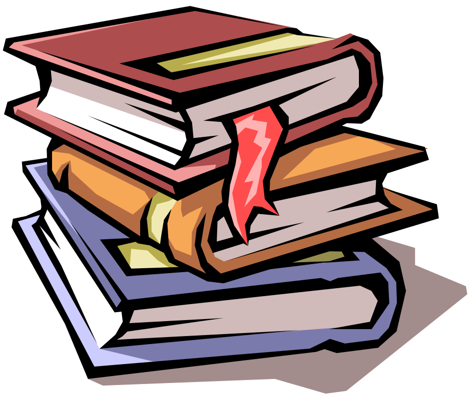
S. ALIXONOV

MATEMATIKA O'QITISH METODIKASI



Taqrizchilar

1. Pedagogika fanlari doktori, professor **Jo'raboy Ikromov**
2. Toshkent Milliy Universitetining dotsenti, fizika-математика фанлари номзоди, доцент **Mashrabjon Mamatov**

Ushbu darslik universitet va pedagogika oliygohlarining matematika fakulteti talabalari uchun "Matematika o'qitish metodikasi" fanining dasturi asosida yozilgan bo'lib, unda asosan umumiy metodikaga doir bo'lgan matematika o'qitish metodikasining maqsadi, mazmuni, formasi metod va vositalari orasidagi munosabatlar pedagogik, psixologik va didaktik nuqtai nazardan ochib berilgan. Ushbu darslikda keltirilgan barcha nazariy va amaliy ma'lumotlar talabalarni matematika o'qitish metodikasi fanidan olidigan amaldagi dasturiga to'la mos keladi. Darslikning barcha boblarining oxirida mustaqil ishlash uchun misollar, o'z o'zini nazorat qilish uchun savollar hamda tayanch iboralar keltirilgan. Ushbu kitob Universitetlarning matematika fakulteti bakalavr yo'nalishidagi talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan.

А 51

Alixonov S.

Matematika o'qitish metodikasi.

Universitetlarning matematika fakulteti bakalavr yo'nalishidagi talabalari uchun darslik – T.:

O'qituvchi, 2008 y.

BBK 74.262

$A\frac{4306010500\ -5}{353(04)-08}211-07$

Toshkent "O'qituvchi" nashriyoti

ISBN 5-645-02631-4

SO’Z BOSHI

Ushbu darslik matematika va amaliy matematika bakalavr talabalar uchun matematika o'qitish metodikasi kursining dasturi asosida yozilgan. Darslikda matematik ta'limning maqsadi, mazmuni, formasi, metodlari va uning vositalarini matematika darslariga tadbiq qilish qonuniyatlari psixologik, pedagogik va didaktik nuqtai-nazardan bayon qilingan. Matematik ta'limni isloh qilish, кadrlar tayyorlash milliy dasturi va uzluksiz ta'limni amalga oshirish masalalari ham bayon etilgan.

Ma'lumki, matematika fani mavjud moddiy dunyodagi narsalarning fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni o'rganish jarayonida «ilmiy izlanish» metodlaridan foydalanadi. Shuning uchun ham ushbu darslikda ilmiy izlanish metodlaridan kuzatish va tajriba, taqqoslash, analiz va sintez, umumlashtirish, abstraktlashtirish va konkretlashtirishlarni matematika darslarida qo'llanishi ilmiy-metodik jihatidan tushuntirishga harakat qilingan. Matematikani o'qitish jarayonida fikrlash formalarini paydo qilish metodikasi ham yoritilgan, ya'ni hissiy bilish (sezgi, idrok, tasavvur) bilan mantiqiy bilish (tushuncha, hukm, xulosa) orasidagi mantiqiy bog'lanishlar ochib berilgan. Matematik tushuncha va uni o'quvchilar ongida shakllantirish metodikasi, matematik hukm va uning turlari bo'lmish aksioma, postulat va teoremalarni o'quvchilarga o'rgatish metodikalari yoritilgan. Matematik xulosa va uning induktiv, deduktiv hamda analogik turlarini dars jarayonidagi tadbiqlari ko'rsatilgan. Matematika fanini o'qitishdagi didaktik prinsiplarning turlarini o'rgatishga alohida ahamiyat berilgan.

Darslikda yangi pedagogik texnologiya asosida o'qitishning an'anaviy va noan'anaviy metodlaridan: ma'ruza, suhbat, mustaqil ish, evristik va muammoli ta'lim metodlarini dars jarayonida qo'llanilishiga katta ahamiyat berilgan. Matematika darsi, uning tuzilishi va uni tashkil qilish metodikasi, matematika darsining turlari, darsga tayyorgarlik va uning tahlili matematika darsiga qo'yilgan talablar ochib berilgan. Darslikda yana son tushunchasini kiritish va uni kengaytirish, ular ustida to'rt amalni bajarish, maktabdagi ayniy shakl almashtirishlarni o'rgatish, maktab matematika kursidagi tenglama turlari, tenglamalar sistemasi hamda parametrik usulda berilgan tenglamalarni yechish metodikalari ham ko'rsatilgan. Darslik oxirida masala va uning turlarini yechish metodikasi ham ko'rsatilgan. Har bir bob tugagandan keyin o'quvchi talabalar uchun shu bob mavzularining mazmunini ochib beruvchi mantiqiy ketma-ketlikka ega bo'lgan savollar sistemasi, hamda tayanch iboralar keltirilgan.

Ushbu darslik haqida qimmatli fikrlarini bildirgan O’zbekiston fanlar akademiyasining akademigi professor Sh.K.Farmonovga, pedagogika fanlari doktori, proffessor J.Ikromovga, professor N.G’aybullayev va professor M.Tojiyevlarga hamda darslikni o'qib chiqib o'zlarini qimmatli fikrlarini bildirgan fizika-matematika fanlar nomzodi, Toshkent Milliy universitetining dotsenti Mashrabjon Mamatovga samimiy minnatdorchiligimni bildiraman.

Muallif.

I - BOB
UMUMTA'LIM MAKTABLARIDA MATEMATIKA O`QITISH MASALALARI.

1-§. Matematika o`qitish metodikasi predmeti.

Matematika so`zi qadimgi grekcha - mathema so`zidan olingan bo`lib, uning ma'nosi «fanlarni bilish» demakdir. Matematika fanining o`rganadigan narsasi (ob'ekti) materiyadagi mavjud narsalarning fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlardan iborat. Hozirgi davrda matematika fani shartli ravishda ikkiga ajraladi.

1) elementar matematika, 2) oliy matematika.

Elementar matematika ham mustaqil mazmunga ega bo`lgan fan bo`lib, u oliy matematikaning turli tarmoqlaridan, ya'ni nazariy arifmetikadan, sonlar nazariyasidan, oliy algebradan, matematik analizdan va geometriyaning mantiqiy kursidan olingan elementar ma'lumotlar asosiga qurilgandir.

Oliy matematika fani esa real olamning fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni to`la hamda chuqur aks ettiruvchi matematik qonuniyatlarni topish bilan shu qo`llanadi.

Elementar matematika fani maktab matematika kursining asosini tashkil qiladi. Maktab matematika kursininng maqsadi o`quvchilarga ularning psixologik xususiyatlarini hisobga olgan holda matematik bilimlar sistemasi ma'lum usulda (metodika) orqali o`quvchilarga etkaziladi. (Metodika so`zi grekcha so`z bo`lib, «yo`l» degan ma'noni beradi). Matematika metodikasi pedagogika va didaktika fanining asosiy bo`limlaridan biri bo`lib, jamiyatimiz taraqqiyoti darajasida ta'lim maqsadlariga mos keluvchi matematikani o`qitish, o`rganish qonuniyatlarini o`rganadigan mustaqil fandir. Matematika metodikasi ta'lim jarayoni bilan bog`liq bo`lgan quyidagi uch savolga javob beradi:

1. Nima uchun matematikani o`rganish kerak?
2. Matematikadan nimalarni o`rganish kerak?
3. Matematikani qanday o`rganish kerak?

Matematika metodikasi haqidagi tushuncha birinchi bo`lib shveysariyalik pedagog - matematik G.Pestalotsining 1803 yilda yozgan «Sonni ko`rgazmali o`rganish» asarida bayon qilingan. XVII asrning birinchi yarmidan boshlab matematika o`qitish metodikasiga doir masalalar bilan rus olimlaridan akademik S.E.Gurev (I760-I8I3), XVIII asrning birinchi va ikkinchi yarmidan esa N.I.Lobachevskiy (I792-I856), I.N.Ulyanov (I83I-I886). L.N.Tolstoy (I828-I9IO) va atoqli metodist-matematik S.I.Shoxor-Trotskiy (I853-I923), A.N.Ostrogradskiy va boshqalar shug`ullandilar va ular matematika faniga ilmiy nuqtai-nazardan qarab, uning progressiv asoslarini ishlab chiqdilar. Masalan, A.N.Ostrogradskiy «Ong kuzatishdan keyin paydo bo`ladi, ong real, mavjud olamga asoslangan» deb yozgan edi. Geometriya metodikasidan materiallar (Materiali po metodike geometrii, 1884 yil, 8-bet.).

Keyinchalik matematika o`qitish metodikasining turli yo`nalishlari bilan N.A.Izvolskiy, V.M.Bradis, S.E.Lyapin, I.K.Andronov, N.A.Glagoleva, I.Ya.Dempman, A.N.Barsukov, S.I.Novoselov, A.Ya.Xinchin, N.F.Chetveruxin, A.N.Kolmogorov, A.I.Markushevich, A.I.Fetisov va boshqalar shug`ullandilar.

1970 yildan boshlab maktab matematika kursining mazmuni yangi dastur asosida o`zgartirildi, natijada uni o`qitish metodikasi ham ishlab chiqildi. Hozirgi dastur asosida o`qitilayotgan maktab matematika fanining metodikasi bilan professorlardan V.M.Kolyagin, J.Ikromov, R.S.Cherkasov, P.M.Erdniev, N.G`aybullaev, T.To`laganov, A.Abduqodirov va boshqa metodist olimlar shug`ullanmoqdalar. Matematika o`qitish metodikasi pedagogika institutlarining III-IV kurslarida o`tiladi. U o`zining tuzilishi xususiyatiga ko`ra shartli ravishda uchga bo`linadi:

**1. Matematika o`qitishning umumiy metodikasi.** Bu bo`limda matematika fanining maqsadi, mazmuni, formasi, metodlari va uning vositalarining metodik sistemasi, pedagogika, psixologiya qonunlari hamda didaktik prinsiplar asosida ochib beriladi.

**2. Matematika o`qitishning maxsus metodikasi.** Bu bo`limda matematika o`qitish umumiy metodikasining qonun va qoidalarining aniq mavzu materiallariga tadbiq qilish yo`llari ko`rsatiladi.

3. Matematika o`qitishning aniq metodikasi.

Bu bo`lim ikki qismdan iborat:

1. Umumiy metodikaning xususiy masalalari;
2. Maxsus metodikaning xususiy masalalari.

Masalan, VI sinfda matematika darslarini rejalashtirish va uni o`tkazish metodikasi deyilsa, bu umumiy metodikaning xususiy masalasi bo`lib hisoblanadi.

2-§. O`rta umumta'lim maktablarida matematika o`qitishning maqsadi

O`rta maktablarda matematika o`qitishning maqsadi quyidagi uch omil bilan belgilanadi:

1. Matematika o`qitishning umumta'limiy maqsadi.
2. Matematika o`qitishning tarbiyaviy maqsadi.
3. Matematika o`qitishning amaliy maqsadi.

Matematika o`qitishning umumta'limiy maqsadi o`z oldiga quyidagi vazifalarni qo`yadi:

a) O`quvchilarga ma'lum bir dastur asosida matematik bilimlar tizimini berish. Bu bilimlar tizimi matematika fani to`g`risida o`quvchilarga etarli darajada ma'lumot berishi, ularni matematika fanining yuqori bo`limlarini o`rganishga tayyorlashi kerak. Bundan tashqari, dastur asosida o`quvchilar o`qish jarayonida olgan bilimlarining ishonchli ekanligini tekshira bilishga o`rganishlari, ya'ni isbotlash va nazorat qilishning asosiy metodlarini egallashlari kerak.

b) O`quvchilarning og`zaki va yozma matematik bilimlarini tarkib toptirish.

Matematikani o`rganish o`quvchilarning o`z ona tillarida xatosiz so`zlash, o`z fikrini aniq, ravshan va lo`nda qilib bayon eta bilish malakalarini o`zlashtirishlariga yordam berishi kerak. Bu degan so`z o`quvchilarning har bir matematik qoidani o`z ona tillarida to`g`ri gapira olishlariga erishish hamda ularni ana shu qoidaning matematik ifodasini formulalar yordamida to`g`ri yoza olish qobiliyatlarini atroflicha shakllantirish demakdir;

v) O`quvchilarni matematik qonuniyatlar asosida real haqiqatlarni bilishga o`rgatish. Bu erda o`quvchilarga real olamda yuz beradigan eng sodda hodisalardan tortib to murakkab hodisalargacha hammasining fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni tushunishga imkon beradigan hajmda bilimlar berish ko`zda tutiladi.

Bunday bilimlar berish orqali esa o`quvchilarning fazoviy tasavvur qilishlari shakllanadi hamda mantiqiy tafakkur qilishlari yanada rivojlanadi.

Matematika o`qitishning tarbiyaviy maqsadi o`z oldiga quyidagilarni qo`yadi:

a) O`quvchilarda ilmiy dunyoqarashni shakllantirish. Bu g`oya bilish nazariyasi asosida amalga oshiriladi.

b) O`quvchilarda matematikani o`rganishga bo`lgan qiziqishlarni tarbiyalash.

Bizga ma'lumki, matematika darslarida o`quvchilar o`qishning dastlabki kunlaridanoq mustaqil ravishda xulosa chiqarishga o`rganadilar. Ular avvalo kuzatishlar natijasida, so`ngra esa mantiqiy tafakkur qilish natijasida xulosa chiqaradilar. Ana shu chiqarilgan xulosalar matematik qonuniyatlar bilan tasdiqlanadi.

Matematika o`qituvchisining vazifasi o`quvchilarda mustaqil mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini shakllantirish bilan birga ularda matematikaning qonuniyatlarini o`rganishga bo`lgan qiziqishlarini tarbiyalashdan iboratdir.

v) O`quvchilarda matematik tafakkurni va matematik madaniyatni shakllantirish. Matematika darslarida o`rganiladigan har bir matematik xulosa qat'iylikni talab qiladi, bu esa o`z navbatida juda ko`p matematik tushuncha va qonuniyatlar bilan ifodalanadi. O`quvchilar ana shu qonuniyatlarni bosqichma-bosqich o`rganishlari davomida ularning mantiqiy tafakkur qilishlari rivojlanadi, matematik xulosa chiqarish madaniyatlari shakllanadi. O`quvchilarni biror matematik qonuniyatni ifoda qilmoqchi bo`lgan fikrlarni simvolik tilda to`g`ri ifodalay olishlari va aksincha simvolik tilda ifoda qilingan matematik qonuniyatni o`z ona tillarida ifoda qila olishlariga o`rgatish orqali ularda matematik madaniyat shakllantiriladi.

3. Matematika o`qitishning amaliy maqsadi o`z oldiga quyidagi vazifalarni qo`yadi:

a) Matematika kursida olingan nazariy bilimlarni kundalik hayotda uchraydigan elementar masalalarni echishga tadbiq qila olishga o`rgatish. Bunda asosan o`quvchilarda nazariy bilimlarni amaliyotga bog`lay olish imkoniyatlarini tarkib toptirish, ularda turli sonlar va matematik ifodalar ustida amallar bajarish malakalarini shakllantirish va ularni mustahkamlash uchun maxsus tuzilgan amaliy masalalarni hal qilishga o`rgatiladi.

b) Matematikani o`qitishda texnik vosita va ko`rgazmali qurollardan foydalanish malakalarini shakllantirish. Bunda o`quvchilarning matematika darslarida texnika vositalaridan, matematik ko`rgazmali qurollar, jadvallar va hisoblash vositalaridan foydalana olish malakalari tarkib toptiriladi.

v) O`quvchilarni mustaqil ravishda matematik bilimlarni egallashga o`rgatish. Bunda asosan o`quvchilarni o`quv darsliklaridan va ilmiy-ommaviy matematik kitoblardan mustaqil o`qib o`rganish malakalarini shakllantirishdan iboratdir.

3-§. Matematika o`qitish metodikasining boshqa fanlar bilan aloqasi.

Bizga ma'lumki, matematika o`qitish metodikasi fani pedagogika fanining ma'lum bir bo`limi bo`lib, u matematika fanini o`qitish qoidalarini o`rganish bilan shug`ullanadi. Matematika o`qitish metodikasi matematika fanini o`qitish qonuniyatlarini o`rganish jarayonida pedagogika, mantiq, psixologiya, matematika, lingvistika va falsafa fanlari bilan uzviy aloqada bo`ladi. Boshqacha aytganda, maktabda matematika o`qitish muammolari mantiq, psixologiya, pedagogika, matematika va falsafa fanlari bilan uzviy bog`liqda hal qilinadi. Matematika o`qitish metodikasining metodologik asosi bilish nazariyasiga asoslangandir.

Matematika metodikasi fani matematik ta'limning maqsadi, mazmuni, formasi, uslubi va uning vositalarini dars jarayoniga tadbiqiy qonuniyatlarini o`rganib keladi. Matematika fani fizika. chizmachilik, kimyo va astronomiya fanlari bilan ham uzviy aloqada bo`ladi. Matematika fanining boshqa fanlar bilan uzviy aloqasi quyidagi ikki yo`l bilan amalga oshiriladi:

1) Matematika tizimining butunligini buzmagan holda o`qishni fanlarning dasturlarini moslashtirish.

2) Boshqa fanlarda matematika qonunlarini, formulalarini teoremalarni o`rganish bilan bog`liq bo`lgan materiallardan matematika kursida foydalanish.

Hozirgi vaqtda matematika dasturini boshqa fanlar bilan moslashtirish masalasi ancha muvaffaqqiyatli hal qilingan. Masalan, funksiyalar va ularni grafik tasvirlash haqida fizikada foydalaniladigan ba'zi ma'lumotlarni o`quvchilar VII sinfdan boshlab o`rgana boshlaydilar. VIII sinfda beriladigan geometrik yasashlarga doir ko`p bilimlar chizmachilik fani uchun boy material bo`ladi, chizmachilikning vazifasi bu bilimlarni turli chizmachilik ishlarini bajartirish yo`li bilan puxtalashdan iboratdir.

Matematika darslarida boshqa fanlardan foydalanish masalasini dasturda aniq ko`rsatish qiyin, buni o`qituvchining o`zi amalga oshiradi, ya'ni o`quv materialini rejalashtirishda va darsga tayyorlanish vaqtida e'tiborga olishi kerak. Masalan, tenglamalarni o`rganish davrida fizik miqdorlar orasidagi bog`lanishlarni aks ettiradigan tenglamalarni, ya'ni issiqlik balansi tenglamasi, issiqlikdan chiziqli kengayish tenglamasi va shunga o`xshash tenglamalarni ham echtirishi mumkin. Dasturning foiz, proporsiya va boshqa boblarini o`rganishda ximiya va fizika masalalaridan foydalanish ma'quldir (aralashmalar, quymalar va shunga o`xshashlar), masalan: 1) 20% li eritma hosil qilish uchun eritiladigan moddadan 240 g suvga qancha solish kerak? 2) 5% li 400 g eritmani qaynatib, 200 g ga keltirildi. Endi eritmaning o`tkirligi qancha bo`ladi?

Qo`shni fanlarga doir materiallardan matematika darslarida foydalanish fanlararo uzviy aloqadorlikni yanada mustahkamlaydi.

4-§. Ta'limni isloh qilinishi.

O`zbekiston Respublikasi mustaqillikka erishgach maktab ta'limiga juda ham katta e'tibor berildi. Jumladan 1997 yil 29 avgust kuni O`zbekiston oliy majlisining IX sessiyasida ta'lim to`g`risidagi qonunga asoslagan kadrlar tayyorlash milliy dasturi qabul qilindi.

Bu qabul qilingan qonunga ko`ra uzluksiz ta'lim tizimining faoliyati davlat ta'lim standartlari asosida, o`z ichiga quyidagi ta'lim turlarini oladi.

Maktabgacha ta'lim, boshlang`ich ta'lim, umumiy o`rta ta'lim, o`rta maxsus kasb-hunar ta'limi, oliy ta'lim, oliy o`quv yurtidan keyingi ta'lim, kadrlar malakasini oshirish va ularni qayta tayyorlash, maktabdan tashqari ta'lim.

Kadrlar tayyorlash milliy modelining o`ziga xos xususiyati mustaqil ravishdagi to`qqiz yillik umumiy o`rta ta'lim hamda uch yillik o`rta maxsus, kasb-hunar ta'limini joriy etishdan iboratdir.

Bu esa umumiy ta'lim dasturlaridan o`rta maxsus, kasb-hunar ta'limi dasturlariga izchil o`tilishini ta'minlaydi. Umumiy ta'lim dasturlari: maktabgacha ta'lim, boshlang`ich ta'lim (I-IV sinflar), umumiy o`rta ta'lim (V-IX sinflar), o`rta maxsus va kasb-hunar ta'limini qamrab oladi.

Maktabgacha ta'lim bola sog`lom, har tomonlama kamol topib shakllanishini ta'minlaydi, unda o`qishga intilish xissini uyg`otadi, uni muntazam bilim olishga tayyorlaydi. Maktabgacha ta'lim bola olti-etti yoshga etguncha davlat va nodavlat makgabgacha tarbiya, bolalar muassasalarida hamda oilalarda amalga oshiriladi.

Umumiy o`rta ta'lim I-IX sinflar o`qishidan iborat bo`lgan majburiy ta'limdir. Ta'limni bu turi boshlang`ich sinfni (I-IV sinflar) qamrab oladi hamda o`quvchilarning fikrlashlari bo`yicha muntazam bilim olishlarini, o`quv-ilmiy va umummadaniy bilimlarni, milliy umumbashariy qadriyatlarga asoslangan ma'naviy-ahloqiy fazilatlarni, mehnat ko`nikmalarini, hamda kasb tanlashni shakllantiradi. Umumiy o`rta ta'lim tugallanganidan keyin ta'lim fanlari va ular bo`yicha olingan baholar ko`rsatilgan hamda davlat tomonidan tasdiqlangan namunadagi attestat beriladi.

O`rta maxsus, kasb-hunar ta'limi umumiy o`rta ta'lim negizida o`qish muddati uch yil bo`lgan majburiy bo`lgan uzluksiz ta'lim tizimining turidir. o`rta maxsus, kasb-hunar ta'limi yo`nalishi akademik litsey yoki kasb-hunar kolleji o`quvchilar tomonidan ixtiyoriy tanlanadi.

Akademik litsey davlat ta'lim standartlariga muvofiq o`rta maxsus ta'lim beradi. O`quvchilarni imkoniyatlari va qiziqishlarini hisobga olgan holda ularning jadal intelektual rivojlanishi chuqur, sohalashtirilgan, kasbga yo`naltirilgan ta'lim olishini ta'minlaydi.

Kasb-hunar kolleji tegishli davlat ta'lim standartlari darajasida o`rta maxsus, kasb-hunar ta'limi beradi, bunda o`quvchilarning kasb hunarga moyilligi, bilim va ko`nikmalarni chuqur rivojlantirish, tanlab olgan kasb-hunar bo`yicha bir yoki bir necha ixtisosni egallash imkonini beradi.

Oliy ta'lim o`rta maxsus, kasb-hunar ta'limi negiziga asoslanadi hamda ikki bosqichga ega.

1. Bakalavriat - mutaxassisliklar yo`nalishi bo`yicha fundemental va amaliy bilim beradigan, ta'lim muddati kamida to`rt yil bo`lgan tayanch oliy ta'limdir. Bakalavrlik dasturi tugagandan so`ng bitiruvchilarga davlat attestatsiyasi yakunlariga binoan kasb bo`yicha «bakalavr» darajasi beriladi.

Magistratura - aniq mutaxassislik bo`yicha fundamental va amaliy bilim beradigan bakalavr negizidagi ta'lim muddati kamida ikki yil bo`lgan oliy ta'limdir. Magistr darajasini beradigan davlat malaka attestatsiyasi magistrlik dasturining nihoyasidir.

Magistrlarga davlat tomonidan tasdiqlangan namunadagi, kasb-hunar faoliyati bilan shug`ullanish huquqini beradigan diplom beriladi.

Oliy o`quv yurtidan keyingi ta'limni oliy o`quv yurtlarida, ilmiy tadqiqot muassasalarida aspirantura, doktorantura, mustaqil tadqiqotchi ko`rinishlaridagi bosqichlar asosida davom ettirish mumkin. Oliy o`quv yurtidan keyingi ta'lim bosqichlari dissertatsiya himoyasi bilan yakunlanadi. Yakuniy davlat attestatsiyalarining natijasiga ko`ra tegishli ravishda fan nomzodi va fan doktori ilmiy darajasi berilib, davlat tomonidan tasdiqlangan namunadagi diplomlar beriladi.

Kadrlar malakasini oshirish va qayta tayyorlash mutaxassisliklarning kasb bilimlari va ko`nikmalarini yangilash hamda chuqurlashtirishga qaratilgan. Kadrlar malakasini oshirish va qayta tayyorlash ta'lim muassasalaridagi o`qish natijalariga ko`ra davlat tomonidan tasdiqlangan namunadagi guvohnoma va sertifikat topshiriladi.

I-BOBNI TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR.

1. Matematika o`qitish metodikasi fani nimani o`rgatadi va qanday savollarga javob beradi?
2. Umumiy metodika bilan xususiy metodikaning farqi nimadan iborat?
3. Matematika fanini o`qitishdagi umumta'limiy maqsad nimalardan iborat?
4. Matematikani o`qitishdagi tarbiyaviy va amaliy maqsadlarni aytib bering.
5. Matematika o`qitish metodikasi fani qaysi fanlar bilan uzviy aloqada bo`ladi?
6. Ta'lim to`g`risidagi qonun qachon qabul qilingan?
7. Kadrlar tayyorlash milliy dasturi qachon qabul qilingan?
8. Kadrlar tayyorlash milliy dasturi necha bosqichdan iborat?
9. Uzluksiz ta'limning ma'nosini aytib bering.
10. Maktabgacha ta'lim nima?
11. Boshlang`ich ta'lim nechanchi sinflarni o`z ichiga oladi?
12. O`rta umumiy ta'limga nechanchi sinflar kiradi?
13. Akademik litsey bilan kasb-hunar kollejlarining farqi nimalardan iborat?
14. Oliy ta'lim necha bosqichdan iborat?
15. Oliy ta'limning bakalavriat yo`nalishini tushuntirib bering.
16. Oliy ta'limning magistratura yo`nalishini tushuntiring.
17. Oliy ta'limdan keyingi ta'limlarni aytib bering.

I-BOB UCHUN TAYANCH IBORALAR

Matematika, metodika, umumiy metodika, xususiy metodika, umumta’limiy maqsad, tarbiyaviy maqsad, amaliy maqsad, ta’lim haqidagi qonun, kadrlar tayyorlash milliy dasturi, sifat bosqichi, uzluksiz ta’lim, maktabgacha ta’lim, boshlang`ich ta’lim, o`rta umumiy ta’lim, akademik litsey, kasb-hunar kolleji, oliy ta’lim, bakalavr, magistr, aspirantura, doktarantura, malaka oshirish.

II BOB
MATEMATIKA DARSLARIDA BILISHNING TURLARI VA XULOSA CHIQARISH METODLARI
1-§. Matematik tushuncha

Biz ta'lim deyilganda o`qituvchi bilan o`quvchilar orasidagi ongli va maqsadga tomon yo`naltirilgan bilishga doir faoliyatni tushunamiz. Har qanday ta'lim o`z oldiga ikkita maqsadni qo`yadi.

1) O`quvchilarga dastur asosida o`rganilishi lozim bo`lgan zarur bilimlar sistemasini berish.

2) Matematik bilimlarni berish orqali o`quvchilarning mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini shakllantirish.

Ta'lim jarayonidagi ana shu ikki maqsad amalga oshishi uchun o`qituvchi har bir o`rgatilayotgan tushunchani psixologik, pedagogik va didaktik qonuniyatlar asosida tushuntirishi kerak. Buning natijasida o`quvchilar ongida **bilish** deb ataluvchi psixologik jarayon hosil bo`ladi.

Bizga falsafa kursidan ma'lumki, bilish jarayoni «jonli mushohadadan abstrakt tafakkurga va undan amaliyotga demakdir». Bundan ko`rinadiki bilish jarayoni tafakkur qilishga bog`liq ekan. «Tafakkur - inson ongida ob'ektiv olamning aktiv aks etishi demakdir» (Yu.M.Kolyagin. «Matematika o`qitish metodikasi, M., 1980 y, 57-bet).

Psixologik nuqtai nazardan qaraganda bilish jarayoni ikki xil bo`ladi:

1) **Hissiy bilish** (sezgi, idrok va tasavvur).

Insonning hissiy bilishi uning sezgi va tasavvurlarida o`z ifodasini topadi. Inson sezgi a'zolari vositasida real dunyo bilan o`zaro aloqada bo`ladi. Bilish jarayonida sezgilar bilan birga idrok ham ishtirok etadi. Sezgilar natijasida ob'ektiv olamning sub'ektiv obrazi hosil bo`ladi, ana shu sub'ektiv obrazning inson ongida butunicha aks etishi idrok deb ataladi.

Tashqi olamdagi narsa va hodisalar inson miya po`stlog`ida sezish va idrok qilish orqali ma'lum bir iz qoldiradi. Oradan ma'lum bir vaqt o`tgach, ana shu izlar jadallashishi va biror narsa yoki hodisaning sub'ektiv obrazi sifatida qayta tiklanishi mumkin. Ana shu ob'ektiv olamning sub'ektiv obrazining ma'lum vaqt o`tgandan keyin qayta tiklanish jarayoni tasavvur deb ataladi.

2) **Mantiqiy bilish** (tushuncha, hukm va xulosa).

Har qanday mantiqiy bilish hissiy bilish orqali amalga oshadi, shuning uchun ham hap bir o`rganilayotgan matematik ob'ektdagi narsalar seziladi, abstrakt nuqtai nazardan idrok va tasavvur qilinadi, so`ngra ana shu o`rganilayotgan ob'ektdagi narsa to`g`risida ma'lum bir matematik tushuncha hosil bo`ladi.

T a ' r i f. *Matematik ob'ektdagi narsalarning asosiy xossalarini aks ettiruvchi tafakkur formasiga matematik tushuncha deyiladi.*

Har bir matematik tushuncha o`zining ikki tomoni, ya'ni mazmuni va hajmi bilan xarakterlanadi.

T a ' r i f. *Tushunchaning mazmuni deb, ana shu tushunchani ifodalovchi asosiy, xossalar to`plamiga aytiladi.*

Masalan, to`g`ri to`rtburchak tushunchasini olaylik. To`g`ri to`rtburchak tushunchasining mazmuni quyidagi asosiy xossalar to`plamidan iboratdir:

1) To`g`ri to`rtburchak diagonali uni ikkita uchburchakka ajratadi.

2) Ichki qarama-qarshi burchaklarining yig`indisi 180^0 ga teng.

3) Diagonallari bir nuqtada kesishadi va shu nuqtada teng ikkiga bo`linadi.

T a ' r i f. *Tushunchaning hajmi deb, ana shu tushunchaga kirgan barcha ob'ektlar to`plamiga aytiladi.*

Masalan, to`rtburchak tushunchasining hajmi shu to`rtburchak tushunchasiga kirgan barcha to`rtburchak turlaridan, ya'ni parallelogramm, kvadrat, romb va trapetsiyadan iborat bo`ladi. Bundan to`rtburchak tushunchasining hajmi tomonlari uzunliklarining kattaligi turlicha bo`lgan barcha katta-kichik to`rtburchaklar tashkil qilishi ko`rinadi.

Bizga hajm jihatidan keng va mazmun jihatidan tor bo`lgan tushunchani jins tushunchasi, aksincha esa hajmi tor va mazmuni keng bo`lgan tushunchani tur tushunchasi deb yuritilishi psixologiya fanidan ma'lum.

1 - m i s o l. Akslantirish tushunchasini olaylik. Bu tushunchadan ikkita, ya'ni qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalari kelib chiqadi. Bu erda akslantirish tushunchasi qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalariga nisbatan jins tushunchasi, qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirishlar esa akslantirish tushunchasiga nisbatan tur tushunchalari bo`ladi. Bu mulohazalardan jins tushunchasi tur tushunchalariga nisbatan hajm jihatidan keng va mazmun jihatidan tor tushuncha ekani ko`rinadi.

2 - m i s o l. Ko`pburchak tushunchasini olaylik. Bu tushunchadan ikkita qabariq va botiq ko`pburchak tushunchalari kelib chiqadi. Ko`pburchak tushunchasi bu tushunchalariga nisbatan jins tushunchasi deb yuritiladi, chunki uning hajmi qabariq va botiq ko`pburchaklar hajmlaridan kattadir. qabariq va botiq ko`pburchaklar esa ko`pburchak tushunchasiga nisbatan tur tushunchalari deb yuritiladi, chunki ulardan hap birining hajmi ko`pburchak tushunchasining hajmidan kichik, ammo mazmunlari ko`pburchak tushunchasining mazmunidan katta.

2-§. Matematik tushunchalarni ta'riflash metodikasi.

Har bir fanda bo`lgani kabi matematika fanida ham ta'riflanadigan va ta'riflanmaydigan tushunchalar mavjud.

Maktab matematika kursida, shartli ravishda, ta'riflanmaydigan eng sodda tushunchalar qabul qilinadi. Jumladan, arifmetika kursida son tushunchasi va qo`shish amali, geometriya kursida esa tekislik, nuqta, masofa va to`g`ri chiziq tushunchalari ta'riflanmaydigan tushunchalardir. Bu tushunchalar yordamida boshqa matematik tushunchalar ta'riflanadi.

Ta'rif degan so`zning ma'nosi shundan iboratki, bunda qaralayotgan tushunchalarni boshqalaridan farqlashga, fanga kiritilgan yangi termin mazmunini oydinlashtirishga imkon beruvchi mantiqiy usul tushuniladi.

Tushunchaning ta'rifi ta'riflanuvchi tushuncha bilan ta'riflovchi tushunchalar orasidagi munosabatdan hosil bo`ladi.

Tushunchaning ta'rifi inglizcha definitsiya (definito) so`zidan olingan bo`lib, «chegara» degan yoki «biror narsaning oxiri» degan ma'noni bildiradi. Professor J.Ikromov o`zining «**Maktab matematika tili**» nomli kitobida tushunchalarning ta'rifini quyidagi turlarga ajratadi:

1) **Real ta'rif**. Bunda qaralayotgan tushunchaning shu gruppadagi tushunchalardan farqi ko`rsatib beriladi. Bunda ta'riflovchi va ta'riflanuvchi tushunchalar hajmlarining teng bo`lishi muhim rol o`ynaydi. Masalan: «Aylana deb tekislikning biror nuqtasidan masofasi berilgan masofadan katta bo`lmagan masofada yotuvchi nuqtalar to`plamiga aytiladi». Bu erda ta'riflanuvchi tushuncha aylana tushunchasidir, ta'riflovchi tushunchalar esa tekislik, nuqta, masofa tushunchalaridir.

2) **Klassifikatsion ta'rif**. Bunda ta'riflanayotgan tushunchaning jins tushunchasi va uning tur jihatidan farqi ko`rsatilgan bo`ladi. Masalan, «kvadrat - barcha tomonlari teng bo`lgan to`g`ri to`rtburchakdir». Bu ta'rifda «to`g`ri to`rtburchak» tushunchasi «kvadrat»ning jins tushunchasi, «barcha tomonlari teng» esa tur jihatidan farqini ifoda qiladi.

3) **Genetik ta'rif** yoki **induktiv ta'rif**. Bunda asosan tushunchaning hosil bo`lish jarayoni ko`rsatiladi. Boshqacha qilib aytganda, tushunchaning hosil bo`lish jarayonini ko`rsatuvchi ta'rif genetik ta'rif deyiladi.

Bizga psixologiya kursidan ma'lumki, genetika so`zi grekcha *genesis* so`zidan olingan bo`lib «kelib chiqish» yoki «manba» degan ma'noni bildiradi.

Masalan: 1) To`g`ri burchakli uchburchakning bir kateti atrofida aylanishidan hosil bo`lgan jismni konus deyiladi.

2) To`g`ri burchakli trapetsiyaning balandligi atrofidan aylanishidan hosil bo`lgan jismni kesik konus deyiladi.

3) Doiraning diametri atrofida aylanishidan hosil bo`lgan jism shar deyiladi.

Yuqoridagilardan ko`rinadiki, tushunchalarni ta'riflashda har bir tushunchaning mazmuni beriladi, bu degan so`z tushunchaning asosiy alomatlari yoki muhim belgilarini sanab ko`rsatish demakdir. Demak, ta'rifda faqat ta'riflanadigan tushunchani boshqa turdagi tushunchalardan ajratib turadagan muhim belgilarigina ifodalanadi. Maktab matematika kursida tushunchalarning ta'rifi ikki usul bilan tuziladi:

1) Berilgan tushunchaning hajmiga kiruvchi barcha ob'ektlar to`plamiga asoslaniladi. Masalan, tekislikning (masofalarni o`zgartmagan holda) o`z-o`ziga akslanishi siljitish deyiladi. Bu erda o`q va markaziy simmetriya, parallel ko`chirish va nuqta atrofida burish tushunchalari siljitish tushunchasining ob'ektiga kiruvchi tushunchalardir.

2) Berilgan tushunchalarning aniqlovchi alomatlar to`plamiga asoslaniladi. Bunday ta'rifni tuzishda tushunchaning barcha muhim alomatlari sanab o`tilmaydi, ammo ular tushunchaning

mazmunini ochib berish uchun etarli bo`lishi kerak. Masalan, parallelogrammning muhim alomatlari quyidagilardan iborat:

a) to`rtburchak;

b) qarama-qarshi tomonlari o`zaro teng va parallel;

v) diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo`linadi;

g) qarama-qarshi burchaklari teng;

Parallelogrammni ta’riflashda a) va b) alomatlar orqali quyidagi ta’rifni tuzish mumkin:

«Qarama-qarshi tomonlari o`zaro parallel va teng bo`lgan to`rtburchak parallelogramm deyiladi».

Endi a) va v) alomatlar orqali ta’rif tuzaylik: «diagonallari kesishib, kesishish nuqtasida teng ikkiga bo`linuvchi to`rtburchak parallelogramm deyiladi».

Aytilganlardan ma’lum bo`ladiki, tushunchani ta’riflashda tanlanadigan muhim alomatlar soni etarlicha bo`lgandagina ta’riflanayotgan tushuncha haqidagi ta’rif to`g`ri chiqadi.

3-§. Matematik tushunchalarni kiritish metodikasi

Maktab matematika kursida matematik tushunchalar ikki xil usulda kiritiladi:

1) Aniq - induktiv metod. Bunda o`quvchilar avval o`qituvchining topshiriqlarini bajargan holda o`rganilayotgan tushunchaning umumiy xossalarini aniqlaydilar, so`ngra o`qituvchi rahbarligida ta’rifni mustaqil holda tuzishga harakat qiladilar. Yangi tushuncha kiritishning bu yo`li ayniqsa quyi sinflarda o`z samarasini beradi.

Bundan tashqari aniq induktiv yo`l orqali tushunchalarni kiritish jarayonida muammoli vaziyatlar hosil bo`ladi, buning natijasida o`quvchilarda mustaqil fikrlash qobiliyatlari shakllanadi. Fikrimizning dalili sifatida 6-sinfda o`rgatiladigan «parallel to`g`ri chiziqlar» tushunchasini aniq-induktiv metod orqali kiritish usulini ko`rib o`taylik.

O`rganish jarayonining bosqichlari	Tushuncha shakllanishining psixologik bosqichlari	O`rganilayotgan tushunchaning aniq modeli
1. Parallel to`g`ri chiziqlar tushunchasiga mos keluvchi misollarni kundalik hayotimizdan olish	Sezish va idrok qilish	Chizg`ichning ikki qirg`og`idagi chiziqlar. Doskaning qarama-qarshi tomonlaridagi chiziqlar
2. Ana shu tushunchani ifodalovchi asosiy va asosiy bo`lmagan xossalarini aniqlash	Idrok qilishdan tasavvurga o`tish	1) To`g`ri chiziqlarning gorizontal joylashishi (asosiy bo`lmagan xossa) 2) Bu to`g`ri chiziqlar o`zaro bir xil uzoqlikda joylashgan (asosiy xossa) 3) To`g`ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega emas (asosiy xossa) 4) To`g`ri chiziqlarni ikki tomonga cheksiz davom ettirish mumkin (asosiy bo`lmagan xossa)
3. Agar mavjud bo`lsa, bu tushunchaning muhim holatlarni ham qaraladi.		Ustma-ust tushuvchi to`g`ri chiziqlar ham bir-biridan bir xil masofada joylashgan bo`ladi (masofa qiymati 0 ga teng)
4. Parallel so`zining mazmuni		Parallel so`zi grekcha so`z paralelos bo`lib, yonma-yon boruvchi degan ma’noni bildiradi
5. Parallel to`g`ri chiziqlar tushunchasining asosiy xossasini ajratish va uni ta’riflash	Tasavvurdan tushunchani hosil qilishga o`tish	1) Bir-biridan bir xil uzoqlikdagi masofada turuvchi to`g`ri chiziqlar jufti parallel to`g`ri chiziqlar deyiladi (aniq bo`lmagan ta’rif, chunki biror burchakning tomonlari ham shu burchak bissektrisasiga nisbatan

		bir xil uzoqlikda joylashgan bo`ladi) 2) Parallel to`g`ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega bo`lmaydi (to`la bo`lmagan ta’rif, chunki, kesishmaydigan to`g`ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega bo`lmaydi). 3) **T a ‘ r i f**. *Bir tekislikda yotib umumiy nuqtaga ega bo`lmagan yoki ustma-ust tushuvchi ikki to`g`ri chiziq parallel to`g`ri chiziqlar deyiladi.*
6. Parallel to`g`ri chiziqlar tushunchasini aniq misollarda ko`rsatish	Tushunchaning hosil bo`lishi	1) O`qituvchi sinf xonasining o`zaro parallel bo`lgan qirralarni ko`rsatadi.
7. Parrallel to`g`ri chiziqlarni simvolik belgilash	Tushunchani o`zlashtirish	2) Kubning modelini ko`rsatib, uning mos qirralaridan o`zaro ayqash bo`lgan to`g`ri chiziqlarni ko`rsatadi. Agar bizga *a* va *b* to`g`ri chiziqlar berilgan bo`lib, ular o`zaro parallel bo`lsa, uni biz $a\|b$ kabi belgilaymiz.

4-§. Matematik tushunchalarni kiritishning abstrakt-deduktiv metodi.

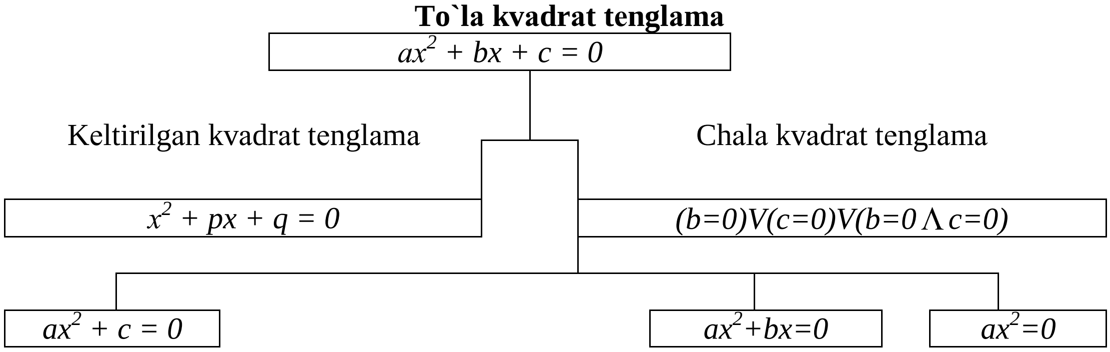
Bunda o`rganiladigan matematik tushuncha uchun ta’rif tayyor ko`rinishda oldindan aniq misol va masalalar yordamida tushuntirilmasdan kiritiladi. Masalan, 7-sinfda o`tiladigan to`la kvadrat tenglama tushunchasi abstrakt-deduktiv metod orqali kiritiladi.

1. Kvadrat tenglama tushuncqhasiga ta’rif beriladi.

T a ‘ r i f . $ax^2+bx+c=0$ ko`rinishidagi tenglamalar to`la kvadrat tenglama deyiladi. Bu erda x - o`zgaruvchi, $a, b, c$- ixtiyoriy o`zgarmas sonlar, $a > 1$.

2) Kvadrat tenglamaning xususiy hollari ko`rib chiqiladi. Buni jadval tarzida bunday ifodalash mumkin.

To`la kvadrat tenglama



3. Hosil qilingan keltirilgan va chala kvadrat tenglamalarga aniq misollar keltiriladi. Masalan,

$$2x^2 – 3x – 4 = 0,\ x^2 – 5x – 6 = 0,$$
$$3x^2 + 5x = 0,\ 2x^2 + 7x = 0,\ 5x^2 = 0, ...$$

4. Kvadrat tenglama tadbiqiga doir hayotiy misollar keltirish kerak. Masalan, $S = \frac{gt^2}{2}$ formula fizika kursidan bizga ma’lum, bu tenglamani echish $gt^2–2s=0$ ko`rinishidagi chala kvadrat tenglama holiga keltirib, so`ngra echiladi.

5. Kvadrat tenglamaning ildizlarini hisoblash formulasini keltirib chiqarish.

1 - u s u l. $ax^2 + bx + c = 0$ tenglama ildizlari topilsin. Buning uchun quyidagi ayniy almashtirishlarni bajaramiz:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right]=$$

$$=a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=$$

$$=a\left[\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=$$

$$=a\left[\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0;\quad a\neq 0$$

$$\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2};$$

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$x_1=-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\quad x_2=-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2- u s u l.

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$ax^2 + bx = -c \mid \cdot 4a,$$
$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \mid + b^2,$$
$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac,$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac;$$
$$2ax_{1,2}+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Agar $ax^2+bx+c=0$ da $a=1$ bo`lsa, $x^2+bx+c=0$ ko`rinishdagi kvadrat tenglama hosil bo`lib, uning echimlari quyidagicha bo`ladi:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}=\frac{-b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}$$

Agar $b=p;\ c=q$ desak, $x^2+px+q=0$ bo`ladi, uning echimlari

$$x_1=\frac{-p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ \text{ va }\ x_2=\frac{-p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

bo`ladi.

3 - u s u l . $x^2 + px + q = 0$ (1)

$b^2 = q;\quad 2ab = p$ desak,

$$b=\pm\sqrt{q},\quad a=\pm\frac{p}{2\sqrt{q}}$$

bularni (1) ga qo`ysak, u quyidagi ko`rinishni oladi.

$$x^2 + 2abx + b^2 = 0 \qquad (2)$$

(2) ga a^2x^2 ni qo`shsak va ayirsak $x^2+2abx+b^2+a^2x^2-a^2x^2=0$ bo`ladi, $a^2x^2+2abx+b^2-a^2x^2+x^2=0$ yoki $(ax+b)^2-a^2x^2+x^2=0$ belgilashga ko`ra $b=\pm\sqrt{q}$; $a=\pm\frac{p}{2\sqrt{q}}$ edi, shuning uchun

$$\left(\frac{px}{2\sqrt{q}}+\sqrt{q}\right)^2-\frac{p^2}{4q}x^2+x^2=0;$$

$$(px+2q)^2-p^2x^2+4qx^2=0;$$

$$px+2q=\pm x\sqrt{p^2-4q};$$

$$2q=x(-p\pm\sqrt{p^2-4q});$$

$$x_{1,2}=\frac{2q}{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}$$

1 - m i s o l. $x^2-3x-4=0;\quad p=-3;\quad q=-4$

$$x_{1,2}=\frac{-p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2};$$

$x_1=4;\quad x_2=-1$

$$x_{1,2}=\frac{2q}{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}=\frac{2\cdot(-4)}{3\pm\sqrt{9+16}}=\frac{-8}{3\pm5};$$

$$x_1=\frac{-8}{-2}=4;\qquad x_2=\frac{-8}{8}=-1;$$

2 - m i s o l. $x^2-5x-6=0;$

$p=-5;\quad q=-6$

$$x_{1,2}=\frac{2q}{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}=\frac{2\cdot(-6)}{5\pm\sqrt{25+24}}=-\frac{12}{5\pm7};$$

$$x_1=-\frac{12}{12}=-1;\qquad x_2=\frac{-12}{-2}=6;$$

3 - m i s o l. $2x^2-5=0$ bo`lsa, $(2x^2=5)\Rightarrow\left(x^2=\frac{5}{2}\right)\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

4 - m i s o l. $2x^2-3x=0$ bo`lsa, $[x(2x-3)=0])\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1=0\\ x_2=\frac{3}{2}\end{bmatrix}$ bo`ladi.

5 - m i s o l. $2x^2=0$ bo`lsa, $x_{1,2}=0$ bo`ladi.

5-§. Matematik hukm.

Matematik hukm mantiqiy bilish formalaridan biri bo`lib, unga quyidagicha ta'rif berilgan: *«Tushunchalar asosida hosil qilingan matematik fikrni tasdiqlash yoki inkor qilishga matematik hukm deyiladi»*. Bu ta'rifdan ko`rinadiki, hukmning xarakterli xossasi aytilgan matematik fikrning to`g`riligini tasdiqlash yoki noto`g`riligini inkor qilishdan iborat ekan.

Matematik tushunchalarni tasdiqlash ma'nosidagi hukmga quyidagicha misollar keltirish mumkin:

1. Paralellogrammning qarama-qarshi tomonlari o`zaro parallel va teng.
2. Har qanday turdagi uchburchak uchta uchga ega.
3. Uchburchak ichki burchaklarning yig`indisi 180° ga teng.
4. Ko`pburchak ichki burchaklarining yig`indisi $2d(n-2)$ ga teng.

Matematik tushunchalarni inkor qilish ma'nosidagi hukmlarga quyidagi misollarni keltirish mumkin:

1. Har qanday uchburchakda ikki tomon uzunliklarining yig`indisi uchinchi tomon uzunligidan kichik emas.

2. Piramidadagi uch yoqli burchaklarning yig`indisi hech qachon o`zgarmas son bo`la olmaydi.

3. Har qanday to`rtburchakda ichki burchaklar yig`indisi 360° dan katta emas.

Bundan kelib chiqadiki, har qanday matematik gap ham matematik hukm bo`la olmas ekan. Masalan, «ABCD to`rtburchak paralellogramm bo`la oladimi?» «Ixtiyoriy uchburchak ichki burchaklarining yig`indisi 180° ga teng bo`la oladimi?». Keltirilgan ikkala misolda ham inkor va tasdiq ma’nosi yo`q, shuning uchun ular matematik hukmga misol bo`la olmaydi.

Matematik hukm uch xil bo`ladi:

1. Birlik hukm. 2. Xususiy hukm. 3. Umumiy hukm.

Matematikani o`qitish jarayonida yuqoridagi hukmlarning uchala turi uzviy aloqada bo`ladi. Boshqacha qilib aytganda, birlik hukmning natijasi sifatida xususiy hukm hosil qilinadi, xususiy hukmning natijasi sifatida esa umumiy hukm hosil qilinadi. Fikrlarimizning dalili sifatida quyidagi misolni ko`raylik. 1) Birlik hukmlar:

a) Aylana to`g`ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi.

b) Ellips to`g`ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi.

v) Giperbola to`g`ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi.

g) Parabola to`g`ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi.

2) Xususiy hukm: "Aylana, ellips, giperbola va parabolalar ikkinchi tartibli egri chiziqlar hosil qiladi". Yuqoridagi birlik va xususiy hukmlarga asoslanib, quyidagi umumiy hukmni hosil qilamiz.

3) Umumiy hukm: "Ikkinchi tartibli egri chiziqlar to`g`ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi".

6-§. Matematik xulosa.

Matematik xulosa ham mantiqiy tafakkur qilish shakllaridan biri. Matematik xulosaga bunday ta’rif berilgan:

«Ikkita qat’iy hukmdan hosil qilingan uchinchi natijaviy hukmga xulosa deyiladi».

M i s o l. 1-Hukm: to`rtburchakning diagonali uni ikkita uchburchakka ajratadi.

2-Hukm: Har bir uchburchak ichki burchaklarining yig`indisi 180^o ga teng.

3-Hukm: Demak, to`rtburchak ichki burchaklarining yig`indisi 360^o ga teng (xulosa bo`ladi).

Maktab matematika kursida xulosalarning uchta turi, ya’ni induktiv, deduktiv va analogik xulosalar o`rganiladi.

T a ‘ r i f. *Ayrim yoki xususuy ma’lumotlarga tayanib umumiy xulosa chiqarishni induksiya deyiladi.*

Induksiya uch xil bo`ladi: chala induksiya, to`la induksiya va matematik induksiya. Chala induksiya metodi orqali chiqarilgan xulosa ko`pgina hollarda to`g`ri, ammo ayrim hollarda noto`g`ri bo`ladi.

1 - m i s o l. Fermaning mashhur teoremasi bo`yicha $(2^{2^n}+1)$ ko`rinishdagi sonlar n = [0,1,2,3,4, ...] bo`lganda 3, 5, 17, 257, 65537, ... kabi tub sonlardan iborat edi. Shuning uchun Ferma umumiy holda $(2^{2^n}+1)$ ko`rinishdagi barcha sonlar n ning ixtiyoriy qiymatlarida ham tub sonlar bo`ladi, deb umumiy xulosa chiqargan. XVIII asrda L.Eyler Ferma teoremasini tekshirib, uning qonuniyati: $n$=5 bo`lganda buzilishini, ya’ni hosil bo`lgan son murakkab son bo`lishini aniqlagan:

$(2^{2^5}+1)$ = 4294967297 = 641·6700417.

Bu degan so`z $(2^{2^5}+1)$ ifoda 641 ga bo`linadi, bundan $(2^{2^5}+1)$ tub son bo`lmay, balki murakkab son ekanligi kelib chiqadi. Demak, chala induksiya metodi orqali Fermaning $\forall n \in N$ bo`lganda $(2^{2^n}+1)$ ko`rinishdagi sonlar tub bo`ladi, degan xulosasi noto`g`ri ekan.

Induksiya metodi orqali xulosa chiqarish esa biror matematik qonuniyat uch hol uchun o`rinli bo`lganidan n - hol uchun o`rinli deb qabul qilinadi.

1-misol:

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$ yig`indisini hisoblang

$$S_1=\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{2},$$
$$S_2=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}=\frac{3+1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},$$
$$S_3=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}=\frac{6+2+1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}.$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Bu uchta xususiy yig`indiga asoslanib, umumiy xulosani yozamiz:

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$

Maktab algebra kursida daraja va logarifmlar xossalari o`tilgandan so`ng ana shu xossalarga asoslanib o`quvchilar induktiv xulosa chiqarish yordamida daraja va logarifmlarning umumlashgan xossasini chiqarishlari mumkin.

2 - m i s o l.

$$a^{n_1}\cdot a^{n_2}=a^{n_1+n_2}$$
$$a^{n_1}\cdot a^{n_2}\cdot a^{n_3}=a^{n_1+n_2+n_3}$$
$$a^{n_1}\cdot a^{n_2}\cdot a^{n_3}\cdot a^{n_4}=a^{n_1+n_2+n_3+n_4}$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a^{n_1}\cdot a^{n_2}\cdot a^{n_3}\cdot\ldots\cdot a^{n_k}=a^{n_1+n_2+n_3\ldots+n_k}$$

3 - m i s o l .

$lg(x_1\cdot x_2)=lgx_1+lgx_2$ agar $x_1>0\ \Lambda\ x_2>0$ bo`lsa,

$lg(x_1\cdot x_2\cdot x_3)=lgx_1+lgx_2+lgx_3$ agar $x_1>0, x_2>0, x_3>0$ bo`lsa,

$lg(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4)=lgx_1+lgx_2+lgx_3+lgx_4$ agar $(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4)>0$ bo`lsa,

... ...

$lg(x_1\cdot x_2\cdot x_3\ldots\cdot x_n)=lgx_1+lgx_2+lgx_3+\ldots+lgx_n$ agar $(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n)>0$ bo`lsa.

Matematik induksiya metodi. Bu metodda biror matematik qonuniyat $n = 1$ hol uchun o`rinli bo`lsa, uni $n = k$ hol uchun o`rinli deb qabul qilib, so`ngra $n=k + 1$ hol uchun o`rinli ekanligini ko`rsatiladi.

1 - m i s o l. $S_n=1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ yig`indining o`rinli ekanligini matematik induksiya metodi orqali ko`rsatilsin, bunda $n\in N$

1. Agar $n = 1$ bo`lsa, $S_1=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$.

2. Agar $n = k$ bo`lsa, $S_k=1+2+3+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

3. Agar $n=k+1$ bo`lsa,

$$S_{k+1}=1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$$ ekanligini isbotlaymiz.

Isboti. $S_{k+1}=S_k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\dfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\dfrac{(k+2)(k+1)}{2}$.

$A\neq B$ bo`lsa, $|AB|>0$. $A=B$ bo`lsa, $|AB|=0$.

Demak, $S_n=1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ yig`indisi hisoblash formulasi to`g`ri ekan.

2-misol. $S_n=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n\in N$

1. Agar n = 1 bo`lsa, $S_1 = \dfrac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$.

2. Agar n = k bo`lsa, $S_k = \dfrac{k\cdot(k+1)(2k+1)}{6}$.

3. Agar $n=k+1$ bo`lsa, $S_{k+1} = 1^2+2^2+3^2+\ldots+(k+1)^2 = \dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ bo`lishligini isbotlang.

I s b o t i.

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k+1}{6}[k(2k+1)+6(k+1)] = \frac{k+1}{6}\cdot[2k^2+7k+6) =$$

$$= \frac{2(k+1)(k+2)\left(k+\dfrac{3}{2}\right)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

3 - m i s o l. $S_n=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, $n\in N$

1. Agar n = 1 bo`lsa, $S_1 = \dfrac{1\cdot(1+1)^2}{4} = 1$.

2. Agar n = k bo`lsa, $S_k = \dfrac{k^2(k+1)}{4} = 1$.

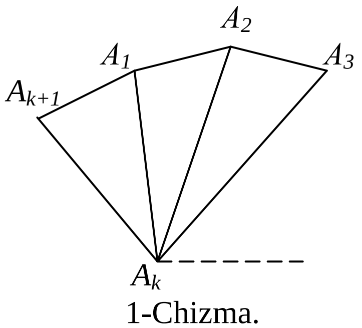
3. Agar $n=k+1$ bo`lsa, $S_{k+1} = 1^3+2^3+3^3+\ldots k^3+(k+1) = \dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

bo`lishligini isbotlang.

Isboti.

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)}{4} + (k+1)^2 = (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right) =$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$



1-Chizma.

T e o r e m a. Q*abariq n burchak ichki burchaklarining yig`indisi 180^o (n-2) ga teng.*

Bu teoremani matematik induksiya metodi bilan isbotlang. (1-chizma).

1. n = 3 bo`lganda S_3 = 180°.

2. n = k bo`lganda $S_k=180°(k–2)$ bo`ladi.

Agar n = k uchun $S_k=180°\ (k–2)$ bo`lca, n = k + 1 uchun

S_{k+1} = 180^o [$(k+1)$-2] bo`lishini isbotlang.

Bu holni isbot qilish uchun (k + 1) burchakli qavariq ko`pburchakni olamiz. $A_1A_k$ diagonal berilgan ko`pburchakni k burchakli qavariq $A_1A_2A_3\ldots A_k$ ko`pburchakka va $A_1A_kA_{k+1}$ uchburchakka ajratadi, u holda $S_{k+1}=S_k+S_3$ tenglik o`rinli bo`ladi:

$S_{k+1}=180°(k–2)+180°=180°[(k–2)+1]=180°[(k+1) – 2].$

Demak, teorema har qanday qavariq *n* burchak uchun ham o`rinli ekan.

4 - m i s o l. Quyidagi tengsizlikni matematik induksiya metodi bilan isbotlang:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

I s b o t i. n=1, bo`lganda 1 = 1 tenglik o`rinli.

n = 2 bo`lganda $1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$ tengsizlik o`rinli.

Endi faraz qilaylik, berilgan tengsizlik $n = k$ uchun o`rinli, ya'ni $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$ bo`lsin, uning $n=k+1$ hol uchun o`rinli ekanini ko`rsatamiz:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

Bu tengsizlikni kuchaytirish uchun $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...\frac{1}{\sqrt{k}}$ o`rniga $\sqrt{k}$ ni qo`yamiz, u holda $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$ (1) bo`ladi. Bu tengsizlikni o`rinli ekanini ko`rsatsak, berilgan tengsizlik isbotlangan bo`ladi.

(1) ning har ikki tomoni kvadratga ko`taramiz, u holda

$$k+\frac{1}{k+1}+\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}>k+1,$$

$$\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}>\frac{k}{k+1}$$

tengsizlik hosil bo`ladi. Bu tengsizlikni har ikkala tomonini $\sqrt{\frac{k}{k+1}}$ ga bo`lsak, 2>$\sqrt{\frac{k}{k+1}}$ tengsizlik k ning k–1 dan boshqa qiymatlaridan o`rinli, shuning uchun

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

tengsizlik n ning hap qanday qiymatida ham o`rinli.

5 - m i s o l. (2n – 1)! > n! tengsizlikni matematik induksiya metodi bilan isbotlang.

I s b o t i. Bizga ma'lumki. (2n–1)! = 1·3·5·...·(2n–1)

1. n = 1 bo`lganda 1 = 1 tenglik o`rinli.

n = 2 bo`lganda 3 > 2 sonli tengsizlik hosil bo`ladi.

2. Endi berilgan tengsizlik $n = k$ hol uchun o`rinli, ya'ni (2k-1)! >k! deb, faraz qilaylik, buning $n = k + 1$ hol uchun o`rinli ekanini ko`rsatamiz:

{[2(k + 1) – 1]! > (k + 1)!} → (2k + 1)! > (k + 1)!

(2k–1)!>k! tengsizlikni har ikki tomonini k+1 ga ko`paytiramiz: u holda

k!(k+1)<(2k–1)!(k+1)<(2k–1)!(2k+1)=(2k+1)! ifoda hosil bo`ladi. Bundan esa (k+1)!<(2k + 1)!. Shuning uchun tengsizlik $n$ ning har qanday qiymatlarida o`rinli.

Tengsizliklarni isbotlang:

1. $\left(\frac{n}{2}\right)^n>n!$

2. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}...\frac{2n-1}{2n}\cdot\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

T a ' r i f: *Umumiy ma'lumotlarga tayanib ayrim yoki xususiy xulosa chiqarish deduksiya deyiladi.*

Misollar 1. $x^2–3x–4=0$ tenglamaning diskriminantini hisoblab, uning echimlari borligini ko`rsating. $D=9+16=25$. $D>0$. Bizga ma'lumki, kvadrat tenglamani echish haqidagi qoidaga ko`ra uning diskriminanti musbat bo`lsa, u ikkita haqiqiy har xil echimga ega edi, shuning uchun $x^2-3x-4=0$ tenglama ham ikkita $x_1 = 4$ va $x_2 = -1$ echimlarga ega.

2. $\sqrt{81\cdot 0{,}09}$ ifodaning qiymatini hisoblang. Bu ifodaning qiymatini hisoblash uchun maktab algebra kursidan umumiy qonuniyatni o`z ichiga oluvchi quyidagi teoremadan foydalanamiz.

T e o r e m a. *$a\geq 0$ va $b\geq 0$ bo`lganda $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ bo`ladi.*

Shuning uchun quyidagi xulosani hosil qilamiz.

$$\sqrt{81\cdot 0{,}09}=\sqrt{81}\cdot\sqrt{0{,}09}=9\cdot 0{,}3=2{,}7$$

3. Maktab geometriya kursida kosinuslar teoremasining analitik ifodasi bunday:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos c \quad (1)$$

Agar (1) da c=90° bo`lsa, cos90°=0, shuning uchun $c^2=a^2+b^2$ (2) bo`ladi. Bizga ma’lumki, (2) Pifagor teoremasini ifodasidir.

Xulosa chiqarish metodlaridan yana biri bu analogiyadir.

T a ‘ r i f. *O`xshashlikka asoslanib xulosa chiqarish analogiya deyiladi.*

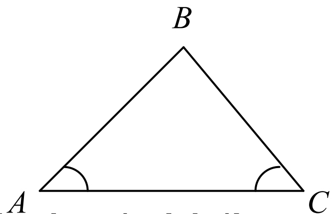
Analogiya bo`yicha xulosa chiqarishni sxematik ravishda quyidagicha tasvirlash mumkin: *F* figura *a, b, c, d, ...* xossalarga ega. $F_1$ figura esa *a, b, c, ...* xossalarga ega bo`lsa, u holda F_1 figura ham *d* xossaga ega bo`lishi mumkin.

Fikrimizning dalili sifatida quyidagi tengsizlikni isbot qilaylik. Har qanday tetraedr uchun $\frac{1}{2}$(|AB|+|BC|+|AC|)<|SA|+|SB|+|SC| tengsizlik o`rinli.

Bizga ma’lumki, fazodagi tetraedr figurasi tekislikda uchburchak figurasiga analogik figuradir, shuning uchun hap qanday uchburchak uchun o`rinli bo`lgan quyidagi xossadan foydalanamiz.

Har qanday uchburchakda ikki tomon uzunligining yig`indisi uchinchi tomon uzunligidan kattadir (2 chizma):

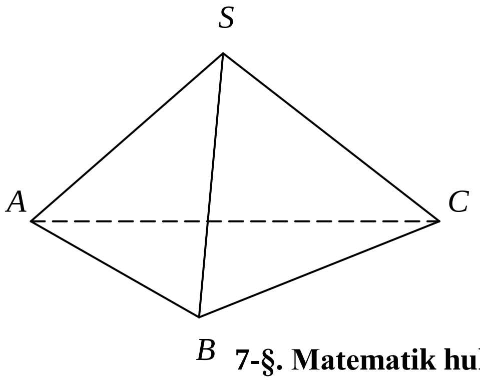
$$|AB| + |BC| > |AC|$$



Agar uchburchak uchun o`rinli bo`lgan ana shu xossani unga analogik bo`lgan figura tetraedrga tadbiq qilsak, quyidagi tengsizlik hosil bo`ladi (3 chizma):

$$\left.\begin{array}{l}|AB|<|SA|+|SB|\\|BC|<|SB|+|SC|\\|AC|<|SA|+|SC|\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |AC|) < |SA| + |SB| + |SC|$$



7-§. Matematik hukmning turlari.

Maktab matematika kursida matematik hukmning asosiy turlari quyidagilardan iborat: aksioma; postulat; teorema.

Aksioma grekcha axioma so`zidan olingan bo`lib, uning lug`aviy ma’nosi "obro`ga ega bo`lgan gap" demakdir. Shuning uchun ham aksiomaga maktab matematika kursida quyidagicha ta’rif berilgan:

«Isbotsiz qabul qilinadigan matematik hukm aksioma deyiladi».

Aksioma asosan eng sodda geometrik figura yoki sodda matematik qonuniyatlarning asosiy xossalarini ifodalovchi hukmdir. Masalan, maktab geometriya kursida o`rganish uchun qabul qilingan aksiomalarni qaraylik:

1. *«Tekislikda yotuvchi ixtiyoriy bir nuqtadan shu tekislikdagi to`g`ri chiziqqa parallel bo`lgan faqat bitta to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin».*

2. *«Tekislikdagi har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin».*

Bizga ma’lumki, matematika fani aksiomalar sistemasi asosida qurilgandir. Matematika fanining mantiqiy asosda qurilishini yaratish uchun aksiomalarning bo`lishligi haqida fikr Gretsiyada bundan ming yil avval paydo bo`lgan edi. XIX asrning oxiri va XX asrning boshlarida matematika fanining turli bo`limlarida aksiomalar chuqur o`rganildi va rivojlantirildi.

Matematika kursidagi aksiomalar sistemasi asosan quyidagi uchta talabga javob berishi kerak.

1. Aksioma sistemasi ziddiyatsiz bo`lishi kerak. Bu degan so`z, biror aksiomadan chiqarilgan natija shu aksioma yordamida hosil qilingan boshqa natijaga yoki boshqa aksiomadan chiqarilgan xulosaga zid kelmasligi kerak.

2. Aksiomalar sistemasi mustaqil bo`lishi kerak, ya’ni hech bir aksioma ikkinchi bir aksiomadan kelib chiqadigan bo`lmasligi kerak.

3. Aksiomalar sistemasi shu fanga oid istalgan bir yangi tushunchani isbot etish uchun etarli bo`lishi kerak, ya’ni biror matematik jumlani isbotlashda hech qachon o`z-o`zidan tushunilishiga yoki tajribaga tayanilmaydi, bu matematik jumla boshqa teoremalar bilan, oxirida aksiomalar bilan asoslanishi kerak bo`ladi.

Maktab geometriya kursida quyidagi aksiomalar sistemasi mavjud.

1.Tegishlilik aksiomasi:

a) har qanday to`g`ri chiziq nuqtalar to`plamidan iboratdir.

b) har qanday ikki nuqtadan bitta va faqat bitta to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin.

v) har qanday to`g`ri chiziqni olmaylik, shu to`g`ri chiziqqa tegishli bo`lgan va tegishli bo`lmagan nuqtalar mavjud.

2. Masofa aksiomasi:

a) har bir kesmaning uzunligi shu kesmaning har qanday nuqtasi ajratgan masofalar uzunliklarining yig`indisiga teng: b) A nuqtadan B nuqtagacha bo`lgan masofa B nuqtadan A nuqtagacha bo`lgan masofaga teng: $|AB| = |BA|$.

v) Ixtiyoriy uchta A, B, C nuqta uchun A dan C gacha bo`lgan masofa A dan B gacha va B dan C gacha bo`lgan masofalar yig`indisidan katta emas: $|AC|\leq|AB|+|BC|$

3. Tartib aksiomasi:

a) To`g`ri chiziqdagi uchta nuqtadan bittasi va faqat bittasi qolgan ikkitasi orasida yotadi.

b) To`g`ri chiziq tekislikni ikki yarim tekislikka ajratadi.

4. Harakat aksiomasi:

a) Agar $|AB|$ masofa musbat bo`lib, u $|A_1B_1|$ masofaga teng bo`lsa, A nuqtani A_1 nuqta va B nuqtani B_1 nuqtaga akslantiruvchi faqat ikkita siljitish mumkin.

5. P a r a l e l l i k a k s i o m a s i:

Berilgan nuqtadan to`g`ri chiziqqa bitta va faqat bitta parallel to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin.

8-§. Postulat.

"Postulat" so`zi lotincha so`z bo`lib, uning lug`aviy ma’nosi "talabni belgilovchi" demakdir. Postulat - bu ma’lum bir talab yoki shartlarni ifodalovchi matematik hukm bo`lib, bundagi talab va shartlarni ba’zi bir tushuncha yoki tushunchalar orasidagi munosabatlar orqali qanoatlantiradi.

1-misol. Evklidning "Negizlar" kitobida paralellik aksiomasi "beshinchi postulat" deb atalgan. qadimgi matematiklar ana shu paralellik aksiomasini XIX acr boshlarigacha isbotlashga urinib keldilar. Bu urinishlar har doim muvaffaqiyatsizlik bilan tugadi. Paralellik aksiomasini to`g`riligi hech kimda shubha tug`dirmasa-da, uni mavjud aksiomalarning va ilgari isbot qilingan geometrik faktlarning asosi uchun qabul qilish mumkin emasmikan, ya’ni u o`zicha teoremadan iborat emasmikan, degan savol barcha matematiklarni qiziqtirar edi. Parallel to`g`ri chiziqlar aksiomasini teskarisidan faraz qilish usuli bilan, ya’ni nuqta orqali berilgan to`g`ri chiziqqa parallel bir nechta to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin, deb qabul qilib isbotlashga urinishlar matematik qonuniyatlarga zid bo`lgan holatlarni keltirib chiqarishi kerak edi, ammo bunday bo`lmadi. Buyuk rus matematigi N.I.Lobachevskiy va undan bexabar holda venger matematigi Ya.Boya nuqta orqali berilgan to`g`ri chiziqqa parallel bir necha to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin, degan farazni qabul qilib, boshqa "noevklid geometriya"ni qurish mumkinligini isbot qildilar. Lobachevskiy geometriyasi ana shunday dunyoga keldi.

2 - m i s o l. Munosabatlar ekvivalentligini ta’rifi ham quyidagi uchta postulat orqali ifodalanadi:

1) munosabat refleksiv bo`lishi kerak: $\forall a \in A: a \xrightarrow{f} a$

2) munosabat simmetrik bo`lishi kerak:

$$\forall a, b \in A: (a \xrightarrow{f} b) \Rightarrow (b \xrightarrow{f} a)$$

3) munosabat tranzitiv bo`lishi kerak:

$$\forall a,\ b,\ c \in A: [(a \xrightarrow{f} b) \wedge (b \xrightarrow{f} c)] \Rightarrow (a \xrightarrow{f} c).$$

9-§. Teorema va uning turlari.

Teorema so`zi grekcha so`z bo`lib, uning lug`aviy ma’nosi "qarab chiqaman" yoki «o`ylab ko`raman» demakdir, shuning uchun ham maktab matematika kursida teoremaga quyidagicha ta’rif berilgan:

"Isbotlashni talab etadigan matematik hukm teorema deyiladi".

Maktab matematika kursida teoremalarning quyidagi turlari mavjuddir:

1. To`g`ri teorema.
2. Teskari teorema.
3. To`g`ri teoremaga qarama-qarshi teorema.
4. Teskari teoremaga qarama-qarshi teorema.

To`g`ri va unga nisbatan teskari bo`lgan teorema tushunchalarini o`quvchilar ongida shakllantirishni - VI sinf geometriya kursining birinchi darslaridan boshlab amalga oshirish kerak. Masalan, quyidagi ikkita tushunchani olib qaraylik.

1. Bu figura parallelogrammdir
2. Bu figura to`rtburchakdir.

Berilgan bu ikkala hukm o`zaro bog`liqdir. Boshqacha qilib aytganda, birinchisining haqiqatligidan ikkinchining haqiqatligi kelib chiqadi, ammo ikkinchisining mavjudligidan birinchisining haqiqatligi har doim ham kelib chiqavermaydi. Agar bu bog`lanishni simvolik ravishda yozadigan bo`lsak u quyidagicha bo`ladi:

paralelogramm	⇒	to`rtburchak

Bu erda biz paralellogramlar sinfini to`rtburchaklar sinfiga kiritdik. Yuqoridagidek bog`lanishlar geometriya kursining birinchi darslaridan boshlab tekshirayotgan matematik hukmlarning ichki o`zaro bog`lanishini ochib beradi. Masalan, "Ichki almashinuvchi burchaklar o`zaro teng" degan hukmni simvolik holda quyidagicha yozish mumkin:

Ichki almashinuvchi burchaklar	⇒	Teng burchaklar

Bu erga agar ichki almashinuvchi burchaklar mavjud bo`lsa, u holda ular teng bo`ladi, degan fikrni tasdiqlayapmiz. Agar yo`nalish teskari tomonga qo`yilsa, bunday mulohaza hosil bo`ladi: "Agar burchaklar teng bo`lsa, u holda ular ichki almashinuvchi burchaklardir". Agar biz teoremadagi shart va xulosaning o`zaro bog`liqligini "agar", "u holda" so`zlari bilan bog`lasak, bunda o`quvchilar teoremaning sharti, natijasi va ular orasidagi bog`lanish haqida chuqurroq tasavvurga ega bo`ladilar. Masalan, agar bir uchburchakni ikki tomoni ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga mos ravishda teng bo`lsa, bunday uchburchaklar teng bo`ladi. Bu aytilgan teoremaning shartidan uning xulosasi kelib chiqmaydi, ammo uning xulosasidan sharti har doim kelib chiqadi. Shuning uchun uni simvolik ravishda bunday yozish mumkin:

Bir uchburchakning ikki tomoni ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga mos ravishda teng bo`lsa	⇐	uchburchaklar teng

Maktab geometriya kursida shunday teoremalar borki, ularning shartidan xulosasining to`g`riligi va aksincha, xulosasidan shartining to`g`riligi kelib chiqadi. Masalan:

1. Agar to`g`ri chiziq burchak bissektrisasi bo`lsa, u berilgan burchakni teng ikkiga bo`ladi.

Bunga teskari bo`lgan teorema ham o`rinlidir: "Agar to`g`ri chiziq burchakni teng ikkiga bo`lsa, bu to`g`ri chiziq shu burchakning bissektrisasidir". Bu aytilganlarni simvolik ravishda bunday yozish mumkin:

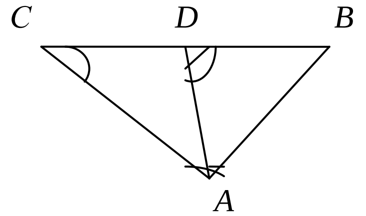
Agar to`g`ri chiziq burchak bissektrisasi bo`lsa	$\Leftarrow$ $\Rightarrow$	Burchak teng ikkiga bo`linadi

Bundan ko`rinadiki, teorema shartining mavjudligidan uning xulosasining haqiqiyligi kelib chiqsa va aksincha, uning xulosasining mavjudligidan haqiqatligi kelib chiqsa, teoremaning shart va xulosalarida qatnashayotgan "agar" va "u holda" bog`lovchilarining o`rinlari o`zgaradi.

Agar biz shartli ravishda berilgan teoremani to`g`ri teorema desak, bu teoremadagi shart va xulosalarning o`rinlarini almashtirish natijasida hosil qilingan teoremani teskari teorema deb ataymiz.

Endi to`g`ri va teskari teoremalarning berilishi hamda ularni isbotlash uslubiyatini ko`rib chiqaylik.

1. **T o` g` r i t e o r e m a:** "Agar uchburchakning biror tomoni katta bo`lsa, u holda ana shu katta tomon qarshisida katta burchak yotadi".



4-Chizma.

Berilgan: ΔABC, $BC > AB$.

Icbot qilish kerak: $\angle A > \angle C$.

I s b o t i. ABC uchburchakning BC tomonida AB tomonga teng $BD=AB$ kesmani o`lchab, ana shu $D$ nuqtani $A$ nuqta bilan birlashtiramiz (4-chizma), natijada $ABD$ teng yonli uchburchak hosil bo`ladi. ABD uchburchak teng yonli bo`lgani uchun $\angle BAD=\angle BDA$. $BDA$ burchak $ADC$ burchakning tashqi burchagi bo`lgani uchun $\angle BAD=\angle C+\angle DAC$ bo`ladi, bundan $\angle BAD>\angle C$ ekani kelib chiqadi. Bu erdagi BAD burchak A burchakning bir qismi xolos. Shuning uchun $\angle A >\angle C$.

Teskari teorema: *"Agar uchburchakning biror burchagi katta bo`lsa, u holda ana shu katta burchak qarshisida katta tomon yotadi".*

B e r i l ga n: ΔABC, $\angle A > \angle C$.

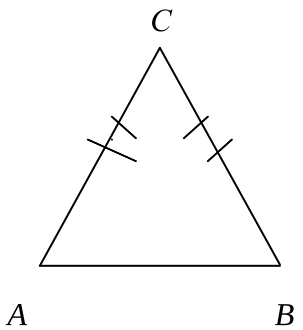
I s b o t q i l i sh k e r a k: $BC > AB$.

I s b o t i. 1) ABC uchburchakning AB tomoni hech qachon BC tomonidan katta bo`la olmaydi, chunki to`g`ri teoremada biz katta tomon qarshisida katta burchak yotadi, deb isbot qildik, aks holda $\angle C>\angle A$ ligi kelib chiqadi, bu esa teorema shartiga ziddir.

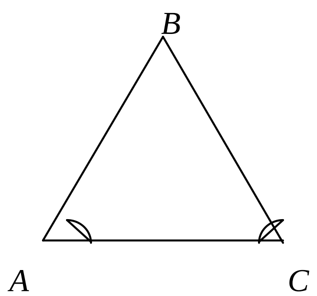
2) AB tomon BC tomonga teng ham bo`la olmaydi, chunki $\angle ABC$ teng yonli emas, agar teng yonli bo`lganda edi $\angle C>\angle A$ tenglik o`rinli bo`lib, bu ham teorema shartiga zid bo`lar edi.

3) Agar AB tomon BC tomondan katta bo`lmasa yoki unga teng bo`lmasa, u holda $BC > AB$ ligi kelib chiqadi.

2. **To`g`ri teorema.** *Agar uchburchakning tomonlari teng bo`lsa, u holda bu tomonlar qarshisida teng burchaklar yotadi.*



5-Chizma.



6-Chizma.

Berilgan: ΔABC, $AC = CB$.

Isbot qilish kerak: $\angle A = \angle B$.

I s b o t i. *ABC* asosi *AB* bo`lgan teng yonli uchburchak bo`lsin. $\angle A=\angle B$ ekanligini isbotlaymiz. Uchburchaklar tengligini birinchi alomatiga ko`ra *CAB* burchak *CBA* burchakka teng bo`ladi, chunki $CA=CB$ va $\angle C=\angle C$. Bu uchburchaklarning tengligidan: $\angle A=\angle B$.

Teskari teorema. *Agar uchburchakning burchaklari o`zaro teng bo`lsa, u holda bu burchaklar qarshisida teng tomonlar yotadi* (6 - chizma).

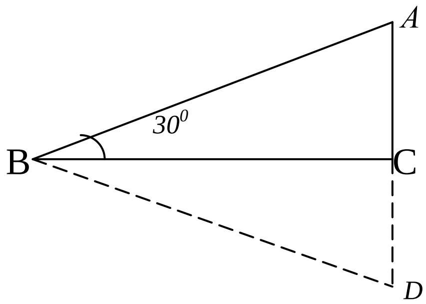
B e r i l g a n: $\angle ABC$, $\angle A = \angle C$.

I s b o t q i l i sh k e r a k: $BC = AB$.

I s b o t i. 1) *BC* tomon *AB* tomondan katta bo`la olmaydi, aks holda avvalgi isbot qilingan teoremaga ko`ra $\angle A>\angle C$ bo`lar edi, bu esa teorema shartiga ziddir.

2) *BC* tomon *AB* tomondan kichik ham bo`la olmaydi, aks holda avvalgi isbot qilingan teoremaga ko`ra $\angle C >\angle A$ bo`lar edi, bu esa teorema shartiga ziddir. Demak, $BC = AB$.

4. **To`g`ri teorema**. *Agar uchburchak to`g`ri burchakli bo`lib, uning bir burchagi* $30^o$ *bo`lsa, u holda* 30^o *li burchak qarshisidagi katet gipotenuzaning yarmiga teng bo`ladi.* (7-chizma).



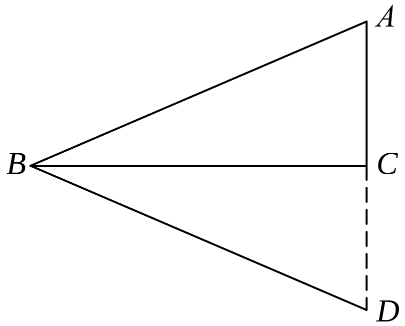
7-Chizma.

B e r i l g a n: *ABC* burchak to`g`ri burchakli, $\angle B = 30^o$.

I s b o t q i l i sh k e r a k: $AC = \dfrac{AB}{2}$

Isboti. *AC* katetni davom ettirib, $CD=AC$ kesmani qo`yib, *D* nuqtani *B* nuqta bilan birlashtiramiz. U holda $\Delta BCD=\Delta BCA$ tenglik hosil bo`ladi, chunki $\angle D=\angle A$ va $\angle D=60°$ bo`lganligi uchun *ABD* uchburchakning *A* va *D* burchaklari $60°$ dan, $\angle ABD=60^o$ *AD* teng tomonli uchbur-chakdir. Chizmadan $AC=\dfrac{AD}{2}$; $AD=AB$, shuning uchun $AC=\dfrac{AB}{2}$.

Teskari teorema. *Agar to`g`ri burchakli uchburchakning kateti gipotenuzaning yarmiga teng bo`lsa, u holda shu katet qarshisidagi burchak* $30°$ *ga teng bo`ladi* (8- chizma).



8-Chizma.

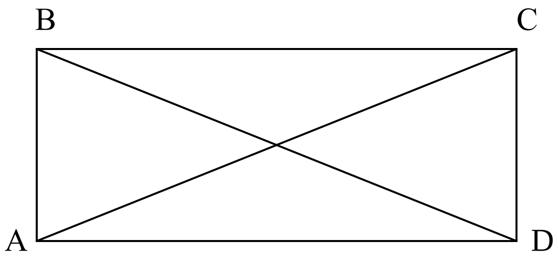
B e r i l g a n: ΔABC to`g`ri burchakli, $AC = \dfrac{1}{2} AB$.

I s b o t q i l i sh k e r a k: $\angle ABC = 30^o$.

I s b o t i. *AC* katetni davom ettirib $CD=AC$ ni qo`yamiz, u holda $AD = 2AC$ bo`ladi, bundan $AD=AB$, ekani kelib chiqadi. *B* va *D* nuqtalarni birlashtirsak, $\Delta BCD=\Delta BCA$ bo`ladi, chunki bularning ikkita kateti va ular orasidagi burchaklari o`zaro teng.

$\Delta BCD=\Delta BCA$ ekanidan $AD=AB$ ga, $\angle ABC=\angle DBC$ u holda $AD=AB$ va $DB=AB$ bulardan ΔABD teng tomonli ekanligini kelib chiqadi, u holda $\angle ABD=60^o$, $\angle ABC=\angle DBC$, bu burchaklar yig`indisi $\angle ABD$ ni hosil qiladi, shuning uchun $\angle ABC=30^o$.

4. To`g`ri teorema. *Agar to`rtburchak to`g`ri burchakli bo`lsa, u holda uning diagnallari o`zaro teng bo`ladi* (9-chizma).



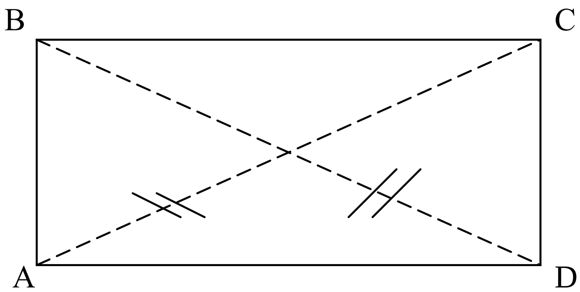
9-Chizma.

Berilgan: *ABCD* - to`g`ri to`rtburchak.

I s b o t q i l i sh k e r a k: *AC = BD*

I s b o t i. *ABD* va *DCA* to`g`ri burchakli uchburchaklarda *AD* umumiy, *BA* va *DC* tomonlari esa o`zaro teng, chunki parallellogrammning qarama-qarshi tomonlari o`zaro tengdir. Shuning uchun $\Delta ABD=\Delta DCA$ bo`ladi, bundan *AC=BD* ekanligi kelib chiqadi.

Teskari teorema. *Agar paralelogrammning diagonallari o`zaro teng bo`lsa, u holda bu parallelogramm to`g`ri to`rtburchakdir* (10 - chizma).



10-Chizma.

Berilgan: *ABCD* – parallelogramm, *AC = BD.*

I s b o t q i l i sh k e r a k: *ABCD* to`g`ri to`rtburchak.

I s b o t i. *ABD* va *DCA* uchburchaklardan quyidagi tengliklarni yoza olamiz: *AB=BC, AD* - umumiy va *AC=BD.* Shuning uchun $\Delta ABD=\Delta DCA$ bo`ladi, u holda $\angle BAD=\angle CDA$ bo`ladi. Bundan tashqari ichki bir tomonli burchaklar bo`lganligi uchun $\angle BAD+\angle CDA=2d$. Bulardan $\angle BAD=\angle CAD=d$ ekani kelib chiqadi. Demak *ABCD* to`g`ri to`rtburchak ekan.

5. To`g`ri teorema. *Agar to`g`ri, burchakli uchburchakning gipotenuzasi va uning katetlariga o`zaro o`xshash ko`pburchaklar yasalsa, u holda gipotenuzaga yasalgan ko`pburchakning yuzi uning katetlariga yasalgan ko`pburchaklar yuzlarining yig`indisiga teng bo`ladi.* (11 - chizma).

Berilgan: ΔABC, $\angle C=90^o$. *AB=c, BC=a, AC=b,* $ABDE3 \infty ANMKC \infty CLHTB$, $ABDE3_{юзи}=S_c$, $ANMKCюзи=S_b$, $CLHTBюзи=S_a$.

I s b o t q i l i sh k e r a k: $S_c = S_a + S_b$

I s b o t i. 7-sinfda o`xshash ko`pburchaklar yuzlarining nisbati mavzusi o`tiladi, ana shu mavzuda quyidagi teorema bor. *"Agar ikkita ko`pburchak o`zaro o`xshash bo`lsa, ular yuzlarining nisbati mos tomonlori kvadratlarining nisbatiga teng".* Shunga asosan quyidagi nisbatni tuzishimiz mumkin:

$$(ANMKC \infty ABDE3) \Rightarrow \left(\frac{S_b}{S_c}=\frac{b^2}{c^2}\right) \Rightarrow s_b \cdot c^2 = s_c \cdot b^2. \qquad (1)$$

$$(CLHTB \infty ABDE3) \Rightarrow \left(\frac{S_a}{S_c}=\frac{a^2}{c^2}\right) \Rightarrow s_a \cdot c^2 = s_c \cdot a^2. \qquad (2)$$

(1) va (2) larni o`zaro xadlab qo`shsak:

$(S_a c^2 + S_b c^2 = S_c c^2 + S_c b^2) \Rightarrow c^2 (S_a + S_b) = S_c (a^2 + b^2)$, $(c^2 = a^2 + b^2)$ bo`lgani uchun $S_a + S_b = S_c$ bo`ladi.

Teskari teorema. *Agar uchburchak bir tomoniga yasalgan ko`pburchakning yuzi uning qolgan ikkita tomoniga yasalgan ko`pburchaklar yuzlarining yig`indisiga teng bo`lsa, u holda bu uchburchak to`g`ri burchaklidir.*

B e r i l g a n: ΔABC, $S_a + S_b = S_c$

I s b o t q i l i sh k e r a k: ΔABC to`g`ri burchakli.

I s b o t i. Teorema shartiga ko`ra $S_a + S_b = S_c$ bo`lgani uchun

$$(ANMKC \infty ABDE3) \Rightarrow \left(\frac{S_b}{S_c} = \frac{b^2}{c^2}\right) \Rightarrow s_b \cdot c^2 = s_c \cdot b^2. \qquad (1)$$

$$(CLHTB \infty ABDE3) \Rightarrow \left(\frac{S_a}{S_c} = \frac{a^2}{c^2}\right) \Rightarrow s_a \cdot c^2 = s_c \cdot a^2. \qquad (2)$$

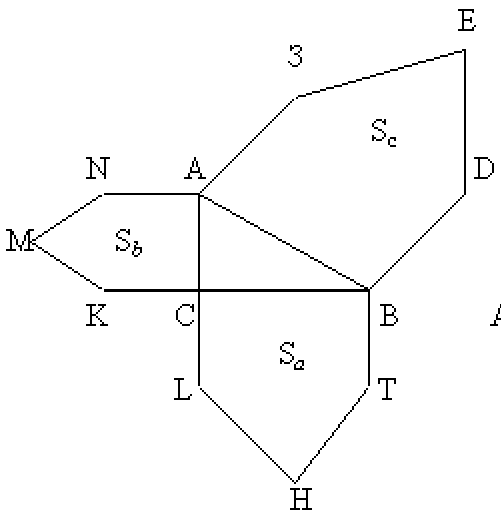
(1) va (2) larni o`zaro hadlab qo`shsak,

$$(S_a c^2 + S_b c^2 = S_c c^2 + S_c b^2) \Rightarrow (c^2 (S_a + S_b) = S_c (a^2 + b^2))$$

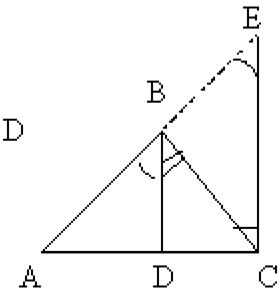
$S_a + S_b = S_c$ shuning uchun: $a^2 + b^2 = c^2$. Bizga ma'lumki, bu tenglik Pifagor teoremasining ifodasidir. Pifagor teoremasi to`g`ri burchakli uchburchaklar uchun o`rinli bo`lar edi.

Shuning uchun ΔABC to`g`ri burchaklidir.

6. **To`g`ri teorema.** *Agar har qanday uchburchakda ichki burchak bissektrisasi o`tkazilsa, u holda bu bissektrisa qarshisida yotgan tomonni qolgan ikki tomonga nisbatan proporsional bo`laklarga bo`ladi* (12-chizma).



11-Chizma



12-Chizma

Berilgan: $\forall \Delta ABC$, BD - bissektrisa, $\angle ABD \cong \angle DBC$.

I s b o t q i l i sh k e r a k:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DC|}$$

I s b o t i. Bu teoremani isbot qilish uchun uchburchakning [AB] tomonini *E* nuqtada kesguncha *[CE]//[BD]* ni o`tkazamiz, natijada $\angle AEC$ va *[BD]//[EC]* larni hosil qildik. Agar burchakning tomonlari parallel to`g`ri chiziqlar bilan kesilsa, proporsional bo`laklarga bo`linadi. Shunga ko`ra:

$$\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|AD|}{|DC|} \qquad (1)$$

Endi *[BE]* ni *[BC]* ga teng ekanligini ko`rsatsak, izlanayotgan proporsiya hosil qilgan bo`lamiz. Buning uchun ΔBCE ning teng yonli ekanligini ko`rsatish kifoya. Chizmadan $\angle ABD \cong \angle AEC$ parallel to`g`ri chiziqlardagi moc burchaklar bo`lgani uchun $\angle BCE \cong \angle DBC$ bo`ladi, chunki parallel to`g`ri chiziqlardagi ichki almashinuvchi burchaklar bo`lgani uchun

$$\left.\begin{array}{r} \angle E \cong \angle B \\ \angle BCE \cong \angle DBC \end{array}\right\} \Rightarrow (\angle E \cong \angle C) \Rightarrow [BE] \cong [BC]$$

Shuning uchun (1) quyidagi ko`rinishda oladi:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DC|}$$

T e s k a r i t e o r e m a. *Agar uchburchakning biror uchidan uning qarshisidagi tomonga tushirilgan kesma shu tomon kesmalarini qolgan ikki tomonga nisbatan proporsional bo`laklarga bo`lsa, u holda bu kesma shu burchak bissektrisasidir.*

Agar biz to`g`ri teoremaning shartini p va uning xulosasini q desak, u holda yuqoridagi teorema turlari uchun quyidagi simvolik ifodalar o`rinlidir:

1) $p => q$ (to`g`ri teorema); 2) $q => p$ (teskari teorema);

3) $\overline{p} => \overline{q}$ (to`g`ri teoremaga qarama-qarshi teorema);

4) $\overline{q} => \overline{p}$ (teskari teoremaga qarama-qarshi teorema).

Quyidagi teoremani to`g`ri teorema deb olib, unga nisbatan yuqoridagi teoremaning turlarini qo`llasak, bunday teoremalar hosil bo`ladi:

1) *Agar to`rtburchak paralellogramm bo`lsa, uning diagonali kesishish nuqtasida teng ikkiga bo`linadi, ya'ni p=>q.*

2) *Agar to`rtburchanning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo`linsa, u holda bu to`rtburchak paralellogrammdir, ya'ni p=> q*

3) *Agar to`rtburchak paralellogramm bo`lmasa, uning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo`linmaydi, ya'ni* $\overline{p} => \overline{q}$.

4) *Agar to`rtburchakning diogonali kesishib, teng ikkiga bo`linmasa, u holda bunday to`rtburchak paralelogramm emas, ya'ni* $\overline{q} => \overline{p}$.

Bu misoldan ko`rinadiki, agar to`g`ri teoremani shart va xulosalarga ajratish mumkin bo`lsa, u holda ana shu to`g`ri teoremaga teskari, qarama-qarshi hamda to`g`ri teoremadan hosil qilingan teskari teoremaga qarama-qarshi teoremalarni hosil qilish mumkin.

10-§. Teoremalarni isbotlash metodlari.

T a ' r i f. *Isbotlash - deduktiv xulosa chiqarish zanjiri, demakdir.*

Har qanday isbotlash jarayoni quyidagi uch qismni o`z ichiga oladi:

1. Teoremaning bayoni - isbot talab etiladigan holat.
2. Argumentlar - teoremani isbotlash jarayonida ishlatilgan matematik hukmlar.
3. Isbotlash - deduktiv xulosa chiqarish orqali teorema xulosasida topish talab qilingan noma'lumni uning shartlari hamda avvaldan ma'lum bo`lgan argumentlardan foydalanib keltirib chiqarish.

Teoremani isbotlashga kirish va uni isbotlash jarayonida o`qituvchi yordamida o`quvchilar quyidagi mantiqiy ketma-ketlikka ega bo`lgan bosqichlarni bajarishlari kerak:

1) Teoremaning sharti va uning xulosasi nimadan iborat ekanligini to`la tushunib olishlari kerak.

2) Ana shu teoremani shart va xulosasida qatnashayotgan har bir matematik tushunchaning ma'nosini bilishlari kerak.

3) Teoremaning shart va xulosa qismlarini matematik simvollar orqali ifodalashlari kerak.

4) Teoremaning shartida qatnashayotgan ma'lum parametrlar teorema xulosasidagi noma'lumni aniqlay oladimi yoki yo`qmi ekanligini bilishlari kerak.

5) Teoremani isbotlash jarayonida teoremadagi shartlardan teorema xulosasining to`g`riligini ko`rsatuvchi natijalar keltirib chiqarishi kerak.

6) Teoremani isbotlash jarayonidagi mantiqiy mulohazalarda teoremaning shartidan to`la foydalanishlari kerak.

7) Teorema isbot qilib bo`lingach, isbotlashda qo`llanilgan metodni ko`zdan kechirish va imkoni bo`lsa, isbotlashning boshqa usullarini qidirib topish kerak.

Maktab matematika kursidagi teoremalarni isbotlash ikki usulda amalga oshiriladi.

1) Bevosita isbotlash usuli (to`g`ri isbotlash usuli);

2) Bilvosita isbotlash usuli (teskarisidan faraz qilish usuli);

Bevosita isbotlash usuli jarayonida teoremaning shartida qatnashayotgan ma'lum va parametrlardan hamda avvaldan ma'lum bo`lgan aksioma, ta'rif va teoremalardan foydalangan holda mantiqiy mulohaza yuritib, teorema xulosasida talab qilingan noma'lumlarni topiladi. Teoremalarni bunday isbotlash analiz va sintez orqali amalga oshiriladi.

T a ' r i f. *Noma'lumlardan ma'lumlarga tomonga izlash metodi analiz deyiladi.*

Psixologik olimlar analiz metodini quyidagicha ta'riflaydilar:

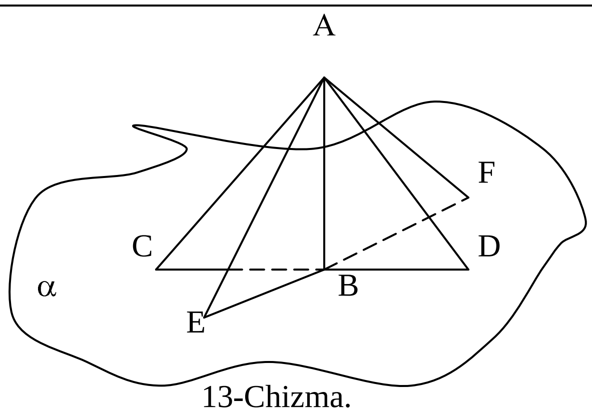
analiz - bu butunlardan bo`laklarga tomon izlash demakdir.

T a ‘ r i f. *Ma’lumlardan noma’lumlarga tomon izlash metodiga sintez deyiladi.*

Psixologik nuqtai-nazardan sintez metodi bo`laklardan butunlarga tomon izlash metodi demakdir.

Fikrimiz dalili sifatida quyidagi teoremalarni analiz va sintez metodlari orqali isbotlaymiz.

1 - t e o r e m a. V nuqtada kesishuvchi *CD* va *EF* to`g`ri chiziqlar α tekislikda yotadi va *CB = BD, EB = BF*. *a* tekislikda yotmaydigan *A* nuqta *AE=EF* va *AC=AD* tengliklarni qanoatlantiradigan qilib tanlansa, *AB* to`g`ri chiziq *a* tekislikka perpendikulyar bo`ladi (13 - chizma).



13-Chizma.

B e r i l g a n: - α tekislik, $(CD)\Lambda(EF)=B$, $(CB=BD)\Lambda(EB=BF)$, $(AE=AF)\Lambda(AC=AD)$.

I s b o t q i l i s h k e r a k: $AB \perp a$.

I s b o t i. Bu teoremani analiz metodi bilan isbotlaymiz.

1. $AB \perp a$ ekanligini isbot qilish uchun $AB \perp CD$ va $AB \perp EF$ ekanligini isbot qilish etarli.

2. $AB \perp CD$ ekanligini isbot qilish uchun $\angle ABC=\angle ABD$ ekanligini isbot qilish etarli.

3. Bu *burchaklarning tengligini isbot qilish uchun* $\Delta ABC=\Delta ABD$ *ekanligini isbot qilish etarli, lekin* $BC=BD$, $AC=AD$, $AB = AB$ shuning uchun $\Delta ABC = \Delta ABD$.

4. $AB \perp EF$ ekanligini isbot qilish uchun $\angle ABE=\angle ABF$ ekanligini isbot qilish etarli.

5. Bu burchaklarning tengligini isbot qilish uchun $\Delta ABE=\Delta ABF$ ekanligini isbot qilish etarli, lekin $BE=BF$, $AE=AF$, $AB=AB$, shuning uchun $\Delta ABE=\Delta ABF$, bundan $AB \perp a$ ekanligi kelib chiqadi.

Isbotning sintez usuli

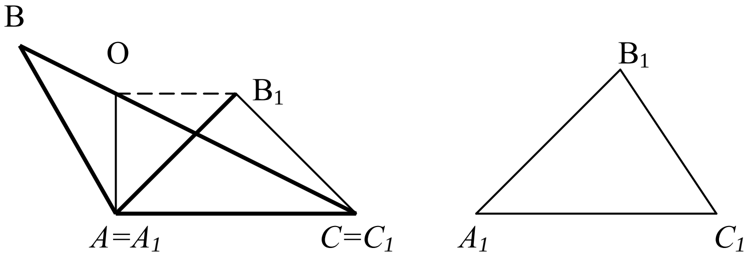
1. $\Delta ABE = \Delta ABF$. *2.* $\angle ABE = \angle ABF$.

3. $\Delta ABC = \Delta ABD$. *4.* $\angle ABC = \angle ABD$.

5. (2) va *(4)* ga ko`ra $AB \perp CD$ va $AB \perp EF$.

6. (5) ga ko`ra $AB \perp a$.

2 - t e o r e m a. *Agar bir uchburchakning ikki tomoni ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga o`zaro teng bo`lsa, u holda bu tomonlar orasidagi burchak qaysi uchburchakda katta bo`lsa, shu burchak qarshisida katta tomon yotadi* (14 - chizma).



14-Chizma.

Berilgan: ΔABC va $\Delta A_1B_1C_1$, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle BAC>\angle B_1A_1C_1$.

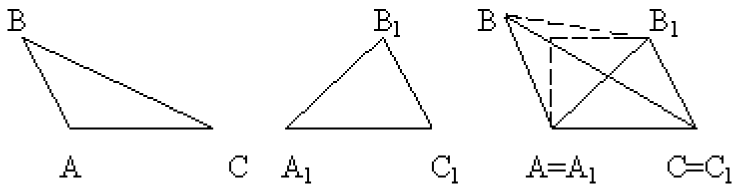
Isbot qilish kerak: $BC>B_1C_1$.

Isbotning analiz metodi, 1 - u s u l.

$A_1B_1C_1$ uchburchakni *ABC* uchburchak ustiga teng tomonini moslab siljitamiz, natijada $AC=A_1C_1$ bo`ladi. $\angle BAB_1$ dan *AO* bissektrisani o`tkazamiz, u holda $\Delta OAB=\Delta OAB_1$ hosil bo`ladi, bundan $BO=B_1O$ ekani kelib chiqadi, ΔOB_1C dan quyidagi tengsizliklarni yoza olamiz:

$OC + OB_1 > B_1O$, $OC + 0B > B_1C$. $BC > B_1C_1$.

2 - u s u l. (15 - chizma)



15-Chizma

B e r i l g a n: ΔABC ва $\Delta A_1B_1C_1$. $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$.

Isbot qilish kerak: $BC > B_1C_1$.

I s b o t i. $A_1B_1C_1$ uchburchakning ABC uchburchak uctiga shunday qo`yaylikki, natijada $AC=A_1C_1$ bo`lsin.

1. $BC>B_1C_1$ ni isbot qilish uchun oldin qachon bir kesma ikkinchi kesmaga nisbatan uzun bo`ladi, degan savolga javob berishimiz kerak.

2. BC va B_1C_1 kesmalarni taqqoslash uchun $A_1B_1C_1$ uchburchakni ABC uchburchak ustiga siljitish natijasida hosil qilingan BB_1C uchburchak tomonlarini o`zaro taqqoslash etarli.

3. Qanday shart bajarilganda uchburchakning bir tomoni uning ikkinchi tomonidan katta bo`ladi (katta burchak qarshisida katta tomon yotadi)?

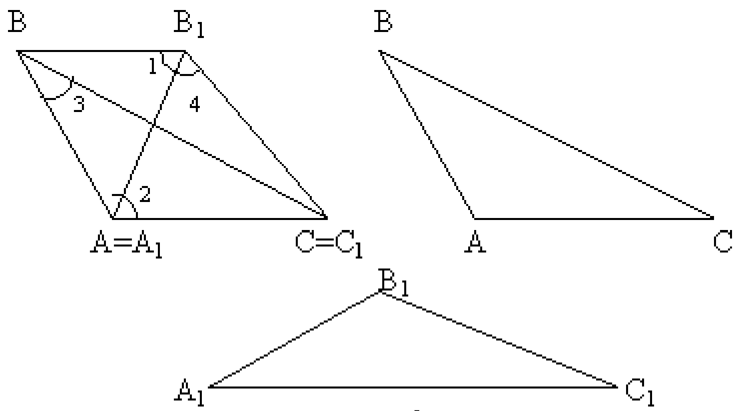
4. BCB_1 uchburchakning BC tomoni BB_1C burchak qarshisida va CB_1 tomoni esa B_1BC burchak qarshisida yotadi. $BC>B_1C_1$ bo`lishi uchun $\angle CBB_1<\angle CB_1B$ ekanligini ko`rsatish kifoya.

5. ΔBAB_1 teng yonli, chunki teorema shartiga ko`ra $AB=AB_1$ edi, shuning uchun $\angle ABB_1=\angle AB_1B=\angle 1$.

$\angle BB_1C = \angle 1 + \angle AB_1C$. $\quad \angle CBB_1 = 1 - \angle ABC$.

$\angle 1 + \angle AB_1C > \angle 1 - \angle ABC$.

$\angle BB_1C > B_1BC$ bundan $BC > B_1C_1$ bo`ladi.



16-Chizma

Isbotning sintez usuli (16 - chizma)

1. $AB = AB_1$. 2. $\angle ABB_1=\angle AB_1B=\angle 1$.

3. $\angle AB_1B+\angle 4>\angle AB_1B - \angle 3$. 4. $\angle CB_1B > CBB_1$.

5. Katta burchak qarshisida katta tomon yotadi, shuning uchun $BC>B_1C_1$ bo`ladi.

3-teorema. Uchburchak ichki burchaklarining yig`indisi 180^o ga teng.

Berilgan: ΔABC.

Isbot qilish kerak: $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^o$ (17- chizma).

Isbotning analiz metodi.

1. Uchburchakning B uchidan AC tomonga parallel qilib DK ni o`tkazamiz, natijada $\angle 5+\angle 2+\angle 4=180^o$ li yoyiq burchakni hosil qilamiz.

2. $\angle 5=\angle 1$, chunki $DK \parallel AC$, bu erda AB kesuvchi.

3. $\angle 4=\angle 3$, chunki $DK \parallel AC$, bu erda CB kesuvchi.

4. $\angle 5+\angle 4+\angle 2 = 180^o$

5. (2) va (3) larga ko`ra $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^o$.

Isbotning sintez metodi:

1. *DK*ni *AB* ga parallel qo`yib o`tkazamiz, ya’ni *DK*||*AB*.
2. $\angle 4 = \angle 3$, chunki *DK* || *AC*, bu erda *BC* kesuvchi.
3. $\angle 5 = \angle 1$, chunki *DK* || *AC*, bu erda *AB* kesuvchi.
4. $\angle 5 + \angle 2 + \angle 4 = 2d$ yoyiq burchak.
5. (2) va (3) larga ko`ra $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2d$

Endi quyidagi teoremani isbotlash bosqichlari asosida isbotlaymiz:

T e o r e m a. *Agar a, b, c ABC uchbukchakning tomonlari va p uning yarim perimetri bo`lsa, u holda bu uchburchakning yuzi* $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *ga teng bo`ladi.*

1. Teoremaning sharti: "agar *a, b, c ABC* uchburchakning tomonlari va *R* uning yarim perimetri bo`lsa", teoremaning xulosasi: "u holda bu uchburchakning yuzi $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ga teng bo`ladi".

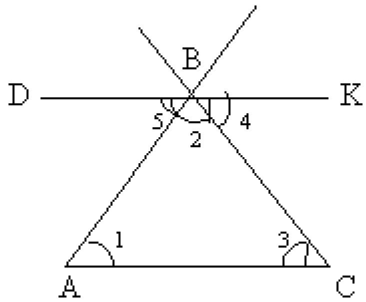
2. Teoremaning shart va xulosa qismlarida uchburchak, uchburchakning tomonlari, uning perimetri va yarim perimetri hamda uning yuzi kabi tushunchalar qatnashayapti (18-chizma).

3. B e r i l g a n: ΔABC, AB = c, BC = *a*, AC = *b*,

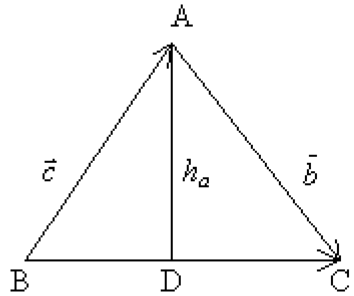
$$\frac{a+b+c}{2} = p$$

I s b o t q i l i sh k e r a k :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



17-Chizma



18-Chizma

4. Teorema shartida berilgan uchburchak, uning tomonlari, yarim perimetri kabi tushunchalar uning xulosasida talab qilinayotgan $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ noma’lumni topish uchun etarlidir.

5. T e o r e m a n i n g i s b o t i. Δ ABS da $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ deb olamiz.
Chizmadan:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a h_a \qquad (1)$$

18 - chizma.

$$\Delta ADC \Rightarrow \left(\frac{h_a}{b} = \sin\alpha\right) \Rightarrow h_a = b \cdot \sin\alpha \qquad (2)$$

(2) ni (1) ga qo`ysak:

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2 \sin^2\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2(1-\cos^2\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2 - (ab\cos\alpha)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 - (|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 - (\vec{a}\,\vec{b})^2} \qquad (3)$$

$|a||b|\cos\alpha$ ifoda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasidir.

ΔABC$\Rightarrow \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ bo`ladi, bu ifodaning har ikki tomonini kvadratga ko`tarsak,

$$\vec{c}^{\,2}=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}-2\,\vec{a}^{\,2}\,\vec{b}^{\,2},$$

$$\vec{a}^{\,2}\,\vec{b}^{\,2}=\frac{\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}-\vec{c}^{\,2}}{2}. \qquad (4)$$

(4) ni (3) ga qo`ysak:

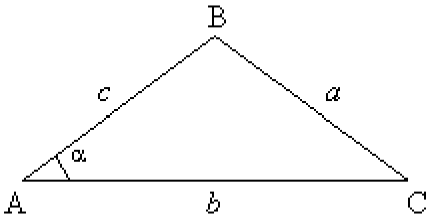
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2b^2}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{ab}{2}-\frac{a^2+b^2-c^2}{4}\right)\left(\frac{ab}{2}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4}\right)}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{4}\right)\left(\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{4}\right)}=\sqrt{\left[\frac{c^2-(a-b)^2}{4}\right]\left[\frac{(a+b)^2-c^2}{4}\right]}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a+b+c-2a}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-2b}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-2c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

6. Teoremani isbotlashda vektor, vektorlarni qo`shish, skalyar ko`paytma va uchburchakning yuzi kabi tushunchalar asosida mantiqiy mulohaza yuritib, teorema shartida berilgan uchburchakning tomonlari perimetri va yarim perimetri kabi tushunchalardan to`la foydalanib teoremaning isboti keltirib chiqarildi.

7. Qaralgan teoremani yuqoridagidan farqli usul bilan ham isbot qilish mumkin (19-chizma)



I s b o t n i n g i k k i n ch i u s u l i.

Berilgan: ΔABC, $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, $p=\dfrac{a+b+c}{2}.$

Isbot qilish kerak:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

I s b o t i. Δ ABC ning yuzi uning tomonlari va ular orasidagi burchagiga ko`ra bunday ifodalanadi:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}cb\cdot\sin a \qquad\qquad (1)$$
$$\sin a=\frac{2S}{bc}$$

Kosinuslar teoremasiga ko`ra: $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$, bundan

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad (2); \quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \quad (3)$$

(1) va (2) larni (3) ga qo`ysak:

$$\left(\frac{2S}{bc}\right)^2+\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=1.$$

$$\frac{4S^2}{b^2c^2}+\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}=1,$$

$$16S^2+(b^2+c^2-a^2)^2=4b^2c^2,$$

$$S^2=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{16}=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{16}=\frac{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]}{16}=$$

$$=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

B i l v o s i t a i s b o t l a sh u s u l i (teskaridan faraz qilish orqali isbotlash usuli).

T a ‘ r i f. *Teoremaning xulosasidagi no’malumlarni topish unga zid bo`lgan jumlani inkor qilish orqali amalga oshirilgan bo`lsa, uni bilvosita isbotlash usuli deyiladi.*

Yuqoridagi ta’rifdan ko`rinadiki, isbotlashning bilvosita usulida biz oldin teorema tasdiqlagan fikrga qarama-qarshi fikrni to`g`ri deb faraz qilamiz: shundan keyin aksiomalar va oldin isbotlangan teoremalarga asoslanib mulohazalar yuritish yo`li bilan teorema shartiga zid keladigan yoki biror aksiomaga yoki ilgari isbotlangan biror teoremaga zid keladigan xulosaga kelamiz. Shunga ko`ra farazimiz noto`g`ri bo`ladi. Natijada teoremadagi yoki berilgan masaladagi da’vo to`g`ri degan xulosaga kelamiz.

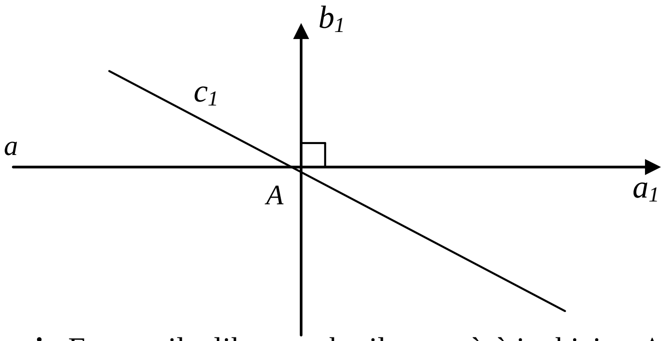
Bilvosita isbotlash ikki xil usul bilan amalga oshiriladi:

1) Apagogik usul.

2) Ajratish usul.

Apagogik usul ko`pincha teskarisidan faraz qilish metodi deb ham yuritiladi. Quyidagi teoremani apagogik - **teskarisidan faraz qilish usuli** bilan isbot qilaylik.

1 - t e o r e m a. To`g`ri chiziqning har bir nuqtasidan unga perpendikulyar to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin va faqat bitta.



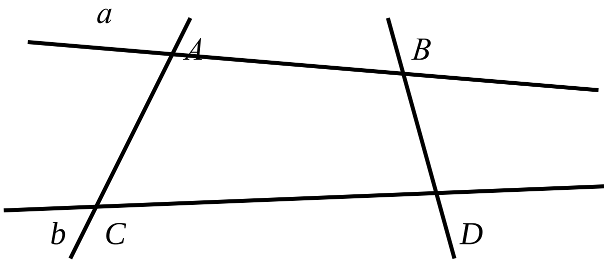
20-Chizma.

Isboti. Faraz qilaylik, a - berilgan to`g`ri chiziq, A unda berilgan nuqta bo`lsin. $a$ to`g`ri chiziqning boshlang`ich nuqtasi A bo`lgan yarim to`g`ri chiziqlaridan birini $a_1$ bilan belgilaymiz, $a_1$ yarim to`g`ri chiziqdan boshlab 90° ga teng ($a_1$^$b_1$) burchakni qo`yamiz. U holda b_1 nurni o`z ichiga olgan to`g`ri chiziq $a$ to`g`ri chiziqqa perpendikulyar bo`ladi. Faraz qilaylik, A nuqtadan o`tib $a$ to`g`ri chiziqqa perpendikulyar bo`lgan boshqa to`g`ri chiziq mavjud bo`lsin. Bu to`g`ri chiziqning $b_1$ nur bilan bir tekislikda yotuvchi yarim to`g`ri chizig`ini s_1 bilan belgilaymiz. Har biri 90^o ga teng (a_1b_1) va (a_1c_1) burchaklar a_1 yarim to`g`ri chiziqdan boshlab bitta yarim tekislikka qo`yilgan. Ammo berilgan yarim tekislikka $a_1$ yarim to`g`ri chiziqdan boshlab 90° ga teng bitta burchak qo`yish mumkin. Shu sababli A nuqta orqali o`tib $a$ to`g`ri chiziqqa perpendikulyar bo`lgan boshqa to`g`ri chiziqning mavjudligi mumkin emas. Shu bilan teorema isbotlandi. Endi quyidagi masalani ham teskarisidan faraz qilish metodi bilan isbotlaymiz.

1 - masala. α va β kesishuvchi tekisliklar berilgan. a tekislikda yotuvchi A nuqta orqali a va a_1 to`g`ri chiziqlar o`tkazilgan. β tekislikda $a$ va $a$ to`g`ri chiziqlarga moc ravishda parallel bo`lgan to`g`ri chiziqlar mavjud emasligini isbot qiling.

Isboti. β tekislikda shunday B nuqta mavjudki, bu nuqtadan o`tuvchi $b$ va $b_1$ to`g`ri chiziqlar moc ravishda $a$ va $a_1$ to`g`ri chiziqlarga parallel bo`lgan deylik. U holda tekisliklarning parallellik alomatiga ko`ra $\alpha||\beta$ bo`lishi kerak. Bu esa masala shartiga zid. Demak, β tekislikda a va a_1 to`g`ri chiziqlarga mos ravishda parallel bo`lgan tekisliklar mavjud. Ajratish metodi bilan isbotlashda tezis mazkur masala yuzasidan qilinadigan mumkin bo`lgan barcha farazlardan biri bo`ladi. Fikrimizning dalili sifatida quyidagi masalani ajratish metodi orqali echamiz.

2 - masala. *a* va b uchrashmas to`g`ri chiziqlar berilgan. *A* va *B* nuqtalar *a* to`g`ri chiziqda, *C* va *D* nuqtalar *b* to`g`ri chiziqda yotadi. *AC* va *BD* to`g`ri chiziqlarning o`zaro vaziyatini aniqlang (21 - chizma).



21-Chizma.

I s b o t i. Ma'lumki, fazodagi ikki to`g`ri chiziq quyidagi uch holatdan birini egallaydi:

1. $AC||BD$. 2. $AC \cap BD$. 3. *AC* va *BD* to`g`ri chiziqlar uchrashmas.

1. Faraz qilaylik, $AC||BD$ bo`lsin, u holda bu to`g`ri chiziqlar *a* va *b* uchrashmas to`g`ri chiziqlar ham etadigan birgina tekislikni aniqlaydi. Bu esa masala shartiga zid.

2. $AC \cap BD$ bo`lsin, u holda bu ikki kesishuvchi to`g`ri chiziqlar *a* va *b* uchrashmas to`g`ri *b* chiziqlar ham yotadigan birgina tekislikni aniqlaydi. Bu ham masala shartiga zid. Demak *AC* va *BD* to`g`ri chiziqlar uchrashmas to`g`ri chiziqlardir.

2 - t e o r e m a. *To`g`ri chiziqdan tashqaridagi nuqtadan shu to`g`ri chiziqqa parallel to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin va faqat bitta.*

Isboti. *a* - berilgan to`g`ri chiziq va *A* bu to`g`ri chiziqda yotmagan nuqta bo`lsin. *a* - to`g`ri chiziq va *A* nuqta orqali $a$ tekislik o`tkazamiz. α tekislikda *A* nuqtadan *a* to`g`ri chiziqqa parallel a_1 to`g`ri chiziqni o`tkazamiz. *a* ga parallel bo`lgan a_1 to`g`ri chiziqning yagona ekanini isbotlaymiz. Teskarisidan faraz qilaylik, *A* nuqtadan o`tadigan va *a* to`g`ri chiziqqa parallel boshqa $a_2$ to`g`ri chiziq mavjud bo`lsin, *a*, a_1 to`g`ri chiziqlar orqali α_2 tekislikni o`tkazish mumkin. $\alpha_2$ tekislik *a* to`g`ri chiziq va *A* nuqta orqali o`tadi, u holda to`g`ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o`tkazish mumkin" degan teoremaga ko`ra y α tekislik bilan ustma-ust tushadi. Endi parallel to`g`ri chiziqlar aksiomasiga ko`ra $a_1$, $a_2$ to`g`ri chiziqlar ustma-ust tushadi. Shu bilan teorema isbot bo`ldi.

11-§. Teoremalarni zaruriy va etarli shartlari

T a ' r i f. *Agar q mulohazadan p mulohazaning to`g`riligi kelib chiqsa, ya'ni q=>p bo`lsa, u holda p mulohaza q mulohaza uchun zaruriy shart bo`lib, q mulohaza esa p mulohaza uchun etarli shart deyiladi.*

1 - m i s o l. Agar natural son juft bo`lsa, u holda u 6 soniga bo`linadi.

Bu teoremada natural son 6 ga bo`linishligi uchun uning juft bo`lishligi zaruriy shart bo`lib, etarli shart bo`la olmaydi, chunki har qanday juft son ham 6 ga bo`linavermaydi.

2 - m i s o l. Agar natural son 6 ga bo`linsa, u holda u juft bo`ladi.

Bu teoremada natural son juft bo`lishligi uchun uning 6 ga bo`linishi etarli shart bo`lib, zaruriy shart bo`la olmaydi, chunki 6 ga bo`linmaydigan juft sonlar ham mavjuddir.

3 - m i s o l. Agar natural son juft bo`lsa, u holda u 2 soniga bo`linadi.

Bu teoremada natural son 2 ga bo`linishi uchun uning juft bo`lishi zarur va etarlidir, chunki hap qanday juft natural son 2 ga bo`linadi.

4 - m i s o l. Har qanday natural son 2 ga bo`linsa, u holda bunday son juft bo`ladi.

Bu teoremada natural son juft bo`lishi uchun uning 2 ga bo`linishi zarur va etarlidir.

1 - t e o r e m a. [a, b] kesmada aniqlangan va uzluksiz bo`lgan *y=f(x)* funksiyaning $\int_a^b f(x)dx$ aniq integrali mavjud bo`lishi uchun $\lim_{\lambda \to 0}$ (S-s)=0 bo`lishligi zarur va etarlidir.

Isbotining zarurligi. $\int_a^b f(x)dx$ - aniq integral mavjud bo`lganda $\lim_{\lambda\to 0}$ (S-s)=0 ekanligini isbotlaymiz. Aniq integral mavjud bo`lishligi uchun ta'rifga ko`ra, $\lim_{\lambda\to 0}$ σ=1 bo`ladi. Limit ta'rifiga ko`ra:

|σ – 1| < ε yoki -ε < σ – 1 < ε, 1 – ε < σ < 1 + ε (1)

Bizga ma'lumki, δ - integral yig`indi Darbuning quyi va yuqori yig`indilarining orasida yotar edi, shuning uchun

$$s \le \sigma \le S \qquad (2)$$

bo`ladi. (1) va (2) larning birlashtirib quyidagi tengsizliklarni tuzamiz:

$$1 - \varepsilon \le s \le \sigma \le S \le 1 + \varepsilon \qquad (3)$$

(3) tengsizlikda quyidagi tengsizliklarni ajratib olish mumkin:

$$\begin{pmatrix} I-\varepsilon < s \\ I+\varepsilon > S \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I-s<\varepsilon \\ I-S>-\varepsilon \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I-s<\varepsilon \\ S-I<\varepsilon \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} |s-I|<\varepsilon \\ |S-I|<\varepsilon \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{\lambda\to o} s = I \\ \lim\limits_{\lambda\to o} s = I \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\lim_{\lambda\to o} s - \lim_{\lambda\to o} s \right) \Rightarrow \left(I - I - 0 \right) \Rightarrow \lim_{\lambda\to o} \left(S - s \right) = 0.$$

Teoremaning zaruriy qismi isbotlandi.

Isbotning etarligi. $\lim_{\lambda\to 0}$ (S-s)=0 bo`lganda $\int_a^b f(x)dx$ bo`lishligini ko`rsatamiz. Buning uchun $\lambda \to 0$ da σ integral yig`indisini chekli I limitga ega ekanligini ko`rsatish kifoya. Bizga ma'lumki, Darbuning quyi yig`indisi monoton o`suvchi bo`lib, yuqoridan chegaralangandir, bundan tashqari u o`zining aniq yuqori chegarasiga ham egadir, ya'ni: sup{s}=1*

Xuddi shuningdek, Darbuning yuqori yig`indisi o`zining quyi chegarasiga ega, ya'ni; inf {S} = I_*

Aniq yuqori va quyi chegaralarning ta'riflariga ko`ra $s \le I^*$ ва $S \ge 1_*$ bo`ladi. Bu ikkala tengsizliklarni birlashtirsak, $s \le 1^* \le 1_* \le S$

Ammo $\lim_{\lambda\to 0}$ (S-s)=0 bo`lgani uchun $\lim_{\lambda\to 0}$ $(1^* - 1_*)=0$

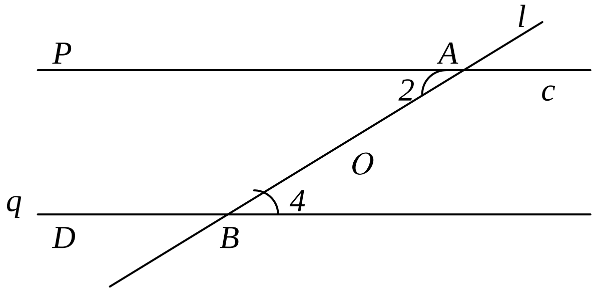
$$(\lim_{\lambda\to 0} I^* - \lim_{\lambda\to 0} I_* = 0) \Rightarrow \lim_{\lambda\to 0} I^* - \lim_{\lambda\to 0} I_* = I \qquad (2)$$

(2) ga ko`ra (1) quyidagi ko`rinishni oladi:

$$s \le 1 \le S \qquad (3)$$

Bizga ma'lumki, $\lim_{\lambda\to 0}$ (S-s)=0, bundan tashqari s ≤ σ ≤ S (4) bo`lgani uchun, (3) va (4) larga ko`ra: I = $\int_a^b f(x)dx$. Shu bilan teoremaning etarli qismi isbot bo`ldi.

2 - t e o r e m a. *Ikki to`g`ri chiziq o`zaro parallel bo`lishi uchun ularni kesib o`tuvchi uchinchi to`g`ri chiziq hosil qilgan mos burchaklari o`zaro teng bo`lishi zarur va etarlidir* (22 - chizma).



22-Chizma.

Z a r u r l i k n i n g i s b o t i. Faraz qilaylik p va q to`g`ri chiziqlar o`zaro parallel bo`lsin, l esa p va q larni kesuvchi to`g`ri chiziq bo`lsin, u holla biz $\angle 2=\angle 4$ ekanini isbot qilishimiz kerak. $p$ va $q$ to`g`ri chiziqlarda $C$ va $D$ nuqtalarni olamiz. O nuqta $A$ va $B$ nuqtalarga nisbatan simmetriya markazi desak, u holda quyidagi munosabatlar o`rinli bo`ladi:

1) [AO] $\rightarrow$ [BO]. 2) [AC] $\rightarrow$ [BD]. 3) $\angle 4 \rightarrow \angle l$AC.

Chizmada $\angle 2=\angle l$AC chunki ular vertikal burchaklardir. Shuning uchun $\angle 2=\angle 4$ ekani kelib chiqadi.

E t a r l i l i k n i n g i s b o t i. Faraz qilaylik, l p va q to`g`ri chiziqlarni kesib o`tuvchi to`g`ri chiziq, $\angle 2=\angle 4$ bo`lsin. U holda $p \parallel q$ ekanligini isbot qilishimiz kerak. $p\cap l = A$, $q \cap l = B$. Faraz qilaylik, p va q to`g`ri chiziqlar o`zaro parallel bo`lmasin, u holda $p\cap q=C$. U holda $\angle 2$ ABC uchburchakning tashqi burchagi bo`ladi. Bundan $\angle 2>\angle B=\angle 4$ ekanligi kelib chiqadi, bu esa yuqorida qo`yilgan $\angle 2=\angle 4$ shartga ziddir, demak, $q \parallel p$ ekan.

3 - t e o r e m a. $a_1+a_2+a_3+...+a_n+ ...=\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *(i=1,∞) (1)*

(1) musbat hadli qator yaqinlashuvchi bo`lishi uchun xususiy yig`indilarning $\{A_n\}$ ketma-ketligi chegaralangan bo`lishi zarur va etarlidir.

3 a r u r i y l i k n i n g i s b o t i. (1) musbat hadli qator yaqinlashyvchi bo`lganda xususiy yig`indilarning $\{A_n\}$ ketma-ketligi chegaralangan ekanligini ko`rsatsak, teoremaning zaruriy qismini isbotlagan bo`lamiz. (1) musbat hadli qator yaqinlashuvchi bo`lganligi uchun $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A$ chekli son bo`ladi, bundan $\lim_{n\to\infty} A_n=A$ (yoki $\sup\{A_n\}=A$) bo`ladi. Limitning ta'rifiga ko`ra $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ bo`lgani uchun $\forall \varepsilon>0$ olinganda ham shunday natural $N$ sonni topish mumkinki, $n>N$ bo`lganda $|A_n - A| < \varepsilon$ tengsizlik o`rinli bo`ladi, bundan:

$$\begin{aligned} -\varepsilon < A_n - A < \varepsilon \\ A-\varepsilon < A_n < A+\varepsilon \end{aligned} \qquad (2)$$

By (2) tengsizlik $\{A_n\}$ ketma-ketlikning $n > N$ nomerli hamma elementlari uchun bajariladi. (2) tengsizlikdan ko`rinadiki, $\{A_n\}$ ketma-ketlik $n>N$ dan boshlab $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ oraliqqa joylashgan bo`lar ekan. Bu degan so`z $\{A_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan deganidir.

E t a r l i k n i n g i s b o t i. $\{A_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo`lganda (1) musbat hadli qatorning yaqinlashuvchi ekanligini isbotlaymiz. $\{A_n\}$ - o`zgaruvchi:

1) monoton o`suvchi

2) yuqoridan chegaralangan bo`lganligi uchun monoton o`zgaruvchining limiti haqidagi teoremaga ko`ra u chekli limitga ega bo`ladi, ya'ni $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ chekli son bo`ladi, shuning uchun qator yaqinlashuvchi bo`lishining ta'rifiga ko`ra (1) musbat hadli qator yaqinlashuvchi bo`ladi.

Shunday teoremalar borki, ular uchun zaruriy shart bajariladi, lekin etarli shart doim ham bajarilmaydi. Fikrimizning dalili sifatida quyidagi teoremani ko`rib chiqaylik.

T e o r e m a.

$$a_1 + a_2 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{t=1}^{\infty} a_t \qquad (1)$$

qator yaqinlashuvchi bo`lsa, uning umumiy hadi $a_n \to 0$, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

I s b o t i. (1) qator teorema shartiga ko`ra yaqinlashuvchi bo`lganligi uchun $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\ldots$ A chekli son bo`ladi.

$$a_n = A_n - A_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} A_{n-1} = A - A = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Bundan ko`rinadiki, qator yaqinlashuvchi bo`lsa, uning n – hadining $n\to\infty$ dagi limiti 0 ga teng bo`lar ekan, bu shart qator yaqinlashuvchi bo`lishligi zaruriy sharti bo`la olmaydi. Bu degan so`z $n \to \infty$ da n - hadining limiti 0 ga teng bo`lgan har bir qator yaqinlashuvchi bo`lavermaydi.

1 - m i s o l. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots+=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ qatorni garmonik qator deb ataladi, bu qatorning n – hadi $a_n = \frac{1}{n}$ bo`lib, $n \to \infty$ da 0 ga intiladi-yu, lekin qatorning o`zi uzoqlashuvchidir.

I s b o t i:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots+ = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+$$

$$+\ldots\rangle 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\ldots=$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots = 1+1+1+\ldots+ = \infty$$

Demak, bu qator uzoqlashuvchi.

2 - m i s o l.

$$\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+$$

$$+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

qatorning n – hadi $n \to \infty$ da 0 ga intiladi, ammo qatorning o`zi uzoqlashuvchi qatordir. Bunda ham qator yaqinlashuvchi bo`lishining zaruriy sharti bajarilib, uning etarli sharti bajarilmaydi.

II-BOBNI TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Bilish deb qanday psixologik jarayonga aytiladi?
2. Tafakkur tushunchasini ta'rifini aytib bering.
3. Sezgi deb nimaga aytiladi?
4. Idrok va tasavvur tushunchalarini ta'riflang?
5. Matematik tushunchaga ta'rif bering.
6. Tushunchaning mazmunini ta'riflang?
7. Tushunchanning hajmi deganda nimani tushunasiz?
8. Tushunchaning jinsi va uning turi deganda nimani tushunasiz?
9. Ta'rif so`zini lug`aviy ma'nosini aytib bering.
10. Real, klassifikatsion va genetik ta'riflarini aytib bering.
11. Matematik tushunchalar qanday metodlar yordamida kiritiladi?
12. Matematik hukm tushunchasiga ta'rif bering.
13. Matematik xulosa deb nimaga aytiladi?
14. Matematik xulosa turlarini aytib bering.
15. Matematik induksiya metodini tushuntiring?
16. Teoremaning qanday turlari bor?
17. Teoremani isbotlash deganda nimani tushunasiz?
18. Isbotni qanday turlari bor?
19. Teoremalarni zaruriy va etarli shartlarini ayting.
20. Geron formulasini isbotlang.

II-BOB UCHUN TAYANCH IBORALAR.

Bilish, tafakkur, hissiy bilish, mantiqiy bilish, sezgi, idrok, tasavvur, tushuncha, tushunchaning mazmuni, tushunchaning hajmi, tushunchaning jinsi, ta'rif, genetik ta'rif, matematik tushuncha, matematik hukm, matematik xulosa, induksiya, deduksiya, teorema, analogiya, zaruriy va etarli shart, perimetr, analiz va sintez metodlari, to`g`ri teorema, teskari teorema, postulat, aksioma, qabariq va botiq ko`pburchak.

III BOB.
MAKTAB MATEMATIKA KURSIDA TA'LIM METODLARI.
1-§. Matematik ta'lim metodlari

Metod so`zi grekcha so`z bo`lib, "yo`l ko`rsatish" demakdir. "Ta'lim metodi" tushunchasi esa hozirgi zamon metodika va didaktika fanlaridagi asosiy tushunchalardan biridir, ammo bu tushuncha yaqin vaqtlarga qadar turli metodik adabiyotlarda turli mazmunda qo`llanib kelinar edi. XIX asrga qadar bo`lgan metodik adabiyotlarda "metod" tushunchasi matematika kursining asosiy mazmunini bayon qiluvchi mavzuning tavsifisi sifatida ishlatiladi. Masalan, "Sonlarni o`rganish metodi", "Geometrik figuralarni o`rganish metodi" va hokazo.

Hozirgi zamon didaktikasida, jumladan, matematika o`qitish metodikasi fanida ta'lim metodining muammolari umumiy holda hal qilingan bo`lib, u o`zining quyidagi ikki tomoni bilan xarakterlanadi:

a) o`qitish (o`qituvchining faoliyati);

b) o`rganish (o`quvchilarning ongli bilish faoliyati).

Ta'lim jarayoni o`qitish va o`rganishdan iborat bo`ladigan bo`lsa, u holda o`qitish (o`quvchilarning bilish faoliyatlarini boshqarish va tekshirishga doir axborot turlari, usul va vositalari), o`rganish (o`quv materialini o`quvchilar tomonidan o`zlashtirishning turlari, usul va vositalari) o`zining quyidagi metodlari orqali amalga oshiriladi. O`qitish va o`rganish metodlari o`zaro bir-biri bilan uzviy aloqadorlikda bo`lib, maktabda o`qitish jarayonini amalga oshiradi. Maktab matematika kursida ta'lim metodlarini quyidagicha klassifikatsiyalash mumkin.

1. Ilmiy izlanish metodlari (kuzatish, tajriba, taqqoslash, analiz va sintez, umumlashtirish, abstraksiyalash va klassifikatsiyalash).
2. O`qitish metodlari (evristik metod, proglammalashtirilgan ta'lim metodi, muammoli ta'lim metodi, ma'ruza va suhbat metodlari).
3. Xulosa chiqarish metodlari (induksiya, deduksiya va analogiya).

2-§. Matematika o`qitishdagi ilmiy izlanish metodlari.

Bizga ma'lumki, matematika fanini o`rganadigan ob'ekti materiyadagi narsalarning fazoviy shakllari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlardan iboratdir. Ana shu shakllar orasidagi miqdoriy munosabatlarni aniqlash jarayonida matematiklar izlanishning ilmiy metodlaridan vosita sifatida foydalanadilar. Matematikadagi izlanishning ilmiy metodlari bir vaqtning o`zida matematikani o`qitishdagi ilmiy izlanish metodlari vazifasini ham bajaradi. O`qitishdagi ilmiy izlanish metodlari quyidagilardan iboratdir.

1. Tajriba va kuzatish; 2. Taqqoslash; 3. Analiz va sintez; 4. Umumlashtirish; 5. Abstraksiyalash; 6. Aniqlashtirish; 7. Klassifikatsiyalash.

3-§. Tajriba va kuzatish metodi.

T a ' r i f. *Matematik ob'ektdagi narsalarning xossalari va ularning o`zaro munosabatlarini belgilovchi metod kuzatish deyiladi.*

Misol. IV-V sinf o`quvchilariga bir necha figurani ko`rsatib, bu figuralar ichidan o`q simmetriyasiga ega bo`lgan geometrik figuralarni ajrating deb buyursak, o`quvchilar barcha figuralarni ko`rib chiqib quyidagicha xulosaga kelishlari mumkin. Figuralar ichida o`zidan biror o`qqa nisbatan ikki qismga ajragan figuralar bo`lsa hamda ularni ana shu o`q bo`yicha buklaganda qismlar ustma-ust tushsa, bunday figuralar simmetrik figuralar bo`ladi. Ammo boshqa figuralarda o`zlarini teng ikkiga bo`luvchi to`g`ri chiziqlar bo`lmasligi mumkin. U holda bunday figuralar nosimmetrik figuralar bo`ladi. Biz figuralardagi bunday xossa va ular orasidagi munosabatlarni kuzatish orqali figuralarni simmetrik va nosimmetrik figuralarga ajratdik.

T a ' r i f. *Matematik ob'ektdagi narsalarning xossalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni suniy ravishda bo`lak (qism)larga ajratish yoki ularni birlashtirish tajriba metodi deyiladi.*

M i s o l. o`quvchilarga natural sonlarni tub ko`paytuvchilarga ajratishni o`rgatiladi:

$1=1,\ 2=2\cdot1;\ 3 = 3\cdot1;\ 4 = 4\cdot1;\ 5 = 5\cdot1; \ldots$

O`quvchilarda ixtiyoriy natural sonlarni misolda ko`rsatilganidek, tub ko`paytuvchilarga ajratish jarayonida tajriba hosil bo`lib, ular natural sonlar to`plamida tub va murakkab sonlar mavjud ekanligini tushunib etadilar. Murakkab natural sonlarni ham tub ko`paytuvchilarga ajralishini, ammo ularning ko`paytuvchilari kamida uchta va undan ortiq bo`lishini tajriba orqali tekshirib ko`radilar.

Masalan: 4=2·2·1; 6 = 3·2·1; 25 = 5·5·1; 36 = 3·3·2·2·1;

Kuzatish va tajriba natijasida tub va murakkab sonlarni qonun va qoidalari o`quvchilarga tushuntiriladi.

4-§. Taqqoslash metodi.

T a ‘ r i f. *O`rganilayotgan matematik ob’ektdagi narsalarning o`xshash va farqli tomonlarini aniqlovchi metod taqqoslash metodi deyiladi.*

Taqqoslash metodi ham ilmiy izlanish metodlaridan biridir. Taqqoslash metodini matematika darslarida o`rganilayotgan mavzu materiallariga tadbiq qilishda quyidagi prinsiplarga amal qilinadi:

1) taqqoslanayotgan matematik tushunchalar bir jinsli bo`lishi kerak;

2) taqqoslash o`rganilayotgan matematik ob’ektdagi narsalarning asosiy xossalariga nisbatan bo`lishi kerak.

1 - m i s o l. Uchburchak figurasi bilan to`rtburchak figurasi taqqoslaganda ularning o`xshash tomonlari: uchlari, burchaklari; ularning o`zaro farqli tomonlari:

a) uchburchakda uchta uch va uchta tomon;

b) to`rtburchakda to`rtta uch va to`rtta tomondan iboratligi aniqlanadi.

Bu misolda taqqoslashning ikkala prinsipi ham bajarildi, ya’ni uchburchak va to`rtburchak figuralari bir jinsli tushunchalar bo`lib, ikkalasi ham ko`pburchakning xususiy hollaridir hamda taqqoslash metodi ikkala figuraning asosiy xossalariga nisbatan amalga oshirildi.

2 - m i s o l. 8-sinf algebra kursida arifmetik progressiya *n*- hadini hisoblash formulasini keltirib chiqarish ham taqqoslash metodi orqali amalga oshiriladi.

T a ‘ r i f. *Ikkinchi hadidan boshlab o`zidan avvalgi har bir hadiga biror o`zgarmas son qo`shilishidan hosil bo`ladigan sonlar ketma-ketligi arifmetik progressiya deyiladi.*

Faraz qilaylik, a_1, a_2, a_3, ... a_n, ... ko`rinishdagi sonlar ketma-ketligi berilgan bo`lsin. d - o`zgarmas son bo`lsin, u holda ta’rifga ko`ra:

$$a_2 = a_1 + d \qquad (1)$$

$$a_3 = a_2 + d \qquad (2)$$

(1) va (2) dan :

$$a_3 = a_1 + d + d = a_1 + 2d \qquad (3)$$

Xuddi shuningdek,

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \qquad (4)$$

(3) va (4) larning o`zaro taqqoslash hamda induksiya metodini tadbiq qilish natijasida arifmetik progressiya *n* - hadini hisoblash formulasi keltirib chiqariladi:

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n – 2)d + d = a_1 + (n – 1)d$$

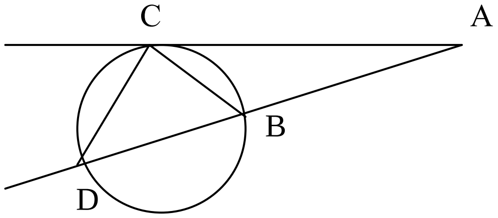
5-§. Analiz va sintez metodi.

T a ‘ r i f. *Noma’lumlardan ma’lumlarga tomon izlash metodi analiz deyiladi.*

Analiz metodi orqali fikrlashda o`quvchi quyidagi savolga javob berishi kerak: *"Izlanayotgan noma’lumni topish uchun nimalarni bilish kerak?" Analiz metodini psixologlar bunday ta’riflaydilar: "butunlardan bo`laklarga tomon izlash metodi analiz deyiladi".*

Fikrlashning analiz usulida har bir qadamning o`z asosi bor bo`ladi, ya’ni har bir bosqich bizga ilgaridan ma’lum bo`lgan qoidalarga asoslanadi. Fikrlarimizning dalili sifatida quyidagi teoremani analiz metodi bilan isbot qilamiz.

T e o r e m a. *Aylana tashqarisidagi nuqtadan aylanaga kesuvchi va urinma o`tkazilsa, kesuvchi kesmalarning ko`paytmasi urinmaning kvadratiga teng (23 - chizma).*



23-Chizma.

Berilgan: teoremada berilgan barcha shartlarni Ш, xulosani esa X bilan belgilaylik.

Ш: [AC] - urinma;

C - urinish nuqasi;

[AD] - kesuvchi;

[AB] - uning tashqi qismi.

Isbot qilish kerak: $AC^2 = |AD| \cdot |AB|$.

Isboti. Bu teoremani isbotlash uchun bizga oldindan ma’lum bo`lgan matematik faktlar kerak bo`ladi, biz ularni qisqacha Ф bilan belgilasak, teoremani shart va xulosalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$Ш, Ф \xrightarrow{?} X$$

Isbotlash natijasida hosil qilinadigan $AC^2 = |AD||AB|$ natijani yana quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\left[\{Ш, Ф\}, \left(\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|} \right) \right] \overset{?}{\Rightarrow} X.$$

Endi bizning maqsadimiz shart va ma’lum faktlar asosida $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ nini aniqlashdan iborat. Bu savolga javob proporsiyaning o`zidan ko`rinib turibdi, agar biz *AC* va *AD* larni bir uchburchak tomonlari desak, u holda *AC* va *AB* larni ikkinchi uchburchak tomonlari deb olamiz. U holda ΔACD va $\Delta\ ABC$ larni hosil qilish kerak bo`ladi. Buning uchun *B* va *C* hamda *C* va *D* nuqtalarni o`zaro birlashtirish kifoya. U holda;

$$[\{Ш, Ф\}, \{\Delta ACD \infty \Delta ABC\}] \overset{?}{\Rightarrow} \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Endi esa bu uchburchaklarning o`xshashliklari bizga noma’lumdir ya’ni:

$$Ш, Ф, \overset{?}{\Rightarrow} \Delta ACD \infty \Delta ABC.$$

Bu erda ikki uchburchak o`xshash bo`lishi uchun qanday shartlar bajarilishi kerak, degan savol tug`iladi, bunga quyidagicha javob berish mumkin:

$$[\{Ш, Ф\}, \angle A = \angle A,\ \angle ACB = \angle ADC] \overset{?}{\Rightarrow} \{\Delta ACD \infty \Delta ABC\}$$

Bu mulohazalardan esa quyidagi savollar kelib chiqadi:

1) $\{Ш, Ф\} \overset{?}{\Rightarrow} \angle A = \angle A.$ 2) $\{Ш, Ф\} \overset{?}{\Rightarrow} \angle ACB = \angle ADC.$ Bu savollarga esa quyidagicha javob berish mumkin:

1) har qanday burchak o`z-o`ziga teng.

2) Aylanaga ichki chizilgan burchaklar haqidagi teoremaga ko`ra yoki ushbu burchaklarni o`lchash orqali hal qilish mumkin.

Yuqoridagi isbotni sxema orqali bunday ifodalash mumkin:

$$Ш, Ф \overset{?}{\Rightarrow} X$$

$$\left[Ш, Ф, \left(\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|} \right) \right] \overset{?}{\Rightarrow} X \qquad \{Ш, Ф\} \overset{?}{\Rightarrow} \left[\left(\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|} \right) \right]$$

$$[\{Ш, Ф\}, (\Delta ACD \infty \Delta ABC)] \overset{?}{\Rightarrow} \left(\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|} \right) \{Ш, Ф\} \overset{?}{\Rightarrow}$$

$\overset{?}{\Rightarrow}(\Delta ACD \infty \Delta ABC)$

$(\text{Ш},\text{Ф}),\ \hat{A}=\hat{A},$ $\qquad$ $A\hat{C}B = A\hat{D}C] \overset{?}{\Rightarrow} (\Delta ACD \infty \Delta ABC)$

$(\text{Ш},\text{Ф})\overset{?}{\Rightarrow}(\hat{A}=\hat{A})$ $\qquad$ $(\text{Ш},\text{Ф})\overset{?}{\Rightarrow}(A\hat{C}B = A\hat{D}C)$

T e o r e m a. *Ikki son yig`indisining o`rta arifmetigi shu sonlar o`rta geometrigidan kichik emas.*

$\forall(a,b)\geq 0$ $\qquad$ $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

Isboti.

$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\rightarrow$ analiz

$\Downarrow$

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$

$\Downarrow$

$a-2\sqrt{ab}+b\geq 0$

$\Downarrow$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$

M i s o l. Quyidagi tenglama analiz metodi bilan echilsin:

$$\frac{\lg 2(x+1)}{\lg(x-3)}=2$$

Bu tenglamaning echimini topishning o`zi noma’lumdan ma’lumga tomon izlanish demakdir. Bu tenglama $x > 3$ va $x \neq 4$ larda ma’noga egadir.

lg2(x+1)=21g(x-3),	$x^2 - 8x + 7 = 0$
lg2(x+1)=1g(x-3)²,	$x_1 = 7$
$2(x+1)=(x-3)^2,$	$x_2 = 1$
$2x + 2 = x^2 - 6x + 9$	

Bu erda $x>3$ bo`lgani uchun $x_2$=1 echim bo`la olmaydi, shuning uchun x_1 = 7 yagona echimdir.

T a ‘ r i f. *Malumlardan noma’lumlarga tomon izlash metodi sintez deyiladi.*

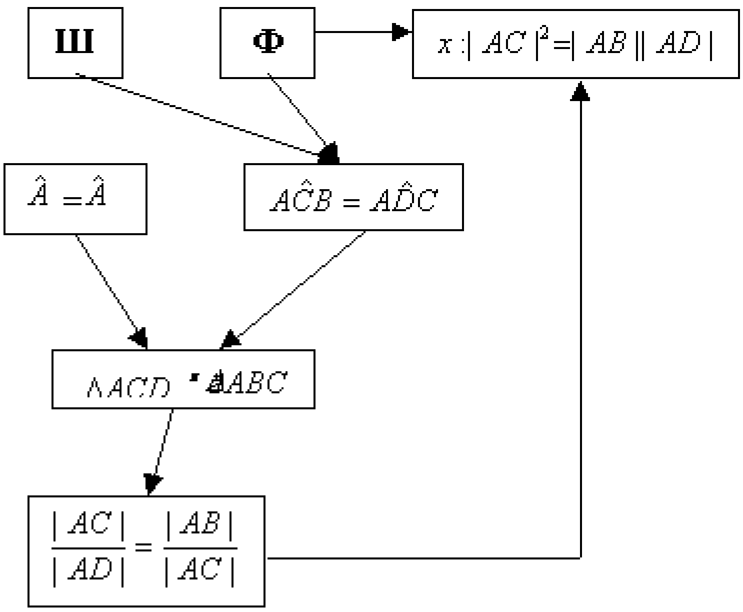
Sintez metodida fikrlashning bir bosqichidan ikkinchi bosqichiga o`tish go`yoki ko`r-ko`rona bo`ladi, bu o`tishlar o`quvchiga noaniqroq bo`ladi.

Sintez metodida biz berilganlarga asoslanib nimalarni topa olamiz, degan savolga javob beramiz. Yuqoridagi teoremani sintez metodi orqali isbot qilaylik.

B e r i l g a n: Ш: [AC] - urinma; *C* - urinish nuqtasi; [*AD*] - kesuvchi; [*AB*] – uning tashqi qismi.

Isbot qilish kerak: (Ш. Ф) $\xrightarrow{?}$ (X:AC^2 = |AD| |AB|).

Biz isbotning sintez metodini quyidagi sxema orqali chizib ko`ramiz:



2-teorema. *Ikki son yig`indisining o`rta arifmetigi shu sonlarni o`rta geometrigidan kichik emas.*

$$\forall(a,b)\geq 0 \qquad \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

I s b o t i.

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$$
$$(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\geq 0$$
$$a-2\sqrt{ab}+b\geq 0$$
$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

Yuqoridagilardan ko`rinadiki, analiz sintez metodiga nisbatan ancha qulay metod ekan, chunki bunda o`quvchilar o`z mulohazalarni mustaqil ravishda asoslab isbotlashga doir misol va masalalarni echishlariga yordam beradi. Umuman olganda, analiz va sintez metodlari bir-biridan ajralmaydigan metodlardir. Masalan, teoremani analiz yo`li bilan isbot qilsak, uni sintez metodi orqali tushuntiramiz, chunki bu metod ancha ixcham va maqsadga tomon tezroq olib keladigan metoddir. Fikrlarimizning dalili sifatida quyidagi misolni ham sintez metodi orqali echamiz.

Misol. $x_1 = 7$ va $x_2 = 1$ echimlarni qanoatlashtiruvchi logarifmik tenglama tuzilsin. Bu erda quyilgan savolning o`zi ma'lumdan noma'lumga tomon izlashni talab qilyapti, shuning uchun bu savolga sintez metodi orqali javob beriladi. Bu erdagi bajarilishi kerak bo`lgan matematik jarayon ildizdan tenglamaga tomon olib boriladi.

1) $x_1=7$ va $x_2=1$ echimlarni qanoatlantiruvchi tenglamani quyidagicha tuzish mumkin:

$$(x-7)(x-1)=0,$$
$$x^2-8x+7=0$$

Ayniy almashtirish bajarish bilan quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$x^2-6x-2x+9-2=0,$$
$$2x+2=x^2-6x+9, \qquad \frac{\lg 2(x+1)}{\lg(x-3)}=2$$
$$2x+2=(x-3)^2,$$
$$lg(2(x+1)) = 2\cdot lg(x-3) | : lg(x-3)\neq 0.$$

Biz sintez metodi yordamida ma'lum bo`lgan $x_1=7$ va $x_2=1$ ildizlarni qanoatlantiruvchi $\frac{\lg 2(x+1)}{\lg(x-3)}=2$ ko`rinishdagi noma'lum tenglamani hosil qildik.

6-§. Umumlashtirish metodi.

Umumlashtirish tushunchasi ham matematika o`qitishdagi ilmiy izlanish metodlaridan biri bo`lib hisoblanadi. Umumlashtirish usulini ahamiyatini atoqli olim A.N.Kondakov quyidagicha ta'riflaydi.

"Umumlashtirish shunday mantiqiy usulki, uning vositasi orqali birlik fikrlashlardan umumiy fikrlashlarga o`tiladi".

Maktab matematika kursida umumlashtirish tushunchasi quyidagicha tadbiq qilinadi:

1. Matematik tushunchalarni umumlashtirish;
2. Teoremalarni isbotlashda umumlashtirish;
3. Misol va masalalarni echishda umumlashtirish;

Endi umumlashtirish tadbiqlarini alohida-alohida ko`rib chiqamiz.

1. Matematik tushunchalarni umumlashtirish

Ta'rif. *Matematik ob'ektdagi narsalarning asosiy xossalarini aks eptiruvchi tafakkur shakli matematik tushuncha deyiladi.*

Har bir matematik tushuncha o`zining ikki tomoni bilan xarakterlanadi:

a) tushunchaning mazmuni;
b) tushunchaning hajmi.

Ta'rif. Tushunchaning mazmuni deb, *ana shu tushunchani ifodalovchi asosiy xossalarning to`plamiga aytiladi.*

Masalan, to`rtburchak tushunchasini olaylik. To`rtburchak tushunchasining mazmuni quyidagi asosiy xossalar to`plamidan iborat:

1) to`rtburchakning diagonali uni ikkita uchburchakka ajratadi.
2) ichki qarama-qarshi burchaklarning yig`indisi 180^o ga teng.
3) diagonallari bir nuqtada kesishadi va shu nuqtada ikkita bo`lakka bo`linadi.

Ta'rif. *Tushunchaning hajmi deb ana shu tushunchaga kirgan barcha ob'ektlar to`plamiga aytiladi.*

Masalan, to`rtburchak tushunchasining hajmi to`rtburchak tushunchasiga kirgan barcha to`rtburchak turlaridan, ya'ni: parallelogramm, kvadrat, romb va trapetsiyadan iborat. Bundan ko`rinadiki. to`rtburchak tushunchasining hajmini tomonlari uzunliklarining miqdori turlicha bo`lgan barcha katta va kichik to`rtburchaklar tashkil qilar ekan. Hajm jihatidan keng, mazmun jihatidan esa tor bo`lgan tushunchani *jins tushunchasi* va aksincha hajmi tor, mazmuni esa keng bo`lgan tushunchani *tur tushunchasi* deb yuritiladi. Masalan, akslayntirish tushunchasini olaylik. Bu tushunchadan qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalari kelib chiqadi.

Bu erda akslantirish tushunchasi qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalariga nisbatan jins tushunchasi, qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalari akslantirish tushunchasiga nisbatan tur tushunchalari bo`ladi. Yuqoridagi mulohazalardan ko`rinadiki, jins tushunchasi tur tushunchalariga nisbatan umumiy bo`lgan tushuncha ekan. Shuning uchun ham tushunchani umumlashtirishga quyidagicha ta'rif berilgan: *"Tur tushunchalaridan jins tushunchalariga o`tish tushunchani umumlashtirish deyiladi".* Umumlashtirish jarayonida o`rganilayotgan tushunchalar orasida umumiy xarakterli mosliklar o`rnatilib, umumiy fikrlashlarga o`tiladi. Yuqoridagi mulohazalardan ko`rinib turibdiki, umumlashtirish jarayonida umumlashtirilgan tushunchaning hajmi ortib, mazmuni torayar ekan.

Misol. Qaytuvchi akslantirish tushunchasining hajmi B bo`lsin, uning mazmuni $\alpha$ bo`lsin. Akslantirish tushunchasining hajmi H bo`lsin, uning mazmuni esa $\beta$ bo`lsin. Tushunchani umumlashtirishga berilgan ta'rifga ko`ra quyidagi munosabat o`rinli bo`ladi: $(B \subset H) \Rightarrow (\alpha > \beta)$. Bu erda $B$ - qaytaruvchi akslantirishning hajmiga bi'ektiv akslantirish kiradi. $H$ - akslantirishning hajmiga esa barcha akslantirishlar kiradi. Shuning uchun qaytuvchi akslantirish tushunchasi akslantirish tushunchasining qismi bo`lyapti. Boshqacha aytganda, akslantirish tushunchasi qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalarining umumlashgan holi ekan.

Endi uning mazmuniga kelsak, bu erda qaytuvchi akslantirish deganda biz faqat shu akslantirishning xossalarigina o`rganamiz. Demak, biz o`rganadigan tushunchaning mazmuni aniq. Endi akslantirish tushunchasini olsak, bu erda biz o`rganadigan tushunchaning mazmuni noaniqroq, chunki akslantirish tushunchasidan ikkita, ya'ni qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalari kelib chiqadi. Bulardan ko`rinib turibdiki, qaytuvchi akslantirish tushunchasining mazmuni akslantirish tushunchasining mazmunidan katta ekan, ya'ni: $\alpha > \beta$.

2. Teoremalarni isbotlashda umumlashtirish

Teoremalarni umumlashtirish jarayonida o`quvchilar uning shart va xulosa qismini o`zaro ajratishlari hamda ular orasidagi o`xshash va farq tomonlarini analiz qilishlari lozimdir.

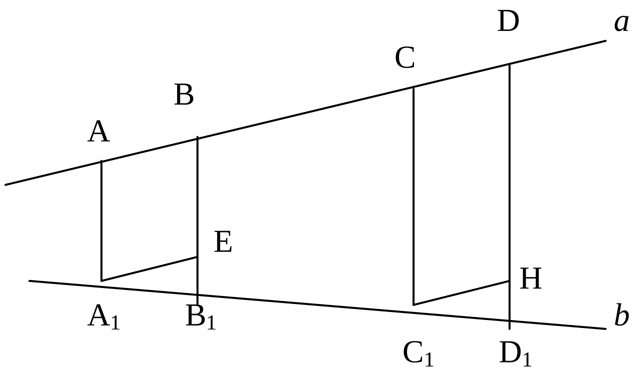
Analiz qilish quyidagi bosqichlar orqali amalga oshiriladi:

1) teoremada qatnashayotgan xossalarni asosiy va asosiy bo`lmagan xossalar gruppasiga ajratiladi;

2) teoremani umumlashtirish uchun uning shartida qatnashayotgan asosiy xossalardan qaysi birini mazmunini o`zgartirish kerakligi aniqlanadi;

3) teorema umumlashgan holda isbot qilinadi.

Teorema. *Agar bir to`g`ri chiziqda bir necha kongurent kesma ajratilsa va ularning uchlaridan ikkinchi to`g`ri chiziqni kesuvchi o`zaro parallel to`g`ri chiziqlar o`tkazilsa, ular ikkinchi to`g`ri chiziqda o`zaro kongurent kesmalar ajratadi* (24-chizma).



24-Chizma.

Berilgan:

$[AB] \wedge [CD] \in a,$

$[AB] \cong [CD],$

$(AA_1) \parallel (BB_1) \parallel (CC_1) \parallel (DD_1)$

I s b o t q i l i sh k e r a k:

$$[A_1B_1] \cong [C_1D_1] \in b,$$

Isboti. Bu teoremani isbotlashda uchburchaklar kongurentligini alomatidan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Chizmadan:

$$(AB) \parallel (A_1E) \wedge (CD) \parallel (C_1H).$$

$\Delta A_1EB_1 \cong \Delta C_1HD_1$ bir tomoni va unga yopishgan burchaklariga ko`ra, natijada:

$$[A_1B_1] \cong [C_1D_1] \in b.$$

Fales teoremasida asosan ikki shart bor: 1) *a* to`g`ri chiziqda konguruent kesmalar ajratilsin, 2) kesmalarning uchlaridan *b* to`g`ri chiziqni kesuvchi parallel to`g`ri chiziqlar o`tkazilsin. Faraz qilaylik, *a* to`g`ri chiziqda konguruent kesmalar emas, balki ixtiyoriy kesmalar ajrataylik, u holda teoremaning mazmuni quyidagicha bo`ladi: "Agar bir to`g`ri chiziqda bir necha ixtiyoriy kesma ajratilsa va ularning uchlaridan ikkinchi to`g`ri chiziqni kesuvchi o`zaro parallel to`g`ri chiziqlar o`tkazilsa, ular ikkinchi to`g`ri chiziqda ham ixtiyoriy kesmalar ajratadi".

Berilgan:

$$([AB] \wedge [BC]) \in a; \quad (AA_1) \parallel (BB_1) \parallel (CC_1) \parallel (DD_1)$$

Isbot qilish kerak:

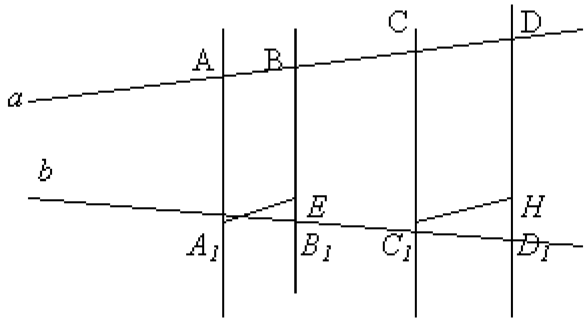
$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}.$$

I s b o t i: chizmadan (25-chizma):

$$(\Delta A_1EB_1 \sim \Delta C_1HD_1) \Rightarrow \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|} = \frac{|A_1E|}{|C_1H|} \qquad (1)$$

$$((A_1E) \parallel (AB) \wedge (C_1H) \parallel (CD)) \Rightarrow ([A_1E] \cong [AB] \wedge [C_1H] \cong [CD]) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|A_1E| = |AB| \wedge |C_1H| = |CD|),$$



25-Chizma

(1) tenglikdagi $|A_1E|$ va $|C_1H|$ o`rniga (2) tenglikdagi AB va CD larni quysak:

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}.$$

(3) tenglik proporsional kesmalar haqidagi teoremaning natijasidir. Demak, proporsional kesmalar haqidagi teorema Fales teoremasining umumlashgan holi ekan.

3. Masalalarni echishda umumlashtirish

Bizga ma'lumki, maktab geometriya kursi deduktiv asosda mantiqiy qurilgan fandir. Shuning uchun ham maktab matematika kursidagi barcha amaliy materiallar o`quvchilarning mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini har tomonlama shakllantirishga qaratilgandir. O`quvchilarning mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini shakllantirish esa matematikada echiladigan amaliy mavzu materiallariga o`qitishning ilmiy izlanish metodlarini izchillik bilan tadbiq qilish lozimligini taqazo etadi. Ana shunday metodlardan biri umumlashtirish usulidir.

1 - m i s o l. Berilgan ikki kesmaga o`rta proporsional bo`lgan kesmani yasash qoidasiga asoslanib, bir-biriga teng bo`lmagan ixtiyoriy ikki musbat sonning o`rta arifmetigi shu sonlarning o`rta geometrigidan katta son ekanligini isbot qiling.

Berilgan: a va b sonlar; $a > 0, b > 0, a \neq b$.

Isbot qilish kerak: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

I s b o t i.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 0,$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0,$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad \text{demak} \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

I. Faraz qilaylik, berilgan sonlar uchta bo`lsin. Berilgan: a, b, c - sonlar; $a>0, b>0, c>0, a \neq b \neq c$.

Isbot qilish kerak: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

Isboti. Faraz qilaylik, $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$ bo`lsin, u holda

$$\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3y^3z^3}\right) \Rightarrow \left(x^3 + y^3 + z^3 \geq \sqrt[3]{x^3y^3z^3} \cdot 3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz\right) \Rightarrow \left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0\right) \qquad (1)$$

Agar biz (1) tengsizlikni o`rinli bo`lishini ko`rsatsak, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ ekanligini ko`rsatgan bo`lamiz.

$$[(x^3+y^3+z^3-3xyz)\geq 0]\Rightarrow[(x+y+z)^3-3(x+y+z)\times$$
$$\times(xy+xz+yz)]\geq 0\Rightarrow[(x+y+z)\times$$
$$\times(x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz)]\geq 0 \qquad (2)$$

(2) dagi birinchi ko`paytuvchi musbat, shuning uchun biz ikkinchi ko`paytuvchini musbat ekanligini ko`rsatsak, (1) tengsizlikni musbat ekanligini ko`rsatgan bo`lamiz:

$$(x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz)=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}[(x-z)^2+(x-y)^2+(y-z)^2]\geq 0 \qquad (3)$$

(3) tengsizlik doimo berilishiga ko`ra musbatdir, agar $x=y=z$ bo`lsa, (3) tengsizlik nolga teng bo`ladi, bu holda (1) tengsizlik tenglikga aylanadi.

Demak, $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ tengsizlik o`rinli ekan.

II. Faraz qilaylik, berilgan sonlar to`rtta bo`lsin.

Berilgan: *a, b, c, d* - sonlar; $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0;$

Isbot qilish kerak: $\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$

Isboti. $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ga asosan

$$\left[\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geq\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)}\right]\Rightarrow\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)}.$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\sqrt{ab}. \qquad \left(\frac{c+d}{2}\right)\geq\sqrt{cd}. \qquad (4)$$

bo`lgani uchun bularni (4) ga qo`ysak:

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}\Rightarrow\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}.$$

Demak, $\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$ tengsizlik o`rinli bo`ladi.

Endi yuqoridagi tengsizlikni har qanday *n* uchun o`rinli deb, matematik induksiya metodi orqali umumlashgan *(n + 1)* hol uchun isbot qilamiz:

$$a_{n+1}\geq\frac{a_1+a_2+a_2+\ldots+a_n}{n}=N_n;$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1}=N_{n+1};$$

$a_{n+1}=N_n+\varepsilon,\quad \varepsilon>0$ bo`lsin

$$\left(N_{n+1}=\frac{nN_n+a_{n+1}}{n+1}\right)\Rightarrow\left(N_{n+1}=\frac{nN_n+N_n+\varepsilon}{n+1}\right)\Rightarrow$$

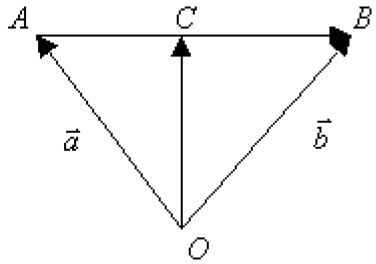
$$\left(N_{n+1}=\frac{N_n(n+1)+\varepsilon}{n+1}\right)\Rightarrow\left(N_{n+1}=N_n+\frac{\varepsilon}{n+1}\right);$$

$$(N_{n+1})^{n+1}=\left(N_n+\frac{\varepsilon}{n+1}\right)^{n+1}=N_n^{n+1}+(n+1)N_n^n\cdot\frac{\varepsilon}{n+1}+\ldots\geq$$
$$\geq(N_n^{n+1}+N_n^n\cdot\varepsilon)=N_n^n(N_n+\varepsilon)=N_n^n a_{n+1};$$

$$\left(N_{n+1}\right)^{n+1} \ge N_n^n a_{n+1} \Rightarrow \left(N_{n+1} \ge \sqrt[n+1]{N_n^n a_{n+1}}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N_{n+1} \ge \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}.$$

Demak, $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \ge \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}$

2- misol. *C* nuqta *[AB]* kesmani teng ikkiga bo`ladi. *O* ixtiyoriy nuqta. $\overrightarrow{OC}$ vektorni $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang (26-chizma).



26-Chizma

Berilgan: *[AB],* $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\left(\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = 1\right) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}|.$

Topish kerak: $\overrightarrow{OC}$ = ?

E ch i sh: shartga ko`ra: $\left(\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = 1\right)$ bo`lgani uchun $|\overrightarrow{AC}| = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$ (1) bo`ladi. Chizmadan: $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{AB}$ vektorlarning yo`nalishlari bir xil bo`lgani uchun

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA},$ (2)

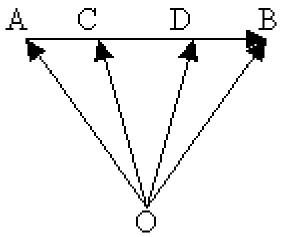
$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA},$ (3)

(2) va (3) larni (1) ga qo`ysak:

$\vec{OC} - \vec{OA} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{OB} - \vec{OA}\right), \quad \vec{OC} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{OB} + \vec{OA}\right),$

$\vec{OC} = \dfrac{1}{2}\vec{OB} + \dfrac{1}{2}\vec{OA}, \quad \vec{OC} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{a}\right)$

Endi shu kesmani ikkita *C* va *D* nuqtalar yordamida teng uch bo`lakka bo`laylik. O ixtiyoriy nuqta. $\overrightarrow{OC}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlarni $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang (27-chizma).



27-Chizma

Berilgan: *[AB],* $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Topish kerak: $\overrightarrow{OC}$ = ?

E ch i sh: shartga ko`ra: $\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (1)

$\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlarning yo`nalishlari bir xil bo`lganligi uchun

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}, \qquad (2)$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}, \qquad (3)$$

(2) va (3) larni (1) ga qo`ysak:

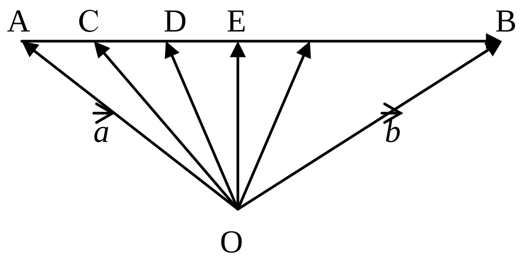
$$\vec{OC} - \vec{OA} = \frac{1}{3}\left(\vec{OB} - \vec{OA}\right),$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{2}{3}\vec{OA},$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{3}\left(\vec{OB} + 2\vec{OA}\right),$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{3}\left(\vec{b} + 2\vec{a}\right).$$

Endi shu *[AB]* kesmani *C, D, E, ...* nuqtalar yordamida teng *n* ta bo`lakka bo`laylik. *O* – tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo`lsin (28-chizma). $\overrightarrow{OC}$ vektorni $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.



28-Chizma.

Berilgan: *[AB],* $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{n}$

Topish kerak: $\overrightarrow{OC}$ = *?*

E ch i sh: shartga ko`ra: $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{n}$

$\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{AB}$ vektorlarning yo`nalishlari bir xil bo`lganligi uchun

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$, (2)

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$, (3)

(2) va (3) larni (1) ga qo`ysak:

$\vec{OC} - \vec{OA} = \frac{1}{n}\left(\vec{OB} - \vec{OA}\right),$

$$\vec{OC} = \frac{1}{n}\left(\vec{OB} + (n-1)\vec{OA}\right).$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{n}\left(\vec{b} + (n-1)\vec{a}\right).$$

7-§. Abstraksiyalash metodi

O`qitish jarayonidagi ilmiy izlanish metodlaridan biri bu abstraksiyalashdir. Abstraksiyalash - o`rganilayotgan ob’ektdagi narsalarning muhim belgilarini, sifat yoki xususiyatlarini fikran ajratib olib ana shu belgi, sifat yoki xususiyatlarni mustaqil fikr ob’ektiga aylantirishdan iborat tafakkur operatsiyasidir.

1 - m i s o l. O`qituvchi abstraksiyalash metodini o`quvchilarga $3 \cdot 5 = 15$ misol orqali tushuntirishi maqsadga muvofiq. Bizga ma’lumki, bu oddiy matematik tenglikdir, ammo u ob’ektiv olamdagi ma’lum bir qonuniyatlarni aks ettiradi. Agar biz $3 \cdot 5 = 15$ tenglikka ma’lum bir shartlarni qo`ysak, u holda bu tenglik quyidagi qonuniyatlarni ifodalaydi:

Agar biz 3 sonini qalamlarning soni, 5 sonini har bir qalamning qiymati desak, u holda 15 soni jami qalamlarning qiymatini (qancha turishini) ifodalaydi.

Agar biz 3 sonini odamning piyoda yurgan vaqti, 5 soni uning bir soatdagi tezligi desak. u holda 15 soni piyoda odamning 3 soat ichida bosib o`tgan yo`lini ifodalaydi.

2 - m i s o l. Biz fizika kursida jismning harakat tezligi tushunchasini $v_t = v_o + at$ formula bilan, metall sterjen uzunligini qizdirilgandagi o`zgarishini $l_x = l_o + at$ formula bilan, chiziqli funksiyaning burchak koeffitsientli formulasini esa $f(x) = ax + b$ bilan ifodalaymiz. Agar biz bu formulalarga diqqat bidan qarasak, $v_t = v_o + at$ va $l_x = l_o + at$ formulalar $f(x) = ax + b$ chiziqli funksiya formulasining fizikada yozilishi ekanligini ko`ramiz.

Yuqoridagi misollardan ko`rinib turibdiki, abstraksiyalash usulida narsalarning aniq holatidan uzoqlashib, ularning muhim belgilari haqidagina gap boradi, narsalarning turli ko`rinishlari bo`yicha fikr yuritilmaydi. O`quvchilarga abstraksiyalash metodini o`rgatish ularning narsa va hodisalarni muhim belgilarini ajrata olishlari hamda ilmiy tushunchalarni o`zlashtirishlari uchun katta ahamiyatga egadir.

8-§. Aniqlashtirish metodi

O`rganilayotgan ob’ektdagi narsalarning xossalarini bir tomonlama xususiy holda fikrlash aniqlashtirish deyiladi.

1 - m i s o l. $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ - bu formulani aniq hollar uchun quyidagicha qo`llash mumkin:

$$\sqrt{81^2 - 63^2} = \sqrt{(81-63)(81+63)} = \sqrt{18 \cdot 144} = 12 \cdot 3\sqrt{2} \approx$$

$$\approx 36 \cdot 1.144 \approx 50{,}9.$$

2 - m i s o l. Bizga ma’lumki, kosinuslar teoremasini

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

formula bilan ifodalaymiz: Agar $C = 90°$ bo`lsa, $\cos 90° = 0$, u holda $c^2 = a^2 + b^2$ - Pifagor teoremasi kelib chiqadi.

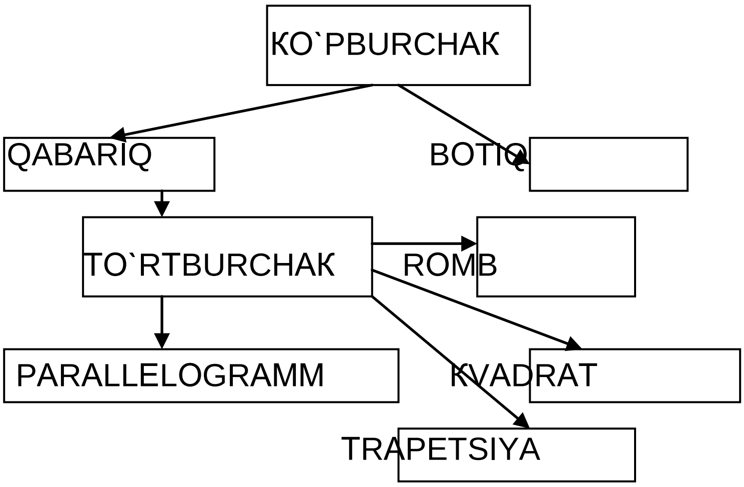
9-§. Klassifikatsiyalash metodi.

T a ‘ r i f. *Jins tushunchalaridan tur tushunchalariga o`tish klassifikatsiyalash deyiladi.*

Klassifikatsiyalash jarayonida o`quvchilar (muhim yoki o`xshash) belgiga asoslangan holda, ularni bir sinfga birlashtirishga harakat qiladilar, ya’ni ularni o`xshash, umumiy va farqli tomonlarini qarab bir-biridan ajratadilar, buning natijasida ular tushunchalarni klassifikatsiya qiladilar.

Masalan, ko`pburchak tushunchasini klassifikatsiyalash quyidagicha amalga oshiriladi:

10-§. Evristik ta’lim metodi.



"Evristika" degan so`zning ma’nosi savol-javobga asosan topaman demakdir. Evristik metod bilan o`qitish maktabdarda asosan, XIX asr boshlaridan boshlab qo`llanila boshlandi.

Atoqli pedagog-matematik S.I.Shoxor-Trotskiy o`zining "Geometriya na zadachax" nomli kitobida bunday yozadi: "Geometrik mashg`ulotlar o`quvchilarga qiziqarli bo`lishi uchun, bu mashg`ulotlardagi har bir masala yoki topshiriq so`zma-so`z quruq yodlash uchun emas, balki ularning aqliy faoliyatlarini ishga soladigan xarakterda bo`lishi kerak. (Shoxor-Trotskiy S.I. "Geometriya na zadachax" M., 1908 y. 14-bet).

Amerikalik olim D.Poya o`zining "Kak reshat zadachu" nomli kitobida evristik ta’lim metodini bunday tushuntiradi: "Evristikaning maqsadi - yangiliklarga olib boruvchi metod va qoidalarni izlash demakdir". U evristik metod mohiyatini quyidagidek izchillikda tuzilgan reja orqali amalga oshirishni tavsiya qiladi:

1. Masalaning qo`yilishini tushunish.
2. Masalani echish rejasini tuzish.
3. Tuzilgan rejasini amalga oshirish.
4. Orqaga nazar tashlash (hosil qilingan echimni tekshirish).

Bu rejani amalga oshirish jarayonida o`quvchilar quyidagi savollarga javob topadilar:

1. Masalada nima noma’lum?
2. Masalada nimalar ma’lum?
3. Masalaning sharti nimalardan iborat?
4. Ilgari shunga o`xshash masala echilganmi?
5. Agar shunga o`xshash masala echilgan bo`lsa, undan foydalanib qo`yilayotgan masalani echa olamizmi?

Albatta, yuqoridagi reja-sxema o`quvchilarning ijodiy fikrlash faoliyatlarini shakllantiradi, ammo bu reja - sxema o`quvchilarning ijodiy qobiliyatlarini shakllantiruvchi birdan-bir yo`l bo`la olmaydi.

Matematik-metodist V.V.Repev evristik metod orqali o`qitishni bunday ta’riflaydi: "Bu metodning mohiyati shundan iboratki, o`qituvchi tomonidan sinf o`quvchilari uchun o`tiladigan mavzu materialining mazmuni muammo kilib qo`yiladi, so`ngra maqsadga tomon yo`naltiruvchi savollar sistemasini o`quvchilarga berish orqali qo`yilgan muammoni hal qilinadi. (Репьев В. В. "Общая методика математики", М., 1958 й., 149-бет).

Endi yuqorida aytilgan fikrlarning dalili sifatida quyidagi tenglama va masalani evristik ta’lim metodi bilan echib ko`rsatamiz.

1. Ushbu $|x^2- 3x-9| =-5$ - tenglama evristik metod bilan echilsin.

Bu tenglamani evristik metod bilan echishda o`qituvchi bilan o`quvchilar orasidagi suhbatni keltiramiz, bu ta’lim jarayonidagi evristik metod mohiyatini ochib beradi:

O`qituvchi. $|x^2-3x-9|=-5$ tenglamani qanday echiladi?

**O`quvchi.** Bu tenglamani echish uchun uning $x^2-3x-9=-5$ va $-x^2+3x+9=-5$ tenglamalar ko`rinishida yozib olamiz.

O`qituvchi: $x^2–3x–9=–5$ va $-x^2+3x+9=–5$ tenglamalarni qanday qoidaga asoslanib yozdingiz?

Agar bizga $|a|$ soni berilgan bo`lsa, u quyidagiga teng edi: $|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

**O`qituvchi.** Xo`sh, u holda hosil qilingan tenglamalar qanday echiladi?

O` q u v ch i.

$$x^2 - 3x - 9 = -5,$$

$$x^2 - 3x - 9 + 5 = 0,$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

O`qituvchi. $x^2–3x–4=0$ tenglamani qaysi formuladan foydalanib echamiz?

**O`quvchi.** $x^2–3x–4=0$ tenglama $x^2 + px + q = 0$ ko`rinishga keladi, bu keltirilgan kvadrat tenglamadir.

**O`qituvchi.** Kim aytadi, $x^2+px+q=0$ tenglamaning umumiy echimi qanday bo`lar edi?

**O`quvchi.** $x^2+px+q=0$ tenglamaning echimi $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ bo`lar edi.

**O`qituvchi.** $x^2–3x–4=0$ tenglamani bu formulaga qanday qilib qo`yamiz?

**O`quvchi.** $x^2–3x–4=0$ tenglamada $p=–3$ va $q=–4$ ga teng, biz ularni umumiy echimga qo`ysak, berilgan tenglamaning echimini topgan bo`lamiz:

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2},$$

O`qituvchi. $-x^2 + 3x + 9 =–5$ tenglama qanday echiladi?

O`quvchi. $–x^2 + 3x + 9 + 5 = 0$

O`qituvchi. Endi nima qilamiz?

**O`quvchi.** o`xshash hadlarini ixchamlaymiz: $-x^2+3x+14=0$

O`qituvchi. Noma'lum x oldidan manfiy ishorani musbat qilish uchun nima qilamiz?

**O`quvchi.** Tenglikni har ikkala tomonini (-1) ga ko`paytiramiz:

$$-x^2 + 3x + 14 = 0 \cdot (-1) \qquad x^2 - 3x - 14 = 0.$$

Bu tenglama ham yuqoridagi kabi echiladi:

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 14} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{65}}{4};$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{65}}{2}; \qquad x_2 = \frac{3 - \sqrt{65}}{2};$$

II. Endi quyidagi masalani evristik metod bilan echamiz.

Masala. Oralaridagi masofa 60 km bo`lgan A nuqtadan B nuqtaga bir vaqtda ikki velosipedchi jo`nadi. Ular bir vaqtda B punktga kelishlari kerak edi. Birinchi velosipedchi esa har soatda 2 km kam yurgani uchun bir soat kech keldi. Har bir velosipedchi soatiga necha km yurgan?

O`qituvchi. Masalaning shartlari qanday? Unda nimalar berilgan? Masala shartida qanday kattaliklar qatnashayapti?

**O`quvchilar.** A va B punktlar orasidagi masofa 60 km ekani berilgan. Velosipedchilarning tezliklari orasidagi hamda ana shu masofalarini bosib o`tishlari uchun ketgan vaqtlar orasidagi farqlar berilgan. Bu masala shartida harakat, masofa va vaqt kabi kattaliklar berilgan.

O`qituvchi. Masalada nimani topish kerak?

**O`quvchilar.** Masalada har qaysi velosipedchining tezligini topish so`ralmoqda.

O`qituvchi. Biz tezliklarni topish uchun qanday formulalardan foydalanamiz?

**O`quvchilar.** Bizga fizika kursidan ma'lum bo`lgan $S=v \cdot t$, $v=\frac{S}{t}$ formulalardan foydalanamiz.

**O`qituvchi.** Masalani shartiga ko`ra nimani x bilan belgilaymiz?

O`quvchilar. x km/soatni A punktdan B puntkga borayotgan velosipedchining tezligi deb olamiz.

O`qituvchi. Agar biz birinchi velosipedchini tezligini x desak, ikkinchi velosipedchini tezligini ana shu noma'lum orqali ifodalay olasizmi?

**O`quvchilar.** Ha, ($x$–2) km/soat ikkinchi velosipedchining tezligi bo`ladi.

**O`qituvchi.** A punktdan B punktgacha masofani birinchi ikkinchi velosipedchilar qancha vaqtda bosib o`tgan?

O`quvchilar. $\frac{60}{x}$ - soatda, va $\frac{60}{x-2}$ soatda.

**O`qituvchi.** Bu velosipedchilarning 60 km.li masofani o`tishlari uchun ketgan vaqtlarni qanday tenglash mumkin?

O`quvchilar. $\frac{60}{x-2}-1=\frac{60}{x}$ tenglama orqali.

O` q i t u v ch i. Bu tenglamani qanday echamiz?

**O`quvchilar.** Tenglama echishning umumiy qoidasiga ko`ra:

$$60x+120-60x=x^2-2x,$$

$$x^2-2x-120=0,$$

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+120}=1\pm 11.$$

$$x_1=12\text{км}/\text{соат},$$

$$x_1=10\text{км}/\text{соат}.$$

11-§. Matematika darslarida muammoli ta'lim.

Umumta'lim maktablari jamiyatning ijtimoiy-iqtisodiy va madaniy hayotdagi muhim o`zgarishlarga hamisha o`z munosabatini bildirib keldi. Jamiyat taraqqiyotining har bir davri uchun ta'lim nazariyasi rivojining ma'lum bir mazmuni mos keladi. Boshqacha qilib aytganda, jamiyat taraqqiyotining har bir bosqichiga mos ravishda o`qitish dasturlarining mazmuni, tarbiya prinsiplari, o`quv-tarbiya jarayonini tashkil qilishning forma va metodlari hamda ta'lim muddatlari mos keladi. Pedagogika kursidan ma'lumki, ta'lim metodini aniqlashtirish jarayoni o`quvchi bilan o`qituvchining o`zaro munosabatlari prinsipidan kelib chiqadi, bunda o`qituvchi o`quvchilarga bilimlarni bayon qilishi, ana shu bilimlarga erishishdagi o`quvchilarning shaxsiy faoliyatlarini uyushtirishi hamda tushuntiriladigan mavzu materialini o`qituvchining o`zi qanday bayon qilish nuqtai-nazaridan yondashiladi.

Og`zaki ko`rsatmalik ta'lim jarayonida o`quvchilar o`qituvchining tushuntirishi orqali bilimlarni ongli ravishda o`zlashtiradilar hamda ularni amalda qo`llash malakalari hosil bo`ladi.

Asta-sekin umumta'lim maktablarining mazmuni tubdan o`zgartirildi, ya'ni ta'limni maktabning maqsad va vazifalariga mos keladigan yangi, ancha takomillashgan izohli-illyustrativ metodi vujudga keltirildi. Izohli-illyustrativ ta'limda o`rganilayotgan ob'ekt mohiyati izohlanadi, hayotiy faktlar bilan bog`lanadi hamda o`qituvchining ana shu o`rganilayotgan ob'ektga nisbatan ko`rsatadigan misol va xilma-xil ko`rgazmali qurollari orqali tasdiqlovchi xulosasi bilan yakunlanadi.

Izohli-illyustrativ ta'limda o`qituvchi faktlarni o`zi bayon qilib beradi, o`zi ularni tahlil qiladi va yangi tushunchalarning mohiyatini tushuntiradi, ya'ni teorema, qoida va qonunlarni o`zi ta'riflaydi.

Izohli-illyustrativ ta'lim metodi umumta'limiy maktablarimizda qo`llanish darajasiga nisbatan an'anaga aylandi va hozirda ham qo`llanilmoqda. Hozirgi zamon ilmiy-texnika revolyusiyasi davrida izohli-illyustrativ ta'lim metodi o`quvchilarning fikrlash qobiliyatini etarli darajada rivojlantira olmaydi, ularni o`rganilayotgan mavzu materialini puxta bilishlariga bo`lgan ehtiyojlarini qanoatlantira olmaydi hamda fanga bo`lgan qiziqishlarini yuqori darajada shakllantira olmaydi. Shuning uchun ham 1960 yilning boshlaridan boshlab, maktablarimizda ta'lim jarayonini jadallashtirish g`oyasi keng tarqalib, ta'limning yangi metodi - *muammoli ta'lim metodi* vujudga kela boshladi.

Ta'lim metodlarining turini aniqlash o`quv jarayonini tashkil qilish prinsiplarini o`zigagina emas, balki aqliy faoliyat xarakteriga ham bog`liqdir, bu esa o`z navbatida fikrlashning reproduktiv va produktiv turlarini o`zaro qo`shib olib borish bilan belgilanadi. Izohli-illyustrativ ta'lim jarayonida barcha bilimlar, ko`nikmalar va malakalar o`zlashtirishning reproduktiv metodi asosida amalga oshiriladi, ya'ni o`quvchilar fanning tayyor natijalarini, tayyor faoliyat usullarini o`zlashtiradilar, bu esa ularda xotira va reproduktiv fikrlash malakalarini shakllantiradi. Faqatgina produktiv ijodiy fikrlash malakalari o`rganilgan nazariy mavzu materialiga bog`liq bo`lgan masala yoki misollarni echish davomida egallanadi, xolos. Birok reproduktiv fikrlash natijasida to`plangan ma'lum hajmdagi bilim va malakalar o`quvchilarning mustaqil bilish va ijodiy qobiliyatlarini rivojlantirish uchun etarli bo`lmaydi. Shuning uchun ham ta'limni jadallashtirish g`oyasini turli yo`nalishlari turli olimlar (M.A.Bankov, M.A.Danilov, M.Maxmutov, Yu.K.Babanskiy va boshqalar) tomonidan eksperiment qilinib ko`rildi va nazariy jihatidan isbotlandi.

O`tkazilgan eksperiment va kuzatishlar natijasida ta'lim jarayonida o`quvchilarning bilish faoliyatlarini jadallashtirish hamda ularning intellektual imkoniyatlaridan yuqori darajada foydalanish umumiy qonuniyatlari ishlab chiqildi. Bu qonuniyatlar quyidagilardan iborat:

1. O`rganilayotgan mavzu materiallari yuzasidan muammoli savollar sistemasini tuzish.

2. Tuzilgan muammoli savollar sistemasi aoosida suhbat metodi orqali tushuntiriladigan mavzu materialini o`rgatish va uning tub mohiyatini ochib berish.

3. Muammoli savollar asosida izlanish xarakteridagi o`quv vazifalarini qo`yish.

Yuqoridagi bosqichlar asosida o`quv materiali tushuntirilganda o`quvchilar o`zlari darrov tushunib etmaydigan fakt va tushunchalarga duch keladilar, natijada o`rganilayotgan mavzu materiali bilan o`quvchilar orasida muammoli vaziyat hosil bo`ladi.

T a ' r i f. O*`rganilayotgan ob'ekt (bilishga doir nazariy material yoki masala) bilan o`rganuvchi sub'ekt (o`quvchi) orasidagi o`zaro harakatlarning o`ziga xos bo`lgan turiga muammoli vaziyat deyiladi.*

Muammoli vaziyat - bu o`quvchilarni o`rganilayotgan mavzu materialidagi fakt va tushunchalarning qanday hosil bo`lishini bilmaslikdan ham ana shu mavzu materialining tub mohiyatini olib beruvchi matematik tushuncha, aksioma va teoremalarni o`rganilayotgan mavzu materialiga tadbiq qila olmaslik paytida vujudga keladigan intellektual qiynalishdir.

Muammoli vaziyatning roli va ahamiyatini aniqlash o`quvchilarning tez fikrlash faoliyatini psixologik, pedagogik qonuniyatlarini hisobga olish asosida o`quv jarayonini qayta qurish muammoli ta'limning asosiy g`oyasini belgilab beradi. Muammoli ta'limda bilimning deyarli katta qismi o`quvchilarga tayyor holda berilmaydi, balki o`quvchilar tomonidan muammoli vaziyatlarni mustaqil xal qila bilish faoliyati jarayonida egallab olinadi.

T a ' r i f. *Muammoli vaziyatlarni hal qilish asosida hosil kilingan dars jarayoni muammoli ta'lim deyiladi.*

Yuqoridagi mulohazalardan muammoli ta'lim nazariyasi o`quvchi intellektual imkoniyatlarini ochib beruvchi rivojlantiruvchi xarakterdagi ta'lim tashkil kilishning psixologik, pedagogik yo`llari va usullarini tushuntiradigan ta'lim jarayoni ekanligi ko`rinadi.

Muammoli ta'limda o`qituvchi faoliyati shundan iboratki, u zarur hollarda eng murakkab tushunchalar mazmunini tushuntira borib o`rganilayotgan mavzu materiali bilan o`quvchilar orasida muntazam ravishda muammoli vaziyatlar vujudga keltiradi, o`quvchilarni faktlardan xabardor qiladi, natijada o`quvchilar bu faktlarni analiz qilish asosida mustaqil ravishda xulosa chiqaradilar va umumlashtiradilar, tushuncha, qoida va teoremalarni o`qituvchi yordamida aniqlab ifoda qilinishi yoki ma'lum bilimlarni yangi vaziyatlarda qo`llanishini o`rganadilar, natijada o`quvchilarda aqliy operatsiya va bilimlarni amaliyotda qo`llanish malakalari shakllanadi.

Maktab matematika kursida o`rganiladigan nazariy mavzu materiallari masala va misollarni ularning mazmuniga ko`ra muammoli va muammoli bo`lmagan turlarga ajratish mumkin.

Agar o`rganilayotgan mavzu materialidagi masala va micollapni echish jarayoni o`quvchilar uchun yangi matematik tushuncha, fakt va qoidalarni o`z ichiga olgan bo`lib, avvalgi usul bilan echish mumkin bo`lmasa-yu, echishning yangi usullari talab etilsa, u holda bunday masala yoki misol mazmunan muammolidir, aksincha, shunday masala yoki misollar o`qituvchi tomonidan o`quvchilarga echish uchun berilishi mumkinki, bunday masala va misollar o`quvchilar uchun muammoli bo`lmay qoladi, chunki ular masala va misol echilishining yangi usullarini mustaqil izlanmasdan, o`qituvchining tushuntirishiga qarab o`zlashtirib oladilar, berilgan masala yoki misol faqatgina koeffitsientlari bilan avvalgilaridan farq qiladigan darajada bo`ladi.

1-misol. Masalan, boshlang`ich sinf o`quvchilariga quyidagi misollarni berish mumkin:

$$6 + 2 x 3 = 24$$
$$6 + 2 x 3 = 12$$

Mazmuniga ko`ra bu masala muammoli bo`ladi, chunki bir xil toifadagi ikkita misol hap xil natijaga ega bo`lyapti. Bas, shunday ekan, misollarni echish usullari ham har xil bo`lishi kerak. O`quvchilarga esa faqatgina bitta ketma-ket hisoblash usuli ma'lum, xolos. Ikkinchi usuli esa ular uchun noma'lumdir. Mana shu erda muammoli vaziyat hosil bo`ladi. Yuqoridagi qo`yilgan misollarning ikkinchi sinfdagi yuqori o`zlashtiruvchi o`quvchilar tomonidan echilishi mumkin. Agar o`qituvchi dastlab o`quvchilarga bir xil miqdorlardan tuzilgan misollarni turlicha usullar bilan echish namunalarini ko`rsatgan bo`lsa edi, ular bu misollarni namunadan foydalanib echa oladilar, natijada bu misollarni echish jarayoni hech qanday muammoli vaziyatni hosil qilmaydi.

2 - m i s o l. Agar o`qituvchi $ax^2+bx+c=0$ to`la kvadrat tenglamaning umumiy $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ echimini topib, unga doir $5x^2+7x+2=0$ misolni ko`rsatgandan so`ng, o`quvchilarga $6x^2+5x+1=0$ tenglamani echinglar desa, bu holat o`quvchilar uchun muammoli vaziyatni hosil qilmaydi, chunki ular uchun bu misolni echishga andaza bor. O`quvchilar bu misolni echish jarayonida hech qanday yangi matematik qonun yoki qoidani ishlatmasdan avvalgi misoldagi koeffitsientlar o`rniga yangilarini qo`yadilar, xolos, bunda o`quvchilarning fikrlash qobiliyatlari shakllanmaydi.

3 - m i s o l. O`qituvchi kvadrat tenglama mavzusini o`tib bo`lganidan keyin bikvadrat tenglamani o`tish jarayonida quyidagicha muammoli vaziyatlarni hosil qilishi mumkin.

O`qituvchi: $6x^4+5x^2+1=0$ tenglamani qanday tenglama deb aytamiz?

O`quvchilar: 4 - darajali tenglama deyiladi.

**O`qituvchi:** to`g`ri, shunday deyish ham mumkin, ammo matematikada shu ko`rinishdagi tenglamalarni *bikvadrat tenglama* deyiladi va uning umumiy kurinishi $ax^4+bx^2+c=0$ kabi bo`ladi. Xo`sh, bu ko`rinishdagi tenglamani qanday echish mumkin?

O`quvchilar: Biz bunday tenglamalarni echmaganmiz.

Mana shu erda o`rganilayotgan mavzu materiali bilan o`quvchilar orasida bilishga doir muammoli vaziyat hosil bo`ladi.

O`qituvchi: $x^2=y$ deb belgilasak, x^4 ni qanday belgilaymiz?

**O`quvchilar:** mulohaza yuritish, ilgari o`tilganlari eslash orqali $x^4=y^2$ deb belgilash to`g`ri ekanligiga ishonch hosil qiladilar.

**O`qituvchi:** Bu tenglamani hozirgi belgilashlarga ko`ra qanday ko`rinishda yozish mumkin?

O`quvchidar: $6y^2-5y+1=0.$

O`qituvchi: bu hosil qilingan tenglamani qanday tenglama deyiladi?

**O`quvchilar:** to`la kvadrat tenglama deyiladi.

O`qituvchi: bu tenglamani qanday echamiz?

**O`quvchilar:** to`la kvadrat tenglama umumiy echimini topish formulasiga qo`yib topamiz:

$$y_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2\cdot 6}=\frac{5\pm1}{12};\quad y_1=\frac{1}{2};\qquad y_2=\frac{1}{3};$$

O`qituvchi: biz hozir tenglamani echib, qaysi noma’lumni topdik?

O`quvchilar: noma’lum y ni topdik.

**O`qituvchi:** nimani topish so`ralgan edi?

**O`quvchilar:** $x$ ni topish so`ralgan edi.

O`qituvchi: x ni qanday topamiz?

Mana shu erdagi noma’lum x ni topish jarayoni ham ko`pchilik o`quvchilar uchun muammoli vaziyatni hosil qiladi.

O`quvchilar noma’lum $x$ ni o`zlari topishlari mumkin, bo`shroq o`quvchilarga o`qituvchi yordamlashadi:

$$x^2=\frac{1}{2};\qquad x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}};$$

$$x^2=\frac{1}{3};\qquad x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}};$$

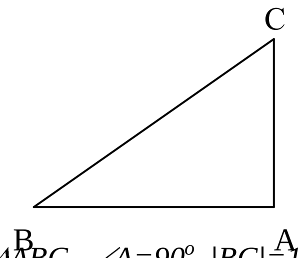
Demak, tenglama 4-darajali bo`lgani uchun biz 4 ta echimini topdik. Bu misolni echib bo`linganidan keyin $ax^4+bx^2+c=0$ bikvadrat tenglamaning umumiy echimini o`qituvchi rahbarligida o`quvchilarning o`zlari topa oladilar:

$$x^2 = y,$$
$$ay^2 + by + c = 0,$$
$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$
$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$
$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

Shunday qilib, muammoli savol, muammoli masala - o`quv muammosining turli shaklda ifodalanishi bo`lib, bularning qo`llanishi muammoli vaziyat va o`quvchilarning izlanish faoliyatining yuzaga kelishiga olib keladi.

3 - m i s o l. Kosinuslar teoremasini o`rganish uchun o`qituvchi oldin o`quvchilar bilan birgalikda to`g`ri burchakli uchburchakning elementlaridan birortasini topishga doir bo`lgan masalalardan echadi.

1 - masala. *ABC* to`g`ri burchakli uchburchakda $\angle A=90^o$, $|BC|=15$ *sм* va $|AB|=9$ sm bo`lsa, $|AC|$ - tomonining uzunligi topilsin (29-chizma).



29-chizma.

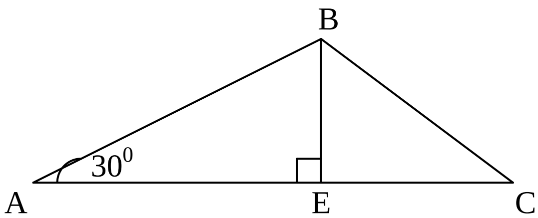
Berilgan: ΔABC , $\angle A=90^o$, $|BC|=15$ *sм* va $|AB|=9$ *sм.*

Topish kerak: |AC| - ?

E ch i sh. Pifagor teoramesiga ko`ra: $|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2$

$\Rightarrow |AC| = \pm\sqrt{BC^2 - AB^2} \Rightarrow |AC| = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12 \qquad |AC| = 12$ *sм.*

2-masala. ΔABC da $\angle A=30^o$, $\angle B=90^o$, $|AB|=2$ *sм,* $|AC|=\frac{4}{3}\sqrt{3}$ sm bo`lsa, $|BC|$ - ning uzunligini toping (30-chizma).



30-chizma.

Berilgan: ΔABC da $\angle A=30^o$, $\angle B=90^o$, $|AB|=2$ *sм,* $|AC|=\frac{4}{3}\sqrt{3}$ *sм*

Topish kerak: *BC - ?*

E ch i sh. Chizmadan:

$$\Delta ABE \backsim \Delta BEC, \quad \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{BE}, \quad BE = \frac{AB}{2} = 1 \quad \text{sм},$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{1}, \qquad |BC| = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{sм}.$$

Echilgan bu masalalar muhokama qilingandan keyin o`quvchilar oldiga quyidagicha muammoli savol qo`yish mumkin. Agar ixtiyoriy uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagi berilgan bo`lsa, uning uchinchi tomonini topish mumkinmi? Bu muammoli savolga javob topish bizni kosinuslar teoremasini o`rganishga olib keladi.

12-§. Matematika darslarida dasturlashtirilgan ta'lim.

Dasturlashtirilgan ta'lim jarayonida o`quvchilar o`qituvchi tomonidan maxsus tayyorlangan didaktik vositalar yordami bilan mustaqil ravishda yangi bilimlarni o`zlashtiradilar. O`quv materialini dasturlashtirish maktab matematika kursida chiziqli va tarmoqli bo`lib, ular ta'lim jarayonida mashinali va mashinasiz amalga oshiriladi.

Dasturlashtirilgan ta'lim metodi o`quvchilarning qisman esga tushirish va qisman yangi bilimlarni o`zlashtirish faoliyatlarini amalga oshiruvchi sistemadan iboratdir. Mashinasiz dasturlashtirilgan topshiriqlarni qo`llash quyidagicha amalga oshiriladi. O`qituvchi tomonidan beriladigan har bir topshiriq bo`lak-bo`lak bo`lgan kadr elementlaridan iborat bo`lib, har bitta kadr element o`rganiladigan mavzu materialining bir qismini hosil qilib, u savollar va javoblar yoki yangi bilimlar bayoni hamda mashqlar tarzida ifodalanadi. Mavzu materialiga doir kadrlar tuzishda eng keng tarqalgan yo`l javoblar tanlab olinadigan usuldir:

a) berilgan savolga tayyor javob olinadigan qoida va xulosa tarzidagi axborotlardan iborat kadrlar;

b) javoblarning to`g`riligini nazorat qilish uchun zarur bo`lgan kadrlar.

1 - m i s o l. Logarifmik funksiya:

$$y = \log_a x,\ a \neq 1,\ x > 0,\ a > 0$$

funksiya logarifmik funksiya deyiladi

M i s o l. $y = \log_3 x;\ y = \log_2 2x;\ y = \log_{112} x;\ \ldots$

Logarifmik funksiyaning aniqlanish sohasi – R_+

Misollar:

1. $y = \log_3 \sqrt{5x}$ logarifmik funksiya bo`la oladimi?

2. $y = \log_5 x;\ y = \log_5(-3x);\ y = \log_4 \frac{x}{7};\ \ldots$

J: Ha.

J: $y = \log_5 x;\ y = \log_4 \frac{x}{7}$.

3. Logarifmik funksiyaning aniqlanish sohasi qanday?

J: R_+.

Mashinali dasturlashtirilgan ta'lim topshiriqlari elektron hisoblash mashinalarida amalga oshiriladi. Qo`yilgan matematik masalalar elektron hisoblash mashinalari yordamida quyidagi bosqichlar orqali echiladi.

1. Masalaning quyilishi - bu ishni matematik amalga oshiradi.

2. Quyilgan masala echimini dasturlashtirish - bu ishni maxsus tayyorgarlikda o`tgan dasturchi bajaradi.

3. Tuzilgan dasturni berilgan ma'lumotlarga ko`ra kartalashtirish.

Bu erda qo`yilgan matematik masala yoki misolni echish uchun dastur tuzish juda ko`p mehnat talab etadi. Dastur tuzuvchi berilgan masalani arifmetik amallar tartibidagi elementar masalalarning yig`indisi ko`rinishiga keltirib oladi, so`ngra unga nisbatan dastur tuzadi. Faraz qilaylik, bizni elektron hisoblash mashinamiz quyidagi kodlardan iborat bo`lgan komandani tushunadigan bo`lsin.

№	Komanda	Operatsiyalar kodi	Belgilanishi
1	Qo`shish	01	a + b = R
2	ayirish	02	a - b = R
3	ko`paytirish	03	a x b = R
4	bo`lish	04	a : b = R
5	to`xtatish	017	To`xta

$y = \frac{ax - b}{cx + d}$ funksiya uchun dastur tuzilsin. Bu kasr chiziqli funksiya uchun quyidagicha dastur tuzish mumkin:

$$
\begin{array}{c}
a \cdot b \Rightarrow R \\
R - b \Rightarrow surat \\
c \cdot x \Rightarrow R \\
R + d \Rightarrow \max raj \\
surat : \max raj = y \\
to'\ xtash
\end{array}
$$

Elektron hisoblash mashinasida chiziqli funksiyada qatnashayotgan barcha koeffitsientlar orasidagi arifmetik amallar uchun quyidagi yacheyka va adreslar ajratilgan bo`lsin:

a – 1001	*x – 1005*	*y - 2000*
b – 1002	*- 0512*	
c – 1003	*- 0513*	
d - 1004	*- 0514*	

Komanda	Yacheyka	Kod	Adres	Adres	Adres
a·x=> R	0060	03	1001	1005	0512
R–b=> surat	0061	02	0512	1002	0513
c·x => R	0062	03	1003	1005	0512
R+d=> maxraj	0063	01	0512	1004	0514
surat: maxraj => y	0064	04	0513	0514	2000
to`xtash	0065	17	0000	0000	0000

Yuqoridagilardan ko`rinadiki, har bir elektron hisoblash mashinasi uchun alohida ishchi dasturlari tuzish kerak bo`ladi, bundan tashqari har bir mashinaning tili har xil bo`ladi. Ana shularni hisobga olib mashinalar uchun *algoritmik til* ishlab chiqiladi, bunda asosan qo`yilgan masala uchun algoritmik tilda dastur tuziladi, bu tuzilgan dastur mashinaga qo`yilganda u algoritmik tilni o`z tiliga o`tkazib masala echimini hal qiladi. "Algol-60" elektron hisoblash mashinasida keltirilgan kvadrat tenglamani echish uchun tuzilgan algoritmik til dasturini ko`rib chiqaylik.

Dasturlashtirilgan ta’limda o`rgatuvchi qurilmalar keng qo`llanilishi tufayli bu ta’lim metodi istiqbolga ega, ammo barcha o`quv materiallarini dasturlashtirilgan xarakterda o`tish maqsadga muvofiq emas. Dasturlashtirilgan ta’limda o`quvchilar bilan o`qituvchi orasida deyarli og`zaki aloqa bo`lmaydi. O`quvchilarning matematik nutqi umuman rivojlanmaydi, shuning uchun ham mavzu materiallarini har xil metodlar yordamida o`quvchilarga o`rgatish maqsadga muvofiqdir.

№	Algoritmik tilda yozilishi	Analitik yozuv usuli
1	Haqiqiylar p,q, x_1, x_2, D	P, q, x_1, x_2, D
2	Ishga tushirish *(p,q)*	*P, q*
3	$D{:}p\uparrow 2\text{-}4\ x\ q$	$D=p^2\text{-}4q$
4	Agar $D\neq 0$ bo`lsa, $M_1$ ga o`tish kerak, aks holda $x_1=x_2=(-p)/2)$	Agar $D\neq 0$ bo`lsa, $x_1=x_2=$ $=-p/2$ bo`lmaydi.
5	M_1 :agar $D<0$ bo`lsa, u holda $M_2$ ga o`tish kerak. $x_1=(-p+D\uparrow 0{,}5)/2$ $x_2=(-p\text{-}D\uparrow 0{,}5)/2$	Agar $D<0$ bo`lsa, $x_1$ va $x_2$ echimlar haqiqiy sonlarda mavjud emas, u holda $D>0$ holini qaraymiz, bunda $x_1=(-p+\sqrt{D})/2$ va $x_2=(-p+\sqrt{D})/2$ bo`ladi.
6	Chiqish: Xulosa $(x_1; x_2)$	x_1 va x_2 echimlar topildi.

III-BOBNI TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR.

1. Matematik ta’lim metodlari qanday metodlarni o`z ichiga oladi?
2. Ilmiy izlanish metodlarining turlarini aytib bering.
3. Tajriba va kuzatish metodini tushuntiring.
4. Taqqoslash metodini aytib bering.
5. Analiz va sintez metodlarini ta’riflang.
6. Umumlashtirish metodini ta’riflang va uni matematika darslariga tadbiqini tushuntirib bering.
7. Tushunchani umumlashtirish deb nimaga aytiladi?
8. Teoremalarni umumlashtirishni tushuntirib bering.
9. Misol va masalalarni umumlashtirish qanday amalga oshiriladi?
10. Abstraksiyalash metodini tushuntirib bering.
11. Aniqlashtirish metodi deganda nimani tushunasiz?
12. Klassifikatsiyalash metodini aytib bering.
13. Qanday ta’lim metodiga evristik ta’lim deyiladi?
14. Muammoli vaziyat deb nimaga aytiladi?
15. Muammoli ta’lim deganda nimani tushunasiz?
16. Dasturlashtirilgan ta’limni tushuntirib bering.
17. Sonlar ketma-ketligi deb qanday to`plamga aytiladi?
18. Qanday sonlar ketma-ketligi arifmetik progressiya deyiladi?

III-BOB UCHUN TAYANCH IBORALAR

Ta’lim metodi, ilmiy-izlanish metodi, tajriba metodi, kuzatish metodi, taqqoslash metodi, analiz metodi, sintez metodi, umumlashtirish metodi, tushunchani umumlashtirish, teoremani umumlashtirish, misollarni umumlashtirish masalalarni umumlashtirish, abstraksiyalash metodi, klassifikatsiyalash metodi, evristik ta’lim, muammoli ta’lim, dasturlashtirilgan ta’lim, sonlar ketma-ketligi, arifmetik progressiya, o`qituvchining faoliyati, o`quvchilarning faoliyati.

IV BOB.

O`QUVCHILARNING MATEMATIK TAFAKKURLARNI SHAKLLANTIRISH METODIKASI.

1-§. Matematik ta’lim jarayonida masalaning roli va o`rni.

Matematik ta’lim jarayonida masalalardan foydalanish qadim zamonlardan beri qo`llanib kelinayotir. Shuning uchun ham matematika darslarida matematik masalaning roli va uning o`rni haqida gap borganda quyidagi uch bosqichni ko`zda tutish maqsadga muvofiqdir.

1. Matematika fanining nazariy qismlarini o`rganish matematik masalalarni echish maqsadida amalga oshiriladi.

2. Matematika fanini o`rgatish matematik masalalarni echish bilan birgalikda olib boriladi.

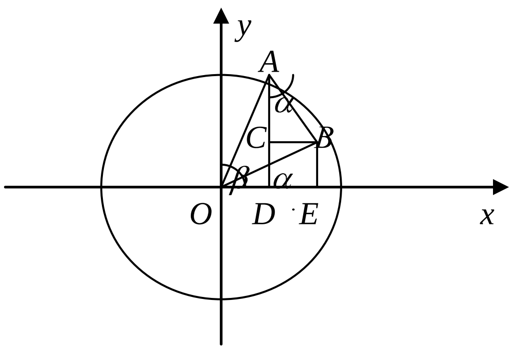
3. Matematikani o`rganish masala yoki misollar echish orqali amalga oshiriladi.

Aytilganlardan ko`rinadiki, jamiyat rivojlanishining har bir bosqichida masalaning roli va uning o`rniga har xil baho berib kelingan.

1966 yili xalqaro matematiklar simpoziumida matematik masala va misollarni echish o`quvchilarning faqatgina matematik faoliyatlarini shakllantiribgina qolmay, balki ana shu fanga doir bilimlarni o`zlashtirish va uni amaliyotga tadbiq qilishga ham xizmat qiladi, deyiladi.

Aytilgan har bir bosqichni aniq mavzu materiallari asosida ko`rib chiqamiz.

1. Darsda *"Ikki burchak yig`indisining sinusi"* nomli mavzuni o`quvchilarga tushuntirsak, ular chiqarilgan natijaviy formuladan foydalanib mavzu materialiga doir misollarni echa oladilar (31-chizma).



31-chizma.

Berilgan: *C* – aylana, $[AB]\perp OB$, $OA=R=1$, $\angle EOB=\alpha$, $\angle BOA=\beta$, $\angle DOA=\alpha+\beta$

Isbot qilish kerak: $sin(\alpha+\beta)$? (31-chizma)

Isboti: $\Delta OAD \Rightarrow \left(\frac{AD}{OA}=\sin(\alpha+\beta)\right)$

OA = 1 bo`lgani uchun $sin(\alpha+\beta)$ = AD = CD + CA (1)

Chizmadan: CD = EB, chunki bular o`zaro paralell to`g`ri chiziqlar orasidagi kesmalar

$\Delta OBE \Rightarrow \left(\frac{EB}{OB}=\sin a\right) \Rightarrow (EB = OB\sin a)$ (2)

$\Delta OAB \Rightarrow \left(\frac{OB}{OA}=\cos\beta\right) \Rightarrow (OB = OA\cos\beta) \Rightarrow (OB=\cos\beta)$ (3)

(3) ni (2) ga qo`ysak $EB=\sin\alpha\cdot\cos\beta.$ (4)

$$\Delta ACB \Rightarrow \left(\frac{AC}{AB} = \cos\alpha\right) \Rightarrow (AC = AB\cos\alpha). \qquad (5)$$

$$\Delta OAB \Rightarrow \left(\frac{AB}{OA} = \sin\beta\right) \Rightarrow (AB = OB\sin\beta). \qquad (6)$$

(6) ni (5) ga qo`ysak:

$AC = \cos\alpha \cdot \sin\beta.$ (7)

(4) va (7) larni (1) ga qo`ysak,

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta$ bo`ladi.

Misol:

$$\sin 75^o = \sin(30^o + 45^o) = \sin 30^o \cdot \cos 45^o + \cos 30^o \cdot \sin 45^o =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}.$$

Demak, $\sin 75^o = \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}.$

Hisoblang: $\sin 135^o = ?$ $\quad\cos 150^o = ?$...

2. Matematik tushunchalarni o`rganish matematik misol va masalalarni echish bilan birgalikda olib boriladi, chunki o`qituvchi yangi o`rganiladigan matematik tushunchaning ta’rifini bergandan keyin uning analitik ifodasini yozadi. Masalan $a^x=b$, $a\neq 1$ ko`rinishdagi tenglamaga ko`rsatkichli tenglama deyiladi deb ta’riflangandan so`ng, quyidagi ko`rinishdagi ko`rsatkichli tenglamani ifodalovchi misollarni ko`rsatish mumkin: $3^x = 27$; $2^x = 16$; $5^x = 125$; ...

O`qituvchi $a^x=b$ ko`rinishdagi tenglamaning echimini geometrik nuqtai-nazardan ko`rsatib berishi maqsadga muvofiqdir. O`qituvchi o`quvchilarga, agar koordinatalar tekisligida ikki funksiya grafigi o`zaro kesishsa, ular kesishish nuqtasining absiscasi ana shu funksiyalarni tenglash natijasida hosil qilingan tenglamaning echimi bo`lishini takrorlagandan so`ng $a^x=b$ tenglamani ham $y=a^x$ ва $y=b$ ko`rinishlarda yozib, ularning har birining grafigini chizib, bu grafiklarning kesishish nuqtasining absissasini $x=\log_a b$ deb belgilash qabul qilinganligini tushuntirishi lozim. Bundan ko`rinadiki, $a^x=b$ tenglamaning echimi $x=\log_a b$ bo`lar ekan. $(3^x=27) \to x = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3\log_3 3 = 3.$

Ko`rsatkichli tenglamalarning barchasi ayniy algebraik almashtirishlar yordamida soddalashtirilib, $a^x=b$ ko`rinishga keltiriladi, so`ngra bundan, $x$ noma’lum $x=\log_a b$ ko`rinishda topiladi.

1-misol.

$$5^{x-1} + 5^{x-2} + 5^{x-3} = 155,$$

$$5^x\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125}\right) = 155,$$

$$5^x\left(\frac{25+5+1}{125}\right) = 155,$$

$$5^x \cdot 31 = 155 \cdot 125.$$

$$5^x \cdot 31 = 31 \cdot 5 \cdot 5^3,$$

$$5^x = 5^4,$$

$$x = 4.$$

2-misol.

$$4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}.$$

$$(2^{\sqrt{x-2}})^2 + 16 - 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}} = 0.$$

$$2^{\sqrt{x-2}} = y \quad \text{desak,}$$

$$y^2 - 10y + 16 = 0.$$
$$y_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25-16} = 5 \pm 3$$
$$y_1 = 8; y_2 = 2.$$

1) $2^{\sqrt{x-2}} = 8$

$2^{\sqrt{x-2}} = 2^3$

$\sqrt{x-2} = 3$

$x - 2 = 3^2$

$x_1 = 11.$

2) $2^{\sqrt{x-2}} = 2$

$\sqrt{x-2} = 1$

$x - 2 = 1$

$x_2 = 3.$

Misollar

1) $2^x \cdot 5^x = 0,1(10^{x-1})^5.$

2) $3^{x^2-x-2} = 81.$

3) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2+2x-5} = 25.$

4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 4,8.$

3. Hozirgi davrda masala yoki misollar echish orqali matematik ta'lim jarayonini olib borishning metodik usul va vositalari ishlab chiqilgan va bu usullar haqida ko`pgina ilmiy metodik va didaktik adabiyotlarda bayon qilingan. Matematik tushunchani masala yoki misollar yordamida kiritish va uning tub mohiyatini o`quvchilarga tushuntirish murakkab bo`lgan pedagogik jarayondir. Shuning uchun ham bir maktab o`qituvchisi dars jarayonida ishlatiladigan masalani tanlash yoki uni tuzishda juda ham ehtiyot bo`lmog`i lozimdir. Tuzilgan masalalarni dars jarayonida qo`llanish ana shu o`quvchilarning o`zlashtirish qobiliyatlarini hisobga olgan holda bo`lishi kerak. Har bir dars jarayonida ishlatiladigan masala yoki misol darsning maqsadiga mos kelishi kerak.

Agar darsda o`qituvchi o`quvchilarga biror yangi matematik tushunchani o`rgatmoqchi bo`lsa, tuziladigan masala yoki misol ana shu tushuncha mohiyatini ochib beruvchi xarakterda bo`lishi kerak.

Masalan $y=a^x$, $a \neq 1$ ko`rsatkichli funksiyaning grafigi nomli mavzuni o`tishdan oldin o`qituvchi $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=3^x$ kabi xususiy holdagi ko`rsatkichli funksiyalarga doir bo`lgan misollarning grafiklarini Dekart koordinatalar sistemasida o`quvchilar bilan savol-javob asosida chizib ko`rsatish maqsadga muvofiqdir.

a ning xususiy qiymatiga nisbatan chizilgan grafiklardan o`quvchilar o`qituvchi bilan birgalikda $y=a^x$ ko`rinishdagi funksiyaning grafigi va uning xossalari haqida umumiy xulosalarni keltirib chiqara oladilar. Bu erda darsni tushuntirish metodikasi xususiylikdan umumiylikka tomon bo`lib, bunda o`quvchilar har bir tushunchani mohiyatini anglab etadilar.

2. Matematika o`qitishda masalalarning bajaradigan funksiyalari.

Hozirgi zamon didaktikasida A.D.Semushin, K.I.Neshkov va Yu.M.Kolyagin, J.Ikromov, T.To`laganov va N.G`aybullaev kabi metodist matematiklar matematika kursidagi masala va misollarning bajaradigan funksiyasini quyidagicha turlarga ajratishadi:

1. Masalaning ta'limiy funksiyasi.
2. Masalaning tarbiyaviy funksiyasi.
3. Masalaning rivojlantiruvchi xarakterdagi funksiyasi.
4. Masalaning tekshiruv xarakterdagi funksiyasi.

Masalaning matematika darsi jarayonida bajaradigan funksiyalarini alohida-alohida ko`rib chiqamiz.

1. Masalaning ta'limiy funksiyasi asosan maktab matematika kursida o`rganilgan nazariy ma'lumot, matematik tushuncha, aksioma, teorema va matematik xulosalar, qonun-qoidalarning aniq masala yoki misollarga tadbiqi natijasida o`quvchilarda mustahkam matematik bilim va malakalar hosil qilish orqali amalga oshiriladi.

O`qituvchi ikki burchak yig`indisi va ayirmasining sinusi teoremasini o`tib bo`lganidan keyin, ana shu mavzu materialini o`quvchilar ongida mustahkamlash uchun quyidagicha misollarni echish mumkin.

1 - m i s o l. Ayniyatni isbotlang:

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin\alpha.$$

Bu erda o`qituvchi o`quvchilarga ayniyat tushunchasining mohiyatini takrorlab berishi lozim.

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{6}+$$

$$+\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{6}=2\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{6}=$$

$$=2\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\sin\alpha.$$

2 - m i s o l. Ayniyatni isbotlang:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=tg\alpha+tg\beta.$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\beta\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1}=tg\alpha+tg\beta.$$

Maktab matematika kursidagi masala yoki misollarni echish o`quvchilarda matematik malaka va ko`nikmalarni shakllantiribgina qolmay, balki olingan nazariy bilimlarni amaliyotga tadbiq qila olishini ham ko`rsatadi. Agar o`qituvchi kvadrat tenglama mavzusini o`tib uni, mustahkamlash jarayonida kvadrat tenglamaga keltiriladigan masalalarni echib ko`rsatsa, o`quvchilarni ana shu mavzu materiali yuzasidan bilimlari mustahkamlanadi hamda kvadrat tenglama tushunchasining tadbiqi haqidagi fikr o`quvchilar ongida shakllanadi.

1 - m a s a l a. Sport formasi sotib olish uchun ikki komandaning har biriga 84 so`mdan pul ajratildi. Komandalardan birining olgan har bir formasi ikkinchi komandaning olgan formasidan 2 so`m arzon bo`lgani uchun u bitta ortiq sport formasi oldi. Har bir komanda nechtadan sport formasi olgan?

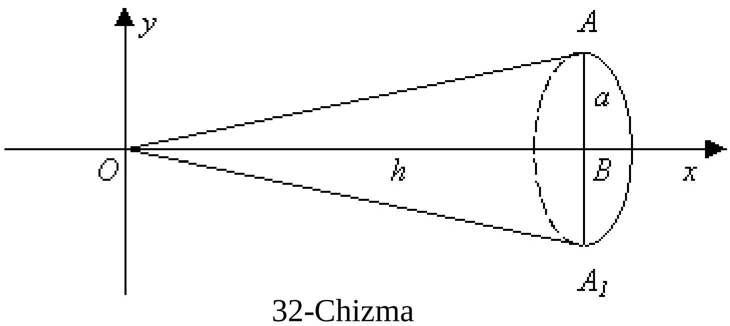
x - birinchi komanda olgan bitta formaning narxi,

(x - 2) - ikkinchi komanda olgan bitta formaning narxi,

$\frac{84}{x}$ - birinchi komanda olgan formalar soni,

$\frac{84}{x-2}$ - ikkinchi komanda olgan formalar soni.

1 - m a s a l a. Balandligi h va asosining uzunligi a ga teng bo`lgan to`g`ri burchakli uchburchakning $Ox$ o`qi atrofida aylanishidan hosil bo`lgan to`g`ri doiraviy konusning hajmi hisoblansin (32-chizma).



32-Chizma

Berilgan: $OB = h, \quad AB = a$

Topish kerak: V = ?

Echish. $V = \pi \int_a^b y^2 dx.$

Chizmadan:

$$y = OA = tg\alpha \cdot x = \frac{a}{h}x, \quad V = \pi \int_0^h y^2 dx = \pi \int_0^h \frac{a^2}{h^2} \cdot x^2 dx = \pi \cdot \frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h =$$

$$= \pi \frac{a^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{\pi a^2 h}{3} = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot h; \qquad a^2 = r^2; \pi r^2 = S$$

bo`lgani uchun $V = \frac{1}{3} S\pi.$

Masala shartida ikki komanda olgan formalarning narxi arzon bo`lgani uchun u birinchi komandaga qaraganda bitta ortiq forma olgani aytilgan. Shu asosda biz sport formalarining soniga nisbatan quyidagi tenglamani tuzishimiz mumkin

$$\frac{84}{x-2} - 1 = \frac{84}{x}$$

$$\frac{84}{x-2} - \frac{84}{x} = 1$$

$$84x - 84x + 168 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x - 168 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+169} = 1 \pm 13.$$

J. 1) $\frac{84}{14} = 6$ dona. I-komanda olgan formalarning soni.

2) $\frac{84}{12} = 7$ dona. I - komanda olgan formalarning soni.

2 - m a s a l a. Oralaridagi masofa 60 km bo`lgan A punktdan B punktga avtobus jo`nadi. 20 minutdan keyin uning ketidan engil mashina jo`nadi. Engil mashinaning tezligi avtobus tezligidan 20 km/s ortiq. Agar avtobus B punktga engil mashinadan 10 minut keyin kelgan bo`lsa, avtobusning tezligini toping?

3 - m a s a l a. Motorli qayiq to`xtovsiz oqim bo`yicha 8 km so`ng oqimga qarshi 16 km yurdi. U barcha yo`lga $1\frac{1}{4}$ soat vaqt sarf qildi. Agar qayiqning turg`un suvdagi tezligi 20 km/s bo`lsa, oqimning tezligini toping?

Agar o`qituvchi geometriya darsida konusning hajmi mavzusini o`tib, unga doir misollarni integral tushunchasidan foydalanib echib ko`rsatsa o`quvchilar algebra bilan geometriya fanlari orasidagi mantiqiy bog`lanishni ko`radilar hamda ularda fazoviy tasavvur qilish faoliyati yanada shakllanadi.

2. Masalaning tarbiyaviy funksiyasi o`quvchilarda ilmiy dunyoqarashni shakllantiradi hamda ularni mehnatga muhabbat ruhida tarbiyalaydi. Bizga ma'lumki, matematika fanining o`rganadigan ob'ekti materiyadagi narsalarning fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni o`rganishdan iboratdir. Bas, shunday ekan, fazoviy forma bilan miqdoriy munosabatlar orasidagi bog`lanish analitik ifodalangan formula bilan yoziladi.

Ana shu formulani kundalik hayotimizdagi elementar masalalarni echishga tadbiqi o`quvchilarda ilmiy dunyoqarashni shakllantiradi. Albatta o`qituvchi bu erda bilish nazariyasiga asoslangan bo`lishi kerak. "Jonli mushohadadan abstrakt tafakkurga va undan amaliyotga borish kerak".

O`qituvchi matematika darsida echiladigan masalalar orqali o`quvchilarni mehnatga muhabbat ruhida tarbiyalashi lozim. Buning uchun o`qituvchi halol va sifatli mehnatni ulug`laydigan masalalarni tanlashi kerak bo`ladi.

1-masala. Ikki ishchi ma'lum muddatda 120 ta detal tayyorlashi kerak edi. Ishchilardan biri ikkinchisiga qaraganda soatiga 2 tadan ortiq detal tayyorlab topshiriqni 5 soat oldin bajardi. Har bir ishchi soatiga nechtadan detal tayyorlagan?

x - birinchi ishchi ishlagan vaqti,

$(x - 5)$ - ikkinchi ishchi ishlagan vaqti.

$\frac{120}{x}$ - birinchi ishchi tayyorlagan detallar soni,

$\frac{120}{x-5}$ - ikkinchi ishchi tayyorlagan detallar soni.

Yuqoridagilarga asoslanib quyidagi tenglamani tuzishimiz mumkin.

$$\frac{120}{x} = \frac{120}{x-5} - 2,$$

$$\frac{120}{x-5} - \frac{120}{x} = 2,$$

$$120x - 120x + 600 = 2x^2 - 10x,$$

$$2x^2 - 10x - 600 = 0 \text{ yoki}$$

$$x^2 - 5x - 300 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 300} = \frac{5}{2} \pm \frac{35}{2}$$

$$x_1 = \frac{40}{2} = 20; \qquad x_2 = -15.$$

Bulardan 1-ishchi 20 soat ikkinchisi esa 15 soat ishlaganligi kelib chiqadi.

$\frac{120}{20} = 6$ ta 1-ishchining 1 soatda tayyorlagan detallar soni.

$\frac{120}{15} = 8$ ta 2-ishchining 1 soatda tayyorlagan detallar soni.

Masalani echib bo`lgandan keyin o`qituvchi masala mohiyatini quyidagi tartibda tushuntirishi mumkin. Agar biror kishi biror topshirilgan ishni ortig`i bilan bajarsa, uning mehnat unumi ortib, unga to`laydigan haq ham ortib boradi. Bu esa o`quvchilarni halol mehnatga muhabbat ruhida tarbiyalaydi.

2 - m a s a l a. Ishchilar brigadasi ma'lum muddatda rejaga muvofiq 250 ta detal tayyorlashlari kerak edi. Kuniga normadagidan 5 tadan ortiqcha detal tayyorlanib muddatidan bir kun ilgari 270 ta detal tayyorlandi. Brigada necha kun ishlagan?

3. Masalaning rivojlantiruvchi xarakterdagi funksiyasi o`quvchilarni mantiqiy tafakkur qilish faoliyatlarini shakllantiradi. Bizga psixologiya kursidan ma'lumki. O`quvchilarning mantiqiy tafakkur qilish faoliyatlari tafakkur operatsiyalari (taqqoslash, analiz - sintez, umumlashtirish, aniqlashtirish, abstraksiyalash va klassifikatsiyalash) orqali amalga oshiriladi. Maktab matematika kursidagi masalaning rivojlantiruvchi xarakterdagi funksiyasi o`quvchilarni matematika o`qitish metodikasining metodlaridan masala yoki misollarni echish jarayonida to`g`ri foydalanish malakalarini

rivojlantiribgina qolmay, balki ularni biror matematik hukm va xulosalar to`g`risida aniq fikr yuritish imkoniyatlarini shakllantiradi hamda masalalar echish qobiliyatlarini rivojlantiradi.

4. Masalaning tekshiruv xarakterdagi funksiyasi o`z ichiga quyidagilarni oladi:

1) O`quvchilarning nazariy olgan bilimlari darajasi;

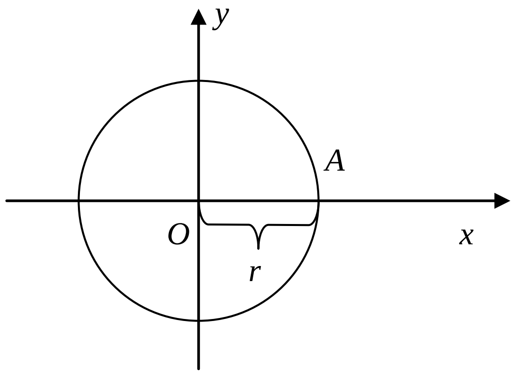
2) O`quvchilarning nazariy olgan bilimlarini amaliy xarakterdagi misol va masalalar echishga tadbiq qilishi;

3) matematik hukmlardan xulosalar chiqarish darajalari;

4) O`quvchilarning matematik tafakkur qobiliyatlarini rivojlanish darajasi.

Endi bitta masala olib, ana shu masala yordamida yuqorida aytib o`tilgan funksiyalarning bajarilishini ko`rib chiqamiz.

Masala. Radiusi *r* ga teng bo`lgan doiraning yuzi integral yordamida hisoblansin (33-chizma).



33-Chizma

Berilgan: S- aylana. $OA = r$.

T o p i s h k e r a k: S = ?

Echish . $x^2+y^2= R^2$ aylana tenglamasidan $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ ni yozib olamiz. Yuzalarni integral yordamida hisoblash formulasi $S = \int_b^a f(x)dx$ edi. Shuning uchun

$$S = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx \qquad (1)$$

$$x = R\sin t, \quad x = 0, \quad t = 0,$$

$$dx = R\cos t dt, \quad x = R, \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

Bu almashtirishlarni (1) ga qo`ysak, u quyidagi ko`rinishni oladi:

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\cdot R\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$= 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cos t dt = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= 4R^2\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4R^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\pi}{2}\right)^2 = 4R^2\cdot\frac{\pi}{4} = \pi R^2.$$

$$S = \pi R^2.$$

1) Bu masalani echish jarayonida o`quvchilarda integral yordamida yuzalarni hisoblash mumkin, degan tushuncha shakllanadi, bu esa ana shu masalani echishdagi asosiy ta’limiy funksiya bo`lib hisoblanadi.

2) Bu masalaning tarbiyaviy funksiyasi esa shundan iboratki, o`quvchilarda bu masalani echishga bo`lgan qiziqish shakllanadi, chunki ular integral yordamisiz doiraning yuzi nimaga teng ekanini

biladilar, integral yordamida hisoblaganda ham uning yuzi $S=\pi R^2$ ekanini kelib chiqishi o`quvchilarni shu fanga bo`lgan hamda uning turli metodlariga bo`lgan qiziqishlarini orttiradi.

3) Bu masalaning rivojlantiruvchi xarakterdagi funksiyasi esa masalaning echish jarayonida hosil bo`lgan muammolarni hal qilishning matematik qonuniyatlarini o`rgatadi, o`quvchilarda matematik tafakkurni shakllantiradi.

4) Bu masalaning amaliy ahamiyati esa shundaki, bunda o`quvchilarning masalani echish imkoniyatiga qarab ularning olgan nazariy bilimlarining darajasi aniqlanadi.

3-§. Matematika darslarida ko`phadlarni ko`paytuvchilarga ajratish metodikasi.

Maktab matematika kursida ko`phadlarni ko`paytuvchilarga ajratish asosan quyidagi metodlar orqali amalga oshiriladi:

1) umumiy ko`paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarish metodi;

2) gruppalash metodi;

3) berilgan ko`phadga qisqa ko`paytirish formulalarini tadbiq qilish metodi.

4) berilgan ko`phadga qo`shimcha hadlarni kiritish metodi;

5) berilgan ko`phadni matematik formulalar yordamida ayniy almashtirib ko`paytyvchilapga ajratish metodi;

6) berilgan ko`phadni ildizlariga ko`ra ko`paytuvchilarga ajratish metodi;

7) noma'lum koeffitsientlar orqali ko`paytuvchilarga ajratish metodi.

1-misol. $a^3+b^3+c^3-3abc$ ko`phad ko`paytuvchilarga ajratilsin.

Berilgan ko`phad o`quvchilar bilan birgalikda ko`rib chiqiladi, unga nisbatan bunday mulohaza yuritish mumkin, berilgan ko`phadda umumiy ko`paytuvchi yo`q, ko`phadda qatnashayotgan to`rtala xadni har qanday gruppalaganda ham biror natija olib bo`lmaydi, shuning uchun bu ko`phadga yordamchi hadlarni kiritish orqali uning ko`rinishini o`zgartirib, qisqa ko`paytirish formulasidan foydalanib, ayniy almashtirish natijasida ko`paytuvchilarga ajratish mumkin:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=a^3+b^3+c^3+3a^2b-3ab^2-3a^2b-3ab^2-3abc=$$
$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc=$$
$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)=$$
$$=(a+b+c)\left[(a+b)^2-(a+b)c+c^2\right]-3ab(a+b+c)=$$
$$=(a+b+c)\left[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\right]=$$
$$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)=$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).\quad (1)$$

Ko`phadni ko`paytuvchilarga ajratish natijasida quyidagicha xulosalar chiqarish mumkin:

a) $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\geq 0$ ifoda $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$ tengsizligidan kelib chiqadi, agar biz $a\geq 0,\ b\geq 0,$ desak, u holda $a^3+b^3+c^3-3abc\geq 0$ bo`ladi, bundan $\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq abc$ kelib chiqadi.

b) agar biz $a^3=x,\ b^3=y,\ c^3=z$ desak,

$$\frac{x+y+z}{3}\geq \sqrt[3]{xyz}\qquad (2)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu degan so`z uchta sonning o`rta arifmetigi ularning o`rta geometrigidan kichik emas, deganidir;

v) faraz qilaylik, $x,\ y,\ z,$ sonlari to`g`ri burchakli parallepipedning uchta o`lchovi bo`lsin. U holda $xyz = V$ (3) parallipipedning hajmini beradi. Agar biz $x+y+z=E$ (4) deb belgilab, (3) va (4) ni (2) ga qo`ysak, $\frac{E}{3}\geq \sqrt[3]{V}$ (5) bo`ladi. Demak, to`g`ri burchakli parallipiped hajmi uning uchta tomoni o`lchovlari yig`indisini uchdan biridan katta emas ekan.

2 - m i s o l. $x^4-8x+63$ ko`phadni ko`paytuvchilarga ajrating.

Berilgan ko`phadni faqatgina yordamchi hadlarni kiritish metodi yoki noma’lum koeffitsientlar metodi orqali ko`paytuvchilarga ajratish mumkin.

1. $x^4 - 8x + 63$ ko`phadni yordamchi hadlarni kiritish metodi orqali ko`paytuvchilarga ajrataylik (34-chizma).

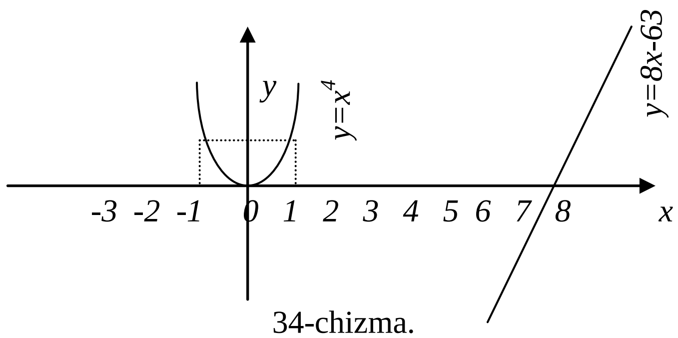
$$x^4-8x+63=x^4+16x^2-16x^2-8x+64-1=$$
$$=(x^4+16x+64)-(16x^2+8x+1)=(x^2+8)^2-(4x+1)^2=$$
$$=(x^2+8+4x+1)(x^2+8-4x-1)=(x^2-4x+9)(x^2-4x+7).$$

Demak.

$x^4 - 8x + 63 = (x^2 + 4x + 9)(x^2 - 4x + 7)$

Hosil qilingan kvadrat uchxad ildizlarini tekshirib ko`ramiz, agar u ikkita haqiqiy ildizlarga ega bo`lsa, ularning har birining yana ko`paytuvchilarga ajratish mumkin, aks holda esa shunday qoldiriladi. $x^4 - 8x + 63$ ko`phadning ildizlarini tekshirib ko`raylik. Ushbu ko`phadni $y = x^4$ va $y = 8x - 63$ ko`rinishda yozib, ularning grafiklarini chizamiz (34 - chizma).

Chizmadan ko`rindiki, bu funksiyalarning grafiklari kesishmaydi, shuning uchun ham bu ko`phad haqiqiy har xil echimlarga ega bo`lmaydi. Bu ko`phad haqiqiy har xil echimlarga ega bo`lmagani uchun



34-chizma.

chiziqli ko`paytuvchilarga ajralmaydi, shuning uchun bu ko`phad ikkita ikkinchi darajali ko`paytuvchilarga ajraladi xolos.

$$x^4 - 8x + 63 = (x^2 + ax + b)(x^2 + px + q) \qquad (1)$$

$$x^4 - 8x + 63 = (x^2 + ax + b)(x^2 + px + q) =$$
$$x^4 + x^3 p + x^2 q + ax^3 + apx^2 + aqx + bx^2 + bpx + bq =$$
$$= x^4 + x^3(a + p) + x^2(q + ap + b) + x(aq + bp) + bq;$$

$$\begin{cases} a + p = 0, \\ aq + bp = -8, \\ ap + b + q = 0, \\ bq = 63, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -p, \\ b + q = a^2, \\ a \cdot (b - q) = 8, \\ bq = 63, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + q = \dfrac{64}{(b - q)^2}, \\ bq = 63, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (b + q)(b - q)^2 = 64 \\ bq = 63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b + q)\left[(b + q)^2 - 4bq\right] = 64 \\ bq = 63 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b + q)\left[(b + q)^2 - 252\right] = 64 \\ bq = 63 \end{cases}$$

agar $b+q=z$ desak:

$$z(z^2 - 252) = 64,$$

$$z^2 - 252z - 64 = 0.$$

Bu tenglama 64 sonining bo`luvchilaridan biri bo`ladi, uning bo`luvchilari esa 1, 2, 3, 4, 8, 32, 64. Bularni berilgan tenglamaga qo`yib, tekshirish natijasida 16 soni uning ildizi ekanini topamiz. Demak, $z=16$

$$\begin{cases} b + q = 16 \\ bq = 63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 16 - q \\ bq = 63 \end{cases},$$

$$q(16-q)=63,$$
$$-q^2+16q=63,$$
$$q^2-16q+63=0,$$
$$q_{1,2}=8\pm\sqrt{64-63}=8\pm1,$$
$$q_1=9;\quad q_2=7.$$
$$b_1=7;\quad b_2=9.$$
$$a=\frac{8}{b-q}=\frac{8}{7-9}=-4,$$
$$a_1=-4,$$
$$a=\frac{8}{b-q}=\frac{8}{9-7}=4$$
$$a_2=4;$$

p=-a shuning uchun $p_1 = 4$; $p_2 = -4$. Bu koeffitsientlarni (1) ga qo`ysak:

$$x^4-8x+64=(x^2-4x+7)(x^2+4x+9)$$

3 - m i s o l. $x^2 + 2xy + 2yz - z^2$ ko`phad ko`paytuvchilarga ajratilsin.

Bu ko`phadni ko`paytuvchilarga ajratishda gruppalash metodidan foydalanamiz:

$$x^2+2xy+2yz-z^2=(x^2-z^2)+(2xy+2zy)=$$
$$(x-z)(x+z)+2y(x+z)=(x+z)(x-z+2y).$$

4 - m i s o l. $x^4 + x^2y^2 + y^4$ ko`phad ko`paytuvchilarga ajratilsin.

Bu ko`phadni ko`paytuvchilarga ajratishda yordamchi hadlarni kiritish metodidan foydalanamiz:

$$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+x^2y^2+y^4+x^2y^2-x^2y^2=$$
$$(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-x^2y^2=$$
$$=(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy).$$

5 - m i s o l. $a^2 + b^2$ ifoda ikki had ko`paytuvchilarga ajratilsin.

1-usul:

$$a^2+b^2+2ab-2ab=(a^2+2ab+b^2)-2ab=$$
$$=(a+b)^2-2ab=(a+b)^2-(\sqrt{2ab})^2=$$
$$=(a+b-\sqrt{2ab})(a+b+\sqrt{2ab}).$$

2- usul: $a^2+b^2=a^2-(bt)^2=(a-bt)(a+bt).$

6 - m i s o l. $a^4 + b^4$ ikki had ko`paytuvchilarga ajratilsin.

1 - u s u l.

$$a^4+b^4+2a^2b^2-2a^2b^2=a^4+2a^2b^2+b^4-2a^2b^2=$$
$$=(a^2+b^2)^2-(\sqrt{2}ab)^2=(a^2+b^2-\sqrt{2}ab)(a^2+b^2+\sqrt{2}ab).$$

2 - u s u l. $(a^4+b^4)=(a^2)^2-(b^2i)^2=(a^2-b^2i)(a^2+b^2i).$

7 - m i s o l. $x^4 + 4x + 15$ ko`phad ko`paytuvchilarga ajratilsin.

$$x^4-4x+15=x^4+8x^2+16-8x^2-4x-1=$$
$$=(x^4+8x^2+16)-(8x^2+4x+1)=(x^2+4)^2-$$
$$-(\sqrt{8x^2+4x+1})^2=(x^2+4-\sqrt{8x^2+4x+1})\times$$
$$\times(x^2+4+\sqrt{8x^2+4x+1}).$$

4-§. Matematika darslarida didaktik prinsiplar.

Bizga ma’lumki, didaktik prinsiplar ta’lim nazariyasining asosini tashkil qiladi. Shuning uchun ham o`quv materialini tushuntirish metodlarini tanlashda ta’lim nazariyasi tomonidan ishlab chiqilgan quyidagi didaktik prinsiplarga amal qilish kerak:

1. **Ilmiylik prinsipi.** Bu prinsipning mohiyati shundan iboratki, maktab matematika kursida o`tiladigan hap bir mavzu materiali nazariy jihatdan isbotlangan, ya’ni avvalgi o`tilgan matematik tushuncha, aksioma va teoremalarga asoslangan holda bayon qilinishi lozim. Ilmiylik prinsipi matematika darsining har bir qadamida kerak bo`ladi, masalan, o`qituvchi o`quvchilarga $x^2 + 1$ tenglamani eching desa, qo`yilgan bu savol to`la ilmiy asosga ega bo`lmaydi, chunki o`quvchilar bu tenglamani haqiqiy sonlar to`plamiga nisbatan echadigan bo`lsalar, u echimga ega emas, agar ular bu tenglamani kompleks sonlar to`plamiga nisbatan echadigan bo`lsalar, u ikkita har xil echimga ega bo`ladi. Shuning uchun ham matematika darslarida ilmiylik prinsipi quyidagi talablarga javob berishi kerak:

1) o`rganilayotgan har bir matematik tushuncha, ta’rif, aksioma va teoremalar bayon qilinishi jihatidan sodda va aniq ifodalangan bo`lishi kerak;

2) matematika darslarida o`rganiladigan har bir mavzu materialiga nisbatan o`quvchilarni tanqidiy qarashga o`rgatish hamda ularni ana shu nuqtai-nazardan ilmiy fikrlash qobiliyatlarini shakllantirish.

Ana shu nuqtai-nazardan ilmiylik prinsipi maktab matematika kursida o`rganiladigan faktlarni ular fanda qanday yoritiladigan bo`lsa, shunga moslab yoritishni talab etadi.

2. **Ko`rsatmalilik prinsipi.** Ko`rsatmalilik prinsipi o`quvchilar tafakkurining aniqlikdan abstraktlikka qarab rivojlanish xususiyatlariga bog`liqdir. Matematikani o`qitishdan asosiy maqsad mantiqiy tafakkurni rivojlantirishdan iboratdir, biroq matematikani o`qitish aniq fakt va obrazlardan ajralmasdir, aksincha, har qanday masalani o`rganishni shu aniq fakt va obrazlarni tekshirishdan boshlash kerak bo`ladi.

Ko`rsatmalilik ilmiy bilishlarga qiziqishni oshiradi, o`quv materialini o`zlashtirishni osonlashtiradi va matematik bilimlarni mustahkam bo`lishiga yordamlashadi.

3. **Onglilik prinsipi.** Onglilik prinsipi o`quvchilarni o`quv materialini ongli ravishda o`zlashtirishga, ya’ni ularni turli faktlarni tushuna bilishga hamda bu faktlar orasidagi bog`lanishlarni va qonuniyatlarni ocha bilishga o`rgatishdan iboratdir. Matematikani o`qitishda bu prinsipning muhimligi shundan iboratki, matematikadan olinadigan bilimlar faqat ongli ravishda o`zlashtirilgandagina o`quvchilar miqdoriy munosabatlarning xarakterini, matematik figura va ularning o`zaro joylanish xususiyatlarini bilib oladilar. Agar onglilik prinsipi mavzu materialini o`zlashtirish jarayonida buzilsa, o`quvchilarning oladigan bilimlari yuzaki bilim bo`lib qoladi. O`quvchilardagi yuzaki bilimlarni quyidagi hollarda ko`rishimiz mumkin:

1. Agar biror o`quvchiga funksiyaning grafigini chiz deb aytilsa, u koordinata tekisligida ana shu grafikning umumiy ko`rinishini chizish mumkin, ammo funksiyaning argument qiymatlariga mos qiymatlarni topib bera olmasligi mumkin.

2. O`quvchi miqdorlarning absolyut qiymati ta’rifini biladi-yu, ammo uni $|x| = 5$ tenglamaga yoki $|x|<5$ tengsizlikka tadbiq qila olmasligi mumkin.

4. **Aktivlik prinsipi.** Bu prinsipning mohiyati shundan iboratki, bunda maktab matematika kursidagi ta’limning har bir bosqichi rivojlantiruvchi xarakterdagi ta’lim asosiga qurilgan bo`lishi kerak, bu esa o`quvchilarning aktiv fikrlash faoliyatlarini shakllantirishga xizmat qiladi. Matematika darslarida o`quvchilarning aktiv fikrlash faoliyatlarisiz bilimlarni ongli ravishda o`zlashtirishlariga erishib bo`lmaydi, shuning uchun ham hozirgi zamon maktab matematika kursining asosiy maqsadi o`quvchilarni matematika darslarida aktiv fikrlash faoliyatlarini shakllantirishdan iboratdir.

O`quvchilarning matematika darslarida aktiv, ongli fikrlash faoliyatlarini hosil qilish uchun mavzu materialini darc jarayonida muammoli vaziyatlar hosil qilish asosida o`tish maqsadga muvofiqdir.

5. **Puxta o`zlashtirish prinsipi.** Puxta o`zlashtirish prinsipi matematik materiallarni puxta o`zlashtirishga erishishda ayniqsa katta ahamiyatga egadir. Matematik tushunchalar o`zaro shunday bog`langanki majburiy minimumning biror qisminigina bilmagan taqdirda ham o`quvchilar o`z bilimlaridan turmushda foydalana olmay qoladilar. Matematikada hisoblash, algebraik ifodalarni ayniy almashtipish, geometrik figuralarni tasvirlash malakalarini puxta egallashning ahamiyati kattadir. Ayniqsa matematikada boshqa fanlardagiga qaraganda ham, dasturning biror qismini yaxshi o`zlashtirmasdan va malakani yaxshi mustahkamlamasdan turib muvaffaqiyat bilan oldinga siljish

mumkin emas. Yuqoridagilardan ko`rinadiki, o`quvchilarning matematika fanidan oladigan bilimlari puxta bo`lishi uchun quyidagi shartlarni bajarilishi zarur.

1. O`quvchilarning matematikaga qiziqishlarini shakllantirish.

2. Tushuntirilgan mavzu materialini o`quvchilarning mantiqiy asosda o`zlashtirishlariga erishish.

3. Matematika darslari davomida o`quvchilarning mantiqiy fikrlash faoliyatlarini hosil qilib borish.

6. **Sistemalik prinsipi.** Matematika darslarida sistemalik prinsipi shundan iboratki. bunda o`qitishni shu fanning sistemasiga moslab olib borish talab etiladi.

IV-BOBNI TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR.

1. Matematik tafakkur deganda nimani tushunasiz?
2. Matematika darslarida masalaning rolini tushuntirib bering.
3. Masalaning ta'limiy funksiyasi nimalardan iborat bo`ladi?
4. Masalaning tarbiyaviy funksiyasichi?
5. Masalaning rivojlantiruvchi funksiyasini aytib bering.
6. Masalani tekshiruv xarakterdagi funksiyasini tushuntirib bering.
7. O`quvchilarning matematik qobiliyatlari qanday shaklantiriladi?
8. Matematik hukmning qanday turlari mavjud?
9. Matematik hukmlar qanday tushunchalar ko`rinishida ifoda qilinadi?
10. Birhad deb qanday ifodaga aytiladi?
11. Ko`phad tushunchasini aytib bering.
12. Ko`phadlarni qanday usullar yordamida ko`paytuvchilarga ajratiladi?
13. Ko`paytuvchilarga ajratishning gruppalash metodiga misol keltiring.
14. Qo`shimcha hadlar kiritish orqali ko`phad qanday qilib ko`paytuvchilarga ajratiladi?
15. Ko`phadni ildizlariga ko`ra ko`paytuvchilarga ajratilishini tushuntirib bering.
16. Ko`phadni noma'lum koeffitsientlar orqali ko`paytuvchilarga ajratish qanday amalga oshiriladi?
17. Matematika darslarida didaktik prinsiplar va ularni matematika darslariga tadbiqini tushuntirib bering.

IV-BOB UCHUN TAYANCH IBORALAR

Matematik tafakkur, masala, masalaning tarbiyaviy funksiyasi, masalaning ta'limiy funksiyasi, matematik qobiliyat, matematik hukm, birhad tushunchasi, ko`phad tushunchasi, ko`paytuvchilarga ajratish, gruppalash metodi, ko`phad ildizlari, didaktik prinsiplar, no'malum koeffitsient, geometrik figura, absolyut qiymat tushunchasi, koordinata tekisligi, algebraik ifoda.

V-BOB. MATEMATIK TA'LIMNI TASHKIL QILISH.

1-§. MATEMATIKA DARSINING TUZILISHI VA UNI TASHKIL QILISH METODIKASI.

Bizga pedagogika kursidan ma'lumki, dars maktablarda olib boriladigan o'quv-tarbiyaviy jarayonning asosidir. Shuning uchun ham dars jarayonida o'tiladigan mavzu mazmunini umumta'limiy, tarbiyaviy, rivojlantiruvchi va amaliy xarakterdagi tomonlari ochib beriladi. Kadrlar tayyorlash milliy dasturini qabul qilinganidan keyin maktablarimizda o'tiladigan har bir dars vazirlar mahkamasi tomonidan ishlab chiqilgan, ta'lim standartlari asosida olib borilishligi aytib o'tilgan. Har bir dars o'quv tarbiyaviy jarayondir. Shuning uchun ham har bir darsda o'quv-tarbiyaviy jarayonining maqsadi, mazmuni, shakli, metodlari va uning vositalari orasidagi o'zaro aloqalar mazmunan ochib beriladi. Agar biz metodika nuqtai-nazardan matematika darsining tuzilishiga nazar tashlaydigan bo'lsak, unda quyidagi didaktik maqsadlar amalga oshiriladi. Darsning boshida o'quvchilar bilimi tekshiriladi. Bu tekshirish savol-javob asosida yoki didaktik tarqatma materiallar asosida o'tkaziladi. Bunda qaysi o'quvchining avvalgi o'tilgan mavzu mazmunini qanday o'zlashtirgani va qanday qiyinchilikka uchragani hamda ana shu mavzu materiali yuzasidan o'quvchilarning olgan bilimi va ko'nikmalari tekshiriladi. O'quvchilarning bergan javoblari o'qituvchi tomonidan izohlab baholanadi. Shundan keyin darsning asosiy maqsadi yangi mavzu o'quvchilarga tushuntiriladi va uni mustahkamlash uchun o'quvchilar bilan birgalikda misol yoki masalalar yechiladi. Bundan tashqari ana shu mavzu mazmunini qanday darajada o'quvchilar o'zlashtirganliklarini bilish uchun o'qituvchi tomonidan o'quvchilarga nazariy va amaliy xarakterdagi savollar ham berib boriladi. Bundan keyin uyga vazifa berish va uni bajarish yuzasidan zarur ko'rsatmalar beriladi. Yuqoridagi aytib o'tilgan bosqichlardan ko'rinadiki, matematika darsiga tayyorgarlik ko'rish o'qituvchidan o'rganiladigan mavzuning maqsadi va uning mazmuni nimalardan iborat ekanligini aniqlashdan iboratdir. Har bir o'qituvchi ertaga o'tadigan matematika darsida qanday o'quv-metodik jarayonni amalga oshiraman degan savolga javob izlashdan boshlashi kerak. 45-minutlik dars vaqtini taqsimlashda yangi materialni o'quvchilarga tushuntirishga va uni mustahkamlash yuzasidan misol va masalalar yechishga ko'proq vaqtni ajratish zarur. Ko'p hollarda maktab o'qituvchilari ko'proq vaqtni uy vazifasini tekshirishga sarf qilib, yangi mavzu mazmunini bayon qilish va uni mustahkamlash vaqtini qisqartirishga olib keladilar. Bu usuldan qochish kerak, chunki darsning asosiy maqsadi yangi mavzu mazmunini o'quvchilarga tushuntirish va uni mustahkamlashdan iboratdir. Fikrlarimiz dalili sifatida «Bikvadrat tenglama ildizlarini topish» mavzusini o'rgatish metodikasini ko'rib chiqaylik.

1. **Darsning maqsadi.** Bikvadrat tenglama va uning ildizlarini topishni o'rgatish.
2. Oldingi darsda o'tilgan mavzu materialini o'quvchilar tomonidan takrorlash uchun savollar.
   a) $ax^2+bx+c=0$ va $x^2+px+q=0$ ko'rinishdagi ifodalar qanday tenglamalar deyiladi?
   b) $y=ax^2+bx+c$ kvadrat uchhaddan to'la kvadratga ajratish uchun qanday ayniy almashtirishlarni bajarish kerak?
   c) $x^2-3x-4=0$ tenglamani yeching.
3. Yangi mavzu mazmuni bilan tanishtirish.

O'qituvchi: $6x^4+5x^2+1=0$ tenglamani qanday tenglama deb ataymiz?
O'quvchilar: 4-darajali tenglama deyiladi.
O'qituvchi: To'g'ri, shunday deyish ham mumkin, ammo matematikada shu ko'rinishdagi tenglamalarni bikvadrat tenglama deyiladi va uning umumiy ko'rinishi $ax^4+bx^2+c=0$ kabi bo'ladi. Xo'sh bunday tenglamani qanday yechish mumkin?
O'quvchilar: Biz bunday tenglamalarni yechmaganmiz.
O'qituvchi: Agar $x^2=y$ deb belgilasak, x^4 ni qanday belgilaymiz?
O'quvchilar: Mulohaza yurtish, ilgari o'tganlarini eslash orqali $x^4=y^2$ deb belgilaymiz deb aytadilar.
O'qituvchi: Yuqoridagi belgilashlarga ko'ra $ax^4+bx^2+c=0$ tenglama qanday ko'rinishni oladi?
O'quvchilar: $ay^2+by+c=0$ bu tenglama kvadrat tenglamadir. Bunday tenglamani yechishni bilamiz.
O'qituvchi: $6x^4+5x^2+1=0$ tenglamani $x^2=y$ belgilash orqali qanday tenglamaga keltiramiz?
O'quvchilar: $6y^2+5y+1=0$ to'la kvadrat tenglama ko'rinishiga.
O'qituvchi: Bunday tenglamani yechishni bilamizmi?
O'quvchi: Bilamiz, $y_1=\frac{1}{2}$; $y_2=\frac{1}{3}$ bu tenglama yechimlari bo'ladi.
O'qituvchi: Bizdan qanday noma'lumni topish so'ralgan edi?
O'quvchilar: Noma'lum x-topishni.
O'qituvchi: $x-$ ni qanday topamiz?
O'quvchilar: $x^2=y$ tenglikdan $x^2=\frac{1}{2}$ bo'ladi, bundan $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x^2=\frac{1}{3}$ tenglikdan esa, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ bo'ladi.

4. O'tilgan mavzu mazmunini mustahkamlash uchun $9x^4+5x^2-4$; $x^4-7x^2+12=0$ va hokazoga o'xshash misollarni o'quvchilar bilan birgalikda yechish maqsadga muvofiqdir.

5. Uyga vazifa berish. 401, 402 misollarni yechib kelinglar. (Algebra darsligi, Sh.Alimov va boshqalar, T. 2004 yil). Agar uyga vazifa berish ishi to'g'ri tashkil etilsa, ular o'quvchilarning bilimlarini mustahkamlaydi, mustaqil ishlash malakasini shakllantiradi, matematika fanini o'rganishda chidamlilik va tirishqoqlik malakalarini tarbiyalaydi. Uyga berilgan har bir topshiriq ko'pchilik o'quvchilarning kuchi etadigan, o'quvchilar vazifaning ma'nosini va qanday bajarish kerakligini tushuna oladigan darajada bo'lishi kerak. Topshiriqning og'ir engilligi o'quvchining sinfda o'tilgan

materialni o’zlashtirishi va uni tushunishi bilan uzviy bog’liqdir, shuning uchun ham o’qituvchi uy vazifasini belgilashda o’quvchilarning uni bajarishga tayyor yoki tayyor emasligini nazarda tutishi lozimdir. Berilgan vazifalargina qo’yilgan maqsadga ya’ni o’quvchilarni o’tilgan mavzular mazmunini puxta o’zlashtirishlariga olib keladi.

2-§. MATEMATIKA DARSINING TURLARI.

1. Yangi mavzu mazmuni bilan tanishtirish.
2. Yangi mavzuni mustahkamlash.
3. O’quvchilarning bilimlarini, ko’nikma va malakalarini tekshirish.
4. O’quv materiallarini takrorlash va umumlashtirish.

Matematikadan 45-minutlik dars o’tilgan mavzuni o’quvchilardan so’rash yangi mavzuni bayon qilish, uni mustahkamlash, o’quvchilarning bilim, ko’nikma va malakalarini tekshirish kabi qismlarga ajratish, o’tiladigan har bir darsni didaktik maqsad va mazmunini tushunarli bo’lishini ta’minlaydi.

Maktab matematika darslarida yangi mavzu mazmunini tushuntirish asosan uch xil usulda olib boriladi. Ular ma’ruza, suhbat va mustaqil ishdir.

Hozirgi yangi pedagogik texnologiyani mohiyati ham suhbat metodi orqali yangi mavzu mazmuni ochib berishdan iboratdir. Bunda mavzu mazmunini o’quvchining o’zi bayon qiladi, lekin mantiqiy mulohazalar vaqtida va turli hisoblashlarni bajarishda o’qituvchi o’quvchilarga mavzu mazmunini ochib beruvchi mantiqiy ketma-ketlikka ega bo’lgan savollar tizimi orqali murojaat qiladi, o’quvchilar ana shu savollarga javob berish orqali mavzu mazmunini chuqurroq o’zlashtirib oladilar.

Shu usulda o’tkaziladigan darsning bir qismini misol qilib ko’rsatamiz.

Bir necha qo’shiluvchilar yig’indisining kvadrati formulasini keltirib chiqarish o’tilmoqda.

O’qituvchi: Ikki son yig’indisining kvadrati to’g’risidagi ifodani esingizga keltiring. Nosir sen ayt men doskaga yozaman.

O’quvchi: Doskaga $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ifoda yoziladi.

O’qituvchi: Endi $(a+b+c)^2$ ning qanday ifodalanishini aniqlaylik.

Agar biz ikkita qo’shiluvchi yig’indisi kvadratining ifodasini biladigan bo’lsak, uchta qo’shiluvchi yig’indisi kvadratini ifodasini chiqarishni qanday boshlashimiz mumkin?

O’qituvchi: Shu uch son yig’indisini ikki son yig’indisi shaklida yozib olish kerak, masalan: $[(a+b)+c]^2$.

O’qituvchi: Bu yozilgan yig’indini kvadratga ko’taring, mumkin bo’lgan xamma sodalashtirishlarni bajaring. Karim, senda natija nima chiqdi, o’qib ber va hosil bo’lgan ifodani aytib tur, men doskaga yozib qo’yay.

Karim aytib turadi, o’qituvchi yozadi.

O’qituvchi: Shu xilda muloxaza qilib, to’rtta qo’shiluvchi yig’indisini kvadratga ko’taring: $(a+b+c+k)^2$. Raxim, qanday muloxaza qilganingni, qanday shakl o’zgartirishlarni bajarish kerakligini aytib ber, natijani yana men doskaga yozay.

Rahim to’rt hadni qanday qilib kvadratga ko’tarish kerakligini so’zlab beradi.

O’qituvchi: Ko’rib chiqqan xamma misollarimizda hosil bo’lgan ifodalarni diqqat bilan ko’rib chiqinglarchi, bulardan ko’phad kvadratini xosil qilish qoidasini chiqarish mumkin emasmikin? Nosir, nima payqading, ayt-chi?

Nosir so’zlab beradi va qoidani aytadi.

O’qituvchi. To’g’ri. Ammo biz faqat bir necha misol natijalarigagina suyanib xulosa chiqardik, shuning uchun uning to’g’riligidan shubxalanish, demak, uni isbot qilishni talab etish xam o’rinli bo’lar edi. Uning isboti bilan siz VIII sinfda tanishasiz, hozir u sizga og’irlik qiladi. Siz chiqargan xulosa to’g’ri va biz bundan keyin undan foydalanadigan bo’lamiz. Bu qoidani yana bir marta aytib chiqaylik . . .

Ba’zan biron teoremani isbot qilishdagi, yoki biron formulani keltirib chiqarishdagi ishni butun sinf yana ham mustaqilroq bajaradi, ammo bu holda ham o’qituvchi rahbarlik qiladi. Bunda o’quvchilarga o’z rejasini isbotlash metodini yoki mulohazalarini taklif etishga keng imkoniyat beriladi. Shu bilan birga, o’qituvchi ba’zan yordamchi savollar tashlaydi, ko’rsatmalar beradi, ayrim o’quvchilar o’z mulohazalarida xatoga yo’l qo’ygunday bo’lsa, tushuntirib beradi. Biroq bu yo’l juda ko’p vaqt oladi, chunki o’quvchilarning turli-tuman takliflari ularni asosiy masaladan chetga chiqaradi.

Endi yuqorida aytilgan fikrlarning dalili sifatida quyidagi tenglama va masalani suhbat metodi bilan yechib ko’rsataylik.

1. Ushbu $|x^2-3x-9|=-5$-tenglama suhbat metod bilan yechilsin.

Bu tenglamani suhbat metod bilan yechishda o’qituvchi bilan o’quvchilar orasidagi suhbatni keltiramiz, bu ta’lim jarayonidagi suhbat metod mohiyatini ochib beradi:

O’qituvchi: $|x^2-3x-9|=-5$ tenglamani qanday yechiladi?

O’quvchi: Bu tenglamani yechish uchun uning $x^2-3x-9=-5$ va $-x^2+3x+9=-5$ tenglamalar ko’rinishida yozib olamiz.

O’qituvchi: $x^2-3x-9=-5$ va $-x^2+3x+9=-5$ tenglamalarni qanday qoidaga asoslanib yozdingiz?

O’quvchi: Agar bizga $|a|$ soni berilgan bo’lsa, u quyidagiga teng edi: $|a|=\begin{cases} a, & a>0, \\ -a, & a<0 \end{cases}$

O’qituvchi: Xo’sh, u holda hosil qilingan tenglamalar qanday yechiladi?

O’quvchi:

$x^2-3x-9=-5,$

$x^2-3x-9+5=0,$

$x^2-3x-4=0$

O’qituvchi: $x^2-3x-4=0$ tenglamani qaysi formuladan foydalanib yechamiz?

O’quvchi: $x^2-3x-4=0$ tenglama $x^2+px+q=0$ ko’rinishga keladi, bu keltirilgan kvadrat tenglamadir.

O’qituvchi: Kim aytadi, $x^2+px+q=0$ tenglamaning umumiy yechimi qanday bo’lar edi?

O’quvchi: $x^2+px+q=0$ tenglamaning umumiy yechimi $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ bo’lar edi.

O’qituvchi: $x^2-3x-4=0$ tenglamani bu formulaga qanday qilib qo’yamiz?

O’quvchi: $x^2-3x-4=0$ tenglamada $p=-3$ va $q=-4$ ga teng, biz ularni umumiy yechimga qo’ysak, berilgan tenglamaning yechimini topgan bo’lamiz:

$$x_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-4}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}$$

O’qituvchi: $-x^2+3x+9=-5$ tenglama qanday yechiladi?

O’quvchi: $-x^2+3x+9+5=0$

O’qituvchi: Endi nima qilamiz?

O’quvchi: O’xshash hadlarini ixchamlaymiz: $-x^2+3x+14=0$

O’qituvchi: Noma’lum x oldidagi manfiy ishorani musbat qilsh uchun nima qilamiz?

O’quvchi: Tenglikni har ikkala tomonini (-1) ga ko’paytiramiz:

$$-x^2+3x+14=0\,\big|\cdot(-1) \qquad x^2-3x-14=0$$

Bu tenglama ham yuqoridagi kabi yechiladi:

$$x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+14}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{65}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{65}}{2};$$

$$x_1=\frac{3+\sqrt{65}}{2}; \qquad x_2=\frac{3-\sqrt{65}}{2}$$

Sinfda yangi materialni o’rganishda qo’llaniladigan usullardan yana biri bu o’quvchilarning mustaqil ishlaridir. O’quvchilarning mustaqil ishlarida misol va masalalar yechishni mashq qilish, teorema isbotlarini turli xil usullarda bajarish (agar imkoni bo’lsa), mavzu mazmuniga qarab natijaviy formulalarni chiqarish va unga doir misollar yoki masalalarni tadbiq qilish kabi o’quv metodik ishlar amalga oshiriladi. Masalan, o'qituvchi to'la kvadrat tenglamasi va uning ildizlarini topish mavzusi o'tilgandan keyin, keltirilgan kvadrat tenglama va uning yechimlarini topishni mustaqil ish sifatida berishi mumkin. Bunda o'qituvchi o'quvchilarni kvadrat tenglama va uning yechimlari mavzusining mazmunini ochib beruvchi mantiqiy ketma-ketlikga ega bo'lgan savollar tuzishi bilan o'quvchilarni yo'naltirib turishi maqsadga muvofiqdir. O'qituvchi har bir o'quvchini qo'yilgan topshiriq mazmunini ochishdagi xato va kamchiliklarini to'g'rilab borishi lozim bo'ladi. shundagina mustaqil ishlash usuli orqali o'quvchilar bilimini chuqurlashtirish mumkin bo'ladi.

Matematika darslarida ma'ruza metodidan ham foydalanib darslar o'tiladi. Bu holda o'qituvchi o'quvchilarni mulohazada ishtirok etdirmasdan, mavzu mazmunini yolg'iz o'zi bayon etadi. Shu bilan birga bayon etilayotgan mavzu mazmunidan nimani yozib olish, qanday chizmani chizib olish, doskadan nimalarni ko'chirib yozish kerakligi o'quvchilarga aytib beriladi.

O'qituvchi nazariy materialnigina emas, balki masalalarni yechilishini ham o'zi bajarishi, hamda mantiqiy mulohazalarni o'zi aytishi va barcha chizmalarni chizish va yozuvlarni yozishni ham o'zi bajarishi mumkin. Bunda o'qituvchining mavzu mazmunini bayon qilish usuli o'quvchilar uchun namuna bo'lishi, o'quvchilar ham o'z fikrlarini o'qituvchilardek bayon etishga intiladigan bo'lishi kerak. O'qituvchilarning nutqi savodli, mulohaza va isbotlari etarli darajada asoslangan bo'lishi hamda nutqi ravon bo'lishi kerak. Agar darsda qo'llanilgan metodlar o'quvchilarda qiziqish tug'dirgan, ular diqqatini jalb qilgan bo'lsa, o'quvchilar mavzudagi asosiy mulohazalarni to'g'ri takrorlab bera olgan bo'lsalar, demakki, o'qituvchi mavzu mazmunini yoritishda qo'llangan metodidan qanoat hosil qilishi mumkin.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash deganda biz asosan o'quv materialini nazariy ma'lumotlarini takrorlash hamda o'quvchilarni o'tilgan mavzu materiallari yuzasidan malaka va ko'nikmalarini shakllantirish uchun misol, masalalar yechish orqali o'tilgan darslarini takrorlab mustahkamlashni tushunamiz. O'tilgan materialni takrorlash ilgari olingan bilimlarni yangilashga, o'tilgan mavzu mazmuniga umumiyroq nuqtai-nazardan qarashga yordam beradi.

O'tilgan mavzu mazmunini mustahkamlashda asosan quyidagilarga e'tibor berish kerak.

1. Yangi mavzu mazmunida ishlatilgan asosiy tushunchalarni o'quvchilar tomonidan o'zlashtirilganlik darajasi.
2. Yangi mavzudagi teorema yoki uning isbotini o'quvchilar tomonidan aytib berilishi darajasi.
3. Yangi mavzuda o'rganilgan teorema va formulalardan misol, masalalar yechishda o'quvchilarning foydalana olish darajasi.
4. O'quvchilarning yangi mavzu mazmunini kundalik hayotda uchraydigan elementar muammolarga tadbiq qilish darajasi.

O'quvchilarni bilim, ko'nikma va malakalarini tekshirish o'tilgan materiallar yuzasidan og'zaki so'rash yoki yozma ish olish usuli bilan aniqlanadi.

Bunday tekshirish darslarini o'tkazish o'qituvchi tomonidan bir hafta oldin e'lon qilinib, o'quvchilarga og'zaki so'raladigan mavzu materiallari va ular asosida o'qituvchi tomonidan tuzilgan savollar ketma-ketligi beriladi.

Agar tekshiruv darsi yozma ish orqali o'tkaziladigan bo'lsa, bunda ham yozma ish variantida tushadigan misol va masalalar qaysi mavzularga taalluqligi o'qituvchi tomonidan bir hafta oldin aytib qo'yiladi.

O'quv materialini takrorlash va umumlashtirish.

Maktab matematika darslarida biror bob o'tib bo'lingandan keyin ana shu bob mavzu materiallarini umumlashtirish xarakteridagi takrorlash, umumlashtirish darslari o'tkaziladi.

O'tilgan materiallarni takrorlash-umumlashtirish darslari ilgari olingan bilimlarni yangilashga, ularni ma'lum bir tizimga solishga va o'tilgan materialga umumiyroq nuqtai-nazardan qarashga yordam beradi. Maktab matematika darslarida takrorlash-umumlashtirish darslarini quyidagi turlarga ajratish mumkin.

1. O'quv yili boshidagi takrorlash-umumlashtirish.
2. Kundalik takrorlash.
3. Tematik takrorlash-umumlashtirish darsi.
4. Yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsi.

Har bir takrorlash darsini o'z o'rni va maqsadi bordir. O'quv yili boshidagi takrorlash darsida o'qituvchi avvalgi sinfda o'tilgan asosiy mavzu materiallarining mazmunini hamda bu mavzularda ishlatilgan asosiy matematik tushunchalarni o'qituvchining o'zi takrorlab imkoniyati boricha umumlashtirib beradi. Matematika fanini o'zi shunday fanki, o'qituvchining o'zi har bir darsda yangi mavzuning mazmunini tushuntirish jarayonida ilgari o'tilgan mavzular mazmuni va ulardagi matematik tushunchalardan foydalanib dars o'tadi. Bunday takrorlashni kundalik takrorlash darsi deb yuritiladi.

Matematikadan biror bob mavzu materiallari o'tib bo'linganidan keyin alohida takrorlash-umumlashtirish darslari o'tkaziladi. Bunday takrorlashni tematik takrorlash-umumlashtirish darsi deyiladi. Tematik takrorlash-umulashtirish darsi bo'lishidan oldin o'qituvchi takrorlanadigan bob mavzu materiallarini o'z ichiga oluvchi mantiqiy ketma-ketlikka ega bo'lgan savollarni o'quvchilarga bir hafta ilgari berib qo'yishi va ana shu savollar asosida tematik takrorlash darsi bo'lishini aytib qo'yishi lozim. Ana shu berilgan savollar asosida o'quvchilar bo'ladigan tematik takrorlash darsiga oldindan tayyorgarlik ko'radilar. Bunday takrorlash darsini o'qituvchi savol javob usuli orqali o'tkazadi. O'qituvchi rahbarligida o'quvchilar mavzularning ketma-ketligi va ularda qatnashayotgan matematik tushunchalar orasidagi mantiqiy bog'lanishlarni tushunib etadilar. Natijada o'quvchilarning ana shu bob mavzu materiallari yuzasidan olgan bilimlari mantiqiy ketma-ketlikka ega bo'ladi va umumlashadi.

Uquv yili oxirida ham reja asosida takrorlash darsi ajratilgan bo'ladi, bunday takrorlashni yakuniy takrorlash darsi deb yuritiladi. Yakuniy takrorlash darsida o'quv yili davomida o'tilgan har bir bob mavzu materiallari takrorlab umumlashtirib boriladi.

Yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsining muvaffaqiyatli o'tishi uchun o'quv yili boshidagi, kundalik, tematik takrorlash darslari o'z vaqtida o'tkazilgan bo'lishi kerak. Yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsi orqali o'quvchilarning yil davomida olgan bilimlari umumlashtiriladi va sistemalashtiriladi.

Yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsini hamma o'qituvchilar ham metodik jihatdan tashkil qilmaydilar. Biz bir necha maktabda o'tkazilgan yakuniy takrorlash-umumlashtirish darslarini kuzatdik, ular o'quv materiallarini umumlashtirish va sistemalashtirish o'rniga ba'zi maktablarda o'quvchilarni doskaga chiqarib qo'yib, ulardan o'tilgan o'quv materiallarini so'rash, ba'zilarida esa bir necha misol yoki masala yechish bilan cheklanishdi.

Ko'pchilik o'qituvchilar yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsini o'tkazishda quyidagi kamchiliklarga yo'l qo'yadilar:

1. Takrorlash-umumlashtirish darsi uchun faqat o'quv yili oxirida soat ajratib uni o'tkazadilar.
2. Takrorlash-umumlashtirish darsi uchun material tanlashga befarq qaraydilar.
3. Takrorlash-umumlashtirish darsini o'tkazish metodikasini to'g'ri tanlay olmaydilar.
4. Takrorlash-umumlashtirish darsi uchun material yuzasidan savollar va mashqlar sistemasini tuzmaydilar.

O'qituvchi yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsi bo'lishidan bir necha kun avval shu darsda qaysi materiallarni qanday usullar bilan takrorlash va umumlashtirishini hamda ularga doir qanday masalalarni yechish kerakligini aniqlab, so'ngra o'quvchilarga shu mavzular bo'yicha tuzilgan savollar va mashqlar sistemasini berishi ular shu o'qituvchi ko'rsatmasiga asosan yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsiga tayyorgarlik ko'rishlari kerak. O'qituvchi yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsini uyushtirishdan oldin quyidagilarga e'tibor berishi kerak:

1. Takrorlash-umumlashtirish darsining materiali o'sha kursni umumlashtiruvchi xarakterda bo'lishi kerak.
2. Shu darsda o'tish uchun ajratilgan material bo'yicha savollar sistemasi tuzilgan bo'lishi kerak.
3. Takrorlash-umumlashtirish darsida ishlanadigan mashqlar sistemasi tuzilgan bo'lishi kerak.
4. Tuzilgan savollar va mashqlar sistemasi takrorlanayotgan materialni sistemalashtiruvchi va umumlashtiruvchi xarakterda bo'lishi kerak.
5. Takrorlash-umumlashtirish darsini o'tkazish metodikasiga e'tibor berish kerak.

O'qituvchi yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsi uchun mavzularni avvaldan rejalashtirishi kerak. Yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsi o'qituvchining umumiy ma'ruzasi yoki o'quvchilarning shu mavzuga doir tayyorlangan ma'ruzalarini eshitish orqali o'tkaziladi. Dars oxirida o'qituvchi takrorlash-umumlashtiruvchi darsida faol qatnashgan o'quvchilarni rag'batlantiradi, faol qatnashmagan o'quvchilarni ogohlantiradi, so'ngra o'tilgan mavzu materialini umumlashtiradi va sistemalashtiradi.

Yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsi bo'lishidan 5-6 kun oldin takrorlanadigan mavzular o'quvchilarga beriladi. O'quvchilar esa o'qituvchining ko'rsatmasiga asosan belgilangan kitoblardan foydalanib, takrorlash-umumlashtirish darsiga ma'ruzalar tayyorlaydilar. Yakuniy takrorlash-umumlashtirish darslarini bunday uyushtirish orqali har bir o'quvchini mustaqil ishga o'rgatiladi.

Mavzularni yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsi rejasiga bob yoki kursni o'z ichiga oladigan materiallardan tanlanadi.

Masalan, VIII sinfda «Ko'pburchaklarning yuzlari» nomli bobga quyidagicha reja tuzish mumkin.

1. Geometrik figuraning yuzi deganda nimani tushunasiz?
2. Nima uchun qobariq va botiq ko'pburchaklar ko'pburchakning xususiy holi bo'lishini tushuntiring.
3. Uchburchak, to'rtburchak va trapetsiyaning yuzlari qanday hisoblanadi.
4. Nima uchun parallelogramm qobariq to'rtburchakning xususiy holi bo'ladi?
5. Nima uchun trapetsiya yuzini hisoblash formulalari uchburchak, to'rtburchak yuzlarini hisoblash formulalarining umumlashgan holi bo'ladi?

SAVOLLAR

1. Kesma deb nimaga aytiladi?
2. Siniq chiziq deb nimaga aytiladi?
3. Qanday geometrik figurani ko'pburchak deyiladi?
4. Qanday ko'pburchak qobariq ko'pburchak deyiladi?
5. Qanday ko'pburchak botiq deyiladi?
6. To'rtburchak deb nimaga aytiladi?
7. Parallelogramm deb qanday to'rtburchakni aytiladi?
8. To'g'ri to'rtburchak deb qanday geometrik figuraga aytiladi?
9. Trapetsiya nima?
10. Romb nima?
11. Kvadrat nima?
12. Qanday geometrik figurani uchburchak deyiladi?
13. Uchburchak tomonlariga ko'ra necha turli bo'ladi?
14. Uchburchak burchaklariga ko'ra necha turli bo'ladi?
15. Uchburchakning tomonlari bilan burchaklari orasida qanday bog'lanish bor?
16. Qobariq ko'pburchak ichki burchaklari yig'indisi necha gradusga teng?
17. Parallelogrammning yuzi nimaga teng?
18. Uchburchakning yuzichi?
19. Trapetsiyaning yuzi qanday o'lchanadi?
20. Rombning yuzi nimaga teng?

Bu savollar tizimi asosida o'quvchilar uylarida mustaqil tayyorlanadilar, buning natijasida ular o'quvchilarda kitob bilan ishlash malakasi hamda mavzu mazmunlarini mustaqil o'zlashtirish malakalari shakllanadi.

3-§. MATEMATIKA DARSIGA TAYYORGARLIK VA DARSNING TAHLILI.

Matematika o'qituvchisi darsga tayyorgarlik ko'rishni o'quv yili boshida o'ziga ajratilgan sinf dasturiga ko'ra yillik ba'zan yarim yillik ish rejasini tuzishdan boshlaydi. Bundan tashqari har bir matematika darsi uchun alohida ish rejasini tuzadi. Matematikaga doir ish rejada har bir mavzuning asosiy savollari, bu savollarni o'tish uchun ajratilgan soatlar va o'tilish muddati ko'rsatilgan bo'lishi kerak. Matematikadan tuzilgan ish rejada har bir mavzuni o'tish uchun qanday ko'rgazmali qurollardan foydalanish va qanday amaliy xarakterdagi misol va masalalarni yechish ham ko'rsatilgan bo'lishi maqsadga muvofiqdir. Matematikadan tuzilgan ish rejani maktabdagi o'quv metodika hay'ati muhokama qiladi va maktab direktori tomonidan tasdiqlangan u rasmiy hujjatga aylanadi va ana shu tasdiqlangan reja asosida o'qituvchi matematika darsini har bir mavzusini o'tadi, maktab rahbariyati ham ana shu tasdiqlangan ish reja asosida o'qituvchini o'quv faoliyatini tekshiradi. O'qituvchi har bir dars uchun mavzu yuzasidan ish rejani tuzishda quyidagilarga ahamiyat berish kerak bo'ladi.

1. Mavzu va uning shu darsda o'rganiladigan qismi ko'rsatiladi.
2. Uy vazifasi qanday tekshiriladi?
3. Qaysi o'quvchilardan so'raladi?
4. Sinfdagi o'quvchilar uchun qanday mustaqil ishlar beriladi va qanday vaqtda beriladi?
5. Yangi mavzu bayoni ko'rsatiladi, o'quvchilarga qanday metod orqali tushuntirilishi va qaysi erlarini yozishligi belgilanadi?
6. O'tilgan yangi mavzuni mustahkamlash uchun beriladigan savollar yoki misol va masalalar yozib qo'yiladi.
7. Uyga beriladigan vazifa, mavzu paragrafi, misol va masala nomerlari hamda o'quvchilarga beriladigan ko'rsatmalar yozib qo'yiladi. O'qituvchi har bir dars oxirida o'quvchilar bilan birgalikda bugungi darsni yakunlashi va o'quvchilar bilimini tekshirishi lozim. O'qituvchi har bir darsning mazmunini yaxshi o'ylab rejalashtirsagina o'quvchilar chuqur matematik bilimga ega bo'ladilar.

Matematikadan ish rejani quyidagi ko'rinishda tuzish maqsadga muvofiqdir.

№	Mavzular va uning mazmuni	Takrorlash	Soat-lar	O'tish muddati	Mustaqil ishlar	Eslatma
1.	Kvadrat tenglama. a) Kvadrat tenglamaga ta'rif b) Kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratish v) Diskriminant tushunchasi va uning $D=0,\ D>0,\ D<0$ bo'lgandagi hollari g) Kvadrat tenglamani geometrik ma'nosini ochib berish d) Kvadrat tenglama yechimini misollarga tadbiq qilish.	Tenglama ta'rifi, Tenglikdagi ishoralarni o'zgartirish	2	Sentyabr 1-5	Kvadrat tenglamaning ildizlari formulasi tadbiqi asosida misollar yechish kitoblardan misollar keltiriladi.	Geometrik tasvirini chizib ko'rsatish.

Har bir mavzu uchun yuqoridagi kabi aniqlik asosida ish rejasi tuziladi va asosiy darslikdan tashqari qo'shimcha adabiyotlar ro'yxati ham o'qituvchi tomonidan o'quvchilarga berilishi maqsadga muvofiqdir.

Matematika darsining tahlili.

Bizga ma'lumki, har bir dars quyidagi bosqichlardan iborat edi.

1. O'tilgan darsni o'quvchilardan so'rash va uni mustahkamlash.
2. Yangi mavzuni o'qituvchi tomonidan tushuntirish va uni mustahkamlash.
3. Uyga vazifa berish.

Ana shu asosiy uch bosqichni amalga oshirishda o'qituvchini ilmiy-metodik faoliyati maydalab mantiqiy tahlil qilinadi.

1. O'tilgan darsni o'quvchilardan so'rash paytida, o'qituvchi tomonidan o'quvchilarga mavzu yuzasidan berilgan savollar to'g'ri bo'ldimi yoki yo'qmi?
2. Doskaga chiqqan o'quvchilarga savollar to'g'ri berildimi, qo'shimcha savollarchi?
3. Ularni bilimlarini baholashda o'qituvchi reyting mezoniga rioya qildimi, o'quvchilarni javoblari o'qituvchi tomonidan tahlil qilindimi?
4. O'tilgan mavzuni o'quvchilardan so'rash uchun o'qituvchi ortiqcha vaqt sarf qilmadimi?
5. Tarqatma materialni yechib bo'lgan o'quvchilar bilimini qanday baholandi?

6. O’qituvchi o’zi avvalgi mavzu mazmunini va o’quvchilar javoblarini qisqacha tahlil qilib yakunladimi?
7. Yangi mavzuni mazmunini ochib berishda ilmiy-metodik xatoga yo’l qo’ymadimi?
8. Yangi mavzuni qanday metod bilan tushuntirdi?
9. Yangi mavzuni mustahkamlashga qanday e’tibor berdi?
10. Yangi mavzuni geometrik ma’nosini ko’rsatib bera oldimi?
11. Uyga berilgan vazifalardan namuna ko’rsatdimi?
12. 45-minutlik vaqtni to’g’ri taqsimladimi?
13. O’qituvchi mavzu mazmunini tushuntirishda o’zini qanday tutdi?
14. Uqituvchi yangi mavzuni tushuntirishda sinf o’quvchilarini o’ziga qarata oldimi?
15. O’qituvchi o’quvchilarni shaxsiyatiga tegmadimi?
16. Darsni tahlilidan so’ng o’qituvchiga beriladigan o’quv, ilmiy, metodik va tarbiyaviy maslahatlar.

Har bir matematika darsini tahlil qilish yuqoridagi savollarga javob topish orqali amalga oshirilishi maqsadga muvofiqdir. Shundagina darsning tahlili samarali bo’ladi.

4-§. MATEMATIKA DARSIGA QO’YILGAN TALABLAR.

Matematika darsining tahlili shuni ko’rsatadiki, darsning maqsadi shu darsning tuzilish strukturasini va ana shu darsda bo’ladigan barcha bosqichlarning o’zaro mantiqiy munosabatlarini aniqlaydi.

1. Matematika darsiga qo’yiladigan birinchi talab bu uning maqsadga tomon yo’naltirilganligidir. Maqsadga tomon yo’naltirilganlik deganda biz darsning maqsadida qo’yilgan mavzu mazmunini tushuntirish orqali o’quvchilarni mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini shakllantirish hamda ularni aqliy va ma’naviy tarbiyalashni tushunamiz.
2. Matematika darsiga qo’yilgan ikkinchi talab bu dars va uning mazmunini ratsional taqsimlashdir. Dars va uning turlarini to’qri taqsimlash hamda matematika darsida o’quvchilarning mavzu mazmunini yaxshi o’zlashtirishlari orqali matematik, umumintellektual va o’quv faoliyatiga nisbatan bilim, ko’nikma hamda tafakkur qilish faoliyatlari shakllanadi.
3. Matematika darsiga qo’yilgan uchinchi talab bu darsni o’tkazishdagi o’quv, tarbiya metodi va vositalarini tanlashdan iboratdir. Matematika darslarida o’quv, tarbiya usullarini tanlash katta ahamiyatga egadir. Matematika o’qituvchisi mavzu mazmuniga qarab tushuntirish, ilmiy izlanish va xulosa chiqarish metodlaridan qaysilarini qo’llansa o’quvchilar mavzu mazmunini yaxshiroq o’zlashtirishlarini aniqlab olishi lozim, shundagina dars samarali bo’ladi.
4. Matematika darsiga qo’yilgan to’rtinchi talab bu darsni o’tkazishda o’quvchilarning bilishga doir bo’lgan faoliyatlarini shakllantirish uchun o’quv jarayonini har xil usullarda tashkil qilishdir. O’qituvchi darsda o’tiladigan mavzu mazmuniga qarab o’quvchilar faoliyatlarini oldindan belgilashi kerak bo’ladi. Agar darsda yangi mavzu o’tiladigan bo’lsa, unda o’qituvchining o’zi mavzu mazmunini ma’ruza yoki suhbat usullari orqali o’quvchilarga tushuntiradi. Agar darsdagi mavzu avvalgi o’tilgan mavzuga doir misol yoki masala yechish bo’lsa, unda mustaqil ishlash yoki yakka tartibda topshiriqlar berish usullaridan foydalanish mumkin. Buning natijasida sinfdagi o’quvchilar o’zlarining intellektual qobiliyatlari orqali mavzu mazmunini u nazariy yoki amaliy xarakterda bo’lsin yaxshi o’zlashtiradilar.

5-§. O’QUVCHILARNING BILIMLARINI TEKSHIRISH.

«Ijroni tekshirish»ning to’g’ri yo’lga qo’yilishi har qanday ish sohasida katta ahamiyatga ega bo’lgani singari, o’qitish ishlarida ham g’oyat katta ahamiyatga egadir. U, o’qituvchiga o’quvchilarda mas’uliyat tuyg’usini tarbiyalashga, o’quvchilarning bilimlaridagi kamchiliklarni o’z vaqtida aniqlab olishga, o’z ishini to’g’ri baholashga imkon beradi.

O’quvchilarning bilimlarini tekshirish ishi muntazam ravishda, ya’ni har kuni olib borilishi kerak. Dastavval yangi materialni bayon etgandan keyin uning qay darajada tushunilganligini tekshirib olish lozim. Darsning asosiy maqsadi o’tiladigan mavzu mazmunini o’quvchilarga tushuntirish ekanini, o’quvchilar bilimni asosan darsda olishlari kerakligini esda tutib, o’qituvchi o’zining shu maqsadga erishgan yoki erishmaganligini har bir darsda o’tilgan mavzu mazmunini asosiy erlarini o’quvchilardan so’rash orqali tekshirib borishi zarur.

O'quvchilarning o'zlashtirish darajasini turli yo'llar bilan tekshirish mumkin, ya'ni biron formulani chiqarish yoki biron teoremani isbotlashdagi asosiy mulohazalarni o'quvchi tomonidan bajarish, ilgaridan tayyorlab qo'yilgan mavzu mazmuniga doir savollarni o'quvchilarga berish, olingan nazariy xulosalarni masala yoki misollar yechishga tatbiq qila olish qobiliyatlarini aniqlab bilishdan iboratdir.

Bularning hammasi o'quvchilarning o'zlashtirish natijalarini aniqlashga va shu bilan birga o'tilgan materialni mustahkamlashga yordam beradi.

Yozma uy vazifalarining bajarilgan-bajarilmaganligini tekshirish ishi ko'pincha sinfni «aylanib chiqib» o'quvchilarning daftarlarini ko'rish yo'li bilan bajariladi. Bu yo'l vazifaning bajarilganligini aniqlashga imkon beradi, ishning sifatini esa bu yo'l bilan aniqlab olish qiyin.

Uy vazifasini tekshirish uchun aylanma daftar tutish ijobiy natija beradi, chunki vazifasi tekshirilgan daftar o'quvchiga berilganda ular daftardagi o'qituvchi tomonidan qo'yilgan baholarni va izohlarni ko'rib berilgan topshiriqlar bo'yicha qanday bilimga ega ekanliklarini bilib oladilar. O'qituvchi uy vazifalar natijasini reyting mezoni bo'yicha ballar asosida baholashi shart.

Bundan tashqari doskaga ayrim o'quvchilarni chiqarib, o'tilgan mavzuga doir o'qituvchi aytgan masala yoki misolning yechilishini so'rash orqali ham aniqlanadi.

Har bir masala yoki misolning yechilishini mufassal bir o'quvchining o'zi oxiriga etkazishi shart emas. Berilgan vazifa yuzasidan eng muhim savollarni ilgaridan tayyorlab qo'yib, tekshirishni ana shu reja bo'yicha olib borish mumkin.

Masala va misollarning yechilishini tekshirganda bir masalaning bir necha xil yechilish variantlarini aniqlash, hisoblashga doir misollarda esa qo'llanilgan turlicha yechish usullarini ko'rsatish va ular ichidan yechishning eng ma'qul usullarini aniqlab olish kerak.

Har kuni hamma o'quvchilarning daftarlarini tekshirib chiqish mumkin emas, ammo bu ishni hech bo'lmaganda tanlab olish yo'li bilan qilish kerak. Har bir darsning oxirida 8-10 o'quvchining daftarini olish yo'li bilan bir oyda har bir o'quvchining daftarini aqalli uch marotaba ko'zdan kechirish kerak. Bu holda o'quvchining ikki hafta davomida bajargan hamma ishlarini tekshirib chiqishga ulguriladi. Bunda tekshirilgan daftarlarda ko'rsatilgan xatolarni o'quvchilarga albatta tuzattirish kerak, shu holdagina tekshirish ishlari maqsadga muvofiq bo'ladi.

Bunday tekshirganda bajarilgan ishning to'g'riligini, topshiriqning to'la bajarilishini va ishning chiroyli, ozoda va batartib bajarilishini e'tiborga olib turib, uy vazifalarini bajarishga alohida reyting mezonlari asosida baho qo'yish kerak.

Daftarlarni tekshirib borish o'qituvchiga o'quvchilar tomonidan berilgan vazifalarni bo'sh o'zlashtirilgan joylarini, misollarni yechishdagi o'quvchilarni yo'l qo'ygan xatoliklarini aniqlab olishga va o'z vaqtida ularni to'g'rilab olish choralarini ko'rishga imkon beradi.

O'quvchilar bilimini tekshirishning yana yo'llaridan biri bu ulardan og'zaki so'rashdir. Buning uchun avvalo o'qituvchi tomonidan mavzu mazmunini ochib beradigan mantiqiy ketma-ketlikka ega bo'lgan ta'riflar, qoidalar, murakkab bo'lmagan xulosalar va teoremalarning isbotini tushuntirib berishni talab etadigan savollar tizimi tuziladi. Savol sinf o'quvchilariga berilib, javobini o'ylashga bir necha daqiqa vaqt beriladi. So'ngra bir o'quvchidan so'raladi. Uning javobini baholashda butun sinf ishtirok etadi (to'g'ri, noto'g'ri, etarli darajada mukammal, javob asosli yo asosli emas va hokazo); javobga qo'shimcha qiluvchilarga yoki xatoni tuzatuvchilarga ham so'z beriladi.

Javoblar reyting asosida baholanadi, biroq sinf jurnaliga yozilmaydi, uch-to'rt marta shu xil joyda turib berilgan javoblarga o'qituvchi tomonidan umumiy ball qo'yilib, bu ball sinf jurnaliga va o'quvchining kundalik daftariga yozib qo'yiladi. Bu holda o'qituvchi berilgan savol va olingan javoblarni maxsus yuritilgan reyting daftariga yozib boradi.

Masalan, B sinfda «Sonlarning bo'linishi» mavzusidan keyin shunday savollarni tuzib olish mumkin:

1) Sonning (masalan, 84 ning) hamma bo'luvchilari qanday topiladi?
2) Berilgan sonlarning (12, 18 ning) umumiy bo'luvchisi deb qanday songa aytiladi va unday sonlar nechta bo'ladi?
3) Berilgan sonlarning (masalan, 24 bilan 36 ning) eng katta umumiy bo'luvchisi deb qanday songa aytiladi va u qanday topiladi?
4) Qanday son berilgan sonlarning (masalan, 12 va 9 ning) umumiy bo'linuvchisi deb ataladi va bunday sonlardan nechtasini topish mumkin?

5) Qanday son berilgan sonlarning (masalan, 14 va 21 ning) eng kichik umumiy bo’linuvchisi deb ataladi va u qanday topiladi?
6) 4 ga bo’linish belgisi, uni tushuntirib bering.
7) Biron son qanday shartda 15 ga bo’linadi?
8) Yig’indi juft son bo’lishi uchun qo’shiluvchilarning har biri juft son bo’lishi zarurmi? Misollar keltiring.

Maktab tajribasida doskaga chiqarib so’rashning turli yo’llari qo’llaniladi. Doskaga bir o’quvchini chiqarib biron xulosa chiqartirish, teoremani isbotlash yoki masala yechdirish kuproq qo’llaniladi, sinfdagi boshqa o’quvchilar esa doskaga chiqqan o’quvchining javobini eshitib turadilar. Bu holda javob beruvchi o’z javobini bemalol, to’la o’ylab olish, uni bayon etishga tayyorlanib olish imkoniyatidan mahrum bo’ladi, chunki unga o’qituvchi ham qarab turadi, o’quvchilar ham o’zlarining chidamsizlik qarashlari bilan uni bezovta qiladi, shoshiltiradi.

O’qituvchi, darsni ish rejasini tuzgan vaqtidayoq, so’ramoqchi bo’lgan o’quvchilarni belgilab qo’ysa va ularning har biriga navbatdagi va takrorlanadigan material yuzasidan so’raladigan 2-3 ta savolni ham aniqlab qo’yishi kerak bo’ladi.

Doskaga 1-2 o’quvchi chiqarilganda ularning har biriga berilgan savolga javob tayyorlash kerak bo’lib qolganda doskada chizma chizish, javobni bog’lanishli qilib aytib berishni osonlashtiradigan yozuvlarni qisqacha yozib qo’yishga imkon beriladi.

Bu o’quvchilar javob tayyorlagunlaricha o’qituvchi qolgan o’quvchilar bilan suhbat asosida savol-javob qilib, og’zaki masalalar yechdirishi, ta’riflarni, teoremalarni aytilishini, sodda hulosalar chiqarish kabilarni so’rab turishi lozim bo’ladi.

Ba’zilar, o’qituvchining sinf bilan qiladigan suhbatidan ikki o’quvchini bo’lsa ham ajratib qo’yish zararli deb, bu xil so’rashga e’tiroz bildiradilar. Ammo, chiqarilgan o’quvchilarning tayyorlanish vaqtida butun sinfni zerikib kutib o’tirishga majbur qilishdan ko’ra, ikki o’quvchini bu xil suhbatdan mahrum qilish yaxshiroq. Doskaga chiqarib o’quvchilar javobini eshitish ham yaxshi natija beradi.

Doskaga chaqirilganlarning javobini eshitishga kelganda ish boshqacha; ularning javoblarini butun sinf o’quvchilari eshitishi kerak. Sinf o’quvchilarini bu vaqtda doskadagi o’quvchilar javoblarini eshitishga jalb qilish kerak. Chaqirilgan o’quvchilar javob bergandan keyin boshqa o’quvchilarga qo’shimcha qilishga, tuzatishlar berishga, o’z fikrlarini aytishga imkon beriladi. Bu savolga to’la va to’g’ri javob olingandan keyin o’qituvchi shu o’quvchining o’ziga endi uzoq tayyorlanishni talab etmaydigan va ilgaridan belgilab qo’yilgan savollarini berishi mumkin.

Ba’zi o’quvchilarning javob beruvchi o’quvchiga shu mavzuga doir qo’shimcha savollar berishiga yo’l qo’yiladi. Bu, o’quvchilarni shu mavzuga doir hamma materialni xotirlashga majbur qiladi. Ammo o’quvchilarni muhim savollar berishga o’rgatish lozim, buning uchun esa o’qituvchi mavzuni o’rganish vaqtida o’rganiladigan materialning eng kerakli va muhim tomonlarini ajratib ko’rsata bilishi kerak bo’ladi.

Har holda, so’rash usulidan qat’i nazar, o’qituvchi, birinchidan, so’raladigan materialni ilgaridan belgilab qo’yishi, savollarning qay tarzda berilishini puxta o’ylashi, masala yechilishining yoki isbotning qanday borishi kerakligini ham oldindan o’ylab qo’yishi lozimdir. Shundagina o’tilgan mavzu bo’yicha o’quvchilarni olgan bilimlari sifatli bo’ladi.

O’quvchilar bilimini tekshirishni yana bir usuli bu o’qituvchi tomonidan o’tilayotgan mavzuga va takrorlashga doir savollar yozilgan kartochkalarni oldindan tayyorlab qo’yishdir. Bunday kartochkalar doskaga chiqarilgan 2-3 o’quvchiga beriladi va tayyorgarlik (javobni o’ylash, doskada kerakli yozuvlarni yozish) uchun 8-10 minut vaqt ko’rsatiladi.

Ular tayyorlanayotganda o’qituvchi sinf bilan suhbat o’tkazadi yoki butun sinfga kichikina mustaqil ish beradi. Doskaga chiqarilgan o’quvchilar o’z javoblarini to’la bayon etganda o’quvchilar quloq soladi va ularga har bir savolning javobidan keyin qo’shimcha qilishga imkon beriladi. O’qituvchi o’quvchilarning javoblarini reyting asosida ballar bilan baholab boradi.

So’rash usuli qanday bo’lishidan qat’i nazar, unga nisbatan ba’zi majburiy talablar qo’yishga to’g’ri keladi. Bu talablar quyidagilardan iboratdir.

a) ma’lum maqsadni ko’zda tutish kerak. Bu maqsad ba’zi o’quvchilarga aniq bo’lmasligi mumkin, ammo o’qituvchi uni ochiq-oydin tasavvur qilishi shart;

b) mavzuning asosiy qoidalarini takrorlashga va mustahkamlashga yordam berishi hamda teoremalar, o’rganilgan qonunlar va bajariladigan shakl o’zgartirishlar orasidagi bog’lanishni aniqlashga, fazoviy

tasavvurlarni kengaytirishga, mantiqiy fikrlashni o'stirishga, o'z fikrini to'g'ri va chiroyli nutq bilan bayon etishga yordam berishi kerak;
v) berilgan savolni tezlik bilan o'qib olish va qisqa, aniq javob bera olish qobiliyatini o'quvchilarda tarbiyalashi kerak;
g) teorema yo qonunlarning aytilishiga o'tkir diqqat eta bilishga, javobning, yozuvlarning va chizmalarning to'g'riligini va tugalligini baholay bilishga, qo'shimcha va tuzatishlar bera bilishga o'rgatishi kerak;
d) so'rashda o'qituvchi beradigan savollar oz vaqt talab qiladigan, ravon, mazmunli bo'lishi shart.

Yozma tekshirish ishlari (yozma ish, test nazorat ishlari) qisqa vaqtga –10-12 minutga mo'ljallab, ba'zilar esa ko'proq vaqtga –1-2 soatga mo'ljallab berilishi mumkin. Qisqa vaqtga mo'ljallangan yozma ishlarni darsning ikkinchi yarmida berish qulayroq va bunda ko'proq o'quvchilarning har xil hisoblashlarni tez bajara olishlarini tekshirish, ayniy shakl o'zgartirishlarni bajara bilishini tayyor tenglamalarni tez yecha bilishini, geometrik figuralarning xossalarini aytib bera olishlarini tekshirishlar ko'zda tutilgan bo'lishi kerak.

V-BOBNI TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR.

1. Matematika darsining tuzilishini gapirib bering.
2. Matematika darsini tashkil qilish qanday amalga oshiriladi?
3. Yangi mavzuni tushuntirish qanday usullar bilan amalga oshiriladi?
4. Yangi mavzu mustahkamlash deganda nimani tushunasiz?
5. O'quvchilarning bilimlarini tekshirish qanday usullar orqali amalga oshiriladi?
6. O'quv materialini takrorlash turlarini aytib bering.
7. Yakuniy takrorlash bilan tematik takrorlashni farqlarini aytib bering.
8. O'qituvchini matematika darsiga tayyorgarlik ko'rishini aytib bering.
9. Matematika darsiga qo'yilgan talablarni aytib bering.
10. Matematika darsining tahlilini tushuntiring.
11. O'quvchilar bilimlarini tekshirish usullarini aytib bering.
12. Yozma ish deganda nimani tushunasiz?

TAYANCH IBORALAR.

Matematika darsi, darsning tuzilishi, yangi mavzu, darsni mustahkamlash, takrorlash turlari, darsga tayyorgarlik, ishchi reja, matematika dasturi, darsga qo'yilgan talab, dars tahlili, bilimlarni tekshirish, yozma ish, reyting nazorati.

VI BOB. SON TUSHUNCHALARINI KIRITISH, UNI KENGAYTIRISH VA SONLAR USTIDA AMALLAR BAJARISH METODIKASI.

1-§. Natural son tushunchasini kiritish va ular ustida amallar bajarish metodikasi.

Eramizdan avvalgi asrlarda yashagan insonlar tirikchilik uchun hap xil qushlar, kiyiklar va boshqa jonivorlarni ovlash bilan kun kechirganlar. Ana shu ovlangan kiyiklarni, umuman olganda jonivorlar sonini dastlab qo'l va oyoq barmoqlari bilan ko'rsatib tushuntirishga odatlanganlar. Agar ovlangan jonivorlar soni ikkala qo'l barmoqlari sonidan ko'p bo'lsa, ularni hisoblash uchun oyoq barmoqlaridan ham foydalanganlar. Vaqt o'tishi bilan kishilarning ongi ham ana shu davrga nisbatan shakllana borgan, Har xil xo'jalik ishlarini bajarish jarayonidagi hisoblarga oyoq va qo'l barmoqlarining soni javob berolmay qolgan, natijada ular hisoblash ishlarini bajarishda tayoqchalardan foydalanganlar. Ana shu qo'l va oyoq barmoqlari hamda ishlatilgan tayoqchalarni sanash natijasida bir, ikki, uch, to'rt va hokazo sonlar hosil qilingan. Masalan, bitta qush, ikkita kiyik, uchta yo'lbars va hokazo. Yuqoridagi mulohazalardan ko'rinadiki, son - bu odamlar sanash natijasida narsalarning miqdoriy qiymatlarini ifoda qiluvchi tushuncha ekan. Sonlar raqamlar bilan belgilanadi, bizning sanoq sistema o'nlik sistema bo'lganligi uchun u to'qqizta qiymatli va bitta qiymatsiz raqam bilan belgilanadi: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Matematika kursida 1, 2, 3, ... qatorni *natural sonlar qatori,* deb ataladi. Natural sonlar to'plami quyidagi xossalarga ega:

1. Natural sonlar to'plamining birinchi elementi 1 ga teng.
2. Natural sonlar to'plamida ixtiyoriy natural sondan keyin keladigan va undan bitta ortiq bo'lgan birgina natural son mavjuddir.
3. Natural sonlar to'plamida 1 sonidan boshqa har bir natural sondan bitta kam bo'lgan va bu sondan oldin keladigan birgina natural son mavjuddir.

Boshlang'ich sinf matematika kursida natural sonlar to'plami haqidagi eng sodda tushunchalar o'quvchilarda shakllantiriladi. IV sinfda esa koordinata tekisligi va nur tushunchalari kiritilganidan keyin natural sonlar to'plamining geometrik tasviri ko'rsatiladi.

Har bir natural songa koordinata nurning bitta nuqtasi mos kelishini o'qituvchi ko'rgazmali qurollar yordamida tushuntirishi lozim. Shundan keyin o'quvchilarga natural sonlarni og'zaki va yozma nomerlash ishlari o'rgatiladi. Buning natijasida o'quvchilar natural sonlarni o'qish va yozishni o'rganadilar.

1. Sanash vaqtida birinchi o'nta sonning har biriga alohida nom beriladi.
2. Sanoq birliklari gruppalarga shunday birlashtiriladiki, buning natijasida bir xil o'nta birligidan yangi ikkinchi xona birligi, ikkinchi xonaning o'nta birligidan yangi uchinchi sanoq birligi va hokazolar tuziladi.
3. Ikkinchi xonadan boshlab har bir xona birligi shu xonadan bevosita quyi xonaning o'nta birligidan tuzilgani uchun bizning sanoq sistemamiz o'nlik sanoq sistemasi deb ataladi. 10 soni esa sanoq sistemasining asosi deb ataladi.
4. Turli xonalardan iborat bo'lgan sonlarning har uchtasining birliklarini birlashtirib sinflar tuziladi. Dastlabki to'rtta xona birliklariga alohida nomlar beriladi, ya'ni bulardan to'rtinchi xona birligi ming, ikkinchi sinf birligi deb qaraladi va undan xuddi asosiy birliklardan tuzilgan kabi, navbatdagi birliklar tuziladi. Ikkinchi sinfning mingta birligi uchinchi sinfning birligi - millionni tashkil etadi va hokazo.
5. Sonlarni yozish uchun 10 ta raqam ishlatiladi, noldan boshqa hamma raqamlar *qiymatli raqamlar* hisoblanadi.
6. Qiymatli raqamlarning qiymati ularning sondagi o'rniga qarab o'zgaradi. Bundan keyin o'qituvchi o'quvchilarga natural sonlarni qo'shish va ayrishni hamda ko'paytirish va bo'lishni kundalik hayotda uchraydigan misollar asosida o'rgatishi maqsadga muvofiqdir.

Masalan, Odiljon 35 ta ko'chat ekdi, Qobiljon esa 30 ta ko'chat ekdi. Ularning ikkalasi birgalikda necha to'p ko'chat ekishgan? $30 + 35 = 65$ ta

Ikkita natural sonni qo'shish natijasida yangi bir natural son hosil bo'ldi, uni shu sonlarning yig'indisi deyiladi. 30 va 35 sonlari *qo'shiluvchilar*, 65 soni *yig'indi* deb ataladi. Shu fikrlar o'quvchilarga o'rgatiladi, so'ngra qo'shish amaliga ta'rif beriladi.

T a ‘ r i f. *Ikki sonning yig’indisini topish amaliga qo’shish deb ataladi.*

Natural sonlarni qo’shish yana quyidagicha usul bilan tushuntirilishi mumkin.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... natural sonlar to’plamini doskaga yozib, unda 4 sonini belgilaymiz, so’ngra ana shu 4 sonidan unga qarab 6 ta sonini sanaymiz, natijada 10 soni hosil bo’ladi. Demak 4+6=10 bo’lar ekan. 6+4=10 bo’lishini ham yuqoridagidek tushuntirish mumkin. 1, 2, 3. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ... natural sonlar to’plamida 6 sonini belgilab, undan o’ngga qarab 4 ta sonni sanaymiz, natijada 10 soni hosil bo’ladi, demak, bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi $a + b = b + a$. Bu tenglikdan qo’shish amaliga nisbatan quyidagi qoidani ifoda qilish mumkin.

Q o i d a. *Qo’shuvchilarning o’rni almashgani bilan yig’indining qiymati o’zgarmaydi, ya’ni* $a + b = b + a$.

Biz qo’shiluvchilar sonini uchta olganimizda ham yuqoridagi qoida o’rinli bo’lib, $(a+b)+c=(a+c)+b$ tenglik hosil bo’ladi, bu esa qo’shish amaliga nisbatan gruppalash qoidasini ifodalaydi.

Endi natural sonlarni ayirishni qaraymiz. Natural sonlarda ayirish amalini o’rgatish uchun quyidagidek masalalarni qarash mumkin. Taqsimchada 20 dona konfet bor edi. Fozil shu konfetdan 6 donasini eb qo’ydi. Tarelkada necha dona konfet qoldi? Bu masalani yechish uchun biz shunday noma’lum x sonini topishimiz kerakki, bunda $6 + x = 20$ tenglik o’rinli bo’lishi kerak. Bu hosil qilingan tenglikni o’qiydigan bo’lsak, birinchi qo’shiluvchi va yig’indi ma’lum bo’lib, ikkinchi qo’shiluvchi esa noma’lumdir.

Q o i d a. *Qo’shiluvchilardan biri va yig’indi ma’lum bo’lganda ikkinchi qo’shiluvchi noma’lum sonni topish amaliga ayirish deb ataladi.*

$$x = 20 - 6. \qquad x = 14.$$

Agar biz umumiy holda $a + x = b$ desak, bundan $x = b - a$ hosil bo’ladi.

Bu erda x - ayirma, b - kamayuvchi, a - ayiriluvchi deb yuritiladi.

Ayirish amalini o’quvchilarga yana quyidagicha tushuntirish mumkin. Masalan, 20 sonidan 6 sonini ayirish kerak bo’lsin. Buning uchun 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 ... natural sonlar qatorini doskaga yozib, 20 sonini belgilaymiz va undan chapga qarab oltita sonni belgilaymiz, natijada 14 soni hosil bo’ladi, bu degan so’z 20 – 6 = 14 deganidir deb o’quvchilarga tushuntiramiz. Bu erda 20 soni kamayuvchi, 6 soni ayiriluvchi, 14-soni esa ayirma deb ataladi.

Masala. 5 ta tokchaning har biriga 16 ta donadan kitob terilgan bo’lsa, hammasi bo’lib qancha kitob terilgan?

Bu masalani yechish uchun qo’shish amalidan bunday foydalanamiz. 16+16+16+16+16=80 yoki bu tenglikni $16\cdot5=80$ ko’rinishda ham yozish mumkin: bunda javoblarning bir xil bo’lganligini o’qituvchi o’quvchilarga tushuntirishi lozim. Bu erda 16 va 5 sonlari *ko’paytuvchilar*, 80 soni esa *ko’paytma* deb yuritiladi.

T a ‘ r i F. Qo’shiluvchilari o’zaro teng bo’lgan sonlarning yig’indisini topish amaliga ko’paytirish deyiladi va u bunday yoziladi:

$$\underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b} = a \cdot b = c$$

a va b sonlari *ko’paytuvchilar*, c esa *ko’paytma* deb yuritiladi.

Yuqoridagi ma’lumotlardan keyin ko’paytirish amaliga nisbatan o’rinli bo’lgan quyidagi uch qonunni ko’rsatish lozim.

1. Ko’paytirish amaliga nisbatan o’rin almashtirish (komutativlik) qonuni o’rinli.

$$a \cdot b = c \text{ bo’lsa, } b \cdot a = c \text{ bo’ladi.}$$

2. Ko’paytirish amaliga nisbatan tarqatish (distributivlik) qonuni o’rinli.

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

Bu qonunni bunday tushuntirish mumkin.

$$(b + c) \cdot a = \underbrace{(b + c) + (b + c) + (b + c) + \ldots + (b + c)}_{a} = ab + ac$$

3. Ko’paytirish amaliga nisbatan gruppalash (assotsiativ) qonuni o’rinli $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$, bu tenglikni quyidagicha tushuntirish mumkin,

$$(a\cdot b)\cdot c = \underbrace{\underbrace{a+a+\ldots+}_{b}\;\underbrace{a+a++}_{b}\ldots\underbrace{a+a+\ldots+\ldots}_{b}}_{c} = a\cdot(b\cdot c)$$

Bu tenglikni quyidagicha izohlash mumkin. Har bir qatorda *b* tadan qo'shiluvchi *b·c* bo'lib har bir qo'shiluvchi *a* ga teng, ya'ni *(b·c)·a* deb yozish mumkin.

4. Omborga 5 yashikda 625 kg olma keltiridi. Har yashikda necha kilogrammdan olma bo'lgan? Bu masalani yechish uchun biz shunday *x* sonini topishimiz kerakki, *x=625 : 5* bo'lsin. Bunday son 125 bo'ladi.

Ana shu 125 sonini hosil qilish uchun bo'lishni, ya'ni *x=625:5* amalni bajariladi, bu amal bo'lish deb yuritiladi.

T a ' r i f. *Ko'payuvchi sonlardan biri va ko'paytma son ma'lum bo'lganda, ikkinchi ko'payuvchi sonni topish amaliga bo'lish deyiladi* va u quyidagicha yoziladi *a·x=c, x=c:a, x* – bo'linma, *c* - bo'linuvchi, *a* - bo'luvchi deb yuritiladi. Yuqoridagi misolda esa 625 - bo'linuvchi, 5 - bo'luvchi, *x* - bo'linma deb ataladi.

Har qanday natural sonni 0 soniga bo'lish mumkin emas, chunki 0·*x*=*c* tenglikni qanoatlantiradigan *x* sonini topish mumkin emas. Demak, *x*=*x*:0 tenglikning bo'lishi mumkin emas.

Bizga ma'lumki, qo'shish amaliga nisbatan qarama-qarshi amal ayirishni va bu ko'paytirishga nisbatan teskari amal bo'lishni quyidagi sxema orqali ko'rsatish ham mumkin:

35-Chizma

$$3+5=8$$

$$3+x=8 \qquad\qquad u+5=8$$

$$x=8-3=5 \qquad\qquad u=8-5=3$$

$$5\cdot 4=20$$

$$x\cdot 4=20 \qquad\qquad 5\cdot y=20$$

$$x=20:4=5 \qquad\qquad y=20:5=4$$

Bu sxemani jadval tarzida ham berish mumkin.

To'g'ri amallar	qarama-qarshi amal
qo'shish	Ayirish
3 + 5 = 8	1. 8 – 3 = 5 2. 8 – 5 = 3
ko'paytirish	Teskari amal bo'lish
5 x 4 = 20	1. 20 : 4 = 5 2. 20 : 5 = 4

2-§. Natural sonlar to'plamini kengaytirish.

Bu mavzuni tushuntirish jarayonida o'qituvchi o'quvchilarga koordinata nurining har bir nuqtasiga bittadan natural son mos kelmasligini, ya'ni koordinata nuridagi nuqtalar to'plamini ortib qolishini ko'rgazmali asosda tushuntirishi lozimdir. Bu mulohazaga ko'ra natural sonlar to'plamini yanada kengaytirish va natijada yangi sonlar to'plamini hosil qilish ehtiyoji zarur ekanligini o'qituvchi yana bir marta o'quvchilarga tushuntirishi lozim. Bundan tashqari o'qituvchi natural sonlar to'plamida har doim qo'shish va ko'paytirish amallarini bajarish mumkin, ammo ayirish va bo'lish amallarini har doim ham bajarish mumkin emasligini misollar yordamida ko'rsatish kerak.

Masalan, 5 + 3 = 8, 2 · 7 = 14. Bu erda hosil qilingan 8 yig'indi va ko'paytma 14 sonlar natural sonlar to'plamida mavjuddir, ammo 3 - 5 ayirmada chiqadigan - 2 soni natural sonlar to'plamida mavjud emas, bu natural sonlar to'plamida har doim ham ayirish amalini bajarish mumkin emas degan so'zdir. Umuman olganda natural sonlar to'plamida X + M = P ko'rinishdagi tenglama P=M bo'lgan holda yechimga ega emas. X+M=P tenglama yechimi X = P – M P ≤ M bo’lganda ham o’rinli bo’lishi uchun 0 soni va barcha butun manfiy sonlar to’plami degan tushuncha kerakdir, shuning uchun ham natural sonlar to’plamini kengaytirish orqali boshqa yangi sonlar to’plamini hosil qilish g’oyasi kelib chiqadi.

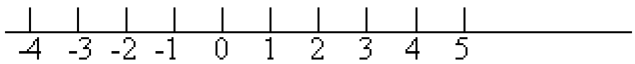
3-§. Butun sonlar va ular bilan to’rt amalni bajarish metodikasi.

5 - sinfda "Koordinata to’g’ri chizig’i" nomli mavzu o’tiladi, ana shu mavzuni o’tish uchun sanoq boshi degan tushuncha kiritilgan bo’lib, shu sanoq boshi nomli nuqtani 0 (nol) soni bilan belgilangan.

0 so’zi lotincha nallrse - so’zidan olingan bo’lib "hech qanday qiymatga ega bo’lmagan" degan ma’noni bildiradi. Nol soni natural sonlar to’plamiga kirmaydigan qiymatsiz son hisoblanadi. Matematikadan bo’sh to’plam tushunchasini ham 0 soni bilan ifodalanadi.

To’g’ri chiziqdagi sanoq boshi deb ataluvchi 0 nuqtadan unga 1, 2, 3 sonlari, chapga esa -1, -2, -3, ... sonlarni yozish va chapdagi sonlarni "minus bir", "minus ikki", "minus uch" ... deb o’qishga kelishilgan. 0 soni to’g’ri chiziqda musbat va manfiy sonlarni ajratib turadi. 0 sonidan o’ng tomonidagi natural sonlarni butun musbat sonlar, chap tomondagi sonlarni esa butun manfiy sonlar deb ataladi. Yuqoridagi mulohazalarga ko’ra butun sonlar to’plamiga quyidagicha ta’rif berish mumkin.

T a ‘ r i f. Barcha natural, butun manfiy va nol sonlari birgalikda butun sonlar to’plami deyiladi (35-chizma).



35-Chizma

Bu erda natural sonlarga nisbatan qarama-qarshi sonlar barcha butun manfiy sonlardir, masalan, 1 va - 1, 2 va -2, 3 va -3, -.... qarama-qarshi sonlar barcha butun manfiy sonlardir;

Butun sonlar to’plamida faqatgina 0 soniga nisbatan qarama-qarshi bo’lgan son yo’qdir:

$$0 = 0 + 0$$

Maktab matematika kursida manfiy son tushunchasi kiritilganidan keyin sonning moduli tushunchasi ham kiritiladi.

T a ‘ r i f. *Musbat sonning moduli o’ziga teng.*

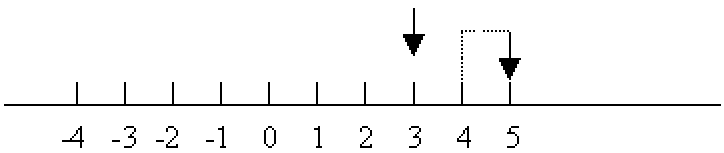
$$|a| = a. \ |5| = 5.$$

T a ‘ r i f. Manfiy sonning moduli o’ziga qarama-qarshi songa teng.

$$|-a| = a. \ |-5| = 5.$$

Butun sonlar bilan to’rt amalning bajarilishini ko’rib chiqaylik.

1. Butun sonlar bilan qo’shish amali quyidagicha bajariladi, masalan 3 soniga 2 sonini qo’shaylik (36-chizma).



36-Chizma

37-Chizma

Butun sonlar qatorida 3 sonini belgilab, undan o’ngga qarab ikkita sonni sanaymiz. Natijada 5 soni hosil bo’ladi, demak, 3 + 2 = 5

2. -2 soniga -3 sonini qo’shing (37-chizma).

Butun sonlar to’plamidan -2 sonini belgilab, undan chapga qarab uchta sonni sanaymiz, natijada -5 soni hosil bo’ladi, demak, (–2) + (–3) = – 5

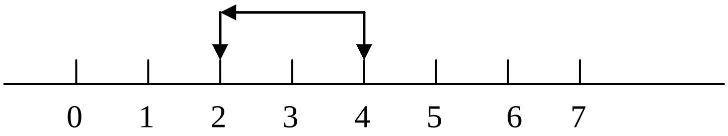
Q o i d a.

Bir xil ishoradagi butun sonlarni o'zapo qo'shish uchun ularning modullarini o'zaro qo'shib yig'indi son oldiga qo'shiluvchilar oldidagi ishora qo'yiladi.

Masalan. 5 + 4 = + (5 + 4) = +9 = 9

$$(-3) + (-2) = -(3 + 2) = -5$$

3. 4 soniga -2 sonini qo'shing. Buning uchun butun sonlar qatorida 4 sonini belgilab, undan chapga qarab ikkita sonni sanaymiz, hosil bo'lgan son izlanayotgan son bo'ladi (38-chizma)



38-chizma.

Q o i d a. *Ishoralari har xil bo'lgan butun sonlarni o'zaro qo'shish uchun ularning kattasini modulidan kichigini ayirib, katta son ishorasi qo'yiladi.*

1) 5 + (–3) = 5 – 3 = +2 = 2

2) (–8) + 3 = –(8 – 3) = –5.

Bu erda |8| > 3, shuning uchun yig'indi son manfiy bo'ladi.

I. O'zaro qarama-qarshi sonlar yig'indisi esa nolga teng.

$$a + (-a) = 0$$

Masalan, $5 + (-5) = 0$

II. Butun sonlar ustida ayirish amali quyidagicha bajariladi. Bir butun sondan ikkinchi butun sonni ayirish uchun kamayuvchiga ayiriluvchiga qarama-qarshi sonni qo'shish kerak, ya'ni $(a - b) + b = a$.

1) 25 – 9 = 16; 2) –15 – 30 = –15 + (–30) = – 45;

3) –12 – (–13) = –12 + 13 = 1.

1. Har xil ishorali ikkita butun sonni ko'paytirish uchun bu sonlarning modulini ko'paytirish va hosil bo'lgan son oldiga "minus" ishorasini qo'yish kerak:

$$a(-b) = -(ab) = -ab$$

$$2\cdot(-3) = -(2\cdot3) = -6\ ,$$

2. Ikkita butun manfiy conni o'zaro ko'paytirish uchun ularning modullarini o'zaro ko'paytirish kerak:

$$(-a)\cdot(-b) = a\cdot b.$$

$$(-5)\cdot(-3) = 5\cdot3 = 15.$$

3. Agar ko'paytuvchilardan biri nolga teng bo'lsa, u holda ko'paytma nolga teng bo'ladi:

$$a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$$

IV. Butun sonlarni bo'lish amali quyidagicha bajariladi.

1. Butun manfiy sonni manfiy conga bo'lish uchun bo'linuvchining modulini bo'luvchining moduliga bo'lish kerak:

$$(-a) : (-b) = |-a| : |-b| = a : b;$$

$$(-81):(-3) = |-81| : |-3| = 81 : 3 = 27$$

2. Hap xil ishorali ikkita butun sonni o'zaro bo'lish uchun bo'linuvchining modulini bo'luvchining moduliga bo'lish va hosil bo'lgan sonning oldiga "minus" ishorasini qo'yish kerak:

$$(-a) : b = |-a| : b = -\frac{a}{b}\ (-15) : 3 = |-15| : 3 = -5$$

3. Nolni nolga teng bo'lmagan har qanday butun songa bo'lishda nol soni hosil bo'ladi:

$$0 : a = 0$$

4. Ixtiyoriy butun sonni nol soniga bo'lish mumkin emas:

$a : 0$ = ma'nosizlik

4-§. Kasr son tushunchasini kiritish va uni o'rgatish metodikasi.

Butun sonlar to'plamida har doim qo'shish, ayirish, ko'paytirish amallarini bajarish o'rinlidir, lekin bo'lish amali har doim bajarilavermaydi. Chunki bir butun sonni ikkinchi butun songa bo'lganda har doim bo'linmada butun son hosil bo'lavermayda.

Masalan, 7:2 = 3.5, 9:4 = $2\frac{1}{4}$, ... Bu erda hosil qilingan bo'linmadagi 3,5; $2\frac{1}{4}$, ... sonlari butun sonlar to'plamida mavjud emas. Umuman olganda $m\cdot x=n,\ m\neq 0$ ko'rinishdagi tenglamaning yechimi butun sonlar to'plamida har doim mavjud emas, bu tenglama har doim $x=\frac{n}{m}$ ko'rinishdagi yechimga ega bo'lishi uchun kasr tushunchasini kiritish orqali butun sonlar to'plamini kengaytirib, unga barcha manfiy va musbat kasr sonlarni qo'shish kerak. Bu degan so'z $\left\{-\frac{p}{q},0,\frac{p}{q}\right\}$ ko'rinishdagi ratsional sonlar to'plamini hosil qilish kerak deganidir. Shundagina $mx=n$ ko'rinishdagi tenglamalar har doim yechimga ega bo'ladi. Bu erda r va q lar natural sonlardir. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra ratsional songa quyidagicha ta'rif berish mumkin: $\frac{p}{q}$ *ko'rinishdagi qisqarmas kasrga ratsional son deyiladi.*

Endi kasr tushunchasini kiritish uchun foydalaniladigan misollarni ko'rib o'taylik.

Agar bir metr uzunlikdagi yog'ochni o'zaro teng ikki bo'lakga bo'linsa, u holda bo'laklarning har birining uzunligi ana shu yog'och uzunligining yarmiga teng bo'ladi va uni $\frac{1}{2}$ kabi yoziladi. Agar ana shu bir metr uzunlikdagi yog'ochni o'zaro teng uch bo'lakka bo'linsa, u holda bo'laklardan har birining uzunlngi shu yog'och uzunligining uchdan biriga teng bo'ladi va uni $\frac{1}{3}$ kabi yoziladi. Xuddi shuningdek, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ ...

Agar bir metr uzunlikdagi yog'ochni teng uch bo'lakka bo'lib, undan ikki qismini oladigan bo'lsak, olingan uzunligini $\frac{2}{3}$ kabi yoziladi.

Agar ana shu yog'ochni to'rt bo'lakga bo'lib, undan uch qismini olsak, olingan qism uzunligini $\frac{3}{4}$ kabi ifodalanadi. Yuqorida qilingan mulohazalarga asoslanib kasr tushunchasining ta'rifini quyidagicha berish mumkin.

T a ' r i f. *Butun sonning o'zaro teng bo'lgan ma'lum bir ulushi, shu sonning kasri deyiladi.*

Yuqorida $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ kasr sonlarni hosil qildik. Berilgan narsalarni yoki butun sonni qancha teng qismga bo'linganligini ko'rsatuvchi sonni kasrning *maxraji*, shunday qismdan nechtasi olinganligini ko'rsatuvchi sonni kasrning *surati* deyiladi. Maxraj kasr chizig'ining ostida, surat esa kasr chizig'ining ustiga yoziladi.

Umumiy holda kasrni $\frac{p}{q}$ ko'rinishda ifodalanadi. Bunda r - kasrning surati, q - kasrning maxraji deb yuritiladi. $\frac{p}{q}$ ko'rinishdagi kasrlarga qarama-qarshi kasrlarni $-\frac{p}{q}$ ko'rinishda ifodalanadi.

Koordinata o'qida $-\frac{p}{q}$ ko'rinishdagi kasrlar nol sonidan chapda joylashgan bo'ladi. Biz butun sonlar to'plamini kengaytirish orqali $-\frac{p}{q}$ va $\frac{p}{q}$ ko'rinishdagi kasrlarni hosil qildik. Natijada koordinata o'qida $\{-\frac{p}{q}, 0, \frac{p}{q}\}$ ko'rinishdagi sonlar to'plami hosil bo'ldi.

Bunday to’plam ***ratsional sonlar to’plami*** deb ataladi. Agar ratsional sonlar to’plamidagi $-\frac{p}{q}$ va $\frac{p}{q}$ kasrlarning maxrajlari q = 1 desak, bizga ma’lum bo’lgan butun sonlar to’plami hosil bo’ladi. Bundan ko’rinadiki, butun sonlar ratsional sonlar to’plamining xususiy bir holi ekan. Ratsional sonlar to’plami bilan koordinata to’g’ri chizig’i nuqtalari orasida o’zaro bir qiymatli moslik o’rnatish mumkinmi, degan savol tug’ilishi tabiiydir. Bu savolga quyidagicha javob berishimiz mumkin, aksincha, har bir nuqtaga bittadan ratsional soni mos keltirish mumkin emas.

Kasrlar uch xil bo’ladi:

1. To’g’ri kasrlar. 2. Noto’g’ri kasrlar. 3. O’nli kasrlar.

1. Agar kasrning surati uning maxrajidan kichik bo’lsa, bunday kasrlarni ***to’g’ri kasrlar*** deyiladi.

Masalan: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}$ ....

2. Agar kasrning surati uning maxrajidan katta bo’lsa, bunday kasrlarni ***noto’g’ri kasrlar*** deyiladi. Masalan, $\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{17}{5}$ ... .

3. Agar kasrning maxraji bir va nol sonlaridan iborat bo’lsa, bunday kasrlarni ***o’nli kasrlar*** deyiladi. Masalan, $\frac{1}{10}$=0,1; $\frac{1}{100}$=0,01; ... .

Kasr tushunchasi kiritilganidan keyin kasrlarning tengligi tushunchasi kiritiladi. Bu tushunchani o’quvchilarga quyidagicha tushuntirish mumkin.

Faraz qilaylik, bizga bir metr uzunlikdagi kesma be-rilgan bo’lsin. Agar shu kesmani teng ikkiga bo’lsak, har bir kesmaning uzunligi $\frac{1}{2}$ kabi kasr bilan ifodalanadi. Endi bo’lingan hap bir kesmani yana ikkiga bo’lsak har bir kesma-ning uzunligi $\frac{1}{4}$ kasr bilan ifodalanadi. Ana shu teng to’rtga bo’lingan kesmalardan ikkitasining uzunligi $\frac{2}{4}$ kasr bilan ifodalanadi. Bu esa butun kesma uzunligining teng ikkiga bo’lgandagi $\frac{1}{2}$ kasr bilan ifodalangan qiymatiga tengdir. Shuning uchun $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\dots$. Bundan ko’rinadiki, $\frac{1}{2}$ va $\frac{2}{4}$ kasrlarning qiymatlari teng bo’lib, ularni ifoda qilish har xildir.

O’quvchilarga kasrlarning tengligi tushunchasini tushuntirilganidan so’ng kasrning quyidagi xossalarini ifoda qilish mumkin.

1 - x o s s a. Agar kasrning surat va maxrajini bir xil songa ko’paytirilsa, kasrning qiymati o’zgarmaydi. $\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\cdot\frac{n}{n}$. 1) $\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{2}=\frac{4}{10}$;

2) $\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{4}=\frac{12}{28}$; 3) $1=\frac{1}{1}=\frac{1}{1}\cdot\frac{4}{4}=\frac{4}{4}=\frac{4\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{100}{100}$.

II - x o s s a. Agar kasrning surat va maxrajini bir xil songa bo’linsa, kasrning qiymati o’zgarmaydi. $\frac{p:n}{q:n}=\frac{p}{q}$ Bu erda *n* > *1* bo’lishi kerak.

M i s o l l a r 1) $\frac{4}{8}=\frac{4}{4\cdot 2}=\frac{1}{2}$ 2) $\frac{15}{3}=\frac{3\cdot 5}{3}=\frac{5}{1}=5$

III - x o s s a. Agar kasrning surat va maxrajidagi sonlar umumiy bo’luvchilarga ega bo’lmasa, u holda bunday kasr qisqarmas kasr bo’ladi. Masalan $\frac{5}{7},\frac{4}{5},\frac{17}{19}$,.... qisqarmas kasrlardir, chunki 5 va 7, 4 va 5, 17 va 19 sonlari o’zaro umumiy bo’luvchilarga ega emas.

5-§. Kasrlarni taqqoslash.

1. Kasrlarni o'zaro taqqoslash uchun berilgan kasrlarni o'zaro bir xil maxrajli kasrlar holiga keltirish kerak, so'ngra ulardan qaysi birining surati katta bo'lsa, o'sha kasrning qiymati katta bo'ladi.

Masalan: $\frac{3}{4}$ va $\frac{2}{5}$; $\frac{3\cdot5}{4\cdot5}=\frac{15}{20}$ va $\frac{2\cdot4}{5\cdot4}=\frac{8}{20}, \frac{15}{20}>\frac{8}{20}$, shuning uchun $\frac{3}{4}>\frac{2}{5}$. Bu erda kasrning surati va uning maxrajini bir xil songa ko'paytirilsa, kasrning qiymati o'zgarmaydi degan xossadan foydalandik.

2. Suratlari bir xil va maxrajlari har xil bo'lgan kasrlardan qaysi birining maxraji katta bo'lsa, o'sha kasr kichik bo'ladi. Qaysi birining maxraji kichik bo'lsa, o'sha kasr katta bo'ladi.

Masalan: $\frac{4}{15}$ va $\frac{4}{21}$ lar uchun $\frac{4}{15}>\frac{4}{21}$.

6-§. Kasrlarni qo'shish.

Faraz qilaylik, bizga AB kesma berilgan bo'lsin, biz uni teng ettiga bo'laylik, ulardan AC=$\frac{1}{7}$, CD=$\frac{3}{7}$, AD=$\frac{4}{7}$ bo'lsin, u holda AD kesmaning qiymati AC va CD kesmalar uzunliklarining yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni AD=AC+CD. Shu bilan birga $\frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$. Yuqoridagi mulohazaga ko'ra quyidagi qoidani yozishimiz mumkin.

I. Maxrajlari bir xil bo'lgan kasrlarni qo'shish uchun ularning suratlarini o'zaro qo'shib, maxrajlaridan bittasini yozish kifoya.

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{q}=\frac{p+r}{q}; \qquad \frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{4}{5}.$$

II. Maxrajlari har xil bo'lgan kasrlarni qo'shish uchun ularni eng kichik umumiy maxrajga keltirib, bir xil maxrajli kasrlarni qo'shish qoidasidan foydalanib, qo'shish kifoya:

1) $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{2\cdot7}{5\cdot7}+\frac{3\cdot5}{7\cdot5}=\frac{14}{35}+\frac{15}{35}=\frac{14+15}{35}=\frac{29}{35}$;

2) $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3\cdot6}{4\cdot6}+\frac{1\cdot4}{6\cdot4}=\frac{18}{24}+\frac{4}{24}=\frac{18+4}{24}=\frac{22}{24}=\frac{11}{12}$;

Umumiy holatda esa $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{p\cdot s}{q\cdot s}+\frac{r\cdot q}{s\cdot q}=\frac{ps+rq}{sq}$.

III. Yig'indida butun son chiqadigan kasrlarni qo'shish quyidagicha amalga oshiriladi:

1) $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3+1}{4}=\frac{4}{4}=1$;

2) $\frac{1}{8}+\frac{7}{8}=\frac{1+7}{8}=\frac{8}{8}=1$;

3) $\frac{2}{4}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}+\frac{2\cdot1}{2\cdot2}=\frac{2+2}{4}=\frac{4}{4}=1$;

IV. Butun sonni kasrga qo'shish

1) $3+\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$;

2) $3+\frac{1}{2}=\frac{3}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3\cdot2}{1\cdot2}=\frac{6+1}{2}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$;

V. Aralash sonni kasrga qo'shish

$$3\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=3+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=3+\left(\frac{3}{4}+\frac{1\cdot2}{2\cdot2}\right)=3+\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\right)=3+\left(\frac{3+2}{4}\right)=3+\frac{5}{4}=4+\frac{1}{4}=4\frac{1}{4}.$$

VI. Aralash sonni aralash songa qo'shish:

$$2\frac{1}{3}+3\frac{1}{2}=(2+3)+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right]=5+\left[\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}\right]=5+\frac{2+3}{6}=5+\frac{5}{6}=5\frac{5}{6}.$$

Qo'shish qonunlari.

1. Kasr qo'shiluvchilarning o'rni almashgani bilan yig'indi kasr sonning qiymati o'zgarmaydi :

$$\frac{a}{q}+\frac{b}{q}=\frac{a+b}{q}=\frac{b+a}{q}=\frac{b}{q}+\frac{a}{q}.$$

Misol:

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{1+3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}.$$

2. Kasr sonlarda qo'shish amaliga nisbatan gruppalash qonuni o'rinlidir:

$$\left(\frac{a}{q}+\frac{b}{q}\right)+\frac{c}{q}=\frac{a}{q}+\left(\frac{b}{q}+\frac{c}{q}\right).$$

Isboti:

$$\left(\frac{a}{q}+\frac{b}{q}\right)+\frac{c}{q}=\frac{a+b}{q}+\frac{c}{q}=\frac{(a+b)+c}{q}=\frac{c+(b+a)}{q}=\frac{a}{q}+\frac{b+c}{q}=\frac{a}{q}+\left(\frac{b}{q}+\frac{c}{q}\right).$$

Misol:

$$\frac{1}{7}+\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{7}\right)+\frac{3}{5}=\frac{1+2}{7}+\frac{3}{5}=\frac{3}{7}+\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 5}+\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{15+21}{35}=\frac{36}{35}.$$

7-§. Kasrlarni ayirish.

1) Faraz qilaylik, bizga AB kesma berilgan bo'lib, u teng 7 bo'lakka bo'lingan bo'lsin. Ulardan AC=$\frac{1}{7}$, CD=$\frac{3}{7}$, AD=$\frac{4}{7}$ larga teng bo'lsin. *CD* kesmaning qiymati *CD=AD–AC* bo'ladi, u holda $\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$ tenglik o'rinli.

2) Karim ikki mashinadagi yukni $\frac{5}{7}$ soatda tushirdi. U birinchi mashinadagi yukni $\frac{3}{7}$ soatda tushirib bo'ldi. Karim ikkinchi mashinadagi yukni necha soatda tushirgan? $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$. Topilgan natijani to'g'riligini tekshirish qo'shish amali orqali amalga oshiriladi:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$$

Endi kasrlarni ayirish uchun chiqarilgan quyidagi qoidalarni ko'rib chiqamiz:

1. *Maxrajlari bir xil bo'lgan kasrlarni ayirish uchun ularning suratlarini o'zaro ayirib, maxrajlardan bittasini maxraj qilib yozish kifoya.*

1) $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3-1}{5}=\frac{2}{5}$; 2) $\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{4-3}{7}=\frac{1}{7}$;

2. Maxrajlari har xil bo'lgan kasrlarni ayirish uchun ularni eng kichik umumiy maxrajga keltirib, bir xil maxrajli kasrlarni ayirish qoidasidan foydalaniladi:

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 7}-\frac{2\cdot 4}{7\cdot 4}=\frac{21-8}{28}=\frac{13}{28}.$$

Umumiy holda:

$$\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{p\cdot s}{q\cdot s}-\frac{r\cdot q}{s\cdot q}=\frac{ps-rq}{sq}.$$

III. Butun sondan kasrni ayirish:

1- usul. $4-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{1}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{12}{3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{12-2}{3}=\dfrac{10}{3}.$

2- usul $4-\dfrac{2}{3}=3+\left(\dfrac{3}{3}-\dfrac{2}{3}\right)=3+\left(\dfrac{3-2}{3}\right)=3+\dfrac{1}{3}=3\dfrac{1}{3}.$

IV. Kasrdan butun sonni ayirish:

$$\frac{3}{7}-2=-\left(2-\frac{3}{7}\right)=-\left(\frac{2\cdot 7}{1\cdot 7}-\frac{3}{7}\right)=-\left(\frac{14}{7}-\frac{3}{7}\right)=-\frac{14-3}{7}=-\frac{11}{7}=-1\frac{4}{7}.$$

V. Butun sondan aralash sonni ayirish:

$$5-2\frac{1}{4}=4\frac{5}{5}-2\frac{1}{4}=(4-2)+\left(\frac{5}{5}-\frac{1}{4}\right)=2+\left(\frac{5\cdot 4}{5\cdot 4}-\frac{1\cdot 5}{4\cdot 5}\right)=$$

$$=2+\frac{20-5}{20}=2+\frac{15}{20}=2+\frac{3}{4}=2\frac{3}{4}.$$

VI. Aralash sondan butun sonni ayirish:

1) $3\dfrac{3}{4}-2=(3-2)+\left(\dfrac{3}{4}-0\right)=1+\dfrac{3}{4}=1\dfrac{3}{4}.$

2) $3\dfrac{3}{4}-2=\dfrac{15}{4}-\dfrac{2}{1}=\dfrac{15}{4}-\dfrac{2\cdot 4}{1\cdot 4}=\dfrac{15-8}{4}=\dfrac{7}{4}=1\dfrac{3}{4}.$

VII. 1 sonidan kasr sonni ayirish:

$$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{1}-\frac{3}{4}=\frac{1\cdot 4}{1\cdot 4}-\frac{3}{4}=\frac{4-3}{4}=\frac{1}{4}.$$

VIII. 1 sonidan aralash sonni ayirish:

1 -usul.

$$1-3\frac{1}{2}=-\left(3\frac{1}{2}-1\right)=\left[(3-1)+\left(\frac{1}{2}-0\right)\right]=-\left(2+\frac{1}{2}\right)=-2\frac{1}{2}.$$

2 -usul. $1-3\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{7}{2}=\dfrac{1\cdot 2}{1\cdot 2}-\dfrac{7}{2}=\dfrac{2-7}{2}=\dfrac{-5}{2}=-2\dfrac{1}{2}.$

8-§. Kasrlarni ko’paytirish.

1. Kasrni butun songa ko’paytirish uchun shu butun sonni kasrning suratiga ko’paytirish kifoya:

1) $\dfrac{5}{17}\cdot 3=\dfrac{5\cdot 3}{17}=\dfrac{15}{17}$; 2) $\dfrac{2}{9}\cdot(-4)=\dfrac{2\cdot(-4)}{9}=-\dfrac{8}{9}$. Ko’paytirish qoidasiga ko’ra $\dfrac{5}{17}\cdot 3,\ \dfrac{2}{9}\cdot(-4)$ ifodalarni quyidagicha yozish mumkin:

1) $\dfrac{5}{17}\cdot 3=\dfrac{5}{17}+\dfrac{5}{17}+\dfrac{5}{17}=\dfrac{5+5+5}{17}=\dfrac{15}{17}$;

2) $\dfrac{2}{9}\cdot(-4)=-\dfrac{2}{9}\cdot 4=-\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{9}=-\left(\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{9}\right)=-\dfrac{8}{9}.$

2. Aralash sonni butun songa ko’paytirish uchun aralash sonni noto’g’ri kasrga aylantirib, butun sonni uning suratiga ko’paytirish kifoya:

1. a) $2\dfrac{1}{2}\cdot 3=\dfrac{2\cdot 2+1}{2}\cdot 3=\dfrac{5}{2}\cdot 3=\dfrac{5\cdot 3}{2}=\dfrac{15}{2}=7\dfrac{1}{2}.$

b) $2\dfrac{1}{2}\cdot 3=2\dfrac{1}{2}+2\dfrac{1}{2}+2\dfrac{1}{2}=6+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=$

$$=6+\left(\frac{1+1+1}{2}\right)=6+\frac{3}{2}=7\frac{1}{2}.$$

2. a) $3\frac{3}{4}(-2)=\frac{3\cdot 4+3}{4}\cdot(-2)=\frac{15}{4}\cdot(-2)=\frac{15\cdot(-2)}{4}=$

$$=-\frac{30}{4}=-\frac{15\cdot 2}{2\cdot 2}=-\frac{15}{2}=-7\frac{1}{2}.$$

b) $3\frac{3}{4}(-2)=-3\frac{3}{4}\cdot 2=-3\frac{3}{4}+\left(-3\frac{3}{4}\right)=-\left(3\frac{3}{4}+3\frac{3}{4}\right)=$

$$=-\left(6+\frac{3+3}{4}\right)=-\left(6+\frac{6}{4}\right)=-7\frac{1}{2}.$$

3. Kasrni kasrga ko'paytirish uchun ularning suratlarini suratlariga va maxrajlarini maxrajlariga ko'paytirish kifoya:

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}=\frac{p\cdot s}{q\cdot r}.$$

M i s o l:

1) $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{9}=\frac{2\cdot 5}{7\cdot 9}=\frac{10}{63}$; 2) $\frac{7}{11}\cdot\frac{2}{5}=\frac{7\cdot 2}{11\cdot 5}=\frac{14}{55}$;

4. Aralash sonlarni o'zaro ko'paytirish uchun ularning har birini noto'g'ri kasrga aylantirib, suratlarini suratlariga va maxrajlarini maxrajlariga o'zaro ko'paytirish kifoya:

1) $2\frac{1}{3}\cdot 4\frac{2}{5}=\frac{7}{3}\cdot\frac{22}{5}=\frac{7\cdot 22}{3\cdot 5}=\frac{154}{15}=10\frac{4}{15}.$

2) $7\frac{2}{3}\cdot 2\frac{1}{2}=\frac{23}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{23\cdot 5}{3\cdot 2}=\frac{115}{6}=19\frac{1}{6}.$

Kasrlarni ko'paytirish o'rin almashtirish, gruppalash va taqsimot qonunlariga bo'ysunadi.

1. Kasrlarni ko'paytirishda ko'paytuvchilarning o'rin almashgani bilan ko'paytmaning qiymati o'zgarmaydi:

1) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 7}=\frac{8}{21}$;

2) $\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{21}.$

2. Kasrlarni ko'paytirishda ularni gruppalab ko'paytirilsa, ko'paytmaning qiymati o'zgarmaydi:

1) $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{3}{7}=\left(\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\cdot\frac{3}{7}=\frac{8}{15}\cdot\frac{3}{7}=\frac{24}{105}.$

2) $\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}=\left(\frac{3\cdot 2}{7\cdot 3}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{6}{21}\cdot\frac{4}{5}=\frac{6\cdot 4}{21\cdot 5}=\frac{24}{105}.$

3. Kasrlarni ko'paytirishda ularga taqsimot qonunini tadbiq qilinsa, ko'paytmaning qiymati o'zgarmaydi:

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{(a+b)p}{cd}==\frac{ap+bp}{cd}.$$

M i s o l.

1) $\left(\frac{4+3}{9}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{(4+3)\cdot 4}{9\cdot 5}=\frac{4\cdot 4+3\cdot 4}{9\cdot 5}=\frac{16+12}{45}=\frac{28}{45}$;

2) $\left(\frac{7+2}{11}\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{(7+2)\cdot 2}{11\cdot 3}=\frac{7\cdot 2+2\cdot 2}{11\cdot 3}=\frac{14+4}{11\cdot 3}=\frac{18}{33}$;

9-§. Kasrlarni bo'lish.

5-sinf matematika kursida kasrlarni bo'lish mavzusi o'tiladi. Bizga butun sonlar mavzusidan ma'lumki, ikkita butun sonni o'zaro bo'lish uchun birinchisini ikkinchi sonning teskarisiga ko'paytirish kerak edi. Xuddi shuningdek, ikki kasr sonni ham o'zaro bo'lish uchun birinchi kasrni ikkinchi kasrning teskarisiga ko'paytirish kerak, ya'ni: $\frac{15}{27}:\frac{2}{3}=\frac{15}{27}\cdot\frac{3}{2}=\frac{45}{54}$. Bu qoidani quyidagi masala orqali o'quvchilarga tushuntirish maqsadga muvofiqdir.

M a s a l a. $\frac{6}{7}$ bo'lagi (qismi) 30 ga teng bo'lgan sonni toping.

Ye ch i sh. Noma'lum sonni x bilan belgilasak, u holda masala shartini quyidagicha yozish mumkin: $\frac{6}{7}\cdot x=30$, chunki sonning bo'lagi ko'paytirish amali yordamida topiladi. Bu tenglik bunday yechiladi: $\frac{1}{7}x=30:6=5$. Bundan $x = 5\cdot 7 = 35$ bo'ladi, Demak, izlanayotgan son 35 ekan.

M a s a l a. Futbol maydoni yuzining $\frac{3}{4}$ qismi o'yin o'ynash uchun tayyor holga keltirildi. Bu 960 m^2 ni tashkil qiladi. Futbol maydonning yuzi kancha?

Ye ch i sh. Futbol maydonning yuzini x bilan belgilasak, shartga ko'ra bu maydonning $\frac{3}{4}$ qismi 960 m^2 edi, shuning uchun $\frac{3}{4}x$ = 960 tenglik o'rinli bo'ladi. x ni topish uchun tenglamaning ikkala qismini $\frac{3}{4}$ ga bo'lish kerak. Demak, $x=960:\frac{3}{4}=960\cdot\frac{4}{3}=320\cdot 4=1280$ m^2.

Futbol maydonining yuzi 1280 m^2 ekan.

Berilgan kasrning qiymati bo'yicha sonning o'zini topishda ham sonning kasrni topishdek, turli hollarni ko'rib o'tish maqsadga muvofiqdir. Sonni kasrga bo'lish ta'rifi butun sonlarni bo'lish ta'rifidek ifodalanadi. Bu qoidani o'quvchilarga alohida ta'kidlab tushuntirish maqsadga muvofiqdir. Shundan keyin kasrlarni bo'lishga doir quyidagi hollarni ko'rib chiqish foydalidir.

1. Kasrni butun songa bo'lish uchun kasrni o'z holicha, butun sonni esa teskari yozib, ularni o'zaro ko'paytirish kifoya:

$$\frac{5}{7}:4=\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5\cdot 1}{7\cdot 4}=\frac{5}{28}.$$

2. Aralash sonni butun songa bo'lish uchun aralash sonni noto'g'ri kasrga aylantirib, so'ngra bo'lish kasrni butun songa bo'lishdek bajariladi:

$$2\frac{5}{7}:4=\frac{19}{7}:4=\frac{19}{7}\cdot\frac{1}{4}=\frac{19}{28}.$$

3. Butun sonni aralash songa bo'lish uchun butun sonni o'z holicha yozib aralash sonni noto'g'ri kasrga aylantirib, ularni o'zaro ko'paytirish kerak.

$$4:1\frac{3}{5}=4:\frac{8}{5}=4\cdot\frac{5}{8}=\frac{20}{8}=2\frac{4}{8}=2\frac{1}{2}$$

4. Aralash sonni aralash songa bo'lish uchun ularning hap birini noto'g'ri kasrlarga aylantirib, so'ngra bo'lishni ikki kasrni o'zaro bo'lish qoidasiga ko'ra bajariladi:

$$2\frac{3}{5}:3\frac{2}{7}=\frac{13}{5}:\frac{23}{7}=\frac{13}{5}\cdot\frac{7}{23}=\frac{13\cdot 7}{5\cdot 23}=\frac{91}{115}$$

10-§. O'nli kasrlar va ular bilan to'rt amalni bajarish metodikasi.

O'nli kasr tushunchasi XV asrda Samarqandlik olim Ali Qushchi tomonidan kiritilgan. U o'zining 1427 yilda yozgan "Hisobot san'atiga kalit", "Arifmetika kaliti" nomli kitobida o'nli kasr tushunchasidan foydalangan.

T a ‘ r i f. *Maxraji o’n yoki uning darajalaridan iborat bo’lgan kasr o’nli kasr deyiladi.*

o’nli kasrlarni bunday belgilash qabul qilingan:

$$\frac{1}{10}=0{,}1; \quad \frac{1}{100}=0{,}01; \quad \frac{1}{1000}=0{,}001; \quad \frac{3}{10}=0{,}3; \quad \frac{3}{1000}=0{,}003; \quad 2{,}15=2\frac{15}{100},\ldots$$

O’nli kasrlarni maxrajsiz yozilganda verguldan o’ngdagi birinchi xonadagi raqam o’ndan birlarni, ikkinchi xonadagilari esa yuzdan birlarni va hokazolarni bildiradi. Masalan, 6,732 o’nli kasrda verguldan keyingi sonlarni turgan o’rniga qarab kasr ko’rinishda quyidagicha ifodalash mumkin: $\frac{7}{10}$; $\frac{3}{100}$; $\frac{2}{1000}$;

O’nli kasrlar uchun quyidagi qoidalar o’rinlidir:

1. Har bir o’nli kasr o’zidan oldingi o’nli kasrga nisbatan o’n marta kattadir. Masalan, $0{,}001=\frac{1}{1000}$; $0{,}01=\frac{1}{100}$; $0{,}1=\frac{1}{10}$;

2. O’nli kasrlarning maxrajlari 10 ning butun ko’rsatkichli darajalaridan, suratlari esa bir xonali sonlardan iborat kasrlarning yig’indisi shakldа ifodalash mumkin.

11-§. O’nli kasrlarni qo’shish va ayirish.

Bu mavzu materialini bayon qilishdan oldin o’qituvchi o’quvchilarga maxrajlari har xil bo’lgan oddiy kasrlarni umumiy maxrajlarga keltirib qo’shish va ayirish haqidagi tushunchani misollar yordamida ko’rsatishi, so’ngra o’nli kasrlarni qo’shish va ayirish haqidagi nazariy va amaliy bilimlarni berishi maqsadga muvofiqdir.

1 - Q o i d a. *O’nli kasrlarni qo’shish uchun bir xil xonalari o’zaro butun sonlar kabi qo’shilib, yig’indida kasrlardagi vergulning tagiga to’g’ri keltirib butun qismi ajratiladi.*

M i s o l.

$$\begin{array}{r} 25{,}382 \\ +\ \ 7{,}200 \\ \hline 32{,}582 \end{array}$$

2-Qoida. *O’nli kasrlarni ayirish uchun kamayuvchining tagiga ayirluvchining verguliga to’g’rilab, o’rin qiymati bir xil bo’lgan raqamlar bir-birini ostiga yozib ayriladi, so’ngra ayirmani butun qismi vergul bilan ajratiladi.*

M i s o l. 1) $\begin{array}{r} 14{,}273 \\ -\ \ 5{,}040 \\ \hline 9{,}233 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 27{,}100 \\ -\ \ 3{,}236 \\ \hline 23{,}864 \end{array}$ 3) 27,1-3,235=?

O’nli kasrlarni ayirish jarayonida quyidagi hollar bo’lishi mumkin: ayiriluvchidagi kasr xonalarining soni kamayuvchidagi kasr xonalaridan ko’p, kamayuvchi va ayiriluvchi o’nli kasrlardagi kasr xonalari soni bir xil, butun sondan o’nli kasrni ayirish, o’nli kasrdan butun sonni ayirish. O’qituvchi bu hollarning har biriga misollar ko’rsatishi kerak.

12-§. O’nli kasrlarni ko’paytirish.

O’nli kasrlarni o’zaro ko’paytirishni oddiy kasrlarni ko’paytirish qoidasiga asoslangan holda tushuntirishi lozim, chunki o’quvchilar o’nli kasrlarni oddiy kasrlarga aylantirish qoidasini biladilar.

M i s o l:

$$3{,}2\cdot 0{,}12=3\frac{2}{10}\cdot\frac{12}{100}=\frac{32}{10}\cdot\frac{12}{100}=\frac{32\cdot 12}{10\cdot 100}=\frac{384}{1000}=0{,}384$$

Ko’paytma kasrning maxrajida nechta nol bo’lsa, uni maxrajsiz yoziladigan o’nli kasrga aylantirganda shuncha kasr xonasi bo’lishini o’quvchilarga tushuntirish lozim.

1) $3{,}2\cdot 0{,}12=\frac{384}{1000}=0{,}384$

2) $2{,}7\cdot 1{,}3=2\frac{7}{10}\cdot 1\frac{3}{10}=\frac{27}{10}\cdot\frac{13}{10}=\frac{351}{10\cdot 10}=\frac{351}{100}=3{,}51$

Ko'rib o'tilgan misollar asosida quyidagi qoidalar tushuntiriladi.

1 - Q o i d a. *O'nli kasrlarni o'zaro ko'paytirish uchun ularning suratlarini suratlariga va maxrajlarini maxrajlariga ko'paytirib, ko'paytuvchi bilan ko'payuvchida jami nechta kasr xonasi bo'lsa, ko'paytmada shuncha xona ajratiladi.* (Bu gap oddiy kasr shakdda yozilgan o'nli kasr haqida aytilgan.)

Masalan,

$$3{,}4\cdot 0{,}25=3\frac{4}{10}\cdot\frac{25}{100}=\frac{34}{10}\cdot\frac{25}{100}=0{,}85$$

2 - Q o i d a. *O'nli kasrlarni o'zaro ko'paytirish uchun ularning verguliga e'tibor bermay, butun sonlar kabi ko'paytirib, ko'payuvchi va ko'paytuvchida hammasi nechta kasr xonasi bo'lsa, ko'paytmaning o'ng tomonidan boshlab sanab shuncha raqamni vergul bilan ajratib qo'yiladi.*

1)
$$\begin{array}{r} 3{,}021\\ \times\ 2{,}51\\ \hline 3021\\ +\ 15105\ \ \\ 6042\ \ \ \ \\ \hline 7{,}58271 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 7{,}124\\ \times\ 3{,}213\\ \hline 21372\\ +\ \ 7124\ \ \\ 14248\ \ \ \ \\ 21372\ \ \ \ \ \ \\ \hline 22{,}889412 \end{array}$$

O'nli kasrlarni o'zaro ko'paytirishda ko'paytirishning ko'payuvchidagi yig'indisiga nisbatan tarqatish qonunini qo'llanishga asoslangan mulohazalarni ham olib borish foydali, buni quyidagicha sxema orqali ham ko'rsatish mumkin. Masalan, 2,37 ni 2 ta birlik, 3 ta o'ndan bir, 7 ta yuzdan birning yig'indisi shaklda yozish mumkin. Yig'indini biror songa ko'paytirish uchun har bir qo'shiluvchini shu songa ko'paytirish va hosil bo'lgan ko'paytmalarni qo'shish, ya'ni 2 birlikni 9 ga, 3 ta o'ndan birni 9 ga, 7 ta yuzdan birni 9 ga ko'paytirib, ko'paytmalarni o'zaro qo'shish kifoya.

$$2{,}37\cdot 9=9\cdot\left(1+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\right)=9+$$

$$+9+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{100}+\frac{9}{100}+\frac{9}{100}+\frac{9}{100}+\frac{9}{100}+\frac{9}{100}=\frac{2133}{100}=21{,}33$$

O'nli kasrlarni 10 ning butun ko'rsatkichli darajalariga ko'paytirishni alohida ko'rib o'tish lozim, ya'ni o'nli kasrni 10 ga, 100 ga, 1000 ga va hokazolarga ko'paytirish uchun bu kasrda vergulni 1, 2, 3, ... raqam o'ngga surish kerak. O'nli kasrlarni 0,1, 0,01, 0,001 ga va hokazolarga ko'paytirish uchun bu kasrlarda vergulni 1, 2, 3, ... raqam chapga surish kifoya.

Masalan: 1) 3,7·100=3,70·100 = 370. Bu misolni quyidagicha tushuntirish mumkin: 3,7 ni 100 ga ko'paytirish uchun, qoidaga ko'ra, 3,7 sonidagi vergulni o'ngga qarab ikki xona surish kerak edi, ammo bizda verguldan keyin bitta son bor, xolos. Shuning uchun 7 sonidan keyin bitta nol qo'yamiz. (Bu erda o'qituvchi o'quvchilarga 3,7 soni 3,70 soniga teng ekanligini tushuntirish va kasr holga keltirib ko'rsatish maqsadga muvofiqdir.)

1) 45,76·0,1=4,576. Bu misolni quyidagicha tushuntirish mumkin. Buning uchun 4576 sonini 1 soniga ko'paytirib hosil bo'lgan ko'paytmada o'ngdan chapga qarab uchta raqamni - ikkala ko'paytuvchida ular nechta bo'lsa, shuncha raqamni vergul bilan ajratamiz. Shunday mulohaza yuritib, 45,76 ni 0,01 ga ko'paytirishda 45,76 sonidan vergulni ikki raqam chapga surish kerakligini ko'rsatamiz.

Masalan: 45,76·0,01 = 0,4576

13-§. O'nli kasrlarni bo'lish.

O’nli kasrlarni bo’lish mavzusida quyidagi uch hol ko’rib o’tiladi: 1) o’nli kasrni butun songa bo’lish. O’nli kasrni butun songa bo’lish butun sonlarni bo’lishga o’xshash bajariladi, bunda qoldiqlar borgan sari kichikroq ulushlarga maydalanib boradi. Masalan,

$$0{,}6 : 4 = 0{,}60 : 4 = 0{,}15.$$

1 - Q o i d a. *O’nli kasrlarni butun songa bo’lish uchun, butun qism bo’luvchiga etadigan bo’lsa, butunini kasr xona almashguncha bo’lib, so’ngra bo’linmada vergul qo’yib bo’lishni davom ettirish kifoya.*

M i s o l :

1)
$$\begin{array}{r|l} -25{,}232 & 4 \\ \cline{2-2} 24 & 6{,}308 \\ \cline{1-1} 12 & \\ -12 & \\ \cline{1-1} 032 & \\ -32 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -25232 & 4000 \\ \cline{2-2} 2400 & 6{,}308 \\ \cline{1-1} -12320 & \\ 12000 & \\ \cline{1-1} -3200 & \\ 3200 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Yuqoridagi misol va qoidalarni tushuntirish jarayonida o’qituvchi o’quvchilarga bo’lish amalining ta’rifini va uni bajarish qoidalarini takrorlashi lozim.

2) **Butun sonni o’nli kasrga bo’lish.** Bu holni ham o’qituvchi o’quvchilarga misol yordamida tushuntirishi kerak. Masalan: 51 : 0,17 = ?
Bu misolni yechishni oddiy kasrlarni bo’lish qoidasi asosida bajarib ko’rsatadi.

Misol:

$$51 : 0{,}17 = 51 : \frac{17}{100} = (51 \cdot 100) : 17 = 5100 : 17 = 300$$

Bu mulohazalarga ko’ra quyidagi qoidani ifodalash mumkin.

Q o i d a. *Butun sonni o’nli kasrga bo’lish uchun bo’luvchidagi o’nli kasrni butun songa aylantirish kerak. Buning uchun bo’luvchining vergul oxiriga suriladi va necha xona surilgan bo’lsa, bo’luvchining o’ng tomoniga shuncha nol qo’yiladi hamda butun sonni butun songa bo’lish kabi bajariladi.*

M i s o l:

351:2,7=3510:27=130
25:6,25=2500:625=4

3) **O’nli kasrni o’nli kasrga bo’lish.** Bu holda ham o’qituvchi o’quvchilarga kasrni kasrga bo’lishning umumiy qoidasini takrorlab, so’ngra o’nli kasrlarni oddiy kasrlar holiga keltirib, kasrlarni o’zaro bo’lish usulidek ko’rsatishi maqsadga muvofiqdir.

Masalan:

$$8{,}51 : 3{,}7 = \frac{851}{100} : \frac{37}{10} = \frac{851 \cdot 10}{100 \cdot 37} = \frac{851}{10} : 37 = 85{,}1 : 37 = 2{,}3$$

Bu misolni yana bunday yechib ko’rsatish ham mumkin:

$$8{,}51 : 3{,}7 = 8{,}51 : \frac{37}{10} = (8{,}51 \cdot 10) : 37 = 85{,}1 : 37 = 2{,}3$$

Yuqoridagi misollardan ko’rinadiki, o’nli kasrni o’nli kasrga bo’lish uchun bo’luvchida qancha kasr xonasi bo’lsa, bo’linuvchi va bo’luvchidagi vergullarni shuncha xona o’ng tomonga so’ramiz, natijada bo’luvchi butun songa aylanadi.
Buning natijasida bo’linuvchi va bo’luvchi bir xil marta ortgani uchun bo’linma o’zgarmaydi.

14-§. Oddiy kasrni cheksiz davriy kasrga aylantirish

2,73 O’nli kasr berilgan bo’lsin. Agar kasrning o’ng tomonidagi qismiga istalgancha nollar yozib qo’yilsa, uning qiymati o’zgarmaydi. 2,73=2,730=2,7300=...=2,7300...0. Shuningdek 2,73 kasrni cheksiz ko’p nollari bo’lgan o’nli kasr ko’rinishida yozish mumkin. Masalan, 2,73 =2,73000... . Bu erda verguldan keyin cheksiz ko’p o’nli xonalar mavjud. Bunday o’nli kasr cheksiz o’nli kasr deyiladi.

Istalgan oddiy kasrni cheksiz o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin. Masalan, 3/14 sonini olib, uning suratini maxrajiga bo'lib ketma-ket o'nli xonalarni hosil qilamiz. Bunda istalgan natural sonni barcha o'nli xonalari nolga teng bo'lgan cheksiz o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkinligini qayd qilib o'tamiz. Masalan, 3 = 3,00000... .

```
_3,00000000…  | 14
  28          |0,214285714…
 _20
  14
 _60
  56
  40
  28
```

Shunday qilib, 3/14 = 0,214285714 ...

Bo'lish davomida chiqqan barcha qoldiqlarni ketma-ket yozib chiqamiz: 2, 6, 4, 12, 8, 10, 2, 6 ... Bu qoldiqlarni barchasi bo'luvchidan, ya'ni 14 sonidan kichik. Bu bo'lishning qaysidir qismida ilgari uchragan qoldiq yana albatta uchrashi kerakligini bildiradi. Bizda ettinchi qadamda 2 qoldiq hosil bo'lib, u birinchi qadamda paydo bo'lgan edi. Bundan tashqari ilgari uchragan qoldiq paydo bo'lgan zaxotiyoq undan keyingi qoldiqlar ular avval qanday tartibda bo'lsa, shunday tartibda takrorlanadilar. Bizning misolimizda 2 qoldiqdan so'ng 6 qoldiq, undan keyin 4, undan keyin 12 keladi va hokazo, ya'ni biz qoldiqlarning quyidagi ketma-ketligini hosil qilamiz: 2, 6, 4, 12, 8, 10, 2, 6, 4, 12, 8, 10, ... Davriy takrorlanuvchi qoldiqlar gruppasi mos ravishda sonning o'nli yozuvidagi davriy takrorlanuvchi raqamlar gruppasiga olib keladi, ya'ni 3/14=0,2142857142857142857... . Sonning o'nli yozuvida verguldan keyingi ketma-ket takrorlanib keluvchi bunday raqamlar gruppasi davr deb ataladi, o'z yozuvida ana shunday davrga ega bo'lgan chekli o'nli kasr davriy kasr deyiladi. Qisqalik uchun davrni bir marta qavs ichiga olib yozish qabul qilingan:

0,2142857142857142857 14...=0,2(142857). Agar davr verguldan keyin boshlansa, bunday kasr *sof davriy kasr* deyiladi, agar vergul va davr orasida boshqa o'nli xonalar bo'lsa, kasr aralash davriy kasr deyiladi. Masalan, 2,(23)=2,2323232323... - sof davriy kasr, 0,2(142857) - aralash davriy kasr, 2,73=2,73000000... = 2,73(0) aralash davriy kasrdir.

15- § . Cheksiz davriy o'nli kasrni oddiy kasrga aylantirish.

Cheksiz o'nli kasrni 10, 100, 1000 va hokazo ko'paytirish uchun chekli o'nli kasr holatidagi kabi vergulni bir, ikki, uch va hokazo xona o'ngga surish kifoya. Masalan, 0,1(23)·100=0,123232323…·100=12, 32323232…=12,(32). Davriy o'nli kasrni oddiy kasrga aylantirishni quyidagi misollar orqali ko'rib chiqaylik.

1. Sonni oddiy kasrga aylantiring: a) 0,(13); b) 2,(273); v) 0,2(54); g) 3,254 (9).

Yechish: a) $x=0,13=0,131313...$ bo'lsin. Sof davriy kasr x ni shunday songa ko'paytiramizki, natijada vergul kasr davri qadar o'ngga suriladi. Davrda ikkita raqam bo'lgani uchun vergulni o'ng tomonga ikki xona surish kerak, buning uchun esa x sonni 100 ga ko'paytirish etarli, u holda $100\cdot x=0,131313...\cdot 100=13,13131313...=13,(13)$ $100x-x=13,(13)\text{-}0,(13)$. Demak, $99x=13,$ bu erdan $x=\dfrac{13}{99}$.

B) $x=2,(273)$ bo'lsin. Bu sof davriy kasrning davrida uchta raqam bor. x ni 1000 ga ko'paytirib, $1000x=2273,(273)$ ni hosil qilamiz. Xuddi yuqoridagiga o'xshash topamiz:

$1000x-x=2273,(273)-2,(273),$ $999x=2271,$ bundan $x=\dfrac{2271}{999}=\dfrac{757}{333}=2\dfrac{91}{333}$

V) $x=0,2(54)$ bo'lsin. Bu aralash davriy kasrda vergulni o'ng tomonga shunday suramizki, natijada sof davriy kasr hosil bo'lsin. Buning uchun x ni 10 ga ko'paytirib qo'yish kifoya. $10x=2,(54)$ ni hosil qilamiz.

y=2,(54) bo'lsin va yuqoridagilarga o'xshash bu sof davriy kasrni oddiy kasrga aylantiramiz. *y=2,(54)* bundan *100y=254(54), 100y–y=254(54)–2,54, 99y=252,* $y=\frac{252}{99}=\frac{28}{11}$ demak, $10x=\frac{28}{11}$, bundan $x=\frac{28}{11\cdot 10}=\frac{11}{55}$

G) *x=3,254(9)* deb *1000x=3254(9)* ni hosil qilamiz. *y=1000x* belgilashni kiritamiz, u holda *y=3254,(9),* bu erdan *10y–y=32549(9)–3254(9); y=3255, 1000x=3255,* $x=\frac{3255}{1000}=3\frac{51}{200}$

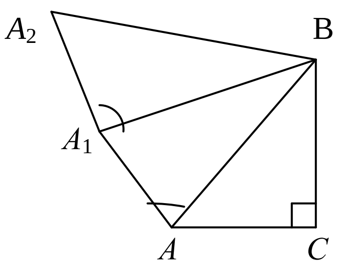
Endi quyidagiga e'tibor beramiz. $\frac{3255}{1000}=3{,}255=3{,}255(0)$ chekli o'nli kasr yoki davrida nol bo'lgan cheksiz kasrni hosil qilamiz.

Demak, *3,254(9)=3,255(0).* Bu hol davrida to'qqiz bo'lgan istalgan kasr ko'rinishida yozish mumkin. Buning uchun davr oldidagi o'nli raqamni bir birlikka ortirish kifoya. Masalan, *0,45(9)=0,46(0); 14,(9) = 15,(0).*

16- § .Irratsional son tushunchasini kiritish metodikasi.

O'quvchilar VII sinfda birinchi marta irratsional son tushunchasi bilan tanishadilar. O'qituvchi bu mavzuni tushuntirishdan oldin o'quvchilarga kvadrat ildiz va arifmetik ildiz tushunchalarini tushuntirishi, so'ngra irratsional son tushunchasini quyidagi masalani yechish orqali kiritishi lozim.

Masala: Katetlari bir birlikka teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi topilsin. (39 - chizma).



39-chizma.

Berilgan: -*ABC, <C=90°, CB=AC=1*
Topish kerak: *AB=?*

Yechish. Pifagor teoremasiga ko'ra: $AB^2=AC^2+CB^2$, $AB^2=1^2+1^2=2$

Masalaning yechimini quyidagicha o'qish mumkin. Shunday AB soni topilsinki, uni kvadratga ko'tarilganda 2 soni hosil bo'lsin. Bunday AB son ratsional sonlar to'plamida mavjud emas. A nuqtadan AB ga perpendikulyar $AA_1=1$ katetni o'tkazib, uning A_1 nuqtasini B nuqta bilan birlashtirib, A_1B ning qiymatini hisoblaymiz: $A_1B^2=AB^2+1^2$; $A_1B^2=2+1=3$; $A_1B^2=3$ soni ham ratsional sonlar maydonida mavjud emas. Yuqoridagilardan ko'rinadiki, ratsional sonlar to'plamida mavjud bo'lmagan yana qandaydir sonlar to'plami ham mavjud ekan, ya'ni: $AB^2=2$; $A_1B^2=3,\ldots$

Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra $AB^2=2$, $A_1B^2=3,\ldots$ ko'rinishdagi sonlarni *ratsional bo'lmagan yoki irratsional sonlar* deb ataldi va ularni $AB=\sqrt{2}$, $A_1B=\sqrt{3}$, ... kabi belgilash qabul qilingan.

Ta'rif: $\frac{p}{q}$ kasr ko'rinishida tasvirlab bo'lmaydigan sonlar irratsional sonlar deyiladi. $(p, q) \in N$

Bu erda o'quvchilarga yana shu narsani tushuntirish kerakki, har qanday ratsional sonni cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishda ifodalash mumkin, irratsional sonni cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida ifodalab bo'lmaydi, bunga quyidagi misollarni ko'rsatish mumkin.

1. $\sqrt{5}=2{,}360679\ldots.$ bu erdagi $\sqrt{5}$ irratsional son cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr ko'rinishida ifodalanayapti.

2. $\sqrt{2}=1{,}41$ - bu erdagi $\sqrt{2}$ irratsional son ta'rifini yana quyidagicha berish mumkin.

Ta'rif. *Cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida ifodalab bo'lmaydigan sonlarni irratsional sonlar deb ataladi.*

Teorema: kvadrati 2 ga teng bo'lgan ratsional son mavjud emas.

Bu teoremaning isbotini teskarisidan faraz qilish yo'li bilan isbotlaymiz, chunki $1^2<2<2^2$ butun sonlar to'plamida u kvadrati 2 ga teng bo'lgan son mavjud emas.

Isboti. Faraz qilaylik, $\frac{p}{q}$ ko'rinishidagi qisqarmas kasr mavjud bo'lsin, *r* va *q* – natural sonlar. Faraz qilaylik, kvadrati 2 ga teng bo'lgan ratsional son mavjud bo'lsin, ya'ni: $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$, bu erda $p^2=2q^2$, bu erda *r* ning ham ikkiga bo'linishi kelib chiqadi. Agar $r=2n$ bo'lsa, $4n=2q^2$ $2n=q^2$ bo'ladi, bundan *q* ning ham juft son ekanligi kelib chiqadi. Farazimizga ko'ra $\frac{p}{q}$ kasrni qisqarmas kasr degan edik, isbotning natijasida esa $\frac{p}{q}$ kasr qisqaruvchi kasr bo'lib chiqyapti, bunday qarama - qarshilik farazimizning noto'g'ri ekanligini tasdiqlab, teorema to'g'ri ekanligini ko'rsatadi.

Yuqoridagi ta'rif va isbot qilingan teoremalardan ko'rinadiki kvadrati 2, 3, 5, 7, 10, 11 larga teng bo'ladigan ratsional son mavjud emas ekan, biz ta'rifga ko'ra bularni irratsional sonlar deb atadik. Bunday irratsional sonlarni $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},$- kabi belgilash qabul qilingan. Ularga qarama - qarshi bo'lgan sonlar ham irratsional sonlar bo'lib, ular $-\sqrt{2},-\sqrt{3},-\sqrt{5},$- kabi belgilanadi. O'qituvchi bu erda o'quvchilarga shuni eslatishi kerakki, irratsional sonlarga kvadrati berilgan musbat songa teng bo'lgan sonni topish masalasigina olib kelmaydi. Masalan, aylana uzunligining diametriga nisbatini ifodalovchi π sonini oddiy kasr ko'rinishida tasvirlash mumkin emas, u ham irratsional sondir.

17- § . Haqiqiy sonlar.

Ratsional va irratsional sonlar birgalikda haqiqiy sonlar to'plamini hosil qiladi. Har bir haqiqiy songa koordinata to'g'ri chiziqning yagona nuqtasi mos keladi. Haqiqiy sonlar to'plami son to'g'ri chizig'i deb ham ataladi. Son to'g'ri chizig'ining geometrik modeli koordinata to'g'ri chizig'idan iboratdir. O'qituvchi haqiqiy sonlarning geometrik tasvirini ko'rsatganidan keyin savol - javob metodi orqali haqiqiy sonlarni taqqoslashni va ularning natijasi sifatida hosil qilinadigan sonli tengsizlik hamda ularning xossalarini bayon qilishi maqsadga muvofiqdir.

Haqiqiy sonlarni taqqoslash masalasi quyidagi ikkita ta'rif asosida hal qilinadi.

Ta'rif. *a sonidan b sonini ayirganda ayirma musbat bo'lsa, u holda a soni b sonidan katta deyiladi va u quyidagicha yoziladi. a–b>0 bundan a>b ekanini ko'rinadi.*

Ta'rif. *a sonidan b sonini ayirganda ayirma manfiy bo'lsa, u holda a soni b sonidan kichik deyiladi va u bunday yoziladi: a–b<0, bundan a<b ekani ko'rinadi.*

Bu erdagi $a>b$ va $a<b$ ifodalar sonli tengsizliklar deyiladi.

Sonli tengsizliklar xossalari:

1. agar $a > b$ bo'lsa, $b<a$ bo'ladi.
2. agar $a > b$ va $b<c$ bo'lsa, u holda $a<c$ bo'ladi.
3. agar $a>b$ bo'lsa, $a+c > b+c$ bo'ladi.
4. agar $a>b$ va s musbat son bo'lsa, u holda $ac>bc$

Isboti: $ac–bc$ ayirmani hosil qilamiz. $ac–bc=c(a–b)$ shartga ko'ra *c* musbat son va $a>b$ bo'lgani uchun $a–b$ musbat son. Ikkita musbat sonning ko'paytmasi musbat sondir, demak $c(a–b)>0$. shunday qilib, $ac–bc>0$. bundan: $ac>bc$.

5. Agar $a>b$ va *c* manfiy son bo'lsa, u holda $ac<bc$ bo'ladi. Agar tengsizlikning har ikkila tomoni bir xil manfiy songa ko'paytirilsa, tengsizlikning ishorasi qarama - qarshiga o'zgaradi.
6. agar $a>b$ va $c>d$ bo'lsa, u holda $a+c>b+d$ bo'ladi.
7. Agar $a>b>0$ bo'lsa, u holda $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ bo'ladi.
8. Agar $a>b>0$ bo'lsa, istalgan *n* natural son uchun $a^n>b^n$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Sonli oraliqlar va ularning tasviri.

Oraliqlar turi	Belgilanish	Tengsizliklar

		yordamida yozilishi.
Interval	$(a;b)$	$a<x<b$
Kesma	$[a;b]$	$a\le x\le b$
Yarim interval	$(a;b]$	$a<x\le b$
Yarim interval	$[a;b)$	$a\le x<b$
Nur	$[a;+\infty)$	$x\ge a$
Nur	$(-\infty;b]$	$x\le b$
Ochiq nur	$(a;+\infty)$	$x>a$
Ochiq nur	$(-\infty;b)$	$x<b$

Haqiqiy sonning moduli va uning xossalari. Haqiqiy son a ning moduli deb, agar $a>0$ bo'lsa, bu sonning o'ziga, agar $a<0$ bo'lsa, uning qarama-qarshi songa aytiladi. a sonning moduli $|a|$ kabi belgilanadi. Shunday qilib:

$$|a|=\begin{cases} agar \quad a>0 \quad bo'lsa, \quad a, \\ agar \quad a<0 \quad bo'lsa, \quad -a \end{cases}$$

masalan, $|x-3|=x-3$, chunki agar $\begin{cases} x-3>0, \quad x>3 \\ x-3<0, \quad x<3 \end{cases}$

Geometrik nuqtai nazardan $|a|$ ifoda koordinata to'g'ri chizig'ida a nuqtadan 0 nuqtagacha bo'lgan masofani bildiradi.

Modullarning xossalari:

1. $|a|\ge 0$ 2. $|a|=|-a|$ 3. $|ab|=|a|\cdot|b|$ 4. $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}; b\ne 0$ 5. $|a|^2=a^2$

18- § . Haqiqiy sonlar ustida amallar bajarish qoidalari.

Bir xil ishorali ikkita sonning yig'indisi o'sha ishorali yig'indi songa tengdir. Bunday yig'indining modulini topish uchun qo'shiluvchilar yig'indisini topish kerak.

Masalan, (+12)+(+8)=+20, (– 12)+(– 8)=– 20.

Turli ishorali ikkita sonning yig'indisi katta bo'lgan qo'shiluvchining ishorasi bilan bir xil ishorali sondir, bu yig'indining qiymatini topish uchun katta sondan kichik sonni ayirish va ayirma oldiga katta son ishorasini qo'yish kerak.

Masalan:

(12)+(– 8)=+(12 – 8)=4, (– 12)+(+8)=– (12 – 8)=– 4.

Bir sondan ikkinchisini ayirish uchun kamayuvchiga ayiriluvchiga qarama-qarshi bo'lgan sonni qo'shish kerak.

Masalan, 12 – (– 8)=12+8=20, 12 – (+8)=12 – 8=4.

Bir xil ishorali ikki sonning ko'paytmasi (bo'linmasi) musbat, har xil ishorali ikki sonning ko'paytmasi manfiy, bo'linmasi ham manfiy bo'lgan sondir. Ko'paytmaning (bo'linmaning) topish uchun berilgan sonlarning o'zaro ko'paytirish (bo'lish) kerak.

Masalan, (– 12)·(– 8)=+12·8=96, (– 24):(+3)= – 24:3= – 8.

Arifmetik amallarni xossalari.

1. $a+b=b+a$ 6. $(ab)c=a(bc)$
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ 7. $a(b+c)=ab+ac$
3. $a+0=a$ 8. $a\cdot 1=a$
4. $a+(-a)=0$ 9. $a\cdot\frac{1}{a}=1, \quad a\ne 0$
5. $ab=ba$

19- § . Arifmetik kvadrat ildiz tushunchasini kiritish.

VII sinf algebra kursida «arifmetik kvadrat ildiz» tushunchasi kiritiladi. Agar bizga $x^2=16$ tenglama berilgan bo'lsa, bu tenglamani o'quvchilar ko'paytuvchilarga ajratish orqali yechishni biladilar, ya'ni:

$$(x^2=16)\Rightarrow[(x^2-16)=0]\Rightarrow[(x^2-4^2)=0]\Rightarrow$$
$$[(x-4)(x+4)]=0\Rightarrow(x_1=4)\wedge(x_2=-4)$$

Demak, $x^2=16$ tenglamaning yechimlari $x_1=4$ va $x_2=-4$ sonlaridan iborat ekan. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra quyidagi qoidani chiqarish mumkin: $x^2=16$ tenglamaning ildizlari, ya'ni kvadrati 16 ga teng bo'lgan sonlar 16 sonining *kvadrat ildizlari* deyiladi. $(-4)^2=16$ bundan $4^2=16$ bo'lgani uchun -4 va 4 sonlari $x^2=16$ tenglamaning kvadrat ildizlaridir.

Ta'rif. a sonining kvadrat ildizi deb kvadrati a songa teng bo'lgan songa aytiladi.

Kvadrat ildiz tushunchasidan tashqari arifmetik kvadrat ildiz tushunchasi ham bo'lib, uni quyidagicha tushuntirish mumkin: $x_1=4$ va $x_2=-4$ lar $x^2=16$ tenglamada ikkita ildiz bo'lib, ulardan $x_1=4$ yechimi musbatdir. Bunday musbat yoki nomanfiy yechim ana shu tenglamaning *arifmetik kvadrat ildizi* deyiladi. Bu tushuncha umumiy holda esa quyidagicha ta'riflanadi.

Ta'rif. a sonining arifmetik kvadrat ildizi deb kvadrati a ga teng bo'lgan nomanfiy songa aytiladi va u $\sqrt{a}$ kabi belgilanadi.

20- § . Arifmetik to'rt amalga doir misollar yechish metodikasi.

1-misol. $$\frac{172\frac{5}{6}-170\frac{1}{3}+3\frac{5}{12}}{0{,}8\cdot 0{,}25}=29\frac{7}{12}$$

1) $172\frac{5}{6}-170\frac{1}{3}+3\frac{5}{12}=(172-170+3)+\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{5}{12}\right)=5+\frac{10-4+5}{12}=5+\frac{11}{12}=5\frac{11}{12}$

2) $0{,}8\cdot 0{,}25=\frac{8}{10}\cdot\frac{25}{100}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

3) $5\frac{11}{12}:\frac{1}{5}=\frac{71}{12}\cdot 5=\frac{355}{12}=29\frac{7}{12}$

2-misol. $$\frac{\left[\left(40\frac{7}{30}-38\frac{5}{12}\right):10{,}9+\left(\frac{7}{8}-\frac{7}{30}\right)1\frac{9}{11}\right]\cdot 4{,}2}{0{,}008}=700$$

Yechish:

1) $40\frac{7}{30}-38\frac{5}{12}=(40-38)+\left(\frac{7}{30}-\frac{5}{12}\right)=2+\frac{14-25}{60}=1+\frac{74-25}{60}=1\frac{49}{60};$

2) $1\frac{49}{60}:10{,}9=\frac{109}{60}:\frac{109}{10}=\frac{109}{60}\cdot\frac{10}{109}=\frac{1}{6};$

3) $\frac{7}{8}-\frac{7}{30}=\frac{105-28}{120}=\frac{77}{120}$

4) $\frac{77}{120}\cdot 1\frac{9}{11}=\frac{77}{120}\cdot\frac{20}{11}=\frac{7}{6}$

5) $\frac{1}{6}+\frac{7}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3};$

6) $\frac{4}{3}\cdot 4{,}2=\frac{4}{3}\cdot\frac{21}{5}=\frac{28}{5};$

7) $\frac{28}{5}:0{,}008=\frac{28}{5}\cdot 125=28\cdot 25=700;$

3-misol. $1\frac{7}{20}:2{,}7+2{,}7:1{,}35+\left(0{,}4:2\frac{1}{2}\right)\cdot\left(4{,}2-1\frac{3}{40}\right)=3$ yechish.

1) $1\frac{7}{20}:2{,}7=\frac{27}{20}:2\frac{7}{10}=\frac{27}{20}:\frac{27}{10}=\frac{27}{20}\cdot\frac{10}{27}=\frac{1}{2};$

2) $2{,}7:1{,}35=2\frac{7}{10}:1\frac{35}{100}=\frac{27}{10}:1\frac{7}{20}=\frac{27}{10}:\frac{27}{20}=\frac{27}{10}:\frac{20}{27}=2$

3) $\frac{1}{2}+2=2\frac{1}{2}$

4) $0{,}4:2\frac{1}{2}=\frac{2}{5}:\frac{5}{2}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

5) $4{,}2-1\frac{3}{40}=4\frac{1}{5}-1\frac{3}{40}=(4-1)+\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{40}\right)=3+\frac{8-3}{40}=3+\frac{5}{40}=3+\frac{1}{8}=3\frac{1}{8}$

6) $\frac{4}{25}\cdot3\frac{1}{8}=\frac{4}{25}\cdot\frac{25}{8}=\frac{1}{2}$

7) $2\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3$

4-misol. $1{,}7:\frac{\left(4{,}5\cdot1\frac{2}{3}+3{,}75\right)\cdot\frac{7}{135}}{5:9}-\left(0{,}5+\frac{1}{3}-\frac{5}{12}\right)=1\frac{17}{84}$ yechish

1) $4{,}5\cdot1\frac{2}{3}=4\frac{1}{2}\cdot1\frac{2}{3}=\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2};$

2) $7\frac{1}{2}+3\frac{75}{100}=7\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}=(7+3)+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=10+\frac{2+3}{4}=10+\frac{5}{4}=11\frac{1}{4};$

3) $11\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{135}=\frac{45}{4}\cdot\frac{7}{135}=\frac{7}{12};$

4) $\frac{7}{12}:\frac{5}{9}=\frac{7}{12}\cdot\frac{9}{5}=\frac{7\cdot3}{4\cdot5}=\frac{21}{20},$

5) $1{,}7:\frac{21}{20}=1\frac{7}{10}:\frac{21}{20}=\frac{17}{10}\cdot\frac{20}{21}=\frac{34}{21};$

6) $0{,}5+\frac{1}{3}-\frac{5}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{12}=\frac{6+4-5}{12}=\frac{5}{12};$

7) $\frac{34}{21}-\frac{5}{12}=\frac{136-35}{84}=\frac{101}{84}=1\frac{17}{84};$

5-misol. $\frac{\left(1{,}75:\frac{2}{3}-1{,}75\cdot1\frac{1}{8}\right):\frac{7}{2}}{\left(\frac{17}{80}-0{,}0325\right):4}\cdot(6{,}79:0{,}7+0{,}3)=250$

1) $1{,}75:\frac{2}{3}=1\frac{75}{100}:\frac{2}{3}=1\frac{3}{4}:\frac{2}{3}=\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{21}{8};$

2) $1{,}75\cdot1\frac{1}{8}=1\frac{75}{100}\cdot1\frac{1}{8}=1\frac{3}{4}\cdot1\frac{1}{8}=\frac{7}{4}\cdot\frac{9}{8}=\frac{63}{32};$

3) $\frac{21}{8}-\frac{63}{32}=\frac{84-63}{32}=\frac{21}{32};$

4) $\frac{21}{32}:\frac{7}{12}=\frac{21}{32}\cdot\frac{12}{7}=\frac{3\cdot3}{8}=\frac{9}{8};$

5) $\frac{17}{80}-0{,}0325=\frac{17}{80}-\frac{325}{10000}=\frac{17}{80}-\frac{13}{400}=\frac{5\cdot 17-13}{80}=\frac{85-13}{10000}=\frac{72}{400}=\frac{9}{50}$;

6) $\frac{9}{50}:4=\frac{9}{50}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{200}$;

7) $\frac{9}{8}:\frac{9}{200}=\frac{9}{8}\cdot\frac{200}{9}=25$;

8) $6{,}79:0{,}7=6\frac{79}{100}:\frac{7}{10}=\frac{679}{100}\cdot\frac{10}{7}=\frac{97}{10}$;

9) $\frac{97}{10}+0{,}3=\frac{97}{10}+\frac{3}{10}=\frac{100}{10}=10$;

10) $25\cdot 10=250$.

VI-BOBNI TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Natural sonlar to'plamini tushuntirib bering.
2. Butun sonlar to'plamiga misollar keltiring.
3. Ratsional sonlar to'plamini ta'riflang.
4. Haqiqiy sonlar to'plamini tushuntirib bering.
5. Sonning moduli deganda nimani tushunasiz?
6. Qo'shish amalini tushuntirib bering.
7. Ayirish amalini ta'riflang.
8. Ko'paytirish amalini ta'riflang.
9. Bo'lish amalini ta'riflang.
10. Kasr son deganda qanday sonni tushunasiz?
11. Kasr sonlar ustida to'rt amal bajarish metodikasini aytib bering.
12. Kasrlarni taqqoslash qanday amalga oshiriladi?
13. Qanday kasr o'nli kasr deyiladi?
14. O'nli kasrlarni qo'shish va ayirish qanday bajariladi?
15. O'nli kasrlarni ko'paytirish va bo'lish qanday bajariladi?
16. Oddiy kasr qanday qilib cheksiz davriy o'nli kasrga aylantiriladi?
17. Cheksiz davriy o'nli kasr qanday qilib oddiy kasrga aylantiriladi?
18. Irratsional son tushunchasini tushuntirib bering.
19. Sonli tengsizlik xossalarini aytib bering.
20. Sonli oraliqlar deganda nimani tushunasiz?
21. Arifmetik kvadrat ildiz tushunchasini tushuntirib bering.
22. Kvadrat ildiz tushunchasi deganda qanday son tushuniladi?

VI-BOB UCHUN TAYANCH IBORALAR

Natural son, butun son, ratsional son, irratsional son, haqiqiy son, sonning moduli, to'rt amal tushunchasi, kasr son, kasrlarni taqqoslash, kasrlarni qo'shish, kasrlarni ayirish, kasrlarni ko'paytirish, kasrlarni bo'lish, o'nli kasr, cheksiz davriy o'nli kasr, kvadrat ildiz, arifmetik kvadrat ildiz, sonli oraliqlar, sonli tengsizlik.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

1. $\dfrac{1{,}4:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}{\left(3\frac{1}{6}\cdot 6-5\frac{1}{2}\cdot 2\frac{5}{11}\right):3\frac{2}{3}}$. j. 1,6

2. $\dfrac{\left(2-1\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\right)\left(1\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}\right)}{2\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{8}+\frac{7}{8}\right)}$. j. $\frac{3}{14}$

3. $\dfrac{11\frac{2}{3}\cdot 2\frac{4}{7}}{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4\frac{1}{8}}$. j. 1

4. $\dfrac{28\frac{4}{5}:14\frac{2}{5}+6\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}{1\frac{11}{16}:2\frac{1}{4}}$. j. $9\frac{1}{3}$

5. $\dfrac{1\frac{9}{16}\cdot 3\frac{1}{5}-9:2\frac{2}{5}}{1\frac{1}{3}\cdot\left(17\frac{7}{12}-6\frac{1}{3}\right):\frac{3}{4}}$. j. $\frac{1}{16}$

6. $\left(\dfrac{0{,}012}{5}+\dfrac{0{,}04104}{5{,}4}\right)\cdot 4560-42\frac{1}{3}$. j. $3\frac{4}{15}$

7. $\dfrac{\left(85\frac{7}{30}-83\frac{5}{18}\right):2\frac{2}{3}}{0{,}04}$. j. $18\frac{1}{3}$

8. $\dfrac{\left(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}}{0{,}002}$. j. 50

9. $\dfrac{\left(95\frac{7}{30}-93\frac{5}{18}\right)\cdot 2\frac{1}{4}+0{,}373}{0{,}2}$. j. 23,865

10. $\dfrac{\left(12\frac{1}{6}-6\frac{1}{27}-5\frac{1}{4}\right)\cdot 13{,}5+0{,}111}{0{,}02}$. j. 599,3 11.

$\dfrac{\left(68\frac{7}{30}-66\frac{5}{18}\right):6\frac{1}{9}+\left(\frac{7}{40}+\frac{3}{32}\right)\cdot 4{,}5}{0{,}04}$. j. $38\frac{15}{64}$

12. $\dfrac{(2{,}1-1{,}965):(1{,}2\cdot 0{,}045)}{0{,}00325:0{,}013}-\dfrac{1:0{,}25}{1{,}6\cdot 0{,}625}$. j. 6

13. $\left(17\frac{1}{2}-8{,}25\cdot\frac{10}{11}\right)\cdot\left(11\frac{2}{3}:\frac{2}{9}+3{,}5\right)$. j. 560

15. $(0{,}5\cdot 2{,}04-0{,}1):(6{,}25\cdot 0{,}2+0{,}8:0{,}64)$. j. 53,3

16. $\dfrac{2\frac{5}{7}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12}+4{,}375\right):9\frac{8}{9}}$. j. $\frac{19}{28}$

17. $\dfrac{0{,}134+0{,}05}{18\frac{1}{6}-1\frac{11}{14}-\frac{2}{15}\cdot 2\frac{6}{7}}$. j. 0,0115

18. $\dfrac{\left(58\frac{4}{15}-56\frac{7}{24}\right):0{,}8+2\frac{1}{9}\cdot 0{,}225}{8\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}}$. j. $\dfrac{157}{280}$

19. $\left[\dfrac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}03}{\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot 4+\frac{2}{5}}-\dfrac{\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\frac{1}{25}\right)\cdot\frac{1}{80}}\right]:2\frac{1}{20}$. j. 10

20. $\left(\dfrac{0{,}216}{0{,}15}+\dfrac{2}{3}:\dfrac{4}{15}\right)+\left(\dfrac{196}{225}-\dfrac{7{,}7}{2\frac{3}{4}}\right)+0{,}695:1{,}39$. j. $2\dfrac{23}{45}$

21. $\dfrac{1}{3}:\dfrac{2}{3}+0{,}228:\left[\left(1{,}5291-\dfrac{1{,}453662}{3-0{,}095}\cdot 0{,}305\right):0{,}12\right]$ j. $\dfrac{152}{76471}$

22. $\dfrac{\left[\left(6{,}2:0{,}31-\frac{5}{6}\cdot 0{,}9\right)\cdot 0{,}2+0{,}15\right]:0{,}02}{\left(2+1\frac{4}{11}\cdot 0{,}22:0{,}1\right)\cdot\frac{1}{33}}$. j. 1320

23. $6:\dfrac{1}{3}-0{,}8:\dfrac{1{,}5}{\frac{3}{2}\cdot 0{,}4\cdot\frac{50}{1:\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0{,}25}}{6-\frac{46}{1+2{,}2\cdot 10}}$ j. 11

24. $\dfrac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}$. j. 20

25. $\dfrac{\left(\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+0{,}1-1\frac{1}{15}\right)\cdot 2{,}52}{\left(0{,}5-\frac{1}{3}+0{,}25-\frac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{7}{13}}$. j. $-\dfrac{63}{84}$

26. $\dfrac{2\frac{3}{4}:1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\frac{1}{3}}:\dfrac{5}{7}-\dfrac{\left(2\frac{1}{6}+4{,}5\right)\cdot 0{,}375}{2{,}75-1\frac{1}{2}}$. j. 5

27. $\dfrac{\left(13{,}75+9\frac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}+\dfrac{\left(6{,}8-3\frac{3}{5}\right)\cdot 4\frac{1}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\dfrac{1}{6}$. j. $\dfrac{2}{3}$

28. $$\frac{0{,}4+\left(5-0{,}8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{\left[1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6\cdot\frac{2}{3}\right)\right]:23\frac{1}{2}}.$$ j. $8\frac{7}{10}$

29. $$\frac{0{,}125:0{,}25+1\frac{9}{16}:2{,}5}{(0-2:2{,}3)\cdot 0{,}46+1{,}6}+\left(\frac{17}{20}+1{,}9\right):0{,}5.$$ j. $5\frac{11}{16}$

30. $$\left[\frac{8{,}8077}{20-[8{,}2:(3{,}333\cdot 0{,}3+0{,}0001)]\cdot 2{,}004}+4{,}9\right]\cdot\frac{5}{32}.$$ j. 1

VII - BOB.

MAKTABDA AYNIY SHAKL ALMASHTIRISHLARNI O'RGANISH.

1-§. Ayniy shakl almashtirishlar.

Algebraik ifodalarni ayniy almashtirishlar maktab matematika kursida muhim o'rin egallaydi va VI-XI sinflarning dastur materiallarini o'rganish jarayonida qo'llaniladi. Maktab matematika kursida sonlar va harflar bilan belgilangan algebraik ifodalarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish va logarifmlash kabi amallar bajariladi. Bu amallarni bajarish jarayonida ana shu algebraik ifodalarning miqdoriy qiymatlarini saqlab, ularni turli ko'rinishlarda yozishga to'g'ri keladi.

T a ' r i f. *Algebraik ifodaning miqdoriy qiymatini o'zgarmasdan bir shakldan ikkinchi bir shaklga o'zgartirib yozish ayniy almashtirish deyiladi.*

Maktab matematika kursida ayniyat degan tushuncha o'rganiladi, so'ngra ayniy almashtirish degan tushuncha kiritiladi.

Ta'rif. *Tarkibidagi xarflarni har qanday qiymatlarida ham to'g'ri bo'laveradigan ikki algebraik ifodaning tengligi ayniyat deyiladi.*

Masalan, $\frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1$ tenglik ayniyatdir, chunki tenglikda qatnashayotgan noma'lum x ning ixtiyoriy qiymatlarida tenglikning chap tomoni uning o'ng tomoniga har doim teng chiqadi. 6-sinfda o'rganiladigan qisqa ko'paytirish formulalari ham ayniy tengliklardir:

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

2) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

3) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;

4) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Yuqoridagi ta'rif va misollardan ko'rinadiki, ayniyat arifmetik amallar qonunlarining harfiy ifodalangan shakli ekan. Ayniy shakl almashtirishlarda algebraik ifodalarni solishtirish, ular ustida amallar bajarish uchun ifodalardagi birhad va ko'phadlarning shaklini o'zgartirish kabi ishlarni bajarish ko'zda tutiladi. Maktab matematika kursidagi ayniy shakl almashtirishlarni shartli ravishda quyidagicha ketma-ketlik asosida ifodalash mumkin:

1. Butun ifodalarni ayniy almashtirish.
2. Kasr ifodalarni ayniy almashtirish.
3. Irratsional ifodalarni ayniy almashtirish.
4. Trigonometrik ifodalarni ayniy almashtirish.

Har qaysi almashtirishni ko'rib chiqamiz.

1. Butun ifodalarni ayniy almashtirish. Ayniyat va ayniy almashtirish tushunchalari VI sinfdan boshlab kiritiladi, lekin I sinf matematika darslaridayoq ayniy almashtirishlar bajariladi. Masalan 3+2=5 ifodaning yig'indisini hisoblash 3+(1+1)=(3+1)+1=4+1=5 kabi ayniy almashtirish yordamida bajariladi. IV-V sinflarda sonlar ustida murakkabroq ayniy almashtirishlar bajariladi. Masalan: 52=5·10+2=5·5·2+2=25·2+2; 35=3·10+5= =3·5·2+5=6·5+5. Bu misollarda bajarilgan ishlar o'quvchilariga ayniy almashtirish deb o'rgatilmasada lekin aslida sonlar ustida ayniy almashtirish bajariladi.

Bizga ma'lumki, ratsional algebraik ifodalar arifmetik to'rt amal hamda darajaga ko'tarish amallari asosida tuziladi. Agar algebraik ifoda qo'shish, ayirish, ko'paytirish va noldan farqli songa bo'lish amallari asosida tuzilgan bo'lsa, u holda bunday ifodalar butun ifodalar deyiladi. Masalan:

1) $5y^2(2x^2-3y)$;
2) $(x+y)(y-x)$;
3) $(2x+5)(7-3x)$;
4) $(c+5)(c^2-3c+5)$;
5) $\frac{5x-1}{4}$;
6) $\frac{x^2-y^2}{7}$

Butun ifodalarni ayniy almashtirishdagi asosiy vazifa berilgan matematik ifodani ko’phadlarni imkoniyati boricha algebraik amallar yordamida standart shaklidagi birhadlar ko’rinishiga keltirib soddalashtirishdan iboratdir. Shu erda o’qituvchi o’quvchilarga o’xshash hadlar, birhad va ko’phad tushunchalarini tushuntirish hamda ularga misollar ko’rsatishi lozim.

Har qanday algebraik ifoda birhad va ko’phadlardan iborat bo’ladi.

T a ‘ r i f. ***Ko’paytirish va darajaga ko’tarish amallari yordamida tuzilgan ifodalarni <u>birhad</u> deyiladi.***

Masalan: $5y^2x$, $\frac{4}{5}xya^2$;…

Birhadlarni ham standart shakllarga keltirish misollar yordamida tushuntiriladi. Masalan: $6x\cdot4y$ birhad sodda holga keltirilsin. Bu misolga biz ko’paytirish, o’rin almashtirish va gruppalash qonunlarini qo’llasak, $6x\cdot4y=24xy$ bo’ladi.

T a ‘ r i f: B*ir necha birhadlarning yig’indisidan iborat bo’lgan ifoda <u>ko’phad</u> deyiladi*.

Masalan: 1) $5x^2y+\frac{3}{5}y^2x$

2) $13a^2b+\frac{4}{7}c^2a+\frac{3}{5}a^2b$

Yuqorida ta’rif va misollardan ko’rinadiki, birhad ko’phadning xususiy holi ekan.

T a ‘ r i f: ***Ko’phadning o’zaro koeffetsientlari bilangina farq qiladigan yoki butun koeffetsientli bo’lgan hadlari o’xshash hadlar deyiladi. O’xshash hadlarni arifmetik amallar yordamida birhad ko’rinishida ifodalashni ixchamlash deyiladi.***

Masalan:

1) $20y^2x+4zt-12y^2x-3tz=20y^2x-12y^2x)+(4zt-3tz)=8y^2x+zt$

2) $2{,}4a^2b^2+3{,}2cd-1{,}4a^2b^2-2{,}5cd=(2{,}4a^2b^2-1{,}4a^2b^2)+(3{,}2cd-2{,}5cd)=a^2b^2+0{,}7cd$

Butun ifodalarni ayniy almashtirishda belgilangan ko’phadlar birhadlarga, birhadlar esa standart shaklga keltiriladi. Bu ishlarni bajarishda o’qituvchi o’quvchilarni bir xil hadlardan iborat ko’phadlarni standart shaklga keltirishdan boshlashi kerak.

Ifodalarni soddalashtiring:

1. $x+x+x=x\cdot3=3x$;
2. $x+x+x+x+x=(x+x)+(x+x+x)=2x+3x=5x$;
3. $(1{,}2x^2)\cdot(-5x)+(-7x)-(-2x)(3x^2)=-6x^3-7x+6x^3=-7x$
4. $(5x^2y-14x^3-8xy^2)+(3x^3-7x^2y+9xy^2)=5x^2y-14x^3-8xy^2+3x^3-7x^2y+9xy^2=$
$=-2x^2y-11x^3+xy^2$

Shundan keyin qisqa ko’paytirish formulalari yordamida soddalashtiriladigan misollarni ko’rsatish lozim.

1) $(2x+3y)^2+(4y-5x)^2=4x^2+12xy+9y^2+16y^2-40xy+25x^2=29x^2-28xy+25y^2$.

2) $(xy+4y)^3-(2xy-3y)^3=(xy)^3+3(xy)^2\cdot4y+3xy(4y)^2+(4y)^3-[(2xy)^3-$
$-3(2xy)^23y+3\cdot2xy(3y)^2-(3y)^3]=$
$=x^3y^3+12x^2y^3+48xy^3+64y^3-8x^3y^3+36x^2y^3-54xy^3+27y^3=$
$=-7x^3y^3+48x^2y^3-6xy^3-6xy^3+91y^3$.

4) Ifoda soddalashtirilsin: $(a-b+c+d)^2+(a+b-c+d)^2$

1-usul: $(a-b+c+d)^2+(a+b-c+d)^2=[(a+d)-(b-c)]^2+[(a+d)+$
$+(b-c)]^2=(a+d)^2-2(a+d)(b-c)+(b-c)^2+(a+d)^2+2(a+d)(b-c)+$
$+(b-c)^2=2[(a+d)^2+(b-c)^2]$.

2-usul: $(a-b+c+d)^2=A$ deb $(a+b-c+d)^2=B$ deb belgilasak, A^2+B^2 hosil bo’ladi. A^2+B^2 ni ayniy almashtirish orqali quyidagicha yozish mumkin: $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$, bularga asosan *(a–b+c+d)²+(a+b–c+d)²=(a–b+c+d+a+b-c+d)²–2(a–b+c+d)·(a+b–c+d)= =(2a+2d)²– 2(a–b+c+d) (a+b–c+d)=4(a+d)²–2[(a+d)²–(b–c)²]=2[(a+d)²+(b–c)²].*

2- § . Kasr ifodalarni ayniy almashtirish.

VII sinf algebra kursidan boshlab kasr ratsional ifodalarni ayniy almashtirish bajariladi.

T a ‘ r i f: *Agar algebraik ifoda qo’shish, ayrish, ko’paytirish va bo’lish amallari yordamida sonlar va o’zgaruvchilardan tuzilgan bo’lsa, u holda bunday ifodani kasr ratsional ifoda deyiladi.*

Masalan: $\frac{y^2-1}{y}$; $\frac{x^2-3x-4}{x+4}$; $\frac{x+5}{x(x-2)}$; ….

Kasr ratsional ifodalarni ayniy almashtirish jarayonida ana shu ifoda qatnashayotgan noma’lum sonlarning qabul qiladigan qiymatlarini aniqlash lozim.

Ta’rif: *Kasr ratsional ifodadagi o’zgaruvchilarning ma’noga ega bo’ladigan qiymatlari o’zgaruvchilarning qabul qiladigan qiymatlari deyiladi.*

Masalan, $\frac{2x-y}{4xy}+\frac{11y-2x}{4xy}$ kasr ratsional ifodadagi x va y larning qabul qiladigan qiymatlari *x=0*, va *y=0* dan boshqa barcha son qiymatlardan iboratdir. Agar *x* va *y* o’zgaruvchilardan biri nol qiymatini qabul qilsa, kasrning maxraji nol bo’lib, o’zining ma’nosini yo’qotadi, chunki har qanday sonni nolga bo’lish mumkin emas.

Kasr ratsional ifodalarni ayniy almashtirishdagi asosiy vazifa berilgan ifodaning surat va maxrajlarida turgan ko’phadlarni ayniy almashtirishlar bilan bir hadlar ko’rinishiga keltirishdan iboratdir.

Kasr ratsional ifodalarni ayniy almashtirishdan oldin o’qituvchi kasr va ular ustida bajariladigan to’rt amalga doir sonli misollardan namunalar ko’rsatib, so’ngra esa harfiy ifodalar qatnashgan kasrlar ustida bajariladigan ayniy almashtirishlarni ko’rsatishi maqsadga muvofiqdir.

1. a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{2\cdot5}{3\cdot5}+\frac{1\cdot3}{5\cdot3}=\frac{10+3}{15}=\frac{13}{15}$;

   b) $\frac{x}{a}+\frac{y}{c}=\frac{x\cdot c}{a\cdot c}+\frac{y\cdot a}{c\cdot a}=\frac{xc+ya}{ca}$;

2. a) $\frac{4}{7}-\frac{1}{9}=\frac{4\cdot9}{7\cdot9}-\frac{1\cdot7}{9\cdot7}=\frac{36}{63}-\frac{7}{63}=\frac{36-7}{63}=\frac{29}{63}$;

   b) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{c\cdot d}{d\cdot b}=\frac{ad-cb}{db}$;

3. a) $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5\cdot3}{6\cdot4}=\frac{5}{8}$; b) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$;

4. a) $\frac{7}{9}:\frac{28}{36}=\frac{7}{9}\cdot\frac{36}{28}=\frac{4}{4}=1$; b) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$;

Yuqorida o’xshash misollarni ko’rsatgandan so’ng o’qituvchi yana bir ayniy almashtirishning mazmunini quyidagicha tushuntirishi lozim. Har qanday ayniy almashtirishning maqsadi misol yoki masalani yechish uchun berilgan matematik ifodani eng sodda yoki qulay holatga keltirib hisoblashdan iboratdir.

1-misol. $\frac{a^2-25}{a+3}\cdot\frac{a}{a^2+5a}-\frac{a+5}{a^2+3a}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish.

1) $$\frac{a^2-25}{a+3}\cdot\frac{a}{a^2+5a}=\frac{a^2-5^2}{a+3}\cdot\frac{a}{a(a+5)}=\frac{(a-5)(a+5)}{(a+3)}\cdot\frac{a}{a(a+5)}=\frac{a-5}{a+3}$$

2) $$\frac{a-5}{a+3}-\frac{a+5}{a^2+3a}=\frac{a-5}{a+3}-\frac{a+5}{a(a+3)}=\frac{(a-5)a}{(a+3)a}-\frac{a+5}{a(a+3)}=\frac{a^2-5a-a-5}{a(a+3)}=\frac{a^2-6a-5}{a(a+3)}$$

2-misol. $(\frac{5x+y}{x^2-5xy}+\frac{5x-y}{x^2+5xy})\cdot\frac{x^2-25y^2}{x^2+y^2}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish:

1) $\dfrac{5x+y}{x^2-5xy}+\dfrac{5x-y}{x^2+5xy}=\dfrac{5x+y}{x(x-5y)}+\dfrac{5x-y}{x(x+5y)}=\dfrac{(5x+y)(x+5y)}{x(x-5y)(x+5y)}+\dfrac{(5x-y)(x-5y)}{x(x+5y)(x-5y)}=$

$=\dfrac{5x^2+xy+25xy+5y^2+5x^2-xy-25xy+5y^2}{x(x+5y)(x-5y)}=\dfrac{10x^2+10y^2}{x(x+5y)(x-5y)};$

2) $\dfrac{10x^2+10y^2}{x(x+5y)(x-5y)}\cdot\dfrac{x^2-25y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{10(x^2+y^2)}{x(x+5y)(x-5y)}\cdot\dfrac{(x-5y)(x+5y)}{x^2+y^2}=\dfrac{10}{x}$

3-misol. Ifodani soddalashtiring.

$(\dfrac{m-n}{mn}+\dfrac{3m+n}{mn-m^2}+\dfrac{3n+m}{mn-n^2}):\dfrac{2m+2n}{mn}+\dfrac{2m}{n-m}$.

Yechish

1) $\dfrac{m-n}{mn}+\dfrac{3m+n}{mn-m^2}+\dfrac{3n+m}{mn-n^2}=\dfrac{m-n}{mn}+\dfrac{3m+n}{m(m-n)}+\dfrac{3n+m}{n(m-n)}=$

$=\dfrac{(m-n)(m-n)+(3m+n)n+(3n+m)m}{mn(m-n)}=\dfrac{m^2-2mn+n^2+3mn+n^2+3mn+m^2}{mn(m-n)}=$

$=\dfrac{2m^2+4mn+2n^2}{mn(m-n)}=\dfrac{2(m+n)^2}{mn(m-n)}$

2) $\dfrac{2(m+n)^2}{mn(m-n)}:\dfrac{2m+2n}{mn}=\dfrac{2(m+n)^2}{mn(m-n)}\cdot\dfrac{mn}{2(m+n)}=\dfrac{m+n}{m-n};$

3) $\dfrac{m+n}{m-n}+\dfrac{2m}{n-m}=\dfrac{m+n}{m-n}-\dfrac{2m}{m-n}=\dfrac{m+n-2m}{m-n}=\dfrac{n-m}{m-n}=-\dfrac{m-n}{m-n}=-1.$

4-misol. $(a^2-b^2-c^2+2bc):\dfrac{a+b-c}{a+b+c}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish

$(a^2-b^2-c^2+2bc):\dfrac{a+b-c}{a+b+c}=[a^2-(b-c)^2]:\dfrac{a+b-c}{a+b+c}=(a-b+c)(a+b-c):\dfrac{a+b-c}{a+b+c}=$

$=(a-b+c)(a+b+c)=(a+c)^2-b^2$

5-misol $\dfrac{2a}{a^2-4x^2}+\dfrac{1}{2x^2+6x-ax-3a}\cdot(x+\dfrac{3x-6}{x-2})$ ifodani soddalashtiring

Yechish:

1) $x+\dfrac{3x-6}{x-2}=x+\dfrac{3(x-2)}{x-2}=x+3$

2) $\dfrac{1}{2x^2+6x-ax-3a}\cdot(x+3)=\dfrac{1}{2x(x+3)-a(x+3)}\cdot(x+3)=\dfrac{1}{(2x-a)(x+3)}\cdot(x+3)=\dfrac{1}{2x-a}$

3) $\dfrac{2a}{a^2-4x^2}+\dfrac{1}{2x-a}=\dfrac{2a}{a^2-4x^2}-\dfrac{1}{a-2x}=\dfrac{2a}{(a-2x)(a+2x)}-\dfrac{1}{a-2x}=\dfrac{2a-a-2x}{(a-2x)(a+2x)}=\dfrac{a-2x}{(a-2x)(a+2x)}=\dfrac{1}{a+2x}$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

1. $(2x+1-\dfrac{1}{1-2x}):(2x-\dfrac{4x^2}{2x-1})$. J. $-2x$
2. $(a^2+2a+1)(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{a^2-1}-\dfrac{1}{a-1})$ j. $\dfrac{1+a}{1-a}$
3. $(1-\dfrac{9x^2+4}{12x}):(\dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{2})+1$ j. $1,5x$
4. $1-(\dfrac{2}{a-2}-\dfrac{2}{a+2})\cdot(a-\dfrac{3a+2}{4})$ j. $\dfrac{a}{a+2}$

5. $(y^2-4)(\frac{3}{y+2}-\frac{2}{y-2})+3$ j. $y–7$.

6. $(a+b-\frac{2ab}{a+b}):(\frac{a-b}{a+b}+\frac{b}{a})$. J. a

7. $(m+1-\frac{1}{1-m}):(m-\frac{m^2}{m-1})$. J. $–m$

8. $\left[\frac{x-2y}{x+2y}-\frac{1}{x^2-4y^2}:\frac{x+2y}{(2y-x)^3}\right]\cdot\frac{(x+2y)^2}{4y^2}$ j. $\frac{x^2-2xy}{2y^2}$

9. $(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}):(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a})$ J. $\frac{2ab-4a^2}{2a+b}$

10. $\left[\frac{a-1}{3a+(a-1)^2}-\frac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\frac{1}{a-1}\right]:\frac{a^2-1}{1-a}$ j. $\frac{a^2+1}{(a^2+a+1)(a^2-1)}$

11. $(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}+\frac{3}{x^2-x+1})\cdot(x-\frac{2x-1}{x+1})$ j. 1

12. $(a+2b+\frac{4b^2}{a-2b}):(a-\frac{2ab}{a+2b})+1$ j. $\frac{2a}{a-2b}$

13. $a^2-b^2-c^2+2bc:\frac{a+b-c}{a+b+c}$. j. $a^2–(b+c)^2$

14. $(\frac{5x^2-15xy}{x^2-9y^2}-\frac{3xy+9y^2}{x^2+6xy+9y^2}):(\frac{5}{y}-\frac{3}{x})$. J. $\frac{xy}{x+3y}$

15. $(\frac{4a^2-6ac}{4a^2-6ac+9c^2}-\frac{6ac+9c^2}{4a^2+6ac+9c^2})\cdot\frac{6a+9c}{4a^2+9c^2}$ j. $\frac{3}{2a-3c}$

16. $(x-\frac{4xy}{x+y}+y)\cdot(x+\frac{4xy}{x-y}-y)$ j. $x^2 - y^2$

17. $(a-\frac{1-2a^2}{1-a}+1):(1-\frac{1}{1-a})$ j. $-a$

18. $ab+\frac{ab}{a+b}\cdot\left[\frac{a+b}{a-b}-a-b\right]$ j. $\frac{ab}{a-b}$

19. $(\frac{y^2-xy}{x^2+xy}-xy+y^2)\cdot\frac{x}{x-y}+\frac{x}{x+y}$ j. $–xy–1$

20. $\left[\frac{1}{(2a-b)^2}+\frac{2}{4a^2-b^2}+\frac{1}{(2a+b)^2}\right]\cdot\frac{4a^2+4ab+b^2}{16a}$ j. $\frac{a}{(2a-b)^2}$

21. $\frac{4}{(c-2)^2}:\left(\frac{1}{(c+2)^2}+\frac{1}{(c-2)^2}+\frac{1}{c^2-4}\right)$. j. $\frac{(c+2)^2}{c^2}$

22. $\left(\frac{25}{a^2+5a+25}-\frac{2a}{5-a}-\frac{2a^3+10a^2}{a^3-125}\right):\left(a-5+\frac{13a-a^2-30}{a-5}\right)$. j. $\frac{25}{a^2+5a+25}$

23. $\frac{x}{ax-2a^2}-\frac{2}{x^2+x-2ax-2a}\cdot\left(1+\frac{3x+x^2}{3+x}\right)$. j. $\frac{1}{a}$.

24. $\left(\frac{x}{x^2-x-6}-\frac{x-1}{3x^2-4x-15}\right):\frac{x^4-2x^2+1}{3x^2+11x+10}$. j. $\frac{2(x+3)}{(x-3)(x-1)^2}$.

25. $\dfrac{a^2}{6x(a+x)^2}-\left(\dfrac{a-x}{2a+2x}+\dfrac{ax}{a^2-x^2}\right)\cdot\dfrac{a-x}{3x}\cdot\dfrac{x}{6a+6x}$. j. $\dfrac{6a^2-a^2x-x^3}{36x(a+x)^2}$.

26. $\dfrac{a-x}{2a+2}\cdot\left(\dfrac{2a+1}{a+x}-\dfrac{x(2a+1)}{x^2-a^2}+\dfrac{x}{a+x}-1\right)$. j. $\dfrac{a^2+ax-x^2}{2(a+1)(x+a)}$.

27. $\left(\dfrac{x+1}{x^2+xy}-\dfrac{1}{x^2-y^2}\right)\cdot\dfrac{(x-y)^2}{x^2-y-yx}+\dfrac{y-x}{(x+y)^2}$. j. $\dfrac{y}{x}\dfrac{x-y}{(x+y)}$

28. $\dfrac{1}{\frac{1}{a^2}(a^2-b^2)}-\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\cdot\left[\dfrac{1}{\frac{1}{a}(ab+b^2)}+\dfrac{1}{\frac{1}{b}(a^2+ab)}\right]$. j. $\dfrac{ab}{a^2-b^2}$.

29. $\left[\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{a^2}\right)+\left(\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\right]:\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{a^2}\right)$. j. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

30. $\left[\dfrac{p}{q}-\dfrac{q}{p}+\dfrac{1}{p+q}\left(\dfrac{q^2}{p}-\dfrac{p^2}{q}\right)\right]:\left(1-\dfrac{q}{p}\right)$. j. $\dfrac{p}{p+q}$.

31. $\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}\right)\cdot\left\{\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2\right):\left[\dfrac{a^2+ab}{\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2)}-1\right]\right\}$ j. $\dfrac{2}{b}$.

32. $\dfrac{a^3-1}{n^2+an}\cdot\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\dfrac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}$. j. $\dfrac{n^2+n+1}{n}\cdot\dfrac{(1+a+a^2)}{a+1}$.

33. $\left(\dfrac{2a+10}{3a-1}+\dfrac{130-a}{1-3a}+\dfrac{30}{a}-3\right)\cdot\dfrac{3a^3+8a^2-3a}{1-\frac{1}{4}a^2}$. j. $\dfrac{12(2a+5)(a+3)}{a-2}$.

34. $\left[\dfrac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)}+\dfrac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)}\right]:\left[\dfrac{5}{x^3+1}+\dfrac{3}{2(x+1)}-\dfrac{3}{2(x-1)}\right]$. j. $\dfrac{x+2}{2}$.

35. $\left(\dfrac{x-y}{2y-x}-\dfrac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2}\right):\dfrac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$. j. $\dfrac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)}$.

36. $\dfrac{a^2+a-2}{a^{n+1}-2a^n}\cdot\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right]$. j. $\dfrac{a+2}{a^{n+1}}$.

37. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$. j. $\dfrac{1}{abc}$.

38. $\dfrac{2a^2(b+c)^{2^n}-\frac{1}{2}}{an^2-a^3-2a^2-a}:\dfrac{2a(b+c)^n-1}{a^2c-a(nc-c)}$. j. $\dfrac{(2a(b+c)^n+1)c}{2(n+c+1)}$.

39. $\dfrac{a-c}{a^2+ac+c^2}\cdot\dfrac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\cdot\left(1+\dfrac{c}{a-c}-\dfrac{1+c}{c}\right):\dfrac{c(1+c)-a}{bc}$. j. $\dfrac{1}{a+c}$.

40. $\dfrac{\left[\dfrac{(a+x)^2}{ax}-4\right]\cdot\left[\dfrac{(a-x)^2}{ax}+4\right]:(a^6-x^6)}{(a^2x-ax^2):\left((a+x)^2-ax\right)\cdot\left((a-x)^2+ax\right)}\cdot\dfrac{a-\dfrac{ax}{a+x}}{a+\dfrac{ax}{a-x}}$. j. $\dfrac{3(x-2)}{2(x+3)}$.

41. $\left(\dfrac{1+x+x^2}{2x+x^2}+2-\dfrac{1-x+x^2}{2x-x^2}\right)^{-1}\cdot 5-2x^2.$ j. $\dfrac{5-2x^2}{2}.$

42. $\dfrac{\left(m^2-\dfrac{1}{n^2}\right)^m\cdot\left(n+\dfrac{1}{m^2}\right)^{n-m}}{\left(n^2-\dfrac{1}{m^2}\right)^n\cdot\left(m+\dfrac{1}{n}\right)^{m-n}}.$ j. $\left(\dfrac{m}{n}\right)^{m+n}.$

43. $\left(\dfrac{3}{2x-y}-\dfrac{2}{2x+y}-\dfrac{1}{2x-5y}\right):\dfrac{y^2}{4x^2-y^2}.$ j. $\dfrac{24}{5y-2x}.$

44. $\left(1+2x-\dfrac{3x^2+11x-6}{3x+1}\right):\left(x+1-\dfrac{3x^2+x+2}{3x+1}\right).$ j. $-\dfrac{3x^2-6x+7}{3x-1}.$

45. $\left(5a-1-\dfrac{5a^2+3}{a+1}\right):\left(3a-\dfrac{3a}{a+1}\right).$ j. $\dfrac{4(a-3)}{3a^2}$

46. $\left[\left(\dfrac{x}{y-x}\right)^{-2}-\dfrac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right]^2\cdot\dfrac{x^4}{x^2y^2-y^4}.$ j. $\dfrac{x-y}{x+y}.$

47. $\left[\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right)\right]:\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right).$ j. $\dfrac{2bc}{(b+c-a)^2}.$

3-§. Irratsional ifodalarni ayniy almashtirish.

Agar berilgan matematik ifodada irratsional ifoda qatnashgan bo'lsa, ayniy almashtirishlar orqali irratsional ifodani ratsional ifoda ko'rinishga keltiriladi va u hisoblanadi. Irratsional ifoda bu ildizlardan yoki butun son bo'lmagan ratsional ko'rsatkichli darajadan tashkil topgan algebraik ifodadir. Shuning uchun irratsional ifodaga quyidagicha ta'rif berilgan.

T a ' r i f. *Agar berilgan algebraik ifodada ildiz chiqarish amali qatnashsa, bunday ifoda irratsional ifoda deyiladi.*

Irratsional ifodalarni ayniy almashtirish orqali ratsional ifoda ko'rinishiga keltirish uchun asosan ildiz ostida qatnashayotgan birhad yoki ko'phadni ildiz ostidan chiqarish, imkoniyati boricha maxrajni irratsionallikdan qutqarish, noma'lum o'zgaruvchilar kiritish orqali berilgan irratsional ifodani ratsional ifoda ko'rinishiga keltirish kabi ishlar qilinadi.

Bundan tashqari o'quvchilarga sonning arifmetik ildizi va uning kvadrat ildizi hamda irratsional ifodalarning xossalari kabi tushunchalar tushuntirib o'tilib, so'ngra quyidagi ko'rinishdagi misollarni yechish maqsadga muvofiqdir.

1 - m i s o l. $\dfrac{1}{\sqrt5-\sqrt3}-\dfrac{1}{\sqrt3-\sqrt5}$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\frac{1}{\sqrt5-\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt3-\sqrt5}=\frac{1}{\sqrt5-\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt5-\sqrt3}=\frac{2}{\sqrt5-\sqrt3}=\frac{2(\sqrt5+\sqrt3)}{(\sqrt5-\sqrt3)(\sqrt3+\sqrt5)}=\frac{2(\sqrt5+\sqrt3)}{5-3}=\sqrt5+\sqrt3.$$

2- misol. $\left(\dfrac{\sqrt a}{2}+\dfrac{3a\sqrt{a^5}}{4}-\dfrac{\sqrt{a^5}}{4a}\right):(-\sqrt a).$ ifodani soddalashtiring.

Yechish.

1) $\dfrac{\sqrt a}{2}+\dfrac{3a\sqrt{a^5}}{4}-\dfrac{\sqrt{a^5}}{4a}=\dfrac{\sqrt a}{2}+\dfrac{3a\sqrt{a^4a}}{4}-\dfrac{\sqrt{a^4a}}{4a}=$

$$=\frac{\sqrt a}{2}+\frac{3a^3\sqrt a}{4}-\frac{a^2\sqrt a}{4a}=\frac{2\sqrt a+3a^3\sqrt a-a\sqrt a}{4}=\frac{\sqrt a}{4}\cdot\left(2+3a^3-a\right)$$

2) $\quad \dfrac{\sqrt{a}}{4}(2+3a^3-a):(-\sqrt{a})=-\dfrac{1}{4}(2+3a^2-a).$

3- misol. $\sqrt{a^3}+a\sqrt{9a}-\dfrac{1}{a}\sqrt{a^5}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish.

$$\sqrt{a^3}+a\sqrt{9a}-\frac{1}{a}\sqrt{a^5}=a\sqrt{a}+3a\sqrt{a}-a\sqrt{a}=3a\sqrt{a}.$$

4-misol. $\dfrac{a}{a-b}\sqrt[3]{(a^2-2ab+b^2)(a^2-b^2)(a+b)}\cdot\dfrac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$

ifodani soddalashtiring.

Yechish. $\dfrac{a}{a-b}\sqrt[3]{(a^2-2ab+b^2)(a^2-b^2)(a+b)}\cdot\dfrac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}=$

$$=\frac{a}{a-b}\sqrt[3]{(a-b)^2(a-b)(a+b)(a+b)}\cdot\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}=$$

$$=\frac{a}{a-b}\cdot(a-b)\cdot\sqrt[3]{(a+b)^2}\cdot\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}=a(a^3-b^3).$$

5-misol. $\left(\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{xy}\right):(x-y)+\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish.

1) $\quad \dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{xy}=\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{x}-\sqrt{xy}\cdot\sqrt{x}-\sqrt{xy}\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$

$$=\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{x}-x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}};$$

2) $\quad \dfrac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}:(x-y)=\dfrac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\dfrac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\dfrac{x}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2};$

3) $\quad \dfrac{x}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}+\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{x+2\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}=\dfrac{x+2\sqrt{xy}+2y}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}.$

1. Kasrli irratsional ifodalarning maxrajlarini berilishiga qarab irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi.

$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ ko’rinishlarda berilgan bo’lsa, ularning o’zaro ko’paytmasi $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$ bo’ladi. Agar irratsional ifodalar $\dfrac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ va $\dfrac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ ko’rinishlarda berilgan bo’lsa, ularning maxrajlari irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi:

1) $\dfrac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{A(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{A(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b};$ agar $a\ge 0, b\ge 0, a\ne b$ bo’lsa.

2) $\dfrac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b};$ agar $a\ge 0,\ b\ge 0,\ a\ne b$ bo’lsa.

1-misol. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$

2-misol. $\dfrac{5}{4-\sqrt{11}}=\dfrac{5(4+\sqrt{11})}{(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11})}=\dfrac{5(4+\sqrt{11})}{16-11}=4+\sqrt{11}.$

2. Agar irratsional ifodalar $\dfrac{A}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}$ va $\dfrac{A}{\sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ ko'rinishlarda berilgan bo'lsa, ularning irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi.

1) $$\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}.$$

2) $$\frac{A}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b}.$$

3) $$\frac{A}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{a+b}.$$

4) $$\frac{A}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{a-b}; \qquad a\neq b.$$

Misollar:

1) $$\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3};$$

2) $$\frac{12}{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{9}}=\frac{12\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\right)}{\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{9}\right)}=\frac{12\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\right)}{6-3}=4\sqrt[3]{6}-4\sqrt[3]{3}=4\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right).$$

3. Agar irratsional ifoda $\dfrac{A}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$ va $\dfrac{A}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}$ ko'rinishlarda berilgan bo'lsa, ularning maxrajlari irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}{\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}=$$
$$=\frac{A\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}{a-b}.$$

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+(-1)^{n-2}\sqrt[n]{ab^{n-2}}+(-1)^{n-2}\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}{\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}-\ldots+(-1)^{n-2}\sqrt[n]{ab^{n-2}}+(-1)^{n-2}\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}=$$
$$=\frac{A\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+(-1)^{n-2}\sqrt[n]{ab^{n-2}}+(-1)^{n-2}\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}{a+b}.$$

Misollar.

1) $$\frac{4}{\sqrt[5]{5}-\sqrt[5]{3}}=\frac{4\left(\sqrt[5]{5^4}+\sqrt[5]{5^3\cdot 3}+\sqrt[5]{5^2\cdot 3^2}+\sqrt[5]{5\cdot 3^3}+\sqrt[5]{3^4}\right)}{5-3}=2(\sqrt[5]{625}+\sqrt[5]{375}+\sqrt[5]{225}+\sqrt[5]{135}+\sqrt[5]{81}).$$

2) $$\frac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt[4]{3^3}-\sqrt[4]{3^2\cdot 2}+\sqrt[4]{3\cdot 2^2}-\sqrt[4]{2^3}}{3-2}=\sqrt[4]{27}-\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{8}.$$

4. Agar irratsional ifoda $\dfrac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, uning maxraji irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi:

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{A\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}=$$

$$=\frac{A\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{a+b-c+2\sqrt{ab}}=\frac{A\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(a+b-c-2\sqrt{ab}\right)}{\left[(a+b-c)+2\sqrt{ab}\right]\left[(a+b-c)-2\sqrt{ab}\right]}=$$

$$=\frac{A\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(a+b-c-2\sqrt{ab}\right)}{\left(a+b-c\right)^2-4ab};$$

$a\geq 0,\quad b\geq 0,\quad c\geq 0,\quad \left(a+b+c\right)^2-4ab\neq 0.$

5. Agar $\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ ifoda berilgan bo'lsa, uning maxraji irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi, agar $ab=cd$ bo'lsa,

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{A\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)\right]}{\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)\right]\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)\right]}=\frac{A\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)\right]}{a+b-c-d};$$

$a\geq 0,\quad b\geq 0,\quad c\geq 0,\quad d\geq 0,\quad a+b\neq c+d.$

6. $\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$ ifoda berilgan bo'lsa, uning maxraji irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi. Buning uchun quyidagi ayniyatlardan foydalanamiz:

$$\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Agar $x=\sqrt[3]{a}, y=\sqrt[3]{b}, z=\sqrt[3]{c}$ desak,

$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)=a+b+c+3\sqrt[3]{abc}.$$

Bu hosil qilingan natijani $\left(a+b+c\right)^2+3\left(a+b+c\right)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2}$ ga ko'paytirsak, ya'ni

$$\left[\left(a+b+c\right)-3\sqrt[3]{abc}\right]\left[\left(a+b+c\right)^2+3\left(a+b+c\right)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{\left(abc\right)^2}\right]=(a+b+c)^2-27abc$$

ni hosil qilamiz. Demak,

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)}=$$

$$=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)\left(a+b+c\right)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2}}{(a+b+c-\sqrt[3]{abc})[(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2}]}=$$

$$=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)\left(a+b+c\right)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2}}{\left(a+b+c\right)^3-27abc}$$

agar $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\neq 0, \left(a+b+c\right)^3\neq 27abc$ bo'lsa.

7. Murakkab ildiz formulasi quyidagichadir:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Masalan:

1) $\sqrt{11+\sqrt{40}}=\sqrt{\frac{11+\sqrt{121-40}}{2}}+\sqrt{\frac{11-\sqrt{121-40}}{2}}=\sqrt{10}\pm 1;$

2) $\sqrt{15-\sqrt{29}}=\sqrt{\frac{15+\sqrt{225-29}}{2}}-\sqrt{\frac{15-\sqrt{225-29}}{2}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{58}-\sqrt{2}\right).$

1-misol. $\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\cdot\sqrt{ab}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish.

$$\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\cdot\sqrt{ab}=$$

$$=\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{ab}-\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\sqrt{ab}=$$

$$=|ab|+2\sqrt{b^2}-\sqrt{a^2}+1=ab+2|b|-|a|+1.$$

2-misol. $A=\sqrt[6]{8x^1(7+4\sqrt{3})}\cdot\sqrt{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. Agar $x\geq 0$ bo'lsa, $8x(7+4\sqrt{3})\geq 0{,}6x\geq 0$ va $2x\geq 0$; $7+4\sqrt{3}=7+2\sqrt{12}=(\sqrt{3}+2)^2$ u holda

$$A=\sqrt[6]{8x(\sqrt{3}+2)^2}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}=\sqrt[3]{2\sqrt{2x}(\sqrt{3}+2)}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2x}(\sqrt{3}-2)}=\sqrt[3]{8x(3-4)}=-2\sqrt[3]{x};$$

3-misol. $\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)$. ifodani soddalashtiring.

Yechish.

$$A=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{1-a^2}-\sqrt{(1-a)^2}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}-\frac{1}{a}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a^2}$$

J: $\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a^2}$

4-misol. $(\sqrt[-2]{1+a}+\sqrt{1-a}):(\sqrt[-2]{1-a^2}+1)$ ifodani soddalashtiring.

Yechish.

1) $\sqrt[-2]{1+a}+\sqrt{1-a}=(1+a)^{-\frac{1}{2}}+\sqrt{1-a}=\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}=\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}}$

2) $\sqrt[-2]{1-a^2}+1=(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}+1=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}+1=\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}}$

3) $\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}}:\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}}\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}=\sqrt{1-a}$

5-misol. $\frac{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}+\frac{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. I-usul.

$$\frac{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}+\frac{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}+\frac{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}=$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}+\frac{(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}=$$

$$=\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}=2\sqrt[3]{a^2}$$

II-usul.

$$\frac{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}+\frac{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}=$$

$$=\frac{(a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})+(a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}=$$

$$=\frac{(a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})}{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}=2\sqrt[3]{a^2}$$

6-misol. $(\frac{1}{\sqrt[16]{a}}+\frac{1}{\sqrt[16]{b}})(\frac{1}{\sqrt[16]{a}}-\frac{1}{\sqrt[16]{b}})(\frac{1}{\sqrt[8]{a}}+\frac{1}{\sqrt[8]{b}})(\frac{1}{\sqrt[8]{a}}-\frac{1}{\sqrt[8]{b}})\cdot$

$\cdot(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}+\frac{1}{\sqrt[4]{b}})(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}-\frac{1}{\sqrt[4]{b}})(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}})(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}})$

Yechish. $(\frac{1}{\sqrt[16]{a}}+\frac{1}{\sqrt[16]{b}})(\frac{1}{\sqrt[16]{a}}-\frac{1}{\sqrt[16]{b}})$

1). $(a^{-\frac{1}{16}}+b^{-\frac{1}{16}})(a^{-\frac{1}{16}}-b^{-\frac{1}{16}})=a^{-\frac{1}{8}}-b^{-\frac{1}{8}}$

2). $(a^{-\frac{1}{8}}-b^{-\frac{1}{8}})(a^{-\frac{1}{8}}+b^{-\frac{1}{8}})=a^{-\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}$

3). $(a^{-\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}})(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}+\frac{1}{\sqrt[4]{b}})(a^{-\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}})=a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}$

4). $(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}})(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})=a^{-1}-b^{-1}$

5). $(a^{-1}-b^{-1})(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}+b^{-1})=a^{-2}-b^{-2}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

1. $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}.$ $\quad$ *j.* $\frac{1}{x}(x+\sqrt{1-x^2})$

2. $\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}}+\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2+4}}:\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2+4}}$ $\quad$ *j.* $\frac{2a}{a+\sqrt{a^2-1}}.$

3. $(\frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{y+1}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y}}):(2y+1)+\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}-1.$ $\quad$ *j.* $\frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}.$

4. $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-1$ $\quad$ *j.* $-\frac{\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{a-b}$ agar $a\neq b$ $bo'lsa.$

5. $3b\sqrt[4]{\frac{a^7\sqrt[3]{a^2}}{27b^2}}$ $\quad$ *j.* $a\sqrt[12]{27a^{11}b^6}$ $\quad agar \quad b>0, \quad a\geq 0 \quad bo'lsa.$

6. $(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})^2-(4xy)^{\frac{1}{2}}$ j. $x+y$

7. $\dfrac{(\sqrt{x}+1)(x^2-\sqrt{x})^{-1}}{(x+\sqrt{x}+x\sqrt{x})^{-1}}$ j. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

8. $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}+1$ j. $\sqrt{a}$

9. $\left[\dfrac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[\dfrac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$ *j.* $\dfrac{2\sqrt[4]{4-x^2}}{x}$

10. $\left(\dfrac{y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\sqrt{x}\right):\left(\dfrac{y}{\sqrt{xy}-x}+\dfrac{x}{\sqrt{xy}+x}-\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}\right)$ *j.* $\sqrt{y}-\sqrt{x}$

11. $\left(\dfrac{\sqrt{x^3}-2}{\sqrt{x}-2x}+\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x^3}+2}{\sqrt{x}+2x}-\sqrt{x}\right):\dfrac{1+\frac{1}{4}x^2}{x-\frac{1}{4}}.$ *j.* $\dfrac{1-x}{x}.$

12. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}}{1-\sqrt{a}}+\dfrac{1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right)^2:\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{a}\right).$ *j.* $\dfrac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2}.$

13. $\dfrac{(a+b)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}.$ *j.* $\dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$

14. $\left[a^2(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}+\sqrt{a^2+b^2}\cdot 2^{-1}\right]:\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a(a^2+b)^{-\frac{1}{2}}+1}.$ *j.* $\dfrac{3a^2+b^2}{2(a^2+b^2)}.$

15. $\dfrac{c+\sqrt{c^2-4}+2}{c-\sqrt{c^2-4}+2}+\dfrac{c-\sqrt{c^2-4}+2}{c+2+\sqrt{c^2-4}}-2c.$ *j.* $\dfrac{2-3c}{2}$

16. $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}:\left(a^{\frac{3}{2}}-1\right)^{-1}+1$ *j.* $a-1.$

17. $2a+\sqrt{a^2-1}\left(\dfrac{a^2}{a^2-1}+1\right)-1:\dfrac{a+(a^2-1)^{\frac{1}{2}}}{1+a(a^2-1)^{-\frac{1}{2}}}.$ *j.* $2(a+\sqrt{a^2-1}).$

18. $\dfrac{x^2+2+\sqrt{x^2-4}}{x^2+2-\sqrt{x^2-4}}+\dfrac{x^2+2-\sqrt{x^2-4}}{x^2+2+\sqrt{x^2-4}}.$ $|x|>2$ *j.* $x.$

19. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3x^{-1}}{x^2-x^{-1}}-\dfrac{x}{x^4-x}\right)(x^2+x+1);$ $x\neq 0,\ x\neq 1.$ *j.* $\dfrac{1}{x-1}\cdot\dfrac{3x^2-x-1}{2}.$

20. $\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{[a(a-b)]^{4}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{2}{3}}(a\sqrt{a}-b\sqrt{b})}{\sqrt[3]{(a-b)}}.$ *j.* $\dfrac{a^2+ab+b^2}{\sqrt[3]{(a-b)^2}}\cdot\sqrt{a}.$

21. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}}-\dfrac{1}{a}.$ $\qquad$ *j.* 0.

4-§. Trigonometrik ifodalarni ayniy almashtirish.

Maktab matematika kursining trigonometriya bo'limida juda ko'p ayniy munosabatlar, jumladan, quyidagi munosabatlar o'rganiladi:

1. Trigonometrik funksiyalarning birini ikkinchisi orqali ifodalaydigan ayniy almashtirishlar.
2. Trigonometrik ifodalarni soddalashtirishdagi ayniy almashtirishlar.
3. Trigonometrik ayniyatlarni isbotlashdagi ayniy almashtirishlar.
4. Trigonometrik tenglamalarni yechishdagi ayniy almashtirishlar.

Yuqoridagilardan ko'rinadiki, trigonometriya kursida ayniy almashtirishlar muhim o'rinni egallaydi. IX sinf geometriya kursida trigonometrik funksiyalarga ta'rif berilganidan so'ng, to'rtta trigonometrik funksiyalarni o'zaro bog'lovchi quyidagi uchta ayniyat o'rganiladi:

1. $\cos^2 a+\sin^2 a=1;$
2. $tga=\dfrac{\sin a}{\cos a};$
3. $ctga=\dfrac{\cos a}{\sin a}.$

Bu ayniyatlarni keltirib chiqarish maktab geometriya kursida batafsil bayon qilingan. Bu ayniyatdardan yana quyidagi uchta ayniyat keltirib chiqariladi:

1. $tga\cdot ctga=1;$ 2. $\dfrac{1}{\cos^2 a}=1+tg^2a;$ 3. $\dfrac{1}{\sin^2 a}=1+ctg^2a.$

Yuqoridagi ayniyatlar trigonometrik ifodalarni hisoblashda bajariladigan ayniy shakl almashtirishlarda eng ko'p ishlatiladigan ayniyatlar bo'lib hisoblanadi. O'qituvchi o'quvchilarga ildizli ifodalar ustida bajariladigan trigonometrik ayniy shakl almashtirishlarni bajarishga alohida e'tibor berish lozim. Masalan, $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ ifodani olaylik. Buni hisoblaydigan bo'lsak, $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sin\alpha$ tengligi o'rinli bo'ladi.

O'quvchilarga $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sin\alpha$ va $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sin\alpha$ tengliklarning ma'nosini tushuntirish lozim. Bu erda $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sin\alpha$ qiymat I chorakdagi, $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sin\alpha$ esa III chorakdagi qiymat ekanligini geometrik nuqtai nazaridan ko'rsatib tushuntirish maqsadga muvofiq. Bundan tashqari α ning aniq son qiymatlarida ham bu ifodalarni hisoblash lozim. Masalan, $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ bo'lganda $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, shuning uchun $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ammo $-\sin\alpha=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Demak, $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sin\alpha$ ekan.

O'quvchilar ayniy shakl almashtirishlarni yaxshi o'zlashtirishlari uchun birinchidan trigonometrik funksiyalar ta'rifini, ulardan birini ikkinchisi orqali ifodalovchi va asosiy ayniyatlar kabi formulalarni bilishlariga, ikkinchidan esa ana shu formulalarni trigonometrik ifoda berilishiga qarab tadbiq qila olish malakalariga bog'liqdir. Maktab matematika kursidagi trigonometrik ayniy shakl almashtirishlarni og'zaki bajarishga o'quvchilarni o'rgatish ularda mantiqiy matematik tafakkurni shakllantiradi. O'qituvchi biror trigonometrik ifodaning shaklini almashtirishni bajarishdan oldin o'quvchilarga eng sodda bo'lgan og'zaki trigonometrik mashqlardan namunalarni doskaga yozib, o'quvchilardan tezroq og'zaki soddalashtirishni bajarishlarini talab qilishi o'quvchilarni trigonometrik ayniyat va formulalarni esda doimo saqlashlariga imkon yaratadi.

Masalan,

$1-\cos^2\alpha;\quad 1-\sin^2\alpha;\quad (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha);$

$\sin\alpha\cdot tg\alpha\cdot\cos\alpha;\quad \dfrac{tg\alpha}{ctg\alpha};\quad \dfrac{1}{ctg\alpha}-tg\alpha;\quad \dfrac{tg\alpha}{ctg\alpha}+1;\quad \dfrac{\cos\alpha}{tg\alpha};$

Bundan keyin o'qituvchi murakkabrok trigonometrik almashtirishlarni ko'rsatishi maqsadga muvofiqdir.

1-misol. *(1–sinα)(1+sinα)–cos²α* ifodani soddalashtiring.

1-usul.

$$(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)-\cos^2 a=1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=$$
$$=1-(1-\cos^2 a)-\cos^2 a=1-1+\cos^2 a-\cos^2 a=0.$$

2-usul.

$$(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)-\cos^2 a=1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=$$
$$=1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=1-1=0;$$

2-misol. $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x-1}$ ifodani soddalashtiring.

$$\frac{\sin^4 x+\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x-1}=\frac{(\sin^2 x)^2+\cos^4 x-1}{(\sin^2 x)^3+\cos^6 x-1}=\frac{(1-\cos^2 x)^2+\cos^4 x-1}{(1-\cos^2 x)^3+\cos^6 x-1}=$$
$$=\frac{1-2\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^4 x-1}{1-3\cos^2 x+3\cos^4 x-\cos^6 x+\cos^6 x-1}=\frac{2\cos^2 x(\cos^2 x-1)}{3\cos^2 x(\cos^2 x-1)}=\frac{2}{3}.$$

3-misol. $\dfrac{cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}=ctg\,\alpha$ ayniyatni isbotlang.

$$\frac{cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=$$
$$=\frac{2\cos\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=ctg\,\alpha.$$

4 - misol. $\dfrac{1+\cos\beta+\cos^2\beta}{1+\sec\beta+\sec^2\beta}$ ifodani soddalashtiring.

$$\frac{1+cos\beta+\cos^2\beta}{1+\sec\beta+\sec^2\beta}=\frac{1+cos\beta+\cos^2\beta}{1+\dfrac{1}{cos\beta}+\dfrac{1}{\cos^2\beta}}=\frac{1+cos\beta+\cos^2\beta}{\dfrac{\cos^2\beta+cos\beta+1}{\cos^2\beta}}=\frac{(1+cos\beta+\cos^2\beta)\cos^2\beta}{\cos^2\beta+\cos\beta+1}=\cos^2\beta.$$

Yuqoridagilardan ko'rinadiki, trigonometriya kursida ayniy almashtirishlar muhim o'rin egallaydi. O'quvchilar trigonometrik ayniy shakl almashtirishlarni yaxshi o'zlashtirishlari uchun birinchidan, trigonometrik funksiyalarni birini ikkinchisi orqali ifodalovchi va asosiy ayniyat kabi formulalarni, ikkinchidan esa shu formulalarni trigonometrik ifodani berilishiga qarab tadbiq qila olish malakalariga bog'liqdir. Trigonometrik ayniy shakl almashtirishlarni bajarish uchun quyidagi formulalarni bilishlari kerak:

1. Asosiy trigonometrik ayniyatlar:

$$1)\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\qquad 2)\ tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\left[\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1)\right],n\in Z;$$
$$3)\ ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},(\alpha\neq\pi n);\qquad 4)\ \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},\left[\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1)\right],n\in Z;$$
$$5)\ \ \mathrm{cosec}\,\alpha=\frac{1}{\sin\alpha},\quad(\alpha\neq\pi n),\quad n\in Z.$$

Bu ayniyatlardan kelib chiqadigan formulalar quyidagilardir:

$$1)\quad tg\alpha\cdot ctg\alpha=1\qquad\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}n\right),\quad n\in Z.$$

2) $1+tg^2\alpha=\sec^2\alpha, \qquad \left[\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1)\right], \quad n\in Z.$

3) $1+ctg^2\alpha=\mathrm{cosec}^2\alpha, \qquad (\alpha\neq\pi), \quad n\in Z.$

1-misol. Ayniyatni isbotlang.

$$\cos^2\alpha(tg\alpha+2)(2tg\alpha+1)-5\sin\alpha\cos\alpha=2,\left[\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1)\right].$$

Isboti:

$$\cos^2\alpha(tg\alpha+2)(2tg\alpha+1)-5\sin\alpha\cos\alpha=\cos^2\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+2\right)\left(\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}+1\right)-5\sin\alpha\cos\alpha=$$

$$=2\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-5\sin\alpha\cos\alpha=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2.$$

2-misol. Ayniyatni isbotlang:

$$(1+\sin\alpha)(tg\alpha+ctg\alpha)(1-\sin\alpha)=ctg\alpha.\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2},n\in Z\right).$$

Исботи. $(1+\sin\alpha)(tg\alpha+ctg\alpha)(1-\sin\alpha)=(1+\sin\alpha)\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)(1-\sin\alpha)=$

$$=\frac{(1-\sin^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=ctg\alpha.$$

II. Ikki burchak yig'indisi va ayirmasining trigonometrik funksiyalari.

1) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

2) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

3) $tg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\pm tg\alpha\cdot tg\beta}.$

$$\left[\alpha,\beta,\alpha\pm\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),n\in Z\right].$$

4) $ctg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta\mp1}{ctg\alpha\pm ctg\beta}. \qquad (\alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\pi n,n\in Z)$

1-misol. $\cos15^o$ ni hisoblang.

Hisoblash.

$$\cos15^0=\cos(45^0-30^0)=\cos45^0\cos30^0+\sin45^0\sin30^0=$$

$$=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(\sqrt6+\sqrt2)\approx0{,}9659.$$

2-misol. $\sin15^o$ ni hisoblang .

Hisoblash

$$\sin15^0=\sin(45^0-30^0)=\sin45^0\cos30^0-\cos45^0\sin30^0=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(\sqrt6-\sqrt2).$$

Xuddi shuningdek, $tg15^o=2-\sqrt3$, $stg15^o=2+\sqrt3$, $\sec15^o=\sqrt6-\sqrt2$ larni hisoblash mumkin.

3-misol. $\dfrac{tg^2a-tg^2\beta}{1-tg^2a\cdot tg^2\beta}=tg(a+\beta)(tga-\beta)$ ayniyatni isbotlang.

Исботи . $\dfrac{tg^2\alpha-tg^2\beta}{1-tg^2\alpha\cdot tg^2\beta}=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}\cdot\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}=$

$=tg(\alpha+\beta)tg(\alpha-\beta).$

4-misol. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ ayniyatni isbotlang.

Isboti $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=$
$=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-\sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)=$
$=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$

Keltirish formulalari:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha;$

2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \sin(2\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha;$

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha,\quad \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha;$

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha,\quad \cos(2\pi\pm\alpha)=\cos\alpha;$

5) $tg\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp ctg\alpha,\quad tg(\pi\pm\alpha)=\pm tg\alpha;$

6) $ctg\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp tg\alpha,\quad ctg(\pi\pm\alpha)=\pm ctg\alpha;$

IV. Ikkilangan va uchlangan burchakning trigonometrik funksiyalari:

1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$ 2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$

3) $tg\,2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\quad\left[2a,\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),n\in Z\right];$

4) $ctg\,2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}\quad\left(2a,\alpha\neq\pi n,n\in Z\right);$

5) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$ 6) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$

7) $tg3\alpha=\frac{1-3tg^2\alpha}{3tg\alpha-tg^3\alpha}\quad\left[2a,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z\right];$

8) $ctg3\alpha=\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}\quad\left[\alpha\neq\frac{\pi n}{3},\ n\in Z\right];$

9) $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};$ 10) $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};$

11) $\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4};$ 12) $\cos^3\alpha=\frac{\cos 3\alpha+3\cos\alpha}{4};$

1-misol. $\sin\alpha\cdot\sin(60^o-\alpha)\cdot\sin(60^o+\alpha)=\frac{1}{4}\sin3\alpha$ ayniyatni isbotlang.

Isboti. $\sin\alpha\cdot\sin(60^0-\alpha)\cdot\sin(60^0+\alpha)=\sin\alpha(\sin^2 60^0-\sin^2\alpha)=\sin\alpha\left(\frac{3}{4}-\sin^2\alpha\right)=$

$=\frac{1}{4}\left(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha.$

2-misol. $\cos\alpha\cdot\cos(60^o-\alpha)\cdot\cos(60^o+\alpha)=\frac{1}{4}\cos3\alpha$ ayniyatni isbotlang.

3-misol. $tg\alpha\cdot tg(60^o-\alpha)\cdot tg(60^o+\alpha)=tg3\alpha$ ayniyatni isbotlang.

Bu ayniyatlardan foydalanib, quyidagi trigonometrik ifodalarni osonlikcha hisoblash mumkin:

$$a)\quad \sin 20^0\cdot\sin 40^0\cdot\sin 80^0=\frac{1}{4}\sin 3\cdot 20^0=\frac{1}{4}\sin 60^0=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8};$$

$$б)\quad \cos 10^0\cdot\cos 50^0\cdot\cos 70^0=\frac{1}{4}\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{8};$$

$$в)\quad tg6^0\cdot tg54^0\cdot tg66^0=tg18^0.$$

4-misol. $sin3\alpha cos^3\alpha+sin^3\alpha cos3\alpha=\frac{3}{4}\,sin\alpha$ ayniyatni isbotlang.

Isboti. $$\sin 3\alpha\cos^3\alpha+\sin^3\alpha\cos 3\alpha=\sin 3\alpha\frac{\cos 3\alpha+3\cos\alpha}{4}+$$

$$+\cos 3\alpha\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}=\frac{3}{4}(\sin 3\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos 3\alpha)=\frac{3}{4}\sin 4\alpha.$$

5-misol. $cos\alpha\cdot cos2\alpha\cdot cos4\alpha$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. Berilgan ifodani $sin\alpha$ ga ko'paytiramiz hamda bo'lamiz.

$$\frac{cos\,\alpha\cdot cos2\alpha\cdot cos4\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot cos2\alpha\cdot\cos 4\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 4\alpha\cdot\cos 4\alpha\right)}{\sin\alpha}=\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 8\alpha\right)\right]}{\sin\alpha}=\frac{\sin 8\alpha}{8\sin\alpha}.$$

6-misol. $tg4\alpha-sec4\alpha=\dfrac{\sin 2a-\cos 2a}{\sin 2a+\cos 2a}$ ayniyatni isbotlang.

V. Yarim argumentning trigonometrik funksiyalari

1) $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; 2) $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$;

3) $\left|tg\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$; $(\alpha\neq\pi(2n+1),\ n\in Z)$;

4) $\left|ctg\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$;

5) $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $(\alpha\neq\pi n, n\in Z)$;

6) $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$; $(\alpha\neq\pi n, n\in Z)$;

1-misol. $tg7^0 30'$ ni hisoblang.

$$tg\,7^0 30'=\frac{1-\cos 15^0}{\sin 15^0}=\frac{1-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=$$

Yechish. $$=\frac{(4-\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{4\sqrt{6}+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-8}{4}=$$

$$=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2.$$

2-misol. $\dfrac{1-tg^2 15^0}{1+tg^2 15^0}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ni isbotlang.

Isboti. $\dfrac{1-tg^2 15^0}{1+tg^2 15^0}=\dfrac{1-\dfrac{1-\cos 30^0}{1+\cos 30^0}}{1+\dfrac{1-\cos 30^0}{1+\cos 30^0}}=\cos 30^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

VI. Trigonometrik funksiyalar ko'paytmasini yig'indiga keltirish formulalari:

1) $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right];$

2) $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right];$

3) $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$

Misol. *cosα+cos(α+2β)+...+cos(α+πβ)* ifodani soddalashtiring.

Yechish. Berilgan ifodani $\sin\dfrac{\beta}{2}$ ga ko'paytiramiz va bo'lamiz.

$$\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\left[\sin\frac{\beta}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+\beta)+\sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+2\beta)+\right.$$

$$\left.+\ldots+\sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+n\beta)\right]=\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)+\right.$$

$$+\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)+\ldots+$$

$$+\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)+\ldots+$$

$$\left.+\sin\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}\beta\right)-\sin\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right)\right]=\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\left[\sin\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}\beta\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}2\sin\frac{n+1}{2}\beta\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\beta\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

VII. Trigonometrik funksiyalar yig'indisi va ayirmasining formulalari:

1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2};$

3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

4) $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

5) $tg\alpha+tg\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta},\quad\left[\alpha,\beta\neq\dfrac{\pi}{2}(2n-1),n\in Z\right];$

$$6)\quad tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta},\quad \left[\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1), n\in Z\right];$$

$$7)\quad ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta},\quad \left[\alpha,\beta\neq\pi n, n\in Z\right];$$

$$8)\quad ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

1-misol. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$ ayniyatni isbotlang.

Isboti.

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\gamma+\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\alpha-\beta-\gamma}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}2\cos\frac{\alpha-\beta+\alpha-\beta+2\gamma}{4}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta-\alpha-\beta-2\gamma}{4}=$$

$$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

2-misol. Agar $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ bo'lsa, $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ tenglikning o'rinli ekanligini isbotlang.

Isboti. Shartga ko'ra $\gamma=\pi-\alpha-\beta$ u holda

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\left[\pi-(\alpha+\beta)\right]-2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)-2=$$

$$=\frac{1-\cos2\alpha}{2}+\frac{1-\cos2\beta}{2}+\frac{1-\cos2(\alpha+\beta)}{2}-2=-\frac{1}{2}\left[\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2(\alpha+\beta)+1\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\cos^2(\alpha+\beta)\right]=-\cos(\alpha+\beta)\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]=$$

$$=-2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta=-2\cos(\pi+\gamma)\cos\alpha\cos\beta=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

VII. Trigonometrik funksiyalarni yarim argumentning tangensi orqali ifodalash:

$$1)\quad \sin a=\frac{2tg\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}}\quad \left[a\neq\pi(2n+1), n\in Z\right];$$

$$2)\quad \cos a=\frac{1-tg^2\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}}\quad \left[a\neq\pi(2n+1), n\in Z\right];$$

$$3)\quad tga=\frac{2tg\frac{a}{2}}{1-tg^2\frac{a}{2}}\quad \left[a,\frac{a}{2}\neq\frac{\pi}{2}(2n+1), n\in Z\right];$$

5-§. Trigonometrik ifodalarni soddalashtirishga doir misollar yechish metodikasi.

1-misol. $(1-\sin a)(1+\sin a)-\cos^2 a$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. **I-usul.**

$$(1-\sin a)(1+\sin a)-\cos^2 a=1-\sin^2 a-\cos^2 a=1-(1-\cos^2 a)-\cos^2 a=1-1+\cos^2 a-\cos^2 a=1-1+\cos^2 a-\cos^2 a=0.$$

II- usul. $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)-\cos^2\alpha= =1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=1-1=0.$

2 misol. $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x-1}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x-1}=\dfrac{(\sin^2 x)^2+\cos^4 x-1}{(\sin^2 x)^3+\cos^6 x-1}=$

$$=\frac{(1-\cos^2 x)^2+\cos^4 x-1}{(1-\cos^2 x)^3+\cos^6 x-1}=\frac{1-2\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^4 x-1}{1-3\cos^2 x+3\cos^4 x-\cos^6 x+\cos^6 x-1}=$$

$$=\frac{2\cos^2 x(\cos^2 x-1)}{3\cos^2 x(\cos^2-1)}=\frac{2}{3}.$$

3 misol $\dfrac{1-(\sin x-\cos x)^2}{1+\sin^2 x-\cos^2 x}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. $\dfrac{1-(\sin x-\cos x)^2}{1+\sin^2 x-\cos^2 x}=\dfrac{1-\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x-\cos^2 x}=$

$$=\frac{1-(\sin^2 x+\cos^2 x)+2\sin x\cos x}{2\sin^2 x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x}=\frac{\cos x}{\sin x}=ctgx.$$

4-misol. $\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{ctg^2 x}-\dfrac{\sin^2 x}{tg^2 x}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. $\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{ctg^2 x}-\dfrac{\sin^2 x}{tg^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\dfrac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x}=$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\cos^2 x=\frac{1-\sin^2 x-\cos^4 x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x-\cos^4 x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}=\sin^2 x.$$

5-misol. $\dfrac{[\cos(-a)+\sin(-a)]^2-1}{\cos^2(-a)+\sin^2(-a)-1}$ ifodani soddalashtiring.

$$\frac{[\cos(-a)+\sin(-a)]^2-1}{\cos^2(-a)+\sin^2(-a)-1}=\frac{(\cos a-\sin a)^2-1}{\cos^2 a-\sin^2 a-1}=\frac{\cos^2 a-2\cos a\sin a+\sin^2 a-1}{\cos^2 a-\sin^2 a-(\cos^2 a+\sin^2 a)}=\frac{-2\cos a\sin a}{-2\sin^2 a}=ctga.$$

6-misol. $1+\sin\alpha+\cos\alpha$ ifodani ko'paytma shakliga keltiring.

Yechish. $1+\sin\alpha+\cos\alpha=(1+\cos\alpha)+\sin\alpha=$

$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\left(90^0-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin 45^0\cdot$$

$$\cdot\cos\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right).$$

7-misol. $\sqrt{3}-2\sin\alpha$ ifodani ayniy almashtirish orqali ko'paytma shakliga keltiring.

Yechish. $\sqrt{3}-2\sin\alpha=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha\right)=2(\sin 60^0-\sin\alpha)==4\sin\left(30^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30^0+\dfrac{\alpha}{2}\right).$

8-misol. $\dfrac{\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha+2\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. $\dfrac{\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha+2\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}=\dfrac{(\sin\alpha+\sin 5\alpha)+2\sin 3\alpha}{(\sin 3\alpha+\sin 7\alpha)+2\sin 5\alpha}=$

$$=\frac{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha+2\sin 3\alpha}{2\sin 5\alpha\cos 2\alpha+2\sin 5\alpha}=\frac{2\sin 3\alpha(\cos 2\alpha+1)}{2\sin 5\alpha(\cos 2\alpha+1)}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}.$$

9-misol. $1-\cos\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{2}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. $1-\cos\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}=1-\cos\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-$

$$-\left(\cos^2\frac{\alpha}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{4}\right)=1+\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=1.$$

10-misol. $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha,$

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^3-3\sin^4\alpha\cdot\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha\cdot\cos^4\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=$

$=1-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha,$

$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\left(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$

$=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=0.$

11-misol. $A=\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}$ ifodani hisoblang.

Yechish. $A=\left(\sin^2\frac{\pi}{16}\right)^2+\left(\sin^2\frac{3\pi}{16}\right)^2+\left(\sin^2\frac{5\pi}{16}\right)^2+\left(\sin^2\frac{7\pi}{16}\right)^2=$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2+\left(1-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(1-\cos\frac{5\pi}{8}\right)^2+\left(1-\cos\frac{7\pi}{8}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[4-2\left(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}\right)+\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}\right)\right]=1-\frac{1}{2}\times$$

$$\times 2\left(2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{8}+2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(4+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}\right)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.)$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

1. $\dfrac{1+tg(-60^0)}{\sin 60^0+\sin(-30^0)}$ ifodani soddalashtiring. J: –2

2. $\dfrac{2-\sin(-45^0)\cdot\cos(-45^0)}{tg(-45^0)\cdot ctg\,45^0}$ ifodani soddalashtiring. J: -2,5

3. $\dfrac{\left(\cos(-\alpha)-\sin(-\alpha)\right)^2}{1-2\sin(-\alpha)\cdot\cos(-\alpha)}$ ifodani soddalashtiring. J: 1

4. $\dfrac{\cos(-\alpha)}{1+2\sin^2(-\alpha)}-\dfrac{\sin(-\alpha)}{1-2\cos^2(-\alpha)}$ ifodani soddalashtiring. $j.\dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$

QUYIDAGI IFODALARNI HISOBLANG:

5. $\dfrac{4-2tg45^0+tg60^0}{3\sin 90^0-4\cos 60^0+4ctg45^0}$. $j.\dfrac{2+\sqrt{3}}{5}$

6. $\dfrac{4-tg^2\dfrac{\pi}{4}+ctg^4\dfrac{\pi}{3}}{3\sin^3\dfrac{\pi}{2}+\cos^2\dfrac{\pi}{3}+ctg\dfrac{\pi}{4}}$. $j.\dfrac{28}{54}$

7. $\left(4\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^2-\left(2tg\dfrac{\pi}{6}\right)^2-\left(2\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2-\left(2ctg\dfrac{\pi}{4}\right)^2$. $j.-\dfrac{1}{3}$.

8. $\sin 2\pi+\cos 4\pi+tg2\pi$ $j.1$

9. $ctg\dfrac{\pi}{2}+\cos ec\dfrac{\pi}{2}+\sec 0^0$. $j.2$.

10. $a^2\sin\dfrac{\pi}{2}+2ab\cos\pi-b^2\sin\dfrac{3}{2}\pi$. $j.$ $(a-b)^2$.

11. $10tg2\pi+3\cos\dfrac{3}{2}\pi-4tg\pi-5\sin\dfrac{3}{2}\pi$. $j.$ 5.

12. $4\sin 90^0+3\cos 720^0-3\sin 630^0+5\cos 900^0$. $j.$ 5.

13. $5tg540^0+2\cos 1170^0+4\sin 990^0-3\cos 540^0$. $j.-1$.

14. $100ctg^2 990^0+25tg^2 540^0-3\cos^2 900$. $j.$ -3.

15. $tg900^0-\sin(-1095^0)+\cos(-1460^0)$. $j.$ $\sqrt{1{,}5}$.

16. $\sin(-1125^0)+\cos^2(-900^0)+tg1710^0$ $j.$ $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

17. $cos20^0+cos40^0+cos60^0+...+cos160^0+cos180^0$. $j.-1$.

18. $\sin\left(-\dfrac{14\pi}{3}\right)+\cos ec^2\dfrac{29\pi}{4}-tg^2\dfrac{3\pi}{4}$. $j.$ $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.

19. $\dfrac{5+\sin 30^0\cos 60^0-tg\dfrac{\pi}{4}}{a+b\cos 2\pi-\sin\pi}$. $j.\dfrac{17}{4(a+b)}$.

20. $\dfrac{m\cos\dfrac{\pi}{4}+n\sin\dfrac{\pi}{4}-tg\pi}{mn-mtg\dfrac{\pi}{4}-ctg\dfrac{\pi}{2}}$. $j.\dfrac{\sqrt{2}(m+n)}{2m(n-1)}$.

21. $(\sin\varphi+\cos\varphi)^2+(\sin\varphi-\cos\varphi)^2$. $j.2$.

22. $\dfrac{1+\cos\beta+\cos^2\beta}{1+\sec\beta+\sec^2\beta}$. $j.\cos^2\beta$.

23. $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^4\dfrac{\alpha}{2}$. $j.1$.

24. $\dfrac{1}{\cos ec^2 2\alpha-1}+\dfrac{\cos^2 2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$. $j.\sec^2 2\alpha$.

25. $\dfrac{1-tg^2\beta}{1+tg^2\beta}+\sin^2\beta.\quad j.\cos^2\beta.$

26. $(1-\cos^2 x)ctg^2 x-1.\quad j.-\sin^2 x.$

27. $\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x.\quad j.\quad \cos^2 x.$

28. $\dfrac{1-\sin^4 2\alpha-\cos^4 2\alpha}{2\sin^4 2\alpha}+1.\quad j.\quad 1.$

29. $(1-\cos^2\beta)tg^2\beta-\sec^2\beta.\quad j.-\cos^2\beta.$

30. $cos^2\dfrac{\alpha}{2}co\sec^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot co\sec^2\dfrac{\alpha}{2}.\quad j.\quad co\sec^2\dfrac{\alpha}{2}.$

31. $\dfrac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}-2ctg^2\alpha.\quad j.\quad 0.$

32. $\dfrac{1+2\sin 2x\cdot\cos 2x}{\cos 2x+\sin 2x}-\cos 2x\quad j.\quad \sin 2x.$

33. $(tg^2\alpha-\sin^2\alpha)ctg^2\alpha+\cos^2\alpha.\quad j.\quad 1.$

34. $\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}+ctg^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\beta.\quad j.\cos ec^2\beta.$

35. $\sqrt{\dfrac{\cos ec^4\alpha-ctg^4\alpha}{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}}\quad j.\quad \dfrac{1}{|\sin\alpha|}=|\cos ec\alpha|.$

36. $\dfrac{co\sec^2\alpha-1}{cos^2 2\alpha-\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha}.\quad j.\quad co\sec^2\alpha$

37. $\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\sin\alpha\cdot\cos\alpha\quad j.\quad -1.$

38. $\dfrac{\sin^4 3\alpha-\cos^4 3\alpha}{\sin^2 3\alpha-\cos^2 3\alpha}+tg^2\alpha.\quad j.\quad \sec^2\alpha.$

39. $\dfrac{\sin^2\beta-tg^2\beta}{\cos ec^2\beta-ctg^2\beta}\cdot ctg^2\beta.\quad j.\quad -\sin^2\beta.$

40. $\sin\alpha(1+tg\alpha)+\cos\alpha(1+ctg\alpha)\quad j.\cos ec\alpha+\sec\alpha.$

41. $\dfrac{\cos ec\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sec\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad j.1.$

42. $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(45^0-\alpha)}{\sqrt{3}\sin\alpha-2\sin(30^0+\alpha)}\quad j.\sqrt{2}tg\alpha.$

43. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cos\beta}\quad j.tg(\alpha+\beta).$

44. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha}\quad j.ctg 2\alpha.$

45. $\dfrac{\sqrt{2}cos\,\alpha-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{2}\sin\alpha}\qquad j.\ tg\alpha.$

46. $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\alpha-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\alpha}{\cos\dfrac{\pi}{4}}$ *j.* 1.

47. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$. *j.* $\sin\alpha-\sin\beta$.

48. $\left(\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}\right)^2+\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ *j.* $\sec^2(\alpha+\beta)$

49. $\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha-\beta)}$. *j.* $2ctg\beta$.

50. $\dfrac{tg(25^0+\alpha)+tg(65^0-\alpha)}{1-tg(65^0-\alpha)tg(25^0+\alpha)}$ *j.* ∞.

51. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{(tg\alpha-tg\beta)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)}$ *j.* $\cos\alpha$.

52. $\dfrac{1-\cos^2\varphi}{1-\sin^2\varphi}+tg\varphi ctg\varphi=\sec^2\varphi$.

53. $(tg\alpha+ctg\alpha)^2-(tg\alpha-ctg\alpha)^2=4$.

54. $\dfrac{\cos\alpha+ctg\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha}=1+\sin\alpha$.

VII-BOBNI TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Ayniy shakl almashtirish deb nimaga aytiladi?
2. Ayniyat tushunchasini ta’riflab bering.
3. Birhad deb nimaga aytiladi?
4. Ko’phad deganda nimani tushunasiz?
5. O’xshash hadni ta’riflab bering.
6. Ixchamlash deganda nimani tushunasiz?
7. Qanday ifodaga kasr ratsional ifoda deyiladi?
8. Irratsional ifodani ta’riflab bering.
9. Trigonometrik ifodalardagi ayniy almashtirishlar qanday bajariladi?
10. Ikki burchak yig’indisi va ayirmasining sinusi nimaga teng?
11. Ikki burchak yig’indisi va ayirmasining kosinusi nimaga teng?
12. Ikki burchak yig’indisi va ayirmasining tangensi nimaga teng?
13. Ikki burchak yig’indisi va ayirmasining kotangensi nimaga teng?
14. Asosiy trigonometrik ayniyatlarni yozib bering.
15. Ikkilangan va uchlangan trigonometrik funksiyalarni tushuntirib bering.
16. Yarim argumentni trigonometrik funksiyalari deganda nimani tushunasiz?
17. Trigonometrik funksiyalar ko’paytmasini yig’indiga qanday keltiriladi?
18. Trigonometrik funksiyalar yig’indisi va ayirmasining ko’paytmaga qanday keltiriladi?
19. Trigonometrik funksiyalarni yarim argumentli tangensi orqali qanday ifodalanadi?
20. Trigonometrik ifodalarni soddalashtirish deganda nimani tushunasiz?

VII-BOB UCHUN TAYAN IBORALAR

Ayniyat tushunchasi, birhad, ko’phad, o’xshash had, ixchamlash, kasr ratsional ifoda, irratsional ifoda, trigonometrik ifoda, ikki burchak yig’indisining sinusi, kosinusi, tangensi, kotangensi, ikki burchak ayirmasining sinusi, kosinusi, tangensi va kotangensi, trigonometrik ayniyat, ikkilangan trigonometrik funksiyalar.

VIII BOB.
TENGLAMALARNI O'RGANISH METODIKASI.
1-§. Tenglama tushunchasini kiritish metodikasi.

Tenglama tushunchasi maktab matematika kursida konkret-induktiv metod orqali kiritiladi. O'quvchilar IV sinfgacha natural sonlar ustida ta'rifsiz to'rt amalni bajarishni o'rganadilar, so'ngra o'quvchilarga qo'shish, ayirish, bo'lish amallarida qatnashayotgan komponentlardan ikkitasi ma'lum bo'lganda noma'lum qatnashayotgan komponentni topish o'rganiladi. Bunda ana shu topilishi kerak bo'lgan komponentni harf bilan belgilanadi. Masalan, qanday songa 4 ni qo'shsak, 7 soni hosil bo'ladi? ($x + 4 = ?$). Qanday sondan 8 ni ayirsak, 10 soni hosil bo'ladi? (x–8=10?). Qanday sonni 5 ga bo'lsak, 7 soni hosil bo'ladi? ($x : 5 = 7$?), 18 soni qanday songa bo'linsa, 3 soni hosil bo'ladi? (18:x=3?). Shu xildagi savollar asosida harfiy ifoda qatnashgan to'rt amalga doir tengliklarni hosil qilishimiz mumkin. O'quvchilar $x + 4 = 7$ tenglikdagi noma'lum x sonini topishni ayirish mavzusidan biladilar, ya'ni "noma'lum qo'shiluvchini topish uchun yig'indidan ma'lum qo'shiluvchini ayirish kerak" degan qoidaga ko'ra berilgan $x + 4 = 7$ tenglikdagi noma'lum sonni quyidagicha topadilar: x=7–4=3. Ana shu fikrlarni o'quvchilarga tushuntirib, so'ngra x+4=7 tenglik matematika kursida tenglama deb atalishini, so'ngra unga berilgan quyidagi ta'rifni keltirish mumkin.

T a ' r i f. *Noma'lum son qatnashgan tenglik tenglama deyiladi.*

$$x + 4 = 7;\ x – 5 = 9;\ 12 - x = 6,27;\ x = 9;\ x : 8 = 7 \ldots .$$

Tenglama deb qaralayotgan tengliklarda noma'lum sonlar *x, y, z.* ... harflar bilan belgilanadi. Tenglamani yechish degan so'z uning hamma ildizlarini topish demakdir, boshqacha qilib aytganda, noma'lumning tenglamani chap qismini uning o'ng qismiga teng qiladigan qiymatni topish tenglamani yechish deb ataladi. Masalan, x+4=7 tenglama, x=3 soni uning ildizidir, chunki tenglamaning ildizigina berilgan tenglikni to'g'ri tenglikka aylantira oladi.

T a ' r i f. *Nomalum sonning topilgan qiymati berilgan tenglamaning yechimi yoki ildizi deyiladi.*

Bundan ko'rinadiki, noma'lumning tenglamani ikkala qismini son jihatidan teng qiladigan qiymati tenglamaning ildizi yoki yechimi bo'lar ekan. Demak, x=3 yechim bo'lgani uchun 3+4=7 bo'ladi. IV sinf o'quvchilariga bir noma'lumli tenglamalarni yechish uchun quyidagi qoida o'rgatiladi:

1. Agar berilgan tenglamada noma'lum son kamayuvchi bo'lsa, u quyidagi qoidaga ko'ra topiladi. *Noma'lum kamayuvchini topish uchun ayriluvchi bilan ayirmani ko'shish kerak.* Umumiy holda $x–b =c$ bo'lsa, $x=b+c$ bo'ladi.

2. Agar berilgan tenglamada noma'lum son ayiriluvchi bo'lsa, u quyidagi qoidaga ko'ra topiladi. *Noma'lum ayiriluvchini topish uchun kamayuvchidan ayirmani ayirish kerak.* Umumiy holda: $a–x =c$ bo'lsa, $x = a– c$ bo'ladi.

3. Agar berilgan tenglamada noma'lum son ko'payuvchilardan biri bo'lsa, u quyidagi qoidaga ko'ra topiladi. *Nomalum ko'payuvchini topish uchun ko'paytmani ma'lum ko'payuvchiga bo'lish kerak.* Umumiy holda: $a \cdot x = c$ bo'lsa. $x=c:a$ bo'ladi.

4. Agar berilgan tenglamada noma'lum son bo'luvchi bo'lsa, u holda u quyidagi qoidaga ko'ra topiladi. *Noma'lum bo'luvchini topish uchun bo'linuvchini bo'linmaga bo'lish kerak.* Umumiy holda $a : x = c$ bo'lsa, $x = a : c$ bo'ladi.

5. Agar berilgan tenglamada noma'lum son bo'linuvchi bo'lsa, u quyidagi qoidaga ko'ra topiladi. *Noma'lum bo'linuvchini topish uchun bo'linmaga bo'luvchini ko'paytirish kerak.* Umumiy holda $x : a = c$ bo'lsa, $x = a \cdot c$ bo'ladi.

6. V sinf matematika kursida manfiy sonlarni ayirish mavzusi o'tiladi, bunda berilgan yig'indi va qo'shiluvchilardan biriga ko'ra ikkinchi qo'shiluvchi topiladi. Masalan, $x+(-5)=12$ tenglik berilgan bo'lsin. x ni topish uchun tenglikni hap ikki qismiga 5 sonni qo'shamiz, $x+(-5)+5=12+5$, $x=17$. Bundagi 17 soni 12 va -5 sonlarining ayirmasidir, ya'ni 12–(–5)=12+5=17. Javobning to'g'riligini qo'shish amali orqali tekshiriladi: 17+(-5)=12. Agar x+(-5)=12 tenglikka IV sinfdagi berilgan tenglama ta'rifini qo'llasak, $x+(-5)=12$ tenglik tenglama bo'lib hisoblanadi. Bu erdagi $x=17$ soni esa $x+(-5)=12$ tenglamaning ildizi bo'ladi. Yuqoridagi yechish bosqichlariga ko'ra $x+a=o$ yoki $-x+a=o$ ko'rinishdagi tenglamalarni yechish qoidasini chiqarish mumkin. $x+a=b$ yoki $-x+a=b$ ko'rinishdagi har qanday tenglamani yechish uchun ularning chap va o'ng qismlariga birgina $-a$ sonini qo'shish kifoya. $(x+a=b) \Rightarrow [x+a–a=b–a) \Rightarrow (x=b–a)$;

$$(–x+a=b) \Rightarrow (–x+a–a=b–a) \Rightarrow (–x=b–a) \Rightarrow (x=a–b).$$

M i so l l a r: *1)* $y+9=–5$ *2)* $x– 3=–17$.

$y+9–9=–5–9$ $\quad$ $x–3+3=–17+3$

$y=–14.$ $\quad$ $x=–14.$

3) $4 – (2{,}8 – x) = 1{,}5$ $\quad$ Tekshirish:

$4 – 1{,}5 = 2{,}8–x$ $\quad$ $4 - (2{,}8 – 0{,}3) = 1{,}5$

$-2{,}8 + 2{,}5 = 2{,}8 – 2{,}8– x$ $\quad$ $1{,}5 = 1{,}5.$

$-x = -0{,}3 \Rightarrow x = 0{,}3.$

Shu misollardan keyin tenglama tuzishga olib keladigan masalalarni yechish foydali bo'ladi.

1 - m a s a l a. Savatda bir necha qo'ziqorin bor edi. Unga yana 27 ta qo'ziqorin solinganidan keyin qo'ziqorinlar 75 ta bo'ldi. Savatda nechta qo'ziqorin bo'lgan?

Ye ch i sh. Savatdagi bor qo'ziqorinlar sonini x bilan belgilaymiz. U holda shartga muvofiq $x+27=75$ tenglamani tuzamiz.

Tenglamani yechish uchun bunday mulohaza yuritamiz: tenglikdagi noma'lum qo'shiluvchini topish uchun yig'indidan ma'lum qo'shiluvchini ayirish kifoya, ya'ni $x=75–27=48$ (ta). Tenglama yechimini to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini bilish uchun tuzilgan tenglamadagi noma'lum x o'rniga 48 sonini qo'yib, uni hisoblaymiz. Agar tenglamaning chap qismida ham 75 chiqsa u to'g'ri yechilgan bo'ladi. 48+27=75, 75=75. Demak, yechim to'g'ri ekan.

2- m a s a l a. O'quvchida 81 tiyin bor edi. U bir necha tiyinga konfet oldi, shundan keyin unda 63 tiyin qoldi. Konfet qancha tiyin turadi?

Matematika fanida tenglik tushunchasi taqqoslash tushunchasi orqali quyidagicha tushuntiriladi: o'rganilayotgan matematik ob'ektdagi narsalarning o'zaro o'xshash va farqli tomonlarini fikran aniqlash taqqoslash deyiladi. Ana shu o'rganilayotgan narsalarning o'xshash yoki farqli tomonlarini taqqoslaganda bir xil son qiymatiga ega bo'lsa, u holda bu narsalar son jihatidan teng deb qaraladi, u tenglik (=) ishorasi bilan belgilanadi. Agar a va b sonlar o'zaro teng bo'lsa, u $a=b$ kabi belgilanadi, agar ular teng bo'lmasa, $a\neq b$ kabi belgilanadi. Masalan, 3=3, 7+1=8, 9-6=3. ... . Xuddi shuningdek, $8\neq 9$, $3+5\neq 4$, ... kabi yoziladi.

Matematika kursida tengliklar ikki xil bo'ladi, ayniyat va tenglama.

T a ' r i f. *Tarkibidagi noma'lum sonlarning yo'l qo'yiladigan har qanday qiymatlarida ikkali qismi bir xil son qiymatlarini qabul qiladigan tenglik ayniyat deyiladi.* Masalan,

$$x^2 – 1 = (x – 1)(x + 1);$$

$$\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2, \qquad \frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}.$$

1) $x^2–1=(x–1)\cdot(x+1)$ tenglikni olaylik, x ning ixtiyoriy qiymatlarida tenglikning chap tomoni o'ng tomoniga teng chiqadi. Masalan,

$x = 2$ bo'lsin, $2^2–1=(2–1)(2+1)$, bundan 3 = 3

$x = 5$ bo'lsin, $5^2–1=(5–1)(5 + 1)$, bundan 24 = 24

2) $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}.$ tenglikni olaylik, bu erda eng avvalo bu tenglikdagi noma'lumlarning yo'l qo'yiladigan qiymatlarini aniqlash lozim. Bu tenglikda $x\neq\pm 1$ bo'lishi kerak, aks holda kasrning maxraji nolga teng bo'lib, u ma'noga ega bo'lmay qoladi. Shuning uchun berilgan xarflarning yo'l qo'yiladigan qiymatlariga quyidagicha ta'rif berilgan.

T a ' r i f. Tenglik tarkibiga kiruvchi harflarning shu tenglikning o'ng va chap qismi ma'noga ega bo'ladigan qiymatlari bu harflarning yo'l qo'yiladigan qiymatlari deyiladi. Yuqoridagi tenglamada yo'l quyiladigan qiymatlar $x\neq\pm 1$ lardan boshqa barcha haqiqiy sonlardir. Masalan,

agar $x = 2$ bo'lsa, $\frac{1}{2^2-1}=\frac{1}{2+1}\cdot\frac{1}{2-1}, \quad \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{3}$

agar $x = 3$ bo'lsa, $\frac{1}{3^2-1}=\frac{1}{3+1}\cdot\frac{1}{3-1}, \quad \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

Endi matematika kursida shunday tengliklar ham borki, ularning ikkala qismi harfning bir xil yo'l qo'yiladigan qiymatlarida turli son qiymatlarini qabul qiladi. Masalan: $x+5=7$, $2x – 7 = 8$.

Bu ko'rinishdagi tengliklarni tenglamalar deb ataladi, tenglama biror berilgan tenglikni ikkala qismi noma'lum harfning yo'l qo'yiladigan qiymatlarida bir xil son qiymatlar qabul qilishini aniqlash masalasini o'rganuvchi tenglik bo'lib hisoblanadi. V sinfda $4x=2x+16$ ko'rinishdagi tenglamani yechish o'rganiladi. Bunday tenglamalarni yechish uchun tenglikning har ikkala tomoniga $-2x$ ifodani qo'shamiz. $4x+(-2x)=2x+(-2x)+16$, $4x-2x=2x-2x+16$. Bu ifodaning tengligini quyidagicha tushuntirish mumkin. Tarozining har ikkala pallasidan o'zaro teng bo'lgan miqdordagi narsalarni olib tashlaymiz, u holda $2x=16$ tenglik hosil bo'ladi, bundan $x=8$ soni kelib chiqadi, $x=8$ soni $4x=2x+16$ tenglamaning yechimi yoki ildizi bo'ladi.

Bir noma'lumga nisbatan ikki tenglamadan birining har bir ildizi ikkinchi tenglamaning ham ildizi bo'lsa, ikkinchi tenglamaning har bir ildizi esa shu bilan birga birinchi tenglamaning ham ildizi bo'lsa, bu ikki tenglama *teng kuchli (ekvivalent) tenglamalar* deyiladi. Masalan, $2x+5=7$ va $x-1=0$ tenglamalar teng kuchli tenglamalardir, chunki ularning ikkalasining ham ildizi $x=1$ sonidan iboratdir. Bundan tashqari ildizlari mavjud bo'lmagan tenglamalar ham teng kuchlidir. Masalan, $x^2=-3$ va $x^2+2=-5$ va hokazo. Teng kuchli tenglamalarning quyidagi xossalarini o'quvchilarga tushuntirish maqsadga muvofiqdir.

1 - x o s s a. *Agar tenglamaning ikkala qismi noldan farqli biror songa ko'paytirilsa yoki bo'linsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglash hosil bo'ladi.*

Masalan, $15x-5=25$, bu tenglamaning har ikki tomonini 5 soniga bo'lsak, $3x-1=5$ tenglama hosil bo'ladi, bu tenglama oldingi tenglamaga teng kuchli bo'lgan tenglamadir. Masalan: $12x-7=2x+13$. $12x-2x=13+7$, $10x=20$, $x=2$.

2-§. Chiziqli tenglamalar.

Maktab matematika kursida chiziqli tenglama tushunchasini kiritish abstrakt-deduktiv usul orqali amalga oshiriladi, chunki bu tenglama uchun avvalo ta'rif beriladi, so'ngra tenglamaning umumiy ko'rinishi va uni yechish usullari hamda grafigi o'rganiladi.

Ta'rif. *Agar tenglamaning chap va o'ng qismlari, noma'lum o'zgaruvchiga nisbatan chiziqli funksiyalardan iborat bo'lsa, bunday tenglama chiziqli tenglama deyiladi.*

Chiziqli tenglama umumiy holda $ax+b=cx+d$ ko'rinishda ifodalanadi. Bu erda a, b, c, d - berilgan ma'lum sonlar, x esa noma'lum son. Bu ko'rinishdagi tenglamalarni yechish quyidagicha amal oshiriladi. $ax+b=cx+d$. (1), $ax-cx=d-b$, $x(a-c)=d-b$, $x=\dfrac{d-b}{a-c}$ (2)

1. Agar $a\neq c$ bo'lsa, (1) tenglama (2) ko'rinishdagi bitta yechimga ega bo'ladi.

2. Agar $a-c=0$. $d-b\neq 0$ bo'lsa. (1) tenglama $0\cdot x=d-b$ ko'rinnshni oladi, bunday tenglama x ning hech bir qiymatida o'rinli bo'lmaydi. Demak, bu holda tenglama yechimga ega emas.

3. Agar $a-c=0$ va $d-b=0$ bo'lsa, (1) tenglama $0\cdot x=0$ ko'rinishni oladi, bu tenglik x ning barcha kiymatlarida o'rinli, shuning uchun (1) tenglama cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Boshqacha qilib aytganda, Hap qanday son uning yechimi bo'laveradi.

1-m i s o l. $a+x=a^2x-1$ tenglamani x ga nisbatan yeching.
Ye ch i sh. $a+1=a^2x-x$, $a+1=x(a^2-1)$; $a+1=x(a-1)\cdot(a+1)$

1. Agar $a\neq +1$ bo'lsa, tenglama $x=\dfrac{1}{a-1}$ yechimga ega.

2. Agar $a=1$ bo'lsa, tenglama $0\cdot x=1$ ko'rinishni oladi, bu holda u yechimga ega emas.

3. Agar $a=-1$ bo'lsa, tenglama $-2x=1$, $x=-\dfrac{1}{2}$ ko'rinishni oladi, bu holda u tenglama yechimga ega.

2 - m i s o l. $3-ax=x-b$ tenglamani x ga nisbatan yeching.
3 - m i s o l. $ax-b=1+x$ tenglamani x ga nisbatan yeching.

3-§. Parametrik usulda berilgan kasr - ratsional tenglamalarni yechish.

Parametrik usuldagi tenglamalarni yechish degan so'z tenglamada qatnashayotgan parametrlarning yo'l qo'yiladigan barcha qiymatlariga mos keluvchi ildizlarni topish demakdir.

M i s o l. $\frac{5}{ax-4}=\frac{1}{9x-a}$ tenglama yechilsin.

Bu tenglama ma’noga ega bo’lishi uchun $ax–4\neq0$ va $9x–a\neq0$ bo’lishi kerak. Tenglamaning har ikkala tomonini $(ax–4)\cdot(9x–a)$ ga ko’paytirsak $45x–ax=5a–4$ tenglama hosil bo’ladi, bundan:

$$45x–ax=5a–4,\ x(45–a)=5a–4. \qquad (1)$$

Endi biz a ning qanday qiymatlarida $9x–a=0$ ga $ax–4=0$ tengliklar o’rinli bo’lishini topamiz. $x=\frac{a}{9}$ va $x=\frac{4}{a}$, $a\neq0$. Bu qiymatlarni (1) tenglamaga qo’ysak, a ga nisbatan kvadrat tenglama hosil bo’ladi:

1) $\frac{a}{9}(45–a)=5a–4.$ 2) $\frac{4}{a}(45–a)=5a–4$

$45a–a^2=45a–36,$ $180–4a=5a^2–4a$

$a^2=36,\ a=\pm6.$ $a^2=36,\ a=\pm6.$

Agar parametr $a=\pm6$ qiymatni qabul qilsa, berilgan tenglama maxraji nolga teng bo’lib, u ma’noga ega bo’lmaydi, shu sababli $(45–a)x=5a–4$. (1) tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli bo’lganligi uchun, $a\neq\pm6$ shartga ko’ra, bu tenglamani quyidagicha yechamiz: 1. a) Agar $45–a\neq0$ bo’lsa, $a\neq45$ bo’ladi. Bu holda (1) tenglama bitta yechimga ega bo’ladi.

b) Agar $45–a=0$ bo’lsa, (1) tenglama $0\cdot x=221$ bo’ladi, bu holda tenglama yechimga ega emas. Javob: $x=\frac{5a-4}{45-a}$, $a\neq45$ va $a=\pm6$.

2. Agar $a=45$ bo’lsa, tenglama yechimga ega emas.

3. Agar $a=\pm6$ bo’lsa, tenglama ma’noga ega bo’lmaydi.

2 - m i s o l. $\frac{1}{2n+nx}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{2(n+3)}{x^3-4x}$ tenglama yechilsin.

J a v o b : 1) agar $n=–4$ bo’lsa, $x=8$; 2) agar $n=–2$ bo’lsa, $x=4$; 3) agar $n=–1$ bo’lsa, $x=1$; 4) agar $n=1$ bo’lsa, $x=3$.

3 - m i s o l. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-b}=1+\frac{1}{b}$ tenglama yechilsin.

J a v o b: $x_1=b+1,\ x_2=\frac{2b}{b+1}$, $b\neq0,\ b\neq1.$

Agar $b=–1$ bo’lsa, $x=0$. Agar $b=1$ bo’lsa, $x=2$.

4-§. Noma’lum absolyut miqdor belgisi ostida qatnashgan tenglamalarni yechish metodikasi.

Absolyut miqdor ta’rifiga ko’ra x sonining absolyut miqdori quyidagicha aniqlanadi:

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa,}\\ -x, & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa,}\\ 0, & \text{agar } x=0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$$

Masalan. |5| = 5, |-2| = 2; ...

T a ‘ r i f. *Agar tenglamadagi noma’lum soni absolyut qiymati belgisi bilan kelsa, bunday tenglama absolyut miqdor belgisi ostidagi tenglama deyiladi.*

Masalan, $|3x–1|=4$. $|2x–1|=|5x–7|$, $|5x–7|=13$

Bu ko’rinishdagi tenglamalarni quyidagi usullar bilan yechiladi.

1-misol. $|5x–7|=13$.

Ye ch i sh. **1 - u s u l.**

1) $5x-7=13,$ 2) $5x-7=-13,$

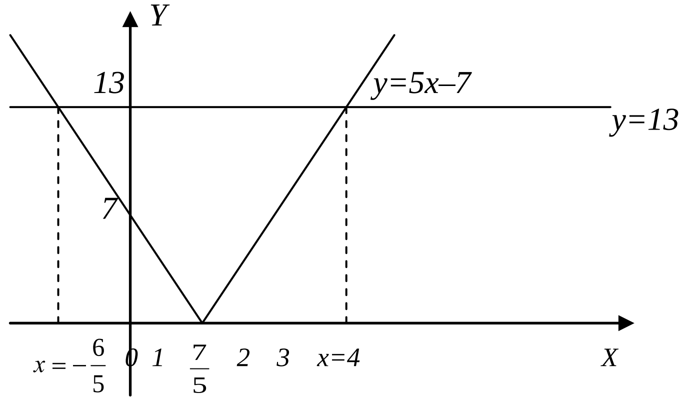
$5x=13+7,$ $5x=-13+7,$

$5x=20,$ $5x=-6,$

$x=4,$ $x=-\frac{6}{5}=-1\frac{1}{5},$

Tekshirish. *20–7=13, 13=13*. Demak, *x=4, x=–6/5* sonlari berilgan tenglamaning ildizlari bo'ladi.

2 - u s u l. (Grafik usuli): *y=5x–7* funksiya grafigini chizamiz, ularning kesishish nuqtasining absissasi berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi (40-chizma).



40-chizma.

X	0	1	2	3	4	5	6	-1	-2	-3	-4
Y	7	2	3	8	13	18	23	12	17	22	27

Buning uchun $y=|5x-7|$ funksiyaning grafigini yasaymiz. Bu grafikning x o'qidan yuqorida yotgan qismini o'zgarishsiz qoldiramiz. Uning uchun $5x-7>0$, shu sababli $|5x-7|=5x-7$ bo'ladi. Bu grafikning absissalar o'qidan pastga yetgan qismiga shu o'qqa nisbatan simmetrik akslantiramiz. Bu holda $5x-7<0$ bo'ladi, ya'ni $|5x-7|=-(5x-7)$. Natijada $y=5x-7$ funksiya grafigi $y=13$ chiziq bilan ikki nuqtada kesishadi, kesishish nuqtalarning absissalari $x=4$ va $x=-1\frac{1}{5}$ nuqtalardan iborat bo'ladi, ana shu nuqtalar $|5x-7|=13$ tenglamaning yechimi bo'ladi.

3 - u s u l. (oraliqlar metodi). Absolyut miqdor belgisi ostidagi $|5x-7|$ ifoda $x=\frac{7}{5}$ da nolga aylanadi. Sonlar to'g'ri chizig'ida $x=\frac{7}{5}$ nuqtani belgilab, bu nuqtadan chapda $\left(-\infty;\frac{7}{5}\right)$ va o'ngda $\left(\frac{7}{5};\infty\right)$ olingan qiymatlarga ko'ra $|5x-7|$ ifodani absolyut miqdor belgisiz quyidagicha yozish mumkin:

$$|5x-7|=\begin{cases} -5x+7, & \text{birinchi } \left(-\infty;\frac{7}{5}\right) \text{ oraliqda,} \\ 5x-7, & \text{ikkinchi } \left(\frac{7}{5};\infty\right) \text{ oraliqda} \end{cases}$$

Bularga ko'ra tenglamani quyidagi ikki ko'rinishda yozish mumkin:

1) $-5x+7=13,$ 2) $5x-7=13,$

$-5x=13-7,$ $5x=13+7,$

$-5x=6,$ $5x=20,$

$x=-\frac{6}{5}=-1\frac{1}{5},$ $x=4,$

2 - m i s o l. $|7x-1|=21-9x.$

Yechish.

1) $7x-1=21-9x,$ 2) $7x-1=-(21-9x),$

$$7x+9x=21+1, \qquad 7x-1=9x-21$$

$$16x=22, \qquad 9x-7x=21-1,$$

$$x=\frac{22}{16}=\frac{11}{8}, \quad x=1\frac{3}{8}. \qquad 2x=20, \quad x=10.$$

Tekshirish.

$$7\cdot\frac{11}{8}-1=21-9\frac{11}{8}, \frac{77-8}{8}=\frac{168-99}{8}.$$

Demak, $x=\frac{11}{8}$ soni berilgan tenglama yechimi ekan.

3-misol. $|x-1|+|x+1|=2$ tenglama yechilsin. Bu tenglamada $x-1=0$ va $x+1=0$, demak, ular $x=1$ va $x=-1$ yechimlarga ega bo'ladi. Sonlar to'g'ri chizig'ida $x=1$ va $x=-1$ nuqtalarni belgilaymiz, bu holda sonlar to'g'ri chizig'i uchta oraliqqa ajraladi. Birinchi oraliq $(-\infty, -1)$, ikkinchi oraliq $[-1,1]$, uchinchi oraliq $(1,\infty)$ dan iboratdir. $|x-1|$ va $|x+1|$ ifodalarning har birini hosil qilingan oraliqlarda absolyut miqdor belgisiz quyidagicha yozish mumkin:

1) agar $x\le -1$ bo'lsa, $|x-1|+|x+1|=2$ tenglama $-x+1-x-1=2$ bo'ladi, bundan $-2x=2$ yoki $x=-1$ yechimga ega bo'lamiz;

2) agar $-1\le x\le 1$ bo'lsa, $|x-1|+|x+1|=2$ tenglama $-x+1+x+1=2$ bo'ladi, bundan $2x=2$ yoki $x=1$ bo'ladi. Demak, $x=-1$ va $x=1$ yechimlarga ega bo'ladi.

4 - m i s o l. $2x^2-5x-3\,|x-2|=0$ tenglama yechilsin.

1) agar $x<2$ bo'lsa, $2x^2-5x-3|x-2|$ tenglama $2x^2-5x+3x-6=0$ yoki $x^2-x-3=0$ ko'rinishni oladi, uni yechsak $x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+3}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$, ya'ni $x_1=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ va $x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ yechimlar hosil qilinadi.

Bunda: $x_1=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ yechim qaralayotgan sohada yetmaydi, shuning uchun $x_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ $(-\infty, 2)$ oraliq uchun yechim bo'ladi;

2) agar $x\ge 2$ bo'lsa, berilgan tenglamadan $2x^2-5x-3x+6=0$ hosil bo'ladi yoki ushbu $x^2-4x+3=0$ ko'rinishni oladi, uni yechsak, $x_1=1$ va $x_2=3$ yechimlarga ega bo'lamiz. Bundagi $x_1=1$ yechim qaralayotgan oraliqda yotmaydi, shuning uchun $(2,\infty)$ oraliq uchun yechim $x_2=3$ bo'ladi. Demak. $2x^2-5x-3|x-2|=0$ tenglamaning yechimi $x_1=1-\frac{\sqrt{13}}{2}$, $x_2=3$ bo'ladi.

5-§. Kvadrat tenglama tushunchasini kiritish metodikasi.

Kvadrat tenglama tushunchasi VII sinfda o'tiladi. Bu tema materialini o'tishdan bir necha kun oldin o'qituvchi qo'shimcha vazifa sifatida o'quvchilarga kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratish mavzusini o'rganib kelishlarini vazifa qilib berilishi kerak.

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Misol.

$$2x^2+4x-3=2\left(x^2+2x-\frac{3}{2}\right)=2\left(x^2+2x+1-\frac{3}{2}-1\right)=$$

$$=2((x+1)^2-\frac{5}{2})=2(x+1)^2-5.$$

Kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratishni tushuntirilganidan so'ng kvadrat tenglama tushunchasini abstrakt-deduktiv usul orqali kiritiladi.

T a ' r i f. *$ax^2+bx+c=0$ (1) ko'rinishdagi tenglama kvadrat tenglama deyiladi, bu yerda a, b, c berilgan sonlar, $a\neq 0$, x noma'lum sondir.*

Bu tenglamaning ildizlarini topish uchun tenglikning chap tomonida turgan kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratamiz, ya'ni

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \text{ yoki } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \quad (2)$$

(2) tenglama (1) tenglamaga teng kuchli tenglamadir. (2) haqiqiy yechimga ega bo'lishi uchun $\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geq 0$ bo'lishi kerak. Bu yerdagi b^2-4ac (1) ning diskriminanti deyiladi va u $D=b^2-4ac$ kabi belgilanadi.

1) Agar diskriminant $D=b^2-4ac>0$ bo'lsa, (1) tenglama ikkita haqiqiy har xil yechimga ega bo'ladi. Bu yechimni (2) tenglamadan topa olamiz:

$$x_{1,2}=\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

2) Agar diskriminant $D=b^2-4ac<0$ bo'lsa, (1) tenglama haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega emas.

3) Agar diskriminant $D=b^2-4ac=0$ bo'lca, (1) bitta haqiqiy yechimga ega bo'ladi: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

Maktab matematika kursida to'la kvadrat tenglama koeffitsientlariga ma'lum shartlar qo'yish orqali chala kvadrat tenglamalar hosil qilamiz.

Agarda (1) $b=0$ va $c=0$ bo'lsa, $ax^2+bx+c=0$ tenglama $ax^2=0$ ko'rinishni oladi, uning yechimi $x=0$. bo'lgan $x_1=x_2=0$ bo'ladi. Agar $b=0$ bo'lsa, $ax^2+bx+c=0$ tenglama $ax^2+c=0$ ko'rinishni oladi, uni yechsak, $x^2=-\frac{c}{a}$ bo'ladi, agar $\frac{c}{a}<0$ bo'lsa, $-\frac{c}{a}>0$ bo'ladi, bunda $ax^2+c=0$ tenglama haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega bo'ladi, ya'ni $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$. Agar $\frac{c}{a}>0$ bo'lsa, $ax^2+c=0$ tenglama haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega emas.

3) Agar $c=0$ bo'lsa, $ax^2+bx+c=0$ tenglama $ax^2+bx=0$ ko'rinishni oladi, uni yechsak

$$(ax^2+bx)=0 \Rightarrow x(ax+b)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-\frac{b}{a} \end{cases}$$ yechimlarni hosil qilamiz.

$ax^2+bx+c=0$ ko'rinishdagi tenglama ildizlarini yana quyidagi usul bilan ham hisoblash mumkin. Berilgan tenglamani $ax^2+bx=-c$ ko'rinishda ifodalab, uning har ikkala tomonini $4a$ ga ko'paytiramiz, natijada $4a^2x^2+4abx=-4ac$ tenglik hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan tenglikning har ikki tomoniga b^2 ni qo'shamiz: $4a^2c^2+4abx+b^2=b^2-4ac$ bundan: $(2ax+b)^2=b^2-4ac$.

Agar $D=b^2-4ac\geq 0$ bo'lsa, bu tenglikning har ikki tomonidan arifmetik kvadrat ildiz chiqarish mumkin:

$(2ax+b)=\sqrt{b^2-4ac}$.

Bunda ikki hol bo'lish mumkin:

1) agar $2ax+b<0$ bo'lsa, $-(2ax+b)=\sqrt{b^2-4ac}$, $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}$;

2) agar $2ax+b>0$ bo'lsa,

$2ax+b=\sqrt{b^2-4ac}$,

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Shunday qilib, diskriminant $D=b^2-4ac>0$ bo'lsa, tenglama ikkita haqiqiy har xil yechimga ega bo'ladi.

Kvadrat tenglama ildizlarini uning diskriminantiga ko'ra tekshirishni quyidagi jadval orqali tushuntirilsa, o'quvchilarning mantiqiy fikrlash qobiliyatlari ortadi:

$D=b-4ac>0$	Agar $c>0$ bo'lsa,	$b<0$ bo'lsa, ikkala ildiz musbat, $b>0$ bo'lsa, ikkala ildiz manfiy.
	$c<0$ bo'lsa, ikkala ildiz har xil bo'ladi	$b<0$ bo'lsa, ikkala ildiz musbat, $b>0$ bo'lsa, ikkala ildiz manfiy.
	$c=\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-\frac{b}{a} \end{cases}$	$b>0$ bo'lsa, ildizlardan biri nolga teng, ikkinchisi esa manfiy bo'ladi, $b<0$ bo'lsa, ildizlardan biri nolga teng, ikkinchisi esa musbat bo'ladi.
$D=b-4ac=0$		$b>0$ bo'lsa, ikkala ildiz manfiy bo'ladi, $b<0$ bo'lsa, ikkala ildiz musbat bo'ladi.

Agar $ax^2+bx+c=0$ tenglamada $a=1$ bo'lsa, hosil bo'lgan $x^2+bx+c=0$ tenglama keltirilgan kvadrat tenglama deyiladi. Har qanday to'la kvadrat tenglamaning har ikkala tomonini a ga bo'lish orqali uni keltirilgan kvadrat tenglama ko'rinishiga keltirish mumkin; $ax^2+bx+c=0$ bo'lsa, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, agar $\frac{b}{a}=p,\ \ \frac{c}{a}=q$ desak, u holda $x^2+bx+q=0$ tenglama keltirilgan kvadrat tenglamaning umumiy ko'rinishi bo'ladi.

Bu tenglamaning yechimi $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ formula bilan ifodalanadi.

Misollar: 1) $3x^2-5x+2=0,\ a=3,\ b=-5.\ c=2.$ To'la kvadrat tenglama yechimi formulasiga ko'ra

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot3\cdot2}}{6}=\frac{5\pm1}{6}$$

$x_1=\frac{5+1}{6}=\frac{6}{6}=1,$ $\qquad x_2=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$ bo'ladi.

2) $3x^2-5x+2=0$ tenglamaning har ikki tomonini 3 ga bo'lsak, $x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}=0$ bo'ladi. Bu tenglamaning ildizlarini keltirilgan kvadrat tenglama formulasidan foydalanib topamiz:

$$p=-\frac{5}{3}, \qquad q=+\frac{2}{3.}$$

$$x_{1,2}=-\frac{p}{q}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-\left(-\frac{5}{6}\right)\pm\sqrt{\frac{25}{36}-\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{5}{6}\pm\sqrt{\frac{25-24}{36}}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}.$$

$$x_1=\frac{5+1}{6}=\frac{6}{6}=1, \qquad x_2=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

6-§. Viyet teoremasi.

Viyet teoremasi ham matematik tushunchalarni kiritishning konkret induktiv usuli orqali kiritiladi, chunki bu teoremani bayon qilishdan oldin teorema xulosasiga olib keladigan quyidagi ko'rinishdagi tushuntirish ishlari bilan shug'ullaniladi. Agar $x^2+px+q=0$ keltirilgan kvadrat tenglama diskriminanti manfiy bo'lmasa, uning ildizlari $x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ va $x_1=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ bo'lar edi.

Bu x_1 va x_2 yechimlarni o'zaro qo'shsak, $x_1+x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-p$, ko'paytirsak

$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\cdot\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=\left(-\frac{p}{2}-\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=q$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bularga ko'ra teoremani quyidagicha ifodalash mumkin.

Teorema. *Agar keltirilgan kvadrat tenglama haqiqiy ildizlarga ega bo'lsa, bu ildizlarning yig'indisi qarama-qarshi ishora bilan olingan x oldidagi koeffitsientga, ularning ko'paytmasi esa shu tenglamaning ozod xadiga teng bo'ladi.*

M i s o l. $x^2-3x+2=0$ tenglamani Viyet teoremasi asosida tekshiring.

Yechish. $D=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2}=\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}>0$ shuning uchun $\begin{cases}x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=2\end{cases}$ bo'ladi. Agar berilgan tenglamani yechsak, $x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}$, bundan $x_1=2$, $x_2=1$ ekani topiladi. Demak, $x_1+x_2=2+1=3$, $x_1\cdot x_2=2\cdot 1=2$.

Bundan tashqari bu sistemani yechsak, noma'lumlarning biriga nisbatan berilgan tenglama hosil bo'ladi:

$$\begin{cases}x_1x_2+x_2^2=3x_2\\ x_1\cdot x_2=2\end{cases}\Rightarrow \left(x_2^2=3x_2-2\right)\Rightarrow x_2^2-3x_2+2=0.$$

Xuddi shuningdek x_1 noma'lumga nisbatan yechish ham mumkin.

7-§. Kvadrat tenglamaga keltirib yechiladigan tenglamalar.

1. $ax^4+bx^2+c=0$ (1) tenglama bikvadrat tenglama deyiladi. Bu yerda a, b va c berilgan sonlar bo'lib, $a\neq 0$ dir. Agar (1) da $x^2=z$ desak, $az^2+bz+c=0$ (2) ko'rinishdagi kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamani z ga nisbatan yechamiz: $z_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ va $z_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Agar $z_1>0$ va $z_2>0$ *($a>0$, $c>0$, $b^2-4ac\geq 0$, $b<0$ yoki $a<0$, $c<0$, $b^2-4ac\geq 0$, $b>0$)* bo'lsa, (1) ko'rinishdagi kvadrat tenglama quyidagi ko'rinishdagi to'rtta yechimga ega bo'ladi:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\quad x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

1 - m i s o l. $x^4-3x^2-4=0$ tenglama yechilsin.

Agar $x^2=z$ deb belgilasak, tenglama $z^2-3z-4=0$ ko'rinishni oladi. Bu tenglamaning yechimi $z_1=4$ va $z_2=-1$ bo'lib $x_{1,2}=\pm 2$ bo'ladi, $x_{3,4}=\pm\sqrt{-1}$ yechimi esa haqiqiy sonlar to'plamida mavjud emas.

2 - m i s o l. $2x^4-5x^2+3=0$. $a=2$, $b=-5$, $c=3$.

Echish. Agar $x^2=z$ desak, berilgan tenglama $2z^2-5z+3=0$ ko'rinishni oladi. Bunda $D=b^2-4ac=25-24=1>0$:

$$z_{1,2}=\frac{5\pm 1}{4},\quad z_1=\frac{3}{2},\quad z_2=1.$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{z}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}};\qquad x_{3,4}=\pm\sqrt{1}=\pm 1.$$

Yechimni formulalardan foydalanib topish mumkin:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{25-4\cdot3\cdot2}}{4}}=\pm\sqrt{\frac{5-1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{4}{4}}=\pm1;$$

$$x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{25-4\cdot3\cdot2}}{4}}=\pm\sqrt{\frac{5+1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Maktab matematika kursida o’zaro teskari noma’lum ifodalarni o’z ichiga olgan tenglamalar ham kvadrat tenglamaga keltirib yechiladi. Fikrimizning dalili quyidagi tenglamani yechaylik:

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\frac{3}{2}.$$

Bu ko’rinishdagi tenglamalarni yechish jarayonida o’qituvchi eng avvalo noma’lum o’zgaruvchining yo’l qo’yiladigan qiymatlari sohasini aniqlash lozimligini o’quvchilarga tushuntirishi kerak. Bu tenglamadagi o’zgaruvchining yo’l qo’yiladigan qiymatlari sohasi $x\neq-1$ va $x\neq0$. Agar $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=z$ desak, $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\frac{1}{z}$ bo’lib, z o’zgaruvchiga ko’ra berilgan tenglama $z-\frac{1}{z}=\frac{3}{2}$ yoki $2z^2-3z-2=0$ ko’rinishni oladi. Bu tenglamadan: $z_1=-\frac{1}{2},\quad z_2=2$

1) $z_1=-\frac{1}{2}$ bo’lganda $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=-\frac{1}{2}$ bo’ladi, bundan $\frac{x}{x+1}=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$ tenglama hosil bo’ladi. Bu tenglama haqiqiy sonlar to’plamida yechimga ega emas.

2) $z=2$ bo’lganda $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=2$ bo’ladi, bundan yoki $\frac{x}{x+1}=\pm\sqrt{2}$ tenglamalar hosil qilamiz.

$$a)\quad \left(\frac{x}{x+1}=\sqrt{2}\right)\Rightarrow\{x=\sqrt{2}x+\sqrt{2}\}\Rightarrow\{x-\sqrt{2}x=\sqrt{2}\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{x(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}\}\Rightarrow\left(x=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(x=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x=\frac{\sqrt{2}+2}{1-2}\right)\Rightarrow\{x_1=-2-\sqrt{2}\}$$

$$б)\quad \left(\frac{x}{x+1}=-\sqrt{2}\right)\Rightarrow\{x=-\sqrt{2}x-\sqrt{2}\}\Rightarrow\{x+\sqrt{2}x=-\sqrt{2}\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{x(1+\sqrt{2})=-\sqrt{2}\}\Rightarrow\left(x=\frac{-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\left(x=\frac{(1-\sqrt{2})(-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}\right)\Rightarrow\Rightarrow\left(x=\frac{-\sqrt{2}+2}{1-2}\right)\Rightarrow\{x_2=\sqrt{2}-2\}$$

Javob: $x_1=-2-\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2}-2$.

3. To’rtinchi darajali $ax^4+bx^3+cx^2+dx+c=0$ ko’rinishdagi tenglamalarni ham to’la kvadrat ajratish yo’li bilan kvadrat tenglama ko’rinishiga keltirib yechiladi.

M i s o l. $x^4+6x^3+9x^2-4x^2+12x+3=0$ tenglamani yeching.

Yechish. $x^4+6x^3+9x^2-4x^2+12x+3=(x^2+3x)^2-4(x^2+3x)+3=0$

$x^2+3x=z$ desak, tenglama $z^2-4z+3=0$ ko’rinishni oladi. Bundan $z_1=1$ va $z_2=3$.

1) $z_1=1$ bo’lganda $x^2+3x=1$ yoki $x^2+3x-1=0$ bo’ladi.

$$x_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+1}=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2};$$

2) $z_2=3$ bo’lganda $x^2+3x=3$ yoki $x^2+3x-3=0$ bo’ladi.

$$x_{3,4}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+3}=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{21}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}.$$

Javob: $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$; va $x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$.

4. Agar $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a$ tenglamada koeffitsientlarning $a_n=a_0$, $a_{n-1}=a_1$, $a_{n-2}=a_2$, ... tengliklari o'rinli bo'lsa, bunday tenglama qaytma tenglama deyiladi. Qaytma tenglamalar ham ayniy almashtirishlar bajarish orqali kvadrat tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi.

M i s o l. $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamani har ikkala tomonini $x^2\neq 0$ ga bo'lamiz. $2x^2+3x-16+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}=0$ yoki $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-16=0$. Agar $x+\dfrac{1}{x}=z$ desak, $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=z^2$ bo'ladi, bunda: $x^2+\dfrac{1}{x^2}=z^2-2$. Bu belgilashlarga asosan berilgan tenglama quyidagi ko'rinishni oladi: $2(z^2-2)+3z-16=0$ yoki $2z^2+3z-20=0$, bundan

$$z_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+4\cdot 2\cdot 20}}{4}=\frac{-3\pm 13}{4},\quad z_1=\frac{5}{2},\quad z_2=-4$$

1) Agar $z_1=\dfrac{5}{2}$ bo'lsa, $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$ yoki $2x^2-5x+2=0$, bundan $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\dfrac{5\pm 3}{4}$, $x_1=2$, $x_2=\dfrac{1}{2}$;

2) agar $z_2=-4$ bo'lsa, $x+\dfrac{1}{x}=-4$ yoki $x^2+4x+1=0$ bo'ladi, bundan $x_1=-2+\sqrt{3}$ va $x_2=-2-\sqrt{3}$.

J a v o b: $x_1=2$, $x_2=\dfrac{1}{2}$, $x_{3,4}=-2\pm\sqrt{3}$

5. $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$ ko'rinishdagi tenglama ham qaytma tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi. Berilgan tenglamani $x^2\neq 0$ ga bo'lsak, $a\left(x^2+\dfrac{e}{ax^2}\right)+b\left(x+\dfrac{d}{bx}\right)+c=0$ bo'ladi. Agar $x+\dfrac{d}{bx}=t$ desak, $\left(x+\dfrac{d}{bx}\right)^2=t^2$ bo'ladi, bundan $x^2+\dfrac{d^2}{b^2x^2}=t^2-\dfrac{2d}{b}$, agar $\dfrac{e}{d}=\dfrac{d^2}{b^2}$ bo'lsa, $x^2+\dfrac{e}{dx^2}=x^2+\dfrac{d^2}{b^2x^2}=t^2-\dfrac{2d}{b}$ yoki $at^2+bt+c-\dfrac{2ad}{b}=0$ ko'rinishdagi kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Demak, $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ tenglamada $\dfrac{e}{d}=\dfrac{d^2}{b^2}$ tenglik bajarilsa, bu tenglama ham qaytma tenglama kabi kvadrat tenglamaga keltirib yechilar ekan.

M i s o l. $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0.$

Yechish. $a=2$, $e=50$, $d=105$, $b=21$. Shartga ko'ra $\dfrac{e}{a}=\dfrac{d^2}{b^2}$ bo'lishi kerak edi, shuning uchun $\dfrac{50}{2}=\left(\dfrac{105}{21}\right)^2$ yoki 25=25 tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikning har ikkala tomonini $x^2\neq 0$ ga bo'lsak, $2x^2-21x+74-\dfrac{105}{x}+\dfrac{50}{x^2}=0$. $2\left(x^2+\dfrac{25}{x^2}\right)-21\left(x+\dfrac{5}{x}\right)+74=0$ Agar $x+\dfrac{5}{x}=t$ desak, $x^2+\dfrac{25}{x^2}=t^2-10$ tenglik hosil bo'ladi, u holda tenglama $2t^2-21t+54=0$ ko'rinishni oladi.

Bundan $t_1=\dfrac{9}{2}$ va $t_2=6$ yechimlarni hosil qilamiz.

1) Agar $t_1=\frac{9}{2}$ bo'lsa, $x+\frac{5}{x}=\frac{9}{2}$ yoki $2x^2-9x+10=0$ bundan $x_1=2$ va $x_2=\frac{5}{2}$ yechimlarni topamiz.

2) agar $t_2=6$ bo'lsa, $x+\frac{5}{x}=6$ yoki $x^2-6x+5=0$, bundan $x_3=1$ va $x_4=5$ yechimlarni topamiz. Javob. $x_1=2$, $x_2=\frac{5}{2}$, $x_3=1$, $x_4=5$.

6. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$ ko'rinishdagi tenglama ham ma'lum bir shart va ayniy almashtirishlarni bajarish orqali kvadrat tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi. Agar bu berilgan tenglamada $a+b=c+d$ yoki $a+c=b+d$ yoki $a+d=b+c$ tengliklar o'rinli bo'lsa, bu tenglama ham kvadrat tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi.

M i s o l. $(x+2)(x-3)(x+1)(x+6)=-96$.

$a=2$, $b=-3$, $c=1$, $d=6$. Shartga ko'ra $a+c=b+d$ edi, shuning uchun $2+1=-3+6$, bunga ko'ra berilgan tenglamani quyidagicha guruhlaymiz: $[(x+2)(x+1)][(x-3)[x+6)]=-96$, $(x^2+3x+2)(x^2+3x-18)=-96$. $x^2+3x=t$ desak, $(t+2)\cdot(t-18)=-96$ tenglik o'rinli bo'ladi, bundan tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaning yechimi $t_1=6$ va $t_2=10$ bo'ladi.

1) agar $t_1=6$ bo'lsa, $x^2+3x=6$ yoki $x^2+3x-6=0$, bundan

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+24}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2};$$

2) agar $t_2=10$ bo'lsa, $x^2+3x=10$ yoki $x^2+3x-10=0$ bo'ladi.

$$x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm 7}{2},\quad x_3=-5,\ x_4=2.$$

Javob: $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$, $x_3=-5$, $x_4=2$.

7. $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ ko'rinishdagi tenglama ham $x=t-\frac{a-b}{2}$ almashtirish orqali bikvadrat tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi.

Agar $\begin{cases} x+a=t+m \\ x+b=t-m \end{cases}$ desak, bu sistemadagi tenglamalarni o'zaro hadma-had ayirsak, $a-b=2m$, $m=\frac{a-b}{2}$ bo'ladi, u holda $x+a=t+\frac{a-b}{2}$ yoki $x=t-\frac{a+b}{2}$ bo'ladi. U holda berilgan tenglama quyidagi ko'rinishni oladi: $\left(t+\frac{a-b}{2}\right)^4+\left(t-\frac{a-b}{2}\right)^4=c$

Bundan:

$$t^4+4t^3\frac{a-b}{2}+6t^2\frac{(a-b)^2}{4}+4t\frac{(a-b)^3}{8}+\frac{(a-b)^4}{16}+$$

$$+t^4-4t^3\frac{a-b}{2}+6t^2\frac{(a-b)^2}{4}-4t\frac{(a-b)^3}{8}+\frac{(a-b)^4}{16}=$$

$$=2t^4+12t^2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4=c.$$

$$t^4+6t^2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^4=\frac{c}{2}.$$

Bu tenglamani bikvadrat tenglamani yechish usuli bo'yicha echa olamiz. Masalan, $(x+6)^4+(x+4)^4=82$ tenglama berilgan bo'lsin.

Bu tenglamada $x=t-\frac{6+4}{2}=t-5$ almashtirishni bajaramiz, u holda berilgan tenglama ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$(t+1)^4+(t-1)^4=82$.

$t^4+4t^3+6t^2+4t+1+t^4-4t^3+6t^2-4t+1=82,$

$2t^4+12t^2+2=82,$ $\quad t^4+6t^2-40=0.$

$t^2=y$ desak, $y^2+6y-40=0,$ $y_1=4,$ $y_2=-10.$

1) agar $t^2=4$ bo'lsa, $t_{1,2}=\pm 2$;

2) agar $t^2=-10$ bo'lsa, haqiqiy sonlar to'plamida yechim mavjud emas.

$x_1=t-5=2-5=-3,$ $x_2=t-5=-2-5=-7.$

8. Agar tenglama $\frac{ax}{px^2+nx+q}+\frac{bx}{px^2+mx+q}=c$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, unda $px+\frac{q}{x}=t$ almashtirish bajariladi. Agar tenglamada $c=0$ bo'lsa, $x_1=0$ bo'lib qolgan yechimlarni x o'zgaruvchiga nisbatan kvadrat tenglamaga keltirib topiladi. Agar $c\neq 0$ bo'lsa, $x\neq 0$ bo'lib, bu holda berilgan tenglamaning surat va maxrajini x ga bo'lamiz: ,

$$\frac{a}{px+n+\frac{q}{x}}+\frac{b}{px+m+\frac{q}{x}}=c$$

Bunda $px+\frac{q}{x}=t$ desak, t o'zgaruvchiga nisbatan kvadrat tenglama hosil bo'ladi: $\frac{a}{t+n}+\frac{b}{t+m}=c$. Bu erda $t\neq -n,\ t\neq -m$ dir. Bularga ko'ra tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$ct^2+(mc+nc-a-b)t+mnc-am-bn=0$

M i s o l. $\frac{2x}{2x^2-5x+3}+\frac{13x}{2x^2+x+3}=6$ tenglama yechilsin.

Yechish. Tenglamaning chap tomonida turgan qo'shiluvchilarning surat va maxrajlarini x ga bo'lsak, $\frac{2}{2x-5+\frac{3}{x}}+\frac{13}{2x+1+\frac{3}{x}}=6$ tenglik hosil bo'ladi. $2x+\frac{3}{x}=t$ desak, $\frac{2}{t-5}+\frac{13}{t+1}=6$ tenglik hosil bo'ladi, (bu erda $t\neq -5$ va $t\neq -1$ bo'lishi kerak):

$2t^2-13t+11=0,$ bundan $t_1=1,$ $t_2=\frac{11}{2}.$

1) agar $t_1=1$ bo'lsa, $2x+\frac{3}{x}=1$ yoki $2x^2-x+3=0$ bo'lib, uning yechimlari haqiqiy sonlar to'plamida mavjud emas.

2) agar $t_2=\frac{11}{2}$ bo'lsa, $2x+\frac{3}{x}=\frac{11}{2}$ yoki $4x^2-11x+6=0$ bo'ladi, bundan $x_1=\frac{3}{4}$ va $x_2=2$ yechimlar topiladi.

J a v o b: $x_1=\frac{3}{4}$, $x_2=2.$

8-§. Irratsional tenglamalarni yechish

Irratsional son tushunchasi maktab matematika kursining VIII sinfida o'tiladi. O'quv qo'llanmasida irratsional tenglamaga ta'rif berib, uni yechish usullari ko'rsatilgan. O'quv qo'llanmasidagi ta'rif quyidagicha ifodalanadi.

T a ' r i f. *"Noma'lumlari ildiz ishorasi ostida bo'lgan tenglamalar irratsional tenglamalar deyiladi".*

Bu ta'rifni kengroq ma'noda quyidagicha ham berish mumkin. *"Noma'lumlari ildiz ishorasi ostida yoki kasr ko'rsatkichli daraja belgisi ostida bo'lgan tenglama irratsional tenglama deyiladi".*

Masalan, $\sqrt{4-5x}=6$ $\qquad x^{\frac{1}{2}}-7=0$

$$\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7, \quad \sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$$

$\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}$ va hokazo.

Maktab matematika kursida faqatgina kvadrat ildizlarni o'z ichiga olgan irratsional tenglamalarni yechish o'rgatiladi. Shuning uchun ham bu mavzu materialini o'tish jarayonida o'qituvchi o'quvchilarga sonning kvadrat ildizi va uning arifmetik ildizi degan tushunchalarni takrorlab tushuntirish lozim, chunki biz maktab algebra kursida faqat manfiy bo'lmagan sonlardan ildiz chiqarishni o'rgatamiz. $\sqrt{-3},\sqrt{-7},\sqrt{-36},...$ lar haqiqiy sonlar maydonida ma'noga ega emas. Biz musbat sonning kvadrat ildizi deganda uning arifmetik ildizini, ya'ni uning musbat qiymatlarini tushunamiz. Masalan, $\sqrt{9}=\pm 3$ bo'ladi, ammo –3 soni arifmetik ildiz bo'la olmaydi, 3 soni esa 9 sonning arifmetik ildizidir.

Irratsional tenglamaning yechishdan avval uning aniqlanish sohasini topish lozim.

1 - m i s o l. $\sqrt{3x-6}+\sqrt{1+x}=2$ tenglamaning aniqlanish sohasi topilsin.

Yechish. $3x-6\geq 0$ va $1+x\geq 0$ bu tengsizliklardan: $x\geq 2$ va $x\geq -1$. Demak, bu tenglamaning aniqlanish sohasi $x\geq 2$ bo'ladi. Haqiqatdan ham, bu tenglama yechilsa, uning ildizi 2 ga teng yoki undan katta son chiqishi uning aniqlanish sohasidan ko'rinadi.

2 - m i s o l. $\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}$ tenglamaning aniqlanish sohasi topilsin. $x-1\geq 0$, $3-x\geq 0$, $x+2\geq 0$ bu tengsizliklardan $x\geq 1$, $x\leq 3$, $x\geq -2$. Bularga ko'ra tenglamaning aniqlanish sohasi $1\leq x\leq 3$ bo'ladi, bu degan so'z tenglama ildizi 1 soni bilan 3 soni orasida bo'ladi, deganidir.

Irratsional tenglamalar ayniy shakl almashtirishlar orqali ratsional tenglama ko'rinishiga keltiriladi. Irratsional tenglamalarni yechish uchun eng ko'p ishlatiladigan shakl almashtirish berilgan tenglikning har ikkala tomonini bir xil darajaga ko'tarish va $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=\sqrt{f(x)g(x)}$, $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}=\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$ kabi usullardir. Bunday shakl almashtirishlarni bajarish jarayonida yechilayotgan tenglama uchun chet ildiz hosil bo'lishi mumkin, chunki bu ayniy tengliklarning o'ng tomonlarining aniqlanish sohasi chapga qaraganda kengroqdir.

Teorema. *Agar $f(x)=g(x)$ (1) tenglamaning har ikkala qismini kvadratga ko'tarilsa, berilgan tenglama uchun chet ildiz hosil bo'ladi, bu chet ildiz $f(x)=-g(x)$ tenglamaning ildizidir.*

I s b o t i. Agar (1) tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak, $[f(x)]^2=[g(x)]^2$ yoki $[f(x)]^2-[g(x)]^2=0$. Bu degan so'z $[f(x)-[g(x)][f(x)+g(x)]=0$ deganidir. Bunda quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin: 1) agar $f(x)-g(x)=0$ bo'lsa, $f(x)+g(x)\neq 0$ u holda $f(x)=g(x)$ bo'ladi; 2) agar $f(x)+g(x)=0$ bo'lsa, $f(x)-g(x)\neq 0$ u holda $f(x)=-g(x)$ bo'ladi. Demak, hosil bo'ladigan chet ildiz yoki $[f(x)]^2-[g(x)]^2=0$. tenglamaning ildizi bo'ladi.

Misol. $4x=7$ tenglama berilgan bo'lsin. Bu tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak, $16x^2=49$ bo'ladi. Bundan $(16x^2-49=0) \Rightarrow (4x-7)(4x+7)=0$.

1) agar $4x-7=0$ bo'lsa, $4x+7\neq 0$ bundan $x=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$

2) agar $4x+7=0$ bo'lsa, $4x-7\neq 0$ bundan $x=-\frac{7}{4}=-1\frac{3}{4}$

Bunda $x=-1\frac{3}{4}$ chet ildizdir, haqiqatda ham $4\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)=7$ bundan –7=7, bu $x=-1\frac{3}{4}$ yechim tenglamani qanoatlantirmaydi deganidir. Bu chet ildiz $4x=7$ tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarish natijasida hosil bo'ladi. Maktab matematika kursida irratsional tenglamalarni yechish quyidagi ikkita usul orqali amalga oshiriladi:

1) irratsional tenglamaning har ikkala tomonini bir xil darajaga ko'tarish;

2) yangi o'zgaruvchilar kiritish usuli;

Irratsional tenglamalarning ikkala tomonini bir xil darajaga ko'tarish usuli quyidagi ketma-ketlik asosida amalga oshiriladi:

a) berilgan irratsional tenglama $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$ ko'rinishga keltiriladi;

b) bu tenglamaning ikkala tomoni *n* darajaga ko'tariladi;

v) hosil bo'lgan $f(x)=g(x)$ ratsional tenglama hosil bo'ladi;

g) natijada $f(x)=g(x)$ ratsional tenglama yechiladi va tekshirish orqali chet ildiz aniqlanadi.

1 - m i s o l. $\sqrt{3x+4}=x$ tenglama yechilsin.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasini topamiz: $x \geq 0$ va $3x+4 \geq 0$, bundan $x \geq -\frac{4}{3}$.

1-usul. Har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak, $[(\sqrt{3x+4})^2 = x^2] \Rightarrow [3x+4 = x^2]$. Bundan $x^2-3x-4=0$ tenglamani hosil qilamiz. Uning yechimlari $x_1=4$ va $x_2=-1$, $x_2=-1$ yechim $\sqrt{3x+4}=x$ tenglama uchun chet ildizdir, chunki u tenglamani qanoatlantirmaydi.

2-usul. $[(\sqrt{3x+4})^2 = x^2] \Rightarrow (3x+4=x^2) \Rightarrow$

$\{[x^2-(3x+4)]=0\} \Rightarrow (x-\sqrt{3x+4})(x+\sqrt{3x+4})=0$

1) Agar $x-\sqrt{3x+4}=0$ bo'lsa, $x+\sqrt{3x+4}\neq 0$ bo'ladi, bundan $x=\sqrt{3x+4}$ berilgan tenglama hosil bo'ladi, buning yechimi $x = 4$ bo'ladi.

2) Agar $x+\sqrt{3x+4}=0$ bo'lsa, $x-\sqrt{3x+4}\neq 0$ bo'ladi, bundan $x=-\sqrt{3x+4}$ bo'ladi, buning yechimi $x=-1$ dir.

Demak, $\sqrt{3x+4}=x$ tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarish natijasida $x=-1$ chet ildiz hosil bo'ladi, $x=4$ esa uning haqiqiy yechimi bo'ladi.

Irratsional tenglamalarni yangi o'zgaruvchilar kiritish usuli bilan ham yechiladi.

2 - m i s o l. $\sqrt[5]{(x-5)^2}-\sqrt[5]{x-5}=6$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamaning aniqlanish sohasi $(-\infty, \infty)$. Agar $\sqrt[5]{x-5}=y$ deb belgilasak, tenglama $y^2-y-6=0$ ko'rinishga keladi. Bu tenglama $y_1=3$ va $y_2=-2$ yechimlarga ega. Bunga ko'ra $(\sqrt[5]{x-5}=3) \Rightarrow (\sqrt[5]{x-5})^5=3^5$; $x-5=243$; $x=248$. $\sqrt[5]{x-5}=-2$ tenglama aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan ildizga ega. Demak, $x_1=248$, $x_2=-27$ tenglamaning yechimi bo'lar ekan.

3 - m i s o l. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=8$ tenglama yechilsin.

Yechish. 1. Aniqlanish sohasini topamiz. $x+4 \geq 0$ va $x+20 \geq 0$, bulardan $x \geq -4$ va $x \geq -20$ bo'ladi. Bundan $x \geq -4$ qiymat olinadi.

2. Berilgan tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz:

$(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20})^2=8^2,$

$x+4+2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x+20}+x+20=64.$

$2x+2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x+20}=40.$

$(\sqrt{(x+4)(x+20)})^2=(20-x)^2,$

$(x+4)(x+20)=400-40x+x^2$

$x^2+24x+80=400-40x+x^2,$

$64x=320, \qquad x=5.$

Bu tenglamani yana quyidagi usul bilan ham yechish mumkin:

$$(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20})^2=8^2, \quad [(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20})^2-8^2)=0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20})-8][(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20})+8]=0$$

1) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=8$, buning yechimi $x=5$

2) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=-8$, bu tenglama yechimga ega emas.

4 - m i s o l. $\sqrt{2x+3}=a$, parametrik ko'rinishdagi irratsional tenglama yechilsin. Bu erda tenglamaning aniqlanish sohasiga nisbatan $a>0$ shartni qo'yish etarli bo'ladi. $(\sqrt{2x+3})^2=a^2$, $2x+3=a^2$, bundan $2x=a^2-3$ yoki $x=\frac{a^2-3}{2}$ yechim hosil bo'ladi.

T e k sh i r i sh. $\sqrt{2\frac{a^2-3}{2}+3}=a, \quad \sqrt{a^2}=a, \quad a=a$

5-misol. $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-10x+25}=10$ irratsional tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani $\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-5)^2}=10$ yoki $|x+2|+|x-5|=10$ ko'rinishga keltirib, so'ngra yechamiz.

a) agar $x<-2$ bo'lsa, $-x-2-x+5=10$, bundan $-2x=7$ yoki $x=-3{,}5$

b) agar $-2\le x\le 5$ bo'lsa, $x+2-x+5=10$, yoki $7=10$, bu holda tenglama yechimga ega emas.

v) agar $x>5$ bo'lsa, $x+2+x-5=10$, bundan $2x=13$ yoki $x=6{,}5$. J a v o b. $x=-3{,}5$ va $x=6{,}5$

6-misol. $\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{x^2-6x+9}$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani $\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(x-3)^2}$ ko'rinishda yozib olamiz, u holda: $\sqrt{1-4x}+2=|x-3|$. Bu tenglamaning aniqlanish sohasi $1-4x\ge 0$ yoki $x\le\frac{1}{4}$ bo'ladi. Aniqlanish sohasi $x\le\frac{1}{4}$ bo'lgani uchun $\sqrt{1-4x}+2=3-x.$ bo'ladi.

$$(\sqrt{1-4x}+2=1-x)\Rightarrow(1-4x=1-2x+x^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x^2+2x=0)\Rightarrow(x_1=-2 \quad \text{ва} \quad x_2=0)$$

Tekshirish. $\sqrt{1-4\cdot(-2)}+2=\sqrt{(-2)^2-6(-2)+9};\qquad 5=5$

7 - m i s o l. $1-\frac{1}{x}=\sqrt{1-\frac{1}{x}\sqrt{4-\frac{7}{x^2}}}$ tenglama yechilsin.

Yechish. 1) Bu tenglamaning aniqlanish sohasini topamiz, $-\frac{1}{x}<1$ bo'ladi.

2) Berilgan tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarib, $\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}\sqrt{4-\frac{7}{x^2}}$ tenglamani hosil qilamiz.

3) Bu tenglamaning har ikkala tomonini yana kvadratga ko'tarsak, $\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}=\frac{4}{x^2}-\frac{7}{x^2}$ yoki $\frac{8}{x^4}-\frac{4}{x^3}=0$

4) Oxirgi tenglamani yechamiz: $8x^3-4x^2=0;\ \ 4x^3(2-x)=0$

a) Agar $4x^3=0$ bo'lsa, $2-x\ne 0$, bundan $x_{1,2,3}=0$

b) Agar $2-x=0$ bo'lsa, $4x^3\ne 0$, bundan $x_4=2$

Tekshirish. $1-\frac{1}{2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}\sqrt{4-\frac{7}{4}}},\quad \frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

J a v o b. $x=2.$

8-misol. $\sqrt{x^2-8x+7}+2\sqrt{x^2-18x+17}=2\sqrt{x^2-32x+31}$ tenglamani yeching.

Yechish. 1. Bu ko'rinishdagi tenglamalarni yechish uchun ildiz ostidagi ifodalarni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$\sqrt{(x-1)(x-7)}+2\sqrt{(x-1)(x-17)}=2\sqrt{(x-1)(x-31)}$$

2. Aniqlanish sohasini topamiz:

$$\begin{cases}(x-1)(x-7)\ge 0,\\(x-1)(x-17)\ge 0,\\(x-1)(x-31)\ge 0,\end{cases}\quad \text{bulardan}\quad \begin{cases}x\le 1\\x\ge 31\end{cases}$$

3. Tenglama ko'rinishini quyidagicha yozib olamiz:

$$\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|x-7|}+2\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|x-7|}=2\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|x-31|}$$

yoki $\sqrt{|x-1|}\left(\sqrt{|x-7|}+2\sqrt{|x-17|}-2\sqrt{|x-31|}\right)=0$ bundan

a) $\left(\sqrt{|x-1|}=0\right)\Rightarrow(x_1=1);$

b) $\sqrt{|x-7|}+2\sqrt{|x-17|}-2\sqrt{|x-31|}=0,$

agar $x\leq 1$ bo'lsa, tenglamani $\sqrt{7-x}+2\sqrt{17-x}-2\sqrt{31-x}=0$ ko'rinishda yozib olish mumkin.
Bundan: $\sqrt{7-x}+2\sqrt{17-x}=2\sqrt{31-x}$

4. Hosil qilingan tenglamaning har ikkala tomoni kvadratga ko'tarib ixchamlasak, $15x^2-482x-497=0$ tenglama hosil bo'ladi, uni yechsak, $x_1=-1$ va $x_2=\dfrac{497}{15}$ yechimlar topiladi, ammo $x_2=\dfrac{497}{15}$ yechim berilgan tenglamaning $x\leq 1$ aniqlanish sohasida yotmaydi, shuning uchun bu hol uchun yechim $x=-1$ bo'ladi. Agar $x\geq 31$ bo'lsa, tenglama $\sqrt{x-7}+2\sqrt{x-17}-2\sqrt{x-31}=0$ ko'rinishni oladi, bunday tenglamani yechishni bilamiz.

Javob: $x_1=-1$ va $x_2=1$.

9 - m i s o l. $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$ irratsional tenglama yechilsin.

Yechish. **1-usul.** $\sqrt[3]{x+45}=u,\quad \sqrt[3]{x-16}=v$ deb belgilasak, bulardan $x+45=u^3$ va $x-16=v^3$ hamda $u-v=1$ bo'ladi. Bulardan sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases}u^3-v^3=61,\\ u-v=1.\end{cases}$$

$$(u-v)(u^2+uv+v^2)=61;\quad u^2+uv+v^2=61;\quad u=v+1;$$

$$(v+1)^2+(v+1)v+v^2=61;\quad 3v^2+3v-60=0;\quad v^2+v-20=0;$$

$$v_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\frac{-1\pm 9}{2};$$

$$v_1=-5;\quad v_2=4;\quad x_1=v_1^3-45=-109;$$

$$x_2=v_2^3+16=4^3+16=64+16=80;$$

2-usul. Tenglamaning ikkala tomonini kubga ko'taramiz:

$$(\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16})^3=1^3$$

yoki

$x+45-x+16-3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}(\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{(x-16)})=1\ 61-3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=1$, bundan $\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=20$, $(x+45)(x-16)=8000,\quad x^2+29x-8720=0.$ Bu tenglamani yechsak, $x_1=-109$ va $x_2=80$ yechimlar kelib chiqadi.

10-misol. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\sqrt[3]{2-x}=u$ va $\sqrt{x-1}=v$ desak, u holda $u^3=2-x,\ v^2=x-1,\ v+u=1,\ v\geq 0$. Bu tengliklardan $\begin{cases}u^3+v^3=1\\ v+u=1\end{cases}$ sistemani hosil qilib uni yechamiz.

$v=1-u;\ u^3+u^2-2u=0;\qquad u(u^2+u-2)=0,$ bundan
$u_1=0;\ u_2=-2;\ u_3=1;\ \ v_1=1;\ \ v_2=3;\ \ v_3=0.$

Bularga asosan:

1) $\sqrt[3]{2-x}=0,\quad 2-x=0,\quad x_1=2.$

2) $\sqrt[3]{2-x}=-2,\quad 2-x=-8,\quad x_2=10.$

3) $\sqrt[3]{2-x}=1,\quad 2-x=1,\quad x_3=1.$

Javob. $x_1=2;\quad x_2=10;\quad x_3=1.$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

1. $1+\sqrt{2x-2}=x.$ *j.* 3.
2. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3.$ *j.* $x_1=4;\quad x_2=-5$
3. $\sqrt{2x+1}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-3}.$ *j.* $x=4.$
4. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1.$ *j.* $x_1=0;\quad x_2=5$
5. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{2x}.$ *j.* $x_1=-a;\quad x_2=a$
6. $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+18}=x$ *j.* $x=7.$
7. $\sqrt{x+4}+\sqrt{20+x}=8$ *j.* $x=5.$
8. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}.$ *j.* $x=4.$
9. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4.$ *j.* $x=5.$
10. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$ *j.* $x=-1$
11. $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x$ *j.* $x=7.$
12. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2.$ *j.* $x_1=-1;\ x_2=3.$
13. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2.$ *j.* $x=0.$
14. $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=1.$ *j.* $x=3.$

9-§. Parametrli irratsional tenglamalarni yechish

1-misol. $\sqrt{x-1}=x-a$ tenglama yechilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$x-1-\sqrt{x-1}+1-a=0 \qquad (1)$$

Agar bu tenglamada $\sqrt{x-1}=y$ desak, $x-1=y^2$ bo'ladi, u holda tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$y^2-y+1-a=0,\qquad y_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-(1-a)}=$$

$$=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1-4+4a}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{4a-3}}{2};$$

$$y_1=\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2};\qquad y_2=\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2}.$$

(1) tenglama faqat $a\ge\frac{3}{4}$ bo'lgandagina, yechimga ega bo'ladi, ya'ni:

$$\sqrt{x-1}=\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2}, \qquad (2)$$

$$\sqrt{x-1}=\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}, \qquad (3)$$

(2) tenglama $1-\sqrt{4a-3}\ge 0$ bo'lganida yechimga ega bo'ladi. (2) va (3) ni yechsak, $\frac{3}{4}\le a\le 1$ tengsizlik hosil bo'ladi, u holda tenglama quyidagi ko'rinishdagi ikkita haqiqiy har xil yechimga ega bo'ladi:

$$x_1=\frac{2a+1+\sqrt{4a-3}}{2};\qquad x_2=\frac{2a+1-\sqrt{4a-3}}{2}$$

Agar *a>1* bo'lsa, tenglama $x_{1,2}=\dfrac{2a+1-\sqrt{4a-3}}{2}$ yechimga ega bo'ladi, agar $a<\dfrac{3}{4}$ bo'lsa, tenglama yechimga ega bo'lmaydi.

2 - misol. $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}=a$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglamaning aniqlanish sohasi

$$\begin{cases}3x-2\ge 0,\\ x+2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{2}{3},\\ x\ge -2\end{cases}\Rightarrow x\ge\frac{2}{3}$$

bo'ladi, u holda berilgan tenglama $a_1\ge\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ bo'lgandagina yechimga ega bo'ladi, agar $a<\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ bo'lsa, yechimga ega emas:

$$\sqrt{3x-2}=a-\sqrt{x+2}$$

$$3x-2=a^2-2a\sqrt{x+2}+x+2,$$

$$2x-4=a^2-2a\sqrt{x+2},$$

$$2x+4+2a\sqrt{x+2}-a^2-8=0,$$

$$2(x+2)+2a\sqrt{x+2}-a^2-8=0.$$

agar $\sqrt{x+2}=y$ desak, $2y^2+2ay-a^2-8=0$ yoki $2y^2+2ay-(a^2+8)=0$, bundan

$$y_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+2a^2+16}}{2}=\frac{-a\pm\sqrt{3a^2+16}}{2};\quad \sqrt{x+2}=\frac{-a-\sqrt{3a^2+16}}{2};\qquad (3)$$

$$\sqrt{x+2}=\frac{-a+\sqrt{3a^2+16}}{2};\qquad (4)$$

$a\ge\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ da (3) tenglama yechimga ega emas, (4) tenglama esa $x=\dfrac{2a^2+4-a\sqrt{3a^2+16}}{2}$ yechimga ega bo'ladi.

3 - misol. $\sqrt{x^2-ax+2}=x-1$ tenglama yechilsin.

Yechish: $\begin{cases}x-1\ge 0,\\ x^2-ax+2=(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ (a-2)x=1.\end{cases}$

Agar *a=2* bo'lsa, sistema yechimga ega emas, agar $a\ne 2$ bo'lsa $\begin{cases}x\ge 1\\ x=\dfrac{1}{a-2}\end{cases}$ hosil bo'ladi, u holda $\dfrac{1}{a-2}\ge 1$ yoki $2<a\le 3$ bo'ladi.

J. Agar $2<a\le 3$ bo'lsa, $x=\dfrac{1}{a-2}$, agar $a\le 2,\quad a>3$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas.

4 - misol. $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\begin{cases}x\ge 0,\\ a+x\ge 0,\\ a-\sqrt{a+x}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ x\ge -a,\\ a\ge\sqrt{a+x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ x\ge -a,\\ a^2\ge a+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ x\ge -a,\\ x\le a^2-a.\end{cases}$

Tenglamaning aniqlanish sohasi, agar $a\ge 1$ bo'lsa, $0\le x\le a^2-a$ bo'ladi. $a-\sqrt{a+x}=x^2$ yoki $\sqrt{a+x}=a-x^2$, bu tenglama $a-x^2\ge 0$ bo'lgandagina yechimga ega, shuning uchun $a+x=a^2-2ax^2+x^4$ yoki $a^2-(2x^2+1)a+(x^4-x)=0$

$$a_{1,2}=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{\left(x^2+1\right)^2-4x^2+4x}}{2};\qquad a_1=x^2-x;\quad a_2=x^2+x+1,\quad a_1=x^2-x$$

tenglama $a^2-x^2\geq 0$ shart uchun $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$

5 - misol. $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{2a}$ tenglama yechilsin.

Yechish. Bu tenglamani yechish uchun uning har ikki tomonini uchinchi darajaga ko'taramiz:

$$a+x+a-x+3\sqrt[3]{a^2-x^2}\left(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}\right)=2a.$$

$$2a+3\sqrt[3]{a^2-x^2}\cdot\sqrt[3]{2a}=2a,$$

$$3\sqrt[3]{a^2-x^2}\cdot\sqrt[3]{2a}=0$$

$$\sqrt[3]{a\ \ -x^2}=0;\qquad a^2-x^2=0;\qquad x_{1,2}=\pm\ a.$$

6-misol. $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$ tenglama yechilsin.

Yechish. Tenglamaning har ikkala tomonini $\sqrt[3]{(a-x)^2}$ ga bo'lamiz, bu erda $x\neq a$,

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2}+4=5\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}},$$

$$\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}=t;\qquad \frac{a+x}{a-x}=t^3,$$

$$t^2-5t+4=0;\qquad t_1=4;\qquad t_2=1.$$

$$1)\ \frac{a+x}{a-x}=64;\quad 65x=63a;\quad x_1=\frac{63a}{65};\quad 2)\ \frac{a+x}{a-x}=1,\quad x_2=0$$

7 - misol. $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}$ tenglama yechilsin.

Yechish. Bu tenglamaning har ikki tomonini $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^2=a^3+b^3+3ab(a+b)$ formula bo'yicha kubga ko'taramiz:

$a+\sqrt{x}+a-\sqrt{x}+3\sqrt[3]{a^2-x}\cdot\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}\right)=b.$ $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}$ bo'lgani uchun $2a+3\sqrt[3]{a^2-x}\cdot\sqrt[3]{b}=b;$ $\sqrt[3]{a^2-x}=\dfrac{b-2a}{3\sqrt[3]{b}};$ $a^2-x=\dfrac{(b-2a)^3}{27b}$, $b\neq 0$ bo'lsa,

$$x=a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b}.$$

8-misol. $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}$ tenglama yechilsin.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi:

$$\begin{cases}a-x\geq 0,\\ b-x\geq 0,\\ a+b-2x\geq 0.\end{cases}$$

Endi $\sqrt[4]{a-x}=t,$ $\sqrt[4]{b-x}=z$ belgilash kiritamiz, u holda $t^4+z^4=a+b-2x=(a-x)+(b-x)$. Bularni tenglamaga qo'yamiz: $t+z=\sqrt[4]{t^4+z^4}$,

$$(t+z)^4=t^4+z^4,$$

$$t^4+4t^3z+6t^2z^2+4tz^3+z^4=t^4+z^4$$

$$tz(2t^2+3tz+2z^2)=0;$$

1) $t_1 = 0, \quad z_1 = 0; \quad (a - x = 0) \Rightarrow x_1 = a;$

$(b - x = 0) \Rightarrow x_1 = b;$

2) $2t^2 + 3tz + 2z^2 = 0$ tenglama yechilsa, qolgan yechimlar hosil bo'ladi.

9 - misol. $\sqrt[n]{\dfrac{a-x}{b+x}} + \sqrt[n]{\dfrac{b+x}{a-x}} = 2$

Yechish. Bu tenglamaning yo'l quyiladigan qiymatlar sohasi $x \neq a$ va $x \neq -b$. Bundan tashqari, $\dfrac{a-x}{b+x} > 0$ va $\dfrac{b+x}{a-x} > 0$. Agar bo'lsa, $a–x>0$ va $b+x>0$ yoki $a–x<0$ va $b+x<0$ bo'ladi, bulardan $x<a$ va $x>–b$ lar bo'ladi.

$\dfrac{a-x}{b+x} = z^n$ desak, $\left(z + \dfrac{1}{z} = 2\right) \Rightarrow (z^2 - 2z + 1 = 0)$

$z_{1,2} = 1; \ \dfrac{a-x}{b+x} = 1; \ a - x = b + x$ yoki $x = \dfrac{a-b}{2}.$

Tekshirish:

$$\sqrt[n]{\dfrac{a - \dfrac{a-b}{2}}{b + \dfrac{a-b}{2}}} + \sqrt[n]{\dfrac{b + \dfrac{a-b}{2}}{a - \dfrac{a-b}{2}}} = \sqrt[n]{\dfrac{a+b}{a+b}} + \sqrt[n]{\dfrac{a+b}{a+b}} = 1 + 1 = 2.$$

10 - misol. $(x - a)\sqrt{x} - (x + a)\sqrt{b} = b(\sqrt{x} - \sqrt{b})$ tenglama yechilsin.

Yechish. Tenglamaning chap tomonidagi ifodaning qavslarini ochib va o'ng tomonidagi ifodani qarama - qarshi ishora bilan chap tomonga o'tkazib quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$x\sqrt{x} - a\sqrt{x} - x\sqrt{b} - a\sqrt{b} - b(\sqrt{x} - \sqrt{b}) = 0,$$

$$x(\sqrt{x} - \sqrt{b}) - a(\sqrt{x} + \sqrt{b}) - b(\sqrt{x} - \sqrt{b}) = 0,$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{b})(x - b) - a(\sqrt{x} + \sqrt{b}) = 0,$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{b})^2(\sqrt{x} + \sqrt{b}) - a(\sqrt{x} + \sqrt{b}) = 0,$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{b})\left[(\sqrt{x} - \sqrt{b})^2 - a\right] = 0,$$

$\sqrt{x} + \sqrt{b} \neq 0$ bo'lsa, $(\sqrt{x} - \sqrt{b})^2 - a = 0.$ bo'ladi bundan $(\sqrt{x} - \sqrt{b})^2 = a$ hosil bo'ladi.

1. Agar $a<0$ bo'lsa, bu tenglama yechimga ega emas.
2. Agar $a>0, b>0$ bo'lsa, $\sqrt{x} - \sqrt{b} = \pm\sqrt{a}, \ \sqrt{x} = \sqrt{b} \pm \sqrt{a}$ bo'ladi, $x_{1,2} = (\sqrt{b} \pm \sqrt{a})^2$
3. Agar $b=0$ va $a>0$ bo'lsa, $x_1=0, x_2=a$ yechimlar bo'ladi.

11-misol. $a^2b^2\sqrt[n]{x} - 4ab\sqrt{ab}\cdot\sqrt[2mn]{x^{m+n}} = (a - b)^2\sqrt[m]{x}, \ m \neq n$

tenglamani yeching.

Yechish. Bu erda $ab>0$. Agar $a=0$ yoki $b=0$ bo'lsa, tenglama $(a - b)^2\sqrt[m]{x} = 0$ bo'ladi, bu holda tenglama bitta $x=0$ yechimga ega bo'ladi. Berilgan tenglamada $ab>0$ va $x \neq 0$ deb, tenglikning har ikki tomonini $\sqrt[m]{x}$ ga bo'lsak,

$$a^2b^2\sqrt[mn]{x^{m-n}} - 4ab\sqrt{ab}\cdot\sqrt[2mn]{x^{m-n}} = (a - b)^2$$

hosil bo'ladi. Agar $\sqrt[2mn]{x^{m-n}} = y > 0$ desak, quyidagi kvadrat tenglama hosil bo'ladi:

$$a^2b^2y^2 - 4ab\sqrt{ab}y - (a - b)^2 = 0;$$

$$y_{1,2}=\frac{2ab\sqrt{ab}\pm\sqrt{4a^3b^3+a^2b^2(a-b)^2}}{a^2b^2}=\frac{2ab\sqrt{ab}\pm ab\sqrt{4ab+(a-b)^2}}{a^2b^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{ab}\pm\sqrt{(a+b)^2}}{ab}=\frac{2\sqrt{ab}\pm(a+b)}{ab};$$

$$y_1=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{ab};\qquad y_2=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{ab}.$$

Agar $y>o$ bo'lib, $a>0$ va $b>0$ bo'lsa, $y_1=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}\right)^2=\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^2$. Agar $y>0$ bo'lib, $a<0$ va $b<0$ bo'lsa, $y_2=\left(\frac{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}}{\sqrt{ab}}\right)^2=\left((-a)^{-\frac{1}{2}}+(-b)^{-\frac{1}{2}}\right)^2$ $y=\sqrt[2mn]{x^{m-n}}$ bo'lgani uchun $x_1=\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4mn}{m-n}}$, $x_2=\left[(-a)^{-\frac{1}{2}}+(-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{4mn}{m-n}}$

12-Misol. $\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}$ tenglama yechilsin.

Yechish. Bu erda $n\in N$ bo'lib, $x>0$, $a+x>0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $x\neq 0$. Tenglamaning chap tomonidagi $\sqrt[n]{a+x}$ ni qavsdan chiqaramiz:

$$\sqrt[n]{a+x}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)=\frac{\sqrt[n]{x}}{b},\sqrt[n]{a+x}\cdot\frac{a+x}{ax}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{a+x}{x}\right)^{n+1}}=\frac{a}{b}\cdot$$

Bu tenglikning chap tomoni noldan katta, shuning uchun o'ng tomoni ham noldan katta bo'ladi, ya'ni $\frac{a}{b}>0$.

$$\left(\frac{a+x}{x}\right)^{\frac{n+1}{n}}=\frac{a}{b};\quad \frac{a+x}{x}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}};\ \frac{a}{x}+1=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}};$$

$$\frac{a}{x}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1;\qquad a=\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1\right]x.$$

Agar $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1\neq 0,\quad a\neq 0$ bo'lsa, $x=\frac{a}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1}$.

1) Agar $a>0$, $\frac{a}{b}>1$ bo'lsa, $a>b>0$ bo'ladi.

2) Agar $a<0$, $\frac{a}{b}<1$ bo'lsa, $0>a>b$ bo'ladi.

Bu holda (1) yechim n ning juft hollari uchun o'rinli bo'ladi.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

Quyidagi tenglamalarni yeching.

1. $\sqrt{x-3} = x-a$, J: agar *2,75≤a≤3* bo'lsa, $x=\frac{1}{2}\left(2a+1\pm\sqrt{4a-11}\right)$ agar *a≥3* bo'lsa, $x=\frac{1}{2}\left(2a+1+\sqrt{4a-11}\right)$.

2. $\sqrt{x-a}=b-x$. J; agar $b\geq a$ bo'lsa, $x=\frac{1}{2}\left(2b+1-\sqrt{4b-4a+1}\right)$; agar $b<a$ yechimga ega emas.

3. $\sqrt{x^2-ax+3a}=2-x$ J: agar $-4\leq a\leq 4$ bo'lsa, $x=\frac{3a-4}{a-4}$; $a<-4$, $a\geq 4$ bo'lsa, yechimga ega emas.

4. $\sqrt{2x-4}+\sqrt{x+7}=a$ J; agar $a\geq 3$ bo'lsa, $x=3a^2+11-2a\sqrt{2a^2+18}$; agar $a<3$ bo'lsa, yechimga ega emas.

5. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-2}=a$. J; agar $0,5\sqrt{6}\leq a\leq\sqrt{3}$ bo'lsa, $x=3a^2-1\pm 2a\sqrt{2a^3-3}$ agar $a>\sqrt{3}$ bo'lsa, $x=3a^2-1+2a\sqrt{2a^3-3}$; agar $a<0,5\sqrt{6}$ bo'lsa, yechimga ega emas.

6. $\sqrt{2x^2-2ax+1}=x-2$. J; agar $a\geq\frac{9}{4}$ bo'lsa, $x=a-2+\sqrt{a^2-4a+7}$; agar $a<\frac{9}{4}$ bo'lsa, yechimga ega emas.

7. $\sqrt{3x-a}=a-2x$. J; agar $a\geq 0$ bo'lsa, $x=\frac{1}{8}\left(4a+3-\sqrt{8a+9}\right)$; agar $a<0$ bo'lsa yechimga ega emas.

8. $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=a$. J; agar $\sqrt{2}\leq a\leq 2$ bo'lsa, $x=\left(4\pm\sqrt{4a^2-a^4}\right):2$; agar $a\leq\sqrt{2}$, $a>2$ bo'lsa, yechimga ega emas.

9. $x+\sqrt{1-x}=a$ J; agar $x_{1,2}=\frac{1-2a\pm\sqrt{5-4a}}{2}$, $a>\sqrt{2}$ bo'lsa, yechimga ega emas.

10 - §. Irratsional tenglamalar sistemasini yechish.

1 - misol. Tenglamalar sistemasi yechilsin:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{5}{6}\sqrt{xy},\\ x+y=13\end{cases}$$

Yechish. Sistemadagi $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{5}{6}\sqrt{xy}$ tenlamaning har ikki tomonini kvadrat ko'tarib, ayniy almashtirishlarni bajarish orqali ratsional tenglamalar sistemasini hosil qilamiz;

$$x+y+2\sqrt{xy}=\frac{25}{36}xy$$

$x+y=13$ bo'lgani uchun $13+2\sqrt{xy}=\frac{25}{36}xy$ bo'ladi. $25xy-72\sqrt{xy}-468=0$. Agar $\sqrt{xy}=t$ desak, $25t^2-72t-468=0$ bo'ladi, bundan $t_1=6$ va $t_2=-\frac{78}{25}$ ildizlarni hosil qilamiz. $\sqrt{xy}=6$ bo'lsa, $xy=36$ bo'ladi:

$$\begin{cases}x+y=13\\ xy=36\end{cases}$$

bu sistemani yechamiz: $x=13-y$, $(13-y)y=36$; $y^2-3y=36$;

$$y_{1,2}=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{169}{4}-36}=\frac{13}{2}\pm\frac{5}{2}.$$

J: $y_1=9$, $y_2=4$, $x_1=4$, $x_2=9$.

2 - m i s o l. $\begin{cases} x+y-\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{12}{x-y} \\ xy=15 \end{cases}$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\dfrac{x+y}{x-y}\geq 0$ bo'lsa, ikki hol bo'lishi mumkin:

a) $x>0,\ y>0,\ x>y$ u holda $x+y-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{(x-y)^2}}-\dfrac{12}{x-y}=0$

yoki $x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2}-12=0.$ Endi $\sqrt{x^2-y^2}=t$ desak,

$$t^2-t-12=0;\quad t_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+12}=\frac{1}{2}\pm\frac{7}{2}$$

$t_1=4,\ t_2=-3$, shuning uchun $\sqrt{x^2-y^2}=4$, bundan $x^2-y^2=16$ bo'ladi. Shuning uchun

$$\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ xy=15 \end{cases}$$

ratsional tenglama sistemasi hosil bo'ladi. Bu tenglamani echib, $x=\pm 5,\ y=\pm 3$ yechimlarni hosil qilamiz.

b) $x<0,\ y<0$ va $x<y$ bo'lsa, tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x+y-\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{-(x-y)}-\frac{12}{x-y}=0,$$

$$x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}-12=0,$$

$$\sqrt{x^2-y^2}=t,\quad t^2+t-12=0,$$

$$t_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+12}=-\frac{1}{2}\pm\frac{7}{2};\quad t_1=3,\quad t_2=-4.$$

$$\sqrt{x^2-y^2}=3 \text{ yoki } x^2-y^2=9.$$

Natijada

$$\begin{cases} x^2-y^2=9, \\ xy=15. \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemani echib,

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{981}+9}{2}},\quad y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{981}-9}{2}},$$

yechimlar hosil qilamiz.

3-misol. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4. \end{cases}$$

Yechish. Sistemadagi ikkinchi tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz: $x+y+2\sqrt{xy}=16$ (1) hosil bo'ladi. Sistemadagi birinchi tenglamaning har ikki tomonini $\sqrt{2}$ ga ko'paytiramiz:

$$\sqrt{2(x^2+y^2)}+2\sqrt{xy}=16 \qquad (2)$$

(2) dan (1) ni ayiramiz:

$$\sqrt{2(x^2+y^2)}-(x+y)=0,$$
$$\sqrt{2(x^2+y^2)}=x+y,$$
$$2(x^2+y^2)=x^2+2xy+y^2,$$
$$x^2-2xy+y^2=0, \quad (x-y)^2=0, \quad x=y.$$

Sistemadagi ikkinchi tenglamadagi x o'rniga u ni qo'ysak, $2\sqrt{y}=4$, $\sqrt{y}=2$, bundan $y=4$ bo'ladi. J: $x=y=4$.

4 - m i s o l. Sistemani yeching:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{1+5x}+\sqrt[4]{5-y}=3,\\ 5x-y=11.\end{cases}$$

Yechish: Agar $\sqrt[4]{1+5x}=u$ va $\sqrt[4]{5-y}=v$ desak,

$$\begin{cases}u+v=3,\\ u^4+v^4=17.\end{cases}$$ bo'ladi.

$u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=[(u+v)^2-2uv]^2=2u^2v^2=17,$

$u+v=3$ bo'lgani uchun $(uv)^2-18uv+32=0$ bundan $uv=2$ va $uv=16$ bo'ladi. Bu yechimlarga ko'ra quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

a) $\begin{cases}u+v=3,\\ uv=2.\end{cases}$

Bu sistemani yechsak, quyidagi yechimlar hosil bo'ladi: $u_1=1$, $v=2$, $u_2=2$, $v_2=1$.

b) $\begin{cases}u+v=3,\\ uv=16;\end{cases}$

bu tenglamalar sistemasini yechsak, u haqiqiy yechimga ega emas. Bu yechimlarga ko'ra quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{1+5x}=2,\\ \sqrt[4]{5-y}=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+5x=-16,\\ 5-y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=3, x_2=0,\\ y_1=4, y_2=-1.\end{cases}$$

yechimlarni hosil qilamiz.

5-misol. Sistemani yeching:

$$\begin{cases}\dfrac{2xy+y\sqrt{x^2-y^2}}{14}=\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{2}},\\ \sqrt{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3}+\sqrt{\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^3}=9,\end{cases}$$

Yechish. $\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}=u$, $\sqrt{\dfrac{x-y}{2}}=v$ desak, $\sqrt{x^2-y^2}=2uv$, $x=u^2+v^2$, $y=u^2-v^2$ bo'ladi, bularga ko'ra $\begin{cases}2(u^4-v^4)+2uv(u^2-v^2)=14(u+v),\\ u^3+v^3=9.\end{cases}$ bo'ladi. Sistemadagi birinchi tenglamaning har ikkala tomonini $u+v\neq 0$ ga bo'lamiz. $\begin{cases}u^3+v^3=9\\ u^3-v^3=7\end{cases}$ Buni yechsak, $u^3=8$ va $v^2=1$ yechimlar hosil bo'ladi.

U holda $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}=2,\\ \sqrt{\dfrac{x-y}{2}}=1\end{cases}$ yoki $\begin{cases}x+y=8,\\ x-y=2.\end{cases}$

bundan $x=5$ va $u=3$ yechimlar hosil bo'ladi.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

1. Sistemani yeching:

$$\begin{cases} x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 208 \\ y^2 + y\sqrt[3]{yx^2} = -1053, \end{cases}$$

J: $x_1 = 8, \quad y_1 = 27, \quad x_2 = -8, \quad y_2 = 27,$

$$x_3 = 8, \quad y_3 = -27, \quad x_4 = -8, \quad y_4 = -27.$$

2. Sistemani yeching:

$$\begin{cases} 8\sqrt{x^2 - y^2} = x + 9y, \\ x^4 + 2x^2 y + y^2 + x = 2x^3 + 2xy + y + 506. \end{cases}$$

$$J: x_1 = 5, y_1 = 3;$$

$$x_2 = \frac{25 - 48\sqrt{6}}{29}, \quad y_2 = \frac{21(5 - 48\sqrt{6})}{29^2}.$$

3. Sistemani yeching:

$$\begin{cases} \dfrac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} + \dfrac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} = \dfrac{17}{4}, \\ x(x + y) + \sqrt{x^2 + xy + 4} = 52. \end{cases} \quad j: \begin{array}{ll} x_1 = 5, & y_1 = 4; \\ x_2 = -5, & y_2 = -4; \\ x_3 = 15, & y_3 = -12; \\ x_4 = -15, & y_4 = 12; \end{array}$$

4. Sistemani yeching:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2}} = \dfrac{5 + \sqrt{7}}{5 - \sqrt{7}} \\ x^3 + 2y^3 = 118. \end{cases}$$

$x_1 = 4, \quad y_1 = 3,$

j. $x_2 = \sqrt[4]{\dfrac{59}{5}},$

$y_2 = \sqrt[4]{\dfrac{59}{5}},$

11-§. Ko'rsatkichli tenglama.

Ko'rsatkichli tenglama tushunchasini tushuntirishdan oldin o'qituvchi o'quvchilarga daraja, ko'rsatkichli funksiya va ularning xossalari haqidagi ma'lumotlarni takrorlashi, so'ngra ko'rsatkichli funksiyaning ta'rifini berish lozim.

T a ' r i f. *Daraja ko'rsatkichida noma'lum miqdor qatnashgan tenglamalar ko'rsatkichli tenglamalar deyiladi.* Masalan, $3^x=2^{x-1}$, $5^{x^2-6}-1=0,7^{x-2}\text{-}\sqrt[3]{49}$ va hokazo. $a^x=b$ tenglama maktab matematika kursidagi eng sodda ko'rsatkichli
tenglamadir. Bu erda a va b berilgan musbat sonlar bo'lib, $a\neq 1$ $a>0$ bo'lishi kerak. x esa noma'lum miqdordir. $a^x=b$ tenglama bitta yechimga egadir. Har qanday ko'rsatkichli tenglama ayniy almashtirishlarni bajarish orqali algebraik yoki $a^x=b$ ko'rinishdagi sodda holga keltirib yechimlari topiladi. Ko'rsatkichli tenglamalarni yechish darajasini quyidagi xossalariga asoslanadi:

1. Agar o'zaro ikkita teng darajaning asoslari teng bo'lsa, ularning daraja ko'rsatkichlari ham o'zaro teng bo'ladi.

Masalan, agar $a^m = a^n$ bo'lsa, $m = n$ bo'ladi, albatta bu erda $a \neq 0$ va $a \neq 1$, $a>0$ bo'lishi kerak.

2. Agar o'zaro teng darajaning ko'rsatkichlari teng bo'lsa, u holda ularning asoslari ham teng bo'ladi, ya'ni $a^m=b^m$ bo'lsa, u holda $a = b$ bo'ladi. Maktab matematika kursidagi ko'rsatkichli tenglamalar asoslarini tenglash, kvadrat tenglamaga keltirish, logarifmlash, ya'ni o'zgaruvchini kiritish va gruppalash usullari bilan yechiladi. Bu usullarni quyidagi misollar orqali ko'rib chiqaylik.

1-misol. $36^x = \dfrac{1}{216}$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglama asoslarini tenglash yo'li orqali yechiladi:

$$(36^x = 216^{-1}),\ (6^{2x} = 6^{-3}) \Rightarrow (2x = -3) \Rightarrow (x = -\frac{3}{2})$$

Ushbu tenglamani logarifmlash usuli bilan ham yechish mumkin. Logarifm ta'rifiga ko'ra: $x=\log_{36}\left(\dfrac{1}{216}\right)$ bundan $x=-\log_{36}216=-\dfrac{1}{2}\log_6 216=-\dfrac{3}{2}$, chunki $\log_6 216=3$.

2-misol. $5^{2x}-5^x-600=0$ tenglama yechilsin. Bu tenglama yangi o'zgaruvchi kiritish usuli orqali kvadrat tenglamaga keltirib yechiladi. Agar $y=5^x$ desak, berilgan tenglama $y^2-y-600=0$ ko'rinishni oladi.

$$y_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+600}=\frac{1}{2}\pm\frac{49}{2};\quad y_1=25,\quad y_2=24$$

$5^x = y$ yoki $5^x=25$, $5^x=5^2$, $x=2$

Javob: $x = 2$

3 - m i s o l. $3^{x^2+1}+3^{x^2-1}=270$ tenglamani yeching.

Yechish. $3^{x^2}\cdot 3+3^{x^2}\cdot\dfrac{1}{3}=270,\quad 3^{x^2}=y$ desak, $3y+\dfrac{1}{3}y=270$ yoki $\dfrac{10}{3}y=270$, bundan $y=81$, $3^{x^2}=81$ yoki $3^{x^2}=3^4$ bundan $x^2 = 4$ va $x_1 =2$, $x_2 =-2$

4 - m i s o l. $5^{2x}-7^x-5^{2x}\cdot 35+7^x\cdot 35=0$ tenglamani yeching. Bu tenglama gruppalash usuli bilan yechiladi:

$5^{2x}(1-35) = 7^x(1-35),\quad 5^{2x} = 7^x,\quad x=0$

5 - m i s o l. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani yechishda $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=1$ ekanligidan foydalanamiz. Agar $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=y$ desak, u holda $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=\dfrac{1}{y}$ bo'ladi. bu belgilashlarga ko'ra tenglama quyidagicha ko'rinishni oladi. $y+\frac{1}{y}=10$, bundan $y^2-10y+1=0$ yoki $y_1=5-2\sqrt{6}$ va $y_2=5+2\sqrt{6}$ ildizlarga ega bo'lamiz.

a) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=5-2\sqrt{6}$ bo'lsin, u holda

$(5+2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}}=\frac{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}{5+2\sqrt{6}}=(5+2\sqrt{6})^{-1}$, bundan $\frac{x}{2}=-1$, $x_1=-2;$

b) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=5+2\sqrt{6}$ bo'lsin, u holda $(5+2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}}=(5+2\sqrt{6})^1$, bundan $\frac{x}{2}=1$, $x_1=2;$

Javob: $x=-2$ va $x=2$

6 - m i s o l. $100^x=300$ tenglama yechilsin.

Yechish. Tenglikning ikkala tomonini 10 asosga ko'ra logarifmlaymiz. $x\lg 100=\lg 300$.

Bizga ma'lumki, $\lg 100=2$. Bu erda $\lg 300=\lg(100\cdot 3)=\lg 100+\lg 3=2+\lg 3$ kabi ayniy almashtirishlar bajaramiz. Bu almashtirishlarga ko'ra berilgan tenglama $x\cdot 2=2+\lg 3$ ko'rinishni oladi. Bundan: $x=\frac{2+\lg 3}{2}=1+\frac{\lg 3}{2}$

7 - m i s o l. $\left(2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}\right)-6\left(2^x-\frac{1}{2^{x-1}}\right)=1$

Yechish. Bu tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\left(2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}\right)-6\left(2^x-\frac{2}{2^x}\right)-1=0$$

$2^x-\frac{2}{2^x}=y$ deb belgilasak, u holda

$$2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}=\left(2^x-\frac{2}{2^x}\right)\left(2^{2x}+2+\frac{4}{2^{2x}}\right)=\left(2^x-\frac{2}{2^x}\right)\left[\left(2^x-\frac{2}{2^x}\right)^2+6\right]=y(y^2+6)$$

bo'ladi. Bu almashtirishlarga ko'ra berilgan tenglama o'zgaruvchi u ga nisbatan quyidagi ko'rinishni oladi: $y(y^2+6)-6y-1=0$ yoki $y^3=1$, $y=1$. $2^x-\frac{2}{2^x}=1$, bundan $2^{2x}-2^x-2=0$ bo'ladi. Agar $2^x=t$ desak, u holda tenglama $t^2-t-2=0$ ko'rinishni oladi. Uning yechimlari $t_1=2$, $t_2=-1$ bo'ladi. U holda $2^x=2$ yoki $x=1$, $2^x=-1$ tenglama yechimga ega emas.

Javob: $x=1$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

Quyidagi tenglamalarni yeching:

1. $5^{x+1}+3\cdot 5^{x-1}-6\cdot 5^{x}+10=0$ J: 2

2. $\sqrt{27^{x-1}}=\sqrt[3]{9^{2-x}}$ J: $x=\frac{17}{13}$

3. $16\sqrt{(0.25)^{5-\frac{x}{4}}}=2^{\sqrt{x+1}}$ J: $x = 24$

4. $4+\frac{2}{3^{x}-1}=\frac{5}{3^{x-1}}$ J: $x = 1$

5. $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}=1{,}2$ J: $x = 0$

6. $7\cdot 2^{x}=5\cdot 3^{x}$ J: $x=\frac{\lg 7-\lg 5}{\lg 3-\lg 2}$

7. $5^{2x}-7^{x}-5^{2x}\cdot 17+7^{x}\cdot 17=0$ J: $x = 0$

8. $9^{x}=\left(\frac{1}{243}\right)^{5x}$ J: $x = 0$

9. $(0{,}4)^{\lg^2 x-1}=(6{,}25)^{2-\lg x^2}$ J: $x_1 = 10^5$, $x_2 = 10$

10. $x^{\lg^2 x+\lg x+3}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}$ J: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{100}$

11. $2\cdot 11^{4(x-1)}-1=121^{x-1}$ J: $x = 1$

12. $2\cdot 3^{x+1}-5\cdot 9^{x-2}=81$ J: $x_1=4$, $x_2=4-\frac{\lg 5}{\lg 3}$

12-§. Logarifmik tenglamalar.

Maktab matematika kursida logarifmik tenglamaga ta'rif berib, so'ngra uni yechish usullari ko'rsatiladi.

T a ' r i f. *Noma'lum miqdor logarifm belgisi ostida qatnashgan tenglamalar logarifmik tenglamalar deyiladi.*

Masalan, $lgx=3-lg5$, $lgx=lg2$, $2lg\sqrt{x}=lg(15-2x)$ va hokazo. Logarifmik tenglama ham ko'rsatkichli tenglama singari transsendent tenglama turiga kiradi. $log_a x=b$ tenglama eng sodda logarifmik tenglamadir. Bu erda a, b lar ma'lum sonlar, x noma'lum sondir. Bu ko'rinishdagi tenglama $x=a^b$ bitta yechimga ega bo'ladi.

Logarifmik tenglamaning yechish jarayonida o'qituvchi o'quvchilarga logarifmik funksiya va uning xossalari haqidagi ma'lumotlarni takrorlab berish lozim. Ayniqsa, o'qituvchi ko'paytmaning $lg(a\cdot b)=lga+lgb$, kasrning $lg\frac{a}{b}=lga-lgb$ va darajaning $lga^n=nlgb$ logarifmlari hamda logarifmlarning bir asosidan boshqa asosiga o'tish $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ formulasi va qoidalarini imkoniyat boricha isboti bilan tushuntirib berishi maqsadga muvofiqdir, chunki logarifmik tenglamalarni yechish jarayonida ana shu qoidalardan foydalaniladi. Logarifmik tenglamalarni yechish jarayonida ko'pincha $lgA=lgB$ bo'lsa, A=B bo'ladi degan qoidaga amal qilamiz. Ayrim hollarda o'quvchilar $lgA+lgB=lgC$ tenglikdan ham $A+B=C$ bo'ladi degan noto'g'ri xulosaga keladilar. Mana shunday xatoliklarning oldini olish uchun o'qituvchi yuqoridagi tengliklarni aniq misollar yordamida ko'rsatib berishi lozim. Masalan. $lg5+lg9=lg\,45$. Bu tenglikdan yuqoridagi xato mulohazaga ko'ra $5+9=45$ bo'lishi kerak, bunda $14\neq 45$. Bundan ko'rinadiki, $lgA+lgB=lgC$ dan $A+B=C$ deb yozish katta xatolikka olib kelar ekan. Demak,

$lgA+lgB=lgC$ bo'lsa, ikki son ko'paytmasining logarifmi qoidasiga ko'ra $lg(A\cdot B)=lgC$ bo'ladi, bundan $A\cdot B=C$ ekanligi ko'rsatish kifoya. $lg5+lg9=lg45$, $lg(5\cdot 9)=lg45$. $45=45$. $log_af(x)=log_ag(x)$ tenglamani yechish uchun $f(x)=g(x)$ tenglamani yechish kerak va topilgan yechimlar ichidan $f(x)>0$, $g(x)>0$ tengsizliklarni qanoatlantiradiganlarini tanlab olinadi. $f(x)=g(x)$ tenglamaning qolgan ildizlari esa $log_af(x)=log_ag(x)$ tenglama uchun chet ildiz bo'ladi. Har qanday logarifmik tenglama ayniy almashtirishlar yordamida uni $log_af(x)=log_ag(x)$ ko'rinishga keltirib, $f(x)=g(x)$ tenglamani yechish orqali va yangi o'zgaruvchi kiritish orqali yechiladi. Logarifmik tenglamalarni yechishni uning aniqlanish sohasini topishdan boshlash lozim.

1 - m i s o l. $log_ax=b$ tenglama yechilsin.

Yechish. Agar $a>0$ va $a\neq 1$ bo'lsa, $x=a^b$ bo'ladi.

2 - m i s o l. $\frac{\lg 2x}{\lg(4x-15)}=2$ tenglama yechilsin.

Yechish. $lg2x$ ning aniqlanish sohasi $x>0$ bo'ladi. $lg(4x–15)$ ning aniqlanish sohasi $4x–15>0$, bundan $x>\frac{15}{4}$ bo'ladi. Bundan tashqari $4x–15\neq 0$ yoki $x\neq 4$ bo'lishi kerak, bularga asoslanib tenglamaning aniqlanish sohasi $x>3\frac{3}{4}$ va $x\neq 4$ bo'ladi. Tenglamani yechish uchun quyidagicha ayniy almashtirish bajaramiz:

$lg2x=21g(4x–15)$, $lg2x=lg(4x–15)^2$; $2x=16x^2–120x+225$ yoki $16x^2–122x+225=0$, bundan $x_1=\frac{72}{15}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$ yechim tenglamaning aniqlanish sohasida yotadi, shuning uchun $x_1=4\frac{1}{2}$ yechim bo'ladi.

3 - m i s o l. $log_2(lgx+2\sqrt{\lg x}+1)–log_2(\sqrt{\lg x}+1)=1$ tenglama yechilsin.

Yechish. Bu tenglamadagi o'zgaruvchining qabul qiladigan qiymatlari sohasi $x\geq 1$ bo'ladi. Berilgan tenglamani potensirlasak, $\frac{\lg x+2\sqrt{\lg x}+1}{\sqrt{\lg x}+1}=2$ yoki $\sqrt{\lg x}+1=2$, $\sqrt{\lg x}=1$ bundan $x=10$.

4 - m i s o l. $x^{1+lgx}=100$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamadagi noma'lumning qabul qiladigan qiymatlar sohasi $x>0$ dir. Tenglikning har ikkala tomonini 10 asosga ko'ra logarifmlaymiz: $lgx\cdot(1+lgx)=lg100$

Agar $lgx=t$ desak, $lg100=2$ bo'ladi. U holda $(1+t)t=2$ yoki $t^2+t–2=0$, bundan $t_1=1$, $t_2=–2$. $lgx=1$, bundan $x=10$, $lgx=–2$, bundan $x=\frac{1}{100}$ Javob. $x_1=10$, $x_2=\frac{1}{100}$

5-misol. $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0{,}18$ tenglama yechilsin

Yechish. Bu tenglamaning aniqlanish sohasi $5x–4>0$ va $x+1>0$ bo'lishi kerak, bundan $x>\frac{4}{5}$ bo'ladi. Tenglamani potensirlasak: $\sqrt{5x-4}\cdot\sqrt{x+1}=100\cdot 0{,}18$ yoki $\sqrt{5x-4}\cdot\sqrt{x+1}=18$. Bunda $5x^2+x–328=0$, bundan $x_1=-\frac{41}{5}$ va $x_2=8$, $x_1=-\frac{41}{5}$ bo'lgani uchun yechim bo'lolmaydi. Javob. $x=8$.

6 - m i s o l. $\frac{1}{12}\lg^2 x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\lg x$ tenglamani yeching.

Echish. Bu tenglamaning aniqlanish sohasi $x>0$. Agar $lgx=y$ desak, $\frac{1}{12}y^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}y$, $y^2+3y–4=0$, bundan $y_1=1$ va $y_2=–4$, u holda $lgx=1$ yoki $x=10$. $lgx=–4$ yoki $x=\frac{1}{10^4}$. J a v o b. $x_1=10$, $x_2=\frac{1}{10^4}$

7 - m i s o l. $log_5x+log_x5=2{,}5$

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi $x>0$ va $x\neq 1$. Bu tenglamada logarifm asoslarini bir xilga keltirish kerak. Buning uchun $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ formuladan foydalanamiz:

$$\log_x 5=\frac{\log_5 5}{\log_5 x}=\frac{1}{\log_5 x}$$

Bu almashtirishlarga ko’ra tenglama quyidagi ko’rinishni oladi: $\log_5 x+\frac{1}{\log_5 x}=2{,}5$, agar $\log_5 x=y$ desak, $y+\frac{1}{y}=2{,}5$ yoki $y^2-2{,}5y+1=0$. Uni yechsak, $y_1=2$ va $y_2=\frac{1}{2}$. Bularga ko’ra $\log_5 x=2$, bundan $x=25$ va $\log_5 x=\frac{1}{2}$, bundan $x=\sqrt{5}$.

Javob: $x_1 = 25$, $x_2 = \sqrt{5}$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

Quyidagi tenglamalarni yeching:

1. $\lg x=3-\lg 5$ J: $x = 200$
2. $100^{\lg(x+20)} = 10000$ J: $x = 80$
3. $\lg(0{,}5 + x) = \lg 2 - \lg x$ J: $x = \frac{\sqrt{33}-1}{4}$
4. $\lg(x+6) - 2 = \frac{1}{2}\lg(2x-3) - \lg 25$ J: $x_1 = 14$, $x_2 = 6$
5. $\frac{1}{5-4\lg x}+\frac{1}{1+\lg x}=1$ J: $x = 100$, $x = 1000$
6. $\frac{1}{5-4\lg(x+1)}+\frac{4}{1+\lg(x+1)}=3$ J: $x = 9$, $x = \sqrt{1041}$
7. $x^x = x$ J: $x = 1$, $x = -1$
8. $x^{\lg x+2} = 1000$ J: $x = \frac{1}{1000}$, $x = 10$
9. $x = 10^{1-0.25\lg x}$ J: $\sqrt[5]{10000}$
10. $\log_3 x + \log_5 x = \log_x 15$ J: $x = 5$
11. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$ J: $x = 16$
12. $\log_{3x} 3 = \log_3 (3x)^2$ J: $x = 1$
13. $\log_{\sqrt{\frac{1}{16}}} x = 4$ J: $x=\frac{1}{256}$
14. $\log_{\sqrt{x-2}}(2\sqrt{x}+6)=2$ J: $x = 16$
15. $\log_3\left(3+\sqrt{3+x}\right)=\frac{2}{\log_x 3}$ J: $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
16. $\sqrt{\log_x\sqrt{2x}}\cdot\log_2 x=-1$ J: $x = \frac{1}{4}$
17. $\frac{\lg(x+4)-\lg(x-3)}{\lg 200-\lg 25}=1$ J: $x = 4$
18. $\log_b x+\log_{b^2} x+\log_{b^4} x=1{,}75$ J: $x = b$
19. $\frac{\lg(2x+5)-\lg x}{2+\lg 100}=\frac{1}{4}$ J: $x = \frac{5}{8}$

20. $\log_3\{1+\log_2[1+\log_4(1+\log_{\frac{1}{2}} x)]\}=0$ *J: x = 1*

21. *$\log_4 x + \log_x 4 = 2$* *J: x = 4*

22. $\log_{\sqrt[4]{x}} x+\log_3 x-\log_{\frac{1}{3}} x=8$ *J: 9*

23. *$\log_7[x + \log_2(9 - 2^x) + 4] = 1$* *J: x = 0*

24. $\log_7 \log_4 \log_3^2(x-7)=0$ *J: $x=7\frac{1}{9}$, $x=16$*

25. *$\log_3 x + 6\log_x 3 = 5$* *J: x=9, x=27*

26. *$\lg x + \lg(x+3) = \lg 2 + \lg(9-2\sqrt{x^2+3x-6})$* *J: x = 2*

13-§. Parametrli logarifmik va ko'rsatkichli tenglamalarni yechish.

Parametrli logarifmik va ko'rsatkichli tenglamalarni yechish parametrsiz shunday tenglamalardan ana shu parametrni qanoatlantiruvchi tenglama yechimini uning yo'l qo'yiladigan qiymatlari ichidan izlash bilan farq qiladi.

1-m i s o l. $\log_a(a+\sqrt{a+x}) = \dfrac{2}{\log_x a}$ tenglama yechilsin.

Yechish. Bu tenglamani yechish uchun avvalo uning paramet-rini qanoatlantiruvchi yo'l qo'yiladigan qiymatlar sohanini topamiz:

$x>0,\ x\neq 1,\ a>0,\ a\neq 1.\quad \log_a(a+\sqrt{a+x})=\log_a x^2$

Potensirlash qoidasiga ko'ra $a+\sqrt{a+x}=x^2$ $\sqrt{a+x}=x^2-a$, bu erda $x^2>a$ tenglikning har ikki tomonini kvadratga ko'tarsak, $a+x=x^4-2ax^2+a^2$, $a^2-(2x^2+1)a+(x^4-x)=0$ bu tenglamani yechsak, $a_{1,2}=\dfrac{2x^2+1\pm(2x+1)}{2}$ hosil bo'ladi: $a_1=x^2+x+1$ va $a^2=x^2-x$. $a_1=x^2+x+1$ tenglamaning yechimi yo'l qo'yiladigan qiymatlar sohasida yotmaydi, $x^2-a>0$, $x>0$ bo'lgani uchun $a = x^2-x$ tenglamani yechamiz: $x^2-x-a=0$, bundan

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+a}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1+4a}{4}}=\frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$$

Bulardan: $x_1=\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{4a+1}}{2}$. Bu yechimlardan $x_1=\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$ tenglamaning yo'l qo'yiladigan qiymatlar sohasida yotadi, shuning uchun u yechim bo'ladi.

Bu berilgan tenglamaning logarifm xossalari va potensirlashga ko'ra $a=\sqrt{a+x}=x^2$ ko'rinishda yozib olamiz. Bu tenglamaning har ikki tomoniga x ni qo'shamiz.

$$a + x + \sqrt{a+x} = x^2 + x$$

agar $\sqrt{a+x}=b$ desak, $b^2 + b = x^2 + x$ hosil bo'ladi. Bundan

$$(x^2-b^2)+(x-b)=0,$$
$$(x-b)(x+b)+(x-b)=0,$$
$$(x-b)(x+b+1)=0;$$

$x+b+1\neq 0$ bo'lgani uchun $x-b=0$ bo'ladi, b ning o'rniga $\sqrt{a+x}$ ni qo'ysak, $x-\sqrt{a+x}=0$ yoki $x^2-x-a=0$ bo'ladi. Biz bu tenglamani yechishni yuqorida ko'rib o'tdik.

2 - m i s o l. $a^{\frac{x}{2}}+b^{\frac{x}{2}}=m(ab)^{\frac{1}{x}}$ tenglama yechilsin.

Yechish. Bu tenglamadagi o'zgaruvchining yo'l qo'yiladigan qiymati $x\neq 0$

a) $a\cdot b>0$ bo'lsin, u holda tenglamaning ikkala tomonidagi ifodalarni $(a\cdot b)^{\frac{1}{x}}$ ga bo'lamiz.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{x}}=m, \qquad (m>0).$$

Agar $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}}=t$ desak, $t+\frac{1}{t}=m$, bundan $t^2-tm+1=0$ bo'ladi. Bu tenglamani yechamiz:

$$t_{1,2}=\frac{m\pm\sqrt{m^2-4}}{2}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{m\pm\sqrt{m^2-4}}{2},. \qquad (1)$$

Bu erda $m\geq 2$ bo'ladi.

a) $m>2$ bo'lsin, bu holda (1) ning har ikki tomonini 10 asosga ko'ra logarifmlaymiz:

$$\frac{1}{x}\lg\frac{a}{b}=\lg(m\pm\sqrt{m^2-4})-\lg 2,$$

$$x=\frac{\lg a-\lg b}{\lg(m\pm\sqrt{m^2-4})-\lg 2}, \qquad (a\neq b).$$

b) $m=2$ bo'lsin, u holda (1) quyidagi ko'rinishni oladi:

bundan: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}}=1, \quad a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{x}}$; $a=b\neq 0$ bo'lishi kerak.

2) $a\cdot b=0$ bo'lsin.

a) $a=b=0$ bo'lsa, berilgan tenglamaning yechimi bo'lgan barcha sonlar.

b) $a=0,\ b\neq 0$ yoki $a\neq 0,\ b=0$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas.

J: 1) Agar $m>2,\ a\neq 0,\ b\neq 0,\ a\neq b$ bo'lsa,

$$x=\frac{\lg a-\lg b}{\lg(m\pm\sqrt{m^2-4})-\lg 2}$$

2) Agar a) $m=2,\ a=b\neq 0$ bo'lsa, x – ixtiyoriy son.

b) $a=b=0,\ x\neq 0$ – ixtiyoriy son

3-m i s o l. $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x+\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x=1$ tenglama yechilsin.

Yechish. Bu tenglamadagi a parametrning yo'l qo'yiladigan qiymatlari sohasi $0<a<1$ bo'ladi. Tenglamaning har ikki tomonini $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x\neq 0$ ga bo'lamiz:

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x+\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x=1, \quad \frac{2a}{1+a^2}=\sin z, \quad \frac{1-a^2}{1+a^2}=\cos z,$$

$$(\cos z)^x+(\sin z)^x=1. \qquad (1)$$

(1) tenglikning chap tomonida turgan ifodaning yo'l qo'yiladigan qiymatlar sohasi $0<z<\frac{\pi}{2}$ bo'ladi, bu oraliqda $f(x)=(\sin z)^x+(\cos z)^x$ funksiya monoton kamayuvchidir. $x=2$ da $f(x)=1$ bo'ladi, shuning uchun $x=2$ bu tenglamaning yechimi bo'ladi.

4-misol. $a^x-\frac{a^{2x}-4a^x+4}{\sqrt{a^{2x}-4a^x+4}}=1$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglama ma'noga ega bo'lishi uchun $\sqrt{a^{2x}-4a^x+4}=\sqrt{(a^x-2)^2}=|a^x-2|\neq 0$ bo'lishi kerak.

$$a^x-\frac{(a^x-2)^2}{|a^x-2|}=1; \qquad a^x-a^x-2=1$$

A) agar $a^x\geq 2$ bo'lsa, $a^x-a^x+2=1$ tenglama yechimga ega emas.

B) agar $0<a^x<2$ bo'lsa, $2a^x=3;\ x=\log_a\frac{3}{2}$ yechim hosil bo'ladi.

5-misol. $2\log_x^2 b-3\log_x bx^2+14\log_{b^2x^2} bx=0$ tenglama yechilsin.

Yechish. $x>0,\ \ x\neq\frac{1}{b^2}$ va $b>0$, agar $\log_x b=y$ desak, $2y^2-3y+1=0,\ \ y_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm1}{4};$

$y_1=1,\ \ y_2=\frac{1}{2},\ \ \log_x b=1$

bundan $x_1=b,\quad \log_x b=\frac{1}{2}$ bundan $x_2=\sqrt{b}$

6-misol. $\frac{2}{a}\lg x=1+\frac{a}{\lg x},\quad a\neq0$ tenglama yechilsin.

Yechish.

$$\frac{2}{a}\lg^2 x=\lg x+a;\quad \frac{2}{a}\lg^2 x-\lg x-a=0;$$

$$\lg x=y;\quad 2y^2-ay-a^2=0,$$

$$y_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+8a^2}}{4}=\frac{a\pm3a}{4},$$

$$y_1=a,\quad y_2=-\frac{a}{2};$$

$$\lg x=a,\quad x=10^a;\quad \lg x=-\frac{a}{2},\quad x=10^{-\frac{a}{2}}.$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

1-misol. $2\log_x a+\log_{ax} a+3\log_{a^2x} a\neq0,\quad a\neq1,\quad a>0$ tenglama yechilsin.

$j:\quad x_1=\frac{1}{\sqrt{a}},\quad x_2=\frac{1}{a\sqrt[3]{a}}.$

2-misol. $\frac{\log_3 4-2}{\log_3(x+2)}=\frac{\log_a(5-x)}{\log_a(x+2)}-1,\quad a>0,\quad a\neq1$ tenglama yechilsin.

$j:\quad x=2\frac{11}{13}.$

3-misol. $\frac{\lg(4+a-x)}{\lg x}=1+\frac{\log_a 4-2}{\log_a x},\quad a>0,\quad a\neq1$ tenglama yechilsin.

$j:\quad x=\frac{a^2(a+4)}{a^2+4}.$

14-§. Ko'rsatkichli va logarifmik tenglamalar sistemasini yechish.

1-misol. $\begin{cases}\sqrt[x]{x+y}=5\\ (x+y)\cdot2^x=100\end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish. Sistemadagi birinchi tenglamaning har ikki tomonini x darajaga ko'taramiz:

$$\begin{cases}x+y=5^x,\\ (x+y)\cdot2^x=100.\end{cases}$$

$$(5^x\cdot2^x=100)\Rightarrow(10^x=10^2)\Rightarrow(x=2).$$

$(2+y=5^2)\Rightarrow y=25-2=23.\qquad Ж: x=2,\quad y=23$

2-misol. $\begin{cases} x^y = 243 \\ \sqrt[y]{1024} = \left(\dfrac{2}{3}x\right)^2 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Echish. Sistemadagi ikkinchi tenglamaning har ikki tomonini y darajaga ko'taramiz.

$$\begin{cases} x^y = 243, \\ 1024 = \left(\dfrac{2}{3}x\right)^{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ 1024 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2y} \cdot (x^y)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ 1024 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2y} \cdot (243)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ 2^{10} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2y} \cdot (3^5)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 5. \end{cases}$$

3 - m i s o l. $\begin{cases} y^{\frac{x}{y}} = x, \\ y^3 = x^2 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Sistemadagi birinchi tenglamaning har ikki tomonini *2y* darajaga, ikkinchi tenglamani esa *y* darajaga ko'taramiz:

$\begin{cases} y^{2x} = x^{2y} \\ y^{3y} = x^{2y} \end{cases} \Rightarrow y^{2x} = y^{3y}; \quad y \neq 1$ былса $2x = 3y, \quad x = \dfrac{3}{2}y,$ x ning bu topilgan qiymatini sistemadagi ikkinchi tenglamaga qo'yamiz:

$$\left(y^3 = \frac{9}{4}y^2\right) \Rightarrow \left(y^3 - \frac{9}{4}y^2 = 0\right) \Rightarrow y^2\left(y - \frac{9}{4}\right) = 0;$$

$$y_{1,2} = 0, \quad y_3 = \frac{9}{4}, \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{27}{8}, \quad y_3 = \frac{9}{4},$$

4-misol. $\begin{cases} 9 \cdot 5^x + 7 \cdot 2^{x+y} = 457, \\ 6 \cdot 5^x - 14 \cdot 2^{x+y} = -890 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. $5^x = a$, $2^{x+y} = b$ desak,

$$\begin{cases} 9a + 7b = 457, \\ 6 \cdot a - 14b = -890 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 64, \end{cases}$$

$(5^x=1)=(5^x=5^0)=(x=0); \quad 2^y=64=2^6; \quad y=6.$

J: $x=0, \ y=6.$

5-misol. $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3} \\ (x+y) \cdot 2^{y-x} = 3 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. $\begin{cases} x + y = 2^{x-y} \cdot 3^{\frac{x-y}{2}} \\ x + y = 3 \cdot 2^{x-y} \end{cases} \Rightarrow (2^{x-y} \cdot 3^{\frac{x-y}{2}} = 3 \cdot 2^{x-y}) \Rightarrow (3^{\frac{x-y}{2}} = 3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-y}{2} = 1\right) \Rightarrow (x - y) = 2 \Rightarrow (x = 2 + y).$$

$$\begin{cases} x+y=3\cdot 2^2=12, \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow (2x=14) \Rightarrow (x=7);$$

$$\begin{cases} y=x-2 \Rightarrow y=5. \\ x=7. \end{cases}$$

J: $x=7$, $y=5$.

6-misol. $\begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2y}, \\ \log_2(x+y)+\log_2(x-y)=4 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish.

$$\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}}=3^{2y-x} \\ \log_2(x+y)(x-y)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-y}{2}=2y-x, \\ (x+y)(x-y)=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=4y-2x, \\ x^2-y^2=16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x=5y \\ x^2-y^2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{3}y, \\ x^2-y^2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{3}y \\ \dfrac{25}{9}y^2-y^2=16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{3}y \\ 16y^2=144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{3}y \\ y^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{3}y \\ y_{1,2}=\pm 3. \end{cases}$$

j: $x_1=5;\quad y_1=3;\quad x_2=-5;\quad y_2=-3.$

7-misol. $\begin{cases} 7\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{y+z-x+1}=9, \\ 2\cdot 3^{x+1}+3^{y+z-x+1}=27, \\ \lg(x+y+z)-3\lg x=\lg yz+\lg 2 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. Agar $3^{x+1}=y$, $3^{y+z-x+1}=v$ desak, berilgan sistemadagi birinchi ikki tenglama quyidagi ko'rnishni oladi:

$$\begin{cases} 7u-6v=9, \\ 2u+v=27 \end{cases}$$

Bu sistemani yechsak, $y=9$, $v=9$ yechimlarga ega bo'lamiz. Bu yechimlarga ko'ra $x=1$, $y+z-x=2$ yoki $y+z=3$ tengliklarni hosil qilamiz. Bu topilganlarga ko'ra sistemadagi uchinchi tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\lg(3+1)-3\lg 1=\lg yz+\lg 2,$$
$$\lg 4-\lg 2=\lg yz,$$
$$\lg 2=\lg yz; \qquad 2=yz$$

Bularga ko'ra quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} y+z=3, \\ yz=2 \end{cases} \quad \text{bundan} \quad \begin{cases} y_1=1, \quad y_2=2, \\ z_1=2, \quad z_2=1, \end{cases}$$

j: $\begin{cases} x_1=1, \quad y_1=1, \quad z_1=2, \\ x_2=1, \quad y_2=2, \quad z_2=1, \end{cases}$

8-misol. $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=\lg 13+1, \\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=3\lg 2 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. Bu tenglamalar sistemasidagi o'zgaruvchining yo'l quyiladigan qiymatlar sohasi $x+y>0$ va $x-y>0$ bo'ladi.

Potensirlash qoidasiga ko'ra tenglama sistemasi quyidagi ko'rinishni oladi;

$$\begin{cases} x^2+y^2=130 \\ \dfrac{x+y}{x-y}=8. \end{cases}$$

Sistemadagi ikkinchi tenglamadan y ni topamiz:

$x+y=8x-8y$ yoki $9y=7x$, $y=\dfrac{7}{9}x$.

Bu qiymatni birinchi tenglamaga qo'yamiz:

$$x^2+\frac{49}{81}x^2=130,$$

$$81x^2+49x^2=130\cdot 81,$$

$$130x^2=130\cdot 81, \quad x^2=81, \quad x_{1,2}=\pm 9;$$

$$y=\frac{7}{9}\cdot 9=7$$

$$j: x=9, \quad y=7.$$

9-misol. $\begin{cases} \lg(x-y)-2\lg 2=1-\lg(x+y) \\ \lg x-\lg 3=\lg 7-\lg y \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. Tenglamalar sistemasidagi noma'lumlarning yo'l quyiladigan qiymatlar sohasi $x>0$, $y>0$, $x>y$.

$$\begin{cases} \lg(x-y)+\lg(x+y)=\lg 4+\lg 10, \\ \lg x+\lg y=\lg 7+\lg 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y)=40 \\ xy=21 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=40, \\ xy=21. \end{cases}$$

Bu sistemani yechsak. Quyidagi yechimni hosil qilamiz: $x=7$, $y=3$.

10-misol. $\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2}=2, \\ \log_8 x\log_2(y+1)^2=\dfrac{4}{3} \end{cases}$ sitemani yeching.

Yechish. $x>0$, $y>0$ bo'lishi kerak. Ikki son ko'paytmasining logarifmi qoidasiga ko'ra sistemani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} 2\log_2 x+\log_2\dfrac{\sqrt{y+1}}{2}=2, \\ \dfrac{1}{3}\log_2 x\cdot 2\log_2(y+1)=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\log_2 x+\dfrac{1}{2}\log_2(y+1)-\log_2 2=2, \\ \dfrac{1}{3}\log_2 x\cdot 2\log_2(y+1)=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Agar $\log_2 x=u$, $\log_2(y+1)=v$ deb belgilasak, u holda tenglama sistemasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} 2u + \frac{1}{2}v = 3, \\ uv = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4u + v = 6, \\ uv = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 2 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} u_2 = \frac{1}{2}, \\ v_2 = 4 \end{cases}$$

1) $(\log_2 x = 1) \Rightarrow (x = 2).$

2) $(\log_2(y+1) = 2) \Rightarrow (y+1 = 4) \Rightarrow (y = 3).$

3) $\left(\log_2 = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow (x = \sqrt{2}).$

4) $(\log_2(y+1) = 4) \Rightarrow (y+1 = 16) \Rightarrow (y = 15).$

$$j: \begin{cases} x_1 = 2, \quad y_1 = 3, \\ x_2 = \sqrt{2} \quad y_2 = 15, \end{cases}$$

11-misol. $\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 5\lg^2 a^2 \\ xy = a^2 \end{cases}$ sistemani yyeching.

Yechish. *x>0, y>0* va *a>0*. Sistemadagi ikkinchi tenglamaning quyidagicha yozib olamiz: lg*x*+lg*y*=2lg[*a*].

Agar lg*x*=*u* va lg*y*=*v* desak, sistemani quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 10\lg^2 a \\ u + v = 2\lg a \end{cases}$$

Sistemadagi ikkinchi tenglamaga ko'ra quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$u = 3\lg|a| = \lg x, \quad v = -\lg|a| = \lg y.$$

$$j: x_1 = |a|^3, \quad y_1 = \frac{1}{|a|}, \quad x_2 = \frac{1}{|a|} \quad y_2 = |a|^3.$$

Bu tengliklardan $x = |a|^3, \quad y = \left|\frac{1}{a}\right|$ bo'ladi.

12-misol. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_9 x + \log_3 y + \log_9 z = 2, \\ \log_{16} x + \log_{16} y + \log_4 z = 2 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. *x>0, y>0 , z>0* bo'lishi kerak. Berilgan sistemaga bir asosdan boshqa asosga o'tish va potensirlash qoidalarini qo'llash orqali uni quyidagicha yoza olamiz:

$$\begin{cases} x^2yz = 16, \\ xy^2z = 81, \\ xyz^2 = 256. \end{cases}$$

Bu hosil qilingan sistemaning chap va o'ng tomonlarini o'zaro ko'paytirsak, $(xyz)^4=24^4$ yoki $xyz=24$ hosil bo'ladi. Bunga ko'ra $x = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{27}{8}, \quad z = \frac{32}{3}$ yechimlarni qosil qilamiz.

13-misol. $\begin{cases} \log_3 x(1 + \log_x y) = 4, \\ 3\left(2\log_{y^4} x^2 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{x^2}} y^4\right) = 10 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamadagi no'malumlarning qabul qilidigan qiymatlari to'plami *x>0* va *y>0* bo'lishi kerak.

Sistemadagi birinchi tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\log_3 x = \frac{\log_x x}{\log_x 3} = \frac{1}{\log_x 3}, \quad 1 + \log_x y = \frac{4}{\log_3 x}$$

$$1 + \log_x y = 4 \cdot \log_x 3 \quad \text{ёки} \quad \log_x x + \log_x y = 4\log_x 3,$$

$$\log_x (xy) = \log_x 3^4, \qquad xy = 3^4$$

Sistemadagi ikkinchi tenglamada quyidagicha $\log_{y^4} x^2 = z$ belgilashni kiritamiz:

$$6z + \frac{3}{2z} = 10 \quad \text{ёки} \quad 12z^2 - 20z + 3 = 0,$$

$$z_1 = \frac{3}{2}, \qquad z_2 = \frac{1}{6}.$$

$$a) \quad \left(\log_{y^4} x^2 = \frac{3}{2}\right) \Rightarrow (x = y^2), \quad \begin{cases} x = y^2, & x_1 = 27. \\ xy = 81, & y_1 = 3; \end{cases}$$

$$b) \quad \left(\log_{y^4} x^2 = \frac{1}{6}\right) \Rightarrow (y = x^3), \quad \begin{cases} xy = 81, & x_2 = 3, \\ y = x^3, & y_2 = 27. \end{cases}$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

1. $\begin{cases} 3^{x+y} + 3^x + 3^y = 7, \\ 3^{2x+y} + 3^{x+2y} = 12. \end{cases}$ $\quad j: \begin{matrix} x_1 = 0, & y_1 = 1, \\ x_2 = 1, & y_2 = 0, \end{matrix}$

2. $\begin{cases} 2 \cdot 9^x + 9^x = 5^x \cdot 5^{-y}, \\ 2 \cdot 3^{x-y} - 5^{y-x} = 3 \cdot 9^x, \end{cases}$ $\quad j: x = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}.$

3. $\begin{cases} (3x - y)^{x+y} = 4, \\ 48^{\frac{1}{x+y}} = 7x^2 - 18xy + 3y^2 \end{cases}$ $\quad j: x = \frac{5}{4}, \quad y = -\frac{1}{4}.$

4. $\begin{cases} x \cdot 2^{x-y+1} + 3y \cdot 2^{2x+y} = 2, \\ 2x \cdot 2^{2x+y} + 3y \cdot 8^{x+y} = 1. \end{cases}$ $\quad j: x = 1 \quad y = -1.$

5. $\begin{cases} \sqrt[y]{4^x} = 32\sqrt[x]{8^y}, \\ \sqrt[y]{3^x} = 3\sqrt[x]{9^{1-y}}. \end{cases}$ $\quad j: \begin{matrix} x_1 = -2, & y_1 = 4, \\ x_2 = \frac{3}{2}. & y_2 = \frac{1}{2}. \end{matrix}$

6. $\begin{cases} \log_a x + \log_a y = 2, \\ \log_b x - \log_b y = 4. \end{cases}$ $\quad j: x = ab^2 \quad y = \frac{a}{b^2}.$

7. $\begin{cases} (1 + \log_x y)\log_2 x = 3 \\ \log_{\sqrt{y}} (y^4 x^2) - 0{,}5\log_{\sqrt{x}} y^4 = 2. \end{cases}$ $\quad j: \begin{matrix} x_1 = 2, & y_1 = 4, \\ x_2 = 2^{12}, & y_2 = 2^{-9}. \end{matrix}$

8. $\begin{cases} x \cdot \log_2 \frac{1}{4} \cdot \log_{\frac{1}{x}} 4 = y\sqrt{y}(\log_x 4 - 2), \\ \log_y 4 \cdot \log_{\sqrt{2}} x = 2. \end{cases}$ $\quad j: x = 2^{\frac{3}{5}}, \quad y = 2^{\frac{2}{5}}.$

9. $\begin{cases} \log_2 xy + 4\log_4 (x - y) = 5, \\ x^2 + y^2 = 20, \end{cases}$ $\quad j: \begin{matrix} x_1 = 4, & y_1 = 2. \\ x_2 = 2, & y_2 = 4. \end{matrix}$

10. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20, \end{cases}$ $\quad j: x = 5, \quad y = 5.$

11 $\begin{cases} \log_{xy}(x+y) = 0 \\ \log_{xy}(y-x) = 1 \end{cases}$ $\quad j: x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

12. $\begin{cases} \lg^2 \frac{x}{y} = 3\lg^2 x - \lg^2 y, \\ \lg^2(y-3x) - \lg x \cdot \lg y = 0. \end{cases}$ $\quad j: \begin{matrix} x_1 = 1, & y_1 = 4, \\ x_2 = \frac{1}{2}, & y_2 = 2, \end{matrix}$

13. $\begin{cases} \sqrt[10]{2^x} \cdot \sqrt{\sqrt[5]{2^y}} = \sqrt[x]{128}, \\ \lg(x+y) = \lg 40 - \lg(x-y). \end{cases}$ $\quad j: x = 7, \quad y = 3.$

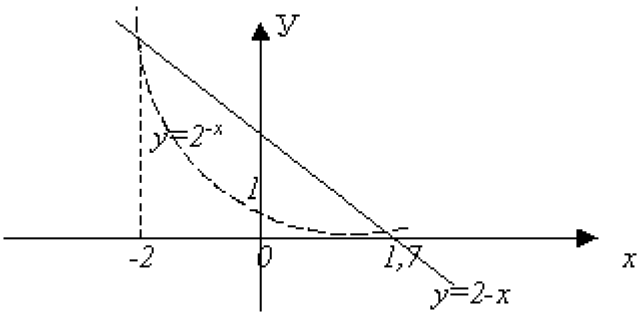
14. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4. \end{cases}$ $\quad j: x = 2, \quad y = 6.$

15-§. Ko'rsatkichli va logarifmik tenglamalarni grafik usulda yechish.

1-misol. $2^{x+1} - x\cdot 2^x - 1 = 0$ tenglama grafik usulda yechilsin.

Yechish. Tenglamaning chap tomonida berilgan $y=2^{x+1} - x\cdot 2^x - 1 = 0$ funksiyaning grafigini chizish murakkabdir, shuning uchun bu tenglamani quyidagacha yozib olamiz: $2^{x+1} - x\cdot 2^x = 1$.

Bu tenglamaning har ikki tomonini $2^x \neq 0$ ga bo'lamiz. natijada $2-x=2^{-x}$ hosil bo'ladi. $y=2-x$ va $y=2^{-x}$ funksiyalarning grafiklarini (41-rasm) koordinata tekisligida chizsak, ularning kesishish nuqtalarining absissalari berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi. J: $x_1=-2$, $x_2=1{,}7$.



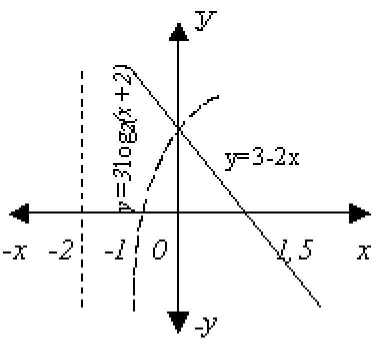
41-chizma

2-misol. $3\log_2(x+2)+2x-3=0$ tenglama grafik usulda yechilsin.

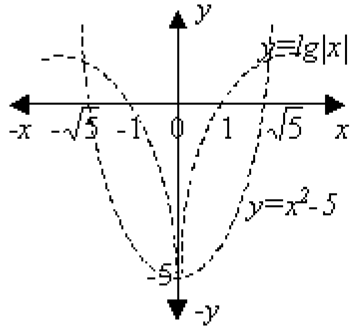
Yechish. Berilgan tenglamaning $3\log_2(x+2)=3-2x$ ko'rini-shida yozib olib, tenglikning har ikki tomonida turgan $y=3\log_3(x+2)$ va $y=3-2x$ funksiyalarning grafiklarini koordinata tekisligida yasaymiz (42-rasm). Bu grafiklar kesishish nuqtasining absissasi berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi. J: $x=0$.

3-misol. $\lg|x|-x^2-5=0$ tenglama grafik usulda yechilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz: $\lg x=x^2-5$. $y=\lg x$ va $y=x^2-5$ funksiyalarini koordinata tekisligida grafiklarini yasaymiz (43 rasm).



42-chizma

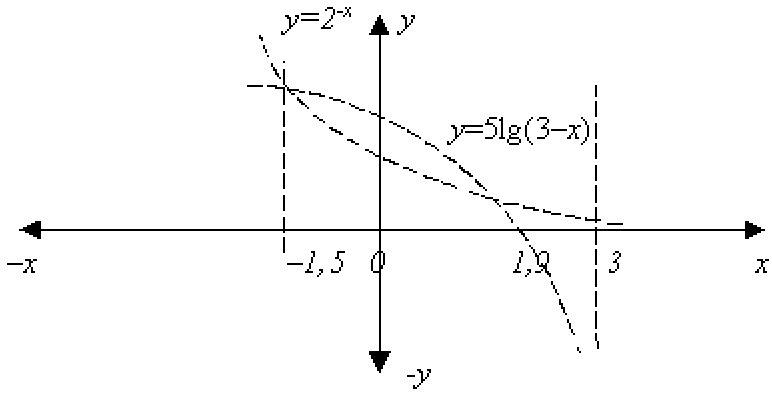


43-chizma

Bu grafiklar kesishish nuqtalarining absissasi berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi.

J: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$.

4 - m i s o l. $2^{-x} - 5lg(3 - x) = 0$ tenglama grafik usulda yechilsin.



44-chizma

Yechish. Berilgan tenglamani $y=2^{-x}$ va $y=51g(3–x)$ ko'rinishda yozib, ularning grafiklarini koordinata tekisligida yasaymiz. Bu grafiklar kesishish nuqtalarining absissasi berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi (44-rasm).

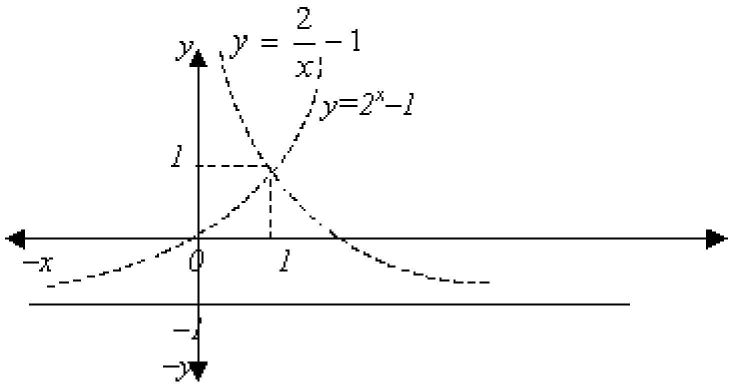
J: $x_1=-1,5$. $x_2=1,9$.

5 - m i s o l. $\begin{cases} xy + x - 2 = 0, \\ x - \log_2(y+1) = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi grafik usulda yechilsin.

Yechish. Berilgan tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} xy = 2 - x, \\ \log_2(y+1) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2-x}{x}, \\ y + 1 = 2^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{x} - 1, \\ y = 2^x - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$y = \dfrac{2}{x} - 1$ va $2^x - 1$ funksiyalarning grafiklarini koordinata tekisligida chizamiz (45-rasm).



45-chizma

Ularning kesishish nuqtalarining absissasi tenglamaning yechimi bo’ladi.

J: $x = 1,\ y = 1.$

16-§. Trigonometrik tenglamalar.

1. $\sin x=a$ tenglamada $|a|\le 1$ bo’lsa, u $x=(-1)^k \arcsin a+\pi k,\ \ k\in Z$ yechimga ega bo’ladi. Xususiy holda

a) agar $\sin x = 0$ bo’lsa, $x = \pi k,\ k \in Z;$

b) agar $\sin x = 1$ bo’lsa, $x = \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in Z;$

v) agar $\sin x = -1$ bo’lsa, $x = -\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in Z;$

g) agar $\sin^2 x = a$ bo’lsa, $x = \pm\arcsin\sqrt{a} + \pi k,\ k \in Z;$

Misol. $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sqrt{3}=0$ tenglama yechilsin.

Yechish:

$$\left[2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sqrt{3}=0\right] \Leftrightarrow \left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\pi}{4}+x=(-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\pi k\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\pi}{4}+x=(-1)^k \left(-\frac{\pi}{3}\right)+\pi k\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+\pi k), \quad k\in Z$$

2. $\cos x=a$ tenglamada $|a|\le 1$ bo’lsa, u $x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z;$ yechimga ega bo’ladi. Xususiy holda:

a) agar $\cos x = 0$ bo’lsa, $x = \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in Z;$

b) agar $\cos x = 1$ bo’lsa, $x = 2\pi k,\ k \in Z;$

v) agar $\cos x = -1$ bo’lsa, $x = \pi +2\pi k,\ k \in Z;$

g) agar $\cos^2 x = a$ bo’lsa, $x = \pm\arccos\sqrt{a} +\pi k,\ k \in Z;$

Misol. $\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)-1=0$ tenglama yechilsin.

Yechish.

$$\left[\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)-1=0\right]\Leftrightarrow\left[\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi k}{2}\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}\right)\Leftrightarrow\left(x=\frac{3}{4}+\frac{3\pi k}{2}\right),\quad k\in Z.$$

3. $tg\ x=a$ tenglama $x=arctg\ a+\pi k,\ k\in Z$ yechimga ega bo'ladi. Xususiy holda

a) agar $tg\ x=0$ bo'lsa, $x=\pi k,\ k\in Z;$

b) agar $tg\ x=1$ bo'lsa, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;$

v) agar $tg\ x=-1$ bo'lsa, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;$

g) agar $tg^2x=a$ bo'lsa, $x=\pm arctg\sqrt{a}+\pi k,\ k\in Z.$

Misol. $3tg^2 3x-1=0$ tenglama yechilsin.

Yechish.

$$\left(tg^2 3x=\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow\left(3x=\pm arctg\frac{1}{\sqrt{3}}+k\pi\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(3x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\Leftrightarrow\left(x=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k\right)\Leftrightarrow\left(x=\frac{\pi}{18}(6k+1)\right).$$

4. $ctg\ x=a$ tenglama $x=arcctg\ a+\pi k,\ k\in Z$ yechimga ega bo'ladi.

a) agar $ctg\ x=0$ bo'lsa, $x=\frac{\pi}{2}\pi k,\ k\in Z;$

b) agar $ctg\ x=1$ bo'lsa, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;$

v) agar $ctg\ x=-1$ bo'lsa, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;$

g) agar $ctg^2x=a$ bo'lsa, $x=\pm arcctg\sqrt{a}+\pi k,\ k\in Z.$

Misol. $ctg^2\left[2x-\frac{\pi}{3}\right]=3$ tenglama yechilsin.

Yechish.

$$\left[ctg^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=3\right]\Leftrightarrow\left[ctg\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\pm\sqrt{3}\right]\Leftrightarrow\left[\left(2x-\frac{\pi}{3}=\pm arcctg\sqrt{3}+\pi k\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+\pi k\right)\Leftrightarrow\left(x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right),\quad k\in z.$$

Matematika kursida har qanday trigonometrik tenglamalar ayniy almashtirishlarni bajarish orqali sodalashtirib, $sin\ x=a,\ cos\ x=a,\ tg\ x=a,\ ctg\ x=a$ ko'rinishdagi eng sodda trigonometrik tenglamalarga keltiriladi.

Trigonometrik tenglamalar quyidagi metodlar yordamida yechiladi.

1. Ko'paytuvchilarga keltirish usuli.

1 - m i s o l. $sin2x=cos2x\ sin2x$ tenglama yechilsin.

Yechish. $sin2x-cos2x\ sin2x=0,\ sin2x(1-cosx)=0$

1) Agar $1-cosx\neq 0$ bo'lib, $sin2x=0$ bo'lsa, $x=\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$ bo'ladi.

2) Agar $sin2x\neq 0$ bo'lib, $1-cosx=0$ bo'lsa, $cosx=1,\ x=2\pi n,\ n\in Z$ bo'ladi.

2 - m i s o l. $sin3x-sin\ x=0$ tenglama yechilsin.

Yechish. $sin3x-sin\ x=2sin\ x\ cos\ 2x=0$

1) Agar $cos2x\neq 0$ bo'lib, $sinx=0$ bo'lsa, $x=\pi n,\ n\in Z$

2) Agar $sinx\neq0$ bo'lib, $cos2x=0$ bo'lsa, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$, $n\in Z$ bo'ladi.

3-misol. $cos^2x+cos^2 2x+cos^2 3x=1,5$ tenglama yechilsin.

Yechish. $cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ formulaga ko'ra

$$\left(\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 6x}{2}=\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=0)\Leftrightarrow[(\cos 2x+\cos 6x)+\cos 4x=0]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[2\cos 4x\cos 2x+\cos 4x=0]\Leftrightarrow\cos 4x(2\cos 2x+1)=0.$$

1) Agar $2cos2x+1\neq0$ bo'lib, $cos4x=0$ bo'lsa, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4}$, $n\in Z;$

2) Agar $cos4x\neq0$ bo'lib, $2cos2x+1=0$ bo'lsa, $cos2x=-\frac{1}{2}$, $2x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n$; $n\in Z.$

II. O'zgaruvchilarni kiritish usuli.

1 - m i s o l. $2cos^2x=3\sin x$ tenglama yechilsin.

Yechish. $(2cos^2x-3\sin x=0)\Leftrightarrow(3\sin x-2(1-sin^2x)=0$

$\Leftrightarrow(3\sin x-2+2\sin^2x=0).$

Agar $\sin x=y$ desak,

$$2y^2+3y-2=0,\quad y_1=\frac{1}{2},\quad y_2=-2.$$

$$\left(\sin x=\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\right),\quad k\in z.$$

2 - m i s o l. $cos2x-5\sin x-3=0$ tenglama yechilsin.

Yechish. $cos2x=1-2sin^2x$ formulaga ko'ra $(1-2sin^2x-5sinx-3=0)$ $\Leftrightarrow$ $(2sin^2x+5sinx+2=0)\Leftrightarrow$ $sinx=y$ desak, $2y^2+5y+2=0$, $y_1=-2$, $y_2=-\frac{1}{2}$.

1) $\sin x=-2$ tenglama yechimga ega emas.

2) $\left(\sin x=-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(x=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi k\right), k\in z;$

$$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z.$$

III. Bir jinsli tenglamalarni yechish.

1-misol. $2sin^2x-sinxcosx-cos^2x=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglama sinus va kosinus funksiyalariga nisbatan bir jinslidir. Tenglamalarning har ikki tomonini $cos^2x\neq0$ ga bo'lsak, $2tg^2x-tg\,x-1=0$ hosil bo'ladi. Bundan $tgx=1$ va $tg\,x=-\frac{1}{2}$.

1) Agar $tgx=1$ bo'lsa, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z;$

2) Agar $tg\,x=-\frac{1}{2}$ bo'lsa, $x=-arctg\frac{1}{2}+\pi k$, $k\in Z$ bo'ladi.

2-m i s o l. $cos^2x+3sin^2x+2\sqrt{3}\,sinxcosx=3$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani ayniy almashtirishlar bajarish orqali bir jinsli ko'rinishga keltiramiz.

$$\cos^2 x+3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=3(\sin^2 x+\cos^2 x),$$

$$\cos^2 x+3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-3\sin^2 x-3\cos^2 x=0$$

$$2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=0,$$

$$2\cos x(\cos x-\sqrt{3}\sin x)=0.$$

1) Agar $cosx-\sqrt{3}\,sinx\neq 0$ bo’lib, $cosx=0$ bo’lsa, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z;$

2) Agar $cos\,x\neq 0$ bo’lib, $cosx-\sqrt{3}\,sin\,x=0$ bo’lsa, $tgx=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z;$

IV. $asin\,x+bcosx=c$ ko’rinishdagi tenglamani yeching.

1-usul. Bu tenglamani yechish uchun $tg\frac{x}{2}=t$ almashtirish bajaramiz. Bizga ma’lumki,

$\sin x=\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, $\cos x=\dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, edi, shunga ko’ra berilgan tenglama quyidagi ko’rinishni oladi:

$$\frac{2at}{1+t^2}+\frac{b(1-t^2)}{1+t^2}=c,$$

$$2at+b-bt^2=c+ct^2,\qquad (b+c)t^2-2at+(c-b)=0,$$

$$t=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c+b},$$

$$x=2arctg\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c+b}+2k\pi,\ k\in z,\quad a^2+b^2\geq c^2 \text{ ва } b\neq -c.$$

Agar $b=-c$ bo’lsa, kvadrat tenglama chiziqli tenglamaga almashadi:

$2at+2b=0,\ \ t=-\frac{b}{a},\ x=-2arctg\frac{b}{a}+2k\pi,\ k\in Z.$

2-usul. Tenglamaning har ikkala tomonini $\sqrt{a^2+b^2}$ ga bo’lamiz:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1 \text{ ва } \left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|^2\leq 1,\qquad \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|^2\leq 1$$

Agar $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$ va $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$ desak, berilgan tenglama $sinx\cdot cos\,\varphi+cosx\cdot sin\,\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ko’rinishni oladi, bundan $sin(x+\varphi)\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ bo’ladi. $\varphi=arctg\frac{b}{a}$; agar $a^2+b^2\geq c^2$ bo’lsa,

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi k-arctg\frac{b}{a},\qquad k\in z.$$

1-misol. $3cosx+4sin\,x=5$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}$ bo’lgani uchun tenglamaning har ikki tomonini 5 ga bo’lamiz: $\frac{3}{5}\cos x+\frac{4}{5}\sin x=1$, $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, shuning uchun $\frac{3}{5}=\sin\varphi$ va $\frac{4}{5}=\cos\varphi$ bo’ladi, bundan $sin\,\varphi\cdot cosx+cos\,\varphi\,sin\,x=1$ tenglamani hosil qilamiz yoki $sin(x+\varphi)=1$ bo’ladi:

$$x+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\qquad x=\frac{\pi}{2}+2k\pi-\varphi,\qquad k\in z,$$

$$\varphi=\arcsin\frac{3}{5},\qquad x=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{5}+2k\pi,\qquad k\in z.$$

2-usul. Agar $\sin x=\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, va $\cos x=\dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, ekanligini nazarda tutib, $tg\frac{x}{2}=y$ desak, $3\cdot\frac{1-y^2}{1+y^2}+4\cdot\frac{2y}{1+y^2}=5$, yoki 3 – $3y^2+8y=5+5y^2$ yoki $4y^2-4y+1=0$ bundan $y=\frac{1}{2}$ yechim hosil bo'ladi:

$$\left(tg\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{x}{2}=arctg\frac{1}{2}+\pi k\right),$$

$$x=2arctg\frac{1}{2}+2\pi k,\qquad k\in\pi.$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLAR.

Trigonometrik tenglamalarni yeching.

1. $tgx+\sin xtgx=0$ $\quad j:n\pi$
2. $2\sin x-3\cos x=6.$ $\quad j:x\in\varnothing.$
3. $\sin^2 x-(1+\sqrt{3})\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0.$

   $j:\frac{\pi}{4}+n\pi,\quad arctg3+n\pi$
4. $\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0.$ $\quad j:\frac{\pi}{4}+n\pi,\quad arctg3+n\pi.$
5. $\sqrt{3}\sin^2 x-4\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0.$ $\quad j: \frac{\pi}{3}+n\pi,\quad \frac{\pi}{6}+k\pi.$
6. $\sin^2 x+3\cos^2 x-2\sin x\cos x=\frac{-5-\sqrt{3}}{2}.$ $\quad$ j:$\frac{\pi}{6}+k\pi$
7. $7\cos^2 x-7\sin 2x=2.$ $\quad$ j:$x=arctg\frac{-7\pm\sqrt{53}}{2}.$
8. $\frac{2}{3\sqrt{2}\sin x-1}=1.$ $\quad$ j:$x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}+k\pi,\quad k\in z.$
9. $\frac{6}{tgx-2}=3-tgx$ $\quad$ j:$\varnothing$
10. $(1-2\sin x)\sin x=2\cos 2x-1$ $\quad$ j: $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$
11. $\sin^4 x+\cos^4 x-2\sin 2x+\sin^2 2x=0$ $\quad j:\ x=\frac{(-1)^k}{2}\arcsin(2-\sqrt{2})+\frac{k\pi}{2}$
12. $\sin^3 x\cos x-\cos^3\sin x=\cos^4\frac{x}{3}$

    $j:\ x=\frac{1}{4}\left[(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{4}+k\pi\right].$
13. $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos 4x$ $\quad j:\ \frac{\pi}{2}n.$
14. $tg(40^0+x)ctg(5^0-x)=\frac{2}{3}$ $\quad$ j: $x=\frac{1}{2}\left[\pi k-35^0+(-1)^{k+1}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}\right]$

15. $(\sin x+\cos x)\sqrt{2}=tgx+ctgx$ J: $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$

16. $\sin 3x\cdot\sin^3 x+\cos 3x\cdot\cos^3 x=\dfrac{1}{8}$ J: $x=\pi k\pm\dfrac{\pi}{6}$

17. $\sin x+\sin 3x+\sin 7x=3$ J: $x=\varnothing$

18. $tg7x+tg3x=0$ J: $x=\dfrac{\pi k}{10}$

19. $1+\sin x+\cos x=0$ J: $x_1=2\pi k-\dfrac{\pi}{2}$, $x_2=\pi(2\pi+1)$

20. $\sin^{10}x+\cos^{10}x=\dfrac{29}{16}\cos^4 2x$ J: $x=\dfrac{2k+1}{8}\pi$

21. $\left|tgx+ctgx\right|=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ J: $x=\dfrac{\pi k}{2}\pm\dfrac{\pi}{6}$

22. $13\sin x-12\cos x+13\sin 3x=0$ J: $x=\dfrac{\pi k}{2}$

23. $1+2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x=0$ J: $x=-\dfrac{\pi k}{4}+k\pi$

24. $\cos^4 x+\cos^4(x-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{4}$ J: $x=\dfrac{\pi}{2}(2k+1)$.

25. $2\sin 2x+\sin x+\cos x=1$ J: $x_1=2k\pi$, $x_2=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

26. $3\sin x+\sin(x+\dfrac{3\pi}{2})=1-3\sin x\cos x$ J: $(2k+1)\pi$, $k\epsilon Z$

27. $3-\cos^2 x-3\sin x=0$ J: $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\epsilon Z$

28. $\cos^3 x+4\sin^2\dfrac{x}{2}\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}\cos x=0$ J: $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

29. $\cos^2 2x-\sin^2 2x=-\dfrac{1}{2}$ J: $\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}k$

30. $\sin^3 x+2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=0$ J: πk

31. $\sin^2 x\cos\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\sin 2x\sin\dfrac{x}{2}=0$ J: πk

32. $2\,tg2x\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\sin x+tg2x=0$ J: $\dfrac{1}{2}\pi k$

33. $\dfrac{4tg\dfrac{3x}{2}}{1-tg^2\dfrac{3x}{2}}-tg3x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ J: $-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi}{3}k$

34. $\dfrac{2tgx}{1-tg^2x}+2tg2x=3$ J: $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}k$

35. $4\sin^4 x+\sin^2 2x=2$ J: $\dfrac{\pi}{4}(2k+1)$

36. $tg(x+\dfrac{\pi}{4})+tg(x-\dfrac{\pi}{4})=2$ J: $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}k$

37. $\dfrac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)=\sin x\cos x-\sin^2 x\cos^2 x$ J: $\dfrac{\pi}{4}+\pi k$

38. $4\sin x+\sin 2x=0$ J: πk

39. $\cos 2x+2\cos^2 x=\frac{5}{4}$ J: $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k$

40. $0{,}5+\cos x=\cos^2\frac{x}{2}$ J: $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k$

41. $\sin x+\cos x\,ctg\frac{x}{2}=-\sqrt{3}$ J: $\frac{5\pi}{3}+2\pi k$

42. $(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})^2-\sin x=0$ J: $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$

17-§. Parametrli trigonometrik tenglamalarni yechish.

Parametrli trigonometrik tenglamani yechish parametrlarning mumkin bo'lgan har bir qiymatlari sistemasi uchun berilgan tenglamaning hamma yechimlari to'plamini aniqlash demakdir. Parametrik ko'rinishdagi trigonometrik tenglamalarni yechish quyidagi ketma-ketliklar asosida amalga oshiriladi.

1. Parametrlarning mumkin bo'lgan har bir qiymatlari sistemasi uchun yechimlar sonini aniqlash.
2. Hosil qilingan parametrli yechim formulalarini topish.
3. Tenglamani parametrlar asosidagi qiymatlar sistemasini aniqlash.

1-misol. $\sin(a+x)+\sin x=\cos\frac{a}{2}$ tenglama yechilsin.

Yechish. Berilgan tenglamaning chap tomonida turgan ifodaga trigonometrik funksiyalar yig'indisini ko'paytmaga keltirish formulasini tadbiq qilsak, u quyidagi ko'rinishni oladi:

$$2\sin(\frac{\alpha}{2}+x)\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Bu tenglamada quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin.

1. Agar $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0,\quad \alpha\neq(2n+1)\pi$ bo'lsa, u holda tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$2\sin(\frac{\alpha}{2}+x)=1,$$

$$x=-\frac{\alpha}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi,\quad k\in Z.$$

2. Agar $\alpha=(2n+1)\pi$ bo'lsa, u holda $\cos\frac{\alpha}{2}=0$ bo'ladi. Bu holda ham tenglik o'rinli bo'ladi:

$$J:\quad x=\begin{cases}-\frac{\alpha}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi, & \alpha\neq(2n+1)\pi,\\ -\,ixtiyoriy\quad son\,, & \alpha=(2n+1)\pi\end{cases}$$

2-misol. $\sin^2 x+a\sin^2 2x=\sin\frac{\pi}{6}$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\frac{1-\cos 2x}{2}+a(1-\cos^2 2x)=\frac{1}{2}$,

$1-\cos 2x+2a-2a\cos^2 2x=1$,

$2a\cos^2 2x+\cos 2x-2a=0$,

$(\cos 2x)_1=\frac{-1+\sqrt{1+16a^2}}{4a}$; $(\cos 2x)_2=\frac{-1-\sqrt{1+16a^2}}{4a}$

$a)\quad \cos 2x=\frac{-1+\sqrt{1+16a^2}}{4a}$, $1+16a^2>0$, $\left|\frac{-1+\sqrt{1+16a^2}}{4a}\right|\le 1$,

$-1+\sqrt{1+16a^2}\le 4a$,

$1+16a^2 \le 4a^2+8a+1,$

$12a^2-8a \le 0;\ a(12a-8) \le 0$

1) $a=0$, $12a-8 \ne 0$,

2) $a \ne 0$, $12a-8=0$, $a=\frac{2}{3}$, bundan $a \le \frac{2}{3}$ bo'ladi.

b) $\cos 2x=\frac{-1-\sqrt{1+16a^2}}{4a}$; $\left|\frac{-1-\sqrt{1+16a^2}}{4a}\right| \le 1,$

tengsizlik a ning hech qanday qiymatlarida bajarilmaydi. Agar $a=0$ bo'lsa $\left[\sin^2 x=\frac{1}{2}\right] \Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,$ $k \in Z.$

J: $a \ne 0$ da $x_{1,2}=\pi k \pm \frac{1}{2}\arccos\left[\frac{-1+\sqrt{1+16a^2}}{4a}\right].$

$a=0$ da $x_{3,4}=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,$ $k \in Z.$

3-misol. $\cos x+\sin x=a$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left[x-\frac{\pi}{4}\right]$; agar $|a| \le \sqrt{2}$ bo'lsa, bu tenglama yechimga ega bo'ladi. Agar $|a| \le \sqrt{2}$ bo'lsa, $x=\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{a}{\sqrt{2}}+2k\pi,$ agar $|a|>\sqrt{2}$ bo'lsa, yechim yo'q.

4-misol. $\sin 2x+3\cos 2x=a$ tenglama yechilsin.

Yechish. $2\sin x \cdot \cos x+3\cos^2 x-3\sin^2 x=a,$

$2tgx+3-3tg^2x=a(1+tg^2x),$

$tg^2x(a+3)-2tgx+(a-3)=0,$

$tgx_{1,2}=\frac{1 \pm \sqrt{10-a^2}}{a+3}.$

Agar $|a| \le \sqrt{10}$ bo'lsa, $x_1=arctg\frac{1 \pm \sqrt{10-a^2}}{a+3}+k\pi,$ $k \in Z.$ Agar $a=-3$ bo'lsa, $\sin 2x+3\cos 2x=-3$ bo'ladi.

$2\sin x\cos x+3\cos^2 x+3\cos^2 x-3=-3,$ $2\sin x\cos x+6\cos^2 x=0,$ $\cos x(\sin x+3\cos x)=0,$

1) $\cos x=0$, $\sin x+3\cos x \ne 0$, $x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi,$ $k \in Z;$

2) $\cos x \ne 0$, $\sin x+3\cos x=0$, $x_2=\mathrm{arctg}(-3)+k\pi,$ $k \in Z.$

J: Agar $|a| \le \sqrt{10}$ $(a \ne -3)$ bo'lsa, $x=arctg\frac{1 \pm \sqrt{10-a^2}}{a+3}+k\pi,$ $k \in Z$, agar $(a \ne -3)$ bo'lsa, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,$ $k \in Z;$ agar $|a|>\sqrt{10}$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas.

5-misol. $\sin^6 x+\cos^6 x=a(\sin^4 x+\cos^4 x)$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x,$

$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^4 x\cos^2 x-3\sin^2 x \cdot \cos^4 x)=1-3\sin^2 x\cos^2 x,$

$1-3\sin^2 x\cos^2 x=a(1-2\sin^2 x\cos^2 x),$

$1-3\sin^2 x\cos^2 x=a-2a\sin^2 x\cos^2 x,$

$\sin^2 x \cdot \cos^2 x=\frac{a-1}{2a-3}$, $\sin^2 2x=4 \cdot \frac{a-1}{2a-3}.$

Agar bu erda $0 \le 4 \cdot \frac{a-1}{2a-3} \le 1$ bo'lsa, tenglama ma'noga ega bo'ladi. Bu tengsizlikni yechsak, $\frac{1}{2} \le a \le 1$ bo'ladi. Agar $a=\frac{3}{2}$ bo'lsa, $1-3\sin^2 x\cos^2 x=\frac{3}{2}-3\sin^2 x\cos^2 x$ hosil bo'ladi, bundan $1=\frac{3}{2}$ tenglik hosil bo'ladi, buning bo'lishi mumkin emas.

Agar $\frac{1}{2}\le a\le 1$ bo'lsa, $x=\pm\frac{1}{2}\arcsin\left[2\sqrt{\frac{a-1}{2a-3}}\right]+\frac{k\pi}{2}$

Agar $a<\frac{1}{2}$ va $a>1$ bo'lsa, yechim yo'q.

6-misol. $\sin\frac{3x}{2}+\sin x=m\sin\frac{x}{2}$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\sin\left[x+\frac{x}{2}\right]=\sin x\cos\frac{x}{2}+\cos x\sin\frac{x}{2}$, bunga ko'ra

$$\sin x+\sin x\cos\frac{x}{2}+\cos x\sin\frac{x}{2}-m\sin\frac{x}{2}=0,$$

$$\sin x\left[1+\cos\frac{x}{2}\right]+\sin\frac{x}{2}(\cos x-m)=0.$$

$$\sin\frac{x}{2}\left[2\cos\frac{x}{2}+4\cos^2\frac{x}{2}-1-m\right]=0,$$

$$1)\quad \sin\frac{x}{2}=0,\quad x=2k\pi,\quad k\in Z;$$

$$2)\quad 4\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}-(1+m)=0,$$

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5+m\cdot 4}}{4}.$$

$a)\quad \cos\frac{x}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5+m\cdot 4}}{4}$, bu erda quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

$$\begin{cases}5+4m\ge 0,\\ \left|\frac{-1\pm\sqrt{5+4m}}{4}\right|\le 1,\end{cases}$$

Bu tengsizliklarni yechsak, $-\frac{5}{4}\le m\le 5$ hosil bo'ladi. Bu shartga ko'ra

$$x=\pm 2\arccos\frac{-1\pm\sqrt{5+4m}}{4}+4k\pi,\quad k\in Z;$$

$$б)\quad \cos\frac{x}{2}=\frac{-1-\sqrt{5+4m}}{4}.$$

Buni yechsak, $x=\pm 2\arccos\frac{-1\pm\sqrt{5+4m}}{4}+4k\pi,\quad k\in Z,\quad -\frac{5}{4}\le m\le 1.$

J: Agar $-\frac{5}{4}\le m\le 1.$ bo'lsa, $x_1=2k\pi,\ k\in Z$

$x_{2,3}=\pm 2\arccos\frac{-1\pm\sqrt{5+4m}}{4}+4k\pi,\quad k\in Z,$ Agar $1\le m\le 5$ bo'lsa, $x_1=2k\pi,\ k\in Z$

$x_2=\pm 2\arccos\frac{-1+\sqrt{5+4m}}{4}+4k\pi,\quad k\in Z,$ Agar $m>5,\quad m<-\frac{5}{4}$ bo'lsa, $x=2k\pi,\ k\in Z$.

7-misol. $a\sin 2x+b\sin\left[2x-\frac{\pi}{2}\right]+\sqrt{a^2+b^2}\sin 6x=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Bizga ma'lumki, $a\sin x+b\cos x=A\sin(x+\varphi)$.

Bu erda $A=\sqrt{a^2+b^2}$ burchakning qiymati esa quyidgai shartlardan kelib chiqadi: $sin\varphi=\frac{b}{A}$, $cos\varphi=\frac{a}{A}$, $\varphi=arctg\frac{b}{a}$. Shuning uchun $sin(2x-\varphi)-sin6x=0$, $sin\frac{4x+\varphi}{2}cos\frac{8x-\varphi}{2}=0;$

a) $sin\frac{4x+\varphi}{2}=0$, $4x+\varphi=(-1)^k arcsin0^0+2\pi k$,

$4x=-\varphi+2\pi k$, $x=\frac{\pi k}{2}-\frac{1}{4}arctg\frac{b}{a}$.

b) $cos\frac{8x-\varphi}{2}=0$, $\frac{8x-\varphi}{2}=arccos0^0+2\pi k$, $8x-\varphi=\pi+2\pi k$.

J: $x=\frac{2k+1}{8}\pi+\frac{1}{8}arctg\frac{b}{a}$, $k\epsilon Z$.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

1-misol. $secx+cosecx+secxcosecx=a$, $(a\neq 0)$ tenglama yechilsin.

J: Agar $\left|\frac{a+2}{a\sqrt{2}}\right|\leq 1$ bo'lsa, $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k arcsin\frac{a+2}{a\sqrt{2}}+\pi k$, $k\epsilon Z$.

2-misol. $tg(a+x)tg(a-x)=1-2cos2x$ tenglama yechilsin.

J: $x=\pi k\pm\frac{1}{2}arccos\frac{-\cos a\pm\sqrt{\cos^3 2a+4\cos 2a}}{2}$

18-§. Trigonometrik tenglamalar sistemasini yechish

Tarkibida trigonometrik funksiyalar qatnashgan bir necha tenglama trigonometrik tenglamalar sistemasini hosil qiladi. Trigonometrik tenglamalar sistemasini yechish tenglamadagi no'malumlarning shu tenglamalar sistemasini qanoatlantiradigan qiymatlarini topish demakdir. Ikki noma'lumli ikkita tenglama sistemasining yechimi deb, noma'lumlarning ikkala tenglamani ham qanoatlantiradigan juft qiymatlariga aytiladi.

1-misol. $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ tgx+tgy=1 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish.

$$y=\frac{\pi}{4}-x,\quad tgx+tg\left[\frac{\pi}{4}-x\right]=1,$$

$$\frac{tgx(tgx-1)}{1+tgx}=0;$$

$$a)\quad tgx=1,\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\quad y=-k\pi,\quad k\in Z;$$

$$b)\quad tgx=0,\ x=k\pi,\quad y=\frac{\pi}{4}-k\pi,\quad k\in Z.$$

$$J:\ \begin{cases} x_1=\pi k+\frac{\pi}{4}, \\ y_1=-\pi k, \end{cases}\quad \begin{cases} x_2=\pi k, \\ y_2=\frac{\pi}{4}-\pi k,\ k\in Z. \end{cases}$$

2- Misol. $\begin{cases} \frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)}=\frac{1}{9} \\ \sin x\cdot\sin y=\frac{1}{3} \end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish:

$$\left[\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\cos x\cos y+\sin x\sin y}=\frac{1}{9}\right]\Rightarrow \qquad \Rightarrow\left[\frac{\cos x\cos y+\frac{1}{3}}{\cos x\cos y-\frac{1}{3}}\right]=\frac{1}{9},$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\left[\cos x\cos y+\frac{1}{3}\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{3}+\frac{1}{27}+\frac{1}{9}\cos x\cos y,\quad \frac{8}{9}\cos x\cos y=\frac{10}{27}$$

$$\cos x\cos y=\frac{5}{12},$$

$$\mp\begin{cases}\cos x\cos y=\frac{5}{12}\\ \sin x\sin y=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos x\cos y-\sin x\sin y=\frac{1}{12},\\ \cos x\cos y+\sin x\sin y=\frac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos(x+y)=\frac{1}{12}\\ \cos(x-y)=\frac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=2k_1\pi\pm\arccos\frac{1}{2}\\ x-y=2k_2\pi\pm\arccos\frac{3}{4}\end{cases}$$

$$x=\pi(k_1+k_2)\pm\frac{1}{2}\left[\arccos\frac{1}{12}+\arccos\frac{3}{4}\right]=\pi(k_1+k_2)\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3-\sqrt{1001}}{48}.$$

$$y=\pi(k_1-k_2)\pm\frac{1}{2}\left[\arccos\frac{1}{12}-\arccos\frac{3}{4}\right]=\pi(k_1-k_2)\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3+\sqrt{1001}}{48}.$$

3-Misol. $\begin{cases}\sin x+\sin y=a\\ x+y=2b\end{cases}$ Tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish:

$$\begin{cases}2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a\\ x+y=2b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\sin b\cos\frac{x-y}{2}=a,\\ x+y=2b\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\cos\frac{x-y}{2}=\frac{a}{2\sin b}\right]\Rightarrow\left[x-y=2\left[k\pi\cdot 2\pm\arccos\frac{a}{2\sin b}\right]\right].$$

$$y=\frac{b}{2}-\arccos\frac{a}{\sin b}+k\pi,\quad x=\frac{3b}{2}+\arccos\frac{a}{\sin b}+k\pi,\quad k\in Z.$$

1) agar $b=0,\ a\neq 0$ bo'lsa, sistema yechimga ega emas.

2) agar $b\neq 0$, $\left|\frac{a}{2\sin b}\right|\leq 1$ bo'lsa, sistema yechimga ega.

3) agar $b=0,\ a=0$ bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega.

4-Misol. $\begin{cases}\sin x+\sin y=1,\\ x+y=\frac{\pi}{3}\end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish. $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, shuning uchun

$$\begin{cases}\cos\frac{x-y}{2}=1,\\ x+y=\frac{\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x-y}{2}=\pm\arccos 1+2k\pi,\\ x+y=\frac{\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow$$

$$+\begin{cases}x-y=4k\pi\pm 2\arccos 1,\\ x+y=\frac{\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x = 4\pi k \pm \arccos 1 + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow (x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}), \quad k \in Z.$$

$$-\begin{cases} x - y = 4k\pi \pm 2\arccos 1, \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \left[2y = \frac{\pi}{3} - 4k\pi \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[y = \frac{\pi}{6} - 2k\pi \right].$$

$$j: x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad y = \frac{\pi}{6} - 2k\pi, \quad k \in Z.$$

5-misol. $\begin{cases} \sin x - \sin y = \operatorname{cosec} x, \\ \cos x + \cos y = \sec x \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yeching.

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}, \\ \cos x + \cos y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin y \sin x = 1, \\ \cos^2 x + \cos x \cos y = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) sistemadagi tenglamalarni o'zaro qo'shsak,

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \cos(x+y) = 2$$

yoki

$$\cos(x+y) = -1; \qquad x + y = \pi + 2k_1\pi$$

hosil bo'ladi. (1) sistemadagi tenglamalarni o'zaro ayirsak quyidagi tenglik hosil bo'ladi.

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x \cos y - \sin x \cos y$$

yoki

$$\cos 2x = \cos(x+y), \qquad \cos 2x - \cos(x+y) = 0,$$

$$\cos 2x - \cos(x-y) = -2\sin\frac{2x+x+y}{2}\sin\frac{2x-x-y}{2} =$$

$$= -2\sin\frac{3x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0.$$

$$1) \quad \sin\frac{3x+y}{2} = 0, \quad 3x + y = 2k_2\pi.$$

$$2) \quad \sin\frac{x-y}{2} = 0, \quad x - y = 2k_2\pi.$$

$$\begin{cases} x + y = \pi + 2\pi k_1, \\ 3x + y = 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi(k_2 - k_1) - \dfrac{\pi}{2}, \\ y = \pi(3k_1 - k_2) + \dfrac{3\pi}{2}, \quad k \in Z. \end{cases}$$

6-misol. $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{4}, \\ x + y = 150^0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish:

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{4}, \\ x + y = 150^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+\cos 2x}{2} + \dfrac{1+\cos 2y}{2} = \dfrac{1}{4}, \\ x + y = 150^0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x + \cos 2y = \dfrac{1}{2} - 2, \\ x + y = 150^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos(x+y)\cos(x-y) = -\dfrac{3}{2} \\ x + y = 150^0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\cos 150^0 \cos(x-y) = -\frac{3}{4} \right] \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x-y) = -\frac{3}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \Rightarrow (x-y) = \pm \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x - y = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in Z \right]. \qquad \begin{cases} x + y = 150^0, \\ x - y = 30^0 + 360^0 k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 180^0 k + 15^0 + 75^0, \\ y = 75^0 - 180^0 k - 15^0 \end{cases}$$

7-misol. $\begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ tenglama sistemasini yeching.

Yechish.

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos x = \dfrac{1}{4\cos y} \end{cases} \Rightarrow \left[\frac{1}{4\cos y} + \cos y = 1 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [redacted]\cos^2 y - 4\cos y + 1 = 0$$

$\cos y = t$ desak,

$$4t^2 - 4t + 1 = 0, \qquad t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{4} = \frac{1}{2}, \quad t_{1,2} = \frac{1}{2}.$$

$$\left[\cos y = \frac{1}{2} \right] \Rightarrow \left[y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right], \quad k \in Z.$$

$$\cos x = \frac{1}{4\cos y} = \frac{1}{4\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\left[\cos x = \frac{1}{2} \right] \Rightarrow \left[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right], \quad k \in Z.$$

J: $x = y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in Z.$

8-misol. $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{3}{4} \\ tgx = 3ctgy \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yechilsin.

Yechish. $\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{3}{4}\\ tgx=3ctgy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{\sin x}{\cos x}=3\cdot\dfrac{\cos y}{\sin y}\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{3}{4},\\ \cos x\cos y=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Bu sistemadagi tenglamalarni o'zaro hadlab qo'shamiz:

$$(\sin x\sin y+\cos x\cos y=1)\Rightarrow(\cos(x-y))=1,\quad (x-y)=0$$

$$\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{3}{4},\\ x-y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{3}{4},\\ x=y\end{cases}\Rightarrow\left[\sin^2 x=\frac{3}{4}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\Rightarrow\left[x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\right],\quad k\in Z.$$

$$Ж:\quad x=y=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in Z.$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

Tenglamalar sistemasini yeching.

1. $\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4},\\ \cos x\cos y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}.\end{cases}$ $j:\quad x=45^0,\ \ y=15^0.$

2. $\begin{cases}\sin x:\sin y=\sqrt{1{,}5},\\ \cos x:\cos y=\sqrt{0{,}5}.\end{cases}$ $j:\quad x=60^0,\ \ y=45^0.$

3. $\begin{cases}\sin x=\sqrt{2}\sin y,\\ tgx=\sqrt{3}tgy.\end{cases}$. $j:\quad x=45^0,\ \ y=30^0.$

4. $\begin{cases}\sin x+\cos y=\dfrac{1}{2},\\ \sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$ $j:\quad x=0^0,\ \ y=60^0.$

5. $\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2},\\ \sin x+\cos y=1.\end{cases}$ $j:\quad x=\dfrac{\pi}{6},\ \ y=\dfrac{\pi}{3}.$

6. $\begin{cases}x-y=\dfrac{\pi}{6},\\ \sin x\cos y=0{,}75\end{cases}$ $j:\quad x=\dfrac{\pi}{3},\ \ y=\dfrac{\pi}{6}.$

7. $\begin{cases} x+y=\dfrac{2}{3}\pi, \\ \sin x \sin y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ $\qquad j:\quad x=\dfrac{5\pi}{12},\ \ y=\dfrac{\pi}{4}.$

19 - §. Masalalarni tenglama tuzish bilan yechish metodikasi.

Masala - bu kundalik hayotimizda uchraydigan vaziyatlarning tabiiy tildagi ifodasidir. Masala asosan uch qismdan iborat bo'ladi.

1. Masalaning sharti - o'rganilayotgan vaziyatni xarakterlovchi ma'lum va no'malum miqdoriy qiymatlar hamda ular orasidagi miqdoriy munosabatlar haqidagi ma'lumot demakdir.
2. Masalaning talabi - masala shartidagi miqdoriy munosabatlarga nimani topish kerakligini ifodalash demakdir.
3. Masalaning operatori - masala talabini bajarish uchun shartdagi miqdoriy munosabatlarga nisbatan bajariladigan amallar yig'indisi.

Tenglama tuzish orqali masala yechish, masala talabida so'ralgan miqdorni imkoniyati boricha biror harf bilan belgilash, masala shartida qatnashayotgan boshqa miqdorlarni belgilangan harf orqali ifodalash, masala shartida ko'rsatil-gan miqdoriy munosabatlarni, amallarning mantiqan to'g'ri ketma-ketligi orqali ifodalaydigan tenglama tuzish va uni yechish orqali masalaning talabini bajarish demakdir.

Masalalarni tenglama tuzish orqali yechishni quyidagi ketma-ketlik asosida olib borish maqsadga muvofiqdir.

1. Masala talabida so'ralgan miqdorni, ya'ni noma'lum miqdorni harf bilan belgilash.
2. Bu harf yordamida boshqa no'malumlarni ifodalash.
3. Masala shartini qanoatlantiruvchi tenglama tuzish.
4. Tenglamani yechish.
5. Tenglama yechimini masala sharti bo'yicha tekshirish.

Maktab matematika kursida tenglama tuzish orqali yechiladigan masalalar ko'pincha uchta har xil miqdorlarni o'zaro bog'liqlik munosabatlari asosida beriladi. Chunonchi:

1) Tezlik, vaqt va masofa.
2) Narsaning qiymati, soni va jami bahosi.
3) Mehnat unumdorligi, vaqt va ishning hajmi.
4) Yonilg'ining sarf qilish normasi, transportning harakat vaqti yoki masofasi va yonilg'ining miqdori.
5) Jismning mustahkamligi, hajmi va uning og'irligi.
6) Ekin maydoni, hosildorlik va yig'ilgan hosildorlik miqdori.
7) Quvurni o'tkazish imkoniyati, vaqti va quvurdan o'tayotgan moddalarning aralashma miqdori.
8) Bir mashinaning yuk ko'tarishi, mashinalar soni va keltirilgan yuklarning og'irligi.
9) Suyuqlikning zichligi, chiqarish chuqurligi va bosimi.
10) Tokning kuchi, uchastka zanjirining qarshiligi va uchastkadagi kuchlanishning pasayishi.
11) Kuch, masofa va ish.
12) Quvvat, vaqt va ish.
13) Kuch, elkaning uzunligi va quvvat momenti.

Masalalarni tenglama tuzib yechishda no'malum miqdorlarni turlicha belgilash, ya'ni asosiy miqdor qilib noma'lumlardan istalgan birini olish mumkin. Asosiy qilib olinadigan va harf bilan belgilanadigan noma'lumni tanlash ixtiyoriy bo'lishi mumkin.

Noma'lum miqdorni tanlashga qarab tuziladigan tenglama har xil bo'ladi, ammo masalaning yechimi bir xil bo'ladi. Fikrimizning dalili sifatida quyidagi masalani turlicha usul bilan echib ko'raylik.

1 - m a s a l a. Ikki idishga 1480 litr suv sig'adi. Birinchi idishga ikkinchi idishga qaraganda 760 litr suv ko'p sig'sa, har qaysi idishga necha litr suv sig'adi?

Yechish. **1 - usul.**

1. Belgilash: x_l - ikkinchi idishdagi suv bo'lsin, u holda (x + 760) - birinchi idishdagi suv bo'ladi.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar: I va II idishdagi suvlarning miqdori x_l va $(x+760)_l$.

3. Tenglama tuzish: $x + x + 760 = 1480$.

4. Tenglamani yechish. $2x+760=1480$, $2x=1480 - 760$, $2x=720$. $x=720:2=360$ litr. Bu ikkinchi idishdagi suv $x=360+760=1120$ litr, birinchi idishdagi suv.

5. Tekshirish. $360 + 360 + 760 = 1480$. $1480 = 1480$.

II- usul. Belgilash. x_l - birinchi idishdagi suv bo'lsa, u holda $(x - 760)_l$ ikkinchi idishdagi suv bo'ladi.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. I va II idishdagi suvlarning miqdori.

3. Tenglama tuzish. $x + x- 760=1480$.

4. Tenglamani yechish. $2x-760=1480$, $2x=1480+760=2240$.

$x=2240:2=1120$ litr, birinchi idishdagi suv, $x=1120-760 = 360$ litr, bu ikkinchi idishdagi suv.

5. Tenglamani tekshirish. $x+x-760=1480$, $1120+360=1480$, $1480=1480$.

III - usul. 1. Belgilash. Faraz qilaylik, birinchi idishga x l suv sig'sin, ikkinchi idishga esa y l suv sig'sin.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. Birinchi va ikkinchi idishlardagi suv miqdorlari va ularning o'zaro farqi.

3. Tenglama tuzish. $\begin{cases} x+y=1480, \\ x-760=y. \end{cases}$

4. Sistemani yechish. $\begin{cases} x+y=1480, \\ x-760=y. \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x+x-760=1480, \\ x-760=y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=1240, \\ x-760=y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1120, \\ y=360 \end{cases}$$

5. Tekshirish. $1120 + 360 = 1480$, $1480 = 1480$

$1120 - 760 = 360$, $360 = 360$

2-masala. Bitta daftar va bitta bloknot hamda bitta qalam uchun 2,2 so'm to'landi. Qalam daftarga qaraganda to'rt marta arzon, bloknot esa daftarga qaraganda 0,4 so'm qimmat. Har qaysi buyumning narxini toping.

1. Belgilashlar. Bloknotning narxini x so'm deb olamiz, u holda daftarning narxi $(x-0,4)$ so'm, qalamning narxi $(x-0,4):4$ so'm.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. Bloknot, daftar, qalam narxlari va narxlar orasidagi munosabat.

3. Tenglama tuzish. $x + (x-0,4) + (x-0,4):4 = 2,2$.

4. Tenglamani yechish. $9x-2=8,8$ $9x=10,8$ $x=1,2$ so'm bloknotning narxi, $x-0,4=1,2-0,4=0,8$ so'm daftarning narxi, $(x-0,4):4 = 0,8:4 = 0,2$ so'm qalamning narxi.

5. Tekshirish. $1,2+0,8+0,2=2,2$ $2,2=2,2$.

II - usul. Belgilashlar. Daftarning narxini x so'm deb olamiz, u holda bloknotning narxi $(x+0,4)$ so'm, qalamning narxi esa $(x : 4)$ so'm bo'ladi.

2. Tenglama tuzish va uni yechish.

$x+x+0,4+x : 4=2,2$, $9x+1,6=8,8$; $9x=7,2$;

$x=0,8$ so'm, $x+0,4=1,2$ so'm, $x : 4=0,2$ so'm.

III - u s u l. 1. Belgilashlar. Qalamning narxini x so'm deb olamiz, u holda daftarning narxi $4x$ so'm bo'ladi. Bloknotning narxi esa $4x+0,4$ so'm. Tenglama tuzish va yechish.

$x+4x+4x+0,4=2,2$; $9x+0,4=2,2$. $9x=1,8$;

$x = 0,2$ so'm; $4\cdot0,2=0,8$ so'm; $4x+0,4 = 4\cdot0,2+0,4=1,2$ so'm

Yuqoridagi belgilashlar hap xil bo'lsa ham javob bir xil chiqadi. Qalam narxi 0,2 so'm, daftar narxi 0,8 so'm, bloknot narxi 1,2 so'm.

3-masala. Bir sabzovot omborida 21 t ikkinchida 18 t kartoshka bor edi. Birinchi omborga kuniga 9 tonnadan, ikkinchisiga 12 tonnadan kartoshka keltirilsa, necha kundan keyin birinchi ombordagi kartoshka ikkinchisidan 1,2 marta kam bo'ladi?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar x deb kartoshka tashilgan kunlar sonini belgilasak, u holda birinchi omborga 9x tonna, ikkinchi omborga esa $12x$ tonna kartoshka keltirilgan bo'ladi. Birinchi ombordagi jami kartoshka $(21+9x)$ t, ikkinchi ombordagi jami kartoshka $(18+12x)$ t bo'ladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. (21+9x) t va (18+12x) t.

3. Tenglama tuzish. 1,2(21+9x)=18+12x

4. Tenglamani yechish. $\frac{6}{5}(21+9x)=18+12x$

$126+54x = 90+60x,$

$6x = 36.$ $x = 6$ kun.

5. Tekshirish. $\frac{6}{5}(21+54)=18+12\cdot 6;$ $90=90$.

4-masala. Tomosha zali 100 ta elektr lampochka bilan yoritiladi. Bir katta lampochkaning bir hafta davomida yonishi 15 tiyinga, kichik lampochkaning yonishi esa 10 tiyinga tushadi. Agar zalni bir hafta yoritish 13,50 so'mga tushsa, zalga nechta katta lampochka va kichik lampochka o'rnatilgan?

Echish.

1. Belgilashlar. Faraz qilaylik, x dona katta va y dona kichik lampochkalar bo'lsin, u holda katta va kichik lampochkalarning har birini haftada yonish puli $\frac{15x}{100}$ va $\frac{10y}{100}$ so'mdan bo'ladi.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. $\frac{15x}{100}$ va $\frac{10y}{100}$

3. Tenglama tuzish.

$$\begin{cases} x+y=100 \\ \frac{3}{20}x+\frac{1}{10}y=\frac{27}{2} \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish.

$$\begin{cases} x+y=100 \\ \frac{3}{20}x+\frac{1}{10}y=\frac{27}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=100 \\ 3x+2y=270 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3y=300 \\ 3x+2y=270 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=30 & \text{- kichik lampochkalar soni} \\ x=70 & \text{- katta lampochkalar soni} \end{cases}$$

5. Tekshirish.

$$\begin{cases} 30+70=100 \\ \frac{3}{2}\cdot 70+\frac{1}{10}\cdot 30=\frac{27}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30+70=100 \\ \frac{27}{2}=\frac{27}{2}. \end{cases}$$

5-masala. Kotlovan qazish uchun ikkita ekskavator ishga solindi. I ekskavator soatiga II ekskavatorga qaraganda 40 kub m ortiq tuproq oladi. I ekskavator 16 soat, II ekskavator 24 soat ishladi. Shu vaqt ichida ikkala ekskavatorda 8640 kub. m tuproq qazib olindi. Har qaysi ekskavator soatiga necha kub metr tuproq olgan?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar I ekskavator soatda x kub metr tuproq qaziydi desak, u holda II ekskavator $(x–40)$ kub metr tuproq qaziydi. I ekskavatorning 16 soatdagi qazigan tuprog'i $16x$, II ekskavatorning 24 soatda qazigan tuprog'i $24(x–40)$ bo'ladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. $16x$ va $24(x–40)$

3. Tenglama tuzish. $16x+24(x–40)=8640$.

4. Tenglamani yechish. $16x+24x–960=8640$. $40x=9600$, $x=240$ kub metr - I ekskavatorchining I soatda qazigan tuprog'i. $x–40=240–40=200$ kub metr, II ekskavatorning 1 soat qazigan tuprog'i.

5. Tekshirish. $16\cdot 240+24\cdot 200=8640$, $8640=8640$.

6-masala. Ikki traktor birgalikda ishlab bir maydonni 6 soatda haydab bo'ladi. Agar I traktorchining yolg'iz o'zi ishlasa, bu maydonni II traktorchiga nisbatan 5 soat tez haydab bo'ladi. Bu maydonni har qaysi traktorchining yolg'iz o'zi necha soatda haydab bo'ladi?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar I-traktorning yerni haydash uchun sarflagan vaqtini x soat desak, u holda II-traktorning yerni haydash uchun sarflagan vaqti *(x + 5)* soat bo'ladi.

$\frac{1}{x}$ - I - traktorning 1 soatdagi ishi.

$\frac{1}{x+6}$ - II - traktorning 1 soatdagi ishi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. $\frac{1}{x}$ va $\frac{1}{x+5}$

3. Tenglama tuzish. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$

4. Tenglamani yechish.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$$

$$6(x+5)+6x=x^2+5x, \quad x^2-7x-30=0$$

$$x_{1,2}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}+30}=\frac{7}{2}\pm\frac{13}{2}$$

$x_1=10$, $x_2=-3$ chet ildiz

$x=10$ soat - birinchi traktorning yerni hayday oladigan vaqti.

$x=15$ soat - ikkinchi traktorning yerni hayday oladigan vaqti.

5. Tekshirish.

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{3+2}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

II - usul. Berilgan masalani tenglamalar sistemasini tuzish orqali yechish quyidagicha bajariladi.

1. Belgilash. Faraz qilaylik, I - traktor yer maydonini x soatda, II - traktor yer maydonini y soatda haydab bo'lsin, y holda I-traktorning bir soatdagi ishi $\frac{1}{x}$, II-traktorning bir soatdagi ishi $\frac{1}{y}$ bo'ladi.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. Birinchi traktorning ish soati $\frac{1}{x}$ bilan ikkinchi traktorning ish soati $\frac{1}{y}$ hamda ular orasidagi vaqtning farqi.

3. Tenglamalar sistemasini tuzish.

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ x-y=5\end{cases}$$

4. Sistemani yechish.

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ x-y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6y+6x=xy\\ x=5+y\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(6y+6(5+y)=5y+y^2)\Rightarrow\begin{cases}y^2-7y-30=0,\\ x=5+y\end{cases}$$

$$y_{1,2}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}+30}=\frac{7}{2}\pm\frac{13}{2}.$$

$y_1=10$ kun; $x=5+10=15$ kun, $y_2=-3$ chet ildiz.

5. Tekshirish.

$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{6}\right).$$

7-masala. Turist paraxodda 72 km suzdi, paraxodda o'tgan yo'lidan 25% ortiq masofani avtomashinada yurdi. Avtomobil tezligi paraxod tezligidan soatiga 21 km ortiq. Turist avtomobilda paraxodda yurganiga qaraganda 1 soat kam yurgan bo'lsa, avtomobilning tezligi qancha?

Echish.

1. Belgilashlar. *x* paraxodning tezligi bo'lsa, u holda *(x+21)* - avtomobilning tezligi bo'ladi. $\frac{72}{x}$ - paraxodda sarf qilingan vaqt, $\frac{90}{x+21}$ - avtomobilda sarf qilingan vaqt.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. $\frac{72}{x}$ va $\frac{90}{x+21}$

3. Tenglama tuzish. $\frac{72}{x}$ - $\frac{90}{x+21}$ $= 1$

4. Tenglamani yechish. $\frac{72}{x}$ - $\frac{90}{x+21}$ $= 1$

$$72(x + 21) – 90x = x^2 + 21x$$

$$x^2 + 21x – 72x + 90 x – 1512 = 0$$

$$x^2 + 39x – 1512 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-39\pm\sqrt{1521+4\cdot1512}}{2} = \frac{-39\pm87}{2}$$

x=24 km/s paraxod tezligi, *x=45 km/s,* avtomobil tezligi.

$$\frac{72}{24}-\frac{90}{45}=1; \quad 72\cdot45-90\cdot24=24\cdot45$$

Tekshirish: 24 · 45 = 24 · 45.

8-masala. Teplovoz ma'lum vaqt ichida 325 km masofosani o'tish kerak, shu yo'lning $\frac{2}{5}$ qismini o'tgandan keyin u 24 minut ushlanib qoldi. Keyin muddatida manzilga etib borish uchun tezligini soatiga 10 km oshirdi. Teplovozning tezligini toping?

Yechish.

Belgilash. Agar teplovozning dastlabki tezligi *x km/s* desak, u holda *(x+10) km/s* uning keyingi tezligi bo'ladi.

$\frac{195}{x+10}$ - keyingi masofani bosib o'tish uchun ketgan vaqt.

$\frac{130}{x}$ - avvalgi, masofani bosib o'tish uchun ketgan vaqt.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. $\frac{130}{x}$; $\frac{195}{x+10}$ va $\frac{325}{x}$

3. Tenglama tuzish. $\frac{130}{x} + \frac{195}{x+10} + \frac{2}{5} = \frac{325}{x}$

4. Tenglama yechish.

$$130\cdot5(x+10)+5\cdot195x+2(x^2+10x)=5(x+10)\cdot325,$$

$$650x+6500+975+2x^2+20x-1625x-16250=0$$

$$2x^2+20x-9750=0, \quad x^2+10x-4875=0$$

$$x_{1,2}=-5\pm\sqrt{25+4875}=-5\pm\sqrt{4900}=-5\pm70$$

x_1=*65 km/s*, avvalgi tezlik,

x_2=*–75 km/s*, chet ildiz,

x+10=75 km/s keyingi tezlik

5. Tekshirish.

$$\frac{130}{65}+\frac{195}{75}+\frac{2}{5}=\frac{325}{65}, \quad \frac{30+39+6}{15}=5, \quad \frac{75}{15}=5, \quad 5=5.$$

9-masala. Tomonlari 12 m va 10 m bo'lgan to'rtburchak shakldagi maydon o'rtasiga chetlari maydon chetlaridan bir xil masofada yotadigan va yuzi 8 m^2 ga teng bo'lgan gulxona ajratish kerak. Gulxonaning cheti maydon chetidan qanday masofada yotishi kerak?

Yechish.

1. Belgilashlar. Oraliqdagi masofani *x* m desak, u holda *12–2x* gulxonaning bo'yi va *10–2x* uning eni bo'ladi.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. Gulxonaning bo'yi *12–2x*, uning eni *10–2x* va gulxonaning yuzi 8 m^2.

3. Tenglama tuzish. $(12 - 2x)(10 - 2x) = 8$.

4. Tenglamani yechish.

$$120-24x - 20x + 4x^2 = 8$$

$$4x^2 - 44x + 112 = 0$$

yoki $x^2 - 11x + 28 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 28} = \frac{11}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 7; \quad x_2 = 4;$$

$x = 4$ m oraliqdagi masofa.

5. Tekshirish.

$1)\ (12 - 2\cdot7)\cdot(10 - 2\cdot7)=8; \quad 2)\ (12 - 8)(10 - 8) = 8$

$(-2)\cdot(-4) = 8; \quad 4\cdot2 = 8$

$8 = 8 \quad 8 = 8$

10-masala. *160 km* masofani avtomashina *3* soatda bosib o'tadi. Yo'lning *75%* asfalt qilingan, qolgan qismiga esa tosh yotqizilgan. Mashinaning tosh yo'ldagi tezligi asfalt yo'ldagi tezligiga qaraganda *20 km/s* kam bo'lsa, u asfalt yo'lda qanday tezlik bilan yurgan?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar mashinaning asfalt yo'ldagi tezligini *x km/s* desak, u holda uning tosh yo'ldagi tezligi *(x–20) km/s* bo'ladi. $\frac{120}{x}$ - mashinaning asfalt yo'lni bosib o'tish uchun sarflagan vaqti.

$\frac{40}{x-20}$ - mashinaning tosh yo'lni bosib o'tish uchun sarflagan vaqti.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. $\frac{120}{x}$ va $\frac{40}{x-20}$

3. Tenglama tuzish. $\frac{120}{x} + \frac{40}{x-20} = 3$

4. Tenglamani yechish.

$$120x - 2400 + 40x = 3x^2 - 60x,$$

$$3x^2 - 220x + 2400 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{110 \pm \sqrt{12100-7200}}{3} = \frac{110 \pm \sqrt{4900}}{3} = \frac{110 \pm 70}{3}$$

x = 60 *km/s*, mashinaning asfalt yo'ldagi tezligi.

x–20=60–20=40 *km/s*, mashinaning tosh yo'ldagi tezligi.

5. Tekshirish:

$\frac{120}{60}+\frac{40}{4}=3$; 2 + 1 = 3; 3 = 3

11-masala. Rejada belgilangan muddatda hosilni yig'ib olish uchun xo'jalik ikkita brigada ajratdi. 400 gektarli uchastkada ishlagan birinchi brigada topshiriqni muddatidan ikki kun oldin bajardi. Ikkinchi brigada esa 900 gektarli uchastkada ishlab, topshiriqni muddatidan 2 kun keyin bajardi. Agar birinchi brigada ikkinchi brigada necha kun ishlagan bo'lsa, shuncha kun, ikkinchi brigada necha kun birinchi brigada ishlagan bo'lsa, shuncha kun ishlaganda edi, ikkala brigada teng miqdorda hosil yig'ar edi. Reja bo'yicha hosil necha kunda yig'ib olinishini va har qaysi brigadaning kundalik ish unumini toping?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar rejada belgilangan muddatni x kun desak, u holda (x–2) kun birinchi brigadaning hosilni yig'ib olish uchun sarf qilgan vaqti, $x+2$ kun esa ikkinchi brigadaning sarf qilgan vaqti bo'ladi. $\frac{400}{x-2}$ - birinchi brigadaning bir kunlik ishi, $\frac{900}{x+2}$ - ikkinchi brigadaning bir kunlik ishi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{400}{x-2}$ va $\frac{900}{x+2}$

3. Tenglama tuzish: $\frac{400}{x-2}(x+2) = \frac{900}{x+2}(x-2)$

4. Tenglamani yechish:

$400(x + 2)^2 = 900(x - 2)^2$ $30x - 20x = 40 + 60$

$20(x + 2) = 30(x - 2)$ $10x = 100,$

$20x + 40 = 30x - 60$ $x = 100 : 10 = 10$

x=10 – rejada belgilangan kun. x=8 - birinchi brigadaning ishlagan kuni, x=12 - ikkinchi brigadani ishlagan kuni.

5. Tekshirish.

$\frac{400}{8}\cdot 12 = \frac{900}{12}\cdot 8$ 600 = 600

12-masala. Oralari 24 km bo'lgan A va B punktlardan ikki avtomobil bir vaqtda bir-biriga qarab yo'lga chiqdi. A punktdan kelayotgan avtomobil uchrashuvdan 16 minut keyin B punktga etib keldi, ikkinchi avtomobil esa A punktga 4 minutdan keyin keldi. Avtomobillarning tezliklarini toping?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar A puktdan chiqqan avtomobil uchrashguncha x km yo'l yurgan desak, u holda B punkdan chiqqan avtomobil 24–x km yo'l yurgan bo'ladi. $15x$ B dan chiqqan avtomobilning tezligi.

$\frac{15\cdot(24-x)}{4}$ A - dan chiqqan avtomobilning tezligi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{4x}{15\cdot(24-x)}$ va $\frac{(24-x)}{15x}$ uchrashguncha ketgan vaqtlar.

3. Tenglama tuzish: $\frac{4x}{15\cdot(24-x)} = \frac{(24-x)}{15x}$

Tenglamani yechish; $60x^2=15(24-x)^2$ $2x = 24 - x,$

$4x^2=(24-x)^2$ $3x = 24;$ $x = 8.$

$x=8$ km A dan chiqqan avtomobilning uchrashguncha bosib o'tgan yo'li.

$x=16$ km B chiqqan avtomobilning uchrashguncha bosib o'tgan yo'li.

60 *km/s* A dan chiqqan avtomobilning tezligi.

120 *km/s* B dan chiqqan avtomobilning tezligi.

5. T e k sh i r i sh:

13-masala. Hovuzga ikki krandan suv keladi. Oldin birinchi kran ochib qo'yildi, u ikkinchi kranning yolg'iz o'zi ishlaganda hovuzni qancha vaqtda to'ldirsa, shu vaqtning uchdan biricha vaqt ochiq turdi. So'ngra, ikkinchi kran birinchi kran yolg'iz o'zi hovuzni qancha vaqtda to'ldirsa, shu vaqtning uchdan biricha ochiq turdi. Shundan keyin hovuzning $\frac{13}{18}$ qismi suvga to'ldi. Agar ikkala kran baravar turganda hovuz 3 soat-u, 36 minutda to'lsa, hovuzni to'ldirish uchun har qaysi kranning yolg'iz o'ziga qancha vaqt kerak bo'lishi hisoblansin.

Yechish.

1. Belgilashlar. Birinchi kran hovuzni x soatda, ikkinchi kran y soatda to'ldiradi deylik, u holda birinchi kran bir soatda hovuzning $\frac{1}{x}$ qismini to'ldiradi, masalaning shartiga ko'ra birinchi kran $\frac{1}{3}y$ soat ochiq turdi, demak, birinchi krandan kelgan suv hovuzning $\frac{\frac{1}{3}y}{x}$ qismini to'ldiradi. Ikkinchi kran hovuzning $\frac{\frac{1}{3}x}{y}$ qismini to'ldirishi ham shu yo'l bilan topiladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{1}{3}\frac{x}{y}$ va $\frac{1}{3}\frac{y}{x}$

3. Tenglama tuzish:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\frac{x}{y}+\frac{1}{3}\frac{y}{x}=\frac{13}{18}, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{18} \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish.

$$\frac{y}{x}=z \text{ desak, } \frac{1}{3}z+\frac{1}{3}\frac{1}{z}=\frac{13}{18}, \quad 6z^2-13z+6=0$$

$$z_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{12}=\frac{13\pm5}{12};$$

$$z_1=\frac{3}{2}; \quad z_2=\frac{2}{3}; \qquad \left.\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{18}\right|\cdot y, \quad \frac{y}{x}+1=\frac{5}{18}y$$

$$\frac{3}{2}+1=\frac{5}{18}y, \quad \frac{5}{2}=\frac{5}{18}y, \quad y=9; \quad x=\frac{2}{3}y=\frac{2}{3}\cdot9=6$$

Kranlarning biri hovuzni 9 soatda, ikkinchisi 6 soatda to'ldiradi.

14-masala. Sof spirt to'ldirilgan bakdan undagi spirtning bir qismini quyib olindi va uning o'rniga shuncha suv quyib qo'yildi. So'ngra bakdan yana o'shancha litr aralashma quyib olindi, shundan keyin bakda 49 litr sof spirt qoldi. Bakning sig'imi 64 l. Bakdan birinchi safar qancha va ikkinchi safar qancha spirt quyib olingan?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar birinchi safar x l spirt quyib olingan bo'lsa, bakda *(64–x)* l spirt qoladi, ikkinchi safar $\frac{64-x}{64}x$ l sof spirt quyib olindi, u holda bakda $64-x-\frac{64-x}{64}x$ l sof spirt qoladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $(64-x)$ l va $\frac{64-x}{64}x$ l.

3. Tenglama tuzish: $\frac{1}{64}(64-x)^2=49$

4. Tenglamani yechish:

$$\frac{1}{64}\cdot 64^2-\frac{1}{64}\cdot 64\cdot 2x+\frac{1}{64}x^2=49$$
$$x^2-128x+960=0$$
$$x_{1,2}=64\pm\sqrt{4096-960}=64\pm 56;$$
$$x_1 = 8\ l,\quad x_2 = 110\ l.$$

$$\frac{64-x}{64}x=\frac{56}{64}\cdot 8=7\ l$$

spirt quyib olingan.

5. Tekshirish:

$$\frac{1}{64}(64-8)^2=49,\quad \frac{1}{64}\cdot 56^2=49,\quad 49=49$$

15-masala. Mashinistka o'ziga topshirilgan ishni har kuni belgilangan normadan 2 bet ortiq bossa, ishni muddatidan 3 kun ilgari tugatadi. Agar normadan 4 betdan ortiq bossa muddatidan 5 kun ilgari tugatadi. U necha bet ko'chirishi va qancha vaqtda ko'chirishi kerak?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar mashinistkaning bir kunlik normasini x bet, ishni tamomlash muddatini y kun desak, u holda jami ish xy bet bo'ladi. $(x+2)$ mashinistkaning normadan ortiq bosgan bir kunlik betlar soni.

$(y-3)$ mashinistkaning ishni muddatidan ilgari tamomlash kuni.

$(x+4)$ mashinistkaning normadan ortiq bosgan bir kunlik betlar soni.

$(y-5)$ mashinistkaning ishni muddatidan ilgari tamomlash kuni.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $x+2$, $y-3$, $x+4$, $y-5$, va xy.

3. Tenglama tuzish: $\begin{cases}(x+2)\cdot(y-3)=xy,\\(x+4)\cdot(y-5)=xy.\end{cases}$

4. Tenglamani yechish: Sistemadagi birinchi tenglamadan ikkinchi tenglamani ayirsak, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$xy-3x+2y-6+5x-xy-4y+20=0,$$
$$2x-2y+14=0,\quad x=y-7.$$

Bu qiymatni sistemadagi birinchi tenglamaga qo'ysak, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$(y-5)(y-3)=(y-7)y$$
$$y^2-8y+15=y^2-7y,\qquad y=15\text{ kun}\quad x=8\text{ bet}$$

J: Mashinkada bosiladigan ish 120 bet ekan.

5. T e k sh i r i sh:

$$\begin{cases}(8+2)\cdot(15-3)=15\cdot 8,\\(8+4)\cdot(15-5)=15\cdot 8\end{cases}\quad => \quad\begin{cases}120=120\\120=120\end{cases}$$

16-masala. Ikki ishchiga bir qancha bir xil detallar tayyorlash topshirildi. Birinchi ishchi 7 soat, ikkinchisi 4 soat ishlagandan keyin butun ishning $\frac{5}{9}$ qismini tamomlangani ma'lum bo'ldi. Ular birgalikda yana 4 soat ishlagandan keyin butun ishni $\frac{1}{18}$ qismi qolganini aniqlashdi. Bu ishni har qaysi ishchi yolg'iz o'zi ishlasa, necha soatda tamomlar edi?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar birinchi ishchi ishni yolg'iz o'zi x soatda, ikkinchi ishchi u soatda tamomlay oladi desak, u holda

birinchi ishchi bir soatda ishning $\frac{1}{x}$ - qismini, ikkinchisi esa $\frac{1}{y}$ qismini tamomlaydi. $7\cdot\frac{1}{x}$ - birinchi ishchining 7 soatdagi bajargan ishi, $4\cdot\frac{1}{y}$ - ikkinchi ishchining 4 soatda bajargan ishi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $7\cdot\frac{1}{x}$ va $4\cdot\frac{1}{y}$

3. Tenglama tuzish:

$$\begin{cases} 7\cdot\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}=\frac{5}{9} \\ 4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1-\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{18}\right)=\frac{7}{18} \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish:

$$\begin{cases} \frac{7}{x}+\frac{4}{y}=\frac{5}{9} \\ \frac{4}{x}+\frac{4}{y}=\frac{7}{18} \end{cases}$$

Sistemadagi birinchi tenglamadan ikkinchisini ayiramiz:

$$\frac{7}{x}-\frac{4}{x}=\frac{5}{9}-\frac{7}{18}, \quad \frac{3}{x}=\frac{3}{18}, \quad x=18 \quad c$$

Bu qiymatni sistemadagi birinchi tenglamaga qo'yamiz:

$$7\frac{1}{18}+\frac{4}{y}=\frac{5}{9}, \quad \frac{4}{y}=\frac{5}{9}-7\cdot\frac{1}{18}, \quad \frac{4}{y}=\frac{3}{18}$$

$$3y = 4\cdot 18; \quad y = 24 \text{ soat.}$$

5. T e k sh i r i sh:

$$\left(\frac{7}{18}+\frac{4}{24}=\frac{5}{9}\right)\Rightarrow\left(\frac{28+12}{72}=-\frac{5}{9}\right)\Rightarrow\left(\frac{5}{9}=\frac{5}{9}\right).$$

17-masala. Paraxodga ko'tarma kran bilan yuk ortildi. Oldin quvvati bir xil bo'lgan 4 ta kran ishladi. Ular 2 soat ishlagandan keyin ularga yana kamroq quvvatga ega bo'lgan 2 ta ko'tarma kran qo'shildi va shundan keyin yuk ortish 3 soatda tamom bo'ldi. Agar hamma kran baravariga ishga tushirilsa, yuk ortish 4,5 soatda tugar edi. Agar bitta kuchli kran yolg'iz o'zi ishlatilsa, yuk ortishni necha soatda tamomlash mumkin bo'lar edi? Bitta kuchsiz kran yolg'iz o'zi ishlasa, ishni necha soatda tamomlar edi?

Yechish.

1. Belgilashlar. Katta quvvatga ega bo'lgan kran x soatda yukni ortsin. Kichik quvvatga ega bo'lgan kran u soatda ortsin, u holda birinchi kran ja'mi ishning $\frac{1}{x}$ qismini bir soatda bajaradi. Kichik quvvatga ega bo'lgan kran esa bir soatda ishning $\frac{1}{y}$ qismini bajaradi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: To'rtta katta kranning 5 soatdagi ishi $4\cdot5\cdot\frac{1}{x}$ va ikkita kichik kranning $3\cdot2\cdot\frac{1}{y}$ soatdagi ishi hamda ularning 4,5 soatdagi ishlari $4\cdot5\cdot\frac{1}{x}$ va $3\cdot2\cdot\frac{1}{y}$

3. Tenglama tuzish:

$$\begin{cases} 4\cdot 5\cdot \dfrac{1}{x}+3\cdot 2\cdot \dfrac{1}{y}=1 \\ 4\cdot 4{,}5\cdot \dfrac{1}{x}+2\cdot 4{,}5\cdot \dfrac{1}{y}=1. \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish:

$$\begin{cases} \dfrac{20}{x}+\dfrac{6}{y}=1 \Big| \cdot 3 \\ \dfrac{18}{x}+\dfrac{9}{y}=1 \Big| \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{60}{x}+\dfrac{18}{y}=3 \\ \dfrac{36}{x}+\dfrac{18}{y}=2 \end{cases}$$

1 - tenglamadan 2-tenglamani ayirsak, $\dfrac{24}{x}=1$ hosil bo’ladi, bundan $x = 24$;

$\dfrac{36}{24}+\dfrac{18}{y}=2,\quad \dfrac{18}{y}=2-\dfrac{3}{2},\quad \dfrac{18}{y}=\dfrac{1}{2}$ soat, $y = 36$ soat.

5. Tekshirish: $\dfrac{20}{24}+\dfrac{6}{36}=1,\quad \dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{6}=1,\quad 1=1$

18-masala. Elektrostansiya qurilishda g’isht teruvchilar brigadasi ma’lum vaqtda 120 ming dona g’isht terish kerak edi. Brigada ishni muddatidan 4 kun ilgari tamomladi. Agar brigada norma bo’yicha 4 kunda qancha g’isht terishi kerak bo’lsa, 3 kunda shundan 5 ming dona ortiq g’isht tergani ma’lum bo’lsa, har kungi g’isht terish normasi qancha bo’lgan va brigada haqiqatda kuniga qanchadan g’isht tergan?

Yechish.

1. Belgilashlar. Bir kunda teriladigan normadagi g’isht x ming dona bo’lsin, haqiqatda esa u ming donadan g’isht terilgan bo’lsa, $\dfrac{1}{x}$ - norma bo’yicha teriladigan kun, $\dfrac{1}{y}$ - haqiqatda terilgandagi sarf qilingan kun.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\dfrac{120}{x}, \dfrac{120}{y},$ $3y$ va $4x$.

3. Tenglama tuzish:

$$\begin{cases} \dfrac{120}{x}-\dfrac{120}{y}=4 \\ 3y-4x=5 \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish:

$$\begin{cases} \dfrac{120}{x}-\dfrac{120}{y}=4 \\ 3y-4x=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30y-30x=xy \\ y=\dfrac{5+4x}{3} \end{cases}$$

$$30\cdot\frac{5+4x}{3}-30x=x\cdot\frac{5+4x}{3}$$

$30(5 + 4x) – 90x = 5x + 4x^2$

$150 + 120x – 90x = 5x+ 4x^2$

$$4x^2 - 25x - 150 = 0$$

$$x_{1,2}=\frac{25\pm\sqrt{625+2400}}{8}=\frac{25\pm 55}{8}$$

$x_1 = 10$ ming dona, $y_1 = \frac{5+40}{3} = \frac{45}{3} = 15$ ming dona.

5. Tekshirish:

$\frac{120}{10} - \frac{120}{15} = 4,$ $\quad 12 - 8 = 4, \quad 4 = 4$

19-masala. Quvvatlari turlicha bo'lgan ikki traktor birga ishlab xo'jalik erini 8 kunda haydab tamomladi. Dastlab dalaning yarmini bir traktor yolg'iz o'zi haydab, keyin ikkala traktor birga ishlasa, hamma ish 10 kunda tugar edi. Dalani har qaysi traktor yolg'iz o'zi necha kunda hayday olar edi?

Yechish. 1. Belgilashlar. Birinchi traktor bilan butun dalani x kunda, ikkinchi traktor bilan u kunda haydash mumkin bo'lsa, u holda birinchi traktor bir kunda $\frac{1}{x}$ qism erni haydasa, ikkinchi traktor bir kunda $\frac{1}{y}$ qism erni haydaydi. Shartga ko'ra birinchi traktor dalani yarmini haydagani uchun $\frac{x}{2}$ bo'ladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $x, y, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ va $\frac{x}{2}$.

3. Tenglama tuzish: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{x}{2} + 4 = 10 \end{cases}$

4. Tenglamani yechish: $\begin{cases} 8y + 8x = xy, \\ x = 12; \end{cases}$

$8y + 8 \cdot 12 = 12y, \; 4y = 96, \; y = 24.$

Demak, birinchi traktor bilan dalani 12 kunda, ikkinchi traktor bilan esa 24 kunda haydash mumkin.

20-masala. Ikki ayol bozorga 100 dona tuxum olib kelishdi. Ikkala ayol tuxumlarni turli narx bilan sotib, barobar miqdorda pul to'lashdi. Agar birinchi ayoldagi tuxumlar ikkinchisidagicha bo'lsa, u 7,2 so'mlik tuxum sotgan bo'lar edi, agar ikkinchi ayoldagi tuxumlar birinchisidagicha bo'lsa, u 3,2 so'mlik tuxum sotgan bo'lar edi. Har qaysi ayol bozorga nechta dona tuxum oborgan?

Yechish. 1. Belgilashlar. Birinchi ayolda x dona, ikkinchi ayolda y dona tuxum bo'lsa, u holda masala shartiga

ko'ra birinchi ayol tuxumning bir donasini $\frac{7,2}{y}$ so'mdan sotib, $\frac{7,2}{y}x$ so'm pul to'plagan bo'ladi. Xuddi shuningdek, ikkinchi ayolga ham $\frac{3,2}{x}y$ so'm pul tushgan bo'ladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $x, y, \frac{7,2}{y}x$ va $\frac{3,2}{x}y$

3. Tenglama tuzish: $\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{3,2}{x}y = \frac{7,2}{y}x \end{cases}$

4. Tenglamani yechish:

$$3,2y^2 = 7,2x^2 \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{7,2}{3,2}; \quad \left(\frac{x}{y}\right)_{1,2} = \pm\frac{3}{2}; \quad \left(\frac{x}{y}\right)_1 = \frac{3}{2};$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)_2 = -\frac{3}{2}; \quad x = 100 - y, \quad \frac{y}{100-y} = \frac{3}{2}; \quad 5y = 300,$$

$y = 60$ dona $\quad x = 40$ dona

5. T e k sh i r i sh:

$$\begin{cases} 60+40=100 \\ \frac{3{,}2}{40}\cdot 60=\frac{7{,}2}{60}\cdot 40 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} 100=100 \\ 4{,}8=4{,}8 \end{cases}$$

21-masala. Aravaning oldingi g'ildiragi 18 m masofada, keyingi g'ildirakdan 10 marta ortiq aylanadi. Agar oldingi g'ildirak aylanasini 6 dm orttirib, keyingi g'ildirak aylanasi 6 dm kamaytirilsa, shuncha masofada oldingi g'ildirak keyingisidan 4 ta ortiq aylanadi. Har qaysi g'ildirak aylanasining uzunligini toping.

Yechish. 1. B e l g i l a sh l a r. Oldingi g'ildirakning aylanasi x dm, keyingi g'ildirakning aylanasi y dm bo'lsin.

$\frac{180}{x}$ - oldingi g'ildirakning bir marta aylanishi.

$\frac{180}{y}$ - keyingi g'ildirakning bir marta aylanishi.

$\frac{180}{x+6}$ - oldingi g'ildirakning ortirilgandan keyingi bir marta aylanishi.

$\frac{180}{y-6}$ - keyingi g'ildirakning kamaytirilganidan keyingi bir marta aylanishi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{180}{x}$, $\frac{180}{y}$, $\frac{180}{x+6}$ va $\frac{180}{y-6}$

3. Tenglama tuzish:

$$\begin{cases} \frac{180}{x}-\frac{180}{y}=10 \\ \frac{180}{x+6}-\frac{180}{y-6}=4 \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish:

$18y - 18x = xy,$

$45(y-6) - 45(x+6) = (x+6)(y-6),$

$45y - 270 - 45x - 270 = xy - 6x + 6y - 36,$

$39y - 39x - 504 = 18y - 18x,$

$21y - 21x - 504 = 0,$

$y - x - 24 = 0, \qquad y = x + 24.$

$18(x+24) - 18x = (x+24)x$

$18x + 332 - 18x = x^2 + 24x; \qquad x^2 + 24x - 332 = 0$

$x_{1,2} = -12 \pm \sqrt{144+332} = -12 \pm 24.$

$x_1 = 12; \quad x_2 = -36$

$x_1=12$ dm oldinti g'ildirak, $y=36$ dm g'ildirak aylanasi uzunligi.

5. Tekshirish: $\frac{180}{12}-\frac{180}{36}=10;$ $10 = 10.$

22-masala. Bir qotishmada 1:2 nisbatda ikki xil metall bor. Ikkinchi qotishmada esa shu metallar 2:3 kabi nisbatda. Tarkibida o'sha metallar 17:27 kabi nisbatda bo'lgan uchinchi bir qotishma hosil qilish uchun shu qotishmalarning har biridan qancha qism olish kerak?

Yechish.

1. Belgilashlar. Uchinchi qotishmada birinchi qotishmaning x qismi va ikkinchi qotishmaning y qismi bo'lsin, ya'ni birinchi qotishmaning x kilogramiga ikkinchi qotishmaning u kilogrami to'g'ri kelsin. U holda $(x+y)$ kilogramm uchinchi qotishmada birinchi metaldan $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y$ va ikkinchi metaldan $\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y$ kg bo'ladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y$ va $\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y$

3. Tenglama tuzish:

$$\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y\right):\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y\right)=17:27$$

4. Tenglamani yechish:

$$\frac{5x+6y}{15}:\frac{10x+9y}{15}=17:27$$

$$\frac{5x+6y}{10x+9y}=\frac{17}{27}; \quad \frac{5\frac{x}{y}+6}{10\frac{x}{y}+9}=\frac{17}{27}$$

$$5\frac{x}{y}+6=\frac{17}{27}\left(10\frac{x}{y}+9\right)$$

$$5\frac{x}{y}-\frac{170}{27}\frac{x}{y}=9\cdot\frac{17}{27}-6; \quad \frac{35x}{27y}=\frac{1}{3}, \quad \frac{x}{y}=\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{35}; \quad \frac{x}{y}=\frac{9}{35}$$

J: birinchi qotishmaning 9 qismiga, ikkinchi qotishmadan 35 qism olish kerak.

23-masala. Ikki ishchining ikkinchisi birinchisidan 1,5 kun keyin ishga tushib, ular bir ishni 7 kunda tamomlay oladilar. Agar bu ishni hap qaysi ishchi yolg'iz o'zi ishlasa, birinchi ishchi ikkinchisiga qaraganda 3 kun ortiq ishlashiga to'g'ri keladi. Har qaysi ishchi yolg'iz o'zi bu ishni necha kunda tamomlaydi?

Yechish.

1. B e l g i l a sh l a r. Agar ikkinchi ishchi butun ishni *x* kunda tamomlasa, birinchi ishchi *x+3* kunda tamomlaydi. Birinchi ishchi 7 kun ishlab, butun ishning $\frac{7}{x+3}$ qismini, ikkinchi ishchi 5,5 kun ishlab, butun ishni $\frac{5,5}{x}$ qismini tamomlaydi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar; $\frac{7}{x+3}$ va $\frac{5,5}{x}$

3. Tenglama tuzish:

$$\frac{7}{x+3} + \frac{5,5}{x} = 1$$

4. Tenglamani yechish:

$$7x + 5,5x + 16,5 = x^2 + 3x,$$

$$x^2 - 9,5x - 16,5 = 0,$$

$$x^2 - \frac{19}{2}x - \frac{33}{2} = 0,$$

$$2x^2 - 19x - 33 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361+264}}{4} = \frac{19 \pm 25}{4}$$

$x_1 = 11, \quad x_2 = -\frac{3}{2}$ - chet ildiz

J: birinchi ishchi ishni 14 kunda, ikkinchi ishchi 11 kunda tamomlaydi.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MASALALAR.

1-masala. Velosipedchi 30 km yo'l yurishi kerak edi. Velosipedchi tayinlangan vaqtdan 3 minut kech yo'lga chiqib, 1 km/s ortiq tezlik bilan yurdi va boradigan joyiga o'z vaqtida etib keldi. Velosipedchining tezligini toping?

J: 25 km/s.

2-masala. Ikki stansiya orasidagi masofa 96 km. Bu masofani birinchi poezd ikkinchi poezddan 40 minut tez o'tadi. Birinchi poezdning tezligi ikkinchi poezdning tezligidan 12 km/s ortiq bo'lsa, ikkala poezdning tezligini toping?

J: Birinchi poezd tezligi 48 km/s,
ikkinchi poezd tezligi 36 km/s.

3-masala. Ikki yo'lovchi bir vaqtda bir-biriga qarab A va B shaharlardan yo'lga chiqdi. Birinchi yo'lovchi ikkinchisidan bir soatda 2 km/s ortiq yo'l bosadi va u ikkinchi yo'lovchi A shaharga bormasdan bir soat oldin B shaharga etib boradi. A va B shaharlar orasidagi masofa 24 km. Har qaysi yo'lovchi bir soatda necha kilometr yo'l bosadi?

J: 6 km va 8 km.

4-masala. A va B shaharlar orasidagi masofa 200 km. A shahardan B shahargacha bir-biriga qarab bir vaqtda ikkita avtomobil yo'lga chiqdi. Birinchi avtomobil ikkinchi avtomobilga qaraganda 20 km tez yurdi va ikkinchi avtomobilga qaraganda 50 minut oldin etib keldi. Har qaysi avtomobilning tezligini toping?

J: 80 km/s va 60 km/s.

5-masala. Ikki pristan orasidagi masofa 60 km. Motorli qayiq bu masofani oqim bo'yicha oqimga qarshi suzganidan ketgan vaqtga qaraganda 50 minut tez suzib o'tadi. Agar daryo oqimining tezligi soatiga 3 km bo'lsa, motorli qayiqning tezligini toping?

J: 21 km/s.

6-masala. Ikki pristan orasidagi masofa 154 km. Bu pristanlarning birinchisidan ikkinchisiga qarab paraxod yo'lga chiqdi. Paraxod ikkinchi pristanga borib, 45 minut to'xtab turdi va yana yo'lga chiqqan joyiga 18,75 soatdan keyin qaytib keldi. Agar paraxodning turg'un suvdagi tezligi soatiga 18 km bo'lsa, daryo oqimining tezligini toping?

J: 4 km/s.

7-masala. Paxta terimida birinchi brigada 6 soat ishladi, shundan so'ng yana bir brigada kelib qo'shildi. Ikki brigada birgalikda topshiriqni 4 soatda tugatishdi. Agar birinchi brigada berilgan uchastkadagi hosilni bir o'zi terib olishi uchun ikkinchi brigada yolg'iz o'zi ishlaganiga qaraganda 3 soat ortiq vaqt talab qilinsa, har qaysi brigadaning yolg'iz o'zi uchastkadagi hosilni necha soatda yig'ib oladi?

J: birinchi brigada 15 kunda,
ikkinchi brigada 12 kunda.

8-masala. Ikkita stanok birgalikda 9 soat-u 36 minutda ishni tugallaydi. Agar bitta stanok o'zi ishlasa, butun ishni bajarish uchun ikkinchiga qaraganda 8 soat ortiq vaqt talab qiladi. Har bir stanok alohida ishlaganda butun ishni necha soatda tugallaydi?

J: 16 soat, 24 soat.

9-masala. Ikki g'isht teruvchi ma'lum bir ishni birgalikda ishlab 4 soatda bajaradi. Agar, ishchi yolg'iz o'zi ishlasa va ishning yarmini bajarsa, so'ngra ikkinchi ishchi ishning qolgan yarmini bajarsa u holda butun ishni bajarish uchun ularga 9 soat kerak bo'ladi. Butun ishni har bir ishchi qancha vaqtda bajaradi?

J: 12 kun va 6 kun.

10-masala. Ikki payvandchi malum bir ishni birgalikda ishlab 4 kunda tugata oladilar. Agar bulardan biri yolg'iz o'zi 3 kun ishlagandan keyin, ikkinchisi kelib qo'shilsa, ular birgalikda topshiriqni 5 kunda bajaradilar. Payvandchilarning har biri topshiriqni necha kunda bajaradi?

J: 6 kun va 12 kun.

11-masala. 300 ishchini jo'natish uchun bir necha avtobus chaqirilgan edi, ammo belgilanganidan ikkita avtobus kam keldi, shuning uchun har qaysi avtobusga mo'ljallanganidan 5 kishi ortiq o'tqizildi. Ishchilarni jo'natish uchun nechta avtobus chaqirilgan edi? J: 12 ta.

12-masala. Tez yurar poezd passajir poezdiga qaraganda soatiga 10 km ortiq yuradi. Tez yurar poezdning 210 km ni o'tishi uchun ketkazgan vaqti passajir poezdining 240 km ni o'tishi uchun ketgan vaqtdan bir soat kam bo'lsa, tez yurar poezdning tezligini toping?

J: tez yurar poezd tezligi 70 km/s,

13-masala. Tajriba uchastkasida ekilganiga qaraganda 14 kg don ortiq yig'ib olindi. Yig'ib olingan donni yana ekildi va birinchi galdagi olingan hosil qancha bo'lsa, shuncha marta hosil olindi, hammasi bo'lib 128 kg don yigib olindi. Tajriba uchastkasiga birinchi galda qancha don ekilgan?

J: 98 kg.

14-masala. Suvoqchilar bilan bo'yoqchilar brigadasi bir uyni remont qildilar. Suvoqchilar soni bo'yoqchilarga qaraganda bittaga ortiq. Har qaysi brigada 150 so'mdan oldi. Agar har bir bo'yoqchi bir suvoqchi olgan pulni olganda edi, suvoqchilar brigadasi bo'yoqchilar brigadasiga qaraganda 67,5 so'm ortiq olgan bo'lardi. Suvoqchilar qancha bo'lgan va bo'yoqchilar qancha bo'lgan?

J: 5 ta suvoqchi, 4 ta bo'yoqchi.

15-masala. Ikki pristan orasidagi masofa daryo bo'yicha 50 km. Katerda bu masofani biridan ikkinchisiga borib, u erda 30 minut to'xtab yana birinchisiga qaytib kelishi uchun 5 soat vaqt sarf qilindi. Daryo oqimining tezligi 2,5 km bo'lsa, katerning turg'un suvdagi tezligini toping?

J: 90 km/C.

16-masala. Ikki avtomashina birgalikda ishlab ma'lum yukni 15 soatda tashib bo'ladi. Birinchi avtomobil ikkinchisidan 6 soat kam ishlab yukning 40% ni tashidi, qolgan yukni 2-avtomobil tashigan bo'lsa, har qaysi avtomobil necha soat ishlagan?

J: 30 soat, 36 soat.

17-masala. Ikki ishchi bir nechtadan detal tayyorlashi kerak edi. Birinchi ishchi bajargan ishi uchun 48 so'm, birinchi ishchidan 6 ta kam detal tayyorlagan ikkinchi ishchi esa 27 so'm oldi. Agar birinchi ishchi tayyorlaganicha detalni ikkinchi ishchi tayyorlaganida edi, ular bir xilda pul olgan bo'lar edilar. Ishchilar qanchadan detal tayyorlashgan?

J: Birinchi ishchi 24 ta,
ikkinchi ishchi 18 ta detal yasagan.

18-masala. Oralaridagi masofa 900 km bo'lgan ikki stansiyadan bir-biriga qarab ikki poezd yo'lga chiqdi. Bu poezdlar yo'lni o'rtasida uchrashishi kerak edi. Agar bu poezdlardan birining tezligi ikkinchisidan 5 km/soat ortiq bo'lsa u belgilangan masofaga ikkinchisidan bir soat oldin keladi. Har bir poezdning tezligini toping?

J: 45 km/soat birinchi poezd tezligi,
50 km/soat ikkinchi poezd tezligi.

19-masala. Avtomashina 160 km kesik yo'lni 3 soatda o'tadi. Bu masofani 75% asfaltlangan bo'lib, qolgan qismi tosh yo'ldan iborat. Agar mashinaning asfalt yo'lidagi tezligi tosh yo'lidagi tezligidan soatiga 20 km ortiq bo'lsa, mashina asfalt yo'lda qanday tezlik bilan yurgan?

J: 60 km/soat asfalt yo'ldagi tezlik.

20-masala. Uch idishga suv quyilgan. Agar bir idishdagi suvning 1/3 qismini ikkinchi idishga quyib, so'ngra ikkinchi idishda bo'lgan suvning 1/4 qismini uchinchi idishga quyib, nihoyat uchinchi idishda bo'lgan suvning 1/10 qismini birinchi idishga quyilsa, har bir idishda 9 litrdan suv bo'ladi. Har qaysi idishda qancha suv bor edi?

J: 12 l, 8 l. 7 l.

21-masala. Oralaridagi masofa 650 km bo'lgan ikki shahardan ikki poezd bir-biriga qarab yo'lga chiqdi. Agar poezdlar bir vaqtda jo'nab ketgan bo'lsa, 10 soatdan keyin uchrashadi. Agar ikkinchi poezd birinchidan 4 soatu 20 minut oldin yo'lga chiqsa, birinchi poezd yo'lga chiqqanidan 8 soat keyin uchrashadi. Har qaysi poezdning o'rtacha tezligi topilsin.

J: 35 km/soat birinchi poezd tezligi.
30 km/soat ikkinchi poezd tezligi.

22-masala. Ikki shahar orasidagi masofa daryo yo'li bilan 80 km. Paraxod bu yo'lni bir boshidan ikkinchi boshiga 9 soat-u 20 minutda borib keladi. Daryo oqimining tezligini soatiga 4 km deb hisoblab, paraxodning turg'un suvdagi tezligini toping.

J: 20 km/s.passajir poezd tezligi 60 km/s.

VIII-BOBNI TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1 Tenglama tushunchasiga ta'rif bering.

2 Tenglama ildizi deganda nimani tushunasiz?
3 Qanday tenglik ayniyat deyiladi?
4 Qanday tenglama chiziqli tenglama deyiladi?
5 Parametrik kasr ratsional tenglamani tushuntirib bering.
6 Absolyut miqdor belgisi qatnashgan tenglamani tushuntirib bering.
7 Kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratib bering.
8. To'la va keltirilgan kvadrat tenglamalarni farqini aytib bering.
9. Kvadrat tenglama ildizlari qanday topiladi?
10. Viet teoremasini aytib bering.
11. Kvadrat tenglamaga keltirib yechiladigan tenglamalarni turlarini ko'rsating.
12. Qanday tenglama irratsional tenglama deyiladi?
13. Parametrli irratsional tenglama qanday yechilishini ko'rsatib bering.
14. Irratsional tenglamalar sistemasi qanday yechiladi?
15. Qanday tenglama ko'rsatkichli tenglama deyiladi?
16. Logarifmik tenglamani ta'riflang?
17. Qanday tenglama parametrli ko'rsatkichli tenglama deyiladi
18. Qanday tenglama parmetrli logarifmik tenglama deyiladi?
19. Ko'rsatkichli tenglamalar sistemasi qanday yechiladi?
20. Logarifmik tenglamalar sistemasi qanday yechiladi?
21. Ko'rsatkichli va logarifmik tenglamalarni grafik usulda yechilishini ko'rsatib bering.
22. Qanday tenglamalar trigonometrik tenglama deyiladi?
23. Parmetrik tenglamalar sistemasini yechish usullarini ko'rsatib bering.
24. Trigonometrik tenglamalar sistemasini yechish usullarini ko'rsatib bering.
25. Masala tushunchasining mazmunini aytib bering.
26. Masalaning sharti deganda nimani tushunasiz?
27. Masalaning xulosasi degandachi?
28. Masalalarda ko'proq qanday miqdorlarning o'zaro bog'liqlik munosabatlari bo'lishini aytib bering.

VIII-BOB UCHUN TAYANCH IBORALAR.

Tenglik, tenglama, ayniyat, chiziqli tenglama, parametrli tenglama, kasr chiziqli tenglama, absolyut miqdor, kvadrat uchhad, to'la kvadrat, kvadrat tenglama, ildiz tushunchasi, Viet teoremasi, irratsional tenglama, tenglamalar sistemasi, ko'rsatkichli tenglama, logarifmik tenglama, parametrli ko'rsatkichli va logarifmik tenglamalar, trigonometrik tenglamalar sistemasi, masala, masala sharti, masala xulosasi.

ADABIYOTLAR

1. Karimov I.A. «Kadrlar tayyorlashning milliy dasturi», T. «O’zbekiston», 1997 yil.
2. Algebra va analiz asoslari: o’rta maktablarning 10-11 sinflari uchun darslik (Sh.O.Alimov, Yu.M.Kolyagin, Yu.V.Sidorov, M.I.Shabunin) T., «O’qituvchi», 1996 yil.
3. Algebra: 7-sinf uchun darslik (Sh.O.Alimov, Yu.M.Kolyagin, Yu.V.Sidorov, M.I.Shabunin) T., «O’qituvchi», 1996 yil.
4. Algebra: 8-sinf uchun darslik (Sh.O.Alimov, Yu.M.Kolyagin, Yu.V.Sidorov, M.I.Shabunin) T., «O’qituvchi», 1996 yil.
5. Algebra: 9-sinf uchun darslik (Sh.O.Alimov, Yu.M.Kolyagin, Yu.V.Sidorov, M.I.Shabunin) T., «O’qituvchi», 1996 yil.
6. Alixonov S. «Geometriya darslarida umumlashtirish» T., «O’qituvchi», 1989 yil.
7. Alixonov S. «Matematika o’qitish metodikasi». T., «O’qituvchi» 1992 yil.
8. Alixonov S. « Matematika o’qitish metodikasi » Qayta ishlangan II nashri. T., «O’qituvchi» 1997 yil.
9. Bikboeva N.U. va boshqalar «Boshlang’ich sinflarda matematika o’qitish metodikasi», T., «O’qituvchi», 1996 yil.
10. N.G’aybullayev, Ortiqov. «Geometriya 7-sinf uchun darslik» T. «O’qituvchi», 1998 yil.
11. N.G’aybullayev, Ortiqov. «Geometriya 8-sinf uchun darslik» T. «O’qituvchi», 1999 yil.
12. Galitskiy M.A. va boshqalar «Algebra va matematik analiz kursini chuqur o’rganish» T., «O’qituvchi», 1995 yil.
13. Davidov V.V. «Vozrostnaya i pedagogicheskaya psixologiya» M., Pedagogika, 1992.
14. Ikramov Dj.I. «Matematicheskaya kultura shkolnika» T., «O’qituvchi», 1981.
15. Ikramov Dj.I. va boshqalar «Matematika, 5-6 sinflar uchun darslik», T., «O’qituvchi», 1997.
16. Klarin M.V. «Innovatsionnie modeli obucheniya v zarubejnix pedagogicheskix poiskax», M., «Prosveshenie», 1994.
17. Kolyagin Yu.N. va boshqalar Metodika prepodavaniya matematiki v sredney shkole. Obhaya metodika., M., «Prosveshenie», 1988.

16\. Litvinenko V.N., Mordkovich A.G «Praktikum po elementarnoy matematike» M. Izd-vo, «AVG», 1995.

17\. Lyahenko S.E. «Laboratornie i prakticheskie raboti po metodike prepodavaniya matematiki» M., «Prosveshenie», 1988.

18\. Metodika prepodavaniya matematiki v sredney shkole. (Pod redaksii Mishina). M. Prosveshenie, 1988.

19\. Pogorelov A.V. «Geometriya 7-11 kl.» M., «Prosveshenie», 1995.

20\. Stolyar A.A. «Metodi obucheniya matematike» Minsk, «Veyshaya shkola» 1993

21\. Stolyar A.A. «Pedagogika matematiki» Minsk, «Veyshaya shkola», 1988

22\. Fridman L.M. Kak reshat zadachi. M., «Prosveshenie» 1988.

23\. Engeler E. Matematika elementarnoy matematike, Perevod nem. yazik. M., «Mir», 1986

QO’SHIMCHA ADABIYOTLAR.

1. N.R.G’aybullayev «Dirchenko I.i. Razvitiye matematicheskix sposobnostey uchashixsya» T., 1987.
2. Davidov V.V. Vidi obobheniya v obuchenii. M., «Pedagogika», 1982.
3. Davidov V.V. Problemi razvivayuhego obucheniya. M., «Pedagogika», 1986.
4. Demidov V.P., Saransev G.I. Metodika prepodavaniya matematiki. M., «Prosveshenie», 1978.
5. Lerner YA. Didakticheskaya osnovi metodov obucheniya. M., «Pedagogika», 1992.
6. Okon V. Vvedeniya v obheyu didaktiku. M., «Visshaya shkola», 1990.
7. Sbornik zadach po matematike dlya postupayuhix vo vtuzi. (Pod redaksii M.I. Skanavi.) M., Visshaya shkola., 1995.

8. Sirojiddinov S.X., Mirzaaxmedov M.A. Matematika kasbi haqida suhbatlar. T., «O’qituvchi», 1993.
9. Teslenko I.F. O prepodavaniya geometrii. M., «Prosveshenie». 1985.
10. Fridman L.M. Uchites uchitsya matematike. M, «Prosveshenie». 1986.
11. Erdniev P.N. Prepodavanie matematiki v shkole. M., «Prosveshenie», 1978.
12. Yastrebeneskiy G.A. Zadache s parametrami. M., «Prosveshenie». 1989.

M U N D A R I J A

I-BOB. UMUMTA'LIMIY MAKTABLARDA MATEMATIKA O'QITISH MASALALARI.
1-§. Matematika o'qitish metodikasi fani. . . . .
2-§. O'rta umumta'limiy maktablarda matematika o'qitishning maqsadi. . . . . .
3-§. Matematika o'qitish metodikasining boshqa fanlar bilan aloqasi . . . . .
4-§. Ta'limni isloh qilinishi. . . . .
II-BOB. MATEMATIKA DARSLARIDA BILISHNING TURLARI VA XULOSA CHIQARISH METODLARI .
1-§. Matematik tushuncha . . . .
2-§. Matematik tushunchalarni ta'riflash metodikasi. . . . .
3-§. Matematik tushunchalarni kiritish metodikasi . . . .
4-§. Matematik tushunchalarni kiritishning abstrakt - deduktiv metodi . . . .
5-§. Matematik hukm . . . .
6-§. Matematik xulosa . . . .
7-§. Matematik hukmning turlari . . . .
8-§. Postulat. . . . .
9-§. Teorema va uning turlari . . . .
10-§. Teoremalarni isbotlash metodlari . . . .
11-§. Teoremalarni isbotlashdagi zaruriy va etarli shartlar . . . .
III-BOB. MAKTAB MATEMATIKA KURSIDA TA'LIM METODLARI
1-§. Matematik ta'lim metodlari . . . .
2-§. Matematika o'qitishdagi ilmiy izlanish metodlari . . . .
3-§. Tajriba va kuzatish metodi . . . .
4-§. Taqqoslash metodi . . . .
5-§. Analiz va sintez metodi . . . .
6-§. Umumlashtirish metodi. . . . .
7-§. Abstraksiyalash metodi . . . .
8-§. Konkretlashtirish metodi. . . . .
9-§. Klassifikatsiyalash metodi . . . .
10-§. Evristik ta'lim metodi. . . . .
11-§. Matematika darslarida muammoli ta'lim . . . .
12-§. Matematika darslarida dasturlashtirilgan ta'lim. . . . .
IV - BOB. O'QUVCHILARNING MATEMATIK TAFAKKURLARINI SHAKLLANTIRISH METODI
1-§. Matematik ta'lim jarayonida masalaning roli va o'rni . . . .
2-§. Matematika o'qitishda masalaning bajaradigan funksiyalari . . . .
3-§. Matematika darslarida ko'phadlarni ko'paytuvchilarga ajratish metodikasi
4-§. Matematika darslarida didaktik prinsiplar . . . .
V - BOB. SON TUSHUNCHASINI KIRITISH, UNI KENGAYTIRISH VA SONLAR USTIDA AMALLAR BAJARISH METODIKASI
1-§. Natural son tushunchasini kiritish va ular ustida amallar bajarish metodikasi . . . .
2-§. Natural sonlar to'plamini kengaytirish . . . .
3-§. Butun sonlar va ular bilan to'rt amalni bajarish metodikasi. . . . .
4-§. Kasr son tushunchasini kiritish va uni o'rgatish metodikasi . . . .
5-§. Kasrlarni taqqoslash . . . .
6-§. Kasrlarni qo'shish . . . .
7-§. Kasrlarni ayrish . . . .
8-§. Kasrlarni ko'paytirish . . . .
9-§. Kasrlarni bo'lish . . . .
10-§. O'nli kasrlar va ular bilan to'rt amalni bajarish metodikasi . . . .
11-§. O'nli kasrlarni qo'shish va ayirish . . . .

12-§. O’nli kasrlarni ko’paytirish . . . .
13-§. O’nli kasrlarni bo’lish . . . .
14-§. Oddiy kasrni cheksiz davriy kasrga aylantirish . . . .
15-§. Cheksiz o’nli davriy kasrni oddiy kasrga aylantirish . . . .
16-§. Irratsional son tushunchasini kiritish metodikasi. . . . .
17-§. Haqiqiy sonlar . . . .
18-§. Haqiqiy sonlar ustida amallarni bajarish qoidalari . . . .
19-§. Arifmetik kvadrat ildiz tushunchasi. . . . .
20-§. Arifmetik to’rt amalga doir misollar yechish. . . . .
VI - BOB. MAKTABDA AYNIY SHAKL ALMASHTIRISHLARNI O’RGANISH
1-§. Ayniy shakl almashtirishlar . . . .
2-§. Kasr ifodalarni ayniy almashtirish . . . .
3-§. Irratsional ifodalarni ayniy almashtirish . . . .
4-§. Trigonometrik ifodalarni ayniy almashtirish . . . .
5-§ Trigonometrik ifodalarni soddalashtirishga doir misollar yechish metodikasi. . . . .
VII - BOB. TENGLAMALARNI O’RGANISH METODIKASI
1-§. Tenglama tushunchasini kiritish metodikasi . . . .
2-§. Chiziqli tenglamalar . . . .
3-§. Parametrik usulda berilgan kasr ratsional tenglamalarni yechish . . . .
4-§. Noma’lumlari absolyut miqdor belgisi ostida qatnashgan tenglamalarni yechish metodikasi . . . .
5-§. Kvadrat tenglama tushunchasini kiritish metodikasi . . . .
6-§. Vieta teoremasi. . . . .
7-§. Kvadrat tenglamaga keltirib yechiladigan tenglamalar . . . .
8-§. Irratsional tenglamalarni yechish . . . .
9-§. Ko’rsatkichli tenglamalar . . . .
10-§. Logarifmik tenglamalar . . . .
11-§. Parametrli irratsional tenglamalarni yechish . . . .
12-§. Irratsional tenglamalar sistemasini yechish . . . .
13-§. Parametrli logarifmik va ko’rsatkichli tenglamalarni yechish. . . . .
14-§. Ko’rsatkichli va logarifmiklar tenglamalar sistemasini yechish . . . .
15-§. Ko’rsatkichli va logarifmik tenglamalarni grafik usulda yechish . . . .
16-§. Trigonometrik tenglamalar . . . .
17-§. Parametrli trigonometrik tenglamalarni yechish . . . .
18-§. Trigonometrik tenglamalar sistemasini yechish . . . .
19-§. Masalalarni tenglama tuzish bilan yechish metodikasi . . . .
ADABIYOT . . . .
MUNDARIJA . . . .