В. Е. ГМУРМАН

Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

В. Е. Гмурман

Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

Русча тўлдирилган
тўртинчи нашридан таржима

СССР Олий ва махсус
ўрта таълим Министрлиги
инженерлик-экономика институтлари
ва факультетлари учун ўқув қўлланма
сифатида рухсат этган

«Ўқитувчи» нашриёти
Тошкент — 1977

517.8
Г 59

Гмурман В. Е.
Эҳтимоллар назарияси ва
математик статистика. Русча
тўлдирилган 4-нашридан тарж.,
Инж-экон. ин-тлари студентлари
учун ўқув қўлланма.
Т., «Ўқитувчи», 1977.
368 б.

Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика.

517.8

Ушбу китоб эҳтимоллар назарияси ва математик статистика бўйича янги программанинг барча материалини ўз ичига олади. Унга қуйидаги боблар янгидан қўшилган; кўрсаткичли тақсимот, статистик гипотезаларнинг статистик текширилиши, бир факторли дисперсион анализ. Экспериментал маълумотларни ишлаб чиқишнинг статистик методларига катта эътибор берилган; кулай ҳисоблаш жадваллари келтирилган. Ҳар бир боб охирида масалалар жавоблари билан берилган.

Китоб инженерлик-экономика институтлари ва факультетлари студентлари учун мўлжалланган, шунингдек, у амалий масалаларни ечишда эҳтимолий ва статистик методларни татбиқ этадиган инженерлар ва экономистлар учун ҳам фойдали бўлади.

Г $\frac{20203 — 106}{353 (06) — 77}$ 144 — 77

РУСЧА ТЎРТИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Китобнинг ушбу нашри янги программага мувофиқлаштирилди. Учта боб қўшилди: кўрсаткичли тақсимот, статистик гипотезаларни статистик текширилиши, бир факторли дисперсион анализ. Бир қатор янги масалалар: тасодифий ҳодисалар оқими, нормал тақсимот билан боғланган тақсимотлар, функциянинг математик кутилиши ва бошқалар киритилди. Айрим ўзгаришлар ва аниқлаштиришлар киритилди. Пирсон критерийси қайтадан баён қилинди ва XVI бобдан XIX бобга ўтказилди. Китобнинг номи ҳам ўзгартирилди.

Ёрдами ва фойдали маслаҳатлари учун Р. С. Гутерга миннатдорлик билдираман.

Автор

КИРИШ

Эҳтимоллар назарияси предмети. Биз кузатадиган ҳодисаларни (воқеаларни) қуйидаги уч турга ажратиш мумкин: муқаррар, рўй бермайдиган ва тасодифий ҳодисалар (воқеалар).

Муқаррар ҳодиса деб тайин шартлар тўплами S бажарилганда албатта рўй берадиган ҳодисага айтилади.

Масалан, агар идишдаги сув нормал атмосфера босими остида ва температураси 20° бўлса, у ҳолда «идишдаги сув суюқ ҳолатда» ҳодисаси муқаррар ҳодисадир. Бу мисолда берилган атмосфера босими ва сув температураси шартлар тўплами S ни ташкил этади.

Мумкин бўлмаган ҳодиса деб шартлар тўплами S бажарилганда мутлақо рўй бермайдиган ҳодисага айтилади.

Масалан, юқоридаги мисолнинг шартлари тўплами бажарилганда «идишдаги сув қаттиқ ҳолатда» ҳодисаси мутлақо рўй бермайди.

Тасодифий ҳодиса деб шартлар тўплами S бажарилганда рўй бериши ҳам, рўй бермаслиги ҳам мумкин бўлган ҳодисага айтилади.

Масалан, танга ташланганда, у ё гербли томони, ёки ёзувли томони билан тушиши мумкин. Шу сабабли «танга ташланганда гербли томони билан тушди» ҳодисаси тасодифийдир.

Ҳар қандай тасодифий ҳодиса, жумладан, танганинг гербли томони тушиши жуда кўп тасодифий сабаблар таъсири натижасидир (бизнинг мисолда тангани отишга сарфланган куч, танга шакли ва бошқалар). Бу сабабларнинг ҳаммаси натижага қай даражада таъсир қилишини ҳисобга олишнинг имкони йўқ, чунки улар жуда кўп бўлиб, уларнинг таъсир қилиш қонунлари эса номаълум. Шу сабабли эҳтимоллар назарияси бир алоҳида ҳодисанинг рўй бериш ёки бермаслигини олдиндан айтиб беришни ўз олдига мақсад қилиб қўймайди — у бундай масалани ҳал этишга қодир эмас.

Агар бир хил шартлар тўплами S бажарилганда кўп карра кузатилиши мумкин бўлган ҳодисалар қараладиган бўлса, яъни оммавий бир жинсли ҳодисалар ҳақида гап борадиган бўлса, у ҳолда иш бошқача бўлади. Етарлича кўп сондаги бир жинсли тасодифий ҳодисалар ўзларининг конкрет табиатларидан қатъи назар тайин қонуниятларга, чунончи эҳтимолий қонуниятларга бўйсунар экан. Эҳтимоллар назарияси ана шу қонуниятларни аниқлаш билан шуғулланади.

Шундай қилиб, *эҳтимоллар назариясининг предмети оммавий бир жинсли тасодифий ҳодисаларнинг эҳтимолий қонуниятларини ўрганишдир.*

Оммавий тасодифий ҳодисалар бўйсунадиган қонуниятларни билиш шу ҳодисаларнинг қандай кечишини олдиндан кўра билишга имкон беради. Масалан, юқорида айтилганидек, тангани бир марта ташлаш натижасини олдиндан айтиб бўлмаса-да, лекин танга етарлича кўп марта ташланганда гербли томони тушиш сонини унча катта бўлмаган хато билан олдиндан айтиш мумкин. Бунда ҳар галги танга ташлаш шарт-шароитлари бир хил деб фараз қилинади, албатта.

Эҳтимоллар назарияси методлари табиатшунослик ва техниканинг турли соҳалари: ишончлилик назарияси, оммавий хизмат кўрсатиш назарияси, назарий физика, геодезия, астрономия, отиш назарияси, кузатиш хатоликлари назарияси, автоматик бошқариш назарияси, умумий алоқа назариясида ва бошқа кўп назарий ва татбиқий фанларда қўлланилади.

Эҳтимоллар назарияси, шунингдек, математик ва амалий статистикани асослаш учун хизмат қилади, у эса ўз навбатида ишлаб чиқаришни планлаштириш ва ташкил этишда, технологик процессларни анализ қилишда, маҳсулот сифатини огоҳлантириш ва қабул қилиш контролида ва бошқа кўп мақсадларда татбиқ қилинади.

Сўнгги йилларда эҳтимоллар назарияси методлари фан ва техниканинг турли соҳаларига кенг кириб бормоқда ва уларнинг тараққиётига ёрдам бермоқда.

Қисқача тарихий маълумот. Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари шакллана бошлаган дастлабки ишлар қимор ўйинлари назариясини яратиш йўлидаги уринишлар эди (Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма ва бошқалар; XVI — XVII асрлар).

Эҳтимоллар назарияси ривожининг кейинги босқичи Яков Бернулли (1654 — 1705) номи билан боғлиқ. У исботлаган теорема кейинчалик «катта сонлар қонуни» номини олган бўлиб, олдинроқ йиғилган фактларнинг биринчи назарий асосланиши эди.

Эҳтимоллар назариясининг кейинги ютуқлари Муавр, Лаплас, Гаусс, Пуассон ва бошқалар номи билан боғлиқдир.

Эҳтимоллар назарияси ривожининг янги, айниқса самарадор даври П. Л. Чебишев (1821 — 1894) ва унинг шогирдлари А. А. Марков (1856 — 1922), А. М. Ляпунов (1857 — 1918) номлари билан боғлиқ. Бу даврда эҳтимоллар назарияси уйғунлашган математик фан бўлиб қолди. Унинг кейинги ривожланиши аввало рус ва совет математикларининг (С. Н. Бернштейн, В. И. Романовский А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин, Б. В. Гнеденко, Н. В Смирнов ва бошқалар) номлари билан боғлиқ. Ҳозирги вақтда эҳтимоллар назариясининг янги йўналишларини барпо қилишда етакчи роль совет математикларига мансуб.

Биринчи қисм

ТАСОДИФИЙ ҲОДИСАЛАР

Биринчи боб

ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

1-§. Синашлар ва ҳодисалар

Юқорида биз тасодифий ҳодиса деб тайин шартлар тўплами S бажарилганда ё рўй бериши, ёки рўй бермаслиги мумкин бўлган ҳодисани атадик. Бундан кейин «шартлар тўплами S бажарилди» дейиш ўрнига, биз қисқача қилиб, «синаш ўтказилди» деймиз. Шундай қилиб, биз ҳодисани синаш натижаси сифатида қараймиз.

1-мисол. Мерган тўртта соҳага ажратилган нишонга қарата ўқ узади. Ўқ узилиши—синаш. Нишоннинг тайин соҳасига ўқ тегиши — ҳодиса.

2-мисол. Яшикда рангли шарлар бор. Яшикдан таваккалига битта шар олинади. Яшикдан шар олиниши синаш ҳисобланади. Тайин рангли шар чиқиши — ҳодиса.

2-§. Тасодифий ҳодисаларнинг турлари

Биргаликда бўлмаган ҳодисалар деб битта синашда бирининг рўй бериши қолганларининг рўй беришини йўққа чиқарадиган ҳодисаларга айтилади.

1-мисол. Деталлар солинган яшикдан таваккалига битта деталь олинди. Бунда стандарт деталь чиқиши ностандарт деталь чиқишини йўққа чиқаради. «Стандарт деталь чиқди» ва «ностандарт деталь чиқди» ҳодисалари биргаликда эмас.

2-мисол. Танга ташланди. Тангапинг гербли томони тушиши ёзувли томони тушишини йўққа чиқаради. «Гербли томон тушди» ва «ёзувли томон тушди» ҳодисалари биргаликда эмас.

Агар синаш натижасида бир нечта ҳодисалардан биттаси ва фақат биттасининг рўй бериши муқаррар ҳодиса бўлса, у ҳолда бу ҳодисалар *ягона мумкин бўлган* дейилади.

Кўриниб турибдики, ягона мумкин бўлган ҳодисалар жуфт-жуфти билан биргаликда эмас.

3-мисол. Иккита пул-буюм лотереяси сотиб олинган. Қуйидаги ҳодисаларнинг биттаси ва фақат биттаси албатта рўй беради: «ютуқ биринчи билетга чиқди, иккинчисига чиқмади», «ютуқ биринчи билетга чиқмади, иккинчисига чиқди», «ютуқ иккала билетга чиқди», «ютуқ иккала билетга ҳам чиқмади». Булар ягона мумкин бўлган ҳодисалар.

4-мисол. Мерган нишонга қарата ўқ узди. Қуйидаги иккита ҳодисадан бири албатта рўй беради: нишонга ўқ тегиши, ўқнинг нишонга тегмаслиги. Булар ягона мумкин бўлган ҳодисалар.

Агар бир нечта ҳодисалардан ҳеч бирини бошқаларига нисбатан рўй бериши мумкинроқ дейишга асос бўлмаса, улар *тенг имкониятли* ҳодисалар дейилади.

5-мисол. Танга ташлаганда гербли томон тушиши ва ёзувли томон тушиши тенг имкониятли ҳодисалар. Ҳақиқатан ҳам, танга бир жинсли материалдан тайёрланган, тўғри цилиндрик шаклга эга ва унинг ўймакорлиги танганинг у ёки бу томони билан тушишига таъсир қилмайди деб фараз қилинади.

6-мисол. Ўйин соққаси ташланганда у ёки бу сондаги очколар тушиши тенг имкониятли ҳодисалардир. Ҳақиқатан ҳам, соққа бир жинсли материалдан ишланган мунтазам кўпёқ шаклига эга ва унга очколарнинг ёзилганлиги у ёки бу ёғи билан тушишига таъсир қилмайди деб фараз қилинади.

3-§. Эҳтимолнинг классик таърифи

Эҳтимол тушунчаси эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчаларидан биридир. Бу тушунчанинг бир нечта таърифи мавжуд. Бу ерда эҳтимолнинг классик таъриф деб аталадиган таърифи берилади. Кейинчалик (6-§) бу таърифнинг бўш томонларини кўрсатиб, эҳтимолнинг классик таърифидаги камчиликлардан қутулишга имкон берадиган бошқа (статистик) таърифини келтирамиз.

Мисол кўрайлик. Айтайлик, яшикда яхшилаб аралаштирилган 6 та бир хил шар бўлиб, улардан 2 таси қизил, 3 таси кўк ва 1 таси оқ бўлсин. Шубҳасиз, яшикдан таваккалига рангли шар (яъни қизил ёки кўк шар) олиниш имконияти оқ шар олиниш имкониятидан кўпроқ. Бу имкониятни сон билан характерлаш мумкинми? Ҳа, мумкин экан. Мана шу сон ҳодисанинг эҳтимоли деб аталади. Шундай қилиб, эҳтимол ҳодисанинг рўй бериш имкониятини характерловчи сондир.

Биз ўз олдимизга таваккалига олинган шарнинг рангли бўлиш имкониятини миқдорий баҳолаш вазифасини қўйайлик. Рангли шар чиқишини A ҳодиса сифатида қараймиз. Синашнинг (синаш яшикдан шар олишдан иборат) мумкин бўлган натижаларининг ҳар бирини, яъни синашда рўй бериши мумкин бўлган ҳар бир ҳодисани элементар натижа деб атаймиз. Элементар натижаларни E_1, E_2, E_3 ва ҳ. к. орқали белгилаймиз. Бизнинг мисолда қуйидаги 6 та элементар натижа бўлиши мумкин: E_1 — оқ шар чиқди; E_2, E_3 — қизил шар чиқди; E_4, E_5, E_6 — кўк шар чиқди.

Осонгина кўриш мумкинки, бу натижалар ягона мумкин бўлган (битта шар албатта чиқади) ва тенг имкониятли (шар таваккалига олинади, шарлар бир хил ва яхшилаб аралаштирилган) ҳодисалардир.

Бизни қизиқтираётган ҳодисанинг рўй беришига олиб келадиган элементар натижаларни бу ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи деймиз. Бизнинг мисолда A (рангли шар чиқиши) ҳодисанинг рўй беришига қуйидаги 5 та натижа қулайлик туғдиради: E_2, E_3, E_4, E_5, E_6.

A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи элементар натижалар сонининг уларнинг умумий сонига нисбати A ҳодисанинг эҳтимоли дейилади ва $P(A)$ билан белгиланади. Кўрилаётган мисолда элементар натижалар жами 6 та, улардан 5 таси A ҳодисага қулайлик туғдиради. Демак, олинган шарнинг рангли бўлиш эҳтимоли: $P(A) = \frac{5}{6}$.

Топилган сон (эҳтимол) биз олдимизга қўйган масаладаги рангли шар чиқиши мумкинлигининг миқдорий баҳосини беради.

Энди эҳтимолнинг таърифини берайлик.

A ҳодисанинг эҳтимоли деб, синашнинг бу ҳодиса рўй беришига қулайлик туғдирувчи натижалари сонининг синашнинг ягона мумкин бўлган ва тенг имкониятли элементар натижалари жами сонига нисбатига айтилади.

Шундай қилиб, A ҳодисанинг эҳтимоли қуйидаги формула билан аниқланади:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

бу ерда m A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи элементар натижалар сони; n — синашнинг мумкин бўлган барча элементар натижалари сони. Бу ерда элементар натижалар ягона мумкин бўлган ва тенг имкониятли деб фараз қилинади.

Эҳтимолнинг таърифидан унинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади:

1. *Муқаррар ҳодисанинг эҳтимоли бирга тенг.*

Ҳақиқатан ҳам, агар ҳодиса муқаррар бўлса, у ҳолда синашнинг ҳар бир элементар натижаси шу ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдиради. Бу ҳолда $m = n$, ва демак,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. *Мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоли нолга тенг.*

Ҳақиқатан ҳам, агар ҳодиса рўй бермайдиган бўлса, у ҳолда тажрибанинг ҳеч бир элементар натижаси бу ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирмайди. Бу ҳолда $m = 0$, ва демак,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. *Тасодифий ҳодисанинг эҳтимоли мусбат сон бўлиб, у ноль ва бир орасида бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, тасодифий ҳодисанинг рўй беришига синашнинг барча элементар натижаларининг бир қисмигина қулайлик туғдиради. Бу ҳолда $0 < m < n$, шунинг учун $0 < \frac{m}{n} < 1$, ва демак,

$$0 < P(A) < 1.$$

Шундай қилиб, исталган ҳодисанинг эҳтимоли қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантиради:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Кейинчалик, кўп мисолларнинг ечилишини анчагина соддалаштирадиган теоремалар кўрсатилади. Ҳозирча эса ечилишида эҳтимолнинг таърифидангина фойдаланиладиган мисоллар келтирамиз.

4- §. Эҳтимолларни бевосита ҳисоблашга доир мисоллар

1- мисол. Телефонда номер тера туриб, абонент битта рақамни эсидан чиқариб қўйди ва уни таваккалига терди. Кераклик рақам терилганлик эҳтимолини топинг.

Ечилиши. A орқали кераклик рақам терилганлик ҳодисасини белгилаймиз.

Абонент 10 та рақамдан исталган бирини терган бўлиши мумкин шунинг учун мумкин бўлган элементар натижалар жами сони 10 га тенг. Бу натижалар ягона мумкин **бўлган** (рақамлардан бири албатта терилган) ва тенг имкониятли (рақам таваккалига терилган).

A ҳодисага биттагина натижа (керакли рақам фақат битта) қулайлик туғдиради.

Изланаётган эҳтимол ҳодисага қулайлик туғдирувчи натижалар сонининг барча элементар натижалар сонига нисбатига тенг:

$$P(A) = \frac{1}{10}.$$

2-мисол. Телефонда номер тера туриб, абонент охирги иккита рақамни эсидан чиқариб қўйди ва фақат шу рақамларнинг ҳар хиллигини эслаб, уларни таваккалига терди. Керакли рақамлар терилганлик эҳтимолини топинг.

Ечилиши. B орқали керакли иккита рақам терилганлик ҳодисасини белгилаймиз.

Ҳар хил рақамлар жуфтини ўнта рақамдан иккитадан ўринлатишлар нечта бўлса, ҳаммаси бўлиб шунча марта, яъни $A^2_{10} = 10 \cdot 9 = 90$ марта териш мумкин. Шундай қилиб, мумкин бўлган элементар натижалар жами сони 90 га тенг. Бу натижалар ягона мумкин бўлган ва тенг имкониятли. B ҳодисага биттагина натижа қулайлик туғдиради.

Изланаётган эҳтимол ҳодисага қулайлик туғдирадиган элементар натижалар сонининг барча элементар натижалар сонига нисбатига тенг:

$$P(B) = \frac{1}{90}.$$

3-мисол. Ушбу масаланинг «ечилишидаги» хатони кўрсатинг: иккита ўйин соққаси ташланди. Тушган очколар йиғиндиси 4 га тенг бўлиш (A ҳодиса) ҳодисасининг эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Синашда ҳаммаси бўлиб иккита натижа бўлиши мумкин: тушган очколар йиғиндиси 4 га тенг, тушган очколар йиғиндиси 4 га тенг эмас. A ҳодисага битта натижа қулайлик туғдиради, натижаларнинг жами сони эса иккига тенг бўлгани учун изланаётган эҳтимол: $P(A) = \frac{1}{2}$.

Бундай ечишнинг хатоси шундаки, кўрилаётган натижалар тенг имкониятли эмас.

Масаланинг тўғри ечилиши. Синашнинг тенг имкониятли натижаларининг жами сони 6·6 = 36 га тенг (бир соққада тушган ҳар бир очко иккинчи соққадаги ҳамма очколар билан биргаликда чиқиши мумкин). Бу натижалар ичида A ҳодисага фақат 3 та натижа қулайлик туғдиради: (1; 3), (3; 1), (2; 2) (қавс ичида тушган очколар сони кўрсатилган). Демак, изланаётган эҳтимол:

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

4-мисол. 10 та деталдан иборат партияда 7 та стандарт деталь бор. Таваккалига олинган олтита деталдан роса 4 таси стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Синашнинг мумкин бўлган элементар натижалари жами сони 10 та деталдан 6 тасини олиш усуллари сонига, яъни 10 та элементни 6 тадан группалаш сонига (C^6_{10}) тенг.

Бизни қизиқтираётган A ҳодисага — олинган 6 та деталдан роса 4 таси стандарт бўлишига қулайлик туғдирувчи натижалар сонини ҳисоблаймиз: 7 та стандарт деталдан 4 та стандарт детални C^4_7 та усул билан олиш мумкин; бунда қолган 6 — 4 = 2 та деталь ностандарт бўлиши лозим; 2 та ностандарт детални 10 — 7 = 3 та ностандарт деталдан C^2_3 та усул билан олиш мумкин. Демак, қулайлик туғдирувчи натижалар сони $C^4_7 \cdot C^2_3$ га тенг.

Изланаётган эҳтимол ҳодисага қулайлик туғдирувчи натижалар сонининг барча элементар натижалар сонига нисбатига тенг:

$$P(A) = \frac{C^4_7 \cdot C^2_3}{C^6_{10}} = \frac{1}{2}.$$

5-§. Нисбий частота. Нисбий частотанинг тургунлиги

Нисбий частота эҳтимол билан бир қаторда эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари жумласига киради.

Ҳодисанинг нисбий частотаси деб, ҳодиса рўй берган синашлар сонининг аслида ўтказилган жами синашлар сонига нисбатига айтилади.

Шундай қилиб, A ҳодисанинг нисбий частотаси қуйидаги формула билан аниқланади:

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

бу ерда m — ҳодисанинг рўй бериш сони, n — синашларнинг жами сони.

Эҳтимол ва нисбий частота таърифларини солиштириб, қуйидаги хулосага келамиз: эҳтимолнинг таърифида синашларнинг ҳақиқатан ўтказилганлиги талаб қилинмайди, нисбий частотанинг таърифида эса синашларнинг аслида ўтказилганлиги фараз қилинади. Бошқача қилиб айтганда, *эҳтимол тажрибадан илгари нисбий частота эса тажрибадан кейин ҳисобланади.*

1-мисол. Техникавий контроль бўлими тасодифий танланган 80 та деталь партиясидан 3 та ностандарт деталь топди. Ностандарт деталлар чиқишининг нисбий частотаси

$$W(A) = \frac{3}{80}.$$

2-мисол. Нишонга қарата 24 та ўқ узилди, бунда улардан 19 таси нишонга текканлиги қайд қилинди. Нишонга тегишнинг нисбий частотаси

$$W(A) = \frac{19}{24}.$$

Узоқ кузатишлар шуни кўрсатдики, агар бир хил шарт-шароитда тажрибалар ўтказилиб, уларнинг ҳар бирида синашлар сони етарлича катта бўлса, у ҳолда нисбий частота турғунлик хоссасига эга эканлиги пайқалади. Бу хосса қуйидагидан иборат: *турли тажрибаларда нисбий частота жуда оз (синашлар қанча кўп ўтказилган бўлса, шунча кам) ўзгариб, бирор ўзгармас сон атрофида тебранади.* Бу ўзгармас сон ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли экан.

Шундай қилиб, агар тажриба йўли билан нисбий частота аниқланган бўлса, у ҳолда уни эҳтимолнинг тақрибий қиймати сифатида олиш мумкин.

Эҳтимол билан нисбий частота орасидаги боғланиш аниқроқ ва батафсилроқ қилиб келгусида баён этилади. Ҳозир эса турғунлик хоссасини мисолларда намойиш қиламиз.

3-мисол. Швед статистикаси маълумотларига қараганда, 1935 йилда қиз болалар туғилишининг нисбий частотаси ойлар бўйича қуйидаги сонлар билан характерланади (сонлар январдан бошлаб, ойларнинг келиш тартибида ёзилган): 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473.

Нисбий частота 0,482 сони атрофида тебранади, бу сонни қиз болалар туғилиш эҳтимолининг тақрибий қиймати сифатида олиш мумкин.

Турли мамлакатлардаги статистик маълумотлар нисбий частотанинг тахминан шу қийматини беришини айтиб ўтамиз.

4-мисол. Танга ташлаш тажрибалари кўп карра ўтказилиб, уларда гербли томон тушиш сони саналган. Бир нечта тажрибаларнинг натижалари 1-жадвалда берилган.

1-жадвал

Танга ташлашлар сони	Гербли томон тушишлар сони	Нисбий частота
4 040	2 048	0,5069
12 000	6 019	0,5016
24 000	12 012	0,5005

Бу ерда нисбий частоталар 0,5 сонидан салгина, шу билан бирга синашлар сони қанча катта бўлса, шунча кам фарқ қилади. Масалан, четланиш 4040 та синашда 0,0069 га, 24000 та синашда эса 0,0005 га тенг. Танга ташлашда гербли томон тушиш эҳтимоли 0,5 га тенглигини эътиборга олсак, нисбий частота эҳтимол атрофида тебранишига яна бир карра ишонч ҳосил қиламиз.

6-§. Эҳтимолнинг классик таърифининг чекланганлиги. Статистик эҳтимол

Эҳтимолнинг «классик» таърифида синашнинг элементар натижалари сони чекли деб фараз қилинади. Амалиётда эса мумкин бўлган натижалари сони чексиз бўлган синашлар анча кўп учраб туради. Бундай ҳолларда классик таърифни қўллаб бўлмайди. Шу ҳолнинг ўзи ҳам классик таърифнинг чекланганлигини кўрсатади. Тўғри, бу камчиликни эҳтимол таърифини тегишлича умумлаштириш йўли билан бартараф қилиш мумкин.

Классик таърифнинг энг бўш томони шундаки, кўпинча синаш натижасини элементар ҳодисалар тўплами сифатида тасвирлаб бўлмайди. Элементар ҳодисаларни тенг имкониятли деб ҳисоблашга асос бўла оладиган шартларни кўрсатиш эса ундан ҳам қийин. Одатда элементар натижаларнинг тенг имкониятлилиги ҳақида симметрияга асосланиб хулоса чиқарилади. Масалан, соққа ташлашда бундай ҳол соққа мунтазам кўпёқли (куб) бўлганда бўлади. Аммо симметриклилик мулоҳазаларига асосланиш мумкин бўлган масалалар амалиётда жуда кам учрайди.

Шу сабабли классик таъриф билан бир қаторда ҳодисанинг эҳтимоли сифатида нисбий частота ёки унга яқин сонни олиб, статистик таърифдан ҳам фойдаланилади. Масалан, агар етарлича катта сондаги синашлар натижасида нисбий частота 0,4 сонга жуда яқинлиги аниқланган бўлса, у ҳолда бу сонни ҳодисанинг эҳтимоли сифатида олиш мумкин.

Масалалар.

1. Яшикда 50 та бир хил деталь бор, улардан 5 таси бўялган. Таваккалига битта деталь олинади. Олинган деталь бўялган бўлиши эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p = 0,1$.

2. Ўйин соққаси ташланди. Жуфт сондаги очко тушиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p = 0,5$.

3. Қуръа ташлашда иштирокчилар яшикдан 1 дан 100 гача номерланган жетон оладилар. Таваккалига олинган биринчи жетоннинг номерида 5 рақами учрамаслик эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p = 0,81$.

4. Халтачада 5 та бир хил куб бор. Ҳар бир кубнинг барча томонларига қуйидаги ҳарфлардан бири ёзилган: о, п, р, с, т. Битталаб олинган ва «бир қатор қилиб» терилган кубларда «спорт» сўзини ўқиш мумкинлиги эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p = \frac{1}{120}$.

5. Олтита бир хил карточканинг ҳар бирига қуйидаги ҳарфлардан бири ёзилган: а, т, м, р, с, о. Карточкалар яхшилаб аралаштирилган. Битталаб олинган ва «бир қатор қилиб» терилган тўртта карточкада «трос» сўзини ўқиш мумкинлиги эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p = \frac{1}{A^4_6} = \frac{1}{360}$.

6. Ҳамма томони бўялган куб мингта бир хил ўлчамли кубчаларга бўлинган ва яхшилаб аралаштирилган. Таваккалига олинган кубчанинг а) битта; б) иккита; в) учта ёғи бўялган бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) 0,384; б) 0,096; в) 0,008.

7. Яхшилаб аралаштирилган 28 та домино тошидан таваккалига битта тош олинган. Ихтиёрий равишда олинган иккинчи тошни биринчи тош ёнига ўйин қоидаси бўйича қўйиш мумкинлиги эҳтимолини биринчи соққа а) дубль бўлганда; б) дубль бўлмаганда топинг.

Жавоби. а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{4}{9}$.

8. Қулфнинг умумий ўқида бешта диск бор. Уларнинг ҳар бири турли ҳарфлар ёзилган олтита секторга бўлинган. Ҳар бир диск қулфнинг корпусига нисбатан тайин бир вазиятда бўлгандагина қулф очилади. Дискларни ихтиёрий равишда ўрнатилганда қулфни очиш мумкин бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p = \frac{1}{6^5}$.

9. 8 та турли китоб битта токчага таваккалига териб қўйилади. Тайин иккита китоб ёнма-ён бўлиб қолиш эҳтимолини топинг.

Жавоби $p = \frac{7 \cdot 2! \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{4}$.

10. Кутубхонада 10 та турли китоб бор, бунда бешта китобнинг ҳар бири 4 сўмдан, учта китоб бир сўмдан, иккита китоб 3 сўмдан туради. Таваккалига олинган иккита китобнинг баҳоси 5 сўм бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p = \frac{C^1{}_5 \cdot C^1{}_3 + C^1{}_2 \cdot C^2{}_3}{C^2{}_{10}} = \frac{7}{9}$.

11. 100 деталли партиядан техникавий контрол бўлими 5 та ностандарт деталь топди. Ностандарт деталлар чиқишининг нисбий частотаси нимага тенг?

Жавоби. $W = 0{,}05$.

12. Мылтиқдан ўқ узишда нишонга тегишнинг нисбий частотаси 0,85 га тенглиги аниқланди. Агар жами 120 та ўқ узилган бўлса, нишонга теккан ўқлар сонини топинг.

Жавоби. 102 та.

Иккинчи боб

ЭҲТИМОЛЛАРНИ ҚЎШИШ ТЕОРЕМАСИ

1-§. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремаси

A ва *B ҳодисаларнинг йиғиндиси* $A + B$ деб, *A* ҳодиса ёки *B* ҳодисанинг, ё бу иккала ҳодисанинг ҳам рўй беришидан иборат ҳодисага айтилади.

Масалан, тўпдан иккита снаряд отилган бўлиб, *A* биринчи отишда нишонга тегиш, *B* иккинчи отишда нишонга тегиш ҳодисалари бўлса, у ҳолда $A + B$ биринчи отишда ёки иккинчи отишда ёки иккала отишда ҳам нишонга тегиш ҳодисаси бўлади.

Жумладан, агар A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмаса, у ҳолда $A + B$ шу ҳодисалардан қайсиниси бўлса ҳам, бирининг рўй беришидан иборат ҳодиса бўлади.

Бир нечта ҳодисаларнинг йиғиндиси деб, бу ҳодисалардан камида бирининг рўй беришидан иборат бўлган ҳодисага айтилади.

Масалан, $A + B + C$ ҳодиса қуйидаги ҳодисалардан бирининг рўй беришидан иборат: A, B C, A ва B, A ва C, B ва C, ҳам A, ҳам B, ҳам C.

Фараз қилайлик, A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмасин ва уларнинг эҳтимоллари берилган бўлсин. Ё A ҳодиса, ёки B ҳодиса рўй бериш эҳтимолини қандай топиш мумкин? Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. *Биргаликда бўлмаган иккита ҳодисадан қайсиниси бўлса ҳам, бирининг рўй бериш эҳтимоли шу ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисига тенг:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Исботи. Қуйидагича белгилаш киритамиз:

n — синашнинг мумкин бўлган элементар натижалари жами сони;

m_1 — A ҳодисага қулайлик туғдирадиган натижалар сони;

m_2 — B ҳодисага қулайлик туғдирадиган натижалар сони.

Ё A ҳодиса, ёки B ҳодиса рўй беришига қулайлик туғдирадиган натижалар сони $m_1 + m_2$ га тенг. Демак,

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}.$$

$\frac{m_1}{n} = P(A)$ ва $\frac{m_2}{n} = P(B)$ лигини назарда тутиб, узил-кесил

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

Натижа. *Ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган бир нечта ҳодисалардан қайсиниси бўлса ҳам, бирининг рўй бериш эҳтимоли шу ҳодисалар эҳтимоллари йиғиндисига тенг:*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Исботи. Учта ҳодиса: A, B ва C ни қарайлик. Қаралаётган ҳодисаларнинг ҳар иккитаси биргаликда бўлмаганлигини учун учта ҳодиса: A, B ва C дан бирининг рўй бериши $A+B$ ва C ҳодисалардан бирининг рўй бериши билан тенг кучли, шунинг учун юқоридаги теоремага асосан

$$P(A+B+C)=P[(A+B)+C]=P(A+B)+P(C)=$$
$$=P(A)+P(B)+P(C).$$

Ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган ихтиёрий сондаги ҳодисалар учун исбот математик индукция методи билан ўтказилади.

1-мисол. Яшикда 30 та шар бор, улардан 10 таси қизил, 5 таси кўк ва 15 таси оқ. Рангли шар чиқиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Рангли шар чиқиши ё қизил шар, ёки кўк шар чиқишини билдиради.

Қизил шар чиқиш (A ҳодиса) эҳтимоли.

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

Кўк шар чиқиш (B ҳодиса) эҳтимоли:

$$P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

A ва B ҳодисалар биргаликда эмас (бир рангли шар чиқиши бошқа рангли шар чиқишини йўққа чиқаради), шунинг учун қўшиш теоремасини қўллаш мумкин.

Изланаётган эҳтимол қуйидагига тенг:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

2-мисол. Мерган учта соҳага ажратилган нишонга қарата ўқ узмоқда. Ўқнинг биринчи соҳага тегиш эҳтимоли 0,45, иккинчи соҳага тегиш эҳтимоли 0,35. Мерганнинг битта ўқ узишда ё биринчи соҳага, ёки иккинчи соҳага теккизиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. A — «мерган биринчи соҳага теккизди» ва B — «мерган иккинчи соҳага теккизди» ҳодисалари биргаликда эмас (ўқнинг бир соҳага тегиши бошқа соҳага тегишини йўққа чиқаради), шунинг учун қўшиш теоремасини қўллаш мумкин.

Изланаётган эҳтимол қуйидагига тенг:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}45+0{,}35=0{,}80.$$

2- §. Ҳодисаларнинг тўла группаси

Тўла группа деб, синашнинг ягона мумкин бўлган ҳодисалари тўпламига айтилади.

1- мисол. Мерган нишонга қараб иккита ўқ узади. A_1 (нишонга битта ўқ тегиши), A_2 (нишонга иккита ўқ тегиши) ва A_3 (нишонга тегмаслик) ҳодисалар тўла группа ташкил қилади.

Теорема. *Тўла группа ташкил этувчи A_1, A_2, ..., A_n ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг:*

$$P(A_1)+P(A_2)+\ \dots\ +P(A_n)=1.$$

Исботи. Тўла группа ташкил этувчи ҳодисалардан бирининг рўй бериши муқаррар, муқаррар ҳодисанинг эҳтимоли эса бирга тенг бўлгани учун

$$P(A_1+A_2+\ \dots\ +A_n)=1. \qquad (*)$$

Тўла группанинг истаган иккита ҳодисаси биргаликда эмас, шунинг учун қўшиш теоремасини қўллаш мумкин:

$$P(A_1+A_2+\ \dots\ A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ \dots\ P(A_n). \qquad (**)$$

(*) ва (**) муносабатларни солиштириб,

$$P(A_1)+P(A_2)+\ \dots\ +P(A_n)=1$$

тенгликни ҳосил қиламиз

2- мисол. Институтнинг консультация пунктига A, B ва C шаҳарлардан контрол ишлар солинган пакетлар келади. A шаҳардан пакет олиниш эҳтимоли 0,7 га, B шаҳардан пакет олиниш эҳтимоли эса 0,2 га тенг. Навбатдаги пакетнинг C шаҳардан келиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. «Пакет A шаҳардан келган», «пакет B шаҳардан келган» ва «пакет C шаҳардан келган» ҳодисалари тўла группа ҳосил қилади, шунинг учун бу ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг:

$$0,7+0,2+p=1.$$

Бу ердан изланаётган эҳтимол:

$$p=1-0,9=0,1.$$

3- §. Қарама-қарши ҳодисалар

Қарама-қарши ҳодисалар деб, тўла группа ташкил этувчи ягона мумкин бўлган иккита ҳодисага айтилади. Агар қарама-қарши иккита ҳодисадан бири A деб белгиланса, у ҳолда иккинчисини $\overline{A}$ билан белгилаш қабул қилинган.

1-мисол. Нишонга қарата ўқ узишда нишонга тегиш ва тегмаслик қарама-қарши ҳодисалардир. Агар A нишонга тегиш бўлса, у ҳолда $\overline{A}$ нишонга тегмаслик бўлади.

2-мисол. Яшикдан таваккалига деталь олинган. «Стандарт деталь чиқди» ва «ностандарт деталь чиқди» ҳодисалари қарама-қарши ҳодисалардир.

Теорема. *Қарама-қарши ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг;*

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Исботи. Қарама-қарши ҳодисалар тўла группа ташкил этади, тўла группа ташкил этувчи ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси эса бирга тенг (2-§).

1-эслатма. Қарама-қарши иккита ҳодисадан бирининг эҳтимоли p орқали белгиланса, иккинчи ҳодисанинг эҳтимоли q орқали белгиланади. *Шундай қилиб, юқоридаги теоремага асосан*

$$p + q = 1.$$

3-мисол. Бирор кунда ёғингарчилик бўлиш эҳтимоли $p = 0{,}7$. Шу куни ҳаво очиқ бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. «Ёғингарчилик бўлади» ва «ҳаво очиқ бўлади» ҳодисалари ўзаро қарама-қарши ҳодисалардир шунинг учун изланаётган эҳтимол:

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3.$$

2-эслатма. A ҳодисанинг эҳтимолини топишга доир масалаларда кўпинча аввал $\overline{A}$ ҳодисанинг эҳтимолини ҳисоблаш, кейин эса изланаётган эҳтимолни қуйидаги формула орқали топиш қулай бўлади:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

4-мисол. Яшикда n та деталь бўлиб, шулардан m таси стандарт. Таваккалига олинган k та деталь орасида камида битта стандарт деталь бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. «Олинган деталларнинг ичида камида биттаси «стандарт» ва «олинган деталларнинг ичида битта ҳам стандарт деталь йўқ» ҳодисалари қарама-қарши ҳодисалардир. Биринчи ҳодисани A орқали, иккинчисини эса $\overline{A}$ орқали белгилаймиз.

Кўриниб турибдики,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

$P(\overline{A})$ ни топамиз. n та деталдан k та деталь олиш усулларининг жами сони C_n^k га тенг. Ностандарт деталлар сони $n-m$ га тенг; шу деталлардан k та ностандарт детални C_{n-m}^k та усул билан олиш мумкин. Шунинг учун олинган k та деталь ичида битта ҳам стандарт деталь йўқлигининг эҳтимоли $P(\overline{A}) = \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$ га тенг.

Изланаётган эҳтимол қуйидагига тенг:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}.$$

4-§. Кичик эҳтимолли ҳодисаларнинг амалда мумкинмаслик принципи

Амалиётда учрайдиган кўп масалаларни ҳал этишда эҳтимоли жуда кичик, яъни нолга яқин бўлган ҳодисалар билан иш кўришга тўғри келади. Кичик эҳтимолли A ҳодиса ягона синашда рўй бермайди деб ҳисоблаш мумкинми? Бундай хулоса қилиш мумкин эмас, чунки кичик эҳтимолли бўлса-да, A ҳодиса рўй бериб қолиши мумкин.

Кичик эҳтимолли ҳодисанинг битта синашда рўй бериши ёки бермаслигини олдиндан айтиб бериш мумкин эмасдек туюлади. Аммо узоқ вақт давомида тўпланган тажриба кичик эҳтимолли ҳодисалар кўпинча ягона синашда рўй бермаслигини кўрсатади. Шу фактга асосланиб, қуйидаги «кичик эҳтимолли ҳодисаларнинг амалда мумкинмаслик принципи» қабул қилинади: *агар тасодифий ҳодиса жуда кичик эҳтимолга эга бўлса, у ҳолда амалда бу ҳодиса ягона тажрибада рўй бермайди деб ҳисоблаш мумкин.*

Қуйидаги саволнинг туғилиши табиий: ягона синашда ҳодисанинг рўй бериши мумкин эмас деб ҳисоблаш мумкин бўлиши учун унинг эҳтимоли қанчалик кичик бўлиши лозим? Бу саволга бир қийматли жавоб бериш мумкин эмас. Мазмунан ҳар хил бўлган масалалар учун жавоб ҳам турлича бўлади. Масалан, парашютдан сакралганда парашютнинг очилмаслик эҳтимоли 0,01 га тенг бўлса, бундай парашютлардан фойдаланишга йўл қўйиш мумкин эмас. Узоққа қатнайдиган поезднинг кечикиб келиш эҳтимоли 0,01 га тенг бўлганда эса поезд ўз вақтида етиб келишига амин бўлиш мумкин.

Ҳодисанинг амалда рўй бериши мумкин эмас деб ҳисоблашга имкон берадиган (берилган тайин масалада) етарли даражада кичик эҳтимолга *қийматдорлик даражаси* дейилади. Практикада одатда 0,01 билан 0,05 орасидаги қийматдорлик даражаси олинади. 0,01 га тенг қийматдорлик даражаси бир процентли, 0,02 га тенг қийматдорлик даражаси икки процентли дейилади ва ҳ.к.

Бу ерда кўрилган принцип фақат кичик эҳтимолли ҳодисалар тўғрисида эмас, балки эҳтимоли бирга яқин бўлган ҳодисалар тўғрисида ҳам башорат қилишга имкон беради. Ҳақиқатан ҳам, агар A ҳодисанинг эҳтимоли нолга яқин бўлса, у ҳолда қарама-қарши $\bar{A}$ ҳодисанинг эҳтимоли бирга яқин бўлади. Иккинчи томондан, A ҳодисанинг рўй бермаслиги қарама-қарши $\bar{A}$ ҳодисанинг рўй беришини англатади. Шундай қилиб, кичик эҳтимолли ҳодисаларнинг амалда мумкинмаслик принципидан татбиқлар учун муҳим бўлган қуйидаги натижа келиб чиқади: *агар тасодифий ҳодиса бирга яқин эҳтимолга эга бўлса, у ҳолда ягона тажрибада бу ҳодиса амалда рўй беради деб ҳисоблаш мумкин.* Бу ерда ҳам қайси эҳтимолни бирга яқин деб ҳисоблаш лозимлиги ҳақидаги савол масаланинг мазмунига боғлиқлиги ўз-ўзидан равшандир.

Масалалар

1. Пул-буюм лотереясининг ҳар 10 000 та билетига 150 та буюм ва 50 та пул ютуқлари ўйналади. Битта лотереяси бор кишига пулми ёки буюмми, барибир ютуқ чиқищ эҳтимоли қанчага тенг?

Жавоби. $p = 0,02.$

2. Мерганнинг битта ўқ узишда 10 очко уриш эҳтимоли 0,1 га, 9 очко уриш эҳтимоли 0,3 га, 8 ёки ундан кам очко уриш эҳтимоли 0,6 га тенг. Мерганнинг битта ўқ узишда камида 9 очко уриш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p = 0,4.$

3. 10 та деталли партияда 8 та стандарт деталь бор. Таваккалига олинган иккита деталдан камида бири стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби $p = \frac{44}{45}.$

4. Яшикдаги 10 та деталь орасида 2 таси ностандарт. Таваккалига олинган 6 та деталь орасида ностандарт деталь биттадан ортиқ бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоби $p = \frac{2}{3}.$

Кўрсатма. Агар A — битта ҳам ностандарт деталь йўқ, B — битта ностандарт деталь бор ҳодисалари бўлса, у ҳолда

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{C_8^6}{C_{10}^6}+\frac{C_2^1\cdot C_8^5}{C_{10}^6}.$$

5. A, B, C ва D ҳодисалар тўла группа ташкил қилади. Ҳодисаларнинг эҳтимоллари бундай: $P(A)=0{,}1$; $P(B)=0{,}4$, $P(C)=0{,}3$. D ҳодисанинг эҳтимоли қанчага тенг?

Жавоби. $P(D)=0.2$.

6. Ремонт устахонасининг статистик маълумотларига қараганда токарлик станогининг 20 марта тўхташига ўртача олганда 10 марта кесгични алмаштириш, 3 марта юритманинг бузилиши, 2 марта хом ашёнинг ўз вақтида етказиб берилмаслиги сабаб бўлади. Қолган тўхташлар бошқа сабабларга кўра юз беради. Станокнинг бошқа сабабларга кўра тўхтаб қолиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p=0{,}25$.

Учинчи боб

ЭҲТИМОЛЛАРНИ КЎПАЙТИРИШ ТЕОРЕМАСИ

1-§. Боғлиқ ва эркли ҳодисалар

Агар иккита ҳодисадан бирининг рўй бериши иккинчисининг рўй бериш ёки рўй бермаслигига боғлиқ бўлмаса бу ҳодисалар *эркли ҳодисалар* дейилади.

1-мисол. Танга икки марта ташланган. Биринчи ташлашда гербли томон тушиш (A ҳодиса) эҳтимоли иккинчи ташлашда гербли томон тушиши ёки тушмаслигига (B ҳодиса) боғлиқ эмас. Ўз навбатида, иккинчи синашда гербли томон тушиш эҳтимоли биринчи синаш натижасига боғлиқ эмас. Шундай қилиб, A ва B ҳодисалар эркли.

2-мисол. Яшикда 5 та оқ ва 3 та қора шар бор. Ундан тасодифан битта шар олинади. Оқ шар чиқиш (A ҳодиса) эҳтимоли, равшанки, 5/8 га тенг. Олинган шар яшикка қайтариб солинади ва синаш такрорланади. Иккинчи синашда оқ шар чиқиш (B ҳодиса) эҳтимоли, аввалгидек, $\frac{5}{8}$ га тенг ва биринчи синаш натижасига боғлиқ эмас. Ўз навбатида, биринчи синашда оқ шар олиниш эҳтимоли иккинчи синаш натижасига боғлиқ эмас. Шундай қилиб, A ва B ҳодисалар боғлиқ эмас.

Бир нечта ҳодисанинг ҳар иккитаси боғлиқ бўлмаса, уларга *жуфт-жуфт* эркли дейилади.

3-мисол. Танга 3 марта ташланган. A, B, C мос равишда биринчи, иккинчи ва учинчи синашда гербли томон тушиши ҳодисаси бўлсин. Равшанки; кўрилаётган ҳодисалардан ҳар иккитаси (яъни A ва B, A ва C B ва C) боғлиқ эмас. Шундай қилиб, A, B ва C жуфт-жуфт эркли.

Агар икки ҳодисадан бирининг рўй бериш эҳтимоли иккинчи ҳодисанинг рўй бериши ёки рўй бермаслигига боғлиқ бўлса, бу ҳодисалар *боғлиқ* дейилади.

4-мисол. Яшикда 100 та деталь бор, шулардан 80 таси стандарт, 20 таси ностандарт. Таваккалига битта деталь олиниб, у яшикка қайтариб солинмайди. Агар стандарт деталь олинган (A ҳодиса) бўлса, у ҳолда иккинчи синашда стандарт деталь чиқиши (B ҳодиса) эҳтимоли $P(B) = 79/99$ га тенг; агар биринчи синашда ностандарт деталь олинган бўлса, у ҳолда $P(B) = 80/99$.

Шундай қилиб, B ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли A ҳодисанинг рўй бериши ёки рўй бермаслигига боғлиқ. A ва B ҳодисалар—боғлиқ.

2-§. Эркли ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтириш теоремаси

A ва B ҳодисаларнинг кўпайтмаси деб, бу ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат бўлган AB ҳодисага айтилади.

Масалан, агар яшикда 1-завод ва 2-заводда ишлаб чиқарилган деталлар бўлиб, A — стандарт деталь чиқиши, B — деталь 1-заводда ишлаб чиқарилган бўлса, у ҳолда AB 1-заводнинг стандарт детали чиқиши бўлади.

Бир нечта ҳодисанинг кўпайтмаси деб, бу ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат бўлган ҳодисага айтилади. Масалан, ABC ҳодиса A, B ва C ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат.

A ва B ҳодисалар эркли бўлиб, уларнинг эҳтимоллари маълум бўлсин. A ва B ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимолини қандай топиш мумкин? Бу саволга қуйидаги кўпайтириш теоремаси жавоб беради.

Теорема. *Иккита эркли ҳодисанинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли шу ҳодисаларнинг эҳтимоллари кўпайтмаси тенг:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Исботи. Белгилашлар киритамиз:

n — синашнинг A ҳодиса рўй берадиган ёки рўй бермайдиган элементар натижалари жами сони.

n_1 A ҳодисага қулайлик туғдирувчи натижалар сони $(n_1 \leqslant n)$;

m — синашнинг B ҳодиса рўй берадиган ёки бермайдиган элементар натижалари жами сони.

m_1 B ҳодисага қулайлик туғдирувчи натижалар сони $(m_1 \leqslant m)$.

Синашнинг мумкин бўлган элементар натижалари жами сони nm га тенг (бу натижаларда ҳам A, ҳам B, ёки A ва $\overline{B}$, ёки $\overline{A}$ ва B, ёки $\overline{A}$ ва $\overline{B}$ рўй беради). Ҳақиқатан ҳам, A ҳодисанинг рўй бериши ёки рўй бермаслигидан иборат n та натижанинг ҳар бири B нинг рўй бериши ёки рўй бермаслигидан иборат m та натижанинг ҳар бири билан биргаликда бўлиши мумкин.

Булардан m_1n_1 таси A ва B ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришига қулайлик туғдиради. Ҳақиқатан ҳам, A ҳодисага қулайлик туғдирувчи n_1 та натижанинг ҳар бири B ҳодисага қулайлик туғдирувчи m_1 та натижанинг ҳар бири билан биргаликда рўй бериши мумкин.

A ва B ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли:

$$P(AB) = \frac{m_1 n_1}{nm} = \frac{n_1}{n}\cdot\frac{m_1}{m}.$$

$\frac{n_1}{n} = P(A$ ва $\frac{m_1}{m} = P(B)$ лигини эътиборга олиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B).$$

Кўпайтириш теоремасини бир нечта ҳодисаларга умумлаштириш учун биргаликда боғлиқмаслик тушунчасини киритамиз.

Бир неча ҳодисалардан ҳар бири ва қолганларининг исталган комбинацияси (у қолган ҳодисаларнинг ҳаммасини ёки бир қисмини ўз ичига олади) эркли бўлса, у ҳолда бу ҳодисалар *биргаликда боғлиқ эмас* дейилади. Масалан, агар A_1, A_2 ва A_3 ҳодисалар биргаликда боғлиқ бўлмаса, у ҳолда A_1 ва A_2, A_1 ва A_3, A_2 ва A_3 A_1 A_2 ва A_3, A_1A_3 ва A_2, A_2A_3 ва A_1 ҳодисалар эркли бўлади.

Шуни таъкидлаб ўтамизки, бир нечта ҳодисаларнинг жуфт-жуфт боғлиқ эмаслигидан уларнинг биргаликда боғлиқ эмаслиги келиб чиқмайди. Шу маънода ҳодисаларнинг биргаликда боғлиқ эмаслиги талаби уларнинг жуфт-жуфт эрклилик талабидан кучлироқдир.

Айтилганларни мисолда тушунтирамиз. Яшикда 4 та шар бор, улардан биттаси қизил рангга (A), 1 таси кўк рангга (B), 1 таси қора рангга (C), 1 таси эса шу учала рангга (ABC) бўялган. Яшикдан олинган шарнинг қизил рангли бўлиш эҳтимоли $P(A)$ қанчага тенг? Тўртта шардан иккитаси қизил рангли бўлгани учун $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Шунга ўхшаш мулоҳаза юритиб, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{2}$ ни топамиз.

Олинган шар кўк рангли бўлсин, яъни B ҳодиса рўй берган бўлсин, деб фараз қилайлик. Олинган шар қизил рангли бўлиш эҳтимоли энди ўзгарадими ёки йўқми, яъни A ҳодисанинг эҳтимоли ўзгарадими? Кўк рангли иккита шардан биттасида қизил ранг ҳам бор, шунинг учун A ҳодисанинг эҳтимоли аввалгидек $\frac{1}{2}$ га тенг. Шундай қилиб, A ва B ҳодисалар эркли.

Шунга ўхшаш мулоҳаза юритиб, A ва C, B ва C эркли ҳодисалар эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, A, B, C ҳодисалар жуфт-жуфт эркли.

Бу ҳодисалар биргаликда боғлиқмас бўладими? Йўқ, бундай бўлмас экан. Ҳақиқатан ҳам, олинган шар икки рангли, масалан, кўк ва қора рангли бўлсин. Шу шар қизил рангга ҳам эга бўлиш эҳтимоли қанчага тенг? Фақат битта шар учала рангга бўялгани учун олинган шар қизил рангга ҳам эга. Шундай қилиб, B ва C ҳодисалар рўй берган деб фараз қилсак, у ҳолда A ҳодиса албатта рўй беради деган хулосага келдик. Демак, бу ҳодиса муқаррар ва унинг эҳтимоли ($\frac{1}{2}$ га эмас) бирга тенг.

Шундай қилиб, жуфт-жуфт эркли бўлган A, B ва C ҳодисалар биргаликда эркли эмас экан.

Энди кўпайтириш теоремасидан келиб чиқадиган натижани келтирамиз:

Натижа. *Биргаликда боғлиқ бўлмаган бир нечта ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли шу ҳодисаларнинг эҳтимоллари кўпайтмасига тенг.*

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ \ldots \ P(A_n).$$

Исботи. Учта A, B ва C ҳодисани кўрайлик. A, B ва C ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериши AB ва C ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериши билан тенг кучлидир, шунинг учун

$$P(ABC) = P(AB \cdot C).$$

A, B ва C ҳодисалар биргаликда боғлиқмас бўлгани учун, жумладан, AB ва C, шунингдек, A ва B ҳодисалар эркли. Иккита эркли ҳодиса учун кўпайтириш теоремасига асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(AB \cdot C) = P(AB) \cdot P(C)$$

ва

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Шундай қилиб, қуйидаги ҳосил бўлди:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Ихтиёрий n учун исбот математик индукция методи билан олиб борилади.

Эслатма. Агар $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар биргаликда боғлиқмас бўлса, у ҳолда уларга қарама-қарши бўлган $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$ ҳодисалар ҳам биргаликда боғлиқмас бўлади.

1-мисол. Иккита тангани бир вақтда ташлашда биргаликда гербли томон тушиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Биринчи тангада гербли томон тушиш (A ҳодиса) эҳтимоли

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Иккинчи тангада гербли томон тушиш (B ҳодиса) эҳтимоли

$$P(B) = \frac{1}{2}.$$

A ва B ҳодисалар эркли бўлгани учун изланаётган эҳтимол кўпайтириш теоремасига асосан қуйидагига тенг:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

2-мисол. Учта яшикнинг ҳар бирида 10 тадан деталь бор. Биринчи яшикда 8 та, иккинчи яшикда 7 та, учинчи яшикда 9 та стандарт деталь бор. Ҳар бир яшикдан таваккалига биттадан деталь олинади. Олинган учала деталь стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Биринчи яшикдан стандарт деталь олинганлик (A ҳодиса) эҳтимоли:

$$P(A) = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

Иккинчи яшикдан стандарт деталь олинганлик (B ҳодиса) эҳтимоли:

$$P(B)=\frac{7}{10}=0{,}7.$$

Учинчи яшик стандарт деталь олинганлик (C ҳодиса) эҳтимоли:

$$P(C)=\frac{9}{10}=0{,}9.$$

A,B ва C ҳодисалар биргаликда боғлиқмас бўлгани учун изланаётган эҳтимол (кўпайтириш теоремасига асосан) қуйидагига тенг:

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}504.$$

Қўшиш ва кўпайтириш теоремаларини биргаликда қўлланишига доир мисол келтирамиз.

3-мисол. A_1, A_2, A_3 эркли ҳодисаларнинг эҳтимоллари мос равишда p_1, p_2, p_3 га тенг. Шу ҳодисалардан фақат биттасининг рўй бериш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Шуни айтиб ўтамизки, масалан фақат биринчи A_1 ҳодисанинг рўй бериши $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ (биринчи ҳодиса рўй берди ва иккинчи, учинчи ҳодисалар рўй бермади) ҳодисанинг рўй бериши билан тенг кучлидир.

Белгилашлар киритамиз:

B_1—фақат A_1 ҳодиса рўй берди, яъни $B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$;

B_2—фақат A_2 ҳодиса рўй берди, яъни $B_2=A_2\overline{A}_1\overline{A}_3$;

B_3—фақат A_3 ҳодиса рўй берди, яъни $B_3=A_3\overline{A}_1\overline{A}_2$;

Шундай қилиб, A_1, A_2, A_3 ҳодисалардан фақат биттасининг рўй бериш эҳтимолини топиш учун B_1, B_2, B_3 ҳодисалардан қайсиниси бўлса ҳам барибир, биттасининг рўй бериш эҳтимоли $P(B_1+B_2+B_3)$ ни излаймиз.

B_1, B_2, B_3 ҳодисалар биргаликда бўлмаганлиги учун қўшиш теоремасини қўллаш мумкин:

$$P(B_1+B_2+B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3). \qquad (*)$$

B_1, B_2, B_3 ҳодисалардан ҳар бирининг эҳтимолини топиш қолди.

A_1, A_2, A_3 ҳодисалар эркли, демак, A_1, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ ҳодисалар ҳам эркли, шунинг учун уларга кўпайтириш теоремасини қўллаш мумкин:

$$P(B_1)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=p_1q_2q_3.$$

Шунга ўхшаш:

$$P(B_2) = P(A_2\overline{A}_1\overline{A}_3) = P(A_2)\,P(\overline{A}_1)\,P(\overline{A}_3) = p_2q_1q_3;$$
$$P(B_3) = P(A_3\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(A_3)\,P(\overline{A}_1)\,P(\overline{A}_2) = p_3q_1q_2.$$

Бу эҳтимолларни (*) га қўйиб, изланаётган эҳтимолни, яъни A_1, A_2, A_3 ҳодисалардан фақат биттасининг рўй бериш эҳтимолини топамиз:

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = p_1q_2q_3 + p_2q_1q_3 + p_3q_1q_2.$$

3-§. Камида битта ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли

Фараз қилайлик, синаш натижасида n та биргаликда боғлиқ бўлмаган ҳодиса ёки уларнинг баъзи бирлари (хусусан, фақат биттаси ёки ҳеч қайсиниси) рўй бериши мумкин бўлсин, шу билан бирга бу ҳодисалардан ҳар бирининг рўй бериш эҳтимоли маълум бўлсин. Шу ҳодисаларнинг камида биттасининг рўй бериш эҳтимолини қандай топиш мумкин? Масалан, агар синаш натижасида учта ҳодиса рўй бериши мумкин бўлса, у ҳолда шу ҳодисалардан камида биттасининг рўй бериши ё битта, ё иккита, ёки учта ҳодисанинг рўй беришини билдиради. Бу қўйилган саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. *Биргаликда боғлиқ бўлмаган $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ҳодисалардан камида биттасининг рўй бериш эҳтимоли бир билан $\overline{A}_1A_2 \ldots \overline{A}_n$ тескари ҳодисалар эҳтимолларининг кўпайтмаси орасидаги айирмага тенг:*

$$P(A) = 1 - q_1q_2 \ldots q_n. \qquad (*)$$

Исботи. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисаларнинг камида биттаси рўй бериш ҳодисасини A орқали белгилайлик. A ва $\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n$ (ҳодисаларнинг ҳеч бири рўй бермаслиги) ҳодисалар қарама-қарши, демак, уларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг:

$$P(A) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n) = 1.$$

Бундан кўпайтириш теоремасидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n) = 1 - P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2) \ldots P(\overline{A}_n)$$

ёки

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n$$

Хусусий ҳол. *Агар $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар p га тенг бўлган бир хил эҳтимолга эга бўлса, у ҳолда шу ҳодисалардан камида биттасининг рўй бериш эҳтимоли:*

$$P(A) = 1 - q^n. \qquad (**)$$

1-мисол. Учта тўпдан ўқ узилганда нишонга тегиш эҳтимоллари қуйидагича: $p_1 = 0,8$; $p_2 = 0,7$; $p_3 = 0,9$. Учала тўпдан бир марта бир йўла отилганда, нишонга камида бир маротаба тегиш ҳодисасининг (A) эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Ҳар бир тўпдан отилган ўқнинг нишонга тегиши бошқа тўплардан отиш натижаларига боғлиқ эмас, шунинг учун қаралаётган A_1 (биринчи тўпдан отилганда нишонга тегиш), A_2 (иккинчи тўпдан отилганда нишонга тегиш), A_3 (учинчи тўпдан отилганда нишонга тегиш) ҳодисалар биргаликда боғлиқ эмас.

A_1, A_2, A_3 ҳодисаларга қарама-қарши ҳодисаларнинг эҳтимоллари (яъни нишонга тегмаслик эҳтимоллари) мос равишда қуйидагига тенг:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,8 = 0,2;$$
$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,7 = 0,3;$$
$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Изланаётган эҳтимол қуйидагига тенг:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994.$$

2-мисол. Босмахонада 4 та ясси босма машинаси бор. Ҳар бир машинанинг тайин вақтда ишлаб турганлиги эҳтимоли 0,9 га тенг. Тайин вақтда камида битта машина ишлаб турганлиги (A ҳодиса) эҳтимолини топинг.

Ечилиши. «Машина ишлаб турибди» ва «машина ишламаётибди» (тайин вақтда) ҳодисалари қарама-қарши бўлгани учун уларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг:

$$p + q = 1.$$

Бундан, тайин вақтда машина ишлаётганлиги эҳтимоли қуйидагига тенг:

$$q = 1 - p = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Изланаётган эҳтимол:

$$P(A) = 1 - q^4 = 1 - 0,1^4 = 0,9999.$$

Топилган эҳтимол бирга жуда яқин бўлгани учун кичик эҳтимолли ҳодисанинг амалда мумкинмаслик принципи натижасига асосланиб, тайин вақтда машиналарнинг камида биттаси ишлаб турибди деган хулосага келиш мумкин.

3-мисол. Битта ўқ узишда мерганнинг нишонга тегказиш эҳтимоли 0,4 га тенг. Мерган нишонга 0,9 дан кичик бўлмаган эҳтимол билан камида бир марта текказиши учун у нечта ўқ узиши керак?

Ечилиши. A орқали қуйидаги ҳодисани белгилаймиз: мерган n та ўқ узганда камида бир марта нишонга текказади.

Биринчи отишда нишонга текказиш, иккинчи отишда нишонга текказиш ва ҳ. к. ҳодисалар биргаликда боғлиқ эмас, шунинг учун (**) формулани қўлланиш мумкин:

$$P(A) = 1 - q^n$$

Шартга асосан $P(A) \geqslant 0,9$, $p = 0,4$ (демак, $q = 1 - 0,4 = 0,6$) эканлигини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$1 - 0,6^n \geqslant 0,9.$$

Бундан

$$0,6^n \leqslant 0,1.$$

Бу тенгсизликни 10 асос бўйича логарифмлаймиз:

$$n \lg 0,6 \leqslant \lg 0,1.$$

Бундан, $\lg 0,6 < 0$ эканлигини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$n \geqslant \frac{\lg 0,1}{\lg 0,6} = \frac{-1}{\bar{1},7782} = \frac{-1}{-0,2218} = 4,5.$$

Шундай қилиб, $n \geqslant 5$, яъни мерган камида бешта ўқ узиши керак.

4-мисол. Ҳодисанинг биргаликда боғлиқ бўлмаган учта синашда камида бир марта рўй бериш эҳтимоли 0,936 га тенг. Ҳодисанинг битта синашда рўй бериш эҳтимолини топинг (ҳар бир синашда ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли бир хил деб фараз қилинади).

Ечилиши. Қаралаётган синашлар биргаликда боғлиқ бўлмаганлиги учун (**) формулани қўллаш мумкин:

$$P(A) = 1 - q^n .$$

Шартга кўра, $P(A) = 0,936$; $n = 3$. Демак,

$$0,936 = 1 - q^3$$

ёки

$$q^3 = 1 - 0{,}936 = 0{,}064.$$

Бундан

$$q = \sqrt[3]{0{,}064} = 0{,}4.$$

Изланаётган эҳтимол қуйидагига тенг:

$$p = 1 - q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$$

4- §. Шартли эҳтимол

A ва B ҳодисалар боғлиқ бўлсин. Ҳодисаларнинг боғлиқлиги таърифига кўра бу ҳодисалардан бирининг рўй бериш эҳтимоли иккинчисининг рўй бериш ёки рўй бермаслигига боғлиқдир. Шунинг учун бизни, масалан, B ҳодисанинг эҳтимоли қизиқтираётган бўлса, у ҳолда A ҳодиса рўй берган ёки бермаганлигини билиш муҳимдир.

Шартли эҳтимол $P_A(B)$ деб, B ҳодисанинг A ҳодиса рўй берди деган фаразда ҳисобланган эҳтимолига айтилади.

Мисол. Яшикда 3 та оқ ва 3 та қора шар бор. Яшикдан икки марта таваккалига биттадан шар олинади. Олинган шар яшикка қайтариб солинмайди. Агар биринчи синашда қора шар чиққан бўлса (A ходиса), иккинчи синашда оқ шар чиқиш (B ҳодиса) эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Биринчи синашдан сўнг яшикдан 5 та шар қолди, улардан 3 таси оқ шар. Изланаётган шартли эҳтимол қуйидагига тенг:

$$P_A(B) = \frac{3}{5}.$$

Эслатма. Эркли ходисалар таърифига кўра улардан бирининг рўй бериши иккинчисининг рўй бериш эҳтимолини ўзгартирмайди. Шу сабабли эркли ҳодисалар учун қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$P_A(B) = P(B) \text{ ва } P_B(A) = P(A).$$

Шундай қилиб, эркли ҳодисаларнинг шартли эҳтимоллари уларнинг шартсиз эҳтимолларига тенг.

5- §. Боғлиқ ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтириш теоремаси

A ва B ҳодисалар боғлиқ бўлиб, $P(A)$ ва $P_A(B)$ эҳтимоллар маълум бўлсин. Бу ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимолини, яъни бир вақтда ҳам A ҳодиса, ҳам B

ҳодиса рўй бериш эҳтимолини қандай топиш мумкин? Бу саволга кўпайтириш теоремаси жавоб беради.

Теорема. *Иккита боғлиқ ҳодисанинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли улардан бирининг эҳтимолини шу ҳодиса рўй берди деган фаразда ҳисобланган иккинчи ҳодисанинг шартли эҳтимолига кўпайтмасига тенг:*

$$P(AB) = P(A)\cdot P_A(B).$$

Исботи. Белгилашлар киритамиз:

n — синашнинг A ҳодиса рўй берадиган ёки рўй бермайдиган элементар натижалари жами сони;

n_1 — синашнинг A ҳодиса рўй беришига қулайлик туғдирувчи натижалари сони ($n_1 \leqslant n$);

m — синашнинг A ҳодиса рўй берди деган фаразда B ҳодиса рўй берадиган элементар натижалари сони, яъни бу натижалар AB ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдиради ($m \leqslant n_1$).

A ва B ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли:

$$P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{n_1}{n}\cdot\frac{m}{n_1}.$$

$\frac{n_1}{n} = P(A)$ ва $\frac{m}{n_1} = P_A(B)$ эканлигини эътиборга олиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(AB) = P(A)\cdot P_A(B). \qquad (*)$$

1- эслатма. (*) формулани BA ходисага қўлласак, $P(BA) = P(B)\cdot P_B(A)$ ни ҳосил қиламиз ёки (BA ҳодиса AB ҳодисадан фарқ қилмаганлиги сабабли):

$$P(AB) = P(B)\cdot P_B(A) \qquad (**)$$

(*) ва (**) формулаларни солиштириб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$P(A)\cdot P_A(B) = P(B)\cdot P_B(A). \qquad (***)$$

Натижа. *Бир нечта боғлиқ ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли улардан бирининг эҳтимолини қолганларининг шартли эҳтимолларига кўпайтмасига тенг, бунда ҳар бир кейинги ҳодисанинг эҳтимоли ундан олдинги ҳамма ҳодисалар рўй берди деган фаразда ҳисобланади:*

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n) = P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n),$$

бу ерда $P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$ A_n ҳодисанинг $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ ҳодисалар рўй берди деган фаразда ҳисобланган эҳтимоли.

Хусусан, учта боғлиқ ҳодиса учун қуйидаги тенглик ўринлидир:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

Шуни қайд қилиб ўтамизки, ҳодисалар ихтиёрий тартибда олиниши мумкин, яъни қайси ҳодисани биринчи, иккинчи ва ҳ. к. деб ҳисоблашнинг фарқи йўқ.

Ихтиёрий n учун исбот математик индукция методи билан олиб борилади.

1-мисол. Йиғувчида 3 та коник, 7 та эллиптик валчалар бор. Йиғувчи таваккалига битта валча, кейин эса яна битта валча олди. Олинган валчалардан биринчиси коник валча, иккинчиси эса эллиптик валча бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Олинган валчалардан биринчиси коник валча бўлиш (A ҳодиса) эҳтимоли:

$$P(A) = \frac{3}{10}.$$

Иккинчи валча эллиптик кўринишда бўлишининг биринчи валча коник кўринишда деган фаразда ҳисобланган, эҳтимоли, яъни шартли эҳтимол қуйидагиға тенг

$$P_A(B) = \frac{7}{9} \cdot$$

Изланаётган эҳтимол боғлиқ ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтириш теоремасига асосан қуйидагига тенг:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}.$$

Белгилашларни сақлаган ҳолда, $P(B) = \frac{7}{10}$, $P_B(A) = \frac{3}{9}$, $P(B) \cdot P_B(A) = \frac{7}{30}$ эканлигини осонгина топамиз, булар ўз навбатида (***) тенгликнинг ўринли эканлигини яққол кўрсатади.

2-мисол. Яшикда 5 та оқ, 4 та қора ва 3 та кўк шар бор. Ҳар бир синаш яшикдан битта шар олишдан иборат, олинган шар яшикка қайтариб солинмайди. Биринчи синашда оқ шар чиқиш (A ҳодиса), иккинчисида қора шар чиқиш (B ҳодиса) ва учинчисида кўк шар чиқиш (C ҳодиса) эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Биринчи синашда оқ шар чиқиш эҳтимоли:

$$P(A) = \frac{5}{12}.$$

Биринчи тажрибада оқ шар чиққан ҳолда иккинчи тажрибада қора шар чиқиш эҳтимоли, яъни шартли эҳтимол:

$$P_A(B) = \frac{4}{11}.$$

Биринчи синашда оқ шар, иккинчисида эса қора шар чиққан ҳолда учинчи синашда кўк шар чиқиш эҳтимоли:

$$P_{AB}(C) = \frac{3}{10}.$$

Изланаётган эҳтимол:

$$P(ABC) = P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C) = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} = \frac{1}{22}.$$

2-эслатма. $P(A) \neq 0$ деб, (*) муносабатдан шартли эҳтимолни топайлик:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Бу тенгликни шартли эҳтимолнинг таърифи сифатида олиш мумкин.

Масалалар

1. Мерганнинг битта ўқ узишда нишонга теккизиш эҳтимоли $p = 0{,}9$. Мерган учта ўқ узди. Учала ўқнинг ҳам нишонга тегиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,729.

2. Танга ва ўйин соққаси ташланди. «Гербли томон тушди» ва «6 очко чиқди» ҳодисаларининг биргаликда рўй бериш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $\frac{1}{12}$.

3. Иккита яшикда деталлар бор: биринчисида 10 та (улардан 3 таси стандарт), иккинчисида 15 та (улардан 6 таси стандарт). Ҳар бир яшикдан таваккалига биттадан деталь олинади. Иккала деталь стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

$P(A) = \frac{3}{10}$ $P(B) = \frac{6}{15}$ $P(AB) = \frac{3}{10}\cdot\frac{6}{15} = \frac{6}{50} = 0{,}12$ *Жавоби.* 0,12.

4. Телевизион студияда 3 та телевизион камера бор. Ҳар бир камеранинг тайин вақтда ишлаб турган бўлиш эҳтимоли $p = 0{,}6$.. Тайин вақтда камида битта камера ишлаб турган бўлиш (A ҳодиса) эҳтимоли қанчага тенг?

Жавоби. 0,936.

5. Учта ўйин соққаси ташланганда камида битта соққада 6 очко тушиш (A ҳодиса) эҳтимоли қанчага тенг?

Жавоби. $\frac{91}{216}$.

6. Корхона тайёрлаган маҳсулотнинг 95% и стандарт, шундан 86% и биринчи сортли. Шу корхонада тайёрланган маҳсулотдан таваккалига олинган биттаси биринчи сорт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,817.

7. Танга бир томони билан кетма-кет икки марта тушгунча ташланади. Қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимолларини топинг: а) тажриба олтинчи отишгача тугайди; б) тангани жуфт марта ташлаш лозим бўлади.

Жавоби. а) $\frac{15}{16}$; б) $\frac{2}{3}$.

8. 1, 2, 3, 4, 5 рақамлардан аввал битта рақам, кейин қолган тўртта рақамдан иккинчи рақам олинади. Мумкин бўлган 20 та натижа тенг имкониятли деб ҳисобланади. а) биринчи олишда; б) иккинчи олишда, в) иккала олишда тоқ рақам чиқиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{5}$;

в) $\frac{3}{10}$.

9. Мерганнинг битта ўқ узишда 10 га теккизиш эҳтимоли $p = 0,6$. Мерган 0,8 дан кичик бўлмаган эҳтимол билан камида бир марта ўнга теккизиш учун нечта ўқ узиши керак?

Жавоби. $n \geqslant 2$.

10. Учта электр лампа занжирга кетма-кет уланган. Тармоқдаги кучланиш номиналдан ортиб кетганда ҳар битта (исталган) лампанинг куйиш эҳтимоли 0,6 га тенг. Кучланиш юқори бўлганда занжирдан ток ўтмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,936.

11. A ҳодисанинг иккита эркли синашда камида бир марта рўй бериш эҳтимоли 0,75 га тенг. A ҳодисанинг битта синашда рўй бериш эҳтимолини топинг (ҳодисанинг иккала синашда ҳам рўй бериш эҳтимоли бир хил деб ҳисобланади).

Жавоби. 0,5.

12. A спорт жамиятининг A_1, A_2, A_3 командалари B жамиятнинг мос равишда уч командаси билан мусобақалашади. A жамият командаларининг B жамият командалари билан учрашувда ютиш эҳтимоллари; A_1 билан B_1 нинг учрашувида 0,8; A_2 билан B_2 нинг учрашувида 0,4; A_3 билан B_3 нинг учрашувида 0,4. Ютиш учун уч ўйиндан камида иккитасида ғолиб чиқиш керак (дуранг натижалар

ҳисобга олинмайди). Қайси жамиятнинг ғалаба қозониш эҳтимоли каттароқ?

Жавоби. A жамиятнинг $\left(P_A = 0{,}544 > \frac{1}{2}\right)$.

13. Битта ўқ узишда нишонга биринчи мерганнинг теккизиш эҳтимоли 0,8 га, иккинчи мерганнинг теккизиш эҳтимоли 0,6 га тенг. Фақат битта мерганнинг нишонга теккизиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,44.

14. 1, 2, . . . , n сонли кетма-кетликдан таваккалига бирин-кетин иккита сон олинади. Улардан бири k бутун мусбат сондан кичик, иккинчиси эса катта бўлиш эҳтимолини топинг, бу ерда $1 < k < n$.

Жавоби. $\frac{2(k-1)(n-k)}{n(n-1)}$.

Кўрсатма. Ушбу икки ҳолни қаранг: а) биринчи сон $< k$ дан, иккинчиси эса $> k$ дан; б) биринчи сон $> k$ дан, иккинчиси эса $< k$ дан.

15. Техникавий контроль бўлими маҳсулотларнинг стандартлилигини текширмоқда. Маҳсулотнинг ностандарт бўлиш эҳтимоли 0,1 га тенг. Қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимолларини топинг: а) текширилган учта маҳсулотдан фақат биттаси ностандарт; б) ностандарт деталь тартиб бўйича фақат тўртинчиси.

Жавоби. а) 0,243; б) 0,0729.

Тўртинчи боб

ҚЎШИШ ВА КЎПАЙТИРИШ ТЕОРЕМАЛАРИНИНГ НАТИЖАЛАРИ

1- §. Биргаликда бўлган ҳодисалар эҳтимоллари учун қўшиш теоремаси

Биз биргаликда бўлмаган ҳодисалар учун қўшиш теоремасини кўрган эдик. Энди биргаликда бўлган ҳодисалар учун қўшиш теоремаси баён қилинади.

Битта синашда иккита ҳодисадан бирининг рўй бериши иккинчисининг рўй беришини инкор қилмаса, бу ҳодисалар *биргаликда* дейилади.

Мисол. A — ўйин соққаси ташланганда тўрт очко чиқиши; B — жуфт сондаги очко чиқиши. A ва B ҳодисалар биргаликда.

A ва B ҳодисалар биргаликда, шу билан бирга бу ҳодисаларнинг эҳтимоллари ва уларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли берилган бўлсин. A ва B ҳодисалардан камида биттасининг рўй беришидан иборат бўлган $A+B$ ҳодисанинг эҳтимолини қандай топиш мумкин? Бу саволга биргаликда бўлган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремаси жавоб беради.

Теорема. *Биргаликда бўлган иккита ҳодисадан камида биттасининг рўй бериш эҳтимоли шу ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндисидан уларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимолини айрилганига тенг:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Исботи. A ва B ҳодисалар биргаликда бўлгани сабабли $A+B$ ҳодисанинг рўй бериши учун қуйидаги учта биргаликда бўлмаган ҳодисадан биттаси рўй бериши керак: $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ ёки AB. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремасига кўра

$$P(A+B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB). \qquad (*)$$

A ҳодиса рўй бериши учун биргаликда бўлмаган $A\bar{B}$ ва AB ҳодисаларнинг биттаси рўй бериши керак. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремасига кўра

$$P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB).$$

Бундан

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB). \qquad (**)$$

Шунга ўхшаш қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(B) = P(A\bar{B}) + P(AB).$$

Бундан

$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB). \qquad (***)$$

(**) ва (***) тенгликларни (*) га қўйиб, натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (****)$$

1-эслатма. Ҳосил қилинган формулани қўллашда A ва B ҳодисалар ўзаро эркли ҳам, боғлиқ ҳам бўлиши мумкин эканлигини назарда тутиш керак.

Эркли ҳодисалар учун

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)\cdot P(B);$$

боғлиқ ҳодисалар учун

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)\cdot P_A(B).$$

2-эслатма. Агар A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмаса, у ҳолда уларнинг биргаликда рўй берганлигидан иборат бўлган ҳодиса мумкин бўлмаган ҳодиса бўлади ва демак, $P(AB) = 0$. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар учун (****) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Биз яна биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремасини ҳосил қилдик. Шундай қилиб, (****) формула биргаликда бўлган ҳодисалар учун ҳам, биргаликда бўлмаган ҳодисалар учун ҳам ўринли.

Мисол. Биринчи ва иккинчи тўплардан ўқ отишда нишонга теккизиш эҳтимоллари мос равишда $p_1 = 0,7$; $p_2 = 0,8$. Битта отишда (иккала тўпдан) тўплардан камида бирининг нишонга теккизиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Ҳар бир тўпнинг нишонга теккизиш эҳтимоли бошқасининг ўқ узишига боғлиқ эмас, шунинг учун A (биринчи тўпдан нишонга теккизиш) ва B (иккинчи тўпдан нишонга теккизиш) ҳодисалар эрклидир.

AB (иккала тўп нишонга теккизади) ҳодисанинг эҳтимоли:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

Изланаётган эҳтимол қуйидагига тенг:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94.$$

Эслатма. Қурилган мисолда A ва B ҳодисалар эркли бўлгани учун $p = 1 - q_1 q_2$ (III боб, 3-§) формуладан фойдаланиш ҳам мумкин эди.

Ҳақиқатан ҳам, A ва B га қарама-қарши ҳодисаларнинг эҳтимоллари, яъни хато кетказиш эҳтимоллари қуйидагича бўлади:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,7 = 0,3;$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Изланаётган эҳтимол, яъни иккала тўпдан бир йўла отишда камида биттасининг нишонга теккизиш эҳтимоли қуйидагига тенг:

$$P = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0,3 \cdot 0,2 = 0,94.$$

Кутилаётганидек, бизга маълум натижани ҳосил қилдик.

2-§. Тўла эҳтимол формуласи

Фараз қилайлик, A ҳодиса тўла группа ташкил этувчи биргаликда бўлмаган $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ҳодисалардан биттасининг рўй берганлик шартида рўй берсин. Бу ҳодисаларнинг эҳтимоллари ва A ҳодисанинг $P_{B_1}(A)$, $P_{B_2}(A)$, $\ldots$, $P_{B_n}(A)$ шартли эҳтимоллари маълум бўлсин. A ҳодисанинг эҳтимолини қандай топиш мумкин? Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. *Тўла группа ташкил этувчи биргаликда бўлмаган B_1, B_2, ..., B_n ҳодисалардан биттасининг рўй берганлик шартидагина рўй берадиган A ҳодисанинг эҳтимоли шу ҳодисалардан ҳар бирининг эҳтимолини A ҳодисанинг мос шартли эҳтимолига кўпайтмалари йиғиндисига тенг:*

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(B) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

Бу формула «тўла эҳтимол формуласи» дейилади.

Исботи. Шартга кўра A ҳодиса рўй бериши учун биргаликда бўлмаган B_1, B_2, ..., B_n ҳодисаларнинг биттаси рўй берган бўлиши керак. Бошқача қилиб айтганда, A ҳодисанинг рўй бериши биргаликда бўлмаган B_1A, B_2A, ..., B_nA ҳодисаларнинг қайси бири бўлса ҳам, биттасининг рўй беришини билдиради. A ҳодисанинг эҳтимолини ҳисоблаш учун қўшиш теоремасидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + \ldots + P(B_nA). \qquad (*)$$

Ҳар бир қўшилувчини ҳисоблаш лозим. Боғлиқ ҳодисалар эҳтимоллари учун кўпайтириш формуласига асосан

$$P(B_1A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A); \quad P(B_2A) = P(B_2) \cdot P_{B_3}(A); \ \ldots ;$$

$$P(B_nA) = P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Бу тенгликларнинг ўнг томонидаги ифодаларни (*) муносабатга қўйиб, тўла эҳтимол формуласини ҳосил қиламиз:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

1-мисол. Икки тўда деталлар бор. Биринчи тўдадаги деталнинг стандарт бўлиш эҳтимоли 0,8 га, иккинчи тўдадаги деталнинг стандарт бўлиши эса 0,9 га тенг. Таваккалига (таваккалига танланган тўдадан) олинган деталнинг стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. A ҳодиса орқали стандарт деталь олинишини белгилаймиз.

Деталь ё биринчи тўдадан (B_1 ҳодиса), ёки иккинчи тўдадан (B_2 ҳодиса) олинган бўлиши мумкин.

Деталь биринчи тўдадан олинган бўлиш эҳтимоли:

$$P(B_1) = \frac{1}{2}.$$

Деталь иккинчи тўдадан олинган бўлиш эҳтимоли:

$$P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

Биринчи тўдадан стандарт деталь олинган бўлишининг шартли эҳтимоли:

$$P_{B_1}(A) = 0{,}8.$$

Иккинчи тўдадан стандарт деталь олинган бўлишининг шартли эҳтимоли:

$$P_{B_2}(A) = 0{,}9.$$

Изланаётган эҳтимол — таваккалига олинган деталнинг стандарт бўлиш эҳтимоли тўла эҳтимол формуласига асосан:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) =$$

$$= 0{,}5\cdot 0{,}8 + 0{,}5\cdot 0{,}9 = 0{,}85.$$

2-мисол. Биринчи қутида 20 та радиолампа бўлиб, улардан 18 таси стандарт; иккинчи қутида эса 10 та радиолампа бўлиб, улардан 9 таси стандарт. Иккинчи қутидан таваккалига битта лампа олиниб, биринчи қутига солинган. Биринчи қутидан таваккалига олинган лампанинг стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. A деб, биринчи қутидан стандарт лампа олинганлик ҳодисасини белгилаймиз.

Иккинчи қутидан ё стандарт лампа олинган (B_1 ҳодиса) ёки ностандарт лампа олинган (B_2 ҳодиса) бўлиши мумкин. Иккинчи қутидан стандарт лампа олиниш эҳтимоли:

$$P(B_1) = \frac{9}{10}.$$

Иккинчи қутидан ностандарт лампа олиниш эҳтимоли

$$P(B_2) = \frac{1}{10}.$$

Иккинчи қутидан биринчи қутига стандарт лампа олиб қўйилганлик шартида биринчи қутидан стандарт лампа олинишининг шартли эҳтимоли қуйидагига тенг:

$$P_{B_1}(A) = \frac{19}{21}.$$

Иккинчи қутидан биринчи қутига ностандарт лампа олиб қўйилганлик шартида биринчи қутидан стандарт лампа олинишининг шартли эҳтимоли қуйидагига тенг:

$$P_{B_2}(A_2) = \frac{18}{21}.$$

Изланаётган эҳтимол, яъни биринчи қутидан стандарт лампа олиниш эҳтимоли тўла эҳтимол формуласига асосан қуйидагига тенг:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) =$$
$$= \frac{9}{10}\cdot\frac{19}{21} + \frac{1}{10}\cdot\frac{18}{21} = 0{,}9.$$

3-§. Гипотезалар эҳтимоли. Бейес формуласи

Фараз қилайлик, A ҳодиса тўла группа ташкил этувчи биргаликда бўлмаган $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ҳодисалардан бири рўй бериш шартидагина рўй бериши мумкин бўлсин. Бу ҳодисаларнинг қайси бири рўй бериши аввалдан номаълум бўлгани сабабли улар *гипотезалар* дейилади. A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли тўла эҳтимол формуласига асосан аниқланади (2-§):

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \ldots +$$
$$+ P(B_n)\cdot P_{B_n}(A). \qquad (*)$$

Фараз қилайлик, синаш ўтказилган бўлиб, унинг натижасида A ҳодиса рўй берган бўлсин. Гипотезаларнинг эҳтимоллари қандай ўзгарганлигини (A ҳодиса рўй берганлиги сабабли) аниқлаш масаласини қўяйлик. Бошқача айтганда,

$$P_A(B_1),\ P_A(B_2),\ \ldots,\ P_A(B_n)$$

шартли эҳтимолларни излаймиз.

Аввал $P_A(B_1)$ шартли эҳтимолни топамиз. Кўпайтириш теоремасига асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(AB_1) = P(A)\cdot P_A(B_1) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A).$$

Бундан

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Бу муносабатда $P(A)$ ни (*) формулага асосан алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}\cdot$$

Қолган гипотезаларнинг шартли эҳтимолларини аниқлайдиган формулалар шунга ўхшаш келтириб чиқарилади, яъни ихтиёрий B_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) гипотезанинг шартли эҳтимоли қуйидаги формула бўйича ҳисобланиши мумкин:

$$P_B(B_i) = \frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}\cdot$$

Ҳосил қилинган формулалар (уларни 1764 йилда келтириб чиқарган инглиз математиги номи билан) *Бейес формулалари* дейилади. Бейес формулалари синаш натижасида A ҳодиса рўй берганлиги маълум бўлгандан сўнг гипотезалар эҳтимолларини қайта баҳолашга имкон беради.

Мисол. Завод цехида тайёрланадиган деталлар уларнинг стандартлилигини текшириш учун икки контролёрдан бирига тушади. Деталнинг биринчи контролёрга тушиш эҳтимоли 0,6 га, иккинчисига тушиш эҳтимоли 0,4 га тенг. Яроқли детални стандарт деб тан олиш эҳтимоли биринчи контролёр учун 0,94 га, иккинчиси учун 0,98 га тенг. Текширишда вақтида яроқли деталь стандарт деб қабул қилинди. Шу детални биринчи контролёр текширганлик эҳтимолини топинг.

Ечилиши. A орқали яроқли деталь стандарт деб қабул қилинганлик ҳодисасини белгилаймиз. Икки хил тахмин қилиниши мумкин:

1) детални биринчи контролёр текширган (B_1 гипотеза);

2) детални иккинчи контролёр текширган (B_2 гипотеза).

Изланаётган эҳтимолни, яъни детални биринчи контролёр текширганлиги эҳтимолини Бейес формуласи бўйича топамиз:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}\cdot$$

Масала шартига кўра:

$P(B_1) = 0,6$ (деталнинг биринчи контролёрга тушиш эҳтимоли);

$P(B_2) = 0,4$ (деталнинг иккинчи контролёрга тушиш эҳтимоли);

$P_{B_1}(A) = 0,94$ (биринчи контролёрнинг яроқли детални стандарт деб қабул қилиш эҳтимоли);

$P_{B_2}(A) = 0,98$ (иккинчи контролёрнинг яроқли детални стандарт деб қабул қилиш эҳтимоли).

Изланаётган эҳтимол:

$$P_A(B_1) = \frac{0,6 \cdot 0,94}{0,6 \cdot 0,94 + 0,4 \cdot 0,98} \approx 0,59.$$

Кўриниб турибдики, синашгача B_1 гипотезанинг эҳтимоли 0,6 га тенг эди, синаш натижаси маълум бўлгандан сўнг эса шу гипотезанинг эҳтимоли (аниқроғи, шартли эҳтимоли) ўзгарди ва 0,59 га тенг бўлди. Шундай қилиб, Бейес формуласи қаралаётган гипотезанинг эҳтимолини қайта баҳолашга имкон берди.

Масалалар

1. Иккита мерган биттадан ўқ узишди. Биринчи мерганнинг нишонга теккизиш эҳтимоли 0,7 га, иккинчисиники эса 0,6 га тенг. Мерганлардан ақалли биттаси нишонга теккизганлиги эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,88.

2. Йиғувчида 1-заводда тайёрланган 16 та деталь, 2-заводда тайёрланган 4 та деталь бор. Таваккалига 2 та деталь олинди. Улардан ақалли биттасини 1-завод тайёрлаганлиги эҳтимолини топинг.

Жавоби. $\frac{92}{95}$.

3. Спортчилар группасида 20 чангичи, 6 велосипедчи ва 4 югурувчи бор. Саралаш нормасини бажариш эҳтимоли чанғичи учун 0,9, велосипедчи учун 0,8, югурувчи учун 0,75. Таваккалига ажратилган спортчининг нормани бажара олиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,86.

4. Йиғувчига 1-заводда тайёрланган деталлардан 3 яшик, 2-заводда тайёрланган деталлардан 2 яшик келтирилди. 1-заводдан келтирилган деталнинг стандарт бўлиш эҳтимоли 0,8 га, 2-заводдан келтирилган деталнинг стандарт бўлиш эҳтимоли 0,9 га тенг. Йиғувчи таваккалига бир яшикни танлаб, ундан таваккалига битта деталь олди. Олинган деталнинг стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,84.

5. Биринчи яшикда 20 та деталь бўлиб, улардан 15 таси стандарт; иккинчи яшикда 30 та деталь бўлиб, улардан 21 таси стандарт; учинчи яшикда 10 та деталь бўлиб, улардан 6 таси стандарт. Таваккалига

танланган яшикдан таваккалига олинган деталнинг стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $\frac{43}{60}$.

6. Телевизион ательеда 4 та кинескоп бор. Кинескопнинг гарантия муддатини ўташ эҳтимоли мос равишда 0,8; 0,85; 0,9; 0,95 га тенг. Таваккалига олинган кинескопнинг гарантия муддатини ўташ эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,875.

7. Иккита яшикда радиолампалар бор. Биринчи яшикда 12 та лампа бўлиб, улардан биттаси ностандарт; иккинчисида 10 та лампа бўлиб, улардан биттаси ностандарт. Биринчи яшикдан таваккалига битта лампа олиниб, иккинчисига солинган. Иккинчи яшикдан таваккалига олинган деталнинг ностандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $\frac{13}{132}$.

8. 28 та тошли доминодан таваккалига битта тош олинган. Таваккалига олинган иккинчи тошни биринчи тош ёнига ўйин қоидаси бўйича қўйиш мумкин бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $\frac{7}{18}$.

9. Студент имтиҳон билетларининг баъзиларини билмайди. Студент учун қайси ҳолда у билмайдиган билетни олиш эҳтимоли кичик бўйича бўлади: биринчи бўлиб олгандами ёки охирги бўлиб олгандами?

Жавоби. Иккала ҳолда ҳам эҳтимоллар бир хил.

10. Ичида 3 та бир хил деталь бўлган яшикка битта стандарт деталь солингандан сўнг, яшикдан таваккалига битта деталь олинди. Агар яшикдаги олдинги деталлар ичида стандарт деталлар сони тўғрисидаги мумкин бўлган барча тахминлар тенг имкониятли бўлса, олинган деталнинг стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,625.

11. Автомат нормал ишлаш режимидан четлашганда C — I сигнализатор 0,8 эҳтимол билан, C — II сигнализатор эса 1 эҳтимол билан ишга тушади. Автомат C — I ёки C — II сигнализатор билан таъминланганлик эҳтимоли мос равишда 0,6 га ва 0,4 га тенг. Автоматнинг бузилганлиги тўғрисида сигнал олинди. Қайси бири каттароқ эҳтимолга эга; автомат C — I сигнализатор билан таъминланганими ёки C — II сигнализатор биланми?

Жавоби. Автоматнинг C — I сигнализатор билан таъминланган бўлиш эҳтимоли $\frac{6}{11}$ га, C — II билан эса $\frac{5}{11}$ га тенг.

12. Студентларнинг саралаш спорт мусобақаларида қатнашиш учун курснинг биринчи группасидан 4 студент, иккинчи группасидан 6 студент, учинчи группасидан 5 студент ажратилган. Биринчи, иккинчи ва учинчи группа студентининг институт терма командасига кириш

эҳтимоли мос равишда 0,9; 0,7 ва 0,8 га тенг. Тасодифан танланган студент мусобақа натижасида терма команда составига олинди. Студентнинг қайси группага тегишли бўлиш эҳтимоли каттароқ?

Жавоби. Биринчи, иккинчи, учинчи группанинг студенти танланган бўлиш эҳтимоли мос равишда $\frac{18}{59}$, $\frac{21}{59}$, $\frac{20}{59}$ га тенг.

13. Корхона маҳсулотининг стандартлилик талабига жавоб бериш эхтимоли 0,96 га тенг. Маҳсулотнинг стандартлигини текширишнинг соддалаштирилган системаси таклиф қилинган бўлиб, у стандарт маҳсулотни 0,98 эҳтимол билан стандарт деб, ностандарт маҳсулотни эса 0,05 эҳтимол билан стандарт деб топади. Текширишда стандарт деб топилган маҳсулотнинг ҳақиқатан ҳам стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,998.

Бешинчи боб

СИНАШЛАРНИНГ ТАКРОРЛАНИШИ

1- §. Бернулли формуласи

Агар бир нечта синаш ўтказилаётган бўлиб, ҳар бир синашда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли бошқа синаш натижаларига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бундай синашлар A *ҳодисага нисбатан эркли* дейилади.

Ҳар хил эркли синашларда A ҳодиса ё ҳар хил эҳтимолга, ёки бир хил эҳтимолга эга бўлиши мумкин. Биз бундан кейин A ҳодиса бир хил эҳтимолга эга бўлган эркли синашларни текширамиз.

Биз қуйида ҳар бири содда ҳодиса деб аталадиган бир нечта содда ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат бўлган мураккаб ҳодиса тушунчасидан фойдаланамиз.

Фараз қилайлик, n та ўзаро эркли синаш ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодиса ё рўй бериши, ёки рўй бермаслиги мумкин бўлсин. A ҳодисанинг эҳтимоли ҳар бир синашда бир хил, чунончи p га тенг деб ҳисоблаймиз. Демак, ҳар бир синашда A ҳодисанинг рўй бермаслик эҳтимоли ҳам ўзгармас ва $q = 1 - p$ га тенг.

n та синашда A ҳодисанинг роса k марта рўй бериши, ва демак, $n - k$ марта рўй бермаслик эҳтимолини ҳисоблашни ўз олдимизга мақсад қилиб қўяйлик.

Шуни айтиб ўтиш муҳимки, A ҳодисанинг k марта аниқ бир кетма-кетликда рўй бериши талаб қилинмайди. Масалан, агар A ҳодисанинг тўртта синашда уч марта рўй бериши тўғрисида гап кетса, у ҳолда қуйидаги мураккаб ҳодисалар бўлиши мумкин:

$$AAA\bar{A},\ AA\bar{A}A,\ A\bar{A}AA \text{ ва } \bar{A}AAA,$$

$AAA\bar{A}$ ёзув биринчи, иккинчи ва учинчи синашда A ҳодиса рўй бериб, тўртинчисида эса у рўй бермаганлигини, яъни $\bar{A}$ карама-қарши ҳодиса рўй берганлигини билдиради; қолган ёзувлар ҳам тегишли маънони билдиради.

Изланаётган эҳтимолни $P_n(k)$ орқали белгилаймиз. Масалан, $P_5(3)$ символ бешта синашда ҳодиса роса 3 марта рўй бериши, демак, 2 марта рўй бермаслик эҳтимолини билдиради.

Қўйилган масалани Бернулли формуласи деб аталувчи формула ҳал этади.

Бернулли формуласини келтириб чиқариш. n та синашда A ҳодисанинг роса k марта рўй бериши ва $n-k$ марта рўй бермаслигидан иборат бўлган битта мураккаб ҳодисанинг эҳтимоли эркли ҳодисалар эҳтимоли кўпайтириш теоремасига кўра

$$p^k q^{n-k}$$

га тенг. Бундай мураккаб ҳодисалар n та элементдан k тадан нечта группалаш тузиш мумкин бўлса, шунча, яъни C_n^k та бўлади. Бу мураккаб ҳодисалар биргаликда бўлмаганлиги учун биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремасига асосан, изланаётган эҳтимол барча мумкин бўлган мураккаб ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисига тенг. Бу мураккаб ҳодисаларнинг эҳтимоллари бир хил бўлгани учун изланаётган эҳтимол (n та синашда A ҳодисанинг k марта рўй бериш эҳтимоли) битта мураккаб ҳодисанинг эҳтимолини уларнинг сонига кўпайтирилганига тенг:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

ёки

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Ҳосил қилинган формула Бернулли формуласи дейилади.

Мисол. Бир суткада электр энергия сарфининг белгиланган нормадан ортиб кетмаслик эҳтимоли $p = 0,75$ га тенг.

Яқин 6 сутканинг 4 суткаси давомида электр энергия сарфининг нормадан ортиб кетмаслик эҳтимолини топинг.

Ечилиши. 6 сутканинг ҳар бирида электр энергиянинг нормада сарфланиш эҳтимоли ўзгармас ва $p = 0,75$ га тенг. Демак, ҳар бир суткада электр энергиянинг нормадан ортиқ сарфланиш эҳтимоли ҳам ўзгармас ва $q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25$ га тенг.

Изланаётган эҳтимол Бернулли формуласига кўра қуйидагига тенг:

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}(0,75)^4\cdot(0,25)^2 = 0,30.$$

2-§. Лапласнинг локал теоремаси

Юқорида биз n та синашда ҳодисанинг роса k марта рўй бериш эҳтимолини ҳисоблашга имкон берадиган Бернулли формуласини келтириб чиқардик. Формулани келтириб чиқаришда ҳодисанинг ҳар бир синашда рўй бериш эҳтимоли ўзгармас деб фараз қилдик.

Осонгина кўриш мумкинки, Бернулли формуласини n нинг катта қийматларида қўллаш қийин, чунки формула катта сонлар устида амаллар бажаришни талаб қилади. Масалан, $n = 50$, $k = 30$, $p = 0,1$ бўлса, у ҳолда $P_{50}(30)$ эҳтимолни ҳисоблаш учун $P_{50}(30) = \frac{50!}{30!\,20!}(0,1)^{30}\cdot(0,9)^{20}$ ифодани ҳисоблашга тўғри келади, бу ерда $50! = 30414093\cdot 10^{57}$, $30! = 26525\,286\cdot 10^{25}$, $20! = 24\,329\,020\cdot 10^{11}$. Тўғри, факториаллар логарифмлари махсус жадвалларидан фойдаланиб, бу ҳисобларни бир оз соддалаштириш мумкин. Аммо бу йўл ҳам узундан узоқ ҳисоблашларни талаб қилади, ундан ташқари, у жиддий камчиликка эга: жадваллар логарифмларнинг тақрибий қийматларидан тузилган, шунинг учун ҳисоблашларда хатолар йиғилиб боради; пировардида ҳисобланган натижа ҳақиқий натижадан анча фарқ қилиши мумкин.

Бундай савол туғилиши табиий: бизни қизиқтираётган эҳтимолни Бернулли формуласини қўлламасдан ҳисоблаш ҳам мумкинми? Ҳа, мумкин экан. Лапласнинг локал теоремаси синашлар сони етарлича катта бўлганда ҳодисанинг n та тажрибада роса k марта рўй бериш эҳтимолини тақрибий ҳисоблаш учун асимптотик* формула беради.

Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$ бўлса, $\varphi(x)$ функция $f(x)$ функциянинг асимптотик яқинлашиши дейилади.

Айтиб ўтиш керакки, хусусий ҳолда, чунончи, $p = \frac{1}{2}$ бўлганда асимптотик формулани 1730 йилда Муавр топган эди; 1783 йилда эса Муавр формуласини Лаплас 0 ва 1 дан фарқли ихтиёрий p учун умумлаштирган. Шунинг учун бу ерда сўз бораётган теоремани баъзан Муавр—Лаплас теоремаси деб аталади.

Лапласнинг локал теоремасининг исботи анча мураккаб бўлганлиги сабабли, биз бу ерда теореманинг ўзини ва унинг қўлланилишини кўрсатувчи мисоллар келтирамиз, холос.

Лапласнинг локал теоремаси. *Агар ҳар бир синашда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p ўзгармас бўлиб, ноль ва бирдан фарқли бўлса, у ҳолда n та синашда A ҳодисанинг роса k марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(k)$ тақрибан (n қанча катта бўлса, шунча аниқ)*

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

функциянинг $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ *даги қийматига тенг.*

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциянинг x аргументнинг мусбат қийматларига мос қийматларидан тузилган жадваллар мавжуд (1-илова). $\varphi(x)$ функция жуфт, яъни $\varphi(-x) = \varphi(x)$ бўлганлиги учун бу жадваллардан аргументнинг қийматлари манфий бўлганда ҳам фойдаланилади.

Шундай қилиб, n та эркли синашда A ҳодисанинг роса k марта рўй бериш эҳтимоли тақрибан қуйидагига тенг:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

$$\text{бу ерда } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

1- мисол. Агар ҳар бир синашда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,2 га тенг бўлса, 400 та синашда бу ҳодисанинг роса 80 марта рўй бериш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $n = 400$; $k = 80$; $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$. Лапласнинг асимптотик формуласидан фойдаланамиз:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(x).$$

x нинг масала маълумотлари орқали аниқланадиган қийматини ҳисоблаймиз;

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400\cdot 0,2}{8} = 0.$$

Жадвалдан (1-илова) $\varphi(0) = 0,3989$ эканлигини топамиз.

Изланаётган эҳтимол:

$$P_{400}(80) = \frac{1}{8}\cdot 0,3989 = 0,04986.$$

Бернулли формуласи ҳам тахминан шу натижага олиб келади (ҳисоблашлар узундан-узоқ бўлгани учун келтирилмади):

$$P_{400}(80) = 0,0498.$$

2-мисол. Мерганнинг ўқ узишда нишонга теккизиш эҳтимоли $p = 0,75$. Мерган 10 та ўқ узганда 8 та ўқни нишонга теккизиш эҳтимолини топинг

Ечилиши. Шартга кўра $n = 10$; $k = 8$; $p = 0,75$; $q = 0,25$. Лапласнинг асимптотик формуласидан фойдаланамиз:

$$P_{10}(8) \approx \frac{1}{\sqrt{10\cdot 0,75\cdot 0,25}}\cdot\varphi(x) = 0,7301\cdot\varphi(x).$$

x нинг масала маълумотлари бўйича аниқланадиган қийматини ҳисоблаймиз:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{8 - 10\cdot 0,75}{\overline{10\cdot 0,75\cdot 0,25}} \approx 0,36.$$

Жадвалдан (1-илова) $\varphi(0,36) = 0,3739$ ни топамиз.

Изланаётган эҳтимол:

$$P_{10}(8) = 0,7301\cdot 0,3739 = 0,273.$$

Бернулли формуласи бошқа натижага, чунончи $P_{10}(8) = 0,282$ га олиб келади. Жавобларнинг бунчалик катта фарқ қилиши бу мисолда n кичик қийматга эгалиги билан тушунтирилади (Лаплас формуласи n нинг катта қийматларидагина яхши яқинлашиш беради).

3-§. Лапласнинг интеграл теоремаси

Яна фараз қилайлик, n тажриба ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли ўзгармас ва p га $(0<p<1)$ тенг бўлсин. n та тажрибада A ҳодисанинг камида k_1 та ва кўпи билан k_2 марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(k_1, k_2)$ ни қандай ҳисоблаш мумкин (қисқалик учун «k_1 дан k_2 мартагача» деймиз)? Бу саволга Лапласнинг интеграл теоремаси жавоб беради, у қуйида исботсиз келтирилади.

Теорема *Агар ҳар бир синашда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p ўзгармас бўлиб, ноль ва бирдан фарқли бўлса, у ҳолда n та синашда A ҳодисанинг k_1 дан k_2 мартагача рўй бериш эҳтимоли $P_n(k_1, k_2)$ тақрибан қуйидаги аниқ интегралга тенг:*

$$P_n(k_1, k_2) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \qquad (*)$$

бу ерда

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{ва} \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Лапласнинг интеграл теоремасини қўллашни тақозо этувчи масалаларни ечишда махсус жадваллардан фойдаланилади, чунки $\int e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ аниқмас интеграл элементар функциялар орқали ифодаланмайди. Китобнинг охирида (2-илова) $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ интеграл учун жадвал келтирилган. Жадвалда $\Phi(x)$ функциянинг x нинг мусбат қийматларига ва $x = 0$ га мос қийматлари берилган; $x < 0$ бўлганда ҳам шу жадвалдан фойдаланилади ($\Phi(x)$ функция тоқ, яъни $\Phi(-x) = -\Phi(x)$)

Жадвалда интегралнинг $x = 5$ гача бўлган қийматлари берилган, чунки $x > 5$ лар учун $\Phi(x) = 0,5$ деб олиш мумкин. $\Phi(x)$ функция кўпинча Лаплас функцияси дейилади.

Лаплас функцияси жадвалидан фойдаланиш мумкин бўлиши учун (*) муносабатни бундай ўзгартирамиз:

$$P_n(k_1, k_2) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x'} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Шундай қилиб, n та эркли синашда A ҳодисанинг k_1 дан k_2 мартагача рўй бериш эҳтимоли

$$P_n(k_1, k_2) \simeq \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

бу ерда $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ ва $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Лапласнинг интеграл теоремасини қўллашга доир мисоллар келтирамиз.

Мисол. Деталини техникавий контроль бўлими (ОТК) текширмаган бўлиш эҳтимоли $p = 0,2$. Тасодифан олинган 400 та деталдан 70 тадан 100 тагачасини ОТК текширмаган бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $p = 0,2$; $q = 0,8$; $n = 400$; $k_1 = 70$; $k_2 = 100$.

Лапласнинг интеграл теоремасидан фойдаланамиз:

$$P_{400}\ (70,100) \approx \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Интеграллашнинг юқори ва қуйи чегараларини ҳисоблаймиз:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

Шундай қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_{400}(70,100) = \Phi(2\ 5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

Жадвалдан (2-илова) қуйидагини топамиз:

$$\Phi(2,5) = 0,4938;\ \Phi(1,25) = 0,3944.$$

Изланаётган эҳтимол:

$$P_{400}(70,100) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

Эслатма. Ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли ўзгармас ва p га тенг бўлган n та эркли синашда A ҳодисанинг рўй бериш сонини m орқали белгилаймиз. Агар m сон k_1 дан k_2 гача ўзгарса, у ҳолда $\frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ каср $\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = x'$ дан $\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = x''$ гача ўзгаради. Демак, Лапласнинг интеграл теоремасини қуйидагича ёзиш ҳам мумкин:

$$P\left(x' \leqslant \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leqslant x''\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Қуйида шу кўринишда ёзишдан фойдаланамиз.

4-§. Эркли синашларда нисбий частотанинг ўзгармас эҳтимолдан четланиш эҳтимоли

Яна ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли ўзгармас ва p га $(0<p<1)$ тенг бўлган n та эркли синаш ўтказилмоқда деб ҳисоблаймиз. $\frac{m}{n}$ нисбий частотанинг ўзгармас p эҳтимолдан четланиши абсолют қиймати бўйича аввалдан берилган $\varepsilon>0$ сондан катта бўлмаслик эҳтимолини топишни ўз олдимизга мақсад қилиб қўяйлик. Бошқача қилиб айтганда,

$$\left|\frac{m}{n}-p\right| \leqslant \varepsilon \qquad (*)$$

тенгсизликнинг рўй бериш эҳтимолини топамиз. Бу эҳтимолни бундай белгилаймиз: $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \leqslant \varepsilon\right)$. (*) тенгсизликни унга тенг кучли

$$-\varepsilon \leqslant \frac{m}{n}-p \leqslant \varepsilon \text{ ёки } -\varepsilon \leqslant \frac{m-np}{n} \leqslant \varepsilon$$

тенгсизликлар билан алмаштирамиз. Бу тенгсизликларни мусбат $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ кўпайтувчига кўпайтириб, дастлабки тенгсизликка тенг кучли тенгсизликларни ҳосил қиламиз:

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{npq}} \leqslant \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leqslant \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Лапласнинг интеграл теоремасининг эслатмада (52- бет) кўрсатилган кўринишидан фойдаланамиз:

$x' = -\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ ва $x'' = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ деб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \leqslant \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leqslant \varepsilon\sqrt{\frac{n}{nq}}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Ниҳоят, қавс ичидаги тенгсизликларни уларга тенг кучли бўлган дастлабки тенгсизлик билан алмаштириб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right)\simeq 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Шундай қилиб,

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon$$

тенгсизликнинг рўй бериш эҳтимоли тақрибан Лаплас функциясининг $x=\varepsilon\sqrt{\frac{p}{pq}}$ даги иккиланган $2\Phi(x)$ қийматига тенг.

1-мисол. Деталнинг нostандарт бўлиш эҳтимоли $p = 0,1$. Тасодифан олинган 400 та деталь ичида нostандарт деталлар бўлиши нисбий частотасининг $p = 0,1$ эҳтимолдан четланиши абсолют қиймати бўйича 0,03 дан катта бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $n = 400$; $p = 0,1$; $q = 0,9$; $\varepsilon = 0,03$.

$P\left(\left|\frac{m}{400}-0,1\right|\leqslant 0,03\right)$ эҳтимолни топиш талаб қилинади.

$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ формуладан фойдаланиб,

$$P\left(\left|\frac{m}{400}-0,1\right|\leqslant 0,03\right)\approx 2\,\Phi\left((0,03\sqrt{\frac{400}{0,1\cdot 0,9}}\right)=2\Phi(2)$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

Жадвалдан (2-илова) $\Phi(2) = 0,4772$ эканлигини топамиз' Демак, $2\Phi(2) = 0,9544$.

Шундай қилиб, изланаётган эҳтимол тақрибан 0,9544 га тенг. Ҳосил қилинган натижанинг маъноси қуйидагича: агар етарли даражада кўп марта текшириш ўтказилиб, ҳар бир текширишда 400 тадан деталь олинса, у ҳолда бу текширишларнинг тахминан 95,44% ида нисбий частотанинг ўзгармас $p = 0,1$ эҳтимолдан четланиши абсолют қиймати бўйича 0,03 дан катта бўлмайди.

2-мисол. Деталнинг нostандарт бўлиш эҳтимоли $p = 0,1$. 0,9544 эҳтимол билан (олинган деталлар ичида) нostандарт деталлар чиқиши нисбий частотасининг ўзгармас p эҳтимолдан четланиши абсолют қиймати бўйича 0,03 дан катта эмас дея олиш учун қанча деталь олиниши керак?

Ечилиши. Шартга кўра $p = 0,1$; $q = 0,9$; $\varepsilon = 0,03$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,1\right| \le 0,03\right) = 0,9544.$$

n ни топиш талаб қилинади.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

формуладан фойдаланамиз.

Шартга асосан:

$$2\Phi\left(0,03\sqrt{\frac{n}{0,1\cdot 0,9}}\right) = 2\Phi(0,1\sqrt{n}) = 0,9544.$$

Демак, $\Phi(0,1\sqrt{n}) = 0,4772$.

Жадвалдан (2-илова) $\Phi(2) = 0,4772$ ни топамиз.

n сонни топиш учун қуйидаги тенгламани ҳосил қилдик:

$$0,1\sqrt{n} = 2.$$

Бундан, изланаётган деталлар сони: $n = 400$.

Ҳосил қилинган натижанинг маъноси қуйидагича: агар ҳар бирида 400 тадан деталь олиб, етарли даражада кўп текширишлар ўтказилса, у ҳолда шулардан 95,44% ида ностандарт деталлар чиқиши нисбий частотасининг ўзгармас p эҳтимолдан четланиши абсолют қиймати бўйича 0,03 дан катта бўлмайди, яъни нисбий частота қуйидаги чегараларда ётади: 0,07(0,1 — 0,03 = 0,07) дан 0,13 (0,1 + 0,03 = = 0,13) гача.

Бошқача қилиб айтганда, текширишларнинг 95,44% ида ностандарт деталлар сони 28 дан (400 нинг 7 % и) 52 гача (400 нинг 13%) бўлган чегараларда ётади.

Агар 400 деталь олиниб, битта текшириш ўтказилса, у ҳолда текширишда ностандарт деталлар 28 тадан кам эмас ва 52 тадан кўп эмаслигини катта ишонч билан кутиш мумкин. Ностандарт деталлар сони, гарчи кичик эҳтимол билан бўлса-да, 28 тадан кам ёки 52 тадан кўп бўлиши мумкин.

Масалалар

1. Цехда 6 та мотор бор. Ҳар бир моторнинг тайин вақтда ишлаб турган бўлиш эҳтимоли 0,8 га тенг. Шу тайин вақтда а) 4 та мотор ишлаб турган бўлиш, б) ҳамма моторлар ишлаб турган бўлиш, в) барча моторлар ишламасдан турган бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) $P_6(4) = 0,246$;
б) $P_6(6) = 0,26$;
в) $P_6(0) = 0,000064$.

2. Агар ҳар бир синашда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,3 га тенг бўлса, бешта эркли синашда ҳодисанинг камида икки марта рўй бериш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 1 - [P_5(0) + P_5(1)] = 0{,}472.$

3. B ҳодиса A ҳодиса камида икки марта рўй берган ҳолда рўй беради. Ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,4 га тенг бўлган 6 та эркли синаш ўтказилган бўлса, B ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 1 - [P_6(0) + P_6(1)] = 0{,}767.$

4. Ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,1 га тенг бўлган 8 та эркли синаш ўтказилган. A ҳодисанинг камида икки марта рўй бериш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 1 - [P_8(0) + P_8(1)] = 0{,}19.$

5. Танга 6 марта ташланган. Гербли томон а) кўпи билан бир марта тушиш, б) камида икки марта тушиш эҳтимолини топинг.

Жавоби а) $P = P_6(0) + P_6(1) = \frac{7}{64}.$

б) $P = 1 - [P_6(0) + P_6(1)] = \frac{57}{64}.$

6. Тўпдан битта ўқ узишда нишонга тегиш эҳтимоли $p = 0{,}9$. Нишонга k ($k \geqslant 1$) та ўқ текканда унинг яксон бўлиш эҳтимоли $1 - q^k$ га тенг. Агар иккита ўқ узилган бўлса, нишоннинг яксон бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,9639.

Кўрсатма. Бернулли формуласи ва тўла эҳтимол формуласидан фойдаланинг.

7. Агар синашнинг ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,2 га тенг бўлса, 400 та синашда шу ҳодисанинг роса 104 марта рўй бериш эҳтимолини тақрибан топинг.

Жавоби. $P_{400}(104) = 0{,}0006.$

8. Мерганнинг битта ўқ узишда нишонга теккизиш эҳтимоли 0,75 га тенг, 100 та ўқ узилганда нишонга теккан ўқлар сони а) 70 дан кам эмас ва 80 дан кўп эмас, б) 70 дан кўп эмас бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) $P_{100}(70{,}80) = 2\Phi(1{,}15) = 0{,}7498;$

б) $P_{100}(0{,}70) = -\Phi(1{,}15) + 0{,}5 = 0{,}1251.$

9. 10000 та эркли синашнинг ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p = 0{,}75$. Ҳодиса рўй бериши нисбий частотасининг ҳодиса

эҳтимолидан четланиши абсолют қиймати бўйича 0,001 дан катта бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 2\Phi(0{,}23) = 0{,}182$

10. Эркли синашларнинг ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,2 га тенг. 5000 та синашда 0,9128 эҳтимоллик билан ҳодиса рўй бериши нисбий частотасининг ҳодиса эҳтимолидан қанчалик четланишини кутиш мумкин?

Жавоби. $\varepsilon = 0{,}00967$.

11. Тангaнинг гербли томони тушиши нисбий частотасининг $p = 0{,}5$ эҳтимолдан четланиши абсолют қиймати бўйича 0,01 дан катта бўлмаслигини 0,6 эҳтимол билан кутиш учун тангани неча марта ташлаш керак?

Жавоби. $n = 1764$

Иккинчи қисм

ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР

Олтинчи боб

ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАРНИНГ ТУРЛАРИ. ДИСКРЕТ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРНИНГ БЕРИЛИШИ

1-§. Тасодифий миқдор

Китобнинг биринчи қисмидаёқ у ёки бу сон чиқишидан иборат бўлган ҳодисалар келтирилди. Масалан, ўйин соққасини ташлаганда 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 сонлар чиқиши мумкин эди. Чиққан очколар сонини аввалдан айтиб бўлмайди, чунки у тўла-тўкис инобатга олиб бўлмайдиган кўп тасодифий сабабларга боғлиқдир. Шу маънода очколар сони тасодифий миқдордир; 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 сонлар бу миқдорнинг *мумкин бўлган қийматларидир.*

Тасодифий миқдор деб, аввалдан номаълум бўлган ва олдиндан инобатга олиб бўлмайдиган тасодифий сабабларга боғлиқ бўлган ҳамда синаш натижасида битта мумкин бўлган қиймат қабул қилувчи миқдорга айтилади.

1-мисол. 100 та чақалоқ ичида ўғил болалар сони 0, 1, 2, ..., 100 қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган тасодифий миқдордир.

2-мисол. Тўпдан отилган снаряднинг учиб ўтган масофаси тасодифий миқдордир. Ҳақиқатан ҳам, масофа фақат нишонга олувчи асбобнинг ўрнатилишигагина боғлиқ бўлмай, балки аввалдан тўла-тўкис ҳисобга олиб бўлмайдиган бир қанча бошқа сабабларга (шамолнинг кучи ва йўналиши, ҳарорат ва бошқаларга) ҳам боғлиқ. Бу миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари бирор (a b) оралиққа тегишлидир.

Биз бундан кейин тасодифий миқдорларни X, Y, Z бош ҳарфлар билан, уларнинг мумкин бўлган қийматларини тегишли x, y, z кичик ҳарфлар билан белгилаймиз. Масалан, X тасодифий миқдор учта қиймат олиши мумкин бўлса, улар бундай белгиланади: x_1, x_2, x_3.

2-§. Дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорлар

Юқорида келтирилган мисолларга қайтайлик. Улардан биринчисида X тасодифий миқдор қуйидаги мумкин бўлган қийматлардан бирини қабул қилиши мумкин эди: 0, 1, 2,

. . ., 100. Бу қийматлар бир-биридан X нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларини ўз ичига олмаган оралиқлар билан ажратилган. Шундай қилиб, бу мисолда тасодифий миқдор айрим, ажралган қийматлар қабул қилади.

Иккинчи мисолда тасодифий миқдор (a, b) оралиққа тегишли ихтиёрий қиймат қабул қилиши мумкин. Бу ерда тасодифий миқдорнинг бир мумкин бўлган қийматини бошқасидан мумкин бўлган қийматларни ўз ичига олмаган оралиқ билан ажратиб бўлмайди.

Мана шу айтилганларнинг ўзиданоқ айрим, ажралган қийматлар қабул қилувчи тасодифий миқдорларни мумкин бўлган қийматлари бирор оралиқни тўлиқ тўлдирувчи тасодифий миқдорлардан фарқ қилиш мақсадга мувофиқ деган хулосага келиш мумкин.

Дискрет (узлукли) тасодифий миқдор деб, айрим, ажралган қийматларни маълум эҳтимоллар билан қабул қилувчи миқдорга айтилади. Дискрет тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари сони чекли ёки чексиз бўлиши мумкин.

Узлуксиз тасодифий миқдор деб чекли ёки чексиз оралиқдаги барча қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган миқдорга айтилади. Кўриниб турибдики, узлуксиз тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари сони чексиздир.

Эслатма. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг берилган таърифи аниқ эмас. Аниқ таъриф кейинроқ берилади.

3- §. Дискрет тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот қонуни

Биринчи қарашда, дискрет тасодифий миқдорнинг берилиши учун унинг мумкин бўлган қийматларининг ҳаммасини санаб чиқиш етарлидек кўринади. Аслида эса бундай эмас: тасодифий миқдорларнинг мумкин бўлган қийматлари бир хил бўлиб, уларнинг эҳтимоллари эса ҳар хил бўлиши мумкин. Шу сабабли дискрет тасодифий миқдорнинг берилиши учун унинг мумкин бўлган қийматларини санаб чиқиш етарли эмас, яна уларнинг эҳтимолларини ҳам кўрсатиш лозим.

Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни деб мумкин бўлган қийматлар билан уларнинг эҳтимоллари орасидаги мосликка айтилади. Тақсимот қонунини жадвал орқали, аналитик усулда (формула кўринишида) ва график усулда бериш мумкин.

Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунининг жадвал орқали берилишида жадвалнинг биринчи сатри мумкин бўлган қийматлардан, иккинчи сатри эса уларнинг эҳтимолларидан тузилади:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Битта синашда тасодифий миқдор мумкин бўлган қийматлардан биттасини ва фақат биттасини кабул қилишини назарда тутиб, $X = x_1$, $X = x_2$, $\ldots$, $X = x_n$ ҳодисалар тўла группа ташкил килади, деган хулосага келамиз; демак, бу ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси, яъни жадвалнинг иккинчи сатридаги эҳтимоллар йиғиндиси бирга тенг:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1,$$

Мисол. Пул лотереясида 100 та билет чиқарилган. Битта 50 сўмлик ютуқ ва ўнта 1 сўмлик ютуқ ўйналмокда. X тасодифий миқдор—битта лотереяси бор киши ютуқлари тақсимот қонунини топинг.

Ечилиши. X нинг мумкин бўлган қийматларини ёзамиз:

$$x_1 = 50, \ x_2 = 1, \ x_3 = 0.$$

Бу мумкин бўлган қийматларнинг эҳтимоллари қуйидагича:

$$p_1 = 0{,}01, \ p_2 = 0{,}1, \ p_3 = 1 - (p_1 + p_2) = 0{,}89.$$

Изланаётган тақсимот конунини ёзамиз:

X	50	10	0
p	0,01	0,1	0,89

Текшириш. $0{,}01 + 0{,}1 + 0{,}89 = 1$.

Равшанлик мақсадида дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини график усулда тасвирлаш ҳам мумкин, бунинг учун тўғри бурчакли координата системасида $(x_i\ p_i)$ нуқталар ясалади, кейин уларни тўғри чизиқ кесмалари билан туташтирилади. Ҳосил қилинган шакл *тақсимот кўпбурчаги* дейилади.

4- §. Биномиал тақсимот

Фараз қилайлик, n та эркли синаш ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодиса рўй бериши ёки рўй бермаслиги мумкин бўлсин. Ҳар бир синашда ҳодисанинг рўй бериши ўзгармас ва p га тенг (демак, ҳодисанинг рўй бермаслик эҳтимоли $q = 1 - p$ га тенг). X дискрет тасодифий миқдор сифатида бу синашларда A ҳодисанинг рўй бериш сонини оламиз.

Ўз олдимизга X миқдорнинг тақсимот қонунини топиш масаласини қўямиз. Бу масалани ҳал этиш учун X нинг мумкин бўлган қийматлари ва уларнинг эҳтимолларини аниқлаш талаб қилинади.

Кўриниб турибдики, n та синашда A ҳодиса ё рўй бермайди, ёки 1 марта, ёки 2 марта, ..., ёки n марта рўй бериши мумкин. Шундай қилиб, X нинг мумкин бўлган қийматлари қуйидагича:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2, \dots,\ x_{n+1} = n.$$

Бу мумкин бўлган қийматларининг эҳтимолларини топиш қолди, бунинг учун Бернулли формуласидан фойдаланиш етарлидир:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (*)$$

бу ерда $k = 0, 1, 2, \dots n$.

(*) формула изланаётган тақсимот қонунининг аналитик ифодасидир.

Эҳтимолларнинг биномиал тақсимоти деб, Бернулли формуласи билан аниқланадиган эҳтимоллар тақсимотига айтилади.

Қонуннинг «биномиал» дейилишига сабаб, (*) формуланинг ўнг томонини Ньютон биноми ёйилмасининг умумий ҳади сифатида қараш мумкин:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^0 q^n.$$

Шундай қилиб, ёйилманинг биринчи p^n ҳади қаралаётган ҳодисанинг n та синашда n марта рўй бериш эҳтимолини, $np^{n-1}q$ иккинчи ҳади ҳодисанинг $n-1$ марта рўй бериш эҳтимолини, ..., охирги q^n ҳади ҳодисанинг бир марта ҳам рўй бермаслик эҳтимолини аниқлайди.

Биномиал қонунни жадвал кўринишда ёзамиз:

X	n	$n-1$	$\dots$	k	$\dots$	0
P	p^n	$np^{n-1}q$	$\dots$	$c_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	q^n.

Мисол. Танга икки марта ташланди. Гербли томон тушиш сонини билдирувчи X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини жадвал кўринишда ёзинг.

Ечилиши. Тангани ҳар ташлашда гербли томон тушиш эҳтимоли $p = \frac{1}{2}$, демак, гербли томон тушмаслик эҳтимоли $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Тангани икки марта ташлаганимизда гербли томони ё 2 марта, ёки бир марта тушиши мумкин, ёки гербли томон мутлақо тушмаслиги мумкин. Шундай қилиб. X нинг мумкин бўлган қийматлари қуйидагича:

$$x_1 = 2, \ x_2 = 1, \ x_3 = 0.$$

Бу мумкин бўлган қийматларнинг эҳтимолларини Бернулли формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$P_2(2) = C_2^2 p^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25;$$

$$P_2(1) = C_2^1 pq = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

$$P_2(0) = C_2^0 q^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25$$

Изланаётган тақсимот қонунини ёзамиз:

X	2	1	0
p	0,25	0,5	0,25

Текшириш: $0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}5 = 1$.

5- §. Пуассон тақсимоти

Ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га тенг бўлган n та эркли синаш ўтказилаётган бўлсин. Бу синашларда ҳодисанинг k марта бериш эҳтимолини топиш учун Бернулли формуласидан фойдаланилади. Агар n катта бўлса, Лапласнинг асимптотик формуласидан фойдаланилади. Аммо ҳодисанинг эҳтимоли кичик ($p \leqslant 0{,}1$) бўлса, бу формула яроқли эмас. Бундай ҳолларда (n катта, p кичик) Пуассоннинг асимптотик формуласига мурожаат қилинади.

Шундай қилиб, ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли жуда кичик бўлган жуда кўп синашлар ўтказилганда ҳодисанинг роса k марта рўй бериш эҳтимолини топиш масаласини қўяйлик.

Муҳим шарт қўяйлик: np кўпайтма ўзгармас қийматини сақлаб қолади, чунончи $np = \lambda$. Кейинчалик кўрсатилишича (VII боб, 5- §), бу синашларнинг ҳар хил сериясида, яъни n

нинг ҳар хил қийматларида ҳодиса рўй беришининг ўртача сони ўзгармасдан қолишини билдиради.

Бизни қизиқтираётган эҳтимолни ҳисоблаш учун Бернулли формуласидан фойдаланамиз:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}p^k(1-p)^{n-k}.$$

$pn = \lambda$ бўлгани учун $p = \frac{\lambda}{n}$ бўлади. Демак,

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

n жуда катта қийматга эгалигини назарда тутиб, $P_n(k)$ ўрнига $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k)$ ни топамиз. Бунда изланаётган эҳтимолнинг тақрибий қиймати топилади, холос: n катта бўлса ҳам, лекин чеклидир, лимитни ҳисоблашда эса биз n ни чексизга интилтирамиз.

Шундай қилиб,

$$P_n(k) \simeq \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\cdot\frac{\lambda^k}{nk}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right] = \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\cdot 1.$$

Шундай қилиб (ёзувни соддалаштириш учун тақрибий тенглик белгисини тушириб қолдирамиз),

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Бу формула оммавий (n катта) кам рўй берадиган (p кичик) ҳодисалар эҳтимолларининг Пуассон тақсимоти қонунини ифодалайди.

Эслатма. k ва λ маълум бўлганда $P_n(k)$ ни топиш учун махсус жадваллар мавжуд.

Мисол. Завод базага 5000 та сифатли маҳсулот жўнатди. Маҳсулотнинг йўлда шикастланиш эҳтимоли 0,0002 га тенг. Базага 3 та яроқсиз маҳсулот келиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $n = 5000$, $p = 0{,}0002$, $k = 3$. λ ни топамиз:

$$\lambda = np = 5000\cdot 0{,}0002 = 1.$$

Изланаётган эҳтимол Пуассон тақсимотига кўра тақрибан қуйидагига тенг:

$$P_{5000}(3) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \simeq 0,06.$$

8-§. Ҳодисаларнинг энг содда оқими

Вақтнинг тасодифий моментларида рўй берувчи ҳодисаларни қарайлик.

Ҳодисалар оқими деб, вақтнинг тасодифий моментларида рўй берувчи ҳодисалар кетма-кетлигига айтилади. Оқимга мисол сифатида қуйидагиларни олиш мумкин: АТС га, тез ёрдам пунктига чақириқларнинг келиши, аэропортга самолётларнинг қўниши, маиший хизмат кўрсатиш корхоналарига клиентларнинг келиши, элементларнинг ишдан чиқиш кетма-кетликлари ва бошқалар.

Оқимларга мансуб бўлган хусусиятлар ичида стационарлик, сўнг-таъсирнинг йўқлиги ва ординарлик хоссаларини ажратамиз.

Стационарлик хоссаси исталган вақт оралиғида k та ҳодиса рўй бериш эҳтимоли k га ва вақт оралиғининг узунлиги t га боғлиқ бўлиб, унинг саноқ бошига боғлиқ бўлмаслиги билан характерланади. Бунда турли вақт оралиқлари кесишмайди деб фараз қилинади. Масалан, k та ҳодисанинг давомийлиги $t=6$ вақт бирлигига тенг бўлган (1; 7), (10; 16), $(T+6)$ вақт оралиқларида рўй бериш эҳтимоллари ўзаро тенгдир.

Шундай қилиб, агар оқим стационарлик хоссасига эга бўлса, у ҳолда давомийлиги t га тенг бўлган вақт оралиғида k та ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли k ва t нинг функцияси бўлади.

«Сўнг таъсирнинг йўқлиги» хоссаси исталган вақт оралиғида k та ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли қўрилаётган оралиқ бошланишидан аввалги вақт моментларида ҳодисалар рўй берганлиги ёки рўй бермаганлигига боғлиқ эмаслиги билан характерланади. Бошқача қилиб айтганда, исталган вақт оралиғида k та ҳодиса рўй беришининг кўрилаётган оралиқнинг бошланишидан аввал нима бўлганлиги тўғрисида исталган тахминда (нечта ҳодиса рўй берган) улар қандай кетма-кетликка рўй берган) ҳисобланган шартли эҳтимоли шартсиз эҳтимолига тенг. Шундай қилиб, оқимнинг аввалги тарихи (аҳволи) ҳодиса-

ларнинг яқин келажакда рўй бериш эҳтимолига таъсир қилмайди.

Шундай қилиб, агар оқим сўнгтаъсирнинг йўқлиги хоссасига эга бўлса, у ҳолда ўзаро кесишмайдиган вақт оралиқларида битта ёки бир нечта ҳодисаларнинг рўй бериши ўзаро боғлиқ бўлмайди.

Ординарлик хоссаси кичик вақт оралиғида иккита ва ундан кўп ҳодисаларнинг рўй бериши амалда мумкин эмаслиги билан характерланади. Бошқача қилиб айтганда, кичик вақт оралиғида биттадан ортиқ ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли битта ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолига қараганда эътиборга олмаса ҳам бўладиган даражада кичик

Шундай қилиб, агар оқим ординарлик хоссасига эга бўлса, у ҳолда чексиз кичик вақт оралиғида кўпи билан битта ҳодиса рўй бериши мумкин.

Энг оддий (Пуассон оқими) оқим деб, стационарлик, сўнгтаъсирнинг йўқлиги ва ординарлик хоссаларига эга бўлган оқимга айтилади.

Эслатма. Практикада кўпинча оқим юқорида айтиб ўтилган хоссаларга эга ёки эга эмаслигини аниқлаш қийин. Шунинг учун бошқа шартлар ҳам топилганки, улар бажарилганда оқимни энг оддий ёки энг оддий оқимга яқин, деб олиш мумкин. Жумладан, агар оқим кўп сондаги ўзаро боғлиқ бўлмаган стационар оқимларнинг йиғиндиси бўлиб, уларнинг ҳар бирининг йиғиндига (йиғилган оқимга) таъсири ҳисобга олмаса ҳам бўладиган даражада кичик бўлса, у ҳолда йиғилган оқим (унинг ординарлиги шартида) энг оддий оқимга жуда яқин.

Оқимнинг интенсивлиги λ деб, вақт бирлиги ичида рўй берувчи ҳодисаларнинг ўртача сонига айтилади.

Агар оқимнинг ўзгармас интенсивлиги маълум бўлса, у ҳолда t вақт давомида энг оддий оқимнинг k та ҳодисаси рўй бериш эҳтимоли қуйидаги Пуассон формуласи билан аниқланишини исботлаш мумкин:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Бу формула энг оддий оқимнинг барча хоссаларини акс эттиради.

Дарҳақиқат, формуладан кўриниб турибдики, интенсивлик берилган ҳолда t вақт ичида k та ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли k ва t нинг функцияси бўлади, бу эса стационарлик хоссасини характерлайди.

Формулада қаралаётган вақт оралиғининг бошланишидан аввалги информациядан фойдаланилмайди, бу эса сўнгтаъсирнинг йўқлиги хоссасини характерлайди.

Формула ординарлик хоссасини акслантиришига ишонч ҳосил қилайлик. $k = 0$ ва $k = 1$ деб, мос равишда ҳодисаларнинг рўй бермаслик ва битта ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолларини топамиз:

$$P_t\ (0) = e^{-\lambda t}, \quad P_t\ (1) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Демак, биттадан кўп ҳодисаларнинг рўй бериш эҳтимоли қуйидагича бўлади:

$$P_t\ (k > 1) = 1 - [P_t\ (0) + P_t\ (1)] = 1 - [e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}].$$

Қуйидаги

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \dots$$

ёйилмадан фойдаланиб, элементар алмаштиришлардан сўнг қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_t\ (k > 1) = \frac{(\lambda t)^2}{2} + \dots .$$

P_t (1) ва P_t ($k > 1$) ни солиштириб кўрсак, t нинг кичик қийматларида биттадан кўп ҳодисаларнинг рўй бериш эҳтимоли битта ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолидан ҳисобга олмаса ҳам бўладиган даражада кичик, деган хулосага келамиз, бу эса ординарлик хоссасини характерлайди.

Шундай қилиб, Пуассон формуласини энг оддий оқимнинг математик модели деб ҳисоблаш мумкин.

Мисол. Бир минутда АТС га ўртача иккита чақириқ келади. 5 минут ичида а) 2 та чақириқ келиш; б) иккитадан кам чақириқ келиш, с) камида иккита чақириқ келиш эҳтимолларини топинг. Чақириқлар оқимини энг оддий деб ҳисобланади.

Ечилиши Шартга кўра $\lambda = 2$, $t = 5$, $k = 2$. Пуассон формуласидан фойдаланамиз:

$$P_t\ (k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}.$$

а) изланаётган эҳтимол, яъни 5 минут ичида 2 та чақириқ келиш эҳтимоли:

$$P_5\ (2) = \frac{10^2 \cdot e^{-10}}{2!} = \frac{100 \cdot 0,000045}{2} = 0,000025.$$

Бу ҳодисанинг амалда рўй бериши деярли мумкин эмас.

б) «битта ҳам чақириқ келмади» ва «битта чақириқ келди» ҳодисалари биргаликда бўлмагани учун изланаётган эҳтимол, яъни 5 минут ичида иккитадан кам чақириқ келиши эҳтимоли қўшиш теоремасига кўра:

$$P_5\ (k < 2) = P_5\ (0) + P_5\ (1) = e^{-10} + \frac{10 \cdot e^{-10}}{1!} = 0,000495.$$

Бу ҳодисанинг амалда рўй бериши деярли мумкин эмас.

в) «иккитадан кам чақириқ келди» ва «камида иккита чақириқ келди» ҳодисалари ўзаро қарама-қарши ҳодисалар, шунинг учун изланаётган эҳтимол, яъни 5 минут ичида камида иккита чақириқ келган бўлиш эҳтимоли:

$$P_5\ (k \geqslant 2) = 1 - P_5\ (k < 2) = 1 - 0,000495 = 0,999505.$$

Бу деярли муқаррар ҳодиса.

Масалалар

1. Тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари қуйидагича: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$. Биринчи иккита мумкин бўлган қийматнинг эҳтимоллари маълум: $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,15$. x_3 нинг эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p_3 = 0,45$.

2. Ўйин соққаси 3 марта ташланди, олти очко чиқишининг тақсимот қонунини ёзинг.

Жавоби.

X	3	2	1	0
p	$\frac{15}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{125}{216}$.

3. Агар ҳар бир синашда А ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,6 га тенг бўлса, бу ҳодисанинг учта ўзаро боғлиқ бўлмаган синашда рўй бериш сони эҳтимолларининг тақсимот қонунини тузинг.

Жавоби.

k	0	1	2	3
p	0,064	0,288	0,432	0,216

4. Тўқувчи 1000 урчуқда ишлайди. Бир минут давомида битта урчуқда ип узилиш эҳтимоли 0,004 га тенг. Бир минут давомида бешта урчуқда ип узилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p_{1000}\ (5) = 0,1562$.

5. Агар қўл ёзманинг бир саҳифасида камида битта хато бўлиш эҳтимоли 0,95 га тенг бўлса, қўл ёзманинг бир саҳифасидаги хатоларнинг ўртача сонини топинг. Хатолар сони Пуассон қонуни бўйича тақсимланган деб ҳисобланади.

Кўрсатма: масала $e^{-\lambda} = 0,05$ тенгламадан λ параметрни топишга келтирилади.

Жавоби 3.

6. Корхона коммутатори 100 абонентга хизмат қилади. Бир минут давомида абонентнинг коммутаторга қўнғироқ қилиш эҳтимоли 0,02 га

тенг. Қуйидаги иккита ҳодисадан қайсиниси каттароқ эҳтимолга эга: бир минут давомида 3 абонент қўнғироқ қилади; 4 абонент қўнғироқ қилади?

Жавоби. $P_{100}(3) = 0{,}18$; $P_{100}(4) = 0{,}09$.

7. Машинкада босилган 1000 бетли қўл ёзма 1000 та хатога эга. Таваккалига олинган саҳифа: а) камида битта хатога, б) роса 2 та хатога, в) камида иккита хатога эга бўлиш эҳтимолини топинг. Хатолар сони Пуассон қонуни бўйича тақсимланган деб ҳисобланади.

Жавоби. а) $P = 1 - e^{-1} = 0{,}6321$;
б) $P_{1000}(2) = 0{,}18395$;
в) $P = 0{,}2642$.

8. АТС га бир минут давомида ўртача бешта чақириқ келади. 4 минут давомида; а) 2 та чақириқ, б) иккитадан кам чақириқ, в) камида иккита чақириқ келиш эҳтимолини топинг.

Кўрсатма: $e^{-10} = 0{,}000045$.

Жавоби. а) 0,000025,
б) 0,000495;
в) 0,999505.

Еттинчи боб

ДИСКРЕТ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРНИНГ МАТЕМАТИК КУТИЛИШИ

1-§. Дискрет тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари

Юқорида айтилганлардан, тақсимот қонуни тасодифий миқдорни тўлиқ характерлашини биламиз. Лекин кўпинча тақсимот қонуни номаълум бўлиб, кам маълумотлар билан чекланишга тўғри келади. Баъзан ҳатто тасодифий миқдорни йиғма тасвирлайдиган сонлардан фойдаланиш қулайроқ бўлади: бундай сонлар *тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари* дейилади. Муҳим сонли характеристикалар жумласига математик кутилиш тегишлидир.

Математик кутилиш тақрибан тасодифий миқдорнинг ўртача қийматига тенг, бу кейинроқ кўрсатилади.

Кўп масалаларни ҳал этишда математик кутилишни билиш кифоя. Масалан, агар биринчи мерган урган очколарнинг математик кутилиши иккинчи мерган урган очколарнинг математик кутилишидан катталиги маълум бўлса, у ҳолда биринчи мерган ўртача ҳисобда иккинчисига қараганда кўпроқ очко уради, ва демак, у иккинчи мергандан яхшироқ отади.

Математик кутилиш тасодифий миқдор ҳақида унинг тақсимот қонунига қараганда анча кам маълумот берса-да, келтирилган масалага ўхшаш масалалар ва бошқача кўп масалаларни ҳал этишда математик кутилишни билиш кифоя қилар экан.

2-§. Дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши

Дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши деб, унинг барча мумкин бўлган қийматларини мос эҳтимолларга кўпайтмалари йиғиндисига айтилади.

X тасодифий миқдор фақат x_1, x_2, ..., x_n қийматларни мос равишда p_1, p_2, ..., p_n эҳтимоллар билан қабул қилсин. Бу ҳолда X тасодифий миқдорнинг $M(X)$ математик кутилиши қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n.$$

Эслатма. Таърифга кўра дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши тасодифий бўлмаган (ўзгармас) миқдордир. Бу тасдиқни эслаб қолишни тавсия қиламиз, чунки кейинчалик бу кўп марта ишлатилади. Кейинчалик ўқувчи узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ҳам ўзгармас миқдор эканлигини билиб олади.

1-мисол. X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини билган ҳолда унинг математик кутилишини топинг:

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3.

Ечилиши. Изланаётган математик кутилиш тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматларини уларнинг эҳтимолларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг:

$$M(X) = 3 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,3 = 3,9.$$

2-мисол. A ҳодисанинг эҳтимоли p га тенг бўлса, битта синашда A ҳодисанинг рўй бериш сонининг математик кутилишини топинг.

Ечилиши. X тасодифий миқдор — A ҳодисанинг битта синашда рўй бериш сони фақат иккита қиймат қабул қилиши мумкин: $x_1 = 1$ (A ҳодиса рўй берди) p эҳтимол билан ва $x_2 = 0$ (A ҳодиса рўй бермади) $q = 1 - p$ эҳтимол билан. Изланаётган математик кутилиш қуйидагига тенг:

$$M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

Шундай қилиб, битта синашда ҳодиса рўй бериш сонининг математик кутилиши шу ҳодисанинг эҳтимолига тенг. Бу натижадан қуйида фойдаланилади.

3-§. Математик кутилишнинг эҳтимолий маъноси

Фараз қилайликки, n та синаш ўтказилган бўлиб, уларда X тасодифий миқдор m_1 марта x_1 қиймат, m_2 марта x_2 қиймат, ..., m_k марта x_k қиймат қабул қилган, шу билан бирга $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$ бўлсин. У ҳолда X қабул қилган барча қийматлар йиғиндиси қуйидагига тенг:

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k$$

Тасодифий миқдор қабул қилган барча қийматларнинг арифметик ўртача қиймати $\overline{X}$ ни топайлик, бунинг учун топилган йиғиндини синашларнинг жами сонига бўламиз:

$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n}$$

ёки

$$\overline{X} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \cdot \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \frac{m_k}{n}. \qquad (*)$$

$\frac{m_1}{n}$ нисбат x_1 қийматнинг W_1 нисбий частотаси, $\frac{m_2}{n}$ нисбат x_2 қийматнинг W_2 нисбий частотаси ва ҳ. к. эканлигини инобатга олиб, (*) муносабатни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\overline{X} = x_1 W_1 + x_2 W_2 + \ldots + x_k W_k. \qquad (**)$$

Синашлар сони етарлича катта деб фараз қилайлик. У ҳолда нисбий частота тақрибан ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолига тенг (бу IX боб, 6-§ да исботланади):

$$W_1 \simeq p_1; W_2 \simeq p_2, \ldots, W_k \simeq p_k.$$

(**) муносабатда нисбий частоталарни мос эҳтимоллар билан алмаштириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\overline{X} \simeq x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k.$$

Бу тақрибий тенгликнинг ўнг томони $M(X)$ дир.

Шундай қилиб,

$$\overline{X} \approx M(X).$$

Ҳосил қилинган натижанинг эҳтимолий маъноси қуйидагича: **математик кутилиш тасодифий миқдорнинг кузатилаётган қийматларининг арифметик ўртача қийматига тақрибан тенг** (синашлар сони қанча кўп бўлса, аниқлик шунча кўп).

1-эслатма. Кўриниб турибдики, математик кутилиш мумкин бўлган қийматларнинг энг кичигидан катта, энг каттасидан эса кичик. Бошқача қилиб айтганда, мумкин бўлган қийматлар сон ўқида математик кутилишнинг ўнг ва чап томонларида жойлашган. Шу маънода математик кутилиш тақсимотнинг жойлашишини характерлайди, шунинг учун уни кўпинча *тақсимот маркази* деб аталади.

Бу термин механикадан олинган: агар $p_1, p_2, \ldots, p_n$ массалар абсциссалари $x_1, x_2, \ldots, x_n$ бўлган нуқталарда жойлашган бўлиб, $\sum p_i = 1$ бўлса, у ҳолда оғирлик марказининг абсциссаси

$$x_c = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i}$$

бўлади. $\sum x_i p_i = M(X)$ ва $\sum p_i = 1$ эканлигини назарга олиб,

$$M(X) = x_c$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, математик кутилиш абсциссалари тасодифий миқдор қабул қиладиган қийматларга, массалари уларнинг эҳтимолларига тенг бўлган моддий нуқталар оғирлик марказининг абсциссасидир.

2-эслатма. «Математик кутилиш» терминининг келиб чиқиши эҳтимоллар назарияси пайдо бўлишининг бошланғич даври билан боғлиқ бўлиб (XVI—XVII а.), у даврда унинг татбиқ соҳаси қимор ўйинлар билан чекланган эди. Ўйинчини кутилаётган ютуқнинг ўртача қиймати ёки, бошқача қилиб айтганда, ютуқнинг математик кутилиши қизиқтирган.

4-§. Математик кутилишнинг хоссалари

1-хосса. *Ўзгармас миқдорнинг математик кутилиши шу ўзгармаснинг ўзига тенг:*

$$M(C) = C.$$

Исботи. C ўзгармасни мумкин бўлган битта C қийматга эга бўлган ва уни $p = 1$ эҳтимол билан қабул қилувчи дискрет тасодифий миқдор сифатида қараймиз. Демак,

$$M(C) = C \cdot 1 = C.$$

1-эслатма. C ўзгармас миқдорнинг X дискрет тасодифий миқдорга кўпайтмаси деб, шундай CX дискрет тасодифий миқдорни оламизки, унинг мумкин бўлган қийматлари X нинг мумкин бўлган қийматларини C ўзгармасга кўпайтмаларига тенг; CXнинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари X нинг мумкин бўлган тегишли қийматларининг эҳтимолларига тенг. Масалан, мумкин бўлган x_1 қийматнинг эҳтимоли p_1 га тенг бўлса, у ҳолда CX миқдорнинг Cx_1 қийматни қабул қилиш эҳтимоли ҳам p_1 га тенг бўлади.

2-хосса. *Ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:*

$$M(CX) = C \cdot M(X).$$

Исботи. X тасодифий миқдор қуйидагича эҳтимолларнинг тақсимот қонуни билан берилган бўлсин:

$$\begin{array}{cccc} X & x_1 & x_2 & \ldots\ x_n \\ p & p_1 & p_2 & \ldots\ p_n. \end{array}$$

1-эслатмани инобатга олиб, CX тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ёзамиз:

$$\begin{array}{cccc} CX & Cx_1 & Cx_2 & \ldots\ Cx_n \\ p & p_1 & p_2 & \ldots\ p_n. \end{array}$$

CX тасодифий миқдорнинг математик кутилиши:

$$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \ \ldots\ + Cx_np_n =$$

$$= C(x_1p_1 + x_2p_2 + \ \ldots\ + x_n p_n) = CM(X).$$

Шундай қилиб,

$$M(CX) = CM(X).$$

2-эслатма. Кейинги хоссага ўтишдан аввал қуйидаги тушунчани айтиб ўтайлик: иккита тасодифий миқдордан бирининг тақсимот қонуни иккинчисининг қандай қиймат қабул қилганлигига боғлиқ бўлмаса, бу тасодифий миқдорлар *эркли* дейилади. Агар бир нечта тасодифий миқдорлардан ихтиёрий сондагисининг тақсимот қонунлари қолганларининг қандай қиймат қабул қилганлигига боғлиқ бўлмаса, улар *ўзаро эркли* тасодифий миқдорлар дейилади.

3-эслатма. Эркли X ва Y тасодифий миқдорларнинг кўпайтмаси деб, шундай XY тасодифий миқдорга айтамизки, унинг мумкин бўлган қийматлари X нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматини Y нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматига кўпайтирилганига тенг; XY кўпайтманинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари кўпайтувчиларнинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари кўпайтмасига тенг. Масалан, мумкин бўлган x_1 қийматнинг эҳтимоли p_1 га, мумкин бўлган y_1 қийматнинг эҳтимоли g_1 га тенг бўлса, у ҳолда мумкин бўлган x_1y_1 қийматнинг эҳтимоли p_1g_1 га тенг бўлади.

3-хосса. *Иккита эркли X ва Y тасодифий миқдорлар кўпайтмасининг математик кутилиши уларнинг математик кутилишлари кўпайтмасига тенг:*

$$M(XY) = M(X)\ M(Y).$$

Исботи. X ва Y эркли тасодифий миқдорлар ўзларининг тақсимот қонунлари билан берилган бўлсин:*

$$\begin{array}{cccccccc} X & x_1 & x_2 & \quad & Y & y_1 & y_2 \\ p & p_1 & p_2 & \quad & g & g_1 & g_2. \end{array}$$

XY тасодифий миқдор қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматларни тузиб чиқайлик, бунинг учун X нинг мумкин бўлган барча қийматларини Y нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматига кўпайтириб чиқамиз: натижада x_1y_1, x_2y_1, x_1y_2 ва x_2y_2 ни ҳосил қиламиз.

3-эслатмани инобатга олиб, XY кўпайтманинг тақсимот қонунини тузамиз:

$$\begin{array}{ccccc} X & x_1y_1 & x_2y_1 & x_1y_2 & x_2y_2 \\ P & p_1g_1 & p_2g_1 & p_1g_2 & p_2g_2. \end{array}$$

Математик кутилиш мумкин бўлган барча қийматларини уларнинг эҳтимолларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг:

$$M(XY) = x_1y_1 \cdot p_1g_1 + x_2y_1 \cdot p_2g_1 + x_1y_2 \cdot p_1g_2 + x_2y_2 \cdot p_2g_2$$

ёки

$$M(XY) = y_1g_1(x_1p_1 + x_2p_2) + y_2g_2(x_1p_1 + x_2p_2) =$$
$$= (x_1p_1 + x_2p_2)(y_1g_1 + y_2g_2) = M(X) \cdot M(Y).$$

Шундай қилиб, $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

Натижа. *Бир нечта ўзаро эркли тасодифий миқдорлар кўпайтмасининг математик кутилиши уларнинг математик кутилишлари кўпайтмасига тенг.*

Масалан, учта тасодифий миқдор учун:

$$M(XYZ) = M(XY \cdot Z) = M(XY)M(Z) = M(X)M(Y)M(Z).$$

Ихтиёрий сондаги тасодифий миқдорлар учун исбот математик индукция методи билан олиб борилади.

1-мисол. Эркли X ва Y тасодифий миқдорлар қуйидаги тақсимот қонунлари орқали берилган:

$$\begin{array}{cccccccc} X & 5 & 2 & 4 & \quad & Y & 7 & 9 \\ p & 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 & \quad & p & 0{,}8 & 0{,}2. \end{array}$$

XY тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топинг.

---

* Ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида мумкин бўлган қийматлар сонини кам қилиб олдик. Умумий ҳол шунга ўхшаш исботланади.

Ечилиши. Берилган миқдорларнинг ҳар бирининг математик кутилишини топамиз:

$$M(X) = 5\cdot 0,6 + 2\cdot 0,1 + 4\cdot 0,3 = 4,4;$$

$$M(Y) = 7\cdot 0,8 + 9\cdot 0,2 = 7,4.$$

X ва Y тасодифий миқдорлар эркли бўлганлиги учун изланаётган математик кутилиш қуйидагига тенг:

$$M(XY) = M(X)\,M(Y) = 4,4\cdot 7,4 = 32,56.$$

4-эслатма. X ва Y тасодифий миқдорларнинг йиғиндиси деб шундай $X + Y$ тасодифий миқдорга айтиладики, унинг мумкин бўлган қийматлари X нинг мумкин бўлган ҳар бир қиймати билан Y нинг мумкин бўлган ҳар бир қиймати йиғиндиларига тенг; $X + Y$ нинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари эркли X ва Y миқдорлар учун қўшилувчиларни эҳтимоллари кўпайтмасига тенг; боғлиқ тасодифий миқдорлар учун бир қўшилувчининг эҳтимолини иккинчисининг шартли эҳтимолига кўпайтмасига тенг.

Қуйидаги хосса эркли тасодифий миқдорлар учун ҳам, боғлиқ тасодифий миқдорлар учун ҳам ўринлидир.

4-хосса. *Иккита тасодифий миқдор йиғиндисининг математик кутилиши қўшилувчиларнинг математик кутилишлар йиғиндисига тенг:*

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Исботи. X ва Y тасодифий миқдорлар қуйидаги тақсимот қонунлар орқали берилган бўлсин*:

X	x_1	x_2	Y	y_1	y_2
p	p_1	p_2	g	g_1	g_2

$X + Y$ нинг барча мумкин бўлган қийматларини тузамиз, бунинг учун X нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматига Y нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматини қўшамиз: $x_1 + y_1$, $x_1 + y_2$, $x_2 + y_1$ ва $x_2 + y_2$ ни ҳосил қиламиз. Бу қийматларнинг эҳтимолларини мос равишда p_{11}, p_{12}, p_{21} ва p_{22} орқали белгилаймиз.

$X + Y$ миқдорнинг математик кутилиши мумкин бўлган

---

* Мулоҳазаларни соддалаштириш мақсадида, биз фақат иккитадан қиймат қабул қилиши мумкин тасодифий миқдорларни қараймиз. Умумий ҳол шунга ўхшаш исботланади.

қийматларни уларнинг эҳтимолларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг:

$$M(X+Y) = (x_1+y_1)p_{11} + (x_1+y_2)p_{12} + (x_2+y_1)p_{21} + (x_2+y_2)p_{22}$$

ёки

$$M(X+Y) = x_1(p_{11}+p_{12}) + x_2(p_{21}+p_{22}) + y_1(p_{11}+p_{21}) + y_2(p_{12}+p_{22}). \qquad *$$

$p_{11}+p_{12}=p_1$ эканлигини исботлаймиз. X тасодифий миқдор x_1 қийматни қабул қилиш ҳодисаси (бу ҳодисани эҳтимоли p_1 га тенг) $X+Y$ тасодифий миқдор x_1+y_1 ёки x_1+y_2 қийматни қабул қилиш ҳодисасини (бу ҳодисанинг эҳтимоли қўшиш теоремасига кўра $p_{11}+p_{12}$ га тенг) эргаштиради ва аксинча. Бундан $p_{11}+p_{12}=p_1$ тенглик келиб чиқади. Ушбу

$$p_{21}+p_{22}=p_2,\quad p_{11}+p_{21}=g_1 \text{ ва } p_{12}+p_{22}=g_2$$

тенгликлар ҳам шунга ўхшаш исботланади.

Бу тенгликларнинг ўнг томонларини (*) муносабатга қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(X+Y) = (x_1p_1+x_2p_2)+(y_1g_1+y_2g_2)$$

ёки узил-кесил

$$M(X+Y) = M(X)+M(Y).$$

Натижа. *Бир нечта тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилиши қўшилувчилар математик кутилишларининг йиғиндисига тенг.*

Масалан, учта қўшилувчи учун қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$M(X+Y+Z) = M[(X+Y)+Z] = M(X+Y)+M(Z) = M(X)+M(Y)+M(Z).$$

Ихтиёрий сондаги қўшилувчилар учун исбот математик индукция методи билан олиб борилади. *

1-мисол. Нишонга қарата учта ўқ узилди. Уларнинг нишонга тегиш эҳтимоллари: $p_1=0,4$; $p_2=0,3$ ва $p_3=0,6$. Нишонга тегиш жами сонининг математик кутилишини топинг.

Ечилиши. Биринчи отишда нишонга тегиш сони X_1 тасодифий миқдор бўлиб, у фақат иккита қиймат қабул қилиши мумкин: 1 ни (нишонга теккан ҳолда) $p_1=0,4$ эҳтимол билан ва 0 ни (нишонга тегмаган ҳолда) $q_1 = 1 - p_1 = 0,6$ эҳтимол билан.

Биринчи ўқ узишда нишонга тегиш сонининг математик кутилиши нишонга тегиш эҳтимолига, яъни $M(X_1) = 0,4$ га тенг (69- бет, 2- мисолга қаранг).

Иккинчи ва учинчи ўқ узишда нишонга тегиш сонининг математик кутилишларини шунга ўхшаш топамиз:

$$M(X_2) = 0,3, \qquad M(X_3) = 0,6.$$

Нишонга тегишнинг жами сони ҳам тасодифий миқдор бўлиб, у учта ўқ узишнинг ҳар бирида нишонга тегишлар йиғиндисидан иборат:

$$X = X_1 + X_2 + X_3.$$

Изланаётган математик кутилишни йиғиндининг математик кутилиши ҳақидаги теоремага асосан топамиз:

$$M(X) = M(X_1 + X_2 + X_3) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) =$$
$$= 0,4 + 0,3 + 0,6 = 1,3 \text{ (та нишонга тегиш)}.$$

2- мисол. Иккита ўйин соққаси ташланганда тушиши мумкин бўлган очколар йиғиндисининг математик кутилишини топинг.

Ечилиши. Биринчи соққада тушиши мумкин бўлган очколар сонини X орқали, иккинчисиникини Y орқали белгилаймиз. Бу миқдорларнинг мумкин бўлган қийматлари бир хил бўлиб, улар 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 га тенг, шу билан бирга бу қийматлардан ҳар бирининг эҳтимоли $\frac{1}{6}$ га тенг.

Биринчи соққада тушиши мумкин бўлган очколар сонининг математик кутилишини топамиз:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} +$$
$$+ 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

$M(Y) = \frac{7}{2}$ эканлиги ҳам равшан.

Изланаётган математик кутилиш:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7.$$

5- §. Эркли синашларда ҳодиса рўй бериш сонининг математик кутилиши

Фараз қилайлик, n та эркли синаш ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли ўзгармас ва p га тенг бўлсин. Бу синашларда A ҳодиса рўй беришнинг ўртача сони қанчага тенг? Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. *n та эркли синашда A ҳодиса рўй бериш сонининг математик кутилиши синашлар сонини ҳар бир синашда ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолига кўпайтирилганига тенг:*

$$M(X) = np.$$

Исботи. X тасодифий миқдор сифатида n та эркли синашда A ҳодисанинг рўй бериш сонини оламиз.

Кўриниб турибдики, бу синашларда A ҳодиса рўй беришнинг X умумий сони шу ҳодисанинг айрим синашларда рўй бериш сонлари йиғиндисидан иборат. Шунинг учун агар X_1 биринчи синашда, X_2 — иккинчи синашда, ... , X_n n-синашда ҳодисанинг рўй бериш сони бўлса, у ҳолда ҳодиса рўй беришининг умумий сони $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ бўлади.

Математик кутилишнинг учинчи хоссасига асосан:

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n). \qquad (*)$$

Тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчи битта синашда: $M(X_1)$ биринчи синашда, $M(X_2)$ иккинчи синашда ва ҳ. к. ҳодиса рўй бериш сонининг математик кутилишидир. Ҳодисанинг битта синашда рўй бериш сонининг математик кутилиши шу ҳодисанинг эҳтимолига тенг (2- §, 2-мисол), шунинг учун $M(X_1) = M(X_2) = \dots = M(X_n) = p$. (*) тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчи ўрнига p ни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(X) = np. \qquad (**)$$

Эслатма. X миқдор биномиал қонун бўйича тақсимланганлиги учун исботланган теоремани қуйидагича таърифлаш ҳам мумкин: n ва p *параметрли биномиал тақсимотнинг математик кутилиши np кўпайтмага тенг.*

Мисол. Тўпдан ўқ узилганда нишонга тегиш эҳтимоли $p = 0,6$. Агар 10 та ўқ узилган бўлса, нишонга тегиш жами сонининг математик кутилишини топинг.

Ечилиши. Ҳар бир ўқ узишда нишонга тегиш ёки тегмаслик бошқа отишлар натижасига боғлиқ эмас, шунинг учун кўрилаётган ҳодисалар эрклидир ва, демак, изланаётган математик кутилиш:

$$M(X) = np = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ (та нишонга тегиш).}$$

Масалалар

1. Дискрет тасодифий миқдорнинг

X	6	3	1
p	0,2	0,3	0,5

тақсимот қонунини билган ҳолда унинг математик кутилишини топинг.

Жавоби. 2,6.

2. Нишонга қарата 4 та ўқ узилди, уларнинг тегиш эҳтимоллари $p_1=0,6$, $p_2=0,4$, $p_3=0,5$ ва $p_4=0,7$. Нишонга тегиш жами сонининг математик кутилишини топинг.

Жавоби. 2,2 та нишонга тегиш.

3. Дискрет эркли тасодифий миқдорлар қуйидаги тақсимот қонунлари орқали берилган:

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7.

XY кўпайтманинг математик кутилишини икки усул билан: 1) XY нинг тақсимот қонунини тузиб; 2) 3-хоссадан фойдаланиб топинг.

Жавоби. 1,53.

4. X ва Y дискрет тасодифий миқдорлар 3-масаладаги тақсимот қонунлари орқали берилган. $X+Y$ йиғиндининг математик кутилишини икки усулда: 1) $X+Y$ нинг тақсимот қонунини тузиб; 2) 4-хоссадан фойдаланиб топинг.

Жавоби. 2,65.

5. Деталнинг ишончлилигини текшириш вақтида унинг бузилиш эҳтимоли 0,2 га тенг. Агар 10 та деталь синалаётган бўлса, бузилган деталлар сонининг математик кутилишини топинг.

Жавоби. 2 та деталь

6. Иккита ўйин соққаси бир марта ташланганда чиқадиган очколар кўпайтмасининг математик кутилишини топинг.

Жавоби. 12,25 очко.

7. 20 та лотерея билети сотиб олинган. Битта билетга ютуқ чиқиш эҳтимоли 0,3 га тенг бўлса, ютуқ чиқадиган лотерея билетлар сонининг математик кутилишини топинг.

Жавоби. 6 та билет.

Саккизинчи боб

ДИСКРЕТ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРНИНГ ДИСПЕРСИЯСИ

1- §. Тасодифий миқдор тарқоқлигининг сонли характеристикасини киритишнинг мақсадга мувофиқлиги

Математик кутилишлари бир хил, лекин мумкин бўлган қийматлари ҳар хил бўлган тасодифий миқдорларни кўрсатиш қийин эмас.

Масалан, қуйидаги тақсимот қонунлари билан берилган X ва Y дискрет тасодифий миқдорларни кўрайлик:

X	$-0{,}01$	$0{,}01$	Y	-100	100
p	$0{,}5$	$0{,}5$	p	$0{,}5$	$0{,}5.$

Бу миқдорларнинг математик кутилишларини топамиз:

$$M(X) = -0{,}01 \cdot 0{,}5 + 0{,}01 \cdot 0{,}5 = 0,$$
$$M(Y) = -100 \cdot 0{,}5 + 100 \cdot 0{,}5 = 0.$$

Бу ерда иккала миқдорнинг ҳам математик кутилиши бир хил, мумкин бўлган қийматлари эса ҳар хил, шу билан бирга X нинг мумкин бўлган қийматлари унинг математик кутилишига яқин, Y нинг мумкин бўлган қиймати эса ўзининг математик кутилишидан анча узоқ. Шундай қилиб, тасодифий миқдорнинг фақат математик кутилишини билган ҳолда унинг қандай қийматлар қабул қилиши мумкинлиги ҳақида ҳам, бу қийматлар математик кутилиш атрофида қандай сочилганлиги ҳақида ҳам бирор мулоҳаза юритиш мумкин эмас. Бошқача қилиб айтганда, математик кутилиш тасодифий миқдорни тўлиқ характерламайди.

Шу сабабли математик кутилиш билан бир қаторда бошқа сонли характеристикалар ҳам киритилади. Жумладан, тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари унинг математик кутилиши атрофида қанчалик тарқоқлигини баҳолаш учун дисперсия деб аталувчи сонли характеристикадан фойдаланилади.

Дисперсия таърифи ва хоссаларига ўтишдан аввал тасодифий миқдорни ўзининг математик кутилишидан четланиши тушунчасини киритамиз.

2- §. Тасодифий миқдорни ўзининг математик кутилишидан четланиши

Айтайлик, X — тасодифий миқдор, $M(X)$ унинг математик кутилиши бўлсин. Янги тасодифий миқдор сифатида $X - M(X)$ айирмани қараймиз.

Четланиш деб, тасодифий миқдор билан унинг математик кутилиши орасидаги фарққа айтилади.

X нинг тақсимот қонуни маълум бўлсин:

$$\begin{array}{cccc} X & x_1 & x_2 \ldots & x_n \\ p & p_1 & p_2 \ldots & p_n . \end{array}$$

Четланишнинг тақсимот қонунини ёзамиз. Четланиш $x_1 - M(X)$ қиймат қабул қилиши учун тасодифий миқдор x_1 қиймат қабул қилиши кифоя. Бу ҳодисанинг эҳтимоли эса p_1 га тенг; демак, четланишнинг ҳам $x_1 - M(X)$ қиймат қабул қилиш эҳтимоли p_1 га тенг. Четланишнинг бошқа мумкин бўлган қийматлари учун ҳам юқоридагига ўхшаш мулоҳазалар ўринли.

Шундай қилиб, четланиш қуйидаги тақсимот қонунига эга.

$$\begin{array}{ccccc} X - M(X) & x_1 - M(X) & x_2 - M(X) & \ldots & x_n - M(X) \\ p & p_1 & p_2 & \ldots & p_n . \end{array}$$

Четланишнинг кейинчалик қўлланадиган муҳим хоссасини келтирамиз.

Теорема. *Четланишнинг математик кутилиши нолга тенг:*

$$M[X - M(X)] = 0.$$

Исботи. Математик кутилишнинг хоссаларидан (айирманинг математик кутилиши математик кутилишлар айирмасига тенг, ўзгармас соннинг математик кутилиши ўша ўзгармаснинг ўзига тенг) фойдаланиб ва $M(X)$ ўзгармас эканлигини назарда тутиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M[X - M(X)] = M(X) - M[M(X)] = M(X) - M(X) = 0.$$

3- §. Дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсияси.

Практикада кўпинча тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларини унинг ўртача қиймати атрофида тарқоқлигини баҳолаш талаб қилинади. Масалан, артиллерияда отилган снарядлар уриб туширилиши лозим бўлган нишон атрофига қанчалик яқин тушишини билиш муҳимдир.

Биринчи қарашда, тарқоқликни баҳолаш учун энг содда йўл тасодифий миқдор четланишининг мумкин бўлган барча қийматларини ҳисоблаш, кейин унинг ўртача қийматини топишдан иборатдек туюлади. Аммо бундай йўл ҳеч қандай натижа бермайди, чунки четланишнинг ўртача қиймати, яъни $M[X-M(X)]$ исталган тасодифий миқдор учун нолга тенг. Бу хосса аввалги параграфда исботланган бўлиб, у бундай тушунтирилади: баъзи мумкин бўлган четланишлар мусбат бўлса, бошқалари манфий, уларнинг ўзаро йўқотилиши натижасида четланишнинг ўртача қиймати нолга тенг бўлади.

Бу мулоҳазалар мумкин бўлган четланишларни уларнинг абсолют қийматлари ёки квадратлари билан алмаштириш мақсадга мувофиқлиги ҳақида дарак беради. Амалда ҳам шундай қилинади. Тўғри, мумкин бўлган четланишларни уларнинг абсолют қийматлари билан алмаштирилганда, абсолют миқдорлар билан иш тутишга тўғри келади, бу эса баъзан жиддий қийинчиликларга олиб келади. Шунинг учун кўпинча бошқача йўл тутилади, яъни четланиш квадратининг ўртача қиймати ҳисобланади ва уни одатда дисперсия дейилади.

Дискрет тасодифий миқдорнинг *дисперсияси* (тарқоқлиги) деб, тасодифий миқдорни ўзининг математик кутилишидан четланиши квадратининг математик кутилишига айтилади:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2.$$

Тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган бўлсин:

$$\begin{array}{lllll} X & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p & p_1 & p_2 & \ldots & p_n. \end{array}$$

У ҳолда четланиш квадрати қуйидаги тақсимот қонунига эга бўлади:

$$\begin{array}{lllll} [X-M(X)]^2 & [x_1-M(X)]^2 & [x_2-M(X)]^2 & \ldots & [x_n-M(X)]^2 \\ p & p_1 & p_2 & \ldots & p_n. \end{array}$$

Таърифга кўра дисперсия қуйидагича бўлади:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2=[x_1-M(X)]^2\cdot p_1+[x_2-M(X)]^2\times$$
$$\times p_2+\ldots+[x_n-M(X)]^2\cdot p_n.$$

Шундай қилиб, дисперсияни ҳисоблаш учун четланиш квадратининг мумкин бўлган қийматларини уларнинг эҳтимолларига кўпайтмалари йиғиндисини ҳисоблаш кифоя.

Эслатма. Таърифдан дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсияси ўзгармас миқдор эканлиги келиб чиқади. Кейинчалик, ўқувчи узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси ҳам ўзгармас миқдор эканлигини билиб олади.

Мисол. Қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган X дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2.

Ечилиши. Математик кутилишни топамиз:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}2 = 2{,}3.$$

Четланиш квадратининг мумкин бўлган барча қийматларини топамиз:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (1 - 2{,}3)^2 = 1{,}69;$$
$$[x_2 - M(X)]^2 = (2 - 2{,}3)^2 = 0{,}09;$$
$$[x_3 - M(X)]^2 = (5 - 2{,}3)^2 = 7{,}29.$$

Четланиш квадратининг тақсимот қонунини ёзамиз:

$[X - M(X)]^2$	1,69	0,09	7,29
p	0,3	0,5	0,2.

Таърифга кўра дисперсия қуйидагига тенг:

$$D(X) = 1{,}69 \cdot 0{,}3 + 0{,}09 \cdot 0{,}5 + 7{,}29 \cdot 0{,}2 = 2{,}01.$$

Кўриб турибмизки, дисперсияни таърифга асосланиб ҳисоблаш нисбатан узундан-узоқ экан. Кейинги параграфда мақсадга анча тезроқ олиб келадиган формула кўрсатилади.

4-§. Дисперсияни ҳисоблаш учун формула

Дисперсияни ҳисоблашда қуйидаги теоремадан фойдаланиш кўпинча қулай бўлади.

Теорема. *Дисперсия X миқдор квадратининг математик кутилишидан X нинг математик кутилиши квадратини айирилганига тенг:*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Исботи. $M(X)$ математик кутилиш ўзгармас миқдор, демак, $2M(X)$ ва $M^2(X)$ ҳам ўзгармас миқдорлардир. Буни назарда тутиб ва математик кутилишнинг хоссаларидан (ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, йиғиндининг математик кутилиши қўшилувчилар математик кутилишларининг йиғиндисига тенг) фойдаланиб, дисперсия таърифини ифодаловчи формулани соддалаштирамиз:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) +$$
$$+ M^2(X)] = M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + M^2(X) =$$
$$= M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Шундай қилиб,

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Формула ёзувидаги ўрта қавс формулани эслаб қолиш қулай бўлиши учун киритилган.

1- мисол. Қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган X тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3.

Ечилиши. $M(X)$ математик кутилишни топамиз:

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,3 = 3,5.$$

X^2 **тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топамиз:**

X^2	4	9	25
p	0,1	0,6	0,3.

$M(X^2)$ математик кутилишни топамиз:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 + 25 \cdot 0 \ = 13,3.$$

Изланаётган дисперсия:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13,3 - (3,5)^2 = 1.05.$$

Эслатма. X ва Y тасодифий миқдорларнинг мумкин бўлган қийматлари бир хил бўлиб, ўртача қийматлари ҳам бир хил бўлса, у ҳолда уларнинг дисперсиялари ҳам тенг бўлиши керакдек туюлади (ахир иккала миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари ўзларининг математик кутилишлари атрофида бир хил тарқоқ). Аммо умумий ҳолда бундай бўлмайди. Гап шундаки, қаралаётган миқдорларнинг бир хил қийматлари умуман айтганда ҳар хил эҳтимолга эга, дисперсиянинг катталиги эса мумкин бўлган қийматлар билангина аниқланиб қолмасдан, балки уларнинг эҳтимоллари билан ҳам аниқланади. Масалан, X нинг математик кутилишдан «узоқ» жойлашган қийматларининг эҳтимоллари Y

нинг ўша қийматларининг эҳтимолларидан катта бўлиб, X нинг «яқин» қийматларининг эҳтимоллари Y нинг шу қийматларининг эҳтимолларидан кичик бўлса, у ҳолда равшанки X нинг дисперсияси Y нинг дисперсиясидан катта бўлади.

Буни кўрсатувчи мисол келтирамиз.

2-мисол. Қуйидаги тақсимот қонунлари орқали берилган тасодифий миқдорларнинг дисперсияларини таққосланг:

X	-1	1	2	3
p	0,48	0,01	0,09	0,42

Y	-1	1	2	3
p	0,19	0,51	0,25	0,05

Ечилиши. Қуйидагиларга осон ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$M(X) = M(Y) = 0.97;$$

$$D(X) \simeq 3{,}69, \quad D(Y) \simeq 1{,}21.$$

Шундай қилиб, X ва Y нинг мумкин бўлган қийматлари ҳамда математик кутилишлари бир хил, аммо дисперсиялари ҳар хил, шу билан бирга $D(X) > D(Y)$.

Бундай натижани ҳисобламасдан ҳам, тақсимот қонунларининг ўзидан кўра билиш мумкин эди.

5-§. Дисперсиянинг хоссалари

1-хосса. *С ўзгармас миқдорнинг дисперсияси нолга тенг:*

$$D(C) = 0.$$

Исботи. Дисперсия таърифига кўра:

$$D(C) = M\{[C - M(C)]^2\}.$$

Математик кутилишнинг биринчи хоссасидан (ўзгармаснинг математик кутилиши унинг ўзига тенг) фойдаланиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(C) = M[(C - C)^2] = M(0) = 0.$$

Шундай қилиб,

$$D(C) = 0.$$

Ўзгармас миқдор ҳамма вақт бир хил қиймат сақлашини, ва демак тарқоқликка эга эмаслигини инобатга олсак, бу хосса ойдин бўлиб қолади.

2-хосса. ***Ўзгармас кўпайтувчини квадратга ошириб, дисперсия белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:***

$$D(CX) = C^2D(X).$$

Исботи. Дисперсия таърифига кўра:

$$D(CX) = M\{[CX - M(CX)]^2\}.$$

Математик кутилишнинг иккинчи хоссасидан (ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгисидан ташқарига чиқариш мумкин) фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(CX) = M\{[CX - CM(X)]^2\} = M\{C^2[X - M(X)]^2\} =$$

$$= C^2M\{[X - M(X)]^2\} = C^2D(X).$$

$$D(CX) = C^2D(X).$$

Шундай қилиб, $D(CX) = C^2D(X)$.

Агар $|C| > 1$ бўлса, CX миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари (абсолют қиймат бўйича) X миқдорнинг қийматларидан катта бўлишини эътиборга олсак, бу хосса тушунарли бўлади. Бундан CX қийматларининг $M(CX)$ математик кутилиш атрофида тарқоқлиги X қийматларининг $M(X)$ атрофида тарқоқлигидан кўпроқ бўлиши, яъни $D(CX) > D(X)$ келиб чиқади. Аксинча, агар $0 < |C| < 1$ бўлса, у ҳолда $D(CX) < D(X)$ бўлади.

3-хосса. *Иккита эркли тасодифий миқдор йиғиндисининг дисперсияси бу миқдорлар дисперсияларининг йиғиндисига тенг:*

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Исботи. Дисперсияни ҳисоблаш формуласи бўйича:

$$D(X + Y) = M[(X + Y)^2] - [M(X + Y)]^2$$

Қавсларни очиб ҳамда бир нечта миқдорлар йиғиндисининг ва иккита эркли тасодифий миқдор кўпайтмасининг математик кутилишлари хоссаларидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(X + Y) = M[X^2 + 2XY + Y^2] - [M(X) + M(Y)]^2 =$$

$$= M(X^2) + 2M(X)\cdot M(Y) + M(Y^2) - M^2(X) -$$

$$- 2M(X)\cdot M(Y) - M^2(Y) = \{M(X^2) - [M(X)]^2\} +$$

$$+ \{M(Y^2) - [M(Y)]^2\} = D(X) + D(Y).$$

Шундай қилиб,

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

1-натижа. *Бир нечта ўзаро эркли тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси бу миқдорларнинг дисперсиялари йиғиндисига тенг.*

Масалан, учта қўшилувчи учун

$$D(X+Y+Z)=D[X+(Y+Z)]=D(X)+D(Y+Z)=$$
$$=D(X)+D(Y)+D(Z).$$

Ихтиёрий сондаги қўшилувчилар учун исбот математик индукция методи билан олиб борилади.

2-натижа. *Ўзгармас миқдор билан тасодифий миқдор йиғиндисининг дисперсияси тасодифий миқдорнинг дисперсиясига тенг:*

$$D(C+X)=D(X).$$

Исботи. C ва X миқдорлар ўзаро эркли, шунинг учун учинчи хоссага асосан:

$$D(C+X)=D(C)+D(X).$$

Биринчи хоссага асосан $D(C)=0$. Демак,

$$D(C+X)=D(X).$$

X ва $X+C$ миқдорлар фақат саноқ боши билан фарқ қилиши, ва демак, улар ўзларининг математик кутилишлари атрофида бир хил тарқоқлигини эътиборга олсак, хосса тушунарли бўлади.

4-хосса. *Иккита эркли тасодифий миқдор айирмасининг дисперсияси уларнинг дисперсиялари йиғиндисига тенг:*

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Исботи. Учинчи хоссага асосан:

$$D(X-Y)=D(X)+D(-Y).$$

Иккинчи хоссага асосан:

$$D(X-Y)=D(X)+(-1)^2D(Y)$$

ёки

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

6-§. Эркли синашларда ҳодисанинг рўй бериш сонининг дисперсияси

Ҳар биридан A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли бир хил бўлган n та эркли синаш ўтказилаётган бўлсин. Бу синашларда ҳодисанинг рўй бериш сонининг дисперсияси қанчага тенг? Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. *Ҳар бирида А ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p ўзгармас бўлган n та эркли синашда бу ҳодиса рўй беришлари сонининг дисперсияси синашлар сонини битта синашда ҳодисанинг рўй бериш ва рўй бермаслик эҳтимолларига кўпайтирилганига тенг:*

$$D(X) = npq.$$

Исботи. X тасодифий миқдор — A ҳодисанинг n та синашда рўй беришлар сонини қараймиз. Равшанки, бу синашларда ҳодисанинг рўй беришлари жами сони унинг айрим синашларда рўй беришлари йиғиндисига тенг:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

бу ерда X_1 биринчи синашда, X_2 иккинчи синашда, ..., X_n n синашда ҳодисанинг рўй бериш сони.

X_1, X_2, ..., X_n миқдорлар ўзаро эркли, чунки ҳар бир синашнинг натижаси қолганларининг натижаларига боғлиқ эмас, демак, 1-натижадан (5-§) фойдаланишга ҳақимиз бор:

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n). \qquad (*)$$

X_1 нинг дисперсиясини қуйидаги формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$D(X_1) = M(X_1^2) - [M(X_1)]^2. \qquad (**)$$

X_1 миқдор биринчи тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш сони, шунинг учун (VII боб, 2-§, 2-мисол) $M(X_1) = p$.

Фақат иккита қийматни, чунончи p эҳтимол билан 1^2 ни ва q эҳтимол билан 0^2 ни қабул қилиш мумкин бўлган X_1^2 тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топамиз:

$$M(X_1^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p.$$

Топилган натижаларни (**) муносабатга қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(X_1) = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

Равшанки, қолган тасодифий миқдорлардан ҳар бирининг дисперсияси ҳам pq га тенг. (*) муносабатнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчини pq га алмаштириб,

$$D(X) = npq$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Эслатма. X миқдор биномиал қонун бўйича тақсимланганлиги учун исботланган теоремани бундай таърифлаш ҳам мумкин: n ва p

параметрли биномиал тақсимотнинг дисперсияси npq *кўпайтмага тенг.*

Мисол. Ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,6 га тенг бўлган 10 та эркли синаш ўтказилмоқда. X тасодифий миқдор — бу синашларда ҳодисанинг рўй бериш сони дисперсиясини ҳисобланг.

Ечилиши. Шартга кўра $n = 10$, $p = 0,6$. Ҳодисанинг рўй бермаслик эҳтимоли:

$$q = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Изланаётган дисперсия:

$$D(X) = npq = 10 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 2,4.$$

7-§. Ўртача квадратик четланиш

Тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларини унинг ўртача қиймати атрофида тарқоқлигини баҳолаш учун дисперсиядан ташқари яна баъзи-бир бошқа характеристикалар ҳам хизмат қилади. Улар жумласига ўртача квадратик четланиш киради.

X тасодифий миқдорнинг *ўртача квадратик четланиши* деб, дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Дисперсиянинг ўлчамлиги тасодифий миқдор ўлчамлигининг квадратига тенглигини кўрсатиш қийин эмас. Ўртача квадратик четланиш дисперсиядан олинган квадрат илдизга тенг бўлгани учун $\sigma(X)$ нинг ўлчамлиги X нинг ўлчамлиги билан бир хил бўлади. Шу сабабли тарқоқлик баҳоси ўлчамлиги тасодифий миқдор ўлчамлиги билан бир хил бўлиши мақсадга мувофиқ бўлган ҳолларда дисперсия эмас, балки ўртача квадратик четланиш ҳисобланади. Масалан, X чизиқли метрларда ўлчанса, у ҳолда $\sigma(X)$ ҳам чизиқли метрларда ўлчанади, $D(X)$ эса квадрат метрларда ўлчанади.

Мисол. X тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот қонуни орқали берилган.

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5.

$\sigma(X)$ ўртача квадратик четланишни топинг.

Ечилиши. X нинг математик кутилишини ҳисоблаймиз:

$$M(X) = 2\cdot 0,1 + 3\cdot 0,4 + 10\cdot 0,5 = 6,4.$$

X^2 нинг математик кутилишини топамиз:

$$M(X^2) = 2^2\cdot 0,1 + 3^2\cdot 0,4 + 10^2\cdot 0,5 = 54.$$

Дисперсияни топамиз:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 54 - 6,4^2 = 13,04.$$

Изланаётган ўртача квадратик четланиш қуйидагига тенг:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13,04} \approx 3,61.$$

8- §. Ўзаро эркли тасодифий миқдорлар йиғиндисининг ўртача квадратик четланиши

Бир нечта ўзаро эркли тасодифий миқдорларнинг ўртача квадратик четланишлари маълум бўлсин. Бу миқдорлар йиғиндисининг ўртача квадратик четланишини қандай топиш мумкин? Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. *Чекли сондаги ўзаро эркли тасодифий миқдорлар йиғиндисининг ўртача квадратик четланиши бу миқдорлар ўртача квадратик четланишларининг квадратлари йиғиндисидан олинган квадрат илдизга тенг:*

$$\sigma(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \ldots + \sigma^2(X_n)}$$

Исботи. Қаралаётган ўзаро эркли миқдорлар йиғиндисини X орқали белгилайлик:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Бир нечта ўзаро эркли тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси қўшилувчилар дисперсияларининг йиғиндисига тенг (5- §, 1-натижа) бўлгани учун

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n).$$

Бундан

$$\sqrt{D(X)} = \sqrt{D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)}$$

ёки узил-кесил

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \ldots + \sigma^2(X_n)}.$$

9- §. Бир хил тақсимланган ўзаро эркли тасодифий миқдорлар

Тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни бўйича унинг сонли характеристикаларини топиш мумкинлиги энди бизга маълум. Бундан, агар бир нечта тасодифий миқдорлар бир хил тақсимот қонунига эга бўлса, у ҳолда уларнинг сонли характеристикалари бир хил бўлиши келиб чиқади.

Бир хил тақсимланган ва демак, бир хил характеристикаларга (математик кутилиш, дисперсия ва бошқалар) эга бўлган ўзаро эркли n та X_1, X_2, ..., X_n тасодифий миқдорларни қарайлик. Шу миқдорларнинг арифметик ўртача қийматининг сонли характеристикаларини ўрганиш катта аҳамиятга эга, биз бу параграфда шу масала билан шуғулланамиз.

Қаралаётган тасодифий миқдорларнинг арифметик қийматини $\overline{X}$ орқали белгилаймиз:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

Қуйидаги уч ҳолат $\overline{X}$ арифметик ўртача қийматнинг сонли характеристикалари билан ҳар бир алоҳида миқдорнинг тегишли характеристикалари орасида алоқа ўрнатади.

1. Ўзаро эркли ва бир хил тақсимланган тасодифий миқдорларнинг арифметик ўртача қийматининг математик кутилиши ҳар бир миқдорнинг математик кутилиши a га тенг:

$$M(\overline{X}) = a$$

Исботи. Математик кутилиш хоссаларидан (ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгисидан ташқарига чиқариш мумкин; йиғиндининг математик кутилиши қўшилувчиларнинг математик кутилишлари йиғиндисига тенг) қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}.$$

Миқдорлардан ҳар бирининг математик кутилиши a га тенглигини назарга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(\overline{X}) = \frac{na}{n} = a.$$

2. n та ўзаро эркли, бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар арифметик ўртача қийматининг дисперсияси миқдорлардан ҳар бирининг D дисперсиясидан n марта кичик:

$$D(\overline{X}) = \frac{D}{n}. \qquad (*)$$

Исботи. Дисперсия хоссаларидан фойдаланиб (ўзгармас кўпайтувчини дисперсия белгисидан ташқарига квадратга ошириб чиқариш мумкин; эркли миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси қўшилувчилар дисперсиялари йиғиндисига тенг), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)}{n^2}.$$

Миқдорлардан ҳар бирининг дисперсияси шартга кўра D га тенглигини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(\overline{X}) = \frac{nD}{n^2} = \frac{D}{n}.$$

3. n та ўзаро эркли, бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар арифметик ўртача қийматининг ўртача квадратик четланиши шу миқдорлардан ҳар бирининг ўртача квадратик четланиши σ дан $\sqrt{n}$ марта кичик:

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (**)$$

Исботи. $D(\overline{X}) = \frac{D}{n}$ бўлгани учун $\overline{X}$ нинг ўртача квадратик четланиши қуйидагига тенг:

$$\sigma(\overline{X}) = \sqrt{D(\overline{X})} = \sqrt{\frac{D}{n}} = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

(*) ва (**) формулалардан келиб чиқадиган умумий хулоса: дисперсия ва ўртача квадратик четланиш тасодифий миқдорнинг тарқоқлик ўлчовлари бўлгани учун етарлича катта сондаги ўзаро эркли тасодифий миқдорларнинг арифметик ўртача қиймати ҳар бир миқдорга қараганда анча кичик тарқоқликка эга.

Бу натижа практика учун қанчалик муҳимлигини мисолда тушунтирамиз.

Мисол. Бирор физикавий катталикни ўлчаш учун одатда бир нечта ўлчаш ўтказилади, кейин эса ҳосил қилинган сонларнинг арифметик ўртача қийматини топиб, уни ўлчанаётган катталикнинг тақрибий қиймати сифатида олинади. Ўлчашлар бир хил шароитда бажарилади деб, қуйидагиларни исботланг:

а) арифметик ўртача қиймат айрим ўлчашларга нисбатан ишончлироқ натижа беради;

б) ўлчашлар сони ортиши билан бу натижанинг ишончлилиги ортади.

Ечилиши. а) Маълумки, айрим ўлчашлар ўлчанаётган катталикнинг ҳар хил қийматини беради. Ҳар бир ўлчашнинг натижаси кўп тасодифий сабабларга (ҳароратнинг ўзгариши, асбобнинг тебраниши ва шунга ўхшашларга) боғлиқ бўлиб, бу сабабларни аввалдан тўла-тўкис ҳисобга олиб бўлмайди.

Шунинг учун, n та айрим ўлчаш натижасини X_1, X_2, ..., X_n (индекс ўлчаш номерини билдиради) тасодифий миқдорлар сифатида қарашга ҳақлимиз. Бу миқдорларнинг эҳтимоллари тақсимоти бир хил (ўлчашлар бир хил методика бўйича ва бир хил асбоблар билан ўтказилади), демак, улар бир хил сонли характеристикаларга эга; бундан ташқари, улар ўзаро эркли (ҳар бир айрим ўлчашнинг натижаси қолганларининг натижасига боғлиқ эмас).

Бундай миқдорларнинг арифметик ўртача қийматининг тарқоқлиги айрим миқдорларнинг тарқоқлигидан кам бўлиши бизга маълум. Бошқача айтганда, ўлчашларнинг арифметик ўртача қиймати ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қийматига айрим ўлчаш натижасига нисбатан яқинроқ бўлади. Бу эса бир неча ўлчашларнинг арифметик ўртача қиймати айрим ўлчашларга нисбатан ишончлироқ натижа беришини англатади.

б) Тасодифий миқдорларнинг сони ортиши билан уларнинг арифметик ўртача қийматининг тарқоқлиги камайиб бориши бизга маълум. Бу эса ўлчашлар сони ортиши билан уларнинг арифметик ўртача қиймати ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қийматидан борган сари камроқ фарқ қилади, демакдир. Шундай қилиб, ўлчашлар сонини орттириб, ишончлироқ натижа олинади.

Масалан, айрим ўлчашнинг ўртача квадратик четланиши $\sigma = 6$ *м* бўлиб, жами $n = 36$ та ўлчашлар ўтказилган бўлса, у ҳолда бу ўлчашларнинг арифметик ўртача қийматининг ўртача квадратик четланиши фақат 1 *м* га тенг. Ҳақиқатан,

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{36}} = 1.$$

Кўриб турибмизки, бир нечта ўлчашларнинг арифметик ўртача қиймати кутилганидек, ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қийматига ҳар бир ўлчаш натижасига нисбатан яқинроқ экан.

10-§. Тақсимот моментлари ҳақида тушунча

Қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган X дискрет тасодифий миқдорни қарайлик:

X	1	2	5	100
p	0,6	0,2	0,19	0,01.

X нинг математик кутилишини топайлик:

$$M(X) = 1\cdot 0,6 + 2\cdot 0,2 + 5\cdot 0,19 + 100\cdot 0,01 = 2,95.$$

X^2 нинг тақсимот қонунини топамиз:

X^2	1	4	25	10 000
p	0,06	0,02	0,19	0,01.

X^2 нинг математик кутилишини топамиз:

$$M(X^2) = 1\cdot 0,6 + 4\cdot 0,2 + 25\cdot 0,19 + 100\cdot 0,1 = 106,15.$$

$M(X^2)$ қиймат $M(X)$ га нисбатан анча катта эканлигини кўриб турибмиз. Бу X^2 нинг X нинг $x = 100$ га мос қиймати квадратга оширилгандан кейин 10000 га тенг бўлгани, яъни анча ортгани, шу қийматнинг эҳтимоли эса кичиклиги (0,01) билан тушунтирилади.

Шундай қилиб, $M(X)$ дан $M(X^2)$ га ўтиш кичик эҳтимолга эга бўлган катта қийматнинг математик кутилишга таъсирини яхшироқ ҳисобга олишга имкон берди. Албатта, агар X миқдор бир нечта катта, лекин кичик эҳтимолли қийматларга эга бўлса, ҳолда у X^2 га, айниқса X^3, X^4 ва ҳ. к. ларга ўтиш бу катта, лекин кичик эҳтимолли қийматларнинг «ролини оширишга имкон беради». Мана шу сабабли тасодифий миқдорнинг (фақат дискрет эмас, балки узлуксиз ҳам) бутун мусбат даражаларининг математик кутилишини текшириш мақсадга мувофиқ бўлади.

X тасодифий миқдорнинг k-тартибли бошланғич моменти деб, X^k миқдорнинг математик кутилишига айтилади:

$$\nu_k = M(X^k).$$

Жумладан

$$\nu_1 = M(X),$$

$$\nu_2 = M(X^2).$$

Бу моментлардан фойдаланиб, дисперсияни ҳисоблаш $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ формуласини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$D\ (X) = \nu_2 - \nu^2_1. \qquad (^*)$$

X тасодифий миқдорнинг моментларидан ташқари $X - M(X)$ четланиши моментларини ҳам текшириш мақсадга мувофиқдир.

X тасодифий миқдорнинг k-тартибли марказий моменти деб, $(X - M(X))^k$ миқдорнинг математик кутилишига айтилади:

$$\mu_k = M[(X - M(X))^k].$$

Жумладан,

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0, \qquad (^{**})$$

$$\mu_2 = M[(X - M(X))^2] = D\ (X). \qquad (^{***})$$

Бошланғич ва марказий моментларни боғловчи муносабатларни келтириб чиқариш осон.

Масалан, $(^*)$ ва $(^{***})$ ни солиштириб,

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu^2_1$$

ни ҳосил қиламиз.

Марказий момент таърифи ва математик кутилиш хоссаларидан фойдаланиб, қуйидаги формулаларни ҳосил қилиш осон:

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu^3_1,$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu^2_1 - 3\nu^4_1.$$

Юқорироқ тартибли моментлар кам ишлатилади.

Эслатма. Бу ерда кўрилган моментлар *назарий моментлар* деб аталади. Кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланадиган моментлар назарий моментлардан фарқли ўлароқ *эмпирик моментлар* деб аталади. Эмпирик моментлар таърифлари кейинроқ берилади (XVII боб, 2-§).

Масалалар

1. Иккита эркли тасодифий миқдорнинг дисперсиялари маълум: $D(X) = 4$, $D(Y) = 3$. Бу миқдорлар йиғиндисининг дисперсиясини топинг.

Жавоби. 7.

2. X тасодифий миқдорнинг дисперсияси 5 га тенг. Қуйидаги миқдорларнинг дисперсиясини топинг. а) $X - 1$; б) $-2X$; в) $3X + 6$.

Жавоби. а) 5; б) 20; в) 45.

3. X тасодифий миқдор $-C$ ва C қийматларни 0,5 эҳтимол билан қабул қилади. Бу миқдорнинг дисперсиясини топинг.

Жавоби. C^2.

4. Тақсимот қонуни маълум бўлган тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг:

X	0,1	2	10	20
P	0,4	0,2	0,15	0,25.

Жавоби. 67,6404.

5. X тасодифий миқдор иккита мумкин бўлган қиймат: x_1 ни 0,3 эҳтимол билан, x_2 ни 0,7 эҳтимол билан қабул қилиши мумкин, шу билан бирга $x_2 > x_1$ · $M(x) = 2,7$ ва $D(X) = 0,21$ ни билган ҳолда x_1 ва x_2 ни топинг.

Жавоби. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

6. Агар $M(X) = 0,8$ бўлса, X тасодифий миқдор — иккита эркли тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш сонининг дисперсиясини топинг.

Кўрсатма. Иккита эркли тажрибада A ҳодиса рўй бериш сонини эҳтимоллари тақсимотининг биномиал қонунини ёзинг.

Жавоби. 0,48.

7. Бир-бирига боғланмасдан ишлайдиган тўртта асбобдан тузилган қурилма синалмоқда. Асбобларнинг ишдан чиқиш эҳтимоллари қуйидагича: $p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,5$; $p_4 = 0,6$. Ишдан чиққан асбоблар сонининг математик кутилиши ва дисперсиясини топинг.

Жавоби. 1,8; 0,94.

8. X тасодифий миқдорнинг — ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,7 га тенг бўлган 100 та эркли синашда ҳодисанинг рўй бериш сонининг дисперсиясини топинг.

Жавоби. 21.

9. Тасодифий миқдорнинг дисперсияси $D(X) = 6,25$. $\sigma(X)$ ўртача квадратик четланишни топинг.

Жавоби. 2,5.

10. Тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган:

X	2	4	8
p	0,1	0,5	0,4.

Бу миқдорнинг ўртача квадратик четланишини топинг.

Жавоби. 2,2.

11. Ўзаро эркли, бир хил тақсимланган 9 та тасодифий миқдордан ҳар бирининг дисперсияси 36 га тенг. Бу миқдор арифметик ўртача қийматининг дисперсиясини топинг.

12. Ўзаро эркли, бир хил тақсимланган 16 та тасодифий миқдордан ҳар бирининг ўртача квадратик четланиши 10 га тенг. Бу миқдорлар арифметик ўртача қийматининг ўртача квадратик четланишини топинг.

Жавоби. 2,5.

Тўққизинчи боб

КАТТА СОНЛАР ҚОНУНИ

1- §. Дастлабки изоҳлар

Маълумки, тасодифий миқдор синаш якунида мумкин бўлган қийматлардан қайси бирини қабул қилишини аввалдан ишонч билан айтиб бўлмайди, чунки у ҳисобга олиб бўлмайдиган бир қанча тасодифий сабабларга боғлиқ бўлиб, биз уларни ҳисобга ололмаймиз. Ҳар бир тасодифий миқдор ҳақида ана шу маънода жуда кам маълумотга эга бўлганимиз учун етарлича катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндиси тўғрисида ҳам бирор нарса айта олишимиз қийиндек кўринади. Аслида эса бу ундай эмас. Бирор нисбатан кенг шартлар остида етарлича катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тасодифийлик характери деярли йўқолар ва у қонуниятга айланиб қолар экан.

Практика учун жуда кўп тасодифий сабабларнинг биргаликдаги таъсири тасодифга деярли боғлиқ бўлмайдиган натижага олиб келадиган шартларни билиш жуда катта аҳамиятга эга, чунки бу ҳодисаларнинг қандай ривожланишини кўра билишга имкон беради. Бу шартлар умумий ном билан катта сонлар қонуни деб юритиладиган теоремаларда кўрсатилади. Булар жумласига Чебишев ва Бернулли теоремалари (бошқа теоремалар ҳам бор, лекин улар бу ерда қаралмайди) мансуб, Чебишев теоремаси катта сонлар қонунининг энг умумийси, Бернулли теоремаси эса энг соддасидир. Бу теоремаларни исботлашда Чебишев тенгсизлигидан фойдаланамиз.

2- §. Чебишев тенгсизлиги

Чебишев тенгсизлиги дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорлар учун ўринли. Соддалаштириш мақсадида биз бу тенгсизликни дискрет миқдорлар учун исботлаймиз.

Тақсимот жадвали орқали берилган X дискрет тасодифий миқдорни қарайлик:

$$\begin{array}{lllll} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p & p_1 & p_2 & \dots & p_n . \end{array}$$

Тасодифий миқдорни ўзининг математик кутилишидан четланиши абсолют қиймат бўйича ε мусбат сондан ортмаслик эҳтимолини баҳолашни мақсад қилиб қўяйлик. Агар ε етарлича кичик бўлса, биз бу билан тасодифий миқдор ўзининг математик кутилишига яқин қиймат қабул қилиш эҳтимолини баҳолаган бўламиз. П. Л. Чебишев, бизни қизиқтираётган баҳони берувчи тенгсизликни исботлаган.

Чебишев тенгсизлиги. *X тасодифий миқдорнинг ўз математик кутилишидан четланиши абсолют қиймат бўйича ε мусбат сондан кичик бўлиш эҳтимоли $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ дан кичик эмас:*

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon) \geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Исботи. $|X-M(X)|<\varepsilon$ ва $|X-M(X)| \geqslant \varepsilon$ тенгсизликларнинг бажарилишидан иборат бўлган ҳодисалар қарама-қарши бўлгани учун уларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг, яъни

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)+P(|X-M(X)| \geqslant \varepsilon)=1.$$

Бундан бизни қизиқтираётган эҳтимол:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)=1-P(|X-M(X)| \geqslant \varepsilon). \qquad (*)$$

Кўриб турибмизки, масала $P(|X-M(X)| \geqslant \varepsilon)$ эҳтимолни ҳисоблашга келтирилди.

X тасодифий миқдор дисперсиясининг ифодасини ёзайлик:

$$D(X)=[x_1-M(X)]^2 p_1+[x_2-M(X)]^2 p_2+\dots$$
$$\dots+[x_n-M(X)]^2 p_n .$$

Бу йиғиндининг ҳар бир қўшилувчиси манфий эмас. Таркибида $|x_i-M(X)|<\varepsilon$ бўлган қўшилувчиларни ташлаб юборамиз (қолган қўшилувчилар учун $x_i-M(X) \geqslant \varepsilon$ бўлади), натижада йиғинди фақат камайиши мумкин. Аниқлик учун биринчи k та қўшилувчи ташлаб юборилган деб ҳисоблаймиз (умумийликка зиён келтирмасдан, тақсимот жадвалида мумкин бўлган қийматлар шу тартибда белгилаб чиқилган дейиш мумкин). Шундай қилиб,

$$D(X) \geq [x_{k+1} - M(X)]^2 p_{k+1} + [x_{k+2} - M(X)]^2 p_{k+2} + \\ + \dots + [x_n - M(X)]^2 p_n .$$

$|x_j - M(X)| \geq \varepsilon$ $(j = k+1, k+2, \dots, n)$ тенгсизликнинг иккала томони ҳам мусбат, шунинг учун уларни квадратга ошириб, тенг кучли $|x_j - M(X)|^2 \geq \varepsilon^2$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бундан фойдаланиб ва қолган йиғиндидаги ҳар бир $|x_j - M(X)|^2$ кўпайтувчини ε^2 билан алмаштириб (бундан тенгсизлик фақат кучайиши мумкин), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(X) \geq \varepsilon^2 (p_{k+1} + p_{k+2} + \dots + p_n). \qquad (**)$$

Қўшиш теоремасига кўра $p_{k+1} + p_{k+2} + \dots + p_n$ эҳтимоллар йиғиндиси X тасодифий миқдор $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ қийматларнинг, қайсиниси бўлса, бирини қабул қилиш эҳтимоли бўлиб, уларнинг ҳар бирида хам четланиш $|x_j - M(X)| \geq \varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантиради. Бундан $p_{k+1} + p_{k+2} + \dots, + p_n$ йиғинди

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$$

эҳтимолни ифодалаши келиб чиқади. Бу мулоҳаза (**) тенгсизликни бундай ёзишга имкон беради:

$$D(X) \geq \varepsilon^2 \cdot P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$$

ёки

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (***)$$

(***) ни (*) га қўйиб узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Мана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Эслатма. Практика учун Чебишев тенгсизлигининг аҳамияти чекланган, чунки кўп ҳолларда у қўпол, баъзан эса тривиал (аҳамияти бўлмаган) баҳо беради. Масалан, агар $D(X) > \varepsilon^2$, ва демак, $\frac{D(X)}{\varepsilon^2} > 1$ бўлса, у ҳолда $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} < 0$; шундай қилиб, бу ҳолда Чебишев тенгсизлиги четланишнинг эҳтимоли манфий эмаслигини билдиради, бу эса шундоқ ҳам равшан, чунки ҳар қандай эҳтимол манфий бўлмаган сон билан ифодаланади.

Чебишев тенгсизлигини назарий аҳамияти эса жуда каттадир. Қуйида Чебишев теоремасини келтириб чиқариш учун шу тенгсизликдан фойдаланамиз.

3- §. Чебишев теоремаси

Чебишев теоремаси. *Агар* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *жуфт-жуфт эркли тасодифий миқдорлар бўлиб, уларнинг дисперсиялари текис чегараланган (ўзгармас* C *сондан катта эмас) бўлса, у ҳолда мусбат* ε *сон ҳар қанча кичик бўлганда ҳам, тасодифий миқдорлар сони етарлича катта бўлса,*

$$\left|\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\dots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon$$

тенгсизликнинг эҳтимоли бирга исталганча яқин бўлади.

Бошқача қилиб айтганда, теорема шартлари бажарилганда

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\dots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Шундай қилиб, Чебишев теоремаси бундай даъво қилади: агар дисперсиялари чегараланган тасодифий миқдорларнинг етарлича кўп сондагиси қаралаётган бўлса, у ҳолда бу тасодифий миқдорлар арифметик ўртача қийматининг уларнинг математик кутилишлари арифметик ўртача қийматидан четланиши абсолют қиймат бўйича исталганча кичик бўлишидан иборат ҳодисани деярли муқаррар деб ҳисоблаш мумкин.

Исботи. Янги тасодифий миқдор — тасодифий миқдорларнинг

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$$

арифметик ўртача қийматини текширамиз.

$\overline{X}$ нинг математик кутилишини топамиз. Математик кутилишнинг хоссаларидан фойдаланиб (ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгисидан ташқарига чиқариш мумкин; йиғиндининг математик кутилиши қўшилувчиларнинг математик кутилишлари йиғиндисига тенг), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}\right)=\frac{M(X_1)+M(X_2)+\dots+M(X_n)}{n}. \qquad (*)$$

$\overline{X}$ тасодифий миқдорга Чебишев тенгсизлигини қўллаймиз:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-M\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)\right|<\varepsilon\right)\geqslant$$

$$\geqslant 1-\frac{D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

ёки (*) муносабатни қўлласак:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-$$

$$-\frac{D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}. \qquad (**)$$

Дисперсиянинг хоссаларидан фойдаланиб (ўзгармас кўпайтувчини квадратга ошириб дисперсия белгисидан ташқарига чиқариш мумкин; эркли тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси қўшилувчилар дисперсиялари йиғиндисига тенг), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)}{n^2}.$$

Шартга кўра ҳамма тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари C ўзгармас сон билан чегараланган, яъни

$$D(X_1)\leqslant C;\ D(X_2)\leqslant C;\ \ldots;\ D(X_n)\leqslant C$$

тенгсизликлар ўринли, шунинг учун

$$\frac{D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)}{n^n}\leqslant\frac{C+C+\cdots+C}{n^2}=\frac{nC}{n^2}=\frac{C}{n}.$$

Шундай қилиб,

$$D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\leqslant\frac{C}{n}. \qquad (***)$$

(***) нинг ўнг томонини (**) қўйиб (бундан (**) тенгсизлик фақат кучайиши мумкин), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}$$

Бундан $n \to \infty$ да лимитга ўтиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(\left| \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - \frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) \geqslant 1.$$

Ниҳоят, эҳтимол бирдан катта бўла олмаслигини ҳисобга олиб, узил-кесил бундай ёзишимиз мумкин:

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(\left| \frac{X_1+X_2+\cdots X_n}{n} - \frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Теорема исботланди.

Юқорида, Чебишев теоремасини таърифлашда, биз тасодифий миқдорларнинг математик кутилишлари ҳар хил деб фараз қилган эдик. Практикада эса кўпинча тасодифий миқдорлар бир хил математик кутилишга эга бўлади. Агар шунга қўшимча қилиб, бу тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари текис чегараланган дейиладиган бўлса, у ҳолда бу миқдорларга Чебишев теоремасини қўллаш мумкинлиги равшан.

Ҳар бир тасодифий миқдорнинг математик кутилишини a орқали белгилаймиз; қаралаётган ҳолда математик кутилишларнинг арифметик ўртача қиймати ҳам a га тенг бўлишини кўриш қийин эмас.

Биз энди қаралаётган хусусий ҳол учун Чебишев теоремасини таърифлашимиз мумкин.

Агар $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *тасодифий миқдорлар жуфт-жуфт эркли ва бир хил математик кутилишга эга бўлиб, уларнинг дисперсиялари текис чегараланган бўлса, у ҳолда* $\varepsilon > 0$ *мусбат сон ҳар қанча кичик бўлганда ҳам тасодифий миқдорлар сони етарлича кўп бўлса,*

$$\left| \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - a \right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг эҳтимоли бирга исталганча яқин бўлади.

Бошқача сўз билан айтганда, теореманинг шартлари бажарилганда

$$\lim_{n \to \infty} \left(\left| \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - a \right| < \varepsilon \right) = 1$$

тенглик ўринли бўлади.

4-§. Чебишев теоремасининг моҳияти

Исботланган теореманинг моҳияти бундай: айрим эркли тасодифий миқдорлар ўз математик кутилишларидан анча фарқ қиладиган қийматлар қабул қилса-да етарлича катта сондаги тасодифий миқдорларнинг арифметик ўртача қиймати катта эҳтимоллик билан тайин ўзгармас сонга, чунончи $\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}$ сонга (ёки, хусусий ҳолда a сонга) яқин қийматларни катта эҳтимол билан қабул қилади. Бошқача сўз билан айтганда, айрим тасодифий миқдорлар анчагина сочилган бўлиши мумкин, лекин уларнинг арифметик ўртача қиймати кам тарқоқ бўлади.

Шундай қилиб, ҳар бир тасодифий миқдор мумкин бўлган қийматлардан қайсинисини қабул қилишини аввалдан айтиб бўлмайди, аммо уларнинг арифметик ўртача қиймати қандай қиймат қабул қилишини олдиндан кўра билиш мумкин.

Шундай қилиб, етарлича катта сондаги эркли тасодифий миқдорларнинг (дисперсиялари текис чегараланган) арифметик ўртача қиймати тасодифийлик характерини йўқотади. Бу бундай изоҳланади: ҳар бир миқдорнинг ўз математик кутилишидан четланиши мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин, аммо арифметик ўртача қийматда улар ўзаро йўқолиб кетади.

Чебишев теоремаси фақат дискрет тасодифий миқдорлар учун эмас балки узлуксиз миқдорлар учун ҳам ўринли; у диалектик материализмнинг тасодифийлик ва зарурият орасидаги боғланиш ҳақидаги таълимотини тасдиқловчи ёрқин мисолдир.

5-§. Чебишев теоремасининг практика учун аҳамияти

Чебишев теоремасининг амалий масалаларни ҳал этишда қўлланишига доир мисоллар келтирамиз.

Одатда бирор физикавий катталикни ўлчаш учун бир нечта ўлчашлар ўтказилади ва уларнинг арифметик ўртача қиймати изланаётган ўлчам сифатида қабул қилинади. Қандай шартларда бундай ўлчаш усулини тўғри деб ҳисоблаш мумкин? Бу саволга Чебишев теоремаси (унинг хусусий ҳоли) жавоб беради.

Ҳақиқатан ҳам, ҳар бир ўлчаш натижаларини X_1, X_2, ..., X_n тасодифий миқдорлар сифатида қараймиз. Бу тасодифий миқдорлар учун Чебишев теоремасини қўлламоқчи бўлсак, қуйидагилар бажарилиши керак: 1) улар жуфт-жуфт эркли, 2) бир хил математик кутилишга эга, 3) уларнинг дисперсиялари текис чегараланган.

Агар ҳар бир ўлчаш натижаси қолганларининг натижаларига боғлиқ бўлмаса, биринчи талаб бажарилади.

Агар ўлчашлар систематик (бир хил ишорали) хатоларсиз бажарилса, иккинчи талаб бажарилади. Бу ҳолда ҳамма тасодифий миқдорларнинг математик кутилишлари бир хил бўлиб, у ҳақиқий ўлчам a га тенг бўлади.

Агар ўлчаш асбоби тайин аниқликни таъминлай олса, учинчи талаб бажарилади. Бунда айрим ўлчашларнинг натижалари ҳар хил бўлса-да, уларни тарқоқлиги чегараланган бўлади.

Агар юқорида кўрсатилган ҳамма талаблар бажарилган бўлса, у ҳолда ўлчаш натижаларига Чебишев теоремасини қўллашга ҳақлимиз: n етарлича катта бўлганда

$$\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon$$

тенгсизликнинг эҳтимоли бирга исталганча яқин бўлади. Бошқача қилиб айтганда, етарлича кўп сонда ўлчашлар ўтказилса, у ҳолда уларнинг арифметик ўртача қиймати ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қийматидан исталганча кам фарқ қилади.

Шундай қилиб, Чебишев теоремаси кўрсатилган ўлчаш усулини қўллаш мумкин бўладиган шартларни бажарилиши кераклигини кўрсатади.

Бироқ ўлчашлар сонини кўпайтириш билан исталганча катта аниқликка эришиш мумкин деб ўйлаш нотўғри бўлар эди. Гап шундаки, асбобнинг ўзи $\pm\alpha$ аниқликда кўрсатади; шунинг учун ҳар бир ўлчаш натижаси, ва демак, уларнинг арифметик ўртача қиймати ҳам асбобнинг аниқлигидан ортмайдиган аниқликда ҳосил қилинади.

Статистикада қўлланадиган танланма усул Чебишев теоремасига асосланган, бу усулни моҳияти шундан иборатки, унда унча катта бўлмаган тасодифий танланмага асосланиб, барча текширилаётган объектлар тўплами (бош тўплам) тўғрисида мулоҳаза қилинади. Масалан, бир той пахтанинг сифати ҳақида ҳар ер-ҳар еридан олинган пахта толаларидан иборат тутамнинг сифатига қараб хулоса чиқарилади. Тутамдаги пахта толаларини сони тойдагидан анча кам бўлса ҳам, тутам етарлича кўп сондаги юзлаб толалардан иборатдир.

Бошқа мисол сифатида донининг сифатини ундан озгинасини татиб кўришга асосланиб уни сифатини билишни олиш мумкин. Бу ҳолда ҳам таваккалига олинган донлар сони ҳамма дон сонидан анча кичик бўлса-да, лекин ўз-ўзи учун етарлича кўп.

Мана шу келтирилган мисолларнинг ўзидан, Чебишев теоремаси практика учун бебаҳо аҳамиятга эга деб хулоса чиқариш мумкин.

6- §. Бернулли теоремаси

n та эркли синаш ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га тенг бўлсин. Ҳодиса рўй беришининг нисбий частотаси тахминан қандай бўлишини олдиндан кўра билиш мумкинми? Бу саволга Яков Бернулли томонидан исботланган теорема (1713 йилда нашр этилган) ижобий жавоб беради, бу теорема «катта сонлар қонуни» номи билан юритилади; у эҳтимоллар назариясининг фан сифатида шаклланишига асос солди. Бернуллининг исботи мураккаб эди. Теореманинг содда исботини П. Л. Чебишев 1846 йилда баён этган.

Бернулли теоремаси. *Агар n та эркли синашнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p ўзгармас ва синашлар сони етарлича катта бўлса, у ҳолда нисбий частотанинг p эҳтимолдан четланиши абсолют қиймат бўйича исталганча кичик бўлиши эҳтимоли бирга исталганча яқин бўлади.*

Бошқача қилиб айтганда, агар ε исталганча кичик мусбат сон бўлса, у ҳолда теорема шартлари бажарилганда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Исботи. X_1 орқали (дискрет тасодифий миқдор) биринчи синашда, X_2 орқали иккинчи синашда, . . . , X_n орқали n-синашда ҳодисанинг рўй бериш сонини белгилаймиз.

Равшанки, бу миқдорларнинг ҳар бири фақат иккита қиймат: 1 ни (A ҳодиса рўй берди) p эҳтимол билан, ва 0 ни (ҳодиса рўй бермади) $1 - p = q$ эҳтимол билан қабул қилиши мумкин.

Қаралаётган миқдорларга Чебишев теоремасини қўллаш мумкинми? Агар тасодифий миқдорлар жуфт-жуфт эркли ва уларнинг дисперсиялари чегараланган бўлса, мумкин. Иккала шарт ҳам бажарилади. Ҳақиқатан ҳам X_1, $X_2, \ldots,$ X_n миқдорларнинг жуфт-жуфт эрклиги тажрибаларнинг эрклилигидан келиб чиқади. Ихтиёрий $X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ миқдорнинг дисперсияси pq* кўпайтмага тенг, $p + q = 1$ бўлгани учун pq кўпайтма $\frac{1}{4}$** дан ортмайди, демак, бу миқдорларнинг дисперсиялари чегараланган, масалан, $C = \frac{1}{4}$ сони билан.

Қўрилаётган миқдорларга Чебишев теоремасини (хусусий ҳолини) қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Ҳар бир X_i миқдорнинг a математик кутилиши (яъни битта синашда ҳодисанинг рўй бериш сонининг математик кутилиши) ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га тенг эканлигини эътиборга олиб (2-мисол, 69-бет), қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Энди $\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ каср n та синашда A ҳодиса рўй беришининг нисбий частотаси $\frac{m}{n}$ га тенглигини кўрсатиш қолди, холос. Ҳақиқатан, X_1, $X_2, \ldots, X_n$ миқдорларнинг ҳар бири ҳодиса мос синашда рўй берганида бирни қабул қилади; демак $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ йиғинди n та синашда ҳодисанинг рўй бериш сони m га тенг, демак,

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{m}{n}.$$

---

* Бу VIII боб, 6-§ дан $n = 1$ деб қабул қилинганда келиб чиқади.

** Маълумки, йиғиндиси ўзгармас бўлган икки соннинг кўпайтмаси ўзининг энг катта қийматига кўпайтувчилар ўзаро тенг бўлган ҳолда эришади. Бу ерда $p_i + q_i = 1$, яъни ўзгармас, шунинг учун $p_i = q_i = \frac{1}{2}$ да $p_i q_i$ кўпайтма энг катта қийматга эга бўлади, бу қиймат $\frac{1}{4}$ га тенг.

Бу тенгликни ҳисобга олиб, узил-кесил

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Эслатма. Бернулли теоремасига асосланиб, синашлар сони ортиши билан нисбий частота албатта p эҳтимолга интилади, деб хулоса чиқариш нотўғри бўлар эди; бошқача қилиб айтганда, Бернулли теоремасидан $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=p$ тенглик келиб чиқмайди. Теоремада фақат тажрибалар сони етарлича катта бўлганда *нисбий частотанинг* ҳар бир синашда ҳодиса рўй беришининг ўзгармас эҳтимолидан *исталганча кам* фарқ қилиши эҳтимоли тўғрисида сўз боради.

Шундай қилиб, $\frac{m}{n}$ нисбий частотанинг p эҳтимолга интилиши математик анализдаги маънода интилишдан фарқ қилади. Бу фарқни таъкидлаш мақсадида «эҳтимол бўйича яқинлашиш» тушунчаси киритилади. Аниқроғи, кўрсатилган интилиш турлари орасидаги фарқ қуйидагидан иборат: агар $\frac{m}{n}$ нисбат $n\to\infty$ да математик анализдаги интилиш маъносида p га интилса, у ҳолда $n=N$ учун ва ундан кейинги барча n лар учун албатта $\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади; агарда $\frac{m}{n}$ нисбат $n\to\infty$ да p га эҳтимол бўйича интилса, у ҳолда n нинг айрим қийматларида тенгсизлик бажарилмай қолиши мумкин.

Шундай қилиб, Бернулли теоремасига кўра $n\to\infty$ да нисбий частота p га **эҳтимол бўйича** интилади. Бернулли теоремаси қисқача қуйидагича ёзилади:

$$\frac{m}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{эҳт}}p.$$

Кўриниб турибдики, Бернулли теоремаси синашлар сони етарлича кўп бўлганда нисбий частота нима учун турғунлик хоссасига эга бўлишини тушунтиради ва эҳтимолнинг статистик таърифини (1-боб, 5—6-§§) асослайди.

Масалалар

1. «Эҳтимол бўйича интилиш» тушунчасидан фойдаланиб, Чебишев теоремасини таърифланг ва ёзинг.

2. Агар $D(X)=0{,}001$ бўлса, $|X-M(X)|<0{,}1$ нинг эҳтимолини Чебишев тенгсизлиги бўйича баҳоланг.

Жавоби. $P\geqslant 0{,}9$.

3. Қуйидагилар берилган: $P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geqslant 0{,}9$; $D(X)=0{,}004$. Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, ε ни топинг.

Жавоби. 0,2.

Учинчи боб

ТАСОДИФИЙ МИҚДОР ЭҲТИМОЛЛАРИ ТАҚСИМОТИНИНГ ИНТЕГРАЛ ФУНКЦИЯСИ

1-§. Тақсимот интеграл функциясининг таърифи*

Дискрет тасодифий миқдор барча мумкин бўлган қийматлари ва уларнинг эҳтимоллари рўйхати билан берилишини эслайлик. Бундай берилиш усули умумий эмас; уни, масалан, узлуксиз тасодифий миқдорлар учун қўллаб бўлмайди.

Ҳақиқатан ҳам, мумкин бўлган қийматлари (a, b) интервални тўла-тўкис тўлдирувчи X тасодифий миқдорни қарайлик. X нинг мумкин бўлган барча қийматлари рўйхатини тузиш мумкинми? Равшанки, бу мумкин эмас. Шу мисол ихтиёрий типдаги тасодифий миқдорларни бериш мумкин бўладиган умумий усулни киритиш мақсадга мувофиқлигини кўрсатиб турибди. Шу мақсадда тақсимотнинг интеграл функцияси киритилади.

Айтайлик, x— ҳақиқий сон бўлсин. X нинг x дан кичик қиймат қабул қилишидан иборат ҳодисанинг эҳтимолини, яъни $X < x$ ҳодисанинг эҳтимолини $F(x)$ орқали белгилаймиз. Албатта, x нинг ўзгариши билан умуман олганда $F(x)$ ҳам ўзгаради, яъни у x нинг функцияси.

Тақсимотнинг интеграл функцияси деб, ҳар бир x қиймат учун X тасодифий миқдорнинг x дан кичик қиймат қабул қилиш эҳтимолини аниқловчи $F(x)$ функцияга айтилади, яъни

$$F(x) = P(X < x).$$

Бу тенгликни геометрик нуқтаи назардан бундай талқин қилиш мумкин: $F(x)$ функция тасодифий миқдорнинг сон ўқида x нуқтадан чапда ётувчи нуқта билан тасвирланадиган қиймат қабул қилиш эҳтимолидир.

Энди, биз узлуксиз тасодифий миқдорнинг аниқроқ таърифини берсак бўлади: тасодифий миқдор тақсимотининг $F(x)$ интеграл функцияси узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, тасодифий миқдорни *узлуксиз* деймиз

---

* Кўпинча «интеграл функция» термини ўрнига «тақсимот функция» термини ишлатилади.

2-§. Интеграл функциянинг хоссалари

1-хосса. *Интеграл функциянинг қийматлари* [0,1] *кесмага тегишли:*

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1.$$

Исботи. Бу хосса интеграл функцияни эҳтимол сифатида таърифланишидан келиб чиқади: эҳтимол ҳамма вақт манфий бўлмаган ва бирдан катта бўлмаган сондир.

2-хосса. $F(x)$ *камаймайдиган функция, яъни агар* $x_2 > x_1$ *бўлса, у ҳолда* $F(x_2) \geqslant F(x_1)$.

Исботи. $x_2 > x_1$ бўлсин. X миқдор x_2 дан кичик қиймат қабул қилишидан иборат ҳодисани қуйидаги иккита биргаликда бўлмаган ҳодисага ажратиш мумкин: 1) X миқдор x_1 дан кичик қийматни $P(X < x_1)$ эҳтимол билан қабул қилади; 2) X миқдор $x_1 \leqslant X \leqslant x_2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматни $P(x_1 \leqslant X < x_2)$ эҳтимол билан қабул қилади. Қўшиш теоремасига асосан:

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leqslant X < x_2).$$

Бундан

$$P(X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 \leqslant X < x_2)$$

ёки

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leqslant X < x_2). \qquad (*)$$

Ҳар қандай эҳтимол манфий бўлмаган сон бўлгани учун $F(x_2) - F(x_1) \geqslant 0$ ёки $F(x_2) \geqslant F(x_1)$. Исботланиши лозим бўлган муносабатни ҳосил қилдик.

1-натижа. *Тасодифий миқдорнинг* (a b) *интервалда ётувчи қийматни қабул қилиш эҳтимоли интеграл функциянинг шу интервалдаги орттирмасига тенг:*

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a). \qquad (**)$$

Бу муҳим натижа (**) формулада $x_2 = b$ ва $x_1 = a$ деб олинса, ҳосил бўлади.

Мисол. X тасодифий миқдор қуйидаги интеграл функция билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} x \leqslant -1 \text{ да } 0; \\ -1 < x \leqslant 3 \text{ да } \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}; \\ x > 3 \text{ да } 1. \end{cases}$$

Синаш натижасида X миқдор (0; 2) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши.

$$P(0 < x < 2) = F(2) - F(0).$$

Шартга кўра (0; 2) интервалда

$$F(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}.$$

демак,

$$F(2) - F(0) = \left[\frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\right] - \left[\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2}.$$

Шундай қилиб,

$$P(0 < X < 2) = \frac{1}{2}.$$

2-натижа. *X узлуксиз тасодифий миқдорнинг тайин битта қиймат қабул қилиш эҳтимоли нолга тенг.*

Ҳақиқатан ҳам, (**) $a = x$, $b = x_1 + \Delta x$ деб олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$P(x_1 \leqslant X < x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1).$$

Δx ни нолга интилтирамиз. X узлуксиз тасодифий миқдор бўлгани учун $F(x)$ функция *узлуксиз* бўлади. $F(x)$ нинг x_1 нуқтада узлуксизлигидан $F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$ айирма ҳам нолга интилади, демак,

$$P(X = x_1) = 0.$$

Бу натижадан фойдаланиб, қуйидаги тенгсизликларнинг ўринли эканлигини кўриш қийин эмас:

$$P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b). \; (^{***})$$

Масалан, $P(a < X \leqslant b) = P(a < X < b)$ тенглик қуйидагича исботланади:

$$P(a < X \leqslant b) = P(a < X < b) + P(X = b) = P(a < X < b).$$

Шундай қилиб, узлуксиз тасодифий миқдорнинг тайин бир қийматни қабул қилиш эҳтимоли тўғрисида гапиришнинг қизиғи йўқ, лекин уни ихтиёрий кичик оралиққа тушиш эҳтимолини текшириш маънога эгадир.

Бу факт амалий масалалар талабига тўла-тўкис мувофиқ келади. Масалан, деталларнинг ўлчамлари йўл қўйилган чегарадан чиқиб кетмаслик эҳтимоли қизиқиш уйғотади, аммо деталь ўлчамининг лойиҳадаги ўлчам билан устма-уст тушиш эҳтимоли масаласи қўйилмайди.

Шуни айтиб ўтиш керакки, $P(X = x_1)$ эҳтимолнинг нолга тенглигидан $X = x_1$ ҳодиса (агар эҳтимолнинг классик таърифи билан чегараланиб қолинган бўлмаса, албатта) рўй бермайди деб ўйлаш нотўғри бўлади. Ҳақиқатан ҳам, синаш натижасида тасодифий миқдор мумкин бўлган қийматларидан бирортасини албатта қабул қилади; шулар ичида x_1 ҳам бўлиши мумкин.

3-хосса. *Агар тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари* (a, b) *интервалга тегишли бўлса, у ҳолда*

$$1)\ x \leqslant a \text{ да } F(x) = 0;$$
$$2)\ x \geqslant b \text{ да } F(x) = 1.$$

Исботи. 1) $x_1 \leqslant a$ бўлсин. У ҳолда $X < x_1$ ҳодиса мумкин бўлмаган ҳодиса (чунки шартга кўра X миқдор x_1 дан кичик қийматларни қабул қилмайди) ва демак, унинг эҳтимоли нолга тенг.

2) $x_2 \geqslant b$ бўлсин. У ҳолда $X < x_2$ муқаррар ҳодиса бўлади, (чунки X нинг барча мумкин бўлган қийматлари x_2 дан кичик) ва демак, унинг эҳтимоли бирга тенг.

Натижа. *Агар узлуксиз тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари бутун* x *ўқда жойлашган бўлса, у ҳолда қуйидаги лимит муносабатлар ўринли;*

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 0; \ \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

3-§. Интеграл функциянинг графиги

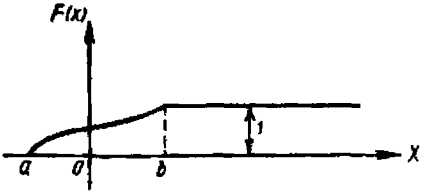
Исботланган хоссалар узлуксиз тасодифий миқдор интеграл функциясининг графиги қандай кўринишда бўлишини тасвирлашга имкон беради.

График $y = 0$, $y = 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган полоса ичида жойлашган (биринчи хосса).

Тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган барча қийматлари жойлашган (a, b) интервалда x нинг ўсиши билан график «тепага» кўтарилади» (иккинчи хосса).

$x \leqslant a$ да графикнинг ординаталари нолга тенг; $x \geqslant b$ да графикнинг ординаталари бирга тенг (учинчи хосса).

Узлуксиз тасодифий миқдор интеграл функциясининг графиги 1-расмда тасвирланган.



1- расм.

Эслатма. Дискрет типдаги тасодифий миқдор учун интеграл функция графиги поғонавий бўлади. Бунга мисолда ишонч ҳосил қилайлик.

Мисол. X дискрет тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот жадвали билан берилган:

X	1	4	8
p	0,3	0,1	0,6.

Интеграл функцияни топинг ва унинг графигини чизинг.

Ечилиши. 1°. Агар $x \leqslant 1$ бўлса, у ҳолда $F(x) = 0$ (учинчи хосса).

2°. Агар $1 < x \leqslant 4$ бўлса, у ҳолда $F(x) = 0{,}3$. Ҳақиқатан ҳам, X миқдор 1 қийматни 0,3 эҳтимол билан қабул қилади.

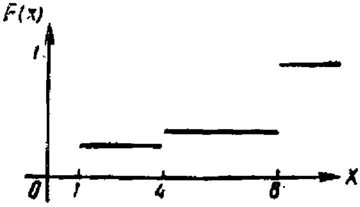
3°. Агар $4 < x \leqslant 8$ бўлса, у ҳолда $F(x) = 0{,}4$. Ҳақиқатан ҳам, агар x_1 ушбу $4 < x \leqslant 8$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда $F(x)$ $X < x_1$; ҳодисанинг эҳтимоли бўлиб, бу ҳодиса X миқдор 1 қийматни қабул қилганда (бу ҳодисанинг эҳтимоли 0,3 га тенг) ёки 4 қийматни қабул қилганда (бу ҳодисанинг эҳтимоли 0,1 га тенг) рўй беради. Бу иккита ҳодиса биргаликда бўлмаганлиги учун қўшиш теоремасига кўра $X < x_1$ ҳодисанинг эҳтимоли $0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$ йиғиндига тенг.

4°. Агар $x > 8$ бўлса, у ҳолда $F(x) = 1$. Ҳақиқатан, $x \leqslant 8$ ҳодиса муқаррар ва демак, унинг эҳтимоли бирга тенг.

Шундай қилиб, интеграл функция аналитик кўринишда қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$F(x) = \begin{cases} x \leqslant 1 \text{ да } & 0 \\ 1 < x \leqslant 4 \text{ да } & 0{,}3, \\ 4 < x \leqslant 8 \text{ да } & 0{,}4, \\ x > 8 \text{ да } & 1. \end{cases}$$

Бу функциянинг графиги 2- расмда келтирилган.



2- расм.

Масалалар

1. X тасодифий миқдор интеграл функция орқали берилган:

$$F(x)=\begin{cases} x\leqslant -1 \text{ да} & 0, \\ -1<x\leqslant 2 \text{ да} & \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}; \\ x>2 \text{ да} & 1. \end{cases}$$

Синаш натижасида X миқдор $(0,\ 1)$ интервалда ётган қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $\frac{1}{3}$.

2. X тасодифий миқдор интеграл функция орқали берилган:

$$F(x)=\begin{cases} x\leqslant 2 \text{ да} & 0; \\ 2<x\leqslant 4 \text{ да} & \frac{1}{2}x-1; \\ x>4 \text{ да} & 1. \end{cases}$$

Синаш натижасида X миқдор $(2;\ 3)$ интервалда ётган қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг:

Жавоби. $\frac{1}{2}$.

3. X дискрет тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот қонуни орқали берилган:

X	2	6	10
P	0,5	0,3	0,1.

Интеграл функциянинг графигини ясанг.

Ўн биринчи боб

УЗЛУКСИЗ ТАСОДИФИЙ МИҚДОР ЭҲТИМОЛЛАРИ ТАҚСИМОТИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИЯСИ

1- §. Тақсимот дифференциал функциясининг таърифи

Юқорида узлуксиз тасодифий миқдорни интеграл функция ёрдамида берган эдик. Тасодифий миқдорни бу усулда бериш ягона эмас. Узлуксиз тасодифий миқдорни, шунингдек, эҳтимоллар тақсимотининг дифференциал функциясидан фойдаланиб ҳам бериш мумкин.

*Тақсимотнинг $f(x)$ дифференциал функцияси** *деб,* интеграл функциясидан олинган биринчи тартибли $f(x) = F'(x)$ ҳосилага айтилади.

Келтирилган таърифга кўра, интеграл функция дифференциал функция учун бошланғич функция бўлиши келиб чиқади.

Дискрет тасодифий миқдор эҳтимоллари тақсимотини тавсифлаш учун дифференциал функцияни қўллаб бўлмаслигини эслатиб ўтамиз.

2- §. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг берилган оралиққа тушиш эҳтимоли

Дифференциал функцияни билган ҳолда, узлуксиз тасодифий миқдорнинг берилган интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимолини ҳисоблаш мумкин. Уни ҳисоблаш қуйидаги теоремага асосланган.

Теорема. *X узлуксиз тасодифий миқдорнинг (a, b) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимоли дифференциал функциядан a дан b гача олинган аниқ интегралга тенг:*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Исботи. Қуйидаги муносабатдан фойдаланамиз (108-бет)

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a).$$

Кўпинча, «дифференциал функция» термини ўрнига «эҳтимол зичлиги» термини ишлатилади.

Ньютон—Лейбниц формуласига асосан:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

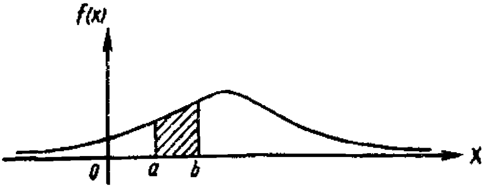
Шундай қилиб,

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$ бўлгани учун узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Ҳосил қилинган натижани геометрик нуқтаи-назардан бундай талқин қилиш мумкин: узлуксиз тасодифий миқдорнинг (a, b) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимоли x ўқ, $f(x)$ тақсимот эгри чизиғи ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзига тенг (3- расм).



3- расм.

Эслатма. Хусусий ҳолда, $f(x)$ жуфт функция бўлиб, интервалнинг чегаралари координаталар бошига нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда

$$P(-a < X < a) = P(|x| < a) = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Мисол. X тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси берилган:

$$f(x) = \begin{cases} x \leqslant 0 \text{ да } 0; \\ 0 < x \leqslant 1 \text{ да } 2x; \\ x > 1 \text{ да } 0. \end{cases}$$

Синаш натижасида X тасодифий миқдор (0,5; 1) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Изланган эҳтимол:

$$P(0{,}5 < X < 1) = 2\int_{0,5}^{1} x dx = x^2\Big|_{0,5}^{1} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

3- §. Тақсимотнинг интеграл функциясини маълум дифференциал функция бўйича топиш

$f(x)$ дифференциал функцияни билган ҳолда $F(x)$ интеграл функцияни қуйидаги формула бўйича топиш мумкин:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Ҳақиқатан, биз $F(x)$ орқали тасодифий миқдорнинг x дан кичик қиймат қабул қилиш эҳтимолини белгилаган эдик, яъни

$$F(x) = P(X < x).$$

Равшанки, $X < x$ тенгсизликни $-\infty < X < x$ қўш тенгсизлик кўринишида ёзиш мумкин, демак,

$$F(x) = P(-\infty < X < x). \qquad (*)$$

(*) формулада (2- §) $a = -\infty$, $b = x$ деб олиб

$$P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Ниҳоят, $P(-\infty < X < x)$ ни $F(x)$ билан алмаштириб (*) муносабатга асосан узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Шундай қилиб, тақсимотнинг дифференциал функциясини билган ҳолда интеграл функцияни топиш мумкин. Албатта, интеграл функция маълум бўлса, дифференциал функцияни топиш мумкин, чунончи

$$f(x) = F'(x).$$

Мисол. Берилган дифференциал функция бўйича интеграл функцияни топинг:

$$f(x)=\begin{cases} x\leqslant a \text{ да} & 0; \\ a<x\leqslant b \text{ да} & \frac{1}{b-a}; \\ x>b \text{ да} & 0. \end{cases}$$

Топилган функциянинг графигини ясанг.

Ечилиши. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ формуладан фойдаланамиз.

Агар $x\leqslant a$ бўлса, у ҳолда $f(x)=0$ ва демак, $F(x)=0$. Агар $a<x\leqslant b$ бўлса, у ҳолда $f(x)=\frac{1}{a-b}$ ва, демак,

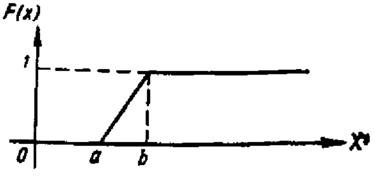
$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{a}0\,dx+\int\limits_{a}^{x}\frac{dx}{b-a}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Агар $x>b$ бўлса, у ҳолда

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{a}0\,dx+\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{b-a}+\int\limits_{b}^{x}0\,dx=\frac{b-a}{b-a}=1.$$

Шундай қилиб, изланаётган интеграл функцияни аналитик кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F(x)=\begin{cases} x\leqslant a & \text{да} & 0; \\ a<x\leqslant b & \text{да} & \frac{x-a}{b-a}; \\ x>b & \text{да} & 1. \end{cases}$$



4- расм.

Бу функциянинг графиги 4- расмда тасвирланган.

4- §. Дифференциал функциянинг хоссалари

1- хосса. *Дифференциал функция манфий эмас:*

$$f(x) \geqslant 0.$$

Исботи. Интеграл функция камаймайдиган функция. демак унинг ҳосиласи $F'(x) = f(x)$ манфий эмас.

Бу хоссанинг геометрик маъноси қуйидагича: дифференциал функциянинг графигига тегишли нуқталар ё x ўқдан юқорида, ёки x ўқнинг ўзида ётади.

Дифференциал функциянинг графигини *тақсимот эгри чизиғи* деб аташ қабул қилинган.

2- хосса. *Дифференциал функциядан* $-\infty$ *дан* ∞ *гача олинган хосмас интеграл бирга тенг:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Исботи. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграл тасодифий миқдорнинг $(-\infty, \infty)$ га тегишли қиймат қабул қилишидан иборат ҳодисанинг эҳтимолини ифодалайди. Равшанки, бундай ҳодиса муқаррардир ва демак, унинг эҳтимоли бирга тенг.

Бунинг геометрик маъноси қуйидагича: x ўқ ва тақсимот эгри чизиғи билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи бирга тенг.

Хусусан, тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари (a, b) оралиққа тегишли бўлса, у ҳолда

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = 1.$$

Мисол. X тасодифий миқдор тақсимотининг дифференциал функцияси $f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}$ тенглик билан берилган. Ўзгармас a параметрни топинг.

Ечилиши. Дифференциал функция $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ шартни қаноатлантириш керак, шунинг учун

$$a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{-x} + e^{x}} = 1$$

тенглик бажарилишини талаб қилиш керак. Бундан

$$a = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^{x}}}.$$

Аниқмас интегрални топайлик:

$$\int \frac{dx}{e^{-x} + e^{x}} = \int \frac{e^{x}dx}{1 + e^{2x}} = \operatorname{arctg} e^{x}.$$

Қуйидаги хосмас интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^{x}} = \lim_{b \to -\infty} \int\limits_{b}^{0} \frac{dx}{e^{-x} + e^{x}} + \lim_{c \to \infty} \int\limits_{0}^{C} \frac{dx}{e^{-x} + e^{x}} =$$

$$= \lim_{b \to -\infty} (-\operatorname{arctg} e^{b}) + \lim_{c \to \infty} (\operatorname{arctg} e^{c}) = \frac{\pi}{2}.$$

Шундай қилиб, изланаётган параметр:

$$a = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

5- §. Дифференциал функциянинг эҳтимолий маъноси

Фараз қилайлик, $F(x)$ узлуксиз X тасодифий миқдорнинг интеграл функцияси бўлсин. Дифференциал функция таърифига кўра $f(x) = F'(x)$, ёки бошқача кўринишда

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Бизга маълумки, $F(x + \Delta x) - F(x)$ айирма X нинг $(x, \ x + \Delta x)$ оралиққа тегишли қийматни қабул қилиш эҳтимолини аниқлайди. Шундай қилиб, узлуксиз тасодифий миқдорнинг $(x, \ x + \Delta x)$ оралиққа тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимолини шу оралиқ узунлигига нисбатининг лимити ($\Delta x \to 0$ да) дифференциал функциянинг шу x нуқтадаги қийматига тенг экан.

Массанинг нуқтадаги зичлиги* таърифига ўхшаш, $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги қийматини эҳтимолнинг шу нуқтадаги зичлиги сифатида қараш мақсадга мувофиқ.

Шундай қилиб, дифференциал функция ҳар бир x нуқтадаги эҳтимоллик тақсимотининг зичлигини аниқлайди.

Дифференциал ҳисобдан маълумки, функциянинг орттирмаси шу функциянинг дифференциалига тақрибан тенг, яъни

$$F(x+\Delta x)-F(x)\simeq dF(x)$$

ёки

$$F(x+\Delta x)-F(x)\simeq F'(x)\,dx.$$

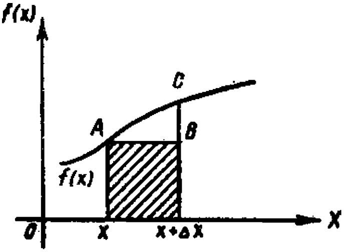
$F'(x)=f(x)$ ва $dx=\Delta x$ бўлгани учун

$$F(x+\Delta x)-F(x)\simeq f(x)\,\Delta x.$$

Бу тенгликнинг эҳтимолий маъноси қуйидагича: тасодифий миқдорнинг $(x,\ x+\Delta x)$ оралиққа тегишли қиймати қабул қилиш эҳтимоли тақрибан (Δx га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор аниқлигида) x нуқтадаги эҳтимол зичлигининг Δx интервал узунлигига кўпайтмасига тенг.

Бу натижани геометрик нуқтаи-назардан бундай талқин этиш мумкин: тасодифий миқдорнинг $(x,\ x+\Delta x)$ интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимоли тақрибан асоси Δx ва баландлиги $f(x)$ бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзига тенг.

5- расмдан кўриниб турибдики, штрихланган тўғри тўртбурчакнинг юзи $f(x)\,\Delta x$ га тенг бўлиб, у тақрибан эгри чизиқли трапециянинг юзига $\left(\int_{x}^{x+\Delta x} f(x)\,dx\right.$ аниқ интеграл билан аниқланган эҳтимолнинг ҳақиқий қийматига$\left.\right)$ тенг. Бунда йўл қўйилган хато ABC эгри чизиқли учбурчакнинг юзига тенг.



5- расм.

---

*) Агар масса x ўқ бўйлаб бирор қонун, масалан, $F(x)$ бўйича узлуксиз тақсимланган бўлса, у ҳолда массанинг x нуқтадаги зичлиги $\rho(x)$ деб, $(x,\ x+\Delta x)$ интервалдаги массанинг шу интервал узунлигига нисбатини $\Delta x\to 0$ даги лимитига айтилади, яъни

$$\rho(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.$$

6- §. Эҳтимолларнинг текис тақсимот қонуни

Практика қўядиган масалаларни ҳал этишда узлуксиз тасодифий миқдорларнинг турли тақсимот қонунлари билан иш кўришга тўғри келади. Бу тақсимотларнинг дифференциал функцияларини ҳам тақсимот қонунлари дейилади. Масалан, кўпинча, текис ва нормал тақсимотлар учраб туради. Бу параграфда текис тақсимот қонунини қараймиз. Нормал тақсимот қонунига навбатдаги боб бағишланган.

Эҳтимолларнинг *текис тақсимоти* **деб, тасодифий** миқдорнинг **мумкин бўлган барча қийматлари тегишли** бўлган **интервалда дифференциал функцияси ўзгармас бўлган** тасодифий **миқдор тақсимотига айтилади.**

Текис **тақсимланган узлуксиз тасодифий миқдорга** мисол **келтирамиз.**

Мисол. **Ўлчаш асбоби бирор бирликда градуслаб чиқилган. Ҳисобни энг яқин бутун бўлинмагача яхлитлаш** хатосини, **иккита қўшни бўлинма орасидаги ихтиёрий** қийматни **ўзгармас эҳтимоли зичлиги билан қабул қилувчи** X тасодифий **миқдор сифатида қараш мумкин. Шундай** қилиб, X текис **тақсимотга эга.**

Текис тақсимотнинг **дифференциал** функциясини топамиз: бунда **тасодифий миқдорнинг барча** мумкин бўлган қийматлари (a, b) **интервалда ва шу оралиқда** дифференциал функция ўзгармас деб ҳисоблаймиз: $f(x) = C$.

Шартга кўра X (a, b) **интервалдан** ташқаридаги қийматларни қабул қилмайди, шунинг учун $x < a$ ва $x > b$ бўлганда $f(x) = 0$ **бўлади.**

Ўзгармаснинг **қийматини топайлик. Тасодифий** миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари (a, b) **интервалга тегишли** бўлгани учун қуйидаги **тенглик бажарилиши керак.**

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1 \text{ ёки } \int_a^b C\,dx = 1.$$

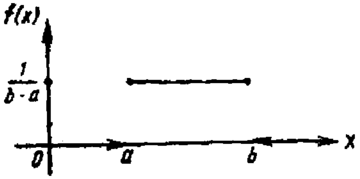
Бундан

$$C = \frac{1}{\int_a^b dx} = \frac{1}{b-a}.$$

Шундай қилиб, **текис тақсимот қонунининг** дифференциал **функциясини аналитик кўринишда қуйидагича ёзиш** мумкин:

$$f(x) = \begin{cases} x \leqslant a & \text{да} \quad 0; \\ a < x \leqslant b & \text{да} \quad \frac{1}{b-a}; \\ x > b & \text{да} \quad 0. \end{cases}$$

Текис тақсимотнинг дифференциал функцияси графиги 6- расмда, интеграл функцияси графиги эса 4- расмда тасвирланган.



6- расм.

Масалалар

1. Тасодифий миқдор дифференциал функцияси орқали берилган:

$$f(x) = \begin{cases} x \leqslant -\frac{\pi}{2} & \text{да} \quad 0; \\ -\frac{\pi}{2} \quad x < \frac{\pi}{2} & \text{да} \quad a\cos x; \\ x > \frac{\pi}{2} & \text{да} \quad 0. \end{cases}$$

a коэффициентни топинг.

Жавоби. $a = \frac{1}{2}$.

2. Тасодифий миқдор дифференциал функцияси орқали берилган:

$$f(x) = \begin{cases} x \leqslant 0 & \text{да} \quad 0; \\ 0 < x \leqslant \pi & \text{да} \quad \frac{1}{2}\sin x; \\ x > \pi & \text{да} \quad 0. \end{cases}$$

г) интеграл функцияни топинг; б) синаш натижасида тасодифий миқдор $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ оралиққа тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) $F(x) = \begin{cases} x \leqslant 0 & \text{да} \quad 0; \\ 0 < x \leqslant \pi & \text{да} \quad \frac{1}{2}(1-\cos x); \\ x > \pi & \text{да} \quad 1; \end{cases}$

б) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$,

3. X тасодифий микдор интеграл функция орқали берилган:

$$F(x)=\begin{cases} x \leqslant 0 & \text{да } 0; \\ 0 < x \leqslant 1 & \text{да } x; \\ x > 1 & \text{да } 1. \end{cases}$$

Дифференциал функцияни топинг.

Жавоби.

$$f(x)=\begin{cases} x \leqslant 0 \text{ да } 0; \\ 0 < x < 1 \text{ да } 1, \\ x > 1 \text{ да } 0. \end{cases}$$

4. X тасодифий миқдор интеграл функцияси орқали берилган:

$$F(x)=\begin{cases} x \leqslant 0 \text{ да } 0; \\ 0 < x \leqslant \pi \text{ да } \frac{1}{2}(1-\cos x); \\ x \geqslant \pi \text{ да } 1. \end{cases}$$

Дифференциал функцияни топинг.

Жавоби.

$$f(x)=\begin{cases} x \leqslant 0 \text{ да } 0; \\ 0 < x \leqslant \pi \text{ да} \frac{1}{2}\sin x; \\ x > \pi \text{ да } 0\cdot \end{cases}$$

Ўн иккинчи боб

НОРМАЛ ТАҚСИМОТ

1- §. Узлуксиз тасодифий миқдорларнинг сонли характеристикалари

Дискрет миқдорларнинг сонли характеристикалари таърифларини узлуксиз миқдорга ҳам тарқатамиз. Математик кутилишдан бошлаймиз.

X узлуксиз тасодифий миқдор $f(x)$ дифференциал функция орқали берилган бўлсин. Айтайлик, X нинг мумкин бўлган барча қийматлари $[a, b]$ кесмага тегишли бўлсин. Бу кесмани узунликлари Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n бўлган n та қисмий кесмага бўламиз ва уларнинг ҳар бирида ихтиёрий x_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ нуқта танлаймиз. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилишини дискрет ҳолдагига ўхшаш аниқлашни кўзда тутиб, мумкин бўлган x_i қийматларни уларнинг Δx_i интервалга тушиш эҳтимолларига ($f(x)\Delta x_i$ кўпайтма X нинг Δx интервалга тушиш эҳтимолига тақрибан тенг) кўпайтмалари йиғиндиларини тузамиз:

$$\sum x_i \cdot f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Қисмий интервэллардан энг каттасининг узунлигини нолга интилтириб, $\int_{a}^{b} xf(x)\,dx$ аниқ интегрални ҳосил қиламиз.

Мумкин бўлган қийматлари $[a, b]$ кесмага тегишли бўлган X *узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилиши деб*

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)\,dx$$

аниқ интегралга айтилади.

Агар мумкин бўлган қийматлар бутун x ўққа тегишли бўлса, у ҳолда

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx.$$

Бу ўринда хосмас интеграл абсолют яқинлашувчи, яъни $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,f(x)\,dx$ интеграл мавжуд деб фараз қилинади. Агар бу талаб бажарилмаса, у ҳолда интегралнинг қиймати қуйи чегаранинг $-\infty$ га, юқори чегаранинг $+\infty$ га (алоҳида-алоҳида) интилиш тезлигига боғлиқ бўлар эди.

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси ҳам дискрет тасодифий миқдор дисперсиясига ўхшаш аниқланади.

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси деб унинг четланиши квадратининг математик кутилишига айтилади.

Агар мумкин бўлган қийматлар $[a, b]$ кесмага тегишли бўлса, у ҳолда

$$D(X) = \int_{a}^{b} [x - M(X)]^2 f(x)\,dx;$$

агар мумкин бўлган қийматлар x ўққа тегишли бўлса, у ҳолда

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)\,dx.$$

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик четланиши дискрет миқдор учун бўлгани каби

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

тенглик билан аниқланади.

1- *эслатма*. Дискрет миқдорларнинг математик кутилиши ва дисперсияси хоссалари узлуксиз миқдорлар учун ҳам сақланишини исботлаш мумкин.

2- *эслатма*. Дисперсияни ҳисоблаш учун қулай бўлган ушбу формулаларни осон ҳосил қилиш мумкин:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - [M(X)]^2.$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - [M(X)]^2.$$

Мисол. Ушбу интеграл функция билан берилган X тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсиясини топинг:

$$F(x) = \begin{cases} x \leqslant 0 & \text{да} \quad 0, \\ 0 < x \leqslant 1 & \text{да} \quad x, \\ x > 1 & \text{да} \quad 1. \end{cases}$$

Ечилиши. Дифференциал функцияни топамиз:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} x \leqslant 0 & \text{да} \quad 0, \\ 0 < x < 1 & \text{да} \quad 1, \\ x > 1 & \text{да} \quad 0. \end{cases}$$

Математик кутилишни топамиз:

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Дисперсияни топамиз:

$$D(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - \left[\frac{1}{2}\right]^2 = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

2- §. Нормал тақсимот

Нормал тақсимот деб

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

дифференциал функция билан тавсифланадиган узлуксиз тасодифий миқдор тақсимотига айтилади.

Кўриниб турибдики, нормал тақсимот иккита параметр: a ва σ билан аниқланади. Нормал тақсимот берилиши учун шу иккита параметрнинг берилиши кифоя. Бу параметрларнинг эҳтимолий маъноси бундай эканлигини кўрсатамиз: a нормал тақсимотнинг математик кутилиши, σ ўртача квадратик четланиши.

а) узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилиши таърифига кўра:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Янги $z=\frac{x-a}{\sigma}$ ўзгарувчи киритамиз: Бундан $x=\sigma z+a$, $dx=\sigma dz$. Янги интеграллаш чегаралари олдингисига тенглигини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(X)=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+a)e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma z e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Қўшилувчилардан биринчиси нолга тенг (интеграл белгиси остида ток функция; интеграллаш чегаралари координаталар бошига нисбатан симметрик). Қўшилувчилардан иккинчиси a га тенг $\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}\right.$ Пуассон интеграли).

Шундай қилиб, $M(X)=a$, яъни нормал тақсимотнинг математик кутилиши a параметрга тенг.

б) Узлуксиз тасодифий миқдор дисперсияси таърифига кўра ва $M(X)=a$ эканлигини эътиборга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Янги $z = \frac{x-a}{\sigma}$ ўзгарувчи киритамиз Бундан $x - a = \sigma z$, $dx = \sigma dz$. Янги интеграллаш чегаралари олдингиларга тенглигини эътиборга олиб,

$$D(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} z \cdot z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

ни ҳосил қиламиз: $u = z$, $dv = z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ деб бўлаклаб интеграллаш натижасида

$$D(X) = \sigma^2$$

ни топамиз. Демак,

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma.$$

Шундай қилиб, нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши σ параметрга тенг

1- эслатма. *Умумий* нормал тақсимот деб ихтиёрий a ва σ $(\sigma>0)$ параметрли нормал тақсимотга айтилади.

Нормаланган нормал тақсимот деб $a = 0$ ва $\sigma = 1$ параметрли нормал тақсимотга айтилади. Масалан, X a ва σ параметрли нормал миқдор бўлса, у ҳолда $U = \frac{X-a}{\sigma}$ нормаланган нормал миқдор бўлади, шу билан бирга $M(U) = 0$, $\sigma(U) = 1$. Нормаланган тақсимотнинг дифференциал функцияси

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Бу функциянинг қийматлари жадвали тузилган (1- илова).

2- эслатма. Умумий нормал тақсимотнинг интеграл функцияси (XI боб, 3- §)

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz,$$

нормаланган нормал миқдорнинг интеграл функцияси

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

$F_0(x)$ функциянинг қийматлари жадвали тузилган. $F(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ эканлигини текшириш осон.

3- эслатма. Нормаланган нормал миқдорнинг (0, x) интервалга тушиш эҳтимолини

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Лаплас функциясидан фойдаланиб топиш мумкин. Дарҳақиқат (XI боб, 2- §.)

$$P(0 < X < x) = \int_0^x \varphi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x).$$

4- эслатма. $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 1$ (XI боб, 4- §, 2- хосса) ва демак, $\varphi(x)$ нинг нолга нисбатан симметриклигига асосан

$$\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, dx = 0,5$$ бинобарин, $P(-\infty < X < 0) = 0,5$

лигини эътиборга олиб,

$$F_0(x) = 0,5 + \Phi(x)$$

эканлигини ҳосил қилиш осон.
Дарҳақиқат,

$$F_0(x) = P(-\infty < X < x) = P(-\infty < X < 0) + P(0 < X < x) = \\ = 0,5 + \Phi(x).$$

3- §. Нормал эгри чизиқ

Нормал тақсимотнинг дифференциал функцияси графиги *нормал эгри чизиқ (Гаусс эгри чизиғи)* деб аталади. Ушбу

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

функцияни дифференциал ҳисоб методлари билан текширамиз:

1. Функция бутун x ўқда аниқланганлиги равшан.
2. Барча x қийматларда функция мусбат қийматлар қабул қилади, яъни нормал эгри чизиқ x ўқ устида жойлашган.
3. x (абсолют қиймати бўйича) чексиз ортганда функция лимити нолга тенг: $\lim\limits_{|x| \to \infty} y = 0$ яъни, x ўқ графикнинг горизонтал асимптотаси бўлади.

4. Функциянинг экстремумини текширамиз. Биринчи ҳосилани топамиз:

$$y' = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

$x=a$ да $y'=0$, $x<a$ да $y'>0$, $x>a$ да $y'<0$ лигини кўриш осон. Демак, функция $x=a$ да максимумга эга бўлиб, у $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ га тенг.

5. Функциянинг аналитик ифодасида $(x-a)$ айирма квадратда, яъни функция графиги $x=a$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик.

6. Функциянинг букилиш нуқтасини текширамиз. Иккинчи ҳосилани топамиз:

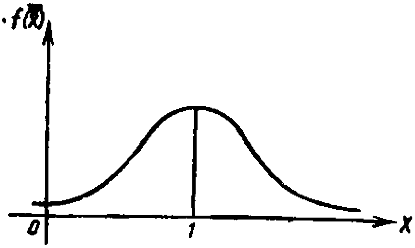
$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left[1-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right].$$

Иккинчи ҳосила $x=a+\sigma$ ва $x=a-\sigma$ да нолга тенг, бу нуқталардан ўтишда эса ишораси ўзгаришини кўриш осон (функция иккала нуқтада ҳам $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$ га тенг). Шундай қилиб, графикнинг

$$\left(a-\sigma,\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right) \text{ ва } \left(a+\sigma,\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$$

нуқталари букилиш нуқталардир.

7- расмда нормал эгри чизиқ $a=1$ ва $\sigma=2$ ҳолда тасвирланган.



7- расм.

4-§. Нормал тақсимот параметрларининг нормал эгри чизиқ формасига таъсири

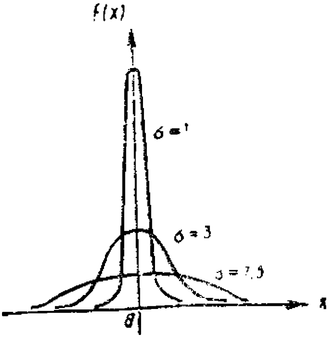
a ва σ параметрларининг қийматлари нормал эгри чизиқнинг шакли ва жойланишига қандай таъсир қилишини аниқлаймиз.

Маълумки, $f(x)$ ва $f(x - a)$ функцияларининг графиклари бир хил шаклга эга; $f(x)$ нинг графигини x ўқининг $a > 0$ да мусбат йўналиши бўйича ёки $a < 0$ да манфий йўналиши бўйича a масштаб бирлигига суриб $f(x - a)$ нинг графигини ҳосил қиламиз. Бу ердан шу нарса келиб чиқадики, a параметр (математик кутилиш) катталигининг ўзгариши нормал эгри чизиқ шаклини ўзгартирмай, балки унинг x ўқ бўйича: a ортганда ўнгга, a камайганда чапга томон сурилишига олиб келади.

σ параметр (ўртача квадратик четланиш) ўзгарганда эса иш бутунлай бошқача. Олдинги параграфда кўрсатилганидек, нормал тақсимот дифференциал функциясининг максимуми $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ га тенг.

Бу ердан шу нарса келиб чиқадики, σ ортиши билан нормал эгри чизиқнинг максимал ординатаси камаяди, эгри чизиқнинг ўзи эса борган сари ясситланиб боради, яъни x ўққа томон қисилиб боради, σ камая борганда нормал эгри чизиқ борган сари «ўткир учли» бўлади ва y ўқнинг мусбат йўналишида чўзилиб боради.

a ва σ параметрларининг исталган қийматларида нормал эгри чизиқ ва x ўқ билан чегараланган юз бирга тенг бўлиб қолаверишини таъкидлаб ўтамиз (XI боб. 4-§, дифференциал функциянинг иккинчи хоссаси). 8-расмда нормал эгри чизиқлар $a = 0$ ва σ нинг турли қийматларида тасвирланган. σ параметрининг ўзгариши нормал эгри чизиқ формасига қандай таъсир қилишини яққол кўриниб турибди



8 расм

$a = 0$ ва $\sigma = 1$ бўлгандаги $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ нормал эгри чизиқ *нормаланган* деб аталади.

5-§. Нормал тасодифий миқдорнинг берилган интервалга тушиш эҳтимоли

Биз энди агар X тасодифий миқдор $f(x)$ дифференциал функция орқали берилган бўлса, у ҳолда X нинг (α, β) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимоли бундайлигини биламиз.

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

X тасодифий миқдор нормал қонун бўйича тақсимланган бўлсин, у ҳолда X нинг (α, β) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимоли

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

га тенг.

Бу формулани тайёр жадваллардан фойдаланиш мумкин бўладиган қилиб ўзгартирамиз. Иккинчи $z = \frac{x-a}{\sigma}$ ўзгарувчини киритамиз. Бундан $x = \sigma z + a$, $dx = \sigma dz$. Интеграллашнинг янги чегараларини топамиз. Агар $x = \alpha$ бўлса, у ҳолда $z = \frac{\alpha - a}{\sigma}$; агар $x = \beta$ бўлса, у ҳолда $z = \frac{\beta - a}{\sigma}$.

Шундай қилиб,

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} (\sigma dz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Ушбу

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Лаплас функциясидан фойдаланиб, узил-кесил натижани ҳосил қиламиз:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (*)$$

Мисол. X тасодифий миқдор нормал қонун бўйича тақсимланган. Бу миқдорнинг математик кутилиши ва ўртача квадратик четланиши мос равишда 30 ва 10 га тенг. X нинг (10 50) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. (*) формуладан фойдаланамиз. Шунга кўра $\alpha = 10$, $\beta = 50$, $a = 30$, $\sigma = 10$, демак

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2).$$

Жадвал бўйича (2-илова)

$$\Phi(2) = 0{,}4772$$

топамиз. Бундан изланаётган эҳтимол:

$$P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

6- §. Берилган четланишнинг эҳтимолини ҳисоблаш

Кўпинча нормал тақсимланган тасодифий миқдорнинг четланиши абсолют қиймати бўйича берилган δ мусбат сондан кичик бўлиши эҳтимолини, яъни $|X - a| < \delta$ тенгсизликнинг рўй бериш эҳтимолини топиш талаб қилинади.

Бу тенгсизликни унга тенг кучли бўлган

$$-\delta < X - a < \delta \quad \text{ёки} \quad a - \delta < X < a + \delta$$

қўш тенгсизлик билан алмаштирамиз.

(*) формуладан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(|X - a| < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) =$$

$$= \Phi\left[\frac{(a + \delta) - a}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{(a - \delta) - a}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Ушбу

$$\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = -\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

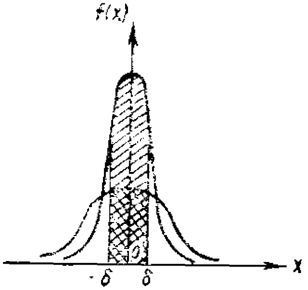
тенгсизликни эътиборга олиб (Лаплас функцияси тоқдир),

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

ни ҳосил қиламиз. Жумладан $a = 0$ да

$$P(|X|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

9- расмда агар иккита тасодифий миқдор нормал тақсимланган ва $a = 0$ бўлса, у ҳолда $(-\delta, \delta)$ интервалга тегишли қиймат қабул қилишининг эҳтимоли σ қиймати кичикроқ бўлган тасодифий миқдорда каттадир. Бу факт σ параметрнинг эҳтимолий маъносига бутунлай тўғри келади (σ ўртача квадратик четланиш бўлиб, у тасодифий миқдорни ўзининг математик кутилиши атрофида тарқоқлигини характерлайди).



9- расм

Эслатма. $|X-a|<\delta$ ва $|X-a|\geqslant\delta$ тенгсизликларнинг юз беришидан иборат ҳодисалар, равшанки, қарама-қаршидир. Шунинг учун, агар $|X-a|<\delta$ ҳодисанинг юз бериш эҳтимоли p га тенг бўлса, у ҳолда $|X-a|\geqslant\delta$ тенгсизликнинг эҳтимоли $1-p$ га тенг.

Мисол X тасодифий миқдор нормал тақсимланган. X нинг математик кутилиши ва ўртача квадратик четланиши мос равишда 20 ва 10 га тенг. Четланиш абсолют қиймати бўйича 3 дан кичик бўлишининг эҳтимолини топинг.

Ечилиши.

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

формуладан фойдаланамиз. Шартга кўра $\delta = 3$, $a = 20$, $\sigma = 10$. Демак,

$$P(|X-20|<3)=2\Phi\left(\frac{3}{10}\right)=2\Phi(0,3).$$

Жадвалдан (2-илова) $\Phi(0,3) = 0,1179$ ни топамиз. Изланаётган эҳтимол:

$$P(|X-20|<3)=0,2358.$$

7-§. Учта сигма қоидаси

Ушбу

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

формулани (6-§) $\delta=\sigma t$ деб шаклини ўзгартирамиз. Натижада

$$P(|X-a|<\sigma t)=2\Phi(t).$$

ни ҳосил қиламиз. Агар $t=3$, бинобарин, $\sigma t=3\sigma$ бўлса, у ҳолда

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973,$$

яъни четланишнинг абсолют катталиги бўйича ўртача квадратик четланишнинг учланганидан кичик бўлиш эҳтимоли 0,9973 га тенг.

Бошқача сўз билан айтганда, четланишнинг абсолют катталиги ўртача квадратик четланишнинг учланганидан ортиқ бўлиши эҳтимоли жуда кичик, чунончи 0,0027 га тенг. Бу эса 0,27% ҳоллардагина шундай юз бериши мумкинлигини билдиради. Бундай ҳодисаларни эҳтимоли кам ҳодисаларнинг юз бера олмаслиги принципига асосланиб, амалда рўй бера олмайди деб ҳисоблаш мумкин. Уч сигма қоидасининг моҳияти ҳам ана шундадир: агар тасодифий миқдор нормал тақсимланган бўлса, *у ҳолда унинг математик кутилишидан четланишининг абсолют катталиги ўртача квадратик четланишнинг учланганидан катта бўлмайди.*

Практикада уч сигма қоидаси бундай қўлланилади: агар ўрганилаётган тасодифий миқдорнинг тақсимоти номаълум, лекин юқорида келтирилган қоидадаги шарт бажарилса, у ҳолда ўрганилаётган тасодифий миқдор нормал тақсимланган деб фараз қилишга асос бор; акс ҳолда у нормал тақсимланмаган.

8-§. Ляпунов теоремаси ҳақида тушунча

Нормал тақсимланган тасодифий миқдор практикада кенг тарқалганлиги маълум. Буни нима билан изоҳлаш мумкин? Бу масалага жавоб буюк рус математиги А. М. Ляпунов томонидан берилган (эҳтимоллар назариясининг марказий лимит теоремаси). *Ляпунов теоремасидан келиб чиқадиган* натижанигина келтирамиз: агар X тасодифий миқдор жуда катта сондаги ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар йиғиндисидан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бирининг йиғиндига таъсири жуда кичик бўлса, у ҳолда X нормал тақсимотга яқин тақсимотга эга бўлади

Практикада худди шундай тасодифий миқдорлар энг кўп учрайди. Айтилганларни тушунтирадиган мисол келтирамиз.

Мисол. Бирор физикавий катталик ўлчанаётган бўлсин. Ҳар қандай ўлчаш ҳам ўлчанаётган катталикнинг тақрибий қийматинигина беради, чунки ўлчаш натижасига ҳар хил тасодифий факторлар (температура, асбобнинг тебранишлари, намлик ва бошқалар) таъсир қилади. Бу факторларнинг ҳар бири жуда кам «хусусий хатони» юзага келтиради. Аммо бу факторларнинг сони жуда катта бўлгани учун уларнинг биргаликда таъсири сезиларли «жами хатони» юзага келтиради.

Жами хатони катта сондаги ўзаро боғлиқ бўлмаган хусусий хатолар йиғиндиси деб қараётиб, жами хато нормал тақсимотга яқин тақсимотга эга деб хулоса чиқаришга ҳақлимиз, тажриба бундай хулосанинг тўғрилигини тасдиқлайди.

9-§. Назарий тақсимотнинг нормал тақсимотдан четланишини баҳолаш. Асимметрия ва эксцесс

Нисбий частоталар тақсимоти *эмпирик тақсимот* деб аталади. Эмпирик тақсимотларни математик статистика ўрганади.

Эҳтимоллар тақсимоти *назарий тақсимот* деб аталади. Назарий тақсимотларни эҳтимоллар назариясида ўрганилади. Бу параграфда назарий тақсимотлар қаралади.

Нормал тақсимотдан фарқ қиладиган тақсимотларни ўрганишда бу фарқни миқдор жиҳатдан баҳолаш зарурати юзага келади. Шу мақсадда махсус характеристикалар, жумладан, асимметрия ва эксцесс тушунчалари киритилади. Нормал тақсимот учун бу характеристикалар нолга тенг. Шу сабабли, агар ўрганилаётган тақсимот учун ассиметрия ва эксцесс унча катта бўлмаган қийматларга эга бўлса, у ҳолда бу тақсимотнинг нормал тақсимотга яқинлигини тахмин қилиш мумкин. Аксинча, асимметрия ва эксцесснинг катта қийматлари тақсимотнинг нормал тақсимотдан анча четланишини кўрсатади.

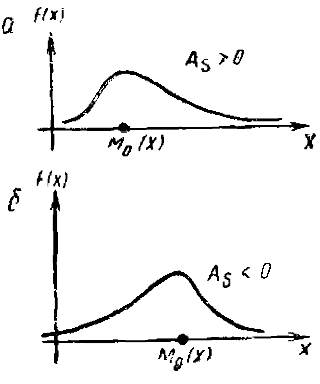
Асимметрияни қандай баҳолаш мумкин? Симметрик тақсимот (бундай тақсимот графиги $x = M(X)$ тўғри чизиққа нисбатан симметрикдир) учун тоқ тартибли марказий моментлар нолга тенглигини исботлаш мумкин. Носимметрик тақсимотлар учун тоқ тартибли марказий моментлар нолдан фарқлидир. Шунинг учун бу моментларнинг исталган бири (исталган тақсимот учун нолга тенг бўлган биринчи тартибли моментдан ташқари) асимметрияни баҳолаш учун хизмат қилиши мумкин; улардан энг соддасини, яъни учинчи тартибли μ_3 моментни танлаш табиийдир. Лекин бу моментни асимметрияни баҳолаш учун қабул қилишнинг ноқулай томони шундаки, унинг катталиги тасодифий миқдор ўлчанадиган бирликларга боғлиқ. Бу камчиликни бартараф қилиш учун μ_3 ни σ^3 га бўлинади ва шундай қилиб, ўлчамсиз характеристика ҳосил қилинади.

Назарий тақсимот асимметрияси деб учинчи тартибли марказий моментнинг ўрта квадратик четланиш кубига нисбатига айтилади:

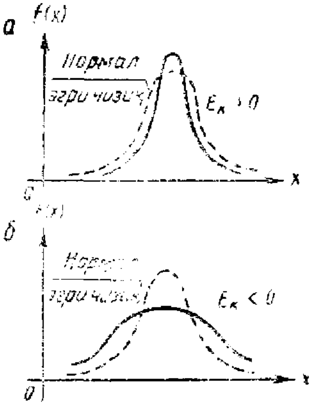
$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Агар тақсимот эгри чизиғининг «узун қисми» математик кутилишдан ўнгда жойлашган бўлса, асимметрия мусбат, агар эгри чизиғининг «узун қисми» математик кутилишдан чапда ётса, асимметрия манфий. Асимметрия ишорасини амалда тақсимот эгри чизиғининг модага (дифференциал функциянинг максимум нуқтасига) нисбатан жойлашиш бўйича аниқланади: агар эгри чизиқнинг узун қисми модадан ўнгда (10-а расм) жойлашган бўлса, у ҳолда асимметрия мусбат, агар чапда (10-б расм) жойлашган бўлса, у ҳолда асимметрия манфий.

«Тикликни», яъни назарий тақсимотнинг нормал эгри чизиққа қараганда кўп ёки кам кўтарилишини баҳолаш учун эксцессдан фойдаланилади.



10- расм



11- расм

Назарий тақсимот эксцесси деб

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

тенглик билан аниқланадиган характеристикага айтилади.

Нормал тақсимот учун $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$, бинобарин, эксцесс нолга тенг. Шу сабабли, агар бирор тақсимотнинг эксцесси нолдан фарқли бўлса, у ҳолда бу тақсимот эгри чизиғи нормал эгри чизиқдан фарқ қилади: агар эксцесс мусбат бўлса, у ҳолда эгри чизиқ нормал эгри чизиққа қараганда «баландроқ» ва «ўткирроқ» учга эга бўлади (11-а расм). агар эксцесс манфий бўлса, у ҳолда таққосланаётган эгри чизиқ нормал эгри чизиққа қараганда «пастроқ» ва «яссироқ» учга эга бўлади (11-б расм). Бунда нормал ва назарий тақсимотлар бир хил математик кутилишлар ва дисперсияларга эга деб ҳисобланади.

10-§. Бир тасодифий аргумент функцияси ва унинг тақсимоти

Аввало, бундан буён «эҳтимолларнинг тақсимот қонуни» дейиш ўрнига, кўпинча, қисқа қилиб «тақсимот» дейишимизни айтиб ўтамиз.

Агар X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган ҳар бир қийматига Y тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган битта қиймати мос келса, у ҳолда Y ни X тасодифий аргументнинг функцияси дейилади:

$$Y = \varphi(X).$$

Энди дискрет ва узлуксиз аргумент тақсимоти бўйича функция тақсимотини қандай топиш кўрсатилади.

1. X аргумент — дискрет тасодифий миқдор бўлсин.

а) Агар X аргументнинг мумкин бўлган турли қийматларига Y функциянинг мумкин бўлган турли қийматлари мос келса, у ҳолда X ва Y нинг мос қийматларининг эҳтимоллари ўзаро тенг бўлади.

1-мисол. X дискрет тасодифий миқдор ушбу

X	2	3
p	0,6	0,4

тақсимот орқали берилган. $Y = X^2$ функция тақсимотини топинг

Ечилиши. Y нинг мумкин бўлган қийматларини топамиз:

$$y_1 = 2^2 = 4;\ y_2 = 3^2 = 9.$$

Y нинг изланаётган тақсимотини ёзамиз:

Y	4	9
p	0,6	0,4.

б) Агар X нинг мумкин бўлган турли қийматларига Y нинг орасида ўзаро тенглари ҳам бор бўлган қийматлари мос келса, у ҳолда Y нинг такрорланувчи қийматлари эҳтимолларини қўшиш лозим

2-мисол. X дискрет тасодифий миқдор ушбу

X	-2	2	3
p	0,4	0,5	0,1

тақсимот орқали берилган. $Y = X^2$ функция тақсимотини топинг.

Ечилиши. Мумкин бўлган $y_1 = 4$ қийматнинг эҳтимоли биргаликда бўлмаган $X = -2$ ва $X = 2$ ҳодисалар эҳтимоллари йиғиндисига, яъни $0,5 + 0,4 = 0,9$ га тенг. Мумкин бўлган $y_2 = 9$ қийматнинг эҳтимоли 0,1 га тенг. Y нинг изланаётган тақсимотини ёзамиз.

Y	4	9
p	0,9	0,1.

2. X аргумент узлуксиз тасодифий миқдор бўлсин. X тасодифий аргументнинг $f(x)$ дифференциал функциясини билган ҳолда $Y = \varphi(X)$ функция тақсимотини қандай топиш мумкин? Қуйидаги исбот қилинган: агар $y = \varphi(x)$ дифференциалланувчи ва қатъий ўсувчи ёки қатъий камаювчи функция бўлиб, $x = \psi(y)$ унинг тескари функцияси бўлса, у ҳолда Y тасодифий миқдорнинг $g(y)$ дифференциал функцияси ушбу тенгликдан топилади.

$$g(y) = f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|.$$

3-мисол. X тасодифий миқдор нормал тақсимланган, шу билан бирга унинг математик кутилиши $a = 0$. $Y = X^3$ функция тақсимотини топинг.

Ечилиши. $y = x^3$ функция дифференциалланувчи ва қатъий ўсувчи бўлгани учун юқоридаги

$$g(y) = f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)| \qquad (*)$$

формулани қўллаш мумкин. $y = x^3$ га тескари функцияни топамиз:

$$\psi(y) = x = y^{\frac{1}{3}}.$$

$f(\psi(y))$ ни топамиз. Шартга кўра

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

шу сабабли

$$f[\psi(y)] = f(y^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2\sigma^2}}. \qquad (**)$$

Тескари функциянинг y бўйича ҳосиласини топамиз:

$$\psi'(y) = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}. \qquad (***)$$

Изланаётган дифференциал функцияни топамиз, бунинг учун (**) ва (***) ни (*) га қўямиз:

$$g(y) = \frac{1}{3\sigma y^{\frac{2}{3}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2\sigma^2}}.$$

Эслатма. (*) формуладан фойдаланиб, нормал тақсимланган X аргументнинг $Y = AX + B$ чизиқли функцияси нормал тақсимланганлигини исботлаш мумкин. Шу билан бирга Y нинг математик кутилишини топиш учун функция ифодасида X нинг ўрнига унинг a математик кутилишини қўйиш лозим:

$$M(Y) = Aa + B;$$

Y нинг ўртача квадратик четланишини топиш учун X аргументнинг ўртача квадратик четланишини X олдидаги коэффициентнинг модулига кўпайтириш лозим:

$$\sigma(Y) = |A|\cdot\sigma(X).$$

4-мисол. $Y = 3X + 1$ чизиқли функциянинг дифференциал функциясини топинг. X аргумент нормал тақсимланган бўлиб, унинг математик кутилиши 2 га, ўртача квадратик четланиши 0.5 га тенг.

Ечилиши. Y нинг математик кутилишини топамиз:

$$M(Y) = 3\cdot 2 + 1 = 7.$$

Y нинг ўртача квадратик четланишини топамиз:

$$\sigma(Y) = 3\cdot 0,5 = 1,5.$$

Изланаётган дифференциал функция қуйидаги кўринишга эга:

$$g(y) = \frac{1}{1,5\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-7)^2}{2\cdot(1,5)^2}}.$$

11-§. Бир тасодифий аргумент функциясининг математик кутилиши

X тасодифий аргументнинг $Y = \varphi(X)$ функцияси берилган. Аргументнинг тақсимот қонунини билган ҳолда бу функциянинг математик кутилишини топиш талаб қилинади.

1. X аргумет дискрет тасодифий миқдор бўлиб, унинг мумкин бўлган қийматлари $x_1, x_2, \ldots, x_n$, уларнинг эҳтимоллари эса мос равишда $p_1, p_2, \ldots, p_n$ га тенг бўлсин. Равшанки Y ҳам дискрет тасодифий миқдор бўлиб, унинг мумкин бўлган қийматлари

$$y_1 = \varphi(x_1),\ y_2 = \varphi(x_2),\ \ldots,\ y_n = \varphi(x_n).$$

«X миқдор x_i қиймат қабул қилди» деган ҳодиса «Y миқдор $\varphi(x_i)$ қиймат қабул қилди» деган ҳодисани эргаштиргани учун Y нинг мумкин бўлган қийматлари эҳтимоллари мос равишда $p_1, p_2, \ldots, p_n$ га тенг. Демак, функциянинг математик кутилиши:

$$M[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)p_i. \qquad (*)$$

1-мисол. X дискрет тасодифий миқдор

X	1	3	5
p	0,2	0,5	0,3

тақсимот орқали берилган. $Y = \varphi(X) = X^2 + 1$ функциянинг математик кутилишини топинг.

Ечилиши. Y нинг мумкин бўлган қийматларини топамиз:

$$\varphi(1) = 1^2 + 1 = 2; \ \varphi(3) = 3^2 + 1 = 10; \ \varphi(5) = 5^2 + 1 = 26.$$

Функциянинг изланаётган математик кутилиши

$$M[X^2 + 1] = 2\cdot 0,2 + 10\cdot 0,5 + 26\cdot 0,3 = 13,2.$$

2. X аргумент $f(x)$ дифференциал функция орқали берилган узлуксиз тасодифий миқдор бўлсин. $Y = \varphi(X)$ функциянинг математик кутилишини топиш учун аввал Y миқдорнинг $g(y)$ дифференциал функциясини топиш, кейин эса

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\cdot g(y)dy$$

формуладан фойдаланиш мумкин. Лекин $g(y)$ дифференциал функцияни излаш қийин кечадиган бўлса, у ҳолда $g(X)$ нинг математик кутилишини бевосита

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx$$

формула орқали топиш мумкин. Жумладан, X нинг мумкин бўлган қийматлари (a, b) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда

$$M[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x)f(x)dx. \qquad (**)$$

Буни исботлаб ўтирмасдан, шуни қайд қиламизки, унинг исботи (*) формула исботига ўхшаш: қўшишни интеграллашга, эҳтимолни эҳтимол $f(x)dx$ элементига алмаштирилади.

2-мисол. Узлуксиз X тасодифий миқдор $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда $f(x) = \sin x$ дифференциал функция орқали берилган; $f(x) = 0$ — интервалдан ташқарида. $Y = \varphi(X) = X^2$ функциянинг математик кутилишини топинг.

Ечилиши. (**) формуладан фойдаланамиз. Шартга кўра

$$f(x) = \sin x, \ \varphi(x) = x^2, \ a = 0, \ b = \frac{\pi}{2}.$$

Демак,

$$M[\varphi(X)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \cdot dx.$$

Бўлаклаб интеграллаб, изланаётган математик кутилишни топамиз:

$$M[X^2] = \pi - 2.$$

12-§. Иккита тасодифий аргумент функцияси. Эркли қўшилувчилар йиғиндисининг тақсимоти. Нормал тақсимотнинг турғунлиги

Агар X ва Y тасодифий миқдорларнинг мумкин бўлган қийматларининг ҳар бир жуфтига Z тасодифий миқдорнинг битта мумкин бўлган қиймати мос келса, у ҳолда Z ни *иккита тасодифий аргумент X ва Y нинг функцияси* дейилади:

$$Z = \varphi(X, Y).$$

Сўнгра, мисоллар орқали

$$Z = X + Y$$

функциянинг тақсимотини қўшилувчиларнинг маълум тақсимотлари бўйича қандай топиш кўрсатилади. Бундай масала практикада тез-тез учраб туради. Масалан, агар X ўлчаш асбоби кўрсатишларининг (нормал тақсимланган) хатоси, Y эса кўрсатишлар шкаласидаги энг яқин бўлинмагача яхлитлаш (текис тақсимланган) хатоси бўлса, у ҳолда хатолар йиғиндиси $Z = X + Y$ нинг тақсимот қонунини топиш масаласи юзага келади.

1. X ва Y дискрет эркли тасодифий миқдорлар бўлсин. $Z = X + Y$ функциянинг тақсимот қонунини топиш учун Z нинг мумкин бўлган барча қийматларини ва уларнинг эҳтимолларини топиш лозим.

1-мисол. Дискрет эркли тасодифий миқдорлар ушбу тақсимотлар орқали берилган:

X	1	2
p	0,4	0,6

Y	3	4
p	0,2	0,8.

$Z = X + Y$ тасодифий миқдорнинг тақсимотини топинг.

Ечилиши. Z нинг мумкин бўлган қийматлари X нинг мумкин бўлган қийматларининг ҳар бири билан Y нинг мумкин бўлган барча қийматлари йиғиндисидир:

$$z_1 = 1 + 3 = 4;\ z_2 = 1 + 4 = 5;\ z_3 = 2 + 3 = 5;\ z_4 = 2 + 4 = 6.$$

Бу мумкин бўлган қийматларнинг эҳтимолларини топамиз.

$Z = 4$ бўлиши учун X миқдор $x_1 = 1$ қиймат ва Y миқдор $y_1 = 3$ қиймат қабул қилиши етарли. Мумкин бўлган бу қийматларнинг эҳтимоллари мос равишда 0,4 ва 0,2 га тенг.

X ва Y аргументлар эркли бўлгани учун $X = 1$ ва $Y = 3$ ҳодисалар ҳам эркли, бинобарин уларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли (яъни $Z = 1 + 3 = 4$ ҳодиса эҳтимоли) кўпайтириш теоремасига кўра $0,4 \cdot 0,2 = 0.08$ га тенг.

Шунга ўхшаш қуйидагиларни топамиз:

$$P(Z = 1 + 4 = 5) = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32;$$
$$P(Z = 2 + 3 = 5) = 0.6 \cdot 0,2 = 0,12;$$
$$P(Z = 2 + 4 = 6) = 0,6 \cdot 0.8 = 0,48.$$

Изланаётган тақсимотни, аввал биргаликда бўлмаган $Z = z_2$, $Z = z_3$ ҳодисаларининг эҳтимолларини жамлаб $(0,32 + 0,12 = 0,44)$ топамиз:

Z	4	5	6
p	0,08	0,44	0,48.

Контроль қилиш: $0,08 + 0,44 + 0,48 = 1$.

2. X ва Y — узлуксиз тасодифий миқдорлар бўлсин. Қуйидаги исботланган: агар X ва Y эркли бўлса, у ҳолда $Z = X + Y$ йиғиндининг $g(z)$ дифференциал функцияси (аргументлардан камида биттасининг дифференциал функцияси $(-\infty, \infty)$ интервалда битта формула орқали берилган деган шарт остида)

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z - x)\,dx \qquad (*)$$

тенгликдан ёки унга тенг кучли

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z - y) f_2(y)\,dy \qquad (**)$$

тенгликдан топилиши мумкин, бу ерда f_1, f_2 — аргументларнинг дифференциал функциялари.

Агар аргументларнинг мумкин бўлган қийматлари манфий бўлмаса, у ҳолда $g(z)$ ни

$$g(z) = \int_0^z f_1(x)f_2(z-x)dx \qquad (***)$$

формула бўйича ёки унга тенг кучли

$$g(z) = \int_0^z f_1(z-y)f_2(y)dy \qquad (****)$$

формула бўйича топиш мумкин.

Эркли тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дифференциал функцияси *композиция* дейилади.

Агар эҳтимоллар тақсимоти қонунининг композицияси яна ўша қонуннинг ўзи (умуман айтганда, параметрлари билан фарқ қилса) бўлса, у ҳолда бу қонун *турғун* дейилади. Нормал қонун турғунлик хоссасига эга: нормал қонунлар композицияси яна нормал тақсимотга эга (бу композициянинг математик кутилиши ва дисперсияси мос равишда қўшилувчилар математик кутилишлари ва дисперсиялари йиғиндисига тенг.) Масалан, агар X ва Y математик кутилишлари ва дисперсиялари мос равишда

$$a_1 = 3, \ a_2 = 4, \ D_1 = 1, \ D_2 = 0{,}5$$

бўлган нормал тақсимланган эркли тасодифий миқдорлар бўлса, у ҳолда бу миқдорларнинг композицияси (яъни $Z = X + Y$ йиғиндининг дифференциал функцияси) ҳам нормал тақсимланган, шу билан бирга композициянинг математик кутилиши ва дисперсияси мос равишда $a = 3 + 4 = 7$; $D = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$ га тенг.

2-мисол. X ва Y эркли тасодифий миқдорлар ушбу дифференциал функциялари орқали берилган:

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} \qquad (0 \leqslant x < \infty);$$

$$f(y) = \frac{1}{4}e^{-\frac{y}{4}} \qquad (0 < y < \infty).$$

Бу қонунларнинг композициясини, яъни $Z = X + Y$ тасодифий миқдорнинг дифференциал функциясини топинг.

Ечилиши. Аргументларнинг мумкин бўлган қийматлари манфий бўлмаганлиги учун (***) формуладан фойдаланамиз:

$$g(z) = \int_0^z f_1(x)f_2(z-x)dx = \int_0^z \left[\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\right]\left[\frac{1}{4}e^{-\frac{z-x}{4}}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{12}e^{-\frac{z}{4}}\int_0^z e^{-\frac{x}{12}}dx = e^{-\frac{z}{4}}\left(1 - e^{-\frac{z}{12}}\right).$$

Бу ерда $z \geq 0$ эканлигини айтиб ўтамиз, чунки $Z = X + Y$ ва шартга кўра X ва Y нинг мумкин бўлган қийматлари манфий эмас.

Контрол қилиш мақсадида китобхонга

$$\int_0^\infty g(z)dz = 1$$

эканлигига ишонч ҳосил қилишни тавсия қиламиз.

Бундан кейин келадиган параграфларда нормал тақсимот билан боғланган тақсимотлар қисқача тавсифланган, улардан математик статистикани баён қилишда фойдаланилади.

13-§. χ^2 тақсимот

Айтайлик, X_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ эркли нормал тасодифий миқдорлар бўлиб, шу билан бирга уларнинг ҳар бирини математик кутилиши 0 га, ўртача квадратик четланиши эса бирга тенг бўлсин. У ҳолда бу миқдорлар квадратлари йиғиндиси

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

$k = n$ эркинлик (озодлик) даражали (эркинлик даражаси $k = n$ бўлган) χ^2 қонун («хи квадрат») бўйича тақсимланган, агар бу миқдорлар битта чизиқли муносабат билан боғланган, масалан, $\sum X_i = n\bar{X}$ бўлса, у ҳолда эркинлик даражалари сони $k = n - 1$ бўлади.

Бу тақсимотнинг дифференциал функцияси

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\leqslant 0 \text{ да,} \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\, e^{-\frac{x}{2}}\, x^{\frac{k}{2}-1} & x>0 \text{ да} \end{cases}$$

бу ерда $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ гамма-функция хусусан $\Gamma(n+1) = n!$ Бу ердан кўриниб турибдики, «хи квадрат» тақсимот битта параметр—эркинлик даражалари сони орқали аниқланади.

Эркинлик даражалари сони ортиши билан тақсимот нормал тақсимотга секин яқинлашади.

14- §. Стьюдент тақсимоти

Z нормал тасодифий миқдор, шу билан бирга $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$, V эса k эркинлик даражали (эркинлик даражаси k бўлган) χ^2 қонун бўйича тақсимланган ва Z га боғлиқ бўлмаган миқдор бўлсин. У ҳолда

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{k}}} \qquad (*)$$

миқдор t-тақсимот ёки k эркинлик даражали Стьюдент (инглиз статистиги В. Госсет тахаллуси) тақсимоти деб аталадиган тақсимотга эга.

Шундай қилиб, нормаланган нормал миқдорнинг k эркинлик даражали «хи квадрат» қонуни бўйича тақсимланган ва k га бўлинган тасодифий миқдордан олинган квадрат илдизга нисбати k эркинлик даражали Стьюдент қонуни бўйича тақсимланган.

Эркинлик даражалари сони ортиши билан Стьюдент тақсимот нормал тақсимотга тез яқинлашади. Бу тақсимот ҳақида қўшимча маълумотлар келгусида (XV боб, 16-§) келтирилади.

15-§. Фишер—Снедекорнинг F тақсимоти

Агар U ва V лар k_1 ва k_2 эркинлик даражали χ^2 қонун бўйича тақсимланган эркли тасодифий миқдорлар бўлса,

$$F = \frac{\frac{U}{k_1}}{\frac{V}{k_2}} \qquad (*)$$

миқдор Фишер—Снедекорнинг k_1 ва k_2 эркинлик даражали F тақсимоти деб аталадиган тақсимотга эга (уни баъзан V^2 орқали белгиланади).

F тақсимотнинг дифференциал функцияси:

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 \text{ да } & 0, \\ x > 0 \text{ да } & C_0 \dfrac{x^{\frac{k_1-2}{2}}}{(k_1 + k_2 x)^{\frac{k_1+k_2}{2}}} \end{cases}$$

бу ерда

$$C_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right) \cdot k_1^{\frac{k_1}{2}} \cdot k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}.$$

Бу ердан кўриниб турибдики, F тақсимот иккита параметр — эркинлик даражаси сонлари орқали аниқланади. Бу тақсимот ҳақида қўшимча маълумотлар келгусида келтирилади (XVIII боб, 8-§).

Мисоллар

1. X тасодифий миқдорнинг дифференциал функциясини билган ҳолда, унинг математик кутилиши ва дисперсиясини топинг:

а) $-1 < x < 1$ да $f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}$, x нинг қолган қийматларида $f(x) = 0$.

б) $a - l < x < a + l$ да $f(x) = \frac{1}{2 \cdot l}$, x нинг қолган қийматларида $f(x) = 0$.

Жавоби. а) $M(X) = 0$, $D(X) = \frac{1}{2}$; б) $M(X) = a$, $D(X) = \frac{l^2}{3}$.

2. X тасодифий миқдор нормал тақсимланган. Бу миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсияси мос равишда 6 ва 2 га тенг. Синаш натижасида X миқдор (4; 8) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби: 0,6826.

3. Тасодифий миқдор нормал тақсимланган. Бу миқдорнинг ўртача квадратик четланиши 0,4 га тенг. Бу миқдорни унинг математик кути-

лишидан четланишни абсолют қиймати бўйича 0,3 дан кичик бўлиши эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,5468.

4. Ўлчашнинг тасодифий хатолари ўртача квадратик четланиши $\sigma = 1$ *мм* математик кутилиши $a = 0$ бўлган нормал қонун бўйича тақсимланган. Иккита боғлиқ бўлмаган кузатишлардан камида бирининг хатоси абсолют қиймати бўйича 1,28 *мм* дан ортиқ бўлмаслиги эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,96.

5. Автомат тайёрлайдиган валиклар диаметрининг лойиҳадагидан четланиши 2 *мм* дан ортиқ бўлмаса, валиклар стандарт ҳисобланади. Валиклар диаметрининг тасодифий четланишлари ўртача квадратик четланиши $\sigma = 1{,}6$ *мм*, математик кутилиши $a = 0$ бўлган нормал қонунга бўйсунади. Автомат неча процент стандарт валиклар тайёрлайди?

Жавоби. Тахминан 79 %.

6. X дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

а)

X	1	2	3
p	0,2	0,1	0,7;

б)

X	-1	1	2
p	0,1	0,2	0,7.

$Y = X^4$ тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг.

Жавоби. а)

Y	1	16	81
p	0,2	0,1	0,7;

б)

Y	1	16
p	0,3	0,7.

7. Узлуксиз X тасодифий миқдор $f(x)$ дифференциал функция орқали берилган. Агар а) $Y = X + 1$ $(-\infty < x < \infty)$; б) $Y = 2X$ $(-a < x < a)$ бўлса, Y тасодифий миқдорнинг дифференциал функциясини топинг.

8. Эркли дискрет тасодифий миқдорлар ушбу тақсимот қонунлари орқали берилган:

X	2	3	5
p	0,3	0,5	0,2;

Y	1	4
p	0,2	0,8.

Ушбу функцияларнинг тақсимот қонунларини топинг:
а) $Z = X + Y$; б) $Z = XY$.

Жавоби: а)

Z	3	4	6	7	9
p	0,06	0,10	0,28	0,40	0,16;

б)

Z	2	3	5	8	12	20
p	0,06	0,10	0,04	0,24	0,40	0,16.

9. X ва Y эркли тасодифий миқдорлар ушбу дифференциал функциялар орқали берилган:

$$f_1(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} \quad (0 \leq x < \infty);$$

$$f_2(y) = \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} \quad (0 \leq y < \infty)$$

Бу қонунларнинг композициясини, яъни $Z = X + Y$ тасодифий миқдорнинг дифференциал функциясини топинг.

$$\textit{Жавоби.}\ g(z) = \begin{cases} z \geq 0 \text{ да} & \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{5}} \left(1 - e^{-\frac{2z}{15}} \right); \\ z < 0 \text{ да} & 0. \end{cases}$$

Ўн учинчи боб

КЎРСАТКИЧЛИ ТАҚСИМОТ

1-§. Кўрсаткичли тақсимот таърифи

Кўрсаткичли (экспоненциал) тақсимот деб

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 \text{ да } 0, \\ x \geq 0 \text{ да } \lambda e^{-\lambda x} \end{cases}$$

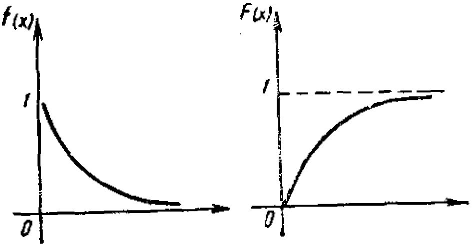
(бу ерда λ — ўзгармас мусбат катталик) дифференциал функция билан тавсифланадиган эҳтимоллар тақсимотига айтилади.

Кўрсаткичли тақсимот **битта** λ параметр билан аниқланишини кўриб турибмиз. Кўрсаткичли тақсимотнинг бу хусусияти унинг кўп сондаги параметрларга боғлиқ тақсимотларга қараганда устунлигини кўрсатиб турибди. Одатда параметрлар номаълум бўлиб, уларни баҳолашга (тақрибий қийматларини топишга) тўғри келади; иккита ёки учта ва ҳ. к. параметрларни баҳолашдан кўра битта параметрни баҳолаш осонлиги ўз-ўзидан равшан. Кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган узлуксиз тасодифий миқдорга мисол бўлиб, энг оддий оқим иккита кетма-кет ҳодисасининг рўй бериши орасидаги вақт тақсимоти (5- § га қаранг) хизмат қилиши мумкин.

Кўрсаткичли тақсимотнинг интеграл функциясини топамиз (XI боб, 3- §):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx = \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Кўрсаткичли тақсимотни биз дифференциал функция ёрдамида аниқладик, уни интеграл функция ёрдамида ҳам аниқлаш мумкинлиги тушунарли.



12- расм

Дифференциал ва интеграл функцияларнинг графиклари 12-расмда тасвирланган.

Мисол. Агар кўрсаткичли тақсимотнинг параметри $\lambda=8$ бўлса, унинг дифференциал ва интеграл функцияларини ёзинг.

Ечилиши. Равшанки,

$$x \geqslant 0 \text{ да } f(x) = 8e^{-8x}; \; x<0 \text{ да } f(x) = 0;$$

$$F(x) = 1 - e^{-8x}.$$

2-§. Кўрсаткичли тақсимланган тасодифий миқдорнинг берилган интервалга тушиш эҳтимоли

Ушбу

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

интеграл функция орқали берилган кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган узлуксиз X тасодифий миқдорнинг (a, b) интервалга тушиш эҳтимолини топамиз.

Ушбу

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

формуладан (X боб, 2- §, 1- натижа) фойдаланамиз. $F(a) = 1 - e^{-ax}$, $F(b) = 1 - e^{-bx}$ эканлигини эътиборга олиб,

$$P(a<X<b) = e^{-ax} - e^{-bx} \qquad (*)$$

ни ҳосил қиламиз. e^{-x} функциянинг қийматлари жадвалдан топилади.

Мисол. Узлуксиз X тасодифий миқдор

$$x\geq 0 \text{ да } f(x)=2e^{-2x}, \quad x<0 \text{ да } f(x)=0$$

кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган. Синаш натижасида X миқдорнинг $(0,3;\ 1)$ интервалга тушиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $\lambda=2$. (*) формуладан фойдаланамиз:

$$P(0,3<X<1)=e^{-(2\cdot 0,3)}-e^{-(2\cdot 1)}=e^{-0,6}-e^{-2}=$$

$$=0,54881-0,13534\simeq 0,41.$$

3- §. Кўрсаткичли тақсимотнинг сон характеристикалари

Узлуксиз X тасодифий миқдор

$$f(x)=\begin{cases} x<0 \text{ да } 0, \\ x\geq 0 \text{ да } \lambda e^{-\lambda x}\end{cases}$$

кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган бўлсин.

Математик кутилишини топамиз (XII боб, 1-§):

$$M(X)=\int_0^\infty xf(x)dx=\lambda\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx.$$

Бўлаклаб интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda} \qquad (*)$$

Шундай қилиб, кўрсаткичли тақсимотнинг математик кутилиши λ параметрга тескари катталикка тенг.

Дисперсияни топамиз (XII боб, 1-§):

$$D(X)=\int_0^\infty x^2f(x)\,dx-[M(X)]^2=\lambda\int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}.$$

Бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\lambda\int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}.$$

Демак,

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Ўртача квадратик четланишни топамиз, бунинг учун дисперсиядан квадрат илдиз чиқарамиз:

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \qquad (**)$$

(*) ва (**) ни таққослаб, қуйидаги хулосага келамиз:

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda},$$

яъни кўрсаткичли тақсимотнинг математик кутилиши ва ўртача квадратик четланиши ўзаро тенг

Мисол. Узлуксиз X тасодифий миқдор

$$x \quad 0 \text{ да } f(x) = 5e^{-5x}; \quad x<0 \text{ да } f(x) = 0$$

кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган. X нинг математик кутилиши, ўртача квадратик четланиши ва дисперсиясини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $\lambda = 5$. Демак,

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5} = 0{,}2;$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{5^2} = 0{,}04.$$

1- эслатма. Практикада кўрсаткичли тақсимланган тасодифий миқдор ўрганилаётган, шу билан бирга λ параметр номаълум бўлсин. Агар математик кутилиши ҳам номаълум бўлса, у ҳолда унинг баҳоси (тақрибий қиймати) топилади, бу баҳо сифатида танланма ўртача қиймат $\overline{x}$ олинади (XVI боб, 5-§). У ҳолда λ параметрнинг тақрибий қиймати

$$\lambda^* = \frac{1}{\overline{x}}$$

тенгликдан топилади.

2- эслатма. Фараз қилайлик, практикада ўрганилаётган тасодифий миқдор кўрсаткичли тақсимотга эга дейишга асос бор бўлсин. Бу гипотезани текшириб кўриш учун математик кутилиш ва ўртача квадратик четланишни, яъни танлама ўртача қиймат ва танлама ўртача квадратик четланиш (XVI боб, 5- §, 9- §) топилади. Кўрсаткичли тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши ва математик кутилиши ўзаро тенг бўлгани учун уларнинг баҳолари унча фарқ қилмаслиги лозим. Агар баҳолар бир-бирига яқин бўлиб чиқса, у ҳолда кузатиш натижалари ўрганилаётган миқдорнинг кўрсаткичли тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани тасдиқлайди; агар баҳолар жуда фарқ қилса, у ҳолда гипотезани рад қилиш лозим.

Кўрсаткичли тақсимот татбиқларда, жумладан, ишончлилик назариясида кенг қўлланилади, ишончлилик назариясининг энг асосий тушунчаларидан бири ишончлилик функциясидир.

4- §. Ишончлилик функцияси

Бирор қурилмани у «содда» ёки «мураккаб» бўлишидан қатъи назар элемент деб атаймиз.

Айтайлик, элемент вақтнинг $t_0 = 0$ моментида ишлай бошласин, вақт ўтиши билан эса ишдан чиқсин. T орқали тасодифий миқдор—элементнинг бузилмасдан ишлаш вақтини белгилаймиз. Агар элемент t дан кичик вақт бузилмасдан (бузилгунга қадар) ишлаган бўлса, у ҳолда t вақт ичида бузилиш рўй беради.

Шундай қилиб, ушбу

$$F(t) = P(T < t)$$

интеграл функция t вақт ичида ишдан чиқиш эҳтимолини аниқлайди. Демак, шу t вақт ичида бузилмасдан ишлаш эҳтимоли, яъни $T > t$ қарама-қарши ҳодисанинг эҳтимоли

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t) \qquad (*)$$

га тенг.

$R(t)$ *ишончлилик функцияси* деб элементнинг t вақт ичида бузилмасдан ишлаш эҳтимолини аниқлайдиган функцияга айтилади:

$$R(t) = P(T > t).$$

5- §. Ишончлиликнинг кўрсаткичли қонуни

Кўпинча, элементнинг бузилмасдан ишлаш вақтининг давомийлиги кўрсаткичли тақсимотга эга. Унинг интеграл функцияси:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Демак, элементнинг бузилмасдан ишлаш вақти кўрсаткичли тақсимланган ҳолда ишончлилик функцияси олдинги параграфнинг (*) муносабатига асосан

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

кўринишга эга.

Ишончлиликнинг кўрсаткичли қонуни деб

$$R(t) = e^{-\lambda t} \qquad (*)$$

тенглик билан аниқланадиган ишончлилик функциясига айтилади; бу ерда λ ишдан чиқиш интенсивлиги.

Ишончлилик функцияси таърифидан (4- §) келиб чиққанидек, бу формула агар элементнинг бузилмасдан ишлаш вақти кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган бўлса, элементнинг t вақт давомида бузилмасдан ишлаш эҳтимолини топишга имкон беради.

Мисол. Элементнинг бузилмасдан ишлаш вақти $t > 0$ да $f(x) = 0,02e^{-0,02t}$ кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган (t — соат ҳисобида). Элемент бузилмасдан 100 соат ишлаш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра ишдан чиқиш интенсивлиги $\lambda = 0,02$. (*) формуладан фойдаланамиз.

$$R(100) = e^{-0,02 \cdot 100} = e^{-2} = 0,13534.$$

Элемент бузилмасдан (ишдан чиқмасдан) 100 соат ишлашининг изланаётган эҳтимоли тахминан 0,14 га тенг.

Эслатма. Агар элементларнинг ишлашининг тасодифий моментларида ишдан чиқишлари энг оддий оқим ҳосил қилса, у ҳолда t вақт ичида битта ҳам ишдан чиқиш юз бермаслиги (VI боб, 6-§) эҳтимоли

$$R_t(0) = e^{-\lambda t},$$

бу (*) тенгликка мувофиқ келади, чунки λ иккала формулада ҳам бир хил маънога эга (ишдан чиқишлар интенсивлиги).

6-§. Ишончлилик кўрсаткичли қонунининг характеристик хоссаси

Ишончлиликнинг кўрсаткичли қонуни жуда содда ва амалда юзага келадиган масалаларни ҳал этишда қулайдир. Бу ҳолда ишончлилик назариясининг жуда кўп формулалари анча соддалашади. Бу эса ушбу қонун қуйидаги муҳим хоссага эга эканлиги билан тушунтирилади: *элементнинг t вақт интервали ичида бузилмасдан ишлаш эҳтимоли унинг қаралаётган интервал бошланғичидан олдинги вақтда ишлаганлигига боғлиқ бўлмасдан, балки t вақтнинг узунлигига боғлиқ* (ишдан чиқиш интенсивлиги λ берилган).

Хоссани исботлаш учун ҳодисаларни қуйидагича белгилаб оламиз:

A — элементнинг узунлиги t_0 бўлган $(0, t_0)$ интервалда бузилмасдан ишлаши;

B — элементнинг узунлиги t бўлган $(t_0, t_0 + t)$ интервалда бузилмасдан ишлаши.

У ҳолда AB — элементнинг узунлиги $t_0 + t$ бўлган $(0, t_0 + t)$ интервалда бузилмасдан ишлаши.

Бу ҳодисаларнинг эҳтимолини (*) формула (5-§) бўйича топамиз:

$$P(A) = e^{-\lambda t_0},\ P(B) = e^{-\lambda t},$$

$$P(AB) = e^{-\lambda(t_0+t)} = e^{-\lambda t_0}\cdot e^{-\lambda t}.$$

Элемент ўтган $(0,\ t_0)$ интервалда бузилмасдан ишлади деган шартда унинг $(t_0,\ t_0 + t)$ интервалда бузилмасдан ишлашининг шартли эҳтимолини топамиз (III боб, 5- §, 2- эслатма):

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{e^{-\lambda t_0}\cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t_0}} = e^{-\lambda t}.$$

Бу ердан кўрамизки, ҳосил қилинган формула t_0 ни ўз ичига олмасдан, балки фақат t ни ўз ичига олади. Бу эса элементнинг ўтган интервалда ишлаш вақти кейинги интервалда бузилмасдан ишлаш эҳтимолининг катталигига таъсир қилмасдан, балки кейинги интервалнинг узунлигигагина боғлиқлигини билдиради, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Ҳосил қилинган натижани бир оз бошқачароқ ҳам таърифлаш мумкин.

$P(B) = e^{-\lambda t}$ ва $P_A(B) = e^{-\lambda t}$ эҳтимолларини таққослаб, бундай хулосага келамиз: элементнинг узунлиги t бўлган интервалда бузилмасдан ишлашининг олдинги интервалда бузилмасдан ишлади деган фараз остида ҳисобланган шартли эҳтимоли шартсиз эҳтимолга тенг.

Шундай қилиб, ишончлиликнинг кўрсаткичли қонуни бўлган ҳолда элементнинг «ўтмишда» бузилмасдан ишлаши унинг «яқин келажакда» бузилмасдан ишлаш эҳтимолига таъсир қилмайди.

Эслатма. Фақат кўрсаткичли тақсимот текширилаётган хоссага эгалигини исботлаш мумкин. Шунинг учун агар амалда ўрганилаётган тасодифий миқдор бу хоссага эга бўлса, у ҳолда у кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган бўлади. Масалан, метеоритлар фазода ва вақт бўйича текис тақсимланган деб фараз қилинганда, метеоритнинг космик кемага урилиш эҳтимоли қаралаётган вақт интервалининг бошланишидан аввал метеоритлар космик кемага урилган ёки урилмаганлигига боғлиқ эмас. Бинобарин, метеоритларнинг космик кемага урилиш вақтининг тасодифий моментлари кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган.

Масалалар

1. Агар кўрсаткичли тақсимотнинг параметри $\lambda = 5$ бўлса, унинг дифференциал ва интеграл функцияларини ёзинг.

Жавоби. $x \geq 0$ да $f(x) = 5e^{-5x}$; $x < 0$ да $f(x) = 0$; $F(x) = 1 - e^{-5x}$.

2. Узлуксиз X тасодифий миқдор кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган: $x \geqslant 0$ да $f(x) = 5e^{-5x}$, $x<0$ да $f(x) = 0$. Синаш натижасида X нинг (0,4; 1) интервалга тушиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P(0,4<X<1) = 0,13$.

3. Узлуксиз X тасодифий миқдор $f(x) = 4e^{-4x}(x>0)$ кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган. X нинг математик кутилишини, ўртача квадратик четланишини ва дисперсиясини топинг.

Жавоби. $M(X) = \sigma(X) = 0,25$, $D(X) = 0,0625$.

4. Элементнинг бузилмасдан ишлаш вақти $f(t) = 0,01 \cdot e^{-0,01t}(t>0)$ кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган, t вақт—соат ҳисобида. Элементнинг 100 соат бетўхтов ишлаш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $R(100) = 0,37$.

Ўн тўртинчи боб

ИККИТА ТАСОДИФИЙ МИҚДОР СИСТЕМАСИ

1-§. Бир нечта тасодифий миқдорлар системаси ҳақида тушунча

Шу вақтга қадар мумкин бўлган қийматлари битта сон билан аниқланадиган тасодифий миқдорлар қаралган эди. Бундай миқдорлар бир ўлчовли деб аталади. Масалан, ўйин соққаси (шошқол)ни ташлашда тушиши мумкин бўлган очколар сони—бир ўлчовли дискрет тасодифий миқдор; тўпдан снаряднинг тушиши жойигача бўлган масофа бир ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдордир.

Бир ўлчовли тасодифий миқдорлардан ташқари, мумкин бўлган қийматлари иккита, учта, . . . , n та сон билан аниқланадиган миқдорлар ҳам ўрганилади. Бундай миқдорлар мос равишда икки ўлчовли, уч ўлчовли, . . . , n ўлчовли деб аталади.

(X, Y) орқали икки ўлчовли тасодифий миқдорни белгилаймиз. X ва Y миқдорларнинг ҳар бири ташкил этувчи (компонент) деб аталади. X ва Y миқдорларнинг иккаласи бир вақтда қаралганда иккита тасодифий миқдор системасини ташкил этади. Худди шундай, n ўлчовли миқдорни n та тасодифий миқдор системаси деб қараш мумкин. Масалан, уч ўлчовли (X, Y, Z) миқдор учта тасодифий миқдор системаси, X, Y ,Z ни ташкил этади.

Мисол. Станок-автомат пўлат плиткаларни штамповка қилади. Агар контрол қилинадиган ўлчамлар плитканинг узунлиги X ва эни Y бўлса, у ҳолда икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдорга эга бўламиз; агар плитканинг баландлиги Z ҳам контрол қилинадиган бўлса, у ҳолда уч ўлчовли (X, Y, Z) миқдорга эга бўламиз.

Икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдорни геометрик нуқтаи назардан ё текисликдаги $M(X, Y)$ тасодифий нуқта (яъни тасодифий координатали нуқта) деб ёки $\overline{OM}$ тасодифий вектор деб талқин қилиш мумкин. Уч ўлчовли тасодифий миқдорни геометрик нуқтаи назардан уч ўлчовли фазода $M(X, Y, Z)$ нуқта сифатида ёки $\overline{OM}$ вектор сифатида талқин қилиш мумкин.

Дискрет (бу катталикларни ташкил этувчилари дискрет) ва узлуксиз (бу катталикларни ташкил этувчилари узлуксиз) кўп ўлчовли тасодифий миқдорларни бир-биридан фарқлантириш мақсадга мувофиқдир.

2-§. Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот қонуни

Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари (яъни (x_i, y_j) сонлар жуфти) ва уларнинг $p(x_i, y_j)$ $i = 1, 2. \ldots n$, $j = 1, 2 \ldots m$) эҳтимоллари рўйхати бу миқдорнинг *тақсимот қонуни* деб аталади.

Тақсимот қонуни одатда икки томонли жадвал кўринишида берилади (2-жадвал).

2-жадвал

X Y	x_1	x_2	. .	x_i	. . .	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$		$p(x_i, y_1)$		$p(x_n, y_1)$
. . .	. . .	. . .	. .	. . .	. . .	. . .
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	. . .	$p(x_i, y_j)$	. . .	$p(x_n, y_j)$
. . .	. .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	. . .	$p(x_i, y_m)$	. .	$p(x_n, y_m)$

Жадвалнинг биринчи сатри X ташкил этувчининг мумкин бўлган барча қийматларини, биринчи устуни эса Y ташкил этувчининг мумкин бўлган барча қийматларини ўз ичига олади. «x_i устун» ва «y_j сатр» кесишган жойда турган катакда икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг (x_i, y_j) қиймат қабул қилиш эҳтимоли $p(x_i, y_j)$ кўрсатилган;

$$(X = x_i,\ Y = y_j),\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

ҳодисалар тўлиқ группа ташкил қилганлиги учун (II боб, 2-§) жадвалнинг барча катакларидаги эҳтимоллар йиғиндиси бирга тенг.

Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини билган ҳолда ҳар бир ташкил этувчининг тақсимот қонунини топиш мумкин. Ҳақиқатан, масалан,

$$(X = x_1;\ Y = y_1),\ (X = x_1;\ Y = y_2),\ \ldots,\ (X = x_1;\ Y = y_m)$$

ҳодисалар биргаликда эмас, шунинг учун X нинг x_1 қиймат қабул қилиш $P(x_1)$ эҳтимоли қўшиш теоремасига кўра:

$$P(x_1) = p(x_1,\ y_1) + p(x_1,\ y_2) + \ldots + p(x_1,\ y_m).$$

Шундай қилиб, X нинг x_1 қиймат қабул қилиш эҳтимоли $P(x_1)$ «x_1 устундаги» эҳтимоллар йиғиндисига тенг. Умумий ҳолда $P(X = x_i)$ эҳтимолни топиш учун x_i устундаги эҳтимолларни қўшиш лозим. Шунга ўхшаш, «y_j сатрдаги» эҳтимолларни қўшиб, $P(Y = y_j)$ эҳтимолни ҳосил қиламиз.

Мисол. Ушбу тақсимот қонуни (3-жадвал) билан берилган икки ўлчовли тасодифий миқдор ташкил этувчиларининг тақсимот қонунларини топинг.

3- жадвал

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Ечилиши. Эҳтимолларни устунлар бўйича жамлаб, X нинг мумкин бўлган қийматлари эҳтимолларини ҳосил қиламиз:

$$p(x_1) = 0{,}16;\ p(x_2) = 0{,}48;\ p(x_3) = 0{,}36.$$

X ташкил этувчининг тақсимот қонунини ёзамиз:

$$\begin{array}{cccc} X & x_1 & x_2 & x_3 \\ p & 0{,}16 & 0{,}48 & 0{,}36. \end{array}$$

Текшириш: 0,16 + 0,48 + 0,36 = 1.

Эхтимолларни сатрлар бўйича жамлаб, Y нинг мумкин бўлган қийматлари эхтимолларини хосил қиламиз: $p(y_1) = 0,60$; $p(y_2) = 0,40$. Y ташкил этувчининг тақсимот қонунини ёзамиз.

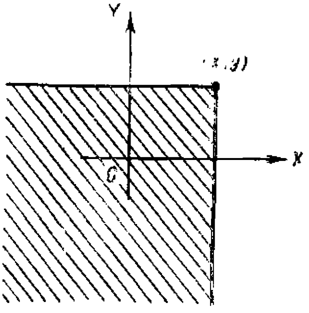
Y	y_1	y_2
p	0,60	0,40.

Текшириш: $0,60 + 0,40 = 1$.

3- § Икки ўлчовли тасодифий миқдор тақсимотининг интеграл функцияси

Икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдорни (дискретми ёки узлуксизми, бунинг фарқи йўқ) қараймиз. x ва y ҳақиқий сонлар жуфти бўлсин. X миқдор x дан кичик қиймат қабул қилиши ва бунда Y миқдор y дан кичик қиймат қабул қилишидан иборат ходиса эхтимолини $F(x, y)$ орқали белгилаймиз. Агар x ва y ўзгарадиган бўлса, у холда, умуман айтганда, $F(x, y)$ хам ўзгаради, яъни $F(x, y)$ эхтимол x ва y нинг функциясидир.

Икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдор *тақсимотининг интеграл функцияси* деб x ва y сонларнинг хар бир жуфти учун X миқдор x дан кичик қиймат қабул қилиши ва бунда Y миқдор y дан кичик қиймат қабул қилиш эхтимолини аниқлайдиган $F(x, y)$ функцияга айтилади, яъни



13- расм

$$F(x, y) = P\ (X < x,\ Y < y).$$

Геометрик нуқтаи назардан бу тенгликни бундай талқин қилиш мумкин: $F(x, y)$ функция (X, Y) тасодифий миқдорнинг учи (x, y) нуқтада бўлиб, бу учдан чапда ва пастда жойлашган чексиз квадратга тушиш эхтимолидир (13- расм).

Мисол. Икки ўлчовли $(X\ Y)$ тасодифий миқдорнинг интеграл функцияси маълум:

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi}\ \text{arctg}\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}\ \text{arctg}\ \frac{y}{3} + \frac{1}{2}\right)\cdot$$

Синаш натижасида X ташкил этувчи $X < 2$ қиймат қабул қилиши ва бунда Y ташкил этувчи $Y < 3$ қиймат қабул қилиши эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Икки ўлчовли тасодифий миқдор интеграл функциясининг таърифига кўра

$$F(x,\ y) = P(X < x,\ Y < y).$$

$x = 2$, $x = 3$ деб олиб, изланаётган эҳтимолни ҳосил қиламиз.

$$P\left(X < 2,\ Y < 3\right) = F\left(2,\ 3\right) = \left(\frac{1}{\pi}\ \operatorname{arctg}\ \frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\pi}\ \operatorname{arc\,tg}\ \frac{3}{3} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16}.$$

4-§. Икки ўлчовли тасодифий миқдор интеграл функциясининг хоссалари

1-хосса. *Интеграл функция қийматлари ушбу қўш тенгсизликни қаноатлантиради:*

$$0 \leqslant F(x,\ y) \leqslant 1.$$

Исботи. Хосса интеграл функцияни эҳтимол сифатида таърифлашдан келиб чиқади: эҳтимол ҳар доим 1 дан катта бўлмаган манфий бўлмаган сондир.

2-хосса. *$F(x,\ y)$ ҳар қайси аргументи бўйича камаймайдиган функциядир,* яъни

агар $x_2 > x_1$ бўлса, $F(x_2,\ y) \geqslant F(x_1,\ y)$,
агар $y_2 > y_1$ бўлса, $F(x,\ y_2) \geqslant F(x,\ y_1)$.

Исботи. $F(x,\ y)$ функция x аргументи бўйича камаймайдиган эканлигини кўрсатамиз. X ташкил этувчи x_2 дан кичик қиймат қабул қилиши ва бунда $Y < y$ дан иборат ҳодисани қуйидаги иккита биргаликда бўлмаган ҳодисага ажратиш мумкин:

1) $P(X < x_1,\ Y < y)$ эҳтимол билан X ташкил этувчи x_1 дан кичик қийматни қабул қилади ва бунда $Y < y$ бўлади;

2) $P(x_1 \leqslant X < x_2,\ Y < y_1)$ эҳтимол билан X ташкил этувчи $x_1 < X < x_2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматни қабул қилади ва бунда $Y < y$ бўлади.

Қўшиш теоремасига кўра

$$P(X < x_2,\ Y < y) = P(X < x_1,\ Y < y) +$$
$$+ P(x_1 \leqslant X < x_2,\ \ Y < y)$$

Бу ердан

$$P(X_2 < x_2,\ \ Y < y) - P(X < x_1,\ \ Y < y) =$$
$$= P(x_1 \leqslant X < x_2,\ \ Y < y)$$

ёки

$$F(x_2,\ \ y) - F(x_1,\ y)) = P(x_1 \leqslant X < x_2,\ Y < y).$$

Исталган эҳтимол манфий бўлмаган сон бўлгани учун

$$F(x_2,\ y) - F(x_1,\ y) \geqslant 0$$

ёки

$$F(x_2,\ y) \geqslant F(x_1,\ y);$$

шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Агар интеграл функцияни геометрик нуқтаи назардан тасодифий нуқтанинг учи $(x,\ y)$ бўлган квадрантга тушиш эҳтимоли сифатида талқин этилишидан фойдаланиладиган бўлса, юқоридаги хосса янада тушунарли бўлади (13-расм). x ортиши билан бу квадрантнинг ўнг чегараси ўнгга томон сурилади; бунда тасодифий миқдорнинг «янги» квадрантга тушиш эҳтимоли камаймаслиги аниқ.

$F(x,\ y)$ функция y аргумент бўйича камаймайдиган функция эканлиги ҳам шунга ўхшаш исботланади.

3-хосса. Ушбу лимит муносабатлар ўринли:

$$1)\ F(-\infty,\ y) = 0, \qquad 3)\ F(-\infty, -\infty) = 0,$$
$$2)\ F(x, -\infty) = 0, \qquad 4)\ F(\infty, \infty) = 1.$$

Исботи. 1) $F(-\infty,\ y)$ ушбу $X < -\infty$ ва $Y < y$ ҳодисанинг эҳтимоли, лекин бундай ҳодиса рўй бера олмайди (чунки $X < -\infty$ ҳодиса рўй бера олмайди); бинобарин, бу ҳодисанинг эҳтимоли нолга тенг.

Агар геометрик интерпретацияга мурожаат қилинадиган бўлса, у ҳолда хосса янада ойдинлашади: $x \to -\infty$ да чексиз квадрантнинг (13-расм) ўнг чегараси чапга томон чексиз сурилади ва бунда тасодифий нуқтанинг бу квадрантга тушиш эҳтимоли нолга интилади.

2) $Y < -\infty$ ҳодиса рўй бера олмайди, шунинг учун $F(x, -\infty) = 0$.

3) $X < -\infty$ ва $Y < -\infty$ рўй бермайдиган ҳодиса; шунинг учун $F(-\infty, -\infty) = 0$.

4) $X < \infty$ ва $Y < \infty$ муқаррар ҳодиса, бинобарин, бу ҳодисанинг эҳтимоли $F(\infty, \infty) = 1$.

Агар $x \to \infty$ ва $y \to \infty$ да чексиз квадрант (13- расм) XOY текисликка айланиши ва демак, синов натижасида (X, Y) тасодифий нуқтанинг бу текисликка тушиш эҳтимоли муқаррар ҳодиса эканлиги эътиборга олинса, хосса янада ойдинлашади.

4- хосса. а) $y = \infty$ да *системанинг интеграл функцияси X ташкил этувчининг интеграл функциясига айланади:*

$$F(x, \infty) = F_1(x);$$

б) $x = \infty$ *да системанинг интеграл функцияси Y ташкил этувчининг интеграл функцияси бўлади:*

$$F(\infty, y) = F_2(y).$$

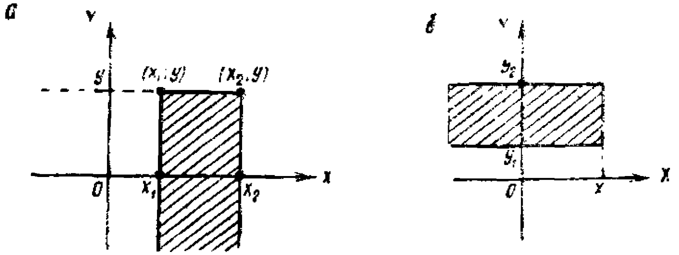
Исботи. а) $Y < \infty$ ҳодиса муқаррар бўлганлиги учун $F(x, \infty)$ ушбу $X < x$ ҳодисанинг эҳтимолини аниқлайди, яъни X ташкил этувчининг интеграл функциясини тасвирлайди.

б) бу ҳол ҳам юқоридагига ўхшаш исботланади.

5- §. Тасодифий нуқтанинг ярим полосага тушиш эҳтимоли

X ва Y тасодифий миқдорлар системасининг интеграл функциясидан фойдаланиб, тасодифий нуқтанинг синов натижасида $x_1 < X < x_2$ ва $Y < y$ ярим полосага (14- *а* расм) ёки $X < x$ ва $y_1 < Y < y_2$ (14-б расм) ярим полосага тушиш эҳтимолини осонгина топиш мумкин.

Тасодифий нуқтанинг учи (x_2, y) бўлган квадрантга тушиш эҳтимолидан нуқтанинг учи (x_1, y) бўлган квадрантга (14-*а*



14- расм

расм) тушиш эҳтимолини айириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(x_1 < X < x_2, \quad Y < y) = F(x_2, \quad y) - F(x_1, \quad y).$$

Шунга ўхшаш

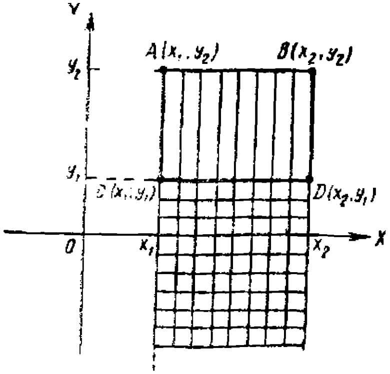
$$P(X < x, \ y_1 < Y < y_2) = F(x, \ y_2) - F(x, \ y_1)$$

га эгамиз.

Шундай қилиб, тасодифий нуқтанинг ярим полосага тушиш эҳтимоли интеграл функциянинг аргументларидан бири бўйича орттирмасига тенг.

6- §. Тасодифий нуқтанинг тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимоли

Томонлари координата ўқларига параллел бўлган $ABCD$ тўғри тўртбурчакни қараймиз (15-расм). Унинг томонлари тенгламалари қуйидагича бўлсин:



15-расм

$$X = x_1, \ X = x_2, \ Y = y_1 \quad \text{ва} \ Y = y_2.$$

(X,Y) тасодифий нуқтанинг бу тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолини топамиз. Изланаётган эҳтимолни, масалан, бундай топиш мумкин: тасодифий нуқтанинг вертикал штрихланган AB ярим полосага тушиш эҳтимолидан (бу эҳтимол $F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)$ га тенг) нуқтанинг горизонтал штрихланган CD полосага тушиш эҳтимолини (бу эҳтимол $F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)$ га тенг) айириш лозим:

$$P(x_1 < X < x_2, \quad y_1 < Y < y_2) = [F(x_2, \quad y_2) - F(x_1, \quad y_2)] - [F(x_2, \ y_1) - F(x_1, \ y_1)]. \qquad (*)$$

Мисол. (X, Y) тасодифий нуқтанинг $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{3}$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолини топинг. Интеграл функция маълум:

$$F(x, y) = \sin x \cdot \sin y \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Ечилиши. (*) формулада $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $y_1 = \frac{\pi}{4}$, $y_2 = \frac{\pi}{3}$ деб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4} < Y < \frac{\pi}{3}\right) = \left[F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)\right] - \left[F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[\sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right] - \left[\sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right] -$$

$$- \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} = 0{,}08.$$

7- §. Икки ўлчовли увлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси (эҳтимолнинг икки ўлчовли зичлиги)

Биз икки ўлчовли тасодифий миқдорни интеграл функция ёрдамида баён қилдик. Икки ўлчовли узлуксиз миқдорни, шунингдек, тақсимотнинг дифференциал функцияси ёрдамида ҳам баён қилиш мумкин. Бу ерда ва бундан кейин интеграл функция ҳамма жойда узлуксиз ва ҳамма жойда (чекли сондаги эгри чизиқлардагина бу истисно бўлиши мумкин) узлуксиз иккинчи тартибли аралаш хусусий ҳосилага эга деб фараз қиламиз.

Икки ўлчовли узлуксиз (X, Y) тасодифий миқдор *тақсимотининг $f(x, y)$ дифференциал функцияси* деб интеграл функциядан олинган иккинчи тартибли аралаш хусусий ҳосилага айтилади:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}.$$

Геометрик нуқтаи назардан бу функцияни сирт сифатида талқин қилиш мумкин. У *тақсимот сирти* деб аталади.

Мисол. (X, Y) тасодифий миқдорлар системасининг маълум

$$F(x, y) = \sin x \cdot \sin y \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

интеграл функцияси бўйича унинг $f(x, y)$ дифференциал функциясини топинг.

Ечилиши. Тасодифий миқдорлар системасининг дифференциал функцияси таърифига кўра

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}.$$

Интеграл функциядан x бўйича олинган хусусий ҳосилани топамиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos x \cdot \sin y.$$

Ҳосил қилинган натижадан y бўйича олинган хусусий ҳосилани топамиз, натижада изланаётган дифференциал функцияни топамиз:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = \cos x \cdot \cos y \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

8- §. Тақсимотнинг интеграл функциясини маълум дифференциал функция бўйича топиш

$f(x,y)$ дифференциал функцияни билган ҳолда $F(x,y)$ интеграл функцияни

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dx\, dy$$

формула бўйича топиш мумкин: бу бевосита дифференциал функция таърифидан келиб чиқади.

Мисол. Икки ўлчовли тасодифий миқдор тақсимотининг интеграл функциясини берилган $f(x, y) = \frac{1}{\pi^2 (1 + x^2)(1 + y^2)}$ дифференциал функция бўйича топинг.

Ечилиши. $F(x, y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} (x, y)\, dxdy$ формуладан фойдаланамиз. Бу ерда $f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$ деб қуйидагини ҳосил қиламиз:

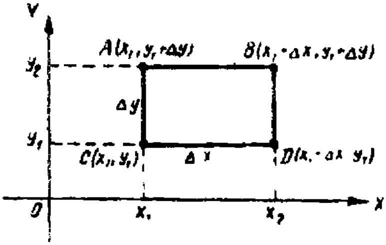
$$F(x, y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\left(\frac{1}{1+y^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{1+y^2}\left(\operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2}\right)dy = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2} = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg} y + \frac{1}{2}\right).$$

9-§. Икки ўлчовли тасодифий миқдор дифференциал функциясининг эҳтимолий маъноси

(X, Y) тасодифий нуқтанинг $ABCD$ тўғри тўртбурчакка (16-расм) тушиш эҳтимоли



16- расм.

$$P(x_1 < X < x_2;\ y_1 < Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] -$$
$$- [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]$$

га тенг (6-§).

Тенгликнинг чап томонини қисқалик учун P_{ABCD} орқали белгилаб ва ўнг томонига Лагранж теоремасини қўллаииб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_{ABCD} = F''_{xy}(\xi, \eta)\cdot\Delta x\cdot\Delta y,$$

бу ерда

$$x_1 < \xi < x_2,\ \Delta x = x_2 - x_1,$$
$$y_1 < n < y_2,\ \Delta y = y_2 - y_1$$

Бундан

$$F''_{xy}(\xi, \eta) = \frac{P_{ABCD}}{\Delta x \cdot \Delta y} \qquad (*)$$

ёки

$$f(\xi, \eta) = \frac{P_{ABCD}}{\Delta x \cdot \Delta y}. \qquad (**)$$

$\Delta x \cdot \Delta y$ кўпайтма $ABCD$ тўғри тўртбурчак юзига тенглигини эътиборга олиб, ушбу хулосага келамиз: $f(\xi, \eta)$ функция тасодифий нуқтанинг $ABCD$ тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолининг бу тўғри тўртбурчак юзига нисбатидир.

Энди (**) тенгликда $\Delta x \to 0$ ва $\Delta y \to 0$ да лимитга ўтамиз. У ҳолда $\xi \to x$, $\eta \to y$, ва демак, $f(\xi, \eta) = f(x, y)$.

Шундай қилиб, $f(x, y)$ функцияни тасодифий нуқтанинг (томонлари Δx ва Δy бўлган) тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолини бу тўғри тўртбурчак юзига нисбатининг тўғри тўртбурчакнинг иккала томони нолга интилгандаги лимити деб қараш мумкин.

10- §. Тасодифий нуқтанинг ихтиёрий соҳага тушиш эҳтимоли

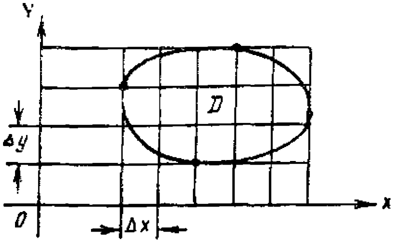
9- § даги (**) муносабатни бундай ёзамиз:

$$f(\xi, \eta) \cdot \Delta x \cdot \Delta y = P_{ABCD}.$$

Бундан қуйидагича хулосага келамиз: $f(\xi, \eta) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$ кўпайтма тасодифий нуқтанинг томонлари Δx ва Δy бўлган тўртбурчакка тушиш эҳтимолидир.

XOY текисликда ихтиёрий D соҳа берилган бўлсин. Тасодифий нуқтанинг бу соҳага тушишидан иборат ҳодисани бундай белгилаймиз:

$$(X, Y) \subset D.$$



17- расм

D соҳани бир-биридан Δx масофада жойлашган ва OY ўққа параллел тўғри чизиқлар ҳамда бир-биридан Δy масофада жойлашган ва OX ўққа параллел тўғри чизиқлар ёрдамида n та элементар соҳага бўламиз (17-расм) (соддалик учун бу тўғри чизиқлар соҳа контурини иккитадан кўп бўлмаган нуқтада кесиб ўтади деб фараз қилинади).

Тасодифий нуқтанинг элементар соҳаларга тушишидан иборат ҳодисалар биргаликда бўлмаганлиги учун нуқтанинг D соҳага тушиш эҳтимоли тақрибан унинг элементар соҳаларга тушиш эҳтимоллари йиғиндисига тенг (элементар соҳалар йиғиндиси D соҳага тақрибан тенг!):

$$P((X, Y) \subset D) \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x \cdot \Delta y.$$

$\Delta x \to 0$ ва $\Delta y \to 0$ да лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P((X, Y) \subset D) = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dxdy. \qquad (*)$$

Шундай қилиб, (X, Y) тасодифий нуқтанинг D соҳага тушиш эҳтимолини ҳисоблаш учун дифференциал функциядан D соҳа бўйича олинган икки каррали интегрални топиш кифоя.

Геометрик нуқтаи назардан (*) тенгликни бундай талқин қилиш мумкин: (X, Y) тасодифий нуқтанинг D соҳага тушиш эҳтимоли юқоридан $z = (x, y)$ сирт билан чегараланган, асоси эса бу сиртнинг XOY текисликка проекциясидан иборат бўлган жисм ҳажмига тенг.

Эслатма. Интеграл остидаги $f(x, y)\, dxdy$ ифода *эҳтимол элементи* дейилади. Юқорида айтилганлардан келиб чиққанидек, эҳтимол элементи тасодифий нуқтанинг томонлари dx ва dy бўлган элементар тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолини аниқлайди.

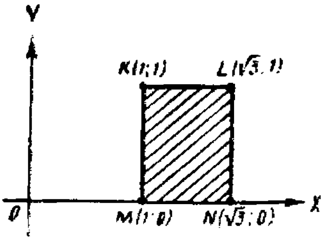
Мисол. Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2 (1 + x^2)(1 + y^2)}$$

дифференциал функцияси берилган. Тасодифий нуқтанинг учлари $K(1;1)$, $L(\sqrt{3}, 1)$; $M(1;\ 0)$ ва $N(\sqrt{3};\ 0)$ бўлган тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Изланаётган эҳтимол

$$P((X, Y) \subset D) = \iint\limits_{(D)} \frac{1}{\pi^2 (1 + x^2)(1 + y^2)}\, dxdy =$$



18- расм

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \left[\frac{1}{1+y^2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}\right] dy = \frac{1}{\pi^2}\cdot \operatorname{arctg} x \Big|_1^{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\cdot \operatorname{arc\,tg} y \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{48}.$$

11 §. Икки ўлчовли тасодифий миқдор дифференциал функциясининг хоссалари

1- хосса. *Дифференциал функция манфий эмас:*

$$f(x, y) \geqslant 0.$$

Исботи. Тасодифий нуқтанинг томонлари Δx ва Δy бўлган тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимоли манфий бўлмаган сондир; бу тўғри тўртбурчакнинг юзи — мусбат сон. Бинобарин, бу иккита соннинг нисбати ва уларнинг ($\Delta x \to 0$ ва $\Delta y \to 0$ даги) лимити манфий бўлмаган сондир, яъни

$$f(x, y) \geqslant 0.$$

Бу хосса $F(x, y)$ функция ўз аргументларининг камаймайдиган функцияси (4- §) эканлигидан бевосита келиб чиқишини қайд қилиб ўтамиз.

2- хосса. *Дифференциал функциядан олинган чегаралари чексиз икки каррали хосмас интеграл бирга тенг:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dxdy = 1.$$

Исботи. Интеграллашнинг чексиз чегаралари интеграллаш соҳаси бутун xOy текисликдан иборатлигини кўрсатади; тасодифий нуқта синов вақтида xOy текисликка тушишдан иборат ҳодисанинг рўй бериши муқаррар бўлганлиги учун унинг эҳтимоли (у эса дифференциал функциядан олинган икки каррали хосмас интеграл билан ифодаланади) бирга тенг, яъни

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) = 1.$$

12- §. Икки ўлчовли тасодифий миқдор ташкил этувчиларнинг дифференциал функцияларини излаш

Иккита тасодифий миқдор системасининг дифференциал функцияси маълум бўлсин. Ўз олдимизга система ташкил этувчиларининг ҳар бирининг дифференциал функциясини топиш масаласини қўямиз.

Аввал X ташкил этувчининг $f_1(x)$ дифференциал функциясини топамиз. X ташкил этувчининг интеграл функциясини $F_1(x)$ орқали белгилаймиз. Бир ўлчовли тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси таърифига кўра

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx}.$$

Ушбу

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x, y)dxdy \qquad (8\text{-}\S),$$

$$F_1(x) = F(x, \infty) \qquad (4\text{-}\S)$$

муносабатларни эътиборга олиб қуйидагини топамиз:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини x бўйича дифференциаллаб, топамиз:

$$\frac{dF_1(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy.$$

ёки

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy. \qquad (*)$$

Y ташкил этувчининг дифференциал функцияси ҳам шунга ўхшаш топилади:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx. \qquad (**)$$

Шундай қилиб, *системанинг ташкил этувчиларидан бирининг дифференциал функцияси система дифференциал функциясидан олинган чегаралари чексиз хосмас интегралга тенг, бунда интеграллаш ўзгарувчиси иккинчи ташкил этувчига мос келади.*

Мисол. Икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдор ушбу дифференциал функция орқали берилган:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1 & \text{да} \quad \frac{1}{6\pi}, \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} > 1 & \text{да} \quad 0. \end{cases}$$

X ва Y ташкил этувчиларнинг дифференциал функцияларини топинг.

Ечилиши. X ташкил этувчининг дифференциал функциясини $(*)$ формула бўйича топамиз:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{6\pi} dy = \frac{1}{6\pi} \int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dy = \frac{2}{6\pi} \int_{0}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dy = \frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}.$$

Шундай қилиб,

$$f_1(x) = \begin{cases} |x| < 3 & \text{да,} \quad \frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}, \\ |x| \geqslant 3 & \text{да} \quad 0. \end{cases}$$

Шунга ўхшаш, $(**)$ фурмуладан фойдаланиб, Y ташкил этувчининг дифференциал функциясини топамиз:

$$f_2(y) = \begin{cases} |y| < 2 & \text{да} \quad \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2}, \\ |y| \geqslant 2 & \text{да} \quad 0. \end{cases}$$

Текшириш мақсадида, топилган функциялар

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = 1 \text{ ва } \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\,dy = 1$$

муносабатларни қаноатлантиришига мустақил ишонч ҳосил қилишни китобхонга тавсия қиламиз.

13-§. Дискрет тасодифий миқдорлар системаси ташкил этувчиларининг шартли тақсимот қонунлари

Агар A ва B ҳодисалар боғлиқ бўлса, у ҳолда B ҳодисанинг шартли эҳтимоли унинг шартсиз эҳтимолидан фарқ қилишини аниқлаган эдик. Бу ҳолда

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad \text{(III боб, 5-§, 2-эслатма).} \qquad (*)$$

Шунга ўхшаш ҳолат тасодифий миқдорлар учун ҳам ўринли. Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг ташкил этувчилари орасидаги боғланишни тавсифлаш учун шартли тақсимот қонуни тушунчасини киритамиз.

Икки ўлчовли (X, Y) дискрет тасодифий миқдорни қараймиз. Ташкил этувчиларнинг мумкин бўлган қийматлари бундай бўлсин:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n; \ y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Фараз қилайлик, синаш натижасида Y миқдор $Y = y_1$ қиймат қабул қилган бўлсин; бунда X ўзининг мумкин бўлган қийматларидан бирини: ё x_1 ни, ё x_2 ни, ..., ёки x_n ни қабул қилади. X нинг $Y = y_1$ шартда, масалан, x_1 қиймат қабул қилиши шартли эҳтимолини $p(x_1|y_1)$ орқали белгилаймиз. Бу эҳтимол, умуман айтганда, $p(x_1)$ шартсиз эҳтимолга тенг бўлмайди.

Ташкил қилувчининг шартли эҳтимолларини умумий ҳолда бундай белгилаймиз:

$$p(x_i|y_j) \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \ j = 1, 2, \ldots, m).$$

X ташкил этувчининг $Y = y_j$ бўлганда *шартли тақсимоти* деб $Y = y_j$; (j индекс X нинг барча қийматларида бир хил қиймат қабул қилади) ҳодиса рўй берди деган фаразда ҳисобланган

$$p(x_1|y_j), \ p(x_2|y_j), \ \ldots, \ p(x_n|y_j)$$

шартли эҳтимоллар тўпламига айтилади.

Y ташкил этувчининг шартли тақсимоти шунга ўхшаш аниқланади.

Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини билган ҳолда, ташкил этувчиларнинг шартли тақсимот қонунларини (*) формуладан фойдаланиб ҳисоблаш мумкин. Масалан X нинг $Y = y_1$ ҳодиса рўй берди деган шартли тақсимот қонуни ушбу формуладан топилиши мумкин:

$$p(x_i | y_1) = \frac{p(x_i, y_1)}{p(y_1)} \quad (i = 1\ \ 2, \ldots, n).$$

X ташкил этувчининг шартли тақсимот қонунлари умумий ҳолда ушбу муносабат орқали аниқланади:

$$p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}. \qquad (**).$$

Y ташкил этувчининг шартли тақсимот қонунлари шунга ўхшаш аниқланади:

$$p(y_j | x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}. \qquad (***).$$

Эслатма. Шартли тақсимот эҳтимоллари йиғиндиси 1 га тенг. Ҳақиқатан, тайин y_j да $\sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j) = p(y_j)$ бўлгани учун (2- §)

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i | y_j| = \sum_{i=1}^{n} \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{p(y_j)}{p(y_j)} = 1.$$

Тайин x_i да

$$\sum_{i=1}^{m} p(y_j | x_i) = 1$$

эканлиги шунга ўхшаш исботланади.

Шартли тақсимотларнинг бу хоссасидан ҳисоблашларни текширишда фойдаланилади.

Мисол. Икки ўлчовли тасодифий миқдор 4-жадвал билан берилган.

4-жадвал

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

X ташкил этувчининг Y ташкил этувчи y_1 қиймат қабул қилди деган шартда шартли тақсимот қонунини топинг.

Ечилиши. Изланаётган қонун қуйидаги шартли эҳтимоллар тўплами билан аниқланади:

$$p(x_1|y_1),\quad p(x_2|y_1),\quad p(x_3|y_1).$$

(*) формуладан фойдаланиб ва $p(y_1)=0{,}60$ (158-бет) эканлигини эътиборга олиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$p(x_1|y_1)=\frac{p(x_1,\ y_1)}{p(y_1)}=\frac{0{,}10}{0{,}60}=\frac{1}{6};$$

$$p(x_2|y_1)=\frac{p(x_2,\ y_1)}{p(y_1)}=\frac{0{,}30}{0{,}60}=\frac{1}{2};$$

$$p(x_3|y_1)=\frac{p(x_3,\ y_1)}{p(y_1)}=\frac{0{,}20}{0{,}60}=\frac{1}{3}.$$

Топилган шартли эҳтимолларни контрол қилиш мақсадида жамлаб, уларнинг йиғиндиси бирга тенг эканлигига ишонч ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1.$$

(172-бетдаги эслатмага биноан шундай бўлиши ҳам лозим эди).

14-§. Узлуксиз тасодифий миқдорлар системаси ташкил этувчиларининг шартли тақсимот қонунлари

$(X,\ Y)$ — икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдор бўлсин. X ташкил этувчининг берилган $Y=y$ қийматидаги $\varphi(x\,|\,y)$ *шартли дифференциал функцияси* деб системанинг $f(x,\ y)$ дифференциал функциясини Y ташкил этувчининг $f_2(y)$ дифференциал функцияси н сбатига айтилади:

$$\varphi(x\,|\,y)=\frac{f(x,\ y)}{f_2(y)}. \qquad (*)$$

Қуйидагини таъкидлаб ўтамиз: $\varphi(x\,|\,y)$ шартли функциянинг $f_1(x)$ дифференциал функциядан фарқи шундаки, $\varphi(x\,|\,y)$ функция X нинг Y ташкил этувчи $Y=y$ қиймат қабул қилди деган шартда тақсимотини беради, $f_1(x)$ эса X нинг Y ташкил этувчи мумкин бўлган қийматлардан қайсиларини қабул қилганлигига боғлиқ бўлмаган ҳолда тақсимотини беради.

Y ташкил этувчининг берилган $X=x$ қийматдаги шартли дифференциал функцияси шунга ўхшаш аниқланади:

$$\psi(y\,|\,x)=\frac{f(x,\ y)}{f_1(x)}. \qquad (**)$$

Агар системанинг $f(x, y)$ дифференциал функцияси маълум бўлса, у ҳолда ташкил этувчиларнинг шартли дифференциал функциялари (*) ва (**) га (170-бет) кўра ушбу формулалар бўйича топилиши мумкин:

$$\varphi(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx}, \qquad (***)$$

$$\psi(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy}. \qquad (****)$$

(*) ва (**) формулаларни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$f(x, y) = f_2(y) \cdot \varphi(x \mid y), \qquad f(x, y) = f_1(x) \cdot \psi(y \mid x).$$

Бу ердан ушбу хулосага келамиз: тасодифий миқдорлар системаси ташкил этувчиларидан бирининг тақсимот қонунини иккинчи ташкил этувчининг шартли тақсимот қонунига кўпайтириб, тасодифий миқдорлар системасининг тақсимот қонунини топамиз.

Ҳар қандай дифференциал функция каби шартли дифференциал функциялар ҳам қуйидаги хоссаларга эга:

$$\varphi(x \mid y) \geqslant 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x \mid y)\, dx = 1;$$

$$\psi(y \mid x) > 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(y \mid x)\, dy = 1.$$

Мисол. Икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдор

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 < r^2 \text{ да } \frac{1}{\pi r^2}, \\ x^2 + y^2 > r^2 \text{ да } 0. \end{cases}$$

дифференциал функция орқали берилган.

Ташкил этувчилар эҳтимоллари тақсимот қонунларининг шартли дифференциал функцияларини топинг.

Ечилиши. X ташкил этувчининг шартли дифференциал функциясини (***) формула бўйича топамиз:

$$|x| < \sqrt{r^2 - y^2} \text{ да}$$

$$\varphi(x\,|\,y)=\frac{f(x,\ y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dx}=\frac{\frac{1}{\pi r^2}}{\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx}=\frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}.$$

$x^2+y>r^2$ да $f(x,\ y)=0$ бўлганлиги учун $|x|>\sqrt{r^2-y^2}$ бўлганда $\varphi(x\,|\,y)=0$.

Шунга ўхшаш, (****) формуладан фойдаланиб, Y ташкил этувчининг шартли дифференциал функциясини топамиз.

$$\psi(y\,|\,x)=\begin{cases}|y|<\sqrt{r^2-x^2} \text{ да } \dfrac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}},\\ |y|>\sqrt{r^2-x^2} \text{ да } 0.\end{cases}$$

15-§. Шартли математик кутилиш

Эҳтимоллар шартли тақсимотининг муҳим характеристикаси шартли математик кутилишдир.

Y дискрет тасодифий миқдорнинг $X=x$ даги (x X нинг мумкин бўлган тайин қиймати) *шартли математик кутилиши* деб, Y нинг мумкин бўлган қийматларини уларнинг шартли эҳтимолларига кўпайтмалари йиғиндисига айтилади:

$$M(Y\,|\,X=x)=\sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j\,|\,x) \qquad (*)$$

Узлуксиз миқдорлар учун

$$M(Y\,|\,X=x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} y\cdot\psi(y\,|\,x)\,dy,$$

бу ерда $\psi(y\,|\,x)$ функция Y тасодифий миқдорнинг $X=x$ даги шартли дифференциал функцияси.

X ташкил этувчининг шартли математик кутилиши шунга ўхшаш аниқланади.

Мисол. Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор 5-жадвал орқали берилган.

5-жадвал

$Y \backslash X$	$x_1=1$	$x_2=3$	$x_3=4$	$x_4=8$
$y_1=3$	0,15	0,06	0,25	0,04
$y_2=6$	0,30	0,10	0,03	0,07

Y ташкил этувчининг $X=x_1=1$ даги шартли математик кутилишини топинг.

Ечилиши. $p(x_1)$ ни топамиз; бунинг учун 5-жадвалнинг биринчи устунида жойлашган эҳтимолларни қўшамиз:

$$p(x_1)=0{,}15+0{,}30=0.45.$$

Y миқдорнинг $X=x_1=1$ даги эҳтимоллари шартли тақсимотини (13-§) топамиз:

$$p(y_1 \mid x_1)=\frac{p(x_1,\ y_1)}{p(x_1)}=\frac{0{,}15}{0{,}45}=\frac{1}{3};$$

$$p(y_2 \mid x_1)=\frac{p(x_2,\ y_2)}{p(x_1)}=\frac{0{,}30}{0{,}45}=\frac{2}{3}.$$

Изланаётган шартли математик кутилишни (*) формула бўйича топамиз:

$$M(Y \mid X=x_1)=\sum_{j=1}^{2} y_j\, p(y_j \mid x_1)=y_1 \cdot p(y_1 \mid x_1)+$$

$$+\,y_2 \cdot p(y_2 \mid x_1)=3 \cdot \frac{1}{3}+6 \cdot \frac{2}{3}=5.$$

16-§. Боғлиқ ва эркли тасодифий миқдорлар

Агар иккита тасодифий миқдордан бирининг тақсимот функцияси иккинчи миқдорнинг мумкин бўлган қийматларини қабул қилганига боғлиқ бўлмаса, уларни эркли деб атаган эдик. Бу таърифдан эркли миқдорларнинг шартли тақсимотлари уларнинг шартсиз тақсимотига тенглиги келиб чиқади.

Тасодифий миқдорлар эрклилигининг зарур ва етарли шартларини келтирамиз.

Теорема. *X ва Y тасодифий миқдорлар эркли бўлиши учун $(X,\ Y)$ системанинг интеграл функцияси ташкил этувчиларнинг интеграл функциялари кўпайтмасига тенг бўлиши зарур ва етарли:*

$$F(x,\ y)=F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Исботи. а) Зарурлиги. X ва Y эркли бўлсин. У ҳолда $X < x$ ва $Y < y$ ҳодисалар эркли, бинобарин, бу ҳодисаларнинг бирга рўй бериш эҳтимоли $P(X < x, Y < y)$ уларнинг эҳтимоллари кўпайтмасига тенг:

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$$

ёки

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

б) Етарлилиги. $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$ бўлсин. Бундан

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) P(Y < y),$$

яъни $X < x$, $Y < y$ ҳодисаларнинг бирга рўй бериш эҳтимоли бу ҳодисалар эҳитмоллари кўпайтмасига тенг. Демак, X ва Y тасодифий миқдорлар эркли.

Натижа. *Узлуксиз X ва Y тасодифий миқдорлар эркли бўлиши учун (X, Y) системанинг дифференциал функцияси ташкил этувчилар дифференциал функциялари кўпайтмасига тенг бўлиши зарур ва етарли:*

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Исботи. а) Зарурлиги. X ва Y эркли узлуксиз тасодифий миқдорлар бўлсин. У ҳолда (олдинги теоремага асосан):

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Бу тенгликни x бўйича, кейин y бўйича дифференциаллаб,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

га ёки (икки ўлчовли ва бир ўлчовли миқдорлар дифференциал функцияси таърифига кўра)

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

га эга бўламиз.

б) Етарлилиги. $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ бўлсин. Бу тенгликни x бўйича ва y бўйича интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dx dy = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\, dx \int_{-\infty}^{y} f_2(y)\, dy$$

ёки (XIV боб, 8-§ ва XI боб, 3-§)

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Бу ердан (олдинги теоремага асосан) X ва Y эркли деган хулоса чиқар миз.

Эслатма. Юқорида келтирилган шартлар зарур ва етарли бўлгани учун эркли тасодифий миқдорларга янги таърифлар бериш мумкин:

1) агар иккита тасодифий миқдор системасининг интеграл функцияси ташкил этувчиларнинг интеграл функциялари кўпайтмасига тенг бўлса, бу миқдорлар эркли деб аталади.

2) агар иккита узлуксиз тасодифий миқдор системасининг дифференциал функцияси ташкил этувчиларнинг дифференциал функциялари кўпайтмасига тенг бўлса, бу миқдорлар эркли деб аталади.

17- §. Икки тасодифий миқдор системасининг сонли характеристикалари. Корреляция моменти. Корреляция коэффициенти

Иккита тасодифий микдорлар системасини тавсифлаш учун ташкил этувчиларнинг математик кутилишлари ва дисперсияларидан ташқари бошқа характеристикалардан ҳам фойдаланилади. Булар жумласига корреляция моменти ва корреляция коэффициенти киради.

X ва Y тасодифий миқдорларнинг μ_{xy} *корреляцион моменти* деб бу миқдорлар четланишлари кўпайтмасининг математик кутилишига айтилади:

$$\mu_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))].$$

Дискрет миқдорлар корреляцион моментларини ҳисоблаш учун

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - M(X))(y_j - M(Y))p(x_i, y_j)$$

формуладан, узлуксиз миқдорлар учун эса

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))(y - M(y)) f(x, y)\,dxdy$$

формуладан фойдаланилади.

Корреляцион момент X ва Y миқдорлар орасидаги боғланишни характерлаш учун хизмат қилади. Қуйида агар X ва Y миқдорлар эркли бўлса, у ҳолда корреляцион момент нолга тенг бўлиши кўрсатилади, бинобарин, агар корреляцион моментлар нолга тенг бўлмаса, у ҳолда X ва Y боғлиқ тасодифий миқдорлардир.

Теорема. *Иккита эркли X ва Y тасодифий миқдорларнинг корреляцион моменти нолга тенг.*

Исботи. X ва Y эркли тасодифий миқдорлар бўлгани учун уларнинг $X - M(X)$ ва $Y - M(Y)$ четланишлари ҳам эрклидир. Математик кутилиш ва четланишнинг хоссаларидан (эркли тасодифий миқдорлар кўпатмасининг математик кутилиши кўпатувчиларнинг математик кутилишлари кўпайтмасига тенг, четланишнинг математик кутилиши нолга тенг) фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\mu_{xy} = M[(X - M(X)) \cdot (Y - M)(Y))] =$$
$$= M[X - M(X)] \cdot M[Y - M(Y)] = 0.$$

Корреляцион момент таърифидан, у X ва Y миқдорлар ўлчамликлари кўпайтмасига тенг ўлчамликка эга бўлиши келиб чиқади. Бошқача сўз билан айтганда, корреляцион момент катталиги тасодифий миқдорларнинг ўлчам бирликларига боғлиқ. Шу сабабдан иккита бир хил тасодифий миқдор учун корреляцион момент катталиги микдорлар қайси ўлчов бирлигида ўлчанганига қараб турли қийматга эга бўлади.

Масалан, X ва Y миқдорлар сантиметрларда ўлчанган бўлиб, $\mu_{xy} = 2$ *см*^{2} келиб чиққан бўлсин. Агар X ва Y ни миллиметрларда ўлчасак, у ҳолда $\mu_{xy} = 200$ *мм*^{2} бўлади. Корреляцион моментнинг бундай хусусияти бу сон характеристиканинг камчилигидир, чунки бунда тасодифий миқдорлар турли системаларининг корреляцион моментларини таққослаш қийинлашади. Бу камчиликни бартараф қилиш мақсадида янги сон характеристика — корреляция коэфиценти киритилади.

X ва Y тасодифий микдорларнинг r_{xy} *коорреляция коэффиценти* деб корреляцион моментнинг бу миқдорлар ўртача квадратик четланишлари кўпайтмаси нисбатига айтилади:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

μ_{xy} нинг ўлчамлиги X ва Y миқдорлар ўлчамликлари кўпайтмасига тенг. σ_x миқдор X ўлчамлигига, σ_y миқдор Y ўлчамлигига эга (VIII боб, 7- §) бўлгани учун r_{xy} ўлчамсиз миқдордир. Шундай қилиб корреляция коэффициенти тасодифий миқдорларнинг ўлчов бирликларининг танланишига боғлиқ эмас. Корреляция коэффициентининг корреляцион моментдан устунлиги ҳам ана шундадир.

Эркли тасодифий миқдорларнинг корреляция коэффициенти нолга тенглиги равшан (чунки $\mu_{xy} = 0$).

Эслатма. Эҳтимоллар назариясининг кўпгина масалаларида X тасодифий миқдор ўрнига нормаланган X' миқдорни текшириш мақсадга мувофиқдир. X' миқдор четланишнинг ўртача квадратик четланишга нисбати сифатида аниқланади:

$$X' = \frac{X - M(X)}{\sigma_x}.$$

Нормаланган миқдор 0 га тенг математик кутилишга ва 1 га тенг дисперсияга эга. Дарҳақиқат, математик кутилиш ва дисперсия хоссаларидан фойдаланиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$M(X') = M\left(\frac{X - M(X)}{\sigma_x}\right) = \frac{1}{\sigma_x} \cdot M[X - M(X)] = \frac{1}{\sigma_x} \cdot 0 = 0;$$

$$D(X') = D\left(\frac{X - M(X)}{\sigma_x}\right) = \frac{1}{\sigma^2_x} \cdot D(X - M(X)) = \frac{D(X)}{\sigma_x^2} = 1.$$

r_{xy} корреляция коэффициенти X' ва Y' нормаланган миқдорларнинг корреляцион моментига тенглигига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$r_{xy} = \frac{M[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))]}{\sigma_x \sigma_y} = M\left[\frac{X - M(X)}{\sigma_x} \cdot \frac{Y - M(Y)}{\sigma_y}\right] =$$

$$= M(X' \cdot Y') = \mu_{x'y'}.$$

18- §. Тасодифий миқдорларнинг корреляцияланганлиги ва боғлиқлиги

Агар X ва Y тасодифий миқдорларнинг корреляцион моменти (ёки корреляция коэффициенти) нолдан фарқли бўлса, улар *корреляцияланган* деб аталади; агар X ва Y нинг корреляцион моменти нолга тенг бўлса, улар *корреляцияланмаган* деб аталади.

Иккита корреляцияланган миқдор, шунингдек, боғлиқ ҳамдир. Дарҳақиқат, тескарисини фараз қиладиган бўлсак, $\mu_{xy} = 0$ деган хулосага келишимиз лозим, бу эса шартга зид, чунки корреляцияланган миқдорлар учун $\mu_{xy} \neq 0$.

Бунга тескари мулоҳаза ҳар доим ҳам ўринли бўлавермайди, яъни агар иккита миқдор боғлиқ бўлса, улар корреляцияланган ҳам, корреляцияланмаган ҳам бўлиши мумкин. Бошқача айтганда, иккита боғлиқ миқдорнинг корреляцион моменти нолга тенг бўлмаслиги мумкин, аммо у нолга тенг бўлиб қолиши ҳам мумкин.

Иккита боғлиқ миқдор корреляцияланмаган бўлиши мумкинлигига мисолда ишонч ҳосил қиламиз.

Мисол. Икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдор ушбу дифференциал функция билан берилган: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ эллипснинг ичида $f(x,y)=\frac{1}{6\pi}$, унинг ташқарисида $f(x, 0)=0$.

X ва Y корреляцияланмаган, боғлиқ миқдорлар эканлигини исботланг.

Ечилиши. X ва Y нинг аввал ҳисобланган дифференциал функцияларидан фойдаланамиз (12- §).

Берилган эллипснинг ичида $f_1(x)=\frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}$, $f_2(y)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2}$, унинг ташқарисида $f_1(x)=0, f_2(y)=0$. $f(x,y)\neq f_1(x)f_2(y)$ бўлганлиги учун X ва Y боғлиқ миқдорлардир (16- §).

X ва Y нинг корреляцияланмаганлигини исботлаш учун $\mu_{xy}=0$ эканлигига ишонч ҳосил қилиш етарли Корреляцион моментни ушбу формуладан (17- §) фойдаланиб топамиз:

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)][y-M(Y)]f(x,y)dx\,dy.$$

$f_1(x)$ дифференциал функция OY ўққа нисбатан симметрик бўлгани учун $M(X)=0$; шунга ўхшаш, $f_2(y)$ нинг OX ўққа нисбатан симметриклигига асосан $M(Y)=0$. Демак,

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\cdot f(x,y)dx\,dy.$$

$f(x, y)$ ўзгармас кўпайтувчини интеграл белгиси олдига чиқариб,

$$\mu_{xy}=f(x,y)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}y\left(\int_{-\infty}^{\infty}x\,dx\right)dy$$

ни ҳосил қиламиз. Ички интеграл нолга тенг (интеграл остидаги функция тоқ, интеграллаш ўзгармаслари координаталар бошига нисбатан симметрик) демак, $\mu_{xy}=0$, яъни X ва Y боғлиқ тасодифий миқдорлар корреляцияланмаган.

Шундай қилиб, иккита тасодифий миқдорнинг корреляцияланганидан уларнинг боғлиқлиги келиб чиқади, аммо бу миқдорларнинг боғлиқлигидан уларнинг корреляцияланганлиги ҳали келиб чиқмайди Иккита миқдорнинг эрклилигидан уларнинг корреляцияланмаганлиги келиб чиқади, аммо бу миқдорларнинг корреляцияланмаганлигидан уларнинг эрклилиги ҳақида ҳали хулоса чиқариш мумкин эмас.

Бироқ нормал тақсимланган миқдорларнинг корреляцияланмаганлигидан уларнинг эрклиги келиб чиқишини айтиб ўтамиз. Бу даъвони кейинги параграфда исботланади.

19-§. Текисликда нормал тақсимот қонуни

Практикада кўпинча нормал тақсимланган икки ўлчовли тасодифий миқдорлар учрайди.

Текисликда *нормал тақсимот қонуни* деб дифференциал функцияси

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho_{xy}^2\right)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_y^2}-2\rho_{xy}\frac{x-a_1}{\sigma_x}\frac{y-a_2}{\sigma_y}\right]}. \qquad (*)$$

бўлган икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимотига айтилади.

Текисликда нормал тақсимот қонуни бешта параметр a_1, a_2, σ_x, σ_y ва ρ_{xy} орқали аниқланишини кўриб турибмиз. Бу параметрлар қуйидагича эҳтимолий маънога эгалигини исботлаш мумкин:

a_1, a_2 — математик кутилишлар;

σ_x, σ_y — ўрта квадратик четланишлар;

ρ_{xy} эса X ва Y миқдорларнинг корреляция коэффициенти.

Агар икки ўлчовли нормал тақсимланган тасодифий миқдорнинг ташкил этувчилари корреляцияланмаган бўлса, у ҳолда улар эркли эканлигига ишонч ҳосил қилайлик. Ҳақиқатан, X ва Y корреляцияланмаган бўлсин. У ҳолда (*) формулада $\rho_{xy} = 0$ деб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\ \sigma_y} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_y^2}\right]} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_y^2}} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Шундай қилиб, нормал тақсимланган тасодифий миқдорнинг ташкил этувчилари корреляцияланмаган бўлса, у ҳолда системанинг дифференциал функцияси ташкил этувчилар дифференциал функциялари кўпайтмасига тенг; бундан эса ташкил этувчиларнинг эрклилиги келиб чиқади (16-§). Тескари даъво ҳам ўринли (18-§).

Демак, икки ўлчовли миқдорнинг нормал тақсимланган ташкил этувчилари учун эрклилик ва корреляцияланганлик тушунчалари тенг кучлидир.

Масалалар

1. Ушбу тақсимот қонуни билан берилган икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор ташкил этувчиларнинг тақсимот қонунларини топинг.

X Y	x_1	x_2	x_3
y_1	0,12	0,18	0,10
y_2	0,10	0,11	0,39

Жавоби.

$$\begin{array}{cccc} X & x_1 & x_2 & x_3 \\ p & 0,22 & 0,29 & 0,49 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y & y_1, & y_2 \\ p & 0,40 & 0,60. \end{array}$$

2. Икки ўлчовлар тасодифий миқдорнинг X ташкил этувчиси $X< \frac{1}{2}$ қиймат қабул қилиши ва бунда Y ташкил этувчи $Y <\frac{1}{3}$ қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг. Системанинг интеграл функцияси маълум:

$$F(x,y) \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} 2x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 3\, y+\frac{1}{2}\right).$$

Жавоби. $P\left(X< \frac{1}{2},\ Y<\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{16}$.

3. (X, Y) тасодифий нуқтанинг $x =\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{6}$ ва $y=\frac{\pi}{3}$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолини топинг. Системанинг интеграл функцияси маълум.

$$F(x,y) = \sin x \sin y \left(0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Жавоби. $P\left(\frac{\pi}{4} <X<\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} <Y<\frac{\pi}{3}\right) = 0,11.$

4. Иккита тасодифий миқдор системасининг

$$F(x,y) = (1 - e^{-2x})\,(1- e^{-3y})(x \geqslant 0,\ y\geqslant 0)$$

интеграл функциясига кўра унинг дифференциал функциясини топинг.

Жавоби. $f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 6\,e^{-(2x+3y)}$.

5. $x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\ y = 0,\ y = \frac{\pi}{2}$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчак ичида иккита тасодифий миқдор системасининг дифференциал функцияси $f(x,y) = C\sin(x+y)$; тўғри тўртбурчакдан ташқарида эса $f(x,y) = 0$. а) C миқдорни топинг; б) системанинг интеграл функциясини топинг.

Жавоби. а) $C = 0,5$; б) $F(x,y) = 0,5[\sin x + \sin y - \sin(x+y)]\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

6. Иккита тасодифий миқдор системаси текис тақсимланган:

$$x = 4,\ x = 6,\ y = 10,\ y = 15$$

тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакда дифференциал функция ўзгармас қийматга эга, бу тўғри тўртбурчакдан ташқарида эса нолга тенг. а) дифференциал функцияни топинг; б) системанинг интеграл функциясини топинг.

Жавоби. а) $f(x,y) = \begin{cases} \text{тўғри тўртбурчакдан ташқарида } 0, \\ \text{тўғри тўртбурчак ичида } 0,1. \end{cases}$

б) $F(x,y) = \frac{(x-4)(y-10)}{10}$.

7. Иккита тасодифий миқдор системасининг дифференциал функцияси $f(x,y) = \frac{C}{(4+x^2)(9+y^2)}$. а) C катталикни топинг; б) системанинг интеграл функциясини топинг.

Жавоби. $C = \frac{6}{\pi^2}$; б) $F(x,y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{3} + \frac{1}{2}\right)$.

8 Икки ўлчовли тасодифий миқдор

$$f(x,y) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}e^{-4x^2-6xy-9y^2}$$

дифференциал функция орқали берилган. Ташкил этувчиларнинг шартли тақсимот қонунларини топинг.

Жавоби. $\varphi(x,y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(2x+\frac{3}{2}y\right)^2}$,

$$\psi(y,x) = \frac{3}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+3y)^2}$$

Учинчи қисм

МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Ўн бешинчи боб

ТАНЛАНМА МЕТОД

1- §. Математик статистиканинг вазифаси

Оммавий (ялпи) тасодифий ҳодисалар бўйсунадиган қонуниятларни аниқлаш статистик маълумотларни — кузатиш натижаларини ўрганишга асосланади. Математик статистиканинг биринчи вазифаси (масаласи) — статистик маълумотларни тўплаш ва (агар маълумотлар жуда кўп бўлса) группалаш усулларини кўрсатишдир.

Математик статистиканинг иккинчи вазифаси (масаласи) — статистик маълумотларни таҳлил қилиш методларини тадқиқот масалаларига мувофиқ ишлаб чиқишдир.

У ёки бу ҳодисаларни математик статистика методлари билан ўрганиш фан ва практика олға сурадиган кўп масалаларни (технологик процессни тўғри ташкил этиш, мақсадга мувофиқ қилиб планлаштириш, ва ҳ. к.) ҳал этишда восита бўлиб хизмат қилади.

Шундай қилиб, математик статистиканинг вазифаси (масаласи) илмий ва назарий хулосалар ҳосил қилиш мақсадида статистик маълумотларни тўплаш ва ишлаб чиқиш методларини яратишдан иборат.

2 - § Қисқача тарихий справка

Математик статистика эҳтимоллар назарияси билан бирга юзага келди (XVII аср) ва у билан биргаликда ярати.ла бошланди. Математик статистиканинг шундан кейинги ривожланишини (XIX асрнинг иккинчи ярми ва XX аср боши) биринчи навбатда П. Л. Чебишев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, шунингдек, К. Гаусс, А. Кетле, Ф. Гальтон, К. Пирсон ва бошқаларнинг номлари билан боғлиқ.

XX асрда математик статистикага совет математиклари (В. И. Романовский, Е. Е. Слуцкий, А. Н. Колмогоров, Н. В. Смирнов), шунингдек, инглиз олимлари (Стьюдент, Р. Фишер, Э. Пирсон), америка олимлари (Ю. Нейман, А. Вальд) энг кўп ҳисса қўшдилар.

3- § Бош ва танланма тўпламлар

Бир жинсли объектлар тўпламини бу объектларни характерловчи бирор сифат ёки сон белгига нисбатан ўрганиш талаб қилинсин. Масалан, агар бирор хил деталлар партияси бўлса, у ҳолда деталнинг сифат белгиси бўлиб, унинг стандартлиги, сон белгиси бўлиб эса деталнинг ўлчами хизмат қилиши мумкин.

Баъзан ялпи текшириш ўтказилади, яъни тўпламдаги объектларнинг ҳар бирини ўрганилаётган белгига нисбатан текширилади. Лекин ялпи текшириш амалда нисбатан кам қўлланилади. Масалан тўплам жуда кўп (жуда катта сондаги) объектларни ўз ичига олган бўлса, у ҳолда ялпи текшириш ўтказиш жисмонан мумкин эмас. Бундай ҳолларда тўпламдан чекли сондаги объектлар тасодифий равишда олинади ва уларни ўрганилади.

Танланма тўплам, ёки оддий қилиб, *танланма* деб тасодифий равишда танлаб олинган объектлар тўпламига айтилади

Бош тўплам деб танланма ажратиладиган объектлар тўпламига айтилади.

Тўплам (бош ёки танланма тўплами) *ҳажми* деб бу тўпламдаги объектлар сонига айтилади. Масалан, 1000 та деталдан текшириш учун 100 та деталь олинган бўлса, у ҳолда бош тўплам ҳажми $N = 1000$, танланма ҳажми эса $n = 100$.

Эслатма. Бош тўплам кўпинча чекли сондаги элементларни ўз ичига олади. Аммо бу сон анча катта бўлса, у ҳолда ҳисоблашларни соддалаштириш ёки назарий хулосаларни ихчамлаш мақсадини кўзда тутиб, баъзан бош тўплам чексиз кўп сондаги объектлардан иборат деб фараз қилинади. Бундай йўл қўйиш шу билан оқланадики (анча катта ҳажмли) бош тўплам ҳажмини орттириш танланма маълумотларини ишлаб чиқиш натижаларига амалда таъсир этмайди.

4 - §. Такрор ва нотакрор танланмалар. Репрезентатив танланма

Танланмани тузишда икки хил йўл тутиш мумкин: объект танланиб ва унинг устида кузатиш ўтказилгандан сўнг, у бош тўпламга қайтарилиши ёки қайтарилмаслиги мумкин. Бунга мувофиқ равишда танланмалар такрор ва нотакрор танланмаларга ажратилади.

Такрор танланма деб шундай танланмага айтиладики, бунда олинган объект (кейингисини олишдан олдин) бош тўпламга қайтарилади.

Нотакрор танланма деб танланган элемент яна бош тўпламга қайтарилмайдиган танланмага айтилади.

Практикада одатда қайтарилмайдиган тасодифий танлашдан фойдаланилади.

Танланмадаги маълумотлар бўйича бош тўпламнинг бизни қизиқтираётган белгиси ҳақида етарлича ишонч билан фикр юритиш учун танланманинг объектлари бош тўпламни тўғри тасвирлаши зарур. Бу талаб қисқача бундай таърифланади: танланма *репрезентатив* (тасвирлай оладиган) бўлиши керак.

Катта сонлар қонунига асосан шуни таъкидлаш мумкинки, агар танлаш тасодифий равишда амалга ошириладиган бўлса, танланма репрезентатив бўлади: агар бош тўплам барча объектларининг танланмага тушиш эҳтимоллари бир хил бўлса, танланманинг ҳар бир объекти тасодифий танланган бўлади.

Агар бош тўпламнинг ҳажми етарли катта бўлиб, танланма бу тўпламнинг унча катта бўлмаган қисмини ташкил қилса у ҳолда такрор ва нотакрор танланмалар орасидаги фарқ йўқолиб боради; лимит ҳолда, чексиз бош тўплам қаралиб, танланманинг ҳажми эса чекли бўлса, у ҳолда бу фарқ йўқолади.

5 - §. Танлаш усуллари

Практикада танлашнинг турли усуллари қўлланилади. Бу усулларни принцип жиҳатдан икки турга бўлиш мумкин:

1. Бош тўпламни қисмларга ажратишни талаб қилмайдиган танлаш, бунга қуйидагилар киради:

а) оддий қайтарилмайдиган тасодифий танлаш;

б) оддий қайтариладиган тасодифий танлаш.

2) Бош тўпламни қисмларга ажратилгандан кейин танлаш, бунга қуйидагилар киради:

а) типик танлаш;

б) механик танлаш;

г) серияли танлаш.

Бош тўпламдан элементлар битталаб олинадиган танлаш *оддий тасодифий* танлаш дейилади. Оддий танлашни турли усуллар билан амалга ошириш мумкин. Масалан, N ҳажмли бош тўпламдан n та объект танлашда қуйидагича йўл тутилади. Карточкалар олиб, уларни 1 дан N гача номерланади. Сўнгра уларни яхшилаб аралаштириб, таваккалига битта карточка олинади, шу олинган карточка билан бир хил номерли объект текширилади. Кейин карточка дастага қайтарилади ва процесс такрорланади, яъни карточкалар аралаштириб, улардан бири таваккалига олинади ва ҳ. к. n марта шундай қилинади; натижада n ҳажмли оддий такрор тасодифий танланма ҳосил қилинади.

Агар олинган карточкалар қайтарилмаса, у ҳолда танланма оддий нотакрор тасодифий танланма бўлади.

Бош танланманинг ҳажми катта бўлганда тасвирланган бу процесс кўп меҳнат талаб қилади. Бундай ҳолда «тасодифий сонлар»нинг тайёр жадвалидан фойдаланилади, уларда сонлар тасодифий тартибда жойлашган бўлади. Номерланган бош тўпламдан масалан, 50 та объект олиш учун тасодифий сонлар жадвалининг ихтиёрий саҳифасини очиб, ундан бир варақайига 50 та сон ёзиб олинади; танланмага номерлари ёзиб олинган сонлар билан бир хил объектлар киритилади. Агар жадвалнинг тасодифий сони N дан катта бўлса, у ҳолда бундай сон тушириб қолдирилади. Такрорсиз танланма бўлган ҳолда жадвалнинг илгари учраган сонлари ҳам тушириб қолдирилади.

Типик танлаш деб, шундай танлашга айтиладики, бунда объектлар бутун бош тўпламдан эмас, балки унинг «типик» қисмларидан олинади. Масалан, деталлар бир нечта станокда тайёрланаётган бўлса, у ҳолда танлаш барча деталлар тўплам дан эмас, балки ҳар бир станок маҳсулотидан айрим олинади. Типик танлашдан текширилаётган белги бош тўпламнинг турли типик қисмларида сезиларли ўзгариб турганда фойдаланилади. Масалан, маҳсулот бир нечта машиналарда тайёрланаётган бўлиб, машиналар орасида унча-мунча эскирганлари бўлса, у ҳолда типик танлашдан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир.

Механик танлаш деб, шундай танлашга айтиладики, бунда бош тўплам танланмага нечта объект кириши лозим бўлса, шунча группага механик равишда ажратилади ва ҳар бир группадан биттадан объект танланади.

Масалан, станокда тайёрланган деталларнинг 20 % ини ажратиб олиш лозим бўлса, у ҳолда ҳар бир бешинчи деталь олинади; агар 5 % деталларни олиш талаб қилинса, у ҳолда ҳар бир йигирманчи деталь олинади ва ҳ. к.

Механик танлаш баъзан танланманинг репрезентативлигини таъминламаслиги мумкинлигини қайд қилиб ўтамиз. Масалан, ҳар бир йигирманчи йўнилаётган валча танланаётган, бўлиб, шу билан бирга танлашдан сўнг дарҳол кесгич алмаштирилса, у ҳолда танланган ҳамма валчалар ўтмасланган кесгичлар билан йўнилган бўлади. Бундай ҳолда танлаш ритмини кесгични алмаштириш ритми билан мос келишини йўқотиш лозим, бунинг учун, масалан, йўнилган ҳар йигирмата валчадан ўнинчисини олиш лозим.

Серияли танлаш деб шундай танлашга айтиладики, бунда объектлар бош тўпламдан битталаб эмас, балки, «сериялаб» олинади ва улар ялписига текширилади. Масалан, буюмлар катта группа станок — автоматлар томонидан тайёрланаётган бўлса, у ҳолда фақат бир нечта станокнинг буюмлари ялписига текширилади. Серияли танлашдан текширилаётган белги турли серияларда унча ўзгармаган ҳолда фойдаланилади.

Практикада кўпинча аралаш танлашдан фойдаланилишини таъкидлаб ўтамиз, бунда юқорида кўрсатилган усуллардан биргаликда фойдаланилади.

Масалан, бош тўпламни баъзан бир хил ҳажмли серияларга ажратилади, кейин оддий тасодифий танлаш билан бир нечта серия танланади ва ниҳоят оддий тасодифий танлаш билан айрим объектлар олинади.

6 - §. Танланманинг статистик тақсимоти

Бош тўпламдан танланма олинган. Бунда x_1 қиймат n_1 марта, x_2 қиймат n_2 марта кузатилган ва $\sum n_i = n$ бўлсин. Кузатилган x_i қийматлар варианталар, *варианталарнинг* ортиб бориши тартибида ёзилган кетма - кетлиги эса *вариацион қатор* дейилади. Кузатишлар сони *частоталар*, уларнинг танланма ҳажмига нисбати $\frac{n_i}{n} = W_i$ эса *нисбий частоталар* дейилади.

Танланманинг статистик тақсимоти деб варианталар ва уларга мос частоталар ёки нисбий частоталар рўйхатига айтилади. Статистик тақсимотни яна интерваллар ва уларга тегишли частоталар кетма - кетлиги кўринишида ҳам бериш мумкин (интервалга мос частота сифатида бу интервалга тушган частоталар йиғиндиси қабул қилинади).

Шуни қайд қилиб ўтамизки, *тақсимот* дейилганда эҳтимоллар назариясида тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари ва уларнинг эҳтимоллари орасидаги мослик, математик статистикада эса кузатилган варианталар ва уларнинг частоталари ёки нисбий частоталари орасидаги мослик тушунилади.

Мисол. Ҳажми 20 бўлган танланманинг частоталари тақсимоти берилган:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7.

Нисбий частоталар тақсимотини ёзинг.

Ечилиши. Нисбий частоталарни топамиз. Бунинг учун частоталарни танланма ҳажмига бўламиз:

$$W_1 = \frac{3}{20} = 0{,}15, \quad W_2 = \frac{10}{20} = 0{,}50, \quad W_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35.$$

Нисбий частоталар тақсимотини ёзамиз:

x_i	2	6	12
W_i	0,15	0,5	0,35

Контрол қилиш: $0{,}15 + 0{,}5 + 0{,}35 = 1$.

7 - §. Тақсимотнинг эмпирик функцияси

Айтайлик, X сон белги частоталарининг статистик тақсимоти маълум бўлсин. Қуйидагича белгилашлар киритамиз: n_x — белгининг x дан кичик қиймати кузатилган кузатишлар сони; n — кузатишларнинг умумий сони (танланма ҳажми).

Равшанки, $X < x$ ходисанинг нисбий частотаси $\frac{n_x}{n}$ га тенг. Агар x ўзгарадиган бўлса, у ҳолда умуман айтганда, нисбий частотаси ҳам ўзгаради, яъни $\frac{n_x}{n}$ нисбий частота x нинг функциясидир. Бу функция эмпирик (тажриба йўли) йўл билан топиладиган бўлгани учун у эмпирик функция дейилади.

Тақсимотнинг эмпирик функцияси (танланманинг тақсимот функцияси) деб ҳар бир x қиймати учун X x ходисанинг эҳтимолини аниқлайдиган $F^*(x)$ функцияга айтилади. Шундай қилиб, таърифга кўра

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

Бу ерда n_x — x дан кичик варианталар сони,
n — танланма ҳажми.

Шундай қилиб, масалан, $F^*(x_2)$ ни топиш учун x_2 дан кичик варианталар сонини танланма ҳажмига бўлиш лозим;

$$F^*(x_2) = \frac{n_{x_2}}{n}.$$

Бош тўплам тақсимотининг $F(x)$ интеграл функциясини, танланма тақсимотининг эмпирик функциясидан фарқ қилиб *тақсимотнинг назарий функцияси* дейилади. Эмпирик ва назарий функциялар орасидаги фарқ шундаки, $F(x)$ назарий функция $X < x$ ҳодиса эҳтимолини, $F^*(x)$ эмпирик функция эса шу ҳодисанинг ўзининг нисбий частотасини аниқлайди. Бернулли теоремасидан келиб чиқадики, $X < x$ ҳодисанинг нисбий частотаси, яъни $F^*(x)$ шу ҳодисанинг $F(x)$ эҳтимолига эҳтимол бўйича яқинлашади. Бошқача сўз билан айтганда $F^*(x)$ ва $F(x)$ сонлар бир-биридан кам фарқ қилади. Шу ернинг ўзиданоқ, бош тўплам тақсимотининг назарий (интеграл) функциясини тақрибий тасвирлашда танланма тақсимотининг эмпирик функциясидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлиши келиб чиқади.

Бундай хулоса шу билан ҳам тасдиқланадики, $F^*(x)$ функция $F(x)$ нинг барча хоссаларига эга. Дарҳақиқат, $F^*(x)$ функциянинг таърифидан унинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади:

1) эмпирик функциянинг қийматлари [0; 1] кесмага тегишли;

2) $F^*(x)$—камаймайдиган функция;

3) агар x_1 — энг кичик варианта бўлса, у ҳолда $x \leqslant x_1$ да $F^*(x) = 0$; x_k — энг катта варианта бўлса, у ҳолда $x > x_k$ да $F^*(x) = 1$.

Шундай қилиб, танланма тақсимотининг эмпирик функцияси бош тўплам тақсимотининг назарий функциясини баҳолаш учун хизмат қилади.

Мисол. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича унинг эмпирик функциясини тузинг.

варианталар	x_i	2	6	10
частоталар	n_i	12	18	30.

Ечилиши. Танланма ҳажмини топамиз: $12 + 18 + 30 = 60$. Энг кичик варианта 2 га тенг, демак,

$$x \leqslant 2 \text{ да } F^*(x) = 0.$$

$X < 6$ қиймат, хусусан, $x_1 = 2$ қиймат 12 марта кузатилган, демак,

$$2 < x \leqslant 6 \quad \text{да} \quad F^*(x) = \frac{12}{60} = 0{,}2.$$

$X < 10$ қийматлар, жумладан $x_1 = 2$ ва $x_2 = 6$ қийматлар $12 + 18 = 30$ марта кузатилган; демак,

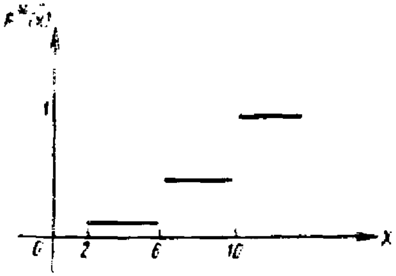
$$6 < x \leqslant 10 \quad \text{да} \quad F^*(x) = \frac{30}{60} = 0{,}5.$$

$X = 10$ энг катта варианта бўлгани учун

$$x > 10 \text{ да } F^*(x) = 1.$$

Изланаётган эмпирик функция:

$$F^*(x) = \begin{cases} x \leqslant 2 & \text{да} \quad 0, \\ 2 < x \leqslant 6 & \text{да} \quad 0{,}2, \\ 6 < x \leqslant 10 & \text{да} \quad 0{,}5, \\ x > 10 & \text{да} \quad 1. \end{cases}$$



19- расм

Бу функциянинг графиги 19-расмда тасвирланган.

8-§. Полигон ва гистограмма

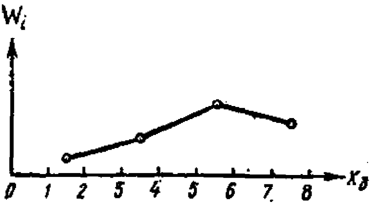
Кўргазмалилик мақсадида статистик тақсимотнинг турли графиклари, жумладан, полигон ва гистограммаси ясалади.

Частоталар полигони деб, кесмалари (x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k) нуқталарни туташтирадиган синиқ чизиққа айтилади. Полигонни ясаш учун абсциссалар ўқига x_i варианталарни, ординаталар ўқига эса уларга мос n_i частоталарни қўйиб чиқилади. Сўнгра (x_i, n_i) нуқталарни тўғри чизиқ кесмалари билан туташтириб, частоталар полигони ҳосил қилинади.

Нисбий частоталар полигони деб кесмалари (x_1, W_1), (x_2, W_2), …, (x_k, W_k) нуқталарни туташтирадиган синиқ чизиққа айтилади. Нисбий частоталар полигонини ясаш учун абсциссалар ўқига x_i вариантларни, ординаталар ўқига эса уларга мос W_i частоталарни қўйиб чиқилади. Сўнгра ҳосил бўлган нуқталарни тўғри чизиқ кесмалари билан туташтириб, нисбий частоталар полигони ҳосил қилинади. 20-расмда ушбу

x	1,5	3,5	5,5	7,5
W	0,1	0,2	0,4	0,3

тақсимотнинг нисбий частоталари полигони тасвирланган.

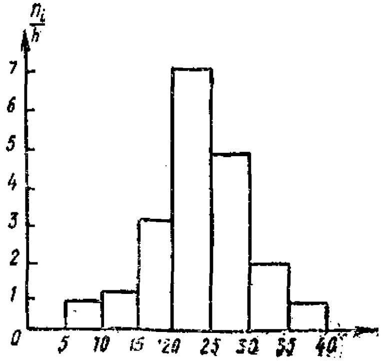


20- расм

Узлуксиз белги бўлган ҳолда гистограмма ясаш мақсадга мувофиқдир, бунинг учун белгининг кузатиладиган қийматларини ўз ичига олган интервални узунлиги h бўлган бир нечта қисмий интервалларга бўлинади ва ҳар бир i-қисмий интервал учун n_i ни — i-интервалга тушган варианталар частоталари йиғиндисини топилади. *Частоталар гистограммаси* деб асослари h узунликдаги интерваллар, баландликлари эса $\frac{n_i}{n}$ нисбатларга (частота зичлиги) тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий фигурага айтилади.

Частоталар гистограммасини ясаш учун абсциссалар ўқида қисмий интерваллар, уларнинг устига эса $\frac{n_i}{n}$ масофада абсциссалар ўқига параллел кесмалар ўтказилади.

i-қисмий тўғри тўртбурчакнинг юзи $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$ га, яъни i-интервалдаги варианталарнинг частоталари йиғиндисига тенг; бинобарин, частоталар гистограммасининг юзи барча частоталар йиғиндисига, яъни танланма ҳажмига тенг.



21-расм.

21-расмда 6-жадвалда келтирилган $n = 100$ ҳажмли тақсимот частоталари гистограммаси тасвирланган.

6-жадвал

Узунлиги $h = 5$ бўлган қисмий интервал	n_i интервал варианталари частоталарининг йиғиндиси	частота зичлиги $\frac{n_i}{h}$
5 — 10	4	0,8
10 — 15	6	1,2
15 — 20	16	3,2
20 — 25	36	7,2
25 — 30	24	4,8
30 — 35	10	2,0
35 — 40	4	0,8

Нисбий частоталар гистограммаси деб асослари h узунликдаги интерваллар, баландликлари эса $\frac{W_i}{n}$ нисбатга (нисбий частота зичлигига) тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат погонавий фигурага айтилади.

Нисбий частоталар полигонини ясаш учун абсциссалар ўқига қисмий интервалларни қўйиб чиқилади, уларнинг тепасидан эса $\frac{W_i}{h}$ масофада абсциссалар ўқига паралле кесмалар ўтказилади. i-қисмий тўғри тўртбурчакнинг юзи $h \cdot \frac{W_i}{h}$ га, яъни i-интервалга тушган варианталарнинг нисбий частоталари йиғиндисига тенг. Демак, нисбий частоталар гистограммасининг юзи барча нисбий частоталар йиғиндисига, яъни бирга тенг.

Масалалар

1. Ушбу тақсимотнинг эмпирик функцияси графигини ясанг:

x_i	5	7	10	15
n_i	2	3	8	7.

2. Ушбу тақсимот частоталари ва нисбий частоталари полигонларини ясанг:

x_i	1	3	5	7	9
n_i	10	15	30	33	12.

3. Ушбу тақсимотнинг частоталари ва нисбий частоталари гистограммаларини ясанг (биринчи устунда қисмий интервал, иккинчи устунда эса қисмий интервалдаги вариантларнинг частоталари йиғиндиси кўрсатилган)

2 — 5	9
5 — 8	10
8 — 11	25
11 — 14	6.

Ўн олтинчи боб

ТАҚСИМОТ ПАРАМЕТРЛАРИНИНГ СТАТИСТИК БАҲОЛАРИ

1 - §. Тақсимот параметрларининг статистик баҳолари

Айтайлик, бош тўпламнинг сон белгисини ўрганиш талаб қилинаётган бўлсин. Фараз қилайлик, шу белги қайси тақсимотга эга эканлиги назарий мулоҳазалардан аниқланган бўлсин. Бу тақсимотни аниқлайдиган параметрларни баҳолаш масаласи юзага келиши табиийдир. Масалан, ўрганилаётган белги бош тўпламда нормал тақсимланганлиги олдиндан маълум бўлса, у ҳолда математик кутилишни ва ўртача квадратик четланишни баҳолаш (тақрибий ҳисоблаш) зарур, чунки бу иккита параметр нормал тақсимотни тўлиқ аниқлайди; агар белги Пауссон тақсимотига эга дейишга асос бўлса, у ҳолда бу тақсимотни аниқлайдиган λ параметрни баҳолаш зарур.

Одатда тадқиқотчи ихтиёрида танланмадаги маълумотларгина, масалан, сон белгининг n та кузатиш натажасида олинган $x_1, x_2, \ldots, x_n$ қийматлари бўлади (бу ерда ва бундан кейин кузатишлар ўзаро боғлиқмас деб фараз қилинади). Баҳоланаётган белги худди шу маълумотлар орқали ифодаланади.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ни эркли $X_1, X_2, \ldots, X_n$ тасодифий миқдорлар деб қараб, назарий тақсимот номаълум параметрининг статистик баҳосини топиш, бу демак, кузатилаётган тасодифий миқдорлар орқали шундай функцияни топишдирки, у баҳоланаётган параметрнинг тақрибий қийматини беради. Масалан, нормал тақсимотнинг математик кутилишини баҳолаш учун ушбу

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

функция (белгининг кузатиладиган қийматларининг арифметик ўртаси) хизмат қилади (бу кейинроқ кўрсатилади).

Шундай қилиб, назарий тақсимот номаълум параметрининг *статистик баҳоси* деб кузатилган тасодифий миқдорлардан тузилган функцияга айтилади.

2-§. Силжимаган, эффектив ва асосли баҳолар

Статистик баҳолар баҳоланаётган параметрларнинг «яхши» яқинлашишларини бериши учун улар маълум талабларни қаноатлантиришлари лозим. Қуйида шу талаблар кўрсатилган.

Θ^* назарий тақсимот Θ номаълум параметрининг статистик баҳоси бўлсин. n ҳажмли танланма бўйича Θ^*_1 баҳо топилган бўлсин. Тажрибани такрорлаймиз, яъни бош тўпламдан ўша ҳажмли иккинчи танланмани оламиз ва ундаги маълумотлар бўйича Θ^*_2 баҳони топамиз. Тажрибани кўп марта такрорлаб, $\Theta_1^*, \Theta_2^*, \ldots, \Theta_k^*$ сонларни ҳосил қиламиз, улар, умуман айтганда, ўзаро хар хил бўлади. Шундай қилиб, Θ^* баҳони тасодифий миқдор, $\Theta_1^*, \Theta_2^*, \ldots, \Theta_k^*$ сонларни эса унинг мумкин бўлган қийматлари сифатида қараш мумкин.

Θ^* баҳо Θ нинг тақрибий қийматини ортиғи билан беради деб фараз қилайлик; у ҳолда танланмадаги маълумотлар бўйича топилган ҳар бир Θ_i^* ($i = 1, 2, \ldots, k$) сон ҳақиқий Θ^* қийматдан катта бўлади. Бу ҳолда Θ^* тасодифий миқдорнинг математик кутилиши (ўртача қиймати) ҳам Θ дан катта бўлади, яъни $M(\Theta^*) > \Theta$. Агар Θ^* қиймат баҳони ками билан берадиган бўлса, равшанки, $M(\Theta^*) < \Theta$.

Шундай қилиб, математик кутилиши баҳолаётган параметрга тенг бўлмаган статистик баҳони ишлатиш (бир хил ишорали) систематик хатоларга олиб келган бўлар эди. Шу сабабли, Θ^* баҳонинг математик кутилиши баҳоланаётган параметрга тенг бўлишини талаб қилиш табиийдир. Бу талабларга риоя қилиниши хатоларни бартараф қилмасада (Θ^* нинг баъзи қийматлари Θ дан катта баъзилари кичик), ҳар хил ишорали хатолар бир хил частотада учрайди. Бошқача сўз билан айтганда, $M(\Theta^*) = \Theta$ талабларга риоя қилиш систематик хатолар ҳосил қилишдан асрайди.

Силжимаган баҳо деб математик кутилиши исталган ҳажмли танланма бўлганда ҳам баҳоланаётган Θ параметрга тенг, яъни

$$M(\Theta^*) = \Theta$$

бўлган Θ^* статистик баҳога айтилади.

Силжиган баҳо деб математик кутилиши баҳоланаётган параметрга тенг бўлмаган баҳога айтилади.

Аммо силжимаган баҳо ҳар доим ҳам баҳоланаётган параметрнинг яхши яқинлашишини беради деб ҳисоблаш хато бўлар эди. Дарҳақиқат Θ^* нинг мумкин бўлган қийматлари унинг ўртача қиймати атрофида анча тарқоқ, яъни $D(\Theta^*)$ дисперсия анчагина катта бўлиши мумкин. Бундай ҳолда битта танланмадаги маълумотлар бўйича топилган баҳо, масалан, Θ_1^* баҳо $\overline{\Theta^*}$ ўртача қийматдан ва демак, баҳоланаётган Θ параметрдан анча узоқлашган бўлади; Θ_1^* ни Θ нинг тақрибий қиймати учун қабул қилиб, катта хатога йўл қўйган бўлур эдик. Агар Θ^* нинг дисперсияси кичик бўлишини талаб қиладиган бўлсак, у ҳолда катта хатога йўл қўйишнинг олдини олган бўламиз. Шу сабабли статистик баҳога эффективлик талаби қўйилади.

Эффектив баҳо деб (танланманинг ҳажми n берилганда) мумкин бўлган энг кичик дисперсияга эга бўлган статистик баҳога айтилади.

Катта ҳажмли (n катта!) танланмалар қаралганда статистик баҳоларга асослилик талаби қўйилади.

Асосли баҳо деб баҳоланаётган параметрга $n \to \infty$ да эҳтимол бўйича яқинлашадиган статистик баҳога айтилади. Масалан, силжимаган баҳонинг дисперсияси $n \to \infty$ да нолга интилса, у ҳолда бундай баҳо асосли ҳам бўлади.

3-§. Бош ўртача қиймат

Айтайлик, дискрет бош тўплам X сон белгига нисбатан ўрганилаётган бўлсин.

Бош ўртача қиймат $\overline{X}_Б$ деб бош тўплам белгиси қийматларининг арифметик ўртача қийматига айтилади.

Агар N ҳажмли бош тўплам белгисининг барча x_1, x_2, ..., x_N қийматлари турлича бўлса, у ҳолда

$$\overline{x}_Б = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}.$$

Агар белгининг x_1, x_2, ..., x_k қийматлари мос равишда N_1, N_2, ..., N_k частоталарга эга, шу билан бирга $N_1 + N_2 \ldots + N_k = N$ бўлса, у ҳолда

$$\overline{x}_Б = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + \ldots + x_k N_k}{N},$$

яъни бош ўртача қиймат белгининг (вазнлари тегишли частоталарга тенг бўлган) қийматларининг вазний ўртача қийматидир.

Эслатма. N ҳажмли бош тўплам Х белгининг x_1, x_2, ..., x_N га тенг турли қийматларига эга бўлган объектлардан иборат бўлсин. Бу тўпламдан тавакkалига битта объект олинади деб фараз қилайлик. Белгининг масалан, x_1 қийматига эга бўлган объект олиниши эҳтимоли $\frac{1}{N}$ га тенглиги равшан. Худди шу эҳтимол билан исталган бошқа объект ҳам олиниши мумкин. Шундай қилиб, X белгининг

катталигини мумкин бўлган x_1, x_2, ..., x_N қийматлари бир хил $\frac{1}{N}$ эҳтимолга эга бўлган тасодифий миқдор деб қараш мумкин. M(Х) математик кутилишни топамиз:

$$M(X) = x_1 \cdot \frac{1}{N} + x_2 \cdot \frac{1}{N} + \ldots + x_N \cdot \frac{1}{N} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \overline{x}_Б.$$

Шундай қилиб, бош тўпламнинг текширилаётган X белгиси тасодифий миқдор деб қараладиган бўлса, у ҳолда белгининг математик кутилиши шу белгининг бош ўртача қийматига тенг:

$$M\ (X) = \overline{x}_Б.$$

Биз бу хулосага бош тўпламнинг барча объектлари белгининг турли қийматларига эга деб ҳисоблаш натижасида келдик. Шундай натижа бош тўплам белгининг бир хил қийматига эга бўлган бир нечтадан объектни ўз ичига олган деб фараз қилинганда ҳам ҳосил қилинади.

Ҳосил қилинган натижани X белгиси узлуксиз тақсимотга эга бўлган бош тўпламга ҳам умумлаштириб, бош ўртача қийматни бу ҳолда ҳам белгининг математик кутилиши сифатида аниқлаймиз:

$$\bar{x}_Б = M(X).$$

4-§. Ўртача танланма қиймат

Бош тўпламни X сон белгига нисбатан ўрганиш мақсадида n ҳажмли танланма олинган бўлсин.

Ўртача танланма $\bar{x}_Т$ *қиймат* деб танланма тўплам белгисининг арифметик ўртача қийматига айтилади.

Агар n ҳажмли танланма белгисининг барча x_1, x_2, ..., x_n қийматлари турлича бўлса, у ҳолда

$$\bar{x}_Т = \frac{x_2 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Агар белгининг x_1, x_2, ..., x_k қийматлари мос равишда n_1, n_2, ..., n_k частоталарга эга, шу билан бирга $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ бўлса, у ҳолда

$$\bar{x}_Т = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n}$$

ёки

$$\bar{x}_Т = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}$$

яъни ўртача танланма қиймат белгининг вазнлари мос равишда тегишли частоталарга тенг бўлган қийматларининг вазний ўртача қийматидир.

Эслатма. Битта танланмадаги маълумотлар бўйича топилган ўртача танланма қиймат, равшанки, тайин сондир. Агар ўша бош тўпламдан ўша ҳажмли бошқа танланмалар олинадиган бўлса, у ҳолда ўртача танланма қиймат танланмадан танланмага ўтилганда ўзгариб боради. Шундай қилиб, ўртача танланма қийматни тасодифий миқдор сифатида қараш мумкин, бинобарин, ўртача танланма қийматнинг (назарий ва эмпирик) тақсимоти, бу тақсимотнинг (уни танланма тақсимот дейилади) сон характеристикалари, жумладан, танланма тақсимотининг математик кутилиши ва дисперсияси ҳақида сўз юритиш мумкин.

Шуни қайд қилиб ўтамизки, назарий мулоҳазаларда X белгининг боғлиқ бўлмаган кузатишлар натижасида ҳосил қилинган x_1, x_2, ..., x_n танланма қийматларини ҳам X билан бир хил тақсимотга эга бўлган, ва демак, ўшандай сон характеристикаларига эга бўлган x_1, x_2, ..., x_n тасодифий миқдорлар деб қаралади.

5 - §. Бош ўртача қийматни ўртача танланма қиймат бўйича баҳолаш. Ўртача танланма қийматларнинг турғунлиги

Айтайлик, бош тўпламдан (X сон белги устида боғлиқ бўлмаган кузатишлар ўтказиш натижасида) белгининг қийматлари x_1, x_2, ..., x_n бўлган n ҳажмли такрорий танланма олинган бўлсин. Мулоҳазаларнинг умумийлигини камайтирмасдан, белгининг қийматларини турли деб ҳисоблаймиз. Айтайлик, $\overline{x}_Б$ ўртача бош қиймат номаълум бўлиб, уни танланмадаги маълумотлар бўйича баҳолаш талаб қилинсин. Ўртача бош қийматнинг баҳоси сифатида ўртача танланма

$$\overline{x}_Т = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

қиймат қабул қилинади.

$\overline{x}_Т$ силжимаган баҳо эканлигига ишонч ҳосил қиламиз, яъни бу баҳонинг математик кутилиши $\overline{x}_Б$ га тенг эканлигини кўрсатамиз. $\overline{x}_Т$ ни тасодифий миқдор, x_1, x_2, ..., x_n эркли, бир хил тақсимланган X_1, X_2, ..., X_n тасодифий миқдорлар сифатида қараймиз. Бу миқдорлар бир хил тақсимланганлиги учун улар бир хил сон характеристикаларга, жумладан, бир хил математик кутилишга эга, уни a орқали белгилаймиз Бир хил тақсимланган тасодифий миқдорларнинг арифметик ўртача қийматининг математик кутилиши биттасининг математик кутилишига тенг (VIII боб, 9 - §.) бўлгани учун:

$$M(\overline{x}_Б) = M\left[\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right] = a. \qquad (*)$$

X_1, X_2; ..., X_n миқдорларнинг ҳар бири ва бош тўплам (уни ҳам тасодифий миқдор сифатида қараймиз) бир хил тақсимотга эга эканлигини эътиборга оладиган бўлсак, бу миқдорларнинг ва бош тўпламнинг сон характеристикалари бир хил деган хулосага келамиз. Жумладан, миқдорларнинг ҳар бирини математик кутилиши a бош тўплам X белгисининг математик кутилишига тенг, яъни

$$M(X) = \bar{x}_Б = a.$$

(*) формулада a математик кутилишни $\bar{x}_Б$ га алмаштириб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(\bar{X}_Т) = \bar{x}_Б.$$

Шу билан ўртача танланма қиймат ўртача бош қийматнинг силжимаган баҳоси эканлиги исботланди.

Ўртача танланма қиймат ўртача бош қиймат учун асосли баҳо ҳам бўлишини осонгина кўрсатиш мумкин. Дарҳақиқат, агар x_1, x_2, ..., x_n тасодифий миқдорлар чегараланган дисперсияларга эга дейдиган бўлсак, у ҳолда бу миқдорларга Чебишев теоремасини (хусусий ҳолини) қўллашга ҳақлимиз; бу теоремага кўра, қаралаётган миқдорларнинг арифметик ўртача қиймати, яъни $\bar{X}_Т$ қиймат n ортиши билан миқдорларнинг ҳар бирининг математик кутилиши a га, ва демак, ўртача бош қиймат $\bar{x}_Б$ га (чунки $\bar{x}_Б = a$) эҳтимол бўйича яқинлашади.

Шундай қилиб, танланманинг ҳажми n ортиши билан ўртача танланма қиймат ўртача бош қийматга эҳтимол бўйича яқинлашади, бу эса ўртача танланма қиймат ўртача бош қиймат учун асосли баҳо эканлигини билдиради.

Юқорида айтилганлардан яна шу нарса ҳам келиб чиқадики, агар битта бош тўпламнинг ўзидан анча катта ҳажмли бир нечта танланмалар бўйича ўртача танланма қийматлар топиладиган бўлса, улар ўзаро тақрибан тенг бўлади. *Ўртача танланма қийматларнинг турғунлик хоссаси* мана шундан иборатдир.

Агар иккита тўпламнинг дисперсиялари бир хил бўлса, у ҳолда ўртача танланма қийматларининг ўртача бош қийматларга яқинлиги танланма ҳажмининг нисбатига боғлиқ бўлмаслигини айтиб ўтамиз. Бу яқинлик танланма ҳажмига боғлиқ: танланма ҳажми қанчалик катта бўлса, ўртача танланма қиймат ўртача бош қийматдан шунчалик кам фарқ қилади. Масалан, агар бир тўпламдан 1% объект, иккинчисидан эса 4% объект танлаб олинган, шу билан бирга биринчи танланманинг ҳажми иккинчисидан катта бўлса, у ҳолда биринчи ўртача танланма қиймат тегишли ўртача бош қийматдан иккинчисига қараганда камроқ фарқ қилади.

Эслатма. Биз танланмани такрор (қайтариладиган) деб фараз қилдик. Аммо нотакрор танланманинг ҳажми бош тўплам ҳажмидан анча кичик бўладиган бўлса, юқорида ҳосил қилинган хулосалар бу танланмалар учун ҳам қўлланилиши мумкин. Бу қоидадан амалда кўп фойдаланилади.

6-§. Группавий ва умумий ўртача қийматлар

Тўпламнинг (бош тўпламми ёки танланма тўпламми, бунинг фарқи йўқ) сон белгиси x нинг барча қийматлари бир нечта группаларга ажратилган бўлсин. Ҳар бир группани мустақил тўплам сифатида қараб, унинг арифметик ўртача қийматини топиш мумкин.

Группавий ўртача қиймат деб белгининг группага тегишли қийматларининг арифметик ўртача қийматига айтилади.

Энди бутун тўпламнинг ўртача қиймати учун махсус термин киритиш мақсадга мувофиқ.

Умумий ўртача қиймат $\overline{x}$ деб белгининг бутун тўпламга тегишли қийматларининг ўртача арифметик қийматига айтилади.

Группавий ўртача қийматларни ва группаларнинг ҳажмларини билган ҳолда умумий ўртача қийматни топиш мумкин: *умумий ўртача қиймат группавий ўртача қийматларни группаларнинг вазнлари бўйича вазний ўртача арифметик* қийматига тенг.

Бунинг исботини келтирмасдан, уни тушунтирадиган мисол билан чекланамиз.

Мисол. Қуйидаги иккита группадан тузилган тўпламнинг умумий ўртача қийматини топинг:

Группа	биринчиси		иккинчиси	
Белгининг қиймати	1	6	1	
Частота	10	15	20	5
Ҳажм	10 + 15 = 25		20+30=50	30

Ечилиши. Группавий ўртача қийматларни топамиз:

$$\overline{x_1} = \frac{10\cdot1+15\cdot6}{25} = 4;$$

$$\overline{x_2} = \frac{20\cdot1+30\cdot5}{50} = 3{,}4.$$

Группавий ўртача қийматлар бўйича умумий ўртача қийматни топамиз.

$$\bar{x} = \frac{25\cdot 4 + 50\cdot 3,4}{25 + 50} = 3,6.$$

Эслатма. Катта ҳажмли тўпламнинг умумий ўртача қийматини ҳисоблашни соддалаштириш мақсадида уни бир нечта группага ажратиб, группавий ўртача қийматларни топиш ва улар бўйича умумий ўртача қийматни топиш мақсадга мувофиқдир.

7-§. Умумий ўртача қийматдан четланиш ва унинг хоссаси

X сон белгининг қийматлари (n ҳажмли) тўпламини (бош тўпламми ёки танланма тўпламми, бунинг аҳамияти йўқ) қараймиз:

белгининг қиймати	x	x_2 ...	x_k
частота	n_1	n_2 ...	n_k

бунда

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Бундан сўнг ёзишни қулайлаштириш мақсадида йиғинди белгиси $\sum_{i=1}^{k}$ ни $\sum$ белги билан алмаштирамиз.

Умумий ўртача қийматни топамиз.

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}.$$

Бундан

$$\sum n_i x_i = n\bar{x}. \qquad (*)$$

$\bar{x}$ ўзгармас катталик бўлгани учун

$$\sum n_i \bar{x} = \bar{x} \sum n_i = n\bar{x}. \qquad (**)$$

Четланиш деб белгининг қиймати билан умумий ўртача қиймат орасидаги $x_i - \bar{x}$ айирмага айтилади.

Теорема. *Четланишларнинг тегишли частоталарга кўпайтмалари йиғиндиси нолга тенг:*

$$\sum n_i(x_i - \bar{x}) = 0.$$

Исботи. (*) ва (**) ни эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sum n_i (x_i - \bar{x}) = \sum n_i x_i - \sum n_i \bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0.$$

Мисол. X сон белгининг тақсимоти берилган:

x_i	1	2	3
n_i	10	4	6.

Четланишларнинг тегишли частоталарга кўпайтмалари йиғиндиси нолга тенглигига ишонч ҳосил қилинг.

Ечилиши. Умумий ўртача қийматни топамиз:

$$\overline{x}=\frac{10\cdot1+4\cdot2+6\cdot3}{20}=1{,}8.$$

Четланишларнинг тегишли частоталарга кўпайтмалари йиғиндисини топамиз.

$$\sum n_i(x_i-\overline{x})=10\cdot(1-1{,}8)+4\cdot(2-1{,}8)+6\cdot(3-1{,}8)=8-8=0.$$

8-§. Бош дисперсия

Бош тўплам X сон белгисини ўзининг ўртача қиймати атрофида сочилишини характерлаш мақсадида йиғма характеристика—бош дисперсия тушунчаси киритилади.

Бош дисперсия $D_Б$ деб бош тўплам белгис қийматларини уларнинг ўртача қиймати $\overline{x}_Б$ дан четланишлари квадратларининг *ўртача арифметик қийматига* айтилади.

Агар N ҳажмли бош тўплам белгисининг барча $x_1, x_2, \dots, x_N$ қийматлари турлича бўлса, у ҳолда

$$D_Б=\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x}_Б)^2}{N}.$$

Агар белгининг $x_1, x_2, \dots, x_k$ қийматлари мос равишда $N_1, N_2, \dots, N_k$ частоталарга эга, шу билан бирга $N_1+N_2+\dots$ $\dots+N_k=N$ бўлса, у ҳолда

$$D_Б=\frac{\sum_{i=1}^{k}N_i(x_i-\overline{x}_Б)^2}{N},$$

яъни бош дисперсия вазнлари тегишли частоталарга тенг бўлган четланишлар квадратларининг вазний ўртача қийматидир.

Мисол. Бош тўплам қуйидаги тақсимот жадвали билан берилган:

x_i	2	4	5	6
N_i	8	9	10	3.

Бош дисперсияни топинг.

Ечилиши. Ўртача бош қийматни (3- §) топамиз:

$$\overline{x}_Б = \frac{8\cdot 2+9\cdot 4+10\cdot 5+3\cdot 6}{8+9+10+3}=\frac{120}{30}=4.$$

Бош дисперсияни топамиз:

$$D_Б = \frac{8\cdot(2-4)^2+9\cdot(4-4)^2+10\cdot(5-4)^2+3\cdot(6-4)^2}{30}=$$

$$=\frac{54}{30}=1,8.$$

Бош тўплам белгиси қийматларини унинг ўртача қиймати атрофида сочилишини характерлаш учун дисперсиядан ташқари йиғма характеристика—ўртача квадратик четланишдан фойдаланилади.

Ўртача квадратик бош четланиш (стандарт) деб бош дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma_Б = \sqrt{D_Б}.$$

9- §. Танланма дисперсия

Танланма сон белгисининг кузатиладиган қийматларини унинг $\overline{x}_т$ ўртача қиймати атрофида сочилишини характерлаш мақсадида йиғма характеристикаси—танланма дисперсия киритилади

Танланма дисперсия $D_т$ деб белгининг кузатиладиган қийматларини уларнинг $\overline{x}_т$ ўртача қийматидан четланиши квадратларининг ўртача арифметик қийматига айтилади.

Агар n ҳажмли танланма белгисининг барча $x_1, x_2, \ldots, x_n$ қийматлари турлича бўлса, у ҳолда

$$D_т = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_т)^2}{n}.$$

Агар белгининг $x_1, x_2, \ldots, x_k$ қийматлари мос равишда $n_1, n_2, \ldots, n_k$ частоталарга эга, шу билан бирга $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ бўлса, у ҳолда

$$D_т = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i\,(x_i-\overline{x}_т)^2}{n},$$

яъни танланма дисперсия вазнлари тегишли частоталарга тенг бўлган четланишларнинг вазний ўртача қийматидир.

Мисол. Танланма тўплам ушбу тақсимот жадвали орқали берилган

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Танланма дисперсияни топинг.

Ечилиши. Ўртача танланма қийматни (4- §) топамиз:

$$\bar{x}_г = \frac{20\cdot1+15\cdot2+10\cdot3+5\cdot4}{20+15+10+5} = \frac{100}{50} = 2.$$

Танланма дисперсияни топамиз:

$$D_г = \frac{20\ (1-2)^2+15\cdot(2-2)^2+10\cdot(3-2)^2+5\cdot(4-2)^2}{50} = \frac{50}{50} = 1.$$

Танланма тўплам белгиси қийматларини унинг ўртача қиймати атрофида сочилишини характерлаш учун дисперсиядан ташқари йиғма характеристика—ўртача квадратик четланишдан фойдаланилади.

Танланма ўртача квадратик четланиш (стандарт) деб танланма дисперсиясидан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma_г = \sqrt{D_г}.$$

10-§. Дисперсияни ҳисоблаш учун формула

Дисперсияни ҳисоблашни (танланма дисперсияни, бош дисперсияни, бунинг фарқи йўқ) қуйидаги теоремадан фойдаланиб, соддалаштириш мумкин.

Теорема. *Дисперсия белгининг қийматлари квадратларининг ўртача қийматидан умумий ўртача қиймат квадратини айирилганига тенг:*

$$D = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2.$$

Исботи. Теореманинг исботи қуйидаги алмаштиришлардан келиб чиқади:

$$D = \frac{\sum n_i(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum n_i(x_i^2-2x_i\,\bar{x}+[\bar{x}]^2)}{n} =$$

$$= \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum n_i x_i}{n} + [\bar{x}]^2\frac{\sum n_i}{n} = \overline{x^2} - 2\,\bar{x}\cdot\bar{x} + [\bar{x}]^2 =$$

$$= \overline{x^2} - [\bar{x}]^2.$$

Шундай қилиб,

$$D = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2,$$

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}, \quad \overline{x^2} = \frac{\sum n_i x_i^2}{n}.$$

Мисол. Берилган

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

тақсимот бўйича дисперсияни топинг.

Ечилиши. Умумий ўртача қийматни топамиз:

$$\bar{x} = \frac{20\cdot 1 + 15\cdot 2 + 10\cdot 3 + 4\cdot 5}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2.$$

Белгининг қийматлари квадратларининг ўртача қийматини топамиз:

$$\overline{x^2} = \frac{20\cdot 1^2 + 15^2\cdot 2^2 + 10\cdot 3^2 + 5\cdot 4^2}{50} = 5.$$

Изланаётган дисперсия:

$$D = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2 = 5 - 2^2 = 1.$$

11-§. Группавий, группаичи, группааро ва умумий дисперсиялар

Айтайлик, тўплам (бош тўпламми, танланма тўпламми, бунинг фарқи йўқ) X сон белгисининг барча қийматлари k та группага ажратилган бўлсин. Ҳар бир группани мустақил тўплам сифатида қараб, белгининг шу группага тегишли қийматларининг группавий ўртача қийматини (6-§) ва группавий ўртача қийматга нисбатан группавий дисперсияни топиш мумкин.

Группавий дисперсия деб белгининг группага тегишли қийматларининг группавий ўртача қийматга нисбатан дисперсиясига айтилади:

$$D_{j\,\text{гр}} = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_j)^2}{N_j},$$

бу ерда n_i сон x_i вариантанинг частотаси,

j — группа номери,

$\bar{x}_j$ қиймат j группанинг группавий ўртача қиймати,

$N_j = \sum n_i$ эса j группанинг ҳажми.

1-мисол. Қуйидаги иккита группадан иборат тўпламнинг группавий дисперсияларини топинг:

Биринчи группа		Иккинчи группа	
x_i	n_i	x_i	n_i
2	1	3	2
4	7	8	3
5	2		
$N_1 = \sum n_i = 10$		$N_2 = \sum n_i = 5.$	

Ечилиши. Группавий ўртача қийматларни топамиз:

$$\overline{x}_1 = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{1\cdot 2 + 7\cdot 4 + 2\cdot 5}{10} = 4;$$

$$\overline{x}_2 = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 8}{5} = 6.$$

Изланаётган группавий дисперсияларни топамиз:

$$D_{1\text{гр}} = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x}_i)^2}{N_1} = \frac{1\cdot(2-4)^2 + 7\cdot(4-4)^2 + 2\cdot(5-4)^2}{10} = 0{,}6;$$

$$D_{2\text{гр}} = \frac{2\cdot(3-6)^2 + 3\cdot(8-6)^2}{5} = 6.$$

Ҳар бир группанинг дисперсиясини билган ҳолда уларнинг арифметик ўртача қийматини топиш мумкин.

Группаичи дисперсия деб группавий дисперсияларнинг группалар ҳажмларига тенг бўлган вазнлар билан олинган арифметик ўртача қийматига айтилади:

$$D_{\text{гр.ичи}} = \frac{\sum N_j D_{j\text{гр}}}{n},$$

бу ерда N_j сон j группа ҳажми;

$$n = \sum_{j=1}^{k} N_j \text{ — бутун тўплам ҳажми.}$$

2-мисол. 1-мисолдаги маълумотлар бўйича группаичи дисперсияни топинг.

Ечилиши. Изланаётган группаичи дисперсия қуйидагига тенг:

$$D_{\text{гр.ичи}} = \frac{N_1 D_{1\text{гр}} + N_2 D_{2\text{гр}}}{n} = \frac{10\cdot 0,6 + 5\cdot 6}{15} = \frac{12}{5}.$$

Группавий ўртача қийматлар ва умумий ўртача қийматни билган ҳолда группавий ўртача қийматларнинг умумий ўртача қийматга нисбатан дисперсиясини топиш мумкин.

Группааро дисперсияси деб группавий ўртача қийматларнинг умумий ўртача қийматга нисбатан дисперсиясига айтилади:

$$D_{\text{гр. аро}} = \frac{\sum N_j \, (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{n}$$

бу ерда $\bar{x}_j$ сон j группанинг группавий ўртача қиймати,

N_j сон j группа ҳажми,

$\bar{x}$ — умумий ўртача қиймат, $n = \sum\limits_{j=1}^{k} N_j$ — бутун тўплам ҳажми.

3- мисол. 1- мисолдаги маълумотлар бўйича группааро дисперсиясини топинг.

Ечилиши. Умумий ўртача қийматни топамиз:

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i \, x_i}{\sum n_i} = \frac{1 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8}{15} = \frac{14}{3}.$$

Юқорида ҳисобланган $\bar{x}_1 = 4$ ва $\bar{x}_2 = 6$ катталиклардан фойдаланиб, изланаётган группааро дисперсияни топамиз:

$$D_{\text{гр. аро}} = \frac{N_1(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + N_2(\bar{x}_2 - \bar{x})^2}{n} =$$

$$= \frac{10 \cdot \left(4 - \frac{14}{3}\right)^2 + 5 \cdot \left(6 - \frac{14}{3}\right)^2}{15} = \frac{8}{9}.$$

Энди бутун тўпламнинг дисперсияси учун махсус термин киритиш мақсадга мувофиқдир.

Умумий дисперсия деб бутун тўплам белгиси қийматларининг умумий ўртача қийматга нисбатан дисперсиясига айтилади:

$$D_{\text{ум.}} = \frac{\sum n_i \, (x_i - \bar{x})^2}{n},$$

бу ерда n_i сон x_i қийматнинг частотаси;

$\bar{x}$ — умумий ўртача қиймат;

n — бутун тўплам ҳажми:

4- мисол. 1-мисолдаги маълумотлар бўйича умумий дисперсияни топинг

Ечилиши. Умумий ўртача қиймат $\frac{14}{3}$ га тенглигини эътиборга олиб, изланаётган умумий дисперсияни топамиз:

$$D_{\text{ум.}}=\frac{1\cdot\left(2-\frac{14}{3}\right)^2+7\cdot\left(4-\frac{14}{3}\right)^2+2\cdot\left(5-\frac{14}{3}\right)^2}{15}+$$

$$+\frac{2\cdot\left(2-\frac{14}{3}\right)^2+3\cdot\left(8-\frac{14}{3}\right)^2}{15}=\frac{148}{45}.$$

Эслатма. Топилган умумий дисперсия группаичи ва группааро дисперсиялар йиғиндисига тенг:

$$D_{\text{ум}}=\frac{148}{45};$$

$$D_{\text{гр.ичи}}+D_{\text{гр.аро}}=\frac{12}{5}+\frac{8}{9}=\frac{148}{45}.$$

Бундай қонуният исталган тўплам учун тўғри эканлиги кейинги параграфда исботланади.

12- §. Дисперсияларни қўшиш

Теорема. Агар тўплам бир нечта группалардан иборат бўлса, у ҳолда умумий дисперсия группаичи ва группааро дисперсиялар йиғиндисига тенг:

$$D_{\text{ум}}=D_{\text{гр.ичи}}+D_{\text{гр.аро}}\,.$$

Исботи. Исботни соддалаштириш учун X белгининг қийматлари тўплами қуйидаги иккита группага ажратилган деб ҳисоблаймиз:

Группа	биринчиси	иккинчиси
Белги қиймати	$x_1\ x_2$	$x_1\ x_2$
Частота	$m_1\ m_2$	$n_1\ n_2$
Группа ҳажми	$N_1=m_1+m_2$	$N_2=n_1+n_2$
Группавий ўртача қиймат	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
Группавий дисперсия	$D_{1\text{гр}}$	$D_{2\text{гр}}$
Бутун тўплам ҳажми	$n=N_1+N_2$	

Ёзишни қулайлаштириш мақсадида йиғинди белгиси $\sum\limits_{i=1}^{2}$ ўрнига $\sum$ белгини ёзамиз. Масалан, $\sum m_i=\sum\limits_{i=1}^{2}m_i=$ $=m_1+m_2=N_1$.

Яна қуйидагини ҳам кўзда тутиш лозим: йиғинди белгиси остида ўзгармас катталик турган бўлса, у ҳолда уни йиғинди белгисидан ташқарига чиқарган маъқул. Масалан, $\sum m_i(\overline{x}_1-\overline{x})^2 = (\overline{x}_1-\overline{x})^2 \sum m_i = (\overline{x}_1-\overline{x})^2 N_1$. Умумий дисперсияни топамиз:

$$D_{ум} = \frac{\sum m_i (x_i-\overline{x})^2 + \sum n_i (x_i-\overline{x})^2}{n}. \qquad (*)$$

Суратнинг биринчи қўшилувчисига $\overline{x}_1$ ни қўшиб ва айириб, алмаштирамиз:

$$\sum m_i (x_i-\overline{x})^2 = \sum m_i [(x_i-\overline{x}_1)+(\overline{x}_1-\overline{x})]^2 =$$

$$= \sum m_i (x_i-\overline{x}_1)^2 + 2(\overline{x}_1-\overline{x}) \sum m_i (x_i-\overline{x}_1) +$$

$$+ \sum m_i (\overline{x}_i-\overline{x})^2.$$

Сўнгра

$$\sum m_i (x_i-\overline{x}_1)^2 = N_1 D_{1гр}$$

бўлганидан (бу тенглик $D_{1гр} = \frac{\sum m_i (x_i-\overline{x}_1)^2}{N_1}$ муносабатдан келиб чиқади) ва 7-§ га кўра

$$\sum m_i (x_i-\overline{x}_1) = 0$$

бўлгани учун биринчи қўшилувчи қуйидаги кўринишни олади:

$$\sum m_i (x_i-\overline{x}_1)^2 = N_1 D_{1гр} + N_1(\overline{x}_1-\overline{x})^2. \qquad (**)$$

(*) нинг суратини ҳам шунга ўхшаш ($\overline{x}_2$ ни қўшиб ва айириб) тасвирлаш мумкин:

$$\sum n_i (x_i-\overline{x})^2 = N_2 D_{2гр} + N_2(\overline{x}_2-\overline{x})^2. \qquad (***)$$

(**) ва (***) ни (*) га қўямиз

$$D_{ум.} = \frac{N_1 D_{1гр} + N_2 D_{2гр}}{n} + \frac{N_1(\overline{x}_1-\overline{x})^2 + N_2(\overline{x}_2-\overline{x})^2}{n} =$$

$$= D_{гр.ичи} + D_{гр.аро}.$$

Шундай қилиб,

$$D_{ум.} = D_{гр.ичи} + D_{гр.аро}.$$

Исботланган теоремани яққол тасаввур қилишга ёрдам берадиган мисол олдинги параграфда келтирилган.

Эслатма. Теорема фақат назарий аҳамиятга эга бўлмасдан, балки муҳим амалий аҳамиятга ҳам эга. Масалан, кузатишлар натижасида белгининг бир нечта группа қийматлари ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда умумий дисперсияни ҳисоблаш учун группаларни ягона тўпламга бирлаштирмаслик ҳам мумкин. Иккинчи томондан, тўплам катта ҳажмга эга бўлса, у ҳолда уни бир нечта группага ажратиш мақсадга мувофиқ. У ҳолда ҳам, бу ҳолда ҳам умумий дисперсияларни ҳисоблаш айрим группаларнинг дисперсияларини ҳисоблаш билан алмаштирилади, бу эса ҳисоблашларни соддалаштиради.

13- §. Бош дисперсияни тузатилган танланма дисперсия орқали баҳолаш

Бош тўпламдан X сон белги устида n та ўзаро боғлиқ бўлмаган кузатиш ўтказиш натижасида n ҳажмли такрорий танланма олинган бўлсин:

белги қийматлари	x_1,	x_2,	...,	x_k,
частотаси	n_1,	n_2,	...,	n_k,
шу билан бирга	$n_1 +$	$n_2 +$	... +	$n_k = n$.

Номаълум $D_{\text{Б}}$ бош дисперсияни танланмадаги маълумотлар бўйича баҳолаш (тақрибан топиш) талаб қилинади. Агар бош дисперсиянинг баҳоси сифатида танланма дисперсияни қабул қилинадиган бўлса, у ҳолда бу баҳо систематик хатоларга олиб келади; у бош дисперсиянинг камайган қийматларини беради. Бу нарса танланма дисперсия бош дисперсия $D_{\text{Б}}$ нинг силжиган баҳоси бўлиши (буни исботлаш мумкин) билан тушунтирилади, бошқача сўз билан айтганда, танланма дисперсиянинг математик кутилиши баҳоланаётган бош дисперсияга тенг бўлмасдан, балки

$$M|D_{\text{Т}}| = \frac{n-1}{n} D_{\text{Б}}$$

га тенг.

Танланма дисперсияни унинг математик кутилиши бош дисперсияга тенг бўладиган қилиб осонгина «тузатиш» мумкин. Бунинг учун $D_{\text{Т}}$ ни $\frac{n}{n-1}$ касрга кўпайтириш кифоя. Буни бажариб «тузатилган дисперсияни» ҳосил қиламиз, уни одатда s^2 орқали белгиланади:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{Т}} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{Т}})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{Т}})^2}{n-1}.$$

Тузатилган дисперсия бош дисперсия учун силжимаган баҳодир, албатта. Дарҳақиқат,

$$M[s^2] = M\left[\frac{n}{n-1} D_{\text{т}}\right] = \frac{n}{n-1} M[D_{\text{т}}] =$$

$$= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_{\text{Б}} = D_{\text{Б}}.$$

Шундай қилиб, бош дисперсиянинг баҳоси сифатида ушбу

$$s^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{т}})^2}{n-1}$$

тузатилган дисперсия қабул қилинади.

Бош тўпламнинг ўртача квадратик четланишини баҳолаш учун «тузатилган» ўртача квадратик четланишдан фойдаланилади, у тузатилган дисперсиядан олинган квадрат илдизга тенг:

$$s = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{т}})^2}{n-1}}.$$

s силжимаган баҳо эмаслигини таъкидлаймиз; бу фактни таъкидлаш мақсадида «тузатилган» ўртача квадратик четланиш деб ёздик ва бундан кейин ҳам шундай ёзамиз.

Эслатма. Ушбу

$$D_{\text{т}} = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x}_{\text{т}})^2}{n} \quad \text{ва} \quad s^2 = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x}_{\text{т}})^2}{n-1}$$

формулаларни солиштириб, улар махражлари билангина фарқ қилишини кўрамиз. Равшанки, танланма ҳажми n нинг етарли катта қийматларида танланма ва тузатилган дисперсиялар бир-биридан кам фарқ қилади. Практикада одатда тахминан $n < 30$ бўлганда тузатилган дисперсиядан фойдаланилади.

14- §. Баҳонинг аниқлиги, ишончли эҳтимол (ишончлилик). Ишончли интервал

Нуқтавий баҳо деб битта сон билан аниқланадиган баҳога айтилади. Юқорида кўрилган барча баҳолар—нуқтавийдир. Кичик ҳажмли танланма бўлган ҳолда нуқтавий баҳо баҳоланаётган параметрдан анча фарқ қилиши, яъни қўпол хатоларга олиб келиши мумкин. Шу сабабли танланма ҳажми унча катта бўлмаганда интервал баҳолардан фойдаланиш лозим.

Интервал баҳо деб иккита сон — интервалнинг учлари билан аниқланадиган баҳога айтилади. Интервал баҳолар баҳоларнинг аниқлиги ва ишончлигини (бу тушунчаларнинг маъноси қуйида ойдинлашади) баҳолашга имкон беради.

Танланма маълумотлари бўйича топилган Θ^* статистик характеристика Θ номаълум параметрнинг баҳоси бўлиб хизмат қилсин. Θ ни ўзгармас сон деб ҳисоблаймиз (Θ тасодифий миқдор ҳам бўлиши мумкин). $|\Theta - \Theta^*|$ айирманинг абсолют катталиги қанчалик кичик бўлса Θ^* баҳо Θ параметрни шунчалик аниқ баҳолаши равшан. Бошқача сўз билан айтганда, $\delta > 0$ ва $|\Theta - \Theta^*| < \delta$ бўлса, у ҳолда δ қанчалик кичик бўлса, Θ^* баҳо шунча аниқдир. Шундай қилиб, δ сон *баҳонинг аниқлигини* характерлайди.

Лекин статистик методлар Θ^* баҳо $|\Theta - \Theta^*| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантиради деб қатъий даъво қилишга имкон бермайди; бу тенгсизлик амалга ошадиган γ эҳтимол ҳақидагина гапириш мумкин.

Θ баҳонинг Θ^* бўйича *ишончлилиги (ишончли эҳтимол)* деб $|\Theta - \Theta^*| < \delta$ тенгсизликнинг амалга ошиш эҳтимоли γ га айтилади. Одатда баҳонинг ишончлилиги олдиндан берилади, бунда γ сифатида бирга яқин сон олинади. Кўпинча ишончлиликни 0,95; 0,99 ва 0,999 қилиб берилади.

Айтайлик, $|\Theta - \Theta^*| < \delta$ бўлиш эҳтимоли γ га тенг бўлсин:

$$P[|\Theta - \Theta^*| < \delta] = \gamma.$$

$|\Theta - \Theta^*| < \delta$ тенгсизликни унга тенг кучли

$$-\delta < \Theta - \Theta^* < \delta \text{ ёки } \Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta$$

қўш тенгсизлик билан алмаштириб,

$$P\ [\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta] = \gamma$$

га эга бўламиз. Бу муносабатни бундай тушуниш лозим: $(\Theta^* - \delta,\ \Theta^* + \delta)$ интервалнинг номаълум Θ параметрни ўз ичига олиш (қоплаш) эҳтимоли γ га тенг.

Ишончли интервал деб номаълум параметрни берилган γ ишончлилик билан қоплайдиган $(\Theta^* - \delta,\ \Theta^* + \delta)$ интервалга айтилади.

Эслатма. $(\Theta^* - \delta,\ \Theta^* + \delta)$ интервал тасодифий учларга эга (улар ишончли чегаралар дейилади). Дарҳақиқат, турли танланмаларда

Θ нинг турли қийматлари ҳосил бўлади. Бинобарин, танланмадан танланмага ўтишда ишончли интервалнинг учлари ҳам ўзгариб боради, яъни ишончли чегараларнинг ўзи ҳам тасодифий миқдорлар: x_1, $x_2 \dots x_n$ нинг функциялари бўлади.

Бунда тасодифий миқдор баҳоланаётган параметр Θ эмас, балки ишончли интервал бўлгани учун Θ нинг берилган интервалга тушиш эҳтимоли ҳақида эмас, балки ишончли интервал Θ ни қоплаш эҳтимоли ҳақида гапириш тўғрироқ бўлади.

Ишончли интерваллар методини америкалик статистик Ю. Нейман инглиз статисти Р. Фишер ғояларига асосланиб ишлаб чиққан.

15- §. Нормал тақсимотнинг σ маълум бўлганда математик кутилишини баҳолаш учун ишончли интерваллар

Бош тўпламнинг X сон белгиси нормал тақсимланган, шу билан бирга бу тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши σ маълум бўлсин. Номаълум a математик кутилишни танланма ўртача қиймат $\bar{x}$ орқали баҳолаш талаб қилинади. Ўз олдимизга a параметрни γ ишончлилик билан қоплайдиган ишончли интервалларни топишни мақсад қилиб қўямиз.

$\bar{x}$ танланма ўртача қийматни $\bar{X}$ тасодифий миқдор сифатида ($\bar{x}$ танланмадан танланмага ўтганда ўзгаради), белгининг x_1, $x_2, \dots, x_n$ танланма қийматларини бир хил тақсимланган эркли X_1, $X_2, \dots, X_n$ тасодифий миқдорлар сифатида қараймиз (бу сонлар ҳам танланмадан танланмага ўзгариб боради). Бошқача сўз билан айтганда, бу миқдорларнинг ҳар бирини математик кутилиши a га, ўртача квадратик четланиши σ га тенг.

Қуйидагини исботсиз қабул қиламиз: агар X тасодифий миқдор нормал тақсимланган бўлса, у ҳолда эркли кузатишлар бўйича топилган $\bar{X}$ танланма ўртача қиймат ҳам нормал тақсимланган. $\bar{X}$ тақсимотининг параметрлари бундай (VIII боб, 9- §):

$$M(\bar{X}) = a, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Ушбу

$$P(|\bar{X} - a| < \delta) = \gamma$$

муносабат бажарилишини талаб қиламиз, бу ерда γ берилган ишончлилик. Қуйидаги

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

формулада (XII боб, 6-§) X ни $\overline{X}$ га ва σ ни $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ га алмаштириб,

$$P(|\overline{X} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$.

Сўнгги тенгликдан $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ни топиб, қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$P\left(\left|\overline{X} - a\right| < t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t).$$

P эҳтимол γ га тенглигини эътиборга олиб (ишчи формулани ҳосил қилиш учун танланма ўртача қийматни яна $\overline{x}$ орқали белгилаймиз), узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P\left(\overline{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma\ .$$

Ҳосил қилинган бу муносабатнинг маъноси қуйидагича: γ ишонч билан айтиш мумкинки, $\left(\overline{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ишончли интервал номаълум a параметрни қоплайди; баҳонинг аниқлиги $\delta = t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Шундай қилиб, юқорида қўйилган масала тўлиқ ечилди. t сон $2\Phi(t) = \gamma$ ёки $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ тенгликдан аниқланишини айтиб ўтамиз: Лаплас функцияси жадвали (2-илова) бўйича Лаплас функциясининг $\frac{\gamma}{2}$ га тенг қиймати мос келадиган t аргумент қиймати топилади.

1-Эслатма. $|\overline{x} - a| < t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ баҳо классик деб аталади.

Классик баҳонинг аниқлигини кўрсатувчи $\delta = t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ формуладан қуйидаги хулосаларга келиш мумкин:

1) танланма ҳажми n нинг ортиши билан δ сон камаяди, бинобарин, баҳонинг аниқлиги ортади;

2) $\gamma = 2\Phi(t)$ баҳо ишончлилигининг ортиши t нинг ортишига ($\Phi(t)$ ўсувчи функция), ва демак, δ нинг ҳам ортишига олиб келади;

бошқача сўз билан айтганда, классик баҳо ишончлилигининг ортиши унинг аниқлигининг пасайишига олиб келади.

Мисол. X тасодифий миқдор ўртача квадратик четланиши $\sigma = 3$ маълум бўлган нормал тақсимотга эга. Танланма ҳажми $n = 36$ ва баҳонинг ишончлилиги $\gamma = 0,95$ берилган. Номаълум a математик кутилишни $\overline{x}$ танланма ўртача қийматлар бўйича баҳолаш учун ишончли интервалларни топинг.

Ечилиши. t ни топамиз. $2\Phi(t) = 0,95$ муносабатдан $\Phi(t) = 0,475$ ни ҳосил қиламиз. Жадвалдан (2-илова)

$$t = 1,96$$

ни топамиз. Баҳонинг аниқлигини топамиз:

$$\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 3}{\sqrt{36}} = 0,98.$$

Ишончли интерваллар бундай:

$$(\overline{x} - 0,98; \quad \overline{x} + 0,98).$$

Масалан, агар $x = 4,1$ бўлса, у ҳолда ишончли интервал қуйидаги ишончли чегараларга эга бўлади:

$$\overline{x} - 0,98 = 4,1 - 0,98 = 3,12;$$
$$\overline{x} + 0,98 = 4,1 + 0,98 = 5,08.$$

Шундай қилиб, номаълум a параметрнинг танланма маълумотлари билан мос келадиган қийматлари

$$3,12 < a < 5,08$$

тенгсизликни қаноатлантиради. Қуйидагича

$$P(3,12 < a < 5,08) = 0,95$$

ёзиш хато бўлишини таъкидлаб ўтамиз. Дарҳақиқат, a—ўзгармас катталик бўлгани учун у ё топилган интервалда ётади (у ҳолда $3,12 < a < 5,08$ ҳодиса муқаррар ва унинг эҳтимоли бирга тенг), ёки унда ётмайди (у ҳолда $3,2 < a < 5,08$ мумкин бўлмаган ҳодиса бўлиб, унинг эҳтимоли 0 га тенг). Бошқача сўз билан айтганда, ишончли интервални баҳоланаётган параметр билан боғламаслик керак: параметр ишончли интервалнинг чегаралари билангина боғланган, чегаралар эса, олдин кўрсатилганидек, танланмадан танланмага ўтганда ўзгариб боради.

Берилган ишончлиликнинг маъносини тушунтирамиз $\gamma = 0,95$ ишончлилик қуйидагини кўрсатади: агар етарлича кўп сонда танланмалар олинган бўлса, у ҳолда уларнинг 95%и шундай ишончли интервалларни аниқлайдики, бу интервалларда параметр ҳақиқатан хам ётади; 5% ҳоллардагина у ишончли интервал чегарасидан четда ётиши мумкин.

2-эслатма. Агар математик кутилишни олдиндан берилган δ аниқлик ва γ ишончлилик билан баҳолаш талаб қилинса, у ҳолда бу аниқликни таъминлаб берадиган минимал ҳажмли танланманинг ҳажмини

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$$

формуладан топилади ($\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ тенгликнинг натижаси).

16-§ Нормал тақсимот математик кутилишини σ номаълум бўлганда баҳолаш учун ишончли интерваллар

Айтайлик, бош тўпламнинг X сон белгиси нормал тақсимланган, шу билан бирга σ ўртача квадратик четланиш номаълум бўлсин. Номаълум a математик кутилишни ишончли интерваллар ёрдамида баҳолаш талаб қилинади. Равшанки, бу ўринда олдинги параграф натижаларидан фойдаланиб бўлмайди, чунки у ерда σ маълум деб фараз қилинган эди.

Танланма маълумотлари бўйича шундай

$$T = \frac{\overline{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

тасодифий миқдорни (унинг қийматларини t орқали белгилаймиз) тузиш мумкин эканки, у $k = n - 1$ озодлик даражали Стьюдент тақсимотига эга бўлар экан (параграф охиридаги тушунтиришга қаранг) бу ерда $\overline{X}$ — танланма ўртача қиймат, S — «тузатилган» ўртача квадратик четланиш, n — танланма ҳажми.

Дифференциал функция

$$S(t, n) = B_n\left[1 + \frac{t^2}{n-1}\right]^{-\frac{n}{2}}$$

бу ерда

$$B_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\;\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Стьюдент тақсимоти n параметр — танланма ҳажми билан (яъни озодлик даражалари сони $k = n - 1$ билан) аниқланишини, a ва σ параметрларга эса боғлиқмаслигини кўриб турибмиз (бу хусусият унинг афзаллигидир). $S(t, n)$ функция t бўйича жуфт бўлгани учун $\left|\frac{X-a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < \gamma$ тенгсизликнинг рўй бериш эҳтимоли бундай аниқланади (XI боб, 2-§, эслатма):

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int_0^{t_\gamma} S(t, n)dt = \gamma.$$

Қавс ичидаги тенгсизликни унга тенг кучли қўш тенгсизлик билан алмаштириб,

$$P\left(\bar{X} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, Стьюдент тақсимотидан фойдаланиб, номаълум a параметрни γ ишончлилик билан қоплайдиган $\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$, $\bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$ ишончли интервални топдик. Бу ерда $\bar{X}$ ва S тасодифий миқдорлар танланма бўйича топилган тасодифий бўлмаган $\bar{x}$ ва s миқдорлар билан алмаштирилган. Жадвал бўйича (3-илова) берилган n ва γ бўйича t_γ ни топиш мумкин.

Мисол. Бош тўпламнинг X сон белгиси нормал тақсимланган. $n = 16$ ҳажмли танланма бўйича $\bar{x} = 20{,}2$ танланма ўртача қиймат ва $s = 0{,}8$ «тузатилган» ўртача квадратик четланиш топилган. Номаълум математик кутилишни 0,95 ишончлилик билан ишончли интервал ёрдамида баҳоланг.

Ечилиши. t_γ ни топамиз. Жадвалдан фойдаланиб (3-илова) $\gamma = 0{,}95$ ва $n = 16$ бўйича $t_\gamma = 2{,}13$ ни топамиз.

Ишончли чегараларни топамиз:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 20{,}2 - 2{,}13 \frac{0{,}8}{\sqrt{16}} = 19{,}774,$$

$$\bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 20{,}2 + 2{,}13 \frac{0{,}8}{\sqrt{16}} = 20{,}626.$$

Шундай қилиб, a номаълум параметр 0,95 ишончлилик билан $19{,}77 < a < 20{,}626$ ишончли интервалда ётади.

Эслатма. Ушбу

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

лимит муносабатлардан танланма ҳажми чексиз ортганда Стьюдент тақсимоти нормал тақсимотга интилиши келиб чиқади. Шу сабабли $n > 30$ да Стьюдент тақсимоти ўрнига нормал тақсимотдан фойдаланиш мумкин.

Лекин қуйидагини таъкидлаб ўтиш айниқса муҳим: *кичик танланмаларда* ($n < 30$), айниқса, n нинг кичик қийматларида тақсимотни нормал тақсимотга алмаштириш қўпол хатоларга, чунончи, ишончли интервални асоссиз торайишига, яъни баҳо аниқлигининг ортишига олиб келади. Масалан, агар $n = 5$ ва $\gamma = 0{,}99$ бўлса, у ҳолда Стьюдент тақсимотидан фойдаланиб, $t_\gamma = 4{,}6$ ни, Лаплас функциясидан фойдаланиб эса $t_\gamma = 2{,}58$ ни топамиз, демак, кейинги ҳолда ишончли интервал Стьюдент тақсимоти бўйича топилган интервалдан торроқ бўлиб чиқди.

Стьюдент тақсимоти танланма кичик бўлганда унча аниқ бўлмаган натижалар бериш ҳолати Стьюдент тақсимотининг кучсизлигидан дарак бермасдан, балки кичик танланма бизни қизиқтираётган белги ҳақида кам информацияга эгалиги билан тушунтирилади.

Тушунтириш. Илгари кўрсатилган эдики (XII боб, 14-§), Z нормал миқдор, шу билан бирга $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$ бўлиб, V эса Z га боғлиқ бўлмаган миқдор бўлиб, k озодлик даражали χ^2 қонун бўйича тақсимланган бўлса, у ҳолда

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{k}}} \qquad (*)$$

миқдор k эркинлик даражали Стьюдент қонун бўйича тақсимланган.

Бош тўпламнинг X сон белгиси нормал тақсимланган, шу билан бирга $M(X) = a$, $\sigma(X) = \sigma$ бўлсин. Агар бу тўпламдан n ҳажмли танланмалар олиниб, улар бўйича танланма ўртача қийматлар топиладиган бўлса, у ҳолда танланма ўртача қиймат нормал тақсимланганлигини, шу билан бирга

$$M(\overline{X}_{\text{т}}) = a, \qquad \sigma(\overline{X}_{\text{т}}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

эканлигини (VIII боб, 9-§) исботлаш мумкин.

У ҳолда

$$Z = \frac{\overline{X}_{\text{т}} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad (**)$$

тасодифий миқдор ҳам $\overline{X}_{\text{т}}$ нормал аргументнинг чизиқли функцияси сифатида нормал тақсимотга эга (XII боб, 10-§, эслатма), шу билан бирга $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$ бўлади.

Z тасодифий миқдорга боғлиқ бўлмаган

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \qquad (***)$$

(S^2 — тузатилган танланма дисперсия) тасодифий миқдор $k = n - 1$ озодлик даражали χ^2 қонун бўйича тақсимланганлиги исбот қилинган.

Демак, (**) ва (***) ни (*) га қўйиб,

$$T = \frac{(\overline{X}_{\text{т}} - a)\sqrt{n}}{S}$$

миқдорни ҳосил қиламиз, у $k = n - 1$ озодлик даражали Стьюдент қонуни бўйича тақсимланган.

17-§. Ўлчанаётган миқдорнинг ҳақиқий қийматини баҳолаш

Ҳақиқий қиймати a номаълум бўлган бирор физик катталик устида ўзаро боғлиқ бўлмаган, тенг (бир хил) аниқликдаги n марта ўлчаш ўтказилаётган бўлсин. Алоҳида ўлчамларнинг натижаларини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ тасодифий миқдорлар сифатида қараймиз. Бу миқдорлар эркли (ўлчашлар эркли), бир хил a математик кутилишга (ўлчанаётган миқдорнинг ҳақиқий қиймати), бир хил σ^2 дисперсияларга эга (ўлчамлар бир хил аниқликда) ва нормал тақсимланган (бундай йўл қўйишни тажрибалар тасдиқлайди). Шундай қилиб, олдинги иккита параграфда ишончли интервалларни келтириб чиқаришда қилинган барча фаразлар бажарилади, бинобарин, биз у ерда ҳосил қилинган формулалардан фойдаланишга ҳақлимиз. Бошқача сўз билан айтганда, ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қийматини алоҳида ўлчашлар натижаларининг арифметик ўртача қиймати бўйича ишончли интерваллар ёрдамида баҳолаш мумкин. Одатда σ номаълум бўлгани учун 16-§ формулаларидан фойдаланиш лозим.

Мисол. Физик миқдорни эркли, тенг (бир хил) аниқликдаги 9 та ўлчаш маълумотлари бўйича айрим ўлчашларнинг арифметик ўртача қиймати $\bar{x} = 42{,}319$ ва «тузатилган» ўртача квадратик четланиш $s = 5{,}0$ топилган. Ўлчанаётган миқдорнинг ҳақиқий қийматини $\gamma = 0{,}95$ ишончлилик билан баҳолаш талаб қилинади.

Ечилиши. Ўлчанаётган миқдорнинг ҳақиқий қиймати унинг математик кутилишига тенг. Шу сабабли масала математик кутилиш a ни (σ номаълум бўлганда) берилган $\gamma = 0{,}95$ ишончлилик билан қоплайдиган

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$$

интервал ёрдамида баҳолашга келтирилади.

Жадвалдан (3-илова) фойдаланиб, $\gamma = 0{,}95$ ва $n = 9$ бўйича $t_\gamma = 2{,}31$ ни топамиз.

Баҳонинг аниқлигини топамиз:

$$t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}31 \cdot \frac{5}{9} = 3{,}85.$$

Ишончлилик чегараларини топамиз:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 42{,}319 - 3{,}85 = 36{,}469;$$

$$\bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 42{,}319 + 3{,}85 = 46{,}169.$$

Шундай қилиб, ўлчанаётган миқдорнинг ҳақиқий қиймати 0,95 ишончлилик билан ушбу интервалда ётади:

$$38{,}469 < a < 46{,}169.$$

18-§. Нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши σ ни баҳолаш учун ишончли интерваллар

Бош тўпламнинг X сон белгиси нормал тақсимланган бўлсин. Бош ўртача крадратик четланиш σ ни «тузатилган» ўртача квадратик четланиш s орқали баҳолаш талаб қилинади. σ параметрни берилган γ ишончлилик билан қоплайдиган ишончли интервалларни топишни ўз олдимизга мақсад қилиб қўяйлик.

Қуйидаги

$$P(|\sigma - s| < \delta) = \gamma$$

ёки

$$P(s - \delta < \sigma < s + \delta) = \gamma$$

муносабат бажарилишини талаб қилайлик.

Тайёр жадвалдан фойдаланиш мумкин бўлиши учун ушбу $s - \delta < \delta < s + \delta$ қўш тенгсизликни унга тенг кучли

$$s\left(1 - \frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

тенгсизликка алмаштирамиз. $\frac{\delta}{s} = q$ деб,

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q) \qquad (*)$$

ни ҳосил қиламиз. Энди q ни топиш қолди. Шу мақсадда ушбу «хи» тасодифий миқдорни киритамиз:

$$\chi = \frac{S}{\sigma}\sqrt{n-1},$$

бу ерда n — танланма ҳажми.

Олдин кўрсатилгани бўйича (16-§, тушунтириш (***) муносабат $\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2}$ миқдор χ^2 қонун бўйича тақсимланган, шу сабабли ундан олинган квадрат илдизни χ орқали белгиланади.

χ тақсимотнинг дифференциал функцияси қуйидаги кўринишга эга (шу параграф охиридаги тушунтиришга қаранг):

$$R(\chi, n) = \frac{\chi^{n-2} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \qquad (**)$$

Кўриб турганимиздек, бу тақсимот баҳоланаётган σ параметрга боғлиқ бўлмасдан, балки танланма ҳажми n гагина боғлиқ.

(*) тенгсизликни у

$$\chi_1 < \chi < \chi_2$$

кўринишни оладиган қилиб, ўзгартирамиз. Бу тенгсизликнинг эҳтимоли берилган γ эҳтимолга тенг (XI боб, 2-§), яъни

$$\int_{\chi_1}^{\chi_2} R(\chi,\ n)\ d\chi = \gamma.$$

$q < 1$ деб фараз қилиб, (*) тенгсизликни бундай ёзамиз:

$$\frac{1}{S(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{S(1-q)}.$$

Бу тенгсизликнинг барча хадларини $S\sqrt{n-1}$ га кўпайтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{S\sqrt{n-1}}{\sigma} \quad \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}$$

ёки

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

Бу тенгсизлик, бинобарин, унга тенг кучли (*) тенгсизликнинг бажарилиш эҳтимоли

$$\int_{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}} R(\chi,n)d\chi = \gamma$$

га тенг. Бу тенгламадан берилган n ва γ бўйича q ни топиш мумкин. q ни амалда топишда жадвалдан фойдаланилади (4-илова).

s ни танланма бўйича ва q ни жадвал бўйича топиб, σ ни берилган γ ишончлилик билан қоплайдиган ишончли интервални, чунончи,

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q)$$

интервални топамиз.

1-мисол. Бош тўпламнинг X сон белгиси нормал тақсимланган. $n = 25$ ҳажмли танланма бўйича «тузатилган» ўртача квадратик четланиш $s = 0,8$ топилган. Бош ўртача квадратик четланиш σ ни 0,95 ишончлилик билан қоплайдиган ишончли интервални топинг.

Ечилиши. Жадвалдан (4-илова) $\gamma = 0,95$ ва $n = 25$ маълумотлар бўйича $q = 0,32$ ни топамиз. Изланаётган (*) ишончли интервал бундай:

$$0,8(1 - 0,32) < \sigma < 0,8(1 + 0,32)$$

ёки

$$0,544 < \sigma < 1,056.$$

Эслатма. Юқорида $q < 1$ деб фараз қилинган эди. Агар $q > 1$ бўлса, у ҳолда (*) тенгсизлик ($\sigma > 0$ лигини эътиборга олсак) қуйидаги

$$0 < \sigma < s\,(1 + q)$$

кўринишни ёки ($q < 1$ ҳолдагига ўхшаш алмаштиришлардан сўнг)

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \infty$$

кўринишни олади. Демак, $q > 1$ қийматлар

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}}^{\infty} R(\chi, n)\,d\chi = \gamma$$

тенгликдан топилиши мумкин.

Амалда берилган турли n ва γ ларга мос $q>1$ қийматларни топиш учун жадвалдан фойдаланилади (4- илова).

2-мисол. Бош тўпламнинг X сон белгиси нормал тақсимланган. $n = 10$ ҳажмли танланма бўйича «тузатилган» ўртача квадратик четланиш $s = 0,16$ топилган. Бош ўртача квадратик четланиш σ ни 0,999 ишончлилик билан қоплайдиган ишончли интервални топинг.

Ечилиши. Жадвалдан (4-илова) берилган $\gamma = 0,999$ ва $n = 10$ маълумотлар бўйича $q = 1,80$ $(q > 1)$ ни топамиз. Изланаётган ишончли интервал бундай:

$$0 < \sigma < 0,16(1 + 1,80)$$

ёки

$$0 < \sigma < 0,448.$$

Тушунтириш. χ тақсимотнинг дифференциал функцияси (**) кўринишга эга эканлигини кўрсатамиз.

Агар X тасодифий миқдор $k = n - 1$ озодлик даражали χ^2 қонун бўйича тақсимланган бўлса, у ҳолда унинг дифференциал функцияси (XII боб 13-§):

$$f(x)=\frac{x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

ёки $k=n-1$ ўрнига қўйишдан сўнг,

$$f(x)=\frac{x^{\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$

$\chi=\varphi(X)=\sqrt{X}$ $(\chi>0)$ функциянинг тақсимотини топиш учун ушбу

$$g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|$$

формуладан (XII боб, 10-§) фойдаланамиз. Бундан тескари функция

$$x=\psi'(\chi)=\chi^2$$

ва

$$\psi'(\chi)=2\chi.$$

Сўнгра $\chi>0$ бўлгани учун $|\psi'(\chi)|=2\chi$. Демак,

$$g(\chi)=f|\psi(\chi)|\cdot|\psi'(\chi)|=\frac{(\chi^2)^{\frac{n-3}{2}}\cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot 2\chi.$$

Элементар алмаштиришлар бажариб ва белгиларни ўзгартириб ($g(\chi)$ ни $R(\chi,n)$ га алмаштирамиз), узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$R(\chi,n)=\frac{\chi^{n-2}e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

19-§. Ўлчашлар аниқлигининг баҳолари

Хатолар назариясида ўлчашлар аниқлигини (асбобларнинг аниқлигини) ўлчашлардаги тасодифий хатоларнинг ўртача квадратик четланиши σ ёрдамида характерлаш қабул қилинган. σ ни баҳолаш учун «тузатилган» ўртача квадратик четланиш s дан фойдаланилади.

Одатда ўлчашлар ўзаро эркли, бир хил математик кутилиш (ўлчанаётган миқдорнинг ҳақиқий қиймати) ва бир хил дисперсияга (бир хил аниқликдаги ўлчашлар бўлган ҳолда) эга бўлганидан аввалги параграфда баён қилинган назарияни ўлчашларни баҳолаш учун ҳам қўлланилиши мумкин.

Мисол. Бир хил аниқликдаги 15 та ўлчаш бўйича ўртача квадратик четланиш $s = 0{,}12$ топилган. Ўлчаш аниқлигини 0,99 ишончлилик билан топинг.

Ечилиши. Ўлчаш аниқлиги тасодифий хатоларнинг ўртача квадратик четланиши σ билан характерланади, шу сабабли масала σ ни берилган 0,99 ишончлилик билан қоплайдиган ишончли интервал (*) ни (18-§) топишга келтирилади.

Жадвалдан (4-илова) $\gamma = 0{,}99$ ва $n = 15$ бўйича $q=0{,}73$ ни топамиз. Изланаётган ишончли интервал бундай:

$$0{,}12\,(1-0{,}73)<\sigma<0{,}12(1+0{,}73)$$

ёки

$$0{,}03<\sigma<0{,}21.$$

20-§. Вариацион қаторнинг бошқа характеристикалари

Вариацион қаторнинг ўртача танланма қиймати ва танланма дисперсиясидан ташқари бошқа характеристикалари ҳам ишлатилади. Улардан асосийларини келтирамиз.

Мода M_0 деб энг катта частотага эга бўлган вариантага айтилади. Масалан, ушбу

варианта	1	4	7	9
частота	5	1	20	6

қатор учун мода 7 га тенг.

Медиана m_e деб вариацион қаторни варианталар сони тенг бўлган икки қисмга ажратадиган вариантага айтилади. Агар варианталар сони тоқ, яъни $n = 2k + 1$ бўлса, у ҳолда $m_e = x_{k+1}$; n жуфт, яъни $n = 2k$ да медиана:

$$m_e=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}.$$

Масалан, 2 3 5 6 7 қатор учун медиана 5 га; 2 3 5 6 7 9 қатор учун медиана $\frac{5+6}{2}=5{,}5$ га тенг.

Вариация қулочи R деб энг кичик ва энг катта варианталар айирмасига айтилади:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Масалан,

$$1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 10$$

қатор учун қулоч $10 - 1 = 9$ га тенг.

Қулоч вариацион қатор тарқоқлигининг энг содда характеристикасидир.

Ўртача абсолют четланиш Θ деб абсолют четланишларнинг ўртача арифметик қийматига айтилади:

$$\Theta = \frac{\sum n_i \left| x_i - \bar{x}_\text{т} \right|}{\sum n_i}.$$

Масалан,

$$\begin{array}{ccccc} x_i & 1 & 3 & 6 & 16 \\ n_i & 4 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

қатор учун:

$$\bar{x}_\text{т} = \frac{4 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot 16}{4 + 10 + 5 + 1} = \frac{80}{20} = 4;$$

$$\Theta = \frac{4 \cdot |1 - 4| + 10 \cdot |3 - 4| + 5 \cdot |6 - 4| + 1 \cdot |16 - 4|}{20} = 2{,}2.$$

Ўртача абсолют четланиш вариацион қатор тарқоқлигининг характеристикаси бўлиб хизмат қилади.

Вариация коэффициенти V деб ўртача танланма квадратик четланишнинг ўртача танланма қийматга нисбатининг процентларда ифодаланганига айтилади:

$$V = \frac{\sigma_\text{т}}{\bar{x}_\text{т}} \cdot 100\%.$$

Вариация коэффициенти иккита вариацион қаторнинг тарқоқлик катталигини таққослаш учун хизмат қилади: вариацион қаторлардан вариация коэффициенти катта бўлгани кўпроқ тарқоқликка эга.

Эслатма. Юқорида вариацион қатор танланма маълумотлари бўйича тузилган деб фараз қилинди. Шу сабабли тавсифланган барча характеристикалар *танланма* характеристикалар дейилади; агар вариацион қатор бош тўплам маълумотлари бўйича тузилган бўлса, у ҳолда характеристикалар *бош* характеристикалар дейилади.

Масалалар

1. Қуйидаги иккита группадан иборат тўпламнинг группавий ўртача қийматини топинг:

биринчи группа	x_i	0,1	0,4	0,6
	n_i	3	2	5;
иккинчи группа	x_i	0,1	0,3	0,4
	n_i	10	4	6.

Жавоби. $\overline{x}_1 = 0,41$; $\overline{x}_2 = 0,23$.

2. 1-масала маълумотлари бўйича умумий ўртача қийматни ушбу иккита усул билан топинг: а) иккала группани битта тўпламга бирлаштиринг; б) 1-масалада топилган группавий ўртача қийматлардан фойдаланинг.

Жавоби. $\overline{x} = 0,29$.

3. Статистик тўплам тақсимоти берилган:

x_i	1	4	5
n_i	6	11	3.

Четланишларнинг тегишли частоталарга кўпайтмалари йиғиндиси нолга тенг эканлигига ишонч ҳосил қилинг.

4. Статистик тўплам тақсимоти берилган:

x_i	4	7	10	15
n_i	10	15	20	5.

Тўпламнинг дисперсиясини: а) дисперсия таърифидан фойдаланиб, б) $D = \overline{x^2} - [\overline{x}]^2$ формуладан фойдаланиб топинг.

Жавоби. $D = 9,84$.

5. Қуйидаги учта группадан иборат тўпламнинг группаичи, группааро ва умумий дисперсияларини топинг.

биринчи группа	x_i	1	2	8
	n_i	30	15	5;
иккинчи группа	x_i	1	6	
	n_i	10	15;	
учинчи группа	x_i	3	8	
	n_i	20	5.	

Жавоби. $D_{\text{гр·ичи}} = 4,6$;
$D_{\text{гр·аро}} = 1$. $D_{\text{ум}} = 5,6$

6. Қуйидаги иккита группадан иборат тўпламнинг группаичи, группааро ва умумий дисперсияларини топинг:

биринчи группа	x_i	2	7
	n_i	6	4;
иккинчи группа	x_i	2	7
	n_i	2	8.

Жавоби. $D_{\text{гр·ичи}} = 5$; $D_{\text{гр·аро}} = 1$; $D_{\text{ум}} = 6$.

7. Ушбу танланма маълумотлари бўйича тузилган вариацион қаторнинг танланма ва тузатилган дисперсияларини топинг:

варианта	1	2	5	8	9
частота	3	4	6	4	3.

Жавоби. $\sigma_{\text{Т}}^2 = 8,4$; $s^2 = 8,84$

8—9 масалаларда нормал тақсимланган белги танланмасининг ўртача квадратик четланиши, ўртача танланма қиймати ва ҳажми берилган. Номаълум математик кутилишни берилган ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли интервалларни топинг.

8. $\sigma = 2$, $\overline{x}_{\text{Т}}=5,40$, $n=10$, $\gamma=0,95$.

Жавоби. $4,16<a<6,64$.

9. $\sigma=3$, $\overline{x}_{\text{Т}}=20,12$, $n=25$, $\gamma=0,99$

Жавоби. $18,57<a<21,67$.

10. Нормал тақсимланган белги математик кутилишининг танланма ўртача қиймат бўйича баҳосининг $\gamma=0,95$ ишончлилик билан аниқлиги 0,2 га тенг бўладиган танланманинг минимал ҳажмини топинг. Ўртача квадратик четланиш 2 га тенг.

Кўрсатма. 15- § даги 2- эслатмага қаранг.

Жавоби. $n=385$.

11—12- масалаларда нормал тақсимланган белгининг «тузатилган» ўртача квадратик четланиши, танланма ўртача қиймати ва кичик танланмасининг ҳажми берилган. Стьюдент тақсимотидан фойдаланиб, номаълум математик кутилишни берилган ишончлилик билан баҳолаш учун *ишончли интервалларни* топинг.

11. $s=1,5$, $\overline{x}_{\text{Т}}=16,8$, $n=12$, $\gamma=0,95$.

Жавоби. $15,85<a<17,75$.

12. $s=2,4$ $\overline{x}_{\text{Т}}=14,2$, $n=9$, $\gamma=0,99$.

Жавоби. $11,512<a<16,888$.

13. Физик катталик устида бир хил аниқликдаги, боғлиқ бўлмаган 16 ўлчаш маълумотлари бўйича $\overline{x}_{\text{Т}} = 23,161$ ва $s = 0,400$ топилган. Ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қиймати a ни ва ўлчаш аниқлиги σ ни 0,95 ишончлилик билан баҳолаш талаб этилади.

Жавоби. $22,948<a<23,374$;
$0,224<\sigma<0,576$.

Ўн еттинчи боб

ТАНЛАНМАНИНГ ЙИҒМА ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ МЕТОДЛАРИ

1- §. Шартли варианталар

Фараз қилайлик, танланманинг варианталари ортиб бориш тартибида, яъни вариацион қатор кўринишида жойлашган бўлсин.

Тенг узоқликдаги варианталар деб h айирмали арифметик прогрессия ташкил этадиган варианталарга айтилади.

Шартли варианталар деб

$$u_i = \frac{x_i - C}{h}$$

тенглик билан аниқланадиган варианталарга айтилади. бу ерда C—сохта ноль (янги саноқ боши), h—қадам, яъни исталган иккита қўшни дастлабки варианта орасидаги фарқ (янги масштаб бирлиги).

Танланманинг йиғма характеристикаларини ҳисоблашнинг соддалаштирилган усуллари дастлабки варианталарни шартли варианталар билан алмаштиришга асосланган.

Агар вариацион қатор тенг узоқликдаги h қадамли варианталардан иборат бўлса, у ҳолда шартли варианталар бутун сонлар бўлишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, сохта ноль сифатида ихтиёрий вариантани, масалан, x_m ни олайлик, у ҳолда

$$u_i = \frac{x_i - x_m}{h} = \frac{x_1 + (i-1)h - [x_1 + (m-1)h]}{h} = i - m.$$

i ва m бутун сонлар бўлгани учун уларнинг айирмаси $i - m = u_i$ ҳам бутун сондир.

1-эслатма. Сохта ноль сифатида исталган вариантани олиш мумкин. Сохта ноль сифатида вариацион қаторнинг тахминан ўртасида жойлашган варианта (бундай варианта кўпинча энг катта частотага эга бўлади) олинганда ҳисоблашларни максимал соддалашишига эришилади.

2-эслатма. Сохта ноль сифатида олинган вариантага нолга тенг бўлган шартли варианта мос келади.

Мисол. Қуйидаги статистик тақсимотнинг шартли варианталарини топинг:

варианталар	23,6	28,6	33,6	38,6	43,6
частоталар	5	20	50	15	10

Ечилиши. Сохта ноль сифатида 33,6 вариантани танлаймиз (бу варианта вариацион қаторнинг ўртасида жойлашган).

Қадамни топамиз:

$$h = 28,6 - 23,6 = 5.$$

Шартли вариантани топамиз:

$$u_1 = \frac{x_1 - C}{h} = \frac{23,6 - 33,6}{5} = -2.$$

Шунга ўхшаш, қуйидагиларни топамиз:

$$u_2 = -1, \; u_3 = 0, \; u_4 = 1, \; u_5 = 2.$$

Кўриб турибмизки, шартли варианталар унча катта бўлмаган бутун сонлардир. Улар билан операциялар бажариш бошланғич варианталардагига қараганда осонроқ, албатта.

2-§. Оддий, бошланғич ва марказий эмпирик моментлар

Танланманинг йиғма характеристикаларини ҳисоблашда эмпирик моментлардан фойдаланиш қулайдир. Уларнинг таърифлари тегишли назарий моментларнинг таърифларига (VIII боб, 10-§) ўхшаш. Эмпирик моментлар назарий моментлардан фарқли равишда кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланади.

k-тартибли оддий эмпирик момент деб $x_i - c$ айирмалар k-даражаларининг ўртача қийматига айтилади:

$$M'_k = \frac{\sum n_i (x_i - c)^k}{n},$$

бу ерда x_i — кузатиладиган варианта,

n_i — вариантанинг частотаси,

$n = \sum n_i$ — танланма ҳажми,

c — ихтиёрий ўзгармас сон (сохта ноль).

k-тартибли бошланғич эмпирик момент деб $c = 0$ бўлгандаги k-тартибли оддий моментга айтилади:

$$M_k = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}.$$

Хусусан,

$$M_1 = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \bar{x}_{\text{т}},$$

яъни биринчи тартибли бошланғич эмпирик момент танланма ўртача қийматга тенг.

k-тартибли марказий эмпирик момент деб $c = \bar{x}_{\text{т}}$ бўлгандаги k-тартибли оддий моментга айтилади:

$$m_k = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_{\text{т}})^k}{n}.$$

Хусусан,

$$m_2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_{\text{т}})^2}{n} = D_{\text{т}}, \qquad (*)$$

яъни иккинчи тартибли марказий эмпирик момент танланма дисперсияга тенг.

Марказий моментларни оддий моментлар орқали ифодалаш осон (буни китобхоннинг ўзи мустақил бажариб кўришини тавсия қиламиз):

$$m_2 = M_2' - (M_1')^2; \qquad (**)$$

$$\left.\begin{aligned} m_3 &= M_3' - 3M_2' M_1' + 2\,(M_1')^3; \\ m_4 &= M_4' - 4M_3'\,M_1' + 6\,M_2'(M_1')^2 - 3(M_1')^4. \end{aligned}\right\} \quad (***)$$

3- §. Шартли эмпирик моментлар. Марказий моментларни шартли моментлар бўйича топиш

Марказий моментларни ҳисоблаш узундан-узоқ ҳисоблашларни талаб қилади. Ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида дастлабки варианталарни шартли варианталарга алмаштирилади.

k-тартибли шартли эмпирик момент деб шартли варианталар учун ҳисобланган k-тартибли бошланғич моментга айтилади:

$$M_k^* = \frac{\sum n_i u_i^k}{n} = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - c}{h}\right)^k}{n}.$$

Хусусан,

$$M_1^* = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - c}{h}\right)}{n} = \frac{1}{h}\left[\frac{\sum n_i x_i}{n} - c\frac{\sum n_i}{n}\right] = \frac{1}{h}\,(\overline{x}_{\text{т}} - c).$$

Бу ердан

$$\overline{x}_{\text{т}} = M_1^*\,h + c.$$

Шундай қилиб, танланма ўртача қийматни топиш учун биринчи тартибли шартли моментни топиш, уни h га кўпайтириш ва натижага сохта ноль c ни қўшиш кифоя.

Оддий моментларни шартли моментлар орқали ифодалаймиз:

$$M_k^* = \frac{1}{h^k}\cdot\frac{\sum n_i (x_i - c)^k}{n} = \frac{M_k'}{h^k}.$$

Бу ердан

$$M_k' = M_k^*\,h^k.$$

Шундай қилиб, k-тартибли оддий моментни топиш учун ўша тартибли шартли моментни h^k га кўпайтириш кифоя.

Одний моментларни топгандан сўнг эса олдинги параграфдаги (**) ва (***) тенгликлар бўйича марказий моментларни осонгина топиш мумкин. Пировардида, марказий моментларни шартли моментлар орқали ифодалайдиган ва ҳисоблашлар учун кулай бўлган ушбу формулаларни ҳосил қиламиз:

$$m_2 = [M_2^* - (M_1^*)^2]\, h^2; \qquad (**)$$

$$\left.\begin{aligned} m_3 &= [M_3^* - 3\, M_2^* M_1^* + 2\, (M_1^*)^3]\, h^3, \\ m_4 &= [M_4^* - 4\, M_3^* M_1^* + 6\, M_2^* (M_1^*)^2 - 3(M_1^*)^4]\, h^4 \end{aligned}\right\} \quad (***)$$

Жумладан, (**) га ва олдинги параграфдаги (*) муносабатга асосан танланма дисперсияни биринчи ва иккинчи тартибли шартли моментлар бўйича ҳисоблаш формуласини ҳосил қиламиз:

$$D_{\text{Т}} = [M_2^* - (M_1^*)^2]\, h^2. \qquad (****)$$

Марказий моментларни шартли моментлар бўйича ҳисоблаш техникаси келгусида баён қилинади.

4- §. Танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни ҳисоблашнинг кўпайтмалар методи

Кўпайтмалар методи тенг узоқликдаги вариантали вариацион қаторнинг турли тартибли шартли моментларини ҳисоблашнинг қулай усулини беради. Шартли моментларни билган ҳолда эса бизни қизиқтираётган бошланғич ва марказий эмпирик моментларни топиш қийин эмас. Жумладан, кўпайтмалар методи ёрдамида танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни ҳисоблаш қулай. Бунда ҳисоблаш жадвалидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ; у бундай тузилади:

1) жадвалнинг биринчи устунига танланма (дастлабки) варианталар ортиб бориш тартибида ёзилади;

2) иккинчи устунга варианталарнинг частоталари ёзилади; ҳамма частоталар жамланади ва уларнинг йиғиндиси (танланма ҳажми n) устуннинг пастки катагига ёзилади;

3) учинчи устунга шартли варианталар $u_i = \frac{x_i - C}{h}$ ёзилади, бунда сохта ноль C сифатида энг катта частотали варианта танланади, исталган иккита қўшни варианта орасидаги айирма h га тенг деб фараз қилинади; амалда эса учинчи устун бундай тўлдирилади: энг катта частотани ўз

ичига олган сатр катагига 0 ёзилади; нолдан юқоридаги катакларга кетма-кет —1, —2, —3 ва ҳ. к., нолдан пастдаги катакларга эса кетма-кет 1, 2, 3 ва ҳ. к. ёзилади;

4) частоталарни шартли вариантларга кўпайтирилади ва уларнинг кўпайтмалари $n_i u_i$ ларни тўртинчи устунга ёзилади; ҳосил қилинган ҳамма сонларни қўшиб, уларнинг йиғиндиси $\sum n_i u_i$ устуннинг пастки катагига ёзилади;

5) частоталарни шартли вариантларнинг квадратларига кўпайтирилади ва уларнинг кўпайтмалари $n_i u_i^2$ ларни бешинчи устунга ёзилади; ҳосил қилинган ҳамма сонларни қўшиб, уларнинг йиғиндиси $\sum n_i u_i^2$ ни устуннинг пастки катагига ёзилади;

6) частоталарни ҳар қайсиси битта орттирилган шартли вариантларнинг квадратларига кўпайтирилади ва $n_i(u_i+1)^2$ кўпайтмаларни олтинчи контрол устунга ёзилади; ҳосил қилинган барча сонларни қўшиб, уларнинг йиғиндиси $\sum n_i(u_i+1)^2$ ни устуннинг пастки катагига ёзилади.

1-эслатма. Тўртинчи устуннинг манфий сонларини алоҳида қўшиш (уларнинг йиғиндиси A_1 ни энг катта частотани ўз ичига олган сатрнинг катагига ёзилади), мусбат сонларини алоҳида қўшиш (уларнинг йиғиндиси A_2 ни устуннинг охиридан иккинчи катагига ёзилади) мақсадга мувофиқдир, у ҳолда $\sum n_i u_i = A_1 + A_2$.

2-эслатма. Бешинчи устуннинг $n_i u_i^2$ кўпайтмаларини ҳисоблашда тўртинчи устуннинг $n_i u_i$ сонларини u_i га кўпайтириш мақсадга мувофиқдир.

3-эслатма. Олтинчи устун ҳисоблашларни контроль қилиш учун хизмат қилади. Агар $\sum n_i(u_i+1)^2$ йиғинди $\sum n_i u_i^2+2\sum n_i u_i+n$ йиғиндига тенг бўлса, ($\sum n_i(u_i+1)^2=\sum n_i u_i^2+2\sum n_i u_i+n$ айниятга мувофиқ равишда шундай бўлиши ҳам керак), у ҳолда ҳисоблашлар тўғри бажарилган ҳисобланади.

4-эслатма. Сохта ноль сифатида исталган варианта олиниши мумкин, яъни 3 пунктда кўрсатилгани бўйича энг катта частотага эга бўлган вариантани олиш шарт эмас. Масалан, энг катта частотага эга бўлган варианта «x_i устун» нинг дастлабки ёки сўнгги сатрларида жойлашган бўлса, у ҳолда **сохта ноль** сифатида устуннинг тахминан ўртасида турган вариантани олиш фойдалироқ бўлади.

Ҳисоблаш жадвали тўлдирилган ва ҳисоблашлар текширилгандан кейин, шартли моментлар ҳисобланади:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n}, \qquad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n}.$$

Ниҳоят, 3-§ даги (*) ва (****) формулалар бўйича танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсия ҳисобланади:

$$\overline{x}_T = M_1^* \cdot h + C,$$

$$D_T = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2.$$

Мисол Кўпайтмалар методи ёрдамида қуйидаги статистик тақсимотнинг танланма ўртача қийматини ва танланма дисперсиясини топинг:

вариантлар:	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
частоталар	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Ечилиши. Ҳисоблаш жадвалини тузамиз, бунинг учун:

1) вариантларни биринчи устунга ёзамиз;

2) частоталарни иккинчи устунга ёзамиз; частоталар йиғиндисини (100 ни) устуннинг пастки катагига ёзамиз;

3) сохта ноль сифатида 11,0 вариантани танлаймиз (бу варианта энг катта частотага эга); учинчи устуннинг энг катта частотани ўз ичига олган сатрга тегишли катагига 0 ёзамиз; нолнинг устига кетма-кет —1, —2, —3, —4 ни, нолнинг тагига 1, 2, 3, 4, 5 ни ёзамиз;

4) частоталарнинг шартли вариантларга кўпайтмаларини тўртинчи устунга ёзамиз, манфий сонлар йиғиндисини (--46) ни алоҳида, мусбат сонлар йиғиндисини (103 ни) алоҳида топамиз; бу сонларни қўшиб, уларнинг йиғиндисини (57 ни) устуннинг пастки катагига ёзамиз;

5) частоталарнинг шартли вариантларнинг квадратларига кўпайтмаларини бешинчи устунга ёзамиз, бу устуннинг сонлари йиғиндисини (383 ни) устуннинг пастки катагига ёзамиз;

6) частоталарнинг биттага орттирилган шартли варианталарнинг квадратларига кўпайтмаларини олтинчи контрол устунга ёзамиз; бу устуннинг сонлари йиғиндисини (597 ни) устуннинг пастки катагига ёзамиз.

Натижада 7-ҳисоблаш жадвалини ҳосил қиламиз.

Контроль: $\sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n = 383 + 2 \cdot 57 + 100 = 597$

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 597.$$

Ҳисоблаш тўғри бажарилган.

Биринчи ва иккинчи тартибли шартли моментларни ҳисоблаймиз:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{57}{100} = 0,57;$$

7- жадвал

x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
10,2	2	—4	—8	32	18
10,4	3	—3	—9	27	12
10,6	8	—2	—16	32	8
10,8	13	—1	—13	13	0
11,0	25	0	$A_1 = -46$		25
11,2	20	1	20	20	80
11,4	12	2	24	48	108
11,6	10	3	30	90	160
11,8	6	4	24	96	150
12,0	1	5	5	25	36
			$A_2 = 103$		
	$n = 100$		$\sum n_iu_i = 57$	$\sum n_iu_i^2 = 383$	$\sum n_i(u_i+1)^2 = 597$

$$M_2^* = \frac{\sum n_iu_i^2}{n} = \frac{383}{100} = 3,83.$$

h қадамни топамиз: $h = 10,4 - 10,2 = 0,2.$

Изланаётган танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни ҳисоблаймиз:

$$\overline{x}_т = M_1^*\cdot h + C = 0,57\cdot 0,2 + 11,0 = 11,1;$$

$$D_г = [M_2^* - (M_1^*)^2]\cdot h^2 = [3,83 - (0,57)^2]\cdot 0,2^2 = 0,14.$$

5-§. Дастлабки варианталарни тенг узоқликдаги варианталарга келтириш

Юқорида танланма характеристикаларни ҳисоблаш методикаси тенг узоқликдаги варианталар учун баён қилинди. Практикада, одатда, кузатиш маълумотлари тенг узоқликда жойлашган сонлар бўлмайди. Бундай савол туғилиши табиий: белгининг кузатилаётган қийматларини тегишлича ишлаб чиқиш натижасида ҳисоблашларни тенг узоқликдаги варианталар бўлган ҳолга келтириб бўлмасмикин? Ҳа, мумкин экан. Шу мақсадда белгининг кузатилаётган ҳамма қийматлари (дастлабки варианталар) кирган интервални бир нечта тенг қисмий интервалларга бўлинади (амалда ҳар бир интервалга камида 8—10 тадан дастлабки варианта кириши керак). Сўнгра қисмий интервалларнинг ўрталари топилади, ана шулар тенг узоқликдаги варианталар кетма-кетлигини ҳосил қилади.

Ҳар бир «янги» вариантанинг (қисмий интервал ўртасининг) частотаси сифатида тегишли қисмий интервалга кирган дастлабки варианталарнинг жами сони қабул қилинади.

Равшанки, дастлабки варианталарни қисмий интервалларнинг ўрталари билан алмаштириш хатоларга олиб келади (қисмий интервалнинг чап ярмидаги дастлабки варианталар ортади, ўнг ярмидаги дастлабки варианталар эса камаяди), аммо бу хатолар асосан йўқолади, чунки улар турли ишораларга эга.

Мисол. $n = 100$ ҳажмли танланма тўплам 8-жадвал билан берилган:

8-жадвал

x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i
1,00	1	1,19	2	1,37	6
1,03	3	1,20	4	1,38	2
1,05	6	1,23	4	1,39	1
1,06	4	1,25	8	1,40	2
1,08	2	1,26	4	1,44	3
1,10	4	1,29	4	1,45	3
1,12	3	1,30	6	1,46	2
1,15	6	1,32	4	1,49	4
1,16	5	1,33	5	1,50	2

Тенг узоқликдаги варианталар тақсимотини тузинг.

Ечилиши. 1,00—1,50 интервални, масалан, қуйидаги 5 та қисмий интервалга бўламиз: 1,00—1,10; 1,10—1,20; 1,20—1,30, 1,30—1,40; 1,40—1,50. Қисмий интервалларнинг ўрталарини янги y_i варианталар сифатида олиб, тенг узоқликдаги варианталарни ҳосил қиламиз:

$$y_1 = 1{,}05;\quad y_2 = 1{,}15;\quad y_3 = 1{,}25;\quad y_4 = 1{,}35;\quad y_5 = 1{,}45,$$

y_1 вариантанинг частотасини топамиз:

$$n_1 = 1+3+6+4+2+\frac{4}{2} = 18$$

(дастлабки варианта 1,10 биринчи қисмий интервалнинг охири, иккинчи қисмий интервалнинг боши бўлгани учун бу вариантанинг 4 частотаси иккала қисмий интервал орасида баравар тақсимланган). y_2 вариантанинг частотасини ҳисоблаймиз:

$$n_2 = \frac{4}{2} + 3 + 6 + 5 + 2 + \frac{4}{2} = 20.$$

Қолган варианталарнинг частоталарини шунга ўхшаш ҳисоблаймиз:

$$n_3 = 25; \qquad n_4 = 22; \qquad n_5 = 15.$$

Пировардида қуйидаги тенг узоқликдаги варианталар тақсимотини ҳосил қиламиз:

y_i	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45
n_i	18	20	25	22	15.

Китобхонга, машқ тариқасида, дастлабки ва тенг узоқликдаги варианталар бўйича ҳисобланган танланма ўртача қийматлар ва танланма дисперсиялар мос равишда қуйидагига тенг эканлигига ишонч ҳосил қилишни тавсия қиламиз:

$$\overline{x}_т = 1,250; \qquad \overline{y}_т = 1,246;$$

$$D_x = 0,018; \qquad D_y = 0,017.$$

Кўриб турибмизки, дастлабки варианталарни тенг узоқликдаги варианталарга алмаштириш муҳим хатоларга олиб келмади; бунда ҳисоблаш ишининг ҳажми анча камайди.

6- §. Эмпирик ва текисловчи (назарий) частоталар

А. Дискрет тақсимот

Тақсимот қонуни номаълум бўлган X дискрет тасодифий миқдорни қараймиз. n та синаш ўтказилган бўлиб, унда X миқдор n_1 марта x_1 қиймат, n_2 марта x_2 қиймат, . . . , n_k марта x_k қиймат қабул қилган бўлсин, бунда $\sum n_i = n$.

Эмпирик частоталар деб аслида кузатиладиган частоталарга айтилади.

Ўрганилаётган X миқдор бирор тайин қонун бўйича тақсимланган деб тахмин қилишга асос бор бўлсин. Бу тахмин кузатиш маълумотлари билан мос келишини текшириш мақсадида кузатилаётган маълумотларнинг частоталари ҳисобланади, яъни X миқдор тахмин қилинаётган қонун бўйича тақсимланган бўлса, у кузатилаётган қийматларнинг ҳар бирини неча марта қабул қилиши лозимлиги назарий жиҳатдан топилади.

Текисловчи (назарий) частоталар деб, кузатилаётган эмпирик частоталардан фарқли, назарий (ҳисоблаш билан) топилган n_i' частоталарга айтилади.

Текисловчи частоталар

$$n_i' = nP_i$$

тенглик бўйича топилади, бу ерда n — кузатишлар сони, P_i — тасодифий X миқдор тахмин қилинаётган тақсимотга эга деган фаразда кузатиладиган x_i қийматнинг эҳтимоли. Бу формула эркли синашларда ҳодиса рўй бериш сонининг математик кутилиши ҳақидаги теоремадан (VII боб, 5-§) келиб чиқади.

Шундай қилиб, **дискрет тақсимотнинг кузатиладиган x_i қийматининг текисловчи частотаси синашлар сонини бу кузатиладиган қийматнинг эҳтимолига кўпайтмасига тенг.**

Мисол. $n = 520$ та синашдан иборат эксперимент ўтказилиб, синашларнинг ҳар бирида бирор ҳодисанинг рўй беришлари сони x_i қайд қилинган; натижада қуйидаги эмпирик тақсимот ҳосил қилинган:

кузатилган қиймат	x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
эмпирик частота	n_i	120	167	130	69	27	5	1	1.

X тасодифий миқдор (бош тўплам) Пуассон қонуни бўйича тақсимланган деган тахминда текисловчи частоталар n_i' ларни топинг.

Ечилиши. Пуассон қонунини аниқлайдиган λ параметр, маълумки, бу тақсимотнинг математик кутилишига тенг. Математик кутилишнинг баҳоси сифатида танланма ўртача қиймат олингани учун (XVI боб, 5-§) λ нинг баҳоси сифатида ҳам танланма ўртача қиймат $\overline{x}_г$ ни олиш мумкин. Танланма ўртача қиймат 1,5 га тенглигини масала шартига кўра осонгина топиш мумкин; бинобарин, $\lambda = 1{,}5$ деб қабул қилиш мумкин.

Шундай қилиб, ушбу

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Пуассон формуласи

$$P_{520}\ (k) = \frac{1,5^{k}\cdot e^{-1,5}}{k!}$$

кўринишни олади. Бу формуладан фойдаланиб, $P_{520}(k)$ эҳтимолни $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ да топамиз (ёзувни соддалаштириш мақсадида қуйида 520 индексни тушириб қолдирамиз): $P(0) = 0.22313$, $P(1) = 0\ 33469$, $P(2) = 0,251021$, $P(3) = 0,125511$, $P(4) = 0,047066$, $P(5) = 0,014120$, $P(6) = 0,003530$, $P(7) = 0\ 000755$.

Текисловчи частоталарни топамиз (кўпайтириш натижалари биргача яхлитланган):

$$n'_1 = n\cdot P(0) = 520\cdot 0,22313 = 116,$$
$$n'_2 = n\cdot P(1) = 520\cdot 0,33469 = 174.$$

Қолган текисловчи частоталар ҳам шунга ўхшаш топилади. Пировардида қуйидагини ҳосил қиламиз:

эмпирик частота	123	167	130	69	27	5	1	1
текисловчи частота	116	174	131	65	25	7	2	0.

Эмпирик ва текисловчи частоталарнинг нисбатан кам фарқ қилиши текширилаётган тақсимот Пуассон қонуни бўйича тақсимланган деган тахминни тасдиқлайди.

Шуни қайд қиламизки, агар берилган тақсимот бўйича танланма дисперсияни ҳисоблайдиган бўлсак, у танланма ўртача қийматга, яъни 1,5 га тенг бўлиб чиқади. Бу қилинган тахминнинг тўғрилигини яна бир бор тасдиқлайди, чунки Пуассон тақсимоти учун $\lambda = M(X) = D(X)$.

Б. Узлуксиз тақсимот

Узлуксиз тақсимот бўлган ҳолда мумкин бўлган алоҳида қийматларнинг эҳтимоли нолга тенг (X боб, 2-§, 2-натижа). Шунинг учун мумкин бўлган қийматларнинг бутун интервалини k та кесишмайдиган интервалларга ажратилади ва X нинг i-қисмий интервалга тушиш эҳтимоли P_i ҳисобланади, кейин эса дискрет тақсимот учун қилингани каби синашлар сонини бу эҳтимолларга кўпайтирилади.

Шундай қилиб, узлуксиз тақсимотнинг текисловчи частоталари

$$n'_i = nP_i$$

тенглик бўйича топилади, бу ерда n—синашлар сони, P_i— тасодифий X миқдор тахмин қилинаётган тақсимотга эга деган фаразда X нинг i-қисмий интервалга тушиш эҳтимоли.

Жумладан, X тасодифий миқдор (бош тўплам) нормал тақсимланган деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у ҳолда текисловчи частоталар

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_T}\varphi(u_i) \qquad (*)$$

формула бўйича топилиши мумкин, бу ерда n — синашлар сони (танланма ҳажми), h — қисмий интервалнинг узунлиги, σ_T — танланма ўртача квадратик четланиш, $u_i = \frac{x_i - \bar{x}_T}{\sigma_T}$ (x_i сон i-қисмий интервалнинг ўртаси),

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

(*) формуланинг қўлланилишига доир мисол 7-§ да келтирилади.

Тушунтириш. (*) формуланинг келиб чиқишини тушунтирайлик. Умумий нормал тақсимотнинг дифференциал функциясини ёзамиз:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (**)$$

$a=0$ ва $\sigma=1$ да нормаланган тақсимотнинг

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

дифференциал функциясини ёки, аргументни белгилашни ўзгартириб,

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

ни ҳосил қиламиз. $u = \frac{x-a}{\sigma}$ деб,

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (***)$$

га эга бўламиз. (**) ва (***) ни таққослаб,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi(u)$$

деган фикрга келамиз.

Агар математик кутилиш a ва ўртача квадратик четланиш σ номаълум бўлса, у ҳолда бу параметрларнинг баҳолари сифатида танланма ўртача қиймати $\overline{x_т}$ ва танланма ўртача квадратик четланиш $\sigma_т$ қабул қилинади (XVI боб 5- §, 9- §). У ҳолда

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_т} \varphi(u)$$

бу ерда

$$u = \frac{x - \overline{x_т}}{\sigma_т}$$

x_i узунлиги h бўлган i- интервалнинг (нормал тақсимланган X тасодифий миқдорнинг кузатилаётган барча қийматлари тўплами шу интервалларга бўлинган) ўртаси бўлсин. У ҳолда X нинг бу интервалга тушиш эҳтимоли тақрибан интервал узунлигини $f(x)$ функциянинг бу интервалнинг исталган нуқтасидаги қийматига, жумладан $x = x_i$ даги қийматига кўпайтмасига тенг (XI боб, 5- §):

$$P_i = hf(x_i) = h \cdot \frac{1}{\sigma_т} \varphi(u_i).$$

Демак, текисловчи частота:

$$n_i' = n P_i = \frac{nh}{\sigma_т} \varphi (u_i),$$

бу ерда

$$u_i = \frac{x_i - \overline{x_т}}{\sigma_т}.$$

Биз (*) формулани ҳосил қилдик.

7- §. Нормал эгри чизиқни тажриба маълумотлари бўйича ясаш

Нормал эгри чизиқни тажриба маълумотлари бўйича ясаш усулларидан бири қуйидагидан иборат:

1) $\overline{x_т}$ ва $\sigma_т$ ни, масалан, кўпайтмалар методи бўйича топилади;

2) назарий эгри чизиқнинг y_i ординаталарини (текисловчи частоталарни) $y_i = \frac{n\cdot h}{\sigma_т}\cdot\varphi(u_i)$ формула бўйича топилади, бу ерда n — кузатилаётган частоталар йиғиндиси, h — иккита қўшни варианта орасидаги айирма, $u_i = \frac{x_i - \bar{x}_т}{\sigma_т}$ ва

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}};$$

3) тўғри бурчакли координаталар системасида (x_i, y_i) нуқталар ясалади ва улар силлиқ чизиқ билан туташтирилади.

Текисловчи частоталарнинг кузатилаётган частоталарга яқинлиги текширилаётган белги нормал тақсимланган деган тахминни тасдиқлайди.

Мисол. Ушбу тақсимот бўйича нормал эгри чизиқни ясанг.

варианта x_i	15	20	25	30	35	40	45	50	55
частота n_i	6	13	38	74	106	85	30	10	4.

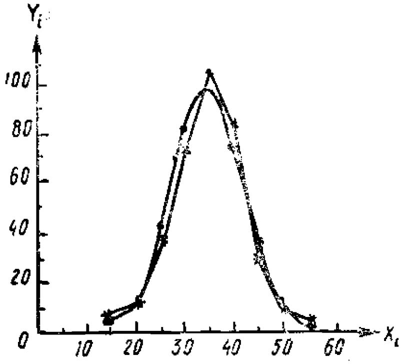
Ечилиши. Кўпайтмалар методидан (4-§) фойдаланиб, $\bar{x}_т = 34.7$, $\sigma_т = 7,38$ ни топамиз.

Текисловчи частоталарни топамиз (9-жадвалга қаранг).

9-жадвал

x_i	n_i	$x_i - \bar{x}_т$	$u_i = \frac{x_i - \bar{x}_т}{\sigma_т}$	$\varphi(u_i)$	$y_i = \frac{n.h.}{\sigma_т}\varphi(u_i) = 248.\varphi(u_i)$
15	6	—19,7	—2,67	0,0113	3
20	13	—14,7	—1,99	0,0551	14
25	38	—9,7	—1,31	0,1691	42
30	74	—4,7	—0,63	0,3271	82
35	106	0,3	0,05	0,3984	99
40	85	5,3	0,73	0,3056	76
45	30	10,3	1,41	0,1476	37
50	10	15,3	2,09	0,0449	11
55	4	20,3	2,77	0,0086	2
	$n=366$				$\sum y_i=366$

22-расмда текисловчи частоталар (улар доирачалар билан белгиланган) бўйича нормал (назарий) эгри чизиқ ва кузатилаётган частоталар (улар «крестлар» билан белгиланган) полигони ясалган. Графикларни таққослаш ясалган эгри чизиқ кузатиш маълумотларини қониқарли акс эттиришини яққол кўрсатиб турибди.



22- расм.

Кузатиш маълумотлари белгининг нормал тақсимланганлиги ҳақида гувоҳлик (дарак) бермоқда деб яна ҳам кўпроқ ишонч билан ҳисоблаш учун махсус қоидалардан (улар мувофиқлик критерийлари дейилади) фойдаланилади, улар ҳақида тушунчани китобхон келгусида (XIX боб, 22-§) топади.

8- §. Эмпирик тақсимотнинг нормал тақсимотдан четланишини баҳолаш. Асимметрия ва эксцесс

Эмпирик тақсимотнинг нормал тақсимотдан четланишини баҳолашда турли характеристикалардан фойдаланилади, булар жумласига асимметрия ва эксцесс киради. Бу характеристикаларнинг таърифлари назарий тақсимотнинг асимметрияси ва эксцесси таърифларига (XII боб, 9-§) ўхшаш.

Эмпирик тақсимотнинг асимметрияси ушбу тенглик билан аниқланади:

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_{т}^{3}},$$

бу ерда m_3 — учинчи тартибли марказий эмпирик момент (2-§).

Эмпирик тақсимотнинг эксцесси ушбу тенглик билан аниқланади:

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_T^4} - 3,$$

бу ерда m_4 — тўртинчи тартибли марказий эмпирик момент.

m_3 ва m_4 моментларни 3-§ даги (***) формуладан фойдаланиб кўпайтмалар методи (4-§) билан ҳисоблаш қулай.

Мисол. Ушбу эмпирик тақсимотнинг асимметрияси ва эксцессини топинг:

варианта	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
частота	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1.

Ечилиши. Кўпайтмалар методидан фойдаланамиз, бунинг учун ҳисоблаш жадвалини тузамиз. Жадвалнинг 1—5 устунлари қандай тўлдирилиши 4-§ да кўрсатилгани учун қисқача тушунтиришлар билан чекланамиз. 6-устунни тўлдириш учун 3- ва 5- устунларнинг ҳар бир сатридаги сонларни кўпайтириб чиқиш қулай; 7-устунни тўлдириш учун 3- ва 6- устунларнинг ҳар бир сатридаги сонларни кўпайтириб чиқиш қулай. 8- устун ҳисоблашларни ушбу айният бўйича контрол қилиш учун хизмат қилади:

$$\sum n_i (u_i + 1)^4 = \sum n_i u_i^4 + 4 \sum n_i u_i^3 + 6 \sum n_i u_i^2 + \\ + 4 \sum n_i u_i + n.$$

Юқоридагиларни 10-ҳисоблаш жадвалида келтирамиз.

Контрол: $\sum n_i (u_i + 1)^4 = 9141.$

$$\sum n_i u_i^4 + 4 \sum n_i u_i^3 + 6 \sum n_i u_i^2 + 4 \sum n_i u_i + n = \\ = 4079 + 4 \cdot 609 + 6 \cdot 383 + 4 \cdot 57 + 100 = 9141.$$

Йиғиндиларнинг бир хиллиги ҳисоблашлар тўғри бажарилгани ҳақида дарак беради.

Қаралаётган тақсимот учун 4-§ даги мисолда қуйидагилар топилган эди:

$$M_1^* = 0,57; \quad M_2^* = 3,38; \quad D_T = 0,14;$$

демак,

$$\sigma_T = \sqrt{0,14}.$$

10-жадвал

1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i u_i^3$	$n_i u_i^4$	$n_i (u_i + 1)^4$
10,2	2	—4	—8	32	— 128	512	162
10,4	3	—3	—9	27	— 81	243	48
10,6	8	—2	—16	32	—64	128	8
10,8	13	—1	—13	13	—13	13	—
11,0	25	0	—46		—286		25
11,2	20	1	20	20	20	20	320
11,4	12	2	24	48	96	192	972
11,6	10	3	30	90	270	810	2560
11,8	6	4	24	96	384	1536	3750
12,0	1	5	5	25	125	625	1296
			103		895		
	$n=100$		$\sum n_i u_i = 57$	$\sum n_i u_i^2 = 383$	$\sum n_i u_i^3 = 609$	$\sum n_i u_i^4 = 4079$	$\sum n_i (u_i + 1)^4 = 9141$

Учинчи ва тўртинчи тартибли шартли моментларни топамиз:

$$M_3^* = \frac{\sum n_i u_i^3}{n} = \frac{609}{100} = 6{,}09;$$

$$M_4^* = \frac{\sum n_i u_i^4}{n} = \frac{4079}{100} = 40{,}79.$$

Учинчи ва тўртинчи тартибли марказий эмпирик моментларни топамиз:

$$m_3 = [M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2\,(M_1^*)^3]\,h^3 =$$
$$= [6{,}09 - 3\cdot 0{,}57\cdot 3{,}83 + 2\cdot(0{,}57)^3]\cdot 0{,}2^3 = -0{,}0007;$$
$$m_4 = [M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6\,(M_1^*)^2 M_2^* - 3\,(M_1^*)^4]\,h^4 =$$

$$= [10{,}78 - 4\cdot 0{,}57\cdot 6{,}09 + 6(0{,}57)^2\cdot 3{,}83 -$$
$$- 3\cdot(0{,}57^4)]\cdot 0{,}2^4 = 0{,}054.$$

Асимметрия ва эксцессни топамиз:

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_т^3} = -\frac{0{,}0007}{(\sqrt{0{,}14})^3} = -0{,}01;$$

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_т^4} - 3 = \frac{0{,}054}{(\sqrt{0{,}14})^3} - 3 = -0{,}24.$$

Эслатма. Кичик ҳажмли танланмалар бўлган ҳолда асимметрия ва эксцесснинг баҳоларига мурожаат қилишда эҳтиёт бўлиш керак ва бу баҳоларнинг аниқлигини топиш лозим (қаранг: Н. В. Смирнов и И. В. Дунин-Барковский. Курс теории вероятностей и математической статистики. «Наука», 1965, 277- бет).

Масалалар

1 — 2- масалаларда танланма варианталар ва уларнинг частоталари келтирилган. Кўпайтмалар методидан фойдаланиб, танланма ўртача қийматини ва дисперсияни топинг.

1. x_i	10,3	10,5	10,7	10,9	11,1	11,3	11,5	11,7	11,9	12,1
n_i	4	7	8	10	25	15	12	10	4	5.

Жавоби. $\overline{x}_т = 11{,}19$,
$D_т = 0{,}19$.

2. x_i	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101
n_i	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2.

Жавоби. $\overline{x}_т = 90{,}72$,
$D_т = 17{,}20$.

3. Ушбу эмпирик тақсимотнинг асимметрияси ва эксцессини топинг:

x_i	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8
n_i	5	10	17	30	20	12	6.

Жавоби. $a_s = -0{,}0006$,
$e_k = 0{,}00004$.

Ўн саккизинчи боб

КОРРЕЛЯЦИЯ НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1- §. Функционал, статистик ва корреляцион боғланишлар

Кўп масалаларда ўрганилаётган Y тасодифий миқдорнинг битта ёки бир нечта бошқа миқдорларга боғлиқлигини аниқлаш ва баҳолаш талаб қилинади. Аввал Y нинг битта тасодифий (ёки тасодифий бўлмаган) X миқдорга, кейин эса бир нечта миқдорга боғлиқлигини (15- §) текширамиз.

Иккита тасодифий миқдор функционал боғланиш билан (XII боб, 10- §), ё статистик деб аталадиган бошқа тур боғланиш билан боғланган бўлиши, ёки ўзаро боғланмаган бўлиши мумкин.

Қатъий функционал боғланиш кам бўлади, чунки иккала миқдор ёки уларнинг бири бошқа тасодифий факторларнинг таъсирига дучор бўлади, шу билан бирга бу факторлар орасида иккала миқдор учун ҳам умумий бўлганлари (умумий дейилганда бу ерда ҳам Y га, ҳам X га таъсир кўрсатадиган факторлар тушунилади) бўлиши мумкин. Бу ҳолда статистик боғланиш юзага келади.
Масалан, Y

$$Z_1, Z_2, V_1, V_2$$

тасодифий факторларга боғлиқ, X эса

$$Z_1, Z_2, U_1$$

тасодофий факторларга боғлиқ бўлса, у ҳолда Y ва X орасида статистик боғланиш бор, чунки тасодифий факторлар орасида умумийлари, чунончи Z_1 ва Z_2 бор.

Статистик боғланиш деб шундай боғланишга айтиладики, унда миқдорлардан бирининг ўзгариши иккинчисининг тақсимоти ўзгаришига олиб келади. Хусусан, статистик боғлиқлик миқдорлардан бирининг ўзгариши иккинчисининг ўртача қийматини ўзгаришида кўринади; бу ҳолда статистик боғланиш *корреляцион* боғланиш деб аталади.

X тасодифий миқдор билан функционал эмас, балки корреляцион боғланган Y тасодифий миқдорга мисол келтирамиз. Айтайлик, Y дон ҳосили, X — ўғитлар миқдори бўлсин. Майдони бир хил бўлган участкалардан бир хил миқдорда ўғит солинганда ҳам ҳар хил ҳосил олинади, яъни Y миқдор X миқдорининг функцияси эмас. Бу тасодифий факторлар (ёғингарчилик, ҳаво температураси ва бошқалар) таъсири билан тушунтирилади. Шунга қарамасдан, тажриба кўрсатадики, ўртача ҳосил ўғитлар миқдорининг функциясидир, яъни Y миқдор X билан корреляцион боғланиш билан боғланган.

2- §. Шартли ўртача қийматлар. Корреляцион боғлиқлик

Корреляцион боғлиқлик таърифини аниқлаштирамиз, бунинг учун шартли ўртача қиймат тушунчасини киритамиз.

Айтайлик, Y тасодифий миқдор ва X тасодифий миқдор орасидаги боғланиш ўрганилаётган бўлсин. X нинг ҳар бир қийматига Y нинг бир нечта қиймати мос келсин. Масалан, $x_1 = 2$ да Y миқдор $y_1 = 5$, $y_2 = 6$, $y_3 = 10$ қийматлар олган бўлсин. Бу сонларнинг арифметик ўртача қийматини топамиз:

$$\bar{y}_2 = \frac{5+6+10}{3} = 7.$$

$\bar{y}_2$ сон шартли ўртача қиймат дейилади; y ҳарфи устидаги чизиқча арифметик ўртача қиймат белгиси бўлиб хизмат қилади, 2 сони эса Y нинг $x_1 = 2$ га мос қийматлари қаралаётганини кўрсатади.

Олдинги параграфдаги мисолга нисбатан олганда, бу маълумотларни бундай талқин қилиш мумкин: учта бир хил участканинг ҳар бирига 4 бирликдан ўғит солинди ва мос равишда 5, 6 ва 10 бирликдан дон олинди; ўртача ҳосил 7 бирлик бўлади.

Шартли ўртача қиймат $\bar{y}_x$ деб Y нинг $X = x$ қийматга мос қийматларининг арифметик ўртача қийматига айтилади.

Агар ҳар бир x қийматга шартли ўртача қийматнинг битта қиймати мос келса, у ҳолда, равшанки, шартли ўртача қиймат x нинг функциясидир; бу ҳолда Y тасодифий миқдор X миқдорга корреляцион боғлиқ дейилади.

Y нинг X га корреляцион боғлиқлиги деб, $\bar{y}_x$ шартли ўртача қийматнинг x га функционал боғлиқлигига айтилади:

$$\bar{y}_x = f(x). \qquad (*)$$

(*) тенглама Y нинг X га *регрессия тенгламаси* дейилади; $f(x)$ функция Y нинг X га *регрессияси*, унинг графиги эса Y нинг X га *регрессия чизиғи* дейилади.

$\bar{x}_y$ шартли ўртача қиймат ва X нинг Y га корреляцион боғлиқлиги шунга ўхшаш аниқланади.

$\bar{x}_y$ *шартли ўртача қиймат* деб X нинг $Y = y$ га мос қийматларининг арифметик ўртача қийматига айтилади.

X нинг Y га *корреляцион боғлиқлиги* деб, $\bar{x}_y$ шартли ўртача қийматнинг y га боғлиқлигига айтилади:

$$\bar{x}_y = \varphi(y). \qquad (**)$$

(**) тенглама X нинг Y га *регрессия тенгламаси* дейилади; $\varphi(y)$ функция X нинг Y га *регрессияси*, унинг графиги эса X нинг Y га *регрессия чизиғи* дейилади.

3- §. Корреляция назариясининг икки асосий масаласи

Корреляция назариясининг биринчи масаласи корреляцион боғланиш формасини аниқлаш, яъни регрессия функциясининг кўринишини (чизиқли, квадратик, кўрсаткичли ва ҳ. к.) топиш. Регрессия функциялари кўпчилик ҳолларда чизиқли бўлади. Агар $f(x)$ ва $\varphi(y)$ регрессия функцияларининг иккаласи ҳам чизиқли бўлса, у ҳолда корреляция *чизиқли*, акс ҳолда эса *ночизиқли* дейилади. Равшанки, чизиқли корреляцияда иккала регрессия чизиғи ҳам тўғри чизиқлардир.

Корреляция назариясининг иккинчи масаласи — корреляцион боғланишнинг зичлигини (кучини) аниқлашдир. Y нинг X га корреляцион боғлиқлигининг зичлиги Y нинг қийматларини $\bar{y}_x$ шартли ўртача қиймат атрофида тарқоқлигининг катталиги бўйича баҳоланади. Кўп тарқоқлик Y нинг X га кучсиз боғлиқлигидан ёки боғлиқлик йўқлигидан дарак беради. Кам тарқоқлик анча кучли боғлиқлик борлигини кўрсатади; бу ҳолда Y ва X ҳатто функционал боғланган бўлиб, лекин иккинчи даражали тасодифий факторлар таъсирида бу боғланиш кучсизланган, бунинг натижасида эса X нинг битта қийматида Y турли қийматлар қабул қилиши мумкин.

X нинг Y га корреляцион боғланишининг зичлиги шунга ўхшаш (X нинг қийматларини $\bar{x}_y$ шартли ўртача қиймат атрофида тарқоқлиги бўйича) аниқланади.

4- §. Регрессия тўғри чизиғи танланма тенгламаси параметрларини группаланмаган маълумотлар бўйича топиш

Айтайлик, X ва Y сон белгилар чизиқли корреляцион боғланиш билан боғланган бўлсин. Бу ҳолда иккала регрессия чизиғи ҳам тўғри чизиқлар бўлади.

Фараз қилайлик, бу тўғри чизиқларнинг тенгламаларини топиш учун n та синов ўтказилган бўлиб, натижада n_i та сон жуфти топилган бўлсин:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n).$$

Кузатилаётган сон жуфтларини (X, Y) тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган барча қийматлари бош тўпламидан олинган тасодифий танланма сифатида қараш мумкин бўлгани учун бу маълумотлар бўйича топилган катталиклар ва тенгламаларга *танланма* номи қўшилади.

Аниқлик учун, Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламасини излаймиз.

Энг содда ҳолни қарайлик: X белгининг турли x қийматлари ва Y белгининг уларга мос y қийматлари бир мартадан кузатилган бўлсин. Бундай маълумотларни группалашнинг зарурати йўқ. Шунингдек, шартли ўртача қийматдан фойдаланишга ҳам ҳожат йўқ, шунинг учун изланаётган

$$\overline{y}_x = kx + b$$

тенгламани бундай ёзиш мумкин:

$$Y = kx + b.$$

Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг бурчак коэффициентини Y нинг X га *танланма регрессия коэффициенти* дейиш ва уни ρ_{yx} орқали белгилаш қабул қилинган.

Шундай қилиб, Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг

$$Y = \rho_{yx}x + b \qquad (*)$$

кўринишдаги танланма тенгламасини излаймиз.

Ўз олдимизга ρ_{yx} ва b параметрларни шундай танлашни вазифа қилиб қўйайликки, кузатиш маълумотлари бўйича XOY текисликда ясалган (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . . , (x_n, y_n) нуқталар иложи борича (*) тўғри чизиқ яқинида ётсин.

Бу талабнинг маъносини аниқлаштирамиз. Ушбу

$$Y_i - y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

айирмани четланиш деб атаймиз, бу ерда Y_i — (*) тенглама бўйича ҳисобланган ва кузатилаётган x_i қийматга мос ордината, y_i эса x_i га мос кузатилаётган ордината.

ρ_{yx} ва b параметрларни четланишларнинг квадратлари йиғиндиси минимал бўладиган қилиб танлаймиз (энг кичик квадратлар методининг мазмуни шундан иборат).

Ҳар бир четланиш изланаётган параметрларга боғлиқ бўлгани учун четланишларнинг квадратлари йиғиндиси ҳам бу параметрларнинг F функцияси бўлади (ρ_{yx} ўрнига вақтинча ρ ёзамиз):

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2$$

ёки

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i)^2.$$

Минимумни излаш учун тегишли хусусий ҳосилаларни нолга тенглаймиз:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i)\, x_i = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i) = 0.$$

Элементар алмаштиришлар бажариб, ρ ва b га нисбатан иккита чизиқли тенглама ҳосил қиламиз*.

$$\left(\sum x^2\right)\rho + \left(\sum x\right) b = \sum xy; \quad \left(\sum x\right)\rho + nb = \sum y \qquad (**)$$

Бу системани ечиб, изланаётган параметрларни топамиз:

$$\rho_y = \frac{n\sum xy - \sum x\cdot\sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2};$$

$$b = \frac{\sum x^2\cdot\sum y - \sum x\cdot\sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}. \qquad (***)$$

X нинг Y га регрессия тўғри чизигининг

$$\bar{x}_y = \rho_{xy} x + C$$

танланма тенгламасини шунга ўхшаш топиш мумкин, бу ерда ρ_{xy} сон X нинг Y га танланма регрессия коэффициенти.

Мисол. Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламасини $n = 5$ та кузатиш маълумотлари бўйича топинг.

---

*Ёзувни соддалаштириш мақсадида $\sum_{i=1}^{n}$ ўрнига $\sum$ ёзамиз.

x	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25.

Ечилиши. 11-ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

11-жадвал

x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	4,875
5,00	2,25	25,00	11,250
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 8,15$	$\sum x_i^2 = 57,50$	$\sum x_i y_i = 26,975$

Изланаётган параметрларни топамиз, бунинг учун жадвал бўйича ҳисобланган йиғиндиларни (***) муносабатларга қўямиз:

$$\rho_{yx} = \frac{5\cdot 26,975-15\cdot 8,15}{5\cdot 57,5-15^2} = 0,202;$$

$$b = \frac{57,5\cdot 8,15-15\cdot 26,975}{62,5} = 1,024.$$

Изланаётган регрессия тенгламасини ёзамиз:

$$Y = 0,202x + 1,024.$$

Бу тенглама бўйича ҳисобланган Y_i қийматлар кузатилган y_i қийматлар билан қанчалик яхши мос келиши ҳақида тасаввур ҳосил қилиш учун $Y_i - y_i$ четланишларни топамиз. Ҳисоблаш натижалари 12-жадвалда келтирилган.

12-жадвал

x_i	Y_i	y_i	$Y_i - y_i$
1,00	1,226	1,25	−0,024
1,50	1,327	1,40	−0,073
3,00	1,630	1,50	0,130
4,50	1,933	1,75	0,083
5,00	2,034	2,25	−0,216

Жадвалдан кўринишича, четланишларнинг ҳаммаси ҳам старлича кичик эмас. Бу кузатишлар сонининг кичиклиги билан изоҳланади.

5-§. Корреляцион жадвал

Кузатишлар сони катта бўлганда битта x қийматнинг ўзи n_x марта, битта y қийматнинг ўзи n_y марта, сон жуфти (x, y) нинг битта ўзи n_{xy} марта учраши мумкин. Шу сабабли кузатиш маълумотлари группаланади, яъни n_x, n_y, n_{xy} частоталар ҳисобланади. Барча группаланган маълумотлар жадвал кўринишида ёзилиб, у *корреляцион жадвал* дейилади.

Корреляцион жадвалнинг тузилишини мисол орқали тушунтирамиз (13-жадвал).

13-жадвал

Y \ X	10	20	30	40	n_y
0,4	5	—	7	14	26
0,6	—	2	6	4	12
0,8	3	19	—	—	22
n_x	8	21	13	18	$n = 60$

Жадвалнинг биринчи сатрида X белгининг кузатилган қийматлари (10; 20; 30; 40), биринчи устунида эса Y белгининг кузатилган қийматлари (0,4; 0,6; 0,8) кўрсатилган. Сатрлар ва устунларнинг кесишишида белгиларнинг кузатилган қийматлари жуфтларининг n_{xy} частоталари ёзилган. Масалан, 5 частота (10; 0,4) сон жуфти 5 марта кузатилганини билдиради. Ҳамма частоталар томонлари йўғон қора чизиқ бўлган тўғри тўртбурчакка жойлаштирилган. Ундаги чизиқча тегишли сон жуфти, масалан, (20; 0,4) кузатилмаганини англатади.

Сўнгги устунда барча сатрлардаги частоталар йиғиндилари ёзилган. Масалан, йўғон томонли тўғри тўртбурчакнинг биринчи сатридаги частоталар йиғиндиси $n_y = 5 + 7 + 14 = 26$; бу сон Y белгининг 0,4 га тенг қиймати (X белгининг турли қийматлари билан биргаликда) 26 марта кузатилганини англатади.

Сўнгги сатрда устунлардаги частоталарнинг йиғиндилари ёзилган. Масалан, 8 сони X белгининг 10 га тенг қиймати (Y белгининг турли қийматлари билан биргаликда) 8 марта кузатилганини кўрсатади.

Жадвалнинг пастки ўнг бурчагида жойлашган катакка барча частоталар йиғиндиси (жами кузатишлар сони n) ёзилган. Равшанки, $\sum n_x = \sum n_y = n$. Бизнинг мисолда

$$\sum n_x = 8 + 21 + 13 + 18 = 60$$

ва

$$\sum n_y = 26 + 12 + 22 = 60.$$

6-§. Регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламасини группаланган маълумотлар бўйича топиш. Танланма корреляция коэффициенти

4-§ да Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг параметрларини аниқлаш учун ушбу тенгламалар системаси ҳосил қилинган эди:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\sum x^2\right)\rho_{yx} + \left(\sum x\right)b = \sum xy; \\ \left(\sum x\right)\rho_{yx} + nb = \sum y. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

X нинг қийматлари ва Y нинг уларга мос қийматлари бир мартадан кузатилган деб фараз қилинган эди. Энди эса кўп сонли маълумотлар олинган (изланаётган параметрларни амалда қониқарли баҳолаш учун камида 50 та кузатиш ўтказилиши лозим), улар орасида такрорланадиганлари бор ва улар корреляцион жадвал кўринишида группаланган деб фараз қилайлик. (*) системани у корреляцион жадвал маълумотларини акс эттирадиган қилиб ёзамиз. Ушбу айниятлардан фойдаланамиз:

$$\sum x = n\overline{x} \qquad \left(\overline{x} = \frac{\sum x}{n} \text{ нинг натижаси}\right);$$

$$\sum y = n\overline{y} \qquad \left(\overline{y} = \frac{\sum y}{n} \text{ нинг натижаси}\right);$$

$$\sum x^2 = n\overline{x^2} \qquad \left(\overline{x^2} = \frac{\sum x^2}{n} \text{ нинг натижаси}\right);$$

$\sum xy = \sum n_{xy} xy$ ((x, y) сон жуфти n_{xy} марта кузатилганлиги ҳисобга олинган)

Бу айниятларнинг ўнг томонларини (*) системага қўйиб ва иккинчи тенгламанинг иккала томонини n га қисқартириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned}(n\overline{x^2})\rho_{yx} + (n\bar{x})b &= \sum n_{xy}xy,\\ (\bar{x})\rho_{yx} + b &= \bar{y}.\end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Бу системани ечиб, ρ_{yx} ва b параметрларни, ва демак, изланаётган тенгламани ҳосил қиламиз

$$\bar{y}_x = \rho_{xy}x + b.$$

Лекин янги катталик — корреляция коэффициентини киритиб, регрессия тенгламасини бошқача кўринишда ёзиш мақсадга мувофиқдир. Буни бажарайлик.

(**) нинг иккинчи тенгламасидан b ни топамиз:

$$b = \bar{y} - \rho_{yx}\bar{x}.$$

Бу тенгламанинг ўнг томонини $\bar{y}_x = \rho_{yx}x + b$ тенгламага қўйиб,

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x}) \qquad (***)$$

ни ҳосил қиламиз. (*) системадан, $\overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \sigma_x^2$ эканлигини (XVI боб, 10-§) ҳисобга олиб, регрессия коэффициентини топамиз:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\left[\overline{x^2} - (\bar{x})^2\right]} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x^2}.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ касрга кўпайтирамиз:

$$\rho_{yx}\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонини $r_т$ орқали белгилаймиз ва уни *танланма корреляция коэффициенти* деб атаймиз:

$$\rho_{yx}\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = r_т$$

ёки

$$\rho_{yx} = r_{\text{т}} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонини (***) га қўйиб, Y нинг X га регрессия тўғри чизиғи танланма тенгламасини ушбу

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_{\text{т}} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \overline{x})$$

кўринишда ҳосил қиламиз.

1-эслатма. X нинг Y га регрессия тўғри чизиғи танланма тенгламаси ҳам шунга ўхшаш топилади:

$$\overline{x}_y - \overline{x} = r_{\text{т}} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \overline{y}),$$

бу ерда

$$r_{\text{т}} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \rho_{xy}.$$

2-эслатма. Регрессия тўғри чизиқлари тенгламалари янада симметрик кўринишда ёзилиши мумкин:

$$\frac{\overline{y}_x - \overline{y}}{\sigma_y} = r_{\text{т}} \frac{x - \overline{x}}{\sigma_x};$$

$$\frac{\overline{x}_y - \overline{x}}{\sigma_x} = r_{\text{т}} \frac{y - \overline{y}}{\sigma_y}.$$

3-эслатма. Танланма корреляция коэффициенти алоҳида ҳам муҳим аҳамиятга эга. Юқоридагидан келиб чиқишича, танланма корреляция коэффициенти

$$r_{\text{т}} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\overline{y}}{n \sigma_x \sigma_y}$$

тенглик билан аниқланади, бу ерда x, y лар X ва Y белгиларнинг варианталари (кузатилган қийматлари);

n_{xy} — кузатилган (x, y) варианта жуфтининг частотаси,

n — танланма ҳажми (барча частоталар йиғиндиси);

$\overline{x}$, $\overline{y}$ — танланма ўртача қийматлар;

σ_x, σ_y — танланма ўртача квадратик четланишлар.

7-§. Танланма корреляция коэффициентининг хоссалари

Танланма корреляция коэффициентининг хоссаларини келтирамиз, булардан эса у чизиқли корреляцион боғланишнинг зичлигини баҳолаш учун хизмат қилиши келиб чиқади.

Ушбу формулалардан фойдаланамиз (келтириб чиқарилишини тушуриб қолдирамиз):

$$S_y = D_y(1 - r_{\text{т}}^2); \qquad S_x = D_x(1 - r_{\text{т}}^2),$$

бу ерда S_y тегишли $\overline{y}_x$ шартли ўртача қийматлар атрофида кузатилган y қийматларнинг дисперсияси;

D_y — умумий ўртача қиймат $\overline{y}$ атрофида кузатилган y қийматларнинг дисперсияси.

S_x, D_x дисперсиялар ҳам шунга ўхшаш маънога эга.

1. Танланма корреляция коэффициентининг абсолют қиймати бирдан ортмайди.

Исботи. Исталган дисперсия манфий эмас. Жумладан,

$$S_y = D_y(1 - r_{\text{т}}^2) \geqslant 0.$$

Демак,

$$1 - r_{\text{т}}^2 \geqslant 0.$$

Бу ердан,

$$-1 \leqslant r_{\text{т}} \leqslant 1 \text{ ёки } |r_{\text{т}}| \leqslant 1.$$

2. Агар танланма корреляция коэффициенти нолга тенг бўлиб, танланма регрессия чизиқлари тўғри чизиқлар бўлса, у ҳолда X ва Y чизиқли корреляцион боғланиш билан боғланмаган.

Исботи. $r_{\text{т}} = 0$ да Y нинг X га регрессиясининг,

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_{\text{т}} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \overline{x})$$

танланма тўғри чизиғи тенгламаси ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = 0$$

ёки

$$\overline{y}_x = \overline{y}.$$

$r_{\text{т}} = 0$ да X нинг Y га регрессия тўғри чизиғи тенгламаси

$$\overline{x}_y = \overline{x}$$

кўринишга эга. Шундай қилиб, $r_{\text{т}} = 0$ да шартли ўртача қийматлар тегишли аргументларнинг ўзгаришида ўзгармас қийматли бўлади; шу маънода X ва Y чизиқли корреляцион боғланиш билан боғланмаган деб ҳисоблаш мумкин.

Шу қаралаётган ҳолда регрессия тўғри чизиқлари тегишли координата ўқларига параллел эканлиги равшан.

Эслатма. Агар танланма корреляция коэффициенти нолга тенг бўлса, у ҳолда X ва Y белгилар ночизиқли корреляцион ва ҳатто функционал боғланиш билан боғланган бўлиши мумкин.

3. Агар танланма корреляция коэффициентининг абсолют қиймати бирга тенг бўлса, у ҳолда белгиларнинг кузатилаётган қийматлари чизиқли функционал боғланиш билан боғланган.

Агар $|r_{\text{т}}| = 1$ бўлса, у ҳолда $S_y = D_y(1 - r_{\text{т}}^2) = 0$. Бу ердан ушбу тенглик келиб чиқишини кўрсатиш мумкин:

$$y - \bar{y} - r_{\text{т}} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) = 0$$

Кўриб турибмизки, кузатилаётган исталган (x, y) сон жуфти x ва y га нисбатан чизиқли бўлган бу тенгламани қаноатлантиради, яъни белгининг танланмадаги қийматлари чизиқли функционал боғланиш билан боғланган. Бу ердан ҳали белгилар бош тўпламда ҳам чизиқли функционал боғланиш билан боғланган деган ишонч билан хулоса чиқариш мумкин эмаслигини қайд қилиб ўтамиз (катта ҳажмли репрезентатив танланма бўлганда нормал тақсимланган бош тўпламда белгилар орасидаги боғланиш чизиқлига яқин ва ҳатто чизиқли бўлади).

4. Танланма корреляция коэффициентининг абсолют қиймати ортиб борган сари чизиқли корреляцион боғланиш янада зичроқ бўла боради ва $|r_{\text{т}}| = 1$ да функционал боғланишга ўтади.

Исботи. Ушбу

$$S_y = D_y(1 - r_{\text{т}}^2), \qquad S_x = D_x(1 - r_{\text{т}}^2)$$

формулалардан кўриниб турибдики, $r_{\text{т}}$ нинг абсолют қиймати ортиши билан S_y ва S_x дисперсиялар камаяди, яъни белгиларнинг кузатилаётган қийматларининг шартли ўртача қийматлар атрофида тарқоқлиги камаяди, аnа шунинг ўзи эса белгилар орасидаги зичлик ортишини ва $|r_{\text{т}}| = 1$ да 3-хоссадан келиб чиқишича, функционал боғланишга ўтишини англатади.

Келтирилган хоссалардан $r_{\text{т}}$ нинг маъноси келиб чиқади: *танланма корреляция коэффициенти танланмада сон белгилар орасидаги чизиқли боғланиш зичлигини характерлайди: $|r_{\text{т}}|$ катталик 1 га қанча яқин бўлса, боғла-*

нии шунча кучли; $|r_т|$ *катталик 0 га қанча яқин бўлса, боғланиш шунча кучсиз.*

Агар танланма етарлича катта ҳажмга эга ва бош тўпламни яхши тасвирласа (репрезентатив бўлса), у ҳолда белгилар орасидаги зичлик ҳақида *танланма* маълумотлари бўйича олинган хулоса маълум даражада *бош тўпламга* ҳам тарқатилиши ҳам мумкин. Масалан, нормал тақсимланган бош тўплам корреляция коэффициентини баҳолаш учун ($n > 50$ да)

$$r_т - 3\frac{1-r_т^2}{\sqrt{n}} \leqslant r_Б \leqslant r_т + 3\frac{1+r_т^2}{\sqrt{n}}$$

формуладан фойдаланиш мумкин.

1-эслатма. Танланма корреляция коэффициентининг ишораси танланма регрессия коэффициентлари ишораси билан бир хил бўлади, бу ушбу формулалардан (4-§) келиб чиқади:

$$\rho_{xy} = r_т\frac{\sigma_y}{\sigma_x};\ \rho_{xy} = r_т\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \qquad (*)$$

2-эслатма. Танланма корреляция коэффициенти танланма регрессия коэффициентларининг геометрик ўртача қийматига тенг. Дарҳақиқат, (*) тенгликларнинг чап ва ўнг томонларини кўпайтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\rho_{xy}\,\rho_{xy} = r_т^2.$$

Бу ердан

$$r_т = \pm\sqrt{\rho_{yx}\,\rho_{xy}}\,.$$

Радикал олдидаги ишора 1-эслатмага мувофиқ регрессия коэффициентлари ишоралари билан бир хил қилиб олиниши лозим.

8-§. Танланма корреляция коэффициентини ҳисоблашнинг тўрт майдон усули

Корреляцион жадвал маълумотлари бўйича танланма корреляция коэффициентини баҳолаш талаб қилинсин. Агар

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1} \quad \text{ва} \quad v_j = \frac{y_j - c_2}{h_2}$$

шартли вариантларга ўтиладиган бўлса, ҳисоблашларни анча соддалаштириш мумкин. Бу ҳолда танланма корреляция коэффициенти ушбу формула бўйича ҳисобланади (шартли варианталарга ўтиш $r_т$ катталикни ўзгартирмайди):

$$r_{Т} = \frac{\sum n_{uv} uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\,\sigma_u\,\sigma_v}$$

$\bar{u}$, $\bar{v}$, σ_u, σ_v катталиклар кўпайтмалар методи (XVII боб, 4-§) бўйича ҳисобланиши мумкин. Энди $\sum n_{uv} uv$ ни ҳисоблаш усулини кўрсатиш қолди. *Тўрт майдон усули* худди шу мақсадга хизмат қилади. Усулнинг номи энг катта частотани ўз ичига олган катакда кесишадиган сатр ва устун корреляцион жадвални *майдонлар* деб аталадиган тўрт қисмга бўлиши билан боғлиқ. Майдонлар 14-жадвалда кўрсатилганидек номерланади.

14-жадвал

u v		0	
	I		II
0		Энг кат. частота	
	III		IV

Ҳисоблаш қандай олиб борилишини кўрсатамиз, бунинг учун ҳозирча I майдон билан чекланамиз. Айтайлик, 14-жадвалнинг биринчи майдонидан иборат қисми 15-жадвал кўринишида тасвирланган бўлсин.

15-жадвал

u v	—3	—2	—1
—2	5	1	—
—1	—	20	23

u ва v варианталар жуфтлари кўпайтмаларини топамиз ва уларни тегишли частоталарни ўз ичига олган катакларнинг юқоридаги ўнг бурчакларга жойлаштирамиз. $u =$

$= -3$ ва $v = -2$ варианталар жуфти 5 марта кузатилган бўлсин; $uv = (-3)\cdot(-2) = 6$ кўпайтмани 5 частотани ўз ичига олган катакнинг юқоридаги ўнг бурчагига ёзамиз. Биринчи майдоннинг қолган катакларини ҳам шунга ўхшаш тўлдириб, 16-жадвални ҳосил қиламиз.

16-жадвал

v \ u	-3	-2	-1
-2	$\boxed{6}$ 5	$\boxed{4}$ 7	—
-1	—	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{1}$ 23

Қолган майдонларнинг катаклари ҳам шунга ўхшаш тўлдирилади. Шундай қилиб, ҳар бир катакка (n_{uv} частотани ўз ичига олган) uv кўпайтма ҳам ёзилган бўлади, энди ҳар бир катакдаги n_{uv} ва uv сонларни кўпайтириш ва натижаларни қўшиш қолади; натижада изланаётган $\sum n_{uv}uv$ сонни ҳосил қиламиз.

Ҳисоблашларни контрол қилишни қулайлаштириш мақсадида ҳар бир катакдаги n_{uv} ва uv сонларнинг кўпайтмалари ҳар бир майдон учун алоҳида қўшилади, шу билан бирга ҳисоблаш ҳар бир майдоннинг сатрлари бўйича ва устунлари бўйича олиб борилади. Майдон сатридаги $n_{uv}\cdot uv$ сонлар йиғиндисини ўнгда жойлашган қўшимча устунлардан сонлари жамланаётган майдон билан бир хил номерга эга бўлганига ёзилади. Майдон устунидаги $n_{uv}\,uv$ сонлар йиғиндисини пастда жойлашган қўшимча сатрлардан сонлари жамланаётган устун билан бир хил номерга эга бўлганига ёзилади. Сонларнинг ҳар бир майдон бўйича алоҳида йиғиндиларини жадвалнинг пастки ўнг бурчагидаги тўртта якуний катакка ёзилади. Ниҳоят, якуний катаклардаги барча сонларни қўшиб, изланаётган сон ҳосил қилинади.

Ҳисоблаш жадвали схематик тарзда 17-жадвал кўринишида тасвирланган. 17-жадвал қандай тўлдирилганлигини тушунтирамиз (яққоллик мақсадида ҳисоблаш биринчи майдон учунгина олиб борилади).

17- жадвал

v \ u	−3	−2	−1	0		I	II
−2	6 5	4 7	—			58	
−1	—	2 20	1 23		II	63	
0				Энг кат. частота		III	IV
		III			IV		
I	30	68	23	II		121	II
III				IV		III	IV

Биринчи майдоннинг сатрлари бўйича n_{uv} ва uv ларнинг кўпайтмалари йиғиндиларини топамиз ($5 \cdot 6 + 7 \cdot 4 = 58$; $20 \cdot 2 + 23 \cdot 1 = 63$) ва уларни қўшимча I устунга жойлаштирамиз.

Биринчи майдоннинг устунлари бўйича n_{uv} ва uv ларнинг кўпайтмалари йиғиндиларини топамиз ($5 \cdot 6 = 30$; $7 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 68$; $23 \cdot 1 = 23$) ва уларни қўшимча I устунга жойлаштирамиз.

I қўшимча устундаги сонлар йиғиндисини топамиз ($58 + 63 = 121$) ва уни (жадвалнинг пастки ўнг бурчагидаги) биринчи якуний катакка ёзамиз.

Контрол қилиш мақсадида қўшимча сатрнинг барча сонларини қўшамиз ($30 + 68 + 23 = 121$).

Қолган майдонлар бўйича ҳисоблаш ҳам шунга ўхшаш олиб борилади.

Мисол. 18- корреляцион жадвалда берилган маълумотлар бўйича танланма корреляция коэффициентини топинг.

Ечилиши. Шартли вариантларга ўтамиз: $u = \frac{x - C_1}{h_1} = \frac{x - 40}{10}$ (C_1 сохта ноль сифатида энг катта частотага эга бўлган $x = 40$ варианта олинди; h_1 қадам иккита қўшни варианта орасидаги айирмагача тенг: $20 - 10 = 10$) ва $v = \frac{y - c_2}{h_2} = \frac{y - 35}{10}$ (c_2 сохта ноль сифатида энг катта частотага эга бўлган $y = 35$ варианта олинди; h_2 қадам иккита қўшни варианта орасидаги айирмага тенг: $25 - 15 = 10$).

18-жадвал

X / Y	10	20	30	40	50	60	n_y
15	5	7	—	—	—	—	12
25	—	20	23	—	—	—	43
35	—	—	30	47	2	—	79
45	—	—	10	11	20	6	47
55	—	—	—	9	7	3	19
n_x	5	27	63	67	29	9	$n = 200$

Шартли варианталар бўйича корреляцион жадвал тузамиз. Бу амалда бундай бажарилади: биринчи устунда энг катта частотага эга бўлган варианта (35) ўрнига 0, нолнинг тепасига кетма-кет —1, —2, нолнинг тагига 1, 2 ёзилади. Биринчи сатрда энг катта частотага эга бўлган варианта (40) ўрнига 0, нолдан чапда кетма-кет —1, —2, —3, нолдан ўнгда 1, 2 ёзилади. Қолган барча маълумотлар дастлабки корреляцион жадвалдан кўчириб ёзилади. Натижада шартли варианталар бўйича 19- корреляцион жадвални ҳосил қиламиз.

$\bar{u}$, $\bar{v}$, σ_u ва σ_v катталикларни кўпайтмалар методи билан топиш мумкин; аммо u_i ва v_j лар кичик бўлгани учун $\bar{u}$ ва $\bar{v}$ ни ўртача қиймат таърифига асосланиб, σ_u

ва σ_v ни эса ушбу формулалардан (XVI боб, 10-§) фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2}, \quad \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\bar{v})^2}.$$

$\bar{u}$ ва $\bar{v}$ ни топамиз:

$$\bar{u} = \frac{\sum n_u u}{n} =$$

$$= \frac{5\cdot(-3) + 27\cdot(-1) + 63\cdot(-2) + 29\cdot 1 + 9\cdot 2}{200} = -0{,}425;$$

$$\bar{v} = \frac{\sum n_v v}{n} = \frac{12\cdot(-2) + 43\cdot(-1) + 47\cdot 1 + 19\cdot 2}{200} = 0{,}09;$$

Ёрдамчи $\overline{u^2}$ микдорни, кейин эса σ_u ни ҳисоблаймиз:

$$\overline{u^2} = \frac{5\cdot 9 + 27\cdot 1 + 63\cdot 4 + 29\cdot 1 + 9\cdot 4}{200} = 1{,}405;$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} = \sqrt{1{,}405 - 0{,}425^2} = 1{,}106.$$

Шунга ўхшаш $\sigma_v = 1{,}209$ ни ҳосил қиламиз.

$\sum n_{uv} uv$ ни тўрт майдон усули билан топамиз, бунинг учун 20- ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

19- жадвал

v \ u	-3	-2	-1	0	1	2	n_v
-2	5	7	—	—	—	—	12
-1	—	20	20	—	—	—	43
0	—	—	30	47	2	—	79
1	—	—	10	11	20	6	47
2	—	—	—	9	7	3	19
n_u	5	27	63	67	29	9	$n=200$

20- жадвал

	—3	—2	—1	0	1	2	1	II
—2	6 5	4 7	—		—	—	58	—
—1	—	2 20	1 23		—	—	63	—
0							III	IV
1	—	—	—1 10		1 20	2 6	—10	32
2	—	—	—		2 7	4 3	—	26
1	30	68	23	II	—	—	121	—
III	—	—	—10	IV	34	24	—10	58

Якуний катаклардаги (20-жадвалнинг пастки ўнг бурчагидаги 4 та катак) сонларни қўшамиз.

$$\sum n_{uv}uv = 121 - 10 + 58 = 169.$$

Изланаётган корреляция коэффициентини топамиз:

$$r_т = \frac{\sum n_{uv}uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{169—200\cdot(—0,425)\cdot 0,09}{200\cdot 1,106\cdot 1,209} = 0,603.$$

Шундай қилиб,

$$r_т = 0,603.$$

9-§. Регрессия тўғри чизиғи танланма тенгламасини топишга доир мисол

Энди, $r_т$ ни қандай ҳисоблаш маълум бўлгандан сўнг, регрессия тўғри чизиғи тенгламасини излашга доир мисол келтириш мақсадга мувофиқдир.

$r_т$ ни топишда $\bar{u}$, $\bar{v}$, σ_u ва σ_v ҳисобланган бўлгани учун ушбу формулалардан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир:

$$\sigma_x = h_1 \sigma_u, \qquad \sigma_y = h_2 \sigma_v, \qquad \bar{x} = \bar{u}\ h_1 + c_1, \qquad \bar{y} = \bar{v}\ h_2 + c_2.$$

Бу ерда олдинги параграфдаги белгилашлар сақланди. Китобхонга бу формулаларни мустақил келтириб чиқаришни тавсия қиламиз.

Мисол. Олдинги параграфдаги мисолнинг 18-корреляцион жадвалидаги маълумотлари бўйича Y нинг X га регрессия тўғри чизиғи танланма тенгламасини топинг.

Ечилиши. Изланаётган тенгламани умумий кўринишда ёзамиз:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_т \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}). \qquad (*)$$

Корреляция коэффициенти олдинги параграфда ҳисобланган эди. $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x ва σ_y ни топсак бўлди:

$$\bar{x} = \bar{u}\ h_1 + c_1 = -0,425 \cdot 10 + 40 = 35,75;$$

$$\bar{y} = \bar{v}\ h_2 + c_2 = 0,09 \cdot 10 + 35 = 35,9;$$

$$\sigma_x = \sigma_u\ h_1 = 1,106 \cdot 10 = 11,06;$$

$$\sigma_y = \sigma_v\ h_2 = 1,209 \cdot 10 = 12,09.$$

Топилганларни (*) га қўйиб, изланаётган

$$\bar{y}_x - 35,9 = 0,603 \frac{12,09}{11,06}(x - 35,75)$$

тенгламани, ёки узил-кесил

$$\bar{y}_x = 0,659\,x + 12,34$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Энди: а) бу тенглама бўйича ҳисобланган б) корреляцион жадвал бўйича шартли ўртача қийматларни таққослаймиз: Масалан, $x = 30$ да:

$$\text{а)}\ \bar{y}_{30} = 0,659 \cdot 30 + 12,34 = 32,11;$$

$$\text{б)}\ \bar{y}_{30} = \frac{23 \cdot 25 + 30 \cdot 35 + 10 \cdot 45}{63} = 32,94.$$

Кўриб турибмизки, ҳисобланган ва кузатилган шартли ўртача қийматларнинг мос келиши қониқарлидир.

10-§. Исталган корреляцион боғланиш ўлчовини киритишга доир дастлабки мулоҳазалар

Юқорида *чизиқли* корреляцион боғланиш зичлигининг баҳоси текширилди. *Исталган* корреляцион боғланиш зичлигини қандай баҳолаш мумкин?

Айтайлик, X ва Y сон белгилар устида кузатиш маълумотлари корреляцион жадвал кўринишга келтирилган бўлсин. Шу билан Y нинг кузатилган қийматлари группаланган деб ҳисоблаш мумкин; ҳар бир группа Y нинг X нинг тайин қийматларига мос келадиган қийматларини ўз ичига олади.

Масалан, 21-корреляцион жадвал берилган бўлсин.

21-жадвал.

Y \ X	8	9
3	4	13
5	6	7
n_x	10	20
$\bar{y}_x$	4,2	3,7

Биринчи группага Y нинг $x_1=8$ қийматга мос келган 10 та қиймати (4 марта $y_1=3$ ва 6 марта $y_2=5$ кузатилган) тегишли.

Иккинчи группага Y нинг $x_2=9$ га мос келган 20 та қиймати (13 марта $y_1=3$ ва 7 марта $y_2=5$ кузатилган) тегишли.

Шартли ўртача қийматларни энди группавий ўртача қийматлар деб аташ мумкин: биринчи группанинг группавий ўртача қиймати:

$$\bar{y}_8 = \frac{4\cdot3+6\cdot5}{10} = 4,2;$$

иккинчи группанинг группавий ўртача қиймати;

$$\bar{y}_9 = \frac{13\cdot 3+7\cdot 5}{20} = 3,7.$$

Y белгининг барча қийматлари группаларга ажратилгани учун белгининг умумий дисперсиясини группаичи ва группааро дисперсиялар йиғиндиси кўринишида тасвирлаш мумкин (XVI боб, 12-§):

$$D_{\text{ум}} = D_{\text{гр.ичи}} + D_{\text{гр.аро}}\,. \qquad (*)$$

Қуйидаги даъволарнинг ўринли эканлигини кўрсатамиз:

1) агар Y белги X билан функционал боғланиш орқали боғланган бўлса, у ҳолда

$$\frac{D_{\text{гр. аро}}}{D_{\text{ум}}} = 1;$$

2) агар Y белги X билан корреляцион боғланиш орқали боғланган бўлса, у ҳолда

$$\frac{D_{\text{гр. аро}}}{D_{\text{ум}}} < 1.$$

Исботи. Агар Y белги X га функционал боғланиш билан боғланган бўлса, у ҳолда X нинг тайин қийматига Y нинг битта қиймати мос келади. Бундай ҳолда ҳар бир группада Y нинг ўзаро тенг қийматлари бўлади*, шунинг учун хар бир группанинг группавий дисперсияси нолга тенг. Демак, группавий дисперсияларнинг (группаларнинг ҳажмлари бўйича вазний) арифметик ўртача қиймати, яъни группаичи дисперсия $D_{\text{гр ичи}} = 0$ ва (*) тенглик

$$D_{\text{ум}} = D_{\text{гр. аро}}$$

кўринишини олади, бу ердан

$$\frac{D_{\text{гр. аро}}}{D_{\text{ум}}} = 1.$$

2) агар Y белги X га корреляцион боғланиш билан боғланган бўлса, у ҳолда X нинг тайин қийматига Y нинг, умуман айтганда, турли (группа ташкил қиладиган) қийматлари мос келади. Бундай ҳолда группанинг ҳар бир

---

* Масалан, $x_1=3$ қийматга $y_1=7$ мос келиб, шу билан бирга $x_1=3$ қиймат 5 марта кузатилган бўлса, у ҳолда группада 5 та $y_1=7$ қиймат бўлади.

группавий дисперсияси нолдан фарқли. Демак, группавий дисперсияларнинг (группаларнинг ҳажмлари бўйича вазний) арифметик ўртача қиймати: $D_{\text{гр. ичи}} \neq 0$.
У ҳолда

$$D_{\text{гр. аро}} < D_{\text{ум}}$$

(битта мусбат қўшилувчи $D_{\text{гр. аро}}$ иккита мусбат қўшилувчи йиғиндиси $D_{\text{гр. ичи}} + D_{\text{гр. аро}} = D_{\text{ум}}$ дан кичик).

$$\frac{D_{\text{гр. аро}}}{D_{\text{ум}}} < 1.$$

Юқорида келтирилган мулоҳазалардан кўриниб турибдики, белгилар орасидаги боғланиш функционал боғланишга қанчалик яқин бўлса, $D_{\text{гр.ичи}}$ шунчалик кичик ва демак, $D_{\text{гр.аро}}$ дисперсия $D_{\text{ум}}$ га шунчалик кўп яқинлашади, бу деган сўз $\frac{D_{\text{гр.аро}}}{D_{\text{ум}}}$ нисбат бирга шунчалик яқинлашади. Бу ердан, равшанки, корреляцион боғланиш зичлигининг ўлчови сифатида группааро дисперсиянинг умумий дисперсияга ёки худди шунинг ўзи, группааро ўртача квадратик четланишнинг умумий ўртача квадратик четланишга нисбатини қараш мақсадга мувофиқдир.

11-§. Танланма корреляцион нисбат

Танланмада белгилар орасидаги *чизиқли* корреляцион боғланиш зичлигини баҳолаш учун танланма корреляция коэффициенти хизмат қилади. *Ночизиқли* корреляцион боғланиш зичлигини баҳолаш учун қуйидаги янги йиғма характеристикалар киритилади:

η_{yx} — Y нинг X га танланма корреляцион нисбати;

η_{xy} — X нинг Y га танланма корреляцион нисбати.

Y нинг X га танланма корреляцион нисбати деб, группааро ўртача квадратик четланишнинг умумий ўртача квадратик четланишга нисбатига айтилади:

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\text{гр. аро}}}{\sigma_{\text{ум}}}$$

ёки, бошқача белгиласак,

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y},$$

бу ерда

$$\sigma_{\overline{y}_x} = \sqrt{D_{\text{гр. ар}}} = \sqrt{\frac{\sum n_x (\overline{y}_x - \overline{y})^2}{n}};$$

$$\sigma_y = \sqrt{D_{\text{ум}}} = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \overline{y})^2}{n}},$$

бу ерда n — танланма ҳажми (барча частоталар йиғиндиси);

n_x — X белги x қийматининг частотаси;

n_y — Y белги y қийматининг частотаси;

$\overline{y}$ — Y белгининг умумий ўртача қиймати,

$\overline{y}_x$ — белгининг шартли ўртача қиймати.

X нинг Y га танланма корреляцион нисбати шунга ўхшаш аниқланади:

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\overline{x}_y}}{\sigma_x}.$$

Мисол. 22-корреляцион жадвал маълумотлари бўйича η_{yx} ни топинг.

22-жадвал.

Y \ X	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	—	6	12
n_x	10	28	12	$n=50$
$\overline{y}_x$	21	15	20	

Ечилиши. Умумий ўртача қийматни топамиз:

$$\overline{y} = \frac{\sum n_y y}{n} = \frac{38\cdot 15 + 12\cdot 25}{50} = 17,4.$$

Умумий ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \overline{y})^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{38\ (15-17,4)^2 + 12\,(25-17,4)^2}{50}} = 4,27.$$

Группааро ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma_{\overline{y}_x} = \sqrt{\frac{\sum n_x\ (\overline{y}_x - \overline{y})^2}{50}} =$$

$$= \sqrt{\frac{10\ (21-17,4)^2 + 28\ (15-17,4)^2 + 12\ (20-16,4)^2}{50}} = 2,73.$$

Изланаётган корреляцион нисбат:

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{y}_x}}{\sigma_y} = \frac{2,73}{4,27} = 0,64.$$

12- §. Танланма корреляцион нисбатнинг хоссалари

η_{yx} қандай хоссаларга эга бўлса, η_{xy} ҳам шу хоссаларга эга бўлгани учун фақат η_{yx} танланма корреляцион нисбатнинг хоссаларини санаб ўтамиз ва ёзувни соддалаштириш мақсадида бундан кейин уни η деб белгилаймиз ҳамда айтишга осон бўлиши учун «корреляцион нисбат» деймиз.

1. *Корреляцион нисбат ушбу қўш тенгсизликни қаноатлантиради:*

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

Исботи. $\eta \geqslant 0$ тенгсизлик η манфий бўлмаган сонлар — (группавий ва умумий) ўртача квадратик четланишларнинг нисбати эканлигидан келиб чиқади.

$\eta \leqslant 1$ тенгсизликни исботлаш учун

$$D_{\text{ум}} = D_{\text{гр.ичи}} + D_{\text{гр.аро}}$$

формуладан фойдаланамиз. Бу тengликнинг иккала қисмини $D_{\text{ум}}$ га бўламиз:

$$1 = \frac{D_{\text{гр.ичи}}}{D_{\text{ум}}} + \frac{D_{\text{гр.аро}}}{D_{\text{ум}}}$$

ёки

$$1 = \frac{D_{\text{гр.ичи}}}{D_{\text{ум}}} + \eta^2.$$

Иккала қўшилувчи ҳам манфиймас ва уларнинг йиғиндиси бирга тенг бўлгани учун уларнинг ҳар бири ҳам бирдан ортиқ бўлмайди, хусусан

$$\eta^2 \leqslant 1.$$

$\eta > 0$ эканлигини эътиборга олиб, бундай хулосага келамиз:

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

2. *Агар* $\eta = 0$ *бўлса, у ҳолда* Y *белги ҳам* X *белги билан корреляцион боғланиш билан боғланмаган.*

Исботи. Шартга кўра

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{гр.аро}}}{\sigma_{\text{ум}}} = 0,$$

бу ердан

$$\sigma_{\text{гр.аро}} = 0,$$

ва демак,

$$D_{\text{гр.аро}} = 0.$$

Группааро дисперсия $\bar{y}_x$ шартли (группавий) ўртача қийматларнинг $\bar{y}$ умумий ўртача қийматга нисбатан дисперсиясидир.

Группааро дисперсиянинг нолга тенглиги шартли ўртача қийматлар X белгининг барча қийматларида (умумий ўртача қийматга тенг бўлган) ўзгармас қийматини сақлашини билдиради. Бошқача сўз билан айтганда, $\eta = 0$ бўлганда шартли ўртача қиймат X нинг функцияси эмас, ва демак, Y белги X белгига корреляцион боғланиш билан боғланмаган.

1-*эслатма.* Тескари даъвони ҳам исботлаш мумкин: агар Y белги X белгига корреляцион боғланиш билан боғланмаган бўлса, у ҳолда $\eta = 0$.

3. *Агар* $\eta = 1$ *бўлса, у ҳолда* Y *белги* X *белгига функционал боғланиш билан боғланган.*

Исботи. Шартга кўра

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{гр.аро}}}{\sigma_{\text{ум}}} = 1.$$

Бу ердан

$$\sigma_{\text{ум}} = \sigma_{\text{гр.аро}}.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтариб,

$$D_{\text{ум}} = D_{\text{гр.аро}} \tag{*}$$

ни ҳосил қиламиз. $D_{\text{ум}} = D_{\text{гр.ичи}} + D_{\text{гр.аро}}$ бўлгани учун (*) га кўра

$$D_{\text{гр.ичи}} = 0. \qquad (**)$$

Группаичи дисперсия группавий дисперсияларнинг (группаларнинг ҳажмлари бўйича вазний) арифметик ўртача қиймати бўлгани учун (**) дан ҳар бир группанинг (Y нинг X нинг тайин қийматига мос қийматларининг) дисперсияси нолга тенглиги келиб чиқади. Бу эса ҳар бир группада Y нинг тенг қийматлари борлигини, яъни X нинг ҳар бир қийматига $У$ нинг битта қиймати мос келишини англатади. Демак, $\eta = 1$ бўлганда Y белги X белгига функционал боғланиш билан боғланган.

2-эслатма. Тескари даъвони ҳам исботлаш мумкин: агар Y белги X белгига функционал боғланиш билан боғланган бўлса, у ҳолда $\eta=1$.

Яна иккита даъвони исботсиз келтирамиз:

4. *Танланма корреляцион нисбат танланма корреляцион коэффициентнинг абсолют қийматидан кичик эмас:*

$$\eta \geqslant |r_{\text{т}}|.$$

5. *Агар танланма корреляцион нисбат танланма корреляция коэффициентининг абсолют қийматига тенг бўлса, у ҳолда аниқ чизиқли боғланиш ўринли бўлади.*

Бошқача сўз билан айтганда, агар $\eta = |r_{\text{т}}|$ бўлса, у ҳолда $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ нуқталар энг кичик квадратлар методи билан топилган регрессия тўғри чизиғида ётади.

13-§. Корреляцион нисбат корреляцион боғланиш ўлчови сифатида. Бу ўлчовнинг афзалликлари ва камчиликлари

Олдинги параграфда қуйидагилар аниқланди: $\eta = 0$ бўлганда белгилар корреляцион боғланиш билан боғланмаган, $\eta = 1$ бўлганда функционал боғланиш ўринли.

Энди η ортиши билан корреляцион боғланиш борган сари зичроқ бўлишига ишонч ҳосил қиламиз. Шу мақсадда

$$D_{\text{ум}} = D_{\text{гр.ичи}} + D_{\text{гр.аро}}$$

муносабатни бундай алмаштирамиз:

$$D_{\text{гр.ичи}} = D_{\text{ум}}\left(1 - \frac{D_{\text{гр.аро}}}{D_{\text{ум}}}\right).$$

ёки

$$D_{\text{гр.ичи}} = D_{\text{ум}} (1 - \eta^2).$$

Агар $\eta \to 1$ бўлса, у ҳолда $D_{\text{гр.ичи}} \to 0$, демак, нолга групавий дисперсияларнинг ҳар бири ҳам интилади. Бошқача сўз билан айтганда, η нинг ортиши билан Y нинг X нинг тайин қийматига мос қийматлари бир-биридан борган сари кам фарқланади ва Y нинг X га боғлиқлиги борган сари зичлашиб, $\eta = 1$ бўлганда функционал боғланишга ўтади.

Юқоридаги мулоҳазаларда корреляцион боғланиш шакли ҳақида ҳеч қандай тахмин қилинмагани учун η **нисбат исталган кўринишдаги боғланиш, шу жумладан, чизиқли боғланиш зичлигининг ҳам ўлчови бўлиб хизмат қилади.** Корреляцион нисбатнинг фақат чизиқли боғланишнинг зичлигини баҳолайдиган корреляция коэффициентидан устунлиги ҳам ана шундадир. Шу билан бир қаторда корреляцион нисбат камчиликка ҳам эга: у кузатиш маълумотлари бўйича топилган нуқталар тайин кўринишдаги эгри чизиққа, масалан, параболага, гиперболага ва ҳ. к. га қанчалик яқин жойлашганлиги ҳақида сўз юритишга имкон бермайди. Бу нарса корреляцион нисбатни таърифлашда боғланиш шакли эътиборга олинмаганлиги билан изоҳланади.

14- §. Эгри чизиқли корреляциянинг энг содда ҳоллари

Агар регрессия графиги $\overline{y}_x = f(x)$ ёки $\overline{x}_y = \varphi(y)$ эгри чизиқ билан тасвирланадиган бўлса, корреляция *эгри чизиқли* дейилади.

Масалан, Y нинг X га регрессия функциялари қуйидаги кўринишларда бўлиши мумкин:

$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$ (иккинчи тартибли параболик корреляция);

$\overline{y}_x = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (учинчи тартибли параболик корреляция);

$\overline{y}_x = \frac{a}{x} + b$ (гиперболик корреляция).

Эгри чизиқли корреляция назарияси чизиқли корреляция назарияси қайси масалаларни ҳал қилса, шу масалаларни (корреляцион боғланиш шакли ва зичлигини аниқлаш) ҳал қилади.

Регрессия тенгламасининг номаълум параметрлари энг кичик квадратлар усули билан изланади. Эгри чизиқли корреляция зичлигини баҳолаш учун танланма корреляцион нисбатлар хизмат қилади (11-§).

Ишнинг моҳиятини аниқлаш мақсадида иккинчи тартибли параболик корреляция билан чекланамиз, бунда n та кузатиш (танланма) маълумотлари худди шундай корреляция ўринли деб аташга имкон беради деб ҳисоблаймиз. Бу ҳолда Y нинг X га танланма регрессия тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C, \qquad (*)$$

бу ерда A, B, C — номаълум параметрлар.

Энг кичик квадратлар усулидан фойдаланиб, номаълум параметрларга нисбатан чизиқли тенгламалар системаси ҳосил қилинади:

$$\left.\begin{aligned} \left(\sum n_x x^4\right) A + \left(\sum n_x x^3\right) B + \left(\sum n_x x^2\right) C &= \sum n_x \overline{y}_x x^2; \\ \left(\sum n_x x^3\right) A + \left(\sum n_x x^2\right) B + \left(\sum n_x x\right) C &= \sum n_x \overline{y}_x x; \\ \left(\sum n_x x^2\right) A + \left(\sum n_x x\right) B + \qquad nC &= \sum n_x \overline{y}_x \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

(формулани келтириб чиқариш тушириб қолдирилди, чунки у 4-§ дагига нисбатан янгилик киритмайди).

Бу системадан топилган A, B, C параметрлар (*) га қўйилади, натижада изланаётган регрессия тенгламаси ҳосил қилинади.

23- жадвал

Y \ X	1	1,1	1,2	n_y
6	8	2	—	10
7	—	30	—	30
7,5	—	1	9	10
n_x	8	33	9	$n = 50$
$\overline{y}_y$	6	6,73	7,5	

Мисол. 23-корреляцион жадвалдаги маълумотлар бўйича Y нинг X га $\bar{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ кўринишдаги танланма регрессия тенгламасини топинг.

24-ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

24-жадвалнинг пастки сатридаги сонларни (йиғиндиларни) (**) га қўйиб, система ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} 74{,}98\,A + 67\ 48\,B + 60{,}89\,C = 413{,}93, \\ 67{,}48\,A + 60{,}89\,B + 55{,}10\,C = 373{,}30, \\ 60{,}89\,A + 55{,}10\,B + 50\,C = 337{,}59. \end{aligned}\right\}$$

24-жадвал

x	n_x	$\bar{y}_x$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \bar{y}_x$	$n_x \bar{y}_x x$	$n_x \bar{y}_x x^2$
1	8	6	8	8	8	8	48	48	48
1,1	33	6,73	36,3	39,93	43,93	48,32	222,09	244,30	268,73
1,2	9	7,5	10,8	12,96	15,55	18,66	67,50	81	97,20
Σ	50	—	55,1	60,89	67,48	74,98	337,59	373,30	413,93

Бу системани ечиб, қуйидагиларни топамиз:

$$A = 1{,}94, \quad B = 2{,}98, \quad C = 1{,}10.$$

Изланаётган регрессия тенгламасини ёзамиз:

$$\bar{y}_x = 1{,}94\,x^2 + 2{,}98x + 1{,}10.$$

Бу тенглама бўйича ҳисобланган шартли ўртача қийматлар корреляцион жадвалдаги шартли ўртача қийматлардан сал фарқ қилишига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин. Масалан, $x_1 = 1$ да: жадвал бўйича $y_1 = 6$; тенглама бўйича $y_1 = 1\ 94 + 2{,}98 + 1{,}10 = 6{,}02$. Шундай қилиб, топилган тенглама кузатиш (танланма) маълумотлари билан яхши мос келади.

15-§. Тўпламий корреляция ҳақида тушунча

Ушбу параграфга қадар корреляцион боғланиш иккита белги орасида қаралган эди. Агар бир неча белги орасидаги боғланиш ўрганилаётган бўлса, корреляция *тўпламий корреляция* дейилади.

Энг оддий ҳолда белгилар сони учта ва улар орасидаги боғланиш чизиқли бўлади:

$$z = ax + by + c.$$

Бундай ҳолда қуйидаги масалалар юзага келади:

1) кузатиш маълумотлари бўйича боғланишнинг

$$z = Ax + By + C \qquad (*)$$

кўринишдаги танланма тенгламасини, яъни A ва B регрессия коэффициентларини ҳамда C параметрни топиш;

2) Z билан иккала X, Y белги орасидаги боғланиш зичлигини аниқлаш;

3) Z ва X (Y ўзгармас бўлганда) орасидаги, Z ва Y (X ўзгармас бўлганда) орасидаги боғланиш зичлигини баҳолаш.

Биринчи масала энг кичик квадратлар усули ёрдамида ечилади, бунда (*) тенглама ўрнига

$$z - \bar{z} = A(x - \bar{x}) + B(y - \bar{y})$$

кўринишдаги боғланиш тенгламасини излаш қулайроқ, бу ерда

$$A = \frac{r_{xz} - r_{yz} r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_z}{\delta_x}; \qquad B = \frac{r_{yz} - r_{xz} r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_y}.$$

Бу ерда r_{xz}, r_{yz}, r_{xy} мос равишда X ва Z, Y ва Z, X ва Y белгилар орасидаги корреляция коэффициентлари; σ_x, σ_y, σ_z ўртача квадратик четланишлар.

Z белгининг X, Y белгилар билан боғланиш зичлиги ушбу танланма *тўпламий корреляция коэффициенти* билан баҳоланади:

$$R = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 - 2r_{xy}r_{xz} + r_{yz} + r^2_{yz}}{1 - r_{xy}^2}},$$

шу билан бирга $0 \leqslant R \leqslant 1$.

Z ва X (Y ўзгармас бўлганда), Z ва Y (X ўзгармас бўлганда) орасидаги богланиш зичлиги мос равишда ушбу *хусусий танланма корреляция коэффициентлари* билан баҳоланади:

$$r_{xz(y)} = \frac{r_{xz} - r_{xy} r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{yz}^2)}},$$

$$r_{yz}(x) = \frac{r_{yz} - r_{xy} r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{xz}^2)}}.$$

Бу коэффициентлар оддий танланма корреляция коэффициенти эга бўлган ўша хоссаларга ва ўша маънога эга, яъни улар белгилар орасидаги чизиқли богланишни баҳолаш учун хизмат қилади.

Масалалар.

1—2- *масалаларда корреляцион жадваллар берилган:* а) $r_т$ ни; б) регрессия тўғри чизиқлари танланма тенгламаларини; в) η_{yx} ва η_{xy} ни топинг.

1.

Y \ X	5	10	15	20	n_y	$\overline{x}_y$
10	2	—	—	—	2	5
20	5	4	1	—	10	8
30	3	8	6	3	20	12,25
40	—	3	6	6	15	16
50	—	—	2	1	3	16,67
n_x	10	15	15	10	$n = 50$	
$\overline{y}_x$	21	29,33	36	38		

Жавоби. а) 0 636; б) $\overline{y}_x = 1{,}17x + 16{,}78$; $\overline{x}_y = 0{,}345y + 1{,}67$;

в) $\eta_{yx} = 0{,}656$, $\eta_{xy} = 0{,}651$.

2.

Y \ X	65	95	125	155	185	215	n_y	$\overline{x}_y$
30	**5**	—	—	—	—	—	5	65
40	4	12	—	—	—	—	16	87,5
50	—	8	**5**	**4**	—	—	17	101,18
60	—	1	5	7	**2**	—	15	145
70	—	—	—	—	1	1	2	200
n_x	9	21	10	11	3	1	$n = 55$	
$\overline{y}_x$	34,44	44,76	55	56,36	63,33	70		

Жавоби. а) 0,825; б) $\overline{y}_x = 0,23x + 21,78$; $\overline{x}_y = 2,92y - 27,25$; в) $\eta_{yx} = 0,859$, $\eta_{xy} = 0,875$.

3 — 4- масалаларда $\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ танланма регрессия тенгламаларини корреляцион жадвал маълумотлари бўйича топинг.

2.

Y \ X	2	3	5	n_y
25	20	—	—	20
45	—	30	1	31
110	—	1	48	49
	20	31	49	$n = 100$

Жавоби. $\overline{y}_x = 2,94x^2 + 7,27x - 1,25$.

4.

$Y \backslash X$	1	2	n_y
2	30	1	31
6	1	18	19
n_x	31	19	$n = 50$

Жавоби. $\overline{y}_x = 0,39x^2 + 2,49x - 0,75.$

Ўн тўққизинчи боб

СТАТИСТИК ГИПОТЕЗАЛАРНИНГ СТАТИСТИК ТЕКШИРИЛИШИ

1- §. Статистик гипотеза. **Ноль ва конкурент,** оддий ва мураккаб гипотезалар

Кўпинча бош тўплам тақсимот қонунини билиш зарур бўлади. Агар тақсимот қонуни номаълум, лекин у тайин кўринишга (уни A деб атаймиз) эга деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у ҳолда қуйидаги гипотеза илгари сурилади; бош тўплам A қонун бўйича тақсимланган. Шундай қилиб, бу гипотезада гап *тахмин қилинаётган тақсимотнинг кўриниши* ҳақида бормоқда.

Тақсимот қонуни маълум, унинг параметрлари эса номаълум бўлган ҳол бўлиши мумкин. Агар Θ номаълум параметр тайин Θ_0 қийматга тенг деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у ҳолда ушбу гипотеза олға сурилади: $\Theta=\Theta_0$. Шундай қилиб бу гипотезада гап маълум тақсимот параметрининг тахмин қилинаётган катталиги ҳақида бормоқда.

Бошқача гипотезалар ҳам бўлиши мумкин: икки ёки бир неча тақсимот параметрларининг тенглиги ҳақида, тўпламларнинг эрклилиги ҳақида ва бошқа кўп гипотезалар.

Статистик гипотеза деб номаълум тақсимотнинг кўриниши ҳақида ёки маълум тақсимотларнинг параметрлари ҳақидаги гипотезага айтилади.

Масалан, қуйидаги гипотезалар статистик гипотеза бўлади:

1) бош тўплам Пуассон қонуни бўйича тақсимланган;

2) иккита нормал тўпламнинг дисперсиялари ўзаро тенг.

Биринчи гипотезада номаълум тақсимотнинг кўриниши ҳақида, иккинчисида иккита маълум тақсимотнинг параметрлари ҳақида тахмин қилинган.

«1980 йилда уруш бўлмайди» гипотезаси статистик гипотеза эмас, чунки унда тақсимотнинг на кўриниши ҳақида, на параметрлари ҳақида сўз боради.

Олға сурилган гипотеза билан бир вақтда унга зид гипотеза ҳам қаралади. Агар олға сурилган гипотеза рад қилинса, у ҳолда зид гипотеза ўринли бўлади. Шу сабабли бу гипотезаларни бир-биридан фарқ қилиш мақсадга мувофиқдир.

Нолинчи (асосий) гипотеза деб олға сурилган H_0 гипотезага айтилади. *Конкурент (альтернатив)* гипотеза деб нолинчи гипотезага зид бўлган H_1 гипотезага айтилади.

Масалан, нолинчи гипотеза нормал тақсимотнинг a математик кутилиши 10 га тенг деган тахминдан иборат бўлса, у ҳолда конкурент гипотеза жумладан, $a \neq 10$ деган тахминдан иборат бўлиши мумкин. Бу қисқача бундай ёзилади:

$$H_0: a = 10; \quad H_1: a \neq 10.$$

Фақат битта ва биттадан ортиқ тахминларни ўз ичига олган гипотезалар бир-биридан фарқ қилинади.

Оддий гипотеза деб фақат битта тахминни ўз ичига олган гипотезага айтилади. Масалан, агар λ кўрсаткичли тақсимотнинг параметри бўлса, у ҳолда $H_0: \lambda = 5$ гипотеза оддий. H_0: нормал тақсимотнинг математик кутилиши 3 га тенг (σ — маълум) гипотеза — оддий.

Мураккаб гипотеза деб чекли ёки чексиз сондаги оддий гипотезалардан иборат гипотезаларга айтилади. Масалан, $H: \lambda > 5$ мураккаб гипотеза ушбу $H_i: \lambda = b_i$ (бу ерда b_i 5 дан катта исталган сон) кўринишдаги оддий гипотезаларнинг чексиз кўп тўпламидан иборат. H_0: нормал тақсимотнинг математик кутилиши 3 га тенг (σ — номаълум) гипотеза мураккаб гипотезадир.

2- §. Биринчи ва иккинчи тур хатолар

Олға сурилган гипотеза тўғри ёки нотўғри бўлиши мумкин, шу туфайли уни текшириш зарурати туғилади. Текшириш статистик методлар билан бажарилгани сабабли, уни ҳам *статистик текшириш* дейилади. Гипотезани статистик текшириш натижасида икки ҳолда нотўғри қарорга келиниши, яъни икки турдаги хатога йўл қўйилиши мумкин.

Биринчи тур хато шундан иборатки, бунда тўғри гипотеза рад қилинади.

Иккинчи тур хато шундан иборатки, бунда нотўғри гипотеза қабул қилинади.

Бу хатоларнинг оқибатлари ҳар хил бўлиши мумкинлигини қайд қилиб ўтамиз. Масалан, «бинони қуриш давом эттирилсин» деган тўғри қарор рад этилган бўлса, у ҳолда биринчи тур бу хато моддий зарарга олиб келади; агар бинонинг ағдарилиб тушиш хавфига қарамасдан «қурилиш давом эттирилсин» деган қарор қабул қилинган бўлса, у ҳолда иккинчи тур бу хато кишиларнинг ҳалокатига олиб келиши мумкин. Албатта, биринчи тур хато иккинчи тур хатога қараганда оғирроқ оқибатларга олиб келадиган мисоллар ҳам келтириш мумкин.

1-эслатма. Тўғри қарор ҳам икки ҳолда қабул қилиниши мумкин:

1) гипотеза қабул қилинади, у аслида ҳам тўғри эди;
2) гипотеза рад қилинади; у аслида ҳам нотўғри эди.

2-эслатма. Биринчи тур хатога йўл қўйиш эҳтимолини α орқали белгилаш қабул қилинган; у *қийматдорлик даражаси* дейилади. Қийматдорлик даражаси кўпинча 0,05 ёки 0,01 га тенг қилиб олинади. Агар, масалан, қийматдорлик даражаси 0,05 га тенг қилиб олинадиган бўлса, у ҳолда бу юзта ҳолдан бештасида биз биринчи тур хатога йўл қўйишимиз (тўғри гипотезани рад қилишимиз) мумкинлигини англатади.

3-§. Нолинчи гипотезани текширишнинг статистик критерийси. Критерийнинг кузатиладиган қиймати

Нолинчи гипотезани текшириш мақсадида махсус танланган ва аниқ ёки тақрибий тақсимоти маълум бўлган тасодифий миқдор ишлатилади. Бу миқдорни, агар у нормал тақсимланган бўлса, U ёки Z орқали, Фишер — Снедекор қонуни бўйича тақсимланган бўлса, F ёки v^2 орқали, Стъюдент қонуни бўйича тақсимланган бўлса, T орқали, «хи квадрат» қонуни бўйича тақсимланган бўлса, χ^2 орқали белгиланади ва ҳ. к. Ушбу параграфда тақсимотнинг кўриниши эътиборга олинмагани учун бу миқдорни, умумийлик нуқтаи назаридан, K орқали белгилаймиз.

Статистик критерий (ёки оддийгина *критерий*) деб нолинчи гипотезани текшириш учун хизмат қиладиган K тасодифий миқдорга айтилади.

Масалан, иккита нормал тақсимланган бош тўплам дисперсияларининг тенглиги ҳақидаги гипотеза текширилаётган бўлса, у ҳолда K критерий сифатида тузатилган танланма дисперсиялар нисбати олинади:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}.$$

Бу миқдор тасодифийдир, чунки турли тажрибаларда дисперсиялар ҳар хил, олдиндан маълум бўлмаган қийматлар қабул қилади. У Фишер — Снедекор қонуни бўйича тақсимланган.

Гипотезани текшириш учун критерийга кирган миқдорларнинг хусусий қийматлари танланмалардаги маълумотлар бўйича ҳисобланади ва, шундай қилиб, критерийнинг хусусий (кузатиладиган) қиймати ҳосил қилинади.

Кузатиладиган қиймат $K_{кузат.}$ деб критерийнинг танланмалар бўйича ҳисобланган қиймати белгиланади.

Масалан, нормал бош тўпламлардан олинган иккита танланма бўйича $s_1^2 = 20$ ва $s_2^2 = 5$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган бўлса, у ҳолда F критерийнинг кузатиладиган қиймати:

$$F_{кузат.} = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{20}{5} = 4.$$

4- §. Критик соҳа. Гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси. Критик нуқталар

Тегишли критерий танлангандан сўнг, унинг мумкин бўлган барча қийматлари тўплами иккита кесишмайдиган қисм тўпламга ажратилади: улардан бири критерийнинг нолинчи гипотеза рад қилинадиган, иккинчиси эса нолинчи гипотеза қабул қилинадиган қийматларини ўз ичига олади.

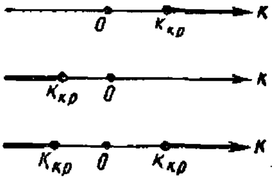
Критик соҳа деб критерийнинг нолинчи гипотеза рад қилинадиган қийматлари тўпламига айтилади.

Гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси (йўл қўйиладиган қийматлар соҳаси) деб критерийнинг гипотеза қабул қилинадиган қийматлари тўпламига айтилади.

Статистик гипотезаларни текширишнинг асосий принципини бундай таърифлаш мумкин: агар критерийнинг кузатиладиган қиймати критик соҳага тегишли бўлса, гипотеза рад қилинади, агар критерийнинг кузатилаётган қиймати гипотезанинг қабул қилиниш соҳасига тегишли бўлса, гипотеза қабул қилинади.

К критерий бир ўлчовли тасодифий миқдор бўлгани учу унинг мумкин бўлган барча қийматлари бирор интервалг тегишли бўлади. Шу сабабли критик соҳа ва гипотезани қабул қилиниш соҳаси ҳам интерваллар бўлади ва демак уларни ажратиб турадиган нуқталар мавжуд.

Критик нуқталар (чегаралар) $k_{\text{кр}}$ деб критик соҳан гипотезанинг қабул қилиниш соҳасидан ажратиб турадига нуқталарга айтилади.



23- расм.

Бир томонлама (ўнг томонлам. ва чап томонлама) ва икк. томонлама критик соҳалар фарқ қилинади.

Ўнг томонлама критик соҳа де $K > k_{\text{кр}}$ тенгсизлик билан аниқланадиган критик соҳага айтилади, б ерда $k_{\text{кр}}$ — мусбат сон (23-*а* расм)

Чап томонлама критик соҳа де $K < k_{\text{кр}}$ тенгсизлик билан аниқланадиган критик соҳага айтилади, бу ерда $k_{\text{кр}}$ — манфий сон (23-*б* расм).

Бир томонлама критик соҳа деб ўнг томонлама ёки ча томонлама критик соҳага айтилади.

Икки томонлама критик соҳа деб $K < k_1$, $K > k_2$ тенгсизликлар билан аниқланадиган критик соҳага айтилади, бу ерда $k_2 > k_1$.

Хусусан, критик нуқталар нолга нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда икки томонлама критик соҳа ($k_{\text{кр}} > 0$ деган фаразда)

$$K < -k_{\text{кр}}, \quad K > k_{\text{кр}}$$

тенгсизликлар ёки унга тенг кучли $|K| > k_{\text{кр}}$ тенгсизлик билан аниқланади (23-*в* расм).

5- §. Ўнг томонлама критик соҳани топиш

Критик соҳани қандай топиш керак? Бу масалага асосли жавоб бериш анча мураккаб назарияни жалб қилишни талаб этилади. Биз унинг элементлари билан чекланамиз. Аниқлик учун,

$$K > k_{\text{кр}},$$

бу ерда $k_{\text{кр}} > 0$

тенгсизлик билан аниқланадиган ўнг томонлама критик соҳани топишдан бошлаймиз.

Кўриб турибмизки, ўнг томонлама критик соҳани топиш учун критик нуқтани топиш кифоя. Демак, янги савол юзага келади: бу нуқтани қандай топиш мумкин?

Шу мақсадда анча кичик эҳтимол — қийматдорлик даражаси α танланади. Сўнгра $k_{кр}$ критик нуқтани бундай талабга асосланиб изланади: нолинчи гипотеза ўринли бўлиши шартида K критерийнинг $k_{кр}$ дан катта қиймат қабул қилиш эҳтимоли қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлсин:

$$P(K > k_{кр}) = \alpha.$$

Ҳар бир критерий учун тегишли жадваллар тузилган бўлиб, улар бўйича юқоридаги талабларни қаноатлантирадиган критик нуқта топилади.

1-эслатма. Критик нуқта топилгандан сўнг, танланмалардаги маълумотлар бўйича критерийнинг кузатилган қиймати топилади, ва агар $K_{кузат.} > k_{кр}$ бўлса, у ҳолда нолинчи гипотеза рад қилинади: агар $K_{кузат} < k_{кр}$ бўладиган бўлса, у ҳолда нолинчи гипотезани рад қилишга асос йўқ.

Тушунтириш. Ўнг томонлама критик соҳа нима учун нолинчи гипотеза ўринли бўлганда

$$P\ (K > k_{кр}) = \alpha \qquad (*)$$

муносабат бажарилсин деган талабга асосланиб топилади? $K > k_{кр}$ ҳодисанинг эҳтимоли кичик бўлгани учун (α — кичик эҳтимол эди) бундай ҳодиса нолинчи гипотеза ўринли бўлганда кичик эҳтимолли ҳодисаларнинг амалда мумкинмаслиги принципига асосан ягона синашда рўй бермаслиги керак (II боб, 4-§). Шунга қарамасдан, у рўй берса, яъни критерийнинг кузатилаётган қиймати $k_{кр}$ дан катта бўлса, у ҳолда буни шу билан тушунтириш мумкин: нолинчи гипотеза ёлғон (нотўғри), бинобарин, у рад қилиниши лозим. Шундай қилиб, (*) талаб критерийнинг шундай қийматларини аниқлайдики, бу қийматларда нолинчи гипотеза рад қилинади, ана шу қийматлар ўнг томонлама критик соҳани ташкил қилади.

2-эслатма. Критерийнинг кузатилаётган қиймати $k_{кр}$ дан нолинчи гипотеза нотўғри бўлгани учун эмас, балки бошқа сабабларга кўра (танланма ҳажмининг кичиклиги, эксперимент методикасининг камчиликлари ва ҳ. к.) катта бўлиб қолиши мумкин. Бу ҳолда нолинчи гипотезани рад қилиб, биринчи тур хатога йўл қўйилади. Бундай хатонинг эҳтимоли α қийматдорлик даражасига тенг. Шундай қилиб, (*) талабдан фойдаланишда, биз α эҳтимол билан биринчи тур хатога йўл қўйиш хавфига эгамиз.

Бу ўринда шуни қайд қилиб ўтамизки, маҳсулот сифатини контрол қилишга доир китобларда яроқли буюмларни яроқсиз деб тан олиш эҳтимоли «ишлаб чиқарувчининг таваккали», яроқсиз партияни қилиш эҳтимоли эса «истеъмолчининг таваккали» дейилади.

3-эслатма. Айтайлик, нолинчи гипотеза қабул қилинган бўлсин. *Шу билан у исботланди деб ўйлаш хато бўлади.* Ҳақиқатан ҳам, маълумки, бир умумий тахминни тасдиқлайдиган битта мисол ҳали уни исботламайди. Шу сабабли бундай дейиш тўғрироқ бўлади: «кузатиш маълумотлари нолинчи гипотезага мувофиқ келади ва демак, уни рад қилишга асос бўла олмайди».

Практикада гипотезани катта ишонч билан қабул қилиш учун бошқа усуллар билан текширилади ёки танланма ҳажмини орттириб, эксперимент такрорланади.

Гипотезани қабул қилишдан кўра кўпроқ рад этишга ҳаракат қилинади. Ҳақиқатан, маълумки бирор умумий даъвони рад қилиш учун бу даъвога зид бўлган битта мисол келтириш кифоя. Агар критерийнинг кузатилаётган қиймати критик соҳага тегишли бўлса, у ҳолда шу фактнинг ўзи нолинчи гипотезага зид бўлган мисолдир, демак, бу мисол гипотезани рад қилишга имкон беради.

6-§. Чап томонлама ва икки томонлама критик соҳаларни излаш

Чап томонлама ёки икки томонлама критик соҳаларни излаш (ўнг томонлама соҳа учун бўлгани каби) тегишли критик нуқталарни топишга келтирилади.

Чап томонлама критик соҳа $K < k_{кр}$ ($k_{кр} < 0$) тенгсизлик билан аниқланади (4-§).

Критик нуқта қуйидаги талабга асосланиб топилади: нолинчи гипотеза ўринли бўлганда критерийнинг $k_{кр}$ дан кичик киймат қабул қилиш эҳтимоли қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлсин:

$$P(K < k_{кр}) = \alpha.$$

Икки томонлама критик соҳа $K < k_1$, $K > k_2$ тенгсизликлар билан аниқланади (4-§).

Критик нуқталар қуйидаги талабга асосланиб топилади: нолинчи гипотеза ўринли бўлганда критерийнинг k_1 дан кичик ёки k_2 дан катта қиймат қабул қилиш эҳтимоллари йиғиндиси қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлсин:

$$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha. \qquad (*)$$

Равшанки, критик нуқталар сон-саноқсиз усуллар билан топилиши мумкин. Агар критерийнинг тақсимоти нолга нисбатан симметрик ва нолга нисбатан $-k_{\text{кр}}$ ва $k_{\text{кр}}$ ($k_{\text{кр}} > 0$) нуқталарни (масалан, қувватни* ошириш учун) танлаш учун асос бўлса, у ҳолда

$$P(K < -k_{\text{кр}}) = P\ (K > k_{\text{кр}}).$$

(*) ни эътиборга олиб,

$$P(K > k_{\text{кр}}) = \frac{\alpha}{2}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу муносабат икки томонлама критик соҳанинг критик нуқталарини топиш учун хизмат қилади.

Юқорида айтиб ўтилганидек (5-§), критик нуқталар тегишли жадваллар бўйича топилади.

7-§. Критик соҳани танлаш ҳақида қўшимча маълумотлар. Критерий қуввати

Биз критик соҳани нолинчи гипотеза ўринли бўлиш шартида критерийнинг шу соҳага тушиш эҳтимоли α тенг бўлсин деган талабга асосланиб туздик. Лекин критерийнинг критик соҳага тушиш эҳтимолини нолинчи гипотеза нотўғри, ва демак, унга конкурент гипотеза ўринли шартида киритиш мақсадга мувофиқ экан.

Критерийнинг қуввати деб конкурент гипотеза ўринли бўлиш шартида критерийнинг критик соҳага тушиш эҳтимолига айтилади. Бошқача сўз билан айтганда, критерий қуввати, бу — агар конкурент гипотеза ўринли бўлса — нолинчи гипотезанинг рад қилиниш эҳтимолидир.

Айтайлик, гипотезани текшириш учун тайин қийматдорлик даражаси қабул қилинган ва танланма тайин ҳажмга эга бўлсин. Энди критик соҳани танлаш бизнинг ихтиёримизда бўлади. Уни критерийнинг қуввати максимал бўладиган қилиб танлаш мақсадга мувофиқ бўлишини кўрсатамиз

Даставвал, агар иккинчи турдаги хато (нотўғри гипотезанинг қабул қилиниш) эҳтимоли β га тенг бўлса, у ҳолда қувват $1 - \beta$ га тенглигига ишонч ҳосил қиламиз. Дарҳақиқат, агар β иккинчи тур хатонинг, яъни «нолинчи гипотеза

---

* Қувват таърифи 7-§ да берилган.

қабул қилинган, аслида конкурент гипотеза ўринли эди» ҳодисасининг эҳтимоли бўлса у ҳолда қарама-қарши ҳодиса «нолинчи гипотеза рад қилинган, шу билан бирга конкурент гипотеза ўринлилигининг эҳтимоли, яъни критерийнинг қуввати 1 — β га тенг.

Равшанки, 1 — β қувват ортсин; демак, иккинчи тур хатога йўл қўйиш эҳтимоли камаяди. Шундай қилиб, қувват қанча катта бўлса, иккинчи тур хатога йўл қўйиш эҳтимоли шунча кичик бўлади.

Шундай қилиб, қийматдорлик даражаси танланган бўлса, у ҳолда критик соҳани критерий қуввати максимал бўладиган қилиб тузиш керак. Бу талабнинг бажарилиши иккинчи тур хато минимал бўлишини таъминлайди, бу эса албатта, мақсадга мувофиқдир.

1-эслатма. «Иккинчи тур хатога йўл қўйилган» ҳодисасининг эҳтимоли β га тенг бўлгани учун қарама-қарши «иккинчи тур хатога йўл қўйилмаган» ҳодисасининг эҳтимоли 1 — β га, яъни критерий қувватига тенг. Бу ердан шу нарса келиб чиқадики, критерий қуввати иккинчи тур хатога йўл қўймаслик эҳтимолидир.

2-эслатма. Равшанки, биринчи ва иккинчи тур хатолар эҳтимоллари қанча кичик бўлса, критик соҳа шунча «яхши»дир. Лекин танланма ҳажми берилганда α ва β ни бир вақтда камайтириш мумкин эмас, α камайтириладиган бўлса, β ортади. Масалан, агар α = 0 қабул қилинадиган бўлса, у ҳолда барча гипотезалар, шу жумладан, нотўғрилари ҳам қабул қилинади, яъни иккинчи тур хато эҳтимоли β ортади.

α ни мақсадга энг мувофиқ бўладиган қилиб қандай танлаш мумкин? Бу саволга бериладиган жавоб ҳар бир конкрет масала учун хатолар «оқибатларининг оғирлигига» боғлиқ. Масалан, биринчи тур хато кўп исрофга, иккинчи тур хато эса кам исрофга сабаб бўлса, у ҳолда иложи борича кичикроқ α олиш лозим.

Агар α танланган бўлса, у ҳолда тўлароқ курсларда баён этилган Ю. Нейман ва Э. Пирсон теоремаларидан фойдаланиб, шундай критик соҳа тузиш мумкинки, унинг учун β минимал, ва демак, критерий қуввати максимал бўлади.

3-эслатма. Биринчи ва иккинчи тур хатолар эҳтимолларини камайтиришнинг бирдан-бир йўли танланмалар ҳажмини орттиришдан иборат.

8-§. Нормал бош тўпламларнинг икки дисперсиясини таққослаш

Амалда дисперсияларни таққослаш масаласи приборлар, асбоблар, ўлчаш методларининг аниқлигини таққослаш талаб этилганда юзага келади. Равшанки, прибор, асбоб ва методлар орасида ўлчаш натижаларининг энг кам тарқоқ бўлишини, яъни энг кичик дисперсияни таъминлайдигани маъқулроқдир, Айтайлик, X ва Y бош тўпламлар нормал тақсимланган бўлсин. Бу тўпламлардан олинган n_1 ва n_2 ҳажмли эркли танланмалар бўйича s_X^2 ва s_Y^2 тузатилган танланма дисперсиялар топилган. Берилган α қийматдорлик даражасида тузатилган дисперсиялар бўйича ушбу нолинчи гипотезани текширишни талаб қилинади: қаралаётган тўпламларнинг бош дисперсиялари ўзаро тенг:

$$H_0: D(X) = D(Y).$$

Тузатилган дисперсиялар бош дисперсияларнинг силжимаган баҳолари (XVI боб, 13-§), яъни

$$M[s_X^2] = D(X), \quad M[s_Y^2] = D(Y)$$

эканлигини эътиборга олиб, нолинчи гипотезани бундай ёзиш мумкин:

$$H_0: M[s_X^2] = M[s_Y^2].$$

Шундай қилиб, тузатилган танланма дисперсияларнинг математик кутилишлари ўзаро тенглигини текшириб кўриш талаб қилинади. Бу масала шунинг учун қўйиладики, одатда тузатилган дисперсиялар ҳар хил бўлади. Бундай савол туғилади: *тузатилган дисперсиялар фарқи муҳимми (аҳамиятлими) ёки муҳим эмасми?*

Агар нолинчи гипотеза ўринли, яъни бош дисперсиялар бир хил бўлиб чиқса, у ҳолда тузатилган дисперсияларнинг фарқи муҳим эмас ва у тасодифий сабаблар, жумладан, танланма объектларининг тасодифий танланиши билан тушунтирилади. Масалан, иккита приборда бажарилган ўлчаш натижаларининг тузатилган танланма дисперсиялари фарқи муҳиммас бўлиб чиқса, у ҳолда приборлар бир хил аниқликка эга.

Агар нолинчи гипотеза рад қилинадиган бўлса, яъни бош дисперсиялар бир хил бўлмаса, у ҳолда тузатилган дисперсиялар фарқи муҳим ва уни тасодифий сабаблар билан тушунтириб бўлмайди; бунга бош дисперсияларнинг ўзлари ҳар хиллиги сабабдир. Масалан, иккита приборда бажарилган ўлчаш натижаларининг тузатилган дисперсиялари фарқи муҳим бўлиб чиқса, у ҳолда приборлар аниқлиги ҳар хилдир.

Бош дисперсиялар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш критерийси сифатида тузатилган дисперсиялардан каттасининг кичигига нисбатини, яъни

$$F = \frac{s^2_{кат}}{s^2_{кич}}$$

тасодифий миқдорни оламиз.

F миқдор нолинчи гипотеза ўринли деган шартда $k_1 = n_1 - 1$ ва $k_2 = n_2 - 1$ озодлик даражали Фишер — Снедекор тақсимотига эга (XII боб, 15- §), бу ерда n_1 — танланма ҳажми, у бўйича катта тузатилган дисперсия ҳисобланган. n_2 — танланма ҳажми, у бўйича кичик дисперсия топилган;

Фишер — Снедекор тақсимоти фақат озодлик даражалари сонига боғлиқ бўлиб, бошқа параметрларга боғлиқ эмаслигини эслатиб ўтамиз.

Критик соҳа конкурент гипотеза кўринишига боғлиқ равишда тузилади.

Биринчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0: D(X) = D(Y)$. Конкурент гипотеза $H_1: D(X) > D(Y)$.

Бу ҳолда қуйидаги талабга асосланиб бир томонлама, чунончи, ўнг томонлама критик соҳа тузилади: F критерийнинг изланаётган критик соҳага тушиш эҳтимоли нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлсин:

$$P[F > F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)] = \alpha.$$

$F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$ критик нуқта Фишер — Снедекор тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан (7-илова) топилади, у ҳолда ўнг томонлама критик соҳа

$$F > F_{кр}$$

тенгсизлик билан; нолинчи гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси эса

$$F < F_{кр}$$

тенгсизлик билан аниқланади.

Кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган тузатилган дисперсиялардан каттасининг кичигига нисбатини $F_{кузат}$ орқали белгилаймиз ва нолинчи гипотезани текшириш қоидасини таърифлаймиз.

1- қоида. Берилган қийматдорлик даражасида нормал тўпламлар бош дисперсияларининг тенглиги ҳақида $H_0: D(X) = D(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза

$H_1: D(X) > D(Y)$ бўлганда текшириш учун тузатилган дисперсиялардан каттасининг кичигига нисбатини, яъни

$$F_{\text{кузат}} = \frac{s^2_{\text{кат}}}{s^2_{\text{кич}}}$$

ни ҳисоблаш ва Фишер—Снедекор тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан берилган α қийматдорлик даражаси ва k_1 ва k_2 озодлик даражалари сонлари (k_1 — катта тузатилган дисперсиянинг озодлик даражалари сони) бўйича $F_{\text{кузат}}$ (α, k_1, k_2) критик нуқтани топиш лозим.

Агар $F_{\text{кузат}} < F_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $F_{\text{кузат}} > F_{\text{кр}}$ бўлса, у ҳолда нолинчи гипотеза рад қилинади.

1- мисол. X, Y нормал бош тўпламлардан олинган $n_1 = 12$ ва $n_2 = 15$ ҳажмли эркли танланмалар бўйича $s^2_X = 11{,}41$ ва $s^2_Y = 6{,}52$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида бош дисперсиялар тенглиги ҳақидаги $H_0: D(X) = D(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: D(X) > D(Y)$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Катта тузатилган дисперсиянинг кичигига нисбатини топамиз:

$$F_{\text{кузат}} = \frac{11{,}41}{6{,}52} = 1{,}75.$$

Конкурент гипотеза $D(X) > D(Y)$ кўринишга эга бўлгани учун критик соҳа ўнг томонламадир.

Жадвалдан (7- илова) $\alpha = 0{,}05$ қийматдорлик даражаси ва $k_1 = 12 - 1 = 11$ ва $k_2 = 15 - 1 = 14$ озодлик даражалари сони бўйича $F_{\text{кр}}$ $(0{,}05;\ 11;\ 14) = 2{,}57$ критик нуқтани топамиз.

$F_{\text{кузат}} < F_{\text{кр}}$ бўлгани учун бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад қилишга асос йўқ. Бунда ва бундан сўнг 0,05 қийматдорлик даражаси учун критик нуқталар 331-бетдаги сноскада кўрсатилган китобдаги VI жадвалдан олинган; 0,01 қийматдорлик даражасида критик нуқталар ушбу китобнинг 7-иловасида берилган.

Иккинчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0: D(X) = D(Y)$. Конкурент гипотеза $H_1: D(X) \neq D(Y)$.

Бу ҳолда қуйидаги талабга асосланиб, икки томонлама критик соҳа тузилади: критерийнинг нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда бу соҳага тушиш эҳтимоли қабул қилинган α қийматдорлик даражасига тенг бўлсин.

Критик соҳанинг чегараларини қандай танлаш керак? Маълум бўлишича, энг катта қувватга (критерийнинг конкурент гипотеза ўринли бўлганда критик соҳага тушиш эҳтимолига) критерийнинг критик соҳанинг иккита интервалдан ҳар бирига тушиш эҳтимоли $\frac{\alpha}{2}$ га тенг бўлганда эришилар экан.

24- расм.

Шундай қилиб, критик соҳанинг чап чегарасини F_1 орқали, ўнг чегарасини F_2 орқали белгиласак, у ҳолда ушбу муносабатлар ўринли бўлиши лозим (24- расм).

$$P(F < F_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad P(F > F_2) = \frac{\alpha}{2}.$$

Кўриб турибмизки,

$$F < F_1, \quad F > F_2$$

критик соҳани, шунингдек,

$$F_1 < F < F_2$$

нолинчи гипотезанинг қабул қилиниш соҳасини топиш учун критик нуқталарни топиш кифоя. Критик нуқталарни амалда қандай топиш керак?

Ўнг критик $F_2 = F_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2\right)$ нуқтани бевосита Фишер—Снедекор тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан $\frac{\alpha}{2}$ қийматдорлик даражаси ва k_1, k_2 озодлик даражалари сонлари бўйича топилади.

Аммо чап критик нуқталарни бу жадвал ўз ичига олмайди, шу сабабли F_1 ни бевосита жадвалдан топиш мумкин эмас.

Бу қийинчиликни бартараф этишга имкон берадиган усул мавжуд. Лекин биз уни баён қилмаймиз, чунки чап критик нуқтани топмаслик ҳам мумкин. F критерийнинг икки томонлама критик соҳага қабул қилинган қийматдорлик даражаси α га тенг эҳтимол билан тушишини қандай таъминлашни баён қилиш билан чекланамиз.

Маълум бўлишича, F_2 ўнг критик нуқтани берилган қийматдорлик даражасидан икки марта кичик бўлган даражада топиш етарли бўлар экан. У ҳолда критерийнинг критик соҳанинг «ўнг қисмига» (F_2 дан ўнгроққа) тушиш эҳтимоли $\frac{\alpha}{2}$ га тенг бўлибгина қолмасдан, балки критерийнинг критик соҳанинг «чап қисмига» (яъни F_1 дан чапроққа) тушиш эҳтимоли ҳам $\frac{\alpha}{2}$ га тенг бўлар экан. Бу ҳодисалар биргаликда бўлмаганлиги учун қаралаётган критерийнинг бутун икки томонлама соҳага тушиш эҳтимоли

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}=\alpha$$

бўлади.

Шундай қилиб, конкурент гипотеза $H_1:D(X)\neq D(Y)$ бўлганда $F_2=F_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2},\ k_1,\ k_2\right)$ критик нуқтани топиш етарли бўлар экан.

2-қоида. Берилган α қийматдорлик даражасида нормал тақсимланган тўпламлар бош дисперсияларининг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1:D(X)\neq D(Y)$ бўлганда текшириш учун тузатилган дисперсиялардан каттасининг кичигига нисбатини, яъни $F_{\text{кузат}}=\frac{s^2_{\text{катт}}}{s^2_{\text{кич}}}$ ни ҳисоблаш ва Фишер—Снедекор тақсимотининг критик нуқталари жадвалларидан $\frac{\alpha}{2}$ қийматдорлик даражаси (берилгандан икки марта кичик) ва k_1, k_2 озодлик даражалари сони (k_1 — катта дисперсиянинг озодлик даражалари сони) бўйича $F_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2},\ k_1,\ k_2\right)$ критик нуқтани топиш лозим.

Агар $F_{\text{кузат}}<F_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $F_{\text{кузат}}>F_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

2- мисол. X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган $n_1=10$ ва $n_2=18$ ҳажмли эркли иккита танланма бўйича $s^2_X=1,23$ ва $s^2_Y=0,41$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган. $\alpha=0,1$ қийматдорлик даражасида бош дисперсиялар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1:D(X)\neq D(Y)$ бўлганда топинг.

Ечилиши. Тузатилган катта дисперсиянинг кичигига нисбатини топамиз:

$$F_{\text{кузат}} = \frac{1,23}{0,41} = 3.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $D(X) \neq D(Y)$ кўринишда, шу сабабли критик соҳа икки томонламадир.

Жадвалдан, берилган қийматдорлик даражасидан икки марта кичик даража, яъни $\frac{\alpha}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05$ ва $k_1 = 10-1 = 9$, $k_2 = 18-1 = 17$ озодлик даражалари сони бўйича $F_{\text{кр}}(0,05; 9; 17) = 2,50$ критик нуқтани топамиз.

$F_{\text{кузат}} > F_{\text{кр}}$ бўлгани учун бош дисперсиялар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад қиламиз. Бошқача сўз билан айтганда, тузатилган танланма дисперсиялар фарқи муҳим. Масалан, агар қаралаётган дисперсиялар икки ўлчаш методининг аниқликларини характерласа, у ҳолда бу методлардан кичик дисперсияга эга бўлганлигини маъқул кўриш лозим.

9- §. Нормал тўпламнинг тузатилган танланма дисперсиясини гипотетик бош дисперсияси билан таққослаш

Айтайлик, бош тўплам нормал тақсимланган, шу билан бирга бош дисперсия номаълум бўлса-да, лекин у гипотетик (тахмин қилинган) σ_0^2 қийматга тенг деб тахмин қилишга асос бор бўлсин. Практикада σ_0^2 олдинги тажриба асосида ёки назарий белгиланади.

Айтайлик, бош тўпламдан n ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $k = n-1$ озодлик даражали S^2 тузатилган танланма дисперсия топилган бўлсин. Тузатилган дисперсия бўйича берилган қийматдорлик даражасида қаралаётган тўпламнинг бош дисперсияси σ_0^2 гипотетик қийматга тенглигидан иборат бўлган нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади.

S^2 дисперсия бош дисперсиянинг силжимаган баҳоси эканлигини ҳисобга олиб, нолинчи гипотезани бундай ёзиш мумкин:

$$H_0: M(S^2) = \sigma_0^2.$$

Шундай қилиб, тузатилган дисперсиянинг математик кутилиши бош дисперсиянинг гипотетик қийматига тенглигини текшириб кўриш талаб қилинади. Бошқача сўз билан айтганда, тузатилган танланма ва гипотетик бош дисперсиялар фарқи муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқлаш талаб этилади.

Амалда қаралаётган гипотеза приборлар, асбоблар, тадқиқот методлари аниқлигини ва технологик методлар турғунлигини текшириш лозим бўлганда қаралади. Масалан, станок-автоматда тайёрланадиган деталнинг контроль қилинадиган ўлчами тарқоқлигининг йўл қўйиладиган характеристикаси σ_0^2 маълум. танланмадан топилган тузатилган дисперсия σ_0^2 дан катта бўлса, у ҳолда станокни созлаш талаб қилинади.

Нолинчи гипотезани текшириш критерийси сифатида $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ тасодифий миқдорни қабул қиламиз. Бу миқдор тасодифий, чунки турли тажрибаларда S^2 ҳар хил, олдиндан номаълум қийматлар қабул қилинади. У озодлик даражалари $k = n - 1$ бўлган χ^2 тақсимотга эга бўлгани учун (XII боб, 13-§) уни χ^2 орқали белгилаймиз.

Шундай қилиб, нолинчи гипотезани текшириш критерийси:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}.$$

Критик соҳа конкурент гипотезанинг кўринишига боғлиқ равишда тузилади.

Биринчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$. Конкурент гипотеза $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$. Бу ҳолда қуйидаги талабга асосланиб, ўнг томонлама критик соҳа тузилади: критерийнинг бу соҳага тушиш эҳтимоли нолинчи гипотеза ўринли тахминда қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлсин:

$$P[\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)] = \alpha.$$

$\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$ критик нуқтани χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвалидан (5-илова) топилади, у ҳолда ўнг томонлама критик соҳа

$$\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}$$

тенгсизлик билан, нолинчи гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси эса

$$\chi^2 < \chi^2_{\text{кр}}$$

тенгсизлик билан аниқланади.

Критерийнинг кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган қийматини $\chi^2_{кузат}$ орқали белгилаймиз ва нолинчи гипотезани текшириш қоидасини таърифлаймиз.

1-қоида. Берилган α қийматдорлик даражасида нормал тўплам номаълум дисперсиясининг гипотетик қийматга тенглиги ҳақидаги $H_0:\sigma = \sigma_0^2$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1:\sigma^2 > \sigma_0^2$ бўлганда текшириш учун критерийнинг кузатилган қийматини $\chi^2_{кузат} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ ни ҳисоблаш ва χ^2 тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан берилган α қийматдорлик даражаси ва $k = n - 1$ озодлик даражаси сони бўйича $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$ нуқтани топиш лозим.

Агар $\chi^2_{кузат} < \chi^2_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад қилишга асос йўқ.

Агар $\chi^2_{кузат} > \chi^2_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

1-мисол. Нормал бош тўпламдан $n = 13$ ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $s^2 = 14.6$ тузатилган танланма дисперсия топилган. 0,01 қийматдорлик даражасида $H_0:\sigma^2 = \sigma_0^2 = 12$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза сифатида $H_1:\sigma^2 > 12$ ни қабул қилиб, текшириш талаб қилинади.

Ечилиши. Критерийнинг кузатилган қийматини топамиз:

$$\chi^2_{кузат} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(13-1)\cdot 14,6}{12} = 14,6.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $\sigma^2 > 12$ кўринишга эга, шунинг учун критик соҳа ўнг томонламадир.

Жадвалдан (5-илова) 0,01 қийматдорлик даражаси ва $k = n - 1 = 13 - 1 = 12$ озодлик даражалари сони бўйича $\chi^2_{кр}(0,01;\ 12) = 26,2$ критик нуқтани топамиз.

$\chi^2_{кузат} < \chi^2_{кр}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача сўз билан айтганда, тузатилган дисперсия (14.6) ва гипотетик бош дисперсия (12) орасидаги фарқ муҳим эмас.

Иккинчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0:\sigma^2 = \sigma_0^2$. Конкурент гипотеза $H_1:\sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

Бу ҳолда қуйидаги талабга асосланиб, икки томонлама критик соҳа тузилади: критерийнинг бу соҳага тушиш эҳтимоли нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда қабул қилинган α қийматдорлик даражасига тенг бўлсин.

Критик нуқталарни — критик соҳанинг чап ва ўнг чегараларини — қуйидаги талаб бўйича топилади: критерийнинг критик соҳанинг икки интервалидан ҳар бирига тушиш эҳтимоли $\frac{\alpha}{2}$ га тенг бўлсин:

$$P\left[\chi^2 < \chi^2_{\text{чап, кр}}\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)\right] = \frac{\alpha}{2},$$

$$P\left[\chi^2 > \chi^2_{\text{ўнг, кр}}\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)\right] = \frac{\alpha}{2}.$$

χ^2 тақсимотининг критик нуқталари жадвалида «ўнг» критик нуқталаргина кўрсатилган, шу сабабли «чап» критик нуқтани топиш қийин бўлиб туюлиши мумкин. Лекин бу қийинчиликни, агар

$$\chi^2 < \chi^2_{\text{чап. кр}} \text{ ва } \chi^2 > \chi^2_{\text{чап. кр}}$$

ҳодисалар қарама-қарши, ва демак, уларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенглиги эътиборга олинадиган бўлса, осонгина бартараф қилиш мумкин:

$$P(\chi^2 < \chi^2_{\text{чап кр}}) + P(\chi^2 > \chi^2_{\text{чап кр}}) = 1.$$

Бу ердан

$$P(\chi^2 > \chi^2_{\text{чап кр}}) = 1 - P(\chi^2 < \chi^2_{\text{чап кр}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Кўриб турибмизки, чап критик нуқтани ушбу талабга асосланиб, ўнг критик нуқта сифатида излаш (ва демак, уни жадвалдан топиш) мумкин: критерийнинг бу нуқтадан ўнгда жойлашган интервалга тушиш эҳтимоли $1 - \frac{\alpha}{2}$ га тенг бўлсин.

2-қоида. Берилган α қийматдорлик даражасида нормал тўпламнинг номаълум σ^2 бош дисперсиясининг σ_0^2 гипотетик қийматга тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ бўлганда текшириш учун критерийнинг кузатилаётган қиймати $\chi^2_{\text{кузат}} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ ни ҳисоблаш ва жадвал бўйича $\chi^2_{\text{кр}}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k\right)$ чап критик нуқтани ва $\chi^2_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)$ ўнг критик нуқтани топиш лозим.

Агар $\chi^2_{\text{чап, кр}} < \chi^2_{\text{кузат}} < \chi^2_{\text{ўнг кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $\chi^2_{\text{кузат}} < \chi^2_{\text{чап кр}}$ ёки $\chi^2_{\text{кузат}} > \chi^2_{\text{ўнг кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

2-мисол. Нормал бош тўпламдан $n = 13$ ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $S^2 = 10{,}3$ тузатилган танланма дисперсия топилган. 0,02 қийматдорлик даражасида $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 12$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза сифатида $H_1: \sigma^2 \neq 12$ ни олиб, текшириш талаб қилинади.

Ечилиши. Критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз:

$$\chi^2_{\text{кузат}} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(12-1)\cdot 10{,}3}{12} = 10{,}3.$$

Конкурент гипотеза $\sigma^2 \neq 12$ кўринишда бўлгани учун критик соҳа икки томонламадир.

Жадвал бўйича (5-илова) критик нуқталарни топамиз: чап критик нуқта: $\chi^2_{\text{кр}}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k\right) = \chi^2_{\text{кр}}\left(1 - \frac{0{,}02}{2}, 12\right) = \chi^2_{\text{кр}}(0{,}99;\ 12) = 3{,}57$ ва ўнг критик нуқта: $\chi^2_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}, k\right) = \chi^2_{\text{кр}}(0{,}01;\ 12) = 26{,}2$.

Критерийнинг кузатилган қиймати гипотезанинг қабул қилиниш соҳасига тегишли бўлганлиги учун ($3{,}57 < 10{,}3 < 26{,}2$) гипотезани рад қилишга асос йўқ. Бошқача сўз билан айтганда, тузатилган танланма дисперсиянинг (10,3) гипотетик бош дисперсиядан (12) фарқи муҳим эмас.

3-ҳол. Конкурент гипотеза $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$.

3-қоида. Конкурент гипотеза $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ бўлганда $\chi^2_{\text{кр}}(1 - \alpha, k)$ критик нуқта топилади.

Агар $\chi^2_{\text{кузат}} > \chi^2_{\text{кр}}(1 - \alpha, k)$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $\chi^2_{\text{кузат}} < \chi^2_{\text{кр}}(1 - \alpha, k)$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

Эслатма. Агар $D_{\text{Т}}$ танланма дисперсия топилган бўлса, у ҳолда критерий сифатида $k = n - 1$ озодлик даражали χ^2 тақсимотга эга бўлган $\chi^{21} = \frac{n D_{\text{Т}}}{\sigma_0^2}$ тасодифий миқдор қабул қилинади ёки $s^2 = \frac{n}{n-1} D_T$ га ўтилади.

10-§. Дисперсиялари маълум бўлган иккита нормал бош тўпламнинг ўртача қийматларини таққослаш (эркли танланмалар)

X ва Y бош тўпламлар нормал тақсимланган, шу билан бирга уларнинг дисперсиялари маълум(масалан,олдинги тажрибадан топилган ёки назарий ҳисобланган) бўлсин. Бу тўпламлардан олинган n ва m ҳажмли боғлиқ бўлмаган танланмалар бўйича $\overline{x}$ ва $\overline{y}$ танланма ўртача қийматлар топилган.

Танланма ўртача қийматлар бўйича қуйидаги нолинчи гипотезани берилган α қийматдорлик даражасида текшириш талаб қилинади: текширилаётган тўпламларнинг бош ўртача қийматлари (математик кутилишлари) ўзаро тенг, яъни

$$H_0: M(X) = M(Y).$$

Танланма ўртача қийматлар бош ўртача қийматларнинг силжимаган баҳолари (XV боб 5- §), яъни $M(\overline{X}) = M(X)$ ва $M(\overline{Y}) = M(Y)$ эканлигини назарда тутиб, нолинчи гипотезани бундай ёзиш мумкин:

$$H_0: M(\overline{X}) = M(\overline{Y}).$$

Шундай қилиб, танланма ўртача қийматларнинг математик кутилишларининг ўзаро тенглигини текшириш талаб қилинади. Бундай масала шунинг учун ҳам қўйиладики, одатда танланма ўртача қийматлар ҳар хил бўлиб чиқади. Бундай савол туғилади: танланма ўртача қийматлар фарқи муҳимми ёки муҳим эмасми?

Агар нолинчи гипотеза ўринли, бош ўртача қийматлар тенг бўлиб чиқса, у ҳолда танланма ўртача қийматларнинг ҳар хиллиги муҳим эмас ва у тасодифий сабаблар билан, жумладан, танланма объектларнинг тасодифий танланиши билан изоҳланади.

Масалан, A ва B физикавий катталиклар аслида бир хил ўлчамларга эга бўлиб, бу катталикларни ўлчаш натижаларининг $\overline{x}$ ва $\overline{y}$ ўртача арифметик қийматлари эса ҳар хил бўлса, у ҳолда бу фарқ муҳим эмас.

Агар нолинчи гипотеза рад қилинадиган бўлса, яъни бош ўртача қийматлар бир хил бўлмаса, у ҳолда танланма ўртача қийматлар фарқи муҳим ва у тасодифий сабаблар билан изоҳланиши мумкин эмас: бу нарса бош ўртача қийматларнинг (математик кутилишларнинг) ўзлари ҳар [illegible] билан изоҳланади. Масалан, A физикавий катталикни ўлчаш натижаларининг $\bar{x}$ арифметик ўртача қиймати B физикавий катталикни ўлчаш натижаларининг $\bar{y}$ арифметик ўртача қийматидан муҳим фарқ қилса, бу нарса бу катталикларнинг ҳақиқий ўлчамлари (математик кутилишлари) ҳар хиллигини англатади.

Нолинчи гипотезани текшириш критерийси сифатида

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma(\bar{X} - \bar{Y})} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}$$

тасодифий миқдорни қабул қиламиз. Бу миқдор — тасодифий, чунки турли тажрибаларда $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ турли, олдиндан маълум бўлган қийматлар қабул қилади.

Тушунтириш. Ўртача квадратик четланиш таърифига кўра

$$\sigma = (\bar{X} - \bar{Y}) = \sqrt{D(\bar{X} - \bar{Y})} .$$

4- хоссага (VIII боб, 5- §) кўра $D(\bar{X} - \bar{Y}) = D(X) + D(\bar{Y})$.
(*) формулага (VIII боб, 9- §) кўра

$$D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n}, \quad D(\bar{Y}) = \frac{D(Y)}{m}.$$

Демак,

$$\sigma(\bar{X} - \bar{Y}) = \sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}.$$

Z критерий — нормаланган нормал тасодифий миқдор. Дарҳақиқат, Z миқдор нормал тақсимланган, чунки у нормал тақсимланган $\bar{X}$ ва $\bar{Y}$ тасодифий миқдорнинг чизиқли комбинацияси; бу миқдорларнинг ўзлари нормал бош тўпламлардан олинган танланмалар бўйича топилган ўртача қийматлар сифатида нормал тақсимланган; Z шунинг учун ҳам нормалланган миқдорки, нолинчи гипотеза ўринли бўлганда $M(Z) = 0$, танланмалар эркли бўлгани учун $\sigma(Z) = 1$.

Критик соҳа конкурент гипотезанинг кўринишига боғлиқ равишда тузилади.

Биринчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0: M(X) = M(Y)$, конкурент гипотеза $H_1: M(X) \neq M(Y)$.

Бу ҳолда икки томонлама критик соҳани қуйидаги талабга асосланиб қурилади: критерийнинг бу соҳага тушиш эҳтимоли нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда қабул қилинган α қийматдорлик даражасига тенг бўлсин.

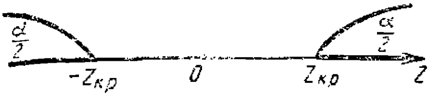
Критерийнинг энг катта қувватига (конкурент гипотеза ўринли бўлганда критерийнинг критик соҳага тушиш эҳтимолига) «чап» ва «ўнг» критик нуқталар бундай танланганда эришилади: критерийнинг критик соҳанинг иккита интервалининг ҳар бирига тушиш эҳтимоли $\frac{\alpha}{2}$ га тенг бўлсин:

$$P(Z < z_{\text{чап кр}}) = \frac{\alpha}{2},$$

$$P(Z > z_{\text{ўнг кр}}) = \frac{\alpha}{2} \cdot \qquad (*)$$

Z нормаланган нормал миқдор, бундай миқдорнинг тақсимоти эса нолга нисбатан симметрик бўлгани учун критик нуқталар нолга нисбатан симметрикдир.

Шундай қилиб, агар икки томонлама критик соҳанинг ўнг чегарасини



25- расм.

$z_{\text{кр}}$ орқали белгилайдиган бўлсак, у ҳолда чап чегара $-z_{\text{кр}}$ га тенг бўлади (25- расм).

Демак,

$$Z < -z_{\text{кр}}, \quad Z > z_{\text{кр}}$$

икки томонлама критик соҳани ва

$$(-z_{\text{кр}},\ z_{\text{кр}})$$

нолинчи гипотезанинг қабул қилиниш соҳасини топиш учун ўнг чегарани топиш кифоя.

$z_{\text{кр}}$ ни — икки томонлама критик соҳанинг ўнг чегарасини $\Phi(Z)$ Лаплас функциясидан фойдаланиб, қандай топишни кўрсатамиз. Маълумки, Лаплас функцияси нормал тасодифий миқдорнинг, масалан, Z нинг $(0, z)$ интервалга тушиш эҳтимолини аниқлайди:

$$P(0 < Z < z) = \Phi(Z). \qquad (**)$$

Z нинг тақсимоти нолга нисбатан симметрик бўлганлиги туфайли унинг $(0, \infty)$ интервалга тушиш эҳтимоли $\frac{1}{2}$ га тенг. Демак, бу интервални $z_{\text{кр}}$ нуқта билан $(0, z_{\text{кр}})$ ва $(z_{\text{кр}}, \infty)$

интервалларга ажратсак, у ҳолда қўшиш теоремасига асосан

$$P(0 < Z < z_{кр}) + P(Z > z_{кр}) = \frac{1}{2}. \qquad (***)$$

(*) ва (**) га асосан

$$\Phi(z_{кр}) + \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$\Phi(z_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Бу ердан қуйидаги хулосага келамиз: икки томонлама критик соҳанинг ўнг чегарасини ($z_{кр}$) топиш учун Лаплас функциясининг шундай аргументини топиш керакки, унга функциянинг $\frac{1-\alpha}{2}$ га тенг қиймати мос келсин.

У ҳолда икки томонлама критик соҳа ушбу

$$Z < -z_{кр}, \quad Z > z_{кр}$$

тенгсизликлар ёки уларга тенг кучли

$$|Z| > z_{кр}$$

тенгсизлик билан, нолинчи гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси эса ушбу

$$-z_{кр} < Z < z_{кр}$$

тенгсизлик, ёки унга тенг кучли

$$|Z| < z_{кр}$$

тенгсизлик билан аниқланади.

Критерийнинг кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган қийматини $Z_{кузат}$ орқали белгилаймиз ва нолинчи гипотезани текшириш қоидасини таърифлаймиз.

1-қоида. Берилган α қийматдорлик даражасида дисперсиялари маълум бўлган иккита бош тўплам математик кутилишларининг тенглиги ҳақидаги $H_0: M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: M(X) \neq M(Y)$ бўлганда текшириш учун критерийнинг кузатилган қиймати

$$Z_{кузат} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}$$

ни ҳисоблаш ва Лаплас функцияси жадвалидан критик нуқтани $\Phi(z_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}$ тенглик бўйича топиш лозим.

Агар $|Z_{кузат}| < z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $|Z_{кузат}| > z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

1-мисол. Нормал бош тўпламлардан олинган $n = 60$ ва $m = 50$ ҳажмли иккита эркли танланма бўйича $\overline{x} = 1250$ ва $\overline{y} = 1275$ танланма ўртача қийматлар топилган. Бош дисперсиялар маълум: $D(X) = 120$, $D(Y) = 100$. Берилган 0,01 қийматдорлик даражасида конкурент гипотеза $H_1: M(X) \neq M(Y)$ бўлганда $H_0: M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани текширинг.

Ечилиши. Критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз:

$$Z_{кузат} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}} = \frac{1250-1275}{\sqrt{\frac{120}{60} + \frac{100}{50}}} = -12{,}5.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $M(X) \neq M(Y)$ кўринишда, шу сабабли критик соҳа икки томонламадир.

Ўнг критик нуқтани ушбу тенглик бўйича топамиз:

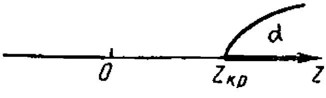
$$\Phi(z_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0{,}01}{2} = 0{,}495$$

Лаплас функцияси жадвали бўйича (2-илова) $z_{кр} = 2{,}58$ ни топамиз. $|Z_{кузат}| > z_{кр}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача сўз билан айтганда, танланма ўртача қийматлар фарқи муҳим.

Иккинчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0: M(X) = M(Y)$. Конкурент гипотеза $H_1: M(X) > M(Y)$.

Практикада бундай ҳол профессионал мулоҳазалар бир тўпламнинг бош ўртача қиймати иккинчи тўпламнинг бош ўртача қийматидан катта деб тахмин қилишга имкон берганда ўринли бўлади. Масалан, технологик процесс такомиллаштирилган бўлса, у ҳолда бу нарса маҳсулот ишлаб чиқарилишининг ортишига олиб келади, деб тахмин қилиниши табиий.

Бу ҳолда ўнг томонлама критик соҳа қуйидаги талабга асосланиб тузилади: критерийнинг бу соҳага тушиш эҳтимоли нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлсин (26-расм)



26-расм.

$$P(Z > z_{\text{кр}}) = \alpha. \qquad (^{****})$$

Критик нуқтани Лаплас функцияси ёрдамида қандай топишни кўрсатамиз. $(^{***})$ муносабатдан фойдаланамиз:

$$P(0 < Z < z_{\text{кр}}) + P(Z > z_{\text{кр}}) = \frac{1}{2}.$$

$(^{**})$ ва $(^{****})$ га асосан:

$$\Phi(z_{\text{кр}}) + \alpha = \frac{1}{2}.$$

Демак,

$$\Phi(z_{\text{кр}}) = \frac{1-2\alpha}{2}.$$

Бу ердан бундай хулосага келамиз: ўнг томонлама критик соҳанинг чегарасини ($z_{\text{кр}}$) топиш учун Лаплас функциясининг шундай аргументини топиш керакки, унга функциянинг $\frac{1-2\alpha}{2}$ га тенг қиймати мос келсин. У ҳолда ўнг томонлама критик соҳа $Z > z_{\text{кр}}$ тенгсизлик билан, нолинчи гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси эса $Z < z_{\text{кр}}$ тенгсизлик билан аниқланади.

2-қоида. Берилган α қийматдорлик даражасида дисперсиялари маълум бўлган иккита нормал бош тўплам математик кутилишларининг тенглиги ҳақидаги $H_0: M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: M(X) > M(Y)$ бўлганда текшириш учун критерийнинг

$$Z_{\text{кузат}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}$$

кузатилган қийматини ҳисоблаш ва Лаплас функцияси жадвалидан $\Phi(z_{\text{кр}}) = \frac{1-2\alpha}{2}$ тенглик бўйича критик нуқтани топиш лозим.

Агар $Z_{\text{кузат}} < z_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $Z_{\text{кузат}} > z_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

2-мисол. Нормал бош тўпламлардан олинган $n = 10$ ва $m = 10$ ҳажмли иккита эркли танланма бўйича $\bar{x} = 14{,}3$ ва $\bar{y} = 12{,}2$ танланма ўртача қийматлар топилган. Бош дисперсиялар маълум: $D(X) = 22$, $D(Y) = 18$. Берилган 0,05 қийматдорлик даражасида $H_0: M(X) = M(Y)$ гипотезани конкурент гипотеза $H_1: M(X) > M(Y)$ бўлганда текширинг.

Ечиниш. Критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз

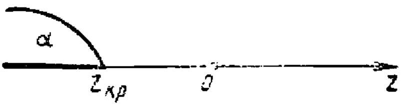
$$Z_{кузат} = \frac{14,3 - 12,2}{\sqrt{\frac{22}{10} + \frac{18}{10}}} = 1,05.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $M(X) > M(Y)$ кўринишда, шу сабабли критик соҳа ўнг томонламадир.

Лаплас функцияси жадвали бўйича $z_{кр} = 1,64$ ни топамиз. $Z_{кузат} < z_{кр}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача сўз билан айтганда, танланма ўртача қийматлар фарқи муҳим эмас.

Учинчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0 : M(X) = M(Y)$. Конкурент гипотеза $H_1 : M(X) < M(Y)$.

Бу ҳолда чап томонлама критик соҳа ушбу талабга асосланиб тузилади: критерийнинг бу соҳага тушиш эҳтимоли,



27- расм.

нолинчи гипотеза ўринли бўлганда, қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлсин (27- расм):

$$P(Z < z'_{кр}) = \alpha.$$

Z критерий нолга нисбатан симметрик тақсимланганини назарда тутиб, бундай хулосага келамиз: изланаётган $z'_{кр}$ критик нуқта шундай $z_{кр} > 0$ нуқтага симметрикки, у нуқта учун $P(Z > z_{кр}) = \alpha$, яъни $z'_{кр} = -z_{кр}$. Шундай қилиб, $z'_{кр}$ нуқтани топиш учун аввал иккинчи ҳолда баён қилингани бўйича $z_{кр}$ ёрдамчи нуқтани топиш, кейин эса топилган қийматни манфий ишора билан олиш керак экан. У ҳолда чап томонлама критик соҳа $Z < -z_{кр}$ тенгсизлик билан, нолинчи гипотезанинг қабул қилиниши соҳаси эса $Z > -z_{кр}$ тенгсизлик билан аниқланади.

3- қоида. Конкурент гипотеза $H_1 : M(X) < M(Y)$ бўлганда $Z_{кузат}$ ни ҳисоблаш ва Лаплас функцияси жадвалидан аввал $z_{кр}$ «ёрдамчи» нуқтани $\Phi(z_{кр}) = \frac{1 - 2\alpha}{2}$ тенгсизлик бўйича топиш, кейин эса $z'_{кр} = -z_{кр}$ деб олиш лозим.

Агар $Z_{кузат} > -z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $Z_{кузат} < -z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

3-мисол. Нормал бош тўпламлардан олинган $n=50$ ва $m=50$ ҳажмли эркли танланмалар бўйича $\overline{x}=142$ ва $\overline{y}=150$ танланма ўртача қийматлар топилган. Бош дисперсиялар маълум: $D(X)=28.2$; $D(Y)=22{,}8$. Берилган 0,01 қийматдорлик даражасида $H_0: M(X)=M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: M(X)<M(Y)$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Масаладаги маълумотларни критерийнинг кузатилаётган қийматини ҳисоблаш формуласига қўйиб, $Z_{кузат}=-8$ ни ҳосил қиламиз.

Шартга кўра конкурент гипотеза $M(X)<M(Y)$ кўринишга эга, шу сабабли критик соҳа чап томонламадир.

$z_{кр}$ «ёрдамчи нуқтани» ушбу тенгсизлик бўйича топамиз:

$$\Phi(z_{кр})=\frac{1-2\alpha}{2}=\frac{1-2\cdot 0{,}01}{2}=0{,}49.$$

Лаплас функцияси жадвалидан $z_{кр}=2{,}33$ ни топамиз. Демак $z'_{кр}=-z_{кр}=-2{,}33$.

$Z_{кузат}<-z_{кр}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача сўз билан айтганда, $\overline{x}$ танланма ўртача қийматнинг $\overline{y}$ танланма ўртача қийматдан кичиклиги муҳим.

11- §. Ихтиёрий тақсимланган бош тўпламларнинг иккита ўртача қийматини таққослаш (катта эркли танланмалар)

Олдинги параграфда X ва Y бош тўпламлар нормал тақсимланган, уларнинг дисперсиялари эса маълум деб фараз қилинган эди. Бу фаразда ҳамда ўртача қийматлар тенглиги ҳақидаги гипотеза ўринли ва танланмалар эркли бўлганда Z критерий 0 ва 1 параметрли нормал қонун бўйича аниқ тақсимланган.

Юқорида келтирилган талаблардан ақалли биттаси бажарилмаса, 10- § да баён қилинган, ўртача қийматларни таққослаш методини қўллаб бўлмайди.

Лекин агар эркли танланмалар катта ҳажмли (ҳар бирининг ҳажми 30 дан кичик эмас) бўлса, у ҳолда танланма ўртача қийматлар тақрибан нормал тақсимланган, танланма дисперсиялар эса бош дисперсияларнинг анча яхши (дуруст) баҳолари бўла олади ва шу маънода уларни тақрибан маълум деб ҳисоблаш мумкин.

Натижада

$$Z' = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{D_{\text{т}}(X)}{n} + \frac{D_{\text{т}}(Y)}{m}}}$$

критерий $M\ (Z') = 0$ (нолинчи гипотеза ўринли шартида) ва $\sigma(Z') = 1$ (танланмалар эркли бўлганда) параметрлар билан тақрибан нормал тақсимланган.

Шундай қилиб, агар: 1) бош тўпламлар нормал тақсимланган, уларнинг дисперсиялари эса номаълум; 2) бош тўпламлар нормал тақсимланмаган, лекин уларнинг дисперсиялари маълум; 3) бош тўпламлар нормал тақсимланмаган, уларнинг дисперсиялари номаълум, шу билан бирга танланмалар катта ҳажмли ва эркли бўлса, у ҳолда ўртача қийматларни аниқ Z критерийни тақрибий Z' критерий билан алмаштириб, 10- § да баён қилинган метод бўйича таққослаш мумкин. Бу ҳолда тақрибий критерийнинг кузатилаётган қиймати қуйидагича бўлади.

$$Z'_{\text{кузат}} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{D_{\text{т}}(X)}{n} + \frac{D_{\text{т}}(Y)}{m}}}.$$

Эслатма. Қаралаётган критерий тақрибий бўлгани учун бу критерий бўйича ҳосил қилинган натижаларга эҳтиётлик билан ёндошиш лозим.

Мисол. $n = 100$ ва $m = 120$ ҳажмли иккита эркли танланма бўйича $\overline{x} = 32{,}4$ ва $\overline{y} = 30{,}1$ танланма ўртача қийматлар ҳамда $D_{\text{т}}(X) = 15{,}0$ ва $D_{\text{т}}(Y) = 25{,}2$ танланма дисперсиялар топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида $H_0 : M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : M(X) > M(Y)$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Масаладаги маълумотларни тақрибий критерийнинг кузатилаётган қийматини ҳисоблаш формуласига қўйиб, $Z'_{\text{кузат}} = 3{,}83$ ни ҳосил қиламиз.

Шартга кўра конкурент гипотеза $M(X) > M(Y)$ кўринишга эга, шу сабабли критик соҳа ўнг томонламадир.

Критик нуқтани ушбу тенглик бўйича топамиз:

$$\Phi(z_{\text{кр}}) = \frac{1 - 2\alpha}{2} = \frac{1 - 2 \cdot 0{,}05}{2} = 0{,}45.$$

Лаплас функцияси жадвалидан $z_{кр}=1,64$ ни топамиз. $Z_{кузат}>$ $>z_{кр}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача сўз билан айтганда, танланма ўртача қийматлар фарқи муҳим.

12- §. Дисперсиялари номаълум ва бир хил бўлган нормал бош тўпламларнинг иккита ўртача қийматини таққослаш (кичик эркли танланмалар)

X ва Y бош тўпламлар нормал тақсимланган, шу билан бирга уларнинг дисперсиялари номаълум бўлсин. Масалан, кичик ҳажмли танланмалар бўйича бош дисперсиялар учун яхши баҳолар олиш мумкин эмас. Шу сабабли ўртача қийматларни таққослашнинг 11- § да баён қилинган методини бу ерда қўллаб бўлмайди.

Аммо юқоридагиларга қўшимча равишда номаълум бош дисперсиялар ўзаро тенг деб фараз қиладиган бўлсак, у ҳолда ўртача қийматларни таққослаш критерийсини (Стьюдент критерийсини) яратиш мумкин. Масалан, битта станокда тайёрланган икки партия деталларнинг ўртача ўлчамлари таққосланаётган бўлса, у ҳолда контроль қилинаётган ўлчамларнинг дисперсиялари бир хил деб тахмин қилиниши табиий.

Агар дисперсиялар бир хил деб ҳисоблашга асос йўқ бўлса, у ҳолда ўртача қийматларини таққослашдан олдин Фишер—Снедекор критерийсидан (8- §) фойдаланиб, бош дисперсиялар тенглиги ҳақидаги гипотезани текшириб кўриш лозим бўлади.

Шундай қилиб, бош дисперсиялар бир хил деган фаразда $H_0: M(X)=M(Y)$ нолинчи гипотезани текшириб кўриш талаб қилинади. Бошқача сўз билан айтганда, кичик n ва m ҳажмли эркли танланмалар бўйича топилган $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ танланма ўртача қийматлар фарқи муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқлаш талаб этилади.

Нолинчи гипотезани текшириш критерийси сифатида

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

тасодифий миқдорни қабул қиламиз. T миқдор нолинчи гипотеза ўринли бўлганда Стьюдентнинг $k=n+m-2$ озодлик даражали t- тақсимотига эга эканлиги исботланган.

Критик соҳа конкурент гипотезанинг кўринишига боғлик равишда қурилади.

Биринчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0: M(X) = M(Y)$. Конкурент гипотеза $H_1: M(X) \neq M(Y)$.

Бу ҳолда қуйидаги талабга асосланиб, икки томонлама критик соҳа қурилади: T критерийнинг бу соҳага тушиш эҳтимоли нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда қабул қилинган α қийматдорлик даражасига тенг бўлсин.

Критерийнинг энг катта қувватига (критерийнинг конкурент гипотеза ўринли бўлганда критик соҳага тушиш эҳтимоли) «чап» ва «ўнг» критик нуқталар қуйидагича танланганда эришилади: критерийнинг икки томонлама критик соҳанинг иккита интервалидан ҳар бирига тушиш эҳтимоли $\frac{\alpha}{2}$ га тенг бўлсин:

$$P(T < t_{\text{чап кр}}) = \frac{\alpha}{2}, \quad P(T > t_{\text{ўнг кр}}) = \frac{\alpha}{2}$$

T миқдор Стьюдент тақсимотига эга, бу тақсимот эса нолга нисбатан симметрик бўлгани учун критик нуқталар ҳам нолга нисбатан симметрик. Шундай қилиб, икки томонлама критик соҳанинг ўнг чегарасини $t_{\text{икки том кр}}(\alpha, k)$ орқали белгилайдиган бўлсак, у ҳолда чап чегара $-t_{\text{икки том. кр}}(\alpha, k)$ бўлади.

Демак,

$$T < -t_{\text{икки том. кр.}}(\alpha, k), \quad T > t_{\text{икки. том. кр.}}(\alpha, k)$$

икки томонлама критик соҳани ва

$$[-t_{\text{икки том. кр.}}(\alpha, k), \; t_{\text{икки том кр}}(\alpha, k)]$$

нолинчи гипотезанинг қабул қилиш соҳасини топиш учун икки томонлама критик соҳанинг ўнг чегарасини топиш кифоя.

Критерийнинг кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган қийматини $T_{\text{кузат}}$ орқали белгилаймиз ва нолинчи гипотезани текшириш қоидасини таърифлаймиз.

1-қоида. Берилган α қийматдорлик даражасида дисперсиялари номаълум, лекин бир хил бўлган икки нормал бош тўпламнинг математик кутилишлари (кичик эркли танланмалар) тенглиги ҳақидаги $H_0: M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани *конкурент гипотеза* $H_1: M(X) \neq M(Y)$ *бўлганда текшириш* учун критерийнинг

$$T_{\text{кузат}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

кузатилаётган қийматини ҳисоблаш ҳамда Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан берилган α қийматдорлик даражаси (жадвалнинг юқори сатрида жойлашган) ва $k = n + m - 2$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{\text{икки том кр}}(\alpha, k)$ нуқтани топиш лозим.

Агар $|T_{\text{кузат}}| < t_{\text{икки том кр}}(\alpha, k)$ бўлса, нолинчи гипотезани рад қилишга асос йўқ.

Агар $|T_{\text{кузат}}| > t_{\text{икки том кр}}(\alpha, k)$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

Мисол. X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган $n=5$ ва $m=6$ кичик ҳажмли эркли танланмалар бўйича $\bar{x} = 3,3$, $\bar{y} = 2,48$ танланма ўртача қийматлар ва тузатилган $s_X^2 = 0,25$ ва $s_Y^2 = 0,108$ дисперсиялар топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида $H_0: M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: M(X) \neq M(Y)$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Танланма дисперсиялар ҳар хил бўлгани туфайли даставвал бош дисперсиялар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани Фишер—Снедекор критерийсидан (8-§) фойдаланиб текширамиз.

Катта тузатилган дисперсиянинг кичигига нисбатини топамиз:

$$F_{\text{кузат}} = \frac{0,25}{0,108} = 2,31.$$

s_X^2 дисперсия s_Y^2 дисперсиядан анча катта, шу сабабли конкурент гипотеза сифатида $H_1: D(X) > D(Y)$ гипотезани қабул қиламиз. Бу ҳолда критик соҳа ўнг томонламадир. Жадвалдан $\alpha = 0,05$ қийматдорлик даражаси ва $k_1 = 5-1 = 4$, $k_2 = 6 - 1 = 5$ озодлик даражалари сонлари бўйича $F_{\text{кр}}(0,05;\ 4;\ 5) = 5,19$ критик нуқтани топамиз.

$F_{\text{кузат}} < F_{\text{кр}}$ бўлгани учун бош дисперсиялар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Бош дисперсиялар тенглиги ҳақидаги тахмин бажарилгани учун ўртача қийматларни таққослаймиз.

Стьюдент критерийсининг кузатилаётган қийматини ҳисоблаймиз:

$$T_{\text{кузат}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{ns_X^2 + ms_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n + m - 2)}{n + m}}.$$

Бу формулага кирган катталикларнинг сон қийматларини қўйиб, $T_{\text{кузат}} = 3,27$ ни ҳосил қиламиз.

Шартга кўра конкурент гипотеза $M(X)\neq M(Y)$ кўринишда, шу сабабли критик соҳа икки томонламадир. 0,05 қийматдорлик даражаси ва $k = 5 + 6 - 2 = 9$ озодлик даражалари сони бўйича жадвалдан (6-илова) $t_{\text{икки том.кр}}(0{,}05;\ 9) = 2{,}26$ критик нуқтани топамиз.

$T_{\text{кузат}} > t_{\text{икки том.кр}}$ бўлгани учун бош ўртача қийматлар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача сўз билан айтганда, танланма ўртача қийматлар фарқи муҳим.

Иккинчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0: M(X) = M(Y)$. Конкурент гипотеза $H_1: M(X)>M(Y)$.

Бу ҳолда қуйидаги талабга асосланиб, ўнг томонлама критик соҳа қурилади: T критерийнинг бу соҳага тушиш эҳтимоли нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлсин:

$$P(T>t_{\text{ўнг том кр}}) = \alpha.$$

$t_{\text{ўнг.том кр}}(\alpha, k)$ нуқтани жадвалдан (6-илова) α қийматдорлик даражаси (жадвалнинг пастки сатрида жойлашган) ва $k = n + m - 2$ озодлик даражалари сони бўйича топилади.

Агар $T_{\text{кузат}} > t_{\text{ўнг том кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $T_{\text{кузат}} > t_{\text{ўнг том. кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

Учинчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0: M(X)=M(Y)$. Конкурент гипотеза $H_1: M(X)<M(Y)$.

Бу ҳолда қуйидаги талабга асосланиб, чап томонлама критик соҳа қурилади: критерийнинг бу соҳага тушиш эҳтимоли нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлсин:

$$P(T < t_{\text{чап том. кр}}) = \alpha \cdot$$

Стьюдент тақсимотининг нолга нисбатан симметриклигига асосан:

$$t_{\text{чап том. кр}} = -t_{\text{ўнг том. кр}} \cdot$$

Шу сабабли аввал «ёрдамчи» $t_{\text{ўнг том кр}}$ критик нуқта иккинчи ҳолда баён қилинганидек топилади ва $t_{\text{чап том. кр}} = -t_{\text{ўнг том. кр}}$ деб олинади.

Агар $T_{\text{кузат}} > -t_{\text{ўнг том. кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $T_{\text{кузат}} < t_{\text{ўнг том. кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

13- §. Нормал тўпламнинг танланма ўртача қиймати билан гипотетик бош ўртача қийматини таққослаш.

А. Бош тўпламнинг дисперсияси маълум. Айтайлик, X бош тўплам нормал тақсимланган, шу билан бирга бош ўртача қиймат a номаълум бўлса-да, лекин у a_0 гипотетик (тахмин қилинаётган) қийматга тенг дейишга асос бор бўлсин. Масалан, X станок-автомат тайёрлайдиган деталлар партиясидаги x_i ўлчамлар тўплами бўлса, у ҳолда бу ўлчамларнинг a бош ўртача қиймати лойиҳадаги a_0 ўлчамга тенг деб тахмин қилиш мумкин. Бу тахминни текшириш учун $\bar{x}$ танланма ўртача қиймат топилади ҳамда $\bar{x}$ ва a_0 фарқи муҳим ёки муҳим эмаслиги текширилади. Агар фарқ муҳим бўлмаса станок ўртача олганда лойиҳадаги ўлчамни таъминлайди, агар фарқ муҳим бўлса, у ҳолда станокни созлаш лозим бўлади.

Фараз қилайлик, бош тўпламнинг дисперсияси, масалан, аввалги тажрибадан маълум ёки назарий топилган ёки катта ҳажмли танланма бўйича ҳисобланган бўлсин (катта танланма бўйича дисперсиянинг етарлича яхши баҳосини ҳосил қилиш мумкин).

Шундай қилиб, нормал бош тўпламдан n ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $\bar{x}$ танланма ўртача қиймат топилган, шу билан бирга σ^2 бош дисперсия маълум бўлсин. Танланма ўртача қиймат бўйича берилган қийматдорлик даражасида a бош ўртача қийматнинг a_0 гипотетик қийматга тенглиги ҳақидаги $H_0{:}a = a_0$ нолинчи гипотезани текшириш талаб этилади.

Танланма ўртача қиймат бош ўртача қийматнинг силжимаган баҳоси (XVI боб, 5 - §) яъни $M(\bar{X}) = a_0$ эканлигини назарда тутиб, нолинчи гипотезани қуйидагича ёзиш мумкин: $M(\bar{X}) = a_0$.

Шундай қилиб, танланма ўртача қийматнинг математик кутилишини бош ўртача қийматга тенглигини текшириш талаб этилади. Бошқача сўз билан айтганда, танланма ва бош ўртача қийматларнинг фарқи муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқлаш лозим.

Нолинчи гипотезани текшириш критерийси сифатида

$$U = \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma(\bar{X})} = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$$

тасодифий миқдорни қабул қиламиз. У нормал тақсимланган, шу билан бирга нолинчи гипотеза ўринли бўлганда $M(U) = 0$, $\sigma(U) = 1$.

Бу ерда ҳам соҳа 10-§ даги каби конкурент гипотезанинг кўринишига боғлиқ равишда қурилгани учун нолинчи гипотезанинг текшириш қоидаларини таърифлаш билан чекланамиз; U критерийнинг кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган қийматини $U_{кузат}$ орқали белгилаймиз.

1-қоида. Берилган қийматдорлик даражасида маълум σ^2 дисперсияли нормал тўпламнинг a бош ўртача қийматининг a_0 гипотетик қийматга тенглиги ҳақида $H_0: a = a_0$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: a \neq a_0$ бўлганда текшириш учун критерийнинг

$$U_{кузат} = \frac{(\overline{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$$

кузатилаётган қийматини ҳисоблаш ва Лаплас функцияси жадвали бўйича икки томонлама критик соҳанинг критик нуқтасини ушбу тенглик бўйича топиш лозим:

$$\Phi(u_{кр}) = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Агар $|U_{кузат}| < u_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $|U_{кузат}| > u_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

2-қоида. Конкурент гипотеза $H_1: a > a_0$ бўлганда ўнг томонлама критик соҳанинг критик нуқтаси ушбу тенглик бўйича топилади:

$$\Phi(u_{кр}) = \frac{1 - 2\alpha}{2}.$$

Агар $U_{кузат} < u_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $U_{кузат} > u_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

3-қоида. Конкурент гипотеза $H_1: a < a_0$ бўлганда аввал $u_{кр}$ критик нуқта 2-қоида бўйича топилади, кейин эса чап томонлама критик соҳанинг чегараси қуйидагича деб фараз қилинади:

$$u'_{кр} = -u_{кр}.$$

Агар $U_{кузат} > -u_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $U_{кузат} < -u_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

1- мисол. Ўртача квадратик четланиши $\sigma = 0,36$ маълум бўлган нормал бош тўпламдан $n = 36$ ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $\bar{x} = 21,6$ танланма ўртача қиймат топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида $H_0 : a = a_0 = 21$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : a \neq 21$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз:

$$U_{кузат} = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(21,6 - 21)\sqrt{36}}{0,36} = 10.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $a \neq a_0$ кўринишда, шу сабабли критик соҳа икки томонламадир.

Критик нуқтани ушбу тенглик орқали топамиз:

$$\Phi(u_{кр}) = \frac{1 - \alpha}{2} = \frac{1 - 0,05}{2} = 0,475.$$

Лаплас функцияси жадвали бўйича $u_{кр} = 1,96$ ни топамиз. $U_{кузат} > u_{кр}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача сўз билан айтганда, танланма ўртача қиймат билан гипотетик бош ўртача қиймат орасидаги фарқ муҳим.

2- мисол. 1-мисол маълумотлари бўйича H_0: $a = 21$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $a > 21$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Конкурент гипотеза $a > 21$ кўринишда бўлгани учун критик соҳа ўнг томонламадир.

Критик нуқтани ушбу тенгликдан топамиз:

$$\Phi(u_{кр}) = \frac{1 - 2\alpha}{2} = \frac{1 - 2 \cdot 0,05}{2} = 0,45.$$

Лаплас функцияси жадвалидан $u_{кр} = 1,65$ ни топамиз. $U_{кузат} = 10 > u_{кр}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этамиз; танланма ўртача қиймат ва гипотетик бош ўртача қиймат орасидаги фарқ муҳим.

Шуни қайд қиламизки, бу ўринда нолинчи гипотезани дарҳол рад этиш мумкин эди, чунки у 1- мисолда икки томонлама критик соҳа бўлганда рад этилган эди. Бу тўлиқ ечилишни бу ерда таълим мақсадида келтирдик.

Б. Бош тўпламнинг дисперсияси номаълум. Агар бош тўпламнинг дисперсияси номаълум бўлса (масалан, кичик танланмаларда), у ҳолда нолинчи гипотезани текшириш критерийси сифатида

$$T = \frac{(\overline{X} - a_0)\sqrt{n}}{s}$$

тасодифий миқдор қабул қилинади, бу ерда s — «тузатилган» ўртача квадратик четланиш. T миқдор $k = n - 1$ озодлик даражали Стьюдент тақсимотига эга.

Критик соҳа конкурент гипотезанинг кўринишига қараб қурилади. Бу иш юқорида баён қилингани бўйича бажарилганлиги сабабли нолинчи гипотезани текшириш қоидалари билан чекланамиз.

1-қоида. Берилган α қийматдорлик даражасида (дисперсияси номаълум нормал тўпламнинг) номаълум a бош ўртача қийматнинг a_0 гипотетик қийматга тенглиги ҳақидаги $H_0 : a = a_0$ гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : a \neq a_0$ бўлганда текшириш учун критерийнинг

$$T_{\text{кузат}} = \frac{(\overline{x} - a_0)\sqrt{n}}{s}$$

кузатилаётган қийматини ҳисоблаш ва Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан жадвалнинг юқори сатрида жойлаштирилган α қийматдорлик даражаси ва $k = n - 1$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{\text{икки том. кр}}\,(\alpha, k)$ критик нуқтани топиш лозим.

Агар $|T_{\text{кузат}}| < t_{\text{икки том.кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $|T_{\text{кузат}}| > t_{\text{икки том.кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

2-қоида. Конкурент гипотеза $H_1 : a > a_0$ бўлганда ўнг томонлама критик соҳанинг $t_{\text{ўнг кр}}\,(\alpha, k)$ критик нуқтаси жадвалнинг (6-илова) пастки сатрида жойлаштирилган α қийматдорлик даражаси ва $k = n - 1$ озодлик даражалари сони бўйича топилади.

Агар $T_{\text{кузат}} < t_{\text{ўнг кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $T_{\text{кузат}} > t_{\text{ўнг кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

3-қоида. Конкурент гипотеза $H_1 : a < a_0$ бўлганда даставвал «ёрдамчи» $t_{\text{ўнг кр}}\,(\alpha, k)$ критик нуқта топилади ва чап томонлама критик соҳанинг чегараси $t_{\text{чап кр}} = -t_{\text{ўнг кр}}$ деб олинади.

Агар $T_{\text{кузат}} > -t_{\text{чап кр.}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $T_{\text{кузат}} < -t_{\text{чап кр.}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

3- мисол. Нормал бош тўпламдан олинган $n = 20$ ҳажмли танланма бўйича $\bar{x} = 16$ танланма ўртача қиймат ва $s = 4,5$ «тузатилган» ўртача квадратик четланиш топилган. 0.05 қийматдорлик даражасида $H_0: a = a_0 = 15$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: a \neq 15$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Критерийнинг кузатилаётган қийматини ҳисоблаймиз:

$$T_{\text{кузат}} = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{s} = \frac{(16 - 15)\cdot\sqrt{20}}{4,5} = 0,99.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $a \neq a_0$ кўринишда, шу сабабли критик соҳа икки томонламадир.

Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан юқори сатрда жойлашган $\alpha = 0,05$ қийматдорлик даражаси ва $k = 20 - 1 = 19$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{\text{икки том. кр}}(0,05; 19) = 2.09$ критик нуқтани топамиз.

$|T_{\text{кузат}}| < t_{\text{икки том. кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. танланма ўртача қийматнинг гипотетик бош ўртача қийматдан фарқи муҳим эмас.

14- §. Икки томонлама критик соҳа ва ишончли интервал орасида боғланиш

Осонгина кўрсатиш мумкинки, икки томонлама критик соҳани α қийматдорлик даражасида излаётганда, тегишли $\gamma = 1 - \alpha$ ишончлилик билан ишончли интервални ҳам топилади. Масалан, 13- § да $H_0: a = a_0$ гипотезани $H_1: a \neq a_0$ да текширилаётганда биз $U = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma}$ критерийнинг икки томонлама критик соҳага тушиш эҳтимоли α қийматдорлик даражасига тенг бўлиши деб талаб қилдик. демак, критерийнинг гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси $(-u_{\text{кр}}, u_{\text{кр}})$ га тушиш эҳтимоли $1 - \alpha = \gamma$ га тенг. Бошқача сўз билан айтганда, γ ишончлилик билан

$$-u_{\text{кр}} < \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma} < u_{\text{кр}}$$

тенгсизлик ёки унга тенг кучли

$$\bar{x} - u_{кр}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + u_{кр}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (*)$$

тенгсизлик бажарилади, бу ерда $\Phi(u_{кр}) = \frac{\gamma}{2}$.

Биз нормал тақсимотнинг σ маълум бўлганда математик кутилиши учун γ ишончлилик билан ишончли интервални ҳосил қилдик (XVI боб, 5-§).

Эслатма. Икки томонлама критик соҳани ва ишончли интервални излаш бир хил натижага олиб келса-да, уларнинг талқини ҳар хилдир: икки томонлама критик соҳа шундай чегараларни (критик нуқталарни) аниқлайдики, улар орасида критерийларнинг тажрибаларни такрорлашда кузатилаётган қийматлари сонининг $(1 - \alpha)\%$ проценти ётади; ишончли интервал эса шундай чегараларни (интервалнинг учларини) аниқлайдики, улар орасида тажрибаларнинг $\gamma = (1 - \alpha)\%$ ида баҳоланаётган параметрнинг ҳақиқий қиймати ётади.

15- §. Танланма ва гипотетик бош ўртача қийматларни таққослашда танланманинг минимал ҳажмини аниқлаш

Практикада кўпинча, шундай $\delta > 0$ катталик (аниқлик) маълум бўладики, танланма ва гипотетик бош ўртача қийматлар айирмасининг абсолют катталиги ундан ортмаслиги лозим. Масалан, одатда, тайёрланаётган деталларнинг ўртача ўлчами лойиҳадагидан тайин δ дан ортиқ фарқ қилмаслиги талаб қилинади.

Бундай савол юзага келади: бу талаб $\gamma = 1 - \alpha$ (α — қийматдорлик даражаси) эҳтимол билан бажарилиши учун танланманинг минимал ҳажми қанча бўлиши лозим?

Нормал тақсимотнинг σ маълум бўлганда математик кутилишини баҳолаш учун ишончли интервални излаш масаласи ва математик кутилишнинг (бош ўртача қийматнинг) гипотетик қийматга тенглиги ҳақидаги гипотезани текшириш (13-§, *А*) масаласи бир-бирига келтирилгани учун ушбу (XVI боб, 15-§):

$$n = \frac{u^2_{кр}\sigma^2}{\delta^2},$$

бу ерда $u_{кр}$ ушбу $\Phi(u_{кр}) = \frac{\gamma}{2} = \frac{1-\alpha}{2}$ тенгликдан топилади.

Агар σ номаълум, лекин унинг баҳоси s топилган бўлса, у ҳолда (13-§, *Б*)

$$n = \frac{t^2_{\text{икки том кр}}(\alpha, k)\cdot s^2}{\delta^2}.$$

16-§. Критерий қувватини излашга доир мисол

Критерийнинг қувватини топишга доир мисолнинг ечилишини келтирамиз.

Мисол. Ўртача квадратик чекланиши $\sigma = 10$ маълум бўлган нормал бош тўпламдан олинган $n = 25$ ҳажмли танланма бўйича $\bar{x} = 18$ танланма ўртача қиймат топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида қуйидагилар талаб қилинади:

а) агар бош ўртача қийматнинг гипотетик қийматга тенглиги ҳақидаги $H_0 : a = a_0 = 20$ гипотеза конкурент гипотеза $H_1 : a < 20$ бўлганда текширилаётган бўлса, критик соҳани топинг;

б) $a_0 = 16$ да текшириш критерийси қувватини топинг.

Ечилиши. а) конкурент гипотеза $a < a_0$ кўринишда бўлгани сабабли критик соҳа чап томонламадир.

3-қоидадан (13-§, *А*) фойдаланиб, критик нуқтани топамиз: $u'_{кр} = -1,65$. Демак, чап томонлама критик соҳа $U < -1,65$ тенгсизлик билан ёки муфассалроқ ёзсак,

$$\frac{(\bar{x}-20)\sqrt{25}}{10} < -1,65$$

билан аниқланади, бу ердан $x < 16,7$.

Танланма ўртача қийматнинг бу қийматларида нолинчи гипотеза рад этилади; шу маънода $\bar{x} = 16,7$ ни танланма ўртача қийматнинг критик қиймати деб қараш мумкин.

б) қаралаётган критерийнинг қувватини ҳисоблаш учун, аввал унинг қийматини конкурент гипотеза ўринли шартда, (яъни $a_0 = 16$) $\bar{x} = 16,7$ деб топамиз:

$$U = \frac{(\bar{x}-a_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(16,7-16)\sqrt{25}}{10} = 0,35.$$

Бу ердан кўриниб турибдики, агар $\bar{x} < 16,7$ бўлса, у ҳолда $U < 0,35$. $\bar{x} < 16,7$ бўлганда нолинчи гипотеза рад қилингани учун у, шунингдек, $U < 0,35$ да рад этилади (бунда конкурент гипотеза ўринли, чунки биз $a_0 = 16$ деб олдик).

Энди Лаплас функциясидан фойдаланиб, критерий қувватини, яъни конкурент гипотеза ўринли бўлса, нолинчи гипотезанинг рад қилиниш эҳтимолини топамиз (7- §):

$$P(U < 0.35) = P(-\infty < U < 0.35) = P(-\infty < U < 0) + \\ + P(0 < U < 0,35) = 0,5 + \Phi(0,35) = 0,5 + 0,1368 = 0,6368.$$

Шундай қилиб, қаралаётган критерийнинг изланаётган қуввати тақрибан 0,64 га тенг. Агар танланма ҳажми орттирилган бўлса, қувват ҳам ортади.

Масалан, $n=64$ да қувват 0,71 га тенг. Агар α **ни** орттириладиган бўлса, қувват ҳам ортади. Масалан, $\alpha = 0,1$ да қувват 0,7642 тенг.

Эслатма. Қувватни билган ҳолда иккинчи тур хато эҳтимолини осон топиш мумкин: $\beta = 1 - 0,64$ (мисолни ечишда аввал β ни, кейин эса $1 - \beta$ га тенг бўлган қувватни топиш ҳам мумкин эди, албатта).

17- §. Дисперсиялари номаълум бўлган бош тўпламларнинг иккита ўртача қийматини таққослаш (боғлиқ танланмалар)

Олдинги параграфларда танланмалар эркли деб фараз қилинган эди. Бу ерда вариантлари жуфт-жуфти билан боғлиқ бўлган, бир хил ҳажмли танланмалар қаралади. Масалан, x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ деталларнинг ўлчамларини биринчи асбоб билан ўлчаш, y_i шу деталларни ўша тартибда иккинчи асбоб билан ўлчаш натижалари бўлса, у ҳолда x_i ва y_i лар жуфт-жуфт боғлиқ, мана шу маънода танланмаларнинг ўзлари ҳам боғлиқ. Одатда $x_i - y_i$ бўлгани учун бу сон жуфтларининг фарқи муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқлаш зарурати юзага келади.

Шунга ўхшаш масала битта лабораторияда амалга оширилган икки тадқиқот методини таққослашда ёки тадқиқот иккита турли лабораторияда бир хил метод билан бажарилганда қўйилади.

Шундай қилиб, X ва Y бош тўпламлар нормал тақсимланган, шу билан бирга уларнинг дисперсиялари номаълум бўлсин.

Берилган α қийматдорлик даражасида дисперсиялари номаълум бўлган нормал тўпламларнинг бош ўртача қийматлари тенглиги ҳақидаги $H_0: M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: M(\overline{X}) \neq M(\overline{Y})$ бўлганда бир хил ҳажмли иккита боғлиқ танланма бўйича текшириш талаб қилинади.

Иккита ўртача қийматни таққослаш ҳақидаги бу масалани битта танланма ўртача қийматин бош ўртача қийматининг гипотетик қийматига тенглиги ҳақида 13- §, *Б* да ҳал қилинган масалага келтирамиз.

Бу мақсадда $D_i = X_i - Y_i$ айирмалар—тасодифий миқдорларни ва уларнинг ўртача қийматини киритамиз:

$$\overline{D} = \frac{\Sigma D_i}{n} = \frac{\Sigma(X_i - Y_i)}{n} = \frac{\Sigma X_i}{n} - \frac{\Sigma Y_i}{n} = \overline{X} - \overline{Y}.$$

Агар нолинчи гипотеза ўринли, яъни $M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$ бўлса, у ҳолда $M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$, ва демак,

$$M(\overline{D}) = M(\overline{X} - \overline{Y}) = M(\overline{X}) - M(\overline{Y}) = 0.$$

Шундай қилиб, $H_0: M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$ нолинчи гипотезани бундай ёзиш мумкин:

$$H_0: M(\overline{D}) = 0.$$

У ҳолда конкурент гипотеза қуйидаги кўринишни олади:

$$H_1: M(\overline{D}) \neq 0.$$

1- эслатма. Бундан буён кузатилаётган $x_i - y_i$ нотасодифий айирмаларни $D_i = X_i - Y_i$ тасодифий айирмалардан фарқли ўлароқ d_i орқали белгилаймиз. Шунга ўхшаш, бу айирмаларнинг $\sum \frac{d_i}{n}$ танланма ўртача қийматини $\overline{D}$ тасодифий миқдордан фарқли ўлароқ $\overline{d}$ орқали белгилаймиз.

Шундай қилиб, иккита $\overline{x}$ ва $\overline{y}$ ўртача қийматни таққослаш битта $\overline{d}$ танланма ўртача қийматни бош ўртача қийматнинг $M(\overline{D}) = a_0 = 0$ гипотетик қиймати билан таққослашга келтирилади. Бу масала олдин, 13- §, Б да ҳал қилинган эди, шу сабабли нолинчи гипотезани текшириш қоидасини ва мисол келтирамиз.

2- эслатма. Юқорида баён қилинганга бўйича,

$$T_{\text{кузат}} = \frac{(\overline{x} - a_0)\sqrt{n}}{s}$$

формулада (13- §, Б)

$$\bar{x} = \bar{d}, \quad a_0 = 0, \quad s_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{\left[\sum d_i\right]^2}{n}}{n-1}}.$$

деб олиш лозим. У ҳолда $T_{\text{кузат}} = \frac{\bar{d}\sqrt{n}}{s_d}$.

Қоида. Берилган α қийматдорлик даражасида номаълум дисперсияли нормал тўпламларнинг иккита ўртача қийматининг тенглиги ҳақидаги $H_0: M(\bar{X}) = M(\bar{Y})$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $M(\bar{X}) \neq M(\bar{Y})$ бўлганда текшириш учун (бир хил ҳажмли боғлиқ танланмалар бўлган ҳол)

$$T_{\text{кузат}} = \frac{\bar{d}\sqrt{n}}{s_d}$$

критерийнинг қийматини ҳисоблаш ва Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан берилган α қийматдорлик даражаси (жадвалнинг юқори сатрида) ва озодлик даражалари сони $k = n - 1$ бўйича $t_{\text{икки том.кр}}(\alpha, k)$ ни топиш лозим.

Агар $|T_{\text{кузат}}| < t_{\text{икки том.кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $|T_{\text{кузат}}| > t_{\text{икки том.кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

Мисол. Иккита асбобда 5 та деталь ўлчанган ва қуйидаги натижалар олинган (*мм* нинг юздан бир улушларида):

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 7, \quad x_3 = 8, \quad x_4 = 5, \quad x_5 = 7;$$
$$y_1 = 7, \quad y_2 = 6, \quad y_3 = 8, \quad y_4 = 7, \quad y_5 = 8.$$

0,05 қийматдорлик даражасида ўлчаш натижалари фарқининг муҳим ёки муҳим эмаслигини текширинг.

Ечилиши. Биринчи сатр сонларидан иккинчи сатр сонларини айирамиз:

$$d_1 = -1, \ d_2 = 1, \ d_3 = 0, \ d_4 = -2, \ d_5 = -1.$$

Танланма ўртача қийматни топамиз:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{-1+1-0-2-1}{5} = -0{,}6.$$

$\sum d_i^2 = 1 + 1 + 4 + 1 = 7$ ва $\sum d_i = -3$ лигини назарда тутиб, «тузатилган» ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{[\sum d_i]^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{7 - \frac{9}{5}}{5-1}} = \sqrt{1,3}.$$

Критерийнинг кузатилаётган қийматини ҳисоблаймиз:

$$T_{\text{кузат}} = \frac{\bar{d}\sqrt{n}}{s_d} = -\frac{0,6\sqrt{5}}{\sqrt{1,3}} = -1,18.$$

Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан жадвалнинг юқори сатрига жойлаштирилган 0,05 қийматдорлик даражаси ва $k = 5 - 1 = 4$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{\text{икки том. кр}}(0,05, 4) = 2,78$ критик нуқтани топамиз.

$|T_{\text{кузат}}| < t_{\text{икки том. кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача айтганда, ўлчаш натижаларининг фарқи муҳим эмас.

18- §. Кузатилаётган нисбий частотани ҳодиса рўй беришининг гипотетик эҳтимоли билан таққослаш

Етарлича катта n сондаги эркли синовлар ўтказилиб, уларнинг ҳар бирида ҳодисанинг p рўй бериш эҳтимоли ўзгармас, лекин номаълум бўлсин. Бу синовлар бўйича $\frac{m}{n}$ нисбий частота топилган бўлсин. Номаълум эҳтимол p_0 гипотетик қийматга тенг деб тахмин қилишга асос бор бўлсин. Берилган α қийматдорлик даражасида номаълум p эҳтимол p_0 гипотетик эҳтимолга тенглигидан иборат нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади.

Эҳтимол нисбий частота бўйича баҳолангани учун қаралаётган масалани бундай таърифлаш мумкин: кузатилаётган нисбий частота ва гипотетик эҳтимол фарқининг муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқлаш талаб қилинади.

Нолинчи гипотезани текшириш критейриси сифатида

$$U = \frac{\left(\frac{M}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}$$

тасодифий миқдорни қабул қиламиз, бу ерда $q_0 = 1 - p_0$. U миқдор нолинчи гипотеза ўринли бўлганда $M(U) = 0$,

$\sigma(U) = 1$ параметрлар билан тақрибан нормал тақсимланган.

Тушунтириш. Шу нарса исботланганки (Лаплас теоремаси), n нинг катта қийматларида нисбий частота тақрибан p математик кутилиш ва $\frac{\sqrt{pq}}{n}$ ўртача квадратик четланиш билан нормал тақсимотга эга. Нисбий частотани нормаллаб (ундан математик кутилишни айириб ва ўртача квадратик четланишга бўлиб), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$U = \frac{\frac{M}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{\left(\frac{M}{n} - p\right)\sqrt{n}}{\sqrt{pq}},$$

шу билан бирга $M(U) = 0$, $\sigma(U) = 1$.
Нолинчи гипотеза ўринли бўлганда, яъни $p = p_0$ да

$$U_{\text{кузат}} = \frac{\left(\frac{M}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}.$$

1- эслатма. Кузатилаётган частота $\frac{M}{n}$ тасодифий миқдордан фарқли ўлароқ бундан кейин $\frac{m}{n}$ орқали белгиланади.

Бу ерда критик соҳа 10- § дагидек қурилгани учун нолинчи гипотезани текшириш қоидасини ва уни намойиш қилувчи мисол келтирамиз.

1- қоида. Берилган қийматдорлик даражасида номаълум эҳтимолнинг гипотетик эҳтимолга тенглиги ҳақидаги $H_0: p = p_0$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: p \neq p_0$ бўлганда текшириш учун критерийнинг

$$U = \frac{\left(\frac{m}{n} - p\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}$$

кузатилган қийматини ҳисоблаш ва Лаплас функцияси жадвалидан $\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1-\alpha}{2}$ тенглик бўйича критик нуқтани топиш лозим.

Агар $|U_{\text{кузат}}| < u_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $|U_{кузат}| > u_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

2- ҳолда. Конкурент гипотеза $H_1: p > p_0$ бўлганда ўнг томонлама критик соҳанинг критик нуқтаси $\Phi(u_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2}$ тенгликдан топилади.

Агар $U_{кузат} < u_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $U_{кузат} > u_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

3- ҳолда. Конкурент гипотеза $H_1: p < p_0$ бўлганда $u_{кр}$ критик нуқта 2- ҳолда бўйича топилади, кейин эса чап томонлама критик соҳанинг чегараси $u_{кр} = -u_{кр}$ деб олинади.

Агар $U_{кузат} > -u_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $U_{кузат} < -u_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

1- *эслатма. Келтирилган натижаларни* $np_0q_0 > 9$ тенгсизликнинг бажарилиши таъминлайди.

Мисол. 100 та эркли танланма бўйича 0,08 нисбий частота топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида $H_0: p = p_0 = 0,12$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: p \neq 0,12$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз:

$$U_{кузат} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0q_0}} = \frac{(0,08-0,12)\sqrt{100}}{\sqrt{0,12\cdot 0,88}} = -1,23.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $p \neq p_0$ кўринишга эга. Шу сабабли, критик соҳа икки томонламадир.

Критик нуқтани ушбу тенгликдан топамиз:

$$\Phi(u_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0,05}{6} = 0,475.$$

Лаплас функцияси жадвали бўйича $u_{кр} = 1,96$ ни топамиз.

$|U_{кузат}| < u_{кр}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача айтганда, кузатилаётган нисбий частотанинг гипотетик эҳтимолдан фарқи муҳим эмас.

19- §. Нормал бош тўпламларнинг дисперсияларини турли ҳажмли танламалар бўйича таққослаш. Бартлет критерийси

Айтайлик, $X_1, X_2, \ldots, X_l$ бош тўпламлар нормал тақсимланган бўлсин. Бу тўпламлардан, умуман айтганда, турли $n_1, n_2, \ldots, n_l$ ҳажмли эркли танланмалар олинган бўлсин (баъзи ҳажмлар бир хил бўлиши мумкин; агар барча танланмалар бирдай ҳажмли бўлса, у ҳолда кейинги параграфда баён қилинган Кочрен критерийсидан фойдаланган маъқулроқ). Танланмалар бўйича $s_1^2, s_2^2, \ldots s_l^2$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган.

Тузатилган танланма дисперсиялар бўйича берилган α қийматдорлик даражасида қаралаётган тўпламлар бош дисперсияларининг ўзаро тенглигидан иборат нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади:

$$H_0: D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_l).$$

Бошқача сўз билан айтганда, тузатилган танланма дисперсиялар фарқи муҳим ёки муҳим эмаслигини текшириш талаб қилинади.

Бир неча дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги бу гипотеза *дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги гипотеза* дейилади.

Шуни эслатиб ўтамизки, s_i^2 дисперсиянинг озодлик даражалари сони деб $k_i = n_i - 1$ сон, яъни шу дисперсия ҳисобланган танланма ҳажмидан битта кам сонга айтилади.

$\overline{s^2}$ орқали тузатилган дисперсияларнинг озодлик даражалари сони бўйича вазний арифметик ўртача қийматини белгилаймиз:

$$\overline{s^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} k_i s_i^2}{k},$$

бу ерда $k = \sum\limits_{i=1}^{l} k_i$.

Дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш критерийси сифатида ушбу Бартлет критерийси — тасодифий миқдорни қабул қиламиз:

$$B = \frac{V}{C},$$

бу ерда $V = 2{,}303\,[k = \lg \bar{s}^2 - \sum_{i=1}^{l} k_i \lg s_i^2]$,

$$C = 1 + \frac{1}{3(l-1)}\left[\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k}\right].$$

Бартлет шу нарсани аниқлаганки, агар барча $k_i > 2$ бўлса, B тасодифий миқдор нолинчи гипотеза ўринли бўлганда $l - 1$ озодлик даражали χ^2 қонун бўйича тақсимланади. $k_i = n_i - 1$ эканлигини ҳисобга олиб, $n_i - 1 > 2$ ёки $k_i > 3$ деган хулосага келамиз, яъни танланмалари ҳар бирининг ҳажми 4 дан кичик бўлмаслиги лозим.

Критик соҳа қуйидаги талабга асосланиб, ўнг томонлама қилиб қурилади: критерийнинг бу соҳага тушиш эҳтимоли нолинчи гипотеза ўринли деб тахмин қилинганда қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлсин:

$$P[B > \chi^2_{кр}(\alpha, l - 1)] = \alpha$$

$\chi^2_{кр}(\alpha, l - 1)$ критик нуқта жадвалдан (5-илова) α қийматдорлик даражаси ва $k = l - 1$ озодлик даражалари сони бўйича топилади. Унда критик соҳа

$$B > \chi^2_{кр}$$

тенгсизлик билан, гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси эса

$$B < \chi^2_{кр}$$

тенгсизлик билан аниқланади.

Бартлет критерийсининг кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган қийматини $B_{кузат}$ орқали белгилаймиз ва нолинчи гипотезани текшириш қоидасини таърифлаймиз.

Қоида Берилган α қийматдорлик даражасида нормал тўпламлар дисперсияларининг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш учун Бартлет критерийсининг кузатилган қийматини ҳисоблаш ва χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвалидан $\chi^2_{кр}(\alpha, l - 1)$ критик нуқтани топиш лозим.

Агар $B_{кузат} < \chi^2_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $B_{кузат} > \chi^2_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

1-эслатма. C ўзгармасни ҳисоблашга шошилмаслик керак. Аввал V ни топиш ва $\chi^2_{кр}$ билан солиштириш лозим. Агар $V < \chi^2_{кр}$

бўлиб чиқса, у ҳолда $B = \frac{V}{C} < \chi^2_{кр}$ бўлади (чунки $C > 1$), ва демак, C ни ҳисоблаш керак бўлмай қолади.

Агар $V > \chi^2_{кр}$ бўлса, у ҳолда C ни ҳисоблаш ва кейин B ни $\chi^2_{кр}$ билан таққослаш лозим.

2- эслатма. Бартлет критерийси тақсимотларнинг нормалдан четланишига жуда сезгир, шунинг учун бу критерий бўйича ҳосил қилинган натижаларга жуда эҳтиёт бўлиб ёндошиш лозим.

Мисол. Нормал бош тўпламлардан олинган $n_1 = 10$, $n_2 = 12$, $n_3 = 15$, $n_4 = 16$ ҳажмли тўртта эркли танланмалар бўйича тузатилган танланма дисперсиялар топилган бўлиб, улар мос равишда 0,25; 0,40; 0,36; 0,46 га тенг. 0,05 қийматдорлик даражасида дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги гипотезани текширинг (критик соҳа ўнг томонлама).

Ечилиши. 25- ҳисоблаш жадвалини тузамиз (8- устунни ҳозирча тўлдирмаймиз чунки C ни ҳисоблаш керак бўлиши ҳали номаълум):

25- жадвал

1	2	3	4	5	6	7	8
i	танланма ҳажми, n_i	Озодлик даражалари сони, k_i	Дисперсиялар, s_i^2	$k_i s_i^2$	$\lg s_i^2$	$k_i \lg s_i^2$	$\frac{1}{k_i}$
1	10	9	0,25	2,25	$\bar{1}$,3979	$\bar{6}$,5811	
2	13	12	0,40	4,80	$\bar{1}$,6021	$\bar{5}$,2252	
3	15	14	0,36	5,04	$\bar{1}$,5563	$\bar{7}$,7822	
4	16	15	0,46	6,90	$\bar{1}$,6628	$\bar{6}$,9420	
$\sum$		$k = 50$		18,98		$\overline{22}$,5305	

Ҳисоблаш жадвалидан фойдаланиб топамиз:

$$\overline{s}^2 = \frac{\sum k_i s_i^2}{k} = \frac{18,99}{50} = 0,3798; \quad \lg 0,3798 = \bar{1},5795.$$

$$V = 2{,}303\,[k \lg \overline{s^2} - \sum k_i \lg s_i^2] =$$
$$= 2{.}203\,[50 \cdot 1{,}5795 - 22{,}5305] = 1{,}02.$$

Жадвалдан (5- илова) 0,05 қийматдорлик даражаси ва $l - 1 = 4 - 1 = 3$ озодлик даражалари сони бўйича $\chi^2_{\text{кр}}\,(0.05;\ 3) = 7.8$ критик нуқтани топамиз.

$V < \chi^2_{\text{кр}}$ бўлгани учун $B_{\text{кузат}} = \frac{V}{C} < \chi^2_{\text{кр}}$ (чунки $C > 1$), ва демак, дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача сўз билан айтганда, тузатилган танланма дисперсиялар фарқи муҳим эмас.

3- эслатма. Агар бош дисперсияни баҳолаш талаб қилинса, у ҳолда дисперсияларнинг бир жинслилиги шартида унинг баҳоси учун тузатилган дисперсияларнинг озодлик даражалари сони бўйича вазний арифметик ўртача қийматини, яъни

$$\overline{s^2} = \frac{\sum k_i s_i^2}{k}$$

ни олиш мақсадга мувофиқдир. Масалан, қаралган мисолда бош дисперсиянинг баҳоси сифатида 0,3793 ни қабул қилиш мақсадга мувофиқ.

20- §. Нормал бош тўпламларнинг дисперсияларини бир хил ҳажмли танланмалар бўйича таққослаш. Қочрен критерийси

Айтайлик, $X_1, X_2, \dots, X_l$ бош тўпламлар нормал тақсимланган бўлсин. Бу тўпламлардан бир хил n ҳажмли l та танланма олинган ва улар бўйича $s_1^2, s_2^2, \dots, s_l^2$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган бўлсин, уларнинг озодлик даражалари сони бир хил: $k = n - 1$.

Тузатилган дисперсиялар бўйича берилган α қийматдорлик даражасида қаралаётган тўпламлар бош дисперсияларнинг ўзаро тенглигидан иборат нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади:

$$H_0 : D(X_1) = D(X_2) = \dots = D(X_l).$$

Бошқача сўз билан айтганда, тузатилган танланма дисперсиялар фарқи муҳим ёки муҳим эмаслигини текшириш талаб қилинади.

Бир хил ҳажмли танланмалар қаралаётган бу ҳолда Фишер — Снедекор критерийси (8- §) бўйича энг кичик ва энг катта дисперсияларни таққослаш мумкин: агар улар орасидаги фарқ муҳим бўлмаса, у ҳолда қолган дисперсиялар орасидаги фарқ ҳам муҳим эмас. Бу методнинг камчилиги шундаки, энг кичик ва энг катта дисперсиялардан ташқари қолган дисперсияларда бўлган информация ҳисобга олинмай қолади.

Шунингдек, Бартлет критерийсини ҳам қўллаш мумкин. Аммо, 19- § да кўрсатилганидек, бу критерийнинг тақрибий тақсимотигина маълум, шу сабабли тақсимоти аниқ топилган Кочрен критерийсидан фойдаланган маъқул.

Шундай қилиб, нолинчи гипотезани текшириш критерийси сифатида Кочрен критерийсини — тузатилган максимал дисперсиянинг қолган барча тузатилган дисперсиялар йиғиндисига нисбатини қабул қиламиз:

$$G = \frac{S_{\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_l^2}.$$

Бу тасодифий миқдорнинг тақсимоти озодлик даражалари сони $k = n - 1$ ва танланмалар сони l га боғлиқ.

Критик соҳани қуйидаги талабга асосланиб, ўнг томонлама қилиб қурилади: критерийнинг бу соҳага тушиш эҳтимоли нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлсин:

$$P[G > G_{\text{кр}}(\alpha, k, l)] = \alpha.$$

$G(\alpha, k, l)$ критик нуқта* жадвалдан топилади, унда ўнг томонлама критик соҳа

$$G > G_{\text{кр}}$$

тенгсизлик билан, гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси эса

$$G < G_{\text{кр}}$$

тенгсизлик билан аниқланади.

Критерийнинг кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган қийматини $G_{\text{кузат}}$ орқали белгилаймиз ва нолинчи гипотезани текшириш қоидасини таърифлаймиз.

---

* Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский, Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. Табл. VIII, Наука, 1965.

Қоида. Берилган α қийматдорлик даражасида нормал тақсимланган тўпламлар дисперсияларининг бир жинслилиги ҳақидаги гипотезани текшириш учун критерийнинг кузатилаётган қийматини ҳисоблаш ва жадвал бўйича критик нуқтани топиш лозим.

Агар $G_{кузат} < G_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $G_{кузат} > G_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

Эслатма. Агар бош дисперсияни баҳолаш талаб қилинса, у ҳолда дисперсияларнинг бир жинслилиги шартида дисперсия баҳоси учун тузатилган танланма дисперсияларнинг арифметик ўртача қийматини олиш мақсадга мувофиқдир.

Мисол. Нормал бош тўпламлардан олинган бир хил $n = 17$ ҳажмли эркли танланмалар бўйича тузатилган дисперсиялар топилган: 0,26; 0,36; 0,40; 0,42. Қуйидагилар талаб қилинади:

а) 0,05 қийматдорлик даражасида бош дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш (критик соҳа ўнг томонлама); б) бош дисперсияни баҳолаш.

Ечилиши. а) Кочрен критерийсининг кузатилаётган қийматини — максимал тузатилган дисперсиянинг барча дисперсиялар йиғиндисига нисбатини топамиз:

$$G_{кузат} = \frac{0,42}{0,26 + 0,36 + 0,40 + 0,42} = 0,2917.$$

Жадвалдан (330-бетдаги изоҳга қаранг) 0,05 қийматдорлик даражаси, $k = 17 - 1 = 16$ озодлик даражалари сони ва танланмалар сони $l = 4$ бўйича $G_{кр}(0,05;\ 16;\ 4) = 0,4366$ критик нуқтани топамиз.

$G < G_{кр}$ бўлгани учун дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача сўз билан айтганда, тузатилган танланма дисперсиялар фарқи муҳим эмас;

б) нолинчи гипотеза ўринли бўлгани учун бош дисперсиянинг баҳоси сифатида тузатилган дисперсияларнинг арифметик ўртача қийматини топамиз:

$$\sigma^2 = \frac{0,26 + 0,36 + 0,40 + 0,42}{4} = 0,36.$$

21- §. Танланма корреляция коэффициентининг қийматдорлиги ҳақидаги гипотезани текшириш

Икки ўлчовли (X, Y) бош тўплам нормал тақсимланган бўлсин. Бу тўпламдан n ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $r_{\text{т}}$ танланма корреляция коэффициенти топилган: у нолдан фарқли бўлиб чиққан.

Танланма таваккалига олингани учун, бош тўпламнинг $r_{\text{Б}}$ корреляция коэффициентини ҳам нолдан фарқли деб хулоса чиқариш мумкин эмас. Бизни худди шу коэффициент қизиқтиради, шу сабабли берилган α қийматдорлик даражасида бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги $H_0: r_{\text{Б}} = 0$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: r_{\text{Б}} \neq 0$ бўлганда текшириш зарурати туғилади.

Агар нолинчи гипотеза рад этиладиган бўлса, бу нарса танланма корреляция коэффициенти нолдан муҳим фарқ қилишини (қисқача қийматдор), X ва Y эса корреляцияланган, яъни чизиқли боғланиш билан боғланганлигини англатади.

Агар нолинчи гипотеза қабул қилинадиган бўлса, у ҳолда танланма корреляция коэффициенти қийматдор эмас, X ва Y эса чизиқли боғланиш билан боғланмаган.

Нолинчи гипотезани текшириш критерийси сифатида

$$T = \frac{r_{\text{т}}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{\text{т}}^2}}$$

тасодифий миқдорни қабул қиламиз. Бу миқдор нолинчи гипотеза ўринли бўлганда $k = n - 2$ озодлик даражали Стьюдент тақсимотига эга.

Конкурент гипотеза $r_{\text{Б}} = 0$ кўринишда бўлгани учун критик соҳа икки томонламадир; у 12- § дагидек (биринчи ҳол) қурилади.

Критерийнинг кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган қийматини $T_{\text{кузат}}$ орқали белгилаймиз ва нолинчи гипотезани текшириш қоидасини таърифлаймиз.

Қоида. Берилган α қийматдорлик даражасида икки ўлчовли нормал тасодифий миқдорнинг бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги $H_0: r_{\text{Б}} = 0$ нолинчи гипотезани конкурент гепотеза $H_1: r_{\text{Б}} \neq 0$ бўлганда текшириш учун критерийнинг

$$T_{\text{кузат}} = \frac{r_{\text{т}}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{T}^2}}$$

кузатилаётган қийматини ҳисоблаш ва Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан икки томонлама критик соҳа учун берилган қийматдорлик даражаси ва $k=n-2$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{кр}(\alpha, k)$ нуқтани топиш лозим.

Агар $|T_{кузат}| < t_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $|T_{кузат}| > t_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

Мисол. Икки ўлчовли (X, Y) нормал тўпламдан олинган $n=122$ ҳажмли танланма бўйича $r_т = 0,4$ танланма корреляция коэффициенти топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: r_б \neq 0$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз.

$$T_{кузат} = \frac{r_т\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_т^2}} = \frac{0,4\sqrt{122-2}}{\sqrt{1-0,4^2}} = 4,78.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $r_б \neq 0$ кўринишда, шу сабабли критик соҳа икки томонламадир.

Икки томонлама критик соҳа учун жадвалдан (6-илова) 0,05 қийматдорлик даражаси ва $k = 122 - 2 = 120$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{кр}(0,05; 120) = 1,98$ критик нуқтани топамиз.

$T_{кузат} > t_{кр}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад қиламиз. Бошқача сўз билан айтганда, танланма корреляция коэффициентининг нолдан фарқи муҳим, яъни X ва Y корреляцияланган.

22-§. Бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш. Пирсоннинг мувофиқлик критерийси

Олдинги параграфларда бош тўпламнинг тақсимот қонуни маълум деб фараз қилинган эди.

Агар тақсимот қонуни номаълум, лекин у тайин кўринишга эга (уни A деб айтайлик) деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у ҳолда қуйидаги нолинчи гипотеза текширилади: бош тўплам A қонун бўйича тақсимланган.

Номаълум тақсимотнинг тахмин қилинаётган қонуни ҳақидаги гипотезани текшириш тақсимот параметрлари ҳақидаги гипотезани текшириш каби, яъни махсус танланган тасодифий миқдор — мувофиқлик критерийси ёрдамида бажарилади.

Мувофиқлик критерийси деб номаълум тақсимотнинг тахмин қилинаётган қонуни ҳақидаги гипотезани текшириш критерийсига айтилади

Бир қанча мувофиқлик критерийлари мавжуд: χ^2 («хи» квадрат) К. Пирсон, Колмогоров, Смирнов критерийлари.

Биз Пирсон критерийсининг бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текширишга қўлланилишини баён қилиш билан чекланамиз (бу критерий бошқа тақсимотлар учун ҳам шунга ўхшаш қўлланилади, унинг устунлиги ҳам ана шундадир). Шу мақсадда эмпирик (кузатиладиган) ва назарий (нормал тақсимот деган тахминда ҳисобланган) частоталарни таққослаймиз.

Одатда эмпирик ва назарий частоталар фарқ қилади. Масалан (XVII боб, 7-§)

эмп. частоталар	6	13	38	74	106	85	30	10	4
назарий частоталар	3	14	42	82	99	76	37	11	2

Частоталарнинг фарқ қилиши тасодифийми? Фарқ тасодифий (муҳим эмас) ва у кузатишлар сонининг кичиклиги, ёки уларнинг группалаш усули, ёки бошқа сабаблар билан тушунтирилиши мумкин. Частоталарнинг фарқи тасодифий эмас (муҳим) ва у назарий частоталар бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақида нотўғри гипотезага асосланиб ҳисобланганлиги билан тушунтирилади.

Пирсон критерийси юқорида қўйилган саволга жавоб беради. Тўғри, ҳар бир критерий каби, у ҳам гипотезанинг ўринлилигини исботламайди, балки берилган қийматдорлик даражасида гипотезанинг кузатиш маълумотлари билан мувофиқ келишини ёки мувофиқ келмаслигини аниқлайди.

Шундай қилиб, n ҳажмли танланма бўйича ушбу эмпирик тақсимот ҳосил қилинган бўлсин:

варианталар	x_i	x_1	x_2	...	x_s
эмп. частоталар	n_i	n_1	n_2	...	n_s

Айтайлик, бош тўплам нормал тақсимланган деган тахминда n'_i назарий частоталар (масалан, навбатдаги параграфдаги каби) ҳисобланган бўлсин. α қийматдорлик даражасида қуйидаги нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади: бош тўплам нормал тақсимланган.

Нолинчи гипотезани текшириш критерийси сифатида

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}. \qquad (*)$$

тасодифий миқдорни қабул қиламиз. Бу миқдор тасодифий, чунки у турли тажрибаларда ҳар хил, олдиндан маълум бўлмаган қийматлар қабул қилади. Равшанки, эмпирик ва назарий частоталар қанча кам фарқ қилса, χ^2 критерийнинг катталиги ҳам шунча кичик ва демак, у маълум даражада эмпирик ва назарий тақсимотларнинг яқинлигини характерлайди.

Частоталар айирмаларини квадратларга кўтариш билан мусбат ва манфий айирмаларнинг ўзаро йўқолиш имконияти йўқолишини айтиб ўтамиз. n'_i га бўлиш билан ҳар бир қўшилувчини камайтиришга эришилади: акс ҳолда йиғинди шунчалик катта бўлиб қолар эдики, нолинчи гипотезани ҳатто у тўғри бўлганда ҳам рад этишга олиб келар эди. Албатта, бу мулоҳазалар танланган критерийни асослаш эмас, тушунтиришдир.

Шу нарса исботланганки, $n \to \infty$ да тасодифий миқдорнинг (*) тақсимот қонуни бош тўплам қайси тақсимот қонунига бўйсунганлигидан қатъи назар, k озодлик даражали χ^2 тақсимот қонунига интилади. Шу сабабли, (*) тасодифий миқдор χ^2 орқали белгиланган, критерийнинг ўзи эса «хи квадрат» мувофиқлик критерийси дейилади.

Озодлик даражалари сони $k = s - 1 - r$ тенглик бўйича топилади, бу ерда s — танланмадаги группалар (қисмий интерваллар) сони, r — тахмин қилинаётган тақсимотнинг танланма маълумотлари бўйича баҳоланган параметрлар сони.

Хусусан, тахмин қилинаётган тақсимот нормал бўлса, у ҳолда иккита параметр (математик кутилиш ва ўртача квадратик четланиш) баҳоланади, шу сабабли $r = 2$ ва озодлик даражалари сони

$$k = s - 1 - r = s - 1 - 2 = s - 3.$$

Агар бош тўплам, масалан, Пуассон қонуни бўйича тақсимланган деб тахмин қилинаётган бўлса, у ҳолда би та λ параметр баҳоланади ва шу сабабли $r = 1$ ва $k = s - 2$

Бир томонлама критерий нолинчи гипотезани икки томонлама критерийга қараганда «қатъият билан» рад этгани учун қуйидаги талабга асосланиб, ўнг томонлама крит соҳа қурамиз: критерийнинг бу соҳага тушиш эҳтимоли н лр чи гипотеза ўринли деган шартда қабул қилинган α қийматдорлик даражасига тенг бўлсин:

$$P\ [\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}\ (\alpha;\ k)] = \alpha.$$

Шундай қилиб, ўнг томонлама критик соҳа

$$\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}\ (\alpha;\ k)$$

тенгсизлик билан, нолинчи гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси эса

$$\chi^2 < \chi^2_{\text{кр}}\ (\alpha;\ k)$$

тенгсизлик билан аниқланади.

Критерийнинг кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган қийматини $\chi^2_{\text{кузат}}$ орқали белгилаймиз ва нолинчи гипотезани текшириш қоидасини таърифлаймиз.

Қоида. Берилган α қийматдорлик даражасида H_0 : бош тўплам нормал тақсимланган деган нолинчи гипотезани текшириш учун аввал назарий частоталарни, кейин эса критерийнинг

$$\chi^2_{\text{кузат}} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} \qquad (**)$$

кузатилган қийматини ҳисоблаш ва χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвалидан берилган α қийматдорлик даражаси ва $k = s - 3$ озодлик даражалари сони бўйича $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$ критик нуқтани топиш лозим.

Агар $\chi^2_{\text{кузат}} < \chi^2_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $\chi^2_{\text{кузат}} > \chi^2_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

1-эслатма. Танланма ҳажми етарлича катта, ҳар ҳолда 50 дан кичик бўлмаслиги лозим. Ҳар бир группа камида 5—8 та вариантани ўз ичига олиши лозим, кам сонли группаларни уларнинг частоталарини қўшиб, битта группага бирлаштириш лозим.

2-эслатма. Биринчи ва иккинчи тур хатоларга йўл қўйилиши мумкин бўлгани сабабли, айниқса, назарий ва эмпирик частоталарнинг мувофиқлиги «ҳаддан ташқари яхши» бўлганда эҳтиёт бўлиш лозим. Масалан, тажрибани такрорлаш, кузатишлар сонини ошириш, бошқа критерийлардан фойдаланиш, тақсимот графигини ясаш, асимметрия ва эксцессни ҳисоблаш лозим (XVII боб, 8-§).

3-эслатма. Контрол қилиш мақсадида (**) формула бундай ўзгартирилади:

$$\chi^2_{\text{кузат}} = \sum \frac{n_i^2}{n_i'} - n.$$

Китобхонга бу алмаштиришни мустақил бажаришни тавсия қиламиз, бунинг учун (**) да частоталар айирмасини квадратга кўтариш, натижани n_i' га бўлиш ва $\sum n_i = n$, $\sum n_i' = n$ ни ҳисобга олиш лозим.

Мисол. 0,05 қийматдорлик даражасида бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текширинг. Эмпирик ва назарий частоталар маълум:

эмпирик частоталар: 6 13 38 74 106 85 30 14,
назарий частоталар: 3 14 42 82 96 76 37 13.

Ечилиши. $\chi^2_{\text{кузат}}$ ни ҳисоблаймиз, бунинг учун 26-ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

26- жадвал

1	2	3	4	5	6	7	8
i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i'}$
1	6	3	3	9	3	36	12
2	13	14	—1	1	0,07	169	12,07
3	38	42	—4	16	0,38	1444	34,38
4	74	82	—8	64	0,78	5476	66,78
5	106	99	7	49	0,49	11236	113,49
6	85	76	9	81	1,07	7225	95,07
7	30	37	—7	49	1,32	900	24,32
8	14	13	1	1	0,08	196	15,08
$\sum$	366	366			$\chi^2_{\text{кузат}}=7,19$		373,19

Контрол қилиш: $\chi^2_{\text{кузат}} = 7,19$;

$$\sum \frac{n_i^2}{n_i'} - n = 373,19 - 366 = 7,19.$$

Ҳисоблаш тўғри бажарилган.

Танланмада группалар сони $s = 8$ лигини эътиборга олиб, озодлик даражалари сонини топамиз: $k = 8 - 3 = 5$.

χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвалидан (5- илова) 0,05 қийматдорлик даражаси, $k = 5$ озодлик даражалар сони бўйича $\chi^2_{\text{кр}}$ (0,05; 5) $= 11,1$ ни топамиз.

$\chi^2_{\text{кузат}} < \chi^2_{\text{кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача сўз билан айтганда, эмпирик ва назарий частоталар фарқи муҳим эмас. Демак, кузатиш маълумотлари бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотеза билан мувофиқ келади.

23- §. Нормал тақсимотнинг назарий частоталарини ҳисоблаш методикаси

Олдинги параграфдан келиб чиққанидек, Пирсоннинг мувофиқлик критерийсининг моҳияти эмпирик ва назарий частоталарни таққослашдир. Эмпирик частоталар тажрибадан топилиши равшан. Агар бош тўплам нормал тақсимланган деб тахмин қилинаётган бўлса, назарий частоталарни қандай ҳисоблаш мумкин? Қуйида бу масалани ҳал этиш усулларидан бири кўрсатилади.

1. X нинг кузатилаётган қийматлари интервали (n ҳажмли танланма) s та бир хил узунликдаги (x_i, x_{i+1}) қисмий интервалларга бўлинади. Қисмий интервалларнинг ўрталари $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ топилади. x_i^* вариантанинг n_i частотаси сифатида i-интервалга тушган варианталар сони қабул қилинади. Натижада тенг узоқликда турган варианталар ва уларга мос частоталар кетма-кетлиги ҳосил қилинади:

$$\begin{matrix} x_1^* & x_2^* & \dots & x_s^*, \\ n_1 & n_2 & \dots & n_s, \end{matrix}$$

бунда $\sum n_i = n$.

2. $\overline{x^*}$ танланма ўртача қиймат ва σ^* танланма ўртача квадратик четланиш, масалан, кўпайтм лар методи билан ҳисобланади.

3. X тасодифий миқдор нормаланади, яъни $Z = \frac{X - \overline{x^*}}{\delta}$ миқдорга ўтилади ва (z_i, z_{i+1}) интервалларнинг учлари ҳисобланади:

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x^*}}{\sigma^*}, \quad z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x^*}}{\sigma^*}.$$

Шу билан бирга, Z нинг энг кичик z_1 қиймати $-\infty$ га, энг катта қиймати, яъни z_s ∞ га тенг деб олинади.

4. X нинг (x_i, x_{i+1}) интервалларга тушишининг n_i назарий эҳтимоллари ушбу тенглик бўйича ($\Phi(z)$ — Лаплас функцияси)

$$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$$

ҳисобланади, ва ниҳоят, изланаётган $n_i' = np_i$ назарий частоталар ҳисобланади.

Мисол. Бош тўплам нормал тақсимланган деган тахминда назарий частоталарни $n = 200$ ҳажмли танланманинг интервал тақсимоти бўйича топинг (27- жадвал).

27- жадвал

Интервал номери	Интервал чегаралари		Частота	Интервал номери	Интервал чегаралари		Частота
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	4	6	15	6	14	16	21
2	6	8	26	7	16	18	24
3	8	10	25	8	18	20	20
4	10	12	30	9	20	22	13
5	12	14	26				
							$n = 200$

Ечилиши. 1. Интервалнинг ўрталари $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ ни топамиз. Масалан, $x_1^* = \frac{4 + 6}{2} = 5$. Шунга ўхшаш иш кўриб, тенг узоқликда турган x_i^* варианталар ва уларга тегишли n_i частоталар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз:

x_i^*	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13.

2. Танланма ўртача қиймат ва танланма ўртача квадратик четланишни кўпайтмалар методидан фойдаланиб топамиз:

$$\bar{x}^* = 12.63, \ \sigma^* = 4,695.$$

3. $\bar{x}^* = 12,63$, $\sigma^* = 4,695$, $\frac{1}{\sigma^*} = 0,213$ ни ҳисобга олиб, (z_i, z_{i+1}) интервалларни топамиз, бунинг учун 28- ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

28- жадвал

i	интервал чегаралари		$x_i - \overline{x^*}$	$x_{i+1} - \overline{x^*}$	интервал чегаралари	
	x_i	x_{i+1}			$z_i = \frac{x_i - \overline{x^*}}{s^*}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x^*}}{s^*}$
1	4	6	—	—6,63	—∞	—1,41
2	6	8	—6,63	—4,63	—1,41	—0,99
3	8	10	—4,63	—2,63	—0,99	—0,56
4	10	12	—2,63	—0,63	—0,156	—0,13
5	12	14	—0,63	1,37	—0,13	0,29
6	14	16	1,37	3,37	0,29	0,72
7	16	18	3,37	5,37	0,72	1,14
8	18	20	5,37	7,37	1,14	1,57
9	20	22	7,37	—	1,57	∞

4. P_i назарий эхтимолларини ва изланаётган $n_i' = nP_i$ назарий частоталарини топамиз, бунинг учун 29-ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

29- жадвал

i	интервал чегаралари		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n_i' = np_i = 200p_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	—∞	—1,41	—0,5	—0,4207	0,0793	15,86
2	—1,41	—0,99	—0,4207	—0,3389	0,0818	16,36
3	—0,99	—0,56	—0,3389	—0,2123	0,1266	25,32
4	—0,56	—0,13	—0,2123	—0,0517	0,1606	32,16
5	—0,13	0,29	—0,0517	0,1141	0,1658	33,16
6	0,29	0,72	0,1141	0,2642	0,1501	30,02
7	0,72	1,14	0,2642	0,3729	0,1087	21,74
8	1,14	1,57	0,3729	0,4418	0,0689	13,78
9	1,57	∞	0,4418	0,5	0,0582	11,64
					$\sum p_i = 1$	$\sum n_i' = 200$

Изланаётган назарий частоталар 29-жадвалнинг сўнгги устунида жойлаштирилган.

Масалалар

1. X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган n_1 ва n_2 ҳажмли иккита эркли танланма бўйича s_X^2 ва s_Y^2 тузатилган танланма дисперсиялар топилган. α қийматдорлик даражасида бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги H_0: $D(X) = D(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза H_1: $D(X) > D(Y)$ бўлганда текширинг;

а) $n_1 = 21$, $n_2 = 16$, $s_X^2 = 3,6$ $s_Y^2 = 2,4$, $\alpha = 0,05$;

б) $n_1 = 13$, $n_2 = 18$, $s_X^2 = 0,72$, $s_Y^2 = 0,20$, $\alpha = 0,01$.

Жавоби а) $F_{кузат} = 1,5$; $F_{кр}$ $(0.05,\ 20;\ 15) = 2.33$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ; б) $F_{кузат} = 3,6$; $F_{кр}$ $(0,01;\ 12;\ 17) = 3,46$. Нолинчи гипотеза рад этилади.

2. X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган n ва m ҳажмли иккита эркли танланма бўйича $\overline{x}$ ва $\overline{y}$ танланма ўртача қийматлар топилган. $D(X)$ ва $D(Y)$ бош дисперсиялар маълум. α қийматдорлик даражасида математик кутилишлар тенглиги ҳақидаги H_0: $M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза H_1: $M(X) \neq M(Y)$ бўлганда текширинг.

а) $n = 30$, $m = 20$, $D(X) = 120$, $D(Y) = 100$, $\alpha = 0,05$;

б) $n = 50$, $m = 40$, $D(X) = 50$, $D(Y) = 120$, $\alpha = 0,01$.

Жавоби. а) $Z_{кузат} = 1$, $z_{кр} = 1,96$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. б) $Z_{кузат} = 10$; $z_{кр} = 2,58$. Нолинчи гипотеза рад этилади.

3. X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган $n = 5$ ва $m = 6$ ҳажмли иккита эркли танланма бўйича $\overline{x} = 15,9$, $\overline{y} = 14,1$ танланма ўртача қийматлар ва $s_X^2 = 14,76$, $s_Y^2 = 4,92$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида математик кутилишлар тенглиги ҳақидаги H_0: $M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза H_1: $M(X) \neq M(Y)$ бўлганда текширинг.

Кўрсатма. Аввал дисперсияларни таққосланг.

Жавоби. $T_{кузат} = 0,88$, $t_{кр} = (0,05;\ 9) = 2,26$. нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

4. Ўртача квадратик четланиши $\sigma = 2,1$ маълум бўлган нормал бош тўпламдан $n = 49$ ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $\overline{x} = 4,5$ танланма ўртача қиймат топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида математик кутилишнинг гипотетик қийматга тенглиги ҳақидаги H_0: $a = 3$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза H_1: $a \neq 3$ бўлганда текширинг.

Жавоби. $U_{кузат} = 5$, $u_{кр} = 1,96$. Нолинчи гипотеза рад этилади.

5. Нормал бош тўпламдан олинган $n = 16$ ҳажмли танланма бўйича $\overline{x} = 12,4$ танланма ўртача қиймат ва $s = 1,2$ «тузатилган» ўртача квадратик четланиш топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида математик кутилишнинг гипотетик қийматга тенглиги ҳақидаги H_0: $a = 11,8$ нолинчи гипотеза конкурент гипотеза H_1: $a \neq 11,8$ бўлганда текширинг.

Жавоби. $T_{кузат} = 2$, $t_{кр}$ $(0,05;\ 15) = 2,13$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

6. Иккита асбоб ёрдамида 5 та деталь ўлчаниб, қуйидаги натижалар олинган (*мм* ҳисобида):

$$x_1 = 4,\ x_2 = 5,\ x_3 = 6,\ x_4 = 7,\ x_5 = 8;$$
$$y_1 = 5,\ y_2 = 5,\ y_3 = 9,\ y_4 = 4,\ y_5 = 6.$$

0,05 қийматдорлик даражасида ўлчаш натижалари фарқи муҳим ёки муҳим эмаслигини текширинг.

Жавоби. $T_{\text{кузат}} = 10{,}51$, $t_{\text{кр}}$ $(0{,}05;\ 4) = 2{,}78$. Ўлчаш натижалари фарқи муҳим.

7. 100 та эркли синаш бўйича $\frac{m}{n} = 0{,}15$ нисбий частота топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида нисбий частотанинг гипотетик эҳтимолига тенглиги ҳақидаги H_0: $p = 0{,}17$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза H_1: $p \neq 0{,}17$ бўлганда текширинг.

Жавоби. $|U_{\text{кузат}}| = 0{,}53$, $u_{\text{кр}} = 1{,}96$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

8. Нормал бош тўпламлардан олинган $n_1 = 7$, $n_2 = 9$, $n_3 = 10$, $n_4 = 12$, $n_5 = 15$ ҳажмли бешта эркли танланма бўйича ушбу тузатилган танланма дисперсиялар топилган: 0,27. 0,32, 0,40; 0,42, 0,48. Ушбу 0,05 қийматдорлик даражасида дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текширинг (критик соҳа ўнг томонлама).

Кўрсатма. Бартлет критерийсидан (19- §) фойдаланинг.

Жавоби. $V = 6{,}63$. $\chi^2_{\text{кр}}$ $(0{,}05;\ 4) = 9{,}5$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

9. Нормал тўпламлардан олинган бир хил $n = 17$ ҳажмли тўртта эркли танланма бўйича ушбу тузатилган танланма дисперсиялар топилган: 2,12; 2,32; 3,24; 4,32. Қуйидагилар талаб қилинади: а) 0,05 қийматдорлик даражасида бош дисперсиялар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текширинг (критик соҳа ўнг томонлама): б) бош дисперсияни баҳолаш.

Кўрсатма. Кочрен критерийсидан (20- §) фойдаланинг.

Жавоби. а) $G_{\text{кузат}} = 0{,}36$, $G_{\text{кр}}(0{,}05;\ 16{,}4) = 0{,}4366$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. б) $\sigma = 3$.

10. Икки ўлчовли $(X,\ Y)$ нормал тўпламдан олинган $n = 62$ ҳажмли танлама бўйича $r_{\text{т}} = 0{,}6$ танланма корреляция коэффициенти топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги H_0: $r_{\text{Б}} = 0$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $r_{\text{Б}} \neq 0$ бўлганда текширинг.

Жавоби. $T_{\text{кузат}} = 5{,}81$, $t_{\text{кр}}$ $(0{,}05;\ 60) = 2{,}0$. Нолинчи гипотеза рад этилади.

11. 0,05 қийматдорлик даражасида бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текширинг. Эмпирик ва назарий частоталар маълум:

а) назарий частоталар:	6	12	16	40	13	8	5			
эмпирик частоталар:	4	11	15	43	15	6	6;			
б) эмпирик частоталар:	5	6	14	32	43	39	30	20	6	5
назарий частоталар:	4	7	12	29	48	35	34	18	7	6

в) эмпирик частоталар:	5	13	12	44	8	12	6
назарий частоталар:	2	20	12	35	15	10	6

Жавоби. $\chi^2_{\text{кузат}} = 2{,}5$, $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 4) = 9{,}5$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. б) $\chi^2_{\text{кузат}} = 3$, $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 7) = 14{,}1$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. в) $\chi^2_{\text{кузат}} = 13$, $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 4) = 9{,}5$. Гипотеза рад этилади.

Йигирманчи боб

БИР ФАКТОРЛИ ДИСПЕРСИОН АНАЛИЗ

1-§. Бир нечта ўртача қийматларни таққослаш. Дисперсион анализ ҳақида тушунча

Айтайлик, X_1, X_2, ..., X_p бош тўпламлар нормал тақсимланган ҳамда номаълум бўлса-да, лекин бир хил дисперсияга эга бўлсин; математик кутилишлар ҳам номаълум бўлса-да, лекин улар ҳар хил бўлиши мумкин. Берилган қийматдорлик даражасида барча математик кутилишлар тенглиги ҳақидаги

$$H_0\colon M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_p)$$

нолинчи гипотезани танланма ўртача қийматлар бўйича текширишни талаб қилинади. Бошқача сўз билан айтганда, танланма ўртача қийматлар фарқи муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқлаш талаб этилади. Бир неча ($p > 2$) ўртача қийматларни таққослаш учун уларни иккита-иккитадан таққослаш кифоядек туюлиши мумкин. масалан, ўртача қийматлар сони ортиши билан улар орасидаги энг катта фарқ ҳам ортади, яъни танланманинг ўртача қиймати янги тажрибадан аввал ҳосил қилинган ўрта қийматларнинг энг каттасидан катта ёки энг кичигидан кичик бўлиб чиқиши мумкин. Шу сабабли бир нечта ўртача қийматларни таққослаш учун бошқача методдан фойдаланилади. Бу метод дисперсияларни таққослашга асосланган ва шу сабабли *дисперсион анализ* деб аталган (у асосан инглиз статистиги Р. Фишер ишларида ривожлантирилган).

Практикада дисперсион анализ p та F_1, F_2, ..., F_p даражага эга бўлган F сифат факторнинг ўрганилаётган X миқдорга таъсири муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқлаш учун қўлланилади. Масалан, энг кўп ҳосил олишда ўғитларнинг қайси тури самаралироқ эканлиги талаб қилинса, у ҳолда F фактор—ўғит, унинг даражалари эса ўғит турлари бўлади.

Дисперсион анализнинг асосий ғояси фактор таъсирида вужудга келадиган «фактор дисперсия» ва тасодифий сабаблар билан бўладиган «қолдиқ дисперсия»ни таққослашдан иборат. Агар бу дисперсиялар орасидаги фарқ муҳим бўлса, у ҳолда фактор X га мухим таъсир кўрсатади: бу ҳолда ҳар бир даражада кузатилаётган қийматларнинг ўртача қийматлари (группавий ўртача қийматлар) ҳам муҳим фарқ қилади.

Факторнинг X га муҳим таъсир кўрсатаётганлиги аниқланган бўлиб, даражалардан қайси бири энг кўп таъсир кўрсатаётганлигини аниқлаш талаб қилинса, у ҳолда қўшимча равишда ўртача қийматларни жуфт-жуфт қилиб таққосланади.

Дисперсион анализ баъзан бир неча тўпламларнинг бир жинслилигини аниқлаш мақсадида қўлланилади (бу тўпламларнинг дисперсиялари тахминга кўра бир хил; агар дисперсион анализ математик кутилишларнинг ҳам бир хиллигини кўрсатса, у ҳолда тўпламлар ана шу маънода бир жинслидир). Бир жинсли тўпламларни эса битта тўпламга бирлаштириш ва шу билан у ҳақида янада тўлиқроқ информация ва демак, яна ҳам ишончлироқ хулосалар олиш мумкин.

Яна ҳам мураккаб ҳолларда бир нечта ўзгармас ёки тасодифий даражали бир нечта факторларнинг таъсири текширилади ва айрим даражалар ва улар комбинацияларининг таъсири аниқланади *(кўп факторли анализ)*.

Биз энг оддий ҳол, X ва p та ўзгармас даражага эга бўлган битта фактор таъсир қиладиган бир факторли ҳол билан чекланамиз.

2- §. Четланишлар квадратларининг умумий, фактор ва қолдиқ йиғиндилари

Айтайлик, нормал тақсимланган X сон белгига p та ўзгармас даражали F фактор таъсир кўрсатсин. Ҳар бир даражада кузатиш сони бир хил ва q га тенг деб фараз қиламиз.

X белгининг pq та x_{ij} қийматлари кузатилган бўлсин, бу ерда i=синаш номери ($i = 1, 2, \ldots, q$), j—фактор даражаси номери ($j = 1, 2, \ldots, p$). Кузатиш натижалари 30-жадвалдан ўрин олган.

30-жадвал

Синов номерлари	Фактор даражалари F_j			
	F_1	F_2	...	F_p
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2p}
...	...	...	...	...
q	x_{q1}	x_{q2}	...	x_{qp}
Группавий ўртача қийматлар	$\overline{x}_{гр1}$	$\overline{x}_{гр2}$	...	$\overline{x}_{гр\,p}$

Таърифга кўра қуйидагиларни киритамиз.

$$S_{ум} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{q} (x_{ij} - \overline{x})^2$$

(кузатилаётган қийматларнинг $\overline{x}$ умумий ўртача қийматдан четланишлари квадратларининг *умумий йиғиндиси*).

$$S_{факт} = q \sum_{j=1}^{p} (\overline{x}_{грj} - \overline{x})^2$$

(группавий ўрта қийматларнинг умумий ўртача қийматидан четланишлари квадратларининг *фактор йиғиндиси*, у «группалар орасида» тарқоқликни характерлайди).

$$S_{қолд} = \sum_{i=1}^{q} (x_{i1} - \overline{x}_{гр1})^2 + \sum_{i=1}^{q} (x_{i2} - \overline{x}_{гр2})^2 + \ldots +$$

$$+ \sum_{i=1}^{q} (x_{ip} - \overline{x}_{гр\,p})^2$$

(группадаги кузатилаётган қийматларнинг ўзининг группавий ўртача қийматдан четланишлари квадратларининг *қолдиқ йиғиндиси*, у «группалар ичидаги» тарқоқликни характерлайди).

Амалда қолдиқ йиғинди ушбу тенглик бўйича (3-§, натижа) топилади:

$$S_{қолд} = S_{ум} - S_{факт}.$$

Элементар алмаштиришлар ёрдамида ҳисоблаш учун қулай формулалар ҳосил қилиш мумкин.

$$S_{\text{ум}} = \sum_{j=1}^{p} P_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^{p} R_j\right]^2}{pq}, \qquad (*)$$

$$S_{\text{факт}} = \frac{\sum_{j=1}^{p} R_j^2}{q} - \frac{\left[\sum_{i=1}^{p} R_j\right]^2}{pq}. \qquad (**)$$

Бу ерда $P_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}^2$ — белгининг F_j даражадаги қийматлари йиғиндиси, $R_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}$ — белгининг F_j даражадаги қийматлари йиғиндиси.

Эслатма. Ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида кузатилаётган ҳар бир қийматдан тахминан умумий ўртача қийматга тенг бўлган бир хил C сон айирилади. Агар камайтирилган қийматлар $y_{ij}=x_{ij}-C$ бўлса, у ҳолда

$$S_{\text{ум}} = \sum_{i=1}^{p} Q_j - \frac{\left[\sum_{i=1}^{p} T_j\right]^2}{pq}, \qquad (***)$$

$$S_{\text{факт}} = \frac{\sum_{j=1}^{p} T_j^2}{q} - \frac{\left[\sum_{j=1}^{p} T_j\right]^2}{pq}, \qquad (****)$$

бу ерда $Q_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}^2$ — белгининг F_j даражадаги камайтирилган қийматлари квадратлари йиғиндиси, $T_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}$ — белгининг F_j даражадаги камайтирилган қийматлари йиғиндиси.

(***) ва (****) формулаларни келтириб чиқариш учун $x_{ij} = y_{ij} + C$ ни (*) га ва

$$R_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij} = \sum_{i=1}^{q} (y_{ij} + C) = \sum_{i=1}^{q} y_{ij} + qC = T_j + qC$$

ни (**) муносабатга қўйиш лозим.

Тушунтиришлар.

1. $S_{\text{факт}}$ F факторнинг таъсирини характерлашга ишонч ҳосил қилайлик. Айтайлик, фактор X га муҳим таъсир кўрсатсин. У ҳолда белгининг битта тайин даражада кузатилган қийматлари группаси, умуман айтганда, бошқа даражалардаги кузатиш группаларидан фарқ қилади. Демак, группавий ўртача қийматлар ҳам фарқ қилади, шу билан бирга фактор таъсири қанча катта бўлса, улар умумий ўртача қиймат атрофида шунча кўп тарқоқ бўлади. Бу ердан фактор таъсирини баҳолаш учун группавий ўртача қийматларнинг умумий ўртача қийматдан четланишлари квадратлари йиғиндисини тузиш мақсадга мувофиқлиги (мусбат ва манфий четланишларнинг ўзаро йўқолиб кетишини бартараф қилиш мақсадида четланиш квадратга кўтарилади) келиб чиқади. Бу йиғиндини q га кўпайтириб $S_{\text{факт}}$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $S_{\text{факт}}$ факторнинг таъсирини характерлайди.

2. $S_{\text{қолд}}$ тасодифий сабаблар таъсирини акс эттиришига ишонч ҳосил қиламиз. Бир группадаги кузатишлар фарқ қилмаслиги керакдек бўлиб кўринади. Лекин X га F фактордан ташқари тасодифий сабаблар ҳам таъсир кўрсатгани учун — битта группадаги кузатишлар, умуман айтганда, турли ва демак, ўзининг группавий ўртача қиймати атрофида тарқоқ бўлади. Бу ердан тасодифий сабабларни баҳолаш учун ҳар бир группанинг кузатилаётган қийматларини уларнинг ўз группавий ўртача қийматидан четланишлари квадратлари йиғиндисини яъни $S_{\text{қолд}}$ ни тузиш мақсадга мувофиқлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, $S_{\text{қолд}}$ тасодифий сабаблар таъсирини характерлайди.

3. $S_{\text{ум}}$ ҳам фактор, ҳам тасодифий сабаблар таъсирини акс эттиришига ишонч ҳосил қиламиз. Барча кузатишларни ягона тўплам сифатида қараймиз. Белгининг кузатилаётган қийматлари фактор ва тасодифий сабаблари натижасида ҳар хил. Бу таъсирни баҳолаш учун кузатилаётган қийматларнинг умумий ўртача қийматдан четланишлари квадратлари йиғиндисини, яъни $S_{\text{ум}}$ ни тузиш мақсадга мувофиқдир.

Шундай қилиб, $S_{\text{ум}}$ фактор ва тасодифий сабаблар таъсирини характерлайди.

Фактор йиғинди фактор таъсирини, қолдиқ йиғинди эса тасодифий сабаблар таъсирини акс эттиришини яққол кўрсатадиган мисол келтирамиз.

Мисол. Иккита асбоб билан ҳақиқий ўлчами X га тенг бўлган физикавий катталик 2 мартадан ўлчанган. Фактор сифатида C систематик хатони, унинг даражалари сифатида эса мос равишда биринчи ва иккинчи асбобларнинг C_1 ва C_2 систематик хатоларини қараб, $S_{\text{факт}}$ систематик хатолар орқали, $S_{\text{қолд}}$ эса ўлчашнинг тасодифий хатолари орқали аниқланишини кўрсатинг.

Ечилиши. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

α_1 ва α_2 — биринчи асбоб билан биринчи ва иккинчи ўлчашдаги тасодифий хатолар;

β_1 ва β_2 — иккинчи асбоб билан биринчи ва иккинчи ўлчашдаги тасодифий хатолар. Унда ўлчаш натижаларининг кузатилган қийматлари мос равишда қуйидагига тенг:

$$x_{11} = x + C_1 + \alpha_1, \quad x_{21} = x + C_1 + \alpha_2;$$

$$x_{12} = x + C_2 + \beta_1, \quad x_{22} = x + C_2 + \beta_2.$$

(x нинг биринчи индекси ўлчаш номерини, иккинчи индекси эса асбоб номерини кўрсатади).

Биринчи ва иккинчи асбобларда ўлчашларнинг ўртача қийматлари мос равишда қуйидагига тенг:

$$\bar{x}_{1\text{гр}} = x + C_1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = x + C_1 + \alpha,$$

$$\bar{x}_{2\text{гр}} = x + C_2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = x + C_2 + \beta.$$

Умумий ўртача қиймат:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_{1\text{гр}} + \bar{x}_{2\text{гр}}}{2} = x + \frac{C_1 + C_2}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Фактор йиғинди:

$$S_{\text{факт}} = (\bar{x}_{1\text{гр}} - \bar{x})^2 + (\bar{x}_{2\text{гр}} - \bar{x})^2.$$

Қавс ичидаги катталикларнинг қийматларини қўйиб, элементлар алмаштиришлардан сўнг қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S_{\text{факт}} = \frac{(C_1 - C_2)^2}{2} + (C_1 - C_2)(\alpha - \beta) + \frac{(\alpha - \beta)^2}{2}.$$

Кўриниб турибдики, $S_{\text{факт}}$ асосан биринчи қўшилувчи билан аниқланади (чунки ўлчашларнинг нисбий хатолари кичик) ва демак, у ҳақиқатан ҳам C фактор таъсирини акс эттиради.

Қолдиқ йиғинди:

$$S_{\text{қолд}} = (x_{11} - \overline{x}_{1\text{гр}})^2 + (x_{21} - \overline{x}_{1\text{гр}})^2 + (x_{12} - \overline{x}_{2\text{гр}})^2 + \\ + (x_{22} - \overline{x}_{2\text{гр}})^2.$$

Қавслар ичидаги катталикларни ўрнига қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S_{\text{қолд}} = [(\alpha_1 - \alpha)^2 + (\alpha_2 - \alpha)^2] + [(\beta_1 - \beta)^2 + (\beta_2 - \beta)^2].$$

Кўриниб турибдики, $S_{\text{қолд}}$ ўлчашларнинг тасодифий хатолари билан аниқланади, ва демак, у тасодифий сабаблар таъсирини ҳақиқатан ҳам акс эттиради.

Эслатма. $S_{\text{қолд}}$ тасодифий сабаблар томонидан вужудга келтирилиши, шунингдек, ушбу тенгликдан хам (3- §, натижа) келиб чиқади.

$$S_{\text{қолд}} = S_{\text{ум}} - S_{\text{факт}}.$$

Дарҳақиқат, $S_{\text{ум}}$ фактор ва тасодифий сабаблар таъсири натижасидир, $S_{\text{факт}}$ ни айириш билан, биз фактор таъсирини йўқотамиз. Демак, «қолган қисм» тасодифий сабаблар таъсирини акс эттиради.

3-§. Умумий, фактор ва қолдиқ йиғиндилар орасидаги боғланиш

Қуйидагини кўрсатамиз: $S_{\text{ум}} = S_{\text{факт}} + S_{\text{қолд}}$. Келтириб чиқаришни соддалаштириш мақсадида иккита даража ($p=2$) ва ҳар бир даражада иккита синов ($q=2$) билан чеклanaмиз. Синов натижаларини 31-жадвал кўринишида тасвирлаймиз.

31-жадвал

Синаш номери	Фактор даражалари, F_j	
	F_1	F_2
1	x_{11}	x_{12}
2	x_{21}	x_{22}
$\overline{x}_{j\text{гр}}$	$\overline{x}_{1\text{гр}}$	$\overline{x}_{2\text{гр}}$

У ҳолда

$$S_{\text{ум}} = (x_{11} - \overline{x})^2 + (x_{21} - \overline{x})^2 + (x_{12} - \overline{x})^2 + (x_{22} - \overline{x})^2.$$

Ҳар бир кузатилаётган қийматга биринчи даражада $\bar{x}_{1гр}$ группавий ўртача қийматни, иккинчи даражада эса $\bar{x}_{2гр}$ группавий ўртача қийматни қўшамиз ва айирамиз.

Квадратга кўтариб ва барча иккиланган кўпайтмалар йиғиндиси 0 га тенг эканлигини (бунга мустақил ишонч ҳосил қилишни ўқувчининг ўзига тавсия қиламиз) ҳисобга олиб қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$S_{ум} = 2[(\bar{x}_{1гр} - \bar{x})^2 + (\bar{x}_{2гр} - \bar{x})^2] \pm [(x_{11} - \bar{x}_{1гр})^2 +$$
$$+ (x_{21} - \bar{x}_{1гр})^2 + (x_{12} - \bar{x}_{2гр})^2 + (x_{22} - \bar{x}_{2гр})^2] = S_{факт} + S_{қолд}.$$

Шундай қилиб, $S_{ум} = S_{факт} + S_{қолд}$.

Натижа. Ҳосил қилинган тенгликдан ушбу муҳим натижа келиб чиқади.

$$S_{қолд} = S_{ум} - S_{факт}.$$

Бу ердан кўриниб турибдики, қолдиқ йиғиндини бевосита ҳисоблашга зарурият йўқ: умумий ва фактор йиғиндиларни, кейин эса уларнинг айирмасини топиш кифоя.

4- §. Умумий, фактор ва қолдиқ дисперсиялар

Четланишлар квадратлари йиғиндисини тегишли озодлик даражаси сонига бўлиб, умумий, фактор ва қолдиқ дисперсияни ҳосил қиламиз:

$$s^2_{ум} = \frac{S_{ум}}{pq-1}, \quad s^2_{факт} = \frac{S_{факт}}{p-1}, \quad s^2_{қолд} = \frac{S_{қолд}}{p(q-1)}.$$

бу ерда p — фактор даражалар сони;

q — ҳар бир даражада кузатишлар сони.

Агар ўртача қийматлар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотеза ўринли бўлса, у ҳолда бу дисперсиялар бош дисперсиянинг силжимаган баҳолари бўлади. Масалан, танланма ҳажми $n = pq$ лигини ҳисобга олиб, бундай хулосага келамиз,

$$s^2_{ум} = \frac{S_{ум}}{pq-1} = \frac{S_{ум}}{n-1}$$

тузатилган танланма дисперсия, маълумки, бош дисперсиянинг силжимаган хатосидир.

Эслатма. Қолдиқ дисперсиянинг $p(q-1)$ озодлик даражалари сони умумий ва фактор дисперсияларнинг озодлик даражалари сонлари орасидаги айирмага тенг. Ҳақиқатан ҳам, $(pq-1) - (p-1) = pq - p = p(q-1)$.

5- §. Бир нечта ўртача қийматларни дисперсион анализ методи билан таққослаш

1- § да қўйилган масалага қайтайлик: берилган қийматдорлик даражасида номаълум, лекин бир хил дисперсияли нормал тўпламларнинг бир нечта ($p>2$) ўртача қийматларининг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текширинг. Бу масалани ҳал этишнинг фактор ва колдиқ дисперсияларини Фишер—Снедекор критерийси (XIX боб, 8- §) бўйича таққослашга келтирилишини кўрсатамиз.

1. Бир нечта ўртача қийматлар (уларни бундан кейин группавий деб атаймиз) тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотеза тўғри бўлсин. Бу ҳолда фактор ва қолдиқ дисперсиялар номаълум бош дисперсиянинг силжимаган баҳолари (4- §) бўлади, ва демак, уларнинг фарқи муҳим эмас. Агар бу баҳоларни F критерий бўйича таққосланса, у ҳолда бу критерий фактор ва қолдиқ дисперсиялар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани қабул қилиш лозимлигини кўрсатиши равшан.

Шундай қилиб, группавий ўртача қийматлар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотеза тўғри бўлса, у ҳолда фактор ва қолдиқ дисперсиялар тенглиги ҳақидаги гипотеза ҳам тўғри бўлади.

2. Группавий ўртача қийматлар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотеза нотўғри (ёлғон) бўлсин. Бу ҳолда группавий ўртача қийматлар орасидаги фарқ ортиши билан фактор дисперсия, у билан бирга $F_{кузат} = \frac{S^2_{факт}}{S^2_{қолд}}$ нисбат ҳам орта боради. Натижада $F_{кузат}$ қиймат $F_{кр}$ дан катта бўлади, ва демак, дисперсиялар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотеза рад этилади.

Шундай қилиб, группавий ўртача қийматлар тенглиги ҳақидаги гипотеза нотўғри бўлса, у ҳолда фактор ва қолдиқ дисперсиялар тенглиги ҳақидаги гипотеза ҳам нотўғри бўлади.

Қарама-қаршисини фараз қилиш йўли билан қуйидаги тескари даъволарнинг ўринли эканлигини кўрсатиш осон: дисперсиялар ҳақидаги гипотезанинг тўғрилигидан (нотўғрилигидан) ўртача қийматлар ҳақидаги гипотезанинг тўғрилиги (нотўғрилиги) келиб чиқади.

Шундай қилиб, бир хил дисперсияли нормал тўпламларнинг группавий ўртача қийматлари тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш учун фактор ва қолдиқ *дисперсиялар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани F критерий бўйича текшириш кифоя.* Дисперсион анализ методининг моҳияти шундан иборат.

1-эслатма. Агар фактор дисперсия қолдиқ дисперсиядан кичик бўлиб чиқса, у ҳолда ана шунинг ўзидан группавий ўртача қийматлар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезанинг ўринлиги келиб чиқади, ва демак, F критерийга мурожаат этишга эҳтиёж қолмайди.

2-эслатма. Агар қаралаётган p та тўпламнинг дисперсиялари тенглиги ҳақидаги тахмин тўғрилигига ишонч бўлмаса, у ҳолда аввало бу тахминни масалан, Кочрен критерийси бўйича текшириш лозим.

Мисол. Учта даражанинг ҳар бирида 4 тадан синов ўтказилган. Синов натижалари 32-жадвалда келтирилган. Дисперсион анализ методи билан 0,05 қийматдорлик даражасида группавий ўртача қийматлар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текширинг. Танланмалар бир хил дисперсияли нормал тўпламлардан олинган деб тахмин қилинади.

32-жадвал

Синаш номери	Фактор даражалари F_j		
	F_1	F_2	F_3
1	51	52	42
2	52	54	44
3	56	56	50
4	57	58	52
$\overline{x}_{\text{гр}j}$	54	56	47

Ечилиши. Ҳисоблашни соддалаштириш мақсадида ҳар бир кузатилган қийматдан $C=52$ ни айирамиз: $y_{ij}=x_{ij}-52$. 33-ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

Жадвалдан фойдаланиб ва фактор даражалари сони $p=3$, ҳар бир даражада кузатишлар сони $q=4$ эканини ҳисобга олиб четланишлар квадратларининг умумий фактор йиғиндиларини топамиз [2-§, (***) ва (****) формулалар.]

$$S_{\text{ум}}=\sum_{j=1}^{p}S_j-\frac{\left[\sum\limits_{j=1}^{p}T_j\right]^2}{pq}=266-0=266;$$

$$S_{\text{факт}}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{p}T_j^2}{q}-\frac{\left[\sum\limits_{j=1}^{p}T_j\right]^2}{pq}=\frac{608}{4}-0=152.$$

33- жадвал

Синаш номери	Фактор даражалари, F_j						
	F_1		F_2		F_3		
	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	
1 2 3 4	—1 0 4 5	1 0 16 25	0 2 4 6	0 4 16 36	—10 —8 —2 0	100 64 4 0	
$S_j = \sum\limits_{i=1}^{4} y_{ij}^2$		42		56		168	$\sum S_j = 266$
T_j	8		12		—20		$\sum T_j = 0$
T_j^2	64		144		400		$\sum T_j^2 = 608$

Четланишлар квадратларининг қолдиқ йиғиндисини топамиз:

$$S_{\text{қолд}} = S_{\text{ум}} - S_{\text{факт}} = 266 - 152 = 114.$$

Фактор ва қолдиқ дисперсияларни топамиз:

$$s^2_{\text{факт}} = \frac{S}{p-1} = \frac{152}{3-1} = 76;$$

$$s^2_{\text{қолд}} = \frac{S_{\text{қолд}}}{p(q-1)} = \frac{114}{3(4-1)} = \frac{114}{9} = 12{,}67.$$

Фактор ва қолдиқ дисперсияларни F критерий (XIX боб, 8-§) бўйича таққослаймиз, бунинг учун критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз:

$$F_{\text{кузат}} = \frac{s^2_{\text{факт}}}{s^2_{\text{қолд}}} = \frac{76}{12{,}67} = 6.$$

Суратнинг озодлик даражалари сони $k_1 = 2$, махражники эса $k_2 = 9$ эканлигини, қийматдорлик даражаси $\alpha = 0{,}05$ эканлигини ҳисобга олиб, жадвалдан $F_{\text{кр}}(0{,}05;\ 2;\ 9) = 4{,}26$ критик нуқтани топамиз.

$F_{\text{кузат}} > F_{\text{кр}}$ бўлгани учун группавий ўртача қийматлар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача айтганда группавий ўртача қийматларнинг фарқи «умуман» муҳим. Агар ўртача қийматларни жуфт-жуфт таққослаш талаб қилинса, у ҳолда Стьюдент критерийсидан фойдаланиш лозим.

3-эслатма. Агар кузатилаётган x_{ij} қийматлар вергулдан кейин бир хонали ўнли каср бўлса, у ҳолда $y_{ij} = 10x_{ij} - C$ сонларга ўтиш мақсадга мувофиқ, бу ерда C сон $10\,x_{ij}$ сонларнинг тахминан ўртача қиймати. Натижада нисбатан унча катта бўлмаган бутун сонлар ҳосил қиламиз. Бу ҳолда фактор ва нисбий дисперсиялар 10^2 марта ортса-да, уларнинг нисбати ўзгармайди. Масалан, агар $x_{11} = 12{,}1$, $x_{21} = 12{,}2$; $x_{31} = 12{,}6$ бўлса, у ҳолда $y_{ij} = 10x_{ij} - 123$ деб қабул қилиб, $y_{11} = 121-123 = -2$; $y_{21} = 122 - 123 = -1$; $y_{31} = 126-123=3$ ни ҳосил қиламиз.

Агар вергулдан сўнг k хона бўлса ҳам шунча ўхшаш иш қилинади:

$$y_{ij} = 10^k \cdot x_{ij} - C.$$

Масалалар

1—2-масалаларда 0,05 қийматдорлик даражасида группавий ўртача қийматлар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади. Танланмалар бош дисперсиялари бир хил бўлган нормал тўпламлардан олинган деб тахмин қилинади.

1.

Синаш номери	Фактор даражалари F_j				
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1	42	66	35	64	70
2	55	91	50	70	79
3	67	96	60	79	88
4	67	98	69	81	90
$\overline{x}_{\text{гр}j}$	57,75	87,75	53,50	73,50	81,75

Жавоби. $F_{\text{кузат}} = 6{,}13$, $F_{\text{кр}}(0{,}05;\ 4{,}15) = 3{,}06$. Нолинчи гипотеза рад этилади.

2.

Синаш номери	Фактор даражалари, F_j			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	6	6	9	7
2	7	7	12	9
3	8	11	13	10
4	11	12	14	10
$\overline{x}_{\text{гр}j}$	8	9	12	9

Жавоби. $F_{\text{кузат}} = 2{,}4$; $F_{\text{кр}}(0{,}05;\ 3;\ 12) = 3{,}49$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

1- илова

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ **функция қийматлари жадвали**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1591	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$ функция қийматлари жадвали

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177
0,05	0,0199	0.50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319
0,15	0,0596	0.60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4505
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4525
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616
0,43	0,1664	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633

Давоми

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,80	0,4641	2,00	0,4772	2,40	0,4918	2,80	0,4974
1,81	0,4649	2,02	0,4783	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,83	0,4664	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,84	0,4671	2,08	0,4812	2,48	0,4934	2,88	0,4980
1,85	0,4678	2,10	0,4821	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,12	0,4830	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,14	0,4838	2,54	0,4945	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,16	0,4842	2,56	0,4948	2,96	0,4985
1,89	0,4706	2,18	0,4854	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,20	0,4861	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,22	0,4868	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,24	0,4875	2,64	0,4959	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,26	0,4881	2,66	0,4961	3,60	0,499841
1,94	0,4738	2,28	0,4387	2,68	0,4963	3,80	0,499928
1,95	0,4744	2,30	0,4893	2,70	0,4965	4,00	0,499968
1,96	0,4750	2,32	0,4898	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,97	0,4756	2,34	0,4904	2,74	0,4969	5,00	0,499997
1,98	0,4761	2,36	0,4909	2,76	0,4971		
1,99	0,4767	2,38	0,4913	2,78	0,4973		

3- илова

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ қийматлар жадвали

γ n	0,95	0,99	0,999	γ n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	2,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

4- илова

$q = q(\gamma, n)$ қийматлар жадвали

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,93	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

5- илова

χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари

Озодлик даражалар сони, k	α қийматдорлик даражаси					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,351	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63

Давоми

Озодлик даражалар сони, k	Қийматдорлик даражаси, α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44.5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

6- илова

Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари

Озодлик даражалар сони, k	α қийматдорлик даражаси (икки томонлама критик соҳа)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79

Озодлик даражалар сони, k	α қийматдорлик даражаси (икки томонлама критик соҳа)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	қийматдорлик даражаси, α (икки томонлама критик соҳа)					

Фишер—Снедекорнинг F тақсимоти критик нуқталари

(k_1— катта дисперсиянинг озодлик даражалар сони),
(k_2— кичик дисперсиянинг озодлик даражалар сони)

$\alpha = 0{,}01$ қийматдорлик даражаси

k_1 k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5695	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,85	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

МУНДАРИЖА

Учинчи қисм. Математик статистика элементлари

ИБ № 353

На узбекском языке

Гмурман Владимир Ефимович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНО — ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ И ФАКУЛЬТЕТОВ

Перевод с русского четвертого дополненного издания, изд-ва **«Высшая школа»**, М., 1972.

Издательство «Ўқитувчи», Ташкент — 1977

Таржимонлар: *Ш. Мирахмедов* (I — XI боблар),
Ў. Ҳусанов (XII — XX боблар)
Редакторлар: *Ў. Ҳусанов* (I — XI боблар), *Х. Алимов* (XII—XX боблар)
Бадиий редактор *Е. И. Соин*,
Тех. редактор *Б. Цапленкова*,
Корректор *Н. Саломова*.

Теришга берилди 23/XII-1976 й. Босишга рухсат этилди 24/V-1977 й.
Қоғоз № 1, $84 \times 108^{1}/_{32}$. Физ. б. л. 11,5. Шартли босма. л. 19,32. Нашр л. 19,78.
Тиражи 6000. «Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент. Навоий кўчаси, 30.
Шартнома 297—76.
Баҳоси 69 т. Муқоваси 14 т.

Ўз ССР Министрлар Советининг нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишла
Давлат комитетининг Тошкент полиграфия комбинатида терилиб, 1-босмахонаси
босилди. Тошкент. Ҳамза кўчаси, 21, 1977 й. Зак. № 315

Набрано на Ташполиграфкомбинате Государственного Комитета Совета Министр
УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Отпечатано в тип
графии № 1. Ташкент, ул. Хамзы, 21.