А. М. ЗУБКОВ
Б. А. СЕВАСТЬЯНОВ
В. П. ЧИСТЯКОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3-91

А. М. ЗУБКОВ
Б. А. СЕВАСТЬЯНОВ
В. П. ЧИСТЯКОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допу

о.

БИБЛИОТЕКА
№ у/5572

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.171
З-91
УДК 519.21 (075.8)

Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.
Сборник задач по теории вероятностей: Учеб. пособие для вузов.— 2-е изд., испр. и доп.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.— 1989.— 320 с.— ISBN 5-02-013949-1.

Содержит упражнения по всем разделам теории вероятностей, включаемым в начальный курс. Тексты задач, указания, решения и ответы помещаются раздельно.

Второе издание по сравнению с первым (1980 г.) существенно переработано. Значительно увеличено общее число задач и, в частности, число простых задач, предназначенных для упражнений по начальному курсу теории вероятностей; в вводные части к основным темам добавлены примеры решения задач; добавлены задачи по случайным процессам и математической статистике.

Для студентов математических и физических специальностей вузов.

Табл. 9. Ил. 8. Библиогр. 13 назв.

Рецензент

кафедра теории вероятностей Московского института электронного машиностроения (заведующий кафедрой — доктор физико-математических наук *Г. И. Ивченко*)

З $\frac{1602090000-110}{053(02)-89}$ 45-89

ISBN 5-02-013949-1

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1980; с изменениями, 1989

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот сборник задач является учебным пособием по начальному курсу теории вероятностей для студентов университетов и технических вузов. Математический аппарат, используемый при решении большей части задач, не выходит за пределы обычного курса математики в технических вузах. Каждая из шести глав задачника имеет введение, где приводятся краткие сведения о понятиях и утверждениях теории вероятностей, необходимых для решения задач этой главы. Введения к первым трем главам содержат, кроме того, примеры решения простых стандартных задач. Конец каждого примера отмечен знаком ▲.

В сборнике имеются задачи разной степени трудности. С одной стороны, в каждой главе есть простые задачи, решение которых сводится к прямому применению основных формул и приемов. Номера таких задач отмечены знаком °. Эти задачи можно использовать на семинарских занятиях как в технических вузах, так и в университетах.

С другой стороны, в каждой главе есть достаточно сложные задачи, решения которых содержат принципиально важные идеи или связаны с аккуратным проведением математических выкладок или рассуждений. Номера таких задач отмечены знаком *, а их полные решения приводятся в части III.

Остальные задачи занимают промежуточное положение. Если первые попытки решения такой задачи не приводят к успеху, то можно воспользоваться указаниями (см. часть II), которые практически для каждой задачи в сжатой форме перечисляют все сколько-нибудь нетривиальные соображения, на которых основано ее решение. Иначе говоря, указания разбивают задачу средней трудности на несколько более простых задач.

Авторы стремились сделать задачи интересными как по форме, так и по содержанию и подбирали задачи так, чтобы помочь учащимся освоиться с основными понятиями и методами теории вероятностей. Особое внимание уделяется тем элементарным методам, которые «работают» практически во всех областях применения теории вероятностей, например: представлению исследуемой случайной величины в виде суммы индикаторов, использованию линейности математического ожидания, методу моментов, представлению исследуемой случайной величины в виде суммы более простой случайной величины и «малого» добавка, и т. п. Большая часть этих приемов, как правило, не находит отражения в стандартных курсах теории вероятностей и может быть усвоена только при самостоятельном решении задач.

При составлении задачника был использован ряд отечественных и зарубежных источников (учебников, задачников, журнальных статей и т. п.), а также задачи, возникавшие в научных и педагогических коллективах, хорошо знакомых авторам.

При подготовке второго издания были исправлены замеченные неточности и добавлены новые задачи.

Часть I. ЗАДАЧИ

Глава 1

ПРОСТЕЙШИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Математические модели случайных явлений, рассматриваемые в теории вероятностей, основываются на понятии *вероятностного пространства*, т. е. тройки $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$, где

$\Omega = \{\omega\}$ — непустое множество, элементы ω которого интерпретируются как взаимно исключающие исходы изучаемого случайного явления;

$\mathscr{A}$ — набор подмножеств множества Ω, называемых *событиями* (предполагается, что множество $\mathscr{A}$ содержит Ω и замкнуто относительно взятия противоположного события и суммы событий в не более чем счетном числе, т. е. $\mathscr{A}$ является σ-алгеброй);

вероятность P — функция, определенная на событиях $A \in \mathscr{A}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\mathsf{P}(A) \geqslant 0$ при любом $A \in \mathscr{A}$;

2) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$; (1.1)

3) $\mathsf{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n)$, если $A_iA_j = \varnothing$ при любых $i \neq j$.

Символ $\varnothing$ означает пустое множество (или невозможное событие).

Определение операций над событиями, определение алгебры и σ-алгебры событий можно найти в учебниках по теории вероятностей (см., например [2], [5], [10] — [13]). В этой главе рассматриваются два простейших класса вероятностных пространств.

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$. В σ-алгебру событий $\mathscr{A}$ включаются все 2^s подмножеств $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ множества Ω. При *классическом определении вероятности* полагают $\mathsf{P}(\omega_1) = \ldots = \mathsf{P}(\omega_s) = 1/s$, поэтому вероятность $\mathsf{P}(A)$ события $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ равна отношению числа элементарных событий *) ω_i, входящих в A, к общему

*) Здесь и ниже число элементов любого конечного множества M будем обозначать $|M|$.

числу элементарных событий в Ω:

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{s}. \tag{1.2}$$

Такая вероятностная схема является математической моделью случайных явлений, для которых исходы опыта в каком-либо смысле симметричны, и поэтому представляется естественным предположение об их равновозможности.

Пример 1.1. Брошено две игральных кости. Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятность события A = {сумма выпавших очков делится на 6}.

Решение. Исход опыта можно описать парой чисел (i, j), где i — число очков, выпавших на 1-й кости, а j — на 2-й $(i, j = 1, 2, \ldots, 6)$. Поэтому мы полагаем

$$\Omega = \{(i, j): i = 1, 2, \ldots, 6; \quad j = 1, 2, \ldots, 6\}.$$

Нетрудно проверить, что общее число элементарных событий $|\Omega| = 36$. Событие A соответствует подмножеству $A = \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3), (6,6)\}$ множества Ω. Так как $|A| = 6$, то по формуле (1.2) получаем

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}. \qquad \blacktriangle$$

Дадим описание двух часто встречающихся вероятностных схем, в которых детализируется общее классическое определение. Обозначим через $\mathcal{N}$ множество из N чисел: $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$; пусть $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — упорядоченный набор из n элементов множества $\mathcal{N}$. Вероятностную схему, в которой

$$\Omega = \{\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n): i_k \in \mathcal{N}, \quad k = 1, 2, \ldots, n\} \tag{1.3}$$

и все элементарные события ω равновероятны, называют схемой *случайного выбора с возвращением.*

Схемой *случайного выбора без возвращения* называют вероятностную схему, в которой

$$\Omega = \{\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n): i_k \in \mathcal{N}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \\ \text{среди } i_1, \ldots, i_n \text{ нет одинаковых}\} \tag{1.4}$$

и элементарные события ω равновероятны.

При вычислении вероятности по формуле (1.2) часто оказываются полезными различные комбинаторные формулы. Приведем основные из них. Пусть дано множество $\mathcal{N}$ из N элементов: $\mathcal{N} = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$. Подмножестми множества $\mathcal{N}$ называют *сочетаниями*. Число сочетаний, которые можно образовать из N элементов $\mathcal{N}$, выбирая различными способами подмножества по n элементов, обозначают C_N^n или $\binom{N}{n}$. Справедливы формулы

$$C_N^n = \frac{N^{[n]}}{n!} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}, \quad C_N^n = C_N^{N-n},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ и

$$N^{[n]} = N(N-1)\ldots(N-n+1). \tag{1.5}$$

Упорядоченные цепочки $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n}$, образованные из различных элементов $\mathcal{N}$, называют *размещениями*. (Размещениями являются, в частности, элементарные события $\omega = (i_1, \ldots, i_n)$ в схеме случайного выбора без возвращения (1.4). Число размещений из N элементов по n, т. е. число различных упорядоченных цепочек длины n из N элементов $\mathcal{N}$, обозначают A_N^n. Для A_N^n имеем формулу $A_N^n = N^{[n]}$. Размещения с $n = N$ называют *перестановками*. Число различных перестановок, образованных из N элементов, равно $N!$

Пример 1.2. В урне лежат пять карточек, занумерованных числами 1, 2, 3, 4, 5. По схеме случайного выбора с возвращением из урны трижды вынимается карточка. Какова вероятность того, что ровно в двух случаях из трех будут вынуты карточки с нечетными номерами?

Решение. Вероятностная схема определяется формулой (1.3) с $N = 5$, $n = 3$; элементарное событие $\omega = (i_1, i_2, i_3)$ соответствует номерам вынутых карточек. Так как $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, то существует ровно $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ различных элементарных событий $\omega = (i_1, i_2, i_3) \in \Omega$. Значит, $|\Omega| = 5^3 = 125$. Далее, $B = \{$ровно в двух случаях из трех вынимаются карточки с нечетными номерами$\} = \{\omega = (i_1, i_2, i_3) \in \Omega$: ровно одно из чисел i_1, i_2, i_3 четное$\} = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, где события $B_k = \{\omega = (i_1, i_2, i_3) \in \Omega$: число i_k четное, а остальные два числа нечетные$\}$, $k = 1, 2, 3$, попарно не пересекаются. При любом $k = 1, 2, 3$ число различных $\omega = (i_1, i_2, i_3) \in B_k$ равно $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ (k-ю карточку можно выбрать двумя способами, а каждую из двух остальных — тремя). Поэтому $|B| = |B_1 \cup B_2 \cup B_3| = |B_1| + |B_2| + |B_3| = 3 \cdot 18 = 54$ и

$$\mathsf{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{54}{125} = 0{,}432. \qquad \blacktriangle$$

Пример 1.3. Найти вероятность того же события, что в примере 1.2, для схемы выбора без возвращения.

Решение. Вероятностная схема определяется формулой (1.4) с $N=5$, $n=3$. В отличие от примера 1.2 элементарные события $\omega=(i_1, i_2, i_3)$ являются теперь размещениями, т. е. $|\Omega| = A_5^3 = 5\cdot4\cdot3 = 60$. Используя те же обозначения, что в примере 1.2, находим, что

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3, \quad B_k \cap B_l = \varnothing \text{ при } k \neq l,$$

и что $|B_k| = A_2^1\cdot A_3^2 = 2\cdot3\cdot2 = 12$ при любом $k = 1, 2, 3$ (k-ю карточку можно выбрать $A_2^1 = 2$ способами, а пару остальных — $A_3^2 = 3\cdot2$ способами). Поэтому теперь $|B| = |B_1| + |B_2| + |B_3| = 3\cdot12 = 36$ и

$$\mathsf{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{36}{60} = 0{,}6. \quad \blacktriangle$$

Часто оказывается полезной следующая классическая формула, известная как уточненная формула Стирлинга (см. [11], т. 1, с. 73, (9.15)):

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \qquad \frac{12n}{12n+1} < \theta_n < 1. \tag{1.6}$$

В формулировках некоторых задач используется выражение: «целое число a сравнимо с целым числом b по модулю m» (m — целое), или, в символической записи,

$$a \equiv b \pmod m. \tag{1.7}$$

Сравнение (1.7) эквивалентно утверждению: *существует такое целое число* t, *что* $a - b = tm$ (т. е. a и b при делении на m дают одинаковые остатки). В частности, запись $a \equiv 0 \pmod m$ означает, что a делится без остатка на m.

Целую часть действительного числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x) будем обозначать $[x]$.

Рассмотрим второй класс вероятностных пространств $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$. Пусть Ω — множество в n-мерном евклидовом пространстве, объем $\mu(\Omega)$ которого положителен и конечен; σ-алгебра $\mathscr{A}$ состоит из всех измеримых (т. е. имеющих объем) подмножеств $A \subset \Omega$. Вероятность P определяется равенством

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \quad A \in \mathscr{A}. \tag{1.8}$$

Определение вероятности (1.8) называют *геометрическим определением вероятности.*

Пример 1.4. Коля и Петя договорились встретиться на остановке автобуса между 9 и 10 часами. Каждый, придя на остановку, ждет другого 15 минут, а потом уходит. Найти вероятность встречи Коли и Пети, предполагая, что моменты их прихода являются координатами точки, имеющей равномерное распределение в квадрате $[9, 10] \times [9, 10]$.

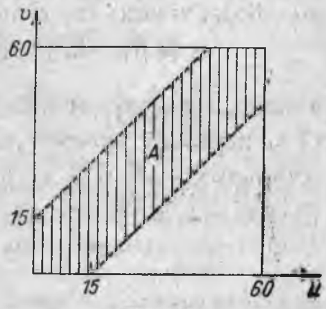

Рис. 1

Решение. Пусть Коля приходит на остановку в 9 ч u мин, а Петя — в 9 ч. v мин. В качестве множества элементарных событий выберем

$$\Omega = \{(u, v) \colon 0 \leqslant u \leqslant 60,\ 0 \leqslant v \leqslant 60\}.$$

Тогда событие A = {встреча Коли и Пети происходит} соответствует множеству

$$A = \{(u, v) \colon |u - v| \leqslant 15,\quad 0 \leqslant u \leqslant 60,\quad 0 \leqslant v \leqslant 60\} \subset \Omega,$$

изображенному на рис. 1. Так как

$$\mu(\Omega) = 60^2, \quad \mu(A) = 60^2 - 45^2 = 60^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) = \frac{7}{16} \cdot 60^2,$$

то по формуле (1.8) находим

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{60^2 \cdot 7/16}{60^2} = \frac{7}{16}. \qquad \blacktriangle$$

Приведем формулы, которые часто используются при решении задач. Пусть $\bar{A}$ обозначает событие, противоположное событию A. Для любых событий $A_1, A_2, \ldots$ имеем

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n, \quad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n. \tag{1.9}$$

При любых A и B верна формула

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B), \tag{1.10}$$

в частности, при $A \cap B = \varnothing$ имеем

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B). \tag{1.11}$$

Вероятность объединения произвольных n событий находится по формуле

$$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k) - \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n} \mathsf{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2}) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < k_3 \leqslant n} \mathsf{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}) - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} \mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_l \leqslant n} \mathsf{P}(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_l}). \quad (1.12)$$

Пример 1.5. Четыре поздравительных открытки случайно разложены по четырем конвертам с адресами. Найти вероятность того, что хотя бы одна открытка попала в свой конверт.

Решение. Множество элементарных событий Ω состоит из всех расположений открыток по конвертам: $|\Omega| = 4! = 24$. Событие

$A = \{$хотя бы одна открытка попала в свой конверт$\}$

можно представить в виде

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,$$

где $A_i = \{i$-я открытка попала в свой конверт$\}$.

По классическому определению вероятности

$$\mathsf{P}(A_1) = \frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}, \quad \mathsf{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{2!}{4!} = \frac{1}{4 \cdot 3},$$
$$\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{4!}.$$

Нетрудно проверить, что при любых попарно различных i, j, k

$$\mathsf{P}(A_i) = \mathsf{P}(A_1) = \frac{1}{4}, \quad \mathsf{P}(A_i \cap A_j) = \mathsf{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{12},$$
$$\mathsf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{24}.$$

По формуле (1.12) находим

$$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) =$$
$$= 4 \cdot \frac{1}{4} - C_4^2 \cdot \frac{1}{12} + C_4^3 \cdot \frac{1}{24} - C_4^4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{5}{8}. \quad \blacktriangle$$

Во всех задачах § 1 данной главы предполагается, что элементарные события равновероятны; слова «случайное», «случайно выбирается» нужно понимать как предположение о равновероятности элементарных событий. В § 2 выражение «точка равномерно распределена на множество Ω» означает, что вероятности нужно вычислять по формуле (1.8).

§ 1. Классическое определение вероятности

1.1°. Из ящика, содержащего три билета с номерами 1, 2, 3, вынимают по одному все билеты. Предполагается, что все последовательности номеров билетов имеют одинаковые вероятности. Найти вероятность того, что хотя бы у одного билета порядковый номер совпадает с собственным.

1.2°. Колода из 36 карт хорошо перемешана (т. е. все возможные расположения карт равновероятны). Найти вероятности событий:

$A = \{$четыре туза расположены рядом$\}$,
$B = \{$места расположения тузов образуют арифметическую прогрессию с шагом 7$\}$.

1.3°. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник А. С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).

1.4°. Брошено три монеты. Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятности событий:

$A = \{$первая монета выпала «гербом» вверх$\}$,
$B = \{$выпало ровно два «герба»$\}$,
$C = \{$выпало не больше двух «гербов»$\}$.

1.5°. Из множества всех последовательностей длины n, состоящих из цифр 0, 1, 2, случайно выбирается одна. Найти вероятности событий:

$A = \{$последовательность начинается с 0$\}$,
$B = \{$последовательность содержит ровно $m+2$ нуля, причем 2 из них находятся на концах последовательности$\}$,
$C = \{$последовательность содержит ровно m единиц$\}$,
$D = \{$в последовательности ровно m_0 нулей, m_1 единиц, m_2 двоек$\}$.

1.6°. Из 28 костей домино случайно выбираются две. Найти вероятность P_2 того, что из них можно составить «цепочку» согласно правилам игры.

1.7°. В записанном телефонном номере 135—3.—.. три последние цифры стерлись. В предположении, что все комбинации трех стершихся цифр равновероятны, найти вероятности событий:

$A = \{$стерлись различные цифры, отличные от $1, 3, 5\}$,
$B = \{$стерлись одинаковые цифры$\}$,
$C = \{$две из стершихся цифр совпадают$\}$.

1.8°. Какова вероятность того, что четырехзначный номер случайно взятого автомобиля в большом городе: а) имеет все цифры разные? б) имеет только две одинаковые цифры? в) имеет две пары одинаковых цифр? г) имеет только три одинаковые цифры? д) имеет все цифры одинаковые?

1.9°. Найти вероятность p_N того, что случайно взятое натуральное число из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ делится на фиксированное натуральное число k. Найти $\lim\limits_{N\to\infty} p_N$.

1.10. Из чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ случайно выбирается число a. Найти вероятность p_N того, что: а) число a не делится ни на a_1, ни на a_2, где a_1 и a_2 — фиксированные натуральные взаимно простые числа; б) число a не делится ни на какое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, где числа a_i — натуральные и попарно взаимно простые. Найти $\lim\limits_{N\to\infty} p_N$ в случаях а) и б).

1.11. Из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ случайно выбирается число a. Найти $\lim\limits_{N\to\infty} p_N$, где p_N — вероятность того, что $a^2 - 1$ делится на 10.

1.12. Из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ случайно выбирается число a. Найти вероятность p_N того, что a при делении на целое число $r \geqslant 1$ дает остаток q. Найти $\lim\limits_{N\to\infty} p_N$.

1.13. Целое число ξ случайно выбирается из множества $\{0, 1, 2, \ldots, 10^n - 1\}$. Найти вероятность того, что в десятичной записи это число k-значно, т. е. представимо в виде $\xi = \xi_k \cdot 10^{k-1} + \xi_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \ldots$ $\ldots + \xi_2 \cdot 10 + \xi_1$, где $0 \leqslant \xi_i \leqslant 9$ при всех $i = 1, \ldots, k$ и $\xi_k > 0$ $(k \geqslant 1)$.

1.14. По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$, выбираются числа ξ и η. Найти вероятность q_N того, что ξ и η взаимно просты. Найти $\lim\limits_{N\to\infty} q_N$, используя известное равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1.15°. По схеме случайного выбора с возвращением из множества целых чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ выбираются числа ξ и η. Обозначим p_N вероятность события $\xi^2 + \eta^2 \leqslant N^2$. Найти $\lim\limits_{N\to\infty} p_N$.

1.16. По схеме случайного выбора с возвращением из множества целых чисел $\{0, 1, 2, \ldots, 10^n - 1\}$ выбираются числа ξ и η. Обозначим p_m вероятность того, что сумма $\xi + \eta$ будет m-значным натуральным числом в десятичной записи. Найти вероятности p_{n-k+1}, $k = 0, 1, \ldots, n$, и $q_k = \lim\limits_{n\to\infty} p_{n-k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

1.17. По схеме случайного выбора с возвращением из множества целых чисел $\{0, 1, 2, \ldots, 10^n - 1\}$ выбираются числа ξ и η. Обозначим p_m вероятность того, что произведение $\xi\eta$ будет m-значным натуральным числом в десятичной записи. Найти $q_k = \lim\limits_{n\to\infty} p_{2n-k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

1.18*. Из множества $\{1, \ldots, N\}$ по схеме случайного равновероятного выбора с возвращением выбираются элементы $X_1', \ldots, X_k'$, а по схеме равновероятного выбора без возвращения — элементы $X_1'', \ldots, X_k''$. Показать, что для любой совокупности $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots, A_M\}$, состоящей из попарно различных k-элементных подмножеств $A_i = \{a_{i,1}, \ldots, a_{i,k}\} \subset \{1, \ldots, N\}$,

$$0 \leqslant \mathsf{P}\{[X_1'', \ldots, X_k''] \in \mathscr{A}\} - \mathsf{P}\{[X_1', \ldots, X_k'] \in \mathscr{A}\} \leqslant \frac{1}{N} C_k^2.$$

1.19*. По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$, $N \geqslant 4$, выбираются числа X и Y. Что больше:

$$P_2 = \mathsf{P}\{X^2 - Y^2 \text{ делится на } 2\}$$

или

$$P_3 = \mathsf{P}\{X^2 - Y^2 \text{ делится на } 3\}?$$

1.20. По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$, $N \geqslant 6$, выбираются числа X и Y. Показать, что

$$\mathsf{P}\{X^4 - Y^4 \equiv 0 \pmod 2\} < \mathsf{P}\{X^4 - Y^4 \equiv 0 \pmod 3\} < \\ < \mathsf{P}\{X^4 - Y^4 \equiv 0 \pmod 5\}.$$

1.21. По схеме случайного выбора с возвращением из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ выбираются числа X и Y. Используя *малую* теорему Ферма (*если p — простое число и целое число a не делится на p, то* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$), найти вероятность $Q_N(p)$ того, что число $X^{p-1} - Y^{p-1}$ делится на простое число p. Найти $\lim\limits_{N\to\infty} Q_N(p) = Q(p)$, $\lim\limits_{p,N\to\infty} Q_N(p) = Q$.

1.22*. По схеме случайного выбора с возвращением из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ выбираются числа X и Y. Показать, что при $N \geqslant 4$

$$\mathsf{P}\{X^3 + Y^3 \equiv 0 \pmod 3\} < \mathsf{P}\{X^3 + Y^3 \equiv 0 \pmod 7\}.$$

1.23°. Из совокупности всех подмножеств множества $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ по схеме выбора с возвращением выбираются множества A_1, A_2. Найти вероятность того, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

1.24. Из совокупности всех подмножеств множества $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ по схеме выбора с возвращением выбираются подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Найти вероятность того, что множества $A_1, A_2, \ldots, A_r$ попарно не пересекаются.

1.25*. В урне содержится $(2n+1)^2$ карточек, на каждой из которых написана упорядоченная пара целых чисел (x, y) (x и y принимают значения от $-n$ до n, каждая пара чисел написана ровно на одной карточке). Из урны по схеме выбора без возвращения извлекаются три карточки: (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3). Рассмотрим эти пары как координаты случайных точек Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 плоскости в декартовой системе координат. Найти вероятность p_n того, что Ξ_1 симметрична Ξ_2 относительно Ξ_3.

1.26°. Брошено 10 игральных костей. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти вероятности событий:

а) не выпало ни одной «6»;

б) выпало ровно три «6»;

в) выпала хотя бы одна «6»;

г) выпало хотя бы две «6».

1.27. Из множества $\{0, 1, \ldots, N\}$ по схеме равновероятного выбора с возвращением извлекаются числа

$X_1, \ldots, X_m$. Пусть

$$b_{k,N}^{(m)} = \mathsf{P}\{X_1 + \ldots + X_m = k\}, \quad 0 \leqslant k \leqslant mN.$$

а) Доказать, что $b_{k,N}^{(m)} = b_{mN-k,N}^{(m)}$.

б) Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{mN} b_{k,N}^{(m)} z^k = \frac{1}{(N+1)^m}\left(\frac{1-z^{N+1}}{1-z}\right)^m,$$

т. е. что

$$b_{k,N}^{(m)} = \frac{1}{(N+1)^m} \sum_{j=0}^{[k/(N+1)]} (-1)^j C_{k-j(N+1)+m-1}^{m-1} C_m^j,$$

$$k = 0, 1, \ldots, mN.$$

1.28. Найти вероятность того, что в номере случайно выбранного в большом городе автомобиля сумма первых двух цифр равна сумме двух последних.

1.29. Некоторые москвичи считают трамвайный, троллейбусный или автобусный билет «счастливым», если сумма первых трех цифр его шестизначного номера совпадает с суммой последних трех цифр. Найти вероятность получить «счастливый» билет.

1.30°. Из карточек разрезной азбуки составлено слово «СТАТИСТИКА». Затем из этих 10 карточек по схеме случайного выбора без возвращения отобрано 5 карточек. Найти вероятность того, что из отобранных карточек можно составить слово «ТАКСИ».

1.31°. Из 30 чисел (1, 2, ..., 29, 30) случайно отбирается 10 различных чисел. Найти вероятности событий:

A = {все числа нечетные},
B = {ровно 5 чисел делится на 3},
C = {5 чисел четных и 5 нечетных, причем ровно одно число делится на 10}.

1.32°. Из урны, содержащей M_1 шаров с номером 1, M_2 шаров с номером 2, ..., M_N шаров с номером N, случайно без возвращения выбирается n шаров. Найти вероятности событий:

1) появилось m_1 шаров с номером 1, m_2 шаров с номером 2, ..., m_N шаров с номером N;

2) каждый из N номеров появился хотя бы один раз.

1.33°. Из множества чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ по схеме выбора без возвращения выбираются числа ξ_1 и ξ_2. Найти $\mathsf{P}\{\xi_2 > \xi_1\}$. При выборе трех чисел найти вероятность того, что второе число лежит между первым и третьим.

Бух ТИП ... ЛП
БИБЛИОТЕКА
№ 4/5572

1.34°. Из множества чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ по схеме выбора без возвращения отобрано n различных чисел. Расположим их в порядке возрастания: $z_{(1)} < z_{(2)} < \ldots$ $\ldots < z_{(n)}$. Найти вероятность того, что $z_{(m)} \leqslant M < z_{(m+1)}$; вычислить ее предел при N, $M \to \infty$, $M/N \to \alpha \in [0, 1]$.

1.35. Из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ случайно без возвращения выбирается $k+1$ чисел: $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$. Первые k чисел, расположенные в порядке возрастания, обозначим $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(k)}$. Найти

$$\mathsf{P}\{x_{(l)} < x_{k+1} < x_{(l+1)}\}.$$

1.36. Десять рукописей разложены по 30 папкам (на одну рукопись 3 папки). Найти вероятность того, что в случайно выбранных 6 папках не содержится целиком ни одной рукописи.

1.37. За круглый стол рассаживаются в случайном порядке $2n$ гостей. Какова вероятность того, что гостей можно разбить на n непересекающихся пар так, чтобы каждая пара состояла из сидящих рядом мужчины и женщины?

1.38°. Участник лотереи «6 из 49» на первой карточке отметил номера (4, 12, 20, 31, 32, 33), а на второй — (4, 12, 20, 41, 42, 43). Найти вероятность того, что участник получит ровно два минимальных выигрыша, т. е. что каждый из этих наборов имеет ровно 3 общих элемента с набором номеров $(\alpha_1, \ldots, \alpha_6) \subset \{1, 2, \ldots, 49\}$, появившихся при розыгрыше тиража.

1.39. Найти вероятность того, что при случайной расстановке двух ладей на шахматной доске они не будут угрожать друг другу.

1.40*. Найти вероятность P_k того, что при случайной расстановке k $(2 \leqslant k \leqslant 8)$ ладей на шахматной доске никакие две ладьи не будут угрожать друг другу. При каких k эта вероятность меньше 1/2? Меньше 1/100?

1.41. Собираясь в путешествие на воздушном шаре, Пончик положил в каждый из 20 карманов своего костюма по прянику. Через каждые 10 минут полета у Пончика возникает желание подкрепиться, и он начинает в случайном порядке просматривать свои карманы до тех пор, пока не найдет очередной пряник. Найти вероятность того, что поиск k-го пряника начинается с пустого кармана.

1.42. В условиях задачи **1.41** найти вероятность P_k того, что первые k пряников Пончик найдет с первой попытки. Вычислить эти вероятности при $k=1$, 2, 3, 4, 5, 6.

1.43*. Решить задачу **1.42** в случае, когда число карманов в костюме Пончика равно 10, и в каждый карман Пончик положил по 2 пряника. Найти численные значения вероятностей при $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$.

1.44. По 20 карманам своего костюма Пончик разложил 18 пряников и 2 конфеты (по одному предмету в каждый карман). Для той же схемы, что в задаче **1.41**, найти вероятность того, что первые два раза Пончик будет подкрепляться конфетами.

1.45. Решить задачу **1.44** в случае, когда в костюме Пончика 10 карманов и в один карман Пончик положил 2 конфеты, а в остальные — по 2 пряника.

1.46. В каждой из трех урн лежит по три карточки. На карточках в первой урне написаны числа a_1, a_2, a_3, во второй урне — числа b_1, b_2, b_3, в третьей — числа c_1, c_2, c_3. Из каждой урны наудачу вынимается по карточке. Пусть α, β, γ — числа на карточках, вынутых из первой, второй, третьей урн соответственно. Найти $\mathsf{P}\{\alpha<\beta\}$, $\mathsf{P}\{\beta<\gamma\}$ и $\mathsf{P}\{\gamma<\alpha\}$ в случаях, когда:

а) $(a_1, a_2, a_3)=(b_1, b_2, b_3)=(c_1, c_2, c_3)=(1, 2, 3)$,

б) $(a_1, a_2, a_3)=(1, 2, 3)$, $(b_1, b_2, b_3)=(2, 3, 4)$, $(c_1, c_2, c_3)=(3, 4, 5)$,

в) $(a_1, a_2, a_3)=(1, 5, 9)$, $(b_1, b_2, b_3)=(2, 6, 7)$, $(c_1, c_2, c_3)=(3, 4, 8)$.

1.47*. В условиях задачи **1.46** найти такой способ расстановки чисел на карточках, при котором сумма $\mathsf{P}\{\alpha<\beta\}+\mathsf{P}\{\beta<\gamma\}+\mathsf{P}\{\gamma<\alpha\}$ принимает наибольшее возможное значение. Чему оно равно?

1.48. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 — числа, выпавшие при одновременном бросании четырех игральных костей. Найти $\mathsf{P}\{\xi_2>\xi_1\}$, $\mathsf{P}\{\xi_3>\xi_2\}$, $\mathsf{P}\{\xi_4>\xi_3\}$ и $\mathsf{P}\{\xi_1>\xi_4\}$ в двух случаях:

а) на гранях каждой кости написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6;

б) на гранях первой кости написаны числа 6, 7, 8, 9, 23, 24, на гранях второй — числа 10, 11, 12, 13, 14, 15, на гранях третьей — числа 1, 2, 16, 17, 18, 19, на гранях четвертой — числа 3, 4, 5, 20, 21, 22.

1.49. В условиях задачи **1.48** найти такой способ расстановки чисел на гранях, при котором сумма $\mathsf{P}\{\xi_2>\xi_1\}+\mathsf{P}\{\xi_3>\xi_2\}+\mathsf{P}\{\xi_4>\xi_3\}+\mathsf{P}\{\xi_1>\xi_4\}$ принимает наибольшее возможное значение. Чему оно равно?

1.50. ***Равновероятной схемой размещения частиц по ячейкам*** называют схему размещения, в которой номера ячеек, последовательно занимаемых частицами, получают посредством случайного выбора с возвращением.

Обозначим $\mu_r = \mu_r(n, N)$ число ячеек, содержащих ровно по r частиц после размещения n частиц по N ячейкам. Найти вероятности следующих событий:

1) $\mu_0(n, N) > 0$ (при $n = N$);

2) $\mu_0(n, N) = 0$ (при $n = N + 1$);

3) $\mu_0(n, N) = 1$ (при $n = N + 1$);

4) найдется ячейка, содержащая хотя бы две частицы (при любых соотношениях между n и N).

1.51. (см. 1.50). Найти $\mathsf{P}\{\mu_0(n, N) = 0\}$ при произвольных n, N.

1.52. По N различимым ячейкам размещается случайно n неразличимых частиц. (Элементарными событиями являются наборы чисел $(r_1, r_2, \ldots, r_N)$, где r_k — число частиц в k-й ячейке, $k = 1, 2, \ldots, N$.) Найти вероятности событий:

1) $\mu_0(n, N) > 0$; 2) $\mu_0(n, N) = 1$.

1.53. В первом ряду кинотеатра, состоящем из N кресел, сидит n человек. Предполагая, что все возможные размещения этих n человек в первом ряду равновероятны, найти вероятности следующих событий:

а) $A_{n,N} = \{$никакие 2 человека не сидят рядом$\}$;

б) $B_{n,N} = \{$каждый из n человек имеет ровно одного соседа$\}$;

в) $C_{n,N} = \{$из любых двух кресел, расположенных симметрично относительно середины ряда, хотя бы одно свободно$\}$.

1.54. В зале кинотеатра в первых двух рядах, каждый из которых состоит из N кресел, сидит n человек. Найти вероятности следующих событий:

а) в первом ряду никакие 2 человека не сидят рядом;

б) во втором ряду каждый человек имеет ровно одного соседа;

в) в первом ряду из любых двух кресел, расположенных симметрично относительно середины ряда, хотя бы одно свободно.

1.55°. Из всех отображений множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя случайно выбирается отображение. Найти вероятности событий:

а) выбранное отображение каждый из n элементов переводит в 1;

б) элемент i имеет ровно k прообразов;

в) элемент i переводится в j;

г) выбранное отображение элементы $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n)$ переводит в элементы $j_1, j_2, \ldots$ $\ldots, j_k$ соответственно.

В задачах 1.56 — 1.60 рассматриваются взаимно однозначные отображения множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на себя. Такие отображения называют *подстановками степени* n. Множество всех подстановок степени n обозначают S_n. Если элементы $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ различны и подстановка σ из S_n переводит i_1 в i_2, i_2 в i_3, ..., i_{k-1} в i_k и i_k в i_1 $(i_1 \to i_2 \to i_3 \to \ldots \to i_{k-1} \to i_k \to i_1)$, то говорят, что элементы $i_1, i_2, \ldots, i_k$ образуют *цикл длины* k.

1.56°. Из множества S_n случайно выбирается подстановка. Найти вероятности событий:

а) выбрана тождественная подстановка

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ 1 & 2 \ldots n \end{pmatrix};$$

б) выбранная подстановка элементы $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_k)$ переводит в элементы $j_1, j_2, \ldots, j_k$ соответственно;

в) элемент i в выбранной подстановке образует единичный цикл, т. е. $i \to i$;

г) элементы 1, 2, 3 образуют цикл длины 3: $1 \to 2 \to$ $\to 3 \to 1$ или $1 \to 3 \to 2 \to 1$;

д) все элементы образуют один цикл.

1.57. Найти вероятность P_n того, что в случайно выбранной подстановке степени n найдется хотя бы один цикл единичной длины. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

1.58*. Из множества S_n случайно выбирается подстановка σ. Доказать, что если λ_1 — длина цикла подстановки σ, содержащего элемент 1, то

$$\mathsf{P}\{\lambda_1 = k\} = \frac{1}{n} \quad \text{при любом} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

1.59*. Из множества S_n случайно выбирается подстановка. Найти вероятность того, что элементы 1 и 2 лежат в одном цикле.

1.60. Обозначим символом $[1^{\alpha_1}2^{\alpha_2} \ldots n^{\alpha_n}]$ (см. [9]) множество подстановок, у которых α_1 циклов длины 1, ..., α_n циклов длины n. Из множества $[1^{\alpha_1}2^{\alpha_2} \ldots n^{\alpha_n}]$

случайно выбирается одна подстановка. Найти вероятности событий:

а) выбрана заранее указанная подстановка из $[1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots n^{\alpha_n}]$;

б) элемент i образует единичный цикл;

в) выбранная подстановка переводит i в j $(i \neq j)$.

§ 2. Геометрические вероятности

1.61°. Случайная точка A равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$ и делит этот отрезок на две части. Пусть η_1 — длина большей части и η_2 — длина меньшей части. Найти $\mathsf{P}\{\eta_1 \leqslant x\}$, $\mathsf{P}\{\eta_2 \leqslant x\}$ при любом x.

1.62°. Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной 1. Найти вероятности следующих событий:

а) расстояние от точки A до фиксированной стороны квадрата не превосходит x;

б) расстояние от точки A до ближайшей стороны квадрата не превосходит x;

в) расстояние от точки A до центра квадрата не превосходит x;

г) расстояние от точки A до фиксированной вершины квадрата не превосходит x.

1.63°. Случайная точка A имеет равномерное распределение в прямоугольнике со сторонами 1 и 2. Найти вероятности следующих событий:

а) расстояние от A до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит x;

б) расстояние от A до любой стороны прямоугольника не превосходит x;

в) расстояние от A до диагоналей прямоугольника не превосходит x.

1.64°. Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной a. Найти вероятность того, что расстояние от A до ближайшей стороны квадрата меньше, чем расстояние от A до ближайшей диагонали квадрата.

1.65°. Случайная точка X имеет равномерное распределение в квадрате $A = \{(x, y)\colon |x| \leqslant a, |y| \leqslant a\}$. Найти вероятность того, что квадрат с центром X и сторонами длины b, параллельными осям координат, целиком содержится в квадрате A.

1.66. Случайная точка X равномерно распределена в квадрате $A = \{(x, y)\colon |x| + |y| \leqslant a\}$. Найти вероятность того, что квадрат с центром X и сторонами длины b, параллельными осям координат, целиком содержится в квадрате A.

1.67. Случайная точка X равномерно распределена в правильном треугольнике с вершинами $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, a\sqrt{3})$. Найти вероятность того, что квадрат с центром X и сторонами длины b, параллельными осям координат, целиком содержится в этом треугольнике.

1.68. Случайная точка X равномерно распределена в круге $S = \{(x, y): x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$. Найти вероятность того, что параллельный оси абсцисс отрезок длины R с серединой в точке X целиком содержится в круге S.

1.69.* Случайная точка A имеет равномерное распределение в правильном n-угольнике. Найти вероятность P_n того, что A находится ближе к границе многоугольника, чем к его диагоналям. Найти такие числа C и a, что

$$P_n = Cn^a(1 + o(1)), \quad n \to \infty.$$

1.70°. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) равномерно распределена в единичном квадрате $K = \{(u, v): 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1\}$. Обозначим η число действительных корней многочлена

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x) = \frac{1}{3} x^3 - \xi_1^2 x + \xi_2.$$

Найти вероятности

$$\mathsf{P}\{\eta = k\}, \quad k = 1, 3.$$

1.71°. На паркет, составленный из правильных k-угольников со стороной a, случайно бросается монета радиуса r. Найти вероятность того, что упавшая монета не заденет границу ни одного из k-угольников паркета для:

а) $k = 3$;
б) $k = 4$;
в) $k = 6$.

1.72*. Случайно подброшена монета. Будем считать, что толщина монеты равна 0 и что вектор нормали, приложенный к стороне монеты с гербом, при вращении образует конус (рис. 2). Ось конуса образует угол θ $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ с горизонтальной плоскостью, α — угол между образующей конуса и его осью $(0 < \alpha \leqslant \pi/2)$. В момент падения монеты конец вектора нормали равномерно распределен на окружности основания конуса. Найти вероятность $p(\alpha, \theta)$ того, что монета упадет гербом вверх. При каких условиях $p(\alpha, \theta) = 1/2$?

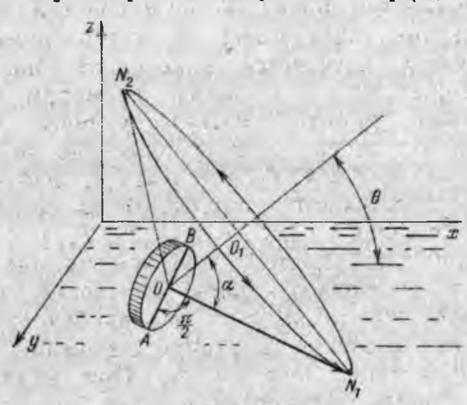

Рис. 2

1.73°. Парадокс Бертрана. В круге радиуса R случайно проводится хорда. Обозначим ξ ее длину. Найти вероятность $Q_x = \mathsf{P}\{\xi > x\}$, если середина хорды равномерно распределена в круге. Вычислить вероятности Q_R и $Q_{R\sqrt{3}}$ того, что длина хорды больше стороны правильного вписанного шестиугольника и треугольника соответственно.

Результат зависит от того, как понимать слово «случайно». См. задачи **1.74** и **1.75**.

1.74°. Решить задачу **1.73**, если направление хорды задано, а ее середина равномерно распределена па диаметре, перпендикулярном ее направлению.

1.75°. Решить задачу **1.73**, если один конец хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности.

1.76. На плоскость, разлинованную параллельными прямыми (расстояние между соседними прямыми равно $2a$), брошена полуокружность радиуса $r < a$; точка (φ, x) (x — расстояние от центра окружности до ближайшей прямой, $0 \leqslant x \leqslant a$; φ — угол между этой прямой и диаметром, соединяющим концы дуги) равномерно распределена в прямоугольнике $[0, a] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Найти вероятность того, что прямая будет иметь k ($k = 0, 1, 2$) пересечений с полуокружностью.

1.77°. В интервале времени $[0, T]$ в случайный момент u появляется сигнал длительности Δ. Приемник включается в случайный момент $v \in [0, T]$ на время t. Предположив, что точка (u, v) равномерно распределена в квадрате $[0, T]\times[0, T]$, найти вероятность обнаружения сигнала.

1.78°. Пассажир может воспользоваться трамваями двух маршрутов, следующих с интервалами T_1, T_2. Момент прихода пассажира определяет на отрезках $[0, T_1]$, $[0, T_2]$ числа u и v, равные временам, оставшимся до прихода трамвая соответствующего маршрута. Предполагая, что точка (u, v) равномерно распределена на $\Omega=\{(u, v)\colon\ 0\leqslant u\leqslant T_1,\ 0\leqslant v\leqslant T_2\}$, найти вероятность того, что пассажир, пришедший на остановку, будет ждать не дольше t $(0<t<\min(T_1, T_2))$.

1.79. Однородный прямой круговой цилиндр случайно бросается на горизонтальную плоскость. Найти вероятность того, что цилиндр упадет на боковую поверхность, если его высота h, а радиус основания r. Вычислить эту вероятность при $h=2r$. При каких h и r вероятности упасть на основание и на боковую поверхность одинаковы?

1.80. Неоднородный прямой круговой цилиндр случайно бросается на горизонтальную плоскость. Радиус основания цилиндра r, центр тяжести расположен на оси симметрии цилиндра на расстоянии a от одного основания и $b>a$ от другого основания цилиндра. Найти вероятность того, что цилиндр упадет: а) на основание, расположенное ближе к центру; б) на основание, более удаленное от центра тяжести; в) на боковую поверхность.

1.81. Однородный прямой круговой конус с высотой h и радиусом основания r случайно бросается на горизонтальную плоскость. а) Найти вероятность того, что он упадет на основание; б) вычислить эту вероятность при $r=h$; в) при каком отношении r/h эта вероятность равна 1/4?

1.82. Однородное тело, ограниченное сферой и плоскостью, проходящей через центр сферы (полушар), случайно бросается на горизонтальную плоскость. Найти вероятность того, что полушар упадет на плоскую часть своей границы.

1.83. Длинный однородный брус прямоугольного поперечного сечения размера $a\times b$, $b>a$, случайно бросается на горизонтальную плоскость так, что его ось параллельна этой плоскости, а угол поворота относительно этой оси равномерно распределен в $[0, 2\pi]$. Найти вероятность того, что он упадет на более широкую грань.

1.84*. На плоскости проведено n окружностей $S_1, \ldots$ $\ldots, S_n$ с общим центром O; радиус окружности S_k равен k $(k=1, 2, \ldots, n)$. Случайная точка A имеет равномерное распределение в круге, ограниченном окружностью S_n; ABC — правильный треугольник, одной из вершин которого является A, а центром — точка O. Найти вероятность P_m того, что граница треугольника ABC пересекает ровно m окружностей, $m = 0, 1, \ldots, n$.

1.85. Найти вероятность P_n того, что случайная точка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, имеющая равномерное распределение в n-мерном кубе $K_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n\colon \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant 1\}$, принадлежит n-мерному шару $S_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n\colon$ $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$, вписанному в K_n. Вычислить P_n для $n = 2, 3, 10, 20$.

Глава 2

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИСПЫТАНИЙ

В построении математической модели последовательности испытаний важную роль играют понятия независимости событий и условной вероятности. *Условная вероятность* $\mathsf{P}(B|A)$ события B при условии, что событие A произошло, определяется формулой

$$\mathsf{P}(B\,|\,A) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(A)}, \quad \mathsf{P}(A) > 0. \tag{2.1}$$

Это равенство может быть записано в виде «теоремы умножения»

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B|A). \tag{2.2}$$

Обобщением (2.2) является формула

$$\mathsf{P}(A_1A_2\ldots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2|A_1)\mathsf{P}(A_3|A_1A_2)\ldots \\ \ldots \mathsf{P}(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}). \tag{2.3}$$

Равенство

$$\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B) \tag{2.4}$$

естественно интерпретировать как *независимость* события B от A. В качестве определения независимости двух событий A и B принимается более симметричное условие

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B), \tag{2.5}$$

эквивалентное (2.4), если $\mathsf{P}(A) > 0$. Из (2.5) следует независимость (см. задачу **2.18**) еще трех пар событий:

A и B, A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *взаимно независимыми* (или *независимыми в совокупности*, или просто *независимыми*), если для всех комбинаций индексов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ $(k = 2, \ldots, n)$ имеем

$$\mathsf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = \mathsf{P}(A_{i_1}) \mathsf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathsf{P}(A_{i_k}). \tag{2.6}$$

Если (2.6) выполняется только при $k = 2$, то события $A_1, \ldots, A_n$ называют *попарно независимыми*; о связи попарной и взаимной независимости см. задачи **2.22** и **2.23**.

Многие важные модели серии опытов со случайными исходами часто описываются либо условными вероятностями, либо предположением о независимости исходов различных опытов и заданием безусловных вероятностей исходов. В таких случаях по формулам (2.3) или (2.6) можно, используя заданные условные вероятности или независимость, вычислить вероятности элементарных событий.

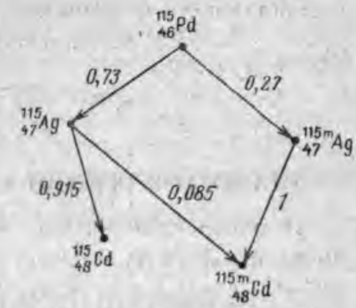

Рис. 3

Пример 2.1. Возможные превращения радиоактивного ядра палладия $^{115}_{46}\mathrm{Pd}$ можно представить в виде графа, приведенного на рис. 3. В обозначениях ядер нижний индекс равен числу протонов в ядре, верхний индекс — сумме числа протонов и числа нейтронов. Буква m в верхнем индексе означает возбужденное состояние ядра. Дугами обозначены возможные превращения ядер; рядом с дугами указаны вероятности соответствующих превращений. Найти вероятность того, что ядро палладия $^{115}_{46}\mathrm{Pd}$ превратится в ядро кадмия $^{115}_{48}\mathrm{Cd}$.

Решение. Обозначим A_1, A_2, A_3 события, состоящие в том, что в превращениях участвовали ядра $^{115}_{46}\mathrm{Pd}$, $^{115}_{47}\mathrm{Ag}$, $^{115}_{48}\mathrm{Cd}$. Тогда условия задачи можно записать в виде $\mathsf{P}(A_1) = 1$, $\mathsf{P}(A_2 | A_1) = 0{,}73$, $\mathsf{P}(A_3 | A_1 A_2) = 0{,}915$. Нужно найти $p = \mathsf{P}(A_1 A_2 A_3)$. По формуле (2.3) находим

$$p = \mathsf{P}(A_1) \mathsf{P}(A_2 | A_1) \mathsf{P}(A_3 | A_1 A_2) = 0{,}73 \cdot 0{,}915 = 0{,}66795. \ \blacktriangle$$

Схема случайного выбора без возвращения (см. гл. 1) естественно определяется в терминах условных вероятностей: если известен результат первых k испытаний, то при $(k+1)$-м испытании с равными вероятностями может появиться любой из оставшихся элементов. Модель случайного выбора, сформулированная в терминах условных вероятностей, совпадает с определением из гл. 1. В терминах независимости и равновероятности результатов отдельных испытаний может быть описана и схема случайного выбора с возвращением, определенная в гл. 1.

Пример 2.2. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, по схеме случайного выбора без возвращения последовательно извлекаются шары. Найти вероятность p_k того, что черный шар впервые появится при k-м испытании ($k = 1, 2, 3, 4$).

Решение. Обозначим C_i событие, состоящее в том, что в i-м испытании появился черный шар. Тогда события

$$B_k = \{\text{впервые черный шар появился при } k\text{-м испытании}\},$$
$$k = 1, 2, 3, 4,$$

можно выразить через C_i и $\overline{C}_i$:

$$B_1 = C_1, \quad B_2 = \overline{C}_1 C_2, \quad B_3 = \overline{C}_1\overline{C}_2 C_3, \quad B_4 = \overline{C}_1\overline{C}_2\overline{C}_3 C_4.$$

По формуле (2.3)

$$\mathsf{P}(B_1) = \mathsf{P}(C_1), \quad \mathsf{P}(B_2) = \mathsf{P}(\overline{C}_1)\mathsf{P}(C_2|\overline{C}_1),$$
$$\mathsf{P}(B_3) = \mathsf{P}(\overline{C}_1)\mathsf{P}(\overline{C}_2|\overline{C}_1)\mathsf{P}(C_3|\overline{C}_1\overline{C}_2),$$
$$\mathsf{P}(B_4) = \mathsf{P}(\overline{C}_1)\mathsf{P}(\overline{C}_2|\overline{C}_1)\mathsf{P}(\overline{C}_3|\overline{C}_1\overline{C}_2)\mathsf{P}(C_4|\overline{C}_1\overline{C}_2\overline{C}_3).$$

По классическому определению вероятности

$$\mathsf{P}(C_1) = \frac{2}{5}, \quad \mathsf{P}(\overline{C}_1) = \frac{3}{5}, \quad \mathsf{P}(\overline{C}_{i+1}|\overline{C}_1\ldots\overline{C}_i) = \frac{3-i}{5-i},$$
$$\mathsf{P}(C_{i+1}|\overline{C}_1\ldots\overline{C}_i) = \frac{2}{5-i}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

В результате получим

$$p_1 = \mathsf{P}(B_1) = \frac{2}{5} = 0{,}4, \quad p_2 = \mathsf{P}(B_2) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = 0{,}3,$$
$$p_3 = \mathsf{P}(B_3) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = 0{,}2,$$
$$p_4 = \mathsf{P}(B_4) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = 0{,}1. \quad \blacktriangle$$

Дадим определение *последовательности испытаний.* Пусть

$$\Omega_n = \{(i_1, i_2, \ldots, i_n)\colon i_k \in \{1, 2, \ldots, N\}, \ k = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{2.7}$$

Элементарное событие $\omega=(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ интерпретируется как цепочка исходов в n последовательных испытаниях, каждое из которых имеет N несовместных исходов: $1, 2, \ldots, N$. Если положить

$$\mathsf{P}(\omega) = p_{i_1} p_{i_2|i_1} \ldots p_{i_n|i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}, \tag{2.8}$$

где $p_{i_s|i_1, \ldots, i_{s-1}} \geqslant 0, \quad \sum\limits_{i_s=1}^{N} p_{i_s|i_1, \ldots, i_{s-1}} = 1 \quad (s=1, \ldots, n;$ $i_k \in \{1, \ldots, N\}, \ 1 \leqslant k \leqslant s)$, то на подмножествах множества Ω_n однозначно определяется вероятность

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathsf{P}(\omega), \qquad A \subseteq \Omega_n.$$

Построенное вероятностное пространство является математической моделью последовательности n испытаний.

Последовательностью *независимых однородных испытаний* является частный случай приведенной общей модели, в которой формулу (2.8) надо заменить формулой

$$\mathsf{P}(\omega) = p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_n} \quad (i_k \in \{1, \ldots, N\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n), \tag{2.9}$$

где $p_1 + p_2 + \ldots + p_N = 1$, $p_l \geqslant 0$, $l = 1, 2, \ldots, N$.

Определение последовательности независимых испытаний можно дать в форме произведения вероятностных пространств. Положим $\Omega_0 = \{1, 2, \ldots, N\}$; тогда Ω_n в (2.7) можно записать в виде

$$\Omega_n = \Omega_0 \times \Omega_0 \times \ldots \times \Omega_0 = \Omega_0^n$$

и для любого $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, где $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega_0$, имеем

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\ldots\mathsf{P}(A_n).$$

Здесь $\mathsf{P}(A_i) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_s}$, если $A_i = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$.

Обозначим $A_{i_l}^{(l)}$ событие, состоящее в том, что в l-м испытании наступил исход i_l. В модели (2.7), (2.8)

$$\mathsf{P}\left\{A_{i_l}^{(l)} \mid A_{i_1}^{(1)} A_{i_2}^{(2)} \ldots A_{i_{l-1}}^{(l-1)}\right\} = p_{i_l|i_1, \ldots, i_{l-1}},$$

а в модели (2.7), (2.9)

$$\mathsf{P}\left\{A_{i_l}^{(l)} \mid A_{i_1}^{(1)} A_{i_2}^{(2)} \ldots A_{i_{l-1}}^{(l-1)}\right\} = p_{i_l}.$$

Обозначим $B_{S_i}^{(i)}$ событие, состоящее в том, что в i-м испытании исход принадлежит множеству $S_i = \{l_{i_1}, \ldots, l_{i_{k(i)}}\}$. Для независимых испытаний события $B_{S_1}^{(1)}$,

$B^{(2)}_{S_2}, \ldots, B^{(n)}_{S_n}$ являются взаимно независимыми при любом выборе $S_1, \ldots, S_n$.

Если в (2.8) положить $p_{i_l|i_1,\ldots,i_{l-1}} = p^{(l)}_{i_l} \geqslant 0$, $p^{(l)}_1 + \ldots$ $\ldots + p^{(l)}_N = 1$, то получится *последовательность независимых* (*неоднородных*) *испытаний*, в которых вероятности исходов зависят от номера испытаний (но не от результатов предыдущих испытаний).

Вероятностную модель, определенную формулами (2.7), (2.9), называют также *полиномиальной схемой.*

Обозначим через $\xi_{n,i}$ число появлений исхода i в n испытаниях полиномиальной схемы. При решении задач полезна формула

$$\mathsf{P}\{\xi_{n,1} = m_1, \xi_{n,2} = m_2, \ldots, \xi_{n,N} = m_N\} = \\ = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_N!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_N^{m_N}, \tag{2.10}$$

где $m_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ целые и $n = m_1 + m_2 + \ldots$ $\ldots + m_N$.

Последовательность исходов полиномиальной схемы с $N = 10$, в каждом испытании которой каждый из исходов 0, 1, 2, …, 9 появляется с вероятностью 1/10, называют *случайными числами.*

Пример 2.3. Найти вероятность того, что среди 10 однозначных случайных чисел ровно 4 четных числа и 2 нечетных числа, кратных 3.

Решение. Однозначное случайное число четно с вероятностью $p_1 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, нечетно и кратно 3 с вероятностью $p_2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Вероятность остальных исходов $p_3 = 1 - p_1 - p_2 = \frac{3}{10}$. Если ξ_1 — число четных чисел среди 10 случайных чисел, ξ_2 — число нечетных чисел, кратных 3, то число остальных чисел $\xi_3 = 10 - \xi_1 - \xi_2$, и по формуле (2.10) с $N = n = 10$ находим

$$\mathsf{P}\{\xi_1 = 4, \xi_2 = 2\} = \mathsf{P}\{\xi_1 = 4, \xi_2 = 2, \xi_3 = 4\} = \\ = \frac{10!}{4!\,2!\,4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right)^4 = 0{,}063787\ldots \quad \blacktriangle$$

Частный случай полиномиальной схемы с $N = 2$ называют *схемой Бернулли.* Ниже два исхода каждого испытания в схеме Бернулли будем обозначать символами 1 и 0 или называть успехом и неудачей, а соответствующие им вероятности — буквами p и $q = 1 - p$. Если μ_n —

число успехов (или число единиц) в n испытаниях Бернулли, то

$$\mathsf{P}\{\mu_n = m\} = P_n(m, p) = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Пример 2.4. Проводится n независимых опытов, состоящих в одновременном подбрасывании k монет. Вычислить вероятности событий:

A = {хотя бы один раз все k монет выпали гербами},
B = {ровно m раз все k монет выпали гербами}.

Решение. Появление k гербов в одном опыте будем называть успехом. Вероятность успеха $p = \frac{1}{2^k}$. Проще вычислить вероятность противоположного события

$\bar{A}$ = {за n испытаний все k монет ни разу одновременно не выпали гербами}.

Положим

$$C_l = \{\text{в } l\text{-м испытании произошел успех}\}.$$

Тогда $\bar{A} = \bar{C}_1\bar{C}_2\ldots\bar{C}_n$, и по формуле (2.6) находим

$$\mathsf{P}(\bar{A}) = \prod_{l=1}^{n} \mathsf{P}(\bar{C}_l) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^n.$$

Для вычисления $\mathsf{P}(\bar{A})$ можно было также воспользоваться формулой (2.11), положив в ней $m = 0$, $p = \frac{1}{2^k}$, $q = 1 - \frac{1}{2^k}$. Таким образом,

$$\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(\bar{A}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^n.$$

Вероятность события B определяем по формуле (2.11):

$$\mathsf{P}(B) = C_n^m \left(\frac{1}{2^k}\right)^m \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-m}. \qquad \blacktriangle$$

Если в формуле (2.11) параметр $p = p_n = \lambda_n/n$, где $\lambda_n \to \lambda$ $(0 < \lambda < \infty)$ при $n \to \infty$, то согласно *теореме Пуассона*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\mu_n = m\} = \lim_{n\to\infty} C_n^m \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-m} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.12}$$

Правая часть формулы (2.12) используется в приложениях как приближенное значение вероятности $\mathsf{P}\{\mu_n = m\}$ при больших значениях n и малых значениях p. Известно (см. [2], с. 124, теорема 9), что при любом множестве $B \subset \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$\left| \mathsf{P}\{\mu_n \in B\} - \sum_{m \in B} \frac{(np)^m}{m!} e^{-np} \right| \leqslant np^2$$

(это можно вывести также из задачи 4.107, см. гл. 4).

Пример 2.5. В партии из $n = 200$ изделий каждое изделие независимо от остальных может быть бракованным с вероятностью $p = 0{,}01$. Оценить вероятность того, что число μ_n бракованных изделий в этой партии равно трем.

Решение. Величина $np^2 = 0{,}02$ мала. В качестве приближенного значения искомой вероятности можно использовать предельное значение в (2.12) (теорему Пуассона) с $\lambda = np = 2$: $\mathsf{P}\{\mu_n = 3\} \approx \frac{2^3}{3!} e^{-2}$. По табл. 3 (с. 308) находим числовое значение: $\mathsf{P}\{\mu_n = 3\} \approx 0{,}18045\ldots$ Точное значение вероятности можно найти по формуле (2.11):

$$\mathsf{P}\{\mu_n = 3\} = C_{200}^3 (0{,}01)^3 (0{,}99)^{197} = 0{,}181355\ldots \qquad \blacktriangle$$

Приведем формулировки двух *теорем Муавра — Лапласа.*

Локальная теорема. *Если* $n \to \infty$, $p = \text{const}$, $0 < p < 1$, $0 < c_1 \leqslant x_{n,m} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leqslant c_2 < \infty$, *то*

$$\mathsf{P}\{\mu_n = m\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{x_{n,m}^2}{2}\right\}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \tag{2.13}$$

равномерно по значениям $x_{n,m} \in [c_1, c_2]$.

Интегральная теорема. *Если* $n \to \infty$, $p = \text{const}$, $0 < p < 1$, *то*

$$\mathsf{P}\left\{x_1 < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < x_2\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-u^2/2}\, du \tag{2.14}$$

равномерно по x_1, x_2 $(-\infty \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \infty)$.

Правые части формул (2.13) и (2.14) дают хорошее приближение, когда n достаточно велико, а p и q не очень близки к нулю. Часто нормальным приближением пользуются при $npq > 20$. Ошибка при использовании нормального приближения может увеличиваться из-за дискретности допредельного распределения (см. задачи 2.61, 2.62). Эта ошибка имеет порядок $O(1/\sqrt{npq})$. Приведенные замечания очень приближенны и носят скорее качественный характер.

Предельное выражение в (2.14) легко можно выразить через значения одной из функций

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du, \quad \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-u^2/2}\,du.$$

Для вычисления предельных выражений в (2.12) и (2.14) можно использовать табл. 3 и 1.

В качестве примера, иллюстрирующего использование интегральной теоремы, рассмотрим пример 2.5 с измененными значениями параметров.

Пример 2.6. В партии из $n = 22\,500$ изделий, каждое изделие независимо от других может быть бракованным с вероятностью $p = 1/5$. Найти вероятность того, что число μ_n бракованных изделий заключено между 4380 и 4560.

Решение. Значение $npq = 3600$ велико, поэтому можно воспользоваться нормальным приближением (2.14). Вычтем $np = 4500$ из трех частей неравенства

$$4380 < \mu_n < 4560$$

и получившееся неравенство поделим почленно на $\sqrt{npq} = 60$:

$$-2 < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < 1.$$

Используя (2.14), получим

$$\mathsf{P}\{4380 < \mu_n < 4560\} = \mathsf{P}\left\{-2 < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < 1\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{2} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \Phi_0(1) + \Phi_0(2),$$

то (см. табл. 1, с. 306—307).

$$\mathsf{P}\{4380 < \mu_n < 4560\} \approx 0{,}3413 + 0{,}4772 = 0{,}8185. \ \blacktriangle$$

Иногда в задачах требуется указать отрезок, в котором с заданной вероятностью лежат значения числа успехов μ_n. В этом случае нужно находить решения уравнений вида $1-\Phi(x)=\alpha$ и строить по ним приближения для искомого отрезка. В табл. 2 приведены величины u_α, определяемые равенством $1-\Phi(u_\alpha)=\alpha$. При наличии микрокалькулятора для вычисления $\Phi(x)$ и u_α можно также пользоваться приближенными формулами *)

$$P_x = 2(1-\Phi(x)) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2/2}\,du =$$

$$= \exp\left\{-\frac{(83x+351)x+562}{703/x+165}\right\}, \quad 0 < x \leqslant 5{,}5;$$

$$x = \sqrt{\frac{((4y+100)y+205)y^2}{((2y+56)y+192)y+131}}, \qquad 2\cdot 10^{-7} \leqslant P_x \leqslant 1,$$

где $y=-\ln P_x$. В указанных интервалах значений x и P_x относительная ошибка первой формулы не превышает 0,042 %, а абсолютная ошибка второй — 0,00013. Для значений x и P_x, лежащих вне указанных интервалов, можно использовать приближенные формулы

$$P_x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{x}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}-\frac{0{,}94}{x^2}\right\}, \quad x \geqslant 5{,}5,$$

$$x = \sqrt{\frac{((2y+280)y+572)y}{(y+144)y+603}}, \quad 10^{-112} < P_x < 2\cdot 10^{-7},$$

где $y=-\ln P_x$.

Во многих задачах приходится рассматривать бесконечные последовательности испытаний. В этом случае полагают

$$\Omega_\infty = \{(i_1, i_2, \ldots): i_k \in \{1, 2, \ldots, N\}\}, \tag{2.15}$$

σ-алгебра событий $\mathscr{A}$ порождается событиями вида

$$A_{j_1\ldots j_n}^{k_1\ldots k_n} = \{(i_1, i_2, \ldots): i_{k_1}=j_1, \ldots, i_{k_n}=j_n\}. \tag{2.16}$$

В случае независимых испытаний

$$\mathsf{P}\left\{A_{j_1\ldots j_n}^{k_1\ldots k_n}\right\} = p_{j_1}\ldots p_{j_n}. \tag{2.17}$$

Равенства (2.17) однозначно определяют вероятность на $\mathscr{A}$ (см. [5]).

---

*) См.: Derenzo S. E. Approximations for hand calculators using small integer coefficients // Math. Comput.— 1977.— V. 31, № 137.— P. 214—225.

Пример 2.7. Найти вероятность того, что в схеме Бернулли первый успех появится в k-м испытании, если вероятность успеха в отдельном испытании равна p.

Решение. Событие $A_k = \{$первый успех появился в k-м испытании$\}$ определяется исходами в k первых испытаниях. Пусть событие

$$C_i = \{\text{в } i\text{-м испытании наступил успех}\}.$$

Тогда

$$A_k = \bar{C}_1\bar{C}_2 \ldots \bar{C}_{k-1}C_k,$$

и по формуле (2.17) находим

$$\mathsf{P}(A_k) = \mathsf{P}(\bar{C}_1)\mathsf{P}(\bar{C}_2)\ldots\mathsf{P}(\bar{C}_{k-1})\mathsf{P}(C_k) = q^{k-1}p. \qquad \blacktriangle$$

Приведем еще две формулы, полезные в тех случаях, когда заданы или могут быть легко вычислены условные вероятности. Если события $B_1, B_2, \ldots, B_n$ попарно несовместны и $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$, то для любого события A имеем

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A \mid B_k) \tag{2.18}$$

(*формула полной вероятности*) и

$$\mathsf{P}(B_m \mid A) = \frac{\mathsf{P}(B_m)\,\mathsf{P}(A \mid B_m)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A \mid B_k)}, \qquad m = 1, \ldots, n, \tag{2.19}$$

(*формула Байеса*).

Пример 2.8. В ящик, содержащий 8 исправных изделий, добавлено 2 изделия, взятых со склада; известно, что доля бракованных изделий на складе равна 5 %. Найти вероятность того, что взятое наудачу из пополненного ящика изделие не будет бракованным.

Решение. Определим события A, B_0, B_1, B_2:

$A = \{$изделие, взятое из пополненного ящика, не бракованное$\}$,

$B_k = \{$из двух изделий, добавленных в ящик, k бракованных$\}$,

$$k = 0,\ 1,\ 2.$$

Очевидно, что $B_0 \cup B_1 \cup B_2 = \Omega$ и $B_kB_l = \varnothing$ $(k \neq l)$. Можно воспользоваться формулой полной вероятности (2.18):

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B_0)\mathsf{P}(A \mid B_0) + \mathsf{P}(B_1)\mathsf{P}(A \mid B_1) + \mathsf{P}(B_2)\mathsf{P}(A \mid B_2).$$

Если произошло событие B_k, то в ящике из 10 изделий k бракованных, следовательно,

$$\mathsf{P}(A \mid B_k) = \frac{10-k}{10}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

При выборе малого числа изделий из большой партии схемы выбора без возвращения и с возвращением имеют близкие вероятности исходов (см. задачу 1.18). Считая поэтому, что каждое из добавленных изделий независимо от другого может быть бракованным с вероятностью 0,05, находим

$$\mathsf{P}(B_0) = 0{,}95^2, \quad \mathsf{P}(B_1) = 2 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05, \quad \mathsf{P}(B_2) = 0{,}05^2.$$

Таким образом,

$$\mathsf{P}(A) = 0{,}95^2 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{9}{10} + 0{,}05^2 \cdot \frac{8}{10} = 0{,}99. \qquad \blacktriangle$$

Пример 2.9. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, по схеме выбора без возвращения отобрали 2 шара. Шар, взятый наудачу из этих двух, оказался белым. Какова вероятность того, что второй шар тоже белый?

Решение. Определим события

$$B_k = \{\text{среди двух отобранных из урны шаров } k \text{ белых}\}, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$A = \{\text{шар, взятый наудачу из двух отобранных, белый}\}.$$

Условную вероятность $\mathsf{P}(B_2 \mid A)$, которую требуется найти, можно вычислить по формуле Байеса (2.19):

$$\mathsf{P}(B_2 \mid A) = \frac{\mathsf{P}(B_2)\mathsf{P}(A \mid B_2)}{\mathsf{P}(B_0)\mathsf{P}(A \mid B_0) + \mathsf{P}(B_1)\mathsf{P}(A \mid B_1) + \mathsf{P}(B_2)\mathsf{P}(A \mid B_2)}.$$

Вероятности, связанные с извлечением двух шаров из урны, найдем с помощью классического определения вероятности:

$$\mathsf{P}(B_0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = 0{,}1, \quad \mathsf{P}(B_1) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = 0{,}6, \quad \mathsf{P}(B_2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = 0{,}3.$$

Так же определяются условные вероятности, связанные с извлечением одного шара из двух отобранных:

$$\mathsf{P}(A \mid B_0) = 0, \quad \mathsf{P}(A \mid B_1) = 0{,}5, \quad \mathsf{P}(A \mid B_2) = 1.$$

Значит,

$$\mathsf{P}(B_2 \mid A) = \frac{0{,}3}{0{,}1 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 1} = \frac{1}{2}. \qquad \blacktriangle$$

§ 1. Условные вероятности

В задачах 2.1—2.6 вероятностное пространство считается заданным; для вычисления условных вероятностей нужно использовать формулу (2.1).

2.1°. Из множества чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ по схеме случайного выбора без возвращения выбираются три числа. Найти условную вероятность того, что третье число попадает в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.

2.2°. Брошено две игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти условную вероятность того, что выпали две пятерки, если известно, что сумма выпавших очков делится на пять.

2.3°. Из 100 карточек с числами 00, 01, ..., 98, 99 случайно выбирается одна. Пусть η_1 и η_2 — соответственно сумма и произведение цифр на выбранной карточке. Найти $\mathsf{P}\{\eta_1 = i \mid \eta_2 = 0\}$, $i = 0, 1, \ldots, 18$.

2.4. Из урны, содержащей M белых и $N-M$ черных шаров, последовательно без возвращения извлекают n шаров. Пусть $A_0^{(i)}$ ($A_1^{(i)}$) — событие, состоящее в том, что i-й шар был черный (белый). Используя классическое определение случайного выбора (гл. 1), найти

$$\mathsf{P}\left\{A_1^{(s+1)} \mid A_{\varepsilon_1}^{(1)} A_{\varepsilon_2}^{(2)} \ldots A_{\varepsilon_s}^{(s)}\right\}, \quad \varepsilon_i = 0, 1.$$

2.5. Решить задачу 2.4 в случае выбора с возвращением (см. введение к гл. 1, (1.3)).

2.6°. Случайный выбор двух подмножеств A_1 и A_2 из множества $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ производится так же, как и в задаче **1.23**. Найти условную вероятность $\mathsf{P}\{|A_1| = l_1, |A_2| = l_2 \mid A_1 \cap A_2 = \varnothing\}$ того, что множества A_1 и A_2 состоят из l_1 и l_2 элементов соответственно при условии, что A_1 и A_2 не пересекаются.

В задачах **2.7—2.11** предполагаются заданными условные вероятности; при решении используются формулы (2.2), (2.3).

2.7°. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность того, что:

а) первый студент взял «хороший» билет,

б) второй студент взял «хороший» билет,

в) оба студента взяли «хорошие» билеты.

2.8°. Два игрока поочередно извлекают шары (без возвращения) из урны, содержащей M белых и $N-M$

черных шаров. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Используя формулу (2.3), найти вероятность выигрыша первого участника, если: а) $N=4$, $M=1$; б) $N=5$, $M=1$; в) $N=7$, $M=2$.

2.9°. Из урны, содержащей M белых и $N-M$ черных шаров, по одному без возвращения извлекаются все шары. Используя определение случайного выбора в терминах условных вероятностей, найти вероятности событий:

$$A_k = \{k\text{-й шар белый}\},$$
$$B_{k,l} = \{k\text{-й и } l\text{-й шары белые}\},$$
$$C_{k,l} = \{k\text{-й шар черный, а } l\text{-й белый}\}.$$

2.10°. Из урны, содержащей 3 белых шара, 5 черных и 2 красных, два игрока поочередно извлекают по одному шару без возвращения. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Если появляется красный шар, то объявляется ничья. Пусть $A_1=$ {выигрывает игрок, начавший игру}, $A_2=$ {выигрывает второй участник}, $B=$ {игра закончилась вничью}. Найти $\mathsf{P}(A_1)$, $\mathsf{P}(A_2)$, $\mathsf{P}(B)$.

2.11°. Из урны, содержащей N_1 белых шаров, N_2 черных и N_3 красных, последовательно без возвращения извлекают шары до тех пор, пока не появится красный шар. Используя формулу (2.3), найти вероятности следующих событий:

1) вынуто n_1 белых шаров и n_2 черных;
2) не появилось ни одного белого шара;
3) всего вынуто k шаров.

2.12°. Из урны, содержащей a белых и b черных шаров, два игрока извлекают шары по очереди. Выигрывает тот, кому раньше попадается белый шар. Найти вероятность выигрыша первого игрока в случаях, когда шары извлекаются:

а) по схеме равновероятного выбора с возвращением,
б) по схеме равновероятного выбора без возвращения.

2.13°. Из урны, содержащей a белых и b черных шаров, три игрока извлекают шары по очереди. Выигрывает тот, кому раньше попадается белый шар. Найти вероятности P_1, P_2, P_3 выигрыша 1-го, 2-го, 3-го игроков в случаях, когда шары извлекаются:

а) по схеме равновероятного выбора с возвращением,
б) по схеме равновероятного выбора без возвращения.

2.14. На остановку прибывают автобусы маршрутов 1, 2, ..., k. Номера последовательно прибывающих автобусов получаются по схеме равновероятного выбора с возвращением из урны, содержащей шары с номерами

1, 2, ..., k. Найти вероятность P_k того, что до появления автобуса маршрута 1 ни на одном из остальных маршрутов не придет более одного автобуса. При каком минимальном $k \geqslant 2$ эта вероятность меньше 1/2?

§ 2. Независимость событий

В задачах **2.15—2.19** предполагается, что задано вероятностное пространство; требуется выяснить, зависимы или независимы некоторые события.

2.15. Брошены две игральные кости. Положим

$A_l = \{$число очков, выпавшее на первой кости, делится на $l\}$,
$B_l = \{$число очков, выпавшее на второй кости, делится на $l\}$,
$C_l = \{$сумма очков, выпавших на первой и второй костях, делится на $l\}$.

Отправляясь от классического определения вероятности, установить, являются ли независимыми следующие пары событий: а) A_l, B_k — при любых l, k; б) A_2, C_2; в) A_4, C_4?

2.16. Игральная кость брошена 2 раза, X_1 и X_2 — числа очков, выпавшие при этих испытаниях. Рассмотрим события

$A_1 = \{X_1$ делится на 2, X_2 делится на $3\}$,
$A_2 = \{X_1$ делится на 3, X_2 делится на $2\}$,
$A_3 = \{X_1$ делится на $X_2\}$,
$A_4 = \{X_2$ делится на $X_1\}$,
$A_5 = \{X_1 + X_2$ делится на $2\}$,
$A_6 = \{X_1 + X_2$ делится на $3\}$.

Найти все пары $\{A_i, A_j\}$, тройки $\{A_i, A_j, A_k\}$ и т. д. взаимно независимых событий.

2.17. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x_1, x_2)\colon 0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1\}$. При каких значениях r независимы события $A_r = \{|\xi_1 - \xi_2| \geqslant r\}$ и $B_r = \{\xi_1 + \xi_2 \leqslant 3r\}$?

2.18. События A и B независимы. Являются ли независимыми события: а) A и $\overline{B}$, б) $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

2.19. Случайная точка $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Пусть

$$A_1 = \left\{\xi_1 \leqslant \frac{1}{2}\right\}, \quad A_2 = \left\{\xi_2 \leqslant \frac{1}{2}\right\},$$
$$A_3 = \left\{\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\right)\left(\xi_2 - \frac{1}{2}\right) < 0\right\}.$$

Показать, что любые два события из A_1, A_2, A_3 независимы, но все три события A_1, A_2, A_3 зависимы. Являются ли зависимыми события A_1A_2 и A_3?

2.20 (см. 2.19). Обобщая пример, приведенный в предыдущей задаче, показать, что для любого целого $n \geqslant 4$ существует совокупность $\{A_1, \ldots, A_n\}$ событий, обладающая следующими свойствами:

а) события $A_1, \ldots, A_n$ не являются независимыми,

б) при удалении из $A_1, \ldots, A_n$ любого события остающаяся совокупность состоит из независимых событий.

2.21*. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ удовлетворяют условиям

$$\mathsf{P}\{A_i\} = p_i, \ \mathsf{P}\left\{\bigcap_{j=1}^{i} A_j\right\} = p_1 \ldots p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Является ли $\{A_1, \ldots, A_n\}$ совокупностью независимых событий?

2.22*. Пространство элементарных событий Ω состоит из n элементов. При каких k на подмножествах Ω можно определить вероятность P и события $A_1, \ldots, A_k$ так, чтобы события $A_1, \ldots, A_k$ были независимыми в совокупности и $0 < \mathsf{P}(A_i) < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$?

2.23*. Пространство элементарных событий Ω состоит из $n \geqslant 4$ элементов. При каких k можно так определить на подмножествах Ω вероятность P и события $A_1, \ldots, A_k$, что $0 < \mathsf{P}(A_i) < 1$ $(i = 1, \ldots, k)$ и события $A_1, \ldots, A_k$ попарно независимы?

В задачах с 2.24 по 2.28 предполагается независимость некоторых событий; требуется вычислить вероятности других событий.

2.24°. Упрощенная система контроля изделий состоит из двух независимых проверок. В результате k-й проверки $(k = 1, 2)$ изделие, удовлетворяющее стандарту, отбраковывается с вероятностью β_k, а бракованное изделие принимается с вероятностью α_k. Изделие принимается, если оно прошло обе проверки. Найти вероятности событий:

а) бракованное изделие будет принято;

б) изделие, удовлетворяющее стандарту, будет отбраковано.

2.25°. Измерительное устройство состоит из двух приборов. Вероятность безотказной работы k-го прибора за рассматриваемый период времени равна $1 - \alpha_k$ $(k = 1, 2)$. Оценить вероятность p того, что оба прибора будут работать:

а) если поломки происходят независимо;

б) если ничего не известно о зависимости между поломками этих приборов.

2.26° (см. задачу **1.38**). Два человека купили по одной карточке лотереи «6 из 49» и независимо друг от друга отметили по 6 номеров. Найти вероятности событий:

а) каждый получит минимальный выигрыш;

б) каждый получит какой-либо выигрыш.

2.27. Электрическая цепь составлена из элементов A_k, $k = 1, 2, \ldots, 5$, по схеме, приведенной на рис. 4. При

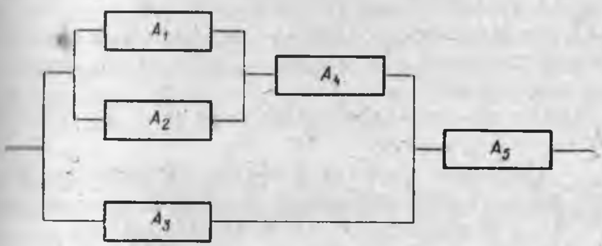

Рис. 4

выходе из строя любого элемента цепь в месте его включения разрывается. Вероятность выхода из строя за данный период элемента A_k равна p_k, $k = 1, \ldots, 5$. Предполагается, что элементы выходят или не выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность события

C = {за рассматриваемый период по цепи может проходить ток}.

2.28°. По цели производится n независимых выстрелов. Вероятность попадания при i-м выстреле равна p_i, $i = 1, \ldots, n$. Найти вероятность того, что при n выстрелах будет не менее двух попаданий.

§ 3. Формула полной вероятности

2.29°. В первой урне находятся 1 белый и 9 черных шаров, а во второй — 1 черный и 5 белых шаров. Из каждой урны по схеме случайного выбора без возвращения удалили по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

2.30°. В первой урне лежит 1 белый шар и 4 красных, а во второй — 1 белый и 7 красных. В первую урну добавляются два шара, случайно выбранных из второй урны.

а) Найти вероятность того, что шар, выбранный из пополненной первой урны, будет белым.

б) Пусть из пополненной первой урны по схеме случайного выбора с возвращением извлекают k шаров. Найти вероятность того, что все они будут белыми.

2.31°. Из урны, содержащей 2 белых и 3 черных шара, наудачу извлекают 2 шара и добавляют в урну один белый шар.

а) Найти вероятность того, что после этого наудачу выбранный из урны шар окажется белым.

б) Пусть из урны по схеме случайного выбора с возвращением извлекают k шаров. Найти вероятность того, что все они белые.

в) Найти ту же вероятность, что в п. б), для схемы выбора без возвращения.

2.32°. В пункте проката имеется 10 телевизоров, для которых вероятность исправной работы в течение месяца равна 0,90, и 5 телевизоров с аналогичной вероятностью, равной 0,95. Найти вероятность того, что два телевизора, взятые наудачу в пункте проката, будут работать исправно в течение месяца.

2.33°. В одной урне содержится 1 белый и 2 черных шара, а в другой урне — 2 белых и 3 черных шара. В третью урну кладут два шара, случайно выбранных из первой урны, и два шара, случайно выбранных из второй.

а) Какова вероятность того, что шар, извлеченный из третьей урны, будет белым?

б) Найти вероятность того, что при выборе с возвращением из третьей урны двух шаров один из них будет белым, а другой — черным.

в) Найти ту же вероятность, что в п. б), для схемы выбора без возвращения.

2.34°. Изделия поступают на проверку, описанную в задаче **2.24**. Предполагая, что каждое изделие удовлетворяет стандарту с вероятностью p, найти следующие вероятности:

а) вероятность того, что поступившее на проверку изделие не будет отбраковано;

б) вероятность того, что неотбракованное изделие удовлетворяет стандарту.

2.35°. Из урны, содержащей M белых и $N-M$ черных шаров, утеряно r шаров. Сравнить вероятности извынимания белого шара: а) до утери; б) после утери при $r=1$; в) после утери при $r>1$.

2.36. Отрезок $[0, a]$ случайной точкой делится на две части, из которых случайно выбирается одна часть. Обозначим η длину выбранной части. Найти $\mathsf{P}\{\eta\leqslant x\}$, $0\leqslant x\leqslant a$, предполагая, что координата ξ случайной точки равномерно распределена на отрезке $[0, a]$ и вероятности выбора любой из полученных частей отрезка одинаковы.

2.37. При переливании крови надо учитывать группы крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любой группы; человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой крови можно перелить только кровь первой группы. Среди населения 33,7 % имеют первую, 37,5 % — вторую, 20,9 % — третью и 7,9 % — четвертую группы крови.

а) Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

б) Найти вероятность того, что переливание можно осуществить, если имеются два донора; три донора.

2.38. Во время испытаний было установлено, что вероятность безотказного срабатывания реле при отсутствии помех равна 0,99, при перегреве — 0,95, при вибрации — 0,9, при вибрации и перегреве — 0,8. Найти вероятность P_1 отказа этого реле при работе в жарких странах (вероятность перегрева равна 0,2, вероятность вибрации 0,1) и вероятность P_2 отказа при работе в передвижной лаборатории (вероятность перегрева 0,1, вероятность вибрации 0,3), предполагая перегрев и вибрацию независимыми событиями.

2.39 (см. 2.38). Найти границы, в которых могут измениться вероятности P_1 и P_2 в предыдущей задаче, если отказаться от предположения о независимости перегрева и вибрации.

2.40°. Имеется пять урн. В 1-й, 2-й и 3-й урнах находится по 2 белых и 3 черных шара; в 4-й и 5-й урнах — по 1 белому и 1 черному шару. Случайно выбирается урна и из нее извлекается шар. Какова условная вероятность того, что выбрана 4-я или 5-я урна, если извлеченный шар оказался белым?

2.41. В стройотряде 70 % первокурсников и 30 % студентов второго курса. Среди первокурсников 10 % девушек, а среди студентов второго курса — 5 % девушек. Все девушки по очереди дежурят на кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит первокурсница.

2.42°. По каналу связи передается одна из последовательностей букв AAAA, BBBB, CCCC с вероятностями p_1, p_2, p_3 $(p_1+p_2+p_3=1)$. Каждая передаваемая буква принимается правильно с вероятностью α и с вероятностями $\frac{1}{2}(1-\alpha)$ и $\frac{1}{2}(1-\alpha)$ принимается за каждую из двух других букв. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что было передано AAAA, если принято ABCA.

2.43°. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна $1-\beta$. Вероятность принять здорового человека за больного равна α. Пусть доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна γ.

а) Найти условную вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным при обследовании.

б) Вычислить найденную в п. а) условную вероятность при следующих числовых значениях *): $1-\beta=0{,}9$, $\alpha=0{,}01$, $\gamma=0{,}001$.

2.44°. Отдел технического контроля (ОТК) проводит сортировку выпускаемых заводом приборов. Каждый прибор независимо от остальных имеет дефекты с вероятностью p. При проверке в ОТК наличие дефектов обнаруживается с вероятностью α; кроме того, с вероятностью β исправный прибор при проверке может вести себя как дефектный. Все приборы, у которых при проверке обнаружены отклонения от стандарта, бракуются. Найти вероятность q_0 того, что незабракованный прибор имеет дефекты, и вероятность q_1 того, что забракованный прибор имеет дефекты. При каких условиях $q_0>q_1$?

2.45°. В урне находится 3 черных и 2 белых шара. Первый игрок по схеме выбора без возвращения извлекает 3 шара. Обратно он возвращает черный шар, если среди вынутых шаров больше было черных; в противном случае возвращается белый шар. Второй игрок после этого извлекает один шар и по его цвету должен угадывать число белых шаров среди трех шаров, вынутых первым игроком. Найти условную вероятность того, что у первого игрока было: а) 0 белых, б) 1 белый, в) 2 белых шара,— если второй игрок вытащил белый шар.

---

*) Эти значения приведены в книге: Закс Л. Статистическое оценивание.— М.: Статистика, 1976.— С. 49.

§ 4. Схема Бернулли

2.46°. Проведено 20 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании трех монет. Найти вероятность того, что хотя бы в одном испытании появятся три «герба».

2.47°. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 1/10. Каковы вероятности того, что сообщение из 10 знаков: а) не будет искажено, б) содержит ровно 3 искажения, в) содержит не более трех искажений?

2.48°. Испытание заключается в бросании трех игральных костей. Найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях ровно два раза выпадет по три единицы.

2.49°. Найти вероятность того, что в $2n$ испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p и неудачи $q=1-p$ появится $m+n$ успехов и все испытания с четными номерами закончатся успехом.

2.50°. Из множества $S=\{1, 2, \ldots, N\}$ случайно и независимо выбираются два подмножества A_1 и A_2 так, что каждый элемент из S независимо от других элементов с вероятностью p включается в подмножество A_i и с вероятностью $q=1-p$ не включается. Найти вероятность того, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

2.51°. По той же схеме выбора подмножеств из $S=\{1, 2, \ldots, N\}$, что в задаче **2.50**, независимо выбираются r подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_r$, $r \geqslant 2$. Найти вероятность того, что выбранные подмножества попарно не пересекаются.

2.52° (см. **2.50**). Из множества $S=\{1, 2, \ldots, N\}$ независимо выбираются r подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Механизм выбора состоит в следующем: любой элемент множества S независимо от других элементов с вероятностью p_i включается в множество A_i и с вероятностью $q_i=1-p_i$ не включается $(i=1, \ldots, r)$. Найти вероятность того, что подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_r$ попарно не пересекаются.

2.53 (см. **2.50**). Из множества $S=\{1, 2, \ldots, N\}$ случайно и независимо выбираются подмножества $A_1, \ldots, A_r$. Механизм выбора такой же, как в задаче **2.50**. Найти: а) $\mathsf{P}\{|A_1 \cap \ldots \cap A_r| = k\}$; б) $\mathsf{P}\{|A_1 \cup \ldots \cup A_r| = k\}$, где $|B|$ обозначает число элементов множества B.

2.54. Каждую секунду с вероятностью p независимо от других моментов времени по дороге проезжает автомашина. Пешеходу для перехода дороги необходимо 3 с. Какова вероятность того, что подошедший к дороге пешеход будет ожидать возможности перехода: а) 3 с; б) 4 с; в) 5 с?

2.55. В одном из матчей на первенство мира по шахматам ничьи не учитывались, и игра шла до тех пор, пока один из участников матча не набирал 6 очков (выигрыш — 1 очко, проигрыш и ничья — 0 очков). Считая участников матча одинаковыми по силе, а результаты отдельных игр независимыми, найти вероятность того, что при таких правилах в момент окончания матча проигравший набирает k очков, $k = 0, 1, \ldots, 5$.

2.56. Обрабатываемые на станке детали сортируются по размерам на две группы. Каждая очередная деталь независимо от предыдущих с равными вероятностями попадает в первую или вторую группу. Пусть в начале смены для каждой группы деталей приготовлено по ящику емкости r. Какова вероятность того, что в момент, когда очередную деталь будет некуда класть, в другом ящике будет m деталей?

2.57°. По каналу связи передаются сообщения из нулей и единиц. Из-за помех вероятность правильной передачи знака равна 0,55. Для повышения вероятности правильной передачи каждый знак сообщения повторяют n раз. Полагают, что последовательности из n принятых знаков в сообщении соответствует знак, составляющий в ней большинство. Найти вероятность правильной передачи одного знака при n-кратном повторении, если $n = 5$.

2.58° (см **2.57**). Подобрать n так, чтобы вероятность правильной передачи знака была не меньше 0,99.

2.59°. По каналу связи передается 1000 знаков. Каждый знак может быть искажен независимо от остальных с вероятностью 0,005. Найти приближенное значение вероятности того, что будет искажено не более трех знаков.

2.60°. В таблице случайных чисел цифры сгруппированы по две. Найти приближенное значение вероятности того, что среди 100 пар пара 09 встретится не менее двух раз.

2.61*. Пусть ξ_n — число успехов в n независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха, равной 1/2.

а) С помощью теоремы Муавра — Лапласа найти приближенные значения

$$\mathsf{P}\left\{\left|\xi_n - \frac{n}{2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}\right\}, \quad \mathsf{P}\left\{\left|\xi_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}\right\}$$

при $n = 100$.

б) Вычислить те же вероятности, что в п. а), с погрешностью 10^{-5}, используя уточненную формулу Стирлинга.

Сравнить результаты пп. а) и б) и истолковать их.

2.62*. Решить предыдущую задачу, полагая $n = 128$.

2.63°. Найти приближенное значение вероятности того, что число «девяток» среди 10 000 случайных чисел заключено между 940 и 1060.

2.64°. Из таблицы случайных чисел отбирают числа, делящиеся на 3, до тех пор, пока не наберется 1025 таких чисел. Найти приближенное значение вероятности того, что потребуется таблица, содержащая не меньше 2500 чисел.

2.65°. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Рассмотреть два случая: а) зрители приходят парами; б) зрители приходят поодиночке. Предположить, что входы зрители выбирают с равными вероятностями.

2.66°. В поселке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от остальных. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки).

2.67°. Пусть η_N — суммарное число появлений «5» и «6» в N бросаниях игральной кости. При $N = 1800$ найти вероятность того, что $\eta_N \geqslant 620$.

2.68°. Две монеты подбрасывают 4800 раз. Найти приближенное значение вероятности того, что событие «герб — герб» появится меньше 1140 раз.

2.69°. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,01. Найти приближенное значение вероятности того, что при 100 выстрелах будет не больше трех попаданий.

2.70°. Из урны, содержащей 1 белый и 4 черных шара, по схеме случайного выбора с возвращением проводят 2500 извлечений шаров. Найти приближенное значение вероятности того, что число появлений белого шара заключено между 480 и 540.

2.71°. На одной странице 2400 знаков. При типографском наборе вероятность искажения одного знака равна

1/800. Найти приближенное значение вероятности того, что на странице не менее двух опечаток.

2.72°. Вероятность успеха в каждом испытании схемы Бернулли равна p. Найти вероятность того, что k-й по порядку успех происходит при l-м испытании.

В задачах с **2.73** по **2.78** рассматриваются бесконечные последовательности испытаний. Воспользоваться частным случаем вероятностного пространства, который определяется формулами (2.15) — (2.17) при $N = 2$.

2.73°. Две игральные кости бросают до выпадения «6» хотя бы на одной из них. Найти вероятность того, что впервые «6» появляется при k-м бросании, $k = 1, 2, 3, \ldots$

2.74°. Двое по очереди бросают монету. Выигрывает тот, кто первым получит «герб». Найти вероятности событий:

а) игра закончится до 4-го бросания;

б) выиграет начавший игру (первый игрок);

в) выиграет второй игрок.

2.75. В схеме Бернулли p — вероятность исхода 1 и $q = 1 - p$ — вероятность исхода 0. Найти вероятность того, что цепочка 00, состоящая из двух нулей подряд, появится раньше цепочки 01. В частности, вычислить эту вероятность при $p = 1/2$.

2.76. Пусть выполнены условия задачи **2.75.** Найти вероятность того, что цепочка 00 (два нуля подряд) появится раньше цепочки 10. В частности, вычислить эту вероятность при $p = 1/2$.

2.77. Пусть выполнены условия задачи **2.75.** Найти вероятность $P_{00|111}$ того, что цепочка 00 появится раньше цепочки 111. В частности, вычислить эту вероятность при $p = 1/2$.

2.78. Движением частицы по целым точкам прямой управляет схема Бернулли с вероятностью p исхода 1: если в данном испытании схемы Бернулли появилась 1, то частица из своего положения переходит в правую соседнюю точку, а в противном случае — в левую. Найти вероятность того, что за n шагов частица из точки 0 перейдет в точку m.

§ 5. Полиномиальная схема

2.79°. Отрезок [0, 10] точками 1, 2, 3, 4, 7 разделен на 4 отрезка длины 1 и 2 отрезка длины 3. Пусть $A_1, \ldots, A_8$ — независимые случайные точки, имеющие равномерное распределение на отрезке [0, 10]. Какова вероятность того, что из этих точек в два каких-либо отрезка длиной 1 попадет по 2 точки, а в каждый из оставшихся отрезков — по одной точке?

2.80. При прохождении одного порога байдарка не получает повреждений с вероятностью p_1, полностью ломается с вероятностью p_2, получает серьезное повреждение с вероятностью p_3 $(p_1+p_2+p_3=1)$. Два серьезных повреждения приводят к полной поломке. Найти вероятность того, что при прохождении n порогов байдарка не будет полностью сломана.

2.81. Сообщения, передаваемые по каналу связи, составляются из трех знаков А, В, С. Из-за помех каждый знак принимается правильно с вероятностью 0,6 и принимается ошибочно за любой из двух других знаков с вероятностью 0,2. Для увеличения вероятности правильного приема каждый знак передается 5 раз. За переданный знак принимается знак, который чаще всего встречается в принятой пятерке знаков. Если наиболее частых знака два, то из них выбирается равновероятно один. Найти вероятность правильного приема знака при указанном способе передачи.

2.82. Пусть $\xi_{n,i}$ — число появлений исхода i в n первых испытаниях полиномиальной схемы (см. введение к гл. 2). Найти $\mathsf{P}\{\xi_{n,1}=m_1\}$.

2.83. В схеме, описанной в задаче 2.82, найти условную вероятность

$$\mathsf{P}\{\xi_{n,2}=m_2, \ldots, \xi_{n,N}=m_n \mid \xi_{n,1}=m_1\}.$$

2.84. В N ячейках, разбитых на две группы по N_1 и N_2 ячеек соответственно $(N_1+N_2=N)$, независимо одну от другой размещают n частиц; пусть p_{ij} $(i=1, 2;$ $j=1, 2, \ldots, N_i)$ — вероятность попадания частицы в j-ю ячейку i-й группы, а $\eta_{ij}^{(n)}$ — число частиц, попавших в j-ю ячейку i-й группы после размещения n частиц. Найти:

а) $\mathsf{P}\{\eta_{ij}^{(n)}=k_{ij},\quad i=1,2,\quad j=1,\ldots,N\}$,

б) $\mathsf{P}\left\{\eta_{21}^{(n)}+\ldots+\eta_{2N_2}^{(n)}=n_2\right\}$,

в) $\mathsf{P}\{\eta_{1j}=k_{1j},\quad j=1,\ldots,N_1 \mid \eta_{21}+\ldots+\eta_{2N_2}=n_2\}$.

2.85. В N ячейках независимо размещают n частиц. Вероятность попадания каждой частицы в i-ю ячейку равна $1/N$, $i=1, 2, \ldots, N$. Обозначим $\mu_0(n, N)$ число ячеек, оставшихся пустыми. Найти $\mathsf{P}\{\mu_0(n, N)=k\}$.

2.86. Игральную кость бросают до первого появления на ней меньше пяти очков. Какова вероятность получить при последнем бросании не меньше двух очков?

2.87. Исходы $\theta_1, \theta_2, \ldots$ последовательности испытаний с $N=3$ возможными исходами 1, 2, 3 и вероятностями исходов p_1, p_2, p_3 объединяются в тройки $(\theta_{3k+1}, \theta_{3k+2}, \theta_{3k+3})$. Из первой тройки $(\theta_{3\nu+1}, \theta_{3\nu+2}, \theta_{3\nu+3})$, в которой все исходы различны, выбирается $\theta_{3\nu+1}$. Найти $\mathsf{P}\{\theta_{3\nu+1} = i\}$.

2.88. Испытания в полиномиальной схеме с исходами 1, 2, 3, имеющими вероятности p_1, p_2, p_3 соответственно, заканчиваются, когда впервые не появится исход 3. Найти вероятность того, что испытания закончатся исходом 1.

2.89. Игрок A подбрасывает 3 игральные кости, а игрок B — 2 кости. Эти испытания они проводят вместе и последовательно до первого выпадения «6» хотя бы на одной кости. Найти вероятности событий:

а) $A=$ {впервые «6» появилось у игрока A, а не B};

б) $B=$ {впервые «6» появилось у игрока B, а не A};

в) $C=$ {впервые «6» появилось одновременно у A и B}.

Глава 3

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$. *Случайной величиной* называется действительная функция от элементарного события $\xi=\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, для которой при любом действительном x множество $\{\omega: \xi(\omega) \leqslant x\}$ принадлежит $\mathscr{A}$ (т. е. является событием) и для него определена вероятность $\mathsf{P}\{\omega: \xi(\omega) \leqslant x\}$, записываемая кратко $\mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}$. Эта вероятность, рассматриваемая как функция x, называется *функцией распределения* случайной величины ξ и обозначается обычно либо $F_\xi(x)$, либо $F(x)$ (иногда функцией распределения называют вероятность $\mathsf{P}\{\xi < x\}$).

С помощью функции распределения $F_\xi(x)$ можно однозначно определить вероятности $\mathsf{P}\{\xi \in B\}$ для борелевских множеств B на числовой прямой (определение борелевских множеств см. в [5], с. 32, или в [2], с. 28—29). В частности, борелевскими множествами являются интервалы вида $(x_1, x_2]$, $[x_1, x_2]$, $[x_1, x_2)$, (x_1, x_2), их конечные и счетные суммы. Вероятность $\mathsf{P}\{\xi \in B\}$, рассматриваемая как функция от борелевского множества B, называется *распределением вероятностей* случайной величины ξ и обозначается $\mathsf{P}_\xi(B)$. Иногда $\mathsf{P}_\xi(B)$ называют *законом распределения* случайной величины ξ или просто *распределением* ξ. Таким образом, распределение вероятностей $\mathsf{P}_\xi(B)$ можно задать функцией распределения $F_\xi(x)$.

Важным классом распределений вероятностей являются *абсолютно непрерывные* распределения, задаваемые плотностью вероятности $p_\xi(x)=p(x)$, т. е. такой неотрицательной функцией $p(x)$, что для любого борелевского множества B

$$\mathsf{P}\{\xi\in B\}=\int_B p(x)\,dx;$$

в общем случае рассматривается интеграл Лебега, который совпадает с интегралом Римана (собственным или несобственным), если последний существует. Другой класс составляют *дискретные* распределения, задаваемые конечным или счетным набором вероятностей $\mathsf{P}\{\xi=x_k\}$, для которых

$$\sum_k \mathsf{P}\{\xi=x_k\}=1.$$

Функция распределения $F_\xi(x)$ в этом случае ступенчатая и задается суммой

$$F_\xi(x)=\sum_{k:\ x_k<x} \mathsf{P}\{\xi=x_k\}.$$

Если распределение случайной величины абсолютно непрерывно или дискретно, то говорят также, что сама случайная величина или ее функция распределения соответственно абсолютно непрерывны или дискретны.

Пример 3.1. Пусть точка $A=(u,\ v)$ равномерно распределена в квадрате $\Omega=\{(u,\ v)\colon\ 0\leqslant u\leqslant 1,\ 0\leqslant v\leqslant \leqslant 1\}$ (см. формулу (1.8) из введения к гл. 1). Положим $\xi_1=\xi_1(u,\ v)=u$,

$$\xi_2=\xi_2(u,\ v)=\begin{cases}\ \ 1 & \text{при}\quad u\geqslant v,\\ -1 & \text{при}\quad u<v.\end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины ξ_1; б) функцию распределения и вероятности значений дискретной величины ξ_2.

Решение. Событие $\{\xi_1\leqslant x\}=\{(u,v)\colon\ u\leqslant x,\ (u,v)\in \in\Omega\}$ при $x>1$ совпадает с Ω, а при $x<0$ — с $\varnothing$. При $0<x<1$ множество точек, определяющих событие $\{\xi_1\leqslant x\}$, образует прямоугольник со сторонами 1 и x.

Таким образом,

$$F_{\xi_1}(x) = \mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant x\} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ x & \text{при} \quad 0 < x < 1, \\ 1 & \text{при} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

Производная $F'_{\xi_1}(x)$ в ее точках непрерывности совпадает с плотностью распределения:

$$p_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \notin [0, 1], \\ 1 & \text{при} \quad x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Функция распределения ξ_2 находится аналогично. Если $x \geqslant 1$, то $\{\xi_2 \leqslant x\} = \Omega$; $\{\xi_1 \leqslant x\} = \varnothing$ при $x < -1$, а при $-1 \leqslant x < 1$

$$\{\xi_2 \leqslant x\} = \{(u, v): u < v, \quad (u, v) \in \Omega\}.$$

Значит,

$$F_{\xi_2}(x) = \mathsf{P}(\xi_2 \leqslant x\} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < -1, \\ 1/2 & \text{при} \quad -1 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{при} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

Случайная величина ξ_2 дискретна; ее распределение сосредоточено в двух точках: -1 и 1. Действительно,

$$\mathsf{P}\{\xi_2 = 1\} = \mathsf{P}\{(u, v): u > v, \quad (u, v) \in \Omega\} = 1/2,$$

$$\mathsf{P}\{\xi_2 = -1\} = \mathsf{P}\{(u, v): u < v, \quad (u, v) \in \Omega\} = 1/2. \ \blacktriangle$$

В задачах обычно говорится о случайной величине ξ и о ее распределении $\mathsf{P}_\xi(\cdot)$ без явного указания того вероятностного пространства, на котором она определена. Это означает, что соответствующее утверждение или вычисление справедливо для любого вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$, на котором можно определить случайную величину $\xi = \xi(\omega)$ с заданным распределением $\mathsf{P}_\xi(\cdot)$; в частности, таким вероятностным пространством можно считать $(R, \mathscr{B}, \mathsf{P}_\xi)$, где $R = \{x\}$ — числовая прямая, $\mathscr{B}$ — борелевская σ-алгебра ее подмножеств, P_ξ — распределение вероятностей случайной величины ξ, которая задается функцией $\xi(x) = x$.

Если на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ определены случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$, то иногда говорят, что задан *случайный вектор* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r)$. *Многомерной функцией распределения* (или *совместной функцией распределения*) $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ называется вероятность $\mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_r \leqslant x_r\}$, рассматриваемая как функция от точки $x=(x_1, \ldots, x_r)$ r-мерного евклидова пространства R^r и обозначаемая $F_{\xi_1,\ldots,\xi_r}(x_1, \ldots \ldots, x_r)$ (кратко $F_\xi(x)$) или $F(x_1, \ldots, x_r)$ (кратко $F(x)$). С помощью функции распределения однозначно определяются вероятности $\mathsf{P}\{\xi\in B\}$ для r-мерных борелевских множеств B. Функция множеств $\mathsf{P}_\xi(B)=\mathsf{P}\{\xi\in B\}$ называется *r-мерным распределением* вероятностей ξ. *Абсолютно непрерывное* r-мерное распределение вероятностей задается *r-мерной плотностью* $p_\xi(x)=p_{\xi_1,\ldots,\xi_r}(x_1, \ldots, x_r)$, т. е. такой неотрицательной функцией $p_\xi(x)$, что для любого борелевского множества $B\subset R^r$

$$\mathsf{P}\{\xi\in B\}=\int\limits_B\ldots\int p_\xi(x_1, \ldots, x_r)\,dx_1\ldots dx_r.$$

Дискретное r-мерное распределение задается с помощью конечного или счетного набора вероятностей $\mathsf{P}\{\xi=x(k)\}$, $x(k)\in R^r$, так что для любого борелевского множества B

$$\mathsf{P}\{\xi\in B\}=\sum_{k:\,x(k)\in B}\mathsf{P}\{\xi=x(k)\}.$$

Пример 3.2. Найти распределение величины $\eta=\xi_1^2$, где случайная величина ξ_1 та же, что в примере 3.1.

Решение. Функция распределения η при $0\leqslant x\leqslant 1$ определяется следующей цепочкой равенств:

$$F_\eta(x)=\mathsf{P}\{\eta\leqslant x\}=\mathsf{P}\{\xi_1^2\leqslant x\}=\mathsf{P}\{-\sqrt{x}\leqslant\xi_1\leqslant\sqrt{x}\}=$$
$$=F_{\xi_1}(\sqrt{x})-F_{\xi_1}(-\sqrt{x})=\sqrt{x}.$$

Очевидно, что $F_\eta(x)=0$ при $x\leqslant 0$ и $F_\eta(x)=1$ при $x>1$. При $0<x<1$

$$p_\eta(x)=F'_{\xi_1}(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$p_\eta(x)=0$ при $x<0$ и при $x>1$. Таким образом, величина η абсолютно непрерывна и ее плотность распределения определяется формулой

$$p_\eta(x)=1/(2\sqrt{x}) \quad \text{при} \quad x\in(0, 1),$$
$$p_\eta(x)=0 \quad \text{при} \quad x\notin(0, 1).$$ ▲

Пример 3.3. Случайная величина ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x)=e^{-x}$ $(x>0)$, $p_\xi(x)=0$ $(x\leqslant 0)$. Найти распределение случайной величины $\eta=\eta(\xi)=[\xi]^2$, где $[\xi]$ обозначает целую часть ξ.

Решение. Так как $\{\eta = k^2\} = \{k \leqslant \xi < k+1\}$, то вероятность $\mathsf{P}\{\eta = k^2\}$ определяется равенствами

$$\mathsf{P}\{\eta = k^2\} = \mathsf{P}\{k \leqslant \xi < k+1\} =$$
$$= \int\limits_k^{k+1} p_\xi(x)\,dx = \int\limits_k^{k+1} e^{-x}dx = e^{-k}(1-e^{-1}),\quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad \blacktriangle$$

Пример 3.4. Случайная величина ξ_1 принимает значения 0 и 1, а случайная величина ξ_2 — значения -1, 0 и 1. Вероятности $\mathsf{P}\{\xi_1 = i,\ \xi_2 = j\}$ задаются следующей таблицей:

$i \backslash j$	-1	0	1
0	1/16	1/4	1/16
1	1/16	1/4	5/16

Найти распределение случайной величины $\eta = \xi_1\xi_2$.

Решение. Произведение $\xi_1\xi_2$ равно нулю, если равен нулю хотя бы один из сомножителей:

$$\{\eta = 0\} = \{\xi_1 = 0,\ \xi_2 = -1\} \cup$$
$$\cup \{\xi_1 = \xi_2 = 0\} \cup \{\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1\} \cup \{\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0\}.$$

Отсюда

$$\mathsf{P}\{\eta = 0\} = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$

Оставшиеся два значения $(1, -1)$ и $(1, 1)$ пары величин (ξ_1, ξ_2) приводят к двум значениям η: -1 и 1. Следовательно,

$$\mathsf{P}\{\eta = -1\} = 1/16, \quad \mathsf{P}\{\eta = 1\} = 5/16.$$

Таким образом, величина η дискретна; ее распределение сосредоточено на значениях -1, 0, 1, и вероятности этих значений равны соответственно 1/16, 5/8, 5/16. $\blacktriangle$

Если s-мерный случайный вектор $\eta = g(\xi)$ есть функция от r-мерного случайного вектора ξ, т. е. $\eta_k = g_k(\xi_1, \ldots, \xi_r)$, $k = 1, \ldots, s$, $g(\cdot) = (g_1(\cdot), \ldots, g_s(\cdot))$, то

$$\mathsf{P}\{\eta \in B\} = \mathsf{P}\{\xi = g_{-1}(B)\}, \tag{3.1}$$

где $g_{-1}(B)$ — прообраз борелевского множества B при отображении g. В частности, если $r = s = 1$, а функция

$y=g(x)$ непрерывна и строго возрастает, то $F_\eta(y)=$ $=F_\xi(g_{-1}(y))$. Если, кроме того, $g(x)$ дифференцируема и распределение ξ имеет плотность $p_\xi(x)$, то распределение η имеет плотность

$$p_\eta(y)=p_\xi(g_{-1}(y))\frac{1}{g'(g_{-1}(y))}.$$

Если $r=s$, отображение $y=g(x)$ взаимно однозначно и якобиан $J_g(x)=\dfrac{\partial(g_1,\ldots,g_r)}{\partial(x_1,\ldots,x_r)}$ не обращается в нуль, то плотность $p_\eta(x)$ можно вычислить по плотности $p_\xi(y)$ с помощью равенства

$$p_\eta(y)=p_\xi(g_{-1}(y))\frac{1}{|J_g(g_{-1}(y))|}=p_\xi(g_{-1}(y))\,|J_{g_{-1}}(y)|. \tag{3.2}$$

В общем случае, как правило, удобнее сначала вычислить функцию распределения η по формуле (3.1), а затем найти плотность распределения η дифференцированием.

Случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_r$ называются *независимыми*, если для любых борелевских множеств $B_1,\ldots,B_r$ имеет место равенство

$$\mathsf{P}\{\xi_1\in B_1,\ \ldots,\ \xi_r\in B_r\}=\prod_{k=1}^{r}\mathsf{P}\{\xi_k\in B_k\}. \tag{3.3}$$

Следующие определения независимости равносильны определению (3.2):

в общем случае: для любых $x_1,\ldots,x_r\in R$

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_r}(x_1,\ \ldots,\ x_r)=\prod_{k=1}^{r}F_{\xi_k}(x_k);$$

для абсолютных непрерывных распределений: для любых $x=(x_1,\ldots,x_r)\in R^r$ (кроме, может быть, точек, образующих множество меры нуль)

$$p_{\xi_1,\ldots,\xi_r}(x_1,\ \ldots,\ x_r)=\prod_{k=1}^{r}p_{\xi_k}(x_k);$$

для дискретных распределений: для всех $x=$ $=(x_1,\ldots,x_r)\in R^r$

$$\mathsf{P}\{\xi_1=x_1,\ \ldots,\ \xi_r=x_r\}=\prod_{k=1}^{r}\mathsf{P}\{\xi_k=x_k\}.$$

Если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_r$ независимы, то функции от них $\eta_k = g_k(\xi_k)$, $k = 1, \ldots, r$, также будут независимыми случайными величинами.

Пример 3.5. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы; их плотности распределения определяются формулами

$$p_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in [0, 1], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0, 1], \end{cases} \qquad p_{\xi_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при} \quad x \in [0, 2], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Найти функцию распределения и плотность распределения величины $\eta = \xi_1 \xi_2$.

Решение. Так как величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то двумерная плотность распределения вектора (ξ_1, ξ_2) есть $p_{\xi_1 \xi_2}(u, v) = p_{\xi_1}(u)\, p_{\xi_2}(v)$. Найдем сначала функцию распределения η:

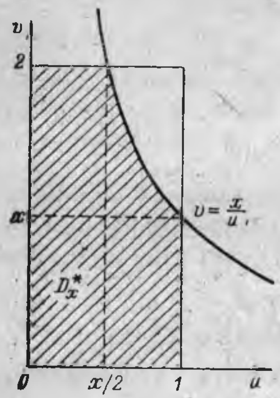

Рис. 5

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}\{\eta \leqslant x\} = \mathsf{P}\{\xi_1 \xi_2 \leqslant x\} = \\ = \iint\limits_{D_x} p_{\xi_1}(u)\, p_{\xi_2}(v)\, du\, dv,$$

где $D_x = \{(u, v) \colon uv \leqslant x\}$. Отсюда

$$F_\eta(x) = \frac{1}{2} \iint\limits_{D_x^*} du\, dv,$$

где $D_x^* = D_x \cap \{(u, v) \colon \ 0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\}$. Очевидно, что $D_x^* = \varnothing$ при $x < 0$ и $D_x^* = \{(u, v) \colon 0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\}$ при $x \geqslant 2$; следовательно,

$$\mathsf{P}\{\eta \leqslant x\} = 0 \quad (x \leqslant 0), \qquad \mathsf{P}\{\eta \leqslant x\} = 1 \quad (x \geqslant 2).$$

При $0 < x < 2$ (рис. 5)

$$\iint\limits_{D_x^*} du\, dv = 2 \cdot \frac{x}{2} + \int\limits_{x/2}^{1} \frac{x}{u}\, du = x - x \ln \frac{x}{2}.$$

Таким образом,

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ \frac{x}{2}\left(1 - \ln \frac{x}{2}\right) & \text{при} \quad 0 < x < 2, \\ 1 & \text{при} \quad x \geqslant 2. \end{cases}$$

Отсюда находим плотность распределения

$$p_\eta(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\notin(0,2],\\ -\frac{1}{2}\ln\frac{x}{2} & \text{при} \quad x\in(0,2]. \end{cases} \qquad \blacktriangle$$

Если ξ и η — независимые случайные величины, то по плотностям $p_\xi(x)$, $p_\eta(x)$ можно вычислить плотность $p_{\xi+\eta}(x)$ их суммы с помощью *формулы композиции* (или *свертки*):

$$p_{\xi+\eta}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y)\,p_\eta(x-y)\,dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x-y)\,p_\eta(y)\,dy. \tag{3.4}$$

Полезны также формулы композиции для функций распределения

$$\begin{aligned} F_{\xi+\eta}(x)&=\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_\xi(x-y)\,p_\eta(y)\,dy,\\ F_{\xi+\eta}(x)&=\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_\xi(x-y)\,dF_\eta(y) \end{aligned} \tag{3.5}$$

(последний интеграл в общем случае надо понимать как интеграл Лебега — Стилтьеса).

Пример 3.6. Найти плотность распределения величины $\eta=\xi_1+\xi_2$, где ξ_1, ξ_2 независимы и каждая из них равномерно распределена на отрезке [0, 1].

Решение. По формуле (3.4)

$$p_\eta(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(y)\,p_{\xi_2}(x-y)\,dy=\int\limits_0^1 p_{\xi_2}(x-y)\,dy.$$

Подынтегральная функция $p_{\xi_2}(x-y)$ положительна и равна 1, если $0\leqslant x-y\leqslant 1$. Отрезок интегрирования [0, 1] и отрезок $[x-1,\ x]$ значений y, при которых $p_{\xi_2}(x-y)>0$, не пересекаются, если $x<0$ или $x>2$. В этих случаях $p_\eta(x)=0$. Если $0\leqslant x\leqslant 1$, то $[0,\ 1]\cap[x-1,\ x]=[0,\ x]$ и

$$p_\eta(x)=\int\limits_0^x dy=x.$$

Если $1\leqslant x\leqslant 2$, то $[0,\ 1]\cap[x-1,\ x]=[x-1,\ 1]$ и

$$p_\eta(x)=\int\limits_{x-1}^1 dy=2-x.$$

Таким образом,

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad x > 2, \\ x, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & \text{если} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$ ▲

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число

$$\mathsf{M}\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega),$$

если интеграл Лебега, стоящий в правой части этого равенства, существует (см. [5], с. 60, или [2], гл. 4, § 1).

Если ξ имеет плотность, то $\mathsf{M}\xi$ может быть вычислено по формуле

$$\mathsf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\,dx. \tag{3.6}$$

Для случайной величины ξ с дискретным распределением

$$\mathsf{M}\xi = \sum_k x_k \mathsf{P}\{\xi = x_k\}, \tag{3.7}$$

если ряд (3.7) сходится абсолютно. В общем случае

$$\mathsf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_\xi(x), \tag{3.8}$$

где интеграл понимается как интеграл Стилтьеса.

Если $\eta = g(\xi)$, то для вычисления $\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}g(\xi)$ можно применять следующие формулы, аналогичные (3.6) — (3.8) (также с оговоркой об абсолютной сходимости):

$$\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,p_\xi(x)\,dx, \tag{3.9}$$

$$\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}g(\xi) = \sum_k g(x_k)\,\mathsf{P}\{\xi = x_k\}, \tag{3.10}$$

$$\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF_\xi(x) \tag{3.11}$$

(в формуле (3.11) в общем случае интеграл понимается как интеграл Лебега — Стилтьеса). Формулы (3.9) — (3.11) обобщаются на случай, когда $\eta = g(\xi_1, \ldots, \xi_r)$, где g — функция, отображающая R^r в R^1. В частности, формула (3.9) в этом случае превращается в

$$\mathsf{M}g(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \\ = \int \ldots \int g(x_1, \ldots, x_r)\, p_{\xi_1, \ldots, \xi_r}(x_1, \ldots, x_r)\, dx_1 \ldots dx_r. \tag{3.12}$$

Для действительной случайной величины ξ математическое ожидание $\mathsf{M}\xi^k$ называется *k-м моментом* или *моментом k-го порядка*, $\mathsf{M}|\xi|^k$ называется *абсолютным моментом k-го порядка*, $\mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^k$ — *центральным моментом k-го порядка*, $\mathsf{M}|\xi - \mathsf{M}\xi|^k$ — *абсолютным центральным моментом k-го порядка*. *Факториальным моментом k-го порядка* называется $\mathsf{M}\xi^{[k]} = \mathsf{M}\xi(\xi - 1)\ldots(\xi - k + 1)$. Второй центральный момент называется *дисперсией* и обозначается $\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2$. Корень квадратный из дисперсии называется *средним квадратическим отклонением.*

Пример 3.7. Для случайной величины η, определенной в примере 3.2, найти $\mathsf{M}\eta$ и $\mathsf{D}\eta$.

Решение. Если плотность распределения известна, то для вычисления $\mathsf{M}\eta$ удобно воспользоваться формулой (3.6), а для вычисления $\mathsf{D}\eta$ формулой

$$\mathsf{D}\eta = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathsf{M}\eta)^2 p_\eta(x)\, dx,$$

которая является частным случаем (3.9) с $g(x) = (x - \mathsf{M}\eta)^2$. Подставляя в эти формулы плотность распределения $p_\eta(x)$, вычисленную в примере 3.2, получим

$$\mathsf{M}\eta = \int_0^1 x \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{3}, \quad \mathsf{D}\eta = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \frac{4}{45}.$$

Можно было также воспользоваться формулами (3.9) при $g(x) = x^2$, $g(x) = (x - \mathsf{M}\eta)^2$ с заменой $p_\xi(x)$ на плотность $p_{\xi_1}(x)$, определенную в примере 3.1:

$$\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}\xi_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{\xi_1}(x)\, dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$\mathsf{D}\eta = \mathsf{M}\left(\xi_1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 p_{\xi_1}(x)\, dx = \\ = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{4}{45}. \quad \blacktriangle$$

Математическое ожидание $M\xi\eta$ произведения двух случайных величин ξ и η называется *смешанным вторым моментом.* Смешанный центральный второй момент $M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$ называется *ковариацией* случайных величин ξ и η и обозначается $\text{cov}(\xi, \eta)$. *Коэффициентом корреляции* ξ и η называется отношение $\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$; всегда $|\rho(\xi, \eta)| \leqslant 1$. Случайные величины ξ и η *некоррелированы*, если $\rho(\xi, \eta) = 0$. *Ковариационной матрицей* случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется матрица

$$C = C(\xi) = \|\text{cov}(\xi_i, \xi_j)\|_{i,j=1}^{n}.$$

Матрица $C(\xi)$ неотрицательно определена.

Отметим важные свойства математических ожиданий:

1. Свойство *аддитивности*: для любых ξ и η с конечными $M\xi$ и $M\eta$

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta. \tag{3.13}$$

2. Свойство *линейности*: для любого числа c

$$M(c\xi) = cM\xi. \tag{3.14}$$

3. Свойство *мультипликативности*: для любых независимых ξ и η с конечными $M\xi$ и $M\eta$

$$M\xi\eta = M\xi M\eta. \tag{3.15}$$

С помощью этих свойств легко получаются следующие формулы для вычисления дисперсии и ковариации:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = M\xi^{[2]} + M\xi - (M\xi)^2,$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta;$$

для независимых $\xi_1, \ldots, \xi_n$

$$D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k, \quad \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0 \ (i \neq j). \tag{3.16}$$

В общем случае

$$D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k + 2 \sum_{1 < k < l < n} \text{cov}(\xi_k, \xi_l).$$

Если векторы $\xi^{(1)} = (\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_r^{(1)}), \ldots, \xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \ldots$ $\ldots, \xi_r^{(n)})$ независимы и $C(\xi^{(1)}), \ldots, C(\xi^{(n)})$ — соответствующие им матрицы ковариаций, то

$$C(\xi^{(1)} + \ldots + \xi^{(n)}) = C(\xi^{(1)}) + \ldots + C(\xi^{(n)}). \tag{3.17}$$

Если имеются две дискретные случайные величины ξ и η, то *условная вероятность* события $\{\xi = x_i\}$ при условии $\eta = y_j$ определяется равенством

$$\mathsf{P}\{\xi = x_i \mid \eta = y_j\} = \frac{\mathsf{P}\{\xi = x_i,\ \eta = y_j\}}{\mathsf{P}\{\eta = y_j\}}. \tag{3.18}$$

Совокупность условных вероятностей (3.18) при всех i задает *условное распределение* случайной величины ξ при условии $\eta = y_j$. *Условное математическое ожидание ξ при условии* $\eta = y_j$ определяется формулой

$$\mathsf{M}\{\xi \mid \eta = y_j\} = \sum_i x_i \mathsf{P}\{\xi = x_i \mid \eta = y_j\} = \sum_i \frac{x_i \mathsf{P}\{\xi = x_i,\ \eta = y_j\}}{\mathsf{P}\{\eta = y_j\}}. \tag{3.19}$$

Формулы (3.18) и (3.19) определяют условные вероятности и условные математические ожидания *при условии* $\eta = y_j$. Условные вероятности $\mathsf{P}\{\xi = x_i \mid \eta\}$ и условные математические ожидания $\mathsf{M}(\xi \mid \eta)$ *при условии* η определяются как случайные величины, принимающие на каждом множестве $\{\omega\colon \eta(\omega) = y_j\} \subset \Omega$ значения (3.18) и (3.19). Общие определения условных распределений и условных математических ожиданий можно найти в книгах А. А. Боровкова [2], А. Н. Колмогорова [5], Б. А. Севастьянова [10].

Вычисляя математическое ожидание от условного математического ожидания $\mathsf{M}\{\xi \mid \eta\}$, получаем полезную формулу

$$\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}[\mathsf{M}\{\xi \mid \eta\}]. \tag{3.20}$$

В частности,

$$\mathsf{P}\{\xi = x_i\} = \mathsf{M}\mathsf{P}\{\xi = x_i \mid \eta\}. \tag{3.21}$$

Для вычисления $\mathsf{D}\xi$ можно использовать формулу

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}[\mathsf{D}\{\xi \mid \eta\}] + \mathsf{D}[\mathsf{M}\{\xi \mid \eta\}], \tag{3.22}$$

где *условная дисперсия* $\mathsf{D}\{\xi \mid \eta\}$ определяется формулой

$$\mathsf{D}\{\xi \mid \eta\} = \sum_i (x_i - \mathsf{M}\{\xi \mid \eta\})^2 \mathsf{P}\{\xi = x_i \mid \eta\}. \tag{3.23}$$

Аналогичные формулы верны и для абсолютно непрерывных распределений. *Условная плотность* ξ при условии $\eta = y$ определяется формулой

$$p_{\xi \mid \eta = y}(x) = \frac{p_{\xi,\eta}(x, y)}{p_\eta(y)} = \frac{p_{\xi,\eta}(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(u, y)\, du}, \tag{3.24}$$

а условное математическое ожидание — формулой

$$\mathsf{M}\{\xi \mid \eta = y\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi|\eta=y}(x)\,dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi,\eta}(x, y)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x, y)\,dx}.$$

Рассматривая условную плотность $p_{\xi|\eta}(x)$ как случайную величину, которая при $\eta = y$ принимает значение $p_{\xi|\eta=y}(x)$, получаем

$$\mathsf{M}\{\xi \mid \eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi|\eta}(x)\,dx,$$

$$\mathsf{D}(\xi \mid \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathsf{M}\{\xi \mid \eta\})^2 p_{\xi|\eta}(x)\,dx.$$

Формулы (3.20) и (3.22) остаются справедливыми и в этом случае, а (3.21) заменяется формулой

$$p_\xi(x) = \mathsf{M} p_{\xi|\eta}(x).$$

Перечислим основные способы вычисления математического ожидания. При подходящем способе задания закона распределения случайной величины наиболее удобным может оказаться *прямое вычисление* по формулам (3.6), (3.7) или (3.9), (3.11), (3.12).

Иногда легко вычисляются или имеют простой вид условные математические ожидания. Тогда для вычисления безусловных математических ожиданий используется *формула полного математического ожидания* (3.20).

Использование свойств аддитивности и мультипликативности математического ожидания позволяет свести вычисление $\mathsf{M}\xi$ к более простым вычислениям математических ожиданий величин, через которые удается выразить ξ. Наиболее частым среди таких приемов является прием введения *сумм индикаторов*. *Индикатором* события A называется случайная величина $\chi_A = \chi_A(\omega)$, принимающая значение 1, если $\omega \in A$, и значение 0, если $\omega \notin A$. Часто оказывается, что можно указать такие события $A_1, A_2, \ldots, A_N$, что интересующая нас величина представляется в виде

$$\xi = \chi_{A_1} + \chi_{A_2} + \ldots + \chi_{A_N}.$$

Особенно удобно то, что свойство аддитивности верно и для зависимых слагаемых. Таким образом,

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{k=1}^{N} \mathsf{M}\chi_{A_k} = \sum_{k=1}^{N} \mathsf{P}\{A_k\}.$$

П р и м е р 3.8. Пусть η_n — число переходов от успеха к неудаче или обратно в n испытаниях схемы Бернулли, в которой вероятность успеха в отдельном испытании равна p. Найти $\mathsf{M}\eta_n$ и $\mathsf{D}\eta_n$.

Р е ш е н и е. Представим η_n в виде суммы индикаторов

$$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{n-1},$$

где $\xi_i = 1$, если исходами i-го и $(i+1)$-го испытаний были соответственно «успех» и «неудача» или «неудача» и «успех». В противном случае $\xi_i = 0$. Тогда

$$\mathsf{M}\xi_i = \mathsf{P}\{\xi_i = 1\} = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$

и, следовательно,

$$\mathsf{M}\eta_n = \mathsf{M}\xi_1 + \ldots + \mathsf{M}\xi_{n-1} = 2(n-1)p(1-p).$$

Найдем теперь $\mathsf{M}\eta_n^2$. Так как

$$\eta_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n-1} \xi_i\xi_j = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i + 2\sum_{i=1}^{n-2} \xi_i\xi_{i+1} + \sum_{\substack{i,j=1\\ |i-j|\geqslant 2}}^{n-1} \xi_i\xi_j$$

и

$$\mathsf{M}\xi_i\xi_{i+1} = p(1-p)p + (1-p)p(1-p) = p(1-p),$$

$$\mathsf{M}\xi_i\xi_j = \mathsf{M}\xi_i\mathsf{M}\xi_j = 4p^2(1-p)^2 \quad (|i-j| \geqslant 2),$$

то

$$\mathsf{M}\eta_n^2 = 2p(1-p)(n-1) + 2(n-2)p(1-p) + \\ + 4p^2(1-p)^2(n^2 - 5n + 6).$$

Отсюда, используя обозначение $q = 1 - p$, получаем

$$\mathsf{D}\eta_n = \mathsf{M}\eta_n^2 - (\mathsf{M}\eta_n)^2 = 4pq(1-3pq)n - 2pq(3-10pq). \quad \blacktriangle$$

Способы вычисления математических ожиданий с помощью *производящих* и *характеристических* функций рассматриваются в гл. 4.

При вычислении математического ожидания можно пользоваться также *теоремой о монотонной сходимости* (если $\xi_n \leqslant \xi_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$ и $\mathsf{M}\xi_n$, $\mathsf{M}\xi$

конечны, то $\mathsf{M}\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{M}\xi_n$) и *теоремой о мажорируемой сходимости* (если $|\xi_n| \leqslant \eta$, $\mathsf{M}\eta < \infty$, и $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$ с вероятностью 1, то $\mathsf{M}\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{M}\xi_n$). В частности, если $\xi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$, где $\xi_n \geqslant 0$ и $\sum\limits_n \mathsf{M}\xi_n$ сходится, то

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{M}\xi_n.$$

Приведем в заключение часто встречающиеся законы распределения. Сначала перечислим некоторые дискретные распределения.

1. *Вырожденное* распределение:

$$\mathsf{P}\{\xi = a\} = 1, \quad a \text{ — постоянная.}$$

2. *Гипергеометрическое* распределение (параметры: N, M, n — натуральные числа, $M \leqslant N$, $n \leqslant N$):

$$\mathsf{P}\{\xi = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, \ldots, \min(M, n).$$

3. *Биномиальное* распределение (параметры: n — натуральное число, $0 \leqslant p \leqslant 1$):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

4. *Распределение Пуассона* с параметром $\lambda > 0$:

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

5. *Геометрическое* распределение с параметром p $(0 < p \leqslant 1)$:

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Далее перечисляются некоторые абсолютно непрерывные распределения, определяемые плотностью $p(x)$.

1. *Равномерное* распределение на отрезке $[a, b]$, $a < b$: $p(x) = \frac{1}{b-a}$, если $a \leqslant x \leqslant b$, $p(x) = 0$, если $x \notin [a, b]$.

2. *Нормальное* (или *гауссовское*) распределение с параметрами a, σ^2, $-\infty < a < \infty$, $0 < \sigma < \infty$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Нормальное распределение с параметрами (0, 1) называют также *стандартным нормальным* распределением.

3. *Показательное* распределение с параметром $\lambda > 0$:

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geqslant 0), \quad p(x) = 0 \quad (x < 0).$$

4. *Гамма-распределение* с параметрами $\lambda > 0$, $\alpha > 0$:

$$p(x) = \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} \quad (x > 0), \quad p(x) = 0 \quad (x \leqslant 0)$$

$\left(\text{здесь } \Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \text{ — гамма-функция}\right)$.

5. *Распределение Коши* с параметром $b > 0$:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{1 + b^2 x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Введем еще *многомерное нормальное* распределение.

Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ независимы и имеют нормальные распределения с параметрами (a_k, σ_k^2), $k = 1, 2, \ldots, r$, соответственно, то r-мерная плотность нормального распределения имеет вид

$$p_{\xi_1, \ldots, \xi_r}(x_1, \ldots, x_r) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{r/2} \sigma_1 \ldots \sigma_r} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r} \frac{(x_k - a_k)^2}{\sigma_k^2}\right\}. \quad (3.25)$$

Если в (3.25) $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_r = \sigma$, то мы имеем плотность *сферически симметричного нормального распределения*

$$p_{\xi_1, \ldots, \xi_r}(x_1, \ldots, x_r) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2} \sigma^r} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{r} x_k^2\right\}. \quad (3.26)$$

Эта плотность инвариантна относительно ортогональных преобразований пространства R^r, оставляющих на месте начало координат.

В общем случае говорят, что вектор $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_r) \in R^r$ имеет *нормальное распределение с вектором математических ожиданий* $a = (\mathsf{M}\eta_1, \ldots, \mathsf{M}\eta_r)$ *и матрицей ковариаций* $B = \|\operatorname{cov}(\eta_i, \eta_j)\|_{i,j=1}^{r}$ (короче: с параметрами (a, B)), если он распределен так же, как вектор

$$\eta^* = a + \xi A = \left(\mathsf{M}\eta_1 + \sum_{i=1}^{k} \xi_i a_{i1}, \ldots, \mathsf{M}\eta_r + \sum_{i=1}^{k} \xi_i a_{ir}\right), \quad (3.27)$$

где случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ имеет сферически симметричное нормальное распределение с $\sigma_1 = \ldots = \sigma_k = 1$, а прямоугольная матрица

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kr} \end{Vmatrix}$$

такова, что матрица ковариаций вектора η^*, равная $A'A$ (см. задачу 3.274) совпадает с матрицей B. Параметры (a, B) определяют многомерное нормальное распределение однозначно.

Если матрица ковариаций B положительно определена, то ее определитель $\det B$ положителен и существует обратная матрица $B^* = \| b^*_{ij} \| = B^{-1}$, а нормальное распределение с параметрами (a, B) имеет r-мерную плотность

$$p_{\xi_1, \ldots, \xi_r}(x_1, \ldots, x_r) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{r/2}\sqrt{\det B}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} b^*_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j)\right\}.$$

Если же матрица B вырождена ($\det B = 0$), то нормальное распределение с параметрами (a, B) сосредоточено на гиперплоскости, размерность которой равна рангу B (см. задачу 3.159, б), и поэтому такое нормальное распределение r-мерной плотности не имеет.

§ 1. Распределение вероятностей случайных величин

В задачах 3.1—3.15 рассматриваются одномерные распределения; в 3.16—3.38 — законы совместного распределения нескольких случайных величин; в 3.49—3.53 — случайные величины, связанные с последовательностями испытаний.

3.1°. Распределение дискретной случайной величины ξ определяется формулами

$$\mathsf{P}\{\xi = i\} = \frac{1}{5}, \quad i = -2, -1, 0, 2.$$

Найти распределения величин $\eta_1 = -\xi$, $\eta_2 = |\xi|$.

3.2°. Распределение случайной величины ξ определяется формулами $\mathsf{P}\{\xi = k\} = C/k(k+1)$, $k = 1, 2, \ldots$ Найти: а) постоянную C; б) $\mathsf{P}\{\xi \leqslant 3\}$; в) $\mathsf{P}\{n_1 \leqslant \xi \leqslant n_2\}$.

3.3°. Распределение дискретной случайной величины ξ определяется формулами: $\mathsf{P}\{\xi = k\} = C/k(k+1)(k+2)$, $k = 1, 2, \ldots$ Найти: а) постоянную C; б) $\mathsf{P}\{\xi \geqslant 3\}$; в) $\mathsf{P}\{n_1 \leqslant \xi \leqslant n_2\}$.

3.4°. Плотность распределения случайной величины ξ задана формулами:

$$p_\xi(x) = C/x^4 \quad \text{при} \quad x \geqslant 1;$$
$$p_\xi(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < 1.$$

Найти: а) постоянную C; б) плотность распределения $\eta = 1/\xi$; в) $\mathsf{P}\{0{,}1 < \eta < 0{,}3\}$.

3.5°. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром α: $\mathsf{P}\{\xi \leqslant x\} = 1 - e^{-\alpha x}$ $(x \geqslant 0)$. Найти плотности распределения случайных величин: а) $\eta_1 = \sqrt{\xi}$; б) $\eta_2 = \xi^2$; в) $\eta_3 = \dfrac{1}{\alpha} \ln \xi$.

3.6°. Случайная величина ξ распределена так же, как в задаче **3.5.** Найти плотности распределения величин: а) $\eta_1 = \{\xi\}$ ($\{\xi\}$ — дробная доля ξ); б) $\eta_2 = 1 - e^{-\alpha\xi}$.

3.7°. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти плотности распределения величин: а) $\eta_1 = 2\xi + 1$; б) $\eta_2 = -\ln(1 - \xi)$.

3.8°. Случайная точка B имеет равномерное распределение на окружности $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ с центром в точке $A = (0, a)$, а случайная точка $C = (\xi, 0)$ является пересечением оси абсцисс с прямой, проходящей через A и B. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины ξ. (Распределение ξ называется *распределением Коши.*)

3.9°. Случайная величина ξ имеет распределение Коши с плотностью $p_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{1 + x^2}$. Найти плотность распределения величин $\eta = \xi^2/(1 + \xi^2)$, $\zeta = 1/(1 + \xi^2)$.

3.10. Случайная величина ξ имеет такое же распределение, как в задаче **3.9.** Найти плотность распределения случайных величин $\eta = 2\xi/(1 - \xi^2)$, $\zeta = 1/\xi$.

3.11. Пусть $h(x)$ — плотность распределения случайной величины ξ; функция $g(x)$ дифференцируема и на интервале $(0, 1)$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Найти: а) такую функцию $\varphi(x)$, что случайная величина $\eta = \varphi(\xi)$ имеет своей плотностью распределения $f(x) = h(g(x))g'(x)$; б) распределение случайной величины $\zeta = g(\eta)$.

3.12°. Случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения $F(x) = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}$. Показать, что случайная величина $\eta = F(\xi)$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

3.13. Пусть η имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, а

$$F_{-1}(y) = \sup\{x\colon F(x) \leqslant y\}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

— функция, обратная к функции распределения $F(x)$ (не обязательно непрерывной!). Доказать, что случайная величина $\xi = F_{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения $F(x)$.

3.14. Построить пример такого абсолютно непрерывного распределения случайной величины ξ с плотностью $p_\xi(x)$ и такой непрерывной функции $g(x)$, что распределение случайной величины $\eta = g(\xi)$ не вырождено и дискретно.

3.15. Функция распределения $F(x)$ непрерывна в каждой точке. Доказать, что она равномерно непрерывна на всей прямой $-\infty < x < \infty$.

3.16°. Совместное распределение $p_{ij} = \mathsf{P}\{\xi_1 = i,\ \xi_2 = j\}$ случайных величин ξ_1, ξ_2 задано таблицей:

$i \backslash j$	−1	0	1
−1	1/8	1/12	7/24
1	5/24	1/6	1/8

Найти: а) одномерные распределения $p_{i\cdot} = \mathsf{P}\{\xi_1 = i\}$, $p_{\cdot j} = \mathsf{P}\{\xi_2 = j\}$; б) совместное распределение $q_{ij} = \mathsf{P}\{\eta_1 = i,\ \eta_2 = j\}$ случайных величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1\xi_2$; в) одномерные распределения $q_{i\cdot} = \mathsf{P}\{\eta_1 = i\}$, $q_{\cdot j} = \mathsf{P}\{\eta_2 = j\}$.

3.17°. Случайные величины ξ и η независимы. Найти $\mathsf{P}\{\xi = \eta\}$, если: а) ξ и η имеют одно и то же дискретное распределение $\mathsf{P}\{\xi = x_k\} = \mathsf{P}\{\eta = x_k\} = p_k$, $k = 0, 1, \ldots$; б) функция распределения ξ непрерывна.

3.18°. Совместное распределение ξ, η является равномерным в единичном круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Найти $\mathsf{P}\{|\xi| \leqslant 3/4,\ |\eta| \leqslant 3/4\}$.

3.19°. Плотность совместного распределения величин ξ, η определяется равенствами: $p_{\xi,\eta}(u, v) = 1$ при $(u, v) \in G$, $p_{\xi,\eta}(u, v) = 0$ при $(u, v) \notin G$, где $G = \Big\{(u, v)\colon$

$0 \leqslant u \leqslant 2, 0 \leqslant v < 1 - \frac{1}{2}u\}$. Найти плотность распределения $p_\xi(x)$ случайной величины ξ.

3.20°. Плотность совместного распределения $p_{\xi_1,\xi_2}(u, v)$ величин ξ_1, ξ_2 определяется равенствами $p_{\xi_1,\xi_2}(u, v) = C(u+v)$ при $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$ и $p_{\xi_1,\xi_2}(u, v) = 0$, в остальных случаях. Найти: а) постоянную C; б) одномерные плотности распределения ξ_1 и ξ_2; в) плотность распределения $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$.

3.21°. Плотность совместного распределения величин ξ_1, ξ_2 определяется равенствами: $p_{\xi_1,\xi_2}(u, v) = \frac{2}{\pi(u^2+v^2)^3}$ при $u^2 + v^2 \geqslant 1$ и $p_{\xi_1,\xi_2}(u, v) = 0$ в остальных случаях. Найти плотность распределения $\eta = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

3.22. Случайные величины ξ и η имеют плотности распределения $f(x)$ и $g(x)$ и функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Случайный вектор $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ имеет плотность распределения

$$p(x, y) = f(x)g(y)(1 + r(F(x), G(y))),$$

где функция $r(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$\min_{\substack{0<u<1\\0<v<1}} r(u, v) \geqslant -1, \qquad \int_0^1 r(u, v)\,dv = \int_0^1 r(u, v)\,du \equiv 0.$$

Найти плотности p_1 и p_2 распределения компонент ζ_1 и ζ_2 вектора ζ.

3.23. Неотрицательные случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и имеют одну и ту же плотность распределения $p(x)$, $x \geqslant 0$. Найти плотность $q(u, v)$ совместного распределения случайных величин $\eta_1 = \xi_1 - \xi_2$, $\eta_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

3.24. Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и имеют одну и ту же плотность распределения $p(x)$. Найти совместную плотность распределения $q(r, \varphi)$ полярных координат (r, φ) точки (ξ_1, ξ_2).

3.25°. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одно и то же показательное распределение: $\mathsf{P}\{\xi_i \leqslant x\} = 1 - e^{-x}$, $x \geqslant 0$, $i = 1, 2$. Найти $\mathsf{P}\{|\xi_1 - \xi_2| \leqslant 1\}$.

3.26°. Случайные величины ξ и η независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, a]$. Найти плотности распределения случайных величин: а) $\xi + \eta$; б) $\xi - \eta$; в) $\xi\eta$; г) ξ/η.

3.27°. Случайные величины ξ и η независимы и имеют показательное распределение с плотностью e^{-x} $(x \geqslant 0)$ каждая. Найти плотность распределения: а) $\xi + \eta$; б) $\xi - \eta$; в) $|\xi - \eta|$; г) ξ/η.

3.28°. Найти плотность распределения суммы $\xi + \eta$, если ξ и η независимы, ξ имеет равномерное распределение в отрезке $[0, 1]$, а η — равномерное распределение в отрезке $[0, 2]$.

3.29°. Найти плотность распределения суммы независимых случайных величин ξ и η, если ξ равномерно распределена в $[0, 1]$, а η имеет показательное распределение с плотностью e^{-x} $(x \geqslant 0)$.

3.30°. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют равномерное распределение в $[0, 1]$.

Найти плотности распределения сумм: а) $\xi_1 + \xi_2$, б) $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$.

Найти $\mathsf{P}\{0{,}5 \leqslant \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leqslant 2{,}5\}$.

3.31°. Точка (ξ_1, ξ_2) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a\}$. Показать, что распределения случайных величин $|\xi_1 - \xi_2|$ и $\min\{\xi_1, \xi_2\}$ совпадают, т. е. что для любого t

$$\mathsf{P}\{|\xi_1 - \xi_2| \leqslant t\} = \mathsf{P}\{\min\{\xi_1, \xi_2\} \leqslant t\}.$$

3.32°. Найти распределение суммы двух независимых слагаемых ξ_1 и ξ_2, если слагаемые распределены:

а) показательно с одним и тем же параметром α;

б) по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2.

3.33°. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и распределены показательно с одинаковым параметром α. Найти плотность распределения величин:

а) $\eta_1 = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$,

б) $\eta_2 = \min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.

3.34°. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют гамма-распределения: ξ_1 — с параметрами (λ, α), ξ_2 — с параметрами (λ, β). Пользуясь формулой

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

найти плотность распределения случайной величины $\xi_1 + \xi_2$.

3.35°. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы; случайная величина ξ_i имеет гамма-распределение с параметрами (λ, α_i), $i = 1, \ldots, n$. Найти плотность распределения случайной величины $\xi_1 + \ldots + \xi_n$.

3.36°. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют показательное распределение с параметром β. Найти плотность распределения суммы $\xi_1 + \ldots + \xi_n$.

3.37°. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \dfrac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}$, если ξ_1, ξ_2 независимы и равномерно распределены в отрезке $[0, 1]$.

3.38. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $n \geqslant 2$, независимы и имеют показательное распределение с плотностью e^{-x} $(x \geqslant 0)$. Обозначим $\eta = \dfrac{\xi_1}{\xi_1 + \ldots + \xi_n}$. Найти плотность распределения η.

3.39. Величины ξ_1, ξ_2 независимы; $\mathsf{P}\{\xi_1 = 0\} = \mathsf{P}\{\xi_1 = 1\} = 1/2$, ξ_2 равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти закон распределения величины $\xi_1 + \xi_2$.

3.40. Пусть случайные величины ξ и η независимы, ξ имеет функцию распределения $F(x)$, а η равномерно распределена в интервале $[a, b]$. Показать, что $\xi + \eta$ имеет плотность $\dfrac{F(x-a) - F(x-b)}{b-a}$.

3.41°. Сумму двух независимых равномерно распределенных на $\{0, 1, \ldots, 9\}$ случайных однозначных чисел ξ и η можно записать в виде $\xi + \eta = 10\zeta_2 + \zeta_1$ $(0 \leqslant \zeta_i \leqslant 9)$. Найти законы распределения ζ_1 и ζ_2. Зависимы ли ζ_1 и ζ_2?

3.42°. Произведение двух независимых равномерно распределенных на $\{0, 1, \ldots, 9\}$ однозначных чисел ξ и η можно записать в виде $\xi\eta = 10\zeta_2 + \zeta_1$, где ζ_1, ζ_2 — целые числа, принимающие значения от 0 до 9. Зависимы ли ζ_1 и ζ_2?

3.43. Случайная точка $A = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3$ имеет равномерное распределение на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Найти распределение проекции (ξ_1, ξ_2) точки A на плоскость (x, y) и проекции ξ_1 точки A на ось x.

3.44. Ввести на сфере в качестве координат широту и долготу, считая их изменяющимися в отрезках $[-\pi/2, \pi/2]$ и $[-\pi, \pi]$ соответственно. Найти плотность $p_\xi(x)$ распределения широты ξ случайной точки, имеющей равномерное распределение на сфере.

3.45. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на множестве целых чисел от $-n$ до n. Подберем многочлен второй степени $A(x) = \alpha_0 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$, принимающий при

$x = -1,\ 0,\ 1$ значения $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ соответственно. Найти вероятность P_n того, что числа $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ целые.

3.46. К переговорному пункту с двумя кабинами подошли три клиента: 1-й и 2-й клиенты заняли соответственно кабины № 1 и № 2, а 3-й клиент остался ждать. Предполагая, что времена $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$ разговоров клиентов независимы и распределены показательно с параметром λ, найти: а) вероятность того, что 3-й клиент попадет в кабину № 1; б) плотность распределения времени ожидания 3-го клиента; в) вероятность того, что 3-й клиент закончит разговор раньше 1-го или 2-го клиентов.

3.47. В переговорном пункте телефоны-автоматы расположены в трех залах: в i-м зале n_i автоматов ($i = 1,\ 2,\ 3$; $n = n_1 + n_2 + n_3$). После перерыва посетители одновременно заняли все автоматы. Введем события $A_i = \{$посетитель, закончивший разговор первым, находился в i-м зале$\}$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Найти вероятности событий A_i, $i = 1,\ 2,\ 3$, если времена разговора посетителей являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с непрерывной функцией распределения.

3.48. Случайная величина ξ с равномерным распределением на $[0,\ 1]$ записывается в виде бесконечной десятичной дроби: $\xi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n 10^{-n}$, где ξ_n — целые, $0 \leqslant \xi_n \leqslant 9$. Доказать, что случайные величины $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$ независимы.

3.49°. В схеме Бернулли с вероятностью успеха p обозначим через ν_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ номер испытания, при котором происходит k-й успех, и положим $\tau_1 = \nu_1$, $\tau_k = \nu_k - \nu_{k-1}$ $(k = 2,\ 3,\ \ldots)$. Найти совместное распределение величин $\tau_1,\ \tau_k$. Являются ли эти величины независимыми?

3.50°. В полиномиальной схеме с исходами $(1, 2, \ldots, N)$ вероятность i-го исхода в каждом испытании равна p_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$. Положим

$$\varepsilon_{s,i} = \begin{cases} 1, & \text{если в } s\text{-м испытании появился } i\text{-й исход,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Являются ли независимыми случайные величины:

а) $\varepsilon_{s,i},\ \varepsilon_{s,j}$ $(s,\ i,\ j$ — фиксированы);

б) $\varepsilon_{s,i},\ \varepsilon_{t,j}$ $(s \neq t)$;

в) $\varepsilon_{1,i},\ \varepsilon_{2,i},\ \ldots,\ \varepsilon_{n,i}$;

г) $\sum\limits_{k=1}^{N} \varepsilon_{1k} c_k,\ \sum\limits_{k=1}^{N} \varepsilon_{2k} c_k,\ \ldots,\ \sum\limits_{k=1}^{N} \varepsilon_{nk} c_k$, если $c_1,\ c_2,\ \ldots, c_N$ — некоторые постоянные?

3.51°. Игральную кость бросают до того момента, когда впервые выпадает меньше пяти очков. Обозначим через θ число очков, выпавших при последнем бросании игральной кости, и через ν — число бросаний кости. Найти совместное распределение θ и ν. Являются ли случайные величины θ и ν зависимыми?

3.52°. В N ячеек независимо бросают частицы; для каждой частицы вероятность попадания в i-ю ячейку равна $p_i = 1/N$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Обозначим через $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_N$ номера бросаний, при которых частицы попадают в пустые ячейки; положим $\tau_1 = \nu_1 = 1$, $\tau_k = \nu_k - \nu_{k-1}$ $(k \geqslant 2)$ и обозначим через θ_k номер ячейки, в которую попадает частица при ν_k-м бросании. Найти:

а) совместное и одномерные распределения величин τ_2, τ_3;

б) совместное и одномерные распределения величин $\tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_N$ (являются ли эти величины независимыми?);

в) совместное распределение $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$.

3.53°. В схеме размещения частиц, описанной в задаче 3.52 (с $p_i \neq 1/N$), найти совместное распределение $\theta_1, \ldots, \theta_N$.

3.54°. Из урны, содержащей M белых и $N-M$ черных шаров, по схеме случайного выбора без возвращения вынимаются все шары. Пусть ξ_1 — число черных шаров, извлеченных до появления 1-го белого шара, ξ_i — число черных шаров, извлеченных между $(i-1)$-м и i-м $(i = 2, \ldots, M)$ белыми шарами, ξ_{M+1} — число черных шаров, появившихся после последнего белого. Найти:

а) $\mathsf{P}\{\xi_1 = k\}$;

б) $\mathsf{P}\{\xi_1 = k, \xi_2 = l\}$;

в) $\mathsf{P}\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_{M+1} = k_{M+1}\}$.

3.55°. Дана функция распределения $F(x, y)$ пары случайных величин ξ, η. Найти $\mathsf{P}\{x_1 < \xi \leqslant x_2,\ y_1 < \eta \leqslant y_2\}$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$.

3.56. Двумерное распределение случайных величин ξ, η задано функцией распределения

$$\mathsf{P}\{\xi \leqslant x, \eta \leqslant y\} = F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \min(x, y) < 0, \\ \min(x, y), & \text{если} \quad 0 \leqslant \min(x, y) \leqslant 1, \\ 1, & \text{если} \quad \min(x, y) > 1. \end{cases}$$

Найти $\mathsf{P}\{(\xi - 1/2)^2 + (\eta - 1/2)^2 \leqslant 1/4\}$.

3.57. Построить пример непрерывной в точке (x_0, y_0) двумерной функции распределения $F_{\xi,\eta}(x, y)$, для которой одномерные функции распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ разрывны в точках x_0 и y_0 соответственно.

3.58. Построить такой пример непрерывной во всех точках двумерной функции распределения $F_{\xi,\eta}(x, y)$, чтобы функция распределения $F_{\xi_1,\eta_1}(x, y)$, где $\xi_1 = \xi + \eta$, $\eta_1 = \xi - \eta$, имела точки разрыва.

3.59. Доказать, что двумерная функция распределения $F_{\xi,\eta}(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0), если соответствующие одномерные функции распределения $F_\xi(x)$, $F_\eta(y)$ непрерывны в точках x_0 и y_0 соответственно.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. При каждом $\omega \in \Omega$ расположим числа $\xi_k(\omega)$, $k = 1, \ldots, n$, в порядке возрастания и перенумеруем их заново: $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(n)}$. Полученная последовательность случайных величин называется *вариационным рядом*, а сами случайные величины $\xi_{(k)}$ — *членами* вариационного ряда. Таким образом, в частности, $\xi_{(1)} = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \xi_k$, $\xi_{(n)} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \xi_k$. Задачи 3.60—3.66 связаны с вариационным рядом.

3.60. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ $(n \geqslant 2)$ независимы и одинаково распределены с функцией распределения $F(x)$. Найти: а) функцию распределения $\xi_{(1)}$; б) функцию распределения $\xi_{(n)}$; в) двумерную функцию распределения $\xi_{(1)}, \xi_{(n)}$.

3.61. По независимым одинаково распределенным случайным величинам $\xi_1, \ldots, \xi_n$, имеющим функцию распределения $F(x)$ и плотность $p(x)$, построен вариационный ряд $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(n)}$. Найти: а) плотность распределения $\xi_{(m)}$; б) совместную плотность распределения $\xi_{(k)}$ и $\xi_{(m)}$ $(k < m)$.

3.62. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_k, \xi_{k+1}$ независимы и имеют одну и ту же непрерывную функцию распределения. Пусть $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(k)}$ — вариационный ряд величин $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Найти

$$\mathsf{P}\{\xi_{k+1} \in [\xi_{(l)}, \xi_{(l+1)}]\}, \qquad l = 1, \ldots, k-1,$$
$$\mathsf{P}\{\xi_{k+1} < \xi_{(1)}\}, \qquad \mathsf{P}\{\xi_{k+1} > \xi_{(k)}\}.$$

3.63. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одинаковое распределение с плотностью $p(x)$. Найти n-мерную плотность $p_n(x_1, \ldots, x_n)$ распределения членов вариационного ряда $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \ldots, \xi_{(n)}$.

3.64*. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют показательное распределение с параметром α:

$$\mathsf{P}\{\xi_i \leqslant x\} = 1 - e^{-\alpha x}, \qquad x \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

а $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(n)}$ — значения $\xi_1, \ldots, \xi_n$, расположенные в порядке неубывания (вариационный ряд). Показать, что случайные величины

$$\Delta_1 = \xi_{(1)}, \quad \Delta_i = \xi_{(i)} - \xi_{(i-1)}, \quad i = 2, \ldots, n,$$

независимы и что

$$\mathsf{P}\{\Delta_i \leqslant x\} = 1 - e^{-\alpha(n-i+1)x}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

3.65*. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одно и то же показательное распределение с параметром λ. Доказать, что случайные величины

$$\max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \text{ и } \xi_1 + \frac{\xi_2}{2} + \frac{\xi_3}{3} + \ldots + \frac{\xi_n}{n}$$

одинаково распределены.

3.66. Пусть $\xi_n = (\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,k})$, $n = 1, 2, \ldots,$— последовательность независимых векторов, у которых координаты $\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,k}$ — независимые случайные величины, имеющие одну и ту же непрерывную функцию распределения $F(x)$. Положим

$$A_n = \left\{\xi_{n,i} < \min_{1 \leqslant m < n} \xi_{m,i},\ i = 1, \ldots, k\right\}.$$

Доказать, что при $k \geqslant 2$

$$\mathsf{P}\left\{\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n\right\} < \frac{1}{2^{k-3} \cdot 3}.$$

3.67. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют одну и ту же непрерывную функцию распределения. Доказать, что события

$$B_n = \{\xi_n < \min\{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}\}, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

независимы.

3.68. Пусть выполнены условия задачи 3.66. Найти

$$\mathsf{P}\left\{\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n\right\}.$$

3.69. Случайные величины ξ и η независимы. Доказать, что если функция распределения ξ непрерывна, то функция распределения $\xi + \eta$ тоже непрерывна.

3.70*. Случайная величина ξ_1 распределена по закону Пуассона с параметром λ_1:

$$\mathsf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

а случайная величина ξ_2 распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda_2 > \lambda_1$. Доказать, что при любом целом k

$$\mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant k\} > \mathsf{P}\{\xi_2 \leqslant k\}.$$

3.71. Функции распределения $F_1(t)$ и $F_2(t)$ удовлетворяют условию

$$F_1(t) \leqslant F_2(t) \text{ для любого } t.$$

Показать, что можно так задать на одном вероятностном пространстве случайные величины ξ_1 и ξ_2 с функциями распределения $F_1(t)$ и $F_2(t)$ соответственно, что

$$\mathsf{P}\{\xi_1 \geqslant \xi_2\} = 1.$$

3.72. Случайные величины ξ и η независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а случайная величина ζ удовлетворяет условиям

$$\mathsf{P}\{\zeta = \xi\} = \mathsf{P}\{\zeta = \eta\} = 1/2.$$

Найти максимально и минимально возможные значения $\mathsf{P}\left\{\left|\zeta - \frac{1}{2}\right| \leqslant t\right\}$ и указать, при каких совместных распределениях ξ, η и ζ эти значения достигаются.

3.73. Случайные величины ξ и η независимы и имеют одно и то же распределение с непрерывной функцией распределения $F(x)$, а случайная величина ζ удовлетворяет условиям

$$\mathsf{P}\{\zeta = \xi\} = \mathsf{P}\{\zeta = \eta\} = 1/2.$$

Пусть $m_\zeta = \sup\{x\colon \mathsf{P}\{\zeta \leqslant x\} \leqslant 1/2\}$ — медиана распределения ζ. Найти минимальное и максимальное значения m_ζ и указать, при каких совместных распределениях ξ, η и ζ эти значения достигаются.

3.74. Пусть X, Y — независимые целочисленные случайные величины, $Z = X + Y$,

$$a = \min\{n\colon \mathsf{P}\{Z = n\} > 0\},$$
$$b = \max\{n\colon \mathsf{P}\{Z = n\} > 0\}.$$

Доказать, что

$$\min\{\mathsf{P}\{Z = a\}, \ \mathsf{P}\{Z = b\}\} \leqslant 1/4.$$

§ 2. Математические ожидания

В задачах 3.75—3.112 используются прямые способы вычисления математических ожиданий; задачи 3.113—3.131 иллюстрируют возможности метода индикаторов (см. введение к гл. 3). Задачи 3.132—3.138 содержат полезные формулы для математических ожиданий различных функций от случайных величин. Разными методами решаются задачи 3.139—3.188.

3.75°. Распределение дискретной случайной величины ξ определяется формулами $\mathsf{P}\{\xi=i\}=1/5$, $i=-2,-1,0,1,2$. Найти математические ожидания величин $\eta_1=-\xi$, $\eta_2=|\xi|$.

3.76°. Распределение дискретной случайной величины ξ определяется формулами $\mathsf{P}\{\xi=k\}=\frac{4}{k(k+1)(k+2)}$, $k=1,2,\ldots$ Найти математическое ожидание случайной величины ξ.

3.77°. Плотность распределения случайной величины ξ задана формулами $p_\xi(x)=0$ при $x<1$, $p_\xi(x)=3/x^4$ при $x\geqslant 1$. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин ξ и $\eta=1/\xi$.

3.78°. Найти $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{D}\xi$, $\mathsf{M}\xi^{[k]}$ $(k=1,2,\ldots)$, если:

а) $\mathsf{P}\{\xi=m\}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, $m=0,1,2,\ldots$;

б) $\mathsf{P}\{\xi=m\}=C_n^m p^m q^{n-m}$, $q=1-p$, $m=0,1,2,\ldots,n$.

3.79°. Плотность совместного распределения $p_{\xi_1,\xi_2}(u,v)$ величин ξ_1, ξ_2 определяется равенствами $p_{\xi_1,\xi_2}(u,v)=u+v$ при $0\leqslant u\leqslant 1$, $0\leqslant v\leqslant 1$; $p_{\xi_1,\xi_2}(u,v)=0$ в остальных случаях. Найти $\mathsf{M}\xi_1$, $\mathsf{M}\xi_2$, $\mathsf{D}\xi_1$, $\mathsf{D}\xi_2$, $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)$.

3.80°. Совместное распределение ξ_1, ξ_2 определяется условиями $\mathsf{P}\{\xi_1\xi_2=0\}=1$, $\mathsf{P}\{\xi_i=1\}=\mathsf{P}\{\xi_i=-1\}=1/4$, $i=1,2$. Найти $\mathsf{M}\xi_1$, $\mathsf{M}\xi_2$, $\mathsf{D}\xi_1$, $\mathsf{D}\xi_2$, $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)$.

3.81°. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0,2\pi]$; $\eta_1=\cos\xi$, $\eta_2=\sin\xi$. Найти $\mathsf{M}\eta_1$, $\mathsf{M}\eta_2$, $\operatorname{cov}(\eta_1,\eta_2)$. Являются ли η_1 и η_2 независимыми?

3.82°. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-\pi,\pi]$.

а) Найти $\mathsf{M}\sin\xi$, $\mathsf{M}\cos\xi$, $\mathsf{D}\sin\xi$, $\mathsf{D}\cos\xi$.

б) Найти $\mathsf{M}\sin^k\xi$, $\mathsf{M}\cos^k\xi$ при любом целом $k\geqslant 1$ и асимптотику $\mathsf{M}\sin^k\xi$, $\mathsf{M}\cos^k\xi$ при $k\to\infty$.

3.83°. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0,\pi]$.

а) Найти $\mathsf{M}\sin\xi$, $\mathsf{M}\cos\xi$, $\mathsf{D}\sin\xi$, $\mathsf{D}\cos\xi$.

б) Найти $\mathsf{M}\sin^k\xi$, $\mathsf{M}\cos^k\xi$ при любом целом $k \geqslant 1$ и их асимптотики при $k \to \infty$.

3.84°. Плотность совместного распределения случайных величин ξ_1, ξ_2 определяется равенствами $p_{\xi_1,\xi_2}(u, v) = \dfrac{2}{\pi(u^2+v^2)^3}$ при $u^2+v^2 \geqslant 1$ и $p_{\xi_1,\xi_2}(u, v) = 0$ в остальных случаях. Найти $\mathsf{M}\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$.

3.85°. Случайная величина ξ имеет показательное распределение: $\mathsf{P}\{\xi > x\} = e^{-x}$ при $x \geqslant 0$. Найти $\mathsf{M}\xi(1-e^{-\alpha\xi})$.

3.86°. Случайная точка A имеет равномерное распределение в круге радиуса R. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния ξ точки A от центра круга.

3.87°. Случайная величина ζ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найти коэффициент корреляции случайных величин η_1, η_2, если:

а) $\eta_1 = a\zeta$, $\eta_2 = b\zeta$ $(a, b > 0)$,

б) $\eta_1 = a\zeta$, $\eta_2 = b\zeta$ $(a < 0 < b)$,

в) $\eta_1 = \zeta$, $\eta_2 = \zeta^2$,

г) $\eta_1 = \zeta - \dfrac{1}{2}$, $\eta_2 = \left(\zeta - \dfrac{1}{2}\right)^2$,

д) $\eta_1 = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\zeta\right)$, $\eta_2 = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\zeta\right)$.

3.88°. Пусть (ξ, η) — координаты случайной точки, имеющей равномерное распределение в области $D \subset R^2$. Найти коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta)$, если:

а) D — часть единичного круга, лежащая в первом квадранте: $x^2+y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

б) D — треугольник: $x+y \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3.89. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(n)}$ — построенный по $\xi_1, \ldots, \xi_n$ вариационный ряд, т. е. значения $\xi_1, \ldots, \xi_n$, расположенные в порядке неубывания. Найти плотность $p_i(x)$ распределения ξ_i, $\mathsf{M}\xi_{(i)}^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\mathsf{D}\xi_{(i)}$.

3.90. Пусть $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(n)}$ — вариационный ряд, построенный по независимым случайным величинам $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, имеющим равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$ (см. задачу 3.89). Найти ковариацию и коэффициент корреляции $\rho(\xi_{(i)}, \xi_{(j)})$. При каких условиях $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(\xi_{(i)}, \xi_{(j)}) = 0$?

3.91°. Доказать, что если случайные величины ξ и η независимы, $\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}\eta = 0$, $\mathsf{M}|\xi|^3 < \infty$, $\mathsf{M}|\eta|^3 < \infty$, то $\mathsf{M}(\xi+\eta)^3 = \mathsf{M}\xi^3 + \mathsf{M}\eta^3$.

3.92°. Случайные величины ξ и η некоррелированы. Доказать, что $M\xi\eta = M\xi M\eta$.

3.93. Случайные величины ξ, η и ζ попарно некоррелированы. Верно ли равенство $M\xi\eta\zeta = M\xi M\eta M\zeta$?

3.94. Случайные величины ξ, η, ζ имеют нулевые математические ожидания, дисперсии σ^2 и попарно некоррелированы. Чему равны минимальное и максимальное значения $M\xi\eta\zeta$?

3.95°. Найти ковариационную матрицу случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, если:

а) ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют стандартное нормальное распределение;

б) вектор ξ имеет равномерное распределение в кубе $\left\{(x_1, x_2, x_3)\colon \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 3} |x_i| \leqslant \sqrt{3}\right\}$;

в) вектор ξ с верятностью 1/6 принимает каждое из 6 значений $(0, 0, \pm\sqrt{3})$, $(0, \pm\sqrt{3}, 0)$, $(\pm\sqrt{3}, 0, 0)$.

3.96°. Какие из приведенных ниже матриц могут, а какие не могут быть ковариационными для случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{е) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{ж) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}?$$

3.97. При каких значениях x существует случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ с ковариационной матрицей:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & x & -x \\ x & 1 & x \\ -x & x & 1 \end{pmatrix}?$$

8.98. Случайный вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_3) имеет ковариационную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{pmatrix}$. Доказать, что

$$|\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23}| \leqslant \sqrt{(1 - \rho_{12}^2)(1 - \rho_{23}^2)}.$$

3.99. а) Показать, что если распределение случайного вектора (ζ_1, ζ_2) совпадает с распределением вектора

$(-\zeta_1, -\zeta_2)$ и $M\zeta_1^2 + M\zeta_2^2 < \infty$, то

$$\operatorname{cov}(\zeta_1, \zeta_2) = 2M(\zeta_1 \max(0, \zeta_2)).$$

б) Пусть (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) — независимые одинаково распределенные векторы, $M(\xi_1^2 + \eta_1^2) < \infty$. Доказать, что

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \eta_1) = M((\eta_1 - \eta_2)\max(0, \xi_1 - \xi_2)).$$

3.100. Случайные векторы $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ и $\xi^* = (\xi_1^*, \ldots, \xi_n^*) \in R^n$ независимы, $M\xi = (m_1, \ldots, m_n) = m$, $M\xi^* = (m_1^*, \ldots, m_n^*) = m^*$, матрицы ковариаций ξ и ξ^* равны $\sigma = \|\sigma_{ij}\|$ и $\sigma^* = \|\sigma_{ij}^*\|$ соответственно.

Найти: а) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\zeta = \xi_1 + \ldots + \xi_n$; б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = (\xi, a) = a_1\xi_1 + \ldots + a_n\xi_n$, где $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — данный неслучайный вектор; в) математические ожидания и ковариационные матрицы векторов $\xi + \xi^*$, $\xi - \xi^*$, $a\xi + b\xi^*$ (a, b — постоянные).

3.101°. Пусть $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x (целую часть x), а $\{x\} = x - [x]$ — дробную часть x. Доказать, что если случайная величина ζ такова, что распределение $\{\zeta\}$ равномерное на отрезке $[0, 1]$, то

$$M[\zeta] = M\zeta - 1/2.$$

3.102°. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и

$$P\{\xi_i = 1\} = P\{\xi_i = -1\} = 1/4,$$
$$P\{\xi_i = 0\} = 1/2, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

3.103°. Случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены:

$$P\{\varepsilon_i = 0\} = P\{\varepsilon_i = 1\} = 1/2, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

а $\delta_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+2}$, $i = 1, 2, \ldots$

а) Показать, что случайные величины $\delta_1, \delta_2, \ldots$ распределены так же, как случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ в задаче 3.102, и что при любом $i = 1, 2, \ldots$ случайные величины δ_i, δ_{i+j} независимы, если $j > 0$ — целое, $j \neq 2$.

б) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $R_n = \delta_1 + \ldots + \delta_n$, $n \geqslant 2$.

3.104°. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найти математическое ожидание случайной величины

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n} |\xi_{i+1} - \xi_i|.$$

3.105°. Найти дисперсию случайной величины η_n, введенной в задаче 3.104. Сравнить ее с $n\mathsf{D}|\xi_2 - \xi_1| = \mathsf{D}(|\xi_2 - \xi_1| + |\xi_4 - \xi_3| + \ldots + |\xi_{2n} - \xi_{2n-1}|)$.

3.106°. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ независимы. Положим

$$\zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad \zeta_n^* = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\zeta_n.$$

Найти $\mathsf{M}\zeta_n$, $\mathsf{M}\zeta_n^*$, $\mathsf{D}\zeta_n$, $\mathsf{D}\zeta_n^*$, $\operatorname{cov}(\zeta_n, \zeta_n^*)$, если

$$\mathsf{M}\xi_k = a, \quad \mathsf{D}\xi_k = \sigma^2, \quad \mathsf{P}\{\eta_k = 1\} = p,$$
$$\mathsf{P}\{\eta_k = 0\} = q = 1 - p \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

3.107°. В экспедиции, рассчитанной на n дней, ежедневно от запаса продуктов нужно отделять соответствующую часть: в 1-й день — $1/n$-ю часть, во 2-й день — $1/(n-1)$-ю часть от остатка и т. д. В действительности нужная часть продуктов отделяется с ошибкой. Пусть η_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ — часть от остатка продуктов, которая отделяется в k-й день. Предполагается, что величины η_k независимы, $\mathsf{M}\eta_k = a_k = \frac{1}{n-k+1}$. Найти математическое ожидание случайной величины ζ, равной части продуктов, оставшейся к последнему дню:

$$\zeta = (1 - \eta_1)(1 - \eta_2)\ldots(1 - \eta_{n-1}).$$

3.108°. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют одно и то же математическое ожидание a и одну и ту же дисперсию σ^2. Положим $\eta_{i,j} = \xi_i - \xi_j$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин

$$\zeta_n^{(1)} = \eta_{1,2} + \eta_{3,4} + \eta_{5,6} + \ldots + \eta_{2n-1,2n},$$
$$\zeta_n^{(2)} = \eta_{1,2} + \eta_{2,3} + \eta_{3,4} + \ldots + \eta_{n,n+1},$$
$$\zeta_n^{(3)} = \eta_{1,2} + \eta_{1,3} + \eta_{1,4} + \ldots + \eta_{1,n+1},$$
$$\zeta_n^{(4)} = \eta_{1,2} + \eta_{2,3} + \eta_{3,4} + \ldots + \eta_{n-1,n} + \eta_{n,1}.$$

3.109°. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию

σ^2. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин $\zeta_n^{(1)}$, $\zeta_n^{(2)}$, $\zeta_n^{(3)}$, $\zeta_n^{(4)}$, определенных в задаче 3.108, если $\eta_{i,j} = \xi_i\xi_j$.

3.110°. Решить задачу 3.109 в случае, когда $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке [0, 1].

3.111°. Решить задачу 3.109 в случае, когда $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют математическое ожидание a и дисперсию σ^2.

3.112. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы $\mathsf{M}\xi_i = 0$, $\mathsf{D}\xi_i = \sigma^2 < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$ Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \text{ и } T_n = \xi_{\nu_1} + \xi_{\nu_2} + \ldots + \xi_{\nu_n},$$

где $\nu_1, \nu_2, \ldots$ — независимые и не зависящие от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайные величины, имеющие равномерное распределение на множестве $\{1, 2, \ldots, k\}$.

3.113°. Обозначим через θ_r число циклов длины r в подстановке, случайно выбранной из множества всех $n!$ подстановок степени n. Найти: а) $\mathsf{M}\theta_1$, $\mathsf{D}\theta_1$; б) $\mathsf{M}\theta_2$; в) $\mathsf{M}\theta_r$ $(r \geqslant 1)$.

3.114°. В урне содержится M_1 шаров с номером 1, M_2 шаров с номером 2, ..., M_N шаров с номером N. По схеме случайного выбора без возвращения выбирается n шаров. Найти математическое ожидание числа непоявившихся номеров.

3.115°. Из урны, содержащей M белых и $N - M$ черных шаров, по схеме выбора без возвращения извлекается выборка объема n. Число белых шаров ξ в выборке имеет гипергеометрическое распределение: $\mathsf{P}\{\xi = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$. Найти $\mathsf{M}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

3.116°. В N ячейках случайно размещаются n частиц. Каждая частица независимо от остальных с вероятностью $1/N$ может попасть в любую фиксированную ячейку. Обозначим через $\mu_0(n, N)$ число пустых ячеек. Найти $\mathsf{M}\mu_0(n, N)$, $\mathsf{D}\mu_0(n, N)$ и асимптотические формулы для них при $n, N \to \infty$, $n/N \to \alpha \in (0, \infty)$.

3.117°. Пусть выполнены условия задачи **3.116** и $\mu_r(n, N)$ — число ячеек, в которые попало ровно r частиц. При $r = 1, 2, \ldots$ найти $\mathsf{M}\mu_r(n, N)$ и асимптотические формулы для $\mathsf{M}\mu_r(n, N)$ при $r = \text{const}$, $n, N \to \infty$, $n/N \to \alpha \in (0, \infty)$.

3.118°. В группе учится 25 студентов. Предполагая, что дни рождения студентов независимы и равномерно распределены по 12 месяцам года, найти математическое ожидание числа μ_r тех месяцев, на которые приходится r дней рождения, для всех таких r, что $\mathsf{M}\mu_r > 0{,}01$.

3.119. По N ячейкам случайно размещаются n *неразличимых* частиц (см. задачу **1.52**). Все размещения предполагаются равновероятными. Обозначим через μ_r число ячеек, содержащих ровно r частиц. Найти $\mathsf{M}\mu_r$ и асимптотические формулы для $\mathsf{M}\mu_r$ при n, $N \to \infty$, $n/N \to \alpha \in (0, \infty)$. Сравнить с результатами задач **3.116** и **3.117**.

3.120°. Пусть $\xi_{n,i}$ — число появлений i-го исхода в n независимых испытаниях с N несовместными исходами и вероятностью p_j появления j-го исхода в s-м испытании ($j = 1, \ldots, N$; $s = 1, \ldots, n$; $p_1 + \ldots + p_N = 1$). Найти: а) $\mathsf{M}\xi_{n,i}$; б) $\mathsf{D}\xi_{n,i}$; в) $\operatorname{cov}(\xi_{n,i}, \xi_{n,j})$ $(i \neq j)$.

3.121. Сопоставим описанной в задаче **3.120** последовательности n независимых испытаний процесс размещения n частиц по N ячейкам, интерпретируя появление j-го исхода в k-м испытании как попадание k-й частицы в j-ю ячейку. Обозначим через $\mu_r = \mu_r(n; p_1, \ldots, p_N)$ число ячеек, в которых после размещения n частиц оказалось ровно по $r = 0, 1, \ldots$ частиц. Найти: а) $\mathsf{M}\mu_0$; б) $\mathsf{M}\mu_r$; в) $\min\limits_{p_1, \ldots, p_N} \mathsf{M}\mu_0(n; p_1, \ldots, p_N)$.

3.122°. В N ячейках последовательно размещают частицы. Каждая частица независимо от остальных попадает в любую фиксированную ячейку с вероятностью $1/N$. Обозначим через ν_k минимальный номер частицы, после размещения которой число занятых (т. е. не пустых) ячеек станет равным k. Найти $\mathsf{M}\nu_k$, $\mathsf{D}\nu_k$ и асимптотическую формулу для $\mathsf{M}\nu_N$ при $N \to \infty$.

3.123. По маршруту ходит N автобусов без кондуктора. В каждом автобусе имеется касса, в которой перед выходом в рейс было r билетов. Всего эти автобусы перевезли n пассажиров. Найти математическое ожидание числа ξ пассажиров, которым не досталось билетов, предполагая, что каждый пассажир независимо от остальных может сесть в любой из автобусов с одной и той же вероятностью $1/N$.

3.124°. Из 30 чисел (1, 2, ..., 29, 30) по схеме равновероятного выбора без возвращения отбирается 10 чисел. Найти математическое ожидание суммы выбранных чисел.

3.125°. В схеме Бернулли p — вероятность исхода 1 и $q = 1 - p$ — вероятность исхода 0. Будем считать, что при i-м испытании ($i \geqslant 2$) появилась цепочка 00, если при $(i-1)$-м и при i-м испытаниях исходами были нули. Найти формулы для математического ожидания и дисперсии числа μ_{00} появлений цепочек 00 в n испытаниях ($n \to \infty$). Сравнить их с формулами для математического ожидания и дисперсии числа $\overset{*}{\mu}_0$ появлений исхода 0 в $n-1$ независимых испытаний Бернулли, когда вероятность исхода 0 равна q^2.

3.126°. В схеме Бернулли задачи **3.125** найти формулы для математического ожидания и дисперсии числа μ_{111} появлений цепочки 111. (Цепочка 111 появляется при i-м испытании, если исходами $(i-2)$-го, $(i-1)$-го и i-го испытаний были единицы.) Сравнить их с формулами для математического ожидания и дисперсии числа $\overset{*}{\mu}_1$ появлений исхода 1 в $n-2$ независимых испытаниях схемы Бернулли, когда вероятность исхода 1 равна p^3.

3.127°. Пусть проведено n испытаний по той же схеме Бернулли, что в задачах **3.125** и **3.126**. Назовем *серией единиц* цепочку исходов последовательных испытаний вида 011...110 (при этом считается, что исходами дополнительных испытаний с номерами 0 и $n+1$ были нули). Пусть η_n — число серий единиц. Найти: а) $\mathsf{P}\{\eta_n = 0\}$; б) $\mathsf{P}\{\eta_n = 1\}$; в) $\mathsf{M}\eta_n$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\mathsf{D}\eta_n$.

3.128. На бесконечный лист клетчатой бумаги (сторона клеточки равна 1) случайно бросается круг единичного радиуса. Считая, что центр круга равномерно распределен на том единичном квадрате, на который он попал, найти математическое ожидание числа ξ точек с целочисленными координатами (x, y), покрытых этим кругом.

3.129*. Каждую целочисленную точку числовой оси независимо от остальных назовем *белой* с вероятностью p и *черной* с вероятностью $q = 1-p$. Пусть S — множество всех таких целочисленных точек x, что расстояние от x до ближайшей черной точки (включая x, если точка x черная) не меньше расстояния от x до начала координат. Найти математическое ожидание числа $|S|$ элементов множества S.

3.130*. Точки $C_1, \ldots, C_n$ независимы и имеют равномерное распределение в круге K с центром O и радиусом 1. Пусть случайное множество A состоит из тех и только тех точек круга, которые находятся ближе к центру O, чем к границе круга и к любой из точек $C_1, \ldots, C_n$. Найти математическое ожидание площади ξ множества A.

3.131. На плоскость независимо брошено N кругов радиуса r_N так, что центры этих кругов равномерно распределены в круге радиуса 1. Обозначим через μ_m площадь множества точек плоскости, покрытых ровно m кругами. Найти

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\mathsf{M}\mu_m}{\pi}, \quad \text{если} \quad Nr_N^2 \to \lambda < \infty.$$

3.132. Случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения. Доказать, что

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\xi \geqslant k\}.$$

3.133. Случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения. Доказать, что для любого целого $k \geqslant 2$

$$\mathsf{M}\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1) = k\sum_{n=1}^{\infty} n^{[k-1]}\mathsf{P}\{\xi > n\}.$$

3.134. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — совокупность событий, χ_i — индикатор события A_i $(i = 1, 2, \ldots)$, т. е.

$$\chi_i = \begin{cases} 1, & \text{если событие } A_i \text{ происходит,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и $\xi = \chi_1 + \chi_2 + \ldots$ — число одновременно происходящих событий из $A_1, A_2, \ldots$ Доказать, что

$$\mathsf{M}\xi^{[k]} = k! \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \mathsf{P}\{A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\} =$$
$$= k! \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \mathsf{P}\{\chi_{i_1} = \ldots = \chi_{i_k} = 1\}.$$

3.135*. Неотрицательная случайная величина ξ имеет функцию распределения

$$F(x) = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}.$$

Доказать, что

$$\mathsf{M}\xi = \int_0^{\infty} (1 - F(x))\,dx.$$

3.136. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x) = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}$. Доказать, что если $\mathsf{M}|\xi| < \infty$, то

$$\mathsf{M}\xi = \int_0^{\infty} (1 - F(x))\,dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)\,dx.$$

3.137. Неотрицательная случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x) = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}$. Доказать, что для любого действительного $\alpha \neq 0$

$$\mathsf{M}\xi^{\alpha} = |\alpha| \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}(1 - F(x))\,dx.$$

3.138. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x) = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}$. Показать, что если

$$F_{-1}(y) = \sup\{x\colon\ F(x) \leqslant y\},$$

то для любой интегрируемой функции $h(x)$

$$\mathsf{M}h(\xi) = \int_0^1 h(F_{-1}(y))\,dy.$$

При решении задач **3.139—3.143** можно использовать следующее простое замечание.

Если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены, а число $k < n$, то наборы $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_k})$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, одинаково распределены и для любой измеримой функции $f(x_1, \ldots$ $\ldots, x_k)$ случайные величины $\eta_{i_1,\ldots,i_k} = f(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k})$, где $1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n$, $i_r \neq i_s$ $(r \neq s)$, тоже одинаково распределены.

3.139. Пусть вероятностное распределение P на плоскости R^2 таково, что если точки $X_1, X_2, X_3 \in R^2$ независимы и имеют распределение P, то

$$\mathsf{P}\{X_1, X_2, X_3 \text{ лежат на одной прямой}\} = 0.$$

Найти математическое ожидание угла $X_1X_2X_3$.

3.140*. Случайные точки A_1, A_2, A_3, A_4 независимы и имеют равномерное распределение в выпуклой плоской фигуре $C \subset R^2$, площадь которой равна 1. Доказать, что вероятность того, что выпуклая оболочка точек A_1, A_2, A_3, A_4 есть треугольник, в 4 раза больше математического ожидания площади треугольника $A_1A_2A_3$.

3.141*. Пусть вероятностное распределение P на плоскости R^2 таково, что если точки $X_1, X_2, X_3 \in R^2$ независимы и имеют распределение P, то

$$\mathsf{P}\{X_1, X_2, X_3 \text{ лежат на одной прямой}\} = 0.$$

Показать, что если точки $X_1, X_2, X_3 \in R^2$ независимы и имеют распределение P, то

$$P_3 = \mathsf{P}\{\text{один из углов } \Delta X_1X_2X_3 \text{ не меньше } 120^\circ\} \geqslant 1/20.$$

3.142*. Пусть вероятностное распределение P на плоскости такое же, как в задаче 3.141. Показать, что если точки $X_1, X_2, X_3, X_4 \in R^2$ независимы и имеют распределение P, то

$$P_4 = \mathsf{P}\{X_1, X_2, X_3, X_4 \text{ образуют выпуклый четырехугольник}\} \geqslant 1/5.$$

3.143. Независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ положительны и имеют одинаковое невырожденное распределение. Обозначим $\eta_k = \dfrac{\xi_k}{\xi_1 + \ldots + \xi_n}$. Найти: а) математическое ожидание η_k; б) коэффициент корреляции η_k и η_l; в) коэффициент корреляции $\eta_1 + \ldots + \eta_k$ и $\eta_1 + \ldots + \eta_l$.

3.144. Из урны, содержащей M белых и $N - M$ черных шаров, по схеме случайного выбора без возвращения вынимаются все шары. Обозначим τ_1 число шаров, извлеченных до появления 1-го белого шара (включая этот шар), τ_i — число шаров, извлеченных после $(i-1)$-го белого до появления i-го белого включительно, τ_{M+1} — число шаров, извлеченных после M-го белого шара. Найти $\mathsf{M}\tau_i$.

3.145. Обозначим через $S(A_1, \ldots, A_k)$ площадь выпуклой оболочки точек $A_1, \ldots, A_k \in R^2$. Установить тождество

$$2S(A_1, A_2, A_3, A_4) = S(A_1, A_2, A_3) + S(A_1, A_2, A_4) + S(A_1, A_3, A_4) + S(A_2, A_3, A_4)$$

и вывести из него, что для независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in R^2$

$$\mathsf{M}S(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 2\mathsf{M}S(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

3.146. Случайные величины ξ, η (возможно, зависимые) обладают конечными дисперсиями: $\mathsf{D}\xi = \sigma_1^2$, $\mathsf{D}\eta = \sigma_2^2$. Указать пределы, в которых может изменяться $\mathsf{D}(\xi + \eta)$.

3.147. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k) \in R^k$ — векторная случайная величина. Доказать, что если $\mathsf{M}|\xi_i| < \infty$, $i = 1, \ldots, k$, то

$$|\mathsf{M}\xi| \leqslant \mathsf{M}|\xi|,$$

где $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2}$ при $x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k$.

3.148. Пусть $\zeta = \xi + i\eta$ — случайная величина, принимающая комплексные значения. Доказать, что если $M|\xi| < \infty$, $M|\eta| < \infty$, то $|M\zeta| \leqslant M|\zeta|$.

3.149. Показать, что если ξ и η — независимые случайные векторы в R^d, а $(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_d)$ и $y = (y_1, \ldots, y_d)$, то

$$M(\xi, \eta) = (M\xi, M\eta).$$

3.150. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Доказать, что если все эти величины одинаково коррелированы, т. е. $\rho(\xi_i, \xi_j) = C$ при любых i, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, то $C \geqslant -\dfrac{1}{n-1}$.

3.151. Доказать, что если $M|\xi|^k < \infty$, то

$$\lim_{x \to \infty} x^k P\{|\xi| \geqslant x\} = 0.$$

3.152. Показать, что если ξ — действительная случайная величина с конечным математическим ожиданием и $f(x)$ — функция, выпуклая вниз, то

$$Mf(\xi) \geqslant f(M\xi),$$

а если $f(x)$ выпукла вверх, то

$$Mf(\xi) \leqslant f(M\xi).$$

3.153. Показать, что для любых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ с конечными r-ми ($r \geqslant 1$) моментами справедливо соотношение

$$M|\xi_1 + \ldots + \xi_k|^r \leqslant k^{r-1}(M|\xi_1|^r + \ldots + M|\xi_k|^r).$$

3.154. Доказать, что при $1 \leqslant r \leqslant 2$ справедливо неравенство

$$|x + y|^r + |x - y|^r \leqslant 2(|x|^r + |y|^r), \quad -\infty < x, \ y < \infty,$$

и с его помощью показать, что если случайные величины ξ и η независимы и распределение η симметрично (т. е. распределения η и $-\eta$ совпадают), то при любом r, $1 \leqslant r \leqslant 2$,

$$M|\xi + \eta|^r \leqslant M|\xi|^r + M|\eta|^r.$$

3.155. Показать, что если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, имеют симметричные распределения и $M|\xi_i|^r < \infty$, $i = 1, \ldots, n$, для некоторого $r \in [1, 2]$, то

$$M|\xi_1 + \ldots + \xi_n|^r \leqslant M|\xi_1|^r + \ldots + M|\xi_n|^r.$$

3.156*. Показать, что если случайные величины ξ и η независимы, $\mathsf{M}\eta = 0$, и $\mathsf{M}|\xi|^r < \infty$, $\mathsf{M}|\eta|^r < \infty$ для некоторого действительного $r \geqslant 1$, то

$$\mathsf{M}|\xi + \eta|^r \geqslant \mathsf{M}|\xi|^r.$$

3.157. Используя задачи 3.153—3.156, доказать, что если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, $\mathsf{M}\xi_i = 0$, $\mathsf{M}|\xi_i|^r < \infty$, $i = 1, \ldots, n$, для некоторого r, $1 \leqslant r \leqslant 2$, то

$$\mathsf{M}|\xi_1 + \ldots + \xi_n|^r \leqslant 2^r (\mathsf{M}|\xi_1|^r + \ldots + \mathsf{M}|\xi_n|^r).$$

3.158. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ принимает значения в R^k, и существует такой набор чисел

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq (0, 0, \ldots, 0),$$

что $\mathsf{P}\{\alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_k\xi_k + \alpha_0 = 0\} = 1$. Доказать, что если все элементы матрицы ковариаций $B = \|\sigma_{ij}\|$ компонент вектора ξ конечны, то:

а) $\det B = 0$;

б) $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) B = (B(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^{\top})^{\top} = 0$, где $^{\top}$ — знак транспонирования.

3.159. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ принимает значения в R^k и имеет математическое ожидание $m \in R^k$ и матрицу ковариаций $B = \|b_{ij}\|$. Доказать, что:

а) матрица B неотрицательно определена, т. е.

$$\sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}a_ia_j = (a, Ba) \geqslant 0 \text{ для любого } a \in R^k;$$

б)* если ранг матрицы B равен r, то существует r-мерная гиперплоскость $L_r \subset R^k$, для которой $\mathsf{P}\{\xi \in L_r\} = 1$, и $\mathsf{P}\{\xi \in L_{r-1}\} < 1$ для любой $(r-1)$-мерной гиперплоскости $L_{r-1} \subset R^k$.

3.160. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и равномерно распределены в отрезке $[0, 1]$. Найти $\mathsf{P}\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \leqslant x\}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

3.161. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и равномерно распределены в отрезке $[0, 1]$. Определим случайную величину ν равной тому значению k, при котором впервые сумма $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k$ превзойдет 1. Найти $\mathsf{M}\nu$.

3.162. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы; $\mathsf{D}\xi_i = \sigma_i^2$, $i = 1, \ldots, n$. При каких $c_1, \ldots, c_n$, удовлетворяющих условиям $c_k \geqslant 0$, $c_1 + \ldots + c_n = 1$, случайная величина $\eta_n = c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n$ имеет минимальную дисперсию? Найти минимальную дисперсию.

3.163. По известному «правилу трех сигм» вероятность отклонения случайной величины от своего математического ожидания более чем на три корня из дисперсии мала. Найти $\mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{M}\xi| < 3\sqrt{\mathsf{D}\xi}\}$, если ξ имеет:

а) нормальное распределение;

б) показательное распределение;

в) равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$;

г) $\mathsf{P}\{\xi = -1\} = \mathsf{P}\{\xi = 1\} = 1/18$, $\mathsf{P}\{\xi = 0\} = 8/9$;

д) распределение Пуассона с $\mathsf{M}\xi = 0{,}09$.

3.164. Вычислить математическое ожидание и дисперсию определителя $\Delta = |\xi_{ij}|_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$, элементы которого ξ_{ij} — независимые случайные величины с $\mathsf{M}\xi_{ij} = 0$ и $\mathsf{D}\xi_{ij} = \sigma^2$.

3.165. Пусть матрица $\Xi = \|\xi_i\xi_j\|_{i,j=1}^n$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие симметричные распределения (т. е. распределение ξ_i совпадает с распределением $-\xi_i$, $i = 1, \ldots, n$). Показать, что если $\mathsf{M}|\xi_i|^k < \infty$, $i = 1, \ldots, n$, для целого $k \geqslant 1$, то $\mathsf{M}\Xi^k$ — диагональная матрица.

3.166. Неотрицательная случайная величина ξ имеет монотонно убывающую выпуклую вниз плотность распределения $f(x)$, $f''(x) > 0$. Что можно сказать о знаках величин $\mathsf{M}\sin\xi$, $\mathsf{M}\cos\xi$?

3.167. Обозначим $\eta_n = \max\{\mu_n, n - \mu_n\}$, где μ_n — число успехов в схеме Бернулли с n испытаниями и с вероятностью успеха p. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\mathsf{M}\eta_n$.

3.168. По последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ испытаний Бернулли ($\mathsf{P}\{\xi_i = 1\} = p > 0$, $\mathsf{P}\{\xi_i = 0\} = q = 1 - p > 0$, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы) построим последовательность пар (ξ_1, ξ_2), (ξ_3, ξ_4), $\ldots$ и вычеркнем из этой новой последовательности все пары вида $(0, 0)$ и $(1, 1)$. Для $k = 1, 2, \ldots$ положим η_k равным первому члену k-й невычеркнутой пары.

а) Показать, что $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, $\mathsf{P}\{\eta_k = 0\} = \mathsf{P}\{\eta_k = 1\} = 1/2$, $k = 1, 2, \ldots$

б) Найти математическое ожидание числа ν членов исходной последовательности, использованных для того, чтобы определить значение η_1.

3.169. По той же последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$, что в задаче **3.168**, построим последовательность троек (ξ_1, ξ_2, ξ_3), (ξ_4, ξ_5, ξ_6), $\ldots$ и вычеркнем из нее все тройки вида (0, 0, 0) и (1, 1, 1). Для $k = 1, 2, \ldots$ положим η_k равным 1, 2 или 3 в соответствии с номером того члена k-й невычеркнутой тройки, который отличается от двух остальных.

а) Показать, что $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, $\mathsf{P}\{\eta_k = i\} = 1/3$, $i = 1, 2, 3$, для $k = 1, 2, \ldots$

б) Найти математическое ожидание числа членов исходной последовательности, использованных для того, чтобы определить значение η_1.

3.170°. В партии n изделий, каждое из которых независимо от остальных с вероятностью p удовлетворяет стандарту, а с вероятностью $q = 1 - p$ — не удовлетворяет ему. Изделия проходят проверку, описанную в задаче 2.24. За каждое изделие, удовлетворяющее стандарту и прошедшее проверку, предприятие получает a руб.; за изделие, прошедшее проверку, но не удовлетворяющее стандарту, уплачивается штраф b руб; за изделие, не прошедшее проверку (забракованное), уплачивается штраф c руб. Найти математическое ожидание прибыли предприятия, полученной за партию из n изделий.

3.171. Координата ξ случайной точки A на действительной прямой имеет непрерывную функцию распределения. Найти на этой прямой такую точку B, для которой математическое ожидание длины отрезка AB минимально.

3.172. Случайные величины ξ, η имеют непрерывную двумерную плотность распределения. Как выбрать точку $B = (x, y) \in R^2$, чтобы величина $\varphi(x, y) = \mathsf{M}\{|\xi - x| + |\eta - y|\}$ была минимальной?

3.173. Случайная величина ξ имеет конечный второй момент $\mathsf{M}\xi^2$. Найти $\min\limits_x \mathsf{M}(\xi - x)^2$ и то значение x, при котором этот минимум достигается.

3.174. Математическое ожидание квадрата расстояния случайной точки $X \in R^2$ от начала координат конечно. Для какой точки A минимально $\mathsf{M}|AX|^2$?

3.175*. Уровень весеннего паводка на реке является случайной величиной ξ с непрерывной функцией распределения $F(x) = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}$. Плотина рассчитана так, чтобы выдерживать паводок уровня не выше z. Предполагая, что уровни паводков в разные годы независимы и одинаково распределены, найти:

а) минимальное значение z, при котором математическое ожидание времени до разрушения плотины паводком будет не меньше $T = 100$ лет;

б) минимальное значение z, при котором вероятность разрушения плотины паводком за $T = 100$ лет будет не больше $\alpha = 1/100$.

3.176*. Наблюдения за уровнями весенних паводков в течение T лет дали значения $\xi_1, \ldots, \xi_T$. На реке построена плотина, которая может выдержать паводок, если только его уровень не превосходит $\zeta_T = \max\{\xi_1, \ldots \ldots, \xi_T\}$. Пусть $\tau_T = \min\{t: \xi_{T+t} > \zeta_T\}$ — время до разрушения плотины паводком. Предполагая, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют одну и ту же непрерывную функцию распределения, найти формулы для $\mathsf{M}\tau_T$, $\mathsf{P}\{\tau_T \leqslant u\}$ и численные значения этих величин при $T = 100$, $u = 10$.

3.177. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют одно и то же распределение с конечным математическим ожиданием, $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \xi_{(3)}$ — их вариационный ряд (см. задачу **3.60**).

а) Доказать, что

$$\mathsf{M}(\xi_{(3)} - \xi_{(1)}) = \frac{3}{2}\mathsf{M}|\xi_1 - \xi_2|.$$

б) Доказать, что

$$\mathsf{M}\{\min(\xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \xi_{(3)} - \xi_{(2)})\} \leqslant \frac{3}{4}\mathsf{M}|\xi_1 - \xi_2|.$$

3.178. Будем говорить, что случайная величина ξ сосредоточена на отрезке $[a, b]$, если $\mathsf{P}\{a \leqslant \xi \leqslant b\} = 1$ и при любом $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{a \leqslant \xi < a + \varepsilon\} > 0 \quad \text{и} \quad \mathsf{P}\{b - \varepsilon < \xi \leqslant b\} > 0.$$

Доказать, что дисперсия случайной величины, сосредоточенной на отрезке длины l, не превосходит $l^2/4$.

3.179. Доказать, что если случайные величины η_1, η_2 независимы и η_i сосредоточена на отрезке длины l_i, $i = 1, 2$, то сумма $\eta_1 + \eta_2$ сосредоточена на отрезке длины $l = l_1 + l_2$.

3.180. Говорят, что случайная величина ξ имеет *безгранично делимое распределение*, если при любом натуральном n ее можно представить в виде суммы $\xi_1 + \ldots \ldots + \xi_n$ независимых одинаково распределенных случайных величин. Доказать, что невырожденное безгранично делимое распределение не может быть сосредоточено на конечном отрезке.

3.181. Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таковы, что $\mathsf{P}\{A_i\} = p$, $i = 1, \ldots, n$, и событие $B_m = \{$происходит не менее m из событий $A_1, \ldots, A_n$). Показать, что

$$\max\left\{0, \frac{np-m+1}{n-m+1}\right\} \leqslant \mathsf{P}\{B_m\} \leqslant \min\left\{1, \frac{np}{m}\right\}.$$

3.182. Случайная величина ξ_1 имеет функцию распределения $F_1(x) = \mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant x\}$, а случайная величина ξ_2 — функцию распределения $F_2(x)$. Доказать, что если $F_1(x) \leqslant F_2(x)$ при всех $x \in (-\infty, \infty)$, то $\mathsf{M}\xi_1 \geqslant \mathsf{M}\xi_2$.

3.183. Случайные величины ξ и η заданы на одном вероятностном пространстве. Описать множество возможных значений $\mathsf{P}\{\xi \leqslant \eta\}$ в следующих случаях:

а) $\mathsf{M}\xi = 1$, $\mathsf{M}\eta = 10$;

б) ξ и η одинаково распределены;

в) ξ распределена равномерно на $[0, 1]$, а η — равномерно на $[0, a]$, $a \neq 1$.

3.184. Случайные величины ξ и η имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что при любом характере зависимости между ξ и η

$$\mathsf{M}|\xi - \eta| \leqslant 1/2.$$

3.185. Случайные величины ξ и η независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а случайная величина ζ удовлетворяет условию

$$\mathsf{P}\{\zeta = \xi\} = \mathsf{P}\{\zeta = \eta\} = 1/2.$$

Указать совместные распределения ξ, η, ζ, при которых достигаются экстремальные значения $\mathsf{M}\zeta$, и найти максимальное и минимальное возможные значения $\mathsf{M}\zeta$.

3.186. Случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения $F(x)$, случайная величина χ принимает только значения 0 и 1: $\mathsf{P}\{\chi = 1\} = a$, $\mathsf{P}\{\chi = 0\} = 1 - a$. Указать совместные распределения ξ и χ, при которых достигаются экстремальные значения $\mathsf{M}\xi\chi$, и найти эти экстремальные значения.

3.187. Случайные величины ξ и η независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а случайная величина ζ удовлетворяет условию

$$\mathsf{P}\{\zeta = \xi\} = p \leqslant 1/2, \quad \mathsf{P}\{\zeta = \eta\} = 1 - p.$$

Указать совместные распределения ξ, η, ζ, при которых достигаются экстремальные значения $\mathsf{M}\zeta$, и найти эти экстремальные значения.

3.188. а) Векторы $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ независимы и $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) \neq 0$, $\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) \neq 0$. Могут ли компоненты $\xi_1+\eta_1$ и $\xi_2+\eta_2$ вектора $\xi+\eta$ быть некоррелированными?

б) Векторы $\xi=(\xi_1, \xi_2)$ и $\eta=(\eta_1, \eta_2)$ независимы и имеют зависимые компоненты:

$$\mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1, \xi_2 \leqslant x_2\} \neq \mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1\}\mathsf{P}\{\xi_2 \leqslant x_2\},$$
$$\mathsf{P}\{\eta_1 \leqslant x_1, \eta_2 \leqslant x_2\} \neq \mathsf{P}\{\eta_1 \leqslant x_1\}\mathsf{P}\{\eta_2 \leqslant x_2\}.$$

Могут ли быть независимыми компоненты $\xi_1+\eta_1$ и $\xi_2+\eta_2$ вектора $\xi+\eta$?

§ 3. Условные распределения

3.189°. Случайные величины ξ и η независимы;

$$\mathsf{P}\{\xi=k\}=\mathsf{P}\{\eta=k\}=pq^{k-1},$$
$$q=1-p, \quad 0<p<1, \quad k=1, 2, \ldots$$

Найти:

а) $\mathsf{P}\{\xi=\eta\}$; б) $\mathsf{P}\{\xi>\eta\}$; в) $\mathsf{P}\{\xi<\eta\}$;
г) $\mathsf{P}\{\xi=k \mid \xi>\eta\}$; д) $\mathsf{P}\{\xi=k \mid \xi<\eta\}$;
е) $\mathsf{P}\{\xi=k \mid \xi=\eta\}$; ж) $\mathsf{P}\{\xi=k \mid \xi+\eta=l\}$;
з) $\mathsf{M}\{\xi \mid \xi+\eta=l\}$, $l \geqslant 2$.

3.190°. Найти распределение целочисленной неотрицательной случайной величины ξ, если:

а) $\mathsf{P}\{0<\xi<\infty\}=1$, $\mathsf{P}\{\xi=k+1 \mid \xi>k\}=p$, $k=0, 1, \ldots$;

б) $\mathsf{P}\{\xi \geqslant 0\}=1$, $\mathsf{P}\{\xi=k+1 \mid \xi \in \{k, k+1\}\}=c<1/2$, $k=0, 1, \ldots$;

в) $\mathsf{P}\{\xi \geqslant 0\}=1$, $\mathsf{P}\{\xi=k+1 \mid \xi \in \{k, k+1\}\}=\frac{r}{k+r+1}$, $r>0$, $k=0, 1, \ldots$

3.191°. Случайные величины ξ, η независимы и одинаково распределены. Найти условную плотность $p_{\xi|\xi+\eta=z}(x)$ распределения ξ при условии $\xi+\eta=z$ в следующих случаях: а) ξ и η имеют показательное распределение с плотностью $p(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$; б) ξ и η равномерно распределены в $[0, 1]$; в) ξ и η имеют распределение с плотностью $\lambda^2 x e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$.

3.192°. Найти условную дисперсию $\mathsf{D}(\xi \mid \xi+\eta=z)$ в случаях а), б), в), определенных в предыдущей задаче.

3.193°. Случайные величины ξ, η независимы и одинаково распределены. Найти $\mathsf{M}(\xi \mid \xi+\eta=z)$. Разобрать отдельно случаи, когда ξ имеет дискретное распределение или положительную плотность.

3.194°. Плотность совместного распределения величин ξ, η определяется равенствами: $p_{\xi,\eta}(u, v)=1$ при $(u, v) \in$

$\in G$, $p_{\xi,\eta}(u, v) = 0$ при $(u, v) \notin G$, где $G = \left\{(u, v)\colon 0 \leqslant u \leqslant \leqslant 2,\ 0 < v < 1 - \frac{1}{2}u\right\}$. Найти плотность $p_{\eta|\xi=z}(x)$ условного распределения η при условии $\xi = z$.

3.195. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — результаты n последовательных испытаний Бернулли, $\mathsf{P}\{\xi_i = 1\} = p$, $\mathsf{P}\{\xi_i = 0\} = q = 1 - p$. Доказать, что для любого k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ условное распределение набора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ при условии $\xi_1 + \ldots + \xi_n = k$ является равномерным на множестве всех C_n^k наборов, состоящих из k единиц и $n - k$ нулей.

3.196. Случайная величина X_1 имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p), случайная величина X_2 при условии X_1 имеет биномиальное распределение с параметрами (X_1, p), X_3 — при условии X_2 имеет биномиальное распределение с параметрами (X_2, p), ..., X_k при условии X_{k-1} имеет биномиальное распределение с параметрами (X_{k-1}, p). Доказать, что безусловным распределением X_k является биномиальное распределение с параметрами (n, p^k).

3.197. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ независимы и распределены по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$. Найти: а) $\mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_k = m | \xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}$; б) $\mathsf{M}\{\xi_1 + \ldots + \xi_k | \xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}$.

3.198. Из урны, содержащей M белых и $N - M$ черных шаров, сначала извлекается без возвращения выборка объема n, а затем из этой выборки извлекается без возвращения выборка объема $n_0 < n$. Найти закон распределения числа ξ белых шаров во второй выборке. Зависит ли этот закон от n?

3.199. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и распределены нормально с одинаковыми параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$; положим $\eta = \dfrac{\xi_1 + \xi_2\xi_3}{\sqrt{1 + \xi_3^2}}$. Найти распределение η.

3.200. На отрезок $[0, a]$ брошено три точки, их координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, a]$. Найти двумерную функцию распределения ξ_2, ξ_3 при условии, что $\xi_1 = z \leqslant \min\{\xi_2, \xi_3\}$, $0 < z < a$.

3.201*. Пусть $\xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}), \ldots, \xi_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2})$ — независимые случайные точки, имеющие равномерное распределение в квадрате $0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1$. Назовем точку $\xi_i = (\xi_{i,1}, \xi_{i,2})$ *граничной*, если для любого $j = 1, \ldots, n$ выполняется хотя бы одно из условий

$$\xi_{j1} \leqslant \xi_{i1}, \quad \xi_{j2} \leqslant \xi_{i2},$$

и обозначим через $\varkappa_n$ число граничных точек. Найти $\mathsf{M}\varkappa_n$.

3.202. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием $a > 0$ и дисперсией $\sigma^2 < \infty$, случайная величина ν не зависит от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и принимает целые положительные значения, $\mathsf{M}\nu = b$, а

$$\tau = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\nu.$$

Найти $\mathsf{M}\tau$ и (при дополнительном условии $\mathsf{D}\nu = \delta^2$) $\mathsf{D}\tau$.

3.203. Случайные величины ξ, η независимы. Доказать, что при любом x

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant \max(\eta, x)\} \geqslant \mathsf{P}\{\xi \geqslant \eta\}\mathsf{P}\{\xi \geqslant x\}.$$

3.204. Случайные величины ξ, η, ζ независимы. Доказать, что

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant \max(\eta, \zeta)\} \geqslant \mathsf{P}\{\xi \geqslant \eta\}\mathsf{P}\{\xi \geqslant \zeta\}.$$

3.205. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Пусть $\delta_1 = 1$, и если $n \geqslant 2$, то

$$\delta_n = \begin{cases} 1 \text{ при } \xi_n < \min\{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Построим последовательность τ_k моментов появления минимальных значений ξ_n и последовательность их величин η_k, т. е. положим $\tau_0 = 0$, $\eta_0 = 1$, $\tau_k = \min\{n\colon n > \tau_{k-1}, \delta_n = 1\}$, $\eta_k = \xi_{\tau_k}$, $k = 1, 2, \ldots$

а) Доказать, что при любых $k \geqslant 1$ и $x \in [0, 1]$ условное распределение η_k при условии $\eta_{k-1} = x$ является равномерным на $[0, x]$.

б) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\zeta_k = -\ln \eta_k$.

в) Найти условное распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\Delta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ при условии $\eta_{k-1} = x$.

г) Найти $\mathsf{M}\tau_k$ при $k \geqslant 1$.

д) Доказать, что случайные величины $\delta_1, \delta_2, \ldots$ независимы и $\mathsf{P}\{\delta_n = 1\} = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

3.206. Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ: $\mathsf{P}\{\zeta_i \leqslant t\} = 1 - e^{-\lambda t}$, и $S_0 = 0$, $S_1 = \zeta_1$, $S_2 =$

$= \zeta_1 + \zeta_2, \ldots$ Пусть, далее, случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы, имеют равномерное распределение на отрезке $[0, a]$, $a > 0$, и $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(n)}$ — их вариационный ряд, т. е. перестановка $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в порядке неубывания. Доказать, что условное совместное распределение $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ при условии $S_n \leqslant a < S_{n+1}$ совпадает с совместным распределением $(\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \ldots, \xi_{(n)})$.

3.207. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2. Показать, что при любых $x > 0$, $C > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\xi - x > \frac{C}{x} \,\middle|\, \xi > x\right\} < e^{-C/\sigma^2}.$$

3.208. В схеме Бернулли с вероятностью p исхода 1 и вероятностью $q = 1 - p$ исхода 0 найти математическое ожидание числа ν_{00} испытаний до первого появления цепочки из двух нулей. В частности, вычислить $\mathsf{M}\nu_{00}$ при $p = 1/2$.

3.209. В схеме Бернулли предыдущей задачи найти математическое ожидание числа ν_{111} испытаний до первого появления цепочки из трех единиц. В частности, вычислить это математическое ожидание при $p = 1/2$.

3.210. В схеме Бернулли задачи **3.208** найти математическое ожидание числа ν_{01} испытаний до первого появления цепочки 01. В частности, вычислить это математическое ожидание при $p = 1/2$.

3.211. Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы и имеют равномерное распределение на окружности единичной длины. Найти вероятность того, что длина наименьшей дуги, содержащей все эти точки, не больше $x \leqslant 1/2$.

3.212. Точки $A_1, \ldots, A_n$ независимы и имеют равномерное распределение на окружности S с центром O. Найти вероятность того, что O лежит внутри выпуклого многоугольника с вершинами $A_1, \ldots, A_n$.

3.213. Точки $A_1, \ldots, A_n$ независимы и имеют равномерное распределение на окружности с центром O, а случайная величина ν равна наименьшему n, при котором выпуклый многоугольник с вершинами $A_1, \ldots, A_n$ содержит O. Найти $\mathsf{M}\nu$ и $\mathsf{D}\nu$.

3.214. Точки $A_1, \ldots, A_n$ независимы и имеют равномерное распределение на окружности радиуса R. Найти вероятность того, что выпуклый многоугольник с вершинами $A_1, \ldots, A_n$ имеет непустое пересечение с окружностью радиуса $r = R/2$, концентричной исходной окружности.

3.215. Точки $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geqslant 2)$ независимы и имеют равномерное распределение на окружности радиуса r. Пусть $A_{(1)} = A_1, A_{(2)}, A_{(3)}, \ldots, A_{(n)}$ — точки $A_1, \ldots, A_n$, расположенные в том порядке, в котором они встречаются при обходе окружности по часовой стрелке. Найти закон распределения длины ξ дуги $A_{(1)}A_{(2)}$ и значения $M\xi$, $D\xi$.

3.216. Пусть выполнены условия задачи 3.215 и ξ_i — длина дуги $A_{(i)}A_{(i+1)}$. Найти совместное распределение и коэффициент корреляции ξ_1, ξ_2.

3.217. Пусть выполнены условия задачи 3.216. Найти закон совместного распределения $\xi_1, \ldots, \xi_k$ при $k \leqslant n$.

3.218. Пусть выполнены условия задачи 3.216. Показать, что совместное распределение $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_k}$ с $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots i_k \leqslant n$ совпадает с распределением $\xi_1, \ldots, \xi_k$.

3.219. Пусть выполнены условия задачи 3.216 и ν — число дуг $A_{(i)}A_{(i+1)}$ длины больше Δ, $0 \leqslant \Delta \leqslant 2\pi r$. Найти $M\nu$, $D\nu$ и асимптотические формулы для них при $r = n/2\pi\lambda$, $n \to \infty$.

3.220. Пусть выполнены условия задачи 3.216. Найти закон распределения случайной величины

$$\eta_n = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}.$$

3.221. Пусть выполнены условия задачи 3.220. Найти $M\eta_n$ и асимптотическую формулу для $M\eta_n$ при $n \to \infty$.

3.222. Точки A, B, C независимы и имеют равномерное распределение на окружности единичного радиуса. Пусть S — площадь $\triangle ABC$, p — его периметр, r — радиус вписанного круга. Найти MS, Mp, Mr.

3.223. Стороны прямоугольника $ABCD$ параллельны осям координат. Найти математическое ожидание площади σ прямоугольника $ABCD$ в следующих случаях:

а) координаты (a_1, a_2) точки A фиксированы, $0 \leqslant a_1, a_2 \leqslant 1$, а точка C имеет равномерное распределение на диагонали единичного квадрата, соединяющей его вершины $(0, 0)$ и $(1, 1)$;

б) точки A и C независимы; точка A равномерно распределена в единичном квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$, а точка C имеет то же распределение, что в п. а).

3.224*. Батарея из n орудий производит залп по цели, находящейся в точке $a \in (-\infty, \infty)$. Если i-е орудие наведено на точку $\beta_i \in (-\infty, \infty)$, то выпущенный из него снаряд попадает в точку $\beta_i + \xi_i + \zeta$, где ξ_i — естественное рассеяние для i-го орудия, а ζ — одинаковый для всех орудий снос из-за ветра. Цель оказывается пораженной, если хотя бы один снаряд попадает на отрезок $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta$ — независимые случайные величины, ξ_i имеет равномерное распределение на отрезке $[-c, c]$, а ζ — равномерное распределение на отрезке $[-d, d]$, $0 < c < d$. Найти и сравнить вероятности поражения цели (и их пределы при $n \to \infty$) в следующих случаях:

а) все орудия точно наведены на цель ($\beta_1 = \beta_2 = \ldots$ $\ldots = \beta_n = a$, $c + \varepsilon < d$);

б) точки прицела выбираются случайно ($\beta_1, \ldots, \beta_n$ — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на отрезке $[a-b, a+b]$, $b > c+d+\varepsilon$).

§ 4. Нормальное распределение

3.225°. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Какое из двух событий: $\{|\xi| \leqslant 0{,}7\}$ или $\{|\xi| \geqslant 0{,}7\}$ — имеет большую вероятность?

3.226°. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами (0, 1). Что больше:

$$\mathsf{P}\{-0{,}5 \leqslant \xi \leqslant -0{,}1\} \text{ или } \mathsf{P}\{1 \leqslant \xi \leqslant 2\}?$$

3.227°. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2. Найти $\mathsf{M}\xi^k$, $k = 1, 2, \ldots$

3.228. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2. Показать, что при любом $x > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left\{\frac{\sigma}{x} - \frac{\sigma^3}{x^3}\right\} < \mathsf{P}\{\xi \geqslant x\} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{\sigma}{x}.$$

3.229°. Случайная величина ξ распределена нормально с параметрами (a, σ^2). Найти:

а) плотность распределения величины $\eta_1 = \xi^2$ при $a = 0$;

б) плотность распределения величины $\eta_2 = e^\xi$ при произвольных a, σ.

3.230°. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma^2)$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2$.

3.231. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Распределение случайной величины $\eta_n = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ называется χ^2-распределением с n степенями свободы. Найти плотность распределения η_n.

Какое из распределений, перечисленных в конце введения к гл. 3, при соответствующем выборе параметров совпадает с распределением η_n?

3.232°. Случайная величина η_n имеет χ^2-распределение с n степенями свободы (см. задачу 3.231). Найти $\mathsf{M}\eta_n$, $\mathsf{D}\eta_n$.

3.233°. Найти $\mathsf{M}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$, если $\ln \xi$ имеет нормальное распределение с параметрами (a, σ^2) (в этом случае говорят, что ξ имеет *логарифмически нормальное распределение*).

3.234°. Для случайной величины ξ, определенной в задаче 3.233, найдите точку, в которой максимальна плотность распределения ξ (эта точка называется модой распределения). Найдите отношение математического ожидания ξ к ее моде.

3.235°. Некоторая категория людей имеет средний вес m кг и среднее квадратическое отклонение веса 3 кг. Для случаев $m = 60$ и $m = 10$ определить вероятность того, что вес случайно взятого человека отличается от m не более чем на 5 кг; если: а) вес имеет нормальное распределение; б) вес имеет логарифмически нормальное распределение.

3.236°. Для случайных величин η_1, η_2, определенных в 3.229, найти $\mathsf{M}\eta_1^k$, $\mathsf{M}\eta_2^k$.

3.237°. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Найти $\mathsf{M}\xi \cos \xi$, $\mathsf{M}\,\frac{\xi}{1+\xi^2}$, $\mathsf{M} \sin \xi$.

3.238. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Найти $\mathsf{M} \cos \xi$, $\mathsf{D} \cos \xi$.

3.239. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Что больше: $\mathsf{D} \sin \xi$ или $\mathsf{D} \cos \xi$?

3.240. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1/2. Найти $\mathsf{M} \cos(\xi^2)$, $\mathsf{M} \sin(\xi^2)$.

3.241°. Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и нормально распределены с параметрами (0, 1). Являются ли независимыми величины $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$?

3.242°. Случайная величина ξ нормально распределена с параметрами (0, 1). Положим

$$\eta = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leqslant 1, \\ -\xi, & \text{если } |\xi| > 1. \end{cases}$$

а) Найти закон распределения η.

б) Имеет ли величина $\xi + \eta$ нормальное распределение?

3.243°. Случайные величины ξ и η независимы и имеют нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Найти

$$\mathsf{P}\{|\xi - \eta| \leqslant 1\}.$$

3.244°. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и нормально распределены с параметрами (1, 1), (2, 5), (0, 7) соответственно. Найти: а) $\mathsf{P}\{2\xi_1 - \xi_2 < 0\}$, б) $\mathsf{P}\{-3 < 2\xi_1 - \xi_2 < 5\}$, в) $\mathsf{P}\{1 < 2\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 < 4\}$.

3.245. Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) имеет сферически симметричное нормальное распределение с $\mathsf{D}\xi_1 = \mathsf{D}\xi_2 = \sigma^2$. Найти распределение вектора (ζ_1, ζ_2), если

$$\zeta_1 = \xi_1 \cos\varphi + \xi_2 \sin\varphi, \qquad \zeta_2 = -\xi_1 \sin\varphi + \xi_2 \cos\varphi.$$

3.246. Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) имеет сферически симметричное нормальное распределение с $\mathsf{D}\xi_1 = \mathsf{D}\xi_2 = 1$. Доказать, что случайные величины $\xi_1\xi_2$ и $\frac{1}{2}(\xi_1^2 - \xi_2^2)$ одинаково распределены.

3.247°. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют нормальное распределение с параметрами (0, 1). Найти совместное распределение случайных величин $\zeta_1 = a\xi_1 + b\xi_2$, $\zeta_2 = a\xi_1 - b\xi_2$ при $a, b \neq 0$.

3.248°. Случайный вектор (η_1, η_2) имеет нормальное распределение с $\mathsf{M}\eta_1 = \mathsf{M}\eta_2 = 0$ и матрицей ковариаций $\begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & \gamma \\ \gamma & \sigma_2^2 \end{Vmatrix}$. Найти распределение вектора $(c_1\eta_1, c_2\eta_2)$ при $c_1, c_2 \neq 0$.

3.249. Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) имеет нормальное распределение с $\mathsf{M}\xi_1 = \mathsf{M}\xi_2 = 0$ и матрицей ковариаций $\begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & \gamma \\ \gamma & \sigma_2^2 \end{Vmatrix}$. Случайные величины ζ_1 и ζ_2 независимы и имеют нормальное распределение, $M\zeta_1 = M\zeta_2 = 0$, $D\zeta_1 = D\zeta_2 = 1$. Доказать, что случайные величины $\xi_1\xi_2$ и $\frac{1}{2}\left(\zeta_1^2(\sigma_1\sigma_2+\gamma) - \zeta_2^2(\sigma_1\sigma_2-\gamma)\right)$ одинаково распределены.

3.250. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2. Случайные величины η_1 и η_2 определяются соотношением

$$\eta_1 + i\eta_2 = \frac{(\xi_1 + i\xi_2)^k}{\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)^{(k-1)/2}},$$

где $i = \sqrt{-1}$, а $k > 0$ — целое число. Найти совместное распределение величин η_1 и η_2.

3.251. Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и имеют нормальное распределение с параметрами (0, 1). Найти математическое ожидание величины

$$\eta = e^{\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)/2}\left(1+\xi_1^2+\xi_2^2\right)^{-3/2}.$$

3.252. Случайные величины ξ, η независимы и нормально распределены с параметрами $(0, \sigma_1^2)$, $(0, \sigma_2^2)$ соответственно. Вычислить при $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$ вероятность попадания случайной точки $(\xi, \eta) \in R^2$ в следующие области: а) прямоугольник $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 2$; б) прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant 2$, $|y| \leqslant 2$; в) прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 4$; г) трапецию $x + y \leqslant 0$, $|x| \leqslant 1$, $y \geqslant -2$; д) область $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, ограниченную эллипсом, вписанным в прямоугольник $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 2$; е) область $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{4c^2} \leqslant 1$, ограниченную эллипсом, описанным около прямоугольника $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 2$.

3.253. Мост через реку представляет собой прямоугольник, координаты которого в декартовой системе координат удовлетворяют неравенствам: $|x| \leqslant 10$, $|y| \leqslant 100$. При артиллерийском обстреле моста точка попадания снаряда (ξ, η) в той же системе координат имеет двумерное нормальное распределение с независимыми координатами и со средними квадратическими отклонениями $\sigma_\xi = 10$, $\sigma_\eta = 40$. «Точкой прицеливания» назовем $(M\xi, M\eta)$. Определить вероятность попадания в мост при одном выстреле, если точка прицеливания равна: а) (0, 0); б) (10, 0); в) (5, 20).

3.254. Случайные величины ξ, η имеют сферически симметричное нормальное распределение с $D\xi = D\eta = 4$.

Найти вероятность попадания точки (ξ, η) в прямоугольник с вершинами $(0; 3)$, $(4; 0)$, $(1{,}8; 5{,}4)$, $(5{,}8; 2{,}4)$.

3.255. Случайные величины ξ, η имеют двумерное нормальное сферически симметричное распределение с $\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}\eta = 0$, $\mathsf{D}\xi = \mathsf{D}\eta = 1$. Найти вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в:

а) треугольник с вершинами $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 0)$;

б) треугольник с вершинами $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$;

в) треугольник с вершинами $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$.

3.256. Случайная точка (ξ, η) имеет сферически симметричное нормальное распределение с $\mathsf{D}\xi = \mathsf{D}\eta = 1$. Найти совместную плотность распределения ее полярных координат.

3.257. Случайная точка (ξ, η) имеет сферически симметричное нормальное распределение с $\mathsf{D}\xi = \mathsf{D}\eta = 1$. Найти вероятность попадания (ξ, η):

а) в квадрат $C = \{(x, y)\colon |x| \leqslant 3,\ |y| \leqslant 3\}$;

б) во вписанный в C круг;

в) в описанный около C круг.

3.258. Случайные величины ξ, η независимы и нормально распределены с $\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}\eta = 0$, $\mathsf{D}\xi = \mathsf{D}\eta = 4$. Найти вероятность того, что случайная точка (ξ, η) попадет в:

а) кольцо $\{(x, y)\colon 2 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 3\}$;

б) область $\{(x, y)\colon 2 \leqslant \min(|x|, |y|),\ \max(|x|, |y|) \leqslant 3\}$;

в) область $\{(x, y)\colon 2 \leqslant |x| + |y| \leqslant 3\}$.

3.259. Случайные точки $A_1 = (\xi_1, \eta_1)$ и $A_2 = (\xi_2, \eta_2)$ на плоскости R^2 независимы и имеют сферически симметричное нормальное распределение с единичной матрицей ковариаций. Найти функцию распределения длины отрезка A_1A_2.

3.260*. Случайные точки $A_1 = (\xi_1, \eta_1)$, $A_2 = (\xi_2, \eta_2)$, $A_3 = (\xi_3, \eta_3)$ на плоскости R^2 независимы и имеют нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и единичной матрицей ковариаций. Найти функцию распределения длины медианы A_1M_1 треугольника $A_1A_2A_3$.

3.261*. Доказать, что в условиях задачи **3.260** длина стороны A_2A_3 и длина медианы A_1M_1 треугольника $A_1A_2A_3$ — независимые случайные величины.

3.262*. В условиях задачи **3.260** найти вероятность того, что треугольник $A_1A_2A_3$ — тупоугольный.

3.263. Случайные точки A_1, A_2, A_3 независимы и имеют равномерное распределение на окружности единичной длины. Найти вероятность того, что треугольник $A_1A_2A_3$ — тупоугольный.

3.264°. Случайный вектор $\xi=(\xi_1, \xi_2)\in R^2$ имеет двумерное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий, область A — угол с вершиной в начале координат и раствором α. Доказать, что если область A' симметрична области A относительно начала координат, то $\mathsf{P}\{\xi\in A'\}=\mathsf{P}\{\xi\in A\}$.

3.265. Случайный вектор $\xi=(\xi_1, \xi_2)\in R^2$ имеет двумерное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0\\ 0 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$. Найти $\mathsf{P}\{|\xi_1|>a|\xi_2|\}$, $a>0$.

3.266. Случайный вектор $\xi=(\xi_1, \xi_2)\in R^2$ имеет невырожденное двумерное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей ковариаций $\|\sigma_{ij}\|_{i,j=1}^2$, $|\sigma_{12}|^2<\sigma_{11}\sigma_{22}$. Найти

$$p_{00}=\mathsf{P}\{\xi_1\geqslant 0,\ \xi_2\geqslant 0\},\qquad p_{01}=\mathsf{P}\{\xi_1\geqslant 0,\ \xi_2\leqslant 0\},$$
$$p_{10}=\mathsf{P}\{\xi_1\leqslant 0,\ \xi_2\geqslant 0\},\qquad p_{11}=\mathsf{P}\{\xi_1\leqslant 0,\ \xi_2\leqslant 0\}.$$

3.267. Случайный вектор $\xi=(\xi_1, \xi_2)\in R^2$ имеет двумерное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix}\sigma^2 & \alpha\\ \alpha & \sigma^2\end{pmatrix}$, $|\alpha|<\sigma^2$. Найти

$$\mathsf{P}\{0\leqslant\xi_1\leqslant x\xi_2\},\qquad x>0.$$

3.268°. Случайный вектор $\xi=(\xi_1, \xi_2)\in R^2$ имеет невырожденное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{pmatrix}$. Найти:

а) $\mathsf{P}\{\xi_1>a\xi_2\}$, $-\infty<a<\infty$;

б) $\mathsf{P}\{\xi_1>a\xi_2+b\}$, $-\infty<a,\ b<\infty$.

3.269. Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) имеет нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\\ \rho & \sigma_2^2\end{pmatrix}$. Показать, что функция $m(x)=\mathsf{M}\{\xi_1|\xi_2=x\}$ линейна, а $s(x)=\mathsf{D}\{\xi_1|\xi_2=x\}$ постоянна.

3.270. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют стандартное нормальное распределение, а $\xi_{(1)}\leqslant\xi_{(2)}\leqslant\xi_{(3)}$ — их вариационный ряд (см. задачу 3.60).

а) Найти распределение вектора $(\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_1)$.

б) Найти плотность $p(x_1, x_2)$ распределения вектора $(\xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \xi_{(3)} - \xi_{(1)})$.

в) Найти распределение случайной величины $\zeta = (\xi_{(2)} - \xi_{(1)})/(\xi_{(3)} - \xi_{(1)})$.

3.271. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 и $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \xi_{(3)}$ те же, что в задаче **3.270**.

а) Найти распределение вектора $(\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2)$.

б) Найти плотность $p(x_1, x_2)$ распределения вектора $(\xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \xi_{(3)} - \xi_{(2)})$.

в) Найти распределение случайной величины $\zeta = (\xi_{(2)} - \xi_{(1)})/(\xi_{(3)} - \xi_{(2)})$.

3.272. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ζ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Положим

$$\xi_3 = \begin{cases} \zeta, & \text{если } \xi_1\xi_2 = 0, \\ |\zeta| \operatorname{sgn}(\xi_1\xi_2), & \text{если } \xi_1\xi_2 \neq 0, \end{cases}$$

где $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ при $x \neq 0$.

а) Найти вектор математических ожиданий и матрицу ковариаций вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3).

б) Найти распределение ξ_3 и совместные распределения векторов (ξ_1, ξ_3) и (ξ_2, ξ_3).

в) Найти плотность $p(x_1, x_2, x_3)$ распределения вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Является ли оно нормальным?

3.273. Используя предыдущую задачу, построить пример случайного вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, распределение которого не является нормальным, но любые $n-1$ его координат взаимно независимы и имеют нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

3.274°. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ имеет сферически симметричное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и единичной ковариационной матрицей. Найти распределение вектора $\eta = \xi A$, где A — действительная матрица с k строками и m столбцами.

3.275. Случайная величина $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, имеющая нормальное распределение в R^n с нулевым математическим ожиданием и невырожденной матрицей ковариаций $A = \|a_{ij}\|$, не зависит от случайной действительной величины η, имеющей функцию распределения $F(x)$, $\mathsf{M}\eta^2 = 1$. Найти математическое ожидание и матрицу ковариаций случайной величины $\eta\xi = (\eta\xi_1, \ldots, \eta\xi_n)$.

3.276. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

Найти распределение вектора

$$\zeta = \left(\xi_1 \sqrt{1-\alpha_1^2} + \eta\alpha_1,\ \xi_2 \sqrt{1-\alpha_2^2} + \eta\alpha_2,\ \ldots \right.$$
$$\left. \ldots,\ \xi_n \sqrt{1-\alpha_n^2} + \eta\alpha_n\right),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — числа из отрезка $[0, 1]$.

3.277. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы; ξ_i имеет нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Найти распределение вектора

$$\eta = (\xi_1,\ \xi_1 + \xi_2,\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3,\ \ldots,\ \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n).$$

3.278. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют нормальное распределение с параметрами (0, 1). Найти минимальное значение k, при котором

$$\mathsf{P}\{\max\{|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_k|\} \geqslant 2\} \geqslant \frac{1}{2}.$$

3.279. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ имеет k-мерное нормальное распределение с математическим ожиданием $a \in R^k$ и ковариационной матрицей A. Что больше: $\ln|\mathsf{M}\xi_1 \ldots \xi_k|$, $\mathsf{M}\ln|\xi_1 \ldots \xi_k|$ или $\ln \mathsf{M}|\xi_1 \ldots \xi_k|$?

3.280. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$ имеет двумерное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$. Найти условное распределение ξ_1 при условии $\xi_2 = x$.

3.281. Распределение случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$ таково, что при любом $x \in (-\infty, \infty)$ условное распределение ξ_1 при условии $\xi_2 = x$ и условное распределение ξ_2 при условии $\xi_1 = x$ нормальны. Является ли нормальным распределение вектора ξ?

Глава 4

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ. ПРОИЗВОДЯЩИЕ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В курсе математического анализа рассматриваются различные виды сходимости последовательностей функций: равномерная сходимость, сходимость почти всюду, сходимость в среднем квадратичном и т. п. По аналогии с этим и в теории вероятностей рассматриваются различные виды сходимости последовательностей случайных величин (как функций, заданных на пространстве элементарных событий), а также последовательностей функций распределения.

Приведем определения тех видов сходимости последовательностей случайных величин, которые используются в задачах этой главы. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ заданы случайные величины $\xi_n = \xi_n(\omega)$ $(\omega \in \Omega,\ n = 1, 2, \ldots)$ и случайная величина $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится к случайной величине ξ *с вероятностью* 1 (*почти наверное*), если

$$\mathsf{P}\left\{\omega \in \Omega:\ \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right\} = 1.$$

Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится к случайной величине ξ *по вероятности*, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0.$$

Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится к случайной величине ξ *в среднем квадратичном*, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}|\xi_n - \xi|^2 = 0.$$

Последовательность функций распределения $F_n(x) = \mathsf{P}\{\xi_n \leqslant x\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *слабо сходится* к функции распределения $F(x) = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}$, если для любой точки x, где $F(x)$ непрерывна, выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

(в этом случае говорят также, что последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится к ξ *по распределению*; при этом $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ могут быть заданы на различных вероятностных пространствах).

Все эти определения естественным образом распространяются и на случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и ξ, принимающие векторные значения.

Понятие сходимости по в е р о я т н о с т и чаще всего используется, когда предельная случайная величина ξ имеет вырожденное распределение ($\mathsf{P}\{\xi = a\} = 1$ для некоторого числа a) и

$$\xi_n = \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n}{n},$$

где $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — случайные величины (не обязательно независимые или одинаково распределенные): если

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{\zeta_1+\ldots+\zeta_n}{n}-a\right|>\varepsilon\right\}=0$$

$$\text{для любого } \varepsilon>0, \qquad (4.1)$$

то говорят, что последовательность $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ удовлетворяет *закону больших чисел*. Из *неравенства Чебышева*

$$\mathsf{P}\{|\xi-\mathsf{M}\xi|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}$$

нетрудно вывести, что если случайные величины $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ не коррелированы, $\mathsf{M}\zeta_n=a$, $\mathsf{D}\zeta_n=\sigma^2<\infty$ $(n=1, 2, \ldots)$, то (4.1) выполняется; однако закону больших чисел удовлетворяют и другие последовательности случайных величин (см. задачи § 1).

Если вместо (4.1) выполнено соотношение

$$\mathsf{P}\left\{\omega:\ \lim_{n\to\infty}\frac{\zeta_1(\omega)+\ldots+\zeta_n(\omega)}{n}=a\right\}=1, \qquad (4.2)$$

т. е. последовательность $\dfrac{\zeta_1+\ldots+\zeta_n}{n}$ сходится к числу a с вероятностью 1, то говорят, что последовательность $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ удовлетворяет *усиленному закону больших чисел*. Соотношение (4.2) выполняется, например, если случайные величины $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ не коррелированы, $\mathsf{M}\zeta_n=a$, $\mathsf{D}\zeta_n=\sigma^2<\infty$ $(n=1, 2, \ldots)$, см. задачи **4.22—4.24**.

Пример сходимости по распределению дает Центральная предельная теорема. *Если $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины*, $\mathsf{M}\zeta_n=a$, $\mathsf{D}\zeta_n=\sigma^2<\infty$ $(n=1, 2, \ldots)$, *то для любого* x, $-\infty<x<\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\frac{\zeta_1+\ldots+\zeta_n-na}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du=\Phi(x).$$

Сходимость распределений центрированных и нормированных сумм случайных величин к стандартному нормальному распределению имеет место и при других предположениях о случайных слагаемых (см. задачу **4.134** и другие задачи из § 5).

Другим важным примером сходимости по распределению являются теоремы о сходимости к распределению Пуассона (см. задачи **4.105** и **4.113**).

Практическое значение предельных теорем состоит в том, что они позволяют аппроксимировать распределения допредельных случайных величин ξ_n (при достаточно больших n) распределением предельной случайной величины ξ; это особенно полезно в тех случаях, когда аналитическая запись функции распределения ξ проще выражения для функции распределения ξ_n. Следует иметь в виду, однако, что вопрос о том, достаточно ли велико n для того, чтобы обеспечить нужную точность приближения, в каждом случае требует особого исследования; см., например, задачи **2.61**, **2.62**, а также **4.107**, **4.123**, **4.124**.

Доказательства предельных теорем могут использовать как прямые вероятностные методы (изучение распределений допредельных случайных величин или их моментов, см. задачи из § 2), так и аналитические методы, основанные на использовании свойств производящих или характеристических функций распределений допредельных случайных величин (см. задачи из § 5).

Если случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения, то *производящей функцией* распределения ξ называется функция комплексного переменного z

$$\varphi_\xi(z) = \mathsf{M}z^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathsf{P}\{\xi = k\}, \quad |z| \leqslant 1;$$

производящую функцию можно рассматривать и в случае, когда ξ принимает и отрицательные значения, если область сходимости ряда в правой части последнего равенства отлична от окружности $|z| = 1$.

Если случайная величина ξ принимает действительные значения, то *характеристической функцией* распределения ξ называется функция действительного переменного t

$$f_\xi(t) = \mathsf{M}e^{it\xi}, \quad -\infty < t < \infty;$$

в частности, если распределение ξ абсолютно непрерывно и имеет плотность $p_\xi(x)$, то

$$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_\xi(x)\, dx.$$

Перечислим важнейшие свойства производящих и характеристических функций.

1. Если $\mathsf{P}\{|\xi| < \infty\} = 1$, то функции $f_\xi(t) = \mathsf{M}e^{it\xi}$ и $\varphi_\xi(z) = \mathsf{M}z^\xi$ непрерывны и $f_\xi(0) = \varphi_\xi(1) = 1$.

2. Если $\mathsf{M}|\xi|^k < \infty$ для некоторого целого $k \geqslant 1$, то

$$\frac{d^k}{dt^k} f_\xi(t)\Big|_{t=0} = i^k \mathsf{M}\xi^k, \quad \frac{d^k}{dz^k} \varphi_\xi(z)\Big|_{z=1-} = \mathsf{M}\xi^{[k]}$$

(по поводу обращения этих утверждений см. задачи 4.67, 4.95, 4.96).

3. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы, то

$$f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t) = f_{\xi_1}(t) \ldots f_{\xi_n}(t),$$

$$\varphi_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(z) = \varphi_{\xi_1}(z) \ldots \varphi_{\xi_n}(z)$$

(обратное утверждение неверно, см. задачу 4.157).

4. Если производящие (или характеристические) функции распределений случайных величин ξ_1 и ξ_2 совпадают, то совпадают и функции распределения ξ_1 и ξ_2.

5. (Теорема непрерывности.) Последовательность $F_n(x) = \mathsf{P}\{\xi_n \leqslant x\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ функций распределения слабо сходится к функции распределения $F(x) = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}$ тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t),$$

где $f_n(t) = \mathsf{M}e^{it\xi_n}$. В этом случае $f(t) = \mathsf{M}e^{it\xi}$, и сходимость $f_n(t) \to f(t)$ равномерна на каждом конечном интервале значений t.

6. (Формулы обращения.) Если функция $f(t) = \mathsf{M}e^{it\xi}$ абсолютно интегрируема, то распределение случайной величины ξ имеет ограниченную непрерывную плотность $p(x)$ и

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)\, dt.$$

Если x и $x+h$ — точки непрерывности функции распределения $F(x) = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}$, то

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{2\pi} \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-a^2t^2/2} \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} dx.$$

Производящие и характеристические функции векторных случайных величин $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k) \in R^k$ определяются формулами

$$f_\xi(t_1, \ldots, t_k) = \mathsf{M} \exp\{i(t_1\xi_1 + \ldots + t_k\xi_k)\},$$

$$\varphi_\xi(z_1, \ldots, z_k) = \mathsf{M}\, z_1^{\xi_1} \ldots z_k^{\xi_k}.$$

Их свойства аналогичны свойствам производящих и характеристических функций одномерных случайных величин. Например, если $\mathsf{M}|\xi_1|^{r_1} \ldots |\xi_k|^{r_k} < \infty$ для целых $r_1, \ldots, r_k \geqslant 0$, то

$$\left.\frac{\partial^{r_1+\ldots+r_k}}{\partial t_1^{r_1} \ldots \partial t_k^{r_k}} f_\xi(t_1, \ldots, t_k)\right|_{t_1=\ldots=t_k=0} = i^{r_1+\ldots+r_k}\mathsf{M}\xi_1^{r_1} \ldots \xi_k^{r_k},$$

$$\left.\frac{\partial^{r_1+\ldots+r_k}}{\partial z_1^{r_1} \ldots \partial z_k^{r_k}} \varphi_\xi(z_1, \ldots, z_k)\right|_{z_1=\ldots=z_k=1-} = \mathsf{M}\xi_1^{[r_1]} \ldots \xi_k^{[r_k]}.$$

Таблицы А и Б содержат формулы для производящих и характеристических функций наиболее часто встречающихся распределений.

Отметим, что приведенная в табл. Б формула для плотности многомерного нормального распределения в R^k имеет смысл лишь в случае, когда матрица ковариаций B не вырождена (т. е. определитель B отличен от 0), поскольку распределения с вырожденными матрицами ковариаций не являются абсолютно непрерывными. Однако формула для характеристической функции многомерного нормального распределения справедлива при любой матрице ковариаций B.

Многомерные нормальные распределения с вырожденной матрицей ковариаций естественным образом появляются как предельные распределения в *многомерном варианте центральной предельной теоремы*: если ζ_1, ζ_2, ...— независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в k-мерном евклидовом пространстве R^k, с математическим ожиданием $a \in R^k$ и матрицей ковариаций B (не обязательно невырожденной), то последовательность распределений случайных величин

$$\frac{\zeta_1 + \ldots + \zeta_n - na}{\sqrt{n}}$$

при $n \to \infty$ слабо сходится к многомерному нормальному распределению в R^k с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей ковариаций B.

Таблица А. **Производящие функции**

Название распределения	Формула для $P\{\xi=k\}$	Производящая функция
Равномерное	$\frac{1}{N}, \quad k=1, 2, \ldots, N$	$\frac{1-z^N}{1-z} z$
Геометрическое	$(1-p) p^k, \quad k=0, 1, \ldots$	$\frac{1-p}{1-pz}$
Биномиальное	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0, 1, \ldots, n$	$(1+p(z-1))^n$
Пуассоновское	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k=0, 1, \ldots$	$e^{\lambda(z-1)}$

Таблица Б. **Характеристические функции**

Название распределения	Формула для плотности	Характеристическая функция
Равномерное	$\frac{1}{a}, \quad 0 \leqslant x \leqslant a$	$\frac{e^{iat}-1}{iat}$
Равномерное	$\frac{1}{2a}, \quad -a \leqslant x \leqslant a$	$\frac{\sin at}{at}$
Показательное	$\alpha e^{-\alpha x}, \quad x \geqslant 0$	$\frac{1}{1-it/\alpha}$
Гамма-распределение	$\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \geqslant 0$	$\frac{1}{(1-it)^{\alpha}}$
Нормальное распределение	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < \infty$	$e^{ita-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Распределение Коши	$\frac{1}{\pi} \frac{b}{b^2+x^2}$, $-\infty < x < \infty$	$e^{-b\|t\|}$
Многомерное нормальное распределение в R^k	$\frac{e^{-(x-a, B^{-1}(x-a))/2}}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{\det B}}$, $x \in R^k$	$e^{i(t,a)-\frac{1}{2}(t,Bt)}$

§ 1. Закон больших чисел. Лемма Бореля — Кантелли

4.1°. Пусть функция $g(x)$, $x \geqslant 0$, неотрицательна и монотонно возрастает. Показать, что для любой действительной случайной величины ξ справедливо неравенство

$$\mathsf{P}\{|\xi| \geqslant x\} \leqslant \frac{\mathsf{M}g(|\xi|)}{g(x)}.$$

4.2°. Пусть случайная величина η_n равна сумме очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя неравенство Чебышева, оценить сверху

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - 3{,}5\right| > \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

4.3°. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$ — результаты $n+1$ испытаний схемы Бернулли ($\mathsf{P}\{\xi_i = 1\} = p$, $\mathsf{P}\{\xi_i = 0\} = 1 - p$) и случайная величина η_n равна числу таких i, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $\xi_i = \xi_{i+1} = 1$. Используя неравенство Чебышева, оценить сверху

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - p^2\right| > \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

4.4. Последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ образованы одинаково распределенными случайными величинами, независимыми внутри каждой последовательности (случайные величины ξ_i и η_i могут не быть независимыми), $\mathsf{M}\xi_i = \mathsf{M}\eta_j = a$, $\mathsf{D}\xi_i = \mathsf{D}\eta_j < \infty$. Выполняется ли закон больших чисел для последовательности $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$:

$$\zeta_{2k-1} = \xi_k, \quad \zeta_{2k} = \eta_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

4.5°. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение,

$$\eta_n = \cos\frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Удовлетворяют ли последовательности $\eta_1, \eta_3, \eta_5, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ закону больших чисел?

4.6°. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ образована независимыми случайными величинами, имеющими нормальные распределения,

$$\mathsf{M}\xi_k = 0, \quad \mathsf{D}\xi_k = Ck^{\alpha}, \quad C > 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Описать множество тех значений α, при которых последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ удовлетворяет закону больших чисел.

4.7. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ образована независимыми случайными величинами,

$$\mathsf{M}\xi_k = 0, \quad \mathsf{D}\xi_k = Ck^\alpha, \quad C > 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

При каких значениях α последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ может удовлетворять закону больших чисел и при каких значениях α может не удовлетворять ему?

4.8. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathsf{M}\xi_k = 0$, $\mathsf{D}\xi_k = \sigma^2 < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$ Удовлетворяют ли закону больших чисел последовательности случайных величин

$$\zeta_n = \xi_n + \xi_{n+1}, \quad \eta_n = \sum_{k=0}^{[n^{1/3}]} \xi_{n+k}, \quad n = 1, 2, \ldots?$$

4.9. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, $\mathsf{M}\xi_i = a$, $\mathsf{D}\xi_i = \sigma^2 < \infty$. Пусть $\zeta_n = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \xi_i\xi_j$. Показать, что последовательность ζ_n удовлетворяет закону больших чисел: для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{\zeta_n}{C_n^2} - a^2\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

4.10. Показать, что утверждение предыдущей задачи останется справедливым, если в ее формулировке заменить условие независимости $\xi_1, \xi_2, \ldots$ условием их некоррелированности:

$$\mathsf{M}(\xi_i - a)(\xi_j - a) = 0, \quad 1 \leqslant i < j < \infty.$$

4.11. Пусть функция $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, ограничена и интегрируема, а $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$.

а) Доказать, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_n)}{n} - \int_0^1 f(x)\,dx\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

б) Найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_n)}{n} - \int_0^1 f(x)\,dx\right| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right\}, \qquad \varepsilon > 0.$$

4.12. Пусть ограниченная интегрируемая функция $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, имеет период 1, а случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Построим последовательность случайных величин

$$\zeta_k = f(\xi + k\eta), \quad k = 1, 2, \ldots$$

а) Доказать, что случайные величины $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ попарно независимы и одинаково распределены. Найти $\mathsf{M}\zeta_1$, $\mathsf{D}\zeta_1$.

б) Показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{\zeta_1 + \ldots + \zeta_n}{n} - \int_0^1 f(x)\,dx\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

в) Показать, что если $\left|f(y) - \int_0^1 f(x)\,dx\right| > \varepsilon$ при всех $y \in [a, b] \subset (0, 1)$, то при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\zeta_1 + \ldots + \zeta_n}{n} - \int_0^1 f(x)\,dx\right| > \varepsilon\right\} \geqslant 2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2.$$

4.13. Пусть случайный вектор $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)})$ имеет нормальное распределение в R^n с нулевым вектором математических ожиданий и единичной матрицей ковариаций, а $B_{r,\varepsilon}$ — множество всех таких точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, что

$$(1-\varepsilon)\, r \leqslant \|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2} \leqslant (1+\varepsilon)\, r.$$

Показать, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\xi^{(n)} \in B_{\sqrt{n},\varepsilon}\} = 1.$$

4.14*. Пусть случайный вектор $\xi^{(n)}$ тот же, что в предыдущей задаче, а $C_{r,\varepsilon}$ — множество всех таких точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, что

$$(1-\varepsilon)\, r \leqslant |x_1| + \ldots + |x_n| \leqslant (1+\varepsilon)\, r, \quad \varepsilon > 0.$$

Показать, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\xi^{(n)} \in C_{n\sqrt{2/\pi},\varepsilon}\} = 1.$$

Сравнить с результатом задачи **4.13.**

4.15. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, одинаково распределены, имеют математическое ожидание a и для некоторого ε, $0 < \varepsilon < 1$,

$$m_\varepsilon = \mathsf{M}|\xi_1 - a|^{1+\varepsilon} < \infty.$$

Показать, что для любого $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - a\right| > \delta\right\} = 0.$$

4.16. Лемма Бореля — Кантелли. Пусть A_1, $A_2, \ldots$ — события, заданные на одном вероятностном пространстве, и случайная величина ν равна числу одновременно происходящих событий. Показать, что:

а) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{A_n\} < \infty$, то $\mathsf{P}\{\nu < \infty\} = 1$,

б) если события $A_1, A_2, \ldots$ попарно независимы и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{A_n\} = \infty$, то $\mathsf{P}\{\nu = \infty\} = 1$.

4.17. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — события, заданные на одном вероятностном пространстве, и случайная величина ν равна числу одновременно происходящих событий. Показать, что если $\mathsf{P}\{A_n\} \geqslant a > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\mathsf{P}\{\nu = \infty\} \geqslant a$.

4.18. Последовательность чисел c_n удовлетворяет условиям $0 \leqslant c_n \leqslant 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Всегда ли существует такая последовательность событий $A_1, A_2, \ldots$, что $\mathsf{P}\{A_n\} = c_n$ и для числа ν одновременно происходящих событий справедливо соотношение $\mathsf{P}\{\nu < \infty\} = 1$?

4.19. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин и случайная величина ζ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{|\xi_n - \zeta| > \varepsilon\} < \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0.$$

Показать, что $\mathsf{P}\left\{\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \zeta\right\} = 1$.

4.20. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин и случайная величина ζ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{M}(\xi_n - \zeta)^2 < \infty.$$

Показать, что $\mathsf{P}\left\{\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \zeta\right\} = 1$.

4.21. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют одно и то же показательное распределение с параметром λ:

$$\mathsf{P}\{\xi_n \leqslant x\} = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Пусть ε — произвольное число из интервала $(0, 1/\lambda)$, случайная величина ν_ε равна числу одновременно происходящих событий $A_n^\varepsilon = \left\{\frac{\xi_n}{\ln n} > \frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right\}$, а μ_ε — числу одновременно происходящих событий

$$B_n^\varepsilon = \left\{\max_{\sqrt{n} < k < n} \frac{\xi_k}{\ln k} < \frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right\}.$$

а) Показать, что $\mathsf{P}\{\nu_\varepsilon < \infty\} = \mathsf{P}\{\mu_\varepsilon < \infty\} = 1$ при любом $\varepsilon \in (0, 1/\lambda)$.

б) Вывести из результата п. а), что последовательность случайных величин $\zeta_n = \frac{\xi_n}{\ln n}$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условию

$$\mathsf{P}\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \zeta_n = \frac{1}{\lambda}\right\} = 1.$$

4.22. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеют математическое ожидание a и дисперсию $\sigma^2 < \infty$ и не коррелированы:

$$\mathsf{M}(\xi_i - a)(\xi_j - a) = 0 \quad \text{при любых } i \neq j.$$

Доказать, что

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_{n^2}}{n^2} = a\right\} = 1.$$

4.23. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеют математическое ожидание a и дисперсию $\sigma^2 < \infty$ и не коррелированы, а

$$\eta_n = \max_{n^2 < k \leqslant (n+1)^2} \left|\xi_{n^2+1} + \xi_{n^2+2} + \ldots + \xi_k - (k - n^2)\, a\right|,$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

Доказать, что $\mathsf{P}\left\{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\eta_n}{n^2} = 0\right\} = 1$.

4.24*. Усиленный закон больших чисел. Доказать, что если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеют математическое ожидание a, дисперсию $\sigma^2 < \infty$ и не коррелированы, то

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} = a\right\} = 1.$$

§ 2. Прямые методы доказательства предельных теорем

В этом параграфе задачи 4.25—4.32 связаны с нахождением предельных распределений с помощью анализа свойств допредельных распределений, задачи 4.33—4.44 — с применениями закона больших чисел, в задачах 4.45—4.57 изучаются свойства различных видов сходимости последовательностей случайных величин.

4.25. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одно и то же геометрическое распределение с параметром p, $0 < p < 1$:

$$\mathsf{P}\{\xi_i = k\} = (1-p)p^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

а) Показать, что

$$\mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_n = k\} = C_{k+n-1}^{n-1}(1-p)^n p^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

б) Найти

$$q_k^{(n)} = \lim_{m\to\infty} \mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_n - m = k \mid \xi_1 + \ldots + \xi_n \geqslant m\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

4.26 (см. задачу 1.53). Первый ряд кинотеатра состоит из N кресел. Зрители один за другим заполняют этот ряд, причем каждый из них может с равной вероятностью занять любое из кресел, свободных в момент его прихода. Пусть $\tau_1(N)$ — порядковый номер первого зрителя, который сел в кресло, находящееся рядом с уже занятым креслом, $\tau_2(N)$ — порядковый номер первого зрителя, который сел в кресло, симметричное относительно середины ряда одному из занятых кресел. Найти законы распределения $\tau_1(N)$ и $\tau_2(N)$ и предельные при $N\to\infty$ распределения случайных величин $\dfrac{\tau_i(N)}{\sqrt{N}}$, $i = 1, 2$, т. е. функции $G_i(x) = \lim\limits_{N\to\infty} \mathsf{P}\left\{\dfrac{\tau_i(N)}{\sqrt{N}} \leqslant x\right\}$.

4.27°. Плотность $p_\xi(x)$ случайной величины ξ непрерывна и ограничена на отрезке $[a, b]$ и равна 0 вне $[a, b]$. Положим $\eta_n = \{n\xi\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\eta_n \leqslant x\}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

4.28. Показать, что утверждение предыдущей задачи справедливо для случайной величины ξ с кусочно-непрерывной плотностью.

4.29. Случайная величина ξ имеет непрерывную плотность распределения $p(x)$. Найти предельное распределение случайной величины $\operatorname{tg} n\xi$ при $n \to \infty$.

4.30 (см. задачи 4.28 и 4.29). Случайная величина ξ имеет непрерывную плотность распределения $p(x)$. Найти предельное распределение случайных величин $\zeta_n = \frac{1}{i}\frac{(1+i\xi)^n-(1-i\xi)^n}{(1+i\xi)^n+(1-i\xi)^n}$ при $n \to \infty$ (здесь $i=\sqrt{-1}$).

4.31*. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Найти предельное (при $x \to \infty$) распределение для условного распределения случайной величины $(\xi - x)x$ при условии $\xi > x$ (ср. с задачей 3.228).

4.32. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$, а $\varkappa_n = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Найти такие последовательности чисел a_n и b_n, что последовательность $a_n\varkappa_n + b_n$ сходится по распределению при $n \to \infty$ к невырожденной случайной величине $\varkappa$, и найти функцию распределения $\varkappa$ в случаях, когда:

а) $F(x) = 0$ $(x \leqslant 1)$, $F(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha}$ $(x \geqslant 1,\ \alpha > 0)$,

б) $F(x) = \max\{0,\ 1 - |x|^\alpha\}$ $(x \leqslant 0,\ \alpha > 0)$, $F(x) = 1$ $(x \geqslant 0)$,

в) $F(x) = \max\{0,\ 1 - e^{-x}\}$.

4.33. Последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ случайных величин таковы, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|\xi_n| \leqslant \varepsilon\} = 1 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0,$$

и существует функция распределения $F(x)$, для каждой точки непрерывности которой выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\eta_n \leqslant x\} = F(x).$$

Доказать, что при любом характере зависимости между ξ_n и η_n для каждой точки непрерывности $F(x)$ справедливы равенства:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\eta_n + \xi_n \leqslant x\} = F(x)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\eta_n(1+\xi_n) \leqslant x\} = F(x)$.

4.34. Случайные величины $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ независимы,

$$\mathsf{P}\{\zeta_i = 1\} = p, \quad \mathsf{P}\{\zeta_i = 0\} = 1 - p, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Положим $\xi_i^{(k)} = \zeta_i(1 - \zeta_{i+1}\zeta_{i+2}\ldots\zeta_{i+k})$, $\eta_n^{(k)} = \xi_1^{(k)} + \ldots$ $\ldots + \xi_n^{(k)}$. В случае когда $0 < p < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} p^{k(n)}\sqrt{n} = 0$, найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\eta_n^{(k(n))} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right\}.$$

4.35. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — такие последовательности случайных величин, что для некоторых чисел a, b для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|\xi_n - a| > \varepsilon\} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|\eta_n - b| > \varepsilon\} = 0.$$

Доказать, что при любом характере зависимости между ξ_n и η_n для любого $\varepsilon > 0$:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|\xi_n - a| < \varepsilon,\ |\eta_n - b| < \varepsilon\} = 1$;

б) если функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (a, b), то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|f(\xi_n, \eta_n) - f(a, b)| < \varepsilon\} = 1.$$

4.36. Пусть $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots$, — независимые одинаково распределенные векторы в R^2,

$$\mathsf{M}\xi_1^{(i)} = a_1 > 0, \quad \mathsf{M}\xi_2^{(i)} = a_2 > 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Доказать, что последовательность случайных величин

$$\eta_n = \frac{\xi_1^{(1)} + \xi_1^{(2)} + \ldots + \xi_1^{(n)}}{\xi_2^{(1)} + \xi_2^{(2)} + \ldots + \xi_2^{(n)}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

сходится по распределению к a_1/a_2, если либо а) $\mathsf{D}\xi_1^{(i)} < \infty$, $\mathsf{D}\xi_2^{(i)} < \infty$, либо б) $\mathsf{M}|\xi_1^{(i)}|^{1+\varepsilon} < \infty$, $\mathsf{M}|\xi_2^{(i)}|^{1+\varepsilon} < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

4.37°. В последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайная величина ξ_n при любом $n = 1, 2, \ldots$ имеет геометрическое распределение с параметром q_n, $q_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Найти предельное распределение случайных величин

$$\zeta_n = q_n\xi_n \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

4.38°. Время ξ безотказной работы прибора имеет математическое ожидание $a > 0$ и дисперсию $\sigma^2 < \infty$. При каждом отказе прибор подвергается ремонту (и тогда время до следующего отказа не зависит от предыстории и распределено так же, как ξ), после k-го отказа прибор списывается как негодный. Пусть τ_k — суммарное время, которое прибор проработал до списания.

а) Найти $\mathsf{M}\tau_k$, $\mathsf{D}\tau_k$.

б) Показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{\tau_k}{\mathsf{M}\tau_k} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0.$$

4.39. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием $a > 0$ и дисперсией $\sigma^2 < \infty$, случайная величина ν не зависит от $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и принимает целые положительные значения, $\mathsf{M}\nu = b$ и

$$\tau = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\nu.$$

Найти $\mathsf{M}\tau$ и предельное распределение случайной величины $\tau/(\mathsf{M}\tau)$, когда распределение ν изменяется так, что $\mathsf{M}\nu \to \infty$ и существует непрерывная функция распределения $F(x)$, удовлетворяющая условиям $F(0) = 0$,

$$\lim \mathsf{P}\left\{\frac{\nu}{\mathsf{M}\nu} \leqslant x\right\} = F(x), \quad 0 \leqslant x < \infty.$$

4.40. Время ξ безотказной работы прибора имеет математическое ожидание $a > 0$ и дисперсию $\sigma^2 < \infty$. Каждый отказ прибора независимо от предыстории и длин периодов безотказной работы с вероятностью p является несущественным (прибор требует только наладки), а с вероятностью $q = 1 - p$ — существенным (прибор нужно ремонтировать). Пусть τ_q — время от начала работы прибора до его ремонта.

а) Найти $\mathsf{M}\tau_q$, $\mathsf{D}\tau_q$.

б) Найти предельное распределение случайной величины $\tau_q/\mathsf{M}\tau_q$, когда параметры $a > 0$ и $\sigma^2 < \infty$ фиксированы, а $q \to 0$.

4.41*. На одном вероятностном пространстве заданы событие A, $\mathsf{P}\{A\} = p$, и случайная величина ξ, имеющая математическое ожидание a и дисперсию $\sigma^2 < \infty$. Доказать, что при любом характере зависимости между ξ и A

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant x \mid A\} \leqslant \frac{\sigma^2}{p(x-a)^2}, \quad x > a,$$

$$|\mathsf{M}\{\xi \mid A\} - a| \leqslant \sigma \min\left\{\frac{1}{\sqrt{p}}, \frac{\sqrt{1-p}}{p}\right\}.$$

4.42*. Последовательность $(\xi_1, \varepsilon_1), (\xi_2, \varepsilon_2), \ldots$ состоит из независимых пар случайных величин (внутри пар случайные величины могут быть зависимыми),

$$\mathsf{M}\xi_i = a, \quad \mathsf{D}\xi_i \leqslant \sigma^2,$$
$$\mathsf{P}\{\varepsilon_i = 1\} = 1 - \mathsf{P}\{\varepsilon_i = 0\} = q.$$

Положим $\nu = \min\{i \geqslant 1: \varepsilon_i = 1\}$,

$$\tau_1 = \xi_1 + \ldots + \xi_{\nu-1} \quad (\tau_1 = 0 \text{ при } \nu = 1),$$
$$\tau_2 = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu.$$

Найти предельные распределения случайных величин $q\tau_1$, $q\tau_2$, когда параметры $a > 0$ и $\sigma^2 < \infty$ фиксированы, а $q \to 0$.

4.43. Процесс работы прибора состоит из независимых одинаково распределенных циклов; длина ξ цикла имеет математическое ожидание $a > 0$ и дисперсию $\sigma^2 < \infty$. Вероятность того, что за один цикл прибор не сломается, равна p, вероятность поломки прибора на любом фиксированном цикле равна $q = 1 - p$ (поломка прибора может зависеть от длины цикла). Пусть τ — время до первой поломки прибора.

Найти предельное распределение случайной величины $q\tau/a$, когда $q \to 0$, $a \to a_0 > 0$, $\sigma^2 \to \sigma_0^2 < \infty$.

4.44. В бункер помещается не более $N = 150$ деталей. Ежеминутно в бункер поступает случайное число деталей, имеющее распределение Пуассона с параметром $\lambda = 2$; числа деталей, поступающих в бункер в непересекающиеся интервалы времени, независимы. Через каждый час все находящиеся в бункере детали перегружаются в тележку и отправляются на дальнейшую обработку. В начальный момент времени бункер свободен. Пользуясь предельными теоремами, указать приближенное значение вероятности того, что за время $T = 100$ часов не произойдет ни одного переполнения бункера.

4.45. Показать, что если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится к ξ с вероятностью 1 или в среднем квадратичном, то она сходится по вероятности и по распределению. Привести пример последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$, сходящейся к ξ по вероятности, но не сходящейся ни в среднем квадратичном, ни с вероятностью 1.

4.46. Последовательность случайных величин ξ_1, $\xi_2, \ldots$, сходится к ξ по распределению. Показать, что можно задать на одном вероятностном пространстве случайные величины $\xi_1', \xi_2', \ldots$ и ξ' так, что для всех x

$$\mathsf{P}\{\xi' \leqslant x\} = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}, \quad \mathsf{P}\{\xi_n' \leqslant x\} = \mathsf{P}\{\xi_n \leqslant x\},$$
$$n = 1, 2, \ldots,$$

и последовательность $\xi_1', \xi_2', \ldots$ сходится к ξ' с вероятностью 1.

4.47. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, $x \in (-\infty, \infty)$, а последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится к случайной величине ξ (с вероятностью 1, по вероятности или по распределению).

а) Сходится ли (в тех же смыслах) последовательность $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots$ к $f(\xi)$?

б) Сходится ли (в тех же смыслах) последовательность $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots$ к $f(\xi)$, если $f(x)$ кусочно-непрерывна (имеет конечное число разрывов на любом конечном интервале), а функция распределения ξ непрерывна?

4.48. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин удовлетворяет условиям

$$\mathsf{P}\{\xi_{n+1} \geqslant \xi_n\} = 1 \text{ для любого } n = 1, 2, \ldots,$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\xi_n = a < \infty.$$

Доказать, что существует случайная величина ξ, для которой

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi\right\} = 1.$$

Верно ли равенство $\mathsf{M}\xi = a$?

4.49. Последовательность точек $\xi_1, \xi_2, \ldots$ на отрезке $[0, 1]$ строится по следующему правилу: ξ_1 имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, и если значения $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$ ($k \geqslant 2$) определены, то точка ξ_k имеет равномерное распределение на минимальном по длине из k отрезков, на которые $[0, 1]$ разбивается точками $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$.

а) Доказать, что существует случайная величина ξ, удовлетворяющая условию $\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi\right\} = 1$.

б) Найти $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{D}\xi$.

4.50. Последовательность точек $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ на отрезке $[0, 1]$ строится по следующему правилу: $\xi_0 = 0$, ξ_1 имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, а ξ_n при любом $n \geqslant 2$ имеет равномерное распределение на интервале, образованном ξ_{n-1} и ξ_{n-2}.

а) Доказать, что существует случайная величина ξ, удовлетворяющая условию $\mathsf{P}\left\{\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi\right\} = 1$.

б) Найти $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{D}\xi$.

4.51*. Последовательность случайных величин ξ_1, ξ_2, ..., последовательности чисел $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и случайная величина ξ удовлетворяют условиям

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad |a| < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \quad \mathsf{P}\{|\xi| < \infty\} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\xi_n - a_n}{b_n} \leqslant x\right\} = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}$$

в каждой точке непрерывности функции $F(x) = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}$. Функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки a и $g'(a) \neq 0$. Доказать, что в каждой точке непрерывности $F(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{g(\xi_n) - g(a_n)}{b_n g'(a_n)} \leqslant x\right\} = F(x).$$

4.52. Последовательность случайных величин ξ_1, ξ_2, ..., последовательности чисел $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и случайная величина ξ удовлетворяют тем же условиям, что в задаче 4.51. Функция $g(x)$ имеет $k \geqslant 2$ непрерывных производных в окрестности точки a и

$$g'(a) = g''(a) = \ldots = g^{(k-1)}(a) = 0, \quad g^{(k)}(a) \neq 0.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{g(\xi_n) - g(a_n)}{b_n^k g^{(k)}(a_n)} \leqslant x\right\} = \mathsf{P}\{\xi^k \leqslant x\}$$

в каждой точке непрерывности функции $F_k(x) = \mathsf{P}\{\xi^k \leqslant x\}$.

4.53. Случайная величина μ_n равна числу успехов в n независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p, $0 < p < 1$.

а) Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\dfrac{(\mu_n - np)^2}{np(1-p)} \leqslant x\right\}$.

б) Пусть $0 < z < 1$, $z \neq p$. Найти такие последовательности чисел $A_n(z)$ и $B_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{(\mu_n - nz)^2 - A_n(z)}{B_n(z)} \leqslant x\right\} = \Phi(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

4.54*. Случайная величина μ_n равна числу успехов в n независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p; функция $g(x)$ определяется соотношениями

$$g(x)=\begin{cases} x\ln x+(1-x)\ln(1-x), & 0<x<1, \\ 0, \quad x=0 \text{ или } x=1. \end{cases}$$

а) При $p=1/2$ найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{n\left(g\left(\frac{\mu_n}{n}\right)+\ln 2\right)\leqslant x\right\}, \qquad x\geqslant 0.$$

б) При $0<p<1$, $p\neq 1/2$, указать такую последовательность $B_n(p)$, $n=1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{B_n(p)\left(g\left(\frac{\mu_n}{n}\right)-g(p)\right)\leqslant x\right\}=\Phi(x),$$

$$-\infty<x<\infty.$$

4.55. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и последовательности чисел $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\xi_n-a_n}{b_n}\leqslant x\right\}=\Phi(x) \text{ для любого } x, \quad |x|<\infty.$$

Пусть $a_1', a_2', \ldots$ и $b_1', b_2', \ldots$ — две другие последовательности чисел. Рассмотрим три группы условий:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n'}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n'}{b_n}=1$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n'-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n'-b_n)=0$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n'-a_n}{b_n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n'}{b_n}=1$.

Какие из условий а), б), в) обеспечивают выполнение соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\xi_n-a_n'}{b_n'}\leqslant x\right\}=\Phi(x) \text{ для любого } x, \quad |x|<\infty?$$

4.56. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится к случайной величине ξ по распределению.

а) Пусть существуют и конечны величины

$$m=\mathsf{M}\xi, \quad m_n=\mathsf{M}\xi_n, \quad m_\infty=\lim_{n\to\infty} m_n.$$

Какие из соотношений $m<m_\infty$, $m=m_\infty$, $m>m_\infty$ могут, а какие не могут выполняться?

б) Ответить на вопрос п. а) при дополнительном условии $\mathsf{M}\xi^2<\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{M}\xi_n^2<\infty$.

4.57. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится к случайной величине ξ по распределению.

а) Пусть существуют и конечны величины

$$M = \mathsf{M}\xi^2, \quad M_n = \mathsf{M}\xi_n^2, \quad M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n.$$

Какие из соотношений $M < M_\infty$, $M = M_\infty$, $M > M_\infty$ могут, а какие не могут выполняться?

б) Пусть существуют и конечны величины

$$\sigma^2 = \mathsf{D}\xi, \quad \sigma_n^2 = \mathsf{D}\xi_n, \quad \sigma_\infty^2 = \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2.$$

Какие из соотношений $\sigma^2 < \sigma_\infty^2$, $\sigma^2 = \sigma_\infty^2$, $\sigma^2 > \sigma_\infty^2$ могут, а какие не могут выполняться?

§ 3. Характеристические и производящие функции

В этом параграфе задачи 4.58 — 4.83 связаны с вычислением производящих функций, моментов случайных величин и характеристических функций, в задачах 4.84—4.99 рассматриваются различные свойства характеристических функций, а в задачах 4.100—4.104 вычисляются характеристические функции специальных распределений и исследуются свойства многомерного нормального распределения.

4.58°. Найти производящие функции целочисленных распределений:

а) пуассоновского: $\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ $0 < \lambda < \infty$;

б) геометрического: $\mathsf{P}\{\xi = k\} = pq^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $p, q > 0$, $p + q = 1$;

в) биномиального: $\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$; $p, q > 0$, $p + q = 1$.

4.59°. Найти производящую функцию $\varphi(z)$ числа ξ_n успехов в n независимых испытаниях, если вероятность успеха в каждом испытании равна p. Используя этот результат, найти формулы для $\mathsf{M}\xi_n$, $\mathsf{M}\xi_n^{[k]}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\mathsf{D}\xi_n$.

4.60°. Производящая функция распределения случайной величины ξ, принимающей целые неотрицательные значения, равна $\varphi(z) = \mathsf{M}z^\xi$.

а) Найти $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{D}\xi$, $\mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^3$.

б) Найти производящие функции $\varphi_i(z) = \mathsf{M}z^{\zeta_i}$ случайных величин $\zeta_1 = \xi/2$, $\zeta_2 = 2\xi$, $\zeta_3 = -\xi$ и $\zeta_4 = \xi_1 - \xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие то же распределение, что ξ.

в) Доказать, что при $b > a > 0$

$$\mathsf{M}\frac{1}{\xi + a} = \int_0^1 z^{a-1}\varphi(z)\,dz,$$

$$\mathsf{M}\frac{1}{(\xi + a)(\xi + b)} = \int_0^1 z^{b-a-1}\int_0^z u^{a-1}\varphi(u)\,du\,dz.$$

4.61°. Пусть τ_1 — порядковый номер первого из испытаний схемы Бернулли (т. е. последовательности независимых испытаний), которое окончилось успехом (вероятность успеха в каждом испытании равна p, неудачи — $q = 1 - p$). Найти $\mathsf{M}\tau_1$, $\mathsf{D}\tau_1$, $\mathsf{M}z^{\tau_1}$.

4.62°. В схеме Бернулли обозначим через θ_k порядковый номер испытания, в котором появился k-й успех; считая вероятность успеха в каждом испытании равной p, найти:

1) $\mathsf{M}\theta_k$, $\mathsf{D}\theta_k$;

2) $\varphi_{\theta_k}(z) = \mathsf{M}z^{\theta_k}$.

4.63. Закон распределения случайной величины ξ определяется формулой

$$\mathsf{P}\{\xi = n\} = C_{n-1}^{m-1}p^m q^{n-m}, \quad n = m, m + 1, \ldots,$$

где m — целое положительное число, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Найти производящую функцию распределения ξ и $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{D}\xi$. Показать, что распределение ξ совпадает с распределением суммы m независимых одинаково распределенных случайных величин.

4.64. Найти закон распределения $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, если ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и при $k = 1, 2, 3$; $0 < p < 1$, $q = 1 - p$:

$$\mathsf{P}\{\xi_k = l\} = C_{l-1}^{m_k-1}p^{m_k}q^{l-m_k}, \quad l = m_k, \quad m_k + 1, \ldots$$

4.65. Случайная величина ν распределена по закону Пуассона с параметром λ и не зависит от результатов испытаний схемы Бернулли с вероятностью успеха p. Обозначим μ_ν число успехов в первых ν испытаниях схемы Бернулли. Найти:

а) $\varphi_{\mu_\nu}(z) = \mathsf{M}z^{\mu_\nu}$;

б) $\mathsf{M}\mu_\nu$, $\mathsf{D}\mu_\nu$.

4.66. Производящая функция совместного распределения величин ξ_1, ξ_2 равна

$$\varphi_{\xi_1,\xi_2}(z) = e^{\lambda(p_1z_1+p_2z_2+p_3z_1z_2-1)},$$

где $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $p_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$. Найти:

а) одномерные распределения ξ_1 и ξ_2;

б) $\mathsf{M}\xi_1$, $\mathsf{M}\xi_2$, $\mathsf{D}\xi_1$, $\mathsf{D}\xi_2$, $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$.

Являются ли величины ξ_1 и ξ_2 независимыми?

4.67. Целочисленная неотрицательная случайная величина ξ имеет производящую функцию $\varphi_\xi(z)$. Доказать, что если для целого $k \geqslant 1$

$$\lim_{u\uparrow 1} \frac{d^k}{dz^k}\varphi_\xi(z)\Big|_{z=u} = m_k < \infty,$$

то $\mathsf{M}\xi^{[k]} = \mathsf{M}\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1) = m_k$.

4.68. Пусть $\xi_{n,i}$ — число появлений i-го исхода в n независимых испытаниях с N несовместными исходами и вероятностью p_j появления j-го исхода в каждом испытании ($j = 1, \ldots, N$). Найти

а) $\varphi(z_1, \ldots, z_N) = \mathsf{M}z_1^{\xi_{n,1}} \ldots z_N^{\xi_{n,N}}$,

б) $\mathsf{M}\xi_{n,i}^{[k]}$, $\mathsf{M}\xi_{n,i}^{[k]}\xi_{n,j}^{[l]}$ $(i \neq j;\ k,\ l = 1, 2, \ldots)$.

4.69. Пусть выполнены условия предыдущей задачи и $N = 4$,

$$\eta_{n,1} = \xi_{n,1}, \quad \eta_{n,2} = \xi_{n,2} + \xi_{n,3}, \quad \eta_{n,3} = \xi_{n,4},$$

$$\zeta_{n,i} = \xi_{n,i} + \xi_{n,i+1} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Найти производящие функции распределений векторов $(\eta_{n,1}, \eta_{n,2}, \eta_{n,3})$, $(\zeta_{n,1}, \zeta_{n,2}, \zeta_{n,3})$ и коэффициенты корреляции $\rho(\eta_{n,1}, \eta_{n,2})$, $\rho(\zeta_{n,1}, \zeta_{n,2})$.

4.70. Пусть величина ν имеет распределение Пуассона с параметром λ и не зависит от исходов испытаний полиномиальной схемы, описанной в задаче **4.68.**

а) Найти производящую функцию распределения случайного вектора $\xi_\nu = (\xi_{\nu,1}, \ldots, \xi_{\nu,N})$.

б) Найти производящую функцию распределения числа μ_k компонент вектора ξ_ν, равных k.

4.71. При каких значениях параметров дробно-линейная функция $\varphi(z) = \dfrac{\alpha+\beta z}{\gamma+\delta z}$ будет производящей функцией целочисленной случайной величины?

4.72. Производящая функция целочисленной случайной величины ξ равна $\varphi_\xi(z)$. Найти характеристическую функцию ξ.

4.73. Найти характеристические функции распределений:

а) пуассоновского: $\mathsf{P}\{\xi = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, $m = 0, 1, \ldots$;

б) биномиального: $\mathsf{P}\{\xi = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$, $m = 0, 1, \ldots, n$;

в) показательного: $p_\xi(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$.

4.74. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют показательное распределение с параметром α:

$$\mathsf{P}\{\xi_i \leqslant x\} = 1 - e^{-\alpha x}, \quad x \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Найти $\mathsf{M}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)^k$ при любых значениях k, $n = 1, 2, \ldots$.

4.75. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, одинаково распределены и имеют характеристическую функцию $f(t) = \mathsf{M}e^{it\xi_1}$ (производящую функцию $\varphi(s) = \mathsf{M}s^{\xi_1}$), случайная величина ν не зависит от $\xi_1, \xi_2, \ldots$, принимает только целые неотрицательные значения и имеет производящую функцию $g(s) = \mathsf{M}s^\nu$. Найти характеристическую функцию (производящую функцию) случайной величины

$$\zeta = \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\nu & \text{при } \nu \geqslant 1, \\ 0 & \text{при } \nu = 0. \end{cases}$$

4.76. Производящая функция распределения случайной величины ξ, принимающей целые неотрицательные значения, равна $\varphi(z) = \mathsf{M}z^\xi$. Выяснить, при каких условиях следующие выражения являются производящими функциями вероятностных распределений, и если являются, то указать, как соответствующие распределения связаны с распределением ξ:

а) $\psi(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi'(1)}$, б) $\psi(z) = \frac{1 - \varphi(z)}{\varphi'(1)(1 - z)}$,

в) $\psi(z) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\varphi(z)}$, г) $\psi(z) = 1 - \frac{\ln \varphi(z)}{\ln \varphi(0)}$,

д) $\psi(z) = \sqrt{\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\varphi(z)}}$.

4.77. Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p), т. е.

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

При каких условиях можно представить ξ в виде

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_m$ независимы и при любом $i = 1, \ldots, m$ случайная величина ξ_i имеет биномиальное распределение с параметрами (n_i, p_i) $(n_i \geqslant 1,\ 0 < p_i < 1)$?

4.78. Случайная величина ξ принимает только целые значения, и $f(t) = \mathsf{M}e^{it\xi}$ — характеристическая функция распределения ξ.

а) Доказать, что при любом целом $k \geqslant 1$

$$\mathsf{P}\{\xi \equiv 0 \pmod k\} = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} f\left(\frac{2\pi j}{k}\right).$$

б) Найти формулу для $\mathsf{P}\{\xi \equiv m \pmod k\}$ при $m = 1, 2, \ldots, k-1$.

4.79. Независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеют равномерное распределение на множестве $\{1, 2, \ldots, 3k\}$. Найти

$$\max_{n\geqslant 1} \mathsf{P}\{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 \equiv 0 \pmod 3\},$$

$$\min_{n\geqslant 1} \mathsf{P}\{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 \equiv 0 \pmod 3\}.$$

4.80. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы. Доказать, что для любого действительного λ, удовлетворяющего условиям

$$\mathsf{M}e^{\lambda\xi_i} < \infty, \quad i = 1, \ldots, n,$$

справедливо равенство

$$\mathsf{M}e^{\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_n)} = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{M}e^{\lambda\xi_i}.$$

4.81. Случайная величина ξ принимает действительные значения. Доказать, что для любого действительного x

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant x\} \leqslant \inf_{\lambda>0} e^{-\lambda x}\mathsf{M}e^{\lambda\xi},$$

$$\mathsf{P}\{\xi \leqslant x\} \leqslant \inf_{\lambda>0} e^{\lambda x}\mathsf{M}e^{-\lambda\xi}.$$

4.82. Пусть μ_n обозначает число успехов в n независимых испытаниях с вероятностью p успеха в каждом испытании. Доказать, что при $\alpha < p$

$$\mathsf{P}\{\mu_n \leqslant \alpha n\} \leqslant \left\{\left(\frac{1-p}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{p}{\alpha}\right)^{\alpha}\right\}^n.$$

Найти аналогичную оценку для $\mathsf{P}\{\mu_n \geqslant \beta n\}$ при $\beta > p$ и для $\mathsf{P}\{\mu_n \leqslant n/2\}$ при $p > 1/2$.

4.83. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены. Доказать, что если $\mathsf{M}|\xi_1| < \infty$ и при некотором $\delta > 0$

$$\sup_{0<\lambda<\delta} \mathsf{M}e^{\lambda\xi_1} < \infty,$$

то $\mathsf{M}\xi_1 = \frac{d}{d\lambda}\mathsf{M}e^{\lambda\xi_1}\Big|_{\lambda=0} < \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\alpha_\varepsilon \in (0, 1)$, что

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \geqslant \mathsf{M}\xi_1 + \varepsilon\right\} \leqslant \alpha_\varepsilon^n, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

аналогично, если $\sup\limits_{0<\lambda<\delta} \mathsf{M}e^{-\lambda\xi_1} < \infty$, то

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \leqslant \mathsf{M}\xi_1 - \varepsilon\right\} \leqslant \alpha_\varepsilon^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

4.84°. Случайные величины ξ_1, ξ_2 и $\varkappa$ независимы, характеристические функции ξ_1 и ξ_2 равны $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно, $\mathsf{P}\{\varkappa = 1\} = 1 - \mathsf{P}\{\varkappa = 2\} = p \in (0, 1)$. Найти характеристическую функцию случайной величины

$$\eta = \xi_\varkappa$$

(распределение η называется *смесью* распределений ξ_1 и ξ_2).

4.85. Показать, что если $\mathsf{P}\{|\xi| < \infty\} = 1$, то функция $f(t) = \mathsf{M}e^{it\xi}$, $-\infty < t < \infty$, равномерно непрерывна.

4.86. Характеристическая функция $f(t) = \mathsf{M}e^{it\xi}$ принимает только действительные значения. Доказать, что при любом действительном t

$$f(t) = f(-t).$$

4.87. Найти характеристическую функцию:

а) равномерного распределения на отрезке $[0, a]$;

б) «треугольного» распределения с плотностью

$$p_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(1 - \alpha|x|) & \text{при } |x| \leqslant \alpha^{-1}; \\ 0 & \text{при } |x| > \alpha^{-1}; \end{cases}$$

в) распределения с плотностью

$$q_\alpha(x) = \frac{C_\alpha}{x^2}\left(1 - \cos\frac{x}{\alpha}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

В случае в) найти значение C_α, при котором $q_\alpha(x)$ оказывается плотностью вероятности.

4.88. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma^2)$. Установив тождество

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{hx^2}e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1-2h\sigma^2}}, \qquad h < \frac{1}{2\sigma^2},$$

найти с его помощью формулы для $\mathsf{M}\eta$ и $\mathsf{D}\eta$, где $\eta = \xi e^{h\xi^2}$.

4.89. Функция $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, обладает следующими свойствами:

а) $f(0) = 1$, $f(t) \geqslant 0$ для любого t;

б) $f(t) = f(-t)$ для любого t;

в) графиком $f(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, является выпуклая вниз ломаная линия, состоящая из конечного числа звеньев.

Является ли $f(t)$ характеристической функцией распределения вероятностей?

4.90. Функция $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, обладает следующими свойствами: $f(0) = 1$, $f(t) \geqslant 0$, $f(t) = f(-t)$ для любого t, $f(t)$ непрерывна и $f''(t) \geqslant 0$ для любого $t \neq 0$. Является ли $f(t)$ характеристической функцией распределения вероятностей?

4.91. Пусть $a > 0$ и функция $f_1(t)$ имеет период $4a$,

$$f_1(t) = 1 - \frac{|t|}{a}, \quad |t| \leqslant 2a.$$

а) Является ли $f_1(t)$ характеристической функцией?

б) Является ли характеристической функцией функция $f_2(t) = |f_1(t)|$?

4.92. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_k$ $(k > 1)$ независимы и имеют функцию распределения $F(x)$, случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_k$ независимы и имеют функцию распределения $G(x)$. Следует ли из условия

$$\mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_k \leqslant x\} = \mathsf{P}\{\eta_1 + \ldots + \eta_k \leqslant x\}$$

для каждого x совпадение функций распределения $F(x)$ и $G(x)$?

4.93. Изменится ли ответ на вопрос предыдущей задачи, если дополнительно потребовать, чтобы $\mathsf{P}\{|\xi_1 + \ldots$

$\ldots + \xi_k| < \infty\} = 1$ и характеристическая функция распределения ξ_1 нигде не обращалась в нуль?

4.94. Показать, что если характеристическая функция $f(t) = \mathsf{M}e^{it\xi}$ удовлетворяет условиям

$$f(t_1) = f(t_2) = 1,$$

то при любых целых $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$f(mt_1 + nt_2) = 1.$$

4.95*. Характеристическая функция $f(t) = \mathsf{M}e^{it\xi}$ дифференцируема при $t = 0$. Верно ли равенство

$$\mathsf{M}\xi = \frac{1}{i} f'(0)?$$

Рассмотреть случай, когда ξ имеет плотность распределения $p(x)$, причем

$$p(x) = p(-x), \quad p(x) = \frac{1 + o(1)}{x^2 \ln x} \quad (x \to \infty).$$

4.96*. Характеристическая функция $f(t) = \mathsf{M}e^{it\xi}$ удовлетворяет условию $|f''(0)| < \infty$. Показать, что

$$\mathsf{M}\xi^2 = -f''(0).$$

4.97. Показать, что если характеристическая функция $f(t) = \mathsf{M}e^{it\xi}$ дважды дифференцируема при $t = 0$ и $|f''(0)| < \infty$, то $|f'(t)| < \sqrt{|f''(0)|}$ при любом t.

4.98. Являются ли характеристическими функциями вероятностных распределений следующие функции:

а) $e^{2(e^{it}-1)}$; д) $|\cos t|^{2/3}$;

б) $\cos(t^2)$; е) $\frac{\sin t}{t}$ $(t \neq 0)$, 1 $(t = 0)$;

в) $\cos^2 t$; ж) e^{-2t} $(t \geqslant 0)$, $\frac{1}{1+t^2}$ $(t \leqslant 0)$;

г) $\cos(|t|^{2/3})$; з) $e^{-|t|}$?

4.99. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, характеристическая функция $f(t) = \mathsf{M}e^{it\xi}$ которой равна:

а) $\frac{1}{at} \sin at \quad (a \neq 0)$,

б) $\frac{4}{t^2} \cos t \sin^2 \frac{t}{2}$, в) $\frac{4}{t^2} e^{it} \sin^2 \frac{t}{2}$,

г) $\sqrt{2}\, e^{-a|t|/2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a|t|}{\sqrt{2}}\right) \quad (a > 0)$, д) $(1 - it)^{-p}(1 + it)^{-q}$ $(p, q > 0)$,

е) $\dfrac{\arcsin(\theta e^{it})}{\arcsin \theta}$, $0 < \theta < 1$.

4.100. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют одно и то же нормальное распределение с параметрами (0, 1). Распределение случайной величины

$$\chi_r^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_r^2$$

называют χ^2-*распределением с r степенями свободы.*

а) Найти функцию распределения и характеристическую функцию χ^2-распределения с двумя степенями свободы.

б) Найти характеристическую функцию и формулы для моментов k-го ($k = 1, 2, \ldots$) порядка χ^2-распределения с r степенями свободы.

4.101. Исходя из формулы для плотности гамма-распределения (см. введения к гл. 3 и 4), проверить, что если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, ξ_1 имеет гамма-распределение с параметром α, а ξ_2 — гамма-распределение с параметром β, то $\xi_1 + \xi_2$ имеет гамма-распределение с параметром $\alpha + \beta$. Используя это свойство семейства гамма-распределений, найти характеристическую функцию $f_\alpha(t)$ и формулы для моментов $m_\alpha^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots$) k-го порядка гамма-распределения с параметром $\alpha > 0$.

4.102. Случайный вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ имеет многомерное нормальное распределение в R^k с вектором математических ожиданий $a = (a_1, \ldots, a_k)$ и матрицей ковариаций B. Найти распределение случайной величины

$$\zeta = c_1\xi_1 + \ldots + c_k\xi_k,$$

где $c_1, \ldots, c_k$ — действительные числа.

4.103. Случайный вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ имеет многомерное нормальное распределение в R^k с вектором математических ожиданий $a = (a_1, \ldots, a_k)$ и матрицей ковариаций B; матрица $C = \|c_{ij}\|$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, k)$ состоит из действительных чисел. Найти распределение случайного вектора $(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$, где

$$\zeta_i = c_{i1}\xi_1 + \ldots + c_{ik}\xi_k, \quad i = 1, \ldots, m.$$

4.104. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ имеет многомерное нормальное распределение в R^k с вектором математических ожиданий $a=(a_1, \ldots, a_k)$ и невырожденной матрицей ковариаций B. Показать, что существует такое ортогональное преобразование C пространства R^k в себя, что вектор $\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_k)=C\xi$ имеет многомерное нормальное распределение с независимыми компонентами.

§ 4. Неравенства Бонферрони и сходимость к распределению Пуассона

4.105. Случайные величины $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ независимы,

$$\mathsf{P}\{\xi_k^{(n)}=1\}=1-\mathsf{P}\{\xi_k^{(n)}=0\}=p_k(n), \quad k=1, 2, \ldots, n.$$

Пусть при $n\to\infty$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} p_k(n)\to 0, \quad p_1(n)+\ldots+p_n(n)\to\lambda, \quad 0<\lambda<\infty.$$

Используя метод производящих функций, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{\xi_1^{(n)}+\ldots+\xi_n^{(n)}=m\}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \quad m=0, 1, 2, \ldots$$

4.106. Случайная величина ξ принимает значения 1 и 0 с вероятностями p и $q=1-p$ соответственно, а случайная величина η имеет распределение Пуассона с параметром p: $\mathsf{P}\{\eta=k\}=\frac{p^k}{k!}e^{-p}$, $k=0, 1, 2, \ldots$. Доказать, что ξ и η можно задать на одном вероятностном пространстве так, что $\mathsf{P}\{\xi\neq\eta\}<p^2$.

4.107. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы, $\mathsf{P}\{\xi_i=1\}=1-\mathsf{P}\{\xi_i=0\}=p_i$, $i=1, \ldots, n$. Используя результаты задачи 4.106, доказать, что

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_n=k\}-\right.$$
$$\left.-\frac{(p_1+\ldots+p_n)^k}{k!}e^{-(p_1+\ldots+p_n)}\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}p_i^2.$$

4.108. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_N$ — совокупность событий и событие B_r состоит в том, что одновременно происходит ровно r из событий $A_1, \ldots, A_N$. Доказать, что при любом $r = 0, 1, \ldots, N$

$$\mathsf{P}\{B_r\} = \sum_{k=r}^{N} (-1)^{k-r} C_k^r S_k,$$

где $S_0 = 1$, $S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant N} \mathsf{P}\{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}\}$.

4.109*. Случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения. Доказать, что если $m_k = \mathsf{M}\xi^{[k]} = \mathsf{M}\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1)$, $k = 1, 2, \ldots$, и для целого $d \geqslant 1$ величина $m_{2d-1} < \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{2d} (-1)^{k-1} \frac{m_k}{k!} \leqslant \mathsf{P}\{\xi > 0\} \leqslant \sum_{k=1}^{2d-1} (-1)^{k-1} \frac{m_k}{k!}.$$

4.110. Пусть выполнены условия задачи 4.109. Доказать, что

$$\sum_{k=n}^{n+2d-1} (-1)^{k-n} C_k^n \frac{m_k}{k!} \leqslant \mathsf{P}\{\xi = n\} \leqslant \sum_{k=n}^{n+2d} (-1)^{k-n} C_k^n \frac{m_k}{k!},$$

если $n = 0, 1, \ldots$ и $m_{n+2d-1} < \infty$.

4.111. Пусть выполнены условия задачи 4.109. Доказать, что при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=n}^{n+2d-1} (-1)^{k-n} C_{k-1}^{n-1} \frac{m_k}{k!} \leqslant \mathsf{P}\{\xi \geqslant n\} \leqslant \sum_{k=n}^{n+2d} (-1)^{k-n} C_{k-1}^{n-1} \frac{m_k}{k!},$$

если $m_{n+2d-1} < \infty$.

4.112. Метод моментов. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин и

$$m_k^{(n)} = \mathsf{M}\xi_n^{[k]} \quad (n, k = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что если существует такая целочисленная неотрицательная случайная величина ξ, что при любом $k = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} m_k^{(n)} = \mathsf{M}\xi^{[k]} = m_k < \infty$$

и $m_k = o(k!\,k^{-r})$, $k \to \infty$, для любого $r < \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\xi_n = k\} = \mathsf{P}\{\xi = k\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

4.113. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин. Доказать, что если при любом $k = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\xi_n^{[k]} = \lambda^k, \quad 0 < \lambda < \infty,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\xi_n = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$, т. е. распределение ξ_n сходится к распределению Пуассона с параметром λ при $n \to \infty$.

4.114. Пассажирский поезд состоит из N вагонов по s мест в каждом вагоне. В момент отправления в поезде находилось n пассажиров. Обозначим символом $\mu_i = \mu_i(n, N, s)$ число вагонов, в которых при отправлении поезда находилось ровно i пассажиров, $i = 0, 1, \ldots, s$. Предполагая, что все $n!C_{Ns}^n = (Ns)^{[n]}$ вариантов размещения пассажиров в поезде равновероятны, найти формулы для факториальных моментов величин $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_s$. Проанализировать поведение математических ожиданий μ_i при изменении n от 0 до Ns.

4.115. Пусть выполнены условия задачи 4.114. Найти явное выражение для $\mathsf{P}\{\mu_i(n, N, s) = k\}$.

4.116. Пусть выполнены условия задачи 4.114. Показать, что если s и i фиксированы, а $n, N \to \infty$ так, что $\mathsf{M}\mu_i(n, N, s) \to \lambda \in (0, \infty)$, то при любом $k = 1, 2, \ldots$

$$\mathsf{M}(\mu_i(n, N, s))^{[k]} \to \lambda^k.$$

Вывести отсюда, что тогда для любого $m = 0, 1, \ldots$

$$\mathsf{P}\{\mu_i(n, N, s) = m\} \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

4.117. Пусть n частиц размещаются по N ячейкам, причем каждая частица независимо от остальных с одинаковыми вероятностями (равными $1/N$) может попасть в любую из N ячеек. Обозначим через $\mu_r(n, N)$ число ячеек, в которых находится ровно по r частиц. Найти формулу для $\mathsf{M}\mu_r(n, N)$ и доказать, что если $r = 0, 1, 2, \ldots$ фиксировано, а $n, N \to \infty$ так, что $\mathsf{M}\mu_r(n, N) \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то

$$\mathsf{P}\{\mu_r(n, N) = m\} \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

4.118. Пусть частицы последовательно и независимо друг от друга размещаются по N ячейкам так, что i-я ($i = 1, 2, \ldots$) частица попадает в j-ю ($j = 1, \ldots, N$) ячейку с вероятностью $1/N$. Положим

$$\nu_r(N) = \min\{n: \mu_r(n, N) > 0\}, \quad r = 2, 3, \ldots,$$

где $\mu_r(n, N)$ — число ячеек, содержащих после размещения n частиц ровно по r частиц. Найти такую последовательность чисел $b_1, b_2, \ldots$, что распределения случайных величин $\nu_r(N)/b_N$ при $N \to \infty$ и фиксированном r сходятся к невырожденному закону, и сам предельный закон.

4.119. Пусть n частиц независимо размещаются по N^2 ячейкам, расположенным в виде квадратной таблицы размером $N \times N$. Назовем ячейку *свободной*, если после размещения n частиц ни в нее, ни в ячейки, находящиеся с ней в одной строке или в одном столбце, не попало ни одной частицы. Найти предельное распределение числа $\varkappa(n, N)$ свободных ячеек, когда

$$n = N(\ln \lambda N + o(1)), \quad N \to \infty.$$

§ 5. Применения центральной предельной теоремы и метода характеристических функций

4.120 (см. 4.2). Случайная величина η_n равна сумме очков, выпавших при n независимых бросаниях симметричной игральной кости. Используя центральную предельную теорему, выбрать n так, чтобы

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - 3{,}5\right| \geqslant 0{,}1\right\} \leqslant 0{,}1.$$

4.121. Складывается 10^4 чисел, округленных с точностью до 10^{-m}. Предполагая, что ошибки округления независимы и равномерно распределены в интервале $(-0{,}5 \cdot 10^{-m},\ 0{,}5 \cdot 10^{-m})$, найти пределы, в которых с вероятностью, не меньшей 0,99, будет лежать суммарная ошибка.

4.122. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены:

$$\mathsf{P}\{\xi_i = z\} = \mathsf{P}\left\{\xi_i = \frac{1}{z}\right\} = \frac{1}{2}, \qquad z \neq 1, \quad i = 1, 2, \ldots$$

а) Найти пределы математического ожидания и дисперсии случайной величины $\eta_n = (\xi_1 \ldots \xi_n)^{1/\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$.

б) Доказать, что при $n \to \infty$ распределение η_n сходится к логарифмически нормальному распределению (см. задачу 3.233). Найти параметры a, σ^2 предельного логарифмически нормального распределения.

в) Сравнить найденные в п. а) значения $\lim\limits_{n\to\infty} M\eta_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} D\eta_n$ с математическим ожиданием и дисперсией случайной величины η, имеющей логарифмически нормальное распределение из п. б).

4.123*. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены:

$$P\{\xi_i = 1{,}25\} = P\{\xi_i = 0{,}8\} = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

и $\eta_n = \xi_1 \ldots \xi_n$.

а) Найти $M\eta_{1000}$, $D\eta_{1000}$, $M \ln \eta_{1000}$, $D \ln \eta_{1000}$.

б) Пользуясь асимптотической нормальностью $\ln \eta_n$ при $n \to \infty$, найти приближенные значения $P\{\eta_{1000} \leqslant 0{,}001\}$, $P\{\eta_{1000} < 1\}$, $P\{\eta_{1000} \leqslant 1\}$, $P\{\eta_{1000} \leqslant 10^4\}$.

в) Пользуясь формулой Стирлинга, найти $P\{\eta_{1000} < 1\}$, $P\{\eta_{1000} \leqslant 1\}$.

4.124. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены:

$$P\{\xi_i = 1{,}25\} = P\{\xi_i = 0{,}75\} = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

и $\eta_n = \xi_1 \ldots \xi_n$.

а) Найти $M\eta_{1000}$, $D\eta_{1000}$, $M \ln \eta_{1000}$, $D \ln \eta_{1000}$.

б) Пользуясь асимптотической нормальностью $\ln \eta_n$ при $n \to \infty$, найти приближенные значения

$$P\{\eta_{1000} \leqslant 10^{-20}\},$$

$$P\{\eta_{1000} < 1{,}25^{501} \cdot 0{,}75^{499} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-14}\},$$

$$P\{\eta_{1000} \leqslant 1{,}25^{501} \cdot 0{,}75^{499}\}, \quad P\{\eta_{1000} \leqslant 10^{-7}\}.$$

в) Пользуясь формулой Стирлинга, найти

$$P\{\eta_{1000} < 1{,}25^{501} \cdot 0{,}75^{499}\},$$

$$P\{\eta_{1000} \leqslant 1{,}25^{501} \cdot 0{,}75^{499}\}.$$

4.125. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Распределение случайной величины

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$$

называется *распределением* χ^2 (хи-квадрат) с n *степенями свободы*.

а) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\chi_n^2}{n} - 1\right| > \varepsilon\right\} = 0$ при любом $\varepsilon > 0$.

б) Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\chi_n^2 - \mathsf{M}\chi_n^2}{\sqrt{\mathsf{D}\chi_n^2}} \leqslant x\right\}$, $\quad -\infty < x < \infty$.

4.126. Случайная точка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ имеет равномерное распределение на единичной сфере в R^n, т. е. на множестве точек $S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n: x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$. Найти $\mathsf{M}\xi_i$ и $\mathsf{M}\xi_i\xi_j$ при $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

4.127. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ имеет сферически симметричное нормальное распределение с нулевым вектором средних и единичной матрицей ковариаций. Равенство

$$\xi = \rho\varepsilon, \quad \rho = |\xi|, \quad \varepsilon = \frac{1}{|\xi|}\xi,$$

где $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$ — длина вектора ξ, дает представление ξ в виде произведения скалярной случайной величины ρ и вектора ε. Доказать, что ρ и ε независимы и что ε имеет равномерное распределение на единичной сфере в R^n (см. задачу 4.126). Найти распределение, математическое ожидание и дисперсию ρ^2.

4.128. Пусть вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in R^n$ имеет равномерное распределение на единичной сфере в R^n. Используя результаты задач 4.127 и 4.125, доказать, что при $n \to \infty$:

а) распределение $\varepsilon_1\sqrt{n}$ сходится к стандартному нормальному распределению,

б) распределение вектора $(\varepsilon_1\sqrt{n}, \ldots, \varepsilon_k\sqrt{n})$, $k = \text{const}$, сходится к совместному распределению k независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение.

4.129. Случайные величины $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Распределение случайной величины

$$\tau_n = \frac{\xi_0}{\sqrt{(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)/n}}$$

называется *распределением Стьюдента с n степенями свободы*. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\tau_n \leqslant x\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

4.130. Пусть $\xi_{n,i}$ обозначает число появлений i-го исхода в n независимых испытаниях с N несовместными исходами; вероятности появления этих исходов в каждом из испытаний равны $p_1, p_2, \ldots, p_N \geqslant 0$ соответственно, $p_1+\ldots+p_N=1$. Далее, пусть $a_1, \ldots, a_N$ — действительные числа и

$$\eta_n = a_1\xi_{n,1}+\ldots+a_N\xi_{n,N}.$$

Найти $\mathsf{M}\eta_n$, $\mathsf{D}\eta_n$ и предельное распределение $\dfrac{\eta_n-\mathsf{M}\eta_n}{\sqrt{\mathsf{D}\eta_n}}$ при $n\to\infty$.

4.131. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены; $\mathsf{M}\xi_k=a$, $\mathsf{D}\xi_k=b^2$, $k=1, 2, \ldots$ Положим $\eta_k=\xi_k+\xi_{k+1}+\xi_{k+2}$, $k=1, 2, \ldots$ Найти:

а) $\mathsf{M}\eta_k$, $\operatorname{cov}(\eta_k, \eta_l)$ $(k\neq l)$, $\mathsf{D}\eta_k$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\dfrac{\eta_1+\ldots+\eta_n-3na}{b\sqrt{3n}}\leqslant x\right\}$.

4.132. Случайная величина ξ_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти

$$\lim_{\lambda\to\infty}\mathsf{P}\left\{\frac{\xi_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\leqslant x\right\}.$$

4.133. Два игрока заняты азартной игрой, состоящей в подбрасывании несимметричной монеты, которая падает «гербом» с вероятностью $p>0$ и «решкой» с вероятностью $q=1-p>0$. Ставки игроков в каждом туре равны соответственно $a_1>0$ и $a_2>0$ руб.; если монета падает «гербом», то выигрыш a_1+a_2 получает первый игрок, если «решкой» — то второй. Предположим, что исходные капиталы игроков бесконечны, и обозначим через $S_n^{(1)}$ суммарный выигрыш первого игрока за n туров, а через $S_n^{(2)}\left(=-S_n^{(1)}\right)$ — второго. Показать, что:

а) существует только одно такое значение $x>0$, что при $a_1/a_2=x$ для любого y, $|y|<\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{S_n^{(1)}>y\}<1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{S_n^{(2)}>y\}<1.$$

б) если $a_1=a_2x$, где значение x то же, что в п. а), то

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{S_n^{(1)}>S_n^{(2)}\}=\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{S_n^{(1)}<S_n^{(2)}\}=\frac{1}{2}.$$

4.134. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ такова, что при любом $n=1, 2, \ldots$

$$\xi_n=\zeta_{n,1}+\zeta_{n,2}+\ldots+\zeta_{n,n},$$

где $\zeta_{n,1}, \ldots, \zeta_{n,n}$ — независимые случайные величины,

$$\mathsf{M}\zeta_{n,i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}\zeta_{n,k} < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{M}\,|\zeta_{n,k}|^3 = 0.$$

Доказать, что распределения случайных величин ξ_n/s_n при $n \to \infty$ сходятся к стандартному нормальному распределению.

4.135. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы,

$$\mathsf{P}\{\xi_n = 1\} = \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \mathsf{P}\{\xi_n = 0\} = \frac{n^{\alpha} - 1}{n^{\alpha}},$$

$$n = 1, 2, \ldots, 0 < \alpha < 1.$$

Найти предельное распределение случайных величин

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - \mathsf{M}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

4.136. Пусть для каждого $n = 1, 2, \ldots$ случайные величины $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ независимы и одинаково распределены:

$$\mathsf{P}\left\{\xi_j^{(n)} = \sqrt[3]{n}\right\} = \mathsf{P}\left\{\xi_j^{(n)} = -\sqrt[3]{n}\right\} = \frac{1}{2\sqrt[3]{n^2}},$$

$$\mathsf{P}\{\xi_j^{(n)} = 0\} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

при любом $j = 1, \ldots, n$. Найти $\mathsf{M}\xi_j^{(n)}$, $\mathsf{D}\xi_j^{(n)}$ и предельное распределение случайной величины

$$\eta_n = \frac{\xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)}}{\sqrt{n\mathsf{D}\xi_1^{(n)}}} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

4.137*. Пусть для каждого $n = 1, 2, \ldots$ случайные величины $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ независимы и одинаково распределены:

$$\mathsf{P}\{\xi_j^{(n)} = \sqrt{n}\} = \mathsf{P}\{\xi_j^{(n)} = -\sqrt{n}\} = \frac{1}{2n},$$

$$\mathsf{P}\{\xi_j^{(n)} = 0\} = \frac{n-1}{n}$$

при любом $j = 1, \ldots, n$. Найти $\mathsf{M}\xi_j^{(n)}$, $\mathsf{D}\xi_j^{(n)}$ и предельное распределение случайной величины

$$\eta_n = \frac{\xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)}}{\sqrt{n \mathsf{D} \xi_1^{(n)}}} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

4.138. Случайные величины $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ независимы,

$$\mathsf{P}\{\xi_i^{(n)} = 1\} = p_i^{(n)},$$

$$\mathsf{P}\{\xi_i^{(n)} = 0\} = 1 - p_i^{(n)} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

и $\zeta_n = \xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)}$.

а) Найти $\mathsf{M}\zeta_n$, $\mathsf{D}\zeta_n$.

б) Доказать, что если $\mathsf{D}\zeta_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то предельное при $n \to \infty$ распределение случайной величины $\frac{\zeta_n - \mathsf{M}\zeta_n}{\sqrt{\mathsf{D}\zeta_n}}$ является стандартным нормальным.

в) Положим $m_n = f(p_1^{(n)}) + \ldots + f(p_n^{(n)})$, где $f(x) = 0$ при $x \leqslant 1/2$ и $f(x) = 1$ при $x > 1/2$. Найти предельное при $n \to \infty$ распределение случайной величины $\zeta_n - m_n$, если

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ p_i^{(n)} \leqslant 1/2}} p_i^{(n)} \to \lambda_0, \qquad \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ p_i^{(n)} > 1/2}} p_i^{(n)} \to \lambda_1,$$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \min\{p_i^{(n)}, 1 - p_i^{(n)}\} \to 0.$$

4.139. Случайная величина ξ_n имеет распределение с дробно-линейной производящей функцией $\varphi_n(z) = \frac{a_n + (1 - d_n - a_n) z}{1 - d_n z}$, $0 \leqslant a_n \leqslant 1$, $0 \leqslant d_n < 1$. Какие невырожденные законы распределения $F(x)$ могут быть предельными для последовательности $F_n(x) = \mathsf{P}\left\{\frac{\xi_n}{A_n} \leqslant x\right\}$, где $A_n \to \infty$ — некоторые нормирующие константы? Какие условия надо наложить на последовательности a_n, d_n, A_n, чтобы $\lim\limits_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$, $x > 0$?

4.140. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, неотрицательны и одинаково распределены:

$$\mathsf{P}\{\xi_1 \geqslant 0\} = 1, \qquad \mathsf{M}\xi_1 = \mu > 0,$$

$$\mathsf{D}\xi_1 = \sigma^2, \qquad 0 < \sigma^2 < \infty;$$

пусть $N_t = \max\{n \geqslant 0: \xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant t\}$, $t \geqslant 0$ (если $\xi_1 > t$, то $N_t = 0$).

а) Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{1}{t}N_t - \frac{1}{\mu}\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

б) Доказать, что для любого x, $-\infty < x < \infty$,

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\left\{N_t < \frac{t}{\mu} + \frac{x\sigma}{\mu}\sqrt{\frac{t}{\mu}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du.$$

4.141. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют показательное распределение с параметром α:

$$\mathsf{P}\{\xi_i \leqslant x\} = 1 - e^{-\alpha x}, \quad x \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

а $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(n)}$ — значения $\xi_1, \ldots, \xi_n$, расположенные в порядке неубывания (вариационный ряд). Используя результаты задачи 3.64, показать, что если $n, m \to \infty$ и $n - m \to \infty$, то:

а) $\mathsf{M}\xi_{(m)} = \dfrac{1 + o(1)}{\alpha}\ln\dfrac{n}{n-m}$, $\quad \mathsf{D}\xi_{(m)} = \dfrac{1 + o(1)}{\alpha}\dfrac{m}{n(n-m)}$;

б) $\lim \mathsf{P}\left\{\dfrac{\xi_{(m)} - \mathsf{M}\xi_{(m)}}{\sqrt{\mathsf{D}\xi_{(m)}}} \leqslant x\right\} =$

$$= \lim \mathsf{P}\left\{\left(\alpha\xi_{(m)} - \ln\frac{n}{n-m}\right)\sqrt{\frac{n(n-m)}{m}} \leqslant x\right\} = \Phi(x),$$

$$-\infty < x < \infty.$$

4.142. Случайные величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ независимы и одинаково распределены:

$$\mathsf{P}\{\zeta_i \leqslant x\} = F(x), \quad i = 1, \ldots, n,$$

а $\zeta_{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \zeta_{(n)}$ — их вариационный ряд (см. задачу 4.141). Доказать, что если в некоторой окрестности точки $x = z_0$ существует непрерывная производная $p(x) = F'(x) > 0$, то при $m/n \to F(z_0)$, $n \to \infty$,

$$\lim \mathsf{P}\left\{\frac{\zeta_{(m)} - z_0}{\sqrt{F(z_0)(1 - F(z_0))}}\, p(z_0) \leqslant x\right\} = \Phi(x).$$

4.143. Частицы последовательно размещаются в N ячейках так, что вероятность попадания j-й ($j = 1, 2, \ldots$) частицы в i-ю ($i = 1, 2, \ldots, N$) ячейку равна $1/N$ и номер ячейки, в которую попадает частица, не зависит от номеров ячеек, в которые попали предыдущие частицы. Пусть ν_k — порядковый номер частицы, после размещения которой впервые число занятых (т. е. не пустых) ячеек становится равным k, и $\tau_k = \nu_k - \nu_{k-1}$ $(\nu_0 = 0)$.

а) Найти производящую функцию распределения τ_m и $\mathsf{P}\{\tau_m > \nu_k - \nu_l\}$, $m > k > l$.

б) Найти

$$\lim_{N\to\infty} \max_{r<m<N} \mathsf{P}\{\tau_m > \nu_{m-1} - \nu_{m-r}\}, \quad r = 2, 3, \ldots$$

4.144. Пусть случайная величина ν_k та же, что в задаче 4.143. Найти предельное распределение случайной величины $\nu_k - k$, когда $N \to \infty$, $k^2/N \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$.

4.145. Пусть выполнены условия задачи 4.143. Найти асимптотические формулы для $\mathsf{M}\nu_m$, $\mathsf{D}\nu_m$ и предельное распределение $\dfrac{\nu_m - \mathsf{M}\nu_m}{\sqrt{\mathsf{D}\nu_m}}$, когда $N \to \infty$ и $\alpha_1 N \leqslant m \leqslant \alpha_2 N$ при некоторых α_1, α_2, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$.

4.146. Производящая функция $\varphi(z) = \mathsf{M}z^\xi$ случайной величины ξ является многочленом степени N, причем все корни $z_1, \ldots, z_N$ уравнения $\varphi(z) = 0$ вещественны. Доказать, что распределение ξ совпадает с распределением суммы $\zeta = \zeta_1 + \ldots + \zeta_N$, где случайные величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_N$ независимы и

$$\mathsf{P}\{\zeta_i = 1\} = p_i, \quad \mathsf{P}\{\zeta_i = 0\} = 1 - p_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Найти значения $p_1, \ldots, p_N$.

4.147*. Производящая функция $\varphi(z) = \mathsf{M}z^\xi$ случайной величины ξ является многочленом степени N, причем все корни $z_1, \ldots, z_N$ уравнения $\varphi(z) = 0$ имеют неположительные вещественные части: $\operatorname{Re} z_i \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, N$. Доказать, что распределение ξ совпадает с распределением суммы $\zeta = \zeta_1 + \ldots + \zeta_M$, где случайные величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_M$ независимы и

$$\mathsf{P}\{\zeta_i = 2\} = r_i, \quad \mathsf{P}\{\zeta_i = 1\} = p_i, \quad \mathsf{P}\{\zeta_i = 0\} = 1 - p_i - r_i, \quad i = 1, \ldots, M.$$

Найти значения M, p_i, r_i $(i = 1, \ldots, M)$.

4.148. Последовательность целочисленных неотрицательных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ такова, что при любом $n = 1, 2, \ldots$ производящая функция

$$\varphi_n(z) = \mathsf{M}z^{\xi_n}$$

является многочленом степени n, все корни которого вещественны. Доказать, что если $\mathsf{D}\xi_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то распределение случайной величины $\dfrac{\xi_n - \mathsf{M}\xi_n}{\sqrt{\mathsf{D}\xi_n}}$ при $n \to \infty$ сходится к стандартному нормальному распределению.

4.149. Доказать, что если выполнены условия задачи 4.148, но $\mathsf{D}\xi_n \to \lambda < \infty$ при $n \to \infty$ и, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq i\leq n} z_{n,i} = -\infty,$$

где $z_{n,1}, \ldots, z_{n,n}$ — корни уравнения $\varphi_n(z) = 0$, то распределение ξ_n при $n \to \infty$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ.

4.150*. Пусть выполнены условия задачи 4.143 и $f_{n,N}(z) = \mathsf{M}z^{\mu_0(n,N)}$ — производящая функция числа пустых ячеек. Найти рекуррентное уравнение, связывающее многочлены $f_{n,N}(z)$ и $f_{n+1,N}(z)$, и вывести из него, что все $N-1$ корней уравнения $f_{n,N}(z) = 0$ вещественны при любом $n \geq 1$.

4.151. Пусть выполнены условия задачи 4.143 и $\mu_0(n, N)$ — число ячеек, оставшихся пустыми после размещения n частиц. Доказать, что если $n, N \to \infty$ так, что $\mathsf{M}\mu_0(n, N) \to \infty$ и $N - \mathsf{M}\mu_0(n, N) \to \infty$, то предельное распределение случайной величины

$$\frac{\mu_0(n, N) - \mathsf{M}\mu_0(n, N)}{\sqrt{\mathsf{D}\mu_0(n, N)}}$$

является стандартным нормальным.

4.152. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют одно и то же распределение с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что если при некоторых $C > 0$, $0 < \alpha \leq 2$,

$$f(t) = 1 - C|t|^\alpha(1 + o(1)), \quad t \to 0,$$

то при $n \to \infty$ существует предельное распределение случайных величин

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n^{1/\alpha}}.$$

Найти его характеристическую функцию.

4.153*. Случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное симметричное распределение с плотностью $p(x) \sim C|x|^{-\alpha}$ $(|x| \to \infty)$, где $C > 0$, $1 < \alpha < 3$. Доказать, что

$$\mathsf{M}e^{it\xi} = 1 - 2C|t|^{\alpha-1}(1 + o(1)) \int_0^\infty \frac{1 - \cos u}{u^\alpha}\, du, \quad t \to 0.$$

4.154. а) Доказать, что решение $\varphi(s)$ функционального уравнения

$$\varphi(s) = \frac{s(1+\varphi^2(s))}{2},$$

удовлетворяющее условию $0 \leqslant \varphi(s) \leqslant 1$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$, является производящей функцией неотрицательной целочисленной случайной величины ξ. Найти асимптотическую формулу для $1-f(t)$ при $t \to 0$, где $f(t) = \mathsf{M}e^{it\xi}$ — характеристическая функция ξ.

б) Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и распределены так же, как случайная величина ξ из п. а). При каком значении α предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{1}{n^\alpha}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) \leqslant x\right\} = G(x), \qquad 0 \leqslant x < \infty,$$

существует и является функцией невырожденного собственного распределения? Найти характеристическую функцию

$$g(t) = \int_0^\infty e^{itx}\,dG(x).$$

4.155. Случайная величина ξ имеет распределение Коши с параметром a, т. е. имеет плотность распределения

$$p(x) = \frac{a}{\pi}\,\frac{1}{a^2+x^2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Показать, что характеристическая функция $\mathsf{M}e^{it\xi}$ распределения ξ равна $e^{-a|t|}$. Вывести отсюда и из задачи 4.153, что

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos u}{u^2}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

4.156. Независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеют абсолютно непрерывное симметричное распределение с плотностью $p(x)$, непрерывной в точке $x=0$, $0 < p(0) < \infty$. Используя результаты задач 4.152—4.155, найти предельное распределение последовательности случайных величин

$$\zeta_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \ldots + \frac{1}{\xi_n}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

4.157. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеют распределение Коши с параметром a; при этом ξ_1 и ξ_2 независимы, а $\mathsf{P}\{\xi_3 = \xi_1\} = 1$. Сравнить характеристические функции и функции распределения суммы $\xi_1 + \xi_2$ независимых и суммы $\xi_1 + \xi_3$ зависимых одинаково распределенных случайных величин.

4.158. Используя результат задачи **4.155**, вычислить

$$I_{a,b}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u^2)(b^2 + (x-u)^2)}.$$

Глава 5

ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

В предыдущих главах рассматривались случайные величины (т. е. измеримые функции, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$), принимающие действительные или векторные значения. Случайная величина, значениями которой являются бесконечные последовательности, называется *случайным процессом с дискретным временем*; если же значениями случайной величины являются функции действительного аргумента, то она называется *случайным процессом с непрерывным временем.* Реализации случайного процесса (последовательности или функции) называют его *траекториями.* Существует много способов задания распределений на множестве траекторий случайного процесса (см., например, задачи § 1).

Задачи § 2 связаны с пуассоновскими процессами и потоками. *Пуассоновский поток* точек на действительной прямой — это не более чем счетная случайная совокупность точек $T = \{\tau_k\} \subset (-\infty, \infty) = R^1$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) существует такая неотрицательная измеримая функция $\lambda(x)$, $x \in R^1$, что для любого измеримого множества $B \subset R^1$ число $\xi(B)$ точек совокупности T, попавших в множество B, имеет распределение Пуассона с параметром $\Lambda(B) = \int_B \lambda(x)\,dx$,

б) для любых двух непересекающихся измеримых множеств B_1, $B_2 \subset R^1$ числа $\xi(B_1)$ и $\xi(B_2)$ независимы.

Функция $\lambda(x)$ называется *интенсивностью* пуассоновского потока.

В ряде случаев более удобным оказывается другое (эквивалентное) определение пуассоновского потока: для любого $x \in R^1$ при $h \downarrow 0$

$$\mathsf{P}\{\xi([x, x+h]) = 1\} = \lambda(x)h + o(h),$$
$$\mathsf{P}\{\xi([x, x+h]) = 0\} = 1 - \lambda(x)h + o(h),$$

и для непересекающихся интервалов $(x, x+h)$, $(y, y+g)$ $(h,\ g > 0)$ случайные величины $\xi([x,\ x+h])$ и $\xi([y,\ y+g])$ независимы.

Если $\lambda(x) = \lambda$, т. е. пуассоновский поток *однородный*, а $\tau_1 < \tau_2 < \ldots$ — все точки пуассоновского потока на $[0,\ \infty)$, то случайные величины $\tau_1,\ \tau_2 - \tau_1,\ \tau_3 - \tau_2,\ \ldots$ независимы и имеют показательное распределение:

$$\mathsf{P}\{\tau_1 \leqslant x\} = \mathsf{P}\{\tau_{k+1} - \tau_k \leqslant x\} = 1 - e^{-\lambda x} \qquad (x \geqslant 0).$$

Пуассоновский процесс ξ_t $(t \geqslant 0)$ с интенсивностью $\lambda(x)$ — это случайный процесс, связанный с пуассоновским потоком с интенсивностью $\lambda(x)$ равенством $\xi_t = \xi([0,\ t])$, т. е. ξ_t — это число точек потока, попавших в отрезок $[0,\ t]$. Таким образом, при любом $t > 0$ значение пуассоновского процесса ξ_t с интенсивностью $\lambda(x)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\Lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda(x)\,dx$, приращения $\xi_{t+h} - \xi_t$ и $\xi_{s+g} - \xi_s$ $(s,\ t,\ h,\ g \geqslant 0)$ имеют распределения Пуассона с параметрами $\Lambda(t+h) - \Lambda(t)$ и $\Lambda(s+g) - \Lambda(s)$ соответственно (и независимы, если интервалы $(t,\ t+h)$ и $(s,\ s+g)$ не пересекаются).

Важным классом случайных процессов являются *цепи Маркова.*

Во введении к гл. 2 была определена общая схема последовательности зависимых испытаний с исходами $1, \ldots, N$, в которой вероятность появления цепочки исходов $i_1, \ldots, i_k$ в испытаниях с номерами $1, \ldots, k$ представлялась в виде

$$P(i_1, \ldots, i_k) = p(i_1)p(i_2|i_1)\ldots p(i_k|i_1 \ldots i_{k-1}), \qquad (5.1)$$

где $p(i_j|i_1 \ldots i_{j-1}) \geqslant 0$ — функции, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i_j=1}^{N} p(i_j \mid i_1 \ldots i_{j-1}) = 1 \qquad (5.2)$$

для любого $j \geqslant 1$ и любых $i_1, \ldots, i_{j-1} \in \{1, \ldots, N\}$.

В предыдущих главах, как правило, рассматривался частный случай однородной последовательности независимых испытаний, когда функции $p(i_j|i_1 \ldots i_{j-1}) = p(i_j)$ не зависели ни от j, ни от $i_1, \ldots, i_{j-1}$. В § 3 этой главы рассматривается другой важный частный случай общей схемы (5.1), в котором для любого $j \geqslant 2$ и любых $i_1, \ldots, i_{j-1}$

$$p(i_j \mid i_1 \ldots i_{j-1}) = p_{i_{j-1}, i_j}; \tag{5.3}$$

если выполнено (5.3), то говорят, что последовательность испытаний образует *однородную цепь Маркова*. Условие (5.3) часто называют *марковским свойством*; оно означает, что если исход какого-то испытания фиксирован, то результаты испытаний, следующих за выбранным, не зависят от результатов испытаний, предшествовавших ему. При построении математических моделей ряда реальных явлений предположение (5.3) оказывается довольно естественным.

Для цепей Маркова начальному испытанию приписывают номер 0 (а не 1, как в (5.1)), исходы $1, \ldots, N$ называют *состояниями* цепи, вектор

$$p^{(0)} = \left(p_1^{(0)}, \ldots, p_N^{(0)}\right) = (p(1), \ldots, p(N))$$

— *вектором начальных вероятностей*, а матрицу

$$P = \| p_{ij} \|_{i,j=1}^N = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{N1} & p_{N2} & \ldots & p_{NN} \end{pmatrix}$$

— *матрицей вероятностей перехода*. В силу (5.2) все элементы матрицы P неотрицательны и сумма элементов каждой строки равна 1; матрицы, обладающие этими свойствами, называют *стохастическими*.

Отметим, что все введенные здесь определения легко распространяются на *бесконечные* последовательности испытаний (цепи Маркова) с *бесконечным* множеством исходов (состояний) $\{1, 2, \ldots\}$.

Из определений (5.1), (5.3) следует, что если ξ_t — состояние цепи Маркова в момент t и

$$p_{ij}(t) = \mathsf{P}\{\xi_t = j \mid \xi_0 = i\} = \mathsf{P}\{\xi_{t+s} = j \mid \xi_s = i\}, \qquad s,\ t \geqslant 0,$$

— вероятность перехода из состояния i в состояние j за t шагов, то матрица

$$P(t) = \| p_{ij}(t) \|_{i,j=1}^N = P^t,$$

а векторы $p^{(t)} = (p_1^{(t)}, \ldots, p_N^{(t)})$, где $p_j^{(t)} = \mathsf{P}(\xi_t = j)$, удовлетворяют соотношению

$$p^{(t+s)} = p^{(s)} P^t;$$

далее для любых $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_k$, $i_0, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, N\}$

$$\mathsf{P}\{\xi_{t_0} = i_0, \xi_{t_1} = i_1, \ldots, \xi_{t_k} = i_k\} =$$

$$= \mathsf{P}\{\xi_{t_0} = i_0\} \prod_{j=1}^{k} p_{i_{j-1}, i_j}(t_j - t_{j-1}).$$

Таким образом, с формальной точки зрения исследование многих свойств цепей Маркова сводится к изучению соответствующих свойств степеней матриц вероятностей перехода (об одном из способов получения явных формул для элементов степеней матриц см. задачи 5.79—5.81).

Важную роль при изучении цепей Маркова играет классификация их состояний. Говорят, что состояние j *следует* за состоянием i $(i \to j)$, если $p_{ij}(t) > 0$ для некоторого целого $t > 0$; если $i \to j$ и $j \to i$, то состояния i и j называют *сообщающимися* $(i \leftrightarrow j)$. Если для состояния i найдется такое состояние $j = j(i)$, что $i \to j$, но $j \not\to i$ (т. е. $p_{ji}(t) \equiv 0$), то состояние i называется *несущественным*; в противном случае состояние i *существенное*. Множество всех существенных состояний с помощью отношения $\leftrightarrow$ (нетрудно проверить, что это отношение является *отношением эквивалентности*) разбивается на *классы сообщающихся существенных состояний*; переходы траектории цепи из одного такого класса в другой невозможны. Множество несущественных состояний тоже разбивается на классы сообщающихся состояний; траектория цепи Маркова может выходить из любого такого класса, но, выйдя из такого класса, вернуться в него уже не может. Если множество состояний цепи Маркова конечно, то с вероятностью 1 траектория цепи рано или поздно выходит из множества несущественных состояний и после этого остается в одном из классов существенных сообщающихся состояний.

Говорят, что класс $\mathscr{A}$ сообщающихся состояний *периодический* с периодом $d > 1$, если для состояния $i \in \mathscr{A}$

$$\{t\colon\ p_{ii}(t) > 0\} \subset \{d, 2d, 3d, \ldots\} \tag{5.4}$$

и любое число $d_1 > d$ не удовлетворяет (5.4); определенное по формуле (5.4) число d зависит от класса $\mathscr{A}$, но не от выбора элемента $i \in \mathscr{A}$. Если (5.4) выполняется только при $d = 1$, то класс $\mathscr{A}$ называют *апериодическим.*

Пусть все состояния цепи Маркова ξ_t с матрицей вероятностей перехода P образуют один апериодический класс сообщающихся состояний. Тогда существует такое целое число t_0, что при любом $t \geqslant t_0$ все элементы матрицы P^t положительны и справедлива следующая

Теорема. *Если для цепи Маркова с $N < \infty$ состояниями при некотором $t_0 > 0$ все элементы матрицы P^{t_0} положительны, то существуют*

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j > 0, \qquad i, j \in \{1, \ldots, N\};$$

величины $\pi_1, \ldots, \pi_N$ являются единственным решением системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij} = \pi_j, \quad j = 1, \ldots, N, \qquad \pi_1 + \ldots + \pi_N = 1.$$

Распределение $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_N)$ не зависит от начального состояния i цепи ξ_t и называется *предельным* или *финальным* распределением ξ_t. Кроме того, распределение π *стационарно*, т. е. $\pi P^t = \pi$ для любого $t = 1, 2, \ldots$ В случае, рассмотренном в теореме, стационарное распределение единственно и совпадает с предельным; если цепь Маркова имеет несколько апериодических классов существенных сообщающихся состояний, то существует много стационарных распределений и предельное распределение зависит от начального; если цепь содержит несущественные состояния, то соответствующие им предельные вероятности равны 0.

Наконец, если все состояния $1, \ldots, N$ цепи Маркова ξ_t образуют один класс периода $d > 1$, то предельного распределения ξ_t при условии $\xi_0 = i$ и $t \to \infty$ не существует; однако существуют такие распределения $\pi^{(1)} = (\pi_1^{(1)}, \ldots, \pi_N^{(1)}), \ldots, \pi^{(d)} = (\pi_1^{(d)}, \ldots, \pi_N^{(d)})$, что для любого $i \in \{1, \ldots, N\}$ и любого целого $k \geqslant 0$

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(td + k) = \pi_j^{(m(i,k))}, \qquad j = 1, \ldots, N,$$

где функция $m(i, k)$ принимает значения $1, \ldots, d$ и при любом $j \in \{1, \ldots, N\}$ лишь одно из чисел $\pi_j^{(1)}, \ldots, \pi_j^{(d)}$ отлично от 0.

Цепью Маркова ξ_t *с непрерывным временем* и множеством состояний $\{1, \ldots, N\}$ называют случайный процесс, траектории которого являются кусочно-постоянными функциями, принимающими значения 1, ..., N, и при любых $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, t и $h > 0$ вероятности перехода из состояния i в состояние j за время h

$$p_{ij}(h) = \mathsf{P}\{\xi_{t+h} = j \mid \xi_t = i\} = \mathsf{P}\{\xi_{t+h} = j \mid \xi_t = i, \{\xi_u\}_{u<t}\}$$

не зависят от поведения процесса ξ_u до момента t и удовлетворяют условиям

$$p_{ij}(h) = \alpha_{ij}h + o(h) \qquad (i \neq j),$$

$$p_{ii}(h) = 1 - \alpha_i h + o(h),$$

$$h \downarrow 0, \quad \alpha_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \alpha_{ij}, \qquad i, j \in \{1, \ldots, N\}.$$

Функции $p_{ij}(t)$, $t \geqslant 0$, являются решением систем дифференциальных уравнений Колмогорова — Чепмэна

$$p'_{ij}(t) = -\alpha_i p_{ij}(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \alpha_{ik} p_{kj}(t),$$

$$i, j \in \{1, \ldots, N\}, \tag{5.5}$$

и

$$p'_{ij}(t) = -\alpha_j p_{ij}(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} p_{ik}(t) \alpha_{kj},$$

$$i, j \in \{1, \ldots, N\}, \tag{5.6}$$

с начальными условиями $p_{ii}(0) = 1$, $p_{ij}(0) = 0$ $(i \neq j,\ i, j \in \{1, \ldots, N\})$.

Классификация состояний описанных здесь цепей Маркова с непрерывным временем отличается от случая дискретного времени лишь тем, что состояния (и их классы) не могут быть периодическими. Если все состояния 1, ..., N цепи Маркова с непрерывным временем сообщаются, то существуют

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \pi_j > 0, \quad i, j \in \{1, \ldots, N\},$$

и предельное распределение $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_N)$ является единственным решением системы линейных уравнений

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} \pi_k \alpha_{kj} = \pi_j \alpha_j, \qquad j = 1, \ldots, N,$$

$$\pi_1 + \ldots + \pi_N = 1.$$

§ 1. Разные задачи

5.1°. Случайные величины ξ_t $(t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ независимы, $\mathsf{M}\xi_t = a$, $\mathsf{D}\xi_t = \sigma^2$. По действительным числам $c_0, c_1, \ldots, c_k$, удовлетворяющим условию $c_0 + c_1 + \ldots \ldots + c_k = 1$, построен случайный процесс

$$\eta_t = c_0\xi_t + c_1\xi_{t-1} + \ldots + c_k\xi_{t-k}, \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Найти $\mathsf{M}\eta_t$, $\mathsf{D}\eta_t$, $\operatorname{cov}(\eta_t, \eta_s)$. Показать, что $\operatorname{cov}(\eta_t, \eta_s) = R(|s-t|)$, т. е. зависит только от $|s-t|$.

5.2°. Пусть выполнены условия задачи 5.1.

а) Доказать, что последовательность случайных величин

$$\zeta_n = \frac{1}{n}(\eta_1 + \ldots + \eta_n)$$

при $n \to \infty$ сходится по вероятности к $a = \mathsf{M}\xi_t$.

б) Сходится ли ζ_n к a с вероятностью при $n \to \infty$?

5.3. Пусть выполнены условия задачи 5.1 и, кроме того, $a = 0$, $\mathsf{M}\xi_t^4 = c < \infty$.

а) Доказать, что для любого целого $s \geqslant 0$ последовательность случайных величин

$$\zeta_n^{(s)} = \frac{1}{n}(\eta_1\eta_{1+s} + \eta_2\eta_{2+s} + \ldots + \eta_n\eta_{n+s})$$

при $n \to \infty$ сходится по вероятности к $R(s)$.

б) Сходится ли $\zeta_n^{(s)}$ к $R(s)$ с вероятностью 1 при $n \to \infty$?

5.4°. Случайный процесс ξ_t, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, определяется формулой

$$\xi_t = \alpha \sin(At + \beta) + \varepsilon_t,$$

где α, β, $\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ — независимые случайные величины, $\mathsf{M}\alpha = 0$, $\mathsf{D}\alpha = 1$, β имеет равномерное распределение на отрезке $[-\pi, \pi]$, $\mathsf{M}\varepsilon_t = 0$, $\mathsf{D}\varepsilon_t = \sigma^2$. Найти $\mathsf{M}\xi_t$, $\mathsf{D}\xi_t$, $\operatorname{cov}(\xi_t, \xi_s)$.

5.5°. Случайный процесс ξ_t, $-\infty < t < \infty$, задан формулой

$$\xi_t = \sin(t + \pi\eta_1) + \sin \pi(t + \eta_2),$$

где η_1 и η_2 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$. Найти $\mathsf{M}\xi_t$, $\mathsf{D}\xi_t$, $\operatorname{cov}(\xi_t, \xi_s)$.

5.6. Случайный процесс ξ_t, $-\infty < t < \infty$, задан формулой

$$\xi_t = \zeta_1 \sin t + \zeta_2 \sin \pi t,$$

где ζ_1 и ζ_2 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \sup_t \xi_t$.

5.7*. Случайные величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены, $\mathsf{M}\alpha_i = 0$, $\mathsf{D}\alpha_i = 1$. Случайные величины $\beta_1, \beta_2, \ldots$ независимы, не зависят от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и имеют равномерное распределение на отрезке $[-\pi, \pi]$. Последовательность случайных процессов $\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots$ определяется равенством

$$\eta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(t + \beta_k).$$

а) Найти предельное распределение $\eta_n(t)$ при $n \to \infty$, $t = \text{const}$.

б) Доказать, что $\eta_n(t) = \theta_n \cos(t + \gamma_n)$. Найти предельное распределение вектора (γ_n, θ_n) при $n \to \infty$.

5.8°. Случайный процесс ε_t, $0 \leqslant t < \infty$, с вероятностью 1 имеет непрерывные траектории, $\mathsf{M}\varepsilon_t = 0$, $\mathsf{D}\varepsilon_t < \infty$, $\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = R(|t-s|)$ при любых $t, s \geqslant 0$. Пусть $\eta_t = \int_0^t \varepsilon_u du$, $t \geqslant 0$. Найти $\mathsf{M}\eta_t$, $\mathsf{D}\eta_t$, $\operatorname{cov}(\eta_t, \eta_s)$.

5.9°. По траектории случайного процесса ξ_t, $t \geqslant 0$, определяется случайная величина

$$\tau_N = \inf\{t \geqslant 0 \colon \xi_t \geqslant N\}.$$

Найти функцию распределения $F_N(x) = \mathsf{P}\{\tau_N \leqslant x\}$ при $N > 0$ в следующих случаях:

а) $\xi_t = \zeta t$, где $\mathsf{P}\{\zeta \leqslant x\} = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^k}$ $(x \geqslant 0,\ k > 0)$,

б) $\xi_t = t^2 - 2t\zeta$, где $\mathsf{P}\{\zeta \leqslant x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x \geqslant 0)$,

в) $\xi_t = \zeta e^{at}$, где $a > 0$ и $\mathsf{P}\{\zeta \leqslant x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x \geqslant 0)$.

5.10. По последовательности $\xi_0, \xi_1, \ldots$ независимых одинаково распределенных случайных величин построен случайный процесс $\eta_k = \xi_{k+1} - \xi_k$, $k = 0, 1, \ldots$ Положим

$$\tau_1 = \inf\{k \geqslant 0 \colon \eta_k \leqslant 0\},$$

$$\tau_2 = \inf\{k \geqslant 0 \colon \eta_k < 0\}.$$

Найти $\mathsf{M}\tau_1$ и $\mathsf{M}\tau_2$ в следующих трех случаях:

а) $\mathsf{P}\{\xi_0 = 1\} = \mathsf{P}\{\xi_0 = 2\} = 1/2$,

б) $\mathsf{P}\{\xi_0 = 1\} = \mathsf{P}\{\xi_0 = 2\} = \ldots = \mathsf{P}\{\xi_0 = d\} = 1/d$,

в) ξ_0 имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

5.11. Найти распределение корня τ случайного уравнения $\xi x + \eta = 0$, где ξ и η — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

5.12. По последовательности $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение, строится траектория случайного процесса ξ_t $(t \geqslant 0)$: $\xi_0 = 0$, $\xi_k = \zeta_1 + \ldots + \zeta_k$ при любом целом $k \geqslant 1$, а при $t \in (k, k+1)$, $k = 0, 1, \ldots$, графиком траектории ξ_t является отрезок, соединяющий точки (k, ξ_k) и $(k+1, \xi_{k+1})$, т. е.

$$\xi_t = (k+1-t)\xi_k + (t-k)\xi_{k+1} \text{ при } k < t < k+1.$$

Найти математическое ожидание числа μ_k нулей процесса ξ_t на полуинтервале $[0,k)$ $(k \geqslant 1$ — целое) и асимптотику $\mathsf{M}\mu_k$ при $k \to \infty$.

5.13. Случайный процесс $\xi_n(x)$, $-\infty < x < \infty$, определяется равенством

$$\xi_n(x) = \zeta_0 + \zeta_1 x + \zeta_2 x^2 + \ldots + \zeta_n x^n,$$

где случайная величина ζ_0 не зависит от случайного вектора $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ и имеет непрерывную функцию распределения. Доказать, что при любых фиксированных x и a

$$\mathsf{P}\{\xi_n(x) = a\} = 0.$$

5.14. Доказать, что если выполнены условия задачи 5.13, то с вероятностью 1 все действительные корни многочлена $\xi_n(x)$ — простые.

5.15. Случайный процесс $\xi_n(x)$, $-\infty < x < \infty$, определяется равенством

$$\xi_n(x) = \zeta_0 + \zeta_1 x + \ldots + \zeta_n x^n,$$

где $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — независимые случайные величины, имеющие нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию. Найти $\mathsf{M}\xi_n(x)$, $\mathsf{D}\xi_n(x)$, $\operatorname{cov}(\xi_n(x), \xi_n(y))$.

5.16. Доказать, что если выполнены условия задачи 5.15, а случайные величины $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение, то при любых действительных $x_1, \ldots, x_k$ вектор $(\xi_n(x_1), \ldots, \xi_n(x_k))$ имеет многомерное нормальное распределение.

5.17*. Случайный процесс $\xi_n(x)$, $-\infty < x < \infty$, определяется равенством

$$\xi_n(x) = \zeta_0 + \zeta_1 x + \ldots + \zeta_n x^n,$$

где $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Используя результаты задач 5.15, 5.16 и 3.266, доказать, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathsf{P}\{\xi_n(x)\,\xi_n(x+h)<0\}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{|1-x^2|}\sqrt{1-\left[(n+1)\,x^n\dfrac{1-x^2}{1-x^{2n+2}}\right]^2}, & |x|\neq 1,\\ \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{n(n+2)}{12}}, & |x|=1.\end{cases}$$

На рис. 6 приведены графики функций $g_{10}(x)$, $g_{20}(x)$, $g_{40}(x)$. Доказать, что при $n\uparrow\infty$ функции $g_n(x)$, монотонно возрастая, стремятся к функции $g(x)=\dfrac{1}{\pi|1-x^2|}$.

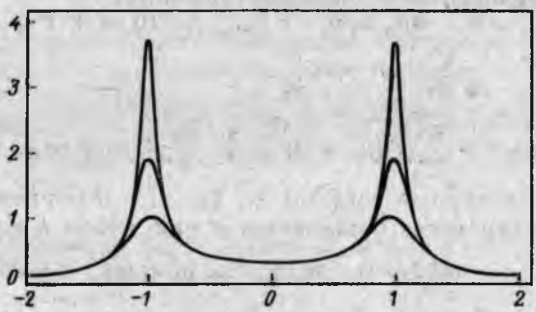

Рис. 6

5.18. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ... независимы и имеют одно и то же распределение на множестве $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$ с производящей функцией $f(s)=\mathsf{M}s^{\xi_1}$. По случайному блужданию

$$\rho_0=0,\ \rho_n=\xi_1+\ldots+\xi_n \qquad (n\geqslant 1)$$

построим случайные величины τ_1, τ_2, ...:

$$\tau_k=\begin{cases}\min\{n\colon \rho_n=-k\}, & \text{если } \inf\limits_{n>0}\rho_n\leqslant -k,\\ \infty \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

а) Доказать, что производящие функции $\varphi_k(s)=\mathsf{M}s^{\tau_k}$ связаны соотношениями $\varphi_k(s)=\varphi_1^k(s)$, а производящая функция $\varphi_1(s)$ является решением уравнения $sf(\varphi_1(s))=1$.

б) Найти функцию $\varphi_1(s)$, если

$$\mathsf{P}\{\xi_1=k\}=(1-p)p^{k+1},\qquad k=-1, 0, 1, \ldots$$

в) Найти функцию $\varphi_1(s)$, если

$$P\{\xi_1=1\}=p, \quad P\{\xi_1=-1\}=1-p, \quad 0<p<1.$$

5.19. По случайному блужданию ρ_n, определенному в задаче 5.18, построим случайную величину $\mu=\inf\limits_{n\geqslant 0}\rho_n$.

а) Найти распределение μ.

б) Доказать, что $P\{\mu>-\infty\}=1$ тогда и только тогда, когда $M\xi_1>0$ или $P\{\xi_1=0\}=1$.

5.20. Показать, что если $\rho_0=0$, $\rho_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$ — случайное блуждание, построенное по независимым одинаково распределенным случайным величинам $\xi_1, \xi_2, \ldots$:

$$P\{\xi_n=1\}=P\{\xi_n=-1\}=1/2, \qquad n=1, 2, \ldots,$$

то справедливы следующие соотношения:

а) $M\rho_n=0$, $D\rho_n=n$, $P\{\rho_{2n+1}=0\}=0$, $P\{\rho_{2n}=0\}=$ $=C_{2n}^n 2^{-2n}\sim\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, $n\to\infty$;

б) $M|\rho_n|=\sum\limits_{k=0}^{n-1}P\{\rho_k=0\}\sim\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$, $n\to\infty$.

5.21. Случайные векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots$ в d-мерном евклидовом пространстве независимы и при любом $k=1, 2, \ldots$

$$M\xi_k=0, \quad M|\xi_k|^2=\sigma_k^2<\infty,$$

где $|\xi_k|$ — евклидова длина ξ_k. Построим случайное блуждание $\rho_0=0$, $\rho_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$ $(n\geqslant 1)$. Доказать, что

$$M\rho_n=0, \quad M|\rho_n|^2=\sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2.$$

5.22. Случайные векторы $\xi_k=(\xi_{k,1}, \ldots, \xi_{k,d})$ $(k=$ $=1, 2, \ldots)$ в d-мерном евклидовом пространстве независимы и имеют равномерное распределение на единичной сфере

$$S^{d-1}=\{(x_1, \ldots, x_d)\in R^d\colon x_1^2+\ldots+x_d^2=1\}.$$

Пусть $\rho_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$ и $|\rho_n|$ — евклидова длина вектора ρ_n. Найти $M|\rho_n|^2$, $D|\rho_n|^2$.

5.23. Пусть выполнены условия задачи 5.22. Доказать, что при любом $\alpha>3/2$

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{|\rho_n|}{n^\alpha}=0\right\}=1.$$

5.24*. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, принимают значения 1 и -1 с вероятностями p и $q=$

$= 1 - p$ соответственно, и

$$S_0 = 0, \quad S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Обозначим через ν число таких n, что $S_n = 0$.

а) Показать, что если $p \neq q$, то $\mathsf{P}\{\nu < \infty\} = 1$;

б) показать, что если $p = q = 1/2$, то $\mathsf{P}\{\nu = \infty\} = 1$.

5.25*. Независимые случайные векторы $\xi_n = (\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,s}) \in R^s$, $n = 1, 2, \ldots$, имеют независимые компоненты и $\mathsf{P}\{\xi_{n,i} = 1\} = \mathsf{P}\{\xi_{n,i} = -1\} = \frac{1}{2}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $n = 1, 2, \ldots$ Положим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и обозначим через ν число таких n, что $S_n = (0, \ldots, 0)$. Показать, что $\mathsf{P}\{\nu = \infty\} = 1$ при $s = 2$ и что $\mathsf{P}\{\nu < \infty\} = 1$ при $s \geqslant 3$.

5.26. (Тождество Вальда.) Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, $\mathsf{M}\xi_i = a$, $\mathsf{M}|\xi_i| \leqslant C < \infty$ $(i \geqslant 1)$. Пусть $B_1 \subset R^1$, $B_2 \subset R^2$, $B_3 \subset R^3$, ... — произвольная последовательность измеримых множеств, и случайная величина ν определяется равенством

$$\nu = \inf\{n: \ (\xi_1, \ldots, \xi_n) \notin B_n\}$$

($\nu = \infty$, если $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in B_n$ при любом $n < \infty$). Используя равенство

$$\sum_{i=1}^{\nu} \xi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \chi\{\nu \geqslant i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i (1 - \chi\{\nu < i\})$$

(где $\chi\{A\}$ — индикатор события A), доказать, что если $\mathsf{M}\nu < \infty$, то

$$\mathsf{M} \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i = a\mathsf{M}\nu.$$

5.27. Проверить справедливость установленного в задаче 5.26 равенства в следующих случаях:

а) $\mathsf{P}\{\xi_i = 1\} = \mathsf{P}\{\xi_i = -1\} = 1/2$, $\nu = \min\{n \geqslant 0: \ \xi_1 + \ldots + \xi_n = 1\}$,

б) $\mathsf{P}\{\xi_i = 1\} = \mathsf{P}\{\xi_i = -2\} = 1/2$, $\nu = \min\{n \geqslant 0: \ \xi_1 + \ldots + \xi_n = 1\}$.

Объяснить результаты.

5.28. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены, $a = \mathsf{M}\xi_1 > 0$ и $\mathsf{P}\{|\xi_1| \leqslant C\} = 1$ при некотором $C < \infty$. Пусть $\rho_0 = 0$, $\rho_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ $(n \geqslant 1)$ и $N_t = \inf\{n > 0: \ S_n \geqslant t\}$. Доказать, что при любом $t > 0$

$$t \leqslant a\mathsf{M}N_t \leqslant t + C.$$

5.29. Случайные величины $\rho_1, \rho_2, \ldots$ при любом целом $n \geqslant 1$ удовлетворяют условию

$$\mathsf{M}\{\rho_{n+1} | \rho_1, \ldots, \rho_n\} \geqslant \rho_n.$$

Доказать, что при любых целых k, $n \geqslant 1$

$$\mathsf{M}\{\rho_{n+k} | \rho_1, \ldots, \rho_n\} \geqslant \rho_n.$$

5.30*. Неотрицательные случайные величины $\rho_1, \rho_2, \ldots$ при любом целом $n \geqslant 1$ удовлетворяют условию

$$\mathsf{M}\{\rho_{n+1} | \rho_1, \ldots, \rho_n\} \geqslant \rho_n.$$

Доказать, что для любого $\delta > 0$ и любого целого $n \geqslant 1$

$$\mathsf{P}\{\max\{\rho_1, \ldots, \rho_n\} \geqslant \delta\} \leqslant \frac{\mathsf{M}\rho_n}{\delta}.$$

5.31. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, $\mathsf{M}\xi_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ Доказать, что для любого $\delta > 0$ и любого целого $n \geqslant 1$

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_1 + \ldots + \xi_k| \geqslant \delta\right\} \leqslant \frac{\mathsf{M}|\xi_1 + \ldots + \xi_n|}{\delta}.$$

5.32. (Неравенство Колмогорова.) Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, $\mathsf{M}\xi_i = 0$, $\mathsf{D}\xi_i = \sigma_i^2 < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Доказать, что для любого $\delta > 0$ и любого целого $n \geqslant 1$

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_1 + \ldots + \xi_k| \geqslant \delta\right\} \leqslant \frac{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2}{\delta^2}.$$

§ 2. Пуассоновские процессы

5.33°. Найти $\operatorname{cov}(\xi_t, \xi_{t+s})$ при $t, s \geqslant 0$, если:

а) ξ_t — пуассоновский процесс на $[0, \infty)$ с интенсивностью λ,

б) ξ_t — пуассоновский процесс на $[0, \infty)$ с интенсивностью $\lambda(t)$.

5.34. Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots)$ — положения точек пуассоновского потока на $[0, \infty)$ с интенсивностью λ. Доказать, что при любом $T > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\tau_k \leqslant T\} = \lambda T.$$

5.35. Пусть выполнены условия задачи 5.34. Найти $\mathsf{M}\tau_k$, $\mathsf{D}\tau_k$ и плотность $p_k(x)$ распределения τ_k.

5.36. Пусть выполнены условия задачи **5.34**. Найти:

а) плотность $p(x_1, \ldots, x_k)$ совместного распределения случайных величин $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$,

б) $\mathsf{P}\{\tau_1 \leqslant x \mid \tau_2 > T\}$, $0 \leqslant x \leqslant \infty$,

в) $\mathsf{P}\{\tau_1 \leqslant x \mid \tau_1 \leqslant T < \tau_2\}$, $0 \leqslant x \leqslant T$.

5.37. Пусть выполнены условия задачи **5.34**. Найти условную плотность $p_T(x_1, \ldots, x_k)$ совместного распределения случайных величин $\tau_1, \ldots, \tau_k$ при условии, что $\tau_k \leqslant T < \tau_{k+1}$. Сравнить $p_T(x_1, \ldots, x_k)$ с плотностью $q_T(x_1, \ldots, x_k)$ совместного распределения членов вариационного ряда $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(k)}$, построенного по независимым случайным величинам $\xi_1, \ldots, \xi_k$, имеющим равномерное распределение на отрезке $[0, T]$.

5.38°. Найти математическое ожидание числа точек пуассоновского потока с интенсивностью λ, принадлежащих интервалу $(0, T)$ и таких, что справа от каждой из них в интервале длины Δ нет других точек этого пуассоновского потока.

5.39°. Найти математическое ожидание числа точек пуассоновского потока с интенсивностью λ, принадлежащих интервалу $(0, T)$ и таких, что расстояния от каждой из них до ближайших точек пуассоновского потока не меньше Δ.

5.40°. Пусть $\{\tau_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — положения точек пуассоновского потока на $(-\infty, \infty)$ с интенсивностью λ. Перенумеруем случайные величины τ_k так, чтобы они удовлетворяли условиям $0 \leqslant |\tau_{(0)}| \leqslant |\tau_{(1)}| \leqslant \ldots$

а) Как можно описать последовательность $\{|\tau_{(k)}|\}_{k=0}^{\infty}$?

б) Что можно сказать о последовательности $\theta_k = \tau_{(k)}/|\tau_{(k)}|$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, знаков чисел $\tau_{(k)}$?

5.41°. Пусть $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ — положения всех точек пуассоновского потока на $[0, \infty)$ с интенсивностью λ. «Проредим» этот поток, исключая из него каждую точку независимо от остальных с вероятностью p, где p — данное число, $0 < p < 1$. Доказать, что прореженный поток является пуассоновским. Чему равна его интенсивность?

5.42°. Пусть $p(x)$ — кусочно-непрерывная функция, принимающая значения из отрезка $[0, 1]$, а $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ — положения всех точек пуассоновского потока на $[0, \infty)$ с интенсивностью $\lambda(x)$. «Проредим» этот поток, исключая из него каждую точку τ_k независимо от остальных с вероятностью $p(\tau_k)$. Доказать, что прореженный поток является пуассоновским. Чему равна его интенсивность?

5.43°. Моменты поступления требований в систему массового обслуживания образуют пуассоновский поток на $(-\infty, \infty)$ с интенсивностью λ. Каждое требование независимо от остальных находится в системе случайное время τ с $\mathsf{P}\{\tau \leqslant x\} = G(x)$, $\mathsf{M}\tau < \infty$. Найти распределение числа ξ_t требований в системе в момент t.

5.44. Для системы массового обслуживания, описанной в задаче 5.43, найти функцию $f(t) = \mathsf{P}\{\xi_t = 0 | \xi_0 = 0\}$. Убедиться в том, что $f(t)$ монотонно не возрастает по t.

5.45. Случайно расположенные на плоскости точки образуют пуассоновское поле с интенсивностью λ, т. е. число точек в любой квадрируемой области S имеет пуассоновское распределение с математическим ожиданием $\lambda|S|$, где $|S|$ — площадь области S, и числа точек в непересекающихся областях независимы. Пусть $\rho_1 \leqslant \leqslant \rho_2 \leqslant \ldots$ — упорядоченные по возрастанию расстояния от начала координат до точек этого поля.

а) Как можно описать последовательность $\{\rho_k\}_{k=1}^{\infty}$?

б) Найти плотность $p_n(x)$ распределения ρ_n, точную формулу для $\mathsf{M}\rho_n$ и асимптотику $\mathsf{M}\rho_n$ при $n \to \infty$.

5.46. Случайно расположенные в пространстве R^3 точки образуют пуассоновское поле с интенсивностью λ, т. е. число точек в любой измеримой области V имеет пуассоновское распределение с математическим ожиданием $\lambda|V|$, где $|V|$ — объем области V, а числа точек в непересекающихся областях независимы. Ответить на те же вопросы, что в задаче 5.45.

5.47. Автобусы прибывают на остановку в случайные моменты времени $\tau_1 < \tau_2 < \ldots$ Случайные величины τ_1, τ_2, ... независимы и τ_n имеет равномерное распределение в интервале $(n-1, n)$.

а) Найти плотность $p(x)$ распределения интервала $\delta_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ между автобусами.

б) Найти плотность $p_k(x_1, x_2)$ распределения двумерного вектора (δ_n, δ_{n+k}) при $k = 1, 2, \ldots$

в) Моменты ξ_1 и ξ_2 прихода двух пассажиров на остановку независимы и имеют равномерное распределение на интервале $(0, 1)$. Найти вероятность того, что они поедут на одном и том же автобусе.

г) Моменты ξ_1 и ξ_2 прихода двух пассажиров на остановку независимы, ξ_1 имеет равномерное распределение на интервале $(0, 1)$, а ξ_2 — на интервале $(1, 2)$. Найти вероятность того, что эти пассажиры поедут на одном автобусе.

д) Пассажир приходит на остановку в случайный момент ξ, имеющий равномерное распределение на интервале $(0, 1)$. Найти математическое ожидание, дисперсию и плотность $q(x)$ распределения времени ожидания автобуса.

5.48. Решить задачу 5.47 в случае, когда последовательность $\tau_1 < \tau_2 < \ldots$ моментов прибытия автобусов на остановку образует пуассоновский поток с интенсивностью 1. Сравнить полученные результаты с результатами решения задачи 5.47.

§ 3. Цепи Маркова

5.49. Цепь Маркова ξ_t имеет множество состояний $\{-6, -5, \ldots, 0, 1, \ldots, 6\}$. Переходные вероятности $p_{ij} = \mathsf{P}\{\xi_{t+1} = j \mid \xi_t = i\}$ при $i \neq 0$ определяются соотношениями

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = i + 1 \leqslant 0 \quad \text{или} \quad j = i - 1 \geqslant 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Провести классификацию цепи Маркова и множества ее состояний, если:

а) $p_{0,6} = 1$, $p_{0,i} = 0$ $(i \neq 6)$,

б) $p_{0,6} = p_{0,-6} = 1/2$, $p_{0,i} = 0$ $(|i| \neq 6)$,

в) $p_{0,6} = p_{0,-5} = 1/2$, $p_{0,i} = 0$ $(i \neq -5,\ i \neq 6)$.

5.50. Матрица вероятностей перехода цепи Маркова имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Распределение по состояниям в момент времени $t = 0$ определяется вектором $(0{,}7;\ 0{,}2;\ 0{,}1)$. Найти:

1) распределение по состояниям в момент $t = 2$;

2) вероятность того, что в моменты $t = 0, 1, 2, 3$ состояниями цепи будут соответственно 1, 3, 3, 2;

3) стационарное распределение.

5.51. Пусть ξ_t — номер состояния в цепи Маркова в момент времени t; $\mathsf{P}(\xi_0 = 1) = 1$, и матрица вероятностей перехода имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 4/11 & 6/11 \end{pmatrix};$$

положим

$$\eta_t = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \xi_t = 1, \\ 2, & \text{если} \quad \xi_t \neq 1. \end{cases}$$

Показать, что последовательность η_t является цепью Маркова. Найти ее матрицу вероятностей перехода.

5.52. Случайные величины ξ_t, $t=1, 2, \ldots$, независимы и

$$\mathsf{P}(\xi_t=1)=p, \quad \mathsf{P}(\xi_t=-1)=1-p=q.$$

Положим $\eta_0=0$; $\eta_{t+1}=\eta_t+\xi_{t+1}$. Является ли последовательность η_t цепью Маркова? Найти $\mathsf{P}(\eta_t=m)$, $m=0, 1, 2, \ldots$

5.53. Пусть ξ_t, $t=1, 2, \ldots,$ — независимые случайные величины, $\mathsf{P}(\xi_t=1)=1-\mathsf{P}(\xi_t=-1)=p$ являются ли цепями Маркова последовательности случайных величин:

а) $\eta_t=\xi_t\xi_{t+1}$;

б) $\eta_t=\xi_1\xi_2\ldots\xi_t$;

в) $\eta_t=\varphi(\xi_t, \xi_{t+1})$, где $\varphi(-1, -1)=1$, $\varphi(-1, 1)=2$, $\varphi(1, -1)=3$, $\varphi(1, 1)=4$?

Для цепей Маркова найти вероятности перехода за один шаг.

5.54. В N ячейках последовательно независимо друг от друга равновероятно размещают частицы. Пусть $\mu_0(n)$ — число ячеек, оставшихся пустыми после размещения n частиц. Показать, что последовательность $\mu_0(n)$, $n=1, 2, \ldots$, является цепью Маркова. Найти вероятности перехода.

5.55. В N ячейках независимо друг от друга размещаются комплекты, состоящие из m частиц. Частицы одного комплекта размещаются в ячейках по одной, и все возможные выборы m мест из N имеют одинаковые вероятности. Обозначим через $\mu_0(n)$ число ячеек, оставшихся пустыми после размещения n комплектов. Показать, что последовательность $\mu_0(n)$, $n=1, 2, \ldots$, является цепью Маркова. Найти вероятности перехода.

5.56. Урна вначале содержит N белых шаров. За 1 шаг из урны по схеме случайного равновероятного выбора вынимают 1 шар и заменяют его новым, который — независимо от предыстории процесса — является черным с вероятностью p и белым с вероятностью $q=1-p$. Обозначим через ξ_n число белых шаров в урне после n-го шага.

а) Найти $p_{ij}=\mathsf{P}\{\xi_{n+1}=j|\xi_n=i\}$, $i, j\in\{0, 1, \ldots, N\}$. Является ли последовательность ξ_n цепью Маркова?

б) Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{P}\{\xi_n=k\}=\pi_k, \quad k\in\{0, 1,\ldots,N\}$.

5.57. В бесконечной последовательности занумерованных шаров каждый шар независимо от остальных является черным с вероятностью p и белым с вероятностью $q=1-p$. Будем считать, что в момент времени $n \in \{0, 1, \ldots\}$ урна содержит шары с номерами $n+1$, $n+2, \ldots, n+N$, и обозначим через ξ_n число белых шаров в урне в момент n. Ответить на те же вопросы, что в задаче 5.56.

5.58. Матрица $P=\|p_{ij}\|_{i,j=1}^N$ с неотрицательными элементами называется *дважды стохастической*, если $p_{i1}+p_{i2}+\ldots+p_{iN}=p_{1i}+p_{2i}+\ldots+p_{Ni}=1$ для любого $i=1, 2, \ldots, N$. Показать, что если цепь Маркова ξ_t с состояниями $1, \ldots, N$ имеет дважды стохастическую матрицу вероятностей перехода $P=\|p_{ij}\|_{i,j=1}^N$, то равномерное распределение на множестве $\{1, \ldots, N\}$ является стационарным для цепи ξ_t.

5.59. Пусть $\zeta_0, \zeta_1, \ldots$ — цепь Маркова с множеством состояний $\{1, 2, 3\}$, матрицей вероятностей перехода $\|p_{ij}\|$ и стационарным распределением π_j. Показать, что если $p_{11}=p_{22}=p_{33}=0$ и $\pi_1=\pi_2=\pi_3=1/3$, то $p_{12}=p_{23}=p_{31}$ и $p_{13}=p_{21}=p_{32}$.

5.60. Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, и $f(x, y)$ — функция, принимающая значения в множестве $\{1, \ldots, N\}$. Является ли последовательность случайных величин

$$\xi_0\left(\mathsf{P}(\xi_0=k)=p_k^{(0)}\right), \quad \xi_{t+1}=f(\xi_t, \eta_{t+1}),$$
$$t=0, 1, 2, \ldots,$$

цепью Маркова?

5.61. Пусть $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Показать, что для любого начального распределения $p^{(0)}=\left(p_1^{(0)}, \ldots, p_N^{(0)}\right)$ и для любой матрицы переходных вероятностей $P=\|p_{ij}\|_{i,j=1}^N$ можно указать такие функции $f(x, y)$ и $g(y)$ ($x \in \{1, \ldots, N\}$, $y \in [0, 1]$), что последовательность $\xi_0=g(\eta_0)$, $\xi_{t+1}=f(\xi_t, \eta_{t+1})$, $t=0, 1, \ldots$, будет цепью Маркова с начальным распределением $p^{(0)}$ и матрицей вероятностей перехода P.

5.62. Игральная кость последовательно перекладывается с одной грани равновероятно на любую из четырех соседних независимо от предыдущего. К какому пределу стремится при $t \to \infty$ вероятность того, что при t-м перекладывании кость окажется на грани «6», если сначала она находилась в этом же положении?

5.63. Цепь Маркова ξ_t имеет два состояния: 1 и 2 — и матрицу вероятностей перехода $\begin{pmatrix} p_{11} & 1-p_{11} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Пусть $\tau = \min\{t \geqslant 1\colon \xi_t = 2\}$.

а) Найти условное распределение τ при условии $\xi_0 = 1$.

б) Как изменится ответ, если матрица вероятностей перехода будет равна

$$\begin{pmatrix} p_{11} & 1-p_{11} \\ 1-p_{22} & p_{22} \end{pmatrix}, \qquad 0 < p_{22} < 1?$$

5.64. Матрица вероятностей перехода $\|p_{ij}\|$ цепи Маркова ξ_t с $n+1$ состояниями имеет вид: $p_{ii} = 1-\alpha$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$; $p_{ij} = \alpha/n$, $i \neq j$. В процессе, начавшемся из состояния k, $k \neq n+1$, обозначим через τ_n момент первого попадания в состояние $n+1$. Подобрать последовательность A_n ($A_n \to \infty$ при $n \to \infty$) так, чтобы существовал предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\tau_n/A_n > x),$$

и найти его.

5.65. Матрица вероятностей перехода цепи Маркова $\xi_n^{(\varepsilon)}$ с множеством состояний $\{1, 2, 3\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 1-p-\varepsilon & p & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 & 1-\varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

где $0 < p < 1-\varepsilon \leqslant 1$. Предполагая, что $\xi_0^{(\varepsilon)} = 1$, рассмотрим случайную величину $\tau_1(\varepsilon) = \min\{n \geqslant 1\colon \xi_n^{(\varepsilon)} = 1\}$ — время возвращения в состояние 1.

а) Доказать, что при любом $t = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathsf{P}\{\tau_1(\varepsilon) = t\} = \mathsf{P}\{\tau_1(0) = t\}.$$

б) Показать, что $\mathsf{M}\tau_1(0) < \infty$, но $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathsf{M}\tau_1(\varepsilon) = \infty$.

в) Найти производящую функцию $\varphi_\varepsilon(s) = \mathsf{M}s^{\tau_1(\varepsilon)}$.

5.66. Цепь Маркова ξ_n имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности

$$\mathsf{P}\{\xi_{n+1} = k+1 \mid \xi_n = k\} = p, \quad \mathsf{P}\{\xi_{n+1} = k \mid \xi_n = k\} = 1-p,$$

где $k, n = 0, 1, \ldots$ и $0 < p < 1$. Найти распределение ξ_n, математическое ожидание и дисперсию ξ_n.

5.67. По цепи Маркова ξ_n, описанной в задаче 5.66, построим последовательность случайных величин

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_k = \min\{n\colon \xi_n = k\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

а) Доказать, что $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ — тоже цепь Маркова. Найти ее переходные вероятности.

б) Найти $\mathsf{M}\tau_k$, $\mathsf{D}\tau_k$, $\varphi_k(s) = \mathsf{M}s^{\tau_k}$.

5.68. Цепь Маркова ξ_n имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности

$$\mathsf{P}\{\xi_{n+1} = k+1 \mid \xi_n = k\} = p, \quad \mathsf{P}\{\xi_{n+1} = 0 \mid \xi_n = k\} = 1 - p,$$

где $k, n \in \{0, 1, \ldots\}$ и $0 < p < 1$. Положим

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_k = \min\{n \geqslant 1\colon \xi_n = k\}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

а) Найти производящую функцию $\varphi_k(s) = \mathsf{M}s^{\tau_k}$ и $\mathsf{M}\tau_k$.

б) Найти предельное распределение случайной величины $\eta_k = \dfrac{\tau_k}{\mathsf{M}\tau_k}$ при $k \to \infty$, пользуясь результатом п. а) и методом характеристических функций.

5.69. Переходные вероятности цепи Маркова ξ_n при любом $n = 0, 1, \ldots$ определяются равенствами

$$\mathsf{P}\{\xi_{n+1} = 1 \mid \xi_n = 0\} = p, \quad \mathsf{P}\{\xi_{n+1} = 0 \mid \xi_n = 0\} = 1 - p,$$
$$\mathsf{P}\{\xi_{n+1} = k+1 \mid \xi_n = k\} = p,$$
$$\mathsf{P}\{\xi_{n+1} = k-1 \mid \xi_n = k\} = 1 - p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Пусть $\tau_{i,j}$ — время перехода цепи ξ_n из состояния i в состояние j:

$$\mathsf{P}\{\tau_{i,j} = t\} = \mathsf{P}\{\min\{n \geqslant 1\colon \xi_n = j\} = t \mid \xi_0 = i\},$$
$$t = 1, 2, \ldots$$

а) Найти производящую функцию $\varphi_{0,1}(s) = \mathsf{M}s^{\tau_{0,1}}$ и $\mathsf{M}\tau_{0,1}$.

б) Найти рекуррентные формулы, связывающие производящие функции $\psi_{k,k+1}(s) = \mathsf{M}s^{\tau_{k,k+1}}$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

в) Используя результаты пп. а) и б), составить и решить рекуррентные уравнения для $\mathsf{M}\tau_{k,k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$ Найти асимптотические формулы для $\mathsf{M}\tau_{0,k}$ при $k \to \infty$.

5.70. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathsf{P}\{\xi_1 = 1\} = \mathsf{P}\{\xi_1 = -1\} = 1/2$; $z_0 = 0$, $z_k = z_{k-1} + \xi_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Положим $\tau_N = \min\{n \geqslant 1\colon |z_n| = N\}$. Найти $\mathsf{M}\tau_1$, $\mathsf{M}\tau_2$, $\mathsf{M}\tau_3$.

5.71. Пусть последовательность $z_0, z_1, \ldots$ определена как в задаче 5.70. Показать, что $\mathsf{M}\tau_N = N^2$.

5.72. Движение частицы по целым точкам отрезка $[0, N]$ описывается цепью Маркова с $N+1$ состояниями и вероятностями перехода за один шаг $p_{01} = p_{NN} = 1$; $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = 1 - p = q$ $(i = 1, \ldots, N-1)$. Пусть $\xi(t)$ — положение частицы в момент t и $\tau = \min\{t\colon \xi(t) = N\}$. Показать, что

$$m_k = \mathsf{M}\{\tau \mid \xi(0) = k\} = \begin{cases} \dfrac{2pq}{(p-q)^2}\left(\left(\dfrac{q}{p}\right)^N - \left(\dfrac{q}{p}\right)^k\right) - \dfrac{N-k}{q-p} & (p \neq q), \\ (N-k)(N+k) & (p = q = 1/2). \end{cases}$$

5.73. Движение частицы по целым точкам отрезка $[0, N]$ описывается цепью Маркова с $N+1$ состояниями и вероятностями перехода за один шаг $p_{00} = p_{NN} = 1$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q$ $(i = 1, \ldots, N-1)$. Пусть $\xi(t)$ — положение частицы в момент t, $p_{ij}(t) = \mathsf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$. Найти вероятности поглощения частицы в точках 0 и N:

$$\pi_k^{(0)} = \lim_{t\to\infty} p_{k0}(t), \quad \pi_k^{(N)} = \lim_{t\to\infty} p_{kN}(t).$$

5.74. Вероятность появления брака при изготовлении изделия равна p. При каждой проверке в ОТК наличие брака обнаруживается с вероятностью q; в случае обнаружения брака изделие возвращается на доработку. После доработки изделие независимо от предыстории может оказаться бракованным с вероятностью r. Доработанное изделие снова поступает в ОТК, и цикл повторяется до тех пор, пока ОТК не пропустит изделие как бездефектное. Построив цепь Маркова, соответствующую описанному процессу, найти:

а) распределение числа ξ раз прохождения изделия через ОТК;

б) вероятность того, что изделие, признанное ОТК бездефектным, в действительности является бракованным.

5.75. В городе N каждый житель имеет одну из трех профессий: A, B, C. Дети отцов, имеющих профессии A, B, C, сохраняют профессии отцов с вероятностями 3/5, 2/3, 1/4 соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями выбирают любую из двух других профессий. Найти:

1) распределение по профессиям в следующем поколении, если в данном поколении профессию A имело 20 % жителей, B — 30 %, C — 50 %;

2) предельное распределение по профессиям, когда число поколений растет;

3) распределение по профессиям, не меняющееся при смене поколений.

5.76. По двум урнам разложено N черных и N белых шаров так, что каждая урна содержит N шаров. Число черных шаров в первой урне в момент $t = 0, 1, 2, \ldots$ обозначим ξ_t. В каждый целочисленный момент времени случайно выбирают по одному шару из каждой урны и меняют их местами. Показать, что ξ_t является цепью Маркова со стационарным распределением

$$\pi_k = (C_N^k)^2/C_{2N}^N, \quad k = 0, \ 1, \ldots, N.$$

5.77. Матрица вероятностей перехода P и распределение q по состояниям в момент $t = 0$ цепи Маркова ξ_t имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} 3/12 & 2/12 & 1/12 & 3/12 & 1/12 & 2/12 \\ 1/12 & 1/12 & 3/12 & 1/12 & 4/12 & 2/12 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1,3 \end{pmatrix},$$

$$q = (1/2, \ 1/2, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0).$$

Найти:

а) несущественные состояния;

б) математическое ожидание времени τ до выхода из множества несущественных состояний;

в) вероятности $p_i^{(\alpha)}$, $p_i^{(\beta)}$ попадания в классы состояний $\alpha = \{3; \ 4\}$, $\beta = \{5, \ 6\}$, если начальным состоянием является $i \in \{1, \ 2\}$;

г) предельное при $t \to \infty$ распределение по состояниям, т. е. величины $\pi_k = \lim\limits_{t \to \infty} \mathsf{P}(\xi_t = k)$.

5.78. Цепь Маркова ξ_n имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности

$$\mathsf{P}\{\xi_{n+1} = k+1 \mid \xi_n = k\} = \frac{1}{a^k},$$

$$\mathsf{P}\{\xi_{n+1} = k \mid \xi_n = k\} = 1 - \frac{1}{a^k},$$

где $k, \ n \in \{0, 1, \ldots\}$ и $a > 1$. Составить рекуррентные уравнения для величин $p_k^{(n)} = \mathsf{P}\{\xi_n = k\}$ и с их помощью найти $\mathsf{M}a^{\xi_n}$ и $\mathsf{D}a^{\xi_n}$.

5.79. Показать, что если все собственные числа $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_n$ матрицы $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ различны, то элементы матрицы $A^m = \| a_{ij}^{(m)} \|_{i,j=1}^n$ представляются в виде

$$a_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{(k)} \lambda_k^m, \quad m = 1, 2, \ldots$$

5.80. Показать, что если матрица $A = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^n$ имеет собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, причем кратность λ_j равна s_j, $s_1 + \ldots + s_r = n$, то элементы матрицы $A^m = \| a_{ij}^{(m)} \|_{i,j=1}^n$ представляются в виде

$$a_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^m \sum_{l=0}^{s_k - 1} c_{ij}^{(k,l)} m^l, \quad m = 1, 2, \ldots$$

5.81. Используя задачи 5.79 и 5.80, показать, что получение формулы для вероятности перехода за n шагов из состояния i в состояние j в цепи Маркова с N состояниями может быть сведено к нахождению собственных чисел матрицы $P = \| p_{ij} \|_{i,j=1}^N$ вероятностей перехода за один шаг, вычислению $P, P^2, \ldots, P^{N-1}$ и решению системы линейных уравнений.

5.82. Матрица вероятностей перехода $P = \| p_{ij} \|$ цепи Маркова ξ_t с состояниями 1 и 2 определяется формулами

$$p_{11} = 1 - \alpha, \; p_{12} = \alpha, \; p_{21} = \beta, \; p_{22} = 1 - \beta.$$

Найти вероятности $p_{ij}(t)$ перехода за время t и стационарные вероятности π_i.

5.83. Для цепи Маркова ξ_t, рассмотренной в задаче 5.82, обозначим через $\nu_1(t)$ число попаданий в состояние 1 за время t. Показать, что для любого $j = 1, 2$ при $t \to \infty$

$$\mathsf{M}\{\nu_1(t) \mid \xi_0 = j\} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} t (1 + o(1)),$$

$$\mathsf{D}\{\nu_1(t) \mid \xi_0 = j\} = o(t^2).$$

5.84. Пусть выполнены условия задачи 5.83. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $j = 1, 2$

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P} \left\{ \left| \frac{\nu_1(t)}{t} - \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right| > \varepsilon \mid \xi_0 = j \right\} = 0.$$

5.85. Пусть выполнены условия задачи 5.83. Положим $\tau_0 = 0$ и введем случайные величины

$$\tau_k = \min\{t > \tau_{k-1}: \; \xi_t = 1\}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

т. е. τ_k — момент k-го попадания в состояние 1. Тогда

$\nu_1(t) = \max\{k\colon \tau_k \leqslant t\}$ — число попаданий в состояние 1 за первые t шагов.

а) Доказать, что случайные величины $\delta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$, $k = 1, 2, \ldots$, независимы, не зависят от $\delta_0 = \tau_1$ и что

$$\mathsf{P}\{\delta_k = m\} = \mathsf{P}\{\delta_0 = m \mid \xi_0 = 1\}, \quad k, m = 1, 2, \ldots$$

Найти $\mathsf{M}\delta_1$, $\mathsf{D}\delta_1$, $\mathsf{M}\{\delta_0 \mid \xi_0 = 2\}$, $\mathsf{D}\{\delta_0 \mid \xi_0 = 2\}$.

б) Используя п. а) и задачу 4.140, найти такие числа a_t и b_t $(t = 1, 2, \ldots)$, что распределение случайной величины $\eta_t = \dfrac{\nu_1(t) - a_t}{b_t}$ при $t \to \infty$ сходится к стандартному нормальному распределению.

5.86. Пусть цепь Маркова ξ_t с состояниями $1, \ldots, N$ имеет матрицу вероятностей перехода $P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^{N}$ удовлетворяющую условию

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant N} \sum_{j=1}^{N} \left| p_{ij} - \frac{1}{N} \right| \leqslant \varepsilon.$$

Показать, что если $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_N)$ — стационарное распределение цепи ξ_t, то

$$\sum_{j=1}^{N} \left| \pi_j - \frac{1}{N} \right| \leqslant \varepsilon.$$

5.87. Пусть ξ_t и ξ_t' — цепи Маркова с матрицами вероятностей перехода $P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^{N}$ и $P' = \|p_{ij}'\|_{i,j=1}^{N}$ соответственно, а $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_N)$ и $\pi' = (\pi_1', \ldots, \pi_N')$ — стационарные распределения этих цепей. Следует ли из близости элементов матриц P и P' (например, из малости величины $\sum\limits_{i,j=1}^{N} |p_{ij} - p_{ij}'|$) близость векторов π и π'?

5.88*. Частица совершает случайное блуждание по множеству точек плоскости с целочисленными координатами. За единицу времени частица перемещается на единичное расстояние параллельно одной из осей координат. После прохождения каждого единичного отрезка частица выбирает направление дальнейшего движения: либо продолжать движение в том же направлении, либо повернуть налево, либо направо (каждый из этих вариантов выбирается с вероятностью 1/3 независимо от предыдущих движений частицы). Пусть $\zeta_n = (\zeta_n^{(1)}, \zeta_n^{(2)})$ — положение частицы в момент n. Найти $\mathsf{M}\zeta_n$ при условии, что $\zeta_0 = (0, 0)$, $\zeta_1 = (1, 0)$.

5.89. Вероятность того, что атом радиоактивного элемента, существующий в момент t, распадется на интервале $(t, t+h)$, при $h \downarrow 0$ имеет вид $\alpha h + o(h)$ и не зависит от предыстории процесса. Найти:

а) вероятность того, что время τ до распада атома будет больше t,

б) период полураспада, т. е. такое число T, что $\mathsf{P}\{\tau > T\} = 1/2$,

в) плотность $p_n(t)$ распределения времени до распада хотя бы одного из n существующих в момент $t = 0$ и независимо ведущих себя атомов.

5.90. Пусть ξ_t — цепь Маркова с непрерывным временем и множеством состояний $\{1, 2\}$. Вероятности перехода $p_{ij}(h) = \mathsf{P}\{\xi_{t+h} = j \mid \xi_t = i\}$ удовлетворяют условиям

$$p_{12}(h) = \alpha h + o(h), \qquad p_{21}(h) = \beta h + o(h), \qquad h \downarrow 0.$$

Найти $p_{ij}(t)$, $t \geqslant 0$, $i, j \in \{1, 2\}$.

5.91. Пусть $P^{(\alpha,\beta)}(t) = \| p_{ij}^{(\alpha,\beta)}(t) \|$ — матрица вероятностей перехода за время t цепи Маркова ξ_t, описанной в задаче 5.90, а $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — стохастическая матрица. Доказать, что для любого фиксированного числа $u > 0$ цепь Маркова ξ_t, удовлетворяющая условию

$$P^{(\alpha,\beta)}(u) = A,$$

существует тогда, и только тогда, когда $a_{11} + a_{22} > 1$.

5.92. Для цепи Маркова ξ_t, определенной в задаче 5.90, обозначим через $\tau_k(t)$ $(k = 1, 2)$ суммарную длительность пребывания цепи в состоянии k за время t. Найти $m_i(t) = \mathsf{M}\{\tau_1(t) \mid \xi_0 = i\}$ и главный член асимптотической формулы для $b_i^2(t) = \mathsf{D}\{\tau_1(t) \mid \xi_0 = i\}$ при $t \to \infty$.

5.93. Движением точки по прямой управляет цепь Маркова, определенная в задаче 5.90: если цепь Маркова находится в состоянии 1, то точка движется в положительном направлении со скоростью v_1, а если цепь Маркова находится в состоянии 2, то точка движется в отрицательном направлении со скоростью v_2. Пусть η_t — координата точки в момент t. Найти

$$M_i(t, x) = \mathsf{M}\{\eta_t \mid \eta_0 = x, \ \xi_0 = i\}, \qquad t \geqslant 0, \qquad i = 1, 2,$$

и асимптотику $B_i^2(t, x) = \mathsf{D}\{\eta_t \mid \eta_0 = x,\ \xi_0 = i\}$, $i = 1, 2$, при $t \to \infty$.

5.94. На телефонную линию могут поступать вызовы двух типов: простые и срочные. Любой вызов, поступающий на свободную линию, занимает ее. Простой вызов, поступающий на занятую линию, получает отказ и теряется. Срочный вызов, поступающий на занятую линию, обрывает ведущийся в этот момент разговор и сам занимает линию. Моменты поступления простых и срочных вызовов образуют пуассоновские потоки с интенсивностями α_1 и α_2 соответственно. Вероятность того, что разговор, ведущийся в момент t, окончится на полуинтервале $(t, t+h]$, не зависит от предыстории процесса и от типа вызова и имеет вид $\beta h + o(h)$ при $h \downarrow 0$.

Построить цепь Маркова с тремя состояниями, соответствующую описанному процессу. Найти ее матрицу интенсивностей переходов и предельные вероятности π_1, π_2 и π_3 того, что линия соответственно свободна, занята простым вызовом и занята срочным вызовом.

5.95. Цепь Маркова ξ_t с непрерывным временем имеет множество состояний $\{0, 1, \ldots, N\}$, а вероятности $p_{ij}(h) = \mathsf{P}\{\xi_{t+h} = j \mid \xi_t = i\}$ перехода из состояния i в состояние j за время h удовлетворяют при $h \downarrow 0$ условиям

$$p_{00}(h) = 1 - \alpha h + o(h), \qquad p_{NN}(h) = 1 - \beta h + o(h),$$

$$p_{ii}(h) = 1 - (\alpha + \beta) h + o(h), \qquad 1 \leqslant i \leqslant N - 1,$$

$$p_{i-1,i}(h) = \alpha h + o(h),$$

$$p_{i,i-1}(h) = \beta h + o(h), \qquad 1 \leqslant i \leqslant N,$$

$$p_{ij}(h) = o(h), \text{ если } |i - j| > 1,$$

где α, β — фиксированные положительные числа.

а) Составить систему дифференциальных уравнений для $p_{ij}(t)$, $0 \leqslant i, j \leqslant N$, $t \geqslant 0$.

б) Найти $\pi_j^{(N)} = \lim\limits_{t \to \infty} p_{ij}(t)$, $j = 0, 1, \ldots, N$, как функции от $\theta = \alpha/\beta$. Показать, что если $\theta = 1$, то $\pi_0^{(N)} = \ldots$ $\ldots = \pi_N^{(N)} = \dfrac{1}{N+1}$.

в) В случае $\theta < 1$ найти $\pi_j = \lim\limits_{N \to \infty} \pi_j^{(N)}$, $j = 0, 1, \ldots$, а в случае $\theta > 1$ найти $\pi_j^* = \lim\limits_{N \to \infty} \pi_{N-j}^{(N)}$, $j = 0, 1, \ldots$

Глава 6

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

В математической статистике исследуются способы получения выводов на основе эмпирических данных. *Случайной выборкой объема n* (или просто *выборкой*) называется случайный вектор

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \tag{6.1}$$

где x_i обычно предполагаются независимыми и имеющими одну и ту же функцию распределения $F(x) = \mathsf{P}(x_i \leqslant x)$. Случайная выборка (6.1) является математической моделью последовательно проводимых измерений или наблюдений. Возможны другие способы получения эмпирических данных, приводящие к другим математическим моделям. (См., например, задачи 6.16, 6.26, 6.42.)

Обычно для выборки (6.1) известен только тип распределения (например, нормальный), но неизвестны параметры, от которых зависит распределение. В этом случае по выборке требуется каким-либо образом определить приближенные значения неизвестных параметров.

Пусть $\mathsf{P}(x_i \leqslant x) = F_\xi(x, \theta)$. *Оценкой* неизвестного параметра θ назовем произвольную функцию $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, \ldots, x_n)$. Оценка θ_n^* является *несмещенной* оценкой θ, если $\mathsf{M}\theta_n^* = \theta$. Если θ_n^* при $n \to \infty$ сходится по вероятности к θ, то оценка θ_n^* называется *состоятельной.*

Может оказаться, что существуют такие функции $\underline{\theta}_n = \underline{\theta}_n(x_1, \ldots, x_n)$ и $\overline{\theta}_n = \overline{\theta}_n(x_1, \ldots, x_n)$, что $\mathsf{P}(\underline{\theta}_n < \theta < \overline{\theta}_n) = 1 - 2\alpha$ одинакова при всех значениях неизвестного параметра θ. В этом случае интервал $(\underline{\theta}_n, \overline{\theta}_n)$ называют *доверительным интервалом*, и вероятность $1 - 2\alpha$ того, что интервал $(\underline{\theta}_n, \overline{\theta}_n)$ накроет неизвестный параметр θ, называют *доверительной вероятностью.*

Если при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(\underline{\theta}_n < \theta < \overline{\theta}_n) \to 1 - 2\alpha,$$

где значение α не зависит от θ, то интервал $(\underline{\theta}_n, \overline{\theta}_n)$ называют *асимптотически доверительным интервалом.*

В качестве примера рассмотрим выборку (6.1), образованную независимыми случайными величинами, имеющими нормальное распределение с неизвестными параметрами: математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Покажем, как для неизвестных параметров a и σ^2 можно построить доверительные интервалы.

Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Положим

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2, \quad \tau_n = \frac{\xi_0}{\sqrt{\chi_n^2/n}}.$$

Законы распределения этих величин называют соответственно *распределением* χ^2 *и распределением Стьюдента с* n *степенями свободы*. Определим величины $t_{\alpha,n}$ и $\chi^2_{\alpha,n}$ как решения уравнений

$$\mathsf{P}\{\tau_n > t_{\alpha,n}\} = \alpha, \qquad \mathsf{P}\{\chi_n^2 > \chi^2_{\alpha,n}\} = \alpha.$$

Построим по выборке (6.1) величины

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n), \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2.$$

Тогда (см. [7])

$$\mathsf{P}\left\{\bar{x} - t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - 2\alpha,$$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha,n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}}\right\} = 1 - 2\alpha.$$

Отметим, что в рассмотренном случае (т. е. когда $x_1, \ldots, x_n$ независимы и имеют одно и то же нормальное распределение) случайные величины $\bar{x}$ и s^2 независимы.

Случайные величины (6.1), расположенные в порядке неубывания их значений:

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}, \tag{6.2}$$

называют *вариационным рядом*. В частности,

$$x_{(1)} = \min\{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad x_{(n)} = \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Эмпирической функцией распределения называется случайная функция $\hat{F}_n(x)$, которая принимает при $x \in [x_{(k)}, x_{(k+1)})$ значение k/n (здесь $k = 0, 1, \ldots, n$ и считается, что $x_{(0)} = -\infty$, $x_{(n+1)} = \infty$). Нетрудно проверить, что $\hat{F}_n(x)$ является несмещенной и состоятельной оценкой $F(x)$ при любом x.

Одним из методов получения оценок является *метод наибольшего правдоподобия.* Пусть (6.1) — независимая выборка, соответствующая случайной величине ξ, которая имеет плотность распределения $p_\xi(x;\ \theta_1, \ldots, \theta_k)$. *Функцией правдоподобия* называется функция

$$L(x_1, \ldots, x_n;\ \theta_1, \ldots, \theta_k) = \prod_{i=1}^{n} p_\xi(x_i;\ \theta_1, \ldots, \theta_k).$$

Оценками наибольшего правдоподобия параметров $\theta_1, \ldots, \theta_k$ называется набор $\theta_1^* = \theta_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \theta_k^* = \theta_k^*(x_1, \ldots, x_n)$, максимизирующий значение $L(x_1, \ldots, x_n;\ \theta_1, \ldots, \theta_k)$ при данных $x_1, \ldots, x_n$. Если плотность $p_\xi(x;\ \theta_1, \ldots, \theta_k)$ дифференцируема, то $\theta_1^*, \ldots, \theta_k^*$ — решение системы уравнений

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, k.$$

При довольно общих условиях оценки наибольшего правдоподобия являются состоятельными и асимптотически нормальными (см. [7]). Аналогично определяется функция L для дискретных случайных величин.

Другой круг задач математической статистики связан с проверкой различных гипотез. Пусть предполагается, что свойства выборки (6.1) соответствуют одной из двух гипотез:

H_1: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ имеет распределение P_1,

H_2: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ имеет распределение P_2,

где P_1, P_2 — два известных распределения.

Статистический критерий, на основании которого принимается решение о том, какой из этих гипотез соответствует выборка (6.1), определяется множеством $B \subset R^n$ и имеет вид: *если* $(x_1, \ldots, x_n) \in B$, *то принимается гипотеза* H_2, *в противном случае* — H_1. Вероятность $\alpha = \mathsf{P}_1(x \in B)$, т. е. вероятность принять гипотезу H_2, когда в действительности верна H_1, называют *ошибкой* 1-*го рода.* Вероятность $\beta = \mathsf{P}_2(x \notin B)$, т. е. вероятность принять H_1, когда верна H_2, называют *ошибкой 2-го рода.* Если множество B задано в виде

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in B\} = \{\eta_n = \eta_n(x_1, \ldots, x_n) > C\},$$

то функцию $\eta_n = \eta_n(x_1, \ldots, x_n)$ называют *статистикой критерия.* Например, пусть $p_1(x)$ — плотность распределения каждого x_i при гипотезе H_1 и $p_2(x)$ — соответствующая плотность при гипотезе H_2. Положим

$$\eta_n = \frac{p_2(x_1)\,p_2(x_2)\ldots p_2(x_n)}{p_1(x_1)\,p_1(x_2)\ldots p_1(x_n)}.$$

Согласно *критерию Неймана — Пирсона* при $\eta_n > C$ (C — некоторая постоянная, определяемая по ошибке 1-го рода) принимается гипотеза H_2, а в противном случае — H_1. Этот критерий среди всех критериев с фиксированной ошибкой 1-го рода имеет наименьшую ошибку 2-го рода (см. [7], с. 576, 577). Аналогично формулируется критерий для дискретных распределений.

Иногда формулируется только одна гипотеза о выборке (6.1). Эту гипотезу нужно либо принять, либо отвергнуть. Пусть, например, гипотеза состоит в том, что выборка (6.1) соответствует случайной величине ξ с $\mathsf{P}(\xi \leqslant x) = F(x)$. Для статистической проверки этой гипотезы используется *критерий* χ^2. Разобьем числовую ось на $r+1$ непересекающихся полуинтервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \ldots, \Delta_{r+1}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{r+1} \Delta_i = (-\infty, \infty)$. Положим $p_k = \mathsf{P}\{\xi \in \Delta_k\}$, $k = 1, \ldots, r+1$. Обозначим через m_k число x_i, попавших в Δ_k. Статистикой критерия χ^2 является величина

$$\eta_{n,r} = \sum_{l=1}^{r+1} \frac{(m_l - np_l)^2}{np_l}.$$

Оказывается, что если элементы выборки (6.1) независимы и имеют функцию распределения $F(x)$ (т. е. если гипотеза верна), то (см. [10], § 57) для любого x при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\{\eta_{n,r} \leqslant x\} \to \mathsf{P}\{\chi_r^2 \leqslant x\}. \tag{6.3}$$

По критерию χ^2 гипотеза отвергается, если $\eta_{n,r} > C$. Величина C выбирается так, чтобы вероятность $\mathsf{P}\{\eta_{n,r} > C\} = \alpha$ была мала. При таком выборе C в случае $\eta_{n,r} > C$ говорят, что гипотеза отвергается с *уровнем значимости* α. Используя предельное распределение (6.3), можно положить $C = \chi^2_{\alpha,r}$, где $\mathsf{P}\{\chi_r^2 > \chi^2_{\alpha,r}\} = \alpha$, и тогда в силу (6.3)

$$\mathsf{P}\{\eta_{n,r} > C\} \to \alpha, \qquad n \to \infty.$$

Если распределение $F(x)$ зависит от неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, то вероятности $p_l(\theta) = \mathsf{P}\{\xi \in \Delta_l\}$ вычисляют, заменяя параметры θ их оценками (например, оценками максимального правдоподобия). В этом случае в предельном распределении (6.3) число степеней свободы r должно быть уменьшено на число оцениваемых параметров (см. [7], с. 460—463).

6.1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — случайная выборка с $\mathsf{M}x_k = a$, $\mathsf{D}x_k = \sigma^2$, $\mathsf{M}(x_k - a)^4 < \infty$, $k = 1, \ldots, n$. Найти математическое ожидание величины

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 \quad \left(\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Является ли s^2 состоятельной оценкой σ^2?

6.2. Найти математическое ожидание и дисперсию эмпирического момента $m_r = \dfrac{x_1^r + \ldots + x_n^r}{n}$ независимой выборки, соответствующей случайной величине ξ с $\mathsf{M}\xi^k = a_k$, $1 \leqslant k \leqslant 2r$.

6.3. По неоднородной выборке $x_1, \ldots, x_n$, где x_k, $k = 1, \ldots, n$, независимы, $\mathsf{M}x_k = a$, $\mathsf{D}x_k = \sigma_k^2$ (σ_k известны), найти несмещенную линейную относительно x_k ($k = 1, \ldots, n$) оценку a^* параметра a, которая имеет наименьшую возможную дисперсию.

6.4*. Пусть $x_{i1}, \ldots, x_{in_i}$ ($i = 1, \ldots, I$) — независимые нормально распределенные величины с параметрами (a, σ_i^2);

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}, \qquad s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{k=1}^{n_i}(x_{ik} - \bar{x}_i)^2.$$

Является ли оценка

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{I} c_i \bar{x}_i, \qquad c_i = \frac{s_i^2}{s_1^2 + \ldots + s_I^2},$$

несмещенной оценкой параметра a?

6.5. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathsf{D}x_1 > 0$, $\mathsf{M}x_1^4 < \infty$. Положим

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2.$$

Найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\bar{x} - \mathsf{M}x_1}{s/\sqrt{n}} \leqslant x\right).$$

6.6. Пусть $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ — независимая выборка, соответствующая случайному вектору (ξ, η), т. е.

$P(x_i \leqslant x,\ y_i \leqslant y) = P(\xi \leqslant x,\ \eta \leqslant y)$. Показать, что величина

$$m = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}),$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k,$$

является несмещенной и состоятельной оценкой $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$.

6.7. Пусть μ_n — число успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании. Найти оценку наибольшего правдоподобия p^* параметра p. Доказать ее несмещенность и состоятельность.

6.8. Пусть μ_n — число успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании. Построить для p асимптотически доверительный интервал с доверительной вероятностью $1-2\alpha$.

6.9. Используя таблицу случайных чисел, получить реализацию выборки $x_1, \ldots, x_n$, где x_k равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$ (значения x_k взять с тремя знаками; $n = 50$). Найти:

а) вариационный ряд $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$;

б) эмпирическую функцию распределения (построить ее график и график теоретической функции распределения);

в) $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$ (сравнить с $\mathsf{M}x_k$);

г) $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2$ (сравнить с $\mathsf{D}x_k$).

6.10. Используя таблицу нормально распределенных случайных чисел, получить реализацию выборки $x_1, \ldots, x_n$, где x_k имеет нормальное распределение с параметрами $a = \mathsf{M}x_k = 0{,}5$, $\sigma^2 = \mathsf{D}x_k = 1$; $n = 50$. Найти: а) вариационный ряд, б) эмпирическую функцию распределения, в) $\bar{x}$, г) s^2 (см. задачу 6.9).

6.11. По выборке, полученной в задаче 6.10, построить доверительный интервал для a (считая a и σ неизвестными) с доверительной вероятнотью 0,95.

6.12. Используя метод наибольшего правдоподобия, найти по выборке $x_1, \ldots, x_n$, где $P(x_k = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, $m = 0, 1, \ldots$, оценку λ^* параметра λ. Будет ли эта оценка несмещенной и состоятельной? Найти $\mathsf{M}\lambda^*$, $\mathsf{D}\lambda^*$.

6.13. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка, соответствующая показательному распределению с параметром λ. Найти оценку максимального правдоподобия λ^* для λ. Вычислить $\mathsf{M}\frac{1}{\lambda^*}$, $\mathsf{D}\frac{1}{\lambda^*}$.

6.14*. Для оценки параметров a, b, c имеются три независимые выборки $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$; $c_1, \ldots, c_n$. Известно, что $c = a + b$ и величины a_i, b_i, c_i распределены нормально с $\mathsf{M}a_i = a$, $\mathsf{M}b_i = b$, $\mathsf{M}c_i = c$. Дисперсии $\mathsf{D}a_i = \sigma_a^2$, $\mathsf{D}b_i = \sigma_b^2$, $\mathsf{D}c_i = \sigma_c^2$ известны. Найти:

а) оценки наибольшего правдоподобия a^*, b^*, c^* параметров a, b, c, используя для каждого параметра только соответствующую ему выборку, а также найти $\mathsf{M}a^*$, $\mathsf{M}b^*$, $\mathsf{M}c^*$, $\mathsf{D}a^*$, $\mathsf{D}b^*$, $\mathsf{D}c^*$;

б) оценки наибольшего правдоподобия a^{**}, b^{**}, c^{**}, используя сразу три выборки и связь $c = a + b$, и также найти $\mathsf{M}a^{**}$, $\mathsf{M}b^{**}$, $\mathsf{M}c^{**}$, $\mathsf{D}a^{**}$, $\mathsf{D}b^{**}$, $\mathsf{D}c^{**}$.

6.15. Пусть $y^{(k)} = \left(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}\right)$, $k = 1, \ldots, n$, — независимые нормально распределенные случайные векторы, $\mathsf{M}y_i^{(k)} = a_i$, $\mathsf{D}y_i^{(k)} = \sigma_i^2$, $i = 1, 2$, $\operatorname{cov}\left(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}\right) = \rho\sigma_1\sigma_2$. Параметры σ_1, σ_2, ρ известны. Найти:

а) оценку максимального правдоподобия $\left(a_1^*, a_2^*\right)$ параметров (a_1, a_2) по выборке $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$;

б) оценку максимального правдоподобия a_i^{**} параметра a_i по выборке $y_i^{(1)}, \ldots, y_i^{(n)}$;

в) $\mathsf{M}a_i^*$, $\mathsf{D}a_i^*$, $\mathsf{M}a_i^{**}$, $\mathsf{D}a_i^{**}$.

6.16*. Пусть $y^{(k)} = \left(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}\right)$, $k = 1, \ldots, n$, — независимые нормально распределенные случайные векторы, $\mathsf{M}y_1^{(k)} = a_1$, $\mathsf{M}y_2^{(k)} = a_2$, $\mathsf{D}y_i^{(k)} = 1$ $(i = 1, 2)$, $\operatorname{cov}\left(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}\right) = \rho_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Параметры ρ_k известны. Найти:

а) оценки максимального правдоподобия a_1^*, a_2^* параметров a_1, a_2 по выборке $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$;

б) оценку максимального правдоподобия a_1^{**} параметра a_1 по выборке $y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(n)}$;

в) $\mathsf{M}a_1^*$, $\mathsf{M}a_1^{**}$, $\mathsf{D}a_1^*$, $\mathsf{D}a_1^{**}$;

г) доказать, что $\mathsf{D}a_1^* \leqslant \mathsf{D}a_1^{**}$.

6.17*. Решить задачу 6.16 в случае, когда известно, что параметр $a_2 = \mathsf{M}y_2^{(k)} = 0$.

6.18. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m$ независимые случайные величины, равномерно распределенные в области $G \subset R^n$. Для оценивания интеграла $a = \int\limits_G \ldots \int f(x)\, dx_1 \ldots dx_n$ $(x =$

$= (x_1, \ldots, x_n))$ по методу Монте-Карло используется величина $\eta_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)$.

а) Найти $M\eta_m$, $D\eta_m$.

б) Построить несмещенную оценку b^{*2} дисперсии $Df(\xi_i)$ по реализациям $f(\xi_1), \ldots, f(\xi_m)$.

в) Предполагая, что $\int_G \ldots \int f^4(y)\, dx_1 \ldots dx_n < \infty$, построить при $m \to \infty$ асимптотически доверительный интервал для a с доверительной вероятностью $1-2\alpha$.

6.19. Для величины $A = \alpha + \beta a + \gamma b$ получены оценки

$$A_1^* = \alpha + \beta z_1 + \gamma z_3, \qquad A_2^* = \alpha + \beta z_2 + \gamma z_3,$$

где α, β, γ — известные постоянные, z_1, z_2, z_3 — независимые оценки неизвестных параметров: $Mz_3 = b$, $Mz_1 = Mz_2 = a$; $Dz_i = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, 3$. Подобрать постоянные c_1, c_2 так, чтобы оценка $A^* = c_1 A_1^* + c_2 A_2^*$ была несмещенной и имела среди несмещенных оценок наименьшую дисперсию.

6.20*. Пусть z_1, z_2, z_3 — несмещенные оценки параметра a; $Dz_i = 1$ $(i = 1, 2, 3)$, $\operatorname{cov}(z_1, z_2) = \rho$, $\operatorname{cov}(z_i, z_3) = 0$ $(i = 1, 2)$. Найти несмещенную линейную оценку $z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3$ параметра a с наименьшей возможной дисперсией и дисперсию этой оценки. Рассмотреть случаи: а) $|\rho| < 1$, б) $\rho = -1$, в) $\rho = 1$.

6.21. Функция $y = Ax$ измерена в точках $x_1, \ldots, x_n$. Пусть результаты измерений являются реализацией независимых случайных величин $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n$, у которых $M\tilde{y}_i = y_i = Ax_i$, $D\tilde{y}_i = \sigma^2 < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Найти:

а) оценку A_n^* параметра A, используя метод наименьших квадратов, т. е. минимизируя по A выражение $I(A) = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{y}_i - Ax_i)^2$;

б) MA_n^*, DA_n^*.

Доказать, что оценка A_n^* состоятельна, если $X_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to \infty$ при $n \to \infty$.

6.22*. Проведено n измерений значений функции $y = Ax$ и ее аргумента x. Пусть результаты измерений являются реализацией n независимых двумерных случайных векторов $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, у которых координаты независимы, $\mathsf{M}\tilde{x}_i = x_i$, $\mathsf{M}\tilde{y}_i = y_i = Ax_i$, $\mathsf{D}\tilde{x}_i = \sigma^2$, $\mathsf{D}\tilde{y}_i = \sigma^2$. Найти:

а) оценку A_n^* параметра A_n, минимизируя по A и $x_1, \ldots, x_n$ выражение

$$I(A, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{y}_i - Ax_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_i - x_i)^2.$$

б) Показать, что оценка A_n^* состоятельна, если при $n \to \infty$

$$X_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to \infty, \quad n/X_n^2 \to 0.$$

6.23. Функция $y = Ax$ измерена n_1 раз в точке $x_1, \ldots$ $\ldots, n_k$ раз в точке x_k. Пусть результаты измерений y_{ij} $(j = 1, \ldots, n_i, i = 1, \ldots, k)$ некоррелированы и имеют вид

$$y_{ij} = Ax_i + \delta_{ij},$$

где $\mathsf{M}\delta_{ij} = 0$, $\mathsf{D}\delta_{ij} = \sigma^2$.

а) Найти оценку A^* параметра A, используя метод наименьших квадратов, т. е. минимизируя по A выражение

$$I(A) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - Ax_i)^2.$$

б) Найти $\mathsf{M}A^*$ и $\mathsf{D}A^*$.

6.24. В предыдущей задаче обозначим

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Подобрать $c_1, \ldots, c_k$ так, чтобы оценка

$$A^* = c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2 + \ldots + c_k\bar{y}_k$$

была несмещенной и имела наименьшую дисперсию. Найти $\mathsf{D}A^*$ при наилучшем выборе $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

6.25. Из урны, содержащей N белых и черных шаров, производится выборка объема n с возвращением. Пусть μ_n — число белых шаров в выборке, а M — неизвестное число белых шаров в урне. Для оценки величины $p = M/N$ используется статистика $p_n^* = \mu_n/n$. Найти $\mathsf{M}p_n^*$, $\mathsf{D}p_n^*$.

6.26. Из урны, содержащей N белых и черных шаров, производится выборка объема n без возвращения. Пусть

μ_n — число белых шаров в выборке, а M — неизвестное начальное число белых шаров в урне. Для оценки величины $p = M/N$ используется статистика $p_n^{**} = \mu_n/n$. Найти $\mathsf{M}p_n^{**}$, $\mathsf{D}p_n^{**}$.

6.27. Для сравнения точности оценок p_n^*, p_n^{**}, определенных в задачах 6.25, 6.26, найти $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathsf{D}p_n^{**}/\mathsf{D}p_n^*)$ в следующих случаях: а) $n \to \infty$, $\frac{n}{N} \to \gamma$ $(0 < \gamma < \infty)$; б) $n \to \infty$, $n/N \to 0$.

6.28. Из урны, содержащей неизвестное число шаров N (шары занумерованы), производится выборка объема n с возвращением. Для оценки числа N используется величина $1/\eta_n$, где

$$\eta_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{N} \xi_k (\xi_k - 1),$$

ξ_k — число появлений шара с номером k в выборке. Найти $\mathsf{M}\eta_n$ и асимптотическую формулу для $\mathsf{D}\eta_n$ при n, $N \to \infty$, $n/N \to \alpha \in (0, \infty)$.

6.29*. Пусть $x_{(1)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$ — вариационный ряд, построенный по выборке $x_1, \ldots, x_n$, где x_k независимы и равномерно распределены на отрезке $[a, b]$. Являются ли оценки $a^* = x_{(1)}$, $b^* = x_{(n)}$ несмещенными оценками a и b? Найти $\mathsf{M}a^*$, $\mathsf{M}b^*$, $\mathsf{D}a^*$, $\mathsf{D}b^*$, $\operatorname{cov}(a^*, b^*)$.

6.30*. Пусть $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$ — вариационный ряд, построенный по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где x_k независимы и имеют показательное распределение с плотностью $p(x) = \alpha e^{-\alpha(x)}$ $(x > 0)$. Найти $\mathsf{M}x_{(1)}$, $\mathsf{M}x_{(n)}$, $\mathsf{D}x_{(1)}$, $\mathsf{D}x_{(n)}$, $\operatorname{cov}(x_{(1)}, x_{(n)})$.

6.31. Пусть $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$ — вариационный ряд, построенный по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Положим

$$\theta_1^* = \bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, \quad \theta_2^* = \frac{x_{(1)} + x_{(n)}}{2}.$$

Найти $\mathsf{M}\theta_k^*$, $\mathsf{D}\theta_k^*$ $(k = 1, 2)$, если:

а) выполнены условия задачи 6.29,

б) выполнены условия задачи 6.30.

6.32. Пусть $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$ — вариационный ряд, построенный по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где x_k независимы и имеют плотность распределения, равную e^{c-x} при $x \geqslant c > 0$. Является ли оценка $c^* = x_{(1)} - \frac{1}{n}$ несмещенной и состоятельной оценкой c? Найти $\mathsf{M}c^*$, $\mathsf{D}c^*$.

6.33. Чтобы оценить ширину кольца, образованного двумя окружностями с общим центром, измерялись их радиусы R и r, т. е. была получена выборка $y_1, \ldots, y_n$, $x_1, \ldots, x_n$, образованная независимыми случайными величинами, которые имеют нормальные распределения с $\mathsf{M}y_i = R$, $\mathsf{M}x_i = r$ $(R > r)$, $\mathsf{D}x_i = \mathsf{D}y_i = \sigma^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\bar{x} = (x_1 + \ldots + x_n)/n$ и $\bar{y} = (y_1 + \ldots + y_n)/n$. Для оценок $\bar{a} = \bar{y} - \bar{x}$, $a^* = \max(0, \bar{y} - \bar{x})$ ширины кольца $a = R - r$ найти: $\mathsf{M}\bar{a}$, $\mathsf{M}a^*$, $\sqrt{\mathsf{M}(\bar{a} - a)^2}$, $\sqrt{\mathsf{M}(a^* - a)^2}$. Вычислить эти величины при $R = 1001$ м., $r = 1000$ м., $\sigma = 10$ м., $n = 200$.

6.34. Независимые наблюдения $\theta_1^*, \ldots, \theta_n^*$ имеют неизвестные математические ожидания $\mathsf{M}\theta_i^* = \theta_i$ и известные дисперсии $\mathsf{D}\theta_i^* = \sigma_i^2$, $i = 1, \ldots, n$. Для оценки линейной комбинации $I = c_1\theta_1 + \ldots + c_n\theta_n$ с заданными $c_1, \ldots, c_n$ используются статистики

$$I_N = c_1\theta_1^* + \ldots + c_N\theta_N^* \qquad (1 \leqslant N \leqslant n).$$

а) Доказать, что I_n — несмещенная, а I_N при $N < n$ — смещенная оценка I.

б) Найти $\mathsf{M}(I_N - I)^2$. При каких условиях среднеквадратическое отклонение смещенной оценки I_{n-1} меньше среднеквадратического отклонения несмещенной оценки I_n?

6.35. Используя критерий χ^2, проверить гипотезу о том, что выборка, полученная в задаче 6.9, соответствует равномерному распределению на отрезке $[0, 1]$. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

6.36. Используя критерий χ^2, проверить гипотезу о том, что выборка, полученная в задаче **6.10**, соответствует нормальному распределению; параметры a и σ считать неизвестными. Уровень значимости положить равным 0,05.

6.37. Найти статистику η_n критерия Неймана — Пирсона для различения по выборке $x_1, \ldots, x_n$ гипотез

H_1: x_k распределены нормально с параметрами (a_1, σ^2),

H_2: x_k распределены нормально с параметрами (a_2, σ^2).

6.38. Найти статистику η_n критерия Неймана — Пирсона для различения по выборке $x_1, \ldots, x_n$ гипотез

$$H_1\colon\ \mathsf{P}\{x_k = i\} = p_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$H_2\colon\ \mathsf{P}\{x_k = i\} = p_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

6.39*. Статистика ξ_n при гипотезе H_i $(i = 1, 2)$ имеет нормальное распределение с $\mathsf{M}\xi_n = na_i$, $\mathsf{D}\xi_n = n\sigma_i^2$; $a_1 < a_2$.

Гипотеза H_2 принимается, если $\xi_n > C$, в противном случае принимается H_1. Найти: а) постоянную $C = C_\alpha$ так, чтобы ошибка 1-го рода была равна α; б) формулу, связывающую ошибки 1-го и 2-го рода α и β_n; в) $\lim \beta_n$ при $n \to \infty$, $\alpha = \mathrm{const} > 0$.

6.40*. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — выборка. Гипотеза H_1 состоит в том, что x_i равномерно распределены на интервале $(0, 1)$ и независимы, а гипотеза H_2 — в том, что x_i независимы и имеют непрерывно дифференцируемую плотность распределения $g(x)$; $g(x) \not\equiv 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $g(x) = 0$ при $x \notin [0, 1]$. Разобьем $[0, 1)$ на N полуинтервалов $\left[0, \frac{1}{N}\right)$, $\left[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right)$, ..., $\left[\frac{N-1}{N}, 1\right)$ и обозначим через μ_0 число полуинтервалов, в которые не попало ни одно из значений x_i. При гипотезах H_1 и H_2 найти $a_j = \lim (\mathsf{M}\mu_0/N)$, $j = 1, 2$, когда $n/N \to \gamma \in (0, \infty)$, $n, N \to \infty$.

6.41. Пусть $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ — положения точек пуассоновского потока с неизвестной интенсивностью λ. Найти: а) оценку максимального правдоподобия λ_n^* параметра λ, построенную по $\tau_1, \ldots, \tau_n$; б) $\mathsf{M}\lambda_n^*$, $\mathsf{D}\lambda_n^*$.

6.42. Пусть $\tau_{12}(t)$ — число переходов в цепи Маркова, определенной в задаче 5.82, из состояния 1 в состояние 2 за время t.

а) Найти $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{M}\frac{\tau_{12}(t)}{t}$, $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{D}\frac{\tau_{12}(t)}{t}$.

б) Является ли величина $\tau_{12}(t)/t$ состоятельной оценкой параметра $\gamma = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ при $t \to \infty$?

Часть II. УКАЗАНИЯ

Глава 1

1.3. Предположить, что все расположения книг равновероятны. Найти число расположений книг с фиксированным расположением трехтомника.

1.4. За множество Ω принять множество всех последовательностей длины 3, составленных из символов Г — «герб», Р — «решетка».

1.8. Для простоты считать, что в каждой буквенной серии имеются все 10^4 номеров от 0000 до 9999. (На самом деле номер 0000 не выдается. Кроме того, в некоторых сериях не все номера выданы, а часть номеров отсутствует в связи со снятием автомобиля с учета.)

1.10. Положим $A_i = \{$выбранное число a делится на $a_i\}$. Воспользоваться тем, что

$$\mathsf{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A}_i\right\} = \mathsf{P}\left\{\overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i}\right\} = 1 - \mathsf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right\}.$$

Далее применить формулу (1.12).

1.11. Поскольку $a^2 \equiv 1 \pmod{10}$ тогда и только тогда, когда $a \equiv 1 \pmod{10}$ или $a \equiv 9 \pmod{10}$, надо подсчитать среди чисел $1, 2, \ldots, N$ число тех, которые в десятичной записи оканчиваются на 1 или 9. Положив $N = 10k + l$, рассмотреть следующие случаи: $l = 0$, $1 \leqslant l < 9$, $l = 9$.

1.12. Если среди чисел $1, \ldots, N$ есть ровно m чисел, дающих при делении на r остаток q, то $(m-1)r + q \leqslant N < mr + q$, т. е. $mr \leqslant N + r - q < (m+1)r$.

1.14. Введем обозначения для следующих событий:

$$A_k = \{\xi \text{ делится на } k\},$$

$$B_k = \{\eta \text{ делится на } k\},$$

$$C_N = \{\text{числа } \xi \text{ и } \eta \text{ взаимно просты}\}.$$

Тогда $\overline{C}_N = \bigcup_{2 \leqslant p \leqslant N} (A_p \cap B_p)$, где объединение берется по всем простым числам p, не превосходящим N. Вероятность $\mathsf{P}(\overline{C}_N)$ находится по формуле (1.12). Воспользоваться решением задачи 1.10 и равенством $A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \ldots \cap A_{p_r} = A_{p_1 p_2 \ldots p_r}$, верным для любых простых $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$. Показать, что $\frac{1}{\lim q_N} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

1.15. Искомая вероятность $p_N = A_N/N^2$, где A_N — число точек плоскости с целыми координатами (x, y), удовлетворяющими условиям $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $x^2 + y^2 \leqslant N^2$. Показать, что $A_N \sim \frac{\pi}{4} N^2$ при $N \to \infty$.

1.16. Число $\xi + \eta$ будет $(n - k + 1)$-значным тогда и только тогда, когда

$$10^{n-k} \leqslant \xi + \eta < 10^{n-k+1}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n, \tag{1}$$

поэтому $p_{n-k+1} = \frac{A_{n,k}}{10^{2n}}$, где $A_{n,k}$ — число точек плоскости с целыми координатами (x, y), $0 \leqslant x$, $y \leqslant 10^n - 1$, для которых выполнены неравенства (1).

1.17. Произведение ξ и η будет $(2n - k)$-значным тогда и только тогда, когда

$$10^{2n-k-1} \leqslant \xi\eta < 10^{2n-k}, \tag{1'}$$

поэтому $p_{2n-k} = \frac{B_{n,k}}{10^{2n}}$, где $B_{n,k}$ — число точек плоскости с целыми координатами (x, y), $0 \leqslant x$, $y \leqslant 10^n - 1$, для которых справедливы неравенства (1'). Показать, что $B_{n,k} \sim B_k \cdot 10^{2n}$ при $n \to \infty$, где B_k — площадь части единичного квадрата $0 \leqslant x$, $y \leqslant 1$, для координат (x, y) точек которой справедливы неравенства $10^{-k-1} \leqslant$ $\leqslant xy \leqslant 10^{-k}$.

1.18. Представить указанную разность вероятностей в виде

$$\sum_{i=1}^{M} \left(\mathsf{P}\left(\{X_1'', \ldots, X_k''\} = A_i\right) - \mathsf{P}\left(\{X_1', \ldots, X_k'\} = A_i\right)\right), \tag{*}$$

убедиться в том, что $M \leqslant C_N^k$, что значения слагаемых в сумме (*) не зависят от i, и оценить слагаемые в (*) сверху и снизу.

1.19. Разность $X^2 - Y^2$ делится на 2 тогда и только тогда, когда четность X и Y одинакова; $X^2 - Y^2$ делится на 3 тогда и только тогда, когда X и Y одновременно либо делятся, либо не делятся на 3.

1.20. При $k = 2, 3, 5$ имеем

$$\{X^4 - Y^4 \equiv 0 \pmod k\} = \{X, Y \equiv 0 \pmod k\} \cup \{X, Y \not\equiv 0 \pmod k\}.$$

1.21. Вывести из малой теоремы Ферма, что

$$\{X^{p-1} - Y^{p-1} \equiv 0 \pmod p\} = \\ = \{X, Y \equiv 0 \pmod p\} \cup \{X, Y \not\equiv 0 \pmod p\}.$$

1.22. Чтобы получить явные формулы для указанных в условии вероятностей, воспользоваться соотношениями

$$\{X^3 + Y^3 \equiv 0 \pmod 3\} = \\ = \{X, Y \equiv 0 \pmod 3\} \cup \{X \equiv 1, Y \equiv -1 \pmod 3\} \cup \\ \cup \{X \equiv -1, Y \equiv 1 \pmod 3\},$$

$$\{X^3 + Y^3 \equiv 0 \pmod 7\} = \\ = \{X, Y \equiv 0 \pmod 7\} \cup \{X \in M_1, Y \in M_2\} \cup \{X \in M_2, Y \in M_1\},$$

где M_1 — множество всех чисел вида $7k+1$, $7k+2$, $7k+4$, M_2 — множество всех чисел вида $7k+3$, $7k+5$, $7k+6$. Для доказательства неравенства при $N>7$ воспользоваться тем, что $a^2/4-1\leqslant uv\leqslant a^2/4$ при $u+v=a$, $|u-v|\leqslant 2$. При $4\leqslant N\leqslant 7$ неравенство проверяется непосредственно с помощью явных формул.

1.23. Множеству $A\subset\{1,\ldots,N\}$ взаимно однозначно соответствует составленная из нулей и единиц строка $x^A=\left(x_1^A,\ldots\right.$ $\left.\ldots,x_N^A\right)$, где $x_i^A=1$, если $i\in A$, и $x_i^A=0$, если $i\notin A$; а случайным подмножествам A_1, $A_2\subset\{1,\ldots,N\}$ соответствует пара строк x^{A_1}, x^{A_2}, элементы $x_1^{A_1},\ldots,x_N^{A_1}$, $x_1^{A_2},\ldots,x_N^{A_2}$ которых независимы и принимают значения 0 и 1 с вероятностью 1/2. Наконец,

$$\{A_1\cap A_2=\varnothing\}=\left\{x_i^{A_1}+x_i^{A_2}\leqslant 1,\ i=1,\ldots,N\right\}.$$

1.24. См. указание к задаче 1.23. Множества $A_1,\ldots,A_r$ попарно не пересекаются, если $x_i^{A_1}+\ldots+x_i^{A_r}\leqslant 1$ при всех $i\in$ $\in\{1,\ldots,N\}$.

1.25. Разбить указанное в условии задачи событие на непересекающиеся события по значениям разностей $\xi_3-\xi_1=\xi_2-\xi_3$ и $\eta_3-\eta_1=\eta_2-\eta_3$.

1.26. В пп. в) и г) найти вероятности противоположных событий.

1.27. а) Заметить, что $\{X_1+\ldots+X_m=k\}=\{(N-X_1)+\ldots$ $\ldots+(N-X_m)=mN-k\}$.

б) Число $(1+N)^m b_k^{(m)}$ таких наборов $x_1,\ldots,x_m\in\{0,\ldots,N\}$, что $x_1+\ldots+x_m=k$, равно коэффициенту при z^k в $(1+z+\ldots$ $\ldots+z^N)^m=\dfrac{(1-z^{N+1})^m}{(1-z)^m}$. Далее воспользоваться разложением функции $(1-z)^{-m}$ в степенной ряд.

1.28. См. указание к задаче 1.8. Убедиться в том, что равновероятный выбор номера автомобиля из множества 10^4 номеров от 0000 до 9999 эквивалентен выбору чисел X_1, X_2, X_3, X_4 из множества 0, 1, ..., 9 по схеме равновероятного выбора с возвращением. Воспользоваться равенством

$$\mathsf P\{X_1+X_2=X_3+X_4\}=\sum_{k=0}^{18}\mathsf P\{X_1+X_2=X_3+X_4=k\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{18}\frac{1}{10^4}\left|\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_i\in\{0,1,\ldots,9\},\ x_1+x_2=x_3+x_4=k\}\right|=$$

$$=\sum_{k=0}^{18}\frac{1}{10^4}\left|\{(x_1,x_2)\colon x_1,x_2\in\{0,1,\ldots,9\},\ x_1+x_2=k\}\right|^2$$

и тем, что согласно задаче 1.27

$$|\{(x_1,x_2)\colon x_1,x_2\in\{0,1,\ldots,9\},\ x_1+x_2=k\}|=$$

$$=C^1_{\min(k,18-k)+1}=1+\min(k,18-k).$$

1.29. См. указание к задаче 1.28.

1.32. 2) Найти вероятность противоположного события A, состоящего в том, что хотя бы один номер не появился. Событие A представить в виде $A = A_1 \cup \ldots \cup A_N$, где A_k $(k = 1, \ldots, N)$ — событие, состоящее в том, что шар с номером k не появился.

1.35. Воспользоваться равенством

$$\mathsf{P}\left\{x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_{k+1}}\right\} = \mathsf{P}\left\{x_1 < x_2 < \ldots < x_{k+1}\right\}$$

при любых попарно различных

$$i_1, i_2, \ldots, i_{k+1} \in \{1, 2, \ldots, k+1\}.$$

1.36. Найти вероятность противоположного события, состоящего в том, что в отобранных папках содержится целиком либо две рукописи, либо ровно одна.

1.37. В условии не указаны числа женщин и мужчин среди гостей. Задача имеет тривиальное решение, если эти числа не равны друг другу. Если же среди гостей имеется n женщин и n мужчин, то для подсчета искомой вероятности можно воспользоваться формулой $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)$, где $A = \{$«пары» занимают места $(1, 2), (3, 4), \ldots (2n-1, 2n)\}$ (при некоторой нумерации мест по кругу), $B = \{$«пары» занимают места $(2, 3), (4, 5), \ldots, (2n-2, 2n-1), (2n, 1)\}$.

1.38. Шесть номеров, вышедших в тираж, выбираются без возвращения из 49 номеров. Предположим, что все возможные шестерки номеров равновероятны. Если на данной карточке ровно 3 номера совпадут с номерами, вышедшими в тираж, то по данной карточке игрок получит минимальный выигрыш. Найти вероятность события A_k, состоящего в том, что на каждой карточке угадано ровно 3 номера, причем $k = 0, 1, 2, 3$ угаданных номеров являются общими для двух карточек.

1.39. Нужно считать равновероятными все C_{64}^2 расположений двух ладей. Найти вероятность противоположного события.

1.40. Ладьи не угрожают друг другу, если все они стоят на разных горизонталях и вертикалях. Выбрать сначала k горизонталей и k вертикалей, а затем из k^2 клеток на их пересечении выбрать k клеток, удовлетворяющих нужному условию.

1.42. Рассмотреть все исходы первых k просмотров карманов.

1.46. Воспользоваться равенствами вида

$$\mathsf{P}\{\alpha < \beta\} = \frac{1}{9} \sum_{i_1, i_2 = 1}^{3} \chi\left\{a_{i_1} < b_{i_2}\right\},$$

где $\chi\{a < b\} = 1$, если $a < b$, и $\chi\{a < b\} = 0$ в противном случае.

1.47. См. указания к задаче 1.46. Заметить, что при любых i_1, i_2, i_3

$$\chi\left\{a_{i_1} < b_{i_2}\right\} + \chi\left\{b_{i_2} < c_{i_3}\right\} + \chi\left\{c_{i_3} < a_{i_1}\right\} \leqslant 2.$$

1.48. См. указания к задаче 1.46.

1.49. См. указания к задаче 1.47.

1.50. 3) Рассмотреть заполнения двух типов: а) в одной из ячеек нет частиц, в двух ячейках — по две частицы и в $(N-3)$

ячейках — по одной; б) в одной из ячеек нет частиц; в одной — три частицы и в $(N-2)$ ячейках — по одной частице.

4) Найти вероятность противоположного события.

1.51. Пусть A_i — событие, состоящее в том, что i-я ячейка осталась пустой. Найти $\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_N)$.

1.52. Рассмотреть строки из $N+n-1$ символов: n частиц и $N-1$ «перегородок» между ячейками. Число таких строк совпадает, очевидно, с числом представлений числа n в виде $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_N$, где все $r_k \geqslant 0$ — целые числа.

1) Событие $\mu_0 = 0$ происходит тогда и только тогда, когда все $r_k \geqslant 1$. Число наборов $(r_1, \ldots, r_N)$, удовлетворяющих этому условию, равно числу представлений числа $n-N$ в виде $n-N = (r_1-1) + \ldots + (r_N-1)$, где $r_k - 1 \geqslant 0$.

2) Фиксировать пустую ячейку, а в остальных разместить частицы, как в п.1).

1.53. а) Число таких вариантов размещения n человек в ряду из N кресел, когда никакие 2 человека не сидят рядом, есть произведение $n!$ и числа решений уравнения $x_0 + x_1 + \ldots + x_n = N - n + 2$ в целых положительных числах (x_i — расстояния между занятыми креслами, $0 \leqslant i \leqslant n$). Последнее число есть C^n_{N-n+1}. См. указания к задаче 1.52.

б) Каждый человек имеет ровно одного соседа тогда и только тогда, когда все сидят парами, изолированными одна от другой. Поэтому при нечетном n искомая вероятность равна 0. При четном n рассуждать аналогично п. а).

в) Если $D_{n,N}$ — число таких способов размещения n человек в ряду из N кресел, когда выполняется условие в), то при четном N число $D_{n,N}$ равно произведению 2^n и числа размещений n человек в $N/2$ креслах. При нечетном N

$$D_{n,N} = D_{n,N-1} + nD_{n-1,N-1}.$$

1.54. Использовать указания к задаче 1.53.

1.57. Пусть A_i — событие, состоящее в том, что в выбранной подстановке $i \to i$. Найти $\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$.

1.58. Найти число подстановок $\sigma \in S_n$ с $\lambda_1 = k$.

1.59. Для каждого $k = 2, \ldots, n$ найти число подстановок из S_n, содержащих элементы 1 и 2 в одном цикле длины k.

1.60. а) Найти число подстановок в классе $\left[1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots n^{\alpha_n}\right]$.

б) Если исключить единичный цикл $i \to i$, то получится подстановка из множества $\left[1^{\alpha_1-1}2^{\alpha_2}\ldots (n-1)^{\alpha_{n-1}}\right]$.

в) Показать, что события $i \to j$ $(j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\})$ равновероятны.

1.61. Использовать равенства

$$\{\eta_1 < x\} = \{\xi < x\} \cap \{1 - \xi < x\},$$
$$\{\eta_2 > x\} = \{\xi > x\} \cap \{1 - \xi > x\},$$

где ξ — координата точки A.

1.69. Проверить, что геометрическое место точек, расположенных ближе к границе многоугольника, чем к его диагоналям, состоит из равнобедренных треугольников, построенных на сторонах многоугольника как на основаниях и имеющих при основании углы $\pi/(2n)$.

1.70. Установить зависимость числа корней от значений многочлена в точках максимума и минимума.

1.71. Центр монеты можно считать равномерно распределенным в том k-угольнике, в который он попал. Монета не заденет границу k-угольника, если центр будет отдален от нее на расстояние, большее r.

1.72. Монета падает гербом вверх, если конец вектора нормали расположен выше его начала, т. е. середины стороны монеты с гербом.

1.73. Пусть (ρ, φ) — полярные координаты середины хорды. Выразить ξ через R и ρ.

1.78. Интересующее нас событие описывается подмножеством

$$A = \{(u, v): \min(u, v) \leqslant t\}.$$

1.79. Слова «случайно бросается» здесь естественно понимать как случайную равномерно распределенную ориентацию цилиндра относительно вертикального направления. Так как цилиндр однородный, то центр описанной вокруг него сферы совпадает с его центром тяжести. Цилиндр упадет на боковую поверхность, если вертикальный направленный вниз из центра тяжести луч пересечет боковую поверхность. Соответствующая вероятность находится как отношение площади сферического пояса описанной около цилиндра сферы, ограничивающего боковую поверхность цилиндра, к площади всей сферы.

1.80. (См. указание к задаче 1.79.) Вероятность того, что цилиндр упадет на какое-то основание, пропорциональна телесному углу, под которым это основание видно из центра тяжести.

1.81. (См. указания к задачам 1.79, 1.80.) Центр тяжести конуса расположен на его высоте на расстоянии $h/4$ от основания.

1.82. (См. указания к задачам 1.79, 1.80.) Найти центр тяжести полушара и определить величину телесного угла, под которым видна плоская часть границы полушара из центра тяжести.

1.83. Положение бруса определяется положением прямоугольника в плоском сечении, перпендикулярном оси бруса. Брус упадет на ту грань, которую пересечет луч, направленный по вертикали вниз из центра тяжести прямоугольника. (Ср. с задачами 1.79, 1.80.)

1.84. Если A находится между S_k и S_{k+1}, то расстояние от 0 до сторон $\triangle ABC$ находится в интервале $(k/2, (k+1)/2)$, т. е. $\triangle ABC$ содержит внутри себя окружности S_i с $1 \leqslant i \leqslant [k/2]$, находится внутри окружности S_i, $k+1 \leqslant i \leqslant n$, и граница $\triangle ABC$ пересекает окружности S_i с $[k/2] < i \leqslant k$.

1.85. Найти n-мерный объем $V_n(r)$ n-мерного шара радиуса r, воспользовавшись рекуррентной формулой

$$V_n(r) = \iint\limits_{u^2+v^2<r^2} V_{n-2}\left(\sqrt{r^2-u^2-v^2}\right) du\, dv =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^r x V_{n-2}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right) dx = 2\pi \int\limits_0^r u V_{n-2}(u)\, du$$

и равенствами $V_1(r) = 2r$, $V_2(r) = \pi r^2$.

Глава 2

2.3. Вероятность выбора любой заданной карточки равна 0,01.

2.6. Использовать определение условной вероятности и результат задачи 1.23.

2.7. Пусть событие A_i состоит в том, что i-й ($i = 1, 2$) студент возьмет «хороший» билет. Положить $\Omega = \{A_1A_2, A_1\overline{A}_2, \overline{A}_1A_2, \overline{A}_1\overline{A}_2\}$, $\mathsf{P}(A_1) = 1/5$, $\mathsf{P}(A_2|A_1) = 4/24$, $\mathsf{P}(\overline{A}_2|\overline{A}_1) = 20/24$. Отсюда однозначно определяются вероятности элементарных событий.

2.8. а) Пусть событие C_i = {появление белого шара в i-м испытании} (испытания с нечетными номерами относятся к игроку, начавшему игру); событие A = {выигрыш игрока, начавшего игру}. Воспользоваться равенствами $A = C_1 \cup \overline{C}_1\overline{C}_2C_3$, $\overline{A} = \overline{C}_1C_2 \cup \overline{C}_1\overline{C}_2\overline{C}_3C_4$. б, в) Решение аналогично а).

2.9. Пусть $D_0^{(i)}\left(D_1^{(i)}\right)$ — событие, состоящее в том, что i-й шар черный (белый). Воспользовавшись формулой (2.3), показать, что все события $D_{\varepsilon_1}^{(1)}D_{\varepsilon_2}^{(2)}\ldots D_{\varepsilon_N}^{(N)}$ с $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_N = M$ ($\varepsilon_i = 0,1$; $i = 1, \ldots, N$) равновероятны. Поэтому $\mathsf{P}(A_k) = \mathsf{P}(A_1)$, $\mathsf{P}(B_{k,l}) = \mathsf{P}(B_{1,2})$, $\mathsf{P}(C_{k,l}) = \mathsf{P}(C_{1,2})$. Воспользоваться равенствами $B_{1,2} = D_1^{(1)}D_1^{(2)}$, $C_{1,2} = D_0^{(1)}D_1^{(2)}$.

2.10. Цепочками из букв *к*, *ч*, *б* будем обозначать появление красного, черного, белого шаров в испытаниях, соответствующих месту буквы в цепочке. Например, событие *кчч* = {в 1-м испытании появился красный шар, во 2-м — черный, в 3-м — черный}. Использовать равенства

$$A_1 = б \cup ччб \cup ччччб,$$

$$A_2 = чб \cup чччб \cup чччччб,$$

$$B = к \cup чк \cup ччк \cup чччк \cup ччччк \cup чччччк.$$

2.12. Решается аналогично 2.10.

2.13. Решается аналогично 2.10.

2.14. Найти вероятность того, что до появления автобуса маршрута номер 1 появится $t = 1, 2, \ldots$ автобусов разных маршрутов.

2.18. Использовать равенство $A\overline{B} \cup AB = A$.

2.20. Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ — координаты точки, равномерно распределенной в $(n-1)$-мерном кубе $\{(x_1, \ldots, x_{n-1}): 0 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1, \ldots, n-1\}$. Рассмотреть события

$$A_i = \{\xi_i \leqslant 1/2\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$A_n = \left\{\prod_{j=1}^{n}(\xi_j - 1/2) < 0\right\}.$$

2.21. При $n = 3$ приписать вероятности 8 событиям $A_1A_2A_3$, $A_1A_2\overline{A}_3$, ..., $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ так, чтобы условия задачи выполнялись, но события A_1 и A_3 не были бы независимыми.

2.22. Рассмотреть совокупность событий $\left\{\bigcap_{i=1}^{k} A_i^{(\varepsilon_i)}, \ \varepsilon_i = 0 \text{ или } 1\ (i = 1, \ldots, k)\right\}$, где $A_i^{(0)} = A_i$, $A_i^{(1)} = \overline{A}_i$.

2.23. Сопоставить каждому событию $A_i \subset \{1, 2, \ldots, n\} = \Omega$ вектор $a_i \in R^n$, у которого j-я ($j = 1, \ldots, n$) координата равна 0 (если $j \notin A_i$) или $\sqrt{p_j}$ (если $j \in A_i$). Переходя к векторам $b_1, \ldots, b_k \in R^n$, ортогональным к $a_0 = (\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$: $b_i = a_i - \mathsf{P}(A_i)a_0$ ($i = 1, \ldots, k$), показать, что события $A_1, \ldots, A_k$ попарно независимы тогда и только тогда, когда векторы $b_1, \ldots, b_k$ попарно ортогональны.

2.24. Пусть $A_i = \{$изделие прошло i-ю проверку$\}$, $i = 1, 2$. По условию задачи события A_1 и A_2 независимы в обоих случаях.

2.25. б) Воспользоваться неравенством $\mathsf{P}(\overline{A_1A_2}) \leqslant \mathsf{P}(\overline{A}_1) + \mathsf{P}(\overline{A}_2)$, где A_1 и A_2 — события, состоящие в том, что 1-й и 2-й приборы будут работать.

2.26. Участник лотереи получает минимальный выигрыш, если он угадал ровно 3 номера, и какой-либо выигрыш, если число угаданных им номеров не меньше 3. Положим $A_k = \{k$-й участник получает минимальный выигрыш$\}$, $B_k = \{k$-й участник получает какой-либо выигрыш$\}$, $k = 1, 2$. Найти $\mathsf{P}(A_k)$, $\mathsf{P}(B_k)$, $k = 1, 2$.

2.27. Положим $A^{(k)} = \{k$-й элемент не вышел из строя$\}$, $\overline{A}^{(k)} = \{k$-й элемент вышел из строя$\}$, $k = 1, 2, \ldots, 5$. По условию задачи события любого набора, составленного из событий $\overline{A}^{(k)}$, $k = 1, \ldots, 5$, с попарно различными индексами, являются взаимно независимыми. Обозначим B событие, состоящее в том, что по участку, содержащему элементы A_1, A_2, A_4, может проходить ток. Воспользоваться равенствами

$$B = (A^{(1)} \cup A^{(2)})A^{(4)} = A^{(1)}A^{(4)} \cup \overline{A^{(1)}}A^{(2)}A^{(4)},$$

$$C = A^{(5)}A^{(3)} \cup A^{(5)}\overline{A^{(3)}}B.$$

Заметим, что для вычисления вероятности $\mathsf{P}(B)$ непосредственно использовать равенство $B = A^{(1)}A^{(4)} \cup A^{(2)}A^{(4)}$ нельзя, так как $A^{(1)}A^{(4)}$ и $A^{(2)}A^{(4)}$ не являются несовместными событиями.

2.28. Положим $A_0^{(i)} = \{$при i-м выстреле допущен промах$\}$, $A_1^{(i)} = \{$при i-м выстреле происходит попадание$\}$. По условию задачи события $A_{\varepsilon_1}^{(1)}, A_{\varepsilon_2}^{(2)}, \ldots, A_{\varepsilon_n}^{(n)}$ ($\varepsilon_i = 0, 1$; $i = 1, \ldots, n$) взаимно независимы. Найти вероятность того, что было меньше двух попаданий.

2.34. Пусть $C = \{$изделие, поступившее на проверку, удовлетворяет стандарту$\}$. В задаче 2.24 вычислены вероятности $\mathsf{P}\{A_1A_2|C\}$, $\mathsf{P}\{A_1A_2|\overline{C}\}$, где $A_1 = \{$изделие прошло первую проверку$\}$, $A_2 = \{$изделие прошло вторую проверку$\}$.

2.35. в) Использовать равенства

$$(M-m)\,C_M^m = MC_{M-1}^m, \quad \sum_{m=0}^{M} C_{M-1}^m C_{N-M}^{r-m} = C_{N-1}^r.$$

2.37. Введем события $C = \{$перелить кровь можно$\}$, $A_i = \{$донор имеет i-ю группу крови$\}$, $B_i = \{$больной имеет i-ю группу крови$\}$. Найти $\mathsf{P}(A_i)$, $\mathsf{P}(B_i)$, $\mathsf{P}(C|B_i)$ в предположении, что группы крови донора и больного независимы и распределены согласно приведенной в задаче статистике.

2.38. Положим $C = \{$вибрация$\}$, $B = \{$перегрев$\}$. Найти вероятности событий $\overline{C}\overline{B}$, $C\overline{B}$, $\overline{C}B$, CB.

2.39. Используем те же обозначения, что в указаниях к задаче 2.38. Положим $\mathsf{P}(BC)=x$. Найти вероятности событий $\overline{B}\overline{C}$, $B\overline{C}$, $\overline{B}C$ как функции от x, $\mathsf{P}(B)$, $\mathsf{P}(C)$. Показать, что $0 \leqslant x \leqslant \min(\mathsf{P}(B), \mathsf{P}(C))$.

2.40. Положим A = {случайно выбранная урна содержит 2 белых и 3 черных шара}, B = {случайно выбранная урна содержит 1 белый и 1 черный шар}, C = {из выбранной урны извлечен белый шар}. Используя условие задачи, определить вероятности $\mathsf{P}(A)$, $\mathsf{P}(B)$, $\mathsf{P}(C|A)$, $\mathsf{P}(C|B)$.

2.42. Введем следующие обозначения событий: A = {передана последовательность $AAAA$}, B = {передана последовательность $BBBB$}, C = {передана последовательность $CCCC$}, D = {принято $ABCA$}. Так как при приеме $ABCA$ вместо $AAAA$ буква A была искажена два раза, то нужно положить $\mathsf{P}\{D\mid A\}=\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{2}\,\frac{1-\alpha}{2}\,\alpha$. Аналогично определяются вероятности $\mathsf{P}\{D|B\}$, $\mathsf{P}\{D|C\}$. Воспользоваться формулой Байеса.

2.45. Пусть $A_k^{(i)}$ — событие, состоящее в том, что i-й игрок ($i=1, 2$) извлек k белых шаров. Из условия задачи естественно определяются вероятности $\mathsf{P}\left\{A_k^{(1)}\right\}$ ($k=0, 1, 2$), $\mathsf{P}\left\{A_k^{(2)}\,\middle|\,A_l^{(1)}\right\}$ ($k=0, 1$; $l=0, 1, 2$). Найти $\mathsf{P}\left\{A_k^{(1)}\,\middle|\,A_k^{(2)}\right\}$, $k=0, 1, 2$.

2.46. Найти вероятность противоположного события.

2.50. Искомую вероятность можно найти, используя то, что для любого элемента $x\in S$

$$\mathsf{P}\{x\notin A_1A_2\}=1-\mathsf{P}\{x\in A_1A_2\}=1-\mathsf{P}\{x\in A_1\}\mathsf{P}\{x\in A_2\}$$

и что отбор разных элементов в множества A_i происходит независимо.

2.51. Множества $A_1, \ldots, A_r$ попарно не пересекаются, если каждый элемент $x\in S$ либо не включается ни в одно из r множеств, либо включается ровно в одно множество.

2.52. Решать так же, как и задачу 2.51.

2.53. а) Каждый элемент $x\in S$ независимо от остальных включается в $\bigcap\limits_{i=1}^{r} A_i$ с вероятностью p^r. б) Воспользоваться соотношением $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{r} A} = \bigcap\limits_{i=1}^{r} \overline{A}_i$ и свести задачу к п. а).

2.54. Моделью исследуемого явления можно считать схему Бернулли. Обозначим через A_t событие, состоящее в том, что в момент t по дороге мимо пешехода проезжает машина, $t=1, 2, 3, \ldots$ События $A_1, A_2, \ldots$ независимы, $\mathsf{P}(A_t)=p$, $\mathsf{P}(\overline{A}_t)=1-p=q$. Выразить интересующие нас события через $A_1, A_2, \ldots$ Например: {пешеход ожидает 4 с} = $\overline{A_1\overline{A}_2A_3}A_4\overline{A}_5\overline{A}_6\overline{A}_7$; использовать взаимную независимость событий.

2.55. Результативные партии рассматривать как испытания Бернулли с одинаковыми вероятностями исходов.

2.56. Последовательно обрабатываемые детали по принадлежности к 1-й или 2-й группе образуют симметричную схему Бернулли. Событие, вероятность которого мы ищем, можно записать в виде $A_{m,r}C\cup B_{m,r}\overline{C}$, где $A_{m,r}$ = {из $r+m$ первых деталей в 1-ю емкость попало r деталей, а во 2-ю попало m деталей}, $B_{m,r}$ = {из

$r+m$ первых деталей во 2-ю емкость попало r деталей, а в 1-ю попало m деталей$\}$, $C=\{(r+m+1)$-я деталь попала в 1-ю емкость$\}$. Предлагаемая задача является переформулировкой известной задачи Банаха (см. [11]).

2.58. Воспользоваться теоремой Муавра — Лапласа.

2.59. Воспользоваться предельной теоремой Пуассона.

2.60. Использовать теорему Пуассона.

2.61. При решении п. б) вывести равенство

$$\mathsf{P}\{|\xi_{2m}-m|\leqslant k\}=$$
$$=\frac{C_{2m}^{m}}{2^{2m}}\left(1+\frac{2m}{m+1}\left(1+\frac{m-1}{m+2}\left(1+\ldots\left(1+\frac{m-k+1}{m+k}\right)\ldots\right)\right)\right),$$

а затем применить уточненную формулу Стирлинга для вычисления $2^{-2m}C_{2m}^{m}$.

2.63. Использовать теорему Муавра — Лапласа. В ответе оставить знаки, не меняющиеся при изменении границ 940, 1060 на ± 1. (См. введение к гл. 2, а также задачи 2.61, 2.62.)

2.64. Пусть ν — порядковый номер 1025-го числа, делящегося на 3, μ_n — число чисел, делящихся на 3, среди первых n чисел таблицы. Использовать равенство

$$\mathsf{P}\{\nu\geqslant 2500\}=\mathsf{P}\{\mu_{2499}<1025\}.$$

В ответе сохранить разумное число знаков. (См. указание к задаче 2.63.)

2.65. а) Пусть в гардеробах по x мест; обозначим через μ число пар, выбравших гардероб одного входа; тогда $500-\mu$ — число пар, выбравших другой гардероб. Используя теорему Муавра — Лапласа, подобрать x так, чтобы

$$\mathsf{P}\{2\mu<x,\ 1000-2\mu<x\}\approx 0{,}99.$$

2.66. Воспользоваться схемой Бернулли с $n=2500$, $p=6/30=0{,}2$, $q=0{,}8$.

2.72. Рассмотреть все цепочки исходов длины l, содержащие k успехов, из которых один стоит на конце цепочки.

2.73. Воспользоваться схемой Бернулли, в которой испытанием является бросание двух костей; за два исхода каждого испытания принять выпадение или невыпадение хотя бы одной «6». Рассматриваемая схема является частным случаем (2.15)—(2.17).

2.74. Занумеруем подряд бросания монеты. Бросания с нечетными номерами производятся первым игроком; остальные — вторым. Пусть C_i — событие, состоящее в том, что в i-м бросании выпал «герб».

а) Событие, состоящее в том, что игра закончится до 4-го бросания, представляется в виде $C_1\cup\overline{C}_1C_2\cup\overline{C}_1\overline{C}_2C_3$;

б), в) рассматриваются аналогично.

2.75. Вероятностное пространство определяется формулами (2.15)—(2.17) с $N=2$, $p_1=p$, $p_2=q$. Обозначим рассматриваемое событие A. Положим $B_k=\{$нуль впервые появился при k-м испытании$\}$. Тогда $\mathsf{P}(A)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(AB_k)$.

2.76. (См. указание к задаче 2.75.) Нетрудно установить, что рассматриваемое событие может произойти лишь в том случае, когда первые два испытания приводят к двум нулям.

2.77. Обозначим рассматриваемое событие A. Исход i-го испытания (0 или 1) обозначим ξ_i. Для условных вероятностей $p_0 = \mathsf{P}\{A \mid \xi_1 = 0\}$, $p_1 = \mathsf{P}\{A \mid \xi_1 = 1\}$, $p_{11} = \mathsf{P}\{A \mid \xi_1 = \xi_2 = 1\}$ можно, пользуясь формулой полной вероятности, составить систему линейных уравнений. Решив ее, находим $P_{00|111} = \mathsf{P}\{A\} = qp_0 + pp_1$. При составлении системы использовать равенства вида

$$\mathsf{P}\{A \mid \xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1\} = \mathsf{P}\{A \mid \xi_1 = 1\} = p_1,$$
$$\mathsf{P}\{A \mid \xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0\} = \mathsf{P}\{A \mid \xi_1 = 0\} = p_0,\ \ldots$$

2.78. Число единиц в n испытаниях схемы Бернулли однозначно определяет положение частицы.

2.81. Найти вероятность противоположного события. Неправильная передача происходит в следующих случаях: $K = \{$искажено не менее 4 знаков$\}$, $L = \{$два знака принято правильно, а остальные знаки одинаковы$\}$, $M = \{$два знака принято правильно; среди остальных ровно два одинаковых; из двух пар частых знаков выбирается пара неверно принятых знаков$\}$.

2.82. Возможны два подхода.

1. Воспользоваться формулами

$$\mathsf{P}\{\xi_{n,1} = m_1, \ldots, \xi_{n,N} = m_N\} = \frac{n!}{m_1! \ldots m_N!}\, p_1^{m_1} \ldots p_N^{m_N}$$
$$(n = m_1 + \ldots + m_N),$$
$$(a_1 + \ldots + a_k)^s = \sum_{s_1 + \ldots + s_k = s} \frac{s!}{s_1! \ldots s_k!}\, a_1^{s_1} \ldots a_k^{s_k}.$$

2. Положим $B_1^{(j)} = \{$в j-м испытании появился исход 1$\}$, $B_0^{(j)} = \{$в j-м испытании не появился исход 1$\}$. Тогда события $B_{\varepsilon_1}^{(1)}, B_{\varepsilon_2}^{(2)}, \ldots, B_{\varepsilon_n}^{(n)}$ $(\varepsilon_j = 0,1)$ взаимно независимы и $\mathsf{P}\{B_1^{(j)}\} = p_1$, $\mathsf{P}\{B_0^{(j)}\} = p_2 + \ldots + p_N = 1 - p_1$.

2.83. Использовать решение задачи 2.82.

2.84. Решается аналогично 2.82.

2.85. Положим $A_i = \{i$-я ячейка осталась пустой$\}$. Тогда

$$\{\mu_0(n, N) = k\} = \bigcap_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le N} \left(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k} \cap \bigcap_{\substack{j \in \{1, \ldots, N\} \\ j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}}} \overline{A}_j \right).$$

Из решения задачи 2.84 следует, что

$$\mathsf{P}\left\{ \bigcap_{\substack{j \in \{1, \ldots, N\} \\ j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}}} \overline{A}_j \,\Big|\, A_{i_1} \ldots A_{i_k} \right\}$$

совпадает с вероятностью того, что после размещения n частиц по $N - k$ ячейкам, отличным от $i_1, \ldots, i_k$, среди этих ячеек нет пустых. Воспользоваться решением задачи 1.38.

2.86. Обозначим θ_n число очков, выпавшее при n-м бросании; ν — номер последнего бросания. Положим $A_n = \{\theta_n \geqslant 5\}$, $B_n = \{2 \leqslant \theta_n < 5\}$. Возможны два подхода к решению.

1) Событие C, вероятность которого требуется найти, можно представить в виде $C = B_1 \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_1A_2 \ldots A_{n-1}B_n\right)$.

2) Доказать равенства

$$\mathsf{P}\{C\} = \mathsf{P}\{B_1\} + \mathsf{P}\{A_1\}\mathsf{P}\{C|A_1\},$$
$$\mathsf{P}\{C|A_1\} = \mathsf{P}\{C\}.$$

2.87. Найти вероятность того, что в k-й тройке все исходы различны. См. указания к задаче 2.86.

2.88. См. указания к задаче 2.86.

2.89. Обозначим через A_i появление хотя бы одной «6» у игрока A при i-м бросании; аналогично определяем B_i для игрока B. Можно воспользоваться любым из подходов, описанных в указаниях к задаче 2.86.

Глава 3

3.2. Воспользоваться формулами

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\xi = k\} = 1, \qquad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

3.3. Воспользоваться формулой

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

3.8. Угол между положительным направлением оси ординат и лучом AB имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$.

3.9. Найти функцию распределения η.

3.10. Найти сначала $\mathsf{P}\{|\eta| \geqslant x\}$, $\mathsf{P}\{|\zeta| \geqslant x\}$ и воспользоваться тем, что распределения η и ζ симметричны, т. е. $\mathsf{P}\{\eta \leqslant -x\} = \mathsf{P}\{\eta \geqslant x\}$, $\mathsf{P}\{\zeta \leqslant -x\} = \mathsf{P}\{\zeta \geqslant x\}$, $-\infty < x < \infty$.

3.12. Заметить, что $\mathsf{P}\{F(\xi) \leqslant F(x)\} = F(x)$ для любого x, $-\infty < x < \infty$.

3.13. Показать, что $\{F_{-1}(\eta) \leqslant x\} = \{\eta \leqslant F(x)\}$ для любого x, $-\infty < x < \infty$.

3.14. Распределение величины $\eta = g(\xi)$ будет иметь атом в точке y, т. е. $\mathsf{P}\{\eta = y\} > 0$, если, например, уравнению $g(x) = y$ удовлетворяют все точки интервала $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и вероятность события $\{x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2\}$ положительна.

3.15. Воспользоваться тем, что при достаточно больших N значения $F(-N)$ и $1 - F(N)$ могут быть сделаны как угодно малыми, а на любом замкнутом интервале $[-N, N]$ непрерывная функция равномерно непрерывна.

3.17. б) Оценить сверху вероятность $\mathsf{P}\{\xi = \eta\}$ суммой

$$\mathsf{P}\{|\xi| \geqslant N, |\eta| \geqslant N\} + \sum_{k=-Nn}^{Nn-1} \mathsf{P}\left\{\frac{k}{n} \leqslant \xi < \frac{k+1}{n}, \frac{k}{n} \leqslant \eta < \frac{k+1}{n}\right\}$$

и показать, что за счет выбора достаточно больших n и N эта сумма может быть сделана сколь угодно малой.

3.23. Использовать формулу (3.2).

3.24. Использовать формулу (3.2).

3.25. Убедиться в том, что $\mathsf{P}\{|\xi_1 - \xi_2| \leqslant 1\} = 2\mathsf{P}\{0 \leqslant \xi_1 - \xi_2 \leqslant \leqslant 1\}$. Воспользоваться равенством

$$\mathsf{P}\{0 \leqslant \xi_1 - \xi_2 \leqslant 1\} = \int_0^\infty \mathsf{P}(u \leqslant \xi_1 \leqslant u + 1)\, d\mathsf{P}\{\xi_2 \leqslant u\}.$$

3.26. Найти сначала функции распределения, рассматривая пару (ξ, η) как случайную точку, равномерно распределенную в квадрате со стороной a, и вычисляя площади соответствующих фигур.

3.27. Воспользоваться тем, что двумерная плотность распределения (ξ, η) равна e^{-x-y}, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Вычислить сначала функции распределения.

3.29. Воспользоваться формулой композиции (3.4). Учесть, что плотности $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$ на разных интервалах определяются разными аналитическими выражениями.

3.30. См. указание к задаче 3.29.

3.31. Показать, что при любом $t \in [0, a]$

$$\mathsf{P}\{|\xi_1 - \xi_2| \leqslant t\} = \frac{t^2 + 2t(a-t)}{a^2} = \left(2 - \frac{t}{a}\right)\frac{t}{a},$$

$$\mathsf{P}\{\min(\xi_1, \xi_2) \leqslant t\} = \frac{(2a-t)\,t}{a^2} = \left(2 - \frac{t}{a}\right)\frac{t}{a}.$$

3.35. Воспользоваться результатом задачи 3.34.

3.36. Воспользоваться результатом задачи 3.35.

3.37. Найти сначала функцию распределения η.

3.38. Найти сначала $\mathsf{P}\{\eta \leqslant x\}$, используя равенство

$$\mathsf{P}\{\eta \leqslant x\} = \mathsf{P}\left\{\xi_1 \leqslant \frac{x}{1-x}(\xi_2 + \ldots + \xi_n)\right\} = \int_0^\infty \mathsf{P}\left\{\xi_1 \leqslant \frac{ux}{1-x}\right\} p_{\xi_2+\ldots+\xi_n}(u)\, du$$

и результат задачи 3.36.

3.39. Воспользоваться независимостью ξ_1 и ξ_2 и равенством

$$\mathsf{P}(\xi_1 + \xi_2 \leqslant x\} = \mathsf{P}\{\xi_2 \leqslant x, \xi_1 = 0\} + \mathsf{P}\{\xi_2 \leqslant x - 1, \xi_1 = 1\}.$$

3.40. Использовать формулу композиции.

3.43. Площадь части поверхности сферы, лежащей в полупространстве $\{x_1 \geqslant x\}$, равна $2\pi(1-x)$ $(|x| \leqslant 1)$.

3.44. Воспользоваться результатом задачи 3.43.

3.45. Показать, что $P_n = \mathsf{P}\{\xi_1 + \xi_3$ — четное число$\}$.

3.46. а) Воспользоваться тем, что $\tau_1 - \tau_2$ и $\tau_2 - \tau_1$ одинаково распределены и что (см. задачу 3.17, б) $\mathsf{P}\{\tau_1 = \tau_2\} = 0$; б) время ожидания 3-го клиента равно $\min(\tau_1, \tau_2)$; в) событие, состоящее в том, что 3-й клиент закончит разговор раньше 2-го, можно записать в виде $\tau_1 + \tau_3 < \tau_2$. Найти сначала плотность распределения $\tau_1 + \tau_3$.

3.47. Пусть τ_k — время разговора k-го посетителя. Вероятность P_k того, что k-й посетитель закончит разговор первым, равна

$$P_k = \mathsf{P}\{\tau_k < \tau_1,\ \tau_k < \tau_2, \ldots, \tau_k < \tau_{k-1},\ \tau_k < \tau_{k+1}, \ldots, \tau_k < \tau_n\}.$$

Показать, что $P_1 = \ldots = P_n$

3.51. Пусть ξ_s — число очков, выпавших в s-м испытании. Выразить событие $(\theta = l,\ \nu = n)$ через события, связанные со случайными величинами ξ_s, $s = 1, 2, \ldots$

3.52. а) Найти $\mathsf{P}\{\theta_1 = i,\ \tau_2 = l_2,\ \theta_2 = j,\ \tau_3 = l_3,\ \theta_3 = k\}$. б), в) Найти совместное распределение $(\theta_1, \ldots, \theta_N, \tau_1, \ldots, \tau_N)$.

3.53. См. указание к задаче 3.52.

3.54. а), б) Использовать равенства

$$\{\xi_1 = k\} = A_0^{(1)} A_0^{(2)} \ldots A_0^{(k)} A_1^{(k+1)},$$

$$\{\xi_1 = k, \xi_2 = l\} = A_0^{(1)} \ldots A_0^{(k)} A_1^{(k+1)} A_0^{(k+2)} \ldots A_0^{(k+l+1)} A_1^{(k+l+2)},$$

где $A_0^{(k)} = \{k\text{-й шар черный}\}$, $A_1^{(k)} = \{k\text{-й шар белый}\}$. в) Событие $\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_{M+1} = k_{M+1}\}$ однозначно определяет моменты появления белых и черных шаров.

3.56. Показать, что ξ и η равномерно распределены на $[0, 1]$ и $\mathsf{P}\{\xi = \eta\} = 1$. См. задачу 3.55.

3.57. Рассмотреть распределение двумерной случайной величины (ξ, η): $\mathsf{P}\{\xi = 0, \eta = 1\} = \mathsf{P}\{\xi = 1, \eta = 0\} = 1/2$. Положить $x_0 = y_0 = 0$.

3.58. См. задачу 3.56.

3.59. Воспользоваться при $a_1 \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant b_2$ соотношением

$$\{\xi \leqslant a_2,\ \eta \leqslant b_2\} \setminus \{\xi \leqslant a_1,\ \eta \leqslant b_1\} \subset \{a_1 \leqslant \xi \leqslant a_2\} \cup \{b_1 \leqslant \eta \leqslant b_2\}.$$

3.60. а) Использовать равносильность событий $\{\xi_{(1)} > x\}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (\xi_i > x)$ и независимость ξ_i; б) использовать равносильность событий $\{\xi_{(n)} \leqslant x\}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (\xi_i \leqslant x)$ и независимость ξ_i; в) использовать равносильность событий $\{x_1 \leqslant \xi_{(1)}\} \cap \{\xi_{(n)} \leqslant x_2\}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{x_1 < \xi_i \leqslant x_2\}$ и независимость ξ_i.

3.61. а) Пусть $B_m = \{$значения $m - 1$ величин из $\xi_1, \ldots, \xi_n$ попали в $(-\infty, x)$, одно значение — в $[x, x + \Delta x)$ и $n - m$ значений в $[x + \Delta x, +\infty]\}$. Показать, что

$$\mathsf{P}\{\{\xi_{(m)} \in (x, x + \Delta x)\} \setminus B_m\} = o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

Воспользоваться полиномиальной схемой.

б) Решение аналогично п. а).

3.62. Использовать равенства

$$\mathsf{P}\{\xi_{i_1} < \xi_{i_2} < \ldots < \xi_{i_{k+1}}\} = \mathsf{P}\{\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{k+1}\},$$

где $(i_1, i_2, \ldots, i_{k+1})$ — любая перестановка $(1, 2, \ldots, k + 1)$, и учесть, что $\mathsf{P}(\xi_i = \xi_j) = 0$ при $i \neq j$ (см. задачу 3.17, б).

3.63. Пусть $x_i < y_i < x_{i+1} < y_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Найти вероятность $\mathsf{P}\{x_i < \xi_{(i)} \leqslant y_i,\ i = 1, \ldots, n\}$. Разделив эту вероятность на $\prod_{i=1}^{n} (y_i - x_i)$ и устремив y_i к x_i, $i = 1, \ldots, n$, получаем искомую плотность.

3.64. Найти плотность совместного распределения $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, преобразовав с помощью формулы (3.2) найденную при решении задачи 3.63 плотность совместного распределения $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(n)}$.

3.65. Воспользоваться результатом задачи 3.64.

3.66. Вывести из задачи 3.62, что $\mathsf{P}(A_n) = n^{-k}$, $n = 2, 3, \ldots$, и воспользоваться неравенствами

$$\mathsf{P}\left\{\bigcup_n A_n\right\} \leqslant \sum_n \mathsf{P}\{A_n\},$$

$$\frac{1}{n^k} \leqslant \frac{1}{2^{k-2}}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right).$$

3.67. См. указания к задачам 3.62 и 3.66.

3.68. Использовать задачу 3.67 и указания к задаче 3.66.

3.69. Использовать вторую из формул (3.5). Показать, что $\sup_x |F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x)| \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

3.70. Воспользоваться результатом п. б) задачи 3.32.

3.71. Выбрав любое вероятностное пространство, на котором задана случайная величина η, имеющая равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, и воспользоваться задачей 3.13.

3.72. Показать, что $\mathsf{P}\{\zeta = \xi$ или $\zeta = \eta\} = 1$ и что поэтому

$$\mathsf{P}\left\{\min\left\{\left|\xi - \frac{1}{2}\right|, \left|\eta - \frac{1}{2}\right|\right\} \leqslant \left|\zeta - \frac{1}{2}\right| \leqslant \max\left\{\left|\xi - \frac{1}{2}\right|, \left|\eta - \frac{1}{2}\right|\right\}\right\} = 1.$$

Далее заметить, что случайные величины ζ_1 и ζ_2 ($\zeta_1 = \xi$; $\zeta_2 = \eta$ при $\left|\xi - \frac{1}{2}\right| < \left|\eta - \frac{1}{2}\right|$; $\zeta_1 = \eta$, $\zeta_2 = \xi$ в противном случае) удовлетворяют условиям $\mathsf{P}\{\zeta_i = \xi\} = \mathsf{P}\{\zeta_i = \eta\} = 1/2$, $i = 1, 2$. Тем самым все сводится к вычислению функций распределения случайных величин

$$\max\left\{\left|\xi - \frac{1}{2}\right|, \left|\eta - \frac{1}{2}\right|\right\}, \quad \min\left\{\left|\xi - \frac{1}{2}\right|, \left|\eta - \frac{1}{2}\right|\right\}.$$

3.73. Использовать соотношения

$$\mathsf{P}\{\xi < \eta\} = \mathsf{P}\{\xi > \eta\} = \frac{1}{2},$$

$$\mathsf{P}\{\min(\xi, \eta) \leqslant \zeta \leqslant \max(\xi, \eta)\} = 1$$

и указания к задаче 3.72.

3.74. Заметить, что если $a_X = \min\{n: \mathsf{P}(X = n) > 0\}$, $b_X = \max\{n: \mathsf{P}(X = n) > 0\}$ и аналогично определены a_Y и b_Y, то $a = a_X + a_Y$, $b = b_X + b_Y$. Вывести отсюда, что

$$\min\{\mathsf{P}(Z = a), \mathsf{P}(Z = b)\} \leqslant \min\{xy, (1-x)(1-y)\},$$

где $x = P\{X = a_X\}$, $y = P\{Y = a_Y\}$. Максимизировать правую часть неравенства сначала по y (при фиксированном x), а затем по x.

3.76. См. указание к задаче 3.2.

3.78. б) Использовать формулу $m^{[k]}C_n^m = n^{[k]}C_{n-k}^{m-k}$.

3.81. Заметить, что $P\{\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1\} = 1$.

3.82. а) При вычислении дисперсии воспользоваться равенством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; б) убедиться в том, что $m_k = M\sin^k \xi = M\cos^k \xi$ и составить рекуррентное уравнение для m_k с помощью интегрирования по частям. Затем использовать формулу Стирлинга.

3.83. См. указание к задаче 3.82.

3.84. Воспользоваться формулой (3.12).

3.85. См. указание к задаче 3.84.

3.89. Плотность распределения $\xi_{(i)}$ найдена в задаче 3.61. Для интегралов, возникающих при вычислении моментов, получить рекуррентные формулы с помощью интегрирования по частям.

3.90. Показать, что для вычисления $M\{\xi_{(i)} | \xi_{(j)} = x\}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, можно воспользоваться результатом задачи 3.89, так как совместное распределение $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(j-1)}$ при условии $\xi_{(j)} = x$ совпадает с распределением $x\eta_{(1)}, \ldots, x\eta_{(j-1)}$, где $\eta_{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \eta_{(j-1)}$ — вариационный ряд, построенный по независимым случайным величинам $\eta_1, \ldots, \eta_{j-1}$, равномерно распределенным на отрезке [0, 1].

3.93. Пусть χ_1, χ_2, χ_3 — индикаторы событий A_1, A_2, A_3, определенных в задаче 2.19. Положить $\alpha = \chi_1 - M\chi_1$, $\beta = \chi_2 - M\chi_2$, $\gamma = \chi_3 - M\chi_3$.

3.94. Положить $\xi = 2\varkappa\alpha$, $\eta = 2\varkappa\beta$, $\zeta = 2\varkappa\gamma$, где α, β, γ — случайные величины, построенные в указании к задаче 3.93, а случайная величина $\varkappa$ не зависит от α, β, γ и удовлетворяет условиям $M\varkappa^2 = \sigma^2$, $M\varkappa^3 = \infty$, $P\{\varkappa \geqslant 0\} = 1$ или $P\{\varkappa \leqslant 0\} = 1$.

3.96. Ковариационная матрица должна быть симметричной и положительно определенной.

3.97. См. указание к задаче 3.96.

3.98. См. указание к задаче 3.96.

3.99. а) Если выполнены условия задачи, то в правой части равенства

$$M\zeta_1\zeta_2 = M\zeta_1 \max(0, \zeta_2) + M(-\zeta_1 \max(0, \zeta_2))$$

значения слагаемых одинаковы.

б) Использовать утверждение п. а) и формулу (3.17).

3.103. б) Выразить R_n через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$

3.104. Найти плотность распределения $|\xi_{i+1} - \xi_i|$.

3.105. Найти $M\eta_m^2$, пользуясь указанием к задаче 3.104 и формулой

$$M|\xi_{j+1} - \xi_j||\xi_j - \xi_{j-1}| = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 |x_1 - x_2||x_3 - x_2|\, dx_1\, dx_2\, dx_3 =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1\int_0^1 |x_1 - x_2||x_3 - x_2|\, dx_1\, dx_3 \right) dx_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 |x - x_2|\, dx \right)^2 dx_2.$$

3.108. При вычислении дисперсии преобразовать $\zeta_{cn}^{(1)}$ в сумму независимых случайных величин, выразив $\eta_{(i)}$ через $\xi_1, \xi_2,$

3.112. Использовать формулу $M\xi_{\nu_i}\xi_{\nu_j} = \sum_{r,s=1}^{h} M\xi_r\xi_s\varkappa_{ir}\varkappa_{js}$, где $\varkappa_{xy} = 1$, если $\nu_x = y$, и $\varkappa_{xy} = 0$ в остальных случаях.

3.113. а) Положить $\theta_1 = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, где $\xi_i = 1$, если $i \to i$, и $\xi_i = 0$ в противном случае; тогда

$$\theta_1^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\xi_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i + \sum_{i \neq j} \xi_i\xi_j.$$

б) Положить $\theta_2 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \xi_{ij}$, где $\xi_{ij} = 1$, если $i \to j \to i$, и $\xi_{ij} = 0$ в остальных случаях.

в) Написать для θ_r формулу, аналогичную случаям $r = 1$ и $r = 2$.

3.114. Пусть μ_0 — число непоявившихся номеров. Тогда $\mu_0 = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N$, где $\xi_k = 1$, если k-й номер не появился, и $\xi_k = 0$ в противном случае.

3.115. Представить ξ в виде суммы индикаторов $\xi = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n$, где $\delta_i = 1$, если i-й шар в выборке белый, и $\delta_i = 0$ в остальных случаях (предполагается, что шары вынимаются из урны поочередно). Воспользоваться тем, что

$$P(\delta_i = 1) = \frac{M}{N}, \quad P(\delta_i\delta_j = 1) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)} \qquad (i \neq j, \quad i, j \leqslant M).$$

3.116. Воспользоваться равенством

$$\mu_0(n, N) = \theta_1 + \ldots + \theta_N,$$

где $\theta_i = 1$, если i-я ячейка пуста, и $\theta_i = 0$ в противном случае.

3.117. См. указания к задаче 3.116.

3.118. Используя задачу 3.117, вывести рекуррентную формулу

$$M\mu_{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\frac{1}{N-1} M\mu_r, \quad r \geqslant 0.$$

3.119. См. указания к задаче 3.116.

3.120. Использовать равенство $\xi_{n,i} = \varepsilon_{1,i} + \ldots + \varepsilon_{n,i}$, где $\varepsilon_{k,j} = 1$, если в k-м испытании появился j-й исход, и $\varepsilon_{k,j} = 0$ в противном случае.

3.121. См. указания к задачам 3.116 и 3.117. При решении п. в) использовать выпуклость вниз функции x^n.

3.122. Использовать равенство $\nu_k = \tau_1 + \ldots + \tau_k$, где $\tau_1 = 1$, $\tau_j = \nu_j - \nu_{j-1}$ ($j = 2, 3, \ldots$) и результаты задачи 3.52.

3.123. Если δ_i — число пассажиров i-го автобуса, которым не досталось билетов, то

$$\xi = \delta_1 + \ldots + \delta_N.$$

3.124. Пусть ξ_k ($k = 1, 2, \ldots, 10$) — k-е по порядку извлечения число. Доказать, что ξ_k ($k = 1, \ldots, 10$) одинаково распределены.

3.125. Представить μ_{00} в виде суммы индикаторов $\eta_2 + \eta_3 + \ldots + \eta_n$, где $\eta_k = 1$, если при k-м испытании появилась цепочка 00, и $\eta_k = 0$ в остальных случаях. Найти $M\mu_{00}$, $M\mu_{00}^2$.

3.126. Решение аналогично решению задачи 3.125.

3.127. Заметить, что j-е испытание является первым в серии единиц тогда и только тогда, когда в этом испытании появилась единица, а в $(j-1)$-м — нуль. Поэтому если $\theta_j = 1$, когда j-е испытание является началом серии единиц, и $\theta_j = 0$ в противном случае, то: 1) $\eta_n = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n$; 2) $\mathsf{M}\theta_1 = p$, $\mathsf{M}\theta_j = pq$ $(j > 1)$; 3) $\mathsf{P}(\theta_j\theta_{j+1} = 0) = 1$; θ_j и θ_k независимы при $|j-k| \geqslant 2$. Далее см. указания к задаче 3.125.

3.128. Представить ξ в виде суммы $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$, где $\theta_i = 1$, если i-я вершина квадрата, в который попал центр круга, лежит в круге.

3.129. Представить $|S|$ в виде $|S| = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k$, где $\alpha_k = 1$, если $k \in S$, и $\alpha_k = 0$, если $k \notin S$.

3.130. Определить на круге случайную функцию

$$\chi(r, \varphi) = \begin{cases} 1, & \text{если } P(r, \varphi) \in A, \\ 0, & \text{если } P(r, \varphi) \notin A, \end{cases}$$

где $P(r, \varphi)$ — точка с полярными координатами r, φ. Тогда $\xi = \iint\limits_K \chi(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi$. В данном случае знаки математического ожидания и интеграла можно поменять местами, так как $\iint\limits_K \mathsf{M}\,|\chi(r, \varphi)|\, r\, dr\, d\varphi < \infty$ (см. [6], теорема Фубини).

3.131. Пусть $\chi_m(x, y) = 1$, если точка (x, y) покрыта ровно m кругами, и $\chi_m(x, y) = 0$ в остальных случаях. Тогда

$$\mu_m = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \chi_m(x, y)\, dx\, dy.$$

Воспользоваться тем, что

$$0 < \mu_m - \iint\limits_{x^2+y^2<1-r_N} \chi_m(x, y)\, dx\, dy <$$

$$< \pi(1 + r_N)^2 - \pi(1 - r_N)^2 = 4\pi r_N \to 0, \quad N \to \infty,$$

с вероятностью 1. По теореме Фубини

$$\mathsf{M} \iint\limits_{x^2+y^2<1-r_N} \chi_m(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{x^2+y^2<1-r_N} \mathsf{M}\chi_m(x, y)\, dx\, dy.$$

Найти $\mathsf{M}\chi_m(x, y)$ при $x^2 + y^2 \leqslant 1 - r_N$.

3.133. Предварительно доказать, что $n^{[k]} = k \sum\limits_{m=1}^{n-1} m^{[k-1]}$ для любых n, $k \geqslant 2$, где $x^{[y]} = x(x-1)\ldots(x-y+1)$, а затем преобразовать правую часть равенства

$$\mathsf{M}\xi^{[k]} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{[k]}\mathsf{P}(\xi = n).$$

3.134. Заметить, что если $y = x_1 + x_2 + \ldots$, где все слагаемые принимают только значения 0 и 1, то

$$y^{[k]} = k! \sum_{1 < i_1 < \ldots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}.$$

3.135. Использовать результат задачи 3.13, геометрическое истолкование интеграла и формулу $\int\limits_0^\infty (1 - F(x))\,dx = \int\limits_0^1 F_{-1}(y)\,dy$.

3.136. Использовать равенство $\xi = \max(0, \xi) - \max(0, -\xi)$ и задачу 3.135.

3.137. Рассмотреть отдельно случаи $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$. Найти функцию распределения ξ^α и воспользоваться задачей 3.135.

3.138. Использовать результат задачи 3.13.

3.139. В треугольнике $X_1X_2X_3$ углы X_1, X_2 и X_3 одинаково распределены, а их сумма равна 180°.

3.140. Событие {выпуклая оболочка A_1, A_2, A_3, A_4 — треугольник} есть объединение четырех попарно непересекающихся событий $B_i = \{A_i$ лежит в треугольнике, образованном тремя остальными точками$\}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

3.141. Рассмотреть независимые точки $X_1, \ldots, X_6 \in R^2$, имеющие распределение P. Показать, что если $\varkappa_6$ — число треугольников $X_iX_jX_k$, $1 \leqslant i < j < k \leqslant 6$, имеющих хотя бы один угол не меньше 120°, то: а) $\mathsf{M}\varkappa_6 = C_6^3 P_3$; б) $\mathsf{P}\{\varkappa_6 \geqslant 1\} = 1$, т. е. $\mathsf{M}\varkappa_6 \geqslant 1$. Доказательство п. б) сводится к рассмотрению двух случаев:

1) точки $X_1, \ldots, X_6$ образуют выпуклый 6-угольник,

2) одна из точек находится внутри треугольника, образованного какими-то тремя другими.

3.142. Рассмотреть совокупность X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 независимых случайных точек R^2, имеющих распределение P. Показать, что если $\varkappa_5$ — число выпуклых четырехугольников, образованных точками X_i, $i = 1, \ldots, 5$, то: а) $\mathsf{M}\varkappa_5 = 5P_4$, б) $\mathsf{P}\{\varkappa_5 \geqslant 1\} = 1$, и поэтому $\mathsf{M}\varkappa_5 \geqslant 1$. При доказательстве б) использовать рис. 7.

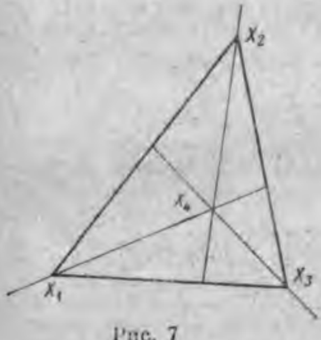

Рис. 7

3.143. Воспользоваться тем, что $\eta_1 + \ldots + \eta_n = 1$ и распределения $\eta_1, \ldots, \eta_n$ одинаковы. Распределения пар η_i, η_j $(i \neq j)$ также одинаковы.

3.144. Показать, что случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{M+1}$, определенные в задаче 3.54, одинаково распределены и что $\tau_i = \xi_i + 1$, $i = 1, \ldots, M$, $\tau_{M+1} = \xi_{M+1}$. Использовать равенство $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{M+1} = N - M$.

3.146. Выписать явную формулу для $\mathsf{D}(\xi + \eta)$ и заметить, что коэффициент корреляции может принимать любое значение из $[-1, 1]$.

3.147. При $\mathsf{M}\xi = m \neq (0, 0, \ldots, 0)$ рассмотреть случайную величину (ξ, e_m), где $e_m = \frac{1}{|m|} m$, и заметить, что

$$|(\xi, e_m)| \leqslant |\xi|, \quad |\mathsf{M}(\xi, e_m)| = |m|.$$

3.150. Выразить $D(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$ через C и воспользоваться неотрицательностью дисперсии.

3.151. Заметить, что при $M|\xi|^k < \infty$

$$M|\xi|^k = \lim_{x\to\infty} \int_0^x u^k \, dP\{|\xi| \leqslant u\}, \quad \int_x^\infty |u|^k \, dP\{|\xi| \leqslant u\} \geqslant x^k P\{|\xi| \geqslant x\}.$$

3.152. Воспользоваться тем, что выпуклая вниз функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$f(x) \geqslant f(x_0) + C_{x_0}(x - x_0), \qquad -\infty < x < \infty,$$

где $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f'(x) \leqslant C_{x_0} \leqslant \lim\limits_{x\downarrow x_0} f'(x)$.

3.153. Использовать выпуклость вниз функции $f(x) = |x|^r$ $(r \geqslant 1)$ и задачу 3.152.

3.154. При доказательстве первого неравенства показать, что можно ограничить случаем $0 \leqslant y \leqslant x$ и что при $0 \leqslant y \leqslant x$ производная по y разности правой и левой частей неотрицательна. Далее заметить, что при указанных в формулировке задачи условиях распределения случайных величин $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$ совпадают, и поэтому $M|\xi + \eta|^r = \frac{1}{2}(M|\xi + \eta|^r + M|\xi - \eta|^r)$.

3.155. Применить метод математической индукции и задачу 3.154.

3.156. Использовать задачу 3.152 и равенство

$$M|\xi + \eta|^r = M(M\{|\xi + \eta|^r | \xi\}).$$

3.157. Показать, что если $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$ и случайная величина ξ'_{k+1} не зависит от S_k и от ξ_{k+1} и распределена так же, как ξ_{k+1}, то распределение $\xi_{k+1} - \xi'_{k+1}$ симметрично и

$$M|S_{k+1}|^r \leqslant M|S_{k+1} + \xi_{k+1} - \xi'_{k+1}|^r \leqslant M|S_k|^r + 2^r M|\xi_{k+1}|^r.$$

3.158. Утверждение п. а) следует из утверждения п. б), а это последнее следует из линейности операции cov (ξ, ζ) по каждой из переменных.

3.159. а) Показать, что $(a, Ba) = D(a, \xi)$.

б) Воспользоваться тем, что условие {ранг B не больше r} эквивалентно условию {существуют линейно независимые векторы $b_1, \ldots, b_{k-r}$, для которых $Bb_i = 0$}, условие $\{D\eta = 0\}$ — условию $\{P\{\eta = C\} = 1$ для некоторого $C\}$, а также п. б) задачи 3.158.

3.160. Применить математическую индукцию и формулу (3.5).

3.161. Воспользоваться соотношением $P\{\nu > n\} = P\{\xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant 1\}$ и результатами задач 3.132 и 3.160.

3.162. Использовать метод неопределенных множителей Лагранжа.

3.164. Воспользоваться формулой $\Delta = \sum\limits_{\alpha} (\pm \xi_{1\alpha_1} \cdots \xi_{n\alpha_n})$, где сумма берется по всем подстановкам $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

3.165. Заметить, что если матрица $A = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^{n}$, то

$$A^k = \left\| \sum_{r_1, \ldots, r_{k-1}=1}^{n} a_{ir_1} a_{r_1 r_2} \ldots a_{r_{k-2} r_{k-1}} a_{r_{k-1} j} \right\|_{i,j=1}^{n}.$$

Воспользоваться тем, что $\mathsf{M}\xi_1^m = 0$ для любого нечетного $m \leqslant k$.

3.166. Представить $\mathsf{M} \sin \xi$ и $\mathsf{M} \cos \xi$ в виде суммы интегралов по $[2\pi k, 2\pi(k+1)]$, $k = 0, 1, \ldots$, а затем показать, что каждый из этих интегралов может быть представлен в виде интеграла по $(0, \pi/2)$ или по $(0, \pi)$ от положительной функции.

3.167. Если $p = 1/2$, то $\mathsf{M}\frac{\eta_n}{n} = \frac{1}{2} + \mathsf{M}\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{1}{2}\right|$; далее воспользоваться неравенством $\mathsf{M}\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \sqrt{\mathsf{D}\frac{\mu_n}{n}}$. При $p \neq 1/2$, например, при $p > 1/2$, заметить, что $\frac{\eta_n}{n} = \frac{\mu_n}{n} - \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{2\mu_n}{n}\right)\xi_n$, где $\xi_n = 1$, если $\mu_n \leqslant n - \mu_n$, и $\xi_n = 0$, если $\mu_n > n - \mu_n$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{M}\xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\mu_n}{n} \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ с помощью теоремы Муавра — Лапласа.

3.168. а) Положить $A_k^\varepsilon = \{\xi_{2k-1} = \varepsilon \neq \xi_{2k}\}$, $B_k = \{\xi_{2k-1} = \xi_{2k}\}$ и использовать разложение

$$\{\eta_1 = \varepsilon_1, \ldots, \eta_n = \varepsilon_n\} =$$

$$= \bigcup_{0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_k} \left\{ A_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots A_{i_k}^{\varepsilon_k} \bigcap_{j=1}^{k} \left(\bigcap_{i_{j-1} < l < i_j} B_l \right) \right\}.$$

б) Заметить, что $\{\nu = 2k\} = \left(A_k^0 \cup A_k^1\right) B_1 \ldots B_{k-1}$.

3.169. См. указание к задаче 3.168.

3.170. Прибыль предприятия η представить в виде $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, где ξ_k — прибыль за k-е изделие. Вычислить $\mathsf{M}\xi_k$ с помощью задачи 2.24.

3.171. Найти производную по x функции $\varphi(x) = \mathsf{M}|\xi - x|$, где x — координата точки B.

3.172. Воспользоваться решением задачи 3.171.

3.173. Воспользоваться равенством

$$\mathsf{M}(\xi - x)^2 = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2 + (x - \mathsf{M}\xi)^2.$$

3.174. Если (ξ, η) — координаты точки X, (a, b) — координаты точки A, то $\mathsf{M}|AX|^2 = \mathsf{M}\{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2\}$. Воспользоваться задачей 3.173.

3.175. Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — уровни весенних паводков в последовательные годы, а τ_z — время до разрушения плотины паводком, то $\{\tau_z > t\} = \left\{\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant t} \xi_i \leqslant z\right\}$. Случайная величина τ_z при любом $z > 0$ имеет геометрическое распределение.

3.176. Найти функцию распределения ζ_T. Воспользоваться формулой $\mathsf{P}\{\tau_T > u\} = \mathsf{M}\{\mathsf{P}(\tau_T > u \mid \zeta_T)\}$ и тем, что условное распределение τ при условии $\zeta_T = z$ — геометрическое при любом z.

3.177. Рассмотреть случайные величины $\rho_{ij} = |\xi_i - \xi_j|$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, и воспользоваться соотношениями а) $\rho_{12}+\rho_{13}+\rho_{23}=2(\xi_{(3)}-\xi_{(1)})$,

б) $\min\{\xi_{(2)}-\xi_{(1)},\ \xi_{(3)}-\xi_{(2)}\}\leqslant {}^1/_2(\xi_{(3)}-\xi_{(1)})$.

3.178. Пусть $\mathsf{P}\{a\leqslant\xi\leqslant b\}=1$, $b-a=l$. Воспользоваться тем, что $\mathsf{D}\xi\leqslant\mathsf{M}(\xi-(a+b)/2)^2$ (см. задачу 3.173).

3.179. Воспользоваться тем, что при $a_i\leqslant b_i$

$$\{a_1\leqslant\eta_1\leqslant b_1\}\cap\{a_2\leqslant\eta_2\leqslant b_2\}\subset\{a_1+a_2\leqslant\eta_1+\eta_2\leqslant b_1+b_2\}.$$

3.180. Воспользоваться задачами 3.178, 3.179 и доказать, что из предположения о том, что ξ сосредоточена на отрезке длины $l<\infty$, и из безграничной делимости распределения ξ следует равенство $\mathsf{D}\xi=0$, т. е. вырожденность распределения ξ.

3.181. Вводя индикаторы $\chi_1,\ldots,\chi_n$ событий $A_1,\ldots,A_n$, установить равенство

$$np=\mathsf{M}(\chi_1+\ldots+\chi_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}(B_k)=\sum_{k=1}^{n}k\mathsf{P}(B_k\diagdown B_{k+1})$$

и вывести из него, что для любого $m=1,2,\ldots,n$

$$m\mathsf{P}(B_m)\leqslant np\leqslant m-1+(n-m+1)\mathsf{P}(B_m).$$

3.182. Воспользоваться результатом задачи 3.136.

3.183. а) Рассмотреть случайные величины $\xi\equiv1$ и η:

$$\mathsf{P}(\eta=0)=1-p,\ \mathsf{P}(\eta=10/p)=p,\quad p\in(0,1].$$

б) Рассмотреть случайные величины ξ и η, имеющие равномерное распределение на $[0,1]$ и такие, что $\eta=\{\xi+p\}$, т. е. η равно дробной части числа $\xi+p$.

в) Показать, что $\mathsf{P}(\xi\leqslant\eta)\leqslant a$ при $a<1$. Рассмотреть случай, когда

$$\frac{\eta}{a}=\{\xi+p\}\ \text{на множестве}\ \{\omega\in\Omega\colon\ \xi\leqslant a\}.$$

Случай $a>1$ сводится к $a<1$ делением на a: $\mathsf{P}(\xi\leqslant\eta)=1-\mathsf{P}(\eta/a<\xi/a)$.

3.184. Вычислить $\mathsf{M}\left|\xi-\frac{1}{2}\right|$ и $\mathsf{M}\left|\eta-\frac{1}{2}\right|$ и воспользоваться неравенством $|x-y|\leqslant|x|+|y|$.

3.185. Показать, что случайные величины $\min(\xi,\eta)$ и $\max(\xi,\eta)$ удовлетворяют условиям задачи и что

$$\mathsf{P}\{\zeta=\xi\ \text{или}\ \zeta=\eta\}=1.$$

3.186. Если

$$F_{-1}(y)=\sup\{x\colon F(x)\leqslant y\}\quad\text{и}\quad\{\chi=1\}=\{\xi\geqslant F_{-1}(1-a)\}=A,$$

то для любой другой случайной величины χ', $\mathsf{P}\{\chi'=1\}=a$, $\mathsf{P}\{\chi'=0\}=1-a$ и $\{\chi'=1\}=A'\neq A$, справедливо неравенство $\mathsf{M}\chi\xi-\mathsf{M}\xi\chi'\geqslant0$, так как

$$\mathsf{M}(\xi\max(\chi-\chi',0))\geqslant F_{-1}(1-a)\mathsf{P}(A\backslash A'),$$
$$\mathsf{M}(\xi\max(\chi'-\chi,0))\leqslant F_{-1}(1-a)\mathsf{P}(A'\backslash A)$$

и

$$\mathsf{P}(A'\backslash A)=\mathsf{P}(A\backslash A').$$

Минимальное значение $\mathsf{M}(\xi\chi)$ достигается при $\{\chi=1\}=\{\xi\leqslant F_{-1}(a)\}$. Для вычисления экстремальных значений $\mathsf{M}(\xi\chi)$ воспользоваться задачами 3.135 и 3.136.

3.187. Представить ζ в виде $\zeta = \eta + (\xi - \eta)\chi$, где случайная величина χ принимает значения 0 и 1 и $\{\chi = 0\} = \{\zeta = \eta\}$, $\{\chi = 1\} = \{\zeta = \xi\}$. Далее воспользоваться аддитивностью математического ожидания и результатом задачи 3.186 (предварительно вычислив функцию распределения $\xi - \eta$).

3.188. а) Воспользоваться свойством аддитивности матриц ковариаций.

б) Использовать результат п. а) и формулу для плотности двумерного нормального распределения.

3.189. а), б), в) Найти $\mathsf{P}\{\xi = \eta\}$; использовать равенство

$\mathsf{P}\{\xi > \eta\} = \mathsf{P}\{\xi < \eta\} = (1 - \mathsf{P}\{\xi = \eta\})/2.$

3.190. Составить и решить рекуррентные уравнения: в случае а) — для $\mathsf{P}\{\xi > k\}$, в случаях б) и в) — для $\mathsf{P}\{\xi = k\}$.

3.191. Использовать задачи: 3.32 — в случае а), 3.26 — в случае б), 3.34 — в случае в).

3.192. Использовать результаты задачи 3.191.

3.193. Условные распределения ξ и η при условии $\xi + \eta = z$ совпадают. Если $\mathsf{P}\{|\xi + \eta - z| < \varepsilon\} = 0$ при некотором $\varepsilon > 0$, то условное распределение ξ или η при условии $\xi + \eta = z$ не определено.

3.195. Показать, что если $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — любые два набора, состоящие из k единиц и $n - k$ нулей каждый, то $\mathsf{P}(\xi = x) = \mathsf{P}(\xi = y)$.

3.196. Доказать индукцией по k, что если ξ_{ij} $(i = 1, \ldots, n;$ $j = 1, 2, \ldots)$ — независимые случайные величины, $\mathsf{P}\{\xi_{ij} = 1\} = p$, $\mathsf{P}\{\xi_{ij} = 0\} = 1 - p$ при любых i, j, то

$$X_k = \xi_{11} \ldots \xi_{1k} + \xi_{21} \ldots \xi_{2k} + \ldots + \xi_{n1} \ldots \xi_{nk}.$$

3.198. Обозначим через η число белых шаров в первой выборке. Тогда по формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}(\xi = m) = \sum_{l=0}^{r} \mathsf{P}(\eta = l)\,\mathsf{P}\{\xi = m \mid \eta = l\}.$$

3.199. Найти условную плотность распределения η при фиксированном ξ_{θ}.

3.201. Вводя индикаторы событий, показать, что $\mathsf{M}\varkappa_n = n\mathsf{P}\{\xi_{j1} \leqslant \xi_{n1}$ или $\xi_{j2} \leqslant \xi_{n2}$ для $j = 1, \ldots, n - 1\}$, и вычислить последнюю вероятность, используя независимость $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и формулу полной вероятности (фиксируя множество $A(\xi_n) = \{j;\ \xi_{j1} \leqslant \xi_{n1}$ или $\xi_{j2} \leqslant \xi_{n2}\}$ и значения ξ_{n1}, ξ_{n2}).

3.202. Использовать условные математические ожидания и формулу $\mathsf{D}\tau = \mathsf{M}\tau^2 - (\mathsf{M}\tau)^2$.

3.203. Показать, что в равенстве

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant \max(\eta, x) \mid \xi \geqslant x\} = \mathsf{M}_\eta\{\mathsf{P}(\xi \geqslant \max(\eta, x) \mid \xi \geqslant x, \eta)\}$$

выражение под знаком математического ожидания можно оценить снизу величиной $\mathsf{P}\{\xi \geqslant \eta \mid \eta\}$ при любом фиксированном значении η.

3.204. Воспользоваться задачей 3.203.

3.205. а) Заметить, что

$$\mathsf{P}\{\eta_k \leqslant y \mid \eta_{k-1} = x\} = \mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant y \mid \xi_1 < x\}.$$

б) Вывести из п. а), что распределения η_k и $\xi_1\xi_2\ldots\xi_k$ совпадают.

в) Воспользоваться равенством

$$\mathsf{P}\{\Delta_k = m \mid \eta_{k-1} = x\} = \mathsf{P}\{\xi_m < x,\ \xi_i \geqslant x \quad (i = 1, \ldots, m-1)\}.$$

г) Заметить, что $\tau_k = \Delta_1 + \ldots + \Delta_k$, и, пользуясь результатами пп. б) и в), найти $\mathsf{M}\Delta_k$.

д) См. указания к задаче 3.67.

3.206. Показать, что n-мерная условная плотность распределения $(S_1, \ldots, S_n)$ при условии $S_n \leqslant a < S_{n+1}$ равна 0 вне множества $D_n(a) = \{(x_1, \ldots, x_n):\ 0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant a\}$ и постоянна на $D_n(a)$. Плотность распределения $(\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(n)})$ найдена в задаче 3.63.

3.207. Представить $\mathsf{P}\left\{\xi - x > \dfrac{C}{x}\right\}$ и $\mathsf{P}\{\xi > x\}$ в виде интегралов по промежутку $[x, \infty)$.

3.208. Положим $\xi_t = 1$, если в испытании с номером t появилась 1, и $\xi_t = 0$ в противном случае. Для условных математических ожиданий $m_0 = \mathsf{M}\{\nu_{00} \mid \xi_1 = 0\}$, $m_1 = \mathsf{M}\{\nu_{00} \mid \xi_1 = 1\}$ составить систему линейных уравнений, используя равенства

$$\mathsf{M}\{\nu_{00} \mid \xi_1 = \xi_2 = 0\} = 2,$$
$$\mathsf{M}\{\nu_{00} \mid \xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1\} = 1 + m_1,$$
$$\mathsf{M}\{\nu_{00} \mid \xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0\} = 1 + m_0,$$
$$\mathsf{M}\{\nu_{00} \mid \xi_1 = \xi_2 = 1\} = 1 + m_1,$$

и формулу (3.20). Найдя из этой системы m_0, m_1, получаем $\mathsf{M}\nu_{00} = pm_1 + qm_0$.

3.209. Для условных математических ожиданий

$$m_0 = \mathsf{M}\{\nu_{111} \mid \xi_1 = 0\}, \quad m_1 = \mathsf{M}\{\nu_{111} \mid \xi_1 = 1\},$$
$$m_{11} = \mathsf{M}\{\nu_{111} \mid \xi_1 = \xi_2 = 1\}$$

составить систему линейных уравнений. Найдя из этой системы m_0 и m_1, получим $\mathsf{M}\nu_{111} = qm_0 + pm_1$. См. также указание к задаче 3.208.

3.210. См. указание к задаче 3.208.

3.211. Пусть $B_i = \{$точки $A_1, \ldots, A_n$ лежат на дуге A_iC длины x (направление от A_i к C — по часовой стрелке)$\}$. Искомое событие есть $B_1 \cup \ldots \cup B_n$. Показать, что $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$, и найти $\mathsf{P}\{B_i \mid A_i = X\}$.

3.212. Указанное в условии событие не происходит тогда и только тогда, когда длина дуги, содержащей $A_1, \ldots, A_n$, не превосходит половины длины окружности. См. задачу 3.211.

3.213. Если B_n — событие, описанное в задаче 3.212, то $\{\nu \leqslant n\} = B_n$. Для вычисления $\mathsf{M}\nu$ и $\mathsf{D}\nu$ использовать задачи 3.132 и 3.133.

3.214. Найти длину дуги, на которой должны быть сосредоточены точки $A_1, \ldots, A_n$, чтобы событие, указанное в условии задачи, не выполнялось. Использовать результат задачи 3.211.

3.215. Если длина дуги A_1B равна x, то $\{\xi > x\} = \{A_2, \ldots, A_n$ не принадлежат дуге $A_1B\}$.

3.216. Использовать формулу полной вероятности

$$\mathsf{P}(\xi_1 > x, \xi_2 > y) = \int\limits_{\infty}^{2\pi r} \mathsf{P}\{\xi_2 > y \mid \xi_1 = z\}\, p_{\xi_1}(z)\, dz,$$

где $p_{\xi_1}(z)$ — плотность распределения ξ_1, и указания к задаче 3.215.

3.217. Использовать формулу полной вероятности

$$\mathsf{P}(\xi_1 > x_1, \ldots, \xi_k > x_k) = \int\limits_{x_1}^{2\pi r} \mathsf{P}\{\xi_2 > x_2, \ldots, \xi_k > x_k \mid \xi_1 = z\}\, p_{\xi_1}(z)\, dz,$$

метод математической индукции (по k) и результаты задач 3.215 и 3.216.

3.218. Воспользоваться результатом задачи 3.217 и тем, что

$$\mathsf{P}\left(\xi_{i_1} > x_1, \ldots, \xi_{i_k} > x_k\right) = \mathsf{P}\left\{\xi_{i_j} > x_j\ (j = 1, \ldots, k),\quad \xi_m > 0\quad (m \neq i_1, \ldots, i_k)\right\}.$$

3.219. Заметить, что $\nu = \theta_1 + \ldots + \theta_n$, где $\{\theta_i = 1\} = \{\xi_i > \Delta\}$, $\{\theta_i = 0\} = \{\xi_i \leqslant \Delta\}$. Далее использовать задачи 3.132 и 3.133, 3.215 и 3.218.

3.220. Заметить, что $\{\eta_n > x\} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{\xi_k > x\}$. Использовать формулу (1.12) из введения к гл. 1 и результат задач 3.217, 3.218.

3.221. Использовать задачи 3.220, 3.135 и равенство

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{C_n^k}{k} = \int\limits_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\, dx = \int\limits_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\, dx.$$

3.222. Пусть α, β, γ — длины дуг BC, CA, AB. Использовать равенства

$$S = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma),$$

$$p = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$r = \frac{2S}{p} = \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2},$$

результаты задачи 3.215 и свойство аддитивности математического ожидания.

3.223. а) Использовать равенство

$$\mathsf{M}\sigma = \int\limits_0^1 (y - a_1)(y - a_2)\, dy - 2 \int\limits_{\min(a_1, a_2)}^{\max(a_1, a_2)} (y - a_1)(y - a_2)\, dy.$$

б) Подставить результат п. а) в формулу $\mathsf{M}\sigma = \mathsf{M}\{\mathsf{M}(\sigma|A)\}$.

3.224. а) Найти вероятность поражения цели при условии, что ζ фиксировано; б) воспользоваться результатом задачи 3.40.

3.227. Получить рекуррентную формулу для $\mathsf{M}\xi^k$, используя интегрирование по частям.

3.228. Представить каждую часть неравенства в виде интеграла по интервалу (x, ∞) от ее производной и сравнить подынтегральные выражения.

3.230. Записать $\mathsf{P}\{\eta \leqslant x\}$ в виде интеграла и вычислить его, переходя к полярным координатам.

3.231. Использовать результаты задач 3.35 и 3.229, а).

3.233. Пользуясь тем, что интеграл от плотности нормального распределения равен 1, найти $\mathsf{M}e^{\eta}$ и $\mathsf{M}e^{2\eta}$, где случайная величина η имеет нормальное распределение с параметрами (a, σ^2).

3.234. Воспользоваться задачами 3.233 и 3.229, б).

3.235. б) Заметить, что

$$\mathsf{P}\{a \leqslant \xi \leqslant b\} = \Phi\left(\frac{\ln b - \mathsf{M}\ln\xi}{\sqrt{\mathsf{D}\ln\xi}}\right) - \Phi\left(\frac{\ln a - \mathsf{M}\ln\xi}{\sqrt{\mathsf{D}\ln\xi}}\right).$$

Найти $\mathsf{M}\ln\xi$ и $\mathsf{D}\ln\xi$, используя результаты задачи 3.233.

3.236. См. указания к задачам 3.227 и 3.233.

3.237. Воспользоваться тем, что случайные величины ξ и $-\xi$ одинаково распределены.

3.238. Разложить $\cos\xi$ в ряд Тейлора по ξ и с помощью результатов задачи 3.227 найти математическое ожидание каждого слагаемого. При вычислении $\mathsf{M}\cos^2\xi$ предварительно перейти к функции от двойного угла.

3.239. Воспользоваться результатами задач 3.237 и 3.238 и равенством $\mathsf{M}\sin^2\xi = 1 - \mathsf{M}\cos^2\xi$.

3.240. Вычислить $(\mathsf{M}\cos\xi^2 + i\mathsf{M}\sin\xi^2)^2 = \left(\mathsf{M}e^{i\xi^2}\right)^2$, записав эту величину в виде двойного интеграла и затем переходя к полярным координатам. При определении квадратного корня найти знак $\operatorname{Im}\mathsf{M}e^{i\xi^2}$, делая в интеграле замену переменных $u = x^2$ и рассматривая интегралы по u от $2\pi k$ до $2\pi(k+1)$, $k = 0, 1, \ldots$

3.241. Найти плотность совместного распределения η_1, η_2.

3.242. а) Использовать равенство $\mathsf{P}(-\xi < x,\ |\xi| \geqslant 1) = \mathsf{P}(\xi < x,\ |\xi| \geqslant 1)$.

б) Найти $\mathsf{P}(\xi + \eta = 0)$.

3.243. Случайная величина $\xi - \eta$ имеет нормальное распределение.

3.244. Случайные величины $2\xi_1 - \xi_2$, $2\xi_1 - \xi_2 + \xi_3$ имеют нормальное распределение.

3.245. Линейное преобразование с матрицей $\begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}$ ортогонально.

3.246. Воспользоваться задачей 3.245 с $\varphi = \pi/4$.

3.249. Используя задачи 3.247, 3.248, представить (ξ_1, ξ_2) в виде подходящего линейного преобразования случайного вектора (ζ_1, ζ_2), имеющего сферически симметричное нормальное распределение с $\mathsf{D}\zeta_1 = \mathsf{D}\zeta_2 = 1$.

3.250. Записать отображение $z = x + iy \to \dfrac{(x+iy)^k}{(x^2+y^2)^{(k-1)/2}}$ в полярных координатах и воспользоваться сферической симметричностью совместного распределения ξ_1 и ξ_2.

3.252. а) — в) Воспользоваться независимостью ξ и η; г) воспользоваться решением а) и симметричностью двумерной плотности распределения (ξ, η) относительно начала координат; д), е) вычислить с помощью интегрирования двумерной плотности.

3.254. Воспользовавшись тем, что плотность сферически симметричного нормального распределения инвариантна относительно поворота вокруг начала координат, повернуть прямоугольник так, чтобы его стороны стали параллельны осям, а вероятность попадания в него не изменилась.

3.255. Воспользоваться симметричностью двумерной плотности относительно любой прямой, проходящей через начало координат, и ее инвариантностью относительно вращений вокруг начала координат.

3.257. б), в) Найти плотность (ξ, η) в полярных координатах.

3.258. а) Выразить искомую вероятность через плотность в полярных координатах (см. задачу 3.256).

б), в) См. указания к задаче 3.254.

3.259. Вектор $(\xi_1 - \xi_2, \eta_1 - \eta_2)$ имеет нормальное сферически симметричное распределение. Воспользоваться задачей 3.230.

3.260. Вектор $A_1M_1 = (-\xi_1 + (\xi_2 + \xi_3)/2, \ -\eta_1 + (\eta_2 + \eta_3)/2)$. См. указание к задаче 3.259.

3.261. Показать, что точка M_1 и вектор A_2A_3 независимы. Вывести отсюда независимость векторов A_1M_1 и A_2A_3 (и, значит, их длин).

3.262. Треугольник является тупоугольным тогда и только тогда, когда одна из его сторон больше удвоенной медианы, проведенной к этой стороне. Эти события, относящиеся к трем разным сторонам, несовместны и имеют одну и ту же вероятность. Найти эту вероятность, используя результаты задач 3.260 и 3.261.

3.263. Треугольник $A_1A_2A_3$ не имеет тупых углов тогда и только тогда, когда он не содержит внутри себя центр описанной около него окружности. Использовать задачу 3.212.

3.264. Заметить, что распределения случайных величин ξ и $-\xi$ совпадают.

3.265. Ввести вспомогательный случайный вектор $\xi' = (\xi_1', \xi_2') = (\xi_1/\sigma_1, \xi_2/\sigma_2)$, имеющий сферически симметричное двумерное нормальное распределение.

3.266. Из результата задачи 3.264 вывести, что достаточно найти p_{00}. Подобрать числа a_1, b_1, b_2 так, чтобы случайный вектор $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) = (a_1\xi_1, \ b_1\xi_1 + b_2\xi_2)$ имел сферически симметричное нормальное распределение с плотностью $\frac{1}{2\pi} e^{-(u^2+v^2)/2}$ и чтобы

$$\{\xi_1 \geqslant 0, \ \xi_2 \geqslant 0\} = \{\zeta_1 \geqslant 0, \ \zeta_2 \geqslant b_1/a_1\}.$$

Для вычисления p_{00} воспользоваться последним равенством и сферической симметричностью распределения ζ.

3.267. Найти такие числа u и v, что случайные величины ξ_1 и $\eta = u\xi_1 + v\xi_2$ независимы и одинаково распределены. Записать искомую вероятность в терминах вектора (ξ_1, η) и воспользоваться сферической симметричностью его распределения.

3.268. Найти распределение $\xi_1 - a\xi_2$.

3.270. а) Вектор $(\xi_2 - \xi_1, \ \xi_3 - \xi_1)$ является разностью двух векторов (ξ_2, ξ_3) и (ξ_1, ξ_1), имеющих нормальные распределения. б) Распределение $(\xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \ \xi_{(3)} - \xi_{(1)})$ совпадает с условным распределением $(\xi_2 - \xi_1, \ \xi_3 - \xi_1)$ при условии, что $\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \xi_3$. Вероятность события $\xi_{\sigma_1} \leqslant \xi_{\sigma_2} \leqslant \xi_{\sigma_3}$ не зависит от перестановки $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ элементов $(1, 2, 3)$. в) Воспользоваться задачей 3.267.

3.271. См. указание к задаче 3.270.

3.272. Ср. с задачей 2.19.

3.278. Найти функцию распределения

$$\zeta_k = \max_{1 \le i \le k} |\xi_i|.$$

3.279. Воспользоваться соотношением $|M\zeta| \leqslant M|\zeta|$ и результатом задачи 3.152.

3.281. Рассмотреть распределение с плотностью

$$p(x_1, x_2) = C^{-1} \exp\{-(x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2)\},$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty}\int \exp\{-(x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2)\}\, dx_1 dx_2.$$

Глава 4

4.1. Заметить, что если $f_x(t) = 0$ при $|t| < x$, $f_x(t) = 1$ при $|t| \geqslant x$, то $P\{|\xi| \geqslant x\} = Mf_x(\xi)$ и $g(t) \geqslant f_x(t) g(x)$.

4.4. Показать, что для любых $\varepsilon > 0$ и $n = 1, 2, \ldots$

$$\left\{\left|\frac{\zeta_1 + \ldots + \zeta_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right\} \subseteq \left\{\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_{[(n+1)/2]}}{[(n+1)/2]} - a\right| > \varepsilon\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\left|\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_{[n/2]}}{[n/2]} - a\right| > \varepsilon\right\},$$

и использовать приведенные во введении к гл. 4 условия выполнения закона больших чисел.

4.5. Применить результат задачи 4.4.

4.6. Показать, что

$$D\,\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} = (1 + o(1))\,\frac{Cn^{\alpha-1}}{\alpha+1}, \qquad n \to \infty,$$

найти распределение $(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n$ и использовать точную формулу для $P\{|\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n| \leqslant \varepsilon\}$.

4.7. Воспользоваться неравенством Чебышева и результатом задачи 4.6. Выяснить, при каких значениях α удовлетворяет закону больших чисел последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, если они независимы и при $k = 1, 2, \ldots$

$$P\{\xi_k = 0\} = 1 - 2^{-k},$$

$$P\{\xi_k = 2^k C k^\alpha\} = P\{\xi_k = -2^k C k^\alpha\} = 2^{-k-1}.$$

4.8. Оценить сверху дисперсии $\zeta_1 + \ldots + \zeta_n$ и $\eta_1 + \ldots + \eta_n$ и применить неравенство Чебышева.

4.9. Вычислить математическое ожидание, дисперсию ζ_n/C_n^2 и воспользоваться неравенством Чебышева.

4.10. Заметить, что

$$\zeta_n = \frac{1}{2}\left((\xi_1 + \ldots + \xi_n)^2 - (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)\right)$$

3.254. Воспользовавшись тем, что плотность сферически симметричного нормального распределения инвариантна относительно поворота вокруг начала координат, повернуть прямоугольник так, чтобы его стороны стали параллельны осям, а вероятность попадания в него не изменилась.

3.255. Воспользоваться симметричностью двумерной плотности относительно любой прямой, проходящей через начало координат, и ее инвариантностью относительно вращений вокруг начала координат.

3.257. б), в) Найти плотность (ξ, η) в полярных координатах.

3.258. а) Выразить искомую вероятность через плотность в полярных координатах (см. задачу 3.256).

б), в) См. указания к задаче 3.254.

3.259. Вектор $(\xi_1 - \xi_2, \eta_1 - \eta_2)$ имеет нормальное сферически симметричное распределение. Воспользоваться задачей 3.230.

3.260. Вектор $A_1M_1 = (-\xi_1 + (\xi_2 + \xi_3)/2, \; -\eta_1 + (\eta_2 + \eta_3)/2)$. См. указание к задаче 3.259.

3.261. Показать, что точка M_1 и вектор A_2A_3 независимы. Вывести отсюда независимость векторов A_1M_1 и A_2A_3 (и, значит, их длин).

3.262. Треугольник является тупоугольным тогда и только тогда, когда одна из его сторон больше удвоенной медианы, проведенной к этой стороне. Эти события, относящиеся к трем разным сторонам, несовместны и имеют одну и ту же вероятность. Найти эту вероятность, используя результаты задач 3.260 и 3.261.

3.263. Треугольник $A_1A_2A_3$ не имеет тупых углов тогда и только тогда, когда он не содержит внутри себя центр описанной около него окружности. Использовать задачу 3.212.

3.264. Заметить, что распределения случайных величин ξ и $-\xi$ совпадают.

3.265. Ввести вспомогательный случайный вектор $\xi' = (\xi_1', \xi_2') = (\xi_1/\sigma_1, \xi_2/\sigma_2)$, имеющий сферически симметричное двумерное нормальное распределение.

3.266. Из результата задачи 3.264 вывести, что достаточно найти p_{00}. Подобрать числа a_1, b_1, b_2 так, чтобы случайный вектор $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) = (a_1\xi_1, \; b_1\xi_1 + b_2\xi_2)$ имел сферически симметричное нормальное распределение с плотностью $\frac{1}{2\pi} e^{-(u^2+v^2)/2}$ и чтобы

$$\{\xi_1 \geqslant 0, \; \xi_2 \geqslant 0\} = \{\zeta_1 \geqslant 0, \; \zeta_2 \geqslant b_1/a_1\}.$$

Для вычисления p_{00} воспользоваться последним равенством и сферической симметричностью распределения ζ.

3.267. Найти такие числа u и v, что случайные величины ξ_1 и $\eta = u\xi_1 + v\xi_2$ независимы и одинаково распределены. Записать искомую вероятность в терминах вектора (ξ_1, η) и воспользоваться сферической симметричностью его распределения.

3.268. Найти распределение $\xi_1 - a\xi_2$.

3.270. а) Вектор $(\xi_2 - \xi_1, \; \xi_3 - \xi_1)$ является разностью двух векторов (ξ_2, ξ_3) и (ξ_1, ξ_1), имеющих нормальные распределения. б) Распределение $(\xi_{(2)} - \xi_{(1)}, \; \xi_{(3)} - \xi_{(1)})$ совпадает с условным распределением $(\xi_2 - \xi_1, \; \xi_3 - \xi_1)$ при условии, что $\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \xi_3$. Вероятность события $\xi_{\sigma_1} \leqslant \xi_{\sigma_2} \leqslant \xi_{\sigma_3}$ не зависит от перестановки $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ элементов $(1, 2, 3)$. в) Воспользоваться задачей 3.267.

3.271. См. указание к задаче 3.270.

3.272. Ср. с задачей 2.19.

3.278. Найти функцию распределения

$$\zeta_k = \max_{1<i<k} |\xi_i|.$$

3.279. Воспользоваться соотношением $|M\zeta| \leqslant M|\zeta|$ и результатом задачи 3.152.

3.281. Рассмотреть распределение с плотностью

$$p(x_1, x_2) = C^{-1} \exp\left\{-\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2\right)\right\},$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty}\int \exp\left\{-\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2\right)\right\} dx_1 dx_2.$$

Глава 4

4.1. Заметить, что если $f_x(t) = 0$ при $|t| < x$, $f_x(t) = 1$ при $|t| \geqslant x$, то $P\{|\xi| \geqslant x\} = Mf_x(\xi)$ и $g(t) \geqslant f_x(t) g(x)$.

4.4. Показать, что для любых $\varepsilon > 0$ и $n = 1, 2, \ldots$

$$\left\{\left|\frac{\zeta_1 + \ldots + \zeta_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right\} \subseteq \left\{\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_{[(n+1)/2]}}{[(n+1)/2]} - a\right| > \varepsilon\right\} \cup$$
$$\cup \left\{\left|\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_{[n/2]}}{[n/2]} - a\right| > \varepsilon\right\},$$

и использовать приведенные во введении к гл. 4 условия выполнения закона больших чисел.

4.5. Применить результат задачи 4.4.

4.6. Показать, что

$$D\,\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} = (1 + o(1))\,\frac{Cn^{\alpha-1}}{\alpha + 1}, \qquad n \to \infty,$$

найти распределение $(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n$ и использовать точную формулу для $P\{|\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n| \leqslant \varepsilon\}$.

4.7. Воспользоваться неравенством Чебышева и результатом задачи 4.6. Выяснить, при каких значениях α удовлетворяет закону больших чисел последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, если они независимы и при $k = 1, 2, \ldots$

$$P\{\xi_k = 0\} = 1 - 2^{-k},$$
$$P\{\xi_k = 2^k C k^\alpha\} = P\{\xi_k = -2^k C k^\alpha\} = 2^{-k-1}.$$

4.8. Оценить сверху дисперсии $\zeta_1 + \ldots + \zeta_n$ и $\eta_1 + \ldots + \eta_n$ и применить неравенство Чебышева.

4.9. Вычислить математическое ожидание, дисперсию ζ_n / C_n^2 и воспользоваться неравенством Чебышева.

4.10. Заметить, что

$$\zeta_n = \frac{1}{2}\left((\xi_1 + \ldots + \xi_n)^2 - \left(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2\right)\right)$$

и что поэтому

$$P\left\{\left|\frac{\zeta_n}{C_n^2}-a^2\right|>\varepsilon\right\}\leqslant P\left\{\left|\frac{(\xi_1+\ldots+\xi_n)^2}{n^2}-a\right|>\frac{\varepsilon}{3}\right\}+$$
$$+P\left\{\frac{(\xi_1+\ldots+\xi_n)^2}{n^2(n-1)}>\frac{\varepsilon}{3}\right\}+P\left\{\frac{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}{n(n-1)}>\frac{\varepsilon}{3}\right\}. \quad (1)$$

Оценить первое слагаемое в правой части (1) с помощью неравенства Чебышева, а второе и третье — с помощью неравенства из задачи 4.1 для функции $g(x)=|x|$.

4.11. Найти $Mf(\xi_1)$ и $Df(\xi_1)$ и воспользоваться законом больших чисел.

б) Использовать центральную предельную теорему.

4.12. а) Если $\{x\}$ обозначает дробную долю x, то $\{\xi+k\eta\}$ и $\{l\eta\}$ при любых целых k, l независимы и имеют равномерное распределение на $[0, 1]$.

б) Воспользоваться неравенством Чебышева.

в) Заметить, что

$$\left|\frac{\zeta_1+\ldots+\zeta_n}{n}-\int_0^1 f(x)\,dx\right|>\varepsilon,$$

если $\{\xi+\eta\}, \ldots, \{\xi+n\eta\}$ принадлежат отрезку $[a, b]$.

4.13. Утверждение задачи можно вывести из закона больших чисел.

4.14. Применить закон больших чисел.

4.15. Воспользоваться результатом задачи 3.157 и неравенством из задачи 4.1.

4.16. а) Показать, что $M\nu<\infty$.

б) Ввести случайные величины $\nu_n=\chi_1+\ldots+\chi_n$, $n=1, 2, \ldots$, где $\chi_j=1$, если происходит событие A_j, и $\chi_j=0$ в противном случае. Показать, что $P\{\nu\geqslant\nu_n\}=1$, $n=1, 2, \ldots$; вычислить математическое ожидание и дисперсию ν_n и с помощью неравенства Чебышева убедиться в том, что для любого $N<\infty$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\nu_n>N\}=1.$$

4.17. Рассмотреть случайную величину ν_N', совпадающую с ν при $\nu\leqslant N$ и равную 0 при $\nu>N$. Очевидно, $M\nu_N'\leqslant N$. Показать, что предположение «существует такое $N<\infty$, что $P\{\nu>N\}<a-\varepsilon<a$» приводит к противоречию, если вычислять математическое ожидание ν_N' по формуле

$$M\nu_N'=\sum_{n=1}^{\infty} P\{A_n\cap\{\nu\leqslant N\}\}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}(P\{A_n\}-P\{\nu>N\}).$$

4.18. Связать события A_n со значениями одной и той же случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

4.19. Показать, что если ν_ε — число одновременно происходящих событий $\{|\xi_n - \zeta| > \varepsilon\}$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\left\{\lim_{n\to\infty} \xi_n \neq \zeta\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} |\xi_n - \zeta| > \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\nu_{1/k} = \infty\},$$

и применить лемму Бореля — Кантелли (задачу 4.16).

4.20. Показать, что выполняются условия задачи 4.19.

4.21. а) Показать, что

$$\mathsf{P}\{A_n^\varepsilon\} = \frac{1}{n^{1+\varepsilon\lambda}}, \quad \mathsf{P}\{B_n^\varepsilon\} \leqslant \exp\left\{-\frac{n^{\lambda\varepsilon}}{2\lambda\varepsilon}\right\},$$

и применить лемму Бореля — Кантелли (задачу 4.16).

б) Использовать соотношение

$$\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\zeta_n - \frac{1}{\lambda}\right| \geqslant \varepsilon\right\} \subseteq \{\nu_\varepsilon = \infty\} \cup \{\mu_\varepsilon = \infty\}.$$

4.22. Найти $\mathsf{D}\left((\xi_1 + \ldots + \xi_{n^2})/n^2\right)$, применить неравенство Чебышева и результат задачи 4.19.

4.23. Найти $\mathsf{D}\left(\xi_{n^2+1} + \xi_{n^2+2} + \ldots + \xi_k\right)$, использовать оценку

$$\mathsf{P}\{\max\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_M\} > \varepsilon\} \leqslant \sum_{i=1}^{M} \mathsf{P}\{\zeta_i > \varepsilon\},$$

неравенство Чебышева и результат задачи 4.19.

4.24. Вывести усиленный закон больших чисел из результатов задач 4.22 и 4.23.

4.25. а) Применить метод математической индукции (по n).

б) Найти

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_n = k + 1\}}{\mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_n = k\}}.$$

4.26. Воспользоваться результатами задачи 1.53 и равенствами

$$\mathsf{P}\{\tau_1(N) > n\} = \mathsf{P}\{A_{n,N}\}, \quad \mathsf{P}\{\tau_2(N) > n\} = \mathsf{P}\{C_{n,N}\}.$$

При нахождении предельных распределений полезно соотношение

$$\ln(1 - x) = -x + O(x^2), \quad x \to 0.$$

4.27. Представить вероятность $\mathsf{P}\{\eta_n \leqslant x\}$ $(0 < x < 1)$ в виде

$$\mathsf{P}\{\eta_n \leqslant x\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{k/n}^{(k+x)/n} p_\xi(u)\,du;$$

к каждому слагаемому применить теорему о среднем.

4.28. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такой набор $\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ непересекающихся отрезков, что

$$\mathsf{P}\left\{\xi \in \bigcup_{i=1}^{m} \delta_i\right\} \geqslant 1 - \varepsilon$$

и плотность $p_\xi(x)$ на $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \delta_i$ непрерывна и ограничена. Далее воспользоваться решением задачи 4.27.

4.29. Воспользоваться равенством $\operatorname{tg} n\xi = \operatorname{tg}\left(\pi\left\{n\frac{\xi}{\pi}\right\}\right)$ и результатами задач 4.28 и 3.8.

4.30. Используя тригонометрическую форму записи комплексных чисел, показать, что $\zeta_n = \operatorname{tg}(n \operatorname{arctg} \xi)$, и применить результаты задач 4.28 и 3.8.

4.31. Использовать неравенства из задачи 3.228 и определение условной вероятности.

4.32. Использовать равенство $\mathsf{P}\{\varkappa_n \leqslant x\} = F^n(x)$ и асимптотическое соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{c}{n}\right)^n = e^{-c}$.

4.33. а) Воспользоваться справедливыми при любом $\varepsilon > 0$ включениями

$$\{\eta_n \leqslant x - \varepsilon,\ |\xi_n| \leqslant \varepsilon\} \subseteq \{\eta_n + \xi_n \leqslant x,\ |\xi_n| \leqslant \varepsilon\} \subseteq$$
$$\subseteq \{\eta_n \leqslant x + \varepsilon,\ |\xi_n| \leqslant \varepsilon\}$$

и тем, что

$$\mathsf{P}\{A\} - \mathsf{P}\{\overline{B}\} \leqslant \mathsf{P}\{AB\} \leqslant \mathsf{P}\{A\}.$$

б) Доказывается аналогично а).

4.34. Использовать теорему Муавра — Лапласа и п. а) задачи 4.33.

4.35. а) Воспользоваться неравенством

$$\mathsf{P}\{AB\} \leqslant \min\{\mathsf{P}\{A\}, \mathsf{P}\{B\}\},$$

справедливым для любых двух событий A, B.

б) Использовать определение непрерывности функции двух переменных и результат п. а).

4.36. Показать, что при каждом $i = 1, 2$ последовательность $\zeta_i^{(n)} = \left(\xi_i^{(1)} + \ldots + \xi_i^{(n)}\right)/n$ сходится по распределению к a_i, когда $n \to \infty$, и применить результат задачи 4.35. В случае а) сходимость $\zeta_i^{(n)}$ к a_i следует из закона больших чисел (см. введение к гл. 4), в случае б) — из задачи 4.15.

4.37. При вычислении $\mathsf{P}\{\zeta_n < x\}$ воспользоваться соотношением $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(1 - \varepsilon)^{1/\varepsilon} = e^{-1}$.

4.38. Заметить, что τ_k можно представить в виде суммы k независимых случайных величин, распределенных так же, как ξ. Воспользоваться неравенством Чебышева.

4.39. Значение $\mathsf{M}\tau$ вычислялось в задаче 3.202. Чтобы найти распределение τ, заметить, что

$$\frac{\tau}{\mathsf{M}\tau} = \frac{\nu}{\mathsf{M}\nu}\cdot\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_\nu}{\nu}; \qquad (1)$$

используя оценку

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_\nu}{\nu} - a\right| > \varepsilon\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\{\nu < n\} + \sup_{m \geqslant n} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_m}{m} - a\right| > \varepsilon\right\},$$

показать, что второй сомножитель в (1) сходится по вероятности к 1, и воспользоваться п. б) задачи 4.33.

4.40. Заметить, что случайная величина τ_q имеет такое же распределение, как сумма $\xi_1+\ldots\xi_\nu$, в которой $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и ν независимы, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ распределены так же, как ξ, а ν имеет геометрическое распределение с параметром q. Далее при решении п. а) использовать задачу 4.37, а при решении п. б) — задачу 4.39.

4.41. Первая оценка следует из неравенства Чебышева. Для доказательства второй можно ввести индикатор χ_A события A и воспользоваться результатами задач 3.186, 3.138, неравенством Коши — Буняковского и переходом к дополнительному событию.

4.42. Используя задачи 4.41 и 4.39, показать, что нахождение предельного распределения $q\tau_1$ сводится к применению задачи 4.37. Затем с помощью задач 4.33 и 4.41 показать, что предельные распределения $q\tau_1$ и $q\tau_2$ совпадают.

4.43. Убедиться в том, что процесс работы прибора удовлетворяет схеме, описанной в задаче 4.42, и что для искомой случайной величины τ и случайных величин τ_1 и τ_2 из задачи 4.42 справедливо соотношение

$$\mathsf{P}\{\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2\} = 1.$$

4.44. Применить результат задачи 4.43. Использовать аппроксимацию пуассоновского распределения нормальным.

4.45. Использовать определения указанных видов сходимости. При построении примера рассмотреть такие независимые случайные величины ξ_n, что

$$\mathsf{P}\{\xi_n=\xi\}=1-\frac{1}{n}, \quad \mathsf{P}\{|\xi_n-\xi|=n\}=1/n.$$

Вычислить $\mathsf{M}(\xi_n-\xi)^2$ и использовать лемму Бореля — Кантелли (задачу 4.16) для доказательства того, что

$$\mathsf{P}\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\xi_n-\xi|=0\right\}=0.$$

4.46. Если $F(x)$ и $F_n(x)$ — функции распределения ξ и ξ_n ($n=1, 2, \ldots$) соответственно, $F^*(x)$ и $F_n^*(x)$ — обратные функции, а случайная величина ζ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, то последовательность случайных величин $\xi_n' = F_n^*(\zeta)$ сходится к $\xi' = F^*(\zeta)$ с вероятностью 1.

4.47. а) В случае когда ξ_n сходится к ξ по вероятности, воспользоваться равномерной непрерывностью $f(x)$ на любом конечном отрезке и включением

$$\{|f(\xi_n)-f(\xi)|>\varepsilon\} \subseteq \{|\xi| \geqslant T\} \cup \{|\xi|<T, |\xi_n-\xi|>\varepsilon'\},$$

справедливым для любых $\varepsilon>0$, $T<\infty$ при некотором $\varepsilon'=\varepsilon'(\varepsilon, T)$. Случай сходимости с вероятностью 1 рассматривается аналогично, а случай сходимости по распределению сводится к любому из рассмотренных с помощью результатов задач 4.45 и 4.46.

б) Рассуждения проводятся так же, как в п. а), но при построении множества, на котором $f(x)$ равномерно непрерывна, нужно исключить из отрезка $[-T, T]$ окрестности всех точек разрыва $f(x)$.

4.48. Существование величины $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n$ следует из монотонности последовательности ξ_n, а равенство $M\xi = a$ — из интегрального представления $M\xi$ (см. задачу 3.138) и из теоремы о монотонной сходимости (см. введение к гл. 3).

4.49. а) Показать, что если Δ_k $(k \geqslant 2)$ — минимальный по длине отрезок из тех, на которые отрезок $[0, 1]$ разбивается точками $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$, а $|\Delta_k|$ — его длина, то $\Delta_{k+1} \subseteq \Delta_k$ $(k = 2, 3, \ldots)$ и $M|\Delta_k| \to 0$ при $k \to \infty$.

б) Вычислить $M\xi$ и $M\xi^2$, пользуясь тем, что условное распределение ξ при условии $\xi_1 = x$ совпадает с распределением $x\xi$, если $x \leqslant 1/2$, и с распределением $1 - (1 - x)\xi$, если $x \geqslant 1/2$.

4.50. а) Показать, что $P\left\{\lim_{n\to\infty} |\xi_n - \xi_{n-1}| = 0\right\} = 1$, и воспользоваться леммой о вложенных отрезках.

б) Воспользоваться тем, что условное распределение ξ при условии $\xi_1 = x$ совпадает с безусловным распределением $x(1 - \xi)$.

4.51. Показать, что случайные величины α_n, определенные равенствами

$$\frac{g(\xi_n) - g(a_n)}{b_n g'(a_n)} = \frac{\xi_n - a_n}{b_n}(1 + \alpha_n),$$

удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\alpha_n| > \varepsilon\} = 0 \text{ при любом } \varepsilon > 0.$$

Далее воспользоваться задачей 4.33, б).

4.52. См. указания к задаче 4.51. В отличие от задачи 4.51 определить случайные величины α_n равенствами

$$\frac{g(\xi_n) - g(a_n)}{b_n^k g^{(k)}(a_n)} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\xi_n - a_n}{b_n}\right)^k (1 + \alpha_n).$$

4.53. а) Распределение случайной величины $\dfrac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ при $n \to \infty$ сходится к стандартному нормальному распределению.

б) Использовать задачу 4.51 с $\xi_n = \dfrac{\mu_n}{n} - z$, $g_n(x) = x^2$.

4.54. а) Использовать задачу 4.52.

б) Использовать задачу 4.51.

4.55. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_n - a_n'}{b_n'} - \frac{\xi_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right\} = 0,$$

если выполнены условия п. в). При построении примеров, доказывающих, что условия а) и б) не обеспечивают совпадения предельных распределений $\dfrac{\xi_n - a_n}{b_n}$ и $\dfrac{\xi_n - a_n'}{b_n'}$, рассмотреть случайные величины $\xi_n = b_n\xi + a_n$, где случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение, и подобрать соответствующим образом последовательности a_n, b_n, a_n', b_n'.

4.56. а) Рассмотреть случайные величины

$$\xi_n = \chi_n \xi + (1 - \chi_n) Cn, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где χ_1, χ_2, ... — случайные величины, не зависящие от ξ,

$$\mathsf{P}\{\chi_n = 0\} + \mathsf{P}\{\chi_n = 1\} = 1.$$

б) Сравнивая

$$\mathsf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x d\mathsf{P}\{\xi \leqslant x\} \text{ и } \mathsf{M}\xi_n = \int_{-\infty}^{\infty} x d\mathsf{P}\{\xi_n \leqslant x\},$$

показать, что за счет выбора достаточно большого T интегралы

$$\int_{|x| \geqslant T} |x| d\mathsf{P}\{\xi \leqslant x\} \text{ и } \int_{|x| \geqslant T} |x| d\mathsf{P}\{\xi_n \leqslant x\}$$

можно сделать сколь угодно малыми, а разность интегралов по области $\{|x| < T\}$ при $n \to \infty$ стремится к 0.

4.57. а) Рассуждая так же, как в п. б) задачи 4.56, показать, что

$$\lim_{n \to \infty} (M_n - M) = \lim_{T \to \infty} \lim_{n \to \infty} \int_T^{\infty} x^2 d\mathsf{P}\{|\xi_n| \leqslant x\} \geqslant 0.$$

Построение примера, в котором $M_\infty > M$, провести аналогично п. а) задачи 4.56.

б) Случайные величины $\xi_n - \mathsf{M}\xi_n$ и $\xi - \mathsf{M}\xi$ удовлетворяют условиям п. а).

4.59. Случайная величина ξ_n имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p).

4.60. а) Использовать равенство $\mathsf{M}\xi^{[k]} = \varphi^{(k)}(1)$.

б) См. определение производящей функции и ее свойства.

в) Использовать равенство $\int_0^1 z^\alpha dz = \frac{1}{1+\alpha}, \quad \alpha > -1.$

4.62. Показать, что $\theta_k = \tau_1 + \ldots + \tau_k$, где $\tau_1, \ldots, \tau_k$ — независимые случайные величины, распределенные так же, как случайная величина τ_1 в задаче 4.61.

4.63. Сравнивая ряды

$$\mathsf{M}z^\xi = \sum_{n=m}^{\infty} C_{n-1}^{m-1} p^m q^{n-m} z^n \text{ и } \frac{1 - qz}{pz} \mathsf{M}z^\xi,$$

составить рекуррентное уравнение, связывающее производящие функции $\mathsf{M}z^\xi$ при соседних значениях m, и найти его решение.

4.64. Пользуясь результатами задачи 4.63, найти производящие функции распределений ξ_1, ξ_2, ξ_3 и их суммы η.

4.65. а) Воспользоваться формулой полного математического ожидания.

б) Использовать результат п. а).

4.66. Найти $P\{\xi_1 = \xi_2 = 0\}$, $P\{\xi_1 = 0\}$, $P\{\xi_2 = 0\}$.

4.67. Представить $\varphi_\xi(z)$ в виде степенного ряда. Воспользоваться правилами почленного дифференцирования рядов и неотрицательностью коэффициентов ряда для $\varphi_\xi^{(k)}(z)$.

4.68. Сопоставить k-му испытанию вектор $(\varepsilon_{k,1}, \ldots, \varepsilon_{k,N})$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\varepsilon_{k,j} = 1$, если в k-м испытании появился j-й исход, и $\varepsilon_{k,j} = 0$ в противном случае. Воспользоваться равенством

$$(\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,N}) = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_{k,1}, \ldots, \varepsilon_{k,N})$$

и свойствами производящих функций векторных случайных величин.

4.69. Использовать результат задачи 4.68.

4.70. а) Воспользоваться формулой полного математического ожидания и результатом задачи 4.68.

б) Вывести из результата п. а), что компоненты $\xi_{\nu,1}, \ldots, \xi_{\nu,N}$ независимы и $\xi_{\nu,i}$ имеет распределение Пуассона с параметром λp_i.

4.71. Воспользоваться тем, что $\varphi(z)$ — аналитическая функция в круге $\{|z| \leqslant 1\}$, что $\varphi(1) = 1$ и что $\varphi(z)$ разлагается в ряд Тейлора по степеням z с неотрицательными коэффициентами.

4.74. Вычислить характеристическую функцию $\xi_1 + \ldots + \xi_n$.

4.75. Использовать формулу полного математического ожидания и свойства характеристических функций (производящих функций).

4.76. а), б) Представить $\psi(z)$ в виде степенного ряда по z.

в), д) Представить $\psi(z)$ в виде степенного ряда по $\varphi(z)$ и использовать результат задачи 4.75.

г) Выразить $\varphi(z)$ через $\psi(z)$ и использовать результат задачи 4.75.

4.77. Вычислить производящие функции Mz^ξ, Mz^{ξ_i}, $i = 1, \ldots, m$, и заметить, что если выполняются условия задачи, то

$$Mz^\xi = Mz^{\xi_1} \ldots Mz^{\xi_m}.$$

4.78. а) Использовать соотношение

$$\sum_{j=0}^{k-1} e^{\frac{2\pi n j}{k} i} = \begin{cases} k, & \text{если } n \text{ делится на } k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

б) Заметить, что $\{\xi$ при делении на k дает остаток $m\} = \{\xi - m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ k)\}$, и воспользоваться утверждением п. а).

4.79. При каждом $i = 1, 2, \ldots$ заменить ξ_i^2 случайной величиной ζ_i — остатком от деления ξ_i^2 на 3. Найти распределение и характеристическую функцию ζ_i и воспользоваться задачей 4.78.

4.80. Использовать независимость $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

4.81. Представить $Me^{\pm\lambda\xi}$ в виде интеграла и оценить его снизу, пользуясь положительностью и монотонностью показательной функции.

4.82. Использовать задачи 4.80 и 4.81.

4.83. Использовать задачи 4.80 и 4.81.

4.84. Применить формулу полного математического ожидания.

4.85. Воспользоваться неравенством

$$|Me^{it\xi} - Me^{it_0\xi}| \leqslant M|e^{it\xi} - e^{it_0\xi}| \leqslant$$
$$\leqslant T|t - t_0| P\{|\xi| < T\} + 2P\{|\xi| \geqslant T\}.$$

4.86. Представить $f(t)$ в виде суммы действительной и мнимой частей. Воспользоваться условиями задачи и четностью функции $\cos x$.

4.87. б) Показать, что $p_\alpha(x)$ — это плотность распределения суммы двух независимых случайных величин, одна из которых имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1/\alpha]$, а другая — равномерное распределение на отрезке $[-1/\alpha, 0]$.

в) Использовать формулу обращения для преобразования Фурье (см. введение к гл. 4) и результат п. б).

4.88. Для доказательства тождества сравнить подынтегральное выражение с плотностью соответствующего нормального распределения. Так как распределение η симметрично, то $M\eta = 0$, если только $M|\eta| < \infty$. Для вычисления $D\eta = M\eta^2$ продифференцировать обе части интегрального тождества по h.

4.89. Показать, что описанная в условии задачи функция $f(t)$ может быть представлена в виде

$$f(t) = p_0 + \sum_{i=1}^{k} p_i \max\{1 - a_i|t|, 0\},$$

где k — число звеньев ломаной (графика функции $f(t)$ на полуоси $(0, \infty)$), числа $a_1, \ldots, a_k, p_1, \ldots, p_k$ положительны, $p_0 \geqslant 0$ и $p_0 + p_1 + \ldots + p_k = 1$. Далее воспользоваться результатами задач 4.84 и 4.87.

4.90. Рассмотреть последовательность $f_1(t), f_2(t), \ldots,$ характеристических функций, удовлетворяющих условиям задачи 4.89 и таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ для любого t, $|t| < \infty$. Затем воспользоваться теоремой непрерывности для характеристических функций (см. введение к гл. 4).

4.91. а) Разложить $f_1(t)$ в ряд Фурье и убедиться в том, что коэффициенты этого разложения определяют распределение вероятностей.

б) Заметить, что $f_2(t) = \dfrac{1 + f_1(2t)}{2}$, и получить разложение $f_2(t)$ в ряд Фурье с помощью результата п. а).

4.92. Использовать результат задачи 4.91.

4.93. Заметить, что функции $f(t) = Me^{it\xi_1}$ и $g(t) = Me^{it(\xi_1 + \ldots + \xi_k)}$ связаны соотношением $f^k(t) = g(t)$ и что согласно задаче 4.85 функции $g(t)$ и $f(t)$ непрерывны.

4.94. Показать, что $Me^{it\xi} = 1$ тогда и только тогда, когда $P\{t\xi \in \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots\}\} = 1$.

4.95. Показать, что если ξ имеет плотность $p(x)$, указанную в условии задачи, то

$$1 - f(t) = 2\int_0^{\infty} (1 - \cos tx)\, p(x)\, dx = o(|t|) \quad \text{при} \quad t \to 0,$$

и поэтому $f'(0) = 0$. Для оценки интеграла разбить его на два: от 0 до T и от T до ∞; использовать неравенства $1 - \cos y \leqslant y^2/2$ и асимптотическую формулу для $p(x)$, $x \to \infty$.

4.96. Использовать равенство

$$f''(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} (f(x-t) - 2f(x) + f(x+t))$$

и следующее из него соотношение $f''(0) = \lim\limits_{t\to 0} \mathsf{M}\xi^2 \dfrac{\cos t\xi - 1}{(t\xi)^2/2}$.

4.97. Воспользоваться результатом задачи 4.96 и оценкой $(\mathsf{M}|\xi|)^2 \leqslant \mathsf{M}\xi^2$.

4.98. Использовать результаты задач 4.86, 4.94, 4.97.

4.99. Найти начальные члены разложений указанных функций в ряды Тейлора.

4.100. а) При вычислении функции распределения χ_2^2 перейти в интеграле к полярным координатам.

б) Воспользоваться результатом п. а) и задачей 4.93 для вычисления $\mathsf{M}e^{it\xi_1^2}$.

4.101. Найти сначала характеристическую функцию гамма-распределения с параметром $\alpha = 1$, затем (пользуясь задачей 4.93) с $\alpha = 1/q$, $q = 1, 2, \ldots$, затем с $\alpha = p/q$ $(p, q = 1, 2, \ldots)$ и, наконец, с помощью теоремы непрерывности — для произвольного $\alpha > 0$.

4.102. Найти характеристическую функцию

$$\mathsf{M}e^{it\zeta} = \mathsf{M}e^{i(tc_1\xi_1 + \ldots + tc_k\xi_k)}.$$

4.103. Найти характеристическую функцию распределения вектора $(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$.

4.104. Воспользоваться теоремой из курса линейной алгебры о приведении симметричной квадратичной формы к диагональному виду с помощью ортогональной замены координат.

4.105. Используя формулу Тейлора для $\ln(1-x)$, найти предел логарифма производящей функции $\xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)}$ при $n \to \infty$.

4.106. Рассмотреть случайную величину ζ, имеющую равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, и построить такие функции $f_p(x)$, $g_p(x)$, $x \in [0, 1]$, что случайная величина $f_p(\zeta)$ распределена так же, как ξ, $g_p(\zeta)$ — так же, как η, и при $k = 0, 1, \ldots$

$$\mathsf{P}\{f_p(\zeta) = g_p(\zeta) = k\} = \min\{\mathsf{P}\{\xi = k\}, \mathsf{P}\{\eta = k\}\}.$$

4.107. Тем же способом, что в задаче 4.106, построить по независимым случайным величинам $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, имеющим равномерное распределение на $[0, 1]$, случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и максимально совпадающие с ними независимые случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_n$, имеющие распределения Пуассона с параметрами $p_1, \ldots$ $\ldots, p_n$ соответственно. Далее воспользоваться соотношением

$$\{\xi_1 + \ldots + \xi_n \neq \eta_1 + \ldots + \eta_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{\xi_i \neq \eta_i\}$$

и свойствами распределения Пуассона (см. также книгу [2]).

4.108. Рассматривая непересекающиеся события вида $A_{i_1} \dots$ $\dots A_{i_q} \overline{A}_{j_1} \dots \overline{A}_{j_{N-q}}$, где $\{i_1, \dots, i_q\} \cup \{j_1, \dots, j_{N-q}\} = \{1, \dots, N\}$ и $\overline{A}$ — событие, дополнительное к A, показать, что

$$S_k = \sum_{q=k}^{N} C_q^k \mathsf{P}\{B_q\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Подставить эти выражения в правую часть равенства, указанного в условии задачи, и привести подобные члены, изменяя порядок суммирования.

4.109. Разложить производящую функцию $\varphi(z) = \mathsf{M}z^{\xi}$ по формуле Тейлора (с остаточным членом в форме Лагранжа) в точке $z = 1$ и заметить, что $\varphi(0) = \mathsf{P}\{\xi = 0\}$, $\varphi^{(k)}(1) = m_k$ и $\varphi^{(k)}(z) \geqslant 0$ для любых $z \in [0, 1]$ и $k = 0, 1, 2, \dots$

4.110. Заметить, что если $\varphi(z) = \mathsf{M}z^{\xi}$, то $\varphi^{(n)}(z) = \mathsf{M}\xi^{[n]}z^{\xi-n}$, т. е. $\varphi^{(n)}(0) = n!\mathsf{P}\{\xi = n\}$. Далее рассуждать так же, как в задаче 4.109.

4.111. Если $\varphi(z) = \mathsf{M}z^{\xi}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\xi \geqslant n\} z^{n-1} = \frac{1 - \varphi(z)}{1 - z}.$$

Далее рассуждения аналогичны проведенным в задачах 4.109 и 4.110. Равенство

$$\left.\frac{d^k}{dz^k} \frac{1 - \varphi(z)}{1 - z}\right|_{z=1} = \frac{\varphi^{(k+1)}(1)}{k+1}$$

установить, используя формулы Лейбница и Тейлора.

4.112. Воспользоваться неравенством из задачи 4.110.

4.113. Применить утверждение задачи 4.112, выбрав в качестве ξ случайную величину, имеющую распределение Пуассона с параметром λ.

4.114. Представить случайную величину $\mu_i(n, N, s)$ в виде суммы индикаторов

$$\mu_i(n, N, s) = \chi_i^{(1)} + \chi_i^{(2)} + \dots + \chi_i^{(N)}$$

и воспользоваться формулой задачи 3.134 для факториальных моментов. Исследовать функцию $f_i(n) = \mathsf{M}\mu_i(n, N, s)$, рассматривая отношение $f_i(n+1)/f_i(n)$.

4.115. Использовать задачу 4.108.

4.116. Вывести из результатов решения задачи 4.114, что при указанном предельном переходе выполняется соотношение $\min\{n, N - n\} = o(N)$. Далее использовать явные формулы для факториальных моментов $\mu_i(n, N, s)$ и задачу 4.113.

4.117. Представить $\mu_r(n, N)$ в виде $\mu_r(n, N) = \chi_1 + \dots + \chi_N$, где $\chi_i = 1$, если i-я ячейка содержит ровно r частиц, и $\chi_i = 0$ в противном случае. Вычислить факториальные моменты $\mu_r(n, N)$, используя результат задачи 3.134, и применить утверждение задачи 4.113.

4.118. Так как

$$\{\mu_r(n, N) + \mu_{r+1}(n, N) + \dots = 0\} = \{\nu_r(N) > n\} \subseteq \{\mu_r(n, N) = 0\},$$

то при условиях

$$\mathsf{P}\{\mu_r(n, N) = 0\} \to C, \quad \mathsf{P}\left\{\sum_{k=r+1}^{\infty} \mu_k(n, N) = 0\right\} \to 1 \qquad (1)$$

выполняется соотношение $\mathsf{P}\{\nu_r(N) > n\} \to C$. Значение C и связь между значениями n и N, при которой выполняются условия (1), найти с помощью задачи 4.113.

4.119. Если $\mu_0^{(1)}(n, N)$ — число строк, в которые не попало ни одной частицы, а $\mu_0^{(2)}(n, N)$ — число таких же столбцов, то случайные величины $\mu_0^{(1)}(n, N)$ и $\mu_0^{(2)}(n, N)$ независимы и их предельные распределения можно найти с помощью результата задачи **4.117**, а $\varkappa(n, N) = \mu_0^{(1)}(n, N)\,\mu_0^{(2)}(n, N)$.

4.121. Применить центральную предельную теорему.

4.122. При любом $k = 1, 2, \ldots$

$$\mathsf{M}\eta_n^k = \left(\frac{z^{k\sqrt{n}} + z^{-k\sqrt{n}}}{2}\right)^n.$$

Использовать соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c$.

б) Случайная величина $\ln \eta_n$ является нормированной суммой независимых слагаемых.

4.123. а) Воспользоваться задачей 4.122.

б) Заметить, что

$$\mathsf{P}\{\eta_{1000} < 1\} = \sum_{k=0}^{499} \frac{1}{2^{1000}} C_{1000}^k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{1000}}\,C_{1000}^{500}.$$

4.124. См. указания к задаче 4.123.

4.125. Применить закон больших чисел и центральную предельную теорему.

4.126. Так как сфера S^{n-1} переходит в себя при любой перенумерации координат и при отражениях относительно координатных гиперплоскостей, то величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ одинаково распределены и при любых $i \neq j$ вектор (ξ_i, ξ_j) имеет такое же распределение, как $(\xi_i, -\xi_j)$. Для вычисления $\mathsf{M}\xi_i^2$ нужно использовать еще аддитивность математического ожидания и уравнение сферы.

4.127. Из сферической симметричности распределения вектора ξ следует, что условное распределение вектора $\varepsilon = \xi/|\xi|$ при условии $\rho = r$ является равномерным на единичной сфере, т. е. не зависит от r.

4.128. Ввести случайную величину ρ_n, которая не зависит от вектора ε и такова, что ρ_n^2 имеет χ^2-распределение с n степенями свободы, $\mathsf{M}\rho_n^2 = n$, $\mathsf{D}\rho_n^2 = 2n$. В силу задачи **4.127** случайный вектор $\rho_n\varepsilon$ имеет n-мерное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и единичной матрицей ковариаций. Предельные распределения случайных векторов $(\varepsilon_1\rho_n, \ldots, \varepsilon_k\rho_n)$ и $(\varepsilon_1\sqrt{n}, \ldots, \varepsilon_k\sqrt{n})$ при $k = \text{const}$, $n \to \infty$ совпадают в силу того, что

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\rho_n}{\sqrt{n}}-1\right|>\delta\right\}\leqslant\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\rho_n^2}{n}-1\right|>\delta\right\}\leqslant\frac{2}{n\delta^2}$$

для любого $\delta>0$ (см. задачу 4.33, б).

4.129. Использовать результаты п. а) задачи 4.125 и п. б) задачи 4.33.

4.130. Ввести случайные величины $\varepsilon_{j,i}$ $(1\leqslant i\leqslant N,\ j=1,2,\ldots)$: $\varepsilon_{j,i}=1$, если в j-м испытании появился i-й исход, и $\varepsilon_{j,i}=0$ в противном случае. Тогда $\eta_n=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\varepsilon_{j,i}\right)$. Далее воспользоваться независимостью внутренних сумм и центральной предельной теоремой.

4.132. Найти предел логарифма характеристической функции $(\xi_\lambda-\lambda)/\sqrt{\lambda}$.

4.133. Представить $S_n^{(1)}$ в виде суммы n независимых одинаково распределенных случайных величин и воспользоваться центральной предельной теоремой.

4.134. Используя независимость $\zeta_{n,1},\ldots,\zeta_{n,n}$, равенство

$$e^{it}=1+it-\frac{t^2}{2}+\frac{\theta|t|^3}{6},\qquad|\theta|\leqslant1,$$

и оценку $\mathsf{M}|\zeta|^3\geqslant(\mathsf{D}\zeta)^{3/2}$ (из которой следует, что $\frac{1}{s_n^2}\max\limits_{1<k<n}\mathsf{D}\zeta_{n,k}\to0$, $n\to\infty$), показать, что для любого t, $|t|<\infty$,

$$\mathsf{M}e^{it\xi_n/s_n}\to e^{-t^2/2},\quad n\to\infty.$$

4.135. Воспользоваться утверждением задачи 4.134.

4.136. Воспользоваться утверждением задачи 4.134.

4.137. Для нахождения предельного при $n\to\infty$ распределения случайной величины η_n использовать метод производящих функций.

4.138. б) Использовать задачу 4.134.

в) Представить ζ_n в виде $\zeta_n=\zeta_n^{(0)}-\zeta_n^{(1)}$, где

$$\zeta_n^{(0)}=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ p_i^{(n)}\leqslant1/2}}\xi_i^{(n)},\qquad\zeta_n^{(1)}=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ p_i^{(n)}>1/2}}\left(1-\xi_i^{(n)}\right).$$

Предельные распределения $\zeta_n^{(0)}$ и $\zeta_n^{(1)}$ найти с помощью задачи 4.105.

4.139. Характеристическая функция случайной величины ξ_n/A_n при $n\to\infty$ должна сходиться к характеристической функции предельного распределения.

4.140. а) Воспользоваться равенством

$$\{N_t<k\}=\{\xi_1+\ldots+\xi_k>t\}$$

и законом больших чисел.

б) В отличие от п. а) воспользоваться центральной предельной теоремой.

4.141. Используя утверждение задачи 3.64, представить $\xi_{(m)}$ в виде суммы m независимых случайных величин. Для доказательства асимптотической нормальности случайной величины $(\xi_{(m)} - \mathsf{M}\xi_{(m)})/\sqrt{\mathsf{D}\xi_{(m)}}$ показать, что выполняются условия задачи 4.134 (при этом удобно применить результаты задачи 4.74). Второе утверждение п. б) вывести из результата п. а) и задачи 4.55.

4.142. Заметить, что если $F_{-1}(y)$ — функция, обратная к $F(x)$, то, согласно задаче 3.13, распределения $\zeta_{(m)}$ и $F_{-1}(1-\exp\{-\alpha\xi_{(m)}\})$ совпадают (здесь $\xi_{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(m)}$ — те же случайные величины, что в задаче 4.141). Далее воспользоваться утверждениями п. б) задачи 4.141 и задачи 4.51.

4.143. а) Вычислив $\mathsf{P}\{\tau_m > n | \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{m-1}\}$, показать, что τ_m не зависит от $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{m-1}$. Для нахождения $\mathsf{P}\{\tau_m > \nu_k - \nu_l\}$ воспользоваться формулой полной вероятности по значениям $\nu_k - \nu_l$ и равенством $\nu_k = \tau_1 + \ldots + \tau_k$.

б) Из точной формулы для $\mathsf{P}\{\tau_m > \nu_{m-1} - \nu_{m-r}\}$ получить двусторонние неравенства, воспользовавшись оценкой

$$\frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1-x}{1-xy} \leqslant \frac{1}{1+y}, \qquad 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1.$$

4.144. Используя результаты задачи 4.143, найти предел логарифма производящей функции $\nu_k - k$.

4.145. Для нахождения предельного распределения использовать утверждение задачи 4.134, а для вычисления моментов — полученные в решении задачи 4.143 равенства $\nu_m = \tau_1 + \ldots + \tau_m$ (где $\tau_1, \ldots, \tau_m$ — независимые случайные величины) и формулу для производящей функции τ_k.

4.146. Показать, что $z_1, \ldots, z_N \leqslant 0$. Отсюда и из равенства $\varphi(1) = 1$ вывести, что

$$\varphi(z) = \prod_{i=1}^{N} (1 - p_i + p_i z), \quad \text{где} \quad p_i = 1/(1 - z_i).$$

4.147. Многочлен $\varphi(z)$, удовлетворяющий условиям задачи, можно представить в виде произведения $N - M$ квадратных трехчленов и $2M - N$ линейных двучленов, причем коэффициенты всех сомножителей неотрицательны, а при $z = 1$ каждый из них принимает значение 1.

4.148. Использовать задачи 4.146 и 4.134.

4.149. Использовать задачи 4.146 и 4.105.

4.150. Для составления рекуррентного уравнения использовать формулу полной вероятности, связывающую распределения $\mu_0(n, N)$ и $\mu_0(n+1, N)$. Показать, что если $z_{n, N-1} \leqslant z_{n, N-2} \leqslant \ldots \ldots \leqslant z_{n, 1} \leqslant 0$ — корни уравнения $f_{n, N}(z) = 0$, то $z_{n+1, N-1} \leqslant \leqslant z_{n, N-1} \leqslant z_{n+1, N-2} \leqslant z_{n, N-2} \leqslant \ldots \leqslant z_{n+1, 1} \leqslant z_{n, 1} \leqslant 0$ и $z_{n, i+1} < < z_{n+1, i} < z_{n, i}$, если только $z_{n, i+1} < z_{n, i}$.

4.151. Воспользоваться задачами 4.148 и 4.150.

4.153. Пользуясь симметричностью распределения ξ, представить $1 - \mathsf{M}e^{it\xi}$ в виде интеграла от 0 до ∞. Чтобы исследовать асимптотическое поведение $1 - \mathsf{M}e^{it\xi}$ при $t \to 0$, разбить этот интеграл на два: от 0 до $T = T(t)$ и от T до ∞ — и оценить первый интеграл по модулю, а при исследовании второго использовать асимптотическую формулу для $p(x)$ при $x \to \infty$.

4.154. а) Получить явную формулу для $\varphi(s)$ и разложить $\varphi(s)$ в ряд Маклорена. При нахождении асимптотики $1 - f(t)$ при $t \to 0$ проследить за изменением $\arg(1 - \varphi(z))$, когда $z = 1 - te^{ix}$, $-\pi \leqslant \leqslant x \leqslant \pi$, $t \to 0$.

б) Воспользоваться справедливым для любого комплексного числа c соотношением $(1 - cn^{-1})^n \to e^{-c}$, $n \to \infty$, и теоремой непрерывности для характеристических функций.

4.155. Используя формулу обращения для характеристических функций, приведенную во введении к гл. 4, показать, что распределение с характеристической функцией $e^{-a|t|}$ имеет плотность $p(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + x^2}$.

4.156. Показать, что плотность распределения случайной величины $1/\xi_1$ удовлетворяет условиям задачи 4.153 с $\alpha = 2$ и $C = = \pi p(0)$. Использовать задачи 4.152, 4.155 и теорему непрерывности для характеристических функций.

4.157. Воспользоваться свойствами характеристических функций и тем, что $\xi_1 + \xi_3 = 2\xi_1$.

4.158. Заметить, что $I_{a,b}(x)$ лишь постоянным множителем отличается от плотности суммы двух независимых случайных величин, имеющих распределения Коши с параметрами a и b. Рассматривая характеристические функции, показать, что эта сумма сама имеет распределение Коши.

Глава 5

5.2. а) Показать, что $\mathsf{D}\zeta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

б) Представить ζ_n в виде линейной комбинации случайных величин $\xi_{1-k}, \xi_{2-k}, \ldots, \xi_n$ и воспользоваться усиленным законом больших чисел.

5.3. а) Вычислить $\mathsf{M}\zeta_n^{(s)}$ и показать, что $\mathsf{D}\zeta_n^{(s)} \to 0$ при $n \to \infty$.

б) Представить $\zeta_n^{(s)}$ в виде квадратичной формы от ξ_{1-k}, $\xi_{2-k}, \ldots, \xi_{n+s}$ и разбить эту форму на сумму конечного числа сумм независимых слагаемых. Далее воспользоваться усиленным законом больших чисел.

5.4. При вычислении ковариации ξ_t и ξ_s использовать равенство $2\sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$.

5.5. Показать, что если $t + \pi n_1 = 2k_1\pi + \alpha_1(t)$, $\pi(t + \eta_2) = = 2k_2\pi + \alpha_2(t)$, где числа k_1 и k_2 целые, а $\alpha_1(t), \alpha_2(t) \in [0, 2\pi)$, то $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ независимы и имеют равномерное распределение в отрезке $[0, 2\pi]$, и $\xi_t = \sin\alpha_1(t) + \sin\alpha_2(t)$. См. также указание к задаче 5.4.

5.6. Так как число π иррационально, то $\eta = |\zeta_1| + |\zeta_2|$.

5.7. а) Воспользоваться центральной предельной теоремой.

б) Представить $\eta_n(t)$ в виде

$$\eta_n(t) = \operatorname{Re}\left\{e^{it}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^{i\beta_k}\right\}.$$

Применить многомерную центральную предельную теорему к сумме

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos\beta_k,\ \alpha_k\sin\beta_k).$$

5.8. Обосновать возможность перестановки знаков интеграла и математического ожидания.

5.9. Если траектория процесса ξ_t монотонно возрастает, то $\{\tau_N \leqslant x\} = \{\xi_x \leqslant N\}$.

5.10. Для вычисления $M\tau_t$ использовать формулу из задачи 3.132. Доказать, что число строго возрастающих последовательностей $x_0, \ldots, x_m$, составленных из чисел $1, \ldots, d$, равно C_d^{m+1}, а число таких же неубывающих последовательностей равно C_{m+d-1}^{d-1}. В случае в) использовать указание к задаче 3.62.

5.11. Найти сначала функцию распределения $\tau = -\eta/\xi$, пользуясь сферической симметричностью распределения вектора (ξ, η).

5.12. Представить μ_k в виде $\mu_k = \eta_0 + \eta_1 + \ldots + \eta_{k-1}$, где $\eta_j = 1$, если на полуинтервале $[j, j+1)$ имеется нуль процесса ξ_t, и $\eta_j = 0$ в противном случае. При вычислении

$$\mathsf{P}\{\eta_j = 0\} = \mathsf{P}\{|\zeta_{j+1}| > |\zeta_1 + \ldots + \zeta_j|,\ \zeta_{j+1}(\zeta_1 + \ldots + \zeta_j) \leqslant 0\}$$

воспользоваться задачей 3.266.

5.13. Применить задачу 3.17 и формулу полной вероятности

$$\mathsf{P}\{\xi_n(x) = a\} = \mathsf{MP}\{\xi_n(x) = a \mid \zeta_1, \ldots, \zeta_n\}.$$

5.14. Многочлен $\xi_n(x)$ имеет кратные действительные корни тогда и только тогда, когда существует такое число u, что

$$\frac{d}{dx}\left(\zeta_1 x + \zeta_2 x^2 + \ldots + \zeta_n x^n\right)\Big|_{x=u} = 0, \tag{1}$$

$$\zeta_0 = -(\zeta_1 u + \zeta_2 u^2 + \ldots + \zeta_n u^n). \tag{2}$$

При условии (1) число значений правой части (2) не превышает $n - 1$. Далее воспользоваться формулой полной вероятности по значениям $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ (см. указания к задаче 5.13).

5.16. Найти характеристическую функцию распределения вектора

$$(\xi_n(x_1), \ldots, \xi_n(x_k)) = \sum_{m=0}^{n} \left(x_1^m, \ldots, x_k^m\right)\zeta_m.$$

5.17. Кроме задач, указанных в условии, воспользоваться асимптотической формулой

$$\arcsin\sqrt{1-y^2} = \frac{\pi}{2} - y\,(1 + o(1)), \quad y \downarrow 0.$$

5.18. Случайные величины $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены. При выводе уравнения для $\varphi_1(s)$ воспользоваться тем, что случайные величины τ_1 и $1 + \tau_{1+\xi_1}$ одинаково распределены (здесь $\tau_0 \equiv 0$).

5.19. а) Используя указания к задаче 5.18, доказать, что $\mathsf{P}\{\mu < -k \mid \mu \leqslant -k\} = \varphi_1(1)$.

б) Из условия $\varphi_1(0) = 0$, непрерывности $\varphi_1(s)$ и уравнения $sf(\varphi_1(s)) = 1$ вывести, что

$$\varphi_1(s) = \inf\left\{x > 0:\ f(x) \leqslant \frac{1}{s}\right\},$$

т. е. что $\varphi_1(1) < 1$ тогда и только тогда, когда уравнение $f(s) = 1$ имеет корень s, $0 < s < 1$.

5.20. а) Использовать формулу Стирлинга (1.6) из введения к гл. 1.

б) Заметить, что $\mathsf{M}\{|\rho_{n+1}|\,|\rho_n = k\} = |k|$ при $k \neq 0$ и $\mathsf{M}\{|\rho_{n+1}|\,|\rho_n = 0\} = 1$, и составить рекуррентное уравнение для $\mathsf{M}|\rho_n|$, используя формулу полного математического ожидания.

5.21. Составить рекуррентное уравнение для $\mathsf{M}|\rho_n|^2$, используя равенство

$$|\rho_{n+1}|^2 = (\rho_n + \xi_{n+1}, \rho_n + \xi_{n+1}) = |\rho_n|^2 + |\xi_{n+1}|^2 + 2(\rho_n, \xi_{n+1}).$$

5.22. См. указания к задаче 5.21. При выводе рекуррентной формулы для $\mathsf{M}|\rho_n|^4$ использовать соотношения

$$\mathsf{P}\{|\xi_k| = 1\} = 1, \quad \mathsf{M}(\rho_n, \xi_{n+1}) = 0,$$
$$\mathsf{M}(\rho_n, \xi_{n+1})^2 = \mathsf{M}|\rho_n|^2\mathsf{M}\xi_{n+1,1}^2$$

и $\mathsf{M}\xi_{k,1}^2 = \dfrac{1}{d}$ (см. задачу 4.126).

5.23. Использовать результаты задачи 5.22, неравенство Чебышева и лемму Бореля — Кантелли (задачу 4.16).

5.24. а) Использовать лемму Бореля — Кантелли (п. а задачи 4.16) и формулу Стирлинга.

б) Убедиться в том, что п. б) задачи 4.16 неприменим. Вычислить $\mathsf{M}\nu$ двумя способами: вводя индикаторы событий $\{\rho_n = 0\}$ и вводя вспомогательные случайные величины

$$\tau_1 = \min\{n \geqslant 1\colon \rho_n = 0\}, \quad \tau_{k+1} = \min\{n > \tau_k;\ \rho_n = 0\},$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

(которые удовлетворяют условиям $\{\nu \geqslant k\} = \{\tau_k < \infty\}$.

5.25. Заметить, что компоненты $\rho_{n,1}, \ldots, \rho_{n,s}$ вектора ρ_n являются независимыми реализациями величин, рассматривавшихся в п. б) задачи 5.24. При $s \geqslant 3$ использовать лемму Бореля — Кантелли, при $s = 2$ рассуждать так же, как в п. б) задачи 5.24.

5.26. Случайные величины ξ_i и $\chi\{\nu < i\}$ независимы. Обосновать законность перестановки знаков суммирования и математического ожидания.

5.28. Применить тождество Вальда (задачу 5.26). Для доказательства того, что $\mathsf{M}N_t < \infty$, использовать задачу 4.83 и соотношение

$$\mathsf{M}N_t = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\{N_t > n\} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\rho_n < t\}.$$

5.29. Использовать метод математической индукции (по k) и формулу полного математического ожидания (по значениям ρ_{n+1}).

5.30. Ввести случайную величину

$$\tau_n = \begin{cases} n+1, & \text{если } \max\{\rho_1, \ldots, \rho_n\} < \delta, \\ \min\{j \geqslant 1\colon \rho_j \geqslant \delta\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Используя задачу 5.29, оценить снизу

$$\mathsf{M}Y_n = \sum_{k=1}^{n+1} \mathsf{P}\{\tau_n = k\}\,\mathsf{M}\{Y_n \mid \tau_n = k\}.$$

5.31. Использовать задачу 5.30. Для доказательства неравенства

$$\mathsf{M}\{|\xi_1+\ldots+\xi_{n+1}|\ |\xi_1,\ldots,\xi_n\}\geqslant|\xi_1+\ldots+\xi_n|$$

использовать задачу 3.152.

5.32. Воспользоваться задачей 5.30, равенством

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1<k<n}|\xi_1+\ldots+\xi_k|\geqslant\delta\right\}=\mathsf{P}\left\{\max_{1<k<n}(\xi_1+\ldots+\xi_k)^2\geqslant\delta^2\right\}$$

и указаниями к задаче 5.31.

5.33. Использовать равенство $\xi_{t+s}=\xi_t+(\xi_{t+s}-\xi_t)$ и независимость случайных величин ξ_t и $\xi_{t+s}-\xi_t$ $(s>0)$.

5.34. Воспользоваться равенством $\{\tau_k\leqslant T\}=\{\xi_T\geqslant k\}$, задачей 3.132 и свойствами пуассоновского процесса.

5.35. Случайные величины $\Delta_1=\tau_1$, $\Delta_2=\tau_2-\tau_1$, $\Delta_3=\tau_3-\tau_2,\ldots$ независимы и одинаково распределены:

$$\mathsf{P}\{\Delta_k\leqslant x\}=1-e^{-\lambda x}\qquad(x\geqslant 0,\ k=1,2,\ldots).$$

Воспользоваться формулой для плотности гамма-распределения.

5.36. См. указания к задаче 5.35. В случае в) воспользоваться тем, что $\{\tau_1<T<\tau_2\}=\{\xi_T=1\}$, где ξ_t — пуассоновский процесс с интенсивностью λ.

5.37. См. указания к задаче 5.35 и задачу 3.63.

5.38. Используя обозначения из задачи 5.34, ввести индикаторы

$$\eta_k=\begin{cases}1, & \text{если}\quad \tau_k\leqslant T\quad\text{и}\quad\tau_{k+1}-\tau_k>\Delta,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

При вычислении $\mathsf{M}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\eta_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\eta_k=1\}$ заметить, что случайные величины τ_k и $\tau_{k+1}-\tau_k$ независимы.

5.39. См. указания к задаче 5.38.

5.43. Величина ξ_t равна числу требований, которые поступили в систему на $(-\infty, t]$ и не покинули ее к моменту t. Использовать конструкцию, описанную в задаче 5.42, и свойства пуассоновского потока.

5.44. См. указания к задаче 5.43.

5.45. б) Величина $\mathsf{P}\{\rho_n>x\}$ равна вероятности того, что в круге радиуса x имеется не более $n-1$ точек пуассоновского поля.

5.46. См. указания к задаче 5.45.

5.47. а) Случайная величина δ_n есть сумма двух независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

б) В случае $k=1$ воспользоваться равенством

$$p_1(x_1, x_2)=\int_0^1 p_1(x_1, x_2\,|\,u)\,du,$$

где $p_1(x_1, x_2|u)$ — плотность условного совместного распределения δ_n и δ_{n+1} при условии, что $\tau_{n+1}=n+u$:

$$p_1(x_1, x_2\,|\,u)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad u\leqslant x_1\leqslant u+1,\quad 1-u\leqslant x_2\leqslant 2-u,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

в) Найти вероятность дополнительного события.

г) События $\{\tau_1 \leqslant \xi_1\}$ и $\{\tau_2 > \xi_2\}$ независимы.

д) При вычислении $M\varkappa$ и $M\varkappa^2$ воспользоваться равенством

$$\varkappa = \chi\{\tau_1 \geqslant \xi\}(\tau_1 - \xi) + \chi\{\tau_1 < \xi\}(\tau_2 - \xi),$$

а при нахождении плотности $q(x)$ — равенством $q(x) = Mq(x|\xi)$, где $q(x|u)$ — плотность условного распределения $\varkappa$ при условии, что $\xi = u$:

$$q(x \mid u) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1 - u, \\ u, & \text{если } 1 - u < x \leqslant 2 - u, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

5.48. Воспользоваться определением пуассоновского потока и указаниями к задаче 5.47.

5.53. а) Найти $p_1 = P\{\eta_3 = 1 | \eta_2 = -1\}$, $p_2 = P\{\eta_3 = 1 | \eta_1 = 1, \eta_2 = -1\}$.

5.54. Вычислить $P\{\mu_0(n+1) = l | \mu_0(n) = k\}$, $k, l = 0, 1, \ldots, N$, и

$$P\{\mu_0(n+1) = l | \mu_0(n) = k, \mu_0(n-1) = k_1, \ldots, \mu_0(0) = k_n\}$$

при любых допустимых значениях $k, k_1, \ldots, k_n, l$.

5.55. См. указания к задаче 5.54.

5.56. б) Убедиться в том, что цепь Маркова ξ_n удовлетворяет условиям теоремы, сформулированной во введении к гл. 5. Проверить, что биномиальное распределение с параметрами (N, q) является стационарным.

5.57. а) Для вычисления p_{ij} воспользоваться тем, что при условии $\xi_n = i$ все C_N^i вариантов окраски шаров с номерами $n+1, \ldots, n+N$ равновероятны. Сравнить $P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0 | \xi_0 = 0\}$ и $p_{01}p_{10}$.

б) Распределение ξ_n не зависит от n.

5.59. Показать, что матрица $\|p_{ij}\|_{i,j=1}^3$ — дважды стохастическая (см. задачу 5.58).

5.60. Показать, что при фиксированном значении ξ_t распределение ξ_{t+1} не зависит от $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{t-1}$.

5.61. Построить кусочно постоянные функции $g(y)$ и $f(x, y)$ так, чтобы при любых $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ мера множества тех значений y, при которых $g(y) = j$ $(f(i, y) = j)$, была равна $p_j^{(0)}$ (p_{ij}).

5.62. За состояние принять число очков на той грани, на которой лежит кость. (Сумма очков на противоположных гранях равна 7.) Выписать матрицу вероятностей перехода, применить теорему о финальных вероятностях.

5.64. Заметить, что $p_{j,n+1} = \alpha/n$ для любого $j = 1, \ldots, n$ и что поэтому распределение τ_n совпадает с распределением $\tau_n' = \min\{t \geqslant 1: \zeta_t = 1\}$, где $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — последовательность Бернулли:

$$P\{\zeta_t = 1\} = \frac{\alpha}{n}, \quad P\{\zeta_t = 0\} = 1 - \frac{\alpha}{n}, \qquad t = 1, 2, \ldots$$

Воспользоваться задачей 4.37.

5.65. а) Использовать соотношения $P\{\tau_1(0) < \infty\} = 1$ и $P\{\tau_1(\varepsilon) = t\} \geqslant P\{\xi_1^{(\varepsilon)} = \ldots = \xi_{t-1}^{(\varepsilon)} = 2,\ \xi_t^{(\varepsilon)} = 1 \mid \xi_0^{(\varepsilon)} = 1\}$.

б) Заметить, что при $\varepsilon > 0$

$$M\tau_1(\varepsilon) \geqslant P\{\xi_2^{(\varepsilon)} = 3 \mid \xi_0^{(\varepsilon)} = 1\} M\{\min\{n > 0: \xi_n^{(\varepsilon)} \neq 3\} \mid \xi_0^{(\varepsilon)} = 3\}.$$

в) Пользуясь формулой полной вероятности по значениям $\xi_1^{(\varepsilon)}$, сначала составить и решить уравнение для производящей функции $\psi_\varepsilon(s) = M\{s^{\tau_1(\varepsilon)} \mid \xi_0^{(\varepsilon)} = 2\}$.

5.66. Последовательность $\eta_n = \xi_{n+1} - \xi_n$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин.

5.67. б) Воспользоваться тем, что $P\{\tau_{k+1} - \tau_k = u \mid \tau_k = t\}$ не зависит ни от k, ни от t.

5.68. а) Составить уравнение для $\varphi_k(s)$, пользуясь формулой полного математического ожидания (по значениям $\delta = \min\{n \geqslant 1: \xi_n = 0\}$).

5.69. б) Использовать формулу полного математического ожидания по значениям ξ_1.

5.70. Заметить, что $P\{\tau_1 = 1\} = 1$. Для вычисления $m_0(N) = M\{\tau_N \mid \zeta_0 = 0\}$, $N = 1, 2, \ldots$, составить и решить системы линейных уравнений для $m_k(N) = M\{\tau_N \mid \zeta_0 = k\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, пользуясь формулой полного математического ожидания (разложением по значениям ζ_1). Сократить число неизвестных, заметив, что $m_k(N) = m_{-k}(N)$.

5.71. Так же, как в задаче 5.70, составить систему линейных уравнений для $m_k(N)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Рассмотреть значения $m_0(N) - m_k(N)$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$ при $N = 2, 3$.

5.72. Используя формулу полного математического ожидания (разложения по значениям $\xi(1)$), составить систему линейных уравнений, которым должны удовлетворять $m_0, m_1, \ldots, m_N$; убедиться в том, что указанные значения m_k являются единственным решением этой системы.

5.73. Так же, как в задаче 5.70, составить систему линейных уравнений, связывающих $p_{k,N}(t+1)$, $p_{k-1,N}(t)$, $p_{k+1,N}(t)$ и, пользуясь монотонностью по t величин $p_{kN}(t)$, перейти от этой системы к системе линейных уравнений относительно $\pi_k^{(N)}$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Вывести из этой системы, что отношение $\dfrac{\pi_{k+1}^{(N)} - \pi_k^{(N)}}{\pi_k^{(N)} - \pi_{k-1}^{(N)}}$ не зависит от k, и воспользоваться равенствами $\pi_0^{(N)} = 0$, $\pi_N^{(N)} = 1$. Аналогично получить формулы для $\pi_k^{(0)}$, $k = 1, \ldots, N$.

5.74. Рассмотреть цепь Маркова с тремя состояниями: $E_0 = \{$изделие исправно$\}$, $E_1 = \{$при проверке в ОТК обнаружен брак$\}$, $E_2 = \{$изделие бракованное, но прошло через ОТК$\}$.

5.76. Найти матрицу P вероятностей перехода цепи Маркова ξ_t и проверить, что $\pi P = \pi$, где $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_N)$, и что $\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_N = 1$. Использовать равенство $C_N^h = C_N^{N-h}$ и метод производящих функций.

5.77. б) С помощью формулы полного математического ожидания (разложения по значениям ξ_1 в классе несущественных состояний) составить систему линейных уравнений для величин $m_i =$

$= \mathsf{M}\{\tau \mid \xi_0 = i\}$, $i = 1, 2$. Решить эту систему и заметить, что в нашем случае

$$\mathsf{M}\tau = \mathsf{P}\{\xi_0 = 1\} m_1 + \mathsf{P}\{\xi_0 = 2\} m_2.$$

в) Аналогично п. б) составить системы линейных уравнений для $p_1^{(\alpha)}$, $p_2^{(\alpha)}$ и для $p_1^{(\beta)}$, $p_2^{(\beta)}$.

г) Заметить, что если $q_j = \lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\xi_t = j \mid \xi_0 = j\}$, $j = 3, 4, 5, 6$,— предельные вероятности для цепи, начальное состояние которой принадлежит существенному классу, то

$$\pi_j = \mathsf{P}\{\xi_0 = 1\} p_1^{(\alpha)} q_j + \mathsf{P}\{\xi_0 = 2\} p_2^{(\alpha)} q_j, \qquad j = 3, 4,$$

$$\pi_j = \mathsf{P}\{\xi_0 = 1\} p_1^{(\beta)} q_j + \mathsf{P}\{\xi_0 = 2\} p_2^{(\beta)} q_j, \qquad j = 5, 6.$$

5.79. Пусть $c_1, \ldots, c_n$ — собственные векторы (векторы-столбцы) матрицы A, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, вектор-столбец $a_j^{(n)}$ имеет координаты $a_{j1}^{(n)}, \ldots, a_{jn}^{(n)}$ и все координаты вектора-столбца e_j равны 0, кроме j-й координаты, равной 1. Если $e_j = \beta_1^{(j)} c_1 + \ldots + \beta_n^{(j)} c_n$, то

$$a_j^{(m)} = A^m e_j = A^m \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(j)} c_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(j)} \lambda_k^m c_k.$$

5.80. Использовать указания к задаче 5.79 и приведение матрицы A к жордановой нормальной форме.

5.81. По собственным числам матрицы P и по значениям P, $P^2, \ldots, P^{N-1}$ можно составить систему N линейных уравнений относительно коэффициентов c_{ij} в формулах задач 5.79 и 5.80.

5.82. Использовать результат задачи 5.81.

5.83. Представить $\nu_1(t)$ в виде суммы индикаторов: $\nu_1(t) = \theta_1 + \ldots + \theta_t$, где $\{\theta_k = 1\} = \{\xi_k = 1\}$, $\{\theta_k = 0\} = \{\xi_k = 2\}$, $k = 1, 2, \ldots$ Используя результат задачи 5.82: $p_{j1}(k) = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} + \varepsilon_{jk}$, где $|\varepsilon_{jk}| \leqslant |1 - \alpha - \beta|^k$, и равенства $\mathsf{M}\theta_k = p_{j1}(k)$, $\mathsf{M}\theta_k\theta_l = p_{j1}(k)\ p_{11}(l-k)$, $1 \leqslant k \leqslant l$, установить приведенную в условии задачи асимптотическую формулу для $\mathsf{M}\{\nu_1(t) \mid \xi_0 = j\}$ и доказать, что при $t \to \infty$

$$\mathsf{M}\{\nu_1^2(t) \mid \xi_0 = j\} = (1 + o(1))\,(\mathsf{M}\{\nu_1(t) \mid \xi_0 = j\})^2.$$

Пользуясь представлением $\nu_1(t) - \mathsf{M}\nu_1(t) = \sum\limits_{k=1}^{t} (\theta_k - \mathsf{M}\theta_k)$, можно показать, что

$$\mathsf{D}\{\nu_1(t) \mid \xi_0 = j\} = Ct(1 + o(1)), \qquad t \to \infty.$$

5.84. Использовать результат задачи 5.24 и неравенство Чебышева.

5.86. Использовать равенство

$$\pi_j - \frac{1}{N} = \sum_{k=1}^{N} \pi_k p_{kj} - \frac{1}{N} = \sum_{k=1}^{N} \pi_k \left(p_{kj} - \frac{1}{N}\right).$$

5.87. Рассмотреть матрицы $P = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1-\varepsilon^2 \end{pmatrix}$ и $P' = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

5.88. Показать, что последовательность $\xi_n = \zeta_{n+1} - \zeta_n$ образует цепь Маркова с 4 состояниями. Найти явное выражение для k-й степени матрицы вероятностей перехода этой цепи, представляя ее в виде разности коммутирующих матриц I и G (т. е. таких, что $IG = GI$). Далее вычислить $\mathsf{M}\xi_k$ и воспользоваться равенством

$$\zeta_n = \xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_{n-1}.$$

5.89. а) Состояние атома описывается разложимой цепью Маркова с двумя состояниями.

5.90. Решить в данном частном случае систему уравнений (5.5) или (5.6).

5.91. Используя результат задачи 5.90, рассмотреть систему уравнений $p_{11}^{(\alpha,\beta)}(t) = a_{11}$, $p_{22}^{(\alpha,\beta)}(t) = a_{22}$ относительно неотрицательных неизвестных α, β.

5.92. Положить

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_t = 1, \\ 0, & \text{если } \xi_t \neq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\tau_1(t) = \int_0^t \chi(s)\, ds, \quad \tau_1^2(t) = 2\int_0^t \int_{s_1}^t \chi(s_1)\chi(s_2)\, ds_2 ds_1.$$

Использовать результат задачи 5.90 и указания к задаче 5.83.

5.93. Использовать равенство

$$\eta(t) = \eta(0) + v_1\tau_1(t) - v_2\tau_2(t) = \eta(0) - v_2 t + (v_1 + v_2)\tau_1(t)$$

и результаты задачи 5.92.

5.94. Составить систему дифференциальных уравнений для вероятностей перехода $p_{ij}(t)$ за время t и перейти к системе уравнений для π_1, π_2, π_3, заменяя $p_{ij}(t)$ на $\pi_j(t) \equiv \pi_j$, $j = 1, 2, 3$.

5.95. См. указания к задаче 5.94.

Глава 6

6.1. Положим $y_k = x_k - a$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$. Показать, что $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(y_k - \bar{y})^2$. Найти $\mathsf{M}s^2$. Доказать, что $\mathsf{D}s^2 = O(1/n)$ при $n \to \infty$.

6.3. См. задачу 3.162.

6.4. Использовать независимость $\bar{x}_i$ и s_i^2.

6.5. Величина s^2 является состоятельной оценкой $\mathsf{D}x_1$ (см. задачу 6.1), т. е. $s^2 - \mathsf{D}x_1$ при $n \to \infty$ сходится по вероятности к 0. Воспользоваться решением задачи 4.33.

6.6. Выразить величину m через $x'_j = x_j - \mathsf{M}\xi$, $y'_j = y_j - \mathsf{M}\eta$. Найти $\mathsf{M}m$. Доказать, что $\mathsf{D}m = O(1/n)$ при $n \to \infty$.

6.7. Найти $\mathsf{M}p^*$, $\mathsf{D}p^*$. Использовать неравенство Чебышева.

6.8. Используя теорему Муавра — Лапласа и результаты задач 6.7, 4.33, доказать, что если $p^* = \mu_n/n$, то при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{p^* - p}{\sqrt{p^*(1 - p^*)/n}} \leqslant x\right\} \to \Phi(x).$$

6.14. б) Найти максимум функции правдоподобия при условии $a + b - c = 0$.

6.18. Воспользоваться результатом задачи 6.1, центральной предельной теоремой и задачей 4.33.

6.19. Оценки A_1^* и A_2^* зависят от общей оценки z_3 и, следовательно, нельзя воспользоваться решением задачи 6.3. Из условия несмещенности $\mathsf{M}A^* = A$ получим $c_1 + c_2 = 1$. Отсюда $A^* = \alpha + \beta[c_1z_1 + (1 - c_1)z_2] + \gamma z_3$. Найти $\mathsf{D}A^*$ и подобрать c_1 так, чтобы дисперсия была минимальной.

6.22. б) В формуле для A_n^* положить $\tilde{y}_i = y_i + \delta_{1i}$, $\tilde{x}_i = x_i + \delta_{2i}$. Использовать задачу 4.33.

6.26. См. задачу 3.115.

6.28. Воспользоваться формулами

$$x^2 = x^{[2]} + x, \qquad x^3 = x^{[3]} + 3x^{[2]} + x,$$

$$x^4 = x^{[4]} + 6x^{[3]} + 7x^{[2]} + x \qquad (x^{[k]} = x(x-1)\ldots(x-k+1))$$

и решением задачи 3.116.

6.29. Использовать результаты задач 3.89, 3.90.

6.30. Использовать результаты задач 3.64, 3.65.

6.31. Использовать результаты задач 6.29, 6.30.

6.32. Использовать результат задачи 6.30.

6.33. Использовать формулу (3.9) и формулу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty u^2 e^{-u^2/2}du = x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2/2}du.$$

6.39. Использовать квантили u_α нормального распределения: $1 - \Phi(u_\alpha) = \alpha$.

6.40. Воспользоваться решением задач 3.116, 3.121 и формулой

$$g(x) = g\left(\frac{k}{N}\right) + \left(x - \frac{k}{N}\right)g'(\theta_k) \qquad \left(\theta_k \in \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

6.41. Воспользоваться решением задачи 5.36.

6.42. Использовать представление $\tau_{12}(t)$ в виде

$$\tau_{12}(t) = \eta_{12}(1) + \ldots + \eta_{12}(t),$$

где $\eta_{12}(s) = 1$, если в момент s был переход из 1 в 2 (т. е. $\xi(s) = 1$ и $\xi(s+1) = 2$), и $\eta_{12}(s) = 0$ в противном случае. Воспользоваться задачей 5.82.

Часть III. РЕШЕНИЯ

Глава 1

1.18. При $A_i \neq A_j$ события $\{X'_1, \ldots, X'_k\} = A_i$ и $\{X'_1, \ldots, X'_k\} = A_j$ не пересекаются. По формуле (1.12)

$$\mathsf{P}\left(\{X'_1, \ldots, X'_k\} \in \mathscr{A}\right) = \sum_{i=1}^{M} \mathsf{P}\left(\{X'_1, \ldots, X'_k\} = A_i\right).$$

То же верно и для $\{X''_1, \ldots, X''_k\}$. Поэтому

$$\mathsf{P}\left(\{X''_1, \ldots, X''_k\} \in \mathscr{A}\right) - \mathsf{P}\left(\{X'_1, \ldots, X'_k\} \in \mathscr{A}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{M} \left(\mathsf{P}\left(\{X''_1, \ldots, X''_k\} = A_i\right) - \mathsf{P}\left(\{X'_1, \ldots, X'_k\} = A_i\right)\right). \quad (1)$$

Для любого множества A_i, состоящего из k элементов,

$$\mathsf{P}\left(\{X'_1, \ldots, X'_k\} = A_i\right) = \frac{k!}{N^k}, \qquad \mathsf{P}\left(\{X''_1, \ldots, X''_k\} = A_i\right) = \frac{k!}{N^{[k]}}.$$

Так как $N^{[k]} \leqslant N^k$ при $k \geqslant 1$, то

$$0 \leqslant \mathsf{P}\left(\{X''_1, \ldots, X''_k\} = A_i\right) - \mathsf{P}\left(\{X'_1, \ldots, X'_k\} = A_i\right) \leqslant k!\, \frac{N^k - N^{[k]}}{N^k N^{[k]}}. \quad (2)$$

Далее,

$$N^{[k]} = N(N-1)\ldots(N-k+1) = \left(\prod_{i=0}^{k-1} (N-i)(N-k+1+i)\right)^{1/2} =$$
$$= \left\{\prod_{i=0}^{k-1}\left[\left(N - \frac{k-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{2} - i\right)^2\right]\right\}^{1/2} \geqslant \{(N^2 - (k-1)N)^k\}^{1/2} =$$
$$= N^k\left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^{k/2} \geqslant N^k\left(1 - \frac{k(k-1)}{2N}\right). \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) и того, что $M \leqslant C_N^k$, следует неравенство

$$0 \leqslant \mathsf{P}\left(\{X''_1, \ldots, X''_k\} \in \mathscr{A}\right) - \mathsf{P}\left(\{X'_1, \ldots, X'_k\} \in \mathscr{A}\right) \leqslant$$
$$\leqslant Mk!\, \frac{k(k-1)}{2NN^{[k]}} \leqslant \frac{1}{N} C_k^2.$$

1.19. Легко проверяется, что

$$P_2=\frac{1}{N^2}\left(\left[\frac{N}{2}\right]^2+\left(N-\left[\frac{N}{2}\right]\right)^2\right)=1-\frac{2}{N}\left[\frac{N}{2}\right]+\frac{2}{N^2}\left[\frac{N}{2}\right]^2,$$

$$P_3=\frac{1}{N^2}\left(\left[\frac{N}{3}\right]^2+\left(N-\left[\frac{N}{3}\right]\right)^2\right)=1-\frac{2}{N}\left[\frac{N}{3}\right]+\frac{2}{N^2}\left[\frac{N}{3}\right]^2.$$

Покажем, что $P_2<P_3$ при $N\geqslant 4$:

$$P_3-P_2=\frac{2}{N}\left(\left[\frac{N}{2}\right]-\left[\frac{N}{3}\right]\right)+\frac{2}{N^2}\left(\left[\frac{N}{3}\right]^2-\left[\frac{N}{2}\right]^2\right)=$$

$$=\frac{2}{N}\left(\left[\frac{N}{2}\right]-\left[\frac{N}{3}\right]\right)\left(1-\frac{1}{N}\left(\left[\frac{N}{3}\right]+\left[\frac{N}{2}\right]\right)\right)>0.$$

1.22. Нетрудно проверить, что

$$\{X^3+Y^3\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)\}=$$
$$=\{X\equiv Y\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)\}\cup\{X\equiv -Y\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)\}\cup$$
$$\cup\{X\equiv -Y\equiv -1(\mathrm{mod}\ 3)\},$$

т. е.

$$\mathbf{P}\{X^3+Y^3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)\}=\frac{1}{N^2}\left(\left[\frac{N}{3}\right]^2+2\left[\frac{N+1}{3}\right]\left[\frac{N+2}{3}\right]\right). \quad (1)$$

Так как $\left[\frac{N}{3}\right]+\left[\frac{N+1}{3}\right]+\left[\frac{N+2}{3}\right]=N$ и функция

$$f(x)=x(a-x)=\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2}{4}, \quad (2)$$

то

$$\mathbf{P}\{X^3+Y^3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)\}\leqslant\frac{1}{N^2}\left(\left[\frac{N}{3}\right]^2+\frac{1}{2}\left(N-\left[\frac{N}{3}\right]\right)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{N^2}\left(\frac{N^2}{2}-N\left[\frac{N}{3}\right]+\frac{3}{2}\left[\frac{N}{3}\right]^2\right). \quad (3)$$

Далее, если M_1 — множество чисел, дающих при делении на 7 остатки 1, 2 или 4, M_2 — множество чисел, дающих при делении на 7 остатки 3, 5 или 6, то для любого $n\in M_1$ число n^3 при делении на 7 дает остаток 1, а для $n\in M_2$ число n^3 при делении на 7 дает остаток —1. Поэтому

$$\{X^3+Y^3\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)\}=$$
$$=\{X\equiv Y\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)\}\cup\{X\in M_1,\ Y\in M_2\}\cup\{X\in M_2,\ Y\in M_1\}$$

и

$$\mathbf{P}\{X^3+Y^3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7)\}=\frac{1}{N^2}\left(\left[\frac{N}{7}\right]^2+2\left(\left[\frac{N+6}{7}\right]+\left[\frac{N+5}{7}\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[\frac{N+3}{7}\right]\right)\left(\left[\frac{N+4}{7}\right]+\left[\frac{N+2}{7}\right]+\left[\frac{N+1}{7}\right]\right)\right). \quad (4)$$

Пользуясь равенством в (2) и тем, что для любого $N \geqslant 1$

$$\sum_{k=0}^{6}\left[\frac{N+k}{7}\right]=N,$$

$$\left|\left[\frac{N+6}{7}\right]+\left[\frac{N+5}{7}\right]+\left[\frac{N+3}{7}\right]-\left[\frac{N+4}{7}\right]-\left[\frac{N+2}{7}\right]-\left[\frac{N+1}{7}\right]\right|\leqslant 2,$$

получаем

$$\mathsf{P}\{X^3+Y^3\equiv 0 \pmod 7\}\geqslant \frac{1}{N^2}\left(\left[\frac{N}{7}\right]^2+2\left(\frac{1}{4}\left(N-\left[\frac{N}{7}\right]\right)^2-1\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{N^2}\left(\frac{N^2}{2}-N\left[\frac{N}{7}\right]+\frac{3}{2}\left[\frac{N}{7}\right]^2-2\right). \quad (5)$$

Из (3) и (5) следует, что

$$N^2\left(\mathsf{P}\{X^3+Y^3\equiv 0 \pmod 7\}-\mathsf{P}\{X^3+Y^3\equiv 0 \pmod 3\}\right)\geqslant$$

$$\geqslant N\left[\frac{N}{3}\right]-\frac{3}{2}\left[\frac{N}{3}\right]^2-N\left[\frac{N}{7}\right]+\frac{3}{2}\left[\frac{N}{7}\right]^2-2=$$

$$=\left(\left[\frac{N}{3}\right]-\left[\frac{N}{7}\right]\right)\left(N-\frac{3}{2}\left(\left[\frac{N}{3}\right]+\left[\frac{N}{7}\right]\right)\right)-2\geqslant$$

$$\geqslant\left(\left[\frac{N}{3}\right]-\left[\frac{N}{7}\right]\right)\frac{2}{7}N-2>0$$

при $N>7$. Для $N=4, 5, 6, 7$ соотношение $\mathsf{P}\{X^3+Y^3\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)\}>\mathsf{P}\{X^3+Y^3\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)\}$ проверяется непосредственно с помощью формул (1) и (4).

1.25. Если Ξ_1 симметрична Ξ_2 относительно Ξ_3, то

$$\xi_3-\xi_1=\xi_2-\xi_3=d_1, \quad \eta_3-\eta_1=\eta_2-\eta_3=d_2 \quad (1)$$

для некоторых целых чисел d_1 и d_2, не равных одновременно 0 и удовлетворяющих условиям $|d_1|\leqslant n$, $|d_2|\leqslant n$. При фиксированных d_1 и d_2 число троек карточек (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3), для которых выполнено (1), равно $(2n+1-2|d_1|)(2n+1-2|d_2|)$. Суммируя по d_1 и d_2, находим число троек попарно различных карточек, для которых Ξ_1 симметрична Ξ_2 относительно Ξ_3:

$$\sum_{\substack{d_1, d_2=-n \\ d_1^2+d_2^2\neq 0}}^{n}(2n+1-2|d_1|)(2n+1-2|d_2|)=(2n+1)\,2\sum_{d_2=1}^{n}(2n+$$

$$+1-2d_2)+2\sum_{d_1=1}^{n}(2n+1-2d_1)\left(2n+1+2\sum_{d_2=1}^{n}(2n+1-2d_2)\right)=$$

$$=2(2n+1)(n(2n+1)-n(n+1))+2(n(2n+1)-n(n+1))\times$$

$$\times(2n+1+2(n(2n+1)-n(n+1)))=4n^2(n+1)^2.$$

Так как общее число упорядоченных троек попарно различных карточек есть

$$(2n+1)^2((2n+1)^2-1)((2n+1)^2-2) = \\ = 4n(n+1)((4n(n+1))^2-1),$$

то искомая вероятность равна

$$p_n = \frac{n(n+1)}{(4n(n+1))^2-1}.$$

1.40. Число способов выбора k горизонталей, занятых k ладьями, равно числу способов выбора k вертикалей и равно C_8^k. На k^2 клетках, по которым пересекаются выбранные вертикали и горизонтали, k клеток для расстановки ладей можно выбрать $k!$ способами. Поэтому число расположений k ладей, не угрожающих друг другу, равно $\left(C_8^k\right)^2 k! = (8^{[k]})^2/k!$. Значит,

$$P_k = \frac{\left(C_8^k\right)^2 k!}{C_{64}^k} = \frac{7}{9}\,\frac{(6^{[k-2]})^2}{62^{[k-2]}},$$

и $P_2 = \frac{7}{9} > \frac{1}{2}$, $P_3 = \frac{14}{31} < \frac{1}{2}$, $P_5 = 0{,}0493566\ldots > 0{,}01$, $P_6 = 0{,}0075289\ldots < 0{,}01$.

1.43. Пусть поиск j-го пряника Пончик начинает с кармана с номером n_j. Тогда число удачных вариантов начал поиска первых k пряников равно числу таких последовательностей $n_1, \ldots, n_k$, составленных из символов 1, 2, ..., 10, что каждый символ встречается не более чем дважды. Число таких последовательностей, в которых m символов встречается дважды, а $k-2m$ символов — по разу, равно $C_k^{2m}\frac{2m}{(2!)^m m!}10^{[k-m]}$. Общее число вариантов начал поиска k пряников равно 10^k. Значит, искомая вероятность равна

$$\frac{1}{10^k}\sum_{m=0}^{[k/2]}\frac{k^{[2m]}10^{[k-m]}}{2^m m!}.$$

1.47. Пусть $\chi(A)=1$, если событие A выполняется, и $\chi(A) = 0$ в противном случае. Тогда

$$S = \mathbf{P}\{\alpha<\beta\}+\mathbf{P}\{\beta<\gamma\}+\mathbf{P}\{\gamma<\alpha\} = \\ = \frac{1}{3^3}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{3}\left(\chi\left(a_{i_1}<b_{i_2}\right)+\chi\left(b_{i_2}<c_{i_3}\right)+\chi\left(c_{i_3}<a_{i_1}\right)\right).$$

Но при любых $\{a_i, b_i, c_i\}_{i=1}^3$ и любых $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3\}$

$$\chi\left(a_{i_1}<b_{i_2}\right)+\chi\left(b_{i_2}<c_{i_3}\right)+\chi\left(c_{i_3}<a_{i_1}\right)\leqslant 2.$$

Значит, $S \leqslant \frac{1}{27}\cdot 3^3\cdot 2 = 2$. Если, например,

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 3} a_i < \min_{1\leqslant i\leqslant 3} b_i, \quad \max_{1\leqslant i\leqslant 3} b_i < \min_{1\leqslant i\leqslant 3} c_i,$$

то $S=2$.

1.58. Цикл $(i_1 = 1, i_2, \ldots, i_k)$ можно выбрать $(n-1)^{[k-1]}$ способами, а остальные $n-k$ элементов можно переставлять $(n-k)!$ способами. Поэтому число подстановок $\sigma \in S_n$ с $\lambda_1 = k$ равно $(n-1)^{[k-1]}(n-k)! = (n-1)!$ и $\mathsf{P}\{\lambda_1 = k\} = (n-1)!/n! = 1/n$.

1.59. Число циклов $(i_1 = 1, i_2, \ldots, i_k)$ длины k, содержащих элементы 1 и 2, равно $C_{k-1}^1 (n-2)^{[k-2]}$, а общее число подстановок, содержащих 1 и 2 в одном цикле, есть

$$\sum_{k=2}^{n} C_{k-1}^1 (n-2)^{[k-2]} (n-k)! = \frac{n(n-1)}{2}(n-2)! = \frac{n!}{2},$$

т. е. 1 и 2 содержатся в одном цикле с вероятностью 1/2.

1.72. Так как по условию толщина монеты предполагается равной 0, то вероятность того, что монета после падения встанет на ребро, тоже равна 0. Будем считать, что монета ложится гербом вверх, если в момент падения конец вектора нормали оказывается

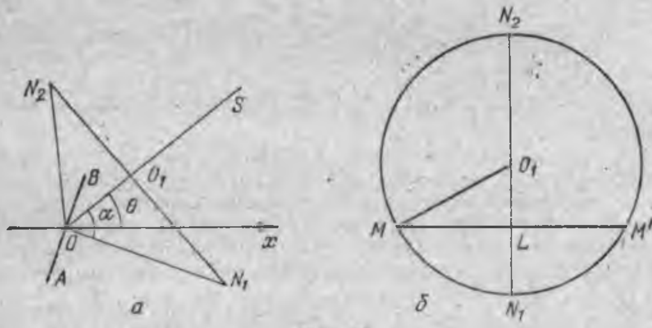

Рис. 8

выше его начала, т. е. центра монеты. На рис. 8, *а* изображено сечение вертикальной плоскостью π, проходящей через центр O монеты и ось OS, вокруг которой вращается монета AB; отрезки ON_1 ON_2 — это положения вектора нормали ON в момент его прохождения через плоскость π, прямая OX — это линия пересечения π с горизонтальной плоскостью γ.

Если $\theta \geqslant \alpha$, то весь конус, по которому скользит вектор ON, расположен выше плоскости γ, и тогда $p(\alpha, \theta) = 1$. Если $\theta \leqslant -\alpha$, то конус расположен ниже плоскости γ, и $p(\alpha, \theta) = 0$. Если $\theta = 0 < \alpha < \pi/2$ или $\alpha = \pi/2 > |\theta|$, то плоскость γ делит окружность, которую описывает конец N вектора ON, на две равные части, и поэтому $p(\alpha, \theta) = 1/2$. В общем случае $0 < |\theta| \leqslant \alpha < \pi/2$, изображенном на рис. 8, *а*, рассмотрим окружность, которую описывает конец N вектора нормали ON (рис. 8, *б*). Искомая вероятность $p(\alpha, \theta)$ равна отношению длины дуги MN_2M' к длине всей окружности. Из рис. 8, *а* находим:

$$O_1N_1 = O_1N_2 = O_1M = OO_1 \operatorname{tg} \alpha, \qquad O_1L = OO_1 \operatorname{tg} \theta;$$

поэтому (см. рис. 8, *б*) угол MO_1N_1 равен $\arccos \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\alpha}$ и $p(\alpha, \theta) = 1 - \dfrac{1}{\pi} \arccos \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\alpha}$.

1.84. Граница ΔABC пересекает ровно m окружностей, если A находится между S_{2m-1} и S_{2m+1} (при $m=0$ — внутри S_1, при $2m-1<n<2m+1$ — между S_n и S_{n-1}), и поэтому

$$P_m=\begin{cases} 1/n^2, & m=0,\\ 8m/n^2, & 1\leqslant m\leqslant[(n-1)/2],\\ (2n-1)/n^2, & m=n/2,\quad n \text{ четное},\\ 0, & m>n/2.\end{cases}$$

Глава 2

2.21. Если $n=2$, то из условий задачи

$$\mathsf{P}(A_1)=p_1,\quad \mathsf{P}(A_2)=p_2,\quad \mathsf{P}(A_1A_2)=p_1p_2$$

следует независимость A_1 и A_2.

При $n=3$ уже можно привести пример совокупности зависимых событий, удовлетворяющих условию задачи:

$$\mathsf{P}(A_1A_2A_3)=\mathsf{P}(A_1A_2\overline{A}_3)=1/8,\ \mathsf{P}(A_1\overline{A}_2A_3)=\mathsf{P}(\overline{A}_1A_2A_3)=1/8-\varepsilon,$$

$$\mathsf{P}(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=\mathsf{P}(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)=1/8+\varepsilon,$$

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=1/8+2\varepsilon,\quad \mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1/8-2\varepsilon,$$

где $0<\varepsilon\leqslant 1/16$. В этом случае $\mathsf{P}(A_i)=1/2$; $i=1,2,3$, $\mathsf{P}(A_1A_2)=1/4$, $\mathsf{P}(A_1A_2A_3)=1/8$, но $\mathsf{P}(A_1A_3)=1/4-\varepsilon\neq\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_3)$.

2.22. Пусть события $A_1,\ldots,A_k$ удовлетворяют условиям задачи. Оценим снизу число элементов множества Ω. Для любого набора $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$, $\varepsilon_i=0$ или 1 $(i=1,2,\ldots,k)$, $\mathsf{P}\left\{\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i^{(\varepsilon_i)}\right\}>0$, где $A_i^{(0)}=A_i$, $A_i^{(1)}=\overline{A}_i$, т. е. $\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i^{(\varepsilon_i)}\neq\varnothing$. Так как при $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\neq(\varepsilon_1',\ldots,\varepsilon_k')$ события $\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i^{(\varepsilon_i)}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i^{(\varepsilon_i')}$ не пересекаются, и число различных наборов $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$ равно 2^k, то $k\leqslant\log_2 n$. Экстремальным примером является $\Omega=\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$: $\varepsilon_i=0$ или $1\}$ с $\mathsf{P}\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\}=2^{-k}$ и $A_i=\{\varepsilon_i=0\}$, $i=1,\ldots,k$.

2.23. Пусть $\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$, $\mathsf{P}(\omega_j)=p_j>0$ $(j=1,\ldots,n)$, $p_1+\ldots+p_n=1$. Событиям $A_i\subset\Omega$, $\varnothing\neq A_i\neq\Omega$ $(i=1,\ldots,k)$ сопоставим векторы в R^n

$$a_i=(\chi_{i1}\sqrt{p_1},\ldots,\chi_{in}\sqrt{p_n}),\qquad i=1,\ldots,k,$$

где $\chi_{ij}=1$, если $\omega_j\in A_i$, и $\chi_{ij}=0$ в противном случае, и положим $a_0=(\sqrt{p_1},\ldots,\sqrt{p_n})\in R^n$. Тогда при $i,j=1,\ldots,k$ $(a_0,a_0)=1$, $(a_0,a_i)=\mathsf{P}(A_i)$, $(a_i,a_j)=\mathsf{P}(A_iA_j)$. Векторы $b_i=a_i-\mathsf{P}(A_i)a_0$ $(i=1,\ldots,k)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(b_i,a_0)=(a_i,a_0)-\mathsf{P}(A_i)(a_0,a_0)=0\quad(i=1,\ldots,k),\tag{1}$$

$$(b_i,b_j)=(a_i,a_j)-\mathsf{P}(A_j)(a_i,a_0)-\mathsf{P}(A_i)(a_0,a_j)+\\+\mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(A_j)(a_0,a_0)=\mathsf{P}(A_iA_j)-\mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(A_j)\quad(i,j=1,\ldots,k).\tag{2}$$

Равенства (1) означают, что векторы $b_1, \ldots, b_k$ лежат в $(n-1)$-мерной гиперплоскости $\{x \in R^n: (x, a_0) = 0\}$. В силу равенств (2) события $A_1, \ldots, A_k$ попарно независимы тогда и только тогда, когда векторы $b_1, \ldots, b_k$ попарно ортогональны. Следовательно, $k \leqslant n-1$.

Если $n \geqslant 4$, то пример $n-1$ попарно независимых событий дает следующая конструкция: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$,

$$\mathsf{P}\{\omega_j\} = \frac{n-3}{(n-2)^2} \quad (j = 1, \ldots, n-1), \qquad \mathsf{P}\{\omega_n\} = \frac{1}{(n-2)^2},$$

$$A_i = \{\omega_i, \omega_n\}, \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

2.61. а) Согласно теореме Муавра — Лапласа

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\xi_n - \frac{n}{2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}\right\} = 2\Phi_0(1) = 0{,}68269\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\xi_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}\right\} = 1 - 2\Phi_0(1) = 0{,}31730\ldots$$

Эти предельные значения и являются приближениями для искомых вероятностей.

б) При $p = q = 1/2$ из формулы (2.11) находим

$$\mathsf{P}\{\xi_n = k\} = C_n^k 2^{-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Отсюда и из равенств

$$\mathsf{P}\{|\xi_{100} - 50| \leqslant 5\} = \mathsf{P}\{45 \leqslant \xi_{100} \leqslant 55\},$$

$$\mathsf{P}\{|\xi_{100} - 50| \geqslant 5\} = \mathsf{P}\{\xi_{100} \leqslant 45\} + \mathsf{P}\{\xi_{100} \geqslant 55\} = 1 - \mathsf{P}\{46 \leqslant \xi_{100} \leqslant 54\}$$

находим

$$\mathsf{P}\{45 \leqslant \xi_{100} \leqslant 55\} = 2^{-100} \sum_{k=45}^{55} C_{100}^k = 2^{-100} C_{100}^{50}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{5} \frac{C_{100}^{50-k}}{C_{100}^{50}}\right) =$$

$$= \frac{C_{100}^{50}}{2^{100}}\left(1 + 2\,\frac{50}{51}\left(1 + \frac{49}{52}\left(1 + \frac{48}{53}\left(1 + \frac{47}{54}\left(1 + \frac{46}{55}\right)\right)\right)\right)\right) =$$

$$= 9{,}15635\,\frac{C_{100}^{50}}{2^{100}}. \tag{2}$$

Используя уточненную формулу Стирлинга (см. стр. 10), находим

$$100! = \sqrt{200\pi}\left(\frac{100}{e}\right)^{100} \exp\left\{\frac{1}{1200} - \frac{\theta_1}{1200\cdot 1201}\right\},$$

$$50! = \sqrt{100\pi}\left(\frac{50}{e}\right)^{50} \exp\left\{\frac{1}{600} - \frac{\theta_2}{600\cdot 601}\right\},$$

где $0 \leqslant \theta_1, \theta_2 \leqslant 1$. Поэтому при некоторых θ_i, $|\theta_i| \leqslant 1$, $i = 3, 4, 5$,

$$\frac{C_{100}^{50}}{2^{100}} = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{400} + \frac{\theta_3}{1{,}8\cdot 10^5}\right\} =$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{1}{400} + \frac{\theta_3}{1{,}8\cdot 10^5} + \frac{\theta_4}{2\cdot 399^2}\right) = \frac{0{,}9975 + \theta_5\cdot 10^{-5}}{5\sqrt{2\pi}}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\mathsf{P}\{45 \leqslant \xi_{100} \leqslant 55\} = 0{,}72874 + \theta_6\cdot 10^{-5}, \qquad |\theta_6| \leqslant 1.$$

Аналогично находим, что

$$\mathsf{P}\{|\xi_{100} - 50| \geqslant 5\} = 0{,}36820 + \theta_7\cdot 10^{-5}, \qquad |\theta_7| \leqslant 1.$$

Отличие значений вероятностей, полученных в п. а), от истинных значений объясняется двумя причинами: заменой допредельных значений вероятностей предельными, а также тем, что события $\{|\xi_{100} - 50| \leqslant 5\}$ и $\{|\xi_{100} - 50| \geqslant 5\}$ пересекаются.

2.62. а) То же, что в предыдущей задаче.

б) Аналогично решению задачи 2.61 получаем

$$\mathsf{P}\{|\xi_{128} - 64| \leqslant 4\sqrt{2}\} = \mathsf{P}\{59 \leqslant \xi_{128} \leqslant 69\} =$$

$$= \frac{C_{168}^{64}}{2^{128}}\left(1 + \frac{128}{65}\left(1 + \frac{63}{66}\left(1 + \frac{62}{67}\left(1 + \frac{61}{68}\left(1 + \frac{60}{69}\right)\right)\right)\right)\right) = 9{,}50563\frac{C_{128}^{64}}{2^{64}} =$$

$$= 0{,}66906 + \theta\cdot 10^{-5}, \qquad |\theta| \leqslant 1,$$

и так как $4\sqrt{2}$ — число не целое, то

$$\mathsf{P}\{|\xi_{128} - 64| \geqslant 4\sqrt{2}\} =$$

$$= 1 - \mathsf{P}\{|\xi_{128} - 64| \leqslant 4\sqrt{2}\} = 0{,}33094 + \theta\cdot 10^{-5}, \qquad |\theta| \leqslant 1.$$

Глава 3

3.64. Используя результат задачи 3.63, получим формулу для плотности распределения $p_\xi(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, вектора $\xi = (\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(n)})$:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} n!\alpha^n e^{-\alpha(x_1+\ldots+x_n)}, & 0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Плотность распределения $\eta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ можно найти по формуле (3.2) с функцией $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$, $g_1(x) = x_1$, $g_i(x) = x_i - x_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n$. Нетрудно проверить, что якобиан J_g преобразования $y = g(x)$ тождественно равен 1. Обратное преобразование $x = g_{-1}(y)$ определяется формулами $x_i = y_1 + \ldots + y_i$, $i = 1, \ldots, n$. Подставляя в (3.2) приведенные выражения для $p_\xi(x)$, $g_{-1}(x)$, J_g, получим

$$p_\eta(y) = \begin{cases} n!\alpha^n e^{-\alpha(ny_1+(n-1)y_2+\ldots+y_n)}, & y_1 \geqslant 0, \ldots, y_n \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \min(y_1, \ldots, y_n) < 0. \end{cases}$$

Плотность распределения $p_\eta(y)$ вектора $\eta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ представляется в виде произведения одномерных плотностей показательных распределений:

$$p_\eta(y) = \prod_{i=1}^{n} \left[\alpha(n-i+1)\, e^{-\alpha(n-i+1)y_i}\right].$$

Отсюда следует, что случайные величины $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ независимы и Δ_i имеет показательное распределение с параметром $\alpha(n-i+1)$.

3.65. Согласно задаче 3.64 соответствующие вариационному ряду $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(n)}$ (построенному по $\xi_1, \ldots, \xi_n$) случайные величины

$$\Delta_1 = \xi_{(1)}, \quad \Delta_k = \xi_{(k)} - \xi_{(k-1)}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

независимы и Δ_k имеет показательное распределение с параметром $(n-k+1)\lambda$, $k = 1, \ldots, n$. Остается заметить, что

$$\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} = \xi_{(n)} = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n,$$

что случайные величины ξ_k/k, $k = 1, 2, \ldots, n$, независимы и ξ_k/k имеет показательное распределение с параметром $k\lambda$, т. е. распределено так же, как Δ_{n-k+1}.

3.70. Введем вспомогательную случайную величину ξ_3, не зависящую от ξ_1 и имеющую распределение Пуассона с параметром $\lambda_2 - \lambda_1$. Согласно п. б) задачи 3.32 распределение $\xi_1 + \xi_3$ совпадает с распределением ξ_2. Поэтому для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathsf{P}(\xi_2 \leqslant k) = \mathsf{P}(\xi_1 + \xi_3 \leqslant k) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \mathsf{P}(\xi_3 = m)\, \mathsf{P}(\xi_1 \leqslant k - m) \leqslant \mathsf{P}(\xi_1 \leqslant k)\, \mathsf{P}(\xi_3 \leqslant k) < \mathsf{P}(\xi_1 \leqslant k).$$

3.129. Начало координат $0 \in S$. Точка $x \in S$ ($|x| \geqslant 1$), если при $x > 0$ точки $1, 2, \ldots, 2x-1$ — белые и при $x < 0$ точки $-1, -2, \ldots, -2x+1$ — белые. Пусть $\theta_x = 1$, если $x \in S$, и $\theta_x = 0$, если $x \notin S$. Тогда

$$|S| = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \theta_x, \quad \mathsf{M}\theta_0 = 1, \quad \mathsf{M}\theta_x = p^{2x-1}$$

и, следовательно,

$$\mathsf{M}|S| = 1 + 2\sum_{x=1}^{\infty} p^{2x-1} = 1 + \frac{2p}{1-p^2}.$$

3.130. Воспользуемся представлением $\xi = \iint_K \chi(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi$, предложенным в указаниях. Тогда $\chi(r, \varphi) = 0$ при $r \geqslant 1/2$ и $\chi(r, \varphi) = 1$, если $r < 1/2$ и в круг $K_{r,\varphi}$ радиусом r с центром в точке (r, φ) не попала ни одна из точек $C_1, \ldots, C_n$. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ вероятность того, что точка C_i попала в круг $K_{r,\varphi}$, равна $\pi r^2/\pi = r^2$ и, следовательно,

$$\mathsf{M}\chi(r, \varphi) = \mathsf{P}\{\chi(r, \varphi) = 1\} = (1 - r^2)^n,$$

если $r < 1/2$. Меняя местами знаки математического ожидания и интеграла в правой части равенства

$$\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}\int_K\int \chi(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi,$$

получим

$$\mathsf{M}\xi = \int_K\int \mathsf{M}\chi(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/2} (1 - r^2)^n\, r\, dr =$$

$$= \frac{\pi}{n+1}\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right].$$

3.135. Пусть $F_{-1}(y) = \sup\{x\colon\ F(x) \leqslant y\}$; тогда, согласно задаче 3.13,

$$\mathsf{M}\xi = \int_0^1 F_{-1}(y)\, dy,$$

т. е. $\mathsf{M}\xi$ — площадь области $\{(x, y)\colon\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant F_{-1}(y)\}$. Но

$$\int_0^1 F_{-1}(y)\, dy = \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx.$$

3.140. Событие

$$D = \{\text{выпуклая оболочка } A_1, A_2, A_3, A_4 \text{ — треугольник}\}$$

есть объединение четырех попарно несовместных событий:

$$B_i = \{A_i \text{ лежит в треугольнике, образованном остальными точками}\},$$

$i = 1, 2, 3, 4$, вероятности которых одинаковы ввиду симметричности распределения набора A_1, A_2, A_3, A_4. Поэтому $\mathsf{P}(D) = 4\mathsf{P}(B_4)$. Так как точка A_4 не зависит от A_1, A_2, A_3 и имеет равномерное распределение в области, площадь которой равна 1, то условная вероятность $\mathsf{P}(B_4|A_1, A_2, A_3)$ (при условии, что положения точек A_1, A_2, A_3 фиксированы) равна площади $S_{\Delta A_1A_2A_3}$ треугольника $A_1A_2A_3$. По формуле полного математического ожидания получим

$$\mathsf{P}\{D\} = 4\mathsf{M}\,\mathsf{P}\{B_4 \mid A_1, A_2, A_3\} = 4\mathsf{M}S_{\Delta A_1A_2A_3}.$$

3.141. Чтобы доказать неравенство $P_3 \geqslant 1/20$, воспользуемся следующим соображением. Пусть $X_1, \ldots, X_n \in R^2$ — независимые точки, имеющие одно и то же распределение P, и $\varkappa_n$ — число таких троек (i, j, k), для которых $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ и выполняется событие $A_{ijk} = \{$один из углов $\Delta X_iX_jX_k$ не меньше $120°\}$. В силу аддитивности математического ожидания

$$\mathsf{M}\varkappa_n = \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} \mathsf{P}(A_{ijk}) = C_n^3 P_3.$$

Поэтому $P_3 = \mathsf{M}\varkappa_n / C_n^3$. Для доказательства требуемой оценки $P_3 \geqslant 1/20 = 1/C_6^3$ достаточно установить, что $\mathsf{M}\varkappa_6 \geqslant 1$. Докажем более сильное утверждение: $\mathsf{P}\{\varkappa_6 \geqslant 1\} = 1$. Действительно, любые

6 точек $X_1, \ldots, X_6$, никакие три из которых не лежат на одной прямой, либо образуют выпуклый шестиугольник, либо одна из этих точек (скажем, X_1) содержится в треугольнике, образованном какими-то тремя другими (скажем, X_2, X_3, X_4). В первом случае $\varkappa_6 \geqslant 1$, поскольку сумма углов шестиугольника равна $180° \cdot (6-2) = 720°$, т. е. по крайней мере один из его шести углов не меньше $120°$. Во втором случае $\varkappa_6 \geqslant 1$, поскольку углы $X_2X_1X_3$, $X_3X_1X_4$ и $X_4X_1X_2$ треугольников $X_1X_2X_3$, $X_1X_3X_4$, $X_1X_2X_4$ в сумме составляют $360°$.

3.142. Рассуждения аналогичны проведенным в решении задачи **3.141.** Если $X_1, \ldots, X_n \in R^2$ — независимые точки, имеющие распределение P, и $\varkappa_n$ — число выпуклых четырехугольников, образованных точками $X_1, \ldots, X_n$, то в силу аддитивности математического ожидания

$$\mathsf{M}\varkappa_n = C_n^4 P_4, \text{ т. е. } P_4 = \mathsf{M}\varkappa_n / C_n^4,$$

и для доказательства приведенной в условии задачи оценки достаточно показать, что $\mathsf{M}\varkappa_5 \geqslant 1$. Но $\mathsf{P}\{\varkappa_5 \geqslant 1\} = 1$, поскольку 5 точек, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой, либо образуют выпуклый пятиугольник (и тогда $\varkappa_5 \geqslant 1$), либо одна из этих точек (скажем, X_4) лежит внутри треугольника, образованного тремя другими (скажем, X_1, X_2, X_3). Эта конфигурация изображена на рис. 7 (см. указание к задаче 3.142). Отрезки и лучи, приведенные на этом рисунке, разбивают плоскость на 9 областей. Легко проверить, что в какую бы из этих областей ни попала точка X_5, из точек X_1, X_2, X_3, X_4 можно выбрать 3 точки, которые вместе с X_5 образуют выпуклый четырехугольник. Значит, и в этом случае $\varkappa_5 \geqslant 1$, что и требовалось доказать.

3.156. Так как функция $f(x) = |x|^r$ при $r \geqslant 1$ выпукла вниз, то при любом действительном x, согласно задаче **3.152**,

$$\mathsf{M}|x + \eta|^r \geqslant |\mathsf{M}(x + \eta)|^r = |x|^r.$$

Поэтому при $r \geqslant 1$

$$\mathsf{M}|\xi + \eta|^r = \mathsf{M}(\mathsf{M}\{|\xi + \eta|^r | \xi\}) \geqslant \mathsf{M}|\xi|^r.$$

3.159. б) Если ранг матрицы B равен r, то существуют такие линейно независимые векторы $b_1, \ldots, b_{k-r} \in R^k$, что $Bb_i = 0$, $i = 1, \ldots, k - r$. Поэтому $\mathsf{D}((b_i, \xi)) = (b_i, Bb_i) = 0$, $i = 1, \ldots, k - r$, т. е. $\mathsf{P}\{(b_i, \xi) = c_i\} = 1$ для некоторых чисел $c_1, \ldots, c_{k-r}$. Значит, существует r-мерная гиперплоскость $L_r \subset R^k$, ортогональная подпространству, натянутому на $b_1, \ldots, b_{k-r}$, и удовлетворяющая условию $\mathsf{P}\{\xi \in L_r\} = 1$.

Обратно, если существует q-мерная гиперплоскость $L_q \subset R^k$, для которой $\mathsf{P}\{\xi \in L_q\} = 1$, то существуют линейно независимые векторы $b_1, \ldots, b_{k-q}$, ортогональные L_q, и числа $c_1, \ldots, c_{k-q}$, удовлетворяющие условиям

$$\mathsf{P}\{(\xi, b_i) = c_i\} = 1, \quad i = 1, \ldots, k - q.$$

Согласно п. б) задачи 3.158 тогда $Bb_i = 0$, $i = 1, \ldots, k - q$, т. е. ранг B не превышает q. Так как по условию ранг B равен r, то соотношение $\mathsf{P}\{\xi \in L_{r-1}\} = 1$ не может выполняться ни для какой $(r-1)$-мерной гиперплоскости $L_{r-1} \subset R^k$.

3.175. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$, уровни весенних паводков в последовательные годы, а τ_z — время до разрушения плотины паводком, Тогда

$$\{\tau_z > t\} = \left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant t} \xi_i \leqslant z\right\} = \bigcap_{i=1}^{t} \{\xi_i \leqslant z\}$$

и, следовательно, $\mathsf{P}\{\tau_z > t\} = F^t(z)$. Отсюда, используя результат задачи 3.132, получим

$$\mathsf{M}\tau_z = \sum_{t=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\tau_z \geqslant t\} = \sum_{t=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\tau_z > t\} = \sum_{t=0}^{\infty} F^t(z) = \frac{1}{1 - F(z)}.$$

В п. а) требуется найти минимальное значение z, при котором $\mathsf{M}\tau_z \geqslant T$, где $T = 100$ лет. Такое z удовлетворяет уравнению $\dfrac{1}{1 - F(z)} = T$ и, следовательно,

$$z = F_{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right) = F_{-1}(0{,}99),$$

где $F_{-1}(u) = \sup\{x\colon\ F(x) \leqslant u\}$ — функция, обратная к $F(x)$. В п. б) требуется найти минимальное z, при котором $\mathsf{P}\{\tau_z \leqslant T\} \leqslant \alpha = 0{,}01$, т. е. $1 - F^T(z) \leqslant \alpha$ или $(1-\alpha)^{1/T} \leqslant F(z)$. Отсюда

$$z = F_{-1}((1-\alpha)^{1/T}) = F_{-1}(0{,}99^{0{,}01}) \approx F_{-1}(0{,}9999).$$

3.176. Приведем два решения. а) Пусть $F(x) = \mathsf{P}\{\xi_i \leqslant x\}$. Тогда

$$\{\tau > t,\ \zeta_T = z\} = \{\xi_{T+1} \leqslant z, \ldots, \xi_{T+t} \leqslant z,\ \zeta_T = z\}$$

и

$$\mathsf{P}\{\tau > t \mid \zeta_T = z\} = F^t(z).$$

Кроме того, $\mathsf{P}\{\zeta_T \leqslant z\} = \mathsf{P}\left\{\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant T} \xi_i \leqslant z\right\} = F^T(z)$. Найдем теперь $\mathsf{P}\{\tau_T > u\}$, воспользовавшись формулой полной вероятности (3.21):

$$\mathsf{P}\{\tau_T > u\} = \mathsf{MP}\{\tau_T > u \mid \zeta_T\} = \mathsf{M}F^u(\zeta_T) =$$

$$= \int_0^{\infty} F^u(z)\, d\left(F^T(z)\right) = T\int_0^{\infty} F^{u+T-1}(z)\, dF(z).$$

Отсюда, полагая $x = F(z)$, получим

$$\mathsf{P}\{\tau_T > u\} = T\int_0^1 x^{u+T-1}dx = \frac{T}{u+T}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\{\tau_T \leqslant u\} = \frac{u}{u+T} \quad (u \geqslant 0), \qquad \mathsf{M}\tau_T = \infty,$$

$$\mathsf{P}\{\tau_{100} \leqslant 10\} = 1/11.$$

б) Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ по условию независимы и имеют одну и ту же непрерывную функцию распределения $F(x)$.

Построим по случайным величинам $\xi_1, \ldots, \xi_{T+u}$ их вариационный ряд $\xi_{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(T+u)}$; в силу непрерывности $F(x)$ с вероятностью 1 все числа $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(T+u)}$ различны. Тогда

$$\{\tau_T \leqslant u\} = \{\xi_{(T+u)} \in \{\xi_{T+1}, \ldots, \xi_{T+u}\}\}. \qquad (1)$$

При условии, что значения $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(T+u)}$ фиксированы, набор $(\xi_1, \ldots, \xi_{T+u})$ имеет равномерное распределение на множестве всех $(T+u)!$ перестановок чисел $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(T+u)}$. Из этих $(T+u)!$ перестановок ровно для $u(T+u-1)!$ выполняется событие в правой части (1). Поэтому

$$\mathsf{P}\{\tau_T \leqslant u\} = \frac{u(T+u-1)!}{(T+u)!} = \frac{u}{u+T}.$$

3.201. Пусть $\chi_i = 1$, если точка ξ_i — граничная, и $\chi_i = 0$ в противном случае. Тогда $\varkappa_n = \chi_1 + \ldots + \chi_n$ и $\mathsf{M}\varkappa_n = n\mathsf{M}\chi_n$, поскольку точки $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены. Пользуясь формулой (3.21), получаем $\mathsf{M}\chi_n = \mathsf{P}\{\xi_{j1} \leqslant \xi_{n1}$ или $\xi_{j2} \leqslant \xi_{n2}$, $j = 1, \ldots, n-1\} = \mathsf{M}P^{n-1}\{\xi_{11} \leqslant \xi_{n1}$ или $\xi_{12} \leqslant \xi_{n2} | \xi_{n-1}, \xi_{n2}\} = \mathsf{M}(1-(1-\xi_{n1})(1-\xi_{n2}))^{n-1} = \mathsf{M}(1-\xi_{n1}\xi_{n2})^{n-1}$. По условию случайные величины ξ_{n1} и ξ_{n2} независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Значит,

$$\mathsf{M}\varkappa_n = n\mathsf{M}\chi_n = n\mathsf{M}(1-\xi_{n1}\xi_{n2})^{n-1} =$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k \mathsf{M}\xi_{n1}^k\xi_{n2}^k = n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k \frac{1}{(k+1)^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}C_n^{k+1} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^{k+1}x^k dx = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}dx = \int_0^1 (1+x+\ldots+x^{n-1})\,dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

3.224. а) По условию i-е орудие поражает цель, если

$$|\beta_i + \xi_i + \zeta - a| = |\xi_i + \zeta| \leqslant \varepsilon.$$

Так как случайные величины $\zeta, \xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, $\mathsf{P}\{\zeta \leqslant x\} = \frac{x+d}{2d}$, $|x| \leqslant d$, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ одинаково распределены, то вероятность Q_n поражения цели залпом из n орудий определяется формулой

$$Q_n = 1 - \mathsf{P}\{|\xi_i + \zeta| > \varepsilon,\quad i = 1, \ldots, n\} =$$

$$= 1 - \mathsf{M}\mathsf{P}\{|\xi_i + \zeta| > \varepsilon,\quad i = 1, \ldots, n \,|\, \zeta\} =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\mathsf{P}\{|\xi_i + x| > \varepsilon\}\,d\mathsf{P}\{\zeta \leqslant x\} =$$

$$= 1 - \int_{-d}^{d}\frac{1}{2d}(1-\mathsf{P}\{|\xi_1 + x| \leqslant \varepsilon\})^n dx.$$

Используя равномерность распределения ξ_1 на $[-c, c]$ и условие $c+\varepsilon \leqslant d$, находим

$$\mathsf{P}\{|\xi+x|\leqslant\varepsilon\}=\begin{cases}\varepsilon/c, & \text{если } |x|\leqslant c-\varepsilon,\\ (c+\varepsilon-|x|)/2c, & \text{если } c-\varepsilon<|x|<c+\varepsilon,\\ 0, & \text{если } |x|\geqslant c+\varepsilon.\end{cases}$$

Значит,

$$Q_n=1-\frac{1}{d}\left(\int\limits_0^{c-\varepsilon}\left(1-\frac{\varepsilon}{c}\right)^n dx+\int\limits_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\left(1-\frac{c+\varepsilon-x}{2c}\right)^n dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^{d}dx\right)=$$

$$=\frac{c+\varepsilon}{d}-\frac{c-\varepsilon}{d}\left(1-\frac{\varepsilon}{c}\right)^n-\frac{2c}{d(n+1)}\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon}{c}\right)^{n+1}\right)=$$

$$=\frac{c}{d}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon}{c}\right)^n\right)+\frac{\varepsilon}{d}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{c}\right)^n+\frac{\varepsilon}{d},$$

и $Q_n\to(c+\varepsilon)/d<1$ при $n\to\infty$.

б) Введем вспомогательные случайные величины $\beta_i^*=\beta_i-a$, $i=1, \ldots, n$; эти случайные величины независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[-b, b]$, $b>c+d+\varepsilon$. Условие поражения цели i-м орудием принимает вид

$$|\beta_i+\xi_i+\zeta-a|=|\beta_i^*+\xi_i+\zeta|\leqslant\varepsilon.$$

Аналогично п. а) получаем для Q_n формулу

$$Q_n=1-\mathsf{MP}\{|\beta_i^*+\xi_i+\zeta|>\varepsilon,\ i=1, \ldots, n\,|\,\zeta, \xi_1, \ldots, \xi_n\}=$$

$$=1-\frac{1}{2d(2c)^n}\int\limits_{-d}^{d}\int\limits_{-c}^{c}\ldots\int\limits_{-c}^{c}\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mathsf{P}\{|\beta_i^*+y_i+x|\leqslant\varepsilon\}\right)dy_1\ldots dy_n dx. \tag{1}$$

Так как β_i^* имеет равномерное распределение на отрезке $[-b, b]$ и по условию $b>c+d+\varepsilon\geqslant|y_i|+|x|+\varepsilon$ при любых $y_i\in$ $\in[-c, c]$, $x\in[-d, d]$, то в подынтегральном выражении в (1)

$$\mathsf{P}\{|\beta_i^*+y_i+x|\leqslant\varepsilon\}=\frac{2\varepsilon}{2b}=\frac{\varepsilon}{b},\quad \text{если } |y_i|\leqslant c,\quad |x|\leqslant d.$$

Значит,

$$Q_n=1-\left(1-\frac{\varepsilon}{b}\right)^n\frac{1}{2d(2c)^n}\int\limits_{-d}^{d}\int\limits_{-c}^{c}\ldots\int\limits_{-c}^{c}dy_1\ldots dy_n dx=$$

$$=1-\left(1-\frac{\varepsilon}{b}\right)^n\to 1 \text{ при } n\to\infty.$$

Сравнение результатов пп. а) и б) показывает, что при достаточно больших n введение искусственного рассеивания при прицеливании увеличивает вероятность поражения цели. Этот неожиданный эффект (в более сложной ситуации, когда случайные величины ζ, ξ_i, β_i имеют нормальное распределение), был отмечен А. Н. Колмогоровым.

3.260. Середина M_1 стороны A_2A_3 имеет координаты $\left(\frac{\xi_2+\xi_3}{2}, \frac{\eta_2+\eta_3}{2}\right)$, а вектор $A_1M_1 = \left(\frac{\xi_2+\xi_3}{2} - \xi_1, \frac{\eta_2+\eta_3}{2} - \eta_1\right)$. Из условий задачи следует, что ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2, η_3 независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Поэтому компоненты вектора A_1M_1 независимы и имеют нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $1 + \frac{1+1}{4} = \frac{3}{2}$. Значит, при любом $x \geqslant 0$

$$\mathsf{P}\{|A_1M_1| \leqslant x\} = \mathsf{P}\{|A_1M_1|^2 \leqslant x^2\} =$$

$$= \frac{1}{3\pi} \iint\limits_{x_1^2+x_2^2<x^2} \exp\left\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{3}\right\} dx_1dx_2 = \frac{1}{3\pi}\int_0^x 2\pi r e^{-r^2/3} dr =$$

$$= \int_0^{x^2/3} e^{-u} du = 1 - e^{-x^2/3}.$$

3.261. Докажем более сильное утверждение: векторы A_2A_3 и A_1M_1 независимы. Имеем $A_2A_3 = (\xi_3 - \xi_2, \eta_3 - \eta_2)$ и (см. решение задачи 3.260) $A_1M_1 = \left(\frac{\xi_2+\xi_3}{2} - \xi_1, \frac{\eta_2+\eta_3}{2} - \eta_1\right)$. Поскольку наборы случайных величин $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ и $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ независимы и одинаково распределены, достаточно доказать, что независимы случайные величины $\xi_3 - \xi_2$ и $\frac{\xi_2+\xi_3}{2} - \xi_1$. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 по условию независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Независимость случайных величин $\xi_3 - \xi_2$ и $(\xi_2 + \xi_3)/2$ доказывается так же, как в задаче 3.241; вычитание из $(\xi_2 + \xi_3)/2$ случайной величины ξ_1, не зависящей от $\xi_3 - \xi_2$, не нарушает независимости.

3.262. Так как треугольник $A_1A_2A_3$ не может иметь более одного тупого угла, то события $\{\angle A_1 > 90°\}$, $\{\angle A_2 > 90°\}$ и $\{\angle A_3 > 90°\}$ несовместны. Из независимости и одинаковой распределенности точек A_1, A_2, A_3 следует, что вероятности этих событий одинаковы. Значит,

$$\mathsf{P}\{\triangle A_1A_2A_3 - \text{тупоугольный}\} = 3\,\mathsf{P}\{\angle A_1 > 90°\} =$$

$$= 3\,\mathsf{P}\left\{|A_1M_1| < \frac{1}{2}|A_2A_3|\right\},$$

поскольку половина стороны треугольника больше проведенной к ней медианы тогда и только тогда, когда противолежащий угол — тупой. Вектор $A_2A_3 = (\xi_3 - \xi_2, \eta_3 - \eta_2)$ имеет нормальное распределение с нулевым вектором средних и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$\mathsf{P}\{|A_2A_3| \leqslant x\} = \mathsf{P}\{|A_1A_2|^2 \leqslant x^2\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\cdot 2} \iint\limits_{x_1^2+x_2^2 \leqslant x^2} e^{-\left(x_1^2+x_2^2\right)/4}\, dx_1\, dx_2 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^x 2\pi r e^{-r^2/4}\, dr =$$

$$= \int\limits_0^{x^2/4} e^{-u}\, du = 1 - e^{-x^2/4}.$$

Согласно задаче 3.261 случайные величины $|A_2A_3|$ и $|A_1M_1|$ независимы, и $\mathsf{P}\{|A_1M_1| \leqslant x\} = 1 - e^{-x^2/3}$ согласно решению задачи 3.260. По формуле полной вероятности находим

$$\mathsf{P}\left\{|A_1M_1| < \frac{1}{2}|A_2A_3|\right\} = \int\limits_0^\infty \mathsf{P}\{|A_1M_1| < x/2\}\, d\mathsf{P}\{|A_2A_3| \leqslant x\} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(1 - e^{-x^2/12}\right)\frac{x}{2} e^{-x^2/4}\, dx = 1 - \int\limits_0^\infty \frac{x}{2} e^{-x^2/3}\, dx =$$

$$= 1 - \int\limits_0^\infty \frac{3}{4} e^{-u}\, du = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $\mathsf{P}\{\triangle A_1A_2A_3$ — тупоугольный$\} = 3/4$.

Глава 4

4.14. Из определения множества $C_{r,\varepsilon}$ следует, что

$$\mathsf{P}\left\{\xi^{(n)} \in C_{n\sqrt{2/\pi},\varepsilon}\right\} = \mathsf{P}\left\{\left|\frac{|\xi_1^{(n)}| + \ldots + |\xi_n^{(n)}|}{n\sqrt{2/\pi}} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right\}. \quad (1)$$

По условию случайные величины $|\xi_1^{(n)}|, \ldots, |\xi_n^{(n)}|$ независимы, одинаково распределены и

$$\mathsf{M}|\xi_1^{(n)}| = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty x e^{-x^2/2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-u}\, du = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$\mathsf{D}|\xi_1^{(n)}| = \mathsf{M}\left(\xi_1^{(n)}\right)^2 - \left(\mathsf{M}|\xi_1^{(n)}|\right)^2 = 1 - \frac{2}{\pi} < \infty.$$

Из этих соотношений и закона больших чисел следует, что правая часть (1) стремится к 0 при $n \to \infty$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$.

Сравнение результатов задач 4.13 и 4.14 (с учетом сферической симметричности распределения вектора $\xi^{(n)}$ и множества $B_{\sqrt{n},0}$) показывает, что при достаточно больших n гиперсфера

$$B_{\sqrt{n},0} = \{x \in R^n: x_1^2 + \ldots + x_n^2 = n\}$$

и поверхность n-мерного «октаэдра»

$$C_{n\sqrt{2/\pi},0} = \{x \in R^n: |x_1| + \ldots + |x_n| = n\sqrt{2/\pi}\}$$

близки друг к другу, а именно: для любого $\varepsilon > 0$ отношение $(n-1)$-мерного объема множества тех точек $x \in B_{\sqrt{n},0}$, для которых отрезок $[(1-\varepsilon)x, (1+\varepsilon)x]$ не пересекается с $C_{n\sqrt{2/\pi},0}$, к $(n-1)$-мерному объему $B_{\sqrt{n},0}$ (т. е. к «площади поверхности» гиперсферы $B_{\sqrt{n},0}$) стремится к 0.

4.24. Для любого $n = 1, 2, \ldots$ справедливы следующие равенства (в которых η_m — величина, введенная в задаче 4.23):

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - a = \frac{(\xi_1 - a) + \ldots + \left(\xi_{[\sqrt{n}]^2} - a\right)}{[\sqrt{n}]^2} \frac{[\sqrt{n}]^2}{n} + \\ + \frac{[\sqrt{n}]^2}{n} \frac{\eta_{[\sqrt{n}]}}{[\sqrt{n}]^2}$$

Из результатов задач 4.22 и 4.23 следует, что

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{(\xi_1 - a) + \ldots + (\xi_{[\sqrt{n}]} - a)}{[\sqrt{n}]^2} \frac{[\sqrt{n}]^2}{n} = 0\right\} = 1,$$

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{\eta_{[\sqrt{n}]}}{[\sqrt{n}]^2} \frac{[\sqrt{n}]^2}{n} = 0\right\} = 1,$$

значит,

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - a\right) = 0\right\} = 1,$$

что и требовалось доказать.

4.31. Согласно задаче 3.228 при $x > a$

$$\frac{e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{\sigma}{x-a} - \frac{\sigma^3}{(x-a)^3}\right\} < \mathsf{P}\{\xi > x\} < \frac{e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma}{x-a},$$

т. е.

$$\lim_{x\to\infty} \mathsf{P}\{\xi > x\} \sqrt{2\pi} e^{(x-a)^2/2\sigma^2} \frac{x-a}{\sigma} = 1.$$

Поэтому для любого $y \geqslant 0$

$$\lim_{x\to\infty} \mathsf{P}\{(\xi - x)\, x > y \mid \xi > x\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathsf{P}\{\xi > x + yx^{-1}\}}{\mathsf{P}\{\xi > x\}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(x + \frac{y}{x} - a\right)^2 - (x-a)^2\right)\right\} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \exp\left\{-\frac{y\left(2 + (y - 2ax)\, x^{-2}\right)}{2\sigma^2}\right\} = e^{-y/\sigma^2}.$$

4.41. Первое утверждение легко следует из неравенства Чебышева:

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant x \mid A\} = \frac{\mathsf{P}\{\xi \geqslant x,\ A\}}{\mathsf{P}\{A\}} \leqslant \frac{1}{p}\, \mathsf{P}\{\xi \geqslant x\} \leqslant \frac{\sigma^2}{p\,(x-a)^2}.$$

Для доказательства второго утверждения введем индикатор события A:

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ происходит,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$\mathsf{M}\{\xi \mid A\} = \frac{\mathsf{M}\xi\chi_A}{\mathsf{P}\{A\}} = \frac{1}{p}\mathsf{M}\xi\chi_A = a + \frac{1}{p}\mathsf{M}(\xi - a)\,\chi_A. \qquad (1)$$

Пусть $F_{-1}(y) = \sup\{t\colon\ \mathsf{P}\{\xi - a < t\} \leqslant y\}$ — функция, обратная к функции распределения случайной величины $\xi - a$. Согласно задаче 3.186

$$\int_0^p F_{-1}(u)\,du \leqslant \mathsf{M}(\xi - a)\,\chi_A \leqslant \int_{1-p}^1 F_{-1}(u)\,du, \qquad (2)$$

а согласно задаче 3.138

$$\sigma^2 = \mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi - a)^2 = \int_0^1 F_{-1}^2(u)\,du. \qquad (3)$$

Применяя к (2) неравенство Коши—Буняковского и пользуясь (3), получаем

$$|\mathsf{M}(\xi - a)\,\chi_A| \leqslant \max\left\{\int_0^p |F_{-1}(y)|\,dy,\ \int_{1-p}^1 |F_{-1}(y)|\,dy\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\sqrt{\int_0^p F_{-1}^2(u)\,du \int_0^p du},\ \sqrt{\int_{1-p}^1 F_{-1}^2(u)\,du \int_{1-p}^1 du}\right\} \leqslant \sigma\sqrt{p}.$$

Отсюда и из (1) следует, что

$$|\mathsf{M}\{\xi \mid A\} - a| \leqslant \sigma/\sqrt{p}. \qquad (4)$$

Если $p \geqslant 1/2$, то с помощью равенства

$$a = p\mathsf{M}\{\xi \mid A\} + (1-p)\mathsf{M}\{\xi \mid \overline{A}\}$$

и оценки (4), примененной к $\mathsf{M}\{\xi \mid \overline{A}\}$, находим:

$$|\mathsf{M}\{\xi \mid A\} - a| = \frac{1-p}{p} |\mathsf{M}\{\xi \mid \overline{A}\} - a| \leqslant \frac{1-p}{p} \frac{\sigma}{\sqrt{1-p}} = \sigma \frac{\sqrt{1-p}}{p}.$$

4.42. Рассмотрим сначала случайную величину τ_1. Из условий задачи следует, что образующие τ_1 слагаемые $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, не зависят от числа слагаемых $\nu - 1$, распределение каждого слагаемого совпадает с условным распределением ξ_1 при условии $\varepsilon_1 = 0$, и при $q \to 0$

$$\mathsf{P}\{q(\nu-1) \leqslant x\} \to 1 - e^{-x}, \quad x \geqslant 0.$$

Из задачи 4.41 следует, что

$$\mathsf{M}\{\xi_i \mid \varepsilon_i = 0\} = a + \theta \frac{\sigma\sqrt{a}}{1-q}, \quad |\theta| \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots;$$

кроме того,

$$\mathsf{D}\{\xi_i \mid \varepsilon_i = 0\} = \mathsf{M}\{\xi_i^2 \mid \varepsilon_i = 0\} - (\mathsf{M}\{\xi_i \mid \varepsilon_i = 0\})^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mathsf{M}\xi_i^2}{1-q} \leqslant \frac{a^2+\sigma^2}{1-q} < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Применяя задачи 4.39 и 4.37, получаем соотношение

$$\lim_{q \to 0} \mathsf{P}\{q\tau_1 \leqslant x\} = 1 - e^{-x/a}, \quad x \geqslant 0.$$

Покажем теперь, что предельные распределения случайных величин $q\tau_1$ и $q\tau_2$ при $q \to 0$ совпадают. Согласно п. а) задачи 4.33 для этого достаточно показать, что при любом $\delta > 0$

$$\mathsf{P}\{q\xi_i \leqslant \delta \mid \varepsilon_i = 1\} \to 1, \quad q \to 0.$$

Но из первого неравенства задачи 4.41 следует, что

$$\mathsf{P}\{q\xi_i > \delta \mid \varepsilon_i = 1\} \leqslant \frac{q^2\sigma^2}{q(\delta - aq)^2} \to 0, \quad q \to 0.$$

4.51. Пусть $g'(x)$ непрерывна в отрезке $[a-\delta, a+\delta]$, $\delta > 0$. По теореме Лагранжа при $x, a_n \in [a-\delta, a+\delta]$

$$g(x) - g(a_n) = g'(a_n + (x - a_n)\theta_1)(x - a_n),$$

где функция $\theta_1 = \theta_1(x, a_n)$ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ определим случайную величину α_n равенством

$$\frac{g(\xi_n) - g(a_n)}{b_n g'(a_n)} = \frac{\xi_n - a_n}{b_n}(1 + \alpha_n). \tag{1}$$

Из (1) следует, что если $|a - a_n| \leqslant \delta$, то на множество

$\{\omega: |\xi_n - a| \leqslant \delta\}$

$$|\alpha_n| = \left|\frac{g(\xi_n) - g(a_n)}{g'(a_n)(\xi_n - a_n)} - 1\right| = \left|\frac{g'(a_n + (\xi_n - a_n)\theta_1)}{g'(a_n)} - 1\right| \leqslant$$

$$\leqslant h(\sigma) = \sup_{\substack{|u-a|<\delta \\ |v-a|<\delta}} \left|\frac{g'(u)}{g'(v)} - 1\right|.$$

Функция $h(\delta)$ стремится к 0 при $\delta \downarrow 0$, так как по условию $g'(x)$ непрерывна при $x = a$ и $g'(a) \neq 0$. Значит, при любом $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{|\alpha_n| > \varepsilon\} \leqslant \mathsf{P}\{|\xi_n - a| > \delta\} + \mathsf{P}\{|\xi_n - a| > h_{-1}(\varepsilon)\}, \quad (2)$$

если n достаточно велико, так что $|a_n - a| < h_{-1}(\varepsilon)$, где $h_{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к $h(\cdot)$. Но в силу условий задачи при любом $z > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|\xi_n - a| > z\} = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{a - z - a_n}{b_n} \leqslant \frac{\xi_n - a_n}{b_n} \leqslant\right.$$

$$\left.\leqslant \frac{a + z - a_n}{b_n}\right\} \leqslant 1 - \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{\xi_n - a_n}{b_n}\right| \leqslant \frac{z}{2b_n}\right\} = 0.$$

Отсюда и из (2) следует, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|\alpha_n| > \varepsilon\} = 0. \quad (3)$$

Используя (1), (3) и задачу 4.33, б), получаем, что в каждой точке непрерывности $F(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{g(\xi_n) - g(a_n)}{b_n g'(a_n)} \leqslant x\right\} = F(x).$$

4.54. а) Применим утверждение к задаче 4.52 с

$$\xi_n = \frac{\mu_n}{n}, \quad a_n = \frac{1}{2}, \quad b_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

По теореме Муавра — Лапласа

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\xi_n - 1/2}{1/(2\sqrt{n})} \leqslant x\right\} = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}, \quad -\infty < x < \infty,$$

где ξ имеет стандартное нормальное распределение. Далее,

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2, \quad g'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{x}{1-x}\Big|_{x=1/2} = 0,$$

$$g''\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)\Big|_{x=1/2} = 4.$$

Согласно утверждению задачи 4.52

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{g(\xi_n)-g(1/2)}{g''(1/2)/(2\sqrt{n})^2}\leqslant x\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{g(\xi_n)+\ln 2)\, n \leqslant x\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{\xi^2 \leqslant x\right\} = 2\Phi_0(\sqrt{x}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2/2}du.$$

б) Применим утверждение задачи 4.51 с

$$\xi_n = \frac{\mu_n}{n}, \quad a_n = p, \quad b_n = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

По теореме Муавра — Лапласа при любом x, $-\infty < x < \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\xi_n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du.$$

Далее, $g'(p) = \ln\frac{p}{1-p} \neq 0$ при $p \neq 1/2$, и согласно утверждению задачи 4.51

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{g(\xi_n)-g(p)}{g'(p)\sqrt{p(1-p)/n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Следовательно, $B_n(p) = \left|\ln\frac{p}{1-p}\right|^{-1}\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}$.

4.83. Из условий $\sup\limits_{0<\lambda<\delta} \mathsf{M}e^{\lambda\xi_1} < \infty$, $\mathsf{M}|\xi_1| < \infty$ и свойств производящих функций следует, что функция $\psi(\lambda) = \mathsf{M}e^{\lambda\xi_1}$ определена и дифференцируема в полуинтервале $[0, \delta)$ и что $\mathsf{M}\xi_1 = \psi'(0)$. Согласно задачам 4.81 и 4.80

$$\mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_n \geqslant n(\mathsf{M}\xi_1 + \varepsilon)\} \leqslant \inf_{0<\lambda<\delta} e^{-\lambda n(\mathsf{M}\xi_1+\varepsilon)}\psi^n(\lambda) =$$

$$= \left(\inf_{0<\lambda<\delta} \psi(\lambda)\, e^{-\lambda(\mathsf{M}\xi_1+\varepsilon)}\right)^n.$$

Из формулы Тейлора

$$\psi(\lambda) = \psi(0) + (1+o(1))\,\lambda\psi'(0) = 1 + (1+o(1))\,\lambda\mathsf{M}\xi_1, \qquad \lambda \downarrow 0,$$

получаем, что $\psi(\lambda) < e^{\lambda(\mathsf{M}\xi_1+\varepsilon)}$ при достаточно малых $\lambda > 0$, поэтому

$$\alpha_\varepsilon = \inf_{0<\lambda<\delta} \psi(\lambda)\, e^{-\lambda(\mathsf{M}\xi_1+\varepsilon)} < 1.$$

Второе утверждение задачи следует из первого: достаточно заменить ξ_i на $-\xi_i$.

4.88. Сначала докажем тождество, указанное в условии задачи. Если $2h\sigma^2 < 1$, то

$$\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{1-2h\sigma^2}{2\pi}}\,e^{hx^2}e^{-x^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{1-2h\sigma^2}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2/(1-2h\sigma^2)}\right\}$$

— плотность нормального распределения с параметрами $\left(0, \dfrac{\sigma^2}{1-2h\sigma^2}\right)$, поэтому

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{hx^2}e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1-2h\sigma^2}}, \qquad 2h\sigma^2 < 1. \qquad (1)$$

Если ξ имеет нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma^2)$, а $\eta = \xi e^{h\xi^2}$, то

$$\mathsf{M}\eta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{hx^2}e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx, \qquad (2)$$

$$\mathsf{M}\eta^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2e^{2hx^2}e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx. \qquad (3)$$

В (2) под интегралом стоит нечетная функция, значит, $\mathsf{M}\eta = 0$, если только интеграл (2) абсолютно сходится. Это заведомо имеет место при $2h\sigma^2 < 1$, так как тогда

$$\exp\left\{x^2\left(h - \frac{1}{2\sigma^2}\right)\right\} = O\left(e^{-\alpha x^2}\right), \qquad \alpha > 0, \text{ при } |x| \to \infty. \qquad (4)$$

Чтобы вычислить интеграл (3), продифференцируем по h обе части тождества (1); в силу (4) дифференцирование под знаком интеграла в этом случае законно:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2e^{hx^2}e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx = \frac{\sigma^2}{(1-2h\sigma^2)^{3/2}}, \qquad 2h\sigma^2 < 1. \qquad (5)$$

Сопоставляя (3) и (5), получаем:

$$\mathsf{D}\eta = \mathsf{M}\eta^2 = \frac{\sigma^2}{(1-4h\sigma^2)^{3/2}} \text{ при } 4h\sigma^2 < 1.$$

Если $4h\sigma^2 \geqslant 1$, то интеграл (3) расходится и $\mathsf{D}\eta = \infty$.

4.95. Если $\mathsf{M}|\xi| < \infty$, то (см. введение к гл. 4) по свойствам характеристических функций $f'(0) = i\mathsf{M}\xi$. Покажем, что если распределение ξ имеет плотность $p(x)$, указанную в условии задачи, то $|f'(0)| < \infty$, а $\mathsf{M}|\xi| = \infty$. Последнее соотношение легко проверяется:

$$\mathsf{M}\,|\xi| = 2\int_0^\infty xp(x)\,dx = 2\int_0^2 xp(x)\,dx + 2\int_2^\infty \frac{\alpha(x)\,dx}{x\ln x} = \infty,$$

где $0 \leqslant \alpha(x) < \infty$ и $\alpha(x) \to 1$ при $x \to \infty$. Для доказательства соотношения $|f'(0)| < \infty$ покажем, что

$$|1 - f(t)| = o(t) \quad \text{при} \quad t \to 0$$

$\left(\text{тогда } f'(0) = \lim\limits_{t\to 0}(1 - f(t))/t = 0\right)$. Действительно, из оценки $1 - \cos y \leqslant y^2/2$ следует, что если

$$T \to \infty, \quad T|t| \to 0,$$

то

$$1 - f(t) = 2\int_0^\infty (1 - \cos tx)\,p(x)\,dx =$$

$$= O\left(t^2T^2\int_0^T p(x)\,dx + \int_T^\infty \frac{1-\cos tx}{x^2\ln x}\,dx\right) =$$

$$= O\left((tT)^2 + |t|\int_{|t|T}^\infty \frac{1-\cos u}{u^2\ln(u/|t|)}\,du\right) =$$

$$= O\left((tT)^2 + \frac{|t|}{\ln T}\int_0^\infty \frac{1-\cos u}{u^2}\,du\right).$$

Если $T \sim (|t|\ln|t|)^{-1/2}$ при $t \to 0$, то последняя оценка дает

$$1 - f(t) = O\left(\frac{|t|}{\ln|t|}\right) = o(|t|),$$

что и требовалось доказать.

4.96. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x, то

$$f''(x) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)}{t^2}.$$

Следовательно, в нашем случае

$$f''(0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(-t) - 2 + f(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\mathsf{M}\,\frac{e^{-it\xi} - 2 + e^{it\xi}}{t^2}.$$

Так как выражение под знаком математического ожидания вещественно, то можно рассматривать только его действительную часть:

$$f''(0) = 2\lim_{t\to 0}\mathsf{M}\,\frac{\cos t\xi - 1}{t^2} = \lim_{t\to 0}\mathsf{M}\xi^2\,\frac{\cos t\xi - 1}{(t\xi)^2/2}.$$

Функция $g_t(y) = \dfrac{\cos ty - 1}{(ty)^2/2}$ неположительна и для каждого y, $|y| < \infty$, стремится к -1 при $t \to 0$. Поэтому из предположения $\mathsf{M}\xi^2 = \infty$ следует равенство

$$f''(0) = \lim_{t\to 0} \mathsf{M}\xi^2 g_t(\xi) = -\infty,$$

которое противоречит условию задачи. Значит, $\mathsf{M}\xi^2 < \infty$ и $f''(0) = -\mathsf{M}\xi^2$.

4.109. Пусть $\varphi^{(N)}(1) < \infty$. Разложим производящую функцию $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\xi = k\} z^k$ по формуле Тейлора в точке $z = 1$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\varphi^{(k)}(1)}{k!}(z-1)^k + \frac{\varphi^{(N+1)}(1+\theta(z-1))}{(N+1)!}(z-1)^{N+1},$$

$$0 < \theta < 1.$$

Полагая здесь $z = 0$ и замечая, что $\varphi^{(k)}(z) \geqslant 0$ при любом $z \in [0, 1]$, получаем

$$\varphi(0) = \mathsf{P}\{\xi = 0\} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{\varphi^{(k)}(1)}{k!} + (-1)^{N+1} a_{N+1}, \quad a_{N+1} \geqslant 0.$$

Отсюда и из того, что $\varphi^{(k)}(1) = m_k$, следуют неравенства, указанные в условии задачи.

4.123. а) Из независимости $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и равенств

$$\mathsf{M}\xi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4} + \frac{4}{5}\right) = 1{,}025, \qquad \mathsf{M}\xi_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{16} + \frac{16}{25}\right) = 1{,}10125,$$

$$\mathsf{M}\ln\xi_1 = 0, \qquad \mathsf{D}\ln\xi_1 = \mathsf{M}\ln^2\xi_1 = \ln^2\frac{5}{4} \approx 0{,}0248965$$

следует, что

$$\mathsf{M}\eta_{1000} = (\mathsf{M}\xi_1)^{1000} \approx 5{,}295\cdot 10^{10},$$

$$\mathsf{M}\eta_{1000}^2 = (\mathsf{M}\xi_1^2)^{1000} \approx 7{,}6899\cdot 10^{41} \approx \mathsf{D}\eta_{1000},$$

$$\mathsf{M}\ln\eta_{100} = 1000\mathsf{M}\ln\xi_1 = 0, \quad \mathsf{D}\ln\eta_{100} = 1000\mathsf{D}\ln\xi_1 \approx 24{,}8965.$$

б) Так как $\ln\eta_n = \ln\xi_1 + \ldots + \ln\xi_n$, слагаемые $\ln\xi_1, \ldots, \ln\xi_n$ независимы, одинаково распределены и $\mathsf{D}\ln\xi_1 = \ln^2 1{,}25 < \infty$, то согласно центральной предельной теореме

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\ln\eta_n}{\sqrt{n\mathsf{D}\ln\xi_1}} \leqslant x\right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du.$$

Из этого соотношения следуют приближенные равенства

$$\mathsf{P}\{\eta_n < y\} \approx \Phi\left(\frac{\ln y}{\sqrt{n\mathsf{D}\ln\xi_1}}\right), \quad \mathsf{P}\{\eta_n \leqslant y\} \approx \Phi\left(\frac{\ln y}{\sqrt{n\mathsf{D}\ln\xi_1}}\right).$$

Подставляя вместо y указанные в условии задачи значения и пользуясь результатами п. а), находим:

$$\mathsf{P}\{\eta_{1000} < 0{,}001\} \approx \Phi(-1{,}384) \approx 0{,}0832,$$

$$\mathsf{P}\{\eta_{1000} < 1\} \approx \Phi(0) = 1/2, \quad \mathsf{P}\{\eta_{1000} \leqslant 1\} \approx \Phi(0) = 1/2,$$

$$\mathsf{P}\{\eta_{1000} < 10^6\} \approx \Phi(2{,}769) \approx 0{,}9972.$$

Сравнивая последний результат с найденным в п. а) значением $\mathsf{M}\eta_{1000} \approx 5{,}295 \cdot 10^{10}$, обнаруживаем, что почти вся масса распределения η_{1000} сосредоточена значительно левее его математического ожидания.

в) Событие $\{\eta_{1000} < 1\}$ происходит, если число значений $\xi_1, \ldots, \xi_{1000}$, равных 1,25, не превосходит 499, а событие $\{\eta_{1000} \leqslant 1\}$ — если это число не превосходит 500, т. е.

$$\mathsf{P}\{\eta_{1000} < 1\} = 2^{-1000} \sum_{k=0}^{499} C_{1000}^k, \quad \mathsf{P}\{\eta_{1000} \leqslant 1\} = 2^{-1000} \sum_{k=0}^{500} C_{1000}^k.$$

Так как $\sum\limits_{k=0}^{499} C_{1000}^k = \sum\limits_{k=501}^{1000} C_{1000}^k = \frac{1}{2}\left(2^{1000} - C_{1000}^{500}\right)$, то

$$\mathsf{P}\{\eta_{1000} < 1\} = \frac{1}{2}\left(1 - 2^{-1000} C_{1000}^{500}\right),$$

$$\mathsf{P}\{\eta_{1000} \leqslant 1\} = \frac{1}{2}\left(1 + 2^{-1000} C_{1000}^{500}\right).$$

По формуле Стирлинга

$$2^{-1000} C_{1000}^{500} \approx 2^{-1000} \frac{\sqrt{2\pi \cdot 1000} \cdot 1000^{1000}}{e^{1000}} \left(\frac{e^{500}}{\sqrt{2\pi \cdot 500} \cdot 500^{500}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{500\pi}} \approx 0{,}02523.$$

Следовательно, $\mathsf{P}\{\eta_{1000} < 1\} \approx 0{,}4874$, $\mathsf{P}\{\eta_{1000} \leqslant 1\} \approx 0{,}5126$.

Отличие этих значений от приближения 0,5 из п. б) объясняется, во-первых, тем, что распределение случайной величины η_{1000} имеет атом в точке 1 (а нормальное распределение абсолютно непрерывно), и во-вторых, заменой допредельного распределения предельным.

4.137. Математическое ожидание и дисперсия $\xi_1^{(n)}$ вычисляются непосредственно: $\mathsf{M}\xi_1^{(n)} = 0$, $\mathsf{D}\xi_1^{(n)} = 1$. Найдем производящую функцию η_n, пользуясь независимостью слагаемых:

$$\mathsf{M}z^{\eta_n} = \left(\mathsf{M}z^{\xi_1^{(n)}/\sqrt{n}}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n} + \frac{z + z^{-1}}{2n}\right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{z-1}{2n} + \frac{z^{-1}-1}{2n}\right)^n.$$

Поэтому при любом фиксированном z

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}z^{\eta_n} = \exp\left\{\frac{z-1}{2}\right\} \exp\left\{\frac{z^{-1}-1}{2}\right\}.$$

Так как $e^{(z-1)/2}$ — производящая функция случайной величины ζ, имеющей распределение Пуассона с параметром 1/2, а $e^{(z^{-1}-1)/2} = Mz^{-\zeta}$, то распределение η_n при $n \to \infty$ сходится к распределению разности двух независимых случайных величин, имеющих распределение Пуассона с параметром 1/2:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\eta_n = k\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-1/2}}{2^m m!} \frac{e^{-1/2}}{2^{|k|+m}(|k|+m)!},$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

4.147. Множество всех N корней многочлена $\varphi(z)$ с действительными коэффициентами разбивается на множество $\{z_1, \ldots, z_M\}$ действительных (неположительных) корней и множество $\{z_{M+1}, \ldots, z_N\}$ пар комплексно сопряженных корней, т. е. $z_{M+2j} = \overline{z_{M+2j-1}}$, $\operatorname{Im} z_{M+2j} \neq 0$, $j = 1, \ldots, (N-M)/2$. Так как $\varphi(1) = 1$, то

$$\varphi(z) = Mz^{\xi} =$$

$$= \prod_{j=1}^{N} \frac{z - z_j}{1 - z_j} = \prod_{j=1}^{M} \frac{z - z_j}{|1 - z_j|} \prod_{j=1}^{(N-M)/2} \frac{z^2 - 2z \operatorname{Re} z_{M+2j} + |z_{M+2j}|^2}{|1 - z_{M+2j}|^2},$$

причем $z^2 - 2z \operatorname{Re} z_{M+2j} + |z_{M+2j}|^2 = (z - z_{M+2j-1})(z - z_{M+2j})$ и $z - z_j$ — многочлены с неотрицательными коэффициентами. Первые M сомножителей являются производящими функциями случайных величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_M$, принимающих значения 0 и 1:

$$\mathsf{P}\{\zeta_j = 0\} = \frac{|z_j|}{|1 - z_j|}, \quad \mathsf{P}\{\zeta_j = 1\} = \frac{1}{|1 - z_j|}, \quad j = 1, \ldots, M,$$

а последние $(N-M)/2$ сомножителей — производящими функциями случайных величин $\zeta_{M+1}, \ldots, \zeta_{(N+M)/2}$, принимающих значения 0, 1 и 2:

$$\mathsf{P}\{\zeta_j = 0\} = \frac{|z_{M+2j}|^2}{|1 - z_{M+2j}|^2}, \quad \mathsf{P}\{\zeta_j = 1\} = \frac{-2 \operatorname{Re} z_{M+2j}}{|1 - z_{M+2j}|^2},$$

$$\mathsf{P}\{\zeta_j = 2\} = \frac{1}{|1 - z_{M+2j}|^2}, \quad j = 1, \ldots, (N-M)/2.$$

Если так определенные случайные величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_{(N+M)/2}$ независимы в совокупности, то распределение их суммы совпадает с распределением ξ.

4.150. Так как частицы размещаются по ячейкам независимо и равновероятно, то при любых целых n, N и k

$$\mathsf{P}\{\mu_0(n+1, N) = k \mid \mu_0(n, N) = k\} = 1 - \frac{k}{N},$$

$$\mathsf{P}\{\mu_0(n+1, N) = k - 1 \mid \mu_0(n, N) = k\} = \frac{k}{N}.$$

По формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}\{\mu_0(n+1,\ N)=k\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\mu_0(n+1,\ N)=k,\ \mu_0(n,\ N)=k\}+$$
$$+\mathsf{P}\{\mu_0(n+1,\ N)=k,\ \mu_0(n,\ N)=k-1\}=$$
$$=\left(1-\frac{k}{N}\right)\mathsf{P}\{\mu_0(n,\ N)=k\}+\frac{k+1}{N}\mathsf{P}\{\mu_0(n,\ N)=k+1\}.$$

Умножая обе части этого равенства на z^k и суммируя по k от 0 до ∞, получаем:

$$f_{n+1,N}(z)=f_{n,N}(z)-\frac{z}{N}\frac{d}{dz}f_{n,N}(z)+\frac{1}{N}\frac{d}{dz}f_{n,N}(z)=$$
$$=f_{n,N}(z)+\frac{1-z}{N}\frac{d}{dz}f_{n,N}(z). \qquad (1)$$

Так как $\mathsf{P}\{\mu_0(n,N)\leqslant N-1\}=1$ и $\mathsf{P}\{\mu_0(n,N)=N-1\}=N^{1-n}>0$, то $f_{n,N}(z)$ — многочлен степени $N-1$ при любом $n\geqslant 1$. Докажем теперь индукцией по n, что все корни $z_{n,1},\ldots,z_{n,N-1}$ многочлена $f_{n,N}(z)$ вещественны и что если $-\infty=z_{n,N}<z_{n,N-1}\leqslant\ldots\ldots\leqslant z_{n,2}\leqslant z_{n,1}\leqslant 0$, то $z_{n+1,N-1}\leqslant z_{n,N-1}\leqslant z_{n+1,N-2}\leqslant z_{n,N-2}\leqslant\ldots\ldots\leqslant z_{n,2}\leqslant z_{n+1,1}\leqslant z_{n,1}$ и, более того, $z_{n,i+1}<z_{n+1,i}<z_{n,i}$, если только $z_{n,i+1}<z_{n,i}$. (Ясно, что отсюда следует утверждение задачи.)

При $n=1$ и $n=2$ имеем:

$$f_{1,N}(z)=z^{N-1},\qquad f_{2,N}(z)=\frac{N-1}{N}z^{N-2}+\frac{1}{N}z^{N-1},$$

т. е. $z_{1,n-1}=\ldots=z_{1,1}=0$, $z_{2,N-1}=-N+1<z_{2,N-2}=\ldots\ldots=z_{2,1}=0$, и доказываемое утверждение справедливо. Допустим теперь, что все $N-1$ корней многочлена $f_{n,N}(z)$ вещественны и неположительны. Нетрудно проверить, что $f_{n,N}(z)>0$ при $z>0$ и $\lim\limits_{z\to-\infty}z^{-(N-1)}f_{n,N}(z)=N^{1-n}>0$ и что если $z_{n,j}$ $(1\leqslant j<<j+k\leqslant N)$ — корень кратности k, т. е.

$$z_{n,j-1}>z_{n,j}=z_{n,j+1}=\ldots=z_{n,j+k-1}>z_{n,j+k} \qquad (2)$$

(здесь мы считаем, что $z_{n,N}=-\infty$, $z_{n,0}=+\infty$), то

$$f_{n,N}(z_{n,j})=f'_{n,N}(z_{n,j})=\ldots=f^{(k-1)}_{n,N}(z_{n,j})=0,\qquad f^{(k)}_{n,N}(z_{n,j})\neq 0.$$

В силу (1) тогда

$$f_{n+1,N}(z_{n,j})=\frac{1-z_{n,j}}{N}f'_{n,N}(z_{n,j})\ \text{при}\ k=1,$$
$$f_{n+1,N}(z_{n,j})=f'_{n+1,N}(z_{n,j})=\ldots=f^{(k-2)}_{n+1,N}(z_{n,j})=0,$$
$$f^{(k-1)}_{n+1,N}(z_{n,j})=\frac{1-z_{n,j}}{N}f^{(k)}_{n,N}(z_{n,j})\ \text{при}\ k\geqslant 2.$$

Иными словами, при переходе от $f_{n,N}(z)$ к $f_{n+1,N}(z)$ кратность каждого корня $z_{n,j}$ уменьшается на 1.

Далее, если $z_{n,\,j+1} < z_{n,\,j}$, то $f_{n,\,N}(z)$ не меняет знак на интервале $(z_{n,\,j+1},\, z_{n,\,j})$ и равна нулю на его концах, а $f'_{n,N}(z)$ имеет на этом интервале ровно один корень (так как все корни многочлена $f_{n,\,N}(z)$ по предположению индукции действительны, то корни $f_{n,\,N}(z)$ и $f'_{n,N}(z)$ чередуются). Отсюда и из (1) следует, что $f_{n+1,\,N}(z)$ меняет знак на интервале $(z_{n,\,j+1},\, z_{n,\,j})$, т. е. имеет на нем корень (ровно один, поскольку в противном случае общее число корней многочлена $f_{n+1,\,N}(z)$ превысило бы $N-1$). Тем самым индуктивный переход от n к $n+1$ полностью обоснован.

4.153. Так как распределение ξ симметрично, т. е. $p(x) = p(-x)$, то $\mathsf{M}e^{-it\xi} = \mathsf{M}e^{it\xi} = \mathsf{M}\cos t\xi$,

$$\mathsf{M}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)\,dx = 2\int_0^{\infty} p(x)\cos tx\,dx.$$

Выберем ε так, чтобы выполнялось условие $0 < \varepsilon < 3-\alpha$, тогда при $t \downarrow 0$, используя соотношение $1-\cos u \sim u^2/2$ $(u \to 0)$, получим:

$$1-\mathsf{M}e^{it\xi} = 2\int_0^{\infty}(1-\cos tx)\,p(x)\,dx =$$

$$= 2\int_0^{t^{-\varepsilon/2}}(1-\cos tx)\,p(x)\,dx + 2\int_{t^{-\varepsilon/2}}^{\infty}(1-\cos tx)\,p(x)\,dx =$$

$$= O(t^{2-\varepsilon}) + 2\int_{t^{1-\varepsilon/2}}^{\infty}(1-\cos u)\,p\left(\frac{u}{t}\right)\frac{du}{t}. \quad (1)$$

Далее, в силу условия $p(x) \sim C|x|^{-\alpha}$, $|x| \to \infty$, имеем:

$$\int_{t^{1-\varepsilon/2}}^{\infty}(1-\cos u)\,p\left(\frac{u}{t}\right)\frac{du}{t} = (1+o(1))\int_{t^{1-\varepsilon/2}}^{\infty}(1-\cos u)\frac{Cu^{-\alpha}}{t^{1-\alpha}}\,du =$$

$$= (1+o(1))\,Ct^{\alpha-1}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^{\alpha}}\,du, \qquad t \downarrow 0. \quad (2)$$

Из (1), (2) и того, что $O(t^{2-\varepsilon}) = o(t^{\alpha-1})$ при $t \downarrow 0$ и $0 < \varepsilon < 3-\alpha < 2$, следует, что

$$\mathsf{M}e^{it\xi} = 1 - 2C|t|^{\alpha-1}(1+o(1))\int_0^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^{\alpha}}\,du, \qquad |t| \to 0.$$

Глава 5

5.7. а) Так как α_k и β_k независимы, то

$$\mathsf{M}\alpha_k\cos(t+\beta_k) = \mathsf{M}\alpha_k\mathsf{M}\cos(t+\beta_k) = 0,$$

$$\mathsf{D}\alpha_k\cos(t+\beta_k) = \mathsf{M}\alpha_k^2\mathsf{M}\cos^2(t+\beta_k) = \mathsf{M}\cos^2\beta_k = 1/2.$$

Применяя центральную предельную теорему к независимым одинаково распределенным случайным величинам $\alpha_k \cos(t+\beta_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, получаем, что предельным распределением $\eta_n(t)$ при $n \to \infty$, $t = \text{const}$ является нормальное распределение с параметрами $(0, 1/2)$.

б) Используя тригонометрическую форму записи комплексных чисел, находим

$$\eta_n(t) = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^{i(t+\beta_k)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{it}}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^{i\beta_k}\right\} =$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^{i\beta_k}\right| \cos\left(t + \arg\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^{i\beta_k}\right),$$

т. е. $\eta_n(t) = \theta_n \cos(t+\gamma_n)$, где

$$\theta_n = \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^{i\beta_k}\right|, \quad \gamma_n = \arg\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^{i\beta_k}.$$

Рассмотрим случайные величины $\alpha_k e^{i\beta_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, как двумерные векторы $(\alpha_k \cos\beta_k, \alpha_k \sin\beta_k)$. Так как $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots$ независимы, а β_k имеют равномерное распределение на отрезке $[-\pi, \pi]$, то распределение $\alpha_1 e^{i\beta_1} + \ldots + \alpha_n e^{i\beta_n}$ сферически симметрично, т. е. θ_n и γ_n независимы и γ_n имеет равномерное распределение на отрезке $[-\pi, \pi]$.

По условию векторы $(\alpha_k \cos\beta_k, \alpha_k \sin\beta_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, независимы, одинаково распределены, $\mathsf{M}(\alpha_k \cos\beta_k, \alpha_k \sin\beta_k) = (0, 0)$, а их матрица ковариаций, как нетрудно проверить, равна $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Согласно многомерному варианту центральной предельной теоремы предельное распределение вектора

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos\beta_k, \alpha_k \sin\beta_k)$$

является асимптотически нормальным с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\theta_n \geqslant x\} = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|\xi_n| \geqslant x\} = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|\xi_n|^2 \geqslant x^2\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{u^2+v^2 \geqslant x^2} e^{-(u^2+v^2)}\,du\,dv = 2\int_x^\infty e^{-r^2} r\,dr = \int_{x^2}^\infty e^{-t}\,dt = e^{-x^2}.$$

5.17. В силу задач 5.16 и 5.15 вектор $(\xi_n(x), \xi_n(x+h))$ имеет двумерное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей ковариаций

$$\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} x^{2j} & x^j(x+h)^j \\ x^j(x+h)^j & (x+h)^{2j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{x^{2n+2}-1}{x^2-1} & \dfrac{(x(x+h))^{n+1}-1}{x(x+h)-1} \\ \dfrac{(x(x+h))^{n+1}-1}{x(x+h)-1} & \dfrac{(x+h)^{2n+2}-1}{(x+h)^2-1}\end{pmatrix} \tag{1}$$

(если x, $x+h$ или $x(x+h)$ равно 1, то значения дробей в правой части определяются по непрерывности). Согласно задаче 3.266

$$\mathsf{P}\{\xi_n(x)\,\xi_n(x+h)<0\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{\operatorname{cov}(\xi_n(x),\,\xi_n(x+h))}{\sqrt{\mathsf{D}\xi_n(x)\,\mathsf{D}\xi_n(x+h)}}. \tag{2}$$

Рассматривая разность между 1 в квадратном аргументе arcsin:

$$1-\frac{(\operatorname{cov}(\xi_n(x),\,\xi_n(x+h)))^2}{\mathsf{D}\xi_n(x)\,\mathsf{D}\,\xi_n(x+h)}=$$
$$=1-\frac{((x(x+h))^{n+1}-1)^2(x^2-1)((x+h)^2-1)}{(x(x+h)-1)^2(x^{2n+2}-1)((x+h)^{2n+2}-1)},$$

приведем ее к общему знаменателю и преобразуем числитель:

$$(x^{2n+2}-1)((x+h)^{2n+2}-1)(x(x+h)-1)^2-$$
$$-((x(x+h))^{n+1}-1)^2(x^2-1)((x+h)^2-1)=$$
$$=[((x(x+h))^{n+1}-1)^2-(x^{n+1}-(x+h)^{n+1})^2](x(x+h)-1)^2-$$
$$-((x(x+h))^{n+1}-1)^2[(x(x+h)-1)^2-(x-(x+h))^2]=$$
$$=h^2((x(x+h))^{n+1}-1)^2-(x^{n+1}-(x+h)^{n+1})^2(x(x+h)-1)^2=$$
$$=h^2(x(x+h)-1)^2\left[\left(\sum_{k=0}^{n}(x(x+h))^k\right)^2-\left(\sum_{k=0}^{n}x^k(x+h)^{n-k}\right)^2\right].$$

Отсюда и из асимптотической формулы

$$\arcsin\sqrt{1-y^2}=\frac{\pi}{2}-y(1+o(1)),\qquad y\downarrow 0, \tag{3}$$

получаем при $|x|\neq 1$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathsf{P}\{\xi_n(x)\,\xi_n(x+h)<0\}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\lim_{h\to 0}\left[\sum_{k=0}^{n}(x(x+h)^k)^2-\left(\sum_{k=0}^{n}x^k(x+h)^{n-k}\right)^2\right]^{1/2}\times$$
$$\times(x^{2n+2}-1)((x+h)^{2n+2}-1)^{-1/2}=$$

$$= \frac{1}{\pi\,|x^{2n+2}-1|}\sqrt{\left(\frac{x^{2n+2}-1}{x^2-1}\right)^2-(n+1)^2x^{2n}} =$$

$$= \frac{1}{\pi\,|1-x^2|}\sqrt{1-\left[(n+1)\,x^n\frac{1-x^2}{1-x^{2n+2}}\right]^2}.$$

Если $|x| = 1$, то матрица ковариаций (1) принимает вид

$$\begin{pmatrix} n+1 & \dfrac{(1+h)^{n+1}-1}{h} \\ \dfrac{(1+h)^{n+1}-1}{h} & \dfrac{(1+h)^{2n+2}-1}{2h+h^2} \end{pmatrix},$$

и при $h \to 0$

$$1-\frac{(\mathrm{cov}\,(\xi_n(1),\,\xi_n(1+h)))^2}{\mathsf{D}\xi_n(1)\,\mathsf{D}\xi_n(1+h)} =$$

$$=1-\frac{((1+h)^{n+1}-1)^2\,h\,(2+h)}{h^2\,(n+1)\,((1+h)^{2n+2}-1)} = 1-\frac{((1+h)^{n+1}-1)\,(2+h)}{h\,(n+1)\,((1+h)^{n+1}+1)} =$$

$$=1-\frac{\left(1+\frac{n}{2}h+\frac{n(n-1)}{6}h^2+o\left(h^2\right)\right)(2+h)}{2+(n+1)\,h+\frac{n(n+1)}{2}h^2+o\left(h^2\right)} =$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{3}-\frac{n}{2}\right)h^2+o\left(h^2\right)\right]=\frac{n(n+2)}{12}\,h^2(1+o(1)).$$

Остается воспользоваться формулами (2) и (3).

Монотонная сходимость функций $g_n(x)$ к $g(x) = \dfrac{1}{\pi\,|1-x^2|}$ при $n \uparrow \infty$ следует из того, что последовательность функций

$$\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{x^n}\,\frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2} = \frac{1}{n+1}\left(x^{-n}+x^{-n+2}+\ldots+x^{n-2}+x^n\right)$$

при $n \uparrow \infty$ монотонно стремится к ∞ для каждого x, $|x| \neq 1$.

5.24. а) Согласно лемме Бореля — Кантелли (см. задачу 4.16) достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\rho_n = 0\} < \infty. \tag{1}$$

Но $\mathsf{P}\{\rho_n = 0\} = 0$ при любом нечетном n, а если $n = 2k$, то по формуле Стирлинга при $k \to \infty$

$$\mathsf{P}\{\rho_n = 0\} = C_{2k}^k p^k q^k \sim \frac{\sqrt{4\pi k}\,(2k)^{2k}}{2\pi k k^{2k}}\,p^k q^k = \frac{(4pq)^k}{\sqrt{\pi k}}. \tag{2}$$

При $p \neq q$ имеем $4pq < 1$, а отсюда следует (1).

б) Хотя, согласно (2), при $p = q = 1/2$

$$\mathsf{P}\{\rho_{2k} = 0\} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \qquad (k \to \infty) \tag{3}$$

и, значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\rho_n = 0\} = \infty$, мы не можем применить лемму Бореля — Кантелли, поскольку события $\{\rho_n = 0\}$, $n = 1, 2, \ldots$, не являются независимыми.

Введем случайные величины

$$\tau_1 = \min\{n \geqslant 1 \colon \rho_n = 0\},$$

$$\tau_{k+1} = \min\{n > \tau_k \colon \rho_n = 0\}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

(в случае, если множество, стоящее под знаком min, пусто, следует положить min равным ∞). Из независимости и одинаковой распределенности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ следует, что случайные величины $\tau_{k+1} - \tau_k$, $k = 1, 2, \ldots$, независимы, не зависят от τ_1 и распределены так же, как τ_1. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\nu \geqslant k\} = \mathsf{P}\{\tau_k < \infty\} =$$

$$= \mathsf{P}\{\tau_1 < \infty\} \prod_{j=1}^{k-1} \mathsf{P}\{\tau_{j+1} - \tau_j < \infty\} = (\mathsf{P}\{\tau_1 < \infty\})^k, \tag{4}$$

и, согласно задаче 3.132,

$$\mathsf{M}\nu = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathsf{P}\{\tau_1 < \infty\})^k = \frac{1}{1 - \mathsf{P}\{\tau_1 < \infty\}}. \tag{5}$$

С другой стороны, если $\chi_n = 1$ при $\rho_n = 0$ и $\chi_n = 0$ в остальных случаях, то $\nu = \chi_1 + \chi_2 + \ldots$ и в силу (3)

$$\mathsf{M}\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{M}\chi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\rho_{2k} = 0\} = \infty. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что $\mathsf{P}\{\tau_1 < \infty\} = 1$, а тогда в силу (4) и $\mathsf{P}\{\nu \geqslant k\} = 1$ при любом $k < \infty$, т. е. $\mathsf{P}\{\nu = \infty\} = 1$.

5.25. Заметим, что компоненты $\rho_{n,1}, \ldots, \rho_{n,s}$ вектора ρ_n являются независимыми реализациями случайных величин, рассматривавшихся в п. б) задачи 5.24, и поэтому при $n = 2k$

$$\mathsf{P}\{\rho_n = (0, \ldots, 0)\} = (\mathsf{P}\{\rho_{n,1} = 0\})^s \sim \left(\frac{1}{\pi k}\right)^{s/2}, \qquad k \to \infty,$$

и $\mathsf{P}\{\rho_n = (0, \ldots, 0)\} = 0$, если n нечетно. Значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\rho_n = (0, \ldots, 0)\} < \infty$$

при $s \geqslant 3$, и в силу леммы Бореля — Кантелли $\mathsf{P}\{\nu < \infty\} = 1$ при $s \geqslant 3$. В случае $s = 2$, повторяя рассуждения из п. б) задачи 5.24, находим, что $\mathsf{M}\nu = \infty$, и если $\tau_1 = \min\{n \colon \rho_n = (0, \ldots, 0)\}$, то

$\mathsf{M}\nu = \dfrac{1}{1-\mathsf{P}\{\tau_1 < \infty\}}$. Значит, $\mathsf{P}\{\tau_1 < \infty\} = 1$ и $\mathsf{P}\{\nu \geqslant k\} = (\mathsf{P}\{\tau_1 < \infty\})^k = 1$ при любом $k < \infty$, т. е. $\mathsf{P}\{\nu = \infty\} = 1$.

5.30. Положим

$$\tau_n = \begin{cases} n+1, \text{ если } \max\{\rho_1, \ldots, \rho_n\} < \delta, \\ \min\{j \geqslant 1\colon \rho_j \geqslant \delta\} \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда в силу неотрицательности ρ_n

$$\mathsf{M}\rho_n = \sum_{k=1}^{n+1} \mathsf{P}\{\tau_n = k\}\, \mathsf{M}\{\rho_n \mid \tau_n = k\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\tau_n = k\}\, \mathsf{M}\{\mathsf{M}\{\rho_n \mid \rho_1, \ldots, \rho_k\} \mid \tau_n = k\}.$$

Согласно задаче 5.29 и определению τ_n

$$\mathsf{M}\{\mathsf{M}\{\rho_n \mid \rho_1, \ldots, \rho_k\} \mid \tau_n = k\} \geqslant \mathsf{M}\{\rho_k \mid \tau_n = k\} \geqslant \delta,$$

поэтому

$$\mathsf{M}\rho_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\tau_n = k\}\, \delta =$$

$$= \delta\mathsf{P}\{\tau_n \leqslant n\} = \delta\mathsf{P}\{\max\{\rho_1, \ldots, \rho_n\} \geqslant \delta\}.$$

Это неравенство эквивалентно приведенному в условии задачи.

5.88. Обозначим через e_1 и e_2 единичные векторы на осях координат и положим $\xi_n = \zeta_{n+1} - \zeta_n$. Тогда $\zeta_n = \xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_{n-1}$, т. е. $\mathsf{M}\zeta_n = \mathsf{M}\xi_0 + \ldots + \mathsf{M}\xi_{n-1}$, и последовательность $\xi_0, \xi_1, \ldots$ образует цепь Маркова с множеством состояний $\{e_1, e_2, e_3 = -e_2, e_4 = -e_1\}$, матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(I - G),$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и начальным состоянием $\xi_0 = e_1$. Чтобы вычислить $\mathsf{M}\xi_k$, заметим, что при начальном условии $\xi_0 = e_1$

$$(\mathsf{P}\{\xi_k = e_i\})_{i=1}^4 = (1, 0, 0, 0)\, P^k.$$

Так как $IG = GI = I$, то

$$(I - G)^k = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m C_k^m I^{k-m} + (-1)^k G^k;$$

далее, $I^r = 4^{r-1}I$, $G^k = G$ при нечетном k и

$$G^k = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ при четном } k.$$

Учитывая равенство $\sum\limits_{m=0}^{k-1} (-1)^m C_k^m 4^{k-m} = (4-1)^k - (-1)^k$, находим: $P^k = \frac{1}{4}\left(I - (-1)^k \frac{I - 4G^k}{3^k}\right)$, т. е. при $\xi_0 = e_1$

$$\mathsf{P}\{\xi_k = e_1\} = \frac{1}{4} + \frac{2-(-1)^k}{4\cdot 3^k}, \quad \mathsf{P}\{\xi_k = e_2\} = \frac{1}{4},$$

$$\mathsf{P}\{\xi_k = -e_2\} = \frac{1}{4}, \quad \mathsf{P}\{\xi_k = -e_1\} = \frac{1}{4} - \frac{2-(-1)^k}{4\cdot 3^k}.$$

Отсюда следует, что $\mathsf{M}\xi_k = \frac{1}{3^k} e_1$ и

$$\mathsf{M}\zeta_n = e_1 \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{3^m} = e_1 \frac{1-3^{-n}}{1-3^{-1}} = \frac{3}{2} e_1 \left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

Глава 6

6.4. Случайные векторы $(\bar{x}_i, s_i)$, $i = 1, \ldots, I$, независимы, поскольку являются функциями от независимых векторов $(x_{i1}, \ldots, x_{in_i})$, $i = 1, \ldots, I$, соответственно. Кроме того, при условиях задачи 6.4 для любого i величины $\bar{x}_i$ и s_i независимы (см. введение к гл. 6), т. е. $\bar{x}_i$ и c_i независимы при каждом $i = 1, \ldots, I$. Так как $\mathsf{M}\bar{x}_i = a$, $c_1 + \ldots + c_I = 1$, то

$$\mathsf{M}\bar{x} = \sum_{i=1}^{I} \mathsf{M}\, c_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{I} \mathsf{M} c_i \mathsf{M}\bar{x}_i = a \sum_{i=1}^{I} \mathsf{M}\, c_i = a\mathsf{M} \sum_{i=1}^{I} c_i = a.$$

6.14. а) Функция правдоподобия, соответствующая выборке $a_1, \ldots, a_n$, имеет вид

$$L(a_1, \ldots, a_n; a) = \frac{1}{(2\pi\sigma_a^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a)^2\right\}.$$

Приравнивая нулю производную ее логарифма по a, получим линейное уравнение относительно неизвестного параметра a

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{1}{\sigma_a^2} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a) = \frac{n}{\sigma_a^2} (\bar{a} - a),$$

единственным решением которого является искомая оценка максимального правдоподобия $a^* = \bar{a}$. Очевидно, $Ma^* = a$, $Da^* = \sigma_a^2/n$. Рассуждения для выборок $\{b_k\}$ и $\{c_k\}$ отличаются лишь обозначениями.

б) Функция правдоподобия, соответствующая полной выборке $\{a_k, b_k, c_k\}_{k=1}^n$, имеет вид

$$L\left(\{a_k, b_k, c_k\}_{k=1}^n;\ a, b, c\right) =$$
$$= \frac{1}{8\pi^3\sigma_a^2\sigma_b^2\sigma_c^2} \exp\left\{-\sum_{k=1}^n\left(\frac{(a_k-a)^2}{2\sigma_a^2} + \frac{(b_k-b)^2}{2\sigma_b^2} + \frac{(c_k-c)^2}{2\sigma_c^2}\right)\right\}.$$

Чтобы найти точку максимума $\ln L$ при условии $a + b - c = 0$, используем метод неопределенных множителей Лагранжа, т. е. приравняем нулю производные функции

$$\ln L - (a + b - c)\lambda$$

по a, b, c и λ. Получим систему линейных уравнений относительно a, b, c и λ:

$$\frac{1}{\sigma_a^2}\sum_{k=1}^n (a_k - a) = \lambda, \quad \frac{1}{\sigma_b^2}\sum_{k=1}^n (b_k - b) = \lambda,$$
$$\frac{1}{\sigma_c^2}\sum_{k=1}^n (c_k - c) = -\lambda, \qquad a + b - c = 0,$$

или

$$\bar{a} - a = \lambda\sigma_a^2, \quad \bar{b} - b = \lambda\sigma_b^2, \quad \bar{c} - c = -\lambda\sigma_c^2, \quad a + b - c = 0. \tag{1}$$

Вычитая из суммы первых двух уравнений третье, находим

$$\bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = \lambda\left(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2\right),$$

т. е. $\lambda = (\bar{a} + \bar{b} - \bar{c})/\sigma^2$, где $\sigma^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2$. Подставляя это значение λ в уравнения системы (1), получаем искомые оценки максимального правдоподобия

$$a^{**} = \bar{a} - \frac{\sigma_a^2}{\sigma^2}(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}),$$

$$b^{**} = \bar{b} - \frac{\sigma_b^2}{\sigma^2}(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}),$$

$$c^{**} = \bar{c} - \frac{\sigma_c^2}{\sigma^2}(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}).$$

Поэтому $Ma^{**} = a$, $Mb^{**} = b$, $Mc^{**} = c$,

$$Da^{**} = \frac{\sigma_a^2}{n}\left(\left(1 - \frac{\sigma_a^2}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{\sigma_a^2}{\sigma^4}\left(\sigma_b^2 + \sigma_c^2\right)\right) = \frac{\sigma_a^2}{n}\left(1 - \frac{\sigma_a^2}{\sigma^2}\right),$$

$$Db^{**} = \frac{\sigma_b^2}{n}\left(\left(1 - \frac{\sigma_b^2}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{\sigma_b^2}{\sigma^4}\left(\sigma_a^2 + \sigma_c^2\right)\right) = \frac{\sigma_b^2}{n}\left(1 - \frac{\sigma_b^2}{\sigma^2}\right),$$

$$Dc^{**} = \frac{\sigma_c^2}{n}\left(\left(1 - \frac{\sigma_c^2}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{\sigma_c^2}{\sigma^4}\left(\sigma_a^2 + \sigma_b^2\right)\right) = \frac{\sigma_c^2}{n}\left(1 - \frac{\sigma_c^2}{\sigma^2}\right).$$

6.16. а) Функция правдоподобия $L\left(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}; a_1, a_2\right)$ имеет вид

$$L\left(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}; a_1, a_2\right) =$$
$$= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_k^2}}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\rho_k^2}\left[\left(y_1^{(k)} - a_1\right)^2 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 2\rho_k\left(y_1^{(k)} - a_1\right)\left(y_2^{(k)} - a_2\right) + \left(y_2^{(k)} - a_2\right)^2\right]\right\}.$$

Приравнивая нулю производные $\ln L$ по a_1 и a_2, получим систему уравнений для оценок максимального правдоподобия

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\rho_k^2}\left[-\left(y_1^{(k)} - a_1^*\right) + \rho_k\left(y_2^{(k)} - a_2^*\right)\right] = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\rho_k^2}\left[\left(y_1^{(k)} - a_1^*\right)\rho_k - \left(y_2^{(k)} - a_2^*\right)\right] = 0.$$

Отсюда, положив

$$\gamma_k = 1/\left(1 - \rho_k^2\right), \quad \Gamma_0 = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k, \quad \Gamma_1 = \sum_{k=1}^{n} \rho_k\gamma_k,$$

находим

$$a_1^*\Gamma_0 - a_2^*\Gamma_1 = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\left(y_1^{(k)} - \rho_k y_2^{(k)}\right),$$

$$a_1^*\Gamma_1 - a_2^*\Gamma_0 = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\left(y_1^{(k)}\rho_k - y_2^{(k)}\right).$$

Решение этой системы определяется формулами

$$a_1^* = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} \gamma_k\left[\left(\Gamma_0 - \rho_k\Gamma_1\right)y_1^{(k)} + \left(\Gamma_1 - \rho_k\Gamma_0\right)y_2^{(k)}\right],$$

$$a_2^* = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} \gamma_k\left[\left(\Gamma_0\rho_k - \Gamma_1\right)y_1^{(k)} + \left(\Gamma_1\rho_k - \Gamma_0\right)y_2^{(k)}\right],$$

где $\Delta = \Gamma_0^2 - \Gamma_1^2$.

б) Оценкой максимального правдоподобия a_1^{**} параметра a_1 по выборке, образованной первыми координатами, является обычное среднее арифметическое (см. задачу 6.15, б):

$$a_1^{**} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_1^{(k)}.$$

Отметим, что a_1^* и a_1^{**} совпадают лишь в случае одинаково распределенных $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$. Если $\rho_k \equiv \rho$, то $\Gamma_1 - \rho_k \Gamma_0 = 0$, $\Gamma_0 - \rho_k \Gamma_1 = n$, $\Delta = n^2$ и, следовательно, $a_1^* = a_1^{**}$. Обратно, если $a_1^* = a_1^{**}$, то $\Gamma_1 - \rho_k \Gamma_0 = 0$, $k = 1, \ldots, n$, т. е. $\rho_k \equiv \rho$ не зависит от k.

в) Используя свойство линейности математического ожидания, находим

$$\mathsf{M}\, a_1^* = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \left[(\Gamma_0 - \rho_k \Gamma_1)\, a_1 + (\Gamma_1 - \rho_k \Gamma_0)\, a_2 \right].$$

Отсюда и из равенств

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k (\Gamma_0 - \rho_k \Gamma_1) = \Gamma_0^2 - \Gamma_1^2 = \Delta, \qquad \sum_{k=1}^{n} \gamma_k (\Gamma_1 - \rho_k \Gamma_0) = 0,$$

получим $\mathsf{M}\, a_1^* = a_1$. Так как векторы $\left(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}\right)$, $k = 1, \ldots, n$, независимы, то

$$\mathsf{D} a_1^* = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 \mathsf{D} \left[(\Gamma_0 - \rho_k \Gamma_1)\, y_1^{(k)} + (\Gamma_1 - \rho_k \Gamma_0)\, y_2^{(k)} \right].$$

Отсюда, учитывая, что $\mathsf{D} y_1^{(k)} = \mathsf{D} y_2^{(k)} = 1$, $\operatorname{cov}\left(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}\right) = \rho_k$, получим

$$\mathsf{D} \left[(\Gamma_0 - \rho_k \Gamma_1)\, y_1^{(k)} + (\Gamma_1 - \rho_k \Gamma_0)\, y_2^{(k)} \right] =$$
$$= (\Gamma_0 - \rho_k \Gamma_1)^2 + (\Gamma_1 - \rho_k \Gamma_0)^2 + 2\rho_k (\Gamma_0 - \rho_k \Gamma_1)(\Gamma_1 - \rho_k \Gamma_0) =$$
$$= \left(1 - \rho_k^2\right)\left(\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 - 2\Gamma_0 \Gamma_1 \rho_k\right).$$

Значит,

$$\mathsf{D} a_1^* = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \left(\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 - 2\rho_k \Gamma_0 \Gamma_1\right) = \frac{\Gamma_0^3 - \Gamma_0 \Gamma_1^2}{\Delta^2} = \frac{\Gamma_0}{\Delta}.$$

Для оценки a_1^{**} непосредственно находим

$$\mathsf{M}\, a_1^{**} = a_1, \quad \mathsf{D} a_1^{**} = \frac{1}{n}.$$

г) Для доказательства неравенства $\frac{\Gamma_0}{\Delta} = \mathsf{D}a_1^* \leqslant \mathsf{D}a_1^{**} - \frac{1}{n}$ умножим обе его части на $n\Delta$:

$$n\Gamma_0 \leqslant \Gamma_0^2 - \Gamma_1^2 \text{ или } \Gamma_1^2 \leqslant \Gamma_0(\Gamma_0 - n),$$

а затем воспользуемся определениями величин Γ_0 и Γ_1:

$$\left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\rho_h}{1-\rho_h^2}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\rho_k^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1-\rho_j^2} - 1\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\rho_k^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_j^2}{1-\rho_j^2}.$$

Остается заметить, что в левой части последнего неравенства стоит квадрат скалярного произведения векторов

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho_1^2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{1-\rho_n^2}}\right) \text{ и } \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{1-\rho_1^2}}, \ldots, \frac{\rho_n}{\sqrt{1-\rho_n^2}}\right),$$

а в правой части — произведение квадратов их длин.

6.20. Из условия несмещенности следует, что $c_3 = 1 - c_1 - c_2$. Дифференцируя $\mathsf{D}z = c_1^2 + c_2^2 + (1 - c_1 - c_2)^2 + 2c_1c_2\rho$ по c_1 и c_2, получим для определения c_1, c_2 систему уравнений

$$2c_1 + (1+\rho)c_2 = 1, \quad (1+\rho)c_1 + 2c_2 = 1. \tag{1}$$

а) Вычитая из первого уравнения второе, получим $(1-\rho)c_1 - (1-\rho)c_2 = 0$, или $c_1 = c_2$. Следовательно,

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{3+\rho}, \quad c_3 = \frac{1+\rho}{3+\rho} \text{ и } \mathsf{D}z = \frac{1+\rho}{3+\rho}.$$

б) Если $\rho = -1$, то из первого уравнения (1) получим $c_1 = 1/2$, а из второго $c_2 = 1/2$. Следовательно, $c_3 = 0$, т. е. в наилучшую оценку включаются в этом случае только коррелированные оценки z_1 и z_2. При $\rho = -1$ величины z_1 и z_2 имеют вид $z_1 = a + \xi$, $z_2 = a - \xi$, где $\mathsf{M}\xi = 0$, $\mathsf{D}\xi = 1$. Таким образом, $z = (z_1 + z_2)/2 = a$, $\mathsf{D}z = 0$.

в) При $\rho = 1$ уравнения в (1) одинаковы: $c_1 + c_2 = 1/2$. В этом случае $z_1 = a + \xi$, $z_2 = a + \xi$, где $\mathsf{M}\xi = 0$, $\mathsf{D}\xi = 1$. Таким образом, очевидно, что при любых c_1, c_2 $(c_1 + c_2 = 1/2)$ и $c_3 = 1/2$ получаем одно и то же выражение $z = (a + \xi + z_3)/2$, и $\mathsf{D}z = 1/2$.

6.22. а) Приравнивая нулю производные от l по A и x_k, получим систему уравнений

$$-2\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{y}_i - Ax_i\right)x_i = 0,$$

$$-2\left(\tilde{x}_k - x_k\right) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Отсюда $x_k = \tilde{x}_k$, $k = 1, \ldots, n$, и

$$A_n^* = \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i \tilde{x}_i\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^2\right).$$

б) Преобразуем полученное в п. а) выражение, положив

$$\tilde{y}_i = y_i + \delta_{1i}, \quad \tilde{x}_i = x_i + \delta_{2i}.$$

После очевидных преобразований получим

$$A_n^* = (A + \eta_{1,n} + \eta_{2,n})/(1 + \eta_{3,n} + \eta_{4,n}),$$

где

$$\eta_{1,n} = \frac{1}{X_n^2} \sum_{i=1}^{n} (\delta_{1i} + A\delta_{2i}) x_i, \quad \eta_{2,n} = \frac{1}{X_n^2} \sum_{i=1}^{n} \delta_{1i}\delta_{2i},$$

$$\eta_{3,n} = \frac{1}{X_n^2} \sum_{i=1}^{n} x_i\delta_{2i}, \quad \eta_{4,n} = \frac{1}{X_n^2} \sum_{i=1}^{n} \delta_{2i}^2.$$

Используя утверждение задачи 4.33, неравенство Чебышева и неравенство $\mathsf{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\} \leqslant \mathsf{M}\xi/\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, верное для неотрицательных случайных величин, нетрудно показать, что при $n \to \infty$ величины $\eta_{k,n}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ сходятся по вероятности к 0. Отсюда следует сходимость по вероятности A_n^* к A.

6.29. Чтобы упростить вычисления, перейдем от выборки $x_1, \ldots, x_n$ из равномерного распределения на $[a, b]$ к выборке $y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$, где $f(x) = (x - a)/(b - a)$, из равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$. Ввиду монотонности функции f члены вариационного ряда $y_{(1)} \leqslant \ldots \leqslant y_{(n)}$ удовлетворяют соотношениям $y_{(i)} = f(x_{(i)})$. Пользуясь результатами задач 3.89, 3.90, находим

$$\mathsf{M}y_{(1)} = \frac{1}{n+1}, \quad \mathsf{M}y_{(n)} = \frac{n}{n+1}, \quad \mathsf{D}y_{(1)} = \mathsf{D}y_{(n)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)},$$

$$\operatorname{cov}(y_{(1)}, y_{(2)}) = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Возвращаясь от $y_{(i)}$ к исходной выборке, получаем окончательно

$$\mathsf{M}x_{(1)} = a + \frac{b-a}{n+1}, \quad \mathsf{M}x_{(n)} = a + (b-a)\frac{n}{n+1} = b - \frac{b-a}{n+1},$$

$$\mathsf{D}x_{(1)} = \mathsf{D}x_{(n)} = \frac{n(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}, \quad \operatorname{cov}(x_{(1)}, x_{(n)}) = \frac{(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)},$$

Таким образом, оценки $a^* = x_{(1)}$ и $b^* = x_{(n)}$ являются смещенными, но их дисперсия при $n \to \infty$ убывает значительно быстрее, чем дисперсия среднего арифметического $\bar{x} = (x_1 + \ldots + x_n)/n$.

6.30. Из утверждений задач 3.64 и 3.65 следует, что $x_{(1)}$ и $x_{(n)}$ можно представить в виде

$$x_{(1)} = \frac{\xi_n}{n}, \quad x_{(n)} = \xi_1 + \frac{\xi_2}{2} + \ldots + \frac{\xi_n}{n},$$

где ξ_k $(k = 1, \ldots, n)$ — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром α. Таким образом,

$$\mathsf{M}\, x_{(1)} = \mathsf{M}\, \frac{\xi_n}{n} = \frac{1}{\alpha n},$$

$$\mathsf{M} x_{(n)} = \mathsf{M}\, \xi_1 + \frac{1}{2}\, \mathsf{M}\, \xi_2 + \ldots + \frac{1}{n}\, \mathsf{M}\, \xi_n = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right),$$

$$\mathsf{D} x_{(1)} = \mathsf{D}\, \frac{\xi_n}{n} = \frac{1}{\alpha^2 n^2},$$

$$\mathsf{D} x_{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\, \mathsf{D}\xi_k = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},$$

$$\operatorname{cov}\left(x_{(1)}, x_{(n)}\right) = \operatorname{cov}\left(\frac{\xi_n}{n}, \xi_1 + \ldots + \frac{1}{n}\, \xi_n\right) = \mathsf{D}\, \frac{\xi_n}{n} = \frac{1}{\alpha^2 n^2}.$$

6.33. Очевидно, что $\mathsf{M}\bar{a} = \mathsf{M}\bar{y} - \mathsf{M}\bar{x} = R - r = a$ и, следовательно, $\mathsf{M}(\bar{a} - a)^2 = \mathsf{D}\bar{a}$. Статистики $\bar{x}$ и $\bar{y}$ независимы, и поэтому

$$\mathsf{D}\bar{a} = \mathsf{D}\bar{x} + \mathsf{D}\bar{y} = \frac{2\sigma^2}{n}.$$

Таким образом,

$$\mathsf{M}\bar{a} = a, \quad \mathsf{M}(\bar{a} - a)^2 = \frac{2\sigma^2}{n}. \tag{1}$$

Статистику $\bar{a}$, поскольку она имеет нормальное распределение с параметрами (1), можно представить в виде $\bar{a} = a + B\eta$, где $B = \sqrt{2\sigma^2/n}$, η — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение. Тогда

$$a^* = \max(0,\ a + B\eta), \qquad a^* - a = \max(-a,\ B\eta).$$

Рассматривая a^* и $a^* - a$ как функции от η, воспользуемся формулой (3.9):

$$\mathsf{M}a^* = \int_{-\infty}^{\infty} \max(0,\ a + Bx)\, \varphi(x)\, dx,$$

$$\mathsf{M}(a^* - a)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\max(-a,\ Bx)]^2\, \varphi(x)\, dx,$$

где $\varphi(x)$ — плотность стандартного нормального распределения. Отсюда, используя формулы

$$\int_X^{\infty} x\varphi(x)\, dx = \varphi(|X|),$$

$$\int_X^{\infty} x^2\varphi(x)\, dx = X\varphi(|X|) + \int_X^{\infty} \varphi(x)\, dx,$$

получим

$$\mathsf{M}a^* = \int_{-a/B}^{\infty} (a + Bx)\,\varphi(x)\,dx = a\int_{-a/B}^{\infty} \varphi(x) + B\varphi\left(\frac{a}{B}\right),$$

$$\mathsf{M}(a^* - a)^2 = a^2\int_{-\infty}^{-a/B} \varphi(x)\,dx + B^2\int_{-a/B}^{\infty} x^2\varphi(x)\,dx =$$

$$= a^2\int_{-\infty}^{-a/B} \varphi(x)\,dx + B^2\int_{-a/B}^{\infty} \varphi(x)\,dx - aB\varphi\left(\frac{a}{B}\right).$$

Выражая оставшиеся интегралы через табличную функцию $\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(v)\,dv$, получим следующие формулы:

$$\mathsf{M}a^* = a\left(0{,}5 + \Phi_0\left(\frac{a}{B}\right)\right) + B\varphi\left(\frac{a}{B}\right),$$
$$\mathsf{M}(a^* - a)^2 = a^2\left(0{,}5 - \Phi_0\left(\frac{a}{B}\right)\right) + B^2\left(0{,}5 + \Phi_0\left(\frac{a}{B}\right)\right) - aB\varphi\left(\frac{a}{B}\right). \quad (2)$$

Для указанных в задаче числовых значений имеем:

$$a = 1 \text{ м}, \quad B^2 = \frac{2\cdot 100 \text{ м}^2}{200} = 1 \text{ м}^2, \quad \frac{a}{B} = 1,$$

$$\Phi_0(1) = 0{,}3413, \quad \varphi(1) = 0{,}2420.$$

Отсюда и из формул (2) находим

$$\mathsf{M}a^* = (0{,}5 + \Phi_0(1)) + \varphi(1) = 1{,}0833 \text{ м},$$

$$\mathsf{M}(a^* - a)^2 = (0{,}5 - \Phi_0(1)) + (0{,}5 + \Phi_0(1)) - \varphi(1) =$$
$$= 1 - \varphi(1) = 0{,}7580 \text{ м}^2.$$

Таким образом,

$$\mathsf{M}\bar{a} = 1 \text{ м}, \qquad \sqrt{\mathsf{M}(\bar{a} - a)^2} = 1 \text{ м},$$

$$\mathsf{M}a^* = 1{,}0833 \text{ м}, \qquad \sqrt{\mathsf{M}(a^* - a)^2} = 0{,}8706 \text{ м}.$$

6.39. Пусть верна гипотеза H_1. Ошибка 1-го рода α определяется формулой

$$\alpha = \mathsf{P}\{\xi_n > C\} = \mathsf{P}\left\{\frac{\xi_n - na_1}{\sigma_1\sqrt{n}} > \frac{C - na_1}{\sigma_1\sqrt{n}}\right\}.$$

Величина $(\xi_n - na_1)/\sigma_1\sqrt{n}$ имеет стандартное нормальное распределение и, следовательно, значение $(C - na_1)/\sigma_1\sqrt{n} = u_\alpha$ определяется соотношением $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \alpha$. Отсюда

$$C_\alpha = C = na_1 + u_\alpha\sigma_1\sqrt{n}. \quad (1)$$

Пусть теперь верна гипотеза H_2. Тогда

$$\beta_n = \mathsf{P}\{\xi_n < C\} = \mathsf{P}\left\{\frac{\xi_n - na_2}{\sigma_2\sqrt{n}} < \frac{C - na_2}{\sigma_2\sqrt{n}}\right\}.$$

Величина $(\xi_n - na_2)/\sigma_2\sqrt{n}$ имеет стандартное нормальное распределение и, следовательно, $(C - na_2)/\sigma_2\sqrt{n} = -u_{\beta_n}$. Отсюда и из равенства (1) получаем $u_\alpha\sigma_1 + u_{\beta_n}\sigma_2 = (a_2 - a_1)\sqrt{n}$. Значит $u_{\beta_n} \to \infty$ при $n \to \infty$, т. е. $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

6.40. Выборке $x_1, \ldots, x_n$ сопоставим процесс размещения n частиц по N ячейкам: будем считать, что i-я частица попадает в k-ю ячейку, если $x_i \in \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. При такой интерпретации получается схема независимого размещения частиц по ячейкам, а случайная величина μ_0 равна числу пустых ячеек. При гипотезе H_1 вероятности попадания частиц в ячейки 1, 2, ..., N одинаковы и равны $1/N$, а при гипотезе H_2 вероятность попадания в k-ю ячейку определяется формулой

$$p_k = \int\limits_{k/N}^{(k+1)/N} g(x)\,dx = \frac{1}{N}\,g\left(\frac{k}{N}\right) + \varepsilon_k(N), \qquad (1)$$

где $\max\limits_k |\varepsilon_k(N)| = O(1/N^2)$, поскольку по условию $g(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$. Математическое ожидание и дисперсия величины μ_0 при гипотезах H_1 и H_2 определяются формулами, полученными в задачах **3.116** и **3.121**. При гипотезе H_1

$$\mathsf{M}\mu_0 = N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\gamma N(1+o(1))}, \quad \frac{n}{N} \to \gamma, \quad N \to \infty.$$

Отсюда

$$a_1 = \lim_{\substack{N\to\infty \\ n/N\to\gamma}} \frac{\mathsf{M}\mu_0}{N} = e^{-\gamma}, \qquad 0 < \gamma < \infty.$$

При гипотезе H_2

$$\mathsf{M}\mu_0 = \sum_{k=1}^{N} (1 - p_k)^n, \qquad (2)$$

Из формулы (1) следует, что при $n, N \to \infty$, $n/N \to \gamma$ равномерно по k

$$(1 - p_k)^n = \exp\left\{n \ln\left(1 - \frac{1}{N}\,g\left(\frac{k}{N}\right) - \varepsilon_k(N)\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\left(-\gamma g\left(\frac{k}{N}\right) - n\varepsilon_k(N)\right)(1 + o(1))\right\} = e^{-\gamma g(k/N)(1+o(1)) + o(1/N)}.$$

Отсюда и из формулы (2), полагая в ней $n = \gamma N(1 + o(1))$, получаем

$$a_2 = \lim_{\substack{N\to\infty \\ n/N\to\gamma}} \frac{\mathsf{M}\mu_0}{N} = \int\limits_0^1 e^{-\gamma g(x)}\,dx.$$

Часть IV. ОТВЕТЫ

Глава 1

1.1. 2/3. 1.2. $\mathsf{P}(A) = 1/1785 = 0{,}0005602\ldots$, $\mathsf{P}(B) = 1/3927 = 0{,}0002546\ldots$ 1.3. 1/6. 1.4. 1/2, 3/8, 7/8.

1.5. $\mathsf{P}(A) = 1/3$, $\mathsf{P}(B) = C_{n-2}^{m} 2^{n-m-2} 3^{-n}$ $(0 \leqslant m \leqslant n-2)$, $\mathsf{P}(C) = C_n^m 2^{n-m} 3^{-n}$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$, $\mathsf{P}(D) = \dfrac{n!}{m_0! m_1! m_2!} \dfrac{1}{3^n}$ $(m_0 + m_1 + m_2 = n)$.

1.6. $7/18 = 0{,}38888\ldots$ 1.7. $\mathsf{P}(A) = 0{,}21$, $\mathsf{P}(B) = 0{,}01$, $\mathsf{P}(C) = 0{,}27$. 1.8. а) 0,504; б) 0,432; в) 0,027; г) 0,036; д) 0,001.

1.9. $p_N = \dfrac{1}{N}\left[\dfrac{N}{k}\right] \to \dfrac{1}{k}$ $(N \to \infty)$.

1.10. а) $p_N = 1 - \dfrac{1}{N}\left(\left[\dfrac{N}{a_1}\right] + \left[\dfrac{N}{a_2}\right] - \left[\dfrac{N}{a_1 a_2}\right]\right) \to \left(1 - \dfrac{1}{a_1}\right) \times \left(1 - \dfrac{1}{a_2}\right)$ $(N \to \infty)$;

б) $p_N = 1 - \dfrac{1}{N} \sum\limits_{r=1}^{k} \sum\limits_{1 < i_1 < \ldots < i_r < k} (-1)^{r-1} \left[\dfrac{N}{a_{i_1} \ldots a_{i_r}}\right] \to \prod\limits_{i=1}^{k} \left(1 - \dfrac{1}{a_i}\right)$ $(N \to \infty)$.

1.11. Если $N = 10k + l$, то $p_N = 2k/N$ при $l = 0$, $p_N = (2k + 1)/N$ при $1 \leqslant l < 9$, $p_N = 2(k+1)/N$ при $l = 9$; $p_N \to 1/5$ $(N \to \infty)$.

1.12. $p_N = \dfrac{1}{N}\left[\dfrac{N + r - q}{r}\right] \to \dfrac{1}{r}$ $(N \to \infty)$. 1.13. $9 \cdot 10^{-(n-k+1)}$.

1.14. $q_N = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sum\limits_{p_1 < \ldots < p_k} \dfrac{1}{N^2}\left[\dfrac{N}{p_1 \ldots p_k}\right]^2$, где суммирования производятся по всем простым числам $p_1, p_2, \ldots$;

$$\lim_{N \to \infty} q_N = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2} = 0{,}607927\ \ldots,$$

где произведение берется по всем простым p.

1.15. $\pi/4 = 0{,}7853981\ldots$

1.16. $p_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot10^n}$, $p_{n-k+1}=\frac{99}{2\cdot10^{2k}}+\frac{9}{2\cdot10^{k+n}}$ $(k=1, \ldots, n)$, $q_0=\frac{1}{2}$, $q_k=\frac{99}{2\cdot10^{2k}}$ $(k=1, 2, \ldots)$.

1.17. $q_k=9\cdot10^{-k-1}+(9k-1)\cdot10^{-k-1}\ln 10$, $k=0, 1, \ldots$

1.19. $P_2<P_3$ при $N\geqslant4$. 1.21. $Q_N(p)=1-\frac{2}{N}\left[\frac{N}{p}\right]+\frac{2}{N^2}\left[\frac{N}{p^2}\right]^2$, $Q(p)=1-\frac{2}{p}+\frac{2}{p^2}$, $Q=1$. 1.23. $\left(\frac{3}{4}\right)^N$.

1.24. $\left(\frac{r+1}{2^r}\right)^N$. 1.25. $\frac{n(n+1)}{(4n(n+1))^2-1}$.

1.26. а) $(5/6)^{10}=0{,}1615055\ldots$; б) $C_{10}^3\cdot5^7 6^{-10}=0{,}1550453\ldots$; в) $1-(5/6)^{10}=0{,}8384944\ldots$; г) $1-(5^{10}+10\cdot5^9)/6^{10}=0{,}5154833\ldots$

1.27. 0,055252. 1.28. 0,067. 1.29. 0,055252. 1.30. 2/21.

1.31. $\frac{1}{10005}=0{,}00009995\ldots$, $\frac{62016}{476905}=0{,}1300384\ldots$, $\frac{99}{667}=0{,}1484257\ldots$

1.32. 1) $\frac{C_{M_1}^{m_1}C_{M_2}^{m_2}\ldots C_{M_N}^{m_N}}{C_M^m}$, если $M=M_1+M_2+\ldots+M_N$, $m=m_1+\ldots+m_N$, $m_i\geqslant0$;

2) $1+\sum_{s=1}^{N}(-1)^s\sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_s\leqslant N}\frac{(M-M_{k_1}-\ldots-M_{k_s})^{[n]}}{M^{[n]}}$.

1.33. 1/2; 1/3. 1.34. $C_M^mC_{N-M}^{n-m}/C_N^n$, $C_n^m\alpha^m(1-\alpha)^{n-m}$, $m=0, 1, 2, \ldots, n$. 1.35. $\frac{1}{k+1}$. 1.36. $\frac{12546}{13195}=0{,}9508147\ldots$

1.37. 0, если числа мужчин и женщин не равны друг другу; $\frac{2^{n+1}-2}{C_{2n}^n}$, если число гостей каждого пола равно n.

1.38. $\frac{2911}{1271256}=0{,}00228986\ldots$ 1.39. 7/9. 1.40. $\frac{7}{9}\cdot\frac{(6^{[k-2]})^2}{62^{[k-2]}}$; при $k\geqslant3$; при $k\geqslant6$. 1.41. $(k-1)/20$. 1.42. $P_k=\frac{20^{[k]}}{20^k}$, $P_1=1$, $P_2=0{,}95$, $P_3=0{,}855$, $P_4=0{,}72675$, $P_5=0{,}5814$, $P_6=0{,}43605$.

1.43. $P_k=\frac{1}{10^k}\sum_{m=0}^{[k/2]}\frac{k^{[2m]}10^{[k-m]}}{2^m m!}$, $P_1=1$, $P_2=1$, $P_3=0{,}99$, $P_4=0{,}963$, $P_5=0{,}9144$, $P_6=0{,}8424$.

1.44. 1/190. 1.45. 1/100. 1.46. а) 1/3, 1/3, 1/3; б) 2/3, 2/3, 0; в) 5/9, 5/9, 5/9. 1.47. {1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}; 2. 1.48. а) 5/12, 5/12, 5/12, 5/12; б) 2/3, 2/3, 2/3, 2/3. 1.49. {1, 2, 3, 4, 5, 6}; {7, 8, 9, 10, 11, 12}, {13, 14, 15, 16, 17, 18}, {19, 20, 21, 22, 23, 24}; 3.

1.50. 1) $1-\frac{N!}{N^N}$; 2) $\frac{N!C_{N+1}^2}{N^{N+1}}$; 3) $\left(\frac{1}{2}C_{N+1}^2C_{N-1}^2+C_{N+1}^3\right)\times$ $\times\frac{N!}{N^{N+1}}$; 4) 1, если $n\geqslant N+1$; 0, если $n=0$ или $n=1$; $1-\frac{N^{[n]}}{N^n}$, если $2\leqslant n\leqslant N$.

1.51. $\sum_{l=0}^{N} C_N^l(-1)^l\left(1-\frac{l}{N}\right)^n$. 1.52. 1) $1-\frac{C_{n-1}^{N-1}}{C_{N+n-1}^{N-1}}$; 2) $\frac{NC_{n-1}^{N-2}}{C_{N+n-1}^{N-1}}$.

1.53. а) $\frac{(N-n+1)^{[n]}}{N^{[n]}}$; б) $\frac{n^{[n/2]}(N-n+2)^{[n/2]}}{N^{[n]}}$, если n четно, и 0, если n нечетно; в) $\frac{2^n}{N^{[n]}}\left(\frac{N}{2}\right)^{[n]}$, если N четно, $\frac{1}{N^{[n]}}\left\{2^n\left(\frac{N-1}{2}\right)^{[n]}+n2^{n-1}\left(\frac{N-1}{2}\right)^{[n-1]}\right\}$, если N нечетно.

1.54. а) $\frac{1}{(2N)^{[n]}}\sum_{k=0}^{n}(N-k+1)^{[k]}N^{[n-k]}$;

б) $\frac{1}{(2N)^{[n]}}\sum_{k=0}^{[n/2]}(2k)^{[k]}(N-2k+2)^{[k]}N^{[n-2k]}$;

в) $\frac{1}{(2N)^{[n]}}\sum_{k=0}^{n}2^k\left(\frac{N}{2}\right)^{[k]}N^{[n-k]}$, если N четное;

$$\frac{1}{(2N)^{[n]}}\sum_{k=0}^{n}\left(\left(\frac{N-1}{2}\right)^{[k]}2^k+k\left(\frac{N-1}{2}\right)^{[k-1]}2^{k-1}\right),$$

если N нечетное.

1.55. а) n^{-n}; б) $(n-1)^{n-k}C_n^kn^{-n}$; в) n^{-1}; г) n^{-k}.

1.56. а) $1/n!$; б) 0, если среди $j_1, \ldots, j_k$ есть одинаковые; $1/n^{[k]}$, если все $j_1, \ldots, j_k$ различны; в) $1/n$; г) $2/n^{[3]}$; д) $1/n$.

1.57. $P_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!}\to 1-\frac{1}{e}$ $(n\to\infty)$. 1,59. 1/2.

1.60. а) $\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}\alpha_k!k^{\alpha_k}$; б) $\frac{\alpha_1}{n}$; в) $\frac{n-\alpha_1}{n(n-1)}$.

1.61. $\mathsf{P}\{\eta_1\leqslant x\}=\max(0,2x-1)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$,

$\mathsf{P}\{\eta_2\leqslant x\}=\min(2x,1)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$.

1.62. а) $\min(x,1)$ $(x\geqslant 0)$; б) $4x(1-x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1/2)$, 1 $(x\geqslant 1/2)$; в) πx^2 $(0\leqslant x\leqslant 1/2)$, 1 $(x\geqslant 1/\sqrt{2})$, $x^2\left(\pi-4\arccos\frac{1}{2x}\right)+$

$+\sqrt{4x^2-1}$ $\left(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; г) $\frac{1}{4}\pi x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, $1 (x\geqslant\sqrt{2})$, $x^2\left(\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{x}\right)+\sqrt{x^2-1}$ $(1\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$.

1.63. а) $x(3-2x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1/2)$, 1 $(x\geqslant 1/2)$; б) 0 $(x\leqslant 1)$, $\min(x-1,\ 1)$ $(x\geqslant 1)$; в) $1-(1-x\sqrt{5})^2$ $(0\leqslant x\leqslant 1/\sqrt{5})$, 1 $(x\geqslant 1/\sqrt{5})$.

1.64. $\operatorname{tg}(\pi/8)=\sqrt{2}-1=0{,}4142135\ldots$

1.65. $\left(1-\frac{b}{2a}\right)^2$, $0\leqslant b\leqslant 2a$; 0, $b>2a$.

1.66. $\left(1-\frac{b}{a}\right)^2$, $0\leqslant b\leqslant a$; 0, $b>a$.

1.67. $\left(1-\frac{b}{a}\,\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)^2$, $0\leqslant b\leqslant 2a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$;

0, $b>2a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$.

1.68. $(4\pi-3\sqrt{3})/6\pi=0{,}39103\ldots$

1.69. $P_n=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}=\frac{\pi^2}{2n^2}(1+o(1))$ $(n\to\infty)$.

1.70. 5/6, 1/6. 1.71. $\left(1-2\frac{r}{a}\operatorname{tg}\frac{\pi}{k}\right)^2$, если $r<\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{k}$; 0 при $r\geqslant\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{k}$, $k=3,4,6$.

1.72. 1, если $\theta\geqslant\alpha$; $1-\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\alpha}$, если $|\theta|<\alpha$; 0, если $\theta<-\alpha$; $p\left(\frac{\pi}{2},\theta\right)=p(\alpha,0)=\frac{1}{2}$.

1.73. $Q_x=1-\left(\frac{x}{2R}\right)^2$, $Q_R=\frac{3}{4}$, $Q_{R\sqrt{3}}=\frac{1}{4}$.

1.74. $Q_x=\sqrt{1-\left(\frac{x}{2R}\right)^2}$, $Q_R=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}866025\ldots$, $Q_{R\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$.

1.75. $Q_x=1-\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{x}{2R}$, $Q_R=\frac{2}{3}$, $Q_{R\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$.

1.76. $\mathsf{P}(A_0)=1-\frac{r}{a\pi}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$, $\mathsf{P}(A_1)=\frac{2r}{a\pi}$, $\mathsf{P}(A_2)=\frac{r}{a\pi}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$, где A_k — событие, состоящее в том, что было k пересечений.

1.77. $1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Delta}{T}\right)^2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$.

1.78. $1-\left(1-\frac{t}{T_1}\right)\left(1-\frac{t}{T_2}\right)$.

1.79. $\frac{h}{\sqrt{4r^2+h^2}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}707106\ldots$; $\frac{r}{h}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}8660254\ldots$

1.80. а) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{2\sqrt{a^2+r^2}}$; б) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{b}{2\sqrt{b^2+r^2}}$;

в) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{\sqrt{b^2+r^2}}+\dfrac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\right)$.

1.81. а) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{h}{2\sqrt{(4r)^2+h^2}}$; б) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{17}}=0,378732\ldots$;

в) $\dfrac{r}{h}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}=0,4330127\ldots$

1.82. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2\sqrt{73}}=0,3244382\ldots$ 1.83. $\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$.

1.84. $P_0=1/n^2$, $P_m=8m/n^2$ $(1\leqslant m<n/2)$, $P_{n/2}=(2n-1)/n^2$ (n четкое), $P_m=0$ $(m>n/2)$.

1.85. $P_{2k}=\dfrac{1}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^k$, $P_{2k+1}=\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^k$, $P_2=0,785398\ldots$, $P_3=0,523598\ldots$, $P_{10}=2,49039\ldots\cdot 10^{-3}$, $P_{20}=$ $=2,46113\ldots\cdot 10^{-8}$.

Глава 2

2.1. 1/3. 2.2. 1/7. 2.3. 1/19 $(i=0)$, 2/19 $(i=1,2,\ldots,9)$, 0 $(i=10,\ldots,18)$. 2.4. $\dfrac{M-\varepsilon_1-\ldots-\varepsilon_s}{N-s}$. 2.5. $\dfrac{M}{N}$.

2.6. $\dfrac{N!}{l_1!\,l_2!\,(N-l_1-l_2)!}\cdot\dfrac{1}{3^N}$. 2.7. а) 1/5; б) 1/5; в) 1/30.

2.8. а) 1/2; б) 3/5; в) 4/7.

2.9. $\mathsf{P}\{A_k\}=\dfrac{M}{N}$, $\mathsf{P}\{B_{k,l}\}=\dfrac{M^{[2]}}{N^{[2]}}$, $\mathsf{P}\{C_{k,l}\}=\dfrac{M(N-M)}{N^{[2]}}$.

2.10. $\mathsf{P}\{A_1\}=\dfrac{83}{210}=0,3952\ldots$, $\mathsf{P}\{A_2\}=\dfrac{43}{210}=0,2047\ldots$, $\mathsf{P}\{B\}=$ $=2/5$.

2.11. 1) $C^{n_1}_{n_1+n_2}N_1^{[n_1]}N_2^{[n_2]}N_3/N^{[n_1+n_2+1]}$;

2) $\sum\limits_{m\geqslant 0}N_2^{[m]}N_3/N^{[m+1]}$;

3) $(N_1+N_2)^{[k-1]}N_3/N^{[k]}$, $N=N_1+N_2+N_3$.

2.12. а) $\dfrac{a+b}{a+2b}$, б) $\dfrac{a}{a+b}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{b^{[2k]}}{(a+b-1)^{[2k]}}$.

2.13. а) $P_1=\dfrac{(a+b)^2}{(a+b)^2+b(a+2b)}$, $P_2=\dfrac{b}{a+b}P_1$, $P_3=$ $=\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^2P_1$;

б) $P_1=\dfrac{a}{a+b}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{b^{[3k]}}{(a+b-1)^{[3k]}}$, $P_2=\dfrac{ab}{(a+b)^{[2]}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(b-1)^{[3k]}}{(a+b-2)^{[3k]}}$,

$$P_3 = \frac{ab^{[2]}}{(a+b)^{[3]}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b-2)^{[3k]}}{(a+b-3)^{[3k]}}.$$

2.14. $P_k = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{k} \frac{(k-1)^{[l]}}{k^l}$; при $k = 6$.

2.15. а) A_l, B_k независимы при любых l, k; б) A_2, C_2 независимы; в) A_4, C_4 зависимы.

2.16. Независимы пары A_i, A_j с $i, j \in \{1, 2, 5, 6\}$, и события наборов $\{A_1, A_5, A_6\}$ и $\{A_2, A_5, A_6\}$.

2.17. Только при $r \leqslant 0$, $r \geqslant 2/3$ и $r = 1/3$.

2.18. а), б) Являются. 2.19. A_1A_2 и A_3 зависимы.

2.21. Является при $n = 2$; не обязательно является при $n \geqslant 3$. 2.22. $k \leqslant \log_2 n$. 2.23. $k \leqslant n - 1$.

2.24. а) $\alpha_1\alpha_2$; б) $1 - (1-\beta_1)(1-\beta_2)$. 2.25. а) $p = (1-\alpha_1) \times \times (1-\alpha_2)$; б) $p \geqslant 1 - \alpha_1 - \alpha_2$.

2.26. а) $\left(C_6^3 C_{43}^3 / C_{49}^6\right)^2 = 0{,}0003115\ldots$, б) $\left(\sum_{k=3}^{6} C_6^k C_{43}^{6-k} / C_{49}^6\right)^2 = 0{,}0003473\ldots$

2.27. $q_5\{q_3 + p_3q_4(q_1 + p_1q_2)\}$, где $q_i = 1 - p_i$.

2.28. $1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)\left(1 + \sum_{k=1}^{n} p_k/(1-p_k)\right)$.

2.29. $38/105 = 0{,}3619047\ldots$

2.30. а) 5/28; б) $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{7}\right)^k + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{7}\right)^k$.

2.31. а) 11/20;

б) $0{,}1\left(\frac{1}{4}\right)^k + 0{,}6\left(\frac{1}{2}\right)^k + 0{,}3\left(\frac{3}{4}\right)^k$, $k = 1, 2, \ldots$;

в) $0{,}1\frac{1^{[k]}}{4^{[k]}} + 0{,}6\frac{2^{[k]}}{4^{[k]}} + 0{,}3\frac{3^{[k]}}{4^{[k]}}$, $k = 1, 2, 3, 4$.

2.32. 0,87107... 2.33. а) 11/30, б) 47/120, в) 47/90.

2.34. а) $p(1-\beta_1)(1-\beta_2) + (1-p)\alpha_1\alpha_2$;

б) $p(1-\beta_1)(1-\beta_2)/[p(1-\beta_1)(1-\beta_2) + (1-p)\alpha_1\alpha_2]$.

2.35. а), б), в) M/N $(r < N)$. 2.36. x/a.

2.37. а) 0,573683; б) 0,7776829...; 0,8732712...

2.38. $P_1 = 0{,}0282$, $P_2 = 0{,}0428$. 2.39. $0{,}027 \leqslant P_1 \leqslant 0{,}033$, $0{,}041 \leqslant \leqslant P_2 \leqslant 0{,}047$.

2.40. 5/11. 2.41. $14/17 = 0{,}8235294\ldots$ 2.42. $2\alpha p_1/[2\alpha p_1 + (1-\alpha) \times \times (p_2 + p_3)]$.

2.43. а) $\alpha(1-\gamma)/[\alpha(1-\gamma) + \gamma(1-\beta)]$, б) 0,9173...

2.44. $q_0 = p(1-\alpha)/[p(1-\alpha) + (1-p)(1-\beta)]$, $q_1 = \alpha p/[\alpha p + +\beta(1-p)]$, $q_0 > q_1 \Leftrightarrow \beta > \alpha$. 2.45. а) 2/11; б) 6/11; в) 3/11.

2.46. $1 - (7/8)^{20} = 0{,}930791\ldots$

2.47. а) 0,348678...; б) 0,057395...; в) 0,987204...

2.48. $C_5^2\left(\frac{1}{6^3}\right)^2\left(1 - \frac{1}{6^3}\right)^3 = 0{,}00021137\ldots$

2.49. $C_n^m p^{m+n} q^{n-m}$. 2.50. $\left(1 - p^2\right)^N$. 2.51. $\left(rq^{r-1}p + q^r\right)^N$.

2.52. $\left[q_1 q_2 \ldots q_r \left(1 + \sum\limits_{i=1}^{r} p_i/q_i\right)\right]^N$.

2.53. а) $C_N^k p^{rk} (1-p^r)^{N-k}$; б) $C_N^k q^{r(N-k)} (1-q^r)^k$.

2.54. а) pq^3, б) $(1-q^3)pq^3$, в) $(1-q^3-pq^3)pq^3$.

2.55. $q_k = C_{5+k}^k 2^{-5-k}$; $q_0 = 1/32$, $q_1 = 3/32$, $q_2 = 21/128$, $q_3 = 7/32$, $q_4 = 63/256$, $q_5 = 63/256$.

2.56. $C_{m+r}^m 2^{-r-m}$. 2.57. 0,593126... 2.58. 536. 2.59. 0,26502. 2.60. 0,26424. 2.61. а) 0,68269, 0,31731; б) 0,72874, 0,36820. 2.62. а) 0,68269, 0,31731; б) 0,66906, 0,33094. 2.63. 0,95. 2.64. 0,846. 2.65. а) 558; б) 541. 2.66. 547. 2.67. 0,1587. 2.68. 0,0228. 2.69. 0,98101. 2.70. 0,8185. 2.71. 0,80085. 2.72. $C_{l-1}^{k-1} p^k q^{l-k}$. 2.73. $\left(\frac{25}{36}\right)^{k-1} \frac{11}{36}$. 2.74. а) 7/8; б) 2/3; в) 1/3. 2.75. q; 0,5. 2.76. q^2; 0,25. 2.77. $q(1-p^3)/(q+p^3)$; 0,7.

2.78. $C_n^{(n+m)/2} p^{(n+m)/2} q^{(n-m)/2}$, если $(n+m)/2$ — целое, 0 в противном случае.

2.79. $C_4^2 8!\,(2!)^{-2}\,(0,1)^6\,(0,3)^2 = 0,0054432\ldots$ 2.80. $p_1^n + np_1^{n-1}p_3$.

2.81. 0,76896. 2.82. $C_n^{m_1} p_1^{m_1} (1-p_1)^{n-m_1}$.

2.83. $\dfrac{(n-m_1)!}{m_2! \ldots m_N!} \prod\limits_{j=2}^{N} \left(\dfrac{p_j}{1-p_1}\right)^{m_j}$.

2.84. а) $n! \left(\prod\limits_{j=1}^{N_1} k_{1j}! \cdot \prod\limits_{j=1}^{N_2} k_{2j}!\right)^{-1} \prod\limits_{j=1}^{N_1} p_{1j}^{k_{1j}} \prod\limits_{j=1}^{N_2} p_{2j}^{k_{2j}}$;

б) $\dfrac{n!}{(n-n_2)!\,n_2!} p_1^{n-n_2} p_2^{n_2}$, где $p_i = p_{i1} + \ldots + p_{iN_i}$, $i = 1, 2$.

в) $\dfrac{(n-n_2)!}{k_{11}! \ldots k_{1N_1}!} \prod\limits_{j=1}^{N_1} \left(\dfrac{p_{1j}}{p_1}\right)^{k_{1j}}$, если $k_{11} + k_{12} + \ldots + k_{1N} = n - n_2$, 0 в противном случае.

2.85. $C_N^k \left(1 - \dfrac{k}{N}\right)^n \sum\limits_{l=0}^{N-k} C_{N-k}^l (-1)^l \left(1 - \dfrac{l}{N-k}\right)^n$.

2.86. 3/4. 2.87. $\mathsf{P}\{\theta_{3\nu+1} = i\} = 1/3$, $i = 1, 2, 3$.

2.88. $p_1/(p_1+p_2)$. 2.89. а) 0,489142...; б) 0,295635...; в) 0,215222...

Глава 3

3.1. $\mathsf{P}\{\eta_1 = i\} = 1/5$, $i = -2, -1, 0, 1, 2$; $\mathsf{P}\{\eta_2 = 0\} = 1/5$, $\mathsf{P}\{\eta_2 = i\} = 2/5$, $i = 1, 2$.

3.2. а) $C = 1$; б) 3/4; в) $(n_2 - n_1 + 1)/(n_1(n_2+1))$, $n_1 \leqslant n_2$.

3.3. а) $C = 4$; б) 1/6; в) $2\left(\dfrac{1}{n_1(n_1+1)} - \dfrac{1}{(n_2+1)(n_2+2)}\right)$.

3.4. а) $C = 3$; б) $p_\eta(x) = 3x^2$ $(0 < x < 1)$; в) 0,026.

3.5. а) $2\alpha x e^{-\alpha x^2}$ $(x > 0)$; б) $\alpha e^{-\alpha\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$ $(x > 0)$; в) $\alpha^2 \exp\{-\alpha(e^{\alpha x} - x)\}$ $(-\infty < x < \infty)$.

3.6. а) $\alpha e^{-\alpha x}/(1 - e^{-\alpha})$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$; б) 1 $(x \in [0, 1])$.

3.7. а) 1/2 ($x \in [1, 3]$); б) e^{-x} ($x > 0$).

3.8. $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$, $\frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$.

3.9. $p_\eta(x) = p_\zeta(x) = 1/(\pi\sqrt{x(1-x)})$ $(0 < x < 1)$.

3.10. $p_\eta(x) = p_\zeta(x) = p_\xi(x)$.

3.11. а) $\varphi(x) = g_{-1}(x)$; б) распределение ζ совпадает с распределением ξ.

3.16. а) $p_{-1,\cdot} = p_{1,\cdot} = 1/2$, $p_{\cdot,-1} = 1/3$, $p_{\cdot,0} = 1/4$, $p_{\cdot,1} = 5/12$; б) $q_{-2,1} = 1/8$, $q_{-1,0} = 1/12$, $q_{0,-1} = 1/2$, $q_{1,0} = 1/6$, $q_{2,1} = 1/8$, остальные $q_{ij} = 0$; в) $q_{-2,\cdot} = q_{2,\cdot} = 1/8$, $q_{-1,\cdot} = 1/12$, $q_{1,\cdot} = 1/6$, $q_{0,\cdot} = q_{\cdot,-1} = 1/2$, $q_{\cdot,0} = q_{\cdot,1} = 1/4$.

3.17. а) $\sum\limits_k p_k^2$; б) 0. 3.18. $1 - \frac{1}{\pi}\left(4 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{3} - \frac{\sqrt{63}}{4}\right) = 0{,}7114\ldots$

3.19. $1 - \frac{1}{2}x$ $(0 < x < 2)$.

3.20. а) $C = 1$; б) $p_{\xi_1}(x) = p_{\xi_2}(x) = x + \frac{1}{2}$ $(0 < x < 1)$; в) $3x^2$ $(0 < x < 1)$.

3.21. $4x^{-5}$ $(x \geqslant 1)$. 3.22. $p_1(x) = f(x)$, $p_2(x) = g(x)$.

3.23. $q(u, v) = \frac{v}{\sqrt{2v^2 - u^2}} p\left(\frac{\sqrt{2v^2-u^2}+u}{2}\right) p\left(\frac{\sqrt{2v^2-u^2}-u}{2}\right)$, $0 \leqslant |u| \leqslant v$.

3.24. $q(r, \varphi) = rp(r\cos\varphi)\, p(r\sin\varphi)$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

3.25. $1 - e^{-1} = 0{,}6321\ldots$

3.26. а) $\frac{1}{a}\left(1 - \left|\frac{x}{a} - 1\right|\right)$ $(0 \leqslant x \leqslant 2a)$, 0 $(x \notin [0, 2a])$; б) $\frac{1}{a}\left(1 - \left|\frac{x}{a}\right|\right)$ $(|x| \leqslant a)$, 0 $(|x| > a)$; в) $\frac{1}{a^2} \ln \frac{a^2}{x}$ $(0 < x \leqslant a^2)$, 0 $(x \notin (0, a^2))$, г) 1/2 $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, $1/(2x^2)$ $(x \geqslant 1)$, 0 $(x < 0)$.

3.27. а) xe^{-x} $(x \geqslant 0)$; б) $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ $(-\infty < x < \infty)$, в) e^{-x} $(x \geqslant 0)$; г) $\frac{1}{1+x^2}$ $(x \geqslant 0)$.

3.28. $\frac{1}{2} \min\left\{1, \frac{3}{2} - \left|x - \frac{3}{2}\right|\right\}$ $(0 \leqslant x \leqslant 3)$; 0 $(x \notin [0, 3])$.

3.29. $1 - e^{-x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$; $e^{-(x-1)} - e^{-x}$ $(1 \leqslant x)$.

3.30. а) $1 - |1 - x|$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$, 0 в остальных точках; б) $\frac{x^2}{2}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\frac{3}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$, $\frac{(3-x)^2}{2}$ при $2 \leqslant x \leqslant 3$, 0 в остальных случаях. Вероятность $\mathsf{P}\{0{,}5 \leqslant \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leqslant 2{,}5\} = \frac{23}{24} = 0{,}95833\ldots$

3.32. а) $p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \alpha^2 x e^{-\alpha x}$ $(x > 0)$; б) $\mathsf{P}\{\xi_1 + \xi_2 = m\} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^m}{m!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$, $m = 0, 1, \ldots$

3.33. а) $\alpha n e^{-\alpha n x}$ $(x>0)$; б) $n\alpha e^{-\alpha x}(1-e^{-\alpha x})^{n-1}$ $(x>0)$.

3.34. $p_{\xi_1+\xi_2}(x)=\dfrac{\lambda^{\alpha+\beta}x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}e^{-\lambda x}\ (x>0)$.

3.35. Гамма-распределение с параметрами $(\lambda,\ \alpha_1+\ldots+\alpha_n)$.

3.36. $\beta\,\dfrac{(\beta x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\beta x}$ $(x>0)$. 3.37. $\dfrac{2}{(1+|1-2x|)^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1)$, $0\ (x\notin[0,\ 1])$.

3.38. $(n-1)(1-x)^{n-2}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, 3.39. $p_{\xi_1+\xi_2}(x)=1/2$ $(x\in[0,\ 2])$.

3.41. $\mathsf{P}\{\zeta_1=k\}=0{,}1\ (0\leqslant k\leqslant 9)$, $\mathsf{P}\{\zeta_2=0\}=0{,}55$, $\mathsf{P}\{\zeta_2=1\}=$ $=0{,}45$. Случайные величины ζ_1 и ζ_2 зависимы.

3.42. Зависимы. 3.43. $p_{\xi_1,\xi_2}(x,\ y)=1/\left(2\pi\sqrt{1-x^2-y^2}\right)$ $(x^2+y^2\leqslant 1)$; $p_{\xi_1}(x)=1/2$ $(|x|\leqslant 1)$. 3.44. $p_\xi(x)=\dfrac{1}{2}\cos x$ $\left(|x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$. 3.45. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2(2n+1)^2}$. 3.46. а) 1/2; б) $2\lambda e^{-2\lambda t}$ $(t>0)$; в) 1/2. 3.47. $\mathsf{P}(A_i)=n_i/n$, $i=1,\ 2,\ 3$.

3.49. $\mathsf{P}(\tau_1=l_1,\ \tau_2=l_2)=q^{l_1+l_2-2}p^2$, $l_1,\ l_2\geqslant 1$, $q=1-p$; $\mathsf{P}\{\tau_1=l\}=\mathsf{P}\{\tau_2=l\}=q^{l-1}p$, $l\geqslant 1$. Случайные величины независимы. 3.50. а) зависимы; б), в), г) независимы.

3.51. $\mathsf{P}(\theta=l,\ \nu=n)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{6}\,(l=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ n=1,\ 2,\ldots)$. Случайные величины ν и θ независимы.

3.52. а), б) $\mathsf{P}(\tau_2=l_2,\ \ldots,\ \tau_N=l_N)=\prod\limits_{k=2}^{N}\mathsf{P}(\tau_k=l_k)$; $\mathsf{P}(\tau_k=l_k)=$ $=\left(\dfrac{k-1}{N}\right)^{l_k-1}\left(1-\dfrac{k-1}{N}\right)$. Величины независимы. в) $\mathsf{P}(\theta_1=i_1,$ $\theta_2=i_2,\ \ldots,\ \theta_N=i_N)=1/N!$, если $i_1,\ \ldots,\ i_N$ различны.

3.53. $\mathsf{P}(\theta_1=i_1,\ \theta_2=i_2,\ \ldots,\ \theta_N=i_N)=p_{i_1}\dfrac{p_{i_2}}{1-p_{i_1}}\cdot\dfrac{p_{i_3}}{1-p_{i_1}-p_{i_2}}\cdot\ldots$ $\ldots\cdot\dfrac{p_{i_N}}{1-p_{i_1}-\ldots-p_{i_{N-1}}}$.

3.54. а) $M(N-M)^{[k]}/N^{[k+1]}$; б) $M^{[2]}(N-M)^{[k+l]}/N^{[k+l+2]}$; в) $M!(N-M)!/N!$, если $k_1+k_2+\ldots+k_{M+1}=N-M$, и 0 в противном случае.

3.55. $F(x_2,\ y_2)-F(x_2,\ y_1)-F(x_1,\ y_2)+F(x_1,\ y_1)$.

3.56. $1-\sqrt{2}/2=0{,}29289\ldots$ 3.60. а) $F_{\xi_{(1)}}(x)=1-(1-F(x))^n$; б) $F_{\xi_{(n)}}(x)=F^n(x)$; в) $F_{\xi_{(1)},\xi_{(n)}}(x_1,\ x_2)=F^n(x_2)-(F(x_2)-F(x_1))^n$, $x_1\leqslant x_2$.

3.61. а) $\dfrac{n!}{(m-1)!(n-m)!}F^{m-1}(x)\,[1-F(x)]^{n-m}\,p(x)$;

б) $\frac{n!}{(k-1)!(m-k-1)!(n-m)!} F^{k-1}(x_1)\cdot[F(x_2)-F(x_1)]^{m-k-1}\times$
$\times(1-F(x_2))^{n-m} p(x_1) p(x_2) \quad (x_1 < x_2)$.

3.62. $1/(k+1)$ во всех случаях. 3.63. $n!\, p(x_1)p(x_2)\ldots p(x_n)$, если $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, и 0 в остальных случаях.

3.67. $1-\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^k}\right)$.

3.72. $4t^2 \leqslant \mathsf{P}\left\{\left|\zeta-\frac{1}{2}\right| \leqslant t\right\} \leqslant 4t(1-t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2$.

3.73. $F_{-1}(1-1/\sqrt{2}) \leqslant m_\zeta \leqslant F_{-1}(1/\sqrt{2})$, где $F_{-1}(y) = \sup\{x: F(x) \leqslant y\}$.

3.75. 0; 6/5. 3.76. 2. 3.77. $\mathsf{M}\xi = 3/2$; $\mathsf{M}\eta = 3/4$; $\mathsf{D}\xi = 3/4$; $\mathsf{D}\eta = 3/80$.

3.78. а) $\mathsf{M}\xi = \mathsf{D}\xi = \lambda$, $\mathsf{M}\xi^{[k]} = \lambda^k$;

б) $\mathsf{M}\xi = np$, $\mathsf{D}\xi = npq$, $\mathsf{M}\xi^{[k]} = n^{[k]}p^k$.

3.79. $\mathsf{M}\xi_i = \frac{7}{12}$, $\mathsf{D}\xi_i = \frac{11}{144}$ $(i = 1, 2)$, $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{144}$.

3.80. $\mathsf{M}\xi_i = 0$, $\mathsf{D}\xi_i = 1/2$ $(i = 1, 2)$, $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$.

3.81. $\mathsf{M}\eta_1 = \mathsf{M}\eta_2 = \operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = 0$; случайные величины зависимы.

3.82. а) $\mathsf{M}\sin\xi = \mathsf{M}\cos\xi = 0$, $\mathsf{D}\sin\xi = \mathsf{D}\cos\xi = 1/2$;

б) $\mathsf{M}\sin^{2k+1}\xi = \mathsf{M}\cos^{2k+1}\xi = 0$, $\mathsf{M}\sin^{2k}\xi = \mathsf{M}\cos^{2k}\xi = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$ при $k \to \infty$.

3.83. а) $\mathsf{M}\sin\xi = \frac{2}{\pi} = 0{,}6366\ldots$; $\mathsf{D}\sin\xi = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} = 0{,}0947\ldots$; $\mathsf{M}\cos\xi = 0$, $\mathsf{D}\cos\xi = 1/2$;

б) $\mathsf{M}\sin^{2k+1}\xi = \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!}\,\frac{2}{\pi} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$ при $k \to \infty$, остальные моменты те же, что в задаче 3.82. 3.84. 4/3.

3.85. $1-(1+\alpha)^{-2}$ при $\alpha > -1$; $-\infty$ при $\alpha \leqslant -1$.

3.86. $\mathsf{M}\xi = 2R/3$, $\mathsf{D}\xi = R^2/18$.

3.87. а) 1; б) -1; в) $\frac{1}{4}\sqrt{15} = 0{,}9682\ldots$; г) 0; д) $\frac{8-2\pi}{8-\pi^2} = -0{,}91827\ldots$

3.88. а) $2\cdot\frac{9\pi-32}{9\pi^2-64} = -0{,}300137\ldots$; б) $-1/2$. 3.89. $p_i(x) = iC_n^i x^{i-1}(1-x)^{n-i}$, $\mathsf{M}\xi_{(i)}^k = \frac{(i+k-1)^{[k]}}{(n+k)^{[k]}}$, $\mathsf{D}\xi_{(i)} = \frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)}$.

3.90. Если $1 \leqslant i < j \leqslant n$, то $\operatorname{cov}(\xi_{(i)}, \xi_{(j)}) = \frac{i(n-j+1)}{(n+1)^2(n+2)}$, $\rho(\xi_{(i)}, \xi_{(j)}) = \sqrt{\frac{i(n-j+1)}{j(n-i+1)}}$ и $\rho(\xi_{(i)}, \xi_{(j)}) \to 0$, если $n \to \infty$, $\min\left\{\frac{i}{j}, \frac{n-j+1}{n-i+1}\right\} \to 0$.

3.93. Равенство неверно. 3.94. $\min M\xi\eta\zeta = -\infty$, $\max M\xi\eta\zeta = +\infty$. 3.95. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ во всех случаях. 3.96. а), г), ж) могут, остальные — не могут. 3.97. а) $x \in [-1/2, 1]$; б) $x \in [-1, 1/2]$.

3.100. а) $M\zeta = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, $D\zeta = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}$; б) $M\eta = (m, a)$, $D\eta = a\sigma a'$; в) $m + m^*$, $m - m^*$, $am + bm^*$; $\sigma + \sigma^*$, $\sigma + \sigma^*$, $a^2\sigma + b^2\sigma^*$.

3.102. $MS_n = 0$, $DS_n = n/2$.

3.103. $MR_n = 0$, $DR_n = 1$, $n \geqslant 2$. 3.104. $n/3$. 3.105. $D\eta_n = (11n - 1)/180$, $nD\,|\xi_1 - \xi_2| = n/18$. 3.106. $M\zeta_n = na$, $M\zeta_n^* = npa$, $D\zeta_n = n\sigma^2$, $D\zeta_n^* = np\,(\sigma^2 + a^2q)$, $\operatorname{cov}\left(\zeta_n, \zeta_n^*\right) = np\sigma^2$. 3.107. $M\zeta_n = 1/n$.

3.108. $M\zeta_n^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$, $D\zeta_n^{(1)} = 2n\sigma^2$, $D\zeta_n^{(2)} = 2\sigma^2$, $D\zeta_n^{(3)} = n\,(n+1)\,\sigma^2$, $D\zeta_n^{(4)} = 0$.

3.109. $M\zeta_n^{(i)} = 0$, $D\zeta_n^{(i)} = n\sigma^4 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$.

3.110. $M\zeta_n^{(i)} = n/4 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$, $D\zeta_n^{(1)} = 7n/144$, $D\zeta_n^{(2)} = (13n - 6)/144$, $D\zeta_n^{(3)} = (3n^2 + 4n)/144$, $D\zeta_n^{(4)} = 13n/144$.

3.111. $M\zeta_n^{(i)} = na^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$, $D\zeta_n^{(1)} = n\sigma^2\,(\sigma^2 + 2a^2)$, $D\zeta_n^{(2)} = \sigma^2\,[n\,(\sigma^2 + 4a^2) - 2a^2]$, $D\zeta_n^{(3)} = n\sigma^2\,(na^2 + \sigma^2 + a^2)$, $D\zeta_n^{(4)} = n\sigma^2\,(\sigma^2 + 4a^2)$.

3.112. $MS_n = MT_n = 0$, $DS_n = n\sigma^2$, $DT_n = \sigma^2 n\left(1 + \frac{n-1}{k}\right)$.

3.113. $M\theta_r = 1/r$, $r \geqslant 1$; $D\theta_1 = 1$.

3.114. $\sum_{k=1}^{N} (M - M_k)^{[n]}/M^{[n]}$, где $M = M_1 + \ldots + M_N$.

3.115. $M\xi = n\frac{M}{N}$, $D\xi = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$.

3.116. $M\mu_0(n, N) = N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = Ne^{-\alpha}\,(1 + o\,(1))$, $D\mu_0(n, N) = N^{[2]}\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n + N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\left(1 - N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right) = Ne^{-\alpha}\,(1 - (1 + \alpha)\,e^{-\alpha})\,(1 + o\,(1))$, $n/N \to \alpha$, $N \to \infty$.

3.117. $M\mu_r(n, N) = \frac{NC_n^r}{N^r}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-r} = N\frac{\alpha^r}{r!}\,e^{-\alpha}\,(1 + o\,(1))$, $\frac{n}{N} \to \alpha$, $N \to \infty$.

3.118. $M\mu_0 = 1{,}3629\ldots$, $M\mu_1 = 3{,}0975\ldots$, $M\mu_2 = 3{,}3791\ldots$, $M\mu_3 = 2{,}3551\ldots$, $M\mu_4 = 1{,}1775\ldots$, $M\mu_5 = 0{,}4496\ldots$, $M\mu_6 = 0{,}1362\ldots$, $M\mu_7 = 0{,}0336\ldots$

3.119. $\mathsf{M}\mu_r = NC_{N+n-r-2}^{N-2}/C_{N+n-1}^{N-1} = \dfrac{n^{[r]}N^{[2]}}{(N+n-1)^{[r+1]}} \sim$
$\sim N \dfrac{\alpha^r}{(\alpha+1)^{r+1}}$.

3.120. а) np_i; б) $np_i(1-p_i)$; в) $-np_ip_j$.

3.121. а) $\sum\limits_{j=1}^{N}(1-p_j)^n$; б) $\sum\limits_{j=1}^{N} C_n^r p_j^r (1-p_j)^{n-r}$; в) $N\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n$.

3.122. $\mathsf{M}\nu_k = N\sum\limits_{l=0}^{k-1}\dfrac{1}{N-l}$, $\mathsf{D}\nu_k = N\sum\limits_{l=0}^{k-1}\dfrac{1}{(N-l)^2}$, $\mathsf{M}\nu_N =$
$= (1+o(1))\,N\ln N$, $N\to\infty$.

3.123. $N\sum\limits_{k=r+1}^{n}(k-r)\,C_n^k\dfrac{1}{N^k}\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{n-k}$.

3.124. 155. 3.125. $\mathsf{M}\mu_{00} = (n-1)\,q^2$, $\mathsf{D}\mu_{00} = pq^2(n-1+q\times$
$\times(3n-5))$; $\mathsf{M}\mu_0^* = (n-1)\,q^2$, $\mathsf{D}\mu_0^* = (n-1)\,pq^2(1+q)$.

3.126. $\mathsf{M}\mu_{111} = (n-2)\,p^3$, $\mathsf{D}\mu_{111} = p^3q(n-2+(3n-8)\,p+$
$+(5n-16)\,p^2)$; $\mathsf{M}\mu_1^* = (n-2)\,p^3$, $\mathsf{D}\mu_1^* = (n-2)\,p^3q\,(1+p+p^2)$.

3.127. а) q^n; б) $\sum\limits_{k=1}^{n}(n-k+1)\,p^kq^{n-k} = \dfrac{p}{(q-p)^2}\,(nq^n(q-p)-$
$-p(q^n-p^n))$ при $p\neq q$, $C_{n+1}^2 2^{-n}$ при $p=q=1/2$; в) $npq+p^2$;
г) $pq(1-3pq)$.

3.128. $\mathsf{M}\xi = \pi$. 3.129. $1+\dfrac{2p}{1-p^2}$.

3.130. $\dfrac{\pi}{n+1}\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$. 3.131. $\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$. 3.139. 60°.

3.143. а) $\mathsf{M}\eta_k = 1/n$; б) $\rho(\eta_k, \eta_l) = -1/(n-1)$ $(k\neq l)$;
в) $\rho(\eta_1+\ldots+\eta_k, \eta_1+\ldots+\eta_l) = \sqrt{\dfrac{k(n-l)}{l(n-k)}}$, $1\leqslant k<l\leqslant n$.

3.144. $(N+1)/(M+1)$ $(i=1, \ldots, M)$, $(N-M)/(M+1)$ $(i=M+1)$.
3.146. $(\sigma_1-\sigma_2)^2\leqslant \mathsf{D}(\xi+\eta)\leqslant(\sigma_1+\sigma_2)^2$. 3.160. $x^n/n!$. 3.161. $e =$
$= 2{,}71828\ldots$ 3.162. $c_k = 1/(\lambda\sigma_k^2)$, где $\lambda = (1/\sigma_1^2)+\ldots+(1/\sigma_n^2)$;
$\mathsf{D}\eta_n = 1/\lambda$. 3.163. а) 0,99730... б) 0,98168... в) 1; г) $8/9 = 0{,}8888\ldots$,
д) 0,91393... 3.164. $\mathsf{M}\Delta = 0$, $\mathsf{D}\Delta = \mathsf{M}\Delta^2 = n!\,\sigma^{2n}$. 3.166. $\mathsf{M}\sin\xi >$
>0, $\mathsf{M}\cos\xi > 0$. 3.167. $\max\{p, 1-p\}$. 3.168. б) $1/(pq)$.
3.169. б) $1/(pq)$. 3.170. $n\{p[(1-\beta_1)(1-\beta_2)a-(1-(1-\beta_1)(1-\beta_2))c]-$
$-q[\alpha_1\alpha_2b+(1-\alpha_1\alpha_2)\,c]\}$.

3.171. Координата b точки B — медиана распределения ξ, т. е. $\mathsf{P}(\xi\leqslant b) = \mathsf{P}(\xi\geqslant b) = 1/2$.

3.172. x — медиана ξ, y — медиана η, т. е. $\mathsf{P}(\xi\leqslant x) = \mathsf{P}(\xi\geqslant x) =$
$= \mathsf{P}(\eta\leqslant y) = \mathsf{P}(\eta\geqslant y) = 1/2$.

3.173. $\min_x \mathsf{M}(\xi - x)^2 = \mathsf{D}\xi$; минимум достигается при $x = \mathsf{M}\xi$.

3.174. $A = \mathsf{M}X$.

3.175. а) $z = F_{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right) = F_{-1}(0{,}99)$; б) $z = F_{-1}((1-\alpha)^{1/T}) = F_{-1}(0{,}9999)$, где $F_{-1}(u) = \sup\{x: F(x) \leqslant u\}$ — функция, обратная к $F(x)$.

3.176. $\mathsf{M}\tau_T = \infty$, $\mathsf{P}\{\tau_T \leqslant u\} = u/(u+T)$, $\mathsf{P}\{\tau_{100} \leqslant 10\} = 1/11$.

3.183. а), б) Любое число из $(0, 1]$; в) любое число из $[0, a]$ при $a < 1$; любое число из $[(a-1)/a, 1]$ при $a > 1$. 3.185. $1/3 \leqslant \mathsf{M}\zeta \leqslant 2/3$.

3.186. $$aF_{-1}(a) - \int_{-\infty}^{F_{-1}(a)} F(x)\,dx \leqslant \mathsf{M}\xi\chi \leqslant aF_{-1}(1-a) + \int_{F_{-1}(1-a)}^{\infty} (1 - F(x))\,dx,$$ где $F_{-1}(y) = \sup\{x: F(x) \leqslant y\}$; минимальное значение $\mathsf{M}\xi\chi$ достигается при $\{\chi = 1\} = \{\xi \leqslant F_{-1}(a)\}$, а максимальное — при $\{\chi = 1\} = \{\xi \geqslant F_{-1}(1-a)\}$.

3.187. $\frac{1}{2} - p\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{2p}\right) \leqslant \mathsf{M}\zeta \leqslant \frac{1}{2} + p\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{2p}\right)$; экстремальные значения достигаются при $\{\chi = 1\} = \{\xi - \eta \leqslant -1 + \sqrt{2p}\}$ и $\{\chi = 1\} = \{\xi - \eta \geqslant 1 - \sqrt{2p}\}$. 3.188. а), б) Да.

3.189. а) $p/(1+q)$; б), в) $q/2\,(1+q)$; г) $2(1+q)\,pq^{k-2}(1 - q^{k-1})$ $(k \geqslant 2)$; д) $2(1+q)\,pq^{2(k-1)}$ $(k \geqslant 1)$; е) $(1+q)\ pq^{2(k-1)}$ $(k \geqslant 1)$; ж) $1/(l-1)$ $(k = 1, \ldots, l-1)$; з) $l/2$.

3.190. а) $\mathsf{P}\{\xi = k\} = p(1-p)^{k-1}$; б) $\mathsf{P}\{\xi = k\} = \left(1 - \frac{c}{1-c}\right) \times \left(\frac{c}{1-c}\right)^k$; в) $\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{r^k}{k!}e^{-r}$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

3.191. а) $\frac{1}{z}$ $(x \in [0, z])$, 0 $(x \notin [0, z])$;

б) $1/z$ $(0 \leqslant x \leqslant z)$, если $0 < z \leqslant 1$, $1/(2-z)$ $(z - 1 \leqslant x \leqslant 1)$, если $1 \leqslant z < 2$; в) $6x(z-x)/z^3$ $(0 \leqslant x \leqslant z)$.

3.192. а) $z^2/12$; б) $z^2/12$ при $0 \leqslant z \leqslant 1$; $(2-z)^2/12$ при $1 \leqslant z \leqslant 2$; в) $z^2/20$.

3.193. $\mathsf{M}(\xi \mid \xi + \eta = z) = z/2$, если $\mathsf{P}(\xi + \eta = z) > 0$ или плотность $p_{\xi+\eta}(z) > 0$.

3.194. $(1 - (z/2))^{-1}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1 - (z/2))$ и 0 $(x \notin [0, 1 - (z/2)])$, если $0 < z < 2$.

3.197. а) $C_n^m p_k^m (1 - p_k)^{n-m}$, б) np_k, где $p_k = \frac{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)}{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_N)}$.

3.198. $\mathsf{P}(\xi = m) = C_M^m C_{N-M}^{n_0 - m} / C_N^{n_0}$.

3.199. Стандартное нормальное распределение.

3.200. $\mathsf{P}\{\xi_2 \leqslant x_2, \xi_3 \leqslant x_3 \mid \xi_1 = z \leqslant \min\{\xi_2, \xi_3\}\} = F(x_2)\ F(x_3)$, где $F(x) = 0$ при $x \leqslant z$, $F(x) = \min\{(x-z)/(a-z), 1\}$ при $x \geqslant z$.

3.201. $1+1/2+\ldots+1/n$. 3.202. $\mathsf{M}\tau=ab$, $\mathsf{D}\tau=b\sigma^2+a^2\delta^2$.

3.205. б) $\mathsf{M}\zeta_k=\mathsf{D}\zeta_k=k$; в) $\mathsf{P}\{\Delta_k=m\mid\eta_{k-1}=x\}=x(1-x)^{m-1}$, $\mathsf{M}\{\Delta_k\mid\eta_{k-1}=x\}=\frac{1}{x}$, $\mathsf{D}\{\Delta_k\mid\eta_{k-1}=x\}=(1-x)/x^2$. г) $\mathsf{M}\tau_1=1$, $\mathsf{M}\tau_k=\infty$, $k\geqslant 2$.

3.208. $\mathsf{M}\nu_{00}=(1+q)/q^2$, $\mathsf{M}\nu_{00}=6$ при $p=1/2$.

3.209. $\mathsf{M}\nu_{111}=(1+p+p^2)/p^3$, $\mathsf{M}\nu_{111}=14$ при $p=1/2$.

3.210. $\mathsf{M}\nu_{01}=1/(pq)$, $\mathsf{M}\nu_{01}=4$ при $p=1/2$.

3.211. nx^{n-1}. 3.212. $1-n2^{1-n}$. 3.213. $\mathsf{M}\nu=5$, $\mathsf{D}\nu=4$.

3.214. $1-n3^{-n+1}$.

3.215. $\mathsf{P}(\xi>x)=(1-x/(2\pi r))^{n-1}$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi r)$, $\mathsf{M}\xi=2\pi r/n$, $\mathsf{D}\xi=4\pi^2r^2(n-1)/n^2(n+1)$.

3.216. $\mathsf{P}\{\xi_1>x,\ \xi_2>y\}=[1-((x+y)/(2\pi r))]^{n-1}$, $0\leqslant x,\ y,\ x+y\leqslant 2\pi r$; $\rho=-1/(n-1)$.

3.217. $\mathsf{P}\{\xi_1>x_1,\ \ldots,\ \xi_k>x_k\}=\left(1-\dfrac{x_1+\ldots+x_k}{2\pi r}\right)^{n-1}$, $x_i\geqslant 0$, $x_1+\ldots+x_k\leqslant 2\pi r$. 3.219. $\mathsf{M}\nu=n\left(1-\dfrac{\Delta}{2\pi r}\right)^{n-1}=$

$$=ne^{-\lambda\Delta}(1+o(1)),\quad \mathsf{D}\nu=C_n^r\left(1-\frac{\Delta}{\pi r}\right)^{n-1}+\mathsf{M}\nu-(\mathsf{M}\nu)^2=$$

$$=ne^{-\lambda\Delta}[1-(1+\lambda^2\Delta^2)e^{-\lambda\Delta}](1+o(1)).$$

3.220. $\mathsf{P}\{\eta_n\leqslant x\}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\left(1-\dfrac{kx}{2\pi r}\right)_+^{n-1}$, где $x\geqslant 0$ и $(a)_+=\max(a,\ 0)$.

3.221. $\dfrac{2\pi r}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=(1+o(1))\dfrac{2\pi r}{n}\ln n,\ n\to\infty$.

3.222. $\mathsf{M}S=\dfrac{3}{2\pi}=0{,}4774\ldots$, $\mathsf{M}p=\dfrac{12}{\pi}=3{,}8197\ldots$, $\mathsf{M}r=\dfrac{12}{\pi^2}-1=0{,}2158\ldots$

3.223. а) $\dfrac{1}{12}+\left(\dfrac{1}{2}-a_1\right)\left(\dfrac{1}{2}-a_2\right)+\dfrac{1}{3}|a_1-a_2|^3$; б) $\dfrac{7}{60}$.

3.224. $\dfrac{c+\varepsilon}{d}-\dfrac{c-\varepsilon}{d}\left(1-\dfrac{\varepsilon}{c}\right)^n-\dfrac{2c}{(n+1)d}\left(1-\left(1-\dfrac{\varepsilon}{c}\right)^{n+1}\right)\to\dfrac{c+\varepsilon}{d}<1,\ n\to\infty$. б) $1-\left(1-\dfrac{\varepsilon}{b}\right)^n\to 1,\ n\to\infty$.

3.225. $\mathsf{P}(|\xi|\leqslant 0{,}7)=0{,}5160\ldots>\mathsf{P}(|\xi|\geqslant 0{,}7)=0{,}4839\ldots$.

3.226. $\mathsf{P}(-0{,}5\leqslant\xi\leqslant-0{,}1)=0{,}1616\ldots>\mathsf{P}(1\leqslant\xi\leqslant 2)=0{,}1359\ldots$ 3.227. $\mathsf{M}\xi^{2k-1}=0$, $\mathsf{M}\xi^{2k}=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\,\sigma^{2k}=(2k-1)!!\,\sigma^{2k}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$

3.229. а) $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}$, $x>0$; б) $\dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $x>0$.

3.230. $1-\exp(-x/(2\sigma^2))$ $(x \geqslant 0)$. 3.231. Гамма-распределение с $\lambda=\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{n}{2}$. 3.232. n; $2n$. 3.233. $\mathsf{M}\xi=e^{a+\sigma^2/2}$, $\mathsf{D}\xi=$ $=e^{2a+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$. 3.234. $e^{a-\sigma^2}$; $e^{3\sigma^2/2}$.

3.235. а) $2\Phi_0(5/3)=0{,}9044\ldots$ в любом случае; б) $\Phi(1{,}6268\ldots)-$ $-\Phi(-1{,}716\ldots)=0{,}9050\ldots$ при $m=60$, $\Phi(1{,}527\ldots)-\Phi(-2{,}214\ldots)=$ $=0{,}9233\ldots$ при $m=10$.

3.236. $\mathsf{M}\eta_1^k=1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)$, $\mathsf{M}\eta_2^k=\exp\left\{ak+\frac{1}{2}\sigma^2k^2\right\}$.

3.237. 0. 3.238. $\mathsf{M}(\cos\xi)=e^{-1/2}=0{,}6065\ldots$, $\mathsf{D}(\cos\xi)=\frac{1}{2}(1-e^{-1})^2=$ $=0{,}1997\ldots$ 3.239. $\mathsf{D}(\sin\xi)=\frac{1}{2}(1-e^{-2})=0{,}4323\ldots>\mathsf{D}(\cos\xi)=$ $=\frac{1}{2}(1-e^{-1})^2=0{,}1997\ldots$ 3.240. $\mathsf{M}\cos\xi^2=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}=$ $=0{,}77688\ldots$, $\mathsf{M}\sin\xi^2=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}=0{,}32179\ldots$ 3.241. Являются. 3.242. а) Стандартное нормальное; б) нет. 3.243. $\Phi(1/\sqrt{2})-$ $-\Phi(-1/\sqrt{2})=0{,}5204\ldots$ 3.244. а) 1/2; б) 0,7928; в) 0,2426. 3.245. Распределения (ζ_1, ζ_2) и (ξ_1, ξ_2) одинаковы.

3.247. Двумерное нормальное распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей $\begin{Vmatrix} a^2+b^2 & a^2-b^2 \\ a^2-b^2 & a^2+b^2 \end{Vmatrix}$.

3.248. Нормальное распределение с $\mathsf{M}c_1\eta_1=\mathsf{M}c_2\eta_2=0$ и ковариационной матрицей $\begin{Vmatrix} c_1^2\sigma_1^2 & c_1c_2\gamma \\ c_1c_2\gamma & c_2^2\sigma_2^2 \end{Vmatrix}$.

3.250. Величины η_1 и η_2 распределены так же, как ξ_1 и ξ_2.

3.251. 1. 3.252. а) $4\Phi_0^2(1)=0{,}4660\ldots$; б) $2\Phi_0(1)\Phi_0(2)=0{,}3258\ldots$; в) $\Phi_0^2(2)=0{,}2277\ldots$; г) $2\Phi_0^2(1)=0{,}2330\ldots$; д) $1-e^{-1/2}=$ $=0{,}3934\ldots$; е) $1-e^{-1}=0{,}6321\ldots$

3.253. а) $4\Phi_0(2{,}5)\Phi_0(1)=0{,}6742\ldots$; б) $2\Phi_0(2{,}5)\Phi_0(2)=0{,}4713\ldots$; в) $(\Phi_0(1{,}5)+\Phi_0(0{,}5))(\Phi_0(3)+\Phi_0(2))=0{,}6095\ldots$

3.254. $\left[\Phi_0\left(\frac{5{,}4}{2}\right)-\Phi_0\left(\frac{2{,}4}{2}\right)\right]\left[\Phi_0\left(\frac{1{,}8}{2}\right)+\Phi_0\left(\frac{3{,}2}{2}\right)\right]=0{,}0849\ldots$

3.255. а) $\Phi_0^2(\sqrt{2})/2=0{,}08876\ldots$; б) $\Phi_0^2(2)-\Phi_0^2(\sqrt{2})=$ $=0{,}05023\ldots$; в) $(\Phi_0^2(2)-\Phi_0^2(\sqrt{2}))/2=0{,}02511\ldots$

3.256. $re^{-r^2/2}/(2\pi)$ $(r\geqslant0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$, 0 в остальных случаях.

3.257. а) $2^2\Phi_0^2(3)=0{,}9946\ldots$; б) $1-e^{-9/2}=0{,}9888\ldots$; в) $1-e^{-9}=0{,}9998\ldots$

3.258. а) $e^{-2}-e^{-9/2}=0{,}1242\ldots$; б) $4\left(\Phi_0^2(3)-\Phi_0^2(2)\right)=$ $=0{,}0835\ldots$; в) $4\left(\Phi_0^2(\sqrt{3}/2)-\Phi_0^2(\sqrt{2}/2)\right)=0{,}1054\ldots$

3.259. $\mathsf{P}\{|A_1A_2|\leqslant x\}=1-e^{-x^2/4}$.

3.260. $\mathsf{P}\{|A_1M_1|\leqslant x\} = 1 - e^{-x^2/3}$.

3.262. 3/4. 3.263. 3/4. 3.265. $\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sigma_1}{a\sigma_2}$. 3.266. $p_{00} = p_{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin\rho$, $p_{01} = p_{10} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}\arcsin\rho$,

где $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}$ — коэффициент корреляции ξ_1 и ξ_2.

3.267. $\frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sigma^2 - x\alpha}{x\sqrt{\sigma^4 - \alpha^2}}$. 3.268. а) 1/2; б) $1 - \Phi\left(b/\sqrt{\sigma_{11} - 2a\sigma_{12} + a^2\sigma_{22}}\right)$. 3.270. а) Нормальное распределение с нулевым вектором средних и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-\left(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2\right)/3}$ при $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$ и 0 в остальных случаях; в) $\mathsf{P}\{\zeta \leqslant x\} = \frac{3}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2 - x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

3.271. а) Нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2\right)/3}$ при x_1, $x_2 \geqslant 0$ и 0 в остальных случаях;

в) $\mathsf{P}\{\zeta \leqslant x\} = \frac{3}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2 + x}$ $(0 \leqslant x < \infty)$.

3.272. а) (0, 0, 0); $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. б) ξ_1, ξ_2, ξ_3 попарно независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

в) $p(x_1, x_2, x_3) =$

$$= \begin{cases} (2\pi^3)^{-1/2}\exp\left\{-\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)/2\right\}, & \text{если } x_1x_2x_3 > 0, \\ (2\pi)^{-3/2}\exp\left\{-x_3^2/2\right\}, & \text{если } x_1x_2 = 0, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3.273. Положить

$$\xi_n = \begin{cases} \zeta, & \text{если } \xi_1 \ldots \xi_{n-1} = 0, \\ |\zeta|\operatorname{sgn}(\xi_1 \ldots \xi_{n-1}), & \text{если } \xi_1 \ldots \xi_{n-1} \neq 0, \end{cases}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, ζ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. 3.274. Нормальное распределение с параметрами $((0, \ldots, 0), A'A)$. 3.275. $\mathsf{M}\eta\xi = (0, 0, \ldots, 0)$, $\operatorname{cov}(\eta\xi_i, \eta\xi_j) = a_{ij}$. 3.276. Нормальное распределение с параметрами $((0, \ldots, 0), \|b_{ij}\|$, где $b_{ij} = 1$ при $i = j$ и $b_{ij} = \alpha_i\alpha_j$ при $i \neq j$. 3.277. Нормальное распределение с параметрами $((0, \ldots, 0), \|b_{ij}\|)$, где $b_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \sigma_k^2$. 3.278. 15. 3.279. $\ln \mathsf{M} |\xi_1 \ldots \xi_k|$. 3.280. Нормальное распределение с $\mathsf{M}(\xi_1 | \xi_2 = x) = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}} x$ и $\mathsf{D}(\xi_1 | \xi_2 = x) = \left(1 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}\sigma_{22}}\right) \sigma_{11}$. 3.281. Вообще говоря, не является.

Глава 4

4.2. $\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - 3{,}5\right| > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{8{,}75}{n\varepsilon^2}$.

4.3. $\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - p^2\right| > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{p^2(1+3p)(1-p)}{n\varepsilon^2}$.

4.4. Выполняется. 4.5. Удовлетворяют. 4.6. $0 \leqslant \alpha < 1$. 4.7. $\alpha \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 1$. 4.8. Удовлетворяют.

4.11. б) $2\Phi(-\varepsilon/C)$, $C = \int_0^1 f^2(x)\,dx - \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2$.

4.12. а) $\mathsf{M}\zeta_1 = \int_0^1 f(x)\,dx$, $\mathsf{D}\zeta_1 = \int_0^1 f^2(x)\,dx - \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2$.

4.18. Всегда. 4.25. б) $(1-p)\,p^k$.

4.26. $\mathsf{P}\{\tau_1(N) > n\} = \prod_{j=1}^{n-1}\left(1 - \frac{n-1}{N-j}\right)$, $G_1(x) = 1 - e^{-x^2}$,

$\mathsf{P}\{\tau_2(N) > n\} = \left(1 + \frac{\delta(N)\,n}{N - 2n + 1}\right)\prod_{j=0}^{n-1}\left(1 - \frac{j + \delta(N)}{N - j}\right)$, где $\delta(N) = 1$ при нечетном N и $\delta(N) = 0$ при четном N, $G_2(x) = 1 - e^{-x^2/2}$.

4.27. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\eta_n \leqslant x\} = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

4.29. Распределение Коши с параметром 1. 4.30. Распределение Коши с параметром 1.

4.31. $\lim\limits_{x\to\infty} \mathsf{P}\{(\xi - x)\,x \leqslant y \mid \xi > x\} = 1 - e^{-y/\sigma^2}$, $y \geqslant 0$.

4.32. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\varkappa_n n^{-1/\alpha} \leqslant x\} = e^{-x^{-\alpha}}$ $(x > 0)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\varkappa_n n^{1/\alpha} \leqslant x\} = e^{-(-x)^{\alpha}}$ $(x < 0)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\varkappa_n - \ln n \leqslant x\} = e^{-e^{-x}}$.

4.34. $\Phi(x)$. 4.37. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\zeta_n \leqslant x\} = 1 - e^{-x}$, $0 \leqslant x < \infty$.

4.38. а) $\mathsf{M}\tau_k = ka$, $\mathsf{D}\tau_k = k\sigma^2$. 4.39. $\mathsf{M}\tau = a\mathsf{M}\nu$, $\mathsf{P}\left\{\frac{\tau}{\mathsf{M}\tau} \leqslant x\right\} \to F(x)$.

4.40. а) $M\tau_q = \frac{a}{q}$, $D\tau_q = \frac{a^2 p + \sigma^2 q}{q^2}$; б) $\lim\limits_{q\to 0} P\left\{\frac{\tau_q}{M\tau_q} \leqslant x\right\} = 1 - e^{-x}$, $0 \leqslant x < \infty$.

4.42. $\lim\limits_{q\to 0} P\{q\tau_1 \leqslant x\} = \lim\limits_{q\to 0} P\{q\tau_2 \leqslant x\} = 1 - e^{-x/a}$, $x \geqslant 0$.

4.43. $P\left\{\frac{q\tau}{a} \leqslant x\right\} \to 1 - e^{-x}$, $0 \leqslant x < \infty$. 4.44. 0,265.

4.47. а), б) Сходится. 4.48. Равенство верно.
4.49. б) $M\xi = 1/2$, $D\xi = 7/44$.
4.50. б) $M\xi = 1/3$, $D\xi = 1/18$.

4.53. а) χ^2 — распределение с 1 степенью свободы. б) $A_n(z) = n^2 (z - p)^2$, $B_n(z) = 2(p - z)\sqrt{n^3 p (1 - p)}$.

4.54. а) $2\Phi_0(\sqrt{x})$, б) $B_n(p) = \left|\ln \frac{1-p}{p}\right|^{-1} \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}$.

4.55. Условия в). 4.56. а) Любое соотношение может выполняться. б) $m = m_\infty$. 4.57. а) $M \leqslant M_\infty$; б) $\sigma^2 \leqslant \sigma^2_\infty$. 4.58. а) $e^{\lambda(z-1)}$; б) $p/(1-qz)$; в) $(pz+q)^n$. 4.59. $\varphi(z) = (pz+q)^n$, $M\xi_n = np$, $M\xi_n^{[k]} = n^{[k]} p^k$, $D\xi_n = npq$, где $q = 1 - p$. 4.60. а) $M\xi = \varphi'(1)$, $D\xi = \varphi''(1) - \varphi'(1)(\varphi'(1) - 1)$, $M(\xi - M\xi)^3 = \varphi'''(1) + 3\varphi''(1)(1 - \varphi'(1)) + \varphi'(1)(2\varphi'(1) - 1)(\varphi'(1) - 1)$; б) $\varphi_1(z) = \varphi(\sqrt{z})$, $\varphi_2(z) = \varphi(z^2)$, $\varphi_3(z) = \varphi(1/z)$, $\varphi_4(z) = \varphi(z)\varphi(1/z)$.

4.61. $M\tau_1 = \frac{1}{p}$, $D\tau_1 = \frac{q}{p^2}$, $Mz^{\tau_1} = \frac{pz}{1 - qz}$. 4.62. 1) $\frac{k}{p}$, $\frac{kq}{p^2}$; 2) $\left(\frac{pz}{1 - qz}\right)^k$. 4.63. $Mz^\xi = \left(\frac{pz}{1 - qz}\right)^m$, $M\xi = \frac{m}{p}$, $D\xi = \frac{mq}{p^2}$.

4.64. $P\{\eta = l\} = C_{l-1}^{m-1} p^m q^{l-m}$, $m = m_1 + m_2 + m_3$, $l \geqslant m$.

4.65. а) $e^{\lambda p(z-1)}$; б) λp, λp.

4.66. а) ξ_1 и ξ_2 распределены по закону Пуассона с параметрами $\lambda(1 - p_2)$ и $\lambda(1 - p_1)$ соответственно; б) $M\xi_1 = D\xi_1 = \lambda(1 - p_2)$, $M\xi_2 = D\xi_2 = \lambda(1 - p_1)$, $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$; случайные величины ξ_1 и ξ_2 зависимы.

4.68. а) $(p_1 z_1 + \ldots + p_N z_N)^n$; б) $n^{[k]} p_i^k$, $n^{[k+l]} p_i^k p_j^l$ $(i \neq j)$.

4.69. $Mz_1^{\eta_{n,1}} z_2^{\eta_{n,2}} z_3^{\eta_{n,3}} = (p_1 z_1 + (p_2 + p_3) z_2 + p_4 z_3)^n$,

$$Mz_1^{\zeta_{n,1}} z_2^{\zeta_{n,2}} z_3^{\zeta_{n,3}} = (p_1 z_1 + p_2 z_1 z_2 + p_3 z_2 z_3 + p_4 z_3)^n,$$

$$\rho(\eta_{n,1}, \eta_{n,2}) = -\sqrt{\frac{p_1(p_2 + p_3)}{(1 - p_1)(1 - p_2 - p_3)}},$$

$$\rho(\zeta_{n,1}, \zeta_{n,2}) = \frac{p_2 - (p_1 + p_2)(p_2 + p_3)}{\sqrt{(p_1 + p_2)(1 - p_1 - p_2)(p_2 + p_3)(1 - p_2 - p_3)}}.$$

4.70. а) $\exp\{\lambda(p_1z_1+\ldots+p_Nz_N-1)\}$;

б) $\prod_{i=1}^{N}\left(1-\frac{(\lambda p_i)^k}{k!}e^{-\lambda p_i}(1-z)\right)$. 4.71. $\alpha/\gamma=a$, $\beta/\gamma=$ $=1-a-d$, $\delta/\gamma=-d$, где $0\leqslant a\leqslant 1$, $0\leqslant d<1$. 4.72. $\varphi_\xi(e^{it})$.

4.73. а) $\exp\{\lambda(e^{it}-1)\}$; б) $(pe^{it}+q)^n$; в) $\frac{1}{1-it/\alpha}$.

4.74. $(n+k-1)^{[k]}\alpha^{-k}$. 4.75. $\mathsf{M}e^{it\zeta}=g(f(t))$, $\mathsf{M}s^\zeta=g(\varphi(s))$.

4.76. а) $\mathsf{P}\{\zeta=k\}=\frac{1}{\mathsf{M}\xi}(k+1)\,\mathsf{P}\{\xi=k+1\}$, $k=0,1,\ldots$

б) $\mathsf{P}\{\zeta=k\}=\frac{1}{\mathsf{M}\xi}\mathsf{P}\{\xi>k\}$, $k=0,1,\ldots$

в) $\zeta=\xi_1+\ldots+\xi_\nu$, где $\xi_1,\xi_2,\ldots$ независимы и распределены так же, как ξ, а ν не зависит от $\xi_1,\xi_2,\ldots$ и $\mathsf{P}\{\nu=k\}=(1-$ $-\alpha)\,\alpha^k$, $k=0,1,\ldots$;

г) $\psi(z)$ — производящая функция тогда и только тогда, когда $\xi=\eta_1+\ldots+\eta_\nu$, где $\eta_1,\eta_2,\ldots$ независимы и одинаково распределены, а ν не зависит от $\eta_1,\eta_2,\ldots$ и имеет распределение Пуассона;

д) то же, что в п. в), но $\mathsf{P}\{\nu=k\}=\sqrt{1-\alpha}\,\alpha^k2^{-2k}C_{2k}^k$, $k=$ $=0,1,\ldots$

4.77. $n_1+\ldots+n_m=n$, $p_1=\ldots=p_m=p$.

4.78. б) $k^{-1}\sum_{j=0}^{k-1}f(2\pi j/k)\,e^{-2\pi imj/k}$. 4.79. 11/27, 1/9.

4.82. $\mathsf{P}\{\mu_n\geqslant\beta n\}\leqslant\left\{\left(\frac{1-p}{1-\beta}\right)^{1-\beta}\left(\frac{p}{\beta}\right)^{\beta}\right\}^n$, $p<\beta$,

$\mathsf{P}\{\mu_n\leqslant n/2\}\leqslant\left(2\sqrt{p(1-p)}\right)^n$, $p>1/2$.

4.84. $pf_1(t)+(1-p)f_2(t)$.

4.87. а) $\frac{e^{ita}-1}{ita}$ $(t\neq 0)$, 1 $(t=0)$;

б) $\frac{2\alpha^2}{t^2}\left(1-\cos\frac{t}{\alpha}\right)$ $(t\neq 0)$, 1 $(t=0)$;

в) $C_\alpha=\alpha/\pi$, $1-\alpha|t|$ $(|t|\leqslant\alpha^{-1})$, 0 $(|t|>\alpha^{-1})$.

4.88. $\mathsf{M}\eta=0$ при $2h\sigma^2<1$, $\mathsf{M}\eta$ не определено при $2h\sigma^2\geqslant 1$; $\mathsf{D}\eta=\frac{\sigma^2}{(1-4h\sigma^2)^{3/2}}$ при $4h\sigma^2<1$ и $\mathsf{D}\eta=\infty$ при $4h\sigma^2\geqslant 1$.

4.89. Является. 4.90. Является. 4.91. а), б) Является. 4.92. Не следует. 4.93. Изменится. 4.95. Равенство верно, если $\mathsf{M}|\xi|<\infty$.

4.98. а), в), е), з) Являются; б), г), д), ж) не являются.

4.99. а) 0, $a^2/3$; б) 0, 7/6; в) 1, 1/6; г) 0, $a^2(1+2\sqrt{2})/4$; д) $p-q$, $p+q$; е) $\frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}\arcsin\theta}$, $\frac{\theta}{(1-\theta^2)^{3/2}\arcsin\theta}$.

4.100. а) $1-e^{-x/2}$ $(x>0)$, $\frac{1}{1-2it}$;

б) $\dfrac{1}{(1-2it)^{r/2}} = \dfrac{1}{(1+4t^2)^{r/4}} \exp\left\{\dfrac{ir}{2} \operatorname{arctg} 2t\right\}$, $M\left(\chi_r^2\right)^k = r(r+2)\dots(r+2k-2)$.

4.101. $\dfrac{1}{(1-it)^{\alpha}} = \dfrac{1}{(1+t^2)^{\alpha/2}} e^{i\alpha \operatorname{arctg} t}$, $\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)$.

4.102. Нормальное распределение, $M\zeta = (a, c)$, $D\zeta = (c, Bc)$.

4.103. Многомерное нормальное распределение в R^m с вектором математических ожиданий Ca и матрицей ковариаций CBC^{T}, где ${\mathsf{T}}$ — знак транспонирования.

4.114. $M(\mu_i(n, N, s))^{[k]} = \dfrac{N^{[k]}\left(C_s^i\right)^k C_{(N-k)s}^{n-ki}}{C_{Ns}^n}$. Функция $f_i(n) = M\mu_i(n, N, s)$ при любом $i = 0, 1, \dots, s$ имеет единственный максимум в точке $n_0 = Ni$ и монотонна слева и справа от n_0. При фиксированных i и s

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \max_n f_i(n) = C_s^i \frac{i^i (s-i)^{s-i}}{s^s}.$$

4.115. $\dfrac{C_N^k}{C_{Ns}^n} \displaystyle\sum_{m=k}^{N} (-1)^{m-k} C_{N-k}^{m-k} \left(C_s^i\right)^m C_{(N-m)s}^{n-mi}$.

4.117. $M\mu_r(n, N) = C_n^r (N-1)^{n-r} N^{-n+1}$.

4.118. $\displaystyle\lim_{N\to\infty} P\left\{\frac{\nu_r(N)}{N^{(r-1)/r}} \leqslant x\right\} = 1 - \exp\left\{-\frac{x^r}{r!}\right\}$ $(x \geqslant 0)$.

4.119. Распределение произведения $\xi_1\xi_2$, где случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют распределение Пуассона с параметром λ.

4.120. $n \geqslant 790$. 4.121. $(-74{,}36\cdot 10^{-m}, 74{,}36\cdot 10^{-m})$.

4.122. а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} M\eta_n = \exp\left\{\frac{1}{2}\ln^2 z\right\}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} D\eta_n = e^{\ln^2 z}\left(e^{\ln^2 z} - 1\right)$;

б) $a = 0$, $\sigma^2 = \dfrac{1}{2}\ln^2 z$;

в) $M\eta = \exp\left\{\dfrac{1}{4}\ln^2 z\right\}$, $D\eta = \exp\left\{\dfrac{1}{2}\ln^2 z\right\}\left(\exp\left\{\dfrac{1}{2}\ln^2 z\right\} - 1\right)$.

4.123. а) $M\eta_{1000} = 1{,}025^{1000} \approx 5{,}295\cdot 10^{10}$, $D\eta_{1000} \approx 7{,}6899\cdot 10^{41}$, $M\ln\eta_{1000} = 0$, $D\ln\eta_{1000} \approx 24{,}8965$; б) $\Phi(-1{,}384) \approx 0{,}0832$, $\Phi(0) = 0{,}5$, $\Phi(0) = 0{,}5$, $\Phi(2{,}769) \approx 0{,}9972$; в) 0,5126..., 0,4873...

4.124. а) $M\eta_{1000} = 1$, $D\eta_{1000} = 1{,}0625^{1000} - 1 \approx 2{,}1327\cdot 10^{26}$, $M\ln\eta_{1000} \approx -32{,}2693$, $D\ln\eta_{1000} \approx 65{,}2357$; б) $\Phi(-1{,}7064) \approx 0{,}0440$, $\Phi(0{,}0633) \approx 0{,}5252$, $\Phi(1{,}9996) \approx 0{,}9772$; $\Phi(0{,}0633) \approx 0{,}5252$, в) 0,5126..., 0,5378...

4.125. б) $\Phi(x)$. 4.126. $M\xi_i = M\xi_i\xi_j = 0$ $(i \neq j)$, $M\xi_i^2 = 1/n$.

4.127. $\rho^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$, т. е. ρ^2 имеет χ^2-распределение с n степенями свободы, $M\rho^2 = n$, $D\rho^2 = 2n$. 4.129. $\Phi(x)$.

4.130. $n\displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_i p_i$, $n\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{N} a_i p_i\right)^2\right)$; стандартное нормальное распределение.

4.131. а) $\mathsf{M}\eta_k = 3a$, $\mathsf{D}\eta_k = 3b^2$, $\operatorname{cov}(\eta_k, \eta_{k+1}) = 2b^2$, $\operatorname{cov}(\eta_k, \eta_{k+2}) = b^2$, $\operatorname{cov}(\eta_k, \eta_l) = 0 \quad (|k-l| \geqslant 3)$, б) $\Phi(x/\sqrt{3})$.

4.132. $\Phi(x)$. 4.133. а) $x = p/(1-p)$. 4.135. Стандартное нормальное распределение.

4.136. $\mathsf{M}\xi_j^{(n)} = 0$, $\mathsf{D}\xi_j^{(n)} = 1$; при $n \to \infty$ распределение η_n сходится к стандартному нормальному распределению.

4.137. Распределение разности двух независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение Пуассона с параметром 1/2:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\eta_n = k\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{-|k|-2m} e^{-1}}{m!\,(|k|+m)!}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

4.138. а) $\sum_{i=1}^{n} p_i^{(n)}$, $\sum_{i=1}^{n} p_i^{(n)}\left(1 - p_i^{(n)}\right)$; в) распределение $\eta_0 - \eta_1$, где η_0 и η_1 независимы и имеют распределения Пуассона с параметрами λ_0 и λ_1 соответственно.

4.139. $F_n(x) \to a + (1-a)\left(1 - e^{-mx}\right) \; (x \geqslant 0)$, если $1 - d_n A_n \to m \in (0, \infty)$, $a_n \to a \leqslant 1$ при $n \to \infty$.

4.143. а) $\mathsf{M}s^{\tau_m} = \left(1 - \frac{m-1}{N}\right) s \Big/ \left(1 - \frac{m-1}{N} s\right)$,

$$\mathsf{P}\{\tau_m > \nu_k - \nu_l\} = \left(\frac{m-1}{N}\right)^{k-l} \prod_{n=l}^{k-1} \left\{\left(1 - \frac{n}{N}\right) \Big/ \left(1 - \frac{n}{N}\,\frac{n-1}{N}\right)\right\};$$

б) 2^{-r}.

4.144. Распределение Пуассона с параметром $\lambda/2$.

4.145. $\mathsf{M}\nu_m = (1 + o(1))\, N \ln \frac{N-m}{N}$, $\mathsf{D}\nu_m = (1 + o(1))\, N \times \left(\frac{m}{N-m} - \ln \frac{N}{N-m}\right)$; стандартное нормальное распределение.

4.146. $p_i = \frac{1}{1 - z_i}$, $i = 1, \ldots, N$. 4.147. См. решение.

4.150. $f_{n+1,N}(z) = f_{n,N}(z) + \frac{1-z}{N} \frac{d}{dz} f_{n,N}(z)$.

4.152. $\exp\{-C\,|t|^{\alpha}\}$.

4.154. а) $1 - f(t) = (1 - i \operatorname{sgn} t)\sqrt{t}\,(1 + o(1))$, $t \to 0$, где $\operatorname{sgn} t = t/|t| \quad (t \neq 0)$. б) $\alpha = 2$; $g(t) = \exp\{-(1 - i \operatorname{sgn} t)\sqrt{t}\}$.

4.156. Распределение Коши с параметром $\pi p(0)$.

4.157. $\mathsf{M}e^{it(\xi_1+\xi_2)} = \mathsf{M}e^{it(\xi_1+\xi_3)} = e^{-2a|t|}$.

4.158. $I_{a,b}(x) = \frac{(a+b)\,\pi}{ab\left((a+b)^2 + x^2\right)}$.

Глава 5

5.1. $\mathsf{M}\eta_t = a$, $\mathsf{D}\eta_t = \sigma^2 \sum_{j=0}^{k} c_j^2$, $\operatorname{cov}(\eta_t, \eta_s) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{k-|s-t|} c_j c_{j+|s-t|}$ при $|s-t| \leqslant k$, $\operatorname{cov}(\eta_t, \eta_s) = 0$ при $|s-t| > k$.

5.2. б) Сходится. 5.3. б) Сходится. 5.4. $\mathsf{M}\xi_t = 0$, $\mathsf{D}\xi_t = \sigma^2 + \frac{1}{2}$, $\operatorname{cov}(\xi_t, \xi_s) = \frac{1}{2}\cos A(s-t)$, $s \neq t$. 5.5. $\mathsf{M}\xi_t = 0$, $\mathsf{D}\xi_t = 1$, $\operatorname{cov}(\xi_t, \xi_s) = \frac{1}{2}(\cos(s-t) + \cos\pi(s-t))$. 5.6. $p_\eta(x) = \max\{0, 1 - |1-x|\}$.

5.7. а) Нормальное распределение с параметрами $(0, 1/2)$; б) θ_n и γ_n независимы, γ_n имеет равномерное распределение на $[-\pi, \pi]$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\theta_n \leqslant x\} = 1 - e^{-x^2}$ $(x \geqslant 0)$.

5.8. $\mathsf{M}\eta_t = 0$, $\mathsf{D}\eta_t = 2\int\limits_0^t (t-u)R(u)\,du$, $\operatorname{cov}(\eta_t, \eta_s) = \frac{1}{2}(\mathsf{D}\eta_t + \mathsf{D}\eta_s - \mathsf{D}\eta_{|t-s|})$, $t, s \geqslant 0$.

5.9. а) $\left(1 + \frac{N}{x}\right)^{-k}$, $x \geqslant 0$; б) $1 - \exp\left\{-\frac{\lambda}{2x}(x^2 - N)\right\}$, $x \geqslant \sqrt{N}$; в) $\exp\{-\lambda N e^{-ax}\}$, $x \geqslant 0$.

5.10. а) $\mathsf{M}\tau_1 = \frac{1}{4}$, $\mathsf{M}\tau_2 = 2$; б) $\mathsf{M}\tau_1 = \left(1 + \frac{1}{d}\right)^d - 2$, $\mathsf{M}\tau_2 = \left(\frac{d}{d-1}\right)^d - 2$; в) $\mathsf{M}\tau_1 = \mathsf{M}\tau_2 = e - 2$.

5.11. Распределение Коши с плотностью $p_\tau(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

5.12. $\mathsf{M}\mu_k = 1 + \pi^{-1}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\operatorname{arctg}(1/\sqrt{j}) = (2 + o(1))\sqrt{k/\pi}$, $k \to \infty$.

5.15. $\mathsf{M}\xi_n(x) = 0$, $\mathsf{D}\xi_n(x) = \dfrac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1}$ $(|x| \neq 1)$, $\operatorname{cov}(\xi_n(x), \xi_n(y)) = \dfrac{(xy)^{n+1} - 1}{xy - 1}$ $(xy \neq 1)$, $\mathsf{D}\xi_n(\pm 1) = \operatorname{cov}\left(\xi_n(x), \xi_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) = n + 1$.

5.18. б) $(1 - \sqrt{1 - 4sp(1-p)})/(2p)$; в) $\left(1 - \sqrt{1 - 4s^2p(1-p_n)}\right)/(2sp)$.

5.19. $\mathsf{P}\{\mu = -\infty\} = 1$, если $\varphi_1(1) = 1$, $\mathsf{P}\{\mu = -k\} = (1 - \varphi_1(1))\varphi_1^k(1)$, $k = 0, 1, \ldots$, если $\varphi_1(1) < 1$. 5.22. $\mathsf{M}|\rho_n|^2 = n$, $\mathsf{D}|\rho_n|^2 = 2n(n-1)/d$. 5.27. В указанных случаях $\mathsf{M}\nu = \infty$.

5.33. а) λt; б) $\Lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda(u)\,du$. 5.35. $\mathsf{M}\tau_k = \dfrac{k}{\lambda}$, $\mathsf{D}\tau_k = \dfrac{k}{\lambda^2}$, $p_k(x) = \dfrac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$.

5.36. а) $p(x_1, \ldots, x_k) = \lambda^k e^{-\lambda x_k}$, если $0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_k$, $p(x_1, \ldots, x_k) = 0$ в остальных случаях; б) $\dfrac{\lambda x}{\lambda T + 1}$ $(0 \leqslant x \leqslant T)$, $1 - \dfrac{e^{-\lambda(x-T)}}{\lambda T + 1}$ $(x \geqslant T)$; в) $\dfrac{x}{T}$.

5.37. $p(x_1, \ldots, x_k) = k!\, T^{-k}$, если $0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant T$, $p(x_1, \ldots, x_k) = 0$ в противном случае; $q(x_1, \ldots, x_k) = p(x_1, \ldots, x_k)$.
5.38. $\lambda T e^{-\lambda\Delta}$. 5.39. $\lambda T e^{-2\lambda\Delta}$.

5.40. а) Пуассоновский поток на $[0, \infty)$ с интенсивностью 2λ; б) θ_k независимы, $\mathsf{P}\{\theta_k = +1\} = \mathsf{P}\{\theta_k = -1\} = 1/2$. 5.41. λp.
5.42. $\lambda(x)p(x)$. 5.43. Распределение Пуассона с параметром $\lambda \mathsf{M}\tau$. 5.44. $f(t) = \exp\left\{-\lambda \int\limits_0^t (1 - G(x))\, dx\right\}$.

5.45. а) Пуассоновский поток на $[0, \infty)$ с интенсивностью $\lambda(x) = 2\lambda\pi x$;

б) $p_n(x) = \dfrac{2\lambda\pi x\, (\lambda\pi x^2)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda\pi x^2}$ $(x \geqslant 0)$, $\mathsf{M}\rho_n = \dfrac{\Gamma(n + 1/2)}{\sqrt{\lambda\pi}(n-1)!} \sim$ $\sim \sqrt{\dfrac{n}{\lambda\pi}}$.

5.46. а) Пуассоновский поток на $[0, \infty)$ с интенсивностью $\lambda(x) = 4\lambda\pi x^2$;

б) $p_n(x) = \dfrac{4\lambda\pi x^2\, (4\lambda\pi x^3/3)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-4\lambda\pi x^3/3}$ $(x \geqslant 0)$, $\mathsf{M}\rho_n =$ $= \dfrac{\Gamma(n+1/3)}{\Gamma(n)} \sqrt[3]{\dfrac{3}{4\lambda\pi}} \sim \sqrt[3]{\dfrac{3n}{4\lambda\pi}}$.

5.47. а) $p(x) = \max\{0, \ 1 - |1 - x|\}$, б) $p_1(x_1, x_2) = \max\{1 - |1 - x_1| - |1 - x_2|, \ 0\}$ при $0 \leqslant x_1, \ x_2 \leqslant 2$, $(1 - x_1) \times (1 - x_2) \geqslant 0$, $p_1(x_1, x_2) = \max\{0, \ \min\{x_1, \ x_2, \ 2 - x_1, \ 2 - x_2\}\}$ при $0 \leqslant x_1, \ x_2 \leqslant 2$, $(1 - x_1)(1 - x_2) \leqslant 0$, $p_1(x_1, x_2) = 0$ в остальных случаях; в) 5/6; г) 1/4; д) $\mathsf{M}\varkappa = 7/12$, $\mathsf{D}\varkappa = 23/144$, $q(x) = 1 - x^2/2$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $q(x) = (2 - x)^2/2$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$, $q(x) = 0$ при $|x - 1| > 1$.

5.48. а) e^{-x} $(x \geqslant 0)$, б) $e^{-(x_1 + x_2)}$ $(x_1, x_2 \geqslant 0)$, в) $2/e \approx 0{,}73576$, г) $(1 - e^{-1})^2 \approx 0{,}39958$, д) $\mathsf{M}\varkappa = 1$, $\mathsf{D}\varkappa = 1$, $q(x) = e^{-x}$ $(x \geqslant 0)$.

5.49. а) Периодическая с периодом 6 (детерминированная), состояния $-6, \ldots, -1$ несущественные, остальные — сообщающиеся; б) периодическая с периодом 6, все состояния сообщающиеся; в) непериодическая; состояние -6 несущественное, остальные — сообщающиеся.

5.50. а) (0,385, 0,336, 0,279); б) (16/47, 17/47, 14/47).

5.51. $\begin{pmatrix} 3/7 & 4/7 \\ 1/11 & 10/11 \end{pmatrix}$.

5.52. $\mathsf{P}\{\eta_t = m\} = C_t^{\frac{t+m}{2}} p^{\frac{t+m}{2}} q^{\frac{t-m}{2}}$, если $t - m$ четно, $|m| \leqslant t$, $\mathsf{P}\{\eta_t = m\} = 0$, если $t - m$ нечетно или $|m| > t$.

5.53. а) Нет, если $p \neq q$, да, если $p = q = 1/2$; б) да, $p_{11} = p_{-1,-1} = p$, $p_{1,-1} = p_{-1,1} = 1 - p$; в) да, $p_{11} = p_{23} = p_{31} = p_{43} = 1 - p$, $p_{12} = p_{24} = p_{32} = p_{44} = p$.

5.54. $\mathsf{P}\{\mu_0(n + 1) = k \mid \mu_0(n) = k\} = k/N$, $\mathsf{P}\{\mu_0(n + 1) = k - 1 \mid \mu_0(n) = k\} = (N - k)/N$.

5.55. $\mathsf{P}\{\mu_0(n + 1) = k - l \mid \mu_0(n) = k\} = C_k^{m-l} C_{N-k}^{l} / C_N^m$.

5.56. а) $p_{ii} = p + (q - p)i/N$, $p_{i,\,i-1} = pi/N$, $p_{i,\,i+1} = q(N-i)/N$, $p_{ij} = 0$, если $|i-j| > 1$; ξ_n — цепь Маркова; б) $\pi_k = C_N^k p^{N-k} q^k$, $k = 0, \ldots N$.

5.57. а) p_{ij} те же, что в задаче 5.56, ξ_n — цепь Маркова при $N = 1$ и не цепь Маркова при $N \geqslant 2$; б) $\pi_k = C_N^k p^{N-k} q^k$, $k = 0, \ldots, N$.

5.60. Является. 5.62. 1/6.

5.63. а) $\mathsf{P}\{\tau = k \mid \xi_0 = 1\} = (1 - p_{11})\, p_{11}^{k-1}$, $k=1, 2, \ldots$; б) ответ не изменится. 5.64. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\tau_n > xn/\alpha\} = e^{-x}$ $(x \geqslant 0)$.

5.65. $s\left(1 - p + p(1-p-\varepsilon)\, s\left(1 - ps - \dfrac{\varepsilon^3 s^2}{1-(1-\varepsilon^2)\, s}\right)^{-1}\right)$.

5.66. Распределение ξ_n — биномиальное с параметрами (n, p); $\mathsf{M}\xi_n = np$, $\mathsf{D}\xi_n = np(1-p)$.

5.67. а) $\mathsf{P}\{\tau_{k+1} = t + u \mid \tau_k = t\} = p(1-p)^{u-1}$, $t \geqslant 0$, $u \geqslant 1$; б) $\mathsf{M}\tau_k = k/p$, $\mathsf{D}\tau_k = k(1-p)/p^2$, $\varphi_k(s) = \left(\dfrac{ps}{1-(1-p)\,s}\right)^k$.

5.68. а) $\varphi_k(s) = \dfrac{p^k s^k (1-ps)}{1 - s\left(1-(1-p)p^k s^k\right)}$, $\mathsf{M}\tau_k = \dfrac{1-p^k}{(1-p)\,p^k}$;

б) $\mathsf{P}\{\eta_k \geqslant x\} \to e^{-x}$, $k \to \infty$, $x \geqslant 0$.

5.69. а) $\varphi_{0,1}(s) = \dfrac{ps}{1-(1-p)\,s}$, $\mathsf{M}\tau_{0,1} = \dfrac{1}{p}$; б) $\varphi_{k,k+1}(s) = ps + (1-p)\, s\varphi_{k-1,k}(s)\, \varphi_{k,k+1}(s)$; в) $\mathsf{M}\tau_{k,k+1} = \dfrac{1}{2p-1}\left(1 - \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{k+1}\right)\left(p \neq \dfrac{1}{2}\right)$; $\mathsf{M}\tau_{k,k+1} = 2(k+1)$, $\mathsf{M}\tau_{0,k} = k(k+1)\left(p = \dfrac{1}{2}\right)$; $\mathsf{M}\tau_{0,k} \sim \dfrac{1-p}{(2p-1)^2}\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^k$ $\left(p < \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathsf{M}\tau_{0,k} \sim \dfrac{k}{2p-1}\left(p > \dfrac{1}{2}\right)$.

5.70. 1; 4; 9. 5.73. $\pi_k^{(N)} = (1-\lambda^k)/(1-\lambda^N)$ при $p \neq q$, где $\lambda = q/p$; $\pi_k^{(N)} = k/N$ при $p = q = 1/2$; $\pi_k^{(0)} = 1 - \pi_k^{(N)}$, $k = 0, 1 \ldots, N$.

5.74. а) $\mathsf{P}\{\xi = 1\} = 1 - pq$, $\mathsf{P}\{\xi = k\} = pq(qr)^{k-2}(1-qr)$ $(k \geqslant 2)$; б) $\dfrac{1-q}{1-qr}\, p$. 5.75. а) $\left(\dfrac{143}{400}, \dfrac{171}{400}, \dfrac{86}{400}\right)$; б), в) $\left(\dfrac{15}{41}, \dfrac{18}{41}, \dfrac{8}{41}\right)$.

5.77. а) $\{1, 2\}$; б) $\dfrac{138}{97} = 1{,}42268\ldots$; в) $p_1^{(\alpha)} = \dfrac{52}{97} = 0{,}5360\ldots$, $p_2^{(\alpha)} = \dfrac{40}{97} = 0{,}4123\ldots$, $p_j^{(\beta)} = 1 - p_j^{(\alpha)}$, $j = 1, 2$; г) $\pi_1 = \pi_2 = 0$, $\pi_3 = \dfrac{92}{291} = 0{,}3161\ldots$, $\pi_4 = \dfrac{46}{291} = 0{,}1580\ldots$, $\pi_5 = \pi_6 = \dfrac{51}{194} = 0{,}2628\ldots$

5.78. $p_k^{(n+1)} = p_k^{(n)}(1 - a^{-k}) + p_{k-1}^{(n)} a^{-k+1}$, $\mathsf{M} a^{\xi_n} = n(a-1)+1$, $\mathsf{D} a^{\xi_n} = (a-1)^3 C_n^2$.

5.82. $\begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1+\alpha-\beta)^t}{\alpha+\beta} \times$ $\times \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}$, $\pi_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$, $\pi_2 = 1 - \pi_1$.

5.85. а) $\mathsf{M}\delta_1 = 1 + \frac{\alpha}{\beta}$, $\mathsf{D}\delta_1 = \frac{\alpha}{\beta^2}(2-\alpha-\beta)$, $\mathsf{M}\{\delta_0 | \xi_0 = 2\} = \frac{1}{\beta}$, $\mathsf{D}\{\delta_0 | \xi_0 = 2\} = \frac{1-\beta}{\beta}$; б) $a_t = \frac{\beta t}{\alpha+\beta}$, $b_t = \sqrt{\frac{\alpha\beta(2-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)^3}\, t}$.

5.87. Не следует. 5.88. $\frac{3}{2} e_1 \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$. 5.89. а) $e^{-\alpha l}$; б) $\frac{1}{\alpha}\ln 2$; в) $p_n(t) = \alpha n e^{-\alpha n t}$ $(t \geqslant 0)$. 5.90. $\begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix} =$ $= \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{e^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}$.

5.92. $m_1(t) = \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)^2}(1 - e^{-(\alpha+\beta)t})$, $m_2(t) = \frac{\beta t}{\alpha+\beta} -$ $- \frac{\beta}{(\alpha+\beta)^2}(1 - e^{-(\alpha+\beta)t})$, $b_i^2(t) = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^3} t + O(1)$, $t \to \infty$, $i = 1, 2$.

5.93. $\mathsf{M}_1(t, x) = \frac{\beta v_1 - \alpha v_2}{\alpha+\beta} t + x + \frac{\alpha(v_1+v_2)}{(\alpha+\beta)^2}(1 - e^{-(\alpha+\beta)t})$, $\mathsf{M}_2(t, x) = \frac{\beta v_1 - \alpha v_2}{\alpha+\beta} t + x - \frac{\beta(v_1+v_2)}{(\alpha+\beta)^2}(1 - e^{-(\alpha+\beta)t})$, $B_i^2(t, x) \sim \frac{2\alpha\beta(v_1+v_2)^2 t}{(\alpha+\beta)^3}$, $t \to \infty$.

5.94. $\begin{pmatrix} -(\alpha_1+\alpha_2) & \beta & \beta \\ \alpha_1 & -(\alpha_2+\beta) & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & -\beta \end{pmatrix}$, $\pi_1 = \frac{\beta}{\alpha_1+\alpha_2+\beta}$, $\pi_3 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2+\beta}$, $\pi_2 = 1 - \pi_1 - \pi_3$. 5.95. в) Если $\theta < 1$, то $\pi_j = \theta^j(1-\theta)$, если $\theta > 1$, то $\pi_j^* = (\theta-1)/\theta^{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots$

Глава 6

6.1. $\mathsf{M}s^2 = \sigma^2$; s^2 — состоятельная оценка σ^2. 6.2. $\mathsf{M}m_r = a_r$, $\mathsf{D}m_r = \frac{a_{2r} - a_r^2}{n} = \frac{\mathsf{D}\xi^r}{n}$, 6.3. $a^* = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$, где $c_k = \sigma_k^{-2}/(\sigma_1^{-2} + \ldots$ $\ldots + \sigma_n^{-2})$. 6.4. Является. 6.5. $\Phi(x)$. 6.7. $p^* = \mu_n/n$.

6.8. $\left[p^* - u_\alpha \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}},\ p^* + u_\alpha \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}\right]$, где $p^* = \mu_n/n$, $1 - \Phi(u_\alpha) = \alpha$. 6.12. $\lambda^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$, оценка состоятельная и несмещенная; $\mathsf{M}\lambda^* = \lambda$, $\mathsf{D}\lambda^* = \lambda/n$.

6.13. $\lambda^* = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{-1}$, $\mathsf{M}\frac{1}{\lambda^*} = \frac{1}{\lambda}$, $\mathsf{D}\frac{1}{\lambda^*} = \frac{1}{n\lambda^2}$.

6.14. а) $a^* = \bar{a}$, $b^* = \bar{b}$, $c^* = \bar{c}$, где $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — средние арифметические по соответствующим выборкам; $\mathsf{M}a^* = a$, $\mathsf{M}b^* = b$, $\mathsf{M}c^* = c$, $\mathsf{D}a^* = \frac{1}{n}\sigma_a^2$, $\mathsf{D}b^* = \frac{1}{n}\sigma_b^2$, $\mathsf{D}c^* = \frac{1}{n}\sigma_c^2$;

б) $a^{**} = \bar{a} + (\bar{c} - \bar{a} - \bar{b})k_a^2$, $b^{**} = \bar{b} + (\bar{c} - \bar{a} - \bar{b})k_b^2$, $c^{**} = \bar{c} + (\bar{c} - \bar{a} - \bar{b})k_c^2$, где $k_a^2 = \sigma_a^2/\sigma^2$, $k_b^2 = \sigma_b^2/\sigma^2$, $k_c^2 = \sigma_c^2/\sigma^2$, $\sigma^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2$; $\mathsf{M}a^{**} = a$, $\mathsf{M}b^{**} = b$, $\mathsf{M}c^{**} = c$, $\mathsf{D}a^{**} = \frac{\sigma_a^2}{n}(1 - k_a^2)$, $\mathsf{D}b^{**} = \frac{\sigma_b^2}{n}(1 - k_b^2)$, $\mathsf{D}c^{**} = \frac{\sigma_c^2}{n}(1 - k_c^2)$.

6.15. а), б) $a_i^* = a_i^{**} = \left(\sum_{k=1}^{n} y_i^{(k)}\right)\Big/n$; в) $\mathsf{M}a_i^* = a_i$, $\mathsf{D}a_i^* = \sigma_i^2/n$.

6.16. а) $a_1^* = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} \gamma_k\left[(\Gamma_0 - \rho_k\Gamma_1)\, y_1^{(k)} + (\Gamma_1 - \rho_k\Gamma_0)\, y_2^{(k)}\right]$, где $\gamma_k = 1/(1 - \rho_k^2)$, $\Gamma_0 = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k$, $\Gamma_1 = \sum_{k=1}^{n}\rho_k\gamma_k$, $\Delta = \Gamma_0^2 - \Gamma_1^2$;

б) $a_1^{**} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_1^{(k)}$; в) $\mathsf{M}a_1^* = \mathsf{M}a_1^{**} = a_1$, $\mathsf{D}a_1^* = \frac{\Gamma_0}{\Delta}$, $\mathsf{D}a_1^{**} = \frac{1}{n}$.

6.17. а) $a_1^* = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{y_1^{(k)} - \rho_k y_2^{(k)}}{1 - \rho_k^2}\right)\Bigg/\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 - \rho_k^2}\right)$;

б) $a_1^{**} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_1^{(k)}$; в) $\mathsf{D}a_1^* = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 - \rho_k^2}\right)^{-1}$, $\mathsf{D}a_1^{**} = \frac{1}{n}$.

6.18. а) a, $\frac{1}{m}\left(\int\limits_G \ldots \int f^2(x)\,dx_1 \ldots dx_n - a^2\right)$;

б) $b^{*2} = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(f(\xi_i) - \eta_m)^2$.

в) $\left[\eta_m - u_\alpha\frac{b^*}{\sqrt{m}},\ \eta_m + u_\alpha\frac{b^*}{\sqrt{m}}\right]$, где $1 - \Phi(u_\alpha) = \alpha$.

6.19. $c_i = \frac{\sigma_i^{-2}}{\sigma_1^{-2} + \sigma_2^{-2}}$, $i = 1, 2$; $\mathsf{D}A^* = \gamma^2\sigma_3^2 + \frac{\beta^2}{\sigma_1^{-2} + \sigma_2^{-2}}$.

6.20. а) $z=(z_1+z_2+(1+\rho)z_3)/(3+\rho)$, $\mathsf{D}z=(1+\rho)/(3+\rho)$; б) $z=(z_1+z_2)/2$, $\mathsf{D}z=0$; в) $z=c_1z_1+c_2z_2+\frac{1}{2}z_3$, $c_1+c_2=\frac{1}{2}$; $\mathsf{D}z=1/2$.

6.21. а) $A_n^*=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{y}_i\tilde{x}_i\right)\Big/X_n^2$; б) $\mathsf{M}A_n^*=A$, $\mathsf{D}A_n^*=\sigma^2/X_n^2$.

6.22. а) $A_n^*=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{y}_i\tilde{x}_i\right)\Big/\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{x}_i^2\right)$.

6.23. $A^*=\left(\sum\limits_{i=1}^{k}x_in_i\bar{y}_i\right)\Big/\left(\sum\limits_{i=1}^{n}n_ix_i^2\right)$, $\mathsf{M}A^*=A$, $\mathsf{D}A^*=\frac{\sigma^2}{n}\times\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\frac{n_i}{n}\right)^{-1}$, где $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$, $\bar{y}_i=(y_{i1}+\ldots+y_{in_i})/n_i$ $(i=1,\ldots,k)$.

6.24. См. ответ к задаче 6.23. 6.25. p, $p(1-p)/n$.

6.26. p, $\frac{1}{n}p(1-p)\frac{N-n}{N-1}$. 6.27. а) $1-\gamma$; б) 1.

6.28. $\mathsf{M}\eta_n=1/N$, $\mathsf{D}\eta_n=2/(\alpha^2N^3)+O(1/N^4)$, $n/N\to\alpha\in(0,\infty)$, $N\to\infty$.

6.29. $\mathsf{M}a^*=a+(b-a)/(n+1)$, $\mathsf{M}b^*=b-(b-a)/(n+1)$, $\mathsf{D}a^*=\mathsf{D}b^*=\frac{(b-a)^2n}{(n+1)^2(n+2)}$, $\operatorname{cov}(a^*,b^*)=\frac{1}{n}\mathsf{D}a^*$.

6.30. $\mathsf{M}x_{(1)}=1/(\alpha n)$, $\mathsf{D}x_{(1)}=1/(\alpha n)^2$, $\mathsf{M}x_{(n)}=\frac{1}{\alpha}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $\mathsf{D}x_{(n)}=\frac{1}{\alpha^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$, $\operatorname{cov}(x_{(1)},x_{(n)})=\frac{1}{\alpha^2n^2}$.

6.31. а) $\mathsf{M}\theta_1^*=\mathsf{M}\theta_2^*=(a+b)/2$, $\mathsf{D}\theta_1^*=(b-a)^2/(12n)$, $\mathsf{D}\theta_2^*=\frac{(b-a)^2}{2(n+1)(n+2)}$; б) $\mathsf{M}\theta_1^*=\frac{1}{\alpha}$, $\mathsf{D}\theta_1^*=\frac{1}{\alpha^2n}$, $\mathsf{M}\theta_2^*=\frac{1}{2\alpha}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{2}{n}\right)$, $\mathsf{D}\theta_2^*=\frac{1}{4\alpha^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{4}{n^2}\right)$.

6.32. Является; $\mathsf{M}c^*=c$, $\mathsf{D}c^*=\frac{1}{n^2}$. 6.33. $\mathsf{M}\bar{a}=1$ м, $\mathsf{M}a^*=1{,}0833$ м, $\sqrt{\mathsf{M}(\bar{a}-a)^2}=1$ м, $\sqrt{\mathsf{M}(a^*-a)^2}=0{,}8706$ м.

6.34. б) $\mathsf{M}(I_N-I)^2=\sum\limits_{i=1}^{N}c_i^2\sigma_i^2+\left(\sum\limits_{i=N+1}^{n}c_i\theta_i\right)^2$; $\mathsf{M}(I_{n-1}-I)^2<\mathsf{M}(I_n-I)^2$, если $\sigma_n>\theta_n$.

6.37. $\eta_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\Big/ n.$ 6.38. $\eta_n = \sum\limits_{k=1}^{N} \xi_k \left(\ln \left(p_k^{(1)}/p_k^{(2)}\right)\right),$

где ξ_k — число величин x_j, равных k.

6.39. а) $C = na_1 + u_\alpha \sigma_1 \sqrt{n}$; б) $u_\alpha \sigma_1 + u_{\beta_n} \sigma_2 = (a_2 - a_1)\sqrt{n}$; в) 0.

6.40. $a_1 = e^{-\gamma}$, $a_2 = \int\limits_0^1 e^{-\gamma g(x)}\, dx$.

6.41. а) $\lambda_n^* = \tau_n/n$; б) λ, λ^2/n.

6.42. а) $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, 0; б) является.

ТАБЛИЦЫ

Нормальное распределение

Таблица 1. **Значения функции** $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du$

x	Сотые доли				
	0	1	2	3	4
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160
0,1	398	438	478	517	557
0,2	793	832	871	910	948
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331
0,4	554	591	628	664	700
0,5	915	950	985	0,2019	0,2054
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	357	389
0,7	580	611	642	673	703
0,8	881	910	939	967	995
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264
1,0	413	437	461	485	508
1,1	643	665	686	708	729
1,2	849	869	888	907	925
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099
1,4	192	207	222	236	251
1,5	332	345	357	370	382
1,6	452	463	474	484	495
1,7	554	564	573	582	591
1,8	641	649	656	664	671
1,9	713	719	726	732	738
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793
2,1	821	826	830	834	838
2,2	861	864	868	871	875
2,3	893	896	898	901	904
2,4	918	920	922	925	927
2,5	938	940	941	943	945
2,6	953	955	956	957	959
2,7	965	966	967	968	969
2,8	974	975	976	977	977
2,9	981	982	982	983	984
3,0	987	987	987	988	988

Таблица 2. **Значения функции** u_α

Функция u_α определяется равенством $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$

α	0,001	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025
u_α	3,0902	2,5758	2,3263	2,1701	2,0537	1,9600

Сотые доли					x
5	6	7	8	9	
0,0200	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359	0,0
596	636	675	714	753	0,1
987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141	0,2
0,1368	406	443	480	517	0,3
736	772	808	844	879	0,4
0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224	0,5
422	454	486	517	549	0,6
734	764	794	823	852	0,7
0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133	0,8
289	315	340	365	389	0,9
531	554	577	599	621	1,0
749	770	790	810	830	1,1
944	962	980	997	0,4015	1,2
0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177	1,3
265	279	292	306	319	1,4
394	406	418	429	441	1,5
505	515	525	535	545	1,6
599	608	616	625	633	1,7
678	686	693	699	706	1,8
744	750	756	761	767	1,9
0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817	2,0
842	846	850	854	857	2,1
878	881	884	887	890	2,2
906	909	911	913	916	2,3
929	931	932	934	936	2,4
946	948	949	951	952	2,5
960	961	962	963	964	2,6
970	971	972	973	974	2,7
978	979	979	980	981	2,8
984	985	985	985	986	2,9
989	989	989	990	990	3,0

α	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050
u_α	1,8808	1,8119	1,7507	1,6954	1,6449

Распределение Пуассона

Таблица 3. **Значения функции** $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158
5			0,00002	0,00006	0,00016
6					0,00001

k \ λ	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112
5	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7		0,00001	0,00002	0,00004

k \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10		0,00004	0,00081	0,00529	0,01813
11		0,00001	0,00022	0,00193	0,00824
12			0,00006	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00020	0,00132
14				0,00006	0,00047
15				0,00002	0,00016
16					0,00005
17					0,00001

Распределение Стьюдента

Таблица 4. **Значения функции $t_{\alpha,n}$**

Функция $t_{\alpha,n}$ определяется равенством

$$P(\tau_n > t_{\alpha,n}) = \alpha,$$

где случайная величина τ_n имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы. Плотность распределения τ_n равна

$$p_{\tau_n}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

n \ 2α	0,10	0,05	0,02	0,01
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	8,169
12	1,782	2,179	2,681	3,055
14	1,761	2,145	2,624	2,977
16	1,746	2,120	2,583	2,921
18	1,734	2,101	2,552	2,878
20	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,717	2,074	2,508	2,819
30	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

χ^2-распределение

Таблица 5. **Значения функции** $\chi^2_{\alpha,m}$

Функция $\chi^2_{\alpha,m}$ определяется равенством

$$P\left(\chi^2_m > \chi^2_{\alpha,m}\right) = \alpha,$$

где случайная величина χ^2_m имеет χ^2-распределение с m степенями свободы. Плотность распределения χ^2_m равна

$$p_{\chi^2_m}(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) 2^{m/2}} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \qquad x > 0.$$

m \ α	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005
1	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9
2	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6
3	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8
4	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9
5	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3
6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3
8	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9
9	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6
10	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2
11	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8
12	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3
13	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8
14	21,1	23,7	26,9	29,1	31
15	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5
16	23,5	26,3	29,6	32,0	34
17	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5
18	26,0	28,9	32,3	34,8	37
19	27,2	30,1	33,7	36,2	38,5
20	28,4	31,4	35,0	37,6	40
21	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5
22	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5
23	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0
24	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5
25	34,4	37,7	41,6	44,3	47

Случайные числа

Таблица 6. **Равномерно распределенные случайные числа**

Приведенные в таблице цифры можно рассматривать как реализации независимых случайных величин, принимающих значения 0,1, ... , 9 с одной и той же вероятностью, равной 0,1.

10	09	73	25	33	76	52	01	35	86	34	67	35	48	76
37	54	20	48	05	64	89	47	42	96	24	80	52	40	37
08	42	26	89	53	19	64	50	93	03	23	20	90	25	60
99	01	90	25	29	09	37	67	07	15	38	31	13	11	65
12	80	79	99	70	80	15	73	61	47	64	03	23	66	53
80	95	90	91	17	39	29	27	49	45	66	06	57	47	17
20	63	61	04	02	00	82	29	16	65	31	06	01	08	05
15	95	33	47	64	35	08	03	36	06	85	26	97	76	02
88	67	67	43	97	04	43	62	76	59	63	57	33	21	35
98	95	11	68	77	12	17	17	68	33	73	79	64	57	53
34	07	27	68	50	36	69	73	61	70	65	81	33	98	85
45	57	18	24	06	35	30	34	26	14	86	79	90	74	39
02	05	16	56	92	68	66	57	48	18	73	05	38	52	47
05	32	54	70	48	90	55	35	75	48	28	46	82	87	09
03	52	96	47	78	35	80	83	42	82	60	93	52	03	44
11	19	92	91	70	98	52	01	77	67	14	90	56	86	07
23	40	30	97	32	11	80	50	54	31	39	80	82	77	32
18	62	38	85	79	83	45	29	96	34	06	28	89	80	83
83	49	12	56	24	88	68	54	02	00	86	50	75	84	01
35	27	38	84	35	99	59	46	73	48	87	51	76	49	69
22	10	94	05	58	60	97	09	34	33	50	50	07	39	98
50	72	56	82	48	29	40	52	42	01	52	77	56	78	51
13	74	67	00	78	18	47	54	06	10	68	71	17	78	17
36	76	66	79	51	90	36	47	64	93	29	60	91	10	62
91	82	60	89	28	93	78	56	13	68	23	47	83	41	13
65	48	11	76	74	17	46	85	09	50	58	04	77	69	74
80	12	43	56	35	17	72	70	80	15	45	31	82	23	74
74	35	09	98	17	77	40	27	72	14	43	23	60	02	10
69	91	62	68	03	66	25	22	91	48	36	93	68	72	03
09	89	32	05	05	14	22	56	85	14	46	42	75	67	88
73	03	95	71	86	40	21	81	65	44	91	49	91	45	23
21	11	57	82	53	14	38	55	37	63	80	33	69	45	98
45	52	16	42	37	96	28	60	26	55	44	10	48	19	49
76	62	11	39	90	94	40	05	64	18	12	55	07	37	42
96	29	77	88	22	54	38	21	45	98	63	60	64	93	29
68	47	92	76	86	46	16	28	35	54	94	75	08	99	23
26	94	03	68	58	70	29	73	41	35	53	14	03	33	40
85	15	74	79	54	32	97	92	65	75	57	60	04	08	81
11	10	00	20	40	12	86	07	46	97	96	64	48	94	39
16	50	53	44	84	40	21	95	25	63	43	65	17	70	82

Таблица 7. **Нормально распределенные случайные числа**

Приведенные в таблице 7 числа можно рассматривать как реализации независимых, случайных величин, имеющих нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma^2 = 1$.

0,464	0,137	2,455	−0,323	−0,068	0,296	−0,288	1,298
0,060	−2,256	−0,531	−0,194	0,543	−1,558	0,187	−1,190
1,486	−0,354	−0,634	0,697	0,926	1,375	0,785	−0,963
1,022	−0,472	1,279	3,521	0,571	−1,851	0,194	1,192
1,394	−0,555	0,046	0,321	2,945	1,974	−0,258	0,412
0,906	−0,513	−0,525	0,595	0,881	−0,934	1,579	0,161
1,179	−1,055	0,007	0,769	0,971	0,712	1,090	−0,631
−1,501	−0,488	−0,162	−0,136	1,033	0,203	0,448	0,748
−0,690	0,756	−1,618	−0,345	−0,511	−2,051	−0,457	−0,218
1,372	0,225	0,378	0,761	0,181	−0,736	0,960	−1,530
−0,482	1,678	−0,057	−1,229	−0,486	0,856	−0,491	−1,983
−1,376	−1,150	1,356	−0,561	−0,256	−0,212	0,219	0,779
−1,010	0,598	−0,918	1,598	0,065	0,415	−0,169	0,313
−0,005	−0,899	0,012	−0,725	1,147	−0,121	1,096	0,181
1,393	−1,163	−0,911	1,231	−0,199	−0,246	1,239	−2,574
−1,787	−0,261	1,237	1,046	−0,508	−1,630	−0,146	−0,392
−0,105	−0,357	−1,384	0,360	−0,992	−0,116	−1,698	−2,832
−1,339	1,827	−0,959	0,424	0,969	−1,141	−1,041	0,362
1,041	0,535	0,731	1 377	0,983	−1,330	1,620	−1,040
0,279	−2,056	0,717	−0,873	−1,096	−1,396	1,047	0,089
−1,805	−2,008	−1,633	0,542	0,250	−0,166	0,032	0,079
−1,186	1,180	1,114	0,882	1,265	−0,202	0,151	−0,376
0,658	−1,141	1,151	−1,210	−0,927	0,425	0,290	−0,902
−0,439	0,358	−1,939	0,891	−0,227	0,602	0,873	−0,437
−1,399	−0,230	0,385	−0,649	−0,577	0,237	−0,289	0,513
0,199	0,208	−1,083	−0,219	−0,291	1,221	1,119	0,004
0,159	0,272	−0,313	0,084	−2,828	−0,439	−0,792	−1,275
2,273	0,606	0,606	−0,747	0,247	1,291	0,063	−1,793
0,041	−0,307	0,121	0,790	−0,584	0,541	0,484	−0,986
−1,132	−2,098	0,921	0,145	0,446	−1,661	1,045	−1,363
0,768	0,079	−1,473	0,034	−2,127	0,665	0,084	−0,880
0,375	−1,658	−0,851	0,234	−0,656	0,340	−0,086	−0,158
−0,513	−0,344	0,210	−0,736	1,041	0,008	0,427	−0,831
0,292	−0,521	1,266	−1,206	−0,899	0,110	−0,528	−0,813
1,026	2,990	−0,574	−0,491	−1,114	1,297	−1,433	−1,345
−1,834	1,278	−0,568	−0,109	−0,515	−0,566	2,923	0,500
−0,287	−0,144	−0,254	0,574	−0,451	−1,181	−1,190	−0,318
0,161	−0,886	−0,921	−0,509	1,410	−0,518	0,192	−0,432
−1,346	0,193	−1,202	0,394	−1,045	0,843	0,942	1,045
1,250	−0,199	−0,288	1,810	1,378	0,584	1,216	0,733

0,630	—0,537	0,782	0,060	0,499	—0,431	1,705	1,164
0,375	—1,941	0,247	—0,491	0,665	—0,135	—0,145	—0,498
—1,420	0,489	—1,711	—1,186	0,754	—0,732	—0,066	1,006
—0,151	—0,243	—0,430	—0,762	0,298	1,049	1,810	2,885
—0,309	0,531	0,416	—1,541	1,456	2,040	—0,124	0,196
0,424	—0,444	0,593	0,993	—0,106	0,116	0,484	—1,272
0,593	0,658	—1,127	—1,407	—1,579	—1,616	1,458	1,262
0,862	—0,885	—0,142	—0,504	0,532	1,381	0,022	—0,281
0,235	—0,628	—0,023	—0,463	—0,899	—0,394	—0,538	1,707
—0,853	0,402	0,777	0,833	0,410	—0,349	—1,094	0,580
0,241	—0,957	—1,885	—0,371	—2,830	—0,238	—0,627	0,561
0,022	0,525	—0,255	—0,702	0,953	—0,869	—1,108	—2,357
—0,853	—1,865	—0,423	—0,432	—0,973	—1,016	—1,726	1,956
—0,501	—0,273	0,857	—0,465	—1,691	0,417	0,524	—0,281
0,439	—0,035	—0,260	0,120	—0,558	0,056	—0,578	0,932
0,471	—1,029	—2,015	—0,594	—0,579	0,551	0,359	0,326
—0,310	0,479	—0,623	—1,047	—0,120	0,418	—0,094	1,114
0,610	2,709	—0,699	—1,347	0,191	0,074	1,501	1,068
—0,220	—0,057	0,481	0,996	0,071	0,524	0,031	0,772
0,738	—0,300	—0,586	—1,023	—3,001	0,479	0,402	0,226
0,884	—0,298	1,066	1,097	—1,752	—0,329	—1,256	0,318
0,457	1,064	0,736	—0,916	—0,291	0,085	1,701	—1,087
—0,798	0,162	—0,342	1,222	—0,933	0,130	0,674	0,899
—0,768	—0,129	—0,188	—1,153	—0,450	—0,244	0,072	1,028
0,023	—1,204	1,395	1,298	0,512	—0,882	0,490	—1,304
1,531	0,349	—0,958	—0,059	0,415	—1,084	—0,856	—0,063
—0,443	—0,292	—0,248	—0,539	—1,382	0,318	—0,276	—1,110
1,409	—0,883	—0,095	0,229	0,129	0,367	0,379	—0,440
1,730	—0,056	—1,488	—0,078	—2,361	—0,992	1,468	0,131
—0,266	0,757	—0,361	0,194	—1,078	0,529	—1,805	—0,772

ПРОГРАММНЫЕ ДАТЧИКИ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Теория вероятностей и математическая статистика изучают свойства математических моделей случайных явлений. Существование тех или иных свойств таких моделей обосновывается, как и в других областях математики, строгими дедуктивными рассуждениями. Однако поиск этих свойств может проводиться путем экспериментов с математическими моделями. Для постановки таких экспериментов необходимо иметь в своем распоряжении последовательности чисел, которые, с той или иной точки зрения, можно рассматривать как реализации последовательности независимых случайных величин (см., например, задачи 6.9 — 6.11). Другой важной областью практических применений таких последовательностей чисел являются методы Монте-Карло, простейшие примеры которых содержатся в задачах 4.11 и 4.12.

В большинстве случаев необходимые для статистических экспериментов последовательности чисел получаются с помощью ЭВМ. Существует много различных программ, вырабатывающих детерминированные последовательности чисел, которые имеют достаточно сложную нерегулярную структуру и поэтому во многом похожи на последовательности случайных чисел. Чтобы подчеркнуть принципиальное отличие этих детерминированных последовательностей от «настоящих» случайных последовательностей, такие программы называют *датчиками псевдослучайных чисел.*

Ниже приводится несколько датчиков псевдослучайных чисел для программируемого микрокалькулятора «Электроника БЗ-34». Каждую из этих программ можно использовать как подпрограмму, если заменить стоящую в ее конце команду БП безусловного перехода к началу командой В/О возврата из подпрограммы.

Для тех, кто владеет основами программирования, не составит труда написать аналогичные программы для других микрокалькуляторов или перевести их на какой-нибудь язык программирования.

1. *Псевдослучайные числа с равномерным распределением на отрезке* [0, 1].

Один из простейших способов построения последовательности v_0, v_1, v_2, ... псевдослучайных чисел из отрезка [0, 1] с распределением, близким к равномерному, дает рекуррентная формула

$$v_{n+1} = \{Kv_n\}, \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots, \tag{1}$$

где $\{x\}$ обозначает дробную долю числа x, а K — целое число, определяющее свойства последовательности $\{v_n\}$. Чтобы последовательность $\{v_n\}$ имела достаточно большой период и не была слишком регулярной, целесообразно выбирать в качестве K целое двузначное число, дающее при делении на 8 остаток +3 или −3. Программа A реализует преобразование (1) числа $v_n \in (0, 1)$, находящегося на индикаторе и хранящегося в регистре C (в случае, когда $K = 37$).

Программа А

00	ПС	
01	3	Вычисление $v_n^* = 37v_n + 1$.
02	7	
03	×	
04	1	
05	+	
06	ПД	Вычисление целой части $[v_n^*]$ числа v_n^*.
07	КИПД	
08	XY	Вычисление $v_{n+1} = \{v_n^*\} = v_n^* - [v_n^*]$.
09	ИПД	
10	−	
11	С/П	Выдача результата.
12	БП	Переход к вычислению v_{n+2}.
13	00	

Например, если перед началом работы программы ввести на индикатор число $v_0 = 0{,}1357913$, то получим последовательность 0,0242781, 0,8982897, 0,236719, 0,758603,...

Если заменить в программе А число $K = 37$ числом $K = 93$, то получим другую последовательность псевдослучайных чисел: 0,628591, 0,458963, 0,683559, 0,570987,... .

Приведем еще один датчик псевдослучайных чисел, соответствующий рекуррентной формуле $v_{n+1} = \{11v_n + \pi\}$, $n = 0, 1, \ldots$; реализующая его программа В отличается от программы А лишь несколькими первыми командами.

Программа В

00 ПС	07 КИПД
01 1	08 XY
02 1	09 ИПД
03 ×	10 —
04 Fπ	11 С/П
05 +	12 БП
06 ПД	13 00

Начиная работу программы В с того же числа $v_0 = 0{,}1357913$, получаем: 0,6352969, 0,129859, 0,5700416, 0,4120502,...

2. *Псевдослучайные числа с равномерным распределением на отрезке* $[a, b]$, *с равномерным распределением на множестве* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *или с показательным распределением.*

Датчик псевдослучайных чисел, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, позволяет легко получать последовательность псевдослучайных чисел, имеющих заданную функцию распределения $F(x)$, если обратная к ней функция $F_{-1}(y) = \sup\{x\colon F(x) \leqslant y\}$, $0 < y < 1$, вычисляется достаточно просто (см. задачу 3.13). Например, если $F(x)$ — функция равномерного распределения на отрезке $[a, b]$, то $F_{-1}(y) = a + (b - a)y$; если $F(x)$ — функция равномерного распределения на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, то $F_{-1}(y) = 1 + [ny]$; если $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ — функция показательного распределения с параметром α, то $F_{-1}(y) = -\alpha^{-1} \ln y$.

Приведенные ниже программы С, D, Е реализуют указанные преобразования. Эти программы имеют общее начало (команды 00 — 11) и используют регистр С для хранения текущего значения псевдослучайного числа, имеющего равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Перед пуском каждой из программ С — Е в регистр С следует заслать начальное значение $v_0 \in (0, 1)$ датчика псевдослучайных чисел.

В программе C (равномерное распределение на $[a, b]$) регистр A должен содержать значение a, регистр B — значение $b - a$. В программе D (равномерное распределение на $\{1, 2, \ldots, n\}$) регистр A должен содержать значение n. В программе E (показательное распределение) регистр A должен содержать значение α.

Программы C — E

		C		D		E	
00	ИПС	12	ИПВ	12	ИПА	12	F ln
01	9	13	×	13	×	13	—
02	3	14	ИПА	14	1	14	ИПА
03	×	15	+	15	+	15	÷
04	1	16	С/П	16	ПД	16	С/П
05	+	17	БП	17	КИПД	17	БП
06	ПД	18	00	18	ИПД	18	00
07	КИПД			19	С/П		
08	XY			20	БП		
09	ИПД			21	00		
10	—						
11	ПС						

При одном и том же начальном значении $v_0 = 0{,}1357913$ (заполнении регистра C) эти программы выдают следующие результаты:

$C(a = -\pi,\ b = \pi)$: 0,8079611, —0,2578431,...

$D(n = 12)$: 8, 6, 9, 7, 2, 6, 5, 4, 3, 12,...

$E(\alpha = 1)$: 0,4642745, 0,7787857, 0,3804423,...

3. *Псевдослучайные числа с нормальным распределением.*

Для построения последовательности псевдослучайных чисел с нормальным распределением метод, использованный в п. 2, неудобен, потому что функция, обратная к функции нормального распределения, вычисляется сложно. Здесь можно использовать утверждение (ср. с задачами **3.230** и **4.127**): случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют стандартное нормальное распределение тогда и только тогда, когда независимы случайные величины $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ и $\varphi = \arg(\xi_1 + i\xi_2)$, причем

$$\mathsf{P}\{0 \leqslant \rho^2 \leqslant x\} = 1 - e^{-x/2}, \quad \mathsf{P}\{0 \leqslant \varphi \leqslant x\} = \min\left\{1, \frac{x}{2\pi}\right\},$$

$$x \geqslant 0.$$

Поэтому если случайные величины ν_1 и ν_2 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, то случайные величины

$$\xi_1 = \cos(2\pi\nu_1)\sqrt{-2\ln\nu_2},$$
$$\xi_2 = \sin(2\pi\nu_1)\sqrt{-2\ln\nu_2} \qquad (2)$$

независимы и имеют стандартное нормальное распределение с $M\xi_1 = M\xi_2 = 0$, $D\xi_1 = D\xi_2 = 1$. Переход от случайной величины ξ, имеющей стандартное нормальное распределение, к случайной величине η, имеющей нормальное распределение с параметрами $M\eta = a$, $D\eta = \sigma^2$, осуществляется по формуле (3.27) из вводной части к гл. 3:

$$\eta = a + \sigma\xi. \qquad (3)$$

Программа F реализует преобразования (2) и (3) и выдает псевдослучайные числа парами. Регистр A должен содержать значение a, регистр B — значение σ, регистр C — начальное значение $v_0 \in (0, 1)$ датчика псевдослучайных чисел, содержимое регистра 9 перед началом работы должно быть равно 0.

Например, при $a = 5$ и $\sigma = 1$ получаем, начиная с $v_0 = 0{,}1357913$, последовательность 4,137646, 4,0978265, 4,5707727, 4,0322492, 5,9907414,...

Программа F

00	БП	14	1	28	2	42	ИП1
01	14	15	ИП9	29	×	43	F sin
02	ИПС	16	—	30	П1	44	ИП2
03	9	17	П9	31	F cos	45	×
04	3	18	Fx ≠ 0	32	XY	46	ИПВ
05	×	19	42	33	ПС	47	×
06	1	20	ПП	34	F ln	48	ИПА
07	+	21	02	35	|—|	49	+
08	ПД	22	ПС	36	2	50	С/П
09	КИПД	23	ПП	37	×	51	БП
10	XY	24	02	38	F$\sqrt{\ }$	52	14
11	ИПД	25	ИПС	39	П2		
12	—	26	Fπ	40	БП		
13	В/О	27	×	41	45		

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики.— 3-е изд.— М.: Наука, 1983.— 416 с.
2. Боровков А. А. Теория вероятностей.— 2-е изд.— М.: Наука, 1986.— 431 с.
3. Боровков А. А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез.— М.: Наука, 1984.— 472 с.
4. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Математическая статистика.— М.: Высшая школа, 1984.— 248 с.
5. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей.— 2-е изд.— М.: Наука, 1974.— 119 с.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— 6-е изд.— М.: Наука, 1989.— 543 с.
7. Крамер Г. Математические методы статистики.— 2-е изд.: Пер. с англ.— М.: Мир, 1976.— 648 с.
8. Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. Задачи по теории вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы.— М.: Наука, 1986.— 327 с.
9. Риордан Д. Введение в комбинаторный анализ.— М.: ИЛ, 1963.— 287 с.
10. Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики.— М.: Наука, 1982.— 255 с.
11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2 т. Пер. с англ.— М.: Мир, 1984.— Т. 1.— 528 с.; Т. 2.— 752 с.
12. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей.— 3-е изд.— М.: Наука, 1987.— 240 с.
13. Ширяев А. Н. Вероятность.— 2-е изд.— М.: Наука, 1989.— 576 с.

Учебное издание

Зубков Андрей Михайлович
Севастьянов Борис Александрович
Чистяков Владимир Павлович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Заведующий редакцией *А. П. Баева*
Редактор *И. Е. Морозова*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *Н. Д. Дорохова*

ИБ № 32828

Сдано в набор 17.05.88. Подписано к печати 11.08.89. Формат 84×108/32. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 16,8. Усл. кр.-отт. 16,8. Уч.-изд. л. 19,85. Тираж 68 000 экз. Заказ № 195. Цена 1 руб.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 Новосибирск, 77, Станиславского, 25