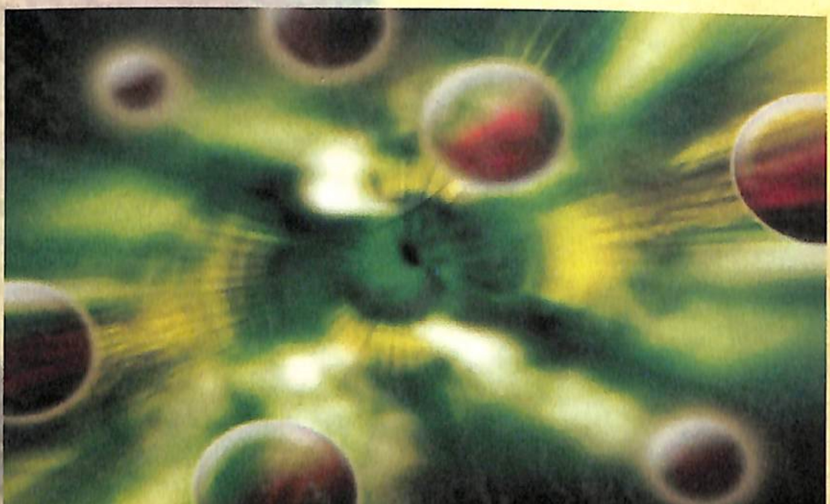
EHTIMOLLAR NAZARIYASIDAN MASALALAR TO'PLAMI



Kitob quyidagi ko'rsatilgan muddatda topshirilishi shart

Oldingi foydalanishlar miqdori___________	
23.01.20	1.02.20

0,4 – 0,40

S. F. FAYZULLAYEVA

EHTIMOLLAR NAZARIYASIDAN MASALALAR TO'PLAMI

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi o'quv qo'llanma sifatida nashrga tavsiya etgan

O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti
Toshkent – 2006

Mas'ul muharrirlar:
A.A. RAFIYEV, filologiya fanlari nomzodi, dotsent,
SH.T. RIZAYEV, filologiya fanlari nomzodi.

Taqrizchilar:
U. E. MAMIROV, dotsent.
N. TOSHOV, dotsent.

22.171
F 20

Fayzullayeva S. F.
Ehtimollar nazariyasidan masalalar to'plami: o'quv qo'llanma. – T.: O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati, 2006. – 112-b.

1. Fayzullayeva S. F.

BBK 22.171я7

O'quv qo'llanmada ehtimollar nazariyasining tasodifiy hodisa, ehtimol, tasodifiy miqdor, taqsimot funksiyalarni, tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi kabi mavzular va ularga doir masalalarni yechish usullari bayon qilingan. O'quv qo'llanma universitetlarning 5460100–matematika bakalavrlik yo'nalishi o'quv rejasidagi ehtimollar nazariyasi fanining amaldagi dasturi asosida yozilgan. Unda fan bo'limlari bo'yicha masalalarni mustaqil yechishda foydalaniladigan nazariy ma'lumot va formulalar hamda namunaviy masalalar yechimlari bilan keltirilgan. Mazkur qo'llanmadan mexanika, amaliy matematika va informatika, fizika hamda iqtisodiyot yo'nalishlarining talabalari, shuningdek ehtimollar nazariyasi bilan shug'ullanadigan barcha mutaxassislar ham foydalanishlari mumkin.

SO'ZBOSHI

Universitetlar va oliy texnika o'quv yurtlarida "Ehtimollar nazariyasi" fani bo'yicha ma'ruzalar hamda amaliy mashg'ulotlar olib boriladi. Mazkur o'quv qo'llanmada shu fanning asosiy bo'limlari qamrab olingan. Unda ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari: tasodifiy hodisa, hodisaning ehtimoli, tasodifiy miqdor, taqsimot funksiyalar, tasodifiy miqdorlarning funksiyalari, sonli xarakteristikalari kabi mavzulari bo'yicha zarur nazariy ma'lumotlar va formulalar qisqacha keltirilgan hamda ularga oid masalalarni yechish usullari bayon etilgan.

Ushbu o'quv qo'llanmadan universitetlarning mexanika, matematika, informatika va informatsion texnologiyalar, fizika, iqtisodiyot yo'nalishlari talabalari hamda "Ehtimollar nazariyasi" fani metodlari yordamida amaliy masalalarni yechadigan injener-texnik xodimlar ham foydalanishlari mumkin.

Ehtimollar nazariyasining vujudga kelishida bo'lgani kabi uning rivojlanishi ham amaliyot talablari bilan belgilanadi. Hozirgi vaqtda uning usullari fan va texnikaning turli sohalarida qo'llaniladi. Shu bilan birga, ular qishloq xo'jaligida, biologiyada, meditsinada, psi-xologiyada, iqtisodiy va sotsiologik tadqiqotlar kabilarda ham tatbiq qilinmoqda.

1-bob. TASODIFIY HODISALAR EHTIMOLI

1.1. Ehtimolning klassik, statistik ta'riflari

Tajriba hodisani ro'yobga keltiruvchi shartlar majmuyining bajarilishini ta'minlashdan iborat. Tajriba natijasida ro'y berishi oldindan aniq bo'lmagan hodisa *tasodifiy hodisa* deyiladi. Tajribaning har qanday natijasi elementar hodisa deyiladi. Tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar to'plami *elementar hodisalar fazosi* deyiladi va Ω orqali belgilanadi. Tajriba har bir takrorlanganda albatta yuz beradigan hodisa muqarrar (ishonchli) hodisa deyiladi va U (to'plam ma'nosida Ω) orqali belgilanadi. Birorta ham elementar hodisani o'z ichiga olmagan hodisa *mumkin bo'lmagan (ishonchsiz) hodisa deyiladi* va B (to'plam ma'nosida $\varnothing$) bilan belgilanadi. A biror hodisa bo'lsin. A hodisaga qarama-qarshi hodisani $\overline{A}$ bilan belgilab, A hodisaning yuz bermasligidan iborat bo'lgan hodisani tushunamiz. Har qanday tasodifiy hodisa Ω ning qism to'plamidir.

Ta'rif. *Agar A hodisa ro'y berganda B hodisa* ham ro'y bersa (B ro'y berganda A ning ro'y berishi shart emas), A hodisa B hodisani ergashtiradi deyiladi va $A \subset B$ kabi belgilanadi. Agar A hodisa B hodisani ergashtirib, B hodisa ham A hodisani ergashtirsa, A va B *hodisalar teng kuchli* deyiladi va $A=B$ kabi ifodalanadi.

Ta'rif. *A va B hodisalarning yig'indisi* deb, A yoki B ning yoki ikkalasining ham ro'y berishidan iborat bo'lgan $A+B$ yoki $A \cup B$ hodisaga aytamiz.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ tasodifiy hodisalar yig'indisi deb, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalarning hech bo'lmaganda bittasi (yoki bir nechtasi yoki ham-masi) ro'y berishidan iborat A hodisaga aytiladi va $A=A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n$ deb belgilanadi.

Ta'rif. *A va B hodisalarning ko'paytmasi* deb, bu hodisalarning bir paytda ro'y berishidan iborat bo'lgan AB yoki $A \cap B$ hodisaga aytiladi.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ *hodisalarning ko'paytmasi* deb, $A_1, A_2, \ldots, A_n$

hodisalarning bir paytda ro'y berishidan iborat A hodisaga aytiladi va $A=A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n$ kabi belgilanadi.

Ta'rif. *A va B hodisalarning ayirmasi* deb, A hodisa ro'y berib, B hodisa ro'y bermasligidan iborat bo'lgan $A - B$ yoki $(A \backslash V)$ hodisaga aytiladi.

Ta'rif. Agar, $A=A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n$ hodisalarning yig'indisi ishonchli hodisa, ya'ni $A=A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n=U$ bo'lsa, ularning ixti-yoriy ikkitasining ko'paytmasi ishonchsiz hodisa, ya'ni $A_i \cdot A_j=V$, $(i \neq j)$ bo'lsa, bu tasodifiy hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'liq gruppasini tashkil qiladi deyiladi.

Agar Ω chekli n ta elementar hodisadan tashkil topgan bo'lib, har bir elementar hodisaning ehtimolini $\frac{1}{n}$ ga teng deb olinsa, bu elementar hodisalar teng imkoniyatli deyiladi. Aytaylik, e_i elementar hodisalardan ba'zilari ro'y bergandagina A hodisa ro'y bersin. Bu holda e_i elementar hodisalar orasidan ro'y berishi A hodisaning ham ro'yobga chiqishiga olib keladiganlarini A hodisaga qulaylik ya-ratadi, deb aytamiz. A hodisaning tarkibiga kirgan elementar hodi-salarni «qulaylik yaratuvchi hollar» deb, elementar hodisalar fazosi elementlarining jami sonini umumiy hollar soni deb ataymiz.

Ta'rif. (Ehtimolning klassik ta'rifi) Qaralayotgan A hodisaning ro'y berishiga qulaylik yaratuvchi hollar soni m ga, umumiy hollar soni esa n ga teng bo'lganda $P(A)=\frac{m}{n}$ kabi aniqlanuvchi miqdor shu hodisaning ehtimoli deb ataladi.

Ehtimollar nazariyasining tabiiy-ilmiy va texnikaviy, sotsiologik masalalaridagi turli tatbiklarida ehtimolning statistik ta'rifi deb ataluv-chi ta'rifidan foydalaniladi.

O'yin soqqasini yoki tangani tashlash, nishonga qarata o'q uzish va shunga o'xshash tajribalarni sharoitni o'zgartirmagan holda cheksiz ko'p marta takrorlash mumkin. Bu tajribalarning har birida biror hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligini qayd qilish mumkin. Tajribalar soni n yetarlicha katta bo'lganda bizni qiziqtirayotgan hodisa r marta ro'y bergan bo'lsin $\mu = \frac{r}{n}$. nisbatni hodisaning chastotasi (ba'zan nisbiy chastotasi) deb ataymiz. Ba'zi bir hodisalar-ning ro'y berishini kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, ko'p hollarda tajribalar soni yetarlicha katta bo'lganda hodisa chastotasining qiymati biror o'zgarmas son atrofida turg'un ravishda tebranadi. Matematika tarixidan ma'lumki, eksperimentator Byuffon tangani 4040 marta tashlab ko'rganda, gerbli tomon tushish soni 2048 ga teng ekanligini qayd qilgan. Bu hodisa chastotasi 0,5080 ekanligi ma'lum bo'ldi. Eksperimentator Pirson K. tangani 24000 marta tashlab ko'rganda, gerbli tomon tushishlari soni 12012 ga teng ekanligini qayd etgan. Bu holda hodisaning ro'y berish chastotasi 0,5005 dan iborat bo'ldi. Ko'rinib turibdiki, bu chastotalar 0,5 soni atrofida o'zgaryapti (tebranyapti). Chastotaning bunday turg'unligi qaralayotgan hodisa (hozirgi holda tanganing gerbli tomoni bilan tushishi) tayin ehtimolga ega, chastota esa shu ehtimol atrofida tebranadi deb faraz qi-lishga asos bo'la oladi. Bunday usulda aniqlangan ehtimol hodisaning *statistik ehtimoli* deb ataladi.

Ta'rif. Tajriba o'tkazilayotgan sharoitlarni o'zgartirmaganda hodisaning ro'y berish chastotasi tebranadigan va chastotani xarakterlaydigan sonni *shu hodisaning ehtimoli* deb ataladi.

Ta'rif. Agar tajribalar soni yetarlicha katta bo'lib, shu tajribalarda qaralayotgan A hodisaning ro'y berish chastotasi biror o'zgarmas $p \in [0,1]$ son atrofida turg'un tebransa, shu r sonni A *hodisaning ro'y berish ehtimoli* deb qabul qilamiz.

Chekli sondagi $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar sistemasini qaraymiz va unga quyidagi shartlarni qo'yamiz:

1. Bu hodisalar juft-jufti bilan birgalikdamas, ya'ni, istalgan ikkita $A_i, A_k, (i, k=1, 2, \dots, n, i=k)$ hodisa uchun ulardan birining yuz berishi ikkinchisining yuz berishini yo'qqa chiqaradi.
2. $A_1, A_2, \dots, A_n$ lar hodisalarning to'la guruhini tashkil etsin, ya'ni ularning qaysidir biri albatta yuz berishi lozim.
3. $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar teng imkoniyatli. Bu shart $A_1, A_2, \dots, A_n$

hodisalardan birortasining boshqalardan ko'proq yuz berishiga yordam beradigan hech qanday obyektiv sabablar yo'qligini anglatadi.

Ehtimolning aksiomalarini keltiramiz.

$\Omega -$ biror to'plam, $S -$ uning qism to'plamlarining biror sistemasi bo'lsin.

Agar

1. $\Omega \in S$;

2. $A_i \in S$; $i = 1, 2, \dots, n$ dan $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in S$ kelib chiqsa,

3. $A \in S$ dan $\overline{A} \in S$ kelib chiqsa, S sistema *algebra tashkil etadi,* deyiladi. Agar ikkinchi shart o'rniga

$A_i \in S$ dan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$ kelib chiqsin, degan shartning bajarilishi

talab qilinsa, u holda S sistema $\sigma -$algebra tashkil etadi deyiladi.

Odatda $\Omega -$ elementar hodisalar fazosi, bu fazoning elementlari ya'ni nuqtalari *elementar hodisalar,* S ning elementlari esa tasodifiy hodisalar deyiladi S. ning o'zi esa *hodisalarning σ algebrasi* deyiladi.

Biz hodisalarning biror S to'plamini qaraymiz. Bu to'plam ushbu xossalarga ega bo'lsin: to'plamga tegishli har bir hodisaga qarama-qarshi hodisa ham shu to'plamga tegishli; to'plamga tegishli chekli yoki cheksiz sondagi hodisalar yig'indisi, ko'paytmasi yana shu to'plamga tegishli. Bu to'plam ishonchli hodisani ham o'z ichiga olishi shart. Bu S to'plam tasodifiy hodisalarning σ -algebrasini tashkil etadi deyiladi. S ning ixtiyoriy elementi A ni tasodifiy hodisa deb yuritamiz. A hodisaga $R(A)$ sonni mos qo'yuvchi va quyidagi xossalarga ega bo'lgan sonli funksiya aniqlangan bo'lsin:

1. Har qanday A tasodifiy hodisa uchun

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Agar U ishonchli hodisa bo'lsa, u holda

$$R(U)=1.$$

3. Agar A hodisa B hodisani ergashtirsa, u holda

ta'rifi deb ham yuritadilar.

(Ω, S, P) uchlik ehtimollik fazosi deb ataladi.

Istalgan A hodisaga qulaylik tug'diruvchi hodisalar soni m ushbu $0 \le m \le n$ tengsizliklarni qanoatlantiradi. Shuning uchun istalgan A hodisaning ehtimoli $0 \le P(A) \le 1$ shartini qanoatlantiradi. Shuni ta'kidlash joizki, muqarrar (ishonchli) hodisaga hamma «elementar» hodisalar imkoniyat yaratadi. Demak, ishonchli ho-disaning ehtimoli birga teng:

$$P(\Omega) = P(U) = 1.$$

Agar B – (ishonchsiz) mumkin bo'lmagan hodisa bo'lsa, bu holda m=0 bo'ladi, ya'ni mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimoli nolga teng:

P(V)=0.

Teorema. (Qo'shish teoremasi) A va B birgalikdamas hodisal-ar bo'lsin. Bu hodisalardan kamida birining yuz berish ehtimoli ular-ning ehtimollari yig'indisiga teng, ya'ni

munosabat o'rinlidir. Bu oxirgi tenglikni chekli sondagi qo'shiluv-chilar uchun ham qo'llash mumkin.

Ta'rif. Agar ikkita hodisadan birining ehtimoli ikkinchisining ro'y berishi yoki ro'y bermasligi natijasida o'zgarmasa, u holda bu hodi-salar *o'zaro bog'liq bo'lmagan (erkli) hodisalar* deyiladi.

Agar A va B hodisalar erkli bo'lsa, u holda ularning birgalikda ro'y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining ko'paytmasiga teng:

P(A va B)=P(AB)=P(A)P(B).

Ta'rif. Bir nechta A, B, ... , C hodisalardan istalgan birining ro'y berish ehtimoli qolganlarining ro'y berish yoki ro'y bermasligiga bog'liq bo'lmasa, u holda *bu hodisalar birgalikda erkli* deyiladi.

Hodisalarning birgalikda erkli bo'lishi uchun ularning juft-juft erkli bo'lishi kifoya qilmasligini tekshirib ko'rish mumkin.

Birgalikda erkli bo'lgan A, B, E, ... , C hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining ko'paytmasiga teng:

$$P(A\ ва\ B\ ва\ E...ва\ C) = P(A \cdot B \cdot E \cdot ... \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(E) \cdot ... \cdot P(C)$$

1-masala. Simmetrik o'yin kubi n marta tashlanayotgan bo'lsin.

5. Hodisalar o'rtasidagi quyidagi munosabatlarni tekshirib ko'ring:

a) $(AUB)\cdot C = ACUBC$;

b) $(AUB)\setminus B = A\setminus AB = A\overline{B}$

d) $A(B-C) = AB - AC$

6. Ikki shaxs, ya'ni A va B kishi $[O,T]$ vaqt davomida (oralig'ida) uchrashmoqchi bo'lishdi. Agar x bilan uchrashuv joyiga A ning kelish vaqtini, u bilan uchrashuv joyiga B ning kelish vaqtini belgilab olsak, elementar hodisalar fazosi Ω qanday bo'ladi?

7. Tajriba simmetrik bir jinsli tangani 4 marta tashlashdan iborat bo'lsin. Elementar hodisalar fazosi qanday ko'rinishga ega?

8. Tasodifiy sonlar jadvalidagi 10000 dona sonlar orasida 7 soni 968 marta uchragan. 7 soning uchrash nisbiy chastotasini toping.

9. Biror suv havzasida (ko'lda) N dona baliq bor deb taxmin qilingan. Bu son noma'lum. M dona baliq ovlanadi va ularga belgi qo'yilib, yana o'sha ko'lga tashlanadi. Takror yana o'sha ko'ldan n_1 dona baliq ovlanadi, belgilangan baliqlar soni m_1 ni aniqlaymiz va h.k. $\frac{m_1}{n_1},\dots,\frac{m_k}{n_k}$, nisbat qanday son atrofida tebranadi?

10 . Texnik nazorat bo'limi tasodifan ajratib olingan 55060 ta kitob ichidan 140 ta yaroqsiz kitob topgan. Yaroqsiz kitoblar nisbiy chastotasini toping.

11 . Ombordagi 25 ta televizorning 17 tasi rangli, qolganlari oq – qora tasvirli ekanligi ma'lum. Tavakkaliga olingan 7 ta televizor orasida 5 tasining rangli televizor bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: $P=\frac{C_{17}^5 C_8^2}{C_{25}^7} \approx 0{,}05$

12. Lotereyalar 4000 ta bo'lib, ulardan 450 tasi yutuqli. Bu biletlardan (chiptalardan) tasodifan bittasi olindi.Uning yutuqli bo'lishi hodisasi ehtimolini toping.

Javob: $P=\frac{9}{80}$

13. Agar P(A)=0,85 bo'lsa, A hodisaga qarama – qarshi hodisaning ehtimoli topilsin.

Javob: P=0,15.

14. Guruhda 16 ta talaba bor. Ularning 12 tasi qiz bolalardir. Tasodifan ajratilgan 7 ta talabalar orasida 5 ta qiz bola bo'lishi ehtimoli topilsin.

Javob: $P=\frac{C_{12}^5 C_4^2}{C_{16}^7}$ =0,27.

15. O'lchamlari bir xil bo'lgan 5 ta kartochkaga A, B, G', L, O harflari yozilgan. Bu kartochkalarni tasodifan joylashtirganda «BOLG'A» so'zi hosil bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P=\frac{1}{120}$.

16. O'zaro bog'liqsiz hodisalar A, B, C, E lar mos holda $P_1=0{,}012$ va $P_2=0{,}010$ va $P_3=0{,}006$ va $P_4=0{,}002$ ehtimol bilan ro'y berishi mumkin. Tajriba natijasida bu hodisalarning hech bo'lmaganda bittasining ro'y berish ehtimoli topilsin.

Javob: P=0,03.

17. Quyidagi tengliklarning to'g'riligini isbotlang.

a) $P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right)$.

b) $A\cdot(B-C) = A\cdot B - A\cdot C$

✓ 18. Idishda 9 ta yaroqli va 1 ta yaroqsiz detal bor edi. Idishdan tavakkaliga 3 ta detal olindi. Bu detallarning uchalasining ham yaroqli detal bo'lishi hodisasining ehtimolini toping.

Javob: $P=0{,}7$.

1.2. Ehtimolning geometrik ta'rifi

Ma'lumki, ehtimolning klassik ta'rifi uchun chekli sondagi yagona mumkin bo'lgan teng imkoniyatli va birgalikda bo'lmagan hodisalarni qarash talab qilinadi; lekin mumkin bo'lgan hollarning chekli sonda bo'lishiga har doim ham erishib bo'lavermaydi. Ko'p hollarda elementar hodisalar fazosining elementlari sonini sanab ham bo'lmaydi. Bu kabi qiyinchiliklarni ehtimolning geometrik ta'rifi yordamida bartaraf qilish mumkin.

Aytaylik, elementar hodisalar fazosi Ω to'plam n o'lchovli Yevklid fazosining qism to'plamidan iborat bo'lsin Ω. ning qism to'plamlari sistemasini S deb belgilasak, ixtiyoriy $A \in S'$ uchun $\mu(A)$ mavjud bo'ladi (ya'ni A to'plam Lebeg ma'nosida o'lchovli).

Ta'rif. *A tasodifiy hodisaning ehtimoli* deb $P(A)=\dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi.

Faraz qilaylik, l kesma L kesmaning bo'lagini tashkil etsin. L kesmaga tavakkaliga nuqta qo'yilgan. Agar nuqtaning l kesmaga tushish ehtimoli bu kesmaning uzunligiga proporsional bo'lib, uning L kesmaga nisbatan joylashishiga bog'liq emas deb qaralsa, u holda nuqtaning l kesmaga tushish ehtimoli

$P=\dfrac{l \text{ ning uzunligi}}{L \text{ ning uzunligi}}$ tenglik bilan topiladi.

Faraz qilaylik, g yassi figura G yassi figuraning bo'lagi bo'lsin G. ga tavakkaliga nuqta tashlangan. Agar tashlangan nuqtaning g figuraga tushish ehtimoli bu figuraning yuziga proporsional bo'lib, G figuraga nisbatan joylashishiga ham, g ning formasiga ham bog'liq bo'lmasa, u holda nuqtaning g figuraga tushish ehtimoli

$P=\dfrac{g \text{ ning yuzi}}{G \text{ ning yuzi}}$ tenglik bilan aniqlanadi.

Nuqtaning V fazoviy figuraning bo'lagi bo'lgan v fazoviy figur-

aga tushish ehtimoli

$P=\dfrac{v \text{ ning hajmi}}{V \text{ ning hajmi}}$ formula bilan topiladi.

1-masala. Ikki shaxs – A va B kishilar $[0,T]$ vaqt davomida uchrashmoqchi bo'lishdi. Uchrashuv joyiga birinchi bo'lib kelgan kishi ikkinchisini τ vaqt davomida kutadi. Uchrashish hodisasini S deb belgilasak, bu hodisa ehtimolini toping.

Yechish. Uchrashuv joyiga A ning kelish vaqtini x deb belgilasak, B ning kelish vaqtini y deb belgilasak, bu tajriba natijalarini belgilovchi elementar hodisalar fazosi

$\Omega=\{(x,y)\ :\ 0\le x\le T,\ 0\le y\le T\}=[0,T]\times[0,T]$ ko'rinishida bo'ladi. Biz uchrashuv sodir bo'lishi hodisasini $C=\{(x,y)\ :\ |x-y|\le\tau\}$ deb olamiz. U holda

$P(C)=\dfrac{T^2-(T-\tau)^2}{T^2}=1-\left(1-\dfrac{\tau}{T}\right)^2$. Xususan,

$T=1$, $\tau=\dfrac{1}{3}$ bo'lsa, $P(C)=1-\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$.

Masalalar

1[0, 1]. kesmaga tasodifan ikkita nuqta tashlangan. Bu nuqtalar kesmani uchta qismga bo'ladi. Bu qismlardan (kesmalardan) uchburchak yasash ehtimolini toping.

Javob: $p=\dfrac{1}{4}$.

2. Shaxmat doskalari tomonlari a bo'lgan kvadratlardan iborat. Bu doskalarga radiusi r, $2r<a$ bo'lgan tanga tashlanmoqda. Tanganing bitta kvadrat ichiga to'la joylashishi hodisasi ehtimolini toping.

$Javob:$ $\left(1-\left(\frac{2r}{a}\right)^2\right)$.

3. Radiusi R bo'lgan aylanaga uchta A, B, C nuqtalar tasodifan tashlangan. Bu ABC uchburchakning o'tkir burchakli bo'lishi hodisasi ehtimolini toping.

Javob: $p=\frac{1}{4}$.

4. Yer Sun'iy yo'ldoshi 60^0 shimoliy kengliklar va 60^0 janubiy kengliklar orasidagi orbitada harakatlanadi. Sun'iy yo'ldoshning Yer-ning bu parallellar orasidagi ixtiyoriy nuqtasiga tushishi hodisasini teng imkoniyatli deb hisoblab, uning 30^0 shimoliy kenglikdan yu-qoriga tushishi ehtimolini toping.
Javob: P=0,21.

5. Tekislik bir-biridan 12 metr masofada joylashgan parallel to'g'ri chiziqlar bilan bo'lingan. Tekislikka radiusi 3 metr bo'lgan doiraviy taxta tavakkaliga tashlangan. Doiraning to'g'ri chiziqlarning bittasini ham kesmaslik ehtimolini toping.
Javob: r = 0. 5.

6. Tekislikda $0\le x\le 1$; $0\le y\le 1$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi x *ва* y haqiqiy sonlari tanlangan $y^2\le x$. tengsizlikning bajarilishi hodisasining ehtimolini hisoblang.

Javob: $p=\frac{2}{3}$.

7. Har biri 2 dan oshmaydigan x *ва* y musbat sonlari tasodifan tanlangan. Bu sonlarning $xy\le 1$ hamda $\frac{y}{x}\le 2$ tengsizlikni qanoatlantirishi hodisasi ehtimoli topilsin.

Javob: $p=\frac{1+3\ln 2}{8}$.

8. Radiusi R bo'lgan doiraga muntazam oltiburchak ichki chizilgan. Doiraga tavakkaliga tashlangan nuqtaning shu muntazam ko'pburchak ichiga tushishi hodisasi ehtimolini toping.

Javob: $p=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

1.3. Bernulli, Puasson formulalari

Biror hodisani kuzatish uchun bir nechta tajriba o'tkazilsa, bu tajribalar(sinovlar) bir-biriga bog'liq yoki bog'liq bo'lmasligi mumkin. Masalan, o'yin soqqasini tashlashdan iborat tajriba o'tkazilmoqda. Har bir tashlashda u yoki bu sonda ochkolar chiqish ehtimolligi boshqa tashlashlarda qanday ochko chiqqanligiga bog'liq emasligi ravshan, chunki biz bu yerda bog'liqmas sinovlar (tajribalar) ketma-ketligiga egamiz. Faraz qilaylik, bog'liq bo'lmagan n ta tajriba o'tkazilayotgan bo'lib, har bir tajribada kuzatilayotgan A hodisaning ro'y berish ehtimoli r va ro'y bermaslik ehtimoli $q=1-r$ bo'lsin. Agar A hodisaning n ta tajribada m marta ro'y berish ehtimolini $P_n(m)$ deb belgilasak,

$P_n(m)=S_n^m p^m q^{n-m}$ o'rinlidir. Bu formulani *Bernulli formulasi* deyiladi.

Agar n ta tajribada A hodisaning eng katta ehtimolli yuz berishlar sonini m deb belgilasak, $np-q$ son butun bo'lmaganda, bu son yotadigan chegara $np-q<m<np+r$ ko'rinishda bo'ladi. Agar $np-q$ butun son bo'lsa $P_n(m)$ ehtimol m ning ikkita $m_0=np-q$ va $m_0=np-q+1$ qiymatida eng katta qiymatga erishishini osonlik bilan tekshirib ko'rish mumkin.

Teorema (Muavr-Laplasning lokal teoremasi).
Agar A hodisaning ro'y berish ehtimoli har bir tajribada o'zgarmas va p $(0<p<1)$ ga teng bo'lsa, u holda yetarlicha katta n lar

uchun $P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $x=\frac{m-nq}{\sqrt{npq}}$ munosabatlar o'rinlidir.

Teorema (Muavr-Laplasning integral teoremasi).

Agar A hodisaning n ta o'zaro bog'liqsiz tajribaning har birida ro'y berish ehtimoli o'zgarmas va r $(0<r<1)$ ga teng bo'lsa, u holda yetarlicha katta n larda A hodisaning kamida m_1 marta va ko'pi bilan m_2 marta ro'y berish ehtimoli $P_n(m_1, m_2)=P(m_1\le m\le m_2)$ taqriban $\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$ ayirmaga teng, bu yerda

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du\ ;\ x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}},\ x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$$

Bunda $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ funksiyalarning qiymatlari jadvaldan topiladi (Ilovaga qaralsin).

A hodisaning nisbiy chastotasi bilan uning r ehtimoli orasidagi ayirma absolyut qiymat jihatidan a dan oshmaslik ehtimoli b dan kichik bo'lmasligi uchun ko'pi bilan nechta tajriba o'tkazish kerak, degan savolga javob topish uchun Muavr-Laplas teoremasini qo'llaymiz va $2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\ge\beta$ munosabatdan n ning izlanayotgan minimal qiymatini topamiz.

Teorema. (Puasson teoremasi) n. ta tajribaning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli $P(A)=p=\frac{\lambda}{n}$ ga teng bo'lsin. Bu tajribada A hodisaning m marta ro'y berish ehtimoli n soni yetarlicha katta bo'lganda $p_m=P(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, $\lambda=np$ formula yordamida topiladi.

1-masala. Har bir sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli $p=$ $0,001$ ga teng bo'lsa, 3000 ta sinovda A hodisaning ikki va undan ortiq marta ro'y berish ehtimolini toping.

Yechish. A hodisaning ro'y berishlar soni γ_n deb belgilasak, izlanayotgan ehtimol $P(\gamma_n\ge 2)$ dan iborat va

$$P(\gamma_n\ge 2)=\sum_{k=2}^{n}P_n(k)=1-P_n(0)-P_n(1).$$

Endi $\lambda=np=3000\cdot 0.001=3$ ni topamiz hamda,

$$P_{3000}(0)=\frac{3^0}{0!}\cdot e^{-3}=e^{-3}=0,0497\ ;\quad P_{3000}(1)=\frac{3^1}{1!}\cdot e^{-3}=3e^{-3}=0,1491\ .$$

Demak,

$$P(\gamma_{3000}\ge 2)=1-e^{-3}-3e^{-3}\approx 0,8012.$$

2-masala. Hodisaning 25 ta erkli sinovning har birida ro'y berish ehtimoli $p=0.8$ ga teng. Hodisaning kamida 11 marta va ko'pi bilan 23 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Yechish. Bizda $m_1=11$, $m_2=23$; $p=0,8$; $q=0,2$; $n=25$ berilgan.

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{11-25\cdot 0,8}{\sqrt{25\cdot 0,8\cdot 0,2}}=\frac{11-20}{2}=-4,5\ .$$

$$x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{23-25\cdot 0.8}{\sqrt{25\cdot 0,8\cdot 0,2}}=\frac{23-20}{2}=1.5.\quad \Phi(1,5)\ ,\quad \Phi(-4,5)$$

qiymatlarni jadvaldan topamiz. Demak,

$$P(11\le m\le 23)=\Phi(1,5)-\Phi(-4,5)=0,4332+0,4999=0,9331.$$

3-masala. O'yin kubi 20 marta tashlab ko'rilayotgan bo'lsin. Bir raqamli tomonining tushishining eng ehtimolli sonini toping.

Yechish. Bernulli formulasiga asosan,

$$n=20\ ,\ p=\frac{1}{6}\ ,\ q=\frac{5}{6}\ ,\quad \mu=np-q=20\cdot\frac{1}{6}-\frac{5}{6}=2,5\ ;$$

qiymatlarni topamiz.

μ -butun son emas; $P_{20}(0)$, $P_{20}(1)$, $P_{20}(2)$, $P_{20}(3),..., P_{20}(20)$ sonlari ichidan eng kattasi $P_{20}(3)$ dir. Demak,

$$P_{20}(3) = C_{20}^{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{17} \approx 0,249.$$

Eng ehtimolli son 3 bo'ladi.

4-masala. Hodisaning 676 ta erkli sinovning har birida ro'y be-rish ehtimoli 0,9 ga teng. Hodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlanishi absolyut qiymati 0,03 dan ortiq bo'lmaslik ehtimolini toping.

Yechish $P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \alpha\right\} \approx 2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$. formulada

$n = 676$; $p = 0,9$; $q = 0,1$, $\alpha = 0,03$ qiymatlarni hisoblab,

$$P\left(\left|\frac{m}{676} - 0,9\right| < 0,03\right) = 2\Phi\left(0,03\sqrt{\frac{676}{0,9 \cdot 0,1}}\right) = 2\Phi(2,6) \ ; \quad \Phi(2,6) \approx 0,4953$$

ni jadvaldan topamiz. Demak,

$$P\left(\left|\frac{m}{676} - 0,9\right| < 0,03\right) = 0,9906.$$

5- masala. Hodisaning o'zaro bog'liqsiz tajribalarning har birida ro'y berish ehtimoli *p=0,75* ga teng. Hodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlanishi absolyut qiymati bo'yicha 0,03 dan ortiq bo'lmasligini 0,4972 ehtimol bilan kutish mumkin bo'lishi uchun o'tkazilishi lozim bo'lgan tajribalar soni n ni toping.

Yechish. Ushbu $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ formulaga $p = 0,75$; $q = 0,25$; $\varepsilon = 0,03$ qiymatlarni keltirib qo'yamiz:

$$2\Phi\left(0,03 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,25 \cdot 0,75}}\right) = 0,4972 \text{ yoki } \Phi\left(0,03 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,1875}}\right) = 0,2486.$$

Jadvaldan $\Phi(0,67) = 0,2486$ ni topamiz. Demak, $0,03 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,1875}} = 0,67$ tenglamani yechib, $n = 93$ ni aniqlaymiz.

Masalalar

1. Biror korxonada ishlab chiqarilgan bitta detalning yaroqsiz chiqishi hodisasi ehtimoli $p = 0,05$. Ishlab chiqarilgan 100 ta detalning orasidagi yaroqsiz detallar o'rtacha sonini toping.

Javob: $np = 5$.

2. Zavodda tayyorlangan lampaning yaroqsiz chiqishi hodisasi ehtimoli $p = 0,1$. Tayyorlangan jami 19 ta lampalar orasida yaroqli lampalarning eng ehtimolli sonini toping.

Javob: $\mu_0 = 17$; $\mu_0 + 1 = 18$.

3. Bitta o'q uzilganda nishonga tegish ehtimoli 0,6 ga teng. 2400 ta o'q uzilganda rosa 1400 ta o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.

Javob: $P_{2400}(1400) = 0,0041$.

4. Biror partiyadagi detalning nuqsonli chiqish ehtimoli *p=0,09* ga teng. Nechta detal olinganda detalning nuqsonli chiqishi nisbiy chastotasining 0,09 ehtimoldan farqi absolut qiymati jihatdan 0,02 dan kichik bo'lish ehtimoli 0,9962 ga teng bo'ladi?

Javob: n=1664

5. O'yin kubi uch marta tashlab ko'riladi. Bunda ikki marta 6 ochko tushish hodisasining ehtimolini toping.

Javob: $P_3(2) = \frac{5}{72}$.

6. Hodisaning bitta sinovda ro'y berish ehtimoli *p=0,7* ga teng. Bu

hodisa ro'y berishining eng ehtimolli soni $\mu_0 = 35$ ga teng bo'lishi uchun nechta erkli sinov o'tkazilishi kerak?

Javob: $49 < n < 50$.

7. Tangani 400 marta tashlash tajribasi o'tkazilayotgan bo'lsin. Bunda gerbli tomonining 200 marta tushishi hodisasi ehtimolini toping.

Javob: $P_{400}(200) = 0{,}0397$.

8. Biror korxonada ishlab chiqarilgan bitta detalning yaroqsiz chiqishi hodisasi ehtimoli p= 0,05 ga teng. Ishlab chiqarilgan 100 ta detallar orasidagi yaroqsiz detallar o'rtacha sonini toping.

Javob: np=5.

9. Omborga jami 1000 ta detal keltirilgan. Bitta detalning yaroqsiz chiqishi hodisasining ehtimoli *p=0,003* ga teng.

Tasodifan olingan a) rosa ikkita; b) ikkitadan kam; d) ikkitadan ko'p; e) kamida ikkita detalning yaroqsiz chiqishi hodisasi ehtimolini toping.

Javob: a) $P_{1000}(2) = 0{,}224$; b) $p = 0{,}1992$; d) $p = 0{,}5678$; e) $p = 0{,}95$.

10. EHM ishlash vaqti davomida ishdan chiqishi kuzatiladi. Ishdan chiqishlar oqimini sodda oqim deb hisoblash mumkin. Bir sutkada ishdan chiqishlar o'rtacha soni 1,5 ga teng. Quyidagi hodisalar ehtimolini toping:

a) ikki sutka davomida bitta ham ishdan chiqishlar yo'q;

b) bir sutka davomida hech bo'lmaganda bitta ishdan chiqish mavjud;

d) hafta davomida uchtadan kam bo'lmagan ishdan chiqish ro'y beradi.

Javob: a) $p_1 \approx 0{,}498$; b) $p_2 \approx 0{,}777$; d) $p_3 \approx 0{,}982$.

11. Idishda 100 dona tayyor detal bor edi. Har bir detalning yaroqsiz chiqishi hodisasi ehtimoli p=0,02.

1) Idishdagi hamma detallarning yaroqli bo'lishi hodisasi ehtimolini toping.

2) Yaroqsiz detallar sonining uchtadan ko'p bo'lmaslik hodisasi ehtimolini toping.

3) 0,9 dan kam bo'lmagan ehtimol bilan 100 tadan kam bo'lmagan yaroqli detal bo'lishi uchun idishga nechta detal joylash-tirish kerak?

Javob: 1) μ bilan idishdagi yaroqsiz detallar soni belgilansa,

1) $P_{100}(\mu = 0) = 0{,}14$; 2). $P_{100}(\mu \le 3) = 0{,}89$

3) $P_n\{\mu \le (n-100)\} = \sum_{m=0}^{n-100} \frac{2^m}{m!} e^{-2} \ge 0{,}9$

12. Bir shaharda 3 foyiz aholi sil bilan kasallanganligi ma'lum. Tekshirish uchun 500 ta kishi tanlangan. Bu kishilar orasida sil bilan kasallanganlarning soni 3+0,5% va 3-0,5% bo'lishi hodisasi ehtimolini toping.

Javob: P=0,9615.

13. Ishchi 12 ta bir xil stanokka xizmat ko'rsatadi τ. vaqt davomida ishchining stanokka e'tibor qilish hodisasi ehtimoli $p = \frac{1}{3}$ bo'lsa,

1) τ vaqt davomida ishchining 4 ta stanokka xizmat qilishi hodisasi ehtimolini toping;

2) τ vaqt davomida ishchini jalb etgan (ya'ni ishchi xizmat ko'rsatgan) stanoklar sonining 3 va 6 orasida bo'lishi hodisasi ehtimolini toping.

Javob: 1) $P_{12}(4) \approx 0{,}238$; 2) $P_{12}(3 \le m \le 6) \approx 0{,}751$.

14. Nishonga 10 ta (marta) o'q otilmoqda. Har bir o'q otishda o'qning nishonga tegishi hodisasi ehtimoli p=0,2 ekanligi ma'lum.

1. O'q tegishlar sonining eng ehtimolli qiymatini toping.
2. Nishonga otilgan o'q tegishlar sonining 4 dan katta bo'lmaslik, 2dan kichik bo'lmaslik hodisasi ehtimolini toping.

Javob: 1) $m_0 = 2$; 2) $P_{10}(2 \le m \le 4) = 0{,}591$.

15. O'yin kubini 12000 marta tashlab ko'rish tajribasida «bir»

raqamli tomoni bilan tushishlar sonining 1900 va 2150 orasida bo'lishi hodisasi ehtimolini toping.

Javob: P=0,99.

16. O'yin kubini 300 marta tashlab ko'rish tajribasini olaylik. A bilan 1 raqamli tomonning tushishi hodisasini belgilaylik μ . bilan A hodisaning o'tkazilgan 300 marta tajribada ro'y berish chastotasini belgilaylik. Agar A ning ro'y berish ehtimoli $p=\frac{1}{6}$ bo'lsa,

$P\left\{\left|\frac{\mu}{300}-\frac{1}{6}\right| \le 0{,}01\right\}$ ehtimolni baholang.

Javob: p=0,35.

17. Bitta lotereya biletining yutuqli chiqishi hodisasi ehtimoli P=0,6 bo'lsa 2400 ta lotereya bileti (chiptalari) orasida 1400 tasining yutuqli bo'lishi hodisasi ehtimolini toping.

Javob: p=0,0041.

18. 130 ta kanali mavjud bo'lgan aloqa liniyasi 1000 ta abonenti bo'lgan A va B shaharlarni bog'laydiki, bu abonentlarning har qaysisi bir soatda o'rtacha 6 minut telefon bilan so'zlashadi. Abonentlarga rad etishsiz xizmat ko'rsatish ehtimolini toping.

Javob: p=0,9993.

19. Shirin bo'lishi uchun bulochka nonlariga mayiz donalari qo'shiladi. 0,99 dan kam bo'lmagan ehtimol bilan hech bo'lmaganda bitta mayiz bo'ladigan bulochkalardagi o'rtacha mayizlar sonini toping.

Javob: $n=5$.

20. Zavodda ishlab chiqarilgan detalning yaroqsiz chiqishi ehtimoli 0,5 ga teng bo'lsa, 400 ta detaldan iborat partiyadagi yaroqsiz detallar soni rosa 200 ta bo'lish ehtimolini toping.

Javob: $P_{400}(200)=0{,}0398$.

21. Urug'lik bug'doy orasidan begona o't urug'ining chiqishi hodisasi ehtimoli p= 0,36 bo'lsin. Tavakkaliga olingan 10000 dona urug' orasida 3600 ta begona o't urug'i bo'lishi hodisasi ehtimolini toping.

Javob: $P_{10000}(3600)=0{,}831$.

22. Tangani 8 marta tashlab ko'radilar. Bunda "gerbli" tomoni bilan 6 marta tushishi hodisasining ehtimolini toping.

Javob: $\frac{7}{64}$.

23. Korxonada 1600 ta kompyuter ishlab chiqarilgan. Tasodifan tanlangan bitta kompyuterning nuqsonsiz chiqishi hodisasi ehtimoli p=0,8 ga teng. Bu kompyuterlar orasidagi nuqsonsiz kompyuterlar soni m ning yotadigan chegaralarini p=0,7698 ehtimol bilan toping.

Javob: $1260 < m < 1299$.

24. Ixtiyoriy olingan detalning nostandart chiqish hodisasi ehtimoli p=0,4 ga teng. Tasodifan olingan 2400 ta detal orasidagi nostandart detallar sonining 1000 tadan 1060 tagacha bo'lishi hodisasining ehtimolini toping.

Javob: $P_{2400}(960,\ 1060)=0{,}0484$.

1.4. Shartli ehtimol formulalari

Ba'zi hodisalarning ehtimollarini hisoblashda ko'pincha qo'shish va ko'paytirish teoremalarini birga tatbiq qilishga to'g'ri keladi.

Shu maqsadda quyidagi misolni qaraymiz.

Misol. Tajriba ikkita bir jinsli kubni tashlashdan iborat bo'lsin. Elementar hodisalar fazosi

$\Omega=\{(1,1),\ (1,2),\ ...,(1,6),(2,1),...,(2,6),...,(6,6)\}$ kabi bo'ladi. Kublar birdaniga tashlanganda uning yuqori yoqlaridagi raqamlar yig'indisining 7 ga teng bo'lishi hodisasini A deb, raqamlar yig'indisining toq son bo'lishi hodisasini B deb belgilaylik. U holda

$P(A)=\frac{6}{36}$, $P(B)=\frac{18}{36}$ B hodisaning ro'y berish sharti asosida A hodisaning ehtimolini topaylik:

$$P(A/B)=\frac{6}{18}=\frac{\frac{6}{36}}{\frac{18}{36}}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{1}{3}.$$

Lekin $A \subset B$ ekanligidan, $AV=A$ kelib chiqadi. Demak,

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Elementar hodisalar fazosi $\Omega=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ kabi bo'lsin. Bu e_i, $i=1, 2, ...n$ elementar hodisalarning k tasi A hodisaga, m tasi B hodisaga va r tasi AB hodisaga qulaylik tug'dirsin. Klassik ta'rifga asosan quyidagi formulalar o'rinli bo'ladi:

$$P(A)=\frac{k}{n},\ P(B)=\frac{m}{n},\ P(AB)=\frac{r}{n},\ P(A/B)=\frac{r}{m}=\frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Demak, $P(A/B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

Yuqoridagi mulohazalarga asosan, A hodisaning ro'y berish sharti asosida B hodisaning ro'y berish shartli ehtimoli

$P(B/A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$, kabi hisoblanadi.

Bu oxirgi ikki tenglikdan ixtiyoriy hodisalarning ko'paytmasi ehtimolini quyidagi formulalar yordamida topishimiz mumkin:

$P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)=P(A)\cdot P(B/A)$.

Aytaylik, B hodisa n ta juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning (gipotezalarnine) bittasi vafaqat bittasi bilangina ro'y berishi mumkin bo'lsin, ya'ni

$$B=\bigcup_{i=1}^{n} BA_i = BA_1+BA_2+...+BA_n,\quad (BA_i)\bigcap(BA_j)=V,\ i\neq j.$$

U holda ehtimolning xossalariga asosan, ushbu to'la ehtimol formulasini olamiz:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

Birgalikdamas B_1, B_2, ..., B_n hodisalar to'la guruhi berilgan. Bu hodisalarning har birining ehtimolligi $P(B_1)$, $P(B_2)$, ..., $P(B_n)$ ma'lum. Tajriba o'tkaziladi va uning natijasida A hodisa ro'y beradi, bu hodisaning har bir gipoteza bo'yicha ehtimolligi, ya'ni $P(A/B_1)$, $P(A/B_2)$, ..., $P(A/B_n)$ ma'lum.

A hodisa ro'y berishi munosabati bilan $P(B_1/A)$, $P(B_2/A)$, ..., $P(B_n/A)$ shartli ehtimolliklarni topish talab qilinadi.

A hodisa hodisalarning to'la gruppasini tashkil etadigan, birgalikdabo'lmagan B_1, B_2, ..., B_n hodisalarning (gipotezalarnine) biri ro'y berishi shartidagina ro'y berishi mumkin bo'lsin. Agar A hodisa ro'y bergan bo'lsa, u holda gipotezalarning $P(B_i/A)$, $i=1,2,...$, shartli ehtimollarini quyidagicha topish mumkin:

B_i va A hodisalarning ko'paytmasi uchun o'rinli bo'lgan ushbu $P(B_i\cdot A)=P(B_i)P(A/B_i)=P(A)P(B_i/A)$ formuladan

$P(B_i/A)=\dfrac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)}$ ifodani olamiz. Bu kasrga

$P(A)=\sum\limits_{K=1}^{n} P(B_K)P(A/B_K)$ to'la ehtimol formulasini keltirib qo'yilsa, quyidagi Beyes formulasi hosil bo'ladi:

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum\limits_{K=1}^{n} P(B_K)P(A/B_K)},\ i=1,2,...,n.$$

1-masala. Ikkita qutida sharlar bor. Birinchi qutida oltita yashil qiymatlar topildi.

3 -masala. Radioga o'rnatilgan lampa ikkita partiyadan biriga $p_1 = 0,4$ *ва* $p_2 = 0,6$ ehtimol bilan tegishli bo'lsin. Lampaning t soat davomida buzilmasdan ishlash vaqti ehtimollari bu partiyalar uchun mos ravishda 0,9 va 0,7 ga teng. Bu lampa t soat buzilmasdan ishlagan bo'lsa, uning 1- partiyaga tegishli bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Ikkitagi potezani qaraymiz:

B_1 – lampa birinchi partiyaga tegishli,

B_2 – lampa ikkinchi partiyaga tegishli.

Tajribadan oldin bu gipotezalarning ehtimollari: $P(B_1) = 0,4$ *ва* $P(B_2) = 0,6$. Tajriba natijasida A hodisa ro'y bergan, ya'ni lampa t soat buzilmasdan ishlagan. A hodisaning B_1 va B_2 gipotezalardagi ehtimollari mos holda quyidagicha: $P(A/B_1)=0,9$; $P(A/B_2)=0,7$. Beyes formulasidan foydalanib, B_1 gipotezaning tajribadan keyingi ehtimolini topamiz:

$$P(B_1 / A) = \frac{0,4 \cdot 0,9}{0,4 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,7} = 0,462.$$

Masalalar

1. Tashqi ko'rinishi bir xil bo'lgan uchta idishning birinchisida 5 ta yaroqli va 5 ta yaroqsiz detal, ikkinchisida 7 ta yaroqli va 3 ta yaroqsiz detal, uchinchisida 9 ta yaroqli detal va bitta yaroqsiz detal bor. Bu uchta idishdan tavakkaliga bittasi tanlanadi, undan tasodifan bitta detal olinadi. Shu olingan detalning yaroqli ekanligi ma'lum bo'lsa, uning birinchi idishdan olingan bo'lishi ehtimoli topilsin.

Javob: $p=0,238$.

2. Ikki mergan nishonga bittadan o'q uzadi. Birinchi merganning o'qi nishonga 0,7 ehtimol bilan, ikkinchi merganniki esa 0,9 ehtimol bilan tegadi. O'q uzilgandan so'ng nishonga bitta o'q tekkanligi ma'lum bo'ldi, bu o'q birinchi merganniki bo'lish ehtimolini toping.

Javob: $p=\frac{7}{34}$.

3. Hisoblash qurilmasi o'zaro bog'liqsiz holda ishlovchi uchta elementdan tashkil topgan. Uning shu elementlaridan qandaydir ikkitasining ishdan chiqqanligi ma'lum bo'ldi. Agar birinchi, ikkinchi, uchinchi elementlarning ishdan chiqish ehtimollari mos holda 0,25, 0,3 va 0,4 bo'lsa, ikkinchi va uchinchi elementlarning ishdan chiqishi hodisasi ehtimolini toping.

Javob: $p=0,439$.

4. Skladga (omborxonaga) uchta zavodda tayyorlangan mahsulot kelib tushdi. Mahsulotning 50 foyizi birinchi zavodda tayyorlanganligi, 10 foyizi ikkinchi zavodda tayyorlanganligi, 40 foyizi esa uchin-chi zavodda tayyorlanganligi ma'lum. Birinchi zavodda oliy navli mahsulotning tayyorlanish ehtimoli 0,92; ikkinchi zavodda oliy navli mahsulotning tayyorlanish ehtimoli 0,98 va uchinchi zavodda oliy navli mahsulotning tayyorlanish ehtimoli 0,90 ekanligi ma'lum. Skladdan tasodifan olingan ikkita mahsulotning oliy navli bo'lishi hodisasi ehtimolini toping.

Javob: $p=0,843$.

5. Sotuv tarmog'iga (magazinga) uchta zavodda tayyorlangan televizorlar chiqarildi. Birinchi zavodda ishlab chiqarilgan televizorlarning 15 foyizi, ikkinchi zavodda ishlab chiqarilganlarning 8 foyizi va uchinchi zavodda tayyorlanganlarning 5 foyizi esa nuqsonli televizorlardir. Sotuv tarmog'iga (magazinga) kelib tushgan televizorlarning 40 foyizi birinchi zavodda, 25 foyizi ikkinchi zavodda va 35 foyizi uchinchi zavodda tayyorlangan ekanligi ma'lum bo'lsa, magazindan yaroqli (nuqsonsiz) televizor sotib olinishining ehtimolini toping.

Javob: $p=0,9025$.

6. Uchta birxil turdagi qutilar bor. Birinchi qutida 20ta yaroqli detal, ikkinchisida esa 10 ta yaroqli detal va 10 ta yaroqsiz detal, uchinchi qutida 20 ta yaroqsiz detal bor ekanligi ma'lum. Tasodifan tanlangan qutidan bitta yaroqli detal olindi. Bu detalning birinchi qutidan olingan bo'lishi hodisasining ehtimolini toping.

Ta'rif. Agar Y tasodifiy miqdorning taqsimot funksiya-sini $F(x)=\int_0^x p(t)dt$ ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, bu tasodifiy miqdorni absolyut uzluksiz taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi $p(t)$. funksiyani *taqsimot zichligi* deb ataydilar, yoki ehtimol taqsimlanish zichligi deb, yoki zichlik funksiyasi deb ham yuritadilar. Ko'p hollarda zichlik funksiyasini $p(x)=F'(x)$ tenglikdan topadilar, ya'ni taqsimot funksiyadan olingan birinchi tartibli hosila zichlik funksiyasidan iborat bo'ladi.

Taqsimot funksiyasi xossalari:

1- xossa. $0 \le F(x) \le 1$. Taqsimot funksiyasi manfiymas bo'lib, uning qiymatlari nol va bir orasida joylashgan.

2- xossa. X tasodifiy miqdorning (x_1, x_2) oraliqqa tushish ehtimoli taqsimot funksiyasining bu oraliqdagi orttirmasiga teng, ya'ni $P(x_1 \le X < x_2)=F(x_2)-F(x_1)$.

3-xossa. Taqsimot funksiyasi kamaymaydigan funksiya, ya'ni $x_1 \le x_2$, $F(x_1) \le F(x_2)$.

4-xossa. Taqsimot funksiyasi chapdan uzluksizdir : $F(x)=F(x-0)=\lim\limits_{x_n \to x} F(x_n)=F(x)$.

5-xossa. $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$..

Ta'rif. Agar $x=x_0$ nuqtada $F(x_0+0)-F(x_0-0)=C_0>0$ bo'lsa, bu funksiya $x=x_0$ nuqtada sakrashga ega bo'lib, uning kattaligi C_0 ga teng deyiladi.

6-xossa. Taqsimot funksiyasining sakrashga ega bo'lgan nuqtalari to'plami ko'pi bilan sanoqli bo'lishi mumkin.

Taqsimot zichligi xossalari:

1. Zichlik funksiyasi manfiy emas : $p(x) \ge 0$.

2. $P(x_0 \le X < x_0+dx) \approx p(x_0)\,dx$, $P(a \le X < b)=\int_a^b p(u)du$.

3. $\int_{-\infty}^{\infty} p(u)du = 1$

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$F(x)=P(X<x)=P(-\infty<X<x)=\sum\limits_{x_i<x} p_i$, bu yerda qo'shish x_i ning $x_i<x$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlari uchun bajariladi.

Ta'rif. *Taqsimotning moddasi* deb, x argumentning $p(x)$ zichlik funksiyasiga maksimum qiymat beruvchi qiymatiga aytiladi.

Ta'rif. Agar taqsimot funksiyasini $F(x)$ deb belgilasak, ushbu $F(x_{0.5})=\frac{1}{2}$ tenglamaning ildizi bo'lgan $x_{0.5}$ soniga *taqsimotning medianasi* deyiladi.

1-masala. Idishda 8 ta detal bor, ulardan 3 tasi yaroqli. Idishdan tavakkaliga 3 ta detal olinadi. X tasodifiy miqdor - olingan yaroqli detallar soni. Uning taqsimot qonunini yozing.

Yechish. X ning mumkin bo'lgan qiymatlari quyidagicha: $x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3$.

Ehtimolning klassik ta'rifiga asosan

$X=0$, $X=1$, $X=2$, $X=3$ hodisalarning ehtimollarini topamiz:

$P(X=0)=\frac{10}{56}$, $P(X=1)=\frac{30}{56}$, $P(X=2)=\frac{15}{56}$, $P(X=3)=\frac{1}{56}$. Bu X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha:

X	0	1	2	3
P	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

Ta'rif. Agar Y tasodifiy miqdorning taqsimot funksiya-sini

$F(x)=\int_0^x p(t)dt$ ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, bu tasodifiy miqdorni absolyut uzluksiz taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi $p(t)$. funksiyani *taqsimot zichligi* deb ataydilar, yoki ehtimol taqsimlanish zichligi deb, yoki zichlik funksiyasi deb ham yuritadilar. Ko'p hollarda zichlik funksiyasini $p(x)=F'(x)$ tenglikdan topadilar, ya'ni taqsimot funksiyadan olingan birinchi tartibli hosila zichlik funksiyasidan iborat bo'ladi.

Taqsimot funksiyasi xossalari:

1- xossa. $0 \le F(x) \le 1$. Taqsimot funksiyasi manfiymas bo'lib, uning qiymatlari nol va bir orasida joylashgan.

2- xossa. X tasodifiy miqdorning (x_1, x_2) oraliqqa tushish ehtimoli taqsimot funksiyasining bu oraliqdagi orttirmasiga teng, ya'ni $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

3-xossa. Taqsimot funksiyasi kamaymaydigan funksiya, ya'ni $x_1 \le x_2$, $F(x_1) \le F(x_2)$.

4-xossa. Taqsimot funksiyasi chapdan uzluksizdir : $F(x)=F(x-0)=\lim\limits_{x_n \to x} F(x_n)=F(x)$.

5-xossa. $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$..

Ta'rif. Agar $x=x_0$ nuqtada $F(x_0+0)-F(x_0-0)=C_0>0$ bo'lsa, bu funksiya $x=x_0$ nuqtada sakrashga ega bo'lib, uning kattaligi C_0 ga teng deyiladi.

6-xossa. Taqsimot funksiyasining sakrashga ega bo'lgan nuqtalari to'plami ko'pi bilan sanoqli bo'lishi mumkin.

Taqsimot zichligi xossalari:

1. Zichlik funksiyasi manfiy emas : $p(x) \ge 0$.

2. $P(x_0 \le X < x_0 + dx) \approx p(x_0)\,dx$, $P(a \le X < b) = \int_a^b p(u)du$.

3. $\int_{-\infty}^{\infty} p(u)du = 1$

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$F(x)=P(X<x)=P(-\infty<X<x)=\sum\limits_{x_i<x} p_i$, bu yerda qo'shish x_i ning $x_i < x$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlari uchun bajariladi.

Ta'rif. *Taqsimotning moddasi* deb, x argumentning $p(x)$ zichlik funksiyasiga maksimum qiymat beruvchi qiymatiga aytiladi.

Ta'rif. Agar taqsimot funksiyasini $F(x)$ deb belgilasak, ushbu $F(x_{0.5})=\frac{1}{2}$ tenglamaning ildizi bo'lgan $x_{0.5}$ soniga *taqsimotning medianasi* deyiladi.

1-masala. Idishda 8 ta detal bor, ulardan 3 tasi yaroqli. Idishdan tavakkaliga 3 ta detal olinadi. X tasodifiy miqdor - olingan yaroqli detallar soni. Uning taqsimot qonunini yozing.

Yechish. X ning mumkin bo'lgan qiymatlari quyidagicha: $x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3$.

Ehtimolning klassik ta'rifiga asosan

$X=0$, $X=1$, $X=2$, $X=3$ hodisalarning ehtimollarini topamiz:

$P(X=0)=\frac{10}{56}$, $P(X=1)=\frac{30}{56}$, $P(X=2)=\frac{15}{56}$, $P(X=3)=\frac{1}{56}$. Bu X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha:

X	0	1	2	3
P	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

2-misol. X diskret tasodifiy miqdor ushbu

X	-1	3	5
R	0,2	0,5	0,3

taqsimot qonuni bilan berilgan. Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish. Ravshanki, $\forall x \in (-\infty,-1)$ uchun $F(x)=0$, chunki bu holda $X<x$ hodisa mumkin bo‘lmagan hodisadir. Endi $-1<x<3$ bo‘lsin. U holda $\forall x \in (-1;3]$ uchun

$F(x)=P(X<x)=P(X=-1)=0,2;$ $3<x\le 5$ bo‘lganda $\forall x \in (3;5]$ uchun

$F(x)=P(X<x)=P(X=-1)+P(X=3)=0,2+0,5=0,7;$ $x>5$ bo‘lganda esa $F(x)=P(X<x)=1$ bo‘ladi, chunki $\forall x>5$ uchun X<x hodisa ishonchli hodisa bo‘ladi. Bu taqsimot funksiyasining analitik ifodasi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ 0,2; & -1<x\le 3 \\ 0,7; & 3<x\le 5 \\ 1; & x>5. \end{cases}$$

3-masala. X tasodifiy miqdor (a,b) da tekis taqsimot qonuniga ega bo‘lsin. Tekis taqsimotning zichlik funksiyasi ushbu formula bilan beriladi:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & agar\ \ x\notin(a,b)\ \ bo‘lsa \\ \dfrac{1}{b-a}, & agar\ \ x\in(a,b)\ \ bo‘lsa \end{cases}$$

Tekis taqsimotning taqsimot funksiyasi quyidagicha:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar\ \ -\infty<x\le a\ \ bo‘lsa, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & agar\ \ a<x<b\ \ bo‘lsa, \\ 1, & agar\ \ b\le x<+\infty\ \ bo‘lsa. \end{cases}$$

4-masala. Normal taqsimot qonuni. (Gauss qonuni). Amaliyotda uchraydigan tasodifiy miqdorlar bo‘ysunadigan taqsimot qonunlari orasida ko‘proq normal taqsimot qonuni bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Bu qonun bilan taqsimlangan X tasodifiy miqdorning taqsimot zichligi ushbu

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

formula bilan beriladi, taqsimot funksiyasi esa

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}du$$

kabi bo‘ladi. Bunda a va σ o‘zgarmas sonlar bo‘lib, ular taqsimotning parametrlari deb yuritiladi hamda $-\infty<a<+\infty$, $\sigma>0$ munosabatlar o‘rinlidir. Xususan, $a=0$, $\sigma=1$ bo‘lganda taqsimot funksiyasi $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$ ko‘rinishga, taqsimot zichligi esa $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ ko‘rinishga ega bo‘ladi hamda bu holda X tasodifiy miqdorni (0,1) -parametrli standart normal qonun bilan taqsimlangan deymiz.

$\Phi(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar qiymati jadvaldan topiladi.

5-masala. X tasodifiy miqdor ushbu

$$f(x) = \frac{C}{1+x^2}$$

zichlik funksiyasiga ega. C o‘zgarmasning qiymatini, taqsimot funksiyasini va $R(-1<X<1)$ ehtimolni toping.

Yechish. Taqsimot zichligi xossalariga asosan,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \quad C\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = C\cdot\pi = 1; \quad C = \frac{1}{\pi}; \quad F(x) = P(X<x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{x}\frac{du}{1+u^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}arctgx;$$

$$P(-1<X<1) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}.$$

6-masala. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f(x) = a\exp(2x - x^2)$, $a > 0$ ko‘rinishida berilgan. Bu tasodifiy miqdorning modasi topilsin.

Yechish. Taqsimotning modasini topish qoidasiga asosan, zichlik funksiyasining birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$$f'(x) = 2a(1-x)e^{2x-x^2}, \quad f''(x) = -2ae^{2x-x^2} + 4a(1-x)^2 e^{2x-x^2}.$$

Endi, $f'(x) = 0$ tenglamadan $x = 1$ yechimni topamiz. Ma’lumki, $f''(1) = -2ae < 0$ ekanligidan, $x = 1$ nuqtada zichlik funksiya $f(x)$ o‘zining maksimum qiymatiga ega bo‘ladi. Demak, bu X tasodifiy miqdorning modasi bir soniga tengdir. Zichlik funksiyasining maksimum qiymati a o‘zgarmasning son qiymatidan bog‘liq emasligi sababli,biz a o‘zgarmas miqdorning son qiymatini aniqlamadik.

7-masala. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x - \frac{1}{4}x^3, & 0 \le x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

ko‘rinishida berilgan. Bu tasodifiy miqdorning medianasini toping.

Yechish. Mediananing ta’rifiga asosan,

$$P(X<\mu) = \int_0^{\mu}\left(x - \frac{1}{4}x^3\right)dx = \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^4}{16}. \text{ va } \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^4}{16} = 0{,}5$$

munosabatlarga ega bo‘lamiz. Bu

$$\mu^4 - 8\mu^2 + 8 = 0$$

tenglamaning ildizlari $\mu = \pm\sqrt{4\pm\sqrt{8}}$ ko‘rinishida bo‘ladi. Bu ildizlar orasidan 0 va 2 sonlari oralig‘ida yotadiganlarini tanlaymiz. Shunday qilib, X tasodifiy miqdorning medianasi $x_{0,5} = \mu = \sqrt{4-\sqrt{8}} \approx 1{,}09$ sonidan iboratdir.

Masalalar

1. Qutida 10 ta shar bor. Ular orasida 8 ta oq shar, qolganlari qora shar bo‘lgan. Tavakkaliga 2 ta shar olingan. Olingan sharlar orasidagi oq sharlar sonining taqsimot qonunini tuzing.

Javob:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$.

2. Tangani 5 marta tashlash tajribasi berilgan. X tasodifiy miqdor tanganing raqamli tomonining tushishlari sonidan iborat bo‘lsin. Uning taqsimot qonuni topilsin.

Javob:

X	0	1	2	3	4	5
R	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

3. X tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuniga ega:

X	-2	1	4
R	0,5	0,35	0,15

Uning taqsimot funksiyasini toping.

$$Javob:\ F(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x\le -2 \quad bo'lsa, \\ 0{,}5 & agar \quad -2<x\le 1 \quad bo'lsa, \\ 0{,}85, & agar \quad 1<x\le 4 \quad bo'lsa, \\ 1, & agar \quad x>4 \quad bo'lsa. \end{cases}$$

4. Agar $F(x)$ taqsimot funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy $h\neq 0$ da $\Phi(x)=\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h}F(u)du$, $\Psi(x)=\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h}F(u)du$ funksiya ham taqsimot funksiya bo'lishini isbotlang.

5. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \frac{1}{4}, & 0<x\le 4; \\ 0, & x>4. \end{cases}$$

zichlik funksiya bilan berilgan Y tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping.

$$Javob:\ F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \frac{x}{4}, & 0<x\le 4; \\ 1, & x>4. \end{cases}$$

6. X tasodifiy miqdor ushbu taqsimot funksiyasiga ega:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x\le 2 \quad bo'lsa, \\ \frac{x}{2}, & agar \quad 2<x\le 4 \quad bo'lsa, \\ 1, & agar \quad x>4 \quad bo'lsa. \end{cases}$$

Ushbu $P(3<X<3{,}5)$ ehtimolning qiymatini toping.

Javob: 0,25.

7. Ushbu $p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$, bunda $-\infty<x<\infty$, funksiya taqsimot zichligi bo'ladimi?

8. Texnik qurilmaning buzilmasdan ishlash vaqti T tasodifiy miqdor bo'lib, u ko'rsatgichli taqsimot qonuni bilan taqsimlangandir. Bu texnik qurilma 10000 soat ish davomida o'rtacha 10 marta buziladi (ishdan chiqadi). Uning 2000 soat ish davomida buzilish ehtimolini toping.

Javob: $p\approx 0{,}87$.

9. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni ushbu ko'rinishida berilgan:

x_i	8	20	25	40	45	55
p_i	0,14	0,36	0,30	0,15	0,03	0,02

Bu tasodifiy miqdorning modasini toping.

Javob: 20.

10. Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi ushbu ko'rinishida berilgan:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<2; \\ a(x-2)(4-x), & 2\le x\le 4; \\ 0, & x>4. \end{cases}$$

Zichik funksiyaning bu ifodasida a o'zgarmas miqdorning qiymatini, taqsimotning modasini va medianasini toping.

Javob: $a=0{,}75$. Taqsimotning modasi va medianasi 3 soniga tengdir.

11. Ushbu

x_k	−3	2	0	1
p_k	0.2	0,14	p_3	0,16

jadval biror X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini ifodalaydi. p_3 noma'lum sonning qiymatini toping.

Javob: $p_3 = 0{,}5$.

2.2. Markov zanjirlari

Muayyan sharoitda o'tkaziladigan tajribalarning har birida A_1, A_2, ..., A_n hodisalardan faqat bittasi ro'y beradigan bo'lsin. Agar n ta tajriba o'tkaziladigan bo'lsa, bunda elementar hodisa $(i_1, i_2, ..., i_n) = \omega$ dan iborat bo'ladi. Bu yerda i_l – shu qiymatga mos o'rinda turgan A_1, A_2, ..., A_n hodisalardan biri ro'y berishini anglatadi. Shunday qilib, $\Omega = \{(i_1, i_2, ..., i_n) \ : \ i_1, \ i_2, ..., i_n = 1, \ 2, ..., k\}$ elementar hodisalar fazosiga ega bo'lamiz. Elementar hodisalar soni esa $|\Omega| = k^n$ dan iboratdir.

Ta'rif. Agar $\omega = (i_1, i_2, ..., i_n)$ uchun

$P(\omega) = P(i_1, i_2, ..., i_n) = P(i_1) \cdot P(i_2) \cdot ... \cdot P(i_n)$ tenglik bajarilsa, bu tajribalar ketma-ketligi erkli tajribalar ketma –ketligi deb ataladi.

Misol. Idishda 6 ta yashil, 5 ta malla shar bor. Idishdan ketma-ket ikki marta bittadan shar olamiz, har bir olingan shar idishga qaytarib solinadi. Olingan ikki sharning yashil bo'lish hodisasini qaraymiz. Bunda 2- sharning yashil bo'lishi 1- sharning yashil bo'lishi – bo'lmasligiga bog'liq emas. Agar biz 1- sharning yashil bo'lishi hodisasini A_1 deb, 2- sharning yashil bo'lishi hodisasini A_2 deb belgilasak, ikkalasining xam yashil bo'lishi hodisasi $A = A_1 \cdot A_2$ bo'ladi. Bu o'zaro erkli tajribalar ketma-ketligi bo'lganligidan, A hodisaning ehtimoli quyidagicha topiladi:

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{6}{11} \cdot \frac{6}{11} = \frac{36}{121}.$$

Agar shu misolda olingan shar idishga qaytarib solinmasa, olingan ikkinchi sharning yashil rangli bo'lishi olingan birinchi sharning qanday rangli ekanligiga bog'liqdir. Bunda tajribalar ketma-ketligi bog'liqli bo'ladi.

Ta'rif. Agar $\omega = (i_1, i_2, ..., i_n)$ uchun

$P(i_n \ / \ i_1, i_2, ..., i_{n-2}, i_{n-1}) = P(i_n \ / \ i_{n-1})$ tenglik o'rinli bo'lsa, bu tajribalar ketma- ketligi Markov zanjiri deyiladi.

Aytaylik, vaqtning t=0, 1, 2, 3, ..., onlarida qaralayotgan sistema $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, ...\}$ holatlarning birida bo'lishi mumkin bo'lsin. Bu $\{\xi_n\}$ butun qiymatli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lishi ham mumkin, uning qiymatlari to'plamini X deb olaylik.

Ta'rif. Ushbu $\{\xi_n, n = 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ ...\}$ ketma-ketlik Markov zanjirini tashkil etadi, deyiladi, agar

$$n \geq 1, \ (x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in X \text{ uchun}$$

$$P\{\xi_{n+1} = x_{n+1} / \xi_0 = x_0, ..., \xi_n = x_n\} = P\{\xi_{n+1} = x_{n+1} / \xi_n = x_n\}$$

munosabat faqat $P\{\xi_0 = x_0, \xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\} > 0$ shart baja-rilganda o'rinli bo'lsa. Quyidagi $P(\xi_{n-1} = x) > 0$ shart bajarilganda, agar

$$\sum_{y \in X} P_n(x, y) = 1 \ , \quad P_n(x, y) \geq 0$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa,biz $P_n(x, y) = P\{\xi_n = y / \xi_{n-1} = x\}$ ehtimolni o'tish ehtimoli deb ataymiz.

Markov zanjirini boshqacha talqin etish ham mumkin: Mumkin bo'lgan holatlari to'plami $(E_1, E_2, ..., E_n, ..)$ dan iborat biror fizik sistema berilgan bo'lib, ξ_0 ning boshlang'ich taqsimoti $P(\xi_0 = j) = p_j^0$, $\sum p_j^0 = 1$ berilgan va vaqtning butun qiymatli onlarida sistema o'z holatini o'zgartirsin. Vaqtning n- momentida sistemaning E_j holatda bo'lish ehtimoli, oldingi momentlarning barchasida sistema qaysi holatda bo'lganligi ma'lum bo'lsa ham, ularga bog'liq bo'lmasdan, faqat vaqtning $(n-1)-$ momentida sistema qaysi holatda bo'lganiga bog'liq bo'lsin. Bunday bog'liqlik Markov zanjiridir. Ushbu $p_{ij}^{(m,n)} = P(\xi_n = j/\xi_m = i)$ ehtimol sistemaning m- tajribada E_i holatda bo'lib, n- tajribada E_j holatga o'tish ehtimoli deyiladi.

Ushbu $p_{ij}^{(m,n)} = P(\xi_n = j/\xi_m = i)$ ehtimol sistemaning m -tajribada E_i holatda bo'lib, n – tajribada E_j holatga o'tish ehtimoli deyiladi.

Quyidagi

$$P(m,n) = \begin{pmatrix} p_{11}^{(m,n)} & p_{12}^{(m,n)} \dots p_{1s}^{(m,n)} \\ p_{21}^{(m,n)} & p_{22}^{(m,n)} \dots p_{2s}^{(m,n)} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ p_{s1}^{(m,n)} & p_{s2}^{(m,n)} \dots p_{ss}^{(m,n)} \end{pmatrix}$$

matritsa *o'tish ehtimollari matritsasi* deyiladi. Bu matritsaning tartibi Markov zanjirining holatlari soni s ga teng bo'ladi.

Agar o'tish ehtimollari tajriba nomeriga bog'liq bo'lmasa, ya'ni $p_{ij}^{(k,k+1)} = p_{ij}^{(k)} = p_{ij}$ bo'lsa, bunday zanjir *bir jinsli Markov zanjiri* deyiladi.

Bir jinsli Markov zanjirining bir qadamda o'tish ehtimollari matritsasi

$$\pi_1 = P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{s1} & p_{s2} & \dots & p_{ss} \end{pmatrix}$$ kabi bo'ladi.

Bir jinsli Markov zanjiri uchun m-tajribada E_i holatda bo'lib, n-tajribada E_j holatga o'tish ehtimollari matritsasi uchun

$$P(m,n) = P(m)\cdot P(m+1)\dots P(n-1) = [P]^{n-m} = \pi_{n-m}$$

munosabatlar o'rinlidir.

O'tish ehtimollari matritsasi ushbu xossalarga egadir:

1. O'tish ehtimollari matritsasining har bir elementi uchun $0 \le p_{ij}^{(m,n)} \le 1$ tengsizlik o'rinlidir.

2. O'tish ehtimollari matritsasining har bir satridagi ehtimollar yig'indisi birga teng.

3. O'tish ehtimollari matritsasi biror ustunining hamma elementlari nol bo'la olmaydi.

Ta'rif. Agar $n \to \infty$ da ixtiyoriy $i, j, k = 1,2,\dots s$ uchun

$$\left| p_{ij}^{(m,n)} - p_{kj}^{m,n} \right| \to 0$$

bajarilsa, bu o'tish ehtimollari bilan berilgan Markov zanjiri ergodik prinsipga bo'ysunadi deyiladi.

Teorema. Agar biror $k > 0$ son uchun o'tish ehtimollari matritsasi π_k ning hamma elementlari musbat bo'lsa, u holda zanjir ergodik bo'ladi va i ga bog'liq bo'lmagan shunday p_j $(1 \le j \le s)$ sonlar mavjudki, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j$ bo'ladi.

Biror fizik sistema vaqtning diskret onlarida (qadamlarda) chekli sondagi $s_1, s_2, \dots, s_n$ holatlarning biridan ikkinchisiga o'tib turishi mumkin, yoki bu holatlarda bo'lishi mumkin bo'lsin. Biz sistemaning k -chi qadamda s_j holatda bo'lishi hodisasini $s_j^{(k)}$ deb, bu hodisaning ehtimolini pj(k), $\sum_{j=1}^{n} p_j(k)=1$ deb belgilaymiz.

1-masala. (Tasodifiy sonlarni m modul bo'yicha yig'ish). Biror m natural sonni tayinlaylik. Tajriba (0,1,2,3,.,m-1) sonlardan birini tasodifiy tanlashdan iborat bo'lsin. Bunda har bir son aniq ehtimol bilan tanlanadi: p_i ehtimollik bilan i soni (i=0, 1, 2, ..., m-1) tanlanadi. Ko'rinib turibdiki, $p_0+p_1+...+p_{m-1}=1$ bajarilishi kerak. Biz tasodifiy tanlangan sonni m ga bo'lishdan chiqqan qoldiqni olamiz. Shunday qilib, m ta turli $A_0, A_1, A_2, ..., A_{m-1}$ holatlar bo'lishi mumkin: Bunda A_i holat n- tajribadan so'ng tanlangan sonlar yig'indisini m ga bo'lganda chiqqan qoldiq i ga tengligini bildiradi. Masalan, $m=8$ holda holatlar ketma-ketligi $A_1, A_4, A_6, A_0, A_5, ...$ bo'ladi. O'tish ehtimollarini hisoblaylik: n ta qadamdan so'ng sistema A_i holatda bo'lsin. Navbatdagi *(n+1)* -chi qadam 0,1,2,.,(m+1) sonlaridan birini tanlashdan iboratdir, bu tanlashlar $p_0, p_1, ..., p_{m-1}$ ehtimollik bilan ro'y beradi. Masalan, α son tanlansa, A_i holat A_j holat bilan almashinadi; bunda j son $i+\alpha$ ni m songa bo'lishdan chiqqan qoldiq. Shunday qilib, $i+\alpha<m$ bo'lsa, $j=i+\alpha$ va demak, $j\geq i$; Agar $i+\alpha\geq m$ bo'lsa, $j=i+\alpha$ va $j<i$ bo'ladi (chunki $\alpha<m$). Bu aytilganlarga asosan, agar $j\geq i$ bo'lsa, $\alpha=j-i$; agar $j<i$ bo'lsa $\alpha=m+(j-i)$. Biz α sonini p_α ehtimol bilan tanlayapmiz. Demak, ushbu

$$p_{ij}=\begin{cases} p_{j-i} & ; \ j\geq i, \\ p_{m+(j-i)} & ; \ j<i. \end{cases}$$ o'tish ehtimollari hosil bo'ladi.

2-masala. Uch holatli fizik sistemaning bir qadamda o'tish ehtimollari matritsasi

$$\pi_1=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda berilgan. Bu fizik sistemaning s_2 holatdan s_3 holatga ikki qadamdan so'ng o'tish ehtimoli $p_{2,3}$ 'ni toping.

Yechish π_2. ni topamiz:

$$\pi_2=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

π_2 matritsaning ikkinchi satr, uchinchi ustunidagi $p_{2,3}=\frac{1}{4}$ ehtimol sistemaning s_2 holatdan s_3 holatga ikki qadamdan so'ng o'tish ehtimolini beradi.

Masalalar

1. $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n$ – o'zaro bog'liq bo'lmagan diskret tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin $\{\xi_n\}$. miqdorlarning qiymatlari

to'plamini $X = \{x_1, x_2, ...\}$ deb olaylik. Bu miqdorlarning har biri o'zining X_k to'plamidan qiymat qabul qiladi, deb faraz qilamizki, agar X_k lar sanoqlidan ko'p bo'lmasa, $X = \bigcup_k X_k$ o'rinlidir. Bu ketma-ketlik Markov zanjirini tashkil etadi-mi?

Javob: Ha.

2. Bizga shunday $\xi_0, \eta_1, \eta_2 ....$ -o'zaro bog'lanmagan, butun qiymatli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan-ki, $q_k(y) = P\{\eta_k = y\}$ aniqlangan bo'lsin. Ushbu $\xi_n = \xi_0 + \eta_1 + \eta_2 + .. + \eta_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi Markov zanjirini tashkil etadimi?

Javob: O'tish ehtimoli $P_n(x, y) = q_n(y - x)$ bo'lgan Markov zanjirini tashkil etadi.

3. O'tish matritsasi

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

bo'lgan, uch holatli,bir jinsli Markov zanjiri ergodik zanjir bo'ladimi? Ikki qadamga o'tish ehtimoli matritsasi qanday bo'ladi?

Javob: Ha.

4. Trikotaj firmasi ustki kiyimlar ishlab chiqarsin. Firmaning hamma holatini shartli ravishda ikkita holatga bo'lish mumkin:

1. Firma ishlab chiqargan mahsulot xaridorlar talabiga mos (qulay vaziyat)

2. Firma ishlab chiqargan mahsulot xaridor talabiga mos emas (noqulay vaziyat).

Bu sistemaning o'tish ehtimollari matritsasi

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

bo'lsin. Firma ishlab chiqargan birinchi (boshlang'ich) mahsulot xaridor talabiga mos bo'lsin. U holda sistemaning boshlang'ich holatda bo'lish ehtimollari (boshlang'ich holatlar vektori)

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bo'ladi. Sistemaning holatdan holatga o'tishi diskret vaqt momentlarida (onlarida) ro'y bersin (masalan, haftalardan so'ne). a) Birinchi haftadan so'ng o'tish ehtimollari matritsasini toping. b) 2- haftadan so'ng o'tish ehtimollari matritsasini toping. d) Bu ergodik Markov zanjiri bo'ladi-mi?

Javob: a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \frac{9}{20} & \frac{9}{20} \end{pmatrix}$ d) Egrodik Markov zanjiri bo'ladi.

5. Elektron o'zida bor bo'lgan energiya zapasiga bog'liq ravishda sanoqli sondagi orbitalarining birortasida to'xtaladi yoki biridan ikkinchisiga tasodifan o'tib turadi. i – orbitadan j – orbitaga bir sekundda o'tish ehtimoli $p_{ij}(1) = c_i e^{-\alpha|i-j|}$ dan iborat. Bunda α - taqsimotning parametri.

a) i - orbitadan j - orbitaga ikki sekundda o'tish ehtimolini toping.

b) c_i o'zgarmaslarni toping.

Javob: a) $\pi_1 = \| p_{ij}(1) \|$, bo'lsa, $\pi_2 = \pi_1^2$ matritsaning elementlari ikki sekundda i - orbitadan j - orbitaga o'tish ehtimollaridan iboratdir.

b) $c_n = \dfrac{1-e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}-e^{-n\alpha}}$.

6. Sistemaning bir holatdan ikkinchi holatga bir qadamda o'tish ehtimollari matritsasi berilgan:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Bir holatdan ikkinchi holatga ikki qadamda o'tish ehtimollari matritsasini toping.

Javob: $\pi_2 = \pi_1$.

7. Halqaviy yo'lda (trassada) joylashgan 2 m ta punktlardan (tayanch nuqtalardan) yuk avtomashinalar yordamida tashilmoqda. Yuk bir punktdan ikkinchi punktga r ehtimol bilan yoki boshqasiga $q=1-p$ ehtimol bilan tashilishi mumkin. Elementlari ushbu n ta tashishdan so'ng j – punktdan k – punktga tashish ehtimoli $p_{ij}(n)$, $(j,\ k=1,2,3,...,2m)$ dan iborat bo'lgan o'tish ehtimollari matritsasi topilsin.

Javob:

$$\pi_n = \begin{pmatrix} 0 & p & .. & q \\ q & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ p & .. & q & 0 \end{pmatrix}$$

8. Zarrachalar bir-biridan bog'liqsiz holda, teng ehtimollik bilan, berilgan N dona yacheykaga birma-bir joylashtiriladi. n dona zarracha joylashtirilgandan so'ng, bo'sh qolgan yacheykalar soni $\mu_0(n)$ bilan

belgilansa, bu $\mu_0(n)$, $n=1,2,3,...,$ ketma-ketlik-ning Markov zanjirini tashkil etishini isbotlang va o'tish ehtimollarini toping.

Javob: $P(\mu_0(n+1)=k/\mu_0(n)=k)=\dfrac{k}{N}$;

$$P(\mu_0(n+1)=k-1/\mu_0(n)=k)=\frac{N-k}{N}.$$

9. O'tish matritsasi

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

bo'lgan, bir jinsli Markov zanjiri ergodik zanjir ekanligini tekshiring.

Javob: Bu zanjir ergodik prinsipga bo'ysunadi.

2.3. Tasodifiy miqdorlarning funksiyalari

(Ω, S, P) ehtimollik fazosida $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlar berilgan bo'lsin $X=(X_1, X_2, ..., X_n)$. vektorni qaraylik. Bu $X_1, ... X_n$ tasodifiy miqdorlar yordamida beriladigan $X : \Omega \to R^k$ o'lchovli akslantirish *tasodifiy vektor* yoki *ko'p o'lchovli tasodifiy miqdor* deyiladi.

$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n)$ funksiya bu X tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi yoki $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlar majmuasining taqsimot funksiyasi deyiladi.

Ta'rif. Agar $p(t_1, t_2, ..., t_k) \geq 0$ bo'lib, tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi quyidagi

$$F(x_1,x_2,\dots,x_k)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\dots\int_{-\infty}^{x_k}p(t_1,t_2,\dots,t_k)dt_1dt_2\dots dt_k$$

ko'rinishida bo'lsa, $X=(X_1,X_2,\dots,X_k)$ absolyut uzluksiz tipdagi tasodifiy vektor deyiladi, bunda $p(t_1,t_2,\dots,t_k)$ funksiya X tasodifiy vektorning zichlik funksiyasi deyiladi. Bu tasodifiy miqdorlarni bilgan holda quyidagi

$$\eta_1=f_1(X_1,X_2,\dots,X_k)$$
$$\eta_2=f_2(X_1,X_2,\dots,X_k)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\eta_r=f_r(X_1,X_2,\dots,X_k)$$

tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyasini topaylik. Bunda $f_1,f_2,\dots,f_r$ o'lchovli funksiyalardir. Faraz qilaylik, $(X_1,X_2,\dots,X_k)$ uzluksiz tipdagi tasodifiy miqdorlar bo'lib, $p(x_1,x_2,\dots,x_k)$ ular majmuasining zichlik funksiyasi bo'lsin, u holda

$$P(\eta_1<y_1,\eta_2<y_2,\dots,\eta_r<y_r)=\int\int_D\dots\int p(x_1,x_2,\dots,x_K)dx_1dx_2\dots dx_K$$

bo'ladi, bu yerda

$$D=\{(x_1,x_2,\dots,x_K):f_i(x_1,x_2,\dots,x_K)\le y_i, i=1,2,\dots,r\}$$

Xususiy xolda $\eta=X_1+X_2+\dots+X_K$ yig'indining taqsimot funksiyasi yuqoridagi integralga asosan,

$P(\eta<x)=\int\int\int_D\dots\int p(x_1,x_2,\dots,x_K)dx_1dx_2\dots dx_K$ ga teng, bunda

$$D=\left\{(x_1,x_2,\dots,x_K):\sum_i x_i\le x\right\}.$$

X_1, X_2 diskret tasodifiy miqdorlar bo'lsa,

$P(X=x_K)=p_K, K=0,1,2,3,\dots; K=-1,-2,-3,\dots;$

$P(X_2=z_s)=q_s,\quad s=0,1,2,\dots;\ s=-1,-2,\dots$

Agar $X=X_1+X_2$ bo'lsa,

$P(X=m)=P(X_1+X_2=m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P(X_1=n, X_2=m-n)$ o'rinli.

Agar X_1, X_2 lar o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa,

$$P(X_1=k,X_2=s)=P(X_1=k)P(X_2=s)=p_K\cdot q_s,$$
$$P(X=m)=P(X_1+X_2=m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P(X_1=n)P(X_2=m-n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}p_n\cdot q_{n-m}$$

munosabatlar o'rinlidir (X_1,X_2). ning zichlik funksiyasi $p(x_1,x_2)$ bo'lsa, $P(X_1+X_2<x)=\int\int_D p(x_1,x_2)dx_1dx_2=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1,z-x)dx_1dz,$

bunda $D=\{(x_1,x_2):x_1+x_2\le x\}$

Agar X_1, va X_2 o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, ularning taqsimot funksiyalari mos holda $F_1(x)$, $F_2(x)$ bo'lsa,

$$P(X_1+X_2<x)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(x-z)dF_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F_2(x-z)dF_1(z)$$

munosabat o'rinli.

1-masala. (X_1,X_2) tasodifiy vektorning zichlik funksiyasi $p(x_1,x_2)$ bo'lsin va $P(X_2=0)$ shartda $\eta=\dfrac{X_1}{X_2}$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topaylik. Ma'lumki,

$$P(\eta<z)=F_\eta(z)=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{tz}p(x_1,t)dx_1dt-\int_{-\infty}^{0}\int_{tz}^{\infty}p(x_1,t)dx_1dt.$$

Agar X_1, X_2 lar mos holda $F_1(x)$, $F_2(x)$ taqsimot zichligiga ega va ular o'zaro bog'lanmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, $\eta = \frac{X_1}{X_2}$ ning taqsimot funksiyasi quyidagicha hisoblanadi:

$$F_\eta(x) = \int_0^\infty F_1(xx_2)p_2(x_2)dx_2 + \int_{-\infty}^0 (1 - F_1(xx_2))p_2(x_2)dx_2 =$$

$$= \int_0^\infty F_1(xx_2)dF_2(x_2) + \int_{-\infty}^0 (1 - F_1(xx_2))dF_2(x_2),$$

bunda $p_2(x_2)$ bilan X_2 tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi belgilangan.

2-masala. X_1, X_2 tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq emas hamda ularning taqsimot qonuni ushbu ko'rinishda berilgan:

X_1:	1	2
p:	0,3	0,7 va

X_2:	-1	3
p:	0,6	0,4

$X = X_1 + X_2$ ning taqsimot qonunini yozing.

Yechish.

$P(X = 0) = P(X_1 = 1,\ X_2 = -1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = -1) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18;$

..., $P(X = 5) = P(X_1 = 2,\ X_2 = 3) = P(X_1 = 2) \cdot P(X_2 = 3) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28$

Demak,

X:	0	1	4	5
P:	0,18	0,42	0,12	0,28

bunda 0,18+0,42+0,12+0,28=1 o'rinlidir.

3-masala. Agar X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lsa, $Y = X^2$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish. Taqsimot funksiyaning ta'rifiga asosan,

$$F_Y(x) = P(Y < x) = P(X^2 < x) = \begin{cases} 0, & x \le 0. \\ P\{-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}\}, & x > 0; \end{cases}$$

Agar X tasodifiy miqdor $p(x)$ zichlik funksiyasiga ega bo'lsa, $Y = X^2$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$p_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0. \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[p(\sqrt{x}) + p(-\sqrt{x})\right], & x > 0; \end{cases}$$ kabi bo'ladi.

4-masala. Aytaylik, ξ tasodifiy miqdor $(0,1]$ kesmada tekis taqsimot qonuni bilan taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lsin $\eta = \ln\frac{1}{\xi}$. tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi topilsin.

Yechish. Agar $\xi \in (0,1]$ bo'lsa, $\ln\frac{1}{\xi} > 0$ bo'ladi hamda $x \le 0$ bo'lsa, $P\{\eta < x\} = 0$ o'rinli. Endi $x > 0$ bo'lsin. U holda

$$P\left(\ln\frac{1}{\xi} < x\right) = P\left(\frac{1}{\xi} < e^x\right) = P(\xi > e^{-x}) = 1 - e^{-x}.$$

Demak, η tasodifiy miqdor $\lambda = 1$ parametrli ko'rsatgichli taqsimot qonuniga ega ekan.

5-masala. O'yin kubi ikki marta tashlab ko'rilayotgan bo'lsin x_1 bilan birinchi tashlashda tushishi mumkin bo'lgan ochkolar sonini, x_2 bilan esa ikkinchi tashlashda tushishi mumkin bo'lgan ochkolar sonini belgilaylik. U holda (x_1, x_2) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar sistemasini belgilaydi.

6-masala. O'zaro bog'liq bo'lmagan (a, σ^2) parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar yordamida $\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a)^2$ tasodifiy miqdorni tuzamiz χ^2 ning zichlik funksiyasi

$$p(x) = p_{\chi^2}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{n-2}{2}}$$

dan iborat ekanligini tekshirib ko'rish mumkin. Bunda $\Gamma(.)$ bilan gamma funksiya belgilangan. Zichlik funksiyasi

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

dan iborat bo'lgan τ_n tasodifiy miqdorni erklilik darajasi n bo'lgan Styudent qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. $t^{*}_{\alpha,n}$ funksiyani $P(|\tau_n| < t_{\alpha,n}) = 1 - 2\alpha$ tenglikdan topadilar.

Masalalar

1. X tasodifiy miqdor $[0,1]$ kesmada tekis taqsimot qonuni bilan taqsimlangan. Y tasodifiy miqdor esa parametri birga teng bo'lgan ko'rsatgichli taqsimot qonuni bilan taqsimlangan. Z=X+Y tasodifiy miqdorning taqsimot zichligini toping.

Javob: $p(x) = p_Z(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \le 0, \\ 1 - e^{-x}, & agar \quad 0 < x \le 1, \\ (e-1)\cdot e^{-x}, & agar \quad x > 1. \end{cases}$

2. X tasodifiy miqdor $(0,1)$ parametrli normal taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo'lsa, Z=2X+3 tasodifiy miqdor taqsimot qonunini toping.

Javob: $p(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-3)^2}{8}\right\}.$

3. Qutida to'rtta shar bor: ikkita oq shar, bitta qora shar, va bitta ko'k shar. Bu sharlar aralashtirilib yuboriladi. Qutidan tasodifan ikkita shar tanlandi. Tanlanmadagi qora sharlar sonini x_1 bilan, ko'k sharlar sonini x_2 bilan belgilaymiz. (x_1, x_2) – tasodifiy miqdorlar sistemasining taqsimot qonunini yozing.

Javob:

$x_1 \backslash x_2$	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
1	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

4. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan,ya'ni uning taqsimot zichligi $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ kabi berilgan. $\eta = \alpha\xi + \beta$, $\alpha \ne 0$, $\alpha = const, \beta = const$ tasodifiy miqdorning taqsimot zichligini toping.

Javob: $p_\eta(y) = \frac{1}{(\alpha\sigma)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y-(\alpha a+\beta))^2}{2(\alpha\sigma)^2}\right\}.$

5. X tasodifiy miqdor $r(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin (0,2] \\ ax & , x \in (0,2] \end{cases}$ zichlik funksiyasiga ega a. o'zgarmasning qiymatini toping.

Javob: $a = \frac{1}{2}.$

6. (X,Y) tasodifiy vektor $f(x,y)$ zichlik funksiyasiga ega bo'lsa, tashkil etuvchilari (komponentalari) $u = X + Y$, $v = X - Y$ dan iborat bo'lgan (u,v) vektorning zichlik funksiyasi topilsin.

Javob: $\varphi(x,y)=\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right).$

7. Agar X_1, X_2 tasodifiy miqdorlarning har biri ushbu $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ zichlik funksiyasiga ega bo'lsa, $Y=X_1+X_2$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

Javob: $\varphi_Y(x)=\frac{2}{\pi(x^2+4)}.$

8. Agar X tasodifiy miqdor $f(x)=3e^{-3x}$, $x\geq 0$ $f(x)=0,\ x<0$ (bo'lsa) zichlik funksiyasiga ega bo'lsa, $Y=2X$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

Javob: $p(x)=\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}.$

9. X tasodifiy miqdor (a,σ) parametrli normal taqsimot qonuni bilan taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lsa, bu X ning chiziqli funksiyasidan iborat bo'lgan tasodifiy miqdor ham normal taqsimot qonuni bilan taqsimlanganligini isbotlang.

10. Agar X va Y o'zaro bog'lanmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa hamda ularning taqsimot qonunlari

X	1	2	3
P	0,2	0,5	0,3

va

Y	-2	2
R	0,4	0,6

ko'rinishida bo'lsa, Z=X+Y tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozing.

Javob:

Z	-1	0	1	3	4	5
P	0,08	0,20	0,12	0,12	0,30	0,18.

11. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & x\in(0,1];\\ 0, & x\leq 0,\ x>1.\end{cases}$$

ko'rinishida berilsa, uning taqsimot funksiyasi, medianasi, modasi topilsin.

$$Javob: F(x)=\begin{cases}0 & ,x\leq 0;\\ x^3 & ,\ x\in(0,1];\\ 1 & ,\ x>1.\end{cases}\ ;\ \text{Moda } x=1\ ;\ a=\frac{1}{2^{1/3}}\text{-mediana.}$$

12. Taqsimot funksiyaning ushbu xossalari isbotlansin:

$$1)\ \lim_{x\to+0}x\cdot\int_x^{\infty}\frac{1}{u}dF(u)=0;\quad 2)\ \lim_{x\to+\infty}x\cdot\int_x^{\infty}\frac{1}{u}dF(u)=0.$$

13. X va Y tasodifiy miqdorlarning har biri mos holda λ_1, λ_2 parametrli Puasson taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo'lsa, $Z=X+Y$ tasodifiy miqdor $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ parametrli Puasson taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo'lishini isbotlang.

14. Agar X tasodifiy miqdor (a,b) intervalda tekis taqsimot qonuni bilan taqsimlangan, Y tasodifiy miqdor $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ kabi zichlik funksiyasiga ega (ya'ni Koshi taqsimot qonuni bilan taqsimlangan) bo'lsa,

$Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot zichligi topilsin.

Javob: $p_Z(t)=\frac{1}{\pi(b-a)}(arctg(t-a)-arctg(t-b)).$

15. X tasodifiy miqdor ushbu taqsimot funksiyasi bilan berilgan:

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar\quad x<0;\\ \frac{1-\cos x}{2}, & agar\quad 0\leq x\leq\pi;\\ 1, & agar\quad x>\pi.\end{cases}$$

Uning zichlik funksiyasini toping.

Javob: $f(x)=\begin{cases} 0{,}5\sin x\,, & agar\ \ 0\le x\le\pi\ ; \\ 0\,, & agar\ \ x<0\ ;\ x>\pi. \end{cases}$

16 (ξ,η,ς). tasodifiy vektorning zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishda berilgan:

$$p(x,y,z)=\frac{6}{(1+x+y+z)^4},\quad x>0,\ y>0\ ,\ z>0 \text{ bo'lsa } x,y,z.$$

ning boshqa qiymatlarida $p(x,y,z)=0$, $\tau=x+y+z$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

Javob: $f_\tau(u)=\dfrac{3u^2}{(1+u)^4}$.

3-bob. TASODIFIY MIQDORLAR SONLI XARAKTERISTIKALARI

3.1. Matematik kutilma, dispersiya va ularning xossalari

Ta'rif. X diskret tasodifiy miqdor

x_1	x_2	x_3	....	x_n	....
p_1	p_2	p_3	....	p_n	....

taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsa, $\sum\limits_{K=1}^{\infty} x_K\cdot p_K$ qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lganda, bu qatorning yig'indisi X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi (kutilishi) deyiladi hamda $MX=\sum\limits_K x_K\cdot p_K$ kabi belgilanadi. MX ifodasida qo'shiluvchilar soni chekli yoki sanoqli sonda bo'lishi mumkin.

X uzluksiz tasodifiy miqdor $f(x)$ zichlik funksiyasiga ega bo'lsin. Agar $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|\cdot f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi *MXO'yoki M(X)G'* mavjud bo'ladi va

$MX=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx$ formula o'rinlidir. Agar X tasodifiy miqdor $F(x)$ taqsimot funksiyasiga ega bo'lsa uning matematik kutilmasi

$MX=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot dF(x)$ kabi hisoblanadi.

Xossalari:

1. O'zgarmas sonning matematik kutilmasi uning o'ziga teng.

2. Agar s – o'zgarmas son bo'lsa, $MsX=sMX$ o'rinlidir, ya'ni o'zgarmas sonni matematik kutilma belgisidan tashqarida yozish mumkin.

3. Ixtiyoriy X, Y tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilishi qo'shiluvchilarning matematik kutilmalarining yig'indisiga teng:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

4. Agar $X_1, X_2, ..., X_n$ chekli sondagi tasodifiy miqdorlar bo'lsa,

$$M(X_1+X_2+...+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)$$

munosabat o'rinlidir.

5. Agar X va Y o'zaro bog'lanmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, bu tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi har bir tasodifiy miqdor matematik kutilmalarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y).$$

Ta'rif. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb $Y=(X-M(X))^2$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga aytiladi:

$$D(X)=M(X-M(X))^2.$$

Matematik kutilmaning xossalaridan foydalanib, dispersiyani

$$D(X)=M(X)^2-(M(X))^2$$

formula bilan ham hisoblash mumkin.

Teorema. Agar $\varphi(x)$ ixtiyoriy uzluksiz funksiya bo'lsa, X tasodifiy miqdor $f(x)$ zichlik funksiyasiga ega bo'lganda

$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|\cdot f(x)dx$ integral mavjud bo'lsa, $M(\varphi(X))$ ham mavjud

bo'ladi va $M(\varphi(X))=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\cdot f(x)dx$ munosabat o'rinlidir.

Agar X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarini x_K deb, bu qiymatlarni qabul qilish ehtimollarini p_K deb belgilasak, uning dispersiyasini

$$D(X)=\sum_{K=1}^{n}(x_K-M(X))^2\cdot p_K$$

formula yordamida topamiz. Agar X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari $\{x_K\}$ sanoqli to'plamdan iborat bo'lsa uning dispersiyasini

$$D(X)=\sum_{K=1}^{\infty}(x_K-M(X))^2\cdot p_K$$

formula yordamida hisoblaymiz. Bunda qator absolut yaqinlashuvchi deb faraz qilinadi.

Ta'rif. Agar X uzluksiz tasodifiy miqdor $f(x)$ zichlik funksiyasiga, $F(x)$ taqsimot funksiyasiga ega bo'lsa, X ning dispersiyasi deb, ushbu

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx, \quad D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 dF(x)$$

integrallarning qiymatiga aytiladi.

Ko'pincha, dispersiyani

$$D(X)=\sum_{K}(x_K)^2\cdot p_K-(M(X))^2, \quad D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)dx-M(X)^2$$

formulalar yordamida hisoblaydilar.

Xossalari:

1. O'zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng.
2. X tasodifiy miqdorni s o'zgarmas songa ko'paytirilsa, uning dispersiyasi c^2 ga ko'paytiriladi, ya'ni $D[c\cdot X]=c^2\cdot D[X]$.
3. Agar X, Y o'zaro bog'lanmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, ular yig'indisiningdispersiyasi qo'shiluvchilar dispersiyalarining yig'indisiga tengdir, ya'ni

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

4. Agar X, Y ixtiyoriy tasodifiy miqdorlar bo'lsa

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\cdot K(X,Y).$$

Bu oxirgi ifodada

$$K(X,Y)=M(X-M(X))\cdot(Y-M(Y))=\operatorname{cov}(X,Y)$$

ga X va Y tasodifiy miqdorlarning bog‘liqlik darajasi yoki korrelatsion momenti yoki, kovariatsiyasi deyiladi.

Ta'rif. X tasodifiy miqdorning dispersiyasidan olingan kvadrat ildizning qiymatiga uning o‘rta kvadrat chetlanishi deyiladi:

$$\sigma=\sigma_X=\sqrt{D(X)}.$$

Ta'rif. X va Y miqdorlarning korrelyatsiya koeffitsienti deb,

$$r=r_{X,Y}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}$$ miqdorga aytiladi.

$(X_1,X_2,...,X_n)$ - tasodifiy miqdorlar sistemasi berilgan bo‘lsin. Uning taqsimot zichligi $f(x_1,x_2,...,x_n)$, taqsimot funksiyasi $F(x_1,x_2,...,x_n)$ bo‘lsa, $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ tasodifiy miqdorlar sistemasining matematik kutilmasi va dispersiyasi shunday vektorki, bu vektorning tashkil etuvchilari (komponentalari) mos ravishda

$$M[X_K]=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}x_K\cdot f(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n\ ;$$

$$D(X_i)=K_{ii}=\sigma_i^{\ 2}=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-M(X_i))^2 f(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n.$$

dan iboratdir.

X_i, X_j larning bog‘liqlik darajasini ushbu

$$M[(X_i-M(X_i))\cdot(X_j-M(X_j))]=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-M(X_i))\cdot(x_j-M(X_j))f(x_1,....,x_n)dx_1...dx_n=$$

$=k_{ij}$ miqdor aniqlaydiki, bu miqdorni korrelyatsion moment deb ham yuritamiz. Ko‘pincha ushbu

$k_{ij}=k_{ji}=M[X_i\cdot X_j]-M(X_i)\cdot M(X_j)$ formula bilan ham ish ko‘rish mumkin.

Teorema. Agar $X_1,X_2,...,X_n$ tasodifiy miqdorlar uchun $\operatorname{cov}(X_i,X_j)=\sigma_{ij}$, i, $j=1,2,...$ mavjud bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $c_1,c_2,...,c_n$ o‘zgarmas sonlar uchun ushbu munosabat o‘rinlidir:

$$D(c_1X_1+c_2X_2+...+c_nX_n)=\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}c_i\cdot c_j.$$

Bu teorema isbotini matematik kutilma va dispersiya xossalaridan foydalanib keltirib chiqarish mumkin.

Quyidagi

$$r_{ij}=r_{ji}=\frac{M(X_i-M(X_i))\cdot(X_j-M(X_j))}{\sqrt{D(X_i)\cdot D(X_j)}}$$

ifoda X_i, X_j miqdorlarning bog‘liqlik darajasini ko‘rsatadi va uni korrelyatsiya koeffitsienti deb yuritamiz.

Aytaylik, ξ tasodifiy miqdor x_1, x_2, ..., x_n qiymatlarni bir xil ehtimollik, ya'ni $P\{\xi=x_i\}=\frac{1}{n}$, $i=1,2,...,n$ ehtimollik bilan qabul qilsin. Uning matematik kutilmasi quyidagicha topiladi:

$$M\xi=\frac{1}{n}\cdot x_1+\frac{1}{n}\cdot x_2+...+\frac{1}{n}\cdot x_n=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}.$$

1-masala. Binomial qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini va dispersiyasini toping.

Yechish ξ. bilan A hodisaning n ta o‘zaro bog‘liqmas sinovlarda ro‘y berish sonini belgilasak,

$$p_k=P(\xi=k)=C_n^k\,p^k q^{n-k}$$

o‘rinlidir. Matematik kutilma (o‘rta qiymat) ta'rifiga asosan,

$$M\xi=\sum_{k=1}^{n}k\cdot P(\xi=k)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}=np\cdot\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}\cdot p^{k-1}\cdot q^{n-k}=$$
$$=np\cdot(p+q)^{n-1}=np.$$

Dispersiyani $D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2$ formuladan foydalanib topamiz:

$$D\xi=\sum_k k^2C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}-(n\cdot p)^2=n\cdot p\left[(n-1)\cdot p\cdot\sum_k C_{n-2}^{k-2}\cdot p^{k-2}\cdot q^{n-k}+\sum_k C_{n-1}^{k-1}\cdot p^{k-1}\cdot q^{n-k}\right]-$$
$$-(np)^2=n\cdot p((n-1)\cdot p+1)-(n\cdot p)^2=npq.$$

2-masala. X tasodifiy miqdor

$$p(x)=\begin{cases}\frac{3}{7}x^2, & x\in(1,2)\\ 0, & x\notin(1,2)\end{cases}$$

zichlik funksiya bilan berilgan MX, DX ni toping.

Yechish. $MX=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx=\int_1^2 x\cdot\frac{3}{7}x^2dx=\frac{3}{7}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^2=\frac{3}{28}\cdot 15\approx 1{,}6.$

$$MX^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot p(x)dx=\int_1^2 x^2\cdot\frac{3}{7}x^2dx=\frac{3}{7}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_1^2=\frac{3}{35}(2^5-1)\approx 2{,}69\ ;$$
$$DX=MX^2-(MX)^2=2{,}69-(1{,}6)^2\approx 0{,}03$$

3-masala. Agar X ning matematik kutilishi $MX=7$ va Y ning matematik kutilishi $MY=5$ ma'lum bo'lsa, $Z=3X+8Y$ tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

Yechish. Matematik kutilishning xossalaridan foydalanib (yig'indining matematik kutilishi qo'shiluvchilar matematik kutilishlari yig'indisiga teng va o'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilish belgisidan tashqariga chiqarish mumkin) $M(3X+8Y)=M(3X)+M(8Y)=3MX+8MY=21+40=61$ ekanligini topamiz.

4-masala. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

x_k	1	3	6	8
p_k	0,2	0,1	0,4	0,3

X ning dispersiyasini va o'rta kvadrat chetlanishini toping.

Yechish. Ushbu

$$DX=M(X^2)-[M(X)]^2$$

formuladan foydalanamiz.

X ning matematik kutilishini topaylik:

$$M(X)=1\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}1+6\cdot 0{,}4+8\cdot 0{,}3=5{,}3.$$

Endi X^2 ning taqsimot qonunini yozamiz:

X^2	1	9	36	64
p_k	0,2	0,1	0,4	0,3

Shu X^2 tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi:

$M(X^2)=1\cdot 0{,}2+9\cdot 0{,}1+36\cdot 0{,}4+64\cdot 0{,}3=34{,}7$

bo'ladi. Demak, X ning dispersiyasi quyidagicha:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=34{,}7-(5{,}3)^2=5{,}61.$$

Izlanayotgan o'rta kvadrat chetlanishni topsak,

$\sigma(x)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{5{,}61}\approx 2{,}37.$ ga ega bo'lamiz.

5-masala. O'zaro bog'lanmagan X, Y tasodifiy miqdorlarning dispersiyalari mos holda $D(X)=4$, $D(Y)=7$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $Z=5X+3Y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish X. va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'lanmaganligi sababli, $5X$ va $3Y$ tasodifiy miqdorlar ham o'zaro bog'lanmagandir.

Dispersiyaning xossalaridan foydalanib, (o‘zaro bog‘lanmagan tasodifiy miqdorlar yig‘indisining dispersiyasi qo‘shiluvchilarning dispersiyalari yig‘indisiga teng; o‘zgarmas ko‘paytuvchini kvadratga oshirib, dispersiya belgisidan tashqariga chiqarish mumkin) ushbuni topamiz:

$$D(Z)=D(5X+3Y)=D(5X)+D(3Y)=25\cdot D(X)+9\cdot D(Y)=25\cdot 4+9\cdot 7=163.$$

Masalalar

1. Tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdor (1,5) intervalda $p(x)=\frac{1}{4}$ zichlik funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $p(x)=0$. X ning matemati kutilishini va dispersiyasini toping.

Javob: $M(X)=3$, $D(X)=\frac{4}{3}$.

2. (2, 6) intervalda tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishini, dispersiyasini, o‘rta kvadrat chetlanishini toping.

Javob: $M(X)=4$, $D(X)=\frac{4}{3}$, $\sigma(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. Taqsimot funksiyasi $x<0$ bo‘lganda $F(x)=0$; $x\ge 0$ bo‘lganda $F(x)=1-e^{-0,5x}$ kabi berilgan ko‘rsatgichli taqsimot qonuniga ega bo‘lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi, o‘rta kvadrat chetlanishi topilsin

Javob: $M(X)=2$, $D(X)=4$, $\sigma(x)=2$.

4. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor

$$p(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. Uning taqsimot funksiyasi, matematik kutilishi, dispersiyasi topilsin.

Javob: $F(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-3)^2}{32}}dt$, $M(X)=3$, $D(X)=16$.

5. X tasodifiy miqdor (-3, 3) intervalda

$$p(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}$$

zichlik funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $p(x)=0$ $p(x)=0$

X ning matematik kutilmasini toping.

Javob: $M(X)=0$.

6. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi mos ravishda 8 va 6 ga teng. X ning asimmetriyasi, ekstsessi, mod asi va medianasi topilsin.

Javob: $A_s=0$, $E_k=0$, $M_0=8$, $M_e=8$.

7. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin x\ , & 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan. Uning matematik kutilmasi, dispersiyasi topilsin.

Javob: M(X)=1, D(X)= $\pi-3$.

8. X uzluksiz tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiyasi bilan berilgan:

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x, & x\in(0,\pi)\\ 0, & x\notin(0,\pi)\end{cases}$$

Uning matematik kutilmasi, dispersiyasi topilsin

Javob: $M(X)=\frac{\pi}{2}$, $D(X)=\frac{\pi^2-8}{4}$.

9. X tasodifiy miqdor ushbu

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ \frac{x}{6}+\frac{1}{2}, & -3<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

taqsimot funksiyasi bilan berilgan. Uning matematik kutilishini va dispersiyasini toping.

Javob: $M(X)=0$, $D(X)=3$.

10. X tasodifiy miqdor (0, 2) intervalda ushbu

$$p(x)=C(x^2+3x)$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. Bu intervaldan tashqarida $p(x)=0$.

a) S o'zgarmasning qiymatini toping.

b) X miqdorning matematik kutilishini toping.

Javob: $C=\frac{3}{26}$, $M(X)=\frac{18}{13}$.

3.2. Nazariy momentlar

Ta'rif. X tasodifiy miqdorning k- tartibli *boshlang'ich momenti* deb, X^k tasodifiy miqdorning matematik kutilishiga aytiladi:

$$\gamma_k=M(X^k)$$

Ta'rif. X tasodifiy miqdorning k- tartibli *markaziy momenti* deb $[X-M(X)]^k$ tasodifiy miqdorning matematik kutilishiga aytiladi:

$$\mu_k=M[X-M(X)]^k.$$

Ta'rif. Ushbu

$$m_K=M|X-a|^K$$

miqdor X tasodifiy miqdorning k- tartibli absolyut momenti deyiladi. Bu yerda a biror haqiqiy son. Umuman olganda, $a=M(X)$ bo'lishi ham mumkin.

Markaziy momentlar boshlang'ich momentlar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\mu_2=\gamma_2-\gamma_1^2;$$
$$\mu_3=\gamma_3-3\gamma_1\gamma_2+2\gamma_1^3;$$
$$\mu_4=\gamma_4-4\gamma_3\gamma_1+6\ \gamma_2\gamma_1^2-3\gamma_1^4.$$

Xususan, $\gamma_1=M(X)$, $\mu_1=0$. $\mu_2=M[X-M(X)]^2=D(X)$ munosabatlar o'rinlidir.

Boshlang'ich va markaziy momentlar birgalikda nazariy momentlar deb nomlanadi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lsa, matematik kutilmalar haqidagi teoremalarga asosan,

$$\gamma_K=\int_{-\infty}^{\infty}x^K\cdot dF(x),\ \mu_K=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^K dF(x),\ \gamma_K=\int_{-\infty}^{\infty}x^K p(x)dx,\ \mu_K=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^K p(x)dx$$

formulalar o'rinlidir; bunda $F(x), p(x)$ bilan mos holda X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi, zichlik funksiyasi belgilangan.

Agar X va Y o'zaro bog'lanmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, ixtiyoriy n haqiqiy soni uchun

$$M(X+Y)^n=\sum_{K=1}^{n}C_n^K\cdot MX^K\cdot MY^{n-K}\quad\text{va}\quad C_n^K=\frac{n!}{K!(n-K)!}$$

munosabatlar o'rinlidir.

Ta'rif. X tasodifiy miqdorning o'rta kvadrat chetlanishi $\sigma = \sqrt{D(X)}$ deb belgilansa, ushbu $A_X = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ miqdor taqsimotning asimmetriyasi deyiladi. X tasodifiy miqdorning ekstsessi deb ushbu $E_X = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ tenglik bilan aniqlanadigan E_X miqdorga aytiladi.

1-masala. X diskret tasodifiy miqdor

x_k	1	3	5
p_k	0,2	0,4	0,4

taqsimot qonuni bilan berilgan. Birinchi, ikkinchi, uchinchi, va to'rtinchi tartibli markaziy momentlarni toping.

Yechish. Boshlang'ich momentlarni topamiz:

$$\gamma_1 = M(X) = 1 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,4 = 3,4.$$

$$\gamma_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,4 + 5^2 \cdot 0,4 = 0.2 + 9 \cdot 0,4 + 25 \cdot 0,4 = 13.8$$

$$\gamma_3 = M(X^3) = 1^3 \cdot 0,2 + 3^3 \cdot 0,4 + 5^3 \cdot 0,4 = 0.2 + 10.8 + 50.0 = 61$$

$$\gamma_4 = M(X^4) = 1^4 \cdot 0.2 + 3^4 \cdot 0,4 + 5^4 \cdot 0.4 = 0.2 + 81 \cdot 0.4 + 625 \cdot 0,4 = 0.2 + 32.4 + 250 = 282.6.$$

Markaziy momentlarni topamiz:

$$\mu_2 = \gamma_2 - \gamma_1^2 = 13,8 - 3,4^2 = 13,8 - 11,56 = 2,24.$$

$$\mu_3 = \gamma_3 - 3\gamma_1 \cdot \gamma_2 + 2\gamma_1^2 = 61 - 3 \cdot 3,4 \cdot 13.8 + 2 \cdot 3,4^3 = -1,152;$$

$$\mu_4 = \gamma_4 - 4 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_1 + 6 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_1^2 - 3 \cdot \gamma_1^4 = 282.6 - 4 \cdot 61 \cdot 3.4 + 6 \cdot 13,8 \cdot 3.4^2 - 3 \cdot 3.4^4 =$$

$$282,6 - 829,6 + 556,2672 = 9,2672.$$

2-masala. X tasodifiy miqdor a, σ parametrli normal taqsimot qonuni bilan taqsimlangan; ya'ni uning zichlik funksiyasi

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

kabi berilgan. Bu X tasodifiy miqdorning markaziy va markaziy absolyut momentlarini toping.

Yechish. Markaziy momentlarni hisoblash formulasiga asosan, ushbu munosabatga ega bo'lamiz:

$$\mu_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad k = 1,2,3,\dots .$$

Agar k-toq son bo'lsa, oxirgi integralda integrallanuvchi funksiyaning toq ekanligidan, $\mu_K = 0$ degan xulosaga ega bo'lamiz.

Agar k juft son bo'lsa, biz $x^2 = 2z$ almashtirish yordamida ushbu natijani olamiz:

$$\mu_k = m_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

$$\mu_k = m_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^k 2^{\frac{k-1}{2}} \cdot \int_0^{\infty} z^{\frac{k-1}{2}} \cdot e^{-z} \cdot dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma^k \cdot 2^{\frac{k-1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = \sigma^k \cdot (k-1) \cdot (k-3) \cdot \ldots \cdot 1 = \sigma^k \cdot \frac{k!}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \left(\frac{k}{2}\right)!}.$$

Agar k - toq son bo'lsa, absolyut momentning qiymati ushbu tengliklar yordamida hisoblanadi:

$$m_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma^k \cdot \int_0^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma^k \cdot 2^{\frac{k-1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{\frac{k-1}{2}} \cdot \left(\frac{k-1}{2}\right)! \cdot \sigma^k.$$

3- masala. X tasodifiy miqdor $[2,3]$ intervalda $f(x) = 2(x-2)$ zichlik funksiya bilan berilgan. Bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. Uning uchinchi tartibli boshlang'ich momenti topilsin.

Yechish.

$$\gamma_3 = MX^3 = 2\int_2^3 x^3(x-2)dx = 0.4 \cdot x^5\Big|_2^3 - x^4\Big|_2^3 = 0.4(3^5 - 2^5) - (3^4 - 2^4) = 84,4 - 65 = 19,4$$

Masalalar

1. X tasodifiy miqdor ushbu

x_k	-2	0	4
r_k	0,2	0,3	0,5

taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsin. Bu tasodifiy miqdorning uchinchi tartibli boshlang'ich va markaziy momentini toping.

Javob: $\nu_3 = 30,4.$ $\mu_3 = -3,648$

2. X tasodifiy miqdor o'yin kubini tashlashdagi tushgan ochkolar sonidan iborat bo'lsin. X ning 1- tartibli boshlang'ich va 2- tartibli markaziy momentini toping.

Javob: $\nu_1 = 3,5$; $\mu_2 = \frac{35}{12}$ ..

3. X tasodifiy miqdor $F(x) = 1 - e^{-3x}$ $(x \geq 0)$ taqsimot funksiyasi bilan berilgan. Uning uchinchi tartibli markaziy momentini toping.

Javob: $\mu_3 = 2/27$.

4. Ko'rsatgichli taqsimotning asimmetriyasi $A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3(x)}$ ni hisoblang.

Javob: $A_s = 2$.

5. X tasodifiy miqdor (0,1) intervalda $f(x) = x + 0,5$ zichlik funksiya bilan berilgan. Bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. X tasodifiy miqdorning to'rtinchi tartibli boshlang'ich va markaziy momenti, asimmetriyasi, ekstsessiyasi topilsin.

Javob: $\gamma_4 = 0,266;$ $\mu_4 = -0,1239;$ $A_s = 0,18$; $E_S = -23,65$.

6. O'yin kubini hamma oltita yog'i tushguncha tashlaydilar. X tasodifiy miqdor bu sinovdagi tashlashlar sonidan iborat bo'lsin. Bu $Y=3X$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Javob: $MX = 49$.

7. X tasodifiy miqdor o'yin kubini tashlashdagi tushgan ochkolar sonidan iborat bo'lsin. $Y=2X$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini va dispersiyasini toping.

Javob: $MX = 7$; $DX = \frac{35}{3}$.

8. O'zaro bog'liqsiz tajribalar o'tkazilayotgan bo'lsin. Har bir tajriba natijasida p ehtimol bilan yutuqqa, yoki $q=1-p$ ehtimol bilan yutuqsizlikka (yutqazishga) ega bo'lishimiz mumkin bo'lsin. Dastlabki yutuqqa ega bo'lguncha tajriba o'tkaziladi, bunday tajribalar soni X tasodifiy miqdor bo'ladi. X ning taqsimoti $P(X = k) = q^k \cdot p$, $(k = 1,2,3,...)$. kabi berilsa, uning matematik kutilmasi topilsin

Javob: $MX = \frac{q}{p}$.

9. X tasodifiy miqdor manfiymas butun $n \geq 0$ qiymatlarni $p_n = C \cdot \frac{k^n}{n!}$ ehtimollik bilan qabul qiladi. Agar $MX = a$ ekanligi ma'lum bo'lsa, S va k o'zgarmaslar qiymati topilsin. X ning eng ehtimolli qiymatini toping.

Javob: Ko'rsatma:

$$C \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} = C \cdot e^k = 1. \quad C = e^{-k}. \quad p_n = \frac{k^n}{n!} \cdot e^{-k} \;; MX = e^{-k} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{k^n}{n!} = k = a \;; C = e^{-a}.$$

$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{a}{n+1}$; agar a butun son bo'lsa, u holda $n = a - 1$. Taqsimot bimodaldir va $p_{n+1} = p_n$; Agar a butun son bo'lmasa, $n = [a]$ bo'ladi va taqsimot unimodal bo'ladi.

10. X tasodifiy miqdor (2, 3) intervalda ushbu

$$p(x)=\frac{3}{5}(x-2)^2+\frac{4}{5}$$

zichlik funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $p(x)=0$. X ning modasini, matematik kutilishini, medianasini toping.

Javob: $M_0(X)=2$, $M(X)=2$; $M_e(X)=2$.

11. X, Y tasodifiy miqdorlar $Y=3X+2$ munosabat bilan bog'langan.

Ular korrelyatsiya koeffitsientining qiymatini toping.

Javob: $r=+1$.

12. Agar X, Y tasodifiy miqdorlar $Y=-5X+4$ kabi chiziqli bog'lanishda ekanligi ma'lum. Korrelyatsiya koeffitsienti topilsin.

Javob: $r=-1$.

13. (X, Y) tasodifiy miqdorlar sistemasining (tasodifiy vektornine) zichlik funksiyasi

$$f(x,y)=\cos x\cdot\cos y\ ,\quad \left(0\le x\le\frac{\pi}{2};\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$$

kabi berilgan. Uning a) taqsimot funksiyasi, b) matematik kutilmasi,

d) korrelyatsion matritsasi topilsin.

Javob: a) $F(x,y)=\sin x\cdot\sin y\ ,\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{2};\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$;

b) $M(X)=M(Y)=\frac{\pi}{2}-1$; в) $\left\| k_{ij}\right\|=\begin{Vmatrix}\pi-3 & 0\\ 0 & \pi-3\end{Vmatrix}$

14. X va Y tasodifiy miqdorlar ushbu $mX+nY=c$ munosabat bilan bog'langan. Bunda m, n, c tasodifiy bo'lmagan sonlar ($m\neq 0$, $n\neq 0$). r korrelyatsiya koeffitsiyentini toping.

Javob: $r=\begin{cases}+1\ , & \frac{m}{n}<0,\\ -1\ , & \frac{m}{n}>0;\end{cases}$

15. (X, Y) tasodifiy miqdorlar sistemasi ushbu

$$F(x,y)=0{,}5[\sin x+\sin y-\sin(x+y)]\ ;\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$$

taqsimot funksiyasi bilan berilgan: a) taqsimot zichligini;

b) X va Y ning matematik kutilmalarini; d) korrelyatsion matritsasini toping.

Javob: a) $f(x,y)=0{,}5\sin(x+y)$, $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$.

b) $M(X)=M(Y)=0{,}785$.

d) $k_{11}=k_{22}=D(X)=D(Y)=0{,}188$. $\left\| k_{ij}\right\|=\begin{Vmatrix}0{,}188 & -0{,}046\\ -0{,}046 & 0{,}188\end{Vmatrix}$.

16. X, Y tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimoti ushbu ko'rinishda berilgan:

$$P(X=0,Y=1)=P(X=0,Y=-1)=P(X=1,Y=0)=P(X=-1,Y=0)=\frac{1}{4}.$$

MX, MY, DX, DY, $\operatorname{cov}(X,Y)$ ni toping. Bu tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'lanmagan tasodifiy miqdorlar bo'ladimi?

Javob: $MX=MY=\operatorname{cov}(X,Y)=0$, $DX=DY=0{,}5$. O'zaro bog'liq tasodifiy miqdorlar bo'ladi.

17. X, Y tasodifiy miqdorlar $Y=2X+6$ munosabat bilan chiziqli bog'langan va $DX=8$ ekanligi ma'lum. Bu tasodifiy miqdorlarning korrelyatsion momentini toping.

Javob: $K(X,Y)=16$.

18. X va Y tasodifiy miqdorlar $Y=7-9X$ munosabatlar bilan

chiziqli bog‘langan, *MX=-3, DX=4* ekanligi ma’lum. Bu tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya koeffitsienti hamda korrelyatsion momentini toping.

Javob: $r=-1$; $K(X,Y)=-36$.

19. X tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

x_k	-3	0	3
p_k	$0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}5$

Uning uchinchi tartibli boshlang‘ich markaziy momentini toping.

Javob: $\gamma_3=8{,}1$;

20. Ikki o‘lchovli (ξ,η) diskret tasodifiy miqdorlar sistemasining taqsimot qonuni ushbu jadval bilan berilgan:

$y_k \backslash x_i$	0	1	2	3
-1	0,01	0,02	0,04	0,04
0	0,03	0,24	0,15	0,06
1	0,04	0,10	0,08	0,08
2	0,02	0,04	0,03	0,0

Bu ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorlar sistemasining tashkil etuvchilari ξ, η tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasini va dispersiyasini toping.

Javob: $M\xi=1{,}6$; $M\eta=0{,}41$; $D\xi=0{,}84$; $D\eta=0{,}6819$.

21. *X* tasodifiy miqdorning taqsimot zichligi quyidagicha berilgan

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in((-\infty,0)\cup(2,+\infty))\\ x, & 0\le x<1;\\ 2-x, & 1\le x<2.\end{cases}$$

Birinchi, ikkinchi, uchinchi,to‘rtinchi tartibli boshlang‘ich va markaziy momentlarini, asimmetriyasini, ekstsessini toping.

Javob:

$$\alpha_1=1,\ \alpha_2=\frac{7}{6}\ ;\ \alpha_3=\frac{3}{2}\ ;\ \alpha_4=2\frac{1}{15}\ ;\ \mu_1=0\ ;\ \mu_2=\frac{1}{6}\ ;\ \mu_3=0\ ;\ \mu_4=\frac{1}{15}\ ;$$

$A_k=0$; $E_x=-0{,}6$

22. O‘zaro bog‘lanmagan *X* va *Y* tasodifiy miqdorlar ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X:

x_k	1	2
P_k -	0,2	0,8

Y:

y_k	0,5	1
p_k	0,3	0,7

Z=XY ko‘paytmaning matematik kutilishini ikki usul bilan: 1) *Z* ning taqsimot qonunini tuzib; 2) matematik kutilishning xossasidan foydalanib toping.

Javob: 1,53

3.3. Xarakteristik va yaratuvchi funksiya

Ta’rif. ξ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi deb, $e^{it\xi}$ tasodifiy funksiyaning matematik kutilishiga aytiladi:

$$f(t)=Me^{it\xi},$$

bu yerda t haqiqiy miqdor, $i=\sqrt{-1}$.

$F(x)$ taqsimot funksiyasi yoki $g(x)$ zichlik funksiyasi bilan berilgan tasodifiy miqdor uchun

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}g(x)dx.$$

Diskret tasodifiy miqdor uchun

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}p_k e^{itx_k},$$

yoki

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot e^{itx_k}$$

bu yerda x_k bilan tasodifiy miqdor qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymat belgilangan va $p_k = P(\xi = x_k)$. $k = 1,2,\dots,n,\dots$

Xarakteristik funksiyaning asosiy xossalari:

1. $f(0)=1$; $|f(t)| \le 1$, $t\in(-\infty,\infty)$.

2. O'zaro bog'liq bo'lmagan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar uchun

$f_{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}(t)=f_{\xi_1}(t)\cdot f_{\xi_2}(t)\cdots f_{\xi_n}(t)$;

3. Agar a, b ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo'lsa $f_{a\xi+b}(t)=e^{itb} f_\xi(at)$.

4. Agar ξ tasodifiy miqdorning k - tartibli boshlang'ich momenti $M\xi^k$ mavjud bo'lsa, $M\xi^k = \frac{1}{i^k} f^{(k)}(t)\big|_{t=0}$.

Agar ξ tasodifiy miqdor butun musbat qiymatlar qabul qilsa, xarakteristik funksiya o'rniga quyidagi ko'rinishda aniqlanadigan yaratuvchi funksiyani kiritish mumkin:

$\varphi(z)=Mz^\xi$; $\varphi(z)=\sum_{k=1}^{n} z^k \cdot p_k$, bu yerda z . $(|z|\le 1)$ -kompleks o'zgaruvchi.

Yaratuvchi funksiya quyidagi xossalarga ega:

$\varphi(1)=1$; $|\varphi(z)|\le 1$; $M\xi=\frac{d}{dz}\varphi(z)\,\big|_{z=1}$; $f(t)=\varphi(e^{it})$.

Ushbu $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)=\xi$ tasodifiy vektorning yaratuvchi (hosil qiluvchi) funksiyasi va xarakteristik funksiyasi mos holda quyidagi formulalar bilan beriladi:

$$\varphi(z_1,z_2,\dots,z_n)=Mz_1^{\xi_1}\cdot z_2^{\xi_2}\cdot\ldots\cdot z_n^{\xi_n}=\varphi_\xi(z_1,\dots,z_n)\quad (|z_i|\le 1,\ i=1,2,\dots n)$$

$$f(t)=f_\xi(t)=f_\xi(t_1,t_2,\dots,t_n)=M\exp\{i\,(t_1\xi_1+t_2\xi_2+\dots+t_n\xi_n)\}\ ,\ -\infty<t_s<\infty,\ s=1,2,\dots n.$$

Turli taqsimot funksiyalarga turli xarakteristik funksiyalar mos keladi hamda taqsimot funksiyasi xarakteristik funksiya orqali bir qiymatli aniqlanadi

Teorema. Agar $\varphi(t)$ va $F(x)$ funksiyalar mos holda ξ tasodifiy miqdorning xarakteristik va taqsimot funksiyalari bo'lsa hamda x_1, x_2 lar $F(x)$ funksiyaning uzluksizlik nuqtalari bo'lsa,

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{c}^{c}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)dt$$

tenglik o'rinlidir. Xususan, agar $\varphi(t)$ absolyut integrallanuvchi va chegaralangan bo'lsa, $f(x)=F'(x)$ mavjud, uzluksiz,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt \quad \text{tenglik o'rinlidir.}$$

1-masala. Aytaylik, ξ tasodifiy miqdor uchun $P(\xi=0)=q$, $P(\xi=1)=p$ va $p+q=1$ bo'lsin, u holda

$$f_\xi(t)=Me^{it\xi}=pe^{it}+q\ .$$

2-masala. ξ -diskret tasodifiy miqdor quyidagicha taqsimot qonuni bilan berilgan:

x_k:	*0*	*1*	*2*	*4*
p_k:	*0,1*	*0,2*	*0,4*	*0,3*

Uning xarakteristik funksiyasi

$$f(t)=e^{it\cdot 0}\cdot 0,1+e^{it\cdot 1}\cdot 0,2+e^{it\cdot 2}\cdot 0,4+e^{it\cdot 4}\cdot 0,3=0,1(1+2\cdot e^{it}+4\cdot e^{2it}+3\cdot e^{4it})$$

kabi hisoblanadi.

3-masala $p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$. zichlik funksiyasi bilan berilgan tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi topilsin va bu funksiya yordamida matematik kutilishi aniqlansin.

Yechish. Uzluksiz tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasini hisoblash formulasiga asosan

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}p(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx-|x|}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}e^{(it-1)x}dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{(it+1)x}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-it}-\frac{1}{1+it}\right)=\frac{1}{1+t^2}.$$

bo‘ladi. Matematik kutilmani xarakteristik funksiyaning xossasiga asosan quyidagicha topamiz:

$$M\xi=\frac{1}{i}\cdot f'(t)\,\Big|_{t=0}\;,\quad f'(t)=-\frac{2t}{(1+t^2)^2}\;,\quad f'(0)=0\;;\quad M\xi=0\,.$$

4-masala. ξ -tasodifiy miqdor $[a,b]$ da tekis taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo‘lsin. U holda uning xarakteristik funksiyasi

$$f(u)=\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{iux}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{e^{iub}-e^{iua}}{iu}\,.$$

ga teng. Xususan, agar ξ tasodifiy miqdor $[-a,a]$ da tekis taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo‘lsa, u holda

$$\psi(u)=\frac{\sin au}{au}$$

bo‘ladi.

5-masala. Faraz qilaylik, ξ - standart $N(0,1)$ normal qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor bo‘lsin. Uning xarakteristik funksiyasi topilsin.

Yechish. Standart normal qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi ushbu ko‘rinishni oladi:

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux-\frac{x^2}{2}}dx\,.$$

Oxirgi integralda integral belgisi ostida differentsiallash qonuniydir, chunki $u\in(-\infty,\infty)$ sohada $\int_{-\infty}^{\infty}ixe^{iux-\frac{x^2}{2}}dx$ integral tekis yaqinlashuvchidir. Shuning uchun

$$f'(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ixe^{iux-\frac{x^2}{2}}dx\,.$$

Bu integralning qiymatini hisoblash maqsadida uni bo‘laklab integrallaymiz:

$$f'(u)=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}e^{iux}e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}-u\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux-\frac{x^2}{2}}dx=-uf(u)$$

Demak, $f(u)$ funksiya ushbu

$$f'(u)=u\cdot f(u)$$

differentsial tenglamani qanoatlantiradi. Uning yechimi

$$f(u)=C\cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$$

ko‘rinishida bo‘ladi. C o‘zgarmas sonning qiymatini $f(0)=1$ boshlang‘ich shartdan topamiz: C=1; Demak,

$$f(u)=e^{-\frac{u^2}{2}}\,.$$

Aytaylik, ξ tasodifiy miqdor $N(a,\sigma^2)$ normal taqsimotga ega bo‘lsin.

Ushbu $\eta=\frac{\xi-a}{\sigma}$ tasodifiy miqdor $N(0,1)$ normal taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo‘ladi ξ. tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi $\xi=\sigma\eta+a$ ni e’tiborga olganda

$$\varphi_\xi(u) = M^{i\xi u} = M\ e^{iau}\cdot e^{\sigma u\eta} = e^{iau-\frac{\sigma^2u^2}{2}}$$

Demak, $N(a,\sigma^2)$ normal taqsimot qonuni bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi ushbu

$$\varphi\ (u) = e^{iau-\frac{\sigma^2u^2}{2}}$$

ko'rinishida bo'ladi.

6-masala. Ushbu

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

ko'rinishdagi zichlik funksiyasiga ega bo'lgan, ya'ni Koshi taqsimot qonuni bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning $\varphi\ (u)$ xarakteristik funksiyasini hisoblaylik.

$$\varphi\ (u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\frac{dx}{1+x^2}$$

integralning qiymatini hisoblash maqsadida $u > 0$ bo'lganda

$$\frac{1}{\pi}\cdot e^{iuz}\cdot\frac{1}{1+z^2}$$

funksiyadan kompleks sohasida K_R yopiq kontur bo'yicha olingan integralni qaraymiz. Bu yopiq kontur: yuqori yarim tekislikda C_R yarim aylanadan iboratdir, (uning tenglamasi $z = \mathrm{Re}^{i\varphi}$, $(0 \le \varphi \le \pi)$), hamda K_R soha haqiqiy sonlar o'qida esa $(-R, R)$ kesmadan iborat. Chegirmalar (vычetlar) haqidagi teoremaga asosan,

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_{K_R}\frac{e^{iuz}}{1+z^2}dz = \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\frac{e^{iuz}}{1+z^2}\bigg|_{z=i} = \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi\cdot i\cdot\frac{e^{-u}}{2\cdot i} = e^{-u}.$$

Osonlik bilan ko'rish mumkinki,

$$\left|e^{iuz}\cdot\frac{1}{1+z^2}\right| = \frac{e^{-uR\sin\varphi}}{\sqrt{1+2R^2\cos 2\varphi + R^4}}$$

tenglikdan $u > 0$ bo'lganda ushbu natijani olamiz:

$$\int_{C_R}\frac{e^{iuz}}{1+z^2}dz \to 0\ ,\quad R \to +\infty.$$

Shunday qilib, $u > 0$ bo'lsa

$$\varphi\ (u) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iux}}{1+x^2}dx = e^{-u}.$$

Agar $u < 0$ bo'lsa, yuqori yarim tekislikdagi aylanani quyi yarim tekislikdagi aylana bilan almashtirish mumkin:

$$\varphi\ (u) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iux}}{1+x^2}dx = e^{u}\ ,\quad u < 0\ .$$

Shunday qilib,

$$\varphi\ (u) = e^{-|u|}\ .$$

7-masala. Hisoblash qurilmasining ikkita elementi o'zaro erkli ishlaydi. T t vaqt davomida buzilish ehtimoli birinchi element uchun 0,7 ga ikkinchi element uchun 0,6 ga teng. t vaqt ichida :a) ikkala elementning buzilish; d) bitta elementning buzilish; s) bitta ham elementning buzilmaslik; b) kamida bitta elementning buzilish ehtimolini toping.

Yechish. Elementlarning t vaqt davomida buzilish ehtimollari mos ravishda

$p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}6$ dan iborat bo'lganidan, elementlarning buzilmasdan ishlash ehtimollari quyidagicha: $q_1 = 0{,}3$; $q_2 = 0{,}4$.

Yaratuvchi funksiyani tuzamiz:

$$\varphi_2(z)=(p_1z+q_1)(p_2z+q_2)=(0,7z+0,3)(0,6z+0,4)=0,42z^2+0,46z+0,12.$$

a) t vaqt ichida ikkala elementning buzilish ehtimoli z^2 oldidagi koeffitsientga teng: $P_2(2)=0,42$;

b) Bitta elementning buzilish ehtimoli z oldidagi koeffitsientga teng:

$$P_2(1)=0,46.$$

d) Bitta ham elementning buzilmaslik ehtimoli ozod hadga teng:

$$P_2(0)=0,12.$$

e) Kamida bitta elementning buzilish ehtimoli

$$P_2(1)+P_2(2)=0,46+0,42=0,88.$$

Masalalar

1. Agar ξ tasodifiy miqdor λ parametrli Puasson taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo'lsa, uning xarakteristik funksiyasi topilsin.

Javob: $\varphi(u)=\exp\{\lambda(\exp(iu)-1)\}$.

2. X tasodifiy miqdor quyidagicha taqsimot qonuni bilan berilgan:

x_k	1	-1
p_k	$0,5$	$0,5$

Uning xarakteristik funksiyasi topilsin.

Javob: $\varphi(u)=\cos u$.

3. Agar X tasodifiy miqdor $p(x)=\dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ zichlik funksiyasiga ega bo'lsa, ya'ni Laplas taqsimoti qonuni yordamida berilgan bo'lsa, uning xarakteristik funksiyasini hisoblang.

Javob: $\varphi(u)=\dfrac{\lambda^2}{\lambda^2+u^2}$

4. Agar η tasodifiy miqdor (α,β) parametrli Gamma qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor, ya'ni zichlik funksiyasi

$$p(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$$

dan iborat bo'lsa, uning xarakteristik funksiyasi $\varphi(u)$ topilsin.

Javob: $\varphi(u)=\dfrac{\lambda}{\lambda-iu}$.

5. O'yin kubi birinchi marta 5 ochko tushguncha ketma-ket tashlanayotgan bo'lsin. Agar X tasodifiy miqdor o'yin kubini tashlashlar sonidan iborat bo'lsa,

1) Bu tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasini toping.
2) Matematik kutilmani va dispersiyani aniqlang.

Javob: 1) $(6-5e^{iu})^{-1}$; 2) $MX=6$; $DX=40$.

6. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni ushbu formula bilan aniqlangan: $P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$; $k=0,1,2,\ldots,n.$

$$0<p<1,\quad q=1-p.$$

Uning yaratuvchi funksiyasini toping.

Javob: $\varphi(z)=Mz^\xi=(q+pz)^n$.

7. ξ tasodifiy miqdor p parametrli geometrik taqsimot bilan taqsimlangan, ya'ni $P\{\xi=n\}=q^n p$, $n=0,1,2,\ldots,\ldots$; Uning yaratuvchi funksiyasi topilsin.

Javob: $\varphi(z)=Mz^\xi=\dfrac{p}{1-qz}$.

8. Quyidagicha aniqlangan funksiyalar xarakteristik funksiya bo'ladimi:

1. $f(t)=\dfrac{a-t}{a}$, $0 \le t \le a$?

2. $f(t)=e^{-t}$ $(0 \le t < \infty)$?

Javob: 1. Yo‘q. 2. Yo‘q.

9. Quyidagi xarakteristik funksiyalarga mos keluvchi taqsimot qonunini toping:

A) $\cos t$; B) $\cos^2 t$.

Javob:

$A)$. $P(\xi=1)=P(\xi=-1)=\frac{1}{2}$; $B)$ $P(\xi=2)=P(\xi=-2)=\frac{1}{4}$, $P(\xi=0)=\frac{1}{2}$.

10. Quyidagi xarakteristik funksiyalarga mos kelgan zichlik funksiyalarni toping.

$a)$ $\varphi(t)=\dfrac{1}{a-it}$. $b)$ $\varphi(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$.

Javob: $a)$ $p(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ ae^{-ax}, & x>0. \end{cases}$; $b)$ $p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

11. Aytaylik, n ta o‘zaro bog‘liqsiz tajribalar o‘tkazilganda A tasodifiy hodisaning ro‘y berish ehtimoli tajribadan tajribaga o‘tganda o‘zgarib borsin, k- tajribada yuz berish ehtimoli p_k bo‘lsin. Mana shu n ta tajribada A hodisaning yuz berishlari soni tasodifiy miqdor bo‘ladi. Bu tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasini toping.

Javob: $\varphi(t)=\left(1+ p\left(e^{it}-1\right)\right)^n$.

12. X, Y tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘lanmagan va ularning har biri Koshi taksimot qonuni bilan taqsimlangan bo‘lsa, $Z=X+Y$ tasodifiy miqdor ham Koshi taqsimot qonuni bilan taqsimlangan ekanligini isbotlang.

13. Agar X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi juft funksiya bo‘lsa, uning xarakteristik funksiyasi xaqikiy qiymatli, juft funksiya ekanligini isbotlang.

14. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan bir xil taqsimlangan $\{\xi_K\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin va

$$P(\xi_1=0)=q \text{ , } P(\xi_1=1)=p=1-q$$

ekanligi ma’lum. Agar $S_n=\xi_1+\xi_2+...+\xi_n$ bo‘lsa,

a) S_n tasodifiy miqdorning

b) $\dfrac{S_n-np}{\sqrt{npq}}$ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasini toping.

Javob: a) $\varphi(t)=\left(pe^{it}+q\right)^n$

b) $\varphi(t)=\left(qe^{-it\sqrt{\frac{p}{nq}}}+pe^{it\sqrt{\frac{q}{np}}}\right)^n$

15. Quyidagi

a) sin *t*, *b) sin t+1, d) o‘cos tg‘*

funksiyalarning qaysi biri xarakteristik funksiya bo‘ladi?

Javob: $a)$ bo‘lmaydi; $b)$ bo‘lmaydi; *d)* bo‘lmaydi.

4-bob. TASODIFIY MIQDORLAR KETMA-KETLIGI

4.1. Katta sonlar qonuni

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0, \quad n \to \infty.$$

munosabat o'rinli bo'lsa, $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ tasodifiy miqdorga ehtimol bo'yicha yaqinlashadi deyiladi $\{\xi_n\}$. ning ξ ga ehtimol bo'yicha yaqinlashishini $\xi = p\lim \xi_n$, deb, yoki $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ kabi belgilaydilar.

Teorema-1 $\xi = p\lim \xi_n$,. va $f(x)$ uzluksiz funksiya $R^1 = (-\infty, +\infty)$ da aniqlangan bo'lsin. U holda

$f(\xi) = p\lim f(\xi_n)$ o'rinlidir.

Teorema-2. Tasodifiy miqdorlarning quyidagi m ta ketma-ketligi berilgan bo'lsin: $\xi_n^{(k)}$, $k = 1,2,3,...m$, $\xi^{(k)} = p\lim \xi_n^{(k)}$. U holda R^m da aniqlangan ixtiyoriy uzluksiz $\Phi(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiya uchun

$$\Phi(\xi^{(1)},...,\xi^{(m)}) = p\lim \Phi(\xi_n^{(1)},...,\xi_n^{(m)}).$$

munosabat o'rinlidir.

Teorema-3. Agar $\xi = p\lim \xi_n$ hamda biror musbat o'zgarmas son S uchun $P\{|\xi_n| \le C\} = 1$ o'rinli bo'lsa, u holda

$$\lim M\xi_n = M\xi, \quad n \to \infty.$$

Ta'rif. X_n tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi X tasodifiy miqdorga o'rta kvadrat ma'noda (o'. kd) yaqinlashadi deyiladi, agar $MX_n^2 < \infty$, $MX^2 < \infty$, $\lim M|X_n - X|^2 = 0$, $n \to \infty$. munosabatlar o'rinli bo'lsa.

Xinchin teoremasi. O'zaro bog'lanmagan, bir xil taqsimlangan, chekli matematik kutilma $MX_n = a$ ga ega bo'lgan $\{X_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. U holda har bir $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim P\left\{\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right\} = 0, \quad n \to \infty.$$ munosabat o'rinlidir.

Chebishev tengsizligi. Agar dispersiya kichik son bo'lsa, u holda tasodifiy miqdor qiymatlari matematik kutilma atrofida zichroq joylashgan bo'ladi. Bu faktni quyidagi Chebishev tengsizligi tasdiqlaydi:

Teorema. (Chebishev tengsizligi.) Agar X tasodifiy miqdor chekli dispersiyaga ega bo'lsa, u holda ixtiyoriy $e>0$ son uchun ushbu tengsizlik o'rinlidir:

$$R\{|C - M(C)| \ge e\} \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Faraz qilaylik, $X_1, X_2, ..., X_n$,. tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi va $Y_n = f_n(X_1, X_2, .., X_n)$ funksiya berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar shunday o'zgarmas sonlar ketma-ketligi $\{a_n\}$, $n = 1,2,..$ mavjud bo'lib, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

$$\lim_{n \to \infty} P\{|Y_n - a_n| < \varepsilon\} = 1$$

munosabat bajarilsa, u holda $X_1, X_2, .., X_n$,. tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo'ysunadi deyiladi.

Teorema. (Chebishev teoremasi) Agar $X_1, X_2, .., X_n$,. o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning dispersiyalari S soni bilan tekis chegaralangan bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M(X_j)\right| \ge \varepsilon\right\} = 0,$$

ya'ni $X_1, X_2, .., X_n, .$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo'ysunadi.

Teorema. Ixtiyoriy $\{X_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo'ysunishi uchun $n \to \infty$ da

$$M\left\{ \frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k - M(X_k))\right)^2}{n^2 + (\sum(X_k - M(X_k)))^2} \right\} \to 0 , \quad n \to \infty ,$$

munosabatning o'rinli bo'lishi zarur va yetarlidir.

1-masala $X = X(\omega)$. diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	0,1	0,3
R	0,4	0,6.

Chebishev tengsizligidan foydalanib, |C-M(C)|<0,2 ning ehtimolini baholang.

Yechish. X miqdorning matematik kutilmasini va dispersiyasini topamiz:

M(X)=0,1 · 0,4+0,3 · 0,6=0,04+0,18=0,22;

D(X)=M(X²)-[M(X)]²=0,1² · 0,4+0,32 · 0,6-0,222=0,058-0,0484=0,0096.

Ushbu shakldagi Chebishev tengsizligidan foydalanamiz:

$$R(|C-M(C)|<e) \geq 1- \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Bunga M(X)=0,22, D(X)=0,0096, e=0,2 ni qo'yib quyidagini hosil qilamiz:

$$R(|C-0,22|<0,2) \geq 1- \frac{0,0096}{0,04} = 0,76.$$

2-masala. Agar ξ tasodifiy miqdor chekli $M\xi$ matematik kutilmaga, σ o'rta kvadrat chetlanishga ega bo'lsa, $|\xi - M\xi| < 3\sigma$ hodisa ehtimolini baholang.

Yechish. Chebishev tengsizligiga asosan,

$$P\{|\xi - M\xi| \leq 3\sigma\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma} = \frac{8}{9}.$$

3-masala. ξ tasodifiy miqdor (a, σ^2) parametrli normal taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo'lsin $P\{|\xi - a| < 3\sigma\}$. ehtimolni baholang.

Yechish. $\frac{\xi - a}{\sigma}$ tasodifiy miqdor 0 va 1 parametrli normal taqsimot qonuni bilan taqsimlangan. U holda

$$P\{|\xi - a| < 3\sigma\} = P\left\{\left|\frac{\xi - a}{\sigma}\right| < 3\right\} = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 \approx 0,997;$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Demak, ξ tasodifiy miqdor (a, σ^2) parametrli normal taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo'lsa, 0,997 ehtimol bilan aytish mumkinki, $a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma$ tengsizlik o'rinlidir. Buni uch sigma qoidasi deb ham ataydilar.

4-masala. $\{\xi_n\}$ o'zaro bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin ξ_n. miqdor $-n$, $0, n$ qiymatlarni mos holda $\frac{1}{2n^2}, 1 - \frac{1}{n^2}, -\frac{1}{2n^2}$ ehtimollar bilan qabul qilsin. Bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o'rinlimi?

Yechish. Matematik kutilma va dispersiya ta'rifiga asosan, $M\xi_n = 0$, $D\xi_n = M\xi_n^{\ 2} = 1$ ni topamiz. Chebishev teoremasiga asosan, bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o'rinlidir.

$\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\ln\xi_k \xrightarrow{p} M\ln\xi_1$. Ma'lumki,

$M\ln\xi_1 = \int_0^1 \ln x dx = -1$. Demak, $\ln\eta_n \xrightarrow{p} 0$. Shuning uchun

$\eta_n \xrightarrow{p} 1$.

Masalalar

1. O'zaro bog'lanmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{\xi_n\}$ учун $M\xi_n = 0$, $D\xi_n = n^\alpha$, $\alpha = const, \alpha < 1$ berilgan. Bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o'rinlimi?

Javob: Ha.

2. O'zaro bog'liq bo'lmagan 500 ta tajribaning har birida biror A hodisa ξ_n *p=0,2* ehtimol bilan ro'y bersin. Bu tajribalarda A hodi-saning ro'y berishlar soni ξ bo'lsa, $P(50 \le \xi \le 150)$ ehtimolni Che-bishev tengsizligidan foydalanib baholang.

Javob: $P(50 \le \xi \le 150) = 0{,}068$.

3. Agar $M\xi = 2$, $D\xi = 0{,}05$ bo'lsa, $1{,}5 < \xi < 2{,}5$ tengsizlikning bajarilish ehtimolini toping.

Javob: $P(1{,}5 < \xi < 2{,}5) = P(|\xi - 2| < 0{,}5) > 0{,}8$.

4. O'zaro bog'lanmagan, bir xil taqsimlangan $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan va $M\xi_i = a$; $D\xi_i = \sigma^2$; $P\{\xi = 0\} = 0$. Ushbu $\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi limitini hisoblang va uning ehtimol bo'yicha yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.

5. $\{\xi_n\}$ o'zaro bog'lanmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan va ular $-n^\alpha$, n^α qiymatlarning har birini $\frac{1}{2}$ ehtimol bilan qabul qilsin. Bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o'rinlimi?

Javob: Ha.

6. ξ_n tasodifiy miqdorlar $-n\alpha$, 0, $n\alpha$ qiymatlarni $(\alpha > 0$, $\alpha = const)$ mos holda $\frac{1}{3n^2}$, $1 - \frac{2}{3n^2}$, $\frac{1}{3n^2}$ ehtimollar bilan qabul qiladi. Bu $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar uchun katta sonlar qonuni o'rinlimi?

7. $\{\xi_n\}$ o'zaro bog'lanmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan va ular $-n^\alpha$, n^α qiymatlarning har birini $\frac{1}{2}$ ehtimol bilan qabul qiladi. Bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o'rinlimi?

Javob: Ha.

8. Ushbu munosabat ma'lum:

$P(|X - MX| < \varepsilon) \ge 0{,}36$; $DX = 0{,}25$;

ε sonini aniqlang.

Javob: 0,625.

9. Agar X tasodifiy miqdor

$P(X = m) = p_m = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$; $(\lambda \ge 0)$ taqsimotga ega bo'lsa,

$P(0 < X < 2(m+1)) > \frac{m}{m+1}$

munosabat isbot qilinsin.

10. Korxonada tayyorlangan mahsulotning yaroqsiz chiqishi hodisasi ehtimoli 0,04 ga teng ekanligi ma'lum. Yaroqsiz mahsulot ishlab chiqarish hodisasi chastotasining bu hodisa ehtimolidan farqi-

ning absolyut qiymati 0,02 dan oshmasligi hodisasi ehtimoli 0,96 dan kam bo'lmasligi uchun nechta mahsulot tanlanishi kerak?

Javob: 2400 ta mahsulot.

11. Aholi punktida bir kunda suvning o'rtacha sarfi 180000 litrga teng. Bu aholi punktida berilgan kunda suv sarfining 200000 litrdan oshmaslik ehtimolini toping.

Javob: p=0,1.

12. O'zaro bog'lanmagan va taqsimot qonuni

$$P\{\xi_k = 2^{k-\lg k-2\lg\lg k}\} = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1,2,3,...$$

kabi berilgan $\{\xi_k\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o'rinli ekanligini isbotlang.

13. Ushbu $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma- ketligi o'zaro bog'lanmagan va $M\xi_k = 0$, $D\xi_k = \sigma^2 < \infty$. Quyidagi $\varsigma_n = \sum_{1\le i<j\le n} \xi_i\xi_j$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonunining o'rinli ekanligini isbotlang.

4.2. Markaziy limit teoremalari

Ta'rif. $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Agar shunday $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $B_n > 0$ sonlar ketma-ketligi mavjud bo'lsaki, $n \to \infty$ da

$$P\left\{\frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n - A_n}{B_n} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

munosabat $x \in (-\infty, \infty)$ da bajarilsa, $\{\xi_n\}$, $n = 1,2,..$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema o'rinli deyiladi. Bu holda ushbu

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n - A_n}{B_n}$$

tasodifiy miqdor $n \to \infty$ da asimptotik normal taqsimlangan deyiladi.

Aytaylik, bog'liq bo'lmagan $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun $M\xi_k = a_k$, $D\xi_k = \sigma_k^2$ bo'lsin. Belgilashlar kiritaylik:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2, \quad S_n = \xi_1 + \xi_2 + .. + \xi_n, \quad \eta_n = \frac{S_n - A_n}{B_n},$$

$$F_k(x) = P(\xi_k < x),$$

$$L_n(\tau) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-a_k|>\tau B_n} (x-a_k)^2 dF_k(x), \quad f_k(t) = Me^{it\xi_k}, \quad \varphi_n(t) = Me^{it\eta_n}.$$

Teorema. Ixtiyoriy $\tau > 0$ uchun $n \to \infty$ da

$$L_n(\tau) \to 0 \quad (1)$$

bo'lsa, $\{\xi_n\}$ uchun markaziy limit teorema o'rinli bo'ladi. (1) shart Lindberg sharti deyiladi.

1- teorema (A. M. Lyapunov teoremasi). Agar $n \to \infty$ da

$$\frac{C_n}{B_n^{2+\delta}} \to 0 \text{ bo'lsa, } n \to \infty \text{ da}$$

$$P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$ munosabat $x \in (-\infty, \infty)$ da bajariladi.

2-teorema. Agar o'zaro bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$\{\xi_n\}$, $n = 1, 2, ...$ chekli uchinchi tartibli momentga ega bo'lsa, va ushbu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} M|\xi_k - a_k|^3}{B_n^3} = 0$$

Lyapunov sharti bajarilsa, u holda bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teoremasi o‘rinlidir.

1-masala. O‘zaro bog‘lanmagan ξ_k tasodifiy miqdorlar ketma- ketligining taqsimoti quyidagicha berilgan:

x_k	k^{α}	$-k^{\alpha}$
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Bunda $\sigma_k^2 = k^{2\alpha}$, $c_k^3 = k^{3\alpha}$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha}$, $C_n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^{3\alpha}$. α ning qanday qiymatida bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema o‘rinli bo‘ladi?

Yechish: $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$, deb belgilaylik. Agar $2\alpha + 1 > 0$ bo‘lsa,

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha} = n^{2\alpha+1}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2\alpha}\cdot\frac{1}{n}\cdot \approx n^{2\alpha+1}\int_0^1 x^{2\alpha}dx = \frac{n^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}.$$

Agar $\alpha = -\frac{1}{2}$ bo‘lsa, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^{-1} \approx \ln n.$; $\alpha < -\frac{1}{2}$ bo‘lsa, $n \to \infty$ da B_n miqdorlar chegaralangan bo‘ladi. Shunga o‘xshash, $\alpha > -\frac{1}{3}$ bo‘lsa, quyidagi munosabatlar o‘rinlidir:

$$C_n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^{3\alpha} = \sum_{k=1}^{n} M|\xi_k|^3 = n^{3\alpha+1}\cdot\int_0^1 x^{3\alpha}dx = \frac{n^{3\alpha+1}}{3\alpha+1}.$$

Agar $\alpha = -\frac{1}{3}$ bo‘lsa, $\sum_{k=1}^{n} M|\xi_K|^3 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \approx \ln n$. Demak,

$C_n^3 \approx \ln n$; $\alpha < -\frac{1}{3}$ bo‘lganda esa, C_n chegaralangandir.

Shuningdek, $n^{\alpha+\frac{1}{3}} = 0(n^{\alpha+\frac{1}{2}})$ ekanligidan, $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ shartda

$C_n = 0(B_n)$ bo‘ladi va Lyapunov sharti bajariladi $\frac{C_n\sqrt{2\alpha+1}}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

tasodifiy miqdor $\alpha > -\frac{1}{2}$ bo‘lganda, $n \to \infty$ da (0,1) parametrli normal taqsimot qonuni bilan taqsimlangandir. Agarda

$P\left\{\xi_k = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}\right\} = \frac{1}{2}$ bo‘lsa, $\frac{S_n}{\sqrt{\ln n}}$ tasodifiy miqdor ham asimptotik normal taqsimlangan. Agarda $P\left\{\xi_K = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}\right\} = \frac{1}{2}$ bo‘lsa, $\frac{S_n}{\sqrt{\ln n}}$ tasodifiy miqdor ham asimptotik normal taqsimlangandir. Xususan, yetarlicha katta n larda $|S_n|$ miqdor

$2\Phi(2) - 1 \approx 0{,}955$ ehtimol bilan $2\sqrt{\ln n}$ dan oshmaydi.

2-masala. Sonli xarakteristikalari ushbu ko‘rinishida bo‘lgan: $M\xi_k = a; D\xi_k = \sigma^2$; $M|\xi_k - a_k|^3 = \mu_3$, ya’ni uchinchi tartibli chekli momentga ega bo‘lgan, bir xil taqsimlangan, o‘zaro bog'lanmagan $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma -ketligi uchun markaziy limit teorema o'rinli ekanligini isbotlang.

Yechish: Masala shartiga asosan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} M|\xi_k - a_k|^3}{B_n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\mu^3}{\left(\sigma\sqrt{n}\right)^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mu_3}{\sigma^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

tengliklarni yozamiz. Demak, Lyapunov sharti bajarilyapti, markaziy limit teorema o'rinlidir.

3-masala. Quyidagi

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

munosabatni markaziy limit teoremadan foydalanib isbotlang.

Yechish. $\lambda = 1$ parametrli Puasson qonuni bilan taqsimlangan $\{\xi_n\}$ tasodifiy mikdorlar ketma- ketligi yordamida ushbu $S_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k$ tasodifiy miqdorni tuzamiz. Ma'lumki, S_n tasodifiy miqdor ham n parametrli Puasson taqsimot qonuniga ega bo'ladi va

$$P(S_n \le n) = e^{-n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$$

munosabat o'rinlidir. Markaziy limit teoremaga asosan, $n\to\infty$ da $P\left(\frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} \le 0\right) \to \frac{1}{2}$ bo'ladi. Demak,

$$P(S_n \le n) \to \frac{1}{2}.$$

4-masala. Uchinchi tartibli chekli momentga ega bo'lgan, bir xil taqsimlangan $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan.

Shunday c_1, c_2, d_1, d_2 o'zgarmas sonlar mavjud bo'lsinki, hamma k natural sonlari uchun

$$c_1 \le D\xi_k \le c_2\ ;\ d_1 \le M|\xi_k - a_k|^3 \le d_2$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsin. Bu ketma -ketlik uchun markaziy limit teoremaning o'rinli ekanligini isbotlang.

Yechish. Masala shartlariga asosan,

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k \ge nc_1\ ;\quad \sum_{k=1}^{n} M|\xi_k - a_k|^3 \le nd_2.$$

Shuning uchun $n\to\infty$ da

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} M|\xi_k - a_k|^3}{B_n^3} \le \frac{nd_2}{\left(\sqrt{n}\cdot c_1\right)^3} = \frac{d_2}{c_1^3\cdot\sqrt{n}} \to 0.$$

Lyapunov sharti bajarilyapti. Demak,qaralayotgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema o'rinli ekan.

5-masala. O'zaro bog'lanmagan, chegaralangan $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Demak, ixtiyoriy n uchun shunday s o'zgarmas soni mavjudki,

$P(|\xi_n \le c|) = 1$ tenglik o'rinlidir. $M\xi_n = a_n$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$,

$B_n \to +\infty$, $n\to\infty$ bo'lsin. Bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teoremaning o'rinli ekanligi tekshirilsin.

Yechish. Masalada berilgan shartlarga asosan, $|a_n| \le c$, va $|\xi_n - a_n| \le 2c$ tengsizlik bir ehtimol bilan bajariladi. Shunday qilib,

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} M|\xi_k - a_k|^3}{B_n^3} \le \frac{2c \cdot \sum_{k=1}^{n} M|\xi_k - a_k|^2}{B_n^3} = \frac{2c}{B_n}.$$

Lyapunov sharti bajarilyapti. Demak, berilgan tasodifiy miqdorlar ketma -ketligi uchun markaziy limit teorema o'rinlidir.

Masalalar

1. O'zaro bog'lanmagan $\{\xi_n\}$tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$$P\{\xi_n = n^\alpha\} = P\{\xi_n = -n^\alpha\} = \frac{1}{2n^\beta}, \quad P(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\beta}$$

ko'rinishidagi taqsimot qonuni bilan berilgan. α va β ning qanday qiymatida bu ketma-ketlik uchun markaziy limit teoremasi o'rinli bo'ladi?

Javob: $0 \le \beta < 1$, $2\alpha > \beta - 1$.

2. Ushbu ξ_1, ξ_2, ξ_3 tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'lanmagan va mos holda (1,1), (0,4), (-1,1) parametrli normal taqsimot qonuniga ega. Quyidagilar topilsin: a) $P(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 < 0)$;

b) $P\{|2\xi_1 - \xi_2 + \xi_3| < 3\}$.

Javob: a) 0,5; b) 0,6826.

3. $\xi_1, \xi_2, ...$ tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmagan va bir xil taqsimlangan hamda $M\xi_i = 0$, $D\xi_i = 1$ bo'lsa, u holda

$$\eta = \sqrt{n}\,\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$$

miqdor (0,1) parametrli asimptotik normal bo'lishini isbotlang.

4. $[-a_n, a_n]$ oraliqda tekis taqsimlangan ξ_n, $n = 1,2,...$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan. Agar hamma a_n lar quyidan chegaralangan bo'lsa, bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema o'rinli ekanligini isbotlang.

5. ξ tasodifiy miqdor λ parametrli Puasson taqsimot qonuni bilan taqsimlangan $\lim_{\lambda \to \infty} P\left(\frac{\xi - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right)$. ni toping.

Javob: $(0,1)$ parametrli normal taqsimot.

6. $M\xi_k = 0$, $D\xi_k = \sigma_k^2$ parametrli normal taqsimot qonuniga ega bo'lgan $\{\xi_n\}$, tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan. Agar ushbu $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2$ qator a) yaqinlashuvchi bo'lganda b) uzoqlashuvchi bo'lganda $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ yig'indining $n \to \infty$ da taqsimoti topilsin.

Javob: a) $(0, \sigma)$ parametrli normal taqsimot.

b) limitik taqsimot mavjud emas.

7. Ushbu ko'rinishdagi

$$p_k(x) = \begin{cases} 2^k, & -\frac{1}{2^{k+2}} \le x \le \frac{1}{2^{k+2}}, \\ 2^k, & 1 - \frac{1}{2^{k+3}} < |x| < 1 + \frac{1}{2^{k+3}}, \\ 0, & \end{cases}$$

zichlik funksiyasiga ega bo'lgan ξ_k , *k=1, 2, ...* tasodifiy miqdorlar uchun markaziy limit teorema o'rinlimi?

Javob: Ha.

8. Quyidagi bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$$P(\xi_k = \pm k) = k^{-\frac{1}{2}}, \quad P(\xi_k = 0) = 1 - k^{-\frac{1}{2}}.$$

uchun markaziy limit teorema o'rinli bo'ladimi?

Javob: Ha.

9. Quyidagi $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan: $P\left(\xi_n = \pm n^{\lambda}\right) = \dfrac{1}{2n^{\lambda}}, P(\xi_n = 0) = 1 - \dfrac{1}{n^{\lambda}}$, $(0 < \lambda < 1)$.

Bu ketma-ketlik uchun markaziy limit teorema o'rinli bo'lishini isbotlang.

10. Agar $\{\lambda_n\}$ sonli ketma-ketlik quyidagi

$$\frac{\max\limits_{1 \le k \le n} \lambda_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2} \to 0, \quad n \to \infty$$

shartni qanoatlantirsa, o'zaro bog'lanmagan va bir xil taqsimlangan $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun $M\xi_i = 0$, $M\xi_i^2 = 1$ munosabatlar bajarilsa,

$\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, ..., \lambda_n\xi_n, ...$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema o'rinli bo'lishini isbotlang.

Ilovalar

$\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiya qiymatlarining jadvali

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,398	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. –М.: Наука, 1987-431 с.

2. Климов Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика. –М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1983.

3. Севастянов Б.А., Чистяков В. П., Зубков А. М. Сборник задач по теории вероятностей. –М.: Наука, 1980. –160 с.

4. Прохоров А. В., Усхаков В. Г.,Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей. –М.: Наука, 1986. –327 с.

5. Под редакцией А.А. Свешникова. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций.

6. Sirojiddinov S. X., Mamatov M. M. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent, «O'qituvchi», 1980.

M U N D A R I J A

S. F. FAYZULLAYEVA

EHTIMOLLAR NAZARIYASIDAN MASALALAR TO'PLAMI

O'quv qo'llanma

Nashr uchun mas'ul: M. Tursunova
Muharrir: A. Bahromov
Musahhih: H. Zokirova
Sahifalovchi: N.Mamanov

O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti. 700029,
Toshkent shahri, Buyuk Turon ko'chasi, 41.

Terishga berildi 01.06.2006-y. Bosishga ruxsat etildi 29.11.2006-y.
Bichimi 60x84 $^1/_{16}$. Bosma tabog'i 7,0. Adadi 2000 nusxa.
Buyurtma №75. Bahosi shartnoma asosida.

"Ma'rifat-Print" MCHJ bosmaxonasida chop etildi. 100185, Toshkent shahri, Sugalli Ota ko'chasi, 7ª-uy.