O'RINBOYEVA L.O'.

MATEMATIKA

O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O`RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

LOLAXON O`RINBOYEVA O`KTAMOVNA

MATEMATIKA

GUMANITAR TA’LIM YO`NALISHLARI UCHUN
O`QUV QO`LLANMA

Toshkent
“Innovatsiya-Ziyo”
2020

UDK: 378.02
BBK: 74.58
L-28

O`rinboyeva Lolaxon O`ktamovna
Matematika /o`quv qo`llanma/. Toshkent: "Innovatsiya-Ziyo" – 2020, 312 b.

Mazkur o`quv qo`llanma pedagogika oliy ta'lim muassasalarining gumanitar ta'lim yo`nalishlari talabalari uchun mo`ljallangan. Unda matematika fani dasturiga mos ravishda mavzular to`liq bayon qilingan va mazmuni ingliz tili ta'lim yo`nalishi xususiyatidan kelib chiqqan holda xorijiy adabiyotlardan olingan ma'lumotlar bilan boyitilgan.

Данное учебное пособие предназначено для студентов гуманитарных направлений педагогических высших образовательных учреждений. Содержание тем изложено согласно учебной программе предмета математика и обогашено материалами из зарубежных источников соответственно специфики направления иностранных языков.

This training manual is intended for students of humanitarian directions of pedagogical higher educational universities. The content of topics is set out in accordance with the curriculum of the subject of mathematics and enrichment with materials from foreign sources, corresponding to the specifics of the direction of foreign languages.

Taqrizchilar:

Abdullayeva B.S. – pedagogika fanlari doktori, professor
Yarkulov R. - texnika fanlari nomzodi, dotsent

O`zbekiston Respublikasi Oliy va o`rta maxsus ta'lim vazirligining 2019-yil 4-oktabrdagi 892-sonli buyrug`iga asosan o`quv qo`llanma sifatida nashrga tavsiya etilgan.

ISBN 978-9943-6214-5-9

KIRISH

Ilm-fan jadal taraqqiy etayotgan, zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari keng joriy etilgan jamiyatimizda turli fan sohalarida bilimlarning tez yangilanib borishi, ta’lim oluvchilar oldiga ularni jadal egallash bilan bir qatorda, muntazam va mustaqil ravishda bilim olish vazifasini qo`ymoqda.

Ta’limning barcha bosqichlariga oid umumiy pedagogik va didaktik talab ta’lim oluvchining dasturiy bilim, tasavvur va ko`nikmalari asosida mustaqil ishlash samaradorligini takomillashtirish, ilmiy fikrlashga, o`quv faniga qiziqishini kuchaytirish, kasbiy bilimlarini chuqurlashtirish, nazariy va amaliy mashg`ulot mobaynida ularning faolligini oshirishdan iboratdir.

Bu borada birinchi prezidentimiz muhtaram Islom Abdug`aniyevich Karimovning “Mamlakatimizning istiqboli yosh avlodlarimiz qanday tarbiya topishiga, qanday ma’naviy fazilatlar egasi bo`lib voyaga yetishiga, farzandlarimizning hayotga nechog`li faol munosabatda bo`lishiga, qanday oliy maqsadlarga xizmat qilishiga bog`liq ekanligini hamisha yodda tutishimiz kerak”, -deb ta’kidlaganlari bejiz emas. Shu boisdan ham bugungi kunda yoshlarning ta’lim-tarbiyasi mustaqil O`zbekistonning davlat siyosatida ustivor ahamiyat kasb etmoqda.

Jahon pedagogik tajribasi zamonaviy pedagogik texnologiyalarning ta’lim

oluvchilarni fanlarga qiziqtirishga, mustaqil ishlashda faolliklarini oshirishga imkoniyati cheksiz ekanligini tasdiqlamoqda.

Ta’limning bugungi vazifasi o`quvchilarni kun sayin oshib borayotgan axborot - ta’lim muhiti sharoitida mustaqil ravishda faoliyat ko`rsata olishga, axborot oqimidan oqilona foydalanishga, tanqidiy fikrlashga, o`z fikrini bayon eta olishga, o`zini-o`zi baholay olishga o`rgatishdan iboratdir. Buning uchun ularga uzluksiz ravishda mustaqil ishlash imkoniyati va sharoitini yaratib berish zarur.

Respublikamiz Oliy ta’lim tizimining bosh maqsadi har tomonlama raqobatbardosh kadr va barkamol shaxs tayyorlashdan iborat ekan, bunday avlod tarbiyasini zamonaviy adabiyotlarsiz tasavvur etish mushkul.

Talabalarda o`quv adabiyotini mustaqil o`rganish va undan foydalana bilish malakalarini hosil qilish, mantiqiy fikrlashni o`stirish va matematik madaniyatning umumiy saviyasini ko`tarish, tatbiqiy masalalarni matematik nuqtayi nazardan tekshirish malakalarini hosil qilish va bu masalalarni matematika fani tilida ifodalashga o`rgatish maqsadga muvofiqdir.

Bu masala oliy ta'lim muassasalarida nazariy bilimlarni puxta egallagan va ayni paytda undan amaliyotda keng foydalana oladigan mutaxassislar tayyorlash zarurligini bildiradi. Bunday mutaxassislarni tayyorlashda oliy ta'lim muassasalarida o`qitiladigan "Matematika" fanining ahamiyati kattadir. Ushbu fanni o`qitishdan asosiy maqsad talabalarni muhim ma'lumotlar majmuasi (ta'rif va tushunchalar, teoremalar va ularning isboti, masalalarni yechish usullari va boshqalar) bilan tanishtirish bilan birga ularni mantiqiy fikrlashga, amaliy masalalarni matematik usullar yordamida yechishga, turli jarayonlarning matematik modelini qurishga o`rgatishdan iborat.

Mazkur "Matematika" o`quv qo`llanmasi gumanitar ta'lim yo`nalishlari, xususan, xorijiy til va adabiyoti (tillar bo`yicha), ona tili va adabiyoti (tillar bo`yicha), tarix o`qitish metodikasi, milliy istiqlol g`oyasi va huquq asoslari, maxsus ta'lim - defektologiya (logopediya, surdopedagogika, oligofrenopedagogika) ta'lim yo`nalishlarining matematika dasturiga mos holda tayyorlangan bo`lib, unda mavzularning batafsil, tushunarli, amaliyot bilan bog`lagan holga bayon qilinishiga harakat qilingan. Mavzularga doir berilgan tayanch iboralar, savol va topshiriqlar hamda glossariy (izohli so`zlar)dan talabalar amaliy mashg`ulotlar hamda mustaqil ta'limga tayyorgarlik ko`rish jarayonida foydalanishlari mumkin.

O`quv qo`llanma IV ta modul (bob), 20 ta paragraf va 61 ta mavzulardan iborat. Unda matematika fani tushunchasi va mohiyati, to`plamlar nazariyasi va matematik mantiq elementlari, matematik tahlilning asosiy tushunchalari, analitik geometriya elementlari, kombinatorika, ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika elementlari, matematik modellar va algoritmlarga oid asosiy ma'lumotlar, tushunchalar, tasdiqlar haqida so`z yuritiladi.

I modul. TO`PLAMLAR NAZARIYASIGA KIRISH VA MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI

"Matematika oqitishdan asosiy maqsad – odamni ana shu go`zallik bilan tanishtirish va uning yordamida matematikada juda ham zarur bo`lgan intizomga va mantiqiy fikrlashga o`rgatishdir. Bu juda ham muhim, chunki matematikada mantiqiy fikrlashga o`rgangan odam uni hayotning xohlagan bir sohasida qo`llay oladi"
A.Ren'i.

1-§. Matematika faniga kirish

Tayanch iboralar: *zamonaviy matematikaning strukturasi, matematik madaniyat, matematik modellar, matematik taffakur, matematikaning vujudga kelish davri, elementar matematika davri, o`zgarmas miqdorlar matematikasi davri, hozirgi zamon matematikasi davri, rivojlanishining asosiy bosqichlari, induksiya va deduksiya, teoremalar, aksiomalar, ta'riflar, aksiomatik usul, Evklid geometriyasi, aksiomatik nazariya, matematik til, uning mohiyati.*

1.1. Matematika fanining predmeti, mazmuni va strukturasi

Matematika[1]- aniq mantiqiy mushohadalarga asoslangan bilimlar haqidagi fan deb e'tirof etilgan[2]. Dastlabki obyekti sanoq bo`lgani uchun ko`pincha unga "hisob haqidagi fan" deb qaralgan.

Yunonistonda matematika deganda geometriya tushunilgan. IX – XIII asrlarda matematika tushunchasini algebra va trigonometriya kengaytirgan. XVII–XVIII asrlarda matematikada analitik geometriya, differensial, va integral hisob asosiy o`rinni egallaganidan so`ng, to XX – asr boshlarigacha u "miqdoriy munosabatlar va fazoviy shakllar haqidagi fan" mazmunida ta'riflangan.

XIX asr oxiri XX asr boshlarida turli geometriyalar, algebralar, cheksiz o`lchovli fazolar kabi mazmunan juda xilma-xil, ko`pincha sun'iy tabiatli obyektlar o`rganila boshlanishi bilan matematikaning yuqoridagi ta'rifi o`ta tor bo`lib qoldi.

---

[2] *ing. mathematics, qad. yun.μάθημα — bilim, fan*
[2] *https://uz.wikipedia.org/wiki/Matematika*

Matematika eng qadimiy fan sohasi bo`lib, uzoq rivojlanish tarixini bosib o`tgan va buning barobarida «Matematika qanday fan? U nimani o`rgatadi?» degan savolga javob ham o`zgarib, chuqurlashib borgan.

Eng avvalo "Matematika" fani nimani o`rgatadi degan savolni qo`yamiz. Bu juda murakkab savol bo`lib, unga ta'lim darajasi turli bo`lgan odamlar turli javoblar beradilar. Masalan, boshlang`ich sinf o`quvchilari matematika narsalarni sanash qoidalarini o`rgatadi, deb javob beradilar va bu javobni noto`g`ri deb bo`lmaydi. Chunki bu matematikaning muhim qismi bo`lmish arifmetikaning mohiyatini tashkil etadi va u dastlabki tarixiy davrlarda matematikani to`liq o`z ichiga olgan. O`rta sinf o`quvchilari bu javobga matematika chiziqlar, figuralar, jismlar, ya'ni geometrik obyektlarni ham o`rgatadi deb qo`shimcha qiladilar. Yuqori sinf o`quvchilari esa matematika funksiyalarni o`rgatishini ham ilova qiladilar. Talabalar oliy o`quv yurtlarida matematikaning differensial tenglamalar, ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika kabi yangidan yangi bo`limlarini o`rganadilar va shu sababli ularning javoblari o`quvchilar javobiga nisbatan kengroq va to`laroq bo`ladi.

Ammo barcha javoblar bir tomonlama xarakterga ega bo`lib, matematikaning u yoki bu yo`nalishlarini ifodalaydi. Bu savolga umumiy holda javob berish uchun juda ko`p matematiklar, faylasuflar harakat qilganlar. Hozircha bu savolga eng qoniqarli javob XX asrning buyuk matematigi A.N.Kolmogorov (1903-1987) tomonidan keltirilgan va quyidagicha ifodalanadi: "Matematika haqiqiy olamning miqdoriy munosabatlari va fazoviy formalari haqidagi fandir".

Matematika boshqa tabiiy fanlardan shu bilan farq qiladiki, u real olamni, atrofimizdagi obyekt va jarayonlarni abstraktlashtirilgan holda o`rganadi va shu sababli uning natijalari umumiy xarakterga ega.

Masalan, biologiya tirik hayotni o`rganuvchi fan bo`lib, unda qo`llaniladigan usullar xususiy xarakterga ega va bu usullarni fizikaga yoki tilshunoslikka tatbiq etib bo`lmaydi. Xuddi shunday fikrlarni fizika, ximiya, geologiya va boshqa fanlar uchun ham aytish mumkin.

Ammo arifmetikaning qonun-qoidalarini biologiya obyektlariga ham, fizik-ximik tadqiqotlarga ham, iqtisodiy masalalarni yechishda ham, qishloq xo`jaligida ham bir xil muvaffaqiyat bilan qo`llash mumkin. Shu sababdan ham XIX asrning buyuk matematigi Gauss

«Arifmetika - matematikaning podshohidir, matematika esa barcha fanlarning podshohidir.» deb bejiz aytmagan.

Hozirgi kunda matematika shartli ravishda elementar va oliy matematika kabi qismlarga ajraladi. Uning *strukturasi* quyidagicha:

Elementar matematika: arifmetika, elementar algebra, elementar geometriya (planimetriya va stereometriya), elementar funksiyalar nazariyasi va analiz elementlari.

Oliy matematika: matematik tahlil, algebra, analitik geometriya, chiziqli algebra va geometriya, diskret matematika, matematik mantiq, differensial tenglamalar, differensial geometriya, topologiya, funksional analiz va integral tenglamalar, funksiyalar nazariyasi, ehtimolliklar nazariyasi, matematik statistika, variatsion hisob va optimallashtirish usullari, sonli usullar, sonlar nazariyasi.

Elementar matematikaning dastlabki obyekti sanoq bo`lgani uchun ko`pincha unga *«hisob-kitob haqidagi fan»* deb qaralgan (ammo bugungi matematikada hisoblashlar, hatto formulalar ustidagi amallar juda kichik o`rin egallaydi). Oliy matematika (ba’zan “Zamonaviy matematika” deyishadi)ning boshlang`ich nuqtasi deb XVII asr – matematik tahlilning paydo bo`lish asri qabul qilingan. Bu paytda analitik geometriya va algebra simvolikasi vujudga keldi. XVII asr oxiriga kelib I.Nyuton, G.Leybnits va ularning o`tmishdoshlari tomonidan yangi matematik apparat - differensial va integral hisob yaratildi. Bu apparat matematik tahlilning asosini va ta’bir joiz bo`lsa, hatto umuman hozirgi zamon tabiatshunosligining matematik asosini tashkil etadi. Bu davrda matematika «*Miqdoriy munosabatlar va fazoviy shakllar haqidagi fan*» mazmunida ta’riflangan. *Matematik madaniyat* — umuminsoniy madaniyatning tarkibiy qismi hisoblanadi. Barchamizga ma’lumki, matematika fani insonning aqlini o`stiradi, uning diqqatini rivojlantiradi, ko`zlangan (rivojlantirilgan) maqsadga erishish uchun o`zida qat’iyat va irodani tarbiyalaydi, o`zidagi algoritmik tarzdagi tartib-intizomlilikni ta’minlaydi va eng muhimi uning tafakkuri kengayadi. Matematika olamni, dunyoni bilishning asosi bo`lib, tevarak-atrofimizdagi voqea va hodisalarning o`ziga xos qonuniyatlarini ochib berishda ahamiyati juda katta. Matematikada borliq, asosan, *matematik modellar* yordamida ideallashgan holda in’ikos qilinadi. Ideallashtirish jarayonida mavjud obyektlar haqidagi empirik bilimga tayangan holda, haqiqatda mavjud bo`lmagan va ba’zan mavjud bo`lishi mumkin ham bo`lmagan, lekin real mavjud predmetlarga ma'lum bir munosabatda o`xshash obyektlar haqidagi tushunchalar hosil qilinadi. Tadqiq qilinayotgan jarayon va hodisalardagi qonuniyatlar matematik belgilar yordamida ixcham ko`rinishda ifoda etilib, ularning matematik modeli quriladi va o`rganiladi. *Matematik modellashtirish* tashqi dunyoni bilish hamda bashorat qilish va boshqarish uchun samarali usul hisoblanadi.

Tafakkur– voqelikni bilishdan iborat bo`lgan aqliy faoliyatning yuksak shakli. Matematikada tafakkur yuritish *mantiqiy qonunlar* asosida amalga oshiriladi.

Matematik tafakkur deganda o`zaro bog`langan mantiqiy amallar majmuasi tushuniladi: matematik tilning belgi sistemalari bilan ishlash; fazoviy tasavvurni qabul qilish; shuningdek, «xususiy hollarda aniqlangan, qonuniyatlarni umumlashtirish; induktiv isbotlar; analogiya bo`yicha isbotlar; muayyan hollarda matematik tushunchalarni topish yoki ular asosida shunday hollarni ko`rish» (D.Poya).

Shuni aytish lozimki, matematik taffakur faqat mantiqiy amallarga tayanmaydi. Masalani to`g`ri qo`yilishi hamda uning yechimini tanlab olishni baholash uchun matematik intuitsiya muhim rol o`ynaydi.

Ta'rıf—avvaldan ma'lum tushunchalar asosida yangi tushuncha kiritishga xizmat qiladigan matematik jumla.

Ta'riflash quyidagi asosiy vazifalarni hal qilishda yordam beradi:

1) tushunchada aks etuvchi predmetning muhim belgilarini ko`rsatadi;

2) tushunchani ifoda qiluvchi so`zning (terminning) ma'nosini ochib beradi;

3) termin hosil qilishga imkon beradi. Ta'rifda odatda "deyiladi" (yoki "deb ataladi", "deb yuritiladi" va h.k.) so`zlari ishtirok etadi.

Isbot — mulohaza, hukm, nazariyaning chinligini aniqlash (asoslash). Isbotning obyektiv metod orqali mantiqiy ishonchga olib boradigan turi va inson his-tuyg'ulari, mayllariga asoslanib ruhiy ishonchga olib keladigan turi mavjud. Mantiqiy isbotning tuzilish jihatdan *tezis* (isbotlanishi kerak bo`lgan fikr), *asos* (tezisni isboti uchun keltirilgan dalillar) isbotidan iborat. Isbot fan va amaliyotda doim qo`llanadigan fikrlash usulidir.

Matematikada mulohaza yuritishning deduksiya va induksiya deb nomlangan ikki muhim usuli mavjud.

Induksiya — ayrim fikrlardan umumiy xulosalar chiqarishda va mantiqiy tadqiqotlarda qo`llaniladigan muhokama usuli. Xususiylikni o`rganib, umumiylik bilib olinadi. Umumiylik predmet va hodisalar bilan uzviy aloqada bo`ladi. Induksiya bilimlarning tashkil topishida, qonuniyatlarni ochishda, tushunchalarni maydonga chiqarish jarayonida, gipotezani olg`a surishda fan uchun muhim ahamiyatga ega.

Deduksiya — mantiq qoidalariga ko`ra xulosa chiqarish. Dastlab formal mantiqda umumiylikdan xususiylik, ayrimlik tomon muhokama yuritish deduksiya deb atalgan. Hozirgi zamon fanida «Deduksiya» termini keng ma'noda qo`llanilib, muayyan hukmdan mantiq qonunlari asosida xulosa chiqarish tushuniladi. Agar asos qilib olingan hukm haqiqiy va deduksiya qonunlariga rioya qilingan bo`lsa, undan chiqariladigan xulosa ham haqiqiy bo`ladi. O`z-o`zidan ravshanligi, ayonligi sababli isbotsiz qabul qilinadigan holat, tasdiq, fikr *aksioma* deb atalishini eslatib o`tamiz. Deduktiv metod turli shakllarda, xususan *aksiomatik metod*, shuningdek, gipotetik — deduktiv metod shaklida uchraydi. Mavjud faktik materiallardan deduktiv yo`l bilan nazariya yaratishda asos bo`ladigan fikrlar majmuasi (aksioma va boshqalar) tanlab olinib, mantiq qonunlari asosida ulardan boshqa bilimlar hosil qilinadi.

1.2. Matematika rivojlanishining asosiy bosqichlari. Algebra fanining vujudga kelishi va rivojlanishi

Albatta, matematika bunday o`lkan bahoga erishishi uchun uzoq taraqqiyot yo`lini bosib o`tishiga to`g`ri kelgan. A.N.Kolmogorov o`zining 1954-yilda qobusnoma uchun yozilgan va "Matematika" deb atalgan maqolasida bu taraqqiyotni ushbu to`rt davrga ajratadi:

1
- Matematikaning paydo bo`lish davri. (qadimgi davrlardan mil.av. VI-V asrlargacha)

2
- O`zgarmas miqdorlar matematikasi (elementar matematika) davri. (Mil.av. V asrdan milodning XVII asrigacha)

3
- O`zgaruvchi miqdorlar matematikasi (oliy matematika) davri. (milodiy XVII-XIX asrlar)

4
- Matematika taraqqiyotining hozirgi zamon davri. (XIX asrning ikkinchi yarmi va XX asr)

**I. Matematikaning paydo bo`lish davri** ibtidoiy jamoa tuzumidan toki eramizdan avvalgi VI-V asrgacha davom etdi. Dastlabki matematik bilimlar amaliy xarakterga ega bo`lgan. Bu davrda insoniyat turli predmetlarni sanashni o`rgandi. Odamlar asbob-uskunalari, ovlagan hayvonlarini, parrandalarini va boshqa chekli narsalarni sanash orqali **son** tushunchasini yartaganlar. Sanoq sistemalari oldin og`zaki holda ishlatilgan. Yozma sanoq sistemalarini kashf etilishi bilan natural sonlar ustida turli arifmetik amallar bajarish qonun-qoidalari topila boshlandi. Masofalar (yo`llar) uzunligini, shakllar yuzini, jismlar hajmini, hosilning oz-ko`pligini o`lchash, taqqoslash va taqsimlash bilan **miqdor** tushunchasi yaratildi. Maydonlarni o`lchash, jismlar hajmini hisoblash, turli ish qurollarini yaratishga ehtiyoj paydo bo`lishi bilan geometriyaning kurtaklari shakllana boshlandi. Shunisi qiziqki, bu jarayonlar turli xalqlarda bir-biriga bog`liqmas ravishda, parallel ko`rinishda amalga oshdi.

Shu tariqa qadimgi Misr, Hindiston, Xitoy, Yunonistonda arifmetik va geometrik bilimlar yig`ila borib, fan sifatida shakllandi.

Bu davr matematikasining katta yutuqlaridan ba'zilari muntazam to`rtburchakli kesik piramida ko`rinishidagi jismlarning hajmini hisoblash formulasini chiqarish va π soninig qiymatini taqriban $(16:9)^2$ ga tengligini aniqlash kabi natijalar hisoblanadi.

**II. O`zgarmas miqdorlar matematikasi (elementar matematika) davri** eramizdan avvalgi V asrdan boshlab toki eramizning XVII asr boshlarigacha davom etdi. Oldingi davrdagi matematik bilimlar tarqoq, xususiy ko`rinishdagi natijalardan, qonun-qoidalardan iborat edi. Ularni birlashtirish, umumiy ko`rinishga keltirish qadimgi Gretsiyadan boshlandi va matematika fanini ilmiy poydevoriga asos solindi.

Evklidning "Negizlar" asarida elementar geometriya fani aksiomatik ravishda ifodalandi va bu asar ikki ming yil davomida boshqa matematik fanlarning asosini yaratishga misol, namuna sifatida xizmat qilib keldi. Qadimgi Gretsiyada matematikaning (asosan geometriyaning) rivojlanishiga **Pifagor, Aristotel, Arximed, Geron, Diofant, Ptolomey** (er.av.VI-IV asrlar)kabi mutafakkirlar katta hissa qo`shdilar. Turli gidrotexnik ko`rilishlar (masalan, Arximed vinti), harbiy mashinalar, Arximedni tosh otuvchi qurilmalari, oynalar sistemasida kemalarni yondirib yuborish, dengizda suzish uchun kerakli bilimlar, geodeziya va kartografiya, astronomik kuzatishlar bilan bog`liq masalalar matematikani rivojlanishiga katta turtki bo`ldi.

Ko`rilayotgan davrning IX-XV asrlari davomida matematikaning rivojlanishiga O`rta Osiyo olimlarining hissasi katta bo`ldi. Bu vaqtda arablar juda ko`p yerlarni bosib olib, arab xalifaligiga birlashtirdilar. Bu yerlarda olimlar yagona arab tilidan foydalana boshladilar va bu ular orasidagi aloqalarni mustahkamlanishiga olib keldi. Bundan tashqari o`sha davrda katta ilmiy tadqiqodlar davlat tomonidan moliyalashtirila boshlandi. Bu omillar ilmning rivojlanishiga, katta kutubxonalar tashkil etilishiga, rasadxonalar qurilishiga olib keldi.

IX asrda yashab ijod etgan xorazmlik olim **Muhammad ibn Muso al Xorazmiy** (783-850) birinchi bo`lib o`zining "Aljabr" asarida algebra faniga asos soldi. Yevropalik olimlar bu kitob orqali kvadrat tenglamalarni yechish usuli bilan tanishdilar. X asrda **Abu Rayhon Beruniy** (973-1048) $x^3+1=3x$ ko`rinishdagi kub tenglamani taqribiy yechish usulini topdi. XI-XII asrda yashagan **Umar Xayyom** (1048-1131) kub tenglamalarni umumiy holda tekshirdi, ularni sinflarga ajratdi va yechilish shartlarini topdi. XIII asrda ijod etgan Ozarbayjon matematigi **Nasriddin Tusiy** (1201-1274) sferik trigonometriyaning asos solinishiga yakun yasadi va Yevklidning "Negizlar" kitobini arab tiliga tarjima qildi. XV asrda buyuk astronom va matematik **Mirzo Ulug`bek** (1394-1449) "Ziji Kuragoniy" asarida 1018 ta yulduzning koordinatalarini nihoyatda katta aniqlik bilan hisoblab berdi. Bu ishda rasadxonada eng zamonaviy aniq asboblardan foydalanilgani bilan bir qatorda yirik matematiklar ham ishlaganini ko`rsatib o`tish kerak. Ulardan eng mashhuri **G`iyosiddin Jamshid ibn Ma'sud al-Koshiy** (1385-1429) hisoblanadi. U o`nli kasrlar ustida arifmetik amallar bajarish qonun–qoidalarini batafsil bayon qilib berdi (o`sha davrda O`rta Osiyoda asosan oltmishlik sanoq sistemasi qo`llanilgan). Al-Koshiy Nyuton binomi formulasini natural sonlar uchun og`zaki ko`rinishda ifodaladi, "Aylana haqidagi risola" asarida π sonini 17 xona aniqlikda hisobladi (Yevropada bu natijalarga atigi XVI asrda, aniqrog`i 1597-yilda erishildi), astronomik hisoblashlar uchun kerak bo`lgan sinuslar jadvalini tuzish uchun tenglamalarni iteratsion usulda sonli yechish yo`lini ko`rsatdi.

Hindistonning matematikaga qo`shgan eng katta hissasi – o`nli sanoq sistemasi uchun raqamlar va nolni kashf etilishidir. Bu raqamlar yevropaliklarga arab matematiklari asarlari orqali ma'lum bo`lgani uchun hozirgi paytda noto`g`ri ravishda «arab raqamlari» deb ataladi.

Elementar matematikaning rivojlanishiga Xitoy olimlarining ham katta ulushi bor.

XII-XV asrlar davomida G`arbiy Yevropa matematiklari asosan qadimgi Gretsiya va Sharq matematiklarining ishlarini o`rganish bilan shug`ullanib kelganlar, matematik bilimlarni ommalashtirish maqsadida turli asarlar yozganlar, matematik simvollarni kashf etganlar. Ammo XVI asrdan boshlab bu yerlik olimlar tomonidan yirik kashfiyotlar qilina boshlandi va yuksalish davri boshlandi. Masalan, polyak olimi **Kopernik**ning astronomik kashfiyoti, italiyalik olim **Galiley**ning (1564-1642) mexanika bo`yicha qator kashfiyotlari matematikani rivojlanishiga turtki bo`ldi.

Italiyalik matematiklar **Tartaliya, Ferrari, Kardano** uchinchi va to`rtinchi tartibli algebraik tenglamalarni yechish usullarini topdilar (oldin bu tenglamalar taqribiy yechilar edi). Fransuz matematigi **FransuaViyet** (1540-1603) n- darajali tenglama ildizlari bilan uning koeffitsientlari orasidagi munosobatlarni topdi.

III. O`zgaruvchi miqdorlar matematikasi (oliy matematika) davri** XVII asrdan boshlandi. Elementar matematikada kattaliklar va geometrik obyektlar qo`zg`almas, o`zgarmas miqdorlar kabi qaralar edi. Matematikada endi harakatlanuvchi va o`zgaruvchi miqdorlarni qurishga to`g`ri kela boshladi. Masalan, **Boyl Mariot** (1662) gaz hajmi bilan uning bosimi o'rtasida o`zaro bog'lanish mavjud ekanligini, **Guk (1660) esa qattiq jismning deformatsiyalanishi ε va kuchlanishi σ orasida $\sigma = \alpha\varepsilon$ ko`rinishdagi chiziqli bog`lanish mavjud ekanligini aniqladilar. Bu qonunlarda ikki o`zgaruvchi miqdor orasidagi o`zaro bog`lanishni o`rganishga to`g`ri keldi va bunday bog`lanishlar funksiya tushunchasiga olib keldi. Elementar matematikada (arifmetikada) son qanday asosiy ahamiyatga ega bo`lsa, oliy matematikada funksiya shunday asosiy ahamiyatga egadir. Funksiyalarni o`rganish matematik tahlil degan fanga olib keldi. Bu fanda limit, hosila, integral kabi tushunchalar kiritildi. Nemis matematigi **Vil'gelm Leybnits** (1646-1716) 1682-1686-yillarda va ingliz matematigi, mexanik **Isaak Nyuton** (1643-1727) 1665-1666-yillarda differensial va integral hisobni kashf etdilar.

Bu davrda matematikani rivojlanishiga **Dekart** (1596-1650), **Fur'ye** (1768-1830), **Paskal** (1623-1662), **Ferma** (1601-1665), **Gyuygens** (1629-1695), **Bernulli** (1667-1748), **Eyler** (1707-1783), **Lagranj** (1736-1813), **Dalamber** (1717-1783), **Koshi** (1789-1857) kabi buyuk olimlar katta hissa qo`shdilar. Shuningdek, ushbu davrda matematik tahlilni rivojlantirish bilan bir qatorda analitik geometriya, differensial tenglamalar, ehtimollar nazariyasi kabi yangi fanlarga asos solindi.

IV. **Matematika taraqqiyotining hozirgi zamon davri** XIX asr boshidan hisoblanadi. Oldingi davrlarda matematikaning rivojlanishi amaliy masalalarni yechish natijasida amalga oshgan bo`lsa, endi matematika o`z ichki qonuniyatlari bo`yicha ham rivojlana boshladi. Bu rivojlanish oldin topilgan tushunchalarni, natijalarni umumlashtirish, ularni mantiqiy jihatdan tugallanganligiga erishish, oldingi natijalarni hozirgi zamon yutuqlari asosida qayta ko`rib chiqish, tahlil etish kabi yo`nalishlarda amalga oshadi. Masalan, $x^2$-1=0 kvadrat tenglama $x=\pm 1$ ildizga ega ekanligi ma'lum, ammo unga juda o`xshash.

x^2 +1=0 tenglama haqiqiy sonlar ichida ildizga ega emas. Shu sababli haqiqiy sonlardan kengroq, umumiyroq bo`lgan kompleks sonlar tushunchasini kiritishga to`g`ri keldi. XIX asrda kompleks sonlar va ularning funksiyalarini o`rganish natijasida «Kompleks tahlil» fani paydo bo`ldi. Bu nazariyaning amaliyotga tadbiqlari keyinchalik topildi.

Algebraik tenglamalarni yechish masalalari bilan shug`ullanish natijasida **Abel, Galua** (1830) tomonidan guruhlar nazariyasi yaratildi. XX asrdagina guruhlar nazariyasi kristallarni o`rganishda, kvant fizikasida o`z tadbig`ini topdi.

XIX asrda matematika fanining juda ko`p sohalarga qo`llanilishi, tarkibining kengayishi natijasida uning poydevorini ilmiy nuqtayi nazardan qayta ko`rib chiqish yoki yaratish masalalari muhim ahamiyatga ega bo`ldi. Matematik fanlarning asosiy poydevori sifatida to`plamlar nazariyasi va matematik mantiq olindi. XX asrda juda ko`p matematik fanlar poydevori to`plamlar nazariyasi asosida yaratildi. XIX-XX asrda yangi matematik fanlarga ham asos solindi va rivojlantirildi. Masalan, to`plamlar nazariyasi, matematik mantiq, haqiqiy o`zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, funksional tahllil, topologiya, matematik fizika masalalari.

O`zbekistonda matematika fanining rivojlanishiga to`xtalib o`taylik. O`zbekistonda matematika fani bo`yicha yutuqlar Toshkentda 1920-yilda universitet tashkil etilishi bilan bog`liq. O’zbekistonga kelgan rus olimlari ichida **V.I.Romanovskiy** (1879-1954) ham bor edi. U matematik statistika bo`yicha ko`zga ko`ringan olim edi va u o`zbek matematika maktabini yaratishga katta hissa qo`shdi. O`zbek matematiklaridan birichi bo’lib **akademik Qori-Niyoziy** (1897-1970)ni ko`rsatish mumkin. U matematika bo`yicha katta ilmiy ishlar qilmagan bo`lsa-da, matematikani targ`ib qilish, o`zbek tilida darsliklar yozish bilan O`zbekistonda matematikaning rivojlanishiga katta hissa qo`shdi. Dunyoga tanilgan matematiklarimizdan **akademik T.A.Sarimsoqov** (1915-1995), **akademik S.X.Sirojiddinov** (1920-1988), **akademik M.S.Salohitdinov** (1933) funksional tahlil, matematik statistika, matematik fizika tenglamalari bo`yicha juda katta kashfiyotlar qilib, o`zbek matematika maktabini jahonga tanitdilar.

1.3. Matematikaning zamonaviy dunyoda, jahon madaniyati va tarixida, jumladan, gumanitar fanlardagi o`rni

Matematik bilimlar nafaqat baho olish uchun savol – javoblar yoki imtihonlarda, balki uyda, ish jarayonida, sport va san’at bilan shug`ullanishda, savdo-sotiq, oldi-berdi hayotning har bir lahzasida naf beradi. Matematika fani biror misol yoki masala, topshiriqlarni turmushdagi oddiy vaziyatlar yordamida yechishga o`rgatadi.

Misol uchun: Shahnoza opaning plastik kartochkasiga 450 000 so`m oylik maoshi tushdi. U oyligining 35% ini plastik kartochkasiga oladi. Uning jami oyligi necha so`m? Uning naqd pulda oladigan maoshi qancha?

Bu misolni to`g`ri proporsional usulida osongina yechish mumkin:

- 450 000 – 35 %
- X - 100 %
- (450 000 x 100 / 35 = 1 285 714,29)
- Demak, 1 285 714 so`m – uning jami maoshi. Shundan 450 000 so`m plastik kartochkaga tushsa, 835 714 so`m naqd pul oladi.

Mutaxassislarning ta'kidlashlaricha, matematikani yaxshi o`zlashtirgan o`quvchining tahliliy va mantiqiy fikrlash darajasi yuqori bo`ladi. U nafaqat misol va masalalar yechishda, balki hayotdagi turli vaziyatlarda ham tezkorlik bilan qaror qabul qilish, muhokama va muzokara olib borish, ishlarni bosqichma-bosqich bajarish qobiliyatlarini o`zida shakllantiradi. Shuningdek, matematiklarga xos fikrlash uni kelajakda amalga oshirmoqchi bo`lgan ishlar, tevarak – atrofda sodir bo`layotgan voqea-hodisalar rivojini bashorat qilish darajasiga olib chiqdi.

Ko`pchilik matematiklar o`z sohasini estetik miqyosda yetakchi deb baholashadi. Haqiqatdan ham, ko`pchilik matematik isbotlar "nodir" hisoblanib, ularning natijalari esa "go`zallik" dir. Bu go`zallikni his etish, o`z hayotida tatbiq etish ma'naviyat, madaniyatni rivojlanishiga asos bo`lib xizmat qiladi.

Vatanimizning gullab-yashnashi, barqaror rivojlanishi ma'lum bir darajada yoshlarning chuqur bilimga, mustahkam ishonch-e'tiqodga va umuman, komil inson bo'lishlariga bog'liq.

Bu haqda birinchi Prezidentimiz Islom Karimov «Komil inson deganda biz, avvalo, ongi yuksak, mustaqil fikrlay oladigan, xulq-atvori bilan o`zgalarga ibrat bo`la oladigan, bilimli, ma'rifatli kishilarni tushunamiz. Ongli, bilimli odamlarni oldi-qochdi gaplar bilan aldab bo`lmaydi. U har bir narsani aql, mantiq tarozisiga solib ko`radi. O`z fikr-o`yi, xulosasini mantiq asosida qurgan kishi yetuk odam bo`ladi»[1] deb ta'kidlagan.

Matematika fanining yana bir o`ziga xos jihati shundan iboratki, har qaysi fan albatta unga murojaat qiladi. Tarix, dinshunoslik, huquqshunoslik kabi gumanitar fanlar ham matematika bilan ko`proq aloqada bo`lishadi. Masalan, qamoq jazosini ozodlikdan mahrum qilish jarayonida, aholiga pensiya tayinlash chog`ida mutaxassisdan matematik amallarni mukammal darajada bilishi talab etiladi.

Shu bilan birga zamonaviy dunyoning tezkor rivojlanishi, jahon madaniyati, inson omilining yuqori sur'atlarda o`sib borishi bevosita matematika bilan bog`liqligini alohida ta'kidlash joiz. Buning isboti sifatida matematikaning amaliy tatbiqlari bo`yicha ba'zi bir misollarni keltiramiz.

[1] **Каримов И.А. Тарихий хотирасиз келажак йўқ. //Асарлар тўплами. 7 жилд. - Т.: "Ўзбекистон", 1999, 134-бет.**

1. 1845-yilda fransuz matematigi **Levere** Uran planetasi trayektoriyasi tenglamasini tekshirib, bizga noma'lum osmon jismi borligini, uning trayektoriyasini va massasini nazariy yo`l bilan, ya'ni "qalam uchida" hisoblab topdi. U ko`rsatgan koordinatalar bo`yicha 1846-yil 23-sentabr kuni nemis astronomi **Galle** teleskopda Neptun planetasini kashf etdi. Xuddi shunday ravishda 9-planeta 1915-yilda qilingan matematik hisoblar asosida 1930-yili kashf etildi.

2. Neytron, kvark kabi elementlar zarrachalarining mavjudligi va ularning xossalari tajribalar asosida emas, hisoblashlar asosida kashf etildi.

3. Samolyotlarning uchish uzoqligi kattalasha borishi bilan ularni avtomatik boshqarish masalasi paydo bo`ldi. Bu masalani **L.S. Pontryagin** (Rossiya) va **Belman** (AQSH) kabi matematiklar hal qilib, optimal boshqarish nazariyasi degan yangi fanga asos soldilar.

4. Telefon aloqasini rivojlanishi bilan aloqa bo`limlarida abonentlarni navbatda qancha kutib turish vaqtlari kabi masalalar natijasida amerikalik olim **Erlang** "Ommaviy xizmat ko`rsatish nazariyasi" nomli yangi matematik fanga asos soldi.

5. Kosmosni o`zlashtirish muammolarini yechishda matematika roli benihoyat kattadir. Akademik **Keldush** (Rossiya) rahbarlik qilgan "Amaliy matematika" ilmiy-tekshirish institutida bu masalalarni yechish usullari ishlab chiqildi va ular EHM lar yordamida amalga oshirildi.

6. Iqtisodiyotda xalq xo`jaligini boshqarish uchun amerikalik iqtisodchi-olim **Leontyev** tomonidan tarmoqlararo muvozanatning matematik modellari ishlab chiqildi va uning tenglamalari yechilib, ishlab chiqrishni oqilona boshqarishga erishildi.

7. **Akademik Kantorovich** (Rossiya) materiallardan andoza olishning kamchiqim yo`llarini axtarish bilan shug`ullandi va natijada chiziqli dasturlash nomli yangi matematik fanga asos soldi. Bu fan natijalari asosida xalq xo`jaligida juda katta iqtisodiy foydaga erishildi va shu sababli Kantorovich iqtisodiyot bo`yicha **Nobel** mukofotiga sazovor bo`ldi.

Bunday misollarni yana ko`plab keltirish mumkin va ular matematikaning qanchalik darajada ahamiyatli ekanligini ifodalaydi.

1.4. Evklid geometriyasi birinchi aksiomatik nazariya sifatida

Aksiomatik metod birinchi marta qadimgi yunon geometrlari asarlarida shakllana boshlagan. Evklidning «Negizlar» (miloddan avval III asr) asarida bayon etilgan geometrik sistema aksiomatik usul bilan nazariya qurish namunasidir. Bu asar jami bo`lib 13 bobdan iborat bo‘lib, uning 1-4 boblarida planimetriyaning aksiomatik nazariyasi qurilgan. Mazkur geometriyaning asosiy aksiomatik tushunchalari «nuqta», «to`g`ri chiziq», «tekislik» bo`lib, ular ideal fazoviy obyektlar sifatida olib qaralgan; geometriyaning o`zi esa fizikaviy fazoning xususiyatlarini o`rganuvchi ta’limot sifatida talqin qilingan. Evklid geometriyasining qolgan barcha tushunchalari ular yordamida hosil qilingan.

Evklidning «Negizlari» deyarli barcha asosiy tillarga tarjima qilingan.

XIX asr oxiri va XX asr boshlarida turli geometriyalar (Lobachevskiy geometriyasi, Proyektiv geometriya, Riman geometriyasi kabi), algebralar (Bul algebrasi, kvaternionlar algebrasi, Keli algebrasi kabi), cheksiz o`lchovli fazolar kabi mazmunan juda xilma-xil, ko`pincha sun’iy tabiatli obyektlar o`rganila boshlanishi bilan matematikaning yuqoridagi ta’rifi o`ta tor bo`lib qolgan. Bu davrda matematik mantiq va to`plamlar nazariyasi asosida o`ziga xos mushohada uslubi hamda tili shakllanishi natijasida matematikada eng asosiy xususiyat — qat’iy mantiqiy mushohada, degan g`oya vujudga keldi (J.Peano, G.Frege, B.Rassel, D.Gilbert).

XIX asr oxiri XX asr boshlariga kelib matematika asoslarini mustahkamlash bo`yicha katta qadamlar qo`yildi: haqiqiy sonlar nazariyasi tugallandi (Veyershtrass, Dedekind), matematik mantiq shakllandi (Peano, Frege), funksiyalar nazariyasi yaratildi (Riman, Lebeg, Fubini, Stiltes), geometriyaning aksiomalar sistemasi takomilga yetkazildi (Gilbert), to`plam tushunchasining ahamiyati anglandi, bu tushuncha asosida geometriya kabi butun matematikani ham qat’iy aksiomalar asosiga qurishga ishonch paydo bo`ldi.

XIX asr ikkinchi yarmidan matematikaning turli sohalari aksiomatik metod bilan qurila boshlandi (turli geometriyalar, arifmetika, ehtimolliklar nazariyasi va b.). Aksiomatik metodning keyingi taraqqiyoti, mukammalashuvi D.Gilbert kiritgan formal sistema va formalizm metodi bilan bog`liq.

Ammo matematika asoslariga chuqurroq kirishilgani sayin muammolar ham o`tkirlashib bordi — XX asrning boshlari matematika tarixidagi eng chuqur inqirozga to`qnash keldi — matematikaning asoslarida chuqur ziddiyatlar ochila boshladi (Burali — Forti, Rassel, Rishar, Grelling paradokslari). Ularni yengib o`tish yo`lidagi urinishlar natijasida to`plamlar nazariyasining aksiomatik nazariyasi yaratildi (Sermelo, Frenkel, Bernays, J. Fon Neyman) va «matematika binosi yaxlit mukammal loyiha asosiga qurilgani» haqidagi Gilbert tasavvuri qayta tiklandi.

Struktura deb o`zaro bog`langan va shartlangan munosabatda bo`lgan elementlardan tashkil topuvchi butunlik tushuniladi. Strukturaga bunday yondashuv o`rganilayotgan obyektni uni tashkil etgan elementlar o`rtasidagi ichki aloqa va bog`liqlikni yoritishni talab etadi.

XX asr o`rtalarida Burbaki[1] taxallusi ostida matematika asoslarini qayta ko`rib chiqqan bir guruh fransuz matematiklari «*Matematika — matematik strukturalar majmuasi* » degan ta'rif kiritdi.

Matematika tili, uning mohiyati va kamchiliklari. XX asr boshqa fanlar taraqqiyotida bo`lgani kabi lingvistika tarixida ham asosiy e'tiborning obyektga substansional nuqtayi nazardan yondashuvdan struktur-funksional nuqtayi nazardan yondashuvga o'tishi bilan xarakterlanadi. Bunga F.deSossyurning "Umumiy lingvistika kursi"da bayon qilingan "til substansiya emas, balki shakldir" degan bosh g`oyasi sababchi bo`ldi.

Struktur tilshunoslik tilga belgilar sistemasi sifatida qaraydi va tilshunoslikni belgi nazariyasi bilan shug`ullanuvchi semiotikaning tarkibiy qismi deb baholaydi.

Hozirgi zamon tilshunosligida til o`ziga xos semiologik sistema (belgi-ishoralar sistemasi), ya'ni *"til g`oyalarni ifodalovchi belgilar sistemasi"* ekanligi qabul qilinib, jamiyatda asosiy va eng muhim fikr almashish quroli, jamiyat tafakkurining rivojlanishini ta'minlovchi, avloddan avlodga madaniy-tarixiy an'analarni yetkazuvchi vosita xizmatini o`tashi ta'kidlangan.

---

[1]Burbaki (Bourbaki Nicolas, 1937-1968) - fransuz matematiklari (A.Veyl, A.Kartan, J.D'yedonne, K.Shevalle, J.Del'sart) tashkil qilgan ijodiy guruh.

Tilni hosil qilgan lingvistik obyektlar ularga ma’lum darajada o`xshash matematik strukturalar yordamida yaxshi ifodalanishi ma’lum.

Shuning uchun ham hozirgi zamonda matematik usullar tilshunoslikda uchraydigan hodisalarni va faktlarini tushuntirishga va bashorat qilishga qodir bo`lgan matematik modellarini qurishga hamda tahlil qilishga samarali qo`llanilmoqda.

XX asrning 50-yillardan boshlab matematikaning tabiiy tilni hosil qilgan obyektlar bilan ba’zi bir jihatlardan o`xshash bo`lgan mavhum strukturalarni o`rganuvchi *matematik lingvistika* (lot. lingua – til) deb nomlangan fan vujudga keldi.

Ko`pincha tilshunoslikda matematik usullarni qo`llash intuitiv tarzda qo`yilgan masalani bitta yoki bir nechta soddaroq va mantiqan to`g`ri qo`yilgan matematik masalalar bilan almashtirsa bo`ladi. Odatda bunday masalalar algoritmik yechimga ega, shuning uchun ham bunday yondashish zamonaviy kompyuter vositalari yordamida og`zaki muloqotning avtomatik tarzda analiz va sintez qilish, axborotlarni qayta ishlash, avtomatik tarjima tizimlarini yaratish uchun zarurdir.

Shu bilan birga matnlarni lingvistik jihatdan tahlil qilish, leksiko-grammatik hodisalarni topish, funksional va pragmatik tomondan matnning strukturaviy-semantik va stilistik xususiyatlarini anglashida ma’lum darajada matematik taffakkur metodlaridan foydalanishi maqsadga muvofiq [1]. Matematik lingvistika tilshunoslik bo`limi sifatida tabiiy tillar hodisalarini va ularni tadqiq etish jarayonlarini mavhumiy-semiotik modellashtirish usulidan foydalanadi; matematik fan sifatida esa ana shu modellarning eng umumiy xossalarini tadqiq etadi va ularning tuzilish usullarini o`rganadi. Uning asosiy tushunchalari — asos qilib olingan belgi-ishoralar (alifbo, lug`at) va ma’lum alifbo belgi-ishoralarining ketma-ketliklari (so`z shakllar, iboralar) kabi tushunchalardir. Bu asosiy tushunchalar tilshunoslikning har bir sathida qo`llanadi. Shuning uchun ham o`z maqsad-vazifasiga ko`ra, matematik lingvistika, eng avvalo, nazariy tilshunoslik vositasi hisoblanadi.

Matematika tili. Matematika ham o`z alifbosiga egadir. Bu alifbo harflar, raqamlar va maxsus belgilardan tashkil etilib, ularning

---

1 Гальперин И.Р. Текст как объект лингвистического исследования. Изд. 4-е, стереотипное. М: ДомКнига, 2006. — 144 с.

har biri o`z navbatida yaxlit deb qabul qilingan belgilardan iboratdir. Matematik belgilar - matematikaga oid bilimlarni yozuvda ifodalash uchun qo'llanadigan belgilardir. Hozirgi zamon matematikasining ko`plab natijalarini rivojlangan va qulay belgilarsiz tasavvur qilish mumkin emas. Keng ma'noda aytganda matematik til xuddi tabiiy tildek alifbo, so`zlar, grammatika, bu tilda turli matnlardan tashkil topgan. Matematik tilda so`zlar va grammatikaning analogi sifatida matematik belgilar, aksiomalar, teoremalar, ta'riflar, matnlar analogi sifatida esa matematik modellar deb qaralsa bo`ladi.

Xalqaro matematika ittifoqi tomonidan nashr qilingan "Matematika: chegaralari va istiqbollari" nomli kitobda quyidagi ta'rif keltirilgan[1]:

"Matematika – bu o`ziga xos bo`lgan grammatik qoidalari yordamida chekli alfavit belgilarining chekli zanjirlarini boshqa shunday zanjirlarga almashtirishlarni o`rganadigan tilshunoslikning bo`limi".

Tabiiy tillardan farqli tomoni shundaki, bu maxsus til grammatikasida «1 + 2» belgilar zanjiri o`rniga «3» belgisini qo`yish qoidasiga o`xshash qoidalar bisyor.

Matematik tilning <u>afzalliklari</u>:

1. Maxsus belgilar yordamida fikrlash madaniyatini egallashga, fikrlarni ketma-ket, mantiqan to`g`ri, aniq va ratsional ifodalashga imkon yaratadi.
2. Tevarak atrofimizdagi voqea va hodislarni ongli o`rganish uchun katta imkoniyatlarga ega.

Matematik tilning <u>kamchiliklari</u>:

1. O`ziga xosligi
2. Ko`p obyektlarni obrazli tasvirlash imkoniyatlari chegaralanganligi.

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. Matematikaning inson faoliyatidagi o`rnini tushuntiring.
2. Matematikaning vujudga kelish davri mohiyati nimalardan iborat?

---

[1] *Mathematics: Frontiers and Perspectives. (Eds.V.Arnold,M.F.Atiyah,P.Lax,B.Mazur.) Amer. Math.Soc., 2000).manbaningmazmun mohiyatidan foydalanildi*

3. Geometriya fanining vujudga kelishi nimalarga bog`liq?
4. Rivojlanish davrining 3-bosqichi mazmunini asoslang.
5. Matematikaning zamonaviy strukturasini tushuntiring.
6. Induksiya va deduksiyaga ta'rif bering.
7. Evklid gemetriyasining mazmunini tushuntiring.
8. Matematikaning tili deganda nimani tushunasiz?
9. Matematik tilning mohiyati nimadan iborat?
10. Mustaqil ravishda tarixiy va qiziqarli masalalarni yechish yo`llarini o`rganing.
11. 5 va 9 litrli chelak yordamida hovuzdan roppa-rosa 3 litr suv oling.
12. Bir to`p askar daryodan o`tishlari kerak edi. Ular daryoda qayiqda suzib yurgan ikki bolani ko`rdilar va daryodan o`tkazib qo`yishni iltimos qildilar. Ammo qayiq juda kichik – yo ikki bolani yoki faqat bir askarni ko`tara olar edi. Shunday bo`lsa ham askarlar daryodan o`ta olishdi. Qanday qilib?
13. Boy bilmasdan savatni turtib yuboribdi va natijada savat ag`darilib, tuxumlar sinibdi. Shunda boy xijolat bo`lib savatdagi barcha tuxumlarning pulini to`lamoqchi bo`libdi va tuxumlar sonini so`rabdi. Shunda Fotima tuxumlarni 2 tadan, 3 tadan, 4 tadan, 5 tadan va 6 tadan sanaganda bir qoldiq qolishini, 7 tadan sanaganda esa qoldiq qolmasligini aytibdi. Topingchi Fotimaning savatida nechta tuxum bor edi?
14. Hisoblang:

1) Oltita ta 4 yordamida 100 ni hosil qiling.

2) Ikkita 4 raqami va matematik belgilar yordamida 64 sonini hosil qiling.

3) Yettita 4 yordamida 100 sonini hosil qiling.

4) To`rtta 4 yordamida 113 hosil qiling.

5) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlarining o`rnini almashtirmay, ular orasiga bor yo`g'i uchta qo'shuv yoki ayiruv ishoralarini shunday qo`yingki, natijada 100 chiqsin.

2-§. To`plamlar va ular ustida amallar

"Matematika fani tabiat sirlarini o`rganishda eng qulay fandir".
G.Galiley

Tayanch iboralar: *to`plam, uning elementi, berilish usullari, chekli, cheksiz, bo`sh to`plamlar, to`plam osti, universal to`plam, teng to`plamlar, birlashma, kesishma, ayirma, simmetrik ayirma, dekart (to`g`ri) ko`paytma, Eyler-Venn diagrammallari.*

2.1. To`plam tushunchasi va uning elementlari

To`plam – matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo`lib, u ta'riflanmaydigan, faqat misollardagina tushuntiriladigan tushunchadir. Masalan, auditoriyadagi talabalar to`plami, to`g`ri chiziqdagi nuqtalar to`plami, kitobning ma'lum betidagi so`zlar to`plami, alifbodagi harflar to`plami, O`zbekistondagi viloyatlar to`plami, Quyosh sistemasidagi planetalar to`plami, biror aylanada yotuvchi nuqtalar to`plami va hokazo.

To`plamni tashkil qiluvchi obyektlar uning elementlari deyiladi.

To`plam odatda lotin alifbosining bosh harflari bilan (masalan, *A,B,C,...*), uning elementlari esa shu alifboning kichik harflari bilan (masalan, *a, b , c, d,...)* belgilanadi.

To`plam bir qancha elementlardan iborat bo`lishi mumkin, quyidagi yozuv:

$$a \in A \qquad (1)$$

a elementni A to`plamga tegishliligini bildiradi.

$$a \notin A \qquad (2)$$

a elementni A to`plamga tegishli emasligini bildiradi, yoki mantiq belgisidan foydalangan holda $\urcorner(a \in A)$ ko`rinishda yozishimiz mumkin. Agar $a \in A$ bo`lsa, u holda "$a$ element $A$ to`plamga tegishli" deyiladi[1].

Hajmlilik aksiomasiga ko`ra, to`plam elementlarini quyidagicha belgilashimiz ham mumkin,

$$A = \{1; a; t; x\}, \qquad (3)$$

bunda, A to`plam tarkibida 1 soni va a, t, x harfiy belgilar kiradi.[2]

[1]*Herbert Gintis , Mathematical Literacy for Humanists, p.p11-12 betlarning mazmun, mohiyatidan foydalanildi.*
[2] *Herbert Gintis , Mathematical Literacy for Humanists, p.p.12-14 betlarning mazmun, mohiyatidan foydalanildi.*

To`liqlilik aksiomasiga ko`ra, to`plam elementlari soni uning tarkibiga kiruvchi elementlar bilan aniqlanib, ularning qanday tartiblanganiga bog`liq emas.

(3) A to`plam $\{a; x; 1; t\}$ to`plam bilan ham va $\{x; t; a; 1; 1; 1; t; a; t; x\}$ to`plam bilan ham bir xildir[1].

To`plamlar asosan ***ikki xil usulda beriladi***:

1) elementlarining ro`yxati bilan;

2) elementlarining xarakteristik xossasi bilan

Masalan, A={qizil; sariq; yashil}- ro`yxati,

A={svetofor ranglari to`plami}- xarakteristik xossasi.

Elementarlarining soniga ko`ra to`plamlar 3 turli bo`ladi: chekli to`plamlar; cheksiz to`plamlar va bo`sh to`plamlar.

Elementlari soni chegaralangan to`plam ***chekli***, elementlari soni chegaralanmagan to`plam ***cheksiz*** to`plam deyiladi. Masalan, auditoriyadagi talabalar to`plami chekli to`plam, barcha natural sonlar to`plami {1; 2; 3; ...; n, n+1;…} esa cheksiz to`plam.

Matematikada ko`pincha sonli to`plamlar, ya`ni elementlari sonlardan iborat bo`lgan to`plamlar ishlatiladi. Maktab matematika kursidan bilamizki, sonli to`plamlar ma'lum belgilar bilan belgilanadi: N – barcha natural sonlar to`plami; $Z$ – barcha butun sonlar to`plami; Q – barcha ratsional sonlar to`plami; $R$ – barcha haqiqiy sonlar to`plami C – barcha kompleks sonlar to`plami.

Odatda to`plam elementlarini ko`rsatib yozish uchun katta qavs (figurali qavs – {}) dan foydalaniladi. Masalan,

N = {1; 2; 3; …..n; ….}

Z = {….; -n; …., -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; …..; n; …..}

Chekli to`plam bitta yoki bir nechta elementdan tashkil topgan bo`lishi yoki hatto bitta ham elementga ega bo`lmasligi mumkin. Birorta ham elementga ega bo`lmagan to`plam ***bo`sh to`plam*** deyiladi va {Ø} belgi bilan belgilanadi.

Masalan, ma'lum auditoriyadagi talabalar ichidan familiyalari A harfi bilan boshlanadigan talabalar to`plamini qaraylik. Bu to`plam bitta yoki bir nechta elementli yoki hatto bo`sh to`plam bo`lishi mumkin.

[1] *Herbert Gintis , Mathematical Literacy for Humanists, 14-15betlarning mazmun, mohiyatidan foydalanildi.*

Misol: x^2-3x+2=0 teglamaning haqiqiy ildizlari to`plamini toping.

Yechish: ax^2– bx+ c =0 kvadrat tenglamaning ildizlari

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanadi. Bizning holimizda a=1, b=-3, c=2. Demak, (1) formulaga ko`ra $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

shunday qilib, x^2-3x+2=0 tenglamaning haqiqiy ildizlari to`plami A={1; 2} bo`lar ekan.

Misol: 3x–2=0 tenglamaning haqiqiy ildizlari to`plami A va butun ildizlari to`plami B ni toping.

Yechish: 3x–2=0 $\Rightarrow$3x=2 $\Rightarrow$ $x = \frac{2}{3} \notin Z$. Demak, $A=\{\frac{2}{3}\}$ va $B=\{\varnothing\}$

Agar A va B to`plamlar bir xil elementlardan tashkil topgan bo`lsa, bu ***to`plamlar teng*** deyiladi. U holda to`liqlik aksiomasiga ko`ra agar ikkita to`plam bir xil elemantlar jamlanmasidan tuzilgan bo`lsa ular teng bo`ladi.

Masalan: Agar A={1;2;3}={2;1;3}={1;1;2;3} to`plamning har bir elementi $B$ to`plamning ham elementi bo`lsa, $A$ to`plam B to`plamning ***qism to`plami*** yoki ***to`plam osti*** deyiladi va $A \subset B$ yoki $A \subseteq B$ orqali belgilanadi.[1]

Bu belgilshlardan birinchisi A to`plam $B$ to`plamning qismi va $A \neq B$ ekanligini, ikkinchisi esa A to`plam $B$ to`plamning qismi bo`lib ular teng bo`lishi ham va teng bo`lmasligi ham mumkinligini bildiradi.

Masalan, $\{x;\ t\} \subset \{x; t; 1\}$ ixtiyoriy A to`plam uchun $A \subseteq A$ munosabat o`rinli bo`ladi.

Yuqoridagilarni matematik tilda quyidagicha yozish mumkin:

$$A \subseteq B \equiv (\forall x \in A)\ (x \in B)$$

[1] *Herbert Gintis , Mathematical Literacy for Humanists, p.p11-12,14-15 betlarning mazmun, mohiyatidan foydalanildi*

$$A \subsetneq B \equiv (\forall x \in A)(x \in B) \wedge (A \neq B)$$

Bu yozuvda $\wedge$ yozuvi "va" ma'nosini bildiradi. Ba'zida ayrimlar $\subset$ belgisi o`rniga $\subseteq$ belgisini, ayrimlar esa $\subsetneq$ belgisini ishlatadi. $A \subsetneq B$ bo`lganda A to`plam $B$ to`plamning xos to`plam ostisi deyiladi. [1]

Ixtiyoriy A to`plam uchun $\emptyset \subseteq A$, agar $A \neq \emptyset$ bo`lsa, u holda $\emptyset \subsetneq A$.

Matematikaning ba'zi sohalarida faqatgina birorta to`plam va uning barcha to`plam ostilari bilan ish ko`rishga to`g`ri keladi. Masalan, planimetriya tekislik va uning barcha to`plam ostilari bilan, stereometriya esa fazo va uning barcha to`plam ostilari bilan ish ko`radi.

Agar biror E to`plam va faqat uning to`plam ostilari bilan ish ko`rilsa, bunday $E$ to`plam ***universal to`plam*** deb ataladi. Universal to`plamning barcha to`plam ostilari to`plami $\beta(E)$ orqali belgilanadi.

Agar A to`plamning elementi va $B$ to`plamning har bir elementi A to`plamning elementi bo`lsa, A va B to`plamlar ***o'zaro teng*** deb aytiladi va $A=B$ kabi yoziladi.

Misol: $(x-1)(x-2)=0$ tenglama ildizlari to`plami $A=\{1;\ 2\}$ 3 dan kichik natural sonlar to`plamiga teng.

Shuningdek, bir vaqtda $A \subset B$ va $B \subset A$ bo`lganda ham $A=B$ bo`ladi.

2.2. To`plamlar ustida amallar va ularning xossalari

To`plamlar ustida asosan birlashma (yig`indi), kesishma (ko`paytma), ayirma va Dekart (to`g`ri) ko`paytma kabi amallar bajariladi. Bizga ikkita A va B to`plamlar berilgan bo`lsin.

To`plamlarning birlashmasi

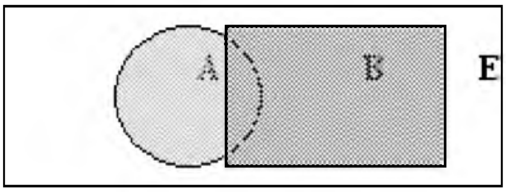
Ta'rif. Barcha elementlari A va B to`plamlarning kamida biriga tegishli bo`lgan elementlardan tuzilgan to`plam $A$ va $B$ to`plamlarning birlashmasi yoki ularning yig`indisi deyiladi va $A \cup B$ kabi belgilanadi.

Bu ta'rifni matematik tilda quyidagicha yozish mumkin:

$$(x \in (A \cup B)) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$$

Misollar: a) $A=\{1;2;3;4;5\}$, $B=\{1;3;5;7;9\}$ bo`lsa, u holda $A \cup B=\{1;2;3;4;5;7;9\}$ dan iborat bo`ladi.

[1] *Herbert Gintis, Mathematical Literacy for Humanists, p.p11-12,14-15 betlarning mazmun, mohiyatidan foydalanildi*



$A \cup B = C$

b) A- barcha manfiy bo`lmagan butun sonlar to`plami bo`lsin. $B$- barcha butun manfiy sonlar to`plami bo`lsin, u holda $A \cup B = Z$ barcha butun sonlar to`plami bo`ladi.

To`plamlarning kesishmasi

Ta'rif. Barcha elementlari A va B to`plamlarning har biriga tegishli bo`lgan elementlardan tuzilgan to`plamga $A$ va $B$ to`plamlarning kesishmasi deyiladi hamda $A \cap B$ kabi belgilanadi.

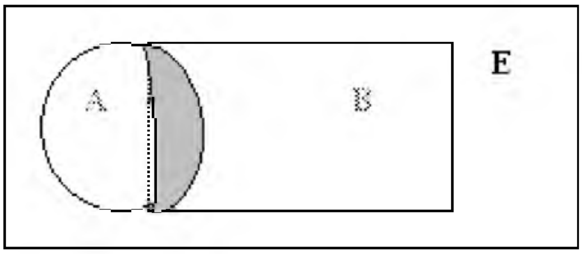
Bu ta'rifni matematik tilda quyidagicha yozish mumkin.

$$(x \in (A \cap B)) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \text{ yoki } A \cap B = \{x: (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Misol. 1) $N \cap Z = N$ bo`ladi.

2) $A=\{1;3;5;7;9\}$, $B=\{4;6;7;8;9\}$ bo`lsa, $A \cap B = \{7;9\}$ bo`ladi.

3) A- hamma romblar to`plami, $B$ - hamma to`g`ri to`rtburchaklar to`plami bo`lsin, u holda $A \cap B$ hamma kvadratlar to`plamidan iborat bo`ladi.



$A \cap B$

To`plamlarning birlashmasi, kesishmasi sonlarning yig`indisi va ko`paytmalarining ko`p xossalariga o`xshash bo`ladi. Masalan, o`rin almashtirish, gruppalash va taqsimot qonunlari sonlar va to`plamlar uchun ham bir xil bo`lishligini quyidagicha ko`rsatish mumkin:

1) $a+b=b+a$ bo`lsa, $A \cup B = B \cup A$
2) $a \cdot b = b \cdot a$ bo`lsa, $A \cap B = B \cap A$
3) $(a+b)+c=a+(b+c)$ bo`lsa, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4) $(a+b) \cdot c = a \cdot s + b \cdot c$ bo`lsa, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Bunday o`xshashlik har doim ham o`rinli emas. Masalan, to`plamlarning quyidagi xossalari uchun to`g`ri emas.

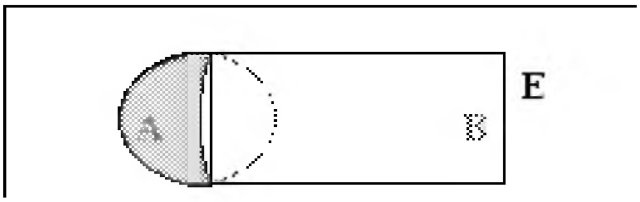
1) $(A\cup B)\cap(B\cup C)=(C\cap B)\cup A$

2) $A\cup A=A$

3) $A\cap A=A$

To`plamlarning ayirmasi

Ta'rif. A to`plamning $B$ to`plamda bo`lmagan hamma elementlariga $A$ va $B$ to`plamlarning ayirmasi deyiladi va $A\backslash B$ kabi belgilanadi.



Misollar:

1) Agar $A=\{1;2;3;4\}$, $B=\{1;2\}$ bo`lsa, u holda $A\backslash B=\{3;4\}$ bo`ladi.

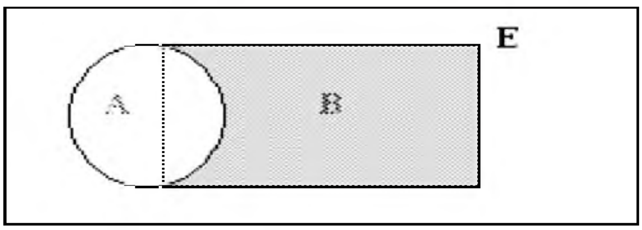
2) Agar $A=\{1;2;5\}$, $B=\{3;4\}$ bo`lsa, u holda $A\backslash B=\{1;2;5\}$ bo`ladi.

3) Agar $A=\{1;2\}$, $B=\{1;2;3\}$ bo`lsa, u holda $A\backslash B=\{\varnothing\}$ bo`ladi.

Bu to`plamning ayirmasi ta'rifini matematik tilda quyidagicha yozish mumkin:

$$x\in(A\backslash B)\Leftrightarrow((x\in A)\wedge(x\notin B)) \text{ yoki } (A\backslash B)=\{x: x\in A, x\notin B\}$$

Agar $B\subset A$ bo`lsa, u holda $A$ va $B$ to`plamlarning ayirmasi B to`plamning $A$ to`plamgacha ***to`ldiruvchisi*** deyiladi va $S_A B$ kabi belgilanadi.



Misol: 1) Irratsional sonlar to`plami $\frac{p}{q}$ ratsional sonlar to`plamining haqiqiy sonlar to`plamigacha to`ldirmasidir.

2) A - barcha to`g`ri to`rtburchaklar to`plami, B - kvadratlar to`plami, $C$ - turli tomonli to`g`ri to`rtburchaklar to`plami bo`lsin, u holda $A\backslash B = C$ va $A\backslash C=B$ bo`ladi.

3) $Q\backslash R = \{\varnothing\}$

To`g`ri chiziqdagi istalgan bir nuqtani 0 nuqta deb olib uni O harfi bilan belgilaymiz. 0 dan o'ng tomonga musbat yo'nalish chap tomonga esa manfiy yo`nalish deb ma'lum bir kesmani o`lchov birligi sifatida qabul qilamiz. O`lchov birligini 0 dan o`ngga va chapga o`lchab joylashtirganda to`g`ri chiziqda ± 1, ± 2, $\pm 3,...$ sonlarga mos nuqtalarni hosil qilamiz, bu nuqtalar butun nuqtalar, ularga mos keluvchi sonlarni esa butun sonlar deb ataladi va u Z harfi bilan belgilanadi $Z = \{... -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$

$A \backslash B$ va $B \backslash A$ to`plamlarning birlashmasi ***simmetrik ayirma*** deyiladi va $A \,\Delta\, B$ ko`rinishida belgilanadi: $A \,\Delta\, B = \{(A \backslash B) \cup (B \backslash A)\}$

Misollar. 1) $A=\{1;3;5;7;9\}$ va $B=\{4;6;7;8;9\}$ to`plamlarning simmetrik ayirmasi topilsin.

Yechish: $A \,\Delta\, B = \{1;3;5\} \cup \{4;6;8\} = \{1;3;4;5;6;8\}$

2) O`zbekiston Respublikasining yoshi 16 dan 25 gacha bo`lgan fuqarolari to`plamini $A$ bilan, yoshi 21 dan 30 gacha bo`lgan fuqarolari to`plamini esa $B$ bilan belgilasak, $A$ va $B$ to`plamlarning $A \cup B$ birlashmasi O`zbekiston Respublikasining yoshi 16 dan 30 gacha bo`lgan fuqarolar to`plamini, $A$ va $B$ to`plamlarning $A \cap B$ kesishmasi O`zbekiston Respublikasining yoshi 21 dan 25 gacha bo`lgan fuqarolar to`plamini, $A$ to`plamdan B to`plamning $A \backslash B$ ayirmasi O`zbekiston Respublikasidagi yoshi 16 dan 21 gacha bo`lgan fuqarolari to`plamini, B to`plamdan $A$ to`plamning $B \backslash A$ ayirmasi esa O`zbekiston Respublikasining yoshi 25 dan 30 gacha bo`lgan fuqarolari to`plamini anglatadi. ■

To`plamlarning dekart (to`g`ri) ko`paytmasi

Ta'rif. A va B to`plamlarning dekart ko`paytmasi deb shunday to`plamga aytiladiki, u to`plam elementlari tartiblangan (x, y) juftliklardan iborat bo`lib, bu juftning birinchisi $A$ to`plamdan, ikkinchisi esa B to`plamdan olinadi. Dekart ko`paytma $A*B$ ko`rinishda belgilanadi: $A \times B = \{(x;y): x \in A \text{ va } y \in B\}$

Misol: $A=\{4;5;7\}$ va $B=\{-1;2;3;4\}$ to`plamlar berilgan bo`lsin. U holda A va B to`plamlarning dekart (to`g`ri) ko`paytmasi quyidagicha bo`ladi:

$A \times B = \{(4;-1),(4;2),(4;3),(4;4),(5;-1),(5;2),(5;3),(5;4),(7;-1),(7;2),(7;3),(7;4)\}$

$B \times A = \{(-1;4),(-1;5),(-1;7),(2;4),(2;5),(2;7),(3;4),(3;5),(3;7),(4;4),(4;5),(4;7)\}$

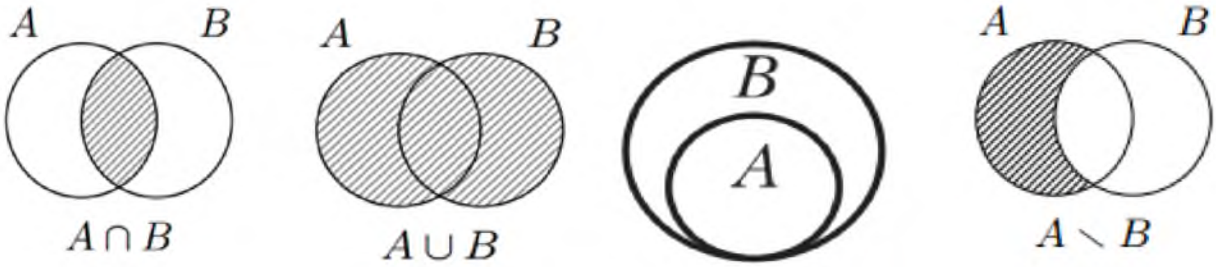
Agar biz dekart ko`paytma elementi $(x, y)$ dagi $x$ ni biror nuqtaning absissasi, $y$ ni esa ordinatasi desak, u holda bu dekart ko`paytma tekislikdagi nuqtalar to`plamini ifodalaydi.

Boshqacha aytganda haqiqiy sonlar to`plami $R$ ni $R$ ga to`g`ri ko`paytmasi $R \times R$ ni tasvirlaydi.

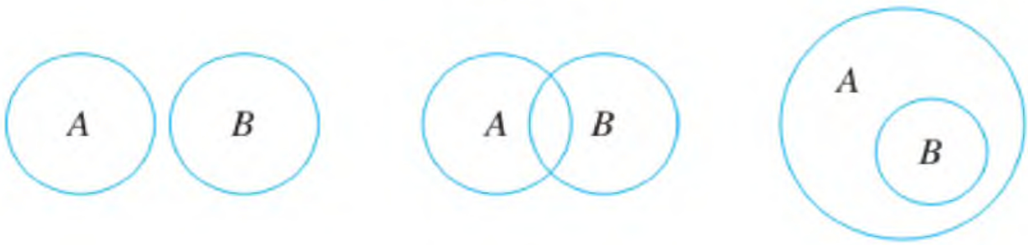
2.3. Eyler-Venn diagrammalari

To`plamlar va ular orasidagi munosabatlar va amallarni *Eyler*[1]*-Venn diagrammalari* yordamida tasvirlash maqsadga muvofiq.

To`plamlar ustida amallarni Eyler-Venn diagrammalari yordamida ifoda qilish amallarning xossalarini isbot qilishni ancha engillashtiradi. Bunda universal to`plam to`g`ri to`rtburchak shaklida, uning to`plam ostilarini to`g`ri to`rtburchak ichidagi doiralar, ovallar orqali ifoda qilinadi. U holda, ikki to`plam birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi, to`lduruvchi to`plamlar, ikki to`plamning simmetrik ayirmasi mos ravishda quyidagicha ifodalanadi:



$A \subseteq B$



$A \not\subseteq B$

---
[1] *Euler Leonard (1707-1783)- German and Russian Mathematician.*

Leonhard Euler
(1707–1783)

John Venn
(1834–1923)

To`plamlar ustida amallarning xossalari

To`plamlar ustidagi amallar quyidagi xossalarga ega:

***To`plamlar kesishmasi uchun*:**

1^0. $A\cap B=B\cap A$ (kommutativlik xossasi)

2^0. $(A\cap B)\cap C=A\cap (B\cap C)$ (assotsiativlik xossasi)

To`plamlar birlashmasi uchun:

1^0. $A\cup B=B\cup A$ (kommutativlik xossasi)

2^0. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (assotsiativlik xossasi)

Ixtiyoriy A,B,C ***to`plamlar uchun*** quyidagi munosabatlar o'rinli:

1^0. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivligi)

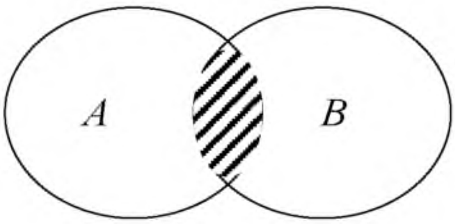
2^0. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivligi)

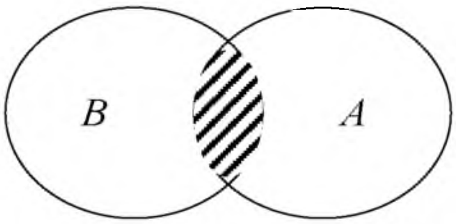
3^0. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

4^0. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

Bu xossalarning (munosabatlarning) to`g`riligi Eyler-Venn diagrammalari orqali ko`zga tashlanadi. Komutativlik va kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivlik xossalarini to`g`riligini ko`rsatamiz

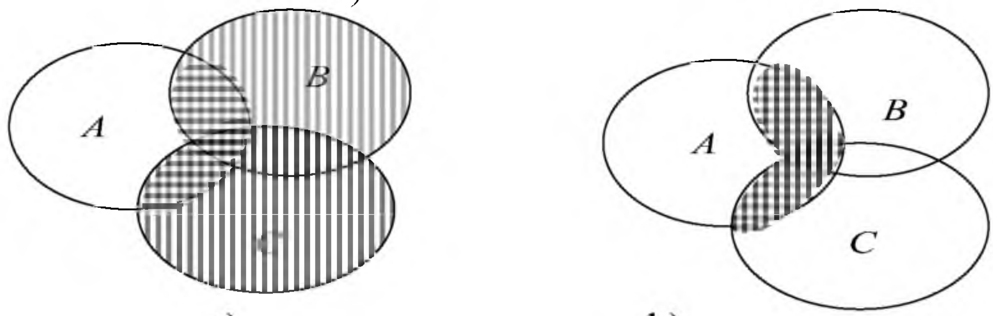
1) $A\cap B=B\cap A$ (komutativlik xossasi)





a) va b) chizmalardagi shtrixlangan sohalar bir xil bo`lgani uchun $A\cap B=B\cap A$ lar teng.

2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivlik xossasi)

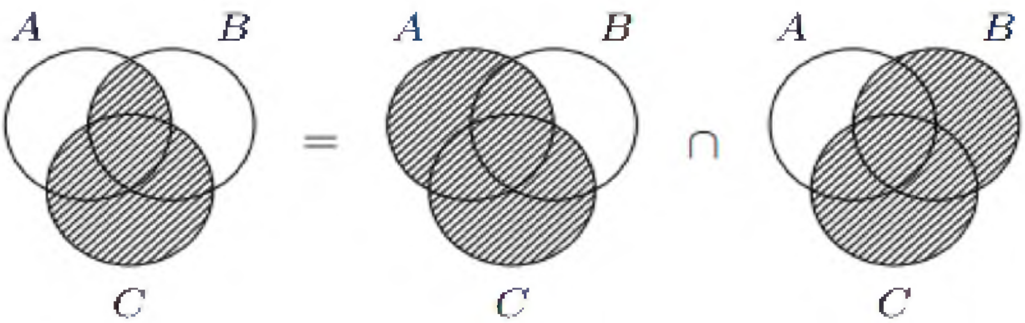


a) b)

a) chizmada tenglikning chap qismi $B\cup C$ birlashma vertikal va $A\cap(B\cup C)$ gorizontal shtrixlangan.

b) chizmada $A\cap B$ va $A\cap C$ kesishma gorizontal shtrixlangan. $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ esa vertikal shtrixlangan. a) va b) chizmalardagi ikki marta shtrixlangan sohalar bir xil bo`lganligidan $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ tenglikning to`g`riligi ko`rinadi.

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ distributivlik munosabati quyidagicha asoslanadi:



(Qolgan xossalarning tengligini mustaqil ravishda tasvirlab ko`ring).

2.4. Sonli to`plamlar, haqiqiy sonlar to`plami

Elementlari sonlardan iborat bo`lgan to`plamlar ***sonli to`plamlar*** deb ataladi. Masalan, barcha natural sonlar to`plami $N=\{1;2;3;\ldots n;\ldots\}$, barcha butun sonlar to`plami $Z=\{\ldots;-3;-2;-1;0;1;2;3;\ldots\}$, barcha ratsional sonlar to`plami $Q=\{\frac{p}{q}|p\in Z, q\in N\}$ va hokazo.

N to`plamda qo`shish va ko`paytirish amallari, $Z$ to`plamda qo`shish, ayirish va ko`paytirish amallari, Q to`plamda esa qo`shish, ayirish, ko`paytirish va bo`lish amallari aniqlangan.

Ratsional sonlar to`plami.** Cheksiz davriy o`nli kasr ko`rinishida yozish mumkin bo`lgan sonlar ***ratsional sonlar* deyiladi. Barcha musbat va manfiy butun va kasr sonlar nol soni bilan birgalikda ratsional sonlar to`plamini hosil qiladi. Ratsional sonlar to`plamini yana quyidagicha ta'riflash mumkin. Barcha $\frac{p}{q}$ ko`rinishidagi sonlarga ratsional sonlar to`plami deyiladi. Bu yerda p, $q \neq 0$ butun sonlar. Ratsional sonlar Q harfi bilan belgilanadi. Ratsional sonlar to`plami quyidagi muhim xossaga ega:

I. Q ratsional sonlar to`plami tartiblangan to`plamdir. Ixtiyoriy ikkita a va b ratsional sonlar olinsa, ular uchun $a=b$, $a>b$ yoki $a<b$ munosabatdan faqat bittasigina o`rinlidir.

II. Q ratsional sonlar to`plami zich joylashgan to`plamdir. Ixtiyoriy a va`$b$ ratsional son olinsa, bu ratsional sonlar orasida yotuvchi bitta yoki cheksiz ko`p ratsional son yotadi. Masalan, $c=\frac{a+b}{2}$ ratsional son uchun $a<c<b$ bo`ladi. Ixtiyoriy ikkita $a$ va $b$ ratsional son orasida kamida bitta ratsional son mavjudligidan bu ratsional sonlarning orasida cheksiz ko`p ratsional sonlarni mavjudligi kelib chiqadi.

Irratsional sonlar. Irratsional son tushunchasini nemis matematigi Dedikind (1831 - 1916) nazariyasi bo`yicha kiritamiz. Shu maqsadda biz barcha ratsional sonlar to`plamini ikkita bo`sh bo`lmagan A va A' to`plamlarga ajratamiz.

Ta'rif. Agar 1) har bir ratsional son A va $A`$ to`plamlardan faqat bittasigina tegishli; 2) A to`plamga tegishli bo`lgan a ratsional son A' to`plamga tegishli bo`lgan a' ratsional sondan kichik bo`lsa, bu bo`linish ratsional sonlar to`plamida bajarilgan kesim deyiladi va uni (A/A') kabi belgilanadi.

Yuqoridagi ta'rifdan ko`rinadiki, $Q$ ratsional sonlar to`plamida kesim hosil bo`lishi uchun uning qism to`plamlari A va $A`$ lar uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak ekan.

1) $A \neq \varnothing$, $A' \neq 0$

2) $A \cup A' = Q$

3) $\forall a \in A,\ \forall a' \in A' \Rightarrow a < a'$

Davriy bo`lmagan cheksiz o`nli kasr shaklida ifodalanuvchi sonlar ***irratsional sonlar*** deb ataladi.

Masalan, $\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}$, 5, -3 sonlar ratsional sonlar, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$, ln2 sonlar esa irratsional sonlardir.

Ratsional va irratsional sonlarni boshqacha ta'riflashimiz ham mumkin: $\frac{p}{q}(p \in Z, q \in N)$ qisqarmas oddiy ko`rinishda ifodalanuvchi son ratsional son, ratsional bo`lmagan son irratsional son deb aytiladi.

Ta'rif. Ratsional va irratsional sonlar haqiqiy sonlar deyiladi. Barcha ratsional va irratsional sonlar to`plami haqiqiy sonlar to`plami deb ataladi va *R* simvol bilan belgilanadi.

R to`plamda taqqoslash qoidasi, qo`shish, ayirish, ko`paytirish amallari aniqlangan.

***Haqiqiy sonlar to`plami quyidagi asosiy xossalarga ega*:**

1^0. agar $a>b$ va $b>c$ bo`lsa, $a>c$ bo`ladi;
agar $a=b$ va $b=c$ bo`lsa, $a=c$ bo`ladi.

Bu xossa > va = belgilarning tranzitivlik xossasi deyiladi.

2^0. $a+b=b+a$, $ab=ba$ tengliklar o`rinli.

Bu xossa + va × amallarining kommunikativlik xossasi deb ataladi.

3^0. $(a+b)+c=a\cdot(b+c)$, $(ab)c=a(bc)$ tengliklar o`rinli (assotsiativlik xossasi).

4^0. "nol son" deb ataladigan shunday $0 \in R$ son mavjudki, $\forall a \in R$ son uchun $a+0=a$ bo`ladi. Bu xossaga "nolning maxsus roli" deb aytiladi.

5^0. "bir" deb ataladigan shunday $1 \in R$ son mavjudki, $\forall a \in R$ uchun $a \cdot 1 = a$ bo`ladi. (birning maxsus roli).

6^0. "$a \in R$ songa teskari son" deb ataluvchi shunday a^{-1} son mavjudki, $a \cdot a^{-1} = 1$ bo`ladi. (teskari sonning mavjudlik xossasi).

7^0. $(a+b)c = ac + bc$ (ko`paytirishning yig`indiga nisbatan taqsimot qonuni).

8^0. $a > b$ bo`lsa, har qanday s son uchun $a + c > b + c$ bo`ladi.

9^0. agar $a > b$ va $c > 0$ bo`lsa, $ac > bc$ bo`ladi.

10^0. Har qanday $a \in R$ son uchun shunday $n \in N$ son topiladiki, $n > a$ bo`ladi (Arximid aksiomasi).

Haqiqiy sonlarning boshqa hamma asosiy xossalaridan kelib chiqadi.

Haqiqiy sonning moduli, xossalari

Ta'rif. Ushbu

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa} \\ -x, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

tengliklar bilan aniqlangan $|x|$ son x haqiqiy sonning moduli yoki absolyut qiymati deb ataladi. Bu yerdagi | | belgi modul belgisi deyiladi.

Masalan, $|2|=2$, $|-2|=-(-2)=2$

$|0|=0$, $|-\frac{1}{2}|=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ va hokazo.

Haqiqiy sonning moduli quyidagi asosiy xossalarga ega:

1-xossa. $\forall x \in R$ uchun $|x| \geq 0, |x|=|-x|, x \leq |x|, -x \leq |x|$ bo`ladi.

2-xossa. $|x| \leq a$ va $-a \leq x \leq a$ $(a > 0)$ tengsizliklar o`zaro teng kuchli.

3-xossa. $\forall x \in R$ va $\forall y \in R$ sonlar uchun $|x+y| \leq |x|+|y|$, $|xy|=|x| \cdot |y|$

4-xossa. $\forall x \in R$ va $\forall y \in R$ $(y \neq 0)$ uchun $|\frac{x}{y}|=\frac{|x|}{|y|}$ tenglik o`rinli.

5-xossa. $\forall x \in R$ va $\forall y \in R$ sonlar uchun $|x-y| \geq ||x|-|y||$, $|x-y| \geq ||x|-|y||$ tengsizliklar o`rinli.

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. To`plam qanday tushuncha?
2. To`plamning turlarini tushuntiring.
3. To`plamning berilish usullariga misol keltiring.
4. Qism to`plamlarni tushuntiring.
5. Universal to`plam nima?
6. Chekli, cheksiz va bo`sh to`plamlarga misollar keltiring.
7. Qanday to`plamlar o`zaro teng to`plamlar bo`lishini

tushuntiring.

8. To`plamlar ustida qanday amallar bajarish mumkin?

9. To`plamlarning birlashmasi deb qanday to`plamga aytiladi?

10. To`plamlarning kesishmasi qanday elementlardan tashkil topadi?

11. To`plamlarning ayirmasini misollar orqali tushuntiring.

12. To`plamlarning dekart ko`paytmasini koordinata tekisligida ifodalashni tushuntiring.

13. Eyler doiralarida tasvirlashga doir misollar keltiring, tasvirlab ko`rsating.

14. Kundalik hayotdan va mutaxassislik faningizdan to`plamlar ustidagi amallarga misollar keltiring.

15. 15-19- misollarda berilgan A va B to`plamlar uchun quyidagi amallarni toping: $A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \cap B$

16. $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N} \mid -2 < \boldsymbol{x} \le 3\},\ \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x} - 2 = 0\}$

17. $A = \{1;\ 2;\ 4\},\ B = \{2;\ 3\}.$

18. $A = \{x \mid x^2 - 7x + 6 = 0\},\qquad B = \{1;\ 6\}.$

19. $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N} \mid 2 < \boldsymbol{x} \le 6\},\ \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N} \mid 1 < \boldsymbol{x} < 4\}$

$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N} \mid 1 < \boldsymbol{x} \le 4\},\ \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}^2 - 9 = 0\}$

bo`lsa, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ to`plamning barcha qism to`plamlarini yozing.

20. 17. $x^2 - 5x + 6 = 0$ tenglamaning ildizlari to`plamini toping.

21. A= (4; 5] vaB=[2;3) to`plamlar berilgan. A\B ni toping.

22. A=[$-\frac{3}{4};\frac{2}{3}$] B= [-2;2] to`plamlar berilgan. A∆B toping.

23. Sinfdagi bir necha o`quvchi marka yig`dilar. 15 o`quvchi O`zbekiston markalarini, 11 kishi chet el markalarini, 6 kishi ham O`zbekiston markalarini, ham 16 chet el markalarini yig`di. Sinfda necha o`quvchi marka to`plagan?

24. 32 o`quvchining 12 nafari voleybol seksiyasiga, 15 nafari basketbol seksiyasiga, 8 kishi esa ikkala seksiyaga ham qatnashadi. Sinfdagi necha o`quvchi hech bir seksiyaga qatnashmaydi?

25. 30 o`quvchidan 18 nafari matematikaga, 17 nafari esa fizikaga qiziqadi. Ikkala fanga ham qiziqadigan o`quvchilar soni nechta bo`lishi mumkin? (Ikkala fanga ham qiziqmaydigan o`quvchilar soni $k \in (0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots ,12)$).

3-§. Binar munosabatlar. Graflar nazariyasi asoslari

Tayanch iboralar: *moslik, ikki to`plam elementlari orasidagi moslik,binary moslik, moslikning aniqlanish sohasi, moslikning qiymatlar to`plami, moslikning grafigi, moslikning grafi, syur'yektiv, biyektiv, funksional mosliklar, teng quvvatli to`plamlar, ekvivalent va tartib munosabatlar, grafning uchlari, qirralari, sirtmog`i, marshruti, yoqlari, ajratilgan uchlar, qisman graf, graf ostisi, oriyentirlangan, bog`langan graf, zanjir, Eyleron grafi, daraxt qirralari, shoxlari, qovurg`asi, o`rmon, to`r, shajara.*

3.1. Ikki to`plam elementlari orasidagi moslik

Ikki to`plam elementlari orasidagi moslikni ko`rishdan oldin, ikki to`plam dekart ko`paytmasi va uning qism to`plamlarini misollar yordamida eslaylik.

Aytaylik bizga $X = \{a,b,c\}$ va $Y = \{m,n\}$ to`plamlari berilgan bo`lsin. U holda

$$X \times Y = \{(a;m),(a;n),(b;m),(b;n),(c;m),(c;n)\}$$

ga ega bo`lamiz.

1-Ta'rif. $X \times Y$ dekart ko`paytmaning istalgan $G_f$ qism to`plami X va Y to`plamlar orasidagi ***binar moslik*** deyiladi. Binar so'zi lotincha "**bis**" so`zidan olingan bo`lib, ikki to`plam elementlari orasida so`z borishini bildiradi.

Moslik lotin alifbosining f, d, t, s kabi harflari bilan belgilanadi.

Bizga ma'lum bo`lgan funksiyalarning hammasi moslik tushunchasiga misol bo`la oladi.

X to`plam moslikning *birinchi to`plami* deyiladi. X to`plamning moslikda ishtirok etuvchi elementlari to`plami ***moslikning aniqlanish sohasi*** deyiladi.

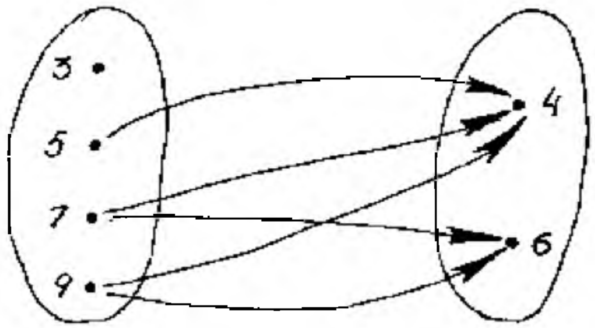
Y to`plam moslikning *ikkinchi to`plami* deyiladi. Y to`plamning moslikda qatnashgan elementlari to`plami ***moslikning qiymatlar to`plami*** deyiladi.

$G_f \subset X \times Y$ *to`plam **moslikning grafigi** deyiladi.* $G_f$ grafik biror $R$ moslikdagi $(x, y)$ juftliklar to`plami ya'ni xRy , bu yerda $x \in X,\ y \in Y$

Ikki to`plam orasidagi moslikni nuqtalar va yo`nalishli kesmalar (strelkalar) yordamida tasvirlovchi rasmlar ***moslikning grafi*** deyiladi.

Chekli to`plamlar orasidagi moslik graflar yordamida ko`rgazmali tasvirlanadi.

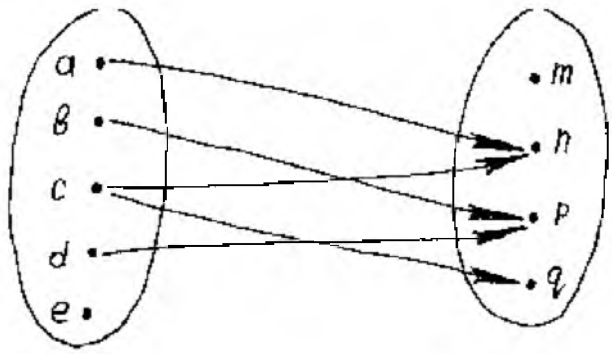
Misollar: 1) $X=\{3,5,7,9\}$ va $Y=\{4,6\}$ to`plamlar orasidagi «katta» mosligining grafigini yasaymiz. Buning uchun berilgan to`plamlar elementlarini nuqtalar bilan belgilaymiz va X to`plam elementlarini tasvirlovchi nuqtalardan $Y$ to`plam elementlarini tasvirlovchi nuqtalarga strelkalar o`tkazamiz:



Natijada biz X va Y to`plamlar elementlari orasidagi «katta» mosligiga ega bo`lamiz.

2) $X=\{a,b,c,d,e\}$, $Y=\{m,n,p,q\}$

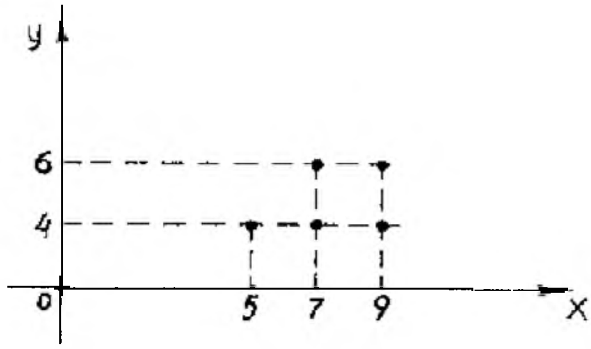
Gf= $G_f=\{(a;n),(b;p),(c;n),(c;q),(d;p)\}$ grafini chizaylik:



Bunda aniqlanish sohasi $\{a,b,c,d\}$, qiymatlar to`plami $\{n,p,q\}$

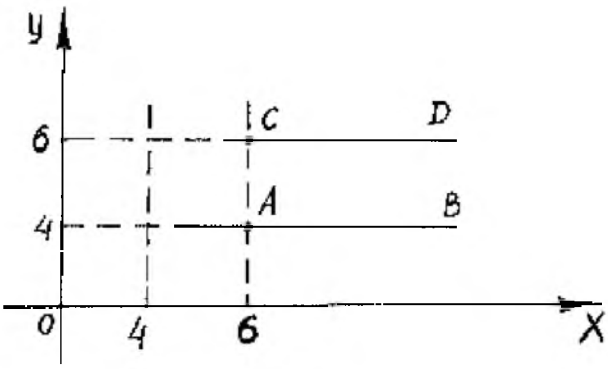
X va Y sonli to`plamlar elementlari orasidagi moslik koordinata tekisligidagi *grafik* yordamida tasvirlanadi.

Buning uchun R moslikda bo`lgan barcha sonlar jufti koordinata tekisligida nuqtalar bilan tasvirlanadi. Buning natijasida hosil bo`lgan figura R moslikning grafigi bo`ladi. Yuqoridagi misolni grafigini chizamiz:



Moslikni bunday tasvirlash ularni berilgan moslikda cheksiz ko`p sonlar jufti bo`lganda ko`rgazmali tasvirlash imkonini beradi.

Masalan, $X = R$ va $Y = \{4;6\}$ to`plamlar orasidagi «katta» mosligini qaraylik va grafigini yasaylik moslikni $[AB)$ va $[CD)$ nurlar ifodalaydi:



2-Ta'rif. Agar f moslikning aniqlanish sohasi birinchi to`plam bilan ustma-ust tushsa, f moslik ***hamma yerda aniqlangan*** deyiladi.

3-Ta'rif. Agar f-moslikning qiymatlar to`plami ikkinchi to`plam bilan ustma-ust tushsa, f moslik ***syur'yektiv*** deyiladi.

4-Ta'rif. Agar f moslikda birinchi to`plamning har bir elementiga ikkinchi to`plamning bittadan ortiq bo`lmagan elementi mos kelsa, f moslik ***funksional*** deyiladi.

5-Ta'rif. Agar f moslikda ikkinchi to`plamning har bir elementiga birinchi to`plamning 1 tadan ortiq bo`lmagan elementi mos qo`yilgan bo`lsa, f moslik ***in'yektiv*** deyiladi.

6-Ta'rif. Syur'yektiv va in'yektiv moslik bir so'z bilan ***biyektiv*** deyiladi.

7-Ta'rif. Hamma yerda aniqlangan funksional moslik ***akslantirish*** deyiladi.

8-Ta'rif. X va Y to`plamlar orasidagi $f$ moslik biyektiv akslantirish bo`lsa, X va Y to`plamlar orasida o`zaro ***bir qiymatli moslik o'rnatilgan*** deyiladi.

Moslik turlariga misollar keltiramiz.

Misol. Aytaylik X - kiyim iladigan (veshalka) garderobdagi paltolar to`plami, $Y$ esa shu garderobdagi ilgaklar to`plami bo`lsin.

Agar har bir palto ilgakda ilinib turgan bo`lsa (polda yotmasdan), u holda $X$ to`plam Y to`plamga akslantirish bo`ladi.

Agar bu akslantirishda har bir ilgakka bittadan ortiq palto ilinmagan bo`lsa (bo`sh ilgaklar ham bo`lishi mumkin), bu akslantirish in'yektiv bo`ladi.

Agar hamma ilgaklar band bo`lsa (bunda ayrim ilgaklarda bittadan ortiq paltolar ilingan ham bo`lishi mumkin), bu akslantirish syur'yektiv bo`ladi.

Agar har bir ilgakda bittadan palto ilingan bo`lsa (o`zaro bir qiymatli), bu akslantirish biyektiv bo`ladi.

9-Ta'rif. X va Y to`plamlar orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatilgan bo`lsa, bu to`plamlar ***teng quvvatli*** deyiladi va qisqacha $X \sim Y$ ko`rinishda yoziladi.

Masalan. Agar $X\{a;b;c;d;e\}$, $Y\{x;y;z;t;p\}$ bo`lsa, u holda $X \sim Y$ bo`ladi, chunki, X va Y to`plamlar orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatish mumkin.

10-Ta'rif. Barcha natural sonlar to`plami $N$ ga teng quvvatli to`plamlar ***sanoqli to`plam*** deyiladi.

Agar ikkita X va Y to`plamlar orasidagi mosliklarning $G_f$ grafigi $X \times Y$ dekart ko`paytmasi bilan ustma-ust tushsa, bu moslik to`la moslik deyiladi. Agar moslik grafigi $G_f$, bo`sh bo`lsa ($G_f = \varnothing$) moslik bo`sh moslik deyiladi.

Ixtiyoriy ikkita X va Y to`plamlar orasida bo`sh va to`la mosliklar mavjud bo`lishi mumkin.

X va Y dekart ko`paytma to`plam ostilari ustida turli xil amallarni bajarish mumkin.

Masalan, X va Y to`plamlar orasida $x\mathrm{R}y$ va $x\mathrm{K}y$ mosliklar grafiklari birlashmasidan iborat bo`ladi, boshqacha aytganda $x\mathrm{S}y$ moslik faqat va faqat $x\mathrm{R}y$ yoki $x\mathrm{K}y$ mavjud bo`lsa bo`ladi.

Shuningdek, moslikka teskari moslik ham mavjud. xRy moslikka teskari yR^{-1}x ko`rinishda yoziladi.

3.2. Binar munosabat tushunchasi va uning umumiy xossalari

Biz to`plamlarni o`rganganda ularni taqqoslab, ular kesishadi yoki teng, yoki biri ikkinchisini qismi deb to`plamlar orasidagi munosabatni qaradik. Natural sonlar to`plamini qaraganda sonlar orasidagi turli-tuman bog`lanishlarni ko`ramiz.

Masalan, 7 soni 6 sonidan katta, 12 soni 9 sonidan 3 ta ko`p, 3 soni 2 sonidan keyin keladi va hokazo.

Xuddi shunga o`xshash, geometriyada figuralarning tengligi va o`xshashligi, to`g`ri chiziqlarning parallelligi va perpendikulyarligi kabi munosabatlar qaraladi.

Bulardan ko`rinadiki, matematikada asosan, ikki obyekt orasidagi munosabat qaraladi, bunga ***binar munosabatlar*** deyiladi.

Yuqorida ko`rib o`tilgan munosabatlar orasida umumiylik bormi, yo`qmi degan masalani qarasak, u yoki bu munosabatlarni qarashda biz berilgan to`plamlar sonlaridan tashkil topgan tartiblangan juftliklar bilan amallar bajarishni ko`ramiz.

Masalan: $X = \{4;5;6\}$ to`plamda 1 ta ko`p munosabatini qarasak, «5 soni 4 sonidan 1 ta ko`p», «6 soni 5 sonidan 1 ta ko`p». Shu to`plamda katta munosabatni qarasak «5>4», «6>4», «6>5». Shunga o`xshash kichik munosabatini qarasak «4 soni 5 sonidan 1 ta kam», «5 soni 6 sonidan 1 ta kam».

Keltirilgan misoldagi «1 ta ko`p» munosabat uchun {(5;4), (6;5)} to`plam, «katta» munosabati uchun {(5;4), (6;4), (6;5)} to`plam, «kichik» munosabati uchun {(4;5), (5;6)} to`plamlarga ega bo`lamiz. Bu to`plamlar esa elementlari $X = \{4;5;6\}$ to`plam elementlaridan hosil qilingan sonlar juftliklari to`plami bilan aniqlanadi. Boshqacha aytganda, bu to`plamlar $X = \{4;5;6\}$ to`plam Dekart ko`paytmasining elementlaridan tashkil topgan qism to`plamlardir, ya'ni

$$X \times X = \{(4;4),(4;5),(4;6),(5;4),(5;5),(5;6),(6;4),(6;5),(6;6)\}:$$

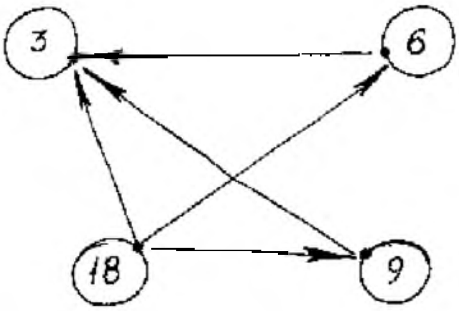
Bundan ko`rinadiki, ko`rib o`tilgan munosabtlar $X \times X$ Dekart ko`paytmaning qism to`plami bilan aniqlanar ekan.

Ta'rif. $X \times X$ to`plamning istalgan $G$ qism to`plami ***binar munosabat*** deyiladi. Binar munosabatlar lotin alfavitining bosh harflari *P, K, R, S…* bilan belgilanadi.

Matematikada binar munosabatlar $a = b$, $a < b$, $a > b$, $a \neq b$, $a \| b$, $a \perp b$ kabi belgilar orqali berilgan.

Munosabatlarni graflar yordamida ko`rgazmali tasvirlash mumkin.

Masalan: $X = \{3;6;9;18\}$ to`plam elementlari uchun «karrali» munosabatini ko`ramiz va uning grafini chizamiz 18 soni 3 ga karrali, 18 soni 6 ga karrali, 18 soni 9 ga karrali va hokazo. X to`plamdagi ixtiyoriy son o`z-o`ziga karrali bo`lgani uchun oxiri ustma-ust tushadigan strelkalar mavjud. Bunday strelkalar sirtmoqlar deyiladi va quyidagicha tasvirlanadi:

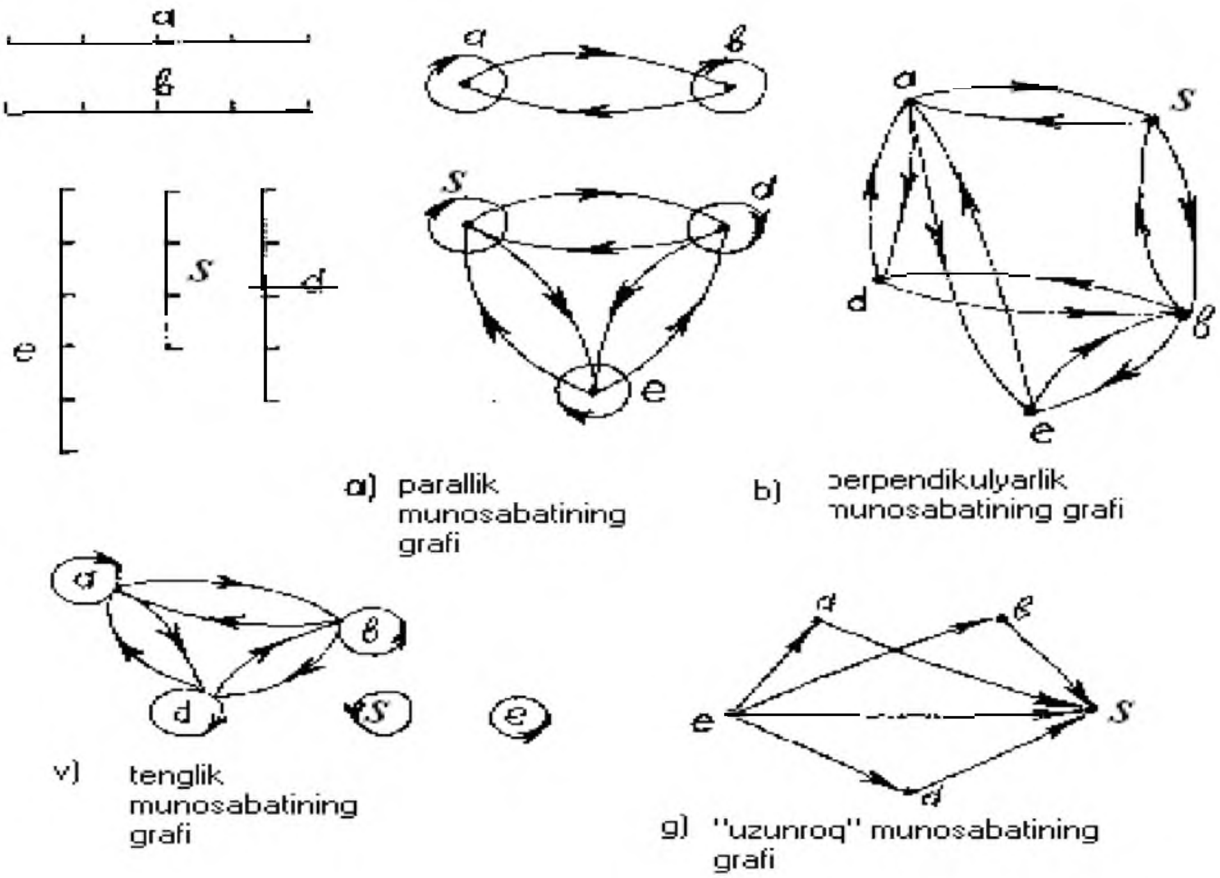


To`plamlarni berilish usullari kabi munosabatlar ham berilish usullariga ega.

1) X to`plamda berilgan R munosabat $X$ to`plamdan olingan va shu munosabat bilan bog`langan barcha elementlar juftliklarini sanab ko`rsatish bilan beriladi.

2) X to`plamda bo`lgan barcha elementlar juftliklarining xarakteristik xossasini ko`rsatish bilan beriladi.

Munosabatlarning umumiy xossalari. Munosabatlarni xossalarini ajratib ko`rsatish uchun matematikada yuqorida aytib o`tilgan munosabatlarni kesmalar to`plamida graflar yordamida tasvirlaymiz: $a, b, s, d, e$ kesmalar berilgan bo`lsin (quyidagi a, b, v, g chizmalar):



a) parallik munosabatining grafi

b) perpendikulyarlik munosabatining grafi

v) tenglik munosabatining grafi

g) "uzunroq" munosabatining grafi

Graflardan ko‘rinadiki parallellik va tenglik munosabatlari *refleksiv xossaga* ega ekan.

1-Ta’rif. Agar X to`plamning ixtiyoriy elementi haqida u o`z-o`zi bilan R munosabatda deyish mumkin bo`lsa(ya’ni xRx bajarilsa) to`plamdagi R munosabat ***refleksiv*** deyiladi.

Agar munosabat refleksiv bo`lsa, grafning har bir uchida sirtmoq bo`ladi.

2-Ta’rif. Agar X to`plamning birorta ham elementi uchun $x$R$x$ bajarilmasa, $R$ munosabat $X$ to`plamda ***antirefleksiv*** deyiladi. «>», «<» (uzun, qisqa), «$\perp$» munosabatlari antirefleksivdir.

Kesmalarning parallellik, perpendikularlik va tenglik munosabatlari graflariga e’tibor bersak, ularning o`ziga xos xususiyati, agar elementlar juftini tutashtiruvchi bitta strelka bor bo`lsa u holda, albatta, shu elementlarni tutashtiruvchi qarama-qarshi yo`nalgan boshqa strelka ham bo`ladi.

Bundan esa parallellik, perpendikularlik va tenglik munosabatlari simmetriklik xossasiga ega ekanligi ko`rinadi.

3-Ta'rif. Agar X to`plamda R munosabat uchun $x\mathrm{R}y$ va $y\mathrm{R}x$ shartlar bir vaqtda bajarilsa, R munosabat ***simmetrik*** munosabat deyiladi.

Simmetriklik xususiyatiga ega bo`lmagan munosabatlar ham mavjud. Masalan, graflardagi uzunroq munosabatini qaraylik. Bu grafni o`ziga xos xususiyati strelkani ikkita uchi tutashtirilsa u yagona bo`ladi. Bundan «uzunroq» munosabati antisimmetrik xossaga ega ekanligi ko`rinadi.

4-Ta'rif. Agar X to`plamning turli $x$ va $y$ elementlari uchun $x\mathrm{R}y$ shartdan $y\mathrm{R}x$ kelib chiqmasa, $X$ to`plamdagi R munosabat ***antisimmetrik*** munosabat deyiladi.

Parallellik, tenglik va uzunroq munosabatlari graflariga e'tibor bersak, strelka birinchi elementdan ikkinchi elementga, ikkinchi elementdan uchinchi elementga borsa, albatta, birinchi elementdan uchinchi elementga ham boradi. Bu tranzitivlik xossasini ifodalaydi.

5-Ta'rif. Agar X to`plamda $R$ munosabat uchun $x\mathrm{R}y$ va $y\mathrm{R}z$ dan $x\mathrm{R}z$ kelib chiqsa, u holda $X$ to`plamda R munosabat ***tranzitiv*** munosabat deyiladi.

Kesmalarning parallelligi va tengligi munosabatlari refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalarga ega. Perpendikularlik munosabati simmetriklik xossasiga, «uzunroq» munosabati antisimmetrik va tranzitivlik xossasiga ega.

Ta'rif. Agar X to`plamda berilgan $R$ munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo`lsa, u holda u ***ekvivalentlik munosabati*** deyiladi.

Demak, refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo`lgan munosabat *ekvivalentlik* munosabati bo`ladi.

Misollar. Tenglik, o`xshashlik, gomeomorflik, paralellik, bitta mahallada yashash, sochning rangi bir xil bo`lish, sinfdosh bo`lish, birinchi harfi bir xil bo`lish.

Ekvivalentlik munosabati oddiy tenglik munosabatining umumlashgani bo`ladi.

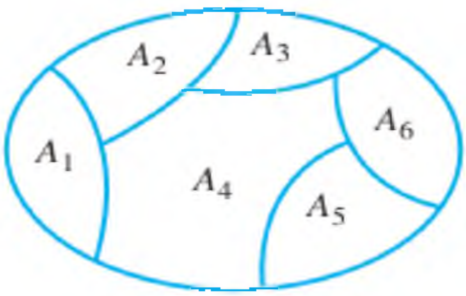
Bizga ma'lumki, tabiatda aynan bir xil obyektlar yo`q, har bir obyekt individual xususiyatlarga ega. Bu xususiyatlar e'tiborga loyiq-noloyiqligi bilan farqlanadi.

Ekvivalentlik munosabati e'tiborga loyiq bo`lgan xususiyatlar bo`yicha bir xil bo`lgan obyektlar orasidagi munosabatdir. Bunda ekvivalentlik munosabat to`plamni o`zaro kesishmaydigan *ekvivalentlik sinflar* deb nomlangan qism to`plamlarga ajratadi.

Masalan, a) shahar fuqarolari uchun “bitta mahallada yashash” munosabatini qarasak, u shahar aholisini o‘zaro kesishmaydigan mahallalarga taqsimlanishini ta’minlaydi. Bunda ekvivalentlik sinflari mahallalar bo`ladi;

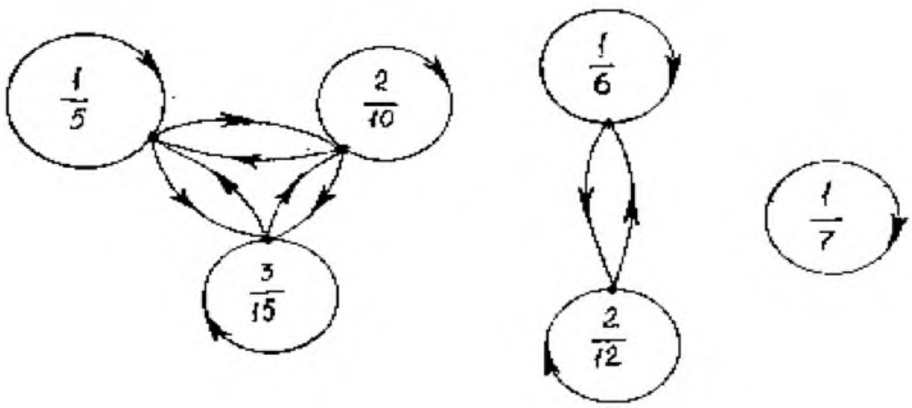
b) biolog biror o`lkadagi o`simliklar va hayvonlar dunyosini o`rganar ekan, u jonzotlarni ayrim xususiyatlarga ko`ra turlar bo`yicha, turlarni esa urug`lar bo`yicha sinflarga ajratib chiqadi;

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 = A \qquad (A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j)$$



c) tildagi so`zlar uchun “birinchi harfi bir xil bo‘lish” ekvivalentlik munosabati lug`atni tuzishda namoyon bo`ladi.

Misol: $\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{6};\frac{1}{7};\frac{2}{10};\frac{2}{12};\frac{3}{15}\right\}$ kasrlar to`plamida tenglik munosabati berilgan.



Bu munosabat:

1) refleksiv, chunki ixtiyoriy kasr o`z-o`ziga teng;

2) simmetrik, chunki x kasrning y kasrga tengligidan y kasrni x kasrga tengligi ham kelib chiqadi;

3) tranzitiv, chunki x kasrning y kasrga va y kasrning z kasrga tengligidan x kasrning z kasrga tengligi kelib chiqadi.

Agar X to`plamda ekvivalentlik munosabati berilgan bo`lsa, u holda bu munosabat X to`plamni juft-jufti bilan kesishmaydigan qism to`plamlariga ajratadi. Yuqoridagi misolimizda qism to`plamlar $\left\{\frac{1}{5};\frac{2}{10};\frac{3}{15}\right\},\left\{\frac{1}{6};\frac{2}{12}\right\},\left\{\frac{1}{7}\right\}$

Bu qism to`plamlar juft-jufti bilan kesishmaydi va qism to`plamlarining birlashmasi birlamchi misolda berilgan to`plam bilan ustma-ust tushadi.

Ta'rif. Refleksiv va simmetrik bo`lgan munosabat ***tolerantlik*** munosabati deyiladi.

Tolerantlik munosabati tranzitivlik xossasiga ega bo`lmasligi mumkin.

Misollar: qarindosh bo`lish, tanish bo`lish, ko`pi bilan bitta harf bilan farqlanish.

Oxirgi munosabat o`zbek tilida "borni yo`q qilish" lingvistik masalasini yechishda namoyon bo`ladi: *bor* $\rightarrow$ *yor* $\rightarrow$ *yoq* $\rightarrow$ *yo`q*.

Endi *tartib munosabatini* qaraymiz.

«Tartib» so`zi kundalik hayotimizda doimo uchraydi. *Masalan*, jismoniy tarbiya darslarida talabalarning bo`y-bo`yiga qarab joylashishi tartibi, o`zbek alfavitida harflarning kelish tartibi va hokazo.

Ta'rif. Agar X to`plamdagi $R$ munosabat tranzitiv va antisimmetrik bo`lsa, u holda bu munosabat ***tartib munosabati*** deyiladi. X to`plam esa tartib munosabati bilan tartiblangan deb ataladi.

Masalan, a) $X=\{3,6,9,18\}$ to`plamni «kichik» munosabati yordamida tartiblashtirish mumkin;

b) boshlang`ich ta'limning birinchi sinfida o`quvchilar «katta» va «kichik» munosabatlari bilan keyinchalik esa kesmalar uchun «uzun» va «qisqa» munosabatlari bilan tanishadilar. Bu munosabatlar yordamida sonlar va kesmalar to`plamida tartib o`rnatiladi.

3.3. Graflar va ularning turlari

Graf deb, shunday *G(X,E)* ikki to`plam juftligiga aytiladiki, bunda *X*-bo`sh bo`lmagan uchlar to`plami $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bo'lib, *E* ning elementlari esa *X* ning ikki elementli to`plam ostilaridir, ya'ni $E=\{(x_1,x_2)\}$. Ushbu ikki elementli to`plam ostilar ***qirralari*** deb ataladi.

Masalan,

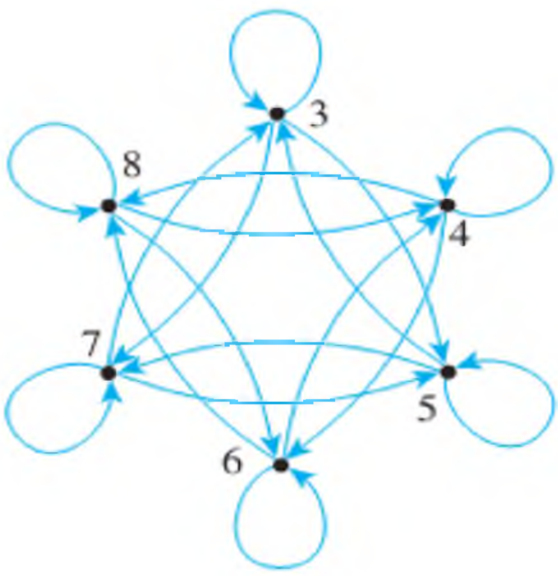
$$G = (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_4)\})$$

Kombinatorik masalalarni yechishda obyektlar nuqtalar, ular orasidagi bog`lanishlar esa chiziqlar bilan tasvirlash ancha qulaylik tug`diradi.

Bunda hosil bo`lgan figura *graf*, nuqtalar grafning ***uchlari***, tutashtiruvchi chiziqlar esa ***qirralari*** deyiladi.

Graflar nazariyasi hozirgi kunda matematikaning eng jadal rivojlanayotgan sohasiga aylandi. Graflar nazariyasi bo`yicha tadqiqotlar natijalari inson faoliyatining turli sohalarida qo`llaniladi. Ulardan ba'zilari quyidagilardir: bosh qotirmalarni hal qilish; qiziqarli o`yinlar; yo`llar, elektr zanjirlari, integral sxemalari va boshqarish sistemalarini loyihalashtirish; avtomatlar, blok-sxemalar va kompyuter dasturlarini tadqiq qilish va hokazo.

Misol. $V=\{3;4;5;6;7;8\}$ to`plam elementlari orasida "$x-y$ ayirma juft bo`lish" munosabati graf yordamida quyidagicha tasvirlanadi:



Agar graf qirrasida yo`nalish belgillangan bo`lsa bu qirra *yoy* yoki *oriyentirlangan qirra* deyiladi. Barcha qirralari oriyentirlangan bo`lgan graf ***oriyentirlangan graf*** (qisqacha *orgraf*) deyiladi.

Agar binar munosabat simmetrik bo`lsa, mos bo`lgan graf oriyentirlanmagan bo`ladi.

Agar binar munosabat refleksiv bo`lsa, mos bo`lgan grafning har bir uchida sirtmoq mavjud.

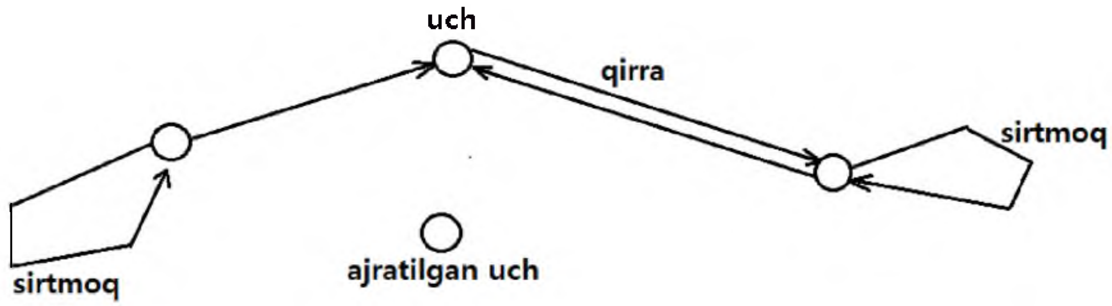
Agar binar munosabat tranzitiv bo`lsa, mos bo`lgan graf uchun (a,b) va (b,c) qirralari bilan birga (a,c) qirrasi ham mavjud. Bunday graf ***bog`langan*** graf deyiladi.

Graf uchidan chiqqan qirralar soni juft (toq) bo`lsa, u holda bu uch o`zi *juft* (*toq*) deyiladi.

Eyler formulasi. Tekislikda uzilishlarga ega bo`lmagan va qirralari kesishmaydigan graf berilgan bo`lsin. U tekislikni bir nechta *yoqlar* deb ataluvchi sohalarga bo`ladi. Bunday graf uchun Eyler 1736-yili qavariq ko`pyoqlilarni tekislikdagi graflar yordamida tasvirlab $|V|-|E|+|F|=2$ formulani isbotladi, bu yerda $|V|,|E|,|F|$ -mos ravishda uchlar, qirralar va yoqlar soni.

Murakkab bo`lmagan graflarni grafik sxemalar orqali ifodalash maqsadga muvofiq, u yerda uchlari nuqtalardan, qirralari esa ularni birlashtiruvchi chiziqlardan iborat.

Ushbu sxemalarda chiziqlar uzunligi, eni va shakli hech qanday ahamiyatga ega emas.



Shunday qilib ***graf erkin konstruksiyalardir***. Bunda ikki uchlari orasidagi bog`lanishning bo`lishi, bir xilda ushbu bog`lanishni xarakteri muhim.

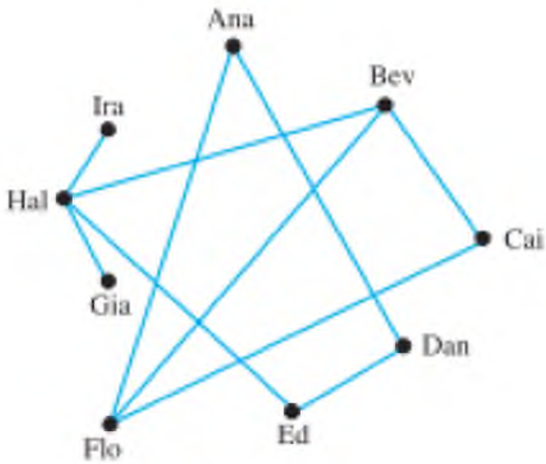
Agar x_1 va $x_2$lar qandaydir qirra (x_i, x_j) ga tegishli bo`lsa, u holda ushbu qirra $x_i$ va $x_j$ “insindent” deyiladi, $x_i$ va $x_j$ lar esa qo`shni nuqtalar deyiladi.

Agar qirra bir nuqtaga “insindent” bo`lsa, u ***sirtmoq*** deyiladi.

Hech qanday qirraga “insindent” bo`lmagan uch ***ajratilgan uch*** deyiladi.

Graflarga misollar:

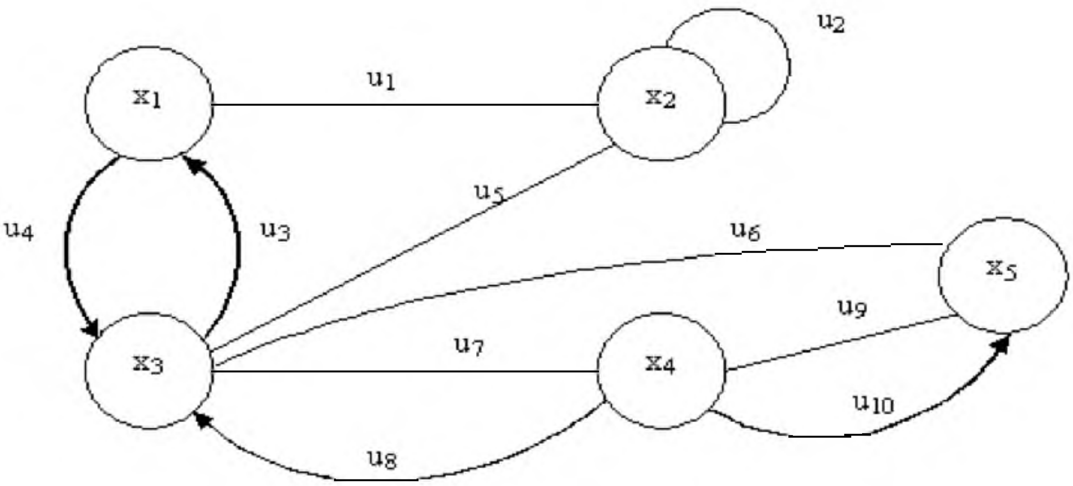
Name	Past Partners
Ana	Dan, Flo
Bev	Cai, Flo, Hal
Cai	Bev, Flo
Dan	Ana, Ed
Ed	Dan, Hal
Flo	Cai, Bev, Ana
Gia	Hal
Hal	Gia, Ed, Bev, Ira
Ira	Hal



Agar grafda shunday uchlar bo`lsaki, ular ikki va undan ko`p uchlar bilan birlashtirilgan bo`lsa bunday graf ***multigraf*** deyiladi.

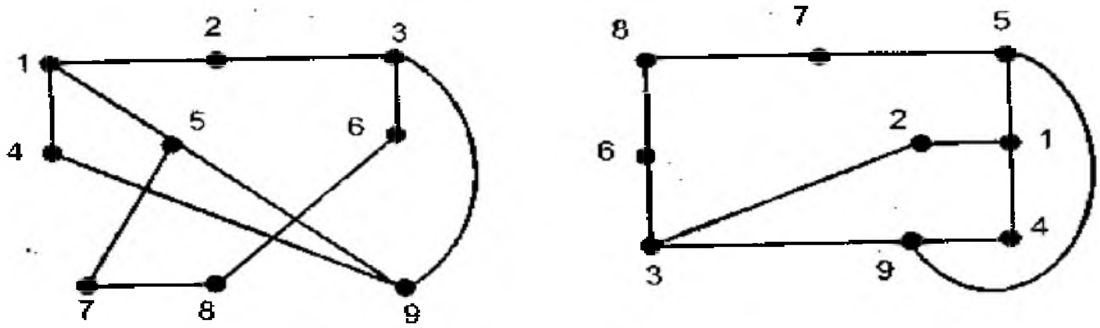
Ushbu uchga tegishli bo`lgan qirralar soni uchning darajasini belgilaydi.

Quyidagi rasmda ko`rsatilgan x_2 uch 6 darajaga ega, chunki unga u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7… qirralar “insindent”dir, x_1 uchning darajasi 3, x_4 ning darajasi esa 1.



Agar graf sirtmoqsiz yoki qirralari karrali bo`lmasa, bunda graf ***oddiy graf*** deyiladi. Graf kvadrat jadval shaklida bo`lishi mumkin.

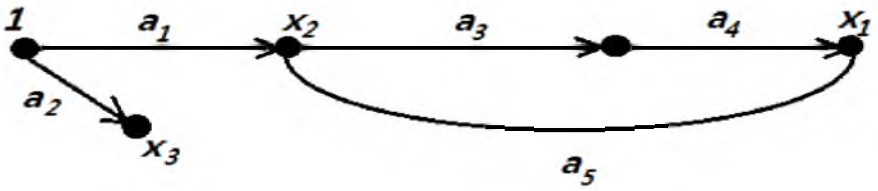
Quyidagi rasmda G_1 va G_2 izomorf graflar jufti ko`rsatilgan.



Ko`pgina masalalarda uchlar orasidagi munosabat muhim rol o`ynamaydi. Bunga misol tariqasida tartib munosabat bo`lishi mumkin. Masalan, $x_i$ $x_j$ dan katta bu holda $x_j$ $x_i$ dan katta bo`lishi mumkin emas. Demak, uchlar orasidagi munosabat ma'lum mo`ljalga ega. Bunday graflarni mo`ljalga ega graflar yoki oriyentirli graflar deymiz.

Orieyntirli D graf deb, bir juft *D=(x,a)* ga aytamiz. Bu yerda x uchlarning ixtiyoriy to`plami va $a$ –uchlarning tartiblangan juftligi to`plami, uchlarning tartiblangan juftligi "***yoylar***" deyiladi.

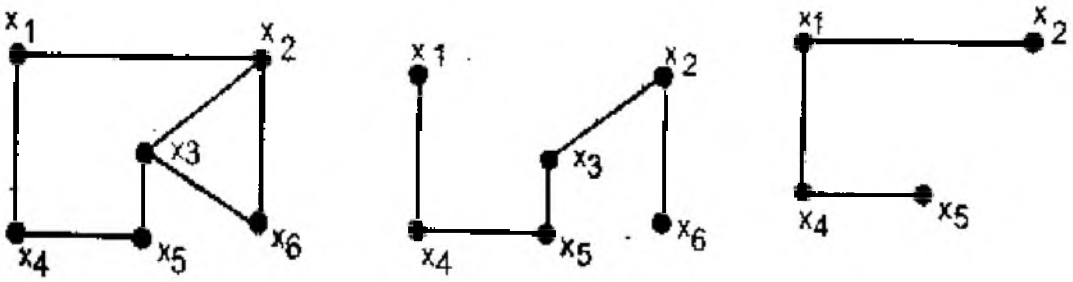
$A \in X \times X$ $(x_i \;\; x_j)$ juftlikda birinchi x_i yoy uchi, ikkinchi uch x_j yoyning oxiri. Quyidagi rasmda yoylar strelka bilan bezatilgan:



Graf $G_0(x_0, E_0) G(x, E)$ ning ***qisman grafi*** deb ataladi, agarda u berilgan grafning barcha uchlariga ega, barcha qirralariga ega emas va qisman qirralariga ega bo`lsa, ya'ni $x_0 = x,\ E_0 \in E$

$G(x, E)$ ning ***graf ostisi*** deb shunday $G_0(x_0, E_0)$ grafga aytiladiki, bunda ular qism bo`ladi.

Quyida qisman grafga, graf ostiga va grafga misol keltirilgan:



Graf marshruti (yo`li).

Bizga oriyentirlanmagan graf berilgan bo`lsin, m uzunlikdagi ***marshrut*** deb graf qirralarining shunday ketma-ketligiga aytiladiki, bunda yonma-yon bo`lgan qirralarning uchlari uchma-uch tushadi. Graflarning marshrutiga misol sifatida quyidagi ketma-ketlikni berish mumkin:

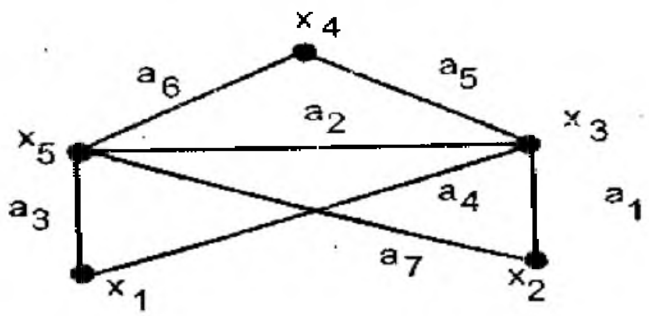
$(\alpha_1\alpha_6\,\alpha_5\alpha_1\alpha_3)$ va $(\alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_6)$ bunda birinchi marshrut $x_1x_2x_3x_2x_1x_3$ lar orqali o`tadi, ikkinchi marshrut $x_2x_1x_2x_3x_2$ lar orqali o`tadi va yopiq marshrut tashkil qiladi.

Grafning ***ikki uchi bog'langan*** deyiladi, agar shu uchlarni birlashtiruvchi yo`l bo`lsa.

Agar grafning har qanday uchini birlashtiruvchi marshrut mavjud bo`lsa, bunday graf ***bog`langan graf*** deyiladi.

Barcha qirralari turli bo`lgan (yo`l) marshrut ***zanjir*** deb ataladi. Agar zanjir turli uchlardan o`tsa, u oddiy zanjir deb ataladi. Yopiq zanjir "sikl" deb ataladi, turli uchlardan o`tuvchi "sikl", oddiy "sikl"dir.

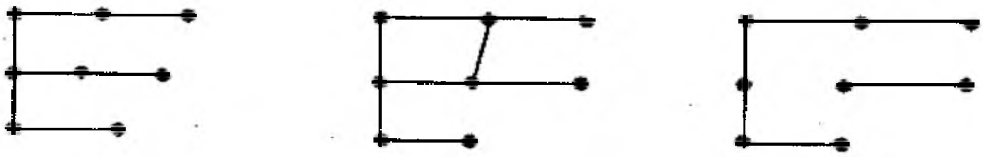
Grafning barcha qirralarini o`zida mujassam qilgan sikl Eylerov deyiladi, Eylerov siklga ega graf Eylerov grafi deyiladi.



3.4. Daraxtlar va ularning tatbiqlari

Siklga ega bo`lmagan bog`langan graf ***daraxt*** deb ataladi, uning qirralari esa ***shoxlari***dir.

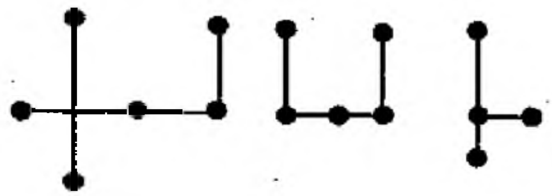
n-uchli daraxtda (n-1) ta qirra bor (a rasm). Haqiqatdan ham agarda daraxtning ikki uchuni birlashtiruvchi bitta qirra qo`shilsa, grafda ***sikl*** paydo bo`ladi (b rasm). Agar bir qovurg`ani olib tashlasa, graf bog`lanmagan bo`lib qoladi (d rasm).



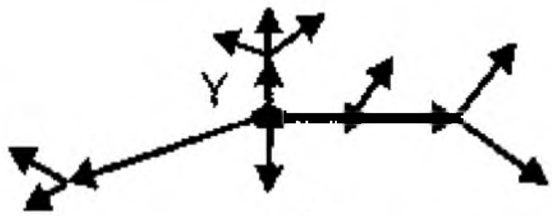
a) b) d)

Shunday qilib, n uchni birlashtirish uchun (n-1) ta qovurg`a kerak.

Siklsiz bog`lanmagan graf ***o`rmon*** deb ataladi. Bunda o`rmonning har qanday bog`langan qismi daraja bo`ladi (f rasm). Oriyentirli daraxt *Y* ***"predaraxt"*** deyiladi, agarda *Y* uchlari orasida doimo yo`l bo`lsa (g rasm)



f)



g)

S=(G; C) juftlik ***to`r*** deb ataladi, bu yerda *G=(X; A)* ixtiyoriy oriyentirlangan (yo`naltirilgan)dir.

C esa grafning har bir yoyiga manfiy bo`lmagan haqiqiy sonni moslaydi.

$C(d_i\, d_j)$ ni yechilayotgan masala shartiga ko`ra turlicha atashadi: yoy og`irligi, o`tkazish qobiliyati.

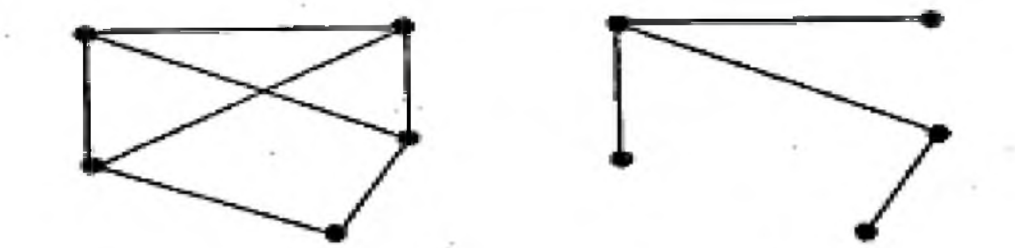
"To`r" deb bir xilda o`lchangan grafga aytiladi, yoylarning yig`indisi ***graf og`irligi*** deyiladi.

Misol. $G = (x, E)$ "mo`ljallanmagan", "oriyentirlanmagan", "yo`naltirilmagan" graf berilgan bo`lsin.

D(Y;J) daraxt $G(x, E)$ grafning qoplovchi daraxti deyiladi, agarda *X=Y* va *J E* ning qismi bo`lsa.

Shunday qilib, qoplovchi daraxt berilgan grafning barcha uchlarini bog`laydi, ammo barcha qovurg`alarini o`z ichiga olmaydi.

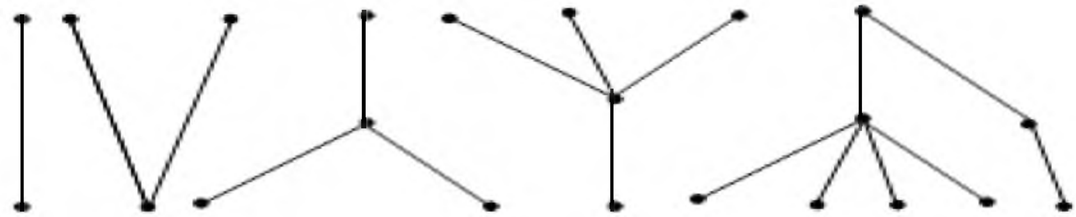
Quyidagi rasmlarda a rasmda berilgan grafga b) rasmda qoplovchi daraxt ko`rsatilgan. Har qanday bog`langan graf kamida bir qoplovchi daraxtga egadir.



a) b)

(a) (b)

Quyidagi rasmda daraxtlar keltirilgan:



Daraxt tushunchasi ko`p tatdbiqlarga ega:

1) ***Shajara***. “Ajdod-avlod” munosabat bo`yicha shajara daraxti chiziladi.

2) ***Fayllar tizimi.*** Fayllar va kataloglar joylashishi daraht ko`rinishida bo`ladi.

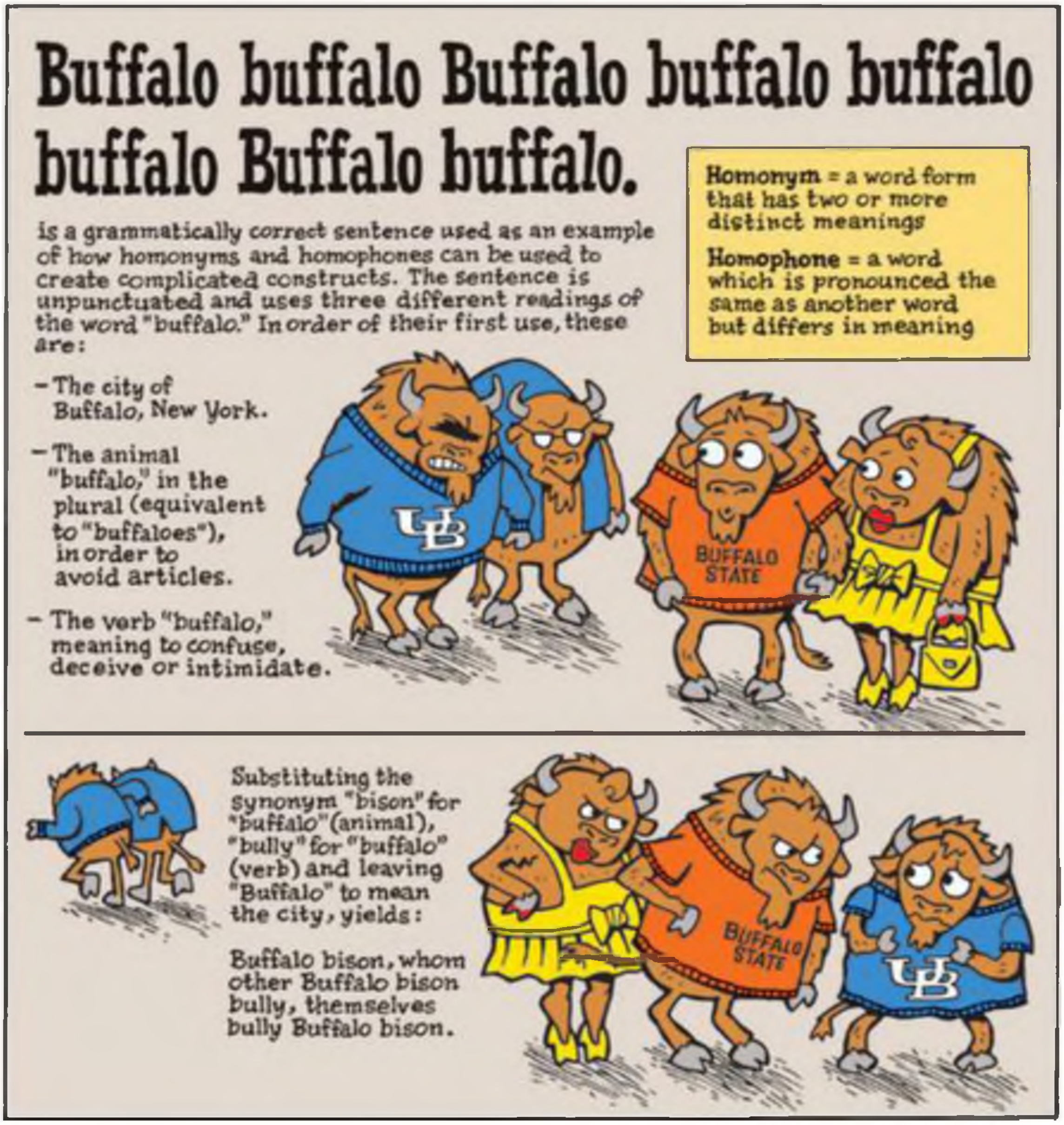
3) ***Gapning sintaksis tahlili***. Ma’lumki, so`z, so`z birikmasi turli ko`rinishdagi murakkab strukturalarni hosil qiladi, bunda so`z sintaksisning eng kichik birligi bo`lib, u gap qurilishi uchun nihoyatda zarur. Sintaksis tahlil muammolari va sintaktik strukturalarni sistemalash metodlari zamonaviy lingvistikada markaziy o`rinni egallaydi. Bunda so`z birikmasining, sodda va komponentlarining orasidagi bog`lanish (masalan, hokim va tobe so`zlarning bog`lanish) munosabatlarini graf yordamida tasvirlash mumkin. Jumladan, gap qurilishining sintaktik munosabatlar daraxt yordamida ifodalanar ekan. Sintaktik munosabatlarning strukturasini bilish chet tillarni ongli o`zlashtirishda, turli murakkablikdagi matnlarni tarjima qilishda qo`lay.

Misol: «Buffalo buffalo Buffalo buffalo buffalo buffalo Buffalo buffalo».

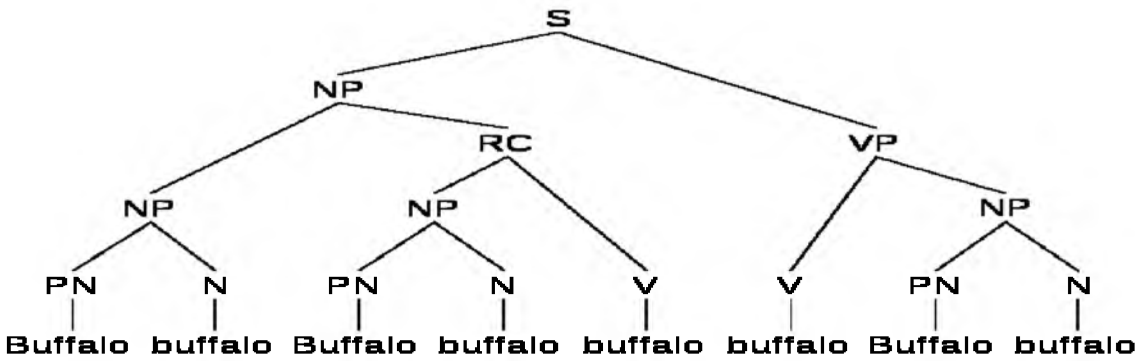
Bunda *buffalo* so`zi quyidagi uch qiymatda ishtirok etmoqda:

Sifat: from Buffalo – Buffallolik, Nyu-York shtatidagi yirik Buffalo shahridan; **Ot**: Buffalo - yovoyi bo`qa (bizon); **Fe'l**: to buffalo – qo`rqitish.

Mazkur gap qo`yidagi ma'noga ega: «Buffalolik buqalar qo`rqitgan (boshqa) buffalolik buqalar buffalolik buqalarni qo`rqitmoqda» (Buffaloes from Buffalo, NY, whom buffaloes from Buffalo bully, bully buffaloes from Buffalo.)

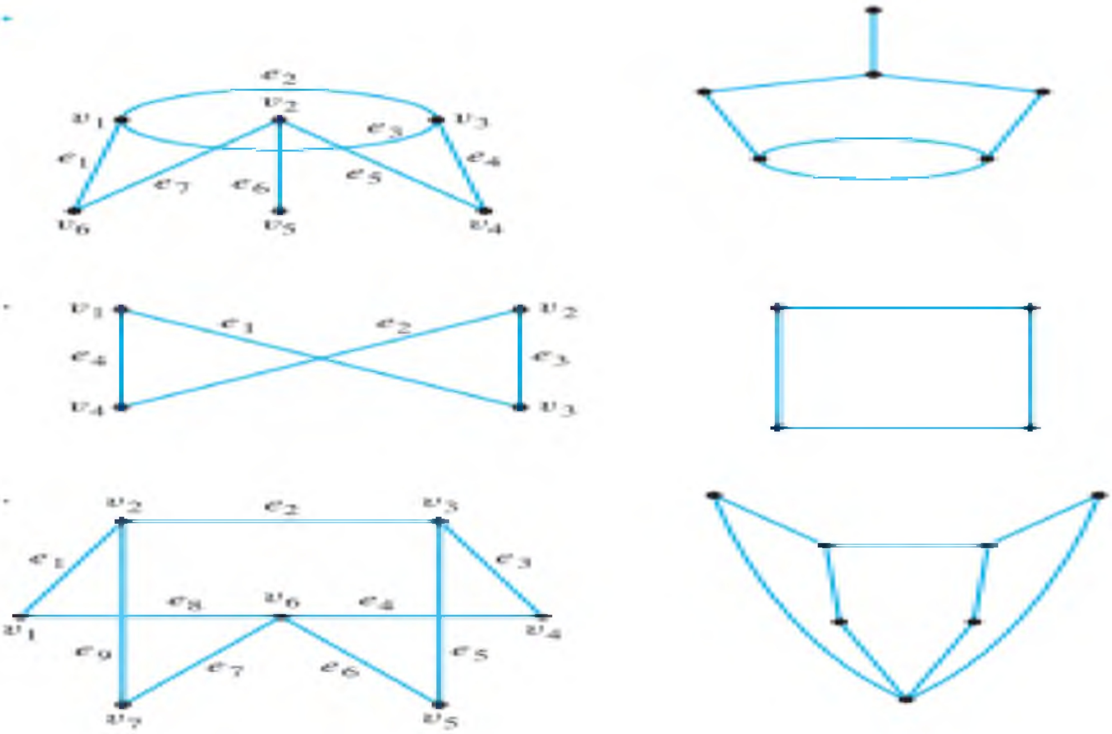


Bu gapning semantik strukturasi quyidagi daraxt yordamida tasvirlanadi:



Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. $G_f \subset X \times Y$ nimani bildiradi.
2. Moslikning berilish usullarini aytib bering.
3. Moslik turlariga misollar keltiring va ular graflarining o`ziga xos xususiyatlarini ko`rsating.
4. Uchburchakning o`rta chizig`i bilan asosi orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatish mumkinmi?
5. Barcha toq sonlar to`plami bilan barcha juft sonlar to`plami orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatish mumkinmi?
6. Bo`sh va to`la mosliklar qanday bo`ladi?
7. Munosabat xossalarini graflarda tasvirlang.
8. Refleksiv, simmetrik, antisimmetriklik, tranzitiv munosabatlarni graflar yordamida tushuntiring.
9. Ekvivalentlik va tartib munosabatlarini misollar yordamida tushuntiring.
10. Kundalik hayotdan munosabatlarga misollar keltiring.
11. R- binar munosabatning simmetriklik xossasini tushuntiring.
12. *A*={7; 14; 28; 25} to`plamda aniqlangan “karrali” munosabati refleksivlik xossasiga egami? Bu munosabat uchun simmetriklik xossasi o`rinlimi?, asoslang.
13. *B*= $\{\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{5}{10};\frac{25}{50};\frac{6}{8};\frac{4}{7}\}$ to`plamda *“x kasr y kasrga teng”* munosabati berilgan. Bu to`plamda birorta tartib munosabatini aniqlang.
14. Quyidagi rasmlarning bir xil ekanligini ko`rsating:



4-§. Matematik mantiq elementlari

"Matematika - buyuk fan, inson aqliy qobiliyatining juda ajoyib bir olijanob mahsuli".
D.I.Pisarev
"Matematikada formulani emas, fikrlash jarayonini eslash talab qilinadi".
V.P.Yermakov

Tayanch iboralar: *matematik mantiq, mulohaza tushunchasi, uning qiymati, mantiqiy amallar va formulalar, mulohazalar hisobi, inkor, kon'yunksiya, diz'yunksiya, implikatsiya, ekvivalensiya, De Morgan qonuniyatlari, Klini misoli.*

4.1. Matematik mantiqning asosiy tushunchalari

Mantiq jarayonini turli matematik belgilar bilan ifodalashga intilish Arastu asarlaridayoq ko`zga tashlanadi. XVI – XVII asrlarga kelib, mexanika va matematika fani rivojlanishi bilan matematik metodni mantiqqa tatbiq etish imkoniyati kengaya bordi. Nemis faylasufi Leybnits har xil masalalarni yechishga imkon beruvchi mantiqiy matematik metod yaratishga intilib, mantiqni matematiklashtirishga asos soldi. Mantiqiy jarayonni matematik usullar yordamida ifodalash asosan XIX asrlarga kelib rivojlana boshladi.

Mulohaza va uning qiymati. Matematik mantiqning boshlang`ich tushunchalaridan biri mulohaza tushunchasidir. “Mulohaza” deganda biz rost yoki yolg`onligi haqida fikr yuritishi mumkin bo`lgan darak gapni tushunamiz. Har qanday mulohaza yo rost yoki yolg`on bo`ladi. Hech bir mulohaza bir vaqtning o`zida ham rost ham yolg`on bo`la olmaydi. Masalan, “$5>3$”, “$2\cdot 2=5$”, “5 son tub son”, “1 son tub son”, “o`g`lining yoshi otasining yoshidan katta” mulohazalarining birinchisi – rost, ikkinchisi yolg`on, uchinchisi – rost, 4 chi va 5 chilari esa yolg`on mulohazalardir.

So`roq va undov gaplar mulohaza bo`la olmaydi. Ta’riflar ham mulohaza bo`la olmaydi. Masalan, “2 songa bo`linuvchi son juft son deyiladi” degan ta’rif mulohaza bo`la olmaydi. Ammo “agar butun son 2 ga bo`linsa, u holda bu son juft son bo`ladi” degan darak gap mulohaza bo`ladi. Bu mulohaza – rost.

Mulohazaning qiymati deganda biz uning rost yoki yolg`onligini tushunamiz. Mulohazalar odatda lotin alifbosining bosh harflari (*A, B, C, .... X, Y, Z)* bilan, ularning qiymatlari (“rost”, “yolg`on”)ni *R* va *Yo* harflari bilan belgilaymiz. Bu yerda *R* – rost, *Yo* – yolg`on. Shuningdek, ularni raqamlar bilan ham belgilash kiritilgan bo`lib, rost mulohaza 1, yolg`on mulohaza esa 0 bilan belgilanadi.

Qismlarga ajratilmaydigan mulohazalar elementar mulohazalar deb aytiladi. Elementar mulohazalar yordamida undan murakkabroq mulohazalarni tuzish mumkin.

Agar mulohazalar o`rtasiga mantiq amallaridan qo`ysak, yangi mulohaza hosil bo`lib, bunday mulohazaga qo`shma mulohaza deyiladi. Mulohazalar algebrasida rost yoki yolg`on tushunchalari asosiy tushunchalardan hisoblanadi. Qo`hma mulohazaning rost yoki yolg’on ekanligini ta’rifdan kelib chiqqan holda jadval asosida ko`rish birmuncha qulaylik tug`diradi. Bunday jadvalga rostlik jadvali ham deyiladi.

Quyida biz berilgan mulohazalardan mantiq amallari deb ataladigan amallar yordamida boshqa mulohazalar hosil qilish usullarini ko`rib chiqamiz.

4.2. Mantiqiy amallar va formulalar

Mulohazalar ustida quyidagi mantiqiy amallar - inkor, kon'yunksiya, diz'yunksiya, implikatsiya va ekvivalensiya amallari mavjud bo`lib, ularning ta'rifi hamda rostlik jadvali quydagicha bo`ladi:[1]

Inkor. Bizga biror A mulohaza berilgan bo`lsin.

Ta'rif. Berilgan A mulohaza rost bo`lganda yolg`on, yolg`on bo`lganda rost bo`ladigan mulohaza A mulohazaning inkori deyiladi va $\rceil A$ yoki $\overline{A}$ orqali belgilanadi.

Bu yerdagi $\overline{A}$ ($\rceil A$) yozuv "A emas" yoki "A bo`lishi noto`g`ri" deb o`qiladi. Inkor amali ushbu rostlik jadvali bilan aniqlanadi:

A	$\overline{A}$
R (1)	Yo (0)
Yo (0)	R (1)

Masalan, A mulohaza - «7-tub son» degan rost mulohaza bo`lsin, u holda $\rceil A$ - «7-tub son emas» degan yolg`on mulohazadan iborat bo`ladi.

Kon'yunksiya.

Ta'rif. A va B mulohazalarning ikkalasi rost bo`lganda rost bo`ladigan hamda "va" bog`lovchisi bilan bog`lanuvchi mulohazalar A va B mulohazalarning kon'yunksiyasi deb ataladi, $A \wedge B$ hamda $A \& B$ ko`rinishlarda belgilanadi.

Bu yerdagi A va B mulohazalar mos ravishda $A \wedge B$ kon'yunksiyaning birinchi va ikkinchi hadlari, "$\wedge$" va "$\&$" belgilar esa kon'yunksiya amali belgisi deyiladi. $A \wedge B$, $A \& B$ yozuvlar "A va B" deb o'qiladi. Kon'yunksiya uchun rostlik jadvali quyidagicha bo`ladi:

A	B	$A \wedge B$
R (1)	R (1)	R (1)
R (1)	Yo (0)	Yo (0)
Yo (0)	R (1)	Yo (0)
Yo (0)	Yo (0)	Yo (0)

Kon'yunksiya – bog'layapman degan ma'noni anglatadi

[1] *Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, 2-7* betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

Masalan, A: “Toshkent – O`zbekistonning poytaxti”, $B$: “Termez shahri Farg`ona vodiysida joylashgan”, C: “Biz mustaqil yurt farzandlarimiz” degan uchta mulohazani qaraylik. Ta’rifga ko`ra, ravshanki, $A \wedge B$ mulohaza yolg`on (chunki A – rost, B – yolg`on), $A \wedge C$ – rost (chunki $A$ – rost, $C$ – rost), $B \wedge C$ – yolg`on (chunki B – yolg`on, C – rost).

Diz’yunksiya.

Ta’rif. A va B mulohazalarning kamida bittasi rost bo`lganda rost bo`ladigan hamda “yoki” bog`lovchisi bilan bog`lanuvchi mulohazalar A va B mulohazalarning diz’yunksiyasi deb ataladi, $A \vee B$ ko`rinishda belgilanadi.

Bu yerdagi $A \vee B$ yozuv “A yoki B” deb o`qiladi, “ $\vee$ ” belgi diz’yunksiya belgisi deyiladi. A va B lar $A \vee B$ diz’yunksiyaning mos ravishda birinchi va ikkinchi hadlari deb ataladi.

Diz’yunksiyaning rostlik jadvali quyidagicha bo`ladi:

A	B	$A \vee B$
R(1)	R(1)	R(1)
R(1)	Yo(0)	R(1)
Yo(0)	R(1)	R(1)
Yo(0)	Yo(0)	Yo(0)

Diz’yunksiya so‘zi – farqlayapman degan ma’noni anglatadi.

Masalan, **1)** “Yozda toqqa chiqamiz yoki dengizga boramiz” diz’yunksiyasini qaraymiz. Bu mulohaza quyidagi hollarda rost bo`ladi: biz toqqa chiqamiz, ammo dengizga bormaymiz; dengizga boramiz lekin toqqa chiqmaymiz; biz toqqa ham chiqamiz, dengizga ham boramiz. Yangi mulohaza yolg`on bo`ladi: biz toqqa ham chiqmaymiz, dengizga ham bormaymiz.

2) $10 \geq 7$ mulohazaning rost yoki yolg`onligini aniqlaylik. Bu diz’yunksiya rost, chunki $10 > 7$ rost mulohaza va $10 = 7$ yolg`on mulohazadan tashkil topgan.

3) $11 \leq 7$ – mulohaza yolg`on, chunki, $11 < 7$ – yolg‘on, $11 = 7$ – yolg`on.

Implikatsiya.

Ta’rif. A mulohaza rost, B mulohaza yolg`on bo`lgandagina – yolg`on, qolgan hollarda rost bo`ladigan mulohazaga A hamda B

mulohazalarning implikatsiyasi deyiladi va $A \Rightarrow B$ ko'rinishda belgilanadi.

"$\Rightarrow$" belgi implikatsiya belgisi deb ataladi. $A \Rightarrow B$ yozuv "agar *A* bo`lsa, u holda *B* bo`ladi" yoki "*A* mulohazadan *B* mulohaza kelib chiqadi" degan ma'nolarni anglatadi. Implikatsiya uchun rostlik jadvali quyidagicha bo`ladi:

A	B	$A \Rightarrow B$
R(1)	R(1)	R(1)
R(1)	Yo(0)	Yo(0)
Yo(0)	R(1)	R(1)
Yo(0)	Yo(0)	R(1)

Implikatsiya so`zi mahkam bog`layapman degan ma'noni anglatadi.

Masalan, 1) "Agar 72 soni 9 ga karrali bo`lsa, u holda bu son 3 ga ham karrali bo`ladi". Bu rost implikatsiya.

2) "Agar $-3<-1$ bo`lsa, u holda $9<8$ bo`ladi", implikatsiyasi yolg`on, chunki $-3<-1$ shart – rost, $9<8$ yolg`on.

Ekvivalensiya.

Ta'rif. *A* va *B* mulohazalar bir vaqtda rost yoki bir vaqtda yolg`on bo`lganda rost bo`ladigan mulohaza *A* va *B* mulohazalarning ekvivalensiyasi deyiladi, $A \Leftrightarrow B$ ko`rinishda belgilanadi.

Bu yerdagi $A \Leftrightarrow B$ yozuv "*A* faqat va faqat, qachonki *B*", yoki "*A* ekvivalent *B*", yoki "*B* uchun *A* zarur va yetarli" deb o`qiladi. Ekvivalensiyaning rostlik jadvali quyidagicha bo`ladi:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
R(1)	*R(1)*	*R(1)*
R(1)	*Yo(0)*	*Yo(0)*
Yo(0)	*R(1)*	*Yo(0)*
Yo(0)	*Yo(0)*	*R(1)*

Masalan, *A*: "972 soni 9 ga karrali", *B*: "972 soni raqamlarining yig`indisi 9 ga karrali" mulohazalari berilgan bo`lsin. U holda *A* va *B* mulohazalarning ekvivalensiyasi quyidagicha bo`ladi. "972 soni 9 ga karrali bo`ladi, faqat va faqat shu holda, qachonki bu son raqamlarining yig`indisi 9 ga karrali bo`lsa. Bu ekvivalensiya rost.

Matematik mulohazalarni yuqoridagi belgilar yordamida ifoda etishga doir misollar keltiramiz:

1-misol. Agar $a>b$ va $b>c$ bo`lsa, $a>c$ bo`ladi. $(a>b)\wedge(b>c)\Rightarrow(a>c)$.

2-misol. $a>b$ bo`lsa, $a+c>b+c$ bo`ladi. $(a>b)\Rightarrow(a+c>b+c)$.

3-misol. $a=0$ yoki $b=0$ bo`lsa, $ab=0$ bo`ladi va aksincha, $ab=0$ bo`lsa, $a=0$ yoki $b=0$ bo`ladi. $(ab=0)\Leftrightarrow((a=0)\vee(b=0))$.

4-misol. $a>0$ va $b>0$ bo`lsa, $ab>0$ bo`ladi. $(a>0)\wedge(b>0)\Rightarrow(ab>0)$.

5-misol. Ixtiyoriy x haqiqiy son uchun $|x|\geq x$. $\forall x\in R$: $|x|>x$.

6-misol. Ixtiyoriy $a\geq 0$ son uchun, shunday $x\in R$ son mavjudki, $x^2=a$ bo`ladi, ya'ni $\forall a\geq 0$, $\exists x\in R$: $x^2=a$.

Mantiqiy qonunlarga amal qilish to`g`ri, tushunarli, aniq, izchil, ziddiyatsiz, asoslangan fikr yuritishga imkon beradi. Aniqlik, izchillik, ziddiyatlardan xoli bo`lish va isbotlilik (asoslanganlik) to`g`ri tafakkurlashning asosiy belgilaridir. Bular mantiqiy qonunlarning asosini tashkil etuvchi belgilar bo`lganligi uchun, ularning har birini alohida-alohida ko`rib chiqamiz.

4.3. Mulohazalar hisobi

"Mulohaza" va "isbot" so`zlarining turmushdagi mazmuni anchayin noaniq. Shu sababli, birinchi bo`lib shu tushunchalarni aniqlash uchun maxsus formal (ya'ni formulalarga tayangan) til ishlatiladi.

Formal tilda mantiqiy bog`lovchilar deb ataluvchi maxsus belgilardan foydalaniladi: $\wedge$ - mantiqiy ko`paytirish, $\vee$ - mantiqiy qo`shish amallari deb yuritiladi. $A\wedge B$ mulohazani $A$ va $B$; $A\vee B$ mulohazani $A$ yoki $B$; $A\Rightarrow B$ mulohazani $A$ mulohazadan $B$ mulohaza kelib chiqadi yoki agar $A$ bo`lsa, u holda B bo`ladi; $A\Leftrightarrow B$ mulohazani $A$ mulohazadan $B$ mulohaza va $B$ mulohazadan $A$ mulohaza kelib chiqadi yoki $A$ bo`ladi, faqat va faqat shu holdaki, agar B bo`lsa, deb o`qiymiz. Mulohazalar to`plamini $M$ harfi bilan belgilaylik. U holda $M$ to`plam, unda bajariladigan barcha $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ amallar bilan birgalikda mulohazalar algebrasi deb yuritiladi. Mulohazalar algebrasini qisqacha MA orqali belgilaymiz. M to`plamda bajariladigan amallarni bajarilish tartibi quyidagicha: avval inkor amali bajariladi, agar inkor amali qavslardan tashqarida bo`lsa, u holda qavs ichidagi amallar bajariladi. Keyin kon'yunksiya, undan so`ng diz'yunksiya, implikasiya va nihoyat ekvivalensiya amallari bajariladi.

Ta'rif. A, B, C,…. mulohazalarni inkor, diz'yunksiya, kon'yunksiya, implikatsiya va ekvivalensiya kabi mantiqiy bog`lovchilar vositasi bilan ma'lum tartibda birlashtirib hosil etilgan murakkab mulohaza ***mantiqiy formula*** deyiladi.

Mantiqiy formulalar tabiiy tildagi mulohazalarning matematik modeli bo`ladi. Mulohazalar hisobida mantiqiy formulalar ***rostlik jadvallari*** yordamida izohlanadi. Bunday jadvallar mantiqiy bog`lovchi orqali tuzilgan murakkab mulohazaning rost (1) yoki yolg`on (0) ligini tashkil etuvchi mulohazalar rostligiga qarab aniqlanadi. Yuqoridagi amallarning rostlik jadvallaridan foydalanib, yanada murakkabroq mulohazalar uchun rostlik jadvalini tuzish mumkin.

Masalan: $((A \vee B) \& (\neg A)) \Rightarrow B$ mulohazaning rostlik jadvalini tuzaylik:

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$(A \vee B) \& (\neg A)$	$((A \vee B) \& (\neg A)) \Rightarrow B$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1

Jadvalni yakunlab, qaralayotgan A va B mulohazalar rostligidan qat'iy nazar $((A \vee B) \& (\neg A)) \Rightarrow B$ mulohaza doim rost bo`lishini ko`ramiz.

Asosiy mantiqiy qonunlar

1°. $A \vee \neg A$ *– uchinchisini inkor qilish qonuni.*

Bu qonun quyidagicha ifodalanadi: bir-biriga zid bo`lgan ikki fikrdan biri hamisha to`g`ri (rost) bo'lib, ikkinchisi xatodir, uchinchisi bo`lishi mumkin emas.

Masalan, bir vaqtning o`zida, bir xil sharoitda inson yo axloqli, yo axloqsiz bo`ladi. Yuqorida keltirilgan ikkita qonun fikrlash jarayonida ziddiyatga yo`l qo`ymaslikni talab qiladi va tafakkurning ziddiyatsiz hamda izchil bo`lishini ta'minlaydi.

2°. $A \,\&\, \neg A \Leftrightarrow 0$ – *ziddiyatsizlik qonuni.*

Bu qonun quyidagicha ifodalanadi: obyektiv voqelikdagi buyum va hodisalar bir vaqtda, bir xil sharoitda biror xususiyatga ham ega bo`lishi, ham ega bo`lmasligi mumkin emas.

Masalan, bir vaqtning o`zida, bir xil sharoitda inson ham axloqli, ham axloqsiz bo`lishi mumkin emas.

3°. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ - *qo`sh inkor qonuni.*

«Bu kishi ilg`or emas degan gap to`g`ri emas» degan fikr «bu kishi ilg`or» degan fikrga teng kuchli.

4°. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow \neg A)$ - *kontrapozitsiya qonuni.*

Bu qonun inkor amali yordamida tezis (isbotlanishi kerak bo`lgan fikr) va asosni (tezisni isboti uchun keltirilgan dalillar) o`rnilarini almashtirishga imkon yaratadi.

Masalan, «Agar shaxs chuqur bilimga ega bo`lsa, u holda u komil inson bo`ladi" degan mulohaza "Komil inson bo`lmagan shaxs chuqur bilimga ega bo`lmaydi" degan mulohazaga teng kuchli.

5°. $\neg(A \,\&\, B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$;

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \,\&\, \neg B$ - *de Morgan*[1] *qonunlari.*

De Morgan qonunlari inkor amali yordamida kon'yunksiya va diz'yunksiya amallarini bir-biri bilan almashtirishga imkon yaratadi.

Masalan, 1) «Halol va vijdonli inson axloqli bo`ladi» mulohazaning inkori «Halol bo`lmagan yoki vijdonli bo`lmagan inson axloqsiz bo`ladi» mulohazaga teng kuchli.

2) «Men darsdan so`ng yo kutubxonaga, yo do`stimnikiga bordim» mulohazaning inkori "Men darsdan so`ng kutubxonaga ham, do`stimnikiga ham bormadim" mulohazaga teng kuchli.

6°. $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$.

Masalan, «Agar bo`sh vaqtim bo`lsa, unda televizor ko`raman» mulohaza «Yoki bo`sh vaqtim bo`lmaydi, yoki televizor ko`raman» mulohazaga teng kuchli.

7°. $A \,\&\, B \Leftrightarrow B \,\&\, A$; $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ – *kommutativlik qonunlari.*

---

[1] De Morgan (Augustus de Morgan (1806 - 1871) – British Mathematician.

Kommutativlik qonunlari o`z-o`zidan ravshan bo`lsa ham, ularni o`ylamasdan qo`llashda muammolarga duchor bo`lish mumkin. Bu holatga **Klini[1] misolini** keltiramiz:

A : “Maryam turmushga chiqdi”; B : “Maryam farzand ko`rdi”.

Bu holda $A \& B$, $B \& A$ formulalar mos ravishda teng kuchli bo`lmagan talqinlarga ega.

Fikrimizcha, buning sababi yuqoridagi mulohazalarda ko`rinmas holatda vaqt parametri ishtirok etishida.

8°. $A \& (B \& C) \Leftrightarrow (A \& B) \& C$; $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ – *assotsiativlik qonunlari*.

9°. $A \& (B \vee C) \Leftrightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$; $A \vee (B \& C) \Leftrightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$ - *distributivlik qonunlari*.

10°. $A \& (B \vee A) \Leftrightarrow A$; $A \vee (B \& A) \Leftrightarrow A$ - *qisqartirish qonunlari*.

Augustus De Morgan (1806–1871)

Stephen C. Kleene (1909–1994)

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar:

1. Mulohaza nima?
2. Har qanday o`tgan zamon darak gapi mulohaza bo`la oladimi? Kelasi zamon darak gaplari-chi?
3. Mulohazalar kon’yunksiyasi nima? Qanday o`qiladi? Rost kon’yunksiyaga, yolg`on kon’yunksiyaga misollar keltiring.
4. Mulohazalar diz’yunksiyasi nima? Qanday o`qiladi? Rost diz’yunksiyaga, yolg`on diz’yunksiyaga misollar keltiring.

[1] ***Stephen Cole Kleene (1909-1994) – American Mathematician***

5. Mulohazalar implikasiyasi nima? Qanday o`qiladi? Misollar keltiring.
6. Mulohazalar ekvivalensiyasi nima? Qanday o`qiladi? Misollar keltiring.
7. Mulohaza inkori nima? Qanday o`qiladi? Misollar keltiring.
8. Mantiqiy amallarning bajarilish tartibini ayting.
9. Rostlik jadvali nima?
10. Elementar mulohaza deb qanday mulohazaga aytiladi?
11. Quyidagi jumlalar orasidan mulohazalarini ajrating va ularning rostlik qiymatini toping: a) 7- buyun son; b) 68 ni 5ga bo`lganda 4 qoldiq qoladi; d) so`roq gaplar mulohaza bo`ladi; e) $x \leq 17$; f) $17 \cdot 2 - 21 = 13$; g) $x^2 + 4 = 13$; h) 24- tub son.
12. A: “ Onasining yoshi qizining yoshidan kichik”; B: ” Samarqand shahri O`zbekistondagi shaharlardan biri”; C: “ 8-dekabr - Konstitutsiya kuni”. $A \wedge B$-?, $A \wedge C$-?, $B \wedge C$-?, $C \wedge B$-?, B^A-?
13. $12 \geq 8$ mulohazaning rost yoki yolg`onligini aniqlang.
14. A: “Agar -4<-2 bo`lsa, u holda 8<7 bo`ladi” mulohazaning rost yoki yolg`onligini isbotlang.
15. A: “972 soni 9ga karrali”; B:“972 soni raqamlarining yig`indisi 9 ga karrali” mulohazalarning ekvivalensiyasini tuzing.
16. A: ”26:2+11=28”, B: ”3- tub son” mulohazalari berilgan bo`lsa, $A \vee B$, $B \vee A$, $\bar{A} \vee B$, $\bar{A} \vee \overline{B}$, $A \vee \overline{B}$ larni so`z orqali ifodalang va ularning rostlik qiymatini toping.

17-25-misol. Quyidagi amallarning rostlik qiymatlarini toping:

17. $\overline{\overline{x \vee y} \rightarrow \overline{x \,\&\, y}}$; $\quad \overline{p_1} \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$

18. $(x \wedge z) \vee (x \wedge \bar{z}) \rightarrow (y \wedge z) \rightarrow (\bar{x} \wedge y \wedge z)$

19. $((\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q}) \& (\mathrm{q} \rightarrow \mathrm{r})) \rightarrow (\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{r})$

20. $\overline{(\mathrm{x} \rightarrow \mathrm{z}) \rightarrow ((\mathrm{y} \rightarrow \mathrm{z}) \rightarrow (\mathrm{x} \vee \mathrm{y} \rightarrow \mathrm{z}))}$

21. $(\mathrm{p}_1 \rightarrow \mathrm{p}_2) \rightarrow ((\mathrm{p}_1 \vee \mathrm{p}) \rightarrow (\mathrm{p}_2 \vee \mathrm{p}))$

22. $(\mathrm{p}_1 \rightarrow (\mathrm{p}_2 \rightarrow \mathrm{p}_3)) \rightarrow ((\mathrm{p}_1 \rightarrow \mathrm{p}_2) \rightarrow (\mathrm{p}_1 \rightarrow \mathrm{p}_3))$

23. $\overline{(\mathrm{p}_1 \rightarrow \mathrm{p}_2) \rightarrow ((\mathrm{p}_1 \wedge \mathrm{p}) \rightarrow (\mathrm{p}_2 \wedge \mathrm{p}))}$

24. $(x \leftrightarrow y) \& (x \vee y) \to (z \to x)$

25. $(x \to y) \& (y \to z) \to (z \to x)$

5-§. Predikatlar va kvantorlar

Tayanch iboralar*:* *predikatlar algebrasi, predikatning aniqlanish sohasi, predikatning rostlik to`plami, rostlik to`plami, predikatlar konyunksiyasi, diz'yunksiyasi, ekvivalensiyasi, implikatsiyasi, inkori, kvantor tushunchasi, umumiylik kvantori, mavjudlik kvantori, paradoks, kutilmagan, g`alati, shubhasiz to`g`ri, yolg`onchi va refleksivlik paradokslar, sofizm, hiyla, Zenon masalalari.*

5.1. Predikatlar va ular ustida amallar

Predikatlar haqida tushuncha. Mulohazalar algebrasi fan va amaliyotning murakkab mantiqiy xulosalarini chiqarish uchun yetarli bo`lmaydi. Bunday murakkab mantiqiy xulosalarini chiqarishda mulohazalar algebrasini ham o`z ichiga oluvchi predikatlar algebrasi muhim o`rin tutadi.

Biz soroq va his-hayajon gaplar mulohaza bo`lmasligini bilamiz, xuddi shu qatorda noma'lum qatnashgan gaplar ham mulohazaga kirmaydi. Bunday gaplar predikatlar deb ataladi. Shu o`rinda predikatlar mulohazaga aylanadimi, degan savol tug`ilishi tabiiy. Biz quyida ana shu masalani ko`rib o`tamiz.

Ayrim darak gaplarda o`zgaruvchilar qatnashib, shu o`zgaruvchilar o`rniga aniq (tegishli) qiymatlarni qo`ysak, mulohaza hosil bo`ladi.

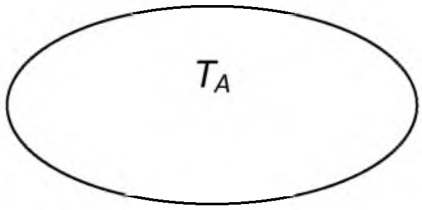
1-Ta'rif. O`zgaruvchi qatnashgan va shu o`zgaruvchining o`rniga qiymatlar qo`yilganda rost yoki yolg`on mulohazaga aylanadigan darak gap predikat deyiladi.

Masalan, "Bu yozuvchi Angliyada ijod qilgan" va "U Angliyada ijod qilgan" darak gaplarida o`zgaruvchi "Bu yozuvchi" so'z birikmasi yoki "u" olmoshning o`rniga "Shekspir" qiymatni qo`ysak, "Shekspir Angliyada ijod qilgan" rost mulohazani, "Gyugo" qiymatni qo`ysak "Gyugo Angliyada ijod qilgan" yolg`on mulohazani hosil qilamiz.

Xuddi matematikadagidek, x orqali o`zgaruvchini belgilasak yuqoridagi darak gaplarni “*x* yozuvchi Angliyada ijod qilgan” deb yozish mumkin.

Predikatlar tarkibida bir yoki bir nechta o`zgaruvchi qatnashishi mumkin, qatnashgan o`zgaruvchilar soniga qarab predikat bir o`rinli, ikki o`rinli va hokazo bo`ladi va $P(x), P(x,y), P(x,y,z),....$ kabi belgilanadi.

2-Ta’rif. Predikat tarkibiga kirgan o`zgaruvchi qabul qilishi mumkin bo`lgan barcha qiymatlar to`plami ***predikatning aniqlanish sohasi*** *deyiladi* va $X,Y,Z,...$ kabi belgilanadi.



3-Ta’rif. O`zgaruvchi o`rniga qo`yilganda predikatni rost mulohazaga aylantiruvchi qiymatlar ***predikatning rostlik to`plami*** *deyiladi* va T_A ko`rinishda belgilanadi (rasm).

Ta’rifga ko`ra istalgan tenglama yoki tengsizlik predikat bo`ladi.

Masalan, 1) *A(x)*: “*x* shahar – O`zbekiston Respublikasining poytaxti”. Bunda *X*={Toshkent, Samarqand, Xiva, Dushanbe, Buxoro, Moskva,…} bo`lib, T_A = {Toshkent} bo`ladi.

2) *B(x)*:“$4 \leq x < 11$”, $x \in N$. $X=N$ bo`lib, $T_B = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ bo`ladi.

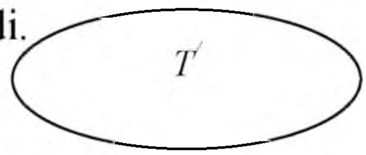
3) *D(y)*:“*y* – 12 sonning bo`luvchisi” bo`lsa, $Y=N$ bo’lib, $T_D=\{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$bo`ladi.

Predikatlar ustida amallar.

Biz asosan bir o`rinli predikatlar bilan to`liqroq tanishib chiqamiz. Predikatlar ustida ham mulohazalar ustida bajarilgan $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ amallari kiritilgan.

Predikat inkori. Aytaylik, *X* to`plamda *A(x)* predikat berilgan bo`lsin.

4-Tarif. *A(x)* rost bo`lganda yolg`on, yolg`on bo`lganda rost bo`ladigan $\overline{A(x)}$predikat *A(x)*ning *inkori* deyiladi.



A(x) ning rostlik to`plami *T* bo`lsa,

$\overline{A(x)}$ning rostlik to`plami $T'$ bo`ladi (rasm).

Masalan, 1) $X=\{\ \forall x \in N,\ x<10\ \}$ to`plamda *A(x)*:”*x*-tub son” predikati berilgan bo`lsa, $T_A = \{2; 3; 5; 7\}$ bo`ladi. $\overline{A(x)}$: ” *x*- tub son emas” da esa $T'_A = \{1; 4; 6; 8; 9\}$bo`ladi.

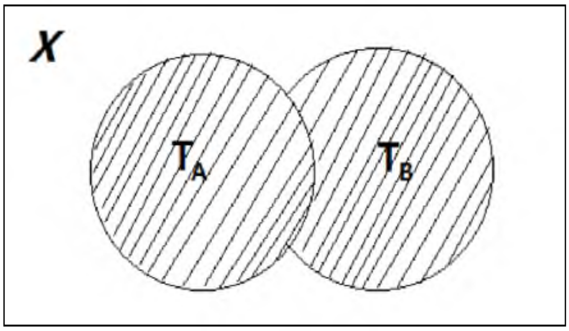
2) X-hafta kunlari to`plamda $A(x)$:”$x$-haftaning juft kuni” predikati berilgan bo`lsa, T={seshanba, payshanba, shanba}, T'_A={yakshanba, dushanba, chorshanba, juma} bo`ladi.

Predikatlar kon’yunksiyasi.

Aytaylik, X to`plamda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bo`lsin.

5-Tarif. A(x) va B(x) predikatlarning har ikkalasi rost bo`lganda rost, qolgan hollarda yolg`on bo`ladigan predikatga ularning kon’yunksiyasi deyiladi.

Predikatlar kon’unksiyasi $A(x)\wedge B(x)$ yoki $A(x)\&B(x)$ ko`rinishda belgilanib, ”$A(x)$ va $B(x)$” deb o`qiladi.Agar $A(x)$ predikatning rostlik to`plamini $T_A$ , $B(x)$ predikatning rostlik to`plamini T_B *va* $A(x)\wedge B(x)$ning rostlik to`plamini $T$ desak u holda $T=T_A\cap T_B$ bo`ladi. Buni Eyler-Venn diagrammalarida tasvirlasak, undagi shtrixlangan sohadan iborat bo`ladi.



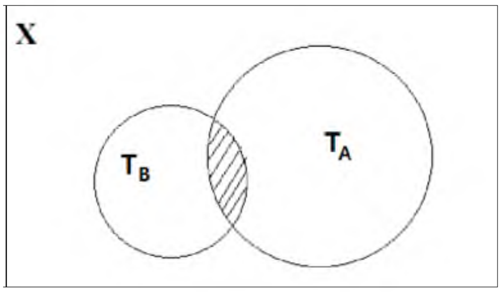
Masalan, X={ $\forall$ $x\in N$, x<10} to`plamda $A(x)$:”$x$-tub son” va $B(x)$:”$x$-toq son” predikatlari berilgan bo`lsa, ularning kon’yunksiyasi
T_A = {2; 3; 5; 7} va T_B = {1; 3; 5; 7; 9}, u holda $T=T_A\wedge T_B$ ={3; 5; 7} ga teng bo`ladi.

Predikatlar diz’yunksiyasi.

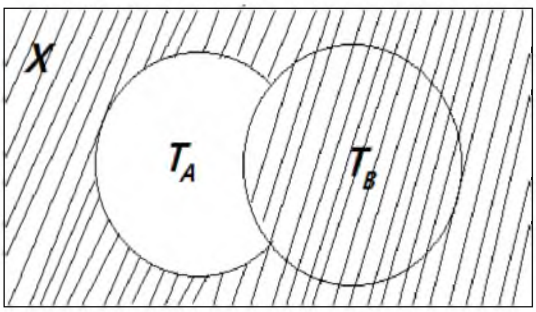
6-Tarif. $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarning har ikkalasi yolg`on bo`lganda yolg`on, qolgan hollarda rost bo`ladigan predikatga ularning diz’yunksiyasi deyiladi.

Predikatlar diz’unksiyasi $A(x)\vee B(x)$ ko`rinishda belgilanib, ”$A(x)$ yoki $B(x)$” deb o`qiladi.

$A(x)$ predikatning rostlik to`plamini $T_A$ , $B(x)$ predikatning rostlik to`plamini T_B *va* $A(x)\vee B(x)$ning rostlik to`plamini $T$ desak u holda $T=T_A\cup T_B$ bo’ladi. Buni Eyler-Venn diagrammalarida tasvirlasak, undagi shtrixlangan sohadan iborat bo`ladi.



Masalan, $X=\{\ \forall x \in N,\ x \leq 15\ \}$ to`plamda $A(x)$: $\{3 \leq x < 13\}$ va $B(x)$:" $x$ soni 12 ning bo`luvchisi" predikatlari berilgan bo`lsa, ularning diz'yunksiyasi



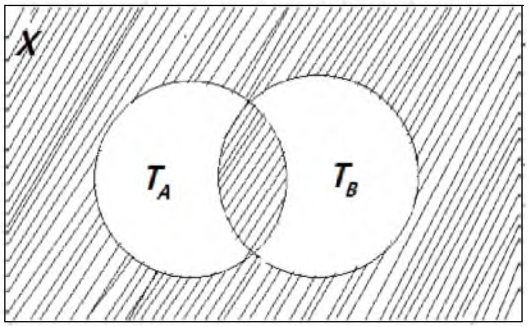
$T_A = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;10; 11; 12\}$ va $T_B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$, u holda $T=T_A \vee T_B =\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;10; 11; 12\}$ga teng bo`ladi.

Predikatlar implikatsiyasi.

7-Tarif. $A(x)$ predikat rost, $B(x)$ predikat yolg`on bo`lganda yolg`on, qolgan hollarda rost bo`ladigan mulohaza shu predikatlarning implikatsiyasi deyiladi.

Predikatlar implikatsiyasi $A(x) \Rightarrow B(x)$ ko`rinishda belgilanib, "$A(x)$ predikatdan $B(x)$ predikat kelib chiqadi" deb o`qiladi. Bunda $B(x)$ predikat $A(x)$ predikat uchun *zaruriy shart*, $A(x)$ predikat $B(x)$ predikat uchun *yetarli shart* deyiladi.

$A(x)$ predikatning rostlik to`plamini $T_A$, $B(x)$ predikatning rostlik to`plamini T_B *va* $A(x) \Rightarrow B(x)$ ning rostlik to`plamini $T$ desak, u holda $T=T'_A \cup T_B$ bo'ladi. Uni Eyler-Venn diagrammalarida tasvirlasak, undagi shtrixlangan sohadan iborat bo`ladi.



Masalan, $X=\{\ \forall x \in N,\ 6 \leq x \leq 15\ \}$ to`plamda $A(x)$: "$x$ - tub son" va $B(x)$: " $x$ - toq son" predikatlari berilgan bo`lsa, ularning implikatsiyasi

$T_A = \{7; 11; 13\}$ va

$T_B = \{7; 9; 11; 13; 15\}$,

$T'_A = \{6; 8; 9; 10; 12; 14; 15\}$, u holda $T=T'_A \cup T_B =\{6; 7; 8; 9;10; 11; 12; 13; 14; 15\}$ga teng bo`ladi.

Predikatlar ekvivalensiyasi.

8-Tarif. $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarning har ikkalasi rost bo`lganda hamda har ikkalasi yolg`on bo`lganda rost, qolgan hollarda yolg`on bo`ladigan mulohaza shu predikatlarning ekvivalensiyasi deyiladi.

Predikatlar ekvivalensiyasi $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ko`rinishda belgilanib,

”$A(x)$ bilan $B(x)$ teng kuchli” deb o`qiladi. Bunda $B(x)$ va $A(x)$ predikatlarning har biri ikkinchisi uchun *zaruriy va yetarli shart* hisoblanadi. $A(x)\Leftrightarrow B(x)$ ning rostlik to`plamini T desak, u $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarning har ikkalasi bir vaqtda rost va har ikkalasi bir vaqtda yolg`on bo`ladigan mulohazalarning rostlik qiymatlari to`plamidan iborat bo`ladi. Demak, $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarning har ikkalasi bir vaqtda rost bo`lgan holdagi rostlik to`plami $T_A \cap T_B$, har ikkalasi bir vaqtda yolg`on bo`lgan holda rostlik to`plami $T_A \cup T_B$ bo`ladi. Bundan $T=(T_A \cap T_B) \cup (T'_A \cap T'_B)$ bo`lishi kelib chiqadi. Uni Eyler-Venn diagrammalarida tasvirlasak, undagi shtrixlangan sohadan iborat bo`ladi.

Masalan, $X=\{\forall x \in N,\ x \le 16\}$ to`plamda $A(x)$: ”$x$ son 3 ga karrali” va $B(x)$:”$x$ soni 12 ning bo`luvchisi” predikatlari berilgan bo`lsa, ularning ekvivalensiyasi $T_A=\{3;\ 6;\ 9;\ 12;\ 15\}$ va $T_B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$, u holda

$T=(T_A \cap T_B) \cup (T'_A \cap T'_B) =\{3;\ 6;\ 12\} \cup \{5;\ 7;\ 8;\ 10;\ 11\} = \{3;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 10;\ 11\}$ga teng bo`ladi.

5.2. Kvantorlar

Predikatni mulohazaga aylantirishning yana bir usuli kvantorlardan foydalanishdir. Ikki xil kvantor bor bo`lib, ularning biri ”umumiylik”, ikkinchisi ”mavjudlik” kvantori deb ataladi.

Umumiylik kvantori ”$\forall$” belgi bilan belgilanadi va ”har bir”, ”hamma”, ”barcha” so’zlari bilan ifodalanadi. $\forall$ belgi inglizcha “All” so’zining bosh harfidan olingan va “hamma” ma’nosini bildiradi.

Mavjudlik kvantori “$\exists$” belgi bilan belgilanadi, inglizcha “Exist” so`zining bosh harfidan olingan bo`lib “bor”, “mavjud”, “topiladi” ma’nosini bildiradi.

$\forall$ va $\exists$ kvantorlarning ma’nosini shunday tushunish mumkin: $\forall x P(x)$ ko`rinishdagi yangi mulohaza $x$ ning barcha qiymatlari uchun $P(x)$ ekanligini da’vo qiladi, $\exists x P(x)$ ko`rinishdagi yangi mulohaza esa $P(x)$ bo`ladigan x ning qiymati bildiradi.

Misol. Mavzu boshlanishida keltirilgan $P(x)$: “x yozuvchi Angliyada ijod qilgan” predikatni qaraymiz. U holda $\forall x P(x)$ ko`rinishdagi yangi mulohaza “barcha yozuvchilar Angliyada ijod qilgan” kabi, $\exists x P(x)$ ko`rinishdagi yangi mulohaza esa “ayrim yozuvchilar Angliyada ijod qilgan” kabi o`qiladi. Bunda birinchi mulohaza yolg`on, ikkinchi mulohaza esa rost bo`ladi.

Predikatlar va kvantorlar yordamida tavtologiyalarni hosil qilish mumkin.

Inkor amali bilan bog`liq bo`lgan ikkita muhim bo`lgan mantiqiy qonunlarni keltiramiz:

$$\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x)), \quad \neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x)).$$

Bu qonunlarnining ma’nosini tushunish uchun misol keltiraylik.

Misol. Yuqorida keltirilgan $P(x)$: “x yozuvchi Angliyada ijod qilgan” predikatni qaraymiz. $\neg(\exists x P(x))$ formula “Angliyada ijod qilgan yozuvchilar mavjud emas” mulohazani, $\forall x(\neg P(x))$ formula esa unga teng kuchli mulohaza bo`lgan “Barcha yozuvchilar Angliyada ijod qilmagan” mulohazani bildiradi.

Xuddi shunday, $\neg(\forall x P(x))$ formula “Hamma yozuvchilar Angliyada ijod qilganligi noto`g`ri” mulohazani, $\exists x(\neg P(x))$ formula esa unga teng kuchli mulohaza bo`lgan “Angliyada ijod qilmagan yozuvchilar bor” mulohazani bildiradi.

Misol. Predikatlar yordamida quyidagi mulohazani yozamiz:

“Barcha ma’lum bo`lgan so`zlar tarjimasi lug`atda keltirilgan. Shunday yangi (noma’lum) so`zlar borki, ularning tarjimasi lug`atda keltirilmagan.”

Predikatlarni kiritamiz:

$A(x)$ = « x so`zi ma’lum»; $B(x)$ = « $x$ so`zi lug`atda keltirilgan».

Bu holda quyidagi kichik mulohazalar paydo bo`ladi:

$\neg B(x)$ = « x so`zi lug`atda keltirilmagan»;

$\forall x A(x)$ = «ixtiyoriy so`z ma’lum»;

$\exists x(\neg A(x))$ = «noma’lum so`zlar mavjud»;

$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$ = «agar so`z ma’lum bo`lsa, u holda u lug`atda keltirilgan»;

$\exists x(\neg A(x) \& \neg B(x))$ = «shunday yangi so`zlar borki, ular lug`atda keltirilmagan».

U holda berilgan mulohaza quyidagi formula yordamida ifodalanadi:

$$(\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))) \& (\exists x(\neg A(x) \& \neg B(x))).$$

Ravshanki, $P(x,y)$ predikatdan kvantorlar yordamida

$\forall xP(x,y), \forall yP(x,y), \exists xP(x,y), \exists yP(x,y)$ ko`rinishdagi bir o`zgaruvchili predikatlarni, ulardan esa

$\forall x\exists yP(x,y), \exists y\forall xP(x,y), \exists x\forall yP(x,y), \forall y\exists xP(x,y),$

$\forall x\forall yP(x,y), \forall y\forall xP(x,y), \exists x\exists yP(x,y), \exists y\exists xP(x,y)$ ko`rinishdagi mulohazalarni qurish mumkin.

Garchi $\forall x\forall yP(x,y), \forall y\forall xP(x,y)$ mulohazalarning hamda $\exists x\exists yP(x,y), \exists y\exists xP(x,y)$ ma'nolari bir xil bo`lsa-da, $\forall x\exists yP(x,y), \exists y\forall xP(x,y)$ mulohazalar teng kuchli emas ekan.

Misol. $P(x,y) =$ "y inson x talabaning otasi" predikatni qaraymiz. Bu holda $\forall x\exists yP(x,y) =$ "ixtiyoriy talabaning otasi bor"; $\exists y\forall xP(x,y) =$ "shunday inson borki, u barcha talabalarning otasi bo`ladi" mulohazalarni bildiradi.

Xuddi shunday, $\exists x\forall yP(x,y), \forall y\exists xP(x,y)$ mulohazalarning ham teng kuchli emasligini ko`rish mumkin.

Mulohazalar algebrasidagi asosiy teng kuchliliklarda mulohazalarni predikatlar mantig'ining formulalari bilan almashtirib predikatlar mantig`ining teng kuchli formulalarini hosil qilishimiz mumkin, masalan, $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$ teng kuchlilikdagi *A, B* mulohazalarni predikatlar mantiqining mos ravishda $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ formulalari bilan almashtirsak $\overline{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}} \equiv \overline{\mathcal{A}} \vee \overline{\mathcal{B}}$ teng kuchlilikka ega bo`lamiz, xususan $\overline{F(x) \wedge F(y)} \equiv \overline{F(x)} \vee \overline{F(y)}$

Misol. $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x) \equiv \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ tengkuchlilikni isbotlang.

Agar *R(x)* va *Q(x)* predikatlar bir vaqtda aynan rost bo`lsa, u holda $R(x) \wedge Q(x)$ predikat ham aynan rost bo`ladi. Bundan esa $\forall xR(x)$, $\forall xQ(x)$, $\forall x(R(x) \wedge Q(x))$ mulohazalarning rost qiymat qabul qilishi kelib chiqadi. Ya'ni bu holda teng kuchlilikning ikkala tomoni «rost» qiymat qabul qiladi.

Faraz qilamiz berilgan *R(x)* va *Q(x)* predikatlarning kamida bittasi masalan, *R(x)* aynan rost bo`lmasin. U holda $R(x) \wedge Q(x)$ predikat ham aynan rost bo`lmaydi, bundan esa $\forall xR(x)$, $\forall xR(x) \wedge \forall xQ(x)$, $\forall x(R(x) \wedge Q(x))$ mulohazalar yolg`on bo`ladi. Ya'ni bu holda ham teng kuchlilikning ikkala tomoni bir xil (yolg`on) qiymat qabul qiladi.

Mulohazalar algebarsidagidek, predikatlar mantig`ining teng kuchli formulalarida «$\equiv$» teng kuchlilik belgisini «$\Leftrightarrow$» ekvivalensiya amali bilan almashtirsak, aynan rost formulalar, ya'ni mantiq qonunlari hosil bo`ladi. Masalan, $\rceil(\forall xR(x)) \Leftrightarrow \exists x \rceil R(x)$; $\rceil(\exists xR(x)) \Leftrightarrow \forall x \rceil R(x)$- formulalar mantiqiy qonunlardir.

5.3. Paradoks va sofizmlar

Paradoks (qad. yun. παράδοξος - kutilmagan, g`alati**)** – ko`pchilik tomonidan qabul etilgan an’anaviy fikr, tajribaga o`z mazmuni yoki shakli bilan keskin zid bo`lgan, kutilmagan mulohaza. Har qanday paradoks «shubhasiz to`g`ri» (asoslimi, asossizmi, bundan qat’i nazar) hisoblangan u yoki bu fikrni inkor etishdek ko`rinadi. «Paradoks» terminining o`zi ham dastlab antik falsafada har qanday g`alati, original fikrni ifodalash uchun ishlatilgan.

Mantiqiy paradokslar, odatda, mantiqiy asoslari to`la aniqlanmagan nazariyalarda uchraydi.

Bir nechta paradoksni keltiramiz.

Misol. (***Yolg‘onchi paradoksi***). "Men tasdiqlayotgan barcha narsa yolg`on" mulohazani qaraymiz.

Agar bu mulohaza rost bo`lsa, bu mulohazaning ma’nosiga asosan aytilgan mulohazaning yolg`on ekanligi haqiqat. Agar bu mulohaza yolg`on bo`lsa, mulohazadagi ta’kid – yolg`on. Demak, bu mulohaza yolg`on degan mulohaza yolg`on, shunday ekan, bu mulohaza haqiqat. Ziddiyat. ■

Misol. (***Refleksivlik paradoksi***). O`zbek tilidagi so`zning ma’nosi o`zida ifodalansa, uni refleksiv deb ataylik.

Masalan, “o`zbekcha” so`zi refleksiv, “inglizcha” so`zi esa refleksiv emas. Xuddi shunday, “o`nta harfli“ so`zi refleksiv, “oltita harfli“ so`zi esa refleksiv emas. Barcha refleksiv so`zlar to`plamini qaraylik. “Norefleksiv” so`zi o`zi refleksivmi?

Agar bu so`z refleksiv bo`lsa, u holda ma’nosiga ko`ra, u norefleksiv. Agar bu so`z norefleksiv bo`lsa, u holda uning ma’nosi o`zida ifodalangani uchun, u refleksiv bo`ladi. Ziddiyat.■

Sofizm (qad.yun. σόφισμα - hiyla) –ataylab chiqariladigan noto`g`ri xulosa, biror tasdiqning noto`g`ri isboti. Bunda isbotdagi xato ancha ustalik bilan bilintirmay yuboriladi.

Sofizmga oid masalalarni dastlab, miloddan avvalgi V asrda Qadimgi Yunonistonda yashagan matematik Zenon tuzgan.

Zenon, mashhur chopqir Axillesning oldida sudralib ketayotgan toshbaqani hech qachon quvib yeta olmasligini matematik mulohazalar yordamida quyidagicha “isbot” qilgan. Axilles toshbaqaga qaraganda 10 marta tezroq chopa oladi. Dastlab, toshbaqa 100 metr oldinda bo`lsin. Axilles bu 100 metrni chopib o`tguncha, toshbaqa 10 metr ilgarilaydi. Axilles bu 10 metrni chopib o`tguncha toshbaqa yana 1 metr siljiydi va h.k. Ular orasidagi masofa doim qisqarib boradi, lekin hech qachon nolga aylanmadi.

Zenon masalalari cheksizlik, harakat, koinot tushunchalari bilan bog`liq bo`lib, ular matematika va fizika fanlarining rivojida katta ahamiyatga ega bo`ldi.

Ayrim sofizmlar ulug` ajdodlarimiz Farobiy asarlarida, Beruniy bilan Ibn Sinoning yozishmalarida muhokama qilingan.

Biz quyida eng sodda sofizmlarga misollar keltirib ularni tushuntirishga harakat qilmoqchimiz.

Misol. (1000 so‘m qaerga ketdi?). Universitetning 3 nafar talabasi o`z do`stlaridan birini mehmon qilish uchun kafega taklif qilishdi. Ular ovqatlanib bo`lishgach ofitsiant ularga 25000 so`mlik hisobni berdi. 3 nafar talaba har biri 10000 so`mdan pul berib, 30000 so`mni ofitsiantga berishdi. Ofitsiant ularga 5000 so`m qaytim qaytardi. 3 nafar talaba 1000 so`mdan bo`lishib olishdi va 2000 so`mni taksi uchun berishdi. Universitetga qaytishayotganda talabalardan biri hisoblay boshladi, “Har birimiz 9000 so`mdan xarajat qildik, bu 27000 so`m bo`ladi, 2000 so`m taksiga berdik, buni qo`shsak 29000 so`m bo`ladi. 1000 so`m qayerga ketdi ?”

Bu yerdagi asosiy qilinayotgan “xatolik” hisoblashning noto`g`ri qilinayotganda. 3 nafar talaba 9000 so`mdan 27000 so`m pul to`lashdi. Bundan 25000 so`mini kafega to`lashdi, 2000 so`mini taksi uchun do`stiga berishdi, demak umumiy hisob 27000 so`m bo`ladi. Yuqoridagi hisoblashda 2000 so`m 27000 so`mning ichida yotibdi. ■

Misol. (“$2\times2=5$” sofizmi).

20-16-4=25-20-5 to`g`ri tenglikni sodallashtiramiz:

$2(10-8-2)=25-20-5$

$2\times2\times(5-4-1)=5\times(5-4-1)$

Oxirgi tenglikning o`ng va chap taraflarini umumiy (5-4-1) ko`paytuvchiga qisqartirib $2\times2=5$ tenglikni hosil qilamiz. Bu yerdagi asosiy qilinayotgan “xatolik” nolga teng bo`lgan (5-4-1) ko`paytuvchiga qisqartirishda. ■

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. Predikatga ta’rif bering.
2. Predikatning aniqlanish sohasi, rostlik to`plami nima? Misollar yordamida tushuntiring.
3. Predikatlar kon’yunksiyaning ma’nosini tushuntiring.
4. Predikatlar diz’yunksiyaning ma’nosini tushuntiring.
5. Predikatlar implikatsiyaning ma’nosini tushuntiring.
6. Predikatlar ekvivalensiyaning ma’nosini tushuntiring.
7. Predikatlar diz’yunksiyasi, kon’yunksiyasi, implikasiyasi, ekvivalensiyasiga misollar keltiring.
8. Mantiq amallarini qo`llash natijasida hosil bo`ladigan predikat o`zgaruvchilarining soni haqida nima deyish mumkin?
9. Kvantorlar nima?
10. Umumiylik va mavjudlik kvantorlarini qo`llashga misollar keltiring.
11. Predikatli formula qanday hosil qilinadi?
12. Predikatli formulaning qanday turlarini bilasiz?
13. Paradokslarga misol keltiring.
14. Sofizmni qanday tushunasiz?
15. Matematik tasdiqlarni predikatlar tilida ifodalashga misol keltiring.
16. N – natural sonlar to`plamidaaniqlangan *R(x)*-«*x*-toq son»; *Q(x)*-«*x* birorta natural sonning kvadratiga teng»-predikatlar berilgan. x=1, 4, 5, 9 qiymatlar uchun $R \wedge Q$, $R \vee Q$, $R \to Q$, $R \leftrightarrow Q$, $\overline{R}$, $\overline{Q}$ predikatlarning qiymatlarini toping.
17. Quyidagi teng kuchliliklarni isbotlang:

1) $\rceil(\forall x R(x)) \equiv \exists x \rceil R(x)$

2) $\rceil(\exists x R(x)) \equiv \forall x \rceil R(x)$

3) $\forall x R(x) \equiv \rceil(\exists x \rceil R(x))$

4) $\exists x R(x) \equiv \rceil(\forall x \rceil R(x))$

5) $\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \exists x(A(x) \vee B(x))$

6) $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall (x)(A(x) \wedge B(x))$

6-§. Matritsalar

Tayanch iboralar: *matritsa, matritsaning elementi, kvadrat matritsa, nol matritsa, birlik matritsa, diagonal matritsalar, xos va xosmas matritsalar, matritsalar yig`indisi, ayirmasi, ko`paytmasi, songa ko`paytmasi, teskari matritsa.*

6.1. Matrisa tushunchasi

$m \cdot n$ ta sondan tuzilgan, quyidagi to`g`ri burchakli jadvalga

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n}. \\ \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

m ta satrli va n ta ustunli matritsa yoki mxn o`lchamli matritsa deb ataladi.

Matritsaning o'lchami uning satrlari soni va ustunlari soni bilan aniqlanadi. Matritsaning o'lchamini ifodalash uchun $m \times n$ belgi ishlatiladi. Bu belgi matritsaning m ta satr va n ta ustundan tashkil topganini bildiradi. Matritsaning o'zi lotin alifbosiming bosh harflaridan biri bilan belgilanadi va uning elementlari jadvali kichik qavsga olinadi. **Masalan,**

3×2 *o'lchamli matritsa*	2×3 *o'lchamli matritsa*	2×2 *o'lchamli matritsa*
$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$

$a_{i,j}$ $(i = 1,2,\dots \text{m},\ j = 1,2,\dots \text{n})$ sonlar matritsaning elementlari deb ataladi. Elementning birinchi indeksi i matritsa elementi turgan satr nomerini, ikkinchi indeksi j esa ustun nomerini ko`satadi.

A matritsaning i-satr va j-ustunda joylashgan elementi a_{ij} bilan belgilanadi.

$A = (a_{ij})$, $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ yoki $A = \| a_{ij} \|$, $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ yozuv A matritsa a_{ij} elementlardan tashkil topganini bildiradi:

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A=\|a_{ij}\|=\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

$1\times n$ o‘lchamli $A=(a_{11}\quad a_{12}\quad \dots \quad a_{1n})$ matritsa *satr matritsa* yoki *satr-vektor* deyiladi.

$m\times 1$ o‘lchamli $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ matritsa *ustun matritsa* yoki *ustun-vektor* deyiladi.

$n\times n$ o‘lchamli maritsa (satrlari soni ustunlari soniga teng, ya’ni $m=n$ matritsa) n - *tartibli kvadrat matritsa* deyiladi.

Kvadrat matritsaning chap yuqori burchagidan o‘ng quyi burchagiga yo‘nalgan $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlaridan tuzilgan diagonaliga uning *bosh diagonali*, o‘nq yuqori burchagidan chap quyi burchagiga yo‘nalgan $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ elementlardan tuzilgan diagonaliga uning *yordamchi diagonali* deyiladi.

Bosh diagonalidan yuqorida (pastda) joylashgan barcha elementlari nolga teng bo‘lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \left(A'=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

matritsa *yuqoridan uchburchak (quyidan uchburchak) matritsa* deyiladi.

Bosh diagonalda joylashmagan barcha elementlari nolga teng bo‘lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa *diagonal matritsa* deyiladi.

Diagonal matritsalarning xossasi: Ikkita diagonal matritsaning yigindisi va ko`paytmasi yana diagonal matritsadir.

Barcha elementlari birga teng bo‘lgan diagonal matritsa *birlik matritsa* deyiladi va *I* harfi bilan belgilanadi.

Istalgan n-tartibli A kvadrat matritsa uchun ushbu tenglik o‘rinli: $I\cdot A = A\cdot I = A$

Barcha elementlari nolga teng bo‘lgan ixtiyoriy o‘lchamdagi matritsa *nol matritsa* deyiladi va O harfi bilan belgilanadi.

A matritsada barcha satrlarni mos ustunlar bilan almashtirish natijasida hosil qilingan A^T matritsa A matritsaning *transponirlangan matritsasi* deyiladi: $(a_{ij})^T = (a_{ji})$.

Agar $A = A^T$ bo‘lsa, A matritsa *simmetrik,* agar $A_T = -A$ bo`lsa, *qiya simmetrik matritsa* deyiladi. Simmetrik matritsaning bosh diagonalga nisbatan simmetrik joylashgan elementlari teng, qiya simmetrik matritsaning bunday elementlari esa qarama-qarshidir. Qiya simmetrik matritsaning barcha diagonal elementlari nolga teng.

Bir xil o‘lchamli $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ matritsalarning barcha mos elementlari teng, ya’ni $a_{ij} = b_{ij}$ bo‘lsa, ular *teng matritsalar* deyiladi va $A = B$ deb yoziladi:

$$\boxed{\begin{array}{c} A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \\ \text{barcha } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \text{ uchun} \end{array}}$$

6.2. Matrisalar ustida amallar

Matritsalar ustidagi asosiy arifmetik amallar - matritsani songa ko`paytirish, matritsalarni qo`shish, ayirish va ularni ko`paytirish amallaridir.

Matritsani songa ko‘paytirish

Ta’rif. $A = (a_{ij})$ *matritsaning* λ *songa ko‘paytmasi* deb, elementlari $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C = \lambda A$ matritsaga aytiladi:

$$\boxed{C = \lambda A \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \lambda a_{ij}.}$$

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

Misol. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ bo‘lsin. $3A$ ni toping.

Yechish. $3A = 3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 4 & 3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 9 & 12 & -3 \end{pmatrix}$.

Matritsani songa ko‘paytirish amali ushbu xossalarga ega:

1) kommutativlik xossasi: $\lambda\cdot A = A\cdot\lambda$
2) assotsiativlik xossasi: $(\alpha\cdot B)\cdot A = \alpha\cdot(B\cdot A)$

Matritsalarni qo‘shish

Matritsalarni qo‘shish va ayirish amallari *bir xil o‘lchamli matritsalar* uchun kiritiladi. Bunda yig‘indi matrisa qo‘shiluvchi matritsalar bilan bir xil o‘lchamga ega bo‘ladi.

Ta’rif. $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ *matritsalarning yig‘indisi* deb, elementlari $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C = A + B$ matritsaga aytiladi

$$\boxed{C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\, a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} b_{11}\, b_{12} \dots b_{1k} \\ b_{21}\, b_{22} \dots b_{2k} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{m1}\, b_{m2} \dots b_{mk} \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan bo`lsin

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}\, a_{12} + b_{12} \dots a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21}\, a_{22} + b_{22} \dots a_{2n} + b_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} + b_{m1}\, a_{m2} + b_{m2} \dots a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ bo‘lsin. $A + B$ ni toping.

Yechish.

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & -1+3 & 4+2\\ 3+1 & 0+0 & 1+(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 6\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni qo‘ish amali ushbu xossalarga ega:

1^0. kommutativlik xossasi: $A+B=B+A$

2^0. assotsiativlik xossasi: $(A+B)+C=A+(B+C)$

3^0. qo`shish amaliga nisbatan distributivlik xossasi: $\lambda\cdot(A+B)=\lambda A+\lambda B$

4^0. sonlarni qo`shishga nisbatan distributivlik xossasi: $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$

Matritsani songa ko`paytirish va matritsalarni qo`shish amalining yuqorida aytilgan xossalari bu amallarning ta’riflari, haqiqiy sonlarni qo`shish va ko`paytirish amallarining kommutativlik va assotsiativlik xossalari hamda ko`paytirishning qo`shishga nisbatan distributuvlik xossasining natijasidir.

Matritsalarni ayirish.

T**a’rif**. $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ *matritsalarning ayirmasi* deb $C=A-B=A+(-B)$ matritsaga aytiladi. Bunda C matritsaning elementlari $c_{ij}=a_{ij}+(-b_{ij})=a_{ij}-b_{ij}$ kabi topiladi.

$$\boxed{C=A-B \quad\Leftrightarrow\quad c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}.}$$

$$A - B=\begin{pmatrix}a_{11}-b_{11}\, a_{12}-b_{12}\ldots a_{1n}-b_{1n}\\ a_{21}-b_{21}\, a_{22}-b_{22}\ldots a_{2n}-b_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}-b_{m1}\, a_{m2}-b_{m2}\ldots a_{mn}-b_{mn}\end{pmatrix}$$

Misol. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ bo‘lsin. $A-B$ ni toping.

Yechish.

$$A-B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1 & -3-3 & 2-2\\ 2-2 & -1-1 & 4-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6 & 0\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko`paytirish

$A-$ satr martitsa va $B-$ ustun matritsa bir xil sondagi elementlarga ega bo‘lsin deylik. Bunda A satrning B ustunga ko‘paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \dots \\ b_{1n} \end{pmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+\dots+a_{1n}b_{1n},$$

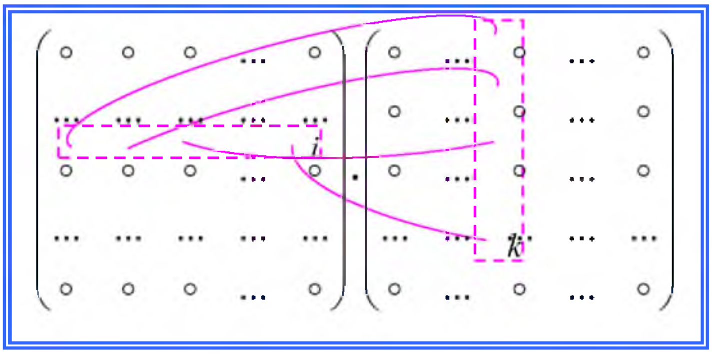
ya’ni ko‘paytma matritsalarning mos elementlari ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Matritsalarni ko‘paytirishning bu qoidasi *satrni ustunga ko‘paytirish qoidasi* deb yuritiladi.

Ikki matritsani ko‘paytirish amali *moslashtirilgan matritsalar* uchun kiritiladi. A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo‘lsa, A va B *matritsalar moslashtirilgan* deyiladi.

Ta’rif. $m\times p$ o‘lchamli $A=(a_{ij})$ *matritsaning* $p\times n$ o‘lchamli $B=(b_{jk})$ *matritsaga ko‘paytmasi* AB deb, c_{ik} elementi A matritsaning i-satrini B matritsaning j-ustuniga satrni ustunga ko‘paytirish qoidasi bilan, ya’ni $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\dots+a_{ip}b_{pk}=\sum_{r=1}^{p}a_{ir}b_{rk},\ i=1,\dots,m,\ k=1,\dots,n$

(qo‘shiluvchlari quyidagi sxemada keltirilgan) kabi aniqlanadigan $m\times n$ o‘lchamli $C=(c_{ik})$ matritsaga aytiladi.



Misollar. Berilgan matritsalarni ko‘paytiring

1. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=(2\cdot 3+1\cdot 4)=(10);$

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ -1\cdot 3 & -1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -3 & -4 \end{pmatrix};$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix};$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3+1\cdot(-1) & 2\cdot 2+1\cdot 0 & 2\cdot 4+1\cdot 3 \\ -3\cdot 3+4\cdot(-1) & -3\cdot 2+4\cdot 0 & -3\cdot 4+4\cdot 3 \\ 0\cdot 3+2\cdot(-1) & 0\cdot 2+2\cdot 0 & 0\cdot 4+2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 11 \\ -13 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+3\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 2\cdot 1+3\cdot 3+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot 5+3\cdot(-2)+(-1)\cdot 3 \\ 1\cdot 2+(-2)\cdot 1+3\cdot 3 & 1\cdot 1+(-2)\cdot 3+3\cdot(-1) & 1\cdot 5+(-2)\cdot(-2)+3\cdot 3 \\ 3\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 3 & 3\cdot 1+1\cdot 3+1\cdot(-1) & 3\cdot 5+1\cdot(-2)+1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 1 \\ 9 & -8 & 18 \\ 10 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

Agar A matritsaning satrlarini $A_1, A_2, \ldots, A_m$ bilan va B matritsaning ustularini $B_1, B_2, \ldots, B_n$ bilan belgilansa, u holda matritsalarni ko‘paytirish qoidasini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$C = AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \ldots & A_1B_n \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \ldots & A_2B_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_mB_1 & A_mB_2 & \ldots & A_mB_n \end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko‘paytirishda A^2 yozuv ikkita bir xil matritsani ko‘paytmasini bildiradi: $A^2 = A\cdot A$ Shu kabi $A^3 = A\cdot A\cdot A\cdot\ldots\cdot$ $A^n = \underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n\ marta}.$

Misol. $f(x) = 2x - x^2 + 5$ va $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ bo‘lsin. $f(A)$ ni toping.

Yechish. Matritsa ko‘rinishdagi $f(A)$ funksiyaga o‘tishda λ sonli qo'shiluvchi λI ko'paytma bilan almashtiriladi, bu yerda I - birlik matritsa

$$f(A)=2A-A^2+5I=2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Umuman olganda matritsalarni ko'paytirish nokommutativ, ya'ni $AB \neq BA$. Masalan, $1\times n$ o'lchamli A matritsaning $n\times 1$ o'lchamli B matritsaga AB ko'paytmasi sondan, ya'ni 1×1 o'lchamli matritsadan iborat bo'lsa, BA ko'paytmasi n - tartibli kvadrat matritsa bo'ladi.

Bir xil tartibli A va B kvadrat matritsalar uchun $AB=BA$ bo'lsa, A va B matritsalar *kommutativ matritsalar*, $AB-BA$ ayirma esa *kommutator* deyiladi.

Misol. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix}$ matritsalarning kommutatorini toping.

Yechish. $AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot3+1\cdot4 & 2\cdot5+1\cdot(-1)\\ 0\cdot3+3\cdot4 & 0\cdot5+3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 9\\ 12 & -3\end{pmatrix},$

$$BA=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot2+5\cdot0 & 3\cdot1+5\cdot3\\ 4\cdot2+(-1)\cdot0 & 4\cdot1+(-1)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 18\\ 8 & 1\end{pmatrix},$$

$$AB-BA=\begin{pmatrix}10 & 9\\ 12 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 18\\ 8 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -9\\ 4 & -4\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko'paytirish amali ushbu xossalarga ega [1]***:***

1^o. A matritsa $m\times n$ o'lchamli va B,C matritsalar $n\times p$ o'lchamli bo'lsa, $A(B+C)=AB+AC$ bo'ladi;

2^o. A matritsa $m\times n$ o'lchamli va B,C matritsalar $n\times p$ o'lchamli bo'lsa, $A(B+C)=AB+AC$ bo'ladi;

3^o. A,B,C matritsalar mos ravishda $m\times n$, $n\times p$, $p\times q$ o'lchamli bo'lsa, $A(BC)=(AB)C$ bo'ladi;

4^o. (4) A,B,I,O moslashtirilgan matritsalar va λ,μ skalyar sonlar bo'lsa, u holda:

---

[1] **Lay, David C. Linear algebra and is applications. Copyright. 2012, pp. 92-112**

1) $(\lambda A)(\mu B)=(\lambda\mu)(AB)$; 2) $A(\lambda B)=(\lambda A)B=\lambda(AB)$;

3) $AI=IA=A$; 4) $AO=OA=O$;

5) $(AB)^T=B^TA^T$.

5^o. $A,I,O-$ n - tartibli kvadrat matritsalar va p,q manfiy bo‘lmagan butun sonlar bo‘lsa, u holda:

1) $A^pA^q=A^{p+q}$; 2) $(A^p)^q=(A)^{pq}$; 3) $A^1=A$; 4) $A^0=I$.

Isboti. Xossalardan ayrimlari ta’riflar yordamida isbotlanadi va ayrimlarining to‘g‘riligiga misollarni yechish orqali ishonch hosil qilish mumkin.

3^o -xossani to‘g‘riligiga misol yechish orqali ishonch hosil qilamiz.

$A=(1\quad 2)$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 1\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}$ matritsalar berilgan bo‘lsin.

U holda

$$BC=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4 & 1\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 12 & 1\\ 20 & 0 & 8\end{pmatrix},$$

$$A(BC)=(1\quad 2)\cdot\begin{pmatrix}-11 & 12 & 1\\ 20 & 0 & 8\end{pmatrix}=(29\quad 12\quad 17),$$

$$AB=(1\quad 2)\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}=(3\quad 7),$$

$$(AB)C=(3\quad 7)\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4 & 1\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}=(29\quad 12\quad 17).$$

Demak, $A(BC)=(AB)C$.

6.3. Teskari matritsa

Bizga ma’lumki I birlik matritsa va $A\cdot I=I\cdot A=A$ tenglik o`rinli.

1-Ta’rif. A matritsa uchun $A\cdot B=I$ tenglikni qanoatlantiruvchi B matritsa A ga *teskari* matritsa deyiladi va u $B=A^{-1}$ ko`rinishda belgilanadi.

2-Ta’rif. Barcha satr vektorlari chiziqli erkli matritsa *xosmas* (aynimagan) matritsa, barcha satr vektorlari chiziqli bog`langan matritsa *xos* (aynigan) matritsa deb ataladi.

Xosmas matritsalarga doir quyidagi ikkita teoremani isbotsiz keltiramiz.

1-Teorema. Xosmas matritsani elementar almashtirishlar yordamida birlik matritsaga keltirish mumkin.

2-Teorema. Xosmas matritsaga teskari matritsa mavjud va yagonadir. (Teoremaning isbotlari A.G.Kuroshning «Oliy algebra kursi» kitobida keltirilgan).

Teskari matritsani topish.

Aytaylik, $n-$tartibli kvadrat, xosmas A matritsa berilgan bo`lsin:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

A matritsaga teskari B matritsani topish uchun, uni quyidagi ko`rinishda yozamiz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & 1 & 0 \dots 0 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} & 0 & 0 \dots 1 \end{array}\right) \qquad (1)$$

Chap tomonida berilgan A matritsa, o`ng tomonda $I$ birlik matritsa yozilgan. Bu matritsalarning ikkalasiga bir vaqtda $A$ matritsani birlik $I$ matritsaga keltiradigan satrlar bo`yicha elementar almashtirishlar qo`llaymiz.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 \dots 0 & b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ 0 & 1 \dots 0 & b_{21} & b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 & b_{n1} & b_{n2} \dots b_{nn} \end{array}\right) \qquad \dots\dots.(2)$$

(2) ning o`ng tomonidagi matritsa xuddi $A$ ga teng teskari $B$ matritsani ifodalaydi, ya'ni $A\cdot B=I$ bo`ladi. A matritsa o`z navbatida $B$ ga teskari bo`lganligi sababli $B\cdot A=I$ ham bajariladi.

Misol. Berilgan A matritsaga teskari bo`lgan A^{-1} matritsani toping.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix};$$

Yechish. Buning uchun quyidagi matritsani tuzamiz: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Birinchi ustunni 1 ga, so`ngra -2 ga ko`paytirib, mos ravishda ikkinchi va uchinchi ustunga qo`shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ikkinchi ustunni 2 ga va 1 ga ko`paytirib, mos ravishda birinchi va uchinchi ustunga qo`shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Uchinchi ustunni –3 ga ko`paytirib, birinchi ustunga qo`shamiz va ikkinchi ustunni –1 ga ko`paytiramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ikkinchi va uchinchi ustunlarni almashtiramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Natijada A ga teskari A^{-1} matritsaga ega bo`lamiz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar:

1. Matritsa nima?
2. Matritsalar ustidagi amallarni izohlang.
3. Qanday shartda matritsalarni qo`shish mumkin?
4. Qanday shartda matritsalarni ko`paytirish mumkin?
5. Teskari matritsa deb nimaga aytiladi?

6. Kvadrat matritsa deb nimaga aytiladi?
7. Birlik matritsa deb nimaga aytiladi?
8. Matritsani songa ko`paytirishning xossalarini ayting.

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ berilgan. AB ni toping.

10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ bo`lsa, AB – BA = ?

11. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ bo`lsa, A^{-1} , B^{-1} ni hisoblang.

12. Matrisalarni ko`paytiring:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7-§. Determinantlar. Chiziqli tenglamalar sistemasi Kramer formulalari

Tayanch iboralar: *determinant, satr va ustun elementlar, bosh va yordamchi diagonal elementlar, determinantning qiymati, 2 ta noma'lumli 2 ta chiziqli tenglamalar sistemasi, 3 ta noma'lumli 3 ta chiziqli tenglamalar sistemasi, Kramer formulalari.*

7.1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar

Determinant tushunchasidan dastlab chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda foydalanilgan bo'lib, keyinchalik ular matematikaning bir qancha masalalarini yechishga, jumladan xos sonlarni topishga, differensial tenglamalarni yechishga, vektor hisobiga keng tatbiq etildi [1].

[1] E.Kreyszig. Advancet engineering Matematics. Copyright. 2011, pp. 255-265

Matritsaning muhim tavsiflaridan biri determinant hisoblanadi. Determinant faqat kvadrat matritsalar uchun kiritiladi.

A kvadrat matrisaning determinanti $\det A$ bilan belgilanadi. Masalan, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matritsaning determinanti $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ kabi aniqlanadi. Bunda matritsani uning determinanti bilan adashtirmaslik kerak: matritsa – bu sonlar massivi (jadvali); determinant – bu bitta son.

Ikkinchi va uchunchi tartibli determinantlar.

Ikkinchi tartibli determinant ikkita satr va ikkita ustun elementlardan iborat ifoda hisoblanadi hamda

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad \text{..............(1)}$$

kabi belgilanadi va aniqlanadi.

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar determinantning elementlari deyiladi. Bunda a_{11}, a_{12} 1 -satr, a_{21}, a_{22} 2 -satr, a_{11}, a_{21} 1 -ustun va a_{12}, a_{22} 2 -ustun elementlari hisoblanadi, ya'ni a_{ij} determinantning i -satr va j - ustunda joylashgan elementini ifodalaydi.

a_{11}, a_{22} elementlar joylashgan diagonalga determinantning bosh diagonali, a_{21}, a_{12} elementlar joylashgan diagonal determinantning yordamchi diagonali deyiladi.

Determinantning qiymati uning bosh diagonal elementlari ko‘paytmasidan yordamchi diagonal elementlari ko‘paytmasini ayiridan hosil bo’lgan songa teng.

Demak, ikkinchi tartibli determinantning qiymati quyidagicha topiladi:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Misol. Berilgan determinantlarni hisoblang:

$$1)\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5-(-2)\cdot 4 = 15+8 = 23;$$

$$2)\ \begin{vmatrix} tg\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & ctg\alpha \end{vmatrix} = tg\alpha\cdot ctg\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = 1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha.$$

Uchinchi tartibli determinant uchta satr va uchta ustun elementlardan iborat ifoda hisoblanadi hamda

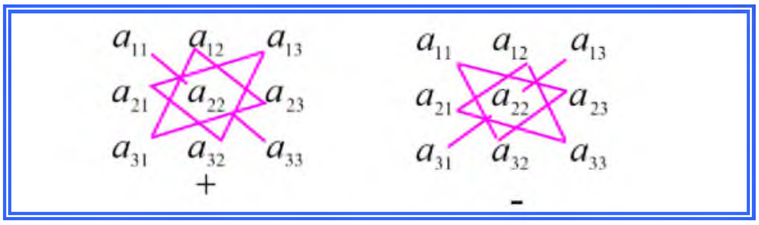
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

(2) kabi belgilanadi va aniqlanadi.

Uchinchi tartibli determinant uchun satr, ustun, bosh diagonal, yordamchi diagonal tushunchalari ikkinchi tartibli determinantdagi kabi kiritiladi.

Uchinchi tartibli determinantlarni hisoblashda (2) tenglikning o‘ng tomonidagi birhadlarni topishning yodda saqlash uchun oson bo‘lgan qoidalaridan foydalaniladi.

«Uchburchak qoidasi» ushbu sxema bilan tasvirlanadi [1]:



Bunda diagonallardagi yoki asoslari diagonallarga parallel bo‘lgan uchburchaklar uchlaridagi elementlar uchta elementning ko‘paytmasini hosil qiladi. Agar uchburchaklarning asoslari bosh diagonalga parallel bo‘lsa, u holda elementlarning ko‘paytmasi ishorasini saqlaydi. Agar uchburchaklarning asoslari yordamchi diagonalga parallel bo‘lsa, u holda elementlarning ko‘paytmasi teskari ishora bilan olinadi.

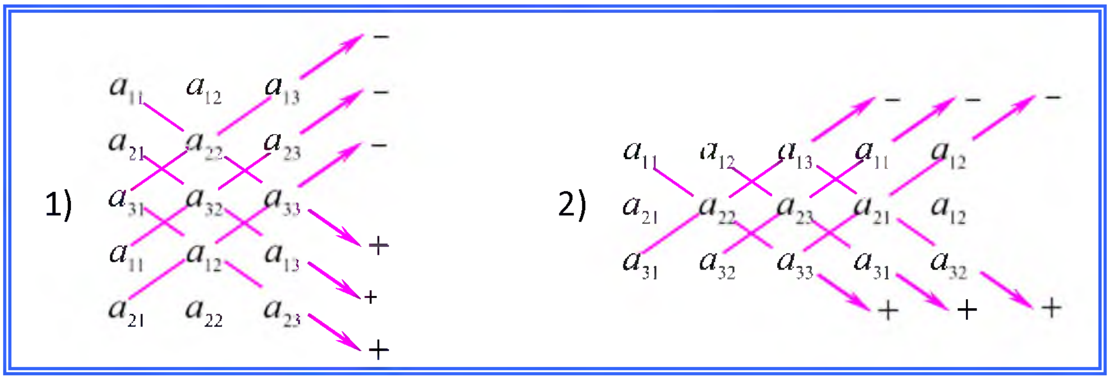
[2] Lay, David C. Linear algebra and is applications. Copyright. 2012, pp.162-169

Misol. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ ni uchburchak qoidasi bilan hisoblang.

Yechish.

$$\begin{matrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{matrix} \Rightarrow \; -8+1+27=20, \quad \begin{matrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{matrix} \Rightarrow \; 6-6+6=6, \; \det A = 20-6=14.$$

«Sarryus qoidalari» quyidagi sxemalar bilan ifodalanadi[1]:



Sxemadagi 1-qoidada avval determinant tagiga uning birinchi ikkita satri yoziladi, 2-qoidada esa determinantning o‘ng tomoniga uning birinchi ikkita ustuni yoziladi. Bunda diagonallardagi yoki diagonallarga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlardagi elementlar uchta ko‘paytuvchini hosil qiladi. Agar to‘g‘ri chiziqlar bosh diagonalga parallel bo‘lsa, u holda elementlarning ko‘paytmasi ishorasini saqlaydi. Agar to‘g‘ri chiziqlar yordamchi diagonalga parallel bo‘lsa, u holda elementlarning ko‘paytmasi teskari ishora bilan olinadi.

Misol. 1) $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ ni Sarryusning 1-qoidasi bilan hisoblang.

[1] E.Kreyszig. Advancet engineering Matematics. Copyright. 2011, pp. 257-259

Yechish.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 3^{-} \\ 3 & 1 & -2^{-} \\ 2 & -4 & 1^{-} \\ 1 & 5 & 3^{+} \\ 3 & 1 & -2^{+} \\ & & ^{+} \end{array} \Rightarrow \; \Delta_2 = 1 - 36 - 20 - 6 - 8 - 15 = -84.$$

2) $\det C = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ ni Sarryusning 2-qoidasi bilan isoblang:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 4 & -1^{-} & 3^{-} & 4^{-} \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2_{+} & 3_{+} & -1_{+} \end{array} \Rightarrow \; \Delta_3 = 0 + 36 + 2 - 0 + 9 - 16 = 31.$$

n **- tartibli determinant tushunchasi**

n - *tartibli determinant*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kabi belgilanadi va ma'lum qoida asosida hisoblanadi.

n - *tartibli determinant* har bir satr va har bir ustundan faqat bittadan olingan n ta elementning ko'paytmasidan tuzilgan $n!$ ta qo'shiluvchilar yig'indisidan iborat bo'ladi, bunda ko'paytmalar bir-biridan elementlarining tarkibi bilan farq qiladi va har bir ko'paytma oldiga inversiya tushunchasi asosida plyus yoki minus ishora qo'yiladi.

n -tartibli determinantni bu qoida asosida ifodalash yetarlicha noqulaylikka ega. Shu sababli yuqori tartibli determinantlarni hisoblashda bir nechta ekvivalent qoidalardan foydalaniladi. Bunday qoidalardan biri yuqori tartibli determinantlarni quyi tartibli determinantlar asosida hisoblash usuli hisoblanadi. Bu usulda determinant biror satr (yoki ustun) bo'yicha yoyiladi. Bunda quyi (ikkinchi va uchunchi) tartibli determinantlar yuqorida keltirilgan ta'riflar asosida topiladi.

n -tartibli determinantlarni yoyishda minor va algebraik to'ldiruvchi tushunchalaridan foydalaniladi.

n -tartibli determinant a_{ij} *elementining minori* deb, shu element joylashgan satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan $(n-1)$-tartibli determinantga aytiladi va M_{ij} bilan belgilanadi.

Determinant a_{ij} *elementining* A_{ij} *algebraik to'ldiruvchisi* deb, $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ songa aytiladi.

Masalan, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ determinantning $a_{21}=2$ elementining minori va algebraik to'ldiruvchisi quyidagicha topiladi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{21}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-10, \quad A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=10.$$

7.2. Determinantning xossalari

Determinantning xossalarini uchinchi tartibli determinant uchun keltiramiz. (bu xossalar ixtiyoriy n- tartibli determinant uchun ham o'rinli bo'ladi).

1-xossa. Transponirlash (barcha satrlarni mos ustunlar bilan almashtirish) natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=\det A^T.$$

Isboti. Xossani isbotlash uchun tenglikning chap va o'ng tomonidagi determinantlarning qiymatlarini uchburchak qoidasi orqali yozib olish va olingan ifodalarning tengligiga ishonch hosil qilish kifoya.

1-xossa satr va ustunlarning teng huquqligini belgilab beradi. Boshqacha aytganda satrlar uchun isbotlangan xossalar ustunlar uchun ham o'rinli bo'ladi va aksincha.

2-xossa. Determinantning istalgan ikkita satr yoki ikkita ustun elementlarini o`rinlari almashtirilsa, uning ishorasi qarama-qarshisiga o`zgaradi (agar birinchi va uchinchi satrlarning o`rinlarini almashtirsak):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

Bu xossa ham 1-xossa kabi isbotlanadi.

3-xossa. Agar determinant ikkita bir xil satr (ustun) elementlarga ega bo‘lsa, uning qiymati nolga teng bo‘ladi.

Isboti. Haqiqatdan ham, determinantda ikkita bir xil satrning o‘rinlari almashtirilsa, uning qiymati o‘zgarmaydi. Ikkinchi tomondan 2-xossaga ko‘ra determinant qiymatining ishorasi o‘zgaradi. Demak, $\det A = -\det A$, yoki $2\det A = 0$. Bundan $\det A = 0$.

4-xossa. Determinantning biror satr (ustun) elementlari λ songa ko‘paytirilsa, determinant shu songa ko‘payadi va aksincha, biror satr (ustun) elementlarining umumiy ko‘paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Isboti. Tenglikning chap tomondagi determinant hisoblanganida oltita qo‘shiluvchining hammasida λ ko‘paytuvchi qatnashadi.

Bu ko‘paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarib, qavslar ichidagi qo‘shiluvchilardan determinant tuzilsa, tenglikning o‘ng tomondagi ifoda hosil bo‘ladi.

5-xossa. Agar determinant biror satrining (ustunining) barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, uning qiymati nolga teng bo‘ladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Xossaning **isboti** 4-xossadan $\lambda = 0$ da kelib chiqadi.

6-xossa. Agar determinantning ikki satri (ustuni) proporsional bo‘lsa, u nolga teng bo‘ladi. Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Isboti. 4-xossaga ko‘ra determinant ikkinchi satrining λ ko‘paytuvchisini determinant belgisidan chiqarish mumkin. Natijada ikkita bir xil satrli determinant qoladi va u 3-xossaga ko‘ra nolga teng bo‘ladi.

7-xossa. Agar determinantning biror satri (ustuni) elementlariga boshqa satrining (ustunining) mos elementlarini biror songa ko‘paytirib qo‘shilsa, determinantning qiymati o‘zgarmaydi.

Isboti. $\det A$ determinantning ikkinchi satri elementlariga λ ga ko‘paytirilgan birinchi satrning mos elementlari qo‘shilgan bo‘lsin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} & a_{23} + \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Qo‘shiluvchilardan birinchisi $\det A$ ga va ikkinchisi esa 3-xossaga ko‘ra nolga teng. Demak, yig‘indi $\det A$ ga teng.

1-izoh. Determinantning xossalari asosida quyidagi teorema isbotlangan.

1-teorema. Bir xil tartibli A va B kvadrat matritsalar ko‘paytmasining determinanti bu matritsalar determinantlarining ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

7.3. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Kramer formulalari

a) Quyidagi sistema ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Bu sistemani yechishning qo`shish, o`rniga qo`yish va grafik usullari bilan o`rta umumta'lim dasturlarida tanishganmiz. Quyida sistemani 2-tartibli determinanatdan foydalanib yechish usulini ko`rib chiqamiz.

(1) tenglamalar sistemasini analitik usulda tekshiramiz. (1) sistema yechimga ega deb faraz qilamiz:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; .. \; c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}; . \;\; a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Ushbu $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; .... $\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ belgilashlarni kiritamiz, natijada $x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$; $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ munosabatlar ushbu ko'rinishni oladi: $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$; $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$;

bu yerda Δ (1) sistemaning determinanti deyiladi. (1) sistema yechimga ega bo'lishi uchun uning determinanti noldan farqli bo'lishi zarur:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Delta \neq 0$ bo'lganda (1) ning yagona yechimi quyidagicha topiladi:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

b) Quyidagi sistema uch noma'lumli, uchta chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Ushbu tenglamalar sistemasini ham yuqoridagi usulda, 3-tartibli determinanatdan foydalanib yechamiz. Buning uchun ushbu belgilashlarni kiritamiz:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix};$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Ikki va uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini determinantlardan foydalanib yechish qoidasiga **Kramer usuli**, yuqorida keltirilgan formulalar **Kramer formulalari** deyiladi.

Misollar. Quyidagi sistemalarni Kramer formulalaridan foydalanib yeching.

1) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

Yechish. Sistemaning determinantlarini tuzamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 8 = -7$$

$\Delta \neq 0$ bo'lgani uchun, sistema yagona yechimga ega. Kramer formulalariga ko'ra: $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1;$ $\quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$

Tekshiramiz: $\begin{cases} 1 + 3 * 1 = 4 \\ 2 * 1 - 1 = 1 \end{cases}$

Javob: (1; 1).

2) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

Yechish. Sistemaning determinantlarini topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

formulalarga ko'ra, $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2,$ $\; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1.$ Javob: (2; 1).

3) $\begin{cases} 5x + 2y - 4z = 38 \\ 4x + 3z = -7 \\ x - 3y = -10 \end{cases}$ sistemani formulalardan foydalanib determinantlarni tuzamiz va hisoblaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 2 & -4\\ 4 & 0 & 3\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}=99;\quad \Delta x=\begin{vmatrix}38 & 2 & -4\\ -7 & 0 & 3\\ -10 & -3 & 0\end{vmatrix}=198;\quad \Delta y=\begin{vmatrix}5 & 38 & -4\\ 4 & -7 & 3\\ 1 & -10 & 0\end{vmatrix}=396;$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}5 & 2 & 38\\ 4 & 0 & -7\\ 1 & -3 & -10\end{vmatrix}=-495.$$

$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{198}{99}=2,\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{396}{99}=4,\ z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=\dfrac{-495}{99}=-5$. Javob: (2; 4; -5).

4) $\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\ x_1-3x_2-6x_4=9\\ 2x_2-x_3+2x_4=-5\\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0\end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish. Sistemani Kramer usulida yechamiz

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 1\\ 1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-3 & 0 & -6\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & -7 & 6\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & -5 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & -7 & 6\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}1 & -5 & 1\\ -3 & 0 & -6\\ 4 & -7 & 6\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & -5 & 1\\ -3 & 0 & -6\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=27$$

$\Delta x_1=81,\quad \Delta x_2=-108,\quad \Delta x_3=-27,\quad \Delta x_4=27.$

Demak, sistema yagona yechimga ega, chunki $\Delta\neq 0$. Bu yechim esa

$x_1=\Delta x_1/\Delta=3,\quad x_2=\Delta x_2/\Delta=-4,\quad x_3=\Delta x_3/\Delta=-1,\quad x_4=\Delta x_4/\Delta=1.$

bo'ladi.

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. Ikkinchi tartibli determinantni ta'riflang.
2. Uchinchi tartibli determinantni ta'riflang.
3. Determinantning xossalarini tushuntiring.
4. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning qanday usullarini bilasiz?
5. Kramer formulalarini izohlang.
6. Determinantlarni hisoblang:

$$1)\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}; \quad 2)\begin{vmatrix}1 & 5\\ 4 & 3\end{vmatrix}; \quad 3)\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}; \quad 4)\begin{vmatrix}8 & 5\\ -4 & 2\end{vmatrix}; \quad 5)\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & -10\end{vmatrix};$$

$$6)\begin{vmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\ -2 & 3\end{vmatrix}; \quad 7)\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 6\end{vmatrix}; \quad 8)\begin{vmatrix}\sqrt{a} & -1\\ a & \sqrt{a}\end{vmatrix}; \quad 9)\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}$$

$$1)\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ -2 & 4 & 6\\ 5 & -1 & 2\end{vmatrix} \quad 2)\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix} \quad 3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix} \quad 4)\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$5)\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & -4 & 7\\ -3 & 12 & -15\end{vmatrix} \quad 6)\begin{vmatrix}1 & b & 1\\ 0 & b & 0\\ b & 0 & a\end{vmatrix} \quad 7)\begin{vmatrix}x & 1 & x\\ 1 & -x & -1\\ x & 1 & x\end{vmatrix}$$

7. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer formulalari asosida yeching:

1. a) $\begin{cases}3x - y = 5\\ -x + 3y = 1\end{cases}$; b) $\begin{cases}x + 4y = 9\\ 3x - y = 1\end{cases}$; d) $\begin{cases}2x + 3y = 14\\ 3x - 4y = -9\end{cases}$

2. a) $\begin{cases}-5x + 2y + z = 2\\ x - 7y - 3z = -25\\ 4x + y - 5z = -6\end{cases}$ b) $\begin{cases}x - 3y - 4z = -17\\ -3x + y + 2z = 5\\ 2x - 4y - 5z = -21\end{cases}$

II modul. MATEMATIK TAHLILNING ASOSIY TUSHUNCHALARI

"Matematik analiz haqli ravishda matematik fanlar ichida birinchisi hisoblanadi".
P.E.Appel

Matematika tarixining 3-davrida yangi matematika ("oliy" matematika) davrining boshlanish nuqtasi, XVI asrda – matematik analizning paydo bo`lish asri qabul qilinadi. XVII asr oxiriga kelib, I.Nyuton, G.Leybnits va ularning safdoshlari tomonidan yangi matematik bo`lim – differensial va integral hisob yaratiladi. Bu bo`lim matematik tahlil (analiz)ning asosini tashkil qiladi.

8-§. Funksiya tushunchasi

Tayanch iboralar: *funksiya, moslik, akslantirishlar, aniqlanish va o`zgarish sohalari, in'yeksiya, syur'yeksiya, biyeksiya, analitik usul, grafik va jadval usullari, funksiya turlari, elementar funksiyalar, juft, toq, davriy funksiyalar, chiziqli, darajali, ko'rsatkichli, trigonometrik funksiyalar.*

8.1. Funksiya va uning berilish usullari, grafigi

Tabiatda ikki xil miqdorlar uchraydi, o`zgaruvchi va o`zgarmas miqdorlar. Bizga bir necha to`rtburchak berilgan bo`lsin. Ularda quyidagi miqdorlar qatnashadi. Tomonlarning uzunliklari, burchaklarning kattaliklari, yuzalari va perimetrlari. Bu miqdorlardan ba'zilari o`zgarmaydi, ba'zilari o`zgarib turadi. Masalan, qaralayotgan hamma to`rtburchaklarda burchaklarining to`g`riligi, ularning soni to`rtta bo`lishi va yig`indisi 360° ga tengligi o`zgarmaydi. Tomonlarining uzunliklari, perimetrlari, yuzlari esa o`zgarib turadi. Xuddi shuningdek, bir necha doira chizilsa, ularda aylana uzunliklarining o`z diametrlariga nisbati hammasida bir xil bo`lib, π ga teng, lekin ularning radiuslari, aylana uzunliklari, doira yuzlari o`zgarib turadi.

Ma'lum sharoitda faqat bir xil son qiymatlariga ega bo`lgan miqdorlar o`zgarmas miqdorlar deyiladi. Ma'lum sharoitda har xil son qiymatlariga ega bo`lgan miqdorlar o`zgaruvchi miqdorlar deyiladi.

Odatda o`zgarmas miqdorlar *a, b, c, d,* ...., o`zgaruvchi miqdorlar esa *x, y, z, u, v,* . . . harflari bilan belgilanadi.

Matematikada ko`pincha o`zaro bir-biriga bog`liq ravishda o`zgaradigan miqdorlar bilan ish ko`riladi. Yuqoridagi misollarda doiraning yuzi uning radiusining o`zgarishiga qarab o`zgaradi, ya'ni doiraning radiusi ortsa, yuzi ham ortadi, kamaysa kamayadi. Xuddi shuningdek, kvadratning tomoni bilan yuzi orasida ham shunday bog`lanish bor. Kvadratning yuzi uning tomoniga bog`liq ravishda o`zgaradi.

Aytaylik, *x* va y o`zgaruvchi miqdorlar berilgan bo`lsin.

Ta'rif. Agar *x* o`zgaruvchining qabul qilishi mumkin bo`lgan har bir *x* qiymatiga biror aniq f qonun yoki qoida bo`yicha $y$ o`zgaruvchining bitta y qiymatini mos qo`yish mumkin bo`lsa, u holda y o`zgaruvchi $x$ o`zgaruvchining ***bir qiymatli funksiyasi****,* x o`zgaruvchi esa y funksiyaning ***argumenti*** *deb* ataladi va $y = f(x)$ yoki $x \to f(x)$ kabi yoziladi.

Demak, *x* - argument yoki erkli o`zgaruvchi, *y* esa funksiya yoki erksiz o`zgaruvchi. Agar *y x* ning funksiyasi bo`lsa, u holda *x* va *y* lar orasidagi bog`lanish funksiyali bog`lanish deyiladi. Masalan: *x* ning har bir *x* haqiqiy qiymatiga $x^2$ haqiqiy sonni mos qo`yuvchi funksiya $y = x^2$ yoki $x \to x^2$ kabi yoziladi. Agar yuqoridagi misollarga e'tibor bersak, doiraning yuzi radiusning funksiyasi, kvadratning yuzi tomonining funksiyasi ekan.

x o`zgaruvchining qabul qilishi mumkin bo`lgan qiymatlari to`plami funksiyaning ***aniqlanish*** *(yoki mavjudlik)* ***sohasi*** deb ataladi va u odatda *D(f)* kabi belgilanib, $y = f(x)$ funksional bog`lanishdan aniqlanadi.

Masalan, $y = \sqrt{x}$ funksiyaning aniqlanish sohasini topaylik. Kvadrat ildiz ostidagi ifodaning manfiymas qiymatlarida ma'noli bo`lgani sababli, $D(\sqrt{x}) = \{x : x \geq 0\} = [0;+\infty)$.

Ushbu $y = \{y : y = f(x),\ x \in D(f)\}$ to`plam, ya'ni $y$ funksiyaning qabul qiladigan qiymatlari ***funksiyaning qiymatlari*** to`plami yoki f funksiyaning ***o`zgarish sohasi*** *deb* ataladi va qisqacha *E(f)* kabi belgilanadi. Ravshanki, $E(\sqrt{x}) = [0;+\infty)$ bo`ladi.

Funksiyaning berilish usullari. Funksiya asosan 3 xil usulda beriladi:

1. Analitik usul
2. Grafik usul.
3. Jadval usul.

Ulardan eng ko`p uchraydigani bu – ***analitik usul**dir*. Bu usulda o`zgaruvchilar orasidagi bog`liqlik formulalar yordamida beriladi. Bunda funksiya bitta yoki bir nechta formula yordamida berilishi mumkin. Masalan,

$$y = x^2 + 1,\ y = 1 - x,\ y = \begin{cases} x \ (x > 0) \\ x^2 \ (x < 0) \\ 1 \ (x = 0) \end{cases}$$

Funksiyaning ***grafik usuli*** asosan funksiyalarni analitik usulda berish qiyin bo`lgan hollarida uchraydi. Ko`pincha tabiatda ro`y beradigan hodisalarni o`rganish jarayonida apparaturalar yordamida egri chiziqlar olinib, ularni o`rganishga to`g`ri keladi. Masalan, elektrokardiogramma va otsilograflarda ko`rsatilgan grafiklar funksiyaning grafik usulida berilishiga misol bo`la oladi. Bunday grafiklar yordamida u yoki bu jarayonning xususiyatlari o`rganiladi va tegishli xulosalar chiqariladi. Bu usuldan ko`pincha fiziklar va shifokorlar foydalanadilar.

Funksiya ***jadval usuli**da* berilganda funksiya argumentlari va unga mos keluvchi funksiya qiymatlari jadvalda keltiriladi.

Bu usulga misol qilib, temir yo`l shoh bekatlarida devorlarga osib qo`yilgan poyezdlar harakati jadvalini, kimyoviy, biologik va boshqa tajribalar natijalari asosida tuzilgan funksional boshlang`ich jadvallarini aytish mumkin. Masalan, poyezdlar harakati jadvaliga qarab, harakatdagi poyezdning qaysi vaqtda qanday aholi punktiga yetib kelishini aniqlashimiz mumkin. Jadval usulidan, ayniqsa, tajriba o`tkazuvchi tadqiqotlarda ko`p foydalaniladi.

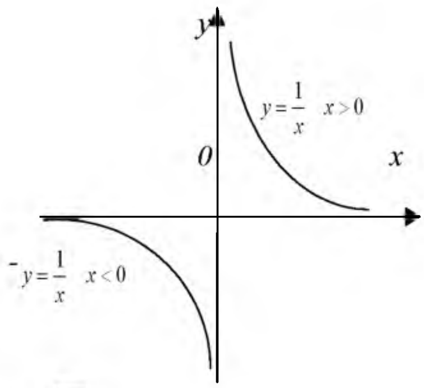
Funksiya grafigi. Ushbu $\Gamma = \{(x,y): y = f(x)\ ,\ \ x \in D(f)\}$ nuqtalar to`plami $y = f(x)$ ***funksiyaning grafigi*** deb ataladi va u asosan funksiyani ko`rgazmali tasvirlash uchun xizmat qiladi. Grafikka qarab, x argumentning qaysi qiymatiga y funksiyaning qanday qiymati mos kelayotganini, funksiyaning qayerda musbat, qayerda manfiy, qayerda nol, qayerda o`suvchi, qayerda kamayuvchi va boshqa ba’zi xususiyatlarini bilib olishimiz mumkin. *y=f(x)* funksiyaning grafigini hosil qilish uchun *M(x,f(x))* nuqtalarni hosil qilib, ular bir-biriga juda yaqin bo`lganda, silliq chiziq bilan tutashtiriladi.

Misol. 1) $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning grafigi chizilsin. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $x\neq 0$ haqiqiy sonlar to’plami, ya’ni $]-\infty,0[\,U\,]0,+\infty[$ dan iborat.

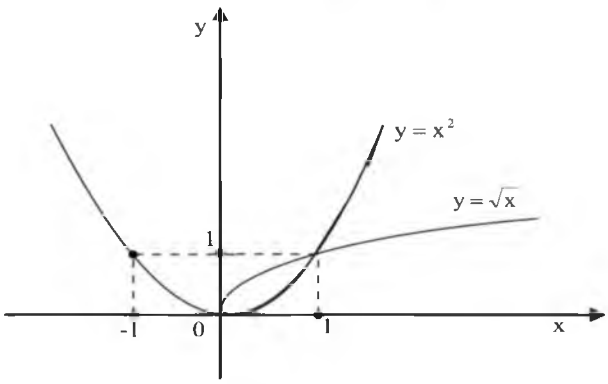
Endi aniqlanish sohasidan *x* ning bir necha qiymatlarini olib, *y* ning ularga mos keladigan qiymatlarini topamiz.

X	1	2	3	-1	-2	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	…
f(x)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	2	-2	…

Koordinata tekisligida $M_1(1;1)$, $M_2(2;\frac{1}{2})$, $M_3(3;\frac{1}{3})$,.... nuqtalarni hosil qilamiz. Belgilangan nuqtalarni uzluksiz chiziq yorlamida tutashtirsak, funksiyaning grafigini ifoda qiladigan egri chiziq - giperbola hosil bo`ladi.



Quyidagi rasmda $y=x^2$ va $y=\sqrt{x}$ funksiyalarning grafiklari tasvirlangan:



8.2. Asosiy elementar funksiyalar

Asosiy elementar funksiyalar deb quyidagi funksiyalarga aytiladi:

1. Darajali funksiya: $y=x^{\alpha}$; bunda $\alpha\in R$.

2. Ko`rsatkichli funksiya: $y=a^{x}$; bunda $a\neq 1$, musbat son.

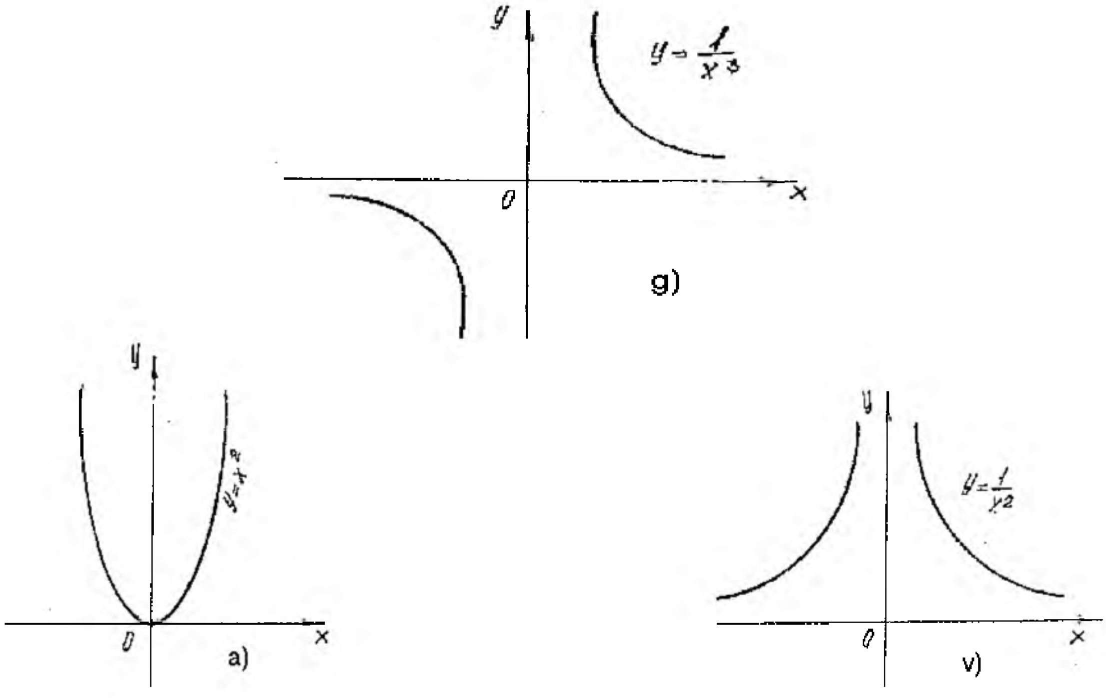
3. Logarifmik funksiya: $y=log_{a}x$; bunda $a\neq 1$ musbat son.

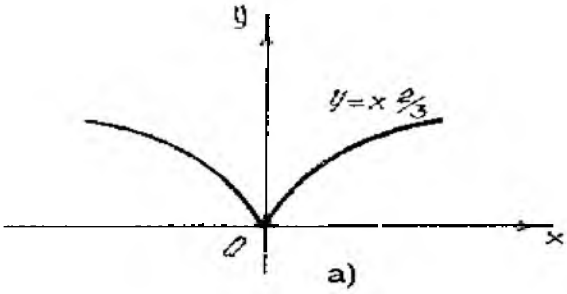
4. Trigonometrik funksiyalar: $y=sinx$, $y=cosx$, $y=tgx$, $y=ctgx$, $u=secx$, $y=cosecx$ va teskari trigonometrik funksiyalar $y=arcsinx$, $y=arccosx$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$, $y=arcsecx$, $y=arccosecx$.

Bu asosiy elementar funksiyalar o`rta maktab kursida o`tilgan bo`lsa-da, ularga qisqacha to`xtalib o`tamiz.

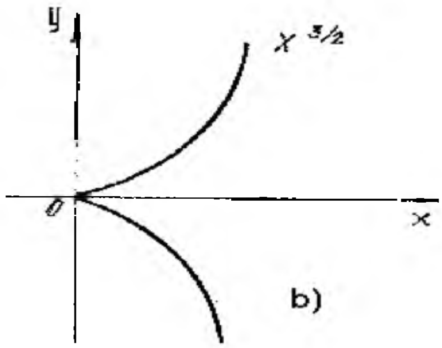
Darajali funksiya

$y=x^{\alpha}$ (α-haqiqiy son) α-darajali funksiyaning ko`rsatkichi. Umuman darajali funksiya $R_{+}$ da to`la aniqlangan. α-irratsional son bo`lganda funksiya logarifmlash va potensirlash yo`li bilan hisoblanadi, bu yerda $x>0$. Shuning uchun funksiyani aniqlanish sohasi $(0;+\infty)$ deb olamiz. $x>0$ da $\alpha=0$ bo`lsa, $x^{\alpha}=1$ bo`ladi. $\alpha\neq 0$ bo`lsa, darajali funksiyaning qiymatlar to`plami haqiqiy sonlar $(0;+\infty)$ intervaldan iborat bo`ladi. Quyidagi chizmalarda darajali funksiyaning $\alpha>1$ va $\alpha<0$ qiymatlaridagi tasvirlari berilgan.

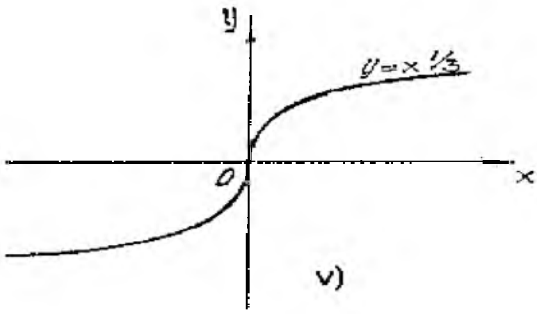




a)



b)



v)

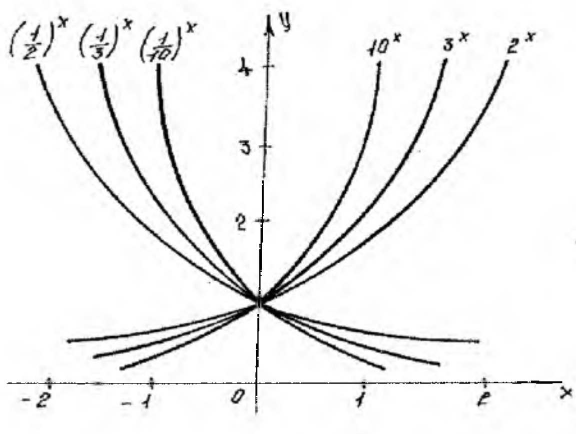
Chizmalardan ko`rinadiki, darajali funksiya musbat ko`rsatkichlarda o`suvchi, manfiy ko`rsatkichlarda kamayuvchidir. Shuning bilan birga darajali funksiyada α ning qiymatlariga qarab aniqlanish sohalari har xil bo`ladi:

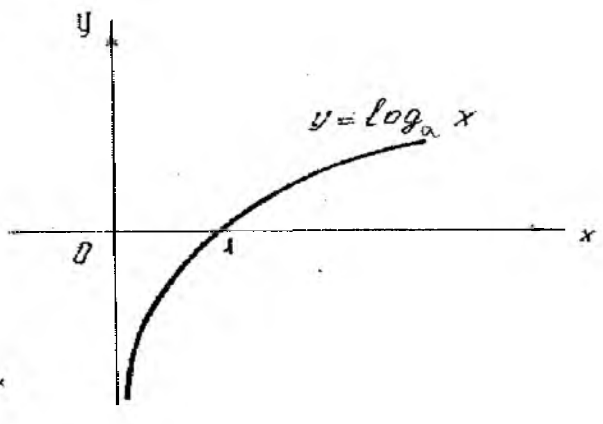
a) α-butun musbat son bo`lsa, funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda aniqlangan.

b) α-butun manfiy son bo`lsa, funksiya x ning $x=0$ dan boshqa hamma qiymatlarida aniqlangan.

Ko`rsatkichli funksiya

$y=a^x$, $a>0$ va $a\neq 1$.Bu funksiyaning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to`plami R dan iborat. Bu funksiya $a>1$ da o`suvchi, $0<a<1$ da kamayuvchi. Ikkala holda funksiya chegaralanmagan





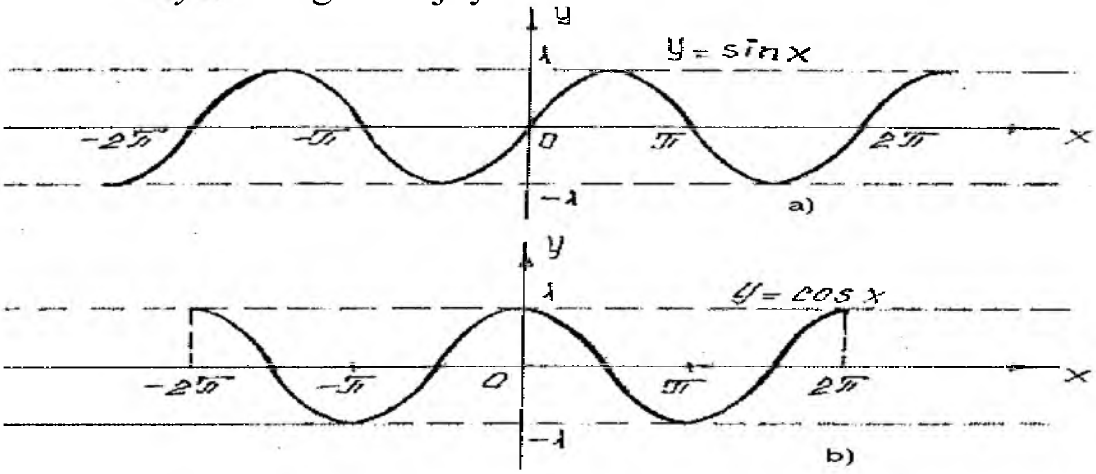
Logarifmik funksiya

$y=log_a x$,$a>0$ va $a\neq 1$. Bu funksiya musbat sonlar to`plami ya'ni $R$ da aniqlangan. Bu funksiyaning qiymatlar to`plami esa haqiqiy sonlar to`plamidan iborat (yuqoridagi 2-chizma).

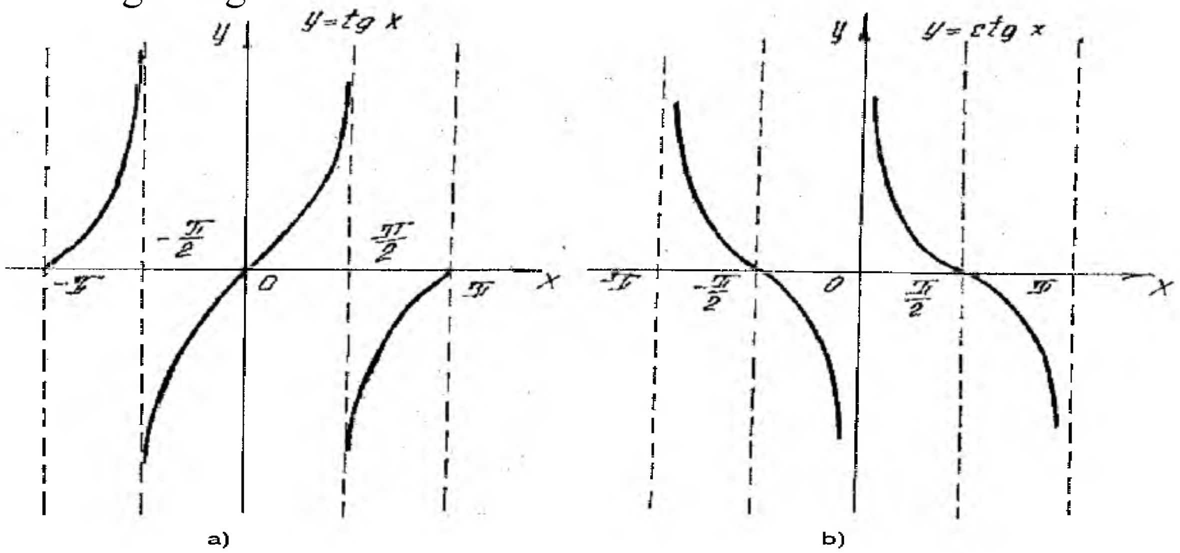
Ko`rsatkichli va logarifmik funksiyalar o`zaro teskari funksiyalardir.

Trigonometrik funksiyalar

Trigonometrik funksiyalar barchasi davriydir. $y=sinx$, $y=cosx$, $x\in R$ funksiyalarining davri 2π ga teng; $sinx$ funksiya toq, $cosx$ funksiya juft funksiyadir. Bu funksiyalar x ning barcha qiymatlarida aniqlangan. Bu funksiyalarning grafiklari chegaralangan bo`lgani uchun $-1\leq y\leq 1$ chegarada joylashadi



Tangens $y=tgx$; $x\in R$, $x\neq\pm\pi/2+\pi k$, $k\in z$ va kotangens $y=ctgx$; $x\in R$, $x\neq\pi k$, $k\in z$ funksiyalari toq, chegaralanmagan, davriy bo`lib davri π ga teng.

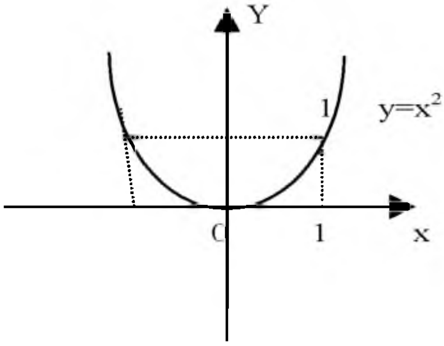


8.3. Funksiyalarning juft-toqligi va davriyligi

Ta'rif. *$y=f(x)$* funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x o`zgaruvchining har bir qiymati bilan $-x$ qiymat ham shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo`lsa va bunda $f(-x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya ***juft funksiya*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiya juft funksiyadir. Haqiqatdan, bu funksiya R to`plamda aniqlangan, demak, aniqlanish sohasi har qanday $x$ bilan $-x$ ni o`z ichiga oladi. Bundan tashqari $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ tenglik bajariladi.

Juft funksiya grafigi ordinata o`qiga nisbatan simmetrik bo`ladi.



y=cosα juft funksiyadir. Haqiqatdan ham har qanday α va $-\alpha$ uchun P_α va $P_{-\alpha}$ nuqtalar absissalar o`qiga nisbatan simmetrik joylashgan. Bundan shu nuqtalarning absissalari bir xil, ordinatalari esa qarama-qarshi ekani kelib chiqadi. Bu kosinus ta'rifiga ko`ra, har qanday α da quyidagi tenglik to`g`ri ekanini bildiradi: $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$.

Umuman, har qanday juft funksiyaning grafigi ordinata o`qiga nisbatan simmetrikdir.

Ta'rif. $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x ning har bir qiymati bilan $-x$ qiymat ham shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo`lsa va bunda $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya ***toq funksiya*** deyiladi.

Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashadi. **Masalan,** $f(x)=x^3$ toq funksiya. Haqiqatdan ham, $f(-x)=(-x)^3=-f(x)$, ya'ni $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajariladi. Bu funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo`lib, kubik paraboladan iboratdir.

y=sinx *funksiya ham* toq funksiyadir. Haqiqatdan ham chizmada P_α va $R_{-\alpha}$ nuqtalarning ordinatalari bir xil, lekin ishoralari qaramaqarshiligidan $sin\alpha=y_{\alpha}$; $sin(-\alpha)=-y_{\alpha}$ bo`ladi. Bundan esa $sin(-\alpha)=-sin\alpha$ bo`ladi.

Har qanday funksiya ham juft yoki toq bo`lishi shart emas.

Masalan, $y=2x+5$, $y=x^2+x^3$, $y=sinx+cosx$ juft ham, toq ham emas. Demak, funksiyalar har doim juft yoki toq bo`lishi shart emas ekan.

Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya uchun shunday $t>0$ son mavjud va funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan har bir x uchun $x+t$ va $x-t$ lar aniqlanish sohasiga joylashgan bo`lib, $f(x+t)=f(x)$ tenglik o`rinli bo`lsa, u holda $f(x)$ ***davriy funksiya*** deb ataladi. t sonlarni eng kichigi funksiyaning ***davri*** deyiladi.

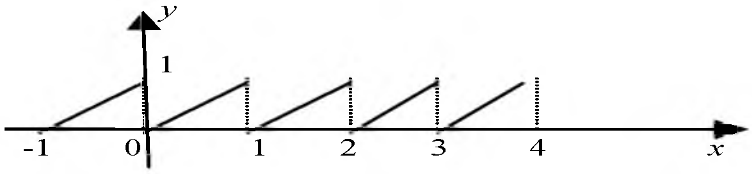
Masalan, $y=sinx$, $y=cosx$, $y=tgx$, $y=x-[x]$ davriy funksiyalardir.

Davriy funksiyaning grafigini hosil qilish uchun uning bir davr ichidagi grafigini chizib, so`ng uni chapga va o`ngga cheksiz ko`p marta ko`chirish kerak.

Misol. $f(x)=x-[x]=x - E(x)$ funksiya berilgan. Bunda $E(x)=[x]$ ifoda x ning butun qismini bildiradi. (E – fransuzcha Entier -ante- butun so`zining birinchi harfi). Masalan, $[x]=m$ $(m\leq x<m+1)$ m butun son.

$f(x)=x-E(x)=\{x\}$. Bu funksiya x ning kasr qismini bildiradi, ya'ni $f(1)=0$; $f(1,05)=0,05$; ... , $f(x)$ funksiya davriydir va uning davri $t=1$ dir. Haqiqatdan, $f(x+1)=x+1-E(x+1)=x+1-E(x)-1=x-E(x)=f(x)$.

Demak, har qanday butun son ham davr bo`ladi.



Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. Funksiya tushunchasi, uning aniqlanish va o`zgarish sohalarini ta'riflang.
2. Funksiyaning berilish usullariga misollar keltiring.
3. Asosiy elementar funksiyalarning xossalarini ayting.
4. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

a) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ b) $y=\arcsin\frac{x-2}{2}$

5. Quyidagi funksiyalarning o`zgarish sohasini toping:

a) $y=\sqrt{16-x^2}$; b) *y=3cosx-1;* c) $y=3^{-x^2}$

6. Quyidagi funksiyalarning juft yoki toq ekanini aniqlang:

a) $y=\sin 5x$; b) $y=\lg\cos 2x$; c) $y=tg3x+\cos 4x$

7. Quyidagi funksiyalarning davrlarini aniqlang:

a) $y=x^4\sin 3x$; b) $y=x^4-x^2+x$; c) $y=\lg\cos x$

8. Quyidagi funksiyalarning juft yoki toqligini aniqlang:

a) $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$; b) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$

9. 1) $y=\frac{7}{x}$; 2) $y=\frac{3}{x}$ funksiyalarning grafigini chizing.

10. 1) *y =2x - 4;* 2) $y=-\frac{2}{3}x+2$ funksiyalarning grafigini yasang.

11. 1) *y =- 0,4x+1;* 2) *y = 0,3x - 3;* 3) *y = -0,5x - 2* funksiyalarning grafiklarini bitta koordinatalar sistemasida chizing.

12. *y=4x+3* va *y=4x-2* funksiyalarning grafiklari (koordinatalar sistemasida) o`zaro qanday joylashgan, ular koordinata o`qlarini qanday nuqtalarda kesib o`tadi?

9-§. Funksiya limiti

Tayanch iboralar: *limit tushunchasi, funksiya limiti, funksiyaning nuqtadagi limiti, cheksiz kichik va cheksiz kata miqdorlar, yigindi, ayirma, ko`paytma va bo`linmaning limiti, ajoyib limitlar, cheksizlik, uzluksizlik, uzilish nuqtalari, uzluksiz funksiyalar.*

9.1. Funksiya limiti, limitlar haqida teoremalar

Ta'rif. Agar har bir $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topilsaki, $0<|x-a|<\delta$ bajarilganda $|f(x)-A|<\varepsilon$ (1) ham bajarilsa, x argument a ga intilganda funksiya A songa teng ***limitga ega*** deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$

$f(x)$ funksiyaning limiti qaralayotganda a nuqta funksiyaning aniqlanish sohasiga kirishi yoki kirmasligi ham mumkin. Funksiyaning a nuqtadagi limiti topilganda $x\neq a$ deb qaraladi.

Quyidagi uch holni qarab o`tamiz:

1-hol. $a=\infty$, A – chekli

2-hol. a – chekli, $A=\infty$

3-hol. $a=\infty$, $A=\infty$

1-hol. Avvaldan berilgan har qanday cheksiz kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday Δ son topilsinki, $|x|>\Delta$ bo`lganda $|f(x)-A|<\varepsilon$ bo`lsin;

2-hol. Avvaldan berilgan har qanday istalgancha katta $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ topilsinki, $|x-a|<\delta$ bo`lganda $|f(x)>\mathrm{E}|$ bo`lsin: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$

3-hol. Avvaldan berilgan har qanday istalgancha katta $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\Delta>0$ son topilsinki, $|x|>\Delta$ bo`lganda $|f(x)|>\varepsilon$ kelib chiqsin. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

O`zgarmas funksiyaning limiti shu o`zgarmas songa teng.

Isboti. $f(x)=c$ berilgan bo`lsin. Unda har qanday $\varepsilon>0$ uchun $|f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon$ ni yoza olamiz.

Demak, ixtiyoriy a uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} c=c$

Limitlar haqidagi teoremalar

Funksiyaning limiti haqidagi asosiy teoremalar (yig`indi, ko`paytma, bo`linma haqidagi) ketma-ketlik limitlarining teoremalariga o`xshash funksiyaning limitini hisoblashni ham osonlashtiradi.

1-teorema. Funksiyalar yig`indisining (ayirmasining) limiti shu funksiyalar limitlarining yig`indisiga(ayirmasiga) teng:

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)]=\lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x)$$

2-teorema. Funksiyalar ko`paytmasining limiti shu funksiyalar limitlarining ko`paytmasiga teng:

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)f_2(x)]=\lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x)$$

Natija. O`zgarmas ko`paytuvchini limit ishorasining oldiga chiqarish mumkin

3-teorema. Funksiyalar bo`linmasining limiti shu funksiyalar limitlarining bo`linmasiga teng, qachonki, bo`luvchi funksiyaning limiti noldan farqli bo`lganda:

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)},\qquad \lim_{x\to a} f_2(x)\neq 0$$

4-teorema. Agar $f(x)$, $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalari uchun a nuqtaning biror oralig`ida $(x\neq a)$ $f_1(x)\leq f(x)\leq f_2(x)$ tengsizliklar bajarilib, $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=A$ bo`lsa u holda $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ bo`ladi.

1-misol. $\lim\limits_{x\to 2}(5x-12)$ ni hisoblang.

Yechish. Funksiyaning limitlari haqidagi teoremalardan foydalanib, quyidagilarni topamiz:

$$\lim_{x\to 2}(5x-12)=\lim_{x\to 2}5x-\lim_{x\to 2}12=5\lim_{x\to 2}x-12=5\cdot 2-12=-2$$

2-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x-3}{2x+8}$ ni hisoblang.

Yechish. Maxrajning limitini topamiz:

$$\lim_{x\to 1}(2x+8)=\lim_{x\to 1}2x+\lim_{x\to 1}8=2\lim_{x\to 1}x+8=2\cdot 1+8=10\neq 0$$

Shuning uchun 3-teoremadan foydalanamiz:

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x-3}{2x+8}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(5x-3)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x+8)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}5x-\lim\limits_{x\to 1}3}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

Ajoyib limitlar

Yoy sinusining shu yoyga nisbatining limiti: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Bu tenglik ***birinchi ajoyib limit*** deb yuritiladi.

Bunday tenglik yordamida trigonometrik funksiyalar qatnashgan ko`pchilik limitlar hisoblanadi.

1-teorema. $(1+\frac{1}{n})^n$ o`zgaruvchi miqdor $n\to\infty$ da 2 bilan 3 orasida yotuvchi limitga ega.

Ta'rif. $(1+\frac{1}{n})^n$ o`zgaruvchi miqdorning $n\to\infty$ dagi limiti e soni deyiladi.

$e=\lim\limits_{n\to 0}(1+\frac{1}{n})^n$; e soni irratsional son: e=2, 7182818284...

2-teorema. x cheksizlikka intilganda $(1+\frac{1}{x})^x$ funksiya e limitga intiladi, ya'ni $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

9.2. Funksiyaning uzluksizligi

Faraz qilaylik, bizga X sohada aniqlangan $y=f(x)$ funksiya berilgan bo`lsin. Agar $y=f(x)$ funksiyaning argumenti $x=x_0$ nuqtada aniqlangan bo`lib, unga biror Δx orttirma bersak, u holda shu nuqtaga mos kelgan funksiyaning orttirmasi ham $y+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$ bo`ladi. Bizga berilgan funksiyani $x=x_0$ nuqtadagi $\Delta x$ orttirmasiga mos kelgan $\Delta y$ orttirmani topadigan bo`lsak,

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x)$$

bo`ladi.

Ta'rif. $y=f(x)$ funksiyaning argumenti $x \to x_0$ da funksiyaning o`zi shu nuqtadagi uning xususiy qiymatiga intilsa, ya'ni $f(x) \to f(x_0)$ bo`lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyasi X to`plamni $x=x_0$ nuqtasida ***uzluksiz*** deyiladi va limit quyidagicha yoziladi.

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Ta'rifdan ko`rinadiki, $y=f(x)$ funksiya biror $x=x_0$ da uzluksiz bo`lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

1. $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada aniqlangan
2. $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi limit qiymati mavjud $\lim_{x \to x_0} f(x)$
3. $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ dagi limit qiymati uning shu nuqtadagi xususiy qiymatiga teng , ya'ni $\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$

Yuqorida aytib o`tilgan uchta shart bajarilganda $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz funksiya deyiladi, aks holda esa $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada ***uzulishga ega*** deyiladi.

Misol. $y=2x+1$ funksiyasini $x=2$ nuqtadagi uzluksizligi ko`rsatilsin

Yechish. $\lim_{x \to 2} (2x+1)=5; \quad f(2)=5$

Uzluksizlik tushunchasiga ε va δ tilida quyidagi ta'rif berilgan.

1-ta'rif *(Koshi ta'rifi).* $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilsaki, funksiya argumenti x ning $|x-x_0|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, f(x) funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

1-misol. Ushbu $f(x)=\sqrt{x+11}$ funksiyaning x_0=5 nuqtada uzluksiz ekanini ko`rsating.

Yechish. $\forall\varepsilon>0$ son olib, bu ε songa ko`ra $\delta$ >0 soni $\delta = 4\varepsilon$ bo`lsin deb qaralsa, u holda $|x-5|<\delta$ bo`lganda

$$|f(x)-f(5)|=\left|\sqrt{x+11}-4\right|=\frac{|x-5|}{\sqrt{x+11}-4}<\frac{|x-5|}{4}<\frac{\delta}{4}=\varepsilon$$

bu esa qurilayotgan funksiyaning x_0=5 nuqtada uzluksiz ekanini bildiradi.

2-ta'rif *(Geyne ta'rıfı).* Agar *X* to`plamning elementlaridan tuzilgan va x_0 ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan tuzilgan mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona $f(x_0)$ ga intilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Agar $\lim\limits_{X\to X_0} f(x)=f(x_0)$ munosabat o`rinli bo`lsa, ushbu $\lim\limits_{X-X_0}[f(x)-f(x_0)]=0$ munosabat ham o`rinli bo`ladi.

Odatda x-x_0 ayirma argument orttirmasi, $f(x)$-$f(x_0)$ esa funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi. Ular mos ravishda Δx va Δy ($\Delta f(x_0)$) kabi belgilanadi, ya'ni: $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$.

Demak, $x=x_0+\Delta x$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x)$ natijada, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ munosabat $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$ ko`rinishga ega bo'ladi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi bu nuqtada argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelishi sifatida ham ta'riflanishi mumkin.

Ta'rif. $y=f(x)$ funksiyasining argument orttirmasi $\Delta x\to 0$ da unga mos keluvchi funksiya orttirmasi $\Delta y\to 0$ bo`lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ da uzluksiz deyiladi va $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ kabi yoziladi.

$$x=x_0+\Delta x,\quad \Delta x=x-x_0,\quad \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),\quad \Delta y=f(x)-f(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{x\to x_0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}(f(x_0+x-x_0)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$$

Misollar

1) $y=2x+1$ funksiyaning uzluksizligi ko`rsatilsin.

$y+\Delta y=2(x+\Delta x)+1$, *ayirmani topamiz* $\Delta y=2x+2\Delta x+1-2x-1$, $\Delta y=2\Delta x$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\Delta x=0$$

2) $y=x^3$

$y+\Delta y=(x+\Delta x)^3$

$\Delta y=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+\Delta x^3$ $\qquad$ $\Delta y=x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-x^3$

$\Delta y=\Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)\Delta x=0.$$

3) $f(x)=\cos x$ funksiyaning $\forall x_0\in R$ nuqtada uzluksiz bo`lishini ko`rsating.

Yechish. $\forall x_0\in R$ nuqtani olib unga Δx orttirma beraylik. Natijada $f(x)=\cos x$ ham ushbu $\Delta y=\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0$ orttirmaga ega bo`lib,va $-\pi<\Delta x<\pi$ bo`lganda

$$|\Delta y|=|\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0|=\left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin(x_0+\frac{\Delta x}{2})\right|\le 2\cdot\frac{|\Delta x|}{2}=|\Delta x|$$

munosabatga ega bo`lamiz. Bundan esa $\Delta x\to 0$ da $\Delta y\to 0$ bo`lishi kelib chiqadi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $x\subset R$ to`plamda aniqlangan bo`lib, $x_0(x_0\in X)$ to`plamning (o'ng va chap) limit nuqtasi bo`lsin. Bunda $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiya uchun quyidagi uch holdan bittasigina bajariladi:

1) chekli $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ chap va o`ng limitlar mavjud va $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ tenglik o`rinli. Bu holda $f(x)$ funksiya $x=x_0$ da uzluksiz bo`ladi;

2) $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ lar mavjud, lekin $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ tengliklar bajarilmaydi, u holda $f(x)\to x=x_0$ nuqtada bir tur uzilishga ega deyiladi;

3) $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ larning birortasi cheksiz yoki mavjud emas. Bu holda x_0 nuqtada 2 tur uzilishga ega deyiladi;

4) $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ bo`lsa bunday uzilish, bartaraf qilish mumkin bo`lgan uzilish deyiladi.

Misol. Ushbu $f(x)=[x]$ funksiyaning $x_0=2$ nuqtada birinchi tur uzulishga ega ekanligini ko`rsating.

Yechish. Demak, $\lim\limits_{x\to 2-0}[x]=1$, $\lim\limits_{x\to 2+0}[x]=2$

Bundan esa berilgan funksiyaning $x_0=2$ nuqtada birinchi tur uzulishga ega ekanligi kelib chiqadi.

Uzluksiz funksiyaning xossalari

Berilgan $f(x)$ va $q(x)$ funksiyalar X to`plamda aniqlangan bo`lib, $x_0 \in X$ nuqta X to`plamning limit nuqtasi bo`lsin.

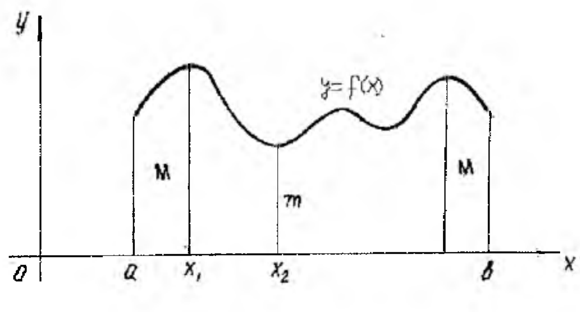
1-teorema. Agar $f(x)$ va $q(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo`lsa u holda $f(x) \pm q(x)$, $f(x) \cdot q(x)$, $\dfrac{f(x)}{q(x)}$: $(q(x) \neq 0)$, $\forall x \in X$ funksiyalar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

1-misol. Ushbu $f(x)=3x^3+\sin^2 x$ funksiyaning $x=R$ da uzluksizligini ko`rsating.

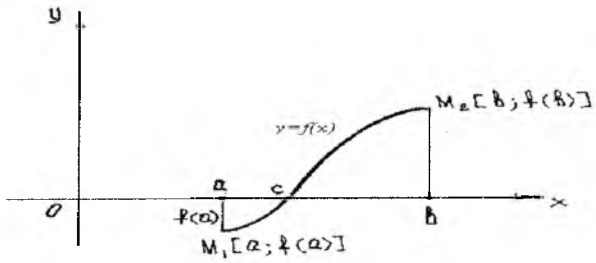
Yechish. $\varphi(x)=x$, $q(x)=\sin x$ funksiyalar R uzluksiz. Bunda $f(x)$ funksiyani $f(x)=3 \cdot x \cdot x \cdot x+\sin x \cdot \sin x$ ko`rinishda yozamiz, u holda uzluksiz funksiyalar ustidagi arifmetik amallarga ko`ra, $f(x)$ funksiyaning R da uzluksizligi kelib chiqadi.

2-teorema. Agar *y=f(x)* funksiya *[a,b]* kesmada uzluksiz bo`lsa, u holda *[a;b]* kesmada funksiya o`zining eng kichik va eng katta qiymatiga erishadi, ya'ni shunday $x_1, x_2 \in (a,b)$ nuqtalar mavjudki, barcha $x \in (a,b)$ lar uchun $f(x_1) \geq f(x)$ va $f(x_2) \leq f(x)$ tengsizliklar o`rinli bo`ladi.

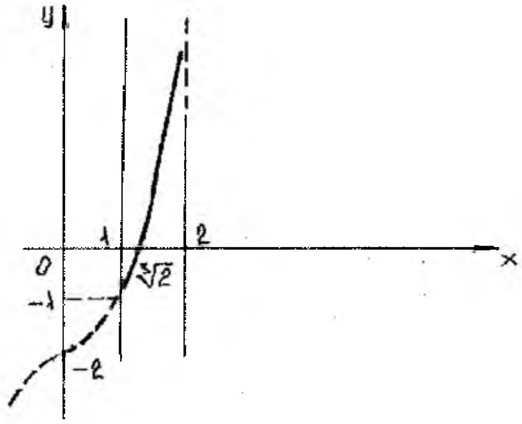
Funksiyani $f(x_1)$ qiymatini *y=f(x)* funksiyaning *[a,b]* kesmadagi eng katta qiymati deb, $f(x_2)$ ni esa eng kichik qiymati deb ataymiz. Bu teorema qisqacha bunday ifodalanadi: kesmada uzluksiz funksiya hech bo`lmaganda bir marta eng katta *M* qiymatga va eng kichik *m* qiymatga erishadi.



3-teorema. Agar *y=f(x)* funksiya *[a,b]* kesmada uzluksiz bo`lib, bu kesmaning uchlarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u holda *[a,b]* kesmada hech bo`lmaganda shunday bir *x=c* nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiya nolga aylanadi: $f(c)=0;\ a<c<b$.

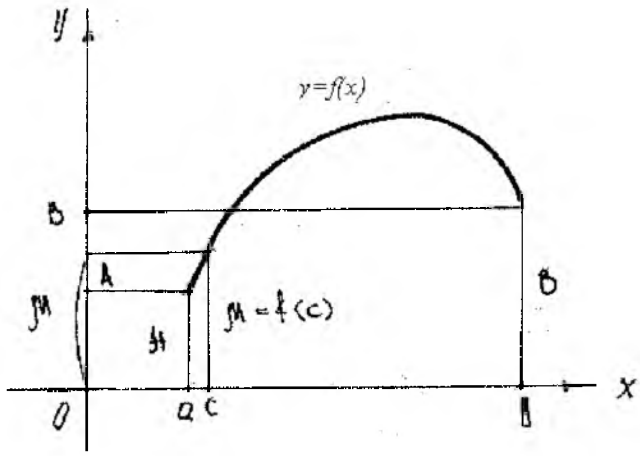


Misol. $y = x^3 - 2$ funksiya berilgan. Bu funksiya [1; 2] kesmada uzluksiz. Demak, bu kesmada $y = x^3 - 2$ nolga aylanadigan nuqta mavjud. Haqiqatdan ham $x = \sqrt[3]{2}$ da *y=0*



4-Teorema. *y=f(x)* funksiya [a,b] kesmada aniqlangan va uzluksiz bo`lsin. Agar kesmaning uchlarida funksiya teng bo`lmagan *f(a)=A, f(b)=B* qiymatlarni qabul qilsa, u holda funksiya *A* va *B* sonlar orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi. U holda A< μ <*B* shartni qanoatlantiradigan ixtiyoriy μ son uchun kamida bitta $c \in$[a;b] nuqta mavjudki, unda $f(c) = \mu$ tenglik to`g`ri bo`ladi.

3-teorema bu teoremaning xususiy holi, chunki *A* va *B* lar turli ishoralarga ega bo`lsa, u holda μ ni o‘rnida O ni olish mumkin.



Uzluksiz funksiyalarga doir teoremalar

1. x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida funksiya chegaralangan bo`ladi.

2. Agar $f(x_0)\neq 0$ bo`lsa, x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida $f(x)$ o'z ishorasini saqlaydi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to`plamda va $z=\varphi(y)$ funksiya $Y$ to`plamda aniqlangan bo`lib, ular yordamida $z=\varphi(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo`lsin.

Teorema *(murakkab funksiya uzluksizligi haqida).* Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada, $z=\varphi(y)$ funksiya x_0 ga mos kelgan $f(x_0)$ nuqtada uzluksiz bo`lsa $z=\varphi(f(x))$ funksiya $x_0$ nuqtada uzluksiz bo`ladi.

Teorema *(Boltsano-Koshining 1-teoremasi).* Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo`lib, segmentning $a$ va $b$ nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo`lsa, u holda shunday c ($a<c<b$) nuqta topiladiki, u nuqtada funksiya 0 ga aylanadi, $f(c)=0$.

Teorema *(Veyershtrassning 1-teoremasi).* Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo`lsa, u holda shu segmentda chegaralangan bo`ladi.

Teorema *(Veyershtrassning 2-teoremasi).* Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo`lsa, funksiya shu segmentda o`zining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralariga erishadi.

Misol. Ushbu $f(x)=\frac{|x|-x}{x^2}$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring

Yechish. Ma'lumki, $|x|=\begin{cases} x & agar \quad x\geq 0 \quad bo'lsa \\ -x & agar \quad x<0 \quad bo'lsa \end{cases}$

bundan foydalanib, $f(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa \\ -\frac{2}{x} & agar \quad x<0 \quad bo'lsa \end{cases}$

$x=0$ nuqtada funksiya aniqlanmagan bo`lib, $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0$ , $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=+\infty$ munosabatlar o`rinlidir, bu esa ta'rifga ko'ra $x=0$ nuqta $f(x)$ funksiya uchun 2 tur uzilish nuqtasi ekanligini bildiradi.

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. Funksiya limitining ε, δ tilidagi ta'rifini ayting.
2. Qachon berilgan funksiya cheksiz limitga ega bo`ladi?
3. Uzluksiz funksiya deb nimaga aytiladi?
4. Argument orttirmasi deb nimaga aytiladi?
5. Uzluksiz funksiyalarning xossalarini ta'riflab bering.
6. Uzilish nuqtalariga ega bo`lgan funksiyalarga misol keltiring.
7. Ajoyib limitlarni tushuntiring.
8. Limitlarni hisoblang:

a) $\lim\limits_{x\to 3}(5x-10)$ b) $\lim\limits_{x\to 1}(5+3x+x^2)$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-x^2}{x^3+3x}$ d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+1}{2x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$ g) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ m) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$

n) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ k) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tgx}{\sin 2x}$ j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+5x+2}{3x^2-x-14}$

9. Funksiyaning uzluksizligi ta'rifidan foydalanib berilgan funksiyalarning $\forall x_0\in R$ da uzluksiz ekanini isbotlang:

1) $f(x)=3x^2-7;$ 2) $f(x)=x^3+7x-6.$

10. Uzluksiz funksiyalarning xossalaridan foydalanib berilgan funksiyalarning $(-\infty;+\infty)$ intervalda uzluksiz ekanini isbotlang:

1) $f(x)=\cos 3x-e^{2x-1};$ 2) $f(x)=\sqrt[3]{x-3}+\sin^2 x+\dfrac{3}{x^2+2}.$

11. $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi uzilish turini aniqlang:

1) $f(x)=\dfrac{3x+4}{x-3},\ x_0=3;$ 2) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3},\ x_0=-3;$

3) $f(x)=arctg\dfrac{5}{2x-1},\ x_0=\dfrac{1}{2};$ 4) $f(x)=\dfrac{3}{4^{x-3}-1},\ x_0=3.$

12. Murakkab funksiyani uzluksizlikka tekshiring:

1) $f(z)=\dfrac{2}{z^2+1},\ z=\begin{cases}x+2 & agar\ x<0\ bo‘lsa,\\ x-2 & agar\ x\ge 0\ bo‘lsa;\end{cases}$ 2) $f(z)=2z^2-3,\ z=tgx.$

13. $f(x)=\dfrac{1}{(x+3)(x-4)}$ funksiyani $[a;b]$ kesmada uzluksizlikka tekshiring: 1) $[a;b]=[-4;1];$ 2) $[a;b]=[-2;3].$

10-§. Funksiya hosilasi

Tayanch iboralar: *harakat tezligi masalasi, funksiya orttirmasi, argument orttirmasi, hosila, dıfferensiallash, asosiy dıfferensiallash formulalari, yig`indi, ayirma, ko`paytmaning hosilasi, murakkab funksiya hosilasi, hosilaning geometrik va mexanik ma'nosi.*

Differensial hisob – matematikaning hosilalar va differensiallarni hisoblash, ularning xossalarini o`rganish hamda funksiyalarni tekshirishga tatbiq qilish bilan shug`ullanadigan bo`limi.

Differensial hisobning vujudga kelishidagi dastlabki ishlar egri chiziqqa urinma o`tkazish masalasini echishda Ferma, Dekart va boshqa matematiklar tomonidan qilingan. I.Nyuton va G.Leybnits o'zlaridan avvalgi matematiklarning bu boradagi ishlarini nihoyasiga yetkazdilar.

10.1. Funksiya hosilasi, uning geometrik va mexanik ma'nosi

Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar. Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar jumlasiga qattiq jismni to`g`ri chiziqli harakatini, yuqoriga vertikal holda otilgan jismning harakatini yoki dvigatel silindridagi porshen harakatini tekshirish kabi masalalarni kiritish mumkin. Bunday harakatlarni tekshirganda jismning konkret o`lchamlarini va shaklini e'tiborga olmay, uni harakat qiluvchi moddiy nuqta shaklida tasavvur qilamiz. Biz bitta masalani olib qaraymiz.

Harakat tezligi masalasi. Aytaylik, M moddiy nuqtaning to`g`ri chiziqli harakat qonuniga ko`ra uning $t=t_0$ paytdagi tezligini (oniy tezligini) topish talab qilinsin. Nuqtaning $t_0$ *ва* $t_0+\Delta t$ $(\Delta t\neq 0)$ vaqtlar orasidagi bosib o`tgan yo`li $\Delta S = f(t_0+\Delta t) - f(t_0)$ bo`ladi. Uning shu vaqtdagi o`rtacha tezligi $\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$ ga teng.

Ma'lumki, Δt qanchalik kichik bo`lsa, $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ o'rtacha tezlik nuqtaning $t_0$ paytdagi tezligiga shunchalik yaqin bo`ladi. Shuning uchun nuqtaning t_0 paytdagi tezligi quyidagi limitdan iborat. $V(t_0) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$

Fuksiya hosilasi.

y=f(x) funksiya *(a,b)* intervalda aniqlangan bo`lsin, *(a,b)* intervalga tegishli x_0 va $x_0+\Delta x$ nuqtalarni olamiz.

Argument biror (musbat yoki manfiy - bari bir) Δx orttirmasini olsin, u vaqtda *y* funksiya biror Δy orttirmani oladi. Shunday qilib argumentning x_0 qiymatida $y_0=f(x_0)$ ga, argumentning $x_0+\Delta x$ qiymatda $y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$ ga ega bo`lamiz. Funksiya orttirmasi Δy ni topamiz

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \qquad (1)$$

Funksiya orttirmasini argument orttirmasiga nisbatini tuzamiz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2)$$

Bu – nisbatning $\Delta x\to 0$ dagi limitini topamiz.

Agar bu limit mavjud bo`lsa, u berilgan *f(x)* funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $f'(x_0)$ bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{yoki} \qquad f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (3)$$

Ta'rif. Berilgan *y=f(x)* funksiyaning argument *x* bo`yicha hosilasi deb, argument orttirmasi Δx ixtiyoriy ravishda nolga intilganda funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining limitiga aytiladi.

Umumiy holda *x* ning har bir qiymati uchun $f'(x)$ hosila ma'lum qiymatga ega, ya'ni hosila ham x ning funksiyasi bo`lishini qayd qilamiz. Hosilada $f'(x)$ belgi bilan birga boshqacha belgilar ham ishlatiladi. $y';\ y'_x,\ \frac{dy}{dx}$

Hosilaning *x=a* dagi konkret qiymati $f'(a)$ yoki $y'\big|_{x=a}$ bilan belgilanadi.

Funksiya hosilasini hosila ta'rifiga ko`ra hisoblashni ko`ramiz.

Misol*:* $y=x^2$ funksiya berilgan, uning:

1) ixtiyoriy *x* nuqtadagi va 2) *x=5* nuqtadagi hosilasi y' topilsin.

Yechish*:*

1) argumentning *x* ga teng qiymatida $y=x^2$ ga teng. Argument

$x+\Delta x$ qiymatida $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$ ga ega bo`lamiz.

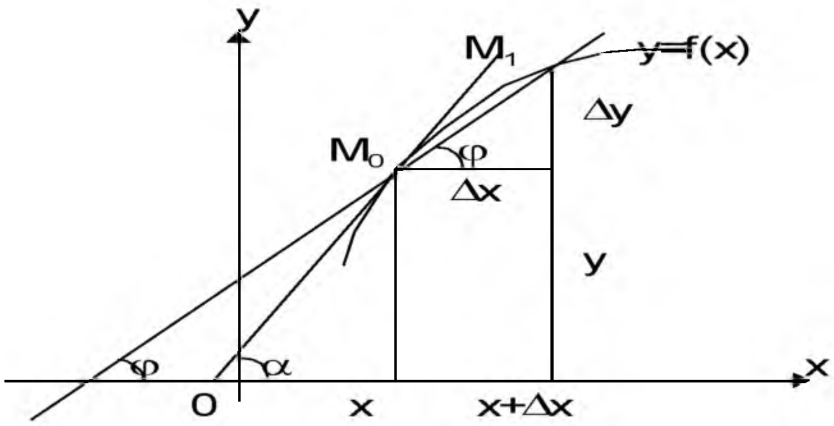
$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x(\Delta x)+(x)^2$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2x+\Delta x(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$ Limitga o‘tib, berilgan funksiyadan hosila topamiz. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$

Demak, $y=x^2$ funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi hosilasi $y'=2x$ $x=5$ da $y'\Big|_{x=5}=2\cdot 5=10$

Hosilaning geometrik va mexanik ma‘nosi. Harakat qiluvchi jismning tezligini tekshirish natijasida, ya’ni mexanik tasavvurlardan chiqib borib, hosila tushunchasiga keldik. Endi hosilaning *geometrik ma’nosini* beramiz.

Bizga berilgan $y=f(x)$ funksiya x nuqta va uning atrofida aniqlangan bo`lsin. Argument $x$ ning biror qiymatida $y=f(x)$ funksiya aniq qiymatga ega bo`ladi, biz uni $M_0(x_0;\ y_0)$ deb belgilaylik. Argumentga Δx orttirma beramiz va natija funksiyaning $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ orttirilgan qiymati to`g`ri keladi. Bu nuqtani $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ deb belgilaymiz va M_0 kesuvchi o`tkazib uning $OX$ o`qining musbat yo`nalishi bilan tashkil etgan burchagini φ bilan belgilaymiz.



Endi $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni qaraymiz. Rasmdan ko`rinadiki, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=tg\varphi$ ga teng.

Agar $\Delta x \to 0$ ga, u holda M_1 nuqta egri chiziq bo`yicha harakatlanib, $M_0$ nuqtaga yaqinlasha boradi. $M_0M_1$ kesuvchi ham $\Delta x \to 0$ da o`z holatini o`zgartira boradi, xususan $\varphi$ burchak ham o`zgaradi va natijada φ burchak α burchakka intiladi. M_0M_1 kesuvchi esa M_0 nuqtadan o`tuvchi urinma holatiga intiladi. Urinmaning burchak koeffitsienti quyidagicha topiladi

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Demak, $f'(x) = tg\alpha$, ya'ni, argument x ning berilgan qiymatida $f'(x)$ hosilaning qiymati $f(x)$ funksiyaning grafigiga uning $M_0(x_0;y_0)$ nuqtasidagi urinmaning OX o`qining musbat yo`nalishi bilan hosil qilgan burchak tangensiga, ya'ni burchak *koeffitsiyentiga* teng.

Hosilaning *mexanik ma`nosi tezlikni bildiradi,* ya'ni moddiy nuqtaning t vaqt ichidagi S masofani bosish uchun harakatdagi tezligini topishdan iborat.

10.2. Differensiallash, uning asosiy qoidalari va formulalari

Berilgan *f(x)* funksiyadan hosila topish amali shu funksiyani differensiallash deyiladi.

Differensiallashning asosiy qoidalari

1. O`zgarmas miqdorning hosilasi nolga teng, ya'ni agar $y=c$ bo`lsa($c=const$) $y'=0$ bo`ladi.

2. O'zgarmas ko`paytuvchini hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin: $y=cu(x)$ bo`lsa $y'=cu'(x)$ bo`ladi.

3.Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar yig`indisining hosilasi shu funksiyalar hosilalarining yig`indisiga teng:

$$y = U(x) + V(x) + W(x); \quad y' = U'(x) + V'(x) + W'(x)$$

4. Ikkita differensiallanuvchi funksiyalar ko`paytmasining hosilasi birinchi funksiya hosilasining ikkinchi funksiya bilan ko`paytmasi hamda birinchi funksiyaning ikkinchi funksiya hosilasi bilan ko`paytmasining yig`indisiga teng:

$$y = u\vartheta \text{ bo`lsa } y' = u'\vartheta + u\vartheta'.$$

5. Ikkita differensiallanuvchi funksiyalar bo`linmasining hosilasi (kasrda ifodalanib) bo`linuvchi funksiya hosilasini bo`luvchi funksiya bilan ko`paytmasi hamda bo`linuvchi funksiyani bo`luvchi funksiya hosilasi bilan ko`paytmasining ayirmasini bo`luvchi (maxrajdagi) funksiya kvadratining nisbatiga teng:

$$y=\frac{u}{\vartheta} \text{ bo`lsa } \quad y'=\frac{u'\vartheta-u\vartheta'}{\vartheta^2}$$

6. Aytaylik, *y=F(u)* murakkab funksiya bo`lsin, ya'ni *y=F(u)*, $u=\varphi(x)$ yoki $y=F[\varphi(x)]$, $u$ – o`zgaruvchi, oraliq argumenti deyiladi. *y=F(u)* va $u=\varphi(x)$ differensiallanuvchi funksiyalar bo`lsin.

Murakkab funksiyaning differensiallash qoidasini keltirib chiqaramiz.

Teorema: Murakkab *F(u)* funksiyaning erkli o`zgaruvchi *x* bo`yicha hosilasi bu funksiya oraliq argumenti bo`yicha hosilasini oraliq argumentining erkli o`zgaruvchi *x* bo`yicha hosilasining ko`paytmasiga teng, ya'ni

$$y'_x=F'_u(u)\cdot u'_x(x)$$

Misol: $y=\left(x^5+4x^4+3x^2+2\right)^5$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: berilgan funksiyani murakkab funksiya deb qaraymiz ya'ni $y=u^5$; $u=x^5+4x^4+3x^2+2$ (1) formulaga asosan

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\left((x^5+4x^4+3x^2+2)^5\right)'=5\left(x^5+4x^4+3x^2+2\right)^4\cdot\left(5x^4+16x^3+6x\right)$$

Differensiallashning asosiy formulalari jadvali

1) y=const ; $y'=0$ 2) $y=x^\alpha$; $y=\alpha x^{\alpha-1}$

3) $y=\sqrt{x}$; $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 4) $y=\frac{1}{x}$; $y=-\frac{1}{x^2}$

5) $y=a^x$; $y'=a^x\ln a$ 6) $y=e^x$; $y'=e^x$

7) $y=\log_a x$; $y'=\frac{1}{x}\log_a e$ 8) $y=\ln x$; $y'=\frac{1}{x}$

9) $y=\sin x$; $y'=\cos x$ 10) $y=\cos x$; $y'=-\sin x$

11) $y=tgx$; $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$ 12) $y=ctgx$; $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

Misollar.

1) $f(x)=(x^3+4x+7)^4$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: bu yerda $y(u)=u^4$ va $u(x)=x^3+4x+7$. U holda

$f(x)=(u^4)'\cdot(x^3+4x+7)'=4u^3(3x^2+4)=4(x^3+4x+7)^3(3x^2+4)$

2) $(x^2+x)'=(x^2)'+(x)'=2x+1$

3) $(2x\sin x)'=(2x)'\sin x+2x(\sin x)'=2(x)'\sin x+2x\cos x=$
$2\sin x+2x\cos x=2(\sin x+x\cos x)$

4) $y=\sin 3x$, $y'-?$ $y'=(\sin 3x)'=3\cos 3x$

5) $y=ctg2x$ $y'=(ctg2x)'=(-\dfrac{1}{\sin^2 2x})\cdot 2=-\dfrac{2}{\sin^2 2x}$

10.3. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari. Yuqori tartibli hosila

Asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini topishda yuqorida keltirilgan differensiallash formulalaridan hamda yig`indi, ayirma, ko`paytma va bo`linmani differensiallash qoidalaridan foydalanamiz.

1. **O`zgarmas funksiya**: $y=C(C\in R)$. O`garmas funksiya butun sonlar o`qida o`zgarmas qiymatini saqlagani uchun ixtiyoriy nuqtada uning orttirmasi nolga teng bo`ladi. Shu sababli

$$(C)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0.$$

2. **Darajali funksiya**: $y=x^\alpha$, bunda $\alpha\in R,\alpha\neq 0$. Bu funksiya uchun $x>0$da

$$\Delta y=(x+\Delta x)^\alpha-x^\alpha=x^\alpha\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1\right)\text{ bo`ladi.}$$

Bundan $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=x^\alpha\dfrac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1}{\Delta x}$. $\Delta x\to 0$da $\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1\sim\alpha\dfrac{\Delta x}{x}$ ni hisobga olib, topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1}{\Delta x}=x^\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x\cdot x}=x^\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Demak, $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Xususan, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. **Korsatkichli funksiya**: $y = a^x$, bunda $a \in R, a > 0, a \neq 1$. Bu funksiyaning orttirmasi $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$ ga teng bo`lib, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ bo`ladi.

Bundan $\Delta x \to 0$ da $a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \ln a$ ni hisobga olib, topamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Demak, $(a^x)' = a^x \ln a$.

Xususan, $(e^x)' = e^x$.

4. **Logorifmik funksiya**: $y = \log_a x$, bunda $a \in R,\ a > 0,\ a \neq 1$.

$y = \log_a x$ funksiya funksiyaga teskari funksiya. Bunda $x'(y) = a^y \ln a$.

U holda $y'(x) == \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$.

Demak, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Xususan, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

5. Trigonometrik funksiyalar.

- $y = \sin x$ funksiyaning orttirmasi

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

bo'lib, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$.

Bu tenglikdan $\Delta x \to 0$ da $\sin\frac{\Delta x}{2} \sim \frac{\Delta x}{2}$ ni hisobga olib, topamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos(x + 0) = \cos x.$$

Demak, $(\sin x)' = \cos x$.

- $y = \cos x$ funksiyaning hosilasini murakkab funksiyaning hosilasi formulasidan foydalanib topamiz[1]:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x.$$

Demak, $(\cos x)' = -\sin x.$

- $y = tgx$ funksiyaning hosilasini bo`linmaning hosilasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Demak, $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

- $y = ctgx$ funksiyaning hosilasini topishda murakkab funksiyaning hosilasi formulasidan foydalanamiz:

$$(ctgx)' = \left(tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \cdot (-1) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Demak, $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

6. Teskari trigonometrik funksiyalar.

- $y = \arcsin x$ funksiya $x = \sin y$ funksiyaga teskari. Bunda $x'(y) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.

U holda $y'(x) == \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Demak, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

- $y = \arccos x$ funksiyaning hosilasini $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ formuladan foydalanib topamiz:

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

---

[1] **George B. Thomas, Ross L.Finney-Calculus and Analytic Geometry 1995 pp 143-154**

Demak, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

- $y = arctgx$ funksiyaning hosilasini teskari funksiyaning hosilasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$(arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Demak, $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

$arctgx$ va $arcctgx$ funksiyalar $arctgx + arcctgx = \dfrac{\pi}{2}$ bog\`lanishga ega. Bundan, $(arcctgx)' = \left(\dfrac{\pi}{2} - arcctgx\right)' = -(arctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Demak, $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Yuqori tartibli hosila

$f(x)$ funksiya biror $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo\`lib, shu intervalda differensiyallanuvchi bo\`lsin. U holda $f'(x)$ hosila $x \in (a;b)$ ning funksiyasi bo\`ladi. Shu sababli bu funksiya uchun hosilaning mavjudligi va uni hisoblash masalasini qo\`yish mumkin.

$f'(x)$ ga *birinchi tartibli hosila* deyiladi. $f'(x)$ funksiyaning hosilasidan olingan hosilaga *ikkinchi tartibli hosila* deyiladi. Ikkinchi tartibli hosila mavjud bo\`lsa, bu hosiladan olingan hosila *uchinchi tartibli hosila* deyiladi va hokazo. Hosilalar ikkinchi tartiblidan boshlab *yuqori tartibli hosila* deyiladi va $y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$ (yoki $f''(x), f'''(x), f^{IY}(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$

Yoki $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \dfrac{d^ny}{dx^n}, \ldots\right)\Big)$ kabi belgilanadi.

Misol. $y = x^3 \ln x$ bo\`lsa, $y^{(4)}(3)$ ni topamiz:

$$y' = (x^3)' \ln x + x^3 (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = x^2(3\ln x + 1);$$

$$y'' = (x^2(3\ln x + 1))' = (x^2)'(3\ln x + 1) + x^2(3\ln x + 1)' =$$
$$= 2x(3\ln x + 1) + x^2 \cdot \frac{3}{x} = x(6\ln x + 5);$$
$$y''' = (x(6\ln x + 5))' = x'(6\ln x + 5) + x(6\ln x + 5)' = 6\ln x + 5 + x \cdot \frac{6}{x} = 6\ln x + 11;$$
$$y^{(4)} = (6\ln x + 11)' = \frac{6}{x}. \quad \text{Bundan} \quad y^{(4)}(3) = \frac{6}{3} = 2.$$

Funksiyaning yuqori tartibli hosilasini topish uchun uning barcha oldingi hosilalarini topish kerak bo`ladi. Biroq, ayrim funksiyalarning n-tartibli hosilalarini bir yo‘la topish imkonini beruvchi formulalar mavjud. Masdalan, quyida keltiriladigan formulalar bunday formulalar qatoriga kiradi:

1. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \ (a > 0), \ (e^x)^{(n)} = e^x;$

2. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$

3. $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, \alpha \in R;$

4. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$

5. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^n (n-1)!}{x^n};$

6. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)};$

7. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)};$

8. $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}.$

Formulalardan ayrimlarining isbotini keltiramiz.

3. $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, \alpha \in R$ ning *isboti.*

$$y = x^\alpha, \qquad y' = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$
$$y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \ \ldots, \qquad y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Shunday qilib,

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, \alpha \in R.$$

4. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ ning *isboti.*

$$y = \cos x, \quad y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = -\cos x = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = \sin x = \cos\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ldots, \qquad y^{(n)} = \cos\left(x + (n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)' = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Demak,

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

5. $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n (n-1)!}{x^n}$ ning *isboti.*

$$y = \ln x, \quad y' = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad y'' = -1\cdot x^{-2}, \; y''' = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2\cdot 1\cdot 2\cdot x^{-3}, \ldots,$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}.$$

Shunday qilib,

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^n (n-1)!}{x^n}.$$

Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi

M moddiy nuqta $s = f(t)$ qonun bilan to`g`ri chiziqli harakat qilsin. U holda s'_t moddiy nuqtaning t vaqtdagi tezligini ifodalaydi: $s'_t = v$.

Nuqtaning t vaqtdagi tezligi v, $t + \Delta t$ vaqtdagi tezligi $v + \Delta v$ bo`lsin, ya'ni $\Delta t$ vaqt oralig`ida nuqtaning tezligi Δv ga o`zgarsin.

$\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ nisbat *to`g`ri chiziqli harakatda nuqtaning* Δt *vaqt oralig`idagi o`rtacha tezlanishini* ifodalaydi. Bu nisbatning $\Delta t \to 0$ dagi limiti M nuqtaning berilgan t vaqtdagi tezlanishi deyiladi va a bilan belgilanadi: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = a$, ya'ni $v' = a$. Bunda $v = s'_t$. Shu sababli $a = (s'_t)'$, ya'ni $a = s''_t$.

$a = s''_t$, ya'ni material nuqta harakat qonunidan t vaqt bo`yicha olingan ikkinchi tartibli hosila to`g`ri chiziqli harakatda material nuqtaning t vaqtdagi tezlanishiga teng. Bu jumla *ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosini* ifodalaydi.

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. Funksiyaning berilgan nuqtadagi hosilasi ta'rifini bering.
2. Funksiyaning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
3. Hosilaning mexanik ma'nosi nimadan iborat?
4. Yig`indi, ko`paytma va bo`linmaning hosilalari qanday topiladi?
5. Differensiallashning asosiy qoidalarini ayting.
6. Trigonometrik funksiyalar hosilalari nimaga teng?
7. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari jadvalini tuzing.
8. Funksiya differensiali deb nimaga aytiladi?
9. Quyidagi funksiyalarning hosilasini hisoblang:

$$a)\; y = -3x^{-5} + 15x^{-4} - 2x^{-2} + x^{-1} + 2;$$

$$b)\; y = 4x^{\frac{3}{4}} + 3x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{1}{2}} + 3x;$$

$$c)\; y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 8;$$

$$d)\; y = 2\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + 1;$$

11-§. Boshlang`ich funksiya, aniqmas integral

Tayanch iboralar: *integral hisobning asosiy masalalari va metodlari, boshlang`ich funksiya, aniqmas integral, integral ostidagi funksiya, integral ostidagi ıfoda, integrallash jadvali, integrallash usullari.*

17-asrga kelib, texnika va tabiiy fanlarning taraqqiyoti matematika oldiga juda ko`p yangi masalalarni, jumladan, murakkab geometrik shakldagi jismlarning yuzini, hajmini, og`irlik markazini hisoblash masalalarini qo`ydi. Bularni aniqlashning qadimgi eski usullari o`rniga yangi va kuchli matematik usullar yaratish zaruriyati tug`ildi. Bunday masalalar integral hisobning paydo bo`lishiga olib keldi.

Integral hisob – matematikaning integrallar va ularning xossalarini, hisoblash usullarini, tatbiqlarini o`rganuvchi bo`limi.

11.1. Boshlang`ich funksiya. Aniqmas integral va uning xossalari

***Boshlang`ich funksiya tushunchasi.*** Differensial hisobning asosiy vazifasi berilgan *F(x)* funksiyaga ko`ra uning hosilasi $f(x) = F'(x)$ ni yoki differensialini topishdan iborat edi.

Integral hisobning asosiy vazifasi buning teskarisi bo`lib, *F(x)* funksiyani uning ma'lum *f(x)* hosilasiga yoki $f(x)dx$ differensialiga ko`ra topishdan iborat. Demak, *f(x)* funksiya berilgan, shunday *F(x)* funksiyani topish kerakki, uning hosilasi *f(x)* ga teng, ya'ni

$$F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

Ta'rif. Agar [*a*; *b*] kesmada aniqlangan *f(x)* funksiya uchun bu kesmaning barcha nuqtalarida $F'(x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, u holda *F(x)* funksiya shu kesmada *f(x)* funksiyaga nisbatan boshlang`ich funksiya deb ataladi.

Misol. Boshlang`ich funksiya ta'rifiga asosan, $F(x)=\frac{x^4}{4}$ funksiya $f(x)=x^3$ funksiyasi uchun boshlang`ich ekani kelib chiqadi, chunki $\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3$

Agar *f(x)* funksiya uchun boshlang`ich funksiya mavjud bo`lsa, u boshlang`ich yagona bo`lmasligini ko`rish oson.

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + 6; F(x) = \frac{x^4}{4} + 7 . \text{ Umuman } F(x) = \frac{x^4}{4} + c .$$

Agar $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar *f(x)* funksiyadan [*a*; *b*] kesmada boshlang`ich funksiyalari bo`lsa, ular orasida ayirma o`zgarmas songa teng bo`ladi. Agar berilgan *f(x)* funksiya uchun qanday bo`lmasin birgina *F(x)* boshlang`ich funksiya topilgan bo`lsa, *F(x)* funksiya uchun har qanday boshlang`ich funksiya $F(x)+C$ ko`rinishga ega bo`ladi.

Aniqmas integral

Ta'rif. Agar *F(x)* funksiya biror oraliqda *f(x)* funksiyaning boshlang`ich funksiyasi bo`lsa, u holda $F(x)+C$ funksiyalar to`plami (bu yerda *C* – ihtiyoriy doimiy) shu kesmada *f(x)* funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va $\int f(x)dx = F(x) + C$ kabi belgilanadi.

Bu yerda *f(x)* – integral ostidagi funksiya, *f(x)dx* integral ostidagi ifoda, $\int$ – integral belgisi deyiladi.

Aniqmas integralni topish jarayoni yoki berilgan funksiyaning boshlang`ich funksiyasini topish jarayoni **integrallash** deyiladi.

Aniqmas integralning xossalari:

1) Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya’ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2) Aniqmas integralning differensiali integral belgisi ostidagi ifodaga teng, ya’ni

$$d\bigl(f(x)dx\bigr) = f(x)dx$$

3) Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ihtiyoriy o`zgarmasning yig`indisiga teng, ya’ni

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

4) Biror funksiyaning differensialidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ihtiyoriy o`zgarmasning yig`indisiga teng, ya’ni

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

5) Agar $\int f(x)dx = F(x) + C$ bo`lsa, u holda barcha o`zgarmas α lar uchun

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx = \alpha\left[F(x) + C\right] = \alpha F(x) + K \text{ bo`ladi.}$$

Bu yerda $k = \alpha C$ - integraldagi yangi o`zgarmas son. Bu xossa quyidagicha: “funksiyani o`zgarmas songa ko`paytmasining integrali o`zgarmas sonni shu funksiya integraliga ko`paytmasiga teng”

6) Chekli sondagi funksiyalarning algerbaik yig`indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yig`indisiga teng, ya’ni

$$\int \bigl(f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)\bigr)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx$$

7) Agar *F(x)* funksiya f(x) uchun boshlang`ich funksiya bo`lsa, ya'ni

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ bo`lsa u holda } \int f(u)du = F(u) + C$$

tenglik to`g`ri bo`ladi, bu yerda $u = u(x)$ x ning differensiallanuvchi funksiyasi. Bu xossa integrallash formulalarining invariantligi deyiladi.

11.2. Integrallash jadvali. Integrallash usullari

Asosiy integrallash jadvali:

1) $\int 0 \cdot dx = C$

2) $\int 1 \cdot dx = x + C$

3) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

4) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

5) $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg}x + C$

6) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

7) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

8) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9) $\int \cos x dx = \sin x + C$

10) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}x + C$

11) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg}x + C$

Quyidagi integrallar ko`p qo`llanilgani uchun eslab qolish lozim:

Agar $\dfrac{d}{dx}x = 1$ bo`lsa, u holda $\int 1dx = x + C$ yoki $\int dx = x + C$ bo`ladi.

Agar $\dfrac{d}{dx}x^2 = 2x$ bo`lsa, u holda $\int 2xdx = x^2 + C$ yoki $\int d(x^2) = x^2 + C$ bo`ladi.

Agar $\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ bo`lsa, u holda $\int 3x^2dx = x^3 + C$ yoki $\int d(x^3) = x^3 + C$ bo`ladi.

Agar $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ bo`lsa, u holda $\int nx^{n-1}dx = x^n + C$ yoki $\int d(x^n) = x^n + C$ bo`ladi.

Agar $\frac{d}{dx}(\frac{u^{m+1}}{m+1}) = u^m$ bo`lsa, u holda $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C$ yoki $\int d(\frac{u^{m+1}}{m+1}) = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C$ bo`ladi.

Agar $\frac{d}{dt}\sin t = \cos t$ bo`lsa, u holda $\int \cos t dx = \sin t + C$ yoki $\int d(\sin t) = \sin t + C$ bo`ladi.[1]

Agar $\frac{d}{dt}\cos t = -\sin t$ bo`lsa, u holda $\int \sin t dx = -\cos t + C$ yoki $-\int d(\cos t) = -\cos t + C$ bo`ladi.

1-misol. $\int 5dx.$

Yechish: xossaga asosan o`zgarmas ko`paytuvchi 5 ni integral ishorasi tashqarisiga chiqaramiz va formulani qo`llab quyidagini hosil qilamiz:

$$\int 5dx = 5\int dx = 5x + C.$$

Tekshirish. $d(5x + C) = 5dx.$ Integral ostidagi ifodani hosil qildik, demak, integral to`g`ri olingan.

2-misol. $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{1}{4}x^4 + C.$

Tekshirish: $d\left(\frac{1}{4}x^4 + C\right) = \frac{1}{4}\cdot 4x^2 dx = x^3 dx.$

Tekshirish: $d\left(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C\right) = (4x^2 - 4x + 12)dx = 4(x^2 - x + 3)dx.$

3-misol. Quyidagi $I = \int (3x+7)^2 dx$ integralni hisoblash uchun $u = 3x + 7$ ni $du = 3dx$ ga almashtirish va o`rniga qo`yib yozish kerak:

$$I = \frac{1}{3}\int (3x+7)^2 3dx = \frac{1}{3}\int u^2 du = \frac{1}{3}\int u^2 du = \frac{1}{3}\frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}\frac{(3x+7)^3}{3} + C = \frac{1}{9}(3x+7)^3 + C$$ [1]

[1] *J.H.Heinbockel. Introduction to Calculus Volume 1, p.181 prop.of int. betning mazmun, mohiyatidan foydalanildi*

Integrallash usullari

*1. **O`zgaruvchilarni almashtirish usuli*** bilan yoki o`rniga qo`yish usuli bilan integrallash

$\int f(x)dx$ ni hisoblash talab qilinsin. Ayrim hollarda x o`zgaruvchini yangi o`zgaruvchiga almashtirish yordamida ya'ni $x=\varphi(t)$ deb olib, integral ostidagi ifodani soddalashtirish mumkin

$$dx=\varphi'(t)dt \qquad \int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

Integrallashdan so`ng $t$ o`rniga uning x orqali ifodasi qo`yiladi. (1) ni to`g`riligini ko`rsatamiz

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)$$

O`ng tomonini $x$ bo`yicha murakkab funksiya kabi differensiallaymiz. t oraliq argument , $\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$ teskari funksiya differensialiga asosan,

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_t \frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

Integrallashda o`zgaruvchining almashtirish ba'zan $x=\varphi(t)$ ko`rinishda emas, balki $t=\psi(x)$ ko`rinishda qulayroq bo`ladi.

Agar integral $\int\frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}$ ko`rinishda bo`lsa, quyidagicha almashtirish bajaramiz:

$$\psi(x)=t;\psi'(x)dx=dt$$

$$\int\frac{\psi'(t)dx}{\psi(x)}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln|\psi(x)|+c$$

Misol. 1) $\int\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ integral hisoblansin.

Yechish. $x=\frac{1}{t}$ deb olamiz. U holda $dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$\int t^2e^t\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int e^tdt=-e^t+c=-e^{\frac{1}{x}}+c$$

---

[1] *J.H.Heinbockel. Introduction to Calculus Volume 1, p.184, example 3-3betlarning mazmun, mohiyatidan foydalanildi*

2) $I=\int\frac{dx}{5-3x}$ ni hisoblang.

Yechish. 5-3x=z

$I=\int\frac{dx}{5-3x}=-\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z}=-\frac{1}{3}\ln|z|=-\frac{1}{3}\ln|5-3x|+c$ **;** $x=\frac{5-z}{3}$**;**

$dx=-\frac{1}{3}dz$

2. *Bo`laklab integrallash.*

Ko`paytmaning differensiali formulasiga ko`ra:

$$d(u\vartheta)=ud\vartheta+\vartheta du;\quad u\vartheta=\int ud\vartheta+\int\vartheta du$$

$$\int ud\vartheta=u\vartheta-\int\vartheta du$$

Bu formula *bo`laklab integrallash formulasi* deb ataladi.

Misol. $\int x\cos xdx$ integral hisoblansin

Yechish. $u=x; du=dx; d\vartheta=\cos xdx; \vartheta=\sin x$

$\int x\cos xdx=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+c;$

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. Berilgan funksiyaning boshlang`ich funksiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Berilgan funksiyaning aniqmas integrali deb nimaga aytiladi?
3. Aniqmas integralning asosiy xossalarini ayting?
4. Trigonometrik funksiyalarning aniqmas integrali nimaga teng?
5. Aniqmas integralda o`zgaruvchini almashtirish formulasini tushuntirib bering?

6-14. Aniqmas integrallarni hisoblang

6\. 1) $\int x^4dx;$ 2) $\int x^{m-1}dx;$ 3) $\int x^{1-n}dx;$ 4) $\int u^{p}+^{1}du.$

7\. 1) $\int 2xdx;$ 2) $\int 4t^3dt;$ 3) $\int ax^2dx;$ 4) $\int nx^{n-1}dx.$

8\. 1) $\int(4u^3-6u^2-4u+3)du;$ 2) $\int\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+5\right)dx;$

3) $\int(4ax^3-6bx^2-4cx+e)dx;$ 4) $\int 3(\varphi-2)d\varphi.$

9\. 1) $\int 3(2x^2-1)^2dx.$ 2) $\int x^4(x-1)dx.$ 3) $\int(x-2)^3dx.$

10. 1) $\int \frac{u^2 - u}{3u} du$; 2) $\int \frac{2\varphi - 3\varphi^3}{5\varphi} d\varphi$. 3) $\int x^{-4} dx$.

11. 1) $\int \frac{du}{\sqrt[3]{u^2}}$; 2) $\int \frac{d\varphi}{2\sqrt{\varphi}}$; 3) $\int \frac{2dt}{3t\sqrt{t}}$.

12. 1) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{x}}$; 3) $\int \left(\frac{3}{t^2} - \right)$; 4) $\int \left(\frac{3}{t^2} - \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{4\sqrt[3]{t^2}}{t} \right) dt$.

13. 1) $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$; 2) $\int \frac{x^2 dx}{a^3 - x^3}$.

14. 1) $\int \sin 2x\, dx$. 2) $\int \cos 4x dx$. 3) $\int \cos 3x\, dx$.

15. 1) $t=1$ bo'lganda $S=5$ bo`lsa, $ds=dt$,
2) $t=2$ bo'lganda $S=4$ bo`lsa, $ds=(3t^2-2t)dt$

12-§. Aniq integral

Tayanch iboralar: *aniq integral, geometrik ma'nosi, xossalari, hisoblash usullari, quyi va yuqori chegaralar, Nyuton-Leybnits formulasi, tatbiqlari, egri chiziq bilan chegaralangan yuzalarni, egri chiziqli yoylar uzunliklarini, hajmlarni, bajarilgan ishlarni, yo`llarni, inersiya momentlarini hisoblash.*

12.1. Aniq integral, uning geometrik ma'nosi, xossalari

Aniq integral - matematik analizning eng muhim tushunchalaridan biridir. Egri chiziq bilan chegaralangan yuzalarni, egri chiziqli yoylar uzunliklarini, hajmlarni, bajarilgan ishlarni, yo`llarni, inersiya momentlarini va hokazolarni hisoblash masalasi shu tushuncha bilan bog`liq.

$[a; b]$ kesmada $y = f(x)$ uzluksiz funksiya berilgan bo`lsin. Quyidagi amallarni bajaramiz:

1. $[a; b]$ kesmani qo`yidagi nuqtalar bilan ixtiyoriy n ta qismga bo`lamiz va ularni qismiy intervallar deb ataymiz:

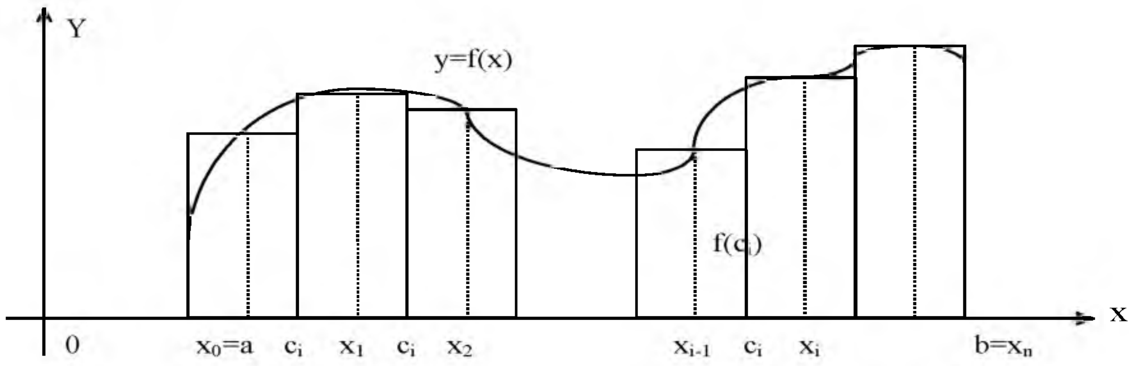
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots\, x_{i-1} < x_i \ldots < x_n = b$$

2. Qismiy intervallarning uzunliklarini bunday belgilaymiz: [1]

$\Delta x_1 = x_1 - a \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1 \; ... \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \; ... \quad \Delta x_n = b - x_{n-1}$

σ_n yig'indi $f(x)$ funksiya uchun $[a, b]$ kesmada tuzilgan integral yig`indi deb ataladi. $\sigma_n$ integral yig`indi qisqacha bunday yoziladi:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$



1-shakl

Integral yig`indining geometrik ma'nosi ravshan: Agar $f(x) \geq 0$ bo`lsa, u holda σ_n – asoslari Δx_1, Δx_2, ..., Δx_i,...,Δx_n va balandliklari mos ravishda $f(c_1)$, $f(c_2)$, ..., $f(c_i)$, ..., $f(c_n)$ bo'lgan to`g`ri to`rtburchak yuzlarining yig`indisidan iborat (1-shakl).

Endi bo`lishlar soni n ni orttira boramiz ($n \to \infty$) va bunda eng katta intervalning uzunligi nolga intilishini, ya'ni max $\Delta x_i \to 0$ deb faraz qilamiz.

Ushbu ta'rifni beramiz.

Ta'rif. Agar σ_n integral yig`indi $[a; b]$ kesmani qismiy $[x_i; x_{i-1}]$ kesmalarga ajratish usuliga va ularning har biridan $c_i$ nuqtani tanlash usuliga bog`liq bo`lmaydigan chekli songa intilsa, u holda shu son $[a;b]$ kesmada $f(x)$ funksiyadan olingan aniq integral deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $\int_a^b f(x)dx.$

Bu yerda $f(x)$ - integral ostidagi funksiya, $[a; b]$ kesma integrallash oralig`i, a va b sonlar integrallashning quyi va yuqori

---

[1] *Larson Edvards. /Calculus/ 2010. 272,226 betlarning mazmun, mohiyatidan foydalanildi.*

chegarasi deyiladi.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad 1$$

Aniq integralning ta'rifidan ko`rinadiki, aniq integral hamma vaqt mavjud bo`lavermas ekan. Biz quyida aniq integralning mavjudlik teoremasini isbotsiz keltiramiz.[2]

Teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada uzluksiz bo`lsa, u integrallanuvchidir, ya'ni bunday funksiyaning aniq integrali mavjuddir.[3]

Agar yuqoridan $y=f(x)\geq 0$ funksiyaning grafigi, quyidan Ox o`qi, yon tomonlaridan esa $x=a$, $x=b$ to`g`ri chiziqlar bilan chegaralangan sohani egri chiziqli trapetsiya deb atasak, u holda

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integralning geometrik ma'nosi ravshan bo`lib qoladi: $f(x)\geq 0$ bo`lganda u shu egri chiziqli trapetsiyaning yuziga son jihatdan teng bo`ladi.

1-izoh. Aniq integralning qiymati funksiyaning ko`rinishiga va integrallash chegarasiga bog`liq.

Masalan: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$

2-izoh. Aniq integralning chegaralari almashtirilsa, integralning ishorasi o`zgaradi.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3-izoh. Agar aniq integralning chegaralari teng bo`lsa, har qanday funksiya uchun ushbu tenglik o`rinli bo`ladi:

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

[1] *Larson Edvards. /Calculus/ 2010. 273,226 betlarning mazmun, mohiyatidan foydalanildi.*
[2] *Larson Edvards. /Calculus/ 2010. 273, 226- betlarning mazmun, mohiyatidan foydalanildi.*
[3] *Larson Edvards. /Calculus/ 2010. 272, 226- betlarning mazmun, mohiyatidan foydalanildi.*

Aniq integralning asosiy xossalari

1-xossa. O`zgarmas ko`paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

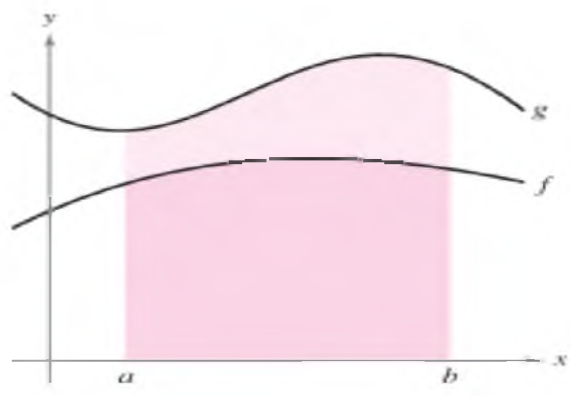
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

2-xossa. Bir nechta funksiyalar algebraik yig`indisining aniq integrali qo`shiluvchilar integralining yig`indisiga teng (ikki qo`shiluvchi bo`lgan hol bilan chegaralanamiz):

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

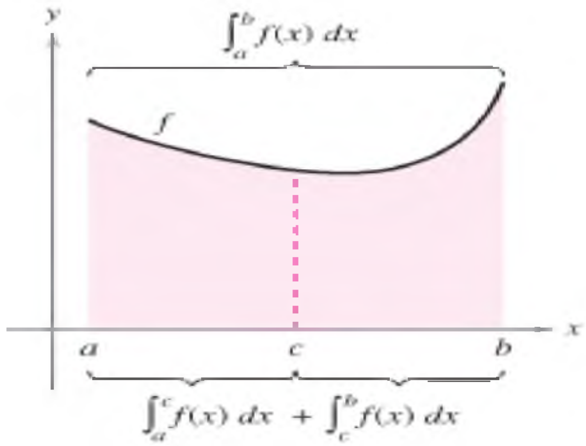
3-xossa. Agar [*a*; *b*] kesmada ikki *f*(*x*) va g(*x*) funksiya (*a*<*b*) $f(x) \le g(x)$ shartni qanoatlantirsa, ushbu tengsizlik o`rinli:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$



4-xossa. Agar [*a*; *b*] kesma bir necha qismga bo`linsa, u holda [*a*,*b*] kesma bo`yicha aniq integral har bir qism bo`yicha olingan aniq integrallar yig`indisiga teng. [*a*; *b*] kesma ikki qismga bo`lingan hol bilan cheklanamiz, ya'ni *a*<*c*<*b* bo`lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



5-xossa. Agar m va M sonlar $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmada eng kichik va eng katta qiymati bo`lsa, ushbu tengsizlik o`rinli:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx. \le M(b-a)$$

Isboti. Shartga ko`ra $m \le f(x) \le M$ ekani kelib chiqadi. 3-xossaga asosan qo`yidagiga ega bo`lamiz:

$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx \qquad (*)$$

Biroq

$$\int_a^b mdx = m\int_a^b dx = m \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = m(b-a)$$

$$\int_a^b Mdx = M\int_a^b dx = M \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = M(b-a)$$

bo'lgani uchun (*) tengsizlik

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$ bo`ladi.

6-xossa (o'rta qiymat haqidagi teorema).

Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo`lsa, bu kesmaning ichida shunday $x=s$ nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiyaning qiymati uning shu kesmadagi o`rtacha qiymatiga teng bo`ladi, ya'ni

$$f(s) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$$

Isboti. Faraz qilaylik, m va M sonlar $f(x)$ uzluksiz funksiyaning $[a;\ b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymati bo`lsin. Aniq integralni baholash haqidagi xossaga ko`ra qo`yidagi qo`sh tengsizlik to`g`ri:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx. \le M(b-a)$$

tengsizlikning hamma qismlarini b-a>0 ga bo`lamiz va natijada

$$m \le \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \le M$$

ni hosil qilamiz. Ushbu $\mu = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx.$ belgilashni kiritib, qo`sh tengsizlikni qayta yozamiz. $m \le \mu \le M$

$f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada uzluksiz bo`lgani uchun u m va M orasidagi hamma oraliq qiymatlarni qabul qiladi.
Demak, biror x=s qiymatda $\mu = f(s)$ bo`ladi, ya'ni

$$f(s) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx.$$ [1]

Teorema isbotlandi.

12.2. Nyuton-Leybnits formulasi. Aniq integralni hisoblash usullari

Nyuton-Leybnits formulasi. Aniq integrallarni integral yig`indining limiti sifatida bevosita hisoblash ko`p hollarda juda qiyin, uzoq hisoblashlarni talab qiladi va amalda juda kam qo`llaniladi. Integrallarni topish formulasi Nyuton-Leybnits teoremasi bilan beriladi.

Teorema. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning $[a;\ b]$ kesmadagi boshlang`ich funksiyasi bo`lsa, u holda aniq integral boshlang`ich funksiyaning integrallash oralig`idagi orttirmasiga teng, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

1. [1]*Larson Edvards. /Calculus/ 2010. 276, 226 betlarning mazmun, mohiyatidan foydalanildi.*

(1) **tenglik Nyuton-Leybnits formulasi deyiladi**.[1]

Isboti. *F(x)* funksiya *f(x)* funksiyaning biror boshlang`ich funksiyasi bo`lsin, u holda 1-teoremaga ko'ra $\int_a^x f(t)dt$ funksiya ham *f(x)* funksiyaning boshlang`ich funksiyasi bo`ladi. Berilgan funksiyaning ikkita istalgan boshlang`ich funksiyalari bir-biridan o`zgarmas *C* qo`shiluvchiga farq qiladi, ya'ni *F(x)=F(x)+C.*
Shuning uchun:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

C-o`zgarmas miqdorni aniqlash uchun bu tenglikda *x=a* deb olamiz:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C \text{ , } \int_a^a f(t)dt = 0$$

bo`lgani uchun *F(a)+C*=0. Bundan, *S=-F(a)*. Demak,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Endi *x=b* deb Nyuton-Leybnits formulasini hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b)\text{-}F(a)$$

yoki integrallash o`zgaruvchisini *x* bilan almashtirsak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)\text{-}F(a)$$

F(b)-F(a)= $F(x)|_a^b$ belgilash kiritib, oxirgi formulani quyidagicha qayta yozish mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)\text{-}F(a)$$

Teorema isbotlandi.

2. [1]*Larson Edvards. /Calculus/ 2010. 283betning mazmun mohiyatidan foydalanildi.*

Integral ostidagi funksiyaning boshlang`ich funksiyasi ma’lum bo`lsa, u holda Nyuton-Leybnits formulasi aniq integrallarni hisoblash uchun amalda qulay usulni beradi. Faqat shu formulaning kashf etilishi aniq integralni hozirgi zamonda matematik analizda tutgan o’rnini olishga imkon bergan. Nyuton-Leybnits formulasi aniq integralning tatbiqi sohasini ancha kengaytirdi, chunki matematika bu formula yordamida xususiy ko`rinishdagi turli masalalarni yechish uchun umumiy usulga ega bo`ldi.

Misollar

1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4}$

2) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} (1+x^{2)})^{-\frac{1}{2}} d(1+x^2) = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} =$
$= \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$

Aniq integralni hisoblash usullari

***O`zgaruvchini almashtirish.*** Bizga $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral berilgan bo`lsin, bunda $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksizdir.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \qquad (2)$$

Aniq integralni (2) formula bo`yicha hisoblaganda yangi o`zgaruvchidan eski o`zgaruvchiga qaytish kerak emas, balki eski o`zgaruvchining chegaralarini keyingi boshlang`ich funksiyaga qo`yish kerak. [1]

[1] *Larson Edvards. /Calculus/ 2010. 303. 226- betning mazmun mohiyatidan foydalanildi.*

Misollar. 1) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $x+1=u^2$ deb almashtirsak, $x=u^2-1$, $dx=2udu$ bo`ladi. Integrallashning yangi chegaralari: $x=3$ bo`lganda $t=2$, $x=8$ bo`lganda $u=3$, u holda:

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2udu}{t} = 2\int_2^3 (u^2-1)du = 2(\frac{u^3}{3}-u)\Big|_2^3 = 2(6-\frac{2}{3}) = \frac{32}{3};$$

2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $x=sinu$ deb almashtirsak, $dx=\cos udu$, $1-x^2=\cos^2 u$ bo`ladi. Integrallashning yangi chegaralarini aniqlaymiz: $x=0$ bo`lganda $u=0$, $x=1$ bo'lganda $u=\pi/2$, u holda:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 udu = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2udu = \frac{1}{2}(u+\frac{1}{2}\sin 2u)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Bo'laklab integrallash.

Faraz qilaylik, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a;\ b]$ kesmada differensiallanuvchi funksiyalar bo`lsin. U holda: $(uv)'=u'v+uv'$

Bu tenglikning ikkala tomonini a dan b gacha bo`lgan oraliqda integrallaymiz:

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx \qquad (3)$$

Lekin $\int (uv)'dx = uv + C$ bo'lgani sababli, $\int (uv)'dx = uv\Big|_a^b$

Demak, (3) tenglikni qo'yidagi ko`rinishda yozish mumkin:

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$$

Bundan $$\int_a^b u\,dv = uv\,|_a^b - \int_a^b v\,du \qquad (4)$$

Bu formula *aniq integralni bo`laklab integrallash formulasi* deyiladi.

Misollar.

1) $\int_0^1 arctgx\,dx$ integral hisoblansin.

$$\int_0^1 arctgx\,dx = \begin{vmatrix} u = arctgx & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\,arctgx\,|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} = arctg1 -$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

2) $\int_0^1 xe^{-x}dx$ integral hisoblansin.

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 =$$

$$= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e};$$

Izoh: Ba'zi integrallarni hisoblashda bo`laklab integrallash formulasini bir necha marta qo`llash mumkin.

12.3. Aniq integralning tatbiqlari

Yuzani dekart koordinatalarida hisoblash. Aniq integralning geometrik ma'nosiga asosan abssissalar o`qidan yuqorida yotgan, ya'ni yuqoridan $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) funksiya grafigi bilan, quyidan $Ox$ o`q bilan, yon tomonlaridan $x = a$ va $x = b$ to`g`ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

integtegralga teng bo`ladi[1].

Shu kabi, abssissalar o‘qidan pastda yotgan, ya’ni quyidan $y=f(x)$ ($f(x)\le 0$) funksiya grafigi bilan, yuqoridan Ox o`q bilan, yon tomonlaridan $x=a$ va $x=b$ to`g`ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi

$$S=-\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

integtegralga teng bo`ladi.

(1) va (2) formulalarni bitta formula bilan umumlashtirish mumkin:

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|. \qquad (3)$$

Misol. $y=x^2$, $y=0$ va $x=1$ chiziqlar bilan chegaralangan tekis shakl (1-shakl) yuzasini (1) formula bilan topamiz:

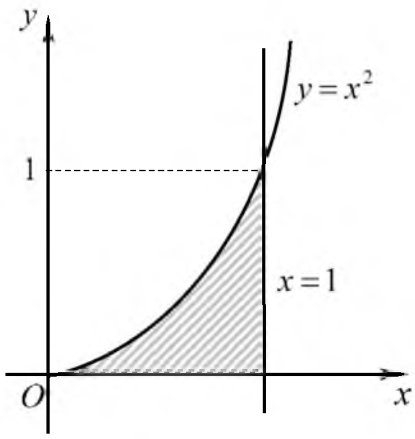
$$S=\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}.$$

Yuzani hisoblashga oid murakkabroq masalalar yuzaning additivlik xossasiga asoslangan holda yechiladi. Bunda tekis shakl kesishmaydigan qismlarga ajratiladi va aniq integralning 4^oxossasiga ko`ra tekis shaklning yuzasi qismlar yuzalarining yig`indisiga teng bo`ladi.

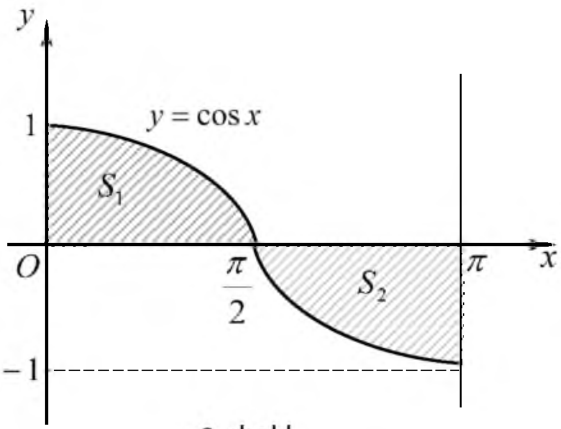
Misol. $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$ va $x=\pi$ chiziqlar bilan chegaralangan tekis shakl yuzasini hisoblaymiz. Bunda berilgan tekis shaklni yuzalari S_1 va S_2 bo`lgan kesishmaydigan qismlarga ajratamiz (2-shakl). U holda yuzaning additivlik xossasiga asosan berilgan tekis shaklning yuzasi qismlar yuzalarining yig`indisiga teng bo`ladi. Demak,

$$S=S_1+S_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1-(-1)=2.$$

[1] **George B. Thomas, Ross L.Finney-Calculus and Analytic Geometry 1995 pp 393-400**



1- shakl.



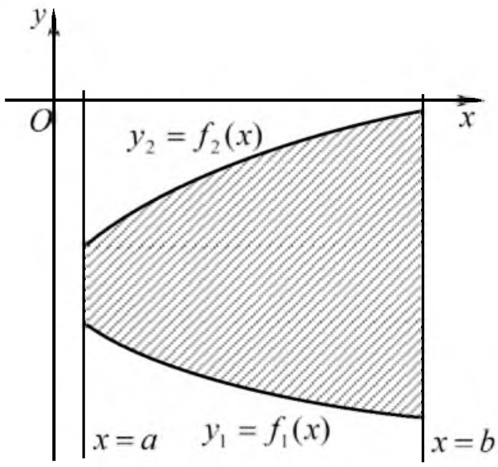
2-shakl.

$[a;b]$ kesmada ikkita $y_1=f_1(x)$ va $y_2=f_2(x)$ uzliksiz funksiyalar berilgan va $x\in[a;b]$ da $f_2(x)\geq f_1(x)$ bo`lsin. Bu funksiyalarning grafiklari va $x=a$ , $x=b$ to`g`ri chiziqlar bilan chegaralangan tekis shaklning yuzasini topamiz.

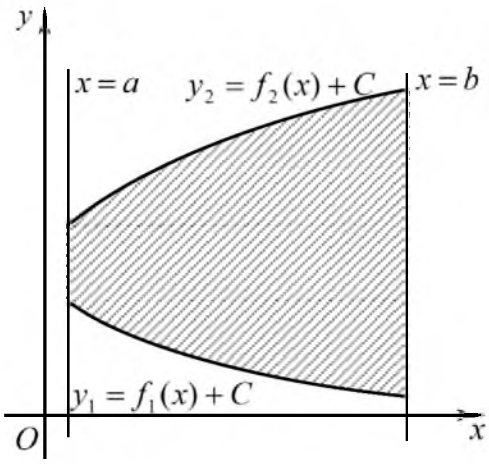
Har ikkala funksiya musbat bo`lganda bu tekis shaklning yuzasi yuqoridan $y_2=f_2(x)$ va $y_1=f_1(x)$ funksiyalar garfiklari bilan, quyidan $Ox$ o`q bilan, yon tomonlardan $x=a$ va $x=b$ to`g`ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyalar yuzalarining ayirmasiga teng bo`ladi:

$$S=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx. \qquad (4)$$

(4) formula $[a;b]$ kesmada uzluksiz va musbat bo`lmagan $y_2=f_2(x)$ va $y_1=f_1(x)$ funksiyalar uchun ham o`rinli bo`ladi. Haqiqatan ham, agar $y_2=f_2(x)$ va $y_1=f_1(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada manfiy qiymatlar qabul qilsa (bunda $y_2\geq y_1$) (3-shakl), har bir funksiyaga bir xil o`zgarmas $y=C$ qiymatlar qo`shish orqali $y_1=f_1(x)+C$ va $y_2=f_2(x)+C$ funksiyalar grafiklarini $Ox$ o`qidan yuqorida joylashtirish mumkin (4-shakl).



3-shakl



4-shakl

4-shakldagi tekis shakl 3-shakldagi tekis shaklni parallel ko`chirish orqali hosil qilindi. Shu sababli yuzaning ko`chishga nisbatan invariantlik xossasiga ko`ra bu tekis shakllar teng yuzalarga ega bo`ladi. 4-shakldagi yuza uchun (4) formula o`rinli, ya'ni

$$S = \int_a^b (f_2(x) + C)dx - \int_a^b (f_1(x) + C)dx = \int_a^b ((f_2(x) + C) - (f_1(x) + C))dx.$$

Bundan $$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

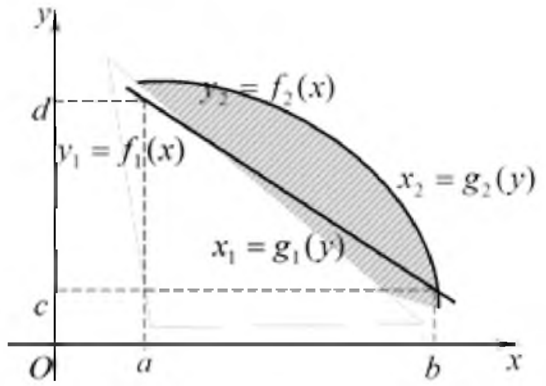
Demak, (4) formula 3-shakldagi tekis shakl uchun ham o`rinli bo`ladi.

Ayrim hollarda yuzani hisoblashga oid masalalar yuzaning ko`chishga nisbatan invariantlik xossasidan foydalangan holda soddalashtiriladi. Bunda tekis shakl yuzasi (4) formulada $x$ va $y$ o`zgaruvchilar (Ox va Oy o`qlar) ning o`rnini almashtirish yo`li bilan hisoblanadi (5-shakl), ya'ni

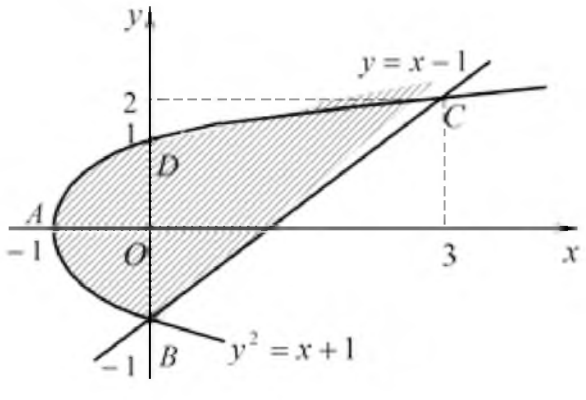
$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx = \int_c^d (g_2(y) - g_1(y))dy. \qquad (5)$$

Misollar

1. $y^2 = x + 1$ va $y = x - 1$ chiziqlar bilan chegaralangan tekis shaklning yuzasini hisoblaymiz. Tekis shakl umumiy $B(0;-1)$ va $C(3;2)$ nuqtalarga ega bo`lgan parabola va to`g`ri chiziq bilan chegaralangan. Tekis shaklni uchta qismga, ya'ni yuzalari $S_1$ ga teng bo`lgan AOD va AOB parabolik sektorlarga va yuzasi S_2 ga teng bo`lgan BCD parabolik uchburchakka ajratamiz (6-shakl).



5-shakl



6-shakl

Bunda (1) va (4) formulalarni qo`llab, topamiz:

$$S = 2S_1 + S_2 = 2\int_{-1}^{0} \sqrt{x+1}dx + \int_{0}^{3} (\sqrt{x+1} - (x-1))dx =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3}\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{0}^{3} = \frac{9}{2}.$$

Bu yuzani y o`zgaruvchi bo`yicha hisoblanganda tekis shaklni qismlarga ajratiish shart bo`lmaydi.

2. $x = \frac{1}{2}y^2$, $y = -3$, $y = 1$ chiziqlar va ordinatalar o`qi bilan chegaralangan tekis shakl yuzasini hisoblaymiz:

$$S = \int_{-3}^{1} \frac{1}{2}y^2 dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}y^3\Big|_{-3}^{1} = \frac{1}{6}(1+27) = \frac{14}{3}.$$

Agar egri chiziqli trapetsiya yuqoridan $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta$ parametrik tenglamalar bilan berilgan funksiya grafigi bilan chegaralangan bo`lsa (1) formulada $x = \varphi(t),\quad dx = \varphi'(t)dt$ o`rniga qo`yish orqali o`zgaruvchi almashtiriladi.

U holda

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (6)$$

bo`ladi, bu yerda, $a=\varphi(\alpha)$ va $b=\varphi(\beta)$.

Misol. Radiusi R ga teng doira yuzasini hisoblaymiz. Buning uchun koordinatalar boshini doiraning markaziga joylashtiramiz. Bu doiraning aylanasi $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ parametrik tenglamalar bilan aniqlanadi va doira koordinata o`qlariga nisbatan simmetrik bo`ladi. Shu sababli uning birinchi chorakdagi yuzasini hisoblaymiz (bunda x o`zgaruvchi 0 dan $R$ gacha o`zgarganda t parametr $\frac{\pi}{2}$ dan 0 gacha o`zgaradi) va natijani to`rtga ko`paytiramiz:

$$S=4S_1=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}R\sin t(-R\sin t)dt=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=$$

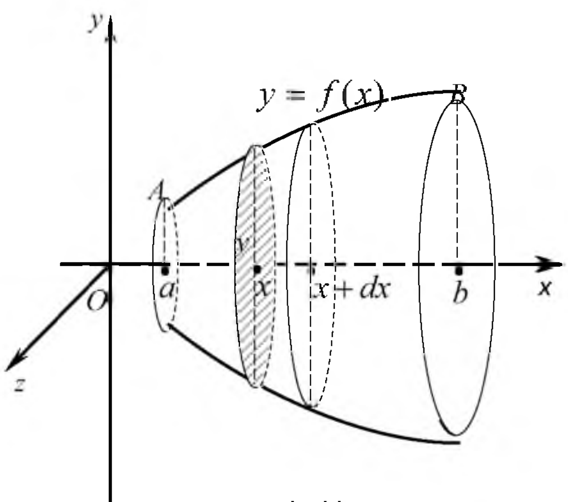
$$=2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=2R^2\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi R^2.$$

Aylanish sirti yuzasini hosoblash.

AB egri chiziq $y=f(x)\geq 0$ funksiyaning grafigi bo`lsin. Bunda $x\in[a;b]$, $y=f(x)$ funksiya va uning $y'=f'(x)$ hosilasi bu kesmada uluksiz bo`lsin.

AB egri chiziqning Ox o`q atrofida aylanishidan hosil bo`lgan jism sirti yuzasini hisoblaymiz. Buning uchun II sxemani qo`llaymiz.

1^o. Istalgan $x\in[a;b]$ nuqta orqali Ox o`qqa perpendikulyar tekislik o`tkazamiz. Bu tekislik aylanish sirtini radiusi $y=f(x)$ bo`lgan aylana bo`ylab kesadi (7-shakl). Bunda aylanish sirtidan iborat S kattalik x ning funksiyasi bo`ladi: $S=S(x)$ $(S(a)=0$ va $S(b)=S)$.



7-shakl

2^o. x argumentga $\Delta x=dx$ orttirma beramiz va $x+\Delta x\in[a;b]$ nuqta orqali Ox o`qqa perpendikulyar tekislik o`tkazamiz. Bunda $S=S(x)$ funksiya «belbog`» ko`rinishida ΔS orttirma oladi.

Kesimlar orasidagi jismni yasovchisi dl bo`lgan va asoslarining radiuslari $y$ va $y+dy$ bo`lgan kesik konus bilan almashtiramiz. Bu kesik konusning yon sirti $dS=\pi(y+y+dy)dl=2\pi ydl+\pi dydl$ ga teng. $dydl$ ko`paytmani dS ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik sifatida tashlab yuboramiz: $dS=2\pi ydl$. Bunda $dl=\sqrt{1+(y'_x)^2}dx$ ekanini hisobga olamiz: $dS=2\pi y\sqrt{1+(y'_x)^2}dx.$

3^o. dS ni a dan b gacha integrallab, topamiz:

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y'_x)^2}dx \qquad (7)$$

Shu kabi $x=g(y)$, $y\in[c;d]$ funksiya grafigining Oy o`q atrofida aylantirshdan hosil bo`lgan jism sirtining yuzasi ushbu

$$S=2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(x'_y)^2}dy \qquad (8)$$

formula bilan hisoblanadi.

Agar sirt $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha\le t\le\beta$ parametrik tenglamalar bilan berilgan bo`lsa, u holda $AB$ egri chiziqning $Ox(Oy)$ o`q atrofida aylanishidan hosil bo`lgan jism sirti yuzasi quyidagicha hisoblanadi:

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \quad \left(S=2\pi\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\varphi(t)\sqrt{\psi'^2(t)+\varphi'^2(t)}dt\right), \quad .. \ (9)$$

bu yerda $a=\varphi(\alpha)$ va $b=\varphi(\beta)$ ($c=\psi(\alpha_1)$va $d=\psi(\beta_1)$).

AB egri chiziq qutb koordinatalar sistemasida $r=r(\varphi),\ \alpha\le\varphi\le\beta$ tenglama bilan berilgan bo`lganida quyidagi formulalar o`rinli bo`ladi:

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi\ (Ox), S=2\pi\int_\alpha^\beta r\cos\varphi)\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi\ (Oy) \quad .10)$$

Misollar. 1. Radiusi R ga teng bo`lgan shar sirti yuzaini hisoblaymiz. Shar parametrik tenglamasi $x=R\cos t,\ \ y=R\sin t$ bo`lgan yarim aylananing Ox o`q atrofida aylanishidan hosil bo`ladi. Sharning koordinata o`qlariga simmetrik bo`lishini inobatga olib hisoblaymiz:

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin t \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt =$$

$$= 4\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = -\, 4\pi R^2 \cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi R^2 .$$

2. $y = ach\dfrac{x}{2}$ zanjir chizig`i $x=0$ dan $x=a$ gacha bo`lagining Ox o`qi atrofida aylanishidan hosil bo`lgan sirt yuzasini hisoblaymiz (8-shakl).

Buning uchun avval $y' = sh\dfrac{x}{a}$ hosilani va $\sqrt{1+(y_x')^2} = ch\dfrac{x}{a}$ ifodani topamiz.

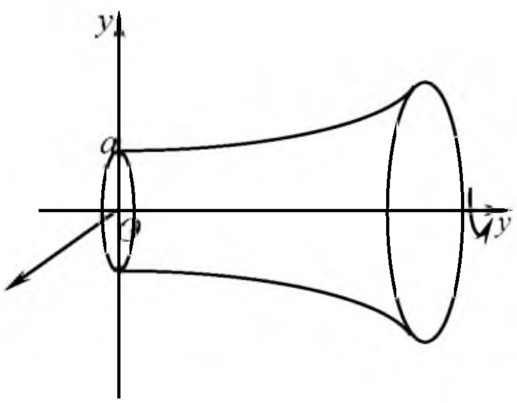
U holda (7) formulaga ko`ra

$$S = 2\pi \int_0^a ach^2 \frac{x}{a} dx = \pi a \int_0^a \left(1 + ch\frac{2x}{a}\right) dx =$$

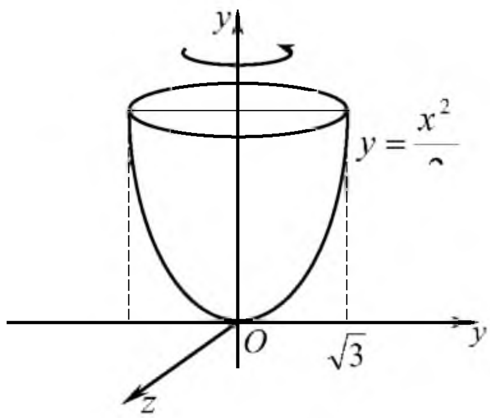
$$= \pi a \left(\frac{a}{2} sh\frac{2x}{a} + x\right)\Bigg|_0^a = \pi a^2 \left(\frac{1}{2} sh2 + 1\right).$$

3. $y = \dfrac{x^2}{2}, x > 0$ parabola bo`lagining $y = \dfrac{3}{2}$ to`g`ri chiziq bilan kesilgan qismining $Oy$ o`qi atrofida aylanishidan hosil bo`lgan sirt yuzasini hisoblaymiz (9-shakl). Misol shartidan topamiz: $x = \sqrt{2y},\ x' = \dfrac{1}{\sqrt{2y}}$. (8) formula bilan topamiz:

$$\sigma = 2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2y}\sqrt{1 + \frac{1}{2y}}\, dy = 2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2y+1}\, dy = 2\pi \frac{1}{3}(2y+1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{14\pi}{3}.$$



8-shakl



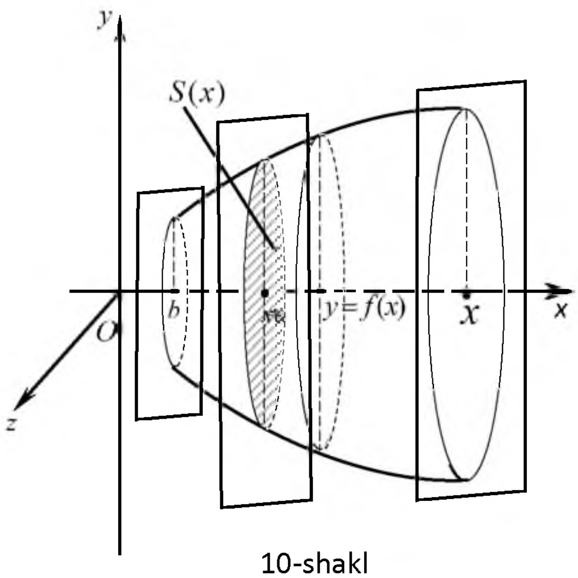
9-shakl

Hajmlarni hisoblash

Hajmni ko`ndalang kesim yuzasi bo`yicha hisoblash

Hajmi hisoblanishi lozim bo`lgan qandaydir jism (10-shakl) uchun uning istalgan ko`ndalang kesim yuzasi S ma'lum bo`lsin. Bu yuza ko`ndalang kesim joylashishiga bog`liq bo`ladi: $S = S(x),\ x \in [a;b]$, bu yerda $S(x)$ - $[a;b]$ kesmada uzluksiz funksiya. Izlanayotgan hajmni topamiz.

1^o. Istalgan $x \in [a;b]$ nuqta orqali Ox o`qqa perpendikulyar tekislik o`tkazamiz. Jismning bu tekislik bilan kesimi yuzasini $S(x)$ bilan va jismning bu tekislikdan chapda yotgan bo`lagining hajmini $V(x)$ bilan belgilaymiz (10-shakl). Bunda $V$ kattalik $x$ ning funksiyasi bo`ladi: $V = V(x)$ ($V(a) = 0$ va $V(b) = V$).



10-shakl

2^o. $V(x)$ funksiyaning dV differensialini topamiz. Bu differensial Ox o`q bilan $x$ va $x+\Delta x$ nuqtalarda kesishuvchi parallel tekisliklar orasidagi «elementar qatlam» dan iborat bo`ladi. Bu differensialni asosi $S(x)$ga va balandligi dx ga teng silindr bilan taqriban almashtirish mumkin. Demak, $dV = S(x)dx$.

3^o. dV ni a dan b gacha integrallab, izlanayotgan hajmni topamiz:

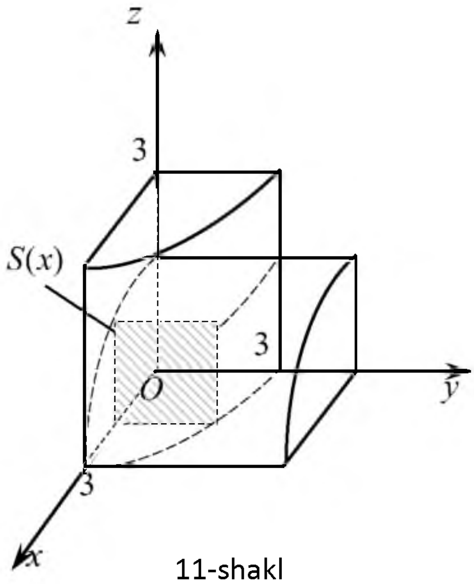
$$V = \int_a^b S(x)dx. \tag{11}$$

Misollar. 1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoidning hajmini hisoblaymiz.

Ellipsoidning koordinatalar boshidan x $(-a \le x \le a)$ masofada o`tuvchi $Ox$ o`qqa perpendikulyar tekislik bilan kesamiz. Kesimda yarim o`qlari $b(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ va $c(x) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ bo`lgan ellips hosil bo`ladi. Uning yuzasi $S(x) = \pi b(x)c(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. U holda

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

2. $x^2+y^2=9$ va $x^2+z^2=9$ silindrlar bilan chegaralangan jism hajmini hisoblaymiz. 11-shakda berilgan jismning I oktantda $(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$ joylashgan sakkizdan bir bo`lagi keltirilgan. Uning $Ox$ o`qqa perpendikulyar tekislik bilan kesimi kvadratdan iborat. Kesim abssissasi $(x;0;0)$ nuqtadan o`tganda kvadratning tomonlari $a=y=z=\sqrt{9-x^2}$ ga va yuzasi $S(x)=9-x^2$ teng bo`ladi, bu yerda $0\leq x\leq 9.$



11-shakl

Jismning hajmni (11) formula bilan hisoblaymiz:

$$V=8\int_{0}^{3}(9-x^2)dx=8\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{3}=144.$$

Aylanish jismlarining hajmini hisoblash

Yuqoridan $y=f(x)$ uzluksiz funksiya grafigi bilan, quyidan Ox o`q bilan, yon tomonlaridan $x=a$ va $x=b$ to`g`ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning $Ox$ o`q atrofida aylantirishdan hosil bo`lgan jism hajmini hisoblaymiz. Bu jismning ixtiyoriy ko`ndalang kesimi doiradan iborat. Shu sababli jismning $X=x$ tekislik bilan kesimining yuzasi $S(x)=\pi y^2$ bo`ladi.

U holda (11) formulaga ko`ra

$$V=\pi\int_{a}^{b}y^2dx. \tag{12}$$

Shu kabi yuqoridan $y=f(x)$ uzluksiz funksiya grafigi bilan, quyidan Ox o`q bilan, yon tomonlaridan $x=a$ va $x=b$ to`g`ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani $Oy$ o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo`lgan jismning hajmi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$V = 2\pi\int_a^b yx dx. \qquad (13)$$

Agar egri chiziqli trapetsiya $x=\varphi(y)$ uzluksiz funksiya grafigi, Oy o`qi,

$y=c$ va $y=d$ to`g`ri chiziqlar bilan chegaralangan bo`lsa, u holda

$$V = \pi\int_c^d x^2 dy \ (Oy) \quad \left(V = 2\pi\int_c^d xy dy \ (Ox)\right) \qquad (14)$$

bo`ladi.

$r=r(\varphi)$ egri chiziq va $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ nurlar bilan chegaralangan egri chiziqli sektorning qutb o`qi atrofida aylanishidan hosil bo`lgan jismning hajmi

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi d\varphi \qquad (15)$$

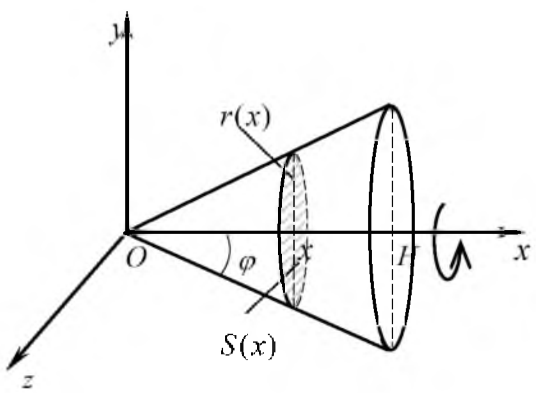
formula bilan topiladi.

Misollar. **1**. $x=y^2$, $y=0$ va $x=a\ (a>0)$ chiziqlar bilan chegaralangan tekis shaklning Ox o`q atrofida aylanishidan hosil bo`lgan jismning hajmini (12) formula bilan hisoblaymiz:

$$V = \pi\int_0^a (\sqrt{x})^2 dx = \pi\int_0^a x dx = \pi\frac{x^2}{2}\bigg|_0^a = \frac{\pi a^2}{2}.$$

2. Radiusi R ga va balandligi H ga teng bo`lgan konusning hajmini hisoblaymiz. Bunda konusnni katetlari $R$ va $H$ bo`lgan to`g`ri burchakli uchburchakning balandlik bo`ylab yo`nalgan Ox o`q atrofida aylanishidan hosil bo`lgan jism deyish mumkin (20-shakl). Gipotenuza tenglamasi $y=kx$ bo`lsin, holda

$$y = kx, \ k = tg\varphi = \frac{R}{H}, \quad y = \frac{R}{H}x$$

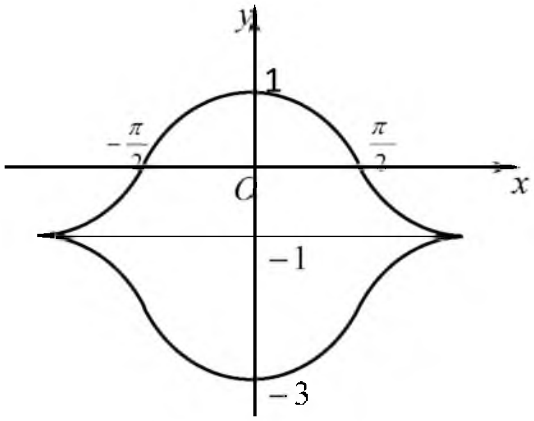


20-shakl

Bundan

$$V = \pi\int_0^H y^2 dx = \pi\int_0^H \frac{R^2}{H^2}x^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^H = \frac{1}{3}\pi R^3 H.$$

3. $y=\cos x$ va $y=-1$ chiziqlar bilan chegaralangan tekis shaklning $-\pi\le x\le\pi$ da $y=-1$ to`g`ri chiziq atrofida aylanishidan hosil bo`lgan jismning hajmini hisoblaymiz. Berilgan chiziqlar bilan chegaralangan tekis shaklning aylanishidan hosil bo`lgan jism 21-shaklda keltirilgan. Egri chiiq $y=-1$ to`g`ri chiziq atrofida aylangani uchun yangi koordinatalar sistemasiga o`tish maqsadga muvofiq bo`ladi: $x'=x,\ y'=y+1$. U holda aylanish jismining hajmi



21-shakl

$$V=\pi\int_{-\pi}^{\pi}(y')^2dx'=\pi\int_{-\pi}^{\pi}(y+1)^2dx=$$

$$=\pi\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x+1)^2dx= =\pi\int_{-\pi}^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi=$$

$$=\pi(\varphi+2\sin\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2}\pi\int_{0}^{\pi}(1+\cos2\varphi)d\varphi=2\pi^2+\frac{1}{2}\pi\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=3\pi^2.$$

Kuchning bajargan ishini hisoblash

Moddiy nuqta o`zgaruvchan $\vec{F}$ kuch ta'sirida $Ox$ o`qi bo`ylab harakatlanayotgan bo`lsin va bunda kuchning yo`nalishi harakat yo`nalishi bilan bir xil bo`lsin. U holda $\vec{F}$ kuchning moddiy nuqtani $Ox$ o`qi bo`ylab $x=a$ nuqtadan $x=b\ (a<b)$ nuqtaga ko`chirishda bajargan ishi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$A=\int_a^b F(x)dx \tag{16}$$

bu yerda $F(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz.

Misollar. 1. Agar prujina 1H kuch ostida 1 *sm* ga cho`zilsa, uni 6 *sm* cho`zish uchun qancha ish bajarish kerak bo`lishini topamiz. Guk qonuniga muvofiq $F$ kuch va $x$ cho`zilish o`zaro $F=kx$ bog`lanishga ega. Proporsionallik koeffitsiyentini masalaning shartidan topamiz:

$$x=1\ sm=0{,}01\ m \text{ da } F=1H, \text{ ya'ni } 1=k\cdot 0{,}01.$$

Bundan, $k=100$ va. $F=100x$

U holda

$$A=\int_0^{0,06}100xdx=50x^2\Big|_0^{0,06}=0{,}18\ (J)$$

2. m massali kosmik kemani erdan h masofaga uchurish uchun qancha ish bajarish kerak bo`lishini topamiz. Butun olam tortishish qonuniga ko`ra yerning jismni tortish kuchi $F=k\frac{mM}{x^2}$ ga teng, bu yerda M -yerning massasi, x - yer markazidan kosmik kemagacha bo`lgan masofa, k - gravtasiya doimiyligi. Yer sirtida, ya'ni $x=R$ da $F=mg$ ga teng, bu yerda g - erkin tushish tezlanishi. U holda

$$mg=k\frac{mM}{R^2}.$$

Bundan $kM=gR^2$ va $F=mg\frac{R^2}{x^2}$.

Izlanayotgan ishni (16) formula bilan topamiz:

$$A=\int_R^{R+h}mg\frac{R^2}{x^2}dx=-mgR^2\frac{1}{x}\Big|_R^{R+h}=-mgR^2\left(\frac{1}{R+h}-\frac{1}{R}\right)=mgR\frac{h}{R+h}.$$

Agar kosmik kema cheksizlikka ketsa, ya'ni $h\to\infty$ da $A=mgR$ bo`ladi.

3. Ikkita e_0 va e elektr zaryadi mos ravishda Ox o'qining $x_0=0$ va $x_1=a$ nuqtalrida joylangan. Ikkinchi zaryadni $x_2=b\ (b>a)$ masofaga ko`chirish uchun kerak bo`ladigan ishni topamiz. Kulon qonuniga ko`ra e_0 zaryad e zaryadni $F=\frac{e_0e}{x^2}$ kuch bilan itaradi, bu yerda x -zaryadlar orasidagi masofa.

Izlanayotgan ishni (16) formula bilan topamiz:

$$A=\int_a^b e_0e\frac{dx}{x^2}=-e_0e\frac{1}{x}\Big|_a^b=-e_0e\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\frac{e_0e(b-a)}{ab}.$$

Jismning bosib o`tgan yo`li

Moddiy nuqta (jism) to`g`ri chiziq bo`ylab o`zgaruvchan $v = v(t)$ tezlik bilan harakatlanayotgan bo`lsin. Bu nuqtaning $t_1$ dan $t_2$ gacha vaqt oralig`ida bosib o`tgan yo`lini topamiz.

Hosilaning fizik ma'nosiga ko`ra nuqtaning bir tomonga harakatida «to`g`ri chiziqli harakat tezligi yo`ldan vaqt bo`yicha olingan hosilaga teng», ya'ni $v(t) = \frac{dS}{dt}$. Bundan $dS = v(t)dt.$ Bu tenglikni t_1 dan t_2 gacha integrallaymiz:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \qquad (17)$$

Izoh. Bu formulani aniq integralni qo`llash sxemalari bilan topish mumkin.

Misol. Moddiy nuqtaning tezligi $v = 2(6-t)\ m/s$ qonun bilan o`zgaradi. Nuqtaning harahat boshidan eng katta uzoqlashishini topamiz:

$$S = \int_0^t 2(6-t)dt = 12t - t^2.$$

Nuqtaning eng katta uzoqlashishini yo`lni vaqtning funksiyasi sifatida qarab, topamiz: $S' = 12 - 2t.$ $t = 6$ da $S' = 0$ bo`ladi. Bundan

$$S_{\max} = 12 \cdot 6 - 6^2 = 36\ m.$$

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. Aniq integralning aniqmas integraldan farqi nimada?
2. Aniq integralning ta'rifini ayting va tushuntiring.
3. Aniq integralning geometrik ma'nosini tushuntiring.
4. Aniq integralning xossalarini ayting.
5. Nyuton-Leybnits formulasini keltiring.
6. Aniq integralning tatbiqlarini misollarda tushuntiring.
7. Aniq integralni hisoblash usullarini misollar yordamida tushuntiring.

8. 1) $\int_0^1 x dx$; 2) $\int_0^2 x^2 dx$; 3) $\int_0^2 4x^3 dx$; 4) $\int_0^2 x^3 dx$; 5) $\int_2^3 3x^2 dx$

9. 1) $\int_{-2}^{2} (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1)dx$; 2) $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2x)dx$

10. 1) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^3}$; 2) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2}$;

11. 1) $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2}dx$; 2) $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\ dx$; 3) $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

12. 1) $\int_0^1 e^x dx$ 2) $\int_1^2 e^x dx$ 3) $\int_0^1 e^{3x} dx$

13. Berilgan chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning yuzlarini hisoblang:

1) $y = x,\ y = 0$ *va* $x = 4$; 2) $y = -3x,\ y = 0$ *va* $x = -2$

3) $x - y + 2 = 0,\ y = 0,\ x = -1$ *va* $x = 2$

14. Ko`rsatilgan chiziqlar bilan chegaralangan yuzlarning $Ox$ o`q atrofida aylanishidan hosil bo`lgan jismlarning hajmlarini toping:

1) $y^2 = x,\ y = 0,\ x = 1$ *va* $x = 2$; 2) $y^2 = 2x,\ y = 0,\ x = 2$ *va* $x = 4$;

3) $y^2 = 6x,\ y = 0,\ x = 1$ *va* $x = 3$; 4) $y^2 = 2(x + 2),\ y = 0$ *va* $x = 0$

"Tabiatda qattiq jismlar bo`lmaganida,
geometriya ham bo`lmasdi".
A.Puankare
"Geometriya noto`g`ri chizmalar
ustida to`g`ri fikr yuritish san'atidir".
D.Poya

Geometrik figuralarni algebraik vositalar yordamida o`rganuvchi fan analitik geometriya deb ataladi. Analitik geometriya negizida taniqli fransuz olimi Rene Dekart geometriyaga qo`llagan koordinatalar metodi yotadi.

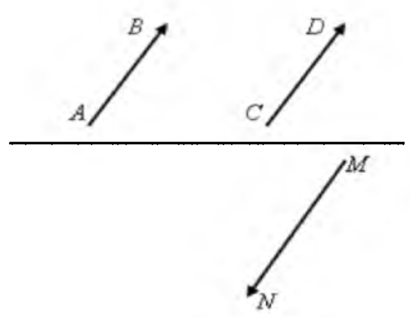
13-§. Vektorlar va ular ustida amallar

Tayanch iboralar: *vektor, vektor fazo, yo`nalgan kesma, bir xil va qarama-qarshi vektorlar, birlik vektor, nol vektor, kollinear va komplanar vektorlar, vektor uzunligi, chiziqli amallar, skalyar ko`paytma, vektor va aralash ko`paytma.*

13.1. Vektorlar va ular ustida chiziqli amallar, xossalari

Vektor tushunchasi. Agar berilgan kesmaning uchlari tartiblangan bo`lsa, u holda bunday kesma yo`nalgan kesma deyiladi. Yo`nalgan kesmaning birinchi uchi uning boshi, ikkinchi uchi esa oxiri deyiladi.

Boshi A va oxiri B nuqtada bo`lgan yo`nalgan kesmani $\overrightarrow{AB}$ bilan belgilaymiz (1-chizma).



1-chizma

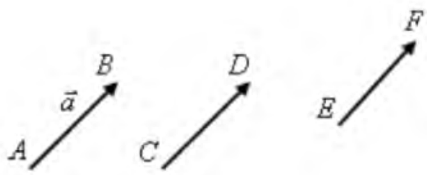
Yo`nalgan $\overline{AB}$ kesmaning uzunligi deb, AB kesma uzunligiga aytiladi va AB yoki $|\overline{AB}|$ bilan belgilanadi.

Agar AB va CD nurlar bir xil (qarama-qarshi) yo`nalgan bo`lsa, $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ yo`nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo`nalishli deyiladi.

Uzunliklari teng, yo`nalishi bir xil bo`lgan barcha yo`nalgan kesmalar to`plamini ozod vektor yoki qisqacha vektor deb ataladi (2-chizma).

Vektor ustiga "$\rightarrow$" belgi qo`yilgan kichik lotin harflari $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}, ...$ bilan yoki quyuq qilib yozilgan kichik lotin harflari $a, в, c, ...$ bilan belgilanadi.

Vektor so`zi lotincha "vector" – so`zidan olingan bo`lib, tashuvchi, olib yuruvchi degan ma'noni bildiradi.



2-chizma

Ta'rifdan vektor - uzunliklari teng, bir xil yo`nalgan kesmalar to`plamidan iborat ekanligi ravshan. Bu to`plamga tegishli har bir yo`nalgan kesma to`plamni to`liq aniqlaydi. Shuning uchun agar $\overline{AB} \in \vec{a}$ bo`lsa, $\vec{a}$ vektorni $\overline{AB} = \vec{a}$ ko`rinishda yozishimiz mumkin.

A nuqta $\overline{AB}$ vektorning boshi, B nuqta esa $\overline{AB}$ vektorning oxiri deyiladi. Yo`nalgan $\overline{AB}$ kesmaning uzunligi $\overline{AB}$ *vektor uzunligi*, yoki *moduli* deyiladi va $|\overline{AB}|$ ko`rinishida belgilanadi.

Uzunligi birga teng bo`lgan vektor *birlik vektor* yoki ort deyiladi.

Boshi bilan oxiri ustma – ust tushgan vektor *nol vektor* deyiladi.

Nol vektor $\vec{0}$ ko`rinishida yoki $\overline{AA}$, yoki $\overline{BB}$ ko`rinishida belgilanadi. Nol vektor yo`nalishi (aniq emas) aniqlanmagan.

Agar $\overline{AB} \in \vec{a}$, $\overline{CD} \in \vec{b}$ yo`nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo`nalishli bo`lsa, $\overline{AB} = \vec{a}$ va $\overline{CD} = \vec{b}$ lar bir xil (qarama-qarshi) yo`nalishli deb aytiladi.

Agar $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ lar bir xil yo`nalishli bo`lsa $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ ko`rinishida, qarama – qarshi yo`nalishda bo`lsa $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$ ko`rinishda belgilanadi.

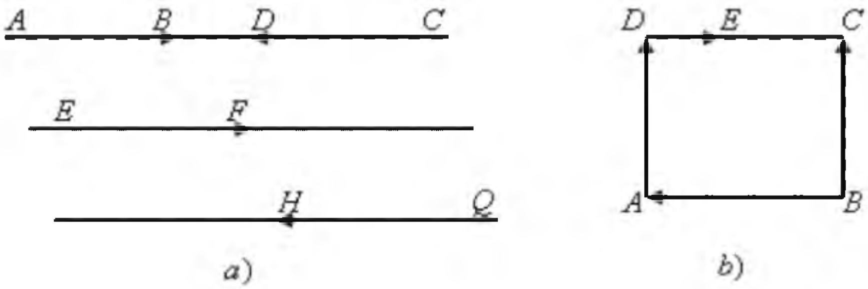
Agar ikkita $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar bir to`g`ri chiziqda yoki parallel to`g`ri chiziqlarda yotsa, u holda bu vektorlar *kollinear vektorlar* deyiladi.

Agar quyidagi shartlar o`rinli bo`lsa:

1) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning modullari teng;

2) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yo`nalishlari bir xil bo`lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar teng vektorlar deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ ko`rinishida yoziladi.

Agar uchta vektor bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotsa, u holda bunday vektorlar komplanar vektorlar deyiladi



3-chizma

3-chizmada parallel to`g`ri chiziqlarda va *ABCD* kvadrat tomonlarida yotuvchi vektorlar ko`rsatilgan:

1) bularning qaysi juftlari bir xil yo`nalishga va qaysi juftlari qarama-qarshi yo`nalishga ega;

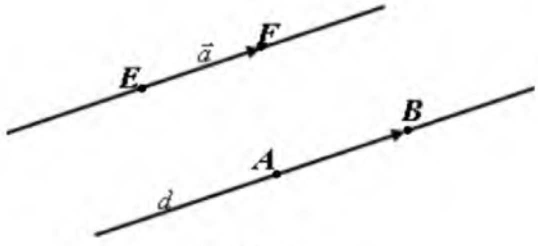
2) qaysi juftlari kollinear bo`ladi;

3) qaysi juftlari teng, qaysi juftlari teng emas.

Vektorlar ustidagi chiziqli amallar

Tekislikda $\vec{a} = \overline{EF}$ va A nuqta berilgan bo`lsin. $A$ nuqtadan $EF$ to`g`ri chiziqqa parallel $d$ to`g`ri chiziq o`tkazamiz (4-chizma).

A nuqtadan ko`rsatilgan yo`nalishda $\vec{a}$ vektor uzunligini o`lchab qo`yib B nuqtani topamiz. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$.
Shunday qilib $\vec{a}$ ni A nuqtadan qo`ydik, ya'ni ko`chirdik.



4-chizma

Vektorlarni qo'shish, ayirish va vektorni songa ko'paytirish amallari vektorlar ustidagi chiziqli amallar deyiladi.

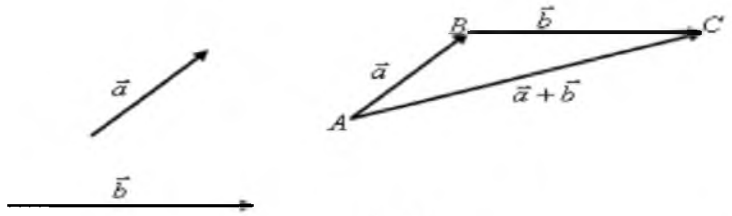
Ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ***vektorlarning yig`indisi*** deb, ixtiyoriy $A$ nuqtadan $\vec{a}$ vektorni qo`yib, uning oxiri B nuqtaga $\vec{b}$ vektorni qo`yganda boshi $\vec{a}$ vektorning boshi $A$ nuqtada oxiri $\vec{b}$ vektorning oxiri $C$ nuqtada bo`lgan $\overline{AC}$ vektorga aytiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig`indisi $\vec{a}+\vec{b}$ kabi belgilanadi[1]. (5-chizma)

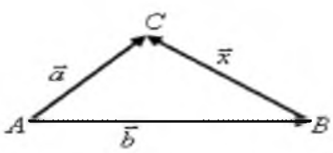
Vektorlarni qo`shish ta'rifidan istalgan $A$, $B$ va $C$ uchta nuqta uchun $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ tenglik o`rinli bo`ladi. Bu tenglikni vektorlarni qo`shishning uchburchak qoidasi deyiladi.

Ta'rif. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ***vektorlarning ayirmasi*** deb, shunday $\vec{x}$ vektorga aytiladiki, ular uchun $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$ tenglik o`rinli bo`ladi.

U holda $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$. (6- chizma)



5-chizma



6-chizma

Ikkita vektorning ayirmasi hamma vaqt mavjud va bir qiymatli aniqlanishini isbotlash mumkin.

Ta'rif. $\vec{a}\neq\vec{0}$ vektorning $\alpha\in R$ ***songa ko`paytmasi*** deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{p}$ ga aytiladi va $\vec{p}=\alpha\cdot\vec{a}$ ko`rinishda yoziladi:

1) $|\vec{p}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|$;

2) $\vec{p}$ vektor $\vec{a}$ ga kollinear.

3) agar α >0 bo`lsa $\vec{p}$ va $\vec{a}$ vektorlar bir xil yo`nalgan, agar α <0 bo`lsa, $\vec{p}$ va $\vec{a}$ vektorlar qarama- qarshi yo`nalgan bo`ladi[2].

[1] *College Geometry.Csaba Vincze and Lasrlo Kozma. March 27, 2014 pp 195-196 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.*

[2] *College Geometry.Csaba Vincze and Lasrlo Kozma. March 27, 2014 197-198 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.*

Xossalari

Vektorlarni *qo`shish* va *songa ko`paytirish* quyidagi xossalarga ega:

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (qo`shishga nisbatan kommutativ, o'rin almashtirish)

2°. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (qo`shishga nisbatan assotsiativ, guruhlash)

3°. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun shunday $\vec{0}$ vektor mavjudki, ular uchun: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

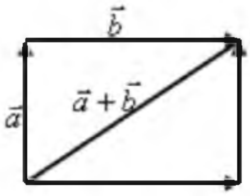
4°. Har bir $\vec{a}$ vektor uchun shunday $-\vec{a}$ vektor mavjudki, ular uchun $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ (bunda $-\vec{a}$ ni $\vec{a}$ ga qarama-qarshi vektor deyiladi).

5°. Ixtiyoriy ikki haqiqiy α, β son va ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun: $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

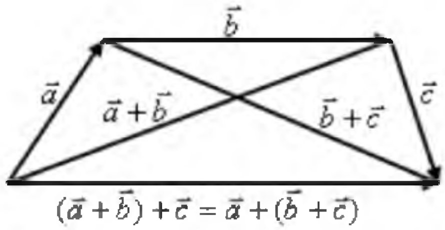
6°. Ixtiyoriy ikki haqiqiy α, β son va ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun: $(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})$

7°. Ixtiyoriy α haqiqiy son va ixtiyoriy $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar uchun: $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$

8^0. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot 1=\vec{a}$



7-chizma



8-chizma

Isbot. 1^0, 2^0- xossalarning isbotini 7, 8- chizmalardan ko`rish mumkin.

3^0 va 8^0 xossalar ravshan. 4^0 xossaga qaraylik. Agar $\vec{a}=\overline{MN}$ bo`lsa, $-\vec{a}$ sifatida $\overline{NM}$ ni olish mumkin. Vektorlarni qo`shish ta'rifiga asosan $\vec{a}+(-\vec{a})=\overline{MN}+\overline{NM}=\overline{MM}=\vec{0}$

5^0, 6^0, 7^0 xossalarning isbotini talabalar mustaqil ish sifatida o`rganadilar.

Vektorlarning chiziqli bog'liqligi

Ixtiyoriy $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ... \vec{a}_n$ (1) vektorlar sistemasi va $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n$ haqiqiy sonlar berilgan bo`lsin.

$$\vec{p} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n \qquad \dots\dots\dots (2)$$

vektorni berilgan (1) vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi. Bunda $\vec{p}$ vektor (1) vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalangan, $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar chiziqli kombinatsiya koeffisiyentlari deyiladi. Agar koeffisiyentlarning kamida bittasi noldan farqli bo`lganda

$$\vec{p} = 0 \qquad (3)$$

bo`lsa, u holda (1) vektorlar sistemasi *chiziqli bog`liq* deyiladi.

Agar (3) tenglik $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlarning hammasi nolga teng bo`lgandagina o`rinli bo`lsa, (1) vektorlar sistemasi chiziqli erkli deyiladi.

Teorema. Agar (1) vektorlar sistemasining biror vektori nol vektor bo`lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bog`liq bo`ladi.

Isbot. Faraz qilaylik $\vec{a}_k = \vec{0}$ bo`lsin, u holda $\alpha_k \neq 0, \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$ sonlar uchun $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ munosabat o`rinli bo`ladi. Demak, ta'rifga asosan (1) vektorlar sistemasi chiziqli bog`liq.

Quyidagi teoremalarni mustaqil (talabalar o`zlari) isbotlab ko`ring:

Teorema. Agar (1) vektorlar sistemasi chiziqli bog`liq bo`lsa, sistemaning kamida bitta vektori uning qolgan vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi.

Teorema. Ikkita vektor chiziqli bog`liq bo`lishi uchun ularning kollinear bo`lishi zarur va yetarli.

Teorema. Uchta vektor chiziqli bog`liq bo`lishi uchun ularning komplanar bo`lishi zarur va yetarli.

Vektor fazo va basis

Fazodagi barcha vektorlar to`plamini $V$ bilan belgilaymiz, unda vektorni qo`shish va ayirish, vektorni songa ko`paytirish amallari aniqlangan.

V vektorlar to`plami dastlabki teoremada aytilgan sakkizta xossani qanoatlantirsa, u holda $V$ vektorlar to`plami vektor fazo yoki chiziqli fazo deyiladi.

1. Vektor fazoning bazisi. Vektor fazoda ma'lum tartibda olingan chiziqli erkli vektorlar

$$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \qquad (4)$$

berilgan bo`lsin.

Vektor fazoning har bir vektori (4) vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalansa, (4) sistema vektor fazo bazisi deyiladi, ya'ni $\forall\vec{a}\in V,\quad \vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+...+\alpha_n\vec{e}_n$

Agar bazis vektorlarning har bir vektori birlik vektor bo`lib, ularning har ikkitasi o`zaro perpendikulyar bo`lsa, bunday bazisni ortogonal bazis deyiladi.

Bazis vektorlar soni vektor fazoning o`lchovi deyiladi.

2.Vektorlarning berilgan bazisga nisbatan koordinatalari va ularning xossalari.

V_3 uch o`lchovli chiziqli fazo va uning $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis vektorlari berilgan bo`lsin, u holda ta'rifga ko`ra bu fazoning har bir $a\in V_3$ vektorini

$$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3 \qquad (5)$$

ko`rinishda yozish mumkin. $x, y,\ z\in R$ (5) ifodani $\vec{a}$ ning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis vektorlar bo`yicha yoyilmasi deyiladi.

Teorema. Vektor fazoning ixtiyoriy vektori tanlab olingan bazis vektorlarga nisbatan yagona yoyilmaga ega.

Isbot. Faraz qilaylik, $\vec{a}$ vektor bazis $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \vec{e}_3$vektorlar bo`yicha

$$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3 \qquad (6)$$

yoyilmadan tashqari, ikkinchi bir

$$\vec{a}=x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2+z'\vec{e}_3 \qquad (7)$$

yoyilmaga ham ega bo`lsin. (6) tenglikdan (7) tenglikni hadlab ayirib quyidagiga ega bo`lamiz: $(x-x')\vec{e}_1+(y-y')\vec{e}_2+(z-z')\vec{e}_3=\vec{0}$.

$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ vektorlar chiziqli erkli bo`lgani uchun: $x-x'=0$, $y-y'=0$, $z-z'=0$. Bundan $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$, demak, yoyilma yagona.

(6) yoyilmadagi *x, y, z* haqiqiy sonlar $\vec{a}$ vektorning ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) bazis vektorlarga nisbatan koordinatalari deyiladi va $\vec{a}(x, y, z)$ ko`rinishda yoziladi. Shunday qilib, $\vec{a}(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3$

Natija. Nol vektorning har qanday bazisga nisbatan koordinatalari nolga teng: $\vec{0}$ (0, 0, 0).

V_3 vektor fazoda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o`zining bazis ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) vektorlariga nisbatan ushbu koordinatalarga ega bo`lsin:

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \vec{a} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$$

$$\vec{b}(x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \vec{b} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3$$

1. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni qo`shamiz (ayiramiz).

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3) \pm (x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3)$$

Bu tenglikdan vektorlarni qo`shish (ayirish) xossalariga ko`ra

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2)\vec{e}_1 + (y_1 \pm y_2)\vec{e}_2 + (z_1 \pm z_2)\vec{e}_3 .$$

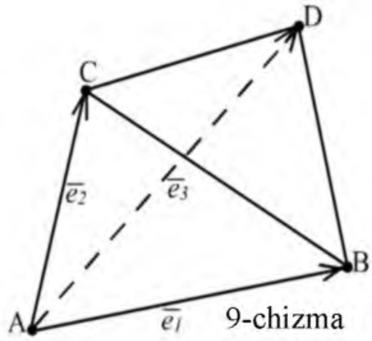
Bundan $(\vec{a} \pm \vec{b})[(x_1 \pm x_2), (y_1 \pm y_2), (z_1 \pm z_2)]$.

Demak, ikki vektor yig`indisining (ayirmasining) koordinatalari qo`shiluvchi (ayriluvchi) vektorlar mos koordinatalarning yig`indisidan (ayirmasidan) iborat.

2. $\vec{a}$ ning λ songa ko`paytmasi, ya'ni $\vec{p} = \lambda\vec{a}$ vektorning koordinatalari

$$\vec{p} = \lambda\vec{a}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \qquad \text{bo'ladi.}$$

Masala: *ABCD* tetraedrning qirralaridan iborat $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ larni bazis vektor deb olib, $\overrightarrow{BC}$ ning shu vektorga nisbatan koordinatalarini toping.



9-chizma

Yechish. $\overrightarrow{AB} = e_1$, $\overrightarrow{AC} = e_2$ va $\overrightarrow{AD} = e_3$ belgilaymiz.

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{e}_2 - \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (-1)\vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 ; \quad \overrightarrow{BC}\ (-1;\ 1;\ 0) .$$

Misollar. $\vec{a}(3,\ -2,\ 1)$, $\vec{b}(-1,\ 0,\ -2)$ va $\vec{c}(1,\ 2,\ 0)$ vektorlar berilgan. $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $3\vec{a}$, $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{c}$ vektorlarning koordinatalarini aniqlang.

Yechish: $\vec{a} + \vec{b} = (3 + (-1));\quad (-2) + 0;\quad (\vec{a} + \vec{b})(2;\ -2;\ -1); \vec{b} - \vec{c}$ vektor koordinatalari $(\vec{b}-\vec{c})(-2;\ -2;\ -2)$; $3\vec{a}(3;\ -2;\ 1)=\vec{a}(9;\ -6;\ 3)$;

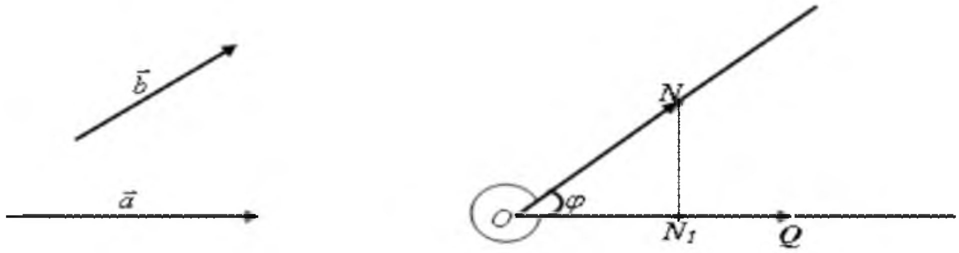
$$\vec{p}=(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-3\vec{c})(3-\frac{1}{2}-3;\ \ -2+\frac{1}{2}\cdot 0-3\cdot 2;\ 1+\frac{1}{2}(-1)-3\cdot 0)$$

Bundan $\quad \vec{p}(-\frac{1}{2},\ -8,\ 0)$.

13.2. Vektorlarning skalyar ko`paytmasi

Yuqorida, vektorlar ustidagi chiziqli amallar: vektorlarni qo`shish va ayirish, vektorni songa ko`paytirish bilan tanishdik. Endi chiziqli bo`lmagan yangi amal, vektorni skalyar ko`paytirish amali bilan tanishaylik.

Fazoda (yoki tekislikda) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo`lsin. $O$ nuqtaga $\vec{a}=\overline{OQ},\vec{b}=\overrightarrow{ON}$ vektorlarni qo`yamiz (10-chizma).



10-chizma

O, Q, N nuqtalar orqali aniqlangan tekislikda *OQ* va *ON* nurlar yordamida ikkita burchak aniqlanadi, bulardan biri φ ikkinchisi $2\pi-\varphi$.

Bu burchaklarning eng kichigi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deb aytiladi va $(\vec{a}\ \vec{b})=\varphi$ ko`rinishda belgilanadi.

Ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusini ko`paytirishdan hosil bo`lgan son bu ***vektorlarning skalyar ko`paytmasi*** deb aytiladi[1].

Vektorlarning skalyar ko`paytmasi $\vec{a}\cdot\vec{b}$ yoki $(\vec{a}\vec{b})$ ko`rinishida yoziladi. Ta'rifga ko`ra,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi \qquad (8)$$

[1] *College Geometry.Csaba Vincze and Lasrlo Kozma. March 27, 2014199-200 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.*

Misol. $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4$ bo'lib, $\varphi=60^0$ bo`lsa, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ni toping.

Yechish: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi=3\cdot4\cos60^0=12\cdot\dfrac{1}{2}=6$.

Natija. Nol vektorning har qanday vektorga skalyar ko`paytmasi nolga teng.

Skalyar ko`paytmaning xossalari

1^0. Ixtiyoriy ikkita vektor uchun: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

Isbot. 1^0-xossani isbotlaylik.

Ta'rifga ko`ra . $\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})\\ \vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{a})\end{array}$

Kosinus juft funksiya ekanini e'tiborga olsak, u holda $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2^0. Ixtiyoriy uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar uchun: $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$;

3^0. Ixtiyoriy ikkita $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar va ixtiyoriy haqiqiy λ son uchun: $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

Isbot. Skalyar ko`paytma ta'rifiga ko`ra $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=|\lambda\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\lambda\vec{a},\vec{b})$, lekin $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ va $\cos(\lambda\vec{a},\vec{b})=\cos(\vec{a}\,\vec{b})$. Shuning uchun $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

4^0. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

$\vec{a}\cdot\vec{a}$ coni $\vec{a}$ vektorning skalyar kvadrati deyiladi va $\vec{a}^2$ kabi belgilanadi. $\sqrt{\vec{a}^2}$ soni $\vec{a}$ vektorning uzunligi deyiladi va $|\vec{a}|$ bilan belgilanadi.

Isbot. Skalyar ko`paytma ta'rifidan

$$\vec{a}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{a})=|\vec{a}|^2\cos0^0=|\vec{a}| \qquad |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}.$$

5^0. Agar $\vec{a}=0$ bo`lsa, $\vec{a}^2=0$.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar perpendikulyar bo`lsa, skalyar ko`paytma nolga teng:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\vec{b}=0 \qquad (9)$$

Buning isboti ta'rifdan kelib chiqadi.

6^0. Ortanormallangan $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ bazis uchun

$$\vec{e}_i\,\vec{e}_j=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases} \quad i,\ j=1,\ 2,\ 3 \qquad (10)$$

Haqiqatan skalyar ko`paytma ta'rifidan

$$\vec{e}_i\,\vec{e}_j=|\vec{e}_i|\,|\vec{e}_j|\cos(\vec{e}_i\,\hat{}\,\vec{e}_j)=1\cdot1\cos\frac{\pi}{2}=0$$

Xususiy holda

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = |\vec{e}_i|^2 = 1 \qquad (11)$$

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning skalyar ko`paytmasi.

Uch o`lchovli vektor fazoda ortonormal bazis $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ berilgan bo`lsin, bu bazisga nisbatan $\vec{a}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{b}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ koordinatalarga ega:

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$$

$$\vec{b} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasini hisoblashda (9) va (11) larni e'tiborga olsak, quyidagilarga ega bo`lamiz.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3)\cdot(x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Ta'rif. Koordinatalari bilan berilgan ikkita vektorning skalyar ko`paytmasi bu vektorlar mos koordinatalari ko`paytmasining yig`indisiga teng:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \qquad (12)$$

Natijalar. 1) $\vec{a}(x,\ y,\ z)$ vektor uzunligi

$$(|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}} \qquad (13)$$

2) ikki $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak (8) ga ko`ra,

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \qquad (14)$$

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo`lsa, bu vektorlar orasidagi burchak ushbu formula bilan aniqlanadi.

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2}}} \qquad (15)$$

3) $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ va $\vec{a} = \{b_1, b_2, b_3\}$ vektorlarning perpendikulyarlik sharti (9) formula bo`yicha quyidagicha aniqlanadi:

$$a_1b_1 + a_3b_3 + a_3b_3 = 0 \qquad (16)$$

1-misol. $\vec{a}(2,2,3), \vec{b}(2,-2,0), \vec{c}(5,-1,4)$ vektorlarning qaysi jufti perpendikulyar?

Yechish. $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ skalyar ko`paytmalarini tekshiramiz:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 3\cdot 0 = 4 - 4 + 0 = 0$; $\vec{a}\cdot\vec{c} = 10 - 2 + 12 = 20$; $\vec{b}\cdot\vec{c} = 10 + 2 + 0 = 12$.

Bundan $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2-misol. $\vec{a}(3,5)$, $\vec{b}(2,-1)$ vektorlarning skalyar ko`paytmasini aniqlang.

Yechish: $(\vec{a},\vec{b}) = 3\cdot 2 + 5\cdot(-1) = 1$.

3-misol: $\vec{a}(1,2)$, $\vec{b}(1,-\frac{1}{2})$ vektorlar tashkil qilgan burchakni aniqlang:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{0}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{5}{4}}} = 0; \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} = 90^0$$

4-misol: $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 5,\ (\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$ **;** $a|\vec{a}+\vec{b}| - ?$

Yechish:

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2(\vec{a}\vec{b}) + \vec{b}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + |\vec{b}|^2} =$$

$$\sqrt{9 + 25 + 2\cdot 15\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{34-15} = \sqrt{19}$$

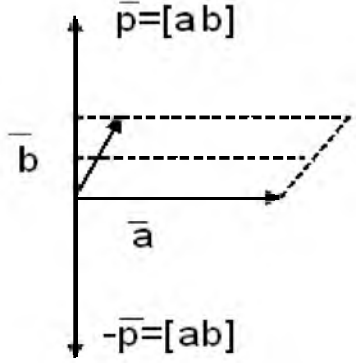
Vektorlarning vektor va aralash ko`paytmasi

Ta'rif. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ ***vektorlarning vektor ko`paytmasi*** deb, quyidagi uchta shartni qanoatlantiruvchi $\bar{p}$ vektorga aytiladi[1]:

1. $|\bar{p}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin(\bar{a};\hat{}\,\bar{b})$
2. $\bar{p} \perp \bar{b}$
3. $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{p}$ vektorlar umumiy boshga keltirilib, $\bar{p}$ uchidan $\bar{a}$, $\bar{b}$ vektorlar yotgan tekislikka qaraganda $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ tomonga qarab eng qisqa yo`l bilan burilish soat mili harakatiga teskari bo`lsin.

[1] *College Geometry.Csaba Vincze and Lasrlo Kozma. March 27, 2014 201-202 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.*

Ikki vektorning vektor ko`paytmasi $\bar{p} = [\bar{a},\bar{b}]$ ko`rinishda belgilanadi.



Ta'rifda keltirilgan shartlarning geometrik ma'nosini aniqlaylik.

1-shart. $\bar{p}$ ning uzunligi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ larga qurilgan parallelogramm yuzi necha kvadrat birlik bo`lsa, shuncha uzunlik birligiga teng, chunki $|\bar{a}|\,|\bar{b}|$ sin ($\bar{a}$;^$\bar{b}$) parallelogram yuzidir.

2-shart. Vektor ko`paytma (natija) $\bar{a}$ va $\bar{b}$ lar bilan aniqlanadigan tekislikka perpendikulyar ekanligini bildiradi.

3-shart. Vektor ko`paytmaning yo`nalishini aniqlaydi.

Ikki vektorning vektor ko`paytmasi quyidagi xossalarga ega:

1°. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar parallel bo`lsin, ya'ni $\bar{a} \,//\, \bar{b}$ bo`lsa, yoki birortasi nol vektor bo`lsa, $\bar{a}\,^\wedge\bar{b}$ =0 yoki $\bar{a}\,^\wedge\bar{b}$ =180$^0$ bo`lib,

sin ($\bar{a}\,^\wedge\bar{b}$)=0; $|\bar{p}|$=0 $\Rightarrow \bar{p}$ $[\bar{a},\bar{b}]$=0 bo`ladi.

2°. $[\bar{a},\bar{b}]$= - $[\bar{b},\bar{a}]$, ya'ni vektor ko`paytma antikommutativdir,

$\bar{p}$ |= |- $\bar{p}$ |. 1- 2-shartlarga asosan $|[\bar{a},\bar{b}]|$= |-$[\bar{b},\bar{a}]$| bo`lib, hosil bo`lgan vektorlarning uzunliklari teng va ikkalasi ham bitta tekislikka perpendikulyar ekanini bildiradi. Yo`nalishlari esa 3-shartga asosan qarama-qarshi bo`ladi.

3°. $[(\bar{a}+\bar{b}),\bar{c}] = [\bar{a},\bar{c}] + [\bar{b},\bar{c}]$ qo`shishga nisbatan taqsimot qonuniga bo`ysunadi. $[\bar{c},(\bar{a}+\bar{b})] = [\bar{c},\bar{a}] + [\bar{c},\bar{b}]$

4°. $\forall\alpha \in R$ uchun $[\lambda\bar{a},\bar{b}] = \lambda\,[\bar{a},\bar{b}] = [\bar{a},\lambda\bar{b}]$

Haqiqatan $[\lambda\bar{a},\bar{b}]$ va $\lambda\ [\bar{a},\bar{b}]$ vektorlarning modullari teng bo`lib, yo`nalishlari esa λ >0 bo`lganda $[\bar{a},\bar{b}]$ vektor bilan bir xil, $\lambda$ <0 bo`lganda esa $[\bar{a},\bar{b}]$ ning yo`nalishiga qarama- qarshi bo`ladi.

Endi dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan berilgan *vektorlarning vektor ko`paytmasini* qaraylik. Dastlab bazis vekltorlarni vektor ko`paytmasini qaraylik.

$$[\bar{i},\bar{i}]=0,\quad [\bar{j},\bar{j}]=0,\quad [\bar{k},\bar{k}]=0 \qquad (1) \qquad \text{ta'rifga ko`ra .}$$

$$\left|[\bar{i},\bar{j}]\right|=|\bar{i}||\bar{j}|\sin 90^0=1*1*1=1,\quad \bar{i}\perp\bar{k},\ \bar{j}\perp\bar{k} \text{ ekanligidan } [\bar{i},\bar{j}]=\bar{k}$$

Shunga o`xshash $\left.\begin{array}{l}[\bar{k},\bar{i}]=\bar{j},[\bar{j},\bar{k}]=\bar{i}\quad bo'lib,\\ [\bar{j},\bar{i}]=-\bar{k},[\bar{k},\bar{j}]=-\bar{i},[\bar{i},\bar{k}]=-\bar{j}\ bo'ladi.\end{array}\right\}\quad (2)$

Koordinatalari bilan berilgan $\bar{a}$ $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ va $\bar{b}$ $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ vektorlarning vektor ko`paytmasini ko`rib o`taylik.

$$\bar{a}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k};\quad \bar{b}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$$

$$[\bar{a},\bar{b}]=[x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k},x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}]=x_1x_2\ [\bar{i},\bar{i}]+x_1y_2\ [\bar{i},\bar{j}]+x_1z_2\ [\bar{i},\bar{k}]+y_1x_2\ [\bar{j},\bar{i}]+y_1y_2\ [\bar{j},\bar{j}]+y_1z_2\ [\bar{j},\bar{k}]+z_1x_2\ [\bar{k},\bar{i}]+z_1y_2\ [\bar{k},\bar{j}]+z_1z_2\ [\bar{k},\bar{k}]=$$

$$=0+x_1y_2\bar{k}-x_1z_2\bar{j}-y_1x_2\bar{k}+0+y_1z_2\bar{i}+z_1x_2\bar{j}-z_1y_2\bar{i}+0=\bar{i}(\ y_1z_2-z_1y_2\ )+\bar{j}(\ z_1x_2-x_1z_2)+\bar{k}(\ x_1y_2-x_2y_1)=\bar{i}\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}+\bar{j}\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

Demak, $[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$ ifoda koordinatalari bilan berilgan vektorlarni vektor ko`paytmasini beradi.

$$[\bar{a},\bar{b}]\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right) \text{ bu uning koordinatalari.}$$

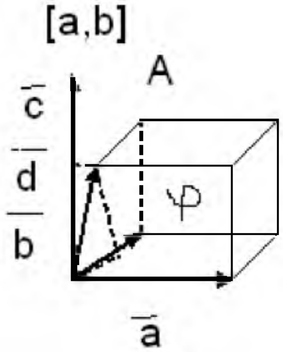
Vektor ko`paytma ta’rifidagi 3-shartni e’tiborga olsak, uchburchak yuzasini hisoblash formulasi quyidagi ko`rinishda bo`ladi $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|$.

Uch vektorning aralash ko`paytmasi

Uchta $\bar a, \bar b, \bar c$ vektorlar berilgan bo`lsin.

Ta'rif. Birinchi ikki vektorning vektor ko`paytmasidan iborat vektorlarni uchinchi vektorga skalyar ko`paytirishdan hosil qilingan son shu uch vektorning aralash ko`paytmasi $\left([\bar a, \bar b], \bar c\right)$ deb ataladi[1].

Faraz qilaylik $\bar a, \bar b, \bar c$ vektorlar O nuqtadan qo`yilgan bo`lib, komplanar bo`lmasin va o`ng uchlikni hosil qilsin.



Qirralari shu vektorlardan iborat parallelepipedni yasasak, $\left|[\bar a, \bar b]\right|$ miqdor parallelepiped asosining yuzini beradi. So`ng $\left([\bar a, \bar b] * \bar c\right)$ skalyar ko`paytma ta'rifiga ko`ra $\left|[\bar a, \bar b]\right| * |\bar c| \cos\varphi;\ \varphi = \left([\bar a, \bar b] \hat{,}\ \bar c\right)$ va $|\bar c|\cos\varphi = H$ bo`lib, parallelepiped balandligiga teng. Demak, $\left([\bar a, \bar b], \bar c\right)$=S$_{as}$ *H=$\pm v$ bo`lib, bu son parallelepiped hajmini aniqlaydi.

Faraz qilaylik, vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo`lsin, ya'ni

$$\bar a = x_1 \bar i + y_1 \bar j + z_1 \bar k,\ \bar b = x_2 \bar i + y_2 \bar j + z_2 \bar k,\ \bar c = x_3 \bar i + y_3 \bar j + z_3 \bar k.$$

$$[\bar a, \bar b] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \bar i \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \bar j \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar k \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Demak, $[\bar a, \bar b]$ vektorning koordinatalari:

$\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$ bo`lib, buni $\bar c$ vektorga skalyar ko`paytirsak, mos koordinatalar ko`paytmalarining yig`indisiga teng bo`ladi, ya'ni :

---

[1] *College Geometry.Csaba Vincze and Lasrlo Kozma. March 27, 2014 203-204 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.*

$$\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right)=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Hosil bo`lgan formula koordinatalari bilan berilgan **uch vektorning aralash ko`paytmasini hisoblash formulalari** bo`ladi.

Ma'lumki, tetraedrning hajmi tetraedrning bir uchidan chiqqan uchta qirrasiga qurilgan parallelepiped hajmining $\frac{1}{6}$ qismiga teng bo`lgani uchun uning hajmini quyidagi formula yordamida hisoblash mumkin

$$V_{tet}=\frac{1}{6}V_{par-d}=\frac{1}{6}\left(\left[\bar{a};\bar{b}\right],\bar{c}\right)$$

Uch vektorning aralash ko`paytmasi quyidagi **xossalarga** ega:

1^0. $\left(\left[\bar{a};\bar{b}\right],\bar{c}\right)=\left(\bar{a},\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right)=\left(\overline{abc}\right)=\left(\overline{cab}\right)=\left(\overline{bca}\right)=-\left(\overline{bac}\right)=-\left(\overline{acb}\right)=-\left(\overline{cba}\right)$

Haqiqatan, $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$; $\bar{c},\bar{a},\bar{b}$; $\bar{b},\bar{c},\bar{a}$ vektorlarga qurilgan parallelepiped hajmlari qiymati teng.

2^0 . $\forall\alpha\in R$ uchun $(\lambda\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\lambda(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$

3^0. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ komplanar bo`lsa, ya'ni bir tekislikda yotsa, u holda $\left(\left[\overline{ab}\right]\bar{c}\right)=0$ bo`ladi. Demak, uchta vektorning komplanarlik sharti $\overline{abc}=0$ va aksincha.

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. Vektorga ta'rif bering.
2. Qanday vektorlar komplanar vektorlar deyiladi?
3. Qanday vektorlar kollinear vektorlar deyiladi?
4. Vektorlar ustidagi chiziqli amallarni tushuntiring.
5. Vektorlarning skalyar ko`paytmasini tushuntiring.
6. Vektorlarning vektor va aralash ko`paytmasini misollarda tushuntiring.
7. Vektorning uzunligi deb nimaga aytiladi?
8. Vektorni songa ko`paytirishning xossalarini ayting.
9. Vektor koordinatalari deb nimaga aytiladi?
10. $\vec{a}(8,1)$, $\vec{b}(2,-2)$ vektorlar orasidagi burchakni aniqlang
11. $\vec{a}(3,-5)$, $\vec{b}(-1,1)$ vektorlar yig`indisi modulini aniqlang.

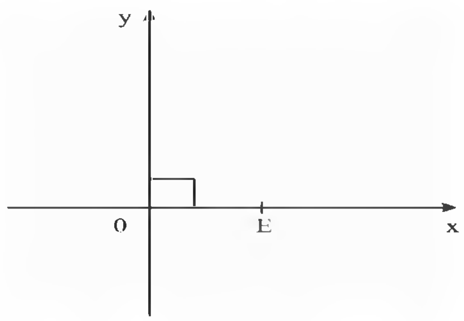
12. $\vec{a}(2,3)$, $\vec{b}(0,1), \vec{c}(1,0)$ vektorlar berilgan. $\vec{P} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}}{2}$ vektorning koordinatalarini aniqlang.

14-§. Tekislik va fazoda ikki nuqta orasidagi masofa

Tayanch iboralar: *vektor, vektor fazo, chiziqli amallar, skalyar ko`paytma, vektor va aralash ko`paytma, koordinatalar sistemasi, tekislik, fazo, ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo`lish*

14.1. Tekislik va fazoda dekart koordinatalar sistemasi

Tekislikda to`g`ri burchakli dekart koordinatalari sistemasi quyidagicha kiritiladi: Tekislikda biror O nuqta olinib, undan koordinata o`qlari deb ataluvchi 2 ta o`zaro perpendikulyar Ox va Oy o`q o`tkaziladi



Bu yerdagi O nuqta koordinatalar boshi, Ox– absissalar o`qi, $Oy$– ordinatalar o`qi deyiladi. Bu sistemada masofalarni o`lchash uchun $OE$ masshtab birligi (masshtab-kesma) tanlanib, uning uzunligini 1 ga teng deb hisoblanadi. Uning yordamida koordinata o`qlaridagi har bir nuqtaga biror haqiqiy sonni mos qo`yish mumkin. (Bunda $Ox$ o`qning O nuqtadan o`ng tomonidagi qismiga musbat sonlar, chap tomonidagi qismiga manfiy sonlar, $O$ nuqtaga nol soni qo`yiladi; Oy o`qning $O$ nuqtadan yuqori tomonidagi qismiga musbat sonlar, quyi tomonidagi qismiga esa manfiy sonlar qo`yiladi).

Nuqtaning koordinatalari. Yuqorida kiritilgan to`g`ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi tekislikdagi har bir nuqtaning holatini aniqlash imkonini beradi. Nuqtaning tekislikdagi (yoki fazodagi) o`rnini aniqlovchi sonlarga shu nuqtaning koordinatalari deyiladi.

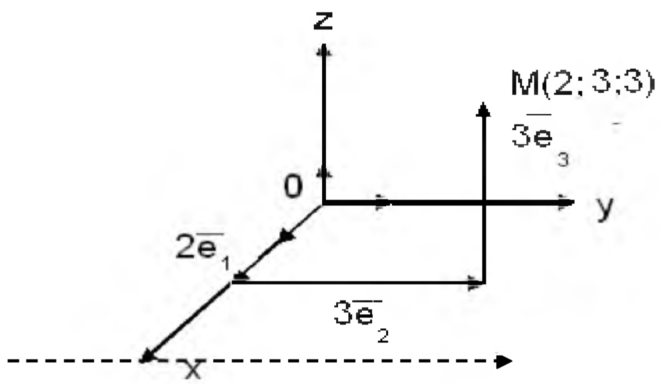
M nuqtaning absissasi va ordinatasi uning koordinatalari deb ataladi. Absissasi x va ordinatasi y bo`lgan $M$ nuqta $M(x;\ y)$ kabi yoziladi. Nuqtaning koordinatalari uning tekislikdagi holatini to`la aniqlaydi: haqiqiy sonlarning har bir (x,y) juftiga tekislikda bitta $M(x,y)$ nuqta mos keladi va aksincha, tekislikdagi har bir M nuqtaga x va y haqiqiy sonlarning bitta $(x;\ y)$ jufti mos keladi.

Ravshanki, xOy sistema tekislikni to`rtta qismga ajratadi. Bu qismlar choraklar (yoki kvadratlar) deb ataladi. Absissa va ordinatalari bir vaqtda musbat bo`lgan nuqtalar joylashgan qismni I chorak deb, soat strelkasi harakati yo`nalishiga teskari yo`nalishda, qolgan qismlarni II chorak, III chorak va IV chorak deb belgilab chiqiladi. Bu holda quyidagiga ega bo`lamiz:

	I	II	III	IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

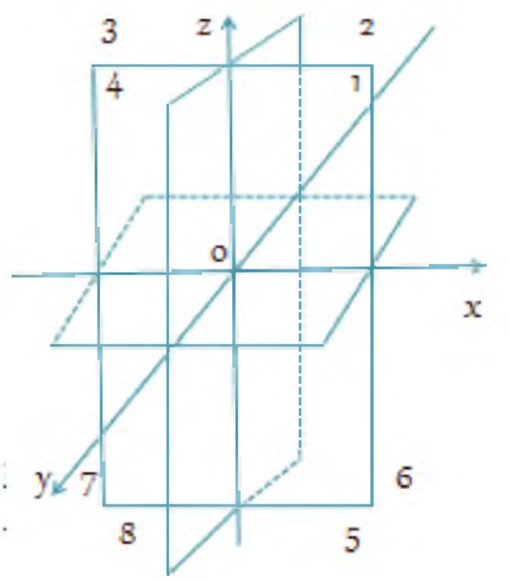
Fazoda dekart koordanatalar sistemasi berilganda, har bir M nuqtaga aniq bir $\overline{OM}$ vektorni doimo mos keltirish mumkin, ya'ni boshi O nuqtada, oxiri esa berilgan M nuqtada bo`lgan vektor: $\overline{OM}$ $(x;y;z) \Leftrightarrow M(x;y;z)$ $M$ nuqtaning affin reperdagi koordinatalari bo`ladi. Demak, fazodagi nuqtalar to`plami bilan ma'lum tartibda olingan haqiqiy sonlar uchliklari to`plami orasida ikki tomonlama moslik mavjud.

Fazoda koordinatalar sistemasiga nisbatan berilgan M nuqta uchun $\overline{OM}$ radius vektor deb ataladi va $\overline{OM} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3$ yoziladi.



Umuman $M(a;b;c)$ nuqtani yasash uchun Ox o`qida $a\overline{e}_1$ ni uning oxiridan $Oy$ o`qqa parallel holda $b\,\overline{e}_2$ ni, uni oxiridan Oz o`qqa parallel holda $c\bar{e}_3$ yasaladi. Shu vektorning oxirgi uchi izlangan nuqta bo`ladi.

Bitta O nuqtada keshishadigan va bir xil nasshtab birligiga ega bo'lgan uchta o'zaro perpendikulyar Ox, Oy va Oz o'qlar fazoda to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasini aniqlaydi va $Oxyz$ ko'rinishda belgilanadi.



Bunda O niqta koordinatalar boshi, Ox – absissalar o'qi, Oy – ordinatalar o'qi, Oz – aplikatalar o'qi deyiladi.

Uchta koordinata tekisligi fazoni 8 ta oktantalarga ajratadi. Quyidagi jadvalda fazoda berilgan nuqtaning oktantalardagi ishoralari ko`rsatilgan:

Oktantalar / Koordinatalar	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

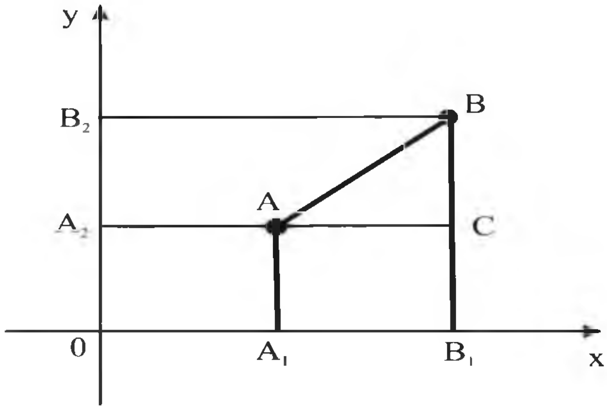
14.2. Tekislik va fazoda ikki nuqta orasidagi masofa

Aytaylik, xOy koordinata tekisligida ikkita $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ nuqtalar berilgan bo`lsin.

AB masofani A va B nuqtalarning koordinatalari orqali ifodalovchi formulani keltirib chiqarish masalasini qaraymiz.

A nuqtadan koordinata o`qlariga mos ravishda $AA_1$ va $AA_2$ perpendikulyarlarni tushiramiz. U holda $OA_1=x_1$ va $OA_2=y_1$ bo`ladi. Shuningdek, B nuqtadan o`qlarga $BB_1$ va $BB_2$ perpendikulyarlarni tushiramiz. Bu holda $OB_1=x_2$ va $OB_2=y_2$ bo`ladi. A nuqta orqali Ox

o`qqa parallel to`g`ri chiziq o`tkazamiz. Bu to`g`ri chiziq BB_1 to`g`ri chiziq bilan C nuqtada kesishadi.



ABC to`g`ri burchakli uchburchakdan foydalanamiz. Pifagor teoremasiga ko`ra

$$AB^2=AC^2+BC^2$$

AC va BC kesmalarni A va B nuqtalarning koordinatalari orqali ifodalaymiz:

$$AC = A_1B_1 = OB_1 - OA_1 = x_2 - x_1,$$
$$BC = A_2B_2 = OB_2 - OA_2 = y_2 - y_1.$$

Demak,

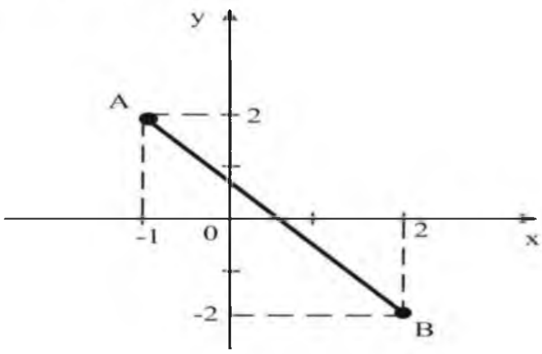
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

bo`ladi. Bu formula tekislikdagi to`g`ri burchakli koordinatalar sistemasida berilgan **ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi** deb ataladi va amaliyotda keng qo`llaniladi.

Misol. A(-1,2) va B (2,-2) nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. $x_1 = -1, y_1 = 2, x_2 = 2, y_2 - 2$ ekanligini e'tiborga olib, (1) formuladan quyidagiga ega bo`lamiz:

$$AB = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ (uz.birl.)}$$



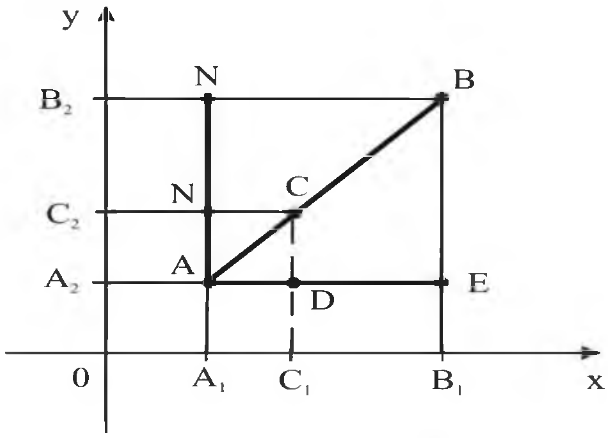
***Kesmani berilgan nisbatda bo`lish.*** Aytaylik, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ nuqtalar va $\lambda$ son berilgan bo`lsin. AB kesmani λ nisbatda bo`lish masalasini qaraymiz, ya'ni A va B nuqtalar orasida yotuvchi shunday C nuqtani topish kerakki,

$$\frac{AC}{CB}=\lambda$$

bo`lsin, C nuqtaning koordinatalarini (x,y) deylik. x va y larni A va B nuqtalarning koordinatalari va λ paramert orqali ifodalovchi ushbu

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ \ (\lambda\neq -1)$$

formulalarni keltirib chiqaramiz. Bu formulalar **kesmani λ nisbatda bo`lish** formulalari deb ataladi



A, C va *B* nuqtalardan *Ox* va *Oy* o`qlarga perpendikulyarlar tushiramiz. U holda $OA_1=x_1$, $OC_1=x$, $OB_1=x_2$, $OA_2=y_1$, $OC_2=y$, $OB_2=y_2$ bo`ladi. A nuqta orqali Ox o`qqa parallel to`g`ri chiziq o`tkazamiz. Bu to`g`ri chiziq CC_1 to`g`ri chiziq bilan esa D nuqtada kesishadi. $\angle BAE$ burchakni qaraymiz. CD va BE parallel to`g`ri chiziqlar uning tomonlaridan proportsional kesmalar ajratadi (bu maktab elementar geometriya kursidan ma'lum):

$$\frac{AD}{DE}=\frac{AC}{CB}=\lambda\quad (*)$$

Endi AD va DE kesmalarni *A, B, C* nuqtalarning koordinatalari orqali ifodalaymiz:

$$AD=A_1C_1=OC_1-OA_1=x-x_1,$$
$$DE=C_1B_1=OB_1-OA_1=x_2-x.$$

U holda (*) dan:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda \Rightarrow x-x_1=\lambda x_2-\lambda x \Rightarrow (1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2 \Rightarrow x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};$$

Xuddi shunga o`xshash, isbot qilinadiki, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

Xususan, $\lambda=1$ desak, $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ bo`ladi.

Bu formulalar **kesmani teng ikkiga bo`lish formulalari** deyiladi.

Misol. Uchlari $A(1;\ 2)$, $B(0;\ 5)$, $C(-2;\ 3)$ nuqtalarda bo`lgan uchburchakning medianalari kesishgan nuqtasining koordinatalarini toping.

Yechish. AD mediana bo`lsin, u holda $D(x,\ y)$ nuqta $BC$ tomon o`rta nuqtasi bo`lib $x_D=-1$, $y_D=4$, $D(-1;\ 4)$ bo`ladi.

Uchburchak medianalar kesishgan nuqtasi $O(x,\ y)$ bo`lsin, u holda

$$\frac{AO}{OD}=\lambda=2:1,\quad \lambda=2$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{1+2(-1)}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{2+2\cdot 4}{3}=\frac{10}{3}$$

Demak, $O(-\frac{1}{3},\ \frac{10}{3})$.

Fazoda $M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalar berilgan bo`lsin, bu nuqtalar orasidagi masofani hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz.

$$\rho(M_1M_2)=\left|\overline{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Haqiqatan $\overline{OM_1}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$; $\overline{OM_2}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$

$$\overline{OM_2}-\overline{OM_1}=\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1)\bar{i}+(y_2-y_1)\bar{j}+(z_2-z_1)\bar{k}$$

$$\overline{M_1M}=\sqrt{\overline{M_1M}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. Kesmani berilgan nisbatda bo`lish nima?
2. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasini ayting.
3. Koordinatalar sistemasi qanday kiritiladi?
4. Fazodagi koordinatalar sistemasini choraklar bo`yicha ishoralarini ayting.
5. Dekart sistemasida qanday metrik masalalarni bilasiz?
6. $A(-1;2)$ va $B(2;6)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesmaning uzunligi nimaga teng?
7. Koordinatalar boshini *a)* $A(3;-4)$; *b)* $M(-5;-12)$ nuqtalar bilan tutashtiruvchi kesmaning uzunligini toping.
8. *B* nuqta *Oy* o`qda yotadi. *B* nuqtadan $A(3;-1)$ nuqtagacha bo`lgan masofa *5* ga teng. *B* nuqtani toping.
9. $A(6;-3)$ *va* $B(-2;-7)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesmaning o`rtasi bo`lgan *C* nuqtaning koordinatalarini hisoblang.
10. (1-15) Uchburchakning uchlarining koordinatalari *A*, *B* va *C* berilgan. Quyidagilarni topish talab qilingan:

1) *BC* tomon uzunligini; 2) *A* uchidan *BC* tomoniga tushirilgan *AD* balandlik tenglamasini; 3) *AD* balandlik uzunligini; 4) *CE* mediananing *E(x; y)* koordinatalarini; 5) uchburchakning perimetri, yuzasi *S* topilib shakli chizilsin.

1. A (3;6),	B) (15;-3),	C) (13;11)
2. A (-10;5),	B) (2;-4),	C) (0;10)
3. A (-4;12),	B) (8;3),	C) (6;17)
4. A (-3;10),	B) (9;1),	C) (7;15)
5. A (-7;4),	B) (5;-5),	C) (3;9)
6. A) (0;3),	B) (12;6),	C) (10;8)
7. A) (-5;9),	B) (7;0),	C) (15;14)
8. A) (-8;-3),	B) (4;-12),	C) (8;10)
9. A) (-5;7),	B) (7;-2),	C) (11;20)
10. A) (4;1),	B) (16;-8),	C) (14;6)

15-§. To`g`ri chiziq tenglamalari

Tayanch iboralar: *tekislik, fazo, to`g`ri chiziq, parametrik, umumiy, berilgan nuqtadan o`tuvchi va berilgan vektorga perpendikulyar, normal, burchak koeffitsiyentli, kesmalardagi tenglamalar, parallellik va perpendikulyarlik shartlari, ikki to`g`ri chiziq orasidagi burchak, nuqtadan to`g`ri chiziqqacha bo`lgan masofa.*

15.1. To`g`ri chiziq va uning tenglamalari

Umumiy boshlang`ich $O$ nuqtaga ega bo`lgan o`zaro perpendikulyar $Ox$ va $Oy$ koordinata o`qlari tekislikda to`g`ri burchakli Oxy koordinatalar sistemasini hosil qiladi. Oxy koordinatalar sistemasida ikkita x va y sonlari tekislikdagi har qanday M nuqtaning o`rnini to`liq aniqlaydi.

Bunda nuqta $M(x;y)$ kabi belgilanadi, x ga M nuqtaning *abssissasi*, y esa M nuqtaning *ordinatasi* deyiladi.

Oxy tekislikdagi chiziq tenglamasi deb aynan shu chiziq nuqtalarining x va y koordinatalari orasidagi bog`lanishni aniqlovchi ikki noma'lumli

$$F(x,y)=0$$

ko`rinishdagi tenglamaga aytiladi.

Shu kabi koordinatalari ikki noma'lumli $F(x,y)=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi Oxy tekislikning barcha $M(x;y)$ nuqtalari to`plamiga *tekislikda* shu tenglama bilan aniqlanuvchi *chiziq* deyiladi.

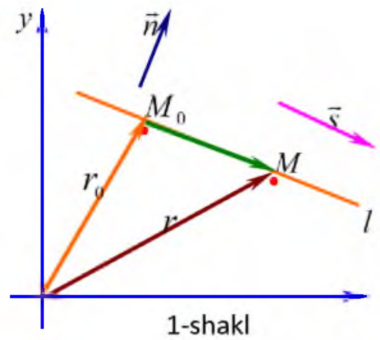
Ayrim hollarda tekislikdagi chiziq $y=f(x)$ tenglama bilan beriladi. Bunda chiziq $y=f(x)$ funksiyaning grafigi deb ataladi.

Shunday qilib, tekislikdagi har qanday chiziqqa ikki o`zgaruvchining biror $F(x,y)=0$ tenglamasi mos keladi va aksincha, ikki o`zgaruvchining har qanday $F(x,y)=0$ tenglamasiga, umuman olganda, tekislikdagi biror chiziq mos keladi.

Bunda «umuman olganda» iborasi aytilganlarda mustasnoga yo`l qo`yilishi mumkinligini bildiradi. Masalan, $(x-1)^2+(y-4)^2=0$ tenglamaga chiziq emas, balki $M(1;4)$ nuqta mos keladi; $x^2+y^2+3=0$

tenglamaga tekislik nuqtalarining hech bir geometrik o`rni mos kelmaydi.

To`g`ri chiziqning tekislikdagi o`rni turli parametrlar bilan bir qiymatli aniqlanishi mumkin. Masalan, to`g`ri chiziqda yotuvchi nuqta va to`g`ri chiziqqa perpendikulyar vektor bilan, to`g`ri chiziqning koordinata o`qlarida ajratgan kesmalari bilan va hokazo. Bunday parametrlar to`g`ri chiziqning tenglamalarini keltirib chiqarish uchun asos bo`ladi. Quyida berilgan parametrlariga ko`ra to`g`ri chiziq tenglamalarini keltirib chiqarish bilan tanishamiz [1],[2].



1-shakl

I. *To`g`ri chiziqda yotuvchi $M_0(x_0;y_0)$ nuqta va to`g`ri chiziqqa perpendikulyar bo`lgan $\vec{n}=\{A;B\}$ vektor berilgan.*

l to`g`ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani olamiz va $\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0\}$ vektorni yasaymiz (1-shakl).

Bunda $\vec{n}\perp\overline{M_0M}$ bo`ladi. Ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga asosan to`g`ri chiziq tenglamasini topamiz:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (1)$$

(1) tenglama ***berilgan nuqtadan o`tuvchi va berilgan vektorga perpendikulyar to`g`ri chiziq tenglamasi*** deyiladi.

To`g`ri chiziqqa perpendikulyar bo`lgan har qanday vektorga *to`g`ri chiziqning normal vektori* deyiladi.

Demak, $\vec{n}=\{A;B\}$ vektor (1) tenglama bilan aniqlanuvchi to`g`ri chiziqning normal vektori bo`ladi.

Misol. $M_1(2;3)$ va $M_2(-1;0)$ nuqtalardan o`tuvchi va $\overline{M_1M_2}$ vektorga perpendikulyar to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Avval $\overline{M_1M_2}$ vektorini topamiz:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1-2;0-3\}=\{-3;-3\}.$$

Bundan $A=-3,\ B=-3$.

Izlanayotgan to`g`ri chiziq tenglamasini (1) formula bilan tuzamiz:

$$-3(x-(-1))-3(y-0)=0$$

yoki $x+y+1=0$.

---

[1] Izu Vaisman. Analytical Geometry. Coryright, 1997. pp. 43-75

[2] **B. George, Jr.Thomas, Ross L Finney. Calculus and Analytic Geometry. Coryright, 1996. pp. 822-829**

II. *To`g`ri chiziqda yotuvchi* $M_0(x_0;y_0)$ *nuqta va to`g`ri chiziqqa parallel bo`lgan* $\vec{s}=\{p;q\}$ *vektor berilgan.*

l to`g`ri chiziqda yotuvchi $M_0(x_0;y_0)$ va $M(x;y)$ nuqtalardan $\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0\}$ vektorni yasaymiz (1-shakl).

Bunda $\vec{s}$ va $\overline{M_0M}$ vektorlar kollinear bo`ladi. Ikki vektorning kollinearlik shartidan quyidagini topamiz:

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}. \qquad (2)$$

(2) tenglama ***berilgan nuqtadan o`tuvchi va berilgan vektorga parallel to`g`ri chiziq tenglamasi*** deyiladi.

Shunindek, bu tenglama *to`g`ri chiziqning* ***kanonik tenglamasi*** deb ataladi.

To`g`ri chiziqqa parallel bo`lgan (yoki to`g`ri chiziqda yotuvchi) nolga teng bo`lmagan har qanday vektorga to`g`ri chiziqning *yo`naltiruvchi vektori* deyiladi.

Demak, $\vec{s}=\{p;q\}$ vektor (2) tenglama bilan aniqlanuvchi to`g`ri chiziqning yo`naltiruvchi vektori bo`ladi.

1-izoh. (2) tenglamadan to`g`ri chiziqning keltirilgan II shartni qanoatlantiruvchi boshqa tenglamalarini hosil qilish mumkin. **Masalan:**

1. (2) tenglamada

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=t,\ t\in(-\infty;+\infty)$$

belgilash kiritamiz. Bundan

$$x=x_0+tp,\ y=y_0+tq \qquad (3)$$

tenglamalar kelib chiqadi, bu yerda $t-$parametr.

(3) tenglamalar ***to`g`ri chiziqning parametrik tenglamalari*** deyiladi.

Ma'lumki, tekislikdagi chiziqning ikkita parametrik (skalyar) tenglamalarini bitta vektor tenglama bilan berish mumkin, ya'ni (3) tenglamalarni

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s} \qquad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $\vec{r}=\{x;y\}$, $\vec{r}_0=\{x_0;y_0\}-$ mos ravishda $M(x;y)$, $M_0(x_0;y_0)$ nuqtalarning radius vektorlari; $\vec{s}=\{p;q\}-$to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori (1-shakl).

(4) tenglama ***to'g'ri chiziqning vektor tenglamasi*** deyiladi.

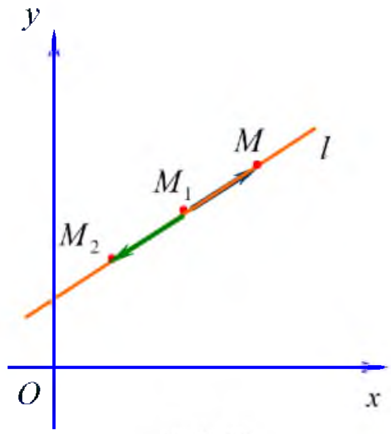
Misol. $M(-2;4)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{s}=\{1;-3\}$ vektorga parallel to'g'ri chiziqning kanonik, parametrik va vektor tenglamalarini tuzing.

Yechish. To'g'ri chiziqning kanonik, parametrik va vektor tenglamalarini (2), (3) va (4) formulalar bilan topamiz:

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-4}{-3};$$
$$x=-2+t,\ y=4-3t,\ t\in T;$$
$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s},\ r_0=\{-2:4\}.$$

III. *To'g'ri chiziqda yotuvchi ikkita $M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$ nuqta berilgan.*

l to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani olib, $\overline{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1\}$ va $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$ vektorlarni yasaymiz (2-shakl). Bunda $\overline{M_1M}$ va $\overline{M_1M_2}$ vektorlar kollinear bo'ladi. Shu sababli



2-shakl

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (5)$$

bo'ladi. (5) tenglama ***berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi*** deyiladi.

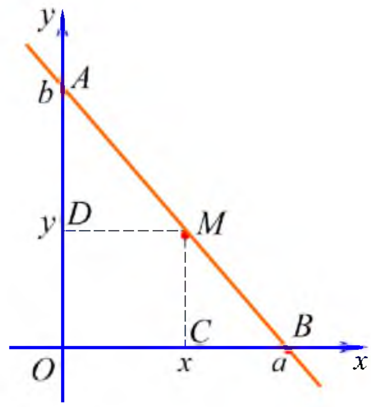
IV. *To'g'ri chiziqning Ox va Oy o'qlaridan ajratgan kesmalari a va b berilgan.*

l to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani olamiz (3-shakl).

ΔCBM va ΔOBA uchburchaklar o'xshash U holda uchburchaklarning o'xshashlik alomatiga ko'ra,

$$\frac{CB}{OB}=\frac{CM}{OA}\Rightarrow\frac{OB-OC}{OB}=\frac{OD}{OA}\Rightarrow\frac{OC}{OB}+\frac{OD}{OA}=1.$$

Bundan $OC=x,\ OB=a,\ OD=y,\ OA=b$ o'rniga qo'yish bajarib, topamiz:



3-shakl

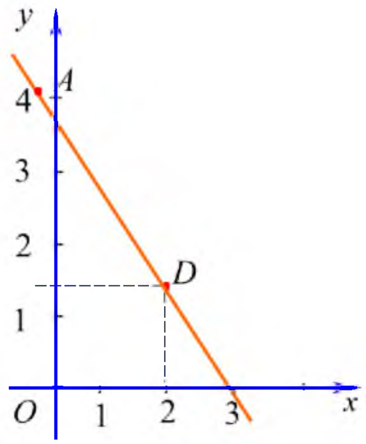
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (6)$$

(6) tenglama ***to'gri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi*** deyiladi.

Misol. $4x+3y-12=0$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqni chizmada tasvirlang.

Yechish. Tekislikdagi to'g'ri chiziqni chizish uchun uning ikkita nuqtasini bilish etarli bo'ladi.

To'g'ri chiziq tenglamasida, masalan $x=0$ deb, $y=4$ni, ya'ni $A(0;4)$ nuqtani va shu kabi $B\left(2;\frac{4}{3}\right)$ nuqtani topamiz. Bu nuqtalarni tutashtirib, berilgan tenglamaga mos to'g'ri chiziqni chizamiz (4-shakl).



4-shakl

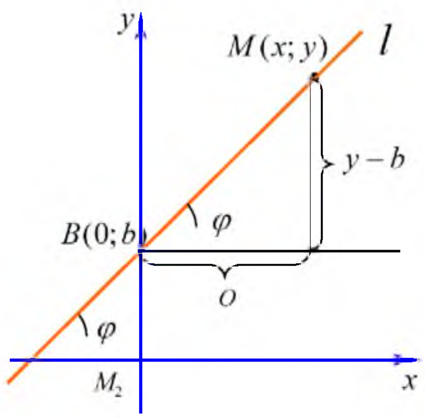
Bu masalani boshqacha, ya'ni to'g'ri chiziq tenglamasini kesmalarga nisbatan tenglamaga keltirib yechish mumkin. Buning uchun tenglamaning ozod hadi (-12) ni o'ng tomonga o'tkazamiz va hosil bo'lgan tenglikning har ikkala tomonini 12 ga bo'lamiz:

$$4x+3y=12; \qquad \frac{4x}{12}+\frac{3y}{12}=1 \qquad \text{yoki} \qquad \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1.$$

Bu tenglama bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziq Ox o'qidan koordinatalar boshiga nisbatan o'ng tomonga 3 ga teng kesma, Oy o'qidan esa koordinatalar boshiga nisbatan yuqoriga 4 ga teng kesma ajratadi (4-shakl).

V. *To`g`ri chiziqning og`ish burchagi $\varphi$ va $Oy$ o`qidan ajratgan kesmasi b berilgan.*

Ox o`qning musbat yo`nalishdan berilgan to`g`ri chiziqqa soat strelkasiga teskari yo`nalishda hisoblangan eng kichik $\varphi$ burchakka *to`g`ri chiziqning og`ish burchagi* deyiladi.



5-shakl

Og`ish burchagining tangensi, ya'ni $k = tg\varphi$ son *to`g`ri chiziqning burchak koeffitsiyenti* deb ataladi.

l to`g`ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani olamiz va burchak tangensi
ta'rifidan foydalanamiz (5-shakl):

$$\frac{y-b}{x} = tg\varphi$$

yoki $\qquad y = tg\varphi x + b$.

Bundan

$$y = kx + b \qquad (7)$$

Bu tenglama ***to`g`ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi*** deyiladi.

2-izoh. (7) tenglamadan to`g`ri chiziqning k burchak koeffitsiyentga ega bo`lgan yana bir tenglamasini keltirib chiqaramiz. Bu to`g`ri chiziq $M_1(x_1;y_1)$ nuqtadan o'tsin. U holda bu nuqtaning koordinatalari (7) tenglamani qanoatlantiradi: $y_1 = kx_1 + b$.

Bundan $b = y_1 - kx_1$. U holda (7) tenglamadan topamiz:

$$y = kx - kx_1 + y_1$$

yoki

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (8)$$

(8) tenglama ***berilgan nuqtadan berilgan yo`nalish bo`yicha o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasi*** deyiladi.

Suningdek bu tenglama ***to`g`ri chiziqlar dastasi tenglamasi*** deb ataladi.

VI. *To`g`ri chiziq $\vec{n} = \overrightarrow{OP}$ normalining yo`nalishi α va uzunligi p berilgan.*

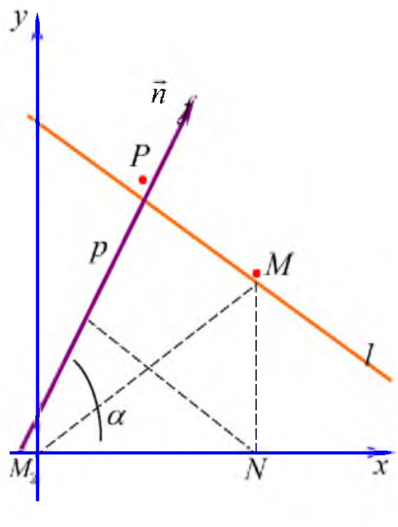
l to`g`ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani olamiz. 6-shaklga asosan:

$$\Pr_f \overline{OP} = \Pr_f \overline{ON} + \Pr_f \overline{NM} + \Pr_f \overline{MP},$$

bu yerda $\Pr_f \overline{OP} = p, \; \Pr_f \overline{ON} = x\cos\alpha,$

$$\Pr_f \overline{NM} = y\sin\alpha, \; \Pr_f \overline{MP} = 0.$$

Bundan, $\qquad p = x\cos\alpha + y\sin\alpha$



6-shakl

yoki

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (9)$$

(9) tenglama ***to`g`ri chiziqning normal tenglamasi*** deyiladi.

Keltirib chiqarilgan (1)-(9) tenglamalar asosida ushbu xulosa kelib chiqadi:

x, y o`zgaruvchilarning har qanday birinchi darajali tenglamasi tekislikdagi biror to`g`ri chiziqni ifodalaydi va aksincha, tekislikdagi har qanday to`g`ri chiziq $x, y$ o`zgaruvchilarning biror birinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanadi.

Demak, tekislikdagi har bir l to`g`ri chiziq tenglamasini

$$Ax + By + C = 0 \qquad (10)$$

ko`rinishda yozish mumkin, bu yerda $C-$ozod had; $A^2 + B^2 \neq 0$;
$\vec{n} = \{A; B\} -$ to`g`ri chiziqning normal vektori.

(10) tenglama ***to`g`ri chiziqning umumiy tenglamasi*** deyiladi.

(10) tenglama ***to'liq bo'lmagan quyidagi hollar*** bo`lishi mumkin:

1) $A = 0$ bo`lsa, tenglama $By + C = 0$ ko`rinishga keladi. Bunda to`g`ri chiziqning normal vektori Ox o`qqa perpendikulyar bo`ladi. Shu sababli to`g`ri chiziq Ox o`qqa parallel, $Oy$ o`qqa perpendikulyar bo`ladi. Shu kabi $B = 0$ da kelib chiqadigan $Ax + C = 0$ to`g`ri chiziq $Oy$ o`qqa parallel, Ox o`qqa perpendikulyar bo`ladi;

2) $C = 0$ bo`lsa, tenglama $Ax + By = 0$ ko`rinishni oladi. Bu tenglamani $O(0;0)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi. Demak, to`g`ri chiziq koordinatalar boshidan o`tadi;

3) $A = 0$ va $C = 0$ bo`lsa, tenglamadan $y = 0$ kelib chiqadi. Bu to`g`ri chiziq $Ox$ o`qda yotadi. Shu kabi $B = 0$ va $C = 0$ da hosil bo`ladigan $x = 0$ to`g`ri chiziq $Oy$ o`qda yotadi.

Misol. a ning qanday qiymatlarida $(a^2 + 4a)x + (a-5)y - 2a + 4 = 0$ to`g`ri chiziq: 1) Ox o`qqa parallel bo`ladi; 2) Ox o`qqa perpendikulyar bo`ladi; 3) koordinatalar boshidan o`tadi?

Yechish. Misolning shartiga ko`ra: $A=a^2+4a,$ $B=a-5,$ $C=-2a+4.$ U holda:

1) $a^2+4a=0$ yoki $a=-4,$ $a=0$ da $A=0$ bo'ladi. Shu sababli berilgan to`g`ri chiziq Ox o`qqa parallel bo`ladi;

2) $a-5=0$ yoki $a=5$ da $B=0$ va berilgan to`g`ri chiziq Ox o`qqa perpendikulyar bo`ladi;

3) $-2a+4=0$ yoki $a=2$ da $C=0$ bo`ladi. Demak, $a=2$ da to`g`ri chiziq koordinatalar boshidan o`tadi.

To`g`ri chiziqning (1)-(10) tenglamalaridan har birini boshqalaridan keltirib chiqarish mumkin. Misol tariqasida (10) tenglamadan (9) tenglamani keltirib chiqaramiz. Buning uchun (10) tenglikning chap va o`ng tomonini *normallovchi ko`paytuvchi* deb ataluvchi $M=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ songa ko`paytiramiz. Hosil bo`lgan $\dfrac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$ tenglamada

$$\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\alpha=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad p=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

belgilashlar kiritsak, (9) tenglama kelib chiqadi.

Bunda M ko`paytuvchining ishorasi C koffitsiyentning ishorasiga qarama-qarshi qilib tanlanadi.

Misol. To`g`ri chiziqning $5x-12y+8=0$ tenglamasini normal ko`rinishga keltiring.

Yechish. Tenglamaning chap va o`ng tomonini $M=-\dfrac{1}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=-\dfrac{1}{13}$ (chunki $C>0$) soniga ko`paytiramiz. Bundan

$$-\frac{5x}{13}+\frac{12y}{13}-\frac{8}{13}=0$$

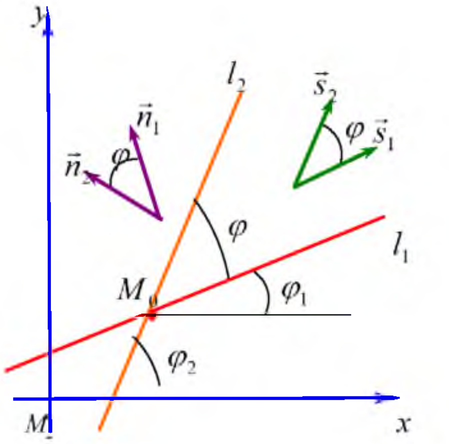
yoki

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,$$

bu yerda $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13},$ $\sin\alpha=\dfrac{12}{13},$ $p=\dfrac{8}{13}.$

15.2. Ikki to`g`ri chiziq orasidagi burchak

Tekislikdagi ikki l_1 va l_2 to`g`ri chiziqlar orasidagi burchak φ bo`lsin. Bu burchak to`g`ri chiziq tenglamalarining berilishiga ko`ra turli formulalar bilan aniqlanishi mumkin.



7-shakl

I. To`g`ri chiziqlar umumiy tenglamalari

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

bilan berilgan bo`lsin. Bunda to`g`ri chiziqlarning $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$, $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$ normal vektorlari orasidagi burchak to`g`ri chiziqlar orasidagi burchakka teng, ya'ni $\varphi = (l_1 \hat{,} l_2) = (\vec{n}_1 \hat{,} \vec{n}_2)$ bo`ladi (7-shakl).

Ikki vektor orasidagi burchak kosinusi formulasidan topamiz:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (11)$$

II. To`g`ri chiziqlar kanonik tenglamalari

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{q_1} \text{ va } \frac{x - x_0}{p_2} = \frac{y - y_0}{q_2}$$

bilan berilgan bo`lsin. Bunda $\vec{s}_1 = \{p_1; q_1\}$, $\vec{s}_2 = \{p_2; q_2\}$ bo`ladi.

U holda $\varphi = (l_1 \hat{,} l_2) = (\vec{s}_1 \hat{,} \vec{s}_2)$ (7-shakl) ekanini hisobga olib, topamiz:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|} = \frac{p_1p_2 + q_1q_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2}\sqrt{p_2^2 + q_2^2}}. \qquad (12)$$

III. To`g`ri chiziqlar burchak koffitsiyentli

$$y = k_1x + b_1 \text{ va } y = k_2x + b_2$$

tenglamalari bilan berilgan bo`lsin. 7-shaklga ko`ra $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Bundan

$$tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1), \; tg\varphi = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_2 tg\varphi_1}$$

yoki

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \qquad (13)$$

kelib chiqadi.

Agar bunda to`g`ri chiziqlardan qaysi biri birinchi va qaysi biri ikkinchi ekani ko`rsatilmasdan ular orasidagi o`tkir burchakni topish talab qilinsa, u holda (13) formulaning o`ng tomoni modulga olinadi, ya'ni

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \qquad (14)$$

Shunday qilib, to`g`ri chiziqlar tenglamalarining ko`rinishiga qarab ular orasidagi burchak (11)-(13) formulalardan biri bilan topiladi.

Misol. $y = -4x + 1$ va $5x - 3y - 7 = 0$ to`g`ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Birinchi tenlamaga ko`ra, $k_1 = -4$. Ikkinchi tenglamadan topamiz:

$$5x - 3y - 7 = 0, \qquad y = \frac{5}{3}x - \frac{7}{3}, \qquad \text{bunda} \quad k_2 = \frac{5}{3}.$$

U holda

$$tg\varphi = \frac{\frac{5}{3} - (-4)}{1 + (-4)\cdot\frac{5}{3}} = -1.$$

Demak, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. $\varphi = 135^0$.

Ikki to`g`ri chiziqning perpendikulyarlik sharti

Tekislikdagi ikki to`g`ri chiziqning perpendikulyarlik shartlarini ikki to`g`ri chiziq orasidagi burchakni topish formulalaridan keltirib chiqaramiz.

$l_1 \perp l_2$ bo`lsin. U holda $\cos\varphi = 0$ va (11) tenglikdan topamiz:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \qquad (15)$$

Shu kabi (12) tenglikdan

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0 \qquad (16)$$

kelib chiqadi.

(13) tenglikdan $ctg\varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_1 - k_2}$.

U holda $l_1 \perp l_2$da $ctg\varphi = 0$ yoki $1 + k_1k_2 = 0$ (17)
bo`ladi.

Demak, to`g`ri chiziqlar tenglamalarining ko`rinishiga qarab ularning perpendikulyar bo`lishi (15)-(17) shartlardan biri bilan aniqlanadi.

Ikki to`g`ri chiziqning parallellik sharti

I. l_1 va l_2 to`g`ri chiziqlar parallel bo`lsin. U holda ularning normal vektorlari $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$ kollinear bo`ladi. Ikki vektorning kollinearlik shartidan ikki to`g`ri chiziqning parallellik shartini topamiz:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (18)$$

II. Agar l_1 va l_2 to`g`ri chiziqlar parallel bo`lsa, u holda ularning yo`naltiruvchi vektorlari $\vec{s}_1 = \{p_1; q_1\}$ va $\vec{s}_2 = \{p_2; q_2\}$ kollinear bo`ladi.

Bundan

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} \qquad (19)$$

III. $l_1 \| l_2$ bo`lganida ular orasidagi burchak uchun $tg\varphi = 0$ bo`ladi. U holda (14) tenglikdan topamiz:

$$k_1 = k_2 \qquad (20)$$

Shunday qilib, (18) - (20) shartlardan biri to`g`ri chiziqlar tenglamalarining berilishiga ko`ra ularning parallel bo`lishini aniqlaydi.

Misol. $M_0(2;1)$ nuqtadan o`tuvchi va $2x + 3y + 4 = 0$ to`g`ri chiiqqa perpendikulyar to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. To`g`ri chiziq tenglamasini $Ax + By + C = 0$ ko`rinishda izlaymiz. To`g`ri chiziq $M_0(2;1)$ nuqtadan o`tgani sababli $2A + B + C = 0$ va $2x + 3y + 4 = 0$ to`g`ri chiiqqa perpendikulyar bo`lgani uchun $2A + 3B = 0$ bo`ladi.

Bu tenglamalarni birgalikda yechib topamiz: $A = -\frac{3}{4}C,\ B = \frac{1}{2}C.$

A va B koffitsiyentlarni izlanayotgan tenglamaga qo`yamiz:

$$-\frac{3}{4}Cx+\frac{1}{2}Cy+C=0.$$

Bundan

$$(-3x+2y+4)C=0 \quad \text{yoki} \quad 3x-2y-4=0.$$

Ikki to`g`ri chiziqning kesishishi

To`g`ri chiziqlar umumiy tenglamalari bilan berilgan bo`lsin

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ va } A_2x+B_2y+C_2=0$$

va $M_0(x_0;y_0)$ nuqtada kesishsin (6-shakl).

U holda $M_0(x_0;y_0)$ nuqtaning koordinatalari har ikkala tenglamani qanoatlantiradi. Shu sababli ikki to`g`ri chiziqning kesishish nuqtasi koordinatalari

$$\begin{cases} A_1x_0+B_1y_0+C_1=0, \\ A_2x_0+B_2y_0+C_2=0 \end{cases} \qquad (21)$$

sistemadan topiladi.

Bunda $M_0(x_0;y_0)$ kesishish nuqtasi orqali o`tuvchi to`g`ri chiziqlar dastasi

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0 \qquad 22)$$

tenglama bilan aniqlanadi, bu yerda $\lambda-$sonli ko`paytuvchi.

Misol. $2x-y-2=0$ a to`g`ri chiziq bo`ylab yo`naltirilgan yorug`lik nuri $x-2y+2=0$ to`g`ri chiziqda sinadi va qaytadi. Qaytuvchi nur yo`nalgan to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Yorug`lik nurining qaytish nuqtasi $2x-y-2=0$ va $x-2y+2=0$ to`g`ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo`ladi.

Bu nuqta $M(x;y)$ bo`lsin. Uni quyidagi sistemadan topamiz:

$$\begin{cases} 2x-\ \ y-2=0, \\ \ \ x-2y+2=0. \end{cases}$$

Bundan $M(2;2)$.

Yorug`lik nuri sinadigan va yo`nalgan to`g`ri chiziqlar orasidagi burchak tangensini topamiz. Berilgan to`g`ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentlari $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = 2$ bo`ladi. Bundan

$$tg\varphi = \frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + \frac{1}{2} \cdot 2} = -\frac{3}{4}.$$

Bu son yorug`lik nuri qaytuvchi va sinuvchi to`g`ri chiziqlar orasidagi burchak tangensiga teng bo`ladi. U holda

$$-\frac{3}{4} = \frac{k - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot k},$$

bu yerda $k -$ nur qaytuvchi to`g`ri chiziqning burchak koeffitsiyenti. Bundan $k = -\frac{2}{11}$.

Demak, izlanayotgan to`g`ri chiziq uchun: $M(2;2)$, $k = -\frac{2}{11}$

Bu parametrlar bilan aniqlanuvchi to`g`ri chiziq tenglamasini tuzaniz:

$$y - 2 = -\frac{2}{11}(x - 2)$$

yoki

$$2x + 11y - 18 = 0.$$

Ikki to`g`ri chiziqning ustma-ust tushishi

l_1 va l_2 to`g`ri chiziqlar umumiy tenglamalari

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

bilan berilgan bo`lsin va ustma-ust tushsin. Bunda:

-birinchidan $l_1 \| l_2$ bo`ladi va $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda$ tengliklardan $A_1 - \lambda A_2 = 0$, $B_1 - \lambda B_2 = 0$ kelib chiqadi;

-ikkinchidan l_1 to`g`ri chiziqning har bir nuqtasi, jumladan, $M_0(x_0;y_0)$ nuqtasi, l_2 to`g`ri chiziqda ham yotadi, ya'ni

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \qquad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$$

bo`ladi. Bu tengliklarning ikkinchisini $\lambda$ ga ko`paytiramiz va birinchidan ayiramiz: $(A_1 - \lambda A_2)x_0 + (B_1 - \lambda B_2) + (C_1 - \lambda C_2) = 0$.
Bundan $C_1 = \lambda C_2$ kelib chiqadi.

Demak, ikki to`g`ri chiziqning ustma-ust tushush sharti

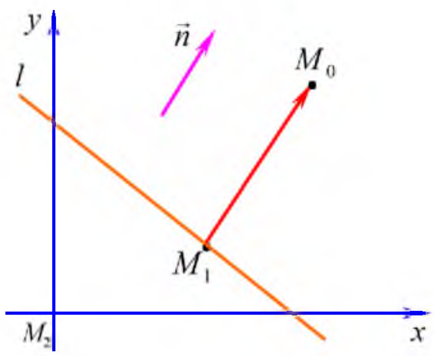
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (23)$$

tengliklar bilan ifodalanadi.

Nuqtadan to`g`ri chiziqqacha bo`lgan masofa

Nuqtadan to`g`ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi *nuqtadan to`g`ri chiziqqacha bo`lgan masofa* deyiladi.

$M_0(x_0;y_0)$ nuqta va $Ax + By + C = 0$ tenglama bilan l to`g`ri chiziq berilgan bo`lsin. $M_0$ nuqtadan $l$ to`g`ri chiziqqa tushurilgan perpendikulyarning asosini $M_1(x_1;y_1)$ bilan belgilaymiz (8-shakl). U holda $\overline{M_1M_0} = \{x_0 - x_1; y_0 - y_1\}$ va $M_1(x_1;y_1)$ nuqta $l$ to`g`ri chiziqda yotgani sababli $Ax_1 + By_1 + C = 0$, ya'ni $C = -Ax_1 - By_1$ bo`ladi.



8-shakl

$\vec{n} = \{A;B\}$ vektorning l to`g`ri chiziqqa perpendikulyar bo`lishi ma'lum. Shu sababli $M_0$ nuqtadan $l$ to`g`ri chiziqqacha bo`lgan masofani vektorning o`qdagi proyeksiyasi xossalaridan foydalanib topamiz:

$$d = \left|\mathrm{Pr}_{\vec{n}}\,\overline{M_1M_0}\right| = \frac{\left|\overline{M_1M_0}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Shunday qilib, ***nuqtadan to`g`ri chiziqqacha bo`lgan masofa***

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (24)$$

formula bilan topiladi.

Misol. $3x+4y-4=0$ va $6x+8y+5=0$ parallel to`g`ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

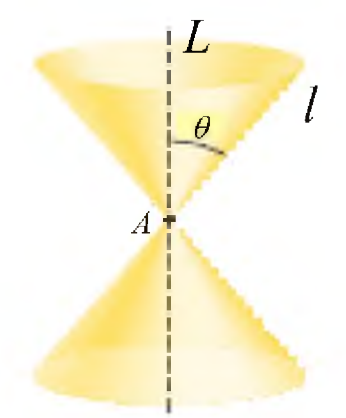
Yechish. $3x+4y-4=0$ to`g`ri chiziqda ixtiyoriy, masalan $M(0;1)$ nuqtani olamiz. U holda berilgan parallel to`g`ri chiziqlar orasidagi d masofa $M(0;1)$ nuqtadan $6x+8y+5=0$ to`g`ri chiziqqacha bo`lgan masofaga teng bo`ladi. Uni (24) formula bilan hisoblaymiz:

$$d=\frac{|6\cdot 0+8\cdot 1+5|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{13}{10}(u.b).$$

15.3. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Ikkinchi tartibli chiziqlar haqida tushuncha. *Oxy* koordinatalar sistemasida x, y o`zgaruvchilarning ikkinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanuvchi chiziq tekislikdagi *ikkinchi tartibli chiziq* deyiladi.

Har qanday ikkinchi tartibli chiziqni doiraviy konusning tekislik bilan kesishish chizig‘i sifatida hosil qilish mumkin[1]. Shu sababli ikkinchi tartibli chiziqlar *konus kesimlar* deb ham ataladi.



1-shakl

Berilgan l to`g`ri chiziqni uni kesuvchi boshqa bir L to`g`ri chiziq atrofida o`zgarmas $\theta$ burchak ostida aylantirish natijasida hosil qilingan sirt *doiraviy konus* deyiladi (1-shakl). Bunda $l$ to`g`ri chiziq *konusning yasovchisi*, fiksirlangan $L$ to`g`ri chiziq *konusning o`qi*, fiksirlangan A nuqta *konusning uchi*, konusning A nuqta bilan ajratilgan qismlariga *konusning pallalari* deyiladi.

Agar konus tekislik bilan kesilganida (2-shakl):

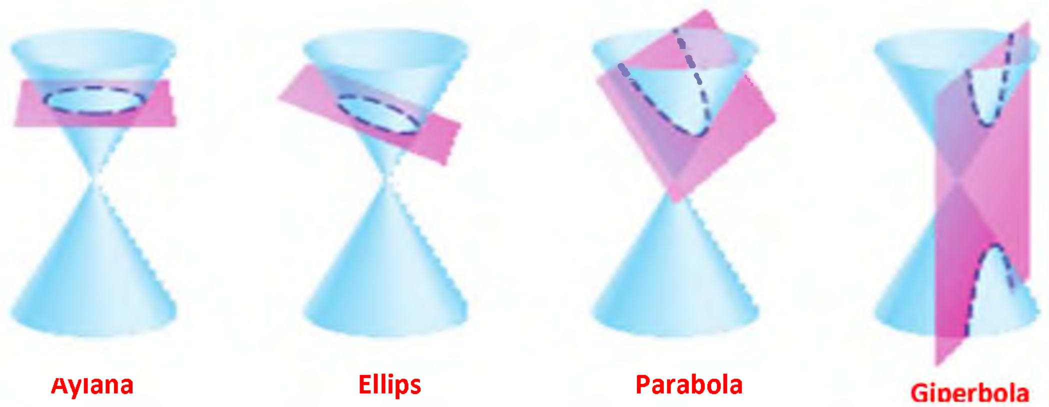
[1] Additional Topics in Analytic Geometry. Chapter 11,pp. 962-1040

- tekislik konus o`qiga perpendikulyar bo`lsa, kesimda ***aylana*** hosil bo`ladi;

- tekislik konus o`qiga perpendikulyar bo`lmay, konusning faqat bitta pallasini kessa va uning yasovchilaridan birortasiga parallel bo`lmasa, kesimda ***ellips*** hosil bo`ladi;

- tekislik konus yasovchilaridan biriga parallel ravishda uning pallalaridan birini kessa, kesimda ***parabola*** hosil bo`ladi;

- tekislik konusning ikkala pallasini kessa, kesimda ***giperbola***



2-shakl

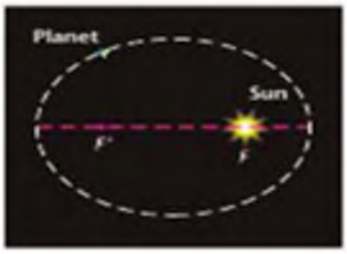
hosil bo`ladi.

Ikkinchi tartibli chiziqlar fan va texnikaning ko`p sohalarida keng qo`llaniladi. Bunga misollar keltiramiz.

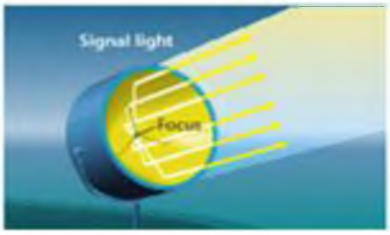
1. Ma’lumki, avtomobil g`ildiraklari aylana shaklida yasaladi (3-shakl).
2. Quyosh sistemasining planetalari quyosh joylashgan umumiy fokusga ega ellipslar bo`yicha harakat qiladi (4-shakl).
3. Agar parabola fokusiga yorug`lik manbai joylashtirilsa, nurlar uning o`qiga parallel ravishda qaytadi. Projektorning tuzilishi bu xossaga asoslangan (5-shakl).
4. Mexanikada isbot qilinganidek, yer yuzidan gorizontga qarab burchak ostida $v_0 = 11{,}2\ km/c$ (ikkinchi kosmik tezlik) boshlang`ich tezlik bilan chiqarilgan raketa parabola bo`ylab yer yuzidan cheksiz uzoqlashsa, $v_0 > 11{,}2\ km/c$ boshlang`ich tezlik bilan chiqarilgan raketa giperbola bo`ylab yer yuzidan cheksiz uzoqlashadi,

$v_0 < 11{,}2\ km/c$ boshlang`ich tezlik bilan chiqarilgan raketa esa yerga qaytib tushadi yoki erning sun'iy yo`ldoshi bo`lib qoladi.

3-shakl



4-shakl



5-shakl

Aylana

Ta'rif. Tekislikda markaz deb ataluvchi berilgan nuqtadan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o`rni ***aylana*** deyiladi.

Tekislikda $M_0(x_0; y_0)$ nuqtadan R masofada yotuvchi nuqtalarni qaraymiz. Bu nuqtalardan biri $M(x; y)$ nuqta bo`lsin (6-shakl).

Aylana ta'rifiga ko`ra $|M_0M| = R$ . Bu tenglikka ikki nuqta orasidagi masofa formulasini qo`llaymiz:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R.$$

Bundan

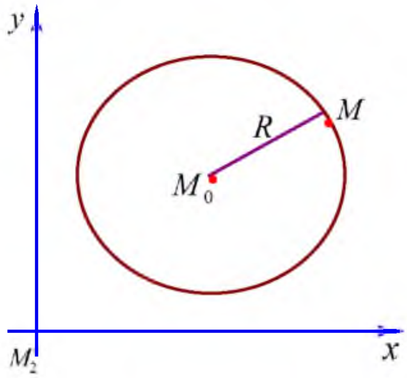
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (1)$$

(1) tenglama *aylananing kanonik tenglamasi* deyiladi. Bunda $M_0(x_0; y_0)$ nuqta *aylana markazi*, R masofa *aylana radiusi* deb ataladi.

Xususan, $x_0 = 0,\ y_0 = 0$ da (1) tenglamadan topamiz:

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (2)$$

(2) tenglama markazi koordintalar boshida yotuvchi va radiusi R ga teng aylanani aniqlaydi.



6-shakl

Misol. Koordinatalari $x = R\cos t,\ y = R\sin t$ tenglamalar bilan aniqlanuvchi $M(x; y)$ nuqta aylana nuqtasi bo`lishini ko`rsating.

Yechish. $M(x;y)$ nuqta koordinatalarining har ikkala tomonini kvadratga ko`taramiz va hadlab qo`shamiz:

$$x^2+y^2=R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t=R^2(\sin^2 t+\cos^2 t)=R^2$$

yoki

$$x^2+y^2=R^2.$$

Demak, koordinatalari $x=R\cos t,\ y=R\sin t$, $t\in R$ tenglamalar bilan aniqlanuvchi $M(x;y)$ nuqta markazi koordinatalar boshida yotuvchi va radiusi R ga teng aylanada yotadi.

Aylanani aniqlovchi ushbu

$$\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t,\ t\in[0;2\pi] \end{cases} \qquad (3)$$

tenglamalar sistemasi *aylananing parametrik tenglamalari* deyiladi.

Misol. $x^2+y^2+8x-4y-5=0$ tenglama bilan aniqlanuvchi aylananing markazi va radiusini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning chap tomonida x va y ga nisbatan to`la kvadrat ajratamiz:

$$x^2+8x+16-16+y^2-4y+4-4-5=0$$

yoki

$$(x+4)^2+(y-2)^2=5^2.$$

Bu tenglama markazi $M_0(-4;2)$ nuqtada yotuvchi va radiusi $R=5$ ga teng aylanani ifodalaydi.

Ellips

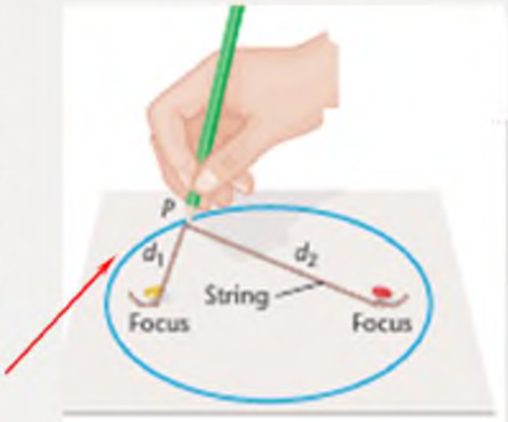
Ta'rif. Tekislikda fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtagacha bo`lgan masofalarning yig`indisi o`zgarmas $2a$ kattalikka teng bo`lgan nuqtalarning geometrik o`rni ***ellips*** deyiladi.

F_1 va F_2 ellipsning fokuslari, M ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo`lsin. $F_1F_2=2c,\ F_1M=r_1,\ F_2M=r_2$ belgilashlar kiritamiz. Ellipsning ta'rifiga ko`ra $F_1M+F_2M=2a,$ ya'ni

$$r_1+r_2=2a, \qquad (4)$$

bu yerda $a-$o`zgarmas son bo`lib, $a>c$.

Ta'rif asosida ellipsni quyidagicha chizish mumkin.
Bir bo`lak karton qog`ozi olinadi va unga ikkita tugmali mix (knopka) joylanadi. Ular ellipsning fokuslarini ifodalaydi. Ikkita mix orasidagi masofadan uzunroq ip olinadi va uning uchlari mixlarga mustahkamlanadi. Bu ip o`zgarmas $2a$ kattalikni ifodalaydi. Keyin qalam olinadi va uning uchi bilan ip tarang tortiladi. Qalamning uchi kartonga tekkiziladi va ipni tarang saqlagan holda qalam harakatlantiriladi. Natijada qalamning uchi ellipsni chizadi.



Oxy koordinatalar sistemasini Ox o`q fokuslardan, $Oy$ o`q F_1F_2 kesmaning o`rtasidan o`tadigan qilib tanlaymiz (7-shakl).
U holda $F_2(-c;0)$ va $F_1(c;0)$ bo`ladi.
M nuqtaning koordinatalari x va y bo`lsin deylik, ya'ni $M(x;y)$.
Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko`ra

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,, \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,.$$

r_1 va r_2 ning bu ifodalarini (4) tenglikka qo`yib, almashtirishlar bajaramiz:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$(x-c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2,$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2,$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc,$$

$$a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

$b^2 = a^2 - c^2$ (chunki $a > c$) belgilash kiritib, topamiz:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

yoki

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (5)$$

(5) tenglama ***ellipsning kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Misol. $x = a\cos t, y = b\sin t$ tengliklar ellips nuqtasini aniqlashini ko`rsating.

Yechish. $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ t \in R$ tengliklardan topamiz:

$$\frac{x}{a} = \cos t,\ \ \frac{y}{b} = b\sin t\ .$$

U holda

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

ya'ni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Demak, $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ t \in R$ tengliklar ellips nuqtasini aniqlaydi.

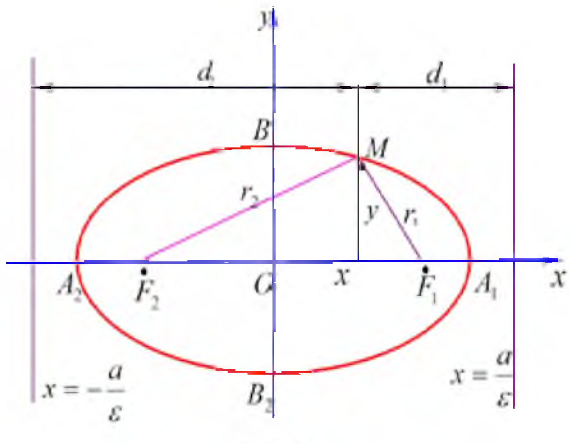
Ellipsni aniqlovchi ushbu

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t,\ \ t \in [0;2\pi] \end{cases} \qquad (6)$$

tenglamalar sistemasi ***ellipsning parametrik tenglamalari*** deyiladi.

Ellipsning shaklini uning kanonik tenglamasidan foydalanib aniqlaymiz.

(5) tenglikda x va y ning faqat juft darajalari qatnashgani uchun ellips Ox, Oy o`qlarga va $O(0;0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo`ladi. Shu sababli (5) tenglamani $x \geq 0$, $y \geq 0$ da (I-chorakda) tekshirish yetarli bo`ladi. I-chorakda (5) tenglamadan $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ kelib chiqadi. Bunda $x$ koordinata $0$ dan $a$ gacha o`sganida y koordinata b dan 0 gacha kamayadi. Ellipsning qolgan chorakdagi shaklini koordinata o`qlariga nisbatan simmetrik qilib chizamiz (7-shakl).



7-shakl

Ellipsda $O(0;0)$ nuqtaga markaz, $A_1(a;0),\ A_2(-a;0),\ B_1(0;b),\ B_2(0;-b)$ nuqtalarga uchlar, A_1A_2, B_1B_2 kesmalarning $2a$, $2b$ uzunliklariga mos ravishda katta va kichik o`qlar, $a, b$ sonlarga mos ravishda katta va kichik yarim o`qlar, F_1M, F_2M kesmalarning r_1, r_2 uzunliklariga fokal radiuslar deyiladi.

Ellipsning shakli $\frac{b}{a}$ nisbatga bog`liq bo`ladi, ammo ellipsning shaklini $\frac{c}{a}$ nisbat yordamida tekshirish qulaylikka ega.

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ kattalik ***ellipsning ekstsentritsiteti*** deyiladi. Bunda $0 < \varepsilon < 1$, chunki $0 < c < a$.

$$b^2 = a^2 - c^2 \text{ dan } \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}, \text{ ya'ni } \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Demak, $\varepsilon \to 1$ da $\frac{b}{a} \to 0$, ya'ni b kichiklashib, ellips Oy o`qiga parallel ravishda $Ox$ o`qqa tomon siqilib boradi, aksincha $\varepsilon \to 0$ da $\frac{b}{a} \to 1$, ya'ni ellips aylanaga yaqinlashib boradi.

Fokuslari Oy o`qida va markazi koordinatalar boshda yotuvchi ellipsning kanonik tenglamalari shu kabi aniqlanadi. Har ikkala hol uchun ellipsning tenglamalarini va asosiy xossalarini keltiramiz[1].

$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ to`g`ri chiziqlar ***ellipsning direktrissalari*** deb ataladi.

Ellipsning M nuqtasidan direktrisalargacha bo`lgan d_1 va d_2 masofalar uchun ushbu

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$

tengliklar bajariladi

Bu tengliklardan ellipsning fokal radiuslari uchun $r_1 = a - \varepsilon x$, $r_2 = a + \varepsilon x$ formulalar hosil qilinadi.

Agar $a = b$ bo`lsa, u holda (5) tenglamadan $x^2 + y^2 = a^2$ tenglama, ya'ni markazi koordinata boshida yotuvchi va radiusi a ga teng aylana tenglamasi kelib chiqadi. Demak, aylana ellipsning xususiy holi hisoblanadi.

Misol. $4x^2 + 9y^2 = 144$ ellipsning o`qlari uzunliklarini, fokuslarining koordinatalarini va ekssentrisitetini toping.

---

[1] **Additional Topics in Analytic Geometry. Chapter 11,pp. 962-1040**

Yechish. Ellipsning tenglamasini kanonik ko`rinishga keltiramiz:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Bundan $a^2=36,\ b^2=16$. Demak, $a=6,\ b=4,\ 2a=12,\ 2b=8.$

Shunday qilib, ellips o`qlarining uzunliklari mos ravishda 12 va 8 ga teng. a va b ni bilgan holda c ni aniqlaymiz:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=2\sqrt{5}.$$

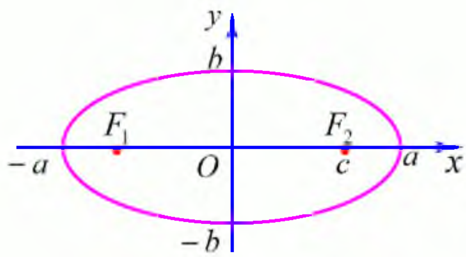
Bundan fokuslarning koordinatalarini va ekssentrisitetni topamiz:

$$F_{21}(2\sqrt{5};0),\ F_2(-2\sqrt{5};0); \qquad \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Markazi $O(0;0)$ nuqtada bo`lgan ellipsning kanonik tenglamalari va asosiy xossalari

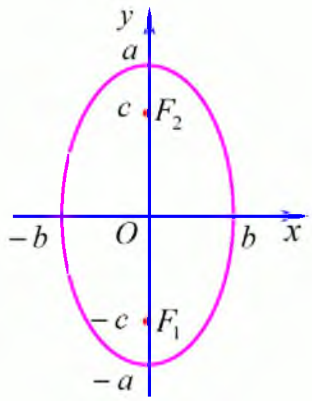
1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad a>b>0$

Katta o`q Ox da yotadi va $2a$ ga teng
Kichik o`q Oy da yotadi va $2b$ ga teng
Fokuslar: $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$
$c^2=a^2-b^2$



2. $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad a>b>0$

Katta o`q Oy da yotadi va $2a$ ga teng
Kichik o`q Ox da yotadi va $2b$ ga teng
Fokuslar: $F_1(0;-c),\ F_2(0;c)$
$c^2=a^2-b^2$



Giperbola

Ta'rif. Tekislikda fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo`lgan masofalar ayirmasining moduli o`zgarmas kattalikka teng bo`lgan nuqtalarning geometrik o`rni *giperbola d*eyiladi.

Oxy koordinatalar sistemasini Ox o`q $F_1$ va $F_2$ fokuslardan, $Oy$ o`q F_1F_2 kesmaning o`rtasidan o`tadigan qilib tanlaymiz (8-shakl).

$M(x;y)$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi bo`lsin. $F_1F_2 = 2c$, $F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$ belgilashlar kiritamiz. Ciperbolaning ta'rifiga ko`ra

$$|r_1 - r_2| = 2a, \qquad (7)$$

bu yerda $a-$ o`zgarmas son bo`lib, $a < c$.

(7) ifodada (4) ifodada bajarilgan almashtirishlar kabi almashtirishlar bajarib, quyidagi tenglamani keltirib chiqaramiz:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (8)$$

bu yerda $b^2 = c^2 - a^2$. (8) tenglama ***giperbolaning kanonik tenglamasi*** deyiladi.

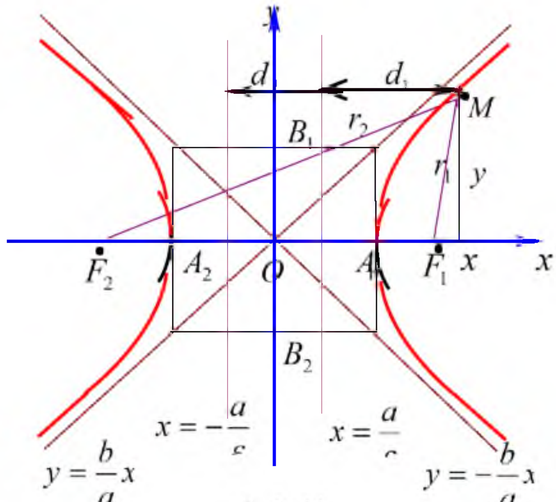
Giperbolaning shaklini uning kanonik tenglamasidan foydalanib aniqlaymiz.

(8) tenglikda x va y ning faqat juft darajalari qatnashgani uchun giperbola ellips kabi Ox , Oy o`qlarga va $O(0;0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo`ladi. Shu sababli (8) tenglamani $x \geq 0$, $y \geq 0$da (I-chorakda) tekshiramiz.

I-chorakda (8) tenglamadan $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ kelib chiqadi. Bunda $x \geq a$ va x koordinata a dan boshlab o`sishi bilan $y$ koordinata ham o`sib boradi, ya'ni $M(x;y)$ nuqta cheksizlikka intiladi. Bu intilish qanday yuz berishini ko`rsatish uchun koordinatalar boshidan o`tuvchi va burchak koeffitsiyenti $k = \frac{b}{a}$ ga teng bo`lgan $y = \frac{b}{a}x$ to`g`ri chiziqni qaraymiz. Bu chiziq ushbu xossaga ega:

M nuqta giperbola bo`ylab harakat qilib koordinata boshidan cheksiz uzoqlashgani sari bu to`g`ri chiziqqa juda yaqinlashib boradi, lekin uni kesib o`tmaydi, ya'ni asimptotik yaqinlashadi.

Shunday qilib, giperbola I-chorakda $A_1(a;0)$ nuqtadan o`tib, $y=\frac{b}{a}x$ to`g`ri chiziqqa asimptotik yaqinlashgani holda o`ngga va yuqoriga qarab o`sib boradi.



8-shakl

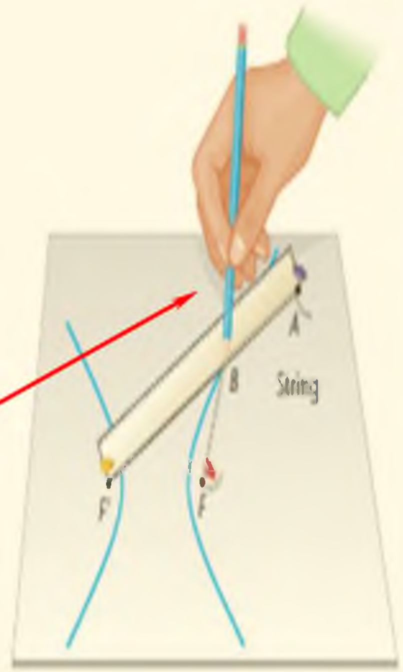
Giperbolaning qolgan choraklardagi shaklini koordinata o`qlariga nisbatan simmetrik qilib chizamiz (8-shakl).

Shunday qilib, giperbola ikki qismdan iborat bo`ladi. Bu qismlarga

Ta'rif asosida giperbolani quyidagicha chizish mumkin:
Bir bo`lak karton qog`ozi olinadi va unga ikkita tugmali mix joylanadi. Ular giperbolaning fokuslarini ifodalaydi. O`lchov cnizg`ichi olinadi va uning bir uchi fokusga erkin aylanadigan qilib biriktiriladi. Chizg`ich uzunligidan kaltaroq ip olinadi va uning bir uchi ikkinchi fokusga, ikkinchi uchi chizg`ichning A nuqtasiga mustahkamlanadi. Keyin qalam olinadi va uning uchi bilan ipni chizg`ichning $B$ nuqtasiga tortiladi. Qalamning uchi kartonga tekkiziladi va ipni tarang saqlagan holda qalam harakatlantiriladi. Natijada qalamning uchi giperbolaning bir tarmog`ini chizadi.
Giperbolaning ikkinchi tarmog`ini chizish uchun chizg`ich bilan ipning holati o`zgartiriladi.
Bu chiziq giperbolaning ta'rifiga mos kelishi uchun

$$BF'-BF=BF'+BA-BF-BA=AF-(BF+FA)=const$$

shartning bajarilishi ta'minlanishi kerak, bu yerda AF – chizg`ichning uzunligi; $(BF+FA)$ – ipning uzunligi.



giperbolaning tarmoqlari deyiladi.

$y=\pm\frac{b}{a}x$ tenglama bilan aniqlanuvchi to`g`ri chiziqlar ***giperbolaning asimptotalari*** deyiladi.

Giperbolada $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ nuqtalar uchlar, A_1A_2 kesmaning $2a$ uzunligi haqiqiy o`q, $B_1B_2$ kesmaning $2b$ uzunligi mavhum o`q, a, b sonlar mos ravishda haqiqiy va mavhum yarim o`qlar, F_1M, F_2M kesmalarning r_1, r_2 uzunliklari fokal radiuslar deyiladi.

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ kattalik ***giperbolaning ekssentrisiteti*** deyiladi. Bunda $\varepsilon > 1$, chunki $c > a$.

$b^2 = c^2 - a^2$ dan $\dfrac{b}{a} = \sqrt{\left(\dfrac{c}{a}\right)^2 - 1}$, ya'ni $\dfrac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

Demak, ekstsentrisitet birga qanchalik yaqin bo`lsa, $\dfrac{b}{a}$ shunchalik kichik bo`ladi, ya'ni $\varepsilon \to 1$ da $\dfrac{b}{a} \to 0$ va giperbola haqiqiy o`qi tomon siqilib boradi, aksincha $\varepsilon$ kattalashgan sayin $\dfrac{b}{a}$ ham kattalashadi va giperbolaning tarmoqlari kengayib boradi. $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ to`g`ri chiziqlar ***giperbolaning direktrisalari*** deb ataladi.

Giperbolaning M nuqtasidan direktrisalargacha bo`lgan d_1 va d_2 masofalar uchun ushbu

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$

tengliklar bajariladi Bu tengliklardan giperbolaning fokal radiuslari uchun ushbu

$$x > 0 \text{ bo`lganda } r_1 = \varepsilon x - a, \ r_2 = \varepsilon x + a;$$

$$x < 0 \text{ bo`lganda } r_1 = -a - \varepsilon x, \ r_2 = a - \varepsilon x$$

formulalar hosil qilinadi. Fokuslari Oy o'qida va markazi koordinatalar boshda yotuvchi giperbolaning kanonik tenglamasi shu kabi aniqlanadi[1].

Yarim o`qlari teng bo`lgan giperbolaga ***teng tomonli giperbola*** deyiladi. Teng tomonli giperbola

[1] **Additional Topics in Analytic Geometry. Chapter 11,pp. 962-1040**

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad (9)$$

tenglama bilan aniqlanadi.

Markazi $O(0;0)$ nuqtada bo`lgan giperbolaning kanonik tenglamalari va asosiy xossalari

1. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

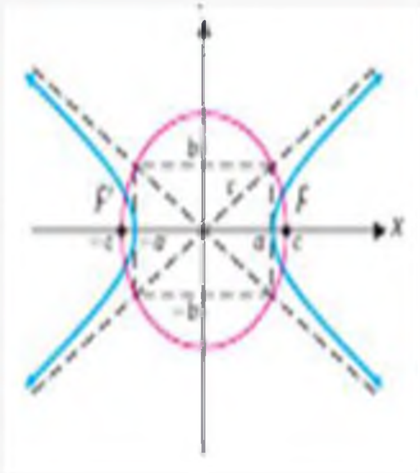
Haqiqiy o`q Ox da yotadi va $2a$ ga teng

Mavhum o`q Oy da yotadi va $2b$ ga teng

Fokuslar: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$

$c^2 = a^2 + b^2$

Asimptotalari: $y = \pm \dfrac{b}{a} x$



2. $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

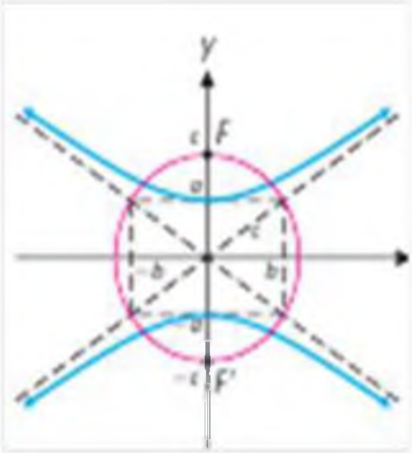
Haqiqiy o`q Oy da yotadi va $2a$ ga teng

Mavhum o`q Ox da yotadi va $2b$ ga teng

Fokuslar: $F_1(0;-c)$, $F_2(0;c)$

$c^2 = a^2 + b^2$

Asimptotalari: $y = \pm \dfrac{a}{b} x$



Misol. Ekssentrisiteti $\sqrt{2}$ ga teng va $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$ nuqtadan o`tuvchi giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing. Uning yarim o`qlari uzunligini, fokuslari koordinatalarini toping va asimptotalarining, direktrisalarining tenglamalarini tuzing.

Yechish. Ma'lumki, $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2}$ yoki $c^2 = 2a^2$. Ikkinchi tomondan $c^2 = a^2 + b^2$. Bundan $a^2 = b^2$. Demak izlanayotgan giperbola teng tomonli.

$M(\sqrt{3};\sqrt{2})$ nuqta giperbolada yotgani uchun $\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2}-\frac{(\sqrt{2})^2}{a^2}=1$, ya'ni $a^2=1$. Demak, izlanayotgan giperbolaning kanonik tenglamasi

$$x^2-y^2=1$$

ko`rinishni oladi. Bu tenglama bilan aniqlanuvchi giperbolaning yarim o`qlari $a=b=1$ uzunlikka, fokuslari $F_1(\sqrt{2};0)$, $F_2(-\sqrt{2};0)$ koordinatalarga ega bo`ladi, asimptotalari $y=\pm x$ tenglamalar bilan, direktrisalari $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ tenglamalar bilan topiladi.

Parabola

Ta'rif. Tekislikda fokus deb ataluvchi berilgan nuqtadan va direktrisa deb ataluvchi berilgan to`g`ri chiziqdan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o`rni ***parabola*** deyiladi.

Parabolaning fokusidan direktrisasigacha bo`lgan masofani $p\ (p>0)$ bilan belgilaymiz. p - *parabolaning parametri* deyiladi.

Oxy koordinatalar sistemasini Ox o`q direktrisaga perpendikulyar va fokusdan o`tadigan, $O(0;0)$ nuqta fokus va direktrisaning o`rtasida yotadigan qilib tanlaymiz. Tanlangan koordinatalar sistemasida $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ nuqta fokus, $x=-\frac{p}{2}$ to`g`ri chiziq direktrisa bo`ladi (9-shakl).

$M(x;y)$ parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo`lsin. M nuqtaning direktrisadagi proyeksiyasini N bilan belgilaymiz.

Parabolaning ta'rifiga ko`ra $NM=MF$. Bundan

$$\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},\ x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2$$

yoki

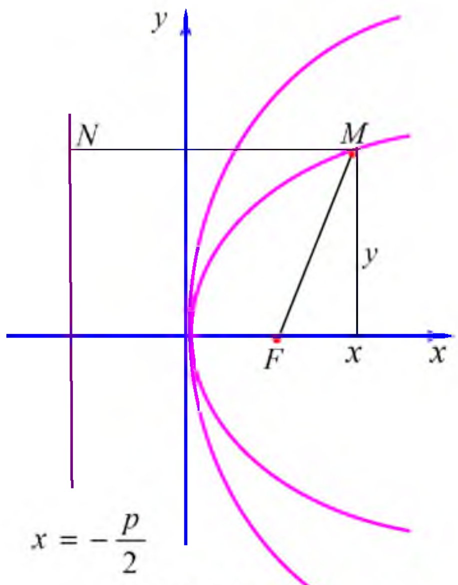
$$y^2=2px. \qquad (10)$$

(10) tenglama ***parabolaning kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Parabolaning shaklini uning kanonik tenglamasidan foydalanib aniqlaymiz. (10) tenglikda y ning juft darajasi qatnashgani uchun parabola Ox o`qqa nisbatan simmetrik bo`ladi.

Shu sababli (10) tenglamani $x \geq 0$, $y \geq 0$ da tekshiramiz.

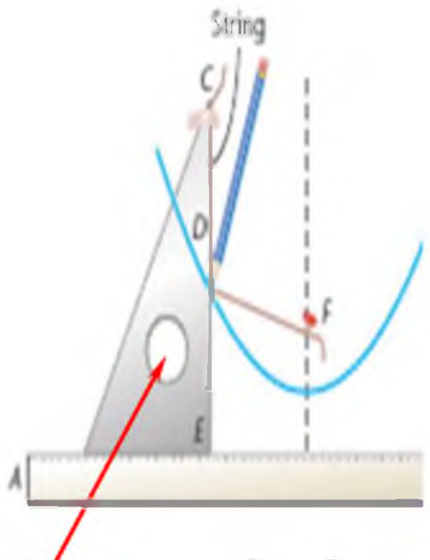
I-chorakda (10) tenglamadan $y = \sqrt{2px}$ kelib chiqadi. Bunda $x \geq 0$ va x koordinata 0 dan boshlab o`sishi bilan $y$ koordinata ham o`sib boradi. Shunday qilib, $y \geq 0$ bo`lganda $M(x;y)$ nuqta $O(0;0)$ nuqtadan chiqadi va $x$ o`sishi bilan o`ngga va yuqoriga qarab bu nuqtadan cheksiz uzoqlashadi. Parabolaning $y \leq 0$ dagi shaklini $Ox$ o`qqa nisbatan simmetrik qilib chizamiz. Bunda $O(0;0)$ nuqta parabolaning *uchi,* Ox o`q parabolaning *o`qi* deb ataladi.



9-shakl

Ta’rif asosida parabolani quyidagicha chizish mumkin.

Bir bo‘lak karton qog‘ozi olinadi, unga tugmali mix va o‘lchash chizg‘ichi joylanadi. Bunda mix parabolaning fokusini, chizgich esa uning direktrisasini ifodalaydi. Chizg‘ich ustiga to‘g‘ri burchakli uchburchak kichik katetli tomoni bilan qo‘yiladi. Uchburchakning katta katetli tomoni uzunligida ip olinadi va ipning bir uchi fokusga, ikkinchi uchi esa uchburchakning C nuqtasiga mustahkamlanadi. Keyin qalam olinadi va uning uchi bilan ipni chizg‘ichning D nuqtasiga tortiladi. Ipni tarang saqlagan holda uchburchak chizg‘ichbo‘ylab harakatlantiriladi. Natijada qalamning uchi parabolani chizadi.



Bunda hamma vaqt $DE = DF$ bo‘ladi.

Parabolaning *ekstsentrisiteti* $\varepsilon = \frac{NM}{MF} = 1$ ga teng bo`ladi, *direktrisasi* $x = -\frac{p}{2}$ tenglama bilan aniqlanadi.

Uchi $O(0;0)$ nuqtada bo'lgan parabolaning kanonik tenglamalari va asosiy xossalari

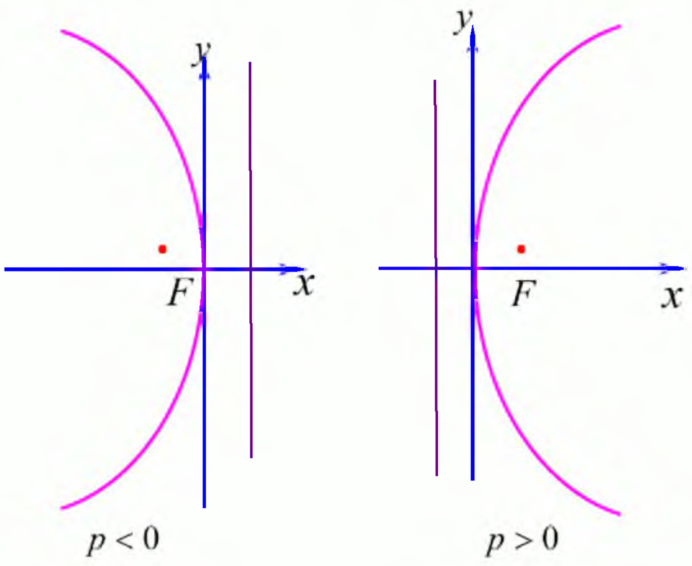
1. $y^2 = 2px$

Fokus: $F_1\left(\frac{p}{2};0\right)$

Direktrisa: $x = -\frac{p}{2}$

va Ox o'qqa simmetrik

Simmetriya o'qi- Ox



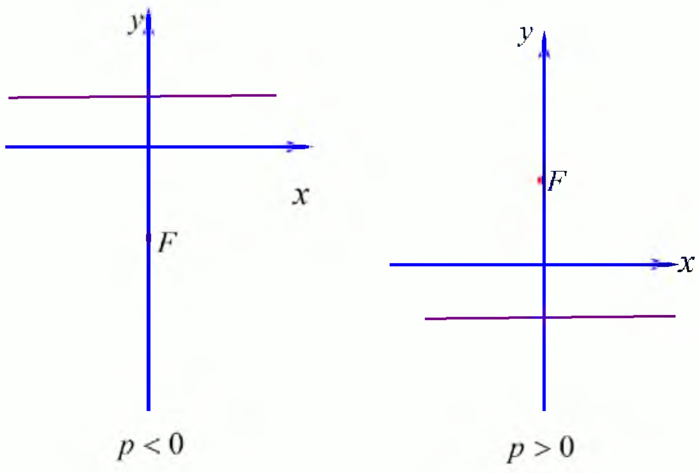
2. $x^2 = 2py$

Fokus: $F_1\left(0;\frac{p}{2}\right)$

Direktrisa: $y = -\frac{p}{2}$

va Oy o'qqa simmetrik

Simmetriya o'di- Oy



Parabolaning boshqa kanonik tenglamalari shu kabi aniqlanadi

Misol. $y^2 = 6x$ parabola berilgan. Uning direktrisasi tenglamasini tuzing va fokusini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani parabolaning kanonik tenglamasi (10) bilan taqqoslab, ko'ramizki, $2p=6,\ \ p=3$.

U holda berilgan parabola uchun direktrisa tenglamasi $x=-\frac{p}{2}=-\frac{3}{2}$ va fokusi $F\left(\frac{p}{2};0\right)=\left(\frac{3}{2};0\right)$ bo'ladi.

Ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamasi

Ikkita x va y o`zgaruvchining ikkinchi darajali tenglamasi umumiy ko`rinishda

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,\ \ A^2+B^2+C^2\neq 0 \qquad (11)$$

kabi yoziladi, bu yerda $A,B,C,D,E,F-$ koeffisiyentlar.

Oldingi bandlarda ta'riflari asosida ellips, giperbola va parabolalarning kanonik tenglamalarini keltirib chiqardik va xossalarini o`rgandik. Bunda chiziqlarning markazlarini koordinatalar boshiga joylashtirdik va ularning o`qlarini koordinata o`qlari bo`ylab yo`naltirdik.

Ushbu bandda (11) tenglama koeffisiyentlarining mos qiymatlarida konus kesimlardan birini, yoki mavhum konus kesimlardan birini, yoki bo`sh to`plamni aniqlashni ko`rsatamiz. Bunda konus kesimning markazi koordinatalar boshida yotmasligi va o`qlari koordinata o`qlariga nisbatan og`ishga ega bo`lishi qiyinchilik tug`dirishi mumkin. Bu qiyinchilikni bartaraf qilish uchun koordinatalar usulining ikki qurolidan - koordinatalar o`qlarini parallel ko`chirish va burishdan foydalanamiz [1].

Koordinata o`qlarini parallel ko`chirish

Tekislikda Oxy to`g`ri burchakli koordinatalar sistemasi berilgan bo`lsin.

Koordinata o`qlarini parallel ko`chirish – bu Oxy sistemadan uning o`qlari yo`nalishlarini va masshtablarini o`zgartirmasdan faqat

[1] Additional Topics in Analytic Geometry. Chapter 11,pp. 962-1040

koordinatalar boshining joylashishini o`zgartirish orqali yangi $O'x'y'$ sistemaga o`tishdir.

Yangi $O'x'y'$ sistemaning koordinatalar boshi O' eski Oxy sistemada $(x_0; y_0)$ koordinatalarga ega bo`lsin, ya'ni $O'(x_0; y_0)$. Tekislik ixtiyoriy M nuqtasining Oxy sistemadagi koordinatalarini $(x; y)$ bilan va $O'x'y'$ sistemadagi koordinatalarini $(x'; y')$ bilan belgilaymiz (10-shakl). U holda

$$\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \overline{OO'} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}, \quad \overline{O'M} = x'\vec{i} + y'\vec{j}.$$

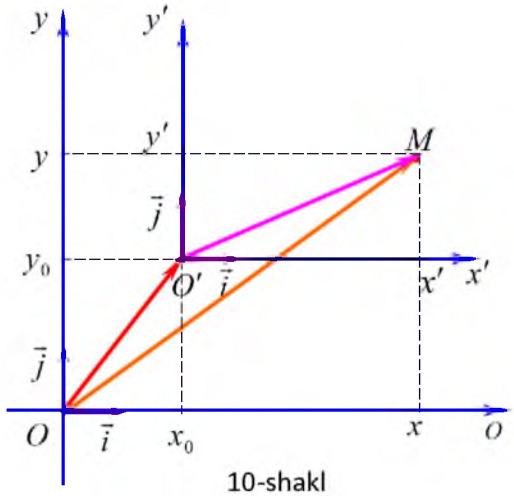
10-shakldan topamiz: $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$.
Bundan

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j}$$

yoki

$$x = x_0 + x', \;\; y = y_0 + y'. \quad (12)$$

(12) formulalar M nuqtaning Oxy sistemadagi $(x; y)$ koordinatalarini $O'x'y'$ sistemadagi $(x'; y')$ koordinatalar orqali topish imkonini beradi va aksincha.



10-shakl

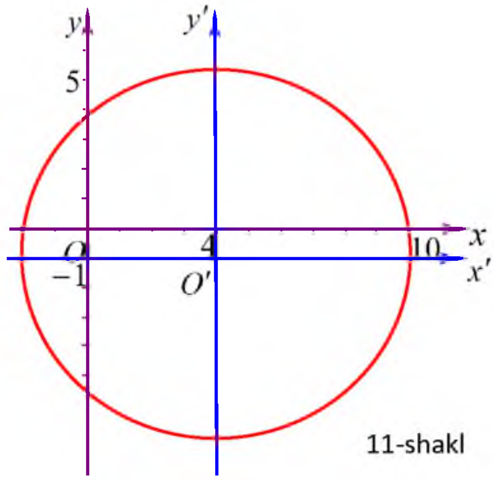
Misol. $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 36$ tenglamani Oxy koordinatalar sistemasini parallel ko`chirish orqali soddalashtiring.

Yechish. Berilgan tenglama Oxy koordinatalar sistemasida markazi $(4;-1)$ nuqtada yotuvchi va radiusi $R = 6$ ga teng aylana ifodalaydi. Oxy koordinatalar sistemasi $O'(x_0; y_0) = O'(4;-1)$ nuqtaga parallel ko`chirilsa, berilgan tenglama yangi $O'x'y'$ sistemada ham aylana tenglamasini beradi. (12) formulalarni qo`llab, topamiz:

$$x' = x - x_0 = x - 4, \quad y' = y - y_0 = y + 1.$$

U holda berilgan tenglama $O'x'y'$ sistemada $x'^2 + y'^2 = 36$ ko`rinishni oladi, ya'ni markazi koordinatalar boshida bo`lgan va radiusi $R = 6$ ga teng aylanani ifodalaydi.

Aylana grafigini Oxy va $O'x'y'$ sistemalarda chizamiz (11-shakl).



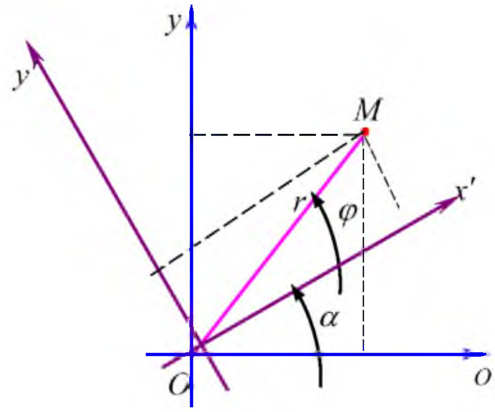
11-shakl

Koordinata o`qlarini burish

Tekislikda Oxy to`g`ri burchakli koordinatalar sistemasi berilgan bo`lsin.

Koordinata o`qlarini burish – bu $Oxy$ sistemadan uning koordinatalar boshini va o`qlari masshtablarini o`zgartirmasdan faqat koordinata o`qlarini biror burchakka burish orqali yangi $Ox'y'$ sistemaga o`tishdir.

Oxy sistemani O nuqta atrofida soat strelkasi yo`nalishiga teskari yo`nalishda α burchakka burib, $Ox'y'$ sistemaga o`tamiz. Tekislik ixtiyoriy $M$ nuqtasining $Oxy$ sistemadagi koordinatalarini $(x;y)$ bilan va $O'x'y'$ sistemadagi koordinatalarini $(x';y')$ bilan belgilaymiz. $M$ nuqta radius vektorining uzunligi $r$ ga, uning $Ox'$ o`q bilan tashkil qilgan burchagi φ ga teng bo`lsin (12-shakl).



12-shakl

12-shakldan topamiz:

$$x' = r\cos\varphi,\ \ y' = r\sin\varphi \tag{13}$$

va

$$x = r\cos(\varphi+\alpha),\ \ y' = r\sin(\varphi+\alpha). \tag{14}$$

(14) tengliklar ustida almashtirishlar bajaramiz va (13) tengliklarni hisobga olib, topamiz:

$$x = r\cos(\varphi+\alpha) = r(\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha) =$$
$$= (r\cos\varphi)\cos\alpha - (r\sin\varphi)\sin\alpha = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = r\sin(\varphi+\alpha) = r(\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha) =$$
$$= r(\cos\varphi)\sin\alpha + r(\sin\varphi)\cos\alpha = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Demak,

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \qquad (15)$$

(15) formulalar ***koordinata o`qlarini burish formulalari*** deyiladi. Bu formulalar M nuqtaning Oxy sistemadagi $(x;y)$ koordinatalarini $Ox'y'$ sistemadagi $(x';y')$ koordinatalar orqali topish imkonini beradi va aksincha.

Misol. $xy=-2$ tenglamani koordinata o`qlarini 45^o ga burish orqali kanonik shaklga keltiring.

Yechish. (15) tengliklardan $\alpha = 45^o$ da topamiz:

$$x = x'\cos45^o - y'\sin45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'),$$

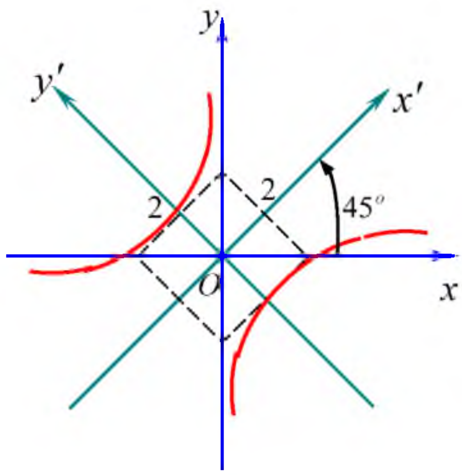
$$y = x'\sin45^o + y'\cos45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y').$$

x va y ni $xy=-2$ tenglamaga qo`yamiz:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') = -2,$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) = -2,$$

$$\frac{y'^2}{4} - \frac{x'^2}{4} = 1.$$



13-shakl

Bu tenglama giperbolaning kanonik tenglamasi hisoblanadi, ya'ni $xy=-2$ tenglama bilan aniqlanuvchi chiziq $Ox'y'$ sistemada $\frac{y'^2}{4} - \frac{x'^2}{4} = 1$ tenglama bilan aniqlanuvchi giperbolani ifodalaydi. Demak, $y = -\frac{2}{x}$ funksiyaning grafigi asimptotalari koordinata o`qlari bilan ustma-ust tushadigan teng tomonli giperboladan iborat (13-shakl).

Koordinata o`qlarini $\alpha$ burchakka burish orqali (11) tenglamada koordinatalar ko`paytmalari qatnashgan hadni yo`qotamiz, ya'ni bu tenglamani

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (16)$$

ko`rinishga keltiramiz.

(11) tenglamada $B \neq 0$ bo`lsin. Koordinata o`qlarini burish formulalari

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \;\; y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

yordamida eski koordinatalarni yangi koordinatalar orqali ifodalaymiz:

$$A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 2B(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) +$$
$$+ C(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + 2D$$
$$(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 2E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0.$$

α burchakni shunday tanlaymizki, $x'y'$ oldidagi koeffisiyent nolga aylansin, ya'ni

$$-2A\sin\alpha\cos\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

tenglik bajarilsin. Bundan

$$ctg2\alpha = \frac{A-C}{2B}. \qquad (17)$$

Shunday qilib, koordinata o`qlarini (15) shartni qanoatlantiruvchi α burchakka burish (11) tenglamani (16) tenglamaga keltiradi.

Teorema. (16) tenglama hamma vaqt yoki aylanani ($A = C$ da), yoki ellipsni ($A \cdot C > 0$ da), yoki giperbolani ($A \cdot C < 0$ da), yoki parabolani ($A \cdot C = 0$da) aniqlaydi. Bunda ellips (aylana) uchun – nuqta yoki mavhum ellips (aylana), giperbola uchun –kesishuvchi chiziqlar juftligi, parabola uchun – parallel chiziqlar juftligi kabi buzilishlar bo`lishi mumkin.

Shunday qilib, (16) tenglama (mos ravishda (11) tenglama) ikkinchi tartibli chiziqlardan birini aniqlaydi.

Misol. $4x^2 - 25y^2 - 24x + 50y - 89 = 0$ tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziq ko`rinishini aniqlang.

Yechish. Berilgan tenglamada $A = 4,\ C = -25$ Bundan $A \cdot C = 4 \cdot (-25) < 0$.

Teoremaga ko`ra berilgan tenglama giperbolani ifodalydi.

Tenglamada almashtirishlar bajaramiz:

$$4(x^2-6x+9)-25(y^2-2y+1)-36+25-89=0,$$
$$4(x-3)^2-25(y-1)^2=100,$$
$$\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{4}=1.$$

Demak, berilgan tenglama simmetriya markazi $O(3;1)$ nuqtada joylashgan va yarim o`qlari $a=5,\ b=2$ ga teng bo`lgan giperbolani aniqlaydi.

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. To`g`ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning holatlarini ayting.
2. To`g`ri chiziqning parallellik sharti qanday?
3. To`gri chiziqning perpendikulyarlik sharti qanday?
4. To`g`ri chiziqning turli tenglamalarini keltiring.
5. Kesmani berilgan nisbatda bo`lish nima?
6. Ellipsni ta'riflang.
7. Ushbu to`g`ri chiziqlarni yasang: a) $x=4$; b) $x=-3$.
8. a) $x+2y-3=0$; b) $y=2x+1$ tenglamalar bilan aniqlangan to`g`ri chiziqni yasang.
9. To`g`ri chiziqning $8x-3y+2=0$ umumiy tenglamasi berilgan. Uning parametrik tenglamasini yozing.
10. Quyidagi berilganlarga ko`ra to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing:

a) koordinata o`qlaridan mos ravishda $a=3$, $b=-2$ kesmalar kesib o`tuvchi to`g`ri chiziq;

b) $A(3,5)$ nuqtadan o`tib, $Ox$ o`qqa parallel bo`lgan to`g`ri chiziq;

c) $B(-1,2)$ nuqtadan o`tib, $Oy$ o`qqa parallel bo`lgan to`g`ri chiziq;

d) $A(0,-2)$ va $B(3,-4)$ nuqtalardan o`tuvchi to`g`ri chiziq.

11. Ox ga parallel bo`lgan to`g`ri chiziq (3;-4) nuqtadan o`tadi. Bu to`g`ri chiziqning tenglamasini tuzing.
12. Quyidagi to`g`ri chiziqlarni $y=kx+b$ ko`rinishga keltiring:
13. 1) $3x+5y+1=0$; 2) $5x-2y+6=0$.

17. Quyidagi to`g`ri chiziqlarning koordinata o`qlari bilan kesishish nuqtalarini toping: 1) $5x+4y+20=0$; 2) $7x-2y+14=0$.

18. $x+2y-7=0$ to`g`ri chiziq bilan $x^2+4y^2=25$ ellipsning kesishish nuqtalarini toping.

16-§. Tekislik tenglamalari

Tayanch iboralar: *sirt, sirt tenglamasi, abssissa, ordinata, applikata, sfera, tekislikning normal vektori, tekislikning turli tenglamalari, umumiy tenglama, tekisliklarning o`zaro vaziyati, parallellik va perpendikulyarlik sharti, nuqtadan tekislikkacha bo`lgan masofa, ikki tekislik orasidagi burchak, ikkinchi tartibli sirtlar, ellipsoid, paraboloid, giperboloid, elliptik paraboloid, elliptik konus, bir pallali va ikki pallali giperboloidlar.*

16.1. Tekislik va uning tenglamalari

Fazoda sirt va chiziq. Umumiy boshlang`ich $O$ nuqtaga va bir xil masshtab birligiga ega bo`lgan o'zaro perpendikulyar Ox, Oy va Oz o`qlar fazoda to`g`ri burchakli $Oxyz$ koordinatalar sistemasini hosil qiladi. $Oxyz$ koordinatalar sistemasida uchta $x$, $y$ va $z$ sonlari fazodagi har qanday $M$ nuqtaning o`rnini to`liq aniqlaydi. Bunda nuqta $M(x;y;z)$ kabi belgilanadi, x - M nuqtaning *abssissasi*, y - M nuqtaning *ordinatasi*, z - M nuqtaning *applikatasi* deyiladi.

$Oxyz$ fazodagi ***sirt tenglamasi*** deb aynan shu sirt nuqtalarining x, y, z koordinatalari orasidagi bog`lanishni aniqlovchi uch noma'lumli $F(x, y, z) = 0$ tenglamaga aytiladi.

Shu kabi, koordinatalari uch noma'lumli $F(x, y, z) = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi $Oxyz$ fazoning barcha $M(x; y; z)$ nuqtalari to`plamiga ***fazoda*** shu tenglama bilan aniqlanuvchi ***sirt*** deyiladi.

Fazodagi sirt $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ (u;v) \in D$ parametrik tenglamalar bilan ham berilishi mumkin, bu yerda $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ - D sohada berilgan sirt barcha nuqtalarining va faqat shu nuqtalarning koordinatalarini beruvchi ikki o`zgaruvchili funksiyalar. Masalan,

$$x = R\sin u\cos v,\ y = R\sin u\sin v,\ z = R\cos u,\ 0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 2\pi$$

parametrik tenglamalar ***sferani*** ifodalaydi[1].

Fazodagi chiziqni ikki sirtning kesishish chizig`i yoki ikki sirt umumiy nuqtalarining gometrik o`rni deb qarash mumkin (1-shakl).

---

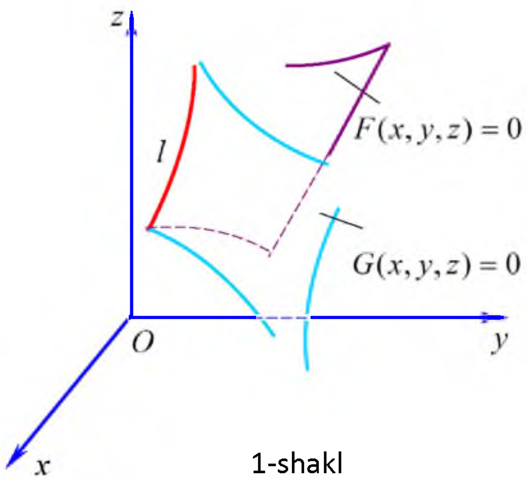
[1] J.Stewart. Calculus, Broks/Cole, Cengage Learing 2012

l chiziqni aniqlovchi ikki sirt $F(x,y,z)=0$ va $G(x,y,z)=0$ tenglamalar bilan berilgan bo`lsin (1-shakl). U holda $l$ chiziq ikkala tenglamani ham qanoatlantiruvchi $M(x;y;z)$ nuqtalar to`plamidan tashkil topadi.

Koordinatalari

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi $Oxyz$ fazoning barcha $M(x;y;z)$ nuqtalari to`plamiga ***fazodagi*** shu tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi ***chiziq*** deyiladi.



1-shakl

Shu kabi, $Oxyz$ ***fazodagi chiziq tenglamasi*** deb aynan shu chiziq barcha nuqtalarining x, y, z koordinatalarini aniqlovchi

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga aytiladi.

Fazodagi chiziqni nuqtaning trayektoriyasi deb qarash mumkin. Bunda chiziq $\vec{r}=\vec{r}(t)$ vektor tenglama bilan yoki $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t\in T$ parametrik tenglamalar bilan beriladi. Masalan,

$$x=R\cos\omega t,\quad y=R\sin\omega t,\quad z=\frac{h}{2\pi}t$$

parametrik tenglamalar *vint chizig`ini* ifodalaydi[1].

Fazodagi analitik geometriyada sirtni (yoki to`g`ri chiziqni) o`rganishda ikkita masala ko`riladi:

1) geometrik xossalariga ko`ra sirtning (yoki to`g`ri chiziqning) tenglamasini keltirib chiqarish;
2) tenglamasiga asosan sirtning (yoki to`g`ri ciziqning) ko`rinishi va xossalarini tekshirish.

[1] J.Stewart. Calculus, Broks/Cole, Cengage Learing 2012

Tekislik tenglamalari

Tekislikning fazodagi o`rni turli parametrlar bilan (masalan, tekislikning koordinata o`qlarida ajratgan kesmalari bilan) bir qiymatli aniqlanishi mumkin.

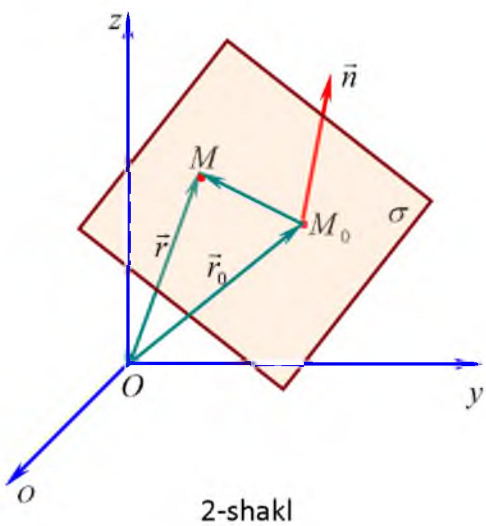
Shu sababli parametrlariga ko`ra tekislikning turli tenglamalari keltirib chiqariladi.

I. *Tekislikda yotuvchi* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *nuqta va to`g`ri chiziqqa perpendikulyar bo`lgan* $\vec{n}=\{A;B;C\}$ *vektor berilgan.*

Tekislikka perpendikular bo`lgan har qanday vektorga ***tekislikning normal vektori*** deyiladi.

σ tekislikning ihtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtasini olamiz. M va M_0 nuqtalarning radius vektorlari mos ravishda $\vec{r}$ va $\vec{r}_0$ bo`lsin. U holda $\overline{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$ bo`ladi (2-shakl). M va M_0 tekislik nuqtalari bo`lgani uchun $\overline{M_0M}$ vektor tekislikda yotadi va tekislikning normal vektoriga perpendikulyar bo`ladi, ya'ni $\vec{n}\perp\overline{M_0M}$ Ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga asosan tekislik tenglamasini topamiz:

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0. \qquad (1)$$



2-shakl

Bu tenglama ***tekislikning vektor tenglamasi*** deyiladi.

(1) tenglamaga normal vektor va radius vektorlarning koordinatalarini qo`yib, topamiz:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (2)$$

Bu tenglama ***tekislikning skalyar tenglamasi*** deyiladi.

Shuningdek, (2) tenglama ***berilgan nuqtadan o`tuvchi va berilgan vektorga perpendikular tekislik tenglamasi*** deyiladi.

Misol. $M_0(3;4;5)$ nuqtadan o`tuvchi va normal vektori $\vec{n}=\{-1;-3;2\}$ bo`lgan tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Masalaning shartiga ko`ra $x_0 = 3, y_0 = 4, z_0 = 5$, $A = -1, B = -3, C = 2$.

U holda (2) tenglamadan topamiz:

$$(-1)\cdot(x-3)+(-3)\cdot(y-4)+2\cdot(z-5)=0$$

yoki

$$x+3y-2z-5=0.$$

II. *Tekislikda yotuvchi uchta* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ *va* $M_3(x_3;y_3;z_3)$ *nuqta berilgan.*

σ tekislikda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtani olamiz va

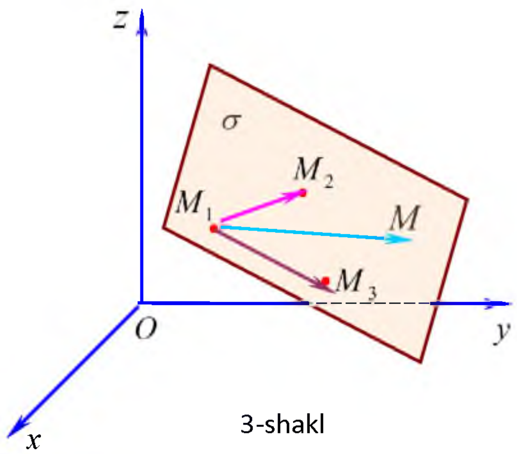
$$\overline{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\},$$

$$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\},$$

$$\overline{M_1M_3}=\{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\}$$

vektorlarni yasaymiz.

Bunda $\overline{M_1M}$ $\overline{M_1M_2}$ $\overline{M_1M_3}$ vektorlar komplanar bo`ladi (3-shakl). Vektorlarning komplanarlik shartidan topamiz:



3-shakl

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

(3) tenglama ***berilgan uchta nuqtadan o`tuvchi tekislik tenglamasi*** deyiladi.

(3) tenglamada $\vec{s}=\overline{M_1M_3}=\{p;q;r\}$ belgilash kiritib, topamiz:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p & q & r \end{vmatrix}=0. \qquad (4)$$

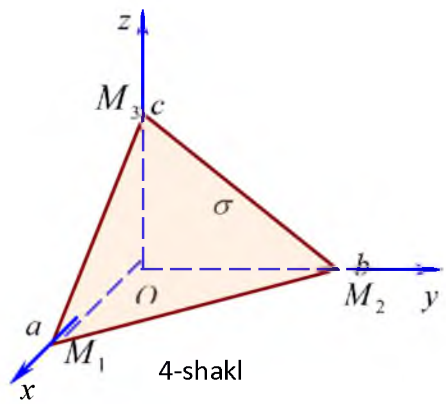
(4) tenglama ***berilgan ikkita nuqtadan o`tuvchi va berilgan vektorga parallel tekislik tenglamasi*** deyiladi.

Shu kabi (3) tenglamadan $\vec{s}_1 = \overline{M_1M_2} = \{p_1; q_1; r_1\}$ $\vec{s}_2 = \overline{M_1M_3} = \{p_2; q_2; r_2\}$ belgilashlarni topamiz:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

(5) ***tenglama berilgan nuqtadan o`tuvchi va berilgan ikki vektorga parallel tekislik tenglamasi*** deyiladi.

$M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ va $M_3(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalar σ tekislikning mos ravishda Ox, Oy va Oz o`qlarida yotuvchi nuqtalari, ya'ni $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$ va $M_3(0;0;c)$ bo`lsin (4-shakl). U holda (3) formulaga ko`ra



4-shakl

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

bo`ladi. Bundan $bcx - abc + abz + acy = 0$, $bcx + acy + abz = abc$ yoki

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (6)$$

3- shakldan ko`inadiki, $a$, $b$ va $c$ mos ravishda $\sigma$ tekislikning $Ox$, $Oy$ va $Oz$ o`qlarda ajratgan kesmalarini ifodalaydi. Shu sababli

(6) tenglama ***tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi*** deyiladi.

Misol. 1) $M_0(2;-1;3)$ nuqtadan o`tuvchi, $\vec{a} = \{3,0,1\}$ va $\vec{b} = \{-3;2;2\}$ vektorlarga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Izlanayotgan tekislik tenglamasini (5) formula bilan topamiz:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\cdot 2-(y+1)\cdot(6-3)+(z-3)\cdot 6=0,$$

$$2x-3y+6z-25=0.$$

2) Ox, Oy va Oz o`qlarda mos ravishda 2, (-4) va 6 ga teng kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Masalaning shartiga ko`ra: $a=2$; $b=-4$; $c=6$.

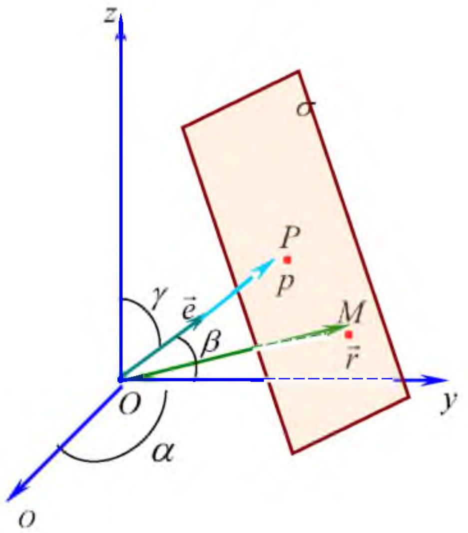
Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasidan topamiz:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{(-4)}+\frac{z}{6}=1,$$

$$6x-3y+2z-12=0.$$

III. *Tekislik* $\vec{n}=\overline{OP}$ *normalining uzunligi* p *va birlik vektori* $\vec{e}=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$ *berilgan.*

σ tekislikda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtani olamiz. Bu nuqtaning radius vektori $\vec{r}=\overline{OM}=\{x;y;z\}$ bo`lsin (5-shakl). Bunda $\vec{r}$ radius vektorning $\vec{e}$ vektor yo`nalishidagi proyeksiyasi p ga teng bo`ladi, ya'ni $\text{Пр}_{\vec{e}}\vec{r}=p$. Bundan



5-shakl

$$\vec{r}\vec{e}=p,\ \vec{r}\vec{e}-p=0 \text{ yoki } x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (7)$$

(7) tenglama ***tekislikning normal tenglamasi*** deyiladi.

Keltirib chiqarilgan (1)-(7) formulalar asosida ushbu xulosa kelib chiqadi:

x,y,z o`zgaruvchilarning har qanday birinchi darajali tenglamasi fazodagi biror tekislikni ifodalaydi va aksincha, fazodagi har qanday tekislik $x,y,z$ o`zgaruvchilarning biror birinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanadi.

Demak, tekislikdagi har bir σ tekislik tenglamasini[1]

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (8)$$

ko`rinishda yozish mumkin, bu yerda D -ozod had; $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

(8) tenglama ***tekislikning umumiy tenglamasi*** deyiladi.

Tekislikning ***umumiy tenglamasi to'liq bo'lmagan*** quyidagi hollarni ko'rish mumkin, agar:

1) $\underline{A = 0}$ bo`lsa, tenglama $By + Cz + D = 0$ ko`rinishga keladi. Bunda tekislikning $\vec{n} = \{0; B; C\}$ normal vektori Ox o`qqa perpendikulyar bo`ladi. Shu sababli tekislik Ox o`qqa parallel bo`ladi.

Shu kabi $\underline{B = 0}$ da $Ax + Cz + D = 0$ tenglama Oy o`qqa parallel tekislikni, $\underline{C = 0}$ da $Ax + By + D = 0$ tenglama $Oz$ o`qqa parallel tekislikni ifodalaydi;

2) $\underline{D = 0}$ bo`lsa, tenglama $Ax + By + Cz = 0$ ko`rinishni oladi. Uni $O(0;0;0)$ nuqta koordinatalari qanoatlantiradi va tekislik koordinatalar boshidan o`tadi;

3) $\underline{A = 0,\ D = 0}$ bo`lsa, tenglamadan $By + Cz = 0$ kelib chiqadi. Bu tekislik $Ox$ o`qdan o`tadi. Shu kabi $\underline{B=0,\ D=0}$ da $Ax + Cz = 0$ tenglama $Oy$ o`qdan o`tuvchi tekislikni, $\underline{C=0,\ D=0}$ da $Ax + By = 0$ tenglama $Oz$ o`qdan o`tuvchi tekislikni ifodalaydi;

4) $\underline{A = 0,\ B = 0}$ bo`lsa, tenglama $Cz + D = 0$ yoki $z = -\dfrac{D}{C}$ ko`rinishni oladi. Bu tekislik Oxy tekislikka parallel bo`ladi. Shu kabi $\underline{A=0,\ C=0}$ da $By + D = 0$ tenglama Oxz tekislikka parallel tekislikni, $\underline{B=0,\ C=0}$ da $Ax + D = 0$ tenglama Oyz tekislikka parallel tekislikni ifodalaydi;

5) $\underline{A = 0,\ B = 0,\ D = 0}$ bo`lsa, tenglama $Cz = 0$ yoki $z = 0$ ko`rinishga keladi. Bu tenglama Oxy tekislikni ifodalaydi. Shu kabi $\underline{B=0,\ C=0,\ D=0}$ da Oyz tekislik $Ax=0$ yoki $x = 0$ tenglama bilan, $\underline{A=0,\ C=0,\ D=0}$ da Oxz tekislik $By=0$ yoki $y = 0$ tenglama bilan aniqlanadi.

[1] **B. George, Jr.Thomas, Ross L Finney. Calculus and Analytic Geometry. Coryright, 1996. 829-832 b.**

Misol. Tekislik tenglamalarini tuzing: **1)** Ox o`qdan va $M_0(0;-2;3)$ nuqtadan o`tuvchi; **2)** Oy o`qqa parallel bo`lgan va $M_1(3;0;-4)$, $M_2(5;-2;3)$ nuqtalardan o`tuvchi; **3)** $Oxz$ tekislikka parallel bo`lgan va $M_0(1;-2;3)$ nuqtadan o`tuvchi.

Yechish. **1)** Ox o`qdan o`tuvchi tekislik tenglamasi $By+Cz=0$ bo‘ladi. Bu tenglamani $M_0(0;-2;3)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi, chunki bu nuqta tekislikda yotadi. Demak, $(-2)\cdot B+3C=0$ yoki $B=\frac{3}{2}C$. Bundan $\frac{3}{2}Cy+Cz=0$ yoki $3y+2z=0$.

2) Oy o`qqa parallel tekislik tenglamasi $Ax+Cz+D=0$ bo`ladi. Uni $M_1(3;0;-4), M_2(5;-2;3)$ nuqtalarning koordinatalari qanoatlantiradi, ya’ni

$$\begin{cases} 3A-4C+D=0, \\ 5A+3C+D=0. \end{cases}$$

Bundan $A=-\frac{7}{29}D$ va $C=\frac{2}{29}D$. U holda $-\frac{7}{29}Dx+\frac{2}{29}Dz+D=0$ yoki

$$7x-2z-29=0.$$

3) Oxz tekislikka parallel tekislik tenglamasi $By+D=0$ bo`ladi. Bundan $M_0(1;-2;3)$ nuqtada $-2B+D=0$ yoki $D=2B$ kelib chiqadi. U holda $By+2B=0$ yoki $y+2=0$.

Tekislikning (1)-(8) tenglamalaridan har birini boshqalaridan keltirib chiqarish mumkin. Masalan, (8) tenglamani (7) tenglamaga o`tkazish uchun (8) tenglikning chap va o`ng tomonini *normallovchi ko`paytuvchi* deb ataluvchi $M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ songa ko`paytiriladi. Bunda M ko`paytuvchining ishorasi D koffitsiyentning ishorasiga qarama-qarshi qilib tanlanadi.

16.2. Ikki tekislik orasidagi burchak. Nuqtadan tekislikkacha bo`lgan masofa

Ikki tekislik orasidagi burchak

Ikki tekislikning normal vektorlari orasidagi burchakka ***ikki tekislik orasidagi burchak*** deyiladi.

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$; va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tenglamalar bilan berilgan σ_1, σ_2 tekisliklar orasidagi burchak φ ga teng bo`lsin.

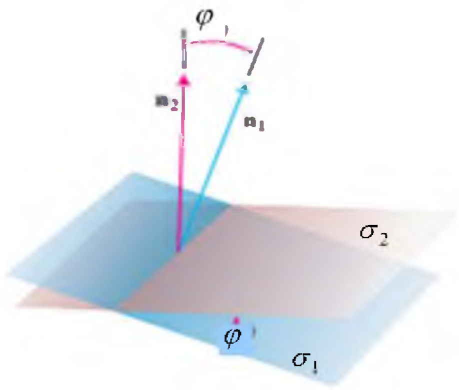
U holda $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$, $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$ va $\varphi=(\sigma_1\hat{,}\sigma_2)=(\vec{n}_1\hat{,}\vec{n}_2)$ bo`ladi (6-shakl).

Ikki vektor orasidagi burchak kosinusi formulasidan topamiz:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Odatda ikki tekislik orasidagi burchak deyilganida 90^o dan oshmagan burchak tushuniladi. Shu sababli

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \quad (9)$$



6-shakl

(9) tenglik ***ikki tekislik orasidagi burchakni topish formulasi*** deyiladi

Misol. $x+y+z-1=0$, $x-2y+3z-1=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping (7-shakl).

Yechish. Masalaning shartiga ko`ra:

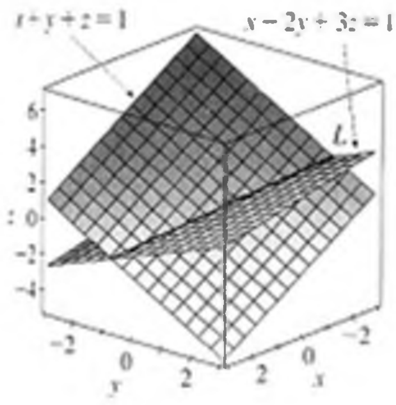
$$\vec{n}_1=\{1;1;1\},\ \vec{n}_2=\{1;-2;3\}.$$

U holda

$$\cos\varphi=\frac{|1\cdot1+1(-2)+1\cdot3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{42}}.$$

Bundan

$$\varphi=\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right)\approx72^o.$$



7-shakl

Ikki tekislikning perpendikularlik sharti

$\sigma_1 \perp \sigma_2$ bo`lsin. U holda $\cos\varphi = 0$ va (9) tenglikdan topamiz:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (10)$$

(10) tenglik ***ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti***ni ifodalaydi.

Misol. $M_1(1;2;1), M_2(0;3;4)$ nuqtalardan o`tuvchi va $x + 2y - z = 0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Tekislik tenglamasini $Ax + By + Cz + D = 0$ ko`rinishida izlaymiz.
Misolning shartiga ko`ra:

$$\begin{cases} A + 2B - C = 0 \ (tekislik\ x + 2y - z = 0\ tekislikka\ \perp), \\ A + 2B + C = -D\ (tekislik\ M_1(1;2;1)\ nuqtadan\ o'tadi), \\ 3B + 4C = -D\ (tekislik\ M_2(0;3;4)\ nuqtadan\ o'tadi. \end{cases}$$

Sistemaning yechimi: $A = -\frac{7}{6}D$, $B = \frac{1}{3}D$, $C = -\frac{1}{2}D$.

A, B, C koffitsiyentlarni izlanayotgan tenglamaga qo`yamiz:

$$-\frac{7}{6}Dx + \frac{1}{3}Dy - \frac{1}{2}Dz + D = 0.$$

Bundan $7x - 2y + 3z - 6 = 0$.

Ikki tekislikning parallellik sharti

σ_1 va σ_2 tekisliklar parallel bo`lsin. U holda $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ vektorlar kollinear bo`ladi. Ikki vektorning kollinearlik shartidan ***ikki tekislikning parallellik sharti***ni topamiz:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (11)$$

Ikki tekislikning ustma-ust tushishi

σ_1 va σ_2 tekisliklar ustma-ust tushsin. U holda quyidagi holatlar:
1) birinchidan, ular parallel bo`ladi. Ikki tekislikning parallellik shartidan topamiz:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\lambda$$

yoki $$A_1-\lambda A_2=0;\quad B_1-\lambda B_2=0;\quad C_1-\lambda C_2=0. \qquad (12)$$

2) ikkinchidan σ_1 tekislikning har bir nuqtasi, jumladan, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqta σ_2 tekislikda yotadi, ya'ni

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0,\ A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0.$$

Bu tengliklardan ikkinchisini λ ga ko`paytiramiz va birinchi tenglikdan ayiramiz:

$$(A_1-\lambda A_2)x_0+(B_1-\lambda B_2)y_0+(C_1-\lambda C_2)z_0+(D_1-\lambda D_2)=0.$$

Bundan (12) tengliklarni hisobga olsak $D_1-\lambda D_2=0$ yoki $\frac{D_1}{D_2}=\lambda$ bo`ladi. Demak,

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}. \qquad (13)$$

(13) tenglik ***tekisliklarning ustma-ust tushush shartini*** ifodalaydi.

Nuqtadan tekislikkacha bo`lgan masofa

Nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikularning uzunligi *nuqtadan tekislikkacha bo`lgan masofa* deyiladi.

$M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqta va $Ax+By+Cz+D=0$ tenglama bilan σ tekislik berilgan bo`lsin. M_0 nuqtadan σ tekislikka tushurilgan perpendikulyarning asosini $M_1(x_1;y_1;z_1)$ bilan belgilaymiz (8-shakl).

U holda M_0 nuqtadan σ tekislikkacha bo`lgan masofa $d=\left|\Pi p_{\vec n}\overline{M_1M_0}\right|$ bo`ladi, bu yerda $\overline{M_1M_0}=\{x_0-x_1;y_0-y_1;z_0-z_1\}$.

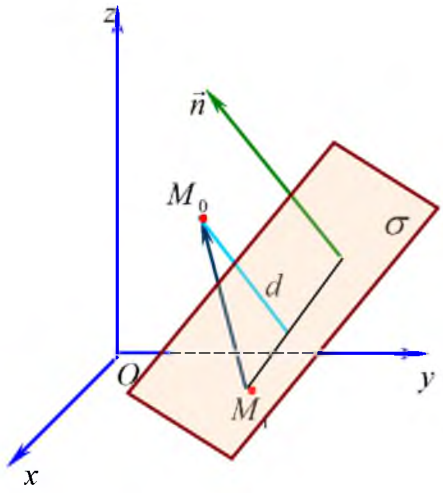
Ikki vektor skalyar ko`paytmasining xossasiga ko`ra

$$d=\frac{\left|\overline{M_1M_0}\cdot\vec n\right|}{|\vec n|}=\frac{|(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B+(z_0-z_1)C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-Ax_1-By_1-Cz_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

$M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqta σ tekislikda yotgani sababli $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, ya'ni $D=-Ax_1-By_1-Cz_1$ bo`ladi. Bundan

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (14)$$



8 -shakl

Shunday qilib, ***nuqtadan tekislikkacha bo`lgan masofa*** (14) formula bilan topiladi.

Misol. $M_0(5;4;-1)$ nuqtadan $M_1(3;0;3)$ $M_2(0;4;0)$ va $M_3(0;4;-3)$ nuqtalardan o`tuvchi tekislikkacha bo`lgan masofani toping.

Yechish. Avval berilgan uchta nuqtadan o`tuvchi tekislik tenglamasini tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-3 \\ 0-3 & 4 & 0-3 \\ 0-3 & 4 & -3-3 \end{vmatrix}=0$$

Bundan

$$-12\cdot(x-3)-9\cdot y+0\cdot(z-3)=0 \ \text{ yoki } \ 4x+3y-12=0.$$

Endi $M_0(5;4;-1)$ nuqtadan $4x+3y-12=0$ tekislikkacha bo`lgan masofani (14) formula bilan hisoblaymiz:

$$d=\frac{|4\cdot5+3\cdot4-12|}{\sqrt{4^2+3^2+0^2}}=4(b).$$

16.3. Ikkinchi tartibli sirtlar

Ikkinchi tartibli sirtlarning kanonik tenglamalari

$Oxyz$ koordinatalar sistemasida x, y, z o`zgaruvchilarning ikkinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanuvchi sirt *ikkinchi tartibli sirt* deyiladi.

Uchta x, y, va z o`zgaruvchining ikkinchi darajali tenglamasi umumiy ko`rinishda

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0, \qquad (1)$$

kabi yoziladi, bu yerda $A, B, C, D, E, F, G, H, K, L-$ o`zgarmaslar; $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Har qanday (1) ko`rinishdagi tenglamani koordinata o`qlarini parallel ko`chirish va burish orqali *kanonik ko`rinishga* keltirish mumkin. Kanonik tenglamada har bir o`zgaruvchi faqat bir marta, bitta (yo nolinchi, yo birinchi, yo ikkinchi) darajada qatnashadi. (1) tenglama koordinatalar sistemasining o`qlari sirtning simmetriya o`qlari bilan ustma-ust tushganida va koordinatalar boshi maxsus tanlanganida (masalan, markaziy-simmetrik sirtlarda simmetriya markazi tanlanadi) kanonik ko`rinishni oladi.

Shu bilan birga ikkinchi tartibli sirt

$$F(x,y) = 0, \ (G(x,y) = 0, \ H(x,z) = 0) \qquad (2)$$

tenglama bilan berilishi mumkin. Bunday tenglama bilan aniqlanuvchi sirtlar silindrik sirtlar deyiladi.

Sirtlarning shaklini tasavvur qilish va chizish uchun *«parallel kesimlar usuli»* deb ataluvchi usulni qo`llaymiz. Bunda sirtning shakli uning koordinata tekisliklari yoki bu tekisliklarga parallel tekisliklar bilan kesishish chiziqlarini (kesimlarini) tekshirish yordamida o`rganiladi.

Sfera

Fazoda markaz deb ataluvchi nuqtadan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o`rniga ***sfera*** deyiladi.

$M_0(x_0; y_0; z)$ nuqtadan R masofada yotuvchi fazodagi nuqtalarni qaraymiz. Bu nuqtalardan biri $M(x; y; z)$ nuqta bo`lsin.

Sferaning ta'rifiga ko`ra $|M_0M| = R$ Bundan

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R$$

yoki

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2. \qquad (3)$$

(3) tenglamaga ***sferaning kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Bunda $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqta *sfera markazi*, R masofa *sfera radiusi* deb ataladi.

Misol. Markazi $M_0(-2;2;1)$ nuqtada yotgan va $2x+y-2z-5=0$ tekislikka uringan sfera tenglamasini tuzing.

Yechish. Sfera tekislikka uringani sababli uning $M_0(-2;2;1)$ markazidan $2x+y-2z-5=0$ tekislikkacha bo`lgan masofa sferaning radiusiga teng bo`ladi. Nuqtadan tekislikkacha bo`lgan masofa formulasidan topamiz:

$$R=\frac{|2\cdot(-2)+1\cdot 2+(-2)\cdot 1-5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{9}{3}=3.$$

U holda (3) formulaga ko`ra $(x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

Ellipsoid

$Oxyz$ koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4)$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirtga ***ellipsoid*** deyiladi.

Ellipsoidning Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesimlarini qaraymiz. Bu tekisliklarning har biri $z=h$ tenglamaga ega bo`ladi. Bunda $h-$ birorta son.

Kesimda hosil bo`lgan chiziq

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h\end{cases} \qquad (5)$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi. (5) sistema tenglamalarini tekshiramiz:

$|h|>c$ bo`lganda $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<0$ bo`ladi. Demak, (5) sirtning $z=h$ tekislik bilan kesishish nuqtasi mavjud bo`lmaydi.

$|h|=c$, ya'ni $h=\pm c$ bo`lganda $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ bo`ladi. Bunda sirtlar $(0;0;c)$ va $(0;0;-c)$ nuqtalarda kesishadi va $z=c$ va $z=-c$ tekisliklar berilgan sirtga urinadi.

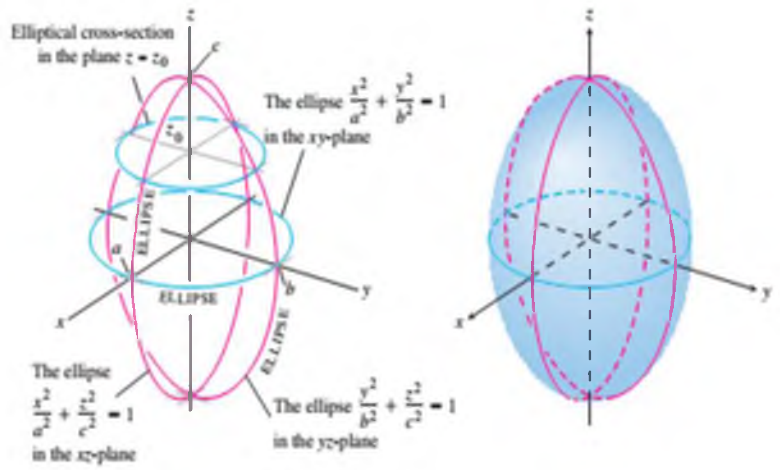
$|h|<c$ bo`lganda (5) tenglamalarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ z = h \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a_1^2} + \dfrac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

bu yerda $a_1 = a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$, $b_1 = b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$.

Demak, kesimda yarim o`qlari $a_1$ va $b_1$ bo`lgan ellips hosil bo`ladi (1-shakl). Bunda $|\ h\ |$ qancha kichik bo`lsa yarim o`qlar shuncha katta bo`ladi. $h=0$ da ular o`zlarining eng katta qiymatlariga erishadi: $a_1 = a$, $b_1 = b$.

(4) sirtning $x=h$ va $y=h$ tekisliklar bilan kesimlari ham ellipslardan iborat bo`ladi.



1-shakl

Shunday qilib, qaralgan kesimlar (4) tenglama bilan aniqlanuvchi sirt 1-shaklda keltirilgan ellipsoiddan iborat bo`lishini ko`rsatadi. a, b, c kattaliklar ellipsoidning *yarim o`qlari* deyiladi. Yarim o`qlar har xil bo`lganda ellipsoid *uch o`qli ellipsoid* bo`ladi. Yarim o`qlardan istalgan ikkitasi bir-biriga teng bo`lganda ellipsoid *aylanish ellipsoidi* bo`ladi. Yarim o`qlarning uchalasi teng bo`lganda ellipsoid tenglamasi

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ R = a = b = c \tag{6}$$

bo`lgan sferaga aylanadi.

Misol. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning Ox va Oy o`qlari atrofida aylanishidan hosil bo`lgan sirtlarning tenglamalarini toping.

Yechish. Agar ikkinchi tartibli chiziq $F(x,y)=0$ tenglama bilan berilgan bo`lsa, u holda bu sirtning $Ox$ o`qi atrofida aylanishidan hosil bo`lgan sirt $F(x;\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$ tenglama bilan, $Oy$ o`qi atrofida aylanishidan hosil bo`lgan sirt esa $F(\pm\sqrt{x^2+z^2};y)=0$ tenglama bilan aniqlanadi. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsning $Ox$ o`qi atrofida aylanishidan hosil bo`lgan sirt tenglamasini topamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2}{b^2}=1$$

yoki
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

Ellipsning Oy o`qi atrofida aylanishidan hosil bo`lgan sirt tenglamasini shu kabi topiladi:

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Hosil bo`lgan tenglamalarning har ikkalasi ***aylanish ellipsoidini*** aniqlaydi.

Giperboloid

$Oxyz$ koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (7)$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirtga ***bir pallali giperboloid*** deyiladi.

Bu sirtni Oxy tekislikka parallel $z=h$ tekisliklar bilan kesamiz. Kesimda

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2},\\ z=h\end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases}\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1,\\ z=h,\end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan bilan aniqlanuvchi chiziq hosil bo`ladi. Bu chiziq yarim o`qlari $a_1=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ va $b_1=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ bo`lgan ellipsdan iborat. Yarim o`qlar $h=0$ da eng kichik qiymatlariga erishadi: $a_1=a$, $b_1=b$. $|h|$ ning o`sishi bilan ular o`sib boradi.

Sirtning Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesimlarni

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemalari bilan bilan aniqlanuvchi giperbolalardan iborat bo`ladi. Kesimlarning tahlili shuni ko`rsatadiki (7) tenglama bilan aniqlanuvchi giperboloid musbat va manfiy yo`nalishlarida chegaralanmagan holda kengayuvchi «trubka» ko`rinishdagi sirtdan iborat bo`ladi (2-shakl). $a = b$ bo`lganda (7) tenglama ***bir pallali aylanish giperboloidni*** ifodalaydi[1].

$Oxyz$ kordinatlar sistemasida

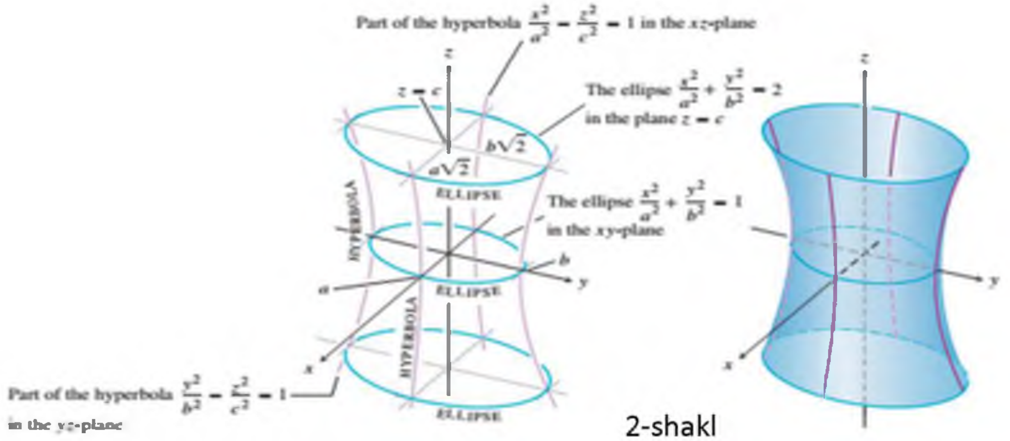
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{8}$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirtga ***ikki pallali giperboloid*** deyiladi.

Bu sirtning Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesisish chizig`i

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h \end{cases} \tag{9}$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi. Bunda $|h| < c$ bo`lganda $z = h$ tekislik sirtni kesmaydi, $|h| = c$ bo`lganda $z = c$ va $z = -c$ tekisliklar sirtga $(0;0;c)$ va $(0;0;-c)$ nuqtalarga urinadi, $|h| > c$ bo`lganda $z = h$ tekislik sirtni kesadi.



2-shakl

[1] B. George, Jr.Thomas, Ross L Finney. Calculus and Analytic Geometry. Coryright, 1996. 829-841 b.

$h| > c$ bo\`lganda (9) tenglamalarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_1^2} + \dfrac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases} \quad \text{bu yerda } a_1 = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1},\ b_1 = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

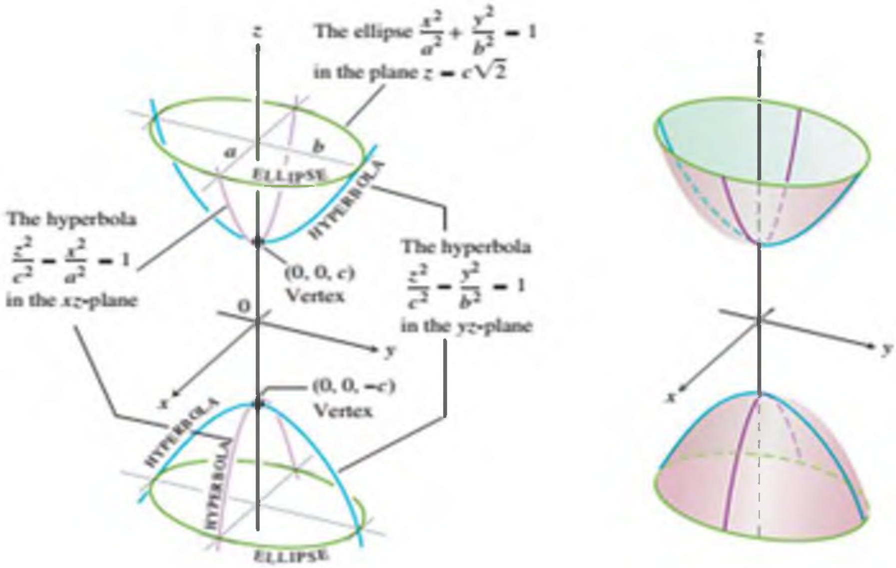
Bu chiziq $|h|$ning o'sishi bilan yarim o\`qlari o\`suvchi ellipsni beradi.

Sirtning Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesimlari

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemalari bilan aniqlanuvchi giperbolalar bo\`ladi.

Bu kesimlar (3-shakl) (8) sirtning ikki pallali giperboloid deb atalishiga sabab bo\`ladi. $a = b$ bo\`lganda (8) tenglama ***ikki pallali aylanish giperboloid***ni aniqlaydi.



3-shakl

Misol. $x^2 - 4y^2 + 4z^2 + 2x + 8y - 7 = 0$ tenglama bilan aniqlanuvchi sirt turini toping.

Yechish. Tenglamaning chap tomonini to\`la kvadratlarga ajratamiz:

$$x^2 + 2x + 1 - 4(y^2 + 2y + 1) + 4z^2 - 1 + 4 - 7 = 0$$

yoki
$$(x+1)^2 - 4(y-1)^2 + 4z^2 = 4.$$

Bundan
$$\frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{z^2}{1^2} - \frac{(y-1)^2}{1^2} = 1.$$

$x'=x+1,\ y'=y-1,\ z'=z$ deb, $Oxyz$ sistema markazini $O'(-1;1;0)$ nuqtaga parallel ko`chirish orqali $O'x'y'z'$ sistemaga o`tamiz. Bu sistemada tenglama

$$\frac{x'^2}{2^2}+\frac{z'^2}{1^2}-\frac{y'^2}{1^2}=1$$

ko`rinishni oladi. Bu tenglama $O'y'$ o`q bo`ylab yo`nalgan ***bir pallali giperboloidni*** aniqlaydi.

Konus

$Oxyz$ koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (10)$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirt ***ikkinchi tartibli konus*** deyiladi.

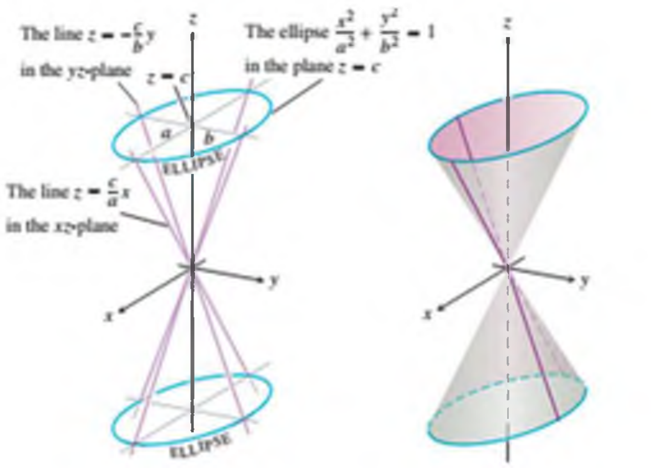
(10) sirtning Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesisish chizig`i $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}, z=h$ bo`ladi. U $h=0$ da $O(0;0;0)$ nuqtaga aylanadi. $h\neq 0$ bo`lsa, kesimda

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{ah}{c}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{bh}{c}\right)^2}=1,\\ z=h,\end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo`ladi. Bu ellipsning yarim o`qlari $|h|$ ning o`sishi bilan o`sadi.

Sirtning Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesimlari

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ y=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ x=0\end{cases}$$



4-shakl

sistemalar bilan aniqlanuvchi ikkita kesishuvchi to`g`ri chiziqlardan iborat bo`ladi (4-shakl).

Paraboloid

$Oxyz$ koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}, \quad a>0, b>0, c>0 \qquad (11)$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirt ***elliptik paraboloid*** deyiladi.

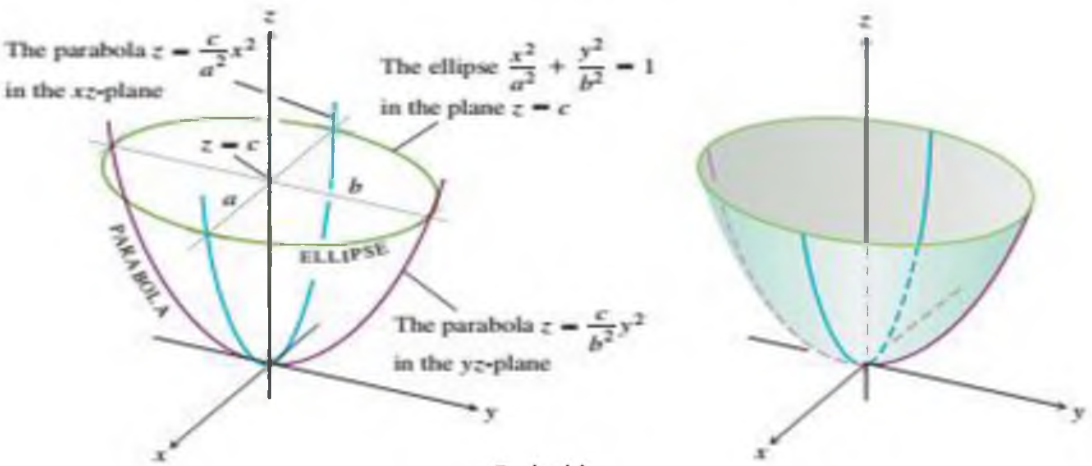
Bu sirtning Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesimi ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{(ah)^2}+\dfrac{y^2}{(bh)^2}=1, \\ z=h, h>0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi ellips bo`ladi. Uning yarim o`qlari $|h|$ ning o`sishi bilan o`sadi.

Sirtning Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesimlarida $z=\dfrac{x^2}{a^2}$ va $z=\dfrac{y^2}{b^2}$ parabolalar hosil bo`ladi (5-shakl). Shu sababli (11) tenglama bilan aniqlanuvchi sirt elliptik paraboloid deyiladi.

$a=b$ bo`lganda (11) tenglama ***aylanish paraloidi*ni** aniqlaydi.



5-shakl

Misol. $M_1(0;b;0)$ nuqtadan va $y=-b$ tekislikdan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o`rnini toping.

Yechish. $M(x;y;z)$ izlanayotgan nuqta bo`lsin. Masala shartiga ko`ra $|M_1M|=|y+b|$ yoki

$$\sqrt{x^2+(y-b)^2+z^2}=|y+b|.$$

Bundan

$$x^2+y^2-2yb+b^2+z^2=y^2+2yb+b^2, \quad x^2+z^2=4by \quad \text{yoki}$$

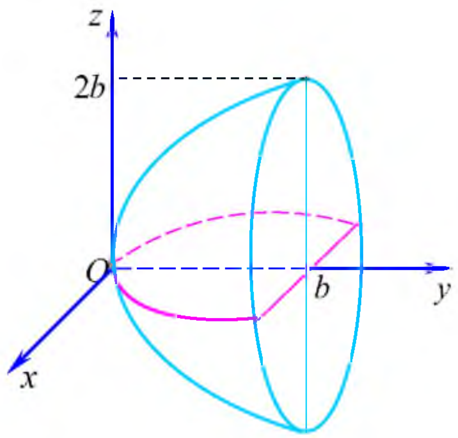
$$\frac{x^2}{4b}+\frac{z^2}{4b}=y.$$

Sirtning Oxz tekislikka parallel tekislik bilan kesimi ushbu

$$\begin{cases} x^2+y^2=4bh, \\ y=h, \;\; h>0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi aylanalardan iborat. Sirtning Oxy va Oyz tekisliklar bilan kesimlarida $y=\frac{x^2}{4b}$ va $y=\frac{z^2}{4b}$ parabolalar hosil bo`ladi.

Shunday qilib bu sirt aylanish paraboloididan iborat bo`ladi (6-shakl).



6-shakl

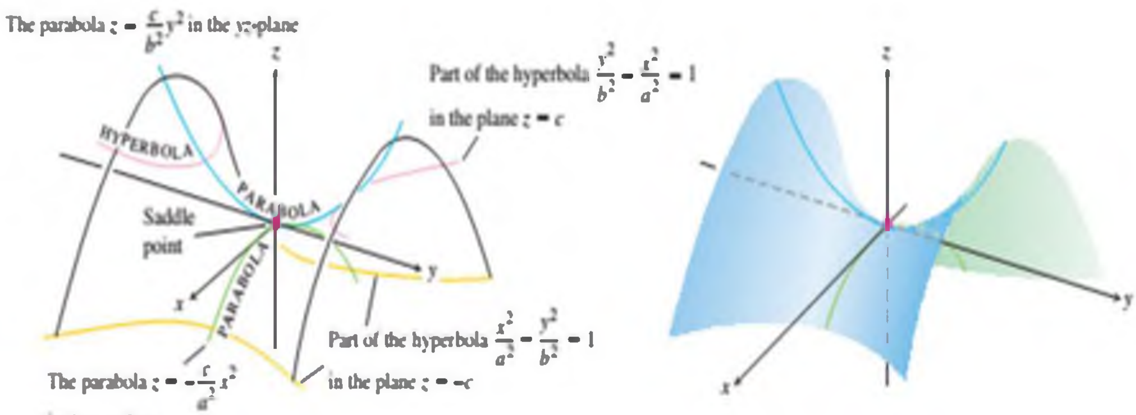
$Oxyz$ koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z, \;\; a>0, \;\; b>0 \qquad (12)$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirt ***giperbolik paraboloid*** deyiladi. Sirtning Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesimi

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(ah)^2}-\frac{y^2}{(bh)^2}=1, \\ z=h, h>0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi giperboladan, Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesimlari $z=\frac{x^2}{a^2}$ va $z=\frac{y^2}{b^2}$ parabolalardan iborat bo`ladi. Shunday qilib (12) tenglama bilan aniqlanuvchi sirtning ko`rinishi «egar» shaklida bo`ladi (7-shakl). Bu sirt giberbolik paraloboid deb ataladi.



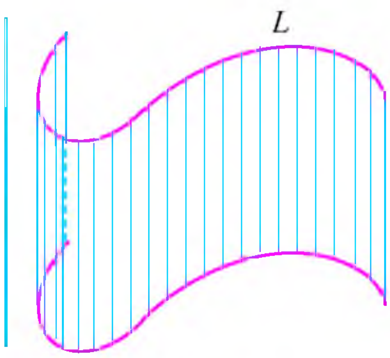
7-shakl

Silindrik sirtlar

Tekislikda L chiziq va bu tekislikka perpendikulyar l to‘g‘i chiziq berilgan bo`lsin.

L chiziqning har bir nuqtasi orqali l to`g`ri chiziqqa parallel qilib o`tkazilgan to`g`ri chiziqlar to`plamidan hosil bo`lgan sirtga ***silindrik sirt*** deyiladi. Bunda $L$ chiziq *silindrik sirtning yo`naltiruvchisi*, l to`g`ri chiziqqa parallel bo`lgan to`g`ri chiziqlar *silindrik sirtning yasovchilari* deb ataladi (8-shakl).

$Oxyz$ koordinatalar sistemasini Oz o`q $l$ yasovchiga parallel va $L$ yo`naltiruvchi Oxy tekislikda yotadigan qilib tanlaymiz.



8-shakl

L yo`naltiruvchining $Oxy$ tekislikdagi tenglamasi $F(x,y)=0$ bo`lsin. U holda $F(x,y)=0$ tenglama yasovchilari Oz o`qqa parallel bo`lgan silindrik sirtni ifodalaydi.

Silindrik sirtning nomlanishi va tenglamasi L yo`naltiruvchining shakli asosida aniqlanadi.

Agar Oxy tekislikdagi yo`naltiruvchi ellipsdan iborat bo`lganda $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglama *elliptik silindrni* ifodalaydi. $x^2+y^2=R^2$ tenglama bilan aniqlanuvchi *doiraviy silindr* elliptik silindrning xususiy holi bo`ladi.

Shu kabi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglama *giperbolik silindrni*, $y^2=2px$ tenglama *parabolik silindrni* ifodalaydi[1].

Misol tariqasida silindrik sirtlarning grafiklarini ***Maple*** kompyuter sistemasida keltiramiz.

Elliptik silindr : $\frac{1}{4}x^2$ C $\frac{1}{6}y^2=1$

```
> with(plots):
imlicitplot3d([x^2/4+y^2/6=1], x=-4..4, y=-4..4, z=-4..4,
grid=[13,13,13]);
```

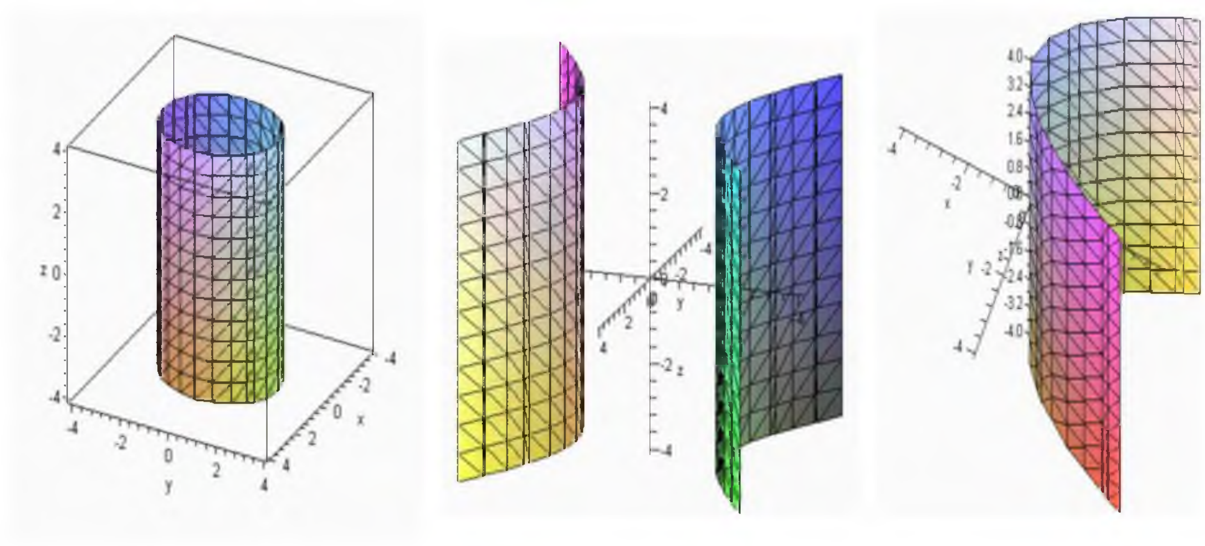
[1] M.Corral. Vector Calculus. Coryright, 2008.40-51b.

Giperbolik silindr : $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}y^2 = 1$

```
> with(plots):
imlicitplot3d([x^2/4-y^2/6=1], x=-4..4, y=-4..4, z=-4..4,
grid=[13,13,13]);
```

Parabolik silindr : $y^2 = 2x$

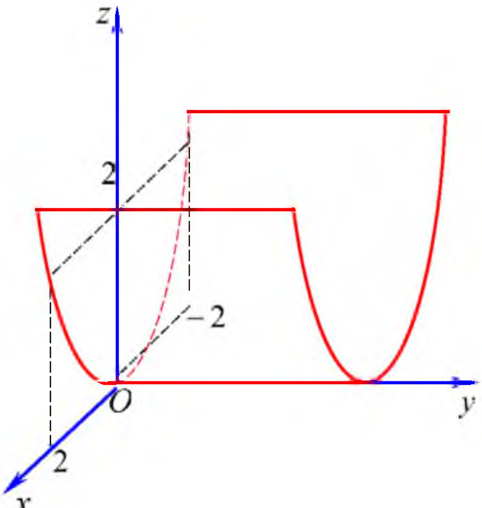
```
> with(plots):
imlicitplot3d([y^2=2*x], x=-4..4, y=-4..4, z=-4..4,
grid=[13,13,13]);
```



Misol. $x^2 = 2z$ tenglama bilan aniqlanuvchi sirt shaklini chizing.

Yechish. Berilgan tenglamada y qatnashmaydi va $x^2 = 2z$ chiziq Oxz tekislikda yotuvchi parabolani ifodalaydi. Shu sababli $\begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0 \end{cases}$ tenglama yasovchilari Oy o`qqa parallel bo`lgan parobolik silindrni ifodalaydi.

Parabola $y = 0$ tekislikda Oz o`qqa nisbatan simmetpik bo`ladi, uchi $O(0;0;0)$ nuqtada yotadi va $M_1(-2;0;2), M_2(2;0;2)$ nuqtalardan o`tadi (9-shakl).



9-shakl

Ikkinchi tartibli sirtlarning to`g`ri chiziqli yasovchilari

To`g`ri chiziqlarning harakatidan hosil bo`ladigan sirtlarga *to`g`ri chiziqli sirtlar* deyiladi. Bu sirtlarning yasovchilari *to`g`ri chiziqli yasovchilar* deb ataladi.

To`g`ri chiziqli sirtlarga konus sirtlar va silindrik sirtlarlar misol bo`la oladi. Bundan tashqari bir pallali giperboloid va giperbolik paraboloid ham to`g`ri chiziqli sirtlar bo`lishi isbotlangan.

Bir pallali giperboloidning har bir nuqtasi orqali

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases} \text{va} \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=l\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{l}\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases} \qquad (13)$$

tenglamalar bilan berilgan to`g`ri chiziqlar oilasidan faqat bitta chiziq o`tishi ko`rsatilgan, bu yerda $a,b,c-$ bir pallali giperbolidning yarim o`qlari, $k,l-$ nolga teng bo`lmagan sonlar.

10-shakl

Shunday qilib, (13) tenglamalar k va l ning turli qiymatlarida bir pallali giperboloidda yotuvchi va uni to`liq qoplovchi cheksiz to`g`ri chiziqlar sistemasini tashkil qiladi. Bu to`g`ri chiziqlarga ***bir pallali giperboloidning to`g`ri chiziqli yasovchilari*** deyiladi.

Shu kabi

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{b}=kz, \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{b}=\frac{1}{k} \end{cases} \text{va} \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{b}=\frac{1}{l}, \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{b}=lz \end{cases} \qquad (14)$$

tenglamalar bilan berilgan to`g`ri chiziqlar giperbolik paraboloidning to`g`ri chiziqli yasovchilari bo`ladi.

To`g`ri chiziqlardan bir pallali giperboloid sirtlarning yasovchilari qurilish va texnikaning konstruksiyalarida keng foydalaniladi.

Hyperboloids produce gear transmission

11-shakl

Masalan, bir pallali giperboloidning to`g`ri chiziqli yasovchilari bo`yicha metal balkalar joylashtirilgan radiomachta, suv va yadro qurilmalari minoralari, teleminoralar (masalan, Guanjou (Xitoy) teleminorasi, 10-shakl), tirgaklar va uzatmalar (11-shakl) kabi konstruksiyalar ishlab chiqilgan. Bunday konstruksiyalar yengil va mustahkam bo`lgani sababli keng tatbiq etiladi.

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. Sirt tushunchasini misolda asoslang.
2. Tekislikning turli tenglamalarini ayting.
3. Tekisliklarning o`zaro vaziyatlarini tushuntiring.
4. Ikkinchi tartibli sirt deb nimaga aytiladi?
5. Ellipsoid, giperboloid va paraboloidga ta'rif bering.
6. Elliptik paraboloidning kanonik tenglamasini ayting.
7. Giperbolik paraboloidning kanonik tenglamasini ayting.
8. Bir pallali giperboloidni ta'riflang va kanonik tenglamasini ayting.
9. Ikki pallali giperboloidni ta'riflang va kanonik tenglamasini ayting.
10. M(2,-1,3) nuqtadan o`tib, a(3,-1,4), b(1,-2,1) vektorlarga parallel bo`lgan tekislik tenglamasini tuzing.
11. A(2,-1,3), B(3,1,2) nuqtalardan o`tib, a(3,-1,4) vektorga parallel bo`lgan tekislik tenglamasini yuzing.
12. A(3,-1,3), B(4,-1,-1), C(2,0,3) nuqtalardan o`tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.
13. Quyidagi tekisliklarning normal vektori koordinatalarini toping

a) 2x-y-2z+5 =0 ; b)x+5y-z= 0 ; c) 3x-2y-7 =0 ; d) 5y-3z = 0

14. Uchlari A(3,6,-7), B(-5,2,3), C(4,-7,-2) nuqtalarda bo`lgan uchburchakning birorta medianasi tenglamasini tuzing.
15. 1) $M_0(1;3;-2)$ nuqtadan va Ox o`qdan o`tuvchi; 2) $M_0(2;-1;3)$ nuqtadan o`tuvchi va $Oy$ o`qqa perpendikulyar; 3) $M_0(3;-2;4)$ nuqtadan o`tuvchi va Oxy tekislikka parallel tekislik tenglamalarini tuzing.

IV modul. KOMBINATORIKA, EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA. MATEMATIK MODELLAR VA ALGORITMLAR

"Matematika tabiatni tushunishni yoki uning kuchidan foydalanishni (masalan mashinalar yasashda) istovchilar uchun foydali va juda ham zarur bo`lib qolmasdan, balki u inson ongining qiziq, jozibali va ajoyib hodisasidir".
A.Ren'i

17-§. Kombinatorika elementlari

Tayanch iboralar: *kombinatorika elementlari, kombinatorikaning asosiy qoida va teoremalari, qo`shish (jamlash) qoidasi, kiritish-chiqarish qoidasi, ko`paytirish qoidasi, guruhlashlar va o`rinlashtirishlar, birikmalar, elementlar, takrorlanuvchi o`rinlashtirishlar, takrorlanuvchi guruhlashlar.*

Obyektlarni tanlash va ularni ma'lum tartibda joylashtirish kabi matematik masalalar har doim insonni qiziqtiriradigan sohalardan hisoblangan.

Kombinatorika – bu matematikaning chekli to`plam elementlarini berilgan qoidalar asosida tanlash va joylashtirish bilan bog`liq masalalarni yechish usullarini o`rganuvchi bo`limdir.

Kombinatorika tarixiga nazar tashlasak, bir necha ming yil avval Xitoyda sehrli kvadratlar tuzish, qadimgi Yunonistonda figurali sonlar nazariyasini tuzish masalasini o`rganishgan. Kombinatorika masalalari Samarqanddagi Ulug`bek maktabining taniqli matematigi G`iyosiddin Jamshid Koshiy, X asrda yashab ijod etgan Umar Xayyom, keyinchalik Yevropa olimlari jumladan, B.Paskal, J.Kordano, G.Leybnits, Ya.Bernulli, P.Ferma, L.Eyler va boshqa olimlarning ishlarida uchraydi.

17.1. Kombinatorikaning asosiy qoida va formulalari

$|A|$ deb chekli A to`plam elementlari sonini belgilaymiz. Kombinatorikada sodda, o`z-o`zidan ravshan bo`lgan, ammo muhim qoidalar bor. Bunday qoidalar sifatida jamlash, ko`paytirish hamda kiritish va chiqarish qoidalari deb ataluvchi qoidalarni ko`rsatish mumkin.

**Qo`shish (jamlash) qoidasi:** Agar $A$ to`plam n ta elementdan, B to`plam esa $m$ ta elementdan iborat bo`lib, bu ikki to`plam o`zaro kesishmasa, u holda A va B ning barcha elementlaridan iborat $A \cup B$ to`plam $n+m$ ta elementga ega, ya'ni

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Qo`shish qoidasi bilan $A$ va $B$ to`plamlar o`zaro kesishganda ham $A \cup B$ to`plam elementlari nechtaligini hisoblash mumkin. Bunda quyidagi ***kiritish-chiqarish qoidasi*** o`rinli:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ravshanki, bu tenglikdan foydalanib $|A|$, $|B|$, $|A \cup B|$ va $|A \cap B|$ miqdorlarning ixtiyoriy uchtasi ma'lum bo`lganda to`rtinchisini hisoblash mumkin.

Misol. 50 nafar talabadan 40 nafari ingliz tilini, 25 nafari esa nemis tilini o`rganmoqdalar. Ikkala tilni ham o`rganayotgan talaba nechta?

Yechish. Ingliz tilini o`rganayotgan talabalar to`plamini A orqali, nemis tilini o`rganayotgan talabalar to`plamini B orqali belgilaymiz.

Ma'lumki, $|A \cup B| = 50$, $|A| = 40$, $|B| = 25$. U holda ikkala tilni ham o`rganayotgan talabalar $A \cap B$ to`plamni tashkil qilib, kiritish-chiqarish formulasidan $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 15$.

**Ko`paytirish qoidasi:** $\tilde{N} = \{<a,b> | a \in A, b \in B\}$ ko`rinishdagi to`plam uchun

$$|C| = |A| \cdot |B|$$

Eslatma. Yuqorida bayon qilingan ikkita to`plam uchun qo`shish, ko`paytirish hamda kiritish - chiqarish qoidalarini chekli sondagi istalgan chekli to`plamlar uchun umumlashtirish mumkin.

Masalan, uchta chekli A, B, C to`plamlar uchun

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

kiritish - chiqarish qoidasi o`rinli.

Misol. 40 nafar turistdan 20 nafari ingliz tilini, 15 nafari fransuz tilini, 11 nafari esa ispan tilini biladilar. Ingliz va fransuz tillarini yetti nafar turist, ingliz va ispan tillarini besh nafar turist, fransuz va ispan tillarini esa uch nafar turist biladi. Ikki nafar turist uchta tilni bilgani ma'lum bo`lsa, turistlar ichida nechtasi shu uchta tildan birortasini ham bilmaydi?

Yechilishi. Ingliz tilini biladigan turistlar to`plamini $E$ deb, fransuz tilini biladigan turistlar to`plamini F deb, ispan tilini biladigan turistlar to`plamini esa I deb belgilaymiz. U holda

$|E|=20$, $|F|=15$, $|I|=11$, $|E\cap F|=7$, $|E\cap F|=5$, $|I\cap F|=3$, $|E\cap F\cap I|=2$.

Dastlab kamida bitta tilda gaplashadigan turistlar sonini topamiz:

$$|E\cup F\cup I|=|E|+|F|+|I|-|E\cap F|-|E\cap I|-|F\cap I|+|E\cap F\cap I|=$$
$$=20+15+11-7-5-3+2=33$$

Demak, $40-33=7$ nafar turist shu uchta tildan birortasini ham bilmaydi.

17.2. O`rinlashtirishlar, o`rin almashtirishlar, birikmalar

Predmetlardan tashkil topgan tuzilmalar ***kombinatsiyalar*** deb ataladi.

Uch xil turdagi kombinatsiyalar o`rganiladi: o`rin almashtirish, o`rinlashtirish va birikmalar.

O`rinlashtirishlar.

A alfavit n ta belgidan tashkil topgan bo`lsin. Uzunligi $m$ ga teng bo`lgan so`zlar (ya'ni uzunligi $m$ ga teng bo`lgan ketma-ketliklar) sonini sanab chiqaylik.

Har bir so`zni tashkil etgan belgilar orasidagi takrorlanadiganlari bor bo`lgan holda bunday so`zlar sonini $\overline{A_n^m}$ (*$n$ ta elementdan $m$ tadan takrorli o`rinlashtirishlar soni)*, bu belgilarning barchasi har xil bo`lgan holda $A_n^m$ (*takrorsiz o`rinlashtirishlar soni*) deb belgilaymiz. Bu ikki miqdor uchun formulalar quyidagicha:

$$\overline{A_n^m}=n^m,\quad A_n^m=n(n-1)(n-2)....(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

Bu yerda $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n, \quad 0! = 1$ (n – faktorial deb o`qiladi)

Endi uzunligi m dan ko`p bo`lmagan so`zlar sonini sanab chiqaylik.

Bunda qo`shish (jamlash) qoidasiga ko`ra so`zlarni tashkil etgan belgilar orasidagi takrorlanadiganlari bor bo`lgan holda bunday so`zlar soni $\sum_{k=0}^{n} \overline{A_n^k} = \overline{A_n^0} + \overline{A_n^1} + \overline{A_n^2} + ... + \overline{A_n^m} = 1 + n + n^2 + n^3 + ... + n^m$ ga, bu belgilarning barchasi har xil bo`lgan holda

$\sum_{k=0}^{n} A_n^k = A_n^0 + A_n^1 + A_n^2 + ... + A_n^m$ ga teng.

Misol. **1)** 20 ta belgidan tashkil topgan alfavit berilgan bo`lsin.

Uzunligi 3 ga teng bo`lgan so`zlar sonini sanab chiqaylik. Bunda belgilarning barchasi takrorlanmasin.

Yechish. $A_{20}^3 = 20(20-1)(20-2) = 6840$

2) 20 ta belgidan tashkil topgan alfavit berilgan bo`lsin.

Uzunligi 3 ga teng bo`lgan so`zlar sonini sanab chiqaylik. Bunda belgilarning ayrimlari takrorlanishi mumkin.

Yechish. $\overline{A_{20}^3} = 20^3 = 8000$.■

O`rin almashtirishlar

n ta elementli o`rin almashtirishlar deb, bir-biridan faqat elementlarining tartibi bilan farq qiladigan n ta elementli birikmalarga aytiladi.

Masalan, 3 ta A, B *va* C elementdan 6 ta o`rin almashtirish bajarish mumkin: ABC, BAC, ACB, CAB, CBA, BCA.

n ta elementli o`rin almashtirishlar soni quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$P_n = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n = n!$$

Misol. **1)** *Afsuski, bugun, yomg`ir, yog`adi* so`zlaridan nechta gap tuzish mumkin?

Yechish. $P_4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$. ■

2) w,e,d,i,g,m,a,t,h harflarining *“we”, ”dig”, ”math”* so`zlaridan hech qaysisini o`z ichiga olmagan barcha o`rin almashtirishlar nechta? Masalan, d,g,i,w,e,t,h,m,a shu shartni qanoatlantirmaydi.

Yechish. Barcha o`rin almashtirishlar soni $9!=362880$ ga teng. *“we”* so`zini o`z ichiga olmagan barcha o`rin almashtirishlar to`plamini $A_1$, *”dig”* so`zini o`z ichiga olmagan barcha o`rin almashtirishlar to`plamini $A_2$, *”math”* so`zini o`z ichiga olmagan barcha o`rin almashtirishlar to`plamini A_3 deylik.

Kamida bitta so`zni o`z ichiga olmagan barcha o`rin almashtirishlar soni

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

ga teng. Ravshanki,

$|A_1| = 8!$ (we,d,i,g,m,a,t,h elementlarning o`rin almashtirishlari soni),

$|A_2| = 7!$ (w,e,dig,m,a,t,h elementlarning o`rin almashtirishlari soni),

$|A_3| = 6!$ ($w,e,d,i,g,math$ elementlarning o`rin almashtirishlari soni),

$|A_1 \cap A_2| = 6!$ (we,dig,m,a,t,h elementlarning o`rin almashtirishlari soni),

$|A_2 \cap A_3| = 4!$ ($w,e,dig,math$) elementlarning o`rin almashtirishlari soni),

$|A_1 \cap A_3| = 5!$ ($we,d,i,g,math$) elementlarning o`rin almashtirishlari soni),

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3!$ ($we,dig,math$) elementlarning o`rin almashtirishlari soni).

Demak, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 8!+7!+6!-6!-5!-4!+3! = 45222$.

U holda, *“we”, ”dig”, ”math”* so‘zlarini o‘z ichiga olmagan barcha o`rin almashtirishlar soni $9!-45222=362880-45222=317658$.

Faraz qilaylik, qandaydir so‘zni tashkil qilgan belgilar orasida aynan bir xil n_1 ta birinchi tur, bir xil n_2 ta ikkinchi tur va hokazo, bir xil n_k ta k - tur belgilar bo`lsin, bu yerda $n_1, n_2, \ldots n_k$ – natural sonlar. Bu belgilarning o`rinlarini almashtirish natijasida hosil bo`lgan so`zlar ***takrorli o`rin almashtirishlar*** ***(anagrammalar)*** deb ataladi.

Barcha anagrammalar sonini $P(n_1,n_2,...,n_k)$ bilan belgilasak, u uchun

$$P(n_1,n_2,...,n_k)=\frac{(n_1+n_2+...+n_k)!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

formula o`rinlidir.

Misol. "Kombinatorika" so`zidan nechta anagramma tuzish mumkin?

Yechish. Bu so`z ikkita K, ikkita O, bitta M, bitta B, ikkita I, bitta N, ikkita A, bitta T va bitta R harfidan tashkil topganligi bois, anagrammalar soni $P(2,2,1,1,2,1,2,1,1)=\frac{13!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}=\frac{13!}{16}$ ga teng.

Qiziqarli ma'lumot. Ayrim adabiyotlarda nafaqat so`zlardan, balki so`z birikmalari hamda gaplardan tashkil topgan anagrammalar qaraladi.

Anagrammalarni tuzish – tabiiy til so`zlari hamda gaplari bilan kombinatorik mashqlarning qadimiy turi bo`lib, unga 2000 yildan oshdi. Shunisi qiziqki ANAGRAMS so`zining harflaridan ARS MAGNA – buyuk san'at (*lot.*) so`z birikmasini tuzish mumkin.

Ma'lumki, fransuz qiroli Lyudovik o`zining qarorgohida anagrammist lavozimini kiritib, uning yillik maoshini 1200 livr deb belgilagan.

Ayrim anagrammalar nafaqat ma'noga, balki dastlabki so`zga (yoki so'z birikmasiga ) qarama-qarshi ma'nodagi so`zni (yoki so`z birikmasini) tashkil qiladi.

Ulardan ayrimlarini keltiramiz:

1. evils agents (jahannam elchilari) – evangelists (evangelistlar)
2. real fun (katta xursandchilik) – funerals (dafn marosimi)
3. no more stars (boshqa yulduzlar yo'q) – astronomer (astronom)

Birikmalar

Agar elementlar tartibi nazardan soqit qilinsa, shunday masala vujudga keladi: n elementli to`plamdan nechta $m$ elementli turli qism to`plam ajratish mumkin? Bunday qism to`plamlar ***n ta elementdan m tadan tuzilgan birikmalar*** deyiladi.

Uzunligi n ga teng bo`lgan va tarkibida aynan $m$ ta $a$ harf bo`lgan $\underbrace{a...a}_{m}\underbrace{b...b}_{n-m}$ ko`rinishdagi so`z bunday birikmani tashkil qiladi.

Birikmalar soni $C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ formulasi bilan hisoblanadi.

Misol. Ikkita unli va uchta undosh fonemadan iborat besh fonemali so`zlar soni

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3} = 10 \text{ ga teng.}$$

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. Kombinatorikaning asosiy qoidalarini ayting.
2. O`rin almashtirishlarni tushuntiring, formulasini eslang.
3. O`rin almashtirishlar deb nimaga aytiladi?
4. Birikmalar nima?
5. Quyidagi misollarni mustaqil o`rganing va yeching:

6. 3 ta kitob, 4 ta daftar va 5 ta qalam bor. Ulardan bittadan olinib komplektlar tuzilmoqda. Bu ishni necha xil usul bilan qilish mumkin? ***J.:*** 60 ta.

7. 30 talabasi bo`lgan guruhdan boshliq, yordamchi va kotib necha xil usul bilan saylanishi mumkin? ***J.:*** 24360 ta.

8. 8 ta har xil kitobdan 3 tasi necha xil usul bilan tanlanishi mumkin?***J:*** 336 ta.

9**.**7 xil kitobni 7 o`quvchiga necha usul bilan tarqatish mumkin? ***J.:*** 5040.

10**.**20 kishi ichidan 5 vakilni necha usul bilan saylash mumkin? ***J.:*** 15504.

11**.** Bir aylanada yotgan 5 ta nuqta ustidan nechta vatar o'tkazish mumkin? ***J.:*** $C_5^2=10$**.**

12**.** Bir kishida 8 ta kitob,ikkinchisida 6 ta kitob bor. Almashtirish uchun ularning har biri necha usul bilan 3 tadan kitob tanlashlari mumkin? ***J.:*** $C_8^3 : C_6^3=1120$**.**

13. Lotareya biletidan 36 ta nomerdan 6 tasini necha xil usul bilan o`chirish mumkin? ***J.:*** C_{36}^{6}.

14. “Uchburchak” so`zidagi harflarni o`rin almashtirib, nechta so`z hosil qilish mumkin? ***J.:*** $P_{10takr} = 4536$.

15. 26 ta harfli alifboda to’rttadan har xil harf olinib, qancha so`z tuzish mumkin? ***J.:*** A_{26}^{4}.

16. Kitob javoniga 3 ta kitob algebradan, 2 ta kitob geometriyadan va 1 ta kitob matematik analizdan necha xil usul bilan almashtirib joylashtirish mumkin? ***J.:*** 60.

17. 10 ta sportchidan 6 kishidan iborat nechta komanda tuzish mumkin? ***J.:*** 210.

18-§. Ehtimollar nazariyasi elementlari

“Matematika – tekshirishning ajoyib qurolidir.
U hodisani ikir-chikirigacha o`rganishga,
ba’zan oldindan aniqlashga imkon beradi”
A.M.Lyapunov.

Tayanch iboralar: *hodisa, tasodifiy hodisalar, tajriba va sinov tushunchasi, hodisalar orasidagi munosabatlar, ehtimol, ehtimolning klassik, statistik va geometrik ta’riflari, muqarrar hodisa, mumkin bo`lmagan hodisa, tasodifiy miqdor, taqsimot funksiyasi, matematik kutilma, dispersiya.*

Ehtimollar nazariyasi tasodifiy voqea yoki hodisalarning qonuniyatlarini o`rganuvchi fandir. Ehtimollar nazariyasi matematika fanining bir yo`nalishi bo`lib, u XVII asrning o`rtalaridan rivojlana boshlagan. XIX asrga kelib ehtimollar nazariyasi alohida fan sifatida shakllandi hamda tabiatshunoslik va texnikaning ko`p sohalarida qo`llanila boshlandi.

Matematika fani, xususan ehtimollar nazariyasi O`zbekistonda rivojlangan bo`lib, bu sohada alohida maktab yaratilgan. Bu maktabning asoschilari V.I. Romanovskiy va uning shogirdi akademik S.X. Sirojiddinovni eslash o`rinlidir.

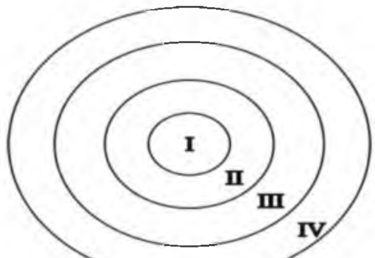
20-asrdan boshlab ehtimollar nazariyasi usullari stilistik, diaxronik va tipologik tahlilda, ijtimoiy lingvistika, psixologik lingvistika, leksikografiya va h.k. larda qo‘llanilmoqda.

18.1. Tasodifiy hodisa va tajriba tushunchasi

Kundalik hayotda ma'lum shartlar majmuasi S bajarilganda ro`y berishi ham mumkin yoki ro`y bermasligi ham mumkin bo`lgan hodisalar tez-tez uchrab turadi. Bunday hodisalar tasodifiy hodisalar deb ataladi. Masalan, shashkol tosh (kubik)ni tashlaganda 2 raqam tushishi ham mumkin yoki tushmasligi ham mumkin; nishonga o`q otilganda o`q nishonga tegishi ham mumkin, tegmasligi ham mumkin; gugurt cho`pining doirlangan qismini gugurt qutusining dorilangan tomoniga bir marta ishqalaganda gugurt cho`pi yonishi ham mumkin, yonmasligi ham mumkin. Bu yerda "2 raqami tushushi", "o`qning nishonga tegishi" va "gugurt cho`pining yonishi" tasodifiy hodisalardir.

Agar S shartlar majmuasi (kompleksi) ko`p marta aynan takrorlansa, bu holda " $S$ shartlar majmuasi" deyish o'rniga undan qisqaroq bo`lgan tajriba iborasi qo`llaniladi. Shunday qilib, hodisaga sinov natijasi sifatida qaraladi.

Masalan: 1) Mergan to`rtta qismga bo`lingan nishonga o`q uzadi. O`q uzish – bu sinov. Otilgan o`qning nishonning aniq bir qismiga tegishi – hodisa.



2) Idishda rangli sharlar bor. Undan tavakkaliga bitta shar olindi. Idishdan shar olish – bu tajriba, ma'lum rangdagi sharning chiqishi esa hodisa.

Tajriba – bu o`rganilayotgan lingvistik hodisaning ro`y berishi mumkin bo`lgan shart-sharoitlar majmuasi.

Misollar. Matnda sodda gaplarni sanab olish, gapda fe'llarni sanab olish.

Matnda sodda gaplarning soni 100 ga teng bo`lishi, gapda fe'llarning soni 2 ga teng bo`lishi.

Tajriba natijasida har gal ro`y beradigan hodisa muqarrar hodisa, hech qachon ro`y bermaydigan hodisa esa mumkin bo`lmagan hodisa deyiladi.

Tajribalarning har qanday natijasi elementar hodisa deyiladi. Elementar hodisani ω orqali belgilaymiz.

Misol. Tajriba 500 gapdan tashkil topgan matnda sodda gaplarni sanab olishdan iborat bo`lsin.

Bu holda elementar hodisa ω sifatida [0;500] oraliqdagi ixtiyoriy butun sonini olish mumkin. Bu tajribada Ω elementar hodisalar fazosi {0;1,2,…,500} to`plamdan iborat.■

Ta'rif. Tajriba o`tkazish natijasida ro`y berishi ham, ro`y bermasligi ham mumkin bo`lgan hodisalar **tasodifiy hodisalar** deyiladi va *A*, *B*, *C* harflar bilan belgilanadi.

Masalan, tangani bir marta tashlaganda $A=\{G\}$ tomonining tushishi tasodifiy hodisa, kubik tashlanganda juft sonlari $A=\{2, 4, 6\}$ tushishi tasodifiy hodisa bo`ladi. Idishda 15 ta shar bo`lsin. Ulardan beshtasi oq, beshtasi qizil va beshtasi ko`k bo`lsin. Sharlar bir xil o`lchamda va bir xil materialdan tayyorlangan bo`lsin. Idishdan ixtiyoriy olingan shar oq shar $A=\{\text{oq}\}$ bo`lishi tasodifiy hodisadir.

Ta'rif. Tajriba o`tkazish natijasida albatta ro`y beradigan hodisa **muqarrar hodisa** deyiladi va Ω harfi bilan belgilanadi.

Masalan, tanga bir marta tashlanganda «*G*» yoki «*R*» ro`y beradi, ya'ni $\Omega=\{G, R\}$ muqarrar hodisadir. Kubik tashlanganda 1 dan 6 gacha raqamlarning tushishi, ya'ni $\Omega=\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ muqarrar hodisadir.

Idishdan shar olganda (oq, ko`k va qizil shar) yo oq, yo qizil, yo ko`k sharning chiqishi Ω ={oq, ko`k, qizil} - muqarrar hodisa.

Ta'rif. Tajriba o`tkazish natijasida ro`y bera olmaydigan hodisani **mumkin bo`lmagan hodisa** deyiladi va $\varnothing$ bilan belgilanadi.

Ta'rif. Ikkita *A* va *B* **hodisalarning yig`indisi** deb, shu *A* va *B* hodisalarning hech bo`lmaganda bittasiga tegishli bo`lgan barcha elementar hodisalar to`plamiga aytiladi va *A*+*B* yoki $A \cup B$ ko`rinishda yoziladi.

Masalan, kubik tashlanganda *A* hodisa juft sonlar tushishi, *B* hodisa esa 3 ga karrali sonlarning tushish hodisasi bo`lsin, ya'ni $A=\{2, 4, 6\}$ $B=\{3, 6\}$. U holda $A+B=\{2, 3, 4, 6\}$ bo`ladi.

Ta'rif. Bir nechta hodisalarning yig`indisi deb, shu hodisalarning hech bo`lmaganda bittasiga tegishli bo`lgan barcha elementar hodisalar to`plamiga aytiladi

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Agar bir nechta hodisalar yig`indisi muqarrar hodisaga teng bo`lsa, u holda bu hodisalar hodisalarning to`liq gruppasini tashkil yetadi deb hisoblanadi.

Masalan, agar $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$, $C = \{1, 3, 5\}$ bo`lsa, u holda $A + B + C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ bo'ladi. $A$, $B$, $C$ lar hodisalarning to`liq gruppasini tashkil etadi.

6-ta'rif. Ikkita A va B **hodisalarning ko`paytmasi** deb, bir vaqtda ham $A$, ham $B$ hodisalarga tegishli bo`lgan elementar hodisalardan iborat bo`lgan to`plamga aytiladi va AB yoki $A \cap B$ ko`rinishda yoziladi.

Masalan, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$ bo`lsa, $AB = \{6\}$ bo`ladi.

7-ta'rif. Bir nechta hodisalarning ko`paytmasi deb, bir vaqtda barcha hodisalarga tegishli bo`lgan elementar hodisalardan iborat bo`lgan to`plamga aytiladi

$$A_1 A_2 \ldots A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k .$$

18.2. Tasodifiy hodisalar orasidagi munosabatlar

**1. Birgalikda bo`lmagan hodisalar.** Bitta-yu-bitta tajribada birining ro`y berishi qolganlarining ro`y berishini inkor qiluvchi hodisalar birgalikda bo`lmagan hodisalar deb aytiladi.

***Masalan*,** tanga tashlandi. Burda "gerb" tushushi hodisasi "raqam" tushish hodisasini, va aksincha, "raqam" tushish hodisasi "gerb" tushish hodisasini inkor qiladi. Demak, "gerb" tushish va "raqam" tushish hodisalari birgalikda bo`lmagan hodisalardir.

**2. To`la gruppa tashkil qiluvchi hodisalar.** Aytaylik, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – hodisalar bo`lsin. Agar tajriba natijasida $A_1, A_2, \ldots, A_n$

hodisalarning kamida bittasi albatta ro`y bersa, bu holda $A_1, A_2, ..., A_n$ – hodisalar berilgan tajriba shartlarida to`la gruppa tashkil qiluvchi hodisalar deb ataladi. Xususan, agar to`la gruppa tashkil qiluvchi hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo`lmagan hodisalar bo`lsa, u holda tajriba natijasida bu hodisalarning bittasi va faqat bittasi ro`y beradi. Ana shu xususiy hol bizni ko`proq qiziqtiradi.

3. Elementar hodisalar. Tajriba natijasida ro`y beradigan har bir hodisa elementar hodisa deb ataladi. Elementar hodisalar odatda $E_1, E_2, ..., E_n$ kabi belgilanadi.

Masalan, idishda bir xil o`lchamli, yaxshilab aralashtirilgan 6 ta shar bor. Ularning 3 tasi ko`k rangli, 2 tasi qizil rangli va bittasi oq rangli shar bo`lsin. Idishdan tavakkaliga olingan bitta sharning rangli (qizil yoki ko`k) bo`lish hodisasi A bo`lsin. Bu yerda elementar hodisalar quyidagilar bo`ladi: E_1 – oq , E_2, E_3, E_4 – ko'k, E_5, E_6 – qizil shar chiqish hodisalari.

Elementar hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo`lmagan teng imkoniyatli hodisalarning to`la gruppasini tashkil qiladi. Ya'ni ularning kamida biring ro`y berish hodisasi muqarrar (ishonchli) hodisadir.

4. Hodisaning ro`y berishiga qulaylik tug`diruvchi elementar hodisalar. Kuzatilayotgan A hodisaning o`zida ifodalovchi elementar hodisalar "$A$ hodisaning ro`y berishga qulaylik tug`diruvchi hodisalar" deyiladi. Yuqoridagi misolda, rangli shar chiqish hodisasi $A$ ning ro`y berishiga qulaylik tug`diruvchi elementar hodisalar beshta: E_2, E_3, E_4, E_5, E_6.

Demak, agar tajribada A hodisaning ro`yobga chiqarishga qulaylik tug`diruvchi hodisalardan biri ro`yobga chiqarishga qulaylik tug`diruvchi hodisalardan biri (qaysi bo`lishidan qat'iy nazar) ro`y bersa, bu holda A hodisa ro`y beradi. Yuqoridagi misolda, $E_2$ yoki, $E_3$ yoki, $E_4$, yoki $E_5$, yoki $E_6$ ro`y bersa, A hodisa (rangli shar chiqish hodisasi) ro`y beradi.

18.3. Ehtimollik tushunchasi, ta'riflari va xossalari

Ehtimollar nazariyasi tasodifiy hodisalarni ro`y berish qonuniyatlarini o`rganadi. Shuning uchun tasodifiy hodisa ro`y berishi imkoniyatlarini bildirish uchun maxsus son – ehtimollik kiritilishi lozim. Demak, hodisaning ehtimoli bu - shu hodisaning ro`y berish imkoniyati darajasini tavsiflovchi (belgilovchi) son hisoblanadi.

Amaliyotda tajribani muayyan sharoitda bog`liqsiz ravishda ko`p marta takrorlab, hodisa nisbiy takrorlanishini kuzatib, uning ehtimolini taqriban aniqlash mumkin bo`ladi.

Tasodifiy hodisa A ning nisbiy takrorlanishi deb shu hodisaning ro`y bergan tajribalar soni $n(A)$ ning o`tkazilgan tajribalar umumiy soni n ga nisbatiga $\frac{n(A)}{n}$ aytiladi.

Tajribalar soni yetarlicha katta ($n \to \infty$) bo`lganida ko`p hodisalarning nisbiy takrorlanishi ma'lum qonuniyatga ega bo`ladi va biror p son atrofida tebranib turadi:

$$\frac{n(A)}{n} \approx p$$

Bu son A hodisaning *ehtimoli* deyiladi.

Ehtimolning amaliy jihatdan qulay bo`lgan bir necha ta'riflari (masalan, klassik, statistik, geometrik ta'riflari) mavjud, ammo uning yagona mukammal matematik ta'rifi yo`q.

1. Ehtimolning klassik ta'rifi. Amaliyotda hodisaning ro`y berishi imkoniyatini taqqoslay bilish ahamiyatga ega. Pul-buyum lotopeyasida $A-$bitta biletga yutuq chiqishi va $B-$barcha biletlarga yutuq chiqishi hodisalari turli darajadagi ro`y berish imkoniyatiga ega ekani ravshan. Shu sababli hodisalarni taqqoslash uchun qandaydir ko`rsatgichga asoslanish lozim bo`ladi.

Hodisa obyektiv ro`y berish imkoniyati darajasining sonli ko`rsatgichiga hodisaning ehtimoli deyilishini bilamiz. Bu ta'rif hodisa ehtimoli tushunchasining sifatiy ifodasi bo`lib, matematik hisoblanmaydi. U matematik bo`lishi uchun bu tushunchaning miqdoriy ko`rsatgichini aniglashi lozim.

Agar sinovning natijalari hodisalarning to`la guruhini tashkil etsa va teng imkoniyatli bo`lsa, ya'ni ular yagona mumkin bo`lgan, birgalikda bo`lmagan va teng imkoniyatli hodisalar bo`lsa, u holda bu natijalar *elementar natijalar* deyiladi. Bunda sinov “klassik“ deb yuritiladi. Shu sababli quyidagi ta'rif ehtimolning klassik ta'rifi deb ataladi.

Sinovning o`rganilayotgan hodisaning ro`y berishiga olib keladigan elementar natijalariga sinovning hodisa ro`y berishiga *qulaylik tug`diruvchi natijalari* deyiladi.

Ta'rif (klassik): A hodisaning ehtimoli deb sinovning A hodisa ro`y berishiga qulaylik tug`diruvchi natijalari soni m ni sinovning barcha elementar natijalari soni n ga nisbatiga aytiladi va $P(A)$ bilan belgilanadi.

Demak,
$$P(A)=\frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Bunda A hodisa ro`y berishiga qulaylik tug`diruvchi natijalar "moyil hodisalar" deb yuritiladi.

Misol. Oyin kubigi bir marta tashlanganda toq ochko tushishi ehtimolini toping.

Yechish. Oyin kubigi tashlanganda oltita elementar natija – 1, 2, 3, 4, 5, 6 ochko tushishi hodisalari mavjud. Barcha $n=6$ ta elementar natijalar teng imkoniyatli va to`la guruh tashkil etadi. $A-$toq ochko tushishi hodisasi bo`lsin. A hodisa ro`y berishiga $m=3$ ta natija – 1, 3 va 5 ochkolar tushishi hodisalari moyil bo`ladi.

U holda (1) formulaga ko`ra
$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Ehtimolning (1) klassik ta'rifi uzoq vaqt davomida ($XYII$ asrdan XIX asrgacha) ehtimolning ta'rifi sifatida qabul qilindi. Hozirgi vaqtda ehtimolga rasman ta'rif berilmaydi. Bu tushuncha birlamchi hisoblanadi va ta'riflanmaydi. Uni tushuntirish uchun hodisaning nisbiy chastotasidan foydalaniladi.

Shu sababli ehtimolning (1) klassik ta'rifiga ta'rif deb emas, balki klassik sinovlarda ehtimollarni topish formulasi sifatida qarash lozim.

2. Ehtimolning statistik ta'rifi. Yuqorida ta'kidlanganidek, ehtimolning klassik ta'rifi faqat klassik shartlarda qo`llaniladi. Hodisalarning shunday sinflari (masalan, sinovning teng imkoniyatli bo'lmagan hodisalari sinfi) mavjudki, ularning ehtimollarini klassik ta'rif orqali huisoblab bo`lmaydi. Misol uchun, tanga tashlanganda $A-$raqamli tomon tushishi va $B-$gerbli tomon tushishi hodisalari teng imkoniyatli bo`lmaydi. Bunda ulardan har birining ehtimolini topishda (1) formulani qo`llab bo`lmaydi.

Bunday hollarda hodisaning aslida o`tkazilgan sinovlarda ro`y berishi soniga, ya'ni statistikaga asoslangan ehtimolning statistik ta'rifidan foydalaniladi. Bu ta'rif nisbiy chastota tushunchasi orqali kiritiladi.

Ta'rif (statistik): A hodisaning nisbiy chastotasi deb hodisa ro`y bergan sinovlar soni $m^*$ ning aslida o`tkazilgan jami sinovlar soni n^* ga nisbatiga aytiladi va $P^*(A)$ bilan belgilanadi.

Demak,

$$P^*(A) = \frac{m^*}{n^*}. \qquad (2)$$

Nisbiy chastota klassik ta'rifdagi ehtimolning xossalariga monand xossalarga ega bo`ladi.

Kuzatishlar shuni ko`rsatadiki, sinovlar soni ortib borgan sayin nisbiy chastota bitta son atrofida tebrana boradi va bu tebranishning o`zgarishi nolga yaqinlashib boradi, ya'ni nisbiy chastota go`yo tasodifiy bo`lmay qoladi.

Masalan, tanga tashlash hodisasi kuzatilganda quyidagi natijalar olingan:

tajriba o`tkazuvchi	**sinovlar soni**	**gerbli tomon tushish soni**	**nisbiy chastota**
Byuffon	4040	2048	0,5069
Pirson	12000	6019	0,5016
Pirson	24000	12012	0,5005

Jadvaldan ko`rinadiki, tanga tashlanganda "gerbli tomon tushishi" hodisasining nisbiy chastotasi 0,5 soni atrofida tebranadi. Demak, $P^*(A) = 0{,}5$ deb olish mumkin. Bu qiymat $P(A)$ ga teng.

Shunday qilib, ehtimolning statistik ta'rifiga binoan sinov shartlari o`zgarmaganda A hodisaning nisbiy chastotasi tebranadigan songa A hodisaning ehtimoli deyiladi.

3. Ehtimolning geometrik ta'rifi. Ehtimolning klassik ta'rifida sinovning elementar natijalari soni chekli deb faraz qilinadi. Amalda elementar natijalar soni cheksiz bo`lgan sinovlar uchraydi. Masalan, mergan tomoni $a$ ga teng kvadratga o`q uzganda o`qning radiusi $r < a$ bo`lgan doiraga tegishi hodisasini qaraylik. Bunda, kvadratning ichki nuqtalari sonini n va doiraning ichki nuqtalari sonini m deyish mumkin, chunki o`q kvadratning istalgan nuqtasiga tegishi mumkin. Ammo, $m$ va $n$ sonlarini hisoblashning imkoni bo`lmaydi. Ko`rinib turibdiki, doira yuzasi oshgan sayin o`qning nishonga tegishi ehtimoli oshib boradi va aksincha. Shu sababli n ni kvadrat yuzasi bilan va m ni doira yuzasi bilan almashtirish mumkin. U holda $A-$ o`qni nishonga tegish hodisasining ehtimoli $P = \frac{S_{\partial}}{S_{kv}} = \frac{\pi r^2}{a^2}$ ga teng bo`ladi. Bunda doira A hodisaning ro`y berishiga moyil (bog`liq) soha deb yuritiladi.

Bu kabi masalalar geometrik ehtimol tushunchasiga asoslanib yechiladi. Geometrik ehtimolda qaralayotgan soha bir o`lchamli (to`g`ri chiziq, kesma), ikki o`lchamli (tekis shakl) va uch o`lchamli (fazoviy jism) bo`lishi mumkin. Bunda sohaning o`lchami (uzunligi, yuzasi, hajmi) ni mes bilan belgilab, quyidagi ta'rif kiritiladi.

Ta'rif (geometrik): ***A hodisaning ehtimoli*** deb A hodisaga bog`liq soha o`lchamining butun soha o`lchamiga nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$P(A) = \frac{mesg}{mesG}. \tag{3}$$

Misol. Radiusi R ga teng doiraga nuqta tavakkaliga tashlangan. Uning shu doiraga ichki chizilgan muntazam uchburchak ichiga tushishi ehtimolini toping.

Yechish. s uchburchakning yuzasi, S doiraning yuzasi, $A-$ nuqtaning uchburchakka tushishi hodisasi bo`lsin. Radiusi $R$ ga teng doiraning yuzasi $S = \pi R^2$ ga teng, unga uchki chizilgan uchburchakning yuzasi $s = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ ga teng bo`ladi.

U holda $$P = (A) = \frac{s}{S} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Ehtimolning xossalari

Ehtimolning klassik ta’rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

1-xossa. Muqarrar hodisaning ehtimoli 1 ga teng:

$$P(\Omega)=1$$

Isboti. $A=\Omega$ – muqarrar hodisa bo`lsin. U vaqtda har bir elementar hodisa $\Omega$ hodisaning ro`y berishiga qulaylik tug`diradi: $m=n$. Demak,

$$P(\Omega)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1.$$

2-xossa. Mumkin bo`lmagan hodisaning ehtimoli 0 ga teng:

$$P(\varnothing)=0$$

Isbot. Aytaylik, $A=\varnothing$ – mumkin bo`lmagan hodisa bo`lsin. U vaqtda hech bir elementar hodisa $\varnothing$ hodisaning ro`y berishiga qulaylik tug`dirmaydi: $m=0$. Demak,

$$P(\varnothing)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$$

3-xossa. A tasodifiy hodisaning ehtimoli 0 va 1 sonlari orasidagi songa teng:

$$0<P(A)<1$$

Isbot. Aytaylik, A – tasodifiy hodisa bo`lsin. U vaqtda sinov natijasida ro`y beradigan elementar hodisalar umumiy sonining bir qismi A hodisaning ro`y berishiga qulaylik tug`diradi: $0<m<n$. Demak,. $0<\frac{m}{n}<1$. Ya’ni, $0<P(A)<1$

Xulosa. Har qanday A hodisaning ehtimoli quyidagi qo`sh tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$0\le P(A)\le 1$$

18.4. Tasodifiy miqdorlar, taqsimot funksiyasi va qonuni tushunchasi

Ta'rif. chekli ehtimollar fazosi (Ω, A, P) berilgan bo`lib, w elementar hodisa uchun aniqlangan $\zeta(w)$, $w \in \Omega$ sonli funksiyaga tasodifiy miqdor deyiladi.

Ko`pincha tasodifiy miqdorlarni grek harflari $\xi, r, \zeta, \nu, ...$ kabilar bilan belgilaymiz.

1-misol. Bernulli sxemasida $\Omega \ni w = (w_1, w_2, .., w_n)$, bo`lib, $w_i = 1$ agar $i -$ tajribada biz kutgan hodisa ro`y bersa, $w_i = 0$, agar $i -$nchi tajribada biz kutgan hodisa ro`y bermasa. U holda $n$ ta tajribada biz kutgan hodisalarni ro`y berishlar soni $\mu = \mu(w) = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ bo`ladi.

2-misol. Yashikda M ta oq $N - M$ ta qora shar bor. Qayta qo`ymaslik sharti bilan $n(n \leq N)$ ta shar olingan bo`lsin. Agar oq sharlar 1 dan M gacha nomerlangan bo`lsa, $\Omega$ elementar hodisalar fazosi $\Omega$ $w = \{i_1, i_2, ..., i_n\}$, ko`rinishdagi elementlardan tuzilgan bo`ladi.

Bu holda chiqqan oq sharlar soni ξ tasodifiy miqdor bo`lib, $\xi = \zeta(w) = m, i_m \leq M < i_{m+1}$, $\quad 1 \leq m \leq M$, bo`ladi.

Agar $q(x_1, x_2, ..., x_r)$-sonli funksiya bo`lib, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r$ lar tasodifiy miqdorlar bo`lsa, u holda $\eta = \eta(w) = q(\xi_1(w), \xi_2(w), ..., \xi_2(w))$ murakkab funksiya ham tasodifiy miqdor bo`ladi.

$P(\xi \in B)$ ehtimollikni B ni sonli funksiyasi sifatida ξ ni taqsimot qonuni deb yuritiladi. Agar $P\{\xi = x_i\} = P_i$ bo`lsa, u holda bu taqsimot qonunini quyidagi 2-jadval orqali ifodalash mumkin:

ξ	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_k
P	P_1	P_2	P_3		P_k

bu yerda $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$, $x_1, x_2, .., x_k$ lar ξ tasodifiy miqdorning qiymatlari bo`ladi va quyidagicha ifodalanadi:

$$P(\xi \in B) = \sum_{x_i \in B} P_i \tag{4}$$

3-misol. Bernulli sxemasida n ta bog`liqsiz tajribada $A$ hodisani $\mu$ marta ro`y berish taqsimot qonuni $P(\mu = m) = C_n^m P^m (1-P)^{n-m}$, $m = 0,1,\ldots,n$ bo`ladi. Bunday taqsimotga binomial taqsimot qonun deyiladi.

4-misol. Yashikda M ta oq $N-M$ ta qora shar bo`lgan holda, qayta qo`ymaslik sharti bilan, $n-$ta shar olganda ulardan ξ tasini oq chiqish taqsimot qonuni

$$P(\xi = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-M}}{C_N^n}, \qquad m = 0,1,\ldots..,\min(n, M)$$

bo`ladi. Bu taqsimot qonuni *gipergeometrik taqsimot qonuni* deyiladi.

5-misol. $P(\xi = m) = \frac{1}{N}$, $m = 1,2,\ldots,N$ tekis taqsimlangan taqsimot qonun deyiladi.

6-misol. $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $\lambda > 0$ ga $\lambda -$ parametrli Puasson qonuni bo`yicha taqsimlangan taqsimot qonun deyiladi.

**Bog`liqsiz hodisa.** Bog`liqsiz tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi.

Agar $P(B) > 0$ bajarilsa, u holda, $P(A/B)$ mavjud bo`ladi. Agar $P(A \setminus B) = P(A)$ bajarilsa, u holda $A$ hodisa $B$ hodisaga bog`liq emas [40] deyiladi.

Agar $P(A) > 0$ bo`lsa, $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A/B)}{P(A)} = P(B)$, ya'ni $A$ ning bog`liqsizligidan B ning A ga bog`liqsizligi kelib chiqadi.

Ehtimollikning ko`paytirish formulasiga ko`ra A va B hodisalarning bog`liqsizligidan $P(AB) = P(A)P(B)$.

Agar oxirgi ifoda bajarilsa, u holda, A va B hodisa bog`liq deyiladi. Bog`liqsiz holat ehtimollik modelini ozgina o`zgartirilsa, bog`liqlikka aylantishi mumkin.

Misol. 52 tali kartadan tasodifan bitta karta olinadi, A hodisasi tuz chiqishi, B g`isht chiqishi bo`lsa, $A \cdot B$ g`isht tuz bo`ladi va

$$P(A) = \frac{4}{52}, \qquad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, \qquad P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

ya'ni A va B hodisalari bog`liqsiz.

Agar 52 kartaga bitta djoker karta qo`shilsa, u holda

$$P(A)=\frac{4}{53}, \qquad P(B)=\frac{13}{53}, \qquad P(A\cdot B)=\frac{1}{53}\neq P(A)\cdot P(B)$$

ya'ni A va B hodisalar o'zaro bog`liqdir.

Agar ixtiyoriy $1\leq i_1\leq i_2\leq ...\leq i_m n, 2\leq m<n$ uchun $P(A_{i_1}, A_{i_2} ... A_{i_m})=P(A_{i_1}) ... P(A_{i_m})$ bajarilsa $A_1, A_2, \,, A_n$ lar bog`liqsiz [41] deyiladi, aks holda o`zaro bog`liq deyiladi.

Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ bog`liqsiz bo`lsa, uni ixtiyoriy to`plam ostisi $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_n}$ ham bog`liqsiz bo`ladi.

$A_1, A_2, \,.\,, A_n$ ni bog`liqsizligi $A_1, A_2, ..., A_n$ larni jufti-jufti bilan bog`liqsizligidan kuchliroqdir.

Misol. $2,3,5,30$ sonlaridan biri $\frac{1}{4}$ ehtimolligi bilan olinadi. A_k hodisa olingan son k ga bo`linadi. $A_2, A_3, A_5$ lar juft-jufti bilan bog`liqsiz va $P(A_2)=P(A_3)=P(A_5)=\frac{1}{2}$,

$P(A_2A_3)=P(A_2A_5)=P(A_3A_5)=\frac{1}{4}$ va $P(A_2A_3A_5)=\frac{1}{4}$, demak A_2, A_3, A_5 lar umuman uchlik sifatida bog`liq.

**Bog`liqsiz tajriba.** Tajriba bu ehtimollar fazosining berilishini bildiradi. $n$ ta tajriba o`tkazilsa, ehtimollar fazosi berilgan bo`ladi. Biror tajriba natijasida ro`y bergan hodisa, ehtimoli ikkinchi tajribada shu hodisani ro`y berish ehtimoliga bog`liq bo`lmasa bunday tajriba bog`liqsiz tajriba deyiladi.

Agar n ta tajribalar ketma-ketligi bog`liqsiz bo`lsa A_1, A_2,..., A_n σ-algebralar bog`liqsizdir.

Biz xususiy holda tajriba natijasida A hodisaning ro`y berishi yoki ro`y bermasligini kuzatamiz.

n ta bog`liqsiz tajriba o`tkazilayotgan bo`lib, har bir tajribada kuzatilayotgan $A$ hodisaning ro`y berish ehtimoli P va ro`y bermaslik ehtimoli $q=1-p$ bo'lsin.

n ta tajriba o`tkazilganda kuzatilayotgan $A$ hodisaning $m$ marta ro`y berib, $n-m$ ro`y bermaslik imkoniyatlarining soni $C_n^m$ ga teng ekanini ko`rish qiyin emas.

n ta ketma-ket o`tkazilgan tajribani bitta murakkab tajriba desak, bu murakkab tajriba natijasida ro`y beradigan hodisaning ko`rinishi $A_1, A_2, ..., A_n$ bo`lib, $A_i\left(i=\overline{1,n}\right) A$ ga yoki $\overline{A}$ ga teng bo`ladi. Bunday hodisalar soni 2^n ga teng. Haqiqatdan ham, $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar ichida:

1) $A_i = A\left(i=\overline{i,n}\right)$ shartni qanoatlantiruvchi hodisalar bitta

Bittasi $\overline{A}$, qolganlari A dan iborat bo`lgan hodisalar $n$ ta, chunki $\overline{A}$ ni $n$ ta o`rniga bir martadan qo`yish bilan n ta turli hodisa hosil qilish mumkin;

2) $(n-m+1)n-m$ tasi $\overline{A}$, qolganlari A dan iborat bo`lgan hodisalar soni - $n$ ta o`rniga $n-m$ ta $\overline{A}$ larni joylashtirishlar soni $C_n^{n-m} = C_n^m$ ga teng va hokazo.

Demak, biz ko`rayotgan murakkab tajriba natijasida ro`y berishi mumkin bo`lgan barcha elementar hodisalar soni $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$ ga teng ekan. Agar $n$ ta tajriba kuzatilatgan $A$ hodisaning $m$ marta ro`y berish hodisasini B desak,

$$B = \left(A\cdot A\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot A\cdot\overline{A}\cdot\overline{A}\cdots\overline{A}\right)\cup\left(A\cdot\overline{A}\cdot A\cdots A\cdot\overline{A}\right)\cup...\left(\overline{A}\cdots\overline{A}\cdot A\cdot A\cdots A\right) \quad (1)$$

bo`lib, u $C_n^m$ qo`shiluvchidan iborat bo`ladi. Tajribalar ketma-ketligi bir-biriga boqg`liq bo`lmagani uchun

$$P\left(\underbrace{A\cdots A}_{m}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdots\overline{A}}_{n-m}\right) = P(A)\cdot P(A)\cdots P(A)\cdot P(\overline{A})\cdots P(\overline{A}) = P^m q^{n-m}$$

bo`ladi. (1) tenglikning o`ng tomonidagi C_n^m ta hodisaning ikkitasi bir vaqtda ro`y bermasligidan $P_n(B) = C_n^m P^m q^{n-m}$ kelib chiqadi. Agar $A$ hodisaning $n$ ta tajribada $m$ marta\ ro`y berish ehtimolini $P_n(m)$ deb belgilasak, $P_n(m) = C_n^m P^m q^{n-m}$ (2) hosil bo`ladi. (2) ni Bernulli formulasi deyiladi.

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. Ehtimollik nima?
2. Hodisa ehtimolining klassik ta’rifini keltiring.
3. Muqarrar, mumkin bo`lmagan, teng ehtimolli hodisalar deganda nimani tushunasiz?
4. Hodisalar yig`indisi va ko`paytmasining ta’rifini keltiring.
5. Birgalikda va birgalikda bo`lmagan hodisalarni misollar yordamida tushuntiring.
6. A hodisaga qarama-qarshi hodisa deganda nimani tushunasiz?
7. Hodisa ehtimolining geometrik ta’rifini misollar yordamida tushuntirib bering.
8. Yashikda o`lchamlari va og`irligi bir xil bo`lgan uchta ko`k, sakkizta qizil va to`qqizta oq shar bo`lib, sharlar yaxshilab aralashtirilgan. Yashikdan tavakkaliga 1 ta shar tanlab oladi. Tanlangan sharning yoki ko`k, yoki qizil, yoki oq chiqish ehtimolliklarini toping.
9. Qutida 6ta oq va 4 ta qora shar bor. Tavakkaliga: 1) 3 ta shar olinganda ularning hammasi oq bo`lishi ehtimolini toping; 2) 5 ta shar olinganda ulardan 2 tasi qora bo`lishi ehtimolini toping; 3) 2 ta shar olinganda ularning turli rangda bo`lishi ehtimolini toping.

Javob: 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{10}{21}$; 3) $\frac{8}{15}$.

10. Talaba 25 ta savoldan 20 tasini biladi. Talaba biletdagi 4 ta savoldan kamida 3 tasiga javob bersa sinovdan o`tgan hisoblanadi. Birinchi savolga nazar tashlagan talaba uni bilishini aniqladi. Talaba: 1) sinovdan o`tishi; 2) sinovdan o`tmasligi ehtimollarini toping.

Javob: 1) 0,06; 2) 0,396.

19-§. Matematik statistika elementlari

Tayanch iboralar: *statistik ma'lumotlar, bo`sh to`plam, tanlanma to`plam, takror va notakror tanlanmalar, tipik, mexanik va seriyali tanlashlar, empirik taqsimot, nisbiy chastota, variantalar, chastotalar poligoni, nisbiy chastotalar poligoni, chastotalar gistogrammasi.*

19.1. Matematik statistikaning asosiy masalalri

Matematik statistikaning vazifasi. Ommaviy (yalpi) tasodifiy hodisalar bo`ysunadigan qonuniyatlarni aniqlash statistik ma'lumotlarni kuzatish natijalarini o`rganishga asoslanadi.

Matematetik statistikaning birinchi vazifasi (masalasi) - statistik ma'lumotlarni to`plash va (agar ma'lumotlar juda ko`p bo`lsa) gruppalash usullarini ko`rsatishdan, ikkinchi vazifasi (masalasi) - statistik ma'lumotlarni tahlil qilish metodlarini tadqiqot masalalariga muvofiq ishlab chiqishdan iboratdir.

U yoki bu hodisalarni matematik statistika metodlari bilan o`rganish fan va amaliyotda uchraydigan ko`p masalalarni (texnologik jarayonlarni to`g`ri tashkil etish, maqsadga muvofiq qilib rejalashtirish va h.k.) hal etishda vosita bo`lib xizmat qiladi.

Shunday qilib, matematik statistikaning vazifasi (masalasi) ilmiy va nazariy xulosalar hosil qilish maqsadida statistik ma'lumotlarni to`plash va ishlab chiqish metodlarini yaratishdan iborat.

**Bosh va tanlanma to`plamlar.** Bir jinsli obyektlar to`plamini bu obyektlarni xarakterlovchi biror sifat yoki son belgiga nisbatan o`rganish talab qilinsin. Masalan, agar biror xil detallar partiyasi bo`lsa, u holda detalning sifat belgisi bo`lib, uning standartga mosligi, son belgisi bo`lib, detalning o`lchami xizmat qilish mumkin. Ayrim hollarda yalpi tekshirish o`tkazishga to`g`ri keladi, ya'ni to`plamdagi obyektlarning har birini o`rganilayotgan belgiga nisbatan tekshiriladi. Lekin yalpi tekshirish amalda nisbatan kam qo`llaniladi, chunki yalpi tekshirish to`plami juda ko`p (katta sondagi) obyektlarni o`z ichiga olgan bo`lsa, u holda yalpi tekshirish o`tkazish jismonan mumkin bo`lmay qoladi. Bunday hollarda to`plamdan chekli sondagi obyektlar tasodifiy ravishda olinadi va ular o`rganiladi.

Tanlanma to`plam yoki oddiy qilib, ***tanlanma deb*** tasodifiy ravishda tanlab olingan obyektlar to`plamiga aytiladi.

***Bosh to`plam deb*** tanlanma ajratiladigan obyektlar to`plamiga aytiladi.

To`plam (bosh yoki tanlanma to`plami) hajmi deb, bu to`plamdagi obyektlar soniga aytiladi. Masalan, 5000 ta detaldan tekshirish uchun 500 ta detal olingan bo`lsa, u holda bosh to`plam hajmi №=5000 tanlanma hajmi esa n=500.

Eslatma: Bosh to`plam ko`pincha chekli sondagi elementlarni o`z ichiga oladi. Ammo bu son ancha katta bo`lsa, u holda hisoblashlarni soddalashtirish yoki nazariy xulosalarni ixchamlash maqsadini ko`zda tutib, ba’zan bosh to`plam cheksiz ko`p sondagi obyektlardan iborat deb faraz qilinadi, chunki bosh to`plam hajmini orttirish tanlanma ma’lumotlarini ishlab chiqish natijalariga amalda ta’sir etmaydi.

Takror va notakror tanlanmalar

Tanlanmani tuzishda ikki xil yo`l tutish mumkin: obyekt tanlanib va uning ustida kuzatish o`tkazilgandan so`ng, u bosh to`plamga qaytarilishi yoki qaytarilmasligi mumkin. Bunga muvofiq ravishda tanlanmalar takror va notakror tanlanmalarga ajratiladi.

Takror tanlanma deb shunday tanlanmaga aytiladiki, bunda olingan obyekt bosh to`plamga qaytariladi.

Notakror tanlanma deb, tanlangan obyekt yana bosh to`plamga qaytarilmaydigan tanlanmaga aytiladi.

Agar bosh to`plamning hajmi yetarli katta bo`lib, tanlanma bu to`plamning uncha katta bo`lmagan qismini tashkil qilsa, u holda takror va notakror tanlanmalar orasidagi farq yo`qolib boradi: limit holda, cheksiz bosh to`plam qaralib, tanlanmaning hajmi esa chekli bo`lsa, u holda bu farq yo`qoladi.

Tanlash usullari. Amaliyotda tanlashning turli usullari qo`llaniladi. Bu usullarni prinsip jihatdan ikki turga bo`lish mumkin:

1. Bosh to`plamni qismlarga ajratishni talab qilmaydigan tanlash, bunga quyidagilar kiradi:

a) oddiy qaytarilmaydigan tasodifiy tanlash;

b) oddiy qaytariladigan tasodifiy tanlash.

2. Bosh to`plamni qismlarga ajratilgandan keyin tanlash, bunga quyidagilar kiradi: a) tipik tanlash; b) mexanik tanlash; v) seriyali tanlash.

Bosh to`plamdan elementlar bittalab olinadigan tanlash oddiy tasodifiy tanlash deyiladi. Oddiy tanlashni turli usullar bilan amalga oshirish mumkin.

Masalan, N hajmli bosh to`plamdan $n$ ta obyekt tanlashni quyidagicha amalga oshirish mumkin. Kartochkalar olib, ularni 1 dan $N$ gacha nomerlaymiz. Keyinchalik ularni yaxshilab aralashtirib, tavakkaliga bitta kartochka olamiz, shu olingan kartochka bilan bir xil nomerli obyekt tekshiriladi. Keyin kartochka kartochkalar to`plamiga qaytariladi va jarayon takrorlanadi, ya'ni kartochkalar aralashtirilib, ulardan biri tavakkaliga olinadi va h.k. n marta shunday qilinadi, natijada n hajmli oddiy takror tasodifiy tanlanma hosil qilinadi.

Agar olingan kartochkalar qaytarilmasa, u holda tanlanma oddiy notakror tasodifiy tanlanma bo`ladi.

Bosh tanlanmaning hajmi katta bo`lganda tasvirlangan bu jarayon ko`p vaqt va mehnat talab qiladi. Bunday holda "tasodifiy sonlarning" tayyor jadvalidan foydalaniladi, ularda sonlar tasodifiy tartibda joylashgan bo`ladi.

***Tipik tanlash deb*,** shunday tanlashga aytiladiki, bunda obyektlar butun bosh to`plamdan emas, balki uning "tipik" qismlaridan olinadi. Masalan, detallar bir nechta stanokda tayyorlanayotgan bo`lsa, u holda tanlash barcha detallar to`plamdan emas, balki har bir stanok mahsulotidan ayrim olinadi. Tipik tanlashdan tekshirilayotgan belgi bosh to`plamning turli tipik qismlarida sezilarli o`zgarib turganda foydalaniladi. Masalan, detallar bir nechta stanoklarda tayyorlanayotgan bo`lib, stanoklar orasida eskirganlari bo`lsa, u holda tipik tanlashdan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

Mexanik tanlash deb, shunday tanlashga aytiladiki, bunda bosh to`plam tanlanmaga nechta obyekt kirishi lozim bo`lsa, shuncha gruppaga mexanik ravishda ajratiladi va har bir gruppadan bittadan obyekt tanlanadi.

Masalan, stanokda tayyorlangan detallarning 10% ini ajratib olish zarur bo`lsa, u holda har bir o`ninchi detal olinadi; agar 5% detallarni olish talab qilinsa, u holda har bir yigirmanchi detal olinadi va h.k.

Seriyali tanlash deb shunday tanlashga aytiladiki, bunda obyektlar bosh to`plamdan bittalab emas, balki, "seriyalab" olinadi va ular yalpisiga tekshiriladi. Masalan, buyumlar katta gruppa stanok-avtomatlar tomonidan tayyorlanayotgan bo`lsa, u holda faqat bir nechta stanokning buyumlari yalpisiga tekshiriladi. Seriyali tanlashdan tekshirilayotgan belgi turli seriyalarda uncha o`zgarmagan holda foydalaniladi.

Amaliyotda ko`pincha aralash tanlashdan foydalanilishini ta'kidlab o`tamiz, bunda yuqorida ko`rsatilgan usullardan birgalikda foydalaniladi.

Masalan, bosh to`plamni ba'zan bir xil hajmli seriyalarga ajratiladi, keyin oddiy tasodifiy tanlash bilan bir necha seriya tanlanadi va nihoyat, oddiy tasodifiy tanlash bilan ayrim obyektlar olinadi.

19.2. Tanlanma va uning xarakteristikalari

Tanlanmaning statistik taqsimoti. Biror ξ tasodifiy miqdor ustida n marta kuzatish o`tkazib,

$$x_1,\ x_2,\dots,x_n \qquad (1)$$

natijalar olingan bo`lsin, u holda biz tanlanma to`plamga ega bo`lamiz. Tajribalar bir xil sharoitda, bir-biriga bog`liq bo`lmagan holda o`tkazilgan deb faraz qilinadi. Ma'lumki, tajriba natijalari (1) ya'ni 1-tajriba natijasi x_1 (1-o`rinda yozilgan), 2-tajriba natijasi $x_2$ (2-o`rinda yozilgan), …, n-tajriba natijasi x_n (n-o`rinda yozilgan) bo`lib, ular son qiymatlari bo`yicha tartibsiz joylashgan bo`lishi mumkin.

Agar tanlanma to`plam qiymatlar bo`yicha o`sish (yoki kamayish) tartibida

$x_1^* \le x_2^* \le \dots\dots \le x_n^*$ (yoki $x_n^* \ge x_{n-1}^* \ge \dots \ge x_2^* \ge x_1^*$) kabi joylashtirilsa, $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ *variatsion qator* deyiladi.

(1) tanlanma to`plamdagi $x_i,\ i=1,2,\dots,n$ lar *variantalar* deyiladi.

Agar tanlanmada x_1 varianta n_1 marta, x_2 varianta n_2 marta, ..., x_k varianta n_k marta (bu yerda $n_1+n_2+\dots\dots+n_k=n$) kuzatilgan bo`lsa, u holda $n_1, n_2,\dots,n_k$ nsonlar *chastotalar*, $w_i=\dfrac{n_i}{n}$ $(i=1,2,\dots,k)$

sonlar esa *nisbiy chastotalar* deyiladi. Ravshanki, $w_1+w_2+...+w_k=1$ bo`ladi.

Tanlanmaning *statistik yoki empirik taqsimoti* deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalardan iborat ushbu jadvalga aytiladi:

$$\begin{pmatrix} x_i: x_1, x_2, ..., x_k \\ n_i: n_1, n_2, ..., n_k \end{pmatrix} \text{yoki} \begin{pmatrix} x_i: x_1, x_2, ..., x_k \\ w_i: w_1, w_2, ..., w_k \end{pmatrix}.$$

Misol. Tanlanma chastotlarining empirik taqsimoti berilgan:

$$\begin{matrix} x_i: -1 & 0 & 1 & 2 \\ n_i: \;\; 2 & 4 & 6 & 8 \end{matrix}$$

Nisbiy chastotalarni toping.

Yechish. $n=n_1+n_2+n_3+n_4=2+4+6+8=20$

$$w_1=\frac{2}{20}=0{,}1;\;\; w_2=\frac{4}{20}=0{,}2;\;\; w_3=\frac{6}{20}=0{,}3;\;\; w_4=\frac{8}{20}=0{,}4.$$

$$\begin{matrix} x_i: & -1 & 0 & 1 & 2 \\ w_i: & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{matrix}$$

Shu bilan birga 0,1+0,2+0,3+0,4=1.

Taqsimotning empirik funksiyasi.

Ta'rif. Tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi deb, x ning har bir qiymati uchun quyidagicha aniqlangan $F_n^*(x)$ funksiyaga aytiladi:

$$F_n^*(x)=\frac{n_x}{n},$$

bunda n_x – x qiymatdan kichik bo`lgan variantalar soni; n – tanlanmaning hajmi.

Tanlanmaning empirik funksiyasidan farqli bo`sh to`plam uchun aniqlangan ushbu $F(x)$ funksiya nazariy taqsimot funksiyasi deb ataladi. Empirik va nazariy taqsimot funksiyalar orasidagi farq shundaki, $F(x)$ nazariy taqsimot funksiya $\{X < x\}$ hodisa ehtimolligini, $F_n^*(x)$ empirik taqsimot funksiya esa shu hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydi.

Empirik taqsimot funksiyaning xossalari

1.; $0 \le F_n^*(x) \le 1$

2. $F_n^*(x)$ – kamaymaydigan funksiya;

3. Agar x_1 – eng kichik varianta va x_k – eng katta varianta bo`lsa, u holda quyidagi munosabatlar o`rinli bo`ladi:

$$F_n^*(x) = 0, \text{ agar } x \le x_1 \text{ bo'lsa,}$$

$$F_n^*(x) = 1, \text{ agar } x > x_k \text{ bo'lsa.}$$

Misol. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo`yicha uning empirik funksiyasini tuzing.

variantalar	x_i	3	7	10
chastotalar	n_i	15	21	24

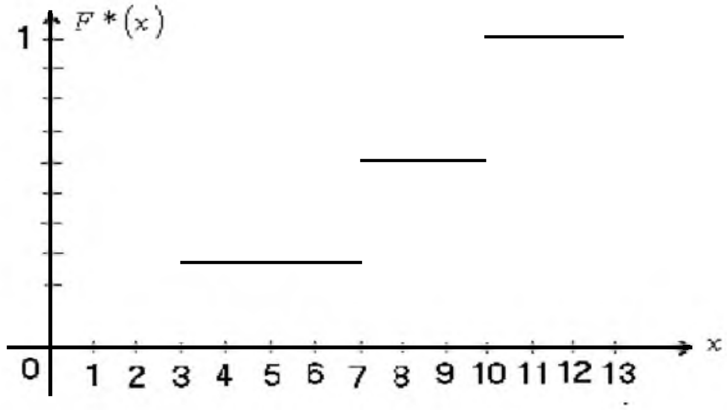
Yechish. Tanlanma hajmini topamiz: 15+21+24=60. Eng kichik varianta 3 ga teng, demak, $x \le 3 \ da \ F^*(x) = 0$. x< 7 qiymat, xususan, x_1=3 qiymat 15 marta kuzatilgan, demak, $3 < x \le 7 \ da \ F^*(x) = \frac{15}{60} = 0{,}25$

x< 10 qiymatlar; jumladan, x_1=3 va x_2=7 qiymatlar 15+21=36 marta kuzatilgan, demak, $7 < x \le 10 \ da \ F^*(x) = \frac{36}{60} = 0{,}6$

x=10 eng katta varianta bo`lgani uchun x>10 da $F^*(x)$=1.

Izlanayotgan empirik funksiya: $$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3, \\ 0{,}25 & 3 < x \le 7, \\ 0{,}6, & 7 < x \le 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

Bu funksiyaning grafigi quyidagi chizmada tasvirlangan:



19.3. Poligon va gistogramma

Ko`rgazmalilik maqsadida statistik taqsimotning turli grafiklari, jumladan, poligoni va gistogrammasi yasaladi.

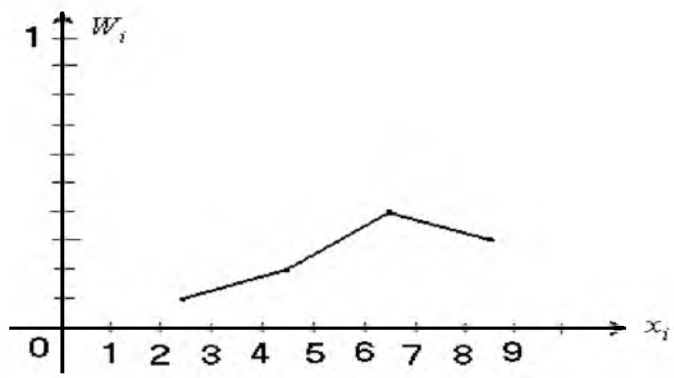
Chastotalar poligoni deb, kesmalari (x_1, n_1), (x_2, n_2), ... , (x_k, n_r) nuqtalarni tutashtiradigan aniq chiziqqa aytiladi. Poligonni yasash uchun absissalar o`qiga $x_i$ variantalarni, ordinatalar o`qiga esa ularga mos n_i chastotalarni qo`yib chiqiladi. So`ng (x_i, n_i) nuqtalarni to`g`ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, chastotalar poligoni hosil qilinadi.

Nisbiy chastotalar poligoni deb, kesmalari (x_1, w_1), (x_2, w_2) ... , (x_r, w_r) nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi. Nisbiy chastotalar poligonini yasash uchun abssissalar o`qiga $x_i$ variantalarni, ordinatalar o`qiga esa ularga mos w_i chastotalarni qo`yib chiqiladi. So`ng hosil bo`lgan nuqtalarni to`g`ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, nisbiy chastotalar poligoni hosil qilinadi.

1-chizmada ushbu

x_i	2,5	4,5	6,5	8,5
w_i	0,1	0,2	0,4	0,3

taqsimotning nisbiy chastotalari poligoni tasvirlangan.

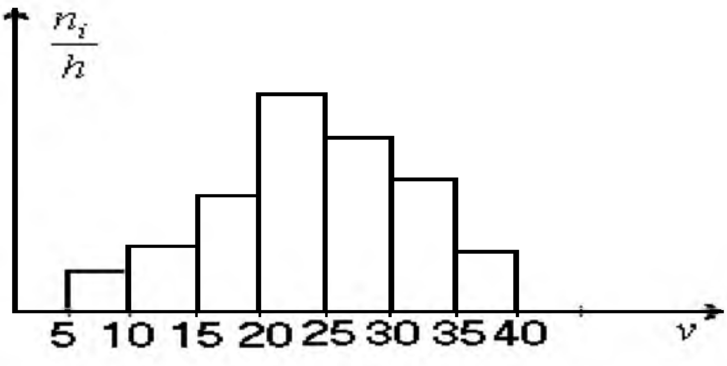


Uzluksiz belgi bo`lgan holda gistogramma yasash maqsadga muvofiqdir. Buning uchun belgining kuzatiladigan qiymatlarini o`z ichiga olgan intervalni uzunligi h bo`lgan bir nechta qismiy intervallarga bo`linadi va har bir i- qismiy interval uchun n_i ni - i - intervalga tushgan variantalar chastotalari yig`indisi topiladi.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{n_i}{n}$ nisbatlarga (chastota zichligi) teng bo`lgan to`g`ri to`rtburchaklardan iborat pog`onaviy figuraga aytiladi.

Chastotalar gistogrammasini yasash uchun abssissalar o`qida qismiy intervallar, ularning ustiga esa $\frac{n_i}{n}$ masofada abssissalar o`qiga parallel kesmalar o`tkaziladi.

i - qiysmiy to`g`ri to`rtburchakning yuzi $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$ *ga, ya'ni* - intervaldagi variantalarning chastotalari yig`indisiga teng, binobarin, chastotalar gistogrammasining yuzi barcha chastotalar yig`indisiga, ya’ni tanlanma hajmiga teng



jadvalda n=100 hajmli taqsimot chastotalari gistogrammasi tasvirlangan:

Uzunligi h=5 bo'lgan nisbiy interval	n_i interval variantalari chastotalarining yig`indisi	chastota zichligi $\frac{n_i}{h}$
5-10	4	0,8
10-15	6	1,2
15-20	16	3,2
20-25	36	7,2
25-30	24	4,8
30-35	10	2,0
35-40	4	0,8

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{W_i}{n}$ nisbatga (nisbiy chastota zichligiga) teng bo`lgan to`g`ri to`rtburchaklardan iborat pog`onaviy figuraga aytiladi.

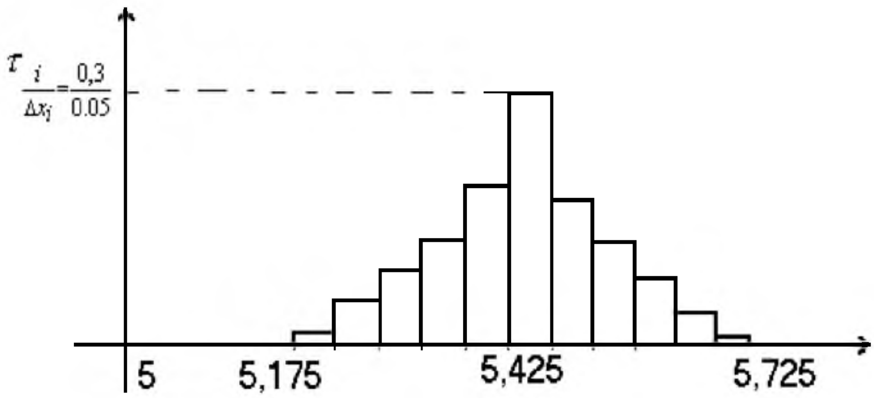
Misol. Bug`doy donining 100 marta o`lchash natijalari berilgan bo`lib, don uzunligining eng kichik uzunligi 5,18 mm, eng katta uzunligi 5,69 mm. [5,175,5,725] oraliqda barcha tanlovlar variatsiyalarini olib, bug`doy doni uzunliklari taqsimoti gistogrammasini chizing.

Yechish: Misolni yechish uchun [5,175,5,725] oraliqni 11 ta qismiy oraliqqa bo`lamiz. Bunda har bir qismiy oraliqqa kamida 9 ta o`lchash natijasi to`g`ri keladi. Har bir qismiy oraliq uzunligi $\Delta x_i = 0{,}05$ ga teng. Shunday qilib kuzatish natijalariga ko`ra nisbiy chastota hisoblangan quyidagi jadvalga ega bo`lamiz.

Qismiy oraliq chegaralari	Chastota	Nisbiy chastota
5,175-5,225	1	0,01
5,225-5,275	4	0,04
5,275-5,325	7	0,07
5,325-5,375	11	0,11
5,375-5,425	16	0,16
5,425-5,575	30	0,30
5,575-5,525	14	0,14
5,525-5,575	8	0,08

5,575-5,625	6	0,06
5,625-5,675	2	0,02
5,675-5,725	1	0,01

Jadvalga asosan, bug`doy doni uzunligi taqsimoti gistogrammasini chizamiz



19.4. Statistik gipoteza va uni tekshirish sxemasi

Matematik statistika masallarida o`rganilayotgan $X$ tasodifiy miqdorning taqsimoti yoki uni aniqlovchi parametrlar noma'lum bo`ladi. Ayrim hollarda masalaning mohiyati yoki tajribaga asoslanib, noma'lum taqsimot $F(x)$ funksiya ko`rinishida bo`ladi yoki taqsimot parametri θ ga teng bo`ladi degan taxmin, ya'ni gipoteza qabul qilinadi. Qabul qilingan gipotezaning to`g`ri yoki noto`g`riligi statistik kuzatish natijalariga asoslanib tekshiriladi. Shu sabali bu gipotezalarga statistik deyiladi.

Ta'rif. No'malum taqsimot qonunining ko`rinishi yoki parametri haqidagi har qanday taxminga ***statistik gipoteza*** deyiladi.

Gipotezalar oddiy va murakkab gipotezalarga bo`linadi. Agar gipotezada taqsimot qonuni to`liq aniqlangan bo`lsa, u holda gipoteza oddiy bo`ladi. Agar bunda taqsimot parametrlari noma'lum bo`lsa , u holda gipoteza murakkab bo`ladi.

Masalan, "Bernulli sxemasida hodisaning ro`y berishi ehtimoli 0,5 ga teng", "Tasodifiy miqdor $a=0,\ \sigma^2=1$ parametrli normal taqsimotga ega" gipotezalar oddiy va "Bernulli sxemasida hodisaning ro`y berishi ehtimoli $(0{,}3;0{,}6)$ oraliqda yotadi", "Tasodifiy miqdor normal taqsimotga ega emas " gipotezalar murakkab hisoblanadi.

Tekshirilayotgan (to`g`ri deb qaralayotgan) gipoteza *nolinchi (asosiy) gipoteza* deb ataladi va H_0 bilan belgilanadi. H_0 ga mantiqan zid bo`lgan gipotezaga *raqobatli* (*konkurent*) yoki *muqobil* (*alternativ*) gipoteza deyiladi va H_1 bilan belgilanadi.

H_0 va H_1 gipotezalar statistik gipotezalarni tekshirish masalalarida ikkita mumkin bo`lgan tanlashlarni hosil qiladi.

H_0 gipotezaning to`g`ri yoki noto`g`riligi tekshirish tasodifiy xarakterga ega bo`lgani uchun bunda ikki xil xatolikka yol qo`yilishi mumkin:

– 1-tur xatolik. Bunda to`g`ri bo`lgan $H_0$ gipoteza noto`g`ri deb rad etiladi;

– 2-tur xatolik. Bunda noto`g`ri bo`lgan $H_0$ gipoteza to`g`ri deb qabul qilinadi.

Masalan, H_0 gipoteza "Ishlab chiqarilgan mahsulotlar partiyasi sifatli" ma'noda bo`lsa, u holda 1-tur xatolikda sifatli mahsulotlar partiyasi sifatsiz deb hisoblanadi. Shu sababli 1-tur xatolikni ishlab chiqaruvchining tavakkali deyish mumkin. 2-tur xatolikda esa sifatsiz mahsulotlar partiyasi sifatli deb hisoblanadi. Shu sababli 2-tur xatolikni iste'molchining tavakkali deb qarash mumkin.

H_0 gipoteza qabul qilinishi yoki rad etilishi mumkin bo`lgan $K$ tasodifiy miqdorga (qoidaga) ***statistik mezon*** deyiladi. Bunda $K$ shunday tanlanishi kerakki, uning o`rinli ekanini tekshirishda ma'lum taqsimot qonunidan foydalanish mumkin bo`lsin.

Tegishli K statistik mezon tanlangach, uning mumkin bo`lgan qiymatlari to`plami S ikkita kesishmaydigan S_1 va S_2 $(S_1 \cup S_2 = S,\ S_1 \cap S_2 = \varnothing)$ qism to`plamlarga ajratiladi.

Agar $K \in S_1$ bo`lsa, u holda H_0 gipoteza qabul qilinadi. Bunda S_1 ga *gipotezani qabul qilish sohasi* deyiladi.

Agar $K \in S_2$ bo`lsa, u holda H_0 gipoteza rad etiladi. Bunda S_2 ga *kritik soha* deyiladi.

S_1 va S_2 to`plamlarni ajratuvchi nuqtalarga *kritik nuqtalar* deyiladi va $K_{kr}$ bilan belgilanadi. Bunda $K > K_{kr} > 0$ tengsizlik bilan aniqlanuvchi $(K_{kr};+\infty)$ oraliqqa o`ng tomonlama kritik soha, $K < K_{kr} < 0$ tengsizlik bilan aniqlanuvchi $(-\infty; K_{kr})$ oraliqqa chap tomonlama kritik soha, $K < K_{1kr}$ va $K > K_{2kr}$ ($K_{2kr} > K_{1kr}$) tengsizliklar bilan aniqlanuvchi $(-\infty; K_{1kr}) \cup (K_{2kr};+\infty)$ oraliqqa ikki tomonlama kritik sohalar deyiladi.

H_0 gipotezani tekshirishda to`rt holat bo`lishi mumkin:

H_0 **gipoteza**	**qabul qilinadi**	**rad etiladi**
to`g`ri	to`g`ri yechim	1-tur xatolik
noto`g`ri	2-tur xatolik	to`g`ri yechim

Ta'rif. 1-tur xatolikka yo`l qo`yish, ya'ni H_0 gipoteza to`g`ri bo`lganda uni rad etish ehtimoli α ga *statistik mezonning qiymatlilik darajasi* deyiladi.

2-tur xatolikka yo`l qo`yish, ya'ni H_0 gipoteza noto`g`ri bo`lganda uni qabul qilish ehtimoli β bilan belgilanadi.

Ta'rif. 2-tur xatolikka yo`l qo`ymaslik, ya'ni H_0 gipoteza noto`g`ri bo`lganda uni rad etish ehtimoli $1-\beta$ ga *statistik mezonning quvvati* deyiladi.

Kritik nuqtalar K mezon uchun berilgan α qiymatlilik darajasiga qarab $P_{H_0}(K > K_{kr}) = \alpha$, $P_{H_0}(K < K_{kr}) = \alpha$, $P_{H_0}(K < K_{1kr}, K > K_{2kr}) = \alpha$ tenglamalarning biridan topiladi. Bu tenglamalarning ildizlari ko`p ishlatiladigan mezonlar uchun odatda maxsus jadvallardan topiladi.

1- tur va 2- tur xatoliklar ehtimollari α va β qancha kichik bo`lsa, statistik gipotezani tekshirish natijasi shuncha yaxshi bo`ladi. Ammo α va β ehtimollarni bir vaqtda kichraytirib bo`lmaydi, chunki $\alpha$ qanchalik kichik bolsa, $\beta$ shunchalik katta bo`ladi. Shu sababli α qaralayotgan masalaning mohiyatiga kelib chiqqan holda tadqiqotchi tomonidan belgilanadi. Berilgan α uchun β eng kichik bo`lgan S_2 soha $P_{H_0}(K \in S_2) = \alpha$ tenglama yordamida topiladi.

Shunday qilib, statistik gipoteza quyidagi sxema asosida tekshiriladi:

1^o . X tasodifiy miqdor ustida n ta bog`liqmas kuzatishlar o`tkaziladi va $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tanlanma hosil qilinadi;

2^o. Nolinchi H_0 va muqobil H_1 statistik gipotezalar kiritiladi;

3^o. $K = K(X_1, X_2, ..., X_n)$ statistik mezon tanlanadi va uning H_0 gipotezadagi $P_{H_0}(K)$ taqsimoti topiladi;

4^o. Masalaning mohiyatidan kelib chiqqan holda α iymatlilik darajasi belgilanadi;

5^o. $P_{H_0}(K \in S_2) = \alpha$ tenglama yordamida S_2 kritik soh topiladi;

6^o. $K = K(X_1, X_2, ..., X_n)$ statistik mezonda $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlar o`rniga tanlanmaning $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlarini qo`yib, statistik mezonning $K_t = K(x_1, x_2, ..., x_n)$ tuzatilgan qiymati hisoblanadi. Bunda agar $K_t \in S_2$ bo`lsa, u holda H_0 gipoteza rad etiladi, agar $K_t \in S_1$ bolsa, u holda H_0 gipoteza qabul qilinadi.

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. Matematik statistikaning vazifasini aytib bering.
2. Bosh va tanlanma to`plamlar deganda qanday to`plamni tushunasiz?
3. Takror va notakror, reprezentativ tanlanmalarni misollar yordamida tushuntiring.
4. Tanlash usullarini misollar yordamida aytib bering.
5. Variantalar nima?
6. Empirik taqsimotni tushuntiring.
7. Empirik taqsimot funksiyaning xossalarini ayting.
8. Chastotalar poligoni deb nimaga aytiladi?
9. Chastotalar gistogrammasi nima?
10. ξ tasodifiy miqdor ushbu taqsimot funksiyasiga ega:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar } & x \le 2 \text{ bo`lsa,} \\ \dfrac{x}{2}, \text{ agar } & 2 < x \le 4 \text{ bo`lsa,} \\ 1, \text{ agar } & x > 4 \text{ bo`lsa.} \end{cases}$$

Ushbu $P(3 < \xi < 3{,}5)$ ehtimollik qiymatini toping.

11. Qutida 10 ta shar bor. Ular orasida 8 ta oq shar, qolganlari qora shar. Tavakkaliga 2 ta shar olingan. Olingan sharlar orasidagi oq sharlar sonining taqsimot qonunini tuzing.
12. $n = 21$, $S^2 = 16{,}2$, $\alpha = 0{,}01$, $H_0: \ \sigma_0^2 = 15$, $H_1: \ \sigma^2 > 15$ bo`lsa, H_0 gipotezani tekshiring.

11. Bo`sh to`plam normal taqsimotga bo'ysinishi haqidagi H_0 gipotezani tekshirish uchun tanlanma asosida emperik n_j va nazariy n_j^* chastotalar topilgan, $\alpha = 0{,}05$ qiymatlilik darajasida H_0 gipotezani tekshiring.

n_j	6	10	32	64	60	42	36
n_j^*	5	8	34	70	62	43	28

20-§. Matematik modellar va algoritmlar nazariyasi

"Matematika – barcha qonuniyatni, modellarni o`rganish va klassifikatsiyalashdir".
U.U.Soyer

Tayanch iboralar: *model, modellashtirish, matematik modellashtirish, tuzilma modellar, analitik modellar, dinamik modellar, masala sharti, maqsadi, algoritm tushunchasi, algoritmlash tili, belgilash bo`limi, operatorlar, mantiqiy ifoda, sikl parametri, takrorlanish, takrorlanish tanasi*

20.1. Matematik modellar va ularning turlari

Matematikada bilimlarni qo`llash deganda biz obyektiv borliqni matematika tilida tushuntirishni ko`zda tutamiz.

Obyektiv borliqni, hayotiy hodisalarni matematika tilida ifodalashga ***matematik modellashtirish*** deyiladi. Fan modellarni ifodalashda aniqlik talab qiladi. Aniqlikni turlicha talqin qilish mumkin. Bir tomondan matematik (formal) modellar, ikkinchi tomondan esa matnli modellar joylashadi. Ularning orasida turli aralash modellar o`rin tutadi. Biz quyida abstrakt modellarni, ya'ni matematik simvollar, ketma-ketliklar asosida qurilgan modellarni o`rganamiz. Har qanday inson, jamoa va xo`jalik o`zining maqsadga yo`nalgan faoliyatida oldiga qo`yilgan maqsadga erishish masalasini hal qiladi. Masala deganda quyidagi mantiqiy masala tushuniladi:

"V berilgan, Z ni topish kerak" yoki <V,Z>.

“V-masalani sharti o`zida, ko`rilayotgan S sistemani turli holatini va holatini o`zgartiruchi qoidalar” to`plamini o`z ichiga oladi. Masalaning yechimi bu Z maqsadga erishish yo`lidir.

Misol uchun:Izquvar berilgan faktlar asosida (ya’ni S obyektning qiyofasi) ayblanuvchini topishi kerak va qonuniy talablar asosida hamda mantiqiy xulosalarga ko`ra, ayblanuvchining aybdor yoki aybdor emasligini isbotlashi kerak. Qo`yilgan masalani formal modeli quyidagichadir “X,Y,R,W berilgan Z ni topish kerak”. Bu yerda “X - ta’sir etuvchi faktorlar”, Y - ta’sir etuvchi faktorlarni ko`rilayotgan obyekt bilan o`zaro munosabatlari, R - operatorlar to`plami, W-Z sistemaning elementlarini baholash mezonlari.

Quyidagi misolni ko`raylik. Aholining turmush tarzini yaxshilash masalasi maqsad qilib qo`yilgan bo`lsin. Aholini turmush tarzi quyidagi mezonlar bilan o`lchanadi: uy-joy bilan ta’minlanganlik, ekologik muhit, yo`l transport xizmati, meditsina xizmati. Sanab o`tilgan faktorlarni yuqori darajada hal etilishi, aholini turmush tarzini ko`tarish maqsadiga xizmat qiladi. Ushbu masalani boshqacha ham qo`yish mumkin. Ya’ni, aholini iste’moli uchun ajratilgan moddiy mablag`ni hajmi miqdorida, ya’ni istemolga ajratilgan mablag`ni ko`tarish orqali aholi turmush tarzini ko`tarishga erishish mumkin.

Qarorlarni qabul qilishda majriba, intuitsiya katta ro`l o`ynaydi. Ammo mas’uliyatli muhim masalalarni hal etish uchun matematik metodlardan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Bunda matematik modellashtirish metodi muhim o`rin egallaydi. Matematik modellashtirish kompyutor texnikasi orqali amalga oshirilmoqdadir. Masala qo`yilishining bir nechta turlari mavjuddir.

A tipdagi masalalar. Masala maqsadi – yo`l qo`yiladigan variantini topish. Har qanday X yechim imkoniyat chegaralaridan chiqmasligi va ichki mutanosib bo`lishi talab etiladi. Masalan, to`liqsiz o`rta maktabning o`quv rejasini tuzish kerak bo`lsin. Ushbu muammo ichida quyidagi masala orinlidir. Maktabda birinchi 8 yil ichida matematika faniga 1500 soatdan kam bo`lmagan vaqt ajratilishi kerak va kvadrat tenglamalar mavzusiga 20 soat. Bunday modellarni matematik yozilishi quyidagicha bo`ladi:

$X=(x_1,x_2,...,x_n)$ ni toping, bunda $W_1(X)\geq W_{i0}(X), i=\overline{1,1-}$ maqsadli oraliq

$g_k(X) \le g_{k0}, k = \overline{1,m}$ -mablag`li chegaralar.

Bunday tipdagi masalalarga, balans hisoblash modellari, tenglamalar sistemasi, tengsizliklar sistemasini yechish, prognoz qilish modellari kiradi.

B tipdan masalalar. Ushbu masalalar optimizatsion masalalar deyiladi. Izlahish obyektlarini maksimallashtirish minimallashga qaratilgandir. Yo`l qo`yiladigan yechimlar to`plami chegaralar sistemasi bilan beriladi va matematik yozuv quyidagicha bo`ladi:

$$X^* = \arg\max W(X) X \in D \text{ yoki } \quad X^* = \arg\min W(X) X \in D$$

Bu yerga W(x) maqsadli funksiya; D – yo`l quyiladigan yechimlar to`plami.

Bu normativ tip modellari. Ushbu masalani hal etib eng yaxshi harakat dasturiga ega bo`lish mumkin.

Agar optimallashtirish rejasi bir nechta xarakteristikaga bog`liq bo`lsa, u holda vektorli optimallashtirish haqida gap boradi.

Masalan, sirtqi o`qitish jarayonida (D), eng qisqa vaqt ichida (T), ushbu sohadagi eng oliy malumotli (V) mutaxassislarni va eng kam xarajat W orqali tayyorlash masalasi berilsa, uning formal yozuvi quyidagicha bo`ladi.

$$X : T(X) \to \min,, \; V(X) \to \max,, \; W(X) \to \min X \in D.$$

Ammo ushbu talablar bir- biriga zid bo`lib, uni hal qilish qiyindir.

***C tipdagi masalalar qo`yilishi***. Bunday masalalarda qo`yilgan maqsadlar keng miqyosda berilib, uni bajarish uchun ajratilgan mablag`ga bog`lab qo`yilmaydi. Ya’ni qo`yilgan maqsad va o`lchov mezonlari alohida belgilanadi.

Shunday qilib, maqsadga yo`nalgan faoliyat davomida turli tipdagi masalalar uchraydi. Ularni yechishda matematik modellashtirish metodi muhim o`rin tutadi va modellarni qanday qo’llash izlanivchi, uning maqsadi, bilimi va imkoniyatiga bog`liqdir.

20.2. Matematik modellarni qurish prinsiplari

Matematik modellashtirish jarayoni ikki ssenariy asosida qurilishi mumkin.

***Birinchi yo`li*** **-** matematik masala shakllantiriladi va uni biror ma'lum matematik modelga olib kelinadi. Bu yo`l masalani ma'lum modelga keltirish yo`lidir.

***Ikkinchi yo`li*** **-** masalaga mos matematik model tuziladi, uni yechish metodi qidiriladi. Bu yo`l bor bo`lishi mumkin yoki hali yechish yo`li noma'lum bo`lishi mumkin.

Bundagi qiyinlik modelni yechish yo`lini topishga va natijaning aniqligini baholashdadir. Shuning uchun mutaxassis matematik modellarni turi hamda ularning yechish yo`li bilan tanish bo`lishi kerak.

Modellarni turli jihatdan ***tasniflash*** mumkin:

a) Tuzilma modellar, bu shunday modellarnki, ular muhit bilan tizim komponentlari orasidagi bo`glanishni izohlaydi. Ularga ierarxiya modeli, ichki tuzilma modellari kiradi.

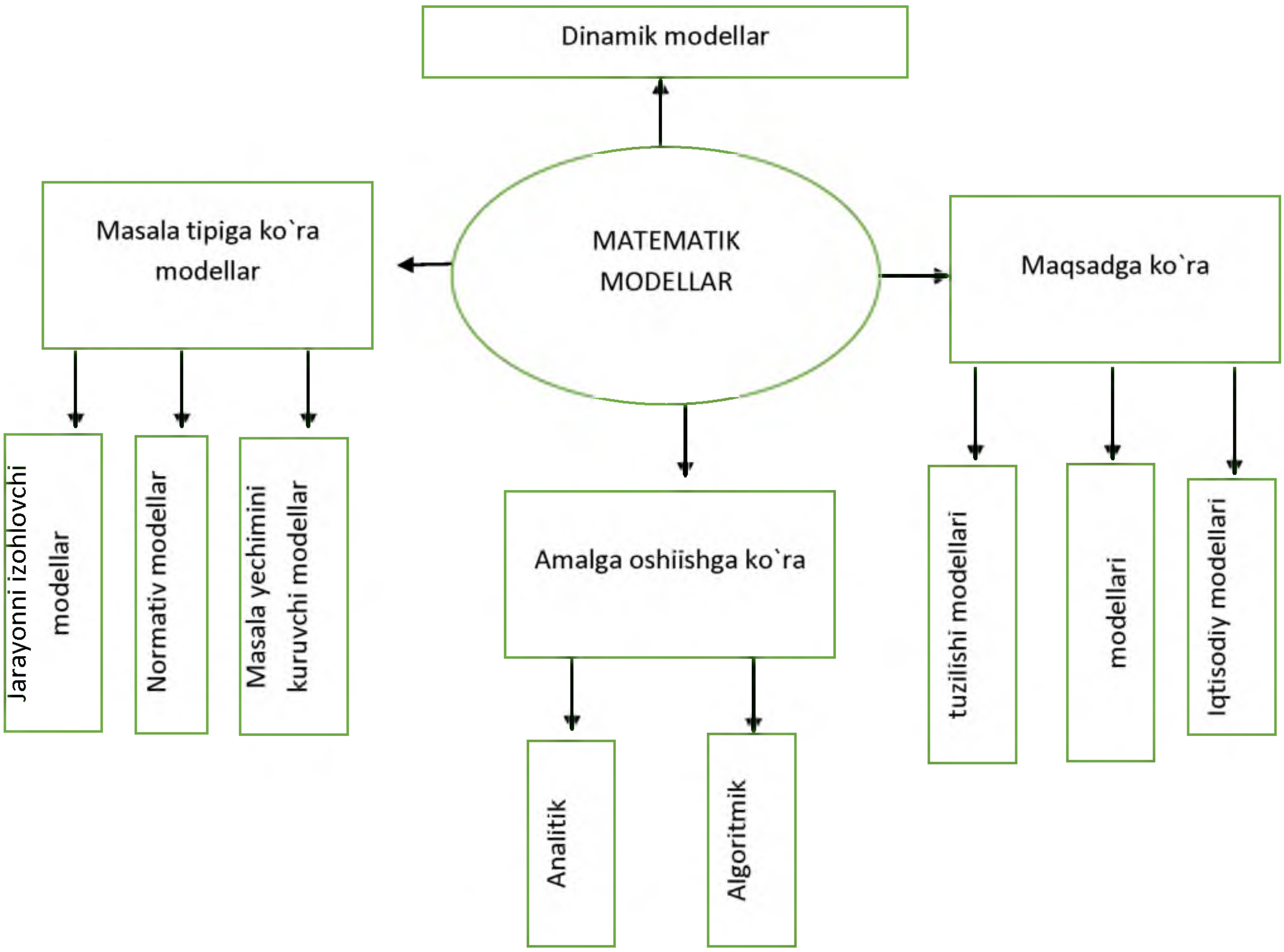
Harakatda modellarda – information modellar, axborot manbalari va iste'molchilari aloqasi, operatsiyalar, ularning vaqtini bog`lovchi jarayonni izohlovchi modellar.

Iqtisodiy modellar – kuzatilayotgan jarayonni iqtisodiyot nuqtayi nazaridan ko`ruvchi modellardir.

b) Masala turiga qarab modellar, bu A,B,C tipdagi masalalarga mos modellar

c) Analitik modellarga matematik konstruktsiya ko`rinishda yozish mumkin bo`lgan modellarni tushunamiz.

Algoritmik modellar bu matematik modellar bo`lib, ularda mantiqiy sharoitlar mavjud bo`ladi va u hisoblash jarayonining tarmoqlanishiga olib keladi.



Dinamik modellar

Taniqli olim Maltus 1798-yil insoniyatni yashab ketish muammosiga bag`ishlangan ishni chop etgan va unga mos matematik model yaratgan. Agar N(t) populyatsia soni ko`rsatilgan bo`lsa, t vaqt, b (tug`ilish koeffitsiyenti) Maltus modeli quyidagidir

$$dN(t) = bN(t)dt$$

Bu oddiy differensial tenglama bo`lib, uning yechimi

$$N(0) = N_0 \text{ ga}$$

$$N(t) = N_0 \exp(bt).$$

Agar d-o`lim koeffitsienti bo`lsa,

$$dN(t) = (b-d)N(t)dt$$

Ushbu tenglamani yechimi vaqtga nisbatan quyidagi funksiyadan

$$N(t) = N_0 \exp(b-d)t$$

r=b-d ko`rsatkich populyatsiyani o`zgarish o`lchovidir. Agar *r*<0 bo`lsa populyatsiya qisqaradi, r>0 da o`shadi. Uzoq vaqt davomida *r* vaqtga bog`lik holda funksiya bo`lishi mumkin *r=r(t)*. Bu holda

$$N(t) = N_0 \exp\left(\int_0^t r(t)\,dt\right)$$

R=0 da populyatsiya turg`un. *N(t)* ni o`sishishuni ko`rsatadagiki *r* ni to`g`ri holatidan chetlanishlar populyatsiyani cheksiz o`sishiga yoki yo`q bo`lishiga olib keladi. Hayotda populyatsiyani sonini boshqaradigan ichki mexanizmlar bordir. Ushbu mexanizmlarni effektivligi populyatsiyani hozirgi vaqtdagi soniga bog`liqdir. Ushbu mexanizmni hisobga olish quyidagi modelga olib keladi.

$$dN(t) = (b-d-cN(t))N(t)dt$$

Xususiy holda K-maksimal populyatsiya soni atrof-muhit imkoniyatiga ko`ra, (k-N(t))/K, model quyidagi ko`rinishga ega

$$dN(t) = r(1-N(t)/K)N(t)dt$$

Ushbu tenglama quyidagi yechimga ega.

$$N(t) = \frac{N_0 K \exp(rt)}{K - N_0\left[1-\exp(rt)\right]},$$

Va u populyatsiya soni o`zgarishini ko`rsatadi. Yuqoridagi misol insoniyatni sonini o`sish masalasini hal etishga tenglamalar rolini ko`rsatadi va dinamik modellarga misol bo`la oladi.

20.3. Algoritmlar nazariyasi

Algoritm— ma'lum bir turga oid masalalarni yechishda ishlatiladigan amallarning muayyan tartibda bajarilishi haqidagi aniq qoida (dastur).

O`rta asrlarda sanoqning o`nli tizimi bo`yicha to`rt arifmetik amal bajariladigan qoidani algoritm deb atashgan. Bu qoidalarni matematikaga *IX* asrda a*l-Xorazmiy* kiritgan. Fanda «Evklid algoritmi», «G`iyosiddin Koshiy algoritmi», «Markov algoritmi» deb ataluvchi algoritmlar ma'lum. Algoritm tushunchasi tobora kengayib borib, kibernetikaning nazariy va mantiqiy asosi hisoblangan algoritmlar nazariyasi paydo bo`ldi. "Algoritm" so`zi biror harakatni qadamma-qadam bajarish metodi ma'nosini anglatadi. Kundalik hayotda algoritmlarni tez-tez uchratib turamiz.

Masalan, oziq-ovqat tayyorlash resepti, yo`nalishlari uchun uskunalar yoki qiziqish, (hobbi to`plamlari), tikishda naqshlar ishlab chichiqish uchun ko`rsatmalar, soliq daromadini ko`rsatuvchi tablitsa ishlab chiqish. Shuningdek, boshlang`ich maktab kursida uchraydigan qo`shish, ayirish, ko`paytirish, bo`lish kabi arifmetik amallarni bajarish jarayoni (algoritmini) misol sifatida olish mumkin. Kompyuter algoritm g`oyasi Ada Augusta va Lovelace nomlari bilan tilga olinadi. Lovelace matematik sifatida o`z mashg`ulotlarini olib borayotganda Charlz Babbagening dizayniga juda qiziqib qoladi. Bu dizayn "Analitik Engine" zamonaviy kompyuterga mo`ljallangan dizayn edi. Keyinchalik Lovelace Charlz Babbagening dizayni naqadar muhim va juda kerakli ekanligini tushunib yetdi va bu algoritmni u rivojlantirdi. [1]

Algoritmlash tili. Operatorlar

Siz ushbu mavzuda ishlatiladigan algoritmik til Paskal, C, Java, va VB.NET, va oddiy elementlari o`zida mujassam Pseudocode, ancha aniq hisoblaydigan dasturlar bilan tanishasiz. Yuqori darajadagi kompyuter tillarida o`zgaruvchi termini kompyuter xotirasida maxsus belgilar sifatida saqlanadi. O`zgaruvchi *x ning* qiymati 3 ga teng, deb aytilganda, kompyuter xotirasi *x* o`rniga 3 raqamini o`z ichiga oladi. Berilgan saqlash joyi bir vaqtning o`zida o`zgaruvchining faqat bitta qiymatini ushlab qolishi mumkin. Agar o`zgaruvchiga dasturning ijro paytida yangi qiymat berilsa, u holda saqlash joyidan eski qiymati o`chiriladi. O`zgaruvchi nomerli tipi uning qanday qiymatlar qabul qiladigan to`plamini anglatadi. Masalan, butun sonlarning majmuini, yoki haqiqiy sonlar, yoki belgi yoki majmuini {0, 1} (Boolean o`zgaruvchilar uchun).

[1] **Discrete mathematics with applications. Fourth edition, Susanna S. EPP Depaul University. Copyright 2010, p.p 214**

***Belgilash bo`limi.*** Bunda o`zgaruvchining qiymatini beradi. **Masalan**, x - shunday o`zgaruvchiki, bunda $x := e$.[1]

**a) Shartli o`tish operatori.** Dasturda boshqaruvni ma'lum shart asosida u yoki bu tarmoqqa uzatish shartli o`tish operatori yordamida amalga oshiriladi. Shartli o`tish operatori ikki xil ko`rinishda ishlatilishi mumkin: to`liq va qisqa.

***Shartli o`tish operatorining to`liq ko`rinishi*:**

IF <mantiqiy ifoda>THEN S1 ELSE S2;

Bu yerda IF (agar), THEN (u holda) va ELSE (aks holda) degan xizmatchi so`zlar, S1 va S2 ixtiyoriy operatorlar.

Operatordagi mantiqiy ifoda boshqaruvni uzatish shartini belgilaydi.

Operatorning ishlash tartibi quyidagicha: agar keltirilgan mantiqiy ifoda TRUE (rost) qiymatni qabul qilsa, ya'ni qo`yilgan shart bajarilsa, THEN - xizmatchi so`zidan keyingi operator bajariladi, aks holda ELSE xizmatchi so`zdan keyingi operator bajariladi.[2]

Mantiqiy ifodalarda munosabat amallari, mantiqiy amallar ishlatilishi mumkin. **Masalan**, A>5, A=B, X<1.5 va h.k.

Shartlar oddiy va murakkab bo`lishi mumkin. Agar mantiqiy ifodada bitta munosabat amali berilgan bo`lsa, «oddiy shart» ni ifodalaydi.

Kattaliklar orasidagi shartlar HAM, YOKI, EMAS (Paskal tilida AND, OR, NOT) mantiq amallari belgilari orqali bog`lanuvchi bir necha munosabatlardan iborat bo`lsa, «murakkab shartlar» deb ataladi.

Masalan, Matematik yozilishi (1) va Algoritmik tilda yozilishi (2)

1) 2<=X< 5   (X>=2) AND(X< 5)

AND amalining natijasi uning ikkala argumenti ham rost bo`lsa rost bo`ladi.

OR amalining natijasi rost bo`lishi uchun argumentlardan birining rost bo`lishi yetarli.

NOT amalining natijasi argumentning inkor qiymatiga teng, ya'ni argument rost bo`lsa - natija yolg`on, argument yolg`on bo`lsa - natija rost bo`ladi.

[1] **Discrete mathematics with applications. Fourth edition, Susanna S. EPP Depaul University. Copyright 2010, p.p 214**
[2] **Discrete mathematics with applications. Fourth edition, Susanna S. EPP Depaul University. Copyright 2010, p.p 215**

Masalan: (4 < 5) AND (5 < 100) - mantiqiy ifoda TRUE (rost), (SIN(X) > 1) AND (5 DIV 2=0) ifoda FALSE (yolg`on) qiymatga teng.

Shuni ta'kidlab o`tish kerakki, agar mantiqiy ifodalar, biz yuqorida aytganimizdek, mantiqiy amallar yordamida (AND, OR, NOT) murakkab ko`rinishga ega bo`lsa, ular qavslarga olib yoziladi.

Shartli o`tish operatorining ishlatilishini misollarda ko`rib chiqamiz.

1) IF x>0 THEN y:=SQRT(x) ELSE z:= sqr(x);

Operatorning bajarilishi natijasida x>0 bo`lsa, u holda y:= sqrt(x) operatori, aks holda z:= sqr(x) operatori bajariladi.

Ayrim algoritmlarda ba'zan shunday hol uchrashi mumkinki, bunda hisoblash jarayonida ayrim amallar ba'zi bir shartlar bajarilgandagina hisoblanadi, aks holda, hech qanday amal bajarilmaydi. Bu holda shartli o`tish operatorini qisqa ko`rinishda ifodalash mumkin.

IF <mantiqiy ifoda> THEN <operator>;

Misol: IF X<1 THEN Y:=sqr(X);

Shartli o`tishda operator o`rnida, o`z navbatida, yana shartli o`tish operatorining to`la va qisqa ko`rinishlari ishlatilishi mumkin. Masalan:

1) IF Bl THEN IF B2 THEN A;

Bu erda B1, B2 - mantiqiy ifoda, A - operator.

Bu operatorning bajarilishi natijasida B1 mantiqiy ifoda tekshiriladi, agar TRUE qiymat qabul qilsa, B2 mantiqiy ifoda tekshiriladi, u ham rost bo`lsa (TRUE), A operator bajariladi.

Agar B1 yoki B2 mantiqiy ifodalar yolg`on bo`lsa (FALSE), shartli o`tish operatoridan keyingi operator bajariladi.

Agar shartli o`tish operatorida THEN yoki ELSE dan keyin bir necha operator guruhi bajarilsa, ular tarkibiy operator ko`rinishida yozilishi kerak, ya'ni operatorlar qavsi - BEGIN va END lar orasida yoziladi.

**b) Shartsiz o`tish operatori.** Dasturda ba'zi bir hollarda boshqaruvni to`g`ridan-to`g`ri biron-bir operatorga uzatishga, ya'ni dasturning bajarilish ketma-ketligini buzishga to`g`ri keladi. Bu jarayon shartsiz o`tish operatori yordamida bajariladi. Shartsiz o`tish operatorining umumiy ko`rinishi quyidagicha:

GOTO < operator belgisi>;

Bu yerda operator belgisi boshqaruv uzatiladigan operator belgisidir. Belgi sifatida 0-9999 oraliqdagi natural sonlar va CHAR turidagi belgilar ishlatiladi.

Belgi tavsiflash bo`limining LABEL bo`limida albatta tavsiflangan bo`lishi shart.

Misol: GOTO 32;

25: WRITE('y=',Y)

Takrorlanish jarayonlarini tashkil qilish

Amaliyotda murakkab jarayonlarni dasturlashda ma’lum buyruqlar ketma-ketligini ma’lum shartlar asosida qayta-qayta bajarish zaruriyati tug`iladi. Ma’lum bir o`zgaruvchining turli qiymatlarida ma’lum buyruqlar tizimining biron-bir qonuniyatga asosan qayta-qayta bajarilishi takrorlanuvchi hisoblash jarayoni - sikl deb ataladi.

Takrorlanuvchi hisoblash jarayonining takror-takror hisoblanadigan qismini ***takrorlanishning tanasi (jismi)*** deb ataladi.

Takrorlanish ichida qiymatlari o`zgarib boradigan o`zgaruvchini takrorlanish o`zgaruvchisi yoki takrorlanishni boshqaruvchi o`zgaruvchisi (sikl parametri) deb yuritiladi.

Takrorlanuvchi jarayonning algoritmi umumiy holda quyidagilarni o`z ichiga olishi kerak:

1. Takrorlanishni tayyorlash - takrorlanishni boshlashdan oddin takrorlanishda qatnashadigan o`zgaruvchilarning boshlang`ich qiymatlari yoki takrorlanish o`zgaruvchisining boshlang`ich qiymati o`rnatiladi, takrorlanish o`zgaruvchisining o`zgarish qadami belgilanadi.
2. Takrorlanish tanasi - takrorlanish o`zgaruvchilarining turli qiymatlari uchun takror bajariladigan amallar ketma-ketligi ko`rsatiladi.
3. Takrorlanish o`zgaruvchisiga yangi qiymat berish - har bir takrorlanishdan avval o`zgaruvchiga o`zgarish qadamiga mos ravishda yangi qiymat beriladi.
4. Takrorlanishni boshqarish - takrorlanishni davom ettirish sharti tekshiriladi, takrorlanishning boshiga o`tish ko`rsatiladi.[1]

[1] Discrete mathematics with applications. Fourth edition, Susanna S. EPP Depaul University. Copyright 2010, p.p 217

Sharti avval tekshiriladigan takrorlanish jarayoni. Takrorlanuvchi jarayonning bu ko`rinishi takrorlanish soni oldindan noma’lum bo`lgan hollarda, ya’ni takrorlanishdan chiqish ma’lum shartga bog`liq bo`lgan hollarda ishlatiladi. Takrorlanishning bu jarayonida takrorlanishdan chiqish sharti takrorlanish tanasini bajarishdan oldin tekshiriladi.

Ushbu operatorning umumiy ko`rinishi quyidagicha:

WHILE L DO M;

bu yerda, **WHILE** - toki, do - bajarish ma’nosini anglatuvchi xizmatchi so`zlar, L - mantiqiy ifoda, M - operatorlar yoki operatorlar guruhi, u takrorlanish tanasini belgilaydi. Takrorlanish tanasida bitta yoki bir necha operatorlar guruhi bo`lishi mumkin.

Bunda operatorlar guruhi, albatta, Begin va End orasida yozilishi kerak.

Operatorning bajarilishi quyidagicha: L mantiqiy ifodaning qiymati hisoblanadi.Agar L mantiqiy ifoda rost qiymatga ega bo`lsa, M operatori bajariladi va bu operator L mantiqiy ifodaning qiymati yolg’on bo’lgungacha qayta-qayta bajariladi.

Agar L mantiqiy ifodaning qiymati birinchi tekshirishdayoq yolg`on bo`lsa, M operatori biron marta ham bajarilmaydi va boshqaruv WHILE operatoridan keyingi operatorga uzatiladi.[1]

Misollar.

1) N! ni hisoblash dasturi tuzilsin.

```
Program fact;
Var n, i,p: integer;
Begin
Read(n); P:=1; I:=0;
While I<n do
Begin
 I:=I+1;P:=P*I;
End;
Write ('n! =', P)
End.
```

[1]**Discrete mathematics with applications. Fourth edition, Susanna S. EPP Depaul University. Copyright 2010, p.p 216**

Tanlash () operatori. Juda ko`p tarmoqlanish jarayonlarida tarmoqlanish ikki yoki undan ortiq tarmoqqa ajraladi. Umuman olganda, buni bizga tanish shartli o`tish operatori yordamida amalga oshirish mumkin:

IF B1 THEN A1 ELSE
IF B2 THEN A2 ELSE
IF BK THEN AK ;

Lekin bu hollarda shartli o`tish operatorlarining yozilishi noqulay.

Ko`p hollarda dasturchi uchun shartli operatorning umumiylashgan ko`rinishi - tanlash (variant) operatorini ishlatish qulay.

Tanlash operatorining metaformulasi quyidagicha yoziladi:

< tanlash operatori>::= CASE <operator selektori> OF < tanlash ro`yxati elementi>; END

bunda:

Tanlash operatorining umumiy ko`rinishi:

CASE S OF
M1 : A1;
M2: A2;
Mp: An
END;

Bu erda CASE (tanlash) -xizmatchi so`z, OF (dan), S - selektor, Mi – operatorlar belgilari, Ai -operatorlar (i=1 dan n gacha).

CASE operatori tarmoqlanish jarayonini berilgan bir necha operatordan birini tanlash yo`li bilan amalga oshiradi. Tanlash operatorida barcha operatorlar, shu jumladan, bajarilishi uchun tanlangan operator ham aniq ravishda keltiriladi (berilgan operatorlar ketma-ketligi chegaralangan).

Bajarilishi kerak bo`lgan operator yoki operatorlar ketma-ketligi operator selektorining qiymatiga ko`ra aniqlanadi. Operator selektori sifatida haqiqiy bo`lmagan, skalyar ko'rinishdagi har qanday ifoda yoki o`zgaruvchi ishlatilishi mumkin.

Operatorning ishlashida uning tarkibidagi har bir operator tanlash belgisi deb ataluvchi belgi bilan ta'minlanadi. Bu belgi operatorning bajarilishi uchun zarur bo`lgan selektorning maxsus qiymatini qabul qiladigan selektorning tavsifiga mos konstantadir. Operator bir necha mavjud qiymatlar bilan ishlashi uchun, unda tanlash belgilari ro`yxati keltirilishi kerak.

Tanlash operatoridagi belgili operatorlar oddiy belgiga ham ega bo`lishlari mumkin. Bu holda oldin tanlash belgilari, so`ng oddiy belgilar yoziladi.

Shuni ham inobatga olish lozimki, tanlash operatoriga faqat CASE xizmatchi so`z orqali kirish mumkin, ya'ni tanlash operatoridan tashqaridagi o`tish operatori orqali bu operatorga murojaat qilish mumkin emas.

Tanlash operatorining bajarilishi uning tarkibidagi operatorlar ketma-ketligidagi bitta operatorning bajarilishiga olib keladi. Shuning uchun ularning biridan biriga GOTO operatori yordamida o`tish xato demakdir.

Shartli o`tish operatorining quyidagi

IF B THEN Al ELSE A2

ko`rinishi tanlash operatorining quyidagi ko`rinishiga ekvivalentdir:

```
CASE B OF
TRUE: A1;
FALSE:A2;
END;
```

qisqa ko`rinishdagi shartli o`tish operatorining IF B THEN A ko`rinishi tanlash operatorining quyidagi ko`rinishga ekvivalentdir:

```
CASE B OF
TRUE: A;
FALSE
END;
```

Misol:

```
CASE T OF
 '*','/': R:=l;
 '+','-': R:=2
 End;
```

Bu operatorning bajarilishi natijasida, agar T-belgili o`zga ruvchi "+" yoki "-" belgi qiymatlarni qabul qilsa, R o`zgaruvchi 2 qiymatni, agar T o`zgaruvchi "*" yoki "/" belgini qabul qilsa, R o`zgaruvchi 1 qiymatni qabul qiladi.

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. Model nima?
2. Matematik modellashtirishni ta’riflang va misollarda tushuntiring.
3. Modellashtirish asosida yechiladigan masalalar turlarini sanang.
4. A tipdagi masalalar qanday ma’noga ega?
5. B tipdagi masalalarni tushuntiring.
6. C tipdagi masalalar qanday ma’noga ega?
7. Dinamik model deganda nimani tushunish mumkin?
8. Matematik modellashtirish jarayonini qanday yo`llar bilan qurish mumkin?
9. Matematik modellarni tasniflang.
10. Maltus modelining ma’nosini tuyshuntiring.
11. Algoritm va algoritmik til tushunchalari qanday ma’noga ega?
12. Qanday dasturlash tillaruni bilasiz?
13. Shartli o`tish operatori qanday amalga oshiriladi?
14. Shartsiz o’tish operatorining umumiy ko`rinishi qanday?
15. Sikl nima? Sikl parametrini tushuntiring.
16. Takrorlanuvchi jarayonning algoritmi umumiy holda qanday hollarga bo`linadi?
17. Sharti avval tekshiriladigan takrorlanish jarayoni qanday hollarda qo`llaniladi?
18. Tanlash operatorining metaformulasini misol orqali tushuntiring.
19. Tanlash operatoriga qanday kirish mumkin?

X U L O S A

Xulosa qilib aytish mumkinki, matematika aksiomatik nazariyalar va matematik modellarni, ular orasidagi munosabatlarni o`rganadigan, xulosalari qat'iy mantiqiy mushohadalar orqali asoslanadigan fan sifatida obyektiv olam, narsa va hodisalarni ilmiy nuqtayi nazardan bilishda nihoyatda katta rol o`ynaydi.

Differensial hisob maxsus til sifatida qaralsa, unda o`ziga xos grammatika (differensiallash qoidalari) va lug`at (hosilalar jadvali) mavjud.

Lug`at va grammatika funksiya hosilasini limit tushunchasiga tayangan umumiy ta'rifdan foydalanmasdan topishga qulaylik tug`diradi. Bunday holat tilshunoslikda uchraydi: kerakli so`z kelib chiqishini tahlil qilmasdan biz uni va uning o`zgarish qoidalarini lug`atdan aniqlaymiz.

Integral hisob (integrallash) – integrallar va ularning xossalarini, hisoblash usullarini, tatbiqlarini o`rganuvchi matematika bo`limi bo`lib, unda hosilasiga ko`ra funksiyani tiklash (boshlang`ich funksiya) masalasi o`rganiladi. Egri chiziq bilan chegaralangan yuzalarni, egri chiziqli yoylar uzunliklarini, hajmlarni, bajarilgan ishlarni, yo`llarni, inersiya momentlarini va hokazolarni hisoblash masalasi integrallash tushunchasi bilan bog`liq.

Integral ostidagi funksiyaning boshlang`ich funksiyasi ma'lum bo`lsa, u holda Nyuton-Leybnits formulasi aniq integrallarni hisoblash uchun amalda qulay usulni beradi. Faqat shu formulaning kashf etilishi aniq integralni hozirgi zamonda matematik analizda tutgan o`rnini olishga imkon bergan. Nyuton-Leybnits formulasi aniq integralning tatbiqiy sohasini ancha kengaytirdi, chunki matematika bu formula yordamida xususiy ko`rinishdagi turli masalalarni yechish uchun umumiy usulga ega bo`ldi.

Demak, ***matematika*** mantiqiy fikrlash orqali tafakkurni kengaytiradi va har bir sohaga ravon kirib borish uchun katta yo'l ochib beradi**…** *(fikringizni davom ettiring).*

Ilova

GLOSSARIY

English	O'zbek-cha	Русский	Izoh
A set	To`plam	множество	To`plam tushunchasi matematikaning boshlang`ich tushunchalark bo`lib, u ta'rifsiz qabul qilinadi.
An element of a set	To`plam elementi	Элементы множества	To`plamni tashkil qiluvchi obyektlar uning elementlari deyiladi.
The operations on sets	To`plam-lar ustida amallar	Операция над множест-вом	birlashma, kesishma, ayirma amallari mavjud.
To contain	O`z ichiga olmoq.	Принадле-жить	A to'plam a ni o'z ichiga oladi <=> $a \in A$
A subset	Qism to`plam	Подмно-жество	Agar A to`plamning har bir elementi $B$ to`plamning ham elementi bo`lsa, $A$ to`plam B to`plamning to`plamostisi deyiladi va $A \subset B$ yoki $A \subseteq B$ orqali belgilanadi.
The union	Birlashma	Обядене-ние	A va B to`plamlarning kamida biriga tegishli bo`lgan barcha elementlardan tashkil topgan $A \cup B$ to`plam $A$ va $B$ to`plamlarning birlashmasi yoki yig`indisi deyiladi.
The difference	Ayirma	разность	A va B to`plamlarning ayirmasi deb, $A$ to`plamning B to`plamga kirmagan barcha elementlardan tashkil topgan to`plamga aytiladi va $A \setminus B$ yoki A-B ko`rinishlarda belgilanadi
An empty set	Bo`sh to`plam	Пустое множество	Birorta ham elementga ega bo`lmagan to`plamga aytiladi va u $\varnothing$ orqali belgilanadi.
Intersection	Kesishma	Пересе-чение	A va B to'plamlarning kesishmasi yoki ko`paytmasi deb, $A$ va $B$ to`plamlarning barcha umumiy, ya'ni A ga ham, B ga ham tegishli

			elementlardan tashkil topgan $A \cap B$ to`plamga aytiladi.
To belong	Tegishli bo`lmoq	Принад-лежит	<=> To contain e.g $a \in A$
Reflexive relation	Refleksiv-lik munosa-bati	Отноше-ние рефлексив ности	Agar $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ uchun $\boldsymbol{xRx}$ bo`lsa, R –binar munosabat refleksiv munosabat deyiladi
Symmetric relation	Simmetrik lik munosa-bati	Отноше-ние симметрич ности	Agar $\boldsymbol{xRy}$ bo`lishidan $\boldsymbol{yRx}$ bo`lishi kelib chiqsa, ya'ni $R^{-1} = R$ shart bajarilsa, R-simmetrik munosabat deyiladi
Linear ordered set	qisman tartiblan-gan to'plam	Чистично упорядо-ченный	Agar R - qisman tartib munosabati bo`lsa, $(A, R)$ qisman tartiblangan to`plam, R chiziqli tartib munosabati bo`lsa, $(A, R)$ chiziqli tartiblangan to`plam deyiladi.
Completely ordered set	To`la tartiblan-gan to`plam	Упорядо-ченное множество	Har qanday bo`sh bo`lmagan to`plamostisi minimal elementga ega chiziqli tartiblangan to`plam to`liq tartiblangan to'plam deyiladi.
Equivalence relation	ekvivalent lik munosaba ti	Отноше-ние эквива-лентности	Refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo`lgan binar munosabat ekvivalentlik munosabati deyiladi
Binary relation	Binar munosa-bat	Бинарное отноше-ние	$\boldsymbol{A} \times B$ ning ixtiyoriy qism to`plamiga binary munosabat deyiladi
Inverse of Binary Relation	Teskari munosa-bat	Обратное отноше-ние	Agar R – ikki o`rinli, ya'ni binar munosat bo`lsa, u holda $\{(a,b)/\forall(b,a) \in R^1\}$ munosabat R^1 - munosabatga teskari munosabat deyiladi va R^{-1} orqali belgilanadi. R^{-1} munosabat R ning inversiyasi deyiladi.
Factorizing a set	To`plamni faktorlash	Фактори-зация множества	A to`plamning bo`sh bo`lmagan to`plamostilaridan tuzilgan $B = \{A_\alpha \ / \alpha \in \Omega\}$ to`plam berilgan bo`lsin. Agar B ixtiyoriy ikkita elementining kesishmasi bo`sh to`plmadan iborat bo`lib, $B$ ning barcha elementlarining yig`indisi A

			ga teng bo\`lsa, u holda $B$ to\`plam A to\`plamning bo\`laklangani deyiladi.
An ordered set	Tartiblan-gan to\`plam	Упорядо-ченное множество	A to\`plamda $R$ - tartib munosabat berilgan bo\`lsin, (A, R) juftlik tartiblangan to\`plam deyiladi.
Composition of binary relations	Binar munosa-batlarning kompozit-siyasi	Комнози-ция бинарных отноше-ний	P va Q binar munosabatlar bo\`sh bo\`lmagan A to\`plamda berilgan bo\`lsin. U holda $P \circ Q = \{(a,c) \mid \exists\, b \in A, (a,b) \in Q \wedge (b,c) \in P\}$ to\`plam P va Q binar munosabatlarning kompozisiyasi deyiladi.
Unary relation	Unar munosa-bat	Унарное отноше-ние	Bir o\`rinli munosabat esa $A$ ning ixtiyoriy to\`plamostisi bo\`lar ekan. Bir o\`rinli munosabat unar munosabat deyiladi.
Transitivity relation	Tranzitiv-lik munosa-bat	Отноше-ние транзитив ности	Agar $\boldsymbol{xRy}$ va $\boldsymbol{yRx}$ bo\`lishidan $\boldsymbol{xRz}$ bo\`lishi kelib chiqsa, ya'ni $R \circ R \subset R$ shart bajarilsa, R-tranzitiv munosabat deyiladi.
A subset	Qism to\`plam	Подмно-жество	Agar B to\`plamning har bir elementi
Conjunction of propositions	Mulohaza -larning kon'yunk-siyasi	Коньюнк-ция высказы-вании	A va B mulohazalar rost bo\`lgandagina rost bo\`lib, qolgan hollarda yolg\`on bo\`ladigan mulohaza A va B mulohazalarning kon'yunksiyasi deyiladi va $A \wedge B$ yoki A & B ko\`rinishda belgilanadi
Disjunction of propositions	Mulohaza -lar diz'yunk-siyasi	Дизьюнк-ция высказы-вании	A va B mulohazalar diz'yunksiyasi deb, A va B mulohazalarning ikkalasi ham yolg\`on bo\`lgandagina yolg\`on, qolgan hollarda rost bo\`ladigan $A \vee B$ mulohazaga aytiladi.
Implication of propositions	Mulohaza -lar implikat-siyasi	Имплика-ция высказы-вании	A va B mulohazalar implikasiyasi deb, A mulohaza rost va B mulohaza yolg\`on bo\`lgandagina yolg\`on, qolgan hollarda rost bo\`ladigan $A \rightarrow B$ mulohazaga aytiladi.
Equivalence of	Mulohaza -	Эквивален ция	A va B mulohazalar ekvivalensiyasi deb, A va B mulohazalarning

propositions	larekvivalen-siyasi	высказивании	ikkalasi ham yolg`on yoki rost bo`lganda rost, qolgan hollarda yolg`on bo`ladigan A↔**B** mulohazaga aytiladi
A proposition	Mulohaza	Высказивание	matematik mantiqning asosiy tushunchalaridan bo`lib, u rost yoki yolg`onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gapdir.
The converse of a proposition	Mulohazaning inkori	Отрицание высказивании	Berilgan A mulohaza rost bo`lganda yolg`on, A mulohaza yolg`on bo`lganda rost bo`ladigan mulohaza A mulohazaning inkori deyiladi va $\rceil$ A yoki $\bar{A}$ orqali belgilanadi.
Propositions algebras	Mulohaza-lar algebrasi	Алгебра высказиваний	Mulohazalar to`plamini M harfi bilan belgilaylik. U holda M to`plam, unda bajariladigan barcha $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ amallar bilan birgalikda mulohazalar algebrasi deb yuritiladi. Mulohazalar algebrasini qisqacha MA orqali belgilaymiz.
A null predicate	Nol predikat	Нулевой предикат	Har qanday mulohazaga noll predikat deb ataladi.
Predicates with n variables	n o`zgaruv-chili predikat	Предикат с n неизвест-ной	Agar $P(x_1,\dots,x_n)$ tasdiq $x_1,\dots,x_n$ o`zgaruvchilarning yo`l qo`yilishi mumkin bo`lgan har qanday qiymatlarida mulohazaga aylansa, n – o`zgaruvchili predikat yoki n o`zgaruvchili mulohazaviy formula deyiladi. Bu erda n - 0, 1, 2 va hokazo manfiy bo`lmagan butun qiymatlar qabul qiladi
The converse of a predicate	Predikat-ning in'kori	Отрицание предика-тов	$M \neq \varnothing$ to`plamda aniqlangan bir o`rinli P(x) - predikat berilgan bo`lsin. U holda P(x) - predikatning inkori deb har qanday $x \in M$ element uchun P(x) - predikat rost bo`lganda yolg`on bo`ladigan; P(x) yolg`on bo`lganda rost bo`ladigan $\rceil$ P(x) predikatga aytiladi.
Graph	Graf	Граф	Graf deb, shunday $G_1(X,E)$ ikki

			to`plam juftligiga aytiladiki, bunda X-bo`sh bo`lmagan uchlar to`plami $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bo`lib, E ning elementlari esa X ning ikki elementli to`plam ostilaridir, ya'ni $E=\{(x_1,x_2)\}$.
Definition	Ta'rif	Опреде-ление	Muayyan tushuncha yoki terminning unga xos muhim belgilarini aks ettiruvchi qisqacha ifodasi; biron predmet yoki voqea hodisaning mazmun-mohiyatini ochib, tushuntirib berish
Sheme	Sxema	Схема	(yun. schema — qiyofa, tashqi ko'rinish) — 1) muayyan qurilma, inshoot, mashina va boshqalarning umumiy muhim tomonlari shartli belgilar bilan masshtabsiz ifodalangan chizma; 2) biror narsaning umumiy tasviri, bayoni, ifodasi.
Line	Chiziq	Линия	geom.ning asosiy tushunchalaridan biri. To`g`ri chiziq geometriyada boshlang`ich (ta'riflanmaydigan) tushuncha deb olinadi.
Design	Konstruk-siya	Конструк-ция	(lot. constructs -tuzilish, qurilish) — 1) mashina, inshoot yoki o`zel va detallarning tuzilish sxemasi, shuningdek, mashina, inshoot, o`zellar hamda ularning detallari. K. da kerakli qism va elementlarining shakli hamda o`zaro joylashishi, ularni biriktirish usullari, o`zaro ta'siri va qanday materiallardan yasalishi hisobga olinadi
Intsendent	Insindent	Инцидент	Agar x_1 va $x_2$lar qandaydir qirraga (x_i, x_j) ga tegishli bo`lsa, u holda ushbu qirra $x_i$ va $x_j$ "insindent" deyiladi, $x_i$ va $x_j$ lar esa qo`shni nuqtalar deyiladi.
Simple graph	Oddiy graf	Простой обыкновенный	Agar graf sirtmoqsiz yoki qirralari karrali bo`lmasa, bunda graf oddiy graf deyiladi.

Matrix of graph	Graf matritsasi	Матрица графа	Matritsa ustunlari va qatorlari graf uchlarini nomerlariga mos keladi, uning elementi c_n x_1 va x_j birlashtiruvchi qirralar sonidir
Isomorphism graphof	Izomorf graflar	Изомор-физм графов	graflar faqat nomerlash bilan farqlanadigan bo`lsa, ular chizilishda farqlanib, bu holda matritsa grafni izomorfizmgacha bo`lgan aniqlikda belgilaydi deymiz. Bunday graflar izomorf graflar deyiladi.
Grafs	Graf yoylari	Дуга графов	Orientirli D graf deb, bir juft D=(X,A) ga aytamiz. Bu yerda X uchlarning ixtiyoriy to`plami va A –uchlarning tartiblangan juftligini to`plamidir, uchlarning tartiblangan juftligini “yoylar” deymiz.
Partial graph	Qisman graf	Частич-ный граф	Graf $G_0(x_0, E_0)$ $G(x, E)$ ning qisman grafi deb ataladi, agarda u berilgan grafning barcha uchlariga ega bo`lib, ammo barcha qirralariga ega bo`lmasa, balki qisman qirralariga ega bo`lsa, ya’ni $x_0 = x,\ E_0 \in E$
Planar graph	Planar graf	Планар-ный граф	Graf (tekis) planar deyiladi, agarda ushbu grafga izomorf bo`lgan grafni tekislikda qirralari kesishmagan holda tasvirlash mumkin bo`lsa.
Line graph	Graf yo`li	Маршрут	m uzunlikdagi marshrut deb grafning qirralarini shunday ketma ketligiga aytiladiki yonma-yon bo`lgan qirralarini uchlari uchma-uch tushishlari kerak.
Connected graph	Bog`lan-gan graf	Связан-ный граф	Grafning ikki uchi bog`langan deyiladi, agar shu uchlarni birlashtiruvchi yo`l bo`lsa. Agar grafning har qanday uchini birlashtiruvchi marshrut mavjud bo`lsa, bunday graf bog`langan graf deyiladi
Chain	Zanjir	Цепь	Barcha qirralari turli bo`lgan (yo`l) marshrut zanjir deb ataladi. Agar

			zanjir turli uchlardan o`tsa, u oddiy zanjir deb ataladi.
Cycle	Sikl	Цикл	Yopiq zanjir “sikl” deb ataladi, turli uchlardan o`tuvchi “sikl”, oddiy “sikl”dir.
Tree	Daraxt	Дерево	Siklga ega bo’lmagan bog`langan graf daraxt deb ataladi, uning qirralari esa shoxlaridir.
Forest	O`rmon	Лес	Siklsiz bog`lanmagan graf o`rmon deb ataladi.
Net	To`r	Сеть	S=(G, C) juftlik to`r deb ataladi, Bu yerda G=(X,A) ixtiyoriy orientirlangan (yo`naltirilgan)dir.
A permutation of objects	O`rin almashti-rish	Переста-новка	***O`rin almashtirish*** deb, *n* ta turli elementlarning bir-biridan faqat joylashishi bilan farq qiluvchi kombinasiyalarga aytiladi. Ularning soni $P_n = n!$ formula bilan aniqlanadi. Bu yerda n!=$1\cdot 2\cdot 3\cdots n$, 0!=1
Repeatings	O`rinlash-tirish	Размеше-ния	***O`rinlashtirish*** deb, *n* ta turli elementdan *m* tadan tuzilgan kombinasiyalar bo`lib, ular bir-biridan yo elementlarning tarkibi, yo ularning tartibi bilan farq qilishiga aytiladi.
Combinations	Gruppa-lashlar	Группиро-вания	***Gruppalashlar*** deb, bir-biridan hech bo`lmaganda bitta elementi bilan farq qiluvchi *n* ta elementdan *m* tadan tuzilgan kombinasiyalarga aytiladi. Ularning soni $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ formula bilan aniqlanadi.
Combinatory	Kombina-torika	Комбина-торика	***Kombinatorika*** – bu diskret matematikaning diskret to`plam elementlarini berilgan qoidalar asosida tanlash va joylashtirish bilan bog`liq bo`lgan masalalarni yechish usullarini o`rganuvchi bo`limidir.
The elements	ementlar	Элементы	Birikmalarni tashkil etgan

			predmetlar *elementlar* deyiladi.
A vector	Vektor	Вектор	Uzunliklari teng yo`nalishi bir xil bo`lgan barcha yo`nalgan kesmalar to`plamini ozod vektor yoki qisqacha vektor deb ataladi.
A unit vector	Birlik vektor	Ед.вектор	Uzunligi birga teng bo`lgan vektor birlik vektor yoki ort deyiladi.
Zero vector	Nol vektor	Нулевой вектор	Boshi bilan oxiri ustma – ust tushgan vektor nol vektor deyiladi.
Ellipse	Ellips	Эллипс	Ellips deb tekislikdagi shunday nuqtalarning geometrik o`rniga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan fokuslar deb ataluvchi $F_1$ va $F_2$ nuqtalargacha bo`lgan masofalari yig`indisi berilgan $PQ$ kesma uzunligiga teng bo`ladi. Bu yerda $PQ > F_1F_2$.
Eccentricity of ellipse	Ekssentri-sitet	Эксцен-триситет	Ellipsning fokuslari orasidagi masofaning ellipsning katta o`qi uzunligiga nisbati shu ellipsning deb ataladi. Ekstsentrisitet e harfi bilan belgilanadi.
The directrix of ellipse	Direktrisa	Дирек-триса	Ellips ning berilgan F fokusga mos direktrisasi deb, uning fokal o`qiga perpendikulyar va markazdan shu $F$ fokus yotgan tomonda $\frac{a}{e}$ masofada turuvchi to`q`ri chiziqqa aytiladi.
Hyperbola	Giperbola	Гипербола	Tekislikda har bir nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi F_1 va F_2 nuqtalargacha bo`lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati berilgan kesma uzunligiga teng bo`lgan nuqtalarning geometrik o`rniga *giperbola* deb ataladi.

FOYDALANILADIGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI

Rahbariy adabiyotlar:

1. Karimov I.A. O`zbekiston iqtisodiy islohotlarni chuqurlashtirish yo`lida. – Toshkent.: O`zbekiston, 1995. -269 b.

2. Karimov I.A. Yangicha fikrlash va ishlash – davr talabi. – Toshkent.: O`zbekiston, 1997. T.5. -384 b.

3. Karimov I. Biz kelajagimizni o`z qo`limiz bilan quramiz. T.7. – Toshkent.: O`zbekiston, 1999. -139 b.

4. Karimov I.A. Ozod va obod vatan, erkin va farovon hayot – pirovard maqsadimiz. – Toshkent.: O`zbekiston, 2000. T.8. -528 b.

5. Karimov I.A. Vatan ravnaqi uchun har birimiz mas'ulmiz. – Toshkent.: O`zbekiston, 2001. T.9. -439 b.

6. Karimov I.A. Jamiyatni erkinlashtirish, isloxotlarni chuqurlashtirish, ma'naviyatimizni yuksaltirish va xalqimizning hayot darajasini oshirish-barcha ishlarimizning mezoni va maqsadidir. –Toshkent.: O'zbekiston, 2007, T. 15. -126 b.

7. Karimov I.A. Yuksak ma'naviyat - yengilmas kuch. –Toshkent.: Ma'naviyat, 2008. -176 b.

O`quv qo`llanma va darsliklar

Asosiy adabiyotlar:

1. Жўраев Т. ва бошқалар. Олий математика асослари. 1-том. Т.: «Ўзбекистон». 1995.

2. Жўраев Т. ва бошқалар. Олий математика асослари. 2-том. Т.: «Ўзбекистон». 1999.

3.Fayziboyev va boshqalar. Oliy matematikadan misollar. Toshkent. «O`zbekiston». 1999.

4. A.Rasulov. Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent. "Turon-Bo`ston". 2012 y.

5. Farmonov Sh. va boshq. "Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika". T.: "Turon-Bo`ston", 2012y.

6. Баврин И.И., Матросов В.Л. "Общий курс высшей математики". М.: "Просвещение". 1995. 464 стр.

7. Тожиев Ш.И. Олий математика асосларидан масалалар ечиш. Т.: «Ўзбекистон». 2002 й.

8. Соатов Ё.У. Олий математика асослари.IIIтом Т.: «Ўзбекистон». 1996 й.

9. Susanna S. Epp. Discrete mathematics with applications, Fourth Edition.Cengage Learning. Boston, USA–2011. (ISBN 978-0-495-39132-6)

10. Jane S Paterson Heriot-Watt (University Dorothy) A Watson Balerno (High School) SQA Advanced Higher Mathematics. Unit 1. This edition published in 2009 by Heriot-Watt University SCHOLAR. Copyright © 2009 Heriot-Watt University.(ISBN 978-1-906686-03-1)

11. Valentin Deaconu, Don Pfaff. A bridge course to higher mathematics.Current address : Department of Mathematics, University of Nevada, Reno NV 89557-0084, USA. E-mail address : vdeaconu@unr.edu

Qo`shimcha adabiyotlar:

12. Hamedova N.A. va bosh. ”Matematika”. OO`Yu uchun darslik,T.: Turon iqbol, 2007-y.

13. Hamedova N.A., Sadikova A.V., Laktaeva I.Sh. ”Matematika” – Gumanitar yo`nalishlar talabalari uchun o`quv qo`llanma. T.: ”Jahon-Print” 2007-y.

14. Jumayev E. va boshq. ”Oliy matematika”,T.: 2008-y.

15. Azlarov T.A., Mansurov X. “Matematik analiz” 1-qism. T.: “O`qituvchi”, 1994-y.

16. Шипачев В.С., “Высшая математика”. М.: “Высшая школа”. 1998г. 479 стр.

17. Normonov A. “Analitik geometriya”. T.: Universitet, 2008-y.

18. Baxvalov S.B. va boshq. “Analitik geometriyadan mashqlar to`plami”. T.: Universitet, 2006-y.

19. Oppoqov Y. va boshq. “Oddiy differensial tenglamalardan misol va masalalar to`plami”. T. : 2009-y.

20. Rasulov A.S., Raimova G.M., Sarimsakova X.K. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. T.: 2006. 272 b.

21. Fayzullayeva S.F. Ehtimollar nazariyasidan masalalar to`plami.T.: 2006.112 b.

22. Гмурман В.Э. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1999-г.-474с.

23. Brandenberger B.M. (editor in chief) . Mathematics, Vol. 1–4. Macmillan reference. USA–2002 (ISBN 0028655621)

24. A.Hausman, H.Kahane, P.Tidman. Logic and Philosophy:A Modern Introduction, Eleventh Edition.Cengage Learning. Boston, USA -2010. (ISBN 978-0-495-60158-6)

25. To‘rayev H.T., Azizov I., Otaqulov S. Kombinatorika va graflar nazariyasi: O‘quv qo‘llanma. – Toshkent: Ilm-Ziyo, 2009-y.

26. Пиотровский Р.Г. и др. Математическая лингвистика. Учеб.пособие для пед.ин-тов. – Москва. Высш.школа, 1997.

27. Грес П.В. Математика для гуманитариев. Учебное пособие. Москва. Университетская книга, Логос, 2007.

MUNDARIJA

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS

ISBN 978-9943-6214-5-9