PARPIYEVA N., QO'SHNAZAROV R.,
MADRAHIMOV R.

MATEMATIKA

O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

N. T. PARPIYEVA, R.QOSHNAZAROV, R.MADRAHIMOV

MATEMATIKA

I qism

O`zbekiston Respublikasi Oliy va o`rta maxsus ta'lim vazirligi Pedagogika oliy o`quv yurtlari (fizika va astronomiya o`qitish metodikasi va informatika o`qitish metodikasi) talabalari uchun o`quv qo`llanma sifatida tavsiya etgan

TOSHKENT
"INNOVATSIYA-ZIYO"
2020

UDK: 378.02
BBK: 74.58
P-28

N. T. Parpiyeva, R.Qoshnazarov, R.Madrahimov /Matematika. I-qism/ o`quv qo`llanma/. Toshkent: "INNOVATSIYA-ZIYO", 2020, 366 b.

Mazkur o`quv qo`llanma pedagogika oliy ta'lim muassasalarining fizika va astronomiya o`qitish metodikasi (informatika) ta'lim yo`nalishlari talabalari uchun mo`ljallangan. Unda matematika fani dasturiga mos ravishda mavzular to`liq bayon qilingan va mazmuni ta'lim yo`nalishlari xususiyatidan kelib chiqqan holda xorijiy adabiyotlardan olingan ma'lumotlar bilan boyitilgan.

Данное учебное пособие предназначено для студентов, высших педагогических образовательных учреждений, направления методики преподавания физики и астрономии (информатики). Содержание тем изложено согласно учебной программе предмета математики и обогащено материалами из зарубежных источников соответственно специфике направления.

This tutorial is intended for students, higher Pedagogical educational institutions, the direction of the methodology teaching physics and astronomy (computer science). The content of topics is described in accordance with the curriculum of the subject of mathematics and enriched with materials from foreign sources according to specifics directions.

Taqrizchilar:

Beshimov R.B. – O`zMU "Geometriya va topologiya" kafedrasi mudiri, fizika – matematika fanlari doktori

Jo'rayev T. – Nizomiy nomidagi Toshkent davlat pedagogika universiteti "Umumiy matematika" kafedrasi dotsenti, fizika – matematika fanlari nomzodi

O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O`RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGINING 2018-YIL 14-IYULDAGI 531-SONLI BUYRUG`IGA ASOSAN O`QUV QO`LLANMA SIFATIDA TAVSIYA ETILGAN

ISBN 978-9943-6213-4-3

KIRISH

Pedagogika oliy o'quv yurtlari matematika, fizika-matematika fakultetlari "Fizika va astronomiya o'qitish metodikasi" va "Informatika o'qitish metodikasi" bakalavriat ta'lim yo'nalishlari talabalari uchun darslar, "Matematika" fanidan tuzilgan dastur bo'yicha turli darslik, o'quv qo'llanma va kitoblardan foydalanib olib boriladi.

Ushbu o'quv qo'llanmani yozishda, mana shu ko'p xillilikni bartaraf etish, talabalarning qiynalmasdan, bitta kitobdan foydalanib mavzularni o'zlashtirishlari osonlashishi hisobga olindi.

Matematika fani talabalarni faqat matematikadan ma'lumotlar majmuasi bilan tanishtirib qolmasdan, balki talabalarni mantiqiy fikrlash, matematik usulllarni amaliy masalalarni yechishga tatbiq qilish, shuningdek, kasbga xos masalalarning matematik modellarini qurish va shunga asosan xulosalar chiqarishni ko'zda tutadi.

O'quv qo'llanma pedagogika oliy ta'lim muassasalarida, "Fizika va astronomiya o'qitish metodikasi" va "Informatika o'qitish metodikasi" bakalavriat ta'lim yo'nalishida tahsil olayotgan talabalar uchun mo'ljallangan bo'lib, "Matematika" fani dasturiga mos yozilgan. O'quv qo'llanma kirish va sakkizta bobdan tashkil topgan. Bunda vektorlar algebrasi va chiziqli algebra elementlari, tekislikdagi analitik geometriya, fazodagi analitik geometriya, haqiqiy sonlar, koordinatalar metodi, funksiya tushunchasi, limitlar nazariyasi, funksiyaning hosilasi, bir o'zgaruvchili funksiyaning integral hisobi, aniq integrallar bo'yicha ko'rsatilgan barcha mavzulardan nazariy va qisman amaliy materiallar keltirilgan.

O'quv qo'llanmani tayyorlashda ta'lim bosqichlari orasidagi izchillikka va ta'limning kasbiy yo'nalganlik tamoyillariga hamda mualliflar o'zlarining Nizomiy nomidagi pedagogika universitetida, ko'p yillar davomida matematika fani bo'yicha o'qigan ma'ruzalari va olib borgan amaliy mashg'ulotlaridan kelib chiqqan xulosalariga asoslandilar. O'quv qo'llanmani tuzilishi, mavzularning tanlanishi mana shu tajribalar natijasi bo'lib, shuningdek, shu paytgacha o'zbek tilida mavjud bo'lgan darslik va o'quv qo'llanmalardan, xorijiy davlatlarda chop etilgan yangi adabiyotlardan ijobiy foydalandi. Foydalanilgan adabiyotlardagi atamalar, tusunchalar va belgilashlarni saqlab qolishga harakat qilindi.

O'quv qo'llanmada teorema, ta'rif, misol, formulalar har bir paragraf bo'yicha, chizmalar har bir bo'b uchun alohida raqamlangan.

O'quv qo'llanma qo'lyozmasini o'qib chiqib, o'z fikr-mulohalazalarini bildirgan fizika-matematika fanlari nomzodi R.Turgunbayevga mualliflar minnatdorchilik bildiradilar.

BIRINCHI BO'LIM. ANALITIK GIOMETRIYA
I BOB. VEKTOR VA CHIZIQLI ALGEBRA ELEMENTLARI

1-§. Vektorlar. Vektorlar ustida amallar

1.1. Skalyar va vektor kattaliklar

Fizika, mexanika va texnika fanlarining turli bo'limlarini o'rganishda o'zlarining son qiymatlari bilan to'liq aniqlanadigan kattaliklar uchraydi. Bunday kattaliklar *skalyar kattaliklar* deb ataladi.

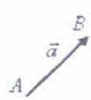
1-ta'rif. Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattaliklar ***skalyar kattaliklar*** deyiladi. Skalyar kattalik biror yo'nalishga ega bo'lmaydi.

Masalan uzunlik, yuza, hajm, massa, jismning temperaturasi va hokazolar skalyar kattaliklardir.

Skalyar kattaliklardan tashqari, turli masalalarda shunday kattaliklar uchraydiki, ularni aniqlash uchun son qiymatidan tashqari, bu kattaliklarni fazodagi yo'nalishini ham bilish zarur. Masalan, "ko'chish" degan kattalik boshqa ko'p fizik kattaliklardan uning son qiymatidan tashqari yana qanday yo'nalgan ekanligini bilish kerakligi bilan farq qiladi. Bunday kattaliklar *vektor kattaliklar* deb ataladi. Masalan jismga ta'sir etayotgan kuch, fazoda harakatlanayotgan jismning tezligi va tezlanishi, magnit maydonning fazoning berilgan nuqtasidagi kuchlanishi vektor kattaliklardir. Vektor kattaliklar vektorlar yordamida tasvirlanadi.

2-ta'rif. Vektor deb, fazodagi tayin uzunlikka ega bo'lgan va yo'nalgan kesmaga, yani cheklab turadigan nuqtalaridan biri boshi, ikkinchisi esa oxiri sifatida qabul qilinadigan tayin uzunlikdagi kesmaga aytiladi.

Vektor kattalik biror nuqtadan boshlanib, oxirida yo'nalishni ko'rsatib turadigan strelkasi bor kesma tarzida tasvirlanadi (1-chizma).



1-chizma

Vektor so'zi lotincha vector – so'zidan olingan bo'lib, tashuvchi, olib yuruvchi degan ma'noni bildiradi.

Vektorlar asosan ustiga strelka qo'yilgan kichik lotin harflari $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, ...$ bilan belgilanadi.

Ba'zan vektorlar kesma oxirlarini ko'rsatuvchi bosh harflar bilan ham belgilanadi. Masalan 1-chizmada ko'rsatilganidek $\overrightarrow{AB}$ ko'rinishda belgilash mumkin. A nuqta vektorning boshi B nuqta vektorning oxiri deyiladi. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ko'rinishda belgilash mumkin.

$\vec{a}$ vektorning *absolut qiymati (uzunligi)* yoki *moduli* deb shu vektorni tasvirlovchi kesma uzunligiga aytiladi. $\vec{a}$ vektorning absolut qiymati $|\vec{a}|$ bilan, $\overrightarrow{AB}$ vektorning absolut qiymati esa $|\overrightarrow{AB}|$ ko'rinishda belgilanadi.

3-ta'rif. Uzunligi birga teng bo'lgan vektor *birlik vektor* deyiladi.

4-ta'rif. Boshi bilan oxiri ustma – ust tushgan vektor *nol vektor* deyiladi.

Nol vektor $\vec{0}$ ko'rinishida yoki $\overrightarrow{AA}$ yoki $\overrightarrow{BB}$ ko'rinishida belgilanadi. Nol vektor yo'nalishi (aniq emas) aniqlanmagan.

5-ta'rif. Agar $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ va $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ yo'nalgan kesmalar parallel yoki bitta to'g'ri chiziqda yotib bir xil (qarama-qarshi) yo'nalishli bo'lsa, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ *va* $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ lar bir xil (qarama-qarshi) yo'nalgan vektorlar deb aytiladi.

Agar $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ lar bir xil yo'nalishli bo'lsa $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ ko'rinishida, qarama–qarshi yo'nalishda bo'lsa $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ ko'rinishda belgilanadi.

6-ta'rif. Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotadigan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar *kollinear vektorlar* deyiladi.

7–ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor:

1) teng modullarga ega;

2) kollinear;

3) bir tomonga yo'nalgan bo'lsa, ular *teng vektorlar* deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ ko'rinishida yoziladi.

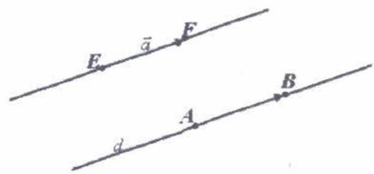
Vektorlar tengligi ta'rifidan kelib chiqadiki, vektorni uning boshini fazoning istalgan nuqtasiga joylashtirish bilan o'z-o'zini parallel ko'chirish mumkin.

Har bir $\vec{a}$ vektor uchun qarama-qarshi vektor mavjud bo'lib, u $-\vec{a}$ bilan belgilanadi. $-\vec{a}$ vektor $\vec{a}$ vektorning moduliga teng modulga ega, u bilan kollinear, lekin qarama-qarshi tomonga yo'nalgan.

1.2. Vektorlar ustidagi chiziqli amallar

Vektorlarni qo'shish va ayirish, hamda vektorni songa ko'paytirish amallari chiziqli amallar deb ataladi.

Tekislikda $\vec{a} = \overrightarrow{EF}$ va A nuqta berilgan bo'lsin. A nuqtadan EF to'g'ri chiziqqa parallel d to'g'ri chiziq o'tkazamiz. (2-chizma).



2-chizma

A nuqtadan ko'rsatilgan yo'nalishda $\vec{a}$ vektor uzunligini o'lchab qo'yib B nuqtani topamiz. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

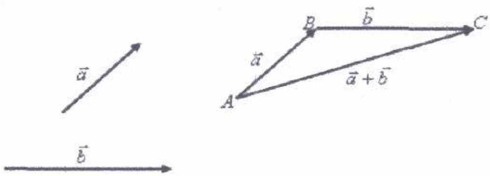
1-ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi deb, ixtiyoriy A nuqtadan $\vec{a}$ vektorni qo'yib, uning oxiri B nuqtaga $\vec{b}$ vektorni qo'yganda boshi $\vec{a}$ vektorning boshi A nuqtada oxiri esa $\vec{b}$ vektorning oxiri C nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a}+\vec{b}$ kabi belgilanadi. (3- chizma)

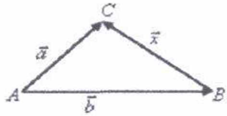
Vektorlarni qo'shish ta'rifidan istalgan uchta A, B va C nuqtalar uchun

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikni vektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasi deyiladi.



3-chizma



4-chizma

2-ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, shunday $\vec{x}$ vektorga aytiladiki, ular uchun $\vec{b}+\vec{x} = \vec{a}$ tenglik o'rinli bo'ladi va ayirma vektor

$\vec{x} = \vec{a}-\vec{b}$ ko'rinishda bo'ladi. (4- chizma).

Ikkita vektorning ayirmasi hamma vaqt mavjud va bir qiymatli aniqlanishini isbotlash mumkin.

3-ta'rif. $\vec{a}$ vektorning $\alpha \in R$ songa ko'paytmasi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{p}$ ga aytiladi va $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{a}$ ko'rinishda yoziladi.

1) $|\vec{p}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;

2) $\vec{p}$ vektor $\overline{a}$ ga kollinear;

3) Agar $\alpha > 0$ bo'lsa $\vec{p}$ va $\vec{a}$ vektorlar bir xil yo'nalgan, agar $\alpha < 0$ bo'lsa, $\vec{p}$ va $\vec{a}$ vektorlar qarama- qarshi yo'nalgan bo'ladi.

Vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish quyidagi xossalarga ega.

1°. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar to'plamiga tegishli bo'lsa u holda ularning yig'indisi ham shu to'plamga tegishli bo'ladi.

2°. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ o'rinli (qo'shishga nisbatan assotsiativ).

3°. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun shunday $\vec{0}$ vektor mavjudki ular uchun

$\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$ munosabat o'rinli hamda $\vec{0}$ vektor qo'shishga nisbatan neytral element.

4°. Har bir $\vec{a}$ vektor uchun shunday $\vec{c}$ vektor mavjudki ular uchun

$\vec{a}+\vec{c}=\vec{0}$ o'rinli (bunda $\vec{c}$ ni $\vec{a}$ ga qarama-qarshi vektor deyiladi va $\vec{c} = -\vec{a}$).

5°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ o'rinli (qo'shishga nisbatan kommutativ).

6°. Ixtiyoriy m haqiqiy son va ixtiyoriy $\vec{a}$, b vektorlar uchun

$$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$$

tenglik o'rinli.

1.3. Vektorlar orasidagi burchak. Vektorning o'qdagi proyeksiyasi

Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy O nuqtadan $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ va $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ vektorlarni qo'yamiz.

1-ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ *vektorlar orasidagi burchak* deb, bu vektorlardan birini ikkinchisi bilan ustma-ust tushgunga qadar burish kerak bo'lgan eng kichik $\varphi(0\le\varphi\le\pi)$ burchakka aytiladi.

Ta'rif bo'yicha vektorlar orasidagi burchak 0^0 va 180^0 gradus orasida yotadi. Agar vektorlar bir xil yo'nalgan bo'lsa, kollinear vektorlar orasidagi burchak 0^0 teng bo'ladi. Agar vektorlar qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, kollinear vektorlar orasidagi burchak 180^0 teng bo'ladi.

2-ta'rif. Agar vektorlar orasidagi burchak 90^0 teng bo'lsa, bunday vektorlar *perpendikular yoki ortogonal vektorlar* deyiladi va $\vec{a}\perp\vec{b}$ kabi belgilanadi.

3-ta'rif. $\vec{a}$ *vektorning* l *o'qidagi ortogonal proyeksiyasi* deb, $\vec{a}$ vektor modulining shu vektor bilan o'q orasidagi φ burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng bo'lgan songa aytiladi.

$\vec{a}$ vektorning l o'qidagi ortogonal proyeksiyasi $\text{пр}_l\,\vec{a}$ ko'rinishida belgilanadi. Ta'rif bo'yicha: $\text{пр}_l\,\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$. (1)

Agar $\vec{a}$ vektor l o'qqa perpendikular bo'lsa, u holda $\varphi=90^0$ bo'lib, $\text{пр}_l\,\vec{a}=|\vec{a}|\cos 90^0=0$ bo'ladi.

Misol. Uzunligi $|\vec{a}|=7$ ga, l o'q bilan hosil qilgan burchagi 60^0 ga teng bo'lgan $\vec{a}$ vektorning l o'qdagi ortogonal proyeksiyasini toping.

Yechilishi. (1) formulaga asosan: $\text{пр}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi = 7\cdot\cos 60^0 = 7\cdot\frac{1}{2} = 3{,}5$

2-§. Vektorning koordinatalari va nuqtaning koordinatalari

2.1. Tekislikdagi to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi

Tekislikda nuqta, chiziq, kesma, shuningdek, boshqa geometrik ob'yektlarning o'rinlarini tasvirlash uchuin to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi kiritiladi. Buning uchun tekislikda biror 0 nuqtada kesishuvchi o'zaro perpendikular ikkita o'q olinadi. Bu o'qlarning har birida 0 nuqtadan boshlab kollinear bo'lmagan $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlar ajratiladi.

1-ta'rif. Musbat yo'nalishlari mos ravishda $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlar bilan aniqlanuvchi o'zaro perpendikular ikkita o'qdan tashkil topgan sistema tekislikda *to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi* deyiladi.

Ta'rifga asosan, $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlar ortogonal va birlik vektorlardir. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$. Musbat yo'nalishlari $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlar bilan aniqlangan o'qlar mos ravishda *abssissalar* va *ordinatalar* o'qlari deb ataladi.

Tekislikning A nuqtasi uchun $\overrightarrow{OA}$ vektor A nuqtaning *radius-vektori* deyiladi. $\overrightarrow{OA}$ vektor uchun quyidagi munosabatni yozish mumkin:

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

2-ta'rif. $\overrightarrow{OA}$ radius-vektorning x, y koordinatalari A nuqtaning $\vec{i}$ O $\vec{j}$ koordinatalar sistemasidagi *koordinatalari* deyiladi va $A(x, y)$ ko'rinishda belgilanadi. Bunda x soni A nuqtaning *abssissasi*, y soni A nuqtaning *ordinatasi* deyiladi.

3-ta'rif. Vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari *vektorning koordinatalari* deb aytiladi.

Vektorni Ox o'qidagi proyeksiyasi uning birinchi koordinatasi yoki x koordinatasi, Oy o'qidagi proyeksiyasi uning ikkinchi koordinatasi yoki y koordinatasi ham deyiladi.

Shunga ko'ra, $\vec{a}$ vektorning koordinatalarini x_a, y_a bilan belgilasak, u holda ta'rifga asosan:

$$x_a = \text{пр}_{Ox}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{\imath}}),$$

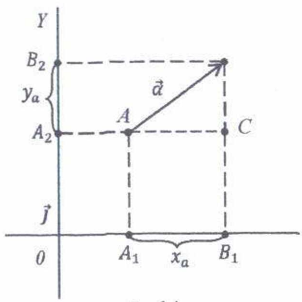
$$y_a = \text{пр}_{Oy}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{\imath}}).$$

Tekislikda $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektor berilgan bo'lsin. A nuqtadan Ox o'qiga parallel, B nuqtadan Oy o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilad (5-chizma). Ularning kesishish nuqtasi C bo'lsin. U holda

$$\overrightarrow{AC} = x_a \cdot \vec{\imath}, \quad \overrightarrow{CB} = y_a \cdot \vec{\jmath} \qquad \text{va}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = x_a \cdot \vec{\imath} + y_a \cdot \vec{\jmath}$$

bo'ladi.



5-chizma

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi. Agar x_a, y_a lar $\vec{a}$ vektorning koordinatalari bo'lsa, $\vec{a}$ vektorni uning koordinatalari orqali quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

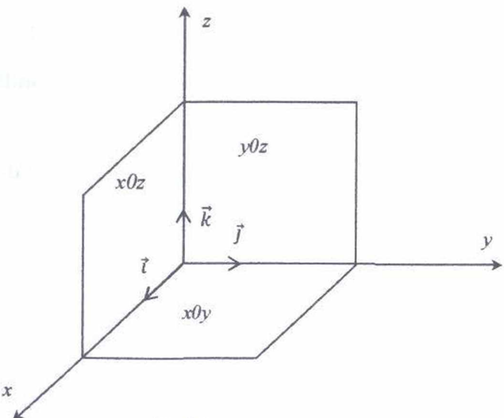
$$\vec{a} = x_a \cdot \vec{\imath} + y_a \cdot \vec{\jmath} \qquad (1)$$

(1) vektor tenglik ko'p hollarda $\vec{a} = \{x_a; y_a\}$ simvolik ko'rinishda yoziladi.

(1) tenglik tekislikdagi har qanday vektorni ikkita o'zaro perpendikular vektorlarga yoyib yozish mumkinligini bildiradi. Umuman olganda, tekislikdagi har qanday vektorni kollinear bo'lmagan ikkita vektorga yoyib yozish mumkin.

2.2. Fazodagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi

Bitta O nuqta, kesishuvchi o'zaro perpendikular uchta Ox, Oy, Oz to'g'ri chiziqlar olinadi (6-chizma). Bu to'g'ri chiziqlarning har bir jufti orqali tekislik o'tkaziladi. Ox va Oy to'g'ri chiziqlar orqali o'tuvchi tekislikni xOy tekislik deb ataladi. Shunga o'hshash qolgan ikkita tekislikni mos ravishda xOz va yOz tekisliklar deyiladi. Ox, Oy, Oz to'g'ri chiziqlar *koordinata o'qlari* (mos ravishda *abssissa, ordinata, applikata*), ularning kesishish nuqtasi *0 koordinata boshi*, xOy, xOz va yOz tekisliklar *koordinata tekisliklari* deyiladi. O nuqta har bir o'qni ikkita yarim to'g'ri chiziqqa ajratadi. Ulardan birini musbat, boshqasini manfiy deb olish mumkin. Bu usul bilan hosil qilingan $Oxyz$ sistemaga fazoda *to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi* deyiladi. Odatda Ox, Oy, Oz koordinata o'qlarining



6-chizma

birlik vektorlari mos ravishda $\vec{i}, \vec{j}$ va $\vec{k}$ vektorlar orqali belgilanadi. Fazodagi vektorning koordinatalar deb uning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalariga aytiladi. Vektorni Ox o'qdagi proyeksiyasi uning birinchi yoki x koordinatasi, Oy o'qdagi proyeksiyasi uning ikkinchi yoki y koordinatasi, Oz o'qdagi proyeksiyasi uning uchinchi yoki z koordinatasi deb aytiladi.

Agar x_a, y_a, z_a sonlar $\vec{a}$ vektorning koordinatalari bo'lsa, $\vec{a}$ vektorni uning koordinatalari orqali quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\vec{a} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} + z_a \cdot \vec{k}$$

Vektor tenglik ko'p hollarda $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$ simvolik ko'rinishda yoziladi.

Umuman olganda, fazodagi har qanday vektorni uchta o'zaro kollinear bo'lmagan vektorlarga yoyib yozish mumkin.

2.3. Tekislikdagi va fazodagi vektorlarning chiziqli bog'liqligi

1–ta'rif. Orasida noldan farqlilari ham bo'lgan shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sonlar mavjud bo'lsaki, ular uchun

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0} \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ vektorlar *chiziqli bog'liq* deb ataladi.

2–ta'rif. Agar (1) tenglik faqat $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ bo'lganda o'rinli bo'lsa, u holda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ vektorlar *chiziqli erkli* deb ataladi.

(1) tenglikdan, masalan $\lambda_1 \neq 0$ deb faraz qilib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a}_3 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\vec{a}_k.$$

Endi $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \mu_2, -\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \mu_3, \dots, -\frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \mu_k$ deb olib,

$\vec{a}_1 = \mu_2\vec{a}_2 + \mu_3\vec{a}_3 + \dots + \mu_k\vec{a}_k$ ni hosil qilamiz.

$\mu_2\vec{a}_2 + \mu_3\vec{a}_3 + \dots + \mu_k\vec{a}_k$ ifoda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ vektorlarning *chiziqli kombinatsiyasi* deb ataladi.

Shunday qilib, bir nechta vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda ulardan hech bo'lmaganda birini qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalash mumkin.

Bunga teskari da'vo ham to'g'ri: agar bir nechta vektorlardan biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalangan bo'lsa, u holda bu vektorlar chiziqli bog'liqdir.

1-teorema. Tekislikdagi har qanday uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar chiziqli bog'liqdir.

2-teorema. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor chiziqli erkli bo'lishi uchun ular kollinear bo'lmasligi zarur va yetarlidir.

1- va 2-teoremalardan tekislikdagi chiziqli erkli vektorlarning maksimal soni ikkiga tengligi kelib chiqadi.

Endi fazodagi vektorlarni qaraymiz.

3–ta'rif. Agar vektorlar bitta tekislikda yotsa yoki bitta tekislikka parallel bo'lsa, ular *komplanar vektorlar* deyiladi.

Shuni qayd etish kerakki, agar komplanar vektorlar umumiy boshga ega bo'lsa, ular bitta tekislikda yotishi ravshan.

3-teorema. Fazodagi har qanday to'rtta $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlar chiziqli bog'liqdir.

Tekislikdagi kabi fazoda ham quyidagilarni keltirish mumkin:

1) agar fazoda berilgan vektorlar soni to'rttadan ko'p bo'lsa, ular chiziqli bog'liqdir;

2) fazodagi uchta vektor komplanar bo'lishi uchun ular chiziqli bog'liq bo'lishi zarur va yetarlidir;

3) uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar chiziqli erkli bo'lishi uchun ular nokomplanar bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu aytilganlardan, fazodagi chiziqli erkli vektorlarning maksimal soni uchga tengligi kelib chiqadi.

2.4. Tekislikda va fazoda bazis. Affin koordinatalar

Chiziqli algebra va vektorlar algebrasining muhim tushunchalaridan biri bazis tushunchasidir.

1–ta'rif. Tekislikdagi bazis deb, istalgan ikkita chiziqli erkli vektorga aytiladi.

$\vec{a}$ - tekislikdagi istalgan vektor, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar esa bazis hosil qilsin. Tekislikdagi har qanday uchta vektor chiziqli bog'liq bo'lganligi uchun $\vec{a}$ vektor bazis vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi, yani quyidagi munosabat bajariladi:

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c}.$$

Agar $\vec{a}$ vektor yuqoridagi ko'rinishda ifodalangan bo'lsa, u holda u $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar hosil qilgan *bazis bo'yicha yoyilgan* deyiladi. λ_1 va λ_2 sonlar tekislikdagi $\vec{a}$ vektorning *affin koordinatalari* deb ataladi va $\vec{a} = \{\lambda_1; \lambda_2\}$ orqali yoziladi.

1-teorema. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ va $\vec{c}$ bazis bo'yicha yoyilmasi yagonadir.

2–ta'rif. Fazodagi bazis deb, istalgan uchta chiziqli erkli vektorga aytiladi.

Tekislikda bo'lgani kabi istalgan $\vec{a}$ vektor bazisning $\vec{b}$, $\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlari orqali bir qiymatli yoyiladi, yani quyidagi munosabat bajariladi:

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c} + \lambda_3\vec{d},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sonlar fazodagi $\vec{a}$ vektorning *affin koordinatalari* deb ataladi va $\vec{a} = \{\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3\}$ orqali yoziladi.

2.5. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning yig'indisi, ayirmasi va vektorning songa ko'paytmasi

Ikkita $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$ va $\vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning yig'indisi, ayirmasi va vektorning songa ko'paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

1) $\vec{a} + \vec{b} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} + z_a \cdot \vec{k} + x_b \cdot \vec{i} + y_b \cdot \vec{j} + z_b \cdot \vec{k} =$
$= (x_a + x_b)\vec{i} + (y_a + y_b)\vec{j} + (z_a + z_b)\vec{k};$

2) $\vec{a} - \vec{b} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} + z_a \cdot \vec{k} - x_b \cdot \vec{i} - y_b \cdot \vec{j} - z_b \cdot \vec{k} =$
$= (x_a - x_b)\vec{i} + (y_a - y_b)\vec{j} + (z_a - z_b)\vec{k};$

4) $\lambda\vec{a} = \lambda(x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} + z_a \cdot \vec{k}) = \lambda x_a \cdot \vec{i} + \lambda y_a \cdot \vec{j} + \lambda z_a \cdot \vec{k}.$

Shunday qilib vektorlar quyidagi koordinatalariga ega

1) $\vec{a}+\vec{b}=\{x_a+x_b; y_a+y_b; z_a+z_b\}$;

2) $\vec{a}-\vec{b}=\{x_a-x_b; y_a-y_b; z_a-z_b\}$;

3) $\lambda\vec{a}=\{\lambda x_a; \lambda y_a; \lambda z_a\}$.

Demak, ikki vektorni qo'shganda (ayirganda) ularning mos koordinatalari qo'shiladi (ayriladi). Vektorni songa ko'paytirilganda, uning koordinatalari shu songa ko'payadi.

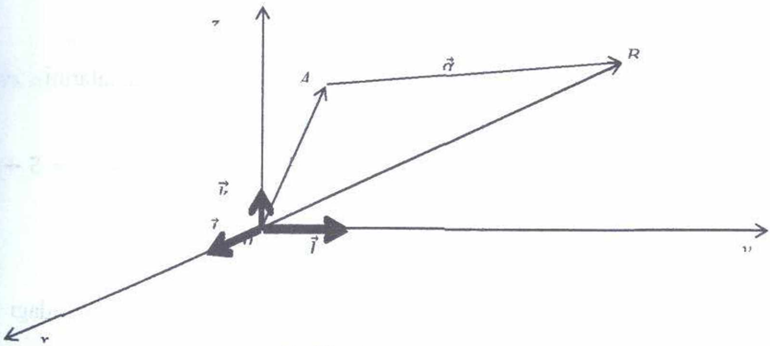
1-misol. $\vec{a}=\{2;-5;9\}$ vektor berilgan bo'lsin. $\vec{a}$ vektorga kollinear bo'lgan $\vec{b}=\{x;10;z\}$ vektorning noma'lum koordinatalarini toping.

Yechilishi. Ikki vektorning kollinearlik shartiga asosan

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}=\lambda\left(2\cdot\vec{i}-5\cdot\vec{j}+9\cdot\vec{k}\right)$$

U holda $\lambda\vec{a}=\{\lambda x_a; \lambda y_a; \lambda z_a\}$ formulaga asosan $\vec{b}=(2\lambda;-5\lambda;9\lambda)$. Bundan

$-5\lambda=10$ va $\lambda=-2$. Demak $\vec{b}=\{-4;10;-18\}$ teng.



7-chizma

2-misol. $\vec{a}=2\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}+5\cdot\vec{k}$, $\vec{b}=3\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}+5\cdot\vec{k}$ vektorlarning yig'indisi va ayirmasini toping.

Yechilishi. 1) $\vec{a}+\vec{b}=(x_a+x_b)\vec{i}+(y_a+y_b)\vec{j}+(z_a+z_b)\vec{k}=$

$=(2+3)\vec{i}+(3-2)\vec{j}+(5+5)\vec{k}=5\vec{i}+\vec{j}+10\vec{k}$;

$2) \vec{a}-\vec{b}=(x_a-x_b)\vec{i}+(y_a-y_b)\vec{j}+(z_a-z_b)\vec{k}==(2-3)\vec{i}+(3+2)\vec{j}+(5-5)\vec{k}=-\vec{i}+5\vec{j};$

U holda $\vec{a}+\vec{b}=\{5,1,10\}$, $\vec{a}-\vec{b}=\{-1,5,0\}$.

2.6. Nuqtaning koordinatalari

A va *B* nuqtalarning koordinatalari berilgan bo'lsin. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalari quyidagicha topiladi. *A* nuqtaning koordinatalari $\{x_A; y_A; z_A\}$ va *B* nuqtaning koordinatalari $\{x_B; y_B; z_B\}$ bo'lsin (7-chizma). U holda

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=x_B\cdot\vec{i}+y_B\cdot\vec{j}+z_B\cdot\vec{k}-x_A\cdot\vec{i}-$$

$$-y_A\cdot\vec{j}-z_A\cdot\vec{k}=(x_B-x_A)\cdot\vec{i}+(y_B-y_A)\cdot\vec{j}+(z_B-z_A)\cdot\vec{k}$$ o'rinli bo'ladi.

Shuning uchun $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalari $x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A$ sonlariga teng.

Demak, vektorning koordinatalari uning mos koordinatalari ayirmasiga teng: $\overrightarrow{AB}=\{x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A\}$.

Misol. Agar *A(2,3,5)* va *B(6,7,5)* bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini toping.

Yechilishi. $x_B-x_A=6-2=4$; $y_B-y_A=7-3=4$; $z_B-z_A=5-5=0$. U holda $\overrightarrow{AB}=\{4,4,0\}$.

Agar $\vec{a}$ vektorning koordinatalari $\{a_x; a_y; a_z\}$ bo'lsa, u holda $\vec{a}$ vektorning *absolut qiymati (uzunligi)* yoki *moduli* uning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari kvadratlarining yig'indisidan olingan kvadrat ildizga teng:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

2.7. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

M_1M_2 kesmani berilgan $\lambda>0$ nisbatda bo'lish degan so'z, bu kesmada ushbu tenglik o'rinli bo'ladigan *M* nuqtani topish demakdir:

$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ yoki $M_1M = \lambda\, MM_2$.

Berilgan M_1 va M_2 nuqtalar mos ravishda x_1, y_1, z_1 va x_2, y_2, z_2 koordinatalarga ega bo'lsin. Izlanayotgan M nuqtaning x, y, z koordinatalari quyidagicha topiladi. Ravshanki, $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\, \overrightarrow{MM_2}$ yoki

$$(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k} = \lambda\left[(x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j} + (z_2 - z)\vec{k}\right]$$

Vektorlarning tengligidan ularning proyeksiyalarining tengligi kelib chiqadi:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y),\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$$

Bu yerdan $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$ (1)

Agar M nuqta M_1M_2 kesmaning kesmaning o'rtasi bo'lsa, u holda $M_1M = MM_2$ va demak, $\lambda = 1$. Bu holda (1) tengliklar ushbu ko'rinishni oladi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (2)$$

Shunday qilib, kesma o'rtasining koordinatalarining har biri uning boshi va oxirining mos koordinatalarining o'rta arifmetigiga teng.

Agar $M_1(x_1; y_1)$ va $M_2(x_2; y_2)$ nuqtalar Oxy tekislikda yotsa, u holda (1), (2) formulalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \quad (3)$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (4)$$

Misol. $M_1(1; 2)$ va $M_2(3; 4)$ nuqtalar berilgan. M_1M_2 kesmani $\lambda = \frac{1}{2}$ nisbatda bo'ling.

Yechilishi. (3) formulaga ko'ra quyidagi hosil bo'ladi:

$$x = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot 3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3},\ y = \frac{2 + \frac{1}{2}\cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{8}{3}.$$

Shunday qilib izlanayotgan nuqta $M\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

2.8. Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari

Fazoda vektorning yo'nalishi bu vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil qiladigan α, β, γ burchaklari bilan aniqlanadi (8-chizma). Bu burchaklarning $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kosinuslari *vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari* deb ataladi.

Vektorning proyeksiyalari formulalari yordamida yo'naltiruvchi kosinuslar uchun ifodalarni keltirib chiqarish oson.

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ vektor berilgan bo'lsin. U holda yning proyeksiyalari

$$a_x = \text{пр}_{Ox}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha,$$
$$a_y = \text{пр}_{Oy}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\beta,$$
$$a_z = \text{пр}_{Oz}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\gamma.$$

Bundan yo'naltiruvchi kosinuslar uchun quyidagi formulalar topiladi:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|a|},\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|}. \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

bo'lganligidan

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Bu tengliklarning har birini kvadratga ko'tarib va ularni qo'shib, vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari orasidagi ushbu bog'lanish topiladi:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

yani istalgan vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari kvadratlarining yig'indisi 1 ga teng.

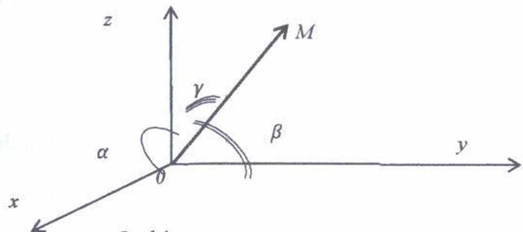
Misol. Agar $A(1;2;3)$ va $B(2;4;5)$ bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil etadigan burchaklarining kosinuslarini toping.

Yechilishi. $\overrightarrow{AB}$ vektorning *Ox*, *Oy*, *Oz* o'qlarga proyeksiyalari

$$\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB} = 2 - 1 = 1,$$
$$\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{AB} = 4 - 2 = 2,$$
$$\text{пр}_{Oz}\overrightarrow{AB} = 5 - 3 = 2.$$

Endi $\overrightarrow{AB}$ vektorning moduli topiladi: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$ bo'lgani uchun bu vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari quyidagiga teng:

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$



8-chizma

2.9. Ikki vektorning kollinearlik sharti

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ va $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ vektorlar kollinear bo'lsin. Bu holda $\vec{a} = \lambda\,\vec{b}$, bunda λ- biror son. Vektor songa ko'paytirilganda uning o'qqa proyeksiyalari ham shu songa ko'paytirilganligi uchun quyidagini hosil qilamiz: $a_x = \lambda b_x,\ a_y = \lambda b_y, a_z = \lambda b_z$.

Aksincha, agar shu tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollineardir.

Haqiqatan ham, agar $\vec{a}$ vektorning barcha proyeksiyalari $\vec{b}$ vektorning barcha proyeksiyalaridan λ marta farq qilsa, u holda $\vec{a}$ vektorning o'zi $\vec{b}$ vektorni λ ko'paytuvchiga ko'paytirish bilan hosil qilinadi, yani $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollineardir. Berigan tengliklar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning proyeksiyalari proporsionalligini ko'rsatadi. Shunday qilib, ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lishi uchun ularning proyeksiyalari proporsional bo'lishi zarur va yetarlidir.

Berilgan tenglik ko'pincha quyidagicha yoziladi: $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

3-§. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi

3.1. Vektorlarning skalyar ko'paytmasining ta'rifi

Vektorlar ustida hozirgacha bajarilgan amallar (qo'shish, ayirish, songa ko'paytirish) chiziqli amallar bo'lib, natijada yana vektorlar kelib chiqadi. Endi vektorlar ustida natija skalyar (son) hosil bo'ladigan amallar ko'rib chiqiladi.

Fizikada A ish quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos\varphi,$$

Bu yerda $\varphi - \vec{F}$ kuch va $\overrightarrow{BC}$ ko'chish vektorlari orasidagi burchak. Bu formulada $\vec{F}$ va $\overrightarrow{BC}$ ning skalyar ko'paytmasi A ishni beradi.

9-chizma

Skalyar ko'paytmani ixtiyoriy ikkita vektor orasida aniqlash mumkin. Bu tushuncha fizika va matematikada keng qo'llaniladi.

Ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, ko'paytiriluvchi vektorlar modullarining bu vektorlar orasidagi φ burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng songa aytiladi (9-chizma). Skalyar ko'paytma $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bilan belgilanadi. Shunday qilib ta'rifga ko'ra

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi.$$

3.2. Vektorlarning skalyar ko'paytmasining xossalari

Vektorlarning skalyar ko'paytmasining ba'zi xossalari ko'riladi.

1. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi o'rin almashtirish xossasiga ega, ya'ni $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

Isboti: Bu xossa skalyar ko'paytmaning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,\quad \vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\varphi,$$

demak, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi skalyar ko'paytuvchiga nisbatan gruppalash xossasiga ega, yani

$$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}).$$

Isboti: Bu tenglikni isbotlashda $\lambda>0$ hol bilan cheklanamiz. $\lambda>0$ bo'lganda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\lambda\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakka teng bo'lganligi uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,$$

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=|\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=\lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Demak, $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}$. Ushbu $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$ tenglik ham shunga o'xshash isbotlanadi.

3. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi taqsimot xossasiga ega, yani

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

4. Agar ikki vektorning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, u holda ko'paytiriluvchi vektorlardan biri nolga teng yoki ular orasidagi burchak kosinusi nolga teng bo'ladi yani bu holda vektorlar perpendikulyardir.

Agar $\vec{a}\perp\vec{b}$ bo'lsa, u holda $\cos\varphi=0$ va demak, vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng.

Shunday qilib, nolga teng bo'lmagan ikki vektor perpendikulyar bo'lishi uchun ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Endi vektorning o'zining o'ziga skalyar ko'paytmasini qaraymiz. Bunday ko'paytma *vektorning skalyar kvadrati* deb ataladi:

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}||\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Vektorning skalyar kvadrati $\vec{a}^2$ bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2,$$

ya'ni vektorning skalyar kvadrati uning modulining kvadratiga teng.

Vektorning skalyar kvadratining formulasidan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\sqrt{\vec{a}^2} \neq \vec{a}, \qquad \sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|.$$

Misol. $\vec{c} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$ vektor berilgan, bunda $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 2.$ $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak 60^0 ga teng. $\vec{c}$ vektorning modilini hisoblang.

Yechilishi. $|\vec{c}| = \sqrt{\left(3\vec{a} + 5\vec{b}\right)^2} = \sqrt{9\vec{a}^2 + 30\vec{a}\cdot\vec{b} + 25\vec{b}^2}$

Bunda

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 6^2 = 36, \quad \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 2^2 = 4,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 6\cdot 2\cos 60^0 = 6$$

bo'lgani uchun

$$|\vec{c}| = \sqrt{9\cdot 36 + 30\cdot 6 + 25\cdot 4} = \sqrt{604} \text{ o'rinli.}$$

3.3. Koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning skalyar ko'paytmasi

Ushbu ikki vektor berilgan bo'lsin:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \text{ va } \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Bunday holda $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$

$$= a_xb_x\vec{i}\vec{i} + a_yb_x\vec{j}\vec{i} + a_zb_x\vec{k}\vec{i} + a_xb_y\vec{i}\vec{j} + a_yb_y\vec{j}\vec{j} + a_zb_y\vec{k}\vec{j} +$$

$$+ a_xb_z\vec{i}\vec{k} + a_yb_z\vec{j}\vec{k} + a_zb_z\vec{k}\vec{k}.$$

Qavslarni ochishda biz skalyar ko'paytmaning taqsimot qoninidan foydalandik.

Birlik vektorlarning skalyar kvadratlari bo'lganliklari uchun

$$\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}=\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

Bo'lishini va o'zaro perpendikulyar vektorlarning skalyar ko'paytmalari bo'lganliklari uchun $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}=\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}=\vec{\imath}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{\imath}=\vec{\jmath}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{\jmath}=0$ bo'lishini e'tiborga olib, ikki vektorning skalyar ko'paytmasi uchun uzil-kesil ushbu formulani hosil qilamiz:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ularning bir ismli proyeksiyalari juft-juft ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

Ikki vektorning perpendikulyarlik sharti quyidagi ko'rinishga teng bo'ladi:

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

Ikki vektor o'zaro perpendikulyar bo'lishi uchun ularning bir ismli proyeksiyalarining juft-juft ko'paytmalari yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Misol. m ning qanday qiymatida $\vec{a}=2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-\vec{k}$ vektor $\vec{b}=\vec{\imath}-5\vec{\jmath}+m\vec{k}$ vektorga perpendikulyar bo'ladi?

Yechilishi. Vektorlarning perpendikulyarlik shartidan quyidagiga egamiz:

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0\,,\ 2\cdot1+3\cdot(-5)+(-1)\cdot m=0$$

bundan $m=-13.$

3.4. Ikki vektor orasidagi burchak kosinusi

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi ifodasi $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ dan

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

topiladi. Skalyar ko'paytmani va vektorlarning modullarini ularning proeksiyalari orqali $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$ va $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ formulalar bo'yicha ifodalab, vektorlar orasidagi burchak kosinusi uchun ushbu formulani hosil qilamiz:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Misol. $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ va $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ vektorlar orasidagi burchak kosinusini hisoblang.

Yechilishi. Berilgan formuladan quyidagini topamiz:

$$\cos\varphi = \frac{3\cdot 2 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}\ \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{7}{3\sqrt{11}} \approx 0{,}703.$$

4-§. Determinantlar nazariyasi elementlari

4.1. Ikkinchi tartibli determinant

To'rtta sondan iborat quyidagi jadval (matritsa deb ataladi) berilgan bo'lsin:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Matritsa ikkita satr va ikkita ustunga ega. Bu matritsani tuzadigan sonlar ikkita indeksli harf bilan belgilangan. Birinchi indeks mazkur son turgan satr nomerini, ikkinchi indeks esa ustun nomerini bildiradi. Masalan: a_{12}– birinchi satr va ikkinchi ustunda turgan sonni bildiradi, a_{21} – ikkinchi satr va birinchi ustunda turgan sonni bildiradi. a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} sonlarni matritsaning *elementlari* deb ataymiz.

Ta'rif. Berilgan matritsaga mos *ikkinchi tartibli determinant* deb, $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ songa aytiladi.

Determinant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ simvol bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (2)$$

a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} sonlar *determinantning elementlari* deb ataladi.

Misol. $\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - 5 \cdot 1 = -15$

Ikkinchi tartibli determinantning xossalari.

1-xossa. Agar determinant satrlarining o'runlarini mos ustunlar bilan almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{3}$$

2-xossa. Ikki satrning (yoki ustunning) o'rnini o'zgartirilganda determinantning ishorasi qarama-qarshi ishoraga o'zgaradi, absolyut qiymati esa o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

3-xossa. Ikkita bir hil satrli (yoki ustunli) determinant nolga teng.

4-xossa. Satrdagi (yoki ustundagi) barcha elementlarning umumiy ko'paytuvchisini determinant belgisidan chiqarish mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

5-xossa. Agar biror satrning (ustunning) barcha elementlari nolga teng bo'lsa, u holda determinant nolga teng.

6-xossa. Agar determinantning biror satri (yoki ustuni) elementlariga boshqa satrning (yoki ustuning) bir hil songa ko'paytirilgan mos elementlarini qo'shilsa, determinant o'z qiymatini o'zgartirmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Ikkinchi tartibli determinantning bu barcha xossalari determinantlarni (2) formula bo'yicha hisoblash qoidasiga asoslanib oddiy hisoblash bilan isbotlanadi.

4.2. Uchunchi tartibli determinant

To'qqizta sondan iborat ushbu jadvalni (matritsani) qaraymiz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Bu matritsaga mos uchinchi tartibli determinant deb, quyidagi hosil qilinadigan songa aytiladi:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Uchinchi tartibli determinant: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

simvoli bilan belgilanadi. $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ sonlar uning elementlari deb ataladi. Uchinchi tartibli determinant uchta satr va uchta ustunga ega. Shunday qilib,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

(8) formula uchinchi tartibli determinantning birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasini beradi va uchinchi tartibli determinantni hisoblashni ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblashga keltiradi.

Uchinchi tartibli determinantning berilgan elementiga mos *minor* deb, bu determinantda shu berilgan element joylashgan satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan ikkinchi tartibli determinantga aytamiz. Minorlarning ikkita indeksli M bosh harfi bilan belgilaymiz. Masalan, a_{12} elementga mos M_{12} minor $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ determinantdir. U uchinchi tartibli determinantdan birinchi satr va ikkinchi ustunni chizib tashlash bilan hosil bo'ladi.

(8) formuladan ko'rinib turibdiki, uchinchi tartibli determinant birinchi satr elementlarining ularga mos minorlarga ko'paytmalarining algebraik yig'indisiga teng, bunda a_{12} elementga mos minor minus ishora bilan olinadi.

Ikkkinchi tartibli determinantlarni hisoblash qoidasini qo'llanib, (8) tenglikni qaytadan bunday yozamiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) +$$

$$+a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} +$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}. \tag{9}$$

Misol.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 18 - 3 \cdot (-41) - 4 \cdot (-48) = 351.$$

Ikkinchi tartibli determinantlarning barcha xossalari uchinchi tartibli determinantlar uchun ham o'rinli bo'lib qoladi. Uchinchi tartibli determinatlar uchun bu xossalarning isboti shu xossalarning ikkinchi tartibli determinantlar uchun isbotidan hech bir farq qilmaydi va uchinchi determinantlarni (8) formula bo'yicha hisoblashga asoslanadi. Kitobxonga bu xossalarni mustaqil isbotlashni tavfsiya qilamiz.

Uchinchi tartibli determinantning birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasini beradigan (8) formulaga o'xshash, determinantning istalgan satri yoki ustuni elementlari bo'yicha yoyilmasini hosil qilish mumkin.

Masalan, determinantning ikkinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasini quyidagicha hosil qilish mumkin. 2°-xossaga (4.1.-bo'limga qarang) asoslanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

O'ng tomonda turgan determinantni birinchi satr elementlari bo'yicha yozamiz. Determinantni hisoblash qoidasiga asosan:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

(10) tenglikni etiborga olsak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Biroq $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ determinantlar berilgan determinantga a_{11}, a_{22}, a_{23} elementlarining minorlaridir. (11) formula berilgan determinantning ikkinchi satri bo'yicha yoyilmasini beradi.

Determinant elementning *algebraik to'ldiruvchisi* deb, bu element turgan satr va ustun nomerlari yig'indisi juft bo'lsa, plyus ishora bilan, bu yig'indi toq bo'lsa, minus ishora bilan olinadigan minorga aytiladi.

a_{ik} elementning algebraik to'ldiruvchisi A_{ik} bian belgilanadi, bu yerda i va $k-$ berilgan element turadigan satr va ustun nomerlaridir.

Elementning algebraik to'ldiruvchisi bilan uning minori orasidagi bog'lanish quyidagi tenglik bilan ifodalanadi:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}. \quad (12)$$

Masalan, $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11},\quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}\,,\quad A_{13} = M_{13}$ va hokazo.

4.3. Yuqori tartibli determinantlar

Ko'pchilik masalalarda ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlardan tashqari, yana yuqori tartibli determinantlar ham uchraydi. Masalan,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

to'rtinchi tartibli determinant bo'ladi va umuman, n-tartibli determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1k} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2k} \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots a_{3k} \ldots a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nk} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi. To'rtinchi tartibli determinant quyidagicha hosil qilinadigan sondir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

(13) tenglikning o'ng tomonidagi uchinchi tartibli determinantlar $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ elementlarning *minorlari* deb ataladi.

a_{ik} elementning minori uchun M_{ik} belgilashni saqlab qolib va bu element uchun A_{ik} algebraik to'ldiruvchini $A_{ik} = (-1)^{i+k}M_{ik}$ formula bo'yicha aniqlanadi va (13) tenglikni qaytadan yozamiz: $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$.

Bu formula to'rtinchi tartibli determinantning birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasini beradi. Yuqori tartibli determinantlar ham shunga o'xshash hisoblanadi. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlarning barcha xossalari istalgan tartibli determinantlar uchun ham to'g'ridir.

1-misol. Ushbu determinantni hisoblang: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Yechilishi: (20) formulaga ko'ra quyidagini topamiz: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$$3\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\left\{3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= 3[3(-2) - 2 + 4 * 4] + 2[2(-2) - 3(-15) + 4(-20)] = 24 - 78 = -54$$

5-§. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi. Uchta vektorning aralash ko'paytmasi

5.1. Vektor ko'paytmasining ta'rifi

Ta'rif. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga *vektor ko'paytmasi* deb, quyidagicha aniqlanadigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi:

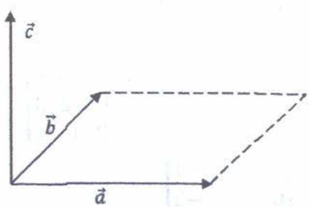
1) $\vec{c}$ vektorning moduli son jihatdan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni tomonlar qilib yasalgan parallelogramning yuziga teng, yani

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi;$$

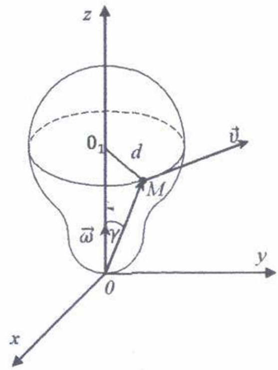
2) $\vec{c}$ vektor ikkala ko'paytiriluvchi vektorga perpendikulyar;

3) $\vec{c}$ vektorning yo'nalishi shundayki, agar uning oxiridan qaralsa, u holda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga tomon eng qisqa yo'l bilan burilish soat strelkasi aylanishiga qarama-qarshi yo'nalishda ko'rinadi (10-chizma).

$\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi $\vec{a} \times \vec{b}$ bilan belgilanadi.



10-chizma



11-chizma

Endi yechilishi ikki vektorning vektor ko'paytmasiga olib keladigan fizik masalani qaraymiz.

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan qattiq jism nuqtasining tezligi qanday hisoblanishini ko'rsatamiz (11-chizma).

Aytaylik, qattiq jism qo'zg'almas o'q atrofida ω burchak tezlik bilan aylanayotgan bo'lsin. Burchak tezlik vektori ω ni kiritamiz. Bu vektor jismning aylanish o'qi bo'ylab shunday tomonga yo'nalganki, u tomondan qaralganda jismning aylanish yo'nalishi soat strelkasinining harakatlanish yo'nalishiga qarama-qarshidir.

M- jismning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Bu nuqtaning tezligi jism aylanayotganda shu nuqta chizadigan aylanaga urinma bo'ylab yo'nalgan.

M nuqta tezligining kattaligi burchak tezlik moduli $|\omega|$ ning *M* nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan *d* masofaga ko'paytmasiga teng, yani

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}|d.$$

Aylanish o'qida ixtiyoriy *O* nuqtani olamiz va undan $\overrightarrow{OA} = \vec{\omega}$ va $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ vektorlarni qo'yamiz. $\vec{\omega}$ va $\vec{r}$ vektorlar orasidagi burchakni γ bilan belgilaymiz. U holda OO_1M uchburchakdan $d = |\vec{r}|sin\gamma$ ni hosil qilamiz. *d* ning bu qiymatini yuqoridagi formulaga qo'yib, quyidagini topamiz: $|\vec{v}| = |\vec{\omega}|d = |\vec{\omega}||\vec{r}|sin\gamma$.

M nuqtaning $\vec{v}$ tezligi $\vec{\omega}$ va $\vec{r}$ vektorlarga perpendikulyar va $\vec{v}$ vektorning oxiridan qaralganda $\vec{\omega}$ dan $\vec{r}$ ga tomon eng qisqa burilish soat strelkasining harakatiga qarama-qarshi yo'nalishda ko'rinadi.

Shu sababli vektor ko'paytmaning ta'rifiga asosan quyidagiga egamiz:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

5.2. Vektor ko'paytmasining xossalari

Vektor ko'paytmaning asosiy xossalarini ko'rib chiqamiz:

1-xossa. Ko'paytuvchilarning o'rinlari almashtirilganda vektor ko'paytmaning ishorasi o'zgaradi, moduli esa saqlanadi.

Shunday qilib, vektor ko'paytma o'rin almashtirish xossasiga ega emas.

Haqiqatdan ham, vektor ko'paytmaning ta'rifidan $\vec{a} \times \vec{b}$ va $\vec{b} \times \vec{a}$

vektorlar bir xil modulga egaligi, kollinearligi, lekin qarama-qarshi tomonlarga yo'nalganligi kelib chiqadi. Shu sababli $\vec{a} \times \vec{b}$ va $\vec{b} \times \vec{a}$ vektorlar qarama-qarshi vektorlardir va demak,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

2-xossa. Vektor ko'paytma skalyar ko'paytuvchiga nisbatan gruppalash xossasiga ega, yani

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}).$$

Bu xossaning isboti vektor ko'paytmaning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi. Biz buni masalan, $\lambda > 0$ bo'lgan hol uchun ko'rsatamiz. Quyidagiga egamiz:

$$|\lambda(\vec{a} \times \vec{b})| = \lambda|(\vec{a} \times \vec{b})| = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi;$$

$$|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = |(\lambda\vec{a})||\vec{b}|\sin\varphi = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi.$$

$\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ vektor ham $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar, chunki $\vec{a}$ va $\vec{b}$, $\lambda\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bitta tekislikda yotadi. Demak, $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ va $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ vektorlar kollineardir. Ravshanki, ularning yo'nalishlari ustma-ust tushadi. Shu sababli $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$. $\lambda < 0$ bo'lgan hol ham shunga o'xshash isbotlanadi.

3-xossa. Vektor ko'paytma taqsimot qonuniga ega, yani

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Bu formulaning keltirib chiqarilishini biz bu yerda qaramaymiz.

4-xossa. Agar ikki vektorning vektor ko'paytmasi nol- vektorga teng bo'lsa, u holda yo ko'paytiriluvchi vektorlardan biri nol- vektorga teng, yo ular orasidagi burchakning sinusi nolga teng, yani bu vektorlar kollineardir.

Aksincha, agar ikkita nolmas vektor kollinear bo'lsa, u holda ularning vektor ko'paytmasi nol- vektorga teng.

Shunday qilib, ikkita nolmas vektorlar kollinear bo'lishi uchun ularning vektor ko'paytmasi nol- vektorga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bundan, xususan, vektorning o'z-o'ziga vektor ko'paytmasi nol- vektorga tengligi kelib chiqadi $\vec{a} \times \vec{a} == \vec{0}$.

Misol. $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})$ ni toping.

Yechilishi: Quyidagiga egamiz:

$(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{a} - 4\vec{a} \times \vec{b} - 6\vec{b} \times \vec{b} = 7\vec{b} \times \vec{a}$, chunki $\vec{a} \times \vec{a} = 0, \vec{b} \times \vec{b} = 0$ va $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

5.3. Koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning vektor ko'paytmasi

Ushbu ikkita vektor berilgan bo'lsin:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \text{ va } \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ vektor ko'paytmaning a_x, a_y, a_z va b_x, b_y, b_z proyeksiyalar orqali ifodasini topamiz. Dastlab $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlarning barcha juft-juft vektor ko'paytmalarini topamiz. Kollinear vektorlarning vektor ko'paytmasi nol vektorga teng bo'lganligi uchun:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Endi $\vec{i} \times \vec{j}$ ko'paytmani qaraymiz. Uning modulini topamiz:

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}||\vec{j}| \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

$\vec{i} \times \vec{j}$ vektor $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziqda, yani Oz o'qda joylashgan. Bu vektor Oz o'qning musbat yo'nalishiga tomon yo'nalgan, chunki shunda $\vec{i}$ va $\vec{j}$ ga tomon eng qisqa yo'l bilan burilish $\vec{i} \times \vec{j}$ vektorning oxiridan qaralganda soat strelkasi aylanishiga teskari yo'nalishda bo'ladi.

(12-chizma, bob yakynida). Bundan bu vektor $\vec{k}$ vektor bilan ustma-ust tushishi kelib chiqadi:

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$. Ravshanki $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$. Shu kabi mulohazalar yuritib, quyidagilarga ishonch hosil qilish mumkin:

$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\qquad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\qquad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

Endi $\vec{a}\times\vec{b}$ vektor ko'paytmani qaraymiz. Vektor ko'paytmaning 3 va 4 xossalaridan hamda berilgan tengliklardan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_yb_x\vec{j}\times$$
$\vec{i}+$
$$+a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\times\vec{k}+$$
$$a_yb_z\vec{j}\times\vec{k}+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}=a_yb_x\left(-\vec{k}\right)+a_zb_x\vec{j}+a_xb_y\vec{k}+a_zb_y(-\vec{i})+$$
$$a_xb_z(-\vec{j})+a_yb_z\vec{i}=$$
$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}.$$

Qavslar ichida turgan ifodalar ikkinchi tartibli determinantlardir. Shu sababli $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}$. Hosil qilingan bu ifodani uchinchi tartibli determinantning birinchi satri elementlari bo'yicha yoyilmasi haqidagi xossaga asosan quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

1-misol. $\vec{a}=4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini toping.

Yechilishi: Yuqoridagi formulaga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 3 & 2\\ -3 & -2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & 2\\ -3 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & 3\\ -3 & -2\end{vmatrix}\vec{k}=$$
$$=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}.$$

2-misol. Qattiq jism qo'zg'almas o'q atrofida o'zgarmas $\vec{\omega}$ burchak tezlik bilan aylanadi. Uning $M(x;y;z)$ nuqtadagi tezligi $\vec{v}$ ga teng. $\vec{v}$ vektorlarning koordinata o'qlari bo'yicha yoyilmasini toping.

Yechilishi. 4.1 bo'limda $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ekanligi ko'rsatilgan edi. *Oz* o'q sifatida aylanish o'qini olamiz va bunda uning yo'nalishi $\vec{\omega}$ vektorning yo'nalishi bilan ustma-ust tushadi deb hisoblaymiz.

U holda $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ va demak, yuqoridagi formulaga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ y & z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ x & z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix}\vec{k} =$$
$$= -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}.$$

5.4. Uchta vektorning aralash ko'paytmasi

Endi $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning quyidagicha tuzilgan ko'paytmasini qaraymiz:

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Bu yerda birinchi ikkita vektorni vektor ko'paytiriladi va hosil bo'lgan $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor uchinchi $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytiriladi. Bunday ko'paytirish *uchta vektorlarning vektor-skalyar* ko'paytmasi yoki *aralash ko'paytmasi* deb ataladi. Aralash ko'paytma, ravshanki, biror son bo'ladi.

Aralash ko'paytmaning ko'paytiriluvchi vektorlarning proyeksiyalari orqali ifodasini topamiz. Avval $\vec{a} \times \vec{b}$ ni aniqlaymiz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}.$$

$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ bo'lganligi sababli skalyar ko'paytma formulasiga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z.$$

Hosil qilingan bu ifoda $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ determinantning uchinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasi ekanligini ko'rish oson. Shunday qilib,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Aralash ko'paytma satrlarida ko'paytiriluvchi vektorlarning mos koordinatalari turadigan uchinchi tartibli determinantga teng. Shu formuladan foydalanib, $(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ekanligini isbotlaymiz.

Haqiqatdan, $(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Quyidagi formulalarni shunga o'hshash hosil qilish mumkin:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} =$$

$$= -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ aralash ko'paytmani qisqalik uchun $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$ bilan belgilaymiz. Bu belgilash orqali yuqoridagi formulalarni endi quyidagicha yozish mumkin:

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = (\vec{b}\,\vec{a}) = (\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}) = -(\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}) = -(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}) = -(\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a})$$

5.5. Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi

Berilgan $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarni umumiy boshdan boshlab qo'yamiz va bu vektorlarni qirralar sifatida olib, parallelepiped yasaymiz (bunda vektorlar bitta tekislikda yotmaydi deb faraz qilamiz). Moduli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni tomonlar sifatida olib yasalgan parallelogrammning yuzi Q ga teng bo'lgan $\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b})$ vektorni ham yasaymiz (13-chizma, bob yakunida). Skalyar ko'paytmaning ta'rifiga asosan

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| cos\varphi = Q \cdot |\vec{c}| cos\varphi$$

Bu yerda φ – qaralayotgan $\vec{d}$ va $\vec{c}$ vektorlar orasidagi burchak. $\varphi < \frac{\pi}{2}$ deb faraz qilib va parallelepipedning balandligini h bilan belgilab, $h = |\vec{c}|cos\varphi$ ni topamiz. Shunday qilib, $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = Qh.$

Biroq Qh ko'paytma qaralayotgan parallelepipedning hajmi V ga teng. Demak, $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = V.$ Agar $\varphi > \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $cos\varphi < 0$ va $|\vec{c}|cos\varphi = -h.$ Demak, $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -V.$

Shunday qilib, uzil-kesil quyidagini hosil qilamiz: $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \pm V$ yoki

$$V = |(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|.$$

Uchta vektorning aralash ko'paytmasi bu vektorlarni qirralar sifatida olib yasalgan bu parallelepipedning hajmiga ishora aniqligida teng.

5.6. Uch vektorning komplanarlik sharti

Bitta tekislikda yotuvchi yoki bitta tekislikka parallel vektorlar komplanar vektorlar deb atalishini biz bilamiz. Uchta $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsin. Umumiylikni cheklamasdan, bu vektorlar bitta tekislikda yotadi, deb hisoblash mumkin. Bu holda $\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b})$ vektor bitta tekislikka

Perpendikulyar va demak, $\vec{c}$ vektorga ham perpendikulyar; shu sababli skalyar ko'paytma: $\vec{d} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$

Demak, komplanar vektorlarning aralash ko'paytmasi nolga teng.

Aksincha, agar aralash ko'paytma $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$ bo'lsa, u holda bu $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanardir.

Haqiqatdan ham, agar bu vektorlar komplanar bo'lmaganida edi, u holda ularda $V \neq 0$ hajmli parallelepiped yasash mumkin bo'lar edi. Biroq

$V = |(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|$ bo'lganligi uchun farazimizga zid o'laroq, $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \neq 0$ bo'lib chiqar edi. Shunday qilib, uchta $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasi nolga teng, yani $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$ yoki

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Misol. $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ va $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ vektorlar komplanar ekanligini ko'rsating.

Yechilishi. Bu vektorlarning aralash ko'paytmasini tuzamiz:

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -(-18 + 48) - 3(12 - 12) + 2(24 - 9) = 0.$$

6-§. Matritsa va ular ustida amallar

6.1. Matritsa haqida tushuncha

Determinantlarni o'rganishda biz (4-§ ga qarang) sonlardan tuzilgan quyidagi jadvallarni qaragan edik:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Bu jadvallar matritsalar, $a_{11}, a_{12}, \dots$ sonlar esa matritsaning elementlari deb ataladi.

Agar matritsada satrlar soni ustunlar soniga teng bo'lsa, u holda bunday matritsani *kvadrat matritsa* deb ataladi, shu bilan birga uning satrlari soni yoki ustunlari soni *matritsaning tartibi* deb ataladi. Jumladan, yuqorida keltirilgan matritsalardan birinchisi ikkinchi tartibli matritsa, uchinchisi esa uchinchi tartibli matritsadir. Satrlari soni ustunlari soniga teng bo'lmagan matritsa *to'g'ri burchakli matritsa* deb ataladi (yuqorida o'rtadagi matritsa).

Faqat bitta ustunga yoki satrga ega bo'lgan matritsalarni ham qaraymiz. $(a_{11}\ a_{12}\ \ a_{13}\ )$ matritsa *satr – matritsa*, $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ matritsa esa *ustun-matritsa* deb ataladi.

Kvadrat matritsaning elementlaridan tuzilgan determinant bu *matritsaning determinanti* deb ataladi.

Matritsani qisqalik uchun bitta harf bilan belgilaymiz, masalan,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

bu matritsaning determinantini esa chiziqlar ichiga olingan shu harfning o'zi bilan belgilaymiz. Masalan, A va B matritsalarning determinantlari quyidagi ko'rinishda yoziladi: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\quad |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Agar kvadrat matritsaning determinanti noldan farqli bo'lsa, u holda matritsani *aynimagan matritsa* deb ataladi. Agar matritsaning determinanti nolga teng bo'lsa, u holda matritsani *aynigan matritsa* deb ataladi.

6.2. Matritsalarning tengligi. Matritsalar ustida amallar

Agar ikkita matritsaning satrlari soni bir xil va ustunlari soni bir xil hamda ularning mos elementlari teng bo'lsa, bu matritsalar teng $(A = B)$ matritsalar deb ataladi.

Masalan, agar $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ bo'lib, $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$ bo'lsa, u holda $A = B$ bo'ladi.

Matritsalarni qo'shish. Agar bir xil tartibli kvadrat matritsalar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

berilgan bo'lsa, u holda ularning *yig'indisi* deb,

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

matritsaga aytiladi.

Satrlari soni bir xil va ustunlari soni ham bir xil ikkita to'g'ri burchakli matritsaning yig'indisi ham shunga o'xshash aniqlanadi.

1-misol. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+1 & 3+2 \\ 1+3 & 0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$

Matritsalarni qo'shish amali quyidagi *o'rin almashtirish* va *guruhlash* qonunlariga bo'ysunishini tekshirib ko'rish oson:

$$A+B=B+A, \quad (A+B)+C=A+(B+C).$$

Barcha elementlari nolga teng bo'lgan matritsa *nol-matritsa* deb ataladi va (0) bilan yoki oddiy qilib 0 bilan belgilanadi.

Matritsalarni qo'shishda nol-matritsa sonlarni qo'shishdagi kabi nol soni rolini o'ynaydi: $A+0=A.$

Masalan,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Matrtitsani songa ko'paytirish. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matritsaning songa ko'paytmasi deb,

$$A\mu=\mu A=\begin{pmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} \end{pmatrix}$$

matritsaga aytiladi.

Biz matritsani songa ko'paytirish qoidasini ikkinchi tartibli kvadrat matritsa bo'lgan hol uchun ko'rdik. Uchinchi tartibli kvadrat matritsalar ham songa huddi shunday ko'paytiriladi.

Matritsani nolga ko'paytirilganda nol-matritsa hosil bo'ladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot 0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko'paytirish. Ikkinchi va uchinchi tartibli ikkita kvadrat matritsani ko'paytirish qoidasini ko'rib chiqamiz. Ushbu matritsalar berilgan bo'lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Ta'rifga ko'ra A matritsaning B matritsaga ko'paytmasi deb, elementlari quyidagicha tuzilgan $C = AB$ matritsaga aytiladi:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Agar uchinchi tartibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

matritsalar berilgan bo'lsa, u holda $C = AB$ matritsa quyidagicha tuziladi:

$$AB =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + \\ & & +a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + \\ & & +a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + \\ & & +a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}.$$

Ko'rinib turibdiki, ko'paytma matritsaning i-satri va k- ustuni kesishgan joyda turadigan elementi birinchi matritsaning i-satri elementlari bilan ikkinchi matritsaning k-ustuni mos elementlari juft ko'paytmalarini yig'indisiga teng.

Masalan, AB ko'paytma matritsaning ikkinchi satri va birinchi ustunida turgan elementi A matritsa ikkinchi satri elementlarining B matritsa birinchi ustuni elementlariga ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

Bu qoida to'g'ri burchakli matritsalar uchun ko'payuvchi matritsaning ustunlari soni ko'paytuvchi matritsaning satrlari soniga teng bo'lgan holda ham o'z kuchini saqlaydi.

2- misol. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

3- misol. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$

Ikkita matritsani ko'paytirish natijasida ko'payuvchi matritsa nechta satrga ega bo'lsa, shuncha satrga va ko'paytuvchi matritsa nechta ustunga ega bo'lsa, shuncha ustunga ega bo'lgan matritsa hosil bo'ladi.

Matritsalarni ko'paytirishga doir yana misollar ko'ramiz,

4- misol.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 - 1\cdot 3 & 3\cdot 1 - 1\cdot 1 \\ -1\cdot 1 + 2\cdot 3 & -1\cdot 1 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

5- misol.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 \\ 3\cdot 3 + 1\cdot(-1) & 3\cdot(-1) + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bu misollardan ko'rinib turibdiki, ikki matritsaning ko'paytmasi, umuman aytganda, o'rin almashtirish qonuniga bo'ysunmaydi, ya'ni

$$AB \neq BA.$$

Matritsalarni ko'paytirish ushbu

$$A\,(BC) = (AB)\,C$$

gruppalash qonuniga va ushbu

$$(A + B)C = AC + BC$$

taqsimot qonuniga bo'ysunishini tekshirib ko'rish mumkin.

Ikkinchi tartibli matritsalarni ko'paytirishda $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kvadrat matritsa alohida ahamiyatga ega. Istalgan ikkinchi tartibli A kvadrat matritsani E matritsaga ko'paytirilganda yana A matritsa hosil bo'lishini tekshirib ko'rish oson:

$AE = EA = A.$

E matritsaga *birlik matritsa* deb ataladi.

Uchinchi tartibli birlik kvadrat matritsa quyidagi ko'rinishga ega:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ravshanki, birlik matritsaning determinanti birga teng:

$$|E| = 1.$$

Agar A va B bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo'lib, ularning determinantlari $|A|$ va $|B|$ bo'lsa, u holda $C = AB$ matritsaning determinant ko'paytiriluvchi matritsalarning determinantlari ko'paytmasiga tengligini ko'rsatish mumkin, ya'ni

$$|C| = |A||B|$$

6- misol. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ bo'lsin, 4- misolda

$$C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

ekanligi ko'rsatilgan edi. Bu matritsalarning determinantlari quyidagichadir:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad |C| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -10.$$

Shunday qilib, misolda $|A||B| = |C|$ o'rinli bo'ldi.

Ma'lumki, noldan farqli ikkita sonning ko'paytmasi nolga teng emas. Matritsalar uchun bunday holat o'rinli bo'lmasligi mumkin, ya'ni ikkita nolmas matritsaning ko'paytmasi nol-matritsaga teng bo'lib qolishi mumkin.

6.3. Teskari matritsa

Endi teskari matritsa deb ataladigan matritsani qaraymiz, bu tushuncha faqat kvadrat matritsa uchun kiritiladi.

Agar A –kvadrat matritsa bo'lsa, u holda unga *teskari matritsa* deb A^{-1} bilan belgilanadigan va $AA^{-1} = E$ shartni qanoatlantiradigan matritsaga aytiladi. Agar bu tenglik bajariladigan bo'lsa, u holda u bilan bir vaqtda $A^{-1}A = E$ tenglik ham bajarilishini isbotlash mumkin.

Teorema. A kvadrat matritsa teskari matritsaga ega bo'lishi uchun A matritsa aynimagan matritsa bo'lishi, ya'ni uning determinant noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir.

A_{ik} tegishli a_{ik} elementining algebraik to'ldiruvchisi bo'lsin. A matritsaga teskari A^{-1} matritsa quyidagicha hosil qilinadi.

1) A matritsaga uning har bir a_{ik} elementini bu elementning A matritsaning $|A|$ determinantiga bo'lingan A_{ik} algebraik` to'ldiruvchisi bilan almashtirib, B matritsani tuzamiz:

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} / |A| & A_{12} / |A| & A_{13} / |A| \\ A_{21} / |A| & A_{22} / |A| & A_{23} / |A| \\ A_{31} / |A| & A_{32} / |A| & A_{33} / |A| \end{pmatrix}.$$

2) B matritsada uning satrlari va ustunlarini o'rinlarini almashtirib, B^* matritsani tuzamiz. B^* matritsa B martisaga nisbatan transponirlangan matritsa deb ataladi. Quyidagiga egamiz:

$$B^* = \begin{pmatrix} A_{11}/ |A| & A_{21}/ |A| & A_{31}/ |A| \\ A_{12}/ |A| & A_{22}/ |A| & A_{32}/ |A| \\ A_{13}/ |A| & A_{23}/ |A| & A_{33}/ |A| \end{pmatrix}.$$

B^* matritsa A matritsaga teskari matritsa bo'ladi.

Ikkinchi tartibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsani tuzamiz.

Bu yerda $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$, $A_{21} = -a_{12}$, $A_{22} = a_{11}$. U holda

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}/ |A| & A_{12}/ |A| \\ A_{21}/ |A| & A_{22}/ |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22}/ |A| & -a_{21}/ |A| \\ -a_{12}/ |A| & a_{11}/ |A| \end{pmatrix}$$

va demak,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{22}/ |A| & -a_{12}/ |A| \\ -a_{21}/ |A| & a_{11}/ |A| \end{pmatrix}.$$

Misol. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani tuzing.

Yechilishi. Bu matritsaning determinanti: $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-9$. $|A|\neq 0$ bo'lganligi uchun A matritsa aynimagan matritsadir va demak, unga teskari matritsa mavjuddir.

Algebralik to'ldiruvchilarni hisoblaymiz:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3,$ $\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-6,$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4,$ $\qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2,$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2,$ $\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-1$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-4.$

B matritsani tuzamiz: $\quad B=\begin{pmatrix}-3/9 & 6/9 & -3/9\\ 4/9 & -2/9 & 1/9\\ -2/9 & 1/9 & 4/9\end{pmatrix}$

Bu matritsada satrlar va ustunlarning o'rinlarini almashtirib,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3 & 4/9 & -2/9\\ 2/3 & -2/9 & 1/9\\ -1/3 & 1/9 & 4/9\end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo'ladi.

6.4. Matritsa rangi

Endi m ta satr va n ta ustunga ega bo'lgan quyidagi to'g'ri burchakli matritsani qaraymiz:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1k} & \cdots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots a_{2k} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots a_{lk} & \cdots & a_{ln}\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mk} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Bunday matritsani $m\times n$ o'lchamli matritsa deb ataymiz. Bu matritsada ixtiyoriy k ta ustun va k ta satrni ajratamiz. Ajratilgan satrlar va ustunlar kesishgan joyda turgan elementar k-tartibli kvadrat matritsa hosil qiladi.

A matritsaning k-tartibli *minori* deb, bu matritsadan ixtiyoriy k ta satr va k ta ustunni ajratishdan hosil bo'lgan kvadrat matritsaning determinantiga aytiladi.

Masalan , uchta satr va to'rtta ustunga ega bo'lgan

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Matritsa uchun uchinchi tartibli minorlardan biri $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

determinant bo'lib, u A matritsaning birinchi, ikkinchi, uchinchi satrlarini va birinchi, ikkinchi, uchunchi ustunlarini ajratishdan hosil bo'ladi. Ikkinchi tartibli minorlardan biri, masalan, $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ determinant bo'ladi. Matritsaning elementlarining o'zlarini birinchi tartibli minorlar deb qarash mumkin. Matritsaning minorlaridan ba'zilari nolga teng, ba'zilari noldan farqli bo'lishi mumkin.

Matritsaning *rangi* deb, uning noldan farqli minorlarni tartiblarining eng kattasiga aytiladi.

Agar A matritsaning rangi r ga teng bo'lsa, bu narsa A matritsada hech bo'lmaganda bitta noldan farqli r–tartibli minor borligini, biroq r dan katta tartibli har qanday minor nolga tengligini anglatadi. A matritsaning rangini $r(A)$ bilan belgilaymiz.

Matritsaning rangini aniqlashda odatda , ko'p sondagi determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Bu ishni osonlashtirish uchun maxsus usullardan foydalaniladi. Bu usullarni bayon qilishdan oldin *matritsani elementar almashtirishlar* haqidagi tushunchani kiritamiz.

Elementar almashtirishlar deb quyidagi almashtirishlarga aytiladi:

1) matritsaning biror satri (ustuni) elementlarini noldan farqli bir xil songa ko'paytirish;

2) matritsaning biror satri (ustuni) elementlariga boshqa satri (ustuni) ning mos elementlarini biror songa ko'paytirib qo'shish;

3) matritsaning satrlari (ustunlari) o'rnini almashtirish;

4) matritsaning barcha elementlari nolga teng bo'lgan satrini (ustunini) tashlab yuborish.

Bir – biridan elementar almashtirishlar orqali hosil qilinadigan matritsalar *ekvivalent matritsalar* deb ataladi. Ekvivalent matritsalar, umuman aytganda, bir-biriga teng emas, lekin *ekvivalent matritsalarning ranglari teng bo'lishini* isbotlash mumkin. Bundan matritsalarning rangini hisoblashda foydalaniladi.

Misol. Matritsaning rangini hisoblang:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Yechilishi. Berilgan matritsaning birinchi satri elementlarini 2 ga bo'lib ushbu ekvivalent matritsani hosil qilamiz:

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Matritsaning ikkinchi va uchinchi satrlaridan uning mos ravishda 3 va 5 ga ko'paytirilgan birinchi satrini ayirib, ushbu matritsani xosil qilamiz:

$$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & 7/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & -27/2 & 21/2 & 0 \end{pmatrix}$$

A_2 matritsaning uchinchi satridan 3 ga ko'paytirilgan ikkinchi satrini ayirib,

$$A_3=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsani hosil qilammiz. A_3 matritsada nollardan iborat satrni tashlab yuborib,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & 7/2 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsani hosil qilamiz, uning rangi ikkiga tengligi ravshan. Demak, berilgan matritsaning rangi ham ikkiga teng, ya'ni $r(A) = 2$.

7-§. Chiziqli tenglamalar sistemalarining umumiy nazariyasi

7.1. Chiziqli tenglamalar sistemasini determinantlar yordamida yechish

Yuqorida bayon qilingan determinantlar nazariyasini birinchi darajali tenglamalar sistemasini yechishga tatbiq qilamiz.

Ikki nomalumli ikkita tenglama sistemasi. Ikkita x va y nomalumli birinchi darajali

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

a_{ik} koeffitsiyentining belgilanishida birinchi indeks tenglama nomerini, ikkinchi indeks esa noma'lum nomerini bildiradi.

Bu sistemasini yechamiz. Buning uchun birinchi tenglamani a_{22} ga , ikkinchi tenglamani $-a_{12}$ ga hadma-had ko'paytiramiz va hosil bo'lgan tenglamalrni qo'shamiz

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = c_1a_{22} - c_2a_{12}.$$

(2)

Shunga o'xshash, birinchi tenglamani $-a_{21}$ ga, ikkinchi teng;lamani a_{11} ga hadma-had ko'paytirib va qo'shib quyidagini hosil qilamiz:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = c_2a_{11} - c_1a_{21}.$$

(3)

Lekin bunday yozish mumkin :

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ c_1a_{22} - c_2a_{12} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

$$c_2a_{11} - c_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}$$

Bu determinantlarni qisqacha bunday yozamiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

(1) sistemaning noma'lumlari oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan Δ determinant *sistemaning determinanti* deb ataladi. Δ_x($yoki\ \Delta_y$)determinant sistemaning Δ determinantidan undagi x (yoki y)noma'lum oldidagi a_{11} va a_{21} koeffitsiyentlarni (yoki a_{12} va a_{22} koeffitsiyentlarni) c_1 va c_2 ozod hadlar bilan almashtirish natijasida hosil qilinadi. (2)va (3) tengliklarni (4) ni e'tiborga olib quyidagini yozish mumkin:

$$\Delta \cdot x = \Delta_x,$$

$$\Delta \cdot y = \Delta_y \qquad (5)$$

Bunda ikki hol bo'lishi mumkin.

1. Sistemaning determinanti $\Delta \neq 0$. U holda (5) dagi tenglamalarning har birining ikkala tomonini Δ ga bo'lib, quyidagini topamiz:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad (6)$$

Yoki buni ochib yozsak:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \qquad (7)$$

(6) [yoki (7)] formulalar *Kramer formulalari* deb atalib, ular (1) sistemaning yechimini beradi.

Shunday qilib, (1) sistemaning Δ determinanti noldan farqli bo'lsa, u holda sistema yagona yechimga ega bo'lib, bu yechim (6) yoki (7) formulalar bilan aniqladi.

2. Sistemaning determinanti $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$, ya'ni $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$. Bu holda bir tenglamaning noma'lumlari oldidagi koeffitsiyenatlari ikkinchi tenglamaning noma'lumlari oldidagi koeffitsiyentlarga proporsionaldir.

Haqiqatan, koeffitsiyentlardan biri, masalan, a_{11} noldan farqli bo'lsin deb faraz qilamiz va $a_{21}/a_{11} = \lambda$ deb belgilaymiz, bundan $a_{21} = \lambda a_{11}$.

U holda $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$ tenglikdan $a_{22} = \lambda a_{12}$ ekanligini topamiz.

Buni etiborga olib, (1) sistemani bunday ko'rinishda yozish mumkin:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= c_1, \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) &= c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Bu yerda yana ikkita xususiy hol bo'lishi mumkin.

1) Ikkala Δ_x va Δ_y determinant nolga teng: $\Delta_x = c_1a_{22} - c_2a_{12} = 0$, $\Delta_y = c_2a_{11} - c_1a_{21} = 0$. Bu yerdan $c_2 = \lambda c_1$ ekanligini topamiz

(chunki $a_{22} = \lambda a_{12}$). Bu holda a_{21}, a_{22}, c_2 sonlar a_{11}, a_{12}, c_1 sonlarga proporsional va (8) sistema bunday ko'rinishda yozilishi mumkin:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1, \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = \lambda c_1. \end{cases} \qquad (9)$$

Shunday qilib, sistemaning ikkinchi tenglamasi birinchi tenglamasidan uning ikkala qismini λ ga ko'paytirish bilan hosil qilinadi, yani u birinchi tenglamaning natijasidir. Bu holda (1) sistema cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega. Masalan, y ga ixtiyoriy qiymat berib, x ning tegishli $x = \frac{c_1 - a_{12}y}{a_{11}}$ qiymatini topamiz.

Δ_x va Δ_y determinantlardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsin. Aytaylik, $\Delta_y = a_{11}c_2 - a_{21}c_1 \neq 0$ bo'lsin. U holda $a_{11}c_2 \neq a_{21}c_1$ o'rinli va demak, $c_2 \neq \lambda c_1$. Bu holda (8) dan ko'rinib turibdiki, ikkinchi

$\lambda(a_{11}x + a_{12}y) = c_2$ tenglama birinchi $a_{11}x + a_{12}y = c_1$ tenglamaga ziddir. Demak, (1) sistema yechimga ega emas (yoki odatda aytilishich, birgalikda emas).

1-misol. Ushbu sistemani yeching:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 7, \\ 4x - 5y &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Yechilishi. Bu yerda

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -22, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -41, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -24.$$

Sistemaning determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lganligi uchun u (7) formulalar bilan aniqlanadigan yagona yechimga ega:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{41}{22}; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{24}{22} = \frac{12}{11}.$$

2-misol. quyidagi sistemani yeching:

$$\left.\begin{array}{c} 2x + 5y = 3, \\ 4x + 10y = 6, \end{array}\right\}$$

Yechilishi. Bu yerda

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Ikkinchi tenglama birinchi tenglamadan uning ikkala tomonini $\lambda = 2$ ga ko'paytirish bilan hosil qilinadi. Shu sababli sistema bitta $2x + 5y = 3$ tenglamaga teng kuchli va cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega. U noma'lumga ixtiyoriy qiymatlar berib , $x = \frac{3-5y}{2}$ ni topamiz, masalan agar $y = 0$ bo'lsa u holda $x = \frac{3}{2}$; agar $y = 1$ bo'lsa u holda $x = -1$ va hokazo.

3-misol. Ushbu sistemani yeching: $\left.\begin{array}{c} 5x + 3y = 7, \\ 10x + 6y = 2. \end{array}\right\}$

Yechilishi. Bu yerda

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 36 \neq 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = -60 \neq 0.$$

Demak, berilgan sistema birgalikda emas, yani yechimlarga ega emas. Bunga bevosita ishonch hosil qilamiz. Birinchi tenglamaning ikkala qismini -2 ga hadma-had ko'paytirib va ikkinchi tenglama bilan qo'shib ziddiyatli $0 = -12$ tenglikka kelamiz.Bu esa o'rinli emas.

7.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsaviy usulda yechish

Matritsalarni ko'paytirish qoidasini tenglamalarning matritsaviy yozilishi deb ataladigan usulga tatbiq etamiz. Ushbu tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = C_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = C_2, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = C_3. \end{array}\right\}$$

Sistemaning matritsasini hamda noma'lumlar va ozod hadlar matritsa-ustunlarini qaraymiz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Ravshanki,

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

Berilgan sistemani matritsalarning tengligi te'rifidan foydalanib, quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & a_{33}x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Yoki qisqaroq yozilsa, $AX=C$ tenglik *matritsaviy tenglama* deb ataladi.

Agar sistema matritsaviy formada yozilgan bo'lib, sistemaning A matritsasi aynimagan bo'lsa, u holda bu tenglama quyidagicha yechiladi. Uning ikkala tomonini A matritsaga teskari A^{-1} matritsaga ko'paytiramiz:

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}C.$$

Matritsalarni ko'paytirishning gruppalash qonunidan foydalanib, bunday yozish mumkin: $(A^{-1}A)X=A^{-1}C$

Biroq $A^{-1}A=E$ va $EX=X$ bo'lganligi uchun matritsaviy tenglamaning yechumini quyidagi ko'rinishda hosil qilamiz:

$$X=A^{-1}C.$$

Misol. Ushbu tenglamalar sistemasini matritsaviy usulda yeching:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} &= 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 23 \\ x_2 + 2x_3 &= 13 \end{aligned}\right\}$$

Yechilishi. Bu sistema matritsaviy formada $AX=C$ ko'rinishda yoziladi.

Bu yerda

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&1\\0&1&2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}10\\23\\13\end{pmatrix}.$$

A^{-1} matritsani topamiz: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3&4/9&-2/9\\2/3&-2/9&1/9\\-1/3&1/9&4/9\end{pmatrix}$

Sistemaning yechimini $X=A^{-1}C$ ko'rinishda yozamiz:

$$X=\begin{pmatrix}-1/3&4/9&-2/9\\2/3&-2/9&1/9\\-1/3&1/9&4/9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\23\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$$

Bu yerdan matritsalarning tengligi ta'rifiga asosan $x_1=4$, $x_2=3$, $x_3=5$ ekanligi kelib chiqadi. Noma'lumlarning bu qiymatlari berilgan sistemani qanoatlantirishini bevosita tekshirib ko'rish bilan ishonch hosil qilishimiz mumkin.

7.3. Chiziqli tenglamalar sistemalari haqida umumiy ma'lumotlar

7.1. va 7.2. bo'limlarda chiziqli tenglamalar sistemalarni yechish metodlari qaralgan edi. Bu metodlar asosan tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lgan sistemalar uchun qo'llaniladi. Bu paragrafda biz noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng bo'lishi ham, undan farqli bo'lishi ham mumkin bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemalarini yechishning umumiy metodini ko'rib chiqamiz.

1. n ta noma'lumli m ta tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\left.\begin{array}{c}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1k}x_k+\cdots+a_{1n}x_n=c_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2k}x_k+\cdots+a_{2n}x_n=c_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ik}x_k+\cdots+a_{in}x_n=c_i,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mk}x_k+\cdots+a_{mn}x_n=c_m.\end{array}\right\}$$

a_{ik} koeffisientining belgilanishidagi birinchi indeks tenglama nomerini, ikkinchi indeks esa noma'lum nomerini bildiradi. Har bir noma'lum bitta indeksli x harfi bilan belgilangan bo'lib, bu indeks noma'lumning nomerini bildiradi.

Agar chiziqli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lsa, u *birgalikda*, agar yechimga ega bo'lmasa, u *birgalikda emas* deyiladi.

\Birgalikda chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lsa, u *aniqlangan*, agar cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'lsa, u *aniqmas* sistema deb ataladi.

Agar ikkita birgalikdagi tenglamalar sistemasida birining har bir yechimi ikkinchining yechimi va aksincha, ikkinchining har bir yechimi birinchining yechmi bo'lsa, bu sistemalar *teng kuchli sistemalar* deb ataladi.

Quyidagi almashtirishlar tenglamalar sistemasini unga teng kuchli sistemaga o'tkazishini isbotlash mumkin:

1) istalgan ikkita tenglamaning o'rinlarini almashtirish;

2) tenglamalardan istalgan birining ikkala tomonini noldan farqli istalgan songa ko'paytirish;

3) sistema tenglamalaridan birining ikkala tomoniga boshqa bir tenglamaning istalgan haqiqiy songa ko'paytirilgan mos qismini qo'shish.

Bu almashtirishlarni ham matritsalarni elementar almashtirishlarga qiyos qilib, *elementar almashtirishlar* deb ataymiz.

Bir nechta shunday almashtirishlardan so'ng sistemada barcha koeffisientlari va ozod hadi nolga teng bo'lgan tenglama hosil bo'lishi mumkin. Bunday tenglamani noma'lumlarning istalgan qiymatlari qanoatlantirgani uchun uni tashlab yuborish mumkin. Bu holda biz berilgan sistemaga teng kuchli, lekin undan bitta kam tenglamaga ega bo'lgan sistemani hosil qilamz.

Agar elementar almashtirishlardan so'ng sistemada chap tomonning barcha koeffisientlari nolga teng va ozod hadi esa noldan farqli tenglama hosil bo'lsa noma'lumlarning hech qanday qiymatlari bu tenglamani qanoatlantirmaydi demak, hosil bo'lgan sistema birgalikda emas. Binobarin, dastlabki berilgan sistema ham birgalikda emas.

7.4.Chiziqli tenglamalar sistemalarini yechishning Gauss metodi

Gauss metodining mohiyati quyidagidan iborat.

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k + \cdots + a_{in}x_n = c_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = c_m, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Aytaylik, sistemada birinchi noma'lum oldidagi a_{11} koeffisient noldan farqli bo'lsin: $a_{11} \neq 0$.

Dastlab sistemaning birinchi tenglamasidan boshqa barcha tenglamalaridan x_1 noma'lumni yo'qotamiz. Buning uchun eng avvalo birinchi tenglamaning ikkala tomonini $a_{11} \neq 0$ koeffisentga bo'lamiz. U holda berilgan sistemaga teng kuchli ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + \frac{a_{10}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{c_1}{a_{11}} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k + \cdots + a_{in}x_n = c_i, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = c_m, \end{array}\right\}$$

Endi sistemaning birinchi tenglamasini a_{21} ga ko'paytiramiz va ikkinchi tenglamasidan ayiramiz. So'ngra birinchi tenglamani a_{31} ga ko'paytiramiz va uchinchi tenglamadan ayiramiz va hokazo. Natijada yana berilgan sistemaga teng kuchli ushbu yangi sistemani hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + a_1'x_2 + \cdots + a_{1k}'x_k + \cdots + a_{1n}'x_n = c_1', \\ a_{22}'x_2 + \cdots + a_{1n}'x_k + \cdots + a_{1n}'x_n = c_2', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i2}'x_2 + \cdots + a_{ik}'x_k + \cdots + a_{in}'x_n = c_i', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m2}'x_2 + \cdots + a_{mk}'x_k + \cdots + a_{mn}'x_n = c_m' \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Bu yerda quyidagicha belgilashlar kiritilgan:

$$a_{ik}' = \frac{a_{ik}}{a_{11}}, a_{ik}' = a_{ik} - \frac{a_{ik}}{a_{11}}a_{i1};\ i = 2,3,\dots,m;\ k = 2,3,\dots,n;$$

$$c_1' = \frac{c_1}{a_{11}},\ c_i' = c_i - \frac{c_i}{a_{11}}a_{i1};\ i = 2,3,\dots,m.$$

Endi (2) sistemaning ikkinchi tenglamasini a'_{22} koeffisentiga bo'lamiz uni noldan farqli deb faraz qilamiz, so'ngra hosil bo'lgan sistemaning ikkinchi tenglamasini ketma-ket $a'_{32} \dots, a'_{i2} \dots, a'_{m2}$ ga ko'paytiramiz va sistemaning birinchi va ikkinchi tenglamalaridan boshqa tenglamalaridan navbati bilan ayiramiz.

Bu jarayonni davom ettirib, chap tomondagi barcha koeffisientlari nolga teng, ozod hadi esa noldan farqli tenglamani o'z ichiga olgan sistemaga ega bo'lsak bu sistema birgalikdamas. Sistema birgalikda bo'lgan holda biz

$$\left.\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1k}x_k + \dots + b_{1n}x_n &= B_1, \\ x_2 + \dots + b_{2k}x_k + \dots + b_{2n}x_n &= B_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_p + \dots + b_{pn}x_n &= B_p. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Sistemaga (bunda $p < n$), yoki

$$\left.\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1k}x_k + \dots + b_{1n}x_n &= B_1, \\ x_2 + \dots + b_{2k}x_k + \dots + b_{2n}x_n &= B_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k + \dots + b_k x_n &= B_k \\ \dots\dots\dots \\ x_n &= B_n \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

sistemaga kelamiz. (1) ko'rinishdagi sistema *pog'onali sistema*, (4) ko'rinishdagi sistema esa *uchburchak sistema* deb ataladi.

Uchburchak sistema bo'lgan holda so'nggi tenglamadan $x_n = B_n$ ni topamiz, so'ngra x_n ning qiymatini oldingi tenglamaga qo'yib, x_{n-1} ni topamiz va hokazo.

Shunday qilib, berilgan (1) tenglamalar sistemasi bir qator elementar almashtirishlarni bajargandan so'ng (4) uchburchak sistemaga keltirilsa, (1) sistema birgalikda va aniqlangan sistema bo'ladi.

Agar berilgan (1) sistema elementar almashtirishlardan so'ng (3) pog'onali sistemaga keltirilsa, u holda (1) sistema birgalikda va aniqmasdir.

Misol. Ushbu tenglamala3r sistemasini yeching:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5. \end{aligned}\right\}$$

Yechilishi. Birinchi tenglamaning barcha hadlarini $a_{11} = 2$ koeffisientiga bo'lib.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5,\\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1,\\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5.\end{aligned}\right\}$$

sistemani hosil qilamiz. Aval hosil bo'lgan bu sistemaning birinchi tenglamasini barcha hadlarini 3 ga ko'paytiramiz va ikkinchi tenglamasidan ayiramiz. So'ngra uchinchi tenglamadan birinchi tenglamani ayiramiz:

$$\left\{\begin{aligned} & x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5,\\ & 0,5x_2 - 0,5x_3 = -0,5,\\ & -1,5x_2 + 2,5x_2 = 4,5\end{aligned}\right.$$

Ikkinchi tenglamaning barcha hadlarini $a_{22} = 0,5$ ga bo'lamiz:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5,\\ x_2 - x_3 = -1,\\ -1,5x_2 + 2,5x_3 = 4,5.\end{aligned}\right.$$

Ikkinchi tenglamani $-1,5$ ga ko'paytiramiz va uchinchi tenglamadan ayiramiz. Natijada ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5,\\ x_2 - x_3 = -1,\\ x_3 = 3.\end{aligned}\right\}$$

Bundan esa ketma-ket quyidagilarni topamiz:

$$x_3 = 3,\ x_2 = -1 + 3 = 2,\ x_1 = 0,5 - 0,5x_2 + 0,5x_3 = 0,5 - 1 + 1,5 = 1.$$

Shunday qilib, uchburchak sistemaning, binobarin, unga teng kuchli dastlabki sistemaning yechimi quyidagichadir: $x_1 = 1\ x_2 = 2\ x_3 = 3.$ Berilgan sistema birgalikda va aniqlangandir.

I bob uchun o'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Vektor deb nimaga aytiladi?
2. Skalyar kattaliklar deb nimaga aytiladi?
3. Vektor kattaliklar deb nimaga aytiladi?
4. Vektorlar ustida qanday chiziqli amallar mavjud.
5. Kollinear va komplanar vektorlar deb qanday vektorlarga aytiladi?

6. Vektorlarni qo'shish va ayirish usullarini tushuntirib bering.
7. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deganda nimani tushunasiz?
8. Vektorning o 'qdagi proyeksiyasi nima?
9. Tekislikdagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi deb nimaga aytiladi?
10. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni qo'shish, ayirish va skalyarga ko'paytirishni tushuntirib bering.
11. Fazodagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi deb nimaga aytiladi?
12. Tekislikdagi va fazodagi vektorlarning chiziqli bog'liqligi qanday aniqlanadi?
13. Tekislikdagi bazis deb nimaga aytiladi?
14. Fazodagi bazis deb nimaga aytiladi?
15. Affin koordinatalari deb nimaga aytiladi?
16. Nuqtaning koordinatalari deb nimaga aytiladi?
17. Vektorning absolut qiymati (uzunligi) yoki moduli deb nimaga aytiladi?
18. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning yig'indisi, ayirmasi va vektorning songa ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
19. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish deb nimaga aytiladi?
20. Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deb nimaga aytiladi?
21. Ikki vektorning kollinearlik sharti deb nimaga aytiladi?
22. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
23. Skalyar ko'paytmaning qanday xossalari bor?
24. O'zlarining koordinatalari bilan berilgan ikki vektorni skalyar ko'paytirish formulasini keltirib chiqaring.
25. Ikki vektorning o 'zaro perpendikularlik sharti nimadan iborat?
26. Ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblash formulalarini yozing.
27. Uchinchi tartibli determinantlarni hisoblash formulalarini yozing.
28. Determinantning xossalarini yozing.
29. Yuqori tartibli determinantlar deb nimaga aytiladi?
30. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?

31. Vektor ko'paytmaning qanday xossalari bor?

32. Koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning vektor ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?

33. Vektor ko'paytmaning geometrik ma'nosi nima?

34. Uchta vektorning aralash ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?

35. Aralash ko'paytma qanday xossalarga ega?

36. Uchta vektorning komplanarlik sharti nimadan iborat?

37. Matritsa deb nimaga aytiladi?

38. Kvadrat matritsa deb nimaga aytiladi?

39. To'g'ri burchakli matritsa deb nimaga aytiladi?

40. Matritsalar ustida qanday amallar mavjud.

41. Teskari matritsa deb nimaga aytiladi?

42. Matritsa rangi deb nimaga aytiladi?

43. Chiziqli tenglamalar sistemasini determinantlar yordamida qanday yechiladi?

44. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsaviy usulda qanday yechiladi?

45. Chiziqli tenglamalar sistemasi Gauss metodi yordamida qanday yechiladi?

I bob bo`yicha mustaqil yechish uchun misollar

1. $\overline{a}(2;-1;3;4), \overline{b}(5;2;-2;6)$ vektorlar berilgan:

a) $2\overline{a}$, $5\overline{a}+3\overline{b}, \overline{a}-2\overline{b}$ vektorlarni;

b) $(\overline{a},\overline{b})$; $(3\overline{a}+b,\overline{a}-2\overline{b})$ skalyar ko'paytmalarini;

c) $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

2. Quyidagi 2-tartibli determinantlarni hisoblang:

1. $\begin{vmatrix} -7 & 6 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 9 & -8 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} \sqrt{a}+\sqrt{b} & \sqrt{a}-\sqrt{b} \\ \sqrt{a}-\sqrt{b} & \sqrt{a}+\sqrt{b} \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} \sin 1^0 & \sin 89^0 \\ -\cos 1^0 & \cos 89^0 \end{vmatrix}$

3. Quyidagi 3-tartibli determinantlarni qulay usulda hisoblang:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

4.Berilgan matritsalar ustida talab qilingan amallani bajaring.

1. $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ $2A$-B=?

2. $C=(1\ \ 2\ \ 3)$, $F=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $C*F$=?

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $A*B$=?

4. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$=?

5.*Matritsalar ustida amallarni bajaring:*

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $2A+5B$=?

2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A+B$=?

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $A*C$=?

4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & -9 & 7 \\ 1 & 5 & 8 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$=?

6. Berilgan kvadrat matritsalar uchun teskari matritsani toping:

1. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} tga & 1 \\ 2 & ctga \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

7. Quyidagi tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching.

1. $\begin{cases} x+y-3z=-1 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x+2y-4z=1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3=-1 \\ x_1-5x_2+x_3=7 \\ 2x_1+x_2-3x_3=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=2 \\ 2x_1-3x_2+x_3=-1 \\ x_1-x_2+2x_3=5 \end{cases}$

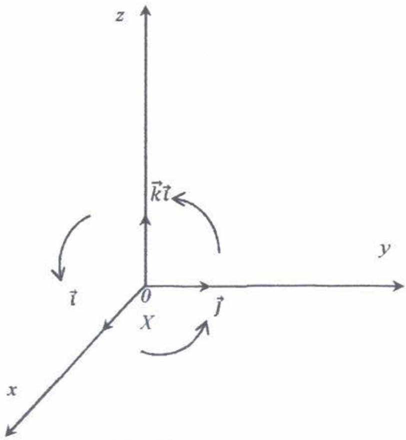
8. Quyidagi tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

1. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=3 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=-1 \\ 3x_1+2x_2-x_3=2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1-3x_2-x_3=1 \\ 3x_1+x_2+4x_3=-1 \end{cases}$

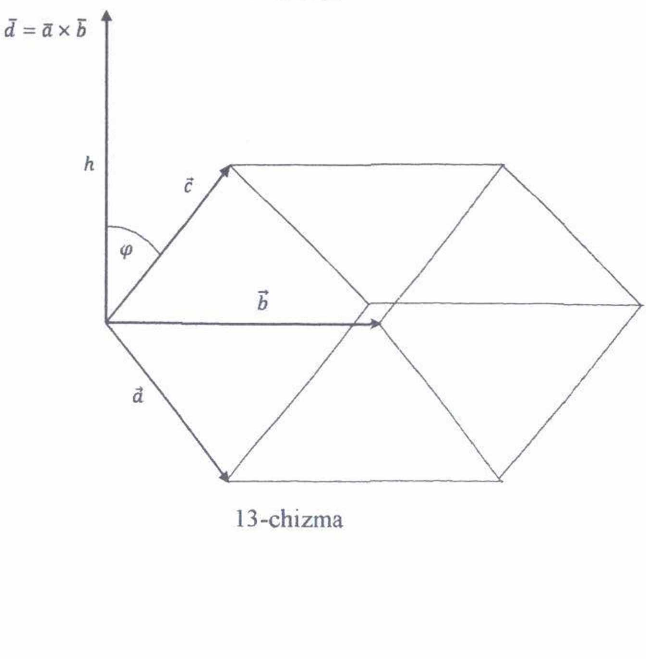
3. $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3+x_4=2 \\ 2x_1+x_2+4x_3+3x_4=1 \\ x_1+5x_2-x_3+x_4=-4 \\ 3x_1-x_2+6x_3+5x_4=0 \end{cases}$

I bob uchun chizmalar

Quyidagi chizma orqali qanday tushunchani aniqlash mumkin



12-chizma



13-chizma

II BOB. TEKISLIKDAGI ANALITIK GEOMETRIYA

1-§. To'g'ri chiziq

1.1. To'g'ri chiziqning normal vektori. Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasi

Dekart koordinatalar sistemasida to'g'ri chiziq tenglamasini keltirib chiqaramiz. Bu berilgan to'g'ri chiziq ixtiyoriy x va y dekart koordinatalarini bog'lovchi tenglamani topamiz deganidir. Bu to'g'ri chiziqda yotmagan nuqtalarning koordinatalari tenglamani qanoatlantirmaydi.

Oxy tekislikda ixtiyoriy l to'g'ri chiziqni qaraymiz (1-chizma, bob yakunida), (barcha chizmalar bobning ohirida keltirilgan). Qaralayotgan to'g'ri chiziqning birorta $M(x_1;y_1)$ nuqtasi va unga perpendikulyar bo'lgan $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}$ vektor berilgan bo'lsin. Bu vektor *to'g'ri chiziqning normal vektori* deyiladi. M_1 nuqta va $\vec{n}$ normal vektor l to'g'ri chiziqning Oxy tekislikdagi holatini to'la aniqlaydi. Aytaylik $M(x;y)$ nuqta l to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Shartga ko'ra $\vec{n}$ vektor shu to'g'ri chiziqda yotgan

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$$

vektorga perpendikulyar. Shuning uchun bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M}=0$, $\vec{n}$ va $\overrightarrow{M_1M}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini ularning proyeksiyalari orqali ifodalab quyidagiga ega bo'lamiz:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \qquad (1)$$

l to'g'ri chiziqning ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasining koordinatalari hosil qilingan tenglamani qanoatlantiradi. Agar Oxy tekislikning $M_2(x_2;y_2)$ nuqtasi l to'g'ri chiziqda yotmasa, uning koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantirmaydi, chunki bu holda $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M} \neq 0$. Shunday qilib, (1) tenglama to'g'ri chiziqning tenglamasi ekan. U *berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga perpendikulyar to'gri chiziq tenglamasi* deyiladi.

Misol. $M_1(-2;4)$ $M_2(-1;3)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n} = 5\vec{i}$-$7\vec{j}$ vektorga perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasini toping.

Yechilishi. Bu holda $A=5, B=-7$, $x=-2$ va $y=4$. (1) formulaga ko'ra $5(x+2)-7(y-4)=0$ yoki $5x-7y+38=0$ hosil bo'ladi.

1.2. Qutb koordinatalar sistemasi

Tekislikning har bir nuqtasining vaziyatini ikkita haqiqiy son yordamida aniqlashga imkon beradigan ko'pgina boshqa koordinata sistemalarini tuzish mumkin. Dekart koordinatalar sistemasidan so'ng eng ko'p ishlatiladigan sistema qutb koordinatalar sistemasidir.

Tekislikda l o'qni (ya'ni sanoq boshiga, musbat yo'nalish va masshtab birligiga ega bo'lgan to'g'ri chiziqni) qaraymiz (2-chizma, bob yakunida). Bu o'qni *qutb o'qi*, uning O sanoq boshini esa *qutb* deb ataymiz.

Aytaylik M – tekislikning qutb bilan ustma-ust tushmaydigan istalgan nuqtasi bo'lsin. Bu nuqta va qutb orqali l_1 o'q o'tqazamiz. l qutb o'qi bilan l_1 o'q orasidagi $(\widehat{l, l_1})$ burchakni φ bilan belgilaymiz va uni M nuqtaning *qutb burchagi* deb ataymiz. M nuqtaning l_1 o'qdagi koordinatasini r bilan belgilaymiz va uni M nuqtaning *qutb radiusi* deb ataymiz va r orqali belgilaymiz. M nuqta l_1 o'qning musbat qismida, yoki l_1 o'qning manfiy qismida yotishi mumkin (3-chizma, bob yakunida).

M nuqtaning φ qutb burchagi va r qutb radiusi uning *qutb koordinatalari* deb ataladi. φ son M nuqtaning qutb burchagi, r esa uning qutb radiusi bo'lgani holda $M(\varphi, r)$ yozuvdan foydalanamiz.

Kelgusida agar mahsus aytilmagan bo'lsa, l o'qdagi musbat yo'nalishni O qutbdan M nuqta tamon (bu holda $r\geq 0$), φ qutb burchakning qiymati sifatida esa
uning barcha mumkin bo'lgan qiymatlaridan $0\leq\varphi\leq 2\pi$ shartni qanoatlantiradigan qiymatini tanlashni shartlashib olamiz. U holda tekislikning qutb bilan ustma-ust tushmaydigan har bir M nuqtasiga yagona φ va r sonlar jufti – uning qutb koordinatalari mos keladi. Aksincha, agar φ va r sonlar juft berilgan bo'lsa, u holda ravshanki, ularga tekislikning bu sonlar qutb koordinatalari bo'ladigan yagona M nuqtasi mos keladi.

Dekart va qutb koordinatalari orasidagi bog'lanish. Ba'zan tekislikdagi dekart qutb koordinatalridan bir vaqtda foydalanishga to'g'ri keladi. Bunda o'zaro teskari ikki masalaning qo'yilishi tabiiydir.

1. M nuqtaning φ va r koordinatalarini bilgan holda uning x va y dekart koordinatalari topilsin.

2. M nuqtaning x va y dekart koordinatalarini bilgan holda uning φ va r koordinatalari topilsin.

Bu masalalarning hal etilishi qutb o'qi bilan dekart sistemasi o'qlarining o'zaro joylashishiga bog'liq. Biz qutb o'qi dekart sistemasining absissalar o'qi bilan ustma-ust tushadigan (va demak, qutb dekart sistemasining koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushadigan) xususiy holnigina qaraymiz. Bunda uchala o'q – qutb o'qi, Ox o'q va Oy o'q umumiy masshtab birligiga ega deb faraz qilinadi. $\cos\varphi$ va $\sin\varphi$ trigonometrik funksiyalarning ta'riflariga asoslanib, quyidagini hosil qilamiz (4-chizma, bob yakunida): $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$,

bundan $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ (2)

aniqlab linadi.

(2) formulalar nuqtaning dekart koordinatalarini uning qutb koordinatalari orqali ifodalaydi. Qutb koordinatalarini dekart koordinatalari orqali ifodalash uchun (2) tengliklarning har birining ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz, keyin esa hosil bo'lgan tengliklarni hadma-had qo'shamiz:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \text{ yoki } r^2 = x^2 + y^2$$

bu yerdan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (3).

(2) tengliklardagi ikkinchi tenglikni birinchi tenglikka bo'lib, quyidagini hosil qilamiz: $\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ (4).

(3) tenglik r qutb radiusining dekart koordinatalari orqali ifodasini beradi. (4) tenglik dekart koordinatalari bilgan holda qutb burchagining tangensini topishga imkon beradi. Biroq topilgan $\mathrm{tg}\varphi$ qiymatga φ ning ikkita qiymati ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$

shartida) mos keladi. φ qutb burchagining bu ikki qiymatidan (2) tengliklarni qanoatlantiradigani tanlanadi.

Misol. M nuqtaning $x = \sqrt{3}$ va y=1 dekart koordinatalarini bilgan holda uning qutb koordinatalarini toping.

Yechilishi. (3) va (4) formulalar bo'yicha quyidagini topamiz:

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2, \quad \mathrm{tg}\varphi = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3.$$

Tangensning bu qiymatiga φ ning ikkita qiymati mos keladi: $\varphi_1=\pi/6$ va $\varphi_2=7\pi/6$. (3) tengliklar bu holda bunday yoziladi: $\sqrt{3} = 2\cos\varphi$, $1=2\sin\varphi$.

Bu tengliklar φ ning faqat birinchi qiymatida bajariladi. Demak $\varphi=\pi/6$. Shunday qilib, M nuqta $\varphi=\pi/6$ va r=2 qutb koordinatalariga ega ekan.

1.3.To'g'ri chiziqniing umumiy tenglamasi

Avvalgi 1.1. bo'limda *Oxy* tekislikda yotuvchi ixtiyoriy l to'g'ri chiziqning *tenglamasi* (dekart koordinatalari sistemasida) (1) *ko'rinishda bo'lishi*, ya'ni *x va y koordinatalarga nisbatab birinchi darajali tenglama bo'lishi* ko'rsatilgan edi.

Aksincha, x va y koordinatalarga nisbatan *istalgan birinchi darajali*

$$Ax+By+C=0 \tag{5}$$

tenglama *Oxy* tekislikda yotuvchi birorta *to'g'ri chiziqning tenglamasi* ekanligini ko'rsataylik. Haqiqatan, (5) tenglamada A va B koeffitsiyentlardan hech bo'lmaganda bittasi nolga teng emas (aks holda tenglama $C=0$ ayniyatga ega bo'lamiz). Masalan, $B\neq 0$ bo'lsin. U holda bu tenglama

$$A(x-0) + B\left(y + \frac{C}{B}\right) = 0$$

tenglamaga teng kuchli. Biroq bu tenglama $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$ nuqtadan o'tuvchi $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}$ vektorga perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasidir. Demak, (5) tenglama bu to'g'ri chiziqning tenglamasidir. (5) ko'rinishdagi tenglama *to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi* deyiladi. Uning A va B koeffitsiyentlari mos ravishda berilgan to'g'ri chiziq normal vektorining koordinatalar o'qidagi proyeksiyalariga teng. Agar ozod had C nolga teng bo'lsa, (5) tenglama $Ax+By=0$ ko'rinishga ega va uni $x=0, y=0$ bo'lgan koordinatalar boshi qanoatlantiradi. Bunday holda to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi.

$y=0$ tenglama Ox o'qning tenglamasi ekanligini ko'rish oson, chunki buni koordinatalar boshining koordinatalari qanoatlantiradi, normal vektor $\vec{n} = \vec{j}$. Shunga o'xshash, Oy o'qning tenglamasi $x=0$ ko'rinishda bo'ladi.

1.4. To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi

Oxy tekislikda ixtiyoriy l to'g'ri chiziqni qaraymiz. Uning holati birorta $M_1(x_1; y_1)$ nuqtasining va berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan yoki shu to'g'ri chiziqda yotadigan $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j}$ vektorning berilishi bilan to'la aniqlanadi. Bu vektor l to'g'ri chiziqning *yo'naltiruvchi vektori* deyiladi.(5-chizma, bob yakunida).

Aytayli, $M(x;y)$-l to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} - (y - y_1)\vec{j}$ va $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j}$ vektorlar kollinear bo'lgani uchun ularning proyeksiyalari proporsional:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n}. \qquad (6)$$

Hosil qilingan tenglamani l to'g'ri chiziq istalgan $M(x;y)$ nuqtasinig koordinatasi qanoatlantiradi. U to'g'ri chiziqning *kanonik tenglamasi* deyiladi.

Eslatma. Agar $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tuvchi l to'g'ri chiziq Oy o'qqa parallel bo'lsa, uning tenglamasi $x = x_1$ ko'rinishda bo'ladi. Uning yo'naltiruvchi vektori $\vec{s}$ ham bu o'qqa parallel, demak, Ox o'qdagi proyeksiyasi m nolga teng. Biroq bu holda ham to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini formal ravishda

$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{n}$ (yoki $x=x_1$) ko'rinishda yoziladi. Shunga o'xshash, *Ox* o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasi $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{0}$ (yoki $y=y_1$) ko'rinishda yoziladi.

1.5. Berilgan nuqtadan berilgan yo'nalish bo'yicha o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi. To'g'ri chiziqlar dastasi

Oxy tekslikda *Ox* o'qni *M* nuqtada kesib o'tuvchi *l* to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin (6-chizma, bob yakunida). *Ox* o'q bilan *l* to'g'ri chiziq orasidagi α burchak deb, *Ox* o'qni *M* nuqta atrofida soat strelkasiga qarama-qarshi yo'nalishda harakatlantirib, uning to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushgungacha burilgan eng kichik burchakka aytiladi. Agar to'g'ri chiziq *Ox* o'q bilan ustma-ust tushsa yoki unga parallel bo'lsa, α burchak nolga teng deb hisoblanadi.

Oxy tekislikda *Oy* o'qqa parallel bo'lmagan *l* to'g'ri chiziqni qaraylik. Uning holati *Ox* o'q bilan *l* to'g'ri chiziq orasidagi α burchak va shu to'g'ri chiziqda yotgan $M_1(x_1;y_1)$ nuqta berilishi bilan to'la aniqlanadi. Yo'naltiruvch vektor sifatida *l* to'g'ri chiziq kabi *Ox* o'q bilan α burchak tashkil qiladigan

$\overrightarrow{S^0}=cos\alpha\cdot\vec{i}+cos\beta\cdot\vec{j}$ birlik vektorni olamiz. Ravshanki, $cos\beta=sin\alpha$ bo'lgani uchun $\overrightarrow{S^0}=cos\alpha\cdot\vec{i}+sin\alpha\cdot\vec{j}$ o'rinli (7-chizma, bob yakunida). Shuning uchun tenglamada $m=cos\alpha, n=sin\alpha$ deb olinsa,u holda tenglama quyidagi shaklda yoziladi:

$$\frac{x-x_1}{cos\alpha}=\frac{y-y_1}{sin\alpha}. \tag{7}$$

Bu tenglamani $y-y_1$ ga nisbatan yechib, $y-y_1=tg\alpha(x-x_1)$ ni hosil qilamiz. $tg\alpha=k$ deb belgilaylik, u holda oxirgi tenglama quyidagi

$$y-y_1=k(x-x_1) \qquad (8)$$

ko'rinishga ega bo'ladi va $k=tg\alpha$ to'g'ri chiziqning *burchak koeffisiyenti* deyiladi, (8) *tenglama berilgan nuqtadan berilgan yo'nalish bo'yicha o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi* deyiladi.

Misol. $M_1(3;-2)$ nuqtadan o'tib , Ox o'q bilan $\alpha=\pi/4$ burchak hosil qiladigan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechillishi. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentini topamiz: $k=tg\alpha=tg(\pi/4)=1$. (7) formula bo'yicha izlanayotgan $y+2=(x-3)$ yoki $x-y-5=0$ tenglama hosil bo'ladi.

Eslatma . Agar $M_1(x_1;y_1)$ nuqta orqali o'tuvchi chiziq Oy o'qqa parallel bo'lsa ($\alpha=\pi/2$), uning uchun burchak koeffitsienti $k=tg\alpha$ aniqlanmagan bo'ladi va to'g'ri chiziq tenglamasini (8) ko'rinishda yozib bo'lmaydi va bu holda $x=x_1$ ko'rinishda bo'ladi.

Tekislikdagi birorta M nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami ***to'g'ri chiziqlar dastasi*** deyiladi, M nuqta esa dastaning ***markazi*** deyiladi.

Faraz qilaylik, (8) tenglamada $M_1(x_1;y_1)$ nuqtaning koordinatalari o'zgarmasdan qolsin, burchak koeffitsiyenti k turli (ixtiyoriy tanlanadigan) qiymatlarni qabul qilsin. U holda k ning har bir son qiymatiga M_1 nuqtadan o'tadigan to'g'ri chiziq mos keladi. Aksincha, M_1 nuqta orqali o'tuvchi ixtiyoriy to'g'ri chiziq (absissalar o'qiga perpendikulyar bo'lgan $x=x_1$ to'g'ri chiziqdan tashqari) to'la aniqlangan k burchak koeffitsiyentiga ega bo'ladi va (8) ko'rinishdagi tenglama bilan aniqlanadi.

Shunday qilib, (8) tenglama k ixtiyoriy qiymatlarni qabul qilganda markazi $M_1(x_1;y_1)$ nuqtada bo'lgan to'g'ri chiziqlar dastasini ($x=x_1$ to'g'ri chiziqni hisobga olmaganda) aniqlaydi.

1.6. Berilgan ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

Tekislikda ikkita $M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$ nuqta berilgan bo'lsin. Bu nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzamiz. Uning yo'naltiruvchisi bo'lgan $\vec{s}$ vektor sifatida $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorni olamiz. U holda

$\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}-(y_2-y_1)\vec{j}$

$m=x_2-x_1, n=y_2-y_1$ da $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}$ formuladan foydalanib

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (9)$$

ga ega bo'lamiz. (9) tenglama *berilgan ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi* deyiladi.

Misol. $M_1(3;4)$ va $M_2(-4;5)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

Yechilishi. (9) formulada $x_1=3, y_1=4, x_2=-4$ va $y_2=5$ deb olinsa,

$\frac{y-4}{5-4}=\frac{x-3}{-4-3}$ o'rinli bo'ladi, yoki $x+7y-31=0$ hosil qilinadi.

1.7. Tekislikda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Ikkita to'g'ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik sharti

M nuqtada kesishadigan l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar mos ravishda $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ tenglamalar bilan aniqlansin. Bu to'g'ri chiziqlar orasidagi φ burchakning tangensini topamiz (8-chizma, bob yakunida). Biz bu to'g'ri chiziqlar bir-biriga perpendikulyar emas deb faraz qilishimiz kerak, aks holda tgφ mavjud bo'lmas edi. l_1 to'g'ri chiziq absissalar o'qi bilan α_1 burchakni, l_2 to'g'ri chiziq esa α_2 burchakni tashkil qilsin. l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar kesishadigan M nuqta orqali Ox o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz, u holda $\alpha_2=\alpha_1+\varphi$ yoki $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$.

Demak, $tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1 tg\alpha_2}$.

Biroq, $tg\alpha_1=k_1$, $tg\alpha_2=k_2$, shuning uchun $tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$ (10) o'rinli.

Shunday qilib, agar ikkita kesishuvchi l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lmasa, ular orasidagi burchakning tangensi (10) formula bo'yicha topiladi. Bunda φ burchak l_1 to'g'ri chiziqdan l_2 to'g'ri chiziqqa qarab yo'nalish bo'yicha hisoblanadi.

Agar to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa yoki ustma-ust tushsa, $\alpha_1=\alpha_2$ va

$tg\alpha_1=tg\alpha_2$, ya'ni $k_1=k_2$ (11).

Agar l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, (10) formula o'z ma'nosini yo'qotadi. Biroq bu holda to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakning kotangensini qarash mumkin: $tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1+tg\alpha_1 tg\alpha_2}{tg\alpha_2 - tg\alpha_1} = \frac{1+k_2k_1}{k_2-k_1}$.

To'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lganda $ctg\varphi = ctg\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Demak, $\frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1} = 0$, bundan $1 + k_1k_2 = 0$ yoki $k_1k_2 = -1$. (12)

Bu formula ikki to'g'ri chiziq perpendikulyar bo'lishining yetarli va zaruriy shartini ifodalaydi.

Misol. $3x+y-6=0$ to'g'ri chiziq bilan $x+2y+1=0$; $6x+2y-1=0$ va $x-3y+2=0$ to'g'ri chiziqlar hosil qilgan burchakni toping.

Yechilishi. Berilgan to'g'ri chiziqlar tenglamasini burchak koeffitsiyentli tenglama shakliga keltiramiz . Buning uchun ularning har birini y ga nisbatan yechamiz: $y=-3x+6$; $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$; $y=-3x+\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

Ko'rish mumkinki, bu to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentlari mos ravishda quyidagilarga teng : $k_1=-3$, $k_2=-1/2$, $k_3=-3$ va $k_4=1/3$. (10) formulaga ko'ra birinchi to'g'ri chiziq bilan ikkinchii to'g'ri chiziq orasidagi φ burchak tangensini topamiz: $tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1} = \frac{-\frac{1}{2}+3}{1+(-3)(-\frac{1}{2})} = 1$. Demak, $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Uchinchi to'g'ri chiziq birinchi to'g'ri chiziqqa parallel, chunki ularning burchak koeffitsiyentlari teng: $k_1 = k_2 = -3$. Ikkita parallel to'g'ri chiziq orasidagi burchak nolga teng. To'rtinchi to'g'ri chiziq birinchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar, chunki ularning burchak koeffitsiyentlari to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti (12) ni qanoatlantiradi: $k_1k_2 = (-3)\cdot\frac{1}{3} = -1$.

1.8. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

Oxy tekislida $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziq va $M_0(x_0;y_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. M_0 nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan d masofani topamiz. M_0 nuqtadan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning asosini

$M_1(x_1;y_1)$ orqali belgilaymiz (9-chizma, boob yakunida). Izlanayotgan d masofa bu perpendikulyar uzunligiga, ya'ni $\vec{d}$ vektorning moduliga teng:

$$\vec{d}=\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1)\vec{i} - (y_0 - y_1)\vec{j}.$$

Bu vektor bilan berilgan to'g'ri chiziq $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}$ normal vektorining skalyar ko'paytmasini qaraylik. Bir tomondan skalyar ko'paytmaning ta'rifidan

$\vec{n}\cdot\vec{d} = |\vec{n}||\vec{d}|cos\varphi$ ga egamiz, bunda φ- ko'paytirilayotgan vektorlar orasidagi burchak . Bu vektorlar kollinear bo'lganligi uchun ular orasidagi burchak nolga yoki π ga teng. Shuning uchun $\cos\varphi = \pm 1$. Shunday qilib,

$$\vec{n}\cdot\vec{d} = \pm|\vec{n}||\vec{d}| = \pm|\vec{n}|d. \quad (13)$$

Ikkinchi tomondan, ikkita vektorning sklayar ko'paytmasi ularning mos proyeksiyalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng:

$$\vec{n}\cdot\vec{d} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1).$$

Biroq $M_1(x_1;y_1)$ nuqta berilgan to'g'ri chiziqda yotadi, shunung uchun uning koordinatalari bu to'g'ri chiziqning tenglamasini qanoatlantiradi: $Ax_1+By_1+C=0$, bundan $Ax_1+By_1 = -C$ o'rinli. Natijada quyidagiga ega bo'lamiz: $\vec{n}\cdot\vec{d} = Ax_0 + By_0 + C.$ (14)

(13) va (14) formulalarni taqqoslab, quyidagini yozish mumkin:

$$\pm|\vec{n}|d = Ax_0 + By_0 + C,$$

bundan $d = \pm\frac{Ax_0+By_0+C}{|\vec{n}|}$ $|\vec{n}|=|A\vec{i} + B\vec{j}| = \sqrt{A^2 + B^2}$

bo'lgani uchun $d = \pm\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ yoki

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \quad (15)$$

(15) formulada suratda ifodaning absolyut qiymati turibdi, u berilgan $Ax+By+C=0$ to'g'i chiziq tenglamasining chap tomonida berilgan koordinatalar o'rniga $M_0(x_0;y_0)$ nuqtaning koordinatalarini qo'yish natijasida hosil qilinadi.

Misol. Uchburchak o'zining $A(1;2)$,$B(-2;1)$ va $C(2;3)$ uchlari bilan berilgan. Uning A uchidan tushirilgan balandligining uzunligini toping.

Yechilishi. Ikkita *B(-2;1)* va *C(2;3)* nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz: $\frac{x-2}{-2-2}=\frac{y-3}{1-3}$ yoki $x-2y+4=0$.

Balandlikning izlanayotgan uzunligini (15) formuladan *A(1;2)* nuqtadan *BC* to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa sifatida topamiz: $d = \frac{|1-2\cdot2+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

2-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

2.1. Ikkinchi tartibli egri chiziqning ta'rifi

Ta'rif. Berilgan dekart koordinatalariga nisbatan ikkinchi darajali tenglamalar bilan aniqlangan egri chiziq *ikkinchi tartibli egri chiziq* deyiladi. Umumiy holda bu tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2DX + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

bu yerda *A, 2B, C, 2D, 2E* va *F* koeffitsiyentlar haqiqiy sonlardir, bundan tashqari *A, B* yoki *C* lardan kamida bittasi noldan farqli.

Aylananing tenglamasi quyidagiga teng:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (2)$$

Bu tenglama *x* va *y* ga nisbatan ikkinchi darajali tenglama. Demak, aylana ikkinchi tartibli egri chiziq ekan. Keyingi b'limlarda to'rtta ikkinchi tartibli egri chiziq: aylana, ellips, giperbola va parabola qaraladi.

2.2. Aylana

Yuqridagi (2) tenglamada qavslarni ochib va ba'zi bir ayniy almashtirishlarni bajarib, aylananing quyidagi tenglamasini hosil qilamiz:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \quad (3)$$

Bu tenglamani ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi (1) bilan solishtirganda aylana tenglamasi uchun quyidagi ikkita shart bajarilganini ko'rish mumkin:

1) *x,y* koordinatalarning ko'paytmasi bo'lgan *xy* ko'rinishdagi had qatnashmayapti;

2) x^2 va y^2 lar oldidagi koeffitsiyentlar o'zaro teng.

Teskari masalani qaraylik. Ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasida xy k'rinishdagi had qatnashmasin va x^2, y^2 oldidagi koeffitsiyentlar o'zaro teng, ya'ni $A=C$ va $2B=0$ bo'lsin bu tenglama aylana tenglamasi bo'la oladimi?

Avvalo umumiylikni saqlagan holda (1) tenglamada $A=1$, demak, $C=1$ deb hisoblash mumkin, agar bunday bo'lmaganda tenglamaning ikkala tomonini ham A ga bo'lib yuborish mumkin edi.

$$x^2 + 2Dx + y^2 + 2Ey + F = 0 \qquad (4)$$

Bu tenglamanng chap tomonida ikkita x^2+2Dx va y^2+2Ey hadlar gruppasini ajratib ularning har birini to'la kvadaratgacha to'ldiramiz. U holda tenglama

$$x^2 + 2Dx + D^2 + y^2 + 2Ey + E^2 - D^2 - E^2 + F = 0 \quad \text{yoki}$$

$$(x + D)^2 + (y + E)^2 = D^2 + E^2 - F \qquad (5)$$

ko'rinishni oladi.

Mumkin bo'lgan uchta holni ko'ramiz:

1) $D^2+E^2-F>0$ bo'lsin, bu holda (5) tenglama yoki unga teng kuchli bo'lgan (4) tenglama ham markazi $O_1(-D;-E)$ nuqtada bo'lgan, radiusi $R=\sqrt{D^2 + E^2 - F}$ dan iborat aylanani aniqlaydi;

2) $D^2+E^2-F=0$ bo'lsin, bu holda (5) tenglama quyidagi

$$(x + D)^2 + (y + E)^2 = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Ushbu tenglamani va unga teng kuchli bo'lgan (4) tenglamani yagona $O_1(-D;-E)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi;

3) $D^2+E^2-F<0$ bo'lsin, bu holda (5) tenglama va unga tengli kuchli (4) tenglama ham hech qanday chiziqni aniqlamaydi, chunki (4) tenglamaning o'ng tomoni manfiy, chap tomoni esa kvadratlar yig'indisi bo'lganidan manfiy bo'la olmaydi.

1-misol. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ tenglama aylanani ifodalashini ko'rsating Uning markazi, koordinatalarini hamda radiusini toping.

Yechilishi. $A = C = 1$ va $2B = 0$ shartlar bu yerda bajariladi. Berilgan tenglamani boshqa ko'rinishda yozamiz:

$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)-1-4-11=0$ yoki $(x-1)^2+(y+2)^2=16$

Bunda markazi $O_1(1;-2)$ nuqtada radiusi $R=4$ bo'lgan aylana tenglamasi hosil bo'ldi.

2-misol. $x^2+y^2+6x-6y+22=0$ tenglama hech qanday chiziqni aniqlamasligini ko'rsating.

Yechilishi. Bu tenglamani quyidagicha yozamiz:

$(x^2+6x+9)+y^2-6y+9)-9-9+22=0$ yoki

$(x+3)^2+(y-3)^2=-4$

Endi bu tenglama hech qanday chiziqni aniqlamasligi ravshan.

2.3. Elllips

Ta'rif. Ellips deb tekislikning barcha shunday nuqtalari to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan shu tekislikning *fokuslar* deb ataluvchi ikki nuqtasigacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas kattalikdir (bu kattalik fokuslar orasidagi masofadan katta bo'lishi shart).

Fokuslarni F_1va F_2 orqali, ular orasidagi masofani $2c$ orqali, ellipsning har bir nuqtasidan fokuslargacha bo'lgan masofalar yig'indisiga teng o'zgarmas miqdorni $2a$ (shartga ko'ra $2a>2c$) orqali belgilaymiz.

Dekart koordinatalar sistemasini F_1 va F_2 fokuslar absissalar o'qida joylashadigan qilib, koordinatalar boshi esa F_1F_2 kesmaning o'rtasi bilan ustma-ust tushadigan qilib yasaymiz (10-chizma, bob yakunida). Bunday tanlangan sistemada fokuslar quyidagi koordinatalarga ega: chap fokus $F_1(-c;0)$ va o'ng fokus $F_2(c;0)$.

O'zimiz tanlagan koordinatalar sistemasida ellips tenglamasini chiqaramiz. Shu maqsadda ellipsning ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasini qaraylik. Ellipsning ta'rifiga ko'ra, bu nuqtadan F_1 va F_2 fokuslargacha bo'lgan masofalar yig'indisi $2a$ ga teng:

$$MF_1+MF_2=2a$$

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan foydalanib, $MF_1 = \sqrt{(x+c)+y^2}$, $MF_2 = \sqrt{(x-c)+y^2}$, ni hosil qilamiz, demak,

$$\sqrt{(x+c)+y^2}+\sqrt{(x-c)+y^2} = 2a \qquad (6)$$

Bu tenglamani soddalashtirish uchun uni

$$\sqrt{(x+c)+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)+y^2}$$

ko'rinishda yozamiz. Tenglamaning ikki tomonini kvadratga ko'tarib, quyidagini hosil qilamiz:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{x-c^2+y^2}$$

yoki soddalashtirishdan so'ng:

$$cx\text{-}a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Endi bu tenglamaning ikkala tomonini yana kvadratga oshirib,

$$c^2x^2-2cxa^2+a^4 = a^2[(x-c)^2+y^2]$$

ni hosil qilamiz yoki ayniy almashtirishlardan so'ng:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \qquad (7)$$

Ellipsning ta'rifiga ko'ra $2a>2c$ bo'lgani uchun a^2-c^2 son musbat. Agar

$$a^2-c^2 = b^2 \qquad (8)$$

belgilash kiritilsa, u holda (7) tenglama $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ yoki

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (9)$$

ko'rinishni oladi. (9) tenglama *ellipsning kanonik tenglamasi* deyiladi.

Ellipsning kanonik tenglamasidan foydalanib, uning shaklini aniqlaymiz. Dastavval tenglama x va y larning juft darajalarini o'z ichiga olishini e'tiborga olaylik. Agar birorta $M(x;y)$ uqta ellipsga tegishli bo'lsa, u holda absissalar o'qiga nisbatan $M(x,y)$ nuqtaga simmetrik bo'lgan $M'(x,-y)$ nuqta va ordinatalar o'qiga nisbatan $M(x,y)$ nuqtaga simmetrik bo'lgan $M''(-x,y)$ nuqta ham ellipsga tegishli bo'ladi. Shunday qilib, ellips ikkita o'zaro perpendikulyar o'qqa ega ekan, ular biz tanlagan koordinatalar sistemasida koordinatalar o'qi bilan ustma-ust tushadi. Ellipsning simmetriya o'qlarini ellips *o'qlari* deb, ularning kesishish nuqtalarini ellips *markazi* deb ataymiz. Ellips fokuslari joylashgan o'q (berilgan holda absissalar o'qi) *fokal o'q* deyiladi.

Ellipsning shaklini 1-chorakda aniqlaymiz. Buning uchun (9) tenglamani y ga nisbatan yechib, $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ni hosil qilamiz. Ravshanki, bu yerda $0 \leq x \leq a$, chunki ildiz ostidagi ifoda manfiy bo'lmasligi kerak. x kattalik 0 dan a gacha o'sganda y kattalik b dan 0 gacha kamayadi. Ellipsning 1-chorakda yotgan bo'lagi koordinatalar o'qida joylashgan $A(a;0)$ va $B(0;b)$ nuqtalar bilan chegaralangan yoy ekan (11-chizma, bob yakunida). Endi ellips simmetriyasidan foydalanib, ellips 11-chizmada tasvirlangan shaklga ega ekan, degan xulosaga kelamiz.

Ellipsning o'qlari bilan kesishgan nuqtalari uning *uchlari* deyiladi. Ellips simmetriyasida ellips $A(a;0)$ va $B(0,b)$ uchlaridan tashqari yana ikkita $A_1(-a;0)$ va $B_1(0;-b)$ uchlarga ega bo'lishi kelib chiqadi. Ellipsning qarama—qarshi uchlarini birlashtiruvchi AA_1 va BB_1 kesmalar va ullarning *2a* va *2b* uzunliklari mos ravishda ellipsning *katta* va *kichik o'qlari* deyiladi. a va b sonlar mos ravishda ellipsning *katta* va *kichik yarim o'qlari* deyiladi. $\frac{c}{a}$ nisbat ellipsning *ekssentrisiteti* deyiladi va odatda ε harfi bilan belgilanadi:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \quad (10)$$

$c<a$ bo'lgani uchun ellips ekssentrisiteti birdan kichik: $\varepsilon < 1$. Ekssentrisitet ellipsning shaklini xarakterlaydi. Haqiqattan, (8) formuladan

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 - \varepsilon^2$$

kelib chiqadi. Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: ellipsning ekssentrisiteti qanchalik kichik bo'lsa, uning kichik yarim o'qi b katta yarmi o'qi a dan shuncha kam farq qiladi, ya'ni ellips fokal o'q bo'ylab shuncha kam tortilgan bo'ladi. $b=a$ bo'lgan holda a radiusli aylana hosil bo'ladi: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ yoki $x^2 + y^2 = a^2$. Bunda $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - a^2} = 0$ va ellips fokuslari go'yo bitta nuqtada–aylana markazida birlashib ketadi. Aylana ekssentrisiteti nolga teng: $\varepsilon = \frac{0}{a} = 0$.

1-misol. Katta yarim o'qi a=5 va ekssentrisiteti $\varepsilon = 0{,}8$ bo'lgan holda ellipsning kanonik tenglamasini toping.

Yechilishi. Shartga ko'ra $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0{,}8$. Demak, fokuslar orasidagi masofaning yarmi $c = a \cdot 0{,}8 = 5 \cdot 0{,}8 = 4$. Biroq bu holda ellips kichik yarim o'qining kvadrati $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$. Shunday qilib, ellipsning izlangan kanonik tenglamasi quyidagicha bo'ladi: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

2-misol. $M_1(2;-3)$ nuqta orqali o'tuvchi, katta yarim o'qi *a=4* bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasini tuzing.

Yechilishi. *a=4* da ellipsning kanonik tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$M_1(2;-3)$ nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirishi kerak. Demak, $\frac{2^2}{16} + \frac{(-3)^2}{b^2} = 1$. Bundan $b^2=12$ ni topib va uni tenglamaga qo'yib, ellipsning izlangan kanonik tenglamasi hosil bo'ladi: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

2.4. Giperbola

Ta'rif. Giperbola deb, tekislikning barcha shunday nuqtalari to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan tekislikning *fokuslari* deb ataluvchi berilgan ikki nuqtasigacha bo'lgan masofalar ayirmalarining absolyut qiymatlari o'zgarmas bo'ladi (bu kattalik nolga teng bo'lmagan va fokuslar orasidagi masofalardan kichik bo'ladi).

F_1 va F_2 fokuslar orasidagi masofani *2c* orqali, giperbolaning har bir nuqtasidan fokuslargacha bo'lgan masofalar ayirmasining moduliga teng bo'lgan o'zgarmas miqdorni *2a* orqali ($0<2a<2c$ shart bo'yicha) belgilaymiz.

Ellips holida bo'lgani kabi absissalar o'qini fokuslar orqali o'tkazamiz. F_1F_2 kesmaning o'rtasini esa koordinatalar boshi deb qabul qilamiz (12-chizma, bob yakunida). Bunday sistemada fokuslar $F_1(-c;0)$ va $F_2(C;0)$ koordinatalarga ega bo'ladi. Tanlangan koordinatalar sistemasida giperbola tenglamasini chiqaramiz. Giperbolaning ta'rifiga ko'ra uning ixtiyoriy $M(x;y)$nuqtasi uchun $|MF_1 - MF_2| = 2a$ yoki

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a$$

biroq $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ va $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Demak

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (11)$$

Ellips tenglamasini keltirib chiqarishdagiga o'xshash soddalashtirishlarni bajargandan so'ng, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2), \quad (12)$$

bu (11) tenglamaning naitijasidir. Bu tenglama ellips uchun hosil qilingan (7) tenglama bilan bir xil ekanligi ko'rinib turibdi. Biroq (12) tenglamada giperbola uchun *2a<2c* bo'lgandan ayirma noldan kichik :$a^2 - c^2 < 0$. Shuning uchun

$$c^2 - a^2 = b^2 \quad (13)$$

bo'ladi. U holda (12) tenglama quyidagi ko'rinishga keltiriladi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (14)$$

U *giperbolaning kanonik tenglamasi* deyiladi.

Kanonik tenglamasidan foydalanib, giperbolaning shaklini aniqlaymiz. Bu tenglama berilgan koordinatalarning faqat juft darajalarini o'z ichiga oladi. Demak, giperbola ikkita simmetriya o'qiga ega, bu holda ular koordinatalar o'qi bilan ustma-ust tushadi. Bundan buyon giperbolaning simmetriya o'qlarini giperbolaning *o'qlari*, ularning kesishish nuqtalarini esa giperbolaning *markazi* deb ataymiz. Giperbolaning fokuslari joylashgan o'q *fokal o'q* deyiladi.

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad (15)$$

bo'lgan 1-chorakda giperbolaning shaklini tekshirib ko'ramiz. Bu yerda $x \geq a$, chunki ildiz ostida musbat son bo'lishi kerak. x miqdor a dan ∞ gacha o'sganda y miqdor 0 dan $+\infty$ gacha o'sadi.

Giperbola koordinatalari o'qiga nisbatan simmetrik joylashganidan, bu egri chiziq 12-chizmada tasvirlangan ko'rinishga ega. Giperbolaning fokal o'q bilan kesishgan nuqatalari uning *uchlari* deyiladi. Giperbola tenglamasida $y=0$ deb, uning uchlarining koordinatalarini topamiz: $x = \pm a$. Shunday qilib, giperbola ikkita uchga ega ekan: $A(a;0)$ va $A_1(-a;0)$. Giperbola ordinatalar o'qi bilan kesishmaydi. Haqiqatan, giperbola tenglamasiga $x = 0$ ni qo'yib, y uchun mavhum qiymatlarni hosil qilmiz: $y = \pm\sqrt{-b^2}$. Shuning uchun giperbolaning fokal o'qi *haqiqiy o'q*, fokal o'qqa perpendikulyar bo'lgan simmetriya o'qi esa giperbolaning *mavhum o'qi* deyiladi. Shuningdek, giperbolaning uchlarini tutashtiruvchi kesma va uning *2a* uzunligi ham *haqiqiy o'q* deb ataladi. $B(0,b)$ va $B_1(0,-b)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesma va uning *2b* uzunlig ham giperbolaning *mavhum o'qi* deb ataladi. a va b sonlar mos ravishda giperbolaning *haqiqiy* va *mavhum yarim o'qlari* deb ataladi.

Fokuslari orasidagi masofaning yarmisining giperbola haqiqiy yarim o'qiga nisbati giperbolaning *ekssentrisiteti* deyiladi va odatda ε harfi bilan belgilanadi:

$$\varepsilon = c/a \qquad (16)$$

Giperbola uchun $c > a$ bo'lganidan, giperbolaning ekssentrisiteti birdan katta: $\varepsilon > 1$. Ekssentrisiteti giperbolaning shaklini aniqlaydi. Haqiqattan (13) formuladan quyidagi kelib chiqadi: $(\frac{b}{a})^2 = (\frac{c}{a})^2 - 1 = \varepsilon^2 - 1$. Bundan ekssentrisiteti qanchalik kichik bo'lsa, giperbolaning yarim o'qlari nisbati $\frac{b}{a}$ shunchalik kichik bo'lishi ko'rinadi. Biroq $\frac{b}{a}$ nisbat giperbola asosiy to'g'ri to'rtburchagining shaklini, demak, giperbolaning o'zini shaklini ham aniqlaydi.

Giperbolaning ekssentrisiteti qanchalik kichik bo'lsa , uning asosiy to'g'ri to'rtburchagi fokal o'q yo'nalishi bo'yicha tortilgan bo'ladi.

Agar giperbolaning haqiqiy yarim o'qi mavhum yarim o'qqa teng bo'lsa *(a=b)*, u *teng tomonli (yoki teng yonli) giperbola* deyiladi. Teng tomonli giperbolaning kanonik tenglamsi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$

yoki $x^2-y^2=a^2$

ko'rinishga ega bo'ladi. Teng tomonli giperbola asimptotalarining tenglamasi $y=x$, $y=-x$ ko'rinishda bo'ladi va demak, koordinata o'qlari hsil qilgan burchaklarining bissektrisalari bo'ladi.

Teng tomonli giperbolaning ekssentrisiteti:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{a}=\sqrt{2}$$

1-misol. Fokuslari orasidagi masofa 26 ga, ekssentrisiteti esa $\frac{13}{12}$ ga teng ekanligini bilgan holda giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing.

Yechilishi. Shartga ko'ra *2c=26* va $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{13}{12}$. Demak, giperbolaning katta yarim o'qi $a=\frac{12}{13}\cdot c=\frac{12}{13}\cdot\frac{26}{2}=12.$ (13) formulaga ko'ra giperbolaning kichik yarim o'qi $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$. Giperbola tenglamasining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi: $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$.

2-misol. O'qlari koordinat o'qlari bilan ustma-ust tushadigan giperbola $M_1(-3;\frac{\sqrt{2}}{2})$ va $M_2(4;-2)$ nuqtalari orqali o'tadi. Uning kanonik tenglamasini toping.

Yechilishi. Giperbolaning kanonik tenglamsini yozamiz: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

Bu tenglamani $M_1(-3;\frac{\sqrt{2}}{2})$ va $M_2(4;-2)$ nuqtalarning koordinatalari qanoatlantiradi. Demak, $\frac{(-3)^2}{a^2}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}^2}{b^2}=1$ va $\frac{4^2}{a^2}-\frac{(-2)^2}{b^2}=1$ yoki $\frac{9}{a^2}-\frac{1/2}{b^2}=1$ va $\frac{16}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$

Bundan $a^2 = 8$ va $b^2 = 4$ ni topamiz va uni giperbolaning kanonik tenglamasiga qo'yamiz va quyidagi hosil bo'ladi: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

2.5.Parabola

Ta'rif. Parabola deb, tekislikning *fokus* deb ataluvchi berilgan F nuqtasidan va *direktrisa* deb ataluvchi to'g'ri chiziqdan baravar uzoqlashgan barcha nuqtalar to'plamiga aytiladi (fokus direktrisada yotmaydi deb faraz qilinadi).

Fokusdan direktrisagacha masofani p orqali belgilaymiz. Bu kattalik parabolaning *parametri* deyiladi.

Parabola tenglamasini keltirib chiqaramiz. Absissalar o'qini shunday joylashtiramizki, u direktrisaga perpendikulyar bo'lib, fokus orqali o'tsin va direktrisadan fokusga qarab musbat yo'nalishga ega bo'lsin (13-chizma, bob yakunida). Koordinatalar boshi sifatida fokusdan direktrisaga tushirilgan FR perpendikulyarning o'rtasini tanlaymiz. Shunday qilib, tanlangan sistemada fokus $F(\frac{p}{2}; 0)$ koordinatalarga ega. Direktrisa tenglamasi $x = -p/2$ ko'rinishni oladi.

Aytaylik, $M(x; y)$ –parabolaning nuqtasi bo'lsin. Parabolaning ta'rifiga ko'ra, $M(x; y)$ nuqtaning direktrisadan MN uzoqligi uning fokusdan bo'lgan MF masofasiga teng: $MN=MF$. 13-chizmadan ravshanki,

$$MN = NQ + QM = \frac{p}{2} + x, \qquad MF = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + (y - 0)^2}$$

Demak, $$\frac{p}{2} + x = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib,

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$

Tenglikka ega bo'lamiz va uni soddalashtirishlardan so'ng

$$y^2 = 2px \qquad (17)$$

tenglamani hosil qilamiz.

(17) tenglama *parabolaning kanonik tenglamasi* deyiladi.

Kanonik tenglamasi bo'yicha parabolaning shaklini tekshiramiz. Bu tenglamada faqat y o'zgaruvchi juft daraja bilan qatnashganligi uchun absissalar o'qi parabolaning simmetriya o'qi bo'ladi. Butun egri chiziq ordinatalar o'qidan o'ng tomonda joylashgan, chunki (17) tenglamaning chap tomoni manfiymas va demak, bu tenglamaning o'ng tomonida joylashgan x manfiy bo'la olmaydi. $x = 0$ da $y = 0$ ga egamiz. Demak, parabola koordinatalar boshidan o'tadi. x cheksiz o'sganda y ning absolyut qiymati ham cheksiz o'sadi. (17) tenglama bilan aniqlanadigan parabola 14-chizmada tasvirlangan ko'rinishga ega.

Parabolaning simmetriya o'qi *fokal o'q* deyiladi. Parabolaning simmetriya o'qi bilan kesishish nuqtasi uning *uchi* deyiladi. Berilgan holda parabolaning uchi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushadi.

Misol. $y^2 = 6x$ parabola berilgan. Uning direktrisasi tenglamasini tuzing va fokusini toping.

Yechilishi. Berilgan tenglamani parabolaning kanonik tenglamasi (17) bilan taqqoslab ko'rilsa, $2p = 6, p = 3$ bo'ladi. Parabola direktrisasining tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$ bo'lib, fokusi $p/2$ va 0 koordinatalarga ega bo'lganidan, ko'rilayotgan hol uchun direktrisa tenglamasi $x = -3/2$ va fokus $F(\frac{3}{2}; 0)$ bo'ladi.

Eslatma. Agar parabolaning fokal o'qi deb ordinata o'qini qabul qilsak, parabola tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $x^2 = 2py$.

2.6. Aylana, ellips, giperbola va parabola konus kesimlar sifatida

Berilgan to'g'ri chiziqni uni kesuvchi boshqa bir to'g'ri chiziq (aylanish o'qlari) atrofida aylantirish natijasida hosil qilingan sirt *doiraviy konus* deyiladi. Bunda aylanayotgan to'g'ri chiziq o'zining istalgan holatida konusning *yasovchisi* deb, to'g'ri chiziqning aylanish o'qi bilan kesishish nuqtasi esa konusning *uchi* deb ataladi. Konus uning *uchi* ajratib turadigan ikkita pallaga ega.

Aylana, ellips, giperbola va parabolani doiraviy konusning uchidan o'tmaydigan tekislikning kesimlari sifatida hosil qilish mumkin. Shuning uchun bu egri chiziqlar ***konus kesimlar*** deyiladi.

Agar tekislik konus o'qiga perpendikulyar bo'lsa, kesimda aylana hosil bo'ladi.

Agar tekislik o'qqa perpendikulyar bo'lmay, konusning faqat bitta pallasini kessa va uning yasovchilaridan bittasiga ham parallel bo'lmasa, kesimda ellips hosil bo'ladi.

Agar tekislik konus yasovchilaridan biriga parallel ravishda uning pallalaridan birini kessa, kesimda parabola hosil bo'ladi.

Nihoyat, agar tekislik konusning ikkala pallasini kessa, kesimda giperbola hosil bo'ladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar fan va texnikaning ko'p sohalarida keng qo'llaniladi. Bunga misollar keltiramiz.

1. Ma'lumki, quyosh sistemasining planetalari Quyosh joylashgan umumiy fokusga ega ellipslar bo'yicha harakat qiladi.

2. Agar parabola fokusiga yorug'lik manbai joylashtirilsa, paraboladan qaytgan nurlar uning o'qiga parallel holda ketadi. Projektorning tuzilishi shu xossaga asoslangan.

3. Mexanikada isbot qilinganidek, Yer yuzidan gorizontga qarab burchak ostida $v_0 = 11{,}2$ km/sek (ikkinchi kosmik tezlik) boshlang'ich tezlik bilan chiqarilgan raketa parabola bo'ylab Yer yuzidan cheksiz uzoqlashib boradi. $v_0 > 11{,}2$ km/sek boshlang'ich tezlik bilan harakat qilayotgan raketa ham Yer yuzidadan cheksiz uzoqlashib boradi, faqat - giperbola bo'ylab harakat qiladi. Nihoyat, $v_0 < 11{,}2$ km/sek boshlang'ich tezlikda raketa ellips bo'ylab

harakatlanib yana Yerga qaytib tushadi, yoki Yerning sun'iy yo'ldoshi bo'lib qoladi.

II bob uchun o'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. To'g'ri chiziqning normal vektori deb nimaga aytiladi?
2. Berilgan nuqtadan o'tuvchi, berilgan vektorga perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasi qanday topiladi?
3. Qutb koordinatalar sistemasi deb nimaga aytiladi?
4. To'g'ri chiziqniing umumiy tenglamasi qanday topiladi?
5. To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deb nimaga aytiladi?
6. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi qanday topiladi?
7. Berilgan nuqtadan berilgan yo'nalish bo'yicha o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi qanday topiladi?
8. To'g'ri chiziqlar dastasi deb nimaga aytiladi?
9. Berilgan ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi qanday topiladi?
10. Tekislikda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb nimaga aytiladi?
11. Ikkita to'g'ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik sharti deb nimaga aytiladi?
12. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa qanday topiladi?
13. Qanday chiziq ellips deyiladi? Uning kanonik tenglamasini keltirib chiqaring.
14. Qanday nuqtaga ellips markazi, qanday nuqtalarga ellips uchlari deyiladi?
15. Qanday chiziq giperbola deb ataladi? Uning kanonik tenglamasini keltirib chiqaring.
16. Giperbolaning markazi va uchlari deb qanday nuqtalarga aytiladi?
17. Ellips va giperbolaning ekssentrisiteti deb nimaga ataladi? Ularni ifodalovchi formulalarni yozing.

18. Giperbolaning direktrisasi nima? Giperbolaning fokuslari qayerda yotadi?

19. Giperbolaning asimptotalari nima?

20. Parabolaga ta 'rif bering. Uning kanonik tenglamasini yozing.

21. Aylana, ellips, giperbola va parabola konus kesimlar sifatida qanday topiladi?

II bob uchun mustaqil yechish uchun misollar

1. $\frac{x+2\sqrt{5}}{4}+\frac{y-2\sqrt{5}}{2}=0$ to'g'ri chiziq berilgan. To'g'ri chiziqning

a) umumiy tenglamasi,

b) burchak koeffitsientli tenglamasi,

c) kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing.

2. To'g'i chiziqlar orasidagi burchakni toping:

1) $\begin{cases} y=2x-3 \\ y=\frac{1}{2}x+1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-\ y+7=0 \\ 2x-3y+1=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ y=3x-4 \end{cases}$

3. A(2;3) nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasini yozing.

Bu dastadan Ox o'qi bilan 1) 45^0, 2) 60^0, 3) 135^0, 4) 0^0 burchaklar tashkil etuvchi to'g'ri chiziqni toping.

4. A(-2;5) nuqta va 2x-y=0 to'g'ri chiziqni yasang. A nuqtadan o'tuvchi va: 1) berilgan to'g'ri chiziqqa parallel;

2) berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

5. A(-4;6) nuqta berilgan. Diametri OA kesma bo'lgan aylana tenglamasini tuzing.

6. A(-6;0) nuqtadan o'tuvchi va Oy o'qiga koordinatalar boshida urinuvchi aylana tenglamasini tuzing.

7. Katta o'qi 8 va kichik o'qi 6 bo'lgan ellipsning tenglamasini tuzing.

8. $4x^2+9y^2=36$ ellips tenglamasidan uning o'qlari, fokuslari va ekstsentrisitetini toping.

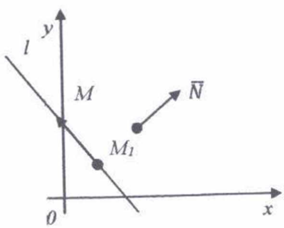
9. Fokuslari orasidagi masofa $2\sqrt{11}$ bo'lib, o'zi (9;-4) nuqtadan o'tgan giperbola tenglamasini tuzing.

10. $16x^2-2y^2=400$ giperbola tenglamasi berilgan. Uning o'qlari, fokuslari, ekstsentrisitetini toping va asimptotasining tenglamasini tuzing.

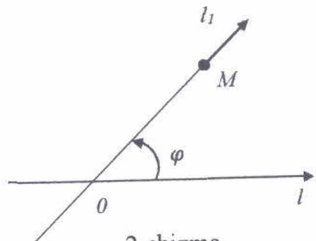
11. Parabola (3;5) nuqtadan o'tadi. Uning kanonik tenglamasini yozing.

12. Agar parabola $y=x$ to'g'ri chiziq va $x^2+6x+y^2=0$ aylananing kesishish nuqtalaridan o'tsa, uning tenglamasi va direktrisasini yozing.

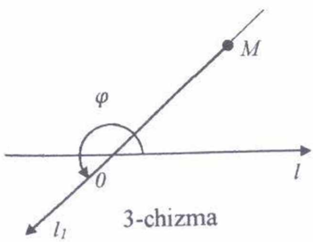
II bob uchun chizmalar



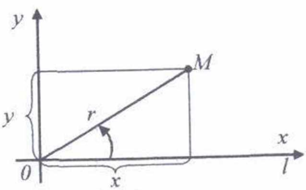
1-chizma



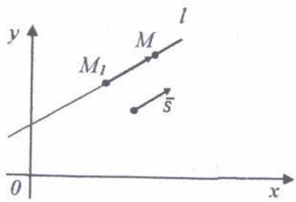
2-chizma



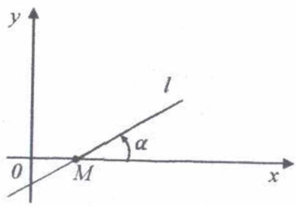
3-chizma



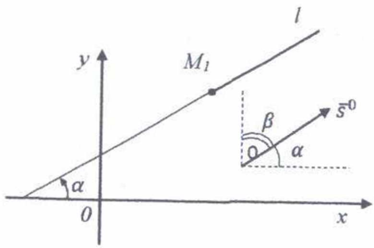
4-chizma



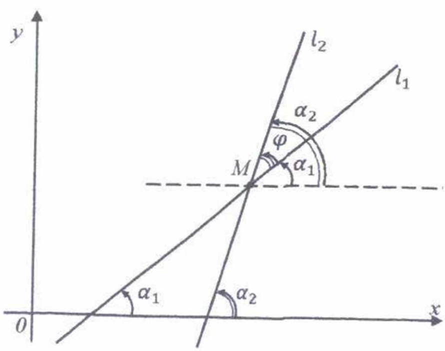
5-chizma



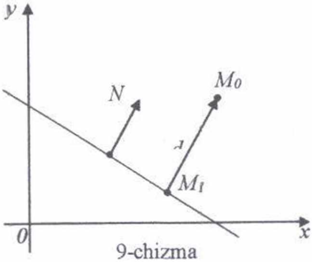
6-chizma



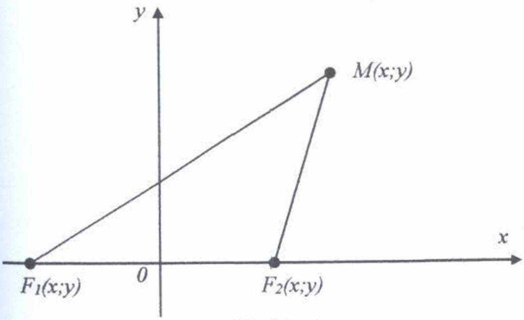
7-chizma



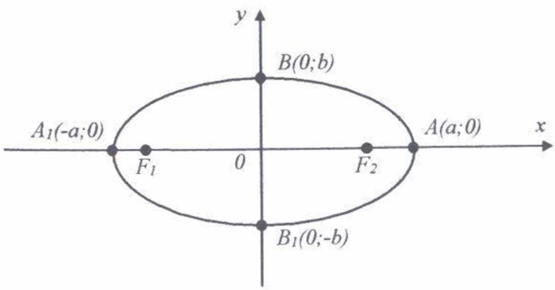
8-chizma



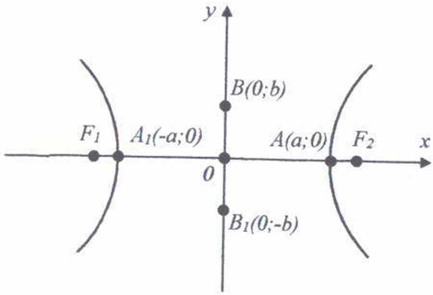
9-chizma



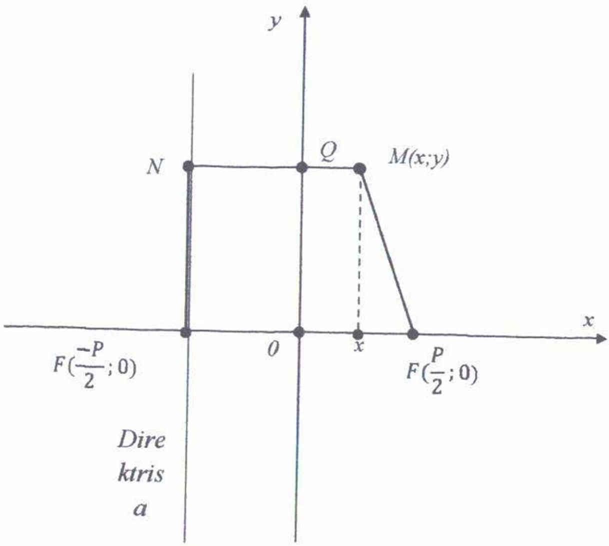
10-chizma



11-chizma



12-chizma



13-chizma

III BOB. FAZODAGI ANALITIK GEOMETRIYA

1-§. Tekislik

1.1. Sirt tenglamasi

Ma'lumki, $F(x,y)=0$ tenglama tekislikda biror chiziqni aniqlaydi, ya'ni Oxy tekislikning koordinatalari x va y bo'lgan barcha nuqtalar to'plami bu tenglamani qanoatlantiradi.

Shunga o'xshash $F(x,y,z)=0$ (1)

tenglama $Oxyz$ fazoda biror *sirtni*, ya'ni x,y va z *koordinatlari* $F(x,y,z)=0$ *tenglamani qanoatlantiradigan nuqtalar to'plamini aniqlaydi*. (1) tenglama bu sirtning tenglamasi, x, y, z o'zgaruvchilar esa koordinatalari deyiladi.

Biroq, ko'pincha, fazo tenglama bilan emas, balki u yoki bu xossaga ega bo'lgan barcha nuqtalar to'plami bilan beriladi. Bunday holda sirtning geometrik xossalaridan kelib chiqqan holda uning tenglamasini toppish talab qilinadi.

Misol. Markazi $O_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqtada radiusi R bo'lgan shar sirt (sfera) tenglamasini toping.

Yechilishi. Sferaning ta'rifiga ko'ra, uning istalgan $M(x,y,z)$ nuqtasining $O_1(x_1,y_1,z_1)$ markazidan uzoqligi R radiusga teng, ya'ni $O_1M=R$

Biroq $O_1M=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$

Demak, $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}=R$

yoki $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2$.

Biz sferaning izlangan tenglamasini hosil qildik, chunki sferaning istalgan nuqtasining koordinatalari tenglamani qanoatlantiradi va ravshanki, bu sferada yotmagan nuqtalar koordinatalari tenglamani qanoatlantirmaydi.

Xususan, agar sfera markazi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushsa, sferaning tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

1.2. Tekislikning normal vektori. Berilgan nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasi

Fazoda Q tekislikni qaraymiz. Uning holati bu tekislikka perpendikulyar bo'lgan $\vec{n}$ vektorning va Q tekislikda yotuvchi biror $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtaning berilishi bilan to'liq aniqlanadi. Q tekislikka perpendikulyar bo'lgan $\vec{n}$ vektor shu tekislikning *normal vektori* deiladi. Agar normal vektor $\vec{n}$ ning proyeksiyalari A, B va C orqali belgilasak

$$\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k} \qquad (2)$$

Berilgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta orqali o'tuvchi va berilgan (2) normal vektorga ega bo'lgan Q tekislikning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun M_1 nuqtani Q tekislikning ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtasi bilan bog'lovchi (birlashtiruvchi) $\overrightarrow{M_1M}$ vektorni qaraylik (1-chizma, bob yakunida).

Q tekislikdagi M nuqtaning ixtiyoriy holatida $\overrightarrow{M_1M}$ vektor Q tekislikning normal vektori $\vec{n}$ ga perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun skalyar ko'paytma nolga teng: $\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{n}=0$. Skalyar ko'paytma $\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{n}$ ni proyeksiyalar orqali yozamiz. $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1)\vec{i}-(y-y_1)\vec{j}+(z-z_1)\vec{k}$, $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ bo'lgani uchun $\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{n}=A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)$

va demak,

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \qquad (3)$$

Biz Q tekislikning ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtasi (3) tenglamani qanoatlantirishuni ko'rsatdik. Q tekislikda yotmagan nuqtalarning bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rish qiyin emas (oxirgi holda $\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{n}\neq 0$).Demak, biz Q tekislikning izlangan tenglamasini hosil qildik. (3) tenglama *berilgan nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasi* deyiladi. U x, y va z o'zgaruvchi koordinatalarga nisbatan birinchi darajalidir.

1-misol. $\vec{n}=2\vec{i}+4\vec{k}$ vektorga perpendikulyar, $M(1;-2;3)$ nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

Yechilishi. Bu yerda $A=2, B=0, C=4$. (3) formulaga binoan quyidagini hosil qilamiz $2(x-1)+0(y+2)+4(z-3)=0$ yoki $x+2z-7=0$

(3) tenglamaning A, B va C koeffitsiyentlariga turli qiymatlar berib, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta orqali o'tuvchi ixtiyoriy tekislik tenglamasini hosil qilish mumkin. Berilgan nuqta orqali o'tuvchi barcha tekisliklar to'plami *tekisliklar bo'g'lami* deyiladi. A, B va C koeffitsiyentlar turli qiymatlarni qabul qiladigan (3) tenglama *tekisliklar bog'lamining tenglamasi* deyiladi

2-misol. Berilgan uchta $M_1(1;-1;\ 0)$, $M_2(2;1;-3)$ va $M_3(-1;0;1)$ nuqtalar orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechilishi. M_1nuqta orqali o'tuvchi tekisliklar bo'glami tenglamasini yozamiz:

$$A(x-1)+B(y+1)+Cz=0$$

$\overrightarrow{M_1M_2}$ va $\overrightarrow{M_1M_3}$ vektorlar izlangan tekislikda yotganligi uchun ularning vektor ko'paytmasiga teng vektor bu tekislikka perpendikulyar bo'ladi va bu vektorni uning normal vektori sifatida qabul qilish mumkin:

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\ \mathrm{x}\ \overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k}.$$

Shunday qilib, $A=5$, $B=5$, $C=5$ va izlaangan tenglama quyidagi ko'rinishni oladi.

$$5(x-1)+5(y+1)+5z=0 \quad \text{yoki} \quad x+y+z=0.$$

1.3.Tekislikning umumiy tenglamasi

Endi uchta x, y va z o'zgaruvchili birinchi darajali umumiy tenglamani qaraylik:

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (4)$$

Bunda A, B yoki C koeffitsiyentlardan kamida bittasi noldan farqli, aks holda biz tenglamaga emas, balki $D=0$ ayniyatga ega bo'lar edik. Aniqlik uchun $C \neq 0$ deb, (4) tenglamani quyidagicha yozib olaylik:

$$A(x-0)+B(y-0)+C\left(z+\frac{D}{C}\right)=0 \qquad (5)$$

Bunda (5) tenglama (4) tenglamaga teng kuchli. (5) tenglamani (3) tenglama bilan taqqoslab, unga teng kuchli bo'lgan (4) tenglama ham $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ normal vektorga ega, $M_1\left(0\,;0;\,-\frac{D}{C}\right)$ nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasi ekanligini ko'ramiz. Har qanday $Ax+By+Cz+D=0$ tenglama biror tekislikning tenglamasini ifodalaydi. Bunda A, B, C koeffitsiyentlar tekislik normal vektorining koordinatalar o'qidagi proyeksiyalaridir.

(4) tenglama tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi.

Misol. $M_1(1\,;2;\,-3)$ va $M_2(4\,;2;\,1)$ nuqtalar $2x+3y-5z-23=0$ tekislikda yotish- yotmasligini aniqlang.

Yechilishi. Agar biror M nuqtaning koordinatalari biror tekislik tenglamasini qanoatlantirsagina bu tekislikda yotadi. Shuning uchun masalani yechishda M_1 va M_2 nuqtalarning koordinatalari tekislik tenglamasini bu tenglamaga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz: $2\cdot 1+3\cdot 2-5\cdot(-3)-23=0$, ya'ni M_1 nuqta tekislikda yotar ekan.

$M_2(4;2;\,1)$ nuqta uchun $2\cdot 4+3\cdot 1-5\cdot 1-23=-14\neq 0$. Demak, M_2 nuqta bu tekislikda yotmas ekan. Agar ozod had $D=0$ bo'lsa, u holda tekislikning tenglamasi $Ax+By+Cz=0$ ko'rinishni oladi va uni koordinatalar boshining $x=0, y=0,\ z=0$ koordinatalari qanoatlantiradi. Demak, tekislik koordinatalar boshi orqali o'tadi.

$x=0,\ y=0,\ z=0$ tenglamalar mos ravishda Oyz, Oxz, Oxy koordinata tekisliklarining tenglamalari ekanligiga osongina ishonch hosil qilish mumkin.

1.4. Tekisliklar orasidagi burchak. Ikkita tekislikning parallelik va perpendikulyarlik shartlari

Mos ravishda $$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

va $$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan ikkita tekisliklarini qaraylik. Ikkita tekislik orasidagi burchak deganda bu tekisliklar tashkil qilgan qo'shni ikki yoqli burchaklardan birini tushunamiz (2-chizma, bob yakunida). Tekisliklarning $\overrightarrow{n_1}$ va $\overrightarrow{n_2}$ normal vektorlari orasidagi φ burchak ravshanki, qo'shma ikki yoqli burchaklardan biriga teng. Shuning uchun $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$ ekanligidan va

$\overrightarrow{n_1} = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}, \overrightarrow{n_2} = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$

bo'lgani uchun

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (6)$$

1-misol. $x + 2y - 3z + 4 = 0,\ 2x + 3y + z + 8 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni aniqlang.

Yechilishi. (6) formulaga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + (-3)\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{5}{14}$$

Shunday qilib $\varphi = \arccos(\frac{5}{14})$ ga teng ekan.

a) Agar tekisliklarning normal vektorlari $\overrightarrow{n_1}$ va $\overrightarrow{n_2}$ kolleniar bo'lganda va faqat shundagina bir-biriga parallel;

b) Agar tekisliklarning normal vektorlari $\overrightarrow{n_1}$ va $\overrightarrow{n_2}$ perpendikulyar bo'lganda va faqat shundagina bir-biriga perpendikulyar bo'ladi.

2-misol. $M_1(-2\,;1;\ 4)$ nuqta orqali o'tuvchi, $3x + 2y - 7z + 8 = 0$ tekislikka parallel bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

Yechilishi. (3) formulaga binoan $M_1(-2\,;1;\ 4)$ nuqta orqali o'tuvchi tekisliklar bog'lami tenglamasini yozamiz:

$$A(x + 2) + B(y - 1) + C(z - 4) = 0$$

Tekisliklar bog'lamidan $3x+2y-7z+8=0$ tekislikka parallel bo'lganini ajratish kerak. Izlanayotgan va berilgan tekislik parallel bo'lgani uchun izlanayotgan tekislikning $A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ normal vektori sifatida berilgan tekislikning $\vec{n}=3\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}$ normal vektorini qabul qilish mumkin.

Demak, $A=3$, $B=2$, $C=-7$. Koeffitsiyentlarning bu qiymatlarini tenglamaga qo'yib izlangan tekislik tenglamasini hosil qilamiz:

$3(x+2)+2(y-1)-7(z-4)=0$ yoki $3x+2y-7z+32=0$

3-misol. $M_2(-2\,;3;\ 6)$ nuqta orqali $2x+3y-2z-4=0$ va $3x+5y+z=0$ tekisliklarga perpendikulyar tekislik o'tkazing.

Yechilishi. M_1 nuqta orqali o'tuvchi tekisliklar bog'lami tenglamasini yozamiz: $A(x+2)+B(y-3)+C(z-6)=0$

tekisliklar mos ravishda $\vec{n_1}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ va $\vec{n_2}=3\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ normal vektorlarga ega. Tekisliklarning perpendikulyarlik shartiga ko'ra izlangan tekislikning $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ normal vektori $\vec{n_1}$ va $\vec{n_2}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lishi kerak. Shuning uchun $\vec{n}$ vektor sifatida $\vec{n_1}$ va $\vec{n_2}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini olish mumkin:

$$\vec{n}=\vec{n_1}\mathrm{x}\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -2\\ 3 & 5 & 1\end{vmatrix}=13\vec{i}-8\vec{j}+\vec{k}$$

Demak, $A=13\,,B=-8\,,C=1$. A,B,C larning qiymatlarini tenglamaga qo'yib, izlangan tekislik tenglamasini hosil qilamiz:

$13(x+2)-8(y-3)+1(z-6)=0$ yoki $13x-8y+z+44=0.$

1.5. Nuqtada tekislikkacha bo'lgan masofa

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqta va $Ax+By+Cz+D=0$ tenglamaga ega Q tekislik berilgan bo'lsin. Ular orasidagi d masofa, ya'ni M_1 nuqtadan Q tekislikka tushirilgan perpendikulyar uzunligi quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (7)$$

buni keltirib chiqarish tekislikdagi kabi nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topish formulasini keltirib chiqarishga o'xshash bo'ladi.

Misol. $M_1(1\,;0\,;-2\,)$ nuqtadan $2x - y + 2z - 4 = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

Yechilishi. (7) formulaga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2\cdot 1 - 1\cdot 0 + 2\cdot(-2) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{6}{3} = 2$$

2-§ Fazoda to'g'ri chiziq

2.1.Fazodagi to'gri chiziq tenglamasi

Fazodagi chiziqni ikkita kesishuvchi sirtlarning har biriga tegishli bo'lgan barcha umumiy nuqtalar to'plami deb ataladi. Agar bu sirtlar $F(x\,,y\,,z\,),\Phi(x\,,y\,,z\,)$ tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ularning kesishish chiziqlari quyidagi tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi:

$$\left.\begin{matrix} F(x\,,y\,,z\,) \\ \Phi(x\,,y\,,z\,) \end{matrix}\right\} \qquad (8)$$

Masalan, $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ sferaning $z = 3$ tekislik bilan kesishishidan hosil bo'lgan aylana quyidagi tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi:

$$\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = 3 \end{matrix}\right\}$$

Ko'rsatilgan aylananing ixtiyoriy $M(x\,,y\,,z\,)$ nuqtasining o'zgaruvchi koordinatalari bu sistemaning har bir tenglamasini qanoatlantiradi.

2.2.To'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari

$M_1(x_1, y_1\,, z_1) -$ L to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqta, $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k} - L$ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori bo'lsin. L to'g'ri chiziqning o'zgaruvchi $M(x\,,y\,,z\,)$ nuqtasi bilan M_1 nuqtani birlashtiruvchi $\overrightarrow{M_1M}$ vektor $\vec{s}$

vektorga kolleniar bo'ladi (3-chizma, bob yakunida). Shuning uchun, $\overrightarrow{M_1M}$ va $\vec{s}$ vektorlarning proyeksiyalari o'zaro proporsional. $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}$ bo'lgani uchun

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \qquad (9)$$

Shunday qilib, to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari *berilgan nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari* yoki *to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari* deb ataluvchi (9) tenglamalarni qanoatlamtirishi kerak.

Misol. To'g'ri chiziqning quyidagi $\left.\begin{matrix} 2x + 3y - z + 8 = 0 \\ x - 3y + 2z + 1 = 0 \end{matrix}\right\}$

tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring.

Yechilishi. To'g'ri chiziqning tenglamasini kanonik ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

$\overrightarrow{n_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ va $\overrightarrow{n_2} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ bo'lganidan

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 9\vec{k}$$

o'rinli, shuning uchun $m = 3, n = -5, p = -9$. To'g'ri chiziqdagi M_1 nuqtani umumiy tenglamada, masalan, $z = 0$ deb topamiz:

$$\left.\begin{matrix} 2x + 3y + 8 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{matrix}\right\}$$

U holda bu tenglamalar sistemasini yechib, $x = -3, y = 2/3$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib, $M_1(-3; -\frac{2}{3}; 0)$. Demak, to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2/3}{-5} = \frac{z-0}{-9}$

2.3.Ikkita nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

L to'g'ri chiziq $M_1(x_1; y_1; z_1)$ va $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar orqali o'tsin. Bu to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzamiz. Shu maqsadda to'g'ri chiziqning $\vec{s}$ yo'naltiruvchi vektorini topamiz hamda M_1 va M_2 nuqtalarni tutashtiruvchi vektorni $\vec{s}$ yo'naltiruvchi vektor deb olamiz:

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

Demak, $m = x_2 - x_1, n = y_2 - y_1,\ \ p = z_2 - z_1$ va shuning uchun (9) tenglamalardan

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (10)$$

ga ega bo'lamiz. (10) tenglama *ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi* deyiladi.

Misol. $M_1(1;3;-5)$ va $M_2(1;4;2)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechilishi. (10) tenglamadan foydalanib, quyidagini topamiz:

$\frac{x-1}{1-1} = \frac{y-3}{4-3} = \frac{z+5}{2+5}$ yoki $\frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{7}$

$m = 0$ bo'lgani uchun berilgan to'g'ri chiziq Ox o'qqa perpendikulyar va to'g'ri chiziq tenglamasini $x = 1,\ \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{7}$ yoki $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 7y - z - 26 = 0 \end{cases}$ ko'rinishda bo'ladi.

2.4.Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

Fazoda ikkita

$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ va $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_3}{p_3}$

turli to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Ma'lumki, fazoning biror nuqtasidan berilgan to'g'ri chiziqlarga parallel qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziqlar tashkil qilgan qo'shni burchaklardan biri ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb qabul qilinadi. Bu qo'shni burchaklardan biri berilgan to'g'ri chiziqlarning $\overrightarrow{s_1}$ va $\overrightarrow{s_2}$ yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi φ burchakka teng. Ma'lumki, $\overrightarrow{s_1} = m_1\vec{i} + n_1\vec{j} + p_1\vec{k},\ \ \overrightarrow{s_2} = m_2\vec{i} + n_2\vec{j} + p_2\vec{k}$ bo'lgani uchun vektorlar orasidagi burchak kosinusi formulasiga ko'ra $cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}||\overrightarrow{s_2}|}$

yoki $cos\varphi = \frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$ (11)

o'rinli.

Ikkita to'g'ri chiziqning parallelik va perpendikulyarlik shartlari mos ravishda ularning $\overrightarrow{s_1}$ va $\overrightarrow{s_2}$ yo'naltiruvchi vektorlarining kolleniarlik va perpendikulyarlik shartlariga teng kuchli.

1-misol. $\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{-2}$, $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{5}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechilishi. (11) formulaga ko'ra

$$cos\varphi = \frac{5\cdot 3 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 5}{\sqrt{25+9+4}\cdot\sqrt{9+4+25}} = \frac{11}{38}$$

ni hosil qilamiz va $\varphi = \arccos(\frac{11}{38})$ ga teng.

2-misol. $M_1(1;2;3)$ nuqta orqali o'tuvchi $\left.\begin{matrix} 2x+3y+5z-7=0 \\ 3x-4y+z-8=0 \end{matrix}\right\}$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasini toping.

Yechilishi. To'g'ri chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y-2}{n} = \frac{z-3}{p}$$

Izlangan to'g'ri chiziq $\vec{s}$ yo'naltiruvchi vektorini $\overrightarrow{n_1} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\imath} + 5\vec{\imath}$ va $\overrightarrow{n_2} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\imath} + \vec{\imath}$ normal vektorlarning vektor ko'paytmasi sifatida topamiz.

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \text{ x } \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 23\vec{\imath} + 13\vec{\jmath} - 17\vec{k}$$

Demak, $m = 23, n = 13, p = -17$. Yo'naltiruvchi koeffitsiyentlarining bu qiymatlarini tenglamaga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz: $\frac{x-1}{23} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{-17}$.

2.5. To'g'ri chiziq va tekislikning parallellik va perpendikulyarlik shartlari

Quyidagi to'g'ri chiziq va tekislikni qaraymiz:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p} \quad (L); \quad Ax + By + Cz + D = 0. (Q)$$

Ravshanki, L to'g'ri chiziq va Q tekislik quyidagi holatda:

a) to'g'ri chiziqning $\vec{s} = \{m, n, p\}$ yo'naltiruvchi vektori va tekislikning $\vec{n} = \{A, B, C\}$ normal vektori o'zaro kolleniar bo'lgandagina perpendikulyar bo'ladi;

b) $\vec{s} = \{m, n, p\}$ va $\vec{n} = \{A, B, C\}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lgandagina bir-biriga parallel bo'ladi.

Misol. $M_1(2; -3; 4)$ nuqta orqali o'tuvchi hamda

$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{8}$ va $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+5}{2}$

to'g'ri chiziqlarga parallel tekislik tenglamasini yozing.

Yechilishi. Berilgan M_1 nuqta orqali o'tuvchi tekislilar bog'lami tenglamasini yozamiz:

$$A(x-2) + B(y+3) + C(z-4) = 0.$$

Izlangan tekislik shartga ko'ra berilgan to'g'ri chiziqlarga parallel bo'lishi uchun uning $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ normal vektori berilgan to'g'ri chiziqlarning $\vec{s_1} = \vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k}$ va $\vec{s_2} = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k}$ va yo'naltiruvchi vektorlariga perpendikulyar bo'lishi kerak. Shuning uchun $\vec{n}$ vektor sifatida $\vec{s_1}$ va $\vec{s_2}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini olish mumkin:

$$\vec{n} = \vec{s_1} \times \vec{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 30\vec{j} - 8\vec{k}$$

Demak, $A = 4, B = 30, C = -8$ Topilgan qiymatlarni berilgan tenglamaga qo'yib, 4(x-2)+30(y+3)-8(z-4)=0 yoki 2x+15y-4z+57=0 ni hosil qilamiz.

3-§. Ikkinchi tartibli sirtlar

3.1. Sfera tenglamasi

Oldingi bo'limlarda markazi $O_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ nuqtada, radiusi R bo'lgan sferaning

$$(x - x_1)^2 - (y - y_1)^2 - (z - z_1)^2 = R^2 \quad (1)$$

tenglamasi keltirib chiqarilgan edi.

Qavslarni ochib, barcha hadlarni tenglamaning chap tomoniga o`tkazib, quyidagini hosil qilamiz:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_1x - 2z_1z + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0.$$

Bu x, y, va z o`zgaruvchi koordinatalarga nisbatan ikkinchi tartibli tenglamadir. Unda koordinatalar ko`paytmasini o`z ichiga olgan had qatnashmaydi, $x^2$, $y^2$ va $z^2$ lar oldidagi koeffisientlar o`zaro teng. x^2, y^2 va z^2 oldidagi koeffisientlari o`zaro teng bo`lgan, koordinatalar ko`paytmasini o`z ichiga olgan had qatnashmagan, umuman aytganda, u sfera tenglamasidir. Aniqrog'i, bunday tenglama to'liq kvadratga ajratish natijasida hamma vaqt

$$(x - x_1)^2 - (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = k \quad (2)$$

ko`rinishga keltirilishi mumkin. Agar bunda $k>0$ bo`lsa (2) tenglama markazi $O_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtada, radiusi $R=\sqrt{k}$ bo`lgan sferaning tenglamasidir. $k=0$ da tenglamani faqat bitta $O_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi. Agar $k<0$ bo`lsa, tenglama hech qanday sirtni aniqlamaydi.

Misol. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 2 = 0$ tenglama sferaning tenglamasi ekanligini isbotlang va bu sferaning radiusi va markazini toping.

Yechilishi. Berilgan tenglamaning chap tomonida almashtirish bajarib, quyidagini hosil qilamiz:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 6z + 9) - 14 - 2 = 0$$

yoki $$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 16.$$

Markazi $O_1(1;-2:-3)$ nuqtada, radiusi $R=4$ bo`lgan sferaning tenglamasi hosil bo'ldi.

3.2. Silindrik sirtlar

Berilgan L to`g`ri chiziqni kesuvchi va berilgan l to`g`ri chiziqqa parallel bo`lgan barcha to`g`ri chiziqlardan tashkil topgan sirt silindrik sirt deyiladi. Bunda $L$ to`g`ri chiziq silindrik sirtning yo`naltiruvchisi, bu sirtni tashkil qiluvchi va l to`g`ri chiziqqa parallel bo`lgan to`g`ri chiziqlardan har biri uning yasovchisi deyiladi (4-chizma, bob yakunida). Keyinchalik yonaltiruvchilar koordinata tekisliklaridan birida yotadigan, yasovchilari esa bu tekislikka perpendikulyar koordinatalar o`qiga parallel bo`lgan silindrik sirtlarnigina qaraymiz.

Oxy tekislikda (Oxy koordinatalar sistemasida)

$$F(x,y)=0 \qquad (3)$$

tenlamaga ega bo`lgan birorta $L$ chiziqni qaraymiz. Yasovchilari $Oz$ o`qqa parallel, yo`naltiruvchisi $L$ bo`lgan silindrik sirt yasaymiz (5-chizma, bob yakunida). Agar (3) tenglamani fazodagi $Oxyz$ koordinatalar sistemasida qarasak, bu silindrik sirtning tenglamasi (3) tenglama ekanligini ko`rsatamiz. Aytaylik, $M(x;\ y;\ z)$- yasalgan silindrik sirtning ixtiyoriy tayinlangan nuqtasi bo`lsin. L yo`naltiruvchi va $M$ nuqta orqali o`tuvchi yasovchining kesishgan nuqtasini N bilan belgilaymiz. N nuqta ravshanki, M nuqtaning Oxy tekislikdagi proyeksiyasidir. Shuning uchun M va N nuqtalar bitta x absissa va bitta y ordinataga ega. Lekin N nuqta L egri chiziqda yotadi, shuning uchun u ushbu egri chiziqning (3) tenglamasini qanoatlantiradi. Demak, bu tenglamani $M(x;\ y;\ z)$ nuqtaning koordinatlari ham qanoatlantiradi, chunki y, z ni o`z ichiga olmaydi. Shunday qilib, berilgan silindrik sirtning ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtasi (3) tenglamani qanoatlantiradi. Bu sirtda yotmagan nuqtalarning koordinatalari (3) tenglamani qanoatlantirmaydi, chunki bu nuqtalar L egri chiziqdan tashqarida yotgan Oxy tekislikning nuqtalariga proeksiyalanadi.

Shunday qilib, z ni o`z ichiga olmagan $F(x,y)=0$ tenglama, agar uni fazodagi $Oxyz$ koordinatalar sistemasida olib qarasak, yasovchilari $Oz$ o`qqa parallel, L yo`naltiruvchisi $Oxy$ tekisligida o`sha $F(x,y)=0$ tenglama bilan beriladigan silindrik sirtning tenglamasi bo`ladi.

$Oxyz$ fazoda L yo`naltiruvchi quyidagi ikkita tenglama sistemasi bilan aniqlanadi

$$\begin{cases} F(x,y) = 0, \\ z = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Xuddi shunga o`xshash, $y$ ni o`z ichiga olmagan $F(x,z)=0$ tenglama va x ni o`z ichiga olmagan $F(y,z)=0$ tenglama $Oxyz$ fazoda yasovchilari mos ravishda $Oy$ va $Ox$ o`qlarga parallel bo`lgan silindrik sirtlarni aniqlashini ko`rsatish mumkin.

Silindrik sirtlarga misollar.

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (5)

tenglama bilan aniqlanadigan silindrik sirt *elliptik silindr* deyiladi (6-chizma, bob yakunida). Uning yasovchilari Oz o`qqa parallel, yarim o`qlari a va b bo`*lgan* $Oxy$ tekislikda yotgan elleps esa uning yo`naltiruvchisidir. Xususan, agar $a=b$ bo`lsa, uning yo`naltiruvchisi aylana bo`ladi, sirt esa to`g`ri doiraviy silindr bo`ladi. Uning tenglamasi: $x^2 + y^2 = a^2$.

2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ (6)

tenglama bilan aniqlanadigan silindrik sirt *giperbolik silindr* deyiladi (7-chizma, bob yakunida). Bu sirtning yasovchilari Oy o`qqa parallel, haqiqiy o`qi a, mavhum o`qi $b$ bo`lgan Oxz tekislikda joylashgan giperbola uning yo`naltiruvchisi bo`lib xizmat qiladi.

3. $y^2=2pz$ (7)

tenglama bilan aniqlanadigan silindrik sirt *parabolik silindr* deyiladi (8-chizma, bob yakunida). Oyz tekislikda yotgan parabola uning yo`naltiruvchisidir, yasovchilari esa $Ox$ o`qqa parallel.

3.3. Konus sirtlar

Berilgan L chiziqni kesuvchi barcha to`g`ri chiziqlardan tashkil topgan va berilgan P nuqta orqali o`tuvchi sirt *konus sirt* deyiladi. Bunda $L$ chiziq konus sirtning yo`naltiruvchisi, P nuqta- uning uchi, konus sirtni tashkil qiladigan har bir to`g`ri chiziq konus sirtning yasovchisi deyiladi.

Misol sifatida uchi koordinatalar boshida, yo`naltiruvchisi yarim o`qlari a va b bo`lgan Z=c tekislikda yotuvchi

$$\begin{cases} Z = c, \\ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad (8)$$

ellipsdan iborat konus sirtni qaraylik. Bu sirt *ikkinchi tartibli konus* deyiladi. Uning tenglamasini keltirib chiqaramiz.

Konus sirtning ixtiyoriy tanlangan $M(x;\ y;\ z)$ nuqtasini qaraymiz va u orqali yo`naltiruvchi bilan $N(X;\ Y;\ c)$ nuqtada kesishuvchi $OM$ yasovchini o`tkazamiz (9-chizma, bob yakunida). $O(0;\ 0;\ 0)$ va $N(X;\ Y; c)$ nuqtalar orqali o`tuvchi $OM$ to`gri chiziqning tenglamasini tuzamiz:

$$\frac{x-0}{X-0} = \frac{y-0}{Y-0} = \frac{z-0}{Z-0} \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z}.$$

Bundan $X=cx/z;$ $Y=cy/z.$ Bu ifodalarni ellepsning ikkinchi (8) tenglamasiga qo`yib, $\frac{c^2x^2}{a^2z^2} + \frac{c^2y^2}{b^2z^2}=1$ ni yoki soddalashtirishlardan so`ng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ ni hosil qilamiz. Biz ikkinchi tartibli konus tenglamasini hosil qildik. Xususan, agar $a=b$ bo`lsa, konusning yo`naltiruvchisi $\begin{cases} z = c \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ aylanadan iborat boladi, sirt esa to`g`ri doiraviy konus bo`ladi. Uning tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

3.4. Aylanma sirtlar

Oyz tekislikda yotgan L chiziq

$$\begin{cases} X = 0 \\ F(Y, Z) = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

tenglamalar bilan berilgan bo`lsin. Bu chiziqni $Oz$ o`qqa nisbatan aylantirish natijasida hosil bo`lgan sirtni qaraylik (10-chizma, bob yakunida) bu sirt *aylanma sirt* deyiladi. Uning tenglamasini topamiz. Aytaylik, $M(x;\ y;\ z)$ – aylanma sirtning ixtiyoriy tanlangan nuqtasi bo`lsin. M nuqta orqali Oz o`qqa perpendekylar bo`lgan tekislik o`tkazamiz va bu tekislikning $Oz$ o`qi va L egri chiziq bilan kesishgan nuqtalarini mos ravishda K va N orqali belgilaymiz. KM va KN kesmalar bitta aylananing radiuslaridir. Shuning uchun $KM=KN$. Lekin KN kesmaning uzunligi N nuqtaning Y ordinatasining absolyut qiymatiga teng, ya`ni $KN=|Y|$, $KM=OP=\sqrt{x^2+y^2}$. Demak, $|Y|=\sqrt{x^2+y^2}$ yoki $Y=\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Bundan tashqari ravshanki, N nuqtaning Z applikatasi, M nuqtaning z applikatasiga teng.

N nuqta (10) tenglamalar bilan berilgan chiziqda yotganligi uchun N nuqtasining Y va Z koordinatalari bu tenglamalardan ikkinchisini qanoatlantiradi. Unda Y va Z lar o`rniga ularga mos ravishda teng bo`lgan $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ va z ni qo`yib,

$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}\ z)=0$ (10) tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani aylanma sirtning istalgan $M(x;\ y;\ z)$ nuqtasining koordinatalari qanoatlantiradi. Bu sirtda yotmagan nuqtalarning koordinatalari (11) tenglamani qanoatlantirmasligini ko`rsatish mumkin. Shunday qilib, (11) tenglama (10) tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadigan $L$ chiziqning $Oz$ o`qqa nisbatan aylanishidan hosil bo`lgan aylanma sirtning tenglamasi ekan, (10) tenglamalar sistemasining ikkinchi tenglamasida y va z koordinatalarni

$$\begin{cases} Y = \pm\sqrt{x^2+y^2} \\ Z = z \end{cases} \quad (11)$$

formulalar orqali x, y, va z larga almashtirish natijasida (10) tenglama hosil qilinadi.

Misol. $\begin{cases} \frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$

ellipsning Oz o`qqa nisbatan aylanma sirtni aniqlang.

Yechilishi. Ellips tenglamasini $\frac{Y^2}{a^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ ko`rinishda yozib, unda (11) formulalarga ko`ra Y va Z larni o`zgaruvchi x, y, z lar bilan almashtirib, izlangan tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Hosil qilingan sirt *aylanma ellipsoid* deyiladi.

3. 5. Ellipsoid

Quyidagi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (13)$$

tenglama bilan aniqlanadigan sirt *ellipsoid* deyiladi. (13) tenglamaga o`zgaruvchi koordinatalar juft darajalarda kirganligidan, ellipsoid koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik bo`ladi. Ellipsoidning shaklini aniqlash uchun uni koordinatalar tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesamiz. Agar ellipsoidni $z=h(|h|<c)$ tekislik bilan kessak, kesmda L ellips hosil bo`lishini ko`rsatamiz.

Haqiqatan,

$$\begin{cases} z=h, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

tenglamalardan z applikatani yo`qotib, L kesimini Oxy tekislikka proeksiyalaydigan silindrik sirtning tenglamasini hosil qilamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1.$$

Bu tenglamadan ko`rindiki, $L$ egri chiziq yarim o`qlari

$$\bar{a}=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \qquad \bar{b}=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$$

bo`lgan ellips ekan.

Ellipsoid 11-chizmada tasvirlangan ko`rinishga ega. Xususiy $a=b$ holda aylanma ellipsoidni hosil qilamiz: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Agar uchta yarim o`q o`zaro teng (c=b=0) bo`lsa, $x^2+y^2+z^2=a^2$ sfera hosil bo`ladi.

3. 6. Giperboloidlar

Ushbu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (14)

tenglama bilan aniqlanadigan sirt *bir pallali giporboloid deyiladi.* Bu sirt uchta simmetriya o'qiga ega, chunki o'zgaruvchi x, y, z koordinatalar (14) tenglamaga juft daraja bilan kirgan. Bir pallali giperboloidni $y=0$ tekislik bilan kesib, Oxz tekistlikda yotuvchi *ABCD* giperbolani hosil qilamiz(12-chizma, bob yakunida):

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{cases}$$

Shunga o'xshash bir pallali giperboloid $x=0$ tekistlik bilan kesilsa, kesimda Oyz tekistlikda yotuvchi $EFGH$ giperbola hosil bo'ladi:

$$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}$$

Bir pallali giperboloid $z=h$ tekistlik bilan kesilganda, kesimda $BFCG$ ellips hosil bo'ladi va u quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases}\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1\\ z=h\end{cases}$$

h absolyut qiymati bo'yicha o'sishi bilan bu ellipsning yarim o'qlari

$$\bar{a}=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \quad \text{va} \quad \bar{b}=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

kamayib boradi. $h=0$ da Oxy tekistlikda yotuvchi, yarim o'qlari a va b bo'lgan ellips hosil bo'ladi.

$a=b$ da *bir pallali aylanma giperboloid* hosil bo'ladi:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \quad (15)$$

Uni $z=h$ tekisliklar bilan kesganda kesimda aylanalar hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2\left(1 + \dfrac{h^2}{c^2}\right), \\ z = h. \end{cases}$$

To'g'ri chiziqlardan bir pallali giperboloid sirtlarni yasash imkoniyatlari qurilish texnikasida keng qo'llaniladi.

Quyidagi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (16)$$

tenglama bilan aniqlanadigan sirt *ikki pallali giperboloid* deyiladi.

Ikki pallali giperboloid ikkita ayrim qismlardan iboratki, buni uning nomi ham aytib turibdi, $a = b$ da (16) tenglama

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad yoki \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2+y^2}{b^2} = 1$$

ko'rinishiga ega bo'ladi va *ikki pallali aylanma giperboloid* tenglamasini beradi.

3.7. Paraboloidlar

Quyidagi $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$ tenglama bilan aniqlanadigan sirt p va q lar bir xil ishorali bo'lgan shartda *elliptik paraboloid* deyiladi.

Quyidagi

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$$

tenglama bilan aniqlanadigan sirt p va q lar bir xil ishorali bo'lgan shartda *giperbolik parabolid* deyiladi.

Giperbolik paraboloidni to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan sirt deb qarash mumkin.

Izoh. To'g'ri chiziqlardan tashkil topgan sirtlar to'g'ri chiziqli sirtlar deyiladi. Shunday qilib, silindirik va konus sirtlar, shuningdek bir pallali giperboloid va giperbolik paraboloid to'g'ri chiziqli sirtlar ekan.

III bob uchun o'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Sirt tenglamasi deb nimaga aytiladi?
2. Tekislikning normal vektori deb nimaga aytiladi?
3. Berilgan nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasi qanday topiladi?
4. Tekislikning umumiy tenglamasi qanday topiladi?
5. Tekisliklar orasidagi burchak. Ikkita tekislikning parallelik va perpendikulyarlik shartlari qanday topiladi?
6. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa deb nimaga aytiladi?
7. Fazodagi to'gri chiziq tenglamasi qanday yoziladi?
8. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari deb nimaga aytiladi?
9. Ikkita nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi qanday yoziladi?
10. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb nimaga aytiladi?
11. To'g'ri chiziq va tekislikning parallellik va perpendikulyarlik shartlari qanday yoziladi?
12. Sferaning tenglamasi qanday yoziladi?
13. Silindrik sirtning ta'rifini aytib bering.
14. Konus sirtning ta 'rifini keltiring.
15. Aylanma sirtning ta 'rifini keltiring.
16. Ellipsoidning kanonik tenglamalarini yozing.
17. Giperboloidlarning kanonik tenglamalarini yozing.
18. Paraboloidlarning kanonik tenglamalarini yozing.

III bob uchun mustaqil yechish uchun misollar

1. $M_1(0;-1;3)$ va $M_2(1;3;5)$ nuqtalar berilgan, M_1 nuqtadan o'tuvchi va $\overrightarrow{n}=\overline{M_1M_2}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi yozilsin.

2. $M(a;a;0)$ nuqtadan o'tuvchi va $\overline{OM}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi yozilsin.

3. $A(a;-\frac{a}{2};a)$ va $B(0;\frac{a}{2};0)$ nuqtadan teng uzoqlikda bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rnining tenglamasi yozilsin.

4. $M_1(0;1;3)$ va $M_2(2;4;5)$ nuqtalardan o'tuvchi va Ox o'qqa parallel tekislik tenglamasi yozilsin.

5. Ox o'qdan va $M(0;-2;3)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi yozilsin.

6. Oz o'qdan va $M(2;-4;3)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi yozilsin.

7. $x=4$, $y=3$ to'g'ri chiziq yasalsin va uning yo'naltiruvchi vektori topilsin.

8. 1) $\begin{cases} y=3 \\ z=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=2 \\ z=x+1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=4 \\ z=y \end{cases}$

To'g'ri chiziqlar yasalsin va ularning yo'naltiruvchi vektorlari aniqlansin.

9. $A(-1;\ 2;\ 3)$ va $B(2;\ 6;\ -2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari yozilsin va uning yo'naltiruvchi kosinuslari topilsin.

10. $A(2;\ -1;\ 3)$ va $B(2;\ 3;\ 3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning tenglamalari yozilsin.

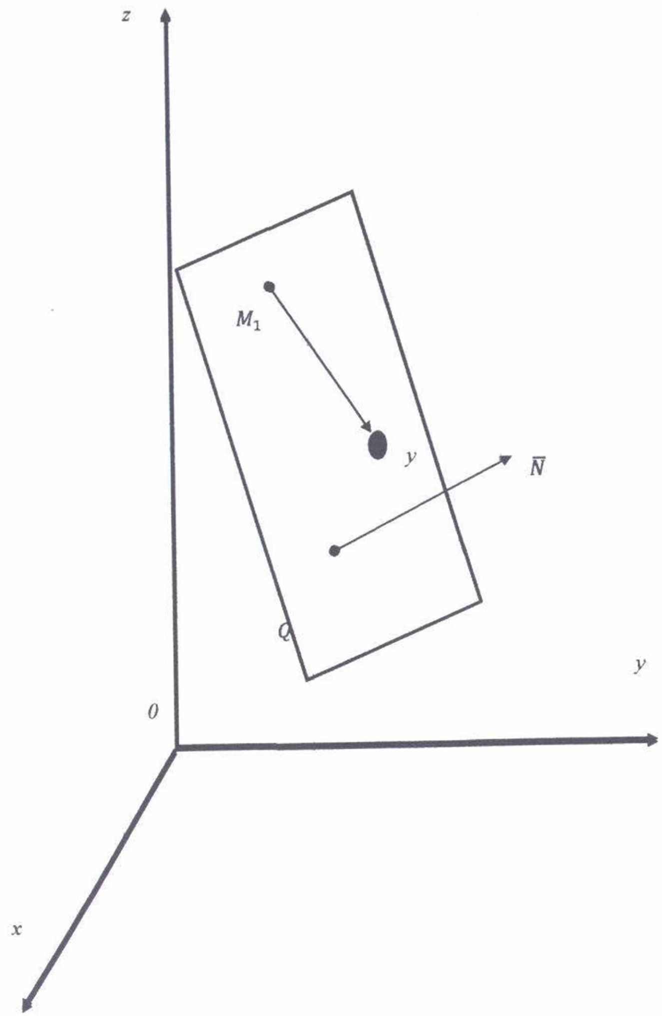
11. 1) $(-2;\ 1;\ -1)$ nuqtadan o'tuvchi va $P\{1;-2;3\}$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasi yozilsin.

2) $A(3;\ -1;\ 4)$ va $B(1;\ 1;\ 2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasi yozilsin.

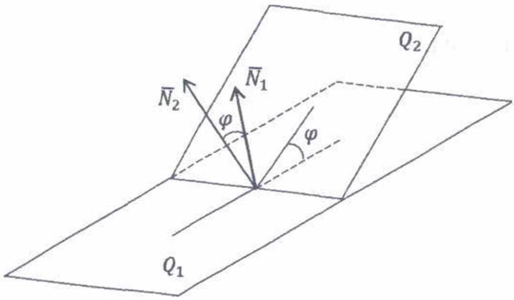
12. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$ to'g'ri chiziqdan va $(3;\ 4;\ 0)$ nuqtadan o'tuvchi tekislikning tenglamasi yozilsin.

13. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{2}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va $2x+3y-z=4$ tekislikka perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.

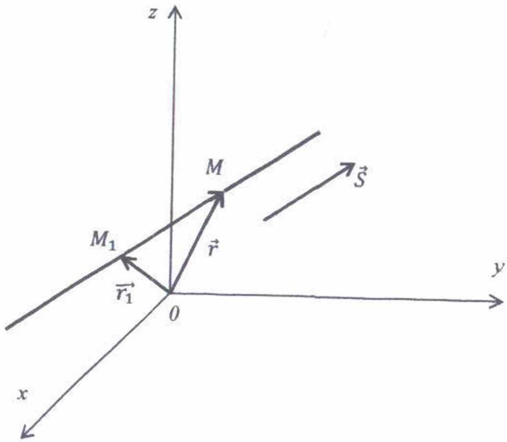
III bob uchun chizmalar



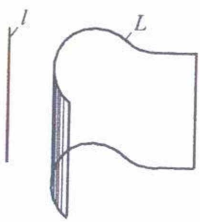
1-chizma



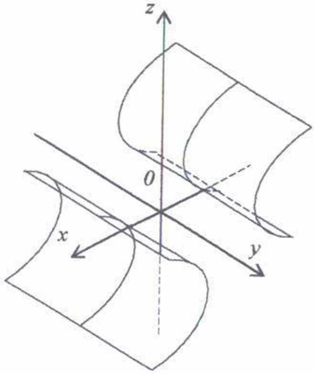
2-chizma



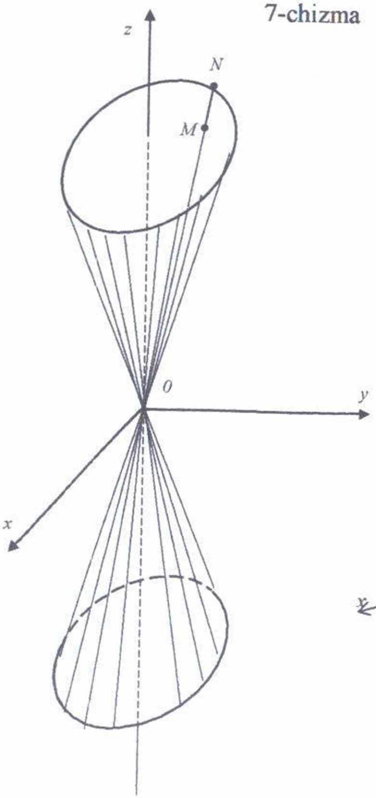
3-chizma



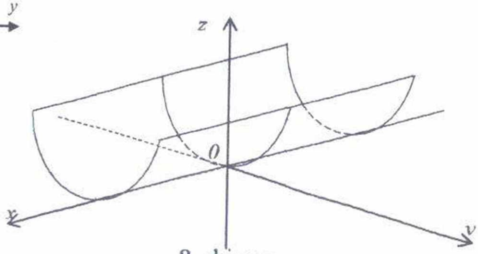
4-chizma



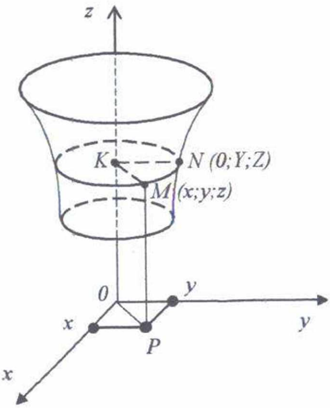
7-chizma



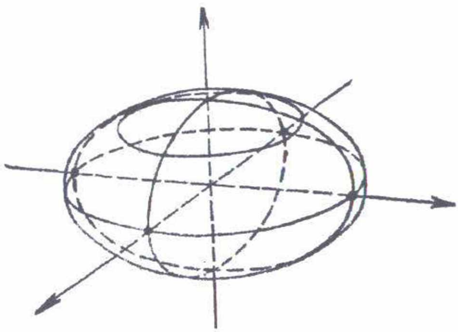
9-chizma



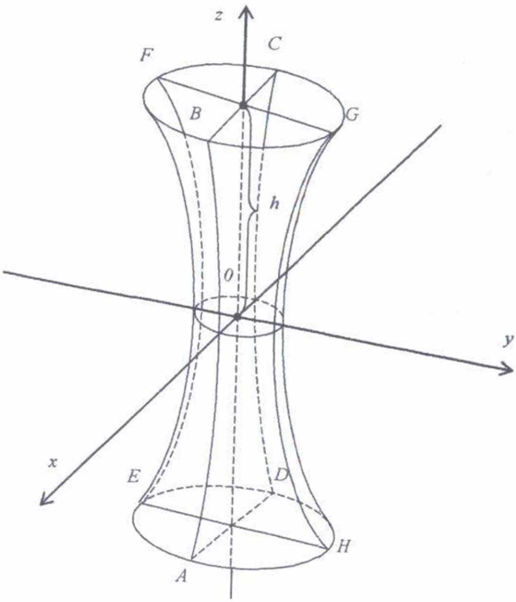
8-chizma



10-chizma



11-chizma



12-chizma

IKKINCHI BO'LIM. MATEMATIK ANALIZ

IV BOB. HAQIQIY SONLAR. KOMPLEKS SONLAR

1-§. To'plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari

1.1.To'plam tushunchasi

To'plam deganda narsalar, buyumlar, ob'yektlarni (biror xossasiga ko'ra) birgalikda bitta butun deb qarashga tushuniladi.

Masalan, hamma natural sonlarni birgalikda qarasak, natural sonlar to'plami hosil bo'ladi. Biror bir turar joyda yashovchi talabalarni birgalikda qarash bilan shu talabalar uyidagi talabalar to'plamini hosil qilamiz. To'g'ri chiziqda yotuvchi hamma nuqtalarni bitta to'plam deb qarash shu to'g'ri chiziqdagi nuqtalar to'plamini, maktabdagi o'quvchilarni birgalikda qarash o'quvchilar to'plamini beradi va h. k.

1-ta'rif. To'plamni tashkil etuvchi narsalar, buyumlar, ob'yektlar to'plamning elementlari deb ataladi. Masalan, yuqoridagi misollardagi o'quvchilar, talabalar, natural sonlar mos to'plamlarning elementlari hisoblanadi. To'plamlar, odatda, lotin yoki grek alfavitining bosh harflari bilan, ularning elementlari esa alfavitning kichik harflari bilan belgilanadi.

A to'plamning $a, b, c, d, \ldots, \alpha, \beta, \gamma$ elementlaridan tuzilganligi

$A = \{a, b, c, d, \ldots, \alpha, \beta, \gamma\}$ ko'rinishda yoziladi.

2-ta'rif. Bitta ham elementga ega bo'lmagan to'plam bo'sh to'plam deb ataladi va $\emptyset$ bilan belgilanadi.

a element A to'plamning elementi ekanligi $a \in A$ yoki $A \ni a$ ko'rinishda belgilanadi va «a element A to'plamning elementi», «a element A to'plamga tegishli», «a element A to'plamda mavjud» yoki «a element A to'plamga kiradi» va shu kabi ataladi.

a element A to'plamning elementi emasligi $a \notin A$ yoki $A \not\ni a$ belgi bilan ko'rsatiladi. Masalan, $A = \{a, b, c\}$ to'plam uchun $a \in A$, $c \in A$, lekin $e \notin A$.

To'plamni tashkil etuvchi elementlar soni chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Birinchi holda chekli to'plamga, ikkinclii holda cheksiz to'plamga ega bo'lamiz. Masalan, $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, b, d\}$ to'plamlar chekli bo'lib, ular mos ravishda bitta, ikkita va uchta elementlardan tuzilgan. Quyidagi $A = \{1,2,3, \dots, n, \dots\}$, $B = \{2,4,6, \dots, 2n, \dots\}$ to'plamlar cheksiz.

Izoh. A to'plamda faqat a element o'z-o'ziga teng, lekin har qanday ikkita boshqa-boshqa a va b elementni tengmas deb hisoblaymiz, bundan A to'plamning har bir elementi bu to'plamda bir martagina olinganligi (bir martagina uchraganligi) ma'lum bo'ladi. a elementning o'z-o'ziga tengligi $a = a$ ko'rinishda, a va b elementlarining har xilligi $a \neq b$ ko'rinishida belgilanadi.

Agar A to'plamning a elementi B to'plamning b elementiga teng, ya'ni $a = b$ desak, bundan bitta element ikkala to'plamda har xil harflar bilan belgilanganligini tushunamiz.

3-ta'rif. A to'plamning har bir elementi B to'plamda ham mavjud bo'lsa va aksincha, B to'plamning har bir elementi A to'plamda ham mavjud bo'lsa, A va B to'plamlarni teng (bir xil) deb ataladi va uni $A = B$ va $B = A$ ko'rinishda belgilaymiz.

Ta'rifdan ma'lumki, ikki to'plamning tengligi ularning aslida bitta to'plam ekanligini bildiradi. Shunga o'xshash, bir qancha to'plamlarning tengligi haqida gapirish mumkin.

4-ta'rif. B to'plamning har bir elementi A to'plamda ham mavjud bo'lsa, B ni A to'plamning to'plam ostisi (qismi, qism to'plami) deyiladi va uni quyidagicha belgilaymiz: $B \subset A$ yoki $A \supset B$.

Izoh. Bu ta'rifdan ko'rinadiki, B to'plamning hamma elementlari A da mavjud bo'lgan holda, A da B ga kirmagan boshqa elementlar bo'lmasa, $A = B$ yoki $B = A$ tenglikka kelamiz.

Shuning bilan birga 4-ta'rifdan bo'sh to'plam va har bir to'plam o'zining to'plam ostisi (qism to'plami) ekanligi ko'rinadi. Masalan, $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ to'plam uchun $B = \{a\}$, $C = \{b, d, f\}$, $D = \{d, g\}$ to'plamlarning har qaysisi to'plam osti (qism to'plam)dir.

Agar A to'plamning har bir elementiga B to'plamning yagona bir elementi mos kelsa, A va B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi deyiladi. Agar A va B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsa, ular ekvivalent deyiladi va $A \backsim B$ ko'rinishda belgilanadi. Masalan, natural sonlar to'plami N barcha juft sonlar to'plami M bilan ekvivalent.

Haqiqatan ham, natural sonlar to'plami N bilan barcha juft sonlar toplami M orasida o'zaro bir qiymatli moslikni o'rnatish oson, har bir natural son $n \in N$ ga $m = 2n \in M$ juft soni mos keladi va aksincha.

Ikkita chekli to'plam orasida ekvivalentlikni o'rnatishning ikkita yo'li bor:

1) to'plamlar elementlari orasida bevosita o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish orqali;

2) to'plamlar elementlarini sanash va ularni har biridagi elementlar sonini taqqoslash yo'li bilan.

Masalan, agar $A = \{1,2,3\}$ va $B = \{\text{stol}, \text{stul}, \text{parta}\}$ bo'lsa, u holda bu to'plamlar chekli ekvivalent bo'lib, bar bir to'plam uchta elementga ega. Agar n elementdan tashkil topgan chekli to'plamning elementlarini biror tarzda $1, 2, 3, 4, \dots, n$ natural sonlar bilan nomerlash mumkin bo'lsa, u nomerlangan yoki tartibga keltirilgan deyiladi.

Masalan, guruhdagi talabalar to'plami tartibga keltirilgan, chunki ularning ism-shariflarini guruh jurnalida natural sonlar yordamida nomerlash mumkin.

5-ta'rif. B to'plamning barcha elementlari A to'plamda mavjud bo'lib, shu bilan birga A da B ga tegishli bo'lmagan elementlar ham mavjud bo'lsa, B to'plam A to'plamning xos qism to'plami deyiladi.

6-ta'rif. A to'plamning o'zi va $\emptyset$ to'plam shu A to'plamning xosmas qism to'plami deyiladi.

1.2. To'plamlar ustida amallar

Ta'rif. $a, b, c, d,$ elementlar A va B to'plamlarning har birida mavjud bo'lsa, ular bu to'plamlarning umumiy elementlari deyiladi.

Masalan, $A = \{a, b, c, d, e, f\}$; $B = \{a, b, d\}$ to'plamlar uchun a, b, d — umumiy elementlar.

1) *To'plamlar kesishmasi (ko'paytmasi).* A va B to'plamlarning faqat umumiy elementlaridan tuzilgan C to'plam A va B to'plamlarning kesishmasi (ko'paytmasi) deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$C = A \cdot B$ yoki $C = A \cap B$,

bu yerda: $\cap$ belgi to'plamlarning kesishmasini bildiradi.

Bitta ham umumiy elementga ega bo'lmagan to'plamlarning kesishmasi bo'sh ($\emptyset$) to'plamga teng.

Masalan, 1) $A = \{a, b, c, d, e\}$ va $B = \{a, c, d, e, b\}$ to'plamlar uchun: $A \cap B = \{a, b, c, d, e\}$.

2) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{5,6,7,8\}$ va $C = \{5,6,7,8,9,10,11\}$ to'plamlarning kesishmasi ushbuga teng: $A \cap B \cap C = \{5,6\}$;

3) $A = \{2,3,4\}$ va $B = \{7,8,9\}$ to'plamlarning kesishmasi ushbuga teng: $A \cap B = \emptyset$.

To'plamlaming kesishmasi geometrik nuqtai nazardan figuralarning kesishmasiga mos keladi. 1-a chizmada (chizmalar bob yakunida keltirilgan) shtrixlangan qism A va B to'plamlarning kesishmasini bildiradi. 1-b chizmada

CB kesma AB va CD kesmalar kesishmasini ifodalaydi. 1-d chizmada EF va KL kesmalar kesishmaydi, demak kesishma bo'sh to'plam.

Xususiy holda: $A \cap A \cap A \ldots = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$.

Yuqoridagi fikr mulohazalar to'plamlar soni ikkitadan ortiq bo'lgan hol uchun ham o'rinli.

2) *To'plamlar birlashmasi (yig'indisi).* Berilgan A va B to'plamlarning birlashmasi (yig'indisi) deb A va B to'plamlarning kamida bittasiga tegishli bo'lgan hamma elementlardan tuzilgan C to'plamga aytiladi. Yig'indi $C = A + B$ yoki $C = A \cup B$ ko'rinishda belgilanadi.

To'plamlarda har bir element bir martagina olinishi lozim bo'lgani uchun, to'plamlardan har ikkalasining umumiy elementlari C yig'indida bir martagina olinadi.

Misollar

1) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ to'plamlamning birlashmasi ushbuga teng: $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$;

2) $A = \{3,4,5,6\}$ va $B = \{6,7,8,9,10\}$ to'plamlar uchun $A \cup B = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ga teng.

To'plamlarning birlashmasi geometrik nuqtai nazardan figuralarning barcha nuqtalaridan tashkil topgan to'plamni bildiradi.2-a,b chizmalarda shtrixlangan yuza A to'plamlarning birlashmasini bildiradi.

Xususiy holda: $A \cup A \cup A \cup \ldots = A \quad A \cup \emptyset = A$

Agar $B \subset A$ bo'lsa, $A \cup B = A$ dir.

To'plamlar soni ikkitadan ortiq bo'lganda ham birlashma uchun chiqarilgan xulosalar to'g'ri bo'ladi.

3) *To'plamlar ayirmasi.* Berilgan A to'plamdan B to'plamning ayirmasi deb A ning B da mavjud bo'lmagan hamma elementlaridan tuzilgan to'plamga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$C = A - B$ yoki $C = A \setminus B$

Misollar

1) $A = \{1,2,3,4\}$ va $B = \{3,4,5,6,7,8\}$ uchun $R = A \backslash B = \{1,2\}$;

2) $A = \{1,2,3,4,5\}$ va $B = \{6,7,8\}$ uchun $R = A \backslash B = \{1,2,3,4,5\}$;

3) $A = \{1,2,3\}$ va $B = \{1,2,3,4,5\}$ uchun $R = A \backslash B = \emptyset$.

To'plamlarning (A va B ning) ayirmasi geometrik nuqtayi nazardan 3- chizmada ko'rsatilgan shtrixlangan yuzani bildiradi.

Xususiy holda: $A \backslash A = \emptyset$, $A \backslash \emptyset = A$.

4) *To'plam to'ldiruvchisi.* A to'plam va uning B qismi berilgan bo'lsin, ya'ni $B \subset A$; A to'plamning B ga kirmay qolgan hamma elementlardangina tuzilgan qismi B ning to'ldiruvchisi deb ataladi va $\bar{B}$ ko'rinishda belgilanadi.

Bunda $\bar{B}$ qism to'plam B ni A gacha to'ldiradi, ya'ni B va $\bar{B}$ ning birlashmasi A ga teng bo'ladi.

Masalan, $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ va $B = \{2,5,6,9\}$ bo'lsa, $\bar{B} = \{1,3,4,7,8\}$ bo'ladi.

2-§. Haqiqiy sonlar to'plami

2.1. Ratsional sonlar

Kishilik jamiyatida turmushning talablari asosida son tushunchalari paydo bo'lgan. Masalan, narsalarni sanashga ehtiyoj natijasida natural sonlar kelib chiqqan. Boshqacha aytganda, bu to'plamda qancha element bor, degan savolga javob berish natural sonlar to'plami tushunchasiga olib kelgan.

Sanash uchun ishlatiladigan sonlar natural sonlar deyuiladi.Natural sonlar to'plami N bilan belgilanadi. (natura – buyum, narsa, predmet) Natural sonlar to'plamiga 0 soni qo'shilsa, manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plami $Z_0 = \{0,1,2,3,\ldots\} = N \cup \{0\}$ ni hosil qilamiz (ba'zi mamlakatlarda sanash nol dan boshlanadi). Ammo amaliyotda musbat sonlar bilan birga tabiatda bo'ladigan hodisalarni o'rganishda manfiy sonlarni kiritishga to'g'ri keldi. Masalan havoning 0 gradusdan yuqori va pastki temperaturasini belgilash uchun musbat yo'nalishga qarama-qarshi manfiy yo'nalish kiritishga to'g'ri keladi.

Shuning uchun 4 soniga -4 soni qarama-qarshi sanaladi va hokazo. Umuman aytganda, n soniga qarama-qarshi son $-n$ soni hisoblanadi va aksincha. Natural sonlar, nol va natural sonlarga qarama-qarshi sonlar birgalikda butun sonlar Z to'plamini tashkil qiladi (zero- nol):

$$Z = N \cup \{0\} \cup \overline{N},$$

Bu yerda $\overline{N}$ –natural songa qarama-qarshi sonlar. Kattaliklarni yanada aniqroq o'lchash butun sonlar to'plamini kengaytirib, kasr sonlarni kiritishga olib keldi. Masalan, daraxtning balandligini o'lchashda ko'pincha u butun sonlar bilan ifodalanmasligi mumkin yoki vaqtni hisoblashda minutlar soat o'lchovining ma'lum qismini tashkil qilishi mumkin (daraxtning balandligi 5,7 metrni, 15 minut 1/4 soatni tashkil qiladi). Butun va kasr sonlar birgalikda ratsional sonlar to'plamini tashkil qiladi. $\frac{m}{n}$ ko'rinishida yozish mumkin bo'lgan har qanday son ratsional son deyiladi, bu yerda $m \in Z, n \in N$ (ya'ni surat butun, maxraj natural sonlar). Masalan, $\frac{5}{1}, -\frac{3}{5}$, 0 soni 3.2 va hokazo.

Butun sonni ham $\frac{m}{1}$ ko'rinishda yozish mumkin. Bizga $\frac{m}{n}$ ko'rinishdagi ratsional son berilgan bo'lsa, unda m ni n ga bo'lish natijasida chekli yoki cheksiz o'nli kasr hosil bo'ladi. Masalan, $\frac{1}{4} = 0.25; \frac{2}{3} = 0.666 \ldots; -\frac{3}{4} = -0.75.$

Maxrajning tuzilishiga qarab, kasrlar ichida cheksiz davriy o'nli kasrlar bo'lishi mumkin:

Masalan, $\frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots = 0,(3),$

$\frac{1}{6} = 0{,}16666 \ldots = 0{,}1(6)$

Bundan ko'rinadiki, har qanday ratsional son cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida tasvirlanishi ham mumkin.

Chekli o'nli kasrni cheksiz davriy kasr ko'rinishida yozish mumkin. Masalan, $\frac{1}{5} = 0{,}2 = 0{,}2000 \ldots 0{,}2(0),$

$\frac{3}{4} = 0{,}75 = 0{,}75000 \ldots = 0{,}75(0).$

2.2. Ratsional sonlar to'plamini kengaytirish zarurligi

Amaliy ehtiyojlar, matematikaning ehtiyojlari, uning mantiqiy rivojlanishi ratsional sonlar to'plami turli masalalarni hal etishda yetarti emasligini ko'rsatadi. Masalan, tomoni 1 o'lchov birligiga teng bo'lgan kvadrat berilgan, bu kvadrat diagonalining uzunligini ifodalovchi x sonni topish lozim. Pifagor teoremasiga ko'ra: $x^2 = 2$ yoki $x = \sqrt{2}$.

Shunday qilib, masala kvadrat tenglamani yechishga keltirildi. Lekin, butun sonlar orasidagi kvadrati 2 ga teng sonni topa olmaymiz, chunki $1^2 < 2,\ \ 2^2 > 2$.

Demak, izlanayotgan sonni kasrlar orasida topishga urinib ko'rish, ya'ni $x = \frac{m}{n}$ deb olish lozim (m va n sonlar o'zaro tub, albatta, aks holda ulami qisqartirgan bo'lar edik).Bu masalani tekshirish quyidagi teoremaga olib keladi.

1-teorema. Kvadrati 2 ga teng bo'lgan ratsional son mavjud emas.

Isbot. Kvadrati 2 ga teng bo'lgan ratsional son mavjud, deb faraz qilamiz, ya'ni $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ tenglik o'rinli bo'lsin, bu yerda m va n o'zaro tub sonlar, u holda $m^2 = (2n)^2$, bundan m^2 natural son juft ekanligi kelib chiqadi, bu holda esa m sonning o'zi ham juft, chunki haqiqatan ham, agar toq bo'lsa. u holda $m^2 = (4k^2 + 4k) + 1$ ham toq, chunki, $(4k^2 + 4k)$ juft, bundan esa $m = 2k$ bo'lib $n^2 = 2k^2$ ekanligi, ya'ni n^2 son juftligi kelib chiqadi. Shunday qilib, m va n sonlarning ikkalasi ham juft, ya'ni ular o'zaro tub emas degan xulosaga keldik, bu esa ular o'zaro tub degan dastlabki farazimizga ziddir. Teorema isbot qilindi: $\sqrt{2}$ — irrational son ekan, ya'ni ratsional son emas. $\sqrt{2} \approx 1{,}411421356 \ldots$, shuningdek, ko'p uchraydigan va π orqali belgilanadigan aylana uzunligining diametriga nisbati hisoblangan son ham irratsional son: $\pi = 3{,}1415926 \ldots$.

1-ta'rif. Ratsional va irratsional sonlar to'plami birgalikda *haqiqiy sonlar to'plami* deyiladi. (Haqiqiy son deb cheksiz o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin bo'lgan songa aytiladi).

Haqiqiy sonlar to'plami R bilan belgilanadi (Real –haqiqiy). Haqiqiy sonlarni sonlar o'qining nuqtalari bilan tasvirlash mumkin.

Agar cheksiz to'g'ri chiziqda:

1) sanoq boshi hisoblangan 0 nuqta;

2) strelka bilan ko'rsatilgan musbat yo'nalish;

3) uzunlikni o'lchash uchun masshtab berilsa, u to'g'ri chiziq *sonlar o'qi* deyiladi. Agar x_1 son musbat bo'lsa, u 0 nuqtadan o'ngda $OM=x_1$ masofada yotuvchi M_1 nuqta bilan tasvirlanadi. Agar x_2 manfiy bo'lsa , u 0 nuqtadan chapda $OM_2=x_2$ masofada yotuvchi M_2 manfiy nuqta bilan tasvirlanadi(4-chizma).

Sonlar o'qining har bir nuqtasi bitta haqiqiy sonni ifodalaydi. Ixtiyoriy ikkita haqiqiy son orasida kamida bitta ratsional yoki iratsional son topiladi. Ayrim hollarda R haqiqiy sonlar to'plamini sonlar o'qi (to'g'ri chizig'i), haqiqiy sonlarning o'zini esa bu to'g'ri chiziqning nuqtalari deb ataladi.

2.3. Haqiqiy sonning absolut qiymati

1-ta'rif. x haqiqiy sonning *absolut qiymati* (yoki *moduli*) deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi manfiy bo'lmagan haqiqiy songa aytiladi, x sonning absolut qiymati $|x|$ bilan belgilanadi:

$x>0$ bo'lsa, $|x|=x$;

$x=0$ bo'lsa, $|x|=0$

$x<0$ bo'lsa, $|x|=-x$

Misollar: $|3{,}12| = 3{,}12$, $|0| = 0$, $|-2{,}7| = -(-2{,}7) = 2{,}7$, $|cosx - 2| - (cosx - 2) = 2 - cosx$.

Istalgan x haqiqiy son uchun $x^2 \leq |x|$ tengsizlik o'rinli ekanligi ta'rifdan ko'rinadi.

Haqiqiy sonlarning absolut qiymati ta'rifidan kelib chiqadigan teoremalarini ko'rib o'tamiz.

1-teorema. Iiki yoki bir necha qo'shiluvchilar yig'indisining absolut qiymati, qoshiluvchilarning absolut qiymatlarining yig'indisidan katta emas:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Isboti. Aytaylik, $|x+y| \geq 0$ bo'lsin, u holda ta'rifga ko'ra:

$|x+y| = x+y \leq |x| + |y|$, chunki, $x \leq |y|; y \leq |y|$. Endi $x+y \leq 0$ bo'lsin, u holda ta'rifga ko'ra:$|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \leq |x| + |y|$. Demak, $|x+y| \leq |x| + |y|$. Keltirilgan isbotlar qo'shiluvchilar soni bir nechta bo'lgan hol uchun ham oson umumlashtiriladi.

2-teorema. Ikki son ayirmasining absolut qiymati bu sonlar absolut qiymatlarining ayirmasidan kichik emas: $|x-y| \geq |x| - |y|$.

Isboti. $x - y = z$ deb olamiz, u holda 1-teoremaga ko'ra: $|x| = |y+z| \leq |y| + |z| = |y| + |x-y||$, bundan esa $|x| - |y| \leq |x-y|$. Demak, $|x-y| \geq |x| - |y|$.

3-teorama. Ko'paytmaning absolut qiymati ko'paytuvchilar absolut qiymatlarining ko'paytmasiga teng: $|x * y| = |x| * |y|$

Isboti. Aytaylik, $x > 0$ va $y > 0$ bo'lsin. Ta'rifga ko'ra : $|x| = x, |y| = y$, u holda $x * y > 0$ bo'lgani uchun ta'rifga asosan:

$|x * y| = x * y$. Bundan esa $|x * y| = |x| * |y|$ ga ega bo'lamiz.

Endi $x < 0, y < 0$ deb faraz qilamiz. U holda $(-x) > 0, (-y) > 0$ va ta'rifga ko'ra $|x| = -x, |-y| = -y$ bo'ladi.

Oldingi holdan foydalansak, $|x * y| = |-(x) * (-y)| = (-x) * (-y) = |x| * |y|$ ga ega bo'lamiz. Endi x va y lar qarama-qarshi ishorali bo'lgan holni tekshiramiz. Aniqlik uchun $x < 0$ va $y > 0$ bo'lsin. $x * y < 0$ va $|x| = -x$ bo'lganidan va absolut qiymat ta'rifidan foydalansak, $|x * y| = -(x * y) = (-x) * y = |x| * |y|$ ga ega bo'lamiz.

4-teorema. Bo'linmaning absolyut qiymati bo'linuvchi va bo'luvchi absolut qiymatlarining bo'linmasiga teng:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}; y \neq 0$$

Bu teorema isboti ham absolut qiymat ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

2.4. Sonli to'plamlar, oraliqlar. Nuqtaning atrofi. Haqiqiy sonlar to'plamining ba'zi bir to'plam ostilari.

1-ta'rif. $a \leq x \leq b$ qosh tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha haqiqiy sonlar (to'g'ri chiziqdagi nuqtalar) to'plami *yopiq oraliq* yoki boshi a, oxiri b nuqtadagi *kesma* deb ataladi va $[a;b]$ orqali belgilanadi. $b-a$ songa $[a;b]$ kesmaning uzunligi deyiladi.

2-ta'rif. $a < x < b$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x haqiqiy sonlar to'plami *ochiq oraliq* yoki *interval* deb ataladi va $(a;b)$ orqali belgilanadi. $b-a$ songa $(a;b)$ interval uzunligi deyiladi.

3-ta'rif. $a \leq x < b$ yoki $a < x \leq b$ tengsizlikni qanoatlantiradigan x haqiqiy sonlar to'plami *yarim oraliq* deb ataladi va mos ravishda $[a;b)$ *yoki* $(a;b]$ orqali belgilanadi.

4-ta'rif. $x > a$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x haqiqiy sonlar to'plami *cheksiz oraliq* deyiladi va $(a;+\infty)$ ko'rinishda belgilanadi.

Shunga o'xshash, $x < b, x \geq 0, x \leq b$ tengsizliklar mos ravishda $(-\infty;b), [a;+\infty), (-\infty;b]$ oraliqlar bilan aniqlanadi. Ayrim hollarda haqiqiy sonlar to'plami ham cheksiz oraliq deyiladi va $(-\infty;+\infty)$ ko'rinishda belgilanadi.

5-ta'rif. Berilgan x_0 nuqtani o'z ichiga oladigan har qanday oraliq (interval) x_0 nuqtaning *atrofi* deyiladi. Odatda x_0 nuqtaning $\varepsilon(\varepsilon > 0)$ atrofi tushunchasi kiritiladi, bu $(x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$ interval orqali belgilanadi.

2.5. Chegaralangan va chegaralanmagan sonlar to'plami. Sonlar tekisligi

1-ta'rif. agar E sonli to'plamning barcha x elementlari uchun $x \leq M(x \geq m)$ tengsizlikni qanoatlantiradigan M son (m son) mavjud bo'lsa, u holda E to'plam *yuqoridan (quyidan) chegaralangan* deyiladi. M soni (m soni) E sonli to'plamning yuqori (quyi) chegarasi deyiladi.

Masalan, 1) barch natural sonlar to'plami quyidan 1 soni bilan chegaralangan;

2) manfiy sonlar to'plami yuqoridan 0 soni bilan chegaralangan.

Ta'rifdan ko'rinadiki, E sonli to'plam cheksiz quyi va yuqori chegaralarga ega bo'lishi mumkin. Masalan, M_1 sonni to'plamning yuqori chegarasi desak, u holda shunday $M_2 > M_1$ soni mavjudki, M_2 soni ham E sonli to'plam uchun yuqori chegara bo'ladi, chunki $x \leq M_1 < M_2$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Masalan, manfiy sonlar to'plami uchun yuqori chegara faqat 0 soni bo'lmasdan, undan katta sonlar ham yuqori chegara bo'ladi.

2-ta'rif. E to'plamning barcha yuqori chegaralarining eng kichigi E to'plamning *aniq yuqori chegrasi*, E to'plamning barcha quyi chegaralarining eng kattasi E to'plamning *aniq quyi chegarasi* deyiladi. Aniq quyi chegara *infE(infimum*-enh kichik), aniq yuqori chegara *supE(supremum*-eng kata) bilan belgilanadi.

Eslatma. To'plamning yuqori va quyi chegaralari to'plamga tegishli bo'lmasligi ham mumkin.

3-ta'rif. Quyidan va yuqoridan chegaralangan E to'plam *chegaralangan to'plam* deyiladi.

Masalan 1) ixtiyoriy kesma chegaralangan to'plam, chunki uning quyi chegarasi kesmaning chap oxiri hisoblanadi; 2) barcha to'g'ri kasrlar to'plami chegaralangan to'plam.

Biz yuqorida haqiqiy sonlarni to'g'ri chiziqning (sonlar o'qining) nuqtalari bilan ifodalash mumkinligini aytgan edik. Shunga o'xshash koordinatalar tekisligini 2ta haqiqiy son juftliklaridan iborat nuqtalar tekisligi deyish mumkin, istalgan sonlar juftini esa shu tekislikning nuqtalari deyiladi. Sonlar tekisligi R^2 bilan belgilanadi.

3-§. Kompleks sonlar to'plami

3.1. Kompleks sonlar

Ixtiyoriy ko'rinishfdagi algebraik tenglamalarni yechishda haqiqiy sonlar to'plami yetarli emas. Masalan, haqiqiy sonlar to'plamida diskriminanti manfiy bo'lgan kvadrat tenglama $x^2 + 1 = 0$ yechimga ega emas.

Bu qiyinchilikdan qutilish maqsadida kompleks sonlar to'plami kiritiladi. Bu to'plamga haqiqiy sonlar to'plami to'plam osti sifatida kiradi. Kompleks sonlar to'plami C bilan belgilanadi. Agar $x^2 + 1 = 0$ tenglamada $D < 0$ bo'lgani uchun uning yechimi kompleks sonlar to'plamida bor deb qaralsa, $i = \sqrt{-1}$ bilan belgilanuvchi mavhum birlik bu tenglamaning yechimi bo'ladi, ya'ni $i^2 + 1 = 0; i^2 = -1$. Shunday qilib, biz haqiqiy sonlar to'plamini bi mavhum sonlar yordamida kengaytiramiz. Haqiqiy a sonini mavhum bi *soniga* qo'shishdan $a + bi$ kompleks sonini hosil qilamiz.

1-ta'rif. $a + bi$ ko'rinishda yozish mumkin bo'lgan ifodaga *kompleks son* deyiladi (bunda a,b haqiqiy sonlar, i esa mavhum birlik) va a-kompleks sonining haqiqiy, bi-mavhum qismlari deyiladi. Agar $a_1 + b_1 i$ va $a_2 + b_2 i$ kompleks sonlarda $a_1 = a_2; b_1 = b_2$ bo'lsa, ular teng deyiladi. Odatda kompleks son bitta z harfi bilan belgilanadi.

$z = a + bi$ kompleks sonning haqiqiy va mavhum qismi nolga teng bo'lsa, ya'ni $a = 0; b = 0$ bo'lsa, u nolga teng bo'ladi.

Mavhum qismlari bilan farq qiluvchi $z = a + bi$ va $z = a - bi$ kompleks sonlar *qo'shma sonlar* deyiladi. Haqiqiy va mavhum qismlarining ishoralari bilan farq qiluvchi ikkita $z_1 = a + bi$ va $z_2 = -a - bi$ kompleks sonlar *qarama-qarshi* kompleks sonlar deyiladi.

Kompleks sonni geometrik tasvirlash uchun $R = \{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ koordinatalar sistemasida absissalar o'qiga $z = a + bi$ kompleks sonning haqiqiy qismi a ni ordinatalar o'qiga esa mavhum qismning koeffitsiyenti b ni joylashtirsak, teksilikda $(a; b)$ nuqtaga ega bo'lamiz. Shu nuqta $a + bi$ kompleks sonni ifodalaydi. Odatda bu z nuqta deyiladi. Shunday qilib, teksilikning har bir nuqtasi bilan kompleks sonlar to'plami o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Ox o'qida kompleks sonning haqiqiy qismi joylashgani uchun *haqiqiy o'q*, ordinatalar o'qida mavhum qismga tegishli son joylashgani uchun yni *mavhum o'q* deyish mumkin.Kompleks sonlar joylashgan tekislikni esa *kompleks tekislik* deyiladi.

Kompleks tekislik Z bilan belgilanadi. Kompleks sonning geometrik ma'nosi sifatida koordinatasi *(a,b)* bo'lgan markaziy vektorni (radius vektor) olish mumkin.

3.2. Kompleks sonning trigonometrik shakli

$z = x + yi$ ko'rinishdagi son kompleks sonning algebraik ko'rinishi deyiladi. Kompleks sonning trigonometrik shaklini hosil qilish uchun 5-chizmadan foydalanamiz. Chizmadan: $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$ (1) ekanligini aniqlash mumkin, bunda r-nomanfiy soni z kompleks sonni tasvirlagan vektorning uzunligini ifodalaydi va unga z sonning moduli, φ burchakni esa z ning *argumenti* deyiladi. r ni quyidagicha aniqlash mumkin:

$$(1) \Longrightarrow |z| = |x + yi| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (2)$$

z kompleks sonning argumenti bir qiymatli aniqlanmaydi, balki $2\pi k$ qo'shiluvchi qadar aniqlikda ifodalanadi, bunda k- butun son. Argumentning barcha qiymatlari orasidan $0 \le \varphi \le 2\pi k$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi bittasini tanlaymiz. Bu qiymat *bosh argument(qiymat)* deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $\varphi = argz.$

(1) tengliklarni hisobga olib, kompleks sonni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$(1) \Rightarrow z = x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (3)$$

bu yerda $$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, agar\ x > 0; y > 0\ bo'lsa; \\ \pi + arctg\frac{y}{x}, agar\ x < 0\ bo'lsa; \\ 2\pi + arctg\frac{y}{x}, agar\ x > 0, y < 0\ bo'lsa. \end{cases}$$

(3) ga kompleks sonning *trigonometrik shakli* deyiladi.

1-misol. Kompleks sonning moduli 3 ga, argumenti $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ga teng bo'lsa , uning haqiqiy va mavhum qismlarini toping.

Yechilishi. (1) formuladan: $x = r\cos\varphi = 3\cos\frac{\pi}{4} = 3\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$y = r\cos\varphi = 3\cos\frac{\pi}{4} = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2-misol. $z = i$ kompleks sonning moduli va argumentini toping.

Yechilishi. $x = 0; y = 1$ ekanidan $r = 1;\ \varphi = \frac{\pi}{2}$

3-misol. Qo‘shma va qarama-qarshi sonlarni chizmada tasvirlang va izohlang.

Yechilihi . Qo‘shma kompleks sonlar bir xil modulga ega va absolyut qiymatlari bo‘yicha teng argumentlarga ega bo‘lib, haqiqiy o ‘qqa simmetrik bo‘lgan nuqtalar bilan tasvirlanadi, ya’ni qarama-qarshi kompleks sonlar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik nuqtalar bilan tasvirlanadi (6-chizma).

4 - misol . $z = 1 - i$ kom pleks sonni trigonometrik shaklda ifodalang

Yechilishi. $x = 1;\ y = -1;\ r = \sqrt{2}$

$$tg\varphi = -1;\ \varphi = 2\pi - arctg(1) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Shunday qilib $z = \sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}.$

3.3. Kompleks sonlar ustida amallar

Kompleks sonlarni qo'shish. $z_1 = a_1 + b_1 i$ va $z_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks sonlarning yig'indisi deb $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ tenglik bilan aniqlanuvchi kompleks songa aytiladi. Kompleks sonlarni qo'shish va vektorlarni qo'shish formulalaridan ko'rish mumkinki ularni bajarish bir hilda amalga oshiriladi (7-chizma).

5-misol. $z_1 = 2 + 5i \; va \; z_2 = -1 - 3i$ kompleks sonlarni yig'indisini toping.

Yechilishi. $z_1 + z_2 = (2 + 5i) + (-1 - 3i) = (2 - 1) + i(5 - 3) = 1 + 2i$

Kompleks sonlarni ayirish. $z_1 = a_1 + b_1 i \; va \; z_2 = a_2 + b_2 i$. kompleks sonlarning ayirmasi deb quyidagi

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

kompleks songa aytiladi. Ikkita kompleks son ayirmasining moduli kompleks sonlar tekisligida shu sonlarni tasvirlovchi nuqtalar orasida masofaga teng (8- chizma)

6-misol $z_1 = 6 + 5I \; va \; z_2 = 4 - 2i$ kompleks sonlarning ayirmasini toping.

Yechilishi. $z_1 = 6 + 5I \; va \; z_2 = 4 - 2i$ lar berilgan ayirma quydagiga teng:

$$z_1 - z_2 = (6 + 5I) - (4 - 2i) = (6 - 4) + i(5 + 2) = 2 + 7i$$

Kompleks sonlarni ko'paytirish. $z_1 = a_1 + b_1 i \; va \; z_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks sonlarning ko'paytmasi deb $i^2 = -1$ ekanligini hisobga olgan holda kompleks sonlarni ikkita ko'phad ko'paytmasi shaklida ko'paytirishdan hosil bo'lgan kompleks songa aytiladi:

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + (a_1 b_1 - a_2 b_2)i$$

$z_1 \; va \; z_2$ kompleks sonlar trigonometrik ko'rinishda berilgan bo'lsa, ya'ni $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ va $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ bo'lsa, u holda ularning ko'paytmasi $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ boiadi.

7-misol. $z_1 = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$ *va* $z_2 = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$ kompleks sonlarning ko'paytmasini toping.

Yechilishi. $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2i}$

Kompleks sonlarni bo'lish. Kompleks sonlarni bo'lish amali ko'paytirish amaliga teskari amal sifatida aniqlanadi. Boshqacha aytganda, $z \cdot z_2 = z_1$, bo'lsa, $z=x+ib$ soni $z_1 = x_1 + iy_1$ sonning $z_2 = x_2 + iy_2$ soniga bo'linmasi deyiladi.

$z = \frac{z_1}{z_2}$ bo'linmani topish uchun surat va maxrajni z_2 ning qo'shmasi bo'lgan $\overline{z_2}$ ga ko'paytiramiz: $z = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$, bundan: $z = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

Agar kompleks sonlar trigonometrik ko'rinishda berilgan bo'lsa, ya'ni $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$ va $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$ b o'lsa, u holda

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)}{r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)} = \frac{r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)(cos\varphi_2 - isin\varphi_2)}{r_2(cos^2\varphi_2 + sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}|cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)|$$

Shunday qilib, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)]$ ya'ni kompleks sonlarni boiishda bo'linuvchining moduli bo'luvchining moduliga bo'linadi, argumentlari esa ayriladi.

8-misol. $z_1 = \sqrt{3} + i$ ni $z_1 = -3 - 3i$ ga: a) algebraik; b) trigonometrik ko'rinishda bo'ling.

Yechilishi.

a) $\frac{z_1}{z_1} = \frac{\sqrt{3}+i}{-3-3i} = \frac{(\sqrt{3}+i)(-3+3i)}{(-3-3i)(-3+3i)} = \frac{-3\sqrt{3}-3+(3\sqrt{3}-3)i}{9+9} =$

$\frac{-3(\sqrt{3}+1)+3(\sqrt{3}-1)i}{18} =$

$$= -\frac{\sqrt{3}+1}{6} + \frac{\sqrt{3}-1}{6} i$$

$$b)\ z_1 = \sqrt{3} + i = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right);$$

$$z_2 = -3 - 3i = 3\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right);$$

$$\frac{z_1}{z_1} = \frac{2\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)}{3\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{2}{3\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{4}\right)\right] = \frac{2}{3\sqrt{2}} \cdot$$

$$\cdot\left[\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right] = \frac{2}{3\sqrt{2}}\cos\frac{13\pi}{12} - isin\frac{13\pi}{12} = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) - isin\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right)\right] = \frac{2}{3\sqrt{2}}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2}}\left[\left(-cos\frac{\pi}{3}cos\frac{\pi}{4} - sin\frac{\pi}{3}sin\frac{\pi}{4}\right) + i\left(sin\frac{\pi}{3}cos\frac{\pi}{4} - cos\frac{\pi}{3}sin\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2}}\left[\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = -\frac{\sqrt{3}+1}{6} + \frac{\sqrt{3}-1}{6} i.$$

Kompleks sonni darajaga ko'tarish. Kompleks sonlarni ko'paytirish qoidasidan darajaga ko'tarish qoidasi kelib chiqadi. $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ kompleks son uchun n natural bo'lganda: $z^n = r^n(cosn\varphi + isinn\varphi)$. Bu formulani Muavr formulasi deyiladi. Muavr formulasini tatbiq qilishda $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$ bo'lishini e'tiborga olishimiz kerak.

8-misol. $(-1 + i)^5$ ni hisoblang.

Yechilishi. $z = -1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right)$;

$$z^5 = (-1+i)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5 \cdot \left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right)^5 = 4\sqrt{2}\left(cos5\cdot\frac{3\pi}{4} + isin5\cdot\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}(cos675^\circ + isin675^\circ) = 4\sqrt{2}[\cos(720^\circ - 45^\circ) + isin(720^\circ - 45^\circ)] =$$

$$= 4\sqrt{2}(cos45^\circ - isin45^\circ) = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 - 4i = 4(1-i).$$

Kompleks sondan ildiz chiqarish. Ildiz chiqarish amali darajaga ko'tarish amaliga teskari amal. Kompleks sonning n-darajali ildizi deb shunday z* kompleks songa aytiladiki, z* ning n-darajasi z soniga tengdir, ya'ni

$$(z^*)^n = z$$

Aytaylik, $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ va $z^* = p(cos\theta + isin\theta)$ bo'lsin. Muavr formulasiga asosan $r(cos\varphi + isin\varphi) = p^n(\cos n\,\theta + i\sin n\,\theta)$, bundan $r = p^n, n\theta = \varphi + 2\pi k$ o'rinli. Bundan $p\ va\ \theta$ ni topish mumkin.

Bu yerda k — istalgan butun son, $\sqrt[n]{r}$ — arifmetik ildiz. Demak,

$\sqrt[n]{r(cos\varphi + isin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$; bu yerda *k=0.1 ...n -1* deb olinadi.

9-misol. $\sqrt[5]{1}$ ning ildizlarini toping.

Yechilishi. $\sqrt[5]{1}$ sonni trigonometrik ko'rinishda yozamiz. z = 1 bo'lib, $z = 1 = cos0 + i\sin 0$ bo'ladi va

$$\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{cos0 + i\sin 0} = cos\frac{2\pi k}{5} + isin\frac{2\pi k}{5}$$

o'rinli.

$k_0 = 0\,; z_1 = cos0 + i\sin 0 = 1;$

$$k_1 = 1;\ z_2 = cos\frac{2\pi}{5} + isin\frac{2\pi}{5} = cos72^\circ + isin72^\circ \approx 0{,}309 + \mathrm{i}0{,}951$$

$$k_2 = 2;\ z_3 = cos\frac{4\pi}{5} + isin\frac{4\pi}{5} = cos144^\circ + isin144^\circ$$

$$k_3 = 3; z_4 = cos\frac{6\pi}{5} + isin\frac{6\pi}{5} = cos216^\circ + isin216^\circ$$

$$k_4 = 4;\ z_5 = cos\frac{8\pi}{5} + isin\frac{8\pi}{5} = cos288^\circ + isin288^\circ$$

IV bob uchun o'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. To'plam deganda nimani tushunasiz?

2. To'plamlar birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi ta'riflarini aytib bering.

3. To'plamga to'ldiruvchi deganda nimani tushunasiz?

4. To'plamlar ustida qanday amallar bor?

5. Ratsional sonlar deb nimaga aytiladi?

6. Ratsional sonlar to'plamini kengaytirish zarurligi deganda nimani tushunasiz?

7. Haqiqiy sonning absolyut qiymati deb nimaga aytiladi?

8. Haqiqiy sonlar to'plamining ba'zi bir to'plam ostilari deganda nimani tushunasiz?

9. Chegaralangan va chegaralanmagan sonlar to'plami deb nimaga aytiladi?

10. Sonlar tekisligi deb nimaga aytiladi?

11. Kompleks sonlar bilan haqiqiy sonlar to'plamining farqi nimada?

12. Kompleks sonlarni qo'shish, ayirishda qanday sonlar hosil bo'ladi, misollar yordamida tushuntiring.

13. Kompleks sonning moduli va argumenti deganda nimani tushunasiz?

14. Kompleks sonni darajaga ko'tarish formulasini keltirib chiqaring.

IV bob uchun mustaqil yechish uchun misollar

1. Quyidagi amallarni bajaring:

a) $(7+3i)+(4-5i)$; b) $(6+3i)-(4-5i)$; c) $(1-i)\cdot(1+2i)$; d) $-2i\cdot(4-3i)$;

e) $5:(1-i)$; f) $(1-5i):(3i)$; g) $(6+i):(1-i)$; i) $(2-i)^2$.

2. Quyidagi sonlarning moduli va argumentini toping:

a) $z=4-3i$; b) $z=2+2\sqrt{3}\,i$; c) $z=3$; d) $z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$.

3. Kompleks sonni trigonometrik shaklda yozing:

a) -3; b) $4i$; c) $-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$; d) $-1-\sqrt{3}\,i$.

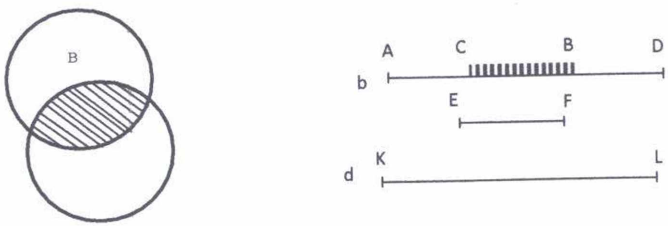
4. Hisoblang:

a) $(\sqrt{3}-3i)^{12}$; b) $(2+3i)^3$; c) $(-2-2i)^8$; d) $\left(\dfrac{1-i}{1+\sqrt{3i}}\right)^{30}$; e) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{9}$.

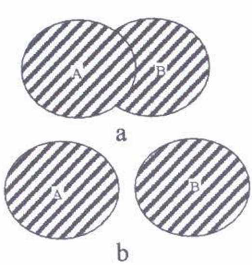
5. Quyidagi ildizlarning barcha qiymatlarini toping:

a) $\sqrt[4]{-i}$; b) $\sqrt[3]{1}$; c) $\sqrt[3]{2-2\sqrt{3}i}$; d) $\sqrt{-1+i}$; e) $\sqrt[4]{-16}$.

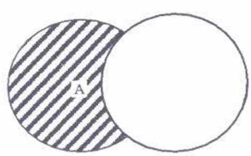
IV bob uchun chizmalar



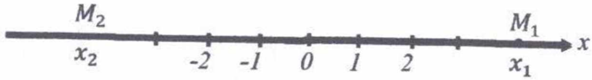
1a-chizma



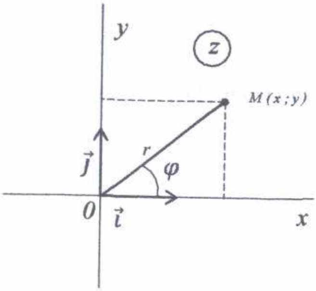
2-



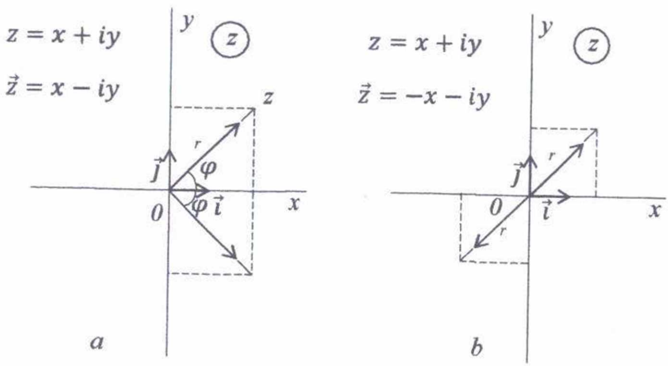
3-chizma



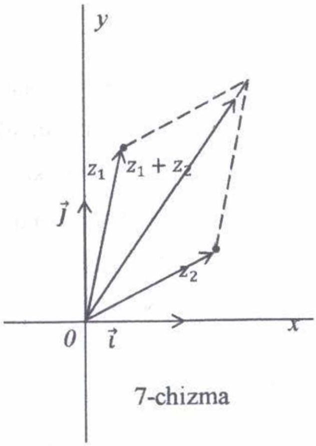
4-chizma



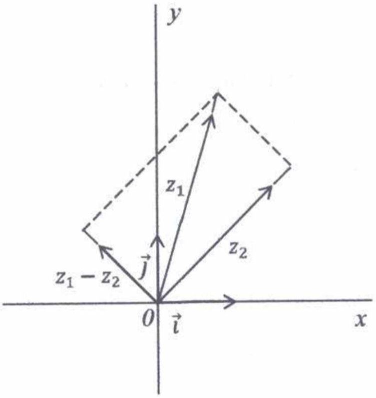
5-chizma



6-chizma



7-chizma



8-chizma

V BOB. FUNKSIYA. KETMA-KETLIKLAR. LIMITLAR NAZARIYASI

1-§. Funksiyalar

1.1. Funksiya tushunchasi

Kundalik faoliyatimizda biz doimo hajm, zichlik, uzunlik, vaqt, bosim, temperatura kabi turli fizik kattaliklarga duch kelamiz. Bu kattaliklarning hammasi bir-biridan sifat jihatidan farq qilsada, biroq ular umumiy xossaga ega ya'ni, ularning har birini o'lchash mumkin. O'lchash natijasida haqiqiy sonlar hosil bo'lib, biz ularni tegishli kattaliklarning son qiymatlari deb ataymiz. Bitta kattalik vaqtning turli momentlarida o'lchanayotgan bo'lsa, turli son qiymatlar hosil bo'lishi mumkin. Masalan, avtomobilning harakat tezligi vaqtning turli momentlarida turli son qiymatlariga ega bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash, yopiq idishdagi biror gaz massasining bosimi turli temperaturalarda turli son qiymatlariga ega bo'ladi. Darahtning balandligi turli yillarda turlicha bo'lishi mumkin. Balandlikka ko'tarilish natijasida havo bosimi tusha boshlaydi. Bir so'z bilan aytganda, kattalikning son qiymatlari o'zgarishi mumkin va shu sababli kattalikning o'zi *o'zgaruvchi* deyiladi. *O'zgarmas kattalikni* o'zgaruvchining xususiy holi deb qarash qabul qilingan, bunda uning qiymatlar to'plami bitta sondan iborat bo'ladi. O'zgaruvchi kattalikning son qiymatlari biror haqiqiy sonlar to'plamini hosil qiladi.

Ikkita o'zgaruvchi kattalik qaralayotganda ko'pincha ulardan birining son qiymatlari ikkinchisining son qiymatlariga bog'liqligini ko'rish mumkin. Masalan, kvadratning yuzi uning tomonining uzunligiga bog'liq bo'ladi. Agar kvadrat tomonining uzunligini x bilan, uning yuzini y bilan belgilansa, bu bog'laninsh $y = x^2$ formula bilan ifodalanadi.

Bu yerda x kvadrat tomonining uzunligini ifodalaydi. Shu tufayli u manfiy yoki nol bo'lishi mumkin emas. Har bir $x \in M$ songa yagona $y = x^2$ soni mos keladi, y ning bu barcha son qiymatlari L to'plamni hosil qiladi

Shunday qilib, bu yerda har bir $x \in M$ ga yagona $y \in L$ ni mos keltiradigan qoida berilgan.

Yana bir misol keltiraylik. Aytaylik, moddiy, nuqta A punktdan v sm/s o'zgarmas tezlik bilan to'g'ri chiziqli harakat qilayotgan bo'lsin va T vaqtdan so'ng B punktga yetib borsin. Harakatning t momentida nuqtaning S bosib o'tgan yo'lini $S = vt$ formula bo'yicha topish mumkin. Shuni qayd etib o'tamizki birinchidan, t o'zgaruvchi qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlardan iborat $M = [0, T]$ to'plam berilgan, ikkinchidan har bir $t \in M$ qiymatga yagona $S = vt$ qiymat mos keladi. S ning bu barcha qiymatlari biror L to'plamini hosil qiladi.

Bu misollarni umumlashtirib, quyidagi ta'rifga kelamiz.

Ta'rif. Akslantirish deb, biror M to'plamning har bir x elementiga boshqa L to'plamning yagona y elementini mos keltiradigan qoidaga aytiladi.

Bunda har bir $y \in L$ element hech bo'lmaganda bitta $x \in M$ elementga mos keladi deb faraz qilinadi. U holda M to'plamni L to'plamga f aksalntirish berilgan deyiladi va bu akslantirish $f: M \to L$ yoki $M \xrightarrow{f} L$ ko'rinishda belgilanadi.

Bu yerda y elementni x elementning f akslantirishdagi *aksi* deyiladi va $y = f(x)$ yoki $x \xrightarrow{f} y$ ko'rinishda yoziladi, x ni esa y ning *asli* deyiladi. $f(M)$ to'plamni f akslantirishning *qiymatlar to'plami* deb ham yuritiladi.

M va L to'plamlarning elementlari nafaqat sonlar, balki ixtiyoriy ob'yektlar bo'lishi mumkin. Masalan, M-berilgan tekislikdagi barcha kvadratlar to'plami, L esa bu kvadratga ichki chizilgan barcha aylanalar to'plami bo'lsin. M to'plamga tegishli kvadratlarning har biriga unga ichki chizilgan ayalanani mos qo'yamiz. Bu bilan biz M to'plamning har bir elementiga L to'plamning yagona elementini mos qo'yadigan akslantirishni aniqlaymiz. Agar berilishida M va L to'plamlar sonli to'plamlar bo'lsa akslantirish funksiya deyiladi.

Odatda, funksiyaning berilishida M va L to'plamlarning tegishli x va y elementlari sonlar deb faraz qilinadi. Bunda x *erkli o'zgaruvchi* (*argument*), y

erksiz o'zgaruvchi, M to'plam funksiyaning aniqlanish sohasi, L to'plam esa funksiyaning *qiymatlar to'plami* deb ataladi. Ko'pincha erksiz y o'zgaruvchi *funksiya* deb ataladi.

Funksiyani belgilash uchun $y = f(x)$ yozuvdan foydalanamiz. Bu yozuvda f harfi $x \in M$ elementga yagona $y \in L$ elementni mos keltiradigan qoidani belgilaydi.

Agar f funksiya $x_0 \in M$ songa $y_0 \in L$ sonni mos keltiradigan bo'lsa, u holda buni $y_0 = f(x_0)$ yoki $y_0 = y|_{x=x_0}$ ko'rinishda yozish mumkin. y_0 son mazkur funksiyaning $x = x_0$ dagi *qiymati* deb ataladi. Masalan, agar $y = x^2$ bo'lsa u holda $y|_{x=1/2} = (1/2)^2 = 1/4$.

1-izoh. Agar aniqlanish sohasi M va qiymatlar to'plami L bo'lgan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsa, u holda M to'plamning L to'plamiga *akslanishi* berilgan, deb ataladi.

Funksiya berilishi uchun M to'plam va f –qoida berilishi talab etiladi.

2-izoh. Funksiyalarni belgilash uchun $x \to f(x)$ ko'rinishdagi yozuvdan ham foydalaniladi. Masalan, $y = x^2$ yozuv o'rniga $x \to x^2$ yozuv ishlatiladi.

Funksiyalarni belgilash uchun f harfidan tashqari boshqa harflar ham qo'llaniladi, masalan: $y = \varphi(x), y = F(x), y = y(x)$. Xuddi shunga o'xshash, funksiya va uning argumentini faqat y va x harflari bilan belgilash shart emas, ularni boshqa harflar bilan belgilash ham mumkin.

Akslantirishlarning muxim jixatlari yana shundaki, M to'plam xususiyatlarini L to'plam orqali o'rganish imkoni mavjud, hamda x aslini uning y aksi orqali aniqlash mumkin bo'ladi.

Masalan M - abiturientlar to'plami ichidan loyiqlarini oliy o'quv yurtlariga talabalikka qabul qilishda ularning test natijalari to'plami bo'lgan L – ballar to'plamidan foydalaniladi. Havodagi samolyo'tning H balandligini aniqlashda $H=k/P$ funksiya yordamida P bosimdan foydalanish mumkin bo'ladi.

1.2. Funksiyaning berilish usullari

Funksiyalar turli-tuman usullar bilan berilishi mumkin. Biroq funksiyalar berilishining quyidagi uchta usuli eng ko'p uchrab turadi: analitik usul, jadval usuli va grafik usul.

Funksiya analitik usulda berilganda o'zgaruvchilar orasidagi munosabat formula yordamida beriladi. Ya'ni bunda funksiyaning tegishli qiymatini hosil qilish uchun argumentning qiymati ustida qanday amallar bajarilishi lozimligini ko'rsatadigan formula beriladi.

Masalan.

$$y = \frac{3x-1}{x^2+2x-3}; y = -x^2 + 5;$$

$$y = \begin{cases} x, \text{ agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x, \text{ agar } x < 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

bular analitik usulda berilgan funksiyalardir.

Yuqorida $y = x^2$ funksiya uchun $[0; +\infty)$ aniqlanish sohasi geometrik mulohazalarga asoslanib aniqlangan, $s = vt$ funksiya uchun esa $[0, T]$ aniqlanish sohasi shartda ko'rsatilgan edi. $y = x^2$ funksiyaning $[-2,2]$ aniqlanish sohasi ham shartda berilgan edi. Biroq ko'pincha funksiya faqat analitik ifoda (formula) yordamida, biror bir qo'shimcha shartlarsiz beriladi. Bunday hollarda funksiyaning aniqlanish sohasi sifatida argumentning barcha shunday qiymatlari to'plamini tushunamizki, bu qiymatlarda shu ifoda ma'noga ega bo'ladi va funksiyaning haqiqiy qiymatlarini beradi.

1-misol. $y = \sqrt{1-x^2} + \log_3 x$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechilishi. Mazkur funksiya ikkita funksiyaning yig'indisidan iborat. Ulardan birinchisining aniqlanish sohasi $1 - x^2 > 0$ bo'ladigan barcha x haqiqiy sonlar to'plami M_1 dan iborat bo'lib $-1 < x < 1$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan barcha x nuqtalar to'plamidir. Shunday qilib, $M_1 = [-1,1]$. Ikkinchi qo'shiluvchining, ya'ni $\log_3 x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $M_2 = (0, +\infty)$ cheksiz intervaldan iborat.

Demak, $y = \sqrt{1 - x^2} + \log_3 x$ funksiyaning aniqlanish sohasi barcha $x \in M_1\ va\ x \in M_2$ nuqtalardan iborat M to'plamdir,ya'ni $M = M_1 \cap M_2 = (0,1]$.

Funksiya jadval usulida berilganda jadval tuzilib, unda argumentning bir qator qiymatlari va funksiyaning tegishli qiymatlari ko'rsatiladi. Logarifmik jadvallar, trigonometrik funksiyalarning qiymatlari jadvallari va boshqa ko'p jadvallar yaxshi ma'lum. Ko'pincha funksiyaning bevosita tajribada olingan qiymatlari jadvali bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi.

Quyidagi jadvalda misning turli *t* temperaturalardagi (gradus hisobida) ρ solishtirma qarshiligining tajribada olingan qiymatlari keltirilgan:

tt	10	20	30	40	50
ρ	$1{,}8 \cdot 10^{-6}$	$1{,}8 \cdot 10^{-6}$	$1{,}9 \cdot 10^{-6}$	$2{,}0 \cdot 10^{-6}$	$1{,}8 \cdot 10^{-6}$

Quyidagi jadvalda yerga ekilgan terak ko'chatining turli *t* yildagi *H* balandligining tajribada olingan qiymatlari(metr) keltirilgan:

tt	2012	2013	2014	2015	2016
HH	2	3,5	5	6,8	8

Funksiyaning grafik usulda berilishida uning grafigi beriladi. Bunda funksiyaning argumentining u yoki bu qiymatlariga mos qiymatlari bevosita shu grafikdan topiladi.

Ko'pchilik hollarda funksiya grafigi tasvirlansa, funksiyaning hossalari tushunarli va ko'rgazmali bo'ladi. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi deb, Oxy tekislikning shunday barcha nuqtalari to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biri uchun x abssissa argumentning qiymati y ordinata esa berilgan funksiyaning tegishli qiymati bo'ladi. Koordinatalar tekisligida shunday nuqtalar to'plami berilsa, uni *grafik usulda berilgan funksiya* deyiladi. Asosan bu nuqtalar to'plami birorta L chiziqni bildiradi. Lekin tekislikdagi har qanday nuqtalar to'plami funksiya ($y = f(x)$ ko'rinishdagi) grafigi bo'lavermaydi. Agar koordinatalar tekisliklardagi nuqtalar to'plami Oy o'qqa parallel har qanday to'g'ri chiziq bilan bittadan ortiq nuqtada kesishmasa, u biror $y = f(x)$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigi bo'ladi.

Funksiyaning grafik usulda berilishi ko'p tarqalgan hol bo'lib, meteorologiya, kardiologiya va boshqa sohalardagi o'ziyozar asboblarda hosil bo'ladigan egri chiziqlar bunga misol bo'la oladi.

Funksiyaning grafigini uning ayrim nuqtalari bo'yicha yasash mumkin. Masalan, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan bo'lsin. a va b orasida argumentning bir qator yaqin qiymatlarini olamiz va ushbu jadvalga x argumentning tanlangan qiymatlarini va y funksiyaning ularga mos qiymatlarini joylashtiramiz:

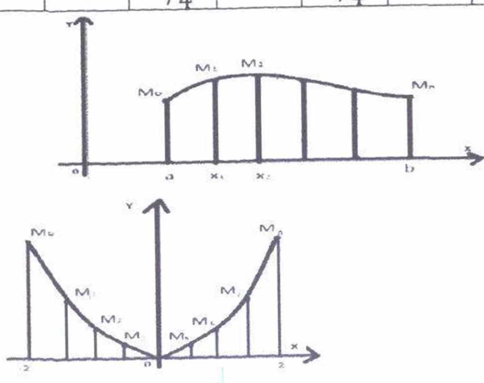
x	$x_0 = a$	x_1	x_2	$\dots$	$x_n = b$
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Bu jadval yordamida $M_0(x_0; y_0), M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \dots \dots, M_n(x_n; y_n)$ nuqtalarini yasaymiz va ularni silliq chiziq bilan tutashtiramiz. Bu egri chiziq berilgan funksiyaning taqribiy grafigi bo'ladi (1-a chizma).

2-misol. $y = x^2$ formula bilan berilgan funksiyaning grafigini $-2 \leq x \leq 2$ shartda yasang.

Yechilishi. Ushbu jadvalni tuzamiz

x	-2	$-3/2$	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$	2
y	4	$9/4$	1	$1/4$	0	$1/4$	1	$9/4$	4



1-a,b chizma

$M_0(-2;4), M_1(-\frac{3}{2};\frac{9}{4})$, $M_2(-1;1), M_3(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}), M_4 4(0;0), M_5(\frac{1}{2};\frac{1}{4}4), M_6(1;1),$ $M_7(\frac{3}{2};\frac{9}{4}), M_8(2;4)$ nuqtalarni yasaymiz. Bu nuqtalarni silliq chiziq bilan tutashtirib, izlanayotkan grafikni hosil qilamiz (1-b chizma).

1.3. Elementar va murakkab funksiyalar

Funksiyalarni o'rganishda asosiy elementar funksiyalar muhim rol egallaydi. Asosiy elementar funksiyalar quyidagilardir.

1.O'zgarmas (konstanta) $y = C$, bu yerda C – haqiqiy son.

2.$y = x^n$ darajali funksiya, bu yerda n-noldan farqli haqiqiy son.

3.$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ ko'rsatkichli funksiya.

4.$y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$logarifmik funksiya.

5.$y = \sin x,\ y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$ trigonometrik funksiyalar.

6.$y = arcsinx, y = arccosx, y = arctgx, arcctgx$ teskari trigonometrik funksiyalar.

Asosiy elementar funksiyalarning aniqlanish sohalarini va ularning grafiklarini ko'rib chiqamiz.

1.O'zgarmas – bu argumentning barcha qiymatlarida bir xil qiymat qabul qiladigan funksiyadir. $y = C$ funksiyaning grafigi absissalar o'qiga parallel to'g'ri chiziqdan iborat.

2.Darajali funksiya aniqlanish sohasining ko'rinishi n ko'rsatkichga bog'liq. Umumiy holda funksiyaning aniqlanish sohasi $[0, +\infty)$ dan iborat.Agar n turli natural qiymatlarni qabul qiladigan bo'lsa, u holda $y = x, y = x^2, y = x^3, y = x^4$ va hokazo funksiyalar qatori hosil bo'lib, ularning har birining aniqlanish sohasi – haqiqiy sonlar o'qidir. Ba'zi toq n lar uchun darajali funksiyalarning grafiklari 1 va 3 choraklardan o'tadi, juft n lar uchun esa 1 va 2 choraklardan o'tadi.

3.$y = a^x$ ko'rsatkichli funksiya x ning barcha haqiqiy qiymatlarida aniqlangan, ya'ni (-∞,+∞) dan iborat. $a > 1$ va $0 < a < 1$ uchun alohida o'rganiladi. $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ uchun $a^x > 0$.

4.$y = \log_a x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $(0, +\infty)$ cheksiz intervaldir, qiymatlar to'plami (-∞,+∞) dan iborat. $a > 1$ va $0 < a < 1$ uchun alohida hususiyatlarga ega. $y = a^x$ ko'rsatkichli funksiyaga teskari bo'lgan funksiyadir.

5. Birlik aylanadagi B(ε, η) nuqtaning absissasini x ning *kosinusi*, ordinatasini x ning *sinusi* deyiladi:

$$\varepsilon = cosx, \ \eta = sinx$$

Birlik aylana ta'rifiga asosan

$$\varepsilon^2 + \eta^2 = 1, \quad cos^2x + sin^2x = 1.$$

Trigonmetrik $sinx, cosx$ funksiyalarning ta'rifi aylana bilan bog'liq bo'lganligi sababli ular *doiraviy funksiyalar* ham deyiladi.

$y = sinx$ va $y = cosx$ trigonometrik funksiyalarning har biri haqiqiy sonlar o'qida aniqlangan.(2- chizma)

$f(x) = tgx$ funksiya $tgx = \frac{sinx}{cosx}$ orqali, $f(x) = ctgx$ esa $ctgx = \frac{cosx}{sinx}$ orqali aniqlanadi.

$y = tgx$ funksiya $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ko'rinishdagi nuqtalardan tashqari haqiqiy sonlar o'qida, $y = ctgx$ funksiya esa $x = k\pi$ (k – istalgan butun son) nuqtalardan tashqari haqiqiy sonlar o'qida aniqlangan. (3- chizma)

6.$y = arcsinx, y = arccosx, y = arctg, y = arcctgx$ teskari trigonometrik funksiyalar trigonometrik funksiyalarga teskari bo'lib grafigi ma'lum oraliqda $y = x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'ladi.

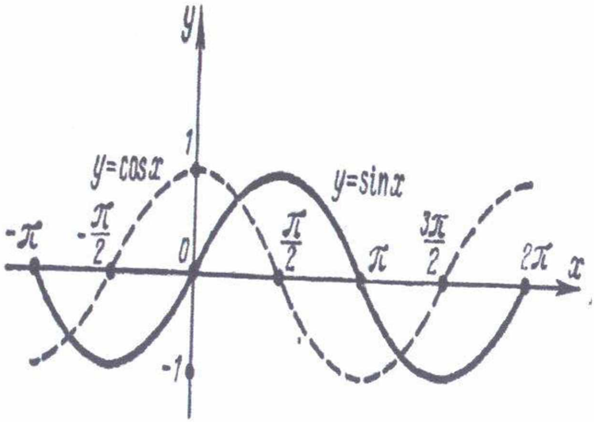
Agar $y = sinx$ funksiyada x ning qabul qiladigan qiymatlarini $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ to'plam deb olsak, u holda y ning $[-1,1]$dan olingan har bir qiymatiga birgina x mos kelishini ko'rish qiyin emas.

Shunday qilib $y = sinx$ funksiya $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da aniqlangan bo'lsin. U holda $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da unga teskari bo'lgan $x = arcsiny$ funksiya mavjud bo'ladi buni $y = arcsinx$ orqali belgilasak ynga $y = sinx$ ga teskari funksiya deyiladi. Shunday qilib, $y = arcsinx$ funksiya $[-1,1]$ da aniqlangan bo'lib, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ uning qiymatlar to'plamidir, grafigi esa $y = sinx \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ funksiya grafigini $y = x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik akslantirishdan hosib qilinadi.

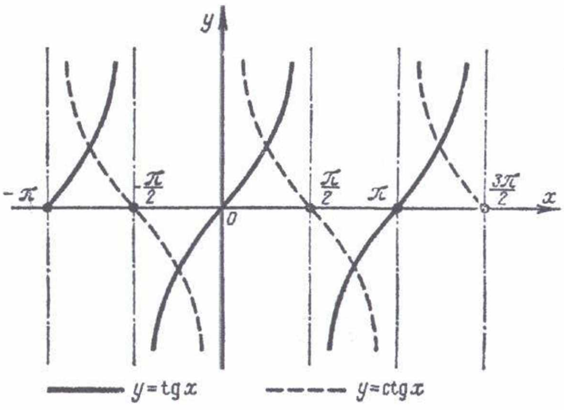
$[0, \pi]$ da $y = cosx$ ga teskari bo'lgan funksiya mavjud bo'lib, u *arkkosinus* deb ataladi va $y = arccosx$ orqali belgilanadi.

$y = arctgx$ (arktangens) funksiya $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ da $y = tgx$ funksiyaga teskari bo'lib, u *arktangens* deb atalad.

$y = arcctgx$ (arkkotangens) funksiya $y = ctgx$ ga $0 < x < \pi$ da teskari funksiya bo'lib, (-∞,+∞) da aniqlangan.



2 - chizma



3 - chizma

Murakkab funksiyalar. Ushbu ikkita funksiya berilgan bo'lsin: aniqlanish sohasi M va qiymatlari sohasi L bo'lgan $u = \varphi(x)$ funksiya hamda aniqlanish sohasi L bo'lgan va qiymatlari sohasi E bo'lgan $y = f\ (u)$ funksiya. U holda har bir $x \in M$ ga $u = \varphi(x)$ qoida bo'yicha yagona u qiymat mos keladi, u ga esa $y = f\ (u)$ qoida bo'yicha yagona y qiymat mos keladi. Shu bilan birga har bir $x \in M$ ga yagona $y \in E$ y qiymat mos keladi, ya'ni M to'plamda x ning $y = f\ [\varphi\ (x)]$ funksiyasi aniqlanadi, bu *murakkab funksiya* (funksiyalar kompozitsiyasi yoki funksiyaning funksiyasi) deb ataladi. u o'zgaruvchi murakkab funksiyaning *oraliq argumenti* deb ataladi. Masalan, agar $y = lg$ u va $u = sin\, x$ bo'lsa, u holda y murakkab funksiyadir:

$$y = lg\ sinx.$$

$y = lg\ sin\, x$ murakkab funksiya x ning faqat $u = sinx > 0$ bo'ladigan qiymatlarida aniqlangandir, chunki logarifmik funksiya o'z argumentining musbat qiymatlaridagina aniqlangan.

Boshqacha aytganda berilgan $y = f(x)$ funksiyaning argumenti x ni yangi t argumentning $x = \varphi(t)$ funksiyasi bilan almashtirilsa, murakkab funksiya $y = f(\varphi(t))$ hosil bo'ladi.

Elementar funksiya deb, asosiy elementar funksiyalardan to'rt arifmetik

(qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish) amalni va funksiyalarning kompozitsiyasini ketma-ket chekli sonda qo'llash yordamida tuzilgan funksiyaga aytiladi.

Asosiy elementar funksiyalar ham elementar funksiyalar sinfiga kiritiladi. Biz mazkur kursimizda asosan ayni shu elementar funksiyalarni qaraymiz.

Elementar funksiyalarga quyidagi funksiyalar misol bo'ladi:

$y = lg\, x + cos\, x,\qquad y = 2^x lnx,\quad y = x^3 + 2x^2 - 2cosx,$

$$y = \frac{x^2 - x}{arcsin\, x}$$

1.4. Ko'phadlar. Ratsional funksiyalar

Bu bo'limda biz elementar funksiyalarning ba'zi muhim xususiy hollarini ko'rib chiqamiz.

Butun ratsional funksiya (yoki ko'phad) deb,

$$y = a_0x^n + a_1\, x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, x + a_n$$

ko'rinishdagi funksiyaga aytiladi, bunda n-natural son bo'lib, kophadning *darajasi* deyiladi; $a_0, a_1, \ldots\ , a_{n-1}, a_n$ lar esa haqiqiy sonlar bo'lib, ko'phadning *koeffitsientlari* deb ataladi.

Ko'phad haqiqiy sonlar o'qida aniqlangan funksiyadir. Butun ratsional funksiyalarga misollar:

$y = 2x^2 - 1,\ y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1,\ y = 2x^3.$

Birinchi darajali $y = a_0x\ + a_1$ ko'phad *chiziqli funksiya* deb ataladi.

Eslatma. $y = C$ o'zgarmas funkisiyani nolinchi darajali ko'phad deb qarash mumkin: $y = Cx^0$.

Kasr-ratsional funksiya (yoki ratsional kasr) deb, ikkita ko'phadning nisbatiga aytiladi: $P(x)/Q(x)$.

Butun ratsional funksiya kasr ratsional funksiyaning $Q(x)$ o'zgarmas bo'lgandagi xususiy holidir $P(x)/Q(x)$ kasr-ratsional funksiya x ning $Q(x)$ mahraj nolga aylanadigan qiymatlaridan boshqa barcha qiymatlarida aniqlangan.

Kasr-ratsional funksiyalarga misollar:

$$y=\frac{x^2-3x-1}{x^3+2x^2-5}; \quad y=\frac{x^2-1}{x^2+1}; \quad y=\frac{x^3+5x^2+3}{x+7};$$

$$y=\frac{1}{x}.$$

y=f(x) da o'ng tomoni x argument ustida arifmetikaning 4 ta amali, daraja va ildiz chiqarish amali qatnashadigan ifodalar *irratsional* funksiyalardir.

$f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+3}{x^2+x+1}}$; $\varphi(x)=\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2-5}}$ - irratsional funksiyalar

1.5. Funksiyalarning eng sodda klassifikatsiyasi

Monoton funksiyalar. Matematikaning asosiy masalalaridan biri funksiyaning o'zgarish holatini o'rganishdir.

1-ta'rif. Agar funksiyaning X to'plamdan olingan ixtiyoriy x_1 va x_2 argumentlari uchun $x_1 < x_2$ tengsizlikdan $f(x_2) < f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya X to'plamda *o'suvchi* deb ataladi.

Demak, argumentning katta qiymatlariga funksiyaning katta qiymatlari mos kelsa, funksiya o'suvchi bo'ladi.

2-ta'rif. Agar funksiyaning X to'plamdan olingan ixtiyoriy x_1 va x_2 argument qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ tengsizlikdan $f(x_2) > f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya X to'plamda *kamayuvchi* deb ataladi.

Bu holda, aksincha, argumentning kichik qiymatlariga funksiyaning katta qiymatlari mos keladi.

3-ta'rif. Agar funksiyaning X to'plamdan ixtiyoriy x_1 va x_2 argument qiymatlari uchun x_1 va x_2 tengsizlikdan $f(x_1) \leq f(x_2)[f(x_2) \geq f(x)]$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda funksiya X to'plamda *kamaymaydigan (o'smaydigan)* deb ataladi.

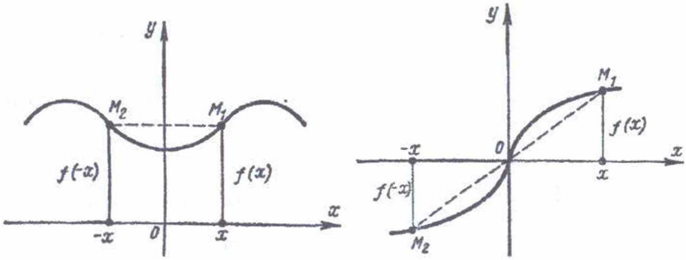
O'suvchi, kamayuvchi, kamaymaydigan, o'smaydigan funksiyalar umumiy bir sinfni tashkil etadi va *monoton funksiyalar* deb ataladi

Juft va toq funksiyalar. Agar har qanday $x \in M$ uchun $-x \in M$ ham o'rinli bo'lsa, u holda M *simmetrik to'plam* deyiladi.

Masalan, $M = [-1, 1]$, $R = (-\infty, +\infty)$ lar simmetrik to'plamlardir.

$y = f(x)$ *funksiya* $[-a, a]$ yoki $(-a, a)$ simmetrik to'plamda aniqlangan bo'lsin.

$y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli istalgan x ucun $f(-x) = f(x)$ bo'lsa, bu funkisiya *juft funksiya* deyiladi.(4-a chizma)



4-a,b chizma

Masalan, $y = x^2$ va $y = cos\, x$ funksiyalar juftdir, chunki aniqlanish sohasi R dan iborat, hamda $(-x)^2 = x^2$ va $cos(-x) = cosx$ o'rinli. Istalgan juft darajali funksiya, ya'ni $y = x^{2k}$(k - istalgan natural son) ko'rinishdagi funksiya ham juftdir.

Juft funksiyaning ta'rifidan bu funksiya grafigining ikkita $M_1[x; f(x)]$ va $M_2[-x; f(-x)]$ nuqtasi ordinatalar o'qiga nisbatan simmetriligi kelib chiqadi. Shuning uchun juft funksiyalarning grafiklarini chizishda grafikning $x \geq 0$ yoki $x \leq 0$ bo'lgan holdan bittasini chizish kifoya. Grafikning ikkinchi qismi esa simmetrik (Oy ga nisbatan) ko'chiriladi.

$y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi simmetrik to'plam bo'lib, istalgan x uchun $f(-x) = -f(x)$ bo'lsa , bu funksiya toq funksiya deb ataladi.(4-b chizma)

Masalan, $y = x^3$ va y=sinx funksiyalar toqdir, chunki $(-x)^3 = -x^3$, sin(-x)=$-sinx$. Istalgan toq ko'rsatkichli $y = x^{2k-1}$ darajali funksiya ham toqdir.

Toq funksiyaning grafigi koordinatalat boshiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi.

Juft funksiyaning ham, toq-funksiyaning ham aniqlanish sohasi, ravshanki, koordinatalar boshiga nisbatan simmetrikdir.

Biroq shuni ham ko'zda tutish kerakki, har qanday funksiya ham juft yoki toq bo'lavermaydi. Masalan, $y = x^2 - x + 1, y = x + cosx, y = 2, y = lgx$ funksiyalarning har biri juft ham emas, toq ham emas.

Davriy funksiyalar. Agar har qanday $x \in M$ uchun $x + T \in M$ ham $(T \neq 0)$ o'rinli bo'lsa, u holda M to'plam davriy (T davrli to'plam) deyiladi.

Agar $y = f(x)$ funksiya M davriy to'plamda aniqlangan bo'lib shunday $T \neq 0$ son mavjud bo'lsaki, uning aniqlanish sohasida $f(x \pm T) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, bu funksiya *davriy funksiya* deb ataladi.

Bunda $f(x \pm T) = f(x)$ shartni qanoatlantiradigan T musbat sonlar $y = f(x)$ funksiyaning davri, T sonlarning eng kichigi esa asosiy davri deb ataladi.

Trigonometriya kursidan ma'lumki, $y = sin\, x, y = cosx, y = tg\, x$ va $y = ctg\, x$ funksiyalar davriydir. Ularning birinchi ikkitasi uchun davr $2k\pi$ ga teng, asosiy davri 2π ga teng, so'nggi ikkitasining davri esa $k\pi$ ga teng.

T davrli davriy funksiyani tekshirish va uning grafigini yasashda bu funksiyaning T uzunlikdagi biror segmentdagi, masalan, $[0; T]$ segmentdagi qiymatlarini bilish kifoyadir. Davriy funksiyalarning grafigini hosil qilish uchun uning bitta davr ichidagi grafigini chizib, so'ngra uni chapga va o'nga cheksiz ko'p marta ko'chirish kerak.

Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar. $f(x)$ funksiya E to'plamda aniqlangan bo'lib, uning qiymatlari to'plami $E(f)$ *chegaralangan* bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya E to'plamda *chegaralangan* deyiladi. Ya'ni barcha $x \in E$ uchun $|f(x)| < M$ tengsizlikni qanoatlantiradigan M son mavjud bo'lsa, $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi. Masalan, [0,4] da $y = x^2, y = \frac{1}{x+1}, y =$

$\sin x$ funksiyalar chegaralangan bo'lib, $y = \frac{1}{x}, y = \ln x$ funksiyalar esa chegaralanmagandir. Ammo [1,4] da barchasi chegaralangan.

2-§. Ketma-ketliklar

2.1. Sonli ketma-ketliklar va ularning limiti

N natural sonlar to'plami berilgan bo'lsin. Agar har bir n natural songa biror qonun yoki qoidaga binoan aniq bitta x_n haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa ketma ketlik berilgan deyiladi va $\{x_n\}$ kaabi belgilanadi..

Boshqacha aytganda agar f(x) funksiyaning aniqlanish sohasi barcha natural sonlar to'plamidan iborat bo'lsa, u holda natural argumentli funksiya qiymatlaridan tuzilgan

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \dots\ f(n),\dots \qquad (1)$$

ifoda sonli ketma-ketlik deb ataladi.

1)ifoda qisqacha $\{f(n)\}$ orqali belgilanadi. Agar $f(n)=y_n$ deb belgilasak, u holda $y_1, y_2, y_3,\dots, y_n,\dots$ yoki $\{y_n\}$- sonli ketma ketlik bo'ladi.

Misollar. 1)1,2,3,...n, ..., bunda f(n)=n

2) 1!,2!,3!,...,n!,..., bunda $f(n) = n!$

3) 1, -1, 1, -1, ..., $(-1)^{n-1}$, ... bunda $f(n)=(-1)^{n-1}$.

4)Agar $\{y_n\}=\{1/n^2\}$ bo'lsa u holda

$y_1=1/1^2=1$, $y_2=1/2^2=1/4$, $y_3=1/3^2=1/9$,.... bo'ladi.

1-ta'rif. Agar $\forall\varepsilon>0$ uchun shunday N natural son mavjud bo'lsaki, $n > N$ bo'lgan barcha *n* lar uchun

$$|\,y_n - a\,| < \varepsilon$$

o'rinli bo'lsa, u holda a son $\{y_n\}$ ketma-ketlikning limiti deb ataladi va

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ yoki $y_n \to a$ orqali belgilanadi.

Agar a chekli son bo'lsa berilgan ketma-ketliklar yaqinlashuvchi deb ataladi. Agar a mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa uzoqlashuvchi deyiladi. Chekli limit geometrik ma'noga ega. Agar a berilgan $\{y_n\}$ ning limiti bo'lsa, u holda a nuqtaning ihtiyoriy ε atrofida y_n ning cheksiz ko'p hadlari joylashadi. Shunday hadlarning nomerlari N dan katta bo'lib, bu atrofdan tashqarida esa y_n ning ko'pi bilan bir nechta (y_1 dan y_N gacha) hadi bo'lishi mumkin.

1-teorema. Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketlik faqat bitta limitga ega bo'ladi.

Isboti. Aksincha, yaqinlashuvchi $\{y_n\}$ ketma-ketlikning ikkita $a \neq b$ limiti bor deb faraz qilaylik. U holda har qanday $\varepsilon > 0$ uchun a va b nuqtalarning $U(a,\varepsilon)$ va $U(b,\varepsilon)$ atroflarining har birida y_n ning cheksiz ko'p hadlari va shu bilan bir vaqtda, ularning har biridan tashqarida chekli sondagi hadlari joylashgan bo'ladi. Endi, agar $\varepsilon = \frac{1}{2}(b-a)$ qilib olsak, $U(a,\varepsilon) \cap U(b,\varepsilon) = \emptyset$ bo'lgani uchun $a \neq b$ bo'lganda yuqoridagi hollar bir vaqtda bo'lishi mumkin emas. Bu ziddiyat $a = b$ ekanligini, ya'ni limit bittaligini ko'rsatadi.

5-misol. $\{y_n\}=\{\frac{1+2+3.....+n}{n^2}\}$ ketma-ketlik limitini toping.

Yechilishi. Bu yerda surat va mahraj bir vaqtda $+\infty$ ga intiladi. Limitini topish uchun suratni arifmetik progressiya formulasi bo'yicha ifodalab, y_n ni almashtiramiz: $1+2+3+\ldots\ldots+n=n(n+1)/2$

Shunday qilib $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3.....+n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)/2}{n^2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$

6-misol. $\{y_n\}=\{(-1)^n\}$ ketma-ketlikni qaraylik. Ketma ketlikning hadlari oldinma ketin 1 va -1 qiymatlarni qabul qiladi. Bu ketma-ketlik, ravshanki limitga ega emas.

2.2. Chegaralangan va monoton ketma-ketliklar

1-ta'rif. Agar $\forall n \in N$ uchun $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik kamaymaydigan (o'smaydigan) deb ataladi.

2-ta'rif. Agar $\forall n \in N$ uchun $x_n < x_{n+1}$($x_n > x_{n+1}$) bo'lganda esa o'suvchi (kamayuvchi) yoki qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) deyiladi. Bunday ketma-ketliklar monoton ketma-ketliklar sinfini tashkil qiladi.

3-ta'rif. Agar barcha n lar uchun $x_n > a$ bo'ladigan birorta a coni mavjud bo'lsa $\{x_n\}$- quyidan chegaralangan ketma ketlik deyiladi.

4-ta'rif. Agar barcha n lar uchun $x_n < a$ bo'ladigan birorta a coni mavjud bo'lsa $\{x_n\}$- yuqoridan chegaralangan ketma ketlik deyiladi

Yuqoridan ham quyidan ham chegaralangan $\{x_n\}$- ketma ketlik chegaralangan deyiladi.

1-teorema. Har qanday yuqoridan chegaralangan kamaymaydigan sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchidir.

Isboti. $\{x_n\}$ kamaymaydigan va yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik bo'lsin. $\{x_n\}$ yuqoridan chegaralangan bo'lgani uchun uning hadlaridan tuzilgan $\{x_n\}$ to'plam aniq yuqori chegaraga ega:

$sup\{x_n\} = a$.

Aniq yuqori chegaraning hossasiga ko'ra:

1)$\forall n \in N$ uchun $x_n \leq a$;

2)$\forall \varepsilon > 0$ uchun $\exists x_N$ bo'lib, $a - \varepsilon < x_N$

1) va 2) dan $a - \varepsilon < x_N \leq a$ ni yoza olamiz.

Ikkinchidan, $\{x_n\}$ kamaymaydigan ketma-ketlik: $x_N \leq x_{N+1} \leq \dots$, demak,

$a - \varepsilon < x_N \leq x_{N+1} \leq x_{N+2} \leq \dots \leq a$ bo'ladi.

Shunday qilib, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ bo'lib, $\{ n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\}$, demak,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Navbatdagi teorema ham shunga o'xshash isbotlanadi.

2-teorema. Har qanday quyidan chegaralangan o'smaydigan sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchidir.

1-misol.

$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots,$

$X_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \ldots$ sonli ketma-ketlikning limiti topilsin.

Yechilishi. Avvalo, har qanday n ucun $x_n < 2$ ekanligini ko'rsatamiz. Ravshanki, $x_1 = \sqrt{2} < 2$. $x_n < 2$ tengsizlik $n = k$ uchun o'rinli bo'lsin. U holda

$x_{k+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} = 2$, ya'ni $x_{k+1} < 2$ bo'ladi. Demak, matematik induksiya prinsipiga asosan, $\{x_n\}$ yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi va $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} > \sqrt{2x_n} > \sqrt{x_n^2} = x_n$, ya'ni $\{x_n\}$–o'suvchi ketma-ketlik.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = a$, mavjud bo'ladi. Endi a limitni topamiz. Buning uchun $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$dan

$x_n^2 = 2 + x_{n-1}$ni hosil qilib,

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = 2 + \lim_{n\to\infty} x_{n-1}$$

ga ega bo'lamiz. Bundan $a^2 = 2 + a$ ga, demak, $a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2}$ yoki $a_1 = 2$, $a_2 = -1$ ga ega bo'lamiz. $x_n > 0$, shuning uchun $a_2 = -1$ limit bo'la olmaydi. U holda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2.$$

2.3. e soni

$y_n = (1+\frac{1}{n})^n$bo'lgan ketma-ketlikni olamiz. Bu ketma-ketlik o'suvchi va uyqoridan chegaralanganligini ko'rsatamiz. $a = 1$, $b = 1/n$ deb, Nyuton formulasiga ko'ra quydagiga egamiz:

$$y_n = (1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2*1}{1*2*3\ldots n}\frac{1}{n^n}$$

Bunda $\frac{n(n-1)}{n^2}=1-\frac{1}{n}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}=\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots$,

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)......2*1}{n^n}=\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n}\ldots\frac{(n-(n-1))}{n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$ ekanini hisobga olib quydagini hosil qilamiz:

$$y_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+1+\frac{1}{1*2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1*2*3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

$$\ldots.+\frac{1}{1*2*\ldots..*n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots(1-\frac{n-1}{n})$$

n o'sishi bilan $1/n, 2/n, 3/n$ .... kasrlar kamayib boradi. $1-\frac{1}{n}$, $1-\frac{2}{n}$, ...ayirmalar esa o'sib boradi. Shuning uchun n o'sishi bilan yoyilmaning 3 – ,4 –, va h.k. hadlari o'sib boradi, bundan tashqari, yangi musbat qo'shiluvchilar qo'shilib boradi. Demak n o'sishi bilan $y_n=(1+\frac{1}{n})^n$ o'sib boradi. Shunday qilib $\{y_n\}=\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ ketma-ketlik o'suvchi. Uning uyqoridan chegaralanganligini ko'rsatamiz.

Agar yoyilmada $y_n$uchun yoyilmadagi qavslarda $1/n, 2/n$ ...larni tashlab yuborsak xar bir qo'shiluvchi 3 –sidan boshlab ortadi va biz dastlabki yig'indidan ortiq bo'lgan yig'indini hosil qilamiz.

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2*3}+\cdots.+\frac{1}{2*3\ldots..*n}$$

lekin: $\frac{1}{2*3}<\frac{1}{2*3}=\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2*3*4}<\frac{1}{2^3}$, ..., $\frac{1}{2*3*4\ldots}<\frac{1}{2^{n-1}}$

Shuning uchun $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ yig'indini geometrik progressiya hadlari yig'indisi formulasidan topamiz:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2(1-\frac{1}{2^n})<2.$$

Shuning uchun: $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3$. Shunday qilib, berilgan ketma-ketlik uyqoridan chegaralangan ekan.

Demak, uyqridan chegaralangan o'suvchi ketma-ketlik limitining mavjudlik alomatiga ko'ra umumiy hadi $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlik limitga ega deb hulosa qilish mumkin. Bu limit matematikada katta ro'l o'ynaydi uni e soni deyiladi. Shunday qilib, $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$

e irratsional son bo'lib, e=2,718281828459045 …

Matematikada asosi e bo'lgan logarifmlar ko'p ishlatiladi va bunday logarifmlar natural logarifmlar deb ataladi.

2.4.To'plamning limit nuqtasi

1-ta'rif. Agar a nuqtaning ixtiyoriy $\mathrm{U}(\mathrm{a}\,,\mathrm{b})$ atrofida E to'plamning a dan boshqa hech bo'lmaganda bitta nuqtasi mavjud bo'isa, u holda a nuqta E to'plamning *limit nuqtasi* deyiladi.

Natija. Limit nuqtaning ixtiyoriy atrofida E to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari yotadi.

a limit nuqta E to'plamga kirishi ham, kirmasligi ham mumkin.

Misollar. 1) $\mathrm{E} = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{\mathrm{n}}, \dots\right\}$ *to'plam berilgan.* Bu to'plam uchun yagona limit nuqta 0 dan iborat, chunki 0 nuqtaning $\forall\ \mathrm{U}\,(0, \delta) = (-\delta, +\delta)$ atrofida $n > \frac{1}{\delta}$ uchun E to'plamning $\frac{1}{n} < \delta$ bo'lgan cheksiz ko'p nuqtalari joylashadi. $a = 0$ limit nuqta E ga tegishli emas. E to'plam boshqa limit nuqtalarga ega emas.

2) $N = \{n\}$ natural sonlar to'plami berilgan Bu to'plam bitta ham limit nuqtaga ega emas, chunki $\delta < 1$ bulganda har qanday a haqiqiy sonning $\mathrm{U}(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = (\mathrm{a} - b\,, \mathrm{a} + \mathrm{b})$ atrofida ko'pi bilan bitta natural son yotishi mumkin.

3) $\mathrm{E} = (\mathrm{a}, \mathrm{b})$ berilgan bo'lsin. Bu to'plamning har bir nuqtasi ***a*** va ***b*** nuqtalar bilan birga E to'plamning limit nuqtalari bo'ladi.

3-§. Funksiylarning limitlari

3.1. Funksiyaning nuqtadagi limiti

Funksiyaning $x \to +\infty$ dagi limiti. $y = 2 - \frac{1}{x}$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyani qiymatlar jadvalini tuzamiz va uning grafigini yasaymiz.

X	1	2	10	100	1000
Y	1	1,5	1,9	1,99	1,999

Ko'rish mumkinki, x argumentni o'sishi bilan bu funksiya 2 songa cheksiz yaqinlashadi yoki boshqacha aytganda, x plyus cheksizlikka intilganda $(x \to +\infty)$ funksiya limiti 2 songa teng deb faraz qilish mumkin.

$M(x, y)$ nuqta $y = 2 - \frac{1}{x}$ funksiya grafigining nuqtasi bo'lsin. M nuqtadan y=2 to'g'ri chiziqqacha bo'lgan d masofani topamiz:

$$d = |y - 2| = |f(x) - 2| = \left|\left(2 - \frac{1}{x}\right) - 2\right| = \left|\frac{1}{-x}\right| = \frac{1}{|x|}.$$

$x \to +\infty$ da $y = 2 - \frac{1}{x}$ fnksiyaning limiti 2 songa teng degan fakt funksiya grafigining $M(x; y)$ nuqtasidan $y = 2$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa, ya'ni x ning yetarlicha katta qiymatlari uchun $|f(x) - 2|$ ni oldindan berilgan istalgan musbat sondan kichik qilib olish mumkin degan so'zdir.

Masalan, $|f(x) - 2| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{10}$ o'rinli, agar $x > 10$ bo'lsa;

$|f(x) - 2| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{100}$, agar $x > 100$ bo'lsa va umuman $\varepsilon > 0$ bo'lganda

$|f(x) - 2| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$, agar $x > \frac{1}{\varepsilon}$ bo'lsa.

Endi $y = f(x)$ funksiyaning $x \to +\infty$ dagi limitiga aniq ta'rif beramiz, bunda $y = f(x)$ funksiya sonlar o'qida yoki biror sondan katta bo'lgan barcha x lar uchun aniqlangan deb faraz qilamiz.

Agar har qanday musbat ε son uchun shunday N son topilsaki, N dan katta barcha x lar uchun

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad (1)$$

tengsizlik bajarilsa, b son $y = f(x)$ funksiyaning $x \to +\infty$ dagi limiti deyiladi.

$f(x)$ funksiyaning $x \to +\infty$ dagi ta'rifi simvolik ravishda quydagicha yoziladi:

$$\forall(\varepsilon > 0), \exists N, \forall(x > N) \to |f(x) - b| < \varepsilon$$

Boshqacha aytganda, agar funksiyaning limiti $x \to +\infty$ da b son bo'lsa, u holda x argumentning cheksiz o'sishi bilan bu funksiyaning qiymati b sondan istalgancha kam farq qiladi, ya'ni funsiyaning qiymati bilan b son orasidagi farq no'lga yaqin bo'ladi.

Funksiyaning $x \to +\infty$ dagi limitining b songa teng bo'lishi quydagicha yoziladi:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b,$$

quydagicha o'qiladi: "ef x funksiyaning x plyus cheksizlikka intilgandagi limiti b ga teng". Yuqoridagi misolga qaytsak, quydagiga egamiz:

$$\lim_{x \to +\infty} (2 - \frac{1}{x}) = 2.$$

1-misol. $\lim_{x \to +\infty} (\frac{5x+3}{x}) = 5$ ni isbot qiling.

Yechilishi. Bu holda $f(x) = \frac{5x+3}{x}$, $b = 5$, Ixtiyoriy musbat ε son olamiz va $f(x) - b$ ayirmaning absolyut qiymatini qaraymiz:

$$|f(x) - b| = \left|\frac{5x+3}{x} - 5\right| = \left|\frac{3}{x}\right| = \frac{3}{|x|}$$

Bu ayirma ε dan kichik bo'lishi uchun ya'ni

$$\left|\frac{5x+3}{x} - 5\right| = \frac{3}{|x|} < \varepsilon \; (*)$$

tengsizlik bajarilgani uchun $|x| > \frac{3}{\varepsilon}$ bo'lishi yetarli. Biz funksiyaning $x \to +\infty$ dagi limitini qarayotganimiz uchun x ni musbat deb hisoblash mumkin. Shuning uchun (*) tengsizlik barcha $x > \frac{3}{\varepsilon}$ lar uchun bajariladi. Bu holda limitning ta'rifida ko'rsatilgan N son $\frac{3}{\varepsilon}$ ga teng. Shunday qilib, $\forall(\varepsilon > 0)\exists(N = \frac{3}{\varepsilon})\forall(x > N = \frac{3}{\varepsilon}) \to \left|\frac{5x+3}{x} - 5\right| < \varepsilon$. Bu $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{5x+3}{x}) = 5$ ekanini bildiradi.

$y = \frac{5x+3}{x}$ funksiyaning x argumentining musbat qiymatlari uchun grafigini yasash mumkin.

2-misol. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x} = 1$ ni isbot qiling.

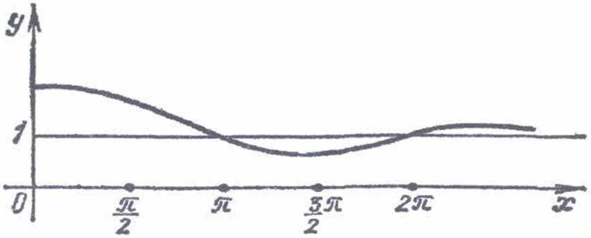
Yechilishi. $\varepsilon > 0$ son olamiz. Quydagiga egamiz:

$$|f(x) - 1| = \left|\frac{x + sinx}{x} - 1\right| = \left|\frac{sinx}{x}\right| = \frac{|sinx|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|},$$

Chunki $|\sin x| \leq 1$. Agar $\frac{1}{x} < \varepsilon$ bo'lsa, $\left|\frac{x+sinx}{x} - 1\right| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi, chunki $x \to +\infty$ da x ni musbat deb hisoblash mumkin. Oxirgi tengsizlik barcha $x > \frac{1}{\varepsilon} = N$ lar uchun o'rinli. Shunday qilib,

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(N = \frac{1}{\varepsilon})\forall\left(x > \frac{1}{\varepsilon}\right) \to \left|\frac{x + sinx}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

Shu bilan biz $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x} = 1$ ekanini ko'rsatdik.(5-chizma)



5- chizma

Endi funksiyaning $x \to +\infty$ dagi limitining geometrik ma'nosini o'rganamiz. Biz bilamizki, agar $y = f(x)$ funksiyaning limiti b songa teng bo'lsa, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N son topiladiki, barcha $x > N$ lar uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Absolyut miqdorlarning xossasiga asosan bu tengsizlik quydagi tengsizlikka teng kuchlidir:

$$-\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon \quad (2)$$

yoki $\quad b - \varepsilon < f(x) - b < \varepsilon + b \quad (2')$

(2') tengsizliklar $y = f(x)$ funksiya grafigidagi absissalari N dan katta bo'lgan barcha nuqtalarning ordinatalari $b - \varepsilon$ va $\varepsilon + b$ sonlar orasida yo'tishini ko'rsatadi. Bu esa x ning N sonidan katta bo'lgan barcha qiymatlari uchun $y = f(x)$ funksiyaning grafigi $y = b - \varepsilon$ va $y = \varepsilon + b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan sohada yo'tadi degan ma'noni anglatadi. Limit ta'rifidagi N son ε ga bog'liq. ε qancha kichik bo'lsa, ya'ni $y = b - \varepsilon$ va $y = \varepsilon + b$ to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa tor bo'lsa, N shuncha katta bo'ladi.

Funksiyaning $x \to -\infty$ dagi limiti. Endi funksiyaning x minus cheksizlikka intilgandagi ($x \to -\infty$) limitning ta'rifini qaraylik.

Agar har qanday musbat ε son uchun shunday M son topilsaki, M dan kichik barcha x lar uchun $\quad |f(x) - b| < \varepsilon \quad (1)$

tengsizlik bajarilsa, b son $y = f(x)$ funksiyaning $x \to -\infty$ dagi limiti deyiladi.

$f(x)$ funksiyaning $x \to -\infty$ dagi limitining ta'rifi simvolik ravishda quydagicha yoziladi: $\quad \forall(\varepsilon > 0)\exists M, \forall(x < M) \to \; |f(x) - b| < \varepsilon$

Funksiyaning $x \to -\infty$ dagi limitining b ga teng bo'lishi quydagicha yoziladi:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Funksiyaning $x \to -\infty$ dagi limitining geometrik ma'nosi funksiyaning $x \to +\infty$ dagi limitining geometrik ma'nosiga o'xshash. Agar $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{b}$ bo'lsa, har qanday musbat ε son uchun shunday M son topilsaki, barcha

$x < M$ lar uchun $y = f(x)$ funksiyaning grafigi $y = b - \varepsilon$ va $y = \varepsilon + b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan sohada joylashgan bo'ladi.

Funksiyaning $x \to x_0$ dagi limiti. Biz funksiyaning $x \to +\infty$ va

$x \to -\infty$ dagi limiti tushunchasini kiritdik. Endi funksiyaning $x \to x_0$ dagi limiti tushunchasini kiritamiz. Dastlab, x erkli o'zgaruvchi x_0 ga chapdan yaqinlashgan holini qaraylik.

Agar har qanday musbat ε son uchun shunday N son ($N < x_0$)topilsaki, N va x_0 orasida ($N < x < x_0$) yotuvchi barcha x lar uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizliklar bajarilsa, b son $y = f(x)$ funksiyaning $x \to x_0$ dagi chap limiti deyiladi va $f(x_0 - 0)$ kabi belgilanadi .

$f(x)$ funksiyaning $x \to x_0$ dagi chap limitining ta'rifi simvolik ravishda quydagicha yoziladi:

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(N < x_0)\forall(N < x < x_0) \to |f(x) - b| < \varepsilon$$

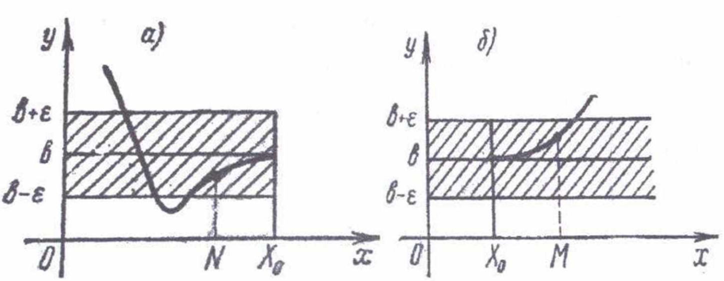
Funksiyaning $x \to x_0$ dagi chap limiti tushunchasi $x \to +\infty$ da limit tushunchasiga o'xshash bo'lib, undan shu bilan farq qiladiki, $x \to +\infty$ da limit holida (1) tengsizlik N dan katta barcha x lar uchun bajariladi. $x \to x_0$ dagi chap limit holida esa N dan katta, lekin x_0 dan kichik barcha x lar uchun bajariladi. Funksiyaning $x \to x_0$ dagi chap limiti quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = b.$$

$x \to x_0 - 0$ simvoli x kattalik x_0 ga chapdan intilishini bildiradi.

Funksiyaning $x \to x_0$ dagi limitining geometrik ma'nosi quydagidan iborat: har qanday $\varepsilon > 0$ uchun, shunday N ($N < x_0$) son topiladiki, N va x_0 orasida joylashgan barcha x lar uchun funksiyaning grafigi $y = b - \varepsilon$ va $y = \varepsilon + b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan polosa orasida joylashgan bo'ladi.

Funksiyaning $x \to x_0$ dagi chap limiti tushunchasiga o'xshash funksiyaning $x \to x_0$ dagi o'ng limit tushunchasi kiritiladi.(6-a chizma)



6-a,b chizma

Agar har qanday musbat ε son uchun shunday (x_0 dan katta) M son topilsaki, M va x_0 orasida ($x_0 < x < M$) yotuvchi barcha x lar uchun

$|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizliklar bajarilsa, b son $y = f(x)$ funksiyaning

$x \to x_0$ dagi o'ng limiti deyiladi va $f(x_0 + 0)$ kabi belgilanadi .(6-b chizma)

$f(x)$ funksiyaning $x \to x_0$ dagi o'ng limitining ta'rifi simvolik ravishda quydagicha yoziladi:

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(x_0 < M)\forall(x_0 < x < M) \to |f(x) - b| < \varepsilon$$

Funksiyaning $x \to x_0$ dagi o'ng limiti quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = b.$$

Agar *f(x)* funksiyaning $x \to x_0$ dagi o'ng limiti b songa teng bo'lsa, u holda uning geometrik ma'nosi quyidagicha bo'ladi: funksiyaning grafigi x_0 va M orasida joylashgan barcha x lar uchun $y = b - \varepsilon$ va $y = \varepsilon + b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan soha ichida joylashgan bo'ladi .

Funksiyaning $x \to x_0$ dagi chap ($x \to x_0 - 0$) va $x \to x_0$ dagi o'ng ($x \to x_0 + 0$) limitlari uning bir tomonlama limitlari deyiladi.

Agar ikkala bir tomonlama limit mavjud bo'lib, ular o'zaro teng bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x \to x_0$ da ikki tomonlama limitga ega yoki oddiygina $x \to x_0$ da limitga ega deyiladi.

Shunday qilib, agar har qanday musbat $\varepsilon > 0$ son uchun shunday M va N sonlar ($N < x_0 < M$) topilsaki, $[N, M]$ intervalda yotuvchi barcha x lar uchun

(x_0 nuqta bundan mustasno bo'lishi mumkin) $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizliklar bajarilsa, b son $y = f(x)$ funksiyaning $x \to x_0$ dagi limiti deyiladi.

$y = f(x)$ funksiyaning $x \to x_0$ dagi limitining ta'rifi simvolik ravishda quydagicha yoziladi: $\forall(\varepsilon > 0)\exists(N < x_0 < M)\forall(x \in [N, M]) \to |f(x) - b| < \varepsilon$

x_0 nuqtani o'z ichiga olgan istalgan intervalni uning atrofi deb ataymiz. Agar b son $y = f(x)$ funksiyaning $x \to x_0$ dagi limiti bo'lsa, u holda $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik x_0 nuqtaning biror atrofining barcha nuqtalari uchun (x_0 nuqta bundan mustasno bo'lishi mumkin) bajarilishini ko'rish oson. Agar $f(x)$ funksiya $x \to x_0$ da b ga teng limitga ega bo'lsa,u quyidagicha yoziladi: $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$.

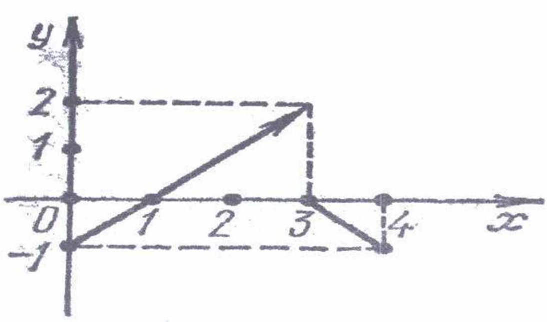
1-eslatma. Funksiyaning $x \to x_0$ dagi (yoki $x \to x_0 - 0$, yoki $x \to x_0 + 0$ dagi) limitining ta'rifida $x \neq x_0$ qiymatlar qaraladi.

x_0 nuqtaning o'zida funksiya aniqlanmagan bo'lishi ham mumkin. Keyinchalik bu eslatmadan ko'p foydalaniladi.

2-eslatma. Funksiyaning $x \to x_0$ dagi (yoki $x \to x_0 - 0$, yoki $x \to x_0 + 0$ dagi) limitining ta'rifida ta'kidlanayotgan M va N sonlar ε va x_0 ga bog'liq.

3-misol. [0,4] segmentda quydagicha aniqlangan $y = f(x)$ funksiyani qaraymiz (7 – chizma).

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, agar\ 0 \leq x < 3\ bo'lsa; \\ 3 - x, agar\ 3 \leq x \leq 4\ bo'lsa; \end{cases}$$



7-chizma.

Yechilishi: Ravshanki

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3-0} (x-1) = 2, \lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} (3-x) = 0.$$

Bunday bo'lishi funksiyaning grafigidan yaqqol ko'rinib turibdi. Bu yerda chap limiti ham, o'ng limiti ham bir-biriga teng emas, shuning uchun $y = f(x)$ funksiya x→3 da limitga ega emas.

Shuni ta'kidlash lozimki agar funksiya biror bir nuqtada chekli limitga ega bo'lsa shu nuqtadagi chap va o'ng limitlar ham shu songa tehg bo'ladi.

3.2. Cheksiz kichik funksiyalar. Chegaralangan funksiyalar

Agar $y = f(x)$ funksiya $x \to +\infty$ da 0 limitga ega bo'lsa, $y = f(x)$ ga $x \to +\infty$ da cheksiz kichik deyiladi. $x \to +\infty$, $x \to x_0 - 0, x \to x_0 + 0, x \to x_0$ da cheksiz kichik funksiyalar shunga o'xshash aniqlanadi. Cheksiz kichik funksiya uchun $b = 0$ bo'ladi va $|f(x) - b| = |f(x) - 0| = |f(x)|$ bo'lgani sababli limitning ta'rifiga ko'ra, masalan $x \to +\infty$ da cheksiz kichik funksiyaning yuqorida berilgan ta'rifiga teng kuchli bo'lgan ta'rifini berish mumkin.

Agar ixtiyoriy ε>0 son uchun shunday N sonni topish mumkin bo'lsaki, barcha $x > N$ lar uchun $|f(x)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, y=f(x) funksiya $(x \to +\infty)$ da cheksiz kichik deyiladi. $x \to +\infty$ da cheksiz kichik funksiya ta'rifining simvolik yozuvi quydagicha: $\forall(\varepsilon > 0)\exists N\forall(x > N) \to |f(x)| < \varepsilon$

1-misol. $y = \frac{1}{x^2}$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz kichik bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun uning $x \to +\infty$ dagi limiti $b = 0$ ekanligini, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N sonni topish mumkinligini ko'rsatish kerak:

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2} < \varepsilon.$$

Lekin bu tengsizlik $x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ bo'lganda o'rinli bo'ladi.

Umuman aytganda, $y = \frac{1}{x^\alpha}$ funksiya (α – ixtiyoriy musbat son) $x \to +\infty$ da cheksiz kichik ekanligini ko'rsatish mumkin.

2-misol. $y = x^3$ funksiya $x \to 0$ da cheksiz kichik funksiya bo'lishini ko'rsatamiz.

$|f(x)| = |x^3| < \varepsilon$ tengsizlik ravshanki, x ning $|x| < \sqrt[3]{\varepsilon}$ bo'ladigan barcha qiymatlari uchun bajariladi. Shunday qilib, $|x^3| < \varepsilon$ tengsizlik $N = -\sqrt[3]{\varepsilon}$ va $M = \sqrt[3]{\varepsilon}$ orasida yotuvchi bacha x lar uchun bajariladi. Bundan $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$, ya'ni $y = x^3$ funksiya $x \to 0$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi deganidir.

Umuman aytganda $y = x^m$ (bu yerda $m > 0$) funksiya $x \to 0$ da cheksiz kichik bo'lishini ko'rsatish mumkin.

Endi cheksiz kichik funksiyalar haqidagi bir nechta teoremani isbot qilamiz. Aniqlik uchun teoremalarning ta'riflari va isbotlarini $x \to +\infty$ dagi cheksiz kichik funksiyalar uchun keltiramiz, chunki ta'rif va isbotlarning boshqa barcha hollari shunga o'xshash bo'ladi. Bu teoremalarni ($x \to -\infty$, $x \to x_0$, $x \to x_0 - 0$ va $x \to x_0 + 0$ hollar uchun mustaqil ta'riflashni va isbotlashni kitobxonning o'ziga havola qilamiz).

1-teorema. Agar $\varphi(x)$ va $\omega(x)$ funksiyalar ($x \to +\infty$ da) cheksiz kichik funksiyalar bo'lsa, ularning yig'indisi $\varphi(x) + \omega(x)$ ham ($x \to +\infty$ da) cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Isboti. $f(x) = \varphi(x) + \omega(x)$ bo'lsin. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ekanini ya'ni

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists N\forall(x > N) \to |f(x)| < \varepsilon$$

ekanini ko'rsatish talab qilinadi. Shunday qilib, ε - ixtiyoriy musbat son bo'lsin. Shartga ko'ra $\varphi(x)$ cheksiz kichik funksiya bo'lganidan musbat $\frac{\varepsilon}{2}$ son uchun :

$$\exists N_1\forall(x > N_1) \to |\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Shunga o'xshash $\frac{\varepsilon}{2}$ musbat son uchun

$$\exists N_2\forall(x > N_2) \to |\omega(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

N soni N_1 va N_2 sonlari ichida eng kattasi bo'lsin. U holda $x > N$ uchun (1) va (2) tengsizliklarning ikkialasi bir vaqtda bajariladi. Bun day holda

$$\forall(x > N) \to \left\{|f(x)| = |\varphi(x) + \omega(x)| \le |\varphi(x)| + |\omega(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\right\}.$$

Demak, $\forall(x > N) \to |f(x)| < \varepsilon$ bu $f(x) = \varphi(x) + \omega(x)$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi demakdir.

Bu teorema x ixtiyoriy chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalar uchun umumlashtirilishi mumkin: bir nechta cheksiz kichik funksiyalarning yig'indisi cheksiz kichik funksiyalardir.

Navbatdagi teorema chegaralangan funksiya va limitga ega funksiya orasidagi bog'lanishni aniqlaydi. Aniqlik uchun funksiyaning $x \to +\infty$ bo'lgan holdagi limitini qaraymiz.

2-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya $x \to +\infty$ da limitga ega bo'lsa, u biror cheksiz $[N, +\infty]$ intervalda chegaralangan bo'ladi.

Isboti. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ bo'lsin. U holda limit ta'rifiga ko'ra $\varepsilon = 1$ uchun

$\exists N \forall(x > N) \to \{|f(x) - b| < 1\}$. Absolyut qiymatlarning xossalariga ko'ra $|f(x) - b| \le |f(x)| - |b|$ bo'lgani uchun $|f(x)| - |b| < 1$, bundan

$|f(x)| < |b| + 1 = C$. Bu $y = f(x)$ funksiya cheksiz $(N, +\infty)$ intervalda chegaralanganini bildiradi.

Eslatma. Cheksiz $(N, +\infty)$ intervalda chegaralangan funksiyani $x \to +\infty$ da chegaralangan deyish mumkin. $x \to +\infty$ da cheksiz kichik funksiya $x \to +\infty$ da chegaralangan bo'ladi.

3-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya $x \to +\infty$ da noldan farqli limitga ega bo'lsa, $y = 1/f(x)$ funksiya (biror cheksiz intervalda) chegaralangan.

Isboti. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ($b \ne 0$) va biror musbat $\varepsilon < |b|$ son berilgan bo'lsin. Limitning ta'rifiga ko'ra $\exists N \forall(x > N) \to \{|f(x) - b| < \varepsilon\}$.

$|f(x) - b| = |b - f(x)| \ge |b| - |f(x)|$ bo'lgani uchun $|b| - |f(x)| < \varepsilon$ va

$|f(x)| > |b| - \varepsilon > 0$. Demak $\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{|b|-\varepsilon} = C.$

Shunday qilib teorema isbot qilindi.

4-teorema. Cheksiz kichik funksiyaning ($x \to +\infty$ da) chegaralangan funksiyaga ($x \to +\infty$ da) ko'paytmasi cheksiz kichik funksiyadir.

Isboti. $\varphi(x)$ funksiya cheksiz $N_0 < x < +\infty$ intervalda chegaralangan bo'lsin. Demak, $(C > 0) \underset{x}{\forall}(x > N_0) => |\varphi(x)| \leq C.$ (3)

So'ngra $f(x)$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz kichik funksiya bo'lsin. $\varphi(x) \cdot f(x)$ ko'aytma xam $x \to +\infty$ da cheksiz kichik funksiya bo'lishini ko'rsatamiz.Xaqiqatan xam $f(x)$ cheksiz kichik funksiya bo'lgani uchun

$\underset{\varepsilon}{\forall} (\varepsilon > 0) \exists N_1 \underset{x}{\forall}(x > N_1) => |f(x)| < \frac{\varepsilon}{C}.$ (4)

N_0 va N_1 sonlarning eng kattasi N bo'lsin. U xolda $x > N$ uchun bir vaqtning o'zida (3) va (4) tengsizliklar bajariladi. Demak, barcha $x > N$ lar uchun

$$|\varphi(x) \cdot f(x)| = |\varphi(x)| \cdot |f(x)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon,$$

Ya'ni $\varphi(x) \cdot f(x)$ cheksiz kichik funksiya ekan.

3-misol. $y = \frac{sinx}{x^2}$ *funksiya* $x \to +\infty$ da cheksiz kichik funksiyadir chunki y chegaralangan $sinx$ funksiya bilan cheksiz kichik $(x \to +\infty\, da)$ $y = \frac{1}{x^2}$ funksiyaning ko'paytmasidan iborat.

1-natija. Har qanday cheksiz kichik funksiya chegaralangan bo'lgani uchun ikkita cheksiz kichik funksiyaning ko'paytmasi cheksiz kichik funksiya bo'ishi kelib chiqadi.

2-natija. Cheksiz kichik funksiyaning songa ko'paytmasi cheksiz kichik funksiyadir.

5-teorema. $x \to +\infty$ da cheksiz kichik funksiya $f(x)$ ning limiti $(x \to +\infty\, da)$ no'ldan farqli bo'lgan $\varphi(x)$ funksiaga bo'linmasi cheksiz kichik funksiyadir.

Isboti. $f(x)/\varphi(x)$ funksiya cheksiz kichik $f(x)$ funksiya bilan chegaralangan $1/\varphi(x)$ funksianing ko'paytmasi shaklida ifodalanishi mumkin ($1/\varphi(x)$ funksiyaning chegaralanganligi 3-teoremadan kelib chiqadi.U xolda 4-teoremadan $f(x)/\varphi(x) = f(x)\cdot 1/\varphi(x)$ bo'linma cheksiz kichik funksiya ekanligi kelib chiqadi.

3.3.Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar orasidagi munosabatlar

Agar ixtiyoriy musbat L son uchun shunday N son tanlash mumkin bo'lsaki, x ning barcha $x > N$ qiymatlari uchun $|f(x)| > L$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz katta deyiladi.

Masalan $x \to +\infty$ da $y = x^2$ funksiya cheksiz katta. Qanday musbat L sonni olishdan qat'iy nazar bu funksiya L dan katta qilib olish mumkin (x ning $N = \sqrt{L}$ dan katta bo'lgan barca qiymatlari uchun). Shunga o'xshash $y = lgx$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz kattadir, chunki $|lgx| > L$ tengsizlik $N = 10^L$ dan katta barcha qiymatlar uchun bajariladi. Ravshanki xar qanday cheksiz katta funksiya $x \to +\infty$ da chegaralangan bo'lmaydi, shuning uchun u limitga ega bo'lmaydi.

Cheksiz katta funksiya $x \to +\infty$ da cheksizlika intiladi yoki y cheksiz limitga ega deyiladi. Agar $f(x)$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz katta bo'lsa, uni simvolik ravishda quidagicha yoziladi: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$. Bu yozuvni funksiya limitga ega ekan deb tushinish kerakmas, u funksiya cheksiz katta deb hisoblanishini bildiradi.

Agar cheksiz katta funksiya (x ning yetarlica katta barcha qiymatlari uchun) musbat bo'lsa, y ni $+\infty$ ga intiladi deyiladi va quidagicha yoziladi:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Agasr cheksiz katta funksiya (x ning barcha yetarlicha katta qiymatlari uchun) manfiy bo'lsa, y ni $-\infty$ ga intiladi deyiladi va quidagicha yoziladi: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Masalan $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3) = -\infty$. Istalgan ko'phad $x \to +\infty$ da ham $x \to -\infty$ da xam cheksiz katta funksiya bo'lishini isbot qilish mumkin.

Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar orasida uzviy bog'lanish mavjud.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz katta bo'lsa, $1/f(x)$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Isboti. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ ni olamiz. Yetarlicha katta x lar uchun $|1/f(x)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishini ko'rsatamiz. $f(x)$ funksiya shartiga ko'ra cheksiz katta funksiya bo'lgani uchun shunday N son mavjudki, $x > N$ da $|f(x)| > 1/\varepsilon$, u holda o'sha x lar uchun $|\frac{1}{f(x)}| < \varepsilon$. Bu bilan teorema isbotlanadi.

2-teorema. Agar no'lga aylanmaydigan $f(x)$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz kichik bo'lsa, u holda $\frac{1}{f(x)}$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz katta funksiya bo'ladi.

$$x \to -\infty, x \to x_0 - 0, x \to x_0 + 0, x \to x_0$$

da cheksiz katta funksiyalar shunga o'xshash aniqlanadi.

3.4. Funksiyaning limiti haqidagi asosiy teoremalar

Bu bo'limda limitga o'tish qoidalari xaqidagi ba'zi teoremalarni keltiramiz. Biz faqat $x\to +\infty$ hol uchun keltiramiz. Boshqa xollar uchun bu teoremalarning isbotlari ham, bir xil bo'lishini eslatib o'tamiz.

1-teorema. Agar $f(x)$funksiya $x\to +\infty$ da b ga teng limitga ega bo'lsa, u holda uni cheksiz kichik funksiya va b soning yig'indisi sifatida ifodalash mumkin.

Isboti. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{f(x)} = \mathrm{b}$ bo'lsin.

$$f(x) - b = \alpha(x) \qquad (1)$$

ayirmani qaraymiz va $\alpha(x)$ funksiya $x\to +\infty$ da cheksiz kichik funksiya ekanini ko'rsatamiz. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ bo'lgani uchun $\forall(\varepsilon > 0)\exists N \underset{x}{\forall}(> N) =>$

$|f(x) - b| < \varepsilon$, u holda $x > N$ uchun $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Bu $\alpha(x)$ funksiya cheksiz kichik degan so'z. Demak $f(x) = b + \alpha(x)$ o'rinli.

2-teorema (teskari teorema). Agar $f(x)$ funksiyani b son va cheksiz kichik funksiya ($x \to +\infty$ da) yig'indisi sifatida ifodalash mumkin bo'lsa b soni $f(x)$ ning $x \to +\infty$ dagi limiti bo'ladi.

1 - misol. $\lim\limits_{x\to\infty}(5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}) = 5$ ekanini isbot qiling.

Yechilishi. $6/x$ va $1/x^2$ funksiyalar $x \to +\infty$ da cheksiz kichik bo'lgani uchun $\frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}$ yig'indi cheksiz kichik funksiyalarning yig'indisi sifatida cheksiz kichikdir. $5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}$ funksiya 5 va cheksiz kichik funksiyaning yig'indisidir. Demak, 2 –teoremaga ko'ra $\lim\limits_{x\to\infty}(5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}) = 5$.

Endi limitga o'tish qoidalarini keltirib chiqarishga o'tamiz.

3-teorema. Agar $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ va $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = c$ bo'lsa $f(x) + \varphi(x)$ va $f(x) - \varphi(x)$ funksiyalar xam $x \to +\infty$ da limitga ega bo'ladi, shu bilan birga

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) \pm \lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$$

o'rinli.

Isboti. 1-teoremaga asosan $f(x)$ va φ (x) funksiyalari $f(x) = b + \alpha(x)$ va $\varphi(x) = c + \beta(x)$ ko'rinishda yoish mumkin,bunda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$lar $x \to \infty$ da cheksiz kichik funksiyalar. U holda

$$\begin{aligned} f(x) + \varphi(x) &= [b + \alpha(x)] + [c + \beta(x)] \\ &= (b + c) + [\alpha(x) + \beta(x)]. \qquad (2) \end{aligned}$$

o'rinli. $\alpha(x) + \beta(x)$ yig'indi cheksiz kichik funksiyadir. Demak, ikkinchi teoremaga ko'ra $b + c$ son $f(x) + \varphi(x)$ funksiyaning limiti bo'ladi.

Shunday qilib, $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) + \varphi(x)] = b + c = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

Funksiyalar ayirmasi isboti shunga o'xshash bo'ladi.

Eslatma. 3-teorema ixtiyoriy sondagi funksiyalarning algebraik yig'indisi uchun ham o'rinli.

4-teorema. Agar $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ va $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = c$ bo'lsa $f(x)\,\varphi(x)$ funksiya $x\to+\infty$ da limitga ega, shu bilan birga

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)\varphi(x)| = \lim_{x\to+\infty} f(x) \lim_{x\to+\infty} \varphi(x),$$

ya`ni ikkita funksiya ko'paytmasining limiti ularning limitlar ko'paytmasiga teng.

Isboti. 1- teoremaga asosan

$$f(x) = b + \alpha(x),\ \varphi(x) = c + \beta(x)$$

ga egamiz, bu yerda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ lar $x\to+\infty$ da cheksiz kichik funksiyalardir. Demak, $f(x)\varphi(x) = [b + \alpha(x)]\,[c + \beta(x)] =$

$$= bc + [c\,\alpha(x) + b\,\beta(x) + \alpha(x)\,\beta(x)]. \qquad (3)$$

Bunda $c\,\alpha(x) + b\,\beta(x) + \alpha(x)\,\beta(x)$ funksiya uchta $c\,\alpha(x)$, $b\,\beta(x)$ va $\alpha(x)\,\beta(x)$ cheksiz kichik funksiyalarning yig'indisi bo'lgani uchun cheksiz kichik bo'ladi. (3) tenglik $f(x)\varphi(x)$ funksiya bc son va $c\,\alpha(x) + b\,\beta(x) + \alpha(x)\,\beta(x)$ cheksiz kichik funksiyalarning yig'indisi shaklida ifodalanganlaigi ko'rsatadi. Demak, 2- teoremaga asosan $b\cdot c$ son $f(x)\varphi(x)$ funksiyaning limitidir. Shunday qilib,

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)\varphi(x)| = bc = \lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot \lim_{x\to+\infty} \varphi(x),$$

Natija. O'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya`ni $\lim\limits_{x\to+\infty} |k\cdot\varphi(x)| = k\cdot \lim\limits_{k\to+\infty} \varphi(x),$

bu yerda k o'zgarmas ko'paytuvchi.

5-teorema. Agar $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b,$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = c$ va $c \neq 0$ bo'lsa, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ funksiya $x\to+\infty$ da limitga ega, shu bilan birga $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)}$, ya'ni maxrajining limiti no'ldan farqli bo'lsa, kasrning limiti surat limitining maxraj limitga nisbatiga teng.

Isboti. 1-teoremaga ko'ra $f(x) = b + \alpha(x)$, $\varphi(x) = c + \beta(x)$ ga egamiz, bunda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ lar $x \to +\infty$ da cheksiz kichik funksiyalar. Quyidagi ayirmani qaraymiz:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{b}{c} = \frac{b+\alpha(x)}{c+\beta(x)} - \frac{b}{c} = \frac{c\alpha(x)-b\beta(x)}{c^2+c\,\beta(x)}. \qquad (4)$$

(4) tenglikning o'ng tomonida turgan $\frac{c\alpha(x)-b\beta(x)}{c^2+c\,\beta(x)} = \lambda(x)$ kasr - cheksiz kichik funksiyadir $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{b}{c} + \frac{c\alpha(x)-b\beta(x)}{c^2+c\,\beta(x)} = \frac{b}{c} + \lambda(x)$.

Shuning uchun $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{b}{c} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)}$.

2- misol. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-2x+5}$ ni toping.

Yechilishi. Suratning limiti

$$\lim_{x\to1}(x^2+3x+2) = \lim_{x\to1} x^2 + 3\lim_{x\to1} x + 2 = 1+3+2 = 6$$

ga, maxrajning limiti esa

$$\lim_{x\to1}(x^2-2x+5) = \lim_{x\to1} x^2 - 2\lim_{x\to1} x + 5 = 1-2+5 = 4 \neq 0$$

ga teng bo'lgani uchun kasrning limiti xaqidagi teoremani qo'llanib, quyidagini hosil qilamiz :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x+5} = \frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2+3x+2)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2-2x+5)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Limitlar haqidagi teoremani bevosita qo'llash hamma vaqt ham maqsadga olib kelavermaydi. Masalan, kasrning maxraji no'lga intilayotgan bo'lsa, unga kasrning limiti haqidagi teoremani qo'llab bo'lmaydi. Shuning uchun bu teoremalarni qo'llashdan oldin ko'pincha limiti izlanayotgan funksiya ustida ayniy almashtirish zarur.

3-misol. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+4}$ ni toping.

Yechilishi. Bu yerda kasrning limiti haqidagi teoremani bevosita qo'llash mumkin emas, chunki kasrning surati va maxraji $x \to +\infty$ da bir vaqtda cheksizlikka intiladi va limitga ega emas. Shunday qilib, bu yerda ∞/∞

ko'rinishdagi aniqmaslik bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Berilgan kasrning limitini toppish uchun dastlab surat va maxrajni x^2 ga bo'lib, almashtirish bajaramiz. Bu bilan kasr va limit ham o'z miqdorini o'zgartirmaydi.
Bu almash tirishdan so'ng limitni topish oson:

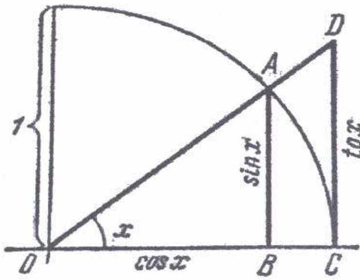
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+4}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to+\infty}(6+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})}=\frac{5}{6}$$

Agar $f(x)/\varphi(x)$ kasrning limiti izlanayotganda surat va maxraj bir vaqtning o'zida no'lga yoki cheksizlikka intilsa, bu kasr $0/0$ yoki mos ravishda ∞/∞ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi deymiz. Bunday kasrning limitini topishni $0/0$ yoki ∞/∞ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish deb atashga kelishib olamiz.

Yuqoridagi misollarni ummumlashtirib, quyidagi holga kelish mumkin: $x\to\pm\infty$ da bir xil darajali ikkita ko'phadning limiti x ning katta darajasi oldidagi koeffisentining nisbatiga teng. Agar ko'phadlarning darajalari teng bo'lmasdan suratinimg darajasi maxrajining darajasidan kichik bo'lsa, ular nisbatining limiti no'lga teng, agar maxrajning darajasi suratning darajasidan katta bo'lsa, ular nisbatining limiti cheksizga teng.

3.5.Ba'zi bir ajoyib limitlar

Ajoyib limitlar funksiya limitlarini topishda katta yordam beradi. Ba'zan $\frac{sinx}{x}$ funksiyaning $x\to0$ dagi limiti bilan ko'p ish ko'rishga to'g'ri keladi. Dastlab, $\lim\limits_{x\to0}\sin x = 0$ va $\lim\limits_{x\to0}\cos x = 1$ ekanligini isbot qilamiz. $0 < x < \pi/2$ bo'lsin. Birlik radiusli aylanani qaraylik (8-chizma).



8-chizma.

AC yoy radianlarda ifodalangan markaziy x burchak son jihatdan teng. AB kesma esa son jihatdan $sin\, x$ ga teng $0 < AB < AC$ bo'lgani uchun

$$0 < sinx < x.$$

$x \to 0$ da $sinx \to 0$ ekani kelib chiqadi. Shunday qilib

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

Endi $\lim\limits_{x\to 0} cosx = 1$ ekanini isbotlaymiz. $cosx = 1 - \sin 2\, x\,/2$ ni etiborga olib, quiyidagini hosil qilamiz:

$$\lim_{x\to 0} cosx = \lim_{x\to 0}\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\cdot 0 = 1$$

Endi $\frac{sinx}{x}$ funksiyaning $x \to 0$ dagi limitini qarashga o'tamiz.

Kasr maxrajining limiti no'lga teng bo'lgani uchun kasrning limiti haqidagi teoremani bu yerda qo'llab bo'lmaydi, chunki $x \to 0$ da $\frac{sinx}{x}$ kasrning surati ham no'lga intilgani uchun bu yerda $0/0$ ko'rinishdagi aniqmaslik mavjud.

$$\Delta\, OAB_{\text{yuzi}} < OAC_{\text{sektor yuzi}} < \Delta\, ODC_{\text{yuzi}}; \qquad (1)$$

$$\Delta\, OAB_{\text{yuzi}} = \frac{OB\cdot BA}{2} = \frac{cosx\cdot sinx}{2};$$

$$OAC_{sektor\ yuzi} = \frac{1}{2}R^2x = \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x = \frac{x}{2};\ \Delta\, ODC_{yuzi} = \frac{(OC\cdot CD)}{2}$$

$$= \frac{(1\cdot tgx)}{2} = \frac{tgx}{2}.$$

Yuzalar uchun topilgan ifodalarni (1) tengsizlikka qo'yamiz:

$\frac{cosx \cdot sinx}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tgx}{2}$.

tengsizliklar x ning 0 va $\pi/2$ orasida joylashgan barcha qiymatlari uchun o'rinli. Bu tengsizliklarning barcha hadlarini $\frac{1}{2}$ sin$x$ ga bo'lib, quyidagini hosil qilamiz:

$$cosx < \frac{x}{sinx} < \frac{1}{cosx} \text{ yoki } \frac{1}{cosx} > \frac{sinx}{1} > cosx. \qquad (2)$$

Bu tengsizliklar $x > 0$ degan faraz bilan keltirib chiqariladi. Lekin ular $x < 0$ da ham o'rinli, chunki, $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{sinx}{x}, cosx(-x) = cosx, \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{cosx}$.

Yuqorida biz $\lim\limits_{x\to 0} cosx = 1$ ekanini ko'rdik. $1/cosx$ bo'linmaga kasrning limiti haqidagi teoremani qo'llab, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{cosx} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} cosx} = \frac{1}{1}$ ni hosil qilamiz.

(2) tengsizliklarda ikki chetdagi $cosx$ va $1/cosx$ funksiyalar $x\to 0$ da bir xil limitga ega bo'lib, bu limit 1 ga teng. U xolda $\frac{1}{cosx}$ va $cosx$ funksiyalar orasida joylashgan $\frac{sinx}{x}$ funksiya ham $x \to 0$ da o'sha limitga ega bo'ladi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

Bu limit yordamida boshqa ko'pgina limitlar topiladi.

1-misol.

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x}$$

ni toping.

Yechilishi. Kasirning surat va maxraji $x \to 0$ da bir vaqtda nolga intiladi. Kasrning limiti haqidagi teoremani bu yerda qo'llab bo'lmaydi. Limitni topish uchun almashtirish bajaramiz:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{sinx}{x} \cdot \frac{1}{cosx}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{sinx}{x}\right) \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{cosx}\right) = 1 \cdot 1 = 1$$

2-misol. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2}$ ni toping.

Yechilishi. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=$

$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$

Ma'lumki e soni quyidagiga teng edi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Endi $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ funksiyani qaraylik. x uzluksiz o'zgarib, $x\to+\infty$ ga intilganda bu funksiya ham e songa teng limitga ega bo'lishini bilib olish mumkin:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

x ixtiyoriy haqiqiy son va $x>1$ bo'lsin, [x] = n, u holda $n\le x<n+1$ bo'ladi. So'ngra $(1+\frac{1}{n+1})^n<(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ tengsizlik o'rinlidir. Ma'lumki,

$\lim_{n\to\infty} n=\lim_{x\to+\infty}[x]=+\infty$,

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})}=\mathrm{e}$,

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})=\mathrm{e}$.

Demak tensizlikda limitga o'tish hossasiga ko'ra

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

bo'ladi.

3-misol. $Y=(1+a)^{1/a}$ funksiyaning $a\to 0$ da limitini toping.

Yechilishi. Limitini topish uchun $1/a=x$ deb, o'zgaruvchini almashtiramiz. U holda $a\to 0$ da $x\to\infty$. Shuning uchun:

$$\lim_{a\to 0}(1+a)^{\frac{1}{a}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

4-misol. $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ ni toping.

Yechilishi. $x = 2t$ deylik. $x \to \infty$ da $t \to \infty$. Demak,

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)\cdot$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e} = \mathrm{e}^2$$

Ikkta $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiya nisbatining $x \to a$ dagi limiti birga teng bo'lsa, bu funksiyalar ekvivalent (yoki teng kuchli) funksiyalar deyiladi. $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ lar $x \to x_0$ da ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar bo'lsin: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\phi(x)}{\Psi(x)} = 1$. U holda x ning x_0 ga yaqinqiymatlari uchun $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \approx 1$yoki

$\varphi(x) \approx \psi(x)$ taqribiy tenglik

o'rinli bo'lib, uning aniqligi x qiymatini x_0 ga yaqinlashishi bilan ortib boradi.

Agar $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar bo'lsa, u quyidagicha belgilanadi: $\varphi(x) \sim \psi(x)$.

1-teorema. $x \to +\infty$ da $\phi(x)\sim\alpha(x)$ va $\Psi(x)\sim\beta(x)$ bo'lsin. Agar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\phi(x)}{\Psi(x)}$ ham mavjud va bu ikkala limit o'zaro teng bo'ladi.

Bu teorema qisqacha quydagicha bayon qilinadi: ikkita cheksiz kichik funksiya nisbatining limiti ularga ekvivalent funksiyalar nisbatining limitiga teng.

6-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\mathrm{tg}3x}$ ni toping.

Yechilishi. $x \to 0$ da $\sin 5x\sim 5x, tg3x\sim 3x$ bolgani uchun

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\mathrm{tg}3x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

4-§. Funksiyaning uzluksizligi

4.1. Nuqtada funksiyalarning uzluksizligi

1-ta'rif. Agar $x \in E da$ $\lim\limits_{x \to x_0,} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa, u holda f(x) funksiya E to'plamning x_0 nuqtasida uzluksiz deb ataladi.

Demak, f(x) funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun quyidagi uch shart bajarilishi kerak:

1) f (x) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan;

2) x_0 nuqtada f(x) funksiyaning limiti mavjud;

3) Funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati f(x_0) bilan uning shu nuqtadagi limiti teng.

Bu holda x_0 nuqta funksiyaning uzluksizlik nuqtasi deyiladi. Aks holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

Endi funksiya limitining ketma-ketliklar tilidagi ta'rifidan foydalanib, uzluksizlikning yana bir ta'rifini berish mumkin.

2-ta'rif (Geyne ta'rifi). Agar E to'plamdan olingan x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi har qanday $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sonli ketma-ketlik uchun unga mos keladigan $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ Ketma-ketlik $f(x_0)$ ga yaqinlashsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.

3-ta'rif.(Koshi ta'rifi). Agar $\forall\varepsilon>0$ uchun $\exists\delta>0$ topilsaki, $|x-x_0|<\delta$ shartni qanoatlantiradigan barcha $x \in E$ uchun $|f(x) - f(x_0)| <\varepsilon$ bo'lsa, u holda f(x) funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi. Bu ta'rif qisqacha quyidagicha yoziladi:

$$(\forall\varepsilon> 0)\ (\exists\delta> 0)\ \{\forall x \in E\ |x - x_0| <\delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| <\varepsilon\}.$$

Argument va funksiyaning orttirmasi. Argumentning x va x_0 qiymatlari orasidagi $x - x_0$ ayirma argumentning x_0 nuqtadagi orttirmasi deb ataladi va $\Delta x = x - x_0$ orqali belgilanadi. Odatda x_0 biror tayinlangan nuqta, x esa o'zgaruvchi nuqta deb qaraladi. Funksiyaning shularga mos qiymatlari orasidagi ayirma esa funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi orttirmasi deyiladi va $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ orqali belgilanadi.

Uzluksizlikning ta'rifini yana boshqacha berish mumkin: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,

bundan $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$ yoki $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

Ya'ni, agar argumentning biror x_0 nuqtadagi orttirmasi nolga intilganda funksiyaning unga mos keladigan orttirmasi ham nolga intilsa funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligiga berilgan yuqoridagi to'rtala ta'rif ekvivalent ta'riflardir (buni isbot qilishni o'quvchiga tavsiya qilamiz).

4.2. Nuqtada uzluksiz funksiyaning xossalari

Funksiyalar yig'indisi, ko'paymasi va bo'linmasining uzluksizligini ko'rib chiqaylik.

1-teorema. Agar f(x) va φ(x) funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda F(x) = f(x) $\pm\varphi$(x), F(x) = f(x) φ(x), G(x) = $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$(bunda $\varphi(x)\neq 0$) funksiyalar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti. Teorema shartiga ko'ra $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=\varphi(x_0)$, u holda

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} [f(x) + \varphi(x)] =$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = f(x_0) + \varphi(x_0) = F(x_0).$$

Demak, $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$, ya'ni $F(x)$ funksiya ham x_0 nuqtada uzluksizdir.

Qolganlari ham huddi shunga o'hshash isbot qilinadi.

Funksiya uzilish nuqtalarining turlari.

1-ta'rif. Agar $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ bo'lsa, ya'ni funksiyaning x_0 nuqtadagi chap limiti funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng bo'lsa, u holda f(x) funksiya x_0 nuqtada chapdan uzluksiz deb ataladi.

2-ta'rif. Agar $f(x_0+0) = f(x_0)$ bo'lsa, u holda f(x) funksiya x_0 nuqtada o'ngdan uzluksiz deyiladi.

Tabiyki, agar $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$ (1)

bo'lsa, u holda f(x) funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'aldi. Agar (1) munosabat o'rinli bo'lmasa, x_0 nuqta funksiyaning uzilish nuqtasi bo'ladi.

Endi bir tomonlama limitlar $f(x_0 - 0)$ va $f(x_0 + 0)$ ni mavjud va chekli deb quyidagini ko'rib o'tamiz:

1)$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ bo'lsin. Bu holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo'ladi.

Bunday holda f(x) dan faqat bitta x_0 nuqtadagi qiymati bilan farq qiladigan va bu nuqtada ham uzluksiz bo'lgan

$$F(x) = \begin{cases} f(x), x \neq x_0, \\ f(x_0), x = x_0 \end{cases}$$

funksiya mavjud bo'ladi. Bunday uzilish nuqtasi tiklash mumkin bo'lgan(tuzatib bo'ladigan) uzlish nuqtasi deyiladi.

1-misol. $f(x) = \begin{cases} 1, \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa}, \\ 2, \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa}. \end{cases}$

Bunda $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = 1$ va $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = 1$ hamda $f(0) = 2$.

2)$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ bo'lsin. Bu holda x_0 funksiyaning chekli sakrashga ega bo'lgan uzilish nuqtasi deyiladi. $d = | f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0) |$ son sakrash kattaligi deyiladi.

2-misol. $F(x) = E(x) = [x]$ funksiyada $x_0 = 1$ nuqtani olamiz.

$E(1\text{-}0) = 0$ *va* $E(1+0) = 1$ bo'lgani uchun $d = 1$.

3-ta'rif. 1) va 2) holdagi uzilish nuqtalari 1-tur uzilish nuqtalari deyiladi.

Barcha boshqa uzilish nuqtalari ya'ni bir tomonlama limitlaridan hech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmaydigan yoki cheksiz bo'ladigan uzilish nuqtalari 2-tur uzilish nuqtalari deyiladi.

3-misol. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, agar\ x \neq 0\ bo'lsa, \\ 1, agar\ x = 0\ bo'lsa. \end{cases}$

Bu funksiya $x = 0$ nuqtada cheksiz sakrashga ega, demak, bu nuqta 2-tur uzilish nuqtasi bo'ladi.

Murakkab funksiya va uning uzluksizligi.

$y = f(x)$ va $u = \varphi(x)$ funksiyalar berilgan bo'lsin. Agar $u = \varphi(x)$ funksiyaning qiymatlari to'plami f(u) funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lsa, u holda ketma-ket qo'llanilgan ikkita akslantirish x→u→y yordamida x ning har bir qiymatiga $y = f(u)$ ning tayin bir qiymati mos qo'yiladi.

E to'plam $y = f(u)$ funksiyaning aniqlanish sohasi bo'lib, $\varphi(x) \in E$ bo'lishini ta'minlovchi x lar E_1 to'plamni tashkil qilsin. U holda $x \in E_1$ uchun $f(\varphi(x))$ E_1 da x ning murakkab funksiyasi deb ataladi. Agar E_1 bo'sh to'plam bo'lsa, u holda murakkab funksiya bo'lmaydi.

4-misol. $y = f(u) = lg\, u$, $0<u<\infty$ va $u = \varphi(x) = x - 1$; $-\infty<x<+\infty$ bo'lsin. Bu holda $E_1 = (1,\infty)$, ya'ni $x \in (1, \infty)$ bo'lganda $u \in (0, \infty)$ bo'ladi va murakkab funksiya $y = lg(x-1)$ $(x \in (1, \infty))$ mavjud bo'ladi. $(-\infty, 1)$ da esa $u = x - 1 \le 0$ bo'lib lgu ma'noga ega bo'lmaydi, shuning uchun bu holda murakkab funksiya majvud bo'lmaydi.

2-teorema. Agar $\varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada va $f(u)$ funksiya $u_0=\varphi(x_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f\,[\varphi(x)]$ murakkab funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lib $(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta_1> 0)\,\{|u - u_0| <\delta_1 \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| <\varepsilon\}$ bo'ladi.

Shunga o'xshash, $u = \varphi(x)$ ning x_0 nuqtada uzluksizligidan yuqoridagi $\delta_1>0$ uchun $(\exists\delta>0)\,\{\,|x-x_0| <\delta \Rightarrow |u - u_0| <\delta_1\}$

bo'ladi. Demak, $|x-x_0| <\delta \Rightarrow |u - u_0| <\delta_1 \Rightarrow |f(u) - f(u_0)\,| <\varepsilon$,

ya'ni $(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta> 0)\,\{\,|x-x_0| <\delta \Rightarrow |f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))| <\varepsilon\}$.

Demak, $y = f(\varphi(x))$ murakkab funksiya x_0 nuqtada uzluksizdir.

4.3. To'plamda funksiyaning uzluksizligi

1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya E to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya E to'plamda uzluksiz deb ataladi. Xususiy holda (a, b) intervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya (a, b) da uzluksiz deyiladi. (a, b) oraliqning har bir ichki nuqtasida uzluksiz va a nuqtada o'ngdan uzluksiz hamda b nuqtada chapdan uzluksiz bo'lgan funksiya $[a, b]$ da uzluksiz deyiladi.

Umuman, $E_1 \subset E$ bo'lib, E berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi bo'lsin. Agar $a \in E_1$ bo'lib, $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya E_1 to'plamning a nuqtasida uzluksiz deyiladi.

E_1 to'plamning a nuqtasida uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya E to'plamning a nuqtasida (E ga nisbatan) uzluksiz bo'lmasligi ham mumkin.

Masalan, Direxle funksiyasi haqiqiy sonlar to'plamining har bir nuqtasida uzlishga ega. Lekin, Direxle funksiyasini ratsioanl sonlar to'plamiga ($Q \subset R$) nisbatan olganimizda, u har bir ratsioanal nuqtada uzluksizdir.

Uzluksiz funksiyaning no'lga aylanishi haqida teorema.

1-teorema (Koshining 1-teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, a va b nuqtalarda qarama-qarshi ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, u holda (a, b) da hech bo'lmaganda shunday ichki bir c nuqta mavjudki

$f(c) = 0$ bo'ladi.

Shunday qilib, $[a, b]$ da shunday c nuqta topiladiki, bu nuqtada $f(x)$ funksiyaning qiymati nolga aylanadi. Shuni ham aytish kerakki, funksiyani nolga aylantiradigan c nuqtalar bir nechta bo'lishi mumkin. Lekin topilgan c nuqta albatta (a, b) oraliqqa tegishli bo'ladi, haqiqatan, teorema shartiga ko'ra $f(a) \neq 0, f(b) \neq 0$, shuning uchun $c = a$ yoki $c = b$ bo'la olmaydi, chunki $f(c) = 0$.

Teoremaning geometrik mazmuni quyidagicha: $y = f(x)$ funksya grafigining $[a, b]$ segmentning chekkalariga tegishli nuqtalari Ox o'qidan har xil tomonda yotsa, u holda bu funksyaning grafigi Ox o'qini kamida 1 ta nuqtada kesib o'tadi.

Eslatma. Agar funksiya segmentda hech bo'lmaganda bitta nuqtada uzulishga ega bo'lsa teoremaning tasdiqlari o'rinsiz bo'lib qoladi. Jumladan, $y=\frac{1}{x}$

funksya $x = 1$ da musbat, $x = -1$da manfiy . Biroq $[-1,1]$ segmentda funksiya *0* ga aylanadigan birorta ham nuqta yo'q.

Oraliq qiymatlar haqida teorema.

2-teorema (Koshining 2-teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz bo'lib, $f(a) = A, f(b) = B$ va $A < B$ bo'lsa, u holda $A < C < B$ ni qanoatlantiradigan har qanday C uchun shunday $\varepsilon \in$(a, b) topiladiki, f(ε)=C bo'ladi.

Isboti. Yordamchi $\varphi(x) = f(x) - C$ funksiyani olamiz. $\varphi(x)$ oldingi teorema shartlarini qanoatlantiradi. Haqiqatan:

1) $\varphi(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz, chunki $f(x)$ va C lar $[a, b]$ da uzluksizdir.

2) $\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0$,

$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$.

Shuning uchun (a, b) da shunday ε nuqta topiladiki, $\varphi(\varepsilon) = 0$ yoki $f(\varepsilon) - C = 0$, ya'ni $f(\varepsilon) = C$ *b*o'ladi. Demak, $[a, b]$ da uzluksiz bo'lgan funksiya o'zining har qanday ikki qiymati orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi.

Teskari akslantirish va teskari funksiya haqida tushuncha. $y = f(x)$ funksiya E_x to'plamda aniqlangan bo'lsin. Funksiyaning o'zgarish sohasi E_y to'plam esa E_x to'plamning obrazi bo'ladi: E_x dan olingan har bir x ga E_y ning ma'lum bir y elementi mos keladi. Lekin E_y dan olingan har qanday y element E_x dan olingan bir yoki bir nechta asliga (originalga) ega bo'lishi mumkin.

2-ta'rif. Agar $E_x \xrightarrow{f} E_y$ akslantirishda E_y to'plamning har bir elementiga E_x da bittadan elemement mos kelsa, bunday akaslantirish $(E_y \rightarrow E_x)$ $f(x)$ ga nisbatan teskari akslantirish deyiladi va $E_y \xrightarrow{f^{-1}} E_x$ deb yoziladi. Boshqacha aytganda, $y=f(x)$ funkisyaning har bir $y \in E_y$ qiymatiga E_x dan faqat bitta x qiymat mos kelsa, f munosabat E_y da $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiyani aniqlaydi deyiladi. Bu teskari funksiyaning aniqlanish sohasi $f(x)$ ning E_y qiymatlar to'plamidan iborat.

Demak, $x=f^{-1}(y)$ va $y=f(x)$ o'zaro teskari funksiyalar bo'ladi. Ya'ni

$f^{-1}(f(x)) = x; \quad (x \in E^x),$

$f(f^{-1}(y)) = y; \quad (y \in E_y).$

Shunday qilib, o'zaro teskari $y=f(x)$ va $x=f^{-1}(y)$ funksiyalar E_x va E_y to'plamlarning elementlarini o'zaro mos juftlarga birlashtiradi. Bu to'plamlar orasida hosil bo'ladigan moslik o'zaro bir qiymatli moslikning o'zidir. Ammo, asosan y ni funksiya, x ni esa argument deb qaralgani uchun ularni $y = f(x)$ va $y = g(x)$ ko'rinishda ifodalash mumkin. Agar to'g'ri va teskari funksiyalarning qiymatlarini y orqali, argumentlarini esa x orqali belgilaydigan bo'lsak, $y=f(x)$ va $y = f^{-1}(x)$ lar o'zaro teskari funksiyalar deb tushuniladi.

Misollar. 1) $y=2x-3$ berilgan. Bunda E_x va E_y barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat, $x = \frac{y+3}{2}$ ham barcha haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan. Shuning uchun $y=2x-3$ va $y = \frac{x+3}{2}$ funksiyalar o'zaro teskari funksiyalardir.

2) $y=x^3$ ga teskari funksiya $y = \sqrt[3]{x}$ funksiyadir.

3) $y=a^x-(-\infty < x < +\infty)$ ga teskari funksiya $y = \log_a x, (x > 0)$ funksiyadir.

4) $y = x$ ning teskari funksiyasi aynan shu funksiyaning o'zidan iborat.

Ravshanki, $y = y^{-1}(x)$ teskari funksiyaning grafigi $y = f(x)$ to'g'ri funksiya grafigidan koordinatalar sistemasida o'qlar nomini almashtirish bilan yoki I va III koordinata burchaklari bissektrisasiga nisbatan simmetrik akslantirishdan hosil bo'ladi.

Teorema (teskari funksiyaning mavjudligi haqida). Agar $f(x)$ funksiya E_x sohada (ochiq yoki yopiq oraliqda) aniqlangan, qat'iy monoton bo'lsa, u holda bu funksiyaning qiymatlari to'plami E_y da $x = g(y)$ teskari funksiya mavjud va u qat'iy monoton bo'ladi.

Masalan, $y=x^3$ funksiya sonlar o'qida o'suvchi, teskari funksiya ham shunday o'suvchi bo'ladi.

4.4. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksialarning xossalari

1-lemma. Agar $f(x)$ funksiya biror x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'ladiki, unda $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi.

Isboti. Ta'rifga ko'ra $\forall\varepsilon > 0$ (masalan, $\varepsilon = 1$) uchun $\exists\delta > 0$ mavjudki, $\forall x, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1$.

Ma'lumki, $|f(x)| - |f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)|$, shuning uchun $|f(x)| - |f(x_0)| < 1$ yoki $|f(x)| < 1 + |f(x_0)|$. Lemma isbot qilindi.

2-lemma. Agar $f(x)$ funksiya biror x_0 nuqtada uzluksiz va $f(x_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ atrofi mavjud bo'ladiki, bu atrofda $f(x)$ bir hil ishorali qiymatlarga ega bo'ladi.

Isboti. $\varepsilon = |f(x_0)| > 0$ ni olamiz. Shunday $\delta >0$ topiladiki, $|x - x_0| < \delta$ ni qanoatlantiruvchi $\forall x\{|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < |f(x_0)|\}$,

$$f(x_0) - |f(x_0)| < f(x) < f(x_0) + |f(x_0)|$$

bo'ladi. Agar $f(x_0) > 0$ bo'lsa, $|f(x_0)| = f(x_0)$, $\quad f(x_0) - |f(x_0)| = 0$ bo'lib, $f(x) > 0$ kelib chiqadi.

Teorema. (K.Veyershtrass 1- teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo'lsa, u shu kesmada chegaralangan bo'ladi.

Teorema. (K.Veyershtrass 2-teoremasi). Agar $f(x)$funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya bu kesmada o'zining aniq yuqori chegarasiga va aniq quyi chegarasiga erishadi.

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda uzluksiz bo'lsa, teoremaning hulosasi noto'g'ri bolishi ham mumkin. Masalan, $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya (0, 1) da uzluksiz, lekin chegaralangan emas. Demak, uzluksizlikning kesmada yuz berishi ahamiyatga ega ekan.

V bob uchun o'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Funksiya nima?
2. Funksiyaning qanday berilish usullari mavjud?
3. Funksiyaning juft-toqligi, davriyligi qanday aniqlanadi?
4. Funksiyaning o'suvchi, kamayuvchiligi, chegaralanganligi, monotonligi qanday aniqlanadi?
5. Elementar funksiyalarga qaysi funksiyalar kiradi?
6. Ko'phad deb nimaga aytiladi?
7. Ratsional funksiyalar deb nimaga aytiladi?
8. Funksiyalarning eng sodda klassifikatsiyasi ayting.
9. Sonli ketma-ketliklar deb nimaga aytiladi?
10. Ketma-ketliklarning berilish usullarini ayting va misollar keltiring.
11. Qanday ketma-ketliklar yuqoridan (quyidan) chegaralangan deb ataladi?
12. Qanday ketma-ketliklar monoton o'suvchi (kamayuvchi, o'smaydigan, kamaymaydigan) deb ataladi?
13. Ketma-ketlikning limiti ta 'rifmi aytib bering.
14. Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklarning limitlari haqidagi teoremalarni aytib bering.
15. e soni deb nimaga aytiladi?
16. Funksiyaning nuqtadagi limiti deb nimaga aytiladi?
17. Cheksiz kichik funksiyalar deb nimaga aytiladi?
18. Chegaralangan funksiyalar deb nimaga aytiladi?
19. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar orasida qanday munosabatlar mavjud?
20. Funksiyaning limiti haqidagi asosiy teoremalarni isbotlang.
21. $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi uzluksizligi ta'rifmi keltiring.
22. $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada chapdan va o'ngdan uzluksizligi ta 'rifini aytib bering.
23. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremalarni ayting va isbotlang.
24. Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalarini aytib bering.
25. To'plamda funksiyaning uzluksizligini ta'riflab bering.
26. Funksiyaning uzilish nuqtasi deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
27. Birinchi va ikkinchi tur uzilish nuqtalari deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.

V bob uchun mustaqil yechish uchun misollar

1. $f(x)=\begin{cases} x^2 & agar \quad |x|\le 1 \quad bo'lsa, \\ 1/x & agar \quad |x|>1 \quad bo'lsa, \end{cases}$ funksiyaning uzulish nuqtalari va ularning turini aniqlang.

2.Quyidagi funksiyalardan qaysilari o'z aniqlanish sohalarida uzluksiz? 1) $y=\arcsin x$, 2) $y=\mathrm{arc}tgx$, 3) $y=\arcsin(\sin x)$, 4) $y=tg(\mathrm{arc}tgx)$

3.Quyidagi funksiyalarning qaysi birlari o'zaro teskari funksiyalar

1) $y=2x+1$ 2) $y=2x-1$ 3) $y=\dfrac{x-1}{2}$?

4.Quyidagi funksiyalarning qaysilari $(-\infty;+\infty)$ da o'suvchi

1) $y=2x-1$ 2) $y=x^2$ 3) $y=x^3$ 4) $y=x^4$?

5. $y=\sqrt{x+6}-\sqrt{4-x}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping

6.Juft funksiyani aniqlang:

1) $f(x)=x^3\sin x$, 2) $f(x)=x^2\cos x$; 3) $f(x)=x+x^3$

7. $y=x^2-8x+7$ funksiyaning qiymatlar to'plamini toping.

8. $y=5\sin^2 x$ funksiyaning eng kichik musbat davrini toping.

9.Quyidagi limitlarni toping. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{3n+1}$ va $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3n}{\sqrt{n^4+1}}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{3n}$ limitni toping.

11. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ ni hisoblang.

12.Funksiyaning uzilish nuqtalarini toping $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$

VI BOB. BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING DIFFERENSIAL HISOBI

1-§. Funksiyalarning hosilalari

1.1. Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar

Moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab, bitta yo'nalishda $s = f(t)$ qonun bo'yicha xarakat qilayotgan bo'lsin, bu yerda t—vaqt, s—nuqtaning t vaqt ichida bosib o'tgan yo'li. Vaqtning biror t_0 momentini belgilab olaylik. Bu momentgacha nuqta $s_0 = f(t_0)$ yo'lni bosib o'tadi. Moddiy nuqtaning t_0 momentdagi v_0 tezligini aniqlash masalasini qo'yamiz. Buning uchun boshqa bir $t_0 + \Delta t$ momentini qaraymiz. Unga bosib o'tilgan $s = f(t_0 + \Delta t)$ yo'l mos keladi.U xolda vaqtning $\Delta t = t - t_0$ oralig'ida nuqta $\Delta s = s - s_0 = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ yo'lni bosib o'tadi.Moddiy nuqtaning Δt oralig'idagi xarakatining *o'rtacha tezligi* $v_{o'rt}$ o'tilgan yo'lning vaqtga nisbati $v_{o'rt}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ bilan aniqlanadi.Vaqtning boshlang'ich t_0 momentini fiksirlangan deb, Δt vaqt oralig'ini esa o'zgaruvchi deb hisoblaymiz. U holda $v_{o'rt}$ o'rtacha tezlik Δt ga bog'liq bo'lgan o'zgaruvchi miqdordir.

Berilgan t_0 momentdagi v_0 *tezlik* deb o'rtacha $v_{o'rt}$ tezlikning $\Delta t \to 0$ dagi limitiga aytiladi, ya'ni

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Shunday qilib, berilgan t_0 momentdagi v_0 tezlikni topish uchun $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$ limitni hisoblash zarur. Yechilishida shunga o'xshash limitni topishga to'g'ri keladigan yana bitta masalani qaraymiz. To'g'ri chiziqli bir jinsli bo'lmagan, uzunligi l bo'lgan ingichka sterjen berilgan bo'lsin. Sterjenning istalgan nuqtasidagi zichligni aniqlaymiz. Aytaylik, sterjen Ox o'qda jo'ylashtirilgan, shu bilan birga uning uchlaridan biri koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushsin. U holda sterjenning har bir nuqtasiga aniq bir koordinata mos keladi. Sterjenning koordinatalari O va x bo'lgan nuqtalari orasidagi kesmaning massasini m orqali belgilaymiz. Ravshanki, m kattalik x ning funksiyasidir. Sterjenning ikkita fiksirlangan x_0 va o'zgaruvchi $x_0 + \Delta x$ nuqtasini qaraymiz. Sterjenning bu nuqtalar orasida joylashgan kesmasi Δx uzunlikka va

$\Delta m = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ massaga ega. $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ nisbat sterjenning x_0 nuqtasidan $x_0 + \Delta x$ nuqtasigacha bo'lgan kesmasidagi *o'rtacha zichligi* deyiladi.

Sterjenning x_0 nuqtadagi δ *zichligi* deb Δx kesma nolga intilgandagi o'rtacha zichlik limitiga aytiladi: $\delta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

1.2. Funksiya hosilasining ta'rifi

$y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Argumentning boshlang'ich x_0 va yangi x qiymatini qaraylik. $x - x_0$ ayirma x argumentning x_0 nuqtadagi orttirmasi (qisqacha argument orttirmasi) deyiladi va Δx simvol bilan belgilanadi. Huddi shunga o'xshash, $y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ ayirma $y = f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi orttilmasi* (qisqacha—funksiya orttirilmasi) deyiladi va Δy simvol bilan belgilanadi. Δx va Δy lar o'zgaruvchi miqdorlardir, ya'ni

$$\Delta x = x - x_0, \qquad (1)$$

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) \qquad (2)$$

yoki

$$x = x_0 + \Delta x, \qquad y = y_0 + \Delta y. \qquad (3)$$

(3) formulada x ning ifodasini (2) formulaga qo'yib quyidagini hosil qilamiz:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \qquad (4)$$

Qoidaga ko'ra Δx va Δy lar kiritilayotganda argumentning boshlang'ich qiymati x_0 fiksirlangan deb yangi qiymati x esa o'zgaruvchi deb hisoblanadi. Bunda $y_0 = f(x_0)$ o'zgarmas, $y = f(x)$ esa o'zgaruvchi bo'ladi. Δx va Δy ortirmalar ham o'zgaruvchi bo'ladi. (4) formulada Δy o'zgaruvchi Δx o'zgaruvchining funksiyasi bo'lishini ko'rsatadi.

$y = f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi hosilasi deb* shu nuqtadagi funksiya ortirmasining argument orttirmasiga nisbatining Δx nolga intilgandagi limitiga aytiladi.

$y = f(x)$ funksiyaning hosilasini x ning turli nuqtalarida xisoblash mumkin. M to'plam x ning shunday qiymatlari to'plami bo'lsin. Har bir $x \in M$ ga bu nuqtada $f'(x)$ hosila mos keladigan qoida M to'plamda aniqlangan funksiyani tasvirlaydi. Bu funksiya $f(x)$ dan olingan hosila deyiladi va $f'(x)$ orqali belgilanadi. Shunday qilib $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati ekan.

Funksiyaning hosilasini $f'(x)$ bilan belgilashdan tashqari boshqa belgilashlar ham ishlatiladi. Masalan, y', $\{f(x)\}'_x$.

1-misol. $y = x^2$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechilishi: Funksiyaning Δy orttirmasini topamiz:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Hosila ta'rifidan foydalanib va x ni fiksirlangan deb hisoblab quyidagini hosil qilamiz:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

Shunday qilib x^2 funksiyaning hosilasi $2x$ ga teng ekan: $(x^2)' = 2x$. Bu hosila sonlar o'qida aniqlangan, chunki uning topilishida x ning qiymati ixtiyoriy tanlangan edi. Funksiya hosilasini topish bu funksiyani *differensiallash* deyiladi.

Hosilaning fizik va geometrik ma'nosini ko'rib chiqaylik.

Yuqorida ko'rilgan masalalarga qaytib, unda hosil qilngan limitlar hosila ekanligini bilish oson. Birinchi masalada

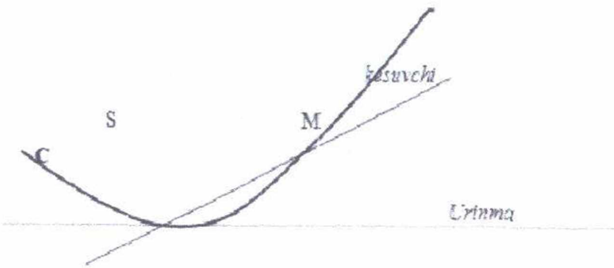
$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'_t,$$

ya'ni *moddiy nuqtaning t momentidagi v oniy tezligi s yo'ldan t vaqt bo'yicha olingan hosiladir.* Hosilaning mexanik ma'nosi shundan iboratdir. Ikkinchi masalada

$$\delta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = m'_x,$$

ya'ni to'g'ri chiziqli sterjenning x nuqtasidagi δ zichligi m massadan x uzunlik bo'yicha olingan hosila ekan.

Ba'zi geometrik masalalarni yechishda juda foydali bo'ladigan hosilaning geometrik ma'nosini oydinlashtiramiz. Shu maqsadda berilgan nuqtada egri chiziqqa o'tkazilgan urinma ta'rifini kiritamiz.

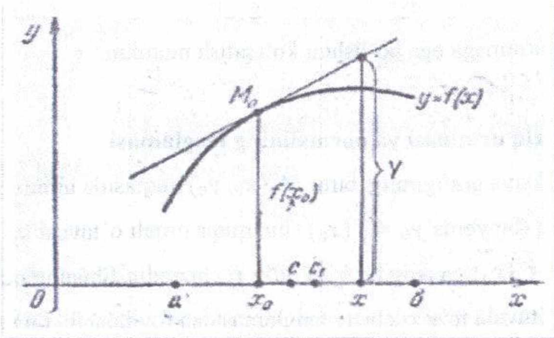


1 - chizma

Tekis egri chiziq S da M_0 nuqta berilgan bo'lsin. Bu egri chiziqning boshqa M nuqtasini qaraymiz. M_0M kesuvchisi o'tkazamiz (1-chizma).

Agar M nuqta S egri chiziq bo'yicha siljiy boshlasa, M_0 nuqta esa qo'zg'almasa, u holda kesuvchi o'z holatini o'zgartiradi. M_0 nuqta orqali o'tivchi quyidagi xossaga ega bo'lgan L to'g'ri chiziq mavjud bo'lsin. Agar M nuqta S egri chiziq bo'yicha siljiyotganda (istalgan tomondan) M nuqtaga yaqinlashib borsa,u holda L to'g'ri chiziq va M_0M kesuvchi orasidagi burchak no'lga intiladi.U holda bu L to'g'ri chiziq S egri chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma deyiladi.

Qisqacha aytganda, *urinma bu kesuvchining limit holatini egallagan to'g'ri chiziqdir.* (2-chizma).



2-chizma.

Izoh: Fazodagi egri chiziqqa o'tkazilgan urinma ham shunga o'xshash aniqlanadi.

Endi absissasi x_0 bo'lgan M_0 nuqtada vertikal bo'lmagan urinmaga ega $u = f(x)$ uzluksiz funksiyani qaraylik. Uning $k = tg\alpha$ burchak koeffitsientini topamiz, bu yerda α -urinma bilan Ox o'q orasidagi burchak. M_0 nuqta va absissasi $x_0 + \Delta x$ bo'lgan M nuqtasi orqali kesuvchi o'tkazamiz. Uning burchak koeffitsienti $k_{kes} = tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ga teng, bu erda β-kesuvchi bilan Ox o'q orasidagi burchak . $\Delta x \to 0$ da funksiyaning uzluksizligiga asosan Δy ham no'lga intiladi. Shuning uchun M nuqta grafik bo'yicha siljib M_0 ga intiladi kesuvchi esa urinmaga yaqinlashib boradi, ya'ni $\lim_{\Delta x \to 0} \beta = \alpha$ va demak, $\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha$

Shuning uchun urinmaning burchak koeffitsienti

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Shunday qilib, funksiya grafigiga absissasi x_0 nuqtada bo'lgan nuqtasidan o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti bu funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasiga teng: $k_{ur} = f'(x_0)$.

Izoh. Biz uzluksiz $y = f\,(x)$ funksiyaning grafigi x_0 nuqtada vertikal bo'lmagan urinmaga ega bo'lsa, bu nuqtada urinmaning k_{ur} burchak koeffitsienti $f'(x_0)$ hosilasiga teng ekanligini ko'rsatdik. Aksincha, agar funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa,uning grafigi x_0 abssissali nuqtada vertikal bo'lmagan urinmaga ega bo'lishini ko'rsatish mumkin.

1.3.Egri chiziq urinmasi va normalining tenglamasi

$y = f(x)$ funksiya grafigining biror $M_0(x_0; y_0)$ nuqtasida urinuvchi urinma to'g'ri chiziq (bu yerda $y_0 = f(x_0)$) bu nuqta orqali o'tuvchi va k_{ur} burchak koeffitsenti $f'(x_0)$ ga teng bo'lgan to'g'ri chiziqdir. Shuning uchun berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidan foydalanib, bu urinma tenglamasini topish mumkin $\qquad y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \qquad (1)$

Urinmaga perpendikulyar bo'lib, urinish nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziq egri chiziqning *normali* deyiladi.

$y = f(x)$ funksiya grafigini qaraymiz, $M_0(x_0; y_0)$ uning nuqtalaridan biri bo'lsin. U holda funksiya grafigining $M_0(x_0; y_0)$ nuqtasidan o'tkazilgan normal tenglamasi $\qquad y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0), \qquad (2)$

ko'rinishga ega bo'ladi, chunki normalning k_Y burchak koeffitsenti urinmaning $k_{ur} = f'(x_0)$ burchak koeffitsenti bilan perpendikulyarlik sharti orqali bog'langan:

$$k_Y = -\frac{1}{k_{ur}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

1-misol. $y = tgx$ funksiya grafigining absissasi $x_0 = \frac{\pi}{4}$ bo'lgan nuqtasidan o'tuchi urinmasi va normali tenglamasini tuzing.

Yechilishi. Urinish nuqtasining ordinatasini topamiz:

$y_0 = tgx_0 = tg(\frac{\pi}{4}) = 1.$

Berilgan funksiyani differensiallaymiz va urinmaning burchak koeffitsentini va normalning burchak koeffitsentini topamiz:

$$(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}, \qquad k_{ur} = 2, k_Y = -\frac{1}{2}.$$

(1) va (2) formulalarga ko'ra urinma va normal tenglamasini topamiz:

$$y-1=2(x-\frac{\pi}{4}) \text{ va } y-1=-\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4}).$$

1.4. Differrensiallanuvchi funksiyaning uzluksizligi

Ma'lumki, ta'rifga ko'ra agar

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

bo'lsa $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi. Bunda funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan deb faraz qilingan edi.

Bu ta'rifni funksiyaning ortirmasi va argumentning ortirmasi yordamida bayon qilish mumkin. Haqiqattan ham, (1) formula

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0 \qquad (2)$$

tenglikka teng kuchli bo'lishi ravshan, $\Delta x = x - x_0$ va $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ deb faraz qilib hamda $x \longrightarrow x_0$ da $\Delta x \to 0$ (va aksincha $\Delta x \to 0$ da $x \longrightarrow x_0$) ekanini xisobga olib, (2) formulaga teng kuchli bo'lgan quyidagi fo'rmulani hosil qilamiz: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$

Boshqacha aytganda, funksiya argumentining x_0 nuqtadagi cheksiz kichik orttirilmasi Δx ga funksiyaning cheksiz kichik orttirilmasi Δy mos kelganda va faqat shunda *y=f(x) funksiya shu nuqtada uzluksiz* deyiladi.

1-misol. $y = x^2$ funksiya uchun x_0 nuqtada argumentning Δx orttirmasiga mos keladigan Δy funksiya orttirilmasini toping.

Yechilishi: Quyidagiga egamiz.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - {x_0}^2 = 2x_0\,\Delta x + \Delta x^2.$$

Ko'rish mumkinki, $\Delta x \to 0$ bo'lganda $\Delta y \to 0$ bo'ladi.

Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa bu nuqtada differensiallanuvchi deyiladi. Agar funksiya $[a,b]$ ning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya shu oraliqda differensiallanuvchi deyiladi.

Funksiyaning differensiallanuvchiligi va uzluksizligi orasida bog'lanishni o'rganuvchi quyidagi teoremani isbotlaylik.

1-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 da differensiallanuvchi bo'lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti: Aytaylik, x argument x_0 nuqtada nolga teng bo'lmagan Δx ortirmasini olsin. Unga funksiyaning birorta Δy ortirmasi mos kelsin. O'z-o'zidan ko'rinib turibdiki $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$ tenglik o'rinli. Limitga o'tib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \mathrm{x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \mathrm{x} = f'(x) \cdot 0 = 0;$$

Bundan $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksizligi kelib chiqadi.

Teskari teorema o'rinli emas: Ba'zi nuqtalarda differensiallanuvchi bo'lmagan uzluksiz funksiyalar mavjud,masalan $y = IxI$ funksiya 0 nuqtada differensiallanuvchi emas ammo uzluksiz.

2-§. Funksiya yig'indisi, ko'paytmasi va bo'linmasining hosilasi

2.1. Funksiya yig'indisining hosilasi

Qo'shiluvchilarni, ko'paytuvchilarni, bo'luvchi va bo'linuvchining hosilalarini bilgan holda yig'indining, ko'paytmaning va bo'linmaning hosilalarini topish qoidalarini keltirib chiqaramiz.

1-teorema. Agar $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar berilgan x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda shu nuqtada ularning yig'indisi ham differensiallanuvchi bo'ladi, shu bilan birga yig'indining hosilasi qo'shiluvchilarning hosilalari yig'indisiga teng bo'ladi:

$$(u + v)' = u' + v'. \quad (1)$$

Isboti: $y = f(x) = u(x) + v(x)$ funksiyani qaraylik. x argumentning Δx orttirmasiga u va v funksiyalarning

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x) \ va \ \Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$$

orttirmalari mos keladi. U holda y funksiya quyidagi orttimani oladi:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = [u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)] - [u(x) + v(x)] = [u(x+\Delta x) - u(x)] + [v(x+\Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v.$$

Demak, $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$.

Shartga ko'ra u va v funksiyalar differensiallanuvchi bo'lgani uchun

$y' = u' + v'$ o'rinli. Shunday qilib, $(u+v)' = u' + v'$.

Izoh. (1) formula qo'shiluvchilarning chekli soni uchun o'rinli:

$$(u + v + \ldots + t)' = u' + v' + \ldots + t'.$$

1-misol. $y = x^3 + \sin x + \ln x$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechilish: Quyidagini hosil qilamiz:

$$y' = (x^3 + \sin x + \ln x)' = (x^3)' + (\sin x)' + (\ln x)' = 3x^2 + \cos x + \frac{1}{x}.$$

2.2. Funksiya ko'paytmasining hosilasi

1-teorema. Agar $u=u(x)$ *va* $v = v(x)$ funksiyalar berilgan x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa,u holda ularning ko'paytmasi ham shu nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.Bunda ko'paytmaning hosilasi quyidagi formula bo'yicha topiladi.

$$(uv)' = u'v + uv'. \qquad (1)$$

Isboti: $y = f(x) = u(x)v(x)$ bo'lsin. Agar x argument Δx orttirma olsa,u holda u, v va y funksiyalar ham mos ravishda $\Delta u, \Delta v$ va Δy orttirmalarni oladi, bunda

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v * \Delta u + u\Delta v + \Delta u * \Delta v.$$

Demak,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} * v\right) + \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x} * u\right)$$

$$+ \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} * \Delta v\right).$$

$u = u(x)$ *va* $v = v(x)$ lar fiksirlangan x da o'zgarmas bo'lgani uchun ularni limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

Shuning uchun,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} * v\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} * v\right) = u'v$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = uv'$$

Bundan tashqari,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} * \Delta v\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} * \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta v) = 0.$$

Chunki shartga ko'ra funksiyalar differensiallanuvchi va demak, uzluksiz, shuning uchun $\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta v) = 0$. Shunday qilib, $y' = (uv)' = u'v + uv'$.

Natija. O'zgarmas ko'paytuvchini hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$(cu)' = cu'. \tag{2}$$

Haqiqatan ham, agar $v = c(c -$ o'zgarmas) bo'lsa, u holda (1) formulaga ko'ra

$$(cu)' = (c)'u + cu' = 0 * u + c * u' = cu'$$

Xususan, $c = -1$ ga teng ko'paytuvchini hosila belgisidan tashqariga chiqarish minus ishorani hosila belgisidan tashqariga chiqarishga teng kuchli:

$$(-u)' = -u' \tag{3}$$

Buning asosida ikkita funksiya ayirmasining hosilasi formulasini keltirib chiqarish mumkin: $(u - v)' = u' - v'$. (4)

1-misol. $y = e^x \sin x$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechilishi. Quyidagini hosil qilamiz:

$y' = (e^x \cos x)' = (e^x)' * \cos x + e^x(\cos x)' = e^x \cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x)$.

2.3. Funksiya bo'linmasining hosilasi

1-teorema. Agar berilgan x nuqtada $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi va $v \neq 0$ bo'lsa, bu nuqtada ularning bo'linmasi $y = \frac{u}{v}$ ham differensiallanuvchi va shu bilan birga

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}. \qquad (1) \quad \text{o'rinli.}$$

Isboti. Δx argument orttirmasi, Δu va Δv lar esa u va v funksiyalarning mos orttirmalari bo'lsin. U holda $y = \frac{u}{v}$ funksiya quyidagicha orttirmani oladi:

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u * v - u * \Delta v}{v*(v+\Delta v)}.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u * v - u * \Delta v}{v(v+\Delta v)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

yoki
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Differensiallanuvchi v funksiyaning uzliksizligiga ko'ra $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$ deb hisoblash mumkin.

Endi $y = tgx$ funksiyaning hosilasini topamiz.

Berilgan funksiyani $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ bo'linma shaklida yozib, (1) formulaga ko'ra, quyidagini hosil qilamiz:

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

Shunday qilib, $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. (2)

Bunda $v = \cos x \neq 0$ shart tgx funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan ixtiyoriy x uchun bajariladi.

$y = ctgx$ funksiyaning hosilasi ham shunga o'xshash keltirib chiqariladi:

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (3)$$

Bu formulani mustaqil keltirib chiqarishni tavsiya qilamiz.

3-§. Murakkab, teskari va parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi

3.1. Murakkab funksiyaning hosilasi

Aytaylik, $y = f(u)$ va $u = \varphi\,(x)$ funksiyalar berilgan bo'lsin. U holda $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya bo'ladi, u o'zgaruvchi esa oraliq argumentdir.

y'_u hosilani va oraliq argumentning $u_x{}'$ hosilasini bilgan holda murakkab funksiya, $y_x{}'$ ning hosilasini qanday topish mumkin?

1-teorema. Agar $u = \varphi\,(x)$ funksiya x nuqtada $u_x{}'$ hosilaga $y = f(u)$ funksiya esa tegishli u nuqtada y'_u hosilaga ega bo'lsa,u holda $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya ham bu nuqtada hosilaga ega bo'ladi va quyidagi formula bilan topiladi: $y_x{}' = y_u{}'\,u_x{}'$.

(1)

Isboti. x ga Δx orttirma beramiz. U holda u va y ham tegishli Δu *va* Δy orttirmalarni oladi.

Faraz qilaylik, $\Delta x \to 0$ da Δu nolga teng bo'lmagan qiymatlarni qabul qilsin.U holda quyidagi ayniyat o'rinli: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} * \frac{\Delta u}{\Delta x}$.

Bu tenglikda $\Delta x \to 0$ da limitga o'tib,quyidagini hosil qilamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u} * \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right).\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$u = \varphi\,(x)$ funksiya differensiallanuvchi va demak, uzluksiz bo'lgani uchun $\Delta x \to 0$ da $\Delta u \to 0$.Shuning uchun $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right) = \lim\limits_{\Delta u\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)$.

Demak, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right) = \lim\limits_{\Delta u\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right) * \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$.

Bunda,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = y_x{}'$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = u_x{}'$$

$$\lim_{\Delta u \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right) = y_u{}'$$

Shuning uchun $y_x{}' = y_x{}' * u_x{}'$. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

$x = 0$ da Δu nol qiymat qabul qilgan holda ham (1) formula o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin.

1-misol. $y = \sin x^3$ funksiyaning hosilasin toping.

Yechilishi. Berilgan funksiya murakkab funksiyadir. $u = x^3$ belgilash kiritib, $y = \sin u$ ni hosil qilamiz. (1) formulaga ko'ra

$$y_x{}' = (\sin u)_u{}' * (x^3)_x{}' = \cos u * 3x^2$$

ni hosil qilamiz yoki $u = x^3$ bo'lgani uchun $y_x{}' = \cos x^3 * 3x^2 = 3x^2 \cos x^3$.

Murakkab funksiya ikkita funksiyadangina iborat bo'lmay, ko'p sondagi funksiyalardan ham iborat bo'lishi mumkin. Bunday hollarda murakkab funksiyaning qiymatiga keltiriladigan amallarning qaysi biri oxiri bo'lishini tasavvur qila bilish kerak. Murakkab funksiyani differensiallayotganda oxirgi amal bajarilayotgan kattalik u oraliq argument sifatida qabul qilinadi.

2-misol. $y = \ln arctgx^2$ funksiyaning hosilasini toping. *Yechilishi.* Berilgan funksiya uchun oxirgi amal natural logarifm hisoblanadi. Bu amal $arctgx^2$ funksiya ustida bajariladi. Shuning uchun $u = arctgx^2$ funksiyani oraliq argument deb qabul qilamiz. U holda $y = \ln u \cdot u'$ hosilani topamiz:

$$y'_x = (\ln u)'_u \cdot (arctgx^2)'_x = \frac{1}{u}(arctgx^2)'_x = \frac{1}{arctgx^2} \cdot (arctgx^2)'_x$$

Differensiallash bu bilan tugagani yo'q, chunki $arctgx^2$ funksiyaning hosilasi hali topilganicha yo'q. Bu ham murakkab funksiya, shuning uchun oxirgi amal bo'lib x^2 bo'yicha arktangens hosilasini topish hisoblanadi. Shuning uchun (1) formulani qayta qo'llab va unda endi $u = x^2$ deb hisoblab, quyidagini topamiz:

$$(arctgx^2)'_x = (arctgu)'_u \cdot (x^2)'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot 2x = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}$$

Uzil-kesil quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y' = \frac{1}{arctgx^2} \cdot \frac{2x}{1+x^4} = \frac{2x}{(1+x^4)arctgx^2}$$

3.2. Teskari funksiyaning hosilasi

Aytaylik, $x = f(y)$ funksiya biror intervalda monoton va differensiallanuvchi bo'lsin hamda bu intervalning y nuqtasida nolga teng bo'lmagan $f'(y)$ hosilaga ega bo'lsin, $y = f^{-1}(x)$. teskari funksiya tegishli x nuqtada $[f^{-1}(x)]'$ hosilasiga ega bo'lishini, shu bilan birga

$$[f^{-1}(x)]' = 1/(f'(y)) \quad (1)$$

bo'lishini ko'rsatamiz.

Shartga ko'ra $x = f(y)$ funksiya monoton va differensiallnuvchi (demak, uzluksiz ham) bo'lgani uchun teskari funksiya mavjudligi haqidagi teoremaga binoan $y = f^{-1}(x)$ funksiya mavjud va monoton hamda uzluksiz. x argumentga $\Delta x \neq 0$ orttirma beramiz. U holda $y = f^{-1}(x)$ funksiya Δy orttirmani oladi, u monotonligiga ko'ra noldan farqli bo'ladi. Bundan tashqari $y = f^{-1}(x)$ funksiyaning uzluksizligi natijasida $\Delta x \to 0$ da Δy orttirma ham nolga intiladi. Demak,

$$[f^{-1}(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\cdot \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}\right) = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'(y)}.$$

(1) formulani quyidagicha ko'rinishda yozish mumkin:

$$y_x' = \frac{1}{x_{y'}} \quad (2)$$

3.3. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi

Biz bungacha tekislikdagi shunday chiziqlar tenglamalarini qaradikki, bu tenglamalar chiziqlarning bevosita berilgan nuqtalarining koordinatalarini o'zaro bog'lar edi. Biroq, amaliyotda ko'pincha chiziqning berilgan x va y koordinatalari uchinchi bir o'zgaruvchi kattalikning funksiyasi deb qaraladigan chiziqning berilish usuli qo'llaniladi. t o'zgaruvchining muayyan qiymati uchun qaralayotgan ikkita funksiyasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (1)$$

U holda t ning bu qiymatlaridan istalgan bittasiga x ning aniq bir qiymati va y ning aniq bir qiymati mos keladi va demak, aniq bir $M(x, y)$ nuqta mos keladi. t o'zgaruvchi (1) funksiyalarning aniqlanish sohasi bo'yicha o'tganda $M(x, y)$ nuqta Oxy tekislikda biror C chiziqni chizadi. (1) tenglama bu chiziqning *parametrik tenglamasi* deyiladi, t –o'zgaruvchi esa *parametr* deyiladi.

Aytaylik, $x = x(t)$ funksiya teskari $t = \Phi(x)$ funksiyaga ega bo'lsin. t uchun bu ifodani (1) tenglamaning ikkinchisiga qo'yib, y ni x ning funksiyasi sifatida ifodalovchi

$$y = y[\Phi(x)] \qquad (2)$$

tenglamani hosil qilish mumkin.

Bu funksiya (1) parametrik tenglamalar bilan berilgan deb shartlashib olamiz. Bu tenglamalardan (2) tenglamaga o'tish parametrni yo'qotish deyiladi. Parametrik holda berilgan funksiyalar qaralayotganda parametrni yo'qotish hamma vaqt ham mumkin bo'lavermaydi. Ko'p hollarda (1) formulalar bo'yicha t parametrga turli qiymatlar berib x argumentning va y funksiyaning mos qiymatlarini hisoblab topish qulay.

1-misol. Markazi koordinatalar boshida, radiusi R bo'lgan aylananing ixtiyoriy nuqtasi M bo'lsin. Bu nuqtaning x va y dekart koordinatalari shu nuqtaning qutb radiusi $r = R$ va qutb burchagi (biz bu yerda uni t orqali belgilaymiz) orqali quyidagicha belgilanadi:

$$\begin{cases} x = R\,cos(t) \\ y = R\,sin\,(t) \end{cases} \qquad (3)$$

(3) tenglama aylananing parametrik tenglamasi deyiladi. Bu tenglamada t parametr 0 dan 2π gacha o'zgaradigan qutb burchagi hisoblanadi. Agar (3) tenglamani hadma-had kvadratga oshirib qo'shsak, $cos^2 t + sin^2 t = 1$

ayniyatga ko'ra parametr yo'qoladi va aylananing Dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasi $x^2 + y^2 = R^2$ hosil bo'ladi. Bu tenglama ikkita elementar funksiyaga ajraladi:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \text{ va } y = -\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Bu funksiyalarning har biri (3) tenglamalar bilan parametrik beriladi. Biroq bu funksiyalar uchun parametrning o'zgarish sohasi turlicha bo'ladi. Bu funksiyalarning birinchisi uchun $0 \le t \le \pi$ o'rinli bo'lib bu funksiyaning grafigi yuqori yarim aylanadir. Ikkinchi funksiya uchun $\pi \le t \le 2\pi$ o'rinli uning grafigi quyi yarim aylanadir.

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalarni differensiallash. Faraz qilaylik, x dan olingan y funksiya (1) tenglamalar bilan parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Shu bilan birga t parametrning biror o'zgarish sohasida $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar differensiallanuvchi va $x'(t) \neq 0$ bo'lsin . y'_x hosilani topamiz:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Shunday qilib, $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$. (4)

(4) formula parametrik ko'rinishida berilgan funksiyaning hosilasini topishga imkon beradi.

2-misol. $\begin{cases} x = sin^2 t \\ y = sin2t \end{cases}$ parametrik tenglamalari bilan berilgan y funksiyaning hosilasini toping.

Yechilishi. (4) formulaga asosan quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2cos2t}{2sint\ cost} = 2\text{ctg}2\text{t}$$

3-misol.

$\begin{cases} x = t - sint \\ y = 1 - cost \end{cases}$ sikloidganing $M_1(x_1; y_1)$ nuqtada $t = \frac{3\pi}{2}$ qiymatiga mos keladigan urunma va normal tenglamasini tuzing.

Yechilishi. Urinish nuqtasi $M_1(x_1; y_1)$ ning koordinatalarini topamiz.

$$x_1 = {}^{(t - sint)}\Big/_{t = \frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2} - sin\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 1 = \frac{3\pi + 2}{2};$$

$$y_1 = {}^{(1 - cost)}\Big/_{t = \frac{3\pi}{2}} = 1 - cos\frac{3\pi}{2} = 1.$$

Urinma va normalning burchak koeffisentini aniqlash uchun hosilani topamiz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - cost)'}{(t - sint)'} = \frac{sint}{1 - cost}.$$

Sikloidning M_1 nuqtasiga urinuvchi urinmaning va normalning burchak koeffisentini topamiz: $k_{ur} = \frac{dy}{dx}\Big|_{M_1} = (\frac{sint}{1-cost})\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}} = -1$; $k_n = -\frac{1}{k_{ur}} = 1.$

Endi berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidan foydalanib, urinma tenglamasini

$$y - 1 = -1 \cdot \left(x - \frac{3\pi + 2}{2}\right) \text{ yoki } x + y - \frac{3\pi + 4}{2} = 0$$

va normalning tenglamasini

$y - 1 = 1 \cdot \left(x - \frac{3\pi+2}{2}\right)$ yoki $x - y - \frac{3\pi}{2} = 0$ hosil qilish oson.

4-§. Ba'zi elementar funksiyalarning hosilalari

4.1. Darajali funksiya hosilasi

$y = C$ o'zgarmasning hosilasi. $y = C$ funksiya butun sonlar o'qida o'zgarmas qiymatini saqlagani uchun ixtiyoriy tanlangan x nuqtada argumentning istalgan Δx orttirmasiga funksiyaning nolga teng bo'lgan Δy orttirmasi mos keladi. Shuning uchun

$$C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Shunday qilib, $C' = 0.$ (1)

Natural ko'rsatkichli $y = x^n$ darajali funksiyaning hosilasini tamiz. x –ixtiyoriy tanlangan nuqta, Δx – argumentning bu nuqtadagi orttirmasi va Δy – berilgan funksiyaning mos orttirmasi bo'lsin. U holda Nyuton binomiga ko'ra: $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1} * \Delta x + \cdots + (\Delta x)^n - x^n$ yoki

$\Delta y = nx^{n-1} * \Delta x + \ldots + (\Delta x)^n$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\,\Delta x + \frac{n(n-1)}{1*2}\, x^{n-2}\,(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1*2} x^{n-2}\,\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1}$$

Shunday qilib, $(x^n)' = nx^{n-1}$. (2)

4.2. Ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi

$y = a^x$ ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi. x argumentlarning ixtiyoriy tanlangan qiymatiga Δx orttirma berib, ko'rsatkichli funksiyaning quyidagi orttirmasini hosil qilamiz:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

Demak,

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\,(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a,$$

o'rinli. Bunda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$$

Shunday qilib, $(a^x)' = a^x \ln a$. (3)

4.3. Logarifmik funksiya hosilasi

$y = \log_a x$ logarifmik funksiyaning hosilasi. Logarifmik funksiyaning aniqlanish sohasidan ixtiyoriy x qiymatni olamiz va unga Δx orttirma beramiz. U holda funksiyaning orttirmasi

$$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a(1+\frac{\Delta x}{x}).$$

Ta'rifga ko'ra

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

Bu limitni topish uchun quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$$\frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x}).}{\Delta x} = \frac{1}{x} * \frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

x miqdor o'zgarmasligini va $\Delta x \to 0$ da $\frac{\Delta x}{x} \to 0$ bo'linishi e'tiborga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}.\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x} * \frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\right] = \frac{1}{x} * \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x}\log_a e.$$

Shunday qilib, $(\,log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$ yoki $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$ bo'lgani uchun quyidagiga ega bo'lamiz: $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ (5)

Hususan, $a = e$ da $(ln\, x)' = \frac{1}{x}$ (6).

4.4. Trigonometrik funksiyalar hosilasi

$y = \sin x$ va $y = \cos x$ funksiyalarning hosilalari. Δx orttirma $y = sin\, x$ funksiyaning ixtiyoriy tanlangan argument orttirmasi bo'lsin. U holda bu funksiyaning orttirmasi: $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} * \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ ga teng. Demak,

$$(\sin x)' = .\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = \cos x,$$

Bunda ajoyib limitga ko'ra $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = \cos x.$$

Shunday qilib, $(sin\, x)' = \cos x.$ (7)

$y = \cos x$ funksiyalarning hosilasini shunga o'xshash keltirib chiqaramiz:

$$(\cos x)' = -\sin x \quad . \tag{8}$$

(8) formulani mustaqil keltirib chiqarishni kitobxonga havola qilamiz.

$y = tgx$ *funksiya.* Bo'linmani differensiallash qoidasiga ko'ra

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (9)$$

Funksiyalar murakkab bo'lgan holda $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$; $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

o'rinli bo'ladi.

4.5. Teskari trigonometrik funksiyalar hosilalari

$y = arsin\, x$ funksiyaning hosilasini topamiz: $x = sin\, y$ teskari funksiyani qaraymiz, bu funksiya $-\pi/2 < y < \pi/2$ intervalda monoton va differensiallanuvchi, uning hosilasi $x' = cos\, y$ esa bu intervalda nolga aylanmaydi. Demak, $y_x' = \frac{1}{x_{y'}}$ =1/cos y ni hosil qilamiz. Biroq

$cos\, y = \sqrt{1 - sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Shunday qilib, $y' = 1/\sqrt{1 - x^2}$ ya'ni

$$(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{10}$$

$y = arctg\, x$ funksiyaning hosilasini shunga o'xshash topamiz. Bu y funksiya ta'rifga ko'ra $-\pi/2 < y < \pi/2$ shartni qanoatlantirishi kerak. Bunda teskari $x = tg\ y$ funksiya monoton va differensiallanuvchi . $x_y' = 1/cos^2 y$ ni topamiz. Demak, $y_x' = \cos^2 y$ ga egamiz. Biroq $\cos^2 y = 1/(1 + tg^2 y) = 1/(1 + x^2)$

yoki $$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{11}$$

$y = arcos\, x$ $y = arcctg\, x$ funksiyalarning hosilalari uchun formulalar quyidagicha bo'ladi: $(arcos\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (12)

$$(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{13}$$

Bu formulalarni mustaqil keltirib chiqarishni kitobxonning o'ziga havola qilamiz.

Differensiallash formulalarining jadvali.

Avval keltirib chiqarilgan differensiallash formulalarini keltiramiz:

I. $y = C$; $y' = 0$.

II. $y = x^n$; $y' = nx^{n-1}$.

III. $y = a^x$; $y' = a^x \ln a$.

III'. $y = e^x$; $y' = e^x$.

IV. $y = \log_a x$; $y' = \frac{1}{x \ln a}$.

IV'. $y = \ln x$; $y' = \frac{1}{x}$.

V. $y = \sin x$; $y' = \cos x$.

VI. $y = \cos x$; $y' = -\sin x$.

VIII. $y = ctgx$; $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

IX. $y = \arcsin x$; $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

X. $y = \arccos x$; $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XI. $y = arctgx$; $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

XII. $y = arcctgx$; $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

XII. $y = tgx$; $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

5-§. Yuqori tartibli hosilalar. Lopital qoidasi

5.1. Yuqori tartibli hosilalar

Faraz qilaylik $y = f(x)$ funksiya biror intervalda differensiallanuvchi bo'lsin. U holda uning hosilasi $f'(x)$ ham biror intervalda x ning funksiyasi bo'ladi. Bu funksiya ham shu intervalda hosilaga ega bo'lsin. Bu $f'(x)$ funksiyaning hosilasi $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va y'' yoki $f''(x)$ simvol bilan belgilanadi: $f''(x) = [f'(x)]'$. (1)

Bunda $f'(x)$ birinchi hosila yoki $f(x)$ funksiyadan olingan birinchi tartibli hosila deyiladi.

1-misol. $y = x^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning birinchi tartibli hosilasini topamiz: $y' = (x^3)' = 3x^2$. Ikkinchi tartibli hosilani birinchi hosilaning hosilasi sifatida topamiz: $y'' = (3x^2)' = 6x$.

Ikkinchi tartibli hosilaning hosilasi uchinchi tartibli hosila yoki uchinchi hosila deb ataladi va y''' yoki $f'''(x)$ simvol bilan belgilanadi:

$$f'''(x) = [f''(x)]'. \qquad (2)$$

Umuman aytganda, $y = f(x)$ funksiyaning n-tartibli hosilasi deb berilgan funksiyaning $(n-1)$ –tartibli hosilasidan olingan birinchi tartibli hosilaga aytiladi va $y^{(n)}$ yoki $f^{(n)}(x)$ simvol bilan belgilanadi:

$$f^{(n)}(\mathrm{x}) = [f^{(n-1)}(\mathrm{x})]'. \qquad (3)$$

Birinchi tartibli hosiladan katta tartibli hosilalar yuqori tartibli hosilalar deyiladi.

2-misol. $y = sinx$ funksiyaning n-tartibli hosilasini toping.

Yechilishi: $y' = (sinx)' = cosx = sin(x + \frac{\pi}{2})$;

$$y'' = (cosx)' = -sinx = sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2);$$

$$y''' = (-sinx)' = -cosx = sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3);$$

$$y^{IV} = (-\cos x)' = \sin x = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4).$$

Hulosa qilab, quyidagini toppish mumkin: $y^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot \mathrm{n})$.

5.2. Ikkinchi tartibli hosilaning fizik ma'nosi

Moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab $s = f(t)$ qonun bilan harakat qilayotgan bo'lsin, bu yerda s – nuqtaning t vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'li. U holda bu harakatning v tezligi vaqtning biror funksiyasidir: $v = v(t)$. Vaqtning t momentida tezlik $v = v(t)$ qiymatga ega bo'ladi. Vaqtning boshqa $t + \Delta t$ momentini qaraymiz. Unga tezlikning $v_1 = v(t + \Delta t)$ qiymati mos keladi. Vaqtning Δt orttirmasiga tezlikning $\Delta v = v_1 - v = v(t + \Delta t) - v(t)$ orttirmasi mos keladi.

$\frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta \mathrm{t}} = \omega_{\mathrm{ur}}$ nisbat vaqtning Δt oraliqdagi o'rtacha tezlanishi deyiladi.

t momentdagi ω tezlanish deb $\Delta t \to 0$ dagi o'rtacha tezlanishning limitiga aytiladi:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{\mathrm{u}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta \mathrm{t}} = v_t' \qquad (4)$$

Shunday qilib, to'g'ri chiziqli harakatning tezlanishi deb tezlikdan vaqt bo'yicha olingan hosilaga aytiladi.

Ma'lumki tezlik s yo'lning t vaqt bo'yicha olingan hosilasi edi: $v = s'$. Buni hisobga olib, $\omega = v'_t = (s')' = s''$ (5)

ga ega bo'lamiz. Shunday qilib, to'g'ri chiziqli (tekis) harakatning tezlanishi yo'lning vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilasiga teng ekan.

1-misol. moddiy nuqtaning tekis harakati $s = \frac{t^3}{3}$ qonun bilan ro'y berayotgan bo'lsin, bu yerda t vaqt sekundlarda, s yo'l esa santimetrlarda ifodalangan bo'lsin. Harakat qilayotgan nuqtaning $t = 5c$ momentdagi ω tezlanishini toping.

Yechilishi. $\omega = s'' = (\frac{t^3}{3})'' = 2t$ ga ega bo'lamiz. Demak, izlanayotgan tezlanish $\omega = 10\ (sm/s^2)$ bo'ladi.

Differentsiallanuvchi funksiyalar haqida asosiy teoremalar

Quyida keltiriladigan teoremalar differensial hisobning asosiy teoremalari deyiladi va o'rta qiymat haqidagi teoremalar hisoblanadi.

1-teorema. Ferma teoremasi. (a, b) intervalda aniqlangan $f(x)$ funksiya bu intervalning biror $x = c$ nuqtasida eng katta yoki eng kichik qiymatini qabul qilsin. Bu holda, agar funksiyaning $x = c$ nuqtada hosilasi mavjud bo'lsa, u nolga teng bo'ladi.

Isboti: Aniqlik uchun funksiyaning (a, b) intervaldagi eng katta qiymati $f(c) = M$ bo'lsin. $f'(c) = 0$ ekanligini ko'rsatamiz. Hosilaning ta'rifiga ko'ra:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Funksiya c nuqtada eng katta qiymatni qabul qilgani uchun Δx ning ixtiyoriy qiymatida quyidagiga egamiz: $f(c) \geq f(c + \Delta x)$ va $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$.

Bundan, agar $\Delta x > 0$ bo'lsa, $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0$ va demak,

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \le 0.$$

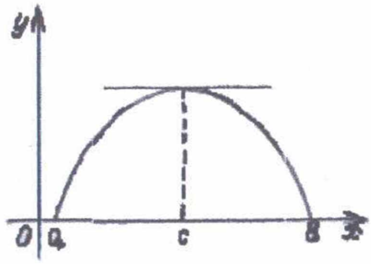
Agar $\Delta x < 0$ bo'lsa, $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \ge 0$ va

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \ge 0.$$

Shunday qilib, $f'(c)$ hosila musbat ham, manfiy ham bo'la olmaydi. Demak, $f'(c) = 0$ tenglik o'rinli.

Ferma teoremasining geometrik ma'nosini quyidagicha tushuntirish mumkin.

$f'(c) = tg\,\alpha = 0$ tenglik funksiya eng katta (yoki eng kichik) qiymatga ega bo'lgan c absissali nuqtada funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma Ox o'qiga parallel bo'ladi (4-chizma).



4-chizma

2-teorema.(Roll teoremasi). Agap $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz, uning ichki nuqtalarida (ya'ni (a,b) intervalda) differentsiallanuvchi va segmentning oxirlarida $f(a) = f(b) = k$ bo'lsa, u xolda $f'(x)$ hosila bu segmentning ichki, kamida bitta $x = c$ nuqtasida nolga teng bo'ladi.

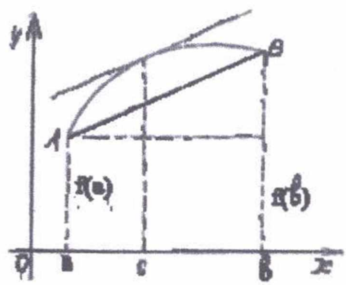
Isboti. Bu funksiya segmentda uzluksiz bo'lgani uchun u o'zining eng katta M va eng kichik m qiymatiga erishadi.

Agar $M = m$ bo'lsa, funksiya $[a,b]$segmentda o'zgarmas va demak, segmentning ixtiyoriy nuqtasida uning hosilasi $f'(x) = 0$.Endi $M \ne m$ bo'lsin, u holda bu sonlardan biri, masalan, $M \ne$ k. Shuning uchun, agar eng katta qiymat M ga c nuqtada erishilsa: $f(c) = M$, u xolda c nuqta $[a, b]$ segmentning ichki nuqtasi bo'lishi kerak. Demak, Ferma teoremasiga ko'ra $f'(c) = 0$.

Izoh. Agar $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ segmentning ichki nuqtalarining barchasida differentsiallanuvchi bo'lish sharti bajarilmasa Roll teoremasidagi hulosa to'g'ri bo'lmasligi mumkin.

3-teorema.(*Lagranj teoremasi*). Agar $f(x)$funksiya $[a, b]$segmentda uzluksiz va uning ichki nuqtalariga differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda bu segment ichida kamida bitta $x = c$ nuqta topiladiki, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \qquad (6)$$



5-chizma

Isboti. Ikkita $A[a; f(a)]$va $B[b; f(b)]$ nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidan foydalanib, AB vatar tenglamasini yozamiz(5-chizma):

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Bundan vatarning ordinatasi aniqlanadi: $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$

Endi funksiya grafigi va vatar ordinatalari ayirmasiga teng bo'lgan x ning bitta o'sha qiymatiga mos keladigan $F(x)$ funksiyani qaraylik:

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right]$$

Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantirishini oson tekshirish mumkin.Haqiqatan, bu funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz, chunki $f(x)$ va $x-a$ lar bu segmentda uzluksiz. $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (7) hosila (a, b) intervalda mavjud, chunki unda $f'(x)$ mavjud. Segmentning oxirlarida $F(a) = F(b) = 0$. Roll teoremasiga ko'ra (a, b) intervalda $x = c$ nuqtani topish mumkinki, unda $F'(C) = O$ buladi. (7) tenglik asosida quyidagini topamiz:

$$F'(c) = f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

Bundan $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ ni topamiz, shuni isbot qilish talab qilingan edi.

Lagranj teoremasining geometrik ma'nosini quyidagicha tushuntirish mumkin. Teorema shartini qanoatlantiradigan $y = f(x)$ funksiyaning grafigini qaraylik.

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ nisbat yoyning oxirlarini tutashtiruvchi AB vatarning burchak koeffitsientini tasvirlaydi. $f'(c) = tg\alpha$ urinmaning burchak koeffitsienti bo'lgani uchun Lagranj teoremasi $y = f(x)$ funksiya grafigida hech bo'lmaganda bitta nuqta topilishini, bu nuqtada urinma yoy oxirlarini tutashtiruvchi vatarga parallel bo'lishini tasdiqlaydi. (6) formula ko'pincha qo'yidagicha yoziladi:

$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$. (8)

Bu tenglik quyidagicha o'qiladi: $[a, b]$ segmentda differentsiallanuvchi bo'lgan funksiyaning orttirmasi segment uzunligi bilan bu segment ichidagi biror nuqtasidagi funksiya hosilasining ko'paytmasiga teng ekan. (8) formulani *Lagranj formulasi* yoki *cheksiz orttirmalar formulasi* deyiladi.

4-teorema.(Koshi teoremasi). Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $[a, b]$ segmentda uzluksiz va uning barcha ichki nutstalarida differentsiallanuvchi bo'lsa, shu bilan birga $\varphi'(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda bu segmentning ichida shunday c nuqta topiladiki, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f\prime(c)}{\varphi'(c)'} \quad a < c < b.$$

1-izoh. Teorema shartidan $\varphi(b) \neq \varphi(a)$ ekani kelib chiqadi,chunki aks holda Roll teoremasiga ko'ra shunday c nuqta topiladiki, uning uchun $\varphi'(c) = 0$ bo'lar edi.

2-izoh. Agar $\varphi(x) = x$ deyilsa, Lagranj teoremasi Koshi teoremasining xususiy holi bo'lar edi.

5.3. Lopital qoidasi

Funksiyaning nuqtadagi limitini hisoblashda cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarning nisbatlarining limitlarini hisoblashga oid misollar ko'p uchraydi. Bu bo'limda $(\frac{0}{0})$ va (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish bilan tanishmiz. Quyida shu aniqmasliklarni hal qilish uchun qo'llaniladigan Lopital qoidasi deb ataladigan yangi qoidani qaraymiz.

1-teorema. $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar biror $(a, a + \Delta x)$ intervalda differentsiallanuvchi, shu bilan birga $\varphi'(x) \neq 0$ bo'lsin, hamda $x \to a + 0$ da ikkala funksiya ham nolga (yoki cheksizlikka) intilsin. Agar ularning hosilalarining nisbati $x \to a + 0$ da limitga ega bo'lsa quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \qquad (9)$$

Isboti. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} \varphi(x) = 0$ hol uchun isbotni keltirish bilan chegaralanamiz. a nuqtada $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarni aniqlab olamiz $f(a) = \varphi(a) = 0$ Bu funksiyalar istalgan $[a, x]$ (bu yerda $a < x < a + \Delta x$) da uzluksiz bo'ladi va ixtiyoriy $[a, x]$ segment uchun Koshi teoremasining shartlarini qanoatlantiradi, shuning uchun

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

bu yerda $a < c < x$. c kattalik x ga bog'liq bo'lishini, lekin $x \to a + 0$ da c kattalik a ga intilishini aytib o'tishimiz kerak. Demak.

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{c \to a+0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

o'rinli.

Izoh. Hosilalarniig nisbati, $0/0$ yoki ∞/∞ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lsa, Lopital qoidasini yana qo'llash mumkin, ya'ni ikkinchi tartibli hosilalarniig nisbatiga o'tish mumkin.

$f(x)$ va $\varphi(x)$ lar $x \to \pm\infty$ da, hamda $x \to a - 0$ da bir vaqtda 0 ga yoki ∞ ga intilganda ham teorema o'rinli bo'laveradi.

1-misol. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$ ni toping.

Yechilishi. Bu yerda $x \to +\infty$ da surat va mahraj cheksiz katta funksiyalarni beradi. Lopital qoidasini ikki marta qo'llab, quyidagini topamiz

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Biz qarab chiqqan $\left(\frac{0}{0}\right)$ va $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ko'rinishdagi aniqmasliklardan tashqari quyidagi ko'rinishdagi aniqmasliklar ham uchraydi.

$(\infty - \infty)$ ko'rinishdagi aniqmaslik. Bunday aniqmaslik deganda

$$\lim_{x \to c} |f(x) - \varphi(x)|$$

limitni topish tushuniladi bunda $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar bir xil ishorali cheksiz katta funksiyalar, ya'ni

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to c} \varphi(x) = \infty$$

Bu hol $f(x) - \varphi(x)$ ifodani almashtirishlar yordamida $(\frac{0}{0})$ yoki (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmaslikka olib kelinadi.

$(0 \cdot \infty)$ ko'rinishidagi aniqmaslik. Bu aniqmaslikni ochish deganda

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0 \quad \text{va} \quad \lim_{x \to c} \varphi(x) = \infty$$

bo'lgandagi $\lim_{x \to c} |f(x)\varphi(x)|$ limitni topish tushuniladi. Bu holda ham $f(x)\varphi(x)$ ifodani almashtirish yordamida $(0/0)$ *va* (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmaslikka keltiriladi.

(1^{∞}) ko'rinishdagi aniqmaslik. Bu aniqmaslikni ochish deganda

$$\lim_{x \to c} f(x) = 1 \quad va \quad \lim_{x \to c} \varphi(x) = \infty$$

bo'lgandagi $\lim_{x \to c} [f(x)]^{\varphi(x)}$ limitni topish tushuniladi.

(0^0) ko'rinishidagi aniqmaslik. Bu aniqmaslikni ochish deganda

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0 \quad va \quad \lim_{x \to c} \varphi(x) = 0 \quad \text{bo'lganda} \quad \lim_{x \to c} [f(x)]^{\varphi(x)}$$

limitni topish tushuniladi.

(∞^0) ko'rinishdagi aniqmaslik. Bu aniqmaslikni ochish deganda $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ *va* $\lim_{x \to c} \varphi(x) = 0$ bo'lgandagi $\lim_{x \to c} [f(x)]^{\varphi(x)}$ limitni topish tushuniladi. $1^{\infty}, 0^0$ *va* ∞^0 ko'rinishdagi aniqmasliklar odatda $[f(x)]^{\varphi(x)}$ ifodani logarifmlash natijasida $(\frac{0}{0})$ yoki (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmasliklarga keltiriladi.

6-§. Hosilaning funksiyani tekshirishga tatbiqi

6.1. Funksiyaning monotonlik intervallari

x_1 va x_2 - birorta segmentga (yoki intervalga) tegishli bo'lgan ixtiyoriy ikkita nuqtalar bo'lsin. Agar $x_2 > x_1$ tengsizlikdan $f(x_2) > f(x_1)$ tengsizlik kelib chiqsa, $y = f(x)$ funksiya bu sementda (yoki intervalda) o'suvchi deyiladi.

$x_2 - x_1 = \Delta x$ *va* $f(x_1) = \Delta y$ belgilashlarni kiritib, Δx va Δy lar bir hil ishorali ekanini aytib o'tamiz. Demak, o'suvchi funksiya uchun funksiya opttirmasining argument orttirmasiga nisbati har doim musbat ekan, ya'ni $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$.

Agar biror segmentga (yoki intervalga) tegishli bo'lgan ixtiyoriy ikkita x_2 *va* x_1 nuqtalar uchun $x_2 > x_1$ tengsizlikdan, $f(x_2) < f(x_1)$ tengsizlik kelib chiqsa, $y = f(x)$ funksiya bu segmentda (yoki intervalda) kamayuvchi deyiladi.

Bu holda $\Delta x = x_2 - x_1$ va $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ ortirmalar turli ishoraga ega shuning uchun kamayuvchi funksiyada orttirmalarning nisbati manfiy ya'ni $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ bo'ladi.

Funksiyaning intervalda o'suvchi va kamayuvchi bo'lishining yetarli va zaruriy shartini aniqlaymiz.

1-teorema. (funksiya o'suvchi bo'lishining zaruriy sharti). Agar (a, b) intervalda $f(x)$ funksiya differensialanuvchi hamda o'suvchi bo'lsa, uning hosilasi berilgan intervalning hech bir nuqtasida manfiy bo'lmaydi, ya'ni $a < x < b$ uchun $f'(x) \geq 0$ bo'ladi.

Isboti. $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda o'suvchi bo'lsin. (a, b) intervalga tegishli ikkita $x \; va \; x + \Delta x$ nuqtani qaraymiz. U holda yuqorida ko'rsatilgandek

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$ bo'ladi. $\Delta x \to 0$ da limitga o'tib,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$$

ni hosil qilamiz.

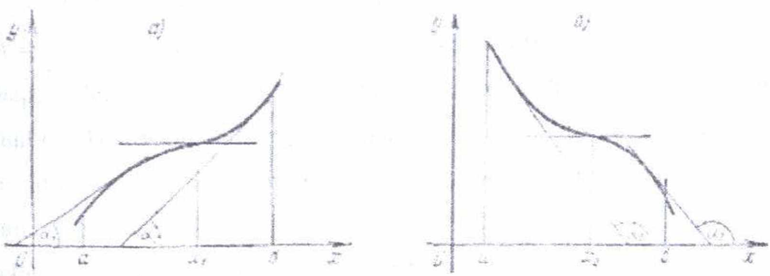
Farazimizga ko'ra funksiya differentsiallanuvchi bo'lgani uchun

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

va demak, $f'(x) \geq 0$ o'rinli.

2-teorema. (funksiya kamayuvchi bo'lishining zaruriy sharti). Agar (a,b) intervalda differentsiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya kamaysa, uning hosilasi berilgan intervalning hech bir nuqtasida musbat bo'lmaydi, ya'ni $f'(x) \leq 0$ bo'ladi.

Qaralgan teoremalarni geometrik ravishda yaqqol tasvirlash mumkin. Xaqiqatan, o'suvchi funksiyaning grafigi abtsissa o'qi bo'yicha o'ng tomonga qarab siljiganda yuqoriga ko'tariladi. U holda grafikka o'tkazilgan urinmalar Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan o'tkir burchakni hosil qiladi yoki ba'zi nuqtalarda Ox o'qqa parallel bo'ladi (1,2- chizmalar).



1,2- chizmalar

O'tkir burchaklarning tangensi musbat (urinmalar Ox o'qqa parallel bo'lgan nuqtalarda nolga teng) bo'lgani uchun va hosilaning geometrik ma'nosiga ko'ra ($tg\,\alpha = f'(x)$) o'suvchi funksiya uchun $f'(x) \geq 0$ bo'ladi.

Shunga o'xshash, agar funksiya kamayuvchi bo'lsa urinmalar $0x$ o'q bilan α o'tmas burchak hosil qiladi yoki ba'zi bir nuqtalarda Ox o'qqa parallel bo'ladi.

O'tmas burchaklarning tangensi manfiy bo'lganidan kamayuvchi funksiya uchun $f'(x) \leq 0$ bo'ladi.

3-teorema (funksiya o'suvchi bo'lshining yetarli sharti). Agar $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya segmentning har bir nuqtasida musbat hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya $[a, b]$ segmentda o'suvchi bo'ladi.

Isboti. Barcha $a < x < b$ uchun $f'(x) > 0$ bo'lsin. $[a, b]$ segmentdan ikkita erkli x_1 *va* x_2 qiymatni olamiz, shu bilan birga $x_2 > x_1$. Lagranj formulasini $[x_1, x_2]$ segmentga moslab yozamiz:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) * f'(c), \qquad x_1 < c < x_2.$$

$[a, b]$ segmentning barcha nuqtalarida $f'(x) > 0$, shuning uchun $f'(c) > 0$. Bundan tashqari $x_2 - x_1 > 0$ bo'lgani uchun $(x_2 - x_1) \cdot f'(c) > 0$ ko'paytma musbat va demak, $f(x_2) - (x_1) > 0$. Bundan

$f(x_2) > f(x_1)$, ya'ni $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda o'suvchi ekan.

4-teorema. (funksiya kamayishining yetarli sharti). Agar $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lib segmentning har bir ichki nuqtasida manfiy hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya $[a, b]$ segmentda kamayuvchi bo'ladi.

Eslatib o'tamizki, funksiya biror intervalda faqat o'suvchi yoki faqat kamayuvchi bo'lgandagina monoton bo'ladi. Masalaga geometrik nuqtai nazardan qaraydigan bo'lsak, hosilaning geometrik ma'nosi $f(x)$ funksiya grafigidagi berilgan nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti bo'lgani uchun berilgan nuqtada $f'(x) > 0$ bo'lsa, urinma absissalar o'qining musbat yo'nalishi bilan o'tkir burchak tashkil qilgan bo'ladi. Bu nuqtada grafik yuqoriga qarab ketgan bo'ladi. $f'(x) < 0$ bo'lganida esa aksincha.

Xulosa. Berilgan $f(x)$ funksiyaning monotonlik sohalarini aniqlash uchun ushbu

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{va} \quad f'(x) \leq 0$$

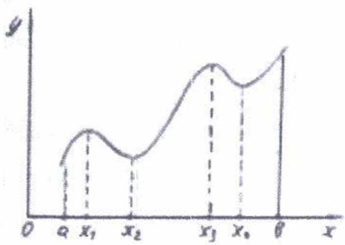
tengsizliklarni yechish yetarli bo'ladi. Agar biror oraliq $f'(x) \geq 0$ tengsizlikning yechimi bo'lsa, shu oraliqda funksiya kamaymaydigan, agar $f'(x) \leq 0$ tengsizlikning yechimi bo'lsa, funksiya shu oraliqda o'smaydigan bo'ladi.

1-misol. $y = x^3 - 3x$ funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlang.

Yechilishi. Funksiyaning hosilasi $y' = 3x^2 - 3$ ga teng, x ning $y' > 0$ bo'ladigan barcha qiymatlari uchun funksiya o'sadi. $3x^2 - 3 > 0$ tengsizlikni yechib, $x > 1$ $yoki$ $x < -1$ ni topamiz. Shunday qilib, funksiya $-\infty < x < -1$ va $1 < x < +\infty$ intervalda o'sadi, x $ning$ $y' < 0$ bo'ladigan barcha $-1 < x < 1$ qiymatlarida funksiya kamayadi.

6.2. Funksiyaning ekstremumlari

Uzluksuz $y = f(x)$ funksiyaning grafigi berilgan bo'lsin(3-chizma). Ko'rish mumkinki, funksiyaning x_1 nuqtadagi qiymati chapdagi va o'ngdagi "qo'shni" nuqtalardagi qiymatlaridan katta.



3-chizma

Bu holda funksiya x_1 nuqtada maksimumga ega deyiladi.

Agar $x = c$ nuqtaning atrofida bu atrofga tegishli bo'lgan barcha $x \neq c$ nuqtalar uchun $f(x) < f(c)$tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada maksimumga ega deyiladi.

$f(c)$ esa funksiyaning maksimumi deb ataladi va $f(c) = f_{max}(x)$ orqali belgilanadi.

Agar $x = c$ nuqtaning atrofida bu atrofga tegishli bo'lgan barcha $x \neq c$ nuqtalar uchun $f(x) > f(c)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada minimumga ega deyiladi.

$f(c)$ esa funksiyaning minimumi deb ataladi va $f(c) = f_{min}(x)$ orqali belgilanadi.

Maksimum va minimum umumiy nom bilan funksiyaning ekstremumi deyiladi. Aytib o'tish kerakki, agar $y = f(x)$ funksiya biror c nuqtada maksimumga ega bo'lsa, bu shu c nuqtada funksiya barcha aniqlanish sohasida eng katta qiymatga ega bo'ladi degan so'z emas. Maksimumning ta'rifidan y funksiyaning c nuqtaga yetarlicha yaqin bo'lgan qiymatlari ichida eng kattasi ekani kelib chiqadi. Funksiya x dan boshqa nuqtalarda katta qiymatlarga ega bo'lsa ham, funksiya x_1 nuqtada maksimumga ega deyiladi. Funksiyaning minimumiga nisbatan ham xuddi shunday izoh berish mumkin. Xususan, funksiyanmng minimumi maksimumiga nisbatan katta bo'lshi ham mumkin.

1-teorema (funksiya ekstremumining mavjud bo'lishining zaruriy sharti). Agar $x = c$ nuqtada differentsiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya bu nuqtada maksimum yoki minimumga ega bo'lsa, u holda uning $x = c$ nuqtadagi hosilasi nolga aylanadi ya'ni $f'(c) = 0$ bo'ladi.

Isboti. $y = f(x)$ funksiya, masalan, c nuqtada maksimumga ega bo'lsin. Maksimumning ta'rifiga ko'ra $x = c$ nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lishi kerakki, bu atrofning barcha $x(x \neq c)$ nuqtalari uchun $f(x) < f(c)$ bo'ladi, ya'ni $f(c)$ — funksiyaning shu atrofdagi eng katta qiymatdir. Shartga ko'ra funksiya $x = c$ nuqtada $f'(c)$ hosilaga ega, biroq Ferma teoremasiga ko'ra $f'(x) = 0$ bo'lishi kerak.

Funksiyaning minimumi uchun ham shunday teoremani keltirish mumkin.

Shu choqqacha $y = f(x)$ funksiya ekstremum nuqtasida hosilaga ega bo'lgan holnigina qaralgandi. Lekin shunday hollar ham uchrashi mumkinki, funksiya ekstremum nuqtalarida hosilaga ega bo'lmasligi mumkin.

Masalan, grafigi $f(x) = |x|$ funksiya uchun $x = 0$ hosila mavjud emas, lekin ravshanki $x = 0$ nuqtada funksiya minimumga ega.

$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ funksiya uchun $f'(x) = -2/(3\sqrt[3]{x})$ hosila $x = 0$ nuqtada mavjud emas. Shunga qaramasdan, funksiya $x = 0$ nuqtada maksimumga ega.

Qaralgan misollar funksiya ekstremumining mavjud bo'lishining zaruriy sharti bajarilishini bildiradi. Agar uzluksiz $y = f(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, funksiyaning $f'(x)$ hosilasi bu nuqtada nolga aylanadi yoki mavjud emas.

Aytib o'tish kerakki, $f'(c) = 0$ shart (yoki $f'(c)$ mavjud emas) ekstremum mavjudligining zaruriy sharti bo'lishi bilan birga, yetarli bo'la olmaydi. Masalan, $f(x) = x^3$ funksiya uchun $f'(x) = 3x^2$ hosila $x = 0$ nuqtada nolga aylanadi, lekin $x = 0$ da funksiya ekstremumga ega emas.

Hosila nolga aylanadigan yoki mavjud bo'lmaydigan (uzilishga ega bo'ladigan) argumentning $x = c$ qiymati funksiyaning kritik nuqtasi deyiladi.

Shunday qilib, agar funksiyaning ekstremumi mavjud bo'lsa, uni kritik nuqtalardagina qarash mumkin. Lekin xamma kritik nuqtalarda ham funksiya ekstremumga ega bo'lavermaydi.

Endi kritik nuqtalarda ekstremum bo'lishini ta'minlaydigan ekstremum mavjudligining yetarli shartini ko'raylik.

Dastlab, hosila kritik nuqtasidan chapda bitta ishoraga, o'ng tomonda boshqa ishoraga ega bo'lgan hollarni—hosila kritik nuqtasidan o'tayotganda o'z ishorasini o'zgartiradi deb atashga kelishib olamiz.

2-teorema (ekstremum mavjudligining yetarli sharti). Agar $y = f(x)$ uzluksiz funksiya $x = c$ kritik nuqtani o'z ichiga oladigan biror intervalning barcha nuqtalarida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, hosila $x = c$ kritik nuqtadan chapdan o'ngga o'tayotganda o'z ishorasini plyusdan minusga o'zgartirsa, funksiya bu nuqtada maksimumga ega, ishora minusdan plyusga o'zgarganda esa maksimumga ega bo'ladi.

Isboti. c - kritik nuqta bo'lsin, aniqlik uchun argument $x = c$ kritik nuqtadan o'tayotganda ishorasini plyusdan minusga o'zgartirsin, ya'ni $x = c$ dan chapda hosila musbat, o'ngda esa manfiy bo'lsin. Ya'ni shunday yetarlicha kichik $h > 0$ son topiladiki, agar $c - h < x < c$ larda $f'(x) > 0$ va $c < x < c + h$ larda $f'(x) < 0$ bo'lsin.

Funksiyaning o'suvchi va kamayuvchi bo'lishi haqidagi teoremalarga asosan,

$[c-h, c]$ segmentda $f(x)$ funksiya o'sadi, $[c, c+h]$segmentda kamayadi degan xulosaga kelamiz. Demak, funksnyaning $x=c$ nuqtadagi qiymati $[c-h, c+h]$ sigmentining barcha boshqa nuqtalaridagi qiymatiga qaraganda katta bo'ladi, bu $x=c$ nuqtada funksiya maksimumga egaligini bildiradi. Minimum uchun bo'lgan hol haqidagi teorema ham shunga o'hshash isbotlanadi.

Izoh. Agar $f'(x)$ hosila kritik nuqtadan o'tayotganda o'z ishorasini o'zgartirmasa, funksiya bu nuqtada na maksimumga, na minimumga ega bo'ladi.

Funksiyani ekstremumga tekshirish uchun 1-qoidani keltirib chiqaramiz.

1-qoida. $y=f(x)$ funksiyaning ekstremumlarini topish uchun:

1) $f(x)$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasini topib, $f'(x)=0$ tenglamani yechish kerak. Bu tenglamaning ildizlarini va $f'(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarni topib, kritik nuqtalar to'plamini hosil qilish kerak;

2) har bir kritik nuqtadan chapda va o'ngda hosilaning ishorasini aniqlash kerak;

3)agar hosila ishorasini plyusdan minusga(minusdan plyusga) o'zgartirsa, u holda bu kritik nuqtada maksimum (minimum) mavjud bo'ladi. Agar hosila ishorasi o'zgarmasa, ekstremum mavjud bo'lmaydi;

4) topilgan x_0 kritik nuqtani $y=f(x)$ ga qo'yib, funksiyaning maksimum (minimum) qiymatini topish lozim.

1-misol. $f(x)=3x^5-5x^3+2$ funksiyaning ekstremumlari topilsin.

Yechilishi.

1)$f'(x)=15x^4-15x^2$, $15x^2(x^2-1)=0$; $x_1=-1, x_2=0, x_3=1-$ kritik nuqtalar;

2) $f'(-2)>0, f'\left(-\frac{1}{2}\right)<0, f'\left(\frac{1}{2}\right)<0, f'(2)>0.$

3) $x_1 = -1$ maksimum nuqtasi, $x_2 = 0$ da ekstremum mavjud emas, $x_3 = 1$ da minimumga ega bo'ladi.

4) $f_{max}(x) = f(-1) = 4, \ f_{min}(x) = f(1) = 0.$

2-misol. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ funksiyaning ekstremumini toping.

Yechilishi.

Bu funksiya haqiqiy sonlar o'qida aniqlangan va differentsiallanuvchi.

1. Hosilasini topamiz: $f'(x) = x^2 - 4x + 3$.
2. Hosilani nolga tenglaymiz va kritik nuqtalarni topamiz:

$$x^3 - 4x + 3 = 0; \ x_1 = 1, \qquad x_2 = 3.$$

Bu sonlar berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini uchta intervalga ajratadi: $-\infty < x < 1, \ 1 < x < 3, \ 3 < x < +\infty$.

3. Bu intervallarning har birida hosila o'z ishorasini saqlaydi (ishora o'zgarishi faqat kritik nuqtadan o'tayotganda ro'y bergani uchun). Shuning uchun hosila ishorasini har bir intervalda tekshirayotganda bu intervalning ixtiyoriy bitta nuqtasini olish yetarli.

$-\infty < x < 1$ intervalda, masalan, $x = 0$ nuqtani olish mumkin. Bu nuqtada $f'(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$. Shuning uchun $-\infty < x < 1$ intervalda hosila musbat.

Shunga o'xshash $1 < x < 3$ intervalda hosila manfiyligini, $3 < x < +\infty$ intervalda esa musbatligini topamiz.

$x = 1$ kritik nuqtadan o'tayotganda hosila o'z ishorosini plyusdan minusga o'zgartirgani uchun funksiya bu nuqtada maksimumga ega. Uni hisoblaymiz:

$$y_{max} = f(1) = 1/3 - 2 - 3 + 1 = 7/3.$$

$x = 3$ nuqtadan o'tayotganda hosila o'z ishorasini minusdan plyusga o'zgartiradi va demak bu nuqtada funksiya minimumga ega

$$y_{min} = f(3) = 1/3 \cdot 27 - 2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 1 = 1.$$

Olingan natijalarni jadvalga yozamiz:

x	$-\infty < x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$3 < x < +\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	o'sadi	maksimum $y_{max} = 7/3$	kamayadi	minimum $y_{min} = 1$	o'sadi

3-misol. $f(x) = xe^x$ funksiyaning ekstremumini toping va grafigini chizing.

Yechilishi. Bu funksiya barcha sonlar o'qida aniqlangan va differentsiallanuvchi.

1. Hosilani topaniz: $f'(x) = e^x(x+1)$.

2. Hosilani nolga tenglab ildizlarini topamiz:

$f'(x) = 0,\ e^x(x+1) = 0,\ x = -1.$

Bu son funksiya aniqlanish s ohasini ikkita intervalga ajratadi:

$$-\infty < x < -1, \quad -1 < x < +\infty$$

3. Hosila ishorasini har bir itervalda tekshiramiz.

$-\infty < x < -1$ intervalda, masalan, $x = -2$ qiymatni olamiz, u holda

$$f'(-2) = e^{-2}(-2+1) = -\frac{1}{e^2} < 0.$$

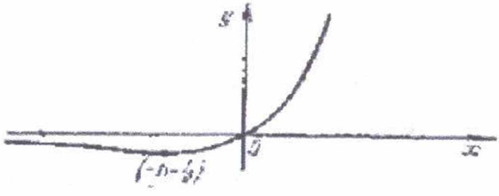
$-1 < x < +\infty$ intervalda $x = 0$ qiymat uchun quyidagiga egamiz: $f'(0) = e^0(0+1) = e^0 = 1 > 0$. $x = -1$ nuqtadan o'tayotganda hosila o'z ishorasini minusladan plyusga o'zgartirgani uchun $x = -1$ da funksiya minimumga ega:

$$y_{min} = f(-1) = -e^{-1} = -1/e.$$

Olingan natijalarni jadvalga yozamiz

x	$-\infty < x < -1$	-1	$-1 < x < +\infty$
y'	$-$	0	+
y	kamayadi	minimum $y_{min} = -1/e$	o'sadi

$y = xe^x$ funksiyaning grafigini chizish mumkin.(4-chizma)



4-chizma

Ba'zi hollarda funktsnyaning ekstremumi tekshirilayotganda ikkinchi tartibli hosilaning ishorasiga asoslangan ekstremumning quyidagi yetarlilik alomati qulay bo'ladi.

3-teorema. $x = c$ *nuqtada* $f(x)$ funksiyaning birinchi tartibli hosilasi nolga teng $[f'(c) = 0]$ bo'lsin, ikkinchi hosila mavjud bo'lib, u noldan farqli bo'lsin $[f''(c) \neq 0]$. Bu holda, agar $f''(c) < 0$ bo'lsa, $x = c$ nuqtada funksiya maksimumga ega bo'ladi, agar $f''(c) > 0$ bo'lsa, $x = c$ nuqtada funksiya minimumga ega bo'ladi.

Isboti. Aniqlik uchun $f''(c) < 0$ bo'lsin.

$x = c$ nuqtada funksiya maksimumga ega bo'lishini ko'rsatamiz. Ikkinchi hosilaning ta'rifiga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$f''(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c + \Delta x) - f'(c)}{\Delta x}$$

Shartga ko'ra $f'(c) = 0$ bo'lgani uchun

$$f''(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c + \Delta x)}{\Delta x}$$

$f''(c) < 0$ ni hisobga olsak,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c + \Delta x)}{\Delta x} < 0$$

ni hosil qilamiz.

Limit manfiy bo'lgani uchun Δx ning absolyut qiymati bo'yicha kichik qiymatlari uchun $\frac{f'(c+\Delta x)}{\Delta x} < 0$ tengsizlik bajariladi.

$\Delta x < 0$ bo'lsin; u holda $f'(c+\Delta x) > 0$; agar $\Delta x > 0$ bo'lsa, $f'(c+\Delta x) < 0$ bo'ladi. Bu $x = c$ nuqtadan o'tayotganda birinchi tartibli hosila o'z ishorasini plyusdan minusga o'zgartirishini ko'rsatadi. Demak, ekstremum mavjudligining yetarlilik shartiga ko'ra $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga ega. Agar

$f''(c) > 0$ bo'lsa, c nuqtada funksiya minimumga ega bo'lishini shunga o'xshash isbot qilish mumkin.

2-qoida. $f(x)$ funksiyani ekstremumga tekshirish uchun:

1) $f'(x) = 0$ tenglamaning barcha yechimlarini topamiz;

2) ikkinchi tartibli hosila $f''(x)$ ni hisoblaymiz;

3) har bir statsionar nuqtada $f''(x)$ ni hisoblaymiz. Agar $f''(x_0) < 0$ bo'lsa, x_0 maksimum nuqtasi . $f''(x_0) > 0$ bo'lsa, x_0 minimum nuqtasi bo'ladi. Agar $f''(x_0) = 0$ yoki $f''(x)$ mavjud bo'lmasa ("shubhali hol"), u holda bu nuqtani boshqa usul bilan tekshirish kerak. x_0 statsionar nuqtada ekstremum mavjud bo'lishi uchun $f''(x_0) \neq 0$ shartning bajarilishi yetarli bo'ladi;

4) x_0 ekstremum nuqtalarni $y = f(x)$ ga qo'yib, $f(x)$ ning ekstremumlarini topamiz.

4-misol. $f(x) = x - 2\sin x$ funksiyaning $[0, 2\pi]$ segmentdagi ekstremumini toping.

Yechilishi.

1. $f'(x) = 1 - 2\cos x$ hosilani topamiz.

2. Hosilani nolga tenglab, hosilaning bu segmentga tegishli nuqtalarini topamiz: $1 - 2\cos x = 0$, $\cos x = 1/2$, $x_1 = \pi/3$, $x_2 = 5\pi/3$.

3. $f''(x) = 2\sin x$ ikkinchi tartibli hosilani topamiz va uning $x_1 = \pi/3$ va $x_2 = 5\pi/3$ nuqtalardagi ishorasini aniqlaymiz: $x_1 = \pi/3$ nuqtada

quyidagilarga egamiz: $f''(\pi/3) = 2\sin(\pi/3) = \sqrt{3} > 0$, $x_2 = 5\pi/3$ nuqtada esa:

$$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2\sin(5\pi/3) \approx -\sqrt{3} < 0.$$

Demak, $x_1 = \pi/3$ da funksiya minimumga ega:

$$y_{min} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2\sin(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0{,}68,$$

$x_2 = 5\pi/3$ nuqtada esa maksimumga ega:

$$y_{max} = f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} - 2\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 69{,}6.$$

Ikkinchi tartibli hosila kritik nuqtada mavjud bo'lmagan holda ekstremum mavjud bo'lishligining yetarlilik shartini qo'llab bo'lmaydi. Bunday hollarda birinchi tartibli hosilaning ishorasini o'zgartirishga asoslangan yetarlilik alomatidan foydalaniladi.

Umuman, "shubhali holda" 1-qoidaga qaytmasdan, yuqori tartibli hosilalardan foydalanish mumkin. Ushbu qoidani isbotsiz keltiramiz:

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning δ atrofida uzluksiz n – tartibli hosilaga ega bo'lib,

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada , n toq son bo'lsa, ekstremumga ega bo'lmaydi; n juft son bo'lganda ekstremumga ega bo'ladi va bu ekstremum $f^{(n)}(x_0) < 0$ holda maksimum, $f^{(n)}(x_0) > 0$ da minimum bo'ladi.

6.3. Funksiyani eng katta va eng kichik qiymati

$[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lgan, $y = f(x)$ funksiyani qaraymiz. Ma'lumki, bunday funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga segmentning chegarasida yoki uning ichida erishadi. Agar funksiyaning eng katta qiymati (eng kichik qiymati) ga segmentning ichki c nuqtasida erishilsa, $[a, b]$ segmentning barcha x nuqtalarida $M = f(c) \geq f(x)$ (yoki $m = f(c) \leq f(x)$) o'rinli bo'ladi va bu tengsizlik $[a, b]$ segmentning ichida yotadigan c

nuqtaning barcha atrofi uchun bajariladi, u holda ta'rifga ko'ra funksiyaning bu qiymati maksimum (minimum) bo'ladi,

Shunday qilib, funksiyaning $[a, b]$ segmentdagi eng katta va eng kichik qiymatini topishning quyidagi qoidasini hosil qilamiz:

1. Funksiyaning $[a, b]$ intervaldagi barcha kritik nuqtalarini topamiz va ulardagi qiymatlarini hisoblaymiz.

2. Funksiyaning $[a, b]$ segment chegaralaridagi $x = a$ va $x = b$ nuqtalarda qiymatlarini hisoblaymiz.

3. Bu qiymatlarning ichidan eng katta va eng kichik qiymatlarini tanlaymiz.

Izoh. Ravshanki, segmentda uzluksiz bo'lgan funksiya, bu segmentning ichki nuqtasida bitta ekstremumga ega bo'lib bu nuqtada maksimumga ega bo'lsa, eng katta qiymatga, minimumga ega bo'lsa, eng kichik qiymatga ega bo'ladi.

1-misol. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$ funksiyaning $[0; 3]$ da eng katta va eng kichik qiymatlari topilsin.

1)funksiyaning (0;3) dagi ekstrmum qiymatlarini topamiz;

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x - 1)(x - 2), f'(1) = 0,$$

$f'(2) = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ statsionar nuqtalar, demak

$$f(1) = -1, \qquad f(2) = -2.$$

2)$f(0) = -6, f(3) = 0$.

3)Bu qiymatlarning eng kichigi -6, eng kattasi 0 dir. Demak, berilgan funksiyaning [0;3] dagi eng kichik qiymati -6, eng katta qiymati esa 0 bo'ladi.

Quyidagi algoritmni tavsiya qilamiz:

№	Yechish algoritmi	Yechish yozuvining namunasi
1	Funksiya hosilasini toping.	$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6; x \in [0; 3]$ $y' = 6x^2 - 18x + 12$
2	Kritik nuqtalarni toping: 1)$f'(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalar	$a) x \in [0; 3]$da y' muvjud. $b) 6(x^2 - 3x + 2) = 0;$ $x_1 = 1, x_2 = 2$

	2) $f'(x) = 0$ o'rinli bo'ladigan nuqtalar.	
3	Berilgan kesma ichidagi kritik nuqatalarni aniqlang	$x_1 = 1, x_2 = 2$
4	Berilgan kesma uchlarida va ichidagi kritik nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning qiymatlarini toping.	$f(0) = -6; f(3) = 0;$ $f(1) = -1; f(2) = -2$
5	Topilgan $f(x)$ funksiya qiymatlaridan eng kichik va eng kattasini aniqlang.	$m = -6$ $M = 0$

2-misol. $f(x) = x^3 - 3x$ funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatini toping.

Yechilishi.

1. Funksiyaning $(-1{,}5;\ 2{,}5)$ intervaldagi kritik nuqtalarini topamiz:

$f'(x) = 3x^2 - 3,\ 3x^2 - 3 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 1.$

Funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

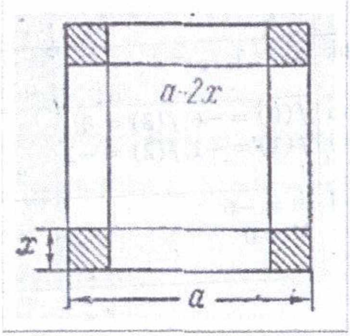
$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2,\ f(1) = 1 - 3 = -2.$

2. Funksiyaning segment chegaralaridagi qiymatini hisoblaymiz:

$f(-1{,}5) = (1{,}5)^3 - 3(-1{,}5) = 1{,}125;\ f(2{,}5) = 2{,}5^3 - 3 \cdot 2{,}5 = 8{,}125.$

Shunday qilib, funksiyaning eng katta qiymati $y_{eng\ katta} = 8{,}125$ ga segmentning o'ng chegarasida erishiladi. Funksiyaning eng kichik qiymati $y_{eng\ kichik} = -2$ ga $x = 1$ nuqtada erishiladi.

3-misol. Tomoni a bo'lgan kvadrat tunukadan uning chekkalaridan bir hil kvadratchalar qirqib tashlab qolgan qismini buklab usti ochiq quticha yasash talab qilinadi. Hajmi eng katta bo'ladigan quticha yasash uchun qirqiladigan kvadratlarning tomoni qanday bo'lishi kerak? (5-chizma).



5-chizma

Yechilishi. Qirqib olinadigan kvadrat tomoni x ga teng bo'lsin, u holda yashikning tubini tashkil qiluvchi kvadratning tomoni $a-2x$ ga teng. Yashikning hajmi:

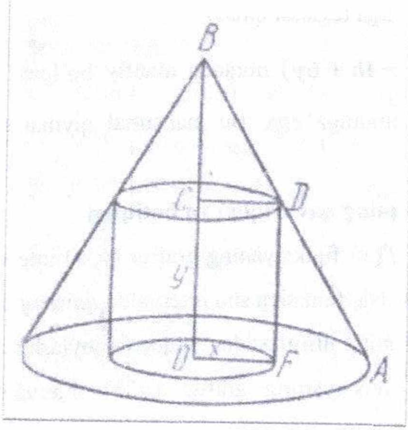
$$V=(a-2x)^2x=a^2x-4ax^2+4x^3.$$

Masalani yechish uchun V funksiyaning $(0, a/2)$ intervaldagi eng katta qiymatini topish kerak. $V'=a^2-8ax+12x^2$ hosilani topamiz. $a^2-8ax+12x^2=0$ tenglamani yechib, ko'rsatilgan intervalga tegishli bo'lgan $x=a/6$ kritik nuqtani topamiz. $x=a/6$ nuqtada ikkinchi hosila $V"=-8a+24x$ manfiy bo'lgani uchun $[V''\left(\frac{a}{6}\right)=-8a+24\cdot\frac{a}{6}=-4a<0]$, $x=a/6$ nuqtada V maksimumga erishadi:

$$V_{max}=\left(a-\frac{2a}{6}\right)^2\frac{a}{6}=\frac{2}{27}a^3.$$

Bu maksimum funksiyaning eng katta qiymati bo'ladi. Shunday qilib, qirqilgan kvadrat tomoni $a/6$ ga teng bo'lsa, qutining hajmi eng katta bo'ladi.

4-misol. Berilgan to'g'ri konusga ichki chizilgan, hajmi eng katta bo'lgan silindrning balandligini toping (6-chizma).



6-chizma

Yechilishi. Konusning balandligi $OB = h$, konus asosining radiusi $OA = R$ bo'lsin. Silindrning balandligi OC ni y bilan asos radiusi OF ni x bilan belgilaymiz. Silindr hajmi $V = \pi x^2 y$. Bu holda V hajm ikkita o'zgaruvchi x va y ga bog'liq. Biroq bu o'zgaruvchilarni bog'laydigan tenglamani tuzish mumkin. AOB va DCB uchburchaklarning o'xshashligidan quyidagilarni topamiz:

$DC: CB = OA: OB$ yoki $x: (h - y) = R: h$

Bundan x ning $x = R(h - y)/h$ ifodasini Silindr hajmining formulasiga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$V = \frac{\pi R^2}{h^2}(h - y)^2 y.$$

Ravshanki, y o'zgaruvchi 0 dan h gacha bo'lgan qiymatlarni qabul qiladi. Bu funksiyaning $(0, h)$ intervaldagi eng katta qiymatini topamiz. V funksiyadan y o'zgaruvchi bo'yicha hosilani topamiz:

$$V' = \frac{\pi R^2}{h^2}(h^2 - 4hy + 3y^2).$$

Hosilani nolga tenglab, $(0, h)$ intervaldagi kritik nuqtani topamiz

$$h^2 - 4hy + 3y^2 = 0; \; y_1 = h/3.$$

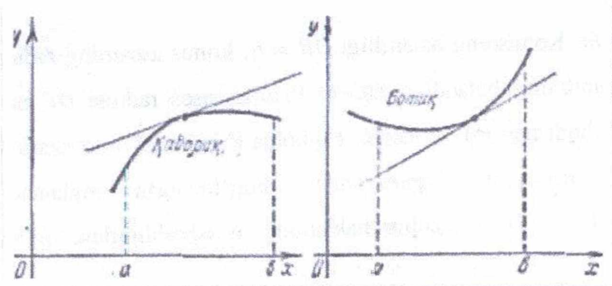
($y_2' = h$ nuqta $|0, h|$ intervalga tegishli emas).

Ikkinchi hosila $V'' = \frac{\pi R^2}{h^2}(-4h + 6y)$ nuqtada manfiy bo'lgani uchun u $y = h/3$ nuqtada V hajm maksimumga ega. Bu maksimal qiymat eng katta qiymat bo'ladi.

6.4. Egri chiziqning qavariqligi va botiqligi

Differentsiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning grafigi (a, b) intervalda o'z urinmasidan pastda joylashgan bo'lsa, funksiya shu intervalda *qavariq* deyiladi.

Agar funksiyaning grafigi uning urinmasidan yuqorida joylashgan bo'lsa, differentsiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning grafigi (a, b) intervalda *botiq* deyiladi (7a,b-chizma).



7a,b-chizma.

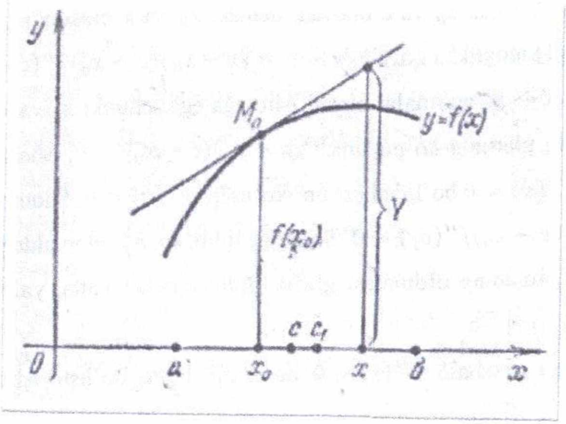
Shunga o'xshash, masalan, $y = \sqrt{1 - x^2}$ yarim aylana $(-1,1)$ intervalda qavariq, $y = x^2$ parabola $(-\infty, +\infty)$ intervalda botiq.

Funksiyaning grafigi ba'zi intervallarda qavariq, ba'zi intervallarda botiq bo'lishi mumkin. Masalan, 0 dan 2π gacha bo'lgan intervalda qaralayotgan $y = \sin x$ funksiyaning grafigi $(0, \pi)$ intervalda qavariq, $(\pi, 2\pi)$ intervalda botiq.

Funksiya grafigi berilgan intervalda qavariq yoki botiq bo'lishining yetarli shartini qaraymiz.

1-teorema. $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalning barcha nuqtasida ikkinchi tartibli hosila $f''(x)$ ga ega bo'lsin. Agar bu intervalning barcha nuqtasida f'(x) < 0 bo'lsa, funksiya grafigi bu intervalda qavariq, agar $f''(x) > 0$ bo'lsa, botiq bo'ladi.

Isboti. Aniqliq uchun $f''(x) < 0$ bo'lsin va grafikning qavariqligini isbot qilamiz. Funksiya grafigida (a, b) intervalga tegishli x_0 abstsissaga ega bo'lgan ixtiyoriy M_0 nuqtani olamiz va M_0 nuqta orqali urinma o'tkazamiz (8-chizma).



8-chizma

Teoremani isbot qilish uchun biz funksiyaning grafigi urinmadan pastda joylashganligini ko'rsatishimiz kerak. Boshqacha aytganda, birorta x abstsissa uchun egri chiziq ordinatasi urinma ordinatasidan kichik bo'lishi kerak. Grafik tenglamasi: $y = f(x)$; urinmaning M_0 nuqtadagi tenglamasi quyidagicha:

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Bu yerda x abstsissaga mos keladigan ordinata Y bilan belgilangan.

Grafik va urinmaning o'sha x abstsissadagi ayirmasi quyidagiga teng:

$$y - Y = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

yoki

$$y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

$f(x) - f(x_0)$ ayirmani Lagranj formulasi bo'yicha almashtiramiz,

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c),$$

bu yerda c nuqta x_0 va x orasida joylashgan.

U holda

$$y - Y = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]. (1)$$

$f'(c) - f'(x_0)$ ayirmani $f''(x)$ hosilaga qo'llab almashtiramiz:

$$f'(c) - f'(x_0) = (c - x_0)f''(c_1),$$

bu yerda c_1, kattalik x_0 va c orasida, demak, x_0 va x orasida joylashgan. Ayirma ifodasini (1) tenglikka qo'yib, $y - Y = (x - x_0)(c - x_0)f''(c_1)$ ni hosil qilamiz $x - x_0$ va $c - x_0$ ayirmalar bir xil ishoraga ega, chunki x_0 va x orasida joylashgan, demak, ularning ko'paytmasi $(x - x_0)(c - x_0) > 0$. Shartga ko'ra (a, b) intervalda $f''(x) < 0$ bo'lgani uchun, xususan, $f''(c) < 0$. Shuning uchun $y - Y = (x - x_0)(c - x_0)f''(c_1) < 0$. Shunday qilib, (a, b) intervaldagi barcha nuqtalar uchun urinmaning ordinatasi grafik ordinatasidan katta, ya'ni grafik qavariq bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash $f''(x) < 0$ da grafik botiq bo'lishi isbotlanadi. Uzluksiz funksiya grafigining qavariqlik qismidan botiqlik qismini ajratadigan nuqtasi *bukilish nuqtasi* deyiladi. Funksiya grafigining bukilish nuqtasini topish quyidagi teoremalarga asoslangan.

2-teorema (bukilish nuqtasi mavjudligining zaruriy sharti). $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda uzluksiz ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin. U holda, agar abstsissasi $x_0 \in (a, b)$ bo'lgan nuqta berilgan funksiyaning grafigining bukilish nuqtasi bo'lsa, $f''(x_0) = 0$ bo'ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $f''(x_0) \neq 0$ bo'lsin. Aniqliq uchun $f''(x_0) > 0$ bo'lsin. U holda ikkinchi tartibli hosilaning uzluksizligi haqidagi farazga ko'ra u x_0 nuqtaning biror atrofida musbat bo'ladi va demak, funksiya grafigi bu atrofda botiq. Lekin bu x_0 nuqta bukilish nuqtasining abstsissasi deyilishiga qarama-qarshidir. Bu qarama-qarshilik $f''(x_0) = 0$ to'g'riligini ko'rsatadi.

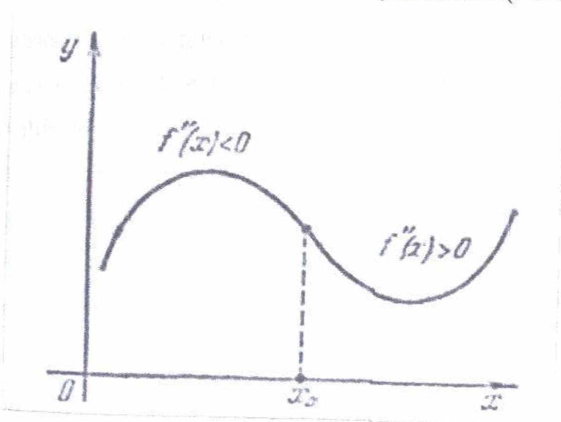
$y = f(x)$ funksiya grafigi abstsissasi $x = x_0$ bo'lgan bukilish nuqtasiga ega bo'lsin. Agar $x = x_0$ da ikkinchi (tartibli) hosila uzluksiz bo'lsa, $f''(x_0) = 0$ bo'ladi. Biroq boshqa hollar, ya'ni uzluksiz funksiyaning ikkinchi hosilasi uzilishga ega bo'lgan hol ham bo'lishi mumkin.

Masalan, $y = \sqrt[3]{x^5}$ funksiyaning ikkinchi (tartibli) hosilasi $y'' = 10/(9\sqrt[3]{x})$. Ravshanki, $-\infty < x < 0$ da $y'' < 0$ va $0 < x < +\infty$ da $y > 0$ bo'ladi. Demak, berilgan funksiyaning grafigi $x = 0$ da bukilish nuqtasiga ega. Biroq bu nuqtada funksiyaning ikkinchi hosilasi mavjud emas.

Shunday qilib, uzluksiz funksiya grafigining bukilish nuqtalari abstsissalarini ikkinchi hosila nolga teng yoki uzilishga ega bo'lgan (xususan, mavjud bo'lmagan) nuqtalardan izlash kerak ekan.

3-teorema (bukilish nuqtasi mavjudligining yetarli sharti). Agar uzluksiz funksiyaning ikkinchi $f''(x)$ hosilasi x_0 nuqtadan o'tayotganda o'z ishorasini o'zgartirsa, u holda $x = x_0$ abstsissali c nuqta funksiya grafigining bukilish nuqtasi deyiladi.

Isboti. Masalan, $x < x_0$ da $f''(x) < 0$ va $x > x_0$ da $f''(x) > 0$ bo'lsin. Bu holda x_0 dan chapda funksiya grafigi qavariq, o'ngda botiq. Demak, x_0 nuqta qavariqlik intervalini botiqlik intervalidan ajratadi, ya'ni funksiya grafigining $(x_0, f(x_0))$ nuqtasi bukilish nuqtasi bo'ladi (9-chizma).



9-chizma

Xulosa. $y = f(x)$ funksiya ikkinchi tartibli hosilalarga ega bo'lsa, uning grafigidagi qavariq va botiq qismlarni aniqlash uchun $f''(x) < 0$ va $f''(x) > 0$ tengsizliklarni yechamiz. $f''(x)$ qaysi oraliqda manfiy (musbat) bo'lsa, o'sha oraliqda grafik qavariq (botiq) bo'ladi.

Bukilish nuqtasini aniqlash uchun $f''(x) = 0$ tenglamani yechamiz. Bu tenglamaning qaysi ildizi atrofida (chap va o'ng tomonlarida) $f''(x)$ har xil ishorali bo'lsa, shu nuqtada fuksiya grafigining bukilish nuqtasi mavjud bo'ladi.

Agar $x = x_0$ nuqtada $f''(x_0)$ mavjud bo'lmasa, u holda bu nuqtaning ikki tomonida $f''(x)$ ning ishoralari tekshiriladi, agar ishoralar har xil bo'lsa, grafikning nuqtasi bukilish nuqtasi bo'ladi.

1-misol. $f(x) = x^3 - 3x$ funksiyaning qavariq va botiqligini tekshiring.

Yechilishi. Ikkinchi hosilani topamiz: $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$.

$f''(x)$ ni nolga tenglaymiz: $6x = 0$, bundan $x = 0$. Agar $x < 0$ da $f''(x) = 6x < 0$ bo'lishini va $x > 0$ da $f''(x) = 6x > 0$ ni e'tiborga olsak, $(-\infty, 0)$ intervalda grafik qavariq, $(0, +\infty)$ intervalda botiq bo'lishini xulosa qilamiz: $x = 0$ nuqtada funksiya grafigi bukilish nuqtasiga ega.

6.5. Funksiya grafigining asimptotalari

Funksiyani tekshirayotganda funksiya grafigining nuqtasi koordinatalar boshidan cheksiz uzoqlashganda yoki boshqacha aytganda uning o'zgaruvchi nuqtasi cheksizlikka intilganda grafik formasini bilib olish muhim hisoblanadi.

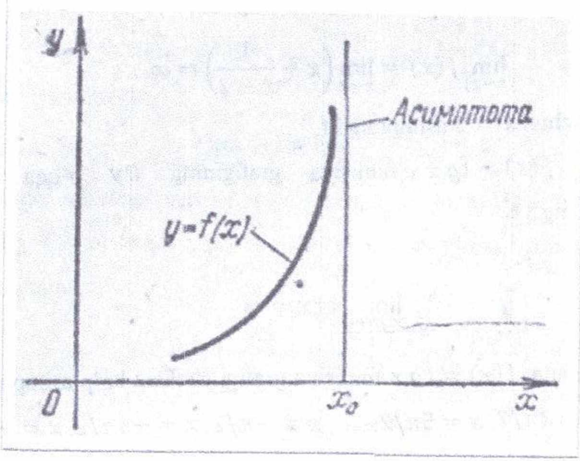
O'zgaruvchisi cheksizlikka intilganda funksiya grafigi biror to'g'ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib boradigan hol alohida qiziqish tug'diradi.

O'zgaruvchi nuqta grafik bo'yicha koordinatalar boshidan cheksiz uzoqlashganda funksiya grafigidagi o'zgaruvchi nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa nolga intilsa, bunday xossaga ega bo'lgan to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining *asimptotasi* deyiladi. Oy o'qqa parallel va Oy o'qqa parallel bo'lgan asimptotalarni ayrim-ayrim holda qaraylik.

Oy o'qqa parallel bo'lgan asimptotalar $x \to x_0 - 0$ da $y = f(x)$ funksiya cheksizlikka intilsin, ya'ni

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$$

U holda ta'rifga ko'ra $x = x_0$ to'g'ri chiziq asimptotadir (10-chizma).



10-chizma

Shunga o'xshash, agar

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$$

bo'lsa ham $x = x_0$ to'g'ri chiziq asimptota bo'ladi. Teskarisi ham o'z-o'zidan ravshan, ya'ni $x = x_0$ asimptota bo'lsa,

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

yoki

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

limitlardan kamida bittasi cheksizdir.

Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiya grafigining Oy o'qqa parallel bo'lgan asimptotalarini izlash uchun funksiya cheksizlikka aylanadigan (cheksiz uzilishga ega bo'lgan) $x = x_0$ ning qiymatlarini topish kerak ekan. U holda Oy o'qqa parallel bo'lgan asimptota $x = x_0$ tenglamaga ega bo'ladi.

1-misol. $f(x) = x + \frac{1}{x-2}$ funksiya grafigining Oy o'qqa parallel bo'lgan asimptotasini toping.

Yechilishi.

$$\lim_{(x\to 2)} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(x + \frac{1}{x-2}\right) = \infty$$

bo'lgani uchun $x = 2$ asimptotadir.

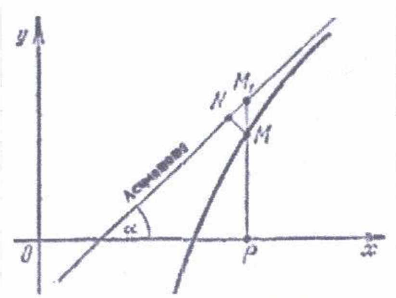
2-misol. $f(x) = tg\, x$ funksiya grafigining Oy o'qqa parallel asimptotasini toping.

Yechilishi.

$$\lim_{x\to\frac{\pi(2n+1)}{2}} \mathrm{tg}\, x = \infty$$

bo'lgani uchun $f(x) = tg\, x$ funksiya grafigi cheksiz ko'p asimptotalarga ega: $x = \pi/2, x = 3\pi/2, x = 5\pi/2, \dots, x = -\pi/2, x = -3\pi/2, x = -5\pi/2$.

Oy o'qqa parallel bo'lmagan asimptotalar. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi Oy o'qqa parallel bo'lmagan asimptotaga ega bo'lsin. U holda bunday asimptota tenglamasi $y = kx + b$ ko'rinishda bo'ladi. k va b ni topish uchun quyidagi ishni bajaramiz. Funksiya grafigining M nuqtasidan asimpgotaga MN perpendikulyar tushiramiz (11- chizma).



11-chizma.

Asimptotaning ta'rifiga ko'ra $x \to +\infty$ da $MN \to 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} MN = 0$$

M_1MN uchburchakdan quyidagiga egamiz: $M_1M = M_1N/\cos\alpha$ bunda α — asimptotaning Ox o'qqa og'ish burchagi. α o'zgarmas bo'lgani uchun M_1M kattalik MN bilan bir vaqtda nolga intiladi, ya'ni

$$M_1M = PM_1 - PM = y_{asim} - y_{grafik} = (kx + b) - f(x)$$

bo'lgani uchun

$$\lim_{x \to +\infty} [(kx + b) - f(x)] = 0$$

qavs ichidagi ayirma $x \to +\infty$ da cheksiz kichik funksiya: $f(x) - (kx + b) = \beta(x)$ ekani kelib chiqadi. Oxirgi tenglikni hadma-had x ga bo'lib, limitga o'tamiz:

$$\lim_{x \to +\infty} [\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\beta(x)}{x}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{b}{x} = 0$$

va

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\beta(x)}{x} = 0$$

bo'lgani uchun

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k\right] = 0$$

ga egamiz.

Bundan asimptotaning burchak koeffitsienti

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (1)$$

orqali topiladi.

Endi b ni aniqlaymiz. $f(x) - kx - b = \beta(x)$ bo'lgani uchun $b = f(x) - kx - \beta(x)$. $x \to +\infty$ da limitga o'tib, quyidagini hosil qilamiz:

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] \quad (2)$$

Bundagi k soni (1) formula bo'yicha topiladi.

Shunday qilib, Oy o'qqa parallel bo'lmagan asimptotani topish uchun (1) va (2) limitlarni topish kerak ekan. Teskarisini, ya'ni (1) va (2) limitlar mavjud bo'lsa, $y = kx + b$ to'g'ri chiziq asimptota ekanligini ko'rsatish mumkin.

Agar bu limitlardan hech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmasa, $y = f(x)$ funksiyaning grafigi $x \to +\infty$ da asimptotaga ega bo'lmaydi.

Xususiy holda asimptota tenglamasidagi k koeffitsient nolga teng bo'lishi mumkin. Bu holda asimptota Ox o'qqa parallel bo'ladi va *gorizontal asimptota* deyiladi.

$x \to -\infty$ da asimptotalar shunga o'xshash topiladi. Aytish joizki, (1) va (2) formulalar orqali topiladigan sonlar $x \to +\infty$ va $x \to -\infty$ da har xil bo'lishi mumkin, ya'ni funksiya grafigi Oy o'qqa parallel bo'lmagan ikkita har xil asimptotaga ega bo'lishi mumkin.

3- misol. $y = x - 2\, arctg\, x$ funksiyaning asimptotalarini toping.

Yechilishi. Berilgan funksiya barcha son o'qida aniqlangan va uzluksiz. Demak, grafik Oy o'qqa parallel bo'lgan asimptotalarga ega emas. Oy o'qqa parallel bo'lmagan asimptotalarni topamiz.

1. $x \to +\infty$ da

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - 2\,\mathrm{arctg}\, x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2\,\mathrm{arctg}\, x}{x}\right) = 1 - 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{arctg}\, x}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(x - 2\,\mathrm{arctg}\, x - x) = -2\lim_{x\to+\infty}\mathrm{arctg}\, x = -2\cdot\frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Shunday qilib, $x \to +\infty$ da asimptota tenglamasi $y = x - \pi$.

2. $x \to -\infty$ da

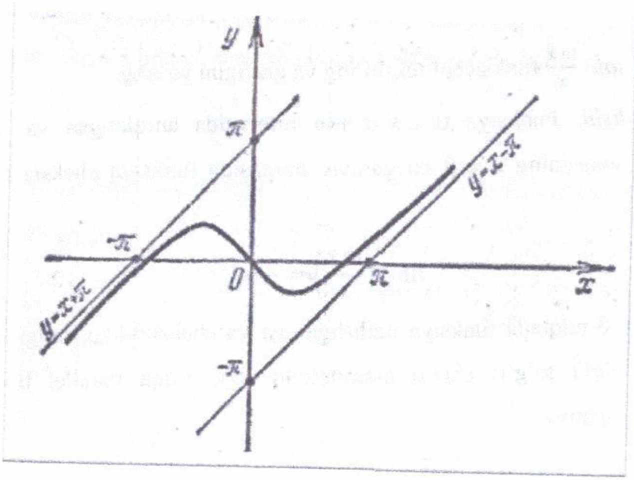
$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - 2\,\mathrm{arctg}\, x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{2\,\mathrm{arctg}\, x}{x}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(x - 2\,\mathrm{arctg}\, x - x) = -2\lim_{x\to-\infty}(\mathrm{arctg}\, x) = -2(-\pi/2) = \pi$$

Demak $x \to -\infty$ da asimptota tenglamasi $y = x + \pi$.

Shunday qilib, $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\, x$ funksiyaning grafigi Oy o'qqa parallel bo'lmagan ikkita har xil asimptotaga ega ekan:

$x \to +\infty$ da $y = x - \pi$ va $x \to -\infty$ da $y = x + \pi$.(12-chizma)



12-chizma

6.6. Funksiyaning grafigini yasash

Yuqorida bayon qilinganlarga asoslanib, funksiyani tekshirishning quyidagi rejasini tavsiya qilish mumkin.

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini, uzluksizlik intervallarini, uzilish nuqtalarini topish.

2. Funksiya grafigining asimptotalarini topish.

3. Funksiyaning monotonlik intervallarini va uning ekstremumlarini (maksimum va minimumini) topish.

4. Funksiyaning qavariqlik va botiqlik intervallarini hamda funksiya grafigining bukilish nuqtalarini topish.

Funksiya grafigini yasash.

1-izoh. Funksiya grafigini yasashda grafikning koordinatalar o'qi bilan kesishish nuqtalarini bilish foydali.

2-izoh. Funksiya grafigini yasashdan avval uni toq yoki juftligini bilish ham foydali. Juft yoki toq funksiyaning grafigini yasayotganda grafikni ordinata o'qiga yoki koordinatalar boshiga nisbatan simmetrikligidan foydalanish tavsiya qilinadi.

1--misol. $\frac{\ln x}{x}$ funksiyani tekshiring va grafigini yasang.

Yechilishi. Funksiya $0 < x < +\infty$ intervalda aniqlangan va uzluksiz. Aniqlanish soxasining $x = 0$ chegaraviy nuqtasida funksiya cheksiz uzilishga ega chunki

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$$

2. $x = 0$ nuqtada funksiya uzilishga ega va cheksizlikka intilgani uchun $x = 0$ $(Oy\ o'qi)$ to'g'ri chiziq assimtotadir. Oy o'qqa parallel bo`lmagan asimptotani topamiz

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1} = 0$$

Shunday qilib, $k = b = 0$ bo'lgani uchun $y = 0$ asimptota teiglamasi, ya'ni Ox o'qi asimptota ekan. Grafik asimptotalari Ox va Oy o'qlar ekan.

3. $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ hosilani va kritik nuqtalarni topamiz:

$$\frac{1-\ln x}{x^2} = 0, \qquad 1 - \ln x = 0, \quad \ln x = 1, \qquad x = e$$

$x = e$ nuqta aniklanish sohasidan ajratadigan $[0, e]$, $[e, \infty]$ intervallarda hosila ishorasini tekshiramiz:

4. $f(x)$ funksiyaning ikkinchi hosilasini topamiz: $f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$.

$f''(x)$ ni nolga tenglab, grafik bukilish nuqtalariga ega buladygan argumentning kiymatlarini topamiz:

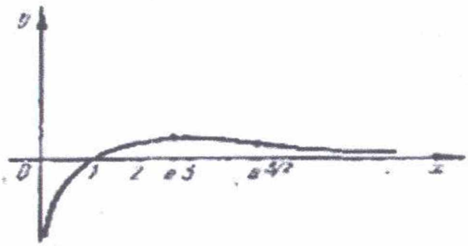
$f''(x) = 0, \quad \frac{2\ln x - 3}{x^3} = 0, \ 2\ln x - 3 = 0, \ \ln x = \frac{3}{2}; \ x = e^{3/2}$.

Ikkinchi hosilaning $[0, e^{3/2}]$ va $[e^{3/2}, +\infty]$ intervallarning har biridagi ishorasini aniqlaymiz:

Koordinatalar o'ki bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Grafik Oy o'q bilan kesishish nuqtasiga ega emas, chunki funksiya $0 < x < +\infty$ oraliqda aniklangan. Ox o'q bilan kesishish nuqtasi $y = 0$ tenglamadan topiladi, bunda

$$\frac{\ln x}{x^2} = 0, \quad \ln x = 0, \quad x = 1.$$

Hosil qilingan natijalarga asoslanib, $y = \frac{\ln x}{x}$ funksiyaning grafigini hosil qilamiz.(13-chizma)



13-chizma

7-§. Funksiyaning differensiali

7.1. Funksiya differensialining ta'rifi

Misol tariqasida $y = x^3$ funksiyani qaraylik. Uning biror $x \neq 0$ nuqtada argumentning Δx orttirmasiga mos keladigan Δy orttirmasini topamiz:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$
$$= 3x^2\Delta x + (3x + \Delta x)(\Delta x)^2.$$

Ko'rib turibmizki, funksiyaning orttirmasini ikkita qo'shiluvchi: birinchisi Δx ga nisbatan chiziqli bo'lgan $3x^2\Delta x$ va ikkinchi Δx ga nisbatan chiziqli bo'lmagan $(3x + \Delta x)(\Delta x)^2$ ko'rinishda qarash mumkin. $x \to 0$ da ikkala qo'shiluvchi cheksiz kichik, yani nolga intiladi. Biroq, bunda ikkinchi qo'shiluvchi birinchisiga nisbatan tez nolga intiladi, ya'ni ikkinchi qo'shiluvchining birinchi qo'shiluvchiga nisbatining limiti nolga teng:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{3x^2\Delta x}=\frac{1}{3x^2}\lim_{x\to 0}(3x\Delta x+(\Delta x)^2)=0$$

Buning natijasida Δx kichik bo'lganda funksiya orttirmasini uning chiziqli qismiga taqriban teng deyish mumkin: $\Delta y\approx 3x^2\Delta x$. Shuning uchun orttirmaning chiziqli qismi funksiya orttirmasining asosiy (bosh) qismi deyiladi.

Quyidagi jadvalda $x=1$ nuqtada $y=x^3$ funksiya uchun funksiyaning orttirmasi $\Delta y=3x\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$ ning, unig asosiy chiziqli qismi $3\Delta x$, chiziqli bo'lmagan qismi $3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$ va Δx ning turli qiymatlari uchun qiymatlari keltirilgan.

Δx	Δy	Chiziqli qismi $3\Delta x$	Chiziqli bo'lmagan qismi $3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$
0,1	0.331	0.3	0.031
0.01	0.030301	0.03	0.000301
0.001	0.003003001	0.003	0.000003001

Bu jadvaldan chiziqli bo'lmagan Δy qism asosiy chiziqli Δy qismdan qancha tez kamayishi yaqqol ko'rinib turibdi. Ko'p funksiyalar shunga o'xshash xossaga ega bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi Δy orttirmasini

$$\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)$$

(1)

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsin, bu yerda $\Delta x-$ funksiyaning Δy orttirmasini keltirib chiqaradigan argument orttirmasi; $A-$ o'zgarmas kattalik (ya'ni Δx ga bog'liq bo'lmagan kattalik) $\alpha(\Delta x)-\Delta x$ ga nisbatan yuqori darajali kichik bo'lgan cheksiz kichik funksiya, ya'ni

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}=0$$

Agar $y=f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi Δy orttirmasini (1) formula ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lsa, funksiyaning argument orttirmasiga to'g'ri proporsional bo'lgan asosiy qismi $A\Delta x$ bu funksiyaning differensiali deyiladi.

$y = f(x)$ funksiyaning differensiali dy simvol bilan belgilanadi yoki $df(x)$ bilan belgilanadi.

Demak, ta'rifga ko'ra

$$dy = A\Delta x. \tag{2}$$

Shunday qilib, agar $y = f(x)$ funksiya x nuqtada differensialga ega bo'lsa, u holda uning bu nuqtadagi ortirmasi ikkita qo'shiluvchi: $dy = A\Delta x$ differensialni va $\Delta x \to 0$ da Δx ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik bo'lgan chiziqli bo'lmagan $\alpha(\Delta x)$ qismni ifodalar ekan. Shuning uchun cheksiz kichik Δx larda chiziqli bo'lmagan qismga e'tibor bermasdan, quyidagi taqribiy $\Delta y \approx A\Delta x$ yoki

$$\Delta y \approx dy \tag{3}$$

tenglikni hosil qilamiz.Endi hosilaning mavjud bo'lishi bilan differensialning mavjud bo'lishi orasidagi aloqani o'rnatuvchi teoremalarni qarab chiqamiz.

1-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya x nuqtada differensialga ega bo'lsa, u holda bu nuqtada hosilaga ham ega bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra $y = f(x)$ funksiya differensialga ega bo'lgani uchun uning Δy orttirmasini (1) ko'rinishda yozib olish mumkin:

$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$, shu bilan birga

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

(1) tenglikning ikkala tomonini Δx ga bo'lib va $\Delta x \to 0$ da limitga o'tib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + \alpha(\Delta x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Lekin

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

va demak, $f'(x)$ hosila mavjud ekan va u A ga teng. Buning natijasi sifatida differensial quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{4}$$

Demak, differensialning mavjudligidan hosilaning mavjudligi, ya'ni funksiyaning differensiallanuvchanligi kelib chiqadi. Teskarisini, funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishidan differensialning mavjud bo'lishi, ya'ni quyidagi teorema o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz:

2-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya x nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu nuqtada differensialga ham ega bo'ladi.

Isboti. $y = f(x)$ funksiya x nuqtada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

hosilaga ega bo'lsin. Fiksirlangan (tayinlangan) x da $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ nisbat Δx orttirmaning funksiyasidir. Limitga ega bo'lgan har qanday funksiya bu limitning va har bir cheksiz kichik funksiyaning yig'indisiga teng shuning uchun

$$\Delta y/\Delta x = f'(x) + \beta(\Delta x), \tag{5}$$

Bu yerda $\beta(\Delta x) -$ cheksiz kichik Δx funksiya ya'ni

$$\lim_{\Delta x \to 0} \beta(\Delta x) = 0$$

(5) tenglikning ikkala tomonini Δx ga ko'paytirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \Delta x\,\beta(\Delta x).$$

Shunday qilib, funksiyaning Δy orttirmasi ikkala qo'shiluvchi $f'(x)\,\Delta x$ va $\Delta x\ \beta(\Delta x)$ ning yig'indisidan iborat ekan. Bunda birinchi qo'shiluvchi Δx ga proporsional, ikkinchi qo'shiluvchi esa $\Delta x \to 0$ da Δx ga nisbatan yuqori darajali cheksiz kichikdir, chunki $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,\beta(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \beta(\Delta x) = 0$

Demak, yuqorida berilgan ta'rifga ko'ra $y = f(x)$ funksiya x nuqtada differensialga ega va u $f'(x)\Delta x$ ga teng bo'lgan.

Binobarin, differensialning mavjudligi va funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishligi tushunchalari teng kuchlidir.

Differensialning geometrik ma'nosini oydinlashtiramiz. Buning uchun $y = f(x)$ funksiyaning grafigida $M(x; y)$ nuqta orqali urinma o'tkazamiz va uning Ox o'qi bilan tashkil qilgan burchagini α bilan belgilaymiz Bu urinmaning $x + \Delta x$ nuqta uchun ordinatasini qaraymiz. Bu ordinate bilan urinmaning x ordinatasi orasidagi ayirmaga teng bo'lgan NP kesmani urinma ordinatasining orttirmasi deb ataymiz. Bu kesma dy differensialga tenglini ko'rsatamiz. To'g'ri burchakli MNP uchburchakdan $NP = tg\alpha \cdot \Delta x$ ga egamiz.

Lekin hosilaning geometrik ma'nosiga ko'ra $tg\alpha = f'(x)$. Shuning uchun

$$NP = f'(x)\Delta x = dy.$$

Shunday qilib, biz differensialning geometrik ma'nosini oydinlashtirdik: $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensiali urinmaning ordinatasining orttirmasiga teng ekan.

$y = x$ funksiyani qaraylik. Uning hosilasi (4) formulaga ko'ra

$$dy = dx = (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

ga teng. Funksiyaning x ga teng differensialini erkli o'zgaruvchining differensiali deb atashga shartlashamiz, ya'ni erkli o'zgaruvchining differensiali uning orttirmasiga teng:

$$dx = \Delta x. \qquad (6)$$

U holda funksiyaning differensiali uchun (4) ifoda quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$dy = f'(x)dx. \quad (7)$$

Bu tenglikning ikkala tomonini dx ga bo'lib, quyidagini hosil qilamiz :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad (8)$$

Shunday qilib, funksiyaning hosilasi uning differensialini erkli o'zgaruvchining differensialiga nisbatiga teng ekan.

Ko'pincha, $\frac{dy}{dx}$ nisbatni y funksiyaning x argument bo'yicha olingan hosilasini ifodalovchi simvol deb qaraladi.

$u = u(x)$ va $v = v(x)$ lar x ning differensiallanuvchi funksiyalari bo'lsin. U holda quyidagi formulalar o'rinli.

$d(u + v) = du + dv,$ (9)

$d(uv) = udv + vdu,$ (9')

$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu+udv}{v^2}$ ($v \neq 0$ shartda). (9'')

Bu formulalarni keltirib chiqarishni kitobxonlarga havola qiliamiz.

Agar x erkli o'zgaruvchi bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiyaning differensialini (7) ko'rinishda yozish mumkin: $dy = f'(x)dx$.

Bu ko'rinish x erkli o'zgaruvchi emas, balki funksiya bo'lganda ham saqlanishini ko'rsatamiz. Haqiqatan, $y = f(x)$ va $x = \varphi(t)$ bo'lsin, ya'ni y t ning murakkab funksiyasi bo'lsin: $y = f[\varphi(t)]$. U holda $dy = y_t'dt$. Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra $y_t' = y_x'x_t'$ ga egamiz. Bundan

$$dy = y_x' \, x_t' dt = y_x' dx = f'(x)dx.$$

chunki $x_t' dt = dx$. Biz quyidagi teoremani isbot qildik.

3-teorema. $x = \varphi(t)$ *bo'lgan* $y = f(x)$ *murakkab funksiyaning differensiali argument* x *erkli o'zgaruvchi bo'lgandagi kabi* $dy = f'(x)dx$ *ko'rinishga ega bo'ladi.*

Murakkab funksiya differensialinig bu teorema bilan ifodalanishi *differensialning invariant formasi* deyiladi.

(7) formuladan hosila uchun $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ifoda x argument erkli o'zgaruvchi bo'lmaganda ham o'z ko'rinishini saqlashi kelib chiqadi.

7.2. Funksiya differensialining taqribiy hisoblashlarga tatbiqi

Taqribiy hisoblashlarda absolyut va nisbiy xatoliklar uchraydi.

Taqribiy kattalik u_0 ning absolyut xatosi bu kattalikning aniq qiymati u bilan taqribiy qiymati u_0 orasidagi ayirmaning absolyut qiymatiga aytiladi. Absolyut xatolikni Δ_u simvol bilan belgilab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\Delta_u = |u - u_0|$$

Ko'pincha u ning aniq qiymati, demak, absolyut xatolik Δ_u ham noma'lum bo'ladi. Shuning uchun absolyut xatolik chegarasi tushunchasi kiritiladi.

u taqribiy kattalikning Δ_u *absolyut xatolikning chegarasi* deb absolyut xatolikdan kichik bo'lmagan ixtiyoriy musbat $\overline{\Delta_u}$ songa aytiladi:

$$|u - u_0| = \Delta_u \leq \overline{\Delta_u} \qquad (1)$$

(1) tengsizlikdan u kattalikning aniq qiymati $u_0 - \overline{\Delta_u}$ va $u_0 + \overline{\Delta_u}$ larning orasida, ya'ni

$u_0 - \overline{\Delta_u} \leq u \leq u_0 + \overline{\Delta_u}$ orasida yotadi.

Agar biror u kattalikning topilayotgan absolyut xatolik chegarasi $\overline{\Delta_u}$ ga teng bo'lsa, u holda u kattalik $\overline{\Delta_u}$ aniqlikda topilgan deyiladi va $u = u_0 \pm \overline{\Delta_u}$ kabi yoziladi.

Ravshanki, $\overline{\Delta_u}$ qancha kichik bo'lsa, u kattalik shuncha aniq topilgan bo'ladi. Biroq xatolik chegarisini bilgan holda yaqinlashishning sifati haqida bir narsa deyish qiyin.

Shunga o'xshash , masalan, Moskvadan Leningradgacha bo'lgan masofani 1 km aniqlikda o'lchayotganda odamning bo'yini 10 sm aniqlikda o'lchayotgandagi absolyut xatolikka nisbatan ancha katta absolyut xatolikka ega bo'lamiz. Lekin, ravshanki, birinchi holda o'lchash sifati yuqori. Yaqinlashish sifati haqida gapirilganda nisbiy xatolik tushunchasi kiritiladi.

Nisbiy xatolik deb $\overline{\Delta_u}$ absolyut xatolikni o'lchayotgan kattalikning u_0 taqribiy qiymati moduliga nisbatan aytiladi.

Nisbiy xatolikni δ_u simvol bilan belgilab , quyidagini hosil qilamiz:

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u_0|}.$$

Bu *nisbiy xatolikning chegarasi* deb absolyut xatolikning chegarasini quyidagi kattalik bilan o'lchanadigan $\overline{\delta_u}$ taqribiy qiymati moduliga nisbatiga aytiladi:

$$\overline{\delta_u} = \frac{\overline{\Delta_u}}{|u_0|} \qquad (2)$$

δ_u va $\overline{\delta_u}$ kattaliklar ko'pincha protsentlarda ifodalanadi. Yuqorida ko'rilgan misollarga qaytib, Moskvadan Leningradgacha bo'lgan L masofani va odam bo'yining l uzunligini o'lchashdagi nisbiy xatoliklarning chegarasini tahminan $L \approx 650\ km$ va $l \approx 170\ sm$ deb topamiz. $L_0 = 650\ km$ bo'lgani uchun $\overline{\Delta_L} = 1\ km$, $\delta_L = {}^1/_{650} \approx 0{,}0015\ yoki\ 0{,}15\ \%$. Ikkinchi holda

$l_0 = 170\ sm$,

$\overline{\Delta_l} = 10\ sm$. Demak, $\overline{\delta_l} \approx {}^{10}/_{170} \approx 0{,}0588\ yoki\ 5{,}88\%$. Birinchi holdagi o'lchash ikkinchisiga nisbatan aniqroq.

Endi differensialni funksiyaning taqribiy qiymatlarini hisoblashga qo'llaymiz.

$y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi qiymati va hosilasi bizga ma'lum bo'lsin, $f(x + \Delta x)$ funksiyaning biror $x + \Delta x$ nuqtaga yaqin qiymatini qanday topishni ko'rsatamiz. Buning uchun quyidagi taqribiy tengsizlikdan foydalanamiz: $\Delta y \approx dy\ yoki\ \Delta y \approx f'(x)\Delta x,\ \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ bo'lgani uchun $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, bundan

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (3)$$

Bu formula qo'yilgan masalani hal qiladi. Bunda hosil bo'ladigan absolyut xatolik

$$\overline{\Delta} = \frac{M}{2}(\Delta x)^2 \qquad (4)$$

dan ortib ketmasligini ko'rsatish mumkin. Bu yerda $M - |f''(x)|$ ning $[x, x + \Delta x]$ segmentdagi eng katta qiymati.

1-misol. (3) formuladan foydalanib, $cos61^0$ ning taqribiy qiymatini toping.

Yechilishi. $cos61^0$ ni $y = f(x) = cosx$ funksiyaning hususiy qiymati sifatida qaraymiz. Argumentning boshlang'ich qiymati sifatida $x = 60^0$ ni yoki radianda $x = {}^{\pi}/_{3}$ (bunda albatta $cos\, x$ jadvalsiz hisoblanadi) deb olamiz. Argumentning yangi (orttirilgan) qiymati sifatida $x + \Delta x = 61^0$, yoki radianda $x + \Delta x = 61\, {}^{\pi}/_{180}$ ni qabul qilamiz. U holda argumentning orttirmasi quyidagicha bo'ladi:

$$\Delta x = \frac{61\pi}{180} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745.$$

(3) formula bu holda quyidagicha ko'rinishga ega bo'ladi:

$$cos(x + \Delta x) \approx cosx + (cosx)' \cdot \Delta x \quad yoki \ \cos(x + \Delta x) \approx cosx - sinx \cdot \Delta x.$$

Bunga x va Δx ning qiymatlarini qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$cos61^0 \approx cos60^0 - sin60^0 \cdot 0{,}01745 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}01745 \approx 0{,}4849$$

Xatolikni baxolash uchun ikkinchi tartibli hosilani topamiz:

$"(x) = (cosx)" = -cosx$. Barcha x lar uchun $|f"(x)| = |-cosx| \leq 1$ bo'lgani sababli, absolyut xatolik (3) formuladan kelib chiqadiki, xatolik

$$\frac{M}{2} \cdot (\Delta x)^2 \leq \frac{1}{2}(0.01745)^2 \approx 0.00015$$

dan ortmaydi.

2-misol. Asosining radiusi $0.5sm$ ga orttirilganda balandligi $H = 40sm$ va asos radiusi $R = 30sm$ bo'lgan silindr xajmining ortishini taqriban hisoblang.

Yechilishi. Balandligi H o'zgarmas va asos radiusi o'zgaruvchi bo'lgan silindrning V xajmi R ning funksiyasi bo'ladi: $V = \pi HR^2$. Xajmning ΔV orttirmasini hisoblayotganda bu orttirmani differensial bilan almashtiramiz:

$$\Delta V = 2\pi HR \cdot \Delta R.$$

$\Delta R = 0.5sm$, $H = 40sm$ va $R = 30sm$ bo'lganda quyidagini hisoblab topamiz:

$$\Delta V = 2\pi \cdot 40 \cdot 30 \cdot 0.5 = 1200\pi \approx 3770(sm^3).$$

(4) formulani qo'llab, bu holda absolyut xatolik chegarasi

$\overline{\Delta_V} = 31.4sm^3$ ekaniga ishonch hosil qilish mumkin.

7.3. Yuqori tartibli differensiallar

$y = f(x)$ funksiyani qaraylik va uning x argumentini erkli o'zgaruvchi deb faraz qilaylik. U holda bu funksiyaning differensiali $dy = f'(x)dx$ ikkita o'zgaruvchi x va dx ga bog'liq bo'lib, bunda dx ga bog'liq emas(berilgan x nuqtadagi orttirmani bu nuqtadan erkli ravishda tanlash mumkin).

$dy = f'(x)\,dx$ ni faqat x ning funksiyasi sifatida qarab (ya'ni dx ni o'zgarmas deb hisoblab), bu funksiyaning differensialini topish mumkin.

Berilgan funksiyaning differensialidan olingan ikkinchi differensial uning *ikkinchi differensiali* (yoki *ikkinchi tartibli diferensiali)* deyiladi va d^2y yoki $d^2f(x)$ simvol bilan belgilanadi.

Shunday qilib ta'rifga ko'ra $\quad d^2y = d(dy)$.

$y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi differensialini topamiz:

$$d^2y = d(dy) = d|f'(x)dx| = |f'(x)dx|' = f''(x)dxdx = f''(x)(dx)^2$$

Differensiallashda dx o'zgarmas deb hisoblanadi. Keyinchalik dx ning qavslarini tashlab yuboramiz. U holda d^2y uchun ifoda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi: $\qquad d^2y = f''(x)dx^2 \qquad (1)$

Uchunchi, to'rtinchi va xk tartibli differensiallar shunga o'xshash topiladi.

Umuman aytganda, $y = f(x)$ funksiyaning *n-differensiali (yoki n-tartibli differensiali)* deb $n-1$ differensialning differensialiga aytiladi.

$y = f(x)$ funksiyaning n –tartibli differensiali d^ny yoki $d^nf(x)$ simvol bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rifga ko'ra: $\qquad d^ny = d(d^{n-1}y)$.

Funksiyaning dy differensiali ba'zan *birinchi tartibli differensial* deb ataladi.

Argumenti erkli o'zgaruvchi bo'lgan $y = f(x)$ funksiya uchun

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n \quad (2)$$

formula o'rinli bo'lishini ko'rsatish oson.

(2) formuladan quyidagi kelib chiqadi: $f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$. $\qquad (3)$

Xususan, $n = 1{,}2$ va 3 da quyidagilarni hosil qilamiz:

Xususan, $n = 1,2$ va 3 da quyidagilarni hosil qilamiz:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \qquad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad f^{(\prime\prime\prime)}(x) = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Boshqacha aytganda, berilgan funksiyaning n –tartibli hosilasini (uning argumenti erkli o'zgaruvchi bo'lgan shartda) uning n –tartibli differensialini erkli o'zgaruvchining n –tartibli differensialiga nisbati sifatida qarash mumkin.

Binobarin, (2) formula ($n > 1$ da), argument erkli o'zgaruvchi bo'lmagan hol uchun o'rinli bo'la olmaydi. Shuning uchun x erkli o'zgaruvchi bo'lmaganda $f^{(n)}(x)(n > 1)$ hosilani $d^n y$ ni dx^n ga nisbati sifatida qarash mumkin emas.

Shunga qaramay, bu yerda ham $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$ nisbati differensiallarning nisbati sifatida emas, balki n-tartibli hosilaning yangi simvolik belgilanishi sifatida qarab $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$ yozuvni saqlashga harakat qilamiz.

7.4. Teylor formulasi

Teylor formulasi matematikaning eng muhim formulalaridan biri bo'lib, ko'plab nazariy tatbiqlarga ega. U taqribiy hisobning negizini tashkil qiladi.

Ma'lumki, funksiyaning qiymatlarini hisoblash ma'nosida ko'phadlar eng sodda funksiyalar hisoblanadi. Shu sababli funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatini hisoblash uchun uni shu nuqta atrofida ko'phad bilan almashtirish muammosi paydo bo'ladi.

Nuqtada differensiallanuvchi funksiya ta'rifiga ko'ra, agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning shu nuqtadagi orttirmasini $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$, ya'ni

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Boshqacha aytganda x_0 nuqtada differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya uchun birinchi darajali

$$P_1(x) = f(x_0) + b_1(x - x_0) \qquad (1)$$

ko'phad mavjud bo'lib, $x \to x_0$ da $f(x) = P_1(x) + o(x - x_0)$ tenglik o'rinli bo'ladi. Shuningdek, bu ko'phad $P_1(x_0) = f(x_0)$, $P_1'(x_0) = b = f'(x_0)$ shartlarni ham qanoatlantiradi.

Endi umumiyroq masalani qaraylik. Agar $x = x_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan $y = f(x)$ funksiya shu nuqtada $f'(x), f''(x), \dots, f^n(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \qquad (2)$$

shartni qanoatlantiradigan darajasi n dan katta bo'lmagan $P_n(x)$ ko'phad mavjudmi?

Bunday ko'phadni

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots + b_n(x - x_0)^n, \qquad (3)$$

ko'rinishda izlaymiz. Noma'lum bo'lgan $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ koeffitsientlarni topishda

$$P_n(x_0) = f(x_0), P_n'(x_0) = f'(x_0), P_n''(x_0) = f''(x_0), \dots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \quad (4)$$

shartlardan foydalanamiz. Avval $P_n(x)$ ko'phadning hosilalarini topamiz:

$$P_n'(x) = b_1 + 2b_2(x - x_0) + 3b_3(x - x_0)2 + \dots + nb_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2 \cdot 1b_2 + 3 \cdot 2b_3(x - x_0) + \dots + n \cdot (n-1)b_n(x - x_0)^{n-2},$$

$$P_n'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1b_3 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2)b_n(x - x_0)^{n-3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$P_n^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1b_n.$$

Yuqorida olingan tengliklar va (3) tenglikning har ikkala tomoniga x ning o'rniga x_0 ni qo'yib barcha $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ koeffitsientlar qiymatlarini topamiz:

$$P_n(x_0) = f(x_0) = b_0,$$

$$P_n'(x_0) = f'(x_0) = b_1,$$

$$P_n''(x_0) = f''(x_0) = 2 \cdot 1b_2 = 2!\, b_2,$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = f^n(x_0) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1b_n = n!\, b_n$$

Bulardan $b_0 = f(x_0)$, $b_1 = f'(x_0)$, $b_2 = \frac{1}{2!}f''(x_0)$, . . ., $b_n = \frac{1}{n!}$ $f^{(n)}(x_0)$ hosil qilamiz. Topilgan natijalarni (3) ga qo'yamiz va

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}$$

$$f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \quad (5)$$

ko'rinishdagi ko'phadni hosil qilamiz. Bu ko'phad Teylor ko'phadi deb ataladi.

Teylor ko'phadi (2) shartni qanoatlantirishini isbotlaymiz. Funksiya va Teylor ko'phadi ayirmasini $R_n(x)$ orqali belgilaymiz: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Yuqoridagi (4) shartlardan $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \ldots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$, ya'ni $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ ekanligini ko'rsatamiz. Agar $x \to x_0$ bo'lsa, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}$ ifodaning $(\frac{0}{0})$ ko'rinishdagi aniqmaslik ekanligini ko'rish qiyin emas. Unga Lopital qoidasini n marta tatbiq qilamiz. U holda

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$ demak $x \to x_0$ da $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ o'rinli ekan.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi:

1-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida n marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $x \to x_0$ da quyidagi formula o'rinli bo'ladi.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}$$

$$f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad (6)$$

Bu yerda $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ Peano ko'rinishidagi qoldiq had deyiladi.

Agar (6) formulada $x_0 = 0$ deb olsak, Teylor formulasining xususiy holi hosil bo'ladi:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n). \quad (7)$$

Bu formula Makloren formulasi deb ataladi.

Lagranj ko'rinishdagi qoldiq hadni

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (8)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda θ birdan kichik bo'lgan musbat son, ya'ni $0 < \theta < 1$.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi quyidagi shaklda yoziladi:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (9)$$ bu yerda $\xi \in (x_0; x)$.

Agar $x_0 = 0$ bo'lsa, u holda $\xi = x_0 + \theta(x - x_0) = \theta x$, bu yerda $0 < \theta < 1$, bo'lishi ravshan, shu sababli Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Makloren formulasi

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (10)$$

shaklida yoziladi.

7.5. Asosiy elementar funksiyalar uchun Teylor formulalari

e^x funksiya uchun Makloren formulasi.Ma'lumki $f(x)=e^x$ funksiyaning $(-\infty;+\infty)$ oraliqda barcha tartibli hosilalari mavjud: $f^{(k)}(x)=e^x$, $k=1,2,\dots,n+1$. Bundan $x=0$ da $f^{(k)}(0)=1$, $k=1,2,\dots,n$; $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$ va $f(0)=1$ hosil bo'ladi. Olingan natijalarni Makloren formulasiga qo'yib

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \qquad (1)$$

tenglikni hosil qilamiz.Bu yerda $0<\theta<1$.

Agar $x=1$ bo'lsa,

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \qquad (2)$$

formulani hosil qilamiz. Bu formula yordamida e sonining irratsionalligini isbot qilish mumkin.

$sinx$ funksiya uchun Makloren formulasi. $f(x)=sinx$ funksiyaning istalgan tartibli hosilasi mavjud va n −tartibli hosila uchun quyidagi formula o'rinli edi: $f^{(n)}(x)=sin(x+\frac{n\pi}{2})$.

$x=0$ da $f(0)=0$ va $f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & \text{agar } n=2k,\\ (-1)^{\kappa}, & \text{agar } n=2\kappa+1\end{cases}$.

Shuning uchun

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\dots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\sin(\theta x+\frac{2k+3}{2}\pi),\quad 0<\theta<1 \qquad (3)$$

ko'rinishdagi yoyilmaga ega bo'lamiz.

$cosx$ funksiya uchun Makloren formulasi. Ma'lumki, $f(x)=cosx$ funksiyaning n −tartibli hosilasi uchun $f^{(n)}(x)=cos(x+\frac{n\pi}{2})$ formulaga egamiz $x=0$ da $f(0)=1$ va $f^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & \text{agar } n=2k+1,\\ (-1)^k, & \text{agar } n=2k\end{cases}$

Demak, $cosx$ funksiya uchun quyidagi formula o‘rinli:

$$cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k!}+\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos(\theta x+k\pi),\quad 0<\theta<1 \quad (4)$$

$f(x)=(1+x)^{\mu}$ ($\mu\in \mathbf{R}$) funksiya uchun Makloren formulasi. Bu funksiya $(-1;1)$ intervalda aniqlangan va cheksiz marta differensiallanuvchi.

Uni Makloren formulasiga yoyish uchun $f(x)=(1+x)^{\mu}$ funksiyadan ketma-ket hosilalar olamiz:

$$f'(x)=\mu(1+x)^{\mu-1},\qquad f''(x)=\mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2},$$

$$f'''(x)=\mu(\mu-1)(\mu-2)(1+x)^{\mu-3},...,$$

$$f^{(n)}(x)=\mu(\mu-1)...(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}. \qquad (5)$$

Ravshanki, $f(0)=1$, $f^{(n)}(0)=\mu(\mu-1)...(\mu-n+1)$. Shuning uchun $f(x)=(1+x)^{\mu}$ funksiyaning Makloren formulasi quyidagicha yoziladi:

$$(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+...+\frac{\mu(\mu-1)...(\mu-n+1)}{n!}x^n+$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)...(\mu-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\mu-n-1}x^{n+1}\ (0<\theta<1).$$

$f(x)=ln(1+x)$ funksiya uchun Makloren formulasi. Bu funksiya $(-1;\infty)$ intervalda aniqlangan va uning istalgan tartibli hosilasi mavjud. Haqiqatan ham, $f'(x)=(\ln(1+x))'=(1+x)^{-1}$ funksiyasiga (5) formulani qo‘llab, unda $\mu=-1$ deb n ni $n-1$ bilan almashtirsak, $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ formulani hosil qilamiz.

Ravshanki, $f(0)=0$, $f^n(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ Shuni e’tiborga olib, berilgan funksiyaning Makloren formulasini yozamiz:

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}},\quad 0<\theta<1 \qquad (6)$$

Yuqorida keltirilgan asosiy elementar funksiyalarning Makloren formulalari boshqa funksiyalarni Teylor formulasiga yoyishda foydalaniladi. Shunga doir misollar ko'ramiz.

1-misol. Ushbu $f(x) = e^{-3x}$ funksiya uchun Makloren formulasini yozing.

Yechilishi. Bu funksiyaning Makloren formulasini yozish uchun $f(0)$, $f'(0), \dots, f^{(n)}(0)$ larni topib, Makloren formulasidan foydalanish mumkin edi. Lekin $f(x) = e^x$ funksiyaning yoyilmasidan foydalanish ham mumkin. Buning uchun (1) formuladagi x ni $-3x$ ga almashtiramiz, natijada

$$e^{-3x} = 1 - \frac{3x}{1!} + \frac{9x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{3^n x^n}{n!} + \frac{(-3x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-3\theta x}, \quad 0 < \theta < 1,$$

formulaga ega bo'lamiz.

2-misol. Ushbu $f(x) = lnx$ funksiyani $x_0 = 1$ nuqta atrofida Teylor formulasini yozing.

Yechilishi. Berilgan funksiyani Teylor formulasiga yoyishda

$f(x) = ln(1 + x)$ funksiya uchun olingan (6) asosiy yoyilmadan foydalanamiz. Unda x ni $x - 1$ ga almashtiramiz, natijada $lnx = ln((x - 1) + 1)$ va

$$lnx = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)} \cdot \frac{(x-1)^{n+1}}{(1+\theta(x-1))^{n+1}},$$

$$0 < \theta < 1$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu formula $x - 1 > -1$ bo'lganda, ya'ni $x > 0$ larda o'rinli.

7.6. Teylor formulasi yordamida taqribiy hisoblash

Makloren formulasining Lagranj ko'rinishdagi qoldiq hadini baholash masalasini qaraylik.

Faraz qilaylik, shunday o'zgarmas M son mavjud bo'lsinki, argument x ning $x_0 = 0$ nuqta atrofidagi barcha qiymatlarida hamda n ning barcha qiymatlarida $|f^{(n)}(x)| \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda

$$|R_n(x)| = |\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}| \leq M \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Argument x ning tayin qiymatida $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

tenglik o'rinli, demak n ning yetarlicha katta qiymatlarida $R_n(x)$ yetarlicha kichik bo'lar ekan. Shunday qilib, $x_0 = 0$ nuqta atrofida $f(x)$ funksiyani

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

ko'phad bilan almashtirish mumkin. Natijada funksiyaning x nuqtadagi qiymati uchun

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

Taqribiy hisoblash formulasi kelib chiqadi. Bu formula yordamida bajarilgan taqribiy hisoblashdagi xatolik $|R_n(x)|$ ga teng bo'ladi.

1-misol. $e^{0,1}$ ni 0,001 aniqlikda hisoblang.

Yechilishi. e^x funksiyaning Makloren formulasidan foydalanamiz.Bunda x o'rniga $x = 0,1$ deb olsak, u holda

$$e^{0,1} \approx 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,01}{2!} + \ldots + \frac{(0,1)^n}{n!},$$

bo'ladi, masala shartiga ko'ra xatolik 0,001 dan katta bo'lmasligi kerak, demak

$R_n(x) = \frac{0,1^{n+1}}{(n+1)!}e^{0,1\theta} < 0,001$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan birinchi n ni topish yetarli. $e^{0,1\theta} < 2$ ekanligini e'tiborga olsak, so'ngi tengsizlikni quyidagicha yozib olish mumkin: $\frac{2}{10^{n+1}(n+1)!} < 0,001$.

Endi $n = 1, 2, 3, ...$ qiymatlarni so'ngi tengsizlikka qo'yib tekshiramiz va bu tengsizlik $n = 3$ dan boshlab bajarilishini topamiz. Shunday qilib, 0,001 aniqlikda

$$e^{0,1} \approx 1+\frac{0,1}{1!}+\frac{0,01}{2!}+\frac{0,001}{3!}=1,055.$$

Xususiy holda, $n = 1$ bo'lganda

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ taqribiy hisoblash formulasi o'rinli bo'ladi.

Teylor formulasi funksiyalarni ekstremumga tekshirishda, qatorlar nazariyasida, integrallarni hisoblashlarda ham keng tatbiqqa ega.

VI bob uchun o'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Funksiyaning berilgan nuqtadagi hosilasi ta'rifini bering.
2. Funksiyaning berilgan nuqtadagi hosilasining geometrik ma'nosi nimadan iborat?
3. Hosilaning mexanik ma'nosi nimadan iborat?
4. Egri chiziq urinmasi va normalining tenglamasi qanday?
5. Funksiya differensiallanuvchanligining zaruriy sharti nimadan iborat?
6. O'zgarmas sonning hosilasi formulasini keltirib chiqaring.
7. Yig'indi, ko'paytma va bo'linmaning hosilasini hisoblash formulalarini keltirib chiqaring.
8. Murakkab funksiyani differensiallash formulasini keltirib chiqaring.
9. Qanday funksiya teskari funksiya deyiladi?
10. Teskari funksiyani differensiallash formulasini keltirib chiqaring.
11. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalarni differensiallash formulasini keltirib chiqaring.
12. Darajali funksiya hosilasi formulasini keltirib chiqaring.
13. Ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi formulasini keltirib chiqaring.
14. Logarifmik funksiya hosilasi formulasini keltirib chiqaring.

15. Trigonometrik funksiyalar hosilalari uchun formulalar keltirib chiqaring.

16. Teskari trigonometrik funksiyalar hosilalari uchun formulalar keltirib chiqaring.

17. Yuqori tartibli hosilalar deb nimaga aytiladi?

18. Ikkinchi tartibli hosila deb nimaga aytiladi?

19. Ikkinchi tartibli hosilaning fizik ma'nosi ayting.

20. Differentsiallanuvchi funksiyalar haqida ba'zi teoremalarni ayting.

21. Lopital qoidasini tushuintiring. Misollar keltiring.

22. O'suvchi funksiya ta 'rifini aytib bering.

23. Kamayuvchi funksiya ta 'rifini aytib bering.

24. Funksiya o'suvchi bo'lishining zaruriy shartini isbotlab bering.

25. Funksiya o'suvchi bo'lshining yetarli shartini isbotlab bering.

26. Funksiyaning maksimumi deb nimaga aytiladi?

27. Funksiyaning minimumi deb nimaga aytiladi?

28. Funksiya ekstremumining mavjud bo'lishining zaruriy shartini isbotlab bering.

29. Funksiya ekstremumi mavjudligini yetarli shartini isbotlab bering.

30. Funksiyani ekstremumga tekshirish qoidasini ayting.

31. Funksiyaning [a, b] segmentdagi eng katta va eng kichik qiymatini topishning qoidasini ayting.

32. Egri chiziqning qavariqligi va botiqligi tushuntirib bering.

33. Bukilish nuqtasi nima?

34. Bukilish nuqtasi mavjudligining zaruriy shartini isbotlab bering.

35. Bukilish nuqtasi mavjudligining yetarli shartini isbotlab bering.

36. Funksiya qanday tekshirihadi?

37. Funksiya differensialining ta'rifini ayting.

38. Hosilaning mavjud bo'lishi bilan differensialning mavjud bo'lishi orasidagi aloqani tushuntiring.

39. Funksiya differensialining taqribiy hisoblashlarga tatbiqi qanday?

40. Nisbiy xatolik deb nimaga aytiladi?

41. Nisbiy xatolikning chegarasi deb nimaga aytiladi?

42. Yuqori tartibli differensiallar deb nimaga aytiladi?

43. Ikkinchi tartibli diferensial deb nimaga aytiladi?

44. n-tartibli differensial deb nimaga aytiladi?

45. Teylor formulasini yozing.

46. Makloren formulasini yozing.

47. Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasini yozing.

48. Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Makloren formulasini yozing.

49. Asosiy elementar funksiyalar uchun Teylor formulalarini yozing.

50. Teylor formulasi yordamida taqribiy hisoblash qanday bajariladi?

VI bob uchun mustaqil yechish uchun misollar

1. $f(x)=x^2-5x$ funksiyaning $[x_0;x_0+\Delta x]$ kesmadagi orttirmasini toping.

2. $y=(x-3)(x^2+3x+9)$ funksiyaning x=3 nuqtadagi hosilasini toping.

3. $f(x)=1/x$ funksiyaning $[x_0;x_0+\Delta x]$ kesmadagi orttirmasini toping.

4. Ushbu funksiyalarning hosilalarini toping: 1) $y=3x^5-4x^3+2x-5$

2) $y=3\sqrt[3]{x}+2/x^2-x^{-1}$

5. Ushbu $y=x+\dfrac{1}{x-1}$ funksiyaning kamayish oralig'ini toping.

6. Ushbu $y=-\dfrac{1}{3}x^3-x^2+3x-5$ funksiyaning o'sish oralig'ini toping.

7. $f(x)=e^{-x}\sin x$ funksiya Makloren formulasida a_3 va a_4 koeffitsientlarni toping.

8. f(x)=$\cos x$ funksiyani $x=\pi/4$ nuqta atrofida Teylor formulasiga yoying.

9. Funksiyaning hosilasini toping: f(x)=$e^{-3x}\cos 2x$

10. $f(x)=3x^2-4x+1$ funksiya grafigiga abssissasi $x_0=2$ bo'lgan nuqtasida o'tkazilgan urinmasi va normali tenglamalarini yozing.

11. Agar yo'lning vaqtga bog'liq ifodasi $s(t)=gt^2+5t-3$ bo'lsa, u holda harakat tezligi va tezlanishi formulalarini yozing.

12. To'g'ri chiziqli harakatlanayotgan jismning tezligi $v(t)=5t+t^2$ (m/s) formula bilan aniqlanadi. Jism t=3c vaqt momentida qanday tezlanishga ega bo'ladi?

13. Massasi 10 kg bo'lgan jism $s(t)=t^2+2t+3$ qonuniyat bilan to'g'ri chiziqli harakatlanmoqda. Jismning t=3 c vaqtdagi kinetik energiyasini aniqlang.

14. Moddiy nuqta $s(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{5t^2}{2}+4t+3$ qonuniyat bilan to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda. Qaysi vaqt momentida moddiy nuqtaning tezligi nolga teng bo'ladi?

15. $y=x+3\sqrt[3]{x}$ funksiyaning [0;1] kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatini toping.

16. Jism $s=t^3+\sqrt{t}$ (m) qonuniyat bilan harakatlanmoqda. Jismning t=1 (c) vaqt momentidagi tezlanishini(m/s^2) toping.

17. Ushbu $f(x)=x^3+2,5x^2-2x$ funksiyaning maksimum nuqtasini toping.

18. Ushbu $s(t)=4t^2-\frac{t^3}{3}+1$ qonuniyat bilan harakatlanayotgan jismning eng katta tezligini aniqlang.

VII BOB. ANIQMAS INTEGRAL

1-§. Aniqmas integral va uning xossalari

1.1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral

Differensial hisobda biz quyidagi asosiy masalani hal qildik: berilgan funksiya bo'yicha uning hosilasini topdik. Fan va texnikaning ko'p masalalari teskari masalaga olib kelinadi: berilgan $f(x)$ funktsiya uchun shunday $F(x)$ funksiyani topish kerakki, uning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo'lsin, ya'ni $F'(x) = f(x)$ (1)

Qo'yilgan masalani yana quyidagi ko'rinishda tavsiflash mumkin: berilgan $f(x)$ funksiya uchun shunday $F(x)$ funksiyani topish kerakki, uning differensiali berilgan $f(x)dx$ ifodaga teng bo'lsin: $dF(x) = f(x)dx.$ (2)

$f(x)$ funksiya bilan (1) munosabat orqali bog'langan funksiya $F(x)$ uning *boshlang'ich funksiyasi* deyiladi.

Shunday qilib, biz quyidagi ta'rifga keldik. Berilgan *funktsiyaning boshlang'ich funksiyasi* deb, hosilasi berilgan funksiyaga teng bo'lgan yoki differensiali $f(x)\,dx$ ifodaga teng bo'lgan funsiyaga aytiladi. Masalan. $f(x) = x^2$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi $F(x) = x^3/3$ chunki $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ yoki $dF(x) = d\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2dx$

Berilgan funksiya bo'yicha uning boshlang'ich funksiyasini izlash integral hisobning asosiy masalalaridan biri hisoblanadi.

Tabiiyki, quyidagicha savol tug'iladi: hamma funksiya uchun ham boshlang'ich funksiya mavjud bo'laveradimi?

Bu savolga javobni keng funksiyalar sinfi uchun biz isbotsiz qabul qiladigan quyidagi teorema beradi.

1-teorema. Segmentda uzluksiz bo'lgan ixtiyoriy funksiya bu segmentda boshlang'ich funktsiyaga ega.

Agar boshlang'ich funktsiya uzilish nuqtalariga ega bo'lsa, biz bu funksiyani uzluksiz bo'lgan intervallardagina qaraymiz.

Berilgan funksiya bo'yicha uning boshlang'ichini izlash masalasi bir qiymatli yechilmaydi.

Quyidagi teorema yuqoridagi savolga uzil-kesil javob beradi.

2-teorema. Agar $F(x)$ funksiya $a \leq x \leq b$ segmentda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $f(x)$ ning ixtiyoriy boshqa boshlang'ich funktsiyasi $F(x)$ dan o'zgarmas qo'shiluvchiga farq qiladi, ya'ni $F(x) + C$ ko'rinishda yozilishi mumkin, bu yerda C— o'zgarmas.

Isboti. $G(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning istalgan bir boshlang'ich funksiyasi bo'lsin, u holda $G'(x) = F'(x) = f(x)$ Lekin,agar ikkita funksiya segmentda teng hosilaga ega bo'lsa, bu funksiyalarning berilgan segmentdagi ayirmasi o'zgarmas bo'lishi kerak, ya'ni $G(x) - F(x) = C$, bu yerda C — o'zgarmas. Shunday qilib, $G(x) = F(x) + C$. Bu bilan teorema isbot bo'ldi.

Isbot qilingan teoremadan $F(x) + C$ ifoda berilgan funktsiyaning barcha boshlang'ich funksiyalarini o'z ichiga olishi kelib chiqadi, bu yerda $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning biror boshlang'ich funktsiyasi, C esa ixtiyoriy o'zgarmas kattalik.

Endi aniqmas integral tushunchasini kiritamiz.

Agar $F(x)$ funktsiya $f(x)$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi bo'lsa, $F(x) + C$ ifoda aniqmas integral deyiladi, bu yerda C —ixtiyoriy o'zgarmas. Funksiyaning aniqmas integrali $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi ($f(x)$dan x bo'yicha olingan aniqmas integral deb o'qiladi). Demak.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (3)$$

Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funktsiya, $f(x)dx$ — integral ostidagi ifoda, x — integrallash o'zgaruvchisi deyiladi, $\int$.— belgisi esa aniqmas integral deyiladi. Integral belgisi ostida biz izlangan funktsiya hosilasini emas, differentsialini yozamiz.

Aniqmas integralni topish amali yoki berilgan funksiyaning barcha boshlang'ich funksiyalarini topish bu funktsiyani integrallash deyiladi.

Boshlang'ich funksiyaning ta'rifidan boshlang'ichining differensiali integral ostidagi ifodaga tengligi kelib chiqadi.

Aniqmas integral boshlang'ich funktsiya va o'zgarmasning yig'indisidan iborat bo'lgani uchun aniqmas integralning differentsiali ham integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni $d\int f(x)dx = f(x)dx$ (4)

yoki aniqmas integraldan olingan hosila integral ostidagi funksiyaga teng

$(\int f(x)dx)'_x = f(x)$ (5)

Birinchi hossaga o'xshab differentsiallash va integrallash amallari orasidagi aloqani o'rnatuvchi yana bitta hossani aytib o'tamiz.

$F(x)$ funktsiya $f(x)$ ning boshlang'ichi bo'lsin. U holda

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Biroq $f(x)dx = dF(x)$ bo'lgani uchun (3) tenglikni ko'pincha quyidagi ko'rinishda yoziladi: $\int dF(x) = F(x) + C.$ (6)

Shunday qilib, biror funksiya differentsialidan olingan integral bu funksiya bilan o'zgarmasning yigindisiga teng ekan.

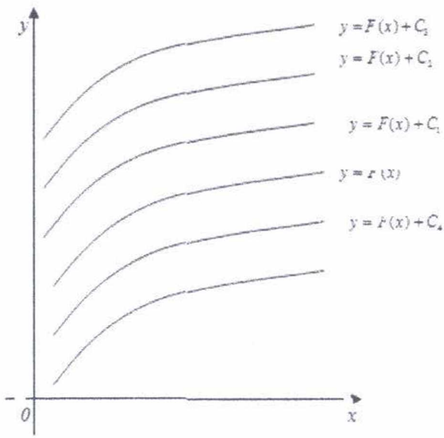
Ko'rsatib o'tilgan hossalar differentsiallash va integrallash o'zaro teskari amal ekanligini bildiradi.

Aniqmas integralning geometrik ma'nosi. Urinmaning og'ma burchagining tangensi har bir nuqtasida berilgan $y = f(x)$funksiya nuqtasining absissalari bo'lishi berilgan holda $y = F(x)$ egri chiziqni topish talab qilinsin. Hosilaning geometrik ma'nosiga ko'ra berilgan nuqtadan $y = F(x)$egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning og'ish burchagi tangensi $F(x)$ hosilaning qiymatiga teng.

Demak, $F'(x) = f(x)$ bo'ladigan shunday $f(x)$funksiyani topishimiz kerak. Bu munosabat izlangan $F(x)$ funksiya $f(x)$ning boshlang'ichi ekanligini ko'rsatadi. Demak, masala integral hisobning masalasi — berilgan funksiyaning boshlang'ichini topishga keltiriladi. Shunday qilib,

$$y = \int f(x)dx \text{ yoki } y = F(x) + C$$

Biz ko'rdikki, masala shartini bitta egri chiziq emas, balki egri chiziqlar oilasi qanoatlantiradi. Shu bilan birga $y = F(x)$ egri chiziq shu egri chiziqlardan biri bo'lsa, u holda ixtiyoriy boshqa egri chiziqni OY o'q bo'ylab parallel ko'chirish yordamida hosil qilish mumkin(1-chizma).



1-chizma

Egri chiziqlarning berilgan oilasidan bitta ma'lum egri chiziqni ajratish uchun masala shartiga yana bitta shart – egri chiziq berilgan (x_0, y_0) nuqtadan o'tishini talab qilish kerak. Bunday shart boshlang'ich shart deyiladi. Boshlang'ich shartning berilishi egri chiziqlar oilasidan (x_0, y_0) nuqtadan o'tadigan egri chiziqni ajratish imkonini beradi. Bu nuqtaning koordinatalari izlangan egri chiziqning $y = F(x) + C$ tenglamasini ya'ni $y_0 = F(x_0) + C$ ni qanoatlantirishi kerak. Bu shartdan C ni bir qiymatli aniqlaymiz:

$$C = y_0 - F(x_0)$$

1-misol. $M(1;2)$ nuqtadan absissasi x bo'lgan nuqtalarda urinmaning burchak koeffitsienti x^2 ga teng bo'ladigan egri chiziq o'tkazing.

Yechilishi. $y' = x^2$. Demak, $y = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Shunday qilib, absissasi x bo'lgan nuqtalarda urinmaning og'ish burchak tangensi x^2 ga teng egri chiziqlar $y = \frac{x^3}{3} + C$ kubik parabolalar oilasini tashkil qilar ekan. Bu egri chiziqlar oilasidan $M(1;2)$ nuqtadan o'tadiganini ajratib olishimiz kerak (boshlang'ich shart). Bu $2 = \frac{1^3}{3+C}$ ni beradi, bundan $C = \frac{5}{3}$. Demak, izlangan chiziq tenglamasi $y = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}$ ekan.

Qarab chiqilgan bu misol aniqmas integralning geometrik ma'nosini oydinlashtirish imkonini beradi.

f(x) funksiya boshlang'ich funksiyasining grafigini *integral egri chiziq* deb ataymiz. Shunday qilib, agar $F'(x) = f(x)$ bo'lsa, $y = F(x)$ funksiyaning grafigi integral egri chiziq bo'ladi.

Aniqmas integral barcha integral chiziqlar oilasi bilan tasvirlanadi.

1.2. Aniqmas integralning asosiy xossalari

Aniqmas integralning asosiy aniqmas integrallar jadvali formulalarini qo'llanish imkonini yanada kengaytiradigan ikki qoidasini keltiramiz.

1°. Chekli sondagi algebraik yig'indidan olingan aniqmas integral, har bir qo'shiluvchidan ayrim-ayrim holda olingan aniqmas integrallarning algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int \big(f(x) + g(x) - \varphi(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int \varphi(x)dx. \quad (1)$$

2°. O'zgarmas ko'paytuvchini aniqmas integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx. \qquad (2)$$

(bunda k o'zgarmas noldan farqli deb faraz qilinadi).

(1) va (2) tengliklarni shu ma'noda tushunish kerakki, ularning chap va o'ng tomonlari o'zgarmas qo'shiluvchiga farq qiladi. Shuning uchun ularning o'rinli bo'lishini ko'rsatish uchun chap tomonning hosilasi (yoki differensiali) o'ng tomonning hosilasiga (yoki differensialiga) tengligini ko'rsatish yetarli.

Masalan, (2) tenglikning o'rinli ekanini isbotlaymiz. (2) tenglikning chap tomonini differensiallab, quyidagini hosil qilamiz: $d\int kf(x)dx = kf(x)dx$.

(2) tenglikning o'ng tomonini differentsiallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$d(k\int f(x)dx) = kd\int f(x)dx = kf(x)dx$$

Shunday qilib, $d\int kf(x)dx = d(k\int f(x)dx)$

bundan (2) tenglik kelib chiqadi.

1-misol. $\int.(x^3 + 3\sin x - 8)dx$ ni toping.

Yechilishi. 1° va 2° xossalarga asosan quyidagiga egamiz:

$\int(x^3 + s\sin x - 8)dx = \int x^3dx + 3\int \sin x\, dx - 8\int dx$.

Yoki quyidagini hosil qilamiz: $\int x^3dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C_1 = \frac{x^4}{4} + C_1$;

$3\int \sin x\, dx = 3(-\cos x + C_2) = -3\cos x + 3C_2$;

$8\int dx = 8(x + C_3) = 8x + 8C_3$.

Shunday qilib, $\int(x^3 + 3\sin x - 8)dx = \frac{x^4}{4} - 3\cos x - 8x + (C_1 + 3C_2 - 8C_3)$.

Har bir integrallashda o'zining erkli o'zgarmasini hosil qildik. Lekin pirovardida faqat bitta ixtiyoriy o'zgarmasni yozamiz, chunki C_1, C_2, C_3 - ixtiyoriy o'zgarmas bo'lsa, $C = C_1 + 3C_2 - 8C_3$ ham ixtiyoriy o'zgarmas bo'ladi. Shuning uchun uzil-kesil quyidagini hosil qilamiz:

$$\int(x^3 + 3\sin x - 8)dx = \frac{x^4}{4} - 3\cos x - 8x + C.$$

Hosil qilingan natijaning to'g'riligini differentsiallash yordamida oson tekshirish mumkin. Haqiqatan, $d\left(\frac{x^4}{4} - 3\cos x - 8x + C\right) = (x^3 + 3\sin x - 8)dx$

1.3. Asosiy elementar funksiyalarning aniqmas integrallari jadvali

Berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyasini izlash masalasi berilgan funksiyaning hosilasini topish masalasiga qaraganda ancha murakkabdir. Differentsial hisob kursida biz asosiy elementlar funktsiyalarning hosilalarini topdik hamda yig'indini, ko'paytmani, bo'linmani va shuningdek, murakkab funksiyani differensiallash qoidalarini aniqladik.

Bu qoidalar bizga ixtiyoriy elementar funktsiya hosilasini topish imkonini berdi. Elementar funktsiyalarning boshlang'ich funksiyalarini topishning differentsial hisobdagi kabi sodda universal qoidalari va retseptlari mavjud emas.

Integrallashni yengillashtirish uchun asosiy integrallar jadvali deb ataladigan jadval tuziladi. Bu jadval differensial hisobning asosiy formulalaridan hosil qilinadi:

I. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$

$(n \neq -1).$

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

III. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

IV. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

V. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C.$

VI. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg + C.$

VII. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$

VIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x + C.$

IX. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

X. $\int e^x dx = e^x + C.$

Bu formulalarni keltirib chiqarish uchun o'ng tomonning differentsiali tenglikning chap tomonidagi integral ostidagi ifodaga tengligini tekshirish yetarli.

2-§. Integrallash usullari

2.1. Yoyish metodi bilan integrallash

Bu metod integral ostidagi funktsiyani har birining boshlang'ichini boshqa metodlar bilan topish mumkin bo'lgan funktsiyalar yig'indisiga yoyishga asoslangan.

1-misol. $\int \frac{x^3+4x+2}{2x}dx$ ni toping.

Yechilishi. $\frac{x^3+4x+2}{2x} = \frac{1}{2}x^2 + 2 + \frac{1}{x}$ bo'lgani uchun

$$\int = \int \left(\frac{1}{2}x^2 + 2 + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^3}{6} + 2x + \ln|x| + C$$

o'rinli bo'ladi. Tekshirish:

$$d\left(\frac{x^3}{6} + 2x + \ln|x| + C\right) = \left(\frac{x^2}{2} + 2 + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^3+4x+2}{2x}dx.$$

tenglik o'rinli.

2-misol. $\int \frac{dx}{cos^2x\, sin^2x}$ ni toping.

Yechilishi. Quyidagiga egamiz:

$$\int \frac{dx}{cos^2x\, sin^2x} = \int \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x\, sin^2x}dx = \int \left(\frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{sin^2x}\right)dx =$$

$$\int \frac{dx}{cos^2x} + \int \frac{dx}{sin^2x} = tgx - ctgx + C$$

Integral ostidagi ifodani qulay usul bilan yoyib, biz integralni jadvaldagi integrallash ko'rinishiga keltirdik.

2.2. O'zgaruvchini almashtirish metodi bilan integrallash

Ko'p hollarda integral o'zgaruvchisi x o'rniga z o'zgaruvchini kiritish bilan berilgan integralni asosiy integrallar jadvalida mavjud yoki boshqa usul bilan oson hisoblanadigan integralga keltiriladi. Bu integrallash metodi *o'zgaruvchini almashtirish metodi* yoki *o'rniga qo'yish metodi* deyiladi.

Integral ostida ichki funktsiyaning hosilasiga ko'paytirilgan murakkab funksiya turgan bo'lsin, ya'ni integral

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$$

ko'rinishida bo'lsin, bunda $\varphi(x)$ *va* $\varphi'(x)$ funksiyalar uzluksiz.

Yangi o'zgaruvchi kiritamiz, $z = \varphi(x)$ bo'lsin. Ushbu formula o'rinli ekanini ko'rsataylik: $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(z)dz$ (1)

bunda $f(z)$ funksiyani uzluksiz deb faraz qilamiz. Bu munosabat *o'zgaruvchini almashtirish formulasi* deb ataladi. Bu yerda, agar $\int f(z)dz = F(z) + C$ bo'lsa, $\int [\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C$ ekani nazarda tutiladi.

Qilingan tasavvurlarimizga ko'ra ikkala tomonning differensiali o'zaro teng ekanini ko'rsatish yetarlidir va quyidagini hosil qilamiz:

$d\{\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx\} = f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx.$

Ikkinchi tomondan, (1) munosabatning o'ng tomonini differentsiallab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$d[\int f(z)dz] = f(z)dz = f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx,$

chunki $f(z) = f[\varphi(x)], d(z) = \varphi'(x)dx.$

Ikkala holda bir xil natija kelib chiqdi. Shu bilan (1) formula isbotlandi.

1-misol. $\int \sin ax\, dx$ ni toping.

Yechilishi. Quyidagi almashtirishlarni bajaramiz:

$\int \sin ax\, dx = \int \frac{1}{a}\sin ax \cdot adx = \frac{1}{a}\int \sin ax\, d(ax).$

Endi $z=ax$ deb, va (1) formulani qo'llab,

$$\int \sin ax\, dx = \frac{1}{a}\int \sin ax\, d(ax) = \frac{1}{a}\int \sin z\, dz =$$

$$= -\frac{\cos z}{a} + C = -\frac{\cos ax}{a} + C$$

2-misol. $\int tgx\, dx$ ni toping.

Yechilishi. $\int tgx\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$ ekani ma'lum. $\sin x dx = -d\cos x$ ni e'tiborga olib, $z = cos\ x$ deymiz. U holda

$$\int tgx\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{x} = -\int \frac{dz}{z} = -\ln|z| + C =$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

Shunday qilib, $\int tgx\,dx = -\ln|\cos x| + C$.

Shunga o'xshash $\int ctgx\,dx = \ln|\sin x| + C$ ni topamiz.

O'zgaruvchini almashtirish yordamida integrallash malakasi hosil qilingandan keyin sodda integrallarni bunga o'xshash o'rniga qo'yishlarni batafsil yozish shart emas.

3-misol. $\int \sqrt[3]{1+x^2}\,xdx$ ni toping.

Yechilishi. $d(1+x^2) = 2xdx$ ni e'tiborga olib, $xdx = \frac{1}{2}d(1+x^2)$ ni hosil qilamiz. Shuning uchun

$$\int \sqrt[3]{1+x^2}xdx = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{1/3}\,d(1+x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}{8} + C$$

Yuqoridagi almashtirishlar x o'zgaruvchi z o'zgaruvchining funktsiyasi, ya'ni $x = \varphi(z)$ bo'lganda va $\varphi'(z)$ uzluksiz bo'lgan holdagina bajarilishi mumkin. (1) formuladan ba'zan quyidagicha foydalaniladi:

$$\int f(x)dx = \int [\varphi(z)]\varphi'(z)dz, \quad (2)$$

bu yerda $\int f(x)dx$ - berilgan integral. Biroq bu yerda $x = \varphi(z)$ almashtirishdan so'ng integrallanadigan funksiya z argumentining funksiyasi bo'lib qolyapti, x o'zgaruvchiga qaytish (o'tish) uchun $x = \varphi(z)$ funksiyaga teskari funktsiyani topish kerak. Bunday $\varphi(z)$ funktsiya uzluksiz va monoton bo'lgandagina mavjud bo'ladi. (2) formula ham o'zgaruvchini almashtirish formulasi deyiladi.

2.3. Bo'laklab integrallash

$u = u(x)$ va $v = v(x)$ lar uzluksiz hosilalari mavjud bo'lgan x ning ikkita funksiyasi bo'lsin. Differensial hisobdan ma'lumki

$$d(uv) = udv + vdu \quad (1)$$

(1) tenglikning ikkala tomonini integrallab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu \text{ yoki } \int udv = \int d(uv) - \int vdu.$$

Biroq $\int d(uv) = uv + C$, shuning uchun

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (2)$$

(2) tenglikda ixtiyoriy o'zgarmas C ni yozmaymiz, chunki formulaning o'ng tomonida ixtiyoriy o'zgarmasni o'z ichiga olgan aniqmas integral qoldi. (2) formula *bo'laklab integrallash formulasi* deyiladi. U $\int udv$ integralni hisoblashni ko'p hollarda ancha oson hisoblanadigan $\int vdu$ integralni hisoblashga keltiriladi.

1-misol. $\int x \sin x \, dx$ ni hisoblang.

Yechilishi. Bu yerda bizda bir nechta imkoniyat bor. Masalan, $u = \sin x$, $xdx = dv$ deb olish mumkin, $u = x$, $\sin x \, dx = dv$ deyish ham mumkin.

$u = \sin x$, $dv = xdx$ deb, $du = \cos x \, dx$, $v = x^2/2$ ni topamiz.

(2) formulaga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$\int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx.$$

Integral ostidagi ifodani bunday ikkita yig'indiga ajratish noqulay ekanini tan olish kerak, chunki bu ancha murakkab integralga olib keladi.

$u = x$, $dv = \sin x \, dx$ deb olamiz; bundan $du = dx$, $v = -\cos x$ ni topamiz.

(2) formuladan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx.$$

$\int \cos x dx = \sin x + C$ bo'lgani uchun uzil-kesil quyidagiga egamiz:

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Ba'zan natijani hosil qilish uchun bo'laklab integrallashni ketma-ket bir necha bor qo'llanish kerak bo'ladi.

Bo'laklab integrallash metodi bilan hisoblanadigan ba'zan ko'p uchraydigan integrallarni ko'rsatamiz:

1. $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kx\, dx, \int P(x)\cos kx\, dx$ *ko'rinishidagi integrallar, bu yerda P(x) – ko'phad, k – biror son.*

Bu tipdagi integrallarda $u = P(x)$ deb olish tavsiya etiladi.

2-misol. $\int (x^2 - 2x + 7)e^{2x}dx$ ni toping.

Yechilishi. $u = x^2 - 2x + 7, dv = e^{2x}dx$ deylik, u holda

$$du = (2x - 2)dx, v = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Bo'laklab integrallash formulasini qo'llanib, quyidagini topamiz:

$$\int (x^2 - 2x + 7)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 7)e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}(2x - 2)dx =$$

$$\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 7)e^{2x} - \int (x - 1)e^{2x}dx.$$

Oxirgi integral berilgan integral tipidan bo'lib $(x - 1)$ ko'phadning darajasi x^2-2x+7 ko'phadnikidan kichik.

$\int (x - 1)e^{2x}\, dx$ integralga yana bo'laklab integrallashni qo'llanib, hamda $u = x - 1$, $dv = e^{2x}dx$ belgilash kiritib $du = dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$ larni topamiz va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int (x - 1)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x - 1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x - 1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Demak,

$$\int (x^2 - 2x + 7)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 7)e^{2x} -$$

$$-\left[\frac{1}{2}(x - 1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right] + C = \frac{1}{4}(2x^2 - 6x + 17)e^{2x} + C.$$

II.

$$\int P(x)\ln x dx, \int P(x)\arcsin x dx, \int P(x)\arccos x dx, \int P(x)\mathrm{arctg}\, x dx, \int P(x)\mathrm{arcctg}\, x dx$$

ko'rinishdagi integrallar, bu yerda $P(x)$ – x ga nisbatan ko'phad.

Bu hollarning barchasida bo'laklab integrallashda u deb $P(x)$ emas balki, ikkinchi ko'paytma olinadi.

3-misol. $\int(4x^3+6x-7)\ln x dx$ ni toping.

Yechilishi. $u = \ln x$, $dv = (4x^3+6x-7)dx$ deb belgilaymiz u holda $du = \frac{dx}{x}$, $u = x^4+3x^2-7x$ ni topamiz va quyidagini aniqlaymiz:

$$\int(4x^3+6x-7)\ln x dx = (x^4+3x^2-7x)\ln x - \int\frac{x^4+3x^2-7x}{x}dx =$$

$$= (x^4+3x^2-7x)\ln x - \left(\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}-7x\right)+C.$$

III. $\int e^{ax}\cos bx\, dx, \int e^{ax}\sin bx\, dx,$ (bu yerda a va b – sonlar) ko'rinishdagi integrallar. Bu integrallar ikki marta bo'laklab integrallab topiladi.

3-§. Integrallarning ba'zi bir tiplari

3.1. Sodda ratsional kasrlarni integrallash

Ko'phadlar haqida ba'zi ma'lumotlar. Bu bo'limda bizga keyinchalik kerak bo'ladigan ba'zi ko'phadlar haqidagi qisqa ma'lumotlarni qarab chiqamiz.

P(x) ko'phadning *ildizi* deb bu ko'phadni nolga aylantiradigan α songa aytiladi.

Isbotsiz keltiradigan quyidagi teorema o'rinlidir.

n- darajali har qanday ko'phad $x-\alpha$ ko'rinishdagi n ta chiziqli ko'paytuvchi bilan a o'zgarmas koeffitsientga ko'paytmasi ko'rinishida ifodalanishi mumkin, *ya'ni*

$$R(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n). \qquad (1)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, sonlar ravshanki, $R(x)$ ko'phadning ildizidir.

Ko'phad yoyilgan ko'paytuvchilar bir xil bo'lishi ham mumkin. Chiziqli ko'paytuvchisi $(x-a)$ (1) yoyilmada k_1 marta uchraydigan $R(x)$ ko'phadning a ildizi k_1 ***karrali ildiz*** deyiladi. Karrali ildizda $k_1=1$ bir bo'lgan ildiz esa ***oddiy ildiz*** deyiladi. (1) yoyilmadan bir xil ko'paytuvchilarni birlashtirib uni quyidagi ko'rinishda yozishimiz mumkin: $R(x) = a(x-a_1)^{k1}(x-b_1)^{k2}\ldots(x-c_1)^{k_s}$ (2)

Bu yerda barcha $a_1, b_1, \ldots, c_1$ ildizlar hap xil, $k_1+k_2+\bullet\bullet\bullet+k_s = n.$

Shunga o'xshash, masalan, $R(x)=4(x-2)^3(x+1)^2(x-5)$ ko'pxad $a=2$, $b=-1, c=5$ ildizlarga ega, shu bilan birga 2 karraligi 3 bo'lgan ildiz; (-1) - karraligi 2 bo'lgan ildiz; 5 - oddiy ildiz.

Algebrada, agar haqiqiy koeffitsientli ko'phad k karrali $\gamma=\alpha+\beta i$ kompleks sonli ildizga ega bo'lsa, qo'shma kompleks son $\tau=\alpha-\beta i$ *h*am o'sha ko'phadning k karrali ildizi bo'lishi isbotlanadi.

Yuqorida bayon qilinganlar quyidagi ko'phadlarni ko'paytuvchilarga yoyganda mavhum sonlardan qutulish mumkin bo'lgan fikrni aytishga imkon beradi:

Haqiqiy koeffitsientli har qanday ko'phadni quyidagi formada yozish mumkin:

$$\boldsymbol{R(h)} = \boldsymbol{a_0(x-a)^{t_1}(x-b)^{t_2}} \ldots (x^2+p_1x+q_1)^{k_1}(x^2+\ p_2x+q_2)^{k_2} \ldots (3)$$

Bu yoyishda chiziqli ko'paytuvchilar haqikiy ildizlarga mos keladi, kvadrat uchhadlar esa ko'phadning kompleks ildiziga to'g'ri keladi. $\mathbf{a_0}$, a, b, ..., p_1 q_1... o'zgarmas kattaliklar haqiqiy sonlardir.

Ma'lumki, *kasr ratsional funktsiya* yoki *oddiy ratsional funktsiya* deb ikkita ko'phadnnng bo'linmasiga teng bo'lgan funktsiyaga aytiladi:

$$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

bu yerda $P_m(x)$ - m – darajali ko'pxad, $Q_n(x)$ – n – darajali ko'phad.

Agar suratning darajasi maxraj darajasidan kichik bo'lsa, ratsional kasr *to'g'ri kasr* deyiladi, aks holda ratsional kasr *noto'g'ri* deyiladi. Yuqorida keltirilgan ratsional kasr noto'g'ri kasrdir. Bu paragrafning vazifasi ratsional kasrlarni integrallash metodlarini bayon qilishdir.

Dastlab, *har qanday noto'g'ri ratsional qasrni ko'phad va noto'g'ri kasr yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin ekanini aytib o'tamiz.*

Haqiqatan, $R(x)=P(x)/Q(x)$— noto'g'ri kasr, ya'ni $R(x)$ ning darajasi $Q(x)$ nikidan katta yoki teng bo'lsin. Suratni maxrajga bo'lib, quyidagi ayniyatni hosil qilamiz: $P(x)=Q(x)L(x)+r(x)$.

bu yerda *r(x)* qoldiq — ko'phad, shu bilan birga qoldiqning darajasi kasrning *Q(x)* surat darajasidan kichik. Bundan $\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$,

bu yerda $r(x)/\,Q(x)$ - to'g'ri ratsional kasr.

1-misol. $R(x) = \frac{x^4+5x^3-6x+5}{x^3+2x-1}$ bo'lsin. $x^4 + 5x^3 - 6x + 5$ ni $x^3 + 2x - 1$ ga bo'lib, $L(x) = x + 5$ bo'linma va $r(x) = -2x^2 - 15x + 10$ qoldiqni hosil qilamiz. Demak, $\frac{x^4+5x^3-6x+5}{x^3+2x-1} = x + 5 - \frac{-2x^2-15x+10}{x^3+2x-1}$

Shunday qilib, noto'g'ri $P(x)/Q(x)$ ratsional kasrni integrallash *L (x)* ko'pxadni va *r(x)/Q(x)* to'g'ri kasrni integrallashga keltirilar ekan:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int [L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}]\, dx = \int L(x)dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}dx$$

Ko'phadni integrallash bizga ma'lum, endi faqat to'g'ri ratsional kasrni integrallashni ko'rsatish qoladi.

Har qanday to'g'ri ratsional kasrni *sodda ratsional kasrlar* deb ataluvchi quyidagi kasrlarning chekli yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin:

I. $\frac{A}{x+a}$; II. $\frac{A}{(x+a)^n}$ (n=2, 3, ...);

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{Mx-N}{(x^2+px+q)^n}$ (n=2, 3, ...); bu yerda *A, a, p, q, M* va *N* - haqiqiy sonlar, x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizlarga ega emas, ya'ni $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Shuning uchun biz sodda kasrlarni integrallashni o'rgansak va to'g'ri ratsional kasrni soddalarining yig'indisiga ajrata olsak, ratsional kasrlarni integrallash masalasi hal qilingan bo'ladi.

Sodda ratsional kasrlarni integrallash. Sodda ratsional kasrlarning I va II tiplarini integrallash qiyinchilik tug'dirmaydi. Haqiqatan,

$$\int \frac{Adx}{x-a} = \mathrm{A}\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = \mathrm{A}\int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Endi III tipdagi ratsional kasrlarni integrallashga o'tamiz

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$$

Maxrajda to'la kvadrat ajratib, qo'yidagiga ega bo'lamiz

$$x^2+px+q=x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=\left(x+\frac{p^2}{4}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Shartga ko'ra x^2+px+q uchhad haqiqiy ildizlarga ega bo'lmagani uchun $q-\frac{p^2}{4}>0$. $q-\frac{p^2}{4}=a^2$ belgilashni kiritamiz. Endi integralga $t=x+\frac{p}{2}$ deb o'zgaruvchini almashtirishni qo'llanamiz*. Bundan:

$$x=t-\frac{p}{2}, dx=dt, x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{4}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{2}\right)=t^2+a^2.$$

Demak, $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+a^2}dt=M\int \frac{tdt}{t^2+a^2}+$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C.$$

t va a ning qiymatlarini o'z o'rniga qo'yib, nihoyat quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

2-misol. $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}dx$ ni toping.

Yechilishi. Maxrajning yarmiga teng bo'lgan yangi t o'zgaruvchini kiritamiz:

$$t=1/2\,(x^2+2x+10)=x+1, x=t-1, dx=dt,$$

$$x^2+2x+10=(t-1)^2+2(t-1)+10=t^2+9.$$

Demak, $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}dx=\int \frac{3(t-1)+5}{t^2+9}dt=3\int \frac{tdt}{t^2+9}+2\int \frac{dt}{t^2+9}=$

$$=\frac{3}{2}\ln(t^2+9)+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10)+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$$

Nihoyat, IV tipidagi ratsional integrallashni qaraymiz:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$$

$t = x + \frac{p}{2}$ deb avvalgidek yangi t o'zgaruvchini kiritamiz. Bu quyidagini beradi:

$x = t - \frac{p}{2}$, $dx = dt$, $x^2+px+q = t^2+a^2$, bu yerda $a^2 = q - \frac{p2}{2}$. Demak,

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} \qquad (4)$$

(4) tenglikning o'ng tomonidagi integrallardan birinchisi oson hisoblanadi:

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-n}d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} + C.$$

Shunday qilib, $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ integralni hisoblash qoladi.

Bu integralni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt = \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}\right]$$

$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} = I_{n-1}$ deb quyidagini hosil qilamiz:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}\right]. \qquad (5)$$

$$u = t, du = dt, dv = \frac{t\ dt}{(t^2+a^2)^n}, v = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}$$

deb $\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}$ integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}I_{n-1}.$$

Hosil qilingan integralni (5) formulaga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)}I_{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{3-2n}{2-2n}I_{n-1} + \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

Shunday qilib, $I_n = \frac{1}{a^2}[\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}]$ (6)

hosil qilingan formula keltirish formulasi deyiladi.

3-misol. $I_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$ ni toping.

Yechilishi. Bu yerda $a = 1, n = 3$. (6) formulani qo'llab topamiz:

$$I_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3} = [\frac{2\cdot 3-3}{2\cdot 2-2} I_2 + \frac{t}{2(2-1)(t^2+1)} = \frac{1}{2} I_1 + \frac{t}{4(t^2+1)^2}$$

(6) formulaga ko'ra

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = [\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 3-2} I_1 + \frac{t}{2(2-1)(t^2+1)} = \frac{1}{2} I_1 + \frac{t}{4(t^2+1)}$$

$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctg\ t + C$ bo'lgani uchun $I_2 = \frac{1}{2} arctg\ t + \frac{t}{2(t^2+1)} + C$

Demak, $I_3 = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2} arctg\ t + \frac{t}{2(t^2+1)}\right] + \frac{t}{4(t^2+1)^2} + C == \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3t}{8(t^2+1)} + \frac{3}{8} arctg\ t + C$

Shunday qilib, ratsional kasrlarni integrallash masalasini yakunlash uchun to'gri ratsional kasrlarnig eng sodda kasrlar yigyndisiga qanday ajratish mumkinligini aniqlash qoladi.

To'g'ri ratsional kasrni sodda kasrlarga yoyish. Yuqorida biz ratsioial kasrni integrallash ko'phadini va to'g'ri ratsional kasrni integrallashga keltirilishini ko'rdik Xar qanday ratsional $P(x)/Q(x)$ to'g'ri kasr sodda kasrlarga qanday yoyilishini aniqlaymiz. Bu yoyishda kasrning $Q(x)$ maxrajini chiziqli va kvadratik ko'paytuvchilarga ajratish muhim ahamiyatga ega.

Aniqlik uchun *Q{x)* maxraj ko'paytuvchilarga quyidagicha ajratiladi:

$$Q(x) = (x - a)^k (x - b)^l (x^2 + rx + q)^m$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots$$

$$+ \frac{B_l}{(x-b)^l} +$$

$$+ \frac{M_1 + N_1}{x^2+px+\_q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{M_m x + N_m}{(x^2+px+q)^m} \qquad (7)$$

(7) formuladan ko'rinadiki, $Q(x)$ maxrajning chiziqli ko'paytuvchilariga I va II tipdagi sodda kasrlar, kvadratik ko'paytuvchilar esa III va IV tipdagi sodda kasrlar mos kelar ekan. Bunda berilgan ko'paytuvchiga (chiziqli yoki kvadratik) mos keladigan sodda kasrlar soni ko'paytuvchi maxraj yoyilmasiga kirgan darajasiga bog'lik. To'g'ri ratsional kasrni yoyish qoidasi $Q(x)$ maxraj yoyilmasiga kiradigan chiziqli va kvadratik ko'paytuvchilarning chekli soni uchun o'rinli bo'lib qoladi.

To'g'ri ratsioial kasrni koeffitsientlarini topishning eng sodda metodlaridan biri aniqmas koeffitsientlar metodidir. Bu metodni qo'llanishni misollarda tushuntiramiz.

4-misol. $\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$ ni sodda kasrga ajrating.

Yechilishi. Yoyilmadan foydalanib, yechamiz:

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+2} \qquad (*)$$

bu yerda A_1, A_2, M va $N-$ lar hali noma'lum sonlar

(*) ayniyatning o'ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz:

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=$$

$$=\frac{A_1(x-1)\ (x^2+2x+2)+A_2(x^2+2x+2)+(Mx+N)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$

Bu ayniyatda kasrning maxraji bir xil. Demak, suratlari ham aynan teng:

$$x^2-5x+9=A_1(x-1)\ (x^2+2x+2)+A_2(x^2+2x+2)+(Mx$$
$$+N)(x-1)^2$$

Qavslarni ochib va o'ng tomondagi ko'phadni x ning darajalarini pasayib borishi bo'yicha ko'ysak , quyidagini hosil qilamiz:

$$x^2-5x+9=(A_1+M)x^3+(A_1+A_2-2M+N)\,x^2+$$
$$+(2A_2+M-2N)x+(-2A_1+2A_2+N)$$

Ikkita ko'phad x ning bir xil darajalarida koeffitsientlar bir xil bo'lganda va faqat shunda aynan teng bo'ladi. Bu ko'phadlarning koeffitsientlarini x ning bir xil darajalarida tenglab, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

x^3 da: $A_1 + M = 0;$

x^2 da: $A_1 + A_2 - 2M + N = 1;$

x da: $2A_2 + M - 2N = -5;$

ozod had: $-2A_1 + 2A_2 + N = 9$

Bu sistemani yechib, $A_1 = -7/_5, A_2 = 1, M = 7/_5, N = 21/_5$ larni topamiz.

To'g'ri ratsional kasrni sodda kasrlar yig'indisiga yeyish har doim mumkin bo'lgani va yagona bo'lgani uchun yeyilmaning noma'lum koeffitsientlarini topish uchun tuziladigan sistema yagona yechimga ega.

$A_1, A_2, M,$ va $N -$ lar o'rniga topilgan qiymatlarni qo'yib uzil kesil quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{7}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{7x + 21}{5(x^2 + 2x + 2)}.$$

5- misol. $\frac{x^2+2x+2}{(x-1)^2(x+3)}$ kasrni eng sodda kasrga ajrating.

Yechilishi. Maxraj faqat xaqiqiy ildizga yega bo'lgani uchun kasrning yoyilmasi quyidagi ko'rinishga yega bo'ladi:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{B_1}{x+3}.$$

Hosil qilingan munosabatning o'ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz:

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A_1(x-2)(x+3) + A_2(x+3) + B_1(x-2)^2}{(x-2)^2(x+3)}$$

Suratni tenglab, quyidagini hosil qilamiz:

$$x^2 + 2x + 2 = A_1(x-2)(x+3) + A_2(x+3) + B_1(x-2)^2$$

Ko'phadning o'ng tomonini x ning darajasi kamayib boradigan qilib joylashtiramiz:

$$x^2 + 2x + 2 = (A_1 + B_1)x^2 + (A_1 + A_2 - 4B_1)x + (-6A_1 + 3A_2 - 4B_1)$$

Tenglikning o'ng va chap tarafida x ning bir xil darajalari bo'yicha koefitsientlarini tenglab kuyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$(A_1 + B_1) = 1$$

$$(A_1 + A_2 + 4B_1) = 2$$

$$(-6A_1 + 3A_2 - 4B_1) = 2$$

Bu sistemani yechib, $A_1 = \frac{4}{5}, A_2 = 2, B_1 = \frac{1}{5}$ larni topamiz.

Koefitsientlarning topilgan bu qiymatlarini (*) munosabatga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{4}{5(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{5(x+3)}.$$

Ratsional kasrlarni integrallash. Yuqorida bayon qilingan fikrlar ratsional kasrlarni integrallaшning asosiy qoidalarini tavsiflashga imkon beradi.

1. Agar ratsional kasr noto'g'ri bo'lsa, u xolda uni ko'phad va to'g'ri ratsional kasr yig'indisi ko'rinishida ifodalanadi. Shu bilan noto'g'ri ratsional kasrni integrallash ko'pxad va to'g'ri ratsional kasrni integrallashga keltiriladi.

2. To'g'ri ratsional kasrning maxraji ko'paytuvchilarga ajratiladi.

3. To'g'ri ratsional kasrni sodda kasrlar yig'indisiga ajratiladi. Bu bilan to'g'ri ratsional kasrni integrallash sodda kasrlarni integrallashga keltiriladi.

6-misol. $\int \frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12} dx$ ni toping.

Yechilishi. Integral ostida noto'g'ri kasr turibdi.Butun qismini ajratib quyidagini hosil qilamiz

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 30x - 22}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = x - 2 + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$$

Demak

$\int \frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12} dx = \int [x - 2 + \frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}] dx = \frac{x^2}{2} - 2x +$
$\int \frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}$

To'g'ri ratsional kasrni oddiy kasrga ajratamiz

$$\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}=\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{4}{5(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{1}{5(x+3)}$$

Shuning uchun

$\int\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}dx=\int[\frac{4}{5(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{1}{5(x+3)}]dx=\frac{4}{5}\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{5}\ln|x+3|+C$

Shunday qilib uzil kesil quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int\frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{4}{5}ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{5}ln|x+3|+C$$

3.2. Ba'zi bir trigonometrik funksiyalarning integrallari

1.Quyidagi ko'rinishdagi integrallarni ko'raylik:

$\int\sin mx\cdot\cos nx\,dx$, $\int\sin mx\cdot\sin nx\,dx$, $\int\cos mx\cdot\cos nx\,dx$.

Bu integrallar yoyish metodi bilan quyidagi trigonometrik ayniyatlar yordamida yechiladi:

$\sin mx\cdot\cos nx=\frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{2}$;

$\sin mx\cdot\sin nx=\frac{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x}{2}$;

$\cos mx\cdot\cos nx=\frac{\cos(m+n)x-\cos(m-n)x}{2}$.

1-misol. $\int\sin 2x\cdot\cos 6xdx$ ni hisoblang.

Yechilishi. Quyidagiga egamiz:

$$\int\sin 2x\cdot\cos 6xdx=\frac{1}{2}\int[\sin(2+6)x+\sin(2-6)x]=\frac{1}{2}\int\sin 8xdx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\sin 4xdx=\frac{1}{16}\int\sin 8xd(8x)-\frac{1}{8}\int\sin 4xd(4x)=$$

$$=-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{8}\cos 4x+C$$

2. $\int sin^n x\ cos\ ^n x$ dx ko'rinishdagi integrallar, bu yerda m va p — butun sonlar. Sonlardan biri m yoki n toq bo'lgan xolni qaraymiz. Bu xolda integrallar ratsioial funksiyalarni integrallashga keltiriladi. Integrallash metodining mazmuni quyidagi misollardan yaqqol ko'rinadi.

2-misol. $\int sin^5 x\, cos^4 dx$ ni toping.

Yechilishi. $sinxdx = -dcosx$ ni etiborga olib, $z = cosx$ deb o'zgaruvchini almashtiramiz. Bu $dz = -sinxdx$ ni beradi va demak, $sin^2 x = 1 - cos^2 x = 1 - z^2$ bo'lgani uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$\int sin^5 x\, cos^4 dx = \int sin^4 x\, cos^4 x \cdot sin\, x\, dx = -\int (1 - z^2)^2\ z^4\, dz =$$

$$-\int (z^4 - 2z^6 + z^8) dz = -\frac{z^5}{5} + \frac{2z^7}{7} - \frac{z^9}{9} + C$$

$$= -\frac{cos^5 x}{5} + \frac{2cos^7 x}{7} - \frac{cos^2 x}{9} + C$$

3-misol. $\int \frac{cos^3 x}{sin^2 x} dx$ ni toping.

Yechilishi. $z = sinx$ deb, $dz = cosx\, dx$, $cos^2 x = 1 - sin^2 x = 1 - z^2$, $sin^2 x = z^2$ ni hosil qilamiz va demak,

$$\int \frac{cos^3 x}{sin^2 x} dx = \int \frac{(1-sin^2 x) cosxdx}{sin^2 x} = \frac{1-z^2}{z^2} dz = \int \left(\frac{1}{z^2} - 1\right) dz = -\frac{1}{z} - z + C = -\frac{1}{sinx} - sinx + c$$

Izoh. Shu metodni m va n sonlardan biri toq va musbat ikkinchisi esa ixtiyoriy bo'lganda ham qo'llaymiz.

4- misol. $\int \sqrt[3]{cos^4 x}\, sin^3 x\, dx$ ni hisoblang.

Yechilishi. Quyidagiga egamiz: $\int \sqrt[3]{cos^2 x}\, sin^3 x dx = cos^{\frac{2}{3}} x sin^2 x \cdot sinxdx$. $cosx = z$ deymiz. U holda $dz = -sinxdx$. Demak

$$\int \sqrt[3]{cos^2 x}\, sin^3 x dx = -\int (z^{\frac{2}{3}} - z^2) dz = -\int (z^{\frac{2}{3}} - z^{\frac{8}{3}}) dz =$$

$=-\frac{3z^{\frac{5}{3}}}{5}+\frac{3z^{\frac{11}{3}}}{11}+C=3z^{\frac{5}{3}}(\frac{z}{11}-\frac{1}{5})+C=3cosx\sqrt[3]{cos^2x}(\frac{cos^2x}{11}-\frac{1}{5})+C$

Endi m va n ko'rsatkichlarning ikkalasi ham juft va manfiymas (xususan bittasi nolga teng bo'lishi mumkin) bo'lsin. $sin^2 x$, $cos^2 x$, $sinx\ cosx$ larni

$$sin^2x=\frac{1-cos2x}{2},\ cos^2x=\frac{1+cos2x}{2},\ sinxcosx=\frac{1}{2}sin2x$$

formulalar bilan almashtirib, sin^nxcos^mx ko'paytma shunga o'xshash yig'indi bilan almashtiriladi, lekin bu yig'indini darajasi kichik (past) bo'ladi.

3. $R(sinx,cosx)dx$ ko'rinishidagi integrallar. Bunda $R(sinx,cosx)dx$ ko'rinishidagi integrallarni hisoblashning umumiy metodini qaraymiz, bu yerda $R(sinx,cosx)dx$ – $sinx$ va $cosx$ ga nisbatan ratsional. Bunday integrallar masalan quyidagilar:

$$\int\frac{\sin x+\cos x}{\cos^2 x+2}dx,\int\sin^3 xcos^2x\,dx,\ \int\frac{dx}{sinx}$$

Haqiqatdan trigonometriyadan ma'lum formulalarni qo'llanib quyidagilarni topamiz: $sinx=2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}=\frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2z}{1+z^2}$

Shunga ohshash $cosx=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-z^2}{1+z^2x}$

Nihoyat, $z=tg\frac{x}{2}$ ni hisobga olib, $x=2arctg\ z, dx=\frac{2dz}{1+z^2}$ ni topamiz. Bu formulalar $sinx$, $cosx$ va dx lar z orqali ratsional ifodalanishini ko'rsatadi $sinx, cosx$ va dx larni z orqali ifodalarini o'rniga qo'yib quyidagini hosil qilamiz:

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2z}{1+z^2},\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2}{1+z^2}dz.$$

Ohirgi integral z ga nisbatan ratsional funksiyaning integralini bildiradi.

5-misol. $\int\frac{dx}{\sin x}$ ni toping

Yechilishi: $z=tg\frac{x}{2}$ deb yuqoridagi formulalardan foydalanib quyidagiga ega bolamiz: $\int \frac{dx}{sinx} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z} = ln|z| + C = ln|tg\frac{x}{2}| + c$

Shunday qilib, $\int \frac{dx}{sinx} = \ln|\mathrm{tg}\frac{x}{2}| + C$

$$\int \frac{dx}{cosx} = \ln|\mathrm{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| + C$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

$z = tg\frac{x}{2}$ almashtirish bilan $\int R(sinx, cosx)dx$ integral hamma vaqt ham ratsional funktsiya integraliga keltirilgani bilan, ba'zan qo'pol hisoblashlarga olib keladi. Shuning uchun ko'p hollarda integralni topishini boshqa metodlaridan foydalangan ma'qul.

Ba'zi integralni $tgx = z$ o'zgaruvchini almashtirish bilan topish mumkin.

Haqiqatan, $x = arctgz$ va $dx = \frac{dz}{1+z^2}$, shuning uchun

$\int R(tgx)dx = \int R(z)\frac{dz}{1+z^2}$

integral ostidagi ifoda ratsional funktsiyasidir.

6-misol. $\int tg^3x\, dx$ ni toping.

Yechilishi. $z = tg\, x$ deb, quyidagiga egamiz:

$$\int tg^3x\, dx = \int \frac{z^3dz}{1+z^2} = \int \left(z - \frac{z}{1+z^2}\right) dz = \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}\, ln(1 + z^2) + C =$$

$$= \frac{tg^2x}{2} - \frac{1}{2} ln(1 + tg^2x) + C = \frac{tg^2x}{2} - \frac{1}{2}\, ln\frac{1}{cos^2x} + C =$$

$$= \frac{tg^2x}{2} + ln|\cos x| + C.$$

Izoh. Agar $sin\, x$ va $cos\, x$ lar juft darajada olinsa $R(sin\, x, cos\, x)dx$ ko'rinishdagi integrallar ham shunday o'rniga qo'yish bilan olinadi. $sin^2\, x$ va $cos^2 x$ lar $tg\, x$ ga nisbatan ratsional ifodalanishidan kelib chiqadi:

$$sin^2x = \frac{1}{1 + ctg^2x} = \frac{tg^2x}{1 + tg^2x}, \quad cos^2x = \frac{1}{1 + tg^2x}.$$

3.3. Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash

Irratsional ifodalarni o'z ichiga olgan integrallarning ba'zi tiplarini qarab chiqamiz.

1. $\int \mathrm{R}(x, \sqrt[n]{ax+b})\, dx$ *ko'rinishidagi integrallr.*

$\int \mathrm{R}(x, \sqrt[n]{ax+b})\, dx$ ko'rinishidagi integral ratsional funksiyaning integraliga keltirilishi mumkin, bu yerda n- butun son $\mathrm{R}(x, \sqrt[n]{ax+b})$ esa x va $\sqrt[n]{ax+b}$ ga nisbatan ratsional funksiya. Haqiqatan, berilgan integralda $ax+b=z^n$ deb o'zgaruvchini almashtiramiz, u holda $x=\frac{z^n-b}{a}$, $dx=\frac{nz^{n-1}}{a}dz$, $\sqrt[n]{ax+b}=z$.

Demak, $\int \mathrm{R}(x, \sqrt[n]{ax+b})dx = \int \mathrm{R}\left(\frac{z^n-b}{a}, z\right)\frac{nz^{n-1}}{a}dz.$

Tenglikning o'ng tomonida turgan integral integrallash o'zgaruvchisi z ga nisbatan ratsional funktsiyaning integralidir.

1-misol. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$ ni toping.

Yechilishi. Bu yerda $ax+b=x, n=2$, $x=z^2$ deb, $dx=2zdz$ ni topamiz. Demak, $\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}dx = \int \frac{(1-z)2zdz}{z^2-2z} = 2\int \frac{(1-z)dz}{z-2}$

Shunday qilib, ratsional funksiya integraliga keltirdik:

$$2\int \frac{(1-z)dz}{z-2} = 2\int\left(-1-\frac{1}{z-2}\right)dz = -2z-2\,ln|z-2|+C$$

z o'rniga x ning ifodasini, ya'ni $z=\sqrt{x}$ ni qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz: $\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}dx = -2(\sqrt{x}+ln|\sqrt{x}-2|)+C$

Umumiy ko'rinishdagi $\int \mathrm{R}\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

Integral ratsional funktsiyali integralga $\frac{ax+b}{cx+d}=z^n$ o'rniga qo'yish yordamida ratsional ifodaga keltiriladi, bu yerda x va $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ larga nisbatan ratsional ifoda $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ va $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}$ integralarni ko'raylik:

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arc\sin\frac{x}{a} + C.$

Ikkinchi integralni hisoblash uchun $\sqrt{x^2+m} = -x + t$ almashtirishni bajaramiz. Tenglikning ikkala tomonini kvatratga ko'tarib, $x^2 + m = x^2 - 2xt + t^2$ ni hosil qilamiz. Bundan: $x = \frac{t^2-m}{2t}$, $dx = \frac{t^2+m}{2t^2}dt$

Bundan tashqari, $\sqrt{x^2+m} = -x + t = -\frac{t^2-m}{2t} + t = \frac{t^2+m}{2t}$, bo'lgani uchun $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \int \frac{\frac{t^2+m}{2t^2}}{\frac{t^2+m}{2t}} = \int \frac{dx}{t} = ln|t| + C.$

Lekin $t = \sqrt{x^2+m} + x$, bo'lgani uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = ln\left|x + \sqrt{x^2+m}\right| + C$

2.$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ *va* $\int \sqrt{x^2+m}\,dx$ *ko'rinishidagi integrallar*. Ikkinchi integralni qaraylik: $\int \sqrt{x^2+m}\,dx = \int \frac{x^2+m}{\sqrt{x^2+m}}dx = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+m}} + m\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}$ (1)

bunda quyidagiga egamiz: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = ln\left|x + \sqrt{x^2+m}\right| + C$

$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+m}}$ integralni hisoblash uchun bo'laklab integrallash metodini qo'llaymiz, bunda $u = x, dv = \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+m}}$; u holda $du = dx, v = \sqrt{x^2+m} -$

Demak, $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+m}} = x\sqrt{x^2+m} - \int \sqrt{x^2+m}\,dx$

Integrallarning topilgan qiymatlarini (1) tenglikka qo'yib quyidagini yozamiz:

$$\int \sqrt{x^2+m}\,dx = x\sqrt{x^2+m} - \int \sqrt{x^2+m}\,dx + m\,ln\left|x + \sqrt{x^2+m}\right|.$$

Ohirgi munosabatining chap va o'ng tomonlarida izlangan $\int \sqrt{x^2+m}\,dx$ integral turibdi. Uni chap tomonga o'tkazib, quyidagini topamiz:

$$\int \sqrt{x^2+m}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+m} - \int \sqrt{x^2+m}\,dx + m\,ln\left|x + \sqrt{x^2+m}\right|\right) + C$$

Shu usul bilan

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}) + C$$

ekanligini ko'rsatish mumkin.

3. $\int R(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C})\,dx$ *ko'rinishdagi integrallar.* Bu ko'rinishdagi integralda ildiz ostidagi ifoda $t = \frac{1}{2}(Ax^2 + Bx + C)' = Ax + \frac{B}{2}$ o'rniga qo'yish yordamida kvadratlarning yig'indisi va ayirmasiga almashtiriladi, bu yerda $R(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C}) - x$ va $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ larga nisbatan ratsional funksiya. U holda $\int R(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C})\,dx$ integral A, B, C, koeffitsientlarga bog'liq ravishda quyidagi integrallardan biriga keltiriladi:

$$I. \int R(t, \sqrt{a^2 - t^2}\,dt). \quad II. \int R(t, \sqrt{a^2 + t^2})\,dt.$$

$$III. \int R(t, \sqrt{t^2 - a^2})\,dt.$$

Bu integrallarda quyidagi o'rniga qo'yishlarining biri yordamida topilpdi:

I. tip integallar uchun $t = a \sin z$;

II. tip integallar uchun $t = a\, tg\, z$;

III. tip integallar uchun $t = a / \cos z$;

2-misol. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}dx$ ni toping.

Yechilishi. Avval integralda $t = \frac{1}{2}(x^2 + 2x - 3)' = x + 1,\ x = t - 1, dx = dt$ o'rniga qo'yishlarni bajaramiz. U holda

$$x^2 + 2x - 3 = (t-1)^2 + 2(t-1) - 3 = t^2 - 4.$$

Demak,

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{(x+1)^3}dx = \int \frac{\sqrt{t^2 - 4}}{t^3}dt.$$

Ohirgi tenglikning o'ng tomonidagi III tipdagi integraldir. Uni hisoblash uchun $t = 2/\cos z$ deb olamiz. U holda

$$dt = \frac{2\sin z}{\cos^2 z}dz, \sqrt{t^2 - 4} = \sqrt{\frac{4}{\cos^2 z} - 4} = 2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 z} - 1} = 2tgz.$$

Shunday qilib,

$$\int \frac{\sqrt{t^2-4}}{t^3}dt$$

$$= \int \frac{2tgz}{(2/cos\ z)^3} \cdot \frac{2\sin z}{cos^2 z}dz = \frac{1}{2}\int sin^2 zdz = \frac{1}{2}\int \frac{1-cos2z}{2}dz$$

$$= \frac{1}{4}\left(z - \frac{\sin 2z}{2}\right) + C = \frac{1}{4}(z - \sin z \cos z) + C.$$

$t = \frac{2}{\cos z}$ bo'lgani uchun $\cos z = \frac{2}{t}, z = arccos\left(\frac{2}{t}\right), sinz = \sqrt{1 - cos^2 z} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{t}\right)^2} = \frac{\sqrt{t^2-4}}{t}.$

Shuning uchun

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}dx = \int \frac{\sqrt{t^2-4}}{t^3}dt = \frac{1}{4}\left[arccos\left(\frac{2}{t}\right) - \frac{2\sqrt{t^2-4}}{t^2}\right] + C$$

$x(t = x+1)$o'zgaruvchiga qaytib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}dx = \frac{1}{4}\left[arccos\frac{2}{x+1} - \frac{2\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^2}\right] + C.$$

VII bob uchun o'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Funktsiyaning boshlang'ich funksiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Aniqmas integral deb nimaga aytiladi?
3. Aniqmas integralning asosiy xossalarini ayting.
4. Asosiy elementar funksiyalarning aniqmas integrallari jadvalini yozing.
5. Yoyish metodi bilan integrallash deb nimaga aytiladi?
6. O'zgaruvchini almashtirish metodi deb nimaga aytiladi?
7. Bo'laklab integrallash deb nimaga aytiladi?
8. Sodda ratsional kasrlar deb nimaga aytiladi?
9. Sodda ratsional kasrlarni integrallash deb nimaga aytiladi?
10. Ratsional kasrlarni integrallash deb nimaga aytiladi?
11. Ba'zi bir trigonometrik funksiyalarning integrallash formulalarini yozing.
12. Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash formulalarini yozing.

VII bob uchun mustaqil yechish uchun misollar

1. $F(x)=\cos 3x-\cos\pi$ funksiya quyidagi $f_1(x)=\sin 3x$, $f_2(x)=-\sin 3x+\sin\pi$, $f_3(x)=3\sin 3x$, $f_4(x)=-3\sin 3x$ funksiyalarning qaysi biri uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi?

2. Quyidagi $F_1(x)=x^5$, $F_2(x)=0,2x^5$, $F_3(x)=4x^3$, $F_4(x)=0,2x^5+5$, $F_5(x)=4^3+4$, $F_6(x)=x^5-5$ funksiyalardan qaysilari $f(x)=x^4$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi?

3. $f(x)=x^2$ funksiyaning $M(-1;3)$ nuqtadan o'tuvchi boshlang'ich funksiyasini toping.

4. $\int \sin 3x\cos 3x dx$ ni hisoblang.

5. $\int \frac{x^3+2x+2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$ ni hisoblang.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x/2}}$ ni hisoblang.

VIII BOB. ANIQ INTEGRALLAR

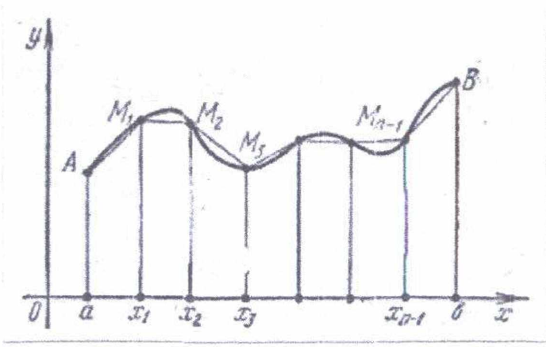
1-§. Aniq integral va uning xossalari

1.1 Aniq integral tushunchasiga olib keluvchi masala

$[a, b]$ da uzluksiz va $f(x) \geq 0$ bo'lgan funksiya berilgan bo'lsin.

1- ta'rif. $y = f(x)$funksiyaning grafigi , Ox o'qi, $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan tekis figura $a\,AB\,b$ egri chiziqli trapetsiya deb ataladi.

Xususiy holda A bilan a nuqta yoki B bilan b nuqta ustama-ust tushishi mumkin, yoki xar ikkala hol bir vaqtda yuz berishi mumkin. Bu xollarda ham qaralayotgan figura egri chiziqli trapetsiya deb yuritiladi. Shu trapetsiyaning yuzini topish talab qilinsin. Buning uchun $[a, b]$ ni $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lib va bo'linish nuqtalaridan Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, $aABb$ egri chiziqli trapetsiyani n ta kichik egri chiziqli trapesiyaga bo'lamiz.(1-chizma)



1-chizma

Endi har bir $[x_{k-1}; x_k]$ segmentchada ixtiyoriy ε_k nuqta olamiz. Har bir egri chiziqli trapetsiyada asosi $[x_{k-1}; x_k]$ va balandligi f(ε_k) bo'lgan to'g'ri to'rt burchak chizamiz. Bu to'g'ri to'rt burchakning yuzalari

$$f(\varepsilon_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\varepsilon_k)\Delta x_k (k = 1,2, \dots, n)$$

bo'ladi, bunda[$x_{k-1}; x_k$] segmentchaning uzunligini qisqacha $\Delta x_k = (x_k - x_{k-1})$ orqali berilgan nda, n ta to'g'ri to'rt burchak yuzlarining yig'indisini esa

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k$$

orqali belgilaymiz. $[x_{k-1}; x_k](k=\overline{1,n})$ segmentchalar uzunliklarining eng kattasini λ orqali (yani $\lambda = max\Delta x_k$) belgilaymiz. $\lambda \to 0$ da yani $[a, b]$ ni mayda bo'laklarga bo'linish soni n cheksiz o'sganda S_n ifoda egri chiziqli trapetsiya yuziga tobora yaqinlasha boradi. Shuning uchun egri chiziqli trapetsiyaning yuzi uchun

$$S = \lim_{\lambda \to 0} S_n = \lim_{max\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k$$

ni qabul qilish tabiiydir.

Kuch ta'sirida bajariladigan ishni xisoblash masalasi. Moddiy nuqtaga nuqtaning holatiga qarab abssisalar o'qi yo'nalishidagi o'zgaruvchan $F = f(x)$ kuch ta'sir qiladi. Moddiy nuqta F kuch ta'sirida a nuqtadan b nuqtagacha xarakatlaganda bajarilgan ishini topish talab qilinsin. $[a, b]$ ni n ta bo'lakka bo'lamiz, har bir $[x_{k-1}; x_k]$ bo'lakda F kuchni deyarli o'zgarmas deb qarasak bajariladigan ish taqriban $f(\varepsilon_k)\Delta x_k$ bo'ladi, bunda $\varepsilon_k \in [x_{k-1}; x_k], \Delta x_k = (x_k - x_{k-1})$ bo'lib, (a, b) da $f(x)$ kuch bajaradigan ish taqriban

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k$$

ga teng bo'ladi. Endi $[x_{k-1}; x_k]$ bo'lakchalarning eng uzunini kichraytirib nolga intiltirsak yani $\lambda = max\Delta x_k \to 0$ bo'lsa, u holda bajarilgan ish uchun

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k$$

ni hosil qilamiz.

Shunday qilib har ikkala masalani yechish ushbu

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k$$

ko'rinishdagi yig'indilarning limitini hisoblash masalasiga olib kelinadi. Shunga o'xshash ko'pchilik mehanik, geometrik masalalar shu ko'rinishdagi yig'indining limitini izlashga keltiriladi.

1.2. Aniq integralning ta'rifi

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ da aniqlangan bo'lsin $[a,b]$ ni

$$a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots x_n = b$$

nuqtalar bilan n ta bo'lakka bo'lamiz va bo'luvchi sonlar to'plamini T orqali belgilab T ni $[a,b]$ ning bo'linishi deb ataymiz. Endi har bir $[x_{k-1}; x_k]$ elementar kesmada bittadan ε_k nuqta tanlab olib, shu nuqtalarda fuksiyaning (k=$\overline{1,n}$) xususiy qiymatlarini hisoblaymiz va ushbu ko'paytmalar yig'indisini tuzamiz:

$$S(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k, \qquad (\text{bunda } \Delta x_k = (x_k - x_{k-1}), \lambda = max\Delta x_k).$$

bu yig'indini $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ dagi integral yig'indisi deb ataladi. Ravshanki, λ ning kattaligi T ga bog'liq yani

$$\lambda = \lambda(T)\ va\ \ n \cdot \lambda(T) \geq b - a, (a < b)$$

bundan esa $\lambda(T) \to 0\ da\ \ n \to \infty$ ekani kelib chiqadi.

Shunday qilib, $[a,b]$ ning T bo'linishlari va $\varepsilon_k \in [x_{k-1}; x_k]$ nuqtalarni tanlash usullari cheksiz ko'p bo'lganligi sababli $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ dagi integral yig'indilari to'plami cheksiz to'plamdir.

1-ta'rif. Agar $\lambda(T)$ holga intilganda $f(x)$ fuksiyaning $[a,b]$ dagi integral yig'indisi chekli I limitga ega bo'lib, bu limit $[a,b]$ ning T bo'linishlariga va ε_k nuqtalarni tanlash usulliga bog'liq bo'lmasa I limit $f(x)$ fuksiyaning $[a,b]$ dagi aniq integrali deyiladi va $\int_a^b f(x)dx$ orqali belgilanadi yani:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

bunday holda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi deb ataladi.

a va b sonlar mos ravishda integrallashning quyi va yuqori chegaralari deyiladi, $f(x)$- integral ostidagi funktsiya, x-integrallash o'zgaruvchisi, $[a, b]$ segment esa integrallash segmenti (yoki integrallash sohasi) deyiladi.

Aniq integralning geometrik ma'nosi $[a, b]$ segmentning barcha x qiymatlari uchun $f(x) > 0$ bo'lganda $y = f(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini bildiradi:

$$S = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Fizik ma'nosi esa kattaligi $F = f(x)$ bo'lgan o'zgaruvchi kuchning $[a, b]$ segment bo'yicha bajargan A ishiga teng:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

1-izoh. Berilgan $f(x)$ funktsiya va berilgan $[a, b]$ segment uchun ravshanki, biz cheksiz ko'p integral yig'indilarga ega bo`lamiz. Bu integral yig'indilarning qiymati bo'linish nuqtalari bo'lgan $x_1, \dots x_2, \dots x_i \dots, x_{n-1}$ larga qanday boglik bo`lsa, oralik nuqta ε_k larning tanlanishiga xam shunday bog'lik bo'ladi.

2-izoh. Agar y= $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ segmentda manfiymas bo`lsa, u xolda integral yig'indi uning qo'shiluvchilari kabi oddiy geometrik ma'noga ega. Shu bilan birga $f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ ko`paytma asosi $[x_{i-1}, x_i]$ va balandligi $f(\varepsilon_i)$ -egri chiziqning ε_i nuqtadagi ordinatasi bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuziga teng.

3-izoh. Ra vshanki, integral yig'indi berilgan funktsiyaning argumenti qanday harf bilan belgilanishiga bog'lik emas. Demak uning limiti, ya'ni aniq integral o'zgaruvchining belgilanishiga bog'lik emas:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(t)\,dt \text{ va h. k.}$$

1-misol. $\int_a^b 2dx$ integralni hisoblang.

Yechilishi. $[a,b]$ segmentni $x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_{n-1}$ bo'lish nuqtalari bilan n ta teng bo'lakka bo`lamiz va tegishli integral yig'indini tuzamiz. Integral ostidagi funksiya o'zgarmas bo'lgani uchun oraliq ε_i nuqtalarni ixtiyoriy tanlanganimizda ham quyidagini hosil qilamiz:

$$\sigma_n = 2*\Delta x_1 + \cdots + 2*\Delta x_i + \cdots + 2*\Delta x_{n} = 2((x_1 - a) + \ldots$$

$$\ldots + (x_i - x_{i-1}) + \ldots + (b - x_{n-1})) = 2(b-a).$$

Shunday qilib, berilgan funktsiya uchun ixtiyoriy integral yig'indi $2(b-a)$ ga teng va demak uning limiti (ya'ni aniq integral) ham $2(b-a)$ ga teng:

$$\int_a^b 2dx = 2(b-a).$$

1.3. Integrallanuvchi funksiyalar haqidagi teoremalar

Aniq integral mavjud bo'lishining zaruriy sharti.

1-teorema. Agar $[a;b]$ da f(x) fuksiya integrallanuvchi bo'lsa u holda bu funksiya $[a;b]$ da chegaralangan bo'ladi.

Isboti. Teoremani teskarisini faraz qilish bilan isbotlaymiz, yani $[a;b]$ da $f(x)$ funksiya chegaralanmagan bo'lsin. U holda $f(x)$ funksiya $[x_{k-1};x_k]$ kesmalarini hech bo'lmaganda birida chegaralanmagan bo'ladi . Haqiqatan funksiya $[x_{i-1};x_i]$ da chegaralanmagan bo'lsin u holda integral yig'indini quyidagicha yozamiz:

$$S(\lambda) = A + f(\varepsilon_i)\Delta x_i,$$

bunda

$$A = \sum_{k=1}^{i-1} f(\varepsilon_k)\Delta x_k + \sum_{k=i+1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k$$

$[x_{i-1}; x_i]$ da $f(x)$ chegaralanmaganligidan $f(\varepsilon_i)\,\Delta x_i$ ning ham chegaralanmaganligi kelib chiqadi. Shuning uchun shunday $\varepsilon_i \in [x_{i-1}; x_i]$ nuqta mavjudki uning uchun $|f(\varepsilon_i)\Delta x_i| > |A| + \frac{1}{\lambda}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Shunga ko'ra

$$|S(\lambda)| = A + f(\varepsilon_i)\Delta x_{i,} \geq |f(\varepsilon_i)\Delta x_i| - |A| > |A| + \frac{1}{\lambda} - |A| = \frac{1}{\lambda}$$

Bunda $\lambda \to 0\ da\, S(\lambda)$ ning chegaralanmaganligi va demak , integral yig'indining chekli limiti mavjud emasligi kelib chiqadi.

Bu esa $f(x)$ funksiyaning integrallanuvchi ekanligiga zid bo'ladi.

Bu qarama-qarshilik teoremani isbot qiladi.

Shuni ham aytish kerakki ba'zi chegaralangan funksiyalar integrallanuvchi bo'lmasligi ham mumkin.

2-teorema. Agar $f(x)$funksiya $[a; b]$ da uzluksiz bo'lsa $[a; b]$ da integrallanuvchi bo'ladi.

3-teorema. Agar $[a; b]$ da chegaralangan $f(x)$ funksiya chekli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo'lsa u holda $f(x)$ integrallanuvchi bo'ladi.

4-teorama. $[a; b]$ da aniqlangan va monoton funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

Isboti. Aniqlik uchun $[a; b]$ da $f(x)$ funksiya kamaymaydigan bo'lsin u holda

$$a \leq x \leq b\ da\ f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

bo'ladi. Bu holda $[a; b]$ ning har qanday T bo'linishida $m_k\ va\ M_k$ qiymatlar

$$m_k = f(x_{k-1}) \leq f(x_k) = M_k (k = \overline{1, n})$$

tengsizliklarni qanoatlantiradi.

$[a, b]$ ning T bo'linishini olamiz va quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$m_k = inf f(x),\ M_k = \sup f(x)$$

$$\underline{S(\lambda)} = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_{k,} \quad \overline{S(\lambda)} = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_{k,}$$

yig'indilar mos ravishda Darbuning quyi va yuqori yig'indilari deb ataladi

$$\overline{S}-\underline{S}=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\Delta x_k$$
$$\leq\lambda\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\lambda|f(b)-f(a)|.$$

bunda $\lambda\to 0\ da\ \overline{S}-\underline{S}\to 0$ kelib chiqadi, demak funksiya integrallanuvchi.

Izoh. Agar $a=b$ bo'lsa ta'rifga ko'ra har qanday funksiya uchun ushbu tenglik o'rinli deb faraz qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx=0.$$

Chunki qaraladigan kesma bir nuqtadan iborat bo'lib, uning uzunligi $b-a=0$ bo'lgani sababli $k=\overline{1,n}$ uchun $\Delta x_k=0$ bo'ladi, yani integral yig'indi noldan iborat bo'ladi.

1.4. Aniq integralning asosiy xossalari

1- xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda $cf(x)(c-const)$ ham $[a;b]$ da integrallanuvchi va

$$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

Isboti. Yaqiqatan,

$$\sum_{k=1}^{n}cf(\varepsilon_k)\Delta x_k=c\sum_{k=1}^{n}f(\varepsilon_k)\Delta x_k$$

va

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

bo'lgani uchun

$$\sum_{k=1}^{n} cf(\varepsilon_k)\Delta x_k = c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k = c\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

2-xossa. Agar $f_1(x) va\ f_2(x)$ funksiyalar $[a;b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f_1(x) \pm f_2(x)$ ham $[a;b]$ da integrallanuvchi va

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

bo'ladi. Bu ham oldingi xossa kabi isbot qilinadi.

3-xossa. Integrallanuvchi $f(x)$ funksiya uchun

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

o'rinli.

Isboti. Faraz qilaylik, $a < b$ bo'lsin $[a;b]$ ning T bo'linishini olamiz. Ma'lumki, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ va

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)(x_k - x_{k-1}) = -\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)(x_{k-1} - x_k)$$

bo'lgani uchun

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

o'rinli.

4-xossa. Agar $f(x)$ funksiya uchun

$$\int_a^c f(x)dx, \int_a^b f(x)dx, \int_c^b f(x)dx,$$

mavjud bo'lsa, u holda ushbu tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

Isboti. $a < c < b$ bo'lsin. $[a;b]$ ni shunday n ta bo'lakka bo'lamizki, $c = x_m$ bo'linish nuqtalaridan biri bo'lsin, u holda

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\varepsilon_k)\Delta x_k + \sum_{k=m+1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k$$

va

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx, \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{m} f(\varepsilon_k)\Delta x_k = \int_a^c f(x)dx,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=m+1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k = \int_c^b f(x)dx$$

bo'lgani uchun bu yerdan hossa o'rinli ekani kelib chiqadi. Agar $a < b < c$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

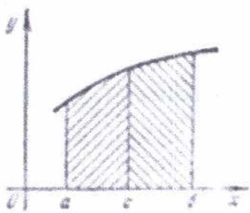
bo'lib, bundan

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

bo'ladi. Shunday qilib, c nuqta $[a;b]$ ning ichki yoki tashqi nuqtasi bo'lishidan qat'iy nazar integrallar mavjud bo'lganda ushbu tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

4-xossaning geometrik ma'nosi: agar $f(x) \geq 0$ bo'lsa, asosi $[a,b]$ segment bo'lgan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi asoslari $[a,c]$ va $[c,b]$ segmentlar bo'lgan egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalari yig'indisiga teng (2-chizma).



2-chizma

5-xossa. Agar [a, b] segmentda $f(x) \geq 0$ bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

bo'ladi.

Haqiqatan, $f(\varepsilon_i) \geq 0$ va $\Delta x_i \geq 0$ bo'lgani uchun ixtiyoriy i larda ushbu integral yig'indi

$$\sum_{i=0}^{n} f(\varepsilon_i)\,\Delta x_i \geq 0$$

o'rinli. Shuning uchun $\lambda \to 0$ da integral yig'indining limiti, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx$$

ham manfiymas.

Agar [a, b] segmentda $f(x) \geq 0$ bo'lsa yoki juda bo'lmasa bu segmentning bitta nuqtasida $f(x) > 0$ bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

qat'iy tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin.

6-xossa. Agar $[a; b]$ kesmada $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar integrallanuvchi bo'lib, $a \leq x \leq b$ da$f(x) \leq \varphi(x)$ o'rinli bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$$

o'rinli bo'ladi.

Isboti. $[a; b]$ kesmaning ixtiyoriy T(λ) bo'linishi uchun $f(\varepsilon_k) \leq \varphi(\varepsilon_k)$ $(k = \overline{1, n})$ bo'lgani sababli

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} \varphi(\varepsilon_k)\Delta x_k$$

bo'ladi, bundan

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k \leq \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\varepsilon_k)\Delta x_k$$

yoki

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$$

kelib chiqadi.

Xususan, hamma vaqt $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ bo'lgani uchun yuqoridagi xossalardan

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bundan quyidagiga egamiz:

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

O'rta qiymat haqidagi teorema. Agar $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda bu segmentning shunday nuqtasi topiladiki, bunda

$$\int_a^b f(x)dx = f(\varepsilon)\,(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$f(x)$ funktsiyaning $[a,b]$ segmentdagi eng katta va eng kichik qiymatlarini mos ravishda m va M bilan belgilaymiz. U holda istalgan x uchun $a \leq x \leq b$ bo'lganda quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Yuqoridagi xossalarni qo'llab, bu tengsizlikdan quyidagini hosil qilamiz:

$$m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\int_a^b dx.$$

Lekin

$$\int_a^b dx = b-a$$

bo'lgani uchun

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Ikki yoqlama tengsizlikning hamma hadlarini $b-a$ ga bo'lib,

$m \leq \mu \leq M$ ni hosil qilamiz, bunda

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu$$

Shunday qilib, μ soni $f(x)$ funktsiyaning eng kichik m qiymati va eng katta M qiymati orasida bo'lar ekan. Segmentda uzluksiz bo'lgan $f(x)$

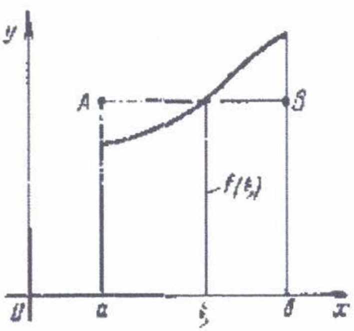
funktsiya m va M orasidagi barcha oraliq qiymatlarni qabul qilgani uchun ε ning $[a, b,]$segmentda shunday qiymati topildadiki, $f(\varepsilon) = \mu$ bo'ladi:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(\varepsilon)$$

yoki

$$\int_a^b f(x)dx = f(\varepsilon)(b-a).$$

O'rta qiymat haqidagi teorema geometrik mazmunga ega. $[a, b]$ segmentda $f(x) \geq 0$ bo'lsin. $\int_a^b f(x)dx$ integral egri chiziqli trapetsiyaning yuziga son jihatdan teng . $f(\varepsilon)(b-a)$ son asosi $[a, b]$ bo'lgan, balandligi $f(\varepsilon)$ga teng to'g'ri to'rtburchak yuzini bildiradi(3-chizma).



3-chizma

Funyiyaning ε nuqtadagi qiymati $f(\varepsilon)$ funktsiyaning senmentdagi o'rta qiymati deyiladi.

2-§. Aniq integralni hisoblash

2.1.Nyuton Leybnits formulasi

Ravshanki, agar $f(x)$ funktsiya $[a; b]$ da uzluksiz bo'lsa, u har qanday $[a; x] \subset [a; b]$ da ham integrallanuvchi bo'ladi va $\int_a^x f(t)dt$ integral x ning

$[a;b]$ kesmadagi har bir qiymatiga aniq bir sonni mos qo'yadi. Ya'ni, bu holda integral o'zining yuqori chegarasining funksiyasi bo'ladi:

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\ a \le x \le b.$

$\Phi(x)$ funktsiyasining $[a;b]$ da differentsiallanuvchi ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun x ga Δx orttirma berib, $\Phi(x)$ning mos orttirmasi $\Delta\Phi(x)$ ni topamiz $(x+\Delta x\epsilon[a;b])$: $\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=$

$\int_a^x f(t)dt+\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt.$

O'rta qiymat haqidagi teoremaga ko'ra $\Delta\Phi(x)=f(\xi)\Delta x$, chunki

$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt= f(\xi)\Delta x,\ \xi\epsilon(x;\ x+\Delta x).$

Bu tenglikdan $\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}= f(\xi)$ kelib chiqadi.

$\Delta x\longrightarrow 0$ da $\xi\longrightarrow x$ bo'lishini va $f(x)$ ning uzluksizligini nazarda tutsak,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x).$$

Shunday qilib, $\Phi'(x)= f(x)$ hosil bo'ladi. Bu tenglik, birinchidan , $\Phi(x)$ ning $[a;b]$ da hosilasi mavjudligini, ikkinchidan. $[a;b]$ da uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi $\Phi(x)$ mavjud ekanligini ko'rsatadi.

Endi aniq integral bilan boshlang'ich funktsiya yoki, umuman, aniqmas integral orasida qanday bog'lanish mavjudligini ko'rib chiqamiz.

$f(x)$ funktsiya $[a;b]$ da uzluksiz bo'lganligidan uning boshlang'ich funktsiyasi mavjud bo'ladi. $F(x)$ uning boshlang'ich funksiyalaridan biri bo'lsin: $F'(x) = f(x)$.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ham $f(x)$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi bo'ladi. Ma'lumki, berilgan funktsiyaning ikkita boshlang'ich funktsiyasi bir-biridan o'zgarmas son bilan farq qiladi: $\Phi(x) - F(x) = C.$

Demak,

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt = F(x) + C.$$

Bu tenglikdan o'zgarmas C ni topish uchun $x = a$ deb olamiz, u holda $0 = F(a) + C$, yoki $C = -F(a)$ bo'ladi, ya'ni $\Phi(x) = F(x) - F(a)$ yoki

$$\int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a)$$

bundan $x = b$ da

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

o'rinli. Bu formula integral hisobning asosiy formulasi bo'lib, Nyuton-Leybnits formulasi deb ataladi.

1-misol. $\int_1^2 e^x dx$ ni hisoblang.

Yechilishi. Integral ostidagi funktsiyaning boshlang'ich funktsiyalaridan biri e^x. shuning uchun Nyuton-Leybnits formulasini qo'llab, quyidagini hosil qilamiz: $\int_1^2 e^x dx = e^x|_1^2 = e^2 - e^1 = e(e-1)$

Ba'zan $F(x)|_a^b$ yozuv o'rniga $[F(x)]_a^b$ yozuvdan foydalanamiz.

2-misol. $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ni hisoblang.

Yechilishi. Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [arc\sin x]_0^{0.5} = arc\sin 0.5 - arc\, sin0 = \pi/6$$

Izoh. Nyuton-Leybnits formulasi integral ostidagi $f(x)$ funksiya uzluksiz degan farazda keltirib chiqarilgan edi. Uzilishiga ega bo'lgan funktsiyalar uchun Nyuton-Leybnits formulasi o'rinli bo'lmasligi ham mumkin.

2.2. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish

Aniqmas integrallarni hisoblashda yangi o'zgaruvchi kiritish usuli bilan soddaroq integralga erishish mumkin edi:

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$$

Shunga o'xshash masalani aniq integral uchun ham ko'rib chiqamiz.

1-teorema. Agar $\varphi'(t)$ funktsiya $[\alpha;\beta]$ kesmada uzluksiz va $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ bo'lib, $f(x)$ funktsiya $\varphi(t)$ funktsiyaning o'zgarish sohasida uzluksiz bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. $F(x)$ berilgan $f(x)$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi bo'lsin: $F'(x)=f(x)$. U holda

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a) \qquad (*)$$

o'rinli bo'ladi. $[\alpha;\beta]$ da $F(\varphi(t))$ funktsiya $y=F(x)\ va\ x=\varphi(t)$ munosabatlar bilan aniqlangan bo'lib, murakkab funksiyaning hosilasi qoidasiga ko'ra

$$(F[\varphi(t)])'=F'(\varphi(t))\,\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

bo'ladi. Demak, $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ uchun $F(\varphi(t))$ boshlang'ich funksiya rolini bajaradi, u holda $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))$ bo'ladi. Shartga ko'ra $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ bo'lgani uchun

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt=F(b)-F(a). \qquad (**)$$

(*) va (**) ni solishtirsak, $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$ kelib chiqadi.

Ko'pgina hollarda $x=\varphi(t)$ almashtirish o'rniga $t=\varphi(x)$ ko'rinishdagi almashtirishdan foydalaniladi. Bu holda $t=\varphi(x)$ ga teskari funktsiya mavjud bo'lishi va bu teskari funksiya teorema talablariga javob berishi kerak.

1-misol. $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ aniq integralni hisoblang.

Yechilishi. $\sqrt{x+1}=t$, ya'ni $x=\varphi(t)=t^2-1$ deylik. Mazkur holda $a=3$, $b=8$.

$x=a=3\ da\ t=\sqrt{3+1}=2$ ga egamiz; $x=b=8\ \ da\ t=\sqrt{8+1}=3$ ga egamiz. Shunday qilib, $\alpha=2, \beta=3$ So'ngra $\varphi'(t)dt=2t\,dt$ ni topamiz. Endi o'zgaruvchini almashtirish formulasidan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}=\int_2^3 \frac{(t^2-1)}{t}2t\,dt=2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_2^3=2\left[\left(\frac{3^3}{3}-3\right)-\left(\frac{2^3}{3}-2\right)\right]$$
$$=10\frac{2}{3}$$

2-misol. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$ integralni hisoblang.

Yechilishi. $x=a\sin t$ deb, $dx=a\,cost\,dt$ ni hosil qilamiz. Agar $x=0$ bo'lsa, u holda $\sin t=0$, bundan $t=0$ agar $x=a$ bo'lsa, $\sin t=1$ bundan $t=\pi/2$. Shunday qilib, $\alpha=0, \beta=\pi/2$.

Demak, o'zgaruvchini almashtirish formulasidan quyidagiga egamiz:

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx=\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-a^2sin^2t}\;a\,cost\,dt=a^2\int_0^{\pi/2} cos^2tdt=$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1+cos2t)dt=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{sin2t}{2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi a^2}{4}$$

2.3. Aniq integralni bo'laklab integrallash

Ma'lumki, aniqmas integralni hisoblashda bo'laklab integrallash usuli asosiy usullardan biri edi. Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra aniq integral bilan aniqmas integral bir-biri bilan muayyan bog'lanishga ega. Shu sababli bu usulni aniq integrallni hisoblashga ham tatbiq qilish mumkin. Buning uchun u(x) va $v(x)$ funktsiyalarni $[\,a;b]$ da uzluksiz hosilalarga ega deb olamiz. U holda $[a;b]$ da $u'v+uv'$ uzluksiz funktsiyaning boshlang'ich funksiyasi va Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_a^b [u'v + uv']dx = [uv]\Big|_a^b$$

bo'ladi. Bundan,

$$\int_a^b u'v\ dx + \int_a^b uv'\ dx = [uv]\Big|_a^b$$

yoki

$$\int_a^b uv'\ dx = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b v\ du$$

bo'ladi. So'ngra $v'dx = dv;\quad u'dx = du$ ni e'tiborga olsak,

$$\int_a^b u\ dv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b v\ du$$

aniq integralni bo'laklab integrallash formulasi hosil bo'ladi.

1-misol. $\int_0^\pi x\cos x\ dx$ ni hisoblang.

Yechilishi. $x = u,\ cosx\ dx = dv$ deb olaylik. U holda $du = dx,\ v = \sin x$. Bo'laklab integrallash formulasini qo'llab, quyidagini topamiz:

$\int_0^\pi x\cos x\ dx = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin\ x\,dx = 0 + [cosx]_0^\pi = -2,$

2-misol. $\int_1^e \ln x\ dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx = (e-0) - (e-1) = 1.$

3-§. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash

3.1. Trapetsiyalar metodi

Uzluksiz $f(x)$ funktsiyadan olingan $I = \int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblash talab qilinsin. Agar $F(x)$ boshlang'ich funktsiyani topish mumkin bo'lsa, u holda Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Agar boshlang'ich funksiyani topib bo'lmasa yoki $y = f(x)$ funktsiya grafik ravishda, jadval ko'rinishda berilgan bo'lsa, taqribiy hisoblash formulalariga murojaat qilinadi.

Aniq integralni hisoblashning taqribiy metodlari $y = f(x)$ egri chiziq, Ox o'qning $[a, b]$ segmenti va $x = a$ va $x = b$ nuqtalardan vertikal o'tkazilgan to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzini topishga asoslangan.

Integralni taqribiy hisoblash g'oyasi shundaki, $y = f(x)$ egri chiziq «o'ziga yaqin» bo'lgan egri chiziq bilan almashtiriladi. U holda izlangan yuza yangi egri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga taxminan teng bo'ladi.

Yangi egri chiziqning tanlanishiga qarab biz integralning u yoki bu taqribiy formulasini hosil qilamiz.

$I = \int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblash talab qilinsin. Integrallash segmenti $[a, b]$ ni $x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}$ nuqtalar yordamida n ta teng kichik segmentlarga ajratamiz. Bundan tashqari, $x_0 = a, x_n = b$ deb olamiz. Har bir kichik segmentning uzunligi $h = (b - a)/n$ ga teng. Bo'linish nuqtalaridan Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Ular egri chiziqni A_0, A_1, $A_2, \dots, A_{i-1}$, $A_i, \dots$, A_{n-1}, A_n nuqtalarda kesib o'tsin. Berilgan $y = f(x)$ egri chiziqni unga ichki chizigan $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ siniq chiziq bilan almashtiramiz, qo'shni ordinatalaminig uchlarini to'g'ri chiziqlar bilan tutashtiramiz.

$[a, b]$ segmentda $f(x) \geq 0$ bo'lsin. Yuqoridan siniq chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzi $\int_a^b f(x)dx$ integralning taqribiy qiymatini beradi.

Bu yuza yuqoridan siniq chiziq zvenolari bilan chegaralangan to'g'ri chiziqli trapetsiyalar yuzalarining yig'indisiga teng. Har bir trapetsiyaning yuzasini hisoblash mumkin. Haqiqatan, uning asosi qo'shni bo'linish nuqtalari x_{n-1} va x_1 ning ordinatalari, balandligi esa $h = (b - a)/n$ bo'lgan $[x_{i-1}, x_i]$ kichik segmentdir. Shuning uchun bunday trapetsiyaning yuzasi $h = (y_{i-1} + y_i)/2$, bu yerda $y_{i-1} = f(x_{i-1})$, $y_i = f(x_i)$.

Demak, yuqoridan $A_0A_1 \dots A_n$ siniq chiziq bilan chegaralangan figuraning yuzasi:

$$S_n = \frac{y_0 + y_1}{2}h + \frac{y_1 + y_2}{2}h + \dots + \frac{y_{i-1} + y_i}{2}h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}h.$$

Ravshanki, almashtirishlardan so'ng quyidagini hosil qilamiz:

$$S_n = h\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right), \text{ bu yerda } h = \frac{b-a}{n}.$$

Shunday qilib, quyidagi taqribiy hisoblash formulani hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right),$$

bu formula trapetsiyalar formulasi deyiladi. $f(x) \geq 0$ da keltirib chiqarilgan trapetsiyalar formulasi $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lgan istalgan $f(x)$ funksiya uchun o'rinli bo'lib qolaveradi.

Ravshanki, bo'lish nuqtalari soni n ortib borgan sari berilayotgan trapetsiyalar formulasining aniqligi ortib boradi.

Integralni trapetsiyalar formulasi bilan hisoblayotganda odatda quyidagicha ish tutiladi:

1) bo'linish nuqtalari n va $2n$ da I_n va I_{2n} integrallarining qiymatlari hisoblanadi:

2) hisoblash natijalari taqqoslanadi va bir xil birinchi raqamlar qoldiriladi.

1-misol. $n = 8$ va $n = 16$ deb, $\int_0^{1,6} sin(x^2)\,dx$ integralni trapetsiyalar formulasi yordamida hisoblang.

Yechilishi. $n = 8$ va $h = (b - a)/n = (1,6 - 0)/8 = 0,2$ da integral ostidagi funktsiyaning qiymatlar jadvalini tuzamiz:

i	x_i	x_i^2	$y_i = sin(x_i^2)$	i	x_i	x_i^2	$y_i = sin(x_i^2)$
0	0	0,00	0,0000	5	1,0	1,00	0,8415
1	0,2	0,04	0,0400	6	1,2	1,44	0,9915
2	0,4	0,16	0,1593	7	1,4	1,96	0,9249
3	0,6	0,36	0,3523	8	1,6	2,56	0,5487
4	0,8	0,64	0,5972				

trapetsiya formulasida $n = 8$ deb quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_0^{1,6} sin(x^2)dx \approx h\left(\frac{y_0+y_8}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7\right) ==$$

$$0,2\left[\frac{0+0,5487}{2} + 0,0400 + 0,1593 + 0,3523 + 0,5972 + 0,8415 + 0,9915 + 0,9249\right] = 0,2 \bullet 4,1807 = 0,8362.$$

Endi integral ostidagi funksiyaning $n = 10$ va $h = (b - a)/n = (1,6 - 0)/16 = 0,1$ dagi qiymatlarining jadvalini tuzamiz:

i	x_i	x_i^2	$y_i = sin(x_i^2)$	i	x_i	x_i^2	$y_i = sin(x_i^2)$
0	0	0,00	0,0000	10	0,9	0,81	0,7243
1	0,1	0,01	0,0100	11	1,0	1,00	0,8415
2	0,2	0,04	0,0400	12	1,1	1,21	0,9356
3	0,3	0,09	0,0899	13	1,2	1,44	0,9915
4	0,4	0,16	0,1593	14	1,3	1,69	0,9928
5	0,5	0,25	0,2474	15	1,4	1,96	0,9249
6	0,6	0,36	0,3523	16	1,5	2,25	0,7776
7	0,7	0,49	0,4706		1,6	2,56	0,5487
8	0,8	0,64	0,5972				

$n = 16$ uchun trapetsiya formulasini qo'llab, quydagini hosil qilamiz:

$$\int_0^{1,6} sin(x^2)dx \approx \frac{1,6}{16}\left[\frac{0+0,5487}{2} + 0,0100 + 0,00400 + 0,0899 + 0,1593 + 0,2474 + 0,3523 + 0,4706 + 0,5972 + 0,7243 + 0,8415 + 0,9356 + 0,9915 + 0,9928 + 0,9249 + 0,7776\right] = 0,8429.$$

Ikkala hisoblash natijalarini taqqoslab ko'ramizki, yaxlitlashda birinchi ikkita raqam ustma-ust tushadi. Demak aniq integralning taqribiy qiymati uchun $\int_0^{1,6} sin(x^2)\,dx \approx 0,84$ sonini olish mumkin. Bu aniq integralning jadval qiymati 0,00001 aniqlikda 0,84528 ga teng.

3.2. Parabolalar metodi (Simpson metodi)

Aniq integralni taqribiy hisoblashning bu metodi trapetsiyalar metodida bo'lganidek integral ostidagi funksiyani vatarlar bilan emas, balki o'qlari Oy o'qqa parallel bo'lgan parabolalarning yoylari bilan almashtirishga asoslangan. Bu metodni bayon qilishdan avval, berilgan egri chiziqli trapetsiyani chegaralovchi egri chiziqli trapetsiyani chegaralovchi egri chiziq $y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$ kvadrat uchhadning grafigi bo'lgan xususiy holni qaraymiz.

Quyidagi formula o'rinli:

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{b-a}{6}(y_{\text{ch}} + 4y_{\text{o'rt}} + y_{\text{o'}})\ (1),$$

bu yerda y_{ch} – egri chiziqning $x = a$ nuqtadagi ordinatasi, (chap ordinata), $y_{\text{o'}}$ – egri chiziqning $x = b$ nuqtadagi ordinatasi, (o'ng ordinata), $y_{\text{o'rt}}$ – egri chiziqning $[a, b]$ segment o'rta nuqtasining, ya'ni $x = (a + b)/2$ nuqta ordinatasi.

Bu munosabatni keltirib chiqarish uni bevosita tekshirishga keltiriladi. Formulaning chap tomonidagi ifodani hisoblaymiz:

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{A(b^3 - a^3)}{3} + \frac{B(b^2 - a^2)}{2} + C(b - a)$$

$$= \frac{b-a}{6}[2A(b^2 + ab + a^2) + 3B(b + a) + 6C].$$

(1) formulaning o'ng tomonidagi ifodalarni hisoblash uchun dastlab $y_{\text{ch}}, y_{\text{o'}}, y_{\text{o'rt}}$ larni topamiz:

$$y_{\text{ch}} = f(a) = Aa^2 + Ba + C;\ y_{\text{o'}} = f(b) = Ab^2 + Bb + C;\ y_{\text{o'rt}} = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$= A\frac{(a+b)^2}{4} + B\frac{a+b}{2} + C.$$

Topilgan qiymatlarni (1) formulaning o'ng tomoniga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz: $\frac{b-a}{6}(y_{\text{ch}} + 4y_{\text{o'rt}} + y_{\text{o'}}) = \frac{b-a}{6}[Aa^2 + Ba + C + A(a^2 + b^2 + 2ab) + 2B(a + b) + 4C + Ab^2 + Bb + C] = \frac{b-a}{6}[2A(a^2 + b^2 + ab) + 3B(b + a) + 6C]$.

Ko'rish mumkinki, (1) munosabatning chap va o'ng tomonlari mos ravishda teng, bu uning o'rinliligini isbot qiladi.

Endi ixtiyoriy $y = f(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani qaraymiz . Egri chiziqning

$M_1(x_{ch}; y_{ch}), M_2(x_{o'rt}; y_{o'rt}), M_3(x_{o'}; y_{o'})$ nuqtalari orqali yordamchi $y = Ax^2 + Bx + C$ parabolani o'tkazamiz (bu yerda $x_{ch} = a, x_{o'rta} = (a + b)(2, x_{o'} = b)$. Bunday uchta nuqta orqali har vaqt parabola o'tkazish mumkin, shu bilan birga bunday parabola faqat bitta bo'ladi

Yordamchi parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzi taqriban berilgan egri chiziqli trapetsiya yuziga teng:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx.$$

(1) formulaga ko'ra

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{b-a}{6}(y_{ch} + 4y_{o'rt} + y_{o'})$$

bo'lgani sababli ixtiyoriy $y = f(x)$ funksiya uchun quyidagi taqribiy tenglik o'rinli: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(y_{ch} + 4y_{o'rt} + y_{o'})$. (2)

Biroq, agar $[a, b]$ segment qancha katta bo'lsa, (1) formula beradigan yaqinlashish shuncha qo'pol bo'ladi. Shuning uchun $\int_a^b f(x)dx$ integralning ancha aniq qiymatini hosil qilish uchun quyidagicha ish tutamiz: $[a, b]$ segmentni uzunligi $h = (b-a)/2$ bo'lgan $2n$ ta juft bo'lakka ajratamiz. Aytaylik, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n-1}$ lar bo'lish nuqtallari bo'lsin. Uzunligi $(b-a)/n$ bo'lgan kichik segmentlarni qaraymiz:

$$[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2n-2}, x_2](x_0 = a, x_{2n} = b);$$

bu segmentlarning o'rtalari mos ravishda $x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}$ nuqtalar bo'ladi.

$\int_a^b f(x)dx$ integralni bir nechta integral yig'indisiga ajratamiz:

$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx.$ (3)

Bu tenglikdagi integrallarning har biriga (2) formulani qo'llanamiz:

$$\left.\begin{array}{l}\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_1 + y_2);\\ \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_2 + 4y_3 + y_4);\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n});\end{array}\right\} \quad (4)$$

bu yerda $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2n$. (4) munosabatlarning o'ng va chap tomonlarini qo'shib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) +$$
$$+4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})], \quad (5)$$

Bu formula parabollik trapetsiyalar yoki Simpson formulasi deyiladi.

Integrallni Simpson formulasi bilan hisoblaganda trapetsiyalar metodidagi kabi quyidagicha ish tutiladi:

1) Bo'linish nuqtalari $2n$ va $4n$ bo'lganda I_{2n} va I_{4n} integrallarning qiymatlari hisoblanadi;

2) Hisoblash natijalari taqqoslanib, bir xil birinchi raqamlar qoldiriladi.

1-misol. $2n = 4$ va $2n = 8$ da $\int_0^{1,6} sin(x^2)\, dx$ integralni Simpson formulasi yordamida hisoblang.

Yechilishi. $2n = 4$ va $h = (b - a)/2n = (1,6 - 0)/4 = 0.4$ uchun jadval tuzamiz:

i	x_i	x_i^2	$y_i = \sin(x_i^2)$
0	0	0,00	0,0000
1	0,4	0,16	0,1593
2	0,8	0,64	0,5972
3	1,2	1,44	0,9915
4	1,6	2,56	0,5487

(5) formulaga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_0^{1,6} \sin(x^2)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2]$$

$$= \frac{1,6-0}{12} [0 + 0,5487 + 4(0,1593 + 0,9915) + 2 \cdot 0,5972]$$

$$= 0,8462,$$

$2n = 8$ va $h = (b-a)/2n = (1,6-0)/8 = 0,2$ da quyidagini topamiz:

$$\int_0^{1,6} \sin(x^2)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)]$$

$$= \frac{1,6-0}{24} [0 + 0,5487$$

$$+ 4(0,0400 + 0,3523 + 0,8415 + 0,9249)$$

$$+ 2(0,1593 + 0,5972 + 0,9915)]$$

$$= 0,8455.$$

Ikkala hisoblash natijalarini taqqoslab ko'ramizki, yaxlitlashdan so'ng birinchi uchta raqam bir xil. Shuning uchun integralning taqribiy qiymati deb $\int_0^{1,0} sin(x^2)\,dx \approx 0,849$ ni qabul qilamiz. Eslatib o'tamizki berilgan integrallni 0,00001 aniqlikdagi jadval qiymati 0,84528 ga teng.

Izoh. Integrallash segmenti bir xil sondagi nuqtalarga bo'linganda Simpson metodi trapetsiyalar metodiga qaraganda odatda ancha aniq natija beradi. Trapetsiyalar metodida xatolik bo'lish nuqtalari sonining kvadratiga teskari proportsional, Simpson metodida esa bo'lish nuqtalari sonining to'rtinchi darajasiga teskari proportsional ekanligini ko'rsatish mumkin.

4-§. Aniq integralning geometriga va fizikaga tatbiqlari

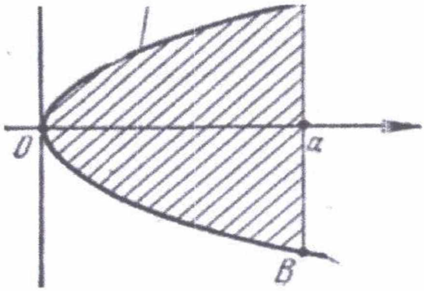
4.1. Tekis figura yuzini hisoblash

Faraz qilaylik, $x = a, x = b, y = 0$ to'g'ri chiziqlar va $y = f(x)$ funksiya grafigi bilan chegaralangan σ tekis figura berilgan bo'lsin. Biz

$f(x) \geq 0$ va $[a; b]$ kesmada uzluksiz deb faraz qilib, shu figura yuzini hisoblaymiz.

$$\sigma = \int_a^b f(x)\, dx \,.(1)$$

1-misol. Parabola segmentining yuzini , ya'ni $x = y^2$ parabola yoyi va $x = a$ to'g'ri chiziqning AB kesmasi bilan chegaralangan figuraning yuzini xisoblash(4-chizma).



4-chizma

Yechilishi. Parabola segmentining Ox o'qiga nisbatan simmetriyasidan kelib chiqib uning S yuzasini AO egri chiziqli trapetsiyaning ikkilangan yuzasi sifatida topamiz:

$$S = 2\int_0^a y dx = 2\int_0^a \sqrt{x} dx = \frac{4}{3} x^{3/2}\Big|_0^a = \frac{4a^{3/2}}{3}\frac{4}{3} a\sqrt{a}$$

2-misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips bilan chegaralangan figuraning yuzasini aniqlang.

Yechilishi. Ellipsning o'qlarga nisbatan simmetriyasidan izlangan yuza birinchi chorakdagi egri chiziqli trapetsiyaning to'rtlangan yuzasiga tengligi kelib chiqadi

$$S = 4\int_0^a y dx = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Bizga $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \pi a^2/4$ ekani ma'lum. Demak,

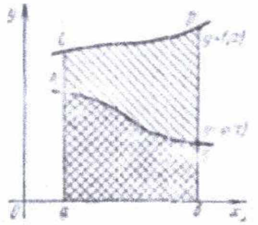
$$S = 4\frac{b}{a}\frac{\pi a^2}{4} = \pi ab$$

Xususan, agar $a = b = R$ bo'lsa, holda ellips radiusa R bo'lgan aylanaga o'tadi va biz doira yuzasining ma'lum formulasiga kelamiz $S = \pi R^2$

Agar yuqorida aytilgan σ figuraning quyidagi chegarasi $y=0$ to'g'ri chiziq o'rniga $y = \varphi(x)$ (bunda $\varphi(x)) \leq f(x)$) chiziq bilan chegaralangan bo'lib, $\varphi(x)$ funksiya $[a; b]$ da uzluksiz bo'lsa,

$$\sigma = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx \quad (2)$$

o'rinli bo'ladi (5-chizma).



5-chizma

3-misol. $y = x^2$ va $x = y^2$ chiziqlar bilan chegaralangan figura yuzasi topilsin.

Berilgan figura yuqoridan $y = \sqrt{x},\ 0 \leq x \leq 1$, chiziq bilan, quyidan esa $y = x;\ 0 \leq x \leq 1$ chiziq bilan chegaralangan. Shuning uchun (2) formulaga ko'ra

$$\sigma = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (kv. birl).}$$

Endi $[a, b]$ segmentda $f(x) < 0$ bo'lsin . Asosi $[a, b]$ bo'lgan quyidan $y = f(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya Ox o'qidan pastda yotadi. Simmetriya xaqidagi tassavarumizga ko'ra uning S yuzasi o'sha asosga ega bo'lgan lekin yuqoridan $y = -f(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzasiga tengligini aytib o'tamiz .Shartga ko'ra $f(x) < 0$ bo'lgani uchun $-f(x) > 0$ o'rinli va quydagini topamiz:

$$S = \int_a^b [-f(x)]\,dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Integral ostidagi funktsiya manfiy bo'lganda egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi shunday ifodalanadi.

4-misol. $y = x^2 - 4$ parabola va abstsissalar o'qi bilan chegaralangan figura yuzasini toping.

Yechilishi. $y = x^2 - 4$ parabola abstsissalar o'qi bilan $A(-2;0)$ va $B(2;0)$ nuqtalarda kesishadi. Binobarin asosi $[-2;2]$ segment bo'lgan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasini topish kerak. Bu segmentda $y \le 0$ bo'lganligi sababli S yuzani topish uchun yuqoridagi formuladan foydalanamiz.

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx = -\int_2^2 (x^2 - 4)dx = \left[-\frac{x^2}{3} + 4^2\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

Agar $[a;b]$ da uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya chekli son marta $c_1, c_2, \dots, c_k$ nuqtalarda nolga aylanib, o'zining ishorasini o'zgartirsa, u holda $y = f(x)$ va Ox o'q, $x = a, x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan yuzani topish uchun $[a;c_1]$, $[c_1;c_2]$,... $[c_k;b]$ kesmalarning har birida integralni alohida hisoblab, ularning absolyut qiymatlarini qo'shib chiqish kerak.

Agar egri chiziqli trapetsiyadagi egri chiziq parametrik usulda

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta$$

tenglamalar yordamida berilgan bo'lsa, u holda yuza quyidagicha topiladi. Bunda $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, [\alpha;\beta]$ da $\varphi(t)$ uzluksiz, $\varphi(t)$ monoton va uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega deb faraz qilamiz. O'zgaruvchini almashtirish qoidasiga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\sigma = \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$$

5-misol. Ellipsning yuzasi hisoblansin.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad \text{bunda} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Yechilishi. Ellipsning yuzasini chorak qismini topamiz:

$\frac{S}{4} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\,(-a\sin t)dt = ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin^2 t dt = \frac{ab}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos 2t)dt =$

$= \frac{ab}{2}(t - \frac{sin2t}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4};$

Demak, $S = \pi ab.$

Endi qutb koordinatalar sistemasida $\theta = \alpha, \theta = \beta$ nurlar va $p = f(\theta)$ chiziq bilan chegaralangan figura berilgan bo'lsin. Bu yerda $f(\theta) \geq 0,\ \ \alpha \leq 0 \leq \beta$ va uni uzluksiz deb faraz qilib, egri chiziqli sektorning yuzasini hisoblaymiz.

$\sigma = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\,d\theta$

6-misol. $r = a(1+\cos\varphi)$ kardioida bilan chegaralangan figura yuzasini hisoblang

Yechilishi. $\alpha = 0$ va $\beta = 2\pi$ da qo'llanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left[\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

4.2. Tekis egri chiziq yoyining uzunligini hisoblash

1-ta'rif. Koordinatalari

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad \alpha < t < \beta \end{cases}$$

formulalar bilan aniqlangan tekislik nuqtalari to'plami Jordan chizig'i deyiladi. Bunda $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funktsiyalar $[\alpha;\beta]$ da uzluksiz deb qaraladi. Shu bilan birga t ning $[\alpha;\beta]$ dagi har ikki qiymatiga tekislikning ikki nuqtasi mos keladi: bundan faqat $t = \alpha, t = \beta$ mustasno bo'lishi mumkin. Egri chiziqning yo'nalishi parametr t ning o'sish yo'nalishida deb qaraladi. Endi AB yoy yuqoridagi shartlarni qanoatlantiradigan Jordan chizig'i bo'lsin va bu chiziq yopiq bo'lmasin. $[\alpha;\beta]$ ning T bo'linishini olamiz:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta.$$

Bo'linish nuqtalarida $\varphi(t)$ *va* $\psi(t)$ larning qiymatlarini hisoblab, yoydagi $P_k\ (\varphi(t_k), \psi(t_k))$ nuqtalarni topamiz va yoyga uchlari $P_k(k = \overrightarrow{1,n})$ lardan iborat bo'lgan siniq chiziq chizamiz.

2-ta'rif. Agar $\lambda(T) = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta t_k \to 0$ da AB yoyga chizilgan siniq chiziq perimetrining chekli limiti mavjud bo'lsa, AB yoy to'g'rilanuvchi yoy deb aytiladi va o'sha limit uning uzunligi deyiladi.

Ravshanki, AB yoyga chizilgan siniq chiziqning perimetri

$$l(T) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2}$$

bo'lib, $sup\ l(T)$ mavjud bo'lganda, AB yoy uzunligi T bo'yicha

$$L = sup\ l(T)$$

bo'ladi.

3–ta'rif. Agar

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), t \in [\alpha;\beta] \end{cases}$$

tenglamalar bilan berilgan chiziq uchun $\varphi'(x), \psi'(x), [\alpha;\beta]$ da uzluksiz va

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$$

bo'lsa, u holda egri chiziq *silliq chiziq* deb ataladi.

1 - teorema. Har qanday silliq to'g'rilanuvchi yoy uzunligi

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$$

formula yordamida hisoblanadi.

Isboti. $[\alpha;\beta]$ning T bo'linishi uchun berilgan yoyga ichki chizilgan siniq chiziq perimetri:

$$l(T)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{|\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})|^2+|\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})|^2}$$

Har bir $[t_{k-1};t_k]$ uchun Lagranj teoremasini qo'llasak,

$$l(T)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{|\varphi'(\xi_k)|^2+|\psi'(\xi'_k)|^2}\Delta t_k$$

,

Bunda,

$t_{k-1}\leq\xi_k$, $\xi'_k<t_k$, $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$.

Agar $\xi_k=\xi'_k$ bo'lsa, u holda $l(T)$ integral yig'indiga aylanadi Bunda $\sigma(T)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{|\varphi'(\xi_k)|^2+|\psi'(\xi_k)|^2}\Delta t_k$

ham integral yig'indi.

Demak,

$$\lim_{\lambda\to 0} l(T)=\lim_{\lambda\to 0}\sigma(T)$$

o'rinli. Lekin

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma(T)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Shuning uchun

$$L=\lim_{\lambda\to 0} l(T)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt \ (1).$$

1-misol. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ tsikloidaning bitta arki uzunligini aniqlang ($0\leq t\leq 2\pi$)

Yechilishi. $x'(t)=a(1-\cos t), y'(t)=a\sin t$ bo'lgani uchun $\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}=a\sqrt{2(1-\cos t)}=2a\sin\frac{t}{2}$.

ga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$l=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a\cos\pi+4a\cos 0=4a+4a=8a.$$

Agar egri chiziq $[a;b]$ da $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lib, $f'(x)$ uzluksiz funksiya bo'lsa, uni

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x), a \leq x \leq b \end{cases}$$

Parametrik ko'rinishda yoza olamiz. Shuning uchun

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \ (2).$$

Endi tenglamalari $r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$ qutb koordinatalarida berilgan egri chiziq uzunligi uchun ifodani topamiz, bunda $r(\varphi)$ va $r'(\varphi)$, lar $[\alpha, \beta]$ segmentda uzluksiz deb faraz qilinadi. Parametr sifatida φ burchakni qabul qilib, bu egri chiziqni parametrik ko'rinishda ifodalash mumkin. Haqiqatan, dekart va qutb koordinatalari orasida $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ bog'lanish mavjud bo'lgani uchun $r = r(\varphi)$ ni e'tiborga olib, $x = r(\varphi)\cos\varphi, y = r(\varphi)\sin\varphi$ ni hosil qilamiz

$x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi$, $y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi$ bo'lgani uchun (2) formuladan foydalanib, quyidagini topamiz:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2}.d\varphi$$

Ma'lum soddalashtirishlardan so'ng quyidagini hosil qilamiz:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}.d\varphi \quad (3)$$

Yoy differensiali.

Oddiy Jordan chizig'i

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varphi(t), \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsin. Bu egri chiziqda belgilangan N nuqta va o'zgaruvchi M nuqtalarni olamiz. t ning o'zgarishi bilan NM yoy uzunligi o'zgaradi.

Shunday qilib, yoy uzunligi $s = \breve{NM}$ parametr t ning $s = s(t)$ funksiyasi bo'ladi. Shu funksiyaning differensialini topamiz. Yoy uzunligi

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{\varphi'^2(z) + \varphi'^2(z)}\,dz$$

ga teng. Bu integralni yuqori chegarasi t bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \varphi'^2(t)}$$

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \varphi'^2(t)}dt$$

Bu yoy differensiali formulasidir yoki

$$ds = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}dt = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

o'rinli.

4.3.Aylanma sirt yuzini hisoblash

$f(x) \geq 0$ funksya $[a; b]$ da aniqlangan va uzluksiz hossalarga ega bo'lsin. Uning grafigi bo'lgan AB egri chiziqni $0x$o'qi atrofida aylantirish natijasida aylanma sirt hosil bo'ladi. Shu sirtlarning yuzini aniq integral vositasida aniqlash talab qilinsin. $[\alpha; b]$ ning T bo'linishini olamiz:

$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b$$

Bo'linish nuqtasidan $0y$ o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ularni AB yoygacha davom ettiramiz. Buning natijasida AB yoy ham $M_k(x_k; f(x_k))$ nuqtalar orqali n ta bo'lakka bo'linadi. (6-chizma)

6-chizma

$M_0, M_1, \dots, M_k$ nuqtalarni ketma-ket vatarlar bilan tutashtiramiz.

AB yoyni $0x$ o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning yuzi deb hosil qilingan siniq chiziqlarni $0x$ o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'ladigan sirt yuzining $M_{k-1}M_k$ vatarlarning eng uzuni 0 ga intiladigan limiti qabul qilingan.

Shunday qilib, bu tarif aylanma sirt yuzining ta'rifini va shu bilan birga shu yuzni topish usulini ifoda qiladi.

Ma'lumki,

$|M_{k-1}M_k| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 - (y_k - y_{k-1})^2} \to 0$ da $\Delta x_k \to 0$ va aksincha. Shuning uchun kelgusida limitni $\lambda \to 0$ uchun ko'rib chiqamiz. $M_{k-1}M_k$ vatarni $0x$ o'q atrofida aylantirganda kesik konus sirti hosil bo'ladi, uning yuzi:

$$S_k = \frac{2\pi f(x_{k-1}) + 2\pi f(x_k)}{2} |M_{k-1}M_k|$$

bo'ladi. Jamlasak

$$P_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \Delta l_k$$

$$\Delta l_k = |M_{k-1}M_k|$$

bo'ladi. Δs_k mos ravishda M_{k-1} va M_k nuqtalar orasidagi yoy uzunligi. Ma'lumki $\Delta x_k \to 0$ da $\Delta s_k \to 0$ bo'ladi.

$\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}$ bo'linma $f(x_{k-1})$ va $f(x_k)$ lar orasidagi son bo'lsin, $f(x)$ uzluksiz bo'lganidan, shunday $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ mavjudki,

$\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2} = f(\xi_k)$ bo'ladi.

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = l$$

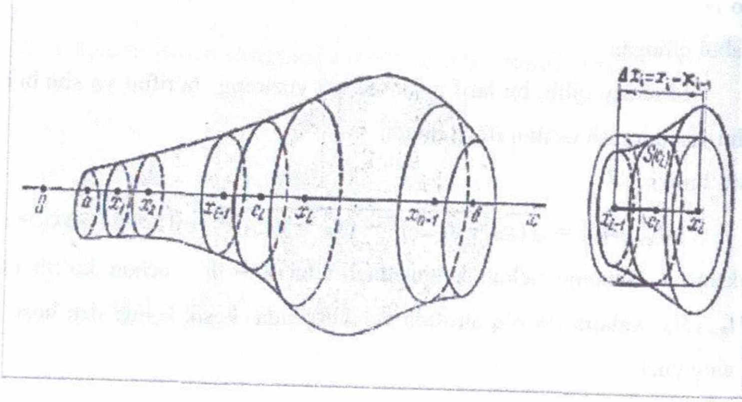
va yuqoridagi shartlarda AB yoyning to'g'rilanuvchiligi nazarda tutilsa

$$\lim_{\lambda \to 0} P_n = 2\pi \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta s_k = 2\pi \int_a^b f(x)ds,$$

ya'ni aylanma sirtning yuzi:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)ds \text{ bo'ladi,(7- chizma)}$$

bunda $dS = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$.



7- chizma.

Shunga o'xshash, agar yoy tenglamasi

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad \alpha \le 0 \le \beta \end{cases}$$

parametrik ko'rinishda berilgan bo'lib, φ va ψ lar uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, u holda sirt yuzi:

$$S = 2\pi \int_a^b \psi(t)\sqrt{\psi'^2(t) + \varphi^{`2}(t)}\, dt.$$

1-misol. Radusi R bo'lgan, sfera sirtining yuzi topilsin.

a) Aylana tenglamasi parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x_t} = -R\, sint \\ \dot{y_t} = R\cos t \end{cases}$$

Yechilishi. Chorak aylanani $0x$ o'q atrofida aylantirish natijasida yarim sfera hosil bo'ladi, demak bunda $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

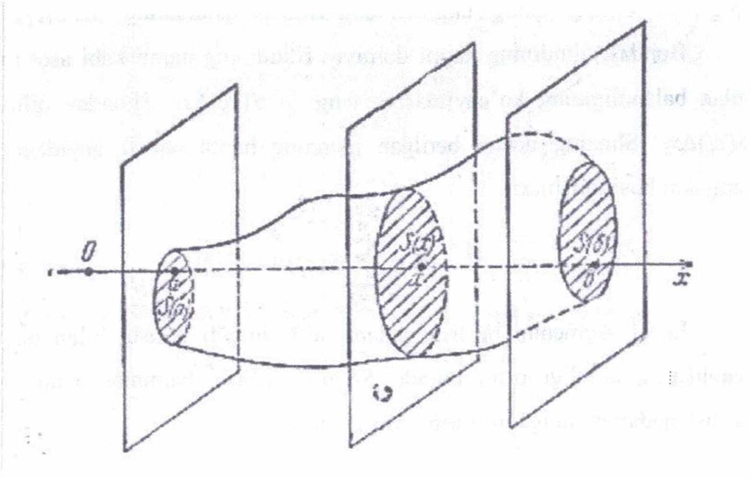
Shuning uchun

$\frac{S}{2} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\, sint \sqrt{(-\mathrm{Rsint})^2 + (Rcost)^2}\, dt = 2\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sintdt =$

$-2\pi \mathrm{R}^2 \mathrm{cost}|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \mathrm{R}^2.$ Demak $S = 4\pi R^2$.

4.4. Aylanish jismining hajmini hisoblash

Jismning xajmini ma'lum ko'ndalang kesimlari bo'yicha xisoblash. V xajmi aniqlanishi lozim bo'lgan biror jismni qaraymiz (8-chizma).



8-chizma

Faraz qilaylik bu jismning Ox *o'*qqa perpendikulyar bo'lgan tekisliklar bilan kesilgan kesimlarining yuzlari ma'lum bo'lsin. Bu kesimlar *ko'ndalang kesimlar* deyiladi. Ko'ndalang kesimning xolati uning Ox o'q bilan kesishish nuqtasining x abstsissasi bilan aniqlanadi. x ning o'zgarishi bilan kesim yuzi o'zgaradi. Demak, ko'ndalang kesim x ning biror funksiyasi ekan, uni biz $S(x)$ bilan belgilaymiz va ma'lum deb hisoblaymiz. So'ngra jismning chetki kesimlarining abstsissalarini a va b bilan belgilaymiz. Jismning V xajmini hisoblash uchun quyidagicha ish tutamiz : $[a, b]$ segmentni $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ nuqtalar bilan n ta bo'llaka ajratamiz va bo'linish nuqtalari orqali Ox o'qqa perpendikulyar tekisliklar o'tkazamiz. Bu tekisliklar jismni n ta qatlamga ajratadi. x_{i-1} va x_i nuqtalardan o'tkazilgan tekisliklar orasida joylashgan qatlam xajmini ΔV_i orqali belgilaymiz. U holda

$V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_n$ yoki $V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$

x_{i-1} va x_i abstsissali kesimlar xosil qilgan bitta qatlamni qaraylik. Uning ΔV_i xajmi balandligi $[x_{i-1}, x_i]$ kesmaning uzunligi, yani $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ga teng, asosi birorta s_i abstsissaga mos ko'ndalang kesim bilan ustma-ust tushadigan to'g'ri silindrning xajmiga taqriban teng. Demak, qatlamning yuzi $S(c_i)$ bo'ladi.

Bunday silindrning xajmi doiraviy silindrning hajmi kabi asosining yuzi bilan balandligining ko'paytmasiga teng: $S(c_i)\Delta x_i$. Shunday qilib, $\Delta V_i \approx S(c_i)\Delta x_i$. Shuning uchun berilgan jismning hajmi uchun quyidagi taqribiy tenglikni hosil qilamiz:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i.$$

$[a, b]$ segmentni bo'lish qadami λ kichrayib borishi bilan bu taqribiy tenglikning aniqligi ortib boradi. Shuning uchun hajmning aniq qiymatini bo'lish qadamini nolga intiltirib hosil qilamiz:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i$$

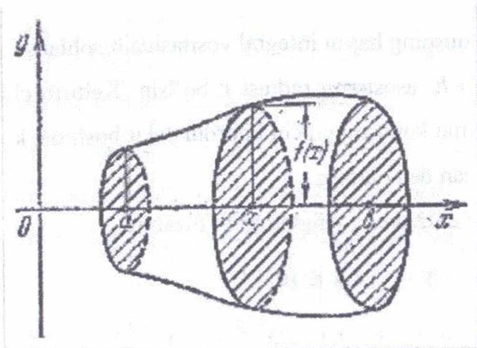
$\sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i$ yig'indi $S(x)$ funksiyaning integral yig'indisidir.
Shuning uchun

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx.$$

Demak, $V = \int_a^b S(x)dx$ (1)

Bu formulada $S(x)$ –ko'ndalang kesim yuzi a va b – jism kesimi chetki nuqtalarining abstsissalaridir.

Aylanish jismining hajmi. $[a;b]$ da musbat, uzluksiz $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu egri chiziqli trapetsiyani Ox o'qi atrofida aylantirish natijasida hosil bo'lgan figura aylanma figura deb ataladi(9-chizma)



9-chizma

Trapetsiyani Ox o'qi atrofida aylantirish natijasida xosil qilingan aylanish jismining hajmini aniqlaymiz. Ko'ndalang kesimlar bu yerda radiusi aylanayotgan egri chiziq y ordinatasining moduliga teng bo'lgan doiralardir. Demak kesim yuzi $S(x) = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2$ ekan. (1) formulaga ko'ra aylanish jismining hajmini topamiz:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx \ (2)$$

1- misol. $y^2 = x$ parabolani Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan va $x = h$ tekislik bilan chegaralangan jismning hajmini aniqlang.

Yechilishi. (2) formulani qo'llanib, quydagini topamiz:

$$V = \pi \int_0^h y^2 dx = \pi \int_0^h x dx = \pi \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^h = \frac{\pi h^2}{2}$$

Agar AB egri chiziq

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \alpha \leq t \leq \beta$$

parametrik tenglmalar bilan berilgan bo'lsa, u holda

$$V = \pi \int_a^b \varphi^2(t)\varphi'(t)dt$$

bo'ladi.

2-misol. Doiraviy konusning hajmi integral vositasida hisoblansin.

Konusning balandligi h, asosining radiusi r bo'lsin. Keltirib chiqarilgan formuladan foydalanish uchun konusning uchi koordinatalar boshida, konus o'qi Ox o'qi bo'ylab yo'naltirilgan deb olamiz.

Yechilishi. OB to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzamiz:

$$y = \frac{r}{h}x, x \in [0; h].$$

Endi v=$\pi \int_a^b f^2(x)dx$ formuladan foydalansak, konus hajmi

$$V = \pi \int_0^h (\frac{r}{h}x)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

4.5. Ishni aniq integral yordamida hisoblash

Agar kattaligi bilan ham, yo`nalishi bilan ham o'zgarmaydigan $F$ kuch ta'sirida moddiy nuqta kuchining yo'nalishi bo'yicha $L$ masofaga siljigan bo`lsa, kuchning bajargan ishi kuch kattaligi F ning siljish L ga ko`paytmasiga teng, ya'ni $E = FL$ (1)

Endi F kuch o'zgarmas yo`nalishni saqlasa ham sonli kattaligi (miqdori) bo'yicha o'zgargan holni qaraymiz. Aytaylik bu kuch ta'sirida moddiy nuqta kuchning ta'sir chizigi yo`nalishi bo`ylab yo`nalgan to'g'ri chiziq bo`ylab harakat qilsin. F kuch bajargan ishni hisoblash masalasini qo'yamiz.

Moddiy nuqta harakat qilayotgan chiziqni Ox o'q deb qabul qilamiz. Yo'lning boshlang'ich va oxirgi nuqtalari mos ravishda a va b $(a < b)$ abstsissalarga ega bo'lsin. $[a, b]$ segmentining xar bir nuqtasida kuchning kattaligi ma'lum qiymatga ega bo'ladi, ya'ni biror funktsiya $F = f(x)$ ning abstsissasi bo'ladi.

Bu funktsiyani biz uzluksiz deb hisoblaymiz. $[a, b]$ segmentni boshlang'ich va ohirgi nuqtalari orasida n ta kichik segmentga bo`lamiz:

$[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, . . . $[x_{i-1}, x_i]$, . . . $[x_{n-1}, x_n]$ $[bunda\ a = x_0,\ b = x_n]$. Ularning uzunliklari mos ravishda

$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ldots \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$.

$[a, b]$ segmentning hammasida bajarilgan ish y'olning barcha kichik uchastkalarida bajarilgan ishlar yig'indisiga teng. Hamma yo`lda bajarilgan ishni E bilan , kichik uchastka $[x_{i-1}, x_i]$ da bajarilgan ishni $\Delta E_i$ bilan belgilab, quyidagiga ega bo`lamiz:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \Delta E_i$$

Lekin kichik uchastkada bajarilgan ishni hisoblash, hamma yo'lda bajarilgan uchastkani hisoblash kabi murakkab, chunki kuch o'zgaruvchi. Biroq segmentlarni bo'lishda $[x_{i-1}, x_i]$ bo'laklar qanchalik kichik qilib olinsa, u xolda F (x) funksiyaning uzluksizligi shartga ko'ra yo'lning har bir uchastkasida kuch deyarli o'zgarmaydi. Har bir kuch $[x_{i-1}, x_i]$ segmentda ξ_i $(x_{i-1} < \xi_i < x_i)$ tadan nuqta olamiz va xar bir kichik segmentda kuch kattaligi uning ξ_i nuqtasidagi $F_i = f(\xi_i)$ qiymatiga teng bo'lgan o'zgarmas qiymatga ega bo'ladi deb faraz qilamiz.

Bunday farazda yo'lning $[x_{i-1}, x_i]$ kesmasida kuch bajargan ish (1)formulaga ko'ra

$$F_i \Delta x_i = f(\xi_i)\, \Delta x_i$$

ga teng bo'ladi.

Lekin haqiqatda esa $[x_{i-1}, x_i]$ kichik segmentda kuch o'zgaruvchi, shuning uchun $f(\xi_i)\, \Delta x_i$ ifoda bu kichik uchastkada bajarilgan ishning taqribiy qiymatinigina beradi. Shunday qilib, $[x_{i-1}, x_i]$ uchastkada $\Delta E_i \approx f\ (\xi_i)\ \Delta x_i$ ga, butun $[a,b]$ yo`lda esa

$$E \approx \sum_{i=1}^{n} f\ (\xi_i)\ \Delta x_i \quad (2)$$

ifodaga ega bo`lamiz. $\Delta x_i$ qanchalik kichik bo`lsa, bu takribiy tenglik shuncha aniq bo'ladi . Shuning uchun bajarilgan ishning taqribiy qiymati uchun kichik kuchishlarning λ eng kata uzunligi nolga intilgan shartda tabiyki, (2) yig'indining limiti qabul qilinadi, ya'ni

$$E = \lim_{x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\ (\xi_i)\ \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx .$$

4.6. Og'irlik markazining koordinatalari

Tekis yoyning og'irlik markazi .To'g'rilanadigan AB yoy bo'ylab $\rho = 1$ zichlik bilan biror modda joylashgan bo'lib, bu yoyning parametrik tenglamalari

$$\begin{cases} x = x(l), \\ y = y(l), \end{cases} \quad 0 \le l \le L$$

bo'lsin (parameter sifatida l- yoy uzunligi olingan),bunda L-butun yoy uzunligi.

[0;L] ning T bo'linishini olamiz: $0 = l_0 < l_1 < \cdots << l_n = L$. Natijada AB ham $P_{k-1}P_k$ qismlarga bo'linadi, bunda

$P_k(x_k, y_k);\ \ x_k = x(l_k), y_k = y(l_k).$

$P_{k-1}P_k$yoyga joylashgan modda massasi $\Delta m_k = 1 \cdot \Delta l_k$.

Shu massani P_k nuqtaga markazlashtiramiz. U holda sistema og'irlik markazining koordinatalari taqriban:

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} x(l_k)\Delta l_k}{\sum_{k=1}^{n} \Delta l_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x(l_k)\Delta l_k}{L},$$

$$\bar{y} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} y(l_k)\Delta l_k}{L}. \quad (1)$$

Ta'rifga ko'ra og'irlik markazining koordinatalari uchun yuqoridagi (1) integral yig'indining $\gamma(t) \to 0$ dagi limiti olinadi. Shuning uchun

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} x(l)dl, \bar{y} = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} y(l)dl, \ L = \int_{0}^{L} dl.$$

Agar yoy tenglamasi $y = f(x)$, $a \le x \le b$, ko'rinishda berilgan bo'lsa,

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1+y^2}\,dx; \quad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_a^b y\sqrt{1+y^2}\,dx. \ (2)$$

1-misol. y=$\sqrt{R^2-x^2}$, $-R \le x \le R$, yarim aylananing og'irlik markazining koordinatalarini topish talab qilinsin. Bunda

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx = 0,$$

chunki integral ostidagi funksiya toq bo'lgani simmetrik oraliqda aniq integral 0 ga teng bo'ladi.

$$\bar{y} = \frac{1}{\pi R}\int_{-R}^{R} R\,dx = \frac{2}{\pi}R.$$

Demak, yarim aylananing og'irlik markazi $(0;\frac{2}{\pi}R)$ nuqtadadan iborat.

Tekis figuraning og'irlik markazi. $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ $[f(x) \le \varphi(x)]$ uzluksiz egri chiziqlar va $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan G tekis figura bo'ylab o'zgarmas $(\rho = 1)$ zichlik bilan biror modda joylashgan bo'lsin.

$[a; b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lib, G figuraga n ta to'g'ri to'rtburchak chizamiz. Bu to'rtburchakning balandligi $\varphi(x_k) - f(x_k)$ ga teng, asosi esa $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ dan iborat.

U holda har bir to'rtburchakka joylashgan modda massasi

$$m_k = \rho[\varphi(x_k) - f(x_k)]\Delta x_k$$

bo'ladi, bunda $\rho = 1-$ jismning zichligi . To'rtburchakning dioganallari kesishgan nuqtaning, ya'ni og'irlik markazining koordinatalari quydagicha bo'ladi:

$$\overline{x_k} = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}; \qquad \overline{y_k} = \frac{\varphi(x_k) + f(x_k)}{2}.$$

U holda pog'onali (n ta to'rtburchakdan iborat) figuraning og'irlik markazi uchun:

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \frac{\Delta x_k}{2}\right)[\varphi(x_k) - f(x_k)]\Delta x_k}{\sum_{k=1}^{n}[\varphi(x_k) - f(x_k)]\Delta x_k}, \\ \bar{\mu} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \overline{y_k} m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[\varphi(x_k) + f(x_k)][\varphi(x_k) - f(x_k)]\Delta x_k}{\sum_{k=1}^{n}[\varphi(x_k) - f(x_k)]\Delta x_k}. \end{cases} \quad (3)$$

Bulardan

$$\lambda = \max_{k<\lambda<0} \Delta x_k \to 0$$

bo'lganda

$$\lim_{\lambda \to 0} \bar{\varepsilon} = \varepsilon$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \bar{\mu} = \mu$$

bo'lib, $C(\varepsilon;\mu)$ berilgan G figuraning og'irlik markazi bo'ladi. Shu bilan birga

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} [\varphi(x_k) - f(x_k)]\Delta x_k = \int_a^b [\varphi(x_k) - f(x_k)]dx = S$$

o'rinli, bu G figuraning yuzasidir.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \frac{\Delta x_k}{2}\right)[\varphi(x_k) - f(x_k)]\Delta x_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k[\varphi(x_k) - f(x_k)]\Delta x_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[\varphi(x_k) - f(x_k)]\Delta x^2{}_k \text{ desak,}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} x_k[\varphi(x_k) - f(x_k)]\Delta x_k = \int_a^b x[\varphi(x) - f(x)]dx$$

va

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} [\varphi(x_k) - f(x_k)]\Delta x^2{}_k = 0$$

chunki $\lambda = \max \Delta x_k \to 0$ da

$$\sum_{k=1}^{n} [\varphi(x_k) - f(x_k)]\Delta x^2{}_k \le \sum_{k=1}^{n} [|\varphi(x_k)| - |f(x_k)|]\Delta x^2{}_k \le$$

$$\le M \cdot \lambda \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = M \cdot \lambda \cdot (b-a) \to 0,$$

$M = sup[|\varphi(x_k)| - |f(x_k)|]$.

Demak, $\lambda \to 0$ da

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{\int_a^b x[\varphi(x)-f(x)]dx}{\int_a^b [\varphi(x)-f(x)]dx}, \\ \mu = \frac{\int_a^b [\varphi^2(x)-f^2(x)]dx}{2\int_a^b [\varphi(x)-f(x)]dx} \end{cases} \quad (4)$$

Agar G figura $aABb$ egri chiziqli trapetsiya bo'lsa, u holda (4) formulalardan

$$\varepsilon = \frac{1}{S}\int_a^b xydy; \qquad \mu = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2\,dx \quad (5)$$

kelib chiqadi, bunda S= $\int_a^b f(x)\,dx$ - egri chiziqli trapetsiya yuzasi.

VIII bob uchun o'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Aniq integral tushunchasiga olib keluvchi masalani ko'rsating.
2. Egri chiziqli trapetsiya deb nimaga aytiladi?
3. Aniq integralning ta'rifini ayting.
4. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzi deb nimaga aytiladi?
5. Aniq integral mavjud bo'lishining zaruriy shartini isbotlang.
6. Aniq integralning asosiy xossalarini ayting va isbotlang.
7. Nyuton Leybnits formulasi.
8. Aniq integralda o'zgaruvchini qanday almashtirish mumkin?
9. Aniq integralni qanday bo'laklab integrallash mumkin?
10. Trapetsiyalar formulasi qanday topiladi?
11. Parabolalar metodi (Simpson metodi)ni tushuntiring.
12. Tekis figura yuzi qanday hisoblanadi?
13. Tekis egri chiziq yoyining uzunligi qanday hisoblanadi?
14. Aylanma sirti yuzi qanday hisoblanadi?
15. Aylanish jismining hajmi qanday hisoblanadi?
16. Ishni aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?
17. Og'irlik markazining koordinatalari qanday topiladi?

VIII bob uchun mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$ ni hisoblang.

2. f (x) =sinx funktsiyanit $[0;\pi]$ da o'rta qiymatini toping.

3. $[1;4]$ да $f(x)=\sqrt{x}$ funktsiyaning o'rta qiymatini toping.

4. y=sinx, y=cosx egri chiziqlar va 0x o'qi bilan chegaralangan figura yuzini hisoblang.

5. $\rho=2$ aylana uzunligini hisoblang.

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$ ellipsni Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'ladigan aylanma ellipsoidning hajmini hisoblang.

7. y=sinx ($0\le x\le\pi$) sinusoidaning ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'ladigan jismning hajmini toping.

8. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ aniq integralni hisoblang.

9. $\left.\begin{matrix} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{matrix}\right\}$ astroida uzunligini toping.

10. Agar AB egri chiziq ordinata o'qqa nisbatan simmetrik bo'lsa, uning og'irlik markazi qaerda yotadi?

11. $x^2+y^2=4$, $(y>0)$ aylana yoyining og'irlik markazi koordinatalarini toping.

12. $y=x^2$, $y=4$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

13. $\int\limits_e^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x}dx$ ni hisoblang.

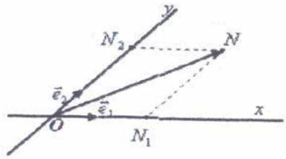
14. $\int\limits_1^{l} x\ln x dx$ ni hisoblang.

GLOSSARY

Inglizcha	O'zbekcha	Ma'nosi
Vector	Vektor	Yo'nalishga ega bo'lgan kesma vektor deb ataladi.
Zero vector	Nol vektor	Boshi bilan oxiri ustma – ust tushgan vector nol vektor deyiladi.
Equal vectors	Teng vektorlar	Agar quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa: 1) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning modullari teng; 2) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yo'nalishlari bir xil bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni teng vektorlar deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ ko'rinishidayoziladi.
Scalar multiplication of vectors	Vektorlarning skalyar ko'paytmasi	$\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlarning uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusini ko'paytirishdan hosil bo'lgan son bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb aytiladi.
Multiplication of vector to number	Vektorni songa ko'paytirish	$\vec{a} \neq \vec{0}$ vektorning $\alpha \in R$ songako'paytmasi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{p}$ ga aytiladiva $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{a}$ ko'rinishdayoziladi. 1) $\lvert\vec{p}\rvert = \lvert\alpha\rvert \cdot \lvert\vec{a}\rvert$; 2) $\vec{p}$ vector $\vec{a}$ ga kollinear. 3) Agar $\alpha > 0$ bo'lsa $\vec{p}$ va $\vec{a}$ vektorlar bir xil yo'nalgan, agar $\alpha < 0$ bo'lsa, $\vec{p}$ va $\vec{a}$ vektorlar qarama- qarshi yo'nalgan bo'ladi.
Determinant	Determinant	Kvadrat matritsaning har bir satr va har bir ustunidan bittadan elementlar olib tuzilgan ko'paytmalarning algebraik yig'indisiga berilgan kvadrat matritsaning determinanti deyiladi.
Multiply by a scalar to the determinant	Sonni Determinantga ko'paytirish	A kvadrat matritsaning biror bir satr (ustun) elementlarini noldan farqli λ skalyarga ko'paytirilsa, u holda A matritsaning determinanti λ skalyarga ko'paytiriladi.
A system of linear equations	Chiziqli tenglamalar sistemasi	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ ko'rinishdagi

		tenglamalar sistemasi yozuvga chiziqli deyiladi.
Solution of systems of linear equations	Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ sistemadagi barcha tenglamalarni qanoatlantiruvchi $(x^0_1, x^0_2, \ldots x^0_n)$ tartiblangan juftlikka aytiladi
A matrix	Matritsa	a_{ik} haqiqiy sonlar m ta satr va n ta ustunda joylashgan quyidagi to`g`ri to`rtburchak $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{n2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$ shaklidagi jadvalga m x n o`lchamli matritsa deyiladi.
Upper triangle Matrix	Yuqori uchburchakli matritsa	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi matritsaga aytiladi.
Bellow triangle Matrix	Quyi uchburchakli matritsa	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi matritsaga aytiladi.
Diagonal Matrix	Diagonal matritsa	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi matritsaga aytiladi.

Unitary Matrix	Birlik matritsa	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$ ko'rinishdagi matritsaga aytiladi.
Zero matrix	Nol matritsa	Har bir elementi nolga teng bo`lgan matritsa
Transpose of matrix	Transponirlangan matritsa	Berilgan n x m o`lchamli A matritsaning har bir satri mos ustunlari bilan almashtirilsa
Square matrix	Kvadrat matritsa	satrlari soni n ustunlari soni m ga teng bo`lgan matritsa
Rank of matrix	Matritsaning rangi	Noldan farqli matritsa osti minorlarining eng katta tartibi
Coordinates system of Affin	Affin koordinatalar sistemasi	Musbat yo'nalishlari mos ravishda $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ vektorlar bilan aniqlanuvchi a va b to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lgan sistema tekislikdagi affin koordinatalar sistemasi deyiladi va $0, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ yoki $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ko'rinishda belgilanadi.
Coordinates system of Decart	Dekart koordinatalar sistemasi	Affin koordinatalar sistemasining $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ koordinat vektori orthogonal bazisni tashkil qilsa, ya'ni $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\lvert\vec{e}_1\rvert = \lvert\vec{e}_2\rvert = 1$ bo'lsa, u holda affin koordinatalar sistemasi dekart koordinatalar sistemasi bo'ladi. Bunday koordinatalar sistemasini $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ko'rinishida belgilaymiz
Distance between two points	Ikki nuqta orasidagi masofa	Bizga Oxy tekislikda $A_1(x_1; y_1)$ va $A_2(x_2; y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu A_1 va A_2 nuqtalar orasidagi masofa ularning koordinatalariga bog'liqdir. Aytaylik $x_1 \neq y_1$ va $x_2 \neq y_2$ bo'lsin. A_1 va A_2 nuqtalardan koordinata o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz (o'tkazilgan parallel to'g'ri chiziqlar A nuqtada kesishsin). U holda A va A_1 nuqtalar orasidagi masofa $\lvert y - y_1\rvert$ ga, A va A_2 nuqtalar orasidagi masofa esa $\lvert x - x_1\rvert$ ga teng bo'ladi. Hosil bo'lgan A_1AA_2 uchburchak to'g'ri burchakli ekanidan Pifagor teoremasiga ko'ra:

		$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=d^2 \quad (*)$ (*) formula tekislikda ikkita nuqta orasidagi masofani aniqlaydi.
Radius vector	Radius vektor	Tekislikda $(0,\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\ )$ affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Shu tekislikda birorta N nuqtani olaylik (2-chizma) $\overrightarrow{ON}$ vektorni N nuqtaning radius vektori deyiladi.  2-chizma
Slope	Burchak koeffitsienti	$k=\dfrac{a_2}{a_1}$ soni d to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti
n- ordered algebraic line	n-tartibli algebraik chiziq	Biror affin koordinatalar sistemasida n-darajali algebraik tenglama bilan aniqlangan figura n-tartibli algebraik chiziq deb aytiladi.
The angle between two lines	Ikkita to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak	Bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchak
The distance from point to line	Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa	Nuqtadan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyar uzunligi
The angle between line and plane	To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak	To'g'ri chiziq bilan uning tekislikdagi proyeksiyasi orasidagi φ burchak
Normal vector	Normal vektor	$Ax+By+Cz+D=0$ -T tekislikdagi $\vec{n}(A,B,C)$ vektor
Package of planes	Tekisliklar dastasi	Fazodagi ixtiyoriy d to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi barcha tekisliklar to'plamini tekisliklar dastasi deyiladi. d to'g'ri chiziq dasta o'qi, tenglamani dasta tenglamasi deyiladi.
Package of planes	Tekisliklar bog'lami	Fazodagi M_0 nuqtadan o'tuvchi barcha tekisliklar to'plamini tekisliklar bog'lami

		deyiladi.
Package of parallel planes	Parallel tekisliklar bog'lami	Fazodagi aniq bir d to'g'ri chiziqqa parallel barcha tekisliklar to'plami parallel tekisliklar bog'lami yo'ki markazsiz bog'lam deyiladi.
Ellipse	Ellips	Koordinatalari $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglamani qanoatlantiruvchi tekislikdagi barcha nuqtalarning geometrik o'rni
Abstract ellipse	Mavhum ellips	Koordinatalari $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ tenglamani qanoatlantiruvchi tekislikdagi barcha nuqtalarning geometrik o'rni
Hyperbola	Giperbola	Koordinatalari $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$ tenglamani qanoatlantiruvchi tekislikdagi barcha nuqtalarning geometrik o'rni
Two crossing line	Kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq	Koordinatalari $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi tekislikdagi barcha nuqtalarning geometrik o'rni
Two different parallel lines	Turli parallel ikki to'g'ri chiziq	Koordinatalari $y^2-a^2=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi tekislikdagi barcha nuqtalarning geometrik o'rni
Hyperbola	Giperbola	Tekislikda har bir nuqtasidan *fokuslar* deb ataluvchi F_1 va F_2 nuqtalargacha bo`lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati berilgan kesma uzunligiga teng bo`lgan nuqtalarning geometrik o`rni
Asimptota	Asimptota	Agar $N\in\lambda$ nuqta shu λ chiziq bo`yicha harakat qilganda uning $d$ to`g'ri chiziqqacha bo`lgan masofasi nolga intilsa, to`g'ri chiziq λ chizining asimptotasi deyiladi.
Joint hyperbola	Qo`shma giperbola	Ayni bir koordinatalar sistemasida a va b larning ayni bir qiymatida $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglamalar bilan aniqlangan ikki giperbola o`zaro qo`shma giperbola deb aytiladi.
Hyperboloid	Bir pallali	Koordinatalari

of one sheet	giperboloid	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o'rni
Hyperboloid of two sheets	Ikki pallali giperboloid	Koordinatalari $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o'rni
Elliptic paraboloid	Elliptik paraboloid	Koordinatalari $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0, \quad q>0)$ tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o'rni.
Hyperbolic paraboloid	Giperbolik paraboloid	**Koordinatalari** $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0, \quad q>0)$ tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o'rni.
Elliptic cone	Elliptik konus	Koordinatalari $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{(z-z_0)^2}{c^2}$$ tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o'rni
Rational maps	Ratsional funksiyalar	Ratsional funksiyalar. Ratsional funksiya deb $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ ko'rinishidagi funksiyalarga aytiladi.
Polynomial	Ko'phad	Ko'phad. $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ ko'rinishdagi funksiyaga aytiladi, bu yerda $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n$ ko'phad koeffisientlari.
Denominator	Maxraj	Maxraj. Kasr ostidagi ifodaga kasrning maxraji deyiladi va u bo'luvchi bo'lib xizmat qiladi.
Numerator	Surat	Surat. Kasr ustidagi ifodaga kasrning surati deyiladi va u bo'linuvchi bo'lib xizmat qiladi.
Degree	Daraja	Daraja. Ko'phad darajasi deb uning eng yuqori darajali o'zgaruvchisining darajasiga aytiladi.

Numeral sequence	Sonli ketma-ketlik.	Sonli ketma-ketlik. Natural sonlar to'plamini haqiqiy sonlar to'plamiga mos qo'yuvchi akslantirishga sonli ketma-ketlik deyiladi. Hamda $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ko'rinishida yoziladi.
Limit of Numeral sequence	Sonli ketma-ketlik limiti.	Sonli ketma-ketlik limiti. a soni $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ketma-ketlik limiti deyiladi, agar $\forall \varepsilon > 0$ soniga ko'ra $\exists n_0 \in N$ son topilib, $\forall n > n_0$ natural son uchun $\lvert x_n - a\rvert < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa. $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ketma-ketlik limiti quyidagicha yoziladi: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
Converges	Yaqinlashuvchi.	Yaqinlashuvchi. $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ketma-ketlik uchun yuqoridagi shartni qanoatlantiruvchi a soni mavjud bo'lsa, bunday ketma-ketlik *yaqinlashuvchi* deyiladi.
Uniqueness of the limit	Limitning yagonaligi	Limitning yagonaligi. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti yagonadir.
Bounded	Chegaralangan.	Chegaralangan. $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi, agar $\forall n \in N$ uchun $\exists M > 0$ soni topilib $\lvert x_n\rvert \leq M$ tengsizlik bajarilsa.
Finite	Chekli.	Chekli. Aniq bir qiymatga ega bo'lgan kattalik.
Infinite	Cheksiz.	Cheksiz. Haqiqiy sonlar to'plamining yuqori chegarasi, quyi chegarasi. Shartli ravishda cheksiz deyiladi.
Compactness	Kompaktlik	Kompaktlik. Agar $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lib, limiti o'ziga tegishli bo'lsa u holda bunday ketma-ketlikka *kompakt* deyiladi.
Continuity	Uzluksizlik.	Uzluksizlik. $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi, agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ o'rinli bo'lsa.
Cauchy sequences	Koshi ketma-ketligi.	Koshi ketma-ketligi. Quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ketma-ketlikka Koshi ketma-ketligi deyiladi. $\forall \varepsilon > 0$ soniga ko'ra $\exists n_0 \in N$ son topilib, $\forall n > n_0$ va $\forall m > n_0$ natural sonlar uchun $\lvert x_n - x_m\rvert < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.

Fundamental sequences	Fundamental ketma-ketliklar	Fundamental ketma-ketliklar. Quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ketma-ketlikka *fundamental ketma-ketlik* deyiladi. $\forall\varepsilon>0$ soniga ko'ra $\exists n_0\in N$ son topilib, $\forall n>n_0$ va $\forall m>n_0$ natural sonlar uchun $\lvert x_n-x_m\rvert<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.
Inverse function	Teskari funksiya	Teskari funksiya. $y=f^{-1}(x)$ funksiya $y=f(x)$ funksiyaning teskarisi deyiladi, agar $x=f(y)$ tenglik o'rinli bo'lsa.
Increasing function	Kamayuvchi funksiya	Kamayuvchi funksiya. $y=f(x)$ funksiya o'zining D sohasida kamayuvchi deyiladi, agar $\forall x_1,x_2:x_1>x_2$ ekanidan $f(x_1)\leq f(x_2)$ ekani kelib chiqsa.
Decreasing function	O'suvchi funksiya	O'suvchi funksiya. $y=f(x)$ funksiya o'zining D sohasida o'suvchi deyiladi, agar $\forall x_1,x_2\in D:x_1>x_2$ ekanidan $f(x_1)\geq f(x_2)$ ekani kelib chiqsa.
Function	Funksiya	Funksiya. R haqiqiy sonlar to'plamini haqiqiy sonlar to'plamiga mos qo'yuvchi akslantirishga aytiladi
Domain region	Aniqlanish soha	Aniqlanish soha. Argumentning qabul qila olishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plamiga aytiladi.Hamda $domf$ bilan belgalaymiz.
Image region	Qiymatlar sohasi	Qiymatlar sohasi. Funksiyaning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari sohasiga aytiladi.
Odd function	Toq funksiya	Toq funksiya. $\forall x\in domf$ uchun $f(-x)=-f(x)$tenglikni qanoatlantiradigan funksiyalarga aytiladi.
Even function	Juft funksiya	Juft funksiya. $\forall x\in domf$ uchun $f(-x)=f(x)$ tenglikni qanoatlantiradigan funksiyalarga aytiladi.
Period of function	Funksiyaning davri	Funksiyaning davri. $\forall x\in domf$ uchun $\exists T\in R$ topilib $f(x+T)=f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa , u holda T soni funksiyaning davri deyiladi.
Bounded function	Chegaralangan funksiya	Chegaralangan funksiya. $y=f(x)$ funksiya chegaralangan deyiladi, agar $\exists M>0$ soni

		topilib $\|f(x)\| \le M$ tengsizlik bajarilsa.
Inverse Trigonometric functions	Teskari trigonometrik funksiyalar	Teskari trigonometrik funksiyalar. Quyidagi ko'rinishidagi funksiyalar: $y=\arccos x$, $y=\arcsin x$, $y=\arctan x$, $y=arc\cot anx$
Irrational maps	Irratsional funksiyalar	Irratsional funksiyalar. Irratsional funksiya deb $F(x)=\sqrt{f(x)}$ ko'rinishidagi funksiyalarga aytiladi.
The limit of a function on a point (Heyne definition)	Funksiyaning nuqtadagi limiti (Geyne bo'yicha)	Funksiyaning nuqtadagi limiti (Geyne bo'yicha). Agar $n\to\infty$ da $x_n \to x_0$ $(x_n \in X,\ x_n \ne x_0)$ bo'ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $n\to\infty$ da $f(x_n)\to b$ bo'lsa, b ga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti deyiladi va $x\to x_0$ da $f(x)\to b$ yoki $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$ kabi belgilanadi.
The limit of a function on a point (Cauchy definition)	Funksiyaning nuqtadagi limiti (Koshi bo'yicha)	Funksiyaning nuqtadagi limiti (Koshi bo'yicha). Agar $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ topilsaki, $\forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$ uchun $\|f(x)-b\|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti deyiladi: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$. Bu ta'rifni qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, $\forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$: $\|f(x)-b\|<\varepsilon$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$.
Limit point	Limit nuqta	Limit nuqta. Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy $U_\varepsilon(x_0)=(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$, $(\forall\varepsilon>0)$ atrofida X to'plamning x_0 nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, ya'ni $\forall\varepsilon>0,\ \exists x\in X,\ x\ne x_0:\ \|x-x_0\|<\varepsilon$ bo'lsa, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi deyiladi.
Increment of argument	Argument orttirmasi	Argument orttirmasi. Argument orttirmasi deb argument yangi qiymatidan dastlabki qiymatning ayirmasi tushuniladi va u

		quyidagicha belgilanadi.ar $\Delta x = x - x_0$
Real function	Haqiqiy funksiya	Haqiqiy funksiya. Faqat haqiqiy qiymatlarni qabul qila oladigan funksiyalarga haqiqiy funksiya deb ataladi.
Real variable	Haqiqiy o'zgaruvchili	Haqiqiy o'zgaruvchili. Haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan funksiyaga haqiqiy o'zgaruvchili funksiya deyiladi.
Neighborhood	Atrof	Atrof . x_0 nuqtaning ε atrofi deb quyidagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x \in R$ nuqtalar to'plamiga aytiladi: $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$
Independent variable	Erkli o'zgaruvchi	Erkli o'zgaruvchi. Erkli o'zgaruvchi deb ixtiyoriy qiymatni mustaqil qabul qila oladigan o'zgaruvchiga aytiladi.
Derivative	Hosila	Hosila.Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi qiymatiga funksiya hosilasi deyiladi.
Secant	Kesuvchi	Kesuvchi. Funksiya grafigining ixtiyoriy ikkita nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa aytiladi.
Tangent	Urinma	Urinma. Kesuvchining limit holatiga urinma deyiladi.
time	Vaqt	Vaqt. Nisbiy tushuncha bo'lib, o'lchov birligi soat,sekund,minut kabilar bilan o'lchanadigan skalyar o'suvchi miqdordir.
Velocity	Tezli	Tezlik. Jismning bir sekund ichida bosib o'tgan yo'liga son jihardan teng bo'lgan kattalikka aytiladi, O'lchov birligi *metr/sekund*
Continuous function	Uzluksiz funksiya	Uzluksiz funksiya. $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz deyiladi, agar $\forall x_0 \in [a,b]$ uchun $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa.
The theorem of de Lopital	Lopital teoremasi	Lopital teoremasi. Quyidagi aniqmasliklarni ochishda foydalaniladi. $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty, \infty^0$ Agar $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ bo'lsa u holda $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ o'rinli.

Taylor polynomial	Teylor yoyilmasi	Teylor yoyilmasi. n -tartibli teylor yoyilmasi deb $Tf_{n,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ ko'phadga aytiladi.
Higher-order derivatives	Yuqori tartibli hosila	Yuqori tartibli hosila. $y=f(x)$ funksiyaning n -tartibli hosilasi deb quyidagi xossani qanoatlantiruvchi funksiyaga aytiladi: $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$, xususiy holda $f^{(0)}(x)=f(x), f^{(1)}(x)=f'(x)$
Primitive function	Boshlang'ich funksiya	Boshlang'ich funksiya. $y=F(x)$ funksiya $y=f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi, agar $F'(x)=f(x)$ tenglik bajarilsa.
Indefinite integral	Aniqmas integral	Aniqmas integral. $y=f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deb $y=F(x)+C$ funksiyalar oilasiga aytiladi, bu yerda $C=const$ va quyidagicha belgilanadi. $\int f(x)dx$
Integration by parts	Bo'laklab integrallash	Bo'laklab integrallah. Bu quyidagicha xossaga ega. $\int udv=uv-\int vdu$
Definite integral	Aniq integral	Aniq integral. Aniq bir qiymatga ega bo'lib, $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}S_n$ formuladan topiladi.
Integration by substitution	Integrallashda o'zgaruvchini almashtirish	Integrallashda o'zgaruvchini almashtirish. $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy$ ko'rinishda ifodalanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Jo'rayev T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-tom. T.: "O'zbekiston". 1995 y.

2. Jo'rayev T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 2-tom. T.: "O'zbekiston". 1998 y.

3. Rajabov F., Masharipova S., Madrahimov R. Oliy matematika. T.: "Turon iqbol". 2007 y.

4. Xushvaqtov M. Matematik analiz. T.: "Yangiyul polygraph service". 2008 y.

5. Toshmetov O'., Turgunbayev R., Saydamatov E., Madirimov M. Matematik analiz I-qism. T.: "Extremum-Press", 2015 y.

6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. 1 том. СПб.: «Мифрил». 1996 г.

7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. 2 том. СПб.: «Мифрил». 1996 г.

8. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Олий математика қисқа курси. Т.: «Ўқитувчи». 1985 й.

9. Claudia Canuto, Anita Tabacco. Mathematical analysis. I. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2008.

10. Andrei D., Polyanin, Alexander V., Manzhirov. Mathematics for engineers and scients.New York.2007.

11. Larson R., Edwards Bruce H. Calculus. Ninth Edition. Cengage Learning. 2010.

12. Klaus Heft. Mathematical preparation course before studying physics.2013.

13. Martin B., Shaw G. Mathematics for physicists. India. 2015.

MUNDARIJA

Parpiyeva N.T., Qoshnazarov R.A., Madrahimov R.M.

MATEMATIKA

I qism

o'quv qo'llanma

Toshkent - "INNOVATSIYA-ZIYO" – 2019

Muharrir Xolsaidov F.B.

Nashriyot litsenziyasi AI № 023, 27.10.2018.
Bosishga 20.12. 2019 da ruxsat etildi. Bichimi 60x90.
"Times New Roman" garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog'i 23. Nashr bosma tabog'i 22,87.
Adadi 100 nusxa.