Т. ТОЛАГАНОВ, А. НОРМАТОВ

МАТЕМАТИКАДАН ПРАКТИКУМ

Педагогика институтларининг математика ва физика-математика факультетлари талабалари учун ўқув қўлланмаси

Қайта ишланган ва тўлдирилган иккинчи нашри

ТОШКЕНТ „ЎҚИТУВЧИ" 1989

Тақризчилар: физика-математика фанлар кандидати *Д. Сатуболдиев*, катта ўқитувчи *А. Алимов*.

Мазкур қўлланма педагогика институтларида ўқитиладиган „Математикадан амалий машғулотлар" курси программаси бўйича ёзилган бўлиб, математиканинг арифметика, алгебра, тригонометрия, геометрия бўлимларини қамраб олгандир. Қўлланманинг мақсади талабаларнинг математикадан олган назарий билимларини ўрта мактаб математикаси билан боғлаш, уларда масала ва мисоллар ечиш малакасини такомиллаштириш ҳамда ривожлантиришдан иборат.

Қўлланмадан, шунингдек, математика ўқитувчилари ва математика билан қизиққан юқори синф ўқувчилари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Т $\frac{1602010000-174}{353(04)-89}$ 151 — 89

ISBN 5—645—00484—1

A

СЎЗ БОШИ

Педагогика институтларининг математика ва физика-математика факультетларида ўқитиладиган „Математикадан амалий машғулотлар“ курси ўзининг тузилиши ва вазифаси бўйича шу факультетларда ўқитиладиган „Алгебра ва сонлар назарияси“, „Математик анализ“ ва „Геометрия“ курсларидан талабалар олган назарий билимларни ўрта мактаб математикаси билан боғлаш, талабаларда масала ва мисоллар ечиш малакасини такомиллаштириш, ривожлантириш билан бирга уларни бевосита ўқитувчилик касбига тайёрлашдан ҳам иборатдир. Мазкур қўлланма юқорида айтиб ўтилган „Математикадан амалий машғулотлар“ курси программаси асосида ёзилган бўлиб, математиканинг арифметика, алгебра, тригонометрия, геометрия бўлимларини қамраб олган. Унда шунингдек, шу бўлимларга таааллуқли бўлмиш ечилиши мураккаброқ бўлган масалалар ҳам берилган.

Барча мисол ва масалалар иложи борича типларга ажратилиб, ҳар бир типдаги мисол ва масалаларни ечиш учун методик кўрсатмалар берилди. Ўйлаймизки, қўлланма талабаларнинг математик қобилияти ва маданиятини шакллантирибгина қолмай, уларнинг математиканинг асосий курсларидан олган билим ва малакаларини ўрта мактаб математикаси билан боғлаш ҳамда уни такомиллаштиришга ҳам ёрдам беради. У яна шунингдек мисол ва масалалар ечиш методларидан рационал фойдаланишга, улар устида изланишга, мавжуд математик билим ва малакаларни унумли татбиқ қилишга ҳам ўргатади деган фикрдамиз.

Қўлланмани яратишда ундаги темаларга доир адабиётдан кенг фойдаланилди. Фойдаланилган адабиёт рўйхати китоб охирида келтирилган.

Қўлланмада қуйидаги белгилашлардан фойдаланилди:

1. N — натурал сонлар тўплами.
2. Z — бутун сонлар тўплами.
3. Q — рационал сонлар тўплами.

4. R — ҳақиқий сонлар тўплами.

5. C — комплекс сонлар тўплами.

6. $\{x|\ldots\}$ — ... хосса билан берилган x сонлар тўплами.

7. ∂f — таърифга кўра.

8 $\wedge$ — конъюнкция белгиси („ва").

9. $\vee$ — дизъюнкция белгиси („ёки").

10. $\forall$ — умумийлик квантори („ихтиёрий").

11. $\exists$ — мавжудлик квантори („мавжуд").

12. $g(x)|\varphi(x)$ — ифода $\varphi(x)$ кўпҳад $g(x)$ кўпҳадга қолдиқсиз бўлинишини билдиради.

13 $a \vdots b$ ифода a соннинг b сонга қолдиқсиз бўлинишини билдиради.

Қўлланманинг I — III боблари ҳамда „Ечилиши мураккаброқ бўлган масалалар" бўлими Т. Р. Толаганов томонидан, IV — VII боблари эса Т. Р. Толаганов ва А. А Норматовлар томонидан биргаликда ёзилган.

Қўлланмани нашрга тайёрлашда берган фойдали маслаҳатлари учун Низомий номидаги Тошкент Давлат педагогика институти алгебра ва сонлар назарияси кафедрасининг доценти Т. Ёқубов, геометрия кафедрасининг доценти Р. Юнусметов, математика ўқитиш методикаси кафедрасининг доценти С. А. Аҳмедов ҳамда В. И. Ленин номли Тошкент Давлат университетининг математика ўқитиш методикаси кафедрасининг доцентлари М. Сахаев, Д. Сатуболдиев ўртоқларга миннатдорчилик изҳор қиламиз.

Муаллифлар

I БОБ БУТУН СОНЛАР ВА КОМБИНАТОРИКА

1-§. Қолдиқли ва қолдиқсиз бўлиш

Ўрта мактаб математика курсидан маълумки, бутун сонлар тўплами $Z=\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ билан белгиланади.

Бутун сонларнинг бўлиниши деганда биз қолдиқли ва қолдиқсиз бўлишни тушунамиз.

a ва b бутун сонлар берилган бўлсин. Агар уларнинг бирини иккинчисига бўлсак, $a=bq+r$; $0\leqslant r<b$ ҳосил булади, бу ерда a — бўлинувчи, b — бўлувчи, q — бўлинма, r — қолдиқ дейилади. Агар $r\neq 0$ бўлса, қолдиқли бўлишга, агар $r=0$ бўлса, қолдиқсиз бўлишга эга бўламиз. 2, 3, 4, 5, 9, 10 га бўлиниш белгилари (аломатлари) мавжуд бўлиб, улардан масала ёки мисолларни ечишда фойдаланилади.

a сонни q га бўлганда r_1 қолдиқ, b ни q га бўлганда r_2 қолдиқ қолиб, $r_1=r_2$ бўлса, у ҳолда a ва b сонлар **тенг қолдиқли** сонлар деб аталади.

Бизга $a, b\in Z$ сонлар берилган бўлса,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=aA_2+b^2;\quad A_2=a+2b,$$
$$(a+b)^3=aA_3+b^3,\quad (a+b)^4=aA_4+b^4,\ \ldots$$

тенгликлардан $(a+b)^n=aA_n+b^n$ ни ёза оламиз.

Агар $b=1$ бўлса, $(a+1)^n=aA_n+1$,
агар $n=2k$, $b=-1$ бўлса, $(a-1)^n=aA_n+1$,
агар $n=2k+1$, $b=-1$ бўлса, $(a-1)^n=aA_n-1$
ларни ҳосил қиламиз.

1-теорема. *Агар a сон b га қолдиқсиз бўлиниб, $|b|>|a|$ бўлса, у ҳолда $a=0$ бўлади.*

2-теорема. *a бутун соннинг b сонга қолдиқсиз бўлиниши учун $|a|\,\vdots\,|b|$ бўлиши зарур ва етарлидир.*

3-теорема. *Агар $a_i\,\vdots\, b$, $i=\overline{1, n}$, $a_i\in N$ бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\,\vdots\, b$ бўлади.*

1-мисол. 5^{19} ни 4 га бўлгандаги қолдиқни топинг.

Ечиш. $5^{19}=(4+1)^{19}=4A_{19}+1$, демак, қолдиқ $r=1$ бўлар экан.

2-мисол. $(3^{198} - 7^{17})$ айирмани 2 га бўлгандаги қолдиқни топинг.

Ечиш. $3^{198} - 7^{17} = (2+1)^{198} - (6+1)^{17} = 2A_{198} + 1 - 6A_{17} - 1 = 2A_{198} - 6A_{17}$, бундан қолдиқ $r = 0$ га тенг экани келиб чиқади.

Машқлар

1. Агар айирмада камаювчини n марта камайтирилса, айрилувчини n марта камайтирилса ёки камаювчи ва айирмани n марта камайтирилса, айирма қандай ўзгаришини аниқланг.

2. Агар икки сон кўпайтмасида кўпаювчини n марта орттирилса ёки кўпайтирувчини k марта камайтирилса ёки ҳар иккаласини бир вақтда мос ҳолда n ва k марта орттирилса кўпайтма қандай ўзгаради?

3. Агар қолдиқли бўлишда бўлинувчи ва бўлувчини n марта орттирилса ёки камайтирилса қолдиқ қандай ўзгаради?

4. Агар қолдиқли бўлишда бўлинма бир неча сонларнинг йиғиндисидан иборат бўлиб, қўшилувчилардан бирини бўлувчига каррали сон қадар орттирилса ёки камайтирилса қолдиқ ўзгармаслигини исботланг.

5. Агар қолдиқли бўлишда кўпайтма n та бутун сон кўпайтмасидан иборат бўлиб, кўпайтувчилардан бирини бўлувчига каррали сон қадар орттирилса ёки камайтирилса қолдиқ ўзгармаслигини исботланг.

6. Берилган бўлинувчини шундай сонга кўпайтирингки, бўлинма ўзгармасин.

7. Қолдиқли бўлишда қандай шарт бажарилганда, a сонни b ва $b+1$ сонларга бўлганда бўлинмада бир хил сон ҳосил бўлади?

8. Агар кетма-кет келган учта натурал сондан уч хонали сон тузилган бўлса, уни тескари тартибда ёзиб, сўнгра каттасидан кичигини айирганда ҳосил бўлган сонни 198 га бўлганда қолдиқда ноль ҳосил бўлишини исботланг.

9. Берилган уч хонали сон билан унга тескари тартибда олинган сон орасидаги фарқ 9 га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

10. Ихтиёрий бир хил рақамдан ташкил топган уч хонали сонни 37 га бўлганда қолдиқ ноль бўлишини исботланг.

11. 3^{110} ни 7 га бўлгандаги қолдиқни топинг.

12. 5^{1985} ва 9^{17} сонларининг айирмасини 4 га бўлганда қолдиқ нолга тенг бўлишини исботланг.

13. Икки натурал соннинг ҳар бирини 3 га бўлганда бирикчисининг қолдиғи 1, иккинчисиники 2 бўлса, уларнинг кўпайтмасини 3 га бўлганда қолдиқ 2 бўлишини исботланг.

14. Агар $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ва $b_1, b_2, \ldots, b_n$ бутун сонларни мос ҳолда k натурал сонга бўлганда қолган қолдиқлар тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{ва} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i \quad \text{ёки} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i \quad \text{ва} \quad \prod_{i=1}^{n} b_i$$

сонларни ҳам k га бўлганда қолган қолдиқлар тенг бўлишини исботланг.

15. Кетма-кет келган ихтиёрий учта натурал соннинг кўпайтмаси 6 га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

16. Кетма-кет келган ихтиёрий тўртта натурал соннинг кўпайтмаси 24 га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

17. $n(n+1)(n+2)(n+3)+7$ сонни 3 га бўлгандаги қолдиқ 7^{1986} сонни 6 га бўлгандаги қолдиққа тенг эканини исботланг.

18. Берилган ихтиёрий $n \in N$ сон учун $n^4+6n^3+11n^2+6n$ сон 24 га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

19. Берилган ихтиёрий $n \in N$ учун $n(n^2-1)(n^2-5n+26)$ сон 120 га каррали эканини исботланг.

20. Берилган ихтиёрий $a, b \in N$ сонлар учун $ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ сон 5 га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

21. Қуйидаги сонларни бўлишдаги қолдиқни топинг:

а) 15^{256} ни 17 га; б) 6^{592} ни 11 га; в) $7^{100}+17^{100}$ ни 13 га; г) $13^{16}-2^{25}\cdot 5^{15}$ ни 3 га ва 37 га; д) $(116+17^{17})^{21}$ ни 8 га; е) $3^{333}+1$ ни 5 га; ж) $43^{43}-17^{17}$ ни 10 га.

2-§. Туб ва мураккаб сонлар

Таъриф. 1) Агар берилган $a>1$ натурал сон фақат иккита (бир ва шу соннинг ўзи) бўлувчига эга бўлса, у ҳолда *a туб сон* дейилади.

2) Агар $a>1$ натурал соннинг бўлувчилари иккитадан ортиқ бўлса, *a мураккаб сон* дейилади.

1 туб сон ҳам, мураккаб сон ҳам эмас, чунки унинг бўлувчиси битта, у ҳам бўлса унинг ўзи.

Берилган a мураккаб соннинг бирдан фарқли энг кичик бўлувчиси туб сон бўлиб, у $\sqrt{a}$ дан катта бўлолмайди. Бундан a мураккаб соннинг туб бўлувчиларини излашда фойдаланилади. a сондан катта бўлмаган туб сонлар жадвалини тузиш учун *Эратосфен ғалвири* деб аталадиган усул мавжуд бўлиб, бу усул бўйича сонлар кетма-кетлигида бирдан фарқли d_1 туб сон топилиб, сўнгра p_1 га каррали бўлган сонлар ўчирилади. Сўнгра p_2 га каррали бўлганлари ўчирилади ва ҳоказо; маълум қадамдан сўнг 1 дан a гача бўлган натурал сонлар орасида фақат туб сонларгина ўчирилмай қолади. Натижада 1 дан a гача бўлган барча туб сонлар ҳосил бўлади.

Ҳар қандай мураккаб a сонни $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$ шаклда ёзиш мумкинлигини эслатиб ўтамиз, бу ёзув a соннинг каноник ёйилмаси дейилади. Бу ерда α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ лар $p_1, p_2, \dots, p_n$ туб сонларнинг a га қандай (неча) карралик билан кирганлигини билдиради.

Берилган a соннинг ихтиёрий бўлувчисини қуйидаги $L=p_1^{\beta_1}\dots p_n^{\beta_n}$ кўринишда тасвирлаш мумкин. Бу ерда β_i лар $0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i$, $i=\overline{1, n}$ шартни қаноатлантиради.

Масалан, $48 = 2^4 \cdot 3$ кўринишида тасвирлаш мумкин, 48 нинг бўлувчиларини топишда эса (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 ларни ҳосил қилиш учун) $2^4 \cdot 3$ нинг ўзидан фойдаланилади, яъни $2^0 \cdot 3^0$; $2^1 \cdot 3^0$; $2^2 \cdot 3^0$; $2^1 \cdot 3^1$; $2^0 \cdot 3^1$; $2^3 \cdot 3^0$; $2^2 \cdot 3$; $2^3 \cdot 3$; $2^4 \cdot 3^0$; $2^4 \cdot 3$ ҳосил бўлади.

Агар $\tau(a)$ орқали a натурал соннинг барча турли натурал бўлувчилари сонини, $s(a)$ орқали эса шу бўлувчилар йиғиндисини белгиласак, у ҳолда $\tau(48) = 10$, $s(48) = 124$ га тенг бўлади.

Теорема. *Агар a натурал соннинг каноник ёйилмаси $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$ бўлса, у ҳолда*

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_n + 1),$$

$$s(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}$$

бўлади.

Мисол. 21 ва 56 сонлари орасидаги туб сонлар жадвали тузилсин.

Ечиш. Бунинг учун 21 дан 56 гача бўлган сонлар жадвалини тузиб оламиз. Сўнгра 2 га, 3 га, 5 га, 7 га, 11 га, 13 га, 17 га, 19 га, 23 га каррали бўлган сонларни ўчирамиз, яъни:

~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~, 31, ~~32~~, ~~33~~, ~~34~~, ~~35~~, ~~36~~, 37, ~~38~~, ~~39~~, ~~40~~, 41, ~~42~~, 43, ~~44~~, ~~45~~, ~~46~~, 47, ~~48~~, ~~49~~, ~~50~~, ~~51~~, ~~52~~, 53, ~~54~~, ~~55~~, ~~56~~.

Натижада 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 туб сонлар қолади.

Машқлар

22. 2320 ва 2350 сонлар орасида туб сон бор ёки йўқлигини аниқланг.

23. Қуйидаги сонларни туб купайтувчилар кўпайтмаси кўринишида тасвирланг:

420, 126, 525, 529, 1514, 1817, 67283,
1224433, 221703, 28303937, 3082607,
138364854, 16304642, 121844682.

24. $2^{18} + 3^{18}$ ни туб кўпайтувчиларга ажратинг, унинг каноник ёйилмасини тузинг.

25 n нинг барча натурал қийматларида $n^4 + 4$ мураккаб сон эканини исботланг.

26. Агар $4p^2 + 1$ ва $6p^2 + 1$ лар туб сонлар бўлса, у ҳолда p туб сонни топинг.

27. Агар $p+10$ ва $p+14$ лар туб сонлар бўлса, у ҳолда p туб соннинг қийматини топинг.

28. Агар m ва n натурал сонларни 3 га бўлганда қолдиқда 1 ва 2 ҳосил бўлиб, $b>3$ бўлса, у ҳолда b, $b+m$, $b+n$ сонлар бир вақтда туб сон бўла олмаслигини исботланг.

29. Барча $2p+1$ (p — туб сон) бутун сонлар ичида ягона шундай сон мавжудки, фақат угина тўлиқ куб ҳосил қилишини кўрсатинг

30. $p>5$ туб соннинг квадрати 30 га бўлинганда қолдиқда 1 ёки 19 ҳосил бўлишини кўрсатинг.

31. Агар p ва q туб сонлар бўлиб 3 дан катта бўлса, у ҳолда p^2-q^2 сон 24 га каррали эканини кўрсатинг.

32. Агар берилган A сонни $A=a^2+b^2=c^2+d^2$ кўринишда тасвирлаш мумкин булса, у ҳолда A мураккаб сон эканини исботланг. (a, b, c, d — бутун сонлар).

33. 235^2+972^2 ни кўпайтувчиларга ажратинг.

34. $3^{10}+3^5+1$ сонни кўпайтувчиларга ажратинг.

35. n натурал соннинг шундай қийматини топингки, n, $n+10$, $n+14$ ва $n+20$ сонлари туб сонлар бўлсин.

36. Қуйидаги сонлар 1) $p+5$ ва $p+10$. 2) p; $p+2$; ва $p+5$; 3) 2^n-1 ва 2^n+1 (бунда $n>2$) бир вақтда туб сонлар бўла олмаслигини исботланг.

37. Агар p ва $8p^2+1$ туб сонлар бўлса, у ҳолда $8p^2+2p+1$ сон ҳам туб сон эканини исботланг.

3-§. Эвклид алгоритми. ЭКУБ ва ЭКУК ни топиш

Берилган сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси ёки энг кичик умумий бўлинувчисини топиш масаласи бевосита Эвклид алгоритми тушунчаси билан боғлиқдир. Берилган a ва b $(a>b)$ натурал сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси (ЭКУБ) $D(a, b)$ учун Эвклид алгоритмидан фойдаланамиз, яъни:

$$\begin{array}{ll}
a=bq_1+r_1 & 0\leqslant r_1<b;\\
b=r_1q_2+r_2, & 0\leqslant r_2<r_1;\\
r_1=r_2q_3+r_3, & 0\leqslant r_3<r_2;\\
\dots\dots\dots\dots & \\
r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n, & 0\leqslant r_n<r_{n-1};\\
r_{n-1}=r_n q_{n+1}, & r_{n+1}=0.
\end{array}$$

Ҳосил қилинган нолдан фарқли a ва b сонларнинг ЭКУБи $r_n=D(a, b)$ дан иборат бўлади. Агар берилган $a, b, c, \dots, l$ сонларнинг ЭКУБ ни топиш талаб қилинса, Эвклид алгоритми ёрдамида: $d_1=D(a, b)$, сўнгра $d_2=D(d_1\ c)$ ва ҳоказо, маълум $(n-1)$ қадамдан кейин $d_{n-1}=D(d_{n-2}, l)$ ҳосил бўлади. Натижада $d_{n-1}=$

$= D(a, b, c, \ldots, l)$ бўлади. Берилган a ва b сонларнинг энг кичик умумий карралиси (ЭКУК) ни $K(a, b)$ орқали белгилаймиз.

Мисол. 2346 ва 646 сонларининг ЭКУБ ва ЭКУК ни топинг.

Ечиш. Бунинг учун Эвклид алгоритмини татбиқ қиламиз, яъни:

$$\begin{array}{r|l} -\,2346 & 646 \\ 1938 & 3 \end{array}\quad
\begin{array}{r|l} -\,646 & 408 \\ 408 & 1 \end{array}\quad
\begin{array}{r|l} -\,408 & 238 \\ 238 & 1 \end{array}\quad
\begin{array}{r|l} -\,238 & 170 \\ 170 & 1 \end{array}\quad
\begin{array}{r|l} -\,170 & 68 \\ 136 & 2 \end{array}\quad
\begin{array}{r|l} -\,68 & 34 \\ 68 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Демак, охирги нолдан фарқли қолдиқ 34 бўлиб, у берилган сонларнинг ЭКУБидир, яъни:

$$34 = D(2346, 646),$$

$$K(2346, 646) = \frac{2346 \cdot 646}{34} = 44574 \text{ (ЭКУК)}$$

бўлади. Бу мисолни яна туб кўпайтувчиларга ажратиш усули билан ҳам ечиш мумкин, яъни:

$$2346 = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 23$$

$$646 = 2 \cdot 17 \cdot 19$$

$$D(2346, 646) = 2 \cdot 17 = 34 \text{ (ЭКУБ)}$$

$$K(2346, 646) = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 = 44574 \text{ (ЭКУК)}$$

ҳосил қилинади. Шундай қилиб, ҳар икки усулда ҳам берилган мисол ечилади.

Машқлар

Қуйидаги сонларнинг ЭКУБ ни топинг:

38. 420, 126, 525

39. 67283, 122433, 221703.

40. 549493, 863489.

41. 476, 1258, 21114.

42. 19074, 13566, 8211. **43.** 1073, 3683, 34481.
44. 1012, 1474, 4598. **45** 874, 1518, 20142.
46. 2227, 9911, 952.

Қуйидаги сонларнинг ЭКУБ ва ЭКУК ни топинг:

47. 1403, 1058. **48.** 36372, 147220.
49. 10140, 92274. **50.** 35574, 192423.
51. 56595, 82467. **52.** 24700, 33250.
53. 3640, 14300. **54.** 41382, 103818.
55. 3327449, 6314153. **56.** 17930199, 4345121.

57. 48 ва 129 сонларининг бўлувчилари сони ва бўлувчилари йиғиндисини топинг.

58. 54, 88, 144 ва 162 сонларининг бўлувчилари ва бўлувчилар йиғиндисини топинг.

59. 720 ва 1200 сонларининг бўлувчилари сонини топинг.

60. Берилган $m \in N$ сон учун m^{m+1} ва $(m+1)^m$ сонларини таққосланг.

61. $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ сонлар учун $2a_{n+1}a_n < a_{n+2}^2 < (a_{n+1} + a_n)^2 + a_0$ ўринли эканини исботланг.

62. Агар $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + n$ a_n. $n \in N$ бўлса, $n^2 + 2n < a_n + a_{n+1} < (n+2)^2$ эканини исботланг.

63. $\overline{1234\,xy}$ сони 8 ва 9 га қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда x ва y рақамларни топинг ва $\overline{1234\,xy}$ ва $\overline{y\,1234\,x}$ ни таққосланг.

64. Агар берилган $\overline{xyp\,138}$ сонни 7 га бўлганда, $\overline{138\,xyp}$ сонни 13 га бўлганда қолдиқда 6 сони ҳосил бўлса ва $\overline{x\,1y3p\,8}$ сонни 11 га бўлганда қолдиқда 5 сони ҳосил бўлса, x, y ва p рақамларини топинг ва ҳосил бўлган сонларнинг энг каттасини ажратинг.

65. Берилган сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси (ЭКУБ) ни топинг. $D(a, b) = d$

а) 1232, 1672; б) 135, 8211; в) 549, 387; г) 12606, 6494; д) 29719, 76501; е) 459459, 519203; ж) 738089, 3082607.

66. Берилган сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчисини топинг:

$$K(a, b) = \frac{ab}{D(a, b)}$$

1) 18, 42; 2) 35, 84; 3) 16, 42, 54;

4) 36, 86, 94; 5) 3640, 14300; 6) 420, 126, 525.

67. Қуйидаги касрларни қисқартиринг:

1) $\frac{17501}{11137}$; 2) $\frac{1491}{2247}$; 3) $\frac{237419}{294817}$; 4) $\frac{1253}{406}$;
5) $\frac{438875}{747843}$; 6) $\frac{127936}{161919}$; 7) $\frac{2227}{9911}$; 8) $\frac{22243}{23777}$;
9) $\frac{2405}{4433}$; 10) $\frac{3587}{2743}$.

68. Қуйидаги сонларнинг ЭКУБ ни топинг:

1) $d = D(a, b)$; $m = K(a,b)$.
2) ab ва $m = K(a, b)$.
3) $a + b$ ва ab; $D(a, b) = 1$.

69. Қуйидагиларни топинг:

$D(n;\ 2n + 1)$, $D(10n + 9;\ n + 1)$. $D(3n + 1;\ 10n + 3)$.

70 Фақат ва фақат $x = K(a, b)$ бўлган ҳолдагина $D\left(\frac{x}{a};\ \frac{x}{b}\right) = 1$ бўлишини исботланг.

71. Берилган a, b ва c тоқ сонлар учун $D(a, b, c) = D\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$ эканини исботланг.

72 Қуйидаги системани натурал қийматларда ечинг:

$\begin{cases} x + y = 150, \\ D(x, y) = 30; \end{cases}$ $\begin{cases} D(x, y) = 45, \\ x : y = 11 : 7; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 8400, \\ D(x, y) = 20; \end{cases}$

$\begin{cases} x : y = 5 : 9, \\ D(x, y) = 28; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 20, \\ K(x, y) = 10. \end{cases}$

73. Берилган a, b, c мусбат бутун сонлар учун қуйидаги

$$K(a, b, c) = \frac{abc\, D(a, b, c)}{D(a, b)\, D(a, c)\, D(b, c)}$$

ва

$$D(a, b)\, D(a, c)\, D(b, c)\, K(a, b)\, K(a, c)\, K(b, c) = a^2b^2c^2$$

муносабатларни исботланг.

74. Берилган a ва b натурал сонлар учун $D(a, b) = D(5a + 3b;\ 13a + 8b)$ муносабат ўринли эканини исботланг.

75. Агар $D(a, b) = 1$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{a} + \frac{1}{a + b}$ каср қисқармас эканини исботланг.

4-§. Биринчи даражали аниқмас тенгламаларни ечиш

Берилган касрни занжирли касрга айлантириш тушунчаси бизга алгебра ва сонлар назарияси фанидан маълумдир.

1-мисол. $\frac{539}{103}$ сонини занжирли касрга айлантиринг.

Ечиш. Бунинг учун каср суратини унинг махражига бўламиз, яъни

$$\begin{array}{r|l} 539 & 103 \\ -515 & 5 \\ \hline 103 & 24 \\ -96 & 4 \\ \hline 24 & 7 \\ -21 & 3 \\ \hline 7 & 3 \\ -6 & 2 \\ \hline 3 & 1 \\ -3 & 3 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Демак, $\frac{539}{103} = 5 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}} = [5; 4, 3, 2, 3]$.

Агар α сонни занжирли касрга ёйганда $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ ҳосил бўлиб $\frac{P_k}{Q_k}$, $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ қўшни яқинлашувчи каср бўлса, у ҳолда

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| \leqslant \frac{1}{Q_k Q_{k+1}}$$

муносабатнинг ўринли эканлигини кўриш мумкин.

Маълумки, занжирли касрнинг шартидан

$$\frac{P_0}{Q_0} = a_0, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}, \ldots, \frac{P_k}{Q_k} = \frac{a_k P_{k-1} + P_{k-2}}{a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}$$

муносабатлар аниқлангандир.

Мисол: $\frac{2517}{773} = [3; 3, 1, 9, 2, 2, 1, 2]$

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1} = 3; \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{10}{3}; \ \ldots$$

K	0	1	2	3	4	5	6	7
a_k	3	3	1	9	2	2	1	2
P_k	3	10	13	127	267	661	928	2517
Q_k	1	3	4	39	82	203	285	773

$$\left|\frac{2517}{773} - \frac{127}{39}\right| < \frac{1}{39 \cdot 82} = \frac{1}{3198}$$

эканини ҳисобга олсак, у ҳолда $\frac{2517}{773} \approx \frac{127}{39}$ бўлишини кўриш мумкин.

Агар берилган α сонни занжирли касрга ёйишда

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2\ a_3\ a_2, a_3, \ldots] = [a_0; a_1, (a_2, a_3)]$$

натижа олинса, бу натижада a_2 ва a_3 ларнинг такрорланишини кўрамиз.

2-мисол. $142x + 82y = 6$ тенгламанинг бутун ечимларини топинг.

Ечиш. $D(142, 82) = 2$; $6:2$ бундан тенглама ечимга эга эканлигини кўриш мумкин. Бундан $71x+41y=3$ натижани ҳосил қиламиз, сўнгра

$$\frac{71}{41} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2].$$

Энди барча яқинлашувчи касрларни тузамиз:

$$\frac{P_0}{Q_0} = 1; \quad \frac{P_1}{Q_1} = 2; \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{5}{3}; \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{7}{4}; \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{19}{11};$$
$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{26}{15}; \quad \frac{P_6}{Q_6} = \frac{71}{41}.$$

Яқинлашувчи касрнинг

$$P_{k-1} Q_k - P_k Q_{k-1} = (-1)^k \quad \text{хоссасига кўра}$$

$26 \cdot 41 - 71 \cdot 15 = (-1)^6$ ёки $71 \cdot (-15) + 41 \cdot 26 = 1$ ни ҳосил қиламиз, сўнгра иккала томонни 3 га кўпайтириб $71 \cdot (-45) + 41 \cdot (78) = 3$ га кўра $x_0 = -45$, $y_0 = 78$ хусусий ечимларни ҳосил қиламиз, умумий ечим эса

$$\begin{cases} x = -45 + 41t, \\ y = 78 - 71t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4 + 41t, \\ y = 7 - 71t; \end{cases}$$

бу ерда $t \in Z$.

3-мисол. Юк ташувчи ташкилотдан 53 т юкни бир қатновда ташиб бериш илтимос қилинди. Бу ташкилот юкни ташиш учун юк кўтариш қуввати 3,5 ва 4,5 тоннали автомашиналардан ажратди. Ташкилот ҳар бир тур машинадан нечтадан ажратган?

Ечиш. Юк ташувчи ташкилот машиналарнинг 3,5 т лисидан x та, 4,5 т лисидан эса y та ажратган бўлсин, у ҳолда

$$3{,}5x + 4{,}5y = 53$$

тенглама ҳосил бўлади.

$$35x+45y=530 \text{ ёки } 7x+9y=106.$$

$$\frac{7}{9}=[0; 1, 2, 3]$$

K	0	1	2	3
a_k	0	1	3	2
P_k	0	1	3	7
Q_k	1	1	4	9

ҳосил қилинган жадвалдан кўриниб турибдики,
$3\cdot 9-4\cdot 7=-1 \Rightarrow 7\cdot 4-9\cdot 3=1 \Rightarrow 7\cdot(4\cdot 106)+ +9\cdot((-3)\cdot 106)=106$; $x_0=4\cdot 106$, $y_0=-3\cdot 106$, $x=4\cdot 106+9t$, $y=(-3)\cdot 106-7t$, $t\in Z$.

Энди ечимлардан мусбатини ажратамиз:

$$\begin{cases} 4\cdot 106+9t\geqslant 0, \\ -3\cdot 106-7t\geqslant 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t\geqslant -47\frac{1}{9}, \\ t\leqslant -45\frac{3}{7}. \end{cases}$$

$t\in Z$ экани ҳисобга олинса, $t_1=-46$, $t_2=-47$ бўлиб, t_1 учун $x_1=10$, $y_1=4$, t_2 учун эса $x_2=1$, $y_2=11$ ҳосил бўлади. Демак, биринчи ҳол учун 3,5 т дан 10 та, 4,5 т лидан эса 4 та, иккинчи ҳол учун 1 та ва 11 та ажратилган.

Машқлар

Касрларни занжирли касрларга ёйинг:

76. $\frac{323}{17}$; 77. $\frac{135}{279}$; 78. $\frac{-187}{63}$; 79. $\frac{30}{37}$;

80. $\frac{-12}{5}$; 81. $\frac{127}{52}$; 82. 1,23; 83. $\frac{71}{41}$.

Занжирли касрга кўра соннинг ўзини топинг:

84. [2; 1, 3, 4, 1, 2]. 85. [0; 3, 1, 2, 7].
86. [2; 1, 1, 6, 8]. 87. [−1; 1, 2, 4, 5].
88. [0; 1, 4, 3, 2]. 89. [−3; 1, 1, 2].

Қуйидаги тенгламаларни Z да ечинг:

90. $143x+169y=5$. 91. $237x+44y=1$.

92. $275x + 145y = 10.$ 93 $3x + 8y = 5.$
94 $2x + 5y = 7.$ 95. $5x + 28y = 59.$
96. $12x + 7y = 41.$ 97. $4x + 14y = 7.$
98 $12x - 7y = 29.$ 99. $8x - 13y = 63.$
100. $7x - 19y = 23$ 101. $39x - 22y = 10.$
102. $122x + 129y = 2.$ 103. $258x - 172y = 56.$
104. $26x + 34y = 13.$ 105. $45x - 37y = 25.$
106 $70x + 33y = 1.$ 107. $60x - 91y = 2.$

108. 440 кг донни ташиш учун 60 ва 80 кг ли қоплар мавжуд. Шу донни ташиш учун ҳар бир хил қопдан нечтадан олинган?

109. Кинотеатрга тушиш учун 14,9 сўмга 0,3 ва 0,5 сўмлик билетлардан сотиб олинди. Ҳар бир хил билетдан нечтадан сотиб олинган?

5-§. $[x]$ ва $\{x\}$ сонли функциялар

Маълумки, $[x]$ — антъе икснинг аниқланиш соҳаси ҳақиқий R сонли тўпламдан иборат бўлиб, сон қиймати x дан катта бўлмаган бутун сондан иборатдир.

Масалан, $[3,45] = 3$, $[5,55] = 5$, $[-3,99] = -4$,

$\left[-7\frac{1}{3}\right] = -8$ кўринишида изланади.

$\{x\}$ — функция олиши мумкин бўлган қийматлар соҳаси R — ҳақиқий сонли тўплам $\{x\} = x - [x] \Longrightarrow$ $\Longrightarrow [x] + \{x\} = x$, яъни: $\{x\}$ сони x сонининг каср қисмидан иборат бўлади.

1-мисол: $\{3,25\} = 3,25 - [3,25] = 3,25 - 3 = 0,25.$

$$\{-3,25\} = -3,25 - [-3,25] = -3,25 - (-4) = \\ = -3,25 + 4 = 0,75.$$

Маълумки, $x \in R$ учун $[x] \leqslant x < [x] + 1$ ёки $x - 1 < [x] \leqslant x$ билан аниқланади. Агар $x_1, x_2 \in Z$ сонлар берилган бўлса, $[x_1 + x_2] = [x_1] + [x_2]$; x учун эса $\left[\frac{x}{m}\right] = \left[\frac{[x]}{m}\right]$; $m \neq 0$, $x \in Z$ тенгликлар ўринлидир.

2-мисол: $[ax] = m$, $a \neq 0$, $x \in R$ тенгламани ечинг. $[x]$ нинг таърифига кўра, берилган тенгламани $ax = m + \alpha$ кўринишда ёзиш мумкин, бунда $0 \leqslant \alpha < 1$ ва $a \neq 0$ бўлиб, $x = \frac{m+\alpha}{a}$ бўлади.

Машқлар

110. Қуйидаги сонларнинг бутун қисмини топинг:

а) $\left[\frac{8}{3}\right]$, в) $\left[-3\frac{1}{2}\right]$, д) $[\sqrt[3]{30}]$, ж) $[\sqrt{175}+1]$,

б) $[2{,}8]$, г) $[\sqrt{13}]$, е) $[\sqrt[4]{200}]$, з) $\left[\frac{\sqrt{542}+2}{3}\right]$,

и) $[2-\lg 2512]$.

111. Агар $x, y \in R$ бўлса $[x+y] \geqslant [x]+[y]$ эканини исботланг.

112 m нинг қандай қийматида $[12{,}4\,m] = 86$ тенглик ўринли бўлади?

113. Агар $\theta \in R$ бўлиб, $0 \leqslant \theta < 1$ бўлса, $[\theta] + \left[\theta + \frac{1}{2}\right] = [2\theta]$ эканини исботланг.

114. Агар $p > 2$ туб сон бўлса, $\left[\frac{p}{4}\right]$ сони $\frac{p-1}{4}$ ёки $\frac{p-3}{4}$ сонларидан бирига тенг бўлишини исботланг.

115. Агар $a = mq + r$ бўлса, у ҳолда $\left[\frac{a}{m}\right] = \frac{a-r}{m}$ бўлишини исботланг.

116. Агар $n \in N$ бўлса, $\frac{[nx]}{n} \leqslant x \leqslant \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n}$ эканини исботланг.

117. Берилган $x, y \in Z$, $n \in N$ учун $\left[\frac{x+y}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right] + \left[\frac{y}{n}\right]$ ёки $\left[\frac{x+y}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right] + \left[\frac{y}{n}\right] + 1$ эканини исботланг.

118. Тенгламани ечинг:

1) $[x^2] = 2$; 2) $[3x^2 - x] = x + 1$;

3) $[x] = \frac{3}{4}x$; 4) $[x^2] = x$.

119. Агар $x_i \in R$, $i = \overline{1, n}$ бўлса, $\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \geqslant \sum_{i=1}^{n} [x_i]$ эканини исботланг.

120. Агар $x \in R$, $n \in N$ бўлса, $[nx] \geqslant n[x]$ эканини исботланг.

121. Агар $D(a, 4) = 1$ бўлса, $\left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{2a}{4}\right] + \left[\frac{3a}{4}\right] = \frac{3(a-1)}{2}$ эканини исботланг.

122. Агар $m = 2, 3, 4, \ldots$ бўлса, у ҳолда $\left[\frac{x}{m}\right] = \left[\frac{x}{m-1}\right]$ тенгламани ечинг.

123. Берилган $[ax^2 + bx + c] = d$, $a \neq 0$, $d \neq 0$ бутун сонлар учун тенглама ечимининг мавжудлик шартини топинг.

124. Қуйидагиларни топинг:

а) $\{2{,}6\}$; в) $\{7\}$; д) $\{0{,}4\}$; ж) $\{-4{,}8\}$;

б) $\left\{\frac{8}{3}\right\}$; г) $\{-4{,}35\}$; е) $\left\{-2\frac{1}{2}\right\}$; з) $\{-0{,}5\}$.

125. 600 нинг бўлувчилари йиғиндисини топинг.

126. 90 ва 360 сонларининг бўлувчиларини топинг.

127. $S(m) = 2m - 1$ шартни қаноатлантирувчи $m \in N$ чексиз эканини исботланг.

128. $\tau(m)$ ва $S(m)$ функциялар учун $D(m_1, m_2) = 1$ бўлганда $\tau(m_1 m_2) = \tau(m_1)\tau(m_2)$, $S(m_1 m_2) = S(m_1) S(m_2)$ эканини исботланг.

129. Берилган n ва $\tau(m^n)$ ўзаро туб сон эканини исботланг.

6-§. Систематик сонлар

Математикада сонларни асосан ўнли саноқ системасида қараймиз. Лекин ўнли саноқ системасидан ташқари саноқ системалари ҳам мавжуд бўлиб, улар устида алгебраик амалларни бажариш мумкин.

Мисол. 165 сонини $g = 5$ саноқ системасида ёзинг.

$$
\begin{array}{r|l}
165 & 5 \\
\underline{15} & 33 \\
15 & \\
\underline{15} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
33 & 5 \\
\underline{30} & 6 \\
3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
6 & 5 \\
\underline{5} & 1 \\
1 &
\end{array}
$$

Демак, $165 = 1130_5$ бўлар экан ёки $1130_5 = 1 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 0 = 125 + 25 + 15 + 0 = 165$.

1-мисол. 1130_5 ва 2313_5 сонларнинг йиғиндисини топинг.

Ечиш.

$$
\begin{array}{r}
1130_5 \\
+\;2313_5 \\
\hline
3443_5
\end{array}
$$

Демак, $1130_5 + 2313_5 = 3443_5$ бўлади.

2-мисол. Берилган систематик касрларни ўнли саноқ системасидаги касрга ўтказинг.

а) $2{,}3_4$; б) $0{,}04_5$; в) $2{,}012_3$.

Ечиш.

а) $2{,}3_4 = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$; б) $0{,}04_5 = 0 + \frac{0}{5} + \frac{4}{5^2} = \frac{4}{25}$;

в) $2{,}013_3 = 2 + \frac{0}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} = \frac{54+0+3+2}{3^3} = \frac{59}{27}$.

3-мисол. Берилган касрларни оддий касрга айлантиринг.

а) $0{,}0(2)_4$; б) $0{,}1(4)_7$; в) $0,\ (23)_6$.

Ечиш.

а) $0{,}0(2)_4 = \left(\frac{2}{3 \cdot 10}\right)_4 = \left(\frac{1}{2 \cdot 3}\right)_4 = \left(\frac{1}{12}\right)_4$;

б) $0{,}1(4)_7 = \left(\frac{14-1}{6 \cdot 10}\right)_7 = \left(\frac{13}{6 \cdot 10}\right)_7 = \left(\frac{5}{30}\right)_7$;

в) $0{,}(23)_6 = \left(\frac{23}{55}\right)_6 = \left(\frac{3}{10}\right)_6$.

Умуман қайси саноқ системасини ишлатишдан қатъи назар ўнли саноқ системасининг қонуниятлари бажарилишини кўряпмиз.

Машқлар

Берилган a ва b сонларни g системага ўтказинг:

130. $a = 18535$, $b = 430$, $g = 7$.
131. $a = 1445$, $b = 650$, $g = 3$.
132. $a = 853$, $b = 33$, $g = 4$.
133. $a = 121$, $b = 4731$, $g = 8$.
134. $a = 1653_7$, $b = 201$, $g = 4$.
135. $a = 3745_9$, $b = 40$, $g = 6$.
136. $a = 15_6$, $b = 3571_8$, $g = 10$.
137. $a = 132_4$, $b = 443_5$, $g = 2$.
138. $a = 4321_5$, $b = 13$, $g = 8$.
139. $a = 201_3$, $b = 6514_7$, $g = 5$.
140. $a = 136$, $b = 2632$, $g = 7$.
141. $a = 101_2$, $b = 3542_6$, $g = 3$.
142. $a = 111_2$, $b = 3546_7$, $g = 4$.

Қуйидаги ўнли касрларни аввал берилган саноқ системасида, сўнгра ўнли саноқ системасидаги оддий каср кўринишида ёзинг.

143. $2{,}114_8$. **144.** $35{,}13_7$ **145.** $2{,}224_6$. **146.** $3{,}201_5$. **147.** $1{,}1\ (6)$.
148. $4{,}2(3)_5$. **149.** $2{,}1(2)_7$. **150.** $5{,}01(3)_6$.

Қуйидаги касрларни аввал шу саноқ системасида, сўнгра ўнли саноқ системасида ёзинг.

151. $\left(\frac{112}{100}\right)_3$. **152.** $\left(\frac{311}{1000}\right)_5$. **153.** $\left(\frac{1}{122}\right)_4$. **154.** $\left(\frac{31}{120}\right)_6$. **155.** $\left(\frac{27}{30}\right)_9$.
156. $\left(\frac{17}{40}\right)_9$. **157.** $\left(\frac{103}{10}\right)_7$. **158.** $\left(\frac{13}{20}\right)_4$. **159.** $\left(\frac{101}{20}\right)_3$. **160.** $\left(\frac{64}{30}\right)_7$.
161. $\left(\frac{331}{40}\right)_5$. **162.** $\left(\frac{1}{3}\right)_6$.

Қуйидаги амалларни бажаринг:

163. $(235)_6 + (233)_6$.
164. $(221)_3 + (241)_5$.
165. $(243)_5 + (264)_7$.
166. $(233)_4 + (221)_3$

167. $(243)_5 \cdot (12)_3$.

168. $(35)_6 \cdot (101)_2$.

169. $(674)_8 \cdot (15)_6$.

170. $(856)_9 \cdot (10)_2$.

171. $(3753)_8 : (33)_4$.

172. $(83421)_9 : (834)_9$.

173. $(5432)_7 : (62)_8$.

174. $(4667)_8 : (321)_4$.

175. $\left(\frac{33}{10}\right)_4 + \left(\frac{21}{55}\right)_6$.

176. $\left(\frac{21}{100}\right)_3 + \left(\frac{33}{45}\right)_6$.

177. $\left(\frac{21}{100}\right)_3 \cdot \left(\frac{12}{121}\right)_3$.

178. $\left(\frac{64}{55}\right)_7 \cdot \left(\frac{33}{142}\right)_5$.

7-§. Комбинаторика (бирлашмалар) ва бином

Комбинаторика — дискрет математиканинг бир бўлими бўлиб, асосан чекли тўпламлар устида иш кўради.

Комбинаторика берилишига кўра такрорланадиган ва такрорланмайдиган:

1) ўринлаштириш;
2) ўрин алмаштириш;
3) группалаш турларига ажралади.

Маълумки, m та элементдан n тадан олиб тузилган ($m > n$, $m \leqslant n$) такрорланувчи ўринлаштиришлар сони $B_m^n = m^n$ га тенг бўлиб, такрорланмайдиган ўринлаштиришлар сони эса $A_m^n = m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)$ га тенг бўлади. (Бу ерда A — arangiment — сўзи лотинча бўлиб, ўринлаштиришни билдиради.)

1-мисол. Нолдан фарқли иккита рақамдан нечта ҳар хил уч хонали сонни ҳосил қилиш мумкин?

Ечиш. Ҳар хил уч хонали изланган сонлар сони $B_2^3 = 2^3 = 8$ га тенг бўлади.

2-мисол. 30 кишилик мажлис учун раис ва секретарни неча хил усул билан сайлаш мумкин?

Ечиш. Мажлисда 30 киши бўлса, ундан икки кишини сайлаш керак. Улардан бири раис, иккинчиси секретарь бўлади. Демак, $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$ хил усул билан.

Агар $A_m^n = m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)$ берилган бўлса, ундан $A_m^n = mA_{m-1}^{n-1}$; $A_m^n = m(m-1)A_{m-2}^{n-2}$; $A_m^n = \frac{m}{m-n} A_{m-1}^n$; $A_m^n = \frac{1}{m-n} A_m^{n+1}$ каби натижаларни ҳосил қилиш мумкин.

m та элементдан m тадан олиб тузилган такрорланмайдиган ўрин алмаштиришлар сони $P_m = m!$ га тенг (бу ерда P — permutatsia — сўзи логинча бўлиб, ўрин алмаштиришни билдиради)

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6; \quad P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24;$$

$$P_m = mP_{m-1}; \quad P_m = A_m^n P_{m-n}; \quad A_m^n = \frac{P_m}{P_{m-n}}.$$

m та элементдан n тадан олиб тузилган группалашлар сони $C_m^n = \dfrac{A_m^n}{P_n}$ га тенгдир, яъни

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}.$$

Группалашнинг асосий хоссаси $C_m^n = C_m^{m-n}$ дан иборатдир, чунки

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{P_m}{P_{m-n}P_n} = \frac{P_m}{P_{m-(m-n)}P_{m-n}} = \frac{A_m^{m-n}}{P_{m-n}} = C_m^{m-n}$$

$$C_m^n = C_m^{m-n}$$

бўлади.

3-мисол. Берилган $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$ тенгликни исботланг.

Исботи. Берилган $C_m^n = \dfrac{P_m}{P_nP_{m-n}}$; $C_m^{n+1} = \dfrac{P_m}{P_{n+1}P_{m-n-1}}$ эканини ҳисобга олсак, у ҳолда

$$C_m^n + C_m^{n+1} = \frac{P_m}{P_nP_{m-n}} + \frac{P_m}{P_{n+1}P_{m-n-1}} =$$

$$= \frac{P_m}{P_n}\left(\frac{1}{P_{m-n}} + \frac{1}{(n+1)P_{m-n-1}}\right) = \frac{P_m(m+1)}{P_n(n+1)P_{m-n}} =$$

$$= \frac{P_{m+1}}{P_{n+1}P_{(m+1)-(n+1)}} = C_{m+1}^{n+1}.$$

Демак, $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$ ҳосил бўлади.

Бизга n та элементли A тўплам берилган бўлсин дейлик $A = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{m} B_\alpha$ ва $B_i \cap B_j = \varnothing$; $i, j = \overline{1,m}$ шарт бажарилсин. A тўплам элементларининг сонини $N(A) = n$ орқали белгиласак, у ҳолда унинг қисм тўпламлари учун $N(B_1)=k_1$; $N(B_2)=k_2$; $N(B_3)=k_3$ ... $N(B_m)=$ $=k_m$ ҳосил қилиб, бундан $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$ эканлиги келиб чиқади.

Кўриниб турибдики, B_1 тўпламни A тўпламдан $C_n^{k_1}$ усул билан ажратиш мумкин, у ҳолда қолган $n-k_1$ элементдан B_2 тўпламни $C_{n-k_1}^{k_2}$ усул билан ажратиш мумкин ва ҳоказо. Натижада B_1, B_2, ..., B_m тўпламларни ажратиш ва кўпайтириш қоидасига асосан

$$C_n^{k_1}\cdot C_{n-k_1}^{k_2}\cdot C_{n-k_1-k_2}^{k_3}\ldots C^{k_m}_{n-\sum\limits_{j=1}^{m-1}k_j}=$$

$$=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1})!}{k_m!(n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1})!}=\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$$

ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, n та элементдан $b_1, b_2, \ldots, b_m$ элементлари $k_1, k_2, \ldots, k_m$ марта такрорланувчи $\sum\limits_{i=1}^{m}k_i=n$ ўрин алмаштирувчилар сони $N(k_1, k_2, \ldots, k_m)=\dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$ га тенг бўлар экан.

4-мисол. Шахмат тахтасининг биринчи чизиғига 2 та от, 2 та фил, 2 та рух, Фарзин, Шохни неча хил усул билан жойлаштириш мумкин?

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $k_1=2$, $k_2=2$, $k_3=$ $=2$, $k_4=1$, $k_5=1$, $\sum k_i=8$.

Демак, $N(2, 2, 2, 1, 1)=\dfrac{8!}{2!2!2!1!1!}=5040$ ҳосил бўлади.

Ўрта мактаб математикасидан маълумки, $(a+b)^2=$ $=a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Бундан $(a+b)^3=\sum\limits_{k=0}^{3}C_3^k a^{3-k}b^k$ кўринишида ёзиш мумкин.

Демак, $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$ экани келиб чиқади.

Агар бу ерда $n-k=\alpha$, $k=\beta$ деб $\alpha+\beta=n$ эканини ҳисобга олиб юқорида келтирилган формулага қўллasак, у ҳолда $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\times$

$\times a^{n-k} b^k = \sum\limits_{\substack{\alpha,\ \beta=0 \\ \alpha+\beta=n}}^{n} \frac{n!}{\alpha!\ \beta!} a^{\alpha} b^{\beta}$ кўринишдаги формула ҳосил бўлиб, бу формула биномал коэффициентининг такрорланувчи ўрин алмаштириш билан ифодаланган кўриниши бўлади. Бу қоидани m та қўшилувчининг n- даражаси учун ҳам ёзиш мумкин:

$$\underbrace{(a+b+\ \ldots\ +c)}_{m}{}^{n} = \sum_{\substack{\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \gamma=0 \\ \alpha+\beta+\ \ldots+\gamma=n}}^{n} \frac{n!}{\alpha!\beta!\ \ldots\ \gamma!} a^{\alpha} b^{\beta}\ \ldots\ c^{\gamma}.$$

Машқлар

179. Юқорида келтирилган мулоҳазалар ёрдамида қуйидагиларни ҳисобланг:

а) A_{15}^4; г) B_4^5; ж) C_5^2;

б) A_4^2; д) P_5; з) C_{10}^3;

в) B_5^4; е) C_4^3; и) C_{15}^4.

180. Тенгсизликларни текширинг:

а) $C_{13}^m < C_{13}^{m+2}$; г) $2C_m^5 > 11C_{m-2}^3$;

б) $C_{18}^{m-2} > C_{18}^m$; д) $C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} < 10$;

в) $5C_m^3 < C_{n+2}^3$, $m,\ n \in \mathrm{N}$: е) $A_{m+1}^4 : C_{m-1}^{m-3} > 14P_3$.

181. Қуйидагиларни исботланг:

а) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$;

б) $C_m^n + C_{m-1}^n + \ldots + C_{m-10}^n = C_{m+1}^{n+1} - C_{m-10}^{n+1}$;

в) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$;

г) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

д) $C_n^0 + 2C_n^1 + \ldots + (n+1)C_n^n = (n+2)\,2^{n-1}$.

182. Қуйидаги (x_n); $x_n = C_{n+5}^4 - \frac{143}{96} \cdot \frac{P_{n+5}}{P_{n+3}}$ $(n \in \mathrm{N})$ кетма-кетликда нечта манфий хад борлигини аниқланг.

183. Қуйидаги кетма-кетлик (x_n); $x_n = \frac{195}{4P_n} - \frac{A_{\;-3}}{P_{n+1}}$ да нечта мусбат ҳад борлигини аниқланг.

184. $x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_4}$ кетма-кетликнинг манфий ҳадлари сонини топинг.

185. Етти киши неча хил усул билан кассага навбатга туриши мумкин?

186. Иккала рақами жуфт сон бўлган нечта икки хонали сон мавжуд?

187 Тенгламаларни ечинг (бу ерда $x \in \mathbf{N}$):

а) $C_{2x}^{x+1} = \frac{2}{3} C_{2x+1}^{x-1}$; б) $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$;

в) $3C_{x+1}^2 - 2A_x^2 = x$; г) $C_{x+1}^2 = \frac{4}{5} C_x^3$;

д) $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$; е) $A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1)$;

ж) $C_{x+1}^{x-4} = \frac{17}{15} A_{x+1}^3$; з) $C_{x+1}^3 : C_x^4 = 6:5$;

и) $C_{x+1}^2 \cdot A_x^2 = (A_{2x}^1)^3 + 4x^3$; к) $3C_{x+1}^2 + P_2 x = 4A_x^2$;

л) $P_{x+3} = 720A_x^5 P_{x-5}$; м) $A_{x+3}^2 = C_{x+2}^3 + 20$.

188. Текисликда берилган n та нуқтадан ҳар иккитасини бирлаштирувчи нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

189. Берилган 10 та бир хил мукофотни, ҳар бири ҳеч бўлмаганда биттадан мукофот оладиган қилиб 6 та ўқувчи орасида неча хил усул билан бўлиш мумкин?

190. Берилган бином $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^6$ ёйилмаси ўрта ҳадининг коэффициентини топинг.

191. Агар бином $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^n$ ёйилмасининг бешинчи ҳади x га боғлиқ бўлмаса, A_n^2 ни ҳисобланг.

192. Берилган бином $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$ ёйилмасида x қатнашмаган ҳад коэффициентини топинг.

193. Агар бином $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ ёйилмасидаги ҳадларининг бирида a нинг даражаси 7 га тенг бўлса, шу ҳаднинг саноғини топинг.

194. Агар $C_m^3 : C_m^2 = 4:1$ бўлса, бином $\left(\sqrt[3]{a} + \frac{a}{\sqrt{a^{-1}}}\right)^m$ ёйилмасининг иккинчи ҳадини топинг.

195. Берилган $\left(x^2 + \frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)^n$ бином ёйилмаси коэффициентларининг йиғиндиси 2048 га тенг бўлса, ёйилма учинчи ҳадининг коэффициентини топинг.

196. Берилган бином $\left(x^4 - \frac{2}{x}\right)^m$ ёйилмасининг биринчи учта ҳади коэффициентларининг йиғиндиси 97 га тенг бўлса, x^4 даража сақлаган ҳаднинг коэффициентини топинг.

II БОБ. АЙНИЙ ШАКЛ АЛМАШТИРИШЛАР. АЙНИЯТЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ИСБОТЛАШ

1-§. Рационал ифодалар устида айний шакл алмаштириш

Маълумки, математикада турли масалаларни ечиш учун ҳарфлар билан ифодаланадиган формулалар келтириб чиқарилади ва бу ифодада қатнашаётган амалларнинг қандай кетма-кетликда бажарилиши аниқланади. Ана шу ифодалар (формулалар) берилишига қараб рационал, иррационал, трансцендент ифодалар деб аталади.

1-таъриф. *Рационал ифода* деб рационал сонлар майдонида аниқланган x, y, z, ... ўзгарувчилар ва шу соҳадан олинган a, b, c ... сонлар устида қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш (нолга бўлишдан ташқари) амаллари билан боғланган алгебраик ифодага айтилади.

Агар $P(x, y, \ldots)$ рационал ифода $Q(x, y, \ldots)$ ва $G(x, y, \ldots)$ ифодаларнинг бўлинмасидан иборат бўлса, у ҳолда $P(x, y, \ldots)$ ифода каср рационал ифода дейилади.

Берилган рационал ифодадаги ҳарфларнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами шу рационал ифоданинг аниқланиш соҳаси дейилади.

Рационал ифодалар кўпинча Q ёки R майдонларда қаралади ва шу майдонларда соддалаштирилади. Рационал ифодаларнинг соҳаси аниқлаб олингандан кейин тегишли шакл алмаштиришлар бажарилади.

2-таъриф. Берилган

$$F(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) \tag{1}$$

рационал ифода қаралаётган B соҳада

$$\frac{P(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c)}{G(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c)} \tag{2}$$

қисқармас рационал касрга айнан тенг бўлса $\left(F=\frac{P}{G}, G \neq 0\right)$, (2) ифода (1) нинг айний шакл алмаштирилган натижаси дейилади.

Рационал ифодаларни айний шакл алмаштиришларда фойдаланиладиган айрим теоремаларни келтирамиз.

1-теорема. *Икки $f(x)$ ва $\varphi(x)$ кўпҳад айнан тенг бўлиши учун уларнинг мос ҳадлари коэффициентлари тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

2-теорема. *Агар $f(x)$ кўпҳад ўзаро туб бўлган $g(x)$ ва $\varphi(x)$ кўпҳадларнинг ҳар бирига бўлинса, у ҳолда $f(x)$ кўпҳад $g(x)\varphi(x)$ га ҳам бўлинади.*

3-теорема. *Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ кўпҳадларнинг ҳар бири $g(x)$ га қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси $f(x)+\varphi(x)$ ҳам $g(x)$ га қолдиқсиз бўлинади.*

$$\forall f(x),\ \varphi(x),\ g(x) \in R : (g(x)/f(x) \wedge g(x)/\varphi(x)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g(x)/(f(x)+\varphi(x)).$$

4-теорема. *$f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ кўпҳадни $(x-\alpha)$ га бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқ $f(x)$ нинг $x=\alpha$ даги қийматига тенгдир:*

$$Қ=f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_1\alpha+a_0.$$

Исботи. Изланаётган бўлинма $(n-1)$ - даражали кўпҳад бўлиб, қолдиқ эса даражаси 1 дан кичик кўпҳад бўлгани сабабли бу қолдиқ бирор сондан иборат бўлиб қолади. Демак, ушбу

$$f(x)=(x-\alpha)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_0)+Қ$$

айниятдаги $f(\alpha)$ қолдиқнинг қиймати x нинг ҳамма қийматлари учун бир хилдир.

Энди $x=\alpha$ деб $f(\alpha)=Қ$ га эга бўламиз. Теорема исбот қилинди.

Кўпинча $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ кўпҳадни $(x-\alpha)$ га бўлишда бўлинма ва қолдиқ коэффициентларини қуйидагича топилади: изланаётган бўлинманинг бўлувчига кўпайтмаси билан $f(\alpha)$ нинг йиғиндиси $f(x)$ га тенг бўлиши керак, яъни $f(x)=(x-\alpha)g(x)+Қ$. Бундан $b_{n-1}=a_n$; $b_{n-2}-\alpha b_{n-1}=a_{n-1}$ ... ёки $b_{n-1}=a_n$; $b_{n-2}=a_{n-1}+\alpha b_{n-1}$; $b_{n-3}=a_{n-2}+\alpha b_{n-2}$; ... $Қ=a_0+\alpha b_0$ бўлади. Бу натижани қуйидаги жадвал кўринишида тасвирлаймиз.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_0
α	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=a_{n-1}+\alpha b_{n-1}$	$b_{n-3}=a_{n-2}+\alpha b_{n-2}$	...	$Қ=a_0+\alpha b_0$

Бу схема *Горнер схемаси* дейилади.

1-мисол. Ифодани соддалаштиринг:

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + 1\right).$$

Ечиш. $f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + 1\right) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{x} \cdot \dfrac{x-2-(x-1)+(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}, \\ x(x-1)(x-2) \neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+1}{x(x-1)}, \\ x(x-1)(x-2) \neq 0. \end{cases}$$

Демак, $f(x) \overset{\partial f}{=} \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+1}{x(x-1)}, \\ x(x-1)(x-2) \neq 0. \end{cases}$

Мисол. Ифодани соддалаштиринг:

$$f(a, b, c) \overset{\partial f}{=} \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)}.$$

Ечиш.

$$f(a, b, c) \overset{\partial f}{=} \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a-b} - \dfrac{1}{a-c} + \dfrac{1}{b-c} - \dfrac{1}{b-a} + \dfrac{1}{c-a} - \dfrac{1}{c-b}, \\ \dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \dfrac{1}{a-b} - \dfrac{1}{a-c};\ a \neq b;\ a \neq c;\ b \neq c \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} + \dfrac{1}{c-a}, \\ a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{a-b} + \dfrac{2}{b-c} + \dfrac{2}{c-a}, \\ a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c. \end{cases}$$

Демак, $f(a, b, c) \overset{\partial f}{=} \begin{cases} \dfrac{2}{a-b} + \dfrac{2}{b-c} + \dfrac{2}{c-a}, \\ a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c. \end{cases}$

2-мисол. $f(x)=2x^5-3x^4+6x^3-8x^2+3$ кўпҳадни R ва C майдонларда кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. Аввал $f(x)$ кўпҳад R сонли майдонда рационал илдизга эга ёки эга эмаслигини аниқлаймиз, бунинг учун:

1) озод ҳад $a_0=3$ нинг бўлувчилари ± 1; ± 3 дан;

2) бош ҳад коэффициенти $a_5=2$ нинг бўлувчилари ± 1; ± 2 дан иборат эканини ҳисобга олган ҳолда $f(x)$ нинг рационал илдизлари тўплами ушбу $B=\left\{-3; -\frac{3}{2}; -1; -\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 3\right\}$ тўпламнинг қисми ёки ўзидан иборат эканлигини Горнер схемаси ёрдамида аниқлаймиз:

	2	−3	6	−8	0	3
1	2	−1	5	−3	−3	0
1	2	1	6	3	0	
$-\frac{1}{2}$	2	0	6	0		

Демак, $f(x)$ кўпҳаднинг рационал илдизлар тўплами $A=\left\{1, 1, -\frac{1}{2}\right\}$ бўлиб, у B нинг қисм тўпламидан иборат бўлади ($A\subset B$), бундан, R да: $f(x)=(x-1)^2\times(2x+1)(x^2+3)$; C да: $f(x)=(x-1)^2(2x+1)(x+i\sqrt{3})(x-i\sqrt{3})$.

3-мисол. $f(x)=x^4-x^3-x^2+2x-2$ кўпҳадни R да кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. 1. Группалаш усули бўйича кўпайтувчиларга ажратамиз: $f(x)=x^4-x^3-x^2+2x-2=x^4-x^3-2x^2+x^2+2x-2=(x^4-2x^2)-(x^3-2x)+(x^2-2)=x^2(x^2-2)-x(x^2-2)+(x^2-2)=(x^2-2)(x^2-x+1)$.

2. Икки алгебраик кўпҳаднинг тенглиги шартидан фойдаланиб кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$f(x)=x^4-x^3-x^2+2x-2=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d).$$

Қавсларни очиб, сўнгра коэффициентларни тенглаштирамиз, натижада

$$\begin{cases} a+c=-1, \\ b+ac+d=-1, \\ ad+bc=2, \\ bd=-2 \end{cases}$$

система ҳосил бўлиб, бундан $a=0$, $b=-2$, $c=-1$, $d=1$ ёки $a=-1$, $b=1$, $c=0$, $d=-2$ қийматларни аниқлаймиз. Демак,

$$f(x)=x^4-x^3-x^2+2x-2=(x^2-2)(x^2-x+1).$$

4-мисол. Ифодани соддалаштиринг:

$$f(x, y, z)=\frac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{yz(y-z)+zx(z-x)+yx(y-x)}.$$

Ечиш.

$$f(x, y, z)=\frac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{yz(y-z)+xy(x-y)+zx(z-x)}, \\ y-z=-(z-x)-(x-y), \\ \{<x, y, z>\in R^3 \mid x\neq y\neq z\neq 0\} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{-zy(z-x)-yz(x-y)+xz(z-x)+xy(x-y)}, \\ \{<x, y, z>\in R^3 \mid x\neq y\neq z\neq 0\}. \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)}{(x-y)(z-x)(z-y)}, \\ \{<x, y, z>\in R^3 \mid x\neq y\neq z\neq 0\} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z, \\ \{<x, y, z>\in R^3 \mid x\neq y\neq z\neq 0\}. \end{cases}$$

Демак, $f(x, y, z)=x+y+z$.

Машқлар

Кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратинг:

1. $f(x)=x^4+x^2+1$.
2. $f(x)=x^{16}-1$.
3. $f(x)=x^8+x^4+1$.
4. $3x^8-x^{16}+1$.
5. $2x^4+x^3+4x^2+x+2$.
6. $x^4-12x^3+47x^2-60x$.
7. x^5+x^4+1.

Симметрик кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратинг:

8. $6x^4 - 11x^3y - 18x^2y^2 - 11xy^3 + 6y^4$.

9. $2x^4 - x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 + 2y^4$.

10. $2x^4 + 7x^3y + 9x^2y^2 + 7xy^3 + 2y^4$.

11. $2x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + 2y^4$.

12. $18a^4 - 21a^3b - 94a^2b^2 - 21ab^3 + 18b^4$.

13. $3x^4 - 8x^3y + 14x^2y^2 - 8xy^3 + 3y^4$.

14. $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

15. $(x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$.

16. $(x + y)(x + z)(y + z) + xyz$.

Антисимметрик кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратинг:

17. $y^2z^2(y^2 - z^2) + x^2z^2(z^2 - x^2) + x^2y^2(x^2 - y^2)$.

18. $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$.

19. $(b - c)(b + c)^2 + (c - a)(c + a)^2 + (a - b)(a + b)^2$.

20. $a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$.

21. $x(y + z)(y^2 - z^2) + y(z + x)(z^2 - x^2) + z(y + x)(x^2 - y^2)$.

22. $(y - z)^5 + (z - x)^5 + (x - y)^5$.

Агар $a + b + c = 0$ бўлса, қуйидаги айниятларнинг ўринли эканини исботланг:

23. $a^2(b + c)^2 + b^2(c + a)^2 + c^2(a + b)^2 + (a^2 + b^2 + c^2)(ab + ac + bc) = 0$.

24. $a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(a + c) = 0$.

25. $a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$.

26. $2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$.

27. $(x - a)^3 + (x - b)^3 + (x - c)^3 + 3abc = x^3$,

$$x = (a + b + c) : 2.$$

28. $a(x - b)(x - c) + b(x - a)(x - c) + c(x - a)(x - b) + 2(x - a)(x - b)(x - c) = abc$.

$$x = (a + b + c) : 2.$$

Қуйидаги ифодаларни соддалаштиринг:

29. $$\frac{1}{(p + q)^3}\left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3}\right) + \frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right) + \frac{6}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

30. $$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} - \frac{4x^3}{1+x^4} - \frac{8x^7}{1+x^8}.$$

31. $$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{a+c}{(a-b)(b-c)}.$$

32. $$\frac{(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3}{(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3}.$$

33. $\left(\frac{a^2-ax}{a^2x+x^3}-\frac{2a^2}{x^3-ax^2+a^2x-a^3}\right)\left(1-\frac{x-1}{a}+\frac{x}{a^2}\right)$.

34. $\frac{a+3}{2a-1}-\frac{a^2-5}{4a^2-4a+1}-\frac{2a^2-a(1-5a)-1}{8a^3-12a^2+6a-1}$.

R да келтирилмайдиган қуйидаги кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратинг:

35. x^6+27.

36. x^4+3x^2+4.

37. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$.

38. $27x^3-27x^2+18x-4$.

39. x^4+y^4.

40. x^4+4y^4.

41. $3x(y+z)+y(3z+2x)+z^2+2(x^2+y^2)$

кўпҳадни C майдонда номаълум коэффициентлар ёрдамида кўпайтувчиларга ажратинг.

42. a ва b номаълум коэффициентларни топинг:

$$(x+4)(x+5)(x-3)=x^3+ax^2+bx-60.$$

2-§. Иррационал ифодаларни айний шакл алмаштириш

Математикада кўп учрайдиган амаллардан бири илдиз чиқариш амалидир. Агар берилган алгебраик ифодаларда тўрт арифметик амалдан ташқари илдиз чиқариш амали ҳам қатнашса, бундай ифодалар *иррационал ифодалар* деб аталади. Маълумки, n-даражали илдиз чиқариш амали манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар тўплами R да ўзаро бир қийматли аниқланади. Манфий бўлмаган $a\in R$ соннинг n-даражали ($n\in N$) арифметик илдизи деб n-даражаси a га тенг бўлган сонга айтилади ва $\sqrt[n]{a}$ каби белгиланади. Шартга кўра $(\sqrt[n]{a})^n=a$, $a>0$.

Теорема. *Ҳар қандай манфий бўлмаган ҳақиқий соннинг n-даражали арифметик илдизи ягона манфий бўлмаган ҳақиқий сондир.*

Масалан, 1) $\sqrt{4}=2$, бу ерда арифметик илдиз 2.

2) $\sqrt[3]{-8}=-2$, бу ерда -2 арифметик илдиз бўла олмайди, чунки бу ҳолда $a\geqslant 0$ шарт бузилади;

3) $\sqrt{x^2}=|x|$, бу ерда арифметик илдиз;

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{агар } x\geqslant 0 \text{ бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Иррационал ифодалар қуйидаги хоссаларга эга:

1. Агар $a_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,n}$, $n \in \mathrm{N}$ бўлса, у ҳолда

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a_n}.$$

2. Агар $a \geqslant 0$, $b > 0$ бўлиб, $n \in \mathrm{N}$ бўлса, у ҳолда

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

3. $\forall a \in \mathrm{R}^+,\ n,\ k \in \mathrm{N} : (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$.
4. $\forall a,\ b \in \mathrm{R}^+,\ n \in \mathrm{N} : \sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$.
5. $\forall a,\ b \in \mathrm{R}^+,\ n \in \mathrm{N} : a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.
6. $\forall a \in \mathrm{R}^+,\ n,\ k \in \mathrm{N} : \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.
7. $\forall a \in \mathrm{R}^+,\ n,\ k \in \mathrm{N} : \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$.
8. $\forall a,\ b \in \mathrm{R}^+,\ m,\ n \in \mathrm{N} : \sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{b} \Rightarrow a^n > b^m$.

1-мисол. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{3}}$ ифоданинг махражини иррационалликдан қутқаринг.

Ечиш. Маълумки, $(a - b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$. Шунинг учун $a = \sqrt[4]{7}$, $b = \sqrt[4]{3}$ десак,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt[4]{7^3} + \sqrt[4]{7^2 \cdot 3} + \sqrt[4]{7 \cdot 3^2} + \sqrt[4]{3^3})}{(\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{7^3} + \sqrt[4]{7^2 \cdot 3} + \sqrt[4]{7 \cdot 3^2} + \sqrt[4]{3^3})} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{1372} + \sqrt[4]{588} + \sqrt[4]{252} + \sqrt[4]{108}}{4}.$$

2-мисол. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$ ифоданинг махражини иррационалликдан қутқаринг.

Ечиш. Бизга маълумки $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ва $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$ формулаларга асосан $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$, $u = a + b + c$, $v = \sqrt[3]{abc}$ деб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc}}{a + b + c - 3\sqrt[3]{abc}} =$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}}{(a+b+c)^3-27abc}[(a+b+c)^2+$$

$$+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}].$$

3-мисол Агар $n>3$ бўлса, $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$ эканини исботланг.

Исботи. Бунинг учун 8-хоссага асосан $n^{n+1}>(n+1)^n$ тенгсизликни исботлаш етарли, яъни

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}<1 \Longleftrightarrow \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1 \Longleftrightarrow \frac{1}{n}\left(1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}<1.$$

Тенгсизлик исбот қилинди.

4-мисол. $S=\frac{1}{a^2c}\sqrt{3a^8c^4d}+\frac{2}{ac^2}\sqrt{12n^6c^6d}-a^4c^2\times$

$\times\sqrt{\frac{3d}{a^4c^2}}$ ифодани соддалаштиринг.

Ечиш. Агар берилган ифодани соддалаштиришда унинг аниқланиш соҳаси аввалдан берилмаган бўлса, у ҳолда аниқланиш соҳаси топиб олинади.

$$a\in R\setminus\{0\},\ c\in R\setminus\{0\},\ d\in R^+$$

бўлишини ҳисобга олсак,

$$S=\frac{1}{a^2c}\sqrt{3a^8c^4d}+\frac{2}{ac^2}\sqrt{12a^6c^6d}-a^4c^2\sqrt{\frac{3d}{a^4c^2}}=$$

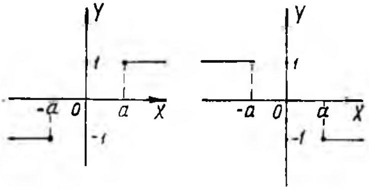
$$=\frac{1}{a^2c}|a^4c^2|\sqrt{3d}+\frac{2}{ac^2}\cdot 2|a^3c^3|\sqrt{3d}-\frac{a^4c^2}{|a^2c|}\sqrt{3d}=$$

$$=\left(a^2c+\frac{4|a^3|}{a}|c|-a^2|c|\right)\sqrt{3d}=$$

$$=\begin{cases} 4a^2c\sqrt{3d}, \text{ агар } a>0,\ c>0 \text{ бўлса,}\\ -4a^2c\sqrt{3d}, \text{ агар } a<0,\ c>0 \text{ бўлса,}\\ -2a^2c\sqrt{3d}, \text{ агар } a>0,\ c<0 \text{ бўлса,}\\ 6a^2c\sqrt{3d}, \text{ агар } a<0,\ c<0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

5-мисол. Функциянинг графигини ясанг:

$$y=\frac{x\sqrt{x^4-a^4}}{a(x^2-a^2)}\sqrt{\frac{1-a^2/x^2}{1+x^2/a^2}}.$$



1- чизма.

Ечиш. Бу функциянинг графигини ясаш учун аввал унинг аниқланиш соҳаси B ни топиб оламиз:

$$((x^4 - a^4 > 0 \wedge \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \geqslant 0 \wedge |x| \neq |a| \wedge a \neq 0) \Longrightarrow B =]-\infty; -|a|[\cup]|a|; +\infty[.$$

Энди функциянинг ўнг томонида айний шакл алмаштириш бажариб, уни

$$y = \frac{x}{a} \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)}}{x^4 - a^4} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}} \frac{|a|}{|x|} =$$

$$= \frac{x|a|}{a|x|} \frac{x^2 - a^2}{x^2 - a^2} = \frac{x|a|}{a|x|}$$

кўринишга келтирамиз. Бунда икки ҳол бўлиши мумкин:

а) агар $a > 0$ бўлса, у ҳолда

$$y = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{агар } x > a \text{ бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x < -a \text{ бўлса;} \end{cases}$$

б) агар $a < 0$ бўлса, у ҳолда

$$y = -\frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1, & \text{агар } x > -a \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x < a \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Агар $a = 0$ бўлса, функция маъносини йўқотади. Энди функциянинг графигини чизамиз (1- чизма).

Машқлар

Қуйидаги илдизлардан ε аниқликда тақрибий илдиз чиқаринг.

43. $3\sqrt{0{,}07}$, $\varepsilon = 0{,}01$.

44. $\sqrt{43\frac{5}{7}}$, $\varepsilon = \frac{1}{8}$.

45. $\sqrt{7\frac{3}{11}}$, $\varepsilon = \frac{2}{9}$.

46. $\sqrt{4 + \sqrt{2{,}5}}$, $\varepsilon = 0{,}01$.

47. $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$, $\varepsilon = 0{,}01$.

48. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, $\varepsilon = 0{,}1$.

49. $\dfrac{13-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$, $\varepsilon = 0{,}01$. 50. $\dfrac{36-5\sqrt{17}}{2-5\sqrt{17}}$, $\varepsilon = 0{,}01$.

Қуйидаги амалларни бажаринг.

51. $\sqrt{54}+4\sqrt{6}-3\sqrt{216}+\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{3}{2}}-3\sqrt{98}$.

52. $\sqrt{125}+3\sqrt{45}+\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{1}{5}}-0{,}7\sqrt{5}-0{,}2\sqrt{0{,}2}$.

53. $(0{,}6\sqrt{200}-5\sqrt{0{,}02})+(4{,}5\sqrt{0{,}5}+5\dfrac{1}{2}\sqrt{800})$.

54. $\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}}+\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{1}{5}}\right)-\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{27}-\dfrac{2}{3}\sqrt{20}\right)$.

Касрнинг махражини иррационалликдан қутқаринг:

55. $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

56. $\dfrac{2\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$.

57. $\dfrac{3}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

58. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3}$.

59. $\dfrac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}$.

60. $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$.

Қуйидаги функцияларнинг графигини ясанг:

61. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}{2}$.

62. $f(x)=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)$.

63. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x(x-2)^2}}{x-2}$.

64. $f(x)=\lg\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2x}+1}-\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2x}-1}}{\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2x}+1}+\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2x}-1}}$.

65. $$f(x) = \frac{2x\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)}}.$$

66. $$f(x) = \frac{x^2-x-2+(x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-2+(x+1)\sqrt{x^2-4}}.$$

Қуйидаги ифодаларни соддалаштиринг:

67. $$\left(\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{xy}\right):(x-y)+\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

68. $$\left(\sqrt{m}-\frac{mn^2+t}{\sqrt{mn^2-t}}\right):(n\sqrt{m}+n\sqrt{mn^2+t}).$$

69. $$\left(\frac{u+\sqrt{u^2-v^2}}{u-\sqrt{u^2-v^2}}-\frac{u-\sqrt{u^2-v^2}}{u+\sqrt{u^2-v^2}}\right):\frac{u\sqrt{u^2-v^2}}{\frac{1}{4}v^2};\quad u>v.$$

70. $$\left(\frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{y+1}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y}}\right):(2y+1)+\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}-1.$$

71. $$\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{b}{\sqrt{ab}-a}-\frac{b}{\sqrt{ab}+b}\right).$$

72. $$\left(\frac{y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\sqrt{x}\right):\left(\frac{y}{\sqrt{xy}-x}+\frac{x}{\sqrt{xy}+y}-\frac{x+y}{\sqrt{xy}}\right)$$

73. $$\left(\frac{\sqrt{x^3}-2}{\sqrt{x}-2x}+\sqrt{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^3}+2}{\sqrt{x}+2x}-\sqrt{x}\right):\frac{1+\frac{1}{4}x^2}{x-\frac{1}{4}}.$$

74. $$\left(\sqrt{m(1-m)}+\frac{\sqrt{m^3}}{\sqrt{1-m}}\right):\left(\frac{1}{1+\sqrt{m}}+\frac{\sqrt{m}}{1-m}\right)\quad 0<m<1.$$

75. $$\left(\frac{ab^3}{\sqrt{(a+b)^6}}-\frac{2ab^2}{\sqrt{(a+b)^3}}+\frac{a}{\sqrt{a+b}}\right):\frac{a^2}{\sqrt{(a+b)^5}}-\frac{a^2b}{\sqrt{(a+b)^7}}.$$

76. $$\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+x}\right);\quad x>0.$$

77. $\left(\frac{\sqrt[3]{a+b}}{\sqrt[3]{a-b}}+\frac{\sqrt[3]{a-b}}{\sqrt[3]{a+b}}-2\right):\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a-b}}-\frac{1}{\sqrt[3]{a+b}}\right)$; $a > b$.

78. $\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right):\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}$; $a>b$.

79. $\left(\frac{1+x+x^2}{2x+x^2}+2-\frac{1-x+x^2}{2x-x^2}\right)^{-1}(5-2x^2)$; $x=\sqrt{3{,}92}$.

80. $\frac{(x^2-y^3)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^3}-\sqrt[3]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^5}}-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$; $x=64$; $y=\frac{31}{78}$.

81. $$\frac{a^3-a-2b-\frac{b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}}\right)\cdot\left(a+\sqrt{a+b}\right)}:\left(\frac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}\right);\ a=23,\ b=22.$$

82. $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{a}+\frac{a}{\sqrt{2}}+2}-\frac{a^2\sqrt[4]{2}-2\sqrt{a}}{a\sqrt{2a}-\sqrt[4]{8a^4}}$.

83. $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)\left(a-\sqrt{a^3}\right)^{-1}$; $a > 0$, $a \neq 1$.

84. $\left(\frac{t\sqrt{t+2}}{\sqrt{t-2}}-\frac{2\sqrt{t-2}}{\sqrt{t+2}}-\frac{4t}{\sqrt{t^2-4}}\right)^{\frac{1}{2}}:\sqrt[4]{t^2-4}$; $|t| > 2$.

85. $$\frac{8-n}{2+\sqrt[3]{n}}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2+\sqrt[3]{n}}\right)-\left(\sqrt[3]{n}+\frac{2\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}-2}\right)\times$$
$$\times\frac{4-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2}+2\sqrt[3]{n}};\ n\neq\pm 8.$$

86. Агар $a \geqslant 0$, $b > 0$, $a^2 \geqslant b$ бўлса,

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

эканини исботланг.

3-§. Тенгсизликларни исботлаш

Математикада тенгсизлик тушунчаси кўп учрайдиган тушунчалардан биридир Тенгсизлик R сонли тўпламда қаралиб, шу тўпламдан олинган сонлар ёки алгебраик ифодаларни катта, кичик ва тенг тушунчалари ёрдамида боғлайди.

Сонли тенгсизликлар қуйидаги хоссаларга эга:

1. $\forall a, b, c \in \mathrm{R} : (a > b \wedge b > c) \Rightarrow (a > c)$.

2. $\forall a, b, m \in \mathrm{R} : (a > b) \Leftrightarrow (a + m > b + m \vee \vee a - m > b - m)$.

3. $\forall a, b, c, d \in \mathrm{R} : (a > b \wedge c > d \Leftrightarrow (a + c > > b + d)$.

4. $\forall a, b, c, d \in \mathrm{R} : (a > b \wedge c < d) \Rightarrow (a - c > > b - d)$.

5. $\forall a, b, c \in \mathrm{R} : a > b \wedge c > 0) \Rightarrow ac > bc$.

6. $\forall a, b, c \in \mathrm{R} : (a > b \wedge c < 0) \Rightarrow ac < bc$

7. $\forall a, b, c, d \in \mathrm{R}^+ : (a > b \wedge c > d) \Rightarrow ac > bd$.

8. $\forall a, b, c, d \in \mathrm{R}^+ : (a > b \wedge c < d) \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

1-теорема. *Бир неча мусбат соннинг ўрта арифметик қиймати шу сонларнинг ўрта геометрик қийматидан кичик эмас.*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

2-теорема. *Агар n та мусбат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сонларнинг кўпайтмаси бирга тенг бўлса, у ҳолда*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n.$$

3-теорема. *Ихтиёрий берилган $a_i > 0$ ва $b_i > 0$; $(i = \overline{1,n})$ учун*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

4-теорема. *(Гёльдер тенгсизлиги). Агар $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x > 0$, $y > 0$ бўлса, у ҳолда $xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.*

1-мисол. Агар $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ бўлса, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ ни исботланг.

Исботи. Биринчи усул:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b \geqslant 2\sqrt{ab}, \\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 \geqslant 4ab, \\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 \geqslant 0, \\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0. \end{cases}$$

Иккинчи усул: $[(a-b)^2 \geqslant 0 \wedge a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0] \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow [(a^2+b^2+2ab \geqslant 4ab) \wedge a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow [a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0 \wedge (a+b)^2 \geqslant 4ab] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow [a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0 \wedge a+b \geqslant 2\sqrt{ab}] \Longleftrightarrow$$

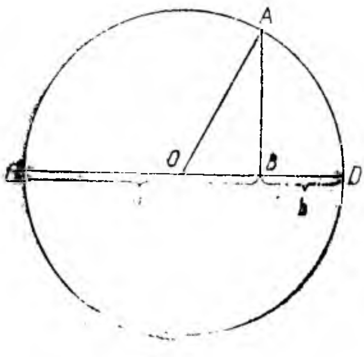
$$\Longleftrightarrow \left[a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0 \wedge \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}\right].$$

Учинчи усул: $|a|$ ва $|b|$ кесмаларни танлаб олиб, $|a+b|$ кесмага тенг диаметрли айлана чизамиз. Бунда a ёки b кесманинг иккинчи учидан $a+b$ диаметрга перпендикуляр бўлиб ўтган ватарнинг ярми ҳар доим диаметрнинг ярмидан кичик эканини аниклаш мумкин (2-чизма). Яъни $\triangle CAD$ дан: $a : AB = AB : b \Longrightarrow$ $\Longrightarrow AB^2 = ab \Longrightarrow AB = \sqrt{ab}$.

CD — гипотенуза, шунинг учун унинг узунлиги шу учбурчакнинг ихтиёрий катетидан узун, бундан $AO > > AB \Longrightarrow \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

2-мисол. Агар $a + b + c = 1$ бўлса, $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leqslant 5$ эканини исботланг.

Исботи. Бу тенгсизликни исботлаш учун 1 теоремадан фойдаланамиз: $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leqslant 5 \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow (\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leqslant 5 \wedge$



2-чизма.

$$\wedge a+b+c=1) \Longleftrightarrow (\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+$$
$$+\sqrt{4c+1}\leqslant\frac{4a+2}{2}+\frac{4b+2}{2}+\frac{4c+2}{2}\wedge a+b+c=1) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leqslant 2a+2b+2c+$$
$$+3\wedge a+b+c=1) \Longleftrightarrow (\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+$$
$$+\sqrt{4c+1}<2(a+b+c)+3\wedge a+b+c=1) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leqslant 5\wedge$$
$$\wedge a+b+c=1).$$

Демак, $a+b+c=1$ бўлганда $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+$ $+\sqrt{4c+1}\leqslant 5$ бўлади.

3-мисол. Қуйидаги тенгсизликни математик индукция методи билан исботланг:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Исботи. $n=1$ бўлганда $\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}=\frac{1}{2}$ тенгсизлик ўринли. Энди берилган тенгсизлик $n=k$ учун ўринли, яъни

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \qquad (1)$$

деб, унинг $n=k+1$ учун ўринли эканини кўрсатамиз:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+4}}. \qquad (2)$$

Бунинг учун (1) ни $\frac{2k+1}{2k+2}$ га кўпайтирамиз:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}.$$

Энди

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

тенгсизликни исботлаймиз, бунинг учун бу тенгсизликнинг иккала томонини квадратга кўтариб, сўнгра ихчамласак,

$$2k^3+28k^2+19k+4<12k^3+28k^2+20k+4$$

ҳосил бўлади, бу эса $k \geqslant 1$ бўлганда ўринлидир. Демак, $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Машқлар

87. $2a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2a(b + c)$.

88. $(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 8abc$; $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

89. $a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

90. $ab + bc + ac \geqslant \sqrt{abc}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$; $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

91. $a(1 + b) + b(1 + c) + c(1 + a) \geqslant 6\sqrt{abc}$; $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

92. $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$; $n \in \mathrm{N}$.

93. $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{m} < \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{m-1}$ $m < n$; $m, n \in \mathrm{N}$.

94. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{99}{100} < \frac{1}{12}$.

95. Агар $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathrm{R}^+$ бўлса, у ҳолда $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$ бўлишини исботланг.

96. $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2}$; $a_i, b_i \in \mathrm{R}$.

97. $\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i} \geqslant n : \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$; $a_i > 0$, $i = \overline{1, n}$.

98. Агар $x \geqslant -1$, $0 < \alpha < 1$ бўлса, $(1 + x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x$ бўлишини, агар $x \geqslant -1$ ва $\alpha < 0$ ёки $\alpha > 1$ бўлса, $(1 + x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$ бўлишини исботланг.

99. Агар $a, b \in \mathrm{R}^+$, $m \in Z$ (бутун сон) бўлса,

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m \geqslant 2^{m+1}$$

эканини исботланг.

100. Томонлари мос равишда a, b, c, d бўлган ихтиёрий тўртбурчакнинг юзи $S \leqslant \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ бўлишини исботланг.

101. $a, b, c \in \mathrm{R}$ ва $-1 \leqslant x \leqslant 1$ да $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$ бўлса, у ҳолда $|x| \leqslant 1$ да $|cx^2 + bx + a| \leqslant 2$ тенгсизликнинг ўринли эканини исботланг.

102. Томонлари мос равишда a, b, c бўлган учбурчакнинг юзи S билан шу учбурчак томонлари $a^2+b^2+c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}$ муносабатда боғланганлигини исботланг.
103. Агар a, b, c ихтиёрий учбурчакнинг томонлари бўлса, у ҳолда $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) < 3abc$ тенгсизликнинг ўринли эканини исботланг.

4-§. Кўрсаткичли ва логарифмик ифодаларни айний шакл алмаштириш

Кўрсаткичли ва логарифмик ифодаларни шакл алмаштиришда бу ифодаларнинг аниқланиш соҳаси эътиборга олиниб ҳамда кўрсаткичли ва логарифмик функцияларнинг хоссаларидан фойдаланиб, берилган ифодаларни содда кўринишга келтирилади.

Таъриф. $y=a^x$; $(a>0,\ a\neq 1)$ кўринишдаги функция *кўрсаткичли функция* дейилади.

Кўрсаткичли ифодалар қуйидаги хоссаларга эга:

1. Агар a^x, a^y, x, $y \in R$, $a>0$ бўлса $a^x\cdot a^y = a^{x+y}$ бўлади.

2. Агар a^x, a^y, x, $y\in R$, $a>0$ бўлса, $a^x : a^y = a^{x-y}$ бўлади.

3 Агар a^x, $a>0$, $x\in R$ бўлса, $\exists y\in R$ учун $(a^x)^y = a^{xy}$ бўлади.

4. $\forall x\in R$, a^x, b^x, $a>0$, $b>0$ учун $(ab)^x = a^x b^x$ бўлади.

Таъриф. *b соннинг a* асосга кўра *логарифми* деб b сонни ҳосил қилиш учун a сонни кўтариш керак бўлган даража кўрсаткичига айтилади ва қуйидагича белгиланади: $x=\log_a b$, бунда $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$.

Логарифмик ифодалар қуйидаги хоссаларга эга:

1. Таърифга кўра $a^{\log_a b}=b$; $a>0$, $b>0$, a, $b\neq 1$.

2. Агар $\log_a N=\log_a k$, a. N, $k>0$ бўлса, у ҳолда $N=k$ бўлади.

3. Агар $x>0$, $y>0$; $a>0$, $a\neq 1$ бўлса, у ҳолда $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$ бўлади.

4. Агар $x>0$, $y>0$, $a>0$, $a\neq 1$ бўлса, у ҳолда $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ бўлади.

5. Агар $x>0$; $y>0$, $y\neq 1$, k, $n\in R$ бўлса, у ҳолда

$\log_{y^k} x^n=\frac{n}{k}\log_y x=\log_{y^{1/n}} x^{1/k}$.

6. Агар $a, b, c>0$, $a, c \neq 1$ бўлса, у ҳолда $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

7. Агар $a, b > 0$, $a \neq 1$, $m, n, k \in R$ бўлса, у ҳолда

$$\log^k_{a^n} b^m = \left(\frac{m}{n}\right)^k \log^k_a b.$$

8. Агар $a, b > 0$, $a, b \neq 1$ бўлса, у ҳолда

$$a^{\log^2_a b} = b^{\log_a b}.$$

Бу хоссалар ёрдамида кўрсаткичли ва логарифмик ифодаларни айний шакл алмаштиришларга доир мисоллар келтирамиз.

1-мисол.

$$F = \frac{\log_a \sqrt{a^2-1} \cdot \log^2_{a-1} \sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1) \cdot \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2-1}}$$

ифодани соддалаштиринг.

Ечиш. Берилган ифоданинг аниқланиш соҳаси: $A = \{a/a > 1\}$.

$$F = \frac{\log_a \sqrt{a^2-1} \cdot \log^2_{a-1} \sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1) \cdot \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2-1}} = \frac{\log_a \sqrt{a^2-1}\ \log^2_a \sqrt{a^2-1}}{\log_a \sqrt{a^2-1}\ \log_a \sqrt{a^2-1}} =$$

$$= \log_a \sqrt{a^2-1} = \frac{1}{2}\log_a (a^2-1).$$

Демак, $F = \frac{1}{2}\log_a (a^2-1)$.

2-мисол. Агар $M_1 = a^{k_1} b^{n_1}$; $N_1 = a^{p_1} b^{q_1}$ ва $\log_{N_1} M_1 = \alpha$ берилган бўлса, $M_2 = a^{k_2} b^{n_2}$; $N_2 = a^{p_2} b^{q_2}$ сонларга кўра $\log_{N_2} M_2$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $\log_{N_1} M_1 = \frac{\log_a M_1}{\log_a N_1} = \frac{k_1 + n_1 \log_a b}{p_1 + q_1 \log_a b} = \alpha$ бўлгани учун $\log_a b = x$ десак, $\frac{k_1 + n_1 x}{p_1 + q_1 x} = \alpha$ бундан: $x = \frac{k_1 - \alpha p_1}{n_1 - \alpha q_1} = l$. Бундан $\log_a b = l$ бўлгани учун $\log_{N_2} M_2 = \frac{k_2 + n_2 l}{p_2 + q_2 l} = \beta$ ҳосил қилинади.

3-мисол. $\log_{98} 56 = \alpha$ бўлса, $\log_7 14$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $\log_{98} 56 = \frac{3 + \log_2 7}{1 + 2\log_2 7} = \alpha$; $\log_2 7 = x$; $x = \frac{\alpha - 3}{1 - 2\alpha}$; $\log_7 14 = \frac{1 + \log_2 7}{\log_2 7} = \frac{1+x}{x} = -\frac{\alpha + 2}{\alpha - 3}$.

Машқлар

Мисолларни ечинг:

104. $a \cdot n > 0$, $b \cdot n > 0$, $bn \neq 1$ бўлса, $\log_{bn} an = \dfrac{\log_b a + \log_b n}{1 + \log_b n}$ ни исботланг.

105. $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ бўлса, $\log_{ba^n} a^{n+1} = \dfrac{(n+1)\log_b a}{1 + n\log_b a}$ ни исботланг.

106. $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ бўлса, $\dfrac{1 - \log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1)\log_a \frac{a}{b}}$ ни исботланг.

107. $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ бўлса,

$$\frac{[\log_a b + \log_a (b^{\frac{1}{2}\log_b a^2})]\log_{ab} b \log_a b}{[\log_a b - \log_{ab} b)(b^{2\log_b (\log_a b)} - 1)} = \frac{1}{\log_a b - 1}$$

ни исботланг.

108. $\log_a N \log_b N + \log_b N \log_c N + \log_c N \log_a N =$

$$= \frac{\log_a N \log_b N \log_c N}{\log_{abc} N}.$$

109. $\lg 2 = a$ га кўра 125; $\sqrt{1{,}25}$; 0,025; $\sqrt{0{,}0125}$ ни ҳисобланг.
110. $\log_6 2 = a$ га кўра $\log_3 6$ ни ҳисобланг.
111. $\lg 64 = a$ га кўра $\lg \sqrt[3]{25}$ ни ҳисобланг.
112. $\log_6 2 = a$ га кўра $\log_6 9$ ни ҳисобланг.
113. $\log_{36} 8 = a$ га кўра $\log_{36} 9$ ни ҳисобланг.
114. $\lg 122{,}5 = a$ ва $\lg 7 = b$ га кўра $\lg 5$ ни ҳисобланг.
115. $\lg 3 = a$ ва $\lg 2 = b$ га кўра $\log_5 6$ ни ҳисобланг.
116. $\log_5 4 = a$ ва $\log_5 3 = b$ га кўра $\log_{25} 12$ ни ҳисобланг.
117. $\log_4 125 = a$ га кўра $\lg 64$ ни ҳисобланг.

Ифодаларни соддалаштиринг:

118. $A = (25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 45^{\log_8 7})^{\frac{1}{2}}$.

119. $A = \sqrt[\log_b a]{a^2} - 2\sqrt[\log_b a]{a}\sqrt[\log_a b]{b} + \sqrt[\frac{1}{2}\log_a b]{b}$.

120. $m^2 = a^2 - b^2$ деб, $\log_{a+b} m + \log_{a-b} m - 2\log_{a+b} m \log_{a-b} m$ ифодани соддалаштиринг.

121. $(\log_a b + \log_b a + 1)(\log_a b - \log_{ab} b)\log_b a - 1$.

122. $(\sqrt[\lg a]{b^{\log_{100} a}}\sqrt[\lg b]{a^{\log_{100} b}})\, 2\log_{ab}(a+b)$.

123. $[(\log_b a + \log_a^4 b + 2)^{\frac{1}{2}} - \log_b a - \log_a b$.

124. $\log_2 2x_2 + \log_2 x \cdot x^{\log_x(\log_2 x + 1)} + \frac{1}{2}\log_4^2 x^4 + 2^{3\log_{\frac{1}{2}} \log_2 x}$.

125. $\dfrac{\log_a b - \log_{b^{-3}\sqrt{a}} \sqrt{b}}{\log_{\frac{a}{b^4}} b - \log_{\frac{a}{b^8}} b} : \log_{a^3} b^{-12}$.

126. $[6(\log_b a \cdot \log_{a^2} b + 1) + \log_a b^{-6} + \log_a^2 b]^{\frac{1}{2}} - \log_a b;\ a > 1$.

127. $\sqrt{\log_n p + \log_p n + 2}(\log_n p - \log_{np} p)\sqrt{\log_n p}$.

128. $\left(\dfrac{\log_a^2 b + 1}{2\log_a b} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{\log_a^2 b + 1}{2\log_a b} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}\log_a^{-\frac{1}{2}} b;\ a > 1$.

III БОБ. АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

1-§. Тенгламалар ва тенгсизликларнинг тенг кучлилиги

Маълумки, тенглама (тенгсизлик) дейилганда, $F_1(x, y, \ldots, z)$ ва $F_2(x, y, \ldots, z)$ функцияларнинг

$$F_1(x, y, \ldots, z) = F_2(x, y, \ldots, z) \qquad (1)$$

тенглиги ($F_1 \geqslant F_2$ тенгсизлиги) тушунилади.

(1) тенгламани (тенгсизликни) ҳар доим

$$f(x, y, \ldots, z) = 0 \quad (f \geqslant 0)$$

кўринишдаги тенглама (тенгсизлик) билан алмаштириш мумкин.

Тенгламани (тенгсизликни) ечиш деб тенгламада (тенгсизликда) қатнашаётган ўзгарувчиларнинг тенгламани (тенгсизликни) тўғри тенгликка (тенгсизликка) айлантирадиган қийматлар тўпламини топишга айтилади. Топилган қийматлар тўплами *тенгламанинг (тенгсизликнинг) ечимлар тўплами* дейилади.

Масалан, $x^2 - 5x + 6 = 0$ тенгламанинг илдизлар тўплами $A = \{2; 3\}$ дан иборат. $x^2 - 5x + 6 > 0$ тенгсизликнинг ечимлар тўплами $B = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$ дан иборат.

Ушбу

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0 \ (\geqslant 0) \qquad (2)$$

ва

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0 \ (\geqslant 0) \qquad (3)$$

кўринишдаги тенгламалар (тенгсизликлар) берилган бўлиб, улар бирор B соҳада аниқланган бўлсин.

Таъриф. Агар B соҳада (2) тенгламанинг (тенгсизликнинг) ечимлар тўплами (3) тенгламанинг (тенгсизликнинг) ечимлар тўплами ва аксинча, (3) тенгламанинг (тенгсизликнинг) ечимлар тўплами (2) нинг ечимлар тўплами бўлса, у ҳолда (2) ва (3) тенгламалар (тенгсизликлар) B соҳада *тенг кучли (эквивалент) тенгламалар (тенгсизликлар)* дейилади.

Масалан, $x^2+6=5x$ ва $x^2+6+\frac{1}{x^2+1}=\frac{5x(x^2+1)+1}{x^2+1}$

$$(x^2+6\geqslant 5x \text{ ва } x^2+6+\sqrt{x^2+1}\geqslant 5x+\sqrt{x^2+1})$$

тенгламалар (тенгсизликлар) тенг кучлидир, чунки таърифнинг шарти қаноатлантирилади.

Тенг кучли тенгламалар (тенгсизликлар) қуйидаги хоссаларга эга:

1. Агар $g(x)$ функция $f(x)=0$, $(f(x)>0)$ нинг аниқланиш соҳасида маънога эга бўлса, у ҳолда $f(x)=0$ $(f(x)>0)$ ва $f(x)+g(x)=g(x)$ $(f(x)+g(x)>g(x))$ лар эквивалент бўлади.

2. Агар $g(x)$ функция $f(x)=0$ $(f(x)>0)$ нинг аниқланиш соҳасида маънога эга бўлиб, $g(x)\neq 0$ бўлса, у ҳолда $f(x)g(x)=0$ ва $f(x)=0$ $(f(x)>0$ ва $f(x)g(x)>0\wedge g(x)>0)$ лар эквивалент бўлади.

Машқлар

Қуйидаги тенгламалар тенг кучлими?

1. $2x^2-3x-2=0$ ва $2x+3=2$ N да.
2. $2x^2-3x=2$ ва $2x+3=2$ Q да.
3. $x^2-2=0$ ва $x^3-4=0$ Q да.
4. $x^2-2=0$ ва $x^4-4=0$ R да.
5. $x^2-2=0$ ва $x^4-4=0$ C да.
6. $x^2+\frac{1}{x}-2x=\frac{1}{x}$ ва $x^2=2x$ Q да.
7. $\frac{x^2-4}{x-2}=1$ ва $x-2=R$ да.

8. $\dfrac{x^2-4}{x-2}=-4$ ва $x-2=-4$ R да.

9. $\dfrac{x(x-2)}{x^2+1}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5x^2}{3x^2+3}$ ва $3(x^2-2x)+2(x^2+1)=5x^2$ R да.

10. $x-2=7-2x$ ва $(x-2)^2=(7-2x)^2$ R да.

11. $3x-1=4x-2$ ва $(3x-1)^4=(4x-2)^4$ R да.

12. $f(x)=\varphi(x)$ ва $[f(x)]^2=[\varphi(x)]^2$ R да.

13. $f(x)=\varphi(x)$ ва $[f(x)]^k=[\varphi(x)]^k k\in N.$ R да.

14. $\sqrt[k+1]{f(x)}=\varphi(x)$ ва $f(x)=[\varphi(x)]^{k+1}$ R да.

15. $x^2-1=0$ ва $\sqrt{x^2-1}=0$ R да.

16. $\sqrt{f(x)}\sqrt{\varphi(x)}=0$ ва $\sqrt{f(x)\varphi(x)}=0$ R да.

17. $\dfrac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}=\dfrac{f_1(x)+f_2(x)}{\varphi_1(x)+\varphi_2(x)}$ ва $\dfrac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}=\dfrac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}$ R да.

Қуйидаги тенгсизликлар R да тенг кучлими?

18. $x>1$ ва $x+\dfrac{1}{4-x}>1+\dfrac{1}{4-x}$.

19. $3x+1>1$ ва $(3x+1)+x-4>x-3$.

20. $x-3>2$ ва $(x-3)(x+1)^2>2(x+1)$.

21. $x-3>2$ ва $(x-3)(x-1)>2(x-1)$.

22. $-x^2-5x+6<0$ ва $x^2+5x-6<0$.

23. $x-1>0$ ва $(6x^2+3x+5)(1-x)<0$.

24. $2(x-x^3-3)(1-4x)>0$ ва $4x-1>0$.

25. $\dfrac{1}{x-3}>2$ ва $\dfrac{1-2(x-3)}{x-3}>0$.

26. $\dfrac{1}{x-3}>2$ ва $1>2(x-3)$.

27. $\dfrac{x-2}{5-x}>0$ ва $(x-2)(5-x)>0$.

28. $\dfrac{x-2}{x^2(5-x)}>0$ ва $(x-2)(5-x>0$.

29. $\dfrac{1}{(x+5)^2}>\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ва $(x+5)^2<(x+1)^2$.

30. $\dfrac{x}{x^2-3x+1}>\dfrac{x}{x^2+3x+2}$ ва $x^2-3x+2>x^2-3x+1$.

31. $5-x>4$ ва $\dfrac{5-x}{x+1}>\dfrac{4}{x+1}$.

2-§ Бир ўзгарувчили бутун ва каср рационал тенгламалар

Ушбу

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

кўринишдаги тенгламалар *юқори даражали (бутун рационал) тенгламалар* деб аталади, бу ерда a_0, $a_1, \ldots, a_n \in Q$.

Агар (1) тенглама

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0 \qquad (2)$$

кўринишда бўлса, бундай тенглама *қайтма тенглама* дейилади.

Юқори даражали тенгламаларни ечишда қўлланиладиган айрим теоремаларни келтирамиз

1-теорема. *Агар коэффициентлари бутун сонлар бўлган (1) тенглама $\frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$ рационал илдизга эга бўлса, у ҳолда p a_0 нинг ва q a_n нинг бўлувчиси бўлади.*

2-теорема. *Агар α сон $P(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, у ҳолда $P(x)$ кўпҳад $x-\alpha$ га қолдиқсиз бўлинади.*

Юқорида $P(x)$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратишда Горнер схемасидан фойдаланган эдик (II боб, 1-§ га қаранг). Шунинг учун Горнер схемасига бу ерда батафсил тўхталмаймиз. Рационал тенгламаларни ечишга доир масалалар келтирамиз.

1-мисол. Ушбу тенгламани ечинг: $x^6 - 17x^3 + 16 = 0$.

Ечиш.

$$x^6 - 17x^3 + 16 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} y^2 - 17y + 16 = 0 \\ y = x^3 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 16 \\ y = x^3 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ y = x^3 \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 = 16 \\ x^3 = 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x - \sqrt[3]{16})(x^2 + x\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{16^2}) = 0 \\ (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \end{array} \right.$$

$$A = \left\{ x \mid x = 1, \quad x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad x = 2\sqrt[3]{2}; \quad x = \sqrt[3]{2}(-1 \pm i\sqrt{3}) \right\}.$$

2-мисол. Ушбу тенгламани ечинг: $x^4+2x^3+5x^2+$ $+4x-12=0$.

Ечиш. Биринчи усул: Бу тенгламада $a_n=1$ ва $a_0=-12$ бўлгани учун a_0 нинг ± 1; ± 2; ± 3; ± 4; ± 6; $+12$ бўлувчиларини ёзиб оламиз сўнгра Горнер схемаси бўйича тенгламанинг илдизлар тўпламини аниқлаймиз:

	1	2	5	4	−12
1	1	4	8	12	0
−2	1	1	6	0	

Демак, тенгламанинг илдизлар тўплами R да $\{1;\ 2\}$

$$x^4+2x^3+5x^2+4x-12=(x-1)(x+2)(x^2+x+6)=0.$$

Бундан

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x+6=0 \\ x-1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1\pm i\sqrt{23}}{2} \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Демак, тенгламанинг илдизлар тўплами C да

$$\left\{1;\ -2;\ \frac{-1\pm i\sqrt{23}}{2}\right\}\ R \text{ да } \{1;\ -2\}.$$

Иккинчи усул (кўпайтувчиларга ажратиш усули):

$$x^4+2x^3+5x^2+4x-12=(x^4+2x^3)+(5x^2+10x)-$$
$$-(6x+12)=(x+2)(x^3+5x-6)=$$
$$=(x-1)(x+2)(x^2+x+6)=0.$$

Бундан, тенгламанинг илдизлар тўплами: $\left\{1;\ -2;\ \dfrac{-1\pm i\sqrt{23}}{2}\right\}$

Учинчи усул (номаълум коэффициентлар киритиш усули): Берилган тенгламани $x^4+2x^3+5x^2+4x-12=$ $=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ кўринишда ёзиб олиб, қавсларни ечиб чиқамиз, сўнгра кўпҳаднинг кўпҳадга тенглик шартини ҳисобга олган ҳолда $a=1$, $b=-2$, $c=1$, $d=6$ ни аниқлаймиз.

3 мисол. Қайтма тенгламани ечинг:

$$x^5+4x^4-3x^3+3x^2-4x-1=0. \qquad (1)$$

Ечиш. Қайтма тенгламанинг даража кўрсаткичи тоқ сон бўлса, у ҳолда унинг битта илдизи ҳар доим 1 га тенг бўлади, яъни

$$(1) \Longleftrightarrow (x-1)(x^4+5x^3+2x^2+5x+1)=0.$$

Энди

$$x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0 \qquad (2)$$

тенгламани ечиш кифоя. Бунинг учун (2) нинг иккала томонини x^2 $(x\neq 0)$ га бўламиз.

$$x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x^2+5x++2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0. \qquad (3)$$

$x+\frac{1}{x}=t$ деб белгиласак, $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ бўлади, буларни (3) га қўйиб, ихчамлаймиз: $t^2+5t=0 \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow t(t+5)=0 \Rightarrow t_1=0,\ t_2=-5.$

1. Агар $t=-5$ бўлса, $x^2+5x+1=0$ бўлиб, ечим $\left\{\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$ бўлади.

2. Агар $t=0$ бўлса, $x^2+1=0$ бўлиб, ечим $\{\pm i\}$ бўлади.

Демак, тенгламанинг илдизлар тўплами: $\left\{1;\ \pm i;\ \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$.

4-мисол. $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0$ тенгламани янги ўзгарувчи киритиш усули билан ечинг.

Ечиш. $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (x^2+x+1)^2-3(x^2+x+1)+2=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t^2-3t+2=0, \\ t=x^2+x+1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t=1, \\ t=x^2+x+1 \end{cases} \vee \begin{cases} t=2, \\ t=x^2+x+1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x+1=1 \\ x^2+x+1=2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x=0 \\ x^2+x-1=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \vee \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. .$$

Тенгламанинг илдизлар тўплами: $\left\{0;\ -1;\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

5-мисол. $x\,\frac{19-x}{x+1}\left(x+\frac{19-x}{x+1}\right)=84$

тенгламани системага келтириш усули билан ечинг.

Ечиш. $x\,\frac{19-x}{x+1}\left(x+\frac{19-x}{x+1}\right)=84 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)=84, \\ y=\frac{19-x}{x+1}, \\ x+1\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)=84, \\ xy+(x+y)=19, \\ y=\frac{19-x}{x+1},\ x+1\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv=84, \\ u+v=19, \\ xy=u,\ v=x+y, \\ y=\frac{19-x}{x+1},\ x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=7\wedge v=12, \\ u=xy,\ v=x+y, \\ y=\frac{19-x}{x+1},\ x+1\neq 0 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} u=12\wedge v=7, \\ u=xy,\ v=x+y, \\ y=\frac{19-x}{x+1},\ x+1\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=12 \\ xy=7 \\ y=\frac{19-x}{x+1},\ x+1\neq 0 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \\ y=\frac{19-x}{x+1},\ x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=4, \\ x=6-\sqrt{29}, \\ x=6+\sqrt{29}. \end{array}\right.$$

Демак, берилган тенгламанинг ечимлар тўплами:

$$\{3;\ 4;\ 6-\sqrt{29},\ 6+\sqrt{29}\}.$$

6-мисол. Қуйидаги параметрли тенгламани ечинг:

$$\frac{x+a}{x-b}+\frac{x+b}{x-a}=2.$$

Ечиш. $\frac{x+a}{x-b}+\frac{x+b}{x-a}=2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-a^2 \cdot x^2-b^2=2(x-a)(x-b), \\ x\neq a,\ x\neq b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(a+b)x = (a+b)^2, \\ x \ne a,\ x \ne b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b \ne 0 \\ x = \dfrac{a+b}{2}, \\ x \ne a^2,\ x \ne b \end{cases} \vee \begin{cases} a+b = 0, \\ 0 \cdot x = 0, \\ x \ne a,\ x \ne b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b \ne 0 \\ x = (a+b) : 2, \\ (a+b) : 2 \ne a, \\ (a+b) : 2 \ne b \end{cases} \vee \begin{cases} a = -b, \\ 0 \cdot x = 0, \\ x \ne a, \\ x \ne b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \ne \pm a, \\ x = \dfrac{a+b}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} b = -a, \\ x \ne \pm a, \\ 0 \cdot x = 0. \end{cases}$$

Жавоб.

1) Агар $b \ne -a$ ва $b \ne a$ бўлса, $\left\{\dfrac{a+b}{2}\right\}$;

2) агар $b \ne -a$ ва $b = a$ бўлса, $\varnothing$;

3) агар $b = -a$ бўлса, $R \setminus \{-a;\ a\}$.

Машқлар

Кўпайтувчиларга ажратиш усули билан ечинг:

32. $x^3 - 3x - 2 = 0$.

33. $x^3 - 19x - 30 = 0$.

34. $2x^3 - x^2 - 1 = 0$.

35. $x^3 + x - 2 = 0$

36. $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$.

37. $6x^4 - 13x^3 - 27x^2 + 19x - 12 = 0$.

38. $9x^2 + 4x^3 = 1 + 12x$.

39. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

40. $x^5 + x^3 + x = 0$.

41. $x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 8x = 0$.

42. $3x^7 + x^6 + 3x^4 + x^3 + 15x + 5 = 0$.

43. $8x^7 - 6x^6 - 4x^4 + 3x^3 + 8x - 6 = 0$.

44. $x^7 + 2x^5 + 4x^4 - 36x^3 + 32x^2 - 72x + 48 = 0$.

45. $(x^3 + x^2 + 1)^2 + (x^3 - x^2 + 1)^2 = 2x^4$.

46. $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$.

Қуйидаги уч ҳадли тенгламаларни ечинг:

47. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

48. $2x^4 + 3x^2 + 3 = 0$.

49. $36x^8-13x^4+1=0$.

50. $(x-2)^6-19(x-2)^3=216$.

Тенгламаларни C да янги ўзгарувчи киритиш усули билан ечинг.

51. $(x^2-2x-1)^2-3x^2-6x-13=0$.

52. $(2x^2-x+5)^2+3(x^2-x-1)-10=0$.

53. $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$.

54. $(x-1)x(x+1)(x+2)=24$.

55. $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8)=4$.

56. $(x-1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

57. $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=19$.

58. $(x^2+x+1)(2x^2+2x-3)=-3(1-x-x^2)$.

59. $(2x^2+3x-2)(5-6x-4x^2)=-5(2x^2+3x+2)$.

60. $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}+4=0$.

61. $x^2-\dfrac{50}{2x^2-7}=14$.

62. $\dfrac{1}{x(x+2)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{12}$.

63. $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$.

Қуйидаги қайтма тенгламаларни C да ечинг.

64. $2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0$.

65. $x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0$.

66. $30x^4-17x^3-228x^2+17x+30=0$.

67. $2x^3-9x^2+9x+2=0$.

68. $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1=0$.

69. $9x^6-18x^5-73x^4+164x^3-73x^2-18x+9=0$.

70. x^8+ [illegible] x^6-1[illegible]$x^4+4x^2+1=0$.

71. $10x^6+x^5-47x^4-17x^3+x^2+10x=0$.

72. $10x^6+19x^5-19x^4-20x^3-19x^2+19x+10=0$.

73. $x^4-2x^3-23x^2+8x+16=0$.

74. $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0$.

75. $2x^4-15x^3+40x^2-45x+18=0$.

76. $27x^6-54x^5+27x^4-18x^3+18x^2-24x+8=0$.

77. $27x^6-54x^5-81x^4+125x^3+54x^2-24x-8=0$.

Қуйидаги каср рационал тенгламаларни ечинг;

78. $\dfrac{12x+1}{6x-2}-\dfrac{9x-5}{3x+1}=\dfrac{108x-36x^2}{4(9x^2-1)}$.

79. $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}=\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}+\dfrac{x^2+6x+12}{x+3}$.

80. $\dfrac{x+4}{2x^3-8x+6}-\dfrac{x-3}{8-2x^3}=\dfrac{x+6}{x^3+3x^2-x+3}$.

81. $\dfrac{2x+5}{3x^2-3x-6}+\dfrac{3x}{8-2x^2}=\dfrac{5x+7}{x^3+x^2-4x-4}.$

82. $\dfrac{x+5}{2x^2-6x-8}+\dfrac{x-7}{64-4x^2}+\dfrac{9}{x^3-x^2-16x+16}=0.$

83. $\dfrac{x-3}{2x^2+2x-12}+\dfrac{12}{x^3-2x^2-9x+18}=\dfrac{x+3}{3x^2-15x+18}.$

84. $\dfrac{3}{2x^2-8}=\dfrac{4-x}{x^4+2x^3+8x-16}-\dfrac{x}{x^3-8}.$

85. $\dfrac{242}{48-10x-2x^2}+\dfrac{x^2+8x}{x^2-3x}+\dfrac{x+2}{x+8}=1.$

86. $\dfrac{14}{20-6x-2x^2}+\dfrac{x^2+4x}{x^2+5x}-\dfrac{x+3}{2-x}+3=0.$

87. $\dfrac{263}{72-15x-3x^2}+\dfrac{8+x}{x-3}+\dfrac{x^2+3x}{x^2-8x}=2.$

88. $\dfrac{40}{x^2+10x+21}-\dfrac{3-x}{7+x}+\dfrac{6+x}{x-4}-2=0.$

89. $\dfrac{22}{x^2+7x-18}+1=\dfrac{x^2+8x}{x^2+9x}+\dfrac{7-x}{x-2}.$

90. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{x+2}{x-2}}}=\dfrac{12}{12x-7}.$

Қуйидаги параметрли тенгламаларни ечинг.

91. $\dfrac{4a}{x^2-a^2}+\dfrac{x-a}{x(x-a)}=\dfrac{1}{x^2-ax}.$

92. $\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{2a}{x+a}=\dfrac{8a^2}{x^2-a^2}.$

93. $\dfrac{ax^2}{x-1}-2a=a^2+1.$

94. $\dfrac{x+a}{x+b}+\dfrac{x-b}{x-a}=2.$

95. $\dfrac{2x+a}{2x-a}+\dfrac{2x+b}{2x-b}=2.$

96. $\dfrac{ax-1}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{a(x^2+1)}{x^2-1}.$

97. $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x+b}=\dfrac{a-b}{x-a}+\dfrac{a+b}{x+b}.$

98. $\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x^2-a^2}=0.$

99. $\frac{a}{ax-1}+\frac{b}{bx-1}=\frac{a+b}{(a+b)x-1}$.

100 $\frac{1}{a+b-x}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b}-\frac{1}{x}$.

101 $(b-5)x^2+3bx-(b-5)=0$.

102. $\frac{x-2}{a+1}=\frac{2x-a-1}{x-2}$,

103. $\frac{x}{2m}+\frac{2}{x-2}=\frac{3x-2m}{2(x-2)}$.

104. $\frac{x}{x-m}-\frac{2m}{x+m}=\frac{8m^2}{x^2-m^2}$.

105 $\frac{x}{2a+3}+\frac{2a-1}{x}=\frac{2(2a+2)}{2a+3}$.

106. $\frac{(m-2)x}{m-1}-1=-\frac{2x^2+m+1}{(m-1)x}+\frac{m+2}{m-1}$.

107. $4(b-1)^2x+4(b-1)+\frac{3b+4}{x}=0$.

108. $\frac{x}{n}+\frac{1}{4(x-2)}=\frac{x(x+2)}{m(x-2)}+\frac{1}{m(x-2)}$.

109. m нинг қандай қийматида $2x^2-(3m+2)x+12=0$ ва $4x^2-(9m-2)x+36=0$ тенгламалар умумий илдизга эга бўлади?

Қуйидаги тенгламаларни график усулда ечинг:

110 $2x^2-x-3=0$.

111. $3x^2-6x+3=0$.

112. $5x^2-4x+7=0$.

113. $5x^2-16x+3=0$.

114. $x^2+4x-12=0$.

115. $x^2-x-6=0$.

3-§. Бир ўзгарувчили бутун ва каср рационал тенгсизликлар

Ҳақиқий сонли майдонда берилган $P(x)$ кўпҳад учун $P(x)>0$; $P(x)\geqslant 0$ кўринишдаги ҳамда $P(x)$ ва $Q(x)$ лар учун $\frac{P(x)}{Q(x)}>0 \Longleftrightarrow P(x)Q(x)>0$ кўринишдаги тенгсизликлар берилган бўлсин. Бундай кўринишдаги тенгсизликларни ечиш учун $P(x)$ ёки $Q(x)$ ни кўпайтувчиларга ажратамиз, яъни $P(x)$ учун

$$P(x)=a(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\dots(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q_n)^{\beta_1}\dots(x^2+p_mx+q_m)^{\beta_m}$$

ўринли бўлсин. Бу ерда $x^2+p_ix+q_i$, $i=\overline{1, m}$.

$\forall x \in R: x^2 + p_i x + q_i > 0,\ i = \overline{1, m}$ бўлса, у ҳолда,

$$P(x) > 0 \Longleftrightarrow a(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_k)^{\alpha_k} > 0 \quad (1)$$

бўлади.

Фараз қилайлик, $P(x)$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ тартибда жойлашган бўлсин. У ҳолда $P(x)$ нинг ишораси $(-\infty; x_1)$; $(x_1; x_2)$, ... $(x_k; +\infty)$ ларнинг ҳар биридаги кўпайтувчиларнинг ва a нинг ишорасига қараб аниқланади. Хусусий ҳолда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 1$ бўлганда (1) ни қаноатлантирадиган оралиқни қуйидаги жадвалда кўриш мумкин.

		$(-\infty; x_1)$	$(x_1; x_2)$	$(x_2; x_3)$	... ...
	$x - x_1$	$-$	$+$	$+$	....
	$x - x_2$	$-$	$-$	$+$	.....
	.....	...	...	...	......
	$x - x_k$	$-$	$-$	$-$	......
$P(x)$	$a > 0,\ k = 2n$	$+$	$-$	$+$	....
	$a > 0,\ k = 2n+1$	$-$	$+$	$-$	.....
	$a < 0,\ k = 2n$	$-$	$+$	$-$	.....
	$a < 0,\ k = 2n+1$	$+$	$-$	$+$	.....

Шундай қилиб, юқори даражали тенгсизликларни бу ечиш методи интерваллар методи деб аталиб, натижани тез аниқлаш учун қулайдир.

1-мисол. $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0 \Longleftrightarrow P(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2) > 0$

$$P(x) = 0$$

бўладиган қийматлар тўплами: $\{-1;\ 1;\ 2\}$.
Энди $P(x)$ нинг ишорасини аниқлаймиз:

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; 2)$	$(2; +\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Демак, берилган тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлар тўплами: $A=(-1;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$.

2-мисол. $1+\frac{x-4}{x-3}>\frac{x-2}{x-1}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $1+\frac{x-4}{x-3}>\frac{x-2}{x-1}\Longleftrightarrow 1+\frac{x-4}{x-3}-\frac{x-2}{x-1}>0\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \frac{x^2-4x+1}{(x-1)(x-3)}>0 \Longleftrightarrow (x-1)(x-3)(x^2-4x+1)>0.$

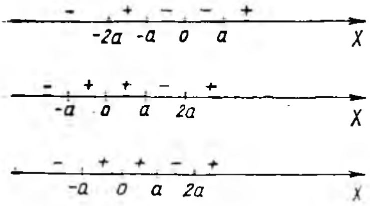
$(x-1)(x-3)(x^2-4x+1)=0$ бўладиган қийматлар: $x_1=2-\sqrt{3};\ x_2=1;\ x_3=3;\ x_4=2+\sqrt{3}.$

Энди $\frac{P(x)}{Q(x)}$ нинг ишорасини аниқлаймиз:

	$(-\infty; x_1)$	$(x_1; x_2)$	$(x_2; x_3)$	$(x_3; x_4)$	$(x_4; +\infty)$
$x-x_1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-x_2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-x_3$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-x_4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Демак, $\frac{x^2-4x+1}{(x-3)(x-1)}>0$ ни қаноатлантирадиган қийматлар тўплами:

$$A=(-\infty;\ 2-\sqrt{3})\cup(1;\ 3)\cup(2+\sqrt{3};\ +\infty).$$



3- чизма.

3-мисол. Ушбу параметрли тенгсизликни ечинг:

$$a(a-1)x^2(x-2a)\times(a^2-x^2)\times(x^2+2a^2+1)>0 \quad (1)$$

Ечиш. $a(a-1)x^2\times(x-2a)(a^2-x^2)\times(x^2+2a^2+1)>0 \Leftrightarrow a(a-1)x^2(x-2a)(a-x)(a+x)>0.$ (2)

Бу (2) тенгсизлик чап томонининг илдизлари $\{0; -a; a; 2a\}$.

I ҳол. $a(a-1)>0 \Leftrightarrow (a<0 \vee a>1)$, (2) $\Leftrightarrow x^2(x-2a)(x-a)(x+a)<0$ (3).

а) Агар $a<0$ бўлса, у ҳолда $2a<a<0<-a$ бўлиб, (3) $\Leftrightarrow (x<2a \vee x<a<x<0 \vee 0<x<-a)$ бўлади (3, a-чизма).

б) $a>1$ бўлса, $-a<0<a<2a$ бўлиб, (3) $\Leftrightarrow (x<-a \vee a<x<2a)$ бўлади (3, $б$-чизма).

II ҳол. $a(a-1)<0$ бўлсин, у ҳолда $a(a-1)<0 \Leftrightarrow 0<a<1$ бўлиб, (2) $\Leftrightarrow x^2(x-2a)(x-a)(x+a)\geqslant 0$ (4) бўлади, бунда $-a<0<a<2a$ бўлиб, (4) $\Leftrightarrow (-a<x<0 \vee 0<x<a \vee 2a<x)$ бўлади (3, $в$-чизма).

III ҳол. $a(a-1)=0 \Leftrightarrow (a=0 \vee a=1)$.
Бу ҳолда (1) $\Leftrightarrow$ (2); $0<0$ бўлиб, жавоби $\varnothing$ бўлади.

Жавоб:

1) Агар $a<0 \Rightarrow A=\{x \mid x<2a \vee a<x<0 \vee 0<x<-a\}$;

2) агар $0<a<1 \Rightarrow A=\{x \mid -a<x<0 \vee 0<x<a \vee 2a<x\}$;

3) агар $a>1 \Rightarrow A=\{x \mid x<-a \vee a<x<2a\}$;

4) агар $a=0 \vee a=1 \Rightarrow x\in\varnothing$.

4-мисол. Қуйидаги тенгсизликни ечинг:

$$mx^2-2(m-1)x+m+2<0. \quad (1)$$

Ечиш.

1) Агар $m=0 \Rightarrow 2x+2<0 \Leftrightarrow x<-1 \Rightarrow A=\{x \mid x<-1\}$;

2) $m\neq 0$, $mx^2-2(m-1)x+m+2<0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2-2(m-1)x+m+2<0, \\ m\neq 0,\ D=1-4m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2-2(m-1)x+m+2<0, \\ m\neq 0,\ 1-4m<0. \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} mx^2-2(m-1)x+m+2<0, \\ m\neq 0,\ 1-4m\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2-2(m-1)x+m+2<0, \\ m\geqslant \frac{1}{4} \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} mx^2-2(m-1)x+m+2<0, \\ m<0 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} mx^2-2(m-1)x+m+2<0, \\ 0<m\leqslant \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2-2(m-1)x+m+2<0, \\ x_1=\frac{1}{m}(m-1-\sqrt{1-4m}), \\ x_2=\frac{1}{m}(m-1+\sqrt{1-4m}), \\ m<0,\ x_1>x_2 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} mx^2-2(m-1)x+m+2<0 \\ x_1<x_2,\ 0<m\leqslant \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<x_2, \\ m<0 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} x>x_1, \\ m<0. \end{cases} \vee \begin{cases} x_1<x<x_2, \\ 0<m\leqslant \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Ж а в о б.

1) Агар $m<0 \Rightarrow A=\{x\mid -\infty<x<x_2;\ x_1<x<+\infty\}$;

2) агар $0<m\leqslant \frac{1}{4} \Rightarrow A=\{x\mid x_1<x<x_2\}$;

3) агар $m>\frac{1}{4} \Rightarrow x\in\varnothing$;

4) агар $m=0 \Rightarrow A=\{x\mid x<-1\}$.

Машқлар

Қуйидаги тенгсизликларни ечинг:

116. $(x+2)(x-1)^2 > 0$.

117. $(x+2)(x-1)^2 \leqslant 0$.

118. $\dfrac{x-4}{(x-2)^2} \geqslant 0$.

119. $\dfrac{x+3}{(x-5)^2} \geqslant 0$.

120. $2x^2 - 5x - 12 < 0$.

121. $-6x^2 - 17x - 5 < 0$.

122. $2x^2 - x + 3 > 0$.

123. $9x^2 - 6x + 1 > 0$.

124. $4x^2 + 2x + 5 < 0$.

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг.

125. $f(x) = 2\sqrt{x-1} - \dfrac{5}{\sqrt{4-x}}$.

126. $f(x) = \sqrt{16-x^2} - 3\sqrt{x^2-4}$.

127. $f(x) = \sqrt{(2-x)(3{,}5-x)(x-8)}$.

128. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{(x^2-3x+2)}}$.

129. $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x-5)(10-x)}{x^2(x-1)}}$.

130. $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x^2+x+1)(x-3)}{x^2+4x+3}}$.

131. $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x^2+1)(x-2)}{x^2-4x+3}}$.

132. $f(x) = \lg \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-9x+20}$.

Қуйидаги параметрли тенгсизликларни ечинг.

133. $ax + 4 > 2x + a^2$.

134. $a(3x-1) > 3x - 2$.

135. $3(2a - x) < ax + 1$.

136. $\dfrac{(a+2)x}{a-1} - \dfrac{2}{3} < 2x - 1$.

137. $\dfrac{x}{x-2} < \dfrac{2b+1}{(b-3)(x-2)}$.

138. $\dfrac{2x-1}{m+1} - \dfrac{x+1}{2(m-1)} > \dfrac{2x-3}{m-1}$.

139. $\dfrac{ax-3}{x-3} - \dfrac{a}{2} < a - 1$.

140. $\dfrac{ax}{a-2} - \dfrac{x-1}{3} < \dfrac{2x+3}{4}$.

141. a нинг қандай қийматлар тўпламида $2x + a^2 + 5 < 0$ тенгсизлик $|x| \leqslant 2$ ни қаноатлантиради?

142. a нинг қандай қийматлар тўпламида $x < 0$ тенгсизлик $(a^2 + 2a - 3)x + 3a^2 - a - 14 < 0$ нинг ечими бўлади?

143. m нинг қандай қийматлар тўпламида $|x| < 3$ тенгсизлик $(m^2-4)x + m - 2 < 0$ нинг ечими бўлади?

144. a нинг қандай қийматлар тўпламида $|x| < 1$ тенгсизлик $\dfrac{2x + a + 9}{x^2 + (2-a)x - 2a} < 0$ нинг ечими бўлади?

Тенгсизликларни ечинг.

145. $x^2 + 3ax - a > 0$.

146. $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 > 0$.

147. $x^2 - 8ax < -15a^2$.

148. $\frac{x^2}{m} - 2x - \frac{x}{m} + m + 1 > 0$.

149. $3(a+1)x^2 - 6(a^2+a+1)x + 7(a^3-1) < 0$.

150. $3(k-1)x^2 - 2(2k-1)x + 2k - 1 > 0$.

151. $x^2 + 2x + 1 > \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2}$.

Параметрнинг қандай қийматларида қуйидаги тенгсизликларнинг ечими R тўплам бўлади?

152. $ax^2 + (a-1)x - 2 < 0$.

153. $(b^2-1)x^2 + 2(b-1)x + 1 < 0$.

154. $(m-2)x^2 - mx - 1 < 0$.

155. m нинг қандай қийматлар тўпламида $-2 \leqslant x \leqslant 1$ тенгсизлик $mx^2 - 2(m+3)x + m < 0$ нинг ечими бўлади?

Тенгсизликни ечинг.

156. $(x+2)(x-1)(x-3) > 0$.

157. $(x+3)(x+2)(x-1)(x-3) > 0$.

158. $5(x+3)(x-2)(x-3) < 0$.

159. $(x+3)(x+2)(x+1)^2(x-2)(x^2+3x+5) > 0$.

160. $(x-7)(x+3)^5(x-2)x^3(x+5)^3 > 0$.

161. $(x-2)^3(x+1)^2(x+3)^4(x-4)^5(x-8) > 0$.

162. $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1) < 0$.

163. $(x+2)(x-1)^2(x-2)(x^2+3x+5) < 0$.

164. $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)(x^2 - x + 1) > 0$.

165. $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 > 0$.

166. $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x < 0$.

167. $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 < 0$.

168. $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} > 1$.

169. $\frac{x^2-3}{x^2+4x+3} \geqslant 0$.

170. $\frac{x^2-4x+3}{x^2-7x+10} > 0$.

171. $\frac{x^2-1}{3x-7-2x^2} > 0$.

172. $\frac{x^2-8x+7}{x^2-2x+3} > 0$.

173. $\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^3+1} > 0$.

174. $\frac{(x-1)(x^2-x+1)}{(x^3-1)} > 0$.

175. $\frac{x^2-2x+1}{3x-5-x^2} > 0$.

176. $\frac{4x^2-5x-1}{2x^2-5x-3} > 0$.

177. $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)} > 0$.

178. $\dfrac{x^2+2x-5}{x^3-x^2-4x+4} > 0.$ 180. $\dfrac{x^3-6x^2+5x+12}{x^4-3x^3+3x^2-3x+2} > 0.$

179. $\dfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^3+2x^2-5x-6} < 0.$

Параметрли каср рационал тенгсизликларни ечинг.

181. $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{a}{x+a}<0.$

182. $\dfrac{2}{x+a}-\dfrac{x}{x^2-a^2}<\dfrac{1}{a-x}.$

183. $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{9}{2a}<\dfrac{1}{x},\ a\neq 0.$

184. $\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{x}{x+3}<\dfrac{18}{x^2-19}.$

185. $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{2a}{x+a}<\dfrac{18a^2}{x^2-a^2}.$

186. $\dfrac{x-a}{x-2a}-\dfrac{x-2a}{x-a}-\dfrac{8}{3}<0.$

187. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{a}<\dfrac{2}{x+3a}.$

188. $\dfrac{(x-a)^2+x(x-a)+x^2}{(x-a)^2-x(x-a)+x}<\dfrac{19}{7}.$

189. $\dfrac{x-a}{x-b}+\dfrac{x-b}{x-a}+2>0.$

4-§. Модуль қатнашган бир ўзгарувчили тенглама ва тенгсизликларни ечиш

Математикада ишлатиладиган тушунчалардан бири соннинг абсолют қиймати (модули) тушунчасидир. Соннинг модули тушунчаси математик анализда ёки тақрибий ҳисоблашларда абсолют хатони топишда (техника фанлари миқёсида) кўп ишлатилганлиги сабабли ўрта мактаб математикасида ҳам бу тушунчага тўхтаб ўтилади.

Таъриф. Ҳақиқий a ва $-a$ сонларнинг манфий бўлмаган қийматига a соннинг *абсолют қиймати (модули)* дейилади ва у $|a|$ каби белгиланади.

Таърифга кўра

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{агар } a\geqslant 0 \text{ бўлса,}\\ -a, & \text{агар } a<0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Теорема. *Қарама-қарши ишорали a ва $-a$ сонларнинг модуллари тенгдир:* $|a|=|-a|$.

Юқоридаги мулоҳазалардан қуйидаги натижалар келиб чиқади:

1. $\forall\, x,\ b\in R: (|x|=b\wedge b\geqslant 0)\Longrightarrow(x=\pm b).$
2. $\forall\, x,\ b\in R: |x|=|b|\Longrightarrow x=\pm b.$
3. $\forall\, x,\ b\in R: |x|<b\wedge b>0\Longrightarrow -b<x<b.$
4. $\forall\, x,\ b\in R: (|x|>b\wedge b>0)\Longleftrightarrow(x>b\wedge b>0)\vee$ $\vee\,(x<-b\wedge b>0).$

Юқорида келтирилган тушунчалар асосида модуль қатнашган тенгламаларни кўриб ўтайлик.

Таъриф. Агар $f(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0$ (1) тенгламада ўзгарувчилар абсолют қиймат остида қатнашса, у ҳолда бундай тенгламалар ***абсолют қийматли тенгламалар*** дейилади.

Масалан, $|x-2|=3$; $|x^3+2x+4|=5$;

$$|2x+3|+|4x-1|=4.$$

Абсолют қийматли тенгламалар қуйидаги турларга бўлинади.

$$1.\ \begin{cases} |f(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c)| = k, \\ k \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = k, \\ k \geqslant 0 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} f(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = -k, \\ k \geqslant 0. \end{cases}$$

Тенглама бир ўзгарувчили бўлган ҳолда

$$\begin{cases} |f(x)| = k, \\ k \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow [(f(x)=k \wedge k \geqslant 0) \vee (f(x)=-k \wedge k \geqslant 0)].$$

1-мисол. $|x-2|=1$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $|x-2|=1 \Longleftrightarrow [(x-2=1 \wedge x-2 \geqslant 0) \vee \vee (x-2=-1 \wedge x-2<0)] \Longleftrightarrow [(x=3) \wedge x \geqslant 2] \vee \vee (x=1 \wedge x<2)] \Longrightarrow A = \{x \mid x=1,\ x=3\}$.

II. $f(|x, a, b, \ldots, c|) = k$.

Хусусий ҳолда қуйидаги кўринишдаги тенгламани қарайлик:

$$f(|ax+b|) = k \Longleftrightarrow [f(-(ax+b)) = k \wedge ax+b \leqslant 0] \vee \vee (f(ax+b) = k \wedge ax+b > 0)].$$

Маълумки, функциянинг жуфтлик хоссасига асосан α сон $f(|x, a, b, \ldots, c|) = k$ тенгламанинг илдизи бўлса, у ҳолда $-\alpha$ ҳам шу тенгламанинг илдизи бўлади. Шунинг учун иккала системадан бирини ечиш етарлидир.

2-мисол. $x^2-|x|=6$ тенгламани ечинг.

Ечиш. 1-усул. $x^2-|x|=6 \Longleftrightarrow [(x^2-x-6=0 \wedge \wedge x \geqslant 0) \vee (x^2+x-6=0 \wedge x<0)] \Longleftrightarrow [(x^2-x-6= =0 \wedge x \geqslant 0 \Longrightarrow (x=3 \wedge x \geqslant 0) \vee (x=-2 \wedge x \geqslant 0)) \vee \vee (x^2+x-6=0 \wedge x<0 \Longrightarrow (x=-3 \wedge x<0) \vee (x=$

$= 2 \wedge x < 0))] \Longleftrightarrow [(x = 3 \wedge x \geqslant 0) \vee (x = -3 \wedge x < 0)] \Longrightarrow A = \{-3;\ 3\}$.

2-усул. $x^2 - |x| = 6 \Longleftrightarrow |x|^2 - |x| = 6 \Longrightarrow (|x| = 3 \vee |x| \neq -2) \Longrightarrow |x| = 3;\ A = \{-3;\ 3\}$.

III. $|f(x, a, b, \ldots, c)| = \varphi(x, a, b, \ldots, c) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x, a, b, \ldots, c) = \varphi(x, a, b, \ldots, c), \\ f(x, a, \ldots, c) \geqslant 0, \\ \varphi(x, a, \ldots, c) \geqslant 0 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} f(x, a, \ldots, c) = -\varphi(x, a, \ldots, c), \\ f(x, a, \ldots, c) < 0, \\ \varphi(x, a, \ldots, c) \geqslant 0. \end{cases}$$

Бу кўринишдаги аралаш системалар тегишли қонуниятлар ёрдамида ҳал қилинади.

3-мисол. $|9 - 3x| = |4 - 5x| + |2x + 5|$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $|a + b| = |a| + |b| \Longleftrightarrow ab \geqslant 0$ га асосан

$$|9 - 3x| = |4 - 5x| + |2x + 5| \Longleftrightarrow (4 - 5x)(2x + 5) \geqslant 0 \Longleftrightarrow -2{,}5 \leqslant x \leqslant 0{,}8.$$

Демак, ечимлар тўплами: $A = \{x \mid -2{,}5 \leqslant x \leqslant 0{,}8\}$.

4-мисол. $|9 - 3x| < |4 - 5x| + |2x + 5|$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Бу ерда $9 - 3x = (4 - 5x) + 2x + 5$ бўлиб ва $|a + b| \leqslant |a| + |b| \Longleftrightarrow ab < 0$ га асосан $(4 - 5x) \times (2x + 5) < 0 \Longleftrightarrow (x < -2{,}5 \vee x > 0{,}8)$.

Жавоб: $x \in \left(-\infty;\ -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{4}{5};\ +\infty\right)$.

5-мисол. $|x + 2a| + |x - a| < 3x$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш Агар $a > 0$ бўлса, у ҳолда $-2a < a$ бўлади; агар $a < 0$ бўлса, у ҳолда $a < -2a$ бўлади.

$$|x + 2a| + |x - a| < 3x \Longleftrightarrow [(x + 2a \geqslant 0 \wedge x - a \geqslant 0 \wedge x + 2a + x - a < 3x) \vee (x + 2a \leqslant 0 \wedge x - a \geqslant 0 \wedge - x - 2a + x - a < 3x) \vee (x + 2a \geqslant 0 \wedge x - a \leqslant 0 \wedge x + 2a - x + a < 3x) \vee (x + 2a \leqslant 0 \wedge x - a < 0 \wedge x + 2a + x - a > 3x)] \Longleftrightarrow [(x \geqslant -2a \wedge x \geqslant a \wedge x > a) \vee$$

$$\vee(x\leqslant-2a\wedge x>a\wedge x>-a)\vee(x\geqslant-2a\wedge x\leqslant a\wedge x>a)\vee$$
$$\vee\left(x\leqslant-2a\wedge x<a\wedge x>-\frac{a}{5}\right)\Big].$$

Жавоб. $\begin{cases}\text{Агар } a<0 \text{ бўлса, у ҳолда } x\in[2a;\ +\infty),\\ \text{агар } a=0 \text{ бўлса, у ҳолда } x\in(0;\ +\infty),\\ \text{агар } a>0 \text{ бўлса, у ҳолда } x\in(a;\ +\infty).\end{cases}$

Машқлар

Қуйидаги тенгламаларни график усулда ечинг.

190. $|x-2|=3$.
191. $|x|=x+2$.
192. $|x|=2x+1$
193. $|-x+2|=2x+1$.
194. $|3x-4|=-x+4$.
195. $\frac{7x+4}{5}-x=\frac{|3x-5|}{2}$.
196. $|x-1|+|x-2|=1$.

Қуйидаги тенгламаларни ечинг.

197. $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$.
198. $|4x-1|-|2x-3|+|x-2|=0$.
199. $|x-1|+|x+2|-|x-3|=4$.
200. $|x-1|-|x+2|-|2x-5|+|3-x|=-3$.
201. $||||x|-2|-1|-2|=2$.
202. $|2-|1-|x|||=1$.

Қуйидаги параметрли тенгламаларни ечинг.

203. $2|x+a|-|x-2a|=3a$.
204. $a-\frac{2a^2}{|x+a|}=0$.
205. $|x^2-a^2|=(x+3a)^2$.
206. $x=2|x-a|-2|x-2a|$.
207. $|x+3a|-|x-a|=2a$.
208. $x+\frac{2|x+a|}{x}=\frac{a}{x}$.

Тенгламаларни график усулда ечинг.

209. $x^2+2{,}5|x|-1{,}5=0$.
210. $x^2+6|x|+8=0$.
211. $x^2-6|x|+8=0$.
212. $|x-3|=(x-3)^2$.
213. $(x+1)^2=|x+3|$.
214. $|2x+3|=(2x-3)^2$.

Тенгламаларни ечинг.

215. $|x^2-4|=x^2-4$.
216. $|-x^2+1|=-x^2+1$.
217. $|x^2-3x+2|=3x-x^2-2$.
218. $|2x-x^2-1|=2x-x^2-1$.
219. $|5x-x^2-6|=x^2-5x+6$.

220. $|x^2 - 5x + 6| = 5x - x^2 - 6$.

221. $|x - 1| = -|x| + 1$.

222. $\left|\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right| = \frac{3}{4}$.

Қуйидаги тенгсизликларни график усулда ечинг.

223. $|2x - 5| < 7$.

224. $|3 - x| < 4$.

225. $|3x - 5| > 10$.

226. $|5 - x| > \frac{1}{2}$.

227. $|x - 2| < 2x - 10$.

228. $|2x - 1| > x - 1$.

229. $|x + 2| > |x|$.

230. $|x| > |1 - x|$.

231. $|2x + 3| > |4x - 3|$.

232. $|x - 1| < |2x - 1|$.

233. $|2x - 3| - |3x + 7| < 0$.

Қуйидаги тенгсизликларни аналитик усулда ечинг.

234. $|2x + 7| - |3x + 5| > 0$.

235. $|2x + 5| - |3x - 7| < 0$.

236. $|x - 1| + |2x - 6| < 3$.

237. $|x - 1| + |x - 3| > 2$.

238. $|x - 1| + |x + 2| - |x - 3| > 4$.

239. $|x + 2| + |x + 1| + |x - 4| > 9$.

240. $|x - 1| - |x - 2| + |x - 3| - |x - 4| + |x - 5| \leqslant 3$.

241. $|x + 2| - |x + 1| + |x| - |x - 1| + |x - 2| > 2{,}5$.

242. $|x^2 - x - 6| > 3 + x$.

243. $|x^2 - 6x + 8| < 5x - x^2$.

244. $|5x - x^2 - 6| > x^2 - 5x + 6$.

245. $|x^2 - 3x + 2| > 3x - x^2 - 2$.

246. $|x^2 + 6x + 5| > x^2 - 8x + 16$.

247. $\left|\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}\right| < 1$.

248. $\left|\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}\right| \geqslant 1$.

249. $\frac{x^2 - |x| - 6}{x - 2} \geqslant 2x$.

250. $\frac{4x - 1}{|x - 1|} \geqslant |x + 1|$.

Қуйидаги параметрли тенгсизликларни ечинг.

251. $|2x + a| > \frac{3a}{2} + |x + a|$.

252. $|x - 3a| < |x - a| - 2a$.

253. $|x + 2a| + |x - a| < 3x$.

254. $|x - a^2| > 2a^2$.

255. $|x + 2a| < \frac{8a^2}{|x - 2a|}$.

256. $a + \frac{4a^2}{|x - 2a|} \geqslant 0$.

5- § Бир номаълумли иррационал тенгламалар

Алгебраик тенгламанинг яна бир тури иррационал тенгламадир.

Таъриф. Агар $f(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c)$ ва $\varphi(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c)$ иррационал функциялар бўлса, у ҳолда $f(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = \varphi(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c)$ кўринишдаги тенглама иррационал тенглама дейилади, бу ерда $a, b, \ldots, c$ параметрлар.

Иррационал тенгламани ечишда асосан иррационал ифодалар устида айний шакл алмаштиришдан ва иррационал функцияларнинг асосий хоссаларидан фойдаланилади.

Теорема *Комплекс сонлар майдонида иррационал тенгламанинг ечими рационал тенгламалар системасининг ечимига тенг кучлидир.*

Масалан, $f(x, y, \ldots, z, \sqrt[n]{R(x, y, \ldots, z)}) = 0 \ (1) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x, y, \ldots, z, u) = 0, \\ u^n = R(x, y, \ldots, z) \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x, y, \ldots, z, u) = 0, \\ u^n = R(x, y, \ldots, z) \geqslant 0, \\ n = 2k \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} f(x, y, \ldots, z, u) = 0, \\ u^n = R(x, y, \ldots, z), \\ n = 2k + 1, \ k \in Z, \end{cases}$$

Иррационал тенгламаларни ечишда қуйидаги методлар ёрдам бериши мумкин. Масалани бир номаълумга нисбатан ҳал қилинса, уни n та номаълумли тенгламалар учун ҳам қўллаш мумкин.

I. Янги ўзгарувчи киритиш усули билан ечиладиган тенгламалар. Масалан, $f(x, \sqrt[n]{\varphi(x)}) = 0$ тенгламани унга эквивалент бўлган ушбу системага қуйидагича келтириш мумкин:

$$f(x, \sqrt[n]{\varphi(x)}) = 0 \Longleftrightarrow [f(x, u) = 0 \wedge u^n = \varphi(x)] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow [(f(x, u) = 0 \wedge u^{2k+1} = \varphi(x)) \vee (f(x, u) = 0 \wedge$$

$$\wedge\, u^{2k} = \varphi(x) \wedge \varphi(x) \geqslant 0)].$$

1-мисол $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} = a$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} = a \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (\sqrt{3y^2-8} = a - y \wedge y = \sqrt{x+2} \wedge x \geqslant \frac{2}{3} \wedge$$

$$\wedge a>0) \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3y^2-8=(a-y)^2, \\ y=\sqrt{x+2}, \\ a-y\geqslant 0, \\ a>0, \quad x\geqslant \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2y^2+2ay-8-a^2=0, \\ 0\leqslant y\leqslant a, \\ a>0, \ x\geqslant \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2}\left(-a-\sqrt{3a^2+16}\right), \\ 0\leqslant y\leqslant a, \ a>0, \\ x\geqslant \dfrac{2}{3}, \ 3a^2+16\geqslant 0 \end{array}\right. \vee$$

$$\vee \left|\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{3a^2+16}\right), \\ 0\leqslant y\leqslant a, \ a>0, \\ x\geqslant \dfrac{2}{3}, \ y=\sqrt{x+2}, \\ 3a^2+16\geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{3a^2+16}\right), \\ 0\leqslant \dfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{3a^2+16}\right)\leqslant a, \\ x\geqslant \dfrac{2}{3}, \ y^2=x+2, \\ 3a^2+16\geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=y^2-2, \\ y\geqslant 0, \\ a\geqslant \dfrac{2\sqrt{6}}{3}, \\ x\geqslant \dfrac{2}{3}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\left(2a^2+4-a\sqrt{3a^2+16}\right), \\ a\geqslant \dfrac{2\sqrt{6}}{3}. \end{array}\right.$$

Жавоб. $\left|\begin{array}{l} a<0 \text{ бўлганда, } x\in\varnothing, \\ 0\leqslant a<\dfrac{2\sqrt{6}}{3} \text{ бўлганда, } x\in\varnothing, \\ a\geqslant \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \text{ бўлганда, } A=\left\{x \mid x=\dfrac{1}{2}\left(2a^2+\right.\right. \\ \qquad\qquad \left.\left.+4-a\sqrt{3a^2+16}\right)\right\}. \end{array}\right.$

II. Даражага кўтариш усули билан ечиладиган тенгламалар.

$$\sqrt[2k]{f(x, a, b, \ldots, c)} = \varphi(x, a, b, \ldots, c) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x, a, \ldots, c) = [\varphi(x, \ldots, c)]^{2k}, \\ \varphi(x, a, \ldots, c) \geqslant 0. \\ f(x, a, \ldots, c) \geqslant 0. \end{cases}$$

2-мисол. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{5x+1} = \sqrt{12x+13}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{5x+1} = \sqrt{12x+13} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (2\sqrt{(2x+3)(5x+1)} = 5x+9 \wedge 2x+3 \geqslant 0 \quad 5x+1 \geqslant$
$\geqslant 0 \wedge 12x+13 \geqslant 0) \Longleftrightarrow (4(2x+3)(5x+1) = 25x^2 + 90x +$
$+ 81 \wedge x \geqslant -\frac{3}{2} \wedge x \geqslant -\frac{1}{5} \wedge x \geqslant -\frac{13}{12}) \Longleftrightarrow (15x^2 -$
$- 22x - 69 = 0 \wedge x \geqslant -\frac{1}{5}) \Longleftrightarrow [(x-3)(15x+23) = 0 \wedge$
$\wedge x \geqslant -\frac{1}{5})]$.

Демак, ечим $A = \{x \mid x = 3\}$.

III. Абсолют қиймат (модуль) қатнашган тенгламага ёки рационал системага келтириб ечиладиган тенгламалар.

3-мисол. Қуйидаги тенгламани ечинг:

$$\sqrt{5 + x - 4\sqrt{x+1}} + \sqrt{10 + x - 6\sqrt{x+1}} = 1.$$

Ечиш.

$$\sqrt{5 + x - 4\sqrt{x+1}} + \sqrt{10 + x - 6\sqrt{x+1}} = 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(y-2)^2} + \sqrt{(y-3)^2} = 1, \\ y = \sqrt{x+1}, \ x+1 \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} |y-2| + |y-3| = 1, \\ y = \sqrt{x+1}, \ x+1 \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 2, \\ y - 2 + y - 3 = 1, \\ y = \sqrt{x+1}, \ x+1 \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2 < y \leqslant 3, \\ y - 2 - y + 3 = 1, \\ y^2 = x+1, \ x+1 \geqslant 0 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} y>3,\\ y-2+y-3=1,\\ y^2=x+1,\\ x+1\geqslant 0,\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 3,\\ \sqrt{x+1}=2\end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} 2<y\leqslant 3,\\ 1=1,\\ 3<x\leqslant 8\end{cases} \vee \begin{cases} y>3,\ x\leqslant 8,\\ y=3,\\ y^2=x+1.\end{cases}$$

Жавоб: $\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 3 \text{ ораликда } A=\{x\mid x=3\},\\ 3<x\leqslant 8 \text{ ораликда } x\in R,\\ x>8 \text{ ораликда } x\in\varnothing.\end{cases}$

IV. Иррационал тенгламани график усулда ечиш. Масалан, $\sqrt[n]{f(x)}=\varphi(x)$ тенглама берилган бўлсин. Бу тенгламани ечиш учун $y=\sqrt[n]{f(x)}$ $y=\varphi(x)$ функцияларнинг графиги чизилади. Сўнгра иккала графикнинг кесишган нуқталарининг абсциссаларини аниқлаб, берилган тенгламанинг илдизлар тупламари $A=\{x_1 x_2 x_3 x_4\}$ ҳосил қилинади (4- чизма).

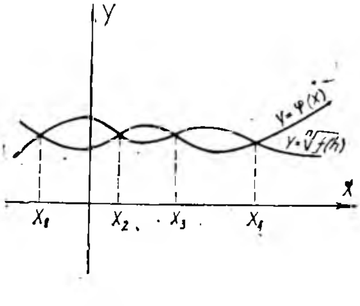
Машқлар

Қуйидаги тенгламаларни янги ўзгарувчи киритиш усули билан ечинг:

257 $x-\sqrt{x-1}=7.$

258 $x+\sqrt{x^2+20}=22.$

259. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2.$



4- чизма.

260. $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2.$

261. $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3.$

262. $\sqrt[5]{\dfrac{16x}{x-1}}+\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{16x}}=2{,}5$

263. $\sqrt[6]{1{,}5}\,\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=0.$

264. $\sqrt{x-a}=x^2+a;$ (a — параметр).

265. $\sqrt[4]{\dfrac{a-x}{b+x}}+\sqrt[4]{\dfrac{b+x}{a-x}}=2$; ($a$, b — параметр).

Қуйидаги тенгламаларни даражага кўтариш усули билан ечинг.

266. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$.

267. $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$.

268. $\sqrt{10-x^2}+\sqrt{x^2+3}=5$.

269. $\sqrt{\dfrac{20+x}{x}}+\sqrt{\dfrac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$.

270. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$.

271. $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}$.

272. $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}=\sqrt{7}+5$.

273. $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=x$.

274. $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}$.

275. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+7}$

276. $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$; (a — параметр).

277. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}$; ($a$, b — параметр).

278. $\sqrt{x-\sqrt{x-a}}=a$ (a — параметр).

279. $\sqrt{a-\sqrt{x+a}}=x$; (a — параметр).

280. $\sqrt{3x+5}-\sqrt{x-2}=a$, (a — параметр).

Қуйидаги тенгламаларни рационал системага ёки модуль қатнашган тенгламага келтириш усули билан ечинг.

281. $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x+2)^2}$.

282. $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^3-2x+1}$.

283. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1$.

284. $\sqrt{5+x+4\sqrt{x+1}}=2+\sqrt{x+1}$.

285. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$.

286. $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$

287. $\sqrt{10-x^2}+\sqrt{x^2+3}=5$.

288. $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$.

289. $\sqrt{2-x}+\sqrt{9-x}=5$.

290. $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$.

291. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$.

Қуйидаги тенгламаларни график усул билан ечинг.

292. $\sqrt{2x-7}-\sqrt{x}=0.$

293. $x-\sqrt{2-x}=0.$

294. $1+\sqrt{x+5}=x.$

295. $\sqrt{x+7}=4x-5.$

296. $\sqrt{1-3x}=3+x.$

297. $\sqrt{2x-7}+3=x.$

298. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3.$

Қуйидаги тенгламаларни қулай усул билан ечинг.

299. $\sqrt{x^2+3x-3}=2x-3.$

300. $\sqrt{9x^2+2x-3}=3x-2.$

301. $x^2-3x=5\sqrt{x^2-3x+24}.$

302. $(x+2)(x-5)+3\sqrt{x(x-3)}=0$

303. $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6}.$

304. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$

305. $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1.$

306. $x+\sqrt{x^2+16}=\dfrac{40}{\sqrt{x^2+16}}.$

307. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}.$

308. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+3}=\sqrt[3]{2x+1}.$

Параметр қатнашган тенгламаларни ечинг.

309. $\sqrt{x+4a}+\sqrt{x}=2\sqrt{a},\ a\geqslant 0$

310. $\sqrt{4x^2+3a^2}-\sqrt{4x^2-3a^2}=2\sqrt{2x}.$

311. $2x+\sqrt{4x^2+a^2}=\dfrac{5a^2}{\sqrt{4x^2+a^2}}.$

312. $\dfrac{1}{\sqrt{2x+a}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-a}}=\sqrt{\dfrac{2}{4x^2-a^2}}.$

313. $\sqrt{x+2a}-\sqrt{\dfrac{4a^2}{x+2a}}=\sqrt{x+4a}.$

314. $\sqrt{16a^2-x\sqrt{x^2+15a^2}}=4a-x.$

315. $\dfrac{\sqrt{2a-x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{2a-x}+\sqrt{x-3a}}=\dfrac{\sqrt{2a-x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{2a-x}-\sqrt{x-3a}}.$

316. $2x+2ax+\sqrt{x}=0.$

317. $\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}=\dfrac{x}{a},\ a\neq 0.$

318. $\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+2ax}{1-2ax}}=1.$

319. $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{a-x}=2\sqrt[8]{a^2-x^2}.$

6-§. Бир номаълумли иррационал тенгсизликлар

Иррационал тенгсизликларни ечиш иррационал тенгламаларни ечишдан қисман фарқ қилади.

Таъриф. Агар $f(x, a, b, \ldots, c)$ функция иррационал функция бўлса, у ҳолда $f(x, a, b, \ldots, c) \geq 0$ кўринишдаги тенгсизлик *иррационал тенгсизлик* дейилади

Иррационал тенгсизликларни ечиш методларини аниқлайдиган қуйидаги теоремалар мавжуд:

1-теорема. $\sqrt[2k]{\varphi(x, a, \ldots, c)} < f(x, a, \ldots, c)$ *тенгсизлик*

$$\begin{cases} \varphi(x, a, \ldots, c) < [f(x, a, \ldots, c)]^{2k}, \\ f(x, a, \ldots, c) > 0, \\ \varphi(x, a, \ldots, c) \geq 0 \end{cases}$$

рационал тенгсизликлар системасига эквивалентдир.

2-теорема. $\sqrt[2k]{\varphi(x, a, \ldots, c)} > f(x, a, \ldots, c)$ *тенгсизлик*

$$\begin{cases} \varphi(x, a, \ldots, c) \geq 0, \\ f(x, a, \ldots, c) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \varphi(x, a, \ldots, c) > [f(x, a, \ldots, c)]^{k}, \\ f(x, a, \ldots, c) \geq 0 \end{cases}$$

рационал тенгсизликлар системасига эквивалентдир.

3-теорема. $\sqrt[2k+1]{\varphi(x, a, \ldots, c)} < f(x, a, \ldots, c)$ *ёки* $\sqrt[2k+1]{\varphi(x, a, \ldots, c)} \geq f(x, a, \ldots, c)$ *кўринишдаги тенгсизликлар мос равишда* $\varphi(x, a, \ldots, c) < [f(x, a, \ldots, c)]^{2k+1}$ *ва* $\varphi(x, a, \ldots, c) \geq [f(x, a, \ldots, c)]^{2k+1}_{k \in N}$ *тенгсизликларга эквивалент бўлади.*

4-теорема. $f(x, \sqrt[n]{\varphi(x)}) > 0$ *тенгсизлик* $\begin{cases} f(x, y) > 0, \\ y^n = \varphi(x) \end{cases}$ *аралаш системага эквивалентдир.*

1 мисол. $\sqrt{x-5} + \sqrt{2x+1} > \sqrt{3x-4}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $\sqrt{x-5} + \sqrt{2x+1} > \sqrt{3x-4} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (2\sqrt{(x-5)(2x+1)} > 0 \wedge x-5 \geq 0 \wedge 2x+1 \geq 0 \wedge$
$\wedge 3x-4 \geq 0) \Longleftrightarrow [(x-5)(2x+1) > 0 \wedge x \geq 5 \wedge x \geq -0{,}5 \wedge$
$\wedge\ x \geq \frac{4}{3}] \Longleftrightarrow [(x-5)(2x+1) > 0 \wedge x \geq 5] \Longleftrightarrow x > 5.$

Демак, берилган тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлар тўплами: $A=\{x \mid x>5\}$.

2- мисол. $\sqrt{x^2-3x+2}-x-3>0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $\sqrt{x^2-3x+2}-x-3>0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2}>x+3 \Longleftrightarrow (x^2-3x+2\geqslant 0 \wedge x+3<0) \vee (x^2-3x+2>(x+3)^2 \wedge x+3\geqslant 0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow ((x-1)(x-2)\geqslant 0 \wedge x<-3) \vee (9x+7<0 \wedge x\geqslant -3) \Longleftrightarrow \left[(x<-3)\vee\left(x\geqslant -3 \wedge x<-\frac{7}{9}\right)\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(x<-3 \vee -3\leqslant x<-\frac{7}{9}\right).$$

Демак, берилган тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлар тўплами: $A=\left\{x \mid x<-\frac{7}{9}\right\}$.

3-мисол. $\sqrt{x+a}-\sqrt{\frac{a^2}{x+a}}<\sqrt{x+2a}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $\sqrt{x+a}-\sqrt{\frac{a^2}{x+a}}<\sqrt{x+2a} \Longleftrightarrow (x+a>0 \wedge x+2a\geqslant 0 \wedge x+a-|a|<\sqrt{(x+2a)(x+a)}) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow [(a<0 \wedge x>-a \wedge x>-2a \wedge x+2a<\sqrt{(x+2a)(x+a)}) \vee (a=0 \wedge x>0 \wedge x<\sqrt{x^2}) \vee (a>0 \wedge -a<x \wedge x>-2a \wedge x<\sqrt{(x+2a)(x+a)})] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow [(a<0 \wedge x\geqslant -2a \wedge (x+2a)^2<(x+a)(x+2a)) \vee (a=0 \wedge x>0 \wedge x<|x|) \vee (a>0 \wedge x>-a \wedge x<\sqrt{x^2+3ax+2a^2})] \Longleftrightarrow [(a<0 \wedge x\geqslant -2a \wedge a(x+2a)<0) \vee (a=0 \wedge x>0 \wedge x<x) \vee (a>0 \wedge x>-a \wedge x<0) \wedge (a>0 \wedge x>-a \wedge x\geqslant 0 \wedge x^2<x^2+3ax+2a^2)] \Longleftrightarrow [(a<0 \wedge x\geqslant -2a \wedge x+2a>0) \vee (a>0 \wedge -a<x<0) \vee (a>0 \wedge x\geqslant 0)] \Longleftrightarrow [(x<0 \wedge x>-2a) \vee (a>0 \wedge x>-a)].$$

Демак, берилган тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлар тўплами:

а) агар $a<0$ бўлса, у ҳолда $A=(-2a;\ +\infty)$;
б) агар $a=0$ бўлса, у ҳолда $A=\varnothing$;
в) агар $a>0$ бўлса, у ҳолда $A=(-a;\ +\infty)$.

Машқлар

Қуйидаги тенгсизликларни ечинг:

320. $\sqrt{x+2} > x$.

321. $\sqrt{2x+3} < 3-x$.

322. $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x$.

323. $\sqrt{x^2-3x-10} > x-2$.

324. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2} > \sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{3}{4}}$.

325. $\sqrt{(x-3)(2-x)} < 3+2x$.

326. $3\sqrt{6+x-x^2}+2 > 4x$.

327. $\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x$.

328. $(1+x)\sqrt{x^2+1} > x^2-1$.

329. $(x-2)\sqrt{x^2+1} > x^2+2$.

330. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1} < 1$.

331. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+8} > 3$.

332. $\sqrt{9-x^2}+\sqrt{6x-x^2} > 3$.

333. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1} < 1$.

334. $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$.

335. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-5} \leqslant \sqrt{5-x}$.

336. $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3} > -\sqrt{x-5}$.

337. $\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-19} > \sqrt{5x-27}$.

338. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

339. $\frac{(8-x)\sqrt{8-x}+(5+x)\sqrt{5+x}}{(8-x)\sqrt{5+x}+(5+x)\sqrt{8+x}} < \frac{7}{6}$.

340. $\sqrt[3]{-9x^2+6x} < 3x$.

341. $\sqrt[3]{x^2-x} > -x\sqrt[3]{2}$.

Қуйидаги тенгсизликларни график усулда ечинг

342. $\sqrt{x-1} \geqslant 2$.

343. $\sqrt{x+2} > x^2$.

344. $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{x-1}$.

345. $\frac{1}{x} \geqslant \sqrt{x}$

Қуйидаги параметр қатнашган тенгсизликларни ечинг.

346. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1} < a$.

347. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x} > a$.

348. $\sqrt{2x+m} \geqslant x$.

349. $\sqrt{\frac{x+a}{a-x}}+\sqrt{\frac{a-x}{x+a}} > 2.$

350. $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}} < \sqrt{2}.$

351. $x+\sqrt{a^2-x^2} \geqslant 0.$

352. $\sqrt{\frac{x+3}{x+2}}+\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} < \frac{a^4+1}{a^2}.$

353. $\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{2ax-x^2} > a.$

354. $\sqrt{\frac{3x+a}{x-a}} < a-1.$

355. $\sqrt{x+a} < a-\sqrt{x}.$

356. $\sqrt{2ax-x^2} \geqslant a-x.$

357. $\sqrt{a-x}+\sqrt{3a-x} > 2\sqrt{a}, \quad a \geqslant 0.$

358. $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a} > 2, \quad a > 0.$

359. $\sqrt{a-x}-\sqrt{\frac{a^2}{a-x}} < \sqrt{2a-x}.$

360. $\sqrt{a^2+x}+\sqrt{b^2+x} > a+b, \ b > a > 0.$

361. $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x} > a+b, \ |b| > |a|.$

362. $\sqrt{2x-a} \geqslant x$

363. $\sqrt{2x^2+3} < x-a.$

364. $\sqrt{x-a}+\sqrt{-x-a} > -a.$

7- §. Кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар

Агар тенгламада номаълумлар устида алгебраик амаллардан ташқари трансцендент амаллар ҳам бажариладиган бўлса, бундай тенглама трансцендент тенгламалар синфига киритилади. Алгебрада кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар трансцендент тенгламалар синфига киради.

Кўрсаткичли ва логарифмик тенгламаларнинг бир неча хусусий ҳолларини ва уларни ечиш усулларини келтирамиз.

1. $a^{f(x)}=1, \ a>0, \ a\neq 1$ кўринишдаги тенгламалар.

Бу тенгламани ечишда $(a^{f(x)}=1, \ a>0, \ a\neq 1) \iff$ $\iff f(x)=0$ муносабатнинг ўринлилигидан фойдаланилади.

1-мисол. $2^{x^2-5x+6}=1$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $2^{x^2-5x+6}=1 \iff x^2-5x+6=0 \iff$

$\iff (x-2)(x-3)=0 \iff \left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ x-3=0. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=3. \end{array}\right.$

Демак, ечимлар тўплами: $A\{x \mid x=2,\ x=3\}$.

II. $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$ кўринишдаги тенгламалар. Бу тенгламаларни ечишда $(a^{f(x)}=a^{\varphi(x)},\ a>0,\ a\neq 1) \Longleftrightarrow (f(x)-\varphi(x)=0)$ муносабатнинг ўринлилигидан фойдаланилади.

2-мисол. $3^{x^2-\frac{5}{7}x}=\sqrt[7]{9}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $3^{x^2-\frac{5}{7}x}=\sqrt[7]{9} \Longleftrightarrow x^2-\frac{5}{7}x-\frac{2}{7}=0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 7x^2-5x-2=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}7x+2=0,\\ x-1=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{2}{7},\\ x=1.\end{array}\right.$$

$$A=\{x \mid x=-\frac{2}{7};\ x=1\}.$$

III. $a^{f(x)}=b,\ a>0,\ b>0,\ a\neq 1$ кўринишдаги тенгламалар. Бу тенглама берилган шартга кўра $f(x)=\log_a b$ тенгламага эквивалент бўлади.

IV. $A_0 a^{nx+k_0}+A_1 a^{nx+k_1}+\ldots+A_m a^{nx+k_m}=N$ кўринишдаги тенгламалар. $k_0<k_1<\ldots<k_m$ бўлганда берилган тенглама $M a^{nx+k_0}=N$ кўринишдаги тенгламага эквивалент бўлади, бу ерда $M=A_0 a^{k_0-k_0}+A_1 a^{k_1-k_0}+ \ldots + A_m a^{k_m-k_0}$.

3-мисол. $5^{3x}-2\cdot 5^{3x-1}-3\cdot 5^{3x-2}=300$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $5^{3x}-2\cdot 5^{3x-1}-3\cdot 5^{3x-2}=300 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 5^{3x-2}(5^2-2\cdot 5-3)=300 \Longleftrightarrow 12\cdot 5^{3x-2}=300 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 5^{3x-2}=5^2 \Longleftrightarrow 3x-2=2 \Longleftrightarrow x=\frac{4}{3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A=\left\{x \mid x=\frac{4}{3}\right\}.$$

V. $A_0 a^{nf(x)}+A_1 a^{(n-1)f(x)}+\ldots+A_n=0$ кўринишдаги тенгламалар. Бу тенгламани ечишда қуйидаги муносабатдан фойдаланилади:

$$A_0 a^{nf(x)}+A_1 a^{(n-1)f(x)}+\ldots+A_n=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A_0 y^n+A_1 y^{n-1}+\ldots+A_{n-1}y+A_n=0,\\ y=a^{f(x)},\ a>0,\ a\neq 1.\end{cases}$$

Логарифмик тенгламалар ҳам берилишига қараб бир неча турга бўлинади:

1. Логарифмнинг $\log_a f(x)=k \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)=a^k, a>0, a\neq 1, \\ f(x)>0 \end{cases}$

таърифи ва хоссасидан фойдаланиб ечиладиган тенгламалар.

4-мисол $\log_{\sqrt{6}}(x^2-5x)=2$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\log_{\sqrt{6}}(x^2-5x)=2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-5x=(\sqrt{6})^2, \\ x^2-5x>0 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-5x-6=0, \\ x>5 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-5x-6=0, \\ x<0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ x<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=6, \\ x>5. \end{cases}$$

$$A=\{x \mid x=-1,\ x=6\}.$$

2. $A_n \log_a^n f(x)+A_{n-1}\log_a^{n-1} f(x)+\ldots+A_1\log_a f(x)+ + A_0=0$ кўринишдаги тенгламалар. Бу тенглама

$$\begin{cases} A_n y^n+A_{n-1}y^{n-1}+\ldots+A_1 y+A_0=0, \\ y=\log_a f(x),\ a>0,\ a\neq 1, \\ f(x)>0 \end{cases}$$

аралаш системага эквивалент бўлади.

3. Потенцирлаш усули билан ечиладиган тенгламалар.

5-мисол. $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \log_2[(x-2)(x-3)]=1, \\ x>3 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3)=2, \\ x>3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+4=0 \\ x>3 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-1=0, \\ x>3 \end{cases} \vee \begin{cases} x-4=0, \\ x>3. \end{cases}$$

$$A=\{x \mid x=4\}.$$

Логарифмик тенгламаларни ечишнинг бошқа усуллари ҳам мавжуд бўлиб, улар устида айний шакл алмаштиришлар бажарилгандан кейин кўриб ўтилган усулларнинг бирортасига келтирилади.

Кўрсаткичли тенгламаларнинг турларидан яна бири

$$[f(x)]^{\varphi(x)}=f(x)$$

ва

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = [f(x)]^{g(x)}$$

кўринишидаги тенгламалардир. Бу кўринишдаги тенгламалар элементар кўрсаткичли тенгламалар эмас. Бу тенгламалар кўрсаткичли тенгламалар, кўрсаткичли функция ва логарифмлашларнинг хоссаларидан ҳамда методларидан фойдаланиб ечилади.

Масалан, $[f(x)]^{\varphi(x)} = f(x)$ тенгламани ечишда унга эквивалент бўлган аралаш системалар тузилиб ечилади яъни,

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = f(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ \varphi(x) \neq 0 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} f(x) = 1, \\ |\varphi(x)| \leqslant k, \\ k \in R \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) = 1 \end{cases} \vee [f(x) = -1 \wedge \varphi(x)$$

унинг илдизлари тоқ сондан иборат]. Бу тенгламаларни логарифмлаш усули билан ҳам ечиш мумкин, яъни

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = f(x) \Longleftrightarrow \lg|f(x)|^{\varphi(x)} = \lg|f(x)| \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\varphi(x) - 1)\lg|f(x)| = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = 1, \\ \lg|f(x)| = 0. \end{cases}$$

6-мисол. $x^x = x$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $x^x = x \Longrightarrow x\lg|x| = \lg|x| \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lg|x| = 0, \\ x = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1, \\ x = 1. \end{array}\right. \quad A = \{x \mid x = 1;\ x = -1\}.$$

$[f(x)]^{\varphi(x)} = [f(x)]^{g(x)}$ **кўринишдаги тенглама ҳам худди шунга ўхшаш ечилади.**

Машқлар

Қуйидаги тенгламаларни ечинг.

365 $\sqrt[10]{2^{x^2-14,5x}} = \frac{1}{8}$.

366. $\frac{12^{x^2+4}}{144^{4x}} = \frac{1}{1728}$.

367. $3 \cdot 16^{x^2-16x-15\frac{3}{4}} = 48 + 24 + 12 + \ldots$.

368. $\left[\sqrt[3]{\left(5 + 3\frac{1}{3} + 2\frac{2}{9} + \ldots\right)225}\right]^{x^2} = 15^{125}$.

369. $\sqrt[x^2-1]{32}\,\sqrt[x-1]{1}-\sqrt[x+1]{8}=0.$

370. $\sqrt[x-65]{32^{2x-60}}-\sqrt[x-66]{4^{3x-49}}=0.$

371. $5\cdot\sqrt[x+2]{3125^{x+1}}=\sqrt[x+3]{15625^{x+2}}.$

372. $\sqrt[0,(2)-x]{m^{0,(3)+x}}=\sqrt[0,(2)+x]{m^{0,(3)-x}}\,\sqrt[0,(2)^2-x^2]{m^2}.$

373. $\sqrt{2^{\sqrt{x+1}}\sqrt{2^{\sqrt{6}}}}=4^{\sqrt{x+1}}.$

374. $\sqrt[x]{\sqrt{2^{3x+1}}}-\sqrt[3x-7]{8^{x-3}}=0.$

375. $27^x-8\cdot[0,(3)]^{3x}-6\cdot3^x+12\cdot3^{-x}=\frac{343}{27}.$

376. $2^{2x}\cdot9^x-2\cdot6^{3x-1}+4^{2x-1}\cdot3^{4x-2}=0.$

377. $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6.$

378. $3^{x-1}-\frac{15}{3^{x-1}}+3^{x-2}-\frac{23}{3^{x-2}}=0.$

379. $\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}=5.$

Қуйидаги тенгламаларни график усулда ечинг.

380. $\left(\frac{1}{2}\right)^x=-x.$

381. $3^x=\frac{1}{3}x^2.$

382. $3^{x^2}=3^x.$

383. $2^{x^2}=x^2+12.$

384. $2^{-x}=\sqrt{x}.$

Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

385. $\log_a x+\log_{a^2}x+\log_{a^3}x=11.$

386. $6-\log_7 x[1+4\cdot9^{4-2\log_{\sqrt3}3}]=\log_x 7.$

387. $\log_{12}(4^x+3x-9)=3x-x\log_{12}27.$

388. $x^2\log_x 27\cdot\log_9 x=x+4.$

389. $\sqrt{\log_5^2x+\log_x^25+2}=2,5.$

390. $\log_x m\,\log_{\sqrt m}\frac{m}{\sqrt{2m-x}}=1.$

391. $\log_2 3+2\log_4 x=\sqrt[\log_3 x]{x^{\log_9 16}}.$

392. $\sqrt{3\log_2^2x-1-9\log_x^2 2}=5.$

393. $\log_{\sqrt3}x+\log_{\sqrt[3]{3}}x+\dots+\log_{\sqrt[10]{3}}x=36.$

394. $\dfrac{1+2\log_9 2}{\log_9 x}-1=2\log_x 3\log_9(12-x)$.

395. $5\log_{\frac{x}{9}} x+\log_{\frac{9}{x}} x^3+8\log_{9x^2}x^2=2$.

396. $20\log_{4x}\sqrt{x}+7\log_{16x}x^3-3\log_{\frac{x}{2}}x^2=0$.

397. $\sqrt[4]{(x-3)^{x+1}}=\sqrt[3]{(x-3)^{x-2}}$.

398. $(x-2)^{10x^2-3x-1}=1$.

Қуйидаги тенгламаларни график усулда ечинг:

399. $\lg(x-1)=x-2$.

400. $\lg(x+1)=x^2+2x+3$.

401. $\lg(x-1)=-(x-1)^2$.

402. $\lg(-x)=2^x$.

Қуйидаги параметр қатнашган тенгламаларни ечинг:

403. $\sqrt[x^2-1]{a^9}\cdot\sqrt[x+1]{a^{\frac{1}{3}}}=\sqrt[x-1]{a^2}$.

404. $a^x(a^{2x}+1)=a(a^{3x}+a^x)$.

405. $\sqrt{2b^{3x-5}+5}+\sqrt{b^{3x-5}-1}=8$.

406. $\sqrt[x]{a^2}=\sqrt[x]{\dfrac{b^4}{a^2}}+\sqrt[x]{b^2}$.

407. $a^{2x+1}-3a^{2x}+4a^{2x-1}=b-1$.

408. $\sqrt{b^{5x+2}+\sqrt{1-b^{10x+4}}}+\sqrt{b^{5x+2}-\sqrt{1-b^{10x+4}}}=a$.

409. $\log_{\sqrt{x}}a\log_{a^2}\dfrac{a^2}{2a-x}=1;\ a>0,\ a\neq 1$,

410. $\log_{ab}(x-a)^2+\log_{ab}(x-b)^2=2\quad ab>0,\ ab\neq 1$.

9-§. Кўрсаткичли ва логарифмик тенгсизликлар

Кўрсаткичли ва логарифмик тенгсизликларни (ёки системани) ечишда тенгсизликларни ечишнинг умумий қоидаларига амал қилиш билан биргаликда кўрсаткичли ва логарифмик функцияларнинг монотонлик хоссаларига ҳам аҳамият берилади.

Кўрсаткичли ва логарифмик тенгсизликлар асосан қуйидаги кўринишларда бўлиши мумкин.

1) $a^{f(x)}>a^{\varphi(x)}\iff\begin{cases}f(x)>\varphi(x),\\a>1\end{cases}\vee\begin{cases}f(x)<\varphi(x),\\0<a<1;\end{cases}$

2) $a^{f(x)}>b\iff\begin{cases}f(x)>\log_a b,\\a>1,\ b>0\end{cases}\vee\begin{cases}f(x)<\log_a b,\\0<a<1,\ b>0;\end{cases}$

3) $A_k a^{kf(x)} + A_{k-1} a^{(k-1)f(x)} + \ldots + A_0 > 0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A_k y^k + A_{k-1} y^{k-1} + \ldots + A_0 > 0, \\ y = a^{f(x)}, \ a > 0, \ a \neq 1; \end{cases}$$

4) $A_1 a^{nx+k_0} + A_1 a^{nx+k_1} + \ldots + A_m a^{nx+k_m} > N \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow P \cdot a^{nx+k_l} > N;$$

5) $[f(x)]^{\varphi(x)} > 1$ ёки $[f(x)]^{\varphi(x)} < 1$;

6) $\log_a f(x) > k \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^k, \\ a > 1, \\ f(x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < a^k, \\ 0 \leqslant a < 1, \\ f(x) > 0; \end{cases}$

7) $\log_a f_1(x) + \log_a f_2(x) + \ldots + \log_a f_n(x) > k \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \log_a \prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x) > k, \\ f_i(x) > 0, \\ a > 0, \ a \neq 1. \end{cases}$$

1-мисол. 2^{x^2+6} 2^{5x} тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $2^{x^2+6} > 2^{5x} \Longleftrightarrow x^2 + 6 > 5x \Longleftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Longleftrightarrow (x-2)(x-3) > 0 \Longleftrightarrow [(x-2) > 0 \wedge x - 3 > 0) \vee (x-2) < 0 \wedge x - 3 < 0)] \Longleftrightarrow (x > 3 \vee x < 2)$.

$$A = \{x \mid x < 2 \vee x > 3\}.$$

2-мисол. $2^{2x} + 2^x - 6 < 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $2^{2x} + 2^x - 6 < 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} y^2 + y - 6 < 0, \\ y = 2^x \end{cases} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -3 < y < 2, \\ y = 2^x > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < 2^x < 2, \\ x \in R \end{cases} \Longleftrightarrow (x < 1).$$

$$A = \{x \mid -\infty < x < 1\}.$$

3-мисол. $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1 \Longleftrightarrow [(x - 2 > 1 \wedge x^2 - 6x + 8 > 0) \vee (0 < x - 2 < 1 \wedge x^2 - 6x + 8 < 0)] \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow [(x > 3 \wedge x > 4) \vee (x > 3 \wedge x < 2) \vee (2 < x < 3 \wedge 2 < x < 4)] \Longleftrightarrow (x > 4 \vee 2 < x < 3)$.

$$A = \{x / 2 < x < 3 \vee x > 4\}.$$

4-мисол. $\log_{x-1}(x^2 - 1) > 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $\log_{x-1}(x^2-1)>0 \iff [(x-1)>1 \wedge x^2-1>1) \vee (0<x-1<1 \wedge 0<x^2-1<1)] \iff [(x>2 \wedge x^2>2) \vee (1<x<2 \wedge 1<x^2<2)] \iff (1<x<\sqrt{2} \vee 2<x)$;

$$A=\{x/1<x<\sqrt{2} \vee 2<x<+\infty\}.$$

5-мисол. $\log_{a^2}(x^2+2x)<1$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $\log_a(x^2+2x)<1 \iff \log_{a^2}(x^2+2x)<\log_{a^2}a^2 \iff \{[(0<a^2<1 \wedge x^2+2x>0 \wedge x^2+2x>a^2) \Rightarrow (0<a^2<1 \wedge x>0 \wedge x^2+2x-a^2>0) \vee (0<a^2<1 \wedge x<-2 \wedge x^2+2x-a^2>0)] \vee [(a^2>1 \wedge x^2+2x>0 \wedge x^2+2x<a^2) \Rightarrow (a^2>1 \wedge x>0 \wedge x^2+2x-a^2<0) < (a^2>1 \wedge x<-2 \wedge x^2+2x-a^2<0)]\} \iff \{[(0<a^2<1 \wedge x>\sqrt{1+a^2}-1) \vee (0<a^2<1 \wedge x<\sqrt{1+a^2}+1)] \vee [(a^2>1 \wedge -1-\sqrt{1+a^2}<x<-2) \vee (a^2>1 \wedge 0<x< <\sqrt{1+a^2}-1)]\}$.

Демак, $0<|a|<1$ бўлганда тенгсизликнинг ечими

$$A=\{x|-\infty<x<-(1+\sqrt{1+a^2})\} \vee$$
$$\vee \{x|\sqrt{1+a^2}-1<x<+\infty\}$$

бўлади; $|a|>1$ бўлганда тенгсизликнинг ечими

$A=\{x|-(1+\sqrt{1+a^2})<x<-2\} \cup \{x|0<x<\sqrt{1+a^2}-1\}$

бўлади; $a=0$, $a=1$ бўлганда тенгсизлик маъносини йўқотади.

Машқлар

Қуйидаги тенгсизликларни ечинг:

411. $\left(\frac{1}{2}\right)^{(x^4-2x^2+1)^{0,5}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$.

412. $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x}\left(\frac{147}{20}\right)^{x} < \left(\frac{81}{625}\right)^{x}$.

413. $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{7}\right)^{x}} > \sqrt[9]{\frac{1}{343}}$

414. $3^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}+3} > 84$.

415. $3^{2x-1}+3^{2x-2}-3^{2x-4}<315$

416. $\sqrt{3^{x+1}}+18\cdot 3^{-x}>29$.

417. $\lg^2 x-2\lg x-8 \leqslant 0$.

418. $\frac{1}{12}\log_{10}^2 x>\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\log_{10}x$.

419. $\log_{x-1}(x+1)>2$.

420. $\log_2(9^{x-1}+7)-1<\log_2(3^{x-1}+1)$.

421. $\log_x 2\cdot\log_{\frac{x}{16}} 2>\frac{1}{\log_2 x-6}$.

422. $\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_3^2 x<1$.

423. $x^{2-2\log_2 x-\log_2^2 x}<\frac{1}{x}$.

424. $\log_{\frac{1}{2}}\log_8\frac{x^2-1}{x-2}<0$.

425. $\log_2\log_3\frac{x-1}{x+1}<\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{x-1}$.

426. $\log_{\frac{1}{3}}\log_5(\sqrt{x^2+1}+x)<\log_3\log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Қуйидаги тенгсизликларни график усулда ечинг:

427. $2^{x-1}\leqslant 2-x$

428. $2^{|x|}>4$.

429. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}<x+2$.

430. $|\log_2 x|>2$.

431. $\log_3|x-1|<1$.

432. $\log_{\frac{1}{2}}|x|>|x|-1$.

Қуйидаги параметрли тенгсизликларни ечинг:

433. $a^{x^2-x}<a^2$.

434. $\frac{1+a^{-x}}{1+2a^{-x}}-\frac{a^k}{a^x-1}<0$.

435. $\sqrt{2-m^{x-3}}<m^{x-3}$.

436. $\frac{2m\cdot a^{2x}-1}{m-1}-\frac{a^{2x}+3}{2}<\frac{1}{m-1}$.

437. $a^{2x}-b^{\frac{2x+1}{2}}<b^{\frac{2x+7}{2}}-a^{2x-1}$.

438. $\log_{0,7}(x^2+2x)<\log_{0,7}(a+1)$.

439. $\log_{\frac{x}{a}} a>\log_{a^2x} a^2$.

440. $3\log_a^2 x+\log_a x>0$

441. $\log_a(x-1)<\log_a(2x+4)-\log_a x$.

442. $6\log_x a<1+\log_a x$.

443. $4+\frac{1}{\log_x a}>\frac{15}{\log_a x-2}$.

444. $x^{\log_a x+1}>a^2x$.

445. $\log_{a^2x} x^3+\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}\sqrt{x}<2$.

9-§. Тенглама тузишга доир масалалар

Маълумки, масалани ечишда масала шартида берилган сонли миқдорлар ёки ҳарфли ифодалар ёрдамида топилиши лозим бўлган номаълум миқдорнинг сон қиймати масала шартида берилаётган қонуният асосида аниқланади. Агар масала шартида берилган миқдорлар билан изланаётган миқдор орасидаги боғланиш мураккаб қонуниятлар ёрдамида берилган бўлса, у ҳолда бу қонуниятларнинг ҳар бирини ўз ичига оладиган тенгламалар тузилади, сўнгра бу тенгламалар системаси текширилади, яъни масалани ечиш тенглама ечишга келтирилади.

Масалани ечиш дейилганда қуйидагилар назарда тутилади: масала шартида берилган маълумотларга кўра изланаётган миқдорнинг масаладаги ўрнини аниқлаш ёки бу мумкин бўлмаса, масаланинг ечими йўқ эканини кўрсатиш; масала шартида берилган миқдорлар масалани ечиш учун етарли бўлса, у ҳолда масаланинг ечилиши учун умумий формула ҳосил қилиб, бу формулани текшириш, унинг мазмунини баҳолаш ва бу формулада қатнашган параметрнинг қийматларига кўра изланаётган миқдорнинг характерли ёки характерли бўлмаган хусусиятларини ажрата билиш, кейин яна масала шартига қайтиб, ечилган тенгламанинг қийматларидан (ечимларидан) қайси бири масала шартини қаноатлантиришини ва қайси бири қаноатлантирмаслигини аниқлаш.

Масала шартидан изланаётган миқдорнигина аниқлайдиган тенглама тузиш ҳар доим ҳам мумкин бўлавермайди. Бундай ҳолда масала шартидан кенг мазмунга эга бўлган тенглама ҳосил қилинади. Аммо, бундай ҳолда ҳосил бўлган тенгламанинг барча илдизлари масала шартини ҳамиша ҳам қаноатлантиравермайди.

Тенглама тузиб, масала ечишда қуйидагиларга алоҳида аҳамият бериш лозим:

1) тенглама тузишда масаланинг ҳамма шартларини имкони борича ҳисобга олиш;

2) топилган натижани тенглама шартига қўйиб текшириб кўриш;

3) тенглама ечимлари билан масаланинг ечими орасидаги фарқни тушунтириб ўтиш.

Охирги пункт айрим ҳолларда ҳисобга олинмай қолади, чунки тенгламанинг масала шартини қаноатлантирадиган ечими олиб қолиниб, каноатлантирмайдиганлари (чет илдизлари) ташлаб юборилади. Умуман чет илдизнинг пайдо бўлиш сабабларини аниқлаш ҳам педагогик, ҳам математик нуқтаи назардан муҳимдир.

1-мисол. Икки соннинг йиғиндиси s ва бу сонлардан бирининг иккинчисига нисбати q бўлса, шу сонларни топинг.

Ечиш. Изланаётган сонлардан бири x десак, у ҳолда иккинчи сон $s-x$ бўлади. Масала шартига кўра x ва q ихтиёрий сонлар, у ҳолда қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$x:(s-x)=q.$$

Бу ерда нолга бўлиш мумкин бўлмагани учун $s-x\neq 0$. Энди умумий кўринишдаги ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$x:(s-x)=q\ /\ s-x\neq 0.$$

Бу тенгламани ечсак, $x=sq-qx$; $(1+q)x=sq$ бўлади. Агар $1+q\neq 0$ бўлса, у ҳолда изланган сонлар $x=\frac{sq}{1+q}$ ва $s-x=\frac{s}{1+q}$ бўлади. Шундай қилиб, биринчи сон $x=\frac{sq}{1+q}$ ва иккинчи сон $s-x=\frac{s}{1+q}$ бўлади.

Энди s ва q параметрларнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламига кўра x нинг ўзгаришини текширамиз. Бу ерда $s>0$ бўлсин. Топилган қийматлардан кўриниб турибдики, агар $q>0$ бўлса, иккала сон s дан кичик.

Масалан, $q=-1,2$ бўлса, у ҳолда $6s=x$ бўлади. Агар $-1<q$ 0 бўлса, $x<0$ бўлади. Булардан қуйидаги савол келиб чиқади: q нинг қандай қийматларида x қандай қийматлар қабул қилади? Исталган k сони x га тенг бўлиши мумкинми? Буни текшириб кўрамиз:

$$\frac{sq}{1+q}=k,\ sq=k+kq;\ q(s-k)=k,\ q=\frac{k}{s-k},\ k\neq s.$$

Шундай қилиб, $q=\frac{k}{s-k}$ нинг қийматини аниқлаб, x ни ихтиёрий s дан фарқли k сонга тенг қилиб олиш мумкинлиги аниқланди. Агар $1+q=0$ ёки $q=-1$ бўлса, у ҳолда тенглама $x(1+q)=sq$ бўлиб, мутлақо ечимга эга эмас. Бу ерда $s=0$: $x\neq 0$ бўлган ҳар қандай сонни қабул қилади.

Умуман, бу масаладан кўриниб турибдики, қатнашаётган s ва q параметрлардан бири s базис бўлиб, q параметр эса актив иштирок этаяпти ва q нинг ўзгариши билан масала ечимн ҳам ўзгариб боряпти.

2- мисол. Бир қотишма $1:2$ нисбатда олинган икки металлдан тайёрланди. Иккинчи қотишма эса шу металлардан $2:3$ нисбатда олиб тайёрланди. Ҳар бир қотишмадан қанча бўлакдан олинса, янги қотишма $a:b$ нисбатда тайёрланади?

Ечиш. Янги қотишма учун биринчи қотишмадан x бўлак, иккинчисидан y бўлак олинган бўлсин, у ҳолда янги қотишма учун биринчи металлдан $\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y$ бўлак, иккинчи металлдан $\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y$ бўлак олинган бўлади. Масаланинг шартига кўра $\dfrac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y}{\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y}=\frac{a}{b}$, бундан $\dfrac{5x+6y}{10x+9y}=\dfrac{a}{b}$.

1. Агар $x=y=0$ бўлса, масала, маъносини йўқотади. Агар $x>0$, $y>0$ бўлса, тенглама $\dfrac{5\frac{x}{y}+6}{10\frac{x}{y}+9}=\dfrac{a}{b}$, $5(b-2a)\frac{x}{y}=3(3a-2b)$ кўринишда бўлади.

2. Агар $b=2a$ бўлса, $0\cdot\frac{x}{y}=3(3a-2b)=-3a$ бўлиб, масала ечимга эга бўлмайди. Бунда янги қотишма биринчи қотишманинг ўзидан иборат бўлади

3. Агар $b\neq 2a$ бўлса, $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3(3a-2b)}{5(b-2a)}$ бўлиб, $\dfrac{3(3a-2b)}{5(b-2a)}>0$ бўлиши керак, бундан $(3a-2b>0\wedge b-2a>0)\vee(3a-2b<0\wedge b-2a<0)$ бўлиб, биринчи системадан $2a<b<1,5a$ ҳосил бўлиб, $a>0$, $b>0$ эканлигидан бу ҳолнинг бўлиши мумкин эмас. Иккинчи системадан $1.5a<b<2a$ ҳосил бўлади. Демак, биринчи қотишмадан $3(2b-3a)$ бўлак, иккинчисидан $5(2a-b)$ бўлак олинган.

Машқлар

446. Трактор олдинги ғилдирагининг айланаси k метр, кейинги ғилдирагининг айланаси l метр. Олдинги ғилдирак қанча масофада кейинги ғилдиракдан n та ортиқ айланади? ($k < l$).

447. Икки ишчининг иккинчиси биринчисидан $1\frac{1}{2}$ кун кейин ишга тушса, улар биргаликда бир ишни 7 кунда тамомлай оладилар. Агар бу ишни ҳар қайси ишчи ёлғиз ўзи бажарса, у ҳолда биринчи ишчи иккинчи ишчига қараганда 3 кун ортиқ ишлаши керак бўлади. Ҳар қайси ишчининг ёлғиз ўзи бу ишни неча кунда тамомлай олади?

448. A модданинг ҳажми B ва C моддалар ҳажмлари йиғиндисининг ярмини ташкил этади; B модданинг ҳажми эса A ва C моддаларнинг ҳажмлар йиғиндисининг $\frac{1}{5}$ қисмини ташкил этади. C модда ҳажмининг A ва B моддалар ҳажмлари йиғиндисига нисбатини топинг.

449. Икки M_1 ва M_2 жисм $AB = 60$ м масофадан бир-бирига қараб текис ҳаракат қилмоқда. M_1 жисм A нуқтадан M_2 жисм B нуқтадан чиққанига қараганда 15 секунд олдин чиқди. Ҳар қайси жисм йўлнинг охирига етганидан сўнг тўхтамай олдинги тезлиги билан орқага қайтди. Биринчи учрашув M_1 жисм йўлга чиққандан 21 секунд ўтгач, иккинчи учрашув эса 45 секунд ўтгач юз беради. Ҳар қайси жисмнинг тезлигини топинг.

450. Ўлчамлари 12 см ва 18 см бўлган расм эни ўзгармас бўлган рамкага жойлаштирилган. Агар рамканинг юзи расмнинг юзига тенг бўлса, рамканинг энини аниқланг.

451. Икки соннинг йиғиндиси 44 га тенг бўлиб, улардан кичиги манфий сондир. Катта сон билан кичик сон айирмасининг кичик сонга бўлган процент нисбати кичик сон билан мос келади. Бу икки сонни топинг.

452. Математикадан масалалар тўплами қўлёзмасида бир мисолда берилган сонни 3 га кўпайтириш ва натижадан 4 ни айириш ёзилган эди. Босмахонада хатога йўл қўйилди: кўпайтириш белгиси ўрнига бўлиш белгиси, минус ўрнига эса плюс қўйилди. Шунга қарамасдан охирги натижа ўзгармади. Тўпламга қандай мисол киритиш мўлжалланган эди?

453. Катта йўлда мотоциклчини қувиб бораётган „Волга“ автомашинаси уни қува бошлаганидан a сек ўтгач етиб олди. Улар орасидаги бошланғич масофа 1 км. Агар улар шу масофада бир-бирига қараб ҳаракат қилса, b секунд ўтгандан кейин учрашади. Ҳар бирининг ўртача тезлигини топинг.

454. Тўғри тўртбурчак шаклидаги ер участкаси тўсиқ билан ўралган. Агар ундан тўғри чизиқ бўйлаб қолган қисми квадрат шаклида бўладиган қилиб бир қисми ажратиб олинса, участканинг юзи 400 $м^2$ га, тўсиқ узунлиги эса 20 м га камаяди. Участканинг дастлабки ўлчамларини аниқланг.

455. Спорт майдончаси учун диагонали 185 м га тенг бўлган тўғри тўртбурчак шаклидаги ер участкаси ажратилди. Қурилиш ишлари бажарилаётганда майдончанинг ҳар бир томонининг узунлигини 4 м га камайтиришга тўғри келди. Бунда тўғри тўртбурчакнинг шакли сақлаб қолинди, лекин юзи 1012 $м^2$ га камайди. Майдончанинг олдинги ўлчамларини топинг.

456. Бир маҳсулотнинг бир килограми билан иккинчи маҳсулотнинг ўн килограми учун 2 сўм тўланган. Агар нархларнинг мавсумий ўзгариши билан биринчи маҳсулотнинг нархи 15% га қимматлашиб, иккинчи маҳсулотнинг нархи 25% га арзонлашса, у ҳолда худди шундай миқдордаги бу маҳсулотлар учун 1 сўм 82 тийин тўланади. Ҳар бир маҳсулотнинг бир килограми қанчадан туради?

457. Отпуска саёҳатида юрган дўстлар биринчи ҳафтада ёнларидаги пулларининг $\frac{2}{5}$ қисмидан 6 сўм кам миқдордагисини харажат қилишди, иккинчи ҳафтадан эса қолган пулнинг $\frac{1}{3}$ қисмини ва яна 2 сўм театрга тушиш учун, учинчи ҳафтада эса қолган пулнинг $\frac{3}{5}$ қисмини ва яна денгизда саёҳат қилиш учун 3 сўм 20 тийин ишлатишди, шундан кейин уларда 20 сўм қолди. Уч ҳафталик саёҳат даврида қанча пул харажат қилинган?

458. Ишчилар бригадаси маълум муддат ичида 800 та бир хил деталь тайёрлаши керак эди. Амалда эса бу иш муддати 8 кун илгари бажарилди, чунки бригада ҳар куни планда белгиланганидан 50 та ортиқ деталь тайёрлади. Иш қандай муддат ичида тугалланиши керак эди ва ҳар кундаги планнинг кунлик ошириб бажарилиш проценти қанча?

459. Бир деталга ишлов бериш учун A ишчи B ишчига қараганда k минут кам вақт сарфлади. Агар A ишчи t соатда B га қараганда n та кўп деталга ишлов берса, шу вақт ичида уларнинг ҳар бири нечтадан деталга ишлов беради?

460. $x^2-3ax+a^2=0$ тенглама илдизлари квадратларининг йиғиндиси 1,75 га тенг. a ни топинг.

461. Солиштирма оғирлиги 20,88 $г/см^3$ бўлган бир бўлак платина пўкак дарахтининг (солиштирма оғирлиги 0,24 $г/см^3$) бир бўлаги билан боғлаб қўйилган. Ҳосил бўлган системанинг солиштирма оғирлиги 0,48 $г/см^3$ га тенг. Агар платина бўлагининг оғирли-

ги 87 г бўлса, дарахт бўлагининг оғирлиги қанча? (Жисмнинг солиштирма оғирлиги—унинг ҳажм бирлигидаги оғирлигидир.)

462. Моддий нуқтага икки куч йўналтирилган бўлиб, улар орасидаги бурчак 30° га тенг. Қўйилган кучлардан бирининг катталиги иккинчисидан $7\sqrt{3}$ марта кўп, тенг таъсир этувчи кучнинг катталиги эса кичик кучнинг катталигидан 24 Н ортиқ. Кичик кучнинг ва тенг таъсир этувчи кучнинг катталигини аниқланг.

463. Учта идишнинг ҳар бирида турли миқдорда суюқлик бор. Уларни тенглаштириш учун олдин биринчи идишдаги суюқликнинг $\frac{1}{3}$ қисми иккинчи идишга кейин иккинчи идишдаги суюқликнинг $\frac{1}{4}$ қисми учинчи идишга қуйилди ва ниҳоят учинчи идишдаги суюқликнинг $\frac{1}{10}$ қисми биринчи идишга қуйилди. Шундан кейин ҳар бир идишдаги суюқлик 9 л дан бўлди. Олдин ҳар бир идишда қанчадан суюқлик бўлган?

464. Разведкачи катер эскадранинг бош кемаси олдига келиб, эскадранинг олдида унинг ҳаракати йўналиши бўйлаб 70 км ни разведка қилиш ҳақида буйруқ олди Агар катерга 28 км/соат тезлик билан юришга рухсат берилганлиги, эскадра эса 14 км/соат тезлик билан ҳаракат қилиши маълум бўлса, катер неча соатдан кейин олдинга қараб кетаётган эскадранинг бош кемаси олдига қайтиб келишини аниқланг.

465. Ҳаракатланувчи моделнинг олдинги ғилдираги 120 м масофада орқа ғилдирагидан 6 та ортиқ айланади. Агар олдинги ғилдирак айланасининг узунлиги ўз узунлигининг $\frac{1}{4}$ қисмича, орқа ғилдирак айланасининг узунлиги эса ўз узунлигининг $\frac{1}{5}$ қисмича узайтирилса, ўша масофада орқа ғилдирак олдинги ғилдиракдан 4 та ортиқ айланади. Ҳар бир ғилдирак айланасининг узунлигини топинг.

466. Монтёрлар бригадаси соатига 8 м дан электр сими ўтказиб, ишни кундузи соат 4 да тамомлаши мумкин эди. Топшириқнинг ярми бажарилгандан кейин бир ишчи бригададан кетди, шу сабабли бригада соатига 6 м дан сим ўтказиб, ишни кеч соат 6 да тамомлади. Неча метр сим ўтказилган ва неча соат ишланган?

467. Шофёр фабрикадан чиқиб йўлга тушганидан икки соат ўтгач, спидометрга қараб атиги 112 км босиб ўтганлигини аниқлади. У, агар шу тезликда юрадиган бўлса, юкни станцияга 30 минут кечикиб олиб боришини аниқлади. Шунинг учун тезликни

оширди ва станцияга муддатидан 30 минут олдин етиб келди. Агар фабрикадан станциягача бўлган масофа 280 км бўлса, автомобилнинг дастлабки ва кейинги тезликларини аниқланг.

468. Кино залида катта ва кичик эшик бор. Кинофильм тугагандан кейин барча томошабинлар икки эшикдан $3\frac{3}{4}$ минутда чиқиб кетадилар Томошабинлар фақат катта эшикдан чиқсалар фақат кичик эшикдан чиққанга қараганда 4 минут кам вақт сарфлайди. Томошабинлар фақат катта эшикнинг ўзидан неча минутда ва фақат кичик эшикнинг ўзидан неча минутда чиқиб кетишлари мумкин?

469. Бир модда ўзига намни тортиб массасини орттиради. 1400 кг намликни тортиши учун бу модданинг майдаланмаганидан майдаланганига қараганда 300 кг кўп олиш керак бўлади. Сўрилган намлик массаси майдаланган ва майдаланмаган модда массасининг қанча процентини ташкил этишини аниқланг, бу сон иккинчи ҳолатда биринчи ҳолатдагидан 105 бирлик кам.

470. Қишлоқдан далагача бўлган масофани босиб ўтишда юк машинасининг ғилдираги велосипед ғилдирагидан 100 та кам, трактор гусеницасидан эса 150 та куп айланади. Агар машина ғилдираги айланасининг узунлиги велосипед ғилдираги айланаси узунлигининг $\frac{4}{3}$ қисмини ташкил этса, трактор гусеницасидан эса 2 м қисқа бўлса, қишлоқдан далагача бўлган масофани топинг.

471. Умумий баҳоси 225 сўм бўлган икки хил қимматбаҳо мўйнали тери халқаро бозорда 40% фойдаси билан сотилди. Агар биринчи хил теридан 25%, иккинчисидан эса 50% фойда қилинган бўлса, ҳар бир терининг баҳосини аниқланг.

472. Спорт майдончаси тўғри тўртбурчак шаклида бўлиб, унинг бўйи энидан b м ортиқ майдончанинг ўзи кенглиги a метр бўлган йўлка билан ўралган Агар спорт майдончасининг юзи уни ўраган йўлканинг юзига тенг бўлса, майдончанинг ўлчамларини топинг.

10-§. Тенгламалар системаси

Тенгламалар системаси деб

$$\begin{cases} f_1(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0, \\ f_2(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_k(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0, \\ i = \overline{1, k} \end{cases}$$

кўринишдаги системага айтилади, бу ерда $x, y, \ldots, z$

лар ўзгарувчилар ёки номаълум миқдорлар, $a, b, \ldots, c$ лар эса параметрлар деб қаралади.

Системани ечиш деб номаълум миқдорларнинг шу системани қаноатлантирадиган қийматлар тўпламини топишга айтилади.

Берилган система ўзининг аниқланиш соҳасида ечимга эга бўлса, бу система *биргаликда бўлган*, ечимга эга бўлмаса, *биргаликда бўлмаган система* дейилади.

Агар система чекли сондаги ечимга эга бўлса, *аниқ система*, чексиз кўп ечимга эга бўлса, *аниқмас система* дейилади.

Агар

$$\begin{cases} f_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0, \\ i = \overline{1,k} \end{cases}$$

системанинг ҳар бир ечими

$$\begin{cases} \varphi_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0, \\ i = \overline{1,k} \end{cases}$$

системанинг ечими ва аксинча бўлса, у ҳолда

$$\begin{cases} f_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0, \\ i = \overline{1,k} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \varphi_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0, \\ i = \overline{1,k} \end{cases}$$

дейилади.

Тенгламалар системасининг эквивалентлигини аниқловчи қуйидаги теоремаларни келтирамиз.

1-теорема. *Агар* $f_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0 \wedge \wedge\, i = \overline{1,k}$ *системанинг ихтиёрий тенгламасида бир ўзгарувчини бошқа ўзгарувчилар орқали ифодалаб, қолган тенгламаларга қўйилса, ҳосил бўлган система аввалги системага эквивалент бўлади, яъни*

$$\begin{cases} f_i(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) = 0, \\ i = \overline{1,k} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f_i(\varphi(y, \ldots, z, a, \ldots, c), y, \ldots, z, a, \ldots, c) = 0, \\ x = \varphi(y, \ldots, z, a, \ldots, c), \\ i = \overline{1,k}. \end{cases}$$

2-теорема. *Агар* $\begin{cases} f_i(x, y, \dots, z, a, b, \dots, c) = 0, \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$ *дан*

$$\begin{cases} f_i(x, y, \dots, z, a, b, \dots, c) = 0, \\ i = \overline{1,k} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \varphi_i(x, y, \dots, z, a, b, \dots, c) = 0, \\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

бўлса, у ҳолда

$$\begin{cases} f_i(x, y, \dots, z, a, b, \dots, c) = 0, \\ i = \overline{1,n} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \varphi_i(x, y, \dots, z, a, b, \dots, c) = 0, \\ j = \overline{1,k}, \\ f_i(x, y, \dots, z, a, b, \dots, c) = 0, \\ i = \overline{(k+1), n}. \end{cases}$$

3-теорема. *Агар* $f_i(x, y, \dots, z, a, b, \dots, c) = 0 \wedge i = \overline{1,k}$ *системанинг ихтиёрий тенгламасига, унинг аниқланиш соҳасида аниқланган* $\varphi(x, y, \dots, z, a, b, \dots, c)$ *функцияни қўшсак ёки айирсак, ҳосил бўлган система* $f_i(x, y, \dots, z, a, b, \dots, c) = 0 \wedge i = \overline{1,k}$ *системага эквивалент бўлади.*

Алгебра курсида тенгламалар системаси берилишига қараб қуйидаги турларга бўлинади:

1) чизиқли тенгламалар системаси;
2) рационал тенгламалар системаси;
3) иррационал тенгламалар системаси;
4) кўрсаткичли тенгламалар системаси;
5) логарифмик тенгламалар системаси.

Биз қуйида ҳар бир тур тенгламалар системасини ечишни мисоллар орқали тушунтирамиз.[1]

1. Ўрнига қўйиш усули

1-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0, \\ x + y = 4. \end{cases} \tag{1}$$

[1] Изоҳ. Чизиқли тенгламалар системаси „Алгебра ва сонлар назарияси" курсида етарли даражада кўриб ўтилганлиги учун унга тўхталишни лозим топмадик.

Ечиш. (1) $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-x(4-x)+(4-x)^2+2x-2(4-x)-3=0, \\ y=4-x \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x^2-8x+5=0, \\ y=4-x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3}, \\ y=4-x \end{cases} \vee \begin{cases} x=1, \\ y=4-x. \end{cases}$$

$$A=\left\{\left(\frac{5}{3};\ \frac{7}{3}\right);\ (1;\ 3)\right\}.$$

2-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=2. \end{cases} \qquad (1)$$

Ечиш. (1) $\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x^2y^2=4 \end{cases} \Longleftrightarrow t^2-5t+4=0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2=4, \\ y^2=1 \end{cases} \vee \begin{cases} y^2=4, \\ x^2=1 \end{cases}$$

Демак, $x=\pm 2$, $y=\pm 1$, $y=\mp 2$, $x=\pm 1$.

II. Алгебраик қўшиш усули

3-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6. \end{cases}$$

Ечиш. Бу системани ечиш учун алгебраик қўшиш усулидан фойдаланамиз, яъни $2x^2+2x=24$ ёки $x^2+x-12=0$, бундан $x_1=3$, $x_2=-4$ ҳосил бўлади. $x_1=3$ ни биринчи $x^2+y^2+x+y=18$ тенгламадаги x ўзгарувчининг ўрнига қўйсак, $y^2+y-6=0$ тенглама ҳосил бўлади, бундан: $y_1=2$; $y_2=-3$.

Демак: 1) $x=3 \wedge y=2$; 2) $x=3 \wedge y=-3$. $x=-4$ учун шу процессни такрорласак; 3) $x=-4 \wedge y=2$; 4) $x=-4 \wedge y=-3$.

Демак, $A=\{(3, 2);\ (3;\ -3);\ (-4;\ 2);\ (-4;\ -3)\}$.

4-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} x^2-xy-y^2=5, \\ 2x^2+xy-10y^2=11. \end{cases} \qquad (1)$$

Ечиш.

$$(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} 11x^2-11xy-11y^2=55, \\ -10x^2-5xy+50y^2=-55. \end{cases}$$

Бу системадаги тенгламаларни ҳадлаб қўшсак, $x^2 - 16xy + 39y^2 = 0$ ҳосил бўлади. $y \neq 0$ деб $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 16\left(\frac{x}{y}\right) + 39 = 0$ кўринишдаги тенгламага эга бўламиз. Бундан $x = 13y$ ва $x = 3y$ ҳосил бўлади. Сўнгра (1) нинг биринчи тенгламасига $x = 13y$ ни x ўзгарувчининг ўрнига қўйиб, ҳосил бўлган тенгламани ечсак: $y_1 = \frac{1}{\sqrt{31}}$; $y_2 = -\frac{1}{\sqrt{31}}$. Бундан

$$\begin{cases} x = \frac{13}{\sqrt{31}}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{31}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{13}{\sqrt{31}}, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{31}}. \end{cases}$$

Шу процессни $x = 3y$ учун ҳам қўлласак,

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ y = -1 \end{cases}$$

ни топамиз. Натижада (1) ни қаноатлантирадиган жуфтликлар тўплами $\left\{\left(\frac{13}{\sqrt{31}}; \frac{1}{\sqrt{31}}\right); \left(-\frac{13}{\sqrt{31}}; -\frac{1}{\sqrt{31}}\right); (3; 1); (-3; -1)\right\}$ дан иборат бўлади.

5-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \sqrt{a-x} - \sqrt{y-x} = \sqrt{y}, \\ \sqrt{b-x} + \sqrt{y-x} = \sqrt{y}. \end{cases} \qquad (1)$$

Ечиш. Тенгламалар системасининг аниқланиш соҳасини топамиз, яъни $(a-x \geqslant 0 \wedge b-x \geqslant 0 \wedge y-x \geqslant 0 \wedge \wedge y \geqslant 0) \Rightarrow (a \geqslant b \geqslant x \wedge a \geqslant y \geqslant 0 \wedge y \geqslant x)$.

(1) ни ҳадлаб қўшсак ва ҳадлаб айирсак, (1) га тенг кучли қуйидаги

$$\begin{cases} \sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = 2\sqrt{y}, \\ \sqrt{a-x} - \sqrt{b-x} = 2\sqrt{y-x} \end{cases} \qquad (2)$$

система ҳосил бўлади. (2) нинг ҳар иккала томонини квадратга оширсак,

$$\begin{cases} a+b-2x+2\sqrt{(a-x)(b-x)} = 4y, \\ a+b-2x-2\sqrt{(a-x)(b-x)} = 4y-4x \end{cases} \qquad (3)$$

система ҳосил бўлади. Сўнгра (3) ни ҳадлаб қўшиб ва ҳадлаб айирсак, қуйидаги тенг кучли

$$\begin{cases} 8y = 2(a+b), \\ 4\sqrt{(a-x)(b-x)} = 4x \end{cases} \quad (4) \iff \begin{cases} y = \frac{a+b}{4}, \\ x = \sqrt{(a-x)(b-x)} \end{cases} \quad (5)$$

система ҳосил бўлади.

(5) системанинг иккинчи тенгламасидан $x \geqslant 0$ бўлиб, $(a+b)x = ab$ экани келиб чиқади. Маълумки, $x \geqslant 0$ ва $a \geqslant b \geqslant x$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ ва $a \geqslant b$ бўлишидан қуйидаги икки ҳол юз беради;

1) $a - b = 0$ бўлса, $a \geqslant y \geqslant 0$ дан $x = y = 0$ бўлади;

2) $a > 0$, $b \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $x = \frac{ab}{a+b}$; $y = \frac{a+b}{4}$ илдизлар ҳосил бўлади.

Агар $a < 0$, $b < 0$ бўлса, у ҳолда система ҳақиқий ечимга эга бўлмайди.

6-мисол. Системани ечинг:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^y \cdot 3^x = 54. \end{cases} \quad (1)$$

Ечиш. Биринчи усул.

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 2^3 \cdot 3, \\ 2^y \cdot 3^x = 2 \cdot 3^3 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳадлаб кўпайтирсак ва ҳадлаб бўлсак,

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бундан; $x = 3$, $y = 1$.

Иккинчи усул. Агар системадаги ҳар бир тенгламани логарифмласак, у ҳолда

$$\begin{cases} x\lg 2 + y\lg 3 = 3\lg 2 + \lg 3 \\ x\lg 3 + y\lg 2 = \lg 2 + 3\lg 3 \end{cases} \left| \begin{matrix} \lg 2 \\ -\lg 3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \lg 3 \\ -\lg 2 \end{matrix}$$

а) $x(\lg^2 2 - \lg^2 3) = 3(\lg^2 2 - \lg^2 3) \Longrightarrow x = 3$;

б) $y(\lg^2 3 - \lg^2 2) = \lg^2 3 - \lg^2 2 \Longrightarrow y = 1$.

Демак, $x = 3$, $y = 1$.

473. $\begin{cases} (x+0{,}2)^2+(y+0{,}3)^2=1; \\ x+y=0{,}9. \end{cases}$

474. $\begin{cases} x^3y^3=-8; \\ x^3+y^3=7. \end{cases}$

473. $\begin{cases} x^{-1}+y^{-1}=5; \\ x^{-2}+y^{-2}=13. \end{cases}$

476. $\begin{cases} x-y=1; \\ x^3-y^3=7. \end{cases}$

477. $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{x}; \\ y^2-x-5=0. \end{cases}$

478. $\begin{cases} y^2-xy=-12; \\ x^2-xy=28. \end{cases}$

479. $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=9; \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20. \end{cases}$

480. $\begin{cases} x^2y^3+x^3y^2=12; \\ x^2y^3-x^3y^2=4. \end{cases}$

481. $\begin{cases} x^4+y^4=82; \\ xy=3. \end{cases}$

482. $\begin{cases} x^3+y^3=35; \\ x+y=5. \end{cases}$

483. $\begin{cases} u^2+uv=15, \\ v^2+uv=10. \end{cases}$

484. $\begin{cases} x^3+y^3=65; \\ x^2y+xy^2=20, \end{cases}$ R да ечинг.

485. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{4}, \\ 2x+3y-5z+19=0. \end{cases}$

486. $\begin{cases} (x+y)^2+2x=35-2y; \\ (x-y)^2-2y=3-2x. \end{cases}$

487. $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}+\dfrac{5}{2}=0; \\ \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{1}{2x-y+3}+\dfrac{7}{5}=0. \end{cases}$

488. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3; \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}=3; \\ \dfrac{1}{xyz}=1. \end{cases}$

489. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ cx+ay+bz=0; \\ (x+b)^2+(y+c)^2+(z+ \\ \quad +a)^2=a^2+b^2+c^2. \end{cases}$

490. $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1; \\ x^2+y^2+\dfrac{4x}{y}=22. \end{cases}$

491. $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=3a^2, \\ (x+y)(x^2+y^2)=15a^3, \end{cases}$ R да ечинг.

492. $\begin{cases} x^3+y^3=19; \\ x^2y+xy^2=-6, \end{cases}$ R да ечинг.

493. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=91; \\ x+\sqrt{xy}+y=13. \end{cases}$

494. $\begin{cases} \sqrt[4]{u+v}-\sqrt[4]{u-v}=2; \\ \sqrt{u+v}-\sqrt{u-v}=8. \end{cases}$

495. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6. \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8. \end{cases}$ ($\sqrt{x+y}=u$, $\sqrt[3]{x-y}=v$ деб белгиланг.

496. $\begin{cases} \sqrt{2x-y+11}-\sqrt{3x+y-9}=3; \\ \sqrt[4]{2x-y+11}+\sqrt[4]{3x+y-9}=3; \end{cases}$

498. $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2}=3; \\ \sqrt{(x-y)^2}=1. \end{cases}$

497. $\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}}-2\sqrt{\frac{x}{y}}=1; \\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4; \end{cases}$

$\sqrt{\frac{y}{x}}=z$ деб белгиланг.

499. $\begin{cases} u^2+v^2=uv+13. \\ u+v=\sqrt{uv}+3; \end{cases}$

500. $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{4}{3}; \\ xy=9. \end{cases}$

501. $\begin{cases} 3(2-\sqrt{x-y})^{-1}+10(2+\sqrt{x+y})^{-1}=5; \\ 4(2-\sqrt{x-y})^{-1}-5(2+\sqrt{x+y})^{-1}=3. \end{cases}$

502. $\begin{cases} 2(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{xy}; \\ x+y=5. \end{cases}$

503. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=10 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4 \end{cases}$

504. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3; \\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3. \end{cases}$

505. $\begin{cases} x-y=8a^2. \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4a. \end{cases}$

506. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{\frac{x-y}{3}}=14; \\ \sqrt{\frac{x+y}{8}}-\sqrt{\frac{x-y}{12}}=3. \end{cases}$

507. $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{\frac{xy}{4}}; \\ x+y=5. \end{cases}$

Қуйидаги тенгламалар системасини ечинг.

508. $\begin{cases} 3^{2x}-2^y=725; \\ 4^x-2^{\frac{y}{2}}=25. \end{cases}$

512. $\begin{cases} x^{2y^2-1}=5; \\ x^{y^2+2}=125. \end{cases}$

509. $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=2, \\ \log_2 x-4=\log_2 3-\log_2 y. \end{cases}$

513. $\begin{cases} 8(\sqrt{2})^{x-y}=0{,}5^{y-3}; \\ \log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3. \end{cases}$

510. $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=81; \\ \lg\sqrt{xy}=1+\lg 3. \end{cases}$

514. $\begin{cases} \log_4 x-\log_2 y=0. \\ x^2-2y^2-8=0. \end{cases}$

511. $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}}+2^{\frac{y-x}{2}}=2{,}5; \\ \lg(2x-y)+1=\lg(y+2x)+\lg 6. \end{cases}$

515. $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}}+2^{\frac{x+y}{6}}=6, \\ x^2+5y^2=6xy \end{cases}$

516. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6; \\ 3^x \cdot 4^y = 12 \end{cases}$

518. $\begin{cases} (x+y)2^{y-2x} = 6{,}25. \\ \sqrt[2x-y]{x+y} = 5. \end{cases}$

517. $\begin{cases} \log_{\sqrt{x}} xy = 8; \\ \log_3\left(\log_{\frac{1}{9}} \dfrac{x}{y}\right) = 0. \end{cases}$

519. $\begin{cases} 8^{\log_9(x-4y)} = 1; \\ 4^{x-2y} - 7 \cdot 2^{x-2y} = 8 \end{cases}$

11-§. Тенгсизликлар системаси

Маълумки, тенгсизликлар системаси дейилганда бир неча ўзгарувчили тенгсизликлардан бир нечтасининг биргаликда қаралиши тушунилади. Масалан,

$$f(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) \gtreqless 0 \qquad (1)$$

кўринишдаги тенгсизлик бир неча ўзгарувчили тенгсизлик деб қаралади.

Бир неча ўзгарувчили тенгсизликлар системаси деб

$$\begin{cases} f_1(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) \gtreqless 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_k(x, y, \ldots, z, a, b, \ldots, c) \gtreqless 0 \end{cases} \qquad (2)$$

системага айтилади.

Хусусий ҳолда

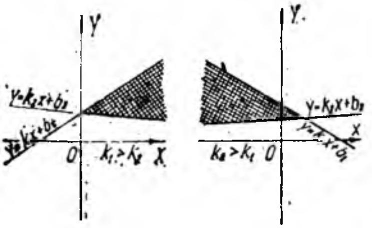
$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 > 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 > 0 \end{cases} \qquad (3)$$

системани кўриб чиқайлик. Геометриядан маълумки, системада қатнашаётган ҳар бир тенгсизлик $A_i x + B_i y + C_i = 0 \wedge i = \overline{1,2}$ тўғри чизиқ билан чегараланган ярим текисликни аниқлайди. Энди (3) тенгсизликлар системасининг ечимлари тўпламини топайлик.

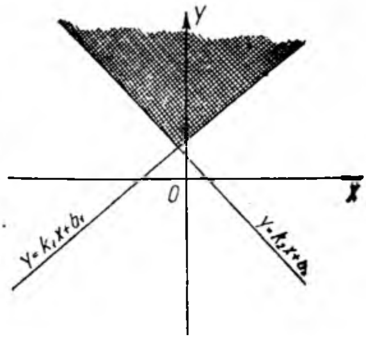
1. $A_1x+B_1y+C_1=0$ ва $A_2x + B_2y + C_2=0$ тўғри чизиқлар параллел бўлмасин, у ҳолда (3) учун $y< k_1x + b_1 \wedge y>k_2x+b_2 \wedge k_1\neq k_2$ ҳоли ўринли бўлсин дейлик, бундан

$$\begin{cases} k_2x + b_2 < k_1x + b_1, \\ k_1 \neq k_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (k_2 - k_1)x < b_1 - b_2, \\ k_1 \neq k_2 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{b_1-b_2}{k_2-k_1}, \\ k_1 > k_2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < \dfrac{b_1-b_2}{k_2-k_1}, \\ k_2 > k_1 \end{cases}$$



5- чизма.



6- чизма.

бўлиб, умумий ечим

$$\begin{cases} x>\frac{b_1-b_2}{k_2-k_1}, k_1>k_2; \\ k_2x+b_2<y<k_1x+b_1 \end{cases} \vee \begin{cases} x<\frac{b_1-b_2}{k_2-k_1}, k_2>k_1 \\ k_2x+b_2<y<k_1x+b_1 \end{cases}$$

бўлади (5- чизма).

Агар (3) учун $B_1>0$, $B_2>0$ шарт бажарилса, у ҳолда (3) система $\begin{cases} y>k_1x+b_1, \\ y>k_2x+b_2 \end{cases}$ системага тенг кучли бўлишини кўриш мумкин, бунда умумий ечим (6-чизма)

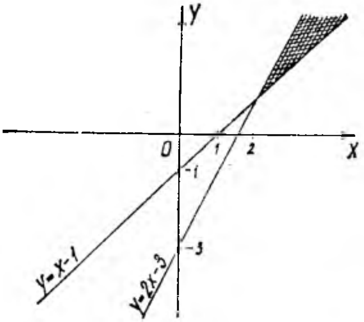
$$y>\begin{cases} k_1x+b_1, \text{ агар } x>\frac{b_2-b_1}{k_1-k_2} \text{ бўлса}, \\ k_2x+b_2, \text{ агар } x<\frac{b_2-b_1}{k_1-k_2} \text{ бўлса}, \\ k_1\neq k_2. \end{cases}$$

2. $A_1x+B_1y+C_1=0$ ва $A_2x+B_2y+C_2=0$

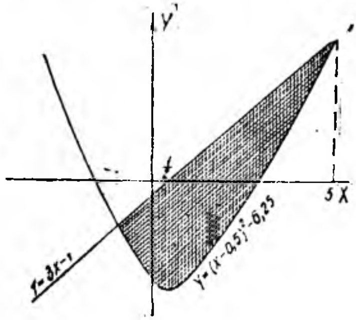
тўғри чизиқлар параллел ва устма-уст тушганда (3) системадаги ҳар иккала тенгсизликни бир вақтда қаноатлантирадиган ечимнинг умумий қисми мавжуд бўлса, у ҳолда ўша соҳа системанинг ечимлар тўпламини аниқлайди, акс ҳолда (3) системанинг ечимлар тўплами бўш бўлади.

1-мисол. Ушбу системани ечинг ва графигини чизинг:

$$\begin{cases} y-x+1>0, \\ 2x-y-3>0. \end{cases}$$



7- чизма.



8- чизма.

Ечиш.

$$\begin{cases} y-x+1>0, \\ 2x-y-3>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y>x-1, \\ y<2x-3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-1<y<2x-3. \\ x>2 \end{cases} \text{(7- чизма)},$$

2-мисол. Ушбу системани ечинг ва графигини чизинг:

$$\begin{cases} y>x^2-x-6, \\ y<3x-1. \end{cases}$$

Ечиш.

$$\begin{cases} y>x^2-x-6, \\ y<3x-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y>x^2-x-6, \\ y<3x-1, \\ x^2-x-6<3x-1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y>x^2-x-6, \\ y<3x-1, \\ -1<x<5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y>\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-6\frac{1}{4}, \\ y<3x-1, \\ -1<x<5 \end{cases} \text{(8- чизма)}.$$

Машқлар

Системаларни аналитик ва график усулда ечинг:

520. $\begin{cases} 2x-y<1, \\ 4x+y\geqslant 1, \\ 4x-y\geqslant 1, \\ y<3. \end{cases}$

521. $\begin{cases} x+y>1, \\ x-y>0, \\ x-y\geqslant x+y. \end{cases}$

522. $\begin{cases} y > x^2, \\ y < x. \end{cases}$

523. $\begin{cases} y > x^2, \\ 3y - x < 9. \end{cases}$

524. $\begin{cases} y > x^2 - 1, \\ y < 1 - x^2. \end{cases}$

525. $\begin{cases} x^2 + y^2 > 1, \\ x + y > 0, \\ x + y \leqslant x^2 + y^2. \end{cases}$

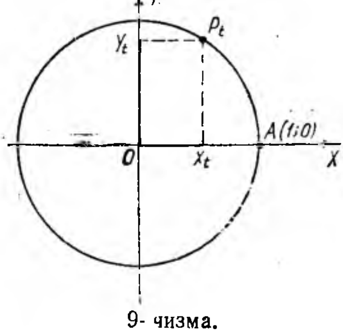
526. $\begin{cases} 0 < \dfrac{x^2 + y^2}{2} < 1, \\ y > 0, \\ y < \dfrac{x^2 + y^2}{2}. \end{cases}$

527. $\begin{cases} 0 < x^2 + y^2 < 1, \\ x + y > 0, \\ x + y \geqslant x^2 + y^2. \end{cases}$

IV БОБ. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАР ВА УЛАР ОРАСИДАГИ МУНОСАБАТЛАР

1-§. Тригонометрик функциялар

Тўғри бурчакли декарт координаталар системаси xOy берилган бўлсин. Маркази координаталар бошида ва радиуси бирга тенг бўлган айлана ясаймиз ҳамда соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишни мусбат йўналиш ва $A(1;\ 0)$ нуқтани бошланғич нуқта деб қабул қиламиз. Бу бирлик айланада $A\ (1;\ 0)$ нуқтадан мусбат йўналишда сон миқдори t сонига тенг бўлган ёй ажратамиз. У ҳолда бирлик айлананинг абсциссаси x_t ва ординатаси y_t бўлган P_t нуқтаси t сонга мос келади (9-чизма).



9- чизма.

1-таъриф. P_t нуқтанинг x_t абсциссаси t соннинг *косинуси*, y_t ординатаси эса t соннинг *синуси* дейилади, яъни $x_t = \cos t$, $y_t = \sin t$.

2-таъриф. t соннинг *тангенси* деб шу сон синусининг унинг косинусига нисбатига айтилади, яъни $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$.

3-таъриф. t соннинг *котангенси* деб шу сон косинусининг унинг синусига нисбатига айтилади, яъни

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

4-таъриф. t соннинг *секанси* деб шу сон косинусининг тескари қийматига айтилади, яъни

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}.$$

5-таъриф. t соннинг *косеканси* деб шу сон синусининг тескари қийматига айтилади, яъни,

$$\operatorname{cosec} t = \frac{1}{\sin t}.$$

Тригонометрик функцияларнинг асосий хоссалари:

1°. Аниқланиш соҳаси.

$D(\sin t) = R$, $D(\cos t) = R$, $D(\operatorname{tg} t) = \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi;\ \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$;

$D(\operatorname{ctg} t) = (n\pi;\ (n+1)\pi)$; $D(\sec t) = \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi;\ \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$,

$D(\operatorname{cosec} t) = (n\pi;\ (n+1)\pi)$; $n \in Z$.

2°. Ўзгариш соҳаси (қийматлар тўплами).

$E(\sin t) = E(\cos t) = [-1;\ 1]$; $E(\operatorname{tg} t) = R$, $E(\operatorname{ctg} t) = R$, $E(\sec t) = (-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$; $E(\operatorname{cosec} t) = (-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$.

3°. Даврийлиги.

Теорема. *Тригонометрик функциялар даврий функциялардир, яъни*;

$\sin(t + 2n\pi) = \sin t$, $\operatorname{ctg}(t + n\pi) = \operatorname{ctg} t$,
$\cos(t + 2n\pi) = \cos t$, $\sec(t + 2n\pi) = \sec t$,
$\operatorname{tg}(t + n\pi) = \operatorname{tg} t$, $\operatorname{cosec}(t + 2n\pi) = \operatorname{cosec} t$, $n \in Z$.

4°. Тригонометрик функциялар қийматларининг ишоралари:

$f(t)$	$\sin t$	$\cos t$	$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} t$	$\sec t$	$\operatorname{cosec} t$
I чорак	+	+	+	+	+	+
II чорак	+	−	−	−	−	+
III чорак	−	−	+	+	−	−
IV чорак	−	+	−	−	+	−

5°. Жуфт ва тоқлиги.

Теорема. *Косинус ва секанс жуфт функциялар, синус, тангенс, котангенс ва косеканс тоқ функциялардир, яъни:*

$$\sin(-t) = -\sin t, \qquad \operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t,$$
$$\cos(-t) = \cos t, \qquad \sec(-t) = \sec t$$
$$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t, \qquad \operatorname{cosec}(-t) = -\operatorname{cosec} t.$$

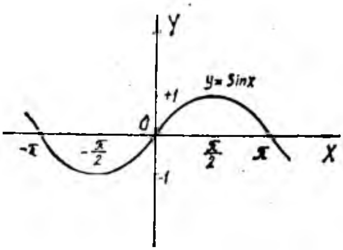
6°. Монотонлик оралиқлари:

$f(t)$ \ t	0	I чорак	$\frac{\pi}{2}$	II чорак	π	III чорак	$\frac{3\pi}{2}$	IV чорак	2π
$\sin t$	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0
$\cos t$	1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1
$\operatorname{tg} t$	0	↗	мавжуд эмас	↗	0	↗	мавжуд эмас	↗	0
$\operatorname{ctg} t$	мавжуд эмас	↘	0	↘	мавжуд эмас	↘	0	↘	мавжуд эмас
$\sec t$	1	↗	мавжуд эмас	↘	−1	↘	мавжуд эмас	↘	1
$\operatorname{cosec} t$	мавжуд эмас	↘	1	↗	мавжуд эмас	↗	−1	↘	мавжуд эмас

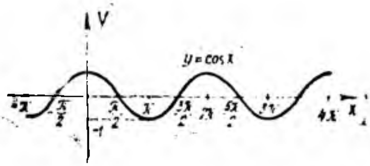
Тригонометрик функцияларнинг графиклари.

Аргументнинг хусусий қийматларида тригонометрик функция қийматлари.

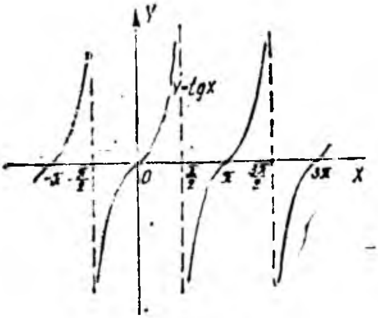
Аргумент хусусий қийматларининг тригонометрик функцияси қиймати бевосита R радиусли айланага ич-



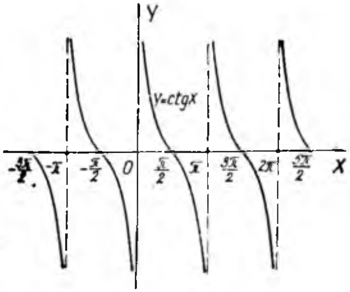
10- чизма.



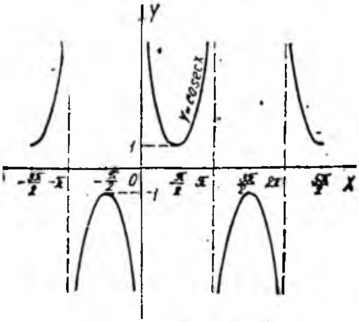
11- чизма.



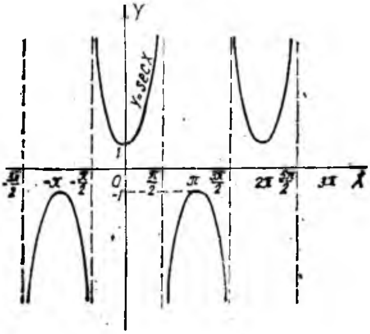
12- чизма.



13- чизма.

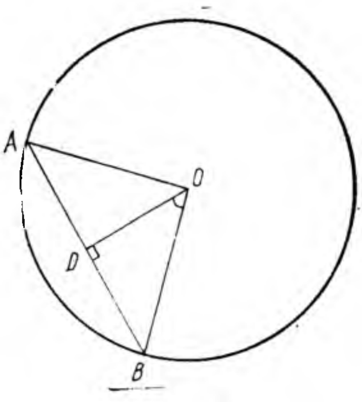


14- чизма.



15- чизма.

ки чизилган n бурчакли кўпбурчак томонларининг узунликларини шу айлана радиуси орқали боғлаш масаласи билан ҳам боғлиқдир. Бу масала айрим геометрик масалаларни тригонометрик функциялар ёрдамида ҳал қилишга ҳам имкон яратади. Маълумки, радиуси $R=1$ бўлган айланага ички чизилган n бурчакли мунтазам кўпбурчакни унинг томонини тортиб турган ёй марказий бур-



16- чизма.

чак синуси ва косинуси орқали қуйидагича ифодалаш мумкин: $\triangle AOB$: $\angle AOB = \smile AB$, $AB = a_n$ $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ (16-чизма). OD биссектриса эканини ҳисобга олинса, у ҳолда $\angle DOB = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$ бўлиб, $OD = l_n$, $AB = a_n$ эканидан қуйидагини ёзамиз:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}, \quad l_n = R\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Булардан $R = 1$ бўлганда қуйидаги натижаларни ёза оламиз:

1) $n = 3$ бўлганда $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $a_3 = \sqrt{3}$, $l_3 = \frac{1}{2}$;

2) $n = 4$ бўлганда $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$, $a_4 = \sqrt{2}$, $l_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $n = 5$ бўлганда $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$, $a_5 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{5}}$, $l_5 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$;

4) $n = 6$ бўлганда $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_6 = 1$, $l_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $n = 8$ бўлганда $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $a_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, $l_8 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;

6) $n = 10$ бўлганда $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$a_{10} = \sqrt{5}-1$, $l_{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Умуман, юқоридагиларни умумлаштириб, қуйидаги жадвални келтириш мумкин:

$f(t)$ \ t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	мавжуд эмас	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	мавжуд эмас
$\operatorname{ctg} t$	мавжуд эмас	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	мавжуд эмас	0

Тригонометрик функциялар орасидаги муносабатлар

Келтириш формулалари

Келтириш формулалари деб $\frac{\pi}{2} \pm t$, $\pi \pm t$, $\frac{3\pi}{2} \pm t$, $2\pi \pm t$ аргументларнинг тригонометрик функцияларини t аргументнинг тригонометрик функциялари орқали ифодаловчи формулаларга айтилади. Булар қуйидаги жадвалда келтирилган:

Функция	Бурчаклар							
	$-\alpha$	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
sec	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$-\operatorname{coses}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$
cosec	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$

Бир аргументнинг тригонометрик функциялари орасидаги муносабатлар.

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1. \qquad (1)$$

$$\mathrm{tg}\, t = \frac{\sin t}{\cos t}, \ t \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \ n \in Z. \qquad (2)$$

$$\mathrm{ctg}\, t = \frac{\cos t}{\sin t}, \ t \neq n\pi, \ n \in Z. \qquad (3)$$

$$\mathrm{tg}\, t \cdot \mathrm{ctg}\, t = 1, \ t \neq \frac{n\pi}{2}, \ n \in Z. \qquad (4)$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}, \ t \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \ n \in Z. \qquad (5)$$

$$\mathrm{cosec}\, t = \frac{1}{\sin t}, \ t \neq n\pi, \ n \in Z. \qquad (6)$$

$$\sin^2 t = 1 + \mathrm{tg}^2 t, \ t \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \ n \in Z. \qquad (7)$$

$$\mathrm{cosec}^2 t = 1 + \mathrm{ctg}^2 t, \ t \neq n\pi, \ n \in Z. \qquad (8)$$

Тригонометрик функциялар учун қўшиш формулалари.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha. \qquad (9)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha. \qquad (10)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (11)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (12)$$

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}, \ \alpha, \ \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \ n \in Z. \qquad (13)$$

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}, \ \alpha, \ \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \ n \in Z. \qquad (14)$$

Тригонометрик функциялар йиғиндисини уларнинг кўпайтмаси билан алмаштириш формулалари.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}. \qquad (15)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}. \qquad (16)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}. \qquad (17)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (18)$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2}+n\pi,\quad n\in Z. \qquad (19)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\ \alpha,\beta\neq n\pi,\ n\in Z. \qquad (20)$$

Тригонометрик функциялар кўпайтмасини уларнинг йиғиндиси билан алмаштириш формулалари.

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]. \qquad (21)$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]. \qquad (22)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta]). \qquad (23)$$

$a\sin\alpha+b\cos\alpha$ $(a,\ b\in R)$ ифодани алмаштириш:

а) ёрдамчи бурчак φ киритиш усули:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}; \qquad (24)$$

б) рационаллаштирувчи алмаштириш киритиш усули:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\left(-b\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+2a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+b\right). \qquad (25)$$

Машқлар

1. Функциянинг ўзгариш соҳасини топинг:

а) $y=1+\sin x$; б) $y=1-\cos x$;
в) $y=|\cos x|$; г) $y=\sin|x|$.

2. Функциянинг даврини топинг:

а) $y=\sin 2x$; б) $x=\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; в) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{4}$;
г) $y=\sin x+\cos x$; д) $y=\sin nx$; е) $y=\cos^2 x$.

3. Ифоданинг ишорасини аниқланг:

а) $\sin 134^\circ - \sin 143^\circ$; б) $\cos 10^\circ - \cos 35^\circ$;
в) $\sin 82^\circ - \operatorname{tg} 82^\circ$; г) $\operatorname{cosec} 222^\circ - \operatorname{ctg} 222^\circ$;
д) $\operatorname{tg} 112^\circ\cdot\sin 155^\circ$; е) $\cos 311^\circ\cdot\operatorname{ctg} 311^\circ\cdot\sec 311^\circ$;
ж) $\cos 5$; з) $\sin(-3)$.

4. $\alpha(0° < \alpha < 360°)$ нинг қандай қийматларида қуйидаги муносабатлар тўғри:

а) $\cos 100° > \cos\alpha$; б) $\sin 210° \leqslant \sin\alpha$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$; г) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \geqslant 0$;

д) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha} > 0$, е) $\dfrac{\cos\alpha}{\sec\alpha} > 0$;

ж) $\cos\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$; з) $\operatorname{ctg}\alpha \geqslant -\sqrt{3}$.

5. Функцияларнинг қайсилари жуфт функция, қайсилари тоқ функция, қайсилари тоқ ҳам эмас, жуфт ҳам эмаслигини аниқланг:

а) $y = \sin x + \operatorname{ctg} x$; б) $y = x^2 \cos x$;

в) $y = \operatorname{tg} x + \sec x$; г) $y = \dfrac{x + \sin x}{x - \sin x}$;

д) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg}^3 x$; е) $y = \dfrac{\operatorname{cosec} x + \sin x}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x}$.

6. Ифодаларнинг қийматини топинг:

а) $3\cos 240° - 2\operatorname{tg} 240°$; б) $8\sin 510° \cdot \cos(-300°) \cdot \operatorname{tg} 420°$;

в) $\sin(\pi - 1) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$; г) $8\sin\dfrac{\pi}{6} \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{6}$;

д) $\sec 420° + \operatorname{cosec} 750° - \cos 2160° + \operatorname{ctg} 630°$;

е) $2\sin^2\dfrac{17\pi}{4} + \operatorname{tg}^2\dfrac{33\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}$.

7. Функцияларни текширинг ва графикларини чизинг:

а) $y = \sin 3x$; б) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$;

в) $y = \cos(2x - 0{,}5)$; г) $y = 2\operatorname{cosec}\left(\dfrac{1}{3}x\right)$;

д) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; е) $y = 3\cos\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

8. α аргументнинг қолган тригонометрик функцияларининг қийматларини топинг:

а) $\sin\alpha = -\dfrac{24}{25}$; б) $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{8}{15}$;

д) $\sec\alpha = \sqrt{2}$ е) $\sin\alpha = -\sqrt{0{,}2}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

2-§. Тригонометрик ифодаларни айний шакл алмаштириш

Тригонометрик функциялар қатнашган ифодалар устида айний шакл алмаштириш тригонометрик функцияларнинг хоссалари ва уларнинг ўзаро боғлиқлигини яна ҳам чуқурроқ ўрганишнинг муҳим босқичидир. Шунинг учун бу параграфда юқорида кўриб ўтилган 1 — 23- формулаларни ишлатиш кетма-кетлигини қулай танлаб қуйида берилган тригонометрик ифодаларни содда ҳолга келтирилади. Тригонометрик ифодаларни айний шакл алмаштиришга доир мисолларда аргументнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари тўплами берилган деб қаралади. Зарур бўлган ҳолда алоҳида аниқланиш соҳасига алоҳида мурожаат қиламиз.

Машқлар

9. Ифодаларни соддалаштиринг:

а) $1+\sin 2-2\cos^2 1$; б) $2\cos^2 3+2\cos 6-3$;

в) $2(\sin^6 5+\cos^6 5)-3(\sin^4 5+\cos^4 5)+1$;

г) $\operatorname{ctg}\frac{1}{8}-\operatorname{tg}\frac{1}{8}-2\operatorname{tg}\frac{1}{4}-4\operatorname{tg}\frac{1}{2}$.

10. а) $(\sin 3+\cos 3)^2+(\sin 3-\cos 3)^2$; $\sin\alpha\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$.

11. $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$.

12. $\sin^2\alpha\sec^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$.

13. $\sin^2\alpha\operatorname{tg}\alpha+\cos^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$.

14. $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

15. $\dfrac{(1-\sin\alpha-\cos\alpha)(-1-\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}$.

16. $\operatorname{ctg}^2\alpha\,\dfrac{\sec\alpha-1}{1+\sin\alpha}+\sec^2\alpha\,\dfrac{\sin\alpha-1}{1+\sec\alpha}$.

17. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$.

18. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

19. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

20. Агар $\sin\alpha+\cos\alpha=t$ бўлса, қуйидаги ифодаларни t параметр орқали ифодаланг:

а) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; б) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

в) $\sin\alpha-\cos\alpha$; г) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$,

21. Агар $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=t$ бўлса,

а) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$ ни топинг.

22. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бўлса, қуйидаги тенгсизликларни исботланг:

а) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 2$; б) $\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha \geqslant 2$;
в) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha \geqslant 2$; г) $\sin\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha \geqslant 2$.

α – аргументнинг қандай қийматларида тенглик белгиси ўринли бўлади?

23. Системадан α аргументни чиқаринг:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha = x, \\ \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = y. \end{cases}$$

24. Системадан α ва β аргументларни чиқаринг:

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\beta = a, \\ x\sin\beta - y\cos\alpha = b, \\ (x^2 + y^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\beta) = 2ab. \end{cases}$$

3-§. Тригонометрик айниятларни исботлаш

Таъриф. *Айният* деб тенгликнинг таркибига кирувчи ўзгарувчиларнинг исталган қийматларида тўғри бўла оладиган тенгликка айтилади.

Тригонометрик айниятни исботлаш — бу тригонометрик функцияларни боғловчи формулалар ёрдамида тенгликнинг бир томонида турган тригонометрик ифодани унинг иккинчи томонида турган ифодага тенг эканлигини исботлаш демакдир. Бунинг учун 1-§ нинг 4—9-бандларида келтирилган формулалардан фойдалана билиш билан биргаликда практикумнинг алгебра қисмида кўрилган айний алмаштириш формулалари ва тенг кучлилик теоремаларини тўғри татбиқ қила билиш керак.

Тригонометрик айниятларни исботлашда тенгликда қатнашаётган аргумент қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами ҳисобга олиниб, шу тўпламда қаралаётган айният исботланади.

Айниятларни исботлашда юқорида келтирилган формулалардан ташқари қўшиш теоремасининг умумлашган натижаси бўлган формулалар ҳам ишлатилиши мумкин бўлиб, улар қуйидагилардан иборатдир:

$$\sin n\alpha = C_n^1 \sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - C_n^3 \sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + \\ + C_n^5 \sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - \ldots$$

агар $n=2k+1$ бўлса, охирги ҳади $(-1)^k \sin^n\alpha$; агар $(n=2k$ бўлса, $(-1)^{\frac{2k-1}{2}} n \sin^{n-1}\alpha\cos\alpha$ бўлади).

$$\cos n\alpha = C_n^0 \cos^n\alpha - C_n^2 \sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + C_n^4 \sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha - \ldots$$

(агар $n=2k+1$ бўлса, охирги ҳади $(-1)^k n\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha$; агар $n=2k$ бўлса, $(-1)^k\sin^n\alpha$ бўлади).

Юқорида келтирилган формулалардан қуйидаги хусусий натижаларни чиқариш мумкин:

$$\text{а) } \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\ \operatorname{ctg}2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha};$$

б) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

в) $\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha$, $\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha$. Олдинги параграфда келтирилган формулалар ва $\sin n$ ҳамда $\cos n\alpha$ лар ёрдамида айрим тригонометрик айниятларни исботлашни кўриб ўтамиз.

1-мисол. $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$ айниятни исботланг.

Исботи. Маълумки, бу айниятни исботлашнинг бир неча хил усули мавжуд бўлиб, улар қуйидагичадир:

а) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = 2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2 + 2\cos(\alpha-\beta) = 2(1+\cos(\alpha-\beta)) = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

б) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = \left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

в) $4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 2(1+\cos(\alpha-\beta)) = 2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = (\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2$.

Айниятни исботлашда умуман энг қисқа ва рационал усул танланади.

2-мисол. $\sin^3\alpha\cos^3\alpha = \frac{3}{32}\sin 2\alpha - \frac{1}{32}\sin 6\alpha$ айниятни исботланг.

Исботи. $\sin^3\alpha\cos^3\alpha = \left(\frac{1}{2}2\sin\alpha\cos\alpha\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)^3 =$
$= \frac{1}{8}\sin 2\alpha\sin^2 2\alpha = \frac{1}{8}\sin 2\alpha\,\frac{1-\cos 4\alpha}{2} = \frac{1}{16}\sin 2\alpha -$
$-\frac{1}{16}\sin 2\alpha\cos 4\alpha = \frac{1}{16}\sin 2\alpha - \frac{1}{32}\sin 6\alpha + \frac{1}{32}\sin 2\alpha = \frac{3}{32}\sin 2\alpha -$
$-\frac{1}{32}\sin 6\alpha.$

3 мисол. Тенгликни исботланг:

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\ldots\cos\frac{14\pi}{15} = -\frac{1}{2^{14}}.$$

Исботи. Берилган кўпайтмада $\frac{\pi}{15}+\frac{14\pi}{15}=\pi$, $\frac{2\pi}{15}+\frac{13\pi}{15}=\pi, \ldots, \frac{7\pi}{15}+\frac{8\pi}{15}=\pi$ эканини ҳисобга олсак, у ҳолда келтириш формуласига асосан:

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\ldots\cos\frac{14\pi}{15} = -\cos^2\frac{\pi}{15}\cos^2\frac{2\pi}{15}\cos^2\frac{3\pi}{15}\ldots\cos^2\frac{7\pi}{15} =$$

$$= \frac{-\sin^2\frac{2\pi}{15}\cos^2\frac{2\pi}{15}\cos^2\frac{4\pi}{15}\cos^2\frac{7\pi}{15}\sin^2\frac{6\pi}{15}\cos^2\frac{6\pi}{15}}{2^4\sin^2\frac{\pi}{15}\sin^2\frac{3\pi}{15}} =$$

$$= -\frac{\sin^2\frac{14\pi}{15}}{2^{14}\sin^2\frac{\pi}{15}} = -\frac{1}{2^{14}}.$$

4-мисол. $\sin 61° + \sin 47° - \sin 25° - \sin 11° = \cos 7°$ тенгликнинг тўғрилигини исботланг.

Исботи. $\sin 61° + \sin 47° - \sin 25° - \sin 11° = (\sin 61° + \sin 47°) - (\sin 25° + \sin 11°) = 2\sin 54°\cos 7° - 2\sin 18°\cos 7° =$
$= 2\cos 7°\cdot(\sin 54° - \sin 18°) = 2\cos 7° 2\cos 36°\sin 18° =$
$= 4\cos 7°\cos 36°\sin 18°\,\frac{\cos 18°}{\cos 18°} = 2\cos 7°\cos 36°\,\frac{\sin 36°}{\cos 18°} =$
$= \cos 7°\,\frac{\sin 72°}{\cos 18°} = \cos 7°\,\frac{\cos 18°}{\cos 18°} = \cos 7°.$

5-мисол. Агар $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ бўлса, $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ ни исботланг.

Исботлаш. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$
$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=$
$=4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$

Машқлар

Айниятларни исботланг:

25. $\sin 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\cos 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha.$
26. $\cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha\cdot\sec\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha.$
27. $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2\operatorname{tg}2\alpha.$
28. $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha.$
29. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2\sin\alpha.$
30. $\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos\alpha)}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$
31. $4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha=\sin 4\alpha$
32. $2\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha.$
33. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$
34. $3-4\sin^2\alpha=4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$
35. $\cos^2(\alpha+\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)=-\sin 2\alpha\sin 2\beta.$
36. $\sin\alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{3\alpha}{2}.$
37. $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1}=2\cos\alpha.$
38. $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha=4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha.$
39. $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$
40. $\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}3\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha.$
41. $\sin^2\alpha+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{3}{2}.$
42. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$

43. $\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta.$

44. $3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=1.$

45. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}+\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta.$

46. $\dfrac{2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}{2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+4\alpha\right)}{\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}.$

47. $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\dfrac{2}{3}.$

48. $\dfrac{\cos 4\alpha\operatorname{tg}2\alpha-\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha+\sin 4\alpha}=-\operatorname{tg}^2 2\alpha.$

49. $4\sin\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin 3\alpha.$

50 $\cos^6\alpha-\sin^6\alpha=\dfrac{1}{4}(3\cos 2\alpha+\cos^3 2\alpha).$

51. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sec 2\alpha.$

52. $\cos\alpha\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{cosec}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=1.$

53. $\left(\sin\alpha+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)^2+\left(\cos\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)^2-\left(\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2=5.$

54. $\sin 6\alpha\cos^3 2\alpha+\cos 6\alpha\sin^3 2\alpha=\dfrac{3}{4}\sin 8\alpha.$

55. $\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{4}\ldots\cos\dfrac{\alpha}{2^n}=\dfrac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}},\quad n\in N.$

56. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\sin\dfrac{n\alpha}{2}\cos\dfrac{(n+1)\alpha}{2}\,\dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}},\ n\in N.$

Тенгликларни исботланг:

57. $\cos^2 3+\cos^2 1-\cos 4\cos 2=1,$

58. $8\cos 10^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ=\sqrt{3}.$

59 $\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}80=3.$

60. $\cos\dfrac{\pi}{5}-\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{2}.$

61. $\cos^4\dfrac{\pi}{12}-\sin^4\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

62. $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{7}=\operatorname{cosec}\frac{2\pi}{7}+\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{7}$.

Шартли айниятларни исботланг:

63. Агар $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ бўлса, у ҳолда

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

64. Агар $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, α, β, $\gamma\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$

65. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=a$ бўлса, у ҳолда

$$\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=a-1.$$

66. Агар $\operatorname{tg}\alpha=\frac{m-1}{m}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{2m-1}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

67. Агар $\alpha+\beta=\gamma$ бўлса, у ҳолда $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

68. Агар $\alpha+\beta=\gamma$ бўлса, у ҳолда $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2(1-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$.

4-§. Тригонометрик тенгсизликларни исботлаш.

Бир номаълумли тенгсизлик деб $f(x)Vg(x)$ тенгсизликка айтилади. Бу ерда V белги $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$ белгилардан бири бўлиб $f(x)$ ва $g(x)$ лар тригонометрик функциялар қатнашган ифодалардир.

Тенгсизликлар берилишига кўра икки хил мазмунга эга бўлиши мумкин:

1. Агар шундай A сонли тўплам топилсаки, бу тўпламга тегишли ҳар бир x учун $f(x)$ ва $g(x)$ лар аниқланган бўлиб, $f(x)>g(x)$ тўғри тенгсизликка айланса, у ҳолда $f(x)>g(x)$ *айний (шартсиз) тенгсизлик* деб айтилади. Бундай тенгсизликлар одатда исботланади

2. Агар шундай B сонли тўпламни топиш талаб қилинсаки, бу тўпламга тегишли ҳар бир x да $f(x)$ ва $g(x)$ лар аниқланган бўлиб, $f(x)>g(x)$ тўғри тенгсизликка айланса, у ҳолда $f(x)>g(x)$ *шартли тенгсизлик* деб айтилади. Бундай тенгсизликлар ечилади. B тўплам эса унинг ечимлари тўплами дейилади.

Тенгсизликлар билан иш кўрганда у ёки бу шакл алмаштиришлар бажаришга тўғри келади. Бу шакл алмаштиришларда тенг кучлиликни сақловчи теоремалардан баъзиларини эслатиб ўтамиз.

1-теорема. $D(\psi)\supset D(f)\cap D(g)$ *бўлса, у ҳолда* $f > g \Longleftrightarrow f+\psi > g+\psi$.

1-натижа. Исталган қўшилувчини тенгсизликнинг бир томонидан иккинчи томонига қарама-қарши ишора билан ўтказиш мумкин.

2-натижа. $f > g \Longleftrightarrow f - g > 0$.

2-теорема. $D(\psi)\supset D(f)\cap D(g)$ ва $\psi>0$ *бўлса, у ҳолда* $f > g \Longleftrightarrow f\cdot\psi > g\cdot\psi$ *бўлади.*

3-теорема $D(\psi)\supset D(f)\cap D(g)$ *ва* $\psi<0$ *бўлса, у ҳолда,* $f > g \Longleftrightarrow f\cdot\psi < g\cdot\psi$ *бўлади,*

4-теорема. $\frac{f}{g} > 0 \Longleftrightarrow f\cdot g > 0$.

5-теорема. $\frac{f}{g} \leqslant 0 \Longleftrightarrow (f\cdot g \leqslant 0 \wedge g \neq 0)$.

Тенгсизликларни исботлаш жараёнида ушбу теоремалардан фойдаланиш билан бирга тригонометрик функцияларнинг хоссалари ва уларга оид асосий формулалардан фойдаланиш ҳамда практикумнинг алгебра қисмида кўрилган баъзи бир тенгсизликлар ва уларнинг натижаларини татбиқ қилиш мақсадга мувофиқлир.

Тригонометрик тенгсизликларни исботлаш усуллари умуман тенгсизликларни исботлаш усулларидан фарқ қилмайди. Улар билан эса практикумнинг алгебра қисмида танишганмиз.

Тенгсизликларни исботлаш намуналари.

1-мисол. Агар $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0 < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) > \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$ ўринли бўлишини исботланг.

Исботлаш.

$$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} > \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta, \\ \operatorname{tg}\alpha > 0,\ \operatorname{tg}\beta > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} > 1, \\ \operatorname{tg}\alpha > 0,\ \operatorname{tg}\beta > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta < 1, \\ \operatorname{tg}\alpha > 0, \operatorname{tg}\beta > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta, \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta > 0, \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos(\alpha+\beta)>0, \\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

α ва β лар $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ шартни қаноатлантирганда тенгсизлик ўринлидир.

2-мисол. $\frac{1}{4} \leqslant \sin^6\alpha+\cos^6\alpha \leqslant 1$ ни исботланг.

Исботлаш. $\frac{1}{4} \leqslant \sin^6\alpha+\cos^6\alpha \leqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{4} \leqslant \sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha \leqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{4} \leqslant \sin^4\alpha+\cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha \leqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{4} \leqslant 1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha \leqslant 1 \Longleftrightarrow -\frac{3}{4} \leqslant -3\sin^2\alpha\cos^2\alpha \leqslant 0 \Longleftrightarrow 0 \leqslant 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha \leqslant 1 \Longleftrightarrow 0 \leqslant \sin^2 2\alpha \leqslant 1.$

Охирги тенгсизлик α нинг исталган қиймати учун тўғридир.

Машқлар

Тенгсизликларни исботланг:

69. Агар $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда $\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$.

70. Агар $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда $\sqrt{\cos\alpha}<\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

71. Агар $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ва $\alpha, \beta, \gamma>0$ бўлса, у ҳолда

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

72. Агар $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда $\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha>2\alpha$.

73. Агар $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ бўлиб, $\alpha, \beta, \gamma\in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\geqslant3\sqrt{3}$.

74. Агар $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ бўлиб, $\gamma\in\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta<1$.

75. Агар $\alpha\neq\frac{n\pi}{2}$, $n\in Z$ бўлса, у ҳолда $\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\geqslant 0$.

76. Агар $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ бўлиб, $\alpha, \beta, \gamma\in\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ бўлса, у ҳолда $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma>0$.

77. $-\sqrt{3} < \dfrac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha} \leqslant \sqrt{3}$.

78. $\sin\dfrac{1}{n-1} - 2\sin\dfrac{1}{n} + \sin\dfrac{1}{n+1} > 0,\ n \geqslant 2,\ n \in N$

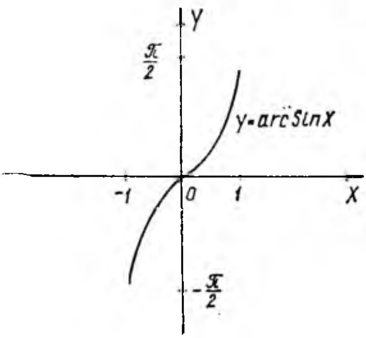
5-§. Тескари тригонометрик функциялар

Юқоридаги параграфларда тўғри тригонометрик функциялар ҳамда уларнинг хоссалари ва графиклари ҳақида тўхталиб ўтилди. Агар берилган функция қаралаётган оралиқда монотон ўсувчи ёки камаювчи бўлса, у ҳолда шу функцияга тескари функциянинг мавжудлиги шартига асосан тригонометрик функцияларга ҳам тескари тригонометрик функциялар мавжуд бўлиб, улар қуйидагилардан иборатдир.

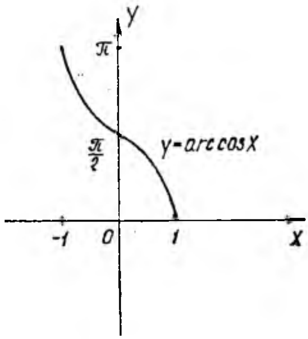
1-таъриф. Берилган $x \in [-1;\ 1]$ соннинг *арксинуси* деб $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ да аниқланган ва синуси x га тенг бўлган $y=\arcsin x$ функцияга айтилади: $y=\arcsin x \Longrightarrow \sin(\arcsin x)=x,\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ -1 \leqslant x \leqslant 1$ (17-чизма).

2-таъриф. $x \in [-1;\ 1]$ соннинг *арккосинуси* деб косинуси x га тенг ва $0 \leqslant y \leqslant \pi$ да аниқланган $y=\arccos x$ функцияга айтилади: $y=\arccos x \Longrightarrow \cos(\arccos x)=x$, $0 < y \leqslant \pi,\ -1 \leqslant x \leqslant 1$ (18-чизма).

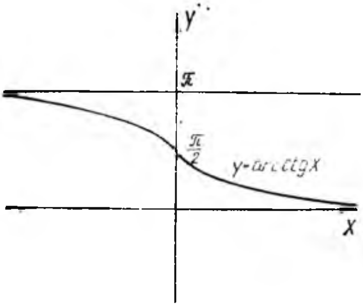
3-таъриф. $x \in R$ соннинг *арктангенси* деб тангенси x га тенг ва $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ да аниқланган $y = \mathrm{aic\,g}\,x$



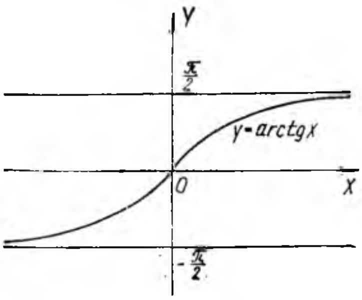
17-чизма.



18-чизма.



19- чизма.



20- чизма.

функцияга айтилади: $y=\operatorname{arctg} x \Longrightarrow \operatorname{tg}(\operatorname{arc tg} x)=x$, $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, $-\infty<x<+\infty$ (19- чизма).

4- таъриф. $x\in R$ соннинг *арккотангенси* деб котангенси x га тенг ва $0<y<\pi$ да аниқланган $y=\operatorname{arcctg} x$ функцияга айтилади: $y=\operatorname{arcctg} x \Longrightarrow \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x$, $0<y<\pi$, $-\infty<x<+\infty$ (20- чизма).

Тескари тригонометрик функцияларнинг асосий хоссалари.

1. Аниқланиш ва ўзгариш соҳалари:

$y=\arcsin x \qquad D(y)=[-1;\ 1].\ E(y)=\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right];$

$y=\arccos x \qquad D(y)=[-1;\ 1],\ E(y)=[0;\ \pi];$

$y=\operatorname{arctg} x \qquad D(y)=R, \qquad E(y)=\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[;$

$y=\operatorname{arcctg} x \qquad D(y)=R, \qquad E(y)=]0;\ \pi[.$

2. Жуфт ва тоқлиги:

Теорема. *Арксинус ва арктангенс тоқ функциялардир, арккосинус ва арккотангенс эса тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас, яъни*

$\arcsin(-x)=-\arcsin x; \qquad \arccos(-x)=\pi-\arccos x;$

$\operatorname{arc tg}(-x)=-\operatorname{arc tg} x; \qquad \operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arccrg} x.$

3. Графиклари:

Тескари тригонометрик функцияларнинг графикларини ҳосил қилиш учун тригонометрик функцияларнинг графикларини $y=x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик акслантириш керак.

Тескари тригонометрик функциялар орасидаги асосий муносабатлар.

1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \leqslant 1.$

2. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in R.$

3. $\arcsin x = \left[\begin{array}{ll} \arccos\sqrt{1-x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ -\arccos\sqrt{1-x^2}, & -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{array}\right.$

4. $\arcsin x = \left[\begin{array}{ll} \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leqslant 1; \\ \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & -1 \leqslant x < 0. \end{array}\right.$

5. $\arccos x = \left[\begin{array}{ll} \arcsin\sqrt{1-x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, & -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{array}\right.$

6. $\arccos x = \left[\begin{array}{ll} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leqslant 1; \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & -1 \leqslant x < 0. \end{array}\right.$

7. $\operatorname{arctg} x = \left[\begin{array}{ll} \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}, & x > 0; \\ \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} - \pi, & x < 0. \end{array}\right.$

8. $\operatorname{arctg} x = \left[\begin{array}{ll} \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geqslant 0; \\ -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leqslant 0. \end{array}\right.$

9. $\operatorname{arcctg} x = \left[\begin{array}{ll} \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x > 0; \\ \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0. \end{array}\right.$

10. $\operatorname{arcctg} x = \left[\begin{array}{ll} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x < 0. \end{array}\right.$

1-мисол. $\arcsin\frac{20}{29}-\arcsin\frac{5}{13}=\arccos\frac{352}{377}$ тенгликнинг тўғрилигини текширинг.

Ечиш. Қулайлик учун қуйидагича белгилашлар киритайлик:

$$\alpha\overset{\partial f}{=}\arcsin\frac{20}{29},\ \beta\overset{\partial f}{=}\arcsin\frac{5}{13},\quad \gamma\overset{\partial f}{=}\arccos\frac{352}{377}.$$

$$1)\ \ 0<\frac{20}{29}<1,\ \Rightarrow\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\frac{5}{13}<1\ \Rightarrow\ 0<\beta<\frac{\pi}{2};$$

$$0<\frac{352}{377}<1\ \Rightarrow\ 0<\gamma<\frac{\pi}{2},\ \frac{20}{29}>\frac{5}{13}\ \Rightarrow\ 0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2};$$

у ҳолда $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$, яъни $\alpha-\beta, \gamma\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ бўлиб, бу эса $\sin t$, $\cos t$ ларнинг монотонлик оралиғидир.

2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\sqrt{1-\sin^2\alpha}\sqrt{1-\sin^2\beta}+$
$+\sin\alpha\sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{20}{29}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}+\frac{20}{29}\cdot\frac{5}{13}=\frac{352}{377}$,

$\cos\gamma=\cos\left(\arccos\frac{352}{377}\right)=\frac{352}{377}$, демак, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\gamma$.

1) ва 2) ларни эътиборга олсак: $\alpha-\beta=\gamma$, яъни $\arcsin\frac{20}{29}-\arcsin\frac{5}{13}=\arccos\frac{352}{377}$.

2-мисол. $2\operatorname{arctg} x=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ айниятни исботланг.

Исботлаш. Қуйидагича белгилашлар киритайлик:

1) $\forall x$ учун $-\frac{\pi}{2}<2\alpha<\frac{\pi}{2}\ \Longleftrightarrow\ -\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{4}$;

$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 1$ учун $-\frac{\pi}{2}\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Демак, α ва β лар $\in\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$ бўлиб, бу $\sin t$ учун монотонлик оралиғидир.

2) $\sin 2\alpha=\sin(2\operatorname{arctg} x)=2\sin(\operatorname{arctg} x)\cos(\operatorname{arctg} x)=$
$=2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{2x}{1+x^2}$,

$\sin\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)=\frac{2x}{1+x^2}\ \Rightarrow\ \sin 2\alpha=\sin\beta$.

1) ва 2) ларни эътиборга олсак: $2\alpha=\beta$, яъни

$$2\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

3) Айниятнинг аниқланиш соҳасини топамиз:

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leqslant 1 \iff |2x| \leqslant 1+x^2 \iff |x|^2-2|x|+1 \geqslant 0 \iff$$

$\iff (|x|-1)^2 \geqslant 0$. Бу эса $\forall x \in R$ учун ҳар доим тўғри. Демак, берилган айният ихтиерий $x \in R$ учун ўринлидир

3-мисол. $\operatorname{arctg}\frac{2}{5} + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} > \operatorname{arctg} 1$ тенгсизлик исботлансин.

Исботлаш. Қулайлик учун қуйидагича белгилашлар киритайлик:

$$\alpha \overset{df}{=} \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{5},\ \beta \overset{df}{=} \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3},\ \gamma \overset{df}{=} \operatorname{arc\,tg} = 1\ \frac{\pi}{4}.$$

Демак, $\alpha + \beta > \frac{\pi}{4}$ эканлигини исботлашимиз керак.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 0 < \frac{2}{5} < 1 \Rightarrow \alpha \in \left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[\\ \quad 0 < \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \beta \in \left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[\end{array}\right| \Rightarrow 0 < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2};$$

$$0 < 1 \Rightarrow \gamma \in \left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[.$$

$\alpha + \beta,\ \gamma \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ бўлиб, бу эса $\operatorname{tg} t$ учун монотон ўсувчи оралиқдир.

2) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) > \operatorname{tg}\gamma$ ёки $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) > 1$ эканини исботлаймиз.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{2}{5}+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{16}{11} = 1\frac{5}{11}.$$

Демак, $1\frac{5}{11} > 1 \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha+\beta) > \operatorname{tg}\gamma$.

1) ва 2) ларни эътиборга олсак, $\alpha+\beta>\gamma$, яъни $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) > \operatorname{tg}\gamma$ бўлиб, берилган тенгсизлик тўғри экан.

Машқлар

Ифодаларнинг қийматини ҳисобланг:

79. $\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

80. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)$.

81. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right) + \arcsin\frac{3}{5}\right)$.

82. $\cos\left(\left(2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right)$.

83. $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arcsin m\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin m\right)$, $|m| < 1$.

84. $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin a\right)\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin a\right)$, $|a| < 1$.

Тенгликларнинг тўғрилигини исботланг:

85. $\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$.

86. $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg}(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}$.

87. $\arcsin\frac{3}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{5} = \operatorname{arc\,tg}\frac{27}{11}$.

88. $\operatorname{arc\,tg} 1 + \operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg} 3 = \pi$.

89. $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{7} = \arccos\left(-\frac{11}{14}\right)$.

90. $\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arcctg}\frac{2}{11}$.

Айниятларни исботланг:

91. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{x+1} = \frac{\pi}{4}$, $x > 0$.

92. $2\arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}} = \arccos x$, $-1 < x < 1$.

93. $\arcsin(x-1) + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} = \frac{\pi}{2}$, $0 < x < 2$.

94. $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x > -1; \\ \frac{-3\pi}{4}, & x < -1. \end{cases}$

95. $2\operatorname{arc\,tg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi$, $x > 1$.

96. $\operatorname{arctg}\frac{1}{a} + \operatorname{arc\,tg}\frac{a-1}{a+1} = \frac{\pi}{4}$, $a \in]-\infty; -1[\cup]0; \infty[$.

97. $\arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$.

98. $\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})$.

99. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

100. $\arcsin x + \arcsin y = \operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy}$.

Тенгсизликларни исботланг:

101. $-\arcsin\dfrac{2}{11} \geqslant \arcsin\left(-\dfrac{2}{9}\right)$.

102. $\arccos\dfrac{1}{3} > \arccos\dfrac{2}{7}$.

103. $\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3} > \dfrac{\pi}{6}$.

104. $\operatorname{arcctg}\dfrac{4}{5} + \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{3} < \dfrac{3\pi}{4}$.

105. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} < \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$.

106 $\arcsin\dfrac{1}{4} + \arccos\dfrac{3}{5} + \arccos\dfrac{12}{13} > \dfrac{\pi}{2}$.

107. $\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{4} > \arccos\dfrac{4}{5} - \arcsin\dfrac{1}{3}$.

108. $3\arccos\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) - 2\arcsin\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) > \dfrac{2\pi}{3}$.

109. $\operatorname{arcctg}(-3) < \dfrac{8}{3} - \operatorname{arctg} 3$.

110. $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{5} + \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} > \dfrac{\pi}{4}$.

V БОБ. ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР СИСТЕМАЛАРИ

1-§. Тригонометрик тенгламалар

Юқорида алгебра бўлимида тенглама тушунчасига таъриф бериб ўтилган эди. Агар $F(x, y, \dots, z, a, b, \dots, c)$ функция содда трансцендент функция бўлса, у ҳолда $F(x, y, \dots, z, a, b, \dots, c) = 0$ тенгламага содда трансцендент тенглама дейилади. Тригонометрияда трансцендент тенгламада қатнашаётган ўзгарувчилар устида тригонометрик ва тескари тригонометрик амаллар қатнашса, у ҳолда бундай тенгламаларни *тригонометрик тенгламалар* деб қаралади. Ҳар қандай тригонометрик тенгламаларни ечиш энг содда тригонометрик тенгламаларни ечишга келтирилади. Булар қуйидагилардир:

$$\sin x = a, \ \cos x = a, \ \operatorname{tg} x = a, \ \operatorname{ctg} x = a.$$

Бу тенгламалар a нинг қандай қийматларида ечимга эга бўлиши ва уларни ечиш формулалари билан танишайлик.

a	$\sin x = a$	$\cos x = a$
$\|a\| < 1$	$A = \{(-1)^k \arcsin a + k\pi \mid k \in Z\}$	$A = \{\pm \arccos a + 2k\pi \mid k \in Z\}$
$a > 1$	$A = \varnothing$	$A = \varnothing$
$a < -1$	$A = \varnothing$	$A = \varnothing$
$a = 1$	$A = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in Z\right\}$	$A = \{2k\pi \mid k \in Z\}$
$a = -1$	$A = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in Z\right\}$	$A = \{\pi + 2k\pi \mid k \in Z\}$
$a \in R$	$\operatorname{tg} x = a$ $\quad A = \{\operatorname{arctg} a + k\pi \mid k \in Z\}$ $\operatorname{ctg} x = a$ $\quad A = \{\operatorname{arcctg} a + k\pi \mid k \in Z\}$.	

Машқлар

Тенгламаларни ечинг:

1. $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.
3. $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{10}-1}{2}$.
4. $\operatorname{ctg} 2x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
5. $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$.
6. $\operatorname{tg}(x + 15^\circ) + 1 = 0$.
7. $\sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$.
8. $3 \sin^2 2x - 1 = 0$,

Тригонометрик тенгламаларнинг турлари билан танишишдан олдин қуйидагиларни таъкидлаб ўтамиз.

Тенгламаларни ечиш жараёнида баъзи бир шакл алмаштиришлар бажарилади. Агар бундай алмаштиришлар тенгламаларнинг тенг кучлилигига доир теоремаларга асосланган бўлса, у ҳолда ҳосил бўлган тенгламанинг ечими берилган тенгламанинг ечими бўлади. Акс ҳолда ечимлар текширилиши керак. Практикумнинг „Алгебра“ қисмидан маълум бўлган бу маълумотларга IV боб, 1 §, 4—9-бандлардаги $1 \div 25$-формулалар ҳамда тригонометрик тенгламаларнинг муайян турларини ечишдаги теоремалар ва формулалар қўшиб қаралади. Тригонометрик функциянинг аниқ бир қийматини берадиган аргументнинг қиймати чексиз кўп бўлгачлиги учун тенгламанинг бир хусусий ечимини олгандан сўнг умумий ечим формуласини ҳосил қилиш мумкин.

1. Алгебраик тенгламаларга келтириладиган тенгламалар.

Бундай турга $f(\sin x) = 0$, $f(\cos x) = 0$, $f(\operatorname{tg} x) = 0$, $f(\operatorname{ctg} x) = 0$ кўринишдаги тенгламалар киради. Бу ерда $f(\sin x) = 0 \sim \begin{cases} t = \sin x, \\ f(t) = 0 \end{cases} \sim \{\sin x = t_1 \vee \sin x = t_2 \vee \ldots \vee \sin x = t_n\}$ белгилаш киритиш билан (агар $f(t) = 0$ тенглама $t_1, t_2, \ldots, t_n$ илдизларга эга бўлса) ҳосил бўлган содда тенгламалар ечилиб, берилган тенглама илдизлари ҳосил қилинади.

Худди шунингдек:

$$f(\cos x) = 0 \sim \begin{cases} t = \cos x, \\ f(t) = 0 \end{cases} \sim \{\cos x = t_1 \vee \cos x = t_2 \vee \ldots \vee \cos x = t_n\}.$$

$$f(\operatorname{tg} x) = 0 \sim \begin{cases} t = \operatorname{tg} x, \\ f(t) = 0 \end{cases} \sim \{\operatorname{tg} x = t_1 \vee \operatorname{tg} x = t_2 \vee \ldots \vee \operatorname{tg} x = t_n\}.$$

$$f(\operatorname{ctg} x) = 0 \sim \begin{cases} t = \operatorname{ctg} x, \\ f(t) = 0 \end{cases} \sim \{\operatorname{ctg} x = t_1 \vee \operatorname{ctg} x = t_2 \vee \ldots \vee \operatorname{ctg} x = t_n\}$$

1-мисол. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \sim \begin{cases} \sin x = t, \\ 2t^2 + t - 1 = 0 \end{cases} \sim$

$$\sim \begin{cases} \sin x = t, \\ t_1 = -1 \vee t_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \sim \sin x = -1 \vee \sin x = \frac{1}{2} \sim$$

$$\sim x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \vee x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi \ (n, m \in Z).$$

Жавоб. $\left\{-\frac{\pi}{2}+2n\pi \mid n\in Z\right\} \cup \left\{(-1)^m\frac{\pi}{6}+m\pi \mid m\in Z\right\}$

2-мисол. $2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-3\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+1=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-3\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+1=0\sim$

$$\sim 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-3\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1=0\sim\begin{cases}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=t,\\ 2t^2-3t+1=0\end{cases}\sim$$

$$\sim\begin{cases}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=t,\\ t_1=1\vee t_2=\frac{1}{2}\end{cases}\sim\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\vee\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\sim$$

$$\sim x=-\frac{\pi}{6}+2n\pi\vee x=\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2m\pi.$$

Жавоб. $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi \mid k\in Z\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2m\pi \mid m\in Z\right\}.$

Машқлар

Тенгламаларни ечинг:

9. $\cos 2x+\cos x=0.$

10. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sec\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2=0.$

11. $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{4}{\sqrt{3}}.$

12. $2\sin^2 x+2\sin x=\sqrt{3}(1+\sin x).$

13. $2\operatorname{ctg}^2 x+2\operatorname{cosec}^2 x-7\operatorname{ctg} x+1=0,$

14. $4\sin^3 x+8\sin^2 x-\sin x+2=0.$

15. $\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-1=0.$

16. $2\sin^5 x=3\sin^3 x-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.$

2. Бир хил исмли иккита тригонометрик функциянинг тенглиги шартидан фойдаланиб ечиладиган тенгламалар.

1-теорема. $\forall x, y\in R$:

$$\sin x=\sin y \iff x=(-1)^n y+n\pi,\ n\in Z,$$

2-теорема. $\forall x, y\in R$;

$$\cos x=\cos y \iff x=\pm y+2n\pi,\ n\in Z.$$

3- теорема. $\forall x, y \in R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z \right\};$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \iff x = y + k\pi, \ k \in Z.$$

3- мисол. $\sin 7x - \sin 5x = 0$ тенгламани ечинг:

Ечиш. $\sin 7x - \sin 5x = 0 \iff \sin 7x = \sin 5x \iff 7x = (-1)^n 5x + n\pi \iff \left[\begin{array}{l} 7x = 5x + 2k\pi, \ n = 2k, \\ 7x = -5x + \pi + 2k\pi, \ n = 2k+1 \end{array} \right. \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = k\pi, \ n = 2k, \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}, \ n = 2k+1. \end{array} \right.$$

Жавоб. $\{k\pi / k \in Z\} \cup \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} / k \in Z \right\}$.

4- мисол. $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \iff \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \iff 2x - \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{3} + n\pi \iff x = \frac{\pi}{2} + n\pi.$

Жавоб. $\left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi / n \in Z \right\}$.

Машқлар

Тенгламаларни ечинг:

17. $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{12} = 0.$

18. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0.$

19. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \operatorname{ctg} x.$

20. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

21. $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x = 0.$

22. $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sin\frac{\pi}{12}\cos\left(2x + \frac{\pi}{12}\right) = \sin x.$

3. $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан бир жинсли бўлган тенгламалар.

$$a_0\sin^n x + a_1\sin^{n-1}x\cos x + \ldots + a_{n-1}\sin x\cos^{n-1}x +$$
$$+ a_n\cos^n x = 0 \qquad (1)$$

кўринишдаги тенглама (бунда $a_i \in R$, $i=\overline{1,n}$) $\sin x$, $\cos x$ га нисбатан бир жинсли тенглама деб аталади.

Агар $a_0 = 0$ бўлса, $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$ сонлар берилган тенгламани қаноатлантиради.

Агар $a_0 \neq 0$ бўлса, $\cos x \neq 0$ бўлиб, берилган тенглама

$$a_0\mathrm{tg}^n x + a_1\mathrm{tg}^{n-1}x + \ldots + a_{n-1}\mathrm{tg}x + a_n = 0 \qquad (2)$$

кўринишга келтирилади. Бу ҳолда (1) $\Longleftrightarrow$ (2).

Бундай кўринишдаги тенгламаларни ечишни 1-бандда ўрганган эдик.

$a_0\sin^{2n}x + a_1\sin^{2n-1}x\cos x + \ldots + a_{2n-1}\sin x\cos^{2n-1}x + a_{2n}\cos^{2n}x = g$ кўринишдаги тенгламани (1) кўринишга келтириш мумкин. Бунинг учун $q = q(\sin^2 x + \cos^2 x)^n$ айниятдан фойдаланиш етарлидир.

5- мисол. $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0 \Longleftrightarrow 2\mathrm{tg}^2 x + 3\mathrm{tg}x + 1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}x = t, \\ 2t^2+3t+1=0 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}x = t, \\ t_1 = -1 \vee t_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}x = -1, \\ \mathrm{tg}x = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + n\pi \vee x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + n\pi,\ n \in Z.$$

Жавоб. $\left\{-\frac{\pi}{4} + n\pi / n \in Z\right\} \cup \left\{-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + n\pi / n \in Z\right\}$.

6- мисол. $2\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 4$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $2\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 4 \sim 2\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x) \sim 4\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0 \sim 4\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}x - 1 = 0 \sim \begin{cases} \mathrm{tg}x = t, \\ 4t^2-2t-1=0 \end{cases} \sim$

$$\sim \begin{cases} \operatorname{tg} x = t, \\ t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \sim \operatorname{tg} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee \operatorname{tg} x =$$

$$= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \sim x = \operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{5}}{2} + n\pi \vee x = \operatorname{arctg} \frac{1-\sqrt{5}}{2} + n\pi.$$

Жавоб. $\left\{ \operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{5}}{2} + n\pi / n \in Z \right\} \cup \left\{ \operatorname{arctg} \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \right.$

$\left. + n\pi / n \in 2 \right\}$

Машқлар

Тенгламаларни ечинг:

23. $\cos^2 5x + 7\sin^2 5x = 8\cos 5x \sin 5x$.

24. $\cos^3 x \sin x + \cos^2 x \sin^2 x - 3\cos x \sin^3 x - 3\sin^4 x = 0$.

25. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

26. $\sin^6 x + \sin^4 x \cos^2 x = \sin^3 x \cos^3 x + \sin x \cos^5 x$.

27. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$.

28. $19 \sin^2 2x - 30 \sin 4x + 25 \cos^2 2x = 25$.

4. **Ёрдамчи бурчак киритиш усули билан ечиладиган тенгламалар.**

$a \sin x + b \cos x = c$ кўринишдаги тенгламани ёрдамчи бурчак киритиш билан ечайлик, бунда $a, b, c \neq 0$.

IV боб, 1-§ даги 24-формулага кўра $a\sin x + b\cos x =$ $= c \sim \sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$.

Агар $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| \leqslant 1$ ёки $c^2 \leqslant a^2 + b^2$ шарт ўринли бўлса, у ҳолда берилган тенгламанинг ечими:

$$x = -\varphi + (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + n\pi, \ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, \ n \in Z.$$

Агар $c^2 > a^2 + b^2$ бўлса, ечими $\varnothing$.

7-мисол. $3\sin \frac{x}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} = 3$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $3\sin \frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos \frac{x}{2} = 3 \sim \sin\left(\frac{x}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) =$

$$= \frac{3}{\sqrt{9+3}} \sim \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sim \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi \sim$$

$$\sim \begin{cases} k = 2n, \ x = \frac{\pi}{3} + 4n\pi; \\ k = 2n+1, \ x = \pi + 4n\pi. \end{cases}$$

Жавоб. $\{\pi + 4n\pi / n \in Z\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 4n\pi / n \in Z\right\}$.

Машқлар

Тенгламаларни ечинг:

29. $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 1$.
30. $2\sin x - 3\cos x = \frac{1}{2}$.
31. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.
32. $4\sqrt{3}\cos(\pi + x) + 12\sin x = \sqrt{3}\pi$.
33. $\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) = 1$.
34. $\sin(\pi\cos x) = \cos(\pi\cos x)$,

5. Рационал алмаштириш усули билан ечиладиган тенгламалар.

$a\sin x + b\cos x = c$ тенгламада $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ ва $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ алмаштириш бажариб, IV боб, 1-§ даги 25-формулага кўра $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\left(-b\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b = c\right)$ кўринишга, ёки ихчамлаштирилгандан сўнг $(c+b)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + (c-b) = 0$, яъни $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ га нисбатан квадрат тенгламага эга бўламиз. Бу ерда, агар $c = -b$ бўлса, у ҳолда $x \in \{-2\operatorname{arctg}\frac{b}{a} + 2n\pi / n \in Z\} \cup \{\pi + 2k\pi / k \in Z\}$; агар $c = -b$, $a^2 + b^2 \geqslant c^2$ бўлса, у ҳолда $x \in \{\operatorname{arctg} \cdot \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c} + 2l\pi / l \in Z\}$; $a^2 + b^2 - c^2 < 0$ бўлса, $x \in \varnothing$.

8-мисол. $\sin x + 7\cos x = 5$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\sin x + 7\cos x = 5 \iff$

$$\iff \begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t;\ 12t^2 - 2t - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t; \\ 6t^2 - t - 1 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \vee \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{3} \iff x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2n\pi \vee$$

$$\vee\ x = -2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2n\pi.$$

Жавоб. $\left\{2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2n\pi / n \in Z\right\} \cup \left\{-2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2n\pi / n \in Z\right\}$.

Машқлар

Тенгламаларни ечинг:

35. $4\sin x + 5\cos x = 3$.

36. $\sin x + \mathrm{ct}\,\frac{x}{2} = 2$.

37. $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x + 1 = 0$.

38. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{6}$.

39. $4\sin(2x + 20°) - \cos(2x + 20°) = 3$.

40. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = a$.

6. Кўпайтувчиларга ажратиш усули билан ечиладиган тенгламалар.

$f(x) = 0$ кўринишдаги тригонометрик тенглама қандайдир усул билан $f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x) = 0$ кўринишга келтирилган бўлсин. Агар $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ лар қандайдир M тўпламда аниқланган бўлса, у ҳолда шу M тўпламда $f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x) = 0$ тенглама $f_1(x) = 0 \vee$ $\vee f_2(x) = 0 \vee \ldots \vee f_n(x) = 0$ га тенг кучли бўлади.

Берилган тенгламани кўпайтма ҳолига келтириш учун алгебранинг маълум теоремаларидан ҳамда IV боб, 1-§, 4—9-бандларда келтирилган формулалардан фойдаланилади. Сўнгра юқоридаги теоремадан фойдаланиш натижасида берилган тенглама бир неча содда тенгламалар дизъюнкциясига келади ва ушбу параграфнинг 1—5-бандларида кўрилган усуллардан бирини татбиқ қилиб ечилади.

9-мисол. $\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}2x\sin3x=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}2x\sin3x=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=0\wedge\cos x\neq0\vee\operatorname{ctg}2x=0\wedge\sin2x\neq0\vee\sin3x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=n\pi\vee x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\vee x=\frac{m\pi}{3}\vee x\neq\frac{l\pi}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\vee x=\frac{m\pi}{3}\wedge\frac{l\pi}{2}\neq\frac{m\pi}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\vee x=(3l+1)\frac{\pi}{3}\vee x=(3l-1)\frac{\pi}{3}$$

Жавоб. $\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}/k\in Z\right\}\cup\left\{\pm\frac{\pi}{3}+l\pi/l\in Z\right\}$.

10-мисол. $\sin x\cos x+\sin x=1-\cos^2x$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\sin x\cos x+\sin x=1-\cos^2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\cos x+1)\sin x=(\cos x+1)(1-\cos x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+1)(\sin x+\cos x-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=-1\vee\cos x+\sin x=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi\vee\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi\vee x=2k\pi\vee x=\frac{\pi}{2}+2m\pi\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=l\pi\vee x=\frac{\pi}{2}+2m\pi\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{l\pi/l\in Z\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2m\pi/m\in Z\right\}.$$

Бу ерда $\{\pi+2n\pi/n\in Z\}\cup\{2k\pi/k\in Z\}=\{m\pi/m\in Z\}$.

Жавоб. $\left\{m\pi/m\in Z\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2l\pi/l\in Z\right\}$.

Машқлар

Тенгламаларни ечинг:

41. $\sin5x\cdot\operatorname{tg}4x\cdot\cos2x=0$.
42. $\cos x-\cos2x=\sin3x$.
43. $\cos^2x+\sin x\cos x=1$.
44. $1-\cos^22x=\sin3x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.
45. $\sin x+\cos x=1+\sin2x$.
46. $\sin^2x+\sin^22x=\sin^23x$.

7. Сунъий усуллар билан ечиладиган тенгламалар.

Айрим тригонометрик тенгламаларни юқорида кўриб ўтилган усуллар ёки оддий шакл алмаштиришлар ёрдамида содда тригонометрик тенглама кўринишига келтириб бўлмайди. Шунинг учун уларнинг ҳар бирига алоҳида ечиш усулини танлаш лозим бўлади. Қуйида уларга намуналар келтирамиз.

1°. Алмаштиришлар киритиб ечиладиган тенгламалар.

$\sin x \pm \cos x = t$; $\sin x + \cos x = t \iff \sin 2x = t^2 - 1$;

ёки $\sin x - \cos x = t \iff \sin 2x = 1 - t^2$.

11-мисол. $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} \sin x + \cos x = t, \\ 2t + (t^2 - 1) + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x + \cos x = t, \\ t^2 + 2t = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sin x + \cos x = t, \\ t_1 = 0 \vee t_2 = -2 \end{cases} \iff \sin x + \cos x = 0 \vee \sin x +$$

$$+ \cos x = -2 \iff \operatorname{tg} x = -1 \vee \sin x + \cos x \neq -2 \iff$$

$$\iff x = -\frac{\pi}{4} + n\pi \vee \varnothing.$$

Жавоб. $\left\{-\frac{\pi}{4} + n\pi / n \in Z\right\}$.

2°. Чап ва ўнг қисмларини баҳолаш йўли билан ечиладиган тенгламалар

12-мисол. $3\cos^8 x + 2\sin^5 x = 5$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $|\sin x| \leqslant 1$ ва $|\cos x| \leqslant 1$ дан фойдаланиб қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$3\cos^8 x + 2\sin^5 x \,| \leqslant 3|\cos^8 x| + 2|\sin^5 x| \leqslant 3\cos^8 x + 2|\sin^5 x| \leqslant 5$.

Бу ерда тенглик белгиси $\sin x = 1$ ва $|\cos x| = 1$ бўлгандагина ўринли бўлиши мумкин. Бу эса мумкин эмас, чунки $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Демак, берилган тенглама ечимга эга эмас.

3°. Агар тригонометрик тенглама

$$f_1^2(x) + f_2^2(x) + \ldots + f_n^2(x) = 0 \qquad (1)$$

кўринишда бўлса, унинг ечимлари

$$f_1(x) = 0 \wedge f_2(x) = 0 \wedge \ldots \wedge f_n(x) = 0 \qquad (2)$$

системанинг ечимлари кўринишида топилиши мумкин, яъни $(1) \sim (2)$. Ҳақиқатан $f_k(x)$ $(k = \overline{1,n})$ функциялар x нинг ҳар бир қиймати учун аниқланган бўлса, у ҳолда (1) тенгламанинг чап қисми манфий эмас. Демак, (1) нинг чап қисми нолга тенг бўлиши учун $f_k(x) = 0$ $(k = \overline{1,n})$ бўлиши керак. Бошқача айтганда $(1) \iff (2)$.

13-мисол $\sin^2 2x + 1 = \cos^2 3x$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $\sin^2 2x + 1 = \cos^2 3x \Longleftrightarrow \sin^2 2x + \sin^2 3x = 0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \sin 3x = 0 \end{cases} \sim \left| \begin{array}{l} x = \frac{n\pi}{2}, \\ x = \frac{k\pi}{3} \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = n_2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + n_1\pi, \\ x = k_3\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k_2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k_1\pi \end{array} \right. \sim x = m\pi.$$

Жавоб. $\{m\pi / m \in Z\}$

Машқлар

Турли усуллар билан ечинг:

47. $5\sin^2 x - 9\sin x - 4 = 0$
48. $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - 4\mathrm{tg} + \sqrt{3} = 0.$
49. $2\mathrm{tg}\,x \cos x + 1 = 2\cos x + \mathrm{tg}\,x.$
50. $4\sin^3 x - 4\sin^2 x - 3\sin x - 3 = 0.$
51. $2\sin^3 x - 3\sin x \cos x = 0.$
52. $2\sin x \cos x + \sqrt{3} - 2\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0.$
53. $9\sin^2 x + 30\sin x \cos x + 25\cos^2 x = 25.$
54. $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\cos x + 2 = 0.$
55. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1.$
56. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}.$
57. $\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 1.$
58. $\sin x \sin(x + 1) = \cos x \cos(x + 1).$
59. $\sin 3x = \cos 2x.$
60. $3\cos^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x = 1 + 2\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}.$
61. $5(\sin x + \cos x)^2 - 12(\sin x + \cos x) + 7 = 0.$
62. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1.$
63. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \cos 2x.$
64. $2 + \sin 2x = \frac{2\sin^2 x}{\sec^2 x - 1}.$
65. $\sec^2 x = \frac{2 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x}.$

66. $4^{\operatorname{tg}^2 x}+2^{\frac{1}{\cos^2 x}}-80=0$.

67. $\cos^6 x+\sin^6 x=4\sin^2 2x$.

68. $\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}=1$.

69. $\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{4}$.

70. $\sin x+\cos x=\sqrt{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}$.

71. $\cos^{120} x-\sin^{120} x=1$.

72. $\dfrac{\sin x+\sin 2x}{\sin 3x}=-1$.

73. $(1-\cos 2x)^2+(1+\sin 2x)^2=1$.

График усул билан тенгламаларнинг нечта ечими борлигини аникланг:

74. $\cos x=|x|$.

75. $\operatorname{tg} x=x$.

76. $x^2-|\sin x|=0$.

77. $2^x=\sin x$.

78. $\cos x=\lg x$.

79. $\operatorname{ctg} x=2x-1$.

Параметр қатнашган тенгламаларни ечинг:

80. $\cos 2x=a(\cos x-\sin x)$.

81. $a\sin^2 x+\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$.

82. $\operatorname{tg}\dfrac{2\pi x}{x^2+x+1}=-\sqrt{3}$.

83. $(3-a)\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x-a-3=0$.

84. $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x=a$.

85. $\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-a\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

86. $a\sin x+1=a^2-\sin x$, a нинг қандай қийматларида тенглама ҳеч бўлмаганда битта ечимга эга бўлади?

87. $\cos^4\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=a(1-\sin 2x)$, $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ оралиқда тенглама нечта ечимга эга?

88. $\cos mx=\cos(m-1)x$ ни ечинг ва $m=2$, $m=3$ бўлганда ечимни геометрик тасвирланг. m нинг қандай қийматида тенглама айниятга айланади?

2-§ Тескари тригонометрик функциялар қатнашган тенгламалар

Тескари тригонометрик тенгламаларни ечиш жараёнида одатда тригонометрик амал бажаришга тўғри келади. Бунинг натижасида трансцендент тенглама рационал тенгламага келтирилади. Бу эса аниқланиш соҳасининг кенгайишига олиб келади. Равшанки, бунда чет илдизлар пайдо бўлиши мумкин. Демак, тенглама ечилгандан сўнг албатта ечимлар устида текшириш ўтказиш керак.

1-мисол. $4\operatorname{arctg}(x^2-3x+3)-\pi=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $4\operatorname{arctg}(x^2-3x+3)-\pi=0 \Longleftrightarrow \operatorname{arctg}(x^2-$
$$-3x+3)=\frac{\pi}{4}. \qquad (1)$$

(1) нинг иккала қисмининг тангенсини оламиз:

$$\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(x^2-3x+3)]=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \qquad (2)$$

Бунда (1) $\Longrightarrow$ (2). (2) ни айний алмаштирамиз:

$x^2-3x+3=1 \Longleftrightarrow x^2-3x+2=0 \Longleftrightarrow x_1=1 \vee x_2=2.$

Текшириш: 1) $x_1=1$ да $\operatorname{arctg}(1^2-3+3)=\operatorname{arctg}1=$
$=\frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow \frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$; $x_2=2$ да $\operatorname{arctg}(2^2-6+3)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$

Жавоб. $\{1;\ 2\}$.

2-мисол.
$$\arccos(x-1)=2\arccos x \qquad (1)$$
тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг иккала қисмининг косинусини оламиз:
$$\cos[\arccos(x-1)]=\cos(2\arccos x). \qquad (2)$$

(2) тенглама (1) тенгламанинг натижасидир, яъни (1) $\Longrightarrow$ (2). (2) тенгламанинг ўнг томонини айний алмаштириш учун $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ формуладан фойдаланамиз, яъни $\cos(2\arccos x)=\cos^2(\arccos x)-$
$-\sin^2(\arccos x)=x^2-(\sqrt{1-x^2})^2=2x^2-1.$

У ҳолда (2) тенглама қуйидаги тенгламага тенг кучли бўлади:

$x-1=2x^2-1 \Longleftrightarrow 2x^2-x=0 \Longleftrightarrow x_1=0 \vee x_2=\frac{1}{2}.$

(1) $\Longrightarrow$ (2) бўлгани учун ҳосил бўлган ечимларни албатта текшириб кўриш керак.

Текшириш: 1) $x_1=0$ да $\arccos(-1)=2\arccos 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \pi=2\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \pi=\pi.$

(2) $x=\frac{1}{2}$ да $\arccos\left(\frac{1}{2}-1\right)=2\arccos\frac{1}{2}\sim\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=$
$=2\arccos\frac{1}{2}\sim\frac{3\pi}{2}=2\cdot\frac{\pi}{3}.$

Жавоб. $\left\{0;\ \frac{1}{2}\right\}.$

Машқлар

Тенгламаларни ечинг:

89. $2\arcsin x=\pi.$
90. $\operatorname{arctg} x=-\frac{3}{2}.$
91. $\arccos(x+1)=\frac{2\pi}{3}.$
92. $\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}(x+1)=\frac{\pi}{4}.$
93. $2\arcsin x=\arccos 2x.$
94. $\operatorname{arctg}^2(3x+2)+2\operatorname{arctg}(3x+2)=0.$
95. $2\arccos x+\arcsin x=\frac{11\pi}{6}.$
96. $\arcsin\sqrt{2}x=2\arcsin x.$
97. $\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}(x-1)=\operatorname{arctg} 2.$
98. $\arcsin(3x-1)+2\operatorname{arctg} 4x=\arccos(1-3x).$
99. $\arccos(1-x)+2\arcsin x=0.$
100. $\operatorname{arcctg} x=a.$
101. $2\arccos x=\frac{2a^2}{\arccos x}-3a.$
102. $a+\frac{a^2}{\arcsin x}=2\arcsin x.$

3-§. Тригонометрик тенгсизликлар

Маълумки, тригонометрик тенгсизликларни ечиш тенгламаларни ечишдан оз фарқ қилади ва барча тенгсизликлар оқибатда қуйидаги энг содда тригонометрик тенгсизликларни ечишга келтирилади:

$$\sin x>a,\ \sin x\geqslant a,\ \sin x<a,\ \sin x\leqslant a,\ \cos x>a,$$
$$\cos x\geqslant a,\ \cos x<a,\ \cos x\leqslant a,\ \operatorname{tg} x>a,\ \ldots$$

бу ерда a — берилган сон.

Юқорида келтирилган тригонометрик функциялар хоссалари графиклари ҳамда содда тригонометрик тенгламанинг ечимини топиш формулаларидан фойдаланиб содда тригонометрик тенгсизликларнинг ечимини топиш жадвалини келтирамиз:

a	Тенгсизлик	Ечимлар тўплами	Тенгсизлик	Ечимлар тўплами
$\lvert a\rvert<1$	$\sin x>a$	$A=\bigcup\limits_{k\in Z}(\arcsin a+2k\pi;\ \pi-\arcsin a+2k\pi)$	$\sin x<a$	$A=\bigcup\limits_{k\in Z}(\pi-\arcsin a+2k\pi;\ 2\pi+\arcsin a+2k\pi)$
$a>1$		$A=\varnothing$		$A=R$
$a=1$		$A=\varnothing$		$A=R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in Z\right\}$
$a=-1$		$A=R\setminus\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in Z\right\}$		$A=\varnothing$
$a<-1$		$A=R$		$A=\varnothing$
$\lvert a\rvert<1$	$\cos x>a$	$A=\bigcup\limits_{k\in Z}(-\arccos a+2k\pi;\ \arccos a+2k\pi)$	$\cos x<a$	$A=\bigcup\limits_{k\in Z}(\arccos a+2k\pi;\ 2\pi-\arccos a+2k\pi)$
$a>1$		$A=\varnothing$		$A=R$
$a=1$		$A=\varnothing$		$A=R\setminus\{2k\pi/k\in Z\}$
$a=-1$		$A=R\setminus\{\pi+2k\pi/k\in Z\}$		$A=\varnothing$
$a<-1$		$A=R$		$A=\varnothing$
$a\in R$	$\operatorname{tg} x>a$	$A=\bigcup\limits_{k\in Z}\left(\operatorname{arctg} a+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$	$\operatorname{tg} x<a$	$A=\bigcup\limits_{k\in Z}\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \operatorname{arctg} a+k\pi\right)$
$a\in R$	$\operatorname{ctg} x>a$	$A=\bigcup\limits_{k\in Z}(k\pi;\ \operatorname{arcctg} a+k\pi)$	$\operatorname{ctg} x<a$	$A=\bigcup\limits_{k\in Z}(\operatorname{arcctg} a+k\pi;\ \pi+k\pi)$

1-мисол. $\sin^2 x-\cos x\sin x\leqslant 1$ ни ечинг.

Ечиш. $\sin^2 x-\cos x\sin x\leqslant 1 \Longleftrightarrow \cos^2 x+\cos x\sin x\geqslant$

$\geqslant 0 \Longleftrightarrow \cos x = 0 \vee$

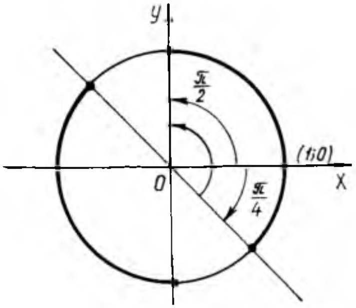
$$\vee \begin{cases} 1 + \dfrac{\sin x}{\cos x} \geqslant 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \vee$

$\vee \operatorname{tg} x \geqslant -1 \Longleftrightarrow x =$

$= \dfrac{\pi}{2} + n\pi \vee -\dfrac{\pi}{4} +$

$+ n\pi \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} + n\pi.$



21- чизма.

Ж а в о б. $\left\{x / -\dfrac{\pi}{4} + n\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z\right\}$

(21- чизма)

2- м и с о л. $\dfrac{5}{4}\sin^2 x + \dfrac{1}{4}\sin^2 2x > \cos 2x$ ечилсин.

Е ч и ш. $\dfrac{5}{4}\sin^2 x + \dfrac{1}{4}\sin^2 2x > \cos 2x \Longleftrightarrow \dfrac{5}{4}\dfrac{1-\cos 2x}{2} + \dfrac{1}{4}(1-\cos^2 2x) > \cos 2x \Longleftrightarrow 5 - 5\cos 2x + 2 - 2\cos^2 2x - 8\cos 2x > 0 \Longleftrightarrow 2\cos^2 2x + 13\cos 2x - 7 < 0 \Longleftrightarrow -7 < \cos 2x < -\dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \cos 2x < -\dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi < 2x <$

$$< \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \Longleftrightarrow \frac{\pi}{3} + n\pi < x < \frac{2\pi}{3} + n\pi.$$

Ж а в о б $\left\{x / \dfrac{\pi}{3} + n\pi < x < \dfrac{2\pi}{3} + n\pi,\ n \in Z\right\}.$

3- м и с о л. $\arcsin x > \arccos x$ ни ечинг.

Е ч и ш. $\arcsin x > \arccos x \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}, \\ \arcsin x > \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x \end{cases} \Longleftrightarrow \arcsin x > \frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ |x| \leqslant 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < x \leqslant 1.$$

Ж а в о б. $\left\{x/\frac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant 1\right\}$.

4-мисол. $\sin x+a\cos x>a$ ни ечинг, бунда $a\neq 0$.

Ечиш. $\sin x+a\cos x>a \Longleftrightarrow \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+a\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}>$

$>a \Longleftrightarrow 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+a-a\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}>a+a\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 2a\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}<0 \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{a}\right)<0.$

1. $a>0 \Longleftrightarrow 0<\operatorname{tg}\frac{x}{2}<\frac{1}{a} \Longleftrightarrow 2n\pi<x<2\operatorname{arctg}\frac{1}{a}+2n\pi.$

2. $a<0 \Longrightarrow \frac{1}{a}<\operatorname{tg}\frac{x}{2}<0 \Longrightarrow 2n\pi+2\operatorname{arctg}\frac{1}{a}<x<2n\pi.$

Ж а в о б. $a>0$ бўлса, у ҳолда $\left\{x/2n\pi<x<\right.$

$\left.<2\operatorname{arctg}\frac{1}{a}+2n\pi,\ n\in Z\right\}$;

агар $a<0$ бўлса, у ҳолда $\left\{x/2n\pi+\right.$

$\left.+2\operatorname{arctg}\frac{1}{a}<x<2n\pi,\ n\in Z\right\}$.

Машқлар

Тенгсизликларни ечинг:

103. $\operatorname{tg} x\geqslant\sqrt{3}$.
104. $\operatorname{ctg} > -\sqrt{3}$.
105. $\sin(x-\alpha)\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
106. $\cos(x+1)\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
107. $\cos x\operatorname{tg}2x\leqslant 0$.
108. $\cos 2x\sin x<0;\ -\pi<x<\pi$.
109. $\sin x-3\cos x<0$.
110. $12\cos^2x+7\sin x<13$.
111. $\sin x>\cos^2 x$.
112. $3\sin 2x-1>\sin x+\cos x$.
113. $|\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x|<\frac{4}{\sqrt{3}}$.

114. $2\cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x$.

115. $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x - 1 < 0$.

116. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x < 2$.

117. $\operatorname{cosec} x < \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{cosec} \frac{x}{2}$.

118. $\sin x + \sin 3x < \sin 2x + \sin 4x$.

119. $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$.

120. $\sin (2\pi \cos x) > 0$.

121. $\sqrt{5 - 2\sin x} \geqslant 6 \sin x - 1$.

122. $\sin x \, |\sin x| \leqslant \frac{1}{2}$.

123. $\log_2 \cos x > \log_2 \operatorname{tg} x$; $0 < x \leqslant \pi$.

124. $\log_{\frac{3}{4}} \sin x > \log_{\frac{9}{16}} 0{,}75$; $-1 < x < 4$.

125. $\cos^2 x + \sin x \cos x \geqslant 1$.

126. $\sqrt{\cos x - \sin x} \geqslant \sin x - \frac{1}{2}$; $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

127. $\arccos x \leqslant \arccos \frac{1}{4}$.

128. $\operatorname{arctg}^2 x - 4 \operatorname{arctg} x + 3 > 0$.

129. $2\arcsin x > \operatorname{arctg} x$.

130. $\arcsin \left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right) < -\frac{\pi}{6}$.

131. $\arcsin x < \arccos (1 - x)$.

132. $\arcsin x - 2\arccos x > \frac{\pi}{3}$.

Параметр қатнашган тенгсизликларни ечинг:

133. $\cos x > a$.

134. $\operatorname{tg} x < a$.

135. $\operatorname{ctg} x < a$.

136. $1 + a \cos x \geqslant (1 + a)^2$.

137. $\sin x + a \cos x < a$, $a \neq 0$.

138. $\sin^4 x + \cos^4 x > a$.

139. $\sin x + \frac{1}{\sin x} < a$, $(a > 0)$.

140. $\sin^2 x + \sin 2x \geqslant a$.

141. $\arcsin x \leqslant a$.

142. $\operatorname{arctg} x < a$.

143. $\arcsin x > a \arccos x$.

144. $\arccos ax < \frac{2\pi}{3}$.

4- §. Тригонометрик тенгламалар ва тенгсизликлар системалари

Аввал тенгламалар (тенгсизликлар) системаларининг тенг кучлилиги ва уларни ечиш усулларини эсга олайлик. Соддалик учун икки номаълумли тенгламалар системасини қарайлик.

Икки номаълумли иккита тенглама системаси деб

$$\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y), \\ f_2(x; y) = g_2(x; y) \end{cases} \qquad (1)$$

га айтилади (1) системанинг ечими деб шундай $(x_0; y_0)$ сонга айтиладики, уни мос равишда x ва y ларнинг ўрнига қўйганда (1) системанинг ҳар бир тенгламаси сонли тўғри тенгликка айланади, яъни:

$$\begin{cases} f_1(x_0; y_0) = g_1(x_0; y_0), \\ f_2(x_0; y_0) = g_2(x_0; y_0). \end{cases}$$

Системани ечиш унинг ҳамма ечимларини топиш демакдир.

Иккита тенгламалар системалари

$$\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y), \\ f_2(x; y) = g_2(x; y) \end{cases} (1) \quad \text{ва} \quad \begin{cases} f_3(x; y) = g_3(x; y); \\ f_4(x; y) = g_4(x; y) \end{cases} \qquad (2)$$

бир хил ечимга эга бўлса, яъни (1) нинг барча ечимлари (2) нинг ҳам ечимлари бўлса ва аксинча (2) нинг барча ечимлари (1) нинг ҳам ечимлари бўлса, у ҳолда бу системалар *тенг кучли* дейилади.

Тенгламалар системаларини ечишнинг бир неча усуллари мавжуд: системаларни чизиқли алмаштириш усули, системани соддароқ системалар дизъюнкциясига алмаштириш усули, ўзгарувчини алмаштириш усули, янги номаълум киритиш усули, номаълумни чиқариш усули ва бошқалар. Бу усулларни қўллаш жараёнида биз берилган системани унга тенг кучли бўлган, аммо унга қараганда соддароқ бўлган системага (ёки системаларга) алмаштирамиз.

Системаларни ечиш намуналарини кўриб чиқайлик:

1-мисол. $\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \cos x \cos y = b \end{cases}$ ечилсин.

Ечиш. $\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \cos x \cos y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = a+b, \\ \cos(x+y) = b-a \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \pm \arccos(a+b) + 2k\pi, \\ x + y = \pm \arccos(b-a) + 2n\pi, \\ |a+b| \leqslant 1, \\ |b-a| \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(\pm\arccos(a+b) \pm \arccos(b-a)) + (n+k)\pi, \\ y = \frac{1}{2}(\pm\arccos(a+b) \pm \arccos(b-a)) + (n-k)\pi; \\ |a+b| \leqslant 1, \ |b-a| \leqslant 1. \end{cases}$$

Бу ерда $k, n \in Z$ бўлиб, $|a+b| \leqslant 1$, $|b-a| \leqslant 1$ шартлар бажарилганда тўртта ечимга эга бўламиз.

Шу усул билан $\begin{cases} \sin x \cos y = a, \\ \cos x \sin y = b \end{cases}$ системани ҳам ечиш мумкин.

2-мисол. $\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = b \end{cases}$ ечилсин.

Ечиш $\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = u, \\ \sin y = v, \\ u + v = a, \\ u^2 + v^2 = b \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = u, \\ \sin y = v, \\ u + v = a, \\ uv = \frac{a^2 - b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{a + \sqrt{2b - a^2}}{2}, \\ \sin y = \frac{a - \sqrt{2b - a^2}}{2}, \\ b \geqslant \frac{a^2}{2}, \\ \left| \frac{a \pm \sqrt{2b - a^2}}{2} \right| \leqslant 1 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} \sin x = \frac{a - \sqrt{2b - a^2}}{2}, \\ \sin y = \frac{a + \sqrt{2b - a^2}}{2}, \\ b \geqslant \frac{a^2}{2}, \\ \left| \frac{a \pm \sqrt{2b - a^2}}{2} \right| \leqslant 1. \end{cases}$$

Агар $\left| \frac{a \pm \sqrt{2b - a^2}}{2} \right| \leqslant 1$ шарт бажарилса,

$$\begin{cases} x = (-1)^n \arcsin \frac{a + \sqrt{2b - a^2}}{2} + n\pi; \\ y = (-1)^k \arcsin \frac{a - \sqrt{2b - a^2}}{2} + k\pi \end{cases} \vee$$

$$\vee\left|\begin{array}{l} x=(-1)^n\arcsin\dfrac{a-\sqrt{2b-a^2}}{2}+n\pi; \\ y=(-1)^k\arcsin\dfrac{a+\sqrt{2b-a^2}}{2}+k\pi;\ k,\quad n\in Z \end{array}\right.$$

ечимлар сериялари берилган системанинг ечимлари бўлади, акс ҳолда ечим $\varnothing$.

Юқоридаги усул билан $\begin{cases}\sin x+\sin y=a,\\ \cos^2x+\cos^2y=b;\end{cases}$

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=a,\\ \cos^2x+\cos^2y=b;\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos x+\cos y=a,\\ \sin^2x+\sin^2y=b\end{cases}$$

ва шу кўринишидаги бошқа системаларни ҳам ечиш мумкин.

3- мисол. $\begin{cases}\sin x+\sin y=a,\\ x+y=\alpha\end{cases}$ ечилсин.

Ечиш.

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=a,\\ x+y=\alpha\end{cases}\iff\begin{cases}2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=a,\\ x+y=\alpha\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases}2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=a,\\ x+y=\alpha\end{cases}\iff\left|\begin{array}{l}\sin\dfrac{\alpha}{2}=0,\\ a=0,\\ x+y=2m\pi\end{array}\right.\vee$$

$$\vee\left|\begin{array}{l}\sin\dfrac{\alpha}{2}\neq 0,\\ \cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}},\\ x+y=\alpha\end{array}\right.\iff\begin{cases}\sin\dfrac{\alpha}{2}=0\iff a=0,\\ x+y=2m\pi\end{cases}\vee$$

$$\vee\left|\begin{array}{l}x-y=\pm 2\arccos\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}+4n\pi,\\ x+y=\alpha.\\ \left|\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right|\leqslant 1.\end{array}\right.$$

Агар $\left|\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right| \leqslant 1$ шарт бажарилса,

$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{2} \pm \arccos\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + 2n\pi, \\ y = \dfrac{\alpha}{2} \pm \arccos\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} - 2n\pi \end{cases}$$

ечимлар сериялари берилган системанинг ечимлари бўлади, акс ҳолда ечим $\varnothing$.

Шу усул билан

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = a, \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x \pm \cos y = a; \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

кўринишдаги системаларни ҳам ечиш мумкин.

4-мисол. $\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b, \ a \cdot b \neq 0 \end{cases}$ ечилсин.

Ечиш. $\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b, \ a \cdot b \neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{b}{a}, \ a \cdot b \neq 0. \end{cases}$$

Бу эса 1-мисолга келтирилган ҳол.

Машқлар

Тенгламалар системаларини ечинг:

145. $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3}, \\ \sin x + \sin y = 1. \end{cases}$

146. $\begin{cases} x + y = \dfrac{5\pi}{6}, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

147. $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3}, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

148. $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

149. $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$

150. $\begin{cases} \sin x \sin y = -\dfrac{3}{4}, \\ 3\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg} y. \end{cases}$

151. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \operatorname{ctg} x + 2\operatorname{ctg} y = 3. \end{cases}$

152. $\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$

153. $\begin{cases} 2^{\sin x + \cos y} = 1, \\ 16^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 4. \end{cases}$

154. $\begin{cases} \sin x = \sin 2y, \\ \cos x = \sin y, \\ 0 < x < \pi, \\ 0 < y < \pi. \end{cases}$

155. $\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z = 3, \\ \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = 6, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$

156. $\begin{cases} \arcsin x = \arccos y, \\ \cos \dfrac{7\pi}{x+y} = 1. \end{cases}$

157. $\begin{cases} \arcsin x + \arccos y = 0, \\ \arcsin y + \arccos x = \pi. \end{cases}$

158. $\begin{cases} \arcsin x + \arccos y = \dfrac{\pi}{2}, \\ xy = 1. \end{cases}$

Тенгсизликлар системаларини ечинг:

159. $\begin{cases} \cos x > \dfrac{1}{2}, \\ \sin x \geqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

160. $\begin{cases} \sin x > \cos x, \\ -2\pi < x < 2\pi. \end{cases}$

161. $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}, \\ \sin x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

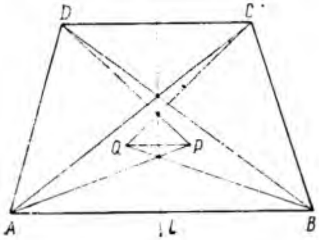
162. $\begin{cases} \sin x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ 0 < x < 2\pi. \end{cases}$

VI БОБ. ПЛАНИМЕТРИЯ

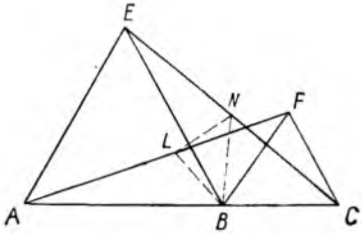
1-§. Геометрик алмаштиришлар ёрдамида масалалар ечиш

Текисликда геометрик алмаштиришларга нуқта атрофида буриш, нуқтага нисбатан симметрия, тўғри чизиққа нисбатан симметрия, параллел кўчириш, ўхшашлик ёки гомотетия, инверсион алмаштиришларни санаб ўтиш етарлидир. Қуйида биз бу тушунчалардан масалалар ечишда қандай фойдаланиш мумкин эканлигидан намуналар келтирамиз.

1-масала. Асослари AB ва DC бўлган $ABCD$ тенг ёнли трапецияда P ва Q нуқталар ABC ва ABD учбурчаклар медианаларининг кесишган нуқталари



22-чизма.



23-чизма.

бўлса, у ҳолда $PD = QC$ экани исботлансин (22-чизма).
Берилган: $ABCD$ трапецияда $AD = BC$, $P \in (ABC)$, $Q \in (ADB)$ бўлиб, P, Q медианаларнинг кесишиш нуқтаси.

Исбот қилиш керак: $PD = QC$.

Исбот. Масаланинг шартига кўра трапеция тенг ёнли, яъни: $AD = BC$, у ҳолда $\angle A = \angle B$ Трапеция диагоналларини ўтказиш натижасида ҳосил бўлган ABC ва ABD учбурчакларда $AD = BC$, $\angle CAB = \angle DBA$ ва AB умумий бўлгани учун $\triangle ABC = \triangle ABD$. l — трапециянинг симметрия ўқи бўлсин. Берилган шартга кўра $S_l(D) = C$, $S_l(A) = B$, $S_l(O) = O$ ҳамда $S_l(Q) = P$ эканини ҳисобга олсак, у ҳолда $S_l(DP) = QC$ келиб чиқади. Бундан $PD = QC$.

2-масала. AC кесмада AB ва BC кесмалар олинган бўлиб AC дан бир томонда ётувчи ABE ва BCF тенг томонли учбурчаклар ясалган (23-чизма). Агар L нуқта AF нинг, N нуқта CE нинг ўртаси бўлса, учбурчак BLN тенг томонли эканини исботланг.

Берилган: $\triangle ABE$ ва $\triangle BCF$ тенг томонли,

$$AL = \frac{1}{2} AF, \quad NC = \frac{1}{2} EC.$$

Исбот қилиш керак: $\triangle BLN$ — тенг томонли.

Исбот. Масаланинг шартига кўра $\triangle AEB$ ва $\triangle BCF$ лар тенг томонли, $AL = LF$ ва $EN = NC$. Векторларни қўшиш қоидасига кўра $\vec{BL} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BF})$; $\vec{BN} =$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC})$. Масала шартига кўра $R_B^{-60°}(\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BE}$, $R_B^{-60°}(\overrightarrow{BF}) = \overrightarrow{BC}$ ҳамда $R_B^{-60°}(\overrightarrow{BE}) = \overrightarrow{BE'}$, бу ерда $E' \in (BF)$ бўлади. У ҳолда $R_B^{-60°}(\overrightarrow{AF}) = \overrightarrow{EC}$ бўлиб, $\angle FBF = 60°$ бўлгани учун ва L нуқта AF нинг, N нуқта EC нинг ўрталари эканини ҳисобга олсак, $R_B^{-60°}(\overrightarrow{BL}) = \overrightarrow{BN}$ бўлади. Бундан $(\widehat{BL\ BN}) = 60°$, $BL = BN$ бўлганидан $\triangle BLN$ нинг тенг томонли эканлиги келиб чиқади.

Машқлар

1. Текисликда икки марказий симметриянинг композицияси параллел кўчириш ёки айний алмаштириш эканлигини исботланг.

2. Текисликда икки параллел кўчиришнинг композицияси яна параллел кўчириш эканлигини исботланг.

3. MN ва PQ перпендикуляр тўғри чизиқлар O нуқтада кесишади. A ва A' нуқталар MN га нисбатан симметрик, A ва A'' нуқталар PQ га нисбатан симметрик A' ва A'' нуқталар O нуқтага нисбатан симметрик эканлигини исботланг.

4. Учбурчак томонларининг ўрталари яна учбурчак ҳосил қилиб, бу учбурчак берилган учбурчак билан медианаларининг кесишган нуқтасига нисбатан $-\frac{1}{2}$ коэффициент бўйича гомотетик эканлигини исботланг.

5. S айлана тенг бўлмаган S_1 ва S_2 айланаларга уринади. Уриниш нуқталарини бирлаштирувчи тўғри чизиқ S_1 ва S_2 айланаларнинг ўхшашлик марказларининг биридан ўтишини исботланг.

6. Тенг ёнли учбурчакнинг асосида олинган ихтиёрий нуқтадан ён томонларига туширилган перпендикулярлар йиғиндиси шу учбурчакнинг ён томонига туширилган баландликка тенг эканлигини исботланг.

7. ABC учбурчакнинг C бурчагининг ташқи биссектрисасида ихтиёрий D нуқта олинган. $AC + CB < AD + DB$ эканини исботланг.

8. Ўткир бурчакли ABC учбурчакнинг AA_1 баландлиги ўтказилган. H шу учбурчакнинг ортомаркази бўлса, $BA_1 \cdot A_1C = AA_1 \cdot HA_1$ муносабат тўғрилигини исботланг.

9. ABC бурчакка учбурчакни шундай ички чизингки, унинг икки учи бурчак томонида, учинчи учи эса берилган M нуқтада булиб, учбурчакнинг периметри энг кичик бўлсин.

10. ABC учбурчакда $AB = BC$, $\angle ABC = 30°$. BC томонда $AC : BD = \sqrt{2} : 1$ шартни қаноатлантирувчи D нуқта олинган. DAC бурчакнинг катталигини топинг.

11. Тенг томонли ABC учбурчак ва ихтиёрий M нуқта берилган. MA, MB ва MC кесмаларнинг энг каттасининг узунлиги қолган иккитасининг узунликларининг йиғиндисидан катта эмаслигини исботланг.

12. ABC учбурчакнинг AB ва AC томонларида уни қопламайдиган қилиб $ABMN$ ва $ACPQ$ квадратлар ясалган. ABC учбурчак

нинг AE медианаси учун $AE \perp NQ$ ва $AE = \frac{1}{2} NQ$ эканини исботланг.

13. Турли томонли ABC учбурчакнинг томонларида уни қопламайдиган қилиб ABC_1, BCA_1 ва CAB_1 мунтазам учбурчаклар ясалган. AA_1, BB_1 ва CC_1 кесмалар тенг эканини ва бир нуқтадан ўтишини исботланг.

14. Параллелограммнинг томонларида уни қоплайдиган қилиб квадратлар ясалган. Бу квадратларнинг марказлари туташтирилса, квадрат ҳосил бўлишини исботланг.

15. Мунтазам учбурчакнинг томонларида уни қопламайдиган қилиб квадратлар ясалган. Уларнинг марказлари туташтирилса тенг томонли учбурчак ҳосил бўлишини исботланг.

16. Мунтазам ABC учбурчакнинг AB ва AC томонларида $AD + AE = AB$ шартни қаноатлантирувчи AD ва AE кесмалар олинган. Агар O учбурчакнинг маркази бўлса, $OD = OE$ ва $\angle DOE = 120°$ бўлишини исботланг.

17. Тенг ёнли тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг CA ва CB катетларида $CD=CE$ шартни қаноатлантирувчи D ва E нуқталар олинган. D ва C нуқталардан ўтказилган AE перпендикулярлар AB гипотенузани мос равишда K ва L нуқталарда кесади. $KL = LB$ эканини исботланг.

18. ABC учбурчакнинг ичида олинган M нуқтадан томонларга перпендикулярлар туширилган. Шу перпендикулярларда учбурчакнинг томонларига тенг қилиб MA_1, AB_1 ва MC_1 кесмалар қўйилган M нуқта $A_1 B_1 C_1$ учбурчакнинг оғирлик маркази эканлигини исботланг.

19. $ABCD$ тўртбурчакда $AB = 3$ см, $BC = 3$ см, $CD = 2\sqrt{3}$ см, $\angle BAD = \angle CDA = 60°$. ABC ва BCD бурчакларнинг катталигини топинг.

20. Тенг (O_1, r) ва (O_2, r) айланалар M ва N нуқталарда кесишади. Бунда $MN = m \cdot O_1O_2$ га параллел бўлган l тўғри чизиқ (O_1, r) айланани A ва B нуқталарда. (O_2, r) айланани C ва D нуқталарда кесади. Агарда AB ва CD нурлар йўналишдош бўлса, AC ни топинг.

21. A_1, B_1, C_1 лар ABC учбурчак томонларининг ўрталари, O_1, O_2, O_3 лар AC_1B, BC_1C ва CB_1A учбурчакларга ички чизилган айланаларнинг марказлари бўлсин. $AB = 4$ см, $AC = 4\sqrt{3}$ см, $\angle BAC = 30°$ бўлса, $O_1 O_2 O_3$ учбурчакнинг бурчакларини топинг.

22. Тенг ёнли трапеция асосларининг ўрталарини туташтирувчи тўғри чизиқ трапеция диагоналларининг кесишиш нуқтасидан ҳамда ён томонлари ётган тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ўтишини исботланг.

23. Трапециянинг асосларига параллел бўлган тўғри чизиқ диагоналларнинг кесишиш нуқтаси O дан ўтади. Шу тўғри чизиқнинг ён томонлар орасида қолган кесмаси O нуқтада тенг иккига бўлинишини исботланг.

24. Қавариқ $ABCD$ тўртбурчак трапеция бўлиши учун зарур ва етарли шарт $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$ эканини исботланг (бу ерда M ва N нуқталар AD ва BC томонларнинг ўрталари).

25. ABC учбурчакнинг AB томонида $AE = EF = FB$ шартни қаноатлантирувчи E ва F нуқталар олинган. Шунингдек A_1 нуқта

BCнинг, B_1 нуқта AC нинг ўртаси, BB_1 ва CF кесмалар P нуқтада, AA_1 ва CE кесмалар K нуқтада кесишади. $AB = a$ деб, PKни топинг.

26. M нуқтани $ABCD$ тўртбурчак томонларининг ўрталарига нисбатан симметрик акслантириш натижасида ҳосил бўлган тўртта нуқта параллелограммнинг учлари эканлигини исботланг.

27. Тўртбурчакнинг учтадан учлари ташкил этган учбурчаклар оғирлик марказлари ҳосил этган тўртбурчак берилган тўртбурчакка $\frac{1}{3}$ коэффициент билан ўхшаш эканлигини исботланг.

28. l тўғри чизиқ ABC бурчакнинг томонларини K ва L нуқталарда, унга параллел бўлган l_1 тўғри чизиқ M ва N нуқталарда кесади. K ва L, M ва N нуқталардан перпендикулярлар чиқарилган. Бу перпендикулярларнинг кесишган нуқталари ва B нуқта бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.

29. ABC учбурчакда AA_1 ва BB_1 баландликлар ўтказилган. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар ўхшаш эканлигини исботланг.

30. Икки айлананинг кесишиш нуқтаси A дан уларнинг AC ва AD диаметрлари ўтказилган. CD тўғри чизиқ айланаларнинг иккинчи кесишиш нуқтаси B дан ўтишини исботланг.

31. Учбурчакнинг ортомаркази оғирлик маркази ва унга ташқи чизилган айлананинг маркази бир тўғри чизиқда ётишини исботланг (Эйлер тўғри чизиғи).

32. Тенг томонли учбурчак айланага ички чизилган. Бир томонга ёпишган ёйда олинган ихтиёрий нуқтадан қарши ётган учгача бўлган масофа шу нуқтадан қолган учларгача бўлган масофалар йиғиндисига тенг эканлигини исботланг.

33. Учбурчакнинг ортомаркази унинг томонларининг ўрталарига нисбатан симметрик акслантирилган. Ҳосил бўлган нуқталар берилган учбурчакка ташқи чизилган айланага тегишли бўлиб, унга тенг учбурчак ҳосил қилишини исботланг.

2-§. Учбурчакларда метрик муносабатлар

Геометрик фигуралар ичида энг кўп учрайдиган ва геометрик масалаларни ечишда кўп қўлланиладиган шакл бу учбурчакдир. Шунинг учун ҳам учбурчакка доир ёки учбурчак элементларининг комбинацияси билан ечиладиган масалалар жуда кўп учрайди. Учбурчак элементларининг комбинацияси орқали бериладиган масалалар асосан қуйидаги кўринишларда берилиши мумкин:

1) учбурчакнинг учта томонига кўра бериладиган масалалар;

2) учбурчакнинг учта бурчагига кўра бериладиган масалалар;

3) учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчакка кўра бериладиган масалалар;

4) учбурчакнинг бир томони ва унга ёпишган бурчакка кўра бериладиган масалалар;

5) учбурчакнинг икки томони ва бу томонлардан бири қаршисидаги бурчакка кўра бериладиган масалалар;

6) учбурчакнинг бир томони ҳамда унга қарши ётган ва ёпишган бурчакларига кўра бериладиган масалалар.

Учбурчакларга доир берилган масалаларни ечишда косинуслар ва синуслар теоремалари айниқса кенг қўлланилади. Масалан, $\triangle ABC$ да a, b, c — томонлар A, B, C — бурчаклар бўлса:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Longleftrightarrow \cos A = (b^2 + c^2 - a^2) : 2bc;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Longleftrightarrow \cos B = (a^2 + c^2 - b^2) : 2ac;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Longleftrightarrow \cos C = (a^2 + b^2 - c^2) : 2ab.$$

Синуслар теоремасига кўра эса

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Юқорида келтирилган тушунчалар ёрдамида қуйидаги тенгликларни ёзиш мумкин:

1) учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуси $R = \frac{abc}{4s}$ га тенг;

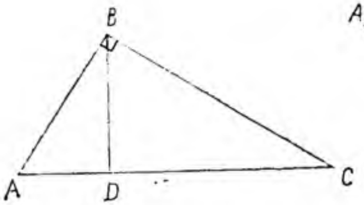
2) учбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси $r = \frac{s}{p}$ га тенг, бу ерда $p = \frac{a+b+c}{2}$;

3) учбурчакнинг баландликлари мос равишда h_a, h_b, h_c ва ички чизилган айлананинг радиуси r бўлса, $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ муносабат ўринли бўлади;

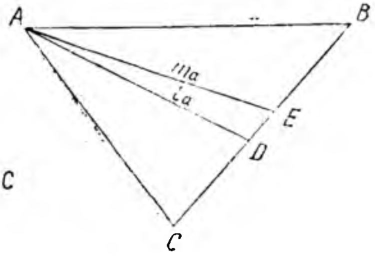
4) тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан унинг гипотенузасига туширилган перпендикуляр гипотенуза бўлаклари орасида ўрта пропорционал миқдордир; ҳар бир катет бутун гипотенуза билан унинг гипотенузадаги проекцияси орасида ҳам ўрта пропорционал миқдордир, яъни (24- чизма):

$$BD^2 = AD \cdot DC; \quad AB^2 = AC \cdot AD; \quad BC^2 = AD \cdot DC;$$

5) бу юқоридаги мулоҳазадан бевосита тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари бир хил ўлчамли бўлганда катетлар квадратларининг йиғиндиси гипотенузанинг квадратига тенг деган мулоҳазани исботлаш осондир, яъни:



24- чизма.



25- чизма.

$$AB^2 + BC^2 = AC \cdot AD + AC \cdot DC = AC(AD + DC) =$$
$$= AC \cdot AC = AC^2 \Longrightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2;$$

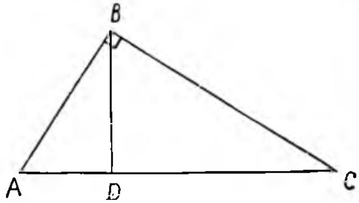
6) учбурчакнинг биссектрисаси унинг бир бурчагидан чиқиб шу бурчак қаршисида ётган томонни қолган томонларга пропорционал бўлакларга бўлади, (25-чизма), яъни: $BD : DC = AB : AC$; ($AD = l_a$ биссектриса);

7) учбурчакнинг медианаси бир бурчакдан чиқиб, қаршисида ётган томонни тенг икки бўлакка бўлади. Унинг узунлиги:

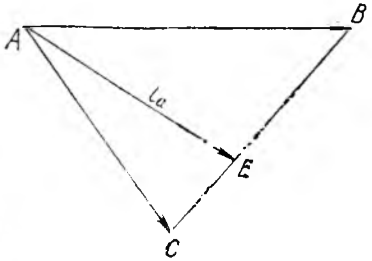
$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \quad 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$
$$4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$$

формула билан топилади (25- чизма);

8) агар ихтиёрий берилган учбурчакнинг томонлари мос равишда a, b, c деб белгиланган бўлса, c томоннинг b томондаги проекциясининг узунлиги $AD = (c^2 + b^2 - a^2)/2b$ орқали топилади (26- чизма).



26- чизма.



27- чизма.

Юқорида келтирилган мулоҳазалар ҳамда мавжуд малака ёрдамида бир нечта масалалар ечиш намуналарини келтирамиз.

1-масала. Учбурчак ABC нинг томонлари a, b, c га тенг. Шу учбурчакнинг a томонига ўтказилган l_a биссектриса узунлигини ҳисобланг (27-чизма).

Берилган: $\triangle ABC$, $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$.

Топиш керак: $AE=l_a=?$

Ечиш. Учбурчак биссектрисасининг хоссасига асосан $AB:AC=BE:EC$ ни ёза оламиз.

Агар учбурчак томонларини векторлар орқали ифодаласак, у ҳолда:

$$\overrightarrow{AE}=\frac{|CE|\,\overrightarrow{AB}+|BE|\,\overrightarrow{AC}}{|CE|+|BE|};$$

$$\overrightarrow{AE}^2=\frac{\overrightarrow{CE}^2\,\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BE}^2\,\overrightarrow{AC}^2+2|CE|\,|BE|\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}}{CE^2+BE^2+2|CE|\,|BE|}.$$

Бу ерда $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AB}$ эканини ҳисобга олсак, у ҳолда

$$\overrightarrow{AE}^2=\frac{\overrightarrow{CE}^2\,\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BE}^2\,\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CE}\,\overrightarrow{BE}(\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2)}{CE^2+BE^2+2|CE|\,|BE|}$$ бўлади.

Касрнинг сурат ва махражини $BE\cdot CE$ га бўлиб юборсак, у ҳолда

$$\overrightarrow{AE}^2=\frac{\frac{CE}{BE}\overrightarrow{AB}^2+\frac{BE}{CE}\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2}{\frac{CE}{BE}+\frac{BE}{CE}+2}=$$

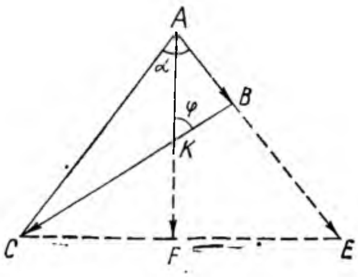
$$=\frac{\frac{b}{c}c^2+\frac{c}{b}b^2+b^2+c^2-a^2}{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+2}=\frac{bc}{(b+c)^2}4p(p-a).$$

Демак, $l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$ бўлиб, бу ерда $p=\frac{a+b+c}{2}$. Шунга ўхшаш b ва c томонларга ўтказилган

$$l_b=\frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)},\qquad l_c=\frac{2}{b+a}\sqrt{abp(p-c)}$$

биссектрисалар узунлигини топиш формулалари ҳосил бўлади.

2-масала. Учбурчакнинг иккита томони узунликларининг нисбати учга, улар орасидаги бурчак эса α га тенг. Шу бурчак биссектрисаси билан унга қарши ётган томон орасидаги бурчак топилсин (28-чизма).



28- чизма.

Берилган: $\triangle ABC$, $AC = 3AB$; $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAK = \angle BAK$.

Топиш керак: $\varphi = \angle AKB$.

Ечиш. Масалани ечиш учун AB нинг давомида $3AB = AE$ шартни қаноатлантирувчи E нуқтани оламиз, у ҳолда $\triangle ACE$ тенг ёнли бўлиб, AF ҳам биссектриса, ҳам медиана бўлади.

Демак, $\vec{AF} \cdot \vec{BC} = |AF||BC|\cos\varphi$ (1) ни ёза оламиз. Энди $\vec{AF}$, $\vec{BC}$, AF, BC ларни аниқлаймиз:

$$\vec{AF} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AE}) = \frac{1}{2}(\vec{AC} + 3\vec{AB}) \qquad (2)$$

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} \qquad (3)$$

а) (2) ва (3) лардан:

$$\vec{AF} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + 3\vec{AB})(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{2}(\vec{AC}^2 -$$

$$- \vec{AC}\vec{AB} + 3\vec{AB}\vec{AC} - 3\vec{AB}^2) = \frac{1}{2}(6\vec{AB}^2 + 6\vec{AB}^2\cos\alpha) =$$

$$= 3\vec{AB}^2(1 + \cos\alpha);$$

б) (2) дан: $\vec{AF}^2 = \frac{1}{4}(\vec{AC} + \vec{AE})^2 = \frac{1}{4}(\vec{AC}^2 + \vec{AE}^2 +$

$$+ 2\vec{AC}\,\vec{AE}) = \frac{1}{4}(18\vec{AB}^2 + 18\vec{AB}^2\cos\alpha) =$$

$$= \frac{9}{2}\vec{AB}^2(1 + \cos\alpha);$$

в) (3) дан: $\vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - 2\vec{AC}\vec{AB} =$ $= 10\vec{AB} - 6\vec{AB}\cos\alpha$. а), б) ва в) ларни (1) га қўйиб; қуйидагига

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}}{|AF||BC|} = \frac{3\overrightarrow{AB}(1+\cos\alpha)}{\sqrt{\frac{9}{2}\overrightarrow{AB}(1+\cos\alpha)}\sqrt{10\overrightarrow{AB}\left(1-\frac{3}{5}\cos\alpha\right)}} = $$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{5-3\cos\alpha}}$$

эга бўламиз.

Демак, $\varphi = \arccos\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{5-3\cos\alpha}}$.

3-масала. ABC учбурчакнинг AB ва BC томонлари асосида $ABDE$ ва $BCKF$ квадратлар чизилган бўлса, у ҳолда ҳосил бўлган DF кесма учбурчак медианаси BP дан икки марта катта ҳамда $(BP)\perp(DF)$ эканлиги исботлансин (29-чизма).

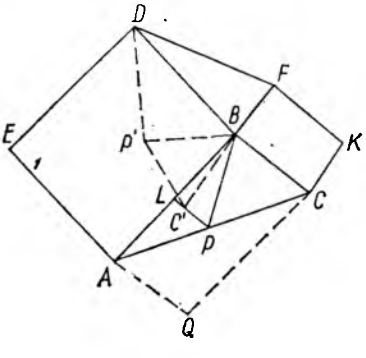
Берилган: $\triangle ABC$, $ABDE$ ва $BFKC$ квадратлар.

Исбот қилиш керак: $DF=2BP$ ва $(BP)\perp(DF)$.

Масалани бир неча хил усул билан ечиш мумкин.

Исбот 1-усул. DF ва BP кесмаларни вектор сифатида қарайлик, у ҳолда $2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ ва $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DB}$. Булардан:

1) $2\overrightarrow{BP}\,\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{BF}$ ҳосил бўлади. Бу ерда $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$ ва $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BF}=0$ эканини ҳисобга олинса, у ҳолда $2\overrightarrow{BF}\,\overrightarrow{DF}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BF}|\times\cos\angle ABF-|BC||BD|\cos\angle CBD=|BA||BF|(\cos\angle ABF-\cos\angle CBD)=0$ бўлади. Бундан $2\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DF}=0$ ёки $\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{DF}$ экани келиб чиқади.



29-чизма.

2) $4\overrightarrow{BP}^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BC}$;

$$\overrightarrow{DF}^2=\overrightarrow{DB}^2+\overrightarrow{BF}^2+2\overrightarrow{DB}\,\overrightarrow{BF}.$$

Бу тенгликларни ҳадлаб айирсак, $4\overrightarrow{BP}^2-\overrightarrow{DF}^2=0$ бўлади. Бундан $4\overrightarrow{BP}^2=\overrightarrow{DF}^2$ ёки $2|BP|=|DF|$ экани келиб чиқади.

2-усул. Исботлашни буриш ёрдамида ҳам амалга ошириш мумкин, яъни $2\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ да

$$R_B^{-90^\circ}(\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BD}; \quad R_B^{-90^\circ}(\overrightarrow{BC}) = -\overrightarrow{BF}$$

ларни бажарайлик. Лекин $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FD}$ эди. У ҳолда векторни коллинеар бўлмаган икки векторга ёйишнинг ягоналигидан $R_B^{-90^\circ}(2\overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{FD}$ бўлади. Бундан $2BP = FD$ ва $(BP \,\widehat{}\, FD) = 90^\circ$ экани келиб чиқади.

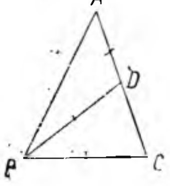
3-усул. $R_B^{-90^\circ}(\triangle ABC) = \triangle DBC'$ буришда $BC\,BC'$ га ва $BP\,BP'$ га аксланишлар ҳосил бўлиб. BP' $\triangle DFC'$ нинг ўрта чизиғи бўлади. Демак, $(BP \,\widehat{}\, BP') = 90^\circ$ ва $2\overrightarrow{BP'} = \overrightarrow{FD}$ ҳосил бўлади. Бундан $BP \perp DF$ ва $2BP = DF$ экани келиб чиқади.

Геометрик масалаларни ечишнинг алгебраик усули масала шартида берилганлардан фойдаланиб биринчи ёки иккинчи даражали тенгламаларни ечиш шартига келтирилади. Бу усулда геометрик масалаларни ечиш масала шартига кўра чизма чизиш ҳамда фигурада қатнашаётган маълум ва номаълум компонентларга суянган ҳолда тенглама тузиш, агар ҳар хил ҳолатлар қараладиган бўлса, ҳар бир ҳолатни таҳлил қилиб асослаш керак бўлади. Бундай ҳолда масалани неча усул билан ечиш мумкинлиги ёки ечиш методлари аниқланади.

4-масала. Агар тенг ёнли учбурчак асосидаги бурчакларининг бирида чиққан тўғри чизиқ уни иккита тенг ёнли учбурчакка ажратса, берилган тенг ёнли учбурчакнинг бурчакларини топинг (30-чизма).

Ечиш. ABC учбурчакда $AB = AC$ ва D нуқта AC томонда ётиб ABC учбурчакни $\triangle ADB$ ва $\triangle DBC$ ларга ажратади. Бунда $AD = BD = BC$. Агар $\angle ABD = X$ деб олсак, $\angle BCD = \angle BDC = 2X$ бўлади. $AB = AC$ бўлганидан $\angle CBD = X$ бўлади. Бундан $5x = 180^\circ$ ҳосил бўлиб, $X = 36^\circ$ экани келиб чиқади.

Масалани ечишнинг иккинчи усулини ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.



30-чизма.

Машқлар

34. Учбурчакнинг учларидан берилган M нуқтагача бўлган масофалар йиғиндиси агар M

нуқта учбурчак ташқарисида олинган бўлса, ярим периметрдан катта агар M нуқта учбурчак ичида ёки контурида олинган бўлса, периметрдан кичик бўлишини исботланг.

35. Учбурчак медианалари йиғиндиси ярим периметрдан катта ва периметрдан кичик бўлишини исботланг.

36. Тенг ёнли учбурчакда асосининг ихтиёрий нуқтасидан ён томонларига туширилган перпендикулярлар йиғиндиси ўзгармас миқдор бўлиб, у учбурчакнинг ён томонига туширилган баландликка тенг бўлишини исботланг

37. Учбурчакнинг биссектрисаси шу учдан чиқувчи медиана ва баландлик ҳосил қилган бурчакда ётишини исботланг.

38. Тўғри бурчакли учбурчакда тўғри бурчакнинг биссектрисаси медиана ва баландлик ташкил этган бурчакни тенг иккига бўлишини исботланг.

— **39.** Тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг AB гипотенузасига учбурчакни қопламайдиган қилиб квадрат ясалган. Агарда катетлар йиғиндиси Q га тенг бўлса, C учдан квадрат марказигача бўлган масофани топинг

40. Учбурчакнинг асоси Q га тенг. Ён томонларини m — нисбатда бўлувчи нуқталар орасидаги масофани топинг.

41. Учбурчакнинг учларидан берилган тўғри чизиққача бўлган масофалар p, q ва r га тенг. Учбурчакнинг оғирлик марказидан шу тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

42. Учбурчакнинг бир учидан ўтказилган баландлик ва медиана шу учга жойлашган бурчакни тенг уч бўлакка бўлади. Учбурчакнинг бурчакларини ҳисобланг.

43. Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасининг ўртаси бўлган O нуқтадан тик чизиқ ўтказилган бўлиб, у катетлардан бирини K нуқтада, иккинчисининг давомини M нуқтада кесиб ўтади. $OK=a$ ва $OM=b$ бўлса, учбурчакнинг томонларини топинг.

44. ABC учбурчакда $\angle A=30°$, $\angle B=50°$. Учбурчакнинг томонлари учун $c^2-b^2=ab$ муносабат ўринли эканлигини исботланг

45. Учбурчак баландликлари тескари қийматларининг йиғиндиси шу учбурчакка ички чизилган айлана радиусининг тескари қийматига тенг, яъни $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$ эканлигини исботланг.

46. ABC учбурчакнинг AC ва AB томонлари узунликлари b ва c га, AA_1 медианасининг узунлиги $\sqrt{bc}$ га тенг бўлса, A бурчакнинг катталигини топинг.

47. ABC учбурчакнинг AA_1 ва BB_1 баландликларининг асосларини бирлаштирувчи A_1B_1 кесма AB томоннинг ўртаси M нуқтадан тўғри бурчак остида кўринса, C бурчакнинг катталигини топинг.

48. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари a ва b га тенг. Учбурчакнинг тўғри бурчагидан чиқувчи биссектрисаси узунлигини топинг.

49. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 20 см, асоси 24 см га тенг. Учбурчакнинг медианалари кесишган нуқтадан биссектрисалари кесишган нуқтагача бўлган масофани топинг.

50. $\triangle ABC$ да биссектрисалар кесишган нуқтадан BC томонга параллел тўғри чизиқ ўтказилган, у AB томонни B_1 нуқтада ва AC томонни C_1 нуқтада кесади $B_1C_1=BB_1+CC_1$ бўлишини исботланг.

51. ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг катетларида ундан ташқарида $BCED$ ва $ACKH$ квадратлар ясалган. D ва H нуқталардан гипотенузанинг давомига DN ва HM перпендикулярлар туширилган. $DN + HM = AB$ эканини исботланг.

52. Агар учбурчакнинг икки медианаси узаро тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчак тенг ёнли бўлишини ва аксинча, агар учбурчак тенг ёнли бўлса, у ҳолда унинг иккита медианаси тенг бўлишини исботланг.

53. Агарда учбурчакнинг оғирлик маркази M унинг ортомаркази H билан устма-уст тушса, у ҳолда бундай учбурчак тенг томонли бўлишини исботланг.

54. ABC учбурчакнинг AB ва BC томонларига ўтказилган медианалари ўзаро перпендикуляр. $\cos B \leqslant \frac{4}{5}$ эканини исботланг.

55. ABC учбурчакда $\angle A = 2\angle B$ бўлса, b ва c томонларга кўра a томонни топинг.

56. $\angle XOY = 60°$ ли бурчакдан ташқарида M нуқта олиниб, бурчак томонларига $MA = n_1$, $MB = n_2$ ва бурчак биссектрисасига MC тик чизиқлар туширилган бўлса, OC ни топинг.

57. Учбурчакнинг учта медианасидан янги учбурчак ясаш мумкинлигини исботланг.

58. ABC учбурчакда $AC = b$, $AB = c$ ва l_a лар маълум бўлса, A бурчакнинг катталигини топинг.

59. ABC учбурчакда $\angle A = 2\alpha$, $AB = c$, $AC = b$. A бурчак биссектрисасининг узунлигини топинг.

60. ABC учбурчакнинг томонларида P Q, R нуқталар шундай олинганки, AP, BQ ва CR тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишади. $AR \cdot BP \cdot CQ = RB \cdot PC \cdot QA$ муносабатни текширинг.

61. Томони a га тенг бўлган тенг томонли ABC учбурчакнинг BC томонида D ва AB томонида E нуқталар $a = 3BD$, $AE = DE$ бўладиган қилиб олинган бўлса, CE кесманинг узунлигини топинг.

62. Учбурчакнинг икки медианаси ўзаро тик. Учбурчакнинг бу медианалар ўтган томонлари a ва b га тенг. Шу учбурчакнинг томонлари орасидаги боғланишни топинг.

63. Тенг ёнли ABC учбурчакнинг тенг AB ва BC томонларида AE ва CF тенг кесмалар олинган. $CE = AF$ эканини ва булар кесишган нуқта BO биссектрисада ётишини исботланг.

64. Учбурчак текислигида $\overrightarrow{QA} + m\overrightarrow{QB} + n\overrightarrow{QC} = 0$ шартни қаноатлантирувчи O нуқта бўлиши мумкинми? Бу ерда m, n мусбат рационал сонлар.

65. ABC учбурчакнинг CA томонини P нуқта n нисбатда CB томонини Q нуқта m нисбатда бўлади. PQ кесма CM медианани қандай нисбатда бўлади?

— 66. ABC учбурчак текислигида ихтиёрий O нуқта берилган. $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ ва $\triangle COA$ ларнинг оғирлик марказлари мос равишда P, Q ва R бўлса, $\triangle ABC$ ва $\triangle PQR$ ларнинг оғирлик марказлари N, K ва O нуқталар бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.

67. ABC учбурчакнинг томонлари a, b, c га тенг. Шу учбурчакнинг a томонига ўтказилган m_a мидиана узунлигини ҳисобланг.

68. Берилган M нуқтанинг учбурчакнинг учларидан узоқлиги m, n, p га тенг. Агар учбурчакнинг томонлари a, b, c га тенг бўлса, берилган нуқтанинг шу учбурчак оғирлик марказидан узоқлигини топинг.

69. ABC учбурчакнинг томонларида ундан ташқарида $ABKL$, $BCMN$, $CAPQ$ квадратлар ясалган. O_1, O_2, O_3 лар мос равишда

шу квадратларнинг ўрталари, D, E, F лар AB. BC, CA томонларнинг ўрталари бўлса қуйидагиларни исботланг.

1) $QM \perp CD$ ва $QM = 2CD$,

2) $CR \perp AB$ ва $AB = 2CR$,

3) $DO_2 \perp DO_3$ ва $DO_2 = DO_3$,

4) $AO_2 \perp O_1O_3$ ва $AO_2 = O_1O_3$,

5) Учбурчак томонларига ясалган квадратлар марказларини билган ҳолда, шу учбурчакнинг ўзини ясанг.

70. Учбурчакнинг иккита томони узунликларининг нисбати учга улар орасидаги бурчак эса α га тенг. Шу бурчакнинг биссектрисаси билан унга қарши ётган томон орасидаги бурчакни топинг.

71. Тўғри бурчакли учбурчак катетларининг йиғиндиси шу учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланалар диаметрларининг йиғиндисига тенг булишини исботланг.

72. Тенг ёнли учбурчакнинг тенг B ва C бурчакларининг биссектрисалари E нуқтада кесишиб, давомида учбурчакка ташқи чизилган айлана билан D ва F нуқталарда кесишади. $ADEF$ тўртбурчак ромб эканлигини исботланг.

73. Учбурчакнинг ортомаркази ва ихтиёрий икки учи орқали ўтувчи айланалар ўзаро тенг бўлишини исботланг.

74 Учбурчакнинг h_a баландлиги ва ташқи чизилган айлананинг A учига ўтказилган радиуси AB ва AC томонлар билан тенг бурчаклар ҳосил қилишини исботланг.

75. Учбурчакнинг ортомаркази H, оғирлик маркази M ва унга ташқи чизилган айлана маркази O лар бир тўғри чизиқда (Эйлер тўғри чизиғи) ётишини исботланг.

76. Мунтазам учбурчак айланага ички чизилган. Айланага тегишли ихтиёрий нуқтадан шу учбурчак учларигача бўлган масофалар квадратларининг йиғиндиси ўзгармас миқдор бўлиб, нуқтанинг жойлашиш ўрнига боғлиқ эмаслигини исботланг.

77. Агар $AC + CD = m$ ва $AB - BD = n$ лар маълум бўлса, ABC учбурчакнинг AD биссектрисасини топинг.

78. ABC учбурчакда $\angle A = 2\angle B$ ва $AC = b$ бўлса, C учдан чиққан медиана учун $b < 2m_c < \sqrt{5}\,b$ муносабат ўринли эканлигини исботланг.

79 ABC учбурчакнинг AB, BC, CA томонларида K, L, M нуқталар олинган. Агарда $AK : KB = BL : LC = CM : MA = n$ шарт бажарилса, ABC ва KLM учбурчакларнинг оғирлик марказлари устма-уст тушишини исботланг.

80. Учбурчакда иккита баландликлар узунликлари ўзлари тушган асосларнинг узунликларидан кичик эмас. Учбурчакнинг бурчакларини топинг

81. ABC учбурчакда AN ва CK биссектрисалар ўтказилган. $AC = 6$ см, $AK = 2$ см, $CN = 3$ см бўлса, NK ни топинг.

82. ABC учбурчакнинг AD биссектрисаси BC томонни $BD : CD = 2 : 1$ нисбатда бўлади. CE медиана шу биссектрисани қандай нисбатда бўлади?

83. ABC учбурчакда $AB = AC$ ва $\angle BAC = 20°$. AB томонда $AD = CD$ шарт билан D нуқта, AC томонда эса $BC = CE$ шарт билан E нуқта олинган. $\angle CDE$ ни топинг.

84 Тенг ёнли бўлмаган учбурчакнинг учала ташқи бурчаклари биссектрисаларининг асослари бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.

85. Тенг ёнли бўлмаган учбурчакнинг иккита ички ва битта ташқи бурчаклари биссектрисаларининг асослари бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.

86. Учбурчакнинг иккита ташқи бурчагининг биссектрисалари кесишган нуқта учинчи бурчагининг ички биссектрисасида ётишини исботланг.

3- §. Айлана ва доира

Айлана ва доира тушунчалари геометрияда кўп учрайдиган асосий тушунчалардан ҳисобланиб, бу тушунчаларнинг таркибий қисмида доиранинг ва айлананинг элементлари бошқа геометрик фигуралар билан узвий алоқада қатнашишлари мумкин.

Маълумки, айлананинг узунлиги $C = 2\pi R$ га, доиранинг юзи эса $S = \pi R^2$ га тенг.

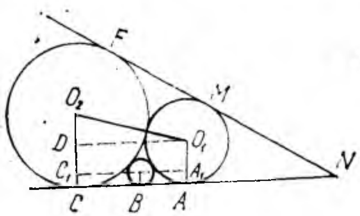
Айлана ва доирага тааллуқли бўлган баъзи маълумотларни келтирамиз:

1. Агар берилган доирада AB ва CD ватарлар E нуқтада кесишса, у ҳолда $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ ёки $BE : ED = CE : EA$ эканлигини кўриш мумкин.

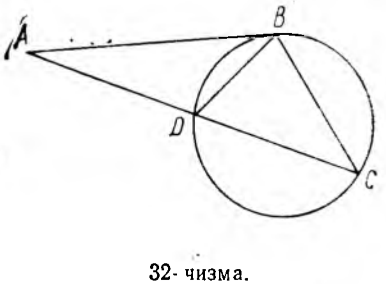
2. Айланага унинг ташқарисида олинган нуқтадан ўтказилган икки уринма кесмалари тенгдир (31- чизма).

3. Агар айлана ташқарисида олинган A нуқтадан $(O; R)$ айланага уринма ва кесувчи ўтказилган бўлса (32- чизма), у ҳолда уринма бутун кесувчи билан унинг ташқи бўлаги орасида ўрта пропорционал миқдордир, яъни: $AB^2 = AC \cdot AD$.

4. Агар берилган ABC учбурчакнинг томонларига ташқаридан уринувчи айланаларнинг радиусларини мос равишда r_a, r_b, r_c деб белгиласак ва ички чизилган айлана радиуси r бўлса, у ҳолда $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$ муносабат ўринли бўлади.



31- чизма.



32- чизма.

5 Агар берилган учбурчакка ташқи ва ички чизилган айланалар радиуслари мос равишда R ва r бўлса, у ҳолда $R \geqslant 2r$ ва $r = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$ муносабат ўринлидир.

6. Берилган ихтиёрий учбурчак учун қуйидаги муносабатлар ўринлидир:

$$h_a + h_b + h_c \geqslant 9r; \quad r_a + r_b + r_c \geqslant \sqrt{3}\, p,$$

$$r_a = 4R \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

$$r_b = 4R \sin\frac{B}{2} \cos\frac{A}{2} \cos\frac{C}{2},$$

$$r_c = 4R \sin\frac{C}{2} \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2}.$$

Юқорида билдирилган мулоҳазалар ёрдамида масалалар ечиш учун намуналар келтирамиз:

1-масала. Катталиги α га тенг бўлган бурчакка унинг томонларига уринувчи ва шу билан бирга ўзаро уринувчи r_1 ва r_2 $(r_2 > r_1)$ радиусли айланалар ички чизилган. Агар шу икки айланага ва бурчакнинг бир томонига уринувчи айлана радиуси r бўлса, у ҳолда $r_1 : r$ нисбат топилсин (31-чизма).

Берилган: $\angle FNC = \alpha$, $O_2C = r_2$; $O_1A = r_1$, $OB = r$.

Топиш керак: $r_1 : r = ?$

Ечиш. Масаланинг шартига кўра O_1, O_2, O лар FNC бурчакка ички чизилган айланалар марказлари бўлиб, уларнинг радиуслари мос ҳолда r_1, r_2 ва r $(r_2 > r_1)$. O_1 нуқтадан NC га параллел қилиб O_2C билан D нуқтада кесишувчи тўғри чизиқ ўтказамиз. Натижа O_1O_2D тўғри бурчакли учбурчак ҳосил бўлади. $\triangle O_1O_2D$ ва $\angle O_2O_1D = \frac{\alpha}{2}$ га $O_2O_1 = r_2 + r_1$ ва $O_2D = r_2 - r_1$ га тенг бўлиб, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$ ни ёза оламиз. Бундан

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}$$ ҳосил бўлади. Агар $AC = AB + BC$ (1) экани ҳисобга олинса ва тўғри бурчакли $\triangle O_2OC_1$ ва $\triangle O_1OA_1$ лардан $AB = OA_1$ ва $BC = OC_1$ ларни ва $\triangle O_2O_1D$ дан $O_1D = AC$ ларни топсак:

$$AB=\sqrt{(r_1+r)^2-(r_1-r)^2}=2\sqrt{r_1r},$$
$$BC=\sqrt{(r_2+r)^2-(r_2-r)^2}=2\sqrt{r_2r},$$
$$AC=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_2-r_1)^2}=2\sqrt{r_1r_2}.$$

Буларни (1) га қўйилса, $\sqrt{r_1r_2}=\sqrt{r}\,(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_1})$ бўлади. Бундан $\sqrt{\frac{r_1}{r}}=1+\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$ ёки $\frac{r_1}{r}=\left(1+\sqrt{\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}}\right)^2$ ҳосил бўлади.

Демак, $\frac{r_1}{r}=\left(1+\sqrt{\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}}\right)^2.$

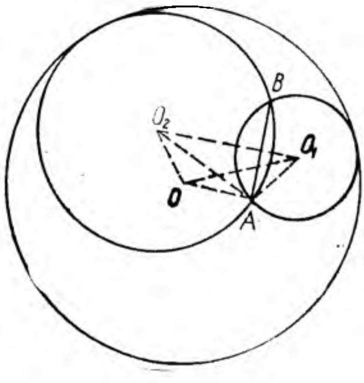
2- масала. (O, R) айланага ички томондан уринувчи ҳамда ўзаро A ва B нуқталарда кесишувчи икки айлана ички чизилган. Агар $\angle OAB=90°$ бўлса, у ҳолда ички чизилган айланалар радиусларининг йиғиндиси топилсин (33- чизма).

Берилган: (O, R), $\angle OAB=90°$.

Топиш керак: $O_1A+O_2A=r_1+r_2$.

Ечиш. Берилишига кўра O_1, O_2 нуқталар ўзаро кесишувчи айланаларнинг марказлари бўлсин дейлик ҳамда (O_1, r_1) ва (O_2, r_2) айланалар радиусларини мос ҳолда r_1 ва r_2 орқали белгилайлик, яъни: $O_1A=r_1$, $O_2A=r_2$. Қулайлик учун $OA=a$ деб белгилайлик.

$\angle OAB=90°$ ва $O_1O_2\perp AB$ лардан $OA\parallel O_1O_2$ келиб чиқади. Демак, AOO_1 ва AOO_2 лар ўзаро тенг учбурчаклар бўлиб, $OO_1=R-r_1$, $OO_2=R-r_2$ эканини ҳисобга олиб, Герон формуласига асосан қуйидагини ёза оламиз, яъни:



33- чизма.

$$S_{\Delta AOO_1}=S_{\Delta OAO_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{R+a}{2}\cdot\frac{R-a}{2}\cdot\frac{R+a-2r_1}{2}\cdot\frac{a+2r_1-R}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{R+a}{2}\cdot\frac{R-a}{2}\cdot\frac{R+a-2r_2}{2}\cdot\frac{a+2r_2-R}{2}}.$$

Бундан $a^2-(R-2r_1)^2=a^2-(R-2r_2)^2$, $Rr_1-r_1^2=$ $=Rr_2-r_2^2$ бўлиб, $r_1\neq r_2$ десак, у ҳолда $r_1+r_2=R$ экани келиб чиқади. Демак, ички чизилган айланалар радиусларининг йиғиндиси катта айлана радиусига тенг бўлар экан, яъни $r_1+r_2=R$.

3- масала. Айланада ёгувчи ихтиёрий нуқтадан шу айланага ички чизилган тенг томонли учбурчак учларигача бўлган масофалар квадратларининг йиғиндиси ўзгармас миқдор эканлигини исботланг (34- чизма).

Берилган: $(O;\ R)$ ва $\triangle ABC$, $AB=BC=CA$, $N\in(O;\ R)$.

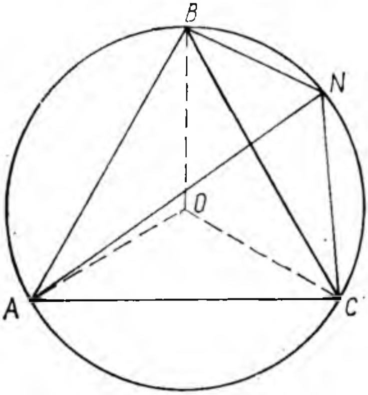
Исбот қилиш керак: $AN^2+BN^2+CN^2=\text{const}$.

Исбот. $(O;\ R)$ айланада O айлана маркази ва N нуқта $(O;\ R)$ га тегишли эканини ҳисобга олган ҳолда қуйидаги муносабатларни ёза оламиз:

$$\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OA}\Rightarrow\overrightarrow{NA}^2=\overrightarrow{NO}^2+\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{NO}\cdot\overrightarrow{OA},\quad(1)$$

$$\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{NB}^2=\overrightarrow{NO}^2+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{NO}\cdot\overrightarrow{OB},\quad(2)$$

$$\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OC}\Rightarrow\overrightarrow{NC}^2=\overrightarrow{NO}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{NO}\cdot\overrightarrow{OC}.\quad(3)$$



34- чизма.

Ҳосил қилинган (1), (2) ва (3) тенгликларни ҳадлаб қўшсак:

$$\overrightarrow{NA}^2+\overrightarrow{NB}^2+\overrightarrow{NC}^2=$$
$$=3\overrightarrow{NO}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+$$
$$+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{NO}(\overrightarrow{OA}+$$
$$+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

ҳосил бўлади. Бунда $OA^2=OB^2=OC^2=R^2$ ва $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{O}$ эканини ҳисобга олсак,

$NA^2+NB^2+NC^2=6R^2$ экани келиб чиқади. Бундан келиб чиқадики, йиғинди фақат айлана радиусига боғлиқ ва ўзгармас миқдордир.

Машқлар

87. Бир-биридан ташқарида ётган икки айлана орасидаги энг қисқа масофа шу айланалар марказидан ўтадиган тўғри чизиқда ётувчи шу айланалар орасидаги кесмага тенг бўлишини исботланг.

88. A нуқтада ташқи уринувчи икки O ва O_1 айланаларга (BC) умумий уринма ўтказилган. B ва C лар уриниш нуқталари бўлса, $\angle BAC$ ни топинг.

89. Икки айлананинг кесишиш нуқталарининг биридан бир неча кесишувчилар ўтказилган. Бу кесувчилар кесмаларининг (кесма кесувчининг икки айлана билан чегараланган қисмидир) орасидан марказлар чизиғига параллел бўлгани энг каттаси бўлишини исботланг.

90. M нуқтадан ўтувчи икки тўғри чизиқ айланага A ва B нуқталарда уринади. Ҳосил бўлган ёйларнинг кичиги ида ихтиёрий C нуқта олиниб бу нуқтадан (MA) ва (MB) билан D ва E нуқталарда кесишгунча учинчи уринма ўтказилган $\triangle MDE$ нинг периметри ва $\triangle DOE$ нинг катталиги C нуқтанинг танланишига боғлиқ эмаслигини исботланг.

91. Икки айлана A ва B нуқталарда кесишади. A нуқтадан (MAN) ва B нуқтадан (PBQ) кесувчилар ўтказилган. (M, P ва N,Q лар алоҳида айланаларда ётади). MP ва NQ кесмалар параллел эканлигини исботланг.

92. Бири иккинчисининг марказидан ўтувчи икки айлана берилган. Уларнинг кесишиш нуқталарининг биридан иккала айланани M ва N нуқталарда кесувчи тўғри чизиқ ўтказилган M ва N нуқталарда айланаларга ўтказилган уринмалар ҳосил қилган бурчак катталигини топинг.

93, Айланага иккита параллел уринма ўтказилган. Айланага ўтказилган учинчи уринманинг параллел уринмалар орасида қолган кесмаси айлана марказидан 90° ли бурчак остида кўринишини исботланг.

94. Ташқи уринувчи икки айланага (радиуслари R ва r) умумий ташқи уринма ўтказилган ва уриниш нуқталари орасидаги кесмани диаметр қилиб айлана чизилган. Шу айлананинг икки айлана марказлари орқали ўтувчи чизиққа уринишини исботланг ҳамда радиусини топинг.

95. Айланани икки концентрик айлана кесиб ўтади: бири A ва B нуқталарда, бошқаси C ва D нуқталарда, AB ва CD ватарлар параллел эканлигини исботланг.

96. S айлана тенг бўлмаган S_1 ва S_2 айланаларга уринади. Уриниш нуқталарини бирлаштирувчи тўғри чизиқ S_1 ва S_2 айланаларнинг ўхшашлик марказларининг биридан ўтишини исботланг

97. Берилган бурчакка учта кетма-кет уринувчи айланалар ички чизилган Агарда икки катта айланаларнинг радиуслари R ва r бўлса, энг кичик айлананинг радиусини топинг.

98 Радиуслари R ва r бўлган икки айлана ташқи уринади. Бу айланаларга умумий ташқи уринма ўтказилган. Уринманинг уриниш нуқталари айланалар уриниш нуқтаси билан туташтирилган Ҳосил бўлган учбурчак томонларини топинг.

99. Радиуслари R ва r бўлган икки айлананинг ташқи уринмаси ички уринмасидан икки марта узун Шу айланалар марказлари орасидаги масофани топинг.

100. R радиусли айланада ўтказилган ватар узунлиги билан марказдан ватаргача бўлган масофа йиғиндиси a га тенг. Ватар узунлигини топинг.

101. Радиуслари r_1 ва r_2, ораларидаги масофа a га тенг бўлган икки айланага R радиусли айлана ташқи уринади. $(O; r_1)$ ва $(O; r_2)$ айланаларга ташқи уринма кесмасининг узунлигини топинг.

102. Икки айлананинг ташқи уринмалари орасидаги бурчак α га, ички уринмалари орасидаги бурчак β га тенг. Катта айлана марказидан кичик айланага ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакни топинг.

103. R ва r радиусли айланалар ички уринади. Бу айланаларга ва уларнинг марказлар чизиғига уринувчи учинчи айлананинг радиусини топинг.

4-§. Тўртбурчаклар ва кўпбурчаклар

Математикада кўпбурчакларни берилишига қараб асосан икки турга ажратилади: қабариқ ва ботиқ кўпбурчакларга. Қабариқ кўпбурчаклар ўз навбатида икки турга—мунтазам ва номунтазам кўпбурчакларга ажралади.

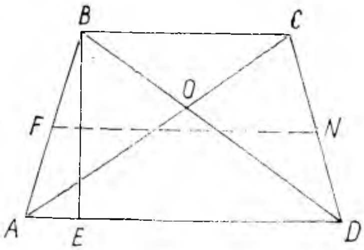
Мунтазам кўпбурчак деганда ҳамма томонлари ва бурчаклари ўзаро тенг бўлган кўпбурчаклар тушунилади. Кўпбурчаклар оиласига учбурчак, тўртбурчак, бешбурчак ва ҳоказо n — бурчакли шаклларни мисол келтириш мумкин.

Биз олдинги параграфда учбурчакларга доир масалалар ечган эдик. Энди тўртбурчак ва кўпбурчакларга тўхталиб ўтайлик.

Квадрат деб—ҳамма томонлари ва бурчаклари ўзаро тенг бўлган тўртбурчакка айтилади. Квадратнинг диагоналлари ўзаро тенг ва тўғри бурчак остида кесишади. Юзи эса бир томонининг квадратига тенгдир.

Тўғри тўртбурчак деб ҳамма бурчаклари тўғри бўлган тўртбурчакка айтилади. Тўғри тўртбурчакнинг ички бурчакларининг йиғиндиси 360° га тенг бўлиб, диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади ва ҳар бир диагонали уни тенг иккита учбурчакка ажратади. Диагоналларининг кесишиш нуқтаси шу тўғри тўртбурчак учун симметрия маркази бўлади. Тўғри тўртбурчакнинг юзи $S = a \cdot b$ формула билан ҳисобланади.

Параллелограмм деб қарама-қарши томонлари ўзаро параллел бўлган тўртбурчакка айтилади. Параллелограммда қарама-қарши ётган томонлари ўзаро тенг ва бир томонига ёпишган бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг бўлади. Параллелограмм диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади ва бу нуқта унинг симметрия маркази бўлади.



35- чизма.

Параллелограмм диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг томонлари квадратлари йиғиндисининг иккиланганига тенгдир, яъни:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2AB^2 + 2AD^2.$$

Параллелограммнинг юзи асоси билан баландлигининг кўпайтмасига тенг, яъни

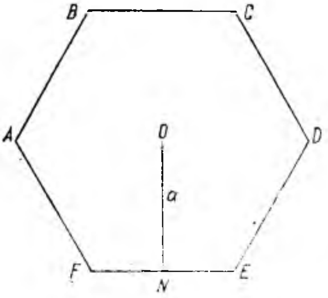
$$S = AD \cdot BE = a \cdot h.$$

Агар параллелограммнинг ҳамма томонлари ўзаро тенг бўлса, у *ромбдир.* Ромбнинг диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади ва ўзаро перпендикуляр бўлади. Ромбнинг юзи диагоналларининг кўпайтмасининг ярмига тенгдир, яъни:

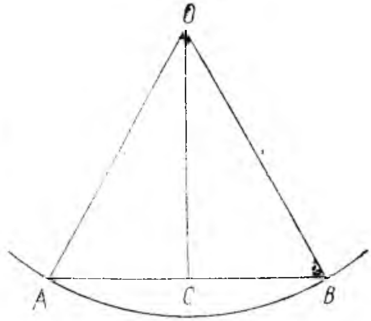
$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Агар берилган тўртбурчакнинг икки томони ўзаро параллел, қолган икки томони ўзаро параллел бўлмаса, у ҳолда бундай фигурага *трапеция* дейилади (35-чизма). Трапециянинг ён томонлари ўзаро тенг бўлса, бу тенг ёнли трапеция бўлиб, бунда $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$ ва $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ бўлади. Трапециянинг юзи асослар (AD ва BC) йиғиндисининг ярми билан баландлигининг кўпайтмасига ёки ўрта чизиғи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг бўлади, яъни: $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BE = \frac{1}{2}(a + b)h$, $FN = \frac{1}{2}(AD + BC)$ экани ҳисобга олинса, $S = FN \cdot h$ бўлади.

Агар берилган тўртбурчакнинг қарама-қарши ётган томонларининг йиғиндиси ўзаро тенг бўлса, унга ички айлана чизиш мумкин.



36- чизма.



37- чизма.

Агар берилган тўртбурчакнинг қарама-қарши бурчакларининг йиғиндиси $\angle A + \angle C = 180^\circ$ $(\angle B + \angle D = 180^\circ)$ бўлса, унга ташқи айлана чизиш мумкин.

Агар кўпбурчак томонларининг сони n та бўлса, бу кўпбурчакни n бурчакли кўпбурчак деб аталади. Қабариқ кўпбурчак ички бурчакларнинг йиғиндиси $180^\circ \times (n-2)$ ға тенгдир. Мунтазам кўпбурчакнинг юзи унинг периметри билан апофемаси кўпайтмасининг ярмига тенгдир, яъни $S = \frac{1}{2} p \cdot a$ (p — периметр, $ON = a$ — апофема) (36- чизма).

Агар (O, R) айланага мунтазам n бурчакли кўпбурчак ички чизилган бўлса, бу кўпбурчак томонларини айлана радиуси орқали ифодалаш мумкин. Яъни (37- чизма):

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{n} \text{ ва } \angle AOC = \frac{180^\circ}{n} \text{ бўлиб,}$$

$AC = \frac{AB}{2} R \sin \frac{180^\circ}{n}$ ёки $AB = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$ ҳосил бўлади.

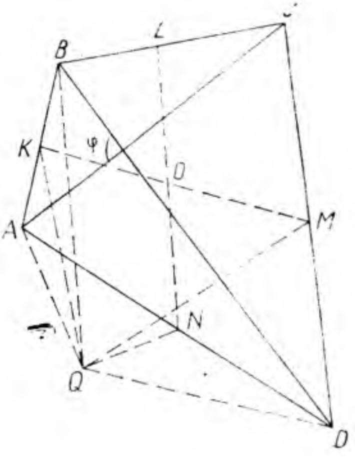
$AB = a_n$, $OC = l_n$ деб белгилашлар киритсак ҳамда $R = 1$ деб қабул қилсак, қуйидаги натижаларни ҳосил қилиш мумкин:

1) Агар $n = 3$ бўлса, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ бўлиб, $a_3 = \sqrt{3} R = \sqrt{3}$ ва $l_3 = R \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

2) Агар $n = 4$ бўлса, $a_4 = \sqrt{2}$ ва $l_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) Агар $n=6$ бўлса, $a_6=1$ ва $l_6=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) Агар $n=12$ бўлса, $a_{12}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ва $l_{12}=$ $=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.



38- чизма.

Юқорида келтирилган тушунчалар ва мавжуд маълумотлар ёрдамида масалалар ечишга намуналар келтирамиз.

1- масала. Агар $ABCD$ тўртбурчакда K, L, M, N нуқталар унинг томонларининг ўрталари бўлса ва диагоналлари ўзаро φ бурчак остида кесишса, у ҳолда $BC^2+AD^2-AB^2-CD^2=2(KM^2-LN^2)=2AC\times BD\cos\varphi$ эканини исботланг (38- чизма).

Берилган: $ABCD$ тўртбурчак, $AK=KB$, $BL=LC$, $CM=MD$, $DN=NA$, $(\widehat{BD\,AC})=\varphi$.

Исбот қилиш керак: $BC^2+AD^2-AB^2-CD^2=2(KM^2-LN^2)=2AC\cdot BD\cos\varphi$.

Исбот. Ихтиёрий Q нуқта учун:

$$\left.\begin{array}{l}2\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QD},\\ 2\overrightarrow{QK}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}\end{array}\right\}\Longrightarrow 2(\overrightarrow{QM}-\overrightarrow{QK})=$$

$$=\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QD}-\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}; \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}2\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QD},\\ 2\overrightarrow{QL}=\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}\end{array}\right\}\Longrightarrow 2(\overrightarrow{QN}-\overrightarrow{QL})=$$

$$=\overrightarrow{QA}-\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD}-\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}. \qquad (2)$$

(1) дан (2) ни ҳадлаб айирсак, у ҳолда

$$2(KM^2-LN^2)=BC^2-AD^2-(CD^2+BA^2)+$$

$$+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BA}. \qquad (3)$$

Равшанки, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0$ ёки бундан $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликнинг иккала томонини квадратга оширсак, $AB^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AD^2 + CB^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$;

$$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = AD^2 + CB^2 - AB^2 - CD^2. \quad (4)$$

(4) ни (3) га олиб бориб қўйсак, у ҳолда

$$2(KM^2 - LN^2) = BC^2 + AD^2 - CD - AB^2. \quad (4')$$

Маълумки, $\overrightarrow{KM} - \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{BD}$ бўлганидан

$$2(KM^2 - LN^2) = 2(\overrightarrow{KM} - \overrightarrow{LN})(\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{LN}) = 2\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD} \quad (5)$$

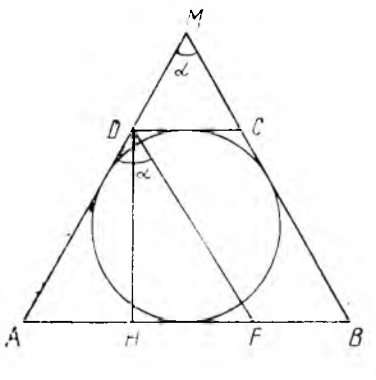
(4′) ва (5) ларни ўзаро тенглаштирсак

$BC^2 + AD^2 - CD^2 - AB^2 = 2(KM^2 - LN^2) = 2\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD}$, бундан $BC^2 + AD^2 - CD^2 - AB^2 = 2(KM^2 - LN^2) = 2AC\,BD\cos\varphi$ ҳосил бўлади.

Демак, $BC^2 + AD^2 - AB^2 - CD^2 = 2(KM^2 - LN^2) = 2AC\,BD\cos\varphi$.

Н а т и ж а. 1) Агар тўртбурчакда қарама-қарши томонлар квадратларининг йиғиндиси ўзаро тенг бўлса, у ҳолда унинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлади:

$$BC^2 + AD^2 = CD^2 + BA^2 \Rightarrow \overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow AC \perp BD;$$



39- чизма.

2) Агар $AC \perp BD$ бўлса, у ҳолда $BC^2 + AD^2 = CD^2 + BA^2$ бўлади;

3) Агар $AC \perp BD$ бўлса у ҳолда $KM = LN$ бўлади;

4) Агар $KM = LN$ бўлиб, $AC \perp BD$ бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ бўлади.

2- м а с а л а. Айлана трапецияга ички чизилган бўлиб, трапециянинг ён томонларини давом эттирилганда улар α бурчак остида кесишади. Агар трапециянинг асослари a ва b $(a > b)$ бўлса ички чизилган айлана радиусини топинг.

Берилган: $ABCD$ трапеция, унга ички чизилган айлана, $AB = a$, $CD = b$, $(AD \widehat{\ } BC) = \alpha$ (39-чизма).

Топиш керак: $r = ?$

Ечиш. Масалани ечиш учун $\vec{BC}$ ни $\vec{CD}$ бўйича параллел кўчириб, $BC = DF$ ни ҳосил қиламиз.

Айланага трапеция ташқи чизилган бўлгани учун, $AD + DF = AD + BC = a + b$ тенгликни ёза оламиз. Учбурчак ADF да $DH = 2r$ эканини эътиборга олган ҳолда, косинуслар теоремасини бир оз ўзгартириб қўлласак, у ҳолда $AF^2 = (AD + DF)^2 - 4S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ бўлади. Бунда $AF = a - b$ ва $S = (a - b) r$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4(a - b) r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

ҳосил бўлади. Бундан $r = \frac{ab}{a - b} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ келиб чиқади.

Кўриниб турибдики, масала $0 < \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{a - b}{a + b}$, $0 < b < a$ шартлар ўринли бўлгандагина ечимга эга бўлади.

Машқлар

104. Параллелограммнинг ички бурчаклари биссектрисалари кесишганда диагонали ён томонларининг айирмасига тенг бўлган тўғри тўртбурчак ҳосил қилишини исботланг.

105. $ABCD$ параллелограммда E — BC томоннинг ўртаси, F — CD томоннинг ўртаси. AE ва AF тўғри чизиқлар BD диагонални тенг уч бўлакка бўлишини исботланг.

106. $ABCD$ параллелограммда E — AD томоннинг ўртаси, F BC томоннинг ўртаси, BE ва FD тўғри чизиқлар AC диагонални тенг уч бўлакка бўлишини исботланг.

107. Трапециянинг ён томонига ёпишган бурчакларнинг биссектрисалари тўғри бурчак остида кесишиши ва кесишиш нуқтаси ўрта чизиқда ётишини исботланг.

108. Трапеция диагоналларининг ўрталарини бирлаштирувчи кесма асосларга параллел ва улар айирмасининг ярмига тенг бўлишини исботланг,

109. Асослари AB ва DC бўлган тенг ёнли $ABCD$ трапеция берилган. P ва Q лар ABC ва ABD учбурчаклар медианаларининг кесишган нуқталари бўлса, $PD = QC$ тенглик ўринли эканлигини исботланг.

110. Қарама қарши томонлари параллел бўлмаган тўртбурчакда диагоналларининг ўрталари ҳамда бир жуфт қарама-қарши томонларининг ўрталари параллелограммнинг учлари бўлишини исботланг.

111. Қарама-қарши томонлари параллел бўлмаган тўртбурчакда қарама-қарши томонларининг ўрталарини ҳамда диагоналларининг ўрталарини бирлаштирувчи учта тўғри чизиқ бир нуқтада кесишишини исботланг.

112. $ABCD$ тўртбурчакда M, N, P ва Q нуқталар AB, BC, CD ва DA томонларнинг ўрталари. MP ва NQ кесмалар кесишиш нуқтаси O да тенг иккига бўлинишини ҳамда ихтиёрий S нуқта учун $4\vec{SO} = \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD}$ тенглик тўғри бўлишини исботланг.

113. $ABCD$ тўртбурчакда K ва N нуқталар AB ва CD томонларнинг ўрталари. $AKND$ ва $BKNC$ тўртбурчаклар диагоналларининг ўрталари параллелограммнинг учлари эканлиги (ёки бир тўғри чизиқда ётиши)ни исботланг.

114. $ABCD$ параллелограммнинг A учидан BD диагоналнии K нуқтада CD томонни P нуқтада, BC томоннинг давомини Q нуқтада кесувчи нур чиқарилган. $KA^2 = KP \cdot KQ$ тенгликни исботланг.

115. $ABCD$ тўртбурчакда $\angle ADC$ ва $\angle ABC$ лар тўғри бурчаклар. A ва C учлардан BD диагоналга AA_1 ва CC_1 тик чизиқлар туширилган. Бу ерда A_1 ва C_1 нуқталар BD диагоналга тегишли. $A_1B = C_1D$ бўлишини исботланг.

116. $ABCD$ тўртбурчакнинг ўрта чизиқлари M нуқтада кесишади. Агар $\vec{AE} = \vec{MB}$ ва $\vec{EF} = \vec{MC}$ шарт билан $MAEF$ синиқ чизиқ ясалган бўлса, қуйидагиларни исботланг.

1) $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 0$; 2) M нуқта FD кесманинг ўртаси; 3) $S_{ABCD} = S_{MAEF} = 2$.

117. $ABCD$ тўртбурчакда E ва F нуқталар AC ва BD диагоналларнинг ўрталари. $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$ муносабат тўғрилигини исботланг.

118. $ABCD$ тўртбурчакда K, L, M, N нуқталар мос равишда томонларнинг ўрталари, φ — диагоналлар орасидаги бурчак. $KM^2 - LN^2 = AC \cdot BD \cos \varphi$ муносабат тўғрилигини исботланг.

119. Трапеция катта асосининг кичик асосига нисбати $\frac{1}{k}$ га, ён томонлари a ва b га тенг. Агар диагоналлар ўзаро перпендикуляр бўлса, трапециянинг асосларини топинг.

120. $ABCD$ трапецияда AD асосга ёпишган бурчакларнинг йиғиндиси $90°$ га тенг. Трапеция асосларининг ўрталарини бирлаштирувчи кесма, шу асослар айирмасининг ярмига тенг бўлишини исботланг.

121. Трапеция диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг ён томонлари квадратлари билан асослари кўпайтмасининг иккиланганининг йиғиндисига тенг бўлишини исботланг.

122. Тенг ёнли трапецияда диагоналлар ўзаро перпендикуляр бўлиб, ўрта чизиғи m га тенг. Трапециянинг баландлигини топинг.

123. Тенг ёнли трапецияда диагонал ўтмас бурчакни тенг иккига бўлади. Катта асоси периметрдан a қадар кичик, ўрта чизиғи эса b га тенг. Трапециянинг кичик асосини топинг.

124. Трапециянинг диагонали ўрта чизиғини тенг уч бўлакка

бўлади, Трапециянинг кичик асосининг катта асосига нисбатини топинг.

125. Тўғри бурчакли трапециянинг диагонали уни, бири томони a бўлган тенг томонли, иккинчиси эса тўғри бурчакли бўлган иккита учбурчакка ажратади. Трапециянинг ўрта чизиғини топинг.

126 Трапециянинг асослари a ва b га тенг бўлса, унинг ён томонларини m нисбатда бўлувчи E ва F нуқталар орасидаги масофани топинг.

127. Трапециянинг асослари a ва b га тенг бўлса, унинг диагоналларининг кесишиш нуқтасидан асосларига параллел қилиб ўтказилган EF кесманинг узунлигини топинг. E ва F нуқталар ён томонларга тегишли,

128. Тенг ёнли трапециянинг асослари a ва b $(a < b)$ га тенг. Катта асоснинг ўртасини кичик асоснинг учлари билан бирлаштирганда, бу тўғри чизиқлар трапеция диагоналини M ва N нуқталарда кесади. MN ни топинг.

129. Трапециянинг асослари a ва b га тенг ҳамда трапециянинг асосларига параллел бўлган MN кесма уни тенг иккига бўлади. MN ни топинг.

130. $ABCD$ тўғри бурчакли тўртбурчакнинг AB томонида шундай E нуқтани топингки, AD ва DC лар шу нуқтадан тенг бурчаклар остида кўринсин.

131. Параллелограммнинг диагоналларидан бири b га тенг. Иккинчи диагонал қўшни томонлар билан α ва β бурчак ташкил этади. Параллелограммнинг томонларини топинг,

132. Параллелограмм томонларининг нисбати диагоналларининг нисбати каби 2 га тенг, A ўтмас бурчагидан CD катта томонига AE баландлик туширилган. $DE:CE$ ни топинг.

133. Трапециянинг ўрта чизиғи 7 см, баландлиги $\frac{15\sqrt{3}}{7}$ см, диагоналлари орасидаги бурчак (асосларининг қаршисидаги) 120°. Шу трапециянинг диагоналларини топинг.

134. Асослари a ва b, баландлиги h бўлган тенг ёнли трапеция берилган. Трапециянинг симметрия ўқида ён томонлари тўғри бурчак остида кўринувчи P нуқта ясанг ва шу нуқтадан асослардан биригача бўлган масофани топинг.

135. $ABCD$ қабариқ тўртбурчакда $AB + BD < AC + CD$. AC диагонал AB томондан катта эканлигини исботланг.

136. $ABCD$ тўртбурчакда $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$. AD ва BC томонлар орасидаги бурчакни топинг.

137. $ABCD$ қабариқ тўртбурчакда $AB + BD < AC + CD$. AB томон AC диагоналдан кичик эканлигини исботланг.

138. Қабариқ тўртбурчакнинг учларидан унинг диагоналларига перпендикулярлар туширилган. Шу перпендикулярлар асослари ҳосил қилган тўртбурчак берилган тўртбурчакка ўхшаш эканлигини исботланг.

139. Қабариқ бешбурчак диагоналларининг йиғиндиси периметридан катта, лекин иккиланган периметридан кичик бўлишини исботланг.

140. $ABCDE$ бешбурчакда K, AB нинг L, BC нинг, M, CD нинг, N, DE нинг P, KM нинг, Q, LN нинг ўртаси. $PQ = \frac{1}{4}AE$ эканини исботланг.

141. $ABCDE$ бешбурчакда ҳар бир томоннинг ўртаси қўшни бўлмаган томонларнинг ўрталари билан бирлаштирилган. Ҳосил бўлган бешта кесмаларнинг ўрталари берилган бешбурчакка гомотетик бўлган бешбурчакнинг учлари эканлигини исботланг.

142. $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8$ нуқталар мос равишда $A_1, \ldots, A_8$ саккизбурчак томонларининг ўрталари. M, N, P, Q нуқталар мос равишда B_1B_3, B_2B_4, B_5B_7, B_6B_8 кесмаларнинг ўрталари. $MN = PQ$ ва $MN \parallel PQ$ эканини исботланг.

143. $ABCDEF$ қабариқ олтибурчакда барча ички бурчаклар тенг. $AB - DE = FE - BC = DC - FA$ муносабатни исботланг.

5-§. Текис фигураларнинг юзлари

Учбурчак, тўртбурчак, доира, кўпбурчаклар текис фигураларга мисол бўла олади. Бу фигураларнинг юзини ҳисоблашни бевосита учбурчак ёки доира юзини ҳисоблаш масаласига келтириш мумкин.

Учбурчак юзини ҳисоблашга доир формулаларни эслатиб ўтамиз:

Учбурчакнинг юзи унинг асоси билан баландлиги кўпайтмасининг ярмига тенг, яъни $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a$.

R ва r лар мос равишда ABC учбурчакка ташқи ва ички чизилган айланаларнинг радиуслари бўлсин, у ҳолда бу учбурчакнинг юзи $S = pr$, (бу ерда $p = \frac{a+b+c}{2}$) $S = \frac{abc}{4R}$ формулалар орқали ифодаланади.

Агар r_a, r_b, r_c лар ABC учбурчакнинг томонларига ташқи уринувчи айланалар радиуслари бўлса, у ҳолда бу учбурчакнинг юзи қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$S = (p-a)\,r_a,\; S = (p-b)\,r_b,\; S = (p-c)\,r_c.$$

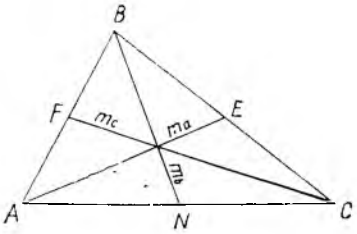
Берилган учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчак маълум бўлса, у ҳолда унинг юзини қуйидаги формулалар аниқлайди:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C;\; S = \frac{1}{2}bc\sin A;\; S = \frac{1}{2}ac\sin B.$$

Агар учбурчакнинг учта бурчаги ва бир томони маълум бўлса, у ҳолда унинг юзи қуйидаги формулалар ёрдамида ҳисобланади:

$$S = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A},\; S = \frac{1}{2}b^2\frac{\sin A\sin C}{\sin B},\; S = \frac{1}{2}c^2\frac{\sin B\sin A}{\sin C}.$$

Агар берилган учбурчакнинг учта томони маълум бўлса, у ҳолда унинг юзини Герон формуласи ёрдамида ҳисобланади, яъни $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ бу ерда $p = \frac{a+b+c}{2}$.



40- чизма.

Доиранинг ва унинг бўлакларининг юзлари:

Доиранинг юзи $S = \pi R^2 = \frac{\pi}{4} d^2$.

Доира секторининг юзи $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$.

Доира сегментининг юзи $S = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{\pi \alpha}{180} - \sin\alpha \right)$.

Тўртбурчак юзларини ҳисоблаш формулаларини олдинги параграфда келтирганимиз учун уларни такрорлаб ўтирмаймиз.

Энди масалалар ечишга намуналар келтирамиз.

1- масала. m_a, m_b, m_c лар ABC учбурчакнинг медианалари бўлса, шу учбурчак юзини ҳисобланг (40- чизма).

Берилган: $\triangle ABC$, m_a, m_b, m_c.

Топиш керак: $S_\triangle = ?$

Ечиш. Масала шартига кўра:

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \qquad (1)$$

$$4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2). \qquad (2)$$

(1) тенгликни 3 га, (2) тенгликни 2 га кўпайтириб, (2) дан (1) ни айирсак, $a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$ ҳосил бўлади.

Худди шунингдек $b = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}$, $c = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}$ ларни ҳосил қиламиз. Ҳосил қилинган натижаларни Герон формуласига қўйсак, ҳамда $m = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$ белгилашдан фойдалансак, у ҳолда

$$S=\frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_b+m_c-m_a)(m_a+m_c-m_b)\times}$$
$$\overline{\times(m_a+m_b+m_c)}=\frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$$

ҳосил бўлади.

Демак, $S=\frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$ экан.

2- масала. ABC учбурчакнинг бир томонида олинган нуқтадан қолган томонларига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган ва бу тўғри чизиқлар учбурчакдан S_1 ва S_2 юзага эга бўлган учбурчаклар ажратади. Берилган учбурчакнинг юзи S ни топинг ва $S_1+S_2\geqslant\frac{1}{2}S$ эканини исботланг (41- чизма).

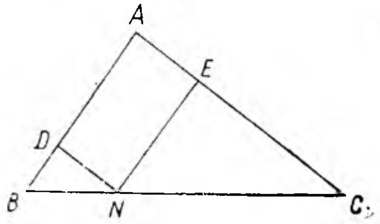
Берилган: $\triangle ABC$, $DN\parallel AC$, $NE\parallel AB$,

$$S_{\triangle BDN}=S_1;\ S_{\triangle NEC}=S_2.$$

Топиш керак: $S=?$ ҳамда исботлаш керак: $S_1+S_2\geqslant\frac{1}{2}S.$

Ечиш. Равшанки, BDN, NEC ҳамда ABC учбурчаклар ўхшаш учбурчаклардир. Чунки учбурчакнинг бир томонига параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқ шу учбурчакдан ўзига ўхшаш учбурчак ажратади. Ҳосил қилинган учбурчаклар юзлари орасида боғланиш муносабатини ўрнатиш учун $BN=x$ ва $NC=y$ орқали белгиласак, у ҳолда $BC=x+y$ бўлади. Энди ўхшаш фигуралар юзларининг нисбати ҳақидаги теоремани татбиқ қилсак,

$$\frac{S_1}{S}=\frac{x^2}{(x+y)^2};\ \frac{S_2}{S}=\frac{y^2}{(x+y)^2}\ \text{ёки}\ \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{x}{x+y}\ \text{ва}$$



41- чизма.

$$\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{y}{x+y}.$$

Ҳосил қилинган натижаларни ҳадлаб қўшсак,

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=1\Rightarrow\sqrt{S_1}+$$
$$+\sqrt{S_2}=\sqrt{S};$$

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$$

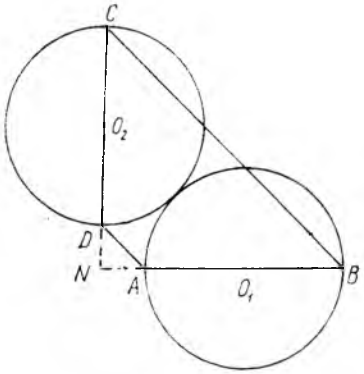
натижага эга буламиз.

Энди $2(S_1 + S_2) \geqslant S$ эканини исботлаймиз.

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2 = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1S_2} \leqslant 2(S_1 + S_2)$$

бу ерда $S_1 + S_2 \geqslant 2\sqrt{S_1S_2}$ дан фойдаландик.

Демак, $2(S_1 + S_2) \geqslant S$ ёки $S_1 + S_2 \geqslant \frac{1}{2}S$ экан.



42- чизма.

3- масала. $ABCD$ тўртбурчакнинг AB ва CD томонлари ўзаро тик бўлиб, улар радиуси r бўлган ва ўзаро уринувчи айланаларнинг диаметрларини ташкил этади. Агар $BC : AD = k$ бўлса, шу тўртбурчакнинг юзини топинг (42- чизма).

Берилган: $\square ABCD$, $AB \perp CD$, $AB = CD = 2r$, $BC : AD = k$.

Топиш керак: $S_{ABCD} = ?$

Ечиш. AB ва CD диаметрли айланалар марказларини мос равишда O_1 ва O_2, AB ва CD кесмалар давомининг кесишиш нуқтасини N, $BN = x$, $CN = y$ деб белгилаймиз. У ҳолда Пифагор теоремасига асосан:

$$BC^2 = x^2 + y^2; \; AD^2 = (x - 2r)^2 + (y - 2r)^2;$$
$$O_1O_2^2 = (x - r)^2 + (y - r)^2.$$

Шартга кўра $BC^2 = k^2AD^2$ эди, у ҳолда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = k^2(x - 2r)^2 + k^2(y - 2r)^2, \\ 4r^2 = (x - r)^2 + (y - r)^2. \end{cases}$$

Бундан

$$\begin{cases} (1 - k^2)(x^2 + y^2) = -4rk^2(x + y) + 8k^2r^2, \\ 2r^2 + 2r(x + y) = x^2 + y^2 \end{cases}$$

бўлиб, $x + y = r\,\frac{5k^2 - 1}{k^2 + 1}$ ни ҳосил қиламиз. У ҳолда

$$S_{ABCD}=\frac{xy-(x-2r)(y-2r)}{2}=r(x+y)-2r^2=$$

$$=r^2\,\frac{5k^2-1}{k^2+1}-2r^2=\frac{3k^2r^2-3r^2}{k^2+1}=3r^2\frac{k^2-1}{k^2+1}.$$

Демак, $S_{ABCD}=3r^2\frac{k^2-1}{k^2+1}.$

Машқлар

144. Параллелограммнинг d диагоналида олинган ихтиёрий нуқтадан унинг томонларига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Ҳосил бўлган тўртта параллелограммдан иккитасининг диагоналлари d нинг бўлаклари. Қолган иккита параллелограммнинг юзлари тенг эканлигини исботланг.

145. Параллелограммнинг ичида олинган ихтиёрий нуқта унинг учлари билан туташтирилган. Қарама-қарши жойлашган бўлаклар юзларининг йиғиндиси бир-бирига тенг эканлигини исботланг.

146. Учбурчакнинг асосига параллел ўтган тўғри чизиқ унинг юзини тенг иккига бўлади. Бу тўғри чизиқ учбурчакнинг ён томонларини қандай нисбатда бўлади?

147. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони a га, асоси b га тенг. Шу учбурчакка ички чизилган айлана унинг томонларига E, F, K нуқталарда уринади. $S_{\triangle EFK}$ ни топинг.

148. Тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлананинг гипотенузага уриниш нуқтаси уни узунликлари m ва n бўлган бўлакларга бўлади. Учбурчакнинг юзини топинг.

149. ABC учбурчакнинг AA_1 медианасида $AE:A_1E=1:2$ шартни қаноатлантирувчи E нуқта олинган. F, BE ва AC кесмаларнинг кесишиш нуқтаси. $S_{\triangle EFK}:S_{\triangle ABC}$ ни топинг.

150. Тенг ёнли ABC учбурчакнинг AC асосига ёпишган бурчаги α. Шу учбурчакка ички чизилган айлана унинг томонларига E, F, K нуқталарда уринади. $S_{\triangle EFK}:S_{\triangle ABC}$ ни топинг.

151. Юзи P га тенг бўлган учбурчакнинг асосига параллел бўлган тўғри чизиқ бу учбурчакдан юзи q га тенг бўлган учбурчак ажратади. Учта учи кичик учбурчакнинг учлари билан устма-уст тушадиган, тўртинчи учи эса берилган учбурчак асосида ётувчи тўртбурчак юзини топинг.

152. ABC учбурчакда $\angle A=60°$, $AB:AC=3:2$; AB ва AC томонларда $BE=EF=FC$ шартни қаноатлантирувчи E ва F нуқталар олинган. $S_{\triangle EFA}:S_{\triangle ABC}$ ни топинг.

153. Учбурчакнинг асоси b га, унга туширилган баландлик h га тенг. Иккита учи ён томонларда, қолган икки учи асосда ётувчи квадрат юзининг берилган учбурчак юзига нисбатини топинг.

154. Тўғри бурчакли учбурчакнинг юзи S, унга ички ва ташқи чизилган айланалар радиуслари R ва r бўлса, $R+r\geqslant\sqrt{2S}$ тўғрилигини исботланг.

155. Асоси трапециянинг бир ён томонидан иборат, учи эса иккинчи ён томоннинг ўртасида ётувчи учбурчакнинг юзи трапеция юзининг ярмига тенглигини исботланг.

156. Трапециянинг диагоналлари уни тўрт бўлакка бўлади. Ён томонларига ёпишган бўлаклари тенг эканлигини исботланг.

157. Томонлари a, b, c га тенг бўлган учбурчакнинг юзи S га тенг. $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$ эканини исботланг.

158. Трапециянинг диагоналлари уни тўрт бўлакка бўлади. Трапециянинг асосларига ёпишган учбурчаклар юзлари S_1 ва S_2 бўлса, трапециянинг юзини топинг.

159. Трапеция асосларининг нисбати $m : n$ каби Трапециянинг диагоналлари уни тўрт бўлакка бўлади. Шу бўлаклар юзларининг нисбатини топинг.

160. ABC учбурчакнинг биссектрисалари қаршисида ётган томонларни A_1, B_1, C_1 нуқталарда кесади. Агарда $\triangle ABC$нинг томонлари a, b, c бўлса, $S_{\triangle A_1B_1C_1}$ топилсин

161. ABC учбурчакнинг ичида олинган ихтиёрий нуқтадан унинг томонларига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган Бу тўғри чизиқлар учбурчакни олти бўлакка бўлади. Булардан учтаси юзлари S_1, S_2, S_3 бўлган учбурчаклар бўлса, $S_{\triangle ABC}$ ни топинг.

162. ABC учбурчакда $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $CA = 15$ см, CC_1 ва AA_1 лар баландликлар $S_{\triangle BC_1A_1}$ ни топинг.

163. ABC учбурчакда $\angle BAC = 60°$, $BD = m$, $DC = n$ бўлиб, D нуқта BC билан учбурчакка ички чизилган айлананинг кесишган нуқтаси $S_{\triangle ABC}$ ни топинг.

164. Бир бурчаги $60°$ бўлган учбурчакка ички чизилган айлана шу бурчак қаршисидаги томонни m ва n бўлакларга бўлади. Учбурчакнинг юзини топинг.

165. Медианаларининг узунликлари 12 15 ва 21 см бўлган учбурчакнинг юзини топинг.

166. Юзи S, томонлари a, b, c, d бўлган тўртбурчак берилган. $S < \frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}$ бўлишини исботланг.

167. Агар иккита тўртбурчак томонларининг ўрталари устма-уст тушса, у ҳолда бундай тўртбурчакларнинг юзлари тенг бўлишини исботланг,

168. Қабариқ $ABCD$ тўртбурчакнинг AB томонида $AP = PQ = QB$ шарт билан P, Q нуқталар, CD томонида $CR = RS = SD$ шарт билан R, S нуқталар олинган $3S_{PQRS} = S_{ABCD}$ ни исботланг.

169. ABC учбурчакда $BB_1 = AC$ шарт билан AB нинг давомига, $CC_1 = AB$ шарт билан BCнинг давомига, $AA_1 = BC$ шарт билан CA нинг давомига BB_1, CC_1 ва AA_1 кесмалар қўйилган. $S_{\triangle A_1AB} + S_{\triangle B_1BC} + S_{\triangle C_1CA} \geqslant 3S_{\triangle ABC}$ бўлишини исботланг.

170. ABC учбурчакка ички чизилган айлана унинг томонларига A_1, B_1, C_1 нуқталарда уринади. $S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{pr^2}{2R}$ ни исботланг. R ва r ташқи ва ички чизилган айланалар радиуслари, p периметр.

171. Тенг ёнли, тўғри бурчакли учбурчак ўз катетининг ўртаси атрофида $45°$ га бурилган. Иккала учбурчаклар умумий қисми юзининг берилган учбурчак юзига нисбатини топинг.

172. Тенг ёнли учбурчакнинг баландлиги h, ички чизилган айланасининг радиуси r. Учбурчакнинг юзини топинг.

173. ABC учбурчакда $\angle B : \angle C = 3 : 1$, l_a учбурчак юзини $2 : 1$ нисбатда бўлади. Учбурчакнинг бурчакларини топинг.

174. ABC учбурчакда O нуқта шундай танланганки, $\angle ABO = \angle BCO = \angle CAO = \alpha$. Агар учбурчакнинг томонлари a, b, c ва юзи S бўлса, α ни топинг.

175. ABC учбурчакнинг a, b, c томонлари ва S юзи учун $S = a^2 - (b - c)^2$ муносабат ўринли бўлса, A бурчакнинг катталигини топинг.

176. $ABCD$ параллелограммнинг бир диагонали иккинчисидан 3 марта катта, периметри 4 см, $Z_C(A) = A_1$ ва $S_{(CD)}(B) = A_1$ бўлса, S_{ABCD} ни топинг.

177. Параллелограммнинг томонлари a ва b, диагоналлари орасидаги ўткир бурчак α. Параллелограммнинг юзини топинг.

178. Параллелограмм томонларининг нисбати билан диагоналларининг нисбати тенг бўлиб, 2 га тенг. Ўтмас бурчакнинг учидан катта томонга туширилган баландлик бу томонни қандай нисбатда бўлади?

179. R радиусли айланага S юзли тенг ёнли трапеция ташқи чизилган. Трапециянинг асосини топинг.

180. S юзли тенг ёнли трапециянинг баландлиги билан ўрта чизиғи узунликларининг йиғиндиси C га тенг. Трапециянинг диагоналлари орасидаги бурчакни топинг.

181. Асосидаги бурчаги 60° бўлган тенг ёнли трапецияга айлана ички чизилган. Ён томонларига уриниш нуқталарини бирлаштирувчи тўғри чизиқ трапеция юзини қандай нисбатда бўлади?

182. Асослари a ва b бўлган трапециянинг ён томонлари орасидаги бурчак α, диагоналлари эса ўзаро перпендикуляр. Трапециянинг юзини топинг.

183. Тенг ёнли трапецияга айлана ички чизилган. Уриниш нуқталарини бирлаштиришдан ҳосил бўлган тўртбурчак юзи трапеция юзининг $\frac{3}{8}$ қисмига тенг. Трапеция асосларининг нисбатини топинг.

184. ABC учбурчакни BC томонига параллел бўлган DE кесма билан шундай кесиш керакки, ҳосил бўлган BDE учбурчакнинг юзи берилган k^2 га тенг бўлсин. Ечиш формуласини текширинг.

185. ABC учбурчакнинг AA_1, BB_1, CC_1 баландликлари ўтказилган бўлиб, уларнинг асослари $A_1B_1C_1$ учбурчак ҳосил қилади. Агар $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ лар маълум бўлса, $S_{\triangle A_1B_1C_1} : S_{\triangle ABC}$ ни топинг.

186. ABC учбурчакнинг медианаларидан янги учбурчак ясалган. Бу учбурчаклар юзларининг нисбатини топинг.

187. Тенг ёнли трапециянинг баландлиги h, ён томони ташқи чизилган айлана марказидан α бурчак остида кўринади. Трапециянинг юзини топинг.

188. $ABCD$ параллелограммнинг AB, BC, CD, DA томонларининг ўрталари мос равишда M, N, K, L Агар параллелограммнинг юзи a^2 бўлса, AN, BK, CL, DM лар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

189. Учбурчакнинг ички бурчаклари биссектрисалари давом эттирилганда ташқи чизилган айланани M, N, L нуқталарда кесади. $S_{\triangle MNL} = \frac{1}{2} Rp$, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ бўлишини исботланг.

190. Учбурчакка ички чизилган r радиусли айланага учбурчак томонларига параллел қилиб уринмалар ўтказилган. Ҳосил бўлган учбурчакларга r_1, r_2, r_3 радиусли айланалар ички чизилган. $r_1 + r_2 + r_3 = r$ эканини исботланг.

191. $ABCD$ тўртбурчак берилган B, C, D учлар асосида $DBCM$ параллелограмм ясалган бўлса, $S_{\triangle ACM} = S_{ABCD}$ эканини исботланг.

192. Квадратга томонлари унинг диагоналларига параллел қи-

либ тўғри тўртбурчак ички чизилган. Тўғри тўртбурчакнинг юзи квадрат юзининг ярмидан катта эканлигини исботланг.

193. Тўғри бурчакли трапецияга айлана ички чизилган. Трапециянинг юзи асосларининг кўпайтмасига тенг эканлигини исботланг.

194. Қабариқ тўртбурчакнинг ҳар бир диагоналининг ўртасидан иккинчи диагоналига параллел қилиб тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси тўртбурчак томонларининг ўрталари билан туташтирилган. Ҳосил бўлган тўртта фигуралар тенгдош эканлигини исботланг.

195. Асослари AD ва BC бўлган трапецияга O марказли айлана ички чизилган. $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OD^2}$ бўлишини исботланг.

196. Юзи S бўлган қабариқ олтибурчак берилган. Унинг бир учидан чиқувчи диагоналлари орасида шундайи борки, у ажратган учбурчак юзи $\frac{1}{6}S$ дан катта бўлмаслигини исботланг.

197. R радиусли айланага ўткир бурчаги α бўлган трапеция ички чизилган Кичик асоснинг учларидан ён томонларига параллел ўтган тўғри чизиқлар айлана марказидан ўтади. Трапециянинг юзини топинг.

198. Айланага барча бурчаклари ўткир, юзи S бўлган тенг ёнли учбурчак ички чизилган. Ён томонлари учбурчакнинг ён томонларига параллел, катта асоси айлана диаметри билан устма-уст тушувчи, ўрта чизиғи l бўлган трапеция ҳам айланага ички чизилган. Трапециянинг баландлигини топинг.

199. $ABCD$ трапецияда O диагоналларнинг кесишиш нуқтаси ва $BC:AD=p$. Трапеция юзининг AOD учбурчак юзига нисбатини топинг.

200. $ABCDEF$ қабариқ олтибурчакнинг қарама-қарши томонлари параллел ва тенг. ACE учбурчакнинг юзи олтибурчак юзининг қандай қисмини ташкил этади?

201. Квадратнинг учлари қарама-қарши томонларининг ўрталари билан бирлаштирилган. Квадратнинг томони a бўлса, ҳосил бўлган саккизбурчак юзини топинг.

202. Радиуслари a га тенг бўлган тўртта айлана марказлари томони a бўлган квадрат учларига жойлашган. Тўртала доира учун умумий бўлган фигура юзасини топинг.

203. Радиуслари a га тенг бўлган учта айлана марказлари томони $\sqrt{2}a$ бўлган мунтазам учбурчак учларига жойлашган. Учала доира учун умумий бўлган фигура юзини топинг.

204. R радиусли ярим доира диаметрига мунтазам учбурчак ясалган. Учбурчакнинг ярим доира ташқарисида қолган қисмининг юзини топинг.

205. Мунтазам учбурчакнинг томони a. Унинг марказидан $\frac{a}{3}$ радиус билан айлана чизилган. Учбурчакнинг доира ташқарисида қолган қисмининг юзини топинг.

206. Радиуслари R_1, R_2, R_3 бўлган учта айлана ўзаро ташқи уринади. Уриниш нуқталари орқали ўтувчи доира ясалган. Шу доира юзини топинг.

6-§. Текис фигураларга доир аралаш масалалар

Юқорида текис фигураларнинг ҳар бир турига доир қонуниятлар ва мисолларни алоҳида-алоҳида равишда кўриб чиқдик. Тажрибада эса бу фигуралар кўпинча аралаш ҳолда ҳам учрагани учун ҳамда юқорида эгалланган билим ва малакаларни янада чуқурлаштирмоқ ва умумлаштирмоқ мақсадида қуйида аралаш фигураларга доир масалаларни кўриб чиқамиз. Бундай масалаларни ечиш учун татбиқ қилиниши лозим бўлган қонуниятлар аввалги параграфларда келтирилгани туфайли, биз бу ерда уларни такрорлаб ўтирмай, бу ишни китобхоннинг ўзига ҳавола қиламиз ва амалий мисолларга ўтамиз.

1-масала. Асослари a ва b ҳамда ён томонлари c ва d бўлган трапеция диагоналларининг узунликларини топинг (43-чизма).

Берилган: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$, $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $CD = d$.

Топиш керак: $BD = ?$ $AC = ?$

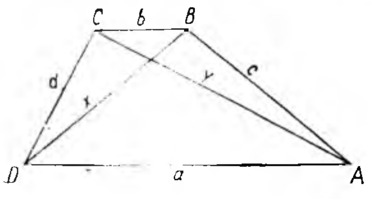
Ечиш. $ABCD$ трапецияда $BD = x$ ва $AC = y$ диагоналлар ўтказилганидан сўнг ABC ва ACD учбурчаклар ҳосил бўлади. $\triangle ABC$да косинуслар теоремасига асосан $y^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\beta$ бўлади. Маълумки, $\cos B = \cos(180° - A) = -\cos A$ эди У ҳолда $y^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$ ҳосил бўлади $\triangle ADC$ да $y^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos D$ ни ҳосил қиламиз. Бу икки тенгликдан: $b^2 + c^2 + 2bc\cos A = a^2 + d^2 - 2ad\cos D$ ёки

$$2bc\cos A + 2ad\cos D = a^2 + d^2 - b^2 - c^2 \qquad (1)$$

Худди шунга ўхшаш ABD ва CBD учбурчакларда косинуслар теоремасини кетма-кет қўллаб, сўнгра тенглаштирилса, у ҳолда

$$2ac\cos A + 2bd\cos D = a^2 - b^2 - (d^2 - c^2) \qquad (2)$$

ни ҳосил қиламиз.



43-чизма.

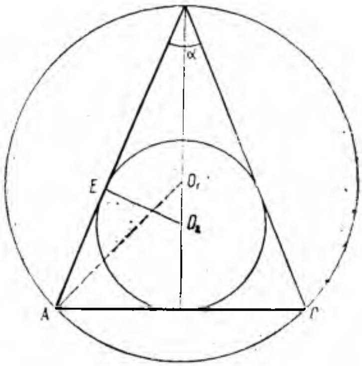
Энди (1) ни b га, (2) ни a га кўпайтириб, (1) дан (2) ни айирсак,

$$2c(a^2 - b^2)\cos A = (a^2 - b^2)(a - b) - (d^2 - c^2)(a + b);$$

$$2c\cos A = a - b - \frac{d^2 - c^2}{a - b}$$

ҳосил бўлади. Шунга ўхшаш (1) ва (2) дан $2d\cos D = a - b + \frac{d^2 - c^2}{a - b}$ ни ҳосил қиламиз. Топилган натижаларни $\cos A$ ва $\cos D$ ларнинг ўрнига қўйилса, у ҳолда:

$$y^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A = b^2 + c^2 + b\left(a - b - \frac{d^2 - c^2}{a - b}\right) = c^2 + ab - \frac{d^2 - c^2}{a - b}b = \frac{a(c^2 - b^2) + b(a^2 - d^2)}{a - b};$$



44- чизма.

$$y = \sqrt{\frac{a(c^2 - b^2) + b(a^2 - d^2)}{a - b}} \quad \text{ва}$$

$$x^2 = b^2 + d^2 + 2d\cos D \cdot b = \frac{a(d^2 - b^2) + b(a^2 - c^2)}{a - b} \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{a(d^2 - b^2) + b(a^2 - c^2)}{a - b}}$$

лар ҳосил бўлади.

Демак, берилган трапециянинг диагоналлари x ва y лар юқоридаги ифодалар ёрдамида ҳисобланар экан.

2-масала. Учидаги бурчаги α бўлган тенг ёнли учбурчакка радиуслари r ва R бўлган ички ва ташқи айланалар чизилган. Шу айланалар радиусларининг нисбатини топинг (44-чизма).

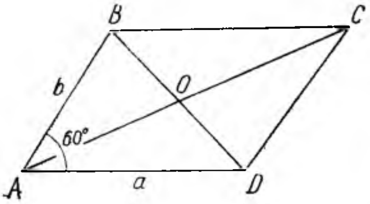
Берилган: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$.

Топиш керак: $R : r = ?$

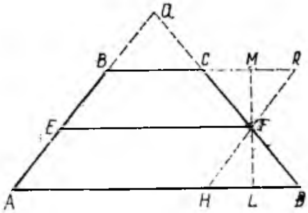
Ечиш. $\triangle ABC$ нинг AB томонида $2BE = AB$ шарт билан E нуқта оламиз. Бу ерда O_1 ички чизилган, O_2 ташқи чизилган айлана маркази ва D нуқта AC томоннинг ўртасидир. E ва O_2 нуқталарни туташтиришдан ҳосил бўлган $\triangle EBO_2$, да $\angle EBO_2 = \frac{\alpha}{2}$ ва $\angle BEO_2 = 90^\circ$ эканидан

$$R = BO_2 = \frac{BE}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{AB}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

бўлади.



45- чизма.



46- чизма.

$\triangle ABD$ да $\angle DAO_1 = \frac{1}{2}\angle DAB = \frac{1}{2}\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$ бўлиб, бундан $O_1D = r = AD\,\mathrm{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$ ҳамда $AD = AB\sin\frac{\alpha}{2}$ эканидан $r = AB\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$ бўлади.

Демак, $R : r = \frac{AB}{2\cos\frac{\alpha}{2}} : AB\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) = \mathrm{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) : \sin\alpha$ ёки $R : r = \frac{\mathrm{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\alpha}$ экани келиб чиқади.

3-масала. Ўткир бурчаги 60° бўлган параллелограмм берилган. Агар диагоналлар квадратларининг нисбати 19/7 бўлса, томонларнинг нисбати топилсин (45-чизма).

Берилган: $ABCD$ параллелограмм, $\angle A = 60°$, $d_1^2 : d_2^2 = \frac{19}{7}$.

Топиш керак: $AB : AD = ?$

Ечиш. Параллелограммда $AB = a$ ва $AD = b$ деб белгилаймиз. Берилишига кўра $\angle A = 60°$ бўлгани учун косинуслар теоремасига асосан:

$\triangle ABD$ дан $DB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60° = a^2 + b^2 - ab$.

$\triangle ABC$ дан $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - 60°) = a^2 + b^2 + ab$. Бу топилган натижалардан $AC > BD$ эканини эътиборга олсак:

$$\frac{AC^2}{BD^2}=d_1^2:d_2^2=(a^2+b^2+ab):(a^2+b^2-ab)=19:7;$$

$$\left|\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+1\right|:\left|\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}+1\right|=19:7;$$

$$7\left(\frac{a}{b}\right)^2+7\frac{a}{b}+7=19\left(\frac{a}{b}\right)^2-19\frac{a}{b}+19;\text{ бундан}$$

$$12\left(\frac{a}{b}\right)^2-26\frac{a}{b}+12=0.$$

Бу квадрат тенгламадан $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ ва $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ ечимлар ҳосил бўлади. Демак, агар $a>b$ шарти бажарилса, у ҳолда жавоб $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$, агар $a<b$ шарти бажарилса, у ҳолда $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ бўлади.

4-масала. Агар берилган трапециянинг асослари мос ҳолда a ва b бўлса, у ҳолда шу асосларга параллел ва трапеция юзини тенг иккига бўлувчи кесма узунлигини топинг (46-чизма).

Берилган: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$, $AD=a$, $BC=b$, $S_{EBCF}=S_{EFDA}$.

Топиш керак: $EF=?$

Ечиш I-усул. Шартга кўра $AD=a$ ва $BC=b$ ҳамда EF кесма трапеция юзини тенг иккига бўлади. Агар $EF=x$ деб олсак, у ҳолда $S_{EBCF}=S_{EFDA}$ га асосан $\frac{(a+x)FL}{2}=\frac{(x+b)FM}{2}$ бўлиб, бундан $(a+x)FL=(x+b)FM$ (1) ҳосил бўлади. $AB \parallel RH$ га асосан $\triangle HFD$ ва $\triangle CRF$ лар ўхшаш учбурчаклар бўлиб, $HD=a-x$ ва $CR=x-b$ эканини эътиборга олсак, $(a-x):FL=(x-b):FM$ (2) бўлади. Натижада (1) ва (2) ларни ҳадлаб кўпайтирсак, қуйидаги натижага эга бўламиз: $a^2-x^2=x^2-b^2$ ёки $x^2=\frac{a^2+b^2}{2}$. У ҳолда $EF=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ҳосил бўлади.

II-усул. Трапециянинг ён томонларини P нуқтада кесишгунча давом эттирамиз (46-чизма). Натижада BPC, EPF, APD ўхшаш учбурчаклар ҳосил бўлади. Уларнинг юзларини мос равишда S_1, S_2, S_3 лар орқали белгилайлик. У ҳолда ўхшаш учбурчаклар юзларининг нисбати уларнинг мос чизиқли элементлари квадратларининг нисбати каби бўлади, яъни $S_1 = qb^2$, $S_2 = qx^2$, $S_3 = qa^2$ (q — пропорционаллик коэффициенти). Демак, $S_2 - S_1 = S_3 - S_2$ ёки $q(x^2 - b^2) = q(a^2 - x^2)$. Бундан $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ ҳосил бўлади.

Машқлар

207. Томонлари a, b, c бўлган учбурчакка айлана ички чизилган. Айланага уринувчи ва a, b томонларни кесиб ўтувчи тўғри чизик учбурчакни иккита фигурага ажратади: бири тўртбурчак, иккинчиси учбурчак. Ҳосил бўлган учбурчакнинг периметрини топинг.

208. ABC учбурчакда AC томон BC томондан катта. CD медиана, ACD ва BCD учбурчакларга ички чизилган айланалар CD га E ва F нуқталарда уринади. $2EF = AC - BC$ эканлигини исботланг

209. Агарда тўртбурчакнинг томонлари давом эттирилганда бир айланага уринса, у ҳолда унинг қарама-қарши томонларининг айирмаси бир-бирига тенг бўлишини исботланг.

210. Учбурчак баландликлари тескари қийматларининг йиғиндиси шу учбурчакка ички чизилган айлана радиусининг тескари қийматига тенг, яъни $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ бўлишини исботланг.

211 Тўғри бурчакли учбурчакка айлана ички чизилган. Агар гипотенуза c ва катетлар йиғиндиси m бўлса, айлана диаметрини топинг.

212 Тўғри бурчакли учбурчакка ташқи чизилган айлана радиусининг ички чизилган айлана радиусига нисбати $5:2$ Учбурчак томонларининг нисбатини топинг.

213 Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетларини диаметр қилиб, уларга айланалар ясалган Шу айланаларнинг кесишиш нуқталари орасидаги масофани топинг.

214. Учбурчакнинг ихтиёрий иккита учи ва ортомаркази орқали ўтувчи айланалар шу учбурчакка ташқи чизилган айланага тенг эканлигини исботланг.

215. Тенг ёнли ABC учбурчакнинг тенг B ва C бурчакларининг биссектрисалари E нуқтада кесишиб, давомида ташқи чизилган айлана билан D ва F нуқталарда кесишади. $EDAF$ тўртбурчак ромб эканлигини исботланг.

216. ABC учбурчакнинг AD баландлиги ва ташқи чизилган айлананинг A учига ўтказилган радиуси AB ва AC томонлар билан тенг бурчаклар ташкил этишини исботланг.

217. Тўғри бурчакли учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланалар диаметрларининг йиғиндиси унинг катетларининг йиғиндисига тенг эканлигини исботланг.

218. Айланага ABC учбурчак ички чизилган. B ва C бурчаклар маълум бўлса, у ҳолда BC томон билан A нуқтада айланага ўтказилган уринма орасидаги бурчакни топинг.

219. ABC учбурчакка ташқи айлана чизилган. A нуқтада айланага ўтказилган уринма BC нурни T нуқтада кесиб ўтади. Агар учбурчак томонлари a, b, c бўлса, CT ва AT кесмаларнинг узунликларини топинг.

220 ABC учбурчак айланага ички чизилган. A ва C учларидан B учдан айлан га ўтказилган уринмагача бўлган масофалар a ва c га тенг. Учбурчакнинг B учидан ўтказилган баландликни топинг.

221. Тенг ёнли учбурчак баландликларининг кесишиш нуқтаси унга ички чизилган айланада ётади. Учбурчакнинг бурчакаларини топинг.

222. Икки тенг $(o_1;\ r)$ ва $(o\ .\ r)$ айланалар бир-бирининг марказидан ўтади. Айланаларнинг умумий қисмига квадрат ички чизилган. Шу квадратнинг томонини топинг.

223. ABC учбурчакнинг A учидан ҳамда AB ва AC томонларнинг ўрталаридан ўтувчи айлана учинчи томонга D нуқтада уринади. $AD^2 = BD \cdot CD$ эканлигини исботланг.

224. Тўғри бурчакли, тенг ёнли ABC учбурчак $(O,\ R)$ айланага ички чизилган D BC томонинг ўртаси, E AD ва OR тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси, $F \in BC$ ҳамда $FE \perp BC$ бўлса $CF = 3EF$ эканини исботланг.

225. ABC учбурчак берилган. BC, CA ва AB тўғри чизиқларда олинган ҳамда учбурчак учлари билан устма-уст тушмаган $A_1B_1C_1$ нуқталар бир тўғри чизиқда ётиши учун $(BC,\ A_1) \cdot (CA,\ B_1) \cdot (AB.\ C_1) = -1$ шарт бажарилиши зарур ва етарли бўлишини исботланг.

226. Мунтазам учбурчак айланага ички чизилган. Айлана ёйида олинган ихтиёрий нуқта учбурчак учлари билан бирлаштирилган. Ҳосил бўлган учта кесманинг бири қолган иккитасининг йиғиндисига тенг бўлишини исботланг.

227. ABC учбурчакнинг AB BC, CA томонларида K, L, M нуқталар олинган Агарда $AK : KB = BL : LC = CM : MA = n$ бўлса, ABC ва KLM учбурчакларнинг оғирлик марказлари устма-уст тушишини исботланг.

228. ABC учбурчакка $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = K$ шарт билан $A_1B_1C_1$ учбурчак ички чизилган $A_1B_1C_1$ учбурчакка $A_1C_2 : C_2B_1 = B_1A_2 : A_2C_1 = C_1B_2 : B_2A_1 = \frac{1}{K}$ шарт билан $A_2B_2C_2$ учбурчак ички чизилган. ABC ва $A_2B_2C_2$ учбурчаклар ўхшаш эканлигини исботланг.

229. ABC учбурчак текислигида олинган ихтиёрий O нуқтадан унинг томонларига t_a, t_b, t_c перпендикулярлар туширилган бўлса, $\frac{t_a}{h_a} + \frac{t_b}{h_b} + \frac{t_c}{h_c} = 1$ эканлигини исботланг.

230. ABC учбурчакнинг BC томонида ихтиёрий D нуқта олинган. ABD ва ACD учбурчакларга ташқи чизилган айланалар радиусларининг нисбати D нуқтанинг вазиятига боғлиқ эмаслигини исботланг.

231. Ўткир бурчаги α бўлган тенг ёнли трапецияга ички ва ташқи айланалар чизилган. Бу айланалар радиусларининг нисбатини топинг.

232. Тенг ёнли учбурчакнинг баландлиги h. Унга ташқи чизилган айлананинг радиуси R. Шу учбурчакка ички чизилган айлана радиусини топинг.

233. Тенг ёнли ABC учбурчакнинг учидаги бурчаги α, унга ички чизилган айлананинг радиуси r бўлса. учбурчак асосига ёпишган бурчак биссектрисасини топинг.

234. Асосидаги бурчаги α шу бурчагининг биссектрисаси l бўлган тенг ёнли учбурчакка ички чизилган айлана радиусини топинг.

235. Трапецияга ички айлана чизиш учун. унинг ён томонларини диаметр қилиб чизилган айланалар бир-бирига уриниши зарур ва етарли бўлишини исботланг.

236 ABC учбурчакнинг A учидан чиққан биссектриса қаршисида ётган томонни D нуқтада, учбурчакка ташқи чизилган айланани E нуқтада кесади. AD нинг DE га нисбатини топинг.

237. R радиусли айланага ABC учбурчак ички чизилган. $AC = b$, $BC = a$ бўлса, AB нинг узунлигини топинг.

238. Тенг ёнли ABC учбурчакда R — ташқи чизилган, r — ички чизилган айланалар радиуслари бўлса, марказлар орасидаги масофани топинг.

239. ABC учбурчакда AD $(D \in BC)$ биссектриса ўтказилган. ABC, ABD ва ADC учбурчакларга ташқи чизилган айланаларнинг марказлари O, O_1, O_2 нуқталар. ABC учбурчакнинг томонлари a, b, c ва ташқи чизилган айлананинг радиуси R бўлса, $|OO_1| = |OO_2| = \dfrac{aR}{b+c}$ ни исботланг.

240. ABC учбурчакка ташқи чизилган айлананинг BAC бурчак тиралган ёйида M нуқта олинган. M нуқтадан AB, BC, CA га ва A нуқтада айланага ўтказилган уринмага туширилган перпендикулярларнинг асослари мос равишда E, F, L ва K нуқталар бўлса, $ME \cdot ML = MF \cdot MK$ эканлигини исботланг.

241. ABC учбурчакнинг томонлари (a, b, c лар) арифметик прогрессия ташкил этади. Шунингдек, $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг томонлари ҳам арифметик прогрессия ташкил этади. Агарда $\angle A = \angle A_1$ бўлса, учбурчаклар ўхшаш эканлигини исботланг

242. Ўзаро ички уринувчи икки айлананинг каттасига тенг томонли учбурчак ички чизилган. Учбурчакнинг учларидан кичик айланага уринмалар ўтказилган. Ҳосил бўлган кесмаларнинг бири қолган иккитасининг йиғиндисига тенг эканлигини исботланг.

243. Айланага $ABCD$ тўртбурчак ички чизилган. ABC, CDA, BCD ва DAB учбурчакларнинг оғирлик марказлари бир айланада ётишини исботланг.

244. Айланага ички чизилган тўртбурчак томонларининг ўрталаридан қаршисида ётган томонларига туширилган тўртта перпендикулярлар бир нуқтада кесишишини исботланг.

245. O марказли айланага $ABCD$ тўртбурчак ташқи чизилган. $\angle AOB + \angle COD = 180°$ эканлигини исботланг.

246. Айланага ташқи чизилган $ABCD$ трапеция диагоналларининг кесишиш нуқтаси E. BAE, BCE, CDE ва DAE учбурчакларга ички чизилган айланалар радиуслари мос равишда r_1, r_2, r_3 ва r_4 бўлса, $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_4}$ бўлишини исботланг.

247. Айланага ички чизилган тўртбурчакнинг бирор учидан бу учга ёпишмаган томонларига туширилган перпендикулярлар асослари орасидаги масофа тўртбурчакнинг қайси учи олинишига боғлиқ эмаслигини исботланг.

248. R радиусли ярим айланага томонлари $AB = 2R$, $CB = \sqrt{2}R$, $AD = R$ бўлган $ABCD$ тўртбурчак ички чизилган. CD томонга A учдан AA_1, B учдан BB_1 перпендикулярлар туширилган. A_1B_1 кесманинг узунлигини топинг.

249. Айланага ички чизилган $ABCD$ тўртбурчакда $AB = \dfrac{1}{2}AD$;

$BC = \frac{1}{2}CD$, $AB = a$, $AC = b$ бўлса, BC нинг узунлигини топинг.

250. Ярим айланага томонлари $AB = BC = 2\sqrt{5}$ см, $CD = 6$ см бўлган $ABCD$ тўртбурчак ички чизилган, Агар AD ярим айлананинг диаметри бўлса унинг узунлигини топинг.

251. Томонлари $AB = 6$ см, $AC = 4$ см, $BC = 5$ см бўлган ABC учбурчакнинг AC томонида $AK=3$ см, AB томонида $AL=2$ см бўлган кесмалар ажратилган. $BLKC$ тўртбурчакнинг периметри ва унинг диагоналларидан ясалган тўгри тўртбурчак юзини топинг,

VII БОБ. СТЕРЕОМЕТРИЯ

Геометриянинг фазода фигуралар ва уларнинг ўзаро миқдорий муносабатларини ўрганадиган бўлими *стереометрия* деб аталади. Стереометрияда ҳам худди планимеtриядагидек геометрик фигураларнинг хоссаларини, ўзаро муносабатларини, миқдорий нисбатларини аниқланади ва исботланади. Фазода асосий фигура сифатида нуқта, тўғри чизиқ ва текислик қаралади.

Стереометриянинг асосий аксиомаларини келтирамиз:

1) Ҳар қандай текислик учун шу текисликка тегишли ёки тегишли бўлмаган нуқта мавжуддир;

2) Агар ихтиёрий икки текислик битта умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда бу текисликлар тўғри чизиқ бўйича кесишади;

3) Агар ихтиёрий икки тўғри чизиқ умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда бу тўғри чизиқлар орқали бир ва фақат биргина текислик ўтказиш мумкин.

Демак, агар берилган T ва T_1 текисликлар умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда улар a тўғри чизиқ бўйича кесишади. Бундан $a \in T$ ва $a \in T_1$ экани келиб чиқади, ёки $T \cap T_1 = a$ кўринишида ҳам ёза оламиз.

Агар берилган a ва b тўғри чизиқлар фазода A умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда бу a ва b тўғри чизиқлар орқали ягона T текисликни ўтказиш мумкинлигидан a ва b тўғри чизиқлар T текисликда ётади. Стереометрияда текисликда геометрик фигуралар учун қўлланилган барча муносабатларни аниқловчи аксиомалар системасидан ҳам фойдаланилишини эслатиб ўтамиз. Шунингдек фазода нуқталар тўпламини топиш масаласини ҳал қилишда планиметрияда кўриб ўтилган нуқталарнинг геометрик ўринларидан ҳамда фазода геометрик фигураларнинг муносабатларидан фойдаланилади. Булардан айримларини эслатиб ўтамиз:

1. Берилган икки тўғри чизиқ фазода ўзаро кесишмаса ва бир текисликда ётса, у ҳолда бу тўғри чизиқлар параллел тўғри чизиқлар дейилади.

2. Агар икки тўғри чизиқ ўзаро кесишмаса ва бир текисликда ётмаса, бундай тўғри чизиқларни айқаш тўғри чизиқлар деб аталади.

3. Агар берилган тўғри чизиқ, берилган текисликдан ўтиб, шу текисликда ўзаро кесишувчи икки тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, у ҳолда бу тўғри чизиқ текисликка ҳам перпендикуляр бўлади.

4. Агар икки текислик бир тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, у ҳолда бу текисликлар ўзаро параллел бўлади.

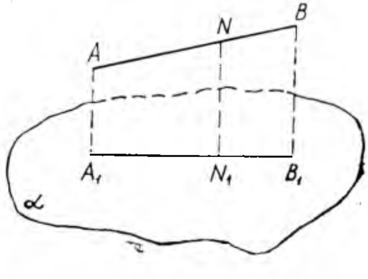
5. Агар берилган тўғри чизиқ берилган текислик билан умумий нуқтага эга бўлмаса ва шу текисликда ётувчи тўғри чизиққа параллел бўлса, у ҳолда берилган тўғри чизиқ текисликка ҳам параллел бўлади.

6. Берилган текисликка тегишли бўлмаган нуқтадан шу текисликка параллел бўлган бир ва фақат биргина текислик ўтказиш мумкин.

7. Агар берилган параллел текисликларни учинчи бир текислик билан кесилса, у ҳолда уларнинг кесишиш чизиқлари ҳам ўзаро параллел бўлади.

8. Агар берилган тўғри чизиқ берилган текисликда ётиб, шу текисликка туширилган оғмага перпендикуляр бўлса, у ҳолда у оғманинг шу текисликдаги проекциясига ҳам перпендикуляр бўлади.

1-§. Фазода нуқта, тўғри чизиқ ва текисликларнинг ўзаро жойлашуви



47- чизма.

Бу параграфда планиметрия курсида кўриб ўтилган асосий аксиомалар системаси ҳамда стереометриянинг аксиомалари биргаликда қаралади. Буларни такрорлашни ҳурматли ўқувчининг ўзига қолдирган ҳолда қуйида уларнинг масала ва мисоллар ечишга татбиқини кўрсатувчи айрим масалаларни ечиш методлари билан таништирамиз.

1-масала. Берилган T_α текисликни кесиб ўтмайдиган AB кесма учларидан шу текисликкача бўлган масофалар a ва b бўлса, у ҳолда кесмани $m:n$ нисбатда бўлувчи N нуқтадан T_α текисликкача бўлган масофа топилсин (47-чизма).

Берилган: T_α, $AB \not\subset T_\alpha$, $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $AN : NB = m:n$.

Топиш керак: $NN_1 = ?$

Ечиш. Масалани ечиш учун вектор тушунчасидан фойдаланамиз. Шартга асосан (чизма) $\overrightarrow{NA} = -\frac{m}{n}\overrightarrow{NB}$. Векторларни қўшиш қоидасига асосан: бир томондан $\overrightarrow{NN_1} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1N_1}$ ва иккинчи томондан $\overrightarrow{NN_1} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1N_1}$ бўлади. Бу иккала тенгликни ҳадлаб қўшсак: $2\overrightarrow{NN_1} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1N} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1N_1} = -\frac{m}{n}\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AA_1} - \frac{m}{n}\overrightarrow{B_1N_1} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1N_1} =$

$$= -\frac{n-m}{n}\overrightarrow{NB} + \frac{n-m}{n}\overrightarrow{B_1N_1} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} = \frac{n-m}{n}\overrightarrow{NB} +$$

$$+ \frac{n-m}{n}\overrightarrow{B_1N_1} + \frac{n-m}{n}\overrightarrow{BB_1} - \frac{n-m}{n}\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} =$$

$$= \frac{n-m}{n}\overrightarrow{NN_1} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{m}{n}\overrightarrow{BB_1}.\text{ Демак, } \left(2 - \frac{n-m}{n}\right)\overrightarrow{NN_1} =$$

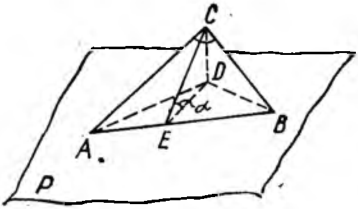
$$\overrightarrow{AA_1} + \frac{m}{n}\overrightarrow{BB_1} \text{ ёки } \frac{n+m}{n}\overrightarrow{NN_1} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{m}{n}\overrightarrow{BB_1} \text{ бўлиб,}$$

$$\overrightarrow{NN_1} = \frac{n\overrightarrow{AA_1} + m\overrightarrow{BB_1}}{m+n}.$$

Бу ерда $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ ва $\overrightarrow{NN_1}$ векторлар коллинеар бўлгани учун $\overrightarrow{NN_1} = \frac{na+mb}{n+m}$ ни ҳосил қиламиз. Ҳосил бўлган натижага ва масалага нисбатан қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $m:n = 1$ бўлганда, $NN_1 = \frac{a+b}{2}$ бўлиб, трапециянинг ўрта чизиғи ҳақидаги масала ҳосил бўлади;

2) $a \neq 0$, $b \neq 0$ бўлганда, $NN_1 = \frac{na+mb}{n+m}$ бўлади;



48- чизма.

3) $a=0$, $b\neq 0$ ёки $a\neq 0$, $b=0$ бўлганда, $NN_1=\frac{mb}{n+m}$ ёки $NN_1=\frac{na}{n+m}$ бўлади;

4) $a=0$, $b=0$ бўлганда, $AB\in T$ бўлиб, N ва N_1 нуқгалар устма-уст тушади, яъни $NN_1=0$.

2- масала. Тўғри бурчакли, тенг ёнли ABC учбурчакнинг c гипотенузаси орқали учбурчак текислиги билан α бурчак ташкил қилувчи T_p текислик ўтказилган. Берилган учбурчакнинг T_p текисликдаги проекцияси ҳосил қилган фигуранинг периметри ва юзи ҳисоблансин (48-чизма).

Берилган: $\triangle ABC$, $\angle C=90°$, $AC=CB$, $AB=c$, $((ABC)\wedge T_p)=\alpha$, $AB\in T_p$.

Топиш керак: $P_{ADB}=?$ $S_{ADB}=?$

Ечиш. Текисликка ўтказилган оғма шартига кўра $AC=CB$ бўлгани учун $AD=DB$ бўлади. Бундан $AE=\frac{1}{2}AB$ ва $DE\perp AB$ бўлиб, $\angle CED=\alpha$ эса икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчагини ташкил этади. ABC учбурчакда $\angle C=90°$ ва $AC=CB$ бўлгани учун $CE=AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}c$. CED учбурчакда $ED=\frac{c}{2}\cos\alpha$ бўлади. ADE учбурчакда $BD=AD=\sqrt{AE^2+ED^2}=\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{4}\cos^2\alpha}=\frac{c}{2}\sqrt{1+\cos^2\alpha}$ экани ҳисобга олинса, у ҳолда $P_{ADB}=AB+BD+AD=c(1+\sqrt{1+\cos^2\alpha})$ ва $S_{ADE}=\frac{c^2\cos\alpha}{4}$ бўлади.

Жавоб: $P_{ADB}=c(1+\sqrt{1+\cos^2\alpha})$; $S_{ADE}=\frac{c^2\cos\alpha}{4}$.

Машқлар

1. Фазода берилган бир нуқта орқали, икки нуқта орқали, уч нуқта орқали, тўрт нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

2. Берилган нуқтадан ўтиб, берилган текисликка параллел бўлган барча тўғри чизиқлар бир текисликка тегишли бўлиб, бу текислик берилган текисликка параллел бўлишини исботланг.

3. Икки айқаш тўғри чизиқ берилган. Бу тўғри чизиқлардан ўтувчи ва ўзаро параллел бўлган фақат бир жуфт текислик мавжуд эканлигини исботланг.

4. M нуқта AB кесманинг ўртаси бўлсин. Ихтиёрий O нуқта учун $OA^2 + OB^2 = 2OM^2 + \frac{1}{2} AB^2$ эканини исботланг.

5. Бир текисликда ётмаган AB ва CD кесмалар берилган. M ва N мос равишда бу кесмаларнинг ўрталари бўлсин. $\frac{1}{2}(AC + BD) > MN$ эканини исботланг.

6. AB кесманинг учларидан T текисликкача бўлган масофалар a ва b, AB кесмани $m:n$ нисбатда бўлувчи M нуқтадан T текисликкача бўлган масофани топинг. Қуйидаги ҳолларни текширинг:

1) AB кесманинг бир учи T текисликда ётган;

2) AB кесма T текисликни кесиб ўтган;

3) AB кесма M нуқтада тенг иккига бўлинган.

7. M нуқта AB кесмани $AM : MB = m : n$ нисбатда бўлади. Ихтиёрий O нуқта учун $n\vec{OA} + m\vec{OB} = (m+n)\vec{OM}$ эканини исботланг.

8. T текисликда $\angle BAC = 60°$ берилган. D нуқта A учдан 25 см, AB томондан 7 см, AC томондан 20 см масофада жойлашган. D нуқтадан T текисликкача бўлган масофани топинг.

9. Учбурчакнинг учларидан T текисликкача бўлган масофалар a, b, c бўлса, шу учбурчак оғирлик марказидан T текисликкача бўлган масофани топинг (мумкин бўлган барча ҳолларни қаранг).

10. Параллелограммнинг учта учидан T текисликкача бўлган масофалар a, b, c. Тўртинчи учидан T текисликкача бўлган масофани топинг (мумкин бўлган ҳолларни қаранг).

11. M нуқтадан ўзаро перпендикуляр бўлган учта T_1, T_2, T_3 текисликкача бўлган масофалар a_1, a_2, a_3. M нуқтадан учала текисликнинг кесишиш нуқтаси O гача бўлган масофани топинг.

12. Тўртбурчакнинг икки айқаш томонларига параллел бўлган текислик иккинчи жуфт томонларни пропорционал бўлакларга бўлишини исботланг.

13. a_1 тўғри чизиқда кетма-кет A_1, B_1, C_1 нуқталар берилган. a_2 тўғри чизиқда $A_1B_1 = k \cdot A_1C_1$; $A_2B_2 = k \cdot A_2C_2$ шарт билан кетма-кет A_2, B_2, C_2 нуқталар берилган. A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 кесмалар A_0, B_0, C_0 нуқталар билан $A_0A_1 = l\,A_1A_2$; $B_0B_1 = l\,B_1B_2$; $C_0C_1 = l\,C_1C_2$ тенг нисбатларда бўлинган. A_0, B_0, C_0 нуқталар бир тўғри чизиқда ётишини ва $A_0B_0 = kA_0C_0$ эканини исботланг.

14. A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2 кесмалар берилган. Бу кесмалар A_3, B_3, C_3 нуқталар билан $A_1A_3 : A_3A_2 = B_1B_3 : B_3B_2 = C_1C_3 : C_3C_2 = k$ шарт билан бўлинган. M_1, M_2, M_3 нуқталар $A_1B_1C_1$; $A_2B_2C_2$; $A_3B_3C_3$ учбурчакларнинг оғирлик марказлари бўлса, M_1, M_2, M_3 нуқталар бир тўғри чизиқда ётишини ҳамда $M_1M_3 : M_3M_2 = k$ эканлигини исботланг.

15. Ҳеч қайси тўрттаси бир текисликда ётмайдиган бешта A, B, C, D, E нуқталар берилган. P — AE нинг, P' — CD нинг ўрталари, Q ва Q', BCD ва ABE учбурчакларнинг оғирлик марказлари бўлса, PQ ва $P'Q'$ кесмалар бир нуқтада кесишиши ва бу нуқтада қандай нисбатда бўлинишини аниқланг.

16. Параллел текисликлар орасида жойлашган икки кесма узунликларининг нисбати $2:3$, текисликларнинг бири билан ҳосил

қилган бурчакларнинг нисбати $2:1$. Шу бурчакларнинг катталигини топинг.

17. AB ва CD кесмалар ўзаро перпендикуляр. Уларнинг ўрталари бўлмиш E ва F нуқталарни бирлаштирувчи EF тўғри чизиқ AB ва CD кесмаларга ҳам перпендикулярдир. Агар $AB = 2m$, $CD = 2n$, $EF = p$ ҳамда $M(M \in EF)$ нуқтадан кесмалар учларигача бўлган масофалар йиғиндиси энг кичик бўлса, EM нинг узунлигини топинг.

18. T ва T' текисликлар $45°$ ли бурчак ташкил этади. Тўғри бурчакли ABC ($\angle C = 90°$) учбурчакнинг A ва B учлари $l = T \cap T'$ га тегишли, $C \in T$. Агар $AB = a$, $\angle BAC = 30°$ бўлса, C нуқтадан T' гача бўлган масофани топинг.

19. T ва T' текисликлар орасидаги бурчак $30°$. $A \in l = T \cap T'$ ва $B \in T \cdot BH \perp T$ ва $H \in T'$. $BH = \frac{\sqrt{3}}{4} AB$ бўлса, $(\widehat{(AB)l})$ ни топинг.

20. $C \in l$ ва $l \parallel T$, $CH \perp T$ ва $H \in T$. $D \in T$ шундай олинганки $CD = \sqrt{3} CH$ ва $(\widehat{l, (CD)}) = 60°$. l ва CD тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текислик билан T текислик орасидаги бурчакни топинг.

21. $ABCD$ параллелограммда $AB : AD = 1 : 2$. $AB \subset T$. CD дан T текисликкача бўлган масофа A учдан BC га туширилган баландликка тенг. Параллелограмм текислиги билан T текислик орасидаги бурчакни топинг.

22. T текисликда бир тўғри чизиқда ётмаган учта A, B, C нуқталар олинган. T' текисликда $S_l(A) = A'$, $S_l(B) = B'$; $S_l(C) = C'$ нуқталар олинган. $T \parallel T'$ эканини исботланг.

23. Тўртбурчак қўшни томонларининг ўрталарини бирлаштирувчи кесмалар параллелограмм ташкил этишини исботланг.

24. Тўртбурчакнинг қарама-қарши томонларининг ўрталарини бирлаштирувчи кесмалар ўзаро кесишган нуқтада тенг иккига бўлинишини исботланг.

25. Тўртбурчакнинг қарама-қарши томонларининг ўрталарини ва диагоналларининг ўрталарини бирлаштирувчи учта кесма бир нуқтада кесишиб, шу нуқтада тенг иккига бўлинишини исботланг.

26. Тўртбурчакнинг барча томонлари ўзаро тенг. $\cos A + \cos B + \cos(\widehat{AB\,DC}) = 1$ эканини исботланг.

27. Олтибурчакнинг қарама-қарши томонлари параллел ва тенг. Унинг барча томонларининг ўрталари бир текисликда ётишини исботланг.

28. Икки айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак α. Бу тўғри чизиқларда $AB = a$ ва $CD = b$ кесмалар олинган. Тўғри чизиқларнинг умумий перпендикуляри MN бўлиб, $M \in AB$, $AM : MB = 2 : 3$ ва $N \in DC$, $CN : ND = 3 : 2$, $MN = m$ бўлса, BD ва BC ларни топинг.

29. Ҳар қандай қабариқ тўрт ёқли бурчакни текислик билан шундай кесиш мумкинки, натижада кесимда параллелограмм ҳосил бўлади. Исботланг.

30. $SABC$ уч ёқли бурчакда ASB ва ASC текис бурчаклар тенг. Буларга қарши ётган икки ёқли бурчаклар тенглигини исботланг.

31. Уч ёқли бурчакда учала биссекториал ярим текисликлар бир тўғри чизиқ орқали ўтишини исботланг.

32. Уч ёқли бурчакнинг қирраларидан ўтиб қарши ётган ёққа перпендикуляр бўлган учта текислик бир тўғри чизиқ орқали ўтишини исботланг.

33. Уч ёқли бурчакнинг иккита текис бурчаги ўзаро тенг. Уларнинг умумий қирраси орқали ўтувчи биссекториал текислик қарши ётган ёққа перпендикулярлигини исботланг.

34. Уч ёқли бурчакнинг барча текис бурчаклари тўғри. Уч ёқли бурчакни текислик билан кесиш натижасида ҳосил бўлган учбурчакнинг ортомаркази уч ёқли бурчак учининг ортогонал проекцияси эканлигини исботланг.

35. Уч ёқли учбурчакнинг текис бурчаклари 60°, 60°, 90°. Бурчакнинг қирраларидан $OA = OB = OC$ кесмалар олинган. Текис бурчаги 90° бўлган ёқ билан ABC текислик орасидаги бурчакни топинг.

36. Текислик уч ёқли тўғри бурчакнинг ёқларига α, β, γ бурчак остида оғган. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma < \sqrt{3}$ эканини исботланг.

37. O нуқтадан чиқувчи учта OA, OB, OC нурлар ўзаро тенг бурчаклар ташкил этади, яъни $\angle BOC = \angle COA = \angle AOB = \alpha$, OM нур учала нурлар билан тенг бурчаклар ташкил этади. Шу бурчак катталигини топинг.

38. ABC учбурчакнинг томонлари a, b, c. D нуқта учбурчак учларидан m, n, k масофада жойлашган. D нуқтадан оғирлик марказигача бўлган масофани топинг.

39. ABC учбурчак ва унинг текислигида ётмаган S нуқта берилган. Агар S нуқта учбурчак учларидан баробар узоқликда ётган бўлса, у ҳолда S нуқта учбурчакка ташқи чизилган айлана марказига проекцияланади. агар S нуқта учбурчак томонларидан баробар узоқликда ётган бўлса, у ҳолда S нуқта учбурчакка ички чизилган айлана марказига проекцияланади. Исботланг.

40. O нуқтадан чиқувчи учта нур ўзаро тўғри бурчаклар ташкил этади. Бу нурларда олинган A, B, C нуқталар орқали T текислик ўтказилган бўлиб, O нуқтадан T текисликка OH перпендикуляр туширилган. Қуйидагиларни исботланг.

1) Кесимда ўткир бурчакли учбурчак ҳосил бўлади;

2) OH перпендикуляр кесимнинг оғирлик марказидан ўтади;

3) $OH^{-2} = OA^{-2} + OB^{-2} + OC^{-2}$;

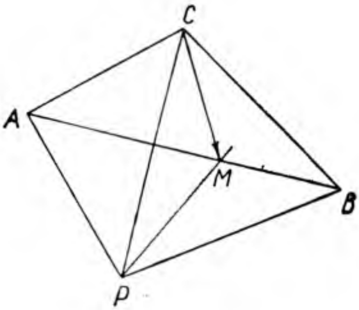
4) $S_{\triangle AOC} = \sqrt{S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle AHC}}$;

5) $S^2_{\triangle ABC} = S^2_{\triangle AOC} + S^2_{\triangle AOB} + S^2_{\triangle BOC}$.

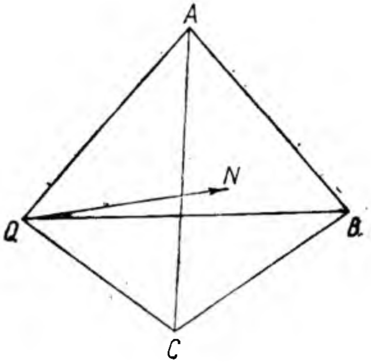
41. $ABCD$ параллелограмм диагоналларининг кесишиш нуқтаси O дан $SA = SC$ ва $SB = SD$ шарт билан OS нур чиқарилган. OS нур параллелограмм текислигига перпендикуляр эканлигини исботланг.

2-§. Фазода нуқталар тўплами

Мазкур параграфда планиметрия қисмида кўриб ўтилган нуқта, тўғри чизиқ ва бошқа фигураларнинг хоссаларидан ҳамда стереометриянинг юқорида келтирилган асосий аксиомаларидан фойдаланилган ҳолда фазода нуқталар тўпламини топишга доир масалалар кўриб чиқилади. Қуйида шундай масалаларни ечиш учун намуналар келтирамиз.



49- чизма.



50- чизма.

1- масала. Тўғри бурчакли ABC учбурчакда C бурчак 90° бўлса, у ҳолда $2PC^2 = PA^2 + PB^2$ шартни қаноатлантирадиган P нуқталар тўпламини топинг.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра тўғри бурчакли ABC учбурчакни чизиб оламиз (49- чизма), сўнгра C учдан CM медиана ўтказамиз. Медиана шартига кўра M нуқта AB кесмани тенг иккига бўлади.

Маълум қоидага асосан $\overrightarrow{CM}^2 = 1/2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ бўлади.

Бундан $\overrightarrow{CM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB})$; $\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB}$ ларнинг скаляр кўпайтмаси 0 га тенг, чунки $CA \perp CB$. Натижада $4\overrightarrow{CM}^2 = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2$. (1)

Энди ABC учбурчак текислигидан ташқарида P нуқта оламиз ва уни A, B, C ва M нуқталар билан бирлаштирамиз. Натижада $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB}$ ҳамда $2PC^2 = PA^2 + PB^2$ шартдан фойдаланиб, $|PC| = \sqrt{\overrightarrow{PC}^2}$ эканини ҳисобга олган ҳолда $2\overrightarrow{PC}^2 = (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CA})^2 + (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB})^2$ ни ёза оламиз ёки $2\overrightarrow{PC}^2 = \overrightarrow{PC}^2 + 2\overrightarrow{PC}\,\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PC}\,\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2$. Бундан $2\overrightarrow{PC}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 = 0$ (2) ҳосил бўлади. (1) ни (2) га қўйилса, $2\overrightarrow{PC} \cdot 2\overrightarrow{CM} + 4\overrightarrow{CM}^2 = 0$ (2) ёки $4\overrightarrow{CM}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CM}) = 0$ бўлиб, $4\overrightarrow{CM}\,\overrightarrow{PM} = 0$ бўлади.

Демак, $CM \perp PM$.

Шундай қилиб, берилган шартни қаноатлантирувчи

P нуқталар тўплами AB гипотенузанинг ўртасидан ва CM медианага перпендикуляр бўлиб ўтувчи PM тўғри чизиқдан иборат экан.

2-масала. Шундай нуқталар тўпламини топингки, бу нуқталардан берилган текисликда ётувчи бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқталаргача бўлган масофалар квадратларининг йиғиндиси ўзгармас сон бўлсин.

Ечиш. Масала шартида берилган нуқталарни бирлаштириб, $\triangle ABC$ ни ҳосил қиламиз (50-чизма). $\triangle ABC$ нинг оғирлик маркази унинг медианалари кесишган нуқтада ётади.

ABC учбурчакдан ташқарида ихтиёрий Q нуқта оламиз ва маълум бўлган қонуниятга асосан:

$$\vec{QA}^2+\vec{QB}^2+\vec{QC}^2=3\vec{QN}^2+\vec{NA}^2+\vec{NB}^2+\vec{NC}^2 \qquad (1)$$

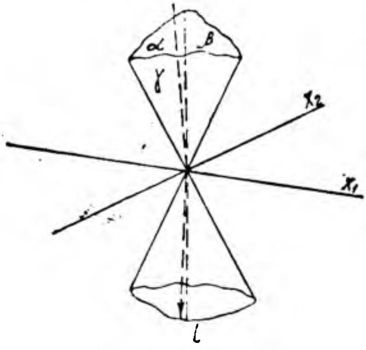
ҳамда векторларни қўшиш қоидасига асосан:

$$\vec{QA}=\vec{QN}+\vec{NA}\Rightarrow\vec{QA}^2=\vec{QN}^2+\vec{NA}^2+2\vec{QN}\,\vec{NA},$$
$$\vec{QB}=\vec{QN}+\vec{NB}\Rightarrow\vec{QB}^2=\vec{QN}^2+\vec{NB}^2+2\vec{QN}\,\vec{NB},$$
$$\vec{QC}=\vec{QN}+\vec{NC}\Rightarrow\vec{QC}^2=\vec{QN}^2+\vec{NC}^2+2\vec{QN}\,\vec{NC}.$$

Ҳосил қилинган натижаларни ҳадлаб қўшсак ва тегишли шакл алмаштиришларни бажарсак:

$$\vec{QA}^2+\vec{QB}^2+\vec{QC}^2=3\vec{QN}^2+\vec{NA}^2+\vec{NB}^2+\vec{NC}^2+$$
$$+2\vec{QN}(\vec{NA}+\vec{NB}+\vec{NC}) \qquad (2)$$

ҳосил бўлади. Маълумки $\vec{NA}+\vec{NB}+\vec{NC}=0$, чунки N нуқта $\triangle ABC$ нинг медианалари кесишган нуқта Демак. (2) дан (1) ни ҳосил қилдик. Ҳосил қилинган натижадан кўриниб турибдики $NA^2+NB^2+NC^2$ ўзгармас маълум сон. $QA^2+QB^2+QC^2$ ҳам ўзгармас сон бўлиши учун QN ўзгармас бўлиши керак. Бунинг учун Q нуқта N нуқтадан тенг узоқликда ётувчи нуқталар тўпламини ҳосил қилиши керак, яъни маркази N нуқтада ётувчи NQ радиус билан чизилган сферадан иборат бўлар экан. Q нуқта ихтиёрий бўлгани учун масала текислик учун ҳам ўринли бўлиб, унда изланган нуқталар тўплами радиуси NQ бўлган айланадан иборат бўлади.



51- чизма.

3- масала. Бир нуқтада кесишувчи учта α, β, γ текисликлардан тенг узоқликда ётувчи нуқталар тўплами топилсин (51- чизма).

Ечиш. Маълумки ихтиёрий α текислик фазони иккита қисм фазога ажратади Агар иккита α ва β текисликлар битта умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда улар a тўғри чизиқ бўйича кесишади ва фазони тўртта қисм фазога ажратади. Бу ҳолда бу иккита текисликдан баробар узоқликда ётган нуқталар тўпламини ($\alpha \cap \beta = a$ бўлган ҳол учун) қарасак, бу нуқталар тўплами α ва β текисликларнинг кесишишидан ҳосил бўлган бурчакларнинг биссекториал текислигидан иборат бўлади. Ўзаро перпендикуляр бўлган биссекториал текисликлар кесишувчи α ва β текисликлари учун иккита бўлади ва бу текисликлар ҳам a тўғри чизиқ бўйича α ва β текисликларни кесиб ўтади. Агар α, β, γ текисликлар битта умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда бу нуқта фазони саккизта қисм фазога ажратади. Бунда α ва β текисликлар x_1, α ва γ текисликлар x_2, β ва γ текисликлар x_3 тўғри чизиқлари бўйича кесишадилар. Ҳосил бўлган ҳар бир фазо уч ёқли бурчак ҳосил қилади, бундан саккизта уч ёқли бурчак ҳосил бўлади. Бу бурчакларнинг мос бўлган ҳар иккитаси ўзаро тенгдир. Демак, ўзаро тенг бўлган уч ёқли бурчаклар жуфти тўртта бўлади. Уч ёқли бурчакларнинг ҳар бир бурчагидан ўтган биссекториал текисликлар кесишишидан ҳосил бўлган тўғри чизиқ шу уч ёқли бурчак ёқларидан баробар узоқликда ётувчи тўғри чизиқ бўлади. Юқоридаги шартга асосан тўрт жуфт уч ёқли бурчак учун туртта тўғри чизиқ ўтади. Шу тўғри чизиқлар берилган учта текисликдан баробар узоқликда ётувчи биз излаётган нуқталар тўпламидир.

Машқлар

42. Фазода берилган икки A ва B нуқтадан баробар узоқликда ётган нуқталар тўпламини топинг.

43. Фазода берилган бир тўғри чизиқда ётмайдиган, учта A, B, C нуқтадан бир хил узоқликда ётган нуқталар тўпламини топинг.

44. Тўғри тўртбурчакнинг тўртала учидан баробар узоқликда ётувчи нуқталар тўпламини топинг.

45. Тенг ёнли трапециянинг тўртала учидан баробар узоқликда ётувчи нуқталар тўпламини топинг.

46. Фазода берилган A ва B нуқталаргача бўлган масофаларининг квадратлари ўзгармас бўладиган нуқталар тўпламини топинг.

47. Икки параллел тўғри чизиқдан бир хил узоқликда ётувчи нуқталар тўпламини топинг.

48. Кесишувчи икки тўғри чизиқдан бир хил узоқликда ётувчи нуқталар тўпламини топинг.

49. Берилган ромбнинг томонларидан бир хил узоқликда ётувчи нуқталар тўпламини топинг.

50. Уч тўғри чизиқдан бир хил узоқликда ётувчи нуқталар тўпламини топинг (мумкин бўлган барча ҳолларни қаранг).

51. Берилган текисликдан маълум масофада ётувчи нуқталар тўпламини топинг.

52. Икки параллел текисликдан баробар узоқликда ётувчи нуқталар тўпламини топинг.

53. Кесишувчи икки текисликдан баробар узоқликда ётувчи нуқталар тўпламини топинг.

54. Берилган уч текисликдан баробар узоқликда ётувчи нуқталарнинг тўпламини топинг (мумкин бўлган барча ҳолларни қараб чиқинг).

55. Берилган кесма тўғри бурчак остида кўринувчи нуқталар тўпламини топинг.

56. Берилган нуқтанинг берилган текисликда ётувчи ҳамда унинг маълум бир нуқтасидан ўтувчи барча тўғри чизиқларга ортогонал проекциялари ташкил этадиган нуқталар тўпламини топинг.

57. Берилган A нуқтанинг берилган l тўғри чизиқдан ўтувчи барча текисликлардаги ортогонал проекциялари ташкил этадиган нуқталар тўпламини топинг.

58. Берилган A нуқтанинг берилган B нуқтадан ўтувчи барча текисликлардаги ортогонал проекциялари ташкил этадиган нуқталар тўпламини топинг.

59. Берилган кесма берилган бурчак остида кўринувчи нуқталар тўпламини топинг.

60. Фазода берилган A ва B нуқталаргача бўлган масофалари квадратларининг йиғиндиси ўзгармас бўладиган нуқталар тўпламини топинг.

61. T текислик ва бу текисликда ётмаган A ва B нуқталар берилган. T текисликда шундай M нуқталар тўпламини топингки, MA ва MB тўғри чизиқлар бу текислик билан тенг бурчаклар ҳосил қилсин.

62. Фазода берилган икки нуқтагача бўлган масофаларининг нисбати ўзгармас бўладиган нуқталар тўпламини топинг.

63. Фазода берилган икки параллел тўғри чизиққача бўлган масофаларининг нисбати ўзгармас бўладиган нуқталар тўпламини топинг.

64. Умумий асосли ва маълум юзага эга бўлган учбурчакларнинг учлари ташкил этган нуқталар тўпламини топинг.

65. A ва B нуқталар берилган. A нуқтанинг B нуқтадан ўтувчи барча тўғри чизиқларга нисбатан симметрик аксланиши натижасида ҳосил бўладиган нуқталар тўпламини топинг.

66. Берилган нуқтанинг маълум l тўғри чизиққа параллел бўлган барча тўғри чизиқларга нисбатан симметрик аксланиши натижасида ҳосил бўладиган нуқталар тўпламини топинг.

67. Берилган l тўғри чизиққа уринувчи R радиусли сфералар марказлари ҳосил қилган нуқталар тўпламини топинг.

68. Берилган сферада маълум узунликда бўлган ватарларнинг ўрталари ҳосил қилган нуқталар тўпламини топинг.

69 Берилган тўғри чизиқнинг маълум нуқтасидан тик ўтувчи барча тўғри чизиқлар ҳосил қиладиган тўпламни топинг.

70. Берилган тўғри чизиқ орқали ўтувчи ва бошқа тўғри чизиққа параллел бўлган текислик ясанг.

71, Икки параллел текисликни шундай ясангки, буларнинг ҳар бири берилган икки айқаш тўғри чизиқнинг бири орқали ўтсин.

72. Берилган нуқта орқали ўтувчи ва берилган текисликка параллел бўлган текислик ясанг.

73. Берилган нуқта орқали ўтувчи ва берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган текислик ясанг.

74. Берилган нуқтадан ўтувчи ва берилган текисликка тик бўлган тўғри чизиқ ясанг.

75. Берилган тўғри чизиқдан ўтувчи ва берилган текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ ясанг.

76. Айқаш тўғри чизиқларнинг ҳар бирини перпендикуляр равишда кесиб ўтувчи тўғри чизиқ ясанг.

77. Берилган сферик сиртнинг берилган текислик билан кесишиш чизиғини ясанг.

78. Берилган тўғри чизиқнинг берилган сферик сирт билан кесишиш нуқталарини ясанг.

79. Конус сиртнинг унинг учидан ўтувчи текислик билан кесишиш чизиғини ясанг.

80. Конус сиртнинг унинг ўқига перпендикуляр бўлган текислик билан кесишиш чизигини ясанг.

81. Берилган конус сиртнинг берилган тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталарини ясанг.

82. Цилиндрик сиртнинг унинг ўқига перпендикуляр бўлган текислик билан кесишиш чизиғини ясанг.

83, Берилган цилиндрик сиртнинг берилган тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталарини ясанг.

84. Берилган l тўғри чизиқдан ўтувчи ва берилган сферага уринувчи текислик ясанг.

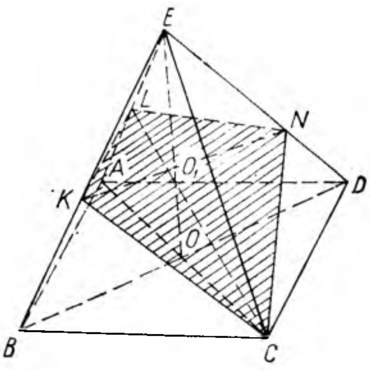
85. Берилган A нуқтадан ўтувчи ва берилган конус сиртига уринувчи текислик ясанг.

86. Берилган A нуқтадан ўтувчи ва берилган цилиндрик сиртга уринувчи текислик ясанг.

3-§. Фазовий фигураларда кесимлар

Геометрик жисмларга кесимлар ўтказиш ўқувчидан маълум билим ва малака талаб қилади. Кесим ясаш, бу масала шартида талаб қилинаётган кесим текислигини чизиб қўя қолиш эмас, балки ясалган кесим ҳа-

ҳақиқатан ҳам талаб қилинган кесим эканлигини исботлаш ҳамдир. Аммо, агар кесим ясаш маълум геометрик қонуниятлар ёрдамида амалга оширилса, у ҳолда у кесим изланаётган кесим эканлиги исботланмаса ҳам бўлади.



52- чизма.

1-масала. Мунтазам тўртбурчакли пирамида асосининг бир учидан унга қарши ётган ён қиррага перпендикуляр бўлган кесим ясанг. Агар пирамида асосининг томони a ва ён қирралари асос текислиги билан φ бурчак ташкил қилса, кесим юзини топинг.

1. Кесимни ясаш. Масаланинг шартига кўра пирамида мунтазам, яъни $AB = BC = CD = AD$ ҳамда $AE = BE = CE = DE$ (52-чизма).

Асоснинг C учидан AE қиррага перпендикуляр туширамиз. Бу перпендикуляр EO баландликни O_1 нуқтада ва EA ни L нуқтада кесади. Берилган пирамида мунтазам бўлгани ва ён қирралари асос текислиги билан φ бурчак ташкил қилгани учун O_1 нуқтадан BD диагоналга $KN \parallel DB$ кесмани ўтказамиз. Натижада DE қиррада N ва BE қиррада K нуқталар ҳосил бўлади. L, C, K ва N нуқталар бир текисликда ётувчи нуқталардир. $AE \perp LC$ ясалишига кўра ҳамда $AE \perp BL$ ва $AE \perp KN$, демак, $AE \perp (LKCN)$.

Ҳақиқатан $\angle ELC = 90°$ бўлгани учун $\angle ELK = \angle ELN = 90°$ бўлади, ҳамда LC нинг пирамида асосидаги проекцияси AC ва $NK \parallel BD$ ва $AC \perp BD$ эканлигидан $LC \perp KN$ бўлади.

2. Кесим юзини ҳисоблаш. Кесимнинг ясалишига кўра $LC \perp KN$ ёки $(\widehat{LC\,KN}) = 90°$. $S_{KLNC} = \frac{1}{2} KN \cdot LC$. Бу ерда LC ни тўғри бурчакли ALC учбурчакдан қарасак: $\angle CAL = \varphi$, $AC = \sqrt{2}\,a$ эканига асосан $LC = \sqrt{2}\,a \sin\varphi$ ни ёза оламиз. Тенг ёнли уч-

бурчак KENдан $KN \parallel BD$ ва $\angle EKN = \varphi$ бўлгани учун $KO_1 = O_1E\operatorname{ctg}\varphi$, $O_1E = OE - OO_1$.

$\triangle AOE$ дан $OE = \frac{\sqrt{2}a}{2}\operatorname{tg}\varphi$ ва $\triangle OO_1C$ дан эса $\angle OCO_1 = 90° - \angle LAC = 90° - \varphi$. Булардан $\triangle OO_1 = OC\operatorname{tg}(90° - \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}a\operatorname{ctg}\varphi$. Демак, $O_1E = \frac{\sqrt{2}}{2}a(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{ctg}\varphi)$; $KN = 2O_1E\operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{2}a(1 - \operatorname{ctg}^2\varphi)$. Шундай қилиб, $S_{KLMC} = \frac{1}{2}LC \cdot KN = a^2(1 - \operatorname{ctg}^2\varphi)\sin\varphi = -\frac{a^2\cos 2\varphi}{\sin\varphi}$.

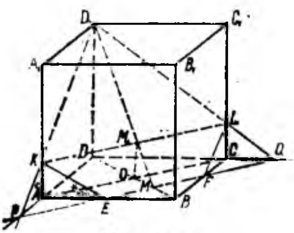
Жавоб. $S_{кес} = -\frac{a^2\cos 2\varphi}{\sin\varphi}$.

Бу ерда $\varphi > 45°$ бўлгани учун $\cos 2\varphi$ манфийдир, шунинг учун $S_{кес} = \frac{a^2\cos(180° - 2\varphi)}{\sin\varphi}$ деб ёзиш мумкин

2-масала. Кубнинг қирраси a га тенг. Юқори асосининг бир учидан ҳамда пастки асосининг унга қарши ётган учидан чиқадиган иккита қиррасининг ўрталаридан ўтувчи текислик ҳосил қилган кесим ясалсин ва бу кесимнинг юзи ҳисоблансин.

1. Кесимни ясаш. Масала шартига кўра агарда устки асосда, D_1 учни олсак, у ҳолда пастки асосининг унга қарши ётган учи B бўлади (53-чизма) $E - AB$ қирранинг $F - CB$ қирранинг ўрталари бўлсин. Масалада сўралган кесим текислиги шу учта нуқта орқали ўтиши керак. Бу текислик AA_1 ва CC_1 қирраларни K ва L нуқталарда кесиб ўтади. Ҳақиқатан EF, DA ва DC ларни давом эттирсак, улар мос равишда P ва Q нуқталарда кесишади.

D_1 ни P билан бирлаштирсак, у A_1A ни K нуқтада; D_1 ни Q билан бирлаштирсак, у C_1C ни L нуқтада кесади. Ҳосил бўлган E, F, L, D_1, K нуқталарни кетма-кет бирлаштирсак, масала шартида сўралган кесим D_1KEFL бешбурчак ҳосил бўлади.



53- чизма.

2. Кесим юзини ҳисоблаш. Бунинг учун бир неча усуллар мавжуд бўлиб, шулардан бирини келтирамиз: $S_{кес} = S_{\triangle D_1PQ} - 2S_{\triangle PEK} \cdot D_1$ уч-

дан бешбурчакнинг баландлигини ўтказамиз, у ҳолда D_1M $\triangle D_1PQ$ нинг ва M_1M эса $\triangle PEK$ нинг баландликлари бўлади.

1) $\triangle D_1DM: DM = DB - BM = \sqrt{2}a - \frac{\sqrt{2}}{4}a = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$,

$$D_1M = \sqrt{DD_1^2 + DM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{9}{8}a^2} = \sqrt{\frac{17}{8}}a.$$

Шунингдек $PQ = 3EF = 3\frac{\sqrt{2}}{2}a$. У ҳолда

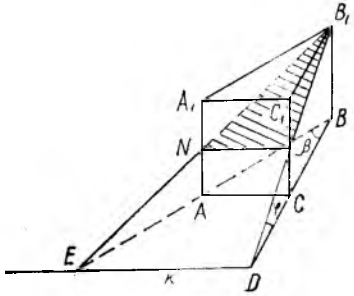
$$S_{\triangle D_1PQ} = \frac{1}{2}PQ \cdot D_1M = \frac{1}{2}\frac{3\sqrt{2}}{2}a\sqrt{\frac{17}{8}}a = \frac{3\sqrt{17}}{8}a^2.$$

2) $\triangle D_1DM \overset{k=3}{\backsim} \triangle M_1OM$ бўлганидан: $M_1M = \frac{1}{3}D_1M = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{17}{8}}a$. У ҳолда $S_{\triangle PEK} = \frac{1}{2}PE \cdot M_1M = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}a\frac{1}{3}\sqrt{\frac{17}{8}}a = \frac{\sqrt{17}}{12}a^2$. Демак, $S_{кес} = S_{\triangle D_1PQ} - 2S_{\triangle PEK} = \frac{3\sqrt{17}}{8}a^2 - 1\frac{\sqrt{17}}{12}a^2 = \frac{7\sqrt{17}}{24}a^2$.

Жавоб. $S_{кес} = \frac{7\sqrt{17}}{24}a^2$.

3-масала. $ABCA_1B_1C_1$ тўғри призманинг асоси B учидаги бурчаги $\beta(\beta < 45°)$ бўлган тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, BC ва AC катетлар орқали ўтувчи ёқлар юзларининг айирмаси S' га тенг. B_1 уч AA_1 қирранинг ўртаси ва AC катетга нисбатан B нуқтага симметрик бўлган D нуқта орқали ўтувчи ҳамда асос текислиги билан φ бурчак ташкил қилувчи текислик ясалсин ва ҳосил бўлган кесим юзи топилсин.

1. Кесимни ясаш. Масаланинг шартига кўра AC катетга нисбатан B нуқтани симметрик кўчирамиз ва D нуқтани ҳосил қиламиз (54-чизма).



54- чизма.

$AC \perp BC$ бўлгани учун $DK \parallel AC$ ва $DK \perp BC$ ни ўтказамиз. D нуқтани B_1 билан бирлаштирамиз. У CC_1 қиррани F нуқтада кесиб ўтади. Призмани кесувчи T текислик ва (BB_1CC_1) текисликлар B_1D чизиқ бўйича ҳамда $BC \perp DK$ бўлгани учун $T \cap (ABC) = DK$ бўйича кесишади. Бундан T ва (ABC) текисликларнинг чизиқли бурчаги $\angle B_1DB = \varphi$ ҳосил бўлади. Энди AA_1 қирранинг ўртасини танлаймиз ва уни N нуқта орқали белгилаймиз. B_1N тўғри чизиғи AB ни давоми ва DK тўғри чизиқлари билан E нуқтада кесишади, чунки T текислик AA_1B_1B текислик билан B_1E тўғри чизиғи бўйича кесишади. Натижада топилган B_1, N ва F нуқталарни бирлаштирсак, изланган кесим ҳосил бўлади.

2. Кесим юзини ҳисоблаш. Ҳосил қилинган кесимнинг призма асосидаги проекцияси ABC учбурчакдан иборат бўлганлиги сабабли ва мавжуд формулага асосан: $S_{ac} = \cos\varphi S_{кес}$ бўлади; $S_{ac} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} ab$ бўлгани учун $(AC = b,\ BC = a)$ $S_{кес} = \frac{ab}{2\cos\varphi}$ бўлади. $\triangle ABC$ дан $b = a\,\mathrm{tg}\beta$ ҳосил бўлади, бундан $S_{кес} = \frac{a^2\mathrm{tg}\beta}{2\cos\varphi}$ бўлади. Масала шартига асосан, катетлар орқали ўтувчи ёқлар юзларининг айирмаси, $S = (a - b)H$, $(a > b)$. $\triangle B_1DB$ дан: $BD = 2BC = 2a$, $H = 2a\,\mathrm{tg}\varphi$ бўлади. Демак,

$$S = 2a^2(1 - \mathrm{tg}\beta)\mathrm{tg}\varphi \text{ ёки } a^2 = \frac{S}{2(1 - \mathrm{tg}\beta)\mathrm{tg}\varphi}$$

ҳосил бўлиб, кесим юзи

$$S_{кес} = \frac{S\,\mathrm{tg}\beta}{4(1 - \mathrm{tg}\beta)\sin\varphi} = \frac{S\sin\beta}{4\sqrt{2}\sin(45° - \beta)\sin\varphi}$$

дан иборат бўлади. Шундай қилиб изланган натижа $S_{кес} = \frac{S\sin\beta}{4\sqrt{2}\sin(45° - \beta)\sin\varphi}$ бўлади, бу ерда $\beta < 45°$ эканини ҳисобга олиш зарурдир.

Машқлар

87. Кубни текислик билан шундай кесиш мумкинки, натижада кесимда мунтазам олтибурчак ҳосил бўлади. Исботланг.

88. Кубнинг қиррасида ихтиёрий нуқта берилган. Бу нуқта орқали кубни кесувчи текисликлар ўтказилган. Кесим мунтазам учбурчак, тўртбурчак, бешбурчак бўлиши мумкинми?

89. Кубнинг бирор диагонали орқали ўтувчи юзаси энг кичик бўлган кесим ясанг.

90. Кубнинг қирраси a га тенг. Устки ва остки асослардаги қарама-қарши қирраларнинг ўрталаридан ҳамда бирор ён қиррасининг ўртасидан ўтадиган текислик ясанг. Ҳосил бўлган шаклнинг турини аниқланг ва унинг юзини ҳисобланг.

91. Кубнинг қирраси a га тенг. Устки асоснинг қарама-қарши икки учи ва пастки асос икки қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесим ясанг. Ҳосил бўлган шаклнинг турини аниқланг ва унинг юзини топинг.

92. Кубнинг қирраси a га тенг. Кубнинг марказидан ўтувчи ва икки қўшни ёқнинг икки диагоналига параллел бўлган текислик кесимини ясанг. Ҳосил бўлган шаклнинг турини аниқланг ва юзини топинг.

93. Кубнинг қирраси a га тенг. Юқори асоснинг бир учидан ва пастки асоснинг унга қарши ётган учидан чиқадиган иккита қиррасининг ўрталаридан ўтувчи кесим ясанг ва унинг юзини топинг.

94. Кубни қирраси a га тенг. Куб диагоналининг бирор нуқтасидан шу диагоналга перпендикуляр текислик ўтказилган. Бу текисликнинг куб қирралари билан кесишиши натижасида ҳосил бўладиган шаклнинг турини аниқланг.

95. DA, DB, DC лар кубнинг D учидан чиқувчи қирралари бўлсин. Кубнинг C учи ва DA ҳамда DB қирраларнинг ўрталари орқали текислик ўтказилган. Кубнинг қирраси a га тенг бўлса, кубнинг маркасидан текисликкача бўлган ммсофани топинг.

96. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг томони a га тенг, $ABCD$ ёқнинг маркази H бўлсин B_1H нинг ўртасидан перпендикуляр ўтувчи текислик ҳосил қиладиган кесим юзини топинг.

97. Учбурчакли мунтазам призмада пастки асоснинг бир томони ва устки асоснинг унга қарши ётган учи орқали ўтувчи текислик ҳосил қилган кесим юзи S га тенг. Призма асосининг марказидан бу кесимга параллел ўтувчи кесим юзини топинг.

98. $ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли мунтазам призманинг баландлиги h га, асосининг томони b га тенг. A, B_1 ва $E \in CC_1$ нуқталар орқали $\angle AEB_1 = \frac{2\pi}{3}$ шарт билан кесувчи текислик ўтказилган. Ҳосил бўлган шаклнинг юзини топинг.

99. $ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призманинг ён қирраси l га, асосида жойлашган мунтазам учбурчакнинг томони b га тенг. Асосида жойлашган ABC учбурчакнинг маркази O бўлиб, B_1O кесма призма асосларига перпендикулярдир. BC қирра ва AA_1 қирранинг ўртаси орқали ўтувчи текислик ҳосил қиладиган кесим юзини топинг.

100. Учбурчакли тўғри призманинг асоси катетлари a ва b бўлган тўғри бурчакли учбурчакдан иборат. Призманинг ён қирраларини кесиб ўтувчи текислик кесимда тенг томонли учбурчак ҳосил қилади. Шу учбурчакнинг томонини топинг.

101. Учбурчакли тўғри призманинг асоси гипотенузаси C бўлган тенг ёнли учбурчакдан иборат. Пастки асоснинг гипотенузасидан ўтказилган текислик кесимда мунтазам учбурчак ҳосил қилади. Агарда ён ёқларга, устки асосга ва кесимга уринувчи шарни ички чизиш мумкин бўлса, призма ҳажмини топинг.

102. $ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призмада кесувчи икки текислик ўтказилган. Биринчиси AB қирра ва A_1C_1 қирранинг ўртаси орқали, иккинчиси эса A_1B_1 қирра ва CC_1 қирранинг ўртаси орқали ўтади. Бу кесимларнинг кесишишидан ҳосил бўлган кесма узунлигининг AB кесма узунлигига нисбатини топинг.

103. Асоси мунтазам учбурчакдан иборат, баландлиги $\sqrt{2}\,b$ га тенг бўлган тўғри $ABCA_1B_1C_1$ призма асосининг томони b га тенг. CC_1 қирранинг ўртаси, A ва B учлар орқали кесувчи текислик ўтказилган. B уч, AC ва B_1C_1 қирраларнинг ўрталари орқали иккинчи кесувчи текислик ўтган. Бу кесимларнинг кесишиши натижасида ҳосил бўладиган кесма узунлигини топинг.

104. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқувчи учта қиррасининг узунликлари a, b, c га тенг. Олтита қиррасининг ўрталари орқали ўтувчи текислик ҳосил қиладиган кесим юзини топинг.

105. Тўғри параллелепипед асосининг қўшни томонларининг ўрталари орқали ўтувчи текислик бу томонларнинг умумий учидан чиқувчи диагоналга параллел. Параллелепипед асоси томонларининг нисбати $1:2$ бўлса, кесувчи текислик ён сиртни қандай нисбатда бўлади?

106. Тўрт бурчакли мунтазам призмада ўзаро параллел бўлган икки кесувчи текислик ўтказилган бўлиб, булардан бири асоснинг диагонали орқали ўтиб, параллелепипеднинг унга айқаш диагоналига параллелдир. Иккинчиси эса призманинг ўқини $1:3$ нисбатда бўлади. Агар биринчи кесимнинг юзи Q бўлса, иккинчи кесимнинг юзини топинг.

107. Тўғри параллелепипеднинг ўлчамлари a, b, c. Ҳеч бир иккитаси бир текисликда ётмайдиган учта қиррасининг ўрталари орқали кесувчи текислик ўтказилган. Кесим юзини топинг.

108. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри параллелепипеднинг баландлиги $\sqrt{3}\,a$, асоси эса $AB=a$, $BC=2a$, $\angle ABC=120°$ бўлган параллелограммдан иборат. BD_1 орқали ўтувчи ҳамда AC га параллел бўлган кесувчи текислик ва асос орасидаги бурчакни топинг.

109. Учбурчакли мунтазам призманинг барча қирралари ўзаро тенг. A_1 нуқта, CC_1 қирранинг ўртаси M ва асосидаги ABC учбурчакнинг BC томонининг ўртаси N орқали текислик ўтказилган. Призманинг кесим ажратган бўлакларининг ҳажмлари нисбатини топинг.

110. Мунтазам тетраэдрни текислик билан шундай кесиш мумкинки, натижада кесим квадратдан иборат бўлади. Исботланг.

111. Учбурчакли пирамиданинг қарама-қарши қирралари ўзаро перпендикуляр. Бу пирамидани текислик билан шундай кесиш мумкинки, натижада кесим тўғри тўртбурчакдан иборат бўлади. Исботланг.

112. Учбурчакли пирамидани текислик билан шундай кесиш мумкинки, натижада кесим параллелограммдан иборат бўлади. Исботланг.

113. Учбурчакли мунтазам пирамида баландлигининг ўртасидан ён ёққа параллел ўтувчи текислик билан кесилган. Ҳосил бўлган кесим юзининг ён ёқ юзига нисбатини топинг.

114. Мунтазам тетраэдрда AD қирранинг ўртасидан BC қиррага параллел қилиб ўтказилган текислик ABC ёқни $\frac{\pi}{4}$ бурчак остида кесиб ўтади. Тетраэдрнинг қирраси a га тенг бўлса, кесим юзини топинг.

115. Мунтазам тетраэдрнинг қирраси a га тенг. A учдан BC

қиррага параллел чизиқ ўтган. Кесувчи текислик AB билан ҳосил қилган бурчак $\frac{\pi}{6}$ га тенг. Кесим юзини топинг.

116. Учбурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси $2b$ га, асосининг томони b га тенг. Ён қирранинг ўртасидан унга перпендикуляр қилиб текислик ўтказилган. Ҳосил бўлган кесим юзини топинг.

117. Учбурчакли мунтазам пирамида асосининг бир учи ва иккита ён қиррасининг ўрталари орқали ўтувчи текислик билан кесилган. Агарда кесувчи текислик ён ёққа перпендикуляр бўлса, пирамида ён сирти юзининг асос юзига нисбатини топинг.

118. Мунтазам тетраэдр C учи ва унга қарши ётган ёқнинг ўртаси орқали AB га параллел ўтган текислик билан кесилган. Кесим ажратган фигуралар ҳажмларининг нисбатини топинг.

119. $DABC$ пирамиданинг асоси $\angle C=90°$, $\angle A=30°$ бўлган ABC учбурчакдан иборат. Ён қирраларнинг узунликлари b га тенг бўлиб, ҳар бири асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. C уч ва DA, DB қирраларнинг ўрталари M, N нуқталар орқали ўтувчи кесим юзини топинг.

120. $ABCD$ мунтазам тетраэдр қиррасининг узунлиги a га тенг. AD қирранинг ўртасидан BC га параллел чиқиб, ABC текислик билан $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$ бурчак ташкил этувчи текислик ҳосил қиладиган кесим юзини топинг.

121. Учбурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси узунлиги $\sqrt{3}\,a$ га, асос томонининг узунлиги a га тенг. Ён қиррасининг ўртасидан шу қиррага перпендикуляр ўтувчи текислик ҳосил қилган кесим юзини топинг.

122. $ABCD$ мунтазам тетраэдрнинг қирраси a га тенг, A уч орқали BC га параллел текислик шундай ўтказилганки, бунда AB билан шу кесувчи текислик ҳосил қилган бурчак 30° га тенг. Кесим юзини топинг.

123. $DABC$ пирамиданинг DA қирраси асос текислигига перпендикуляр. A учдан BC га параллел ва DBC ёққа перпендикуляр текислик ўтказилган. $DA=1$, $AB=\frac{13}{16}$, $AC=\frac{15}{16}$, $BC=\frac{7}{8}$ бўлса, кесим юзини топинг.

124. Мунтазам тетраэдрнинг қирраси a га тенг. Тетраэдр кесишмайдиган икки қиррасига параллел ва марказидан q $\left(0<q<\frac{\sqrt{2}a}{4}\right)$ масофадан ўтувчи текислик билан кесилган. Ҳосил бўлган кесимнинг томонлари, периметри ва юзини топинг.

125. $DABC$ пирамиданинг ён қирралари ўзаро тенг, асоси катетлари $CA=a$ ва $CB=\sqrt{3}\,a$ бўлган тўғри бурчакли учбурчак, баландлиги $DO=h$. Катетларнинг ўрталаридан DC қиррага параллел қилиб кесувчи текислик ўтказилган бўлса, ҳосил бўлган кесим юзини топинг.

126. Тўртбурчакли пирамида ён ёғининг юзи Q га тенг. Шу ёққа параллел ва асос томонини $3:1$ нисбатда бўлиб ўтувчи текислик ўтказилган. Кесим юзини топинг.

127. Тўртбурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a га, асосидаги икки ёқли бурчаги 2α га тенг. Пирамида шу икки ёқли бурчакни тенг иккига бўлиб ўтувчи текислик билан кесилган бўлса, ҳосил бўлган кесим юзини топинг.

128. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг баландлиги H га, асосининг томони a га тенг. Асосининг томони ва унга айқаш бўлган ён қирранинг ўртаси орқали кесувчи текислик ўтказилган. Пирамида учидан кесувчи текисликкача бўлган масофани топинг.

129. $ABCD$ тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг баландлиги $EO = 2\sqrt{2}\,a$ га, асосининг томони a га тенг. Асоснинг A учи орқали BD диагоналга параллел бўлган ва AB билан $30°$ ли бурчак ташкил этувчи текислик ўтказилган бўлса, ҳосил бўлган кесим юзини топинг.

130. $EABCD$ тўртбурчакли пирамиданинг асоси томони a бўлган квадратдан иборат. EA ён қирра асосга перпендикуляр бўлиб, $EA = h$. A уч орқали BD диагоналга параллел бўлган ва EC қиррани $2:1$ (E учдан ҳисобланг) нисбатда бўлувчи текислик ўтказилган. Ҳосил бўлган кесим юзини топинг.

131. Тўртбурчакли пирамиданинг асоси диагоналлари $AC = d_1$ ва $BD = d_2$ бўлган ромбдан иборат. EA ён қирра асос текислигига тик бўлиб, $EA = h$. A уч ва EC ён қирранинг ўртаси орқали ўтувчи текислик асоснинг BD диагоналига параллел. Ҳосил бўлган кесим юзини топинг.

132. $EABCD$ пирамиданинг ён қирралари ўзаро тенг, асоси томонлари a ва $2a$ бўлган тўғри тўртбурчак, баландлиги $EO = 3a$. A уч ва EC қирранинг ўртаси орқали ўтувчи текислик BD га параллел бўлса, ҳосил бўлган кесим юзини топинг.

133. $SABCD$ пирамиданинг асоси параллелограмм бўлиб, бунда $AB=15$ см, $AD=13$ см, $BD=14$ см. SA ён қирра асосга тик бўлиб, $SA=48$ см, A уч орқали BD га параллел ва SC қиррани M нуқтада $SM:MC=3:2$ нисбатда кесиб ўтувчи текислик ўтказилган бўлса, ҳосил бўлган кесим юзини топинг.

134. $SABCD$ пирамиданинг ён қирралари ўзаро тенг, асоси томонлари a ва $\sqrt{3}\,a$ га тенг бўлган тўғри тўртбурчак, баландлиги $SO = \sqrt{3}\,a$ га тенг. A уч орқали SC ён қиррага перпендикуляр бўлган текислик ўтказилган бўлса, ҳосил бўлган кесим юзини топинг.

135. $FABCDE$ бешбурчакли мунтазам пирамиданинг ён қиррасининг узунлиги b га, асосининг томони a га тенг. Асоснинг A ва C учлари ҳамда ED ва FE ён қирраларининг ўрталари орқали текислик ўтказилган бўлса, ҳосил бўлган кесим юзини топинг.

136. Олтибурчакли мунтазам пирамидада асоснинг маркази орқали ён ёққа параллел қилиб текислик ўтказилган. Ҳосил бўлган кесим юзининг ён ёқ юзига нисбатини топинг.

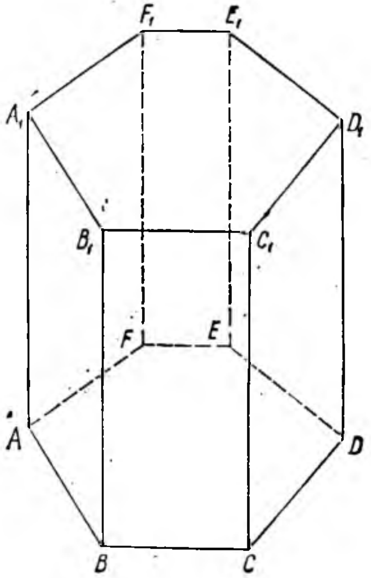
137. Олти бурчакли мунтазам пирамидада баландлиги ва асосининг бир учи орқали кесувчи текислик ўтказилган. Ҳосил бўлган кесимнинг юзи Q га тенг бўлса, шу кесимга параллел ва асос томонини тенг иккига бўлувчи текислик ҳосил қиладиган кесим юзини топинг.

138. Олтибурчакли мунтазам пирамидада унинг баландлиги орқали ўтувчи ва асоснинг бир томонига перпендикуляр бўлган текислик ўтказилган. Ҳосил бўлган кесимнинг юзи Q га тенг бўлса, шу кесимга параллел ва асос томонини $3:1$ нисбатда бўлувчи нуқта орқали ўтган кесим юзини топинг.

139. Тўртбурчакли мунтазам кесик пирамидада диагонал ўтказилган кесимнинг юзи Q га тенг, асослари томонларининг нисбати $1:2$. Диагонал кесимга параллел ва катта асосининг томонини

1 : K нисбатда бўлувчи текислик ўтказилган (диагонал кесимдан ҳисобланг) бўлса, ҳосил бўлган кесим юзини топинг (K нинг турли қийматларини қаранг).

4- §. Кўпёқликлар



55- чизма.

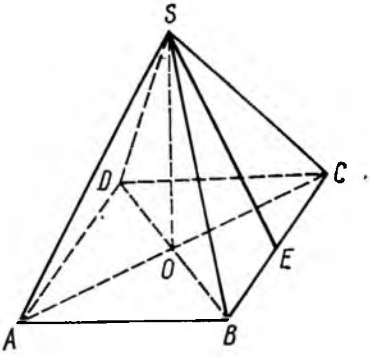
Кўпёқликлар берилиши жиҳатидан икки турга бўлинади: мунтазам ва номунтазам кўпёқликлар.

Призма — ён томонидан текисликлар билан, юқори ва қуйидан параллел текисликлар билан чегараланган кўпёқликдир (55- чизма). Тўғри призма ён сиртининг юзи асосининг периметри билан ён қирраси узунлигининг кўпайтмасига тенгдир: $S = P \cdot AA_1$. Призманинг тўла сирти: $S_{т.с.} = S_{ён} + 2S_{ас}$. Призманинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенгдир: $V = S_{ас} \cdot H$. Оғма призманинг ён сирти юзи перпендикуляр кесим периметри билан ён қиррасининг кўпайтмасига, ҳажми эса перпендикуляр кесим юзи билан ён қирраси узунлигининг кўпайтмасига тенгдир.

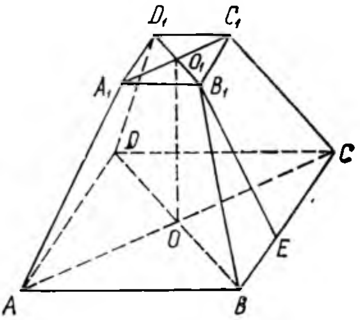
Агар призманинг асоси параллелограммдан иборат бўлса, у ҳолда бу призма параллелепипед деб аталади.

Тўғри бурчакли параллелепипед диагоналининг квадрати унинг уч чизиқли ўлчови квадратларининг йиғиндисига тенгдир.

Таъриф. Ёқларидан бири ихтиёрий кўпбурчак, қолган ёқлари эса умумий учга эга бўлган учбурчаклардан иборат бўлган кўпёққа *пирамида* дейилади (56-чизма). Мунтазам пирамиданинг ён сирти асосининг периметри билан апофемаси кўпайтмасининг ярмига тенг: $S = \frac{1}{2} pa$ (a—апофема). Умуман пирамиданинг ён сирти ён ёқлари юзларининг йиғиндисига тенгдир. Пирамиданинг тўла сирти: $S_{т. с.} = S_{ён} + S_{ас}$. Пирамиданинг ҳажми асосининг юзи билан баландлиги кўпайт-



56- чизма.

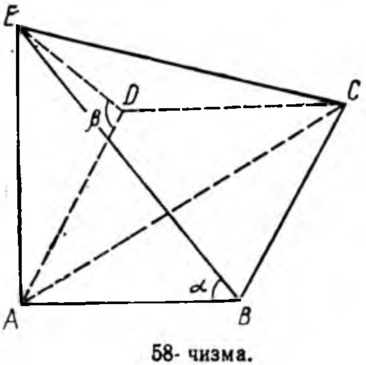


57- чизма.

масининг учдан бирига тенг: $V = \frac{1}{3} S_{ас} \cdot H$. Мунтазам кесик пирамиданинг ён сирти асослар периметрлари йиғиндисининг ярми билан апофемасининг кўпайтмасига тенг: $S = \frac{1}{2} (P + P_1)a$. Кесик пирамиданинг тўла сирти: $S = s_{ён} + S_{ас} + s_{ас}$ (57-чизма). Кесик пирамиданинг ҳажми: $V = \frac{1}{3}H(S + s + \sqrt{Ss})$.

Юқоридаги мулоҳазалар ёрдамида масалалар ечиш учун намуналар келтирамиз.

1-масала. Пирамиданинг асоси тўғри тўртбурчак бўлиб, битта ён қирраси асос текислигига перпендикуляр ва иккита ён ёғи асос текислиги билан α ва β бурчаклар ташкил қилади. Агар пирамиданинг баландлиги H бўлса, унинг ён сиртини топинг (58-чизма).



58- чизма.

Берилган: $ABCDE$ пирамида, $AE = H$, $\angle EDA = \beta$, $\angle EBA = \alpha$.

Топиш керак: $S_{ён} = ?$

Ечиш. $ABCDE$ пирамидада $\triangle ABE$ ва $\triangle ADE$ лар тўғрибурчакли учбурчаклар булгани учун

$$AB = AE\operatorname{ctg}\alpha = H\operatorname{ctg}\alpha,\ AD = AE\operatorname{ctg}\beta = H\operatorname{ctg}\beta$$

бўлади. Бундан $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot H = \frac{1}{2} H^2 \operatorname{ctg}\alpha$ ва $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot H = \frac{1}{2} H^2\operatorname{ctg}\beta$ экани келиб чиқади.

Пирамиданинг асоси тўғри бурчакли бўлгани учун:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = H^2\operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{ctg}\beta \text{ бўлиб, } S_{\triangle ABC} = \\ = \cos\alpha \cdot S_{\triangle BCE}$$

ва $S_{\triangle ACD} = \cos\beta S_{\triangle DCE}$. Буларга асосан:

$$S_{\triangle BCE} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\cos\alpha} = \frac{H^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{2\cos\alpha} = \frac{H^2\operatorname{ctg}\beta}{2\sin\alpha};$$

$$S_{\triangle CED} = \frac{S_{\triangle ACD}}{\cos\beta} = \frac{H^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{2\cos\beta} = \frac{H^2\operatorname{ctg}\alpha}{2\sin\beta}.$$

Натижада:

$$S_{\text{ён}} = \frac{H^2\operatorname{ctg}\alpha}{2} + \frac{H^2\operatorname{ctg}\beta}{2} + \frac{H^2\operatorname{ctg}\beta}{2\sin\alpha} + \frac{H^2\operatorname{ctg}\alpha}{2\sin\beta} =$$

$$= \frac{H^2}{2\sin\alpha\sin\beta}(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha + \cos\beta) =$$

$$= \frac{H^2}{2\sin\alpha\sin\beta}\left(\sin(\alpha+\beta) + 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \frac{H^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

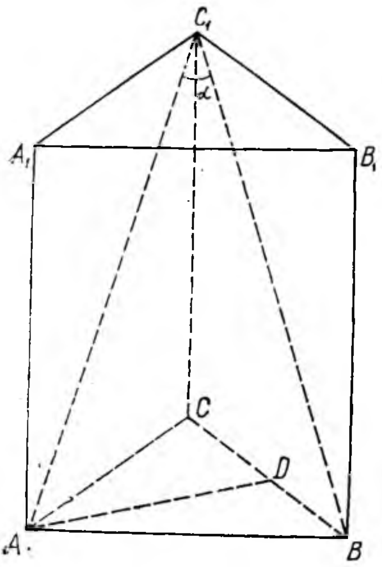
$$= \frac{2H^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Жавоб. $S_{\text{ён}} = \dfrac{2H^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

2-масала. Учбурчакли мунтазам призма асосининг томони a га ва қўшни ён ёқларининг бир учидан чиқувчи диагоналлари орасидаги бурчак α га тенг бўлса, унинг тўла сирти топилсин (59-чизма).

Берилган: $ABCA_1B_1C_1$ призма, $AC = BC = BA = a$, $\angle AC_1B = \alpha$.

Топиш керак: $S_{\text{т. с.}} = ?$



59- чизма.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра призманинг асоси мунтазам учбурчакдан иборат ($AC = BC = AB = a$) бўлгани учун $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot AD$.

$AD = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ эканидан

$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ бўлади.

Косинуслар теоремасига асосан $\triangle AC_1B$ дан ҳамда $AC_1 = BC_1$ эканини ҳисобга олган ҳолда:

$$a^2 = 2AC_1^2 - 2AC_1^2\cos\alpha,$$

$$AC_1^2 = \frac{a^2}{2(1-\cos\alpha)},$$

$$AC_1 = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.\quad \triangle AA_1C_1 \text{ дан } AA_1 = \sqrt{C_1A^2 - a^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - a^2} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

ҳосил бўлади. $S_{\text{ён}} = 3S_{AA_1CC_1}$ эканини ҳисобга олсак, у ҳолда

$$S_{\text{ён}} = 3AA_1 \cdot a = \frac{3a^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

бўлади. Призманинг тўла сирти эса,

$$S_{\text{т. с.}} = S_{\text{ён}} + 2S_{\text{ас}} = \frac{3a^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} a^2\left(\frac{\sqrt{6\cos\alpha - 3}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + 1\right).$$

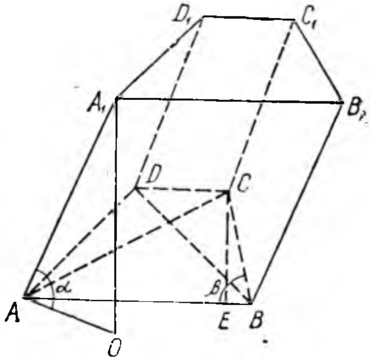
Жавоб. $S_{т.с.} = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \left(\frac{\sqrt{6\cos\alpha - 3}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + 1 \right)$

3-масала. Оғма призма асосининг ўткир бурчаги β, ён томони эса кичик асоси a га тенг бўлган тенг ёнли трапециядан иборат. Агар призма юқори асосининг бир учи пастки асосининг барча учларидан баробар узоқликда бўлиб, ён қирраси асос текислиги билан α бурчак ташкил қилса, унинг ҳажмини топинг (60-чизма).

Берилган: $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ оғма призма, $AD = DC = BC = a$, $\angle ABC = \angle BAD = \beta$; $\angle A_1AO = \alpha$.

Топиш керак: $V = ?$

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $AD = DC = BC = a$ ва $\angle ABC = \angle BAD = \beta$ бўлиб, A_1 учи асосининг барча учларидан тенг узоқликда бўлгани учун ҳамда AA_1, A_1B, A_1C, A_1D тенг оғмаларнинг проекциялари ва A_1O баландлик эканлигидан $AO = OD = OC = OB$. Демак, O нуқта призма асосига ташқи чизилган айлана маркази бўлади. Призма ҳажмини топиш учун, призма асосининг юзи ва баландлигини топиш лозим. Бунинг учун аввал AOни топамиз, сўнгра $\triangle AA_1O$ дан баландликни топиш имконига эга бўламиз. Призманинг асоси тенг ёнли трапеция ва $AD = DC = CB = a$ бўлгани учун: $\angle DBC = \frac{\beta}{2}$ ва $\angle ADC = \pi - \beta$. $\triangle ABC$ дан: $DC = 2R\sin\frac{\beta}{2}$, $R = AO = \frac{a}{2\sin\frac{\beta}{2}}$, $\triangle AA_1O$ дан $A_1O = AO\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\operatorname{tg}\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}$ ларни ҳосил қиламиз. Демак, $DC = a$, $EC = CB \cdot \sin\beta = a\sin\beta$, $BE = a\cos\beta$ бўлиб, $AB = a + 2a\cos\beta = a(1 + 2\cos\beta)$.



60-чизма.

Призманинг асоси трапеция бўлгани учун $S_{ас} = \frac{AB + DC}{2} CE$ га асосан: $S_{ас} = \frac{a(1 + 2\cos\beta) + a}{2} \times$

$\times\ a\sin\beta = a^2(1+\cos\beta)\sin\beta = 2a^2\cos^2\frac{\beta}{2}\sin\beta$ бўлади.

Бундан ва A_1O га асосан:

$$V = S_{ac}OA_1 = 2a^2\cos^2\frac{\beta}{2}\sin\beta\,\frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}} = 2a^3\cos^3\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Жавоб. $V = 2a^3\cos^3\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

4-масала. Мунтазам тўртбурчакли пирамида асосининг томони a га ва ён қиррадаги икки ёқли бурчак α га тенг бўлса, пирамида ҳажмини топинг (61-чизма).

Берилган: $SABCD$—пирамида, $AB = BC = CD = AD = a$, $\angle DKB = \alpha$.

Топиш керак: $V = ?$

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $ABCD$ квадрат, у ҳолда унинг юзи $S_{ABCD} = a^2$ га тенг. SO баландлик $ABCD$ нинг диагоналлари кесишган нуқтага (ташқи чизилган айлана марказига) тушади. $\triangle DKB$ да $DK = KB$ бўлгани учун $\triangle DKB$ тенг ёнли учбурчак. Тўғри бурчакли $\triangle OKB$ да $\angle OKB = \frac{\alpha}{2}$ эканини ҳисобга олсак, $OK = OB\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\cdot OB = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ эканидан $OK = \frac{\sqrt{2}a}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

$\triangle DKB$ текислиги SC қиррага тик бўлгани (ясалишига кўра) учун $OK \perp SC$ бўлиб, $\triangle OSC$ ва $\triangle OKC$ ўхшаш эканлигидан:

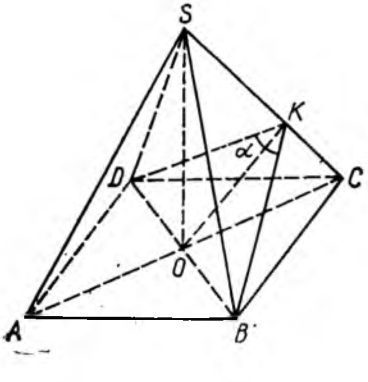
$$OS = \frac{OK\cdot OC}{KC},$$

$$KC = \sqrt{OC^2 - OK^2}$$

бўлади.

У ҳолда

$$OS = \frac{a\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\,a\sqrt{2}}{4\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sqrt{2}\,a\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{1-\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sqrt{2}\,a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{-\cos a}}.$$



61-чизма.

Демак, топилган натижаларидан ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ эканини ҳисобга олган ҳолда

$$V = \frac{1}{3} a^2 \frac{\sqrt{2} a \cos\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{-\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{2} a^3 \cos\frac{\alpha}{2}}{6\sqrt{-\cos\alpha}}$$

ни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $V = \frac{\sqrt{2} a^3 \cos\frac{\alpha}{2}}{6\sqrt{-\cos\alpha}}$.

Машқлар

140. Кубнинг қирраси a га тенг. Кубнинг диагонали, ёқнинг диагонали ва параллел бўлмаган томонларда жойлашган айқаш қирралари орасидаги бурчакни топинг.

141. Кубнинг қирраси a га тенг. Кубнинг диагонали билан унга айқаш бўлган қирра орасидаги масофани ҳамда қўшни ёқларнинг айқаш диагоналлари орасидаги масофани топинг.

142. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб берилган. AB_1D_1 ва BC_1D текисликлар A_1C диагоналга перпендикуляр бўлиб, уни тенг уч бўлакка бўлишини исботланг.

143 Бир хил уч ёқли бурчакка эга бўлган параллелепипедлар ҳажмларининг нисбатлари ўша бурчаклардан чиққан қирралар узунликлари кўпайтмаларининг нисбатлари каби бўлишини исботланг

144 Параллелепипеднинг диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг барча қирралари квадратларининг йиғиндисига тенг эканлигини исботланг.

145. Параллелепипед диагоналларининг кесишиш нуқтаси унинг симметрия маркази бўлишини исботланг.

146. Параллелепипеднинг бир учидан чиқувчи учта ёқнинг шу учдан чиқувчи диагоналлари ўтказилган ва шу учала диагонални қирра деб олиниб, параллелепипед ясалган. Берилган параллелепипедда олинган учга қарши ётган уч янги ҳосил қилинган параллелепипеднинг симметрия маркази эканлигини исботланг.

147 Параллелепипед диагоналларининг кесишиш нуқтаси орқали ўтувчи ҳар қандай текислик уни тенг икки шаклга ажратишини исботланг.

148. Параллелепипеднинг бир учидан чиқувчи учта қирранинг узунликлари a, b, c га тенг. Биринчи икки қирра ўзаро перпендикуляр бўлиб, учинчи қирра буларнинг ҳар бири билан α бурчак ташкил этади Параллелепипед ҳажмини топинг.

149. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипедда $AB=a$, $AD=b$ ва $AA_1=c$ бўлса, AB_1D_1 ва A_1C_1D текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

150. $ABCDA_1C_1C_1D_1$ параллелепипед берилган бўлиб, бунда: $AB=a$, $BC=c$, $BB_1=b$, $\angle ABC=\beta$, $\angle ABB_1=\gamma$, $\angle B_1BC=\alpha$ бўлса, BD_1 ва AC_1 ларни топинг.

151. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипедда $AB = 8$ см, $AD=6$ см, $AA_1=10$ см. DA_1 ва BD_1 диагоналлар орасидаги бурчак катталигини топинг.

152. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали унинг учларидан чиқувчи икки қирраси билан α ва β бурчак ҳосил қилади. Бу қирралардан ўтиб диагоналда кесишувчи икки текислик ҳосил қиладиган чизиқли бурчакнинг косинусини топинг.

153. Тўғри бурчакли параллелепипед қўшни ёқларининг кесишмайдиган диагоналлари асос текислиги билан α ва β бурчаклар ҳосил қилади. Бу диагоналлар орасидаги бурчакни топинг.

154. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг асоси тўғри тўртбурчак бўлиб, кичик томони a га, диагоналлари орасидаги бурчак $60°$ га тенг. Агар асоснинг катта томони ён қиррага тенг бўлса, параллелепипеднинг ҳажмини топинг.

155. Параллелепипеднинг асоси квадратдан иборат. Устки асоснинг учларидан бири остки асоснинг барча учларидан баробар узоқликда бўлиб, остки асос текислигидан b масофада жойлашган. Асоснинг томони a га тенг бўлса, параллелепипеднинг тўла сиртини топинг.

156. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали 13 см, ён ёқларининг диагоналлари эса $4\sqrt{10}$ см ва $3\sqrt{17}$ см. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.

157. Тўғри бурчакли параллелепипед асосининг томонлари узунликлари $m:n$ нисбатда. Унинг диагонал кесими юзи Q га тенг бўлган квадрат Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.

158. a, b, c қирралари бир-бири билан α, β, γ бурчаклар ҳосил қилувчи параллелепипед ҳажмини топинг.

159 Асоси 12 см ва асосидаги бурчаги $30°$ бўлган тенг ёнли учбурчак тўғри призманинг асосини ташкил қилади. Призманинг баландлиги асосининг баландлигига тенг бўлса, призманинг ҳажмини топинг.

160. Учбурчакли мунтазам призманинг ён қирраси асоснинг баландлигига тенг. Асоснинг баландлиги ва ён қирра орқали ўтувчи кесимнинг юзи Q га тенг бўлса, призманинг ҳажмини топинг.

161. Учбурчакли мунтазам призманинг ҳажми V га, қўшни ёқларнинг бир учдан чиқувчи диагоналлари орасидаги бурчак 2α га тенг. Призманинг баландлиги ва асосининг томонини топинг.

162. Учбурчакли тўғри призма асосининг юзи l^2 га, ён ёқларининг юзлари m^2, n^2 ва p^2 га тенг. Призманинг ҳажмини топинг.

163. Тўртбурчакли мунтазам призманинг диагонали ён ёғи текислиги билан $30°$ ли бурчак ташкил этади. Асоснинг томони a га тенг бўлса, призманинг ҳажмини топинг.

164. Призманинг асоси томони a бўлган квадратдан иборат. Ён ёқларининг бири квадрат, иккинчиси эса бурчаги $60°$ бўлган ромбдан иборат. Призманинг тўла сиртини топинг.

165. Учбурчакли оғма призманинг асоси томони a бўлган мунтазам учбурчак. Агар призманинг ён қирраси асос томонига тенг бўлиб, асос текислиги билан $60°$ бурчак ҳосил қилса, унинг ҳажмини топинг.

166. Тўртбурчакли мунтазам призма асосининг юзи P ва ҳажми V га асосан унинг тўла сиртини ҳисобланг.

167. Учбурчакли тўғри $ABCA_1B_1C_1$ призманинг асоси $AB=BC$ бўлган учбурчак бўлиб, B учидан чиққан баландлиги $\sqrt{3}$ см. BB_1

қиррада олинган P нуқта учун $\angle A_1PC = \frac{\pi}{2}$, $A_1P = 2\sqrt{2}$ см ва $PC = \sqrt{5}$ см. Призма ҳажмини топинг.

168. Баландлиги h ва ўткир бурчаги α бўлган тўғри бурчакли учбурчак тўғри призманинг асосини ташкил қилади. Ён қирра узунлиги a га тенг бўлса, призманинг ҳажмини топинг.

169. Агар пирамиданинг асосидаги икки ёқли бурчаклари тенг бўлса, у ҳолда унинг учи асосига ички чизилган айлана марказига проекцияланишини исботланг.

170. Агар пирамиданинг ён қирралари асос текислиги билан тенг бурчаклар ташкил қилса, унинг учи асосига ташқи чизилган айлана марказига проекцияланишини исботланг.

171. Тетраэдрнинг қарама-қарши қирраларининг ўрталарини бирлаштирувчи кесмалар кесишадиган нуқтасида тенг иккига бўлинишини исботланг.

172. Мунтазам тетраэдрни текислик билан шундай кесиш мумкинки, натижада кесимда квадрат ҳосил бўлади. Исботланг.

173. Мунтазам тетраэдр ичида олинган ихтиёрий нуқтадан унинг ёқларигача бўлган масофалар йиғиндиси шу тетраэдрнинг баландлигига тенг бўлишини исботланг.

174. Тетраэдрнинг иккита қарама-қарши қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи текислик шу тетраэдрни иккита тенгдош фигурага ажратишини исботланг.

175 Тетраэдрнинг ҳар бир учи ўзига қарши ётган ёқнинг оғирлик маркази билан туташтирилган. Ҳосил бўлган тўртта кесма бир нуқтада кесишиши ва шу нуқтада $1:3$ нисбатда бўлинишини исботланг.

176. $DABC$ мунтазам тетраэдрда ўртаси O нуқта бўлган DH баландлик туширилган, OA, OB, OC кесмалар ўзаро перпендикуляр эканлигини исботланг.

177. Мунтазам пирамиданинг ўзининг ҳамда ён ёғининг баландлиги орқали ўтувчи текислик шу ён ёққа перпендикуляр бўлишини исботланг.

178. Учбурчакли пирамиданинг учидаги текис бурчаклари тўғри бўлса, у ҳолда асос юзининг квадрати ён ёқлари юзлари квадратларининг йиғиндисига тенг эканлигини исботланг.

179. Мунтазам тетраэдрнинг қиррасига жойлашган икки ёқли бурчак катталигини топинг

180. Мунтазам тетраэдрнинг қирраси a га тенг. Тетраэдр ёқларининг марказлари орасидаги масофани топинг.

181. Мунтазам тетраэдрнинг қарама-қарши ётган икки қирраси орасидаги бурчакни топинг.

182. Мунтазам тетраэдрнинг икки ёғининг кесишмайдиган баландликлари орасидаги бурчакни топинг.

183. $ABCD$ мунтазам тетраэдрда B_1 нуқта DB қирранинг, C_1 нуқта DC қирранинг ўртаси ABC ва AB_1C_1 текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

184. $ABCD$ тетраэдрда $AB = CD = 13$ см, $BC = AD = 14$ см, $AC = BD = 15$ см. BC қиррадаги икки ёқли бурчак катталигини топинг.

185. Учбурчакли пирамиданинг ён қирраларининг узунликлари a, b, c бўлиб, улар ўзаро тик. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

186. $ABCD$ учбурчакли пирамиданинг ён қирраларида $DA' = DB' = DC' = 1$ кесмалар олинган бўлиб, $DA'B'C'$ пирамиданинг

ҳажми V_0 бўлсин DA, DB ва DC қирраларнинг узунликларини маълум деб, $ABCD$ пирамиданинг ҳажмини V_0 орқали ифодаланг.

187. Пирамиданинг баландлиги h га тенг. Пирамиданинг асосига параллел ўтиб ён сиртини тенг иккига бўлувчи текисликдан унинг учигача бўлган масофани топинг.

188. Пирамиданинг баландлиги тенг уч бўлакка бўлинган. Бўлиниш нуқталаридан асос текислигига параллел қилиб текисликлар ўтказилган бўлса, бу текисликлар пирамиданинг ҳажмини қандай нисбатда бўлишини топинг.

189. Пирамиданинг асосига параллел ўтган текислик ён сиртни тенг иккига бўлади. Пирамиданинг ҳажми қандай нисбатда бўлинган?

190. Қиррасининг узунлиги b га тенг бўлган учбурчакли мунтазам пирамиданинг ҳажми $\frac{1}{6}b^3$ га тенг. Пирамиданинг учидаги текис бурчагини топинг.

191. Баландлиги h га тенг бўлган учбурчакли мунтазам пирамиданинг ён ёғи асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

192. Учбурчакли мунтазам пирамиданинг учидаги текис бурчаги α га, ён қирраси билан асоснинг унга қарши ётган томони орасидаги энг қисқа масофа a га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

193. Ён қирралари тенг бўлган учбурчакли пирамиданинг асоси юзи Q бўлган тўғри бурчакли учбурчак. Катетларда жойлашган икки ёқли бурчаклар α ва β бўлса, пирамиданинг ҳажмини топинг.

194. $ABCD$ мунтазам тетраэдрда M нуқта AD қирранинг ўртаси, AB қиррада N нуқта $AN=\frac{2}{3}AB$ шарт билан олинган. ABC ва MNC текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

195. $ABCD$ учбурчакли пирамиданинг D учидаги барча текис бурчаклари тўғри, DH—пирамиданинг баландлиги. H нуқта ABC учбурчакнинг ортомаркази эканлигини исботланг.

196. $ABCD$ учбурчакли пирамиданинг D учидаги ADB текис бурчаги тўғри. DH — пирамиданинг баландлиги $\angle DAH=\alpha$, $\angle DBH=\beta$, $\angle AHB=\varphi$ бўлса, $\cos\varphi=-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$ эканлигини исботланг.

197. $ABCD$ учбурчакли пирамиданинг DA, DB, DC қирралари ўзаро тик $DH=h$—пирамиданинг баландлиги, S_1, S_2, S_3 лар ён ёқларининг юзлари $S_1+S_2+S_3\geqslant\frac{9}{2}h^2$ эканини исботланг.

198. $ABCD$ учбурчакли пирамиданинг D учидаги барча текис бурчаклари тўғри. $DH=h$ пирамиданинг баландлиги. Ён қирраларининг узунликлари a, b, c бўлса, $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ бўлишини исботланг.

199. Мунтазам пирамиданинг ҳажми сон жиҳатдан унинг ён қиррасининг кубидан кичик эканлигини исботланг.

200. $ABCD$ учбурчакли пирамиданинг асоси ABC да олинган

ихтиёрий O нуқта орқали $OA' \parallel DA$, $OB' \parallel DB$ ва $OC' \parallel DC$ чизиқлар ўтказилган. $A' \in (DBC)$, $B' \in (DCA)$, $C' \in (DAB)$ текисликларга тегишли. $\frac{OA'}{DA} + \frac{OB'}{DB} + \frac{OC'}{DC} = 1$ эканини исботланг.

201. Учбурчакли мунтазам пирамиданинг ён сирти Q га тенг, ён ёқ асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг баландлигини топинг.

202. Учбурчакли мунтазам пирамиданинг тўла сирти Q га, ён қирраларидаги бурчак α га тенг бўлса, унинг баландлигини топинг.

203. Учбурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a га, ёи ёқлари ҳосил қилган икки ёқли бурчак α га тенг. Пирамиданин ҳажми ва ён сиртини топинг.

204. Учбурчакли пирамида баландлигининг ўртасидан ён қиррагача бўлган масофа h га, ён ёққача бўлган масофа b га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

205. Учбурчакли пирамиданинг ён қирраларининг ва асосининг икки томонининг узунликлари b га, асосининг тенг томонлари орасидаги бурчак α га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

206. $ABCD$ учбурчакли пирамидада DBC ва ABC ёқлар ўзаро перпендикуляр бўлиб, D учдаги текис бурчакларнинг ҳар бири $\frac{\pi}{3}$ га тенг. $BD = DC = 1$ см. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

207. Учбурчакли пирамиданинг ён қирраларини $1:2$, $1:2$, $2:1$ нисбатда бўлувчи текислик пирамидани иккита кўпёқликка ажратади. Бу кўпёқликлар ҳажмларининг нисбатини топинг.

208. Учбурчакли мунтазам пирамида асосининг юзи $\sqrt{3}$ га тенг. Ён қирра асос текислиги билан ташкил қилган бурчак учидаги текис бурчакдан тўрт марта кичик. Пирамиданинг ён сиртини топинг.

209. $ABCD$ учбурчакли пирамиданинг D учидан туширилган баландлик ABC учбурчакнинг ортомарказидан ўтади. Агар $DB=b$, $DC=c$ ва $\angle BDC=90°$ бўлса, $S_{\Delta ADB} : S_{\Delta ADC}$ ни топинг.

210. $ABCD$ учбурчакли пирамиданинг D учида жойлашган текис бурчаклар қуйидагича: $\angle ADB = \angle BDC = \alpha$, $\angle ADC = \frac{\alpha}{2}$. AD қирра асос текислигига перпендикуляр бўлса, $\angle BAC$ ни топинг.

211. Тўртбурчакли мунтазам пирамида асосининг марказидан ён қиррагача бўлган масофа h га ён ёққача бўлган масофа b га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

212. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраларидан учтасини m, n, p нисбатда бўлиб ўтувчи текислик тўртинчи ён қиррани қандай нисбатда бўлади?

213. Тўртбурчакли мунтазам пирамидада ён ёқ асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Пирамиданинг қўшни ёқлари орасидаги бурчакни топинг.

214. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамида ён қиррасининг узунлиги асос томонинг узунлигидан икки марта катта. M, AB томоннинг. N, SC қирранинг ўртаси. SM ва BN лар орасидаги бурчакни топинг.

215. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси b га тенг ва у асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

216. Тўртбурчакли мунтазам пирамида ён қирраси a га, шу қиррага жойлашган икки ёқли бурчаги β га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

217. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг ён ёғи асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Ён қиррада жойлашган икки ёқли бурчакни топинг.

218. Тўртбурчакли пирамиданинг асоси периметри p диагоналларининг орасидаги ўткир бурчаги α бўлган тўғри тўртбурчакдан иборат. Пирамиданинг ён қирралари асос текислиги билан β бурчак ташкил этса, унинг ҳажмини топинг.

219. Пирамиданинг асосида ён томонлари кичик асос билан тенг, катта асоси a га, ўтмас бурчаги α га тенг бўлган трапеция ётади. Пирамиданинг ён қирралари асос текислиги билан β бурчак ташкил этса, унинг ҳажмини топинг.

220. Пирамиданинг асоси тенг ёнли трапеция бўлиб, унинг асослари a ва b $(a>b)$ га тенг, ҳамда диагоналларининг тенг бўлмаган бўлаклари ўзаро φ бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг баландлиги трапеция диагоналларининг кесишиш нуқтасидан ўтади. Асоснинг параллел бўлган томонларига жойлашган икки ёқли бурчаклар нисбати $2:1$. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

221. Учбурчакли мунтазам $ABCA_1B_1C_1$ кесик пирамиданинг ABC катта асосининг томони b га тенг. A нуқтадан A_1BC_1 гача бўлган масофа m га, B нуқтадан эса n га тенг. Кесик пирамиданинг баландлигини топинг.

222. Тўртбурчакли мунтазам пирамида асосларининг томонлари a ва b га, ён сирти асослари юзларининг йиғиндисига тенг. Кесик пирамиданинг баландлигини топинг.

223. Тўртбурчакли мунтазам кесик пирамида асосларининг юзлари a^2 ва b^2 га тенг. Асосларига параллел ва кесик пирамида ҳажмини тенг иккига бўлувчи кесим юзини топинг.

224. Асосларининг юзлари a ва b бўлган кесик пирамиданинг ўрта кесими юзи m бўлса, $m=\dfrac{a+b+\sqrt{ab}}{4}$ эканини исботланг.

225. n бурчакли мунтазам пирамиданинг учидаги текис бурчаги α га тенг. Иккита қўшни ёқлари ҳосил қилган икки ёқли бурчакни топинг.

226. n бурчакли мунтазам пирамиданинг ён ёқлари асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Ён қирранинг асос текислиги билан ҳосил қилган бурчагини топинг.

227. Агар тўртбурчакли мунтазам кесик пирамиданинг диагонали 18 см, асосларининг томонлари эса 14 см ва 10 см бўлса, унинг ҳажмини топинг.

228. Мунтазам тўртбурчакли кесик пирамиданинг апофемаси катта асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Кесик пирамида асосларининг томонлари a ва $\sqrt{3}\,a$ га тенг бўлса, шу пирамиданинг тўла сиртини топинг.

229. Мунтазам тўртбурчакли кесик пирамида катта асосининг томони a га, кичик асосининг томони b га, ён ёғининг ўткир бурчаги α га тенг. Шу кесик пирамиданинг ҳажмини топинг.

230. Мунтазам октаэдрни текислик билан шундай кесиш мумкинки, натижада кесимда мунтазам олтибурчак ҳосил бўлади. Исботланг.

231. Қирраси a га тенг бўлган мунтазам октаэдрнинг ҳажмини топинг.

232. Куб ёқларининг ўрталари октаэдрнинг учлари бўлиб хизмат қилади. Агар кубнинг сирти m^2 га тенг бўлса, октаэдрнинг сиртини топинг.

233. Куб ёқларининг ўрталари октаэдрнинг учлари бўлиб хизмат қилади. Куб ҳажмининг октаэдр ҳажмига нисбатини топинг.

234. Мунтазам октаэдрнинг қирраси a га тенг. Октаэдр ёқларининг ўрталари бошқа бир мунтазам кўпёқликнинг учлари бўлиб хизмат қилади. Кўпёқликнинг турини аниқланг ҳамда қиррасининг узунлигини топинг.

235. Мунтазам додекаэдрни текислик билан шундай кесиш мумкинки, натижада кесимда мунтазам олтибурчак ҳосил бўлади. Исботланг.

236. Қирраси a га тенг бўлган мунтазам додекаэдрнинг тўла сиртини топинг.

237. Қирраси a га тенг бўлган мунтазам додекаэдрнинг ҳажмини топинг.

238. Қирраси a га тенг бўлган мунтазам икосаэдрнинг тўла сиртини топинг.

239. Қирраси a га тенг бўлган мунтазам икосаэдрнинг ҳажмини топинг.

5- §. Айланма жисмлар

Цилиндр, конус, шарлар айланма жисмларга тааллуқли жисмлардир.

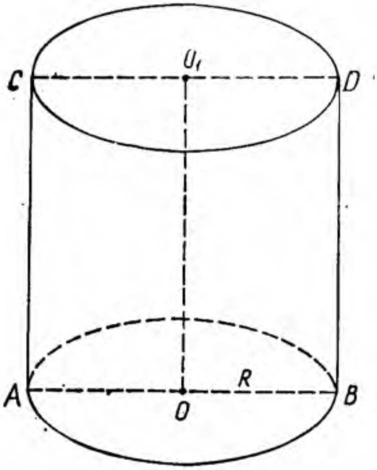
Тўғри тўртбурчакнинг бир томони атрофида айланиши натижасида цилиндр ҳосил қилинади ва шунга ўхшаш тўғри бурчакли учбурчакнинг бирор катети атрофида айланишидан конус ёки ярим доиранинг диаметри атрофида айланишидан шар ҳосил қилиш мумкин эканлиги равшандир.

Цилиндрик сирт ва параллел текисликлар билан чегараланган жисм *цилиндр* деб аталади (62-чизма).

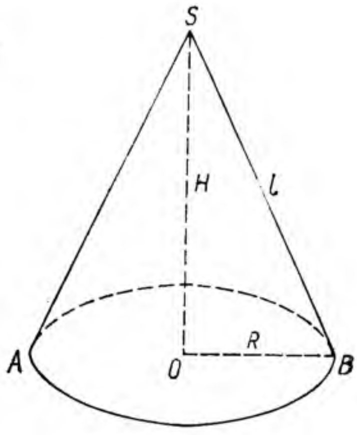
Цилиндрнинг ён сирти асос айланасининг узунлиги билан баландлигининг кўпайтмасига тенг: $S_{ён}=2\pi RH$. Цилиндрнинг тўла сирти: $S_т=S_{ён}+2S_{ас}=2\pi R(H+R)$. Цилиндрнинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг: $V=S_{ас}\cdot H=\pi R^2H$.

Каноник сиртнинг учидан бир томонда жойлашган ва ясовчиларнинг ҳаммасини шу учдан бир тарафда кесувчи текислик билан чегараланган жисм *конус* деб аталади (63-чизма). Конуснинг ён сирти асос айланасининг узунлиги билан ясовчиси кўпайтмасининг ярмига тенг: $S_{ён}=\pi Rl$. Конуснинг тўла сирти: $S_т=S_{ён}+S_{ас}=$ $=\pi R(R+l)$. Конуснинг ҳажми асосининг юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг:

$$V=\frac{1}{3}S_{ас}\cdot H=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$



62- чизма.

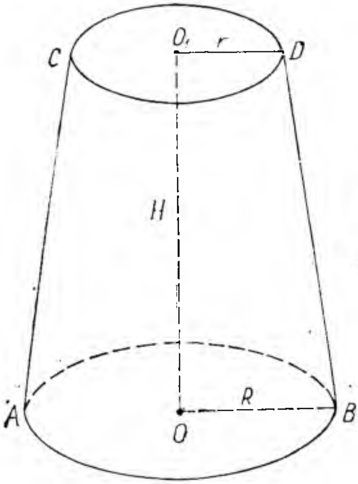


63- чизма.

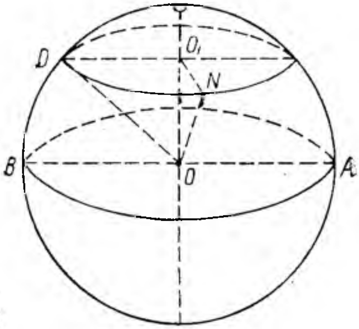
Кесик конус деб, бутун конуснинг асоси билан унинг асосига параллел кесувчи текислик орасига олинган бўлагига айтилади (64-чизма). Кесик конуснинг ён сирти асосларидаги айланалар узунликлари йиғиндисининг ярми билан ясовчисининг кўпайтмасига тенг: $S_{ён}=\pi l(R+r)$. Кесик конуснинг тўла сирти: $S_{т}=S_{ён}+S_{ас}+s_{ас}=\pi(R^2+r^2+Rl+rl)$. Кесик конуснинг ҳажми кесик конус билан бир хил баландликка эга бўлган учта конус ҳажмларининг йиғиндисига тенг: бунда улардан бирининг асоси шу конуснинг остки асоси, иккинчисиники устки асоси бўлиб учинчисининг асосини юзи эса, остки ва устки асосларнинг юзлари орасидаги геометрик миқдордир: $V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+Rr)$.

Т а ъ р и ф. Фазонинг берилган ихтиёрий бир нуқтасидан берилган R масофадан катта бўлмаган масофада ётувчи барча нуқталар тўпламига *шар* дейилади (65-чизма).

Шарни текислик билан кесиш натижасида ҳосил бўлган ҳар қандай кесим *доира* бўлади. Шарнинг марказидан ўтган ҳар қандай текислик унинг сиртини ўзаро симметрик ва тенг икки бўлакка бўлади. Шарга уринма текислик ўтказилса, бу текислик уриниш нуқ-



64- чизма.



65- чизма.

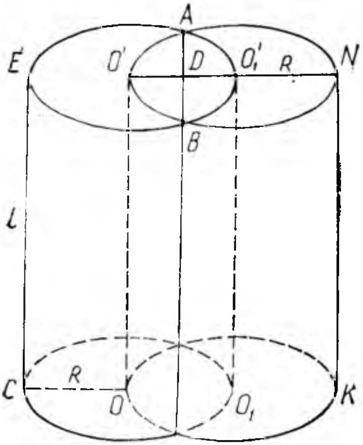
тасида радиусга перпендикуляр бўлади. Шарнинг сирти катта доира айланасининг узунлиги билан шар диаметрининг кўпайтмасига тенг: $S=4\pi R^2$. Шар камарининг сирти: $S=2\pi RH$ (бу ерда H—шар камарининг баландлиги).

Шар сегментининг сирти: $S=2\pi Rh$ (бу ерда h—сегмент баландлиги).

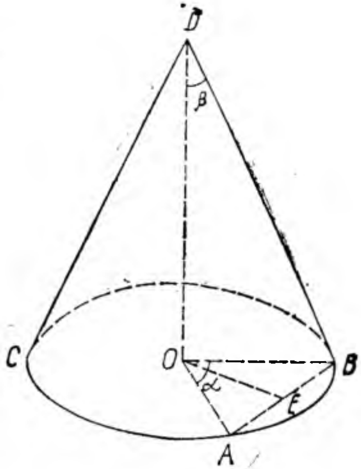
Шар сегментининг ҳажми шундай цилиндрнинг ҳажмига баробарки, бу цилиндр асосининг радиуси сегментнинг баландлигидан иборат, баландлиги эса шар радиусини сегмент баландлигининг учдан бири қадар камайтирилганига тенг: $V=\pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right)$.

Шар секторининг ҳажми унга мос бўлган шар камарининг сиртини (ёки мос сегмент сиртини) радиуснинг учдан бирига кўпайтирилганига тенг: $V=\frac{2}{3}\pi R^2H$ (бу ерда H—шар камарининг баландлиги).

Шарнинг ҳажми унинг сирти билан радиуси кўпайтмасининг учдан бирига тенг: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ ёки $V=\frac{1}{6}\pi d^3$. Шарнинг сирти унга ташқи чизилган цилиндр тўла



66- чизма.



67- чизма.

сиртининг $\frac{2}{3}$ бўлагига, ҳажми эса ташқи чизилган цилиндр ҳажмининг $\frac{2}{3}$ бўлагига тенгдир.

Айланма жисмларга оид масалалар ечишга намуналар келтирамиз.

1-масала. Асосининг радиуси R ва баландлиги H бўлган иккита цилиндр бирининг ясовчиси, иккинчисининг ўқи билан устма-уст тушган ҳолда кесишган бўлса, кесишишдан ҳосил бўлган жисм ҳажми топилсин (66-чизма).

Берилган: Цилиндр, $OC=R$, $CE=H$.

Топиш керак: $V_1 \cup V_2=?$

Ечиш. Кесишишидан ҳосил бўлган жисмнинг асоси радиуси R бўлган иккита доиранинг бир-бирларининг марказлари орқали ўтиши натижасида ҳосил бўлган кесимдан иборат. Шунинг учун унинг юзи

$S_{ac}=2\pi R^2-2S_{cer}$ бўлади. $O'D=\frac{R}{2}$; $\angle AO_1D=60^\circ$, $\angle AOB=120^\circ$ бўлгани учун, $S_{AO_1B_{cer}}=\frac{\pi R^2}{3}$ ва $S_{AO_1'B_{cer}}=$ $=\frac{\pi R^2}{3}-\frac{\sqrt{3}R^2}{4}=\frac{R^2}{12}(4\pi-3\sqrt{3})$.

Шундай қилиб, $S_{ac}=2\pi R^2-\frac{R^2}{6}(4\pi-3\sqrt{3})=\frac{R^2}{6}(8\pi+$ $+3\sqrt{3})$ ҳосил бўлади.

Жавоб. $V=S_{ac}\cdot H=\frac{1}{6}R^2H(8\pi+3\sqrt{3})$.

2-масала. Конуснинг асосида a узунликдаги ватар α га тенг ёйни тортиб туради. Агар конус баландлиги ясовчиси билан β бурчак ташкил этса, унинг ҳажмини топинг (67-чизма).

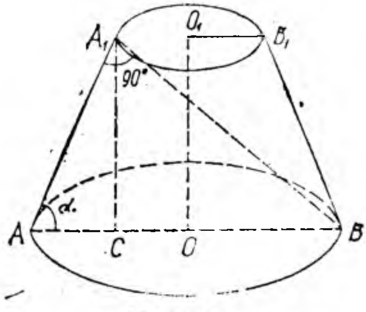
Берилган: BCD конус, $AB=a$, $\angle AOB=\alpha$, $\angle ODB=\beta$.

Топиш керак: $V_к=?$

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $AB=a$, $\angle AOB=\alpha$ бўлгани учун $\triangle BOA$ тенг ёнли ва OE баландлик ҳам биссектриса ҳам медианадир. Бундан $AE=\frac{a}{2}$ экани келиб чиқади. Тўғри бурчакли учбурчак OAE дан: $OA=$ $=R=\frac{AE}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ ёки $R=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Учбурчак DOB дан: $DO=$ $=OB\cdot\mathrm{ctg}\beta$ ёки $H=R\mathrm{ctg}\beta=\frac{a\mathrm{ctg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, у ҳолда $V_к=\frac{1}{3}S_{ac}\times$ $\times H=\frac{1}{3}\,\frac{\pi a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{a\mathrm{ctg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

Жавоб: $V_к=\frac{\pi a^3\mathrm{ctg}\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}$

3-масала. Кесик конуснинг l ясовчиси пастки асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилса ва ўзининг юқори учи билан қаршидаги ясовчининг асосда ётган учини бирлаштирувчи тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, кесик конуснинг тўла сирти ва ҳажмини топинг (68-чизма).



68- чизма.

Берилган: ABA_1B_1 кесик конус, $AA_1=l$, $\angle A_1AB=\alpha$, $\angle AA_1B=90°$.

Топиш керак: $S_{т\cdot с}=?$ $V_к=?$

Ечиш. Учбурчак AA_1C тўғри бурчакли ва $AA_1=l$ бўлгани учун $AC=l\cos\alpha$ га тенг бўлади. $\triangle AA_1B$ тўғри бурчакли бўлгани учун $AB=2R=\frac{l}{\cos\alpha}$ бўлиб, бундан $R=\frac{l}{2\cos\alpha}$, у ҳолда $r=R-AC=\frac{l}{2\cos\alpha}-l\cos\alpha=\frac{l(1-2\cos^2\alpha)}{2\cos\alpha}$ ҳосил бўлади. Натижада: $S_{ac}=\pi R^2=\frac{\pi l^2}{4\cos^2\alpha}$, $S'=\pi r^2=\frac{\pi l^2(1-\cos^2\alpha)^2}{4\cos^2\alpha}$ (бу ерда S остки асос юзи, S' устки асос юзи). Демак, кесик конуснинг тўла сирти:

$$S_т=\pi\left(\frac{l^2}{4\cos^2\alpha}+\frac{l^2(1-2\cos^2\alpha)^2}{4\cos^2\alpha}+\frac{l^2}{2\cos\alpha}+\frac{l^2(1-2\cos^2\alpha)}{2\cos\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\pi l^2}{\cos^2\alpha}\left(\cos^4\alpha-\cos^3\alpha-\cos^2\alpha+\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)$$

$\triangle AA_1C$ дан $H=l\sin\alpha$ эканини ҳисобга олинса,

$$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+rR+R^2)=\frac{\pi l\sin\alpha}{3}\times$$

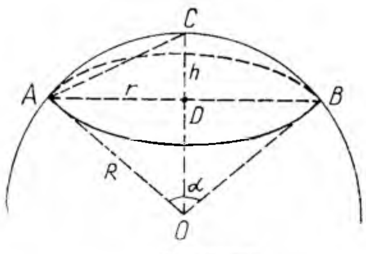
$$\times\left(\frac{l^2}{4\cos^2\alpha}+\frac{l^2(1-2\cos^2\alpha)^2}{4\cos^2\alpha}+\frac{l^2(1-2\cos^2\alpha)}{4\cos^2\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\pi l^3\sin\alpha}{12\cos^2\alpha}(4\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha+3).$$

Демак, $V_к=\frac{\pi l^3\sin\alpha}{12\cos^2\alpha}(4\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha+3)$.

4-масала. R радиусли шардан ўқ кесими α бурчакли бўлган шар сектори ажратилган. Шу секторнинг тўла сирти ва ҳажми топилсин (69-чизма).

Берилган: $(O;\ R)$ шар, $\angle AOB=\alpha$



69- чизма.

Топиш керак: $S_{т\cdot сек}=?$ ва $V_{сек}=?$

Ечиш. Масаланинг шартига кўра шарнинг радиуси S. Сегмент баландлигини $CD=h$ ва радиусини $AD=r$ орқали белгилайлик. $\triangle ACD$ да:

$\angle CAD = \frac{\alpha}{4}$, чунки $\angle CAD = \frac{\smile BC}{2} = \frac{\alpha}{2}$ га тенг эди.

$\triangle ACD$ дан: $h = r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$. $\triangle ADO$ дан $r = R\sin\frac{\alpha}{2}$. У ҳолда $h = r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = R\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$ экани келиб чиқади. Демак, шар секторининг ҳажми $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2\frac{\alpha}{4}$ бўлади. $S_т = \pi R(2h + r)$ эканини ҳисобга олсак, у ҳолда $S_т = \pi R^2 \sin\frac{\alpha}{2}\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} + 1\right)$ ҳосил бўлади.

Машқлар

240. Конус асосининг айланасига ўтказилган уринма уриниш нуқтасидан ўтказилган ясовчига тик эканлигини исботланг.

241. Икки сферанинг ўзаро жойлашишига қараб уларнинг ўхшашлик маркази масаласини қараб чиқинг.

242. Берилган икки сферага уринувчи текислик ё уларнинг ўхшашлик марказидан ўтиши ё марказлар чизигига параллел бўлишини исботланг.

243. Учбурчакнинг навбати билан ўз томонлари атрофида айланишидан ҳосил бўлган конуслар ҳажмларининг нисбати ўша томонларнинг нисбатларига тескари пропорционал эканлигини исботланг.

244. Тўғри призманинг асоси—қарама-қарши бурчакларининг йиғиндиси $2d$ бўлган тўртбурчак. Шу призмага ташқи сфера чизиш мумкин эканлигини исботланг.

245. Ҳар қандай тўғри бурчакли параллелепипедга ташқи сфера чизиш мумкинлигини исботланг.

246. Конуснинг ҳажми асоси ва баландлиги ўшандай бўлган цилиндр ҳажмидан шу цилиндр ён сиртини унинг асоси радиусининг учдан бирига кўпайтмасини айрилганига тенг эканлигини исботланг.

247. Конуснинг баландлиги унинг асосининг диаметрига тенг. Конус асоси юзининг унинг ён сиртига нисбатини топинг.

248. Конуснинг ҳажмини унинг ён сирти S ва асосининг марказидан ясовчисигача бўлган масофа d орқали ифодаланг.

249. Цилиндрни тўғри бурчакли тўртбурчакни унинг бирор томони атрофида айлантириб ҳосил қилиш мумкин. Цилиндр ҳажми V ни тўғри тўртбурчакнинг юзи S ва унинг диагоналларининг кесишиш нуқтаси чизган айлананинг узунлиги C орқали ифодаланг.

250. Агар икки тенг конус умумий баландликка ва параллел асосларга эга бўлса, у ҳолда уларнинг умумий бўлагининг ҳажми ҳар бир конус ҳажмининг тўртдан бирига тенг бўлишини исбот қилинг.

251. Конуснинг баландлиги учта тенг бўлакка бўлинган. Учлари бўлиниш нуқталарида жойлашган, ясовчилари эса берилган конус ясовчисига параллел ва у билан йўналишдош бўлган конуслар ясалган. Берилган конус ҳажми қандай бўлакларга бўлинган?

252. Қандай шарт бажарилганда тўрт ёқли бурчакка ташқи конус чизиш мумкин?

253. Конуснинг баландлиги h га тенг. Ўзаро перпендикуляр бўлган икки ясовчи конус сиртини $1:2$ нисбатда бўлади. Конус ҳажмини топинг.

254. Конус сиртда ўзаро перпендикуляр бўлган учта ясовчи ўтказиш мумкин бўлсин. Конус сиртнинг ўқ кесимида ҳосил бўлган бурчак косинусини топинг.

255. Цилиндрнинг ясовчисига тик бўлган кесимнинг юзи Q га, ўқ кесимнинг юзи эса S га тенг. Бу цилиндрнинг тўла сиртини ва ҳажмини топинг.

256. Тенг ёнли цилиндрнинг устки асоси айланасининг бир нуқтаси пастки асоси айланасининг бир нуқтаси билан туташтирилган бўлиб, бу тўғри чизиқ асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилади. Бу тўғри чизиқ билан цилиндр ўқи орасидаги энг қисқа масофани топинг.

257. Конуснинг ҳажми унинг ён сирти юзи билан асосининг марказидан ясовчисигача бўлган масофа кўпайтмасининг учдан бирига тенг эканлигини исботланг.

258. Конуснинг α бурчак ташкил этувчи икки ясовчиси орқали ўтган текислик асос текислиги билан β бурчак ташкил этади. Кесим юзи S га тенг бўлса, конуснинг баландлигини топинг.

259. Конус текисликда ётган бўлиб, унда ўзининг қўзғалмас учи атрофида думалайди. Конуснинг баландлиги h га, ясовчиси l га тенг. Конуснинг баландлиги чизган сиртнинг юзини ҳисобланг.

260. Конус текисликда ётган бўлиб, унда ўзининг қўзғалмас учи атрофида думалайди. Бунда конуснинг баландлиги берилган конус ёйилмасига ўхшаш бўлған сирт чизади. Шу сирт юзининг берилган конус сирти юзига нисбатини топинг.

261. Шар сиртида ҳар бири қолган учтаси билан уринувчи тўртта айланалар берилган. Агар шар радиуси R бўлса, айланалар радиусини топинг.

262. R радиусли шарда диаметри шар радиусига тенг, ўқи шар марказидан ўтувчи цилиндрик тешик ҳосил қилинган. Шарнинг қолган бўлагининг ҳажмини топинг.

263. Кесик конуснинг баландлиги унинг асосларининг диаметри орасида ўрта пропорционал бўлса, у ҳолда бундай кесик конусга шарни ички чизиш мумкин эканлигини исботланг.

264. Конус ён сиртининг юзи асосининг юзидан икки марта катта. Унинг ўқ кесимининг юзи Q га тенг. Конуснинг ҳажмини топинг.

265. Цилиндр ва шар берилган. Цилиндр асосининг ва шарнинг радиуслари тенг. Цилиндр тўла сиртининг шар сиртига бўлган нисбати $m:n$ каби. Уларнинг ҳажмлари нисбатини топинг.

266. Радиуси r бўлган ярим доирадан конус сирт ўралган. Ҳосил бўлган конуснинг ҳажмини топинг.

267. Конус асосининг радиуси R га, унинг ён сирти ёйилмасининг учидаги бурчаги $90°$ га тенг Конуснинг ҳажмини топинг.

268 Конус ён сиртининг ёйилмаси марказий бурчаги $120°$ ға, юзи эса S га тенг бўлган сектордан иборат. Бу конуснинг ҳажмини топинг.

269. Конуснинг тўла сирти πS кв бирликка тенг. Конус ён сиртининг текисликка ёйилмасининг марказий бурчаги $60°$ бўлган сектордан иборат. Конуснинг ҳажмини аниқланг.

270. Конуснинг баландлиги h га тенг. Бу конус ён сирти ёйил-

масининг марказий бурчаги 120° га тенг бўлган сектордан иборат. Конуснинг ҳажмини топинг.

271. Томонлари 4 ва 6 см, ўткир бурчаги 30° бўлган параллелограмм ўзининг катта томони атрофида айланишидан ҳосил бўладиган жисмнинг сирти ва ҳажмини топинг.

272. Юзи Q га тенг бўлган ромбни унинг бирор томони атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг сиртини ҳисобланг.

273. Ромб олдин ўзининг катта диагонали атрофида сўнгра кичик диагонали атрофида айланади. Бунда ҳосил бўлган айланма жисмлар ҳажмларининг нисбати улар сиртларининг нисбатига тенг эканлигини исбот қилинг.

274. Томонлари a, b ва c га тенг бўлган учбурчак навбат билан ҳар бир томони атрофида айлантирилади. Бунда ҳосил бўладиган жисмларнинг ҳажмлари нисбатини топинг.

275. Конус S юзли тўғри бурчакли учбурчакнинг бир катети атрофида айланишидан ҳосил бўлган. Агар бу учбурчакнинг айланишида унинг медианаларининг кесишиш нуқтаси чизган айлананинг узунлиги L га тенг бўлса, конуснинг ҳажмини топинг.

276. Томонлари 10 см, 17 см ва 21 см бўлган учбурчак ўзининг катта томони атрофида айланади. Ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини ва сиртини аниқланг.

277. Тенг ёнли учбурчак асосининг бир учи орқали ён томонига параллел ўтган тўғри чизиқ атрофида айланмоқда. Агар учбурчакнинг ён томони a га, асосидаги бурчаги α га тенг бўлса, айланма жисмнинг ҳажмини топинг.

278. Асослари 2 см ва 3 см ҳамда ўткир бурчаги 60° бўлган тенг ёнли трапеция ўзининг кичик асоси атрофида айланади. Ҳосил бўлган айланма жисмнинг сиртини ва ҳажмини аниқланг.

279. Периметри $2p$ га тенг бўлган параллелограмм узунлиги d га тенг диагоналининг учига перпендикуляр қилиб ўтказилган ўқ атрофида айланади (ўқ параллелограмм текислигида ётади), Ҳосил бўлган айланма жисмнинг сиртини топинг.

280. Томонлари a ва b, ўткир бурчаги α бўлган параллелограмм катта диагоналининг учига перпендикуляр қилиб ўтказилган ўқ атрофида айланади (ўқ параллелограмм текислигида ётади). Ҳосил бўлган айланма жисмнинг ҳажмини топинг.

281. Квадрат ўзининг бир учи ва бу учдан чиқмаган томонининг ўртасидан ўтувчи ўқ атрофида айланмоқда. Ҳосил бўлган айланма жисмнинг ҳажмини ва тўла сиртини топинг.

6-§. Геометрик фигуралар комбинацияси

Алоҳида фазовий фигураларнинг ўлчамларини ҳисоблаш кўп ҳам қийинчилик туғдирмайди. Бунинг учун аксарият ҳолларда, айтайлик, ҳажм, юза ва шу кабиларни ҳисоблаш формулаларини билиш ва масала шартида берилган маълумотларни бир озгина ишлаб шу формулаларга келтириш кифоялик қилади.

Аммо фазовий фигураларнинг комбинациясига таааллуқли бўлган масалаларни ечиш кишидан нафақат анчагина чуқурроқ ва кенгроқ бўлган билимларни, балки янада юксакроқ савиядаги мантиқий фикрлашни ҳам талаб қилади. Бундай масалаларни ечишда юқоридаги параграфлардаги масалаларни ечиш учун зарур бўлган билимларни комплекс ҳолда ҳамда ҳар бирининг ўз ўрнини топиб қўллай билиш лозим бўлади.

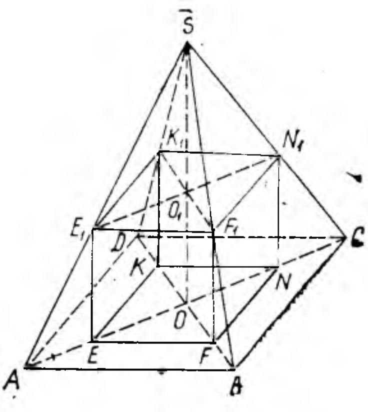
Юқоридаги параграфларда қўлланилган билимларни такрорлашни ўқувчининг ўзига ҳавола қилган ҳолда тўғридан-тўғри масалалар ечишга ўтамиз.

1-масала. Мунтазам тўртбурчакли пирамидага куб шундай жойлаштирилганки, кубнинг тўртта учи ён қирраларида, қолган учлари эса пирамида асосида ётади. Агар пирамиданинг баландлиги H ва ён қирраси l бўлса, кубнинг қирраси топилсин (70-чизма).

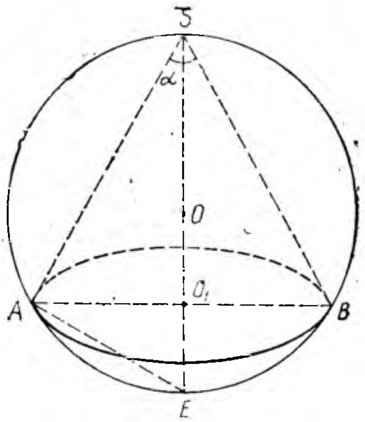
Ечиш. Масаланинг шартига кўра $\triangle SO_1N_1 \backsim \triangle SOC$, чунки $O_1N_1 \parallel OC$ ва SOC учбурчак тўғри бурчакли учбурчакдир. Бу ўхшашликдан $SO_1 : SO = O_1N_1 : OC$. Агар $EE_1 = x$ деб олсак, $SO_1 = SO - OO_1 = H - x$. $SO = H$, $O_1N_1 = \frac{x}{\sqrt{2}}$ ва $OC = \sqrt{l^2 - H^2}$ бўлганидан, $\frac{H-x}{H} = \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{l^2-H^2}}$ пропорцияни ҳосил қиламиз. Натижада $EE_1 = x = \frac{H\sqrt{2(l^2-H^2)}}{H+\sqrt{2(l^2-H^2)}}$ қийматга эга бўламиз.

Жавоб. Кубнинг қирраси $EE_1 = \frac{H\sqrt{2(l^2-H^2)}}{H+\sqrt{2(l^2-H^2)}}$.

2-масала. Радиуси R бўлган шарга конус жойлаштирилган. Агар конуснинг ўқ кесими учидаги бурчаги α бўлса, асосининг радиуси, ясовчиси ва ҳажми топилсин (71-чизма).



70- чизма.

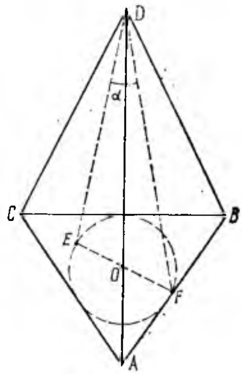


71- чизма.

Ечиш Масаланинг шартига кўра шар радиуси R ва конуснинг ўқ кесими учидаги бурчаги α га тенг ва $\triangle ASB$ тенг ёнли. SO_1 ни шар сирти билан кесишгунча давом эттирамиз ва E нуқтани ҳосил қиламиз. Сўнгра $\triangle SAE$ да $\angle SAE = 90°$, $SE = 2R$ ва $\angle ASE = \frac{\alpha}{2}$ эканини ҳисобга олинса, у ҳолда $AS = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$ ҳосил бўлади. $\triangle SAO_1$ дан

$$AO_1 = r = R\sin\alpha,$$

$$SO_1 = h = 2R\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$



72- чизма.

Юқоридагилардан конус асосининг юзи $S = \pi r^2 = \pi R^2\sin^2\alpha$ га тенг бўлиб, конуснинг ҳажми $V = \frac{1}{3}\pi R^2\sin^2\alpha 2R\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$ бўлади.

Жавоб. Конуснинг радиуси $r = R\sin\alpha$, ясовчиси $l = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$, ҳажми $V = \frac{2}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

3-масала. Конус асосининг радиуси R ва ўқ кесими учидаги бурчаги α бўлса, у ҳолда шу конусга ташқи чизилган мунтазам учбурчакли пирамиданинг ҳажми топилсин (72-чизма).

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $OE = R$ ва $AB = BC = AC$ бўлгани учун, $OE = \frac{1}{3}AE$. Бундан $AE = 3R$,

$AE = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$ ёки $AB = \frac{2}{\sqrt{3}}AE = 2\sqrt{3}R$. $\triangle ODE$ дан

$\angle ODE = \frac{\alpha}{2}$, $DO = OE\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ ни ёза оламиз.

Демак, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot AE = \frac{1}{2}2R\sqrt{3}\cdot 3R = 3\sqrt{3}R^2$

ҳосил бўлади. У ҳолда пирамиданинг ҳажми

$V = \frac{1}{3}S_{ac}\cdot H = \frac{1}{3}3\sqrt{3}R^2R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}R^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ бўлади.

Жавоб. $V = \sqrt{3}R^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Машқлар

282. Қирраси a га тенг бўлган кубга ички ва ташқи чизилган шарларнинг радиусларини топинг.

283. Қирраси a га тенг бўлган мунтазам тетраэдрга ички ва ташқи чизилган шарларнинг радиусларини топинг.

284. Қирраси a га тенг бўлган мунтазам тетраэдрнинг барча қирраларига уринувчи сферанинг радиусини топинг.

285. Қирраси a га тенг бўлган мунтазам октаэдрга ички ва ташқи чизилган шарларнинг радиусларини топинг.

286. Сферага ички ва ташқи чизилган мунтазам тетраэдрлар ҳажмларининг нисбатини топинг.

287. Тетраэдрга ички ва ташқи сфералар чизилган. Шу сфералар сиртларининг нисбатини топинг.

288 Шарга тенг томонли конус ички чизилган. Бу жисмлар ҳажмларининг ва сиртларининг нисбатларини топинг.

289. Шарга баландлиги унинг радиусига тенг бўлган цилиндр ички чизилган. Цилиндрнинг сирти шарни бир неча бўлакларга бўлади. Ҳосил бўлган фигураларнинг ҳажмларининг нисбатини топинг.

290. Конус баландлигининг унга ташқи чизилган шар радиусига нисбати q га тенг. Бу фигуралар ҳажмларининг нисбатини топинг.

291. Конусга шар ички чизилган. Конус тўла сиртининг шар сиртига нисбати уларнинг ҳажмларининг нисбати каби эканлигини исботланг.

292. Конусга шар ички чизилган. Шар сиртининг конус асосининг юзига нисбати 4:3. Ўқ кесим конус учида ҳосил қиладиган бурчакнинг катталигини топинг.

293. Баландлиги h асос айланасининг радиуси r бўлган конусга ички чизилган шар ҳажмини топинг.

294. Кубнинг қирраси a га тенг. Ўқи кубнинг диагонали билан устма-уст тушувчи ҳамда кубнинг қирраларига уринувчи цилиндрик сирт асосининг радиусини топинг.

295. Қирраси a га тенг бўлган мунтазам тетраэдр цилиндрга шундай ички чизилганки, унинг қарама-қарши икки қирраси цилиндр асосларининг диаметри бўлиб хизмат қилади. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.

296. Қирраси a га тенг бўлган куб цилиндрга ички чизилган. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.

297. Қирраси a га тенг бўлган мунтазам октаэдр цилиндрга ички чизилган бўлиб, бунда октаэдрнинг иккита қарама-қарши учи цилиндр асосларига ички чизилган. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.

298. Тенг томонли конусга ички чизилган икки шарларнинг бири конуснинг ён сиртига ва асосига уринади, иккинчиси эса конуснинг ён сиртига ва биринчи шарга уринади. Шарлар ҳажмларининг нисбатини топинг.

299. Кесик конусга шар ички чизилган. Кесик конус ҳажмининг шар ҳажмига нисбати 13:6. Конус ясовчисининг асос текислиги билан ташкил этган бурчагини топинг.

300. Конуснинг баландлиги h га, шу баландлик билан ясовчи ташкил этган бурчак α га тенг. Маркази конус ичида жойлашган ҳамда конусни иккита тенгдош фигурага ажратувчи сферанинг радиусини топинг.

301. Тетраэдрнинг ён қирралари ўзаро тик бўлиб, узунликлари a, b, c га тенг. Тетраэдрнинг ҳажми ва унга ташқи чизилган сферанинг радиусини топинг.

302. Конус цилиндр билан умумий асосга эга бўлиб, учи цилиндр иккинчи асосининг марказига жойлашган. Цилиндрнинг ва конуснинг тўла сиртларининг нисбатлари $7:4$. Конуснинг ўқи билан ясовчиси орасидаги бурчакни топинг.

303. Баландлиги h га тенг бўлган конуснинг ён сиртини $n:m$ нисбатда бўлувчи (нисбат конус учидан ҳисоблансин) сферанинг диаметри конус баландлигига тенг. Конус радиусини топинг.

304. Баландлиги конус асосининг радиусига тенг бўлган цилиндр конусга ички чизилган бўлиб, цилиндр тўла сиртининг конус асос юзига нисбати $3:2$. Конуснинг ўқи ва ясовчиси орасидаги бурчакни топинг.

305. Асоси тўғри бурчакли учбурчак бўлган тўғри призмага шар ички чизилган. Асосда тўғри бурчак учидан гипотенузага туширилган баландлик h катетларининг бири билан α бурчак ҳосил қилади. Призманинг ҳажмини топинг.

306. Учбурчакли мунтазам пирамидага шар ички чизилган бўлиб, пирамида ҳажмининг шар ҳажмига нисбати $27\sqrt{3}:45$ га тенг. Пирамида ён ёғининг асос текислиги билан ҳосил қилган бурчагини топинг.

307. Асоси ўткир бурчаги α бўлган ромбдан иборат бўлган пирамидага r радиусли шар ички чизилган. Пирамида ён ёқлари асос текислиги билан β бурчак ташкил этади. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

308. $ABCD$ учбурчакли пирамидада DA, DB ва DC қирралар ўзаро тик бўлиб $AB=BC=a$, $BD=b$. Пирамидага ички чизилган шар радиусини топинг.

309. Мунтазам тўртбурчакли пирамидага ташқи чизилган шар радиуси унга ички чизилган шар радиусидан уч марта катта. Пирамиданинг ён ёғи билан асос текислиги орасидаги бурчакни топинг.

310. Шарга ташқи чизилган конуснинг тўла сирти шар сиртидан n марта катта. Шар ҳажмининг конус ҳажмига нисбатини топинг.

311. Радиуси R га тенг бўлган шарга ташқи чизилган кесик конус тўла сиртининг шар сиртига нисбати m га тенг. Кесик конус асосларининг радиусларини топинг.

312. Шарга ташқи чизилган конуснинг тўла сирти шар сиртидан n марта катта. Конус ясовчисининг асос текислиги билан ташкил қилган бурчагини топинг.

313. Конуснинг баландлиги унга ички чизилган шар радиусидан турт марта катта. Конуснинг ясовчиси b га тенг. Конуснинг ён сирти ва унга ташқи чизилган шарнинг радиусини топинг.

314. Ён ёқлари квадрат бўлган учбурчакли мунтазам призма R радиусли шарга ички чизилган. Призма қиррасининг узунлигини топинг.

315. $ABCD$ учбурчакли пирамиданинг D учидаги барча текис бурчаклари тўғри. Шу пирамидага ташқи чизилган шарнинг маркази, ABC учбурчакнинг оғирлик маркази ҳамда D нуқта бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.

316. Тетраэдрнинг қарама-қарши қирралари ўзаро перпендикуляр. Қарама-қарши қирраларнинг ўрталарини бирлаштирувчи

ҳар бир кесма шу тетраэдрга ташқи чизилган шарнинг радиусига тенг эканлигини исботланг.

317. Бир учига жойлашган текис бурчаклари тўғри бўлган тетраэдрга ички ва ташқи шарлар чизилган. $2R:r\geqslant 3(1+\sqrt{3})$ эканини исботланг.

318. $ABCD$ тетраэдрга r радиусли шар ички чизилган, Бу шарга уринувчи ва ёқларига параллел бўлган текисликлар $ABCD$ тетраэдрдан тўртта тетраэдр ажратади. Шу тетраэдрларга ички чизилган шарлар радиуслари r_1, r_2, r_3, r_4 бўлсин. $r_1+r_2+r_3+r_4=2r$ эканини исботланг.

319. Тўртбурчакли мунтазам пирамидага куб қуйидагича ички чизилган: кубнинг тўртта учи пирамиданинг ён қирраларида ётади, қолган тўртта учи пирамида асосида ётади. Агарда кубнинг ҳажми V_1, пирамиданинг ҳажми V бўлса, $V_1\leqslant \frac{4}{9}V$ эканини исботланг.

320. Кесик конуснинг ясовчиси ён сирти юзига тенгдош бўлган доиранинг радиусига тенг. Бундай кесик конусга шарни ички чизиш мумкин эканлигини исботланг.

321. Кесик конуснинг баландлиги унинг асосларининг диаметрлари орасида ўрта пропорционалдир. Бундай кесик конусга шарни ички чизиш мумкин эканлигини исботланг.

322. Тўртбурчакли мунтазам пирамидага ички ва ташқи чизилган шарлар радиуслари r ва R бўлсин. $\frac{R}{r}\geqslant \sqrt{2}+1$ эканини исботланг.

323. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг ён ёғи асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Пирамидага ички чизилган шарнинг радиуси r га тенг. Шар марказидан пирамида асосига параллел ўтказилган текислик ҳосил қилган кесим юзини топинг.

324. Учбурчакли мунтазам пирамиданинг баландлиги h га, учидаги текис бурчаги α га тенг. Пирамидага ташқи чизилган шар радиусини топинг.

325. Ҳажми V га тенг бўлган конусга ички чизилган пирамиданинг асоси ўткир бурчаги α бўлган тўғри бурчакли учбурчакдан иборат. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

326. Қирраси a га тенг бўлган кубга цилиндр қуйидагича ички чизилган: цилиндрнинг ўқи кубнинг диагоналида ётади, цилиндрнинг ҳар бир асоси кубнинг учта учи орқали ўтувчи текисликларда ётади. Цилиндрнинг ён сиртини топинг.

327. Учбурчакли мунтазам пирамидага R радиусли шар ташқи чизилган. Пирамиданинг учидаги текис бурчаги α бўлса, унинг ён қирраси узунлигини топинг.

328. Ён қиррасидаги икки ёқли бурчаги 2α бўлган учбурчакли мунтазам пирамидага шар ташқи чизилган. Пирамида ҳажмининг шар ҳажмига нисбатини топинг.

329. Пирамиданинг асоси томони a ва ўткир бурчаги α бўлган ромбдан иборат. Асосида жойлашган икки ёқли бурчакларнинг ҳар бири φ га тенг. Шу пирамидага ички чизилган шар ҳажмини топинг.

330. Шар конуснинг учидан ўтиб, унинг асосига уринади. Конуснинг тўла сирти шар сиртидан икки марта катта эканлигини исботланг. Уларнинг ҳажмлари қандай нисбатда бўлади?

331. Конуснинг ясовчиси асос текислиги билан α бурчак таш-

кил этади. Шу конусга шар ташқи чизилган. Конус ҳажмининг шар ҳажмига нисбатини топинг.

332. $ABCD$ тетраэдрда $AB=6$, $CD=8$ бўлиб, қолган қирраларининг узунликлари $\sqrt{74}$. Тетраэдрга ташқи чизилган шарнинг радиусини топинг.

333. Учбурчакли мунтазам пирамидага R радиусли шар ички чизилган. Пирамиданинг ён қирраси асоснинг томонига тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

334. Қирраси a га тенг бўлган мунтазам тетраэдрга ички чизилган тенг томонли цилиндрнинг баландлигини топинг.

335. Цилиндрнинг ўқ кесими томони a га тенг бўлган квадрат. Шу цилиндрга ички чизилган тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг ён ва тўла сиртларини топинг.

336. Радиуси R бўлган шарга тўртбурчакли мунтазам пирамида ички чизилган. Агар бу пирамида асосига ташқи чизилган айланинг радиуси r га тенг бўлса, пирамиданинг ҳажмини топинг.

337. Цилиндр ва шар берилган Цилиндр асосининг ва шар катта доирасининг радиуслари тенг. Цилиндр тўла сиртининг шар сиртига бўлган нисбати $m:n$. Уларнинг ҳажмлари нисбатини топинг.

338. Цилиндрнинг баландлиги асосининг радиусига тенг бўлиб, унинг узунлиги a га тенг. Цилиндр ўқи орқали бошқа цилиндрик сирт ўтказилган бўлиб, бу сирт берилган цилиндрни икки бўлакка, унинг асоси эса берилган цилиндр асосининг айланасини узунликлари $2:1$ нисбатда бўлган иккита ёйга бўлади. Цилиндр катта бўлагининг ён сиртини ва ҳажмини топинг.

339. Конус ва ярим шар радиуси R га тенг бўлган умумий асосга эга. Агар конуснинг ҳажми ярим шарнинг ҳажмига тенг бўлса, конуснинг ён сиртини топинг.

340. Радиуси R бўлган ярим шарга куб шундай ички чизилганки, унинг тўртта учи ярим шарнинг асосида ётади. қолган тўртта учи эса унинг сферик сиртига жойлашган. Кубнинг ҳажмини ҳисобланг

341. Шар сегментига ички чизилган конуснинг ён сирти бу сегмент асосининг юзи билан унинг ён сирти орасида ўрта пропорционал миқдор эканлигини исботланг.

342. Уч бурчакли пирамиданинг ён қирралари a, b, c га тенг; учидаги барча текис бурчаклари 90° дан. Бир учи пирамида учида, унга қарши ётган учи эса пирамида асосида ётган ички чизилган кубнинг томонини топинг.

343. Ярим шарга ички чизилган конус у билан умумий асосга эга, ташқи чизилган конуснинг асоси эса ярим шарнинг асос текислигида ётади. Ташқи чизилган конуснинг ўқ кесими тўғри бурчакли учбурчак. Ярим шарнинг сирти конуслар ён сиртларининг орасида ўрта пропорционал эканлигини исботланг.

344. Шарга тенг томонли конус ва тенг томонли цилиндр ташқи чизилган бўлса, $S_ц^2 = S_ш \cdot S_к$ ва $V_ц^2 = V_ш \cdot V_к$ ларни исботланг.

345 Агар икки конус умумий баландликка ва параллел асосларга эга бўлса, у ҳолда уларнинг умумий бўлагининг ҳажми ҳар бир конус ҳажмининг тўртдан бирига тенг бўлишини исбот қилинг.

346. Ўқ кесими квадрат бўлган цилиндрга учлари цилиндр ўқининг ўртасида бўлган иккита конус ясалган. Агар цилиндрнинг баландлиги $2h$ га тенг бўлса, конусларнинг тўла сиртлари йиғиндисини ва ҳажмлари йиғиндисини топинг.

347. Шар, ўқ кесими квадрат бўлган цилиндр ва конус берилган. Цилиндр ва конус бир хил асосга эга, уларнинг баландликлари эса шар диаметрига тенг. Цилиндр, шар ва конус ҳажмлари қандай нисбатда бўлади?

348. Агар шар секторини чегараловчи конус сиртнинг юзи Q га, сферик сегмент сиртнинг юзи эса S га тенг бўлса, шар секторининг ҳажмини топинг.

349. Радиуси R бўлган шарга тўртбурчакли мунтазам пирамида ички чизилган бўлиб, бунда пирамиданинг асоси унга тик бўлган радиусни тенг иккига бўлади. Шар сиртини аниқланг.

350. Радиуси R га тенг бўлган шарга n бурчакли мунтазам пирамида ички чизилган. Агар пирамида энг катта ҳажмга эга бўлса, унинг баландлигини топинг.

351. Радиуси R га тенг бўлган шарга n бурчакли мунтазам призма ички чизилган. Агар призма энг катта ҳажмга эга бўлса, унинг баландлигини топинг.

352. Кубнинг қирраси a га тенг. Кубнинг бир қиррасининг учларидан ўтувчи ва унга қарши ётган қиррадаги икки ёқли бурчакнинг ёқларига уринувчи шарнинг радиусини топинг.

353. Қирраси a га тенг бўлган иккита бир хил куб берилган. Агар биринчи куб ўзининг ёқларидан бирининг ўрта чизиғи атрофида 90° га бурилса, у ҳолда у иккинчи куб билан устма-уст тушади. Бу кублар умумий бўлагининг ҳажмини топинг.

354. Кубнинг ҳеч бир иккитаси бир қиррада ётмайдиган тўртта учи қаралмоқда. Бу тўртта учининг ҳар учтаси орқали кесувчи текисликлар ўтказилган. Шу усул билан кесиб ташлангандан сўнг кубнинг қолган қисмининг ҳажмини топинг. Кубнинг қирраси a га тенг.

355. Кубнинг умумий учга эга бўлган ҳар учта қиррасининг охирларида жойлашган учта учи орқали текисликлар ўтказилган. Агар кубнинг қирраси a га тенг бўлса, бу текисликлар билан чегараланган жисмнинг ҳажмини топинг.

356. Қирраси a га тенг бўлган иккита бир хил куб икки қарама-қарши ёқларининг ўртасини туташтирувчи умумий кесмага эга, лекин бир куб бу кесма атрофида иккинчисига нисбатан 45° га бурилган. Бу кубларнинг умумий бўлагининг ҳажмини ҳамда бу кублар бирлашмасидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.

357. Қирраси a га тенг бўлган иккита бир хил кубнинг диагоналлари битта тўғри чизиқда ётади. Иккинчи кубнинг учи биринчи кубнинг маркази билан устма-уст тушади ҳамда иккинчи куб диагонали атрофида биринчи кубга нисбатан 60° га бурилган. Бу кубларнинг умумий бўлагининг ҳажмини топинг.

358. Қирраси a га тенг бўлган иккита бир хил куб қарама-қарши қирраларининг ўрталарини туташтирувчи умумий кесмага эга, лекин бир куб бу кесма атрофида иккинчисига нисбатан 90° га бурилган. Бу кубларнинг умумий бўлагининг ҳажмини топинг.

359. Қирраси a га тенг бўлган иккита бир хил куб умумий диагоналга эга, лекин бир куб диагоналга унинг атрофида иккинчисига нисбатан 60° га бурилган. Бу кубларнинг умумий бўлагининг ҳажмини топинг.

360. Мунтазам тетраэдр ёқларининг марказлари янги тетраэдрнинг учлари бўлиб хизмат қилади. Уларнинг сиртлари нисбатини ва ҳажмлари нисбатини топинг.

361. Қирраси a га тенг бўлган иккита мунтазам тетраэдр умумий баландликка эга, лекин бир тетраэдр бу баландлик атрофида иккинчисига нисбатан 60° га бурилган. Бу тетраэдрларнинг умумий бўлагининг ҳажми ва сиртини топинг.

362. Қирраси a га тенг бўлган иккита мунтазам тетраэдр умумий баландликка эга, лекин бирининг учи иккинчисининг асосининг марказида ва аксинча жойлашган. Асосларда жойлашган. учбурчакларнинг томонлари параллел. Бу тетраэдрлар умумий бўлагининг ҳажмини топинг.

363. Қирраси a га тенг бўлган иккита мунтазам тетраэдр қарама-қарши қирраларининг ўрталарини бирлаштирувчи умумий кесмага эга, лекин бир тетраэдр иккинчисига нисбатан 90° га бурилган. Бу тетраэдрларнинг умумий бўлагининг ҳажмини топинг.

364. Қирраси a га тенг бўлган иккита мунтазам тетраэдр умумий баландликка эга, лекин бир тетраэдр бу баландлик атрофида иккинчисига нисбатан 30° га бурилган. Бу тетраэдрларнинг умумий бўлагининг ҳажмини топинг.

365. Қирраси a га тенг бўлган иккита мунтазам тетраэдр умумий баландликка эга, лекин бирининг учи иккинчисининг асосининг марказида ва аксинча жойлашган. Биринчи тетраэдрнинг асоси иккинчи тетраэдр асосига нисбатан 60° га бурилган. Бу тетраэдрларнинг умумий бўлагининг ҳажмини топинг.

366. Иккита мунтазам тетраэдр икки ёғи билан шундай бирлаштирилганки, натижада улар иккиланган пирамида ҳосил қилади. Бу иккиланган пирамида олтита ён ёқларининг марказлари учбурчакли тўғри призманинг учлари деб қабул қилинган. Агар тетраэдрнинг қирраси a га тенг бўлса, ҳосил бўлган призманинг ҳажмини топинг.

367. Асос айланасининг радиуси r бўлган учта тенг томонли конус қуйидагича жойлаштирилган: уларнинг ҳаммаси умумий учга эга, ҳар иккитаси умумий ясовчига эга. Учлари учда ва конуслар асосларининг марказларида ётган пирамиданинг ҳажмини топинг.

368. Фазода умумий учга эга бўлган n та конус жойлаштирилган бўлиб, уларнинг иккитаси умумий ясовчига эга. Конуснинг учидаги ўқ кесимда ҳосил бўлган бурчакни топинг.

369. Тўртбурчакли мунтазам пирамидага ички ва ташқи чизилган шарларнинг марказлари устма-уст тушади. Пирамиданинг учидаги текис бурчагини топинг.

370. Радиуслари R ва r бўлган икки ташқи уринувчи шарларга конус ташқи чизилган. Бу учала жисмлар билан чегараланган фигуранинг ҳажмини топинг.

371. Радиусларининг нисбати P га тенг бўлган икки шар ўзаро уринади. Бу шарлар конусга қуйидагича ички чизилган: шарларнинг марказлари конус ўқида жойлашган бўлиб, биринчи шар конуснинг ён сиртига, иккинчиси унинг асоси ва ён сиртига уринади. Шарлар сиртлари йиғиндисининг конуснинг тўла сиртига нисбатини топинг.

372. Радиуслари R ва r бўлган икки шар ўзаро ташқи уринади. Бу шарлар конусга қуйидагича ички чизилган: биринчи шар конуснинг асосига ва ён сиртига уринади. Шарларнинг конус ён сиртига уриниш айланалари кесик конуснинг асослари бўлиб хизмат қилади. Шу кесик конуснинг ён сиртини топинг.

373. Ўқ кесимининг учидаги бурчаги α га тенг бўлган конусга сфера ички чизилган. Сферага конусга ўхшаш бўлган конус ички чизилган. Агарда биринчи конус ҳажмининг иккинчи конус ҳаж-

мига нисбати a га тенг бўлса, α бурчакнинг катталигини топинг. a нинг қандай қийматларида масала ечимга эга?

374. Баландлиги 10 см бўлган тенг томонли конуснинг асоси T_α текисликда ётади. Ўзаро уринувчи тенг шарлар T_α текисликка ва конуснинг ён сиртига уринади. Бу шарларнинг радиусларини топинг.

375. Конусга бешта тенг шар жойлаштирилган бўлиб, булардан тўрттаси конус асосида ётиб, ҳар бири бошқа иккитасига ва конуснинг ён сиртига уринади. Бешинчи шар конуснинг ён сиртига ва дастлабки тўртта шарга уринади. Агарда шарларнинг радиуслари r га тенг бўлса, конуснинг ҳажмини топинг.

376. Баландлиги 4 см, асос айланасининг радиуси 3 см бўлган конуснинг асоси T_α текисликда ётади. Олтита тенг шарларнинг ҳар бири иккита қўшнисига, T_α текисликка ва конуснинг ён сиртига уринади. Шарларнинг радиусини топинг.

377. Радиуслари r_1 бўлган иккита шар ва радиуслари r_2 бўлган иккита шар T_α текисликда қуйидагича жойлаштирилган: шарларнинг ҳар бири қолган учтасига ва T_α текисликка уринади. $r_1 : r_2$ ни топинг.

378. Радиуслари R га тенг бўлган учта шар T_α текисликда ётади ва ҳар бири қолган иккитаси билан уринади. Берилган шарларга ва T_α текисликка бир вақтда уринувчи шарнинг радиусини топинг.

379. Радиуси R га тенг бўлган битта шар ва радиуслари r га тенг бўлган иккита шар T_α текисликда ётади ва ўзаро уринади. Берилган шарга ва T_α текисликка бир вақтда уринувчи шарнинг радиусини топинг.

380. Радиуслари r га тенг бўлган тўртта шар T_α текисликда қуйидагича жойлаштирилган: уларнинг марказлари томони a га тенг бўлган квадрат ташкил этади. Бу тўртала шарга устки томондан уринувчи бешинчи шарнинг радиуси R га тенг бўлиб, у T_α текислик билан умумий нуқтага эга эмас. Бешинчи шарнинг энг юқори нуқтасидан T_α текисликкача бўлган масофани топинг. a, r, R лар орасида қандай муносабат бажарилганда масала ечимга эга?

381. Радиуслари R га тенг бўлган тўртта шар T_α текисликда қуйидагича ётади: булардан учтаси ўзаро уринади, тўртинчиси эса бу учта шарнинг иккитасига уринади. Буларнинг устига радиуслари r га тенг бўлган ўзаро уринувчи икки шар қўйилган бўлиб, буларнинг ҳар бири учта катта шарга уринади. Катта ва кичик шарлар радиуслари нисбатини топинг.

382. Цилиндрнинг ичига радиуси 4 см бўлган иккита шар ва радиуси 5 см бўлган битта шар қуйидагича жойлаштирилган: ҳар бир шар қолган иккитасига, цилиндрнинг ён сиртига ва цилиндр асосларининг бирига уринади. Цилиндр асосининг радиусини топинг.

383. Асосининг радиуси R га тенг бўлган цилиндрга k та тенг шарлар қуйидагича жойлаштирилган: ҳар бир шар цилиндрнинг ён сиртига пастки асос текислигига ва иккита шарга уринади. Сўнгра ўша радиусдаги $k+1$- шар олиниб, у цилиндрнинг устки асосига ва олдин жойлаштирилган k та шарнинг ҳаммасига

бир вақтда уринадиган қилиб жойлаштирилган. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.

384. Қирраси a га тенг бўлган мунтазам тетраэдрга тўртта тенг шар қуйидагича жойлаштирилган: ҳар бир шар қолган учтасига ва тетраэдрнинг учта ёғига уринади. Бу шарларнинг радиусини топинг.

Ечилиши мураккаброқ бўлган масалалар

Юқоридаги бобларда берилган мисол ва масалаларни ечиш усул ва методлари билан танишилди. Бу методларнинг мисол ва масалаларнинг берилишига қараб рационал танланиши ва татбиқ қилиниши мисол ва масалалар ечишда муҳим аҳамиятга эгадир. Шунинг учун берилган ҳар бир масалани таҳлил қилиш ва унда қатнашаётган математик қонуниятларнинг мазмуни, мақсади ва ўзаро боғлиқлигини аниқлаш натижасида бу масалани ечиш алгоритми аниқланади ва шу алгоритм асосида масалани ечилади. Бу ўринда берилган масала ўз шартида қандай математик боғланишни сақлаётганлигини аниқлаш ва уни синтез қилиш муҳимдир. Бу бўлимда келтирилган вариантлар мисоллар ва масалаларни ечишда ўқувчилар ўзларининг математикадан билим ва малакаларини унумли ишлатибгина қолмасдан, математикани ўрганиш соҳасида яна ҳам чуқурроқ математик ва мантиқий тафаккурга эга бўлишлари мумкин. Бундан ташқари улар юқорида кўриб ўтилган масалаларни ечиш методлари бўйича олган билимларини янада бойитадилар ҳамда такомиллаштирадилар.

1-вариант

1. Соддалаштиринг:

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\frac{x^2-1}{2}+\sqrt{1-x^2}.$$

2 Асосининг томони a бўлган учбурчакли мунтазам призма асосининг бир томони бўйича асос текислиги билан α бурчак ташкил этувчи текислик ўтказилган бўлса, призманинг текислик билан кесилгандан қолган бўлагининг ён сиртини топинг.

3. Тенгламани ечинг:

$$9^{\log_{25}x^2}+\log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2}=0{,}5\left(9^{\log_{25}x+1}-9^{\log_{25}x}\right).$$

4. Тенгламани ечинг: $\sin^2x+3\cos^2x=4\sin x\cos x$.

5. $y=\sqrt{1-x^2}$ эгри чизиқнинг OX ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган шакл ҳажмини топинг.

2-вариант

1. Айниятни исботланг: $\arccos\frac{36}{85}-\arccos\frac{15}{17}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}$.

2. Турист икки шаҳар орасидаги масофани 3 кунда босиб ўтди. У биринчи куни бутун йўлнинг $\frac{1}{5}$ қисмини ва яна 60 км, иккинчи куни бутун йўлнинг $\frac{1}{4}$ қисмини ва яна 20 км, учинчи куни эса бутун йўлнинг $\frac{23}{80}$ қисмини ва қолган 25 кмни босиб ўтди. Шаҳарлар орасидаги масофани топинг.

3. Тенгламани ечинг: $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-\sin(2\pi-x)=$
$=\frac{\sec x-\cos x}{2}\operatorname{cosec} x$.

4. $xy+3=0$, $3y+x=0$, $x=-1$ чизиқлар билан чегараланган юзани топинг.

5. Тенгсизликни ечинг: $\sqrt{9^x+3^x-2}\geqslant 9-3^x$.

3-вариант

1. Тўртбурчакли мунтазам пирамида асосининг томони l ва асосидаги икки ёқли бурчаги α бўлиб, шу пирамидага шар жойлаштирилган бўлса, унинг марказидан пирамида ён қиррасигача бўлган масофани топинг.

2. Тенгсизликни исботланг: $\lg(n+1)>\frac{3}{10n}+\lg n$; $n\in N$.

3. Айниятни исботланг:

$$\frac{\sin^2(3\pi-4\alpha)+4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)-4}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)-4\cos^2\left(2\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)}=\operatorname{ctg}^4 2\alpha.$$

4. Тенгсизликни ечинг: $\sqrt{\log_2\frac{3-2x}{1-x}}<1$.

5. Ҳисобланг: $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\ldots\cos\frac{14\pi}{15}$.

4-вариант

1. Соддалаштиринг: $\sin^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

2. $7\frac{1}{2}$ минутда ҳовуздаги сувнинг $\frac{2}{3}$ қисмини чиқариб ташлаши мумкин бўлган насос 0,15 соат ишлаганидан сўнг тўхтаб қолди. Агар насос тўхтагандан кейин ҳовузда 25 м^3 сув қолган бўлса, ҳовузнинг сиғимини топинг.

3. Тенгламани ечинг: $(a^{\log_b x})^2 - 5x^{\log_b a} + 6 = 0.$

4. Тенгсизликни ечинг:

$$x^2 \cdot 2^x + 9(x+2)2^x + 8x^2 < (x+2)2^{2x} + 9x^2 2^x + 18x + 16.$$

5. $y=x^2$, $x=-1$ ва $x=1$ чизиқлар билан чегараланган юзани топинг.

5-вариант

1. Соддалаштиринг ва ҳисобланг:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)\left(\frac{a+b}{2a}-\frac{b}{a+b}\right):\left[\left(a-2b+\frac{b^2}{a}\right)\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)\right];$$

бу ерда $a=0{,}75$, $b=1\frac{1}{3}$.

2. Асоси тенг ёнли учбурчак бўлган пирамида асосининг тенг ёнлари орасидаги бурчак α ва периметри $2p$ бўлиб, ён ёқлари асос текислиги билан φ бурчак ташкил этса, пирамида ҳажмини топинг.

3. Тенгламани ечинг: $x^{\frac{\lg x+7}{4}} = 10^{\lg x+1}$.

4. Тенгламани ечинг: $\sin x + \cos x = \operatorname{cosec} x$.

5. Агар $F'(x) = \dfrac{x^3-4x+5}{x}$ ва $F(1) = \dfrac{1}{3}$ бўлса $F(x)$ ни топинг.

6-вариант

1. 60 т юкни бир жойдан иккинчи жойга олиб бориш учун бир неча машина сўраб олинди Йўлнинг бузуқлиги сабабли ҳар бир машинага мўлжаллланганидан 0,5 т кам юк ортилди ва шунинг учун яна қўшимча 4 та машина сўраб олинди. Аввал нечта машина сўраб олинган эди?

2. Тенгламани ечинг:

$$\lg(6\cdot 5^x + 25\cdot 20^x) = x + \lg 25.$$

3. Агар A, B, C лар учбурчак бурчаклари бўлса

$$\frac{\sin C}{\cos A\cos B} = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B$$ эканини исботланг.

4. Тенгсизликни ечинг: $\dfrac{2(x-4)}{(x-1)(x-7)} > \dfrac{1}{x-2}$.

5. $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y-x=4$ чизиқлар билан чегараланган юзани ҳисобланг.

7-вариант

1. Оғма параллелепипеднинг асоси томонлари a ва b бўлган тўғри тўртбурчак бўлиб ён қирраси c га тенг ва асосининг томонлари билан α ўткир бурчак ташкил қилса, унинг ҳажмини топинг.

2. Тенгламани ечинг:

$$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2-3=\log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3+\log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3.$$

3. Тенгламани ечинг:

$$4\cos^2 x+2\sin^2 x=3\sin 2x.$$

4. Тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{x-6}-\sqrt{10-x}\geqslant 1.$$

5. $y=\frac{x^4-3}{x^2}$ функция графигига $x=1$ нуқтада уринувчи уринма тенгламасини тузинг.

8-вариант

1. Орасидаги масофа 30 км бўлган A ва B туристик базалардан икки группа ёш туристлар бир-бирларига қараб йўлга чиқишлари керак. Агар биринчи группа иккинчисидан 2 соат олдин йўлга чиқса, у ҳолда улар иккинчи группа йўлга чиққанидан 2,5 соат кейин учрашишади. Агар иккинчи группа биринчидан 2 соат олдин йўлга чиқса, у ҳолда учрашув биринчи группа йўлга чиққанидан 3 соат кейин содир бўлади. Ҳар бир группа туристлари қандай ўртача тезлик билан келаётир?

2 Тенгламани ечинг: $\log_3 x+\log_{\sqrt{x}} x-\log_{\frac{1}{3}} x=6.$

3. Агар берилган учбурчак медианалари бир нуқтада кесишиши маълум бўлса, у ҳолда кесишиш нуқтасида бу медианалар 2 : 1 нисбатда бўлинишини исботланг.

4. Тенгламани ечинг:

$$\cos^4 x+\sin^4 x-4\sin x\cos x+3\sin^2 x\cos^2 x=0.$$

5. $y=\frac{6x^2-x^4}{x}$ функциянинг ҳосиласини ва критик нуқталарини топинг.

9-вариант

1. Асоси учбурчак бўлган V ҳажмли пирамида конусга жойлаштирилган. Агар пирамида асосининг иккита бурчаги α ва β бўлса конуснинг ҳажмини топинг.

2. Тенгламани ечинг: $3^{\log_3^3 x}=x^{\log_3 x}$.

3. Тенгламани ечинг:

$$\frac{\cos^2 x\,(1+\operatorname{ctg} x)-3}{\sin x-\cos x}=3\cos x.$$

4. Тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{9^x-3^{x+2}}\geqslant 3^x-9.$$

5. Молнинг нархини олдин 20% га, кейин янги нархини яна 15% га ва охирги ҳисоботдан кейин яна 10% га арзонлаштиришди. Молнинг биринчи баҳосини ҳаммаси бўлиб неча процентга арзонлаштиришган?

10-вариант

1. Ён қирраси асос текислиги билан α бурчак ташкил қилувчи мунтазам учбурчакли пирамида R радиусли шарга жойлаштирилган бўлса, шу пирамида ҳажмини топинг.

2. Икки бригада бир вақтда ишлаб, ер участкасига 12 соатда ишлов бериб бўлишди Агар бригадаларнинг ишлаш тезликлари нисбати 3 : 2 бўлса ҳар бир бригаданинг ёлғиз ўзи шу ер участкасига неча соатда ишлов бериб бўлади?

3. Тенгсизликни ечинг: $\dfrac{1}{2^x+3} > \dfrac{1}{2^{x+2}-1}$.

4. Тенгламани ечинг:

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x = \sin^2 4x + \sin^2 5x.$$

5. Агар $F'(x) = 4x^3 - x + 8$ ва $F(2) = 32$ бўлса $F(x)$ ни топинг.

11-вариант

1. Мунтазам учбурчакли пирамидада асоси икки томонининг ва ён қиррасининг ўрталаридан ўтувчи ҳамда асос текислиги билан α бурчак ташкил этувчи текислик ўтказилган бўлиб у пирамиданинг ён ёғига параллелдир Агар шунда ҳосил бўлган кесим юзи S бўлса пирамида ҳажмини топинг.

2. Тенгламани ечинг:

$$\log^2_{\sqrt{5}} x \left(\log_x 5\sqrt{x} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}\right) = 6.$$

3. Икки ишчи бир сменада биргаликда 72 та деталь тайёрлашди. Иш унумини биринчи ишчи 15% га, иккинчиси 25% га оширгандан сўнг, улар бир сменада биргаликда 86 та деталь тайёрлайдиган бўлдилар. Иш унуми ошгандан сўнг ҳар бир ишчи бир сменада нечтадан деталь тайёрлаган?

4. Тенгсизликни ечинг: $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} < \dfrac{3}{2}$.

5. Тенгламани ечинг:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x.$$

12-вариант

1. Мунтазам тўртбурчакли пирамида асосининг томони a га ва ён ёқлари орасидаги икки ёқли бурчак α га тенг бўлса, пирамиданинг тўла сирти ва ҳажмини топинг.

2. Тенгламани ечинг: $1 - \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi - x}{2}$.

3. Берилган $\overrightarrow{AB} = \{3;\ 0;\ 4\}$ ва $\overrightarrow{AC} = \{5,\ -2;\ 4\}$ векторлар ABC учбурчак томонларини аниқласа у ҳолда шу учбурчакнинг AN медианасини топинг.

4. Юк поезди йўлда 12 мин тўхтаб қолди, кейин эса тезлигини 15 км/соатга ошириб йўқотилган вақтни 60 км масофада етказиб олди. Поезднинг дастлабки тезлигини топинг.

5. Тенгсизликни ечинг: $8\frac{3^{x-2}}{3^x-2^x}>1+\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

13-вариант

1. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси унинг баландлигидан m бирликка ортиқ ва улар орасидаги бурчак α га тенг бўлса, унинг тўла сирти ва ҳажмини топинг

2. Тенгламани ечинг:

$$\sin x+\sin 2x+\cos x+\cos 2x+1=0.$$

3. Тенгсизликни ечинг:

$$\log_{0,5}\sqrt{x+1}<\log_{0,5}\sqrt{4-x^2}+1.$$

4. Турист бутун йўлнинг $\frac{5}{8}$ қисмини автомобилда, қолган қисмини эса катерда босиб ўтди. Катернинг тезлиги автомобиль тезлигидан 20 км/соат кам. Турист автомобилда катердагига қараганда 15 мин кўп юрди. Туристнинг юрган йўли 160 км га тенг бўлса автомобилнинг ва катернинг тезлиги қанчага тенг?

5. Тенгламани ечинг:

$$\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=10.$$

14-вариант

1. Мунтазам тўртбурчакли пирамида учидан асоси билан φ бурчак ташкил қилиб асосининг томонига параллел бўлган текислик ўтказилган. Агар пирамида асосининг томони a ва текис бурчаги α бўлса кесим юзини топинг.

2. Тенгламани ечинг:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{1}{4}\sin^2 2x.$$

3. Тенгламани ечинг:

$$2\lg 2+\left(1+\frac{1}{2x}\right)\lg 3+\lg\left(3^{\frac{1}{x}}+27\right)=0.$$

4. $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=2$ чизиқлар билан чегараланган юзани топинг.

5. A дан B гача бўлган масофа темир йўли бўйлаб 88 км га тенг. Сув йўли билан бу масофа 108 км гача узаяди. Поезд A дан теплоходга қараганда бир соат кеч йўлга чиқади ва B га ундан 15 мин. олдин етиб келади. Агар поезднинг ўртача тезлиги теплоходнинг ўртача тезлигидан 40 км га ортиқ бўлса поезднинг ўртача тезлигини топинг.

15-вариант

1. Агар берилган мунтазам учбурчакли пирамиданинг учидаги текис бурчаги α ва асосига ташқи чизилган айлананинг радиуси R бўлса, унинг тўла сирти ва ҳажмини топинг.

2. Тенгламани ечинг:

$$\log_x \sqrt{5} + \log_x 5x - 2{,}25 = (\log_x \sqrt{5})^2.$$

3. Системани ечинг:

$$\begin{cases} 2x + y^2 \leqslant 0; \\ y + 1 \leqslant 0; \\ y - 2x + 3 \geqslant 0. \end{cases}$$

4. Поезд t соат тўхтаб қолди. Машинист поезд тезлигини m км/соатга ошириб, кечиккан вақтини S км ли масофада етказиб олди. Агар поезд кечикмаганда шу S км масофада қандай тезлик билан ҳаракат қилган бўлар эди?

5. Тенгламани ечинг:

$$|1 - \sin 5x| = \left(\cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{3x}{2}\right)^2.$$

16-вариант

1. Пирамида асоси ўткир бурчаги α бўлган ромбдан иборат бўлиб, ён ёқлари асос текислиги билан φ бурчак ташкил қилса ва пирамида баландлиги H бўлса унинг ҳажмини топинг.

2. Тенгсизликни ечинг: $\log_x \frac{3}{8 - 2x} \geqslant -2.$

3. Тенгламани ечинг: $\sin 9x + \sin 5x + 2\sin^2 x = 1.$

4. Станциядан 20 мин кечикиб чиққан поезд тезлигини жадвалдагидан 16 км/соатга ошириб 160 км ли йўлни босиб ўтди ва кейинги станцияга ўз вақтида етиб келди. Поезднинг бу икки станция оралиғида жадвал бўйича тезлиги қандай бўлган?

5. Системани ечинг:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{4}{3} < \frac{4}{x}, \\ \frac{1}{x} > -1; \\ x^2 + 3x - 1 > 0. \end{cases}$$

Қуйидаги мисол ва масалаларни энг қулай усуллардан фойдаланиб ечинг:

1. $\frac{x\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} = 4.$

2. $\sqrt{\log_2 x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = 2.$

3. $x\sqrt{x^2+15} - \sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15} = 2.$

4. $4+\sqrt{26-x^2} = x$

5. $\sqrt{13 - 18\,\mathrm{tg}\, x} = 6\,\mathrm{tg}\, x - 3.$

6. $x^2 - 4x + 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12.}$

7. $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$.

8. $2x^2+\sqrt{2x^2-4x+12}=4x+8$.

9. $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$.

10. $\sqrt[3]{16-x^3}=4-x$.

11. $\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\frac{6}{\sqrt{3-x}}$.

12. $\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}$.

13. $x^2-4x+32=16\sqrt{x}$.

14. $\frac{2+x}{\sqrt{2}+\sqrt{2+x}}+\frac{2-x}{\sqrt{2}-\sqrt{2+x}}=2\sqrt{2}$.

15. $a\sqrt{x}-\sqrt{x+2ax\sqrt{x^2+7a^2}}=0$.

16. $\frac{x}{x+1}-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}=3$.

17. $\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}-2\sqrt{\frac{x-4}{x+4}}=\frac{7}{3}$.

18. $\sqrt{5x-5}+\sqrt{10x-5}=\sqrt{15x-10}$.

19. $\sqrt{8+2x-x^2}>6-3x$.

20. $2x+3<\sqrt{-2-3x-x^2}$.

21. $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$.

22. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$.

23. $2-\sqrt{1-x^2}>\sqrt{4-x^2}$.

24. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

25. $\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}>\frac{2}{x}$.

26. $a\sqrt{x+1}<1$; a — параметр.

27. $(a+1)\sqrt{2-x}<1$.

28. $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}>0$.

29. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^2}}\geqslant 0$.

30. $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\frac{35}{12}$.

31. $\begin{cases}|x|+2|y|=3,\\ 5y+7x=2.\end{cases}$

32. $\begin{cases}2x+3y-z=6,\\ x-y+7z=8,\\ 3x-y+2z=7.\end{cases}$

33. $\begin{cases}x^2+y^2+6x+2y=0,\\ x+y+8=0.\end{cases}$

34. $\begin{cases}\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6},\\ x^2-y^2=5.\end{cases}$

35. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{y-4} - \dfrac{x-1}{y+4} + \dfrac{16}{y^2-16} = 0, \\ 11x - 3y = 1. \end{cases}$ 36. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10. \end{cases}$ 38. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 - 2xy, \\ y(x+y) = 10. \end{cases}$

39. $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7. \end{cases}$ 40. $\begin{cases} (x^2 + y^2)\,xy = 78, \\ x^4 + y^4 = 97. \end{cases}$

41. $\begin{cases} x + y + z = 13, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 91, \\ y^2 = xz. \end{cases}$ 42. $\begin{cases} x + y - 2 \leqslant 0, \\ 2y + 5x \geqslant 10, \\ 5x - 2y - 10 \leqslant 0. \end{cases}$

43. $\begin{cases} 3x + 2y + 1 > 0, \\ 3x + 2y - 3 < 0. \end{cases}$ 44. $\begin{cases} 2y - x \leqslant 6, \\ 9x + 4y \leqslant 56, \\ 3x + 5y \geqslant 4. \end{cases}$

45. $\begin{cases} x - 3y + 13 \leqslant 0, \\ y + 5 \leqslant 5x, \\ 4y + 28 \geqslant 7x. \end{cases}$ 46. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(2x + y - 2) > \log_{\frac{1}{3}}(y + 1), \\ \sqrt{y - 2x - 3} < \sqrt{3 - 2x}. \end{cases}$

47. $5^{2x} = 3^{2x} + 2 \cdot 5^x + 2 \cdot 3^x.$

48. $3^{12x-1} - 9^{6x-1} - 27^{4x-1} + 81^{3x+1} = 2192.$

49. $3^{\lg \operatorname{tg} x} - 2 \cdot 3^{\lg \operatorname{ctg} x + 1} = 1.$

50. $3^{2x+1} = 3^{x+2} + \sqrt{1 - 6 \cdot 3^x + 3^{2(x+1)}}.$

51. $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}.$

52. $2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6.$

53. $4^{\lg x + 1} - 6^{\lg x} - 2 \cdot 3^{\lg x^2 + 2} = 0.$

54. $4^{3+2\cos 2x} - 7 \cdot 4^{1+\cos 2x} - \sqrt{4} = 0.$

55. $0{,}4^{\lg^2 x + 1} = 6{,}25^{2 - \lg x^3}.$

56. $9^{1+\log_3 x} - 3^{1+\log_3 x} - 210 = 0.$

57. $\sqrt{\log_2 (2x^2) \log_4 (16x)} = \log_4 x^3.$

58. $\log_2 (4^x + 4) = \log_2 2^x + \log_2 (2^{x+1} - 3).$

59. $\log_{\sqrt{6}} x \sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\sqrt{6}.$

60. $|x - 1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x - 1|^3.$

61. $\log_{3x+7} (9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3} (6x^2 + 23x + 21) = 4.$

62. $\log_{\sin x} 2 - \log_{\sin^2 x} a = -1.$

63. $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \dfrac{a^2 - 4}{2a - x} = 1.$

64. $\log_{3-4x^2} (9 - 16x^4) = 2 + \dfrac{1}{\log_2 (3 - 4x^2)}.$

65. $\log_{3x+5} (9x^2 + 8x + 8) > 2.$

66. $\dfrac{\log_5 (x^2-4x+11)^2 - \log_{11} (x^2-4x+11)^3}{\sqrt{2-5x-3x^2}} > 0.$

67. $\log_3 \dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 0.$

68. $\log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 > 1.$

69. $\log_{(x-3)} (2(x^2-10x+24)) > \log_{x-3} (x^2-9).$

70. $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2} - x - 1\right) > 1.$

71. $\log_5 x + \log_x \dfrac{x}{3} < \dfrac{\log_5 x\,(2-\log_3 x)}{\log_3 x}.$

72. $\begin{cases} \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{9}{8}, \\ \log_2 x + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{y} = 3. \end{cases}$

73. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 + \dfrac{1}{2} y, \\ \log_3 (x+2y) + \log_{\frac{1}{3}} (x-2y) = 1. \end{cases}$

74. $\begin{cases} 10^{3-\lg(x-y)} = 250, \\ \sqrt{x-y} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x+y} = \dfrac{26-y}{\sqrt{x-y}}. \end{cases}$

75. $\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15, \\ 3^y \log_2 x = 2\log_2 x + 3^{y+1}. \end{cases}$

76. $\begin{cases} \log_x (xy) = \log_y x^2, \\ y^{2\log_y x} = 4y + 3. \end{cases}$

77. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}} (y-x) = 4. \end{cases}$

78. $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 32, \\ \log_3 (x-y) = 1 - \log_3 (x+y). \end{cases}$

79. Самолёт узоққа учиш синови вақтида завод аэродромидан белгиланган жойгача жами S км учиб ўтди ва бунга t_1 соат сарфлади. Кейин орқага бурилиб t_2 $(t_1 < t_2)$ соатда завод аэродромига қайтди. Самолётнинг учиб боришдаги ва қайтишдаги ҳақиқий (ҳавонинг ҳаракатсиз массасига нисбатан) тезлиги бир хил бўлиб, $t_1 < t_2$ тенгсизлик шамолнинг таъсири билан тушунтирилади: бунда шамол аввал самолётнинг учиши йўналишида, кейин эса қаршидан эсган. Самолётнинг ҳақиқий тезлиги v ни, шамолнинг тезлиги $v_{ш}$ ни ва ҳавонинг ҳаракатсиз массасига нисбатан самолётнинг учиб ўтган ҳақиқий масофаси S_x ни топинг.

80. Икки ака-ука уйларидан 20 км нарида жойлашган стадионга билет олишган эди. Улар стадионга етиб олиш учун ўзларининг велосипедларидан фойдаланишга қарор қилишиб, акаси велосипедда, укаси пиёда бир вақтда йўлга чиқишга келишиб олишди. Акаси йўлнинг маълум қисмини ўтгандан сўнг велосипедни қолдириб кетади, укаси эса велосипед қолдирилган ерга етиб бориб,

велосипедга миниб акасига стадионга кираверишда етиб олади. Агар ака-укалар пиёда бир хил 4 км/соат тезлик билан юрсалар, велосипедда эса ундан 5 марта тезроқ ҳаракат қилсалар, йўлга қанча вақт кетади ва акаси велосипедни қанча масофада қолдириши керак?

81. Икки теплоход бир вақтда портдан йўлга чиқиб, бири жанубга, иккинчиси эса шарққа қараб йўл олди. Жўнагандан 2 соат кейин улар орасидаги масофа 174 км ни ташкил қилди. Теплоходлардан бирининг тезлиги иккинчисининг тезлигидан соатига 3 км ортиқ бўлса ҳар бир теплоходнинг тезлигини топинг.

82. Пассажир ва юк поездлари тезликларининг нисбати $a:b$. Пассажир поезди A станциядан юк поездига қараганда $\frac{1}{2}$ соат кеч йўлга чиқди. B станцияга ундан $\frac{1}{2}$ соат илгари етиб келди. Агар A билан B орасидаги масофа S км га тенг бўлса, поездларнинг тезликларини топинг.

83. Икки концентрик айлана бўйлаб икки нуқта текис ҳаракат қилмоқда. Улардан бири бир марта тўла айланиб чиқиш учун иккинчисига қараганда 5 сек кам вақт сарфлайди ва 1 мин да 2 та ортиқ айланишга улгуради. Ҳар бир нуқта ўз айланасини бир минутда неча марта айланиб чиқади?

84. Бир китобнинг биринчи томининг 60 нусхаси ва иккинчи томининг 75 нусхасининг биргаликдаги нархи 270 сўмни ташкил қилади. Ҳақиқатда эса китоблар учун 237 сўм тўланди, чунки биринчи том китоб 15% га, иккинчиси эса 10% га арзонлаштирилди. Китобларнинг олдинги баҳоларини топинг.

85. Идишларни қабул қилувчи ишчи икки хил сиғимли 140 та банка қабул қилди. Катта сиғимли банканинг ҳажми кичик сиғимли банканинг ҳажмидан 2,5 л кўп. Катта банкаларнинг умумий ҳажми кичик банкаларнинг умумий ҳажми билан бир хил бўлиб, 60 л га тенг. Катта ва кичик банкаларнинг сонини аниқланг,

86. Моторли қайиқ ва елканли қайиқ кўлда бир-биридан 30 км масофада бўлиб, бир-бирига қараб суза бошлади ва 1 соатдан кейин учрашди. Агар моторли қайиқ елканли қайиқдан 20 км масофа нарида бўлганда, уни қувиб етиши учун 3 соат-у 20 минут зарур бўлар эди. Ҳар бир қайиқнинг тезлигини топинг.

87. Бир хонали сон 10 бирликка орттирилди. Агар биринчи сон неча процентга орттирилган бўлса, ҳосил бўлган сон ҳам шунча процентга орттирилса, у ҳолда 72 ҳосил бўлади. Дастлабки сонни топинг.

88. Шаклланиш ҳолатида турган кристалл ўзининг массасини текис орттира боради. Икки кристаллнинг шаклланиши кузатилганда қуйидаги ҳол аниқланади: улардан иккинчисининг массаси 7 ойда қанча ўсган бўлса, биринчисининг массаси 3 ойда шунча ўсибди. Аммо бир йил ўтгандан кейин биринчи кристалл дастлабки массасини 4% га, иккинчи кристалл эса 5% га орттиргани маълум бўлди. Бу кристалларнинг дастлабки массалари нисбатини топинг.

89. Ёғоч тўсиннинг оғирлиги 90 кг, бундан 2 м узун бўлган темир тўсиннинг оғирлиги эса 160 кг, шу билан бирга 1 м темир тўсиннинг оғирлиги 1 м ёғоч тўсиннинг оғирлигидан 5 кг ортиқ. Ҳар бир тўсиннинг узунлигини топинг,

90, Оила аъзолари ота, она ва уч қиздан иборат бўлиб, ҳаммасининг ёши биргаликда 90 йил, Қизларнинг ёши орасидаги фарқ

2 йилдан. Онанинг ёши қизлар ёшининг йиғиндисидан 10 йилга ортиқ, Ота билан она ёшларининг айирмаси ўртанча қизнинг ёшига тенг. Оила аъзоларининг ҳар бирининг ёши нечада?

91. Тўғри призманинг асоси тўғри бурчакли учбурчакдан иборат бўлиб, унинг гипотенузаси c га, ўткир бурчаги эса 30° га тенг. Остки асоснинг гипотенузаси ва устки асос тўғри бурчагининг учи орқали асос текислиги билан 45° ли бурчак ҳосил қилувчи текислик ўтказилган, Призмадан кесиб олинган учбурчакли пирамиданинг ҳажмини аниқланг.

92. Уч бурчакли пирамиданинг ён ёқлари ўзаро тик, уларнинг юзлари эса a^2, b^2 ва c^2 га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

93. Пирамиданинг асоси томони a га тенг бўлган мунтазам олтибурчакдан иборат. Ён қирраларидан бири асос текислигига тик ва асосининг томонига тенг. Бу пирамиданинг тўла сиртини топинг.

94. Кесик пирамида асосларининг юзлари S_1 ва $S_2 (S_1 > S_2)$ га, унинг ҳажми эса V га тенг. Тўла пирамиданинг ҳажмини топинг.

95. Тўғри параллелепипеднинг асоси бурчакларидан бири 30° га тенг бўлган параллелограммдан иборат. Асоснинг юзи 4 дм^2 га тенг. Параллелепипед ён ёқларининг юзлари 6 дм^2 га ва 12 дм^2 га тенг. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.

96. Асосларининг томонлари 3 м ва 2 м га, ён сирти юзи эса асослари юзларининг йиғиндисига тенг бўлган уч бурчакли кесик пирамиданинг ҳажмини топинг.

97. Мунтазам тетраэдр ёқларининг марказлари унга ички чизилган тетраэдрнинг учлари бўлиб хизмат килади. Уларнинг сиртлари нисбатини ва ҳажмлари нисбатини топинг.

98. Уч бурчакли кесик пирамида устки асосининг бир томони орқали бу томонга қарши ён қиррага параллел қилиб текислик ўтказилган. Агар асосларининг мос томонлари 1:2 нисбатда бўлса, кесик пирамиданинг ҳажми қандай нисбатда бўлинган?

99. Параллелепипед қирраларининг узунликлари a, b ва c га тенг. Узунликлари a ва b бўлган қирралар ўзаро тик, узунлиги c га тенг бўлган қирра эса уларнинг ҳар бири билан 60° ли бурчак ҳосил қилади. Параллелепипеднинг ҳажмини аниқланг.

100. Тўғри параллелепипеднинг асоси параллелограммдан иборат бўлиб, унинг томонлари 3 см ва 4 см га, бурчаги 120° га тенг. Параллелепипеднинг кичик диагонали асосининг катта диагоналига тенг. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.

101. Пирамиданинг асоси юзи S га тенг бўлган тўғри тўртбурчакдан иборат Пирамиданинг иккита ён ёғи асосга тик, қолган иккитаси эса асосга 30° ли ва 60° ли бурчак остида оғма. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

102. Учбурчакли мунтазам пирамида асосининг учи ва икки ён қиррасининг ўрталари орқали текислик ўтказилган. Агар кесувчи текисликнинг ён ёққа тик эканлиги маълум бўлса, пирамида ён сиртининг унинг асоси юзига нисбатини топинг.

103. Уч бурчакли мунтазам пирамида баландлигининг ўртасидан ён қиррага ва ён ёққа тик чизиқлар туширилган. Уларнинг узунликлари мос равишда a ва b га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг, a ва b ларнинг ҳар қандай қийматида ҳам масала ечимга эга бўлаверадими?

104. Радиуси R бўлган ярим шарга куб шундай ички чизилганки, унинг тўртта учи ярим шарнинг асосида ётади, қолган тўрт-

таси эса унинг сферик сиртига жойлашган. Кубнинг ҳажмини топинг.

105. Конуснинг ясовчиси билан асоси текислиги орасидаги бурчак 30° га, конуснинг ён сирти $3\pi\sqrt{3}$ кв. бирликка тенг. Бу конусга ички чизилган олтибурчакли мунтазам пирамиданинг ҳажмини топинг.

106. Радиуси R бўлган шарга олтибурчакли мунтазам призма ташқи чизилган. Призманинг тўла сиртини топинг.

107. Радиуси R бўлган шарга олтибурчакли мунтазам кесик пирамида ички чизилган бўлиб, унинг остки асоси шар мар азидан ўтади, ён қирраси эса асос текислиги билан 60° ли бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

108. Шарга асосининг диагоналлари a ва b га тенг бўлган тўғри параллелепипед ташқи чизилган. Бу параллелепипеднинг тўла сиртини аниқланг.

109. Радиуси R бўлган шарга тўртбурчакли мунтазам пирамида ички чизилган. Агар бу пирамида асосига ташқи чизилган айлананинг радиуси r га тенг бўлса, пирамиданинг ҳажмини топинг.

110. Конус S юзли тўғри бурчакли учбурчакнинг бир катети атрофида айланишидан ҳосил бўлган. Агар бу учбурчакнинг айланишида унинг медианаларининг кесишиш нуқтаси чизган айлананинг узунлиги l га тенг бўлса, конуснинг ҳажмини топинг.

ЖАВОБЛАР

I БОБ. Бутун сонлар ва комбинаторика

22. {2333, 2339, 2341. 2347} **24.** $2^{18}+3^{18}=(2^2+3^2)(2^4-2^2\cdot 3^2+3^4)(2^{12}-2^6\cdot 3^6+3^{12})=13\cdot 61\cdot 37\cdot 73\cdot 181$. **25.** $(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$. **26.** N ни $5n$, $5n+1$, $5n+2$ кўринишда ёзиш мумкин. $n=1$ да $p=5$, $4p^2+1=101$ $6p^2+1=151$ бўлади. **27.** {3}. **31.** $p^2-q^2=(p-1)(p+1)-(q-1)(q+1)$ қўшилувчиларнинг ҳар бири 3, 8 га бўлинади. **32.** $A=a^2+b^2=c^2+d^2$ бир хил жуфтликда бўлса, $(a-c)(a+c)=(d-b)\times(d+b)$; $a-c=tu$, $a+c=sv$; $d+b=su$, $d\cdot b=tv$, $A=a^2+b^2=\frac{1}{4}(u^2+v^2)(t^2+s^2)$. **34.** $a^{10}+a^5+1=(a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1)=\frac{a^{15}-1}{a^5-1}$. **35.** {3}. **38.** {3}. **39.** {1103}. **40.** {3413}. **47.** {23}. **55.** {2963}. **56.** {3911}. **65.** a_1) {88}; a_2) {11}; a_3) {357}; a_4) {9}; a_6) {2011}; a_9) {3109}. **67.** 1) $\frac{11}{7}$, 2) $\frac{71}{107}$, 3) $\frac{91}{113}$, 4) $\frac{179}{58}$, 5) $\frac{125}{213}$, 6) $\frac{64}{81}$, 7) $\frac{131}{583}$, 9) $\frac{185}{341}$, 10) $\frac{17}{13}$. **68.** 1) $D(d, m)=D(d, k[dx, dy])=dD(1,k[x,y])=d$; 2) $D(a, b, m)=D(dm, m)=D(d, 1)\cdot m=m$, $d=D(a, b)$; 3) $D(a, b)=1$; $D(a+b, a b)=1$; 4) $D(a, b)=d$, $a=dx$, $b=dy(x, y)=1$; $D(a+b, m)=dD(x+y, xy)=d$, $D(a+b, m)=D(a, b)$. **72.** 1) $x=30u$, $y=30v$, $u=1; 2; 3; 4$; $x=30; 60; 90$ $y=150-x$, 2) $x=495$, $y=315$; 3) $x=20; 60; 140; 420$: $y=\frac{8400}{x}$, 4) {140; 252}, 5) {2; 10}, {10; 2}. **76.** [1; 9]. **77.** [0; 2,15]. **78.** [−2; 1, 30, 2]. **79.** [0; 1, 4, 3, 2]. **80.** [−3; 1, 1, 2]. **81.** [2; 2, 3, 1]. **82.** [1; 4, 2, 1, 7]. **83.** [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2]. **90.** Ечим йўқ. **91.** $x=13+44t$; $y=-70-237t$. **92.** $x=9+29t$; $y=-17-55t$. **93.** $x=7+8t$; $y=-2-3t$. **94.** $x=1+5t$; $y=1-2t$. **110.** а) {2}; б) {2}; в) {−4}; в) {5}; к) {−2}. **111.** $x=[x]+\alpha_1$; $y=[y]+\alpha_2$, $0<\alpha_1<1$, $0<\alpha_2<1$, агар $0\leqslant\alpha_1+\alpha_2<1$ бўлса, $[x+y]=[x]+[y]$, агар $1\leqslant\alpha_1+\alpha_2<2$ бўлса, $[x+y]>[x]+[y]$, демак $[x+y]\geqslant[x]+[y]$ бўлади. **114.** $\left[\frac{P}{4}\right]_{p=4k+1}=\frac{P-1}{4}=k$; $\left[\frac{P}{4}\right]_{p=4k+3}=\frac{P-3}{4}=k$. **115.** $a=mq+r$ $0<r<m$; $\frac{a}{m}=q+\frac{r}{m}$; $q=\left[\frac{a}{m}\right]=\frac{a-r}{m}$. **116.** $[nx]\leqslant nx<[nx]+1$ дан келиб чиқади. **122.** $a=4q+1$ ёки $a=4q+3$: $\left[\frac{a}{4}\right]+\left[\frac{2a}{4}\right]+\left[\frac{3a}{4}\right]=q+2q+3q=\frac{3(a-1)}{2}$.

II боб. Айний шакл алмаштиришлар. Айниятлар ва тенгсизликларни исботлаш.

1. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. **2.** $(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$. **3.** $(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(-x-1)$. **4.** $(x^4-x^8+1)(x^4+x^8+1)$. **6.** $x(x-3)(x-4)(x-5)$. **7.** $(x^2+x+1)(x^3-x+1)$. **8.** $(2x^2+3xy+2y^2)(x-3y)(3x-y)$. **9.** $(x^2-xy+y^2)(2x^2+xy+y^2)$. **10.** $(x+2y)(2x+y)(x^2+xy+y^2)$. **11.** $(x^2+xy+y^2)(2x^2-3xy+y^2)$. **12.** $(a-3b)(3a-b)(2a+3b)(3a+2b)$. **13.** $(x^2-2xy+3y^2)(3x^2-2xy+y^2)$. **14.** $3(x+y)(x+z)(y+z)$. **15.** $(x+y)(x+z)(y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)$. **16.** $(x+y+z)(xy+xz+yz)$. **17.** $(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$. **18.** $(y-x)(x-z)(y-z)$. **19.** $(a-b)(a-c)(b-c)$. **20.** $(a+b+c)(b-a)(a-c)(b-c)$. **21.** $(x+y+z)(y-x)(x-z)(y-z)$. **22** $5(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)(y-x)(x-z)(y-z)$. **29.** $\frac{1}{p^3q^3}$. **30.** $\frac{16x^{15}}{1-x^{16}}$.

31. $\{0\}$. **32.** $(a+b)(a+c)(b+c)$. **33.** $\frac{a+1}{a}$. **34.** $\frac{2a+1}{(2a-1)^2}$. **35.** $(x^2+3)(x^3+3x+3)(x^2-3x+3)$. **36.** $(x^2+x+2)(x^2-x+2)$. **37.** $(x+1)(x+6)(x^2+7x+16)$. **38.** $(3x-1)(9x^2-6x+4)$, кўрсатма $3x=t$ белгилаш киритинг. **41.** $(2x+y+z)(x+2y+z)$. **42.** $a=6$, $b=-7$. **43.** $\{0,79\}$.

44. $\left\{6\frac{1}{2}\right\}$. **45.** $\left\{2\frac{2}{3}\right\}$. **46.** $\{2, 36\}$. **47.** $\{2, 9\}$. **48.** $\{9, 8\}$. **49.** $\{15, 39\}$.

50. $\{-7, 24\}$. **51.** $\left\{-10\frac{2}{3}\sqrt{6}-21\sqrt{2}\right\}$. **52.** $\{13, 41\sqrt{5}\}$. **53.** $\left\{117\frac{3}{4}\sqrt{2}\right\}$. **54.** $\left\{-1\frac{7}{18}\sqrt{3}+1\frac{31}{75}\sqrt{5}\right\}$. **55.** $\left\{\frac{1}{2}(2+\sqrt{6}-\sqrt{10})\right\}$.

56. $\left\{\frac{(90-2\sqrt{30})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})}{26}\right\}$. **57.** $\left\{\frac{3(3\sqrt{2}-4)(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2}\right\}$.

58. $\left\{\frac{1}{6}\sqrt[4]{27}(\sqrt[4]{3}-1)\right\}$. **59.** $\{0, 06\}$. **60.** $\left\{\frac{\sqrt{5}(\sqrt{6}+1)}{5}\right\}$. **61.** $f(x)=\left[\begin{array}{ll}\frac{1}{x^2+1}, & x>0,\\ -\frac{1}{x^2+1}, & x<0.\end{array}\right.$ **62.** $f(x)=\left[\begin{array}{l}x-1,\ x\geqslant 2,\\ 1,\ 1\leqslant x<2.\end{array}\right.$ **63.** $f(x)=\left[\begin{array}{l}\sqrt{x},\ x<2,\\ \sqrt{x},\ 0<x<2.\end{array}\right.$ **64.** $f(x)=\left[\begin{array}{l}\lg x,\ 0<x<1,\\ -\lg x,\ x\geqslant 1.\end{array}\right.$ **65.** $f(x)=x(x+1)$, $x>0$. **66.** $f(x)=\left[\begin{array}{l}\sqrt{\frac{x-2}{x+2}},\ x\geqslant 2,\\ -\sqrt{\frac{x-2}{x+2}},\ x<-2.\end{array}\right.$ **67.** $\{1\}$. **68.** $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

69. $\{1\}$. 70. $\left\{\frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}\right\}$. 71. $\{\sqrt{a}-\sqrt{b}\}$. 72. $\{\sqrt{x}-\sqrt{y}\}$. 73. $\left\{\frac{1-x}{x}\right\}$. 74. $\sqrt{m(1-m)}$. 75. $\frac{[(a+b)^2-b^2(2a+b)](a+b)}{a^2}$. 76. $\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x^2-1)}{4x^2}$. 77. $\sqrt[3]{a+b}-\sqrt[3]{a-b}$. 78. $\{1\}$. 79. $\{0,04\}$. 80. $\{16\}$.

81. $a-b$. 82, $\{-1\}$. 83, $\frac{1}{c}$. 84. $\frac{\sqrt{t^2-4}}{t+2}$. 85. $\{2\}$. 109. $\{3-3a;\ \frac{1-3a}{2};\ -1-2a\}$. 110. $\frac{1}{1-a}$. 111. $\frac{2}{3}-\frac{a}{9}$. 112. $\{2-2a\}$. 113. $\left\{1-\frac{2a}{3}\right\}$. 114. $\left\{\lg 5=\frac{a-2b+1}{2}\right\}$. 115. $\frac{a+b}{1-b}$. 116. $\frac{a+b}{2}$. 117. $\frac{18}{3+2a}$.

118. $\{10\}$. 119. $(b-a)^2$. 120. $\{0\}$. 121. $\log_a b$. 122. $a+b$.

123. $\begin{cases} 0<a<1, \\ 0<b<1. \end{cases} \vee \begin{cases} a>1, \\ b>1, \end{cases}$ бўлганда $\{0\}$, $\begin{cases} a>1, \\ 0<b<1. \end{cases} \vee \begin{cases} 0<a<1, \\ b>1 \end{cases}$ бўлганда $-2(\log_a b+\log_b a)$. 124 $(\log_2 x+1)^3$. 125. $\log_a b$. 126. $3-2\log_a b$. 127. $\log_n^2 p$ бунда $\begin{cases} n>1, \\ p>1 \end{cases} \vee \begin{cases} 0<n<1, \\ 0<p<1. \end{cases}$ 128. $b\geqslant a>1$ бўлганда -2; $1<b<a$ бўлганда $-2\log_a b$.

III боб. Алгебраик тенгламалар ва тенгсизликлар

1. Йўқ. 2. Йўқ. 3. Ҳа. 4. Ҳа. 5. Йўқ. 6. Йўқ. 7. Ҳа. 8 Йўқ. 9. Ҳа. 10. Йўқ. 11. Йўқ. 12. Йўқ. 13. Агар $k=2n+1$ бўлса, ҳа; агар $k=2n$ бўлса, йўқ. 14. Ҳа. 15. Ҳа. 16. ($f(x)>0$, $\varphi(x)\geqslant 0$) бўлганда, ҳа. 17. ($\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\neq 0$ бўлганда, ҳа. 18. Йўқ. 19. Йўқ. 20. Ҳа. 21. Йўқ. 32. $\{-1,2,\ -1\}$. 33. $\{-3,\ -2,\ -5\}$. 34. $\left\{1,\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{4},\ \frac{-1-i\sqrt{7}}{4}\right\}$. 35. $\left\{1;\ -\frac{1}{2}\pm i\sqrt{\frac{7}{2}};\ -\frac{1}{2}-i\sqrt{\frac{7}{2}}\right\}$. 36. $\{-2,\ -1,\ \pm i\}$. 37. $\left\{-2,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ 3\right\}$. 38. $\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1,\ -\frac{1}{2}\right\}$.

39. $\left\{\frac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};\ \frac{-1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right\}$. 40. $\left\{0;\ \sqrt{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}\right\}$. 41. $\{\pm i;\ 0;\ 2;\ 4\}$. 42. $\left\{-\frac{1}{3};\ \sqrt{\frac{-1+i\sqrt{19}}{2}}\ \sqrt{\frac{-1-i\sqrt{19}}{2}}\right\}$. 43. $\left\{\frac{3}{4};\ \sqrt{\frac{1+i\sqrt{15}}{4}};\ \sqrt{\frac{1-i\sqrt{15}}{4}}\right\}$. 44. $\{\pm\sqrt{2i}\pm\sqrt{3i};\ 2;\ -1\pm\sqrt{3}\}$. 45. $\{-1\}$.

46. $\left\{-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{2};\ 3\right\}$. 47. $\{\pm 2 \pm 3\}$. 48. $\left\{-\frac{\sqrt{\sqrt{6}-1}+}{2}\right. \to$

$\to \frac{+i\sqrt{\sqrt{6}+1}}{2};\ \frac{-\sqrt{\sqrt{6}-1}-i\sqrt{\sqrt{6}+1}}{2}; -\sqrt{\sqrt{6}-1}+$

$+\sqrt{\sqrt{6}+1},\ -\sqrt{\sqrt{6}+1}-\sqrt{\sqrt{6}-1}\}$. 49. $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\ \pm i\frac{\sqrt{2}}{2};\right.$

$\left.\pm\frac{\sqrt{3}}{3};\ \pm\frac{\sqrt{3}}{3}i\right\}$. 50. $\left\{0;\ +5;\ \sqrt{3}i;\ -\sqrt{3}i;\ \frac{1+3\sqrt{3}i}{2}\right\}$ 51.

$\{-1;\ 3;\ 1\pm i\sqrt{3}\}$. 52. $\left\{\frac{1\pm i\sqrt{7}}{4};\ \frac{1\pm i\sqrt{95}}{4}\right\}$. 53. $\{2;\ 3;$

$\left.\frac{5\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$. 54. $\left\{-3;\ 2;\ \frac{-1\pm i\sqrt{15}}{2};\ \frac{1-i\sqrt{15}}{2}\right\}$. 55. $\{-6;\ -6\pm$

$\pm\sqrt{5}\}$. 56. $\left\{-6;\ 1;\ \frac{-5\pm i\sqrt{39}}{2}\right\}$. 57. $\left\{\frac{-5\pm\sqrt{85}}{2};\ \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

58. $\{-2, -1, 0, 1\}$. 59. $\left\{-\frac{3}{2};\ 0;\ \frac{-3\pm\sqrt{65}}{4}\right\}$. 60. $\{1;\ -5;\ -1\pm$

$\pm\sqrt{6}\}$. 61. $\left\{\pm 2;\ \pm 2i;\ \pm\frac{\sqrt[4]{24}}{2}i\right\}$. 62. $\{1;\ -3,\ -1\pm\sqrt{3}i\}$. 63 $\{1;$

$3;\ 2\pm 3i\}$. 64. $\{\pm 1;\ \pm\frac{1}{2};\ -2\}$. 65. $\left\{\pm i;\ \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$. 66 $\{3,$

$\left.\frac{2}{3},\ -\frac{5}{2}\right\}$. 67. $\left\{2;\ \pm 5;\ \frac{1\pm\sqrt{17}}{4}\right\}$. 77. $\left\{\frac{3\pm\sqrt{15}}{6};\ \frac{3\pm\sqrt{21}}{6};\right.$

$\left.\frac{-3+\sqrt{21}}{6}\right\}$. 78. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. 79. $\left\{0;\ -\frac{5}{2}\right\}$. 80. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. 81. $\left\{-\frac{22}{10}\right\}$.

82. $\{-11\}$. 83. $\{27\}$. 84. $\left\{-\frac{2}{5}\right\}$. 85. $\{-13\}$. 86. $\left\{\frac{6}{5}\right\}$. 87. $\{\varnothing\}$.

88. $\left\{-\frac{17}{15}\right\}$. 89. $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{52}}{2}\right\}$. 90. $\left\{\frac{12}{13}\right\}$ 91. $\begin{cases} a\neq 1, \\ a\neq\frac{1}{2}\end{cases}$ бўлганда

$\{1, -a\}$. 92. $a\neq 0$ бўлганда $\{2a;\ 3a\}$. 93. $a\neq 0$ бўлганда $\{a+1,$

$\left.\frac{1}{a}+1\right\}$; $a=0$ бўлганда $\varnothing$. 94. $(b\neq 0\wedge b\neq -a)$ б

$\left\{\frac{a-b}{2}\right\}$; $b=a$ бўлганда $C\setminus\{-a;\ a\}$; $b=-a\neq 0$ б

95. $(b^2\neq a^2\wedge ab\neq 0)$ бўлганда $\left\{\frac{ab}{a+b}\right\}$; $a=b$

$R\setminus\{0\}$, қолган ҳолларда $\varnothing$. 96. $(a+b\neq 1\wedge a$

$\left\{\frac{a+b+1}{a+b-1}\right\}$; $(a+b=1 \vee a+b=0)$ бўлганда $\varnothing$. 99. $(ab \neq 0 \wedge \wedge a^2 \neq b^2)$ бўлганда $\left\{0;\ \frac{2}{a+b}\right\}$; $(a=0 \wedge b \neq 0)$ бўлганда $R\setminus\left\{\frac{1}{b}\right\}$; $(a \neq 0 \wedge b=0)$ бўлганда $R\setminus\left\{\frac{1}{a}\right\}$; $a=b=0$ бўлганда R, $(a=b \neq \neq 0 \vee b=-a \neq 0)$ бўлганда $\{0\}$. 100. $a+b \neq 0$ бўлганда $\{a;\ b\}$; $a+b=0$ бўлганда $R\setminus\{0\}$. 101. $k=0$ бўлганда $\{0\}$; $k=5$ бўлганда $\left\{\frac{-3k \pm \sqrt{9k^2-4(k-5)^2}}{2(k-5)}\right\}$. 102. $a \neq 3$, $a \neq -1$ бўлганда $\{a+3,\ a-1\}$; $a=3$ бўлганда $\{6\}$. 103. $m \neq 1$, $m \neq 0$ бўлганда $\{2m,\ m+ +2\}$; $m=1$ бўлганда $\{3\}$. 104. $m \neq 0$ бўлганда $\{3m,\ -2m\}$; $m=0$ бўлганда $x \in \varnothing$. 105. $a \neq 0{,}5$; $a \neq -1{,}5$ бўлганда $\{2a-1,\ 2a+3\}$ $a=0{,}5$ бўлганда $\{4\}$, $a=1{,}5$ бўлганда $x \in \varnothing$. 106. $m \neq 0$, $m \neq \pm 1$ бўлганда $\left\{\frac{m+1}{m},\ 1\right\}$; $m=0$, $m=-1$ бўлганда $\{1\}$; $m=1$ да $x \in \varnothing$. 107. $k < -1$ $\left(k \neq -1\frac{1}{3}\right)$, $k \geqslant 4$ бўлганда $\left\{\frac{k \pm \sqrt{k^2-3k-4}}{2(k-1)}\right\}$; $k=-1\frac{1}{3}$ бўлганда $\left\{-\frac{4}{7}\right\}$; $k=1$ бўлганда $x \in \varnothing$. 108. $mn \neq 0$, $m=n$ бўлганда $\{0\}$; $m=9n$ $(n \neq 0)$ бўлганда $\{0,\ 5\}$; $m \neq n$, $m \neq \neq 9n$, $mn \vee 0$ бўлганда $\left\{\frac{m+n \pm 2\sqrt{mn}}{m-n}\right\}$. 109. $m=3$. 110. $\left\{-1,\ \frac{3}{2}\right\}$. 123. $R\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$. 124. $\varnothing$. 125. $[1;\ 4[$. 126. $[-4;\ 2] \cup [2;\ 4]$. 127. $[2;\ 3{,}5] \cup [8;\ +\infty[$. 128. $]2;\ +\infty[$. 132. $]-\infty;\ 2[\cup]5;\ +\infty[$. 133. $a < 2$ бўлганда $]-\infty,\ a+2[$; $a=2$ бўлганда $\varnothing$; $a > 2$ бўлганда $]a+2,\ +\infty[$. 134. $a < 1$ бўлганда $\left]-\infty;\ \frac{a-2}{3(a-1)}\right[$; $a=1$ бўлганда R; $a > 1$ бўлганда $\left]\frac{a-2}{3(a-1)};\ +\infty\right[$. 135. $a=-3$ бўлганда $x \in R$; $a < -3$ бўлганда $\left]-\infty;\ \frac{6a-1}{a+3}\right[$; $a > -3$ бўлганда $\left]\frac{6a-2}{a+3};\ \infty\right[$. 136. $a < 1 \vee a > 4$ бўлганда $\left]\frac{a-1}{3(a-4)};\ +\infty\right[$; $1 < < a < 4$ бўлганда $\left]-\infty;\ \frac{a-1}{3(a-4)}\right[$; $a=4$, $a=1$ бўлганда $x \in \varnothing$. 137. $b > 3$ бўлганда $\left[2;\ \frac{2b+1}{b-3}\right]$; $b < 3$ бўлганда $\left[\frac{2b+1}{b-3};\ 2\right]$; $b=3$ бўлганда $x \in \varnothing$. 138. $m < -9 \vee -1 < m < 1$ бўлганда

$\left]\frac{7+3m}{m+9}, +\infty\right[$; $-9 < m < -1 \vee m > 1$ бўлганда $\left]-\infty; \frac{7+3m}{m+9}\right[$; $m = -9 \vee m = \pm 1$ $x \in \varnothing$. 139. $a < 1$ бўлганда $\left]3; \frac{9a-12}{a-2}\right[$; $a = 1$ бўлганда $x \in \varnothing$, $1 < a < 2$ бўлганда $\left]\frac{9a+12}{a-2}; 3\right[$; $a = 2$ $]3; +\infty[$; $a > 2$ бўлганда $]3; +\infty[$ ёки $\left]\frac{9a-12}{a-2}; +\infty\right[$. 140. $a < -10 \vee a > 2$ бўлганда $\left]-\infty; \frac{5(a-2)}{2(a+10)}\right[$; $a = -10$ бўлганда $x \in R$; $-10 < a < 2$ бўлганда $\left]\frac{5(a-2)}{2(a+10)}; +\infty\right[$. 141. $|a| > 3$. 142. $1 \leqslant a < 2\frac{1}{3}$.
143. $m = -2$. 144. $a > 1$, $a < -11$. 145. $a < -\frac{4}{9} \vee a > 0$ бўлганда $]-\infty; 0{,}5(3a + \sqrt{9a^2+4a}[\cup]0{,}5(-3a + \sqrt{9a^2+4a}); +\infty[$; $a = -\frac{4}{9}$ бўлганда $R \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$; $a = 0$ да $R \setminus \{0\}$; $-\frac{4}{9} < a < 0$ да $x \in R$. 146. $m \leqslant \frac{1}{3}$ да $x \in \varnothing$; $\frac{1}{3} < m < 1$ да $\left[\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}, \frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}\right[$. 147. $a < 0$ да $]5a; -3a[$; $a > 0$ да $]3a\ 5a[$; $a = 0$ да $x \in \varnothing$. 148. $m > 0$ бўлганда $]-\infty; m[\cup]m+1, +\infty[$; $m < 0$ да $]m, m+1[$. 152. $-3-2\sqrt{2} < a < -3+2\sqrt{2}$. 153. b—нинг қиймати йўқ. 154. $-3-2\sqrt{3} < m < -2+2\sqrt{3}$. 155. $-\infty < m < -1{,}5$. 156. $]-2; 1[\cup]3; \infty[$. 157. $]-\infty; -3[\cup]-2; 1[\cup]3; +\infty[$. 158. $]-\infty; -3[\cup]2; 3[$. 159. $]-3; -2[\cup]2; +\infty[$. 160. $]-5; -3[\cup]2; 7[\cup]7; +\infty[$. 161. $]2; 4[\cup]8; +\infty[$. 162. $\varnothing$. 163. $]-2; 1[\cup]1; 2[$. 164. $]-2; 1[\cup]3; +\infty[$. 181. $a < 0$ бўлганда $]a; 0[\cup]-a; +\infty[$; $a = 0$ да $\varnothing$; $a > 0$ да $]-\infty; -a[\cup]0; a[$.
182. $a < 0$ да $]-\infty; a[\cup \left]\frac{a}{2}; a\right[$; $a = 0$ бўлганда $]-\infty\ 0[$; $a > 0$ бўлганда $]-\infty; -a[\cup \left]\frac{a}{2}; a\right[$. 183. $a < 0$ бўлганда $]-\infty; a[\cup \left]\frac{2a}{3}, \frac{a}{3}\right[\cup]0; +\infty[$; $a > 0$ да $\left]0; \frac{a}{3}\right[\cup \left]\frac{2a}{3}, a\right[$. 184. $a \leqslant 3$ бўлганда $]-\infty; -3[\cup]-3; 3[\cup]6-a; +\infty[$; $3 < a < 9$ да $]-\infty; -3[\cup]-3{,}6; -a[\cup]3; +\infty[$; $a \geqslant 9$ бўлганда $]-\infty; 6-a[\cup]3; +\infty[$. 185. $a < 0$ да $]3a; a[\cup]a; -2a[$; $a = 0$ да $\varnothing$; $a > 0$ да $[-2a; -a[\cup]a; 3a[$. 186. $a < 0$ да $\left]-\infty; \frac{5a}{2}\right[\cup \left]2a; \frac{5a}{4}\right[\cup]a;$

$+\infty[$; $a>0$ да $R\setminus\{0\}$; $a>0$ да $]-\infty; a[\ \cup\ ]\frac{5a}{4}; 2a[\ \cup\ ]\frac{5a}{2}; \infty[$.
187. $a<0$ да $]-\infty; 0[\ \cup\ ]-a; -2a[\ \cup\ ]-3a; +\infty[$; $a>0$ да $]-3a; -2a[\ \cup\ ]-a; 0[$. **188.** $a<0$ да $]3a; -2a[$; $a=0$ да $\varnothing$; $a>0$ да $]-2a; 3a[$. **190.** $\{-1,5\}$. **191.** $\{-1\}$. **192.** $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **193.** $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **194.** $\{0,2\}$. **195.** $\left\{\frac{17}{19}; 3\right\}$. **196.** $\{x \mid 1<x<2\}$. **197.** $\left\{1; 5\frac{1}{2}\right\}$. **198.** $\left\{0; \frac{2}{5}\right\}$. **199.** $\{-8; 2\}$. **200.** $\left\{-4; 0,2; 2\frac{2}{3}\right\}$. **207.** $a<0$ да $\{-2a\}$; $a=0$ да R; $a>0$ да $\{0\}$. **208.** $a<0 \vee a>1$ да $\varnothing$; $0<a<1$ да $\{-1+\sqrt{1-a}; 1-\sqrt{3a+1}\}$. **209.** $\left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$. **210.** $\varnothing$. **211.** $\{2; 4; -2; -4\}$. **212.** $\{2; 3; 4\}$. **213.** $\{-2; 1\}$. **214.** $\left\{1; \frac{3}{2}; 2\right\}$. **215.** $\{x \mid x<-2 \vee x>2\}$. **216.** $\{x \mid -1<x<1\}$. **217.** $\{x \mid 1<x<2\}$. **218.** $\{1\}$. **219.** $\{x \mid x \geqslant 2 \vee x<3\}$. **220.** $\{x / 2 \leqslant x \leqslant 3\}$. **221.** $\{0,1; -1\}$. **222.** $\left\{1\frac{3}{4}; 2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{4}; 2\frac{1}{2}\right\}$. **223.** $]-1; 6[$. **224.** $]-1; 7[$. **225.** $]-\infty; -\frac{5}{3}[\ \cup\ ]5; +\infty[$. **227.** $]8; +\infty[$. **228.** R. **229.** $]-1; +\infty[$. **230.** $[\frac{1}{2}; +\infty[$. **231.** $]0; 3[$. **232.** $]-\infty; 0[\ \cup\ ]\frac{2}{3}; +\infty[$. **233.** $]-10; -\frac{4}{5}]$. **234.** $]-2; 4; 2[$. **235.** $]-\infty; \frac{2}{5}[\ \cup\ ]2; +\infty[$. **236.** $]2, \frac{10}{3}[$. **237.** $]-\infty; 1[\ \cup\ ]3; +\infty[$. **238.** $]-\infty; -8[\ \cup\ ]2; +\infty[$. **239.** $]-\infty; -\frac{8}{3}[\ \cup\ ]2; +\infty[$. **240.** $]0; 6[$. **241.** $]-\infty; -2,5[\ \cup\ ]1,5; -0,5[\ \cup\ ]0,5; 1,5[\ \cup\ ]2,5; +\infty[$. **242.** $]-\infty; 1-\sqrt{10}[\ \cup\ ]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[\ \cup\ ]1+\sqrt{10}; +\infty[$. **243.** $]\frac{11-\sqrt{57}}{4}; \frac{11+\sqrt{57}}{4}[$. **244.** $]-\infty; 1[\ \cup\ ]2; +\infty[$. **245.** $]-\infty; 1[\ \cup\ ]2; +\infty[$. **246.** $]\frac{11}{4}; +\infty[$. **247.** $[0,1; \frac{3}{5}]\ \cup\ [2\frac{1}{2}; +\infty[$. **248.** $]-\infty; -2[\ \cup\ ]-2; -1[\ \cup\ ]-1; 0]$. **249.** $]-\infty; 2]$. **250.** $[-2+\sqrt{6}; 1[\ \cup\ ]1; 4[$. **251.** $a<0$ да $R\setminus\left\{\frac{a}{2}\right\}$, $a>0$ да $]-\infty; -3\frac{1}{2}a[\ \cup\ ]\frac{a}{2}; +\infty[$. **252.** $a<0$ да $]-\infty; a[$, $a>0$ да $\varnothing$. **253.** $a<0$ да $]-a; +\infty[$,

$a > 0$ да $]a; +\infty[$. 254. $a < 0$ да $]-\infty; a\sqrt{3}[\cup]-a\sqrt{3}; +\infty[$; $a \geqslant 0$ да $]-\infty; -a\sqrt{3}[\cup]a\sqrt{3}; +\infty[$. 255. $a < 0$ да $]2a\sqrt{3}; 2a[\cup$ $\cup]2a; -2a\sqrt{3}[$, $a = 0$ да $\varnothing$; $a>0$ да $]-2a\sqrt{3}; 2a[\cup]-2a; 2a\sqrt{3}[$. 256. $a < 0$ да $[6a; 2a[\cup]2a; -2a[$; $a > 0$ да $R\setminus\{2a\}$. 257. $\{10\}$. 258. $\{-4; 4\}$. 259. $\{8; 27\}$. 260. $\{1\}$. 261. $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$. 262. $\left\{2; -\frac{1}{511}\right\}$. 263. $\left\{-1; 1; 2; -\frac{1}{2}\right\}$. 264. $a < 1$ да $\left\{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4a}); \frac{1}{2}\times\right.$ $\left.\times(1-\sqrt{4a-3})\right\}$, $-1 < a < 0$ да $\left\{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4a})\right\}$, $0 < a <$ $< \frac{1}{4}$ да $\left\{\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right\}$, $a > \frac{1}{4}$ да $x\in\varnothing$. 265. $a+b\neq 0$ да $\left\{\frac{1}{2}(a-b)\right\}$; $a+b=0$ да $x\in\varnothing$. 266. $\{8; 7\}$. 267. $\{-4; 4\}$. 268. $\{\pm 1; \pm\sqrt{6}\}$. 269. $\{12\}$. 270. $\left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$. 271. $\{3\}$. 272. $\{-4; 4\}$. 273. $\{4\}$. 274. $\{2; 3\}$. 275. $\varnothing$. 276. $a < 0 \vee 0 < a < 1$ да $\varnothing$; $a = 0$ да $\{0\}$; $a > 1$ да $\left\{\frac{1}{4}(a-1)^2\right\}$. 277. $b \geqslant 0$ да $\{a\}$; $b < a$ да $\{b\}$. 278. $a < 1$ да $\varnothing$; $0 < a < 1$ да $\{a^2-a+1; a^2+a\}$; $a > 1$ да $\{a^2+$ $+a\}$. 284. $x > -1$ да $x\in R$. 285. $\{0\}$. 286. $\{-4; 4\}$. 287. $\{\pm 1;$ $\pm\sqrt{6}\}$. 288. $\left\{\frac{17}{16}\right\}$. 289. $\varnothing$. 290. $\{8\}$. 291. $\{0\}$. 292. $\{7\}$. 293. $\{1\}$. 294. $\{4\}$. 295. $\{2\}$. 296. $\{-1\}$. 297. $\{4\}$. 298. $\{4; 5\}$. 299. $\{4\}$. 300. $\varnothing$. 301. $\{-5; 8\}$. 302. $\{-1; 4\}$. 303. $\left\{1\frac{1}{2}; 3\right\}$. 304. $[2; +\infty[$. 305. $[5; 8]$. 306. $\{3\}$. 307. $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$. 308. $\{2\}$. 309. $a > b > 0$ бўлганда $\left\{\frac{(a-b)^2}{b}\right\}$; $a = b = 0$ да $[0; +\infty[$, қолган ҳолларда $\varnothing$. 310. $\left\{\frac{|a|\sqrt{3}}{2}\right\}$. 311. $a \neq 0$ да $\left\{\frac{2|a|}{3}\right\}$; $a = 0$ да $]-\infty; 0[$. 312. $-1 <$ $< a < 1$ да $\left\{\frac{a^2+1}{4}\right\}$; $a < -1 \vee a > 1$ да $\varnothing$. 313. $a<0$ да $\{-4a\}$; $a = 0$ да $]0; +\infty[$; $a > 0$ да $\varnothing$. 314. $a < 0$ да $\varnothing$; $a = 0$ да $]-\infty;$ $0[$; $a > 0$ да $\{0; 3a\}$. 315. $a < 0$ $\{2a\}$; $a > 0$ $\varnothing$. 316. $a < -1$ да $\left\{0; \frac{1}{4(a+1)^2}\right\}$; $a \geqslant -1$ да $\{0\}$. 317. $\{|a|\}$. 318. $a \neq 0$ да $\{0\}$ $a=0$ да R. 319. $a \geqslant 0$ да $\{0\}$; $a < 0$ да $\varnothing$. 320. $[-2; 2)$. 321. $(-4{,}5; 0)$

322. $]-\infty; -2[\cup \left]5; 5\frac{9}{13}\right[$. 323. $]-\infty; -2[\cup]14; +\infty[$. 324. $\left[2; \frac{4}{\sqrt{3}}\right[$. 325. $[2; 3]$. 326. $[-2; 2[$. 327. $]-\infty; -10[\cup]1; +\infty[$. 328. $]-1; +\infty[$. 329. $\varnothing$. 330. $\left[-\frac{1}{2}; 3-2\sqrt{3}\right[$. 331. $]34+6\sqrt{33}; +\infty[$. 340 $\left]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right[$. 348. $-1 \leqslant m \leqslant 0$ да $[1-\sqrt{1+m}; 1+\sqrt{1+m}]$; $m>0$ да $\left[-\frac{m}{2}; 1+\sqrt{1+m}\right]$; $m<-1$ да $\varnothing$. 349. $a>0$ да $]-a; a[$; $a<0$ да $]a; -a[$; $a=0$ да $R\setminus\{0\}$. 350. $(a<0 \vee a>1)$ да $\varnothing$; $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$ да $[0; a^2]$; $\frac{1}{2}<a<1$ да $[2a-1; a^2]$. 351. $\left[-\frac{|a|}{\sqrt{2}}; |a|\right]$. 352. $a \neq 0$ да $]-\infty; -3[\cup]-1; +\infty[$. 353 $a<0$ да $[a; 0]$ $a>0$ да $]0; a[$; $a=0$ да $\varnothing$. 354. $1<a<1+\sqrt{3}$ да $\left]\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}; -\frac{a}{3}\right]$; $a=1+\sqrt{3}$ да $\left]-\infty; -\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right]$; $a>1+\sqrt{3}$ да $\left]-\infty; -\frac{a}{3}\right] \cup \left[\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}; +\infty\right[$. 355. $a>1$ да $\left]0; \frac{(a-1)^2}{4}\right[$; $a \leqslant 1$ да $\varnothing$. 356. $a>0$ да $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}a; 2a\right]$; $a<0$ да $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}a; 0\right]$. 357. $a>0$ да $\left]-\infty; \frac{3}{4}a\right[$. 358. $0<a<2$ да $\left]\frac{a^2+4}{4}; +\infty\right[$; $a>2$ да $[a; +\infty[$. 359. $a<0$ да $]-\infty; 2a[$; $a=0$ да $\varnothing$; $a>0$ да $]-\infty; a[$. 360. $]0; +\infty[$. 361. $b<-a$ да $]-\infty; a^2]$ $b=-a$ да $]-\infty; a^2[$; $(b>-a \wedge a<0)$ да $]-\infty; a^2]$; $b>-a \wedge a>0$ да $]-\infty; 0[$. 362. $a<0$ да $\left[\frac{a}{2}; 1+\sqrt{1-a}\right]$; $a>1$ да $\varnothing$; $0<a \leqslant 1$ да $[1-\sqrt{1-a}; 1+\sqrt{1-a}]$. 364. $(a<-4 \vee a \geqslant 0)$ да $\varnothing$; $-4<a \leqslant -2$ да $\left]\frac{a}{2}\sqrt{-a^2-4a}; -\frac{a}{2} \times \sqrt{a^2+4a}\right[$; $-2<a<0$ да $[a; -a]$. 365. $\{2; 5; 12\}$. 366. $\{1; 7\}$. 367. $\{1; 17\}$. 368. $\{5\}$. 369. $\{10\}$. 370. $\{62{,}5; 100\}$. 371. $\{3\}$. 372. $\{1, 8\}$. 373 $\{0, 5\}$. 374. $\left\{\pm\frac{\sqrt{21}}{3}\right\}$. 375. $\{1\}$. 376. $\{1\}$. 377. $\{1, 5\}$. 378 $\{2\lg 3+0{,}5\lg 7\}$. 379. $\{0{,}5\lg 1{,}5\}$. 390. $\{m; m>0\}$. 391. $\left\{\frac{16}{3}\right\}$.

892. $\left\{\frac{1}{8};\ 8\right\}$. 393. $\{\sqrt{3}\}$. 394 $\{6\}$. 395. $\{\sqrt{3};\ 3\}$. 396 $\left\{\frac{1}{4\sqrt[5]{8}};\ 4\right\}$. 397. $\{3;\ 4;\ 11\}$. 398. $\left\{-\frac{1}{5};\ \frac{1}{2};\ 3\right\}$. 399. $\{2\} \cup]1;\ 2[$. 400. $\varnothing$. 404. $a=1$ да $x \in R$; $a>0$ $a \neq 1$ да $\{1\}$. 405. $b>0\ (b\neq 1)$ да $\left\{\frac{\lg 10b^5}{\lg b^3}\right\}$; $b=1$ да $\varnothing$. 408. $b>0$ $(b\neq 1)$ $\sqrt[4]{2} \leqslant a \leqslant 2$ да $\left\{\frac{1}{5}\times \times\left(\log_b \frac{\sqrt{2a^4+4}-a^2}{2}-2\right)\right\}$; $b=0$; $b=1$, $a=2$ да $x=R$ $a<\sqrt[4]{2} \vee a>2$ $\varnothing$. 409. $\{a\}$. 410. $a^2+b^2-6ab<0$ да $\{0;\ a+b\}$; $a^2+b^2-6ab \geqslant 0$ да $\left\{0;\ a+b;\ \frac{a+b\pm\sqrt{a^2+b^2-6ab}}{2}\right\}$. 411. $]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]0;\ 1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$. 412. $]-\infty;\ 0[$. 413. $]-\infty;\ 2{,}5[$. 437. $a=1$ $0<b<1$ да $\left]-\infty;\ \frac{\lg 2-\lg(b^3+1)}{\lg b}-0{,}5\right[$; $a=1$; $b>1$ да $\left]\frac{\lg 2-\lg(b^3+1)}{\lg b}-0{,}5;\ +\infty\right[$; $b=1$; $0<a<1$ да $]x_2;\ +\infty[$. x_1 ва x_2 илдизлари $b=1$, $a>1$ $]-\infty;\ x_2[$; $x_2=\frac{\lg 2-\lg(b^3+1)}{\lg b}+0{,}5$, $0<a<\sqrt{b}$, $\left]\frac{\lg(ab\sqrt[3]{b}(b^3+1))-\lg(a+1)}{2\lg a-\lg b};\ +\infty\right]$. 450. 3 см. 451. $\{-220;\ 264\}$. 452. $\{3;\ 3;\ -4\}$. 453. $\left\{\frac{l(a+b)}{2aq}\ \text{м/сек};\ \frac{l(a-b)}{2ab}\ \text{м/сек}\right\}$. 500. $\{(1;\ 9)\ (9;\ 1)\}$. 501. $\{(5;\ 4)\}$. 502. $\{(4;\ 1)\ (1;\ 4)\}$. 503. $\{(1;\ 81)\ (81;\ 1)\}$. 505. $\{(9a^2;\ a^3)\}$.

IV боб. Тригонометрик функциялар ва улар орасидаги муносабатлар

1. а) $E(y)=[0;\ 2]$; б) $E(y)=[0;\ 2]$; в) $E(y)=[0;\ 1]$; г) $E(y)=[-1;\ 1]$. 2. а) π; б) 4π; в) 4π; г) 2π; д) $\frac{2\pi}{n}$; е) π. 3. а) мусбат; б) мусбат; в) манфий; г) манфий; д) манфий; е) манфий; ж) мусбат; з) манфий. 4. а) $100° < \alpha < 260°$; б) $0° < \alpha < 210°$ ва $330° < \alpha < 360°$; в) $45°$, $135°$, $225°$ ва $315°$; г) $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$ ва $180° \leqslant \alpha \leqslant 270°$; д) $0°<\alpha<180°$; $\alpha\neq 90°$; е) $0°<\alpha<360°$ ва $\alpha\neq 90°$ $\alpha\neq 270°$; ж) $60° \leqslant \alpha \leqslant 300°$; з) $0° < \alpha \leqslant 150°$ ва $180° < \alpha \leqslant 330°$. 5. а) тоқ; б) жуфт а) тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас; г) жуфт; е) жуфт. 6. а) $-1{,}5+2\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{3}$; в) 0; г) 6; д) 3; е) 0 8. а) $\cos\alpha=\pm\frac{7}{25}$.

$\text{tg}\alpha = \pm 3\frac{3}{7}$, $\text{ctg}\alpha = \pm\frac{7}{24}$, $\text{cosec}\alpha = -1\frac{1}{24}$, $\sec\alpha = \pm 3\frac{4}{7}$; б) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\text{tg}\alpha = -1\frac{1}{3}$, $\text{ctg}\,\alpha = -\frac{3}{4}$, $\text{cosec}\,\alpha = -1\frac{1}{4}$, $\sec\alpha = 1\frac{2}{3}$; в) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\text{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{cosec}\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sec\alpha = 2$; г) $\sin\alpha = \pm\frac{15}{17}$, $\cos\alpha = \pm\frac{8}{17}$, $\text{tg}\alpha = 1\frac{7}{8}$, $\sec\alpha = \pm 2\frac{1}{8}$, $\text{cosec}\alpha = \pm 1\frac{2}{15}$; д) $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{tg}\alpha = \pm 1$, $\text{ctg}\alpha = \pm 1$, $\text{cosec}\alpha = \pm\sqrt{2}$; е) $\cos\alpha = -\sqrt{0{,}98}$ $\text{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\text{ctg}\alpha = 2$, $\text{cosec}\alpha = -5\sqrt{0{,}2}$, $\sec\alpha = -\frac{1}{\sqrt{0{,}98}}$. 11. $2\sec^2\alpha$. 12. $\sec^2\alpha$. 13. $\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$. 14. 1. 15. -2. 16. 0. 17. $2|\text{tg}\alpha|$. 18. $2|\text{cosec}\alpha|$. 19. 1. 20. а) $\frac{t^2-1}{2}$; б) 1; в) $\pm\sqrt{2-t^2}$; г) $\frac{1+2t^2-t^4}{2}$. 21. а) t^2-2; б) t^3-3t. 23. $x+2=y^2$. 24. $2(x^2+y^2)=(a+b)^2$. 79. $\frac{1}{6}(\sqrt{3}-3\sqrt{2})$. 80. Мавжуд эмас. 81. $-\frac{33}{56}$. 82. $\frac{4}{5}$. 83. $\sqrt{1-m^2}$. 84. $\frac{a}{2}$.

V боб. Тригонометрик тенгламалар ва тенгсизликлар. Тригонометрик тенгламалар ва тенгсизликлар системалари

1. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}$; $n\in Z$. 2. $\frac{\pi}{3}+n\pi$; $n\in Z$; 3. $\varnothing$. 4. $\frac{\pi}{3}+\frac{n\pi}{2}$; $n\in Z$. 5. $\frac{\pi}{3}+4n\pi$; $n\in Z$. 6. $-\frac{\pi}{3}+n\pi$; $n\in Z$. 7. $\frac{\pi}{10}+\frac{n\pi}{5}$; $n\in Z$. 8. $\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4}$; $n\in Z$. 9. $\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi$; $\pi+2n\pi$; $n\in Z$. 10. $\frac{3\pi}{4}+2n\pi$, $n\in Z$. 11. $n\pi$; $n\in Z$. 12. $\frac{3\pi}{2}+2n\pi$; $(-1)^n\frac{\pi}{3}+2n\pi$; $n\in Z$. 13. $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $\text{arctg}\,\frac{3}{4}+n\pi$; $n\in Z$. 14. $2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$; $n\in Z$. 15. $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $n\in Z$. 16. $n\pi$; $n\pi\pm\frac{\pi}{2}$; $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$; $n\in Z$. 17. $\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$; $-\frac{7n}{18}+$

$+\frac{2n\pi}{3}$; $n\in Z$. 18. $-\frac{5\pi}{12}+n\pi$; $n\in Z$. 19. $\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}$; $n\in Z$. 20. $\varnothing$, 21. $\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}$; $n\in Z$. 22. $2n\pi$; $\frac{\pi}{3}+\frac{2n\pi}{3}$; $n\in Z$. 23. $\frac{\pi}{20}+\frac{n\pi}{5}$; $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\frac{n\pi}{5}$; $n\in Z$. 24. $\pm\frac{\pi}{6}+n\pi$; $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $n\pi$; $n\in Z$. 25. $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}$; $n\in Z$. 26. $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $n\pi$; $\pi\in Z$. 27. $-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}$; $n\in Z$. 28. $\pm\frac{\pi}{6}+n\pi$; $n\in Z$. 29. $\frac{\pi}{9}+\frac{2n\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}+\frac{2n\pi}{3}$; $n\in Z$. 30. $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{13}}{16}+n\pi$; $n\in Z$. 31. $\frac{\pi}{3}+2n\pi$; $\frac{5\pi}{6}+2n\pi$; $n\in Z$. 32. $\frac{\pi}{6}+(-1)^n\arcsin\frac{\pi}{8}+n\pi$, $n\in Z$. 33. $10^{0,5+2n}$; 10^{2n}, $n\in Z$. 34. $\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+n\pi$; $-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+n\pi$; $n\in Z$. 35. $2\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}+2n\pi$; $n\in Z$. 36. $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $n\in Z$. 37. $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $\operatorname{arctg}(2+\sqrt{3})+n\pi$; $n\in Z$. 38. $\frac{\pi}{6}+2\operatorname{arctg}\frac{-6\pm\sqrt{179}}{11}\mp 2n\pi$; $n\in Z$. 39. $-\frac{\pi}{18}+\operatorname{arctg}\frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}+n\pi$; $n\in Z$. 40. $a=-1$ бўлса $\pm\frac{3\pi}{4}+2n\pi$; $a=\sqrt{2}$ бўлса $-\frac{\pi}{4}-2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)+2n\pi$; $a=-\sqrt{2}$ бўлса $-\frac{\pi}{4}-2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)+2n\pi$; $a<\sqrt{2}$ бўлса $-\frac{\pi}{4}+2\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{2-a^2}}{a+1}+2n\pi$; $a>\sqrt{2}$ бўлса $\varnothing$, $n\in Z$. 41. $\frac{n\pi}{5}$; $\frac{n\pi}{4}$; $n\in Z$. 42. $\frac{2n\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $n\in Z$. 43. $n\pi$; $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $n\in Z$. 44. $\frac{n\pi}{2}$; $n\in Z$. 45. $2n\pi$; $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $n\in Z$. 46. $\frac{n\pi}{2}$; $\pm\frac{\pi}{6}+n\pi$; $n\in Z$. 47. $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $(-1)^n\arcsin\frac{4}{5}+n\pi$; $n\in Z$. 48. $\frac{\pi}{6}+n\pi$; $\frac{\pi}{3}+n\pi$; $n\in Z$. 49. $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi$. $n\in Z$. 50. $-\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $\pm\frac{\pi}{3}+n\pi$; $n\in Z$. 51. $n\pi$; $\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi$; $n\in Z$. 52. $\pm\frac{\pi}{6}+2n\pi$; $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $n\in Z$.

53. $n\pi$; $\operatorname{arctg} 10+n\pi$; $n\in Z$. 54. $\pi+2n\pi$; $n\in Z$. 55. $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $\frac{7\pi}{6}+2n\pi$; $n\in Z$. 56. $\frac{\pi}{12}+2n\pi$; $\frac{7\pi}{12}+n\pi$; $n\in Z$. 57. $n\pi$; $-\frac{\pi}{3}+n\pi$; $n\in Z$. 58. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{n\pi}{2}$; $n\in Z$. 59. $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $\frac{\pi}{10}+\frac{2n\pi}{5}$; $n\in Z$. 60. $2n\pi$; $-2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2n\pi$ $n\in Z$. 61. $2n\pi$; $\frac{\pi}{2}+2n\pi$ $(-1)^n\arcsin\frac{7\sqrt{2}}{10}-$ $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $n\in Z$, 62. $\frac{n\pi}{2}$; $n\in Z$. 63 $\frac{\pi}{2}+n\pi$; $\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi$; $n\in Z$. 64. $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $n\in Z$. 65. $2n\pi$; $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $n\in Z$. 66. $\pm\frac{\pi}{3}+n\pi$; $n\in Z$. 67. $\pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{19}}+\frac{n\pi}{2}$; $n\in Z$. 68. $\frac{\pi}{6}+n\pi$; $\frac{\pi}{3}+n\pi$; $n\in Z$. 69. $\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$; $n\in Z$. 70 $\frac{\pi}{4}+2n\pi$; $n\in Z$. 71. $n\pi$; $n\in Z$. 72. $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $n\in Z$. 73. $n\pi$; $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $n\in Z$. 74 2 та ечими бор. $x_1\in\left]-\frac{\pi}{2};\right.$ $\left.0\right]$; $x_2\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$. 75. Чексиз кўп ечимга эга. 76. 3 та ечими бор: $x_1=0$, $x_2\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$; $x_3\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. 77. Чексиз кўп ечимга эга. 78. 3 та ечими бор: $x_1\in\left]1;\frac{\pi}{2}\right[$; x_2, $x_3\in\left]\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right[$. 79. Чексиз кўп ечимга эга. 80. $|a|>\sqrt{2}$ бўлса, $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $|a|\geqslant\sqrt{2}$ бўлса, $\frac{\pi}{4}+$ $+n\pi\vee\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{a}{\sqrt{2}}+2n\pi$, $n\in Z$. 81. $a=0$ бўлса, $\frac{\pi}{2}+n\pi$; $a\neq0$ бўлса, $\pm\arccos\frac{-1+\sqrt{1+16a^2}}{4a}+2n\pi$; $n\in Z$. 82. $n=-1$ бўлса, $\left\{-2;-\frac{1}{2}\right\}$; $n=a$ бўлса, $\left\{-\frac{7+3\sqrt{5}}{2};\ -\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right\}$; $n=1$ бўлса, 1. 83. $|a|<10\wedge a\neq3$ бўлса, $\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{10-a^2}}{3-a}+$ $+n\pi$; $a=3$ бўлса, $-\operatorname{arctg}3+n\pi$; $|a|>10$ бўлса, $\varnothing$; $n\in Z$. 84. $-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$ бўлса, $(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\left(1-\sqrt{3-2a}\right)+\frac{n\pi}{2}$; $a<-\frac{1}{2}\vee a>\frac{3}{2}$ бўлса $\varnothing$; $n\in Z$. 85. $a<0\vee a>\frac{8}{3}$ бўлса,

$n\pi$; $\pm\frac{1}{2}$ $\arccos\frac{4-a}{2a-4}+n$; $0\leqslant a-\frac{8}{3}$ бўлса $n\pi$; $n\in Z$, **86.** $a=-1\wedge 0\leqslant a\leqslant 2$. **87.** $a<\frac{1}{4}$ ёки $a>\frac{1}{2}$ бўлса, $\varnothing$, $a=\frac{1}{2}$ бўлса, битта ечим; $\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ бўлса, 2 та ечим. **88.** $m\in R$ бўлса, $2n\pi$; $m\neq\frac{1}{2}$ бўлса, $\frac{2n\pi}{2m-1}$ ёки $2n\pi$; $m=\frac{1}{2}$ бўлса, R, $n\in Z$. Агар $m\in N\wedge m\neq 1$ бўлса, тенгламанинг ечимларини берувчи ёйларнинг учлари $2m-1$ томонли мунтазам кўпбурчакнинг учларидан иборат бўлади. Демак, $m=2$ бўлганда мунтазам учбурчак ва $m=3$ да мунтазам бешбурчак бўлади. **89.** $\{1\}$. **90.** $\left\{-\operatorname{tg}\frac{3}{2}\right\}$. **91.** $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$. **92.** $\{-2;\ -1\}$. **93.** $\left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right\}$. **94.** $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$. **95.** $\varnothing$. **96.** $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\ 0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. **97.** $\{-1;\ 1\}$. **98.** $\left\{\frac{1}{4}\right\}$. **99.** $\{0\}$. **100.** $-\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}$ бўлса, $\operatorname{tg}\alpha$; $a\leqslant-\frac{\pi}{2}\vee a>\frac{\pi}{2}$ бўлса, $\varnothing$. **101.** $-\frac{\pi}{2}<a<0$ бўлса, $\cos 2a$; $0>a\leqslant 2\pi$ бўлса, $\cos\frac{a}{2}$; $a<-\frac{\pi}{2}$ ёки $a=0$ ёки $a<2\pi$ бўлса, $\varnothing$, $n\in Z$. **102.** $-\frac{\pi}{2}\leqslant a<0$ ёки $0<a\leqslant\frac{\pi}{2}$ бўлса $-\sin\frac{a}{2}$; $\sin a$; $-\pi\leqslant a<-\frac{\pi}{2}$ ёки $\frac{\pi}{2}<a\leqslant\pi$ бўлса, $-\sin\frac{a}{2}$; $a<-\pi$ ёки $a>\pi$ бўлса, $\varnothing$. **103.** $\operatorname{arctg}3+n\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+n\pi$; $n\in Z$. **104.** $n\pi<x<\operatorname{arcctg}(-3)+n\pi$; $n\in Z$. **105.** $\alpha-\frac{2\pi}{3}+2n\pi\leqslant x\leqslant\alpha-\frac{\pi}{3}+2n\pi$; $n\in Z$, $\alpha\in R$. **106.** $\frac{5\pi}{6}-1+2n\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{6}-1+2n\pi$; $n\in Z$. **107.** $\frac{\pi}{4}+2n\pi<x<\frac{3\pi}{4}+2n\pi$; $\pi+2n\pi\leqslant x<\frac{5\pi}{4}+2n\pi$; $\frac{7\pi}{4}+2n\pi<x\leqslant\pi+2n\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $n\in Z$. **108.** $\left]-\pi;\ -\frac{3\pi}{4}\right[$; $\left[-\frac{\pi}{4};\ 0\right[$; $\left]\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right[$. **109.** $\operatorname{arctg}3+2n\pi-\pi<x<\operatorname{arctg}3+2n\pi$, $n\in Z$. **110.** $-\pi-\arcsin\frac{1}{4}+2n\pi<x<2n\pi+\arcsin\frac{1}{4}$; $2n\pi+\arcsin\frac{1}{3}<x<\pi-$

$-\arcsin\frac{1}{3}+2n\pi;\ n\in Z$. **111.** $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2n\pi<x<\pi-$ $-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2n\pi;\ n\in Z$. **112.** $\pi+2n\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2n\pi;$ $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\pi}{4}+2n\pi<x<\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}+2n\pi;\ n\in Z$. **113.** $\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}<x<\frac{\pi}{3}+\frac{n\pi}{2};\ n\in Z$. **114.** $-\frac{\pi}{2}+n\pi<x<-\mathrm{arctg}2+n\pi;$ $-\frac{\pi}{4}+n\pi<x<\frac{\pi}{4}+n\pi;\ n\in Z$. **115.** $\frac{\pi}{4}+n\pi<x<n\pi;\ x\neq\frac{3\pi}{4}+n\pi;$ $n\in Z$. **116.** $\varnothing$. **117.** $2n\pi<x<\frac{\pi}{3}+2n\pi;\quad \pi+2n\pi<x<2\pi+2n\pi;$ $3\pi+2n\pi<x<\frac{11\pi}{3}+2n\pi;\ n\in Z$. **118.** $2n\pi<x<\frac{\pi}{5}+2n\pi;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n<$ $<x<\frac{3\pi}{5}+2n\pi;\ \pi+2n\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2n\pi;\ \frac{7\pi}{5}+2n\pi<x<\frac{9\pi}{5}+2n\pi;$ $n\in Z$. **119.** $\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{8}+\frac{n\pi}{2};\ x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2};\ n\in Z$. **120.** $\frac{\pi}{3}+$ $+2n\pi<x<\frac{\pi}{2}+2n\pi;\ -\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<-\frac{\pi}{3}+2n\pi;\ \frac{2\pi}{3}+2n\pi<x<$ $<\pi+2n\pi;\ \pi+2n\pi<x<\frac{4\pi}{3}+2n\pi;\ n\in Z$. **121.** $-\frac{7\pi}{6}+2n\pi\leqslant x\leqslant$ $\leqslant\frac{\pi}{6}+2n\pi;\ n\in Z$. **122.** $\frac{3\pi}{4}+2n\pi\leqslant x<\frac{9\pi}{4}+2n\pi;\ n\in Z$. **123.** $]0;$ $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big[$. **124.** $\Big]0;\ \frac{\pi}{3}\Big[;\ \Big[\frac{2\pi}{3};\ \pi\Big]$. **125.** $n\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+n\pi;\ n\in Z$. **126.** $\Big[0;\ \arccos\frac{\sqrt{6}-1}{2}\Big]$. **127.** $\Big[\frac{1}{4};\ 1\Big]$. **128.** $]-\infty;\ \mathrm{tg}\,1[$, **129.** $]0;$ $1]$. **130.** $\Big[1,\ \frac{1+\sqrt{17}}{4}\Big[;\ \Big[\frac{1-\sqrt{17}}{4};\ -\frac{1}{2}\Big]$. **131.** $\Big[0;\ \frac{1}{2}\Big[$. **132.** $]\sin 80^\circ;\ 1]$. **133.** $a<-1$ бўлса, $x\in R$; $-1\leqslant a\leqslant 1$ бўлса, $-\arccos a+$ $+2n\pi<x<\arccos a+2n\pi$; $a>1$ бўлса, $\varnothing$, $n\in Z$. **134.** $-\frac{\pi}{2}+$ $+n\pi<x\leqslant\mathrm{arctg}\,a+n\pi;\ n\in Z$. **135.** $\mathrm{arctg}\,a+n\pi\leqslant x<\pi+n\pi;\ n\in Z$. **136.** $-3\leqslant a<1$ бўлса, $\arccos(a+2)+2n\pi\leqslant x\leqslant 2\pi-\arccos(a+2)+$ $+2n\pi$; $-1\leqslant a\leqslant 0$ бўлса, $x\in R$; $a<-3$ ёки $a>0$ бўлса, $\varnothing$. **137.** $a>0$ бўлса, $2\ \mathrm{arctg}\frac{1}{a}+2n\pi<x<2\pi+2n\pi$; $a<0$ бўлса, $2n\pi<x<$ $-2\pi+2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{a}+2n\pi;\ n\in Z$. **138.** $a<\frac{1}{2}$ бўлса, $x\in R$. $\frac{1}{2}<a<1$

бўлса; x қуйидаги интерваллардан бирига тегишли: $n\pi < x < \frac{\alpha}{2}+n\pi$; $(2n+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2} < x < (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $(2n+1)\frac{\pi}{2} < x < \frac{\alpha}{2} + (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $(\pi+1)\pi-\frac{\alpha}{2} < x < (n+1)\pi$, бу ерда $\alpha=\arcsin\sqrt{2(1-a)}$; $a > 1$ бўлса, $\varnothing$; $n \in Z$. 139. $0 < a < 2$ бўлса, $\pi+2n\pi < x < 2\pi+n\pi$; $a \geqslant 2$ бўлса, $\pi+2n\pi < x < 2\pi+2n\pi$, $\arcsin\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}+2n\pi \leqslant x \leqslant \pi-\arcsin\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}+2n\pi$; $n \in Z$. **140.** $a \leqslant \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ бўлса, $x \in R$; $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ бўлса, $\varnothing$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < a \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ бўлса, $\frac{\alpha+\varphi}{2}+n\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi-\alpha+\varphi}{2}+n\pi$; $n \in Z$ бўлиб, бу ерда $\alpha = \arcsin\frac{2a-1}{\sqrt{5}}$; $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$. **141.** $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ бўлса, $[-1;\ \sin a]$; $a \geqslant \frac{\pi}{2}$ бўлса, $[-1;1]$; $a=-\frac{\pi}{2}$ бўлса, $\{-1\}$; $a < -\frac{\pi}{2}$ бўлса, $\varnothing$. 142. $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ бўлса, $]-\infty;\ \mathrm{tg}\,a]$; $a \geqslant \frac{\pi}{2}$ бўлса, $x \in R$. $a \leqslant -\frac{\pi}{2}$ бўлса, $\varnothing$. 143. $a \geqslant -\frac{1}{2}$ бўлса, $]\cos\frac{\pi}{2(a+1)};\ 1]$; $-1 \leqslant a < \frac{1}{2}$ бўлса, $[-1;\ 1]$; $a < -1$ бўлса, $\varnothing$ 144. $a<0$ бўлса, $\left[\frac{1}{a};\ -\frac{1}{2a}\right[$; $a>0$ бўлса, $\left]-\frac{1}{2a};\ \frac{1}{a}\right]$; $a=0$ бўлса, $x \in R$. 145. $x=\frac{\pi}{6}+2n\pi$; $y=\frac{\pi}{6}-2n\pi$; $n \in Z$. 146. $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}+n\pi$; $y=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}+n\pi$; $n \in Z$. 147. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}$; $y=(-1)^n\frac{n}{6}-\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}$; $n \in Z$. 148. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+n\pi$, $y=\pm\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+n\pi$; $n \in Z$. 149. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi$; $y=\pm\frac{\pi}{3}\ \pi \in Z$. 150. $x=-\frac{\pi}{3}+\pi(n+k)$; $y=\frac{\pi}{3}+(n-k)\pi$; $n,\ k \in Z$. 151. $x_1=\frac{\pi}{4}+n\pi$; $y_1=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x_2=\mathrm{arctg}\,\frac{2}{3}+n\pi$; $y_2=\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}+k\pi$; $k,n\pi \in Z$. 152. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi(k+n)$; $y_1=\pi(k-n)$; $x_2=\pi(k+n)y_2=-\frac{\pi}{4}+\pi(k-n)$; $k,\ n \in T$.

153. $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi,\ y_1=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\ x_2=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi;$ $y_2=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi\ k,\ n\in Z$. 154. $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right);\ \left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{6}\right)$. 155. $x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi;$ $y_1=\operatorname{arctg}2+n\pi;\ z_1=\frac{3\pi}{4}-\operatorname{arctg}2-\pi(k+n);\ x_2=-\frac{\pi}{4}+k\pi;\ y_2=$ $=-\operatorname{arctg}2+n\pi;\ z_2=\frac{5\pi}{4}+\operatorname{arctg}2-\pi(k+n)\ k,\ n\in Z$. 156. $\left(\frac{7+\sqrt{23}}{12};\ \frac{7-\sqrt{23}}{12}\right),\ \left(\frac{7-\sqrt{23}}{12};\ \frac{7+\sqrt{23}}{12}\right)$. 157. $\forall y\in[0;1]$ учун $x=-\sqrt{1-y^2}$. 158. $(1;\ 1)$. 159. $\frac{\pi}{6}+2n\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2n\pi;\ n\in Z$. 160. $2n\pi-\frac{7\pi}{4}<x<-\frac{3\pi}{4}+2n\pi$ ёки $2n\pi+\frac{\pi}{4}+<x<\frac{5\pi}{4}+2n\pi$. 161. $-\frac{\pi}{3}+2n\pi\leqslant x<\frac{\pi}{6}+2n\pi;\ \frac{5\pi}{6}+2n\pi<x\in\frac{3\pi}{2}+2n\pi;\ n\in Z$. 162. $\frac{\pi}{6}+$ $+2n\pi<x\leqslant\frac{\pi}{3}+2n\pi$; ёки $\frac{2\pi}{3}+2n\pi\leqslant x<\frac{11\pi}{6}+2n\pi;\ n\in Z$.

VI б о б.

Планиметрия

4. К ў р с а т м а. Учбурчакнинг ўрта чизиғи ҳақидаги теоремадан фойдаланинг. 5. К ў р с а т м а. Учта айлананинг текисликда ўзаро жойлашиш вазиятини қаранг. 6. К ў р с а т м а. Асосига нисбатан симметрияни қаранг. 7. К ў р с а т м а. $S_{(CD)}$ ни қаранг. 8. К ў р с а т м а л а р. 1-у с у л: $\triangle BHA_1\sim\triangle AHB_1$ ни қаранг; 2-у с у л: $S_{(BC)}$ ни қаранг. 9. К ў р с а т м а. $S_{(BA)}(M)$ ва $S_{(BC)}(M)$ ларни қаранг. 10. 60°. К ў р с а т м а. AB кесманинг ўрта перпендикулярига нисбатан симметрияни қаранг. 11. К ў р с а т м а $R_A^{60^\circ}$ ни қаранг. 12. К ў р с а т м а л а р. 1-у с у л: $R_A^{-90^\circ}(ABC)$ ни қаранг; 2-у с у л: AE ва NQ векторларни қаранг. 13. К ў р с а т м а. $R_A^{60^\circ}$ ва $R_B^{60^\circ}$ ларни қаранг. 14. К ў р с а т м а л а р. O_1, O_2, O_3 ва O_4 лар квадратлар марказлари бўлсин. 1-у с у л: $\triangle O_1O_2A=\triangle O_2O_3B$ ни қаранг; 2-у с у л: $R_{O_i}^{90^\circ}$ ни қаранг ($i=\overline{1,4}$). 15. К ў р с а т м а. $R_M^{-120^\circ}$ ни қаранг. M—учбурчакнинг маркази. 16. К ў р с а т м а. $R_O^{-120^\circ}$ ни қаранг. 17. К ў р с а т м а. $R_C^{90^\circ}(A)$ ни қаранг. 18. К ў р с а т м а. $R_M^{-90^\circ}(\triangle A_1B_1C_1)$ ни қаранг. 19. 150°. 90°. К ў р с а т м а л а р. 1-у с у л: $T: AB\to A'B'$ ни қаранг. Бунда B' нуқта CD томонда ёта-

ди; 2-усул: $T: AB \to MC$ ни қаранг. 20. $\sqrt{4r^2-m^2}$. Кўрсатма. $T: O_1 \to O_2$ ни қаранг. 21. 30°, 30°, 120°. Кўрсатма. $T: A \to B_1$ $T: C \to A_1$, $T: B \to C_1$ ларни қаранг. 22. Кўрсатма. Диагоналларнинг кесишиш нуқтасига нисбатан гомотетияни қаранг. 23. Кўрсатма. 22-масалага қаранг. 24. Кўрсатма. $R_N^{180^\circ}(ADNM)$ ни қаранг. 25. $\frac{1}{4}a$. Кўрсатма. $BP = PB_1$ ва $AK = KA_1$ ларни исботланг ва $H_M: B \to P$ ва $A \to K$ ларни қаранг. Бу ерда M учбурчакнинг оғирлик маркази. 26. Кўрсатма. H_M^2 ни қаранг. 27. Кўрсатма M_1, M_2, M_3, M_4 лар учбурчакларнинг, O эса тўртбурчакнинг оғирлик марказлари бўлсин. $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ муносабатдан фойдаланинг. 28. Кўрсатма. H_B ни қаранг. 30. Кўрсатма. H_A^2 ни қаранг. 31. Кўрсатма. $H_M^{-\frac{1}{2}}$ ни қаранг, M — оғирлик маркази. 32. Кўрсатмалар. 1-усул: $R_B^{60^\circ}(\triangle ABD)$ ни қаранг; 2-усул: CD нинг давомида $BC = DM$ кесма ясанг ва $\triangle BDM$ ни қаранг. 33. Кўрсатма. $H_H^{\frac{1}{2}}$ ва $H_M^{\frac{1}{2}}$ ларни қаранг. 34. Кўрсатма. Учбурчак тенгсизлигидан фойдаланинг. 35. Кўрсатмалар. 1-усул: 34-масалага қаранг; 2-усул: Берилган учбурчакни параллелограммга тўлдиринг. 36. Кўрсатмалар. 1-усул: 6-масалага қаранг; 2-усул: Берилган нуқтадан ён томонга параллел тўғри чизиқ ўтказинг. 37. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Кўрсатма. $ABOC$ тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинлигидан фойдаланинг, бу ерда O квадрат маркази. 40. $\frac{ma}{m+1}$. Кўрсатма. Учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланинг. 41. $\frac{p+q+r}{3}$ (битта ечими). Кўрсатма. Тўғри чизиқ билан учбурчакнинг ўзаро жойлашишини қаранг. 42. 90°, 60°, 30°. 43. Гипотенуза $2\sqrt{ab}$, катетлари $2a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ ва $2b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$. Кўрсатма. Ҳосил бўлган учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланинг. 44. Кўрсатмалар. 1-усул: Синуслар ва косинуслар теоремаларидан фойдаланинг; 2-усул; C бурчакка биссектриса ўтказиб, учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланинг. 46. $\arccos\frac{4bc-b^2-c^2}{2bc}$. 47. $\frac{\pi}{4}$. 48. $\frac{\sqrt{2ab}}{a+b}$. Кўрсатма. Биссектрисанинг хоссасидан ва синуслар теоремасидан фойдаланинг. 49. $\frac{2}{3}$ см. Кўрсатма. Тенг ёнли учбурчакнинг учидан асосига ўтказилган медиана баландлик ҳам бўлиши ва биссектрисаларнинг кесишган нуқтаси ички чизилган айлана маркази эканлигидан фойдаланинг. 50 Кўрсатма. Тўғри чизиқларнинг параллеллик аломатларидан фойдаланинг. 51. Кўрсатмалар. 1-усул: Ҳосил бўлган учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланинг; 2-усул: Синуслар теоремасидан фойдаланинг. 53. Кўрсатма. 31-масалага қаранг. 54. Кўрсатма. Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 55. $a=\sqrt{b^2+bc}$. Кўрсатмалар. 1-усул: B бурчакка биссектриса ўтказиб, учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланинг; 2-усул. Синуслар ва косинуслар теоремаларидан фойдаланинг; 3-усул: Синуслар теоремаси ва $\sin 3\alpha$ формуласидан фойдаланинг. 56 $|n_2-n_1|$. 58. $2\arccos\frac{l_a(b+c)}{2bc}$. Кўрсатмалар. 1-усул: Косинуслар теоремасидан ва биссектриса хоссасидан фойдаланинг; 2-усул: Учбурчакнинг юзини ифодаланг. 59. $\frac{2bc}{b+c}\cos\alpha$. Кўрсатма. 58-масалага қаранг. 60. Кўрсатма. Олтита учбурчак учун синуслар теоремасини қўлланг. 61. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. 62. $5c^2=a^2+b^2$. Кўрсатмалар. 1-усул: Медианани топиш формуласидан ва Пифагор теоремасидан фойдаланинг; 2-усул: Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 63. Кўрсатма. B бурчак биссектрисасига нисбатан симметрияни қаранг. 64. Ҳа. $\overrightarrow{AQ}=\frac{m}{1+m+n}\overrightarrow{AB}+$ $+\frac{n}{1+m+n}\overrightarrow{AC}$ 65. $\frac{2mn}{m+n}$. Кўрсатма. Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 66. Кўрсатма. Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 67. $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}$. Кўрсатмалар. 1-усул: Берилган учбурчакни параллелограммга тўлдиринг; 2-усул: Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 68. $\frac{1}{3}\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)-(m^2+n^2+p^2)}$. Кўрсатма. Вектор алгебрасидан ва косинуслар теоремасидан фойдаланинг. 69. Кўрсатмалар. 1- ва 2-пунктлар учун 12-масалага қаранг, 3- ва 4-пунктлар учун $R^{90°}$ ни қаранг, 5-пункт 4-пунктдан келиб чиқади. 70. $\arccos\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{5-3\cos\alpha}}$. Кўрсатма. Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 73. Кўрсатма. Синуслар теоремасидан фойдаланинг. 75. Кўрсатмалар. 1-усул: 31-

масалага қаранг; 2-усул: Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 76. Кўрсатма. Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 77. $\sqrt{mn}$. Кўрсатма. Биссектриса хоссасидан фойдаланинг. 78. Кўрсатма. Медианани a, b, c лар орқали ифодалаб, сўнгра синуслар теоремасидан фойдаланинг. 79. Кўрсатма. Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 80. 90°, 45°, 45°. 81. $\sqrt{2,88}$. Кўрсатма. Биссектриса хоссасидан ва косинуслар теоремасидан фойдаланинг. 82. 3 : 1. Кўрсатма. Биссектрисанинг ва учбурчак ўрта чизиғининг хоссасидан фойдаланинг. 83. 30°. Кўрсатма. Тангенслар теоремасидан фойдаланинг. 88. 90°. Кўрсатмалар. 1-усул: Гомотетиядан фойдаланинг; 2-усул: Вектор алгебрасидан фойдаланинг; 3-усул: Бир нуқтадан ўтган уринма кесмалари тенглигидан фойдаланинг. 89. Кўрсатма. Учбурчак тенгсизлигидан фойдаланинг. 90. Кўрсатма. Уринма ҳақидаги теоремадан фойдаланинг. 91. Кўрсатма. Гомотетиядан фойдаланинг. 92. 60°. 93. Кўрсатма. Уринма ҳақидаги теоремадан фойдаланинг. 94. $\sqrt{Rr}$. 97. $\frac{r^2}{R}$. 98. Гипотенуза $2\sqrt{Rr}$, катетлари $2r\sqrt{\frac{R}{R+r}}$ ва $2R\sqrt{\frac{r}{R+r}}$. 100. Кўрсатма. Ватар узунлиги $R^2 = \frac{x^2}{4} + (a-x)^2$; $0 < x < a$ тенгламадан топилади. 101. Кўрсатма. Уринма кесмасининг узунлигини x; $(O_1;\ r_1)$ ва $(O_2;\ r_2)$ айланалар марказлари орасидаги масофани y ва $\angle O_1OO_2 = \alpha$ деб олиб,

$$\begin{cases} a^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha, \\ y^2 = (R+r_1)^2 + (R+r_2)^2 - 2(R+r_1)(R+r_2)\cos\alpha, \\ x^2 = y^2 - (r_1 - r_2)^2 \end{cases}$$

системани қаранг. 102. $2\arcsin\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Кўрсатма. Тўғри бурчакли учбурчакларни қараб чиқинг. 103. $\frac{4Rr(R-r)}{(R+r)^2}$. 105. Кўрсатма. Медиана хоссасидан фойдаланинг. 106. Кўрсатма. 105-масалага қаранг. 110. Кўрсатмалар. 1-усул: Учбурчакнинг ўрта чизиғи ҳақидаги теоремадан фойдаланинг; 2-усул. Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 111. Кўрсатма. 110-масалага қаранг. 112. Кўрсатма. 110-масалага қаранг. 113. Кўрсатма. 110-масалага қаранг. 114 Кўрсатма. Учбурчакларнинг ўхшашлиги хоссасидан фойдаланинг. 115. Кўрсатмалар. 1-усул: A_1B ва C_1D кесмаларга қурилган учбурчакларнинг тенглигидан фойдаланинг; 2-усул: Z_0ни қаранг. 116. Кўрсатма. Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 118. Кўрсатма. Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 119. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{1+k^2}}$; $k\sqrt{\frac{a^2+b^2}{1+k^2}}$. 120. Кўрсатма. Трапецияни учбурчакка тўлдиринг. 122. m. 123. $4b-a$. 124. $1:2$. 125. $\frac{3}{4}a$. 126. $\frac{a+mb}{1+m}$. Кўрсатмалар. 1-усул: Кичик асоснинг бир учи орқали ён томонига параллел тўғри чизиқ ўтказинг; 2-усул: Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 127. $\frac{2ab}{a+b}$. Кўрсатмалар. 1-усул: Учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланинг; 2-усул: Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 129. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Кўрсатма. Трапециянинг юзини ифодаланг. 130. Изланган нуқта (C, CD) айлана билан AB томоннинг кесишган нуқтаси бўлади. Агар: $AB > BC$ бўлса, ечим иккита; $AB = BC$ бўлса. ечим битта; $AB<BC$ бўлса, ечим йўқ. 131. Кўрсатма. Синуслар ва косинуслар теоремаларидан фойдаланинг. 132. $3:5$. Кўрсатма. Косинуслар теоремасидан фойдаланинг. 133 10 см, 6 см. Кўрсатма. Трапецияга тенгдош бўлган учбурчакни қаранг. 134. $\frac{h}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{h^2-ab}$. 136. 90°. Кўрсатма. AD ва BC томонлар давомида кесишсин. Косинуслар теоремасидан фойдаланинг. 137. Кўрсатма. Тескарисини фараз қилинг. 138. Кўрсатма. O диагоналлар кесишган нуқта бўлсин. Ўхшаш учбурчакларни қаранг. 139. Кўрсатма. Учбурчак тенгсизлигидан фойдаланинг. 140. Кўрсатма. R AD диагоналнинг ўртаси бўлсин. $KLMR$—параллелограмм эканлигини исботланг. 141. Кўрсатма. Кўпбурчакнинг оғирлик маркази учун вектор муносабатдан фойдаланинг. 142. Кўрсатма. Вектор муносабатдан фойдаланинг. 146. $\sqrt{2}-1$. Кўрсатма. Ўхшаш учбурчаклар юзларининг нисбатидан фойдаланинг. 148. mn. 149. $1:4$. Курсатма. Фалес теоремасига келтиринг. 151. $\sqrt{pq}$. Кўрсатма. Ўхшаш учбурчаклар хоссаларидан фойдаланинг. 154. Кўрсатма. 71-масалага қаранг. 155 Кўрсатма. Трапециянинг ўрта чизиғини ўтказинг. 157. Кўрсатма. Герон формуласидан ҳамда ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар орасидаги боғланишдан фойдаланинг. 158. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. Кўрсатма. 155-масалага қаранг. 159. $m^2:mn:n^2:mn$. 160. $\frac{2abc\,S}{(a+b)(a+c)(b+c)}$. 161. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$. Кўрсатма. Ўхшаш учбурчаклар хоссаларидан фойдаланинг. 162. $\frac{2100}{169}$ см^2. 163. $\sqrt{3mn}$. Кўрсатма. m, n ва r лар орасида муносабат ўрнатинг. 165. $48\sqrt{6}$ см^2. Кўрсатма. 67-масалага қаранг. 166. Кўрсатма. Тўртбурчакка диагоналлар ўтказинг ва ҳосил бўлган учбурчакларнинг юзларини икки усулда қаранг. 167.

Кўрсатма. $S_{ABCD}=2S_{MNPQ}$ ни исботланг. Бу ерда M, N, P, Q лар берилган тўртбурчак томонларининг ўрталари. 169 Кўрсатма. Ҳосил бўлган учбурчаклар юзларининг берилган учбурчак юзига нисбатларини қаранг. 170. Кўрсатма. Ички чизилган айлана хоссасидан ва синуслар теоремасидан фойдаланинг. 171. $\frac{1}{4}(2\sqrt{2}-1)$. 173. 30°, 60°, 90°. Кўрсатма. Юзлар нисбатидан томонлар нисбатига ўтинг ва синуслар теоремасидан фойдаланинг. 174. $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$. Кўрсатма. Ҳосил бўлган учбурчаклар учун косинуслар теоремаси ва учбурчак юзини топиш формуласини қўлланг. 175. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{4}$. Кўрсатма. Косинуслар теоремасидан фойдаланиб, тригонометрик тенгламага келтиринг. 176. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Кўрсатма. $AC=BC=AB$ ни исботланг. 177. $\frac{1}{2}(a^2-b^2)\operatorname{tg}\alpha$. Кўрсатма. Косинуслар теоремасидан фойдаланинг. 178. 3:5. 179. $\frac{S\pm\sqrt{S^2-16R^4}}{2R}$. Кўрсатма. $\begin{cases}a+b=\frac{S}{R},\\ a\cdot b=4R^2\end{cases}$ га келтиринг. 181. Кўрсатма. Трапециянинг ён томонларини давом эттириб, учбурчакка тўлдиринг. 182. $\frac{ab(a+b)}{2|a-b|}\operatorname{tg}\alpha$. Кўрсатма. Трапециянинг ён томонлари x ва y бўлсин. $x^2+y^2=a^2+b^2$ ни исботланг, ҳамда косинуслар теоремасидан фойдаланинг. 183. 1:3. 184. $\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4k^2}{S}}\right)$. 185. $1-\cos^2A-\cos^2B-\cos^2C$ агар $\triangle ABC$ ўткир бурчакли бўлса. Кўрсатма. $Z_{ABC}-S_{A_1B_1C_1}$ ни қаранг. 186. 4:3. Кўрсатма. 1-усул: Медиана хоссасидан фойдаланинг; 2-усул: Учбурчакларнинг тенгдошлигидан фойдаланинг. 187. $h^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Кўрсатма. Ички чизилган бурчак хоссасидан фойдаланинг. 188. $\frac{1}{S}a^2$. 189. Кўрсатма. Дастлаб $S_{LMN}=S_{LOM}+S_{MON}+Z_{NOL}$ ни кўринг, бу ерда O айлана маркази. 190. Кўрсатма. Ўхшаш учбурчакларнинг хоссаларидан ва 45-масаладан фойдаланинг. 194. Кўрсатма. Ҳосил бўлган тўртбурчакларнинг бирига тенг бўлган тўртбурчакнинг бир учи диагоналлардан бирининг ўртаси билан устма-уст тушади. 197. $-2R^2\sin^2\alpha\sin 4\alpha\ \left(\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. Кўрсатма. Трапеция учларини айлана маркази билан туташтириб, ҳосил бўлган тенг ёнли учбурчакларни қаранг. 198. $\frac{S}{l}$. Кўрсатма. Трапециянинг ва учбурчакнинг асосларидаги бурчакларни қаранг. 199. $(P+1)^2$. 200. $\frac{1}{2}$. Кўрсатма. Аффин алмаштиришлар билан берилган олтибурчакни мунтазам олтибурчакка алмаштиринг. 201. $\frac{1}{6}a^2$. 202. $a^2\left(1+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$. 203. $\frac{a^2}{4}(\pi+2\sqrt{3}-6)$, 204. $R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. 205. $\frac{a^3}{18}(3\sqrt{3}-\pi)$. 206. $\frac{\pi R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}$. 207. $a+b-c$. Кўрсатма. Уринманинг хоссасидан фойдаланинг. 208. Кўрсатма. Уринманинг хоссасидан фойдаланинг. 209. Кўрсатма Уринманинг хоссасидан фойдаланинг. 210. Кўрсатма. Учбурчакнинг юзини учта баландлиги орқали ифодаланг. 211. $m-c$. Кўрсатма. Уринманинг хоссасидан фойдаланинг. 212. $3:4:5$. Кўрсатма. 211-масалага қаранг. 213. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Кўрсатма. Айланаларнинг иккинчи кесишиш нуқтаси гипотенузада ётишини исботланг. 214. Кўрсатма. H учбурчакнинг ортомаркази бўлсин, у ҳолда $\sin AHC=\sin ABC$ ни исботланг. 215. Кўрсатма. Биссектрисанинг ва ички чизилган бурчакнинг хоссасидан фойдаланинг. 216. Кўрсатма. Ички чизилган бурчак хоссасидан фойдаланинг. 217. Кўрсатма. 211-масалага қаранг. 218. $|b-c|$. 219. $\frac{ab^2}{c^2-b^2}$; $\frac{abc}{c^2-b^2}$. 220. $\sqrt{ac}$. Кўрсатма. Ҳосил бўлган тўғри бурчакли учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланинг. 221. Тенг бурчакларнинг ҳар бири $\arccos\frac{2}{3}$ га тенг бўлади. 222. $\frac{1}{2}r(\sqrt{7}-1)$. 223. Кўрсатма. Дастлаб AD A бурчакнинг биссектрисаси эканлигини исботланг, сўнгра ҳосил бўлган учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланинг. 224. Кўрсатма. Дастлаб $\triangle CEF\sim\triangle AOM$ ни исботланг, бу ерда $M'=AD\cap CO$. 225. Кўрсатма. Учбурчакнинг A, B, C учлари орқали ўзаро параллел тўғри чизиқлар ўтказинг. 226. Кўрсатмалар. D нуқта BC ёйга тегишли бўлсин. 1-усул: $R_B^{60°}$ ни қаранг; 2-усул: CD нур давомида $BD=DM$ кесма олиб, ҳосил бўлган BDM учбурчакнинг тенг томонли эканлигини исботланг. 227. Кўрсатма. Вектор муносабатдан фойдаланинг. 228. Ўхшашлик коэффициенти $\frac{k^2+k+1}{(k-1)^2}$. Кўрсатма. Вектор муносабатдан фойдаланинг. 230. Кўрсатма. $\triangle AOO_1 \sim \triangle ABC$ ни қаранг. 231. $\frac{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$. Кўрсатма. Трапецияда: a—катта асос, l—ён томон, d—диагонал бўлсин. Тўғри бурчакли учбурчакнинг хоссаларидан ва косинуслар теоремасидан фойдаланинг. 232. $\sqrt{2R(2R-h)-(2R-h)}$. Кўрсатма. Учбурчакда a—асос, l—ён томон бўлсин. Тўғри бурчакли учбурчакнинг хоссаларидан ва $S=pr$ формуладан фойдаланинг. 233. $\frac{2r\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi+\alpha}{4}}{\sin\frac{\pi+3\alpha}{4}}$. 234. $\frac{l\sin\frac{3\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. 235. Кўрсатма. $ABCD$ трапецияда AB томоннинг ўртаси O_1 ва CD томоннинг ўртаси O_2 бўлсин. $O_1A+O_2D=O_1O_2$ ни исботланг. 236. $\frac{(b+c)^2-a^2}{a^2}$. Кўрсатма. $AD\cdot DE=BD\cdot DC$ дан фойдаланинг. 237. $\frac{1}{2R}\left|a\sqrt{4R^2-b^2}\pm\right.$ $\left.\pm b\sqrt{4R^2-a^2}\right|$. Кўрсатма. Птолемей теоремасидан фойдаланинг. 238. $\sqrt{R(R-2r)}$ 239. Кўрсатма. Биссектрисаларнинг хоссасидан ва BAD ҳамда AOO_2 учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланинг. 240. Кўрсатма. $\triangle MEF \sim \triangle MKL$ ни исботланг. 241. Кўрсатма. Синуслар теоремасидан фойдаланинг. 242. Кўрсатма. Учбурчакнинг хоссасидан ва 225-масаладан фойдаланинг. 243. Кўрсатма. M нуқта тўртбурчак диагоналларининг ўрталарини бирлаштирувчи кесманинг ўртаси эканлигини исботланг, сўнгра $H_M^{-\frac{1}{3}}$ ни қаранг. 245. Кўрсатма. O нуқтадан тўртбурчак томонларига тик чизиқ туширинг ва ҳосил бўлган тўрт жуфт учбурчакларни қаранг. 247. Кўрсатма. Синуслар ва косинуслар теоремасидан фойдаланинг. 248. $\frac{R}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$. Кўрсатма. Айланага ички чизилган мунтазам кўпбурчак хоссасидан фойдаланинг. 249. $\sqrt{\frac{1}{8}(5b^2-8a^2)}$. Кўрсатма. Косинуслар теоремасидан фойдаланинг. 250. 10 см. Кўрсатма. $AC=y$ ва $BO=x$ деб,

$$\begin{cases} y^2+36=4x^2, \\ \frac{y^2}{4}+(x-3)=20 \end{cases}$$

системани қараб чиқинг. 251. 12,5 см; 16,5 см². Кўрсатма. Косинуслар теоремасидан фойдаланинг.

VII боб. Стереометрия

1. Чексиз кўп, чексиз кўп, битта, ҳеч қанча. 4. Кўрсатма. Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 6. $\frac{an+bm}{m+n}$. Кўрсатмалар. 1-усул: MA ва MB кесмаларга ўхшаш тўғри бурчакли учбурчаклар ясанг; 2-усул: Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 7. Кўрсатма. Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 8. $\sqrt{37}$ см. 9. $\frac{a+b+c}{3}$. Кўрсатма. 6-масалага қаранг. 10. $c+b-a$. Кўрсатма. $|x-c|=|b-a|$ ни исботланг. 11. $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$. Кўрсатма. Изланган масофа тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагоналининг узунлиги бўлади. 13. Кўрсатма. Вектор муносабатдан фойдаланинг. 14. Кўрсатма. Вектор муносабатдан фойдаланинг. 15. 2 : 1 ва 1 : 1. Кўрсатма. Фалес теоремасидан фойдаланинг. 16. $\arccos\frac{3}{4}$; $\arccos\frac{1}{8}$. Кўрсатма. Косинуслар ёки синуслар теоремасидан фойдаланинг. 17. $\frac{pm}{m+n}$. Кўрсатма. Дастлаб M нуқта EF тўғри чизиқда ётишини исботланг. 18. $\frac{\sqrt{6}}{8}a$. Кўрсатма. $DC'\perp \Pi$ ўтказиб, $\triangle DBC'$ тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчак эканлигини исботланг. 19. 60°. Кўрсатма. $\triangle ABA'$ ни ясанг, бу ерда A' нуқта B нуқтанинг l тўғри чизиқдаги проекцияси. 20. $\arcsin\frac{2}{3}$. 21. 30°. 23. Кўрсатма. Учбурчакнинг ўрта чизиғи хоссасидан фойдаланинг. 24. Кўрсатма. 23-масалага қаранг. 25. Кўрсатма. 23-масалага қаранг. 27. Кўрсатма. Учбурчакнинг ўрта чизиғи хоссасидан фойдаланинг. 28. $\frac{1}{5}\sqrt{25m^2+9a^2+4b^2-12ab\cos\alpha}$, $\frac{1}{5}\times$ $\times\sqrt{25m^2+9(a^2+b^2+2ab\cos\alpha)}$. Кўрсатмалар. 1-усул: Вектор муносабатдан фойдаланинг: 2-усул: $BMNB'$ параллелограмм ясанг. 29. Кўрсатма. Тўртёқли бурчакнинг қарама-қарши ёқларининг кесишиш чизиқлари орқали текислик ўтказинг. 31. Кўрсатма. Учёқли бурчакнинг учала қиррасига учидан бошлаб тенг кесмалар қўйинг. 32. Кўрсатма. $SABC$—учёқли бурчак ва $l_1 = \Pi_1\cap(SBC)$ ҳамда $l_2=\Pi_2\cap(SAC)$ бўлсин. SB қиррага тегишли ихтиёрий B_1 нуқтадан l_1 ва l_2 тўғри чизиқларга тик чизиқлар ўтказинг. 33. Кўрсатма. Учёқли бурчакнинг учала қиррасига

учидан бошлаб тенг кесмалар қўйинг. **35.** 90°. Кўрсатмалар. 1-усул: D нуқта AC нинг ўртаси бўлсин. $\triangle OBD$ ни қаранг; 2-усул: Вектор алгебрасидан фойдаланинг. **36.** Кўрсатма. Дастлаб $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ исботланг, сўнгра $3(a^2+b^2+c^2) \geqslant (a+b+c)^2$ муносабатдан фойдаланинг. **37.** $\arccos\sqrt{\frac{1}{3}(1+2\cos\alpha)}$.

38. $\frac{1}{3}\sqrt{3(m^2+n^2+k^2)-(a^2+b^2+c^2)}$. Кўрсатма. Вектор муносабатдан фойдаланинг. **41.** Кўрсатма. Вектор алгебрасидан фойдаланинг. **42.** AB кесманинг ўртасидан тик ўтувчи текислик. **43.** $\triangle ABC$ га ташқи чизилган айлана марказидан $(ABC)\perp l$ ўтувчи тўғри чизиқ. **44.** Диагоналларнинг кесишиш нуқтасидан тўртбурчак текислигига тик ўтувчи текислик. **45.** Трапецияга ташқи чизилган айлана марказидан трапеция текислигига тик ўтувчи текислик **46.** AB тўғри чизиқнинг маълум бир нуқтасидан тик ўтган текислик. **47.** Текислик. **48.** Ўзаро тик бўлган текисликлар. **49.** Ромбга ички чизилган айлана марказидан ромб текислигига тик ўтган текислик. **50.** Ўзаро параллел бўлган: тўртта тўғри чизиқ, иккита тўғри чизиқ битта тўғри чизиқ, йўқ. Курсатма Учала тўғри чизиқларни бирор T текисликка проекцияланг. **51.** Параллел текисликлар. **52.** Текислик. **53.** Ўзаро тик бўлган текисликлар. **54.** Агар $T_1 \parallel T_2$; $T_1 \cap T_3 = \varnothing$ бўлса $T_1 \cap T_3$ га параллел бўлган иккита тўғри чизиқнинг бирлашмасидан; агар текисликлар ўзаро кесишса, лекин умумий нуқтага эга бўлмаса, $T_1 \cap T_2$ га параллел бўлган тўртта тўғри чизиқнинг бирлашмасидан агар текисликлар бир нуқтада кесишса, шу нуқта орқали ўтувчи тўртта тўғри чизиқнинг бирлашмасидан иборат бўлади. **55.** Берилган кесмани диаметр қилиб олинган сфера, A, B нуқталар кирмайди. **56.** Айлана. **57.** Айлана. **58.** Диаметри AB кесмадан иборат бўлган сфера. **60.** Маркази AB кесманинг ўртасида бўлган сфера, нуқта ёки $\varnothing$. **61.** Аполлония айланаси ёки тўғри чизиқ. **62.** Аполлония сфераси ёки текислик. **63.** Цилиндрик сирт ёки текислик. **64.** Цилиндрик сирт. **65.** Сфера. **66.** l га тик бўлган текислик. **67.** Цилиндрик сирт. **68.** Берилган сферага концентрик сфера. **69.** Текислик. **87.** Кўрсатма. A, B_1, D_1 ва D, B, C_1 учлардан ўтувчи текисликлар кесимда тенг томонли учбурчак ҳосил қилади. Буларга параллел ва тенг узоқликдан ўтувчи текислик билан кесимни қаранг. Исботлаш учун икки усулдан фойдаланиш мумкин: 1) учбурчакнинг ўрта чизиғи хоссасидан, 2) вектор алгебрасидан. **89.** Агар кесим BD_1 диагонал орқали ўтса, у AA_1 ва CC_1 ён қирраларнинг ўрталаридан ўтади. **90.** Мунтазам олтибурчак, $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. Кўрсатма. Кесувчи текислик қаралаётган ён қиррага қарши ётган ён қирранинг ўртасидан ўтади. 91. Тенг ёнли трапеция, $S=\frac{9}{8}a^2$. Кўрсатма. Пастки асос қиррасининг ўртасидан устки асос диагоналига $\parallel$ тўғри чизиқ ўтказинг. 92. Мунтазам олтибурчак, $S=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 93. Бешбурчак, $S=\frac{7\sqrt{17}}{24}a^2$. Кўрсатма. E нуқта AB томоннинг, F нуқта BC томоннинг ўртаси бўлсин. DA ва DC тўғри чизиқларнинг EF тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталари P ва Q ларни ҳосил қилинг. D_1PQ текислик кубни кесиши натижасида изланган кесим ҳосил бўлади. Кесим юзини ҳисоблашнинг бир неча усули мавжуд, хусусан ёйилмадан фойдаланиш ҳам мумкин. 94. Кўрсатма. 87, 88, 92-масалаларга қаранг. 95. $l=\frac{1}{2}a$. 96. $S=\frac{7\sqrt{6}}{16}a^2$. Кўрсатма. Изланган кесим кубнинг BD_1 диагоналига ва ёғининг AC диагоналига параллел ўтади. 97. $S'=\frac{4}{9}S$. 98. $S_{кес}=\frac{1}{2}xy\sin\frac{2\pi}{3}$. Кўрсатма. $AE=x$, $B_1E=y$ десак,

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=b^2+h^2, \\ \sqrt{x^2-b^2}+\sqrt{y^2-b^2}=h \end{cases}$$ система ҳосил бўлади.

99. $S=\frac{b}{8}\sqrt{15b^2+4l^2}$. 100. $l=\sqrt{\frac{2}{3}(a^2+b^2+\sqrt{a^4+b^4-a^2b^2})}$. Кўрсатма. Кесувчи текисликнинг призма асосининг C учи орқали ўтказинг ва қарши ёқда ҳосил бўладиган трапецияни қаранг. 101. $V=\frac{c^3}{8}(1+\sqrt{6}-\sqrt{3})$. Кўрсатма. Шарнинг радиуси асосга ички чизилган айлана радиусига тенг. 102. $\frac{3}{5}$. Биринчи кесим трапеция ва иккинчи кесим учбурчак бўлади. 103. $l=\frac{3\sqrt{111}}{35}b$. 104. $S=\frac{3}{4}\sqrt{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}$. 105. 23 : 9 нисбатда, кесимда бешбурчак ҳосил бўлади. 106. $S=\frac{7}{4}Q$, биринчи кесимда учбурчак, иккинчи кесимда бешбурчак ҳосил бўлади. 107. $S=\frac{3}{8}\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{4a^2+b^2+c^2}$ кесимда олтибурчак ҳосил бўлади.

108. $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{2}$, кесимда тўртбурчак ҳосил бўлади. 109. 23 : 13. Кўрсатма. A_1M ва AC тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси K, KN ва AB тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси P бўлсин. У ҳолда призма бўлагининг ҳажмини иккита пирамида A_1APK ва $MCNK$ ҳажмларининг айирмаси сифатида қараш мумкин. 110. Кўрсатма. Кесувчи текислик икки айқаш қиррага параллел ўтади. Исботлаш учун икки усулдан фойдаланиш мумкин 1) учбурчакнинг ўрта чизиғи хоссасидан; 2) вектор алгебрасидан. 111. Кўрсатма. 110-масалага қаранг. 112. Кўрсатма. 110-масалага қаранг. 113. 25 : 36. Кўрсатма. Икки текисликнинг параллеллик аломатидан фойдаланинг. 114. $\frac{a^2(\sqrt{2}+1)}{6\sqrt{3}}$, кесимда учбурчак ҳосил бўлади. 115. $S = \frac{3\sqrt{2}}{25}a^2$, кесимда учбурчак ҳосил бўлади. Кўрсатма. Кесим D учдан чиққан баландликнинг ўртасидан ўтади. 117. $\sqrt{6}$, кесимда учбурчак ҳосил бўлади. Кўрсатма. Кесим текислиги ён ёққа тик ўтади. 118. 4 : 5. 119. $S = \frac{1}{4} b^2 \cos\alpha \sqrt{1+2\cos^2\alpha}$. 120. $S = \frac{a^2}{6}$. 121. $S = \frac{3\sqrt{6}}{50}a^2$. 122. $S = \frac{3\sqrt{2}}{25}a^2$. Кўрсатма. Кесувчи текислик тетраэдр баландлигининг ўртасидан ўтади. 123. $S = \frac{21}{125}$. 124. $l_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{2q}$; $p = 2a$; $S = \frac{1}{4}(a^3 - 8q^2)$. 125. $S = \frac{a}{4}\sqrt{3a^2 + 4b^2}$ кесимда параллелограмм ҳосил бўлади. 126. $S = \frac{7}{16}Q$ кесимда тенг ёнли трапеция ҳосил бўлади. Кўрсатма. Кесимнинг шакли ён ёқдан ажралган трапеция билан тенгдош бўлади. 127. $S = \frac{a^2\sin^2 2\alpha\cos\alpha}{\sin^2 3\alpha}$, кесимда тенг ёнли трапеция ҳосил бўлади. Кўрсатма. Пирамида учидан асосга тик қилиб ёрдамчи кесувчи текислик ўтказинг. 128. $l = \frac{2aH}{\sqrt{9a^2 + 4H^2}}$, кесимда тенг ёнли трапеция ҳосил бўлади. Кўрсатма. Пирамида учидан асосга тик қилиб ёрдамчи кесувчи текислик ўтказинг. 129. $S = \frac{3\sqrt{2}}{5}a^2$, кесимда ҳосил бўладиган тўртбурчакнинг диагоналлари ўзаро тик бўлади. Кўрсатма. BP кесувчи текисликка тик бўлсин, у ҳолда шартга кўра $\angle BAP =$

$=30^\circ$ бўлиб, $BP=\frac{1}{2}\cdot AB=\frac{1}{2}a$ бўлади. Пирамида асосидан кесувчи текисликка ўтказилган тик чизиқ OL бўлсин, у ҳолда BD бу текисликка параллел бўлганлиги сабабли, $OL=BP=\frac{a}{2}$ бўлади. **130.** $S=\frac{2a}{15}\sqrt{16a^2+2h^2}$, кесимда ҳосил бўладиган тўртбурчакнинг диагоналлари ўзаро тик бўлади. **131.** $S=\frac{d_2}{6}\sqrt{h^2+d_1^2}$, кесимда ҳосил бўладиган тўртбурчакнинг диагоналлари ўзаро тик бўлади. **132.** $S=\frac{3}{2}a^2$. **133.** $E_{юз}=126$ см^2. К ў р с а т м а. $O_1=(SO)\cap(MA)$ ва O — параллелограмм диагоналларининг кесишиш нуқтаси бўлсин, у ҳолда $SO_1:O_1O=3:1$ ва $MO_1:O_1A=3:5$ бўлади. **134.** $E_{юз}=\frac{18a^2}{35}$. К ў р с а т м а. $O=AC\cap BD$ ва $AD=a$ бўлсин, у ҳолда $\triangle DOA$ ва $\triangle COB$ лар мунтазам бўлиб, DK ва FB лар уларнинг баландликлари бўлади Кесувчи текислик SC қирранинг ўртасидан ўтиб, DK ва FB ларга параллелдир. **135.** $S=\frac{a}{16}(2+\sqrt{5})\sqrt{4b^2+3a^2}$ кесимда тенг ёнли трапеция ҳосил бўлади. **136.** $\frac{5}{4}$, кесимда тенг ёнли трапеция ҳосил бўлади **137.** $S=\frac{1}{2}Q$, кесимда тенг ёнли трапеция ҳосил бўлади. **138.** $S=\frac{1}{4}Q\left(\text{ёки } \frac{3}{4}Q\right)$, кесимда тенг ёнли трапеция ҳосил бўлади **139.** $S=\frac{Q}{3}\left(\frac{3k-1}{k-1}\right)$, $k\in N$. К ў р с а т м а. a—пастки асоснинг, b — устки асоснинг диагонали бўлсин. Кесим текислиги диагонал текисликка параллел бўлиши учун пастки асосни $\frac{k}{k+1}$ нисбатда бўлувчи нуқта олинса, устки асосни $\frac{k}{k+1}-\frac{1}{k+1}$ нисбатда бўлувчи нуқта олиниши керак. Демак, кесимда тенг ёнли трапеция ҳосил бўлиб, унинг пастки асоси $\frac{ka}{k+1}$ га, устки асоси $\frac{k-1}{k+1}b=\frac{(k-1)a}{2(k+1)}$ га тенг бўлади. **140.** $l_1=\sqrt{3}a$; $l_2=\sqrt{2}a$; $l_3=\sqrt{\frac{3}{2}}a$. **141.** $l_1=\frac{\sqrt{2}}{2}a$; $l_2=\frac{\sqrt{3}}{3}a$. К ў р с а т м а. Изланган масофа куб қиррасининг ўртаси билан диагоналнинг ўртасини бирлаштирувчи кесма бўлади: A, B_1, D_1 ва B, D, C_1 учлардан ўтувчи текисликларни қаранг. 143. Кўрсатма. Қаралаётган учёқли бурчакнинг учида қирраларининг узунликлари 1 га тенг ва ҳажми V_0 бўлган махсус параллелепипед ясанг. 144. Кўрсатма. Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 146. Кўрсатма. Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 148. $V = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. 149. $\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{b\sqrt{a^2+c^2}}{ac}$. Кўрсатма. Берилган текисликлар MN тўғри чизиқ орқали кесишади. Бу ерда $M - ADD_1A_1$ ёқнинг, $N - A_1D_1C_1B_1$ ёқнинг ўрталари. A_1D_1 қирранинг ўртасидан MN га $MN \perp KL$ ўтказамиз. Натижада ҳосил бўлган $A_1L_1D_1$ изланган икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги бўлади. 150. Кўрсатма. Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 151. $\alpha = \arccos\dfrac{8}{5\sqrt{17}}$. Кўрсатма. A_1B_1 қирранинг ўртасидан A_1D диагоналга параллел тўғри чизиқ ўтказинг. 152. $-\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta$. Кўрсатма. $\angle PMN$ изланаётган икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги бўлсин. Бу ерда P нуқта DC қиррага, N нуқта BC қиррага ва M нуқта CA_1 диагоналга тегишли бўлсин. $CMPN$ пирамидани қаранг. 153. $\gamma = \arccos(\sin\alpha\sin\beta)$. Кўрсатма. Диагоналлардан бирини қарши ётган ёққа параллел кўчиринг. 154. $V = 3a^3$. 155. $S = 2a(a + \sqrt{a^2 + 4b^2})$. Кўрсатма. Устки асоснинг қаралаётган учидан пастки асоснинг қиррасига тик чизиқ ўтказинг. 156. $V = 144$ см³. 157. $V = \dfrac{mnQ\sqrt{Q}}{m^2+n^2}$. 158. $V = abc\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$. Кўрсатма. 150-масалага қаранг. 159. 72 см³. 160. $\dfrac{Q\sqrt{3Q}}{2}$. 161. $h = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\sqrt{3}}(\mathrm{ctg}^2\alpha - 3)}$; $l = \sqrt[3]{\dfrac{8V\sin\alpha}{\sqrt{3 - 12\sin^2\alpha}}}$. 162. $V = \dfrac{l}{2}\sqrt[4]{(m^2+n^2+p^2)(m^2+n^2-p^2)\times(m^2+p^2-n^2)(n^2+p^2-m^2)}$. 163. $V = \sqrt{2}a^3$. 164. $S = (4+\sqrt{3})a^2$. 165. $V = \dfrac{3}{8}a^3$. 166. $S = 2p + \dfrac{4V}{\sqrt{p}}$. 167. $V = 9\sqrt{3}$ см³. Кўрсатма. $BC = x$ ва $AA_1 = y$ ларни топиш учун

$$\begin{cases} y = \sqrt{5 - x^2} + \sqrt{8 - x^2}, \\ y^2 = 13 - 4(x^2 - 3). \end{cases}$$

системани тузиш керак. 168. $\dfrac{ah^2}{\sin 2\alpha}$. 171. Кўрсатма. 112-масалага қаранг. 173. Кўрсатма. Тетраэдр ичида олинган ихтиғрий нуқта орқали кетма-кет тетраэдр ёқларига параллел текисликлар ўтказинг. **174.** Кўрсатма. $ABCD$ тетраэдрнинг AB қиррасининг ўртаси M нуқта ва CD қиррасининг ўртаси N нуқта бўлсин, у ҳолда MN кесма кесувчи текисликда ётиб AD ва CB қирралардан тенг узоқлашган бўлади. **175.** Кўрсатма. O_1 нуқта DAC ёқнинг, O_2 нуқта DBC ёқнинг оғирлик марказлари бўлсин. AO_1O_2B шаклнинг трапеция эканлигини исботланг, сўнгра ўхшашликдан фойдаланинг. **176.** Кўрсатмалар. 1-усул: кесувчи ADH текислик ўтказинг: 2-усул: Вектор алгебрасидан фойдаланинг. **177.** Кўрсатма. 31-масалага қаранг. **178.** Кўрсатма. $DABC$ пирамидани DB қирраси ва DH баландлиги орқали ўтувчи текислик билан кесинг ҳамда кесимда ҳосил бўлган тўғри бурчакли учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланинг. **179.** $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$. Кўрсатма. $DABC$ тетраэдрни DB қирраси ва DH баландлиги орқали ўтувчи текислик билан кесинг. 1-усул: Учбурчаклар метрик муносабатдан фойдаланинг; 2-усул: Вектор алгебрасидан фойдаланинг. **180.** $l = \frac{a}{3}$. **181.** $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Кўрсатмалар. 1-усул: Ёқларининг диагоналлари тетраэдрнинг қирраларидан иборат бўлувчи ёрдамчи куб ясанг; 2-усул: Вектор алгебрасидан фойдаланинг. **182.** $\arccos\frac{2}{3}$, $\arccos\frac{1}{6}$. **183.** $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}}{5}$. Кўрсатма. Тетраэдрнинг қирраси ва қарши ётган ёқнинг баландлиги орқали кесим ўтказинг. **184.** $\alpha = \arccos\frac{3}{8}$. **185.** $V = \frac{1}{6}abc$. Кўрсатма. Пирамиданинг ён ёғини асос сифатида олинг. **186.** $V_0 \cdot DA \cdot DB \cdot DC$. **187.** $l = \frac{\sqrt{2}}{2}h$. **188.** $1:7:19$. **189.** $2\sqrt{2}-1$. **191.** $V = \sqrt{3}h^3\operatorname{ctg}^2\alpha$. **192.** $V = \frac{d^3}{\sin^3\alpha}$. **193.** $V = \frac{1}{6}Q\sqrt{2Q\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. **194.** $\operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{\frac{2}{7}}$. Кўрсатма. M нуқтадан ABC текисликка MH_1 тик чизиқ туширинг, сўнгра H нуқтадан $H_1M_1 \perp CN$ ўтказинг. H_1M_1 ни топиш учун $\triangle ACN$ нинг юзини икки усулда ҳисобланг. **195.** Кўрсатма. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага келтиринг. **197.** Кўрсатма. DH баландликнинг ён қирралар билан ташкил этган бурчаклари α, β, γ бўлсин, у ҳолда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$; S_1, S_2, S_3 ларни қирралар орқали ифодалаб, сўнгра ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар боғланишидан фойдаланинг. **198.** Кўрсатма. $abc = 2hS$ ни исботланг, бу ерда S асос юзи бўлиб, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$ га тенг. **199.** Кўрсатма. Пирамидага ташқи конус чизиб, конуснинг ҳажми ясовчисининг кубидан кичик эканлигини исботланг. 203. Кўрсатма. Умумий асосли $DABC$ ва $ODBC$ пирамидаларни қаранг. 204. $\frac{18b^3h^3}{(h^2-b^2)\sqrt{4b^2-h^2}}$. Кўрсатма. Пирамиданинг баландлиги DH бўлиб, унинг ўртаси K бўлсин, KM кесма DA қиррага, KN—кесма BDC ёққа тик бўлсин, ҳамда $(AH)\cap(DN)=E$ бўлсин. $HD=y$ ва $EH=x$ деб,

$$\begin{cases} x\sqrt{\frac{1}{4}y^2-b^2}=by, \\ 2x\sqrt{\frac{1}{4}y^2-h^2}=hy \end{cases}$$

системани қаранг. 206. $V=\frac{\sqrt{2}}{8}$ см^3. 207. $\frac{2}{25}$. 208. $S=\frac{15}{\sqrt{39}}$. 209. $\frac{b}{c}$. Кўрсатма. $\angle ADC=90°$ га тенг эканлигини исботланг. 210. $\angle BAC=\arccos\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$. Кўрсатма. BE асоснинг баландлиги бўлсин. DE кесма ён ёқнинг биссектрисаси бўлишини исботланг. 212. $m-n+p$. Кўрсатма. Кесимда ҳосил бўлган тўртбурчак диагоналларининг кесишиш нуқтаси пирамида баландлигига тегишли бўлади. 213. $\beta=\arccos(-\cos^2\alpha)$. Кўрсатма. $\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$ муносабатни ҳосил қилинг. 214. $\alpha\approx 25°20'$. Кўрсатма. Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 215. $V=\frac{1}{3}b^3\sin2\alpha\cos\alpha$. 216. $V=-\frac{2}{3}a^3\cos\beta\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\beta}{2}$. 217. $\beta=2\operatorname{arctg}\sqrt{1+2\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

218. $V=\frac{p^3\sin\alpha\operatorname{tg}\beta}{192\sqrt{2}\sin^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$. 219. $V=\frac{2a^3\operatorname{tg}\beta\sin^3\frac{\alpha}{2}}{3(1-2\cos\alpha)^3}$. 220. $V=\frac{(a+b)^2}{24}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{a(a-2b)}$. Кўрсатма. Асоснинг параллел томонларининг ўрталари ва S уч орқали кесим ҳосил қилинг. 221. $h=\frac{b(n+2m)}{\sqrt{9b^2-12n}}$. Кўрсатма. BB_1 қирра ҳамда AC ва A_1C_1 қирраларнинг ўрталари орқали ўтувчи кесим ҳосил қилинг.

222. $h=\frac{ab}{a+b}$. 223. $S=\sqrt[3]{\frac{1}{4}(a^3+b^3)^2}$. К ў р с а т м а. $V_1=V_2$ шартдан фойдаланинг. 225. $2\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$. 226. $\beta=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha\cos\frac{\pi}{n}\right)$. К ў р с а т м а. Ички чизилган мунтазам кўпбурчак хоссасидан фойдаланинг. 227. $V=872$ см^3. К ў р с а т м а. Диагонал кесим ясанг. 228. $S=\frac{2a^2(1+2\cos\alpha)}{\cos\alpha}$. 229. $V=\frac{a^3-b^3}{6\cos\alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha}$. 230. К ў р с а т м а. Октаэдрнинг қарама-қарши икки ёғига параллел ва улардан баробар узоқликдан ўтган текислик билан кесимини қаранг. И с б о т л а ш у ч у н: 1-у с у л: Учбурчак ўрта чизиғи хоссасидан фойдаланинг; 2-у с у л: Вектор алгебрасидан фойдаланинг. 231. $V=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. К ў р с а т м а. Октаэдрни иккита тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг бирлашмаси сифатида қаранг. 232. $S=\frac{\sqrt{3}}{6}m^2$. 233. $6:1$. 234. Қирраси $\frac{\sqrt{2}}{3}a$ га тенг бўлган куб. 235. К ў р с а т м а. Додекаэдрнинг қарама-қарши икки ёғини кесиб ўтувчи текислик билан кесимини қаранг. 236. $S=3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$. К ў р с а т м а. Мунтазам додекаэдрнинг тўла сирти 12 та мунтазам бешбурчаклар юзларининг йиғиндисидан иборат. 237. $V=\frac{a^3}{4}\sqrt{10(47+21\sqrt{5})}$ К ў р с а т м а. Додекаэдрни учи унинг марказида, асоси эса ёғидан иборат бўлган 12 та пирамидага ажратинг. 238. $S=5\sqrt{3}a^2$. К ў р с а т м а. Мунтазам икосаэдрнинг тўла сирти 20 та мунтазам учбурчаклар юзларининг йиғиндисидан иборат. 239. $V=\frac{5}{6}a^3\times\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$. К ў р с а т м а. Икосаэдрни учи унинг марказида, асоси эса ёғидан иборат бўлган 20 та пирамидага ажратинг. 240. К ў р с а т м а л а р. 1-у с у л: Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремадан фойдаланинг; 2-у с у л: Вектор алгебрасидан фойдаланинг.

243. $V_a : V_b : V_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$. Кўрсатма. Учбурчакнинг бир томони a ва шу томонга туширилган баландлик h бўлсин. Шу томон атрофида айланишдан ҳосил бўлган жисм ҳажми $V_a = \frac{1}{3}\pi h^2 a$ бўлади. Шу ҳажмни учбурчакнинг юзи орқали ифодаланг. Масалани учбурчакнинг турли ҳоллари учун текширинг. 247. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 248. $V = \frac{1}{3}Sd$. 249. $V = S \cdot c$. 251. $1:7:19$. 252. Тўртёқли бурчакнинг қарама-қарши икки ёқли бурчакларининг йиғиндилари ўзаро тенг бўлиши керак. 253. $V = \frac{2}{3}\pi h^3$. Кўрсатма. Конус сиртида олинган учта ўзаро тик бўлган ясовчилар асос айланасига ички чизилган мунтазам учбурчак учларига тиралади. 254. $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$. Кўрсатма. 253-масалага қаранг. 255. $S_{т.с.} = \pi S + 2Q$ кв. бир $V = \frac{S}{2}\sqrt{\pi Q}$ куб бир. 256. $l = \frac{h}{2\sin\alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha}$. Кўрсатма. AB—масала шартида айтилган тўғри чизиқ, OO_1 цилиндрнинг ўқи бўлсин. Изланган масофа OO_1 ни ўртасидан тикка ўтади. 258. $h = \sin\beta\sqrt{S\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. 259. $\frac{\pi h^3}{l}$. 260. $2:1$. Кўрсатма. Конуснинг ўқ кесимидаги бурчаги 90° бўлади. 261. $r = \frac{\sqrt{6}}{3}R$. Кўрсатма. Айланаларнинг уриниш нуқталари мунтазам октаэдрнинг учлари бўлиб хизмат қилади. 262. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi R^3$. Кўрсатма. Цилиндрнинг ўқ кесимини қаранг 263. Кўрсатма. Конуснинг ўқ кесимини қаранг, бунда тенг ёнли трапеция ва унга ички чизилган айлана ҳосил бўлади. 264. $V = \frac{\pi Q\sqrt{Q}}{3\sqrt[4]{3}}$. Кўрсатма. Конуснинг ўқ кесимида тенг томонли учбурчак ҳосил бўлади. 265. $\frac{6m-3n}{4n}$. 266. $\frac{\sqrt{3}\pi r^3}{24}$. Кўрсатма. Конус ён сирти ярим доиранинг юзига тенглигидан фойдаланинг. 267. $V = \frac{\sqrt{15}\pi R^3}{3}$. Кўрсатма. Ко-

нус ён сиртининг ёйилмаси радиуси ясовчига тенг бўлган доиранинг тўртдан бирига тенг бўлади. 268. $V = \frac{3S}{8\pi} \sqrt{3\pi S}$. Кўрсатма. Секторнинг юзи доира юзининг учдан бирига тенг бўлади. 269. $V = \frac{S\pi}{21}\sqrt{55}$ кв. бирлик. 270. $V = \frac{\pi h^3}{24}$. 271. $S = 40\pi$ см². 272. $4\pi Q$. 274. $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$. Кўрсатма. 243-масалага қаранг. 275. $V = SL$. 276. $V = 448\pi$ см³, $S = 216\pi$ см². Кўрсатма. 243- ёки 274-масалаларга қаранг. 277. $V = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{1+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

Кўрсатма. Айланма жисм ясовчиси a га тенг бўлган цилиндрдан асослари цилиндр асосларида жойлашган ва умумий учга эга бўлган иккита конус сирт ўйиб олинганига тенг. 278. $S = 4\sqrt{3}\pi$ см²; $V = 2\pi$ см³. 279. $S = 2\pi dp$. 280. $V = \pi ab \sin\alpha\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$. 281. Кўрсатма. Айланма жисм асослари умумий бўлган конус ва кесик конусдан иборат бўлиб, бунда кесик конусдан бошқа конус сирт ўйиб олинган. 282. $r = \frac{a}{2}$; $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. 283. $r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$; $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$. Кўрсатма. Ташқи чизилган сфера радиусини топиш учун ёрдамчи кубни қаранг; ички чизилган сфера радиуси эса ташқи чизилган сфера радиусидан уч марта кичик эканлигини кўрсатинг. 284. $R = \frac{\sqrt{2}}{4}a$.

Кўрсатма. Ёрдамчи кубни қаранг. 285. $r = \frac{\sqrt{6}}{6}a$; $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Кўрсатма. Октаэдрга ички чизилган шар унинг ёнларига биссектрисаларнинг кесишиш нуқталарида уринади. Бу нуқталар октаэдрга ички чизилган кубнинг учларидан иборат бўлади. Ташқи чизилган сфера радиусини топиш учун ёрдамчи кубни қаранг. 286. 27. Кўрсатма. 283-масалага қаранг. 287. 9. Кўрсатма. 283-масаладан фойдаланинг. 288. $\frac{32}{9}$; $\frac{16}{9}$. Кўрсатма. Конуснинг ўқи бўйича кесимда айлана ва унга ички чизилган мунтазам учбурчак ҳосил бўлади. 289. 18 : 5 : 4 : 5. 290. $\frac{1}{4}q^2(2-q)$ $0 < q < 2$. 292. $\alpha = 60^\circ$. 293. $V = \frac{4\pi r^3h^3}{3(r+\sqrt{r^2+h^2})^3}$. Кўрсатма.

Конуснинг ўқ кесимида тенг ёнли учбурчак ва унга ички чизилган айлана ҳосил бўлади. Учбурчак биссектрисасининг хоссасидан фойдаланинг. 294. $R=\frac{\sqrt{2}}{2}a$; 295. $V=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi a^3$. Кўрсатма. Тетраэдрга ташқи чизилган цилиндр бир вақтда ёғининг диагонали тетраэдр қиррасига тенг бўлган кубга ҳам ташқи чизилган бўлади. 296. $V=\frac{1}{2}\pi a^3$. 297. $V=\frac{\sqrt{6}}{9}\pi a^3$. Кўрсатма. Цилиндр асосининг радиуси октаэдрнинг ёғига ташқи чизилган айлана радиусидан иборат, баландлиги эса ички чизилган шар радиусига тенг бўлади. 285-масалага қаранг. 298. 27. Кўрсатма. Конуснинг ўқ кесимида мунтазам учбурчак ҳосил бўлади. 299. $\alpha=60^\circ$. Кўрсатма. Кесик конуснинг ўқ кесимида тенг ёнли трапеция ва унга ички чизилган айлана ҳосил бўлади. R — шарнинг, R_1 устки асоснинг, R_2 — остки асоснинг радиуслари бўлсин. Дастлаб $R^2=R_1\cdot R_2$ ни исботланг. 300. $R=\frac{1}{2}h\sqrt[3]{\frac{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha}}$. 301. $V=\frac{1}{6}abc$; $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Кўрсатма. 185-масалага қаранг. Сферанинг радиусини топиш учун тетраэдрни тўғри бурчакли параллелепипедга тўлдиринг. 302. $\alpha=\arcsin\frac{3}{5}$. 304. $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 305. $V=\frac{2h^3}{\sin 2\alpha(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}$. Кўрсатма. Призмани шар марказидан ўтувчи ва асосларга параллел бўлган текислик билан кесинг. 306. $\alpha=\frac{\pi}{6}$ ёки $\alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}$. 307. $V=\frac{8}{3}R^3\frac{\cos^4\beta/2}{\sin\alpha\cos\beta\sin^2\beta/2}$. Кўрсатма. Пирамиданинг баландлиги ва ромбнинг баландлиги орқали ўтказилган кесимни қаранг. Пирамиданинг баландлиги ромбнинг симметрия марказидан ўтишини ҳамда шар маркази шу баландликка ётишини исботланг. 308. $r=\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+ab+\sqrt{a^2-b^2}}$. Кўрсатма. Дастлаб $\triangle ADC$ тенг ёнли эканлигини исботланг, сўнгра $r=\frac{3V}{S}$ формуладан фойдаланинг. Бу ерда r — ички чизилган шарнинг радиуси, V — пирамиданинг ҳажми, S — пирамиданинг тўла сирти. 309. $\alpha=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{7}}$ ёки $\alpha=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{7}}$. Кўрсатма. Ички чизилган шарнинг радиуси учун пирамиданинг ўқи ва ён ёғинииг апофемаси орқали ўтадиган кесимни қаранг, ташқи чизилган шарнинг радиуси учун пирамиданинг ўқи ва ён қирраси орқали ўтадиган кесимни қаранг. **310.** $\frac{1}{n}$. **311.** $r_1 = \frac{R}{2}(\sqrt{2m+1} + \sqrt{2m-3})$; $r_2 = \frac{R}{2}(\sqrt{2m+1} - \sqrt{2m-3})$; $m > \frac{3}{2}$, $m = \frac{3}{2}$ да кесик конус цилиндрга айланади; $m < \frac{3}{2}$ да ечим йўқ. **312.** $\alpha = \arccos\frac{2n-1 \pm 2\sqrt{n(n-2)}}{1+4n}$, $n \geqslant 2$. **313.** $S = \frac{1}{3}\pi b^2$, $R = \frac{3\sqrt{2}}{8}b$. **314.** $l = 2R\sqrt{\frac{3}{7}}$. **315.** Кўрсатма. ABC учбурчакнинг ҳар бир томони орқали унга қарши ётган қиррага параллел қилиб текисликлар ўтказинг. **316.** Кўрсатма. Тетраэдрни тўғри бурчакли параллелепипедга тўлдиринг. **317.** Курсатма. Тетраэдрни тўғри бурчакли параллелепипедга тўлдиринг. У ҳолда $\triangle ABC$ нинг оғирлик маркази DD_1 диагоналда ётади. O_1 — ички чизилган сферанинг маркази бўлиб, $O_1F = O_1E = r$ ҳамда $DD_1 = 2R$ бўлсин. $O_1D \leqslant MD - O_1E$ ни асосланг ва $DD_1 : D_1A_1 \approx O_1D : O_1F$ дан фойдаланинг. **318.** Кўрсатма. Ҳосил бўладиган ҳар бир тетраэдр берилган тетраэдрга ўхшашлигидан фойдаланиб $\frac{r_i}{r}$ муносабатларни ҳосил қилинг. Сўнгра берилган тетраэдр ҳажмини ҳосил бўлган тетраэдрлар ҳажмлари орқали ифодаланг. **320.** Кўрсатма. Масала шартига кўра $\pi l^2 = \pi l(R+r)$ ёки $R + r = l$. Ушбу шартга асосан тенг ёнли трапецияга ички айлана чизиш мумкин эканлигини исботланг. **321.** Кўрсатма. Масала шартига кўра $h^2 = 4Rr$ ҳамда $l^2 = h^2 + (R-r)^2$ бўлиб, булардан $R + r = l$. 320-масалага қаранг. **322.** Кўрсатма. Дастлаб $\frac{R}{r} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + 2}{2\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ эканини исботланг, сўнгра $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{t}$ деб, $\frac{R}{r} = \frac{1+t^2}{2t(1-t)} \geqslant 1 + \sqrt{2}$; $0 < t < 1$ ни исботланг. **323.** $S = \frac{4r^2}{\sin^2\alpha}$. Кўрсатма. Пирамидаларнинг ўхшашлигидан фойдаланинг. **324.** $R = \frac{3h}{2\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Кўрсатма. Пирамиданинг баландлигини ташқи чизилган сфера билан кесишгунча давом эттиринг ва ҳосил бўлган тўғри бурчакли учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланинг. **325.** $V_n =$

$=\dfrac{V\cdot\sin 2\alpha}{\pi}$. Кўрсатма. Конус ва пирамиданинг баландликлари умумий эканлигидан фойдаланинг. **326.** $S=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. Кўрсатма. Цилиндрнинг асоси мунтазам учбурчакка ички чизилган доира бўлиб баландлиги куб диагоналининг учдан бирига тенг бўлади. 393- масалага қаранг. **327.** $l=\dfrac{2R}{\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}}$; $0<\alpha<\frac{2\pi}{3}$. Кўрсатма. Шарнинг маркази пирамида баландлигига тегишли бўлади. **328.** $\dfrac{\sqrt{3}(3\operatorname{tg}^2\alpha-1)}{18\pi\operatorname{tg}^6\alpha}$. **329.** $\frac{1}{6}\pi a^3\sin^3\alpha\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}$. Кўрсатма. Шарнинг маркази пирамида баландлигига тегишли бўлиб, у асоса диагоналларнин кесишиш нуқтаси орқали уринади. **330.** Ҳажмлари ҳам ўшандай нисбатда бўлади. Кўрсатма. r— шарнин радиуси ва α—конуснинг ясовчиси билан баландлиги орасидаги бурчак бўлсин. Конус учидан шар марказигача бўлган масофа $3r$ бўлиб, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$. У ҳолда конус асосининг радиуси $4r\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}r$, ясовчиси эса $\dfrac{4r}{\cos\alpha}=3\sqrt{2}r$ бўлади. **331.** $\frac{1}{2}\sin^2\alpha\times$ $\times\sin^3 2\alpha$. Кўрсатма. Конуснинг баландлигини ташқи чизилган сфера билан кесишгунча давом эттиринг ва ҳосил бўлган тўғри бурчакли учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланинг. **332.** $R=5$ узунлик бирл. Кўрсатма. AB ва CD қирралар ўзаро перпендикуляр эканлигини исботланг. У ҳолда ташқи чизилган шарнинг маркази уларнинг умумий перпендикуляри KM га тегишли бўлади. Бу ерда K нуқта CD қирранинг, M нуқта AB қирранинг ўртаси. KM ни икки усулда: биринчидан бевосита ҳисоблаш, иккинчидан R орқали ифодалаш мумкин. **333.** $V=4\sqrt{3}r^3$. Кўрсатма. Кесик конусга шар ички чизилган бўлгани учун унинг ҳажми шар радиусининг учдан бирини пирамиданинг тўла сиртига кўпайтирилганига тенг. Шунингдек кесик пирамиданинг ҳажми $V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$. Пирамида асосларини x ва y деб, ён сиртни улар орқали ифодаланг. **334.** $h=\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)}{3}a$. Кўрсатма. Тетраэдрнинг ён қирраси ва баландлиги орқали ўтувчи кесим ясанг, сўнгра тўғри бурчакли учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланинг. **335.** $S_{\text{ён.с}}=\frac{3}{2}a^2$, $S_{\text{т.с}}=2a^2$. **336.** $V=$

$=\frac{2}{3}r^2(R+\sqrt{R^2-r^2})$ ёки $V=\frac{2}{3}r^2(R-\sqrt{R^2-r^2})$. Кўрсатма. Агарда $H>R$ бўлса, биринчи ечим, агарда $H<R$ бўлса, иккинчи ечим ўринли бўлади. 337. $\frac{6m-3n}{4n}$. 338. $2\pi a^2$; $a^3\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 339. $S=\pi\sqrt{5}R^2$. 340. $V=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}R^3$. Кўрсатма. Кубнинг диагонали орқали ўтказилган кесимни қаранг. 342. $d=\frac{abc}{ab+ac+bc}$.

Кўрсатма. Асос сифатида кубнинг бирор ён ёғини олинг, у ҳолда кубнинг асосида ётган учи учта пирамиданинг учи бўлиб хизмат қилади. Натижада ҳажмларни таққослаш имкониятига эга бўлинади. 345. Кўрсатма. Ўхшаш конуслар хоссасидан фойдаланинг. 346. $S_{ум.}=2\pi(\sqrt{2}+1)h^2$; $V_{ум.}=\frac{2}{3}\pi h^3$. 347. $3:2:1$. 348. $V_{сек.}=\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S^2+4Q^2}{\pi S}}$. 349. $S=\frac{\pi R^2}{2}(4-\sqrt{7})$. 350. $h=\frac{4}{3}R$. 351. $h=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$. 352. $R=\frac{4\pm\sqrt{7}}{2}a$. Кўрсатма. Шарнинг кубга уриниш нуқталари орқали ўтказилган кесимни қаранг. Кубнинг қиррасини a га, шарнинг радиусини R га, шар марказидан қарши ётган қиррагача бўлган масофани x га тенг деб олиб, $\frac{R}{a}=\frac{x}{\sqrt{2}a}$ ўхшашликни қаранг. 353. $V_{ум.}=\frac{a^3}{4}$. 354. $V=\frac{a^3}{3}$.

Кўрсатма. Натижада қирраси $\sqrt{2}a$ га тенг бўлган мунтазам тетраэдр ҳосил бўлади. 355. $V=\frac{a^3}{6}$. Кўрсатма. Натижада қирраси $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ га тенг бўлган мунтазам октаэдр ҳосил бўлиб, унинг учлари куб ёқларининг ўрталари бўлади. 356. $V_{ум.}=2a^3(\sqrt{2}-1)$, $V=2a^3(2-\sqrt{2})$. Кўрсатма. Кубларнинг умумий бўлаги саккиз бурчакли мунтазам призма, бирлашмаси эса, ўн олти бурчакли қавариқ бўлмаган призмадан иборат. 357. $V_{ум.}=\frac{9}{64}a^3$. Кўрсатма. Кубларнинг умумий бўлаги асослари билан бирлаштирилган иккита мунтазам учбурчакли пирамидадан иборат бўлади. 358. $V_{ум.}=a^3\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right)$. Кўрсатма. Кубни айланиш ўқига перпендикуляр бўлган диагонал кесим билан қирқинг, сўнгра ҳосил бўлган шаклни 90° га буринг. 359. $V_{ум.} = \frac{3}{4}a^3$. Кўрсатма. Кубларнинг умумий бўлаги учлари кубнинг қарама-қарши учларида жойлашган, асослари эса 87-масалада қаралган мунтазам олтибурчакдан иборат бўлган иккита пирамиданинг бирлашмасидан ташкил топади. 360. $9:1$, $27:1$. Кўрсатма. 286-масалага қаранг. 361. $V_{ум.} = \frac{\sqrt{2}}{8}a^3$; $S_{ум.} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$. Кўрсатма. Баландлиги тетраэдр баландлигига тенг бўлган мунтазам олтибурчакли пирамида ҳосил бўлади. 362. $V_{ум.} = \frac{\sqrt{2}}{48}a^3$. Кўрсатма. Қирраси $\frac{a}{2}$ га тенг бўлган иккита тетраэдрнинг бирлашмасидан иборат бўлган шакл ҳосил бўлади. 363. $V_{ум.} = \frac{\sqrt{2}}{24}a^3$. Кўрсатма. 355-масалага қаранг. Ёрдамчи кубнинг қирраси $\frac{\sqrt{2}}{2}$ га тенг бўлади. 364. $V_{ум.} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{12}a^3$. Кўрсатма. Буриш натижасида ҳосил бўлган $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг томонлари ABC учбурчакнинг баландликларига параллел бўлади, ҳамда учбурчаклар томонларининг кесишишидан ҳосил бўлган бўлакларнинг нисбати $1:\sqrt{3}:2$ каби бўлади. 365. $V_{ум.} = \frac{\sqrt{2}}{54}a^3$. Кўрсатма. Умумий бўлак ён ёқларининг ўткир бурчаги 60° бўлган ромбдан иборат параллелепипед бўлади. 366. $V = \frac{\sqrt{2}}{54}a^3$. Кўрсатма. 365-масалага қаранг. 367. $V = \frac{\sqrt{6}}{4}r^3$. Кўрсатма. Пирамида асосининг томонини топиш учун иккита конус учун умумий бўлган ўқ кесимни қаранг, баландлигини топиш учун эса $\vec{SO} = \frac{1}{3}(\vec{SO_1} + \vec{SO_2} + \vec{SO_3})$ муносабатдан фойдаланинг. 368. $\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)$. Кўрсатма. Конусларнинг иккитасини олиб уларнинг умумий ясовчиси ва текисликка уринадиган ясовчиларини қаранг. 369. $\alpha = \frac{\pi}{4}$. 370. $V = \frac{2\pi \cdot 2r^2}{R + r}$. Кўрсатма. Конуснинг ўқ кесимида ҳосил бўладиган тўғри бурчакли учбурчаклардан фойдаланинг. 371. $2P(1 - P)(1 + P^2)$. Кўрсатма.

Конуснинг ўқ кесимида ҳосил бўладиган тўғри бурчакли учбурчаклардан фойдаланинг. **372.** $S = 4\pi Rr$. Кўрсатма. Кесик конуснинг ён сиртини унинг ўрта кесими орқали ифодаланг. **373.** $\alpha = 2\arcsin\left[\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\sqrt[3]{a}}}\right)\right]$ бунда $a \geqslant 8$. Кўрсатма. Сфера радиуси ёрдамида конуслар асосларининг радиусларини боғланса, ҳажмларнинг нисбати ёрдамида тригонометрик тенгламага келинади. **374.** $r = 2$ см — агар шарлар конуснинг ичида жойлашган бўлса, $r = 10$ см — агар шарлар конусдан ташқарида жойлашган бўлса. Кўрсатма. Конуснинг ўқи ва шарлардан бирининг маркази орқали ўтувчи кесим ҳосил қилинг. **375.** $V = \frac{\pi r^3}{3}(22\sqrt{2} + 25)$. Кўрсатма. O_1 ва O_3 лар орқали ўтувчи ўқ кесим ҳосил қилинг ва конуснинг баландлигини H ва асосининг радиусини R лар орқали ифодаланг. **376.** $r = \frac{3}{4}$ см — агар шарлар конуснинг ичида жойлашган бўлса, $r = 2$ см — агар шарлар конусдан ташқарида жойлашган бўлса. Кўрсатма. 374-масалага қаранг. **377.** $2 \pm \sqrt{3}$. Кўрсатма. Шарларнинг T текисликка уриниш нуқталари томони $2\sqrt{r_1 r_2}$ ва диагоналлари $2r_1$; $2r_2$ бўлган ромбнинг учлари эканлигини исботланг. **378.** $r = \frac{1}{3}R$. Кўрсатма. O_1, O_2, O_3 — берилган шарларнинг марказлари бўлсин. O—тўртинчи шарнинг маркази бўлсин. Учлари O, O_1, O_2, O_3 нуқталарда бўлган учбурчакли мунтазам пирамидани қаранг. **379.** $\frac{Rr(2Rr + r - \sqrt{(4R-r)3r})}{2(R-r)^2}$. Кўрсатма. Шарларнинг марказларини T текисликка проекциялаб, асослари тенг ёнли учбурчаклардан иборат бўлган призмани қаранг. **380.** $H = R + r + \sqrt{(R+r)^2 - \frac{a^2}{2}}$; a, r, R лар учун $R + r \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}a$; $r \leqslant \frac{a}{2}$, $R - r < \sqrt{(R+r)^2 - \frac{a^2}{2}}$ шартлар бажарилиши керак. Кўрсатма. Радиуси r га тенг бўлган шарларнинг марказлари O_1, O_2, O_3, O_4 радиуси R га тенг бўлган шарнинг маркази O бўлсин. У ҳолда $OO_1O_2O_3O_4$ тўртбурчакли мунтазам пирамидани қаранг. **381.** $\sqrt{3} : 1$. Кўрсатма. Шарларни T текисликка проекцияланг. Натижада катта шарларнинг марказлари ромбнинг учлари бўлишини ва кичик шарлар проекцияси эса ўзаро уринувчи ҳамда ромбга ички чизилган айланалардан иборат бўлишини исботланг. **382.** $R = 9\frac{7}{18}$ см. **383.** $r <$

$\leqslant H \leqslant 2r \Longrightarrow 3 \leqslant k \leqslant 6$. 1) $k=3: V = 2\pi R^3(\sqrt{2}+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$; 2) $k = 4: V = \sqrt{2}\pi R^3$; 3) $k=5$; $V = \frac{\pi R^3}{3}(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{8}-\sqrt{5})$; 4) $k = 6: \frac{1}{3}\pi R^3$. **384.** $r = \frac{a\sqrt{6}-1}{10}$. Кўрсатма. Шарларнинг марказлари тетраэдрга ўхшаш бўлган тетраэдрнинг учларида жойлашади. Бу тетраэдрга ички чизилган шарлар радиусларини тетраэдрнинг қирраси орқали ифодаланг.

Ечилиши мураккаброқ бўлган масалалар

1. $\{-1;\ 8\}$. **2.** $\{2\}$. **3.** $\{-1\}$. **4.** $\{5\}$. **5.** $\left\{\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+n\pi / n\in Z\right\}$. **6.** $\{2\}$. **7.** $\{-4;\ 2\}$. **9.** $\{-5;\ 0\}$. **12.** $\{-1;\ 9/16\}$. **13.** $\{4\}$. **16.** $\{-4/3\}$. **17.** $\{5\}$. **19.** $]1;\ 4]$. **20.** $[-2,\ (\sqrt{5}-15)/10[$. **21.** $]3;\ 5]$. **22.** $](\sqrt{13}-5)/2,\ 1]$. **23.** $[-1;\ -\sqrt{15}/4[\cup]\sqrt{15}/4;\ 1]$. **28.** $\{5\}\cup]4+\sqrt{2};\ +\infty[$. **29.** $[-1;\ \sqrt[3]{4}[$. **31.** $\left\{\left(-\frac{11}{19};\ \frac{23}{19}\right),\ (1;\ -1)\right\}$. **32.** $\{(2;\ 1;\ 1)\}$. **34.** $\{(-3;\ -2);\ (3;\ 2)\}$. **37.** $\{(-3;\ -2);\ (3;\ 2)\}$. **38.** $\{(-3;\ -2);\ (3;\ 2)\}$. **39.** $\{(1;\ 2),\ (2,\ 1)\}$. **40.** $\{(-3;\ -2),\ (-2;\ -3);\ (2;\ 3);\ (3;\ 2)\}$. **41.** $\{(1;\ 3;\ 9);\ (9;\ 3;\ 1)\}$. **47.** $\{1\}$. **48.** $\left\{\frac{1}{4}\right\}$. **49.** $\{\operatorname{arctg}10 + n\pi \mid n\in Z\}$. **50.** $\left\{\log_3\left(2+\sqrt{\frac{11}{3}}\right)\right\}$. **52.** $\{\pi(2k+1)/2 \mid k\in Z\}$. **53.** $\{10^{-2}\}$. **54.** $\{\pi(3k+1)/3 \mid k\in Z\}$. **55.** $\{10;\ 10^5\}$. **56.** $\{5\}$. **57.** $\{16\}$. **58.** $\{2\}$. **59.** $\left\{\frac{1}{5}\right\}$. **60.** $\{10^{-1};\ 2;\ 10^3\}$. **61.** $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$. **62.** $\{(-1)^n \arcsin 2^{-\sqrt{-\log_2 a/2}} + n\pi \mid n\in Z,\ 0<a<1\}$. **64.** $\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right\}$. **65.** $\left]-\frac{4}{3};\ -\frac{17}{22}\right[$. **66.** $]-2;\ 2-\sqrt{15}[$. **67.** $\left]-\infty;\ -\frac{2}{3}\right[\cup\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$. **68.** $]1;\ 4[$. **69.** $]10-\sqrt{43};\ 4[\cup]10+\sqrt{43};\ +\infty[$. **70.** $[-\sqrt{8};\ -1[\cup]1;\ (\sqrt{41}-1)/5]$. **71.** $]0;\ 1/5[\cup]1;\ 3[$. **72.** $\{(4;\ 2),\ (2;\ 4)\}$. **73.** $\left\{\left(2;\ \frac{1}{2}\right)\right\}$; **74.** $\{(20;\ 16)\}$. **75.** $\{(512;\ 1)\}$. **76.** $\left\{\left(2,\ \frac{1}{4}\right)\left(2+\sqrt{7};\ 2+\sqrt{7}\right)\right\}$. **77.** $\{(4;\ 1)(16;\ 2)\}$. **78.** $\{2;\ 1\}$. **79.** $\left\{v = \frac{S(t_1+t_2)}{2t_1t_2}\right.$ км/соат; $v_ш = \frac{S(t_1-t_2)}{2t_1t_2}$ км/соат; $\left.S_қ = \frac{S(t_2-t_1)^2}{2t_1t_2}\text{ км}\right\}$. **80.** $\{3$ соат$\}$. **81.** $\{v_1 = 63$ км/соат; $v_2 = 60$ км/соат$\}$. **82.** $\left\{v_n = \frac{S(a-b)}{b}\right.$ км/соат; $v_{нк}=\dfrac{S(a-b)}{a}$ км/соат$\}$. **83.** $\{4, 5\}$. **84.** $\{2$ сўм$\}$. **85.** $\{20;$ $120\}$. **86.** $\{v_1=18$ км/соат. $v_2=12$ км/соат$\}$. **87.** $\{2\}$. **88.** $\{35; 12\}$. **89.** $\{l_б=6$ м; $l_т=8$ м$\}$. **90.** $\{38, 31, 5, 7, 9\}$. **91.** $\left\{V=\dfrac{c^3}{32}\right\}$. **92.** $\left\{V=\dfrac{abc\sqrt{2}}{3}\right\}$. **93.** $\left\{S=\dfrac{6+3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}a^2\right\}$. **94.** $\left\{V_т=\dfrac{\sqrt{S_2}\sqrt{S_2}}{S_2\sqrt{S_2}-S_1\sqrt{S_1}}\right\}$. **95.** $\{12$ дм$^3\}$. **96.** $\{(1.9)$ м$^3\}$. **97.** $\{9:1; 27:1\}$. **98.** $\{3; 4\}$. **99.** $\left\{\dfrac{abc\sqrt{2}}{2}\right\}$. **100.** $\{36\sqrt{2}$ куб бир$\}$. **101.** $\left\{\dfrac{1}{3}\sqrt{5}\right\}$. **102.** $\{\sqrt{6}\}$. **103.** $\left\{\dfrac{18a^3b^2}{(a^2-b^2)\sqrt{4b^2-a^2}}\right\}$. **104.** $\left\{\dfrac{2}{3}R^3\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right\}$. **105.** $\left\{\dfrac{27}{8}\sqrt{2}\right.$ куб бир$\}$. **106.** $\{12R^2\sqrt{3}\}$. **107.** $\left\{\dfrac{21R^3}{16}\right\}$. **108.** $\{3ab\}$. **109.** $\left\{\dfrac{2}{3}r^2(R\pm\sqrt{R^2-r^2})\right\}$. **110.** $\{S\cdot L\}$.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЕТ

1. Атанасян Л. С. и др. Сборник задач по элементарной геометрии. М., Просвещение, 1970.

2. Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шубин М. И. Лекции и задачи по элементарной математике. М., Наука, 1971.

3. Бухштаб А. А. Теория чисел. 2-е изд. М., Просвещение, 1966.

4. Базылев В. Т., Дуничев Қ. И., Иваницкая В. П. Геометрия. М., 1, 2- қисмлар, Просвещение, 1974, 1975.

5. Воробьев Н. Н. Признаки делимости. М., Наука, 1980.

6. Вересова Е. Е., Денисова Н. С., Полякова Т. Н. Практикум по решению математических задач. М., Просвещение, 1979.

7. Грибанов В. У., Титов П. И. Сборник упражнений по теории чисел. М., Просвещение, 1964.

8. Дорофеев Г. В., Потапов М. Қ., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы. М., «Наука», 1968.

9. Делоне Б. Н., Житомирский О. Задачник по геометрии. М., Физматгиз, 1959.

10. Егоров В. Қ. ва бошқалар (М. И. Сканавининг умумий таҳрири остида). Математикадан масалалар тўплами. Т., Ўқитувчи, 1975.

11. Зайцев В. В., Рыжков В.В., Сканави М. И. Элементарная математика. М., Высшая школа, 1964.

12. Кудреватов Г. А. Сборник задач по теории чисел. М., Просвещение, 1970.

13. Кочева А. А. Задачник — практикум по алгебре и теории чисел. ч. 3. М., Просвещение, 1984.

14.. «Квант» журнали. 1984, № 3, 5, 6.

15. Қожуров П. Я. Тригонометрия. М., Физматгиз, 1960.

16. Лоповак Л М. Сборник стереометрических задач на построение. М., Учпедгиз, 1953.

17. Лидский В. В. и др. Задачи по элементарной математике., М., Просвещение.

18. Ляпин С. Е., Баранова И. В., Борчугова З. Г. Сборник задач по элементарной алгебре. М., Просвещение, 1973.

19. Морозова Е. А., Петраков И. С. Международные математические олимпиады. М., Просвещение, 1971.

20. «Математика в школе. М., Просвещение, 1984, № 1—6.

21. Моденов П. С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. М., Высшая школа, 1960.

22. Новоселов С. И. Специальный курс тригонометрии. М., Советская наука, 1967.

23. Новоселов С. И. Специальный курс по элементарной алгебре. М., Советская наука, 1965.

24. Новоселов С. И. Алгебра ва элементар функциялар. Т., Ўзпеддавнашр., 1959.

25. Невяжский Г. А. Неравенства, М., «Наука», 1947.

26. Погорелов А. В. Геометрия. М., Наука, 1984.

27. Фомин С. В. Системы счисления. М., Наука, 1980.

28. Худобин А. И., Ҳудобин Н. И. Сборник задач по тригонометрии. М., Учпедгиз, 1954.

29. Ястребинецкий А. Уравнения и неравенства с параметрами. М., Просвещение, 1972.

МУНДАРИЖА

Т63

Толаганов Т. Р., Норматов А.

Математикадан практикум: Пед. инст. студентлари учун ўқув қўлланма. —2-нашри. —Т Ўқитувчи, 1989. — 300 б.

I. Автордош.

Толаганов Т., Норматов А. Практикум по математике: Учеб. пособие для студентов пединститутов.

22. Iя73

На узбекском языке

ТУРГУН ТОЛАГАНОВ, АСКАР НОРМАТОВ

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие для студентов пединститутов

Переработанное и дополненное 2-е издание

Тошкент „Ўқитувчи" 1989

Муҳаррир *Ю. Музаффархўжаев*
Расмлар муҳаррири *С. Е. Соин*
Техмуҳаррир *Н. Винникова, Д. Габдрахманова*
Корректор *М. Маҳмудхўжаева*

ИБ №4707

Теришга берилди 5.01.89. Босишга рухсат этилди 7.09.89. Формати 84×108/32. Тип. қоғози № 2. Литературная гарн. Кегли 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 15,75. Шартли кр.-отт. 16,06. Нашр. л. 13,20. Тиражи 16000. Зак. 2310. Баҳоси 55 т.

„Ўқитувчи" нашриёти. Тошкент —129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 9—210—88.

Область газеталарининг М. В. Морозов номидаги бирлашган нашриёти ва босмахонаси. Самарқанд. ш., У. Турсунов кўчаси, 82. 1989.

Объединенное издательство и типография областных газет имени М. В. Морозова г. Самарканд, ул. У. Турсунова, 82.