Aslonov J.

CHIZIQLI ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYA

CH0000036187

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

J. O. ASLONOV

CHIZIQLI ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYA

1-kitob. Analitik geometriya

o'quv qo'llanma

Toshkent
"Innovatsiya-Ziyo"
2020

UDK: 373.6
BBK: 74.200.526
A 95

J.O.Aslonov
Chiziqli algebra va analitik geometriya /o'quv qo'llanma/. – Toshkent: "Innovatsiya- Ziyo", 2020, 208 bet.

Ushbu o'quv-qo'llanma "Chiziqli algebra va analitik geometriya" fanining birinchi qismi, ya'ni Analitik geometriya fanidan bakalavriatning "5130100 - Matematika" ta'lim yo'nalishi uchun mo'ljallangan bo'lib, 1-kurs talabalari uni ikkinchi semestrda o'tadilar.

O'quv-qo'llanmani yaratishda yetakchi oliy ta'lim muassasalari o'quv dasturlarida asosiy adabiyot sifatida kiritilgan

I. Vaisman. Analytical Geometry (USA, World Scientific. 1997), Oprea J. Differential geometry and its application (USA, PH, 1997) adabiyotlaridan foydalanilgan.

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI TOMONIDAN NASHRGA TAVSIYA ETILGAN

ISBN 978-9943-6793-7-5

KIRISH

Ushbu o‘quv-qo‘llanma “Chiziqli algebra va analitik geometriya” fanining birinchi qismi, ya’ni Analitik geometriya fanidan bakalavriatning “5130100 - Matematika” ta’lim yo‘nalishi uchun mo‘ljallangan bo‘lib, 1-kurs talabalari uni ikkinchi semestrda o‘tadilar. O‘quv-qo‘llanmani yaratishda yetakchi Oliy ta’lim muassassalari o‘quv dasturlarida asosiy adabiyot sifatida kiritilgan. I. Vaisman. Analytical Geometry (USA, World Scientific. 1997), Oprea J. Differential geometry and its application (USA, PH, 1997) adabiyotlaridan foydalanilgan.

Kurs davomida vektorlar ustida qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari va ularning xossalari, bazis tushunchasi va chiziqli erkli hamda chiziqli bog‘liq vektorlarga ta’rif beriladi, vektorlarining skalyar ko‘paytmasi va uning xossalari, vektorlarning vektor ko‘paytmasi va uning xossalari, aralash ko‘paytma, vektorlarning oriyentatsiyasi, nokomplanar vektorlarga qurilgan parallelepipedning hajmi shu vektorlarning aralash ko‘paytmasining absolyut qiymatiga tengligi, parallellogramning yuzasi vektorlarning vektor ko‘paytmasi uzunligiga teng ekanligi isbotlanadi, vektor-funksiya tushunchasi; vektor-funksiya xossalari; vektor-funksiya differensiali; vektor-funksiya uzluksizligi; vektor-funksiya aniqmas integrali; vektor-funksiya hosilalarining geometrik ma’nosi; yopishma tekislik va uning tenglamasi; binormal va boshnormal tengalamalari; egri chiziq yoyi uzunligi va uni hisoblash; vektor funksiyalarning analitik realizatsiyasi; normal tekislik tenglamasi; egri chiziq egriligi va uni hisoblash formulalari; egri chiziq buralishi va uni hisoblash formulalari. Frene formulalari; fazoda va tekislikda to‘g‘ri chiziqlarning turli tenglamalari; normal tenglama. tekislik tenglamasi; to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro vaziyati; tekisliklarning o‘zaro vaziyati; tekislik va to‘g‘ri chiziqlarning joylashishi; nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa; ayqash to‘g‘ri chiziqlar; ikki ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa; aylana va uning elementlari; fazoda sfera tenglamasi; ikkinchi tartibli sirtlarning kanonik tenglamalari; tekis kesimlar; joylashishi; ikkinchi tartibli konusning kesimlari: ellips, parabola, giperbola va ularning xossalari; ikkinchi tartibli chiziqlarning kanonik tenglamalari; ikkinchi tartibli chiziqlarning qutbdagi tenglamalari; ikkinchi tartibli chiziqlarning joylashishi; simmetriya o‘qlari; ikkinchi tartibli chiziqlarning asimptotik va noasimptotik yo‘nalishlari; maxsus yo‘nalishlar; urinma tenglamasi; ikkinchi tartibli chiziqlarning diametri; tekislikni chiziqli almashtirish; affin almashtirishlar; xossalari; ortogonal almashtirishlar va ularning xossalari; ikkinchi tartibli chiziqning markazi; markaz haqidagi tasdiqlar; markaziy va nomarkaziy ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamalarini soddalashtirish o‘rganiladi va fazoda berilgan ikkinchi tartibli sirtlarning umumiy tenglamalari ikki holga: markaziy va nomarkaziy hollarga ajratilib kanonik ko‘rinishga olib kelinadi. Ushbu o’quv-qo’llanmani tayyorlashda o’z hissasini qo’shgan “Geometriya va topologiya” kafedrasi professor-o’qituvchilariga o’z minnatdorligimni bildiraman.

1-kitob. ANALITIK GEOMETRIYA

1-§. Vektorlar va ular ustida amallar

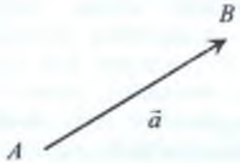
Reja:

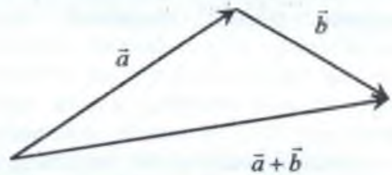
1. Vektor haqida tushuncha
2. Vektorlarni qo'shish amali
3. Vektorlarni songa ko'paytirish
4. Vektorlar ustida amallarning xossalari

Ta'rif-1. *Yo'nalishga ega bo'lgan kesma vektor deb ataladi.*

Biz vektorni $\overline{AB}$ ko'rinishida yoki bitta kichik lotin harfi bilan $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ ko'rinishida belgilaymiz. Vektorni $\overline{AB}$ ko'rinishida belgilasak A,B nuqtalar mos ravishda vektorning boshi va oxiri joylashgan nuqtalardir, vektorning uzunligi $|\overline{AB}|$, $|\bar{a}|$ ko'rinishida belgilanadi.

Agar vektorning boshi va oxiri bitta nuqtada bo'lsa, u nol vektor deyiladi. Nol vektor yo'nalishga ega emas, uning uzunligi esa nolga teng. Nol vektor $\bar{0}$ ko'rinishida yoziladi.





Ta'rif-2. Ikkita $\bar{a}=\overline{AB}$ va $\bar{b}=\overrightarrow{CD}$ vektorlardan $\bar{b}=\overrightarrow{CD}$ vektor boshini $\bar{a}=\overrightarrow{AB}$ vektor oxiriga qo'yilganda $\overrightarrow{AB}$ vektor boshidan $\overline{CD}$ vektor oxiriga yo'naltirilgan vektor, bu vektorlarning yig'indisi deyiladi va $\bar{a}+\bar{b}$ ko'rinishida yoziladi.

Yuqorida keltirilgan vektorlarni qo'shish qoidasi uchburchak qoidasi deyiladi.

Ta'rif-3. *Berilgan λ haqiqiy son va $\vec{a}$ vektorning ko'paytmasi shunday vektorki, uning uzunligi $|\lambda||\vec{a}|$ ga teng, yo'nalishi: $\lambda>0$ bo'lganda $\vec{a}$ vektor yo'nalishi bilan bir xil, $\lambda<0$ bo'lganda esa $\vec{a}$*

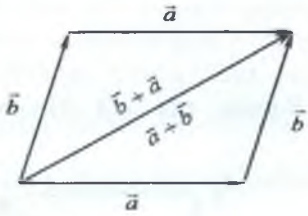
vektor yo'nalishiga qarama-qarshi bo'ladi. Ko'paytma $\lambda\vec{a}$ ko'rinishida yoziladi.

Biz V bilan hamma vektorlar to'plamini belgilaymiz. Bunda vektorlarimiz bir to'g'ri chiziqda, bir tekislikda yoki fazoda yotgan bo'lishi mumkin.

Vektorlarni qo'shish va skalyar songa ko'paytirish amallari quyidagi xossalarga ega:

1. $\forall\bar{a},\bar{b}\in V$ uchun; $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ – kommutativlik.
2. $\forall\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in V$ uchun; $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ - assosiativlik.
3. $\forall\bar{a}\in V$ uchun $\exists\,\bar{b}\in V$ $\bar{a}+\bar{b}=0, \bar{b}=-\bar{a}$
4. $\forall\bar{a}\in V$ uchun; $\bar{a}\cdot 1=\bar{a}$ - birlik element.
5. $\forall\bar{a},\bar{b}\in V$ hamda $\forall\lambda\in R$ uchun $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$
6. $\forall\lambda,\mu\in R$ va $\forall\bar{a}\in V$ uchun: $\bar{a}(\lambda+\mu)=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$
7. $\forall\lambda,\mu\in R$ va $\forall\bar{a}\in V$ uchun $\lambda(\mu\bar{a})=(\lambda\mu)\bar{a}$
8. $\forall\bar{a}\in V$ uchun $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$

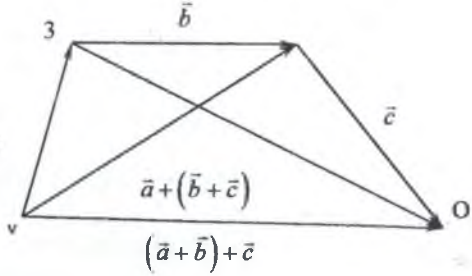
Birinchi xossani isbotlash uchun ixtiyoriy ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning boshini bitta O nuqtaga joylashtiramiz va



chizmadagi $OABC$ parallelogrammni hosil qilamiz. Bu parallelogrammdagi OAB uchburchakdan $\overline{OB}=\bar{a}+\bar{b}$ tenglik, OCB uchburchakdan esa $\overline{OB}=\bar{b}+\bar{a}$ tenglikni hosil qilamiz(Chizma-3).

Ikkinchi xossani isbotlash uchun $\bar{a}$ vektorning boshini O nuqtaga, $\bar{b}$ vektorning boshini $\bar{a}$ vektorning oxiriga joylashtiramiz va $\bar{c}$ vektorning boshini esa $\bar{b}$ vektorning oxiriga joylashtiramiz. Chizmadan quyidagi tengliklarni hosil qilamiz

$$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\overline{OC} \quad \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=\overline{OC}$$

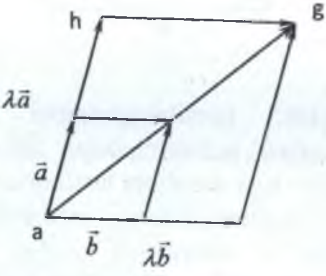


Chizma-7

Har bir $\overline{a}=\overline{AB}$ vektor uchun $\overline{b}=\overline{BA}$ vektor $\overline{a}$ vektorga qarama qarshi yo‘nalgan, uzunligi esa $\overline{a}$ ning uzunligiga teng vektordir. Vektorlarni qo‘shish qoidasiga ko‘ra $\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{O}$ tenglikni hosil qilamiz.

Beshinchi xossani isbotlash uchun $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlarning boshlarini bitta nuqtaga joylashtirib, ular yordamida quyidagi $ABCD$ parallelogrammni hosil qilamiz.

Berilgan λ son uchun $\lambda\overline{a}$ va $\lambda\overline{b}$ vektorlarga qurilgan $ABCD$ parallelogramm $ABCD$ parallelogrammga o‘xshashdir. Shuning uchun uning diagonali uzunligi $ABCD$ parallelogramm diagonali uzunligidan $|\lambda|$marta “kattadir”. Bundan esa $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$ tenglikni hosil qilamiz.



Oltinchi xossani isbotlash uchun $\lambda\mu>0$ va $\lambda\mu<0$ hollarni qaraymiz. Birinchi holda λ va μ sonlarining ishorasi bir xil bo‘ladi. Shuning uchun ularning ikkalasi ham yoki manfiy yoki musbat bo‘ladi. Biz ularning ikkalasi ham manfiy bo‘lgan holni qaraylik. Bu holda $\overline{a}(\lambda+\mu)$, $\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$ vektorlar $\overline{a}$ vektorga qarama qarshi yo‘nalgan bo‘ladi. Demak ular bir xil yo‘nalishga ega. Ularning uzunliklari esa

$|\lambda+\mu||\bar{a}|$ ga tengdir.Agar λ va μ sonlari musbat son bo‘lsa, yuqoridagi mulohaza takrorlanadi. λ va μ sonlarining ishoralari har xil bo‘lsa, biz yana ikkita holni qaraymiz:

$\lambda+\mu>0$ va $\lambda+\mu<0$. $\lambda+\mu>0$ bo‘lganda $\bar{a}(\lambda+\mu)$, $\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$, $\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$ vektorlar $\bar{a}$ vektor bilan bir xil yo‘nalishga ega. $\mu\bar{a}$ vektorning boshini $\lambda\bar{a}$ vektorning oxiriga joylashtirib, ularning uzunliklari ham tengligini ko‘ramiz.Chizmaga qarang. Qolgan hollar yuqoridagidek mulohazalar asosida tekshiriladi.

Ta'rif-4. *Bir to‘g‘ri chiziqqa parallel vektorlar kollinear vektorlar deyiladi.*

Vektorlar bir xil yo‘nalishga ega bo‘lsa $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$ ko‘rinishda, agar qarama qarshi yo‘nalishga ega bo‘lsa $\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$ ko‘rinishda belgilaymiz.

Tasdiq- 1.*Nol vektordan farqli $\bar{a},\bar{b}$ vektorlar kollinear bo‘lishi uchun $\lambda\in R$ son mavjud bo‘lib, $\bar{a}=\lambda\bar{b}$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.*

Isbot. Vektorlar uchun $\bar{a}=\lambda\bar{b}$ shart bajarilsa, $\bar{a},\bar{b}$ vektorlar kollinearligini isbotlash sodda bo‘lganiligi uchun uni isbotlashni o‘quvchilarga havola etamiz .Bu shartninig zarurligini ko‘rsatamiz. Agar $\bar{a},\bar{b}$ vektorlar kollinear bo‘lsa, ularni parallel ko‘chirish natijasida bitta to‘g‘ri chiziqqa joylashtirish mumkin. Shuning uchun ular l to‘g‘ri chiziqda yotadi va ularning boshi O nuqtada deb hisoblaymiz. Agar $\bar{a},\bar{b}$ vektorlar bir xil yo‘nalishga ega bo‘lsa, $\lambda=\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$ uchun $\bar{a}=\lambda\bar{b}$ tenglik bajariladi. Agar $\bar{a},\bar{b}$ vektorlar qarama qarshi yo‘nalishga ega bo‘lsa, $\lambda=\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$ uchun $\bar{a}=\lambda\bar{b}$ tenglik bajariladi.

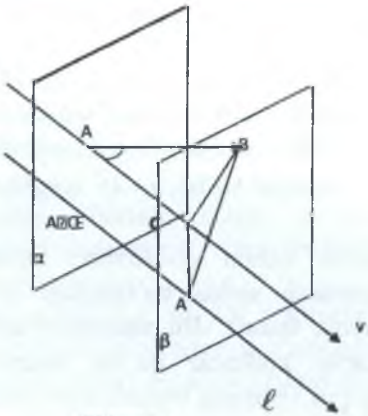
Ta'rif-5. *Vektor ($\bar{a}$- vektor) yotgan to‘gri chiziq α tekislikka parallel bo‘lsa, $\bar{a}$ vektor α tekislikka parallel deyiladi.*

Ta'rif-6. *Uchta $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlar bitta tekislikka parallel bo‘lsa,ular komplanar vektorlar deyiladi.*

Tabiiyki, agar vektorlar komplanar bo‘lsa, ularni parallel ko‘chirish natijasida bitta tekislikka joylashtirish mumkin.

Vektorning o'kka proeksiyasi vektorning yo'nalishiga qarab musbat, manfiy yoki nolga teng bo'lgan son bo'lib, $\bar{a}$ vektorning ℓ o'qqa proeksiyasi quyidagi qoida bo'yicha aniqlanadi:Chizma

Agar $\bar{a}=\overline{AB}$ bo'lsa, A va B nuqtalarning ℓ o'qdagi ortogonal proeksiyalarini mos ravishda A', B' bilan belgilaymiz. $A'B'$ kesmaning ℓ o'qdagi kattaligi $\bar{a}$ vektorning ℓ o'qdagi proeksiyasi deb ataladi.



Chizma-7

Proyeksiya uchun

$$pr_\ell \bar{a} = |\bar{a}| \cos\phi$$

tenglik o'rinli bo'lib,bu erda φ -berilgan $\bar{a}$ vektor va ℓ o'q orasidagi burchakdir.

Proyeksiyaning xossalari:

1. $pr_\ell \lambda \bar{a} = \lambda pr_\ell \bar{a}$, $\lambda \in R^1$

2. $pr_\ell (\bar{a} + \bar{b}) = pr_\ell \bar{a} + pr_\ell \bar{b}$

Isbot. 1. Birinchi $pr_\ell \lambda \bar{a} = \lambda pr_\ell \bar{a}$ tenglikni isbotlash uchun quyidagi hollarni qaraymiz:

a) $\lambda = 0$ bo'lsa $\lambda \bar{a} = \bar{0}$ tenglik o'rinli bo'ladi va.natijada $A' = B'$ munosabatdan

$$pr_l \lambda \bar{a} = 0 \text{ va } pr_l \lambda \bar{a} = \lambda pr_l \bar{a} = 0$$

tengliklar kelib chiqadi.

b) $\lambda>0$ bo'lsa, $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$ munosabatdan tenglik kelib chiqadi;bu erda φ va ψ mos ravishda $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning ℓ o'q bilan hosil qilgan burchaklaridir. Bu holda $|\lambda\bar{a}|=\lambda|\bar{a}|$ va demak $pr_\ell(\lambda\bar{a})=|\lambda\bar{a}|\cos\psi=\lambda pr_\ell\bar{a}$.

b) l<0 bo'lsa, l $\bar{a}$ va $\bar{a}$ vektorlar uchun $\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$ munosabat o'rinli bo'ladi. Shuning uchun $\psi=\varphi+\pi$ tenglikdan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$pr_\ell(\lambda\bar{a})=|\lambda\bar{a}|\cos(\phi+\pi)=-\lambda|\bar{a}|\cos(\phi+\pi)=\lambda pr_\ell\bar{a}.$$

2. $pr_\ell(\bar{a}+\bar{b})=pr_\ell\bar{a}+pr_\ell\bar{b}$ tenglikni isbotlashni keyinroqqa qoldirib, skalyar ko'paytmani o'rganishga o'tamiz.

Chiziqli erkli va chiziqli bog'lanishli vektorlar oilasi. Bizga $\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,...,\bar{a}_n\}$ vektorlar oilasi va n ta $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ sonlar berilgan bo'lsa, $\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+...+\lambda_n\bar{a}_n$ vektor $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_n$ vektorlarning chiziqli kombinasiyasi deb ataladi. Chiziqli kombinasiyada qatnashayotgan sonlarning birortasi noldan farqli bo'lsa, u notrivial chiziqli kombinasiya deb ataladi.

Ta'rif. *Berilgan $\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,...,\bar{a}_n\}$ vektorlar oilasi uchun kamida bittasi noldan farqli bo'lgan $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ sonlar mavjud bo'lib,*

$$\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+...+\lambda_n\bar{a}_n=\bar{0}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,...,\bar{a}_n\}$ vektorlar oilasi chiziqli bog'lanishli deyiladi.

Izoh. Vektorlar oilasi chiziqli bog'lanishli bo'lsa, uning birorta notrivial chiziqli kombinasiyasi nol vektor bo'ladi.

Teorema-1. *Ikkita vektordan iborat oila chiziqli bog'lanishli bo'lishi uchun bu oila vektorlarining kollinear bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Isbot. Oilaga tegishli ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar chiziqli bog'lanishli bo'lsa, kamida bittasi noldan farqli λ_1,λ_2 sonlari mavjud bo'lib, $\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}=\bar{0}$ tenglik bajariladi. Agar $\lambda_1\neq0$ bo'lsa, $\bar{a}=-(\lambda_1/\lambda_2)\bar{b}$ tenglikni hosil qilamiz. Bu esa birinchi tasdiqqa ko'ra $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning kollinear ekanligini ko'rsatadi.

Va aksincha, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar kollinear bo'lsin. Ularning boshlarini bitta nuqtaga joylashtirsak, ular bitta to'gri chiziqda yotadi.

Bu to‘gri chiziqda vektorlar boshi joylashgan nuqtani koordinata boshi sifatida olib, koordinatalar sistemasini kiritamiz. Vektorlarning oxirlarini A va B harflar bilan belgilaymiz: $\bar{a}=\overline{OA}$, $\bar{b}=\overline{OB}$. Vektorlardan bittasi, misol uchun $\bar{a}$ noldan farqli vektor bo‘lsin. Demak, $\bar{a}\neq\bar{0}$ va O nuqta AB kesmani biror λ nisbatda bo‘ladi: $BO/OA=\lambda$ yoki $BO=\lambda OA$

Endi $\bar{b}=-\lambda\bar{a}$ tenglikni ko‘rsatamiz. Agar $\bar{a},\bar{b}$vektorlar yo‘nalishi bir xil bo‘lsa, O nuqta AB kesmaga tegishli emas va l<0. Agar $\bar{a},\bar{b}$ vektorlar yo‘nalishi qarama qarshi bo‘lsa, l>0 bo‘ladi. Shuning uchun $\bar{b}$ va $-\lambda\bar{a}$ vektorlarning yo‘nalishlari bir xil. Ularning uzunliklari ham teng:

$$|\bar{b}| =| \overrightarrow{BO}| =| \lambda| |\overrightarrow{OA}| =| \lambda| |\bar{a}| =| -1\bar{a}| .$$

Demak, bu vektorlar tengdir. Endi $\bar{b}=-\lambda\bar{a}$ tenglikdan $-\lambda\bar{a}+\bar{b}=\bar{0}$ tenglik kelib chiqadi. Demak, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar chiziqli bog‘lanishli oilani tashkil qiladi.

Teorema-2.

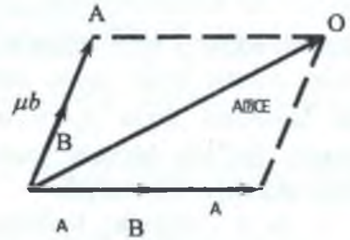
1) Vektorlar oilasiga nol vektor tegishli bo‘lsa, bu oila chiziqli bog‘lanishlidir.

2) Vektorlar oilasi birorta chiziqli bog‘lanishli vektorlar oilasini o‘z ichiga olsa, bu oila ham chiziqli bog‘lanishlidir.

Isbot.

1) Berilgan $\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,...,\bar{a}_n\}$ oilada $\bar{a}_i=\bar{0}$ bo‘lsa, $\lambda_i=0$, $\lambda_j=1$,$i\neq j$ sonlar uchun $\lambda_{i_1}\overline{a_{i_1}}+\lambda_{i_2}\bar{a}_{i_2}+\lambda_{i_3}\bar{a}_i+...+\lambda_{i_m}\bar{a}_{i_m}=\bar{0}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

2) Berilgan $\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,...,\bar{a}_n\}$ oilada bir nechta $\overline{a_{i_k}}$, $k=1,2,...m$, $m<n$, vektorlar chiziqli boglanishli oilani tashkil qilsa, ularning birorta notrivial chiziqli kombinasiyasi nol vektor bo‘ladi :



4-chizma

$$\lambda_{i_1}\overline{a_{i_1}}+\lambda_{i_2}\overline{a_{i_2}}+\lambda_{i_3}\overline{a_{i}}+\ldots+\lambda_{i_m}\overline{a_{i_m}}=\overline{0}$$

Biz agar $\lambda_j=\lambda_{j_k}$, $j=j_k$ va $\lambda_j=0, j\neq j_k$ tengliklar bilan n ta l_1, l_2, l_3,..., l_n sonlarni aniqlasak $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\lambda_3\overline{a}_3+\ldots+\lambda_n\overline{a}_n=\overline{0}$ tenglikni hosil qilamiz.

***Teorema-3**. Uchta vektordan iborat oila chiziqli bog'lanishli bo'lishi uchun ularning komplanar bo'lishi zarur va yetarlidir.*

***Isbot**.* Oilaga tegishli uchta $\overline{a},\overline{b}$ va $\overline{c}$ vektorlar chiziqli bog'lanishli bo'lsa, ularning komplanarligini isbotlaymiz. Chiziqli bog'lanishlilikning ta'rifiga asosan, kamida bittasi noldan farqli a,b,g sonlar uchun

$$a\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c}=\overline{0}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Aniqlik uchun g noldan farqli bo'lsin, unda avvalgi tenglikdan

$$\overline{c}=-\frac{\alpha}{\gamma}\overline{a}-\frac{\beta}{\gamma}\overline{b}$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikda λ=a/g, μ= b/g belgilashlarni kiritib,

$\overline{c}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}$ tenglikni hosil qilamiz. Agar $\overline{a},\overline{b}$ va $\overline{c}$ vektorlarning boshi bitta umumiy O nuqtaga joylashtirilgan bo'lsa, oxirgi tenglikdan $\overline{c}$ vektor λa va μb vektorlarga qurilgan parallelogarmm diagonaliga tengligi kelib chiqadi. Bu esa ular bitta tekislikda yotadi deganidir, demak, ular komplanar vektorlardir.

Va aksincha, $\overline{a},\overline{b}$ va $\overline{c}$ vektorlar komplanar bo'lsin. Ular chiziqli bog'liqligini isbotlaymiz.

Berilgan uchta vektorlar orasida kollinear vektorlar bo'lgan holni chiqarib tashlaymiz. Teorema-1 ga asosan, ushbu vektorlar jufti chiziqli bog'liq bo'lar edi va berilagan uchta vektor ham chiziqli bog'liqligi kelib chiqar edi. Shuning uchun $\overline{a},\overline{b}$ va $\overline{c}$ vektorlar orasida hech bir jufti kollinear bo'lmagan holni ko'rib chiqamiz (xususan, ular orasida nol vektor ham yo'q). Vektorlarni bitta tekislikka ko'chirib, ularning boshlarini *O* nuqtaga joylashtiramiz (Chizmaga qarang).

Keyin $\overline{c}$ vektorning *S* uchi orqali $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlarga parallel to'gri chiziqlar o'tkazamiz, vektor yotgan to'gri chiziqning $\overline{b}$ vektorga parallel to'gri chiziq bilan kesishish nuqtasini *A* deb belgilaymiz va $\overline{b}$ vektor yotgan to'gri chizikning $\overline{a}$ vektorga parallel to'gri chiziq bilan kesishish nuqtasini *V* deb belgilaymiz. (Ushbu nuqtalarning mavjudligi, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar kollinear emasligidan kelib chiqadi). Vektorlarni ko'shishning parallelogramm koidasiga ko'ra $\bar{c}$ vektor $\overline{OA}$ va $\overline{OB}$ vektorlar summasiga teng, ya'ni

$$\bar{c} = \overline{OA} + \overline{OB}.$$

$\overline{OA}$ vektor noldan farkli $\bar{a}$ vektorga kollinear (u bilan bir to'gri chiziqda yotuvchi), demak, shunday λ haqiiy son topiladiki,

$$\overline{OA} = \lambda\bar{a}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.Xuddi shunga o'xshash, $\overline{OB} = \lambda\bar{b}$ tenglik ham o'rinli. Bu tengliklardan

$$\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$$

tenglik kelib chiqadi. Oxirgi tenglikni $\lambda\bar{a} + \mu\bar{b} + (-1)\bar{c} = \bar{0}$ ko'rinishda yozib olish mumkin. Bu tenglikdagi λ, μ va –1 sonlarining kamida bittasi noldan farqli bo'lganligi sababli, oxirgi tenglik $\bar{a}, \bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlarning chiziqli bog'lanishligini ifodalaydi. Teorema isbotlandi.

Natija-1. *Agar $\bar{a}, \bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlar komplanar bo'lmasa, ular chiziqli erkli bo'ladilar.*

Natija-2. *Ixtiyoriy uchta komplanar bo'lmagan vektorlar orasida ikkita kollinear vektorlar bo'la olmaydi. Shuningdek ular orasida nol vektor ham bo'lmaydi.*

Masala yechish namunasi

1.1. ([1], 1.2.1 i)). $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ chiziqli yerkli vektorlar berilgan. $\vec{l} = 2\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}$, $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{n} = 2\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$ vektorlarni chiziqli yerklilikka tekshiring.

Yechilishi: Quyidagi vektor tenglikni qaraymiz:

$$\lambda\vec{l} + \mu\vec{m} + \nu\vec{n} = \vec{a}(-\lambda + 2\mu - \nu) + \vec{b}(2\lambda - \mu - \nu) + \vec{c}(-\lambda - \mu + 2\nu) = \vec{0}.$$

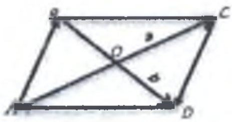
Bu yerda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ chiziqli yerkli bo'lgani uchun

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu - \nu = 0 \\ 2\lambda - \mu - \nu = 0 \\ -\lambda - \mu + 2\nu = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga yega bo‘lamiz va noma’lumlar uchun $\lambda = \mu = \nu$ munosabat o ‘rinli bo‘lib, ular noldan farqli bo‘la-oladi. Demak, $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ –chiziqli bog‘liq vektorlar.

1.2.([2],1159) $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{BD} = \boldsymbol{b}$ vektorlar $ABCD$ parallelogrammning diagonallari. Shu parallelogrammning tomonlari bo‘lgan $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ vektorlarni **a, b** vektorlar orqali ifodalang.

Yechilishi: Avvalo $ABCD$ parallelogrammni chizib olamiz. AC va BD diagonallar kesishish nuqtasini O bilan belgilaymiz.Bizga ma’lumki parallelogrammning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi, bundan quyidagi munosabatlarni hosil qilamiz:



$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

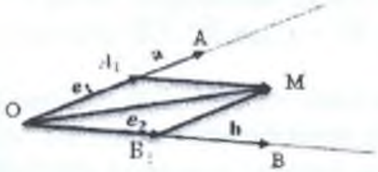
$$\Delta ABO \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \frac{a-b}{2},$$

$$\Delta BCO \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = \frac{a+b}{2},$$

$$\Delta CDO \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \frac{b-a}{2},\ \Delta DAO \Rightarrow \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OD} = -\frac{a+b}{2},$$

Javob: $\overrightarrow{AB} = \frac{a-b}{2}, \overrightarrow{BC} = \frac{a+b}{2},\ \overrightarrow{CD} = \frac{b-a}{2}, \overrightarrow{DA} = -\frac{a+b}{2}.$

1.3.([2],1169) O nuqtadan ikkita $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{BD} = \boldsymbol{b}$ vektor chiqadi. AOB burchakning bissektrisasi bo‘ylab yo‘nalgan biror $\overrightarrow{OM}$ vektor topilsin.



Yechilishi: AOB burchakni chizib olamiz. a va b vektorlar yordamida burchak uchidan chiqib, uning tomonlari bo‘ylab yo‘nalgan birlik vektorlarni topamiz. Buning uchun $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarni mos ravishda $\frac{1}{|a|}$ va $\frac{1}{|b|}$ sonlarga ko‘paytiramiz. Natijada $\boldsymbol{e_1} = \overline{OA_1} = \frac{a}{|a|}$ va $\boldsymbol{e_2} = \overline{OB_2} = \frac{b}{|b|}$ birlik vektorlarni hosil qilamiz. $\boldsymbol{e_1}$va $\boldsymbol{e_2}$ vektorlar orqali OA_1MB_1 rombni tuzib olamiz. Bizga ma’lumki, rombning dioganallari uning burchaklari bissektrisasi bo‘ladi. Demak OM nur AOB burchak bissektrisasi hamda

$\overrightarrow{OM} = e_1 + e_2 = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}$ AOB burchakning bissektrisasi bo‘ylab yo‘nalgan vektor. **Javob:** $\overrightarrow{OM} = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}$

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1.([2], 1161) [A] *ABC* uchburchakda *AD* mediana o‘tkazilgan. $\overrightarrow{AD}$ vektorni $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ vektorlar orqali ifodalang.

2.([2], 1163) [A] *YE, F* nuqtalar *ABCD* to‘rtburchak *AB, CD* tomonlarining o‘rtalari. $\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2}$ y ekanligi isbotlansin.

Bundan trapetsiyaning o‘rta chizig‘i haqidagi teoremani keltirib chiqaring.

3.([2], 1165) [A] Muntazam ko‘pburchak markazidan uning uchlariga qarab yo‘naltirilgan vektorlar yig‘indisi 0 ga tengligi isbotlansin.

4.([2], 1167) [A] Uchburchak tekisligida shunday nuqta topilsinki, shu nuqtadan uchburchak uchlariga yo‘nalgan vektorlar yig‘indisi nolga teng bo‘lsin.

1.5.([1], 1.2.1 ii)).$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ chiziqli yerkli vektorlar berilgan. $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ vektorni $\vec{l'} = \vec{b} - 2\vec{c} + \vec{a}$, $\vec{m'} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{n'} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$ vektorlar orqali chiziqli ifodalang.

5.([2], 1160)[U] *K, L* nuqtalar *ABCD* parallelogrammning *BC, CD* tomonlarining o‘rtalari. $\overrightarrow{AK} = \boldsymbol{k}, \overrightarrow{AL} = \boldsymbol{l}$ deb $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ vektorlarni **k** va **l** vektorlar orqali ifodalang.

6.([2],1162) [U] *ABC* uchburchakda *AD, BE, CF* medianalar o‘tkazilgan. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}$ vektorlar yig‘indisi topilsin.

7.([2],1164) [U] $\overrightarrow{AB}$ **=p,** $\overrightarrow{AF}$ **=q** vektorlar muntazam *ABCDEF* oltiburchakning ikkita qo‘shni tomonlari. Bu oltiburchakning tomonlari bo‘ylab qo‘yilgan $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ vektorlarni ***p, q*** vektorlar orqali ifodalang.

8.([2], 1166) [U] Tekislikning ixtiyoriy nuqtasidan chiqib, muntazam ko‘pburchak markazini tutashtiruvchi vektor shu nuqtadan chiquvchi va ko‘pburchak uchlarini tutashtiruvchi vektorlarning o‘rta arifmetigiga teng ekanligi isbotlansin.

9.([2], 1168) [U] 1167 masala parallelogramm uchun yechilsin.

Test namunalari

1. $\vec{a}\{2;-1;3\}, \vec{b}\{-6;3;-9\}$ vektorlar o'zaro qanday joylashgan?
a) $\vec{a}, \vec{b}$ – kollinear
b) $\vec{a} \perp \vec{b}$
c) $\vec{a}\ \vec{b} = 30^0$
d) $\vec{a}, \vec{b}$ – kollinear emas

2. $\vec{a} = \{2;-1;3\}$, $\vec{b} = \{-6;3;-9\}$ vektorlar qanday o'zaro munosabatda bo'ladi.
a) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ kolleniar bo'ladi.
b) $\vec{a} \perp \vec{b}$
c) $\vec{a} = \vec{b}$
d) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ kollinear emas.

3. $\vec{a}\{1;6;5\}, \vec{b}\{3;-2;4\}, \vec{c}\{3;-2;4\}$ vektorlar o'zaro qanday joylashgan?
a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar
b) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar kollinear
c) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ o'zaro ortogonal
d) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar emas

4. $P(5;1;3)$ va $Q(2;-1;4)$ nuqtalar berilgan. $\overline{PQ}$ vektorning koordinatalarini topilsin.
a) $\{-3;-2;1\}$
b) $\{1;1;0\}$
c) $\{0;4;0\}$
d) $\{0;0;4\}$

5. $a = \{3;4;-3\}$ vektorning boshi $A(1;2;5)$ nuqtada joylashgan, shu vektorning oxirining koordinatalarini toping.
a) (4 ; 6 ; 2);
b) (5 ; 7 ; 2);
c) (5 ; 7 ; 2);
d) (4 ; 0 ; 2);

6. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro qanday joylashgan bo'lsa, $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ tenglik o'rinli bo'ladi.
a) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
b) $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$

c) $\vec{a} \perp \vec{b}$

d) $\vec{a} = -\vec{b}$

7. $A = \{3;1;5\}$, $B = \{1;2;2\}$ bo‘lsa $\overline{AB}$ vektorning koordinatalarini toping.

a) $\{-2;1;-3\}$

b) $\{1;2;3\}$

c) $\{0;1;4\}$

d) $\{-1;2;3\}$

8. $\vec{a} = \{1\ ;3;-1\}$ va $\vec{b} = \{2;1;4\}$ vektorlar berilgan bo‘lsa, $2\vec{a} - 3\vec{b}$ vektorning koordinatlarini toping.

a) $\{-4;3;-14\}$

b) $\{4;-3;10\}$

c) $\{-3;10;4\}$

d) $\{1;2;-3\}$

9. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning kollinearlik shartini ko‘rsating.

a) $[\vec{a},\vec{b}] = 0$

b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

c) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$

d) $\vec{a} + \vec{b} = 0$

10. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning komplanarlik shartini ko‘rsating.

a) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$

b) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$

c) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$

d) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = 0$

2-§. Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko‘paytmalari, ularning geometrik ma’nosi, hisoblash formulalari

Reja:

1. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi
2. Vektor ko‘paytma tushunchasi
3. Vektorning vektor ko‘paytmasi xossalari
4. Vektorlarning aralash ko‘paytmasi
5. Aralash ko‘paytmaning xossalari

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi

Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb . $(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\phi$. ifodaga aytiladi. Bu yerda ϕ - $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchak. **[1, 1.4.1. definition, 24-27 bet]**

Skalyar ko'paytmaning ta'rifidan bevosita quyidagi fakt kelib chiqadi:

1-xossa. Ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lishi uchun ularning o'zaro perpendikular bo'lishi zarur va yetarlidir.

$$(\bar{a},\bar{b})=0 \Leftrightarrow \phi=\frac{\pi}{2},\ \bar{a}\perp\bar{b}$$

2-xossa. $(\bar{a},\bar{a})=|\bar{a}|^2$

3-xossa. Kommutativlik $(\bar{a},\bar{b})=(\bar{b},\bar{a})$.

4-xossa. $(\lambda\bar{a},\bar{b})=\lambda(\bar{a},\bar{b})$, $\lambda\in R$

5-xossa. $(\bar{a}+\bar{b},\bar{c})=(\bar{a},\bar{c})+(\bar{b},\bar{c})$

Beshinchi xossa isboti proeksiya ning ikkinchi xossasidan kelib chiqadi:

$$(\bar{a}+\bar{b},\bar{c})=|\bar{a}+\bar{b}||\bar{c}|\cos\varphi=np_{\bar{c}}(\bar{a}+\bar{b})|\bar{c}|=$$

$$np_l(\bar{a}+\bar{b})|\bar{c}|=np_l\bar{a}\cdot|\bar{c}|+np_l\bar{b}\cdot|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{c}|\cos\alpha+|\bar{b}|\cdot|\bar{c}|\cos\varphi$$

$\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlar komponentalari bilan berilgan bo'lsin, ya'ni

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\ \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k},\ \vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}.$$

Avvalo komponentalari bilan berilgan ikki vektorni skalyar ko'paytirish masalasini o'rganaylik:

$$(\vec{a},\vec{b})=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\ x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$$

Tenglikni o'ng tomonidagi qavslarni ko'phadni ko'phadga ko'paytirish qoidasiga asosan ko'paytiramiz:

$$(\vec{a},\vec{b})=(\vec{i},\vec{i})x_1x_1+(\vec{i},\vec{j})x_1x_2+(\vec{i},\vec{k})x_1x_3+(\vec{j},\vec{i})x_2x_1+(\vec{j},\vec{j})x_2x_2+(\vec{j},\vec{k})x_2x_3+$$

$$+(\vec{k},\vec{i})x_3x_1+(\vec{k},\vec{j})x_3x_2+(\vec{k},\vec{k})x_3x_3$$

ikki vektorni skalyar ko'paytirishning ta'rifiga asosan $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ birlik ortogonal vektorlar bo'lganidan

$$\cos(\vec{i},\vec{j})=\cos\frac{\pi}{2}=0,\ \cos(\vec{i},\vec{k})=0,\ \cos(\vec{j},\vec{k})=0$$

Shu sababli $(\vec{i},\vec{j})=(\vec{i},\vec{k})=(\vec{j},\vec{i})=(\vec{j},\vec{k})=(\vec{k},\vec{i})=(\vec{k},\vec{j})=0$ va $(\vec{i},\vec{i})=(\vec{j},\vec{j})=(\vec{k},\vec{k})=1$, demak $(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$. Bu tenglik quyidagi teoremani isbotidir

Teorema. Komponentalari bilan berilgan $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, va $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi bu vektorlarning bir ismli komponentalari ko‘paytmasining yig‘indisiga teng.

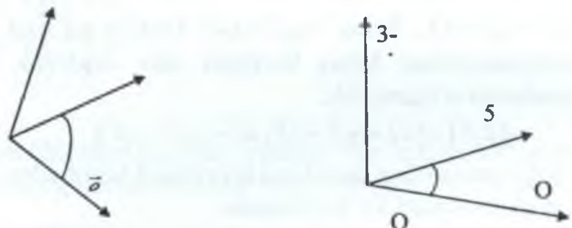
Agar $\vec{a}\perp\vec{b}$ bo‘lsa $(\vec{a},\vec{b})=0$ bo‘lganidan $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$, bu tenglik ikki vektorning perpendikularlik shartidir. Vektorlar orasidagi burchak esa quyidagicha bo‘ladi:

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}\quad \text{yoki}\quad \cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Vektor va aralash ko‘paytma

Ta’rif-1. *Tartiblangan $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ uchlikda $\bar{c}$ vektor oxiridan $\bar{a},\bar{b}$ vektorlar tekisligiga qaraganimizda $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ ga qisqa burilish yo‘nalishi soat mili yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘lsa, bu uchlik o‘ng uchlik deb ataladi. Agar bu yo‘nalish soat mili yo‘nalishi bilan ustma-ust tushsa, $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ uchlik chap uchlik deyiladi.*

Bizga $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ o‘ng (va $\{\bar{b},\bar{a},\bar{c}\}$ chap) uchlik berilgan bo‘lsin.



4-chizma

Ta’rif-2. Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi deb shunday vektorga aytiladiki, bu vektor $[\bar{a},\bar{b}]$ kabi belgilanadi va:

1) $[\bar{a},\bar{b}]$ ning uzunligi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga qurilgan

parallelogramm yuziga tengdir:

$$\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = \left|\bar{a}\right| \left|\bar{b}\right| \sin\varphi$$

2) $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ vektor $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga perpendikular bo‘lishi kerak:

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right]\perp\bar{a},\ \left[\bar{a},\bar{b}\right]\perp\bar{b};$$

3) $\bar{a}$, $\bar{b}$ vektorlar va vektor ko‘paytma $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ o‘ng uchlik hosil qiladi.

Vektor ko‘paytmaning xossalari:

1) $\left[\bar{a},\bar{b}\right]=-\left[\bar{b},\bar{a}\right]$;

2) $\left[\lambda\bar{a},\bar{b}\right]=\lambda\left[\bar{a},\bar{b}\right]=-\left[\lambda\bar{b},\bar{a}\right]$, $\lambda\in R$;.

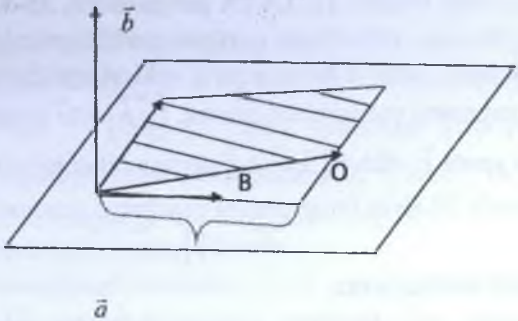
3) $\left[\bar{a}+\bar{b},\bar{c}\right]=\left[\bar{a},\bar{c}\right]+\left[\bar{b},\bar{c}\right]$;

4) $\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\bar{0} \Leftrightarrow \bar{a}\,//\,\bar{b}$.

Tasdiq-1 (Yordamchi fakt). Berilgan α tekislikda vektor va unga perpendikular birlik $\bar{e}$ vektor berilgan bo‘lsin. Agar $\bar{g}$ vektor α tekislikka *perpendikular* va $\bar{e},\bar{c},\bar{g}$ o‘ng uchlik bo‘lsa, α tekislikda yotuvchi har qanday $\bar{a}$ vektor uchun

$$\left[\bar{a},\bar{c}\right]=pr_{\bar{e}}\bar{a}\cdot\left|\bar{c}\right|\bar{g}$$

tenglik o‘rinlidir.



Isbot. 1) Vektorlar tengligini ko‘rsatish uchun ularning yo‘nalishlari bir xil va uzunliklari tengligini ko‘rsatamiz. Vektor ko‘paytmaning ta’rifiga ko‘ra, uning uzunligi $\bar{a}$ va $\bar{c}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuziga tengdir:

$\left|\left[\bar{a},\bar{c}\right]\right| = S$. Chap tomondagi vektorning uzunligi esa $\left|pr_{\bar{e}}\bar{a}\right| \left|\bar{c}\right|$ga tengdir. Agar parallelogrammning asosi sifatida $\bar{c}$ vektorni olsak, uning yuzasi $|c|\,h$ga tengdir. Bu yerda h balandlik bo'lib, $\left|pr_{\bar{e}}\bar{a}\right| = h$ tenglik o'rinlidir. Demak vektorlarning uzunligi tengdir. Endi ularning yo'nalishi bir xil ekanligini ko'rsatamiz. Agar $\bar{a},\bar{c},\bar{g}$ - o'ng uchlik bo'lsa, $\bar{g}$ va $\left[\bar{a},\bar{c}\right]$ vektorlar bir xil yo'nalishga ega. Bu holda $\bar{a}$ va $\bar{e}$ vektorlar $\left|\bar{c}\right|$ vektorning bir tomonida joylashgan va $np_{\bar{e}}\bar{a}>0$ bo'ladi. Agar $\bar{a},\bar{c},\bar{g}$- chap uchlik bo'lsa, $pr_{\bar{e}}\bar{a}<0$ va $pr_{\bar{e}}\bar{a}\left|\bar{c}\right|\bar{g}$ vektor $\bar{g}$ vektorga qarama qarshi yo'nalgandir. Demak, $pr_{\bar{e}}\bar{a}\left|\bar{c}\right|\bar{g}$ vektor yo'nalishi $\left[\bar{a},\bar{c}\right]$ vektor yo'nalishi bilan bir xil bo'ladi. Natijada

$$\left[\bar{a},\bar{c}\right] = pr_{\bar{e}}\bar{a}\cdot\left|\bar{c}\right|\bar{g}$$

tenglikni hosil qildik.

Ta'rif-3*. Uchta $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi deb, $\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right)$ miqdorga aytiladi va quyidagi ko'rinishda belgilanadi:*

$\overline{abc} = \left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right)$. **[1, 1.4.18. definition, 35-bet]**

Tasdiq-2*. Berilgan nokomplanar (chiziqli erkli) $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlar o'ng uchlikni tashkil qilsa, ularning aralash ko'paytmasi ularga qurilgan parallelepipedning hajmiga, aks holda esa hajmning manfiy ishora olinganiga teng*dir. **[1, 1.4.19. proposition, 35-37 bet]**

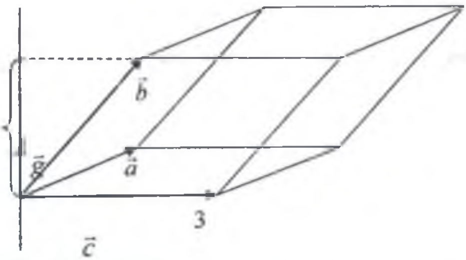
Isbot: Biz $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlarga qurilgan parallelipipedning hajmini V bilan belgilaymiz. Agar S bilan $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuzasini belgilasak, $\left[\bar{a},\bar{b}\right] = S\bar{e}$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $\bar{e}$ vektor $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ ko'paytma bilan bir xil yo'nalgan birlik vektordir. Skalyar ko'paytmani proeksiya yordamida yozsak,

$$\overline{abc} = S\left|\bar{e}\right|\, pr_{\bar{e}}\bar{c}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu yerda $pr_{\bar{e}}\bar{c}$ absolyut qiymati bo'yicha $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlarga qurilgan va asosi $\bar{a}$, $\bar{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammdan iborat parallelipipedning balandligiga tengdir. Agar $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ o'ng uchlikni tashkil qilsa, $pr_{\bar{e}}\bar{c} = h$, agar $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ chap uchlikni tashkil qilsa, $pr_{\bar{e}}\bar{c} = -h$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda h qaralayotgan parallelipipedning balandligidir. Shuning uchun $V(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = Sh$ formulani hisobga olsak,



biz bevosita tasdiq isbotini olamiz.

Endi biz vektor ko‘paytma xossalarini isbotlashga kirishamiz.

1-xossa isboti $\bar{a},\bar{b},[\bar{a},\bar{b}]$ va $\bar{a},\bar{b},[\bar{b},\bar{a}]$ uchliklarning oriyentatsiyalari har xil ekanligidan kelib chiqadi: birinchi uchlik o‘ng oriyentatsiyaga , ikkinchi uchlik chap oriyentatsiyaga egadir.

2-xossani isbotlash uchun ikkita holni ko‘ramiz $\lambda > 0$ va $\lambda < 0$.

Birinchi holda $\bar{a}$ va $\lambda\bar{a}$ vektorlar bir xil yo‘nalishga ega va shuning uchun $\bar{a},\bar{b},[\lambda\bar{a},\bar{b}]$ va $\bar{a},\bar{b},[\bar{a},\bar{b}]$ vektorlar bir xil oriyentatsiyaga ega. Demak $[\lambda\bar{a},\bar{b}]$ va $\lambda[\bar{a},\bar{b}]$ vektorlar uzunliklari teng va bir xil yo‘nalishga ega.

Ikkinchi holda $\bar{a}$ va $\lambda\bar{a}$ vektorlar yo‘nalishlari qarama-qarshi va $\bar{a},\bar{b},[\lambda\bar{a},\bar{b}]$ va $\bar{a},\bar{b},[\bar{a},\bar{b}]$ vektorlar uchliklari har xil oriyentatsiyaga ega bo‘ladi. Bundan esa $[\lambda\bar{a},\bar{b}]$ va $[\bar{a},\bar{b}]$ vektorlar qarama qarshi yo‘nalishga ega ekanligi kelib chiqadi.Demak, $[\lambda\bar{a},\bar{b}]$ va $\lambda[\bar{a},\bar{b}]$ vektorlar bir xil yo‘nalishga ega va uzunliklari tengdir.

3 –xossa isbotini keltiramiz.

a) $\bar{a},\bar{b},$ va $\bar{c}$ komplanar vektorlar , $\bar{e},\bar{c},\bar{g}$ - o‘ng uchlik bo‘lib, $\bar{e},\bar{g}$ vektorlar 1-tasdiq shartlarini qanoatlantiruvchi vektorlar bo‘lsa, ikkita vektor ko‘paytmani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$[\bar{a},\bar{c}] = pr_{\bar{e}}\,\bar{a}|\bar{c}|\bar{g} \text{ va } [\bar{b},\bar{c}] = pr_{\bar{e}}\,\bar{b}|\bar{c}|\bar{g}\ .$$

Endi proeksiya xossasidan foydalanib

$$\left[\overline{a}+\overline{b},\overline{c}\right]=pr_{\overline{e}}(\overline{a}+\overline{b})\left|\overline{c}\right|\overline{g}=pr_{\overline{e}}\,\overline{a}\left|\overline{c}\right|\overline{g}+pr_{\overline{e}}\,\overline{b}\left|\overline{c}\right|\overline{g}$$

tenglikni hosil qilamiz.

b) $\overline{a},\overline{b}$, va $\overline{c}$ komplanar komplanar vektorlar emas;

Bu holda $\left[\overline{a}+\overline{b},\overline{c}\right]$, $\left[\overline{a},\overline{c}\right]$ va $\left[\overline{b},\overline{c}\right]$ vektorlarning barchasi $\overline{c}$ vektorga perpendikular bo'lganligi uchun ular komplanar oilani tashkil etadi. Demak, ular chiziqli bog'lanishli bo'ladi, ya'ni kamida bittasi noldan farqli $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ sonlari mavjud bo'lib,

$$\lambda_1\left[\overline{a}+\overline{b},\overline{c}\right]+\lambda_2\left[\overline{a},\overline{c}\right]+\lambda_3\left[\overline{b},\overline{c}\right]=0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan

$$\lambda_1\left[\overline{a}+\overline{b},\overline{c}\right]=-\lambda_2\left[\overline{a},\overline{c}\right]-\lambda_3\left[\overline{b},\overline{c}\right]$$

tenglikni hosil qilib, uning ikkala tomonini $\overline{b}$ ga skalyar ko'paytiramiz va

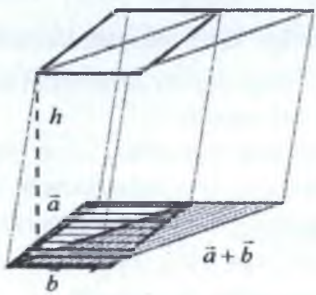
$$\lambda_1\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\overline{c}\,\overline{b}=-\lambda_2\,\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b}$$

tenglikni hosil qilamiz. Yuqoridagi aralash ko'paytma haqidagi tasdiqqa ko'ra

$$(\overline{a}+\overline{b})\,\overline{c}\,\overline{b} \text{ va } \overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b}$$

aralash ko'paytmalarning absolyut qiymatlari mos ravishda $V_{(a+b)cb}$, V_{acb} hajmlarga tengdir.

Bu parallelepipedlarning asoslari sifatida mos ravishda $\overline{a}+\overline{b},\overline{b}$ va $\overline{a},\overline{b}$, vektorlarga qurilgan parallelogrammlarni olsak, ularning balandligi tengligini ko'ramiz. Shuning uchun $V_{acb}=S_1h$ va $V_{(a+b)cb}=S_2h$ tengliklardan va ularning asoslari yuzalari ham tengligidan bu hajmlarning tengligi kelib chiqadi.



a

Endi $(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}\,\bar{b}$ va $\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b}$ aralash ko‘paytmalar bir xil ishoralarga ega bo‘lishi, $\bar{a}+\bar{b},\bar{c},\bar{b}$ uchlik oriyentatsiyasining $\bar{a},\bar{c},\bar{b}$ uchlik oriyentatsiyasi bilan ustma-ust tushishidan kelib chiqadi. Demak, $(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}\,\bar{b}=\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b}$ munosabat o‘rinli. Bundan esa, $\lambda_1=-\lambda_2$ munosobatni hosil qilamiz. Xuddi shunday usul bilan $\lambda_1=-\lambda_3$ tenglikni isbotlaymiz.

Demak,

$$\left[\bar{a}+\bar{b},\bar{c}\right]=\left[\bar{a},\bar{c}\right]+\left[\bar{b},\bar{c}\right]$$

tenglik o‘rinlidir.

4-xossaning isboti $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar parallel bo‘lganda, ular orasidagi burchakning sinusi nolga tengligidan kelib chiqadi.

Ushbu mavzu bo‘yicha amaliyot darsida quyidagi misol va masalalarni yechish tavsiya etiladi:

Skalyar ko‘paytmaga doir masalalar

1. Quyidagi hollarning har birida $\vec{a},\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi topilsin:

1. $|\vec{a}|=8, |\vec{b}|=5, (\vec{a}\wedge\vec{b})=60^0$;
2. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1, \quad (\vec{a}\wedge\vec{b})=135^0$;
3. $\vec{a}\perp\vec{b}$;
4. $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=6, \vec{a}\downarrow\downarrow\vec{b}$;
5. $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=1, \vec{a}\downarrow\uparrow\vec{b}$.

2. ABC uchburchak tomonlarining uzunliklari berilgan: $BC=5$, $CA=6$, $AB=7$. $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi topilsin.

3. $\vec{p}=\vec{a}(\vec{b},\vec{c})-\vec{b}(\vec{a},\vec{c})$ va $\vec{c}$ vektorlarning bir-biriga perpendikularligi isbotlansin.

4. $\vec{p}=\vec{c}+2\vec{t}$ va $\vec{a}=5\vec{c}-4\vec{t}$ vektorlar o‘zaro perpendikularligi ma’lum bo‘lsa, $\vec{c}$ va $\vec{t}$ birlik vektorlar orasidagi burchak topilsin.

5. Tomonlari birga teng bo‘lgan teng tomonli ABC uchburchak berilgan. $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ deb $(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})$ ifoda hisoblansin.

6. ABC uchburchakda AD, BE, CF medianalar o‘tkazilgan. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$ vektor hisoblansin.

7. To‘g‘ri burchakli ABC uchburchak AB gipotenuzasiga CH

perpendikular tushirilgan. $\overrightarrow{CH}$ vektor $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$ vektorlar orqali ifodalansin.

8. D nuqta ABC uchburchakning AB tomonini $\overline{AD}:\overline{DB}=\lambda$ nisbatda bo‘ladi. CD kesmaning uzunligi uchburchakning uchta tomoni va λ son orqali ifodalansin.

9. Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a},\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi hisoblansin:

1) $\vec{a}=\{5, 2\}$, $\vec{b}=\{-3, 6\}$; 2) $\vec{a}=\{6, -8\}$, $\vec{b}=\{12, 9\}$; 3) $\vec{a}=\{3, -5\}$, $\vec{b}=\{7, 4\}$.

10. Koordinatalari bilan berilgan quyidagi $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar orasidagi α burchak topilsin:

1. $\vec{a}=\{4, 3\}$, $\vec{b}=\{1, 7\}$;
2. $\vec{a}=\{6,-8\}$, $\vec{b}=\{12, 9\}$
3. $\vec{a}=\{2, 5\}$, $\vec{b}=\{3, -7\}$;
4. $\vec{a}=\{2,-6\}$, $\vec{b}=\{-3, 9\}$.

11. $\vec{a}=\{5, 2\}$, $\vec{b}=\{7, -3\}$ vektorlar berilgan. Bir vaqtning o‘zida ikkita $(\vec{a},\vec{x})=38$, $(\vec{b},\vec{x})=30$ tenglamani qanoatlantiradigan **x** vektor topilsin.

12. $\vec{a}=\{3, -2\}$, $\vec{b}=\{-5, 1\}$, $\vec{c}=\{0, 4\}$ vektorlar berilgan.

1. $3\vec{a}^2-4(\vec{a},\vec{b})+5\vec{b}^2-6(\vec{b},\vec{c})-2\vec{c}^2$;
2. $2(\vec{a},\vec{b})\vec{c}-3.\vec{b}^2\vec{a}+(\vec{a},\vec{c})\vec{b}$ topilsin.

13. $\{7, -4\}$ vektorning $\{-8, 6\}$ vektorga parallel bo‘lgandagi proyeksiyaning son qiymati topilsin.

14. Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi hisoblansin:

1. $\vec{a}=\{3, 5, 7\}$, $\vec{b}=\{-2, 6, 1\}$;
2. $\vec{a}=\{3, 0, -6\}$, $\vec{b}=\{2, -4, 0\}$;
3. $\vec{a}=\{2, 5, 1\}$, $\vec{b}=\{3, -2, 4\}$.

Vektor ko‘paytma va aralash ko‘paytmaga doir masalalar

1. $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarni bilgan holda: 1) $[(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})]$;2)$[\vec{a}(\vec{a}+\vec{b})]$; 3) $\left[\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}\right]$ vektorlar topilsin.

2. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2+\left(\vec{a},\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$ ekanligini ko'rsating.

3. Agar uchta $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar kollinear bo'lmasa, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{c},\vec{a}\right]$ tenglikdan $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ munosabatning kelib chiqishini ko'rsating va aksincha.

4. $\left[\vec{a},\vec{b}+\lambda\vec{a}\right]=\left[\vec{a}+\mu\vec{b},\vec{b}\right]=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ ekanligini ko'rsating.

5. Ushbu $\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{c},\vec{a}\right]=0$ munosabat o'rinli bo'lsa, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlarning komplanarligini ko'rsating.

6. Bir nuqtadan chiquvchi uchta komplanar $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar berilgan. Ularning oxirlaridan o'tgan tekislikning $\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{c},\vec{a}\right]$ vektorga perpendikularligini ko'rsatilsin.

7. $\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{b},\vec{c}\right],\left[\vec{c},\vec{a}\right]$ vektorlar komplanar bo'lsa, ularning kollinearligi ko'rsatilsin.

8. Quyidagi hollarning har birida $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ vektor ko'paytma topilsin:

1) $\vec{a}=\{2, 3, 1\}$, $\vec{b}=\{5, 6, 4\}$; 2) $\vec{a}=\{5, -2, 1\}$, $\vec{b}=\{4, 0, 6\}$;

3) $\vec{a}=\{-2, 6, -4\}$, $\vec{b}=\{3, -9, 6\}$.

9. $\vec{a}=\{8, 4, 1\}$, $\vec{b}=\{2, -2, 1\}$ vektorlardan yasalgan parallelogramm yuzi hisoblansin.

10. $\vec{a}=\{3, 1, 2\}$, $\vec{b}=\{2, 7, 4\}$ $\vec{c}=\{1, 2, 1\}$ vektorlar berilgan. 1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$;

2) $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}]$; 3) $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$ topilsin.

Mavzu bo'yicha test namunalari

1. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi quyidagicha bo'ladi ...

a) $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\phi$

b) $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\phi$

c) $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot tg\phi$

d) $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot ctg\phi$

2. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

a) $cos\phi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$

b) $\sin\phi = \frac{|\bar{a}||\bar{b}|}{\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}}$

c) $ctg\phi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}}$

d) $tg\phi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

3. Ixtiyoriy $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar uchun quyidagi munosabatlardan qaysi biri o'rinli.

a) $(ab)^2 \le a^2b^2$

b) $(ab)^2 > a^2b^2$

c) $(ab)^2 \ge a^2b^2$

d) $(ab)^2 < a^2b^2$

4. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi bo'lgan vektorning uzunligi quyidagiga teng.

a) $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\phi$

b) $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}||\vec{b}|tg\phi$

c) $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$

d) $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}||\vec{b}|ctg\phi$

5. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ortogonallik shartini ko'rsating.

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

b) $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right] = 0$

c) $\vec{a}+\vec{b} = 0$

d) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

6. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning kollinearlik shartini ko'rsating.

a) $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = 0$

b) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$

c) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$

d) $\vec{a}+\vec{b} = 0$

7. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning komplanarlik shartini ko'rsating.

a) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$
b) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$
c) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$
d) $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}=0$

8. $\vec{a}=4\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$ va $\vec{b}=3\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi quyidagiga teng.
a) $\vec{a}\vec{b}=-20$
b) $\vec{a}\vec{b}=20$
c) $\vec{a}\vec{b}=-50$
d) $\vec{a}\vec{b}=30$

9. $\vec{a}=\vec{i}$ va $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$ vektorlar orasidagi burchak quyidagiga teng.
a) $\phi=45^0$
b) $\phi=90^0$
c) $\phi=30^0$
d) $\phi=0^0$

10. $\vec{a}=\vec{j}+\vec{k}$ va $\vec{b}=\vec{k}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi quyidagiga teng.
a) $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\vec{i}$
b) $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\vec{j}$
c) $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\vec{k}$
d) $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\vec{j}+\vec{k}$

11. $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ va $\vec{b}=\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{k}$ vektorlarga yasalgan parallelopipedning hajmi quyidagiga teng .
a) $V=1$
b) $V=6$
c) $V=12$
d) $V=4$

12. $\vec{a}=\vec{j}+\vec{k}$ va $\vec{b}=\vec{j}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi quyidagiga teng
a) $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=-\vec{i}$
b) $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\vec{j}$
c) $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\vec{k}$

d) $[\vec{a}\vec{b}] = \vec{j} + \vec{k}$

13. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ va $\vec{b} = \vec{j}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi quyidagiga teng

a) $[\vec{a}\vec{b}] = \vec{k}$

b) $[\vec{a}\vec{b}] = \vec{j}$

c) $[\vec{a}\vec{b}] = -\vec{i}$

d) $[\vec{a}\vec{b}] = \vec{j} + \vec{k}$

14. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ va $\vec{b} = \vec{k}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi quyidagiga teng

a) $[\vec{a}\vec{b}] = \vec{j} + \vec{i}$

b) $[\vec{a}\vec{b}] = \vec{j}$

c) $[\vec{a}\vec{b}] = -\vec{i}$

d) $[\vec{a}\vec{b}] = \vec{j} + \vec{k}$

15. $\vec{a} = \vec{i}$ va $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ vektorlar orasidagi burchak quyidagiga teng.

a) $\phi = 45^0$

b) $\phi = 90^0$

c) $\phi = 30^0$

d) $\phi = 0^0$

16. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ va $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ vektorlar orasidagi burchak quyidagiga teng.

a) $\phi = 90^0$

b) $\phi = 45^0$

c) $\phi = 30^0$

d) $\phi = 0^0$

17. $\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$ va $\vec{b} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi quyidagiga teng.

a) $\vec{a}\vec{b} = -41$

b) $\vec{a}\vec{b} = 20$

c) $\vec{a}\vec{b} = -50$

d) $\vec{a}\vec{b} = 30$

3-§. To‘g‘ri chiziq va tekisliklarning turli tenglamalari

Reja:

1. To‘g‘ri chiziq va uning umumiy tenglamasi
2. Tekislik va uning tenglamalari
3. Fazoda to‘g‘ri chiziqning tenglamalari
4. Ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘gri chiziq tenglamasi
5. To‘g‘ri chiziq ikkita tekislikning umumiy qismidir

Affin koordinatalar sistemasida ixtiyoriy to‘g‘ri chiziq uchun shunday birinchi darajali

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

tenglama mavjudki, to‘g‘ri chiziqda yotgan har bir nuqtaning x, y koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiradi (A, B sonlari bir vaqtda 0 ga teng emas); shu bilan birga x, y o‘rniga (1) tenglamaga qaralayotgan to‘g‘ri chiziqdagi istalgan nuqta koordinatalarini qo‘yganda, bu tenglama ayniyatga aylanadi.

Aksincha: tekislikdagi ixtiyoriy affin koordinatalar sistemasida $A^2+B^2 \neq 0$ sharti bilan berilgan (1) ko‘rinishdagi har qanday tenglama uchun shunday to‘g‘ri chiziq mavjudki, bu to‘g‘ri chiziqda yotgan nuqtalarning koordinatalari bu tenglamani ayniyatga aylantiradi.

(1) ko‘rinishdagi tenglama to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

Agar to‘g‘ri chiziq o‘zining umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqqa nisbatan bir tomonda joylashgan nuqtalar uchun

$$Ax+By+C>0 \qquad (2)$$

va unga nisbatan ikkinchi tomonda yotgan nuqtalar uchun

$$Ax+By+C<0 \ (3)$$

tengsizliklar bajariladi.

Tekislikning tegishli qismlari musbat va manfiy yarim tekisliklar deb ataladi. Tenglamaning chap tomonini manfiy songa ko‘paytirish natijasida musbat yarim tekislik manfiy yarim tekislikka almashadi va aksincha. Ustma- ust tushmaydigan ikkita $M_1(x_1, y_2)$, $M_2(x_1, y_2)$

nuqtadan o'tadigan to'g'ri chiziq tenglamasi affin koordinatalar sistemasida quyidagi ko'rinishlardan biriga ega bo'ladi. [1]

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

yoki

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

$$x_2 - x_1 \neq 0 \text{ va } y_2 - y_1 \neq 0$$

shartlar bajarilganda:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (6)$$

yoki

$$x_2 - x_1 \neq 0$$

shartda

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1). \qquad (7)$$

To'g'ri chiziqda yotgan yoki unga parallel bo'lgan noldan farqli ixtiyoriy vektor to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi.

OY o'qiga parallel bo'lmagan yoki OY o'qi bilan ustma- ust tushmaydigan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deb songa aytiladi.

Ikkita $M_1(x_1, y_2)$, $M_2(x_1, y_2)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ formuladan topiladi.

Agar koordinatalar sistemasi to'g'ri burchakli bo'lsa, k soni to'g'ri chiziqning OX o'qi bilan tashkil qilgan burchak tangensiga teng.

(x_1, y_1) nuqtadan o'tib, burchak koeffitsiyenti k ga teng va OY o'qiga parallel bo'lmagan to'g'ri chiziq tenglamasi affin koordinatalar sistemasida

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (8)$$

ko'rinishda bo'ladi. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti k bo'lib, u OY o'qini $(0, b)$ nuqtada kesib o'tsa, to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$y = kx + b \qquad (9)$$

[1] [1, 48-49 бетлар]

To‘g‘ri chiziq koordinita o‘qlarini $(a,0)$ va $(0,b)$ nuqtalarda kesib o‘tsa, uning tenglamasi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ko‘rinishda yoziladi.

To‘g‘ri chiziq (x_1,y_1) nuqtadan o‘tib, $\{l,m\}$ vektorga parallel bo‘lsa, u holda uning tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ l & m \end{vmatrix} \quad (10)$$

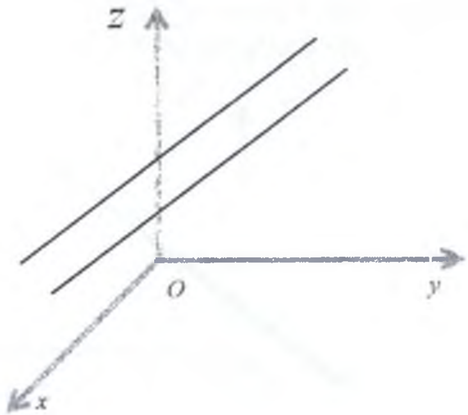
yoki

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m} \quad (11)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Ixtiyoriy (x_1,y_1) nuqta va noldan farqli $\vec{a}=(l,m)$ vektor berilgan bo‘lsa, (x_1,y_1) nuqtadan o‘tib (l,m) vektorga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi

$$\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \end{cases} \quad (12)$$



ko‘rinishda bo‘ladi.

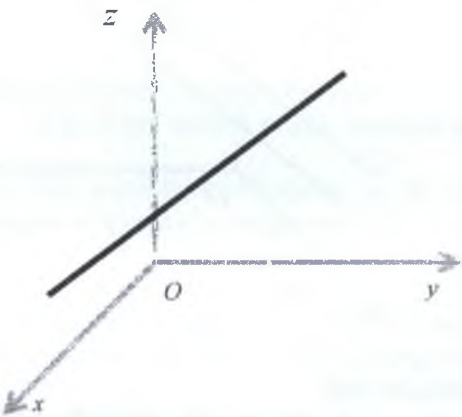
Bu yerda t son shu to‘g‘ri chiziqda yotgan M nuqtaning koordinatasi bo‘lib, bunda (x_1,y_1) nuqta koordinatalar boshi va $\{l,m\}$

vektor esa masshtab vektor sifatida olingan. $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ tenglamalar bilan berilgan ikki to‘g‘ri chiziqning kesishishi parallel bo‘lishi va ustma-ust tushishi uchun quyidagi jadvalda berilgan shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

To‘g‘ri chiziqlarning joylashuvi	shartlar
Kesishadi	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$
Parallel bo‘ladi	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ ammo, $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$ determinantlardan hech bo‘lmasa biri (yoki ikkalasi) noldan farqli
Ustma-ust tushadi	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0$

ikki to‘g‘ri chiziqning ustma-ust tushishining zarur va yetarli shartini quyidagicha ham ifodalash mumkin:

$$A_1x+B_1y+C_1=\lambda(A_2x+B_2y+C_2), \quad \lambda \neq 0$$



(bu tenglik x, y ga nisbatan ayniyatdir) $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ umumiy tenglamalar bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasining koordinatalari Kramer formulalaridan hisoblanadi:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \quad (13)$$

Affin sistemasida umumiy tenglamalari bilan berilgan

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \; A_2x+B_2y+C_2=0$$

to‘g‘ri chiziqlar kesishsa,

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0, \; \alpha^2+\beta^2>0$$

tenglamada x,y oldidagi koyeffitsiyentlar baravariga nolga aylanmaydi, va bu tenglama to‘g‘ri chiziqlarning kesishgan nuqtasidan o‘tgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini aniqlaydi. Aksincha

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \; A_2x+B_2y+C_2=0$$

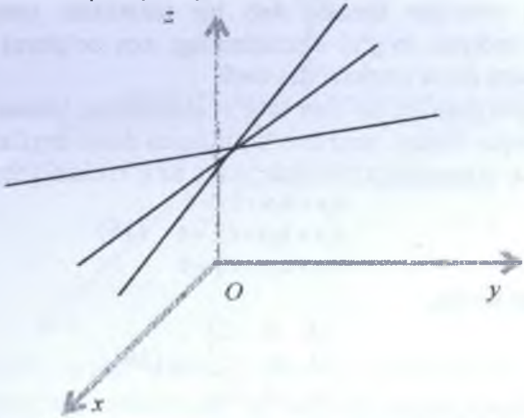
to‘g‘ri chiziqlarning kesishgan nuqtasidan o‘tgan har qanday to‘g‘ri chiziq

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0,$$

tenglama bilan ifodalanadi.

$A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa,

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0 \quad (14)$$



tenglama berilgan to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini aniqlaydi, bunda

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq-\frac{\alpha}{\beta}$$

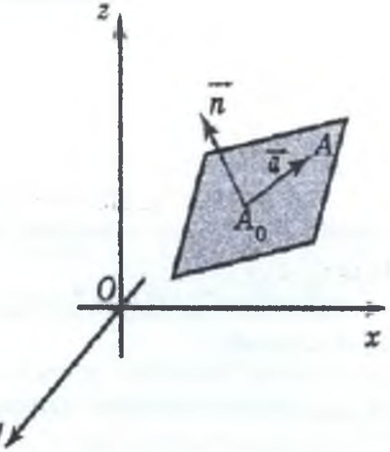
bajarilishi kerak va aksincha (bunda α,β sonlardan hech bo'lmasa bittasi noldan farqli)

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2=0$$

to'g'ri chiziqlarga parallel bo'lgan har qanday to'g'ri chiziq

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

tenglama bilan ifodalanadi.



To'g'ri chiziqlar dastasi deb bir tekislikda yotgan va bitta nuqtadan o'tadigan to'g'ri chiziqlarning xos to'plami deb ataladi. Umumiy nuqta dasta markazi deyiladi.

O'zaro parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar to'plami ham parallel to'g'ri chiziqlar dastasi yoki xos bo'lmagan dasta deyiladi. Agar affin koordinatalar sistemasiga nisbatan uchta to'g'ri chiziq tenglamalari

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1&=0\\ A_2x+B_2y+C_2&=0 \qquad (15)\\ A_3x+B_3y+C_3&=0 \end{aligned}$$

berilgan bo'lsa,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0 \quad (16)$$

shart to'g'ri chiziqlarning biror dastaga xususiy holda to'g'ri chiziq dastasiga tegishli bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shartdir.

(x_1, y_1) nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziqlar dastasi tenglamasi quyidagi ko'rinishda yozilishi mumkin:

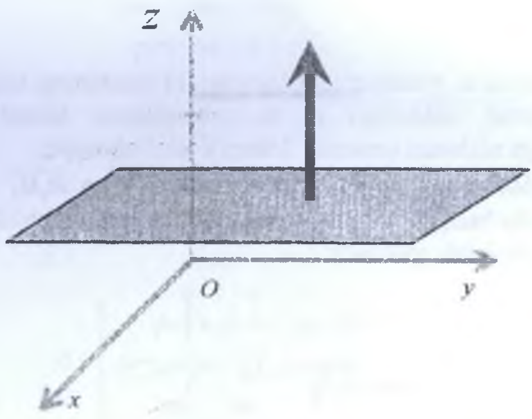
$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 \quad (17)$$

bu yerda A, B koeffitsiyentlar ixtiyoriy haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi va bir vaqtda nolga aylanmaydi.

Umumiy dekart koordinatalar sistemasida koordinatalari $(-B, A)$ vektor hamma vaqt $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi. To'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasida $\{A, B\}$ vektor $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'ladi.

Agar $\{A, B\}$ vektor to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasida joylashtirilsa, bu vektorning uchi $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziqqa nisbatan musbat yoki manfiy yarim tekislikda yotadi.

Har qanday tekislik umumiy dekart sistemasida *(x,y,z)* koordinatalariga nisbatan birinchi darajali, ya'ni ushbu $Ax+By+Cz+D=0$ ko'rinishli tenglama bilan ifodalanadi; bu tenglamadagi A,B,C koeffitsiyentlar bir vaqtda nolga teng emas deb faraz qilinadi. Aksincha, shu ko'rinishdagi har qanday tenglama tekislikni aniqlaydi. Bu tenglama tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi.



Agar tekislik o'zini umumiy $Ax+By+Cz+D=0$ tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, tekislikning bir tarafida yotgan barcha nuqtalar koordinalari uchun

$$Ax+By+Cz+D>0$$

va ikkinchi tarafda yotgan nuqtalar uchun esa:

$$Ax + By + Cz + D < 0$$

tengsizlik o‘rinli.

Mos ravishda yarim fazolarni «musbat» va «manfiy» yarim fazolar deb ataymiz. Tekislikning umumiy tenglamasini chap tomonini manfiy songa ko‘paytirganda, musbat yarim fazo manfiy yarim fazoga aylanadi va aksincha, berilgan *M(x,y,z)* nuqtadan o‘tadigan va berilgan ikkita nokollinear $a = \{l_1 m_1, n_1\}, b = \{l_2 m_2, n_2\}$ vektorlarga parallel bo‘lgan tekislik tenglamasi ushbu ko‘rinishda yoziladi:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

yoki $(r - r_1)ab = 0$ bu yerda $\boldsymbol{r_1}$- berilgan M_1 nuqtaning radius vektorini bildiradi. Bu tenglama quyidagi vektor-parametrik ko‘rinishga ega: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_1} + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$ [2]

yoki koordinatalarda

$$x = x_1 + ul_1 + vl_2$$
$$y = y_1 + um_1 + vm_2$$
$$z = z_1 + un_1 + vn_2$$

Bu yerda *u, v*-sonlar tekisligidagi *M* nuqtaning boshi M_0 nuqtada va masshtab vektorlari ***a***, ***b*** vektorlardan iborat koordinatalar sistemasiga nisbatan umumiy dekart koordinatasidir.

Ikki $M(x_1,y_1,z_1)$, $M(x_2,y_2,z_2)$ nuqtadan o‘tgan $\overline{M_1M_2}$ vektorga kollinear bo‘lmagan, ***a*** vektorga parallel bo‘lgan tekislik tenglamasi ushbu ko‘rinishda yoziladi:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

yoki $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1})(\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1})\boldsymbol{a} = 0$ $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$ –bu yerda berilgan M_1, M_2 nuqtalarning radius vektorlarini ifodalaydi. Bu tenglama esa parametrik shaklda:

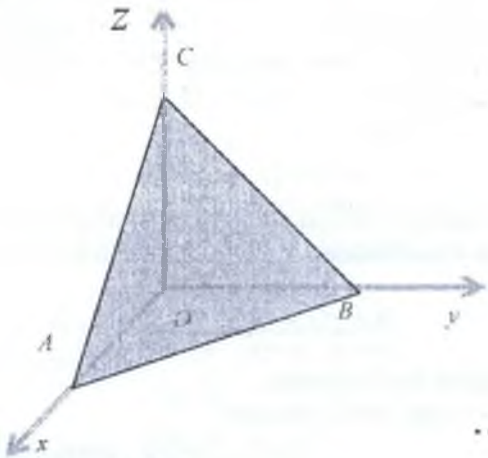
[2] [1, 2.2.3 proposition, 49 бет]

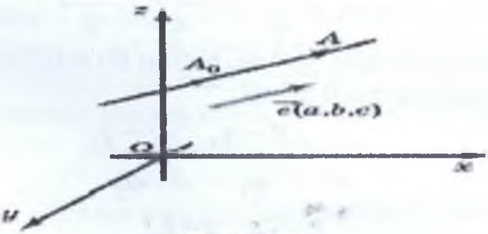
$$r = r_1 + ua + v(r_2 - r_1)$$

yoki koordinatalarda:

$$x = x_1 + ul + v(x_2 - x_1)$$
$$y = y_1 + um + v(y_2 - y_1)$$
$$z = z_1 + un + v(z_2 - z_1)$$

Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan fazoda bizga ℓ to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsa, $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ vektor ℓ to‘gri chiziqqa parallel vektorlardan bittasi bo‘lsin, $M(x_0, y_0, z_0)$ esa to‘gri chiziqqa tegishli birorta nuqta bo‘lsin.Berilgan $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning radius-vektorini r_0 bilan belgilasak, fazoda radius-vektori $\bar{r}$ bo‘lgan $M(x, y, z)$ nuqtaning to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lishi $\bar{r} - \bar{r_0}$ va $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ vektorlarning parallelligiga teng kuchlidir.





Bu shartni

$$\bar{r} = \bar{r_0} + \bar{a}t \qquad (1)$$

ko‘rinishda yozib,to‘g‘ri chiziqning vektor ko‘rinishdagi tenglamasini olamiz..Bu yerda t parametr $-\infty$dan ∞gacha o‘zgarganda $\bar{r}$ vektor oxiri ℓ to‘g‘ri chiziq nuqtalarini hosil qiladi.Yuqoridagi tenglamani koordinatalar orqali yozsak

$$x = x_0 + a_1 t \quad ,y = y_0 + a_2 t \quad ,z = z_0 + a_3 t$$

tengliklarni hosil qilamiz.Bu tenglamalar to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamalari deyiladi.

Agar bu tenglamalardan t ni yo‘qotsak

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \qquad (2)$$

tenglama kelib chiqadi. Bu tenglama ℓ to‘gri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

Fazoda radius-vektorlari $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ bo‘lgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa, bu nuqtalardan o‘tgan ℓ to‘g‘ri chiziq uchun $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$vektor yo‘naltiruvchi vektor bo‘ladi.Yuqoridagi (1) tenglamadagi vektor o‘rniga $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$vektorni qo‘ysak, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta sifatida $M_1(x_1, y_1, z_1)$nuqtani olsak, ℓ to‘g‘ri chiziqning vektor ko‘rinishdagi parametrik tenglamasini

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)t \qquad (3)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Agar (3) tenglamada t parametrni yo‘qotib uni koordinatalar orqali yozsak, $\ell$to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (4)$$

ko‘rinishda hosil qilamiz.

Bizga ℓ to‘gri chiziq kanonik

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

tenglama yordamida berilgan bo‘lsin.Bu tenglamadan quyidagi ikkita tenglamalarni hosil qilamiz

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2},$$

$$\frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \qquad (5)$$

Bu tenglamalarni

$$a_2(x-x_0)-a_1(y-y_0)=0,\ a_3(y-y_0)-a_2(z-z_0)=0$$

ko'rinishda yozsak ℓ to'gri chiziq

$$a_2(x-x_0)-a_1(y-y_0)=0$$

va

$$a_3(y-y_0)-a_2(z-z_0)=0$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi tekisliklarning kesishishidan iborat bo'lishini ko'ramiz. Agar bizga ikkita a va b tekisliklar

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

va

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

tenglamalar bilan berilib,

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi 2 ga teng bo'lsa, ular parallel bo'lmaydi va birorta ℓ to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi .Bu to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzish uchun uning birorta nuqtasini va bitta yo'naltiruvchi vektorini bilishimiz yetarli. Biz koordinatalari

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

sistemani qanoatlantiruvi $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtani topib, ℓ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\overline{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$ va $\overline{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$

vektorlarning vektor ko'paytmasini olamiz,chunki bu vektor ko'paytma ℓ to'g'ri chiziqqa paralleldir.

Masala yechish namunasi

Quyida to'g'ri chiziqqa doir masalalarni yechishning bir nechta usullarini misollarda ko'rsatamiz. To'g'ri chiziqqa oid masalalar yechishda bu misollar ancha yordam beradi.

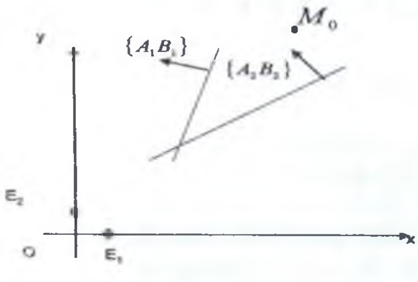
1-masala: Kesishuvchi ikkita $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ to'g'ri chiziq va ularda yotmaydigan $M_0(x_0,y_0)$ nuqta berilgan. Shu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklardan shu nuqtani o'z ichiga olgan burchak bissektrisasining tenglamasi tuzilsin.

Yechish. $M(x,y)$ nuqta izlanayotgan bissektrisada yotgan ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Bu nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqlargacha masofalar teng bo'lganligidan:

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

nuqtalar bitta burchakning ichki nuqtalari bo'lgani uchun $A_1x+B_1y+C_1$, $A_1x_0+B_1y_0+C_1$ sonlarining ishoralari bir xil. Xuddi shuningdek, $A_2x+B_2y+C_2$, $A_2x_0+B_2y_0+C_2$ sonlar ham bir xil ishorali, ya'ni

$$(A_1x+B_1y+C_1)(A_1x_0+B_1y_0+C_1)>0,$$
$$(A_2x+B_2y+C_2)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)>0$$



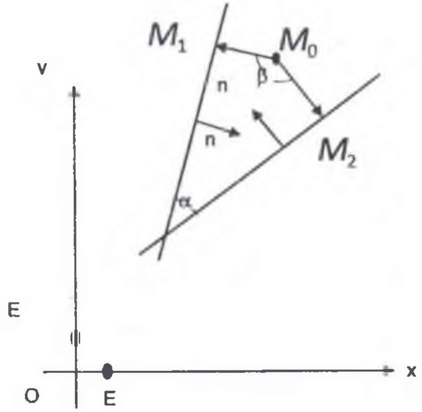
7-chizma

Agar $A_1x_0+B_1y_0+C_1$, $A_2x_0+B_2y_0+C_2$ sonlar bir xil ishorali bo'lsa, $A_1x+B_1y+C_1$, $A_2x+B_2y+C_2$ sonlar ham bir xil ishorali bo'ladi. Izlangan bissektrisa tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \quad (1)$$

Agar $A_1x_0+B_1y_0+C_1$, $A_1x_0+B_1y_0+C_1$ sonlar qarama-qarshi ishorali bo'lsa, (7-chizma)

$A_1x+B_1y+C_1$, $A_1x+B_1y+C_1$ sonlar ham qarama-qarshi ishorali bo'ladi; u holda izlangan bissektrisa tenglamasi quyidagicha bo'ladi:



8-chizma

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad (2)$$

Izoh: (1),(2) tenglamalarni faqatgina M_0 nuqtani o‘z ichiga olgan burchakka tegishli nuqtalar koordinatalari emas, balki shu burchakka vertikal bo‘lgan nuqtalarning koordinatalari ham qanoatlantiradi.

2-masala: Kesishadigan ikkita $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ to‘g‘ri chiziqlar va ularning hech birida ham yotmaydigan $M_0(x_0,y_0)$ nuqta berilgan. M_0 nuqtani o‘z ichiga olgan burchak kosinusi topilsin.

Yechish: M_0 nuqtadan berilgan M_0M_1, M_0M_2 to‘g‘ri chiziqlarga perpendikular tushiramiz. Izlangan burchakni α $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$ vektorlar orasidagi burchakni β bilan belgilasak, u holda: $\alpha=180^0-\beta$

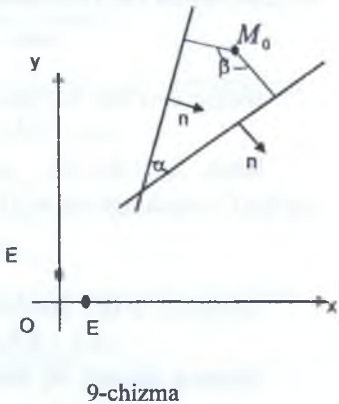
1) Agar $A_1x_0+B_1y_0+C_1$, $A_2x_0+B_2y_0+C_2$ sonlar musbat bo‘lsa, $\vec{n}_1=\{A_1,B_1\}$ $\vec{n}_2=\{A_2,B_2\}$ vektorlar yo’nalishlari $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$ vektorlarga qarama-qarshi bo‘ladi (8- chizma).

Shuning uchun $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$ vektorlar orasidagi β burchak $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ vektorlar orasidagi burchakka teng bo‘ladi, ya’ni

$$\cos\beta=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

va bundan,

$$\cos\alpha=-\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$



9-chizma

2) Agar $A_1x_0+B_1y_0+C_1$, $A_2x_0+B_2y_0+C_2$ sonlar manfiy bo‘lsa, u holda $\vec{n}_1=\{A_1,B_1\}$

$\vec{n}_2=\{A_2,B_2\}$ vektorlar yo'nalishlari $\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}$ vektorlarniki bilan bir xil bo'ladi. Demak , bu holda ham

$$\cos\alpha=-\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

3) $A_1x_0+B_1y_0+C_1>0, \quad A_2x_0+B_2y_0+C_2<0$ bo'lsin. U holda $\vec{n}_1=\{A_1,B_1\}$ va $\overrightarrow{M_0M_1}$ vektorlar qarama-qarshi yo'nalishga ega. $\vec{n}_2=\{A_2,B_2\}$ va $\overrightarrow{M_0M_2}$ vektorlar esa bir xil yo'nalishga ega bo'ladi. Bu holda $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ vektorlar orasidagi burchak $180^0-\beta=\alpha$ ga teng va

$$\cos\alpha=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

4) Agar $A_1x_0+B_1y_0+C_1<0, \quad A_2x_0+B_2y_0+C_2>0$ bo'lsa, (9-chizma):

$$\cos\alpha=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

3-masala. O'zaro perpendikular bo'lmagan kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq

$$A_1x+B_1y+C_1=0$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

va ularda yotmaydigan $M_0(x_0,y_0)$ nuqta berilgan. Bu nuqtaning shu to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan o'tkir burchakda yotishi uchun zaruriy va yetarli shartlar topilsin.

Yechish: Zaruriy shart. $M_0(x_0,y_0)$ nuqta to'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir α burchakda yotsin. Agar $A_1x_0+B_1y_0+C_1, \quad A_2x_0+B_2y_0+C_2$ sonlar bir xil ishorali bo'lsa, (2-masalaga qarang),

$$\cos\alpha=-\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \text{ teng,}$$

ammo α-o'tkir bo'lgani uchun, $A_1A_2+B_1B_2<0$ demak

$$(A_1A_2+B_1B_2)(A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)<0$$

lekin $A_1x_0+B_1y_0+C_1, \quad A_2x_0+B_2y_0+C_2$ sonlar qarama-qarshi ishorali bo'lsa (2-masalaga qarang):

$$\cos\alpha=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

ammo α - o'tkir burchak uchun $A_1A_2+B_1B_2>0$ demak,

$$(A_1A_2+B_1B_2)(A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)<0$$

shuning singari, M_0 nuqta o'tmas burchakda yotsa; u holda

$$(A_1A_2+B_1B_2)(A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)>0$$

tengsizlikni hosil qilamiz; bundan

$$(A_1A_2+B_1B_2)(A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)<0$$

shart M_0 nuqtaning o‘tkir burchakda yotishi uchun zarur va yetarliligi kelib chiqadi.

4-masala: O‘zaro perpendikular bo‘lmagan ikkita kesishuvchi $A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0$ to‘g‘ri chiziqlar berilgan.To‘g‘ri chiziqlar orasidagi o‘tkir burchak bissektrisasi tenglamasini tuzing.

Yechish. $M(x,y)$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi o‘tkir burchak bissektrisasida yotuvchi ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. U holda :

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A1^2+B1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^{\ 2}+B_2^{\ 2}}}$$

nuqta o‘tkir burchakda yotganligi sababli 3-masalaga asosan

$$(A_1A_2+B_1B_2)(A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)<0.$$

Agar $A_1A_2+B_1B_2>0$ bo‘lsa, $A_1x+B_1y+C_1$, $A_2x+B_2y+C_2$ sonlar qarama-qarshi ishorali bo‘lishi kerak. Demak o‘tkir burchak bissektrisasi tenglamasi

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^{\ 2}+B_1^{\ 2}}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^{\ 2}+B_2^{\ 2}}}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Lekin $A_1A_2+B_1B_2<0$ bo‘lsa, $A_1x+B_1y+C_1$, $A_2x+B_2y+C_2$ sonlar bir xil ishorali va ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi o‘tkir burchak bissektrisa tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^{\ 2}+B_1^{\ 2}}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^{\ 2}+B_2^{\ 2}}}$$

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Berilgan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik berilgan *CE* kesmaning kesishish shartini yozing.

2. Uchta tekislik

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, ularning bir nuqtada kesishish shartini toping.

3. Ikkita parallel bo‘lmagan to‘g‘ri chiziqlar

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, ular hosil qilgan burchakning bissektrisalari tenglamalarini tuzing.

4. Berilgan $M(x_0,y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va $y=kx+b$ to‘g‘ri chiziq bilan ma’lum φ burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

5. Uchta to‘g‘ri chiziq

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0$$

tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, ularning bir nuqtada kesishish shartini toping.

6. Ikkita parallel bo‘lmagan tekisliklar

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, ular hosil qilgan ikki yoqli burchaklar uchun bissektorial tekisliklar tenglamalarini tuzing.

7. Ikkita parallel bo‘lmagan tekisliklar $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, berilgan $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalarning tekisliklar hosil qilgan ikki yoqli burchaklarga nisbatan holatini aniqlang.

8. Ikkita parallel bo‘lmagan to‘g‘ri chiziqlar

$$A_1x+B_1y+C_1=0,,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$

tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, koordinata boshi va berilgan $M_1(x_1,y_1)$ nuqtaning to‘g‘ri chiziqlar hosil qilgan burchaklarga nisbatan holatini aniqlang.

9. Berilgan $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqtadan o‘tuvchi va $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziqning tenglamasini yozing.

10. To‘g‘ri chiziq $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq va unga tegishli bo‘lmagan $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

11. Affin koordinatalar sistemasini aniqlovchi bazis vektorlari orasidagi burchak $\frac{\pi}{3}$ ga teng bo‘lsa, $4x-5y+7=0$ va $9x+4y-11=0$ tenglamalar bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

12. Affin koordinatalar sistemasi o‘qlari orasidagi burchak $\frac{\pi}{3}$ ga teng bo‘lsa, uchlari $A(-1,2)$, $B(1,1)$, $C\left(2,-\frac{5}{2}\right)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning AB tomoni va C uchidan tushirilgan medianasi orasidagi burchakni toping.

13. Quyidagi uchta to‘g‘ri chiziq bitta nuqtada kesishadimi: $3x-y-1=0$,$2x-y+3=0$,$x-y+7=0$?

14. Ikkita to‘g‘ri chiziq $x-3y+10=0$, $2x+y-8=0$ tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqlar orasidagi qismi $P(0,1)$ nuqtada teng ikkiga bo‘linuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

15. Uchburchak tomonlari $2x-y+3=0$, $x+5y-7=0$ va $3x-2y+6=0$ tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, uning balandliklari tenglamalarini tuzing.

16. To‘rtburchak tomonlari $x-y=0$, $x+3y=0$, $x-y-4=0$, $3x+y-12=0$ tenglamalari bilan berilgan. To‘rtburchak diagonallari tenglamalarini tuzing.

17. Uchburchak tomonlari $2x-5y-2=0$, $x+y-8=0$, $5x-2y-5=0$ tenglamalar bilan berilgan. Uchburchak ichida shunday nuqta topingki, bu nuqta bilan uchburchak uchlarini tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziqlar uchburchakni teng yuzali uchburchaklarga ajratsin.

18. To‘g‘ri chiziq $12x+5y-52=0$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, unga parallel va undan 2 birlik masofada bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

19. Ikkita ayqash to‘g‘ri chiziq $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ va $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$ tenglamalar bilan berilgan. Ularning umumiy perpendikulyari tenglamasi tuzilsin.

20. To‘g‘ri chiziq $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, unga koordinata boshidan tushirilgan perpendikulyar tenglamasini tuzing.

Test namunalari

1. $xCos\alpha + ySin\alpha - p = 0$ tenglama to‘g‘ri chiziqning qanday ko‘rinishdagi tenglamasi, p - sonning geometrik ma’nosi qanday?

a) To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi, p - koordinata boshidan to‘g‘ri chiziqqacha masofa.

b) To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi, p - koordinata boshidan to‘g‘ri chiziqqacha masofa.

c) To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi, p - koordinata boshidan to‘g‘ri chiziqqacha masofa.

d) To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi, p - ixtiyoriy son.

2. $Ax + By = 0, A \neq 0, B \neq 0$ tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziq tekislikda koordinata sistemasiga nisbatan qanday joylashgan.

a) to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan o‘tadi.

b) to‘g‘ri chiziq O*u* o‘qiga parallel.

c) to‘g‘ri chiziq *Ox* o‘qiga parallel..

d) to‘g‘ri chiziq O*x* o‘qi bilan ustma-ust tushadi.

3. $Ax + By + C = 0$ ko‘rinishdagi tenglama qanday ataladi?

a) Tekislikda to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi.

b) To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi

c) To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi

d) To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi

4. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasida x va y o‘zgaruvchilar oldidagi koeffitsientlar qanday geometrik ma’noga ega.

a) To‘g‘ri chiziq normal vektorining koordinatlari

b) To‘g‘ri chiziq yo’naltiruvchi vektorining koordinatlari

c) To‘g‘ri chiziqning *Ox* va Oy o‘qlaridan ajratgan kesmalarining uzunliklari

d) Ixtiyoriy koordinatlar

5. $Ax + B = 0, B \neq 0$ tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziq tekislikda koordinata sistemasiga nisbatan qanday joylashgan.

a) to‘g‘ri chiziq *Oy* o‘qiga parallel.

b) to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan o‘tadi.
c) to‘g‘ri chiziq *Ox* o‘qi bilan usma-ust tushadi.
d) to‘g‘ri chiziq *Oy* o‘qi bilan usma-ust tushadi.

6. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ tenglama to‘g‘ri chiziqning qanday ko‘rinishdagi tenglamasi deyiladi ?
a) To‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi
b) To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi
c) Kanonik ko‘rinishdagi tenglamasi
d) Burchak koefitsiyentli tenglamasi.

7. $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}$ tenglama to‘g‘ri chiziqning qanday ko‘rinishdagi tenglamasi deyiladi, *m,n* sonlar qanday geometrik ma’noga ega.
a) To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi, *m va n* yo‘naltiruvchi vektorning koordinatalari
b) To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi, *m va n* normal vektorining koordinatalari.
c) To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi , *m va n* – haqiqiy sonlar.
d) To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi, *m va n* haqiqiy sonlar.

8. $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ ko‘rinishdagi tenglama qanday ataladi?
a) Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.
b) To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi.
c) To‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi.
d) To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi.

9. To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi … ko‘rinishga ega.
a) $\begin{cases} x=x_1+\lambda m \\ y=y_1+\lambda n \end{cases}$
b) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$
c) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b_1}=1$
d) $y=kx+b$

10. $y=kx+b$ ko‘rinishdagi tenglama to‘g‘ri chiziqning qanday ko‘rinishdagi tenglamasi va k,b sonlar qanday geometrik ma’noga ega?

a) To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi, k son to‘g‘ri chiziqning Ox o‘qi bilan tashkil qilgan burchak tangensiga teng, b - son to‘g‘ri chiziqning Oy o‘qidan ajratgan kesmasi.

b) To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi, k son to‘g‘ri chiziqning Ox o‘qi bilan tashkil qilgan burchak kotangensiga teng, b - son to‘g‘ri chiziqning Ox o‘qidan ajratgan kesmasi.

c) To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi, $k = Cos\varphi$ b - ixtiyoriy son.

d) To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi, $k = ctg\varphi$, b -to‘g‘ri chiziqning Oy o‘qidan ajratgan kesmasining uzunligi.

4-§. To‘g‘ri chiziq va tekisliklar o‘zaro vaziyatini aniqlash, nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha, nuqtadan tekislikkacha, to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofalarni aniqlash

Reja:

1. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak
2. To‘g‘ri chiziq va tekislikni kesishuvi
3. Ikki tekislikning o‘zaro vaziyati
4. To‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro vaziyati
5. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa
6. Ikkita ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa
7. Fazoda nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani hisoblash

Fazoda ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak sifatida fazoning istalgan nuqtasidan shu to‘g‘ri chiziqlarga parallel o‘tkazilgan ikki to‘g‘ri chiziqning tashkil qilgan burchaklaridan ixtiyoriy birini olamiz. Bu burchak 0 bilan π orasida o‘zgaradi. Agar L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar o‘zining kanonik tenlamalari bilan berilgan bo‘lsa, ravshanki, ular orasidagi burchak ularning yo‘naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka teng.

$$L_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \text{ bo‘lsa}$$

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{S}_1,\bar{S}_2)}{|\bar{S}_1||\bar{S}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \quad (1)$$

Agar $L_1 \| L_2$ bo‘lsa $\bar{S}_1 \| \bar{S}_2$ bo‘lib

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \quad (2)$$

(2) ikki to‘g‘ri chiziqning parallelik shartidir. Agar $L_1 \perp L_2$ bo‘lsa, $\bar{S}_1 \perp \bar{S}_2$ bo‘lib, $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$ (3).

(3) ikki to‘g‘ri chiziq perpendikulyarlik shartidir.

Endi to‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni topish masalasini qaraylik: to‘g‘ri chiziq bilan uning tekislikdagi proyeksiyasi orasidagi burchakka to‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak deb aytiladi.

To‘g‘ri chiziq $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ tenglama bilan tekislik esa $Ax+By+Cz+D=0$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin. To‘g‘ri chiziq bilan uning proyeksiyasi orasidagi burchak φ o‘rniga, tekislikning normal vektori $\bar{n}$ bilan to‘g‘ri chiziqni yo‘naltiruvchi $\bar{S}$ vektori orasidagi $\frac{\pi}{2}-\varphi$ burchakni topish qulay. Haqiqatan $\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi$ bo‘lganidan

$$\sin\varphi=\frac{(\bar{n},\bar{S})}{|\bar{n}||\bar{S}|}=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \quad (4)$$

Agar L II Q bo‘lsa, $\bar{n}\perp\bar{S}$ bo‘lib $Am+Bn+Cp=0$ (5)

(5) to‘g‘ri chiziq va tekislikning parallelik shartidir. Agar L II Q bo‘lsa $\bar{n} // \bar{S}$ bo‘lib $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ (6).

(6) to‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik shartidir.

L to‘g‘ri chiziq $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ (1) kanonik tenglamasi bilan, *Q* tekislik $Ax+By+Cz+D=0$ (2) umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsin va ular o‘zaro parallel bo‘lsin. L to‘g‘ri chiziq bilan *Q* tekislikni kesishgan nuqtasini topamiz, ya’ni (1) va (2) tenglamalar sistemasini yechimini topamiz: buning uchun (1) proporsiyaning umumiy qiymatini λ bilan belgilaymiz va bu tenglamalardan *x, y, z* larni topamiz, ya’ni

$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}=\lambda$, $\frac{x-x_1}{m}=\lambda$, $\frac{y-y_1}{n}=\lambda$, $\frac{z-z_1}{p}=\lambda$ bulardan

$$x=m\lambda+x_1,\ y=n\lambda+y_1,\ z=p\lambda+z_1 \quad (3)$$

(2) dagi x, y, z larning qiymatlarini (2) ga qo‘yamiz:

$$A(m\lambda + x_1) + B(n\lambda + y_1) + C(p\lambda + z_1) + D = 0 \text{ yoki}$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + \lambda(A_m + B_n + C_p) = 0 \quad (4)$$

L to'g'ri chiziq va Q tekislik parallel bo'lmaganidan $Am + Bn + Cp \neq 0$ (4) dan λ ni topamiz:

$$\lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A_m + B_n + C_p} \quad (5)$$

(5) ni (3) ga qo'ysak $M_0(x_0; y_0; z_0)$ to'g'ri chiziq bilan tekislikni kesishgan nuqtasi hosil bo'ladi. Agar $Am + Bn + Cp = 0$ bo'lib, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq bilan tekislik kesishmaydi. Agar $Am + Bn + Cp = 0$ bo'lib, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ bo'lsa, bu vaqtda L to'g'ri chiziq ustida yotadi va ular cheksiz ko'p nuqtada kesishadi.

Masala: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$ to'g'ri chiziq bilan $x + 2y - 2z - 3 = 0$ tekislikning kesishish nuqtasi topilsin.

Yechish: $Am + Bn + Cp = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = 2 + 6 - 4 = 4 \neq 0$, demak, berilgan to'g'ri chiziq va tekislik parallel emas. Endi to'g'ri chiziq tenglamasini parametrik shaklga keltiramiz:

$$\frac{x-1}{2} = \lambda; \frac{y}{3} = \lambda; \frac{z-1}{2} = \lambda, \quad x = 2\lambda + 1, \quad y = 3\lambda, \quad z = 2\lambda + 1$$

x, y, z larni tekislikning umumiy tenglamasiga qo'yamiz:

$$2\lambda + 1 + 2 \cdot 3\lambda - 2(2\lambda + 1) - 3 = 0$$

$$2\lambda + 1 + 6\lambda - 4\lambda - 2 - 3 = 0; 4\lambda - 4 = 0, \lambda = 1$$

$$x_0 = 2\lambda + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3; y_0 = 3 \cdot 1 = 3; z_0 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

Demak berilgan to'g'ri chiziq va tekislikni kesishish nuqtasi $M_0(3;3;3)$ ekan.

[3]Bizga dekart koordinatalari kiritilgan fazoda α va β ikkita tekisliklar mos ravishda quyidagi tenglamalar bilan berilgan bo'lsin:

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Bu tekisliklar orasidagi burchak ularning normal vektorlari orasidagi burchakka tengdir. Ularning $\overline{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\overline{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$ normal vektorlari orasidagi burchakning kosinusini

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

[3] [1, 58-59-бетлар]

formula bo'yicha hisoblashni bilamiz. Tekisliklarning parallellik sharti ularning vektorlari paralleligiga teng kuchlidir. Shuning uchun bu shart

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

ko'rinishda yoziladi. Tekisliklarning perpendikulyarlik sharti ularning normal vektorlari perpendikulyarligiga teng kuchli va

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

ko'rinishda yoziladi.

Bizga ikkita ℓ_1,ℓ_2 to'g'ri chiziqlar mos ravishda

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3} \text{ va } \frac{x-x_2}{b_1}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{b_3}$$

kanonik tenglamalar yordamida berilgan bo'lsin.Bu tenglamalarni vektor ko'rinishda yozsak, ular $\bar{r}=\bar{r}_1+\bar{a}t$ va $\bar{r}=\bar{r}_2+\bar{a}s$ ko'rinishlarga keladi.

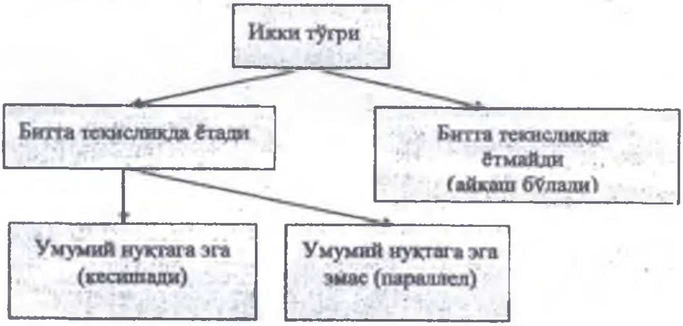
Parallellik. Bu to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotib kesishmasa, ular parallel to'g'ri chiziqlar deyiladi.

Agar biz uchta $\bar{r}_2-\bar{r}_1=\overline{M_1M_2}$, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning bir tekislikda yotishi shartini yozsak

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

tenglikni hosil qilamiz.

Фазода иккита тўғри чизиқнинг ўзаро вазияти



Ayqash to'g'ri chiziqlar. To'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotmasa, ular ayqash to'g'ri chiziqlar deyiladi. Bu holda $\overline{r_2} - \overline{r_1} = \overline{M_1 M_2}$, $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar komplanar bo'lmaganligi uchun

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. To'g'ri chiziqlar parallel bo'lmaganligi uchun $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar o'zaro kollinear emas.

Agar to'g'ri chiziqlar kesishsa, $\overline{r_2} - \overline{r_1} = \overline{M_1 M_2}$, $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar komplanar bo'ladi, $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar esa kollinear emas.

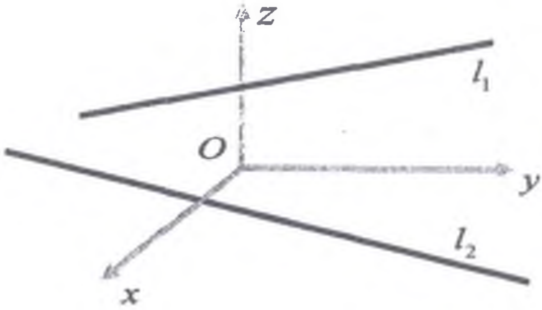
Bizga ℓ to'g'ri chiziq

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

tenglama bilan, tekislik

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, ularning tenglamalari bo'yicha o'zaro vaziyatini aniqlamoqchimiz.



Tekislik va to'g'ri chiziq orasidagi burchak to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori va tekislik normal vektori orasidagi burchakning $\frac{\pi}{2}$ gacha bo'lgan to'ldiruvchisiga tengdir, ya'ni agar $\bar{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ va $\bar{n}=\{A,B,C\}$ vektorlar orasidagi burchak ψ ga teng bo'lsa, tekislik va to'g'ri chiziq orasidagi φ burchak $\frac{\pi}{2}-\psi$ ga tengdir. Bu burchak

$$\sin\varphi=\frac{Aa_1+Ba_2+Ca_3}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

formula bo'yicha hisoblanadi. Tekislik va to'g'ri chiziqning paralellik sharti

$$Aa_1+Ba_2+Ca_3=0$$

tenglikga, perpendikulyarlik sharti esa

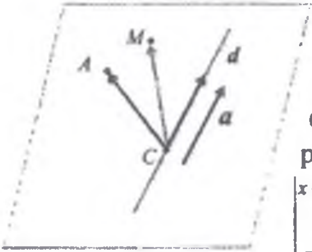
$$\frac{A}{a_1}=\frac{B}{a_2}=\frac{C}{a_3}$$

munosabatga teng kuchlidir.

Agar $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ **va** $Aa_1+Ba_2+Ca_3=0$ **tengliklar bajarilsa,** ℓ **to'g'ri chiziq** α **tekislikda yotadi.**

Masala yechish namunasi

1.([1], p68, 2.3.8.Ex) Berilgan $A(-1,1,2)$ nuqtadan va $d: \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-1}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.



Yechish: d to'g'ri chiziqdan $C(-2,3,-1)$ nuqtani olamiz. $\vec{a}=\{1,2,-1\}$ - d to'g'ri chiziqni yo'naltiruvchi vektori. $\overline{AC}=\{-1,2,-3\}$. Qidirilayotgan tekislik $\vec{a}$, $\overline{AC}$ vektorlarga parallel va $A(-1,1,2)$ nuqtadan o'tadi:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x-y-z+4=0$$

Javob: $x-y-z+4=0$

2.3.1.([1],p72) ΔABC uchburchakning A va B uchlari mos ravishda Ox hamda Oy o'qlarining $2x-y-2=0$ to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalari bo'lib, $tg\hat{A}=\frac{1}{2}, tg\hat{B}=\frac{4}{3}$ bo'lsa, AC hamda BC tomonlar tenglamalarini tuzing.

2.3.2.([1],p72) Tekislikda $4x-6y-3=0, 2x-3y+7=0$ to'g'ri chiziqlar parallel ekanligi ko'rsatilsin hamda bu to'g'ri chiziqlarga parallel va ulardan teng uzoqlikda joylashgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

2.3.8.([1],p72) $x+5y+z=0, x-z+4=0$ tekisliklarning kesishish to'g'ri chizig'idan o'tuvchi hamda $x-4y-8z+12=0$ tekilik bilan $\frac{\pi}{6}$ burchak ostida kesishuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

2.3.9.([1],p72) Berilgan $P(4,3,-2)$ nuqtadan $3x-y+5z+1=0$ tekislikkacha masofani toping.

2.3.11.([1],p72) $d: \begin{cases} 3x+2y-z+5=0 \\ x-y-z+1=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqning koordinata tekisliklariga proyeksiyalari tenglamalarini toping(x, y, z —fazoning ortogonal koordinatalari).

2.3.13.([1],p72) $A(1,-1,1), B(1,1,0), C(0,2,-1)$ nuqtalar berilgan (ortogonal koordinatalar). A nuqtadan BC to'g'ri chiziqqacha masofani toping.

2.3.15.([1],p72) $A(2,3,1)$ nuqtadan $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar tushiring.

2.3.17.([1],p72) Berilgan $\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1}$, $\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{1}$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani toping va bu to‘g‘ri chiziqlarga umumiy perpendikulyar tenglamasini tuzing.

1([2]). Berilgan $(3,1,-2)$ nuqtadan va

$$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$$

to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

2([2]). $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$ to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi va $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{2}$ to‘g‘ri chiziqqa parallel tekislik tenglamasini tuzing.

3([2]). Berilgan $A(4,-3,1)$ nuqtadan $x+2y-z-3=0$ tekislikkacha bo‘lgan masofani toping.

4([2]). Ushbu $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ va $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

5([2]). To‘rtburchak tomonlari $x+3y=0$, $x-y=0$, $x-y-4=0$, $3x+y-12=0$ tenglamalar bilan berilgan. To‘rtburchak burchaklari bissektrisalarining tenglamalarini tuzing.

6([2]). To‘g‘ri chiziq $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, unga $A(4,0,-1)$ nuqtadan tushirilgan perpendikulyar tenglamasini tuzing.

7([2]). Tomonlari $18x+6y-17=0$, $14x-7y+15=0$, $5x+10y-9=0$ tenglamalar bilan berilgan uchburchakning burchaklarini toping.

8([2]). To‘rtburchak tomonlari

$$x+3y=0,\ x-y=0,\ x-y-4=0,\ 3x+y-12=0$$

tenglamalar bilan berilgan. To‘rtburchakning dioganallari tenglamasini tuzing.

9([2]). Ushbu $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ va $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$ to‘g‘ri chiziqlarga umumiy perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing

$$\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4} \text{ va } 3x-y+2z-5=0$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

2.3.3.([1],p72) ΔABC uchburchakning B, S uchlari qo‘zg‘almas bo‘lsa, $AC^2-AB^2=constant$ munosabatni qanoatlantiruvchi barcha A nuqtalarning geometrik o‘rni to‘g‘ri chiziq ekanligini isbotlang hamda bu to‘g‘ri chiziqning BC tomon bilan hosil qilgan burchagini toping.

2.3.10.([1],p72) $x+5y-z+2=0, 4x-y+3z-1=0$ tekisliklarning kesishish to‘g‘ri chizig‘idan o‘tuvchi va

a) Oy o‘qiga parallel;

b) $2x-y+5z-3=0$ tekislikka perpendikulyar tekisliklar tenglamalari topilsin.

2.3.12.([1],p72) $A(1,1,0), B(0,1,1), C(1,0,1), D(-1,1,1)$ nuqtalar berilgan. A, B nuqtalardan o‘tuvchi hamda CD to‘g‘ri chiziqqa parallel tekislik tenglamasini tuzing.

2.3.14.([1],p72) $A(4,0,1)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3}$, $\frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$ to‘g‘ri chiziqlar bilan kesishuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

2.3.16.([1],p72) Fazoda $(d_1)\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-4}{1}$, $(d_2)\frac{x+10}{11}=\frac{y+8}{10}=\frac{z-1}{2}$ to‘g‘ri chiziq tenglamalari berilgan.

i) to‘g‘ri chiziqlar bir tekislikda yotishini ko‘rsating va bu tekislik tenglamasini tuzing.

ii) to‘g‘ri chiziqlar orasidagi o‘tmas burchakni ko‘rsating va bu burchak bisterisasi tenglamasini tuzing.

1([2]). Berilgan $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqtadan o’tuvchi va

$$Ax+By+Cz+D=0$$

tekislikga perpendikulyar to’g’ri chiziq tenglamasini yozing.

2([2]). Quyidagi to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini toping:

1) $8x-3y-1=0, \quad 4x+y-13=0$

2) $3x+7y-15=0, \; 9x+21y-32=0$

3) $5x-2y+13=0, \quad x+3y-11=0$

3([2]). Quyidagi uchta to'g'ri chiziqlar bir nuqtadan o'tadimi?

1) $3x-y-1=0, 2x-y+3=0, x-y+7=0$

2) $x+3y-1=0, 5x+y-10=0, 3x-5y-8=0$

3) $3x-y+6=0, 4x-3y-5=0, 2x-y+5=0.$

4([2]). Uchburchak tomonlari ushbu $x+2y+3=0, \quad 3x-7y+9=0$ $5x-3y-11=0$ tenglamalar bilan berilgan. Uchburchakning balandliklari kesishgan nuqtani toping.

5([2]). To'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlang.

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=0, \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \text{va} \begin{cases} 4x+y-6z-2=0, \\ y-3z+2=0 \end{cases}$$

6([2]). Quyidagi to'g'ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtasini toping.

1) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$ va $3x-3y+2z-5=0$

2) $\dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ va $x+2y-4z+1=0$

7([2]). Berilgan $A(4,-3,1)$ nuqtaning $x+2y-z-3=0$ tekislikdagi proyeksiyasini toping.

8([2]). Berilgan $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$ to'g'ri chiziqning $x-y+3z+8=0$ tekislikdagi proyeksiyasini toping.

9([2]). Berilgan to'g'ri chiziq berilgan tekislikda yotadimi?

1) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+2}{5}, \quad 4x+3y-z+3=0$

2) $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z-2}{3}, \quad 5x-8y-2z-1=0$

3) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z}{1}, \quad 3x-2y-z-1=0$

10([2]). Berilgan to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni toping.

1) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+2}{5}, \quad 4x+3y-z+3=0$

2) $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z-2}{3}$, $\quad 5x-8y-2z-1=0$

3) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{1}$, $\quad 3x-2y-z-1=0$

11([2]). To‘g‘ri chiziqlarning tenglamalarini kanonik ko‘rinishga keltiring.

$$1)\begin{cases}3x-4y-2z=0,\\ 2x+y-2z=0\end{cases} \quad 2)\begin{cases}4x+y-6z-2=0,\\ y-3z+2=0.\end{cases}$$

12([2]). To‘g‘ri to‘rtburchakning uchta tomoni

$$x+y=0,\ \ x-y=0,\ \ x-y-4=0$$

tenglamalar bilan berilgan. Uning yuzasi 10 ga teng bo‘lsa, to‘rtburchakning to‘rtinchi tomoni tenglamasini tuzing.

13([2]). Uchburchak tomonlari $x+2y+3=0, 3x-7y+9=0,\ 5x-3y-11=0$ tenglamalar bilan berilgan. Uchburchakning medianalari kesishgan nuqtani toping.

Test namunalari

1. $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikning umumiy tenglamasida A,B,C koeffitsientlar qanday geometrik ma’noga ega?

a) Tekislikning normal vektorining koordinatlari
b) Tekislik yo’naltiruvchi vektorinig koordinatlari
c) Tekislikda joylashgan vektorning koordinatlari
d) Tekislikka parallel vektorning koordinatalari.

2. $Ax+By+Cz=0$ tenglama bilan berilgan tekislik koordinata sistemasiga nisbatan qanday joylashgan?

a) Koordinata boshidan o‘tadi
b) Ox o‘qiga parallel.
c) *Oy* o‘qiga parallel
d) *Oz* o‘qiga parallel.

3. $By+Cz+D=0$ tenglama bilan berilgan tekislik koordinata sistemasiga nisbatan qanday joylashgan?

a) *Ox* o‘qiga parallel.
b) *Oz* o‘qiga parallel.
c) *Oy* o‘qiga parallel.
d) Koordinata boshi orqali o‘tadi.

4. $Cz+D=0$ tenglama bilan berilgan tekislik koordinata sistemasiga nisbatan qanday joylashgan?

a) xOy koordinata tekisligiga parallel.

b) Ox o'qiga parallel.

c) Oy o'qiga parallel.

d) Koordinata boshidan o'tadi.

5. Tenglamasi $By+D=0$ bo'lgan tekislik koordinata tekisliklariga nisbatan qanday joylashgan?

a) xOz koordinata tekisligiga parallel.

b) Oz koordinata tekisligiga parallel.

c) xOy koordinata tekisligiga parallel.

d) Ou o'qiga parallel.

6. $Ax+D=0$ tenglama bilan berilgan tekislik koordinata tekisliklariga nisbatan qanday joylashgan?

a) Oz koordinata tekisligiga parallel.

b) Ox o'qiga parallel.

c) Ox koordinata tekisligiga parallel.

d) Ou o'qiga parallel.

7. $Cz=0$ tenglama bilan berilgan tekislik koordinata sistemasiga nisbatan qanday joylashgan?

a) xOy koordinata tekisligi bilan ustma-ust tushadi

b) xOz koordinata tekisligi bilan ustma-ust tushadi

c) Oy o'qidan iborat.

d) Ox o'qidan iborat.

8. $By=0$ tenglama bilan berilgan tekislik koordinata sistemasiga nisbatan qanday joylashgan?

a) xOz tekisligidan iborat.

b) xOy tekisligidan iborat.

c) Ox o'qidan iborat.

d) Oy o'qidan iborat.

5-§. To‘g‘ri chiziq va tekisliklar o‘zaro vaziyatini aniqlash, nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofalarni aniqlash

Reja:

1. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa
2. Nuqtadan tekislikgacha bo‘lgan masofani hisoblash
3. Fazoda nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani hisoblash
4. To‘g‘ri chiziq va tekislikni kesishuvi
5. Ikkita ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa
6. [4]Bizga l to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsa, koordinata boshidan o‘tuvchi va l to‘g‘ri chiziqga perpendikulyar to‘g‘ri chiziqni L bilan, ularning kesishish nuqtasini M_0 bilan belgilaymiz. Agar $\bar{n}$ bilan L to‘g‘ri chiziqning birlik yo‘naltiruvchi vektorini belgilasak , u

$$\bar{n}=\{\cos\theta,\sin\theta\}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Tekislikning $M(x,y)$ nuqtasi l to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lishi uchun $\overline{OM}$ vektorning L to‘g‘ri chiziqqa proeksiyasi $\overline{OM_0}$ vektorning uzunligiga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir. Agar $\overline{OM_0}$ vektorning uzunligini p bilan belgilasak

$$pr_{\bar{n}}\overline{OM}=p$$

tenglikni hosil qilamiz. Proyeksiyani skalyar ko‘paytma orqali ifodalash natijasida biz

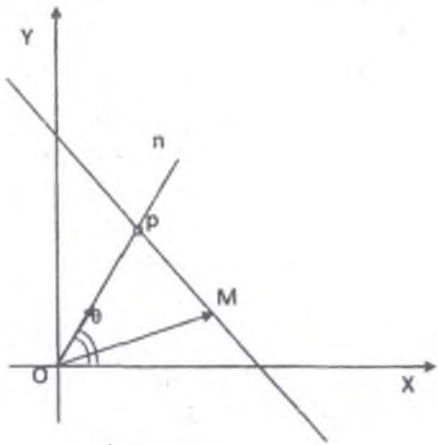
$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi deyiladi.

Agar $M(x,y)$ nuqta tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsa, N_0 bilan $M(x,y)$ nuqtaning L to‘g‘ri chiziqdagi proeksiyasini belgilasak, $\overline{M_0N_0}$ kesma kattaligi uchun quyidagi $M_0N_0=ON_0-OM_0=ON_0-p$ tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $ON_0=np\text{-}OM$ bo‘lganligi uchun

$$M_0N_0=x\cos\theta+y\sin\theta-p$$

[4] ([1, 2.3.1 proposition, 61 бет])



Chizma-24

formula M_0N_0 kattalikni hisoblash imkonini beradi. Bu kattalik $M(x,y)$ nuqtaning l to‘g‘ri chiziqdan chetlashishi deyiladi. Chetlashishning absolyut qiymati $M(x,y)$ nuqtadan l to‘g‘ri chiziqga bo‘lgan masofaga tengdir. Demak, nuqtadan to‘g‘ri qiziqgacha bo‘lgan masofani hisoblash uchun to‘g‘ri chiziq tenglamasini normal ko‘rinishga keltirish keyin esa nuqta koordinatalarini normal tenglamaning chap tomonidagi o‘zgaruvchilar o‘rniga qo‘yish etarlidir.

To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini normal ko‘rinishga keltirish uchun uning ikkala tarafini

$$t = \mp \frac{1}{\sqrt{A^2 + B_2}}$$

ifodaga ko‘paytirish zarur bo‘ladi. Bu yerda $tC = -p$ tenglik bajarilishi kerak. Shuning uchun t ifodaning ishorasi C ning ishorasiga qarama-qarshi bo‘lishi lozimdir.

Ixtiyoriy (x_1, y_1) nuqta va noldan farqli $\vec{a} = (l, m)$ vektor berilgan bo‘lsa, (x_1, y_1) nuqtadan o‘tib (l, m) vektorga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases} \quad (12)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bu yerda t son shu to'g'ri chiziqda yotgan M nuqtaning koordinatasi bo'lib, bunda (x_1, y_1) nuqta koordinatalar boshi va $\{l, m\}$ vektor esa masshtab vektor sifatida olingan.

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan ikki to'g'ri chiziqning kesishishi parallel bo'lishi va ustma-ust tushishi uchun quyidagi jadvalda berilgan shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir. Ikki to'g'ri chiziqning ustma-ust tushishining zarur va yetarli shartini quyidagicha ham ifodalash mumkin:

$$A_1x + B_1y + C_1 = \lambda(A_2x + B_2y + C_2), \qquad \lambda \neq 0$$

(bu tenglik x, y ga nisbatan ayniyatdir) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ umumiy tenglamalar bilan berilgan to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasining koordinatalari Kramer formulalaridan hisoblanadi:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \qquad (13)$$

Affin sistemasida umumiy tenglamalari bilan berilgan

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

to'g'ri chiziqlar kesishsa, $\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ tenglamada x, y oldidagi koyeffitsiyentlar baravariga nolga aylanmaydi, va bu tenglama to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasidan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasini aniqlaydi. Aksincha

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasidan o'tgan har qanday to'g'ri chiziq

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

tenglama bilan ifodalanadi.

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa,

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (14)$$

tenglama berilgan to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini aniqlaydi, bunda $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq-\frac{\alpha}{\beta}$ bajarilishi kerak va aksincha (bunda α,β sonlardan hech bo‘lmasa bittasi noldan farqli)

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0$$

to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lgan har qanday to‘g‘ri chiziq

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

tenglama bilan ifodalanadi.

To‘g‘ri chiziqlar dastasi deb bir tekislikda yotgan va bitta nuqtadan o‘tadigan to‘g‘ri chiziqlarning xos to‘plami deb ataladi. Umumiy nuqta dasta markazi deyiladi. O‘zaro parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar to‘plami ham parallel to‘g‘ri chiziqlar dastasi yoki xos bo‘lmagan dasta deyiladi. Agar affin koordinatalar sistemasiga nisbatan uchta to‘g‘ri chiziq tenglamalari

$$\begin{aligned}A_1x+B_1y+C_1&=0\\A_2x+B_2y+C_2&=0\\A_3x+B_3y+C_3&=0\end{aligned}\qquad(15)$$

berilgan bo‘lsa,

$$\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\A_2 & B_2 & C_2\\A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}=0\quad(16)$$

shart to‘g‘ri chiziqlarning biror dastaga xususiy holda to‘g‘ri chiziq dastasiga tegishli bo‘lishi uchun zaruriy va yetarli shartdir. (x_1,y_1) nuqtadan o‘tgan to‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yozilishi mumkin:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0\quad(17)$$

bu yerda A,B koeffitsiyentlar ixtiyoriy haiqiqy qiymatlarni qabul qiladi va bir vaqtda nolga aylanmaydi.

Umumiy dekart koordinatalar sistemasida koordinatalari $(-B,A)$ vektor hamma vaqt

$$Ax+By+C=0$$

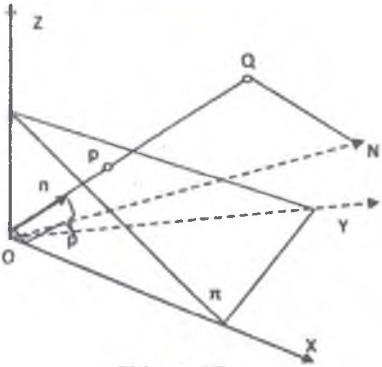
to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi. To‘g‘ri burchakli dekart koordinatalari sistemasida $\{A,B\}$ vektor $Ax+By+C=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘ladi. Agar $\{A,B\}$ vektor to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasida joylashtirilsa, bu vektorning uchi $Ax+By+C=0$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan musbat yoki manfiy yarim tekislikda yotadi.

Fazoda α tekislik berilgan bo‘lsa, koordinata boshidan bu tekislikka perpendikulyar ℓ to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz va bu to‘g‘ri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtasini M_0 bilan belgilaymiz.

To‘g‘ri chiziqning $\overline{OM_0}$ vektorga parallel yo‘naltiruvchi birlik $\bar{e}$ vektorini

$$\bar{e}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

ko‘rinishda yozishimiz mumkin.Bu yerda $\bar{e}$ vektorning koordinata o‘qlari bilan hosil qilgan burchaklari mos ravishda α,β,γ harflari bilan belgilangan.Agar M_0nuqta koordinata boshi bilan ustma ust tushsa, $\bar{e}$ vektor sifatida ℓ to‘g‘ri chiziqqa parallel ixtiyoriy vektorni olish mumkin. Bu vektorning tanlanishi ℓ to‘g‘ri chiziqda yo‘nalishni aniqlaydi va ℓ to‘g‘ri chiziqni o‘qqa aylanadi. Fazoning $M(x,y,z)$ nuqtasi α tekislikka tegishli bo‘lishi uchun $\overline{OM}$ vektorning ℓ o‘qqa proeksiyasi $\overline{OM_0}$ vektor uzunligiga teng bo‘lishi lozimdir.



Chizma-27

Demak

$$np_{\bar{e}}\overline{OM}=p$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.Bu yerda p- koordinata boshidan α tekislikkacha bo‘lgan masofa).Bu tenglikda $\bar{e}$ vektorning birlik vektor ekanligini hisobga olib,tenglikni

$$np_{\bar{e}}\overline{OM}=\left(\bar{e},\overline{OM}\right)$$

ko'rinishda yozamiz. Skalyar kupaytmani koordinatalar orqali ifodalasak,yuqoridagi tenglik

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglama tekislikning normal tenglamasi deyiladi.

Bu tenglama yordamida berilgan $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan α tekislikgacha bo'lgan masofani hisoblash mumkin. Berilgan $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan α tekislikgacha bo'lgan masofani d bilan, $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning ℓ o'qdagi proeksiyasini N bilan belgilasak, yo'nalishga ega bo'lgan $\overline{M_0N}$ kesmaning kattaligi $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning α tekislikdan chetlanishi deyiladi.Bu chetlashishni δ bilan belgilasak, $\delta = M_0N = ON - OM_0$

tenglik o'rinli bo'ladi.Bu yerda $p = OM_0$ tenglikni hisobga olsak,

$$\delta = ON - p$$

tenglikni hosil qilamiz.Bu tenglikda $\overline{OM}$ vektorning ON proyeksiyasini

skalyar ko'paytma orqali yozsak

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p$$

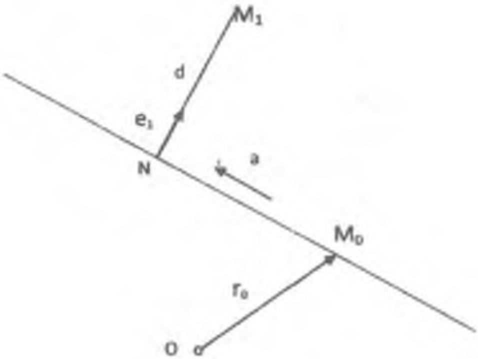
formulani olamiz. Bundan esa d uchun $d = \left|\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$

formulani topamiz. Biz oldingi paragraflarda tekislikda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa formulasini ham keltirgan edik. To'g'ri chiziq va tekislik tenglamalarini vektor ko'rinishda yozib biz ikkita formulani bitta formula ko'rinishida yozishimiz ham mumkin. Haqiqatdan, tekislikning (to'g'ri chiziqning) normal vektorini $\bar{n} = \{A, B, C\}$ (to'g'ri chiziq uchun $\bar{n} = \{A, B\}$) ko'rinishda, tekislikka tegishli (to'g'ri chiziqqa tegishli) nuqta radius vektorini r_0 bilan belgilasak, tekislik (to'g'ri chiziq) tenglamasini $(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{n}) = 0$ ko'rinishda yozishimiz mumkin.Radius –vektori $\bar{r}_1$ bo'lgan $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan tekislikkacha (to'g'ri chiziqqacha) bo'lgan masofa skalyar ko'paytmaning moduliga tengdir:

$$d = \left|\left(\bar{r}_1 - \bar{r}_0, \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}\right)\right|.$$

Bizga fazoda ℓ to‘g‘ri chiziq va unga tegishli bo‘lmagan $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqta berilgan bo‘lsin. Biz bilamizki to‘g‘ri chiziq va unga tegishli bo‘lmagan nuqta orqali bitta tekislik o‘tkazish mumkin. Tekislikda nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani hisoblashni oldingi paragraflarda o‘rgangan edik. Buning uchun biz to‘g‘ri chiziqning tekislikdagi tenglamasini va nuqtaning tekislikdagi koordinatalarini bilishimiz kerak. Lekin bu ish har doim qulay bo‘lmaganlini uchun biz bevosita ℓ to‘g‘ri chiziqning $\bar{r}=\bar{r_0}+\bar{a}t$ tenglamasidan foydalanmoqchimiz. Bizga to‘g‘ri chiziqning $M_0(x_0,y_0,z_0)$nuqtasi va uning yo‘naltiruvchi $\bar{a}$ vektori ma’lum. Agar N nuqta ℓ to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lib, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va N nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq ℓ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lsa, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va N nuqtalar orasidagi masofa $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqtadan ℓ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofadir. Biz $\overline{NM_1}$ vektorni $\overline{NM_1}=d\overline{e_1}$ ko‘rinishda yoza olamiz. Bu yerda $d=|NM_1|$, $\overline{e_1}$ esa $\overline{NM_1}$ vektor bilan bir xil yo‘nalishga ega bo‘lgan birlik vektordir. Xuddi shunday $\bar{a}$ vektorni $\bar{a}=|\bar{a}|\overline{e_2}$ ko‘rinishda yozib, $\overline{NM_1}$ va $\bar{a}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi uchun $\left[\overline{NM_1},\bar{a}\right]=d|\bar{a}|\left[\overline{e_1},\overline{e_2}\right]$ tenglikni olamiz.

Bu tenglikdan $d=\dfrac{\left|\left[\overline{NM_1},\bar{a}\right]\right|}{|\bar{a}|}$



formulani hosil qilamiz. Lekin bu formulada N nuqta koordinatalari noma’lum bo‘lganligi uchun biz undan bevosita foydalana olmaymiz. Lekin chizmadan ko‘rinib turibdiki,biz $\overline{NM_1}$ vektorni

$$\overline{NM_1}=\overline{r_1}-(\overline{r_0}+\overline{a}t_1)$$

ko‘rinishda yoza olamiz. Bu yerda t_1-parametrning N nuqtaga mos keluvchi qiymatidir. Endi bu ifodani yuqoridagi formulaga qo‘yib va $\overline{a}t_1, \overline{a}$ vektorlarning vektor ko’paytmasi nol vektor ekanligini hisobga olsak

$$d=\frac{\left|\left[\overline{r_1}-\overline{r_0},\overline{a}\right]\right|}{|\overline{a}|}$$

formulani olamiz. Bu formulani koordinatalar orqali yozsak, u

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & z_1-z_0\\ a_1 & a_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

ko‘rinishga keladi.

L to‘g‘ri chiziq $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ (1) kanonik tenglamasi bilan, Q tekislik $Ax+By+Cz+D=0$ (2) umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsin va ular uzaro parallel bo‘lsin. L to‘g‘ri chiziq bilan Q tekislikni kesishgan nuqtasini topamiz, ya’ni (1) va (2) tenglamalar sistemasini yechimini topamiz: buning uchun (1) praporsiyaning umumiy qiymatini λ bilan belgilaymiz va bu tenglamalardan x, y, z larni topamiz, ya’ni

$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}=\lambda,\ \frac{x-x_1}{m}=\lambda,\ \frac{y-y_1}{n}=\lambda,\ \frac{z-z_1}{p}=\lambda$ bulardan

$$x=m\lambda+x_1,\ y=n\lambda+y_1,\ z=p\lambda+z_1 \quad (3)$$

(3) dagi x, y, z larning qiymatlarini (2) ga qo‘yamiz:

$A(m\lambda+x_1)+B(n\lambda+y_1)+C(p\lambda+z_1)+D=0$ yoki

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D+\lambda(A_m+B_n+C_p)=0 \quad (4)$$

L to‘g‘ri chiziq va Q tekislik parallel bo‘lmaganidan $Am+Bn+Cp\neq 0$ (4) dan λ ni topamiz:

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A_m+B_n+C_p} \quad (5)$$

(5) ni (3) ga qo‘ysak $M_0(x_0;y_0;z_0)$ to‘g‘ri chiziq bilan tekislikni kesishgan nuqtasi hosil bo‘ladi. Agar $Am+Bn+Cp=0$ bo‘lib, $Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0$ bo‘lsa to‘g‘ri chiziq bilan tekislik kesishmaydi. Agar $Am+Bn+Cp=0$ bo‘lib, $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ bo‘lsa, bu vaqtda L to‘g‘ri chiziq ustida yotadi va ular cheksiz ko‘p nuqtada kesishadi.

Masala yechish namunasi

Ushbu $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{2}$ to‘g‘ri chiziq bilan $x+2y-2z-3=0$ tekislikning kesishish nuqtasi topilsin.

Yechish: $Am+Bn+Cp=1\cdot 2+3\cdot 2+2\cdot(-2)=2+6-4=4\neq 0$, demak berilgan to‘g‘ri chiziq va tekislik parallel emas. Endi to‘g‘ri chiziq tenglamasini parametrik shaklga keltiramiz:

$$\frac{x-1}{2}=\lambda;\frac{y}{3}=\lambda;\frac{z-1}{2}=\lambda,\ x=2\lambda+1,\ y=3\lambda,\ z=2\lambda+1$$

x, y, z larni tekislikning umumiy tenglamasiga qo‘yamiz:

$$2\lambda+1+2\cdot 3\lambda-2(2\lambda+1)-3=0$$

$$2\lambda+1+6\lambda-4\lambda-2-3=0;4\lambda-4=0,\lambda=1$$

$$x_0=2\lambda+1=2\cdot 1+1=3;y_0=3\cdot 1=3;z_0=2\cdot 1+1=3$$

Demak berilgan to‘g‘ri chiziq va tekislikni kesishish nuqtasi $M_0(3;3;3)$ ekan.

[5]Bizga dekart koordinatalari kiritilgan fazoda α va β ikkita tekisliklar mos ravishda quyidagi tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin:

$$\alpha: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ \beta: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Bu tekisliklar orasidagi burchak ularning normal vektorlari orasidagi burchakka tengdir. Ularning $\overline{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$ va $\overline{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$ normal vektorlari orasidagi burchakning kosinusini

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

formula bo‘yicha hisoblashni bilamiz. Tekisliklarning parallellik sharti ularning vektorlari paralleligiga teng kuchlidir. Shuning uchun bu shart

---

[5] [1, 58-59-бетлар]

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

ko'rinishda yoziladi.

Tekisliklarning perpendikulyarlik sharti ularning normal vektorlari perpendikulyarligiga teng kuchli va

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

ko'rinishda yoziladi.

Biz ikkita $\bar{r}=\bar{r}_1+\bar{a}t$ va $\bar{r}=\bar{r}_2+\bar{b}s$ tenglamalar bilan berilgan ℓ_1,ℓ_2 ayqash to'g'ri chiziqlar orsadagi masofani hisoblash formulasini keltirib chiqarmoqchimiz. Ikkita ℓ_1,ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa

$$d=\inf d(A,B),A\in \ell_1,B\in \ell_2$$

formula bo'yicha aniqlanadi.Bu yerda $d(A,B)$- A va B nuqtalar orasidagi masofadir. Agar to'g'ri chiziqlar kesishsa, ular orasidagi masofa nolga teng bo'ladi. Parallel ℓ_1,ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani hisoblash uchun bitta $A\in \ell_1$ no'qtani olib undan ℓ_2 to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash yetarlidir. To'g'ri chiziqlar ayqash bo'lgan holda biz avvalo mos ravishda ℓ_1,ℓ_2 to'g'ri chiziqlarga tegishli bo'lgan A_0 va B_0 nuqtalar mavjud bo'lib, bu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning ℓ_1,ℓ_2 to'g'ri chiziqlarga perpendikulyar ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun biz $\overline{A_0B_0}$ vektorni

$$\overline{A_0B_0}=(\bar{r}_2+\bar{b}s_0)-(\bar{r}_1+\bar{a}t_0)$$

ko'rinishda yozib, uning $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga perpendikulyarlik shartlarini yozamiz. Bu shartlarni skalyar ko'paytma orqali yozsak, ular

$$\begin{aligned}&(\bar{r}_2-\bar{r}_1,\bar{a})+(\bar{a},\bar{b})s_0-(\bar{a},\bar{a})t_0=0 \qquad (5)\\&(\bar{r}_2-\bar{r}_1,\bar{b})+(\bar{b},\bar{b})s_0-(\bar{a},\bar{b})t_0=0\end{aligned}$$

ko'rinishga keladi. Bu tengliklar s_0,t_0 noma'lumlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasidan iboratdir. Bu sistemaning asosiy determinanti Δ noldan farqli,chunki

$$\Delta=\begin{vmatrix}(\bar{a},\bar{a}) & (\bar{a},\bar{b})\\ (\bar{a},\bar{b}) & (\bar{b},\bar{b})\end{vmatrix}=[\bar{a},\bar{b}]^2>0$$

munosabat o'rinlidir. Demak (5) sistema yagona yechimga ega, ya'ni (A_0,B_0) juftlik yagonadir. Endi A_0B_0 kesma uzunligi to'g'ri chiziqlar orasidagi masofaga tengligini ko'rsatamiz.Buning uchun mos ravishda ℓ_1, ℓ_2 to'g'ri chiziqlarga tegishli va radius –vektorlari

$$\bar{r}_1 + \bar{a}t\ ,\ \bar{r}_2 + \bar{b}s$$

vektorlardan iborat A, B nuqtalar uchun

$$|AB| \ge |A_0B_0|$$

tengsizlikni isbotlaymiz.

Bu tengsizlikni isbotlash uchun $\overline{AB}$ vektorni

$$\overline{AB} = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) + (\bar{b}s - \bar{a}t) = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1 + \bar{b}s_0 - \bar{a}t_0) + (s - s_0)\bar{b} + (t - t_0)\bar{a}$$

ko'rinishda yozamiz.Bu ifodada

$$\overline{A_0B_0} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 + \bar{b}s_0 - \bar{a}t_0$$

tenglik o'rinli. Ikkita o'zaro perpendikulyar $\bar{p},\ \bar{q}$ vektorlar uchun

$$(\bar{p} + \bar{q})^2 = \bar{p}^2 + \bar{q}^2$$

tenglik o'rinlidir. Bu tenglik umumlashgan Pifagor teoremasi deyiladi.

Bu tenglikni

$$\bar{p} = \overline{A_0B_0}\ ,\quad \bar{q} = (s - s_0)\bar{b} + (t - t_0)\bar{a}$$

vektorlar uchun yozsak

$$\overline{AB}^2 = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1 + \bar{b}s_0 - \bar{a}t_0)^2 + [(s - s_0)\bar{b} + (t - t_0)\bar{a}]^2$$

tenglikni olamiz.Bu tenglikdan esa

$$\overline{AB}^2 \ge (\bar{r}_2 - \bar{r}_1 + \bar{b}s_0 - \bar{a}t_0)^2 = \overline{A_0B_0}^2$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Endi A_0B_0 kesma uzunligini hisoblash uchun formula keltirib chiqaramiz. Shu maqsadda $\overline{A_0B_0}, \bar{a}, \bar{b}$ vektorlarning aralash ko'paytmasini tekshiramiz.

Aralash ko'paytma moduli uchun

$$|\overline{A_0B_0}\,\bar{a}\,\bar{b}| = |A_0B_0|\,|[\bar{a}, \bar{b}]|$$

tenglik o'rinli ekanligini bilamiz.Bundan esa

$$d = |A_0B_0| = \frac{|\overline{A_0B_0}\,\bar{a}\,\bar{b}|}{|[\bar{a}, \bar{b}]|}$$

munosabatni olamiz. Aralash ko'paytmadagi $\overline{A_0B_0}$ vektorni

$$\overline{A_0B_0} = \overline{A_0A_1} + \overline{A_1B_1} + \overline{B_1B_0}$$

ko'rinishda yozamiz. Bu yerda $A_1 \in \ell_1, B_1 \in \ell_2$ va $\overline{OA_1} = \overline{r_1}, \overline{OB_1} = \overline{r_2}$. Shuning uchun $\overline{A_0A_1}$ vektor $\bar{a}$ vektorga, $\overline{B_0B_1}$ vektor esa $\bar{b}$ vektorga paralleldir. Bularni hisobga olsak

$$d = \frac{\left|\overline{A_1B_1}\,\bar{a}\,\bar{b}\right|}{\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|}$$

formula kelib chiqadi. Bu formulani koordinatalar yordamida yozsak, u

$$d = \frac{abs\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}}$$

ko'rinishga keladi.

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

Berilgan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik berilgan $\overline{CE}$ kesmani kesishi shartini yozing.

1.Uchta tekislik

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ularning bir nuqtada kesishish shartini toping.

2.Ikkita parallel bo'lmagan to'g'ri chiziqlar

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ular hosil qilgan burchakning bissektrisalari tenglamalarini tuzing.

3.Berilgan $M(x_0,y_0)$ nuqtadan o'tuvchi va $y=kx+b$ to'g'ri chiziq bilan ma'lum φ burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

4. Uchta to'g'ri chiziq

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ularning bir nuqtada kesishish shartini toping.

5.Ikkita parallel bo'lmagan tekisliklar

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ular hosil qilgan ikki yoqli burchaklar uchun bissektorial tekisliklar tenglamalarini tuzing.

6. Ikkita parallel bo'lmagan tekisliklar

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, berilgan $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalarning tekisliklar hosil qilgan ikki yoqli burchaklarga nisbatan holatini aniqlang.

7.Berilgan tekislikning berilgan kesmani kesishi shartini yozing.

8.Ikkita parallel bo'lmagan to'g'ri chiziqlar

$$A_1x+B_1y+C_1=0,,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, koordinata boshi va berilgan $M_1(x_1,y_1)$ nuqtaning to'g'ri chiziqlar hosil qilgan burchaklarga nisbatan holatini aniqlang.

9. Berilgan $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqtadan o'tuvchi va $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqning tenglamasini yozing.

10. To'g'ri chiziq $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

11. Affin koordinatalar sistemasini aniqlovchi bazis vektorlari

orasidagi burchak $\frac{\pi}{3}$ ga teng bo'lsa, $4x-5y+7=0$ va $9x+4y-11=0$ tenglamalar bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

12. Affin koordinatalar sistemasi o'qlari orsasidagi burchak $\frac{\pi}{3}$ ga teng bo'lsa, uchlari $A(-1,2)$, $B(1,1)$, $C\left(2,-\frac{5}{2}\right)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning AB tomoni va C uchidan tushirilgan medianasi orasidagi burchakni toping.

13.Quyidagi uchta to'g'ri chiziq bitta nuqtada kesishadimi?

$3x-y-1=0$,$2x-y+3=0$,$x-y+7=0$

14. Ikkita to'g'ri chiziq

$$x-3y+10=0,$$
$$2x+y-8=0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar orasidagi qismi $P(0,1)$ nuqtada teng ikkiga bo'linuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

15. Uchburchak tomonlari

$$2x-y+3=0,\ x+5y-7=0 \text{ va } 3x-2y+6=0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, uning balandliklari tenglamalarini tuzing.

16. To'rtburchak tomonlari

$$x-y=0,\ x+3y=0,\ x-y-4=0,\ 3x+y-12=0$$

tenglamalari bilan berilgan.To'rtburchak diagonallari tenglamalarini tuzing.

17. Uchburchak tomonlari

$$2x-5y-2=0\ \ x+y-8=0\ ,\ 5x-2y-5=0$$

tenglamalar bilan berilgan. Uchburchak ichida shunday nuqta topingki, bu nuqta bilan uchburchak uchlarini tutashtiruvchi to'g'ri chiziqlar uchburchakni teng yuzali uchburchaklarga ajratsin.

18.To'g'ri chiziq $12x+5y-52=0$ tenglama bilan berilgan bo'lsa,unga parallel va undan 2 birlik masofada bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Test namunalari

1. $M_1(x_1, y_1)$ nuqtadan $x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - p = 0$ to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa qanday formula orqali hisoblanadi?

a) $d = |x_1 \cos\phi + y_1 \sin\phi - p|$

b) $d = x_1 \cos\phi - y_1 \sin\phi - p$

c) $d = |x_1 \cos\phi + y_1 \cos\phi - p|$

d) $d = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2}}{|Ax_1 + By_1 - C|}$

2. $M_1(x_1, y_1)$ nuqtadan $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa qanday formula yordamida hisoblanadi?

a) $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

b) $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 - B^2}}$

c) $d = \dfrac{\sqrt{A^2 - B^2}}{|Ax_1 + By_1 + C|}$

d) $d = |x_1 Cos\alpha + y_1 Cos\alpha - p|$

3. $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziq tenglamasi qanday shartda normal ko'rinishda bo'ladi?

a) $A^2 + B^2 = 1, C \leq 0$

b) $A^2 + B^2 \neq 1, C \leq 0$

c) $A^2 - B^2 = 1$

d) $A + B = 1, C \leq 0$

4. $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ va $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ to'g'ri chiziqlarning bir nuqtada kesishish shartini ko'rsating .

a) $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

b) $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$

5. $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikning umumiy tenglamasida A, B, C koeffitsientlar qanday geometrik ma'noga ega?

a) Tekislikning normal vektorining koordinatlari
b) Tekislik yo'naltiruvchi vektorining koordinatlari
c) Tekislikda joylashgan vektorning koordinatlari .
d) Tekislikka parallel vektorning koordinatalari.

6. $Ax + By + Cz = 0$ tenglama bilan berilgan tekislik koordinata sistemasiga nisbatan qanday joylashgan?

a) Koordinata boshidan o'tadi
b) Ox o'qiga parallel.
c) Oy o'qiga parallel
d) Oz o'qiga parallel.

7. $By + Cz + D = 0$ tenglama bilan berilgan tekislik koordinata sistemasiga nisbatan qanday joylashgan?

a) Ox o'qiga parallel.
b) Oz o'qiga parallel.
c) Oy o'qiga parallel.
d) Koordinata boshi orqali o'tadi.

8. $Cz + D = 0$ tenglama bilan berilgan tekislik koordinata sistemasiga nisbatan qanday joylashgan?

a) xOy koordinata tekisligiga parallel.
b) Ox o'qiga parallel.
c) Oy o'qiga parallel.
d) Koordinata boshidan o'tadi.

9. Tenglamasi $By + D = 0$ bo'lgan tekislik koordinata tekisliklariga nisbatan qanday joylashgan?

a) xOz koordinata tekisligiga parallel.
b) yOz koordinata tekisligiga parallel.
c) xOy koordinata tekisligiga parallel.
d) Oy o'qiga parallel.

10. $Ax + D = 0$ tenglama bilan berilgan tekislik koordinata tekisliklariga nisbatan qanday joylashgan?

a) yoz koordinata tekisligiga parallel.
b) Ox o'qiga parallel.
c) xOy koordinata tekisligiga parallel.

d) Oy o‘qiga parallel.

11. $Cz=0$ tenglama bilan berilgan tekislik koordinata sistemasiga nisbatan qanday joylashgan?

a) xOy koordinata tekisligi bilan ustma-ust tushadi

b) xOz koordinata tekisligi bilan ustma-ust tushadi

c) Oy o‘qidan iborat.

d) Ox o‘qidan iborat.

12. $By=0$ tenglama bilan berilgan tekislik koordinata sistemasiga nisbatan qanday joylashgan?

a) xOz tekisligidan iborat.

b) xOy tekisligidan iborat.

c) Ox o‘qidan iborat.

d) Oy o‘qidan iborat.

13. $Ax=0$ tenglama bilan berilgan tekislik koordinata sistemasiga nisbatan qanday joylashgan?

a) yoz tekisligi bo‘ladi.

b) xOy tekisligi bo‘ladi.

c) Ox o‘qidan iborat bo‘ladi.

d) Oy o‘qidan iborat bo‘ladi.

14. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ko‘rinishdagi tenglama qanday ataladi va a,b,c sonlar qanday geometrik ma’noga ega?

a) Tekislikning kesmalariga nisbatan tenglamasi, a,b,c-sonlar mos ravishda, Ox, Oy, Oz o‘qlardan ajratgan kesmalarining uzunliklari.

b) Tekislikning umumiy tenglamasi; a,b,c- ixtiyoriy sonlar.

c) Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi, a,b,c-tekislik normal vektorining koordinatalari.

d) Tekislikning normal tenglamasi ; a,b,c mos ravishda, Ox, Oy, Oz o‘qlardan ajratgan kesmalarning uzunliklari.

15. $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tekisliklar orasidagi burchak quyidagi formula yordamida topiladi:

a) $\cos\phi = \dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

b) $\cos\phi = \dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}+\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

c) $\cos\phi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} - \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

d) $\cos\phi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 - C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

16. $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tenglamalar bilan berilgan tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlarini ko'rsating.

a) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$,
$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

b) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$,
$A_1A_2 - B_1B_2 - C_1C_2 = 0$

c) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$,
$A_1A_2 + B_1B_2 - C_1C_2 = 0$

d) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$,
$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 1$

17. Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ va $M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

a) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

b) $\dfrac{x - x_1}{x_3 - x_2} = \dfrac{y - y_1}{y_3 - y_2} =$
$= \dfrac{z - z_1}{z_3 - z_2}$

c) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$

18. $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0$ ko'rinishdagi tenglama tekislikning qanday ko'rinishdagi tenglamasi deyiladi va p soni qanday geometrik ma'noga ega?

a) Tekislikning normal tenglamasi; p - koordinata boshidan tekislikgacha bo'lgan masofa.

b) Tekislikning normal ko'rinishdagi tenglamasi; p - ixtiyoriy son.

c) Tekislikning umumiy tenglamasi; p - koordinata boshidan tekislikgacha masofa.

d) Tekislikning normal ko'rinishdagi tenglamasi; p - normal vektorning koordinatlari.

6-§. Aylana va sfera tenglamalari

Reja:

1. Aylana va uning tenglamasi
2. Sfera va uning tenglamasi

Bu mavzu affin yoki ortogonal koordinatalar sistemasiga nisbatan ikkinchi darajali tenglamalar bilan aniqlangan chiziqlar va sirtlar oilasiga mansub bo'lgan aylana va sferaga bag'ishlangan (**[1,75 bet]**).

Bizga elementar geometriyadan ma'lumki, tekislikda markazi A nuqtada, radiusi r bo'lgan aylana AN masofa r ga teng bo'lgan N nuqtalarning geometrik o'rnidir. Fazodagi $AN = r$ bo'lgan N nuqtalarning geometrik o'rni markazi A nuqtada radiusi r bo'lgan sfera deyiladi[6].

Markazi $C(a,b)$ nuqtada bo'lgan, r radiusli aylananing tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad (1)$$

Bu tenglama aylananing normal tenglamasi deyiladi. Markazi koordinatalar boshida bo'lsa, aylananing normal tenglamasi

$$x^2+y^2=r^2 \quad (2)$$

ko'rinishni qabul qiladi.

$Ax^2+Ay^2+2Bx+2Cy+D=0$ tenglama $A \neq 0$ va $B^2+C^2-AD>0$ shartlarda markazi $\left(-\frac{B}{A},-\frac{C}{A}\right)$ nuqtadagi $r=\sqrt{\frac{B^2+C^2-AD}{A^2}}$ radiusli aylanani aniqlaydi.

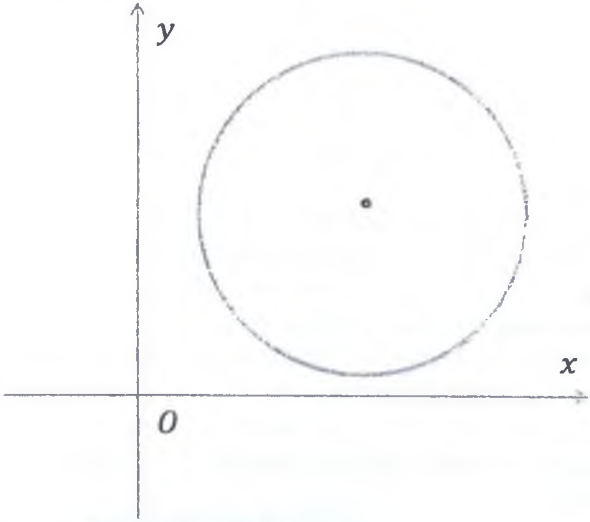
Tekislikdagi ixtyoriy $M(x,y)$ nuqta koordinatalarini aylananing normal tenglamasiga qo'ysak, hosil qilingan:

---

[6] [1,75 бет]

$$\sigma = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$$

son $M(x,y)$ nuqtaning aylanaga nisbatan darajasi deyiladi. M nuqtadan $C(a,b)$ nuqtagacha bo'lgan masofani d desak, bu son $\sigma = d^2 - r^2$ ga teng bo'ladi.



1-chizma

Agar M nuqta aylana tashqarisida yotsa, M nuqtaning shu aylanaga nisbatan darajasi musbat, va u M nuqtadan aylanaga o'tkazilgan urinma uzunligining kvadratiga tengdir, yoki elementar geometriyaning ma'lum teoremasiga ko'ra: $\sigma = MT^2 = MA \cdot MB$ bo'ladi, ya'ni MT urinma uzunligining kvadrati M nuqtadan o'tkazilgan ixtiyoriy kesuvchi uzunligini uning tashqi qismi ko'paytmasiga teng. Olingan M nuqta aylana ichida yotsa, M nuqtaning darajasi manfiy va uning absolyut qiymati shu nuqtadan o'tuvchi vatar bo'laklarining ko'paytmasiga teng bo'ladi:

$$\sigma = -MA \cdot MB$$

Agar M nuqta aylanada olinsa, uning darajasi $\sigma = 0$ ga teng. Agar

$$u_1 = (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2 = 0$$

$$u_2 = (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - r_2^2 = 0$$

ikki aylana tenglamasini ifoda etsa,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$$

tenglama (λ_1, λ_2 – ixtiyoriy bir vaqtda 0 ga teng bo'lmagan sonlar) aylana (yoki to'g'ri chiziq)ni tasvirlaydi: $u_1 = 0, u_2 = 0$ aylanalar kesishsa,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$$

aylana va aylanalarning kesishish nuqtalaridan o'tadi.

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$$

tenglamani, har biri uchun $\frac{u_1}{u_2}$ nisbatning darajasi $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ga teng bo'ladigan nuqtalarning geometrik o'rni tenglamasi deb qarash mumkin.

$\lambda_2 = -\lambda_1 \neq 0$ shart bajarilsa, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$ tenglama $u_1 - u_2 = 0$ yoki $u_1 = u_2$ to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Bu to'g'ri chiziq ikki aylananing radikal o'qi deyiladi, ya'ni radikal o'qda yotuvchi har bir nuqtani har ikkala aylanaga nisbatan darajasi tengdir.

Uchta $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$ aylana berilgan bo'lib, ularning markazlari bir to'g'ri chiziqda yotmasa, har bir juft aylananing radikal o'qlari $u_1 = u_2, u_2 = u_3, u_3 = u_1$ bitta nuqtadan o'tadi. Bu nuqta shu uchta aylananing ixtiyoriy radikal markazi deb ataladi. Quyidagilar mos ravishda

$$u - (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$$

$$v - Ax + By + C = 0$$

aylana bilan to'g'ri chiziq tenglamasi bo'lsa, $u + \lambda v = 0$ tenglama aylanani ifodalaydi. $u = 0$ aylana bilan $v = 0$ to'g'ri chiziq kesishsa, $u + \lambda v = 0$ aylana ularning kesishish nuqtalaridan o'tadi.

Tasdiq[7]. 1) Markazi A nuqtada va radiusi r bo'lgan aylana (sfera) quyidagi tenglamani qanoatlantiruvchi N nuqtalar to'plami bo'ladi:

$$\left(\vec{R} - \vec{a}\right)^2 = \vec{r}^2, \quad (1)$$

bu yerda $\vec{R}$ va $\vec{a}$ vektorlar mos ravishda N va A nuqtalarning radius vektorlari.

2) Tekislikda ortogonal koordinatalar sistemasiga nisbatan aylana tenglamasi

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad (2)$$

[7] [1, 3.1.1-propos., 75 бет]

ko'rinishida bo'ladi, bu yerda a, b sonlari A nuqtaning koordinatalari. Bu (2) tenglamani unga ekvivalent bo'lgan ushbu

$$x^2+y^2-2ax-2by+\sigma=0 \quad (3)$$

ko'rinishida yozish mumkin, bu yerda $\sigma=a^2+b^2-r^2$.

3) ortogonal koordinatalar sistemasiga nisbatan sfera tenglamasi

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \quad (4)$$

ko'rinishida bo'ladi, bu yerda a, b, c sonlari A nuqtaning koordinatalari. Bu (4) tenglamani unga ekvivalent bo'lgan ushbu

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+\sigma=0 \quad (5)$$

ko'rinishida yozish mumkin, bu yerda $\sigma=a^2+b^2+c^2-r^2$.

Isbot. Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalanib A va N nuqtalar orasidagi masofani hisoblaymiz. Natijada isbotlash kerak bo'lgan tengliklarni hosil qilamiz.

(3) ko'rinishidagi tenglamalarni (2) tenglama ko'rinishida yozish mumkin bo'lganligi uchun (3) ko'rinishidagi har qanday tenglama aylanani aniqlaydi. Masalan,

$$x^2+y^2-x+y-1=0 \quad (6)$$

tenglamani

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$

ko'rinishida yozish mumkin va u markazi $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ nuqtada va radiusi $\sqrt{3/2}$ ga teng aylana tenglamasidir. Ikkinchi tomondan

$$x^2+y^2-x+y+1=0 \quad (7)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi haqiqiy koordinatali nuqtalar mavjud emas. (7) tenglamani

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

ko'rinishida yozamiz va uni xosmas aylana tenglamasi deyiladi. Lekin har ikki holda ham (3) tenglama *aylananing umumiy tenglamasi* deyiladi. (5) tenglama esa *sferaning umumiy tenglamasi* deyiladi.

Aylananing umumiy tenglamasida uchta parametr ishtirok etadi. Demak, aylana tenglamasi uni qanoatlantiruvchi uchta nuqta yordamida hosil qilinar ekan. Elementar geometriya kursidan yaxshi ma'lumki, buning uchun berilgan uchta nuqta bir to'g'ri chiziqda yotmasligi kerak. Shuningdek, har bir uchburchak uchun bitta aylana mavjud bo'ladi. Agar berilgan nuqtalar $M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3)$ bo'lsa, aylana tenglamasi ushbu

$$x_i^2+y_i^2-2ax_i-2by_i+\sigma=0$$

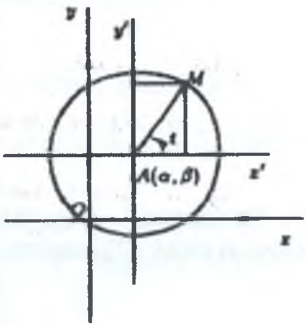
tenglamalar sistemasini a, b, σ larga nisbatan yechib hosil qilinadi. Determinantlar nazariyasi bilan tanish talabalar izlanayotgan aylana tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad (8)$$

ko'rinishida bo'lishini osongina topishadi. Bu determinant hisoblansa u (3) tenglama ko'rinishini oladi. Ikkinchi tomondan bu determinant nolga teng bo'ladi, agar (x,y) ni (x_i,y_i) bilan almashtirilsa (ikkita satri bir xil bo'lgan determinant nolga teng).

Xuddi shunga o'xshash bir tekislikda yotmaydigan to'rtta nuqtadan o'tuvchi sfera tenglamasini ham hosil qilishimiz mumkin. **Bu masalani talabalarga mustaqil ish sifatida qoldiramiz.**

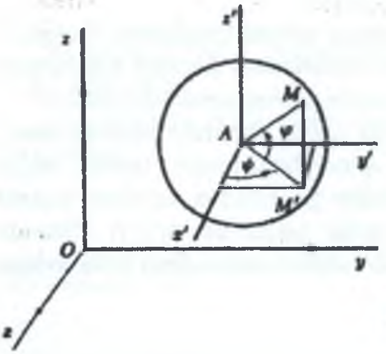
Bizga ma'lumki, chiziqlar va sirtlar parametrik tenglamalar yordamida ham berilishi mumkin. Endi biz aylana va sfera uchun ham parametrik tenglamalar yozmoqchimiz. Aylana uchun parametr t sifatida $\overline{AN}$ vektor va Ox o'qi orasidagi burchakni olsak (2-chizma), N nuqtaning koordinatalarini osongina topamiz:



$$\begin{cases} x=a+r\cos t \\ y=b+r\sin t \end{cases} \quad (9).$$

2-

(9) tenglama *aylananing parametrik tenglamalari* bo'ladi.



Sfera uchun bizga ikkita parametr kerak bo'ladi. Ulardan biri sifatida *geografik kenglikni*, ya'ni $\overline{AN}$ vektor bilan Oxy

tekisligi orasidagi φ burchakni, ikkinchisi sifatida *geografik uzoqlik*ni, ya'ni AN to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi Oz o'qiga parallel tekislik bilan A nuqta orqali o'tuvchi Oxz tekisligiga parallel tekislik orasidagi ψ burchakni olamiz. U holda N nuqtaning koordinatalari

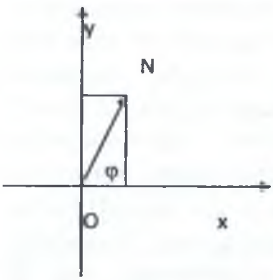
$$\begin{cases} x = a + r\cos\varphi\cos\psi \\ y = b + r\cos\varphi\sin\psi \\ z = c + r\sin\varphi \end{cases} \quad (10)$$

formulalar bilan aniqlanadi (3-chizma). Bu tengliklar *sferaning parametrik tenglamalari* bo'ladi.

Shuni ta'kidlab o'tishimiz kerakki, aylana va sferaning parametrik tenglamalaridagi parametrlarni ayrim hollarda maxsus turdagi koordinatalar sifatida foydalaniladi va ular tadbiqiy masalalarda muhim rol o'ynaydi. Agar tekislikda O nuqta *qutb boshi* bo'lsa, har bir N nuqta markazi O nuqtada, radiusi $r = l$ (ON) bo'lgan aylanaga tegishli bo'ladi (bu yerda l uzunlik). Agar δ oriyentirlangan yo'nalish Ox o'qi yo'nalishi va δ bilan ON orasidagi oriyentirlangan burchak sifatida φ ni olsak, (r,φ) juftlik N nuqtani aniqlaydi. (r,φ) juftlik N nuqtaning *qutb koordinatalari* deyiladi.

Qutb koordinatalardan foydalanishda ba'zi muammolar mavjud. Birinchidan, bu koordinatalar O nuqta uchun aniqlanmagan. N nuqta O nuqta bilan ustma-ust tushganda φ burchak aniqlanmagan, lekin O nuqta $r = 0$ ga mos keladi deyish mumkin. Ikkinchidan, r uzunlik bo'lgani uchun $r \geq 0$ shartni talab qilishimiz kerak bo'ladi, φ burchakning qiymati esa $2\pi n$ (bu yerda n ixtiyoriy butun son) ga teng bo'ladi. Tekislik nuqtalari va nuqtaning qutb koordinatalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish uchun r va φ ning qiymatlarini quyidagi oraliqlarda o'zgaradigan qilib olishimiz mumkin:

$$0 < r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi .$$



4-чизма

Lekin ba'zi masalalarda nuqta tekislik bo'ylab uzluksiz harakat qilishi kerak. Bunday hollarda φ burchakning qiymatini 2π dan katta, r barcha haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi deb hisoblash mumkin. Bu noqulayliklarga qaramasdan qutb koordinatalardan foydalanish ko'pgina hollarda qulaydir.

Agar (x, y) Dekart koordinatalar sistemasini 4-chizmadagidek kiritsak, quyidagi

$$x = \rho\cos\varphi, \quad x = \rho\sin\varphi$$

bog‘lanishlarni olamiz. Berilgan N nuqtaning Dekart koordinatalari ma’lum bo‘lsa, uning qutb koordinatalarini topish uchun

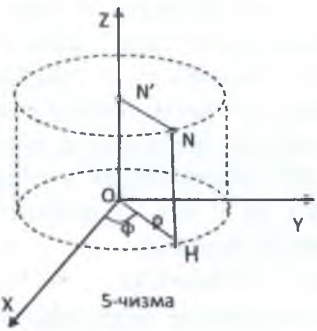
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

formula bo‘yicha birinchi qutb koordinatani topamiz. Ikkinchi qutb koordinatani topish uchun nuqtaning N nuqtaning qaysi chorakda joylashganligini bilishimiz kerak va

$$\varphi = arctg\frac{y}{x}, \quad \varphi = arcctg\frac{x}{y}$$

tengliklardan foydalanishimiz kerak.

Fazoda N nuqta uchta son bilan aniqlanishi mumkin: (ρ, φ, z). Bu yerda (ρ, φ) N nuqtaning Oxy tekisligidagi proyeksiyasi bo‘lgan H nuqtaning qutb koordinatalari, z esa N nuqtaning Oz o‘qiga proyeksiyasi bo‘lgan N' nuqtaning applikatasidir. Ushbu (ρ, φ, z) sonlar N nuqtaning *silindrik koordinatalari* deyiladi.



5-чизма

Agar biz fazoda dekart koordinatalar sistemasini kiritsak, silindrik va dekart koordinatalari orasidagi ushbu

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad x = \rho\sin\varphi, \; z = z$$

bog‘lanishlarni olamiz. Bu yerda ρ, φ o‘zgaruvchilar uchun

$$0 \le \rho < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

munosabatlar o‘rinlidir.

Fazoda silindrik koordinatalar sistemasini kiritganimizda fazo bitta o‘qqa ega bo‘lgan ichma-ich joylashgan (konsentrik) silindrlarga ajraladi. Fazoning har bir nuqtasi bu silindrlarning faqat bittasiga tegishli bo‘ladi. Agar nuqtaning silindrik koordinatalari ρ, φ, z bo‘lsa, bu nuqta yotgan silindrning radiusi ρ ga teng bo‘ladi. Agar nuqta silindrlar o‘qiga tegishli bo‘lsa, u tegishli bo‘lgan silindrning radiusi nolga teng bo‘ladi. Yuqoridagi tanlangan dekart koordinatalar sistemasida silindrlarning o‘qi Oz

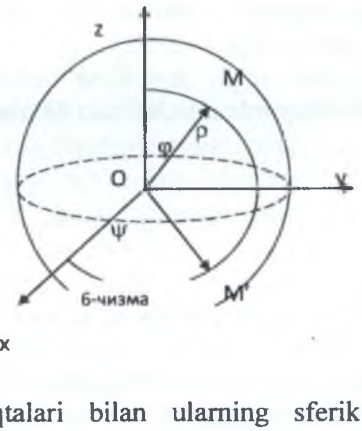
o'qidan iboratdir. Bu dekart koordinatalar sistemasida konsentrik silindrlar tenglamasi

$$x^2+y^2=\rho^2$$

ko'rinishda bo'ladi.

Xuddi shuningdek, fazodagi M nuqta quyidagi uchta son bilan ham aniqlanishi mumkin: (ρ,φ,ψ). Bu yerda $\rho=|OM|$ ga teng bo'lgan masofa, φ va ψ esa mos ravishda markazi O nuqtada, radiusi ρ bo'lgan sferada kenglik va uzoqlikdir (6-chizma). Yuqorida aniqlangan ρ,φ,ψ kattaliklar M nuqtaning *sferik koordinatalari* deyiladi. Bunga sabab, fazoning koordinatalari $\rho=const$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalari to'plami sferani tashkil qiladi. Fazoning har bir nuqtasi radiusi koordinata boshidan shu nuqtagacha bo'lgan masofaga teng bo'lgan sferada yotadi. Nuqtaning dekart koordinatalari bilan sferik koordinatalari orasidagi bog'lanish quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} x=\rho\sin\psi\cos\varphi, & 0\le\varphi<2\pi \\ y=\rho\sin\varphi\cos\psi, & -\dfrac{\pi}{2}<\psi<\dfrac{\pi}{2} \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$



6-чизма

Odatda fazo nuqtalari bilan ularning sferik koordinatalari oraksidagi moslik o'zaro bir qiymatli bo'lishi uchun ular uchun

$$0\le\rho<\infty,\ 0\le\varphi<2\pi,\ 0<\psi<\pi$$

chegaralar qo'yiladi.

Fazoda sferik koordinatalar sistemasini kiritganimizda fazo markazi bitta nuqtada bo'lgan sferalarga ajraladi. Agar nuqtaning sferik koordinatalari ρ, φ, ψ bo'lsa, u yotgan sferaning radiusi ρ ga teng bo'ladi. Bu masofa nuqtadan koordinatalar boshigacha bo'lgan masofaga tengdir. Nuqta ρ radiusli sferada yotgan bo'lsa, φ va ψ burchaklar uning sferadagi vaziyatini aniqlaydi.

Markazi $C(a,b,c)$ nuqtada, r radiusli sfera tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

(7-chizma). Bu tenglama sferaning normal tenglamasi deyiladi. Agar sfera markazi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushsa, normal tenglama quyidagi

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+2Bx+2Cy+2Dz+E=0$$

tenglama

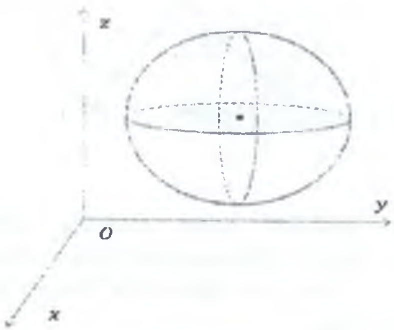
$$A\neq 0,\ B^2+C^2+D^2-AE>0$$

shartda markazi $(-\frac{B}{A}, -\frac{C}{A}, -\frac{D}{A})$ nuqtadagi va radiusi $r=\sqrt{\frac{B^2+C^2+D^2-AE}{A^2}}$ ga teng bo'lgan aylanani aniqlaydi.

M nuqtaning radiusi r, markazi C nuqtada bo'lgan sferaga nisbatan darajasi deb

$$u = d^2 - r^2$$

songa aytiladi. Bu yerda $d = MC$ son M nuqtadan C markazgacha bo'lgan masofa.



7-chizma

Agar M nuqta sfera tashqarisida yotsa, bu nuqtaning sferaga nisbatan darajasi musbat sondir. Bu son M nuqtadan sferaga o'tkazilgan urinma uzunligining kvadratiga teng. Agar M nuqta sfera ichida yotsa, bu nuqtaning sferaga nisbatan darajasi manfiy son bo'ladi va absolyut qiymati bo'yicha $MP \cdot MQ$ ko'paytmaga teng. MP, MQ kesmalar M nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy vatar bo'laklarining uzunliklariga teng.

Agar M nuqta sferada yotsa, bu nuqtaning sferaga nisbatan darajasi nolga teng. $M(x,y,z)$ nuqtaning markazi $C(a,b,c)$ nuqtada yotuvchi va radiusi r ga teng sferaga nisbatan darajasi

$$s=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2$$

formuladan aniqlanadi.

Konsentrik bo'lmagan ikkita sferalarga nisbatan teng darajali nuqtalarning geometrik o'rni tekislikdan iborat. Bu tekislik ikkita sferaning radikal tekisligi deyiladi. Agar sferalar kesishsa, radikal tekislik ularning umumiy aylanasi orqali o'tadi.

Ikkita sfera tenglamalarini qaraylik:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2-r_1^2=0,$$
$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2-r_2^2=0$$

va ularning chap tomonlarini u_1, u_2 deb belgilaylik.

$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2=0$ tenglama λ_1, λ_2 sonlar bir vaqtda nolga teng bo'lmagan holda sfera yoki tekislikni aniqlaydi. Agar sferalar kesishsa, bu tenglama ularning umumiy aylanasidan o'tadigan sferani yoki tekislikni ifoda etadi. $u_1=u_2$ tenglama radikal tekislikni aniqlaydi.

$\lambda u+\mu v=0$ tenglamada $u=0$ sfera tenglamasi va $v=0$ tekislik tenglamasi bo'lsa, $\lambda \neq 0$ shartda sferani, yoki $\lambda=0, \mu \neq 0$ shartda tekislikni aniqlaydi. Agar ular kesishsa bu sfera $v=0$ tekislikning sfera bilan kesishish chizig'i orqali o'tadi.

Tasdiq[8]. Bizga markazi A nuqtada bo'lgan Γ aylana yoki sfera berilgan bo'sin. Aylana tekisligida yotuvchi d to'g'ri chiziq aylanani ikkita haqiqiy koordinatali nuqtalarda kesib o'tadi, agar A nuqtadan d to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa radiusdan kichik bo'lsa. Agar bu masofa radiusga teng bo'lsa, bitta haqiqiy koordinatali nuqtada kesib o'tadi. Agar bu masofa radiusdan katta bo'lsa to'g'ri chiziq kesib o'tmaydi.

[8] [1, 81-бет, 3.1.2]

Natija[9]. Aylana (sfera)ning har bir urinmasi urinish nuqtasiga o'tkazilgan radiusga perpendikulyar bo'ladi.

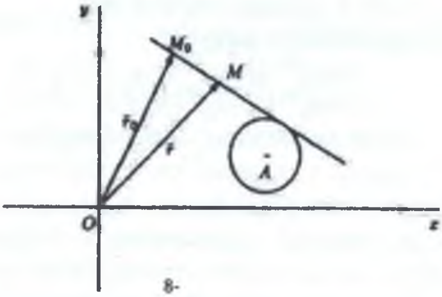
Urinma tushunchasi muhim geometrik rol o'ynaydi. Shuning uchun turli geometrik holatlar uchun urinma tenglamalarini yozish qiziqarlidir. Agar M_0 tekislik (fazo)dagi tayin nuqta bo'lsa, (1) teglama bilan berilgan aylana (sfera)ning berilgan nuqtadan o'tuvchi barcha urinmalarini topamiz.

Agar urinmaga tegishli bo'lgan ixtiyoriy M nuqtaning radius vektori $\bar{r}$ bo'lsa, urinma tenglamasi $\bar{r} = r_0 + \lambda\bar{v}$ ko'rinishida bo'ladi va uning yo'naltiruvchi vektori $\bar{v} = \overline{M_0M} = r - r_0$ ga teng (8-chizma).

Shuning uchun M_0M to'g'ri chiziq aylana (sfera)ga urinma bo'lishi uchun $\bar{v}$ vektor $\Delta = 0$ shartni qanoatlantirishi, ya'ni

$$[(\bar{r} - \bar{r}_0)(r_0 - \bar{a})]^2 - (\bar{r} - \bar{r}_0)^2 [\rho^2 - (r_0 - \bar{a})^2] = 0 \quad (11)$$

tenglik bajarilishi kerak.



8-

Yuqoridagi mulohazalardan ushbu tasdiq kelib chiqadi.

Tasdiq[10]. Aylana (sfera)ning berilgan M_0 nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi

$$[(\bar{r} - \bar{a})(r_0 - \bar{a}) - \rho^2]^2 - [(\bar{r} - \bar{a})^2 - \rho^2][(r_0 - \bar{a})^2 - \rho^2] = 0 \quad (12)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Isbot. Biz $M(\bar{r})$ nuqta urinmaga tegishli bo'lishi uchun $\bar{r}$ vektor (12) tenglikni qanoatlantirishi zarur va yetarli ekanligiga egamiz. Shuning uchun biz (12)-tenglik (11)-tenglikka teng kuchli ekanligini isbotlashimiz kerak. Buning uchun (11)-tenglikda ushbu $\bar{r} - \bar{r}_0 = \bar{r} - \bar{a} + \bar{a} - \bar{r}_0$ almashtirishni bajaramiz va qavslarni ochamiz.

[9] [1, 82-бет, 3.1.3]
[10] [1, 83-бет, 3.1.4]

Natijada (12)-tenglikni hosil qilamiz. (12) formulaning geometrik ma'nosi quyidagidan iborat. Agar M_0 nuqta aylanaga tegishli bo'lsa, (12) tenglik

$$(\bar{r}-\bar{a})(\bar{r}_0-\bar{a})-\rho^2=0 \quad (13)$$

ko'rinishiga keladi. (13)-tenglama to'g'ri chiziq tenglamasi bo'lib, u aylananing M_0 nuqtadagi urinmasi tenglamasidir. Bu urinma AM_0 radiusga perpendikulyardir. Shuning uchun AM_0 to'g'ri chiziq aylananing M_0 nuqtadagi normal tenglamasi bo'ladi. Sfera uchun esa (13)-tenglamani fazoda qaraymiz. U holda bu tenglik M_0 nuqtadan o'tuvchi va radiusga perpendikulyar tekislik tenglamasi bo'ladi. Bu tekislik sferaning M_0 nuqtadagi urinmalaridan tashkil topganligi uchun uni sferaning M_0 nuqtadagi urinma tekisligi tenglamasi deb ataymiz. AM_0 to'g'ri chiziq esa sferaning M_0 nuqtadagi normal tenglamasi bo'ladi.

(13)-tenglamaning chap tomoni aylana (sfera) tenglamasining chap tomonidagi $(\bar{r}-\bar{a})^2$ ifodani skalyar ko'paytma shaklida yozib, ko'paytuvchilardan birida $\bar{r}$ vektorning o'rniga $\bar{r}_0$ vektorni qo'yib hosil qilinadi. Bu jarayon algebra kursidan ma'lumki, *qutblashtirish* deb yuritiladi. Agar (1) va (13) tenglamalar koordinatalar yordamida yozilsa, aylana (sfera)ning (3) ((5)) umumiy tenglamasini qutblashtirish ushbu

$$x^2 \mapsto xx_0, \quad x \mapsto \frac{1}{2}(x+x_0) \quad (14)$$

almashtirish yordamida amalga oshiriladi. Bu almashtirish y va z o'zgaruvchilar uchun ham xuddi shunday yoziladi, bu yerda x_0, y_0, z_0 lar M_0 nuqtaning koordinatalari. Natija shundan iboratki, aylana (sfera)ning M_0 nuqtadagi urinma (urinma tekislik) tenglamasi bu uning umumiy tenglamasini qutblashtirishdir.

Misol[11]. Ushbu $M_0(2,-1,3)$ nuqta

$$x^2+y^2+z^2-x+y+z-14=0$$

tenglama bilan berilgan Γ sferaga tegishli ekanligini tekshiring va Γ sferaga M_0 nuqtadagi urinma tekislik tenglamasini yozing.

Yechish. M_0 nuqta Γ sferaga tegishli ekanligi tekshirish uchun nuqtaning koordinatalari sfera tenglamasini qanoatlantirishini

[11] [1, 84-p., 3.1.5]

ko'rishimiz oson. Urinma tekislik tenglamasini yozish uchun sfera tenglamasini qutblashtiramiz. Buning uchun esa (14) munosabatdan foydalanamiz. Natijada $2x-y+3z-\frac{1}{2}(x+2)+\frac{1}{2}(y-1)+\frac{1}{2}(z+3)-14=0$ tenglikni yoki $3x-y+7z-28=0$ ni hosil qilamiz. Bu izlanayotgan urinma tekislik tenglamasidir.

Endi yana (12) tenglikka qaytamiz. Agar M_0 nuqta Γ aylana (sfera)dan tashqarida yotsa, ma'lumki, bu nuqtadan aylanaga ikkita urinma, sferaga esa urinma konus o'tadi. Agar M_0 nuqta Γ aylana (sfera)ning ichida yotsa, u holda bu nuqtada aylana (sfera) uchun haqiqiy urinma (urinma tekislik) yo'q. Lekin aytish mumkinki, bu holda (12) tenglik aylana uchun ikkita mavhum urinmalar juftligini, sfera uchun esa xosmas konus tenglamasini aniqlaydi.

Shuni ham ta'kidlashimiz kerakki, urinma (urinma tekislik) bilan aylana (sfera)ning kesishish nuqtasi M_0 ning koordinatalari (1) va (12) tengliklarni qanoatlantirishi bilan bir qatorda (13)-tenglikni ham qanotlantirishi kerak. Natijada urinma (urinma tekislik) M_0 nuqta uchun muhim geometrik ahamiyatga egaligini hosil qilamiz. Bu urinma (urinma tekislik) M_0 nuqta bilan aylana (sfera)ga nisbatan qutb o'qi (tekisligi) va M_0 nuqta qutb boshi deyiladi.

Misol[12]. Ushbu $x+y+z+1=0$ tenglama bilan berilgan tekislikning $x^2+y^2+z^2-x+y+z-14=0$ tenglama bilan berilgan sferaga nisbatan qutb boshini toping.

Yechish. Izlanayotgan qutb boshi $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta bo'lsin. U holda qutb tekisligini qutblashtirish yordamida hosil qilamiz, ya'ni qutb tekisligi

$$xx_0+yy_0+zz_0-\frac{1}{2}(x+x_0)+\frac{1}{2}(y+y_0)+\frac{1}{2}(z+z_0)-14=0$$

yoki unga ekvivalent bo'lgan

$$x(x_0-\frac{1}{2})+y(y_0+\frac{1}{2})+z(z_0+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(-x_0+y_0+z_0)-28=0$$

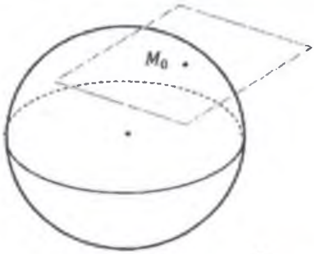
ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tekislik berilgan tekislik bilan ustma-ust tushishi, ya'ni ularning mos koeffitsiyentlari proporsional bo'lishi kerak va biz $x_0=-\frac{63}{2}$, $y_0=z_0=-\frac{127}{4}$ ni hosil qilamiz.

---
[12] [1, 85-p., 3.1.6]

Tasdiq[13]. Aytaylik G aylana (sfera) umumiy tenglamasi (3) (mos ravishda (5)) bilan berilgan va M nuqta aylana (sfera) yotuvchi tekislik (fazo)ning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. U holda, agar P_1, P_2 nuqtalar G aylana (sfera)ning M nuqtadan o‘tuvchi d o‘q bilan kesishish nuqtalari bo‘lsa, $d(MP_1)\cdot d(MP_2)$ ko‘paytma d o‘qqa bog‘liq emas.

Masala yechish namunasi

1-misol. *([1],p84,3.1.5.Yex)* $M_0(2,-1,3)$ nuqtani $\Gamma:\ x^2+y^2+z^2-x+y+z-14=0$ tenglama bilan berilgan sferaga tegishli ekanligini tekshiring va shu nuqtadan sferaga urinma tekislik tenglamasini tuzing.



Yechish: M_0 nuqta koordinatalarini Γ sfera tenglamasiga olib borib quyamiz:

$$2^2+(-1)^2+3^2-2+(-1)+3-14=4+1+9-2-1+3-14=0$$

$\Rightarrow M_0 \in \Gamma$

Urinma tekislik tenglamasi: $u^2 \mapsto uu_0,\quad u \mapsto \frac{1}{2}(u+u_0)$ ya’ni

$$xx_0+yy_0+zz_0-\frac{1}{2}(x+x_0)+\frac{1}{2}(y+y_0)+\frac{1}{2}(z+z_0)-14=0 \Rightarrow$$

$$2x-y+3z-\frac{1}{2}(x+2)+\frac{1}{2}(y-1)+\frac{1}{2}(z+3)-14=0 \Rightarrow 3x-y+7z-28=0$$

Javob: $3x-y+7z-28=0$.

2-misol. *([1], p84., Ex3.1.6)* Ushbu $x+y+z+1=0$ tenglama bilan berilgan tekislikning $x^2+y^2+z^2-x+y+z-14=0$ tenglama bilan berilgan sferaga nisbatan qutb boshini toping.

Yechish. Izlanayotgan qutb boshi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta bo‘lsin. U holda qutb tekisligini qutblashtirish yordamida hosil qilamiz, ya’ni qutb tekisligi

$$xx_0+yy_0+zz_0-\frac{1}{2}(x+x_0)+\frac{1}{2}(y+y_0)+\frac{1}{2}(z+z_0)-14=0$$

yoki unga ekvivalent bo‘lgan

$$x(x_0-\frac{1}{2})+y(y_0+\frac{1}{2})+z(z_0+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(-x_0+y_0+z_0)-28=0$$

[13] [1, 86-бет, 3.1.7]

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tekislik berilgan tekislik bilan ustma-ust tushishi, ya'ni ularning mos koeffitsiyentlari proporsional bo'lishi kerak va biz $x_0 = -\frac{63}{2}$, $y_0 = z_0 = -\frac{127}{4}$ ni hosil qilamiz.

Javob: $x_0 = -\frac{63}{2}$, $y_0 = z_0 = -\frac{127}{4}$

Masala yechish namunasi

1. ([1],p93,Yex3.1.2.) Koordinatalar boshidan utuvchi $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$ aylana urinmasining tenglamasini tuzing.

2. ([1],p94,Yex3.1.4.)Berilgan ikki aylananing radikal o'qi aylanalar markazlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar ekanligini kursating hamda radikal o'q berilgan aylanalar bilan to'g'ri burchak ostida kesishadigan aylanalar markazlarining geometrik o'rni ekanligini isbotlang.

3. ([2])Quyidagi har bir holda aylana S markazining koordinatalarini va r radiusini toping.

1) $x^2 + y^2 - 6x = 0;$

2) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0;$

3) $x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0;$

4) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 4y - 1 = 0.$

4. ([2]) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ aylanaga nisbatan $A(3,1), B(1,0), C(-2,0)$ *va* $D(-2,1)$ nuqtalarning vaziyati aniqlansin.

5. ([([2])Markazi $2x - y + 1 = 0$ to'g'ri chiziqda yotuvchi va (2,1), (3,4) nuqtalardan o'tuvchi aylana tenglamasi tuzilsin.

6. ([2]) $x - y + 2 = 0$, $7x + y = 0$ to'g'ri chiziqlarga urinuvchi, radiusi $r = \sqrt{2}$ ga teng bo'lgan aylana tenglamasi tuzilsin.

7. ([2]) $A(-1,0)$, $B(2,4)$ nuqtalarni tutashtiradigan AB kesma $ctg\alpha = 3$ burchak ostida ko'rinadigan nuqtalarning geometrik o'rni topilsin.

8. ([2]) $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziqning $x^2 + y^2 = R^2$ aylanaga urinma bo'lishi uchun zaruriy va yetarli sharti topilsin.

9. ([2],1542.) Quyidagi aylananing markazi aniqlansin.
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, Ax + By + Cz + D = 0$

10. ([2],1543) A(3;0;4), B(3;5;0),C(3;4;4),D(5;4;6) nuqtalarning (x-1)2+(y+2) 2+(z-1) 2=49 sferaga nisbatan vaziyati aniqlansin.

11. ([2],1544) Quyidagi tekistliklarning ushbu (x-1)2+(y-2) 2+(z-4) 2=25 sferaga nisbatan vaziyati aniqlansin.

12. 1) 2x+2y+z+2=0,

13. 2) 2x+2y+z+5=0,

14. 3) 2x+2y+z+11=0.

15. to‘g‘ri chiziqqa qo‘shma bo‘lgan diametrial tekisligining tenglamasi tuzilsin.

16. ([2],1546) ([2],1547) x2 +y2+z2- R2=0 sferaning S(x0 y0 z0) nuqtadan o‘tuvchi vatarlari o‘rtalarining geometrik o‘rni topilsin.

17. ([2],1549) (x-a)2+(y-b) 2+(z-c)2=R2 sferaning M0 (x0 y0 z0) nuqtadan o‘tuvchi vatarlari o‘rtalarining geometrik o‘rni topilsin.

18. ([2],1550.) S(x0 y0 z0) nuqtadan x2 +y2+z2= R2 sferaga o‘tkazilgan urinma tekislikka tushirilgan perpendikularlar asoslarinig geometrik o‘rni topilsin.

19. ([2],1552.) (x-a)2+(y-b) 2+(z-c)2=R2 sferaga M0 (x0 y0 z0) nuqtada o‘tkazilgan urinma tekislik tenglamasi tuzilsin.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. ([1],p93,Yex3.1.1.)Tekislikda $(x-1)^2+y^2=4$ tenglama bilan berilgan aylana va $P(2,-\frac{1}{2})$ nuqtani qaraymiz, i) P nuqtani aylaninig ichki nuqtasi ekanligini ko‘rsating va o‘rtasi P nuqtada bo‘lgan d vatar tenglamasini tuzing.

ii) Aylananing d to‘g‘ri chiziqqa nisbatan M qutbini toping va shu nuqtadan o‘tuvchi aylananing urinmalar juftining kvadratik tenglamasini tuzing

2. ([1],p94,Yex3.1.3.)$x^2+y^2=16$, $(x-5)^2+y^2=9$ aylanalar orasidagi burchakni toping.

3. ([1],p94,Yex3.1.6.).AB ва CD – Γ aylananing o‘zaro ortogonal diameterlari bo‘lib, C nuqtadan o‘tuvchi d to‘g‘ri chiziq Γ aylanani N nuqtada kesib o‘tsin hamda AB bilan kesishish nuqtasi M bo‘lsin. Γ aylanani N nuqtasidan o‘tuvchi urinmasi bilan M nuqtadan AB parallel qilib o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq kesishish nuqtalarining geometrik o‘rni

Γ aylananing D nuqtasidagi o‘rinmasi bilan ustma-ust tushishini kursating.

4. ([2])Markazi $S(-1,3)$ nuqtada va radiusi $r=4$ bo‘lgan aylana tenglamasi tuzilsin.

5. ([2])Koordinatalari quyidagi:

1) $(x-1)^2+(y-3)^2 \geq 25$

2) $16 \leq (x-1)^2+(y+3)^2 \leq 25,$

3) $(x-1)^2+(y-2)^2 \leq 25, \quad (x-4)^2+(y-6)^2 \leq 9$

4) $x^2+y^2-6x \leq 0, \quad y \geq 0$

5) $x^2+y^2-4y \leq 0, \quad |x| \geq 1$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi nuqtalar tekislikda qanday joylashadi?

6. ([2]) Markazi Ox o‘qida bo‘lgan va Oy o‘qiga urinuvchi aylananing tenglamasi tuzilsin.

7. ([2])$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ aylana qanday shart bajarilaganda koordinatalar boshidan o‘tadi?

8. ([2])$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ tenglama qanday shart bajarilganda aylanani aniqlaydi?

9. 2])Markazi (1;-3) nuqtada va (3;5) nuqtadan o‘tuvchi aylananing tenglamasi tuzilsin.

10. ([2])Koordinatalar o‘qlariga urinuvchi, radiusi 3 ga teng aylananing tenglamasi tuzilsin.

11. ([2])Aylana (1,4) , (-7,4) , (2,-5) nuqtalardan o‘tadi. Uning markazi, radiusi va tenglamasi topilsin.

12. ([2])Radiusi $r=\sqrt{5}$ ga teng bo‘lgan, $x+2y-3=0$ to‘g‘ri chiziqqa urinuvchi, markazi Oy o‘qida yotuvchi aylana tenglamasi tuzilsin.

13. ([2])Oy o‘qiga (0;-3) nuqtada urinuvchi va (-2;1) nuqtadan o‘tuvchi aylana tenglamasi tuzilsin.

14. ([2])Markazi (1,1) nuqtada bo‘lib, koordinatalar boshidan o‘tuvchi aylananing tenglamasi tuzilsin.

15. ([2])$x^2+y^2-2x-8y-8=0$ aylana $5x+12y-14=0$ to‘g‘ri chiziq bilan kesishishi natijasida hosil qilgan vatarning uzunligi topilsin.

16. ([2])$(x-5)^2+y^2-9=0$ aylanaga koordinatalar boshidan o‘tkazilgan urinmalar tenglamalari tuzilsin.

17. ([2]) $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$ aylana $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan θ burchak ostida ko'rinsa, shu burchak yarmining sinusi: $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{r}{\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}}$ tenglikdan topilishi isbotlansin.

18. ([2]) (5,0), (4,1) nuqtalardan o'tuvchi va $3x+4y+34=0$ to'g'ri chiziqqa urinuvchi aylana tenglamasi tuzilsin.

Test namunalari

1. $x^2+y^2-6x=0$ aylananing markazi S, radiusi r ni toping.

a) $S(3,0)$, $r=3$
b) $S(0,3)$, $r=4$
c) $S(-3,0)$, $r=2$
d) $S(3,0)$, $r=2$

2. Quyidagi nuqtalardan qaysi biri $x^2+y^2-1=0$ aylanaga tegishli?

a) $S(-1,0)$
b) $T(3,0)$
c) $R(3,1)$
d) $V(-2,0)$

3. $x^2+y^2=1$ aylanaga $M_0(1,0)$ nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasi:

a) $x=1$
b) $x=-1$
c) $y=1$
d) $y=-1$

4. Radiusi $r=3$ markazi $S(3,0)$ nuqtada bo'lgan aylana tenglamasi:

a) $x^2+y^2-6x=0$
b) $x^2+y^2-8x=0$
c) $x^2+y^2-1=0$
d) $x^2+y^2-4x=0$

5. $M(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$ nuqtaning sferik koordinatalarini toping.

a) $M(2,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$
b) $M(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$

c) $M(\sqrt{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$

d) $M(2,0,\frac{\pi}{4})$

6. $M(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$ nuqtaning silindrik koordinatalarini toping.

a) $M(2,\frac{\pi}{4},1)$

b) $M(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$

c) $M(\sqrt{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$

d) $M(2,0,\frac{\pi}{4})$

7. Tekislikdagi qutb va dekart koordinatalari orasidagi bog'lanish qanday formulalar bilan beriladi.

a) $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$

b) $x=\rho\sin\varphi, y=\rho\cos\varphi$

c) $x=\rho tg\varphi, y=\rho ctg\varphi$

d) $x=\sin\varphi, y=\cos\varphi$

8. Nuqtaning qutb koordinatalari berilgan $M(6,\frac{\pi}{2})$. Uning dekart koordinatalari topilsin.

a) (0;6)

b) (3;4)

c) (-2;4)

d) (0'3)

9. M(0;-4) nuqtaning qutb koordinatalari topilsin.

a) $(4;\pi)$

b) $(4;\frac{\pi}{2})$

c) $(1;45^0)$

d) $(4;\frac{3\pi}{2})$

10. a=5, b=3, R=6 bo'lsa, markazi koordinata boshida bo'lgan aylana tenglamasini tuzing.

a) $(x-5)^2+(y-3)^2=36$

b) $(x-5)^2-(y-3)^2=25$

c) $(x-3)^2+(y-5)^2=16$

d) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=25$

11. $x^2+y^2-2x+6y-15=0$ aylananing markazini va radiusini topting.

a)C(1;-3), R=5

b)C(-1;3), R=5

c)C(2;6), R=25

d)C(-1;-3), R=15

12. $x^2+y^2+8x-4y-5=0$ aylananing markazini va radiusini toping.

a)C(-4;2), R=5

b)C(-4;4), R=5

c)C(8;-2), R=25

d)C(-4;4), R=25

13. $x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)=22$ tenglama qanday sirtni tasvirlaydi?

a)Sfera

b)Giperbolik paraboloid

c)Ikki pallali giperboloid

d)Ellipsoid

14. Quyidagi sfera markazining koordinatalari va radiusi aniqlansin. $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$

a)*C(6;-2;3), R=7*

b)*C(-6;-2;-3), R=7*

c)*C(-6;-2;3), R=49*

d)*C(6;-2;-3), R=14*

15. $x^2+y^2+z^2=r^2$ sferaga $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtada o'tkazilgan urinma tekislik tenglamasini ko'rsating.

a) $xx_0+yy_0+zz_0-r^2=0$

b) $xx_0+yy_0+zz_0+r^2=0$

c) $xx_0-yy_0-zz_0-r^2=0$

d) $(x-x_0)+(y-y_0)+(z-z_0)-r^2=0$

16. *A(3;0;4), B(3;5;0), C(3;4;4), D(5;4;6)* nuqtalarning qaysi biri $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=49$ sferaning ichida yotadi?

a)*A(3;0;4)*

b)*B(3;5;0)*

c)*C(3;4;4)*

d)*D(5;4;6)*

7-§. Ikkinchi tartibli sirtlarning umumiy nazariyasi

Reja:

1. Ellipsoid
2. Giperboloidlar
3. Paraboloidlar
4. Chiziqli sirtlar

1^0. Ellipsoid[14]

Fazoda dekart koordinatalari sistemasi kiritilgan bo'lib, unda ikkinchi darajali $F(x,y,z)$ ko'phad yordamida berilgan

$$F(x,y,z)=0 \qquad (1)$$

tenglamani qaraylik. Fazoda koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ikkinchi tartibli sirt deb ataladi.

Ta'rif-1. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u ellipsoid deb ataladi.Bu tenglamada $a \geq b \geq c > 0$ *munosabat bajarilishi talab qilinadi.*

Ellipsoid tenglamasidan ko'rinib turibdiki, u koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazidir.

Ellipsoidning shaklini chizish uchun uning koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesimini qaraymiz.Masalan,uni $z=h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, $|h|<c$ bo'lganda kesimda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi.Bu tenglamani

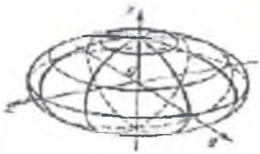
$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1$$

---

[14] [1,103-105 pages]

ko‘rinishda yozish mumkin.

Xuddi shunday, ellipsoidni Oxz, Oyz tekisliklariga parallel tekisliklar bilan bilan kessak, kesimda ellipslar hosil bo‘ladi. Yuqoridagilarni hisobga olib,ellipsoidni chizmada tasvirlashimiz mumkin.



Chizma-1

Ta’rif-2. *Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (3)$$

ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lsa , u ikki pallali giperboloid deb ataladi.Bu tenglamada $a \geq b > 0$, $c > 0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Ikki pallali giperboloid tenglamasidan ko‘rish mumkinki, uchinchi o‘zgaruvchi $z \leq c$ va $z \geq c$ tengsizliklarni qanoatlantirishi kerak. Demak

ikki pallali giperboloid ikki qismdan iborat va uning nomi shakliga mosdir. Agar ikki pallali giperboloidni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, $|h| > c$ bo‘lganda kesimda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo‘ladi.Bu ellipsning yarim o‘qlari mos ravishda

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, \quad b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$$

kattaliklarga tengdir.

Agar ikki pallali giperboloidni $y = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, har qanday h uchun kesimda

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{h^2}{b^2}+1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo‘ladi. Bu giperbolaning yarim o‘qlari mos ravishda

$$c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}\ ,\quad a\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}$$

kattaliklarga tengdir.

Xuddi shunday ikki pallali giperboloidni $x=h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, har qanday h uchun kesimda

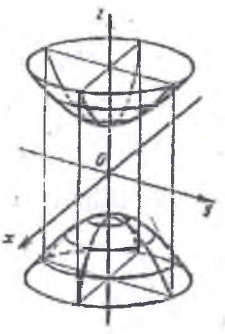
$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}+1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo‘ladi. Bu giperbolaning yarim o‘qlari mos ravishda

$$c\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\ ,\quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}$$

kattaliklarga tengdir.

Bundan tashqari (3) tenglamadan ko‘rish mumkinki, giperboloid koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan,koordinata boshi esa uning simmetriya markazi bo‘ladi.Bularni hisobga olib, uni chizmada tasvirlashimiz mumkin.



Chizma-2. Ikki pallali giperboloid

Ta’rif-3. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4)$$

ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lsa , u bir pallali giperboloid deb ataladi.Bu tenglamada $a \geq b > 0$, $c > 0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Bir pallali giperboloidning tenglamasidan ko‘rish mumkinki, u koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazi bo‘ladi. Bir pallali giperboloidni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, har qanday h uchun kesimda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}+1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo‘ladi. Bu ellipsning yarim o‘qlari mos ravishda

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\ , \qquad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

kattaliklarga tengdir.Agar $h = 0$ bo‘lsa, kesimda eng kichkina ellips hosil bo‘ladi. Bu ellips bir pallali giperboloidning bo‘g‘zi deb ataladi.

Bir pallali giperboloidni $x = h,\ y = h$ tenglama bilan aniqlangan tekisliklar bilan kessak, mos ravishda $|h| < a$ va $|h| < b$ bo‘lganda kesimda

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2} \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}$$

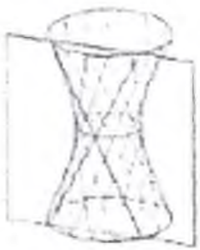
tenglamalar bilan aniqlanuvchi giperbolalar hosil bo‘ladi.Bu giperbolalardan birinchisining yarim o‘qlari mos ravishda

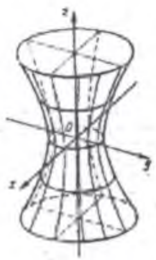
$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\ , \qquad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

kattaliklarga tengdir. Agar $|h| = a$ yoki $|h| = b$ bo‘lsa, kesimda mos ravishda

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \text{ va } \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar hosil bo‘ladi. Bu faktlarni hisobga olib, bir pallali giperboloidni chizmada tasvirlashimiz mumkin





Chizma-3

Ta'rif-4. Sirtning xa an shu sirtda yotuvchi to'g'ri chiziq o'tsa, bunday sirt chiziqli sirt deyiladi.

Sirt chegaralagan bo'lsa,unda to'g'ri chiziq yotmaydi va shuning uchun u chiziqli sirt bo'lmaydi. Demak ellipsoid chiziqli sirt bo'lmaydi.

Teorema. Bir pallali giperboloid chiziqli sirt bo'lib, uning har bir nuqtasidan giperboloidda yotuvchi ikkita to'g'ri chiziq o'tadi.

Paraboloidlar

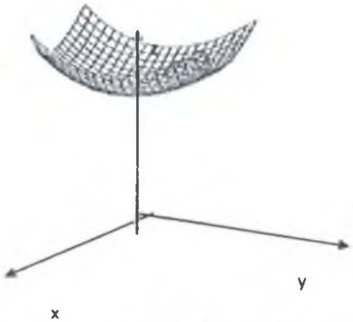
Ta'rif-5. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u elliptik paraboloid deb ataladi. Bu tenglamada p, $q>0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Elliptik paraboloidning tenglamasidan ko'rish mumkinki,koordinata boshi unga tegishli, yOz va xOz tekisliklari elliptik paraboloidning

simmetriya tekisliklari bo'ladi. Elliptik paraboloidni $z=h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, $h>0$ bo'lganda kesimda yarim o'qlari mos ravishda $\sqrt{2hp}$, $\sqrt{2hq}$ kattaliklarga teng bo'lgan ellips hosil bo'ladi. Elliptik paraboloidni $x=h$, $y=h$ tenglamalar bilan aniqlangan tekisliklar bilan kessak, kesimda fokal parametrlari mos ravishda p ,q kattaliklarga teng bo'lgan parabolalar hosil bo‘ladi.Bu parabolalarning uchlari mos ravishda $\left(0, h, \frac{h^2}{2q}\right)$ va $\left(h, 0, \frac{h^2}{2p}\right)$ nuqtalarda joylashgan. Bu xossalarni hisobga olib, elliptik paraboloidni chizmada tasvirlashimiz mumkin.



Chizma-6.

Ta’rif-6. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (4)$$

ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lsa , u giperbolik paraboloid deb ataladi. Bu tenglamada $p > 0, q > 0$, munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Giperbolik paraboloid ham yOz va xOz tekisliklarlarga nisbatan simmetrik joylashgandir. Agar giperbolik paraboloidni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, $h > 0$ bo‘lganda kesimda yarim o‘qlari mos ravishda

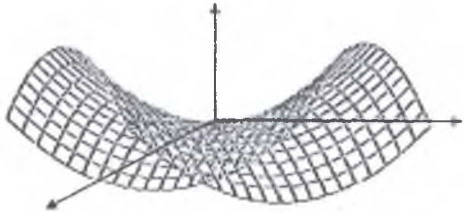
$$\sqrt{2hp}, \sqrt{2hq}$$

kattaliklarga teng bo‘lgan giperbola hosil bo‘ladi. Agar $h < 0$ bo‘lsa, kesimda haqiqiy o‘qi Ox o‘qqa, mavhum o‘qi Oy o‘qqa parallel va yarim o‘qlari mos ravishda $\sqrt{-2hq}$, $\sqrt{-2hp}$ kattaliklarga teng bo‘lgan giperbola paydo bo‘ladi. Kesuvchi tekislik xOy tekisligi ustma-ust tushsa, kesimda

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ikkita kesishuvchi to‘g‘ri hosil bo‘ladi.

Giperbolik paraboloidni o‘qiga parallel tekisliklar bilan kesssak kesimda parabolalarni olamiz.



Chizma-7.

Masalan kesuvchi tekislik $x=h$ tenglama bilan berilsa,kesimda fokal parametrlari q ga teng va uchi $\left(h,0,\frac{h^2}{2p}\right)$ nuqtada bo‘lgan parabola hosil bo‘ladi.

[15]***Teorema-1.*** *Giperbolik paraboloid chiziqli sirt bo‘lib, uning har bir nuqtasidan paraboloidda yotuvchi ikkita to‘g‘ri chiziq o‘tadi.*

Isbot. Giperbolik paraboloidga tegishli $M(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va

$$x=x_0+lt$$
$$y=y_0+mt$$
$$z=z_0+nt$$

tenglamalar bilan aniqlangan to‘g‘ri chiziq paraboloidda yotishi uchun

$$\frac{(x_0+tl)^2}{p}-\frac{(y_0+tm)^2}{q}=2(z_0+tn)$$

tenglik parametrning har bir qiymatida bajarilishi kerak.

Bu tenglikni

$$t^2\left(\frac{l^2}{p}-\frac{m^2}{q}\right)+2t\left(\frac{lx_0}{p}-\frac{my_0}{q}-n\right)=0$$

[15] [1, 3.3.8 proposition]

ko‘rinishda yozib, undan

$$\frac{l^2}{p}-\frac{m^2}{q}=0 \quad \text{va} \quad \frac{lx_0}{p}-\frac{my_0}{q}-n=0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklardan $\{l,m,n\}$ yo’nalish uchun

$$l:m:n=\sqrt{p}:u\sqrt{q}:\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu yerda $u=\pm 1$ tenglik bajarilgan. Demak, giperbolik paraboloidning har bir nuqtasidan unda yotuvchi ikkita to‘g‘ri chiziq o‘tadi. Bu to‘g‘ri chiziqlarning parametrik tenglamalarini

$$\begin{aligned} x &= x_0+t\sqrt{p} \\ y &= y_0+ut\sqrt{q} \\ z &= z_0+t\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) \end{aligned} \qquad (5)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu parametrik tenglamalarda

$$\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)\neq 0$$

munosabat bajarilsa,

$$t=t_1=-\frac{z_0}{\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}+u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)$$

bo‘lganda (5) to‘g‘ri chiziqlar $z=0$ tekislikni kesib o‘tadi. Bu tekislikda

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \text{ va } \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \qquad (6)$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi to‘g‘ri chiziqlar ham yotadi. Demak (5) to‘g‘ri chiziq (6) to‘g‘ri chiziqlarning bittasini kesib o‘tadi. Buni aniqlash uchun

(5) ifodalarni (6) tenglamalarga qo‘ysak

$$\left(\frac{x_0+t_1\sqrt{p}}{\sqrt{p}}+u\frac{y_0+ut_1\sqrt{q}}{\sqrt{q}}\right)=\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}+u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)+2t_1=0$$

tenglikni olamiz. Demak (5) to‘g‘ri chiziq

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+u\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \qquad (7)$$

to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tadi. Bu to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamalarini

$$\begin{aligned} x&=\tau\sqrt{p} \\ y&=-\tau u\sqrt{q} \end{aligned} \qquad -\infty<\tau<+\infty$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Yuqoridagi (5) va (7) to‘g‘ri chiziqlarning kesishish $\left(x_0+t_1\sqrt{p},\, y_0+ut_1\sqrt{q}\right)$ nuqtada kesishadi va bu nuqtaga parametrning

$$\tau_1=\frac{x_0+t_1\sqrt{p}}{\sqrt{p}}=\frac{x_0}{\sqrt{p}}+t_1=\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)$$

qiymati mos keladi.

Agar $t'=t-t_1$ belgilashni kiritib, (5) to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamalarini

$$x=x_0+t\sqrt{p}=\left(x_0+t_1\sqrt{p}\right)+(t-t_1)\sqrt{p}=(t'+\tau_1)\sqrt{p}$$

$$y=y_0+tu\sqrt{q}=\left(y_0+t_1u\sqrt{q}\right)+u(t-t_1)\sqrt{q}=u(t'-\tau_1)\sqrt{q}$$

$$z=z_0+t\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)=(t-t_1)\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)=2t'\tau_1$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Agar $\frac{x_0}{\sqrt{p}}-u\frac{y_0}{\sqrt{q}}=0$ bo‘lsa, giperbolik paraboloidning (4) tenglamasidan $z_0=0$ tenglik kelib chiqadi. Demak, bu holda (5) to‘g‘ri chiziq $z=0$ tekislikda yotadi.

Misollar

1. **[2].** Markazi *C(a,b,c)* nuqtadagi, *r* radiusli sfera tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

Bu tenglama sferaning normal tenglamasi deyiladi. Agar sfera markazi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushsa, normal tenglama quyidagi

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + 2Bx + 2Cy + 2Dz + E = 0$$

tenglama

$$A \neq 0 \; B^2 + C^2 + D^2 - AE > 0$$

shartda markazi $\left(-\frac{B}{A}, \; -\frac{C}{A}, \; -\frac{D}{A}\right)$ nuqtadagi va radiusi $r=$ $\sqrt{\frac{B^2 + C^2 + D^2 - AE}{A^2}}$ ga teng bo‘lgan aylanani aniqlaydi.

M nuqtaning radiusi *r*, markazi *C* nuqtada bo‘lgan sferaga nisbatan darajasi deb

$$u = d^2 - r^2$$

songa aytiladi. Bu yerda $d = MC$ son *M* nuqtadan *C* markazgacha bo‘lgan masofa.

Agar *M* nuqta sfera tashqarisida yotsa, bu nuqtaning sferaga nisbatan darajasi musbat sondir. Bu son M nuqtadan sferaga o‘tkazilgan urinma uzunligining kvadratiga teng. Agar *M* nuqta sfera ichida yotsa, bu nuqtaning sferaga nisbatan darajasi manfiy son bo‘ladi va absolut qiymati bo‘yicha $MP \cdot MQ$ ko‘paytmaga teng. *MP*, *MQ* kesmalar *M* nuqtadan o‘tuvchi ixtiyoriy vatar bo‘laklarining uzunliklariga teng.

Agar M nuqta sferada yotsa, bu nuqtaning sferaga nisbatan darajasi nolga teng. M(x,y,z) nuqtaning markazi C(a,b,c) nuqtada yotuvchi va radiusi *r* ga teng sferaga nisbatan darajasi

$$u = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2$$

formuladan aniqlanadi.

Konsentrik bo‘lmagan ikkita sferalarga nisbatan teng darajali nuqtalarning geometrik o‘rni tekislikdan iborat. Bu tekislik ikkita sferaning radikal tekisligi deyiladi. Agar sferalar kesishsa, radikal tekislik ularning umumiy aylanasi orqali o‘tadi.

Ikkita sfera tenglamalarini qaraylik:

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 - r_1^{\,2} = 0,$$
$$(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2 - r_2^{\,2} = 0$$

va ularning chap tomonlarini u_1, u_2 deb belgilaylik.

$l_1u_1 + l_2u_2 = 0$ tenglama l_1, l_2 sonlar bir vaqtda nolga teng bo'lmagan holda sfera yoki tekislikni aniqlaydi. Agar sferalar kesishsa, bu tenglama ularning umumiy aylanasidan o'tadigan sferani yoki tekislikni ifoda etadi. $u_1 = u_2$ tenglama radikal tekislikni aniqlaydi.

2.[2]. Quyidagi sfera markazining koordinatalari va radiusi aniqlansin.

1) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$,
2) $x^2+y^2+z^2+8x=0$,
3) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$,
4) $x^2+y^2+z^2-6z-7=0$.

3. [2]. Quyidagi aylana markazining koordinatalari va radiusi aniqlansin.

$x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0$
$2x+2y+z+1=0$

4. [2]. Quyidagi aylananing markazi aniqlansin.

$x^2+y^2+z^2=R^2, Ax+By+Cz+D=0$

5.[2]. $A(3;0;4)$, $B(3;5;0)$, $C(3;4;4)$, $D(5;4;6)$ nuqtalarning $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=49$ sferaga nisbatan vaziyati aniqlansin.

6.[2]. Quyidagi tekistliklarning ushbu $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=25$ sferaga nisbatan vaziyati aniqlansin.

1) $2x+2y+z+2=0$,
2) $2x+2y+z+5=0$,
3) $2x+2y+z+11=0$.

7.*[2]. O'qlari koordinata o'qlaridan iborat bo'lgan va, $x^2+y^2+z^2=9$, $z=x$ aylanadan hamda $M(3, 1,1)$ nuqtadan o'tgan ellipsoid tenglamasi tuzilsin.

8.[2]. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{75}=1$ ellipsoidning $M(3,2,5)$ nuqtasidagi urinma tekisligi tenglamasi tuzilsin.

9.[2]. * $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikning $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidga urinishi uchun zaruriy va yetarli shart topilsin.

10[2]. . * $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikning $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoid bilan kesishishi uchun qanday shartning bajarilishi zarur va yetarli?

Test namunalari

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ tenglama bilan berilgan sirtning $x=2a$ tekislik bilan kesimida qanday chiziq hosil bo'ladi?
   a) $\varnothing$
   b) Ellips
   c) To'g'ri chiziq
   d) parabola
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ tenglama bilan berilgan sirtni qaysi tekislik bilan kesimida parabola hosil bo'ladi?
   a) $x=2a$
   b) $z=2a$
   c) $z=a$
   d) Ushbu sirt kesimida parabola hosil bo'lmaydi
3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ sirtni qaysi tekislik bilan kesimida ellips hosil bo'ladi?
   a) $z=2$
   b) $x=2a$
   c) $y=b$
   d) Ushbu sirt kesimida ellips hosil bo'lmaydi
4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ sirtni qaysi tekislik bilan kesimida giperbola hosil bo'ladi?
   a) $z=2$
   b) $x=2a$
   c) $y=b$
   d) Ushbu sirt kesimida giperbola hosil bo'lmaydi
5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ sirtning $z=2$ tekislik bilan kesimida qanday chiziq hosil bo'ladi?
   a) giperbola
   b) Ellips
   c) To'g'ri chiziq
   d) Parabola

6. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ sirtning $y=b$ tekislik bilan kesimida qanday chiziq hosil bo‘ladi?

a) Parabola
b) giperbola
c) Ellips
d) To‘g‘ri chiziq

7. Sferani markazidan o‘tuvchi tekislik bilan kesganda … hosil bo‘ladi.

a) Aylana
b) Ellips
c) Nuqta
d) To‘g‘ri chiziq

8. Sferani markazidan o‘tuvchi tekislik bilam kesganda hosil bo‘lgan aylananing radiusi …

a) berilgan sfera radiusiga teng
b) berilgan sfera radiusidan ikki barobar katta
c) berilgan sfera radiusining yarmiga teng
d) aniqlab bo‘lmaydi

9. Giperbola quyidagi sirtning kesimidir:

a) konus, bir pallali giperboloid, konus,
b) ellipsoid,bir pallali giperboloid,
c) elliptik paraboloid
d) doiraviy silind, konus

10. Parabola quyidagi sirtning kesimidir:

a) konus, elliptik paraboloid
b) konus, ellipsoid
c) bir pallali giperboloid, elliptik paraboloid
d) doiraviy silind, konus

11. Ellips quyidagi sirtning kesimidir:

a) konus, ellipsoid
b) Silind, giperbolik paraboloid
c) Konus, parabolik silindr
d) Parabolik silindr, ellipsoid

12. Elliptik paraboloidning tekis kesimlarida qanday chiziqlar hosil bo‘ladi?

a) ellips va parabola

b) ellips va giperbola
c) giperbola va parabola
d) parabola

13. Doiraviy silindrning tekis kesimlari nimalardan iborat? 1. aylana, 2. Ellips, 3. Parabola, 4. Ikkita parallel to‘g‘ri chiziq, 5.to‘g‘ri chiziq

a) 1,2,4,5
b) 1,2,3,4
c) 1,3,4,5
d) 2,3,4,5

14. Giperbolik paraboloidning tekis kesimlari nimalardan iborat? 1. giperbola, 2. Ellips, 3. Parabola, 4. Ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq, 5.to‘g‘ri chiziq

a) 1,3,4
b) 1,2,3
c) 3,4,5
d) 1,4,5

15. Bir pallali giperboloidning tekis kesimlari nimalardan iborat? 1. giperbola, 2. Ellips, 3. Parabola, 4. Ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq, 5.to‘g‘ri chiziq

a) 1,2,4
b) 1,2,3
c) 3,4,5
d) 1,4,5

8-§. Ikkinchi tartibli konus kesimlarining umumiy nazariyasi (Ellips, giperbola va parabolaning kanonik tenglamalari)

Reja:

1. Konus va uning kesimlari
2. Parabola
3. Ellips
4. Giperbola

Konus va uning kesimlari[16]

Ta’rif. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini biror dekart

[16] [1, 96-103-betlar]

koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u konus deb ataladi.Bu tenglamada $a \geq b > 0$, $c > 0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

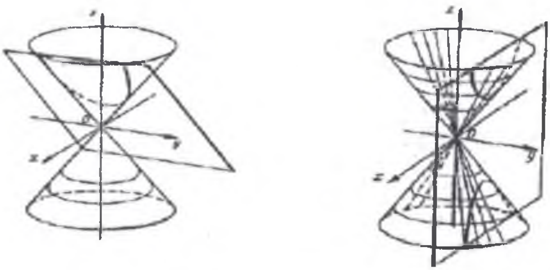
Konus tenglamasidan ko'rinib turibdiki,u koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazidir.Bundan tashqari,agar $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta konusga tegishli bo'lsa, $O(0,0,0)$ va $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqdagi har bir nuqta konusga tegishlidir. Haqiqatan ham, bu to'g'ri chiziqqa tegishli nuqta (tx_0, ty_0, tz_0) ko'rinishga ega va bevosita

$$\frac{(tx_0)^2}{a^2}+\frac{(ty_0)^2}{b^2}-\frac{(tz_0)^2}{c^2}=t^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)=0$$

tenglikni tekshirib ko'rish mumkin.

Konusning har bir yasovchisi bu ellipsni bir marta (faqat bitta nuqtada) kesib o'tadi. Konusda yotuvchi va bu xossaga ega bo'lgan chiziqlar konusning yasovchisi deyiladi. Bu ellipslarning markazlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq konusning o'qi deyiladi.

Yuqoridagi kanonik tenglamada konusning o'qi Oz o'qi bilan ustma-ust tushadi. Koordinata boshi ham konusga tegishli, konusning hamma yasovchilari bu nuqtadan o'tadi. Konusning hamma yasovchilari o'tuvchi nuqta uning uchi deb ataladi.



Ta'rif-4. Konusni uning uchidan o'tmaydigan tekisliklar bilan kesish natijasida hosil bo'lgan chiziqlar konus kesimlar deyiladi.

Teorema-2. Aylanadan boshqa hamma konus kesimlar tekislikda berilgan nuqtagacha bo‘lgan masofasining berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofasiga nisbati o‘zgarmas bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rnidir.

Isbot. Konusni α tekislik bilan kesganimizda hosil bo‘lgan chiziqni γ bilan belgilaylik. Konusga ichki chizilgan va α tekislikka urinuvchi sferaning tekislik blan kesishish nuqtasini F bilan belgilaymiz. Ichki chizilgan sfera konusga aylana bo‘ylab urinadi. Bu aylana yotuvchi tekislikni ω bilan belgilaymiz. Konus kesimga tegishli ixtiyoriy M nuqta olib, undan o‘tuvchi yasovchi bilan ω tekislikning kesishish nuqtasini B bilan belgilaymiz. Konus kesimga tegishli M nuqtadan α va ω tekisliklar kesishishidan hosil bo‘lgan δ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar o‘tkazamiz. Sferaga M nuqtadan o‘tkazilgan urinmalar kesmalari bo‘lgani uchun $FM = BM$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Berilgan M nuqtadan ω tekislikgacha bo‘lgan masofani $h(M)$ bilan belgilasak, $AM = \frac{h(M)}{\sin\varphi}$ $BM = \frac{h(M)}{\sin\psi}$ tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda φ - α va ω tekisliklar orasidagi burchak, ψ - konus yasovchis va ω tekislik orasidagi burchak, A nuqta esa M nuqtadan δ to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyar asosidir. Yuqoridagi tengliklardan

$$\frac{FM}{AM} = \frac{BM}{AM} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = e$$

munosabatni olamiz. Bu munosabatdan ko‘rinib turibdiki, $\frac{FM}{AM}$ nisbat M nuqtaga bog‘lik emas. Teorema isbotlandi.

Konus kesim uchun F nuqta uning fokusi δ to‘g‘ri chiziq esa direktrisa deyiladi. Yuqoridagi nisbat 1 dan kichik yoki teng bo‘lganda konus kesimning hamma nuqtalari fokus bilan birgalikda direktrisaning bir tarafida yotadi. Haqiqatdan ham direktrisaning boshqa tarafida yotuvchi M' nuqta uchun

$$\frac{FM'}{AM'} > \frac{BM'}{AM'} \geq 1$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Agar yuqoridagi nisbat 1 dan katta bo‘lsa, direktrisaning har ikkala tarafida konus kesimga tegishli nuqtalar bor. Demak, bu holda konus kesim ikki qismdan iborat .

Biz bilamizki, agar $e<1$ bo‘lsa konus kesim ellips bo‘ladi. Agar $e=1$ bo‘lsa, konus kesim parabola bo‘ladi. Konus kesim uchun $e>1$ bo‘lsa, u giperbola bo‘ladi.

Konusni $z=h$ tenglama bilan aniqlanuvchi tekislik bilan kessak, kesimda yarim o‘qlari mos ravishda $\frac{a}{c}|h|$, $\frac{b}{c}|h|$ kattaliklarga teng bo‘lgan ellips hosil bo‘ladi. Agar biz konusni $x=h$, $y=h$ tenglamalar bilan aniqlangan tekisliklar bilan kessak, kesimda yarim o‘qlari mos ravishda

$$\frac{c}{d}|h|,\quad \frac{a}{d}|h| \text{ va } \frac{c}{a}|h|,\quad \frac{b}{a}|h|$$

kattaliklarga teng bo‘lgan giperbolalar hosil bo‘ladi.

Konus kesimda parabola hosil bo‘lishini ko‘rsatish uchun, uni $z=\frac{c}{a}x+h, h\neq 0$ tenglama bilan aniqlanuvchi tekislik bilan kesamiz. Natijada kesimda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{\left(\frac{c}{a}x+h\right)^2}{c^2}=0$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ikkinchi tartibli chiziqni hosil qilamiz. Koordinatalar sistemasini almashtirish yordamida bu tenglamani

$$y^2=2\frac{hb^2}{ac}\left(x+\frac{ha}{2c}\right)$$

ko‘rinishga keltirsak, uning parabola ekanligini ko‘ramiz.

PARABOLA

Tekislikda biror dekart koordinatalar sistemasida

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad \textbf{(1)}$$

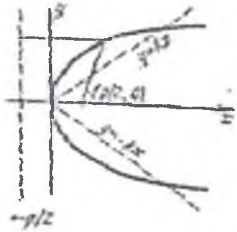
tenglama berilgan bo'lsin. Bu yerda a_{11}, a_{12}, a_{22} koyeffitsiyentlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lishi lozim. Bu shartni $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2>0$ ko'rinishda yozish mumkin.

Ta'rif. Tekislikda koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ikkinchi tartibli chiziq deyiladi.

Misollar. Tekislikda koordinatalari $x^2+y^2=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami faqat bitta nuqtadan iborat.

2) Tekislikda koordinatalari $x^2-y^2=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ikkita to'g'ri chiziqdan iborat.

3) Tekislikda koordinatalari $xy-1=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ikki qismdan iborat va maktab kursidan ma'lumki, u giperbola deb ataldi.



Ta'rif-2. Ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini biror dekart koordinatalar sistemasida

$$y^2=2px, \qquad p>0 \qquad \textbf{(2)}$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u parabola deb ataladi. Tenglamadagi p soni parabola parametri deyiladi.

Misol. Siz maktab kursidan $y=x^2$ tenglama bilan berilgan parabolani yaxshi bilasiz. Bu tenglamani kanonik ko'rinishga keltirish uchun

$$x'=y, y'=x$$

almashtirish bajaramiz. Natijada $y'^2=2\cdot\frac{1}{2}x'$ tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda $p=\frac{1}{2}$.

Tenglamadan ko'rinib turibdiki, agar (x,y) koordinatali nuqta parabolga tegishli bo'lsa, $(x,-y)$ nuqta ham parabolaga tegishli bo'ladi. Demak parabola Ox o'qiga nisbatan simmetrik joylashgandir. Bundan tashqari koordinata boshi parabolaga tegishli, x manfiy qiymatlarni qabul qilmaganligi uchun parabola Oy o'qining o'ng tomonida joylashgan. Bu mulohazalardan foydalanib biz chizmada parabolani quyidagi ko'rinishda tasvirlashimiz mumkin.

Tekislikda $x+\frac{p}{2}=0$ tenglama bilan berilgan to'gri chiziq parabolaning direktisasi , $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ nuqta esa uning fokusi deb ataladi.

Parabola xossalari:

1^0 . Parabolaning ixtiyoriy nuqtasidan direktisagacha bo'lgan masofa fokusgacha bo'lgan masofaga tengdir.

Parabola nuqtasidan $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ nuqtagacha bo'lgan masofani r bilan, direktisagacha bo'lgan masofani d bilan belgilab $r=d$ tenglikni isbotlaymiz.

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2}$$

ifodada $y^2=2px$ tenglikdan foydalansak va $x\geq 0$ munosabatni hisobga olsak

$$r=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=x+\frac{p}{2}$$

formulani hosil qilamiz.

Direktrisagacha bo'lgan masofani hisoblash uchun nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa formulasidan foydalanib

$$d=\left|-x-\frac{p}{2}\right|=x+\frac{p}{2}=r$$

tenglikni hosil qilamiz.

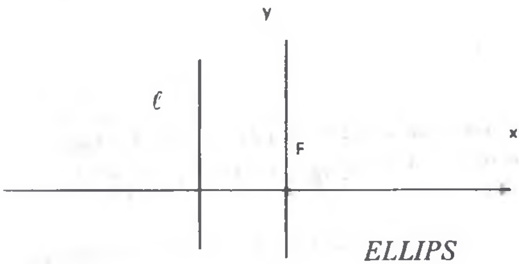
2^0. Parabolaning geometrik aniqlanishi.

Berilgan to'gri chiziq va unda yotmaydigan nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar to'plami paraboladir.

Tekislikda ℓ to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan F nuqta berilgan bo'lsin. Berilgan F nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani p bilan belgilab va F nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar ravishda o'tuvchi to'g'ri chiziqni abssissa o'qi sifatida olib koordinatalar sistemasini kiritamiz. Abssissa o'qining musbat yo'nalishi ℓ to'g'ri chiziqdan F nuqta tarafga yo'nalgan, koordinata boshini ℓ to‘g‘ri chiziq va F nuqta o‘rtasiga quyidagi chizmadagi kabi joylashtiramiz. Ordinata o‘qi esa ℓ to‘g‘ri chiziqqa paralleldir. Natijada ℓ to‘g‘ri chiziq: $x+\frac{p}{2}=0$ tenglamaga, F nuqta esa $\left(\frac{p}{2},0\right)$ koordinatalarga ega bo‘ladi.Tekislikning $M(x,y)$ nuqtasidan ℓ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofaning shu nuqtadan F nuqtagacha bo‘lgan masofaga tengligidan

$$y^2=2px$$

tenglamani hosil qilamiz.



ELLIPS

Ta’rif-3. Ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini birorta Oxy dekart koordinata sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

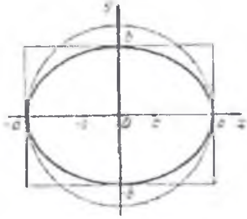
ko‘rinishida yozish mumkin bo‘lsa, u ellips deb ataladi. Bu yerda koeffitsiyentlar $a\geq b>0$ munosabatni qanoatlantiradi.

Bu tenglamani o‘rganish natijasida ellipsni chizamiz va uning xossalarini keltirib chiqaramiz. Tenglamadan ko‘rinib turibdiki, x,y o‘zgaruvchilar $-a\leq x\leq a$, $-b\leq x\leq b$ tengsizliklarni qanoatlantiradi. Abssissa o‘qida yotuvchi $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ nuqtalar ellipsning fokuslari, $x\pm\frac{a}{e}=0$ tenglamalar bilan aniqlanuvchi to‘g‘ri chiziqlar ellipsning direktrisalari deb ataladi. Bu yerda $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $e=\frac{c}{a}$ bo‘lib, e soni ellipsning yekssentrisiteti deyiladi. Tenglamadan ko‘rinib turibdiki, ellips koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik joylashgan bo‘lib, koordinata boshi uning simmetriya markazidir.

Ellips xossalari:

1. Ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas va $2a$ ga tengdir.

Bu xossa bevosita hisoblash yordamida $r_1 + r_2 = 2a$ tenglikni tekshirish yordamida isbotlanadi.



2. Ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning mos direktrisalargacha bo'lgan masofalarga nisbati o'zgarmas va e soniga tengdir.

Bu xossa bevosita $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$ tenglikni tekshirish yordamida isbotlanadi.

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + c^2 + 2xc + b^2 - \frac{x^2b^2}{a^2}} =$$

$$\sqrt{x^2 - \frac{x^2b^2}{a^2} + 2aex + a^2} = \sqrt{x^2\frac{(a^2-b^2)}{a^2} + 2aex + a^2} = |xe + a|$$

$$d_1 = \left|-x - \frac{a}{e}\right| = \left|x + \frac{a}{e}\right| = \frac{|xe+a|}{e} \Rightarrow \quad \frac{r_1}{d_1} = e$$

2. Ellipsning geometrik aniqlanishi.

Tekislikda ikkita nuqta berilgan bo'lsa, bu nuqtalargacha bo'lgan masofalarining yigindisi o'zgarmas songa teng bo'ladigan nuqtalarning geometrik o'rni ellips bo'ladi.

Isbot. Tekislikda F_1, F_2 nuqtalar berilgan.Biz tekislikning nuqtasidan bu nuqtalargacha bo'lgan masofalarni mos ravishda r_1, r_2 ko'rinishda belgilab,

$$r_1 + r_2 = const = 2a$$

tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalarinng geometrik o'rnini aniqlashimiz kerak. Berilgan nuqtalar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilasak, $r_1 + r_2 > 2a$ tengsizlikdan $a > c$ munosabat kelib chiqadi.

Tekislikda dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz.Berilgan F_1, F_2 nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni abssissa o‘qi sifatida olamiz, unda musbat yo‘nalish F_1 nuqtadan F_2 nuqtaga qarab yo‘nalgan bo‘ladi. Koordinata boshini F_1, F_2 nuqtalarning o‘rtasiga joylashtirib, ordinata o‘qi sifatida abssissa o‘qiga perpendikulyar ixtiyoriy o‘qni olamiz. Masofalar uchun

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ , \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ifodalarni yuqoridagi tenglikga qo‘yib,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga oshirib,

hadlarni ixchamlashtirib va yana bir marta kvadratga oshirib

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda $b^2 = a^2 - c^2$ belgilash kiritilgan.

3. Bizga l to‘g‘ri chiziq va unga tegishli bo‘lmagan nuqta F berilgan bo‘lsa, tekislikda berilgan nuqtagacha bo‘lgan masofasining berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofasiga nisbati o‘zgarmas birdan kichik e soniga teng bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni ellips bo‘ladi.

Bu faktni isbotlash uchun berilgan F nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziq o‘tkazib, uni abssissa o‘qi sifatida olamiz. Natijada abssissa o‘qini F nuqta ikki qismga ajratadi. Berilgan F nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofaning e soniga ko‘paytmasini p bilan belgilab, quyidagi tengliklar bilan

$$a = \frac{p}{1-e^2} \text{ va } c = ea, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

a , b, c sonlarni kiritamiz.Koordinata boshini abssissa o‘qining l to‘g‘ri chiziqni kesmaydigan qismida F nuqtadan c birlik masofada joylashtiramiz. Natijada koordinata boshidan l to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa

$$p_1 + c = \frac{p}{e} + ea = \frac{a(1-e^2)}{e} + ea = \frac{a}{e}$$

kattalikka teng bo'ladi. Bu yerda p_1 bilan F nuqtadan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa belgilangan. Demak l to'g'ri chiziq tenglamasi

$$x-\frac{a}{e}=0$$

ko'rinishda bo'ladi. Ikkinchi koordinata o'qini l to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazib, tekislikning $M(x,y)$ nuqtasidan F nuqtagacha bo'lgan masofani r bilan, l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaga d bilan belgilasak, $r=ed$ tenglikdan

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

tenglamani olamiz.

GIPERBOLA

Ta'rif-4. Ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini birorta Oxy Dekart koordinata sistemasida

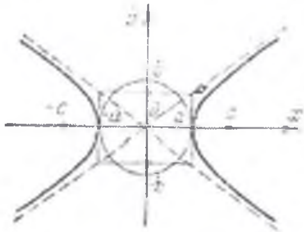
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, bu chiziq giperbola deb ataladi. Bu yerda koeffitsiyentlar $a \geq b > 0$ munosabatni qanoatlantiradi.

Giperbola tenglamasini tekshirish natijasida quyidagilarni olamiz:

1) x,y o'zgaruvchilar $|x| \geq a$, $-\infty < y < \infty$ tengsizliklarni qanoatlantiradi. Absissa o'qidagi $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ nuqtalar giperbolaning fokuslari, $x \pm \frac{a}{e}=0$ tenglamalar bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlar giperbolaning direktrisalari deyiladi.Bu yerda $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $e=\frac{c}{a}>1$ bo'lib, e soni giperbolaning yekssentrisiteti deyiladi.

2) Tenglamada x,y o'zgaruvchilarning faqat ikkinchi darajalari qatnashganligi uchun giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgandir. Bundan tashqari koordinata boshi giperbolaning simmetriya markazidir.



3.Tekislikda ikkita nuqta berilgan bo'lsa, bu nuqtalargacha bo'lgan masofalarni ayirmasining moduli o'zgarmas songa teng bo'ladigan nuqtalarning geometrik o'rni giperbola bo'ladi. Tekislikda F_1, F_2 nuqtalar berilgan. Biz tekislikning nuqtasidan bu nuqtalargacha bo'lgan masofalarni mos ravishda r_1, r_2 ko'rinishda belgilab

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami giperbola ekanligini isbotlaymiz. Berilgan nuqtalar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilaymiz va tekislikda dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz. Berilgan F_1, F_2 nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni abssissa o'qi sifatida olamiz, unda musbat yo'nalish F_1 nuqtadan F_2 nuqtaga qarab yo'nalgan. Koordinata boshini $F_1 F_2$ nuqtalarning o'rtasiga joylashtirib, ordinata o'qi sifatida abssissa o'qiga perpendikulyar ixtiyoriy o'qni olamiz. Masofalar uchun

$$r_1 = \sqrt{(ex + a)^2}, r_2 = \sqrt{(ex - a)^2}$$

ifodalarni yuqoridagi tenglikga qo'yib

$$\left|\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikni kvadratga oshirib va zaruriy algebraik almashtirishlarni bajarib

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

munosabatni olamiz. Bu yerda $b^2 = c^2 - a^2$ belgilash kiritilgan.

Misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ konusni qaysi tekislik bilan kesganda kesimda parabola paydo bo'ladi?

Yechish. Konus kesimda parabola hosil bo'lishini ko'rsatish uchun, uni $z=\frac{c}{a}x+h, h\neq 0$ tenglama bilan aniqlanuvchi tekislik bilan kesamiz. Natijada kesimda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{\left(\frac{c}{a}x+h\right)^2}{c^2}=0$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ikkinchi tartibli chiziqni hosil qilamiz.

Koordinatalar sistemasini almashtirish yordamida bu tenglamani

$$y^2=2\frac{hb^2}{ac}\left(x+\frac{ha}{2c}\right)$$

ko'rinishga keltirsak, uning parabola ekanligini ko'ramiz.

Darsda yechiladigan misollar

1. ([2]).* *(0,-2,2) (-1,0,0)* nuqtalardan va $x^2+y^2-z^2=0$ konusni parabola bo'yicha kesuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

2. ([2]) * (0,-2,2) (-1,0,0) nuqtalardan va $x^2+y^2-z^2=0$ konusni ellips bo'yicha kesib o'tadigan barcha tekisliklar topilsin.

3. ([2]) $2x=2y=z$ to'g'ri chiziq orqali $4x^2-y^2+z^2=0$ sirtni teng tomonli giperbola bo'yicha kesuvchi tekislik o'tkazilsin.

4. ([2])* $x^2+2z^2-2x=0$ sirtning $z-y=0$ tekislikka parallel tekisliklar bilan kesishishidan hosil bo'lgan parabolalarning o'qlari yotuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

5. ([2]) *Elliptik paraboloidni aylanalar bo'yicha kesuvchi, o'zgarmas radiusli sferalar markazlarining geometrik o'rni topilsin.

6. ([2])* *(0,1,1)* nuqtadan o'tgan silindr o'zaro perpendikular tekisliklarda doiraviy kesimlarga ega. Bu kesimlardan biri $x^2+y^2-1=0$, $z=0$ tenglamalar bilan aniqlanadi. Silindr tenglamasi tuzilsin.

7. ([2])* $x^2+y^2+4z^2-1=0$ ellipsoid bilan $x+y+z=0$ tekislikning kesishishidan hosil bo'lgan ellips yarim o'qlarning uzunliklari topilsin.

8. ([2])$x-y=0$ tekislik $2y^2+z^2-2x=0$ paraboloidni aylana bo'yicha kesishishini isbotlang va bu aylana radiusini toping.

9. ([2])* $x^2+2y^2+z^2+4xy-2xz-4yz+2x-6z=0$, $x-z=0$ parabolaning parametri topilsin.

10. ([2])* $Ax+BY+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2=1)$ tekislik bilan $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidning kesishishidan hosil bo‘lgan chiziqning affin turini aniqlang.

11. ([2])* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ konusni teng tomonli giperbolaga bo‘yicha kesuvchi tekisliklar topilsin.

12. ([2])* Ikkinchi tartibli ikkita sirtning kesimi ikkinchi tartibli chiziqlarini o‘z ichiga olsa, bu ikkala sirt uchun umumiy bo‘lgan qolgan nuqtalar to‘plami (agar u bo‘sh bo‘lmasa) ham ikkinchi tartibli chiziq bo‘lishi isbotlansin.

13. ([2])* Ikkinchi tartibli ikki chiziq orqali ikkinchi tartibli sirtni o‘tkazish uchun bu chiziqlar ikkita umumiy nuqtaga ega bo‘lishi zarur va yetarli (umumiy nuqtalar xos va xosmas, haqiqiy yoki mavhum, turli va ustma-ust tushuvchi bo‘lishi mumkin).

14. ([2])* Ikkinchi tartibli uchta chiziq tekisliklari umumiy to‘g‘ri chiziqqa ega bo‘lmasin. Bu tekisliklar juft-jufti bilan ikkita umumiy nuqtaga ega bo‘lsin va bu nuqtalarning hech biri bir vaqtda uchchala chiziqqa tegishli bo‘lmasin. Bu uchta chiziq orqali ikkinchi tartibli sirt o‘tkazish mumkinligi va uning yagonaligi isbot qilinsin.

15. ([2])* Ikkinchi tartibli ikkita sirt bosh o‘qlarining parallel bo‘lishi uchun bu sirtlar tenglamalariga tegishli bo‘lgan kvadratik forma matritsalar o‘rin almashinuvchi bo‘lishi zarur va yetarlidir.

16. ([2])* Elliptik paraboloidning ikkita o‘zaro perpendikular diametrial kesimlarining parametrlariga teskari bo‘lgan sonlar yig‘indisi berilgan paraboloid uchun o‘zgarmas ekanligi ko‘rsatilsin.

17. ([2])* Har biridan o‘zaro perpendikular bo‘lgan yasovchilari o‘tadigan bir pallali giperboloid nuqtalarining geometrik o‘rni aniqlansin. Shu geometrik o‘rin nuqtalarida o‘tkazilgan urinma tekisliklarga parallel bo‘lgan tekisliklar bir pallali giperboloidni qanday egri chiziq bo‘yicha kesadi?

Test namunalari

1. Ikkinchi tartibli konusni tekislik bilan kesganda nuqta paydo bo‘lishi mumkinmi?

a) ha

b) yo‘q
c) To‘g‘ri javob berilmagan
d) bilmayman

2. Ikkinchi tartibli konusni tekislik bilan kesganda kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar paydo bo‘lishi mumkinmi?
a) ha
b) yo‘q
c) To‘g‘ri javob berilmagan
d) bilmayman

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ tenglama bilan berilgan konusni qaysi tekislik bilan kesganda ellips paydo bo‘ladi?
a) $z=2$
b) $z=0$
c) $x=a$
d) $y=a$

4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ tenglama bilan berilgan konusni qaysi tekislik bilan kesganda giperbola paydo bo‘ladi?
a) $x=a$
b) $y=0$
c) $z=0$
d) $z=2$

5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ tenglama bilan berilgan konusni qaysi tekislik bilan kesganda nuqta paydo bo‘ladi?
a) $x=a$
b) $y=0$
c) $z=0$
d) $z=2$

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ tenglama bilan berilgan konusni qaysi tekislik bilan kesganda ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq paydo bo‘ladi?
a) $x=a$
b) $y=0$
c) $z=0$
d) $z=2$

7. Giperbola quyidagi sirtning kesimidir:

a) konus, bir pallali giperboloid
b) konus, ellipsoid
c) bir pallali giperboloid, elliptik paraboloid
d) doiraviy silind, konus

8. Parabola quyidagi sirtning kesimidir:
a) konus, elliptik paraboloid
b) konus, ellipsoid
c) bir pallali giperboloid, elliptik paraboloid
d) doiraviy silind, konus

9. Ellips quyidagi sirtning kesimidir:
a) konus, ellipsoid
b) Silind, giperbolik paraboloid
c) Konus, parabolik silindr
d) Parabolik silindr, ellipsoid

10. Ikkinchi tartibli konusni tekislik bilan kesganda parabola paydo bo'lishi mumkinmi?
a) ha
b) yo'q
c) To'g'ri javob berilmagan
d) bilmayman

11. Ikkinchi tartibli konusni tekislik bilan kesganda giperbola paydo bo'lishi mumkinmi?
a) ha
b) yo'q
c) To'g'ri javob berilmagan
d) bilmayman

12. Ikkinchi tartibli konusni tekislik bilan kesganda ellips paydo bo'lishi mumkinmi?
a) ha
b) yo'q
c) To'g'ri javob berilmagan
d) bilmayman

9-§. Ikkinchi tartibli chiziqlarning qutb koordinata sistemasidagi tenglamalari

Reja:

1. Parabola, ellips va giperbolaning ba'zi koordinatalar sistemasidagi tenglamalari
2. Qutb koordinatalardagi tenglalamalar
   a. Parabola
   b. Ellips
   c. Giperbola

Koordinata boshi chiziqning uchida bo'lgan hol:
a) Ellips kanonik ko'rinishdagi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa,

$$x' = x+a, \qquad y' = y \qquad (2)$$

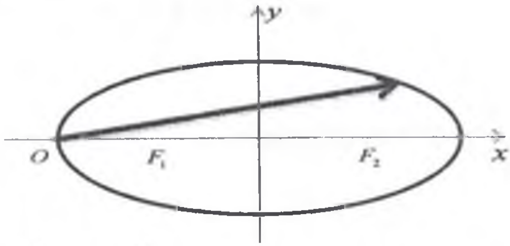
almashtirish bajarsak, yangi $O'x'y'$ koordinatalar boshi ellipsning chap $(-a,0)$ uchida joylashadi va (1) tenglama

$$\frac{(x'-a)^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamani

$$y'^2 = 2px' + qx'^2 \qquad (4)$$

ko'rinishda yozib olamiz.



Bu yerda $p=\frac{b^2}{a}$, $q=-\frac{b^2}{a^2}=e^2-1$ bo'lib, $-1\le q<0$ munosabat bajariladi. Agar giperbolaning

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$

tenglamasida

$$x'=x-a, y'=y \qquad (6)$$

almashtirish bajarsak, tenglama

$$y'^2=2px'+qx'^2 \qquad (*)$$

ko'rinishda bo'lib, koeffitsiyentlar uchun

$$q=\frac{b^2}{a^2}=e^2-1>0, \quad p=\frac{b^2}{a}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Agar $(*)$ tenglamada $q=0$ bo'lsa, parabola tenglamasini hosil qilamiz.

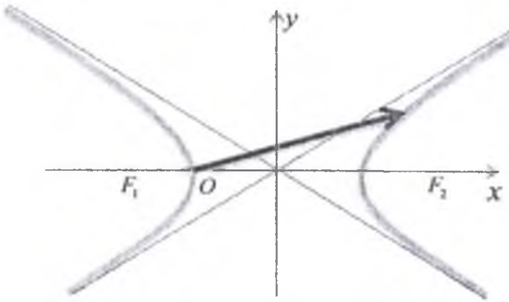
Demak, giperbolalar, ellipslar va parabolalar tenglamalarini $(*)$ ko'rinishda yozish mumkin.

QUTB KOORDINATA SISTEMASIDAGI TENGLAMALAR[17]

a) Parabola

$$y^2=2px$$

kanonik tenglama bilan berilgan bo'lsa, qutbni parabola fokusiga joylashtirib, qutb o'qi sifatida abssissa o'qini olib, parabola tenglamasini qutb koordinatalar sistemasida yozaylik.



Agar biz

[17] [1,78-79 pp]

$$x' = x - \frac{p}{2}, \qquad y' = y$$

almashtirishlar bajarsak

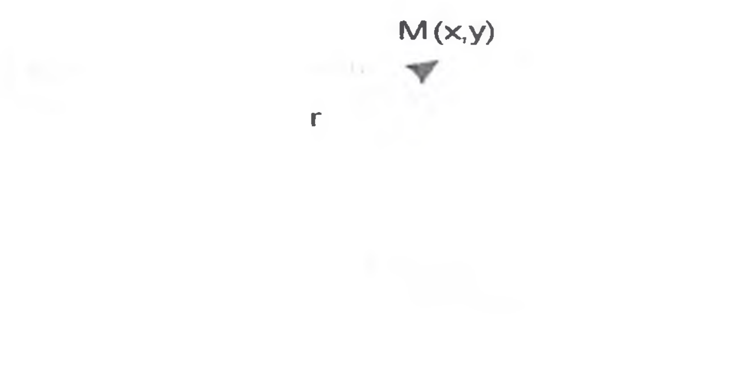
$$x' = r\cos\phi, \qquad y' = r\sin\phi$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda r, ϕ nuqtaning qutb koordinatalari bo‘lib, agar nuqta parabolaga tegishli bo‘lsa, r uning fokal radiusiga tengdir.

Biz $x - \frac{p}{2} = r\cos\phi$ tenglikda r ning nuqtadan direktrisagacha bo‘lgan masofaga tengligini hisobga olib, $r = x + \frac{p}{2}$ ifodani yuqoridagi tenglikka qo‘ysak,

$$r = \frac{p}{1-\cos\phi}$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu munosabat parabolaning qutb



koordinatalar sistemasidagi tenglamasidir.

b) Ellipsning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun qutbni ellipsning chap fokusiga joylashtirib, abssissa o‘qini qutb o‘qi sifatida olamiz.

M (x,y)

Ellipsning

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

kanonik tenglamasini qutb koordinatalar sistemasiga o‘tkazish uchun

$$\begin{cases} x'=x+c \\ y'=y \end{cases}$$

almashtirishlar yordamida yangi $O'x'y'$ dekart koordinatlar sistemasini kiritamiz. Bu koordinatalar sistemasi va qutb koordinatalar orasidagi bog‘lanish boshi

$$x'=r\cos\phi, \qquad y'=r\sin\phi$$

formulalar yordamida beriladi. Ellipsning M nuqtasi uchun chap fokal radius uning qutb radiusiga tengligidan foydalanib

$$MF_1=r=ex+a$$

tenglikni yozamiz. Bu tenglikdagi $r=ex+a$ ifodani

$$x+c=r\cos\phi$$

tenglikka qo‘ysak

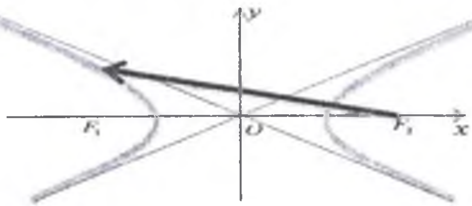
$$r=\frac{p}{1-e\cos\phi}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda

$$p=\frac{b^2}{a}=a-ec$$

tenglikdan foydalandik.

s) Giperbola tenglamasini qutb koordinatalar sistemasida yozish uchun uning har qismi uchun mos ravishda qutb koordinatalar sistemasi kiritamiz. Uning o‘ng qismi uchun qutb boshini giperbolaning o‘ng fokusiga joylashtiramiz va absissa o‘qini qutb o‘qi sifatida olamiz.



Giperbola nuqtasi uchun qutb radiusi r uning o‘ng fokal radiusiga teng bo‘lganligi uchun

$$r = ex - a$$

ifodani hosil qilamiz.

Biz bilamizki, agar dekart $O'x'y'$ koordinatalar sistemasi uchun qutb boshi koordinata boshida joylashgan va qutb o‘qi $O'x'$ abssisa o‘qi bilan ustma-ust tushsa, qutb koordinatalar sistemasi va $O'x'y'$ koordinatalar sistemasi orasidagi bog‘lanish

$$x' = r\cos\phi$$
$$y' = r\sin\phi$$

formulalar yordamida beriladi.

Bu yangi $O'x'y'$ koordinatalar sistemasi va giperbola tenglamasi berilgan Oxy koordinatalar sistemasi orasidagi bog‘lanish esa

$$x' = x - c$$
$$y' = y$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Biz bu tengliklarning birinchisidan foydalanib,

$$x - c = r\cos\phi$$

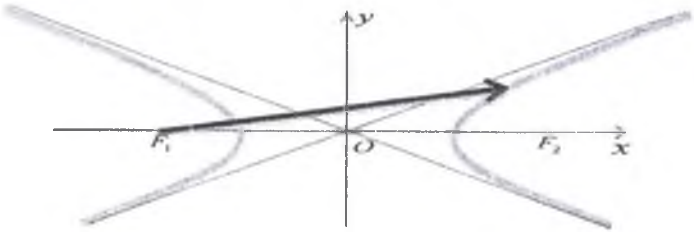
tenglikni hosil qilamiz. Yuqoridagi $r = ex - a$ ifodani bu tenglikga qo‘ysak,

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\phi}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2 - a^2}{a} = ec - a$$

tenglikdan foydalandik.



Biz giperbola chap shoxining tenglamasini qutb koordinatalar sistemasida yozish uchun qutb boshini chap fokusga joylashtiramiz va abssissa o‘qini qarama-qarshi yo‘nalish bilan qutb o‘qi sifatida olamiz. Biz agar

$$x' = -x - c$$

$$y' = y$$

formulalar bilan yangi dekart koordinatalar sistemasi kiritsak,ular uchun

$$x' = r\cos\phi$$

$$y' = r\sin\phi$$

formulalar o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda qurb radius chap fokal radiusga teng bo‘lganligi uchun

$$r = -ex - a$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikdagi r ning ifodasini yuqoridagi formulardan kelib chiqadiagan

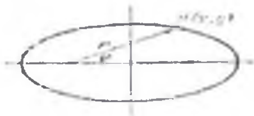
$$-x - c = r\cos\phi$$

tenglikka qo‘yib

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\phi}$$

tenglamani hosil qilamiz.

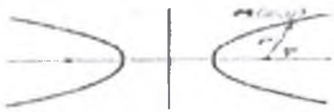
Bu yerda ham



$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2 - a^2}{a} = ec - a$$

tenglik o‘rinlidir.

Demak, qutb koordinatalar sistemasida mos ravishda tanlanganda har qanday ikkinchi tartib chiziq tenglamasini



$$r = \frac{p}{1 - e\cos\phi}$$

ko‘rinishda yozish mumkin ekan. Bu tenglama $e = 1$ bo‘lsa, parabola, $e < 1$ bo‘lganda ellips va nihoyat $e > 1$ bo‘lganda giperbola tenglamasidir.

Masala yechish namunasi

1-misol. Agar F^1M-FM masofaning absolyut kattaligi $2a$=40sm, fokuslar orasidagi masofa 2c=50sm bo‘lsa, giperbola mavhum yarim o‘qining uzunligi b ni toping. Giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing.

Yechish: Berilganlarga ko‘ra a=20sm va c=25sm.

$b^2 = c^2 - a^2$, $\qquad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = \sqrt{625 - 400} = \sqrt{225} = 15$ sm

Demak, mavhum yarim o‘qning uzunligi 15sm ga teng yekan.

Giperbolaning kanonik tenglamasi formulasi - (23) ga a va b larning qiymatlarini qo‘yamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{20^2} - \frac{x^2}{15^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{225} = 1.$$

Giperbolaning izlangan kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{225} = 1$$

dan iborat yekan.

2-misol. Agar giperbola haqiqiy o‘qining uzunligi 8sm. ga, mavhum o‘qining uzunligi yesa 4sm. ga teng bo‘lsa, F_1 va F_2 fokuslari absissalar o‘qi OX da yotgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

Yechish: Shartga ko‘ra $2a$=8 sm va 2b=4 sm. Bulardan a= 4 sm va b= 2 sm. Ushbu qiymatlarni giperbolaning tenglamasi- (23) ga qo‘yamiz va uni soddalashtirib, izlangan tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

3-misol. Giperbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ tenglama bilan berilgan. Uning yekssentrisitetini toping va asimptotalarining tenglamasini tuzing.

Yec***hish***: Masalaning shartiga ko‘ra a^2=25, b^2=24. Bulardan a =5, b=$\sqrt{24}$. Giperbola yekssentrisitetining formulasi – (25) dan foydalanamiz:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{25 + 24}}{5} = \frac{\sqrt{49}}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4.$$

Demak, yekssentrisiteti ye=1,4 ga teng ekan. Endi berilgan qiymatlarni (27) ga qo‘yib, giperbolaning asimptotalarining tenglamasini tuzamiz:

$$y = \pm\frac{b}{a}x \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{24}}{5}x \Leftrightarrow y = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}x.$$

4 – misol. Giperbola $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, uning direktrisalarini toping.

Ye***chish***: Masala shartida a^2=64 va b^2=36 parametrlar berilgan. Ulardan a=8 va b=6 dir. Giperbola direktrisalarining formulasi $x=\pm\frac{a}{e}$ dan ye, ya'ni yekssentrisitetni topamiz;

$$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{64+36}}{8}=\frac{\sqrt{100}}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}.$$

Hosil qilingan qiymatdan foydalanib, giperbolaning direktrisalarini topamiz:

$$x=\pm\frac{a}{e}\Leftrightarrow x=\pm\frac{8}{\frac{5}{4}}\Leftrightarrow x=\pm\frac{32}{5} \quad \text{ёки} \quad x=\pm 6{,}4.$$

Demak, giperbolaning direktrisalari $x=\pm 6{,}4$ dan iborat yekan.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. ([2]) Qutb koordinatalari quyidagi qiymatlarga ega bo'lgan nuqtalar yasalsin:

$(3;\frac{\pi}{6})$, $(1;\frac{5\pi}{3})$, $(5,\frac{7\pi}{6})$, $(0{,}5,\frac{\pi}{2})$, $(2{,}5;\frac{2\pi}{3})$,

$(6,\pi)$, $(3,\frac{\pi}{3})$, $(\sqrt{3},-\frac{\pi}{6})$, $(-2,\frac{\pi}{4})$,

2. ([2]) Tomoni a ga teng bo'lgan muntazam oltiburchak uchlarining qutb koordinatalari aniqlansin; oltiburchakning uchlaridan biri qutb, shu uchidan o'tgan tomoni qutb o'qi deb olinsin.

3. ([2]) Berilgan ikki nuqta orasidagi masofa hisoblansin:

1) $A(2,\frac{\pi}{12})$ va $B(1,\frac{5\pi}{12})$

2) $C(4,\frac{\pi}{5})$ va $D(6,\frac{6\pi}{5})$

3) $E(3,\frac{11\pi}{18})$ va $F(4,\frac{\pi}{9})$.

4.([2]) Qutb koordinatalar sistemasida $A(8;-\frac{2\pi}{3})$ $B(6;\frac{\pi}{3})$ nuqtalar berilgan. AB kesma o'rtasining koordinatalari topilsin.

5.([2]) $A(5;\frac{2\pi}{3})$ nuqta berilgan. 1) A nuqtaga qutbga nisbatan simmetrik bo'lgan B nuqta; 2) A nuqtaga qutb o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan C nuqta topilsin.

6. ([2]) $A(2;\frac{\pi}{6})$, $B(3;\frac{4\pi}{3})$, $C(1;\frac{3\pi}{2})$, $D(5;\pi)$, $E(5,0)$ nuqtalar berilgan. Qutb o'qi qutb atrofida $\frac{3\pi}{4}$ burchakka musbat yo'nalishda burilsa, bu nuqtalarning koordinatalari aniqlansin.

7. ([2]) Uchlaridan biri qutbda bo'lgan, qolgan ikki uchi $(4;\frac{\pi}{9}),(1;\frac{5\pi}{18})$ nuqtalarda joylashgan uchburchak yuzi hisoblansin.

8.([2]) Qutb koordinatalari bilan berilgan $A(2;\frac{\pi}{3}), B(\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}), C(5;\frac{\pi}{2}), D(3;-\frac{\pi}{6})$, nuqtalarning to'g'ri burchakli koordinatalari topilsin; bunda abssissalar o'qi qutb o'qi bilan, koordinatalar boshi qutb bilan ustma-ust tushadi.

9. ([2]) To'g'ri burchakli koordinatalari bilan berilgan $A(-1;1), B(0;2), C(5;0)$ nuqtalarning qutb koordinatalari topilsin.

10. ([2]) M nuqtaning dekart koordinatalari $x=8, y=-6$ bo'lsa, uning qutb koordinatalari topilsin.

11. ([2]) Qutb koordinatalar bilan berilgan $M(10;\frac{\pi}{6})$, nuqtaning dekart koordinatalari topilsin. Bu yerda qutb o'qi Ox o'qiga parallel bo'lib, qutb $O(2;3)$ nuqtada joylashgan.

12. ([2]) Qutb sifatida $O(3;5)$ nuqtani olib, qutb o'qini Oy o'qining musbat yo'nalishiga parallel qilib yo'naltirib, $M_1(9;-1), M_2(5;5-2\sqrt{3})$ nuqtalarning qutb koordinatalari topilsin.

Test namunalari

1. Giperbolaning fokuslari orasidagi masofa 8 ga, direktrisalari orasidagi masofa 6 ga teng bo'lsa, uning yarim o'qlarini aniqlang.

a) $a=2\sqrt{3}$, $b=2$

b) $a=2$, $b=2$

c) $a=2\sqrt{3}$, $b=\sqrt{3}$

d) $a=\sqrt{3}$, $b=2$

2. Ekssentrisiteti $e=2$ bo‘lgan giperbolaning asimptotalari orasidagi burchakni toping.

a) $\alpha=120^0$

b) $\alpha=90^0$

c) $\alpha=45^0$

d) $\alpha=30^0$

3. $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{64}=1$ giperbolaning fokuslarini toping.

a) $F_1(-17,0)$, $F_2(17,0)$

b) $F_1(-17,0)$, $F_2(0,-17)$

c) $F_1(0,-17)$, $F_2(0,17)$

d) $F_1(-15,0)$, $F_2(15,0)$

4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbolaning $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi urinma tenglamasini ko‘rsating.

a) $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$

b) $\frac{x-x_0}{a^2}-\frac{y-y_0}{b^2}=1$

c) $\frac{x-x_0}{a^2}+\frac{y-y_0}{b^2}=0$

d) $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=0$

5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbolaning asimptotalari tenglamalarini ko‘rsating.

a) $y=\pm\frac{b}{a}x$

b) $y=\pm\frac{c}{a}x$

c) $y=\pm\frac{be}{a}x$

d) $y=\pm\frac{a}{e}x$

6. $y^2=6x$ parabolaning direktrisasi tenglamasini toping.

a) $x+1.5=0$

b) $x-1.5=0$

c) $x+12=0$

d) $x-12=0$

7. $y^2 = 2px$ parabolaga $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasidagi urinmasining tenglamasi:

a) $yy_0 = p(x + x_0)$

b) $y - y_0 = p(x - x_0)$

c) $y + y_0 = p(x + x_0)$

d) $yy_0 = p(x - x_0)$

8. Quyidagi nuqtalardan qaysi biri $y^2 = 8x$ tenglama bilan berilgan parabolaga tegishli?

a) $A(2,-4)$

b) $B(4,2)$

c) $M(-2,-4)$

d) $P(-2,4)$

9. $x^2 + y^2 - 6x = 0$ tenglama bilan berilgan aylananing markazi S va radiusi r ni toping.

a) $S(3,0)$, $r = 3$

b) $S(0,3)$, $r = 4$

c) $S(-3,0)$, $r = 2$

d) $S(3,0)$, $r = 2$

10. Quyidagi nuqtalardan qaysi biri $x^2 + y^2 - 1 = 0$ tenglama bilan berilgan aylanaga tegishli?

a) $S(-1,0)$

b) $T(3,0)$

c) $R(3,1)$

d) $V(-2,0)$

10-§. Chiziqlarning asosiy elementlari: shakli, o'lchamlari, simmetriya o'qlari

Reja:

1Chiziqlarning invariantlari
2.Chiziqlarning asosiy elementlari: shakli, o'lchamlari
3.Chiziqlarning asosiy elementlari: simmetriya o'qlari

Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi odatda quyidagi ko'rinishlardan birida yoziladi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 \qquad (1')$$

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1'')$$

(1) ko‘rinishdagi tenglama quyidagi chiziqlarning birini aniqlaydi:

$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ ellips,

$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$ mavhum ellips,

$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$ ikkita mavhum kesishuvchi to‘g‘ri chiziq,

$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ giperbola,

$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$ kesishadigan ikkita mavhum to‘g‘ri chiziq,

$Y^2 = 2pX$ parabola,

$X^2 = a^2,\ a \neq 0$ ikkita parallel to‘g‘ri chiziq,

$X^2 = -a^2,\ a \neq 0$ ikkita mavhum parallel to‘g‘ri chiziq,

$X^2 = 0$ ikkita ustma-ust tushuvchi to‘g‘ri chiziq.

Ushbu

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22} \qquad (4)$$

ifodalar to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasini boshqa to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasiga almashtirishga nisbatan ikkinchi tartibli chiziqning invariantlari deyiladi, bu yerda $a_{12} = a_{21}$ deb hisoblanadi.

Bu esa quyidagini bildiradi: agar biror to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida ikkinchi tartibli chiziq

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

tenglama bilan va boshqa to'g'ri to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida shu chiziq

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+a'=0$$

tenglama bilan berilsa, u holda:

$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}' & a_{12}'\\ a_{21}' & a_{22}'\end{vmatrix},\quad I_1=a_{11}+a_{22}=a_{11}'+a_{22}',$$

$$K_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_1\\ a_{21} & a_{22} & a_2\\ a_1 & a_2 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}' & a_{12}' & a_1'\\ a_{21}' & a_{22}' & a_2'\\ a_1' & a_2' & a'\end{vmatrix}.$$

$I_2=0,\ K_3=0$ bo'lgan holda, ushbu $K_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_1\\ a_1 & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_2\\ a_2 & a\end{vmatrix}$ ifoda ham (aytilgan ma'noda) invariant bo'ladi va u seminvariant deyiladi.

$$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0 \qquad (6)$$

tenglama ***xarakteristik tenglama***[18] deyiladi. Uning λ_1, λ_2 ildizlari doimo haqiqiy.

Haqiqatan (6) kvadrat tenglamaning diskreminanti $D=I_1^2-4I_2$ ga teng bo'lib, bu ifodani ikkinchi tartibli chiziq tenglamasidagi koeffitsiyentlar orqali ifodalasak , $D=(a_{11}-a_{22})^2+a_{12}^2\geq 0$ munosabat bajariladi.

Ikkinchi tartibli chiziqlarni uch guruhga ajratish mumkin.

Birinchi guruhga yagona simmetriya markaziga ega bo'lgan chiziqlar kiradi, ular: ellips, mavhum ellips, kesishadigan ikki mavhum to'g'ri chiziq, giperbola va kesishadigan ikki to'g'ri chiziq.

Ikkinchi tartibli chiziq yagona markazga ega (ya'ni I guruhga tegishli) bo'lishi uchun $I_2\neq 0$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Ikkinchi guruhga simmetriya markaziga ega bo'lmagan chiziqlarni, ya'ni parabolani kiritamiz. Chiziqning parabola bo'lishi uchun ushbu $I_2=0, K_3\neq 0$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Uchinchi guruhga simmetriya markazlari to'g'ri chiziqni tashkil etadigan chiziqlarni kiritamiz, ular: ikkita parallel to'g'ri chiziq, ikkita mavhum parallel to'g'ri chiziq, ustma-ust tushadigan ikkita to'g'ri chiziq, ikkinchi tartibli chiziqning simmetriya markazlari to'g'ri chiziqni tashkil etadigan bo'lishi uchun $I_2=0, K_3=0$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

[18] [1 ,125 p]

CHIZIQLARNING ASOSIY ELEMENTLARI: SHAKLI, O'LCHAMLARI

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini almashtirish natijasida I guruh chiziqlarining tenglamasini

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0 \qquad (7)$$

II guruh chiziqlarining tenglamasini

$$I_1 x^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_2}}\, y = 0 \qquad (8)$$

III guruh chiziqlarining tenglamasini

$$I_1 x^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0 \qquad (9)$$

ko'rinishga keltirish mumkin.

Ikkinchi tartibli chiziqlarning mos guruhlarga tegishli bo'lishining zaruriy va yetarli alomatlari invariantlar orasidagi munosabatlar bilan quyidagicha ifodalanadi:

1. Ellips $I_2 > 0,\ I_1 K_3 < 0$,

Mavhum ellips $I_2 > 0,\ I_1 K_3 > 0$,

Kesishadigan ikki mavhum to'g'ri chiziq $I_2 > 0,\ K_3 = 0$,

Giperbola $I_2 < 0,\ K_3 \neq 0$,

Kesishadigan ikki to'g'ri chiziq $I_2 < 0,\ K_3 = 0$.

2. Parabola $I_2 = 0,\ K_3 \neq 0$.

3. Ikki parallel to'g'ri chiziq

Ikki mavhum parallel to'g'ri chiziq $I_2 = 0,\ K_3 = 0,\ K_2 > 0$,

Ustma-ust tushadigan to'g'ri chiziq $I_2 = 0,\ K_3 = 0,\ K_2 = 0$.

Yuqorida yozilgan ma'lumotlar 1- jadvalda berilgan.

Ellips yoki giperbolaning boshlang'ich koordinatalar sistemasiga nisbatan joylashishi quyidagicha aniqlanadi:

Yangi koordinatalar sistemasining boshi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

sistemaning yechish natijasida topiladi.

Yangi $O'X$ o'qning burchak koeffitsiyenti ($a_{12} \neq 0$ holda)

$$k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \qquad (11)$$

formuladan topiladi, bu yerda λ_1 son xarakteristik tenglamaning yechimi bo‘lib, $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0$ tenglamadagi X^2 oldidagi koeffitsiyentdir.

Agar chiziq ellips bo‘lib λ_1 xarakteristik tenglamaning absolut qiymati jihatdan kichik ildizi bo‘lsa, $k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$ formula ellips katta o‘qining burchak koeffitsiyentini aniqlaydi.

Agar chiziq giperbola bo‘lib, λ_1 xarakteristik tenglamaning K_3 bilan bir xil ishorali ildizi bo‘lsa, u holda: $k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$, $(a_{12} \neq 0)$ formula giperbola haqiqiy o‘qining burchak koeffitsiyentini ifodalaydi.

Agar parabolaning uchi, parametri va o‘qi bo‘yicha botiqlik tomoniga yo‘nalgan vektor ma’lum bo‘lsa, parabolaning boshlang‘ich sistemaga nisbatan joylashishi ma’lum bo‘ladi.

Parabola uchi parabola o‘qi tenglamasi bilan parabola tenglamasini birgalikda yechish natijasida, ya’ni parabola o‘qining

$$a_{11}x + a_{12}y + \frac{a_{11}a_1 + a_{12}a_2}{a_{11} + a_{12}} = 0 \qquad (12)$$

yoki

$$a_{21}x + a_{22}y + \frac{a_{12}a_2 + a_{21}a_1}{a_{11} + a_{21}} = 0$$

tenglamasini parabola tenglamasi bilan birga yechib topiladi.

$$\left\{ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \right\} \qquad (13)$$

sonlardan iborat vektor parabola o‘qiga parallel bo‘lib, botiqlik tomoniga yo‘nalgan. Parabolaning parametri

$$p = \sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}} \qquad (14)$$

formuladan aniqlanadi.

Agar ikkinchi tartibli chiziq ikkita to‘g‘ri chiziqqa ajralsa, bu to‘g‘ri chiziqlar tenglamalarini tuzish uchun chiziq tenglamasining chap tomonini chiziqli ko‘paytuvchilarga ajratib, ularning har birini nolga tenglashtiriladi.

CHIZIQLARNING ASOSIY ELEMENTLARI: SIMMETRIYA O'QLARI

Ikkinchi tartibli chiziq metrikasi g_{11}, g_{12}, g_{22} bilan aniqlangan affin koordinatalar sistemasiga nisbatan berilgan bo'lsin. U holda berilgan affin sistemasini ikkinchi affin sistemaga almashtirishga nisbatan ikkinchi tartibli chiziq invariantlari quyidagi ifodalar bilan aniqlanadi:

$$I_2 = \frac{1}{G}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (15)$$

$$K_3 = \frac{1}{G}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} \qquad (16)$$

$$I_1 = \frac{1}{G}\left(\begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} \\ a_{21} & g_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} \\ g_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right) \qquad (17)$$

bu yerda

$$G = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 .$$

K_2-invariant affin sistemada quyidagi ko'rinishga ega:

$$K_2 = \frac{1}{G}\left(\begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} & a_1 \\ g_{21} & a_{22} & a_2 \\ 0 & a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} & a_1 \\ a_{21} & g_{22} & a_2 \\ a_1 & 0 & a \end{vmatrix}\right). \qquad (19)$$

Affin sistemasida kanonik tenglamalarining koeffitsiyentlari invariantlar orqali xuddi to'g'ri burchakli sistemadagidek ifodalanadi.

Ellips va giperbolaning affin sistemaga nisbatan joylashishi quyidagicha aniqlanadi: markazining koordinatalari (10) tenglamalardan topiladi. Yangi $O'X$ o'qining burchak koeffitsiyenti

$$k = \frac{g_{11}\lambda_1 - a_{11}}{a_{12} - g_{12}\lambda_1} \qquad (20)$$

yoki

$$k = \frac{g_{21}\lambda_1 - a_{21}}{a_{22} - g_{22}\lambda_1} \qquad (21)$$

formuladan topiladi; bu yerda λ_1 -xarakteristik tenglamaning yechimi va u X^2 oldidagi koeffitsiyentdir.

Tasdiq. [19]Agar $x=0$ ikkinchi tartibli chiziqning simmetriya o‘qi bo‘lsa, u holda ikkinchi tartibli chiziq bu to‘g‘ri chiziqni o‘z ichiga oladi yoki uning tenglamasi x ning birinchi tartib bilan qatnashgan hadni o‘z ichiga olmaydi.

Isbot. Ikkinchi tartibli chiziqning simmetriya o‘qi $x=0$ bo‘lsa, u holda (x,y) va $(-x,y)$ nuqtalar bu chiziq tenglamasini qanoatlantiradi. Va bu mulohaza ikkinchi tartibli chiziqning barcha (x,y) nuqtalari uchun o‘rinlidir. Bundan

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{23}y+a_{33}=0,\ a_{12}xy+a_{13}x=0$$

Munosabatlarni olamiz. Bu esa ikkinchi tartibli chiziq tenglamasi berilgan munosabatlardan birinchi yoki ikkinchisi bilan aniqlanishini anglatadi va qolgan barcha koffitsentlar nolgan teng.

Parabolaning joylashishi xuddi to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi bilan ish ko‘rgandek aniqlanadi, faqat o‘qning tenglamasi quyidagi

$$a_{11}x+a_{12}y+\frac{g_{11}a_{12}a_2-g_{12}(a_{12}a_1+a_{11}a_2)+g_{22}a_{11}a_1}{g_{11}a_{22}-2g_{12}a_{12}+g_{22}a_{11}}=0 \qquad (22)$$

yoki

$$a_{21}x+a_{22}y+\frac{g_{11}a_{22}a_2-g_{12}(a_{22}a_1+a_{12}a_2)+g_{22}a_{12}a_1}{g_{11}a_{22}-2g_{12}a_{12}+g_{22}a_{11}}=0 \qquad (23)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Masala yechish namunasi

1-misol. Quyidagi tenglama bilan berilgan chiziqning turi va joylashishi aniqlansin.

$$6xy+8y^2-12x-26y+11=0$$

Yechish.

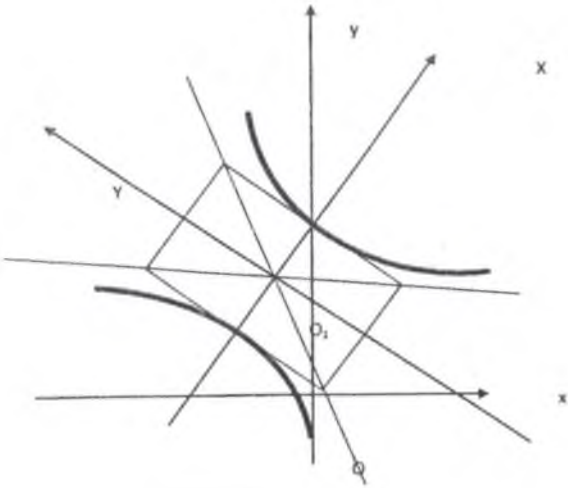
$$I_2=\begin{vmatrix}0 & 3\\ 3 & 8\end{vmatrix}=-9<0;$$

demak bu chiziq-birinchi guruhga tegishli;

$$K_3=\begin{vmatrix}0 & 3 & -6\\ 3 & 8 & -13\\ -6 & -13 & 11\end{vmatrix}=81\neq 0;$$

chiziq giperboladan iborat;

[19] [1.,3.3.21 proposition]



21-chizma

$$I_1 = 0 + 8 = 8.$$

Chiziqning xarakteristik tenglamasi:

$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0.$$

Xarakteristik tenglamaning yechimlari:

$$\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = -1,$$

Almashtirishdan so'ng tenglama $9X^2 - Y^2 + \frac{81}{-9} = 0$ ko'rinishga keladi.

Kanonik tenglamasi esa:

$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{9} = 1.$$

Markazi quyidagi

$$\begin{cases} 3y - 6 = 0, \\ 3x + 8y - 13 = 0 \end{cases}$$

tenglamalardan topiladi. $O'(-1,2)$- nuqta chiziq markazi. $O'X$ o'qning burchak koeffitsiyenti $k = \frac{9}{3} = 3$.

Bu ma'lumotlardan foydalanib, giperbolani chizish mumkin(21-chizma).

2-misol. Quyidagi

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$

Chiziqning tenglamasini kanonik shaklga o'tkazuvchi koordinatalar sistemasini almashtirish formulalari topilsin.

Yechish. Giperbola markazi $O'(-1,2)$ nuqtada $O'X$ o'qning burchak koeffitsiyenti 3 ga teng, demak:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}; \qquad \sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}};$$

Natijada almashtirish formulalari quyidagicha bo'ladi:

$$X = \frac{x-3y}{\sqrt{10}} - 1; \qquad Y = \frac{3x+y}{\sqrt{10}} + 2,$$

bundan

$$X = \frac{x-3y-5}{\sqrt{10}}; \qquad Y = \frac{-3x+y-5}{\sqrt{10}}$$

kelib chiqadi.

3-misol. Quyidagi

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$

chiziqning kanonik koordinatalar sistemasidagi fokuslarining koordinatalari va direktrisa tenglamalari topilsin.

Yechish. Kanonik koordinatalar sistemada chiziq fokuslarining koordinatalari quyidagicha

$$x_{F1} = -\sqrt{10}; \qquad y_{F1} = 0;$$
$$x_{F2} = \sqrt{10}; \qquad y_{F2} = 0;$$

boshlang'ich sistemada esa: $x_{F1} = -2$, $y_{F1} = -1$; $x_{F2} = 0, y_{F2} = 5$.

Kanonik sistemada direktrisalari tenglamalari

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}},$$

boshlang'ich sistemada esa:

$$\frac{x+3y-5}{\sqrt{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}},$$

yoki $x+4y-4=0$, $\quad x+3y-6=0$ ko'rinishda bo'ladi.

4-misol. Quyidagi

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$$

chiziqning shakli va joylashishi aniqlansin:

Yechish.

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad K_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & -7 \end{vmatrix} = -\frac{25}{4};$$

Demak, berilgan chiziq-parabola; $I_1 = 1 + 4 = 5$.

Parametri $\quad p = \sqrt{\dfrac{25}{4 \cdot 5^3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$. $\quad$ Kanonik tenglamasi: $Y^2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} X$.

O'qining tenglamasi: $\quad x - 2y - \dfrac{1 \cdot 2 - 2 \cdot (-\frac{3}{2})}{1+4} = 0$

yoki

$$x - 2y + 1 = 0.$$

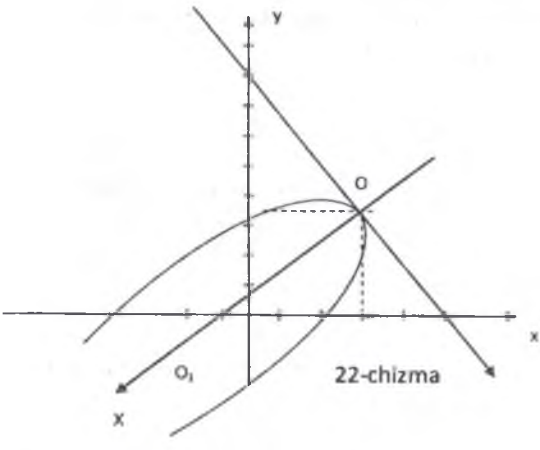
Parabola uchining koordinatalarini topish uchun tenglamalar:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ (x - 2y)^2 + 4x - 3y - 7 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 4x - 3y - 6 = 0. \end{cases}$$

Natijada, parabola uchi $O'(3,2)$ nuqtada, botiqlik tomoniga



22-chizma

yo'nalgan o'q vektori esa

$$\left\{ \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} \right\} = \{-5, -\frac{5}{2}\} \downarrow\downarrow (-2, -1)$$

koordinatalarga ega (22-chizma). ($X=\sqrt{5}$ bo'lganda $Y=\pm 1$ teng ekanini bilish foydali).

5-misol. Quyidagi

$$x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$$

chiziqning fokusi va direktrisasi topilsin (4-misolga qarang).

Berilgan chiziq parametri $p=\frac{1}{2\sqrt{5}}$ ga teng parabolani ifodalaydi. Parabola uchi $O'(3,2)$ nuqtada. Parabola o'qining musbat yo'nalishi (-2,-1) vektor bilan aniqlanadi. Ox va $O'x$ o'qlar orasidagi burchakni φ desak:

$$\cos\varphi=-\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{5}};$$

Demak almashtirish formulalari:

$$x=\frac{-2X+Y}{\sqrt{5}}+3,\quad y=\frac{-X-2Y}{\sqrt{5}}+2$$

bundan

$$X=\frac{-2x-y+8}{\sqrt{5}},\qquad Y=\frac{x-2y+1}{\sqrt{5}}$$

Kanonik sistemada fokus koordinatalari:

$$X=\frac{1}{4\sqrt{5}},\quad Y=0,$$

boshlang'ich sistemada esa:

$$x=2{,}9;\qquad y=1{,}95$$

kanonik sistemada direktrisa tenglamasi: $X=-\frac{1}{4\sqrt{5}}$

boshlang'ich sistemada esa:

$$\frac{-2x-y+8}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{4\sqrt{5}}\quad \text{yoki}\qquad 8x+4y-33=0$$

6–misol. Quyidagi

$$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$$

tenglama bilan aniqlagan chiziqning turi va joylashishi aniqlansin.

Yechish.

$$I_2=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 \end{vmatrix}=-\frac{9}{4}<0$$

chiziq birinchi guruhga tegishli.

$$K_3=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

chiziq-kesishadigan ikkita to'g'ri chiziqdan iborat. Tenglamani ikkita chiziqli ko'paytuvchilarga ajratamiz.

$$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=x^2+(-5y+1)x+4y^2+2y-2=$$

$$=x^2+(-5y+1)x+\left(\frac{-5y+1}{2}\right)^2+4y^2+2y-2-\left(\frac{-5y+1}{2}\right)^2=$$

$$=\left(x+\frac{-5y+1}{2}\right)^2+4y^2+2y-2-\frac{25y^2-10y+1}{4}=\left(x+\frac{-5y+1}{2}\right)^2-$$

$$-\left(\frac{3y-3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{-5y+1}{2}+\frac{3y-3}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{-5y+1}{2}-\frac{3y-3}{2}\right)=$$

$$=(x-y-1)\cdot(x-4y+2);$$

bu to'g'ri chiziqlar tenglamalari: $x-y-1=0;$ $x-4y+2=0$ dan iborat.

Darsda yechiladigan misollar

1.([2])Koordinata boshini sirtning simmetriya markaziga ko'chirish yordamida quyidagi sirtlarning tenglamasini soddalashtiring.

1) $x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z=0;$

2) $y^2+3xy+2yz+zx+3x+2y=0;$

3) $x^2+2y^2-z^2+2x-2y+2z+1=0$

2. ([2])Ikkinchi tartibli sirt $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ tenglama bilan berilgan. Bu sirtning M(2, 1, -1) nuqtadan o'tuvchi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linuvchi vatarining tenglamasini yozing.

3. ([2])Ikkinchi tartibli sirt $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=-1$ tenglama bilan berilgan. Bu sirtga (-6; 2; 6) nuqtada urinuvchi tekislik tenglamasini yozing.

4.([2])Ellipsoid $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$ tenglama bilan berilgan. Uning (-2; 1; -1/2) nuqtadagi normali tenglamasini yozing.

5.([2]) Ikkinchi tartibli sirt $2x^2+5y^2+8z^2+12yz+6zx+2xy+8x+14y+18z=0$ tenglama bilan berilgan. Bu sirtning 1)$\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-5}$ to'g'ri chiziqqa; 2)Ox o'qiga; 3)Oy o'qiga; 4)Oz o'qiga parallel vatarlarga qo'shma diametrial tekisligi tenglamasini yozing.

6. ([2])$x^2+3z^2-6xy+8x+5=0$ tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli sirtning $\frac{x+3}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{3}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi diametrial tekisligi tenglamasini yozing.

7. ([2])Ikinchi tartibli sirtning bitta $M(2,0,-1)$ nuqtasi, markazi $C(0,0,-1)$ va Oxy tekislik bilan kesimi

$$\begin{cases} x^2-4xy-1=0 \\ z=0 \end{cases}$$

malum bo'lsa,uning tenglamasini tuzing.

8.([2]) Ikkinchi tartibli sirtning berilgan tekislik bilan kesishishidan hosil bo'lgan chiziqni tekshiring

1)$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1,\ 4x-3y-12z-6=0$

2)$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+z^2=1,\quad x+4z-4=0.$

9. ([2])$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ paraboloidning $3x+2y-4z=0$ tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziqli yasovchilarini toping.

10.([2]) Berilgan $M(6,2,8)$ nuqtadan o'tuvchi va $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ sirtda yotuvchi to'g'ri chiziqlarni toping.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. Markazi $C(2;1)$ nuqtada bo'lgan ikkita qo'shma diametr

uchlari $A(5;1), B(0;3)$ nuqtadan iborat ellips tenglamasi tuzilsin.

2. Diametri $x-2y=0$ to'g'ri chiziqdan $x+y=0$ esa uchidagi urinmasidan iborat bo'lgan hamda $A(0;1)$ nuqtadan o'tuvchi parabola tenglamasi tuzilsin.

3. Markazi $C(2;1)$ nuqtada, Ox o'qiga $A(3;0)$ nuqtada urinadigan va Oy o'qi uning xosmas (cheksiz uzoq) nuqtasida kesishadigan giperbolaning asimptotalari topilsin.

4. Uchlari $A(4;2), B(8;2), C(4;5)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchak bilan berilgan. Shu uchburchakka tashqi chizilgan uchburchakning A uchidan chiqarilgan AD mediana diametri bo'ladigan parabola tenglamasi tuzilsin.

5. AOB uchburchak berilgan: $A(8;0), O(0;0), B(0;6)$. O nuqtadan o'tadigan, AB tomoni o'rtasida urinadigan, OA, OB tomonlarni kesib o'tadigan ikkinchi tartibli chiziq tenglamasi tuzilsin.

6. Parallelogrammning uchta $O(0;0), A(4;0), B(2;2)$. uchi hamda A *va* B nuqtalar parallelogrammning qarama-qarshi uchlari ekanligi ma'lum. Shu parallelogramga ichki chizilgan va parallelogramm tomonlarining o'rtalarida urinadigan ellips tenglamasi tuzilsin.

7. (3;0) nuqtadan o'tadigan markazi (0;-1) nuqtada bo'lgan ikkinchi tartibli chiziq berilgan. Bu chiziq $2x-3y+1=0,\ x+y-5=0$ to'g'ri chiziqlarni xosmas nuqtalarda kesib o'tishi ma'lum bo'lsa, chiziq tenglamasi tuzilsin.

8. (1;1) nuqtadan o'tadigan, Ox o'qni (1;0) nuqta va xosmas nuqtasida, shuningdek, Oy o'qini (0;1) nuqta bilan xosmas nuqtasida kesib o'tadigan ikkinchi tartibli chiziq tenglamasi tuzilsin.

9. $M(1;1)$ nuqtadan o'tib, Ox o'qiga (3;0) nuqtada urinadigan va asimptotasi Oy o'qidan iborat giperbolaning tenglamasi tuzilsin.

10. Asimptotalari $x-1=0,\ 2x-y+1=0$ to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lgan va $4x+y+5=0$ to'g'ri chiziqqa urinadigan giperbola tenglamasi tuzilsin.

Test namunalari

1. Quyidagilardan qaysilari ikkinchi tartibli chiziq uchun invariant?

a) $a_{11}+a_{22}$

b) $a_{11}a_{22}+a_{12}^2$

c) $a_{12}+a_{22}$

d) $a_{11}+a_{12}+a_{22}$

2. Quyidagilardan qaysilari ikkinchi tartibli chiziq uchun invariant?

a) $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$

b) $a_{11}-a_{22}$

c) $a_{12}+a_{22}$

d) $a_{11}+a_{12}+a_{22}$

3. Quyidagilardan qaysilari ikkinchi tartibli chiziq uchun invariant?

a) $a_{11}a_{22}+a_{12}^2$

b) $a_{11}-a_{22}$

c) $a_{12}+a_{22}$

d) Hech qaysisi

4. Quyidagilardan qaysilari ikkinchi tartibli chiziq uchun invariant?

a) $a_{11}a_{22}+a_{12}^2$

b) $a_{11}-a_{22}$

c) $a_{12}+a_{22}$

d) $K_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

5. Quyidagilardan qaysilari ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasini ifodalaydi?

a) $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$

b) $\lambda^2-I_3\lambda+I_2=0$

c) $\lambda^2+I_1\lambda+I_2=0$

d) $\lambda^2-I_1\lambda+I_3=0$

6. Quyidagi mulohazalarning qaysi biri to‘g‘ri?

a) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining barcha yechimlari haqiqiy

b) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining haqiqiy yechimlari mavjud

c) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining yechimi mavjud bo‘lmasligi mumkin

d) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining kompleks yechimlari mavjud

7. Birinchi guruhga qaysi chiziqlar kiritiladi? To‘liq javobni ko‘rsating!

a) yagona simmetriya markaziga ega bo‘lgan chiziqlar

b) ellips, mavhum ellips, giperbola va kesishadigan ikki to‘g‘ri chiziq.

c) yagona simmetriya markaziga ega bo‘lmagan chiziqlar

d) mavhum ellips, kesishadigan ikki mavhum to‘g‘ri chiziq, giperbola va kesishadigan ikki to‘g‘ri chiziq.

8. Ikkinchi guruhga qaysi chiziqlar kiritiladi? To‘liq javobni ko‘rsating!

a) yagona simmetriya markaziga ega bo‘lgan chiziqlar

b) ellips, mavhum ellips, giperbola va kesishadigan ikki to‘g‘ri chiziq.

c) yagona simmetriya markaziga ega bo‘lmagan chiziqlar

d) mavhum ellips, kesishadigan ikki mavhum to‘g‘ri chiziq, giperbola va kesishadigan ikki to‘g‘ri chiziq.

9. Uchinchi guruhga qaysi chiziqlar kiritiladi?

a) simmetriya markazlari to‘g‘ri chiziqni tashkil etadigan chiziqlarni kiritiladi

b) ellips, mavhum ellips, giperbola va kesishadigan ikki to‘g‘ri chiziq.

c) yagona simmetriya markaziga ega bo‘lmagan chiziqlar

d) mavhum ellips, kesishadigan ikki mavhum to‘g‘ri chiziq, giperbola va kesishadigan ikki to‘g‘ri chiziq.

10. Uchinchi guruhga tegishli chiziqlarning tenglamasini ko‘rsating!

a) $I_1x^2+\frac{K_2}{I_1}=0$

b) $I_1x^2\pm2\sqrt{-\frac{K_1}{I_2}}y=0.$

c) $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{K_1}{I_2}=0$

d) $I_1x^2+\frac{K_2}{I_3}=0.$

11. Ikkinchi guruhga tegishli chiziqlarning tenglamasini ko‘rsating!

a) $I_1x^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0$

b) $I_1x^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_2}}y = 0$.

c) $\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0$

d) $I_1x^2 + \frac{K_2}{I_3} = 0$.

12. Birinchi guruhga tegishli chiziqlarning tenglamasini ko‘rsating!

a) $I_1x^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0$

b) $I_1x^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_2}}y = 0$.

c) $\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0$

d) $I_1x^2 + \frac{K_2}{I_3} = 0$.

11-§. Chiziqlarning asosiy elementlari asimptotalari, urinmalari, diametrlari

Reja:

1. Ikkinchi tartibli chiziq va to‘gri chiziqning o‘zaro vaziyati
2. Asimpotik yo‘nalish
3. Yo‘nalishga qo‘shma diametr
4. Qo‘shma yo‘nalishlar va bosh yo‘nalishlar

IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQ VA TO‘GRI CHIZIQNING O‘ZARO VAZIYATI

[20]Bizga $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ (1) tenglama bilan aniqlangan ikkinchi tartibli chiziq va

[20] [1.,110-111 pp]

$$x = x_0 + lt$$
$$y = y_0 + mt$$

parametrik tenglamalar yordamida to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin.

To‘g‘ri chiziq va ikkichi tartibli chiziqning kesishish nuqtalarini topish uchun ifodalarni (1) ga qo‘yamiz. Natijada quyidagi

$$\left(a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2\right)t^2 + 2\left(a_{11}lx_0 + a_{12}\left(ly_0 + mx_0\right) + a_{22}my_0 + a_{13}l + a_{23}m\right)t + \\ + F\left(x_0, y_0\right) = 0$$

kvadrat tenglamani hosil qilamiz.Bu tenglamada ikkinchi darajali had oldidagi ifoda to‘g‘ri chiziqning yo‘nalishiga bog‘liq xolos. Ba’zi yo‘nalishlar uchun bu ifoda nolga teng bo‘ladi va yuqoridagi tenglama chiziqli tenglamaga aylanadi. Ba’zi yo‘nalishlar uchun bu ifoda nolga teng emas va yuqoridagi tenglama kvadrat tenglama bo‘ladi.

***Ta’rif-1**. Berilgan$\{\ell, m\}$ yo‘nalish uchun*

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

tenglik bajarilsa,bu yo‘nalish asimpotik yo‘nalish,

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 \neq 0$$

munosabat bajarilsa noasimptotik yo‘nalish deyiladi.

To‘g‘ri chiziqning yo‘nalishi noasimptotik bo‘lsa, yuqoridagi tenglama kvadrat tenglama bo‘ladi. Demak bu to‘g‘ri chiziq (1) chiziq bilan ikkita yoki bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkin. Noasimptotik yo‘nalishdagi to‘g‘ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan bitta nuqtada kesishsa, u urinma deb ataladi.

To‘g‘ri chiziqning yo‘nalishi asimptotik bo‘lsa, yuqoridagi tenglama chiziqli tenglama bo‘ladi. Demak, bu holda to‘g‘ri chiziq (1) bilan bitta nuqtada kesishadi, yoki to‘g‘ri chiziqning hamma nuqtalari (1)ga tegishli bo‘ladi. Agar ikkinchi darajali had koeffitsiyenti nolga teng bo‘lib, ozod had noldan farqli bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan kesishmaydi. Asimptotik yo‘nalishdagi to‘g‘ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan kesishmasa, u ikkinchi tartibli chiziq uchun asimptota [21]deyiladi.

Biz

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

[21] [1., 115p 3.3.5 def]

tenglamada $\ell \neq 0$ bo'lsa, $k=\frac{m}{\ell}$ belgilash kiritib uni

$$a_{11}+2a_{12}k+a_{22}k^2=0$$

ko'rinishda, agar $m \neq 0$ bo'lsa, $k=\frac{\ell}{m}$ belgilash kiritib, uni

$$a_{11}k^2+2a_{12}k+a_{22}=0$$

ko'rinishda yozamiz. Ikkala holda ham diskriminant uchun

$$D=4a_{12}^2-4a_{11}a_{22}=-4\delta$$

tenglik o'rinli. Demak, $\delta>0$ bo'lsa asimptotik yo'nalish mavjud emas. Bu holda (1) chiziq elliptik chiziq deyiladi, agar $\delta=0$ bo'lsa, asiptotik yo'nalish bitta va bu holda (1) chiziq parabolik, $\delta<0$ bo'lsa, ikkita asimptotik yo'nalish mavjud, chiziq esa giperbolik chiziq deyiladi.

Yuqoridagi (11) tenglamadagi birinchi darajali had oldidagi koeffitsiyent

$$(a_{11}\ell+a_{12}m)x+(a_{12}\ell+a_{22}m)y+a_{13}\ell+a_{22}m=0 \qquad (13)$$

ko'rinishga ega. Agar

$$\begin{aligned} a_{11}\ell+a_{12}m&=0\\ a_{21}\ell+a_{22}m&=0 \end{aligned} \qquad (14)$$

tengliklar bir vaqtda bajarilmasa, (13) tenglama to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

Berilgan $\{\ell,m\}$ yo'nalish uchun(14) tengliklar bajarilsa, $\{\ell,m\}$ yo'nalish maxsus yo'nalish deyiladi. Ikkinchi tartibli chiziq uchun $\delta \neq 0$ bo'lsa, (14) sistema faqat trivial yechimga ega va demak, yagona markazga ega bo'lgan chiziqlar uchun maxsus yo'nalishlar yo'q.

Ta'rif-2. *Maxsus bo'lmagan $\{\ell,m\}$ yo'nalish uchun (13) tenglama aniqlovchi to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziqning $\{\ell,m\}$ yo'nalishga qo'shma diametri deb ataladi.*

Diametr tushunchasining korrekt aniqlanganligini ko'rsatamiz. Avvalo, $\{\ell,m\}$ yo'nalish asimptotik yo'nalish bo'lgan holni qaraylik. Bu holda,

$$a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=0$$

tenglikning chap tomoni uchun

$$a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=(a_{11}l+a_{12}m)l+(a_{12}l+a_{22}m)m \qquad (14)$$

tenglik o'rinli. Demak,

$$(a_{11}l + a_{12}m)l + (a_{12}l + a_{22}m)m = 0 \qquad (15)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikdan

$$\frac{\ell}{-(a_{12}\ell + a_{22}m)} = \frac{m}{a_{11}\ell + a_{12}m} \qquad (16)$$

proporsionallik munosabati kelib chiqadi.

Diametr uchun $\{-(a_{12}l + a_{22}m), a_{11}l + a_{12}m\}$ vektor yo'naltiruvchi vektor bo'lganligi uchun diametr $\{\ell, m\}$ yo'nalishga parallel bo'ladi. Diametrga tegishli nuqtalar uchun (11) tenglamadagi birinchi darajali had oldidagi koeffitsent nolga teng bo'ladi. Demak, bu holda diametr ikkinchi tartibli chiziq uchun asimptota bo'ladi (kesishmaydi) yoki diametrga tegishli hamma nuqtalar (1) chiziqda yotadi.

Qo'shma yo'nalishlar va bosh yo'nalishlar. Noasimptotik $\{\ell, m\}$ yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziq (1) chiziqni ikkita M_1 va M_2 nuqtalarda kesib o'tsa, M_1M_2 kesmaning o'rtasini $M_0(x_0, y_0)$ bilan belgilab to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalarini

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt$$

ko'rinishda yozamiz. Parametrning M_1, M_2 nuqtalarga mos keluvchi qiymatlarini t_1, t_2 bilan belgilasak, ular (10) tenglamaning ildizlari bo'ladi va Viyet teoremasigi ko'ra $t_1 + t_2 = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning diametrga tegishli ekanligi kelib chiqadi. Demak noasimptotik $\{\ell, m\}$ yo'nalishga parallel vatarlarning o'rtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq shu yo'nalishga qo'shma diametr bo'ladi.

Noasimptotik $\{\ell, m\}$ yo'nalishga ega bo'lgan va qo'shma diametrga tegishli $M_0(x_0, y_0)$ o'tuvchi to'g'ri chiziq (1) chiziqni M_1 va M_2 nuqtalarda kesib o'tsa, bu nuqtalarga mos keluvchi parametrning qiymatlari (10) tenglamaning ildizlari bo'ladi. To'g'ri chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasi diametrga tegishli bo'lganligi uchun (10) tenglamada birinchi darajali had oldidagi koeffitsiyent nolga teng bo'ladi. Viyet teoremasiga ko'ra $t_1 + t_2 = 0$ bo'lganligi uchun $M_0(x_0, y_0)$ nuqta M_1M_2 kesmaning o'rtasi bo'ladi. Demak, diametr tushunchasi korrekt aniqlangan.

Berilgan $\{\ell, m\}$ yo'nalishga qo'shma diametr tenglamasini

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\ell + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})m = 0 \qquad (17)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglamadan ko'rnib turibdiki, har qanday diametr (1) chiziq markazidan o'tadi.

Ta'rif-1. *Birorta yo'nalish o'ziga perpendikulyar yo'nalishga qo'shma bo'lsa, u bosh yo'nalish deyiladi.*[22]

Bu ta'rifga ko'ra $\{\ell, m\}$ yo'nalish bosh yo'nalish bo'lishi uchun u $\{-m, \ell\}$ yo'nalishga qo'shma bo'lishi kerak. Albatta, agar $\{\ell, m\}$ yo'nalish bosh yo'nalish bo'lsa, $\{-m, \ell\}$ yo'nalish ham bosh yo'nalish bo'ladi. Berilgan $\{\ell, m\}$ yo'nalishning bosh yo'nalish bo'lish sharti

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + ml') + a_{22}mm' = 0$$

tenglikda $\{\ell', m'\}$ vektorni $\{-m, \ell\}$ bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladi va quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$a_{12}\ell^2 + (a_{22} - a_{11})\ell m - a_{21}m^2 = 0 \quad (35)$$

Agar $\{\ell, m\}$ maxsus yo'nalish bo'lsa,

$$\frac{\ell}{m} = \frac{-a_{12}}{a_{11}} = \frac{-a_{22}}{a_{12}}$$

tenglik o'rinli bo'ladi va yuqoridagi (35) shart bajarilgan. Biz bilamizki, faqat $\delta = 0$ bo'lgan hollardagina ikkinchi tartibli chiziq maxsus yo'nalishga ega bo'lib, u ikkinchi tartibli chiziq uchun asimptotik yo'nalish bo'ladi. Demak, yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziqlar uchun asimptotik yo'nalish bosh yo'nalish bo'ladi. Albatta, maxsus yo'nalishga perpendikulyar yo'nalish ham bosh yo'nalish bo'ladi. Boshqa bosh yo'nalishlar yo'q. Demak, yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziqlar uchun o'zaro perpendikulyar faqat ikkita bosh yo'nalish mavjuddir.

Yuqoridagi (35) tenglikda $a_{12} = 0$ va $a_{11} = a_{22}$ munosabatlar bajarilsa, bu tenglik ixtiyoriy $\{\ell, m\}$ yo'nalish uchun bajariladi. Demak, bu holda ixtiyoriy yo'nalish bosh yo'nalish bo'ladi. Agar $a_{12} \neq 0$ bo'lsa,(35) tenglik $k = \frac{\ell}{m}$ (va $k = \frac{m}{\ell}$) ifoda uchun kvadrat tenglama bo'ladi. Bu tenglamada diskriminant uchun

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a^2{}_{12} > 0$$

munosabat o'rinli bo'lgani uchun u ikkita ildizga ega va demak, ikkinchi tartibli chiziq uchun ikkita o'zaro perpendikulyar bosh yo'nalish mavjud.

---

[22] [1, 123p 3.3.19 def]

Berilgan $\{\ell, m\}$ yo'nalishga qo'shma diametr yo'nalishi $\{\ell', m'\}$ uchun

$$l' : m' = -(a_{12}l + a_{22}m) : (a_{11}l + a_{12}m) \qquad (18)$$

munosabat o'rinli. Bu munosabatni

$$(a_{11}l + a_{12}m)l' + (a_{12}l + a_{22}m)m' = 0$$

ko'rinishda yoki

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + ml') + a_{22}mm' = 0$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

Ta'rif- 1. *Ikkita $\{\ell, m\}$ va $\{\ell', m'\}$ yo'nalishlar uchun (20) munosabat bajarilsa, bu yo'nalishlar (1) chiziqga nisbatan qo'shma yo'nalishlar deyiladi.*

Bu munosabatda (1) tenglama koeffitsentlari qatnashadi. Koeffitsiyentlar esa koordinatalar sistemasiga bog'liq. Ikkita $\{\ell, m\}$ va $\{\ell', m'\}$ yo'nalishlar biror koordinatalar sistemasida (1) chiziqga nisbatan qo'shma yo'nalishlar bo'lsa, ular ixtiyoriy koordinatalar sistemasida (1) chiziqga nisbatan qo'shma yo'nalishlar bo'lishini ko'rsatamiz.

Biz Oxy koordinatalar sistemasidan $O'x'y'$ koordinatalar sistemasiga

$$x = c_{11}x' + c_{12}y' + x_0$$
$$y = c_{21}x' + c_{22}y' + y_0$$

almashtirishlar yordamida o'tsak,(1) tenglama

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$$

ko'rinishga keladi. Ikkita $\{\ell, m\}$ va $\{\ell', m'\}$ yo'nalishlar uchun qo'shma bo'lish sharti bo'lgan (21) tenglikni

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

belgilash kiritib,

$$(l', m')A\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = 0$$

ko'rinishda, (1) tenglamani esa.

$$(x, y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{13}, a_{23})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0$$

ko'rinishda yozish mumkin.

1-misol. Quyidagi

$$x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$$

chiziqning shakli va joylashishi aniqlansin:

Yechish.

$$I_2=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=0,\qquad K_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 4 & -\frac{3}{2}\\ 2 & -\frac{3}{2} & -7\end{vmatrix}=-\frac{25}{4};$$

Demak, berilgan chiziq-parabola;

$$I_1=1+4=5.$$

Parametri

$$p=\sqrt{\frac{25}{4\cdot 5^3}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Kanonik tenglamasi:

$$Y^2=\frac{1}{\sqrt{5}}X.$$

O‘qining tenglamasi:

$$x-2y-\frac{1\cdot 2-2\cdot(-\frac{3}{2})}{1+4}=0$$

yoki

$$x-2y+1=0.$$

Parabola uchining koordinatalarini topish uchun tenglamalar:

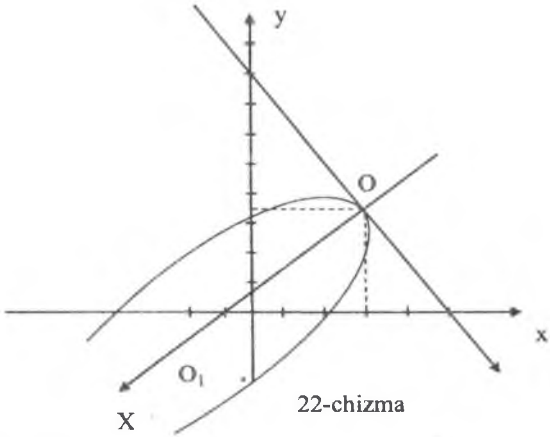
$$\begin{cases}x-2y+1=0\\ x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-2y=-1\\ (x-2y)^2+4x-3y-7=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-2y+1=0\\ 4x-3y-6=0.\end{cases}$$

Natijada, parabola uchi $O'(3,2)$ nuqtada, botiqlik tomoniga yo’nalgan o‘q vektori esa

$$\left\{\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 2 & -\frac{3}{2}\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -\frac{3}{2}\end{vmatrix}\right\}=\{-5,-\frac{5}{2}\}\ \downarrow\downarrow\ (-2,-1)$$



22-chizma

koordinatalarga ega (22-chizma). ($X=\sqrt{5}$ bo'lganda $Y=\pm 1$ teng ekanini bilish foydali).

5-misol. Quyidagi

$$x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$$

chiziqning fokusi va direktrisasi topilsin (4-misolga qarang).

Berilgan chiziq parametri $p=\frac{1}{2\sqrt{5}}$ ga teng parabolani ifodalaydi. Parabola uchi $O'(3,2)$ nuqtada. Parabola o'qining musbat yo'nalishi (-2,-1) vektor bilan aniqlanadi. Ox va $O'x$ o qlar orasidagi burchakni φ desak:

$$\cos\varphi=-\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{5}};$$

Demak, almashtirish formulalari:

$$x=\frac{-2X+Y}{\sqrt{5}}+3,\quad y=\frac{-X-2Y}{\sqrt{5}}+2$$

bundan

$$X=\frac{-2x-y+8}{\sqrt{5}},\qquad Y=\frac{x-2y+1}{\sqrt{5}}$$

Kanonik sistemada fokus koordinatalari:

$$X=\frac{1}{4\sqrt{5}},\quad Y=0,$$

boshlang'ich sistemada esa:

$$x=2{,}9; \qquad y=1{,}95$$

kanonik sistemada direktrisa tenglamasi: $X=-\frac{1}{4\sqrt{5}}$

boshlang'ich sistemada esa:

$$\frac{-2x-y+8}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{4\sqrt{5}} \quad \text{yoki} \qquad 8x+4y-33=0$$

$$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=x^2+(-5y+1)x+4y^2+2y-2=$$

$$=x^2+(-5y+1)x+\left(\frac{-5y+1}{2}\right)^2+4y^2+2y-2-\left(\frac{-5y+1}{2}\right)^2=$$

$$=\left(x+\frac{-5y+1}{2}\right)^2+4y^2+2y-2-\frac{25y^2-10y+1}{4}=\left(x+\frac{-5y+1}{2}\right)^2-$$

$$-\left(\frac{3y-3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{-5y+1}{2}+\frac{3y-3}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{-5y+1}{2}-\frac{3y-3}{2}\right)=$$

$$=(x-y-1)\cdot(x-4y+2);$$

bu to'g'ri chiziqlar tenglamalari: $x-y-1=0;$ $\quad x-4y+2=0$ dan iborat.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. Diametri $x-2y=0$ to'g'ri chiziqdan $x+y=0$ esa uchidagi urinmasidan iborat bo'lgan, hamda $A(0;1)$ nuqtadan o'tuvchi parabola tenglamasi tuzilsin.

2. Uchlari $A(4;2), B(8;2), C(4;5)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchak bilan berilgan. Shu uchburchakka tashqi chizilgan uchburchakning A uchidan chiqarilgan AD mediana diametri bo'ladigan parabola tenglamasi tuzilsin.

3. AOB uchburchak berilgan: $A(8;0), O(0;0), B(0;6)$. O nuqtadan o'tadigan, AB tomoni o'rtasida urinadigan, OA, OB tomonlarni kesib o'tadigan, ikkinchi tartibli chiziq tenglamasi tuzilsin.

4. Parallelogrammning uchta $O(0;0), A(4;0), B(2;2)$. uchi hamda A *va* B nuqtalar parallelogrammning qarama-qarshi uchlari ekanligi ma'lum. Shu parallelogramga ichki chizilgan va parallelogramm tomonlarining o'rtalarida urinadigan ellips tenglamasi tuzilsin.

5. (3;0) nuqtadan o'tadigan markazi (0;-1) nuqtada bo'lgan ikkinchi tartibli chiziq berilgan. Bu chiziq $2x-3y+1=0,$ $x+y-5=0$ to'g'ri chiziqlarni xosmas nuqtalarda kesib o'tishi ma'lum bo'lsa, chiziq tenglamasi tuzilsin.

6. (1;1) nuqtadan o'tadigan, Ox o'qni (1;0) nuqta va xosmas nuqtasida, shuningdek, Oy o'qini (0;1) nuqta bilan xosmas nuqtasida kesib o'tadigan ikkinchi tartibli chiziq tenglamasi tuzilsin.

7. $M(1;1)$ nuqtadan o'tib, Ox o'qiga (3;0) nuqtada urinadigan va asimptotasi Oy o'qidan iborat giperbolaning tenglamasi tuzilsin.

Test namunalari

1. Quyidagilardan qaysi biri assimptotik yo'nalishni aniqlovchi tenglama?

a) $a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$

b) $a_{11}a_{22} + a_{12}^2 = 0$

c) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$

d) $a_{11} + a_{12} + a_{22} = 0$

2. Quyidagilardan qaysi biri assimptotik yo'nalishni aniqlovchi tenglama?

a) $a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 \neq 0$

b) $a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$

c) $a_{11}a_{22} + a_{12}^2 = 0$

d) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$

3. Urinma ta'rifini ko'rsating!

a) Noasimptotik yo'nalishdagi to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan bitta nuqtada kesishsa,u urinma deb ataladi.

b) Asimptotik yo'nalishdagi to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan bitta nuqtada kesishsa,u urinma deb ataladi.

c) Noasimptotik yo'nalishdagi to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan kesishmasa, u urinma deb ataladi.

d) Noasimptotik yo'nalishdagi to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan bittadan ortiq nuqtada kesishsa,u urinma deb ataladi.

4. Quyidagi mulohazalarning qaysi biri to'g'ri?

a) Asimptotik yo'nalishdagi to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan kesishmasa, u ikkinchi tartibli chiziq uchun asimptota deyiladi.

b) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining haqiqiy yechimlari mavjud

c) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining yechimi mavjud bo'lmasligi mumkin

d) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining kompleks yechimlari mavjud

5. Quyidagi mulohazalarning qaysi biri to‘g‘ri?

a) Noasimptotik yo‘nalishdagi to‘g‘ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan kesishmasa, u ikkinchi tartibli chiziq uchun urinma deyiladi.

b) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining haqiqiy yechimlari mavjud

c) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining yechimi mavjud bo‘lmasligi mumkin

d) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining kompleks yechimlari mavjud

6. Quyidagi mulohazalarning qaysi biri to‘g‘ri?

a) $\delta > 0$ bo‘lsa asimptotik yo‘nalish mavjud emas.

b) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining haqiqiy yechimlari mavjud

c) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining yechimi mavjud bo‘lmasligi mumkin

d) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining kompleks yechimlari mavjud

7. Quyidagi mulohazalarning qaysi biri to‘g‘ri?

a) agar $\delta = 0$ bo‘lsa, asimptotik yo‘nalish bitta va bu holda (1) chiziq parabolik chiziq deyiladi

b) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining haqiqiy yechimlari mavjud

c) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining yechimi mavjud bo‘lmasligi mumkin

d) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining kompleks yechimlari mavjud

8. Quyidagi mulohazalarning qaysi biri to‘g‘ri?

a) $\delta < 0$ bo‘lsa ikkita asimptotik yo‘nalish mavjud, chiziq esa giperbolik chiziq deyiladi.

b) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining haqiqiy yechimlari mavjud

c) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining yechimi mavjud bo‘lmasligi mumkin

d) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining kompleks yechimlari mavjud

9. Quyidagi mulohazalarning qaysi biri noto‘g‘ri?

a) $\delta < 0$ bo‘lsa ikkita asimptotik yo‘nalish mavjud, chiziq esa giperbolik chiziq deyiladi.

b) $\delta < 0$ bo‘lsa, ikkita asimptotik yo‘nalish mavjud, chiziq esa giperbolik chiziq deyiladi.

c) agar $\delta = 0$ bo‘lsa, asimptotik yo‘nalish bitta va bu holda (1) chiziq parabolik chiziq deyiladi

d) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining kompleks yechimlari mavjud

10. Quyidagi mulohazalarning qaysi biri noto‘g‘ri?

a) $\delta < 0$ bo‘lsa, ikkita asimptotik yo‘nalish mavjud, chiziq esa giperbolik chiziq deyiladi.

b) Ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasining haqiqiy yechimlari mavjud

c) Asimptotik yo‘nalishdagi to‘g‘ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan kesishmasa, u ikkinchi tartibli chiziq uchun asimptota deyiladi.

d) Barchasi to‘g‘ri

12-§. Affin almashtirishlari va ortogonal almashtirishlar

Reja:

1. Tekislikda dekart koordinatalar sistemasini almashtirish
2. Affin almashtirishlari
3. Ortogonal almashtirishlar

TEKISLIKDA DEKART KOORDINATALAR SISTEMASINI ALMASHTIRISH[23]

Tekislikda dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo‘lib, uni koordinatalar boshi O nuqta atrofida φ burchakka burishni qaraylik.

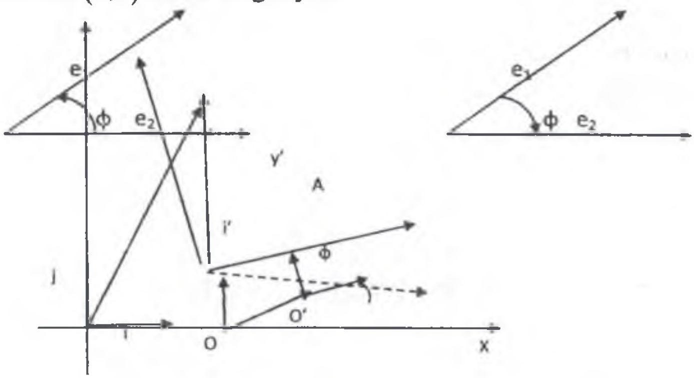
Tasdiq. Nuqtaning “eski” va “yangi” koordinatalari orasidagi bog‘lanish

[23] [1, 4.3.3, 4.3.4 propositions, 161-163pp.]

$$x = x'\cos\phi - y'\sin\phi$$
$$y = x'\sin\phi + y'\cos\phi$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi.

Isbot. Bir vektordan ikkinchisiga qisqa burilish yo'nalishi soat strelkasi yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lsa, bu vektorlar o'ng ikkilik, aks holda chap ikkilik tashkil qiladi deyiladi. Bazis sifatida biror ikkilik tanlansa, biz oriyentatsiya tanlab olingan deb hisoblaymiz. Bizga $\{\bar{i},\bar{j}\}$ va $\{\bar{i}',\bar{j}'\}$ ortonormal bazislar berilgan bo'lsin. Bu bazislar yordamida kiritilgan Dekart koordinatalar sistemasilarini mos ravishda Oxy va $O'x'y'$ bilan belgilaylik. Nuqtaning "eski" va "yangi" koordinatalari orasidagi bog'lanishni topamiz. "Yangi» koordinatalar sistemasi markazining «eski» koordinata sistemasidagi koordinatalarini (a,b) bilan belgilaylik.



Tekislikda M nuqta berilgan bo'lib,uning Oxy va $O'x'y'$ sistemalardagi koordinatalari mos ravishda (x,y) va (x',y') juftliklardan iborat bo'lsin.

Biz quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\overline{OA} = x\bar{i} + y\bar{j},\ \overline{O'A} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}'\ ,\ \overline{OO'} = a\bar{i} + b\bar{j}$$

Har bir vektorni $\{\bar{i},\bar{j}\}$ bazis orqali ifodalash mumkinligi uchun

$$\bar{i}' = a_{11}\bar{i} + a_{12}\bar{j}\ ,\ \bar{j}' = a_{21}\bar{i} + a_{22}\bar{j} \qquad (1)$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Bu ifodalarni

$$\overline{OA} = \overline{OO'} + \overline{O'A}, \quad \overline{OA} = x\bar{i} + y\bar{j}$$

tengliklarga qo'yib

$$x\bar{i} + y\bar{j} = a\bar{i} + b\bar{j} + a_{11}x'\bar{i} + a_{12}x'\bar{j} + a_{21}y'\bar{i} + a_{22}y'\bar{j}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bazis vektorlari $\{\bar{i},\bar{j}\}$ chiziqli erkli oilani tashkil etganligi uchun yuqoridagi

munosabatdan

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + a$$
$$y = a_{21}x' + a_{22}y' + b$$

formulalarni olamiz. Endi a_{ij} koeffitsiyentlarni topish uchun ikkita holni qaraymiz.

Birinchi hol: $\{\bar{i},\bar{j}\}$ va $\{\bar{i}',\bar{j}'\}$ bazislar bir xil oriyentatsiyaga ega. Bu holda, agar ϕ bilan $\bar{i}$ va $\bar{i}'$ vektorlar orasidagi burchakni belgilasak, $\bar{j}$ va $\bar{j}'$ vektorlar orasidagi burchak ham ϕ ga teng bo'ladi. Yuqoridagi (1) tengliklarning har ikkalasini $\bar{i}$ va $\bar{j}$ vektorlarga skalyar ko'paytirib

$$a_{11} = \cos\phi, a_{12} = \sin\phi, \quad a_{21} = -\sin\phi, \; a_{22} = \cos\phi$$

formulalarni olamiz.Agar $\{\bar{i},\bar{j}\}$ va $\{\bar{i}',\bar{j}'\}$ bazislar har xil oriyentatsiyaga ega bo'lsa, $\bar{j}$ va $\bar{j}'$ vektorlar orasidagi burchak $\pi - \phi$ ga teng bo'ladi. Bu holda (1) tengliklarning har birini $\bar{i}$ va $\bar{j}$ vektorlarga skalyar ko'paytirib

$a_{11} = \cos\phi, a_{12} = \sin\phi, \; a_{21} = \sin\phi, \; a_{22} = -\cos\phi$ formulalarni hosil qilamiz. Bu formulalarni (2) formulalarga qo'yib mos ravishda quyidagi ikkita formulalarni olamiz:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\phi - y'\sin\phi + a \\ y &= x'\sin\phi + y'\cos\phi + b \end{aligned} \qquad (3)$$

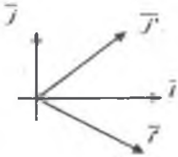
Bu holda o'tish determinanti uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$$

tenglik o'rinli.

Ikkinchi holda bazislarning oriyentatsiyalari har xil va koordinatalarni almashtirish formulalari

$$\begin{cases} x = x'\cos\phi + y'\sin\phi + a \\ y = x'\sin\phi - y'\cos\phi + b \end{cases} \quad (4)$$



ko'rinishda bo'ladi.

Bu holda o'tish determinanti uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -1$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak koordinatalar sistemasini almashtirganimizda o'tish matritsasining determinanti musbat bo'lsa, oriyentatsiya o'zgarmaydi. Agar o'tish matritsasining determinanti manfiy bo'lsa, oriyentatsiya qarama-qarshi oriyentatsiyaga o'zgaradi.

Ikkita $Đ$ va Q tekislikni qaraylik. $Đ$ tekislikda to'g'ri burchakli Ox_1x_2 koordinatalar sistemasi hamda Q tekislikda $O\acute{o}_1\acute{o}_2$ koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. $Đ$ va Q tekisliklar ustma-ust keltirilishi mumkin. Shuningdek, koordinatalar sistemalari ham ustma-ust keltirilishi mumkin.

Chiziqli almashtirishlar.

1. Tekislikda chiziqli almashtirishlar tushunchasi.

Berilgan π tekislik va undagi $M(x,y)$ nuqtani

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{33} \end{aligned} \quad (1)$$

formulalar yordamida $M'(x',y')$ nuqtasiga o'tkazuvchi akslantirishga π tekislikni chiziqli almashtirish deyiladi. Har bir M nuqtani M' nuqtasiga

Ushbu $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ determinant (1) chiziqli almashtirishning determinanti deyiladi.

Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (1) almashtirish xosmas, $\Delta = 0$ bo'lsa, xos almashtirish deyiladi.

Biz faqat xosmas almashtirishlarni o‘rganamiz. Bunday almashtirishlarga affin almashtirishlar deyiladi.

$\Delta = 0$ bo‘lsa, π tekislikning barcha nuqtalarni bitta to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalarga o‘tib qoladi. Demak, affin almashtirish bu $\Delta \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi chiziqli almashtirishdir.

Affin almashtirishning xossalari

1. Ikkita affin almashtirish ketma-ket bajarilsa, yana affin almashtirish paydo bo‘ladi.
2. Ayniy almashtirish $x' = x, y' = y$ affin almashtirishdir.

Haqiqatan, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ demak, affin almashtirish.

3. Affin almashtirishga teskari almashtirish affin almashtirishdir. (ya’ni M' ni M nuqtaga o‘tkazuvchi almashtirish).

Isbot. (1) munosabatdan x va y larni topamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = x' - a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y = y' - a_{23} \end{cases} \qquad x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \Delta_x = \begin{vmatrix} x' - a_{13} & a_{12} \\ y' - a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & x' - a_{13} \\ a_{22} & y' - a_{23} \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{cases} x = \dfrac{1}{\Delta}\left(a_{22}x' - a_{12}y' - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} \right) \\ y = \dfrac{1}{\Delta}\left(-a_{21}x' + a_{11}y' - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \right) \end{cases}$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, (2) almashtirish chiziqli almashtirish

$$\frac{a_{22}}{\Delta} = b_{11} \quad -\frac{a_{21}}{\Delta} = b_{12}$$

$$\text{va } -\frac{a_{12}}{\Delta} = b_{21} \quad \frac{a_{11}}{\Delta} = b_{22}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \dfrac{a_{22}}{\Delta} & -\dfrac{a_{12}}{\Delta} \\ -\dfrac{a_{21}}{\Delta} & \dfrac{a_{11}}{\Delta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \neq 0$$

demak (2) almashtirish affin.

4. Affin almashtirishi tekislikni bir qiymatli almashtirishdir. Ya’ni har bir M nuqtaning yagona M' obrazi va aksincha ixtiyoriy

M' nuqtaning yagona M proobrazi mavjud.

Isbot. Faraz qilaylik, affin almashtirishda ikkita $M(x,y)$ va $\bar{M}(\bar{x},\bar{y})$ nuqtalar bitta $M'(x',y')$ nuqtaga o‘tsin. U holda (1) formulalarni berilgan $M(x,y)$ va $\bar{M}(\bar{x},\bar{y})$ nuqtalar uchun yozib tenglamalarni ayirsak:

$$\begin{cases} a_{11}(x-\bar{x})+a_{12}(y-\bar{y})=0 \\ a_{21}(x-\bar{x})+a_{22}(y-\bar{y})=0 \end{cases}$$

chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

Bu sistema uchun $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$, demak, bu sistema yagona trivial yechimga ega: $x-\bar{x}=0, y-\bar{y}=0$, bundan esa $x=\bar{x}, y=\bar{y}$ munosabatlar kelib chiqadi, ya’ni M va M' nuqtalar ustma-ust tushadi.

M' nuqtaning asli (proobrazi) yagonaligi uchinchi xossadan (aksinchasi) yuqoridagidan ko‘rsatiladi.

Teorema. Affin almashtirishda to‘g‘ri chiziq yana to‘g‘ri chiziqqa, parallel to‘g‘ri chiziqlar parallel to‘g‘ri chiziqlarga o‘tadi.

Isbot. π tekislikda $l: Ax+By+C=0$ to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. (1) affin almashtirishni bajarish natijasida $l': A'x+B'y+C'=0$ tenglama bilan aniqlanadigan to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi. Bunda

$$\frac{A}{\Delta}a_{22}-\frac{B}{\Delta}a_{21}=A', \frac{B}{\Delta}a_{11}-\frac{A}{\Delta}a_{22}=B', -\frac{A}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{12} \\ a_{13} & a_{22} \end{vmatrix}-\frac{B}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=C'$$

$$\frac{A}{\Delta}\left(a_{22}x'+a_{11}y'-\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}\right)+\frac{B}{\Delta}\left(-a_{21}x'+a_{11}y'-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{13} \\ a_{23} & a_{23} \end{vmatrix}\right)+C=0$$

Demak, l to‘g‘ri chiziq nuqtalari l' to‘g‘ri chiziqqa bir qiymatli o‘tar ekan.

Uchinchi xossaga ko‘ra, aytish mumkinki, l' to‘g‘ri chiziq nuqtalari l to‘g‘ri chiziq nuqtalariga bir qiymatli o‘tadi. To‘rtinchi xossaga ko‘ra l to‘g‘ri chiziq nuqtalari l' to‘g‘ri chiziqqa o‘tadi.

Xossaning ikkinchi qismini isbotlashga o‘tamiz. Bizga o‘zaro parallel l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lib, ularning (1) affin almashtirishdagi akslari l_1' va l_2' bo‘lsin. l_1' va l_1' to‘g‘ri chiziqlar kesishsin deb faraz qilaylik, $M'\in l_1'\cap l_2'$ kesishish nuqtasi bo‘lsin. To‘rtinchi xossaga ko‘ra M' nuqta yagona M nuqtaning obrazi va M

nuqta l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlarning har biriga tegishli. Bu esa l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlarning parallelligiga zid. Xossa to‘liq isbotlandi.

Teorema. Agar tekislikdagi biror to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtaning bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan obrazlari berilgan bo‘lsa, tekislikning affin almashtirishi bir qiymatli aniqlanadi.

Isbot. Teorema shartiga ko‘ra M_1, M_2, M_3 nuqtalar π tekislikda bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydi va M_1', M_2', M_3' nuqtalar ham bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydi. π tekislikda M_i nuqtalarni M_i' nuqtalarga o‘tkazuvchi yagona affin almashtirishi mavjud ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun (1) munosabat bilan aniqlanuvchi affin almashtirish mavjud bo‘lib, $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ koeffitsentlar bir qiymatli aniqlanishini va $\Delta \neq 0$ ekanini ko‘rsatish yetarli. (1) formulalardan M_1', M_2', M_3' nuqtalarning birinchi koordinatalari uchun quyidagi

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} \\ x_2' &= a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13} \\ x_3' &= a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13} \end{aligned} \qquad (3)$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz Bu sistemada a_{11} a_{12} a_{13} noma’lumlar. Sistemaning asosiy matritsasining determinanti

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$$

bo‘lib, u $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$ dereminatga teng va noldan farqli, chunki bu determinant $\overline{M_1M_2}$ va $\overline{M_1M_3}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuziga teng va bu vektorlar nokolleniarligidan $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$ dereminat nolga teng emas. Demak, (3) sistema yagona a_{11}, a_{12}, a_{13} yechimga ega.

Xuddi shunga o‘xshash a_{21}, a_{22}, a_{23} koeffitsentlar ham bir qiymatli aniqlanishi ko‘rsatiladi. Endi $\Delta \neq 0$ ekanini ko‘rsatamiz.

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_2 - x_1) & a_{12}(y_2 - y_1) \\ a_{11}(x_3 - x_1) & a_{12}(y_3 - y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ $\det A = \det A^T$ lardan foydalansak,

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}(x_2-x_1) & a_{12}(y_2-y_1) \\ a_{11}(x_3-x_1) & a_{12}(y_3-y_1) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{pmatrix}$$

bundan esa $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ekani kelib chiqadi.

ORTOGONAL ALMASHTIRISHLAR

Tekislikda quyidagi chiziqli almashtirishni qaraylik

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{aligned} \qquad (1)$$

Agar $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$ belgilashlar kiritsak, (1) sistemani $X' = AX + B$ ko‘rinishda yozish mumkin

(1) almashtirish uchun $A^T A = E$ munosabat bajarilsa, u ortogonal almashtirish deyiladi.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1,\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1,\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

Ortogonal almashtirishi affin almashtirishi bo‘ladi.

Teorema (Ortogonal almashtirishning asosiy xossasi). Ortogonal almashtirishda nuqtalar orasodagi masofa saqlanadi.

Isbot. $M_1(x_1, y_1)$ va $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalarni (1') ortogonal almashtirish $M_1'(x_1', y_1')$ va $M_2'(x_2', y_2')$ nuqtalarga o‘tkazsin.

Ushbu $|M_1M_2| = |M_1'M_2'|$ munosabatni isbotlash kerak.

$$|M_1'M_2'|^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 = \left(a_{11}(x_2 - x_1) + a_{12}(y_2 - y_1)\right)^2 +$$

$$+\left(a_{21}(x_2 - x_1) + a_{22}(y_2 - y_1)\right)^2 = \left(a_{11}^2 + a_{21}^2\right)(x_2 - x_1)^2 + \left(a_{11}^2 + a_{21}^2\right)(x_2 - x_1)^2 +$$

$$+\left(a_{12}^2 + a_{22}^2\right)(y_2 - y_1)^2 + 2\left(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}\right)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) =$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = |M_1M_2|^2$$

Masala yechish namunasi

1-misol. Ushbu

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ y_2 &= x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

akslantirish Ox_1x_2 koordinatalar sistemasini α burchakka burishdan iborat. Bunda Ox_1x_2 sistemadagi har bir x_1 va x_2 koordinatali nuqta (3) qonuniyat bo'yicha o'zgaradi.

Shunday qilib, (3) chiziqli almashtirish eski x_1 va x_2 koordinatalarni yangi y_1 va y_2 koordinatalarga o'tkazadi.

Bu almashtirishning matritsasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha - \sin\alpha \\ \sin\alpha + \cos\alpha \end{Vmatrix}$$

2-misol. Ushbu

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}\right\}, \qquad M = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

akslantirishni qaraymiz. Bu akslantirishda (1, 1) nuqta (3, 1) nuqtaga, (1, 2) nuqta (3, 2) nuqtaga, (2, 1) nuqta (6, 1) nuqtaga, (2, 2) nuqta (6, 2) nuqtaga va hokazo o'tadi. Ox_1x_2 va Oy_1y_2 koordinata sistemalarini bir joyda qarasak, bu akslantirishni 2-chizmadagi kabi tasvirlash mumkin. Bu akslantirish Ox_1 o'qi bo'ylab 3 marta cho'zishdan iborat.

3-misol. Ushbu

$$y_1 = 2x_1 + x_2$$
$$y_2 = x_1 - x_2$$

almashtirishga teskari almashtirishni toping.

Yechish. Almashtirishning determinantini topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$$

Demak, berilgan almashtirish o'zaro bir qiymatli.

Teskari almashtirish quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2$$

$$x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2$$

bu almashtirishning matritsasi

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Darsda ishlanadigan misollar

1. Affin almashtirish berilgan: $x'=3x+y-6, \quad y'=x+y+1$. Bu almashtirishda qaysi nuqta (9;8) nuqtaga o‘tadi?

2. Affin almashtirish berilgan: $x'=3x+4y-12, \quad y'=4x-3y+6$. $7x-2y-24=0$ to‘g‘ri chiziqdagi, bu almashtirishda yana shu to‘g‘ri chiziqda yotadigan nuqta toping.

3. α affin almashtirish $A(2;1)$, $B(3;0)$, $C(1;4)$ nuqtalarni mos ravishda $A'(1;6)$, $B'(1;9)$, $C'(3;1)$ nuqtalarga o‘tkazadi. Bu almashtirishda $M(5;7)$ nuqta qanday nuqtaga o‘tadi? Bu almashtirish qaysi nuqta qo‘zg‘almasi bo‘ladi?

4. $A_1(1;0), A_2(0;2), A_3(-3;0)$ nuqtalarni $A_1'(2;3), A_2'(-1;4), A_3'(-2;-1)$ nuqtalarga o‘tkazadigan affin almashtirish aniqlansin.

5. Ushbu affin almashtirishning $x'=4x+5y-11, \quad y'=2x+4y-7$ qo‘sh nuqtasi aniqlansin.

6. Ushbu affin almashtirishning $x'=3x+4y-8, \quad y'=x+3y-4$ qo‘sh nuqtasi aniqlansin.

7. Ushbu $x'=3x+4y-15, \ y'=2x+4y-2=0$ affin almashtirishda quyidagi:

a. $Ox, \quad Oy$ o‘qlar;

b. $2x+3y+5=0, \quad 4x-3y-2=0$ to‘g‘ri chiziqlar;

c. $2x-6y-7=0$ to‘g‘ri chiziq

qanday to‘g‘ri chiziqlarga almashadi?

8. Ushbu $x'=2x+y-2, \quad y'=x-y-1$ affin almashtirish va $A(1;1)$ nuqta berilgan. A nuqtadan o‘tadigan shunday to‘g‘ri chiziq topilsinki, u shu almashtirishda yana A nuqtadan o‘tadigan bo‘lsin.

9. Ushbu $x'=7x-y+1, \quad y'=4x+2y+4$ affin almashtirishning qo‘sh to‘g‘ri chiziqlari topilsin.

10. Ushbu $\left.\begin{matrix}x'=ax-by\\ y'=bx+ay\end{matrix}\right\}$ $a^2+b^2\neq 0$ affin almashtirishning qo‘sh to‘g‘ri chiziqlari bo‘lmasligi isbotlansin.

11. $x' = x + 3y,\quad y' = 4x + 3y$ dan iborat affin almashtirishning qo'sh to'g'ri chiziqlari yangi sistema o'qlari deb olinsa, bu almashtirish qanday yoziladı?

12. Affin almashtirish berilgan: $x' = 5x + y,\quad y' = 4x + 3y$. Bu almashtirishda o'zlariga kollinear bo'lgan vektorlarga almashadigan vektorlar topilsin.

MUSTAQIL ISHLASH UCHUN MASALALAR

1. Tekislikning $x' = ax + b,\quad y' = cy + d$ (bu yerda a,b,c,d sonlar barcha haqıqiy qiymatlarni qabul qiladi va $a \neq 0,\ c \neq 0$ faraz qilingan) affin almashtirishlari to'plami gruppa tashkil etadimi?.
2. Tekislikning ushbu $x' = x,\quad y' = ky$ (k-noldan farqli haqiqiy son) affin almashtirishlari to'plami gruppa tashkil etadimi? Bu almashtirishlarning geometrik ma'nosi aniqlansin.
3. Ushbu $x' = x + ky,\quad y' = y$ (k barcha haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi) affin almashtirishlar to'plami gruppa tashkil qiladimi? Ko'rsatilgan har bir almashtirishlarning geometrik ma'nosi aniqlansin.
4. Quyidagi $x' = \lambda x,\quad y' = \lambda y$ (λ barcha haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi) affin almashtirishlar to'plami gruppa bo'la oladimi? Ko'rsatilgan har bir almashtirishlarning geometrik ma'nosi aniqlansin.
5. Dekart koordinatalar sistemasida ushbu $x' = r(x\cos\varphi - y\sin\varphi),\quad y' = r(x\sin\varphi + y\cos\varphi)$ (bu yerda r barcha musbat va haqiqiy qiymatlarni va φ barcha haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi) affin almashtirishlar to'plami gruppa tashkil qiladimi?
6. Ushbu $x' = ax - by,\ y' = bx + ay$ (bu yerda a va b sonlar bir vaqtda nolga teng bo'lmagan qiymatlarni qabul qiladi va $a^2 + b^2 \neq 0$) affin almashtirishlar to'plami gruppa tashkil qiladimi? Ko'rsatilgan har bir almashtirishlarning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
7. Ushbu $x' = r(x\cos\varphi - y\sin\varphi) + \alpha,\quad y' = r(x\sin\varphi + y\cos\varphi) + \beta$ (bu yerda r barcha musbat qiymatlarni va φ,α,β parametrlar barcha haqiqiy musbat qiymatlarni qabul qiladi) affin almashtirishlar to'plami gruppa tashkil qiladimi? Bu almashtirishning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
8. Ushbu $\left.\begin{array}{l} y_1 = -x_1 + 1 \\ y_2 = -x_2 + 3 \end{array}\right\}$ almashtirish $M(x_1,x_2)$ nuqtani $N(y_1,y_2)$

nuqtaga o'tkazadi.

A) Quyidagi nuqtalar obrazlarining koordinatalarini toping: $M_1(4,5)$, $M_2(-4,-5)$, $M_3(-2,7)$, $M_4(7,-2)$

B) Quyidagi nuqtalar proobrazlarining koordinatalarini toping: $N_1(2,4)$, $N_2(-3,8)$, $N_3(4,-6)$, $N_4(-8,-9)$

9. Uchlari $A(3,3)$, $B(-3,3)$, $C(3,-3)$, ва $D(-3,-3)$ nuqtalarda bo'lgan $ADCD$ kvadratning obrazini toping. Bunda akslantirish formulalari $\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 - 4 \\ y_2 = x_2 + 2 \end{array}\right\}$ dan iborat.

10. Akslantirish ushbu $\left.\begin{array}{l} y_1 = 3x_1 - 5x_2 + 2 \\ y_2 = 2x_1 + x_2 - 7 \end{array}\right\}$ formulalar bilan berilgan. $M(1,8)$ nuqtaning obrazini va $N(-5,2)$ nuqtaning proobrazini toping.

11. Ushbu $\left.\begin{array}{l} y_1 = 2x_1 + 3x_2 - 1 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 + 5 \end{array}\right\}$ almashtirishga teskari almashtirishni toping.

12. Ushbu $\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 - 2x_2 + 4 \\ y_2 = 2x_1 + x_2 - 5 \end{array}\right\}$ almashtirishga teskari almashtirishni toping.

Test topshiriqlari

1. Bir vektordan ikkinchisiga qisqa burilish yo'nalishi soat strelkasi yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lsa, bu vektorlar ... tashkil qiladi deyiladi.
a)o'ng ikkilik
b) chap o'nglik
c) vektorlar uchligini
d) bazis

2. Bir vektordan ikkinchisiga qisqa burilish yo'nalishi soat strelkasi yo'nalishi bilan bir xil bo'lsa, ular chap ikkilik tashkil qiladi deyiladi.
a)o'ng ikkilik
b) chap o'nglik
c) vektorlar uchligini
d) bazis

3. Koordinatalar sistemasini almashtirganda o'tish matritsasinig determinanti musbat bo'lsa, oriyentatsiya ....

a) o'zgarmaydi
b) o'zgaradi
c) musbat bo'ladi
d) manfiy bo'ladi

4.Almashtirish uchun $A^T A = E$ munosabat bajarilsa, u .... almashtirish deyiladi.
a)ortgonal
b) affin
c) chiziqli
d) xos

5. Agar o'tish matritsasining determinanti manfiy bo'lsa, oriyentatsiya qarama-qarshi oriyentatsiyaga ....
a) o'zgarmaydi
b) o'zgaradi
c) musbat bo'ladi
d) manfiy bo'ladi

6. Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (1) almashtirish ... almashtirish deyiladi.
a) xosmas
b) xos
c) maxsus
d) maxsus bo'lmagan

7.Agar $\Delta = 0$ bo'lsa, (1) almashtirish ... almashtirish deyiladi.
a) xosmas
b) xos
c) maxsus
d) maxsus bo'lmagan

8. .... almashtirishlarni affin almashtirishlar deyiladi.
a) xosmas
b) xos
c) maxsus
d) maxsus bo'lmagan

9. affin almashtirish bu ... shartni qanoatlantiruvchi chiziqli almashtirishdir.
a)$\Delta \neq 0$
b) $\Delta = 0$
c) $\Delta < 0$
d) to'g'ri javob berilmagan

10. Almashtirish uchun ... munosabat bajarilsa, u ortgonal almashtirish deyiladi.

a) $A^T A = E$

b) $A^T A^{-1} = E$

c) $A^{-T} A = E$

d) $A^{-1} A = E$

13-§. Ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamalarini kanonik ko'rinishga keltirish. Markaziy hol

Reja:

1. Ikkinchi tartibli chiziq markazi
2. Markaziy chiziq tenglamalarini kanonik ko'rinishga keltirish

IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLARNING UMUMIY TENGLAMALARINI KANONIK KO'RINISHGA KELTIRISH[24]

Biz bu mavzuda tekislikda dekart koordinatalar sistemasida

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqni tekshirish bilan shug'ullanamiz. Bu ishni koordinatalar sistemasini o'zgartirish va (1)tenglamani soddalashtirish yordamida amalga oshiramiz. Birinchi navbatda parallel ko'chirishda (1) tenglama koeffitsiyentlari qanday o'zgarishini tekshiramiz. Buning uchun

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0 \qquad (2)$$

formulalar yordamida almashtirishlarni bajaramiz. Bu holda koordinata o'qlarining yo'nalishlari o'zgarmaydi,faqat koordinata boshi $O'(x_0, y_0)$ nuqtaga ko'chadi.Bu formulalardan x, y larni topib va (1) ga qo'yib

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \quad (3)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamada koeyeffitsiyentlar uchun

$$a'_{11} = a_{11}, \quad a'_{12} = a_{12}, \quad a'_{22} = a_{22},$$

[24] [1, 131-143 pp.]

$$a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13},\quad a'_{23} = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23},\quad a'_{33} = F(x_0, y_0) \quad (4)$$

tengliklar o'rinli bo'lib, $F(x, y)$ bilan (1) tenglamaning chap tomonidagi ifoda belgilangan.

Yuqoridagi (3) formulalardan ko'rinib turibdiki, paralllel ko'chirishda ikkinchi darajali hadlar oldidagi koeffitsiyentlar o'zgarmaydi. Agar $O'(x_0, y_0)$ nuqtaning koordinatalari

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0, \end{aligned} \qquad (5)$$

sistemani qanoatlantirsa, (3) tenglamada birinchi darajali hadlar qatnashmaydi.

Bundan tashqari, agar $O'(x_0, y_0)$ nuqtaning koordinatalari (5) sistemani qanoatlantirsa, $O'(x_0, y_0)$ nuqta ikkinchi tartibli chiziq uchun simmetriya markazi bo'ladi. Haqiqatan ham bu holda koordinatalar markazini $O'(x_0, y_0)$ nuqtaga ko'chirsak, tenglamada birinchi darajali hadlar qatnashmaydi. Shuning uchun yangi koordinatalar sistemasida

$$F(x', y') = F(-x', -y')$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, $O'(x_0, y_0)$ nuqta chiziq uchun simmetriya markazidir. Va aksincha, agar birorta A nuqta chiziq uchun simmetriya markazi bo'lsa, uning koordinatalari (5) sistemani qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Koordinata boshini A nuqtaga joylashtirib, yangi x, y koordinatalar sistemasini kiritamiz. Agar $M(x, y)$ nuqta chiziqqa tegishli bo'lsa, $F(x, y) = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi. Koordinata boshi simmetriya markazi bo'lgani uchun $F(-x, -y) = 0$ tenglik ham o'rinli bo'ladi. Bu tengliklarni ikkinchisini birinchisidan ayirib $a_{12}x + a_{23} = 0$ tenglikni hosil qilamiz. Agar a_{13}, a_{23} koeffitsiyentlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, bu tenglama to'g'ri chiziqni aniqlaydi, ya'ni ikkinchi tartibli chiziqning hamma nuqtalari bir to'g'ri chiziqda yotadi. Agar ikkinchi tartibli chiziq bir to'g'ri chiziqda yotmasa, bu koeffitsiyentlarning har ikkalasi ham nolga teng bo'ladi. Bu esa A nuqtaning koordinatalari (5) sistemani qanoatlantirishini ko'rsatadi. Bu faktlarni hisobga olsak, quyidagi ta'rifning geometrik ma'nosi yaxshi tushinarli bo'ladi.

Ta'rif-1 .Tekislikdagi $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning koordinatalari (5) sistemani qanoatlantirsa, u (1) tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqning markazi deyiladi.

Tabiiyki, (5) sistema yagona yechimga ega bo'lishi, cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi yoki umuman yechimga ega bo'lmasligi mumkin. Agar

$$a_{11}a_{22} - a^2{}_{21} \neq 0$$

munosabat o'rinli bo'lsa, (5) sistema yagona yechimga ega bo'ladi. Agar

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$$

munosabat o'rinli bo'lsa sistema cheksiz ko'p yechimga,

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$$

munosabat bajarilsa, sistema yechimga ega emas. Bularni e'tiborga olib, biz ikkinchi tartibli chiziqlarni uchta sinfga ajratamiz:

a) yagona markazga ega bo'lgan chiziqlar;

b) cheksiz ko'p markazga ega bo'lgan chiziqlar;

c) markazga ega bo'lmagan chiziqlar;

Biz quyidagi determinantlarni kiritamiz

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bu yerda

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad a_{32} = a_{23}.$$

belgilashlar kiritilgan.

Yagona markazga ega chiziqlar uchun $\delta \neq 0$, yagona markazga ega bo'lmagan chiziqlar uchun $\delta = 0$. Chiziqlar cheksiz ko'p markazga ega bo'lishi uchun $\Delta = 0$ tenglik bajarilshi kerak.

Uchinchi tartibli determinantni

$$\Delta = a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ko'rinishda yozib olsak, oxirgi determinant δ ga tengdir. Agar $\delta = 0$ bo'lsa,

birorta k soni uchun

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k \ , \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

munosabat bajariladi. Bu tenglikni hisobga olib,

$$\Delta = (a_{13} - ka_{23}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar $\Delta = 0$ tenglik ham bajarilsa,

$$a_{13} - k a_{23} = 0 \quad \text{va} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

tengliklardan kamida bittasi o'rinli bo'ladi. Bu tengliklarning birinchisi o'rinli bo'lsa,

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k$$

munosabatdan

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

munosobat kelib chikadi. Agar

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

bo'lsa, $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k$ va $\frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$ tengliklardan

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

munosobat kelib chiqadi. Demak, $\delta = 0$ va $\Delta = 0$ tengliklarning bir vaqtda bajarilishi

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

shartga teng kuchlidir. Natijada biz quyidagi tasdiqni hosil qilamiz:

Tasdiq. *Ikkinchi tartibli chiziq*

a) $\delta \neq 0$ *bo'lsa yagona markazga ega,*

b) $\delta = 0$ *va* $\Delta = 0$ *bo'lsa cheksiz ko'p markazga ega va markazlar to'plami bitta to'gri chiziqni tashkil etadi;*

v) $\delta = 0$ *va* $\Delta \neq 0$ *bo'lsa markazga ega emas.*

YAGONA MARKAZGA EGA BO'LGAN IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQ TENGLAMASINI SODDALASHTIRISH

Biz umumiy $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ tenglama bilan berilgan yagona markazga ega ikkinchi tartibli chiziqni aniqlash va uni yasash bilan shug'ullanamiz.

Bu holda parallel ko'chirish yordamida koordinata boshini ikkinchi tartibli chiziqning markaziga joylashtiramiz.

Natijada tenglamada birinchi hadlar yo'qoladi. Koordinata o'qlarini o'zaro perpendikulyar bosh yo'nalishlar bo'yicha yo'naltiramiz. yo'nalishlarning o'zaro qo'shma bo'lishi invariant xossa bo'lganligi uchun yangi koordinatalar sistemasida $\{1,0\}$ va$\{0,1\}$ yo'nalishlar o'zaro qo'shma bo'ladi. Bu shart

$$a_{12}'=0$$

tenglikka teng kuchlidir. Demak bu holda ikkinchi tartibli chiziqning tenglamasi

$$d_{11}x'^2+d_{22}y'^2+d_{33}=0 \qquad (36)$$

ko'rinishga keladi.Bu tenglamada

$$d_{11}\neq 0\; d_{22}\neq 0,d_{33}$$

koeffitsiyent esa nolga teng bo'lishi ham,nolga teng bo'lmasligi ham mumkin. Agar d_{33} koeffitsiyent esa nolga teng bo'lsa, (36) tenglama

$$Ax'^2+By'^2=0 \qquad (37)$$

ko'rinishga keladi. Agar A,B koeffitsiyentlar har xil ishoralarga ega bo'lsa, bu tenglama ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Koeffitsiyentlar bir xil ishoralarga ega bo'lsa, bu tenglamani bitta nuqtani aniqlaydi.

Yuqoridagi (36) tenglamada d_{33} koeffitsiyent esa nolga teng bo'lmasa, (36) tenglama

$$Ax'^2+By'^2=1 \qquad (38)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglama esa koeffitsiyentlarning ishorasiga qarab, ellipsni yoki giperbolani aniqlaydi.

Demak, yagona markazga ega bo'lgan ikkinchi tartibli chiziq quyidagi to'rtta chiziqlarning biridan iborat:

1. Ellips
2. Giperbola;

3. Ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq;
4. Bitta nuqta.

Masala. Quyidagi

$$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$$

tenglama bilan aniqlagan chiziq tenglamasini soddalashtiring.

Yechish. Berilgan ikkinchi tartibli chiziq uchun ikkinchi invariantni hisoblasak,

$$I_2=\begin{vmatrix}1 & -\frac{5}{2}\\ -\frac{5}{2} & 4\end{vmatrix}=-\frac{9}{4}<0$$

chiziq birinchi guruhga tegishli, ya’ni berilgan chiziq giperbolik tipda. Ushbu

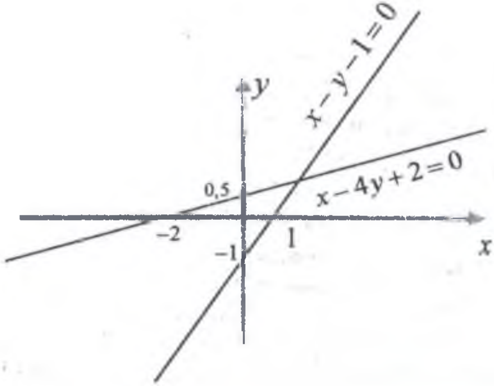
$$K_3=\begin{vmatrix}1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2} & 4 & 1\\ \frac{1}{2} & 1 & -2\end{vmatrix}=0$$

munosabatdan berilgan ikkinchi tartibli chiziqning kesishadigan ikkita to‘g‘ri chiziqdan iborat ekanligini ko‘ramiz.

Tenglamani ikkita chiziqli ko‘paytuvchilarga ajratish yordamida soddalashtiramiz:

$$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=x^2+(-5y+1)x+4y^2+2y-2=$$
$$=x^2+(-5y+1)x+\left(\frac{-5y+1}{2}\right)^2+4y^2+2y-2-\left(\frac{-5y+1}{2}\right)^2=$$
$$=\left(x+\frac{-5y+1}{2}\right)^2+4y^2+2y-2-\frac{25y^2-10y+1}{4}=\left(x+\frac{-5y+1}{2}\right)^2-$$
$$-\left(\frac{3y-3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{-5y+1}{2}+\frac{3y-3}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{-5y+1}{2}-\frac{3y-3}{2}\right)=$$
$$=(x-y-1)\cdot(x-4y+2);$$

bu to‘g‘ri chiziqlar tenglamalari: $x-y-1=0;$ $x-4y+2=0$ dan iborat.



Darsda yechiladigan misollar

1. Asimptotalari $x-1=0,\ 2x-y+1=0$ to‘g‘ri chiziqlardan iborat bo‘lgan va $4x+y+5=0$ to‘g‘ri chiziqqa urinadigan giperbola tenglamasi tuzilsin.

2.([2]) Ikkinchi tartibli sirtning berilgan tekislik bilan kesishishidan hosil bo‘lgan chiziqni tekshiring

1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1,\ 4x-3y-12z-6=0$

2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+z^2=1,\quad x+4z-4=0.$

3. ([2]) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ paraboloidning $3x+2y-4z=0$ tekislikka parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqli yasovchilarini toping.

4.([2]) Berilgan $M(6,2,8)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ sirtda yotuvchi to‘g‘ri chiziqlarni toping.

5. Diametri $x-2y=0$ to‘g‘ri chiziqdan $x+y=0$ esa uchidagi urinmasidan iborat bo‘lgan hamda $A(0;1)$ nuqtadan o‘tuvchi parabola tenglamasi tuzilsin.

6. Uchlari $A(4;2), B(8;2), C(4;5)$ nuqtalarda bo‘lgan ABC uchburchak bilan berilgan. Shu uchburchakka tashqi chizilgan uchburchakning A uchidan chiqarilgan AD mediana diametri bo'ladigan parabola tenglamasi tuzilsin.

7. AOB uchburchak berilgan: $A(8;0), O(0;0), B(0;6)$. O nuqtadan o'tadigan, AB tomoni o'rtasida urinadigan, OA, OB tomonlarni kesib o'tadigan ikkinchi tartibli chiziq tenglamasi tuzilsin.

8. Parallelogrammning uchta $O(0;0), A(4;0), B(2;2)$. uchi hamda A *va* B nuqtalar parallelogrammning qarama-qarshi uchlari ekanligi ma'lum. Shu parallelogramga ichki chizilgan va parallelogramm tomonlarining o'rtalarida urinadigan ellips tenglamasi tuzilsin.

9. (3;0) nuqtadan o'tadigan markazi (0;-1) nuqtada bo'lgan ikkinchi tartibli chiziq berilgan. Bu chiziq $2x-3y+1=0$, $x+y-5=0$ to'g'ri chiziqlarni xosmas nuqtalarda kesib o'tishi ma'lum bo'lsa, chiziq tenglamasi tuzilsin.

10. (1;1) nuqtadan o'tadigan, Ox o'qni (1;0) nuqta va xosmas nuqtasida, shuningdek, Oy o'qini (0;1) nuqta bilan xosmas nuqtasida kesib o'tadigan ikkinchi tartibli chiziq tenglamasi tuzilsin.

11. $M(1;1)$ nuqtadan o'tib, Ox o'qiga (3;0) nuqtada urinadigan va asimptotasi Oy o'qidan iborat giperbolaning tenglamasi tuzilsin.

Test savollari

1. Quyidagilardan qaysi biri yagona markazga ega?
a) Ellips
b) Ikkita parallel to'g'ri chiziq
c) Ikkita ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqlar
d) parabola
2. Quyidagilardan qaysi biri yagona markazga ega?
a) Giperbola
b) Ikkita parallel to'g'ri chiziq
c) Ikkita ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqlar
d) parabola
3. Quyidagilardan qaysi biri yagona markazga ega?
a) Ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq
b) Ikkita parallel to'g'ri chiziq
c) Ikkita ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqlar
d) parabola
4. Quyidagilardan qaysi biri yagona markazga ega?

a) Nuqta
b) Ikkita parallel to‘g‘ri chiziq
c) Ikkita ustma-ust tushuvchi to‘g‘ri chiziqlar
d) parabola

5. Quyidagilardan qaysi biri yagona markazga ega emas?
a) Ellips
b) Nuqta
c) Ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq
d) parabola

6. Quyidagilardan qaysi biri yagona markazga ega emas?
a) Ellips
b) Nuqta
c) Ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq
d) Ikkita ustma-ust tushuvchi to‘g‘ri chiziqlar

7. Quyidagilardan qaysi biri cheksiz ko‘p markazga ega ?
a) Ellips
b) Nuqta
c) Ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq
d) Ikkita ustma-ust tushuvchi to‘g‘ri chiziqlar

8. Quyidagilardan qaysi biri cheksiz ko‘p markazga ega?
a) Ellips
b) Nuqta
c) Ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq
d) Ikkita parallel to‘g‘ri chiziq

9. Quyidagilardan qaysi biri markazga ega emas?
a) Ellips
b) Parabola
c) Ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq
d) Ikkita parallel to‘g‘ri chiziq

10. Quyidagilardan qaysi birlari yagona markazga ega?
e) Ellips, giperbola
f) Nuqta, parabola
g) Ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq, nuqta
h) Ikkita parallel to‘g‘ri chiziq, ellips

14-§. Ikkinchi tartibli sirtlarning umumiy tenglamalarini kanonik ko‘rinishga keltirish

Reja:

1. Ikkinchi tartibli sirtlarning umumiy tenglamasi
2. Yagona markazga ega ikkinchi tartibli sirt tenglamasini soddalashtirish
3. Yagona markazga ega bo‘lmagan ikkinchi tartibli sirt tenglamasini soddalashtirish

IKKINCHI TARTIBLI SIRTLARNING UMUMIY TENGLAMASI

Biz ikkinchi tartibli sirt deganda fazoda dekart koordinatalar sistemasida koordinatalari quyidagi

$$\begin{gathered} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o‘rnini tushunamiz.

Bu yerda $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ koeffitsentlardan kamida bittasi noldan farqli. Yuqoridagi (1) tenglamani ikkinchi tartibli sirtning umumiy tenglamasi deb ataymiz.

Ma’lumki, ikkinchi tartibli sirt geometrik obyekt sifatida, berilgan dekart koordinatalar sistemasidan boshqa dekart koordinatalar sistemasiga o‘tganimizda o‘zgarmaydi. Eslatib o‘tamiz, (1) tenglama va boshqa koordinata sistemasiga o‘tgandagi tenglama ekvivalentdir.

Quyida biz bir dekart koordinatalar sistemasidan boshqasiga o‘tganimizda (1) tenglamaning koeffitsiyentlarining o‘zgarishini ko‘ramiz. Parallel ko‘chirish va burishni alohida qaraymiz. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz: (1) tenglamaning yuqori tartibli hadlari

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

–(1) tenglamaning yuqori tartibli hadlari

$$2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}$$

–(1) tenglamaning chiziqli hadlari.

Dekart koordinatalar sistemasini

$$\begin{aligned} x &= x'+x_0 \\ y &= y'+y_0 \\ z &= z'+z_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

formulalar yordamida parallel ko'chirishni qaraylik. Bunda x_0, y_0, z_0 yangi koordinatalar boshining eski $Oxyz$ koordinatalar sistemasidagi koordinatalari (2) tenglamalar sistemasidagi ifodalarni (1) tenglamaga qo'yib ikkinchi tartibli sirtning yangi koordinatalar sistemasidagi tenglamasini hosil qilamiz:

$$a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+2a_{12}x'y'+2a_{13}x'z'+2a_{23}y'z'+$$
$$+2a'_{14}x'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{44}=0 \qquad (1)$$

Bu tenglamada

$$\begin{aligned} a'_{14} &= a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14} \\ a'_{24} &= a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24} \\ a'_{34} &= a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}z_0+a_{34} \qquad (3) \\ a'_{44} &= a_{11}x_0^2+a_{22}y_0^2+a_{33}z_0^2+2a_{12}x_0y_0+2a_{13}x_0z_0+2a_{23}y_0z_0+ \\ &+2a_{14}x_0+2a_{24}y_0+2a_{34}z_0+a_{44} \end{aligned}$$

Yuqoridagilardan quyidagicha xulosa qilish mumkin: Dekart koordinatalar sistemasini parallel ko'chirganimizda yuqori tartibli hadlar oldidagi koeffitsiyentlar o'zgarmaydi, chiziqli koeffitsentlar esa (3) formulalardagi kabi o'zgaradi.

Koordinatalar sistemasini burishda ikkinchi tartibli sirt tenglamasining o'zgarishini o'rganishda bizga quyidagi tushunchalar kerak bo'ladi.

Bizga ikkinchi tartibli sirt

$$F(x,y,z)=0 \qquad (1')$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, unga tegishli $M(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadagi urinma tekislik tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. Ikkinchi tartibli sirtda yotuvchi va M_0 nuqtadan o'tuvchi hamma chiziqlarning shu nuqtadagi urinmalari yotuvchi tekislik Sirtning M_0 nuqtadagi urinma tekisligi deyiladi.

Urinma tekislik tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun M_0 nuqtadan o'tuvchi α tekislik bilan sirtni kesganimizda hosil bo‘lgan kesimni (chiziqni) γ bilan , uning M_0 nuqtadagi urinmasini l bilan belgilaymiz.

Urinmaga tegishli nuqtani $M(x,y,z)$ bilan, γ chiziqda M_0 nuqtaga etarli yaqin nuqtani N bilan belgilab, M_0 va N nuqtalardan to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziqda $M(x,y,z)$ nuqtaga eng yaqin nuqta $M'(x',y',z')$ bo‘lsin. Biz N nuqtaning koordinatalarini

$$x_N = x_0 + t(x' - x_0)$$
$$y_N = y_0 + t(y' - y_0)$$
$$z_N = z_0 + t(z' - z_0)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Koordinatalar uchun bu ifodalarni (1) tenglamaga qo‘ysak

$$F(x_0 + t(x' - x), y_0 + t(y' - y_0), z_0 + t(z' - z_0)) = 0 \quad (1)$$

tenglikni olamiz. Bu tenglikning chap tomonidagi ifodada $t \to 0$ da x',y',z' o‘zgaruvchilar mos ravishda x_0,y_0,z_0 kattaliklarga intiladi. Yuqoridagi tenglikni t ga bo‘lib va $F(x_0,y_0,z_0)=0$ tenglikni hisobga olib, $t \to 0$ da limitga o‘tsak

$$(x - x_0)F_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)F_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$
(14)

tenglamani hosil qilamiz.Bu tenglama sirtning M_0 nuqtadagi urinma tekisligi tenglamasidir.

Biz ikkinchi tartibli chiziqlar uchun diametr tushunchasini kiritgan edik. Ikkinchi tartibli sirt uchun esa diametr tekislik tushunchasini kiritamiz. To‘g‘ri chiziq ikkinchi tartibli sirtni ikki M,N nuqtada kesib o‘tsa, MN kesma ikkinchi tartibli sirt uchun vatar bo‘ladi.

Teorema-1. Parallel vatarlarning o‘rtalari bir tekislikda yotadi.

Isbot. Ikkinchi tartibli sirt uchun maxsus tanlangan $Oxyz$ dekart koordinatalar sistemasi mavjudki, uning tenglamasida xy,xz,yz ifodalar qatnashmaydi. Bu faktni isbotlash uchun

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz +$$
$$+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}$$

belgilash kiritib,

$$f(x,y,z)=\frac{a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz}{x^2+y^2+z^2}$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya hamma o‘zgaruvchilarga nisbatan bir jinsli, ya’ni

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=f(x,y,z), \qquad \lambda\in R^1$$

tenglik o‘rinlidir. Bundan tashqari f funksiya birlik sferada chegaralangan va sferaning birorta M_0 nuqtasida bu sferadagi eng kichik qiymatga erishadi.

Funksiya bir jinsli bo‘lgani uchun, u koordinata boshidan chiquvchi nurlarda funksiyaning qiymati o‘zgarmaydi. Demak, M_0 nuqtada funksiya o‘zining aniqlanish sohasidagi eng kichik qiymatiga erishadi.

Koordinatalar boshini o‘zgartirmagan holda Oz' o‘qni $\overline{OM_0}$ vektor bo‘yicha yo‘naltirib, yangi $Ox'y'z'$ koordinatalar sistemasini kiritamiz. Yangi koordinatalar sistemasida funksiya

$$f(x',y',z')=\frac{a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{12}x'y'+2a'_{23}y'z'+2a'_{13}x'z'}{x'^2+y'^2+z'^2}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Maxrajda turgan ifoda nuqtadan koordinata boshigacha bo‘lgan masofa ning kvadrati bo‘lgani uchun. Uning ko‘rinishi o‘zgarmaydi. Yangi koordinatalar sistemasida M_0 nuqta $(0,0,z_0)$ koordinatalarga ega va

$$f(0,y',z_0)=\frac{a'_{22}y'^2+2a'_{23}y'+a'_{33}z_0'^2}{z_0^2+y^2}$$

tenglik o‘rinli. Demak,

$$\left.\frac{df(0,y',z_0)}{dy'}\right|_{y'=0}=0$$

tenglikdan $a'_{23}=0$ munosabat kelib chiqadi. Yuqoridagidek $f(x',0,z_0)$ Funksiyaning M_0 nuqtada minimumga erishishidan foydalanib, $a'_{13}=0$

tenglikni olamiz. Natijada ikkinchi tartibli sirt tenglamasi

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_{14}x'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{33}z'^2+a'_{44}=0$$

ko‘rinishga keladi. Bu yerda faqat x',y' o‘zgaruvchilarga bog‘liq ifodada $x'y'$ ko‘paytmani yo‘qatish uchun koordinatalar sistemasini qanday o‘zgartirishni biz IV bobda o‘rgandik. Buning uchun koordinata boshini o'zgartirmasdan yangi, Ox', Oy' o'qlarni o'zaro qo'shma qilib tanlasak, Oz' o'q yo'nalishini o'zgartirmasak, sirt tenglamasi

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0 \quad (15)$$

ko'rinishga keladi.

Endi bevosita teorema isbotiga kirishamiz. Buning uchun

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}$$

to'g'ri chiziqqa parallel vatar o'rtasining koordinatalarini $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ bilan belgilasak, uning uchi koordinatalari mos ravishda

$$x=\bar{x}+\lambda t,\ y=\bar{y}+\mu t,\ z=\bar{z}+\nu t \text{ va } x=\bar{x}-\lambda t, y=\bar{y}-\mu t, z=\bar{z}-\nu t \quad (16)$$

ko'rinishda bo'ladi. Vatar uchlari sirtga tegishli bo'lgani uchun, ularning koordinatalari (15) tenglamani qanoatlantiradi. Ularni (15) tenglamaga qo'ysak,

$$a_{11}\bar{x}^2+a_{22}\bar{y}^2+a_{33}\bar{z}^2+2a_1\bar{x}+2a_2\bar{y}+2a_3\bar{z}+a+2t(\lambda a_{11}\bar{x}+\mu a_{22}\bar{y}$$
$$+\nu a_{33}\bar{z}+\lambda a_1+\mu a_2+\nu a_3)+t^2\left(a_{11}\lambda^2+a_{22}\mu^2+a_{33}\nu^2\right)=0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikda t ning ishorasini o'zgartirsak ham, u o'rinli bo'ladi. Demak, birinchi darajali had koeffitsienti nolga teng bo'ladi:

$$\lambda\left(a_{11}\bar{x}+a_1\right)+\mu\left(a_{22}\bar{y}+a_2\right)+\nu\left(a_{33}\bar{z}+a_3\right)=0 \quad (17)$$

Bundan esa vatar o'rtasining koordinatalari (17) tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi.

Ta'rif-2. Parallel vatarlarning o'rtalaridan o'tuvchi tekislik sirtning diametrial tekisligi deb ataladi.

Diametrial tekislikning tenglamasini ixtiyoriy dekart koordinatalar sistemasida yozish uchun (16) ifodalarni

$$F(x,y,z)=0$$

tenglamaga qo'yib,

$$2F(x,y,z)\pm 2t(\lambda F_x(x,y,z)+\mu F_y(x,y,z)+\nu F_z(x,y,z))+$$
$$+t^2(a_{11}\lambda^2+a_{12}\mu^2+a_{33}\nu^2+2a_{12}\lambda\mu+2a_{23}\mu\nu+2a_{31}\nu\lambda)=0$$

tenglikni olamiz.Bu tenglikIik bajarilishi uchun t oldidagi koifsent nolga teng bo'lishi kerak. Demak, diametrial tekislik tenglamasini

$$\lambda F_x+\mu F_y+\lambda F_z=0 \quad (18)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Ravshanki, agar ikkinchi tartibli sirt simmetriya markaziga ega bo‘lsa, har qanday diametrial tekislik bu markazdan o‘tadi.

Demak ikkinchi tatibli sirt markazi

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0 \qquad (19)$$

tenglamalar sistemasi yordamida aniqlanadi.

Paraboloidning diametrial tekisligi uning o‘qiga parallel bo‘ladi. Bu holda $a_{33} = 0$ bo‘lganligi uchun (18) tenglamada z o‘zgaruvchi qatnashmaydi.

Elliptik va giperbolik silindrlar uchun ularning o‘qlaridagi hamma nuqtalar markaz bo‘lgani uchun har qanday diametrial tekislik sirt o‘qi orqali o‘tadi.

Ta’rif. Bizga α tekislik berilgan bo‘lib,sirtga tegishli ixtiyoriy M nuqta uchun α tekislikka nisbatan bu nuqtaga simmetrik nuqta ham sirtga tegishli bo‘lsa, α tekislik sirtning simmetrik tekisligi deyiladi.

Diametrial tekislik tenglamasidan foydalanib sirtning simmetriya tekisligi tenglamasini keltirib chiqaramiz. Simmetriya tekisligiga perpendikulyar yo‘nalishdagi o‘zaro parallel vatarlar o‘rtalari simmetriya tekisligiga tegishli bo‘lganligi uchun $\bar{a} = \{l, m, n\}$ vektorga perpendikulyar simmetriya tekisligi tenglamasi (18) ga ko‘ra

$$lF_x + mF_y + nF_z = 0 \qquad (20)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Simmetriya tekisligiga $\bar{a} = \{l, m, n\}$ vektor perpendikulyar

bo‘lganligi uchun

$$\frac{a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n}{l} = \frac{a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n}{m} = \frac{a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n}{n} \qquad (21)$$

proposionallik o‘rinli bo‘ladi. Simmetriya tekisligiga perpendikulyar yo‘nalishni (20) tenglikdan aniqlash uchun (21) nisbatni k bilan belgilab, ekvivalent sistemani hosil qilamiz

$$\begin{cases} (a_{11} - k)l + a_{12}m + a_{13}n = 0 \\ a_{21}l + (a_{22} - k)m + a_{23}n = 0 \\ a_{31}l + a_{32}m + (a_{33} - k)n = 0 \end{cases} \qquad (22)$$

l, m, n lar bir vaqtda nolga teng bo‘lmaganligi uchun

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan k ni topib (22) sistemaga qo'yamiz va undan $\{l, m, n\}$ yo'nalishni topamiz.

Biz sirtning simmetriya tekisligini bilsak, ikkinchi tartibli sirt tenglamasini soddalashtirish uchun qulay, yani kanonik koordinatalar sistemasini topish qiyin bo'lamaydi.

YAGONA MARKAZGA EGA IKKINCHI TARTIBLI SIRT TENGLAMASINI SODDALASHTIRISH[25]

Yagona markazga ega ikkinchi tartibli sirtning umumiy tenglamasini parallel ko'chirish va 1-teoremani qo'llash yordamida

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + a'_{44} = 0 \quad (23)$$

ko'rinishga keltiramiz. Ikkinchi tartibli sirtning markazi yagona ekanligidan ma'lumki,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0.$$

Bu munosabatdan a_{11}, a_{22}, a_{33} koeffitsentlarning hech biri nolga teng bo'llmasligini ko'rish mumkin.

Endi (23) tenglamaning mumkin bo'lgan barcha ko'rinishlarini qarab chiqamiz.

1-hol. (23) tenglamadagi a_{11}, a_{22}, a_{33} koeffitsiyentlar bir xil ishorali, a_{44} koeffitsiyent esa noldan farqli. Bu holda (1) ikkinchi tartibli sirt ellipsoidning kanonik tenglamasini aniqlaydi. Agar a_{11}, a_{22}, a_{33} va a_{44} koeffitsiyentlar bir xil ishorali bo'lsa (1) ikkinchi tartibli sirt tenglamasi

$$\frac{X^2}{\frac{a_{44}}{a_{11}}} + \frac{Y^2}{\frac{a_{44}}{a_{22}}} + \frac{Z^2}{\frac{a_{44}}{a_{33}}} = -1$$

[25] [1, page 133]

ko'rinishga keladi. Bunda Ellipsoid mavhum, agar a_{11}, a_{22}, a_{33} koeffitsiyentlar bir xil a_{44} koeffitsiyent esa ularga qarama-qarshi ishorali bo'lsa,

$$\frac{X^2}{\frac{a_{44}}{a_{11}}}+\frac{Y^2}{\frac{a_{44}}{a_{22}}}+\frac{Z^2}{\frac{a_{44}}{a_{33}}}=1$$

ko'rinishdagi ellipsoidning kanonik tenglamasi hosil bo'ladi.

2-hol. (23) tenglamadagi a_{11}, a_{22}, a_{33} va a_{44} koeffitsiyentlardan ikkitasi bir xil qolganlari qarama-qarshi ishorali

Bu holda (1) ikkinchi tartibli sirt bir pallali giperboloidning kanonik tenglamasini aniqlaydi.

Aniqlik uchun $a_{11}>0, a_{22}>0, a_{33}<0, a_{44}<0$ bo'lsin. Bunda (1) ikkinchi tartibli sirt tenglamasi

$$\frac{X^2}{-\frac{a_{44}}{a_{11}}}+\frac{Y^2}{-\frac{a_{44}}{a_{22}}}-\frac{Z^2}{\frac{a_{44}}{a_{33}}}=1$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu esa bir pallali giperbolaning kanonik tenglamasi. Agar koeffitsentlarning ishorali boshqa holatda bo'lsa, koordinata o'qlarini almashtirish yordamida kanonik tenglamaga kelish mumkin.

3-hol. (23) tenglamadagi a_{11}, a_{22}, a_{33} va a_{44} koeffitsiyentlardan birining ishorasi qolganlarining ishorasiga qarama-qarshi .

Bu holda (1) ikkinchi tartibli sirt ikki pallali giperboloidning kanonik tenglamasini aniqlaydi.

Aytaylik aniqlik uchun $a_{11}<0, a_{22}<0, a_{33}>0, a_{44}<0$ bo'lsin. U holda $\frac{a_{44}}{a_{11}}>0, \frac{a_{44}}{a_{22}}>0, -\frac{a_{44}}{a_{33}}>0$ munosabatlar bajariladi. Bunda (1) ikkinchi tartibli sirt tenglamasini

$$\frac{X^2}{\frac{a_{44}}{a_{11}}}+\frac{Y^2}{\frac{a_{44}}{a_{22}}}-\frac{Z^2}{-\frac{a_{44}}{a_{33}}}=-1$$

Ko'rinishga keladi. Bu esa ikki pallali giperbolaning kanonik tenglamasi. Agar koeffitsentlarning ishorali boshqa holatlarda bo'lsa, koordinata qo'larini almashtirish yordamida kanonik tenglamaga kelish mumkin.

4-hol. (23) tenglamadagi a_{44} koeffitsiyent nolga teng.

Bu holda (1) ikkinchi tartibli sirt konusning kanonik tenglamasini aniqlaydi.

Agar a_{11}, a_{22}, a_{33} koeffitsiyentlarning ishoralari bir xil bo'lsa,

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 = 0$$

tenglama dekart koordinatalar sistemasida $x = y = z = 0$ nuqtada bajariladi. Ya'ni (23) tenglama bu holda nuqtani aniqlaydi. Bu konus mavhum konus deb ataladi.

Agar a_{11}, a_{22}, a_{33} koeffitsiyentlarning ishoralari turlicha bo'lsa, (23) tenglama konusni aniqlaydi.

Aytaylik aniqlik uchun $a_{11} < 0, a_{22} < 0, a_{33} > 0$ bo'lsin. U holda

$$-\frac{1}{a_{11}} > 0, -\frac{1}{a_{22}} > 0, \frac{1}{a_{33}} > 0$$

munosabatlar bajariladi. Bunda (1) ikkinchi tartibli sirt tenglamasini

$$-\frac{X^2}{\frac{1}{a_{11}}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{a_{22}}} + \frac{Z^2}{\frac{1}{a_{33}}} = 0$$

ko'rinishda yoza olamiz.

YAGONA MARKAZGA EGA BO'LMAGAN IKKINCHI TARTIBLI SIRT TENGLAMASINI SODDALASHTIRISH[1]

Berilgan ikkinchi tartibli chiziq markazi yagona bo'lmasa, 1-teoremani qo'llash bilan (1) tenglamani

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (24)$$

ko'rinishga olib kelamiz.

Markaz yagona bo'lmaganligi uchun

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} = 0$$

munosabat o'rinli. Bundan esa a_{11}, a_{22}, a_{33} koeffitsiyentlardan bittasi yoki ikkitasi nolga teng bo'lishi mumkin. Ularning barchasi bir paytda nolga teng bo'lolmaydi.

---

[1] [1, page 131]

1-hol. a_{11}, a_{22}, a_{33} koeffitsiyentlardan bittasi nolga teng. Aniqlik uchun a_{33} koeffitsiyent nolga teng bo'lsin. Agar koeffitsiyentlardan boshqa biri nolga teng bo'lsa, koordinata o'qlarini qayta nomlash bilan yuqoridagi holga kelish mumkin.

Yangi x', y', z' koordinatalarga eski x, y, z koordinatalarga

$$x = x' + \frac{a_{14}}{a_{11}},$$

$$y = y' + \frac{a_{24}}{a_{22}},$$

$$z = z'$$

almashtirish yordamida o'tsak, (24) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

a) Agar koeffitsiyentlar uchun $a_{34} = 0$, $a_{44} = 0$ munosabat bajarilsa, (1) tenglama yordamida berilgan ikkinchi tartibli sirt

$$x \pm \sqrt{-\frac{a_{22}}{a_{11}}}\, y = 0$$

ikkita tekislik tenglamasiga ajraladi. Ko'rinib turibdiki, a_{22}, a_{11} koeffitsentlar turli ishorali bo'lgan holda haqiqiy, bir xil ishorali bo'lganda esa mavhum tekisliklar paydo bo'ladi.

b) Agar koeffitsiyentlar uchun $a_{34} = 0$, $a_{44} \neq 0$ munosabat bajarilsa, (24) tenglama

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{44} = 0 \quad (25)$$

ko'rinishga keladi. a_{22}, a_{11} va a_{44} koeffitsentlar bir xil ishorali bo'lganda mavhum silindr tenglamasi paydo bo'ladi. Agar a_{22}, a_{11} koeffitsentlar bir xil ishorali a_{44} koeffitsent esa ularga qarama-qarshi ishoraga ega bo'lsa, arifmetik amallarni bajarish orqali (25) tenglamani

$$\frac{x^2}{\frac{a_{44}}{a_{11}}} + \frac{y^2}{\frac{a_{44}}{a_{22}}} = 1$$

holatga olib kelamiz. Shunday qilib bu holda berilgan ikkinchi tartibli sirt elliptik silindrni aniqlar ekan.

a_{22}, a_{11} koeffitsentlar turli ishorali bo‘lgan holda, giperbolik silindr tenglamasiga ega bo‘lamiz.

$$\frac{x^2}{\frac{a_{44}}{a_{11}}} - \frac{y^2}{\frac{a_{44}}{a_{22}}} = 1 \quad \left(\frac{x^2}{\frac{a_{44}}{a_{11}}} - \frac{y^2}{\frac{a_{44}}{a_{22}}} = -1 \right)$$

v) Agar $a_{34} \neq 0$ munosabat bajarilsa, (24) tenglamani koordinata boshini parallel ko‘chirish bilan

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0 \quad (26)$$

Ko‘rinishga olib kela olamiz. (26) tenglama paraboloidlarning tenglamalarini aniqladi.

Agar a_{11}, a_{22} bir xil ishorali bo‘lsa, paraboloid elliptik bo‘ladi

$$\frac{x^2}{\frac{a_{34}}{a_{11}}} + \frac{y^2}{\frac{a_{34}}{a_{22}}} = 2z$$

Agar a_{11}, a_{22} turli ishorali bo‘lsa, paraboloid giperbolik bo‘ladi

$$\frac{x^2}{\frac{a_{34}}{a_{11}}} - \frac{y^2}{\frac{a_{34}}{a_{22}}} = 2z$$

2-hol. a_{11}, a_{22}, a_{33} koeffitsiyentlardan ikkitasi bir paytda nolga teng. Aniqlik uchun $a_{11} = a_{22} = 0$ bo‘lsin. Agar koeffitsiyentlardan boshqa biri nolga teng bo‘lsa, koordinata o‘qlarini qayta nomlash bilan yuqoridagi holga kelish mumkin.

Yangi x', y', z' koordinatalarga eski x, y, z koordinatalarga

$$x = x',$$

$$y = y',$$

$$z = z' + \frac{a_{34}}{a_{33}}$$

almashtirish yordamida o‘tsak, (24) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0. \quad (27)$$

a) Agar koeffitsiyentlar uchun $a_{14} = 0$, $a_{24} = 0$ munosabat bajarilsa, (1) tenglama yordamida berilgan ikkinchi tartibli sirt

$$z = \pm\sqrt{-\frac{a_{44}}{a_{33}}}$$

ikkita parallel tekislik tenglamasiga ajraladi. Ko'rinib turibdiki, a_{33}, a_{44} koeffitsentlar turli ishorali bo'lgan holda haqiqiy, bir xil ishorali bo'lganda esa mavhum tekisliklar paydo bo'ladi. Agar $a_{44} = 0$ bu tekisliklar ustma-ust tushadi.

b) Agar a_{14}, a_{24} koeffitsiyentlarning kamida bittasi noldan farqli. Bu holda dekart koordinatalar sistemasini Oz o'qi atrofida shunday burchakka buramizka bunda abssissa o'qi $2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0$ tekislikka parallel bo'lsin. Ko'rish mumkinki bunday almashtirishdan so'ng (27) tenglama

$$a_{33}z^2 + 2a_{24}y = 0 \qquad (28)$$

ko'rinishni oladi. (28) tenglama parabolik silindr tenglamasi ekanligi ko'rinib turibdi. Xulosa sifatida aytish mumkinki, (1) tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli sirt tenglamalari soddalashtirishdan keyin quyidagi hollardan biriga keladi[27]

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + a_{33}z^2 + 1 = 0$:

a. Mavhum ellipsoid ($a_{33} > 0$ bo'lgan holda);

b. Ikki pallali giperboloid ($a_{33} < 0$ bo'lgan holda);

c. Mavhum elliptik silindr ($a_{33} = 0$ bo'lgan holda);

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + a_{33}z^2 - 1 = 0$:

a. Haqiqiy ellipsoid ($a_{33} > 0$ bo'lgan holda);

b. Bir pallali giperboloid ($a_{33} < 0$ bo'lgan holda);

c. Haqiqiy elliptik silindr ($a_{33} = 0$ bo'lgan holda);

3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + a_{33}z^2 - 1 = 0$:

a. Bir pallali giperboloid ($a_{33} > 0$ bo'lgan holda);

b. Ikki pallali giperboloid ($a_{33} < 0$ bo'lgan holda);

c. Giperbolik silindr ($a_{33} = 0$ bo'lgan holda);

4) $y^2 + a_{33}z^2 - 2px = 0$:

a. Elliptik paraboloid ($a_{33} > 0$ bo'lgan holda);

[27] [1, page 132, theorem 3.4.2]

b. Giperbolik paraboloid ($a_{33} < 0$ bo‘lgan holda);

c. Parabolik silindr ($a_{33} = 0$ bo‘lgan holda);

5) $x^2 - a^2y^2 + a_{33}z^2 = 0$:

a. Haqiqiy yoki mavhum konus (mos ravishda $a_{33} > 0$ va $a_{33} < 0$ bo‘lgan hollarda);

b. Ikkita kesishuvchi tekisliklar ($a_{33} = 0$ bo‘lgan holda);

6) $x^2 + a^2y^2 + a_{33}z^2 = 0$:

a. Mavhum konus ($a_{33} > 0$ bo‘lgan holda);

b. Haqiqiy konus ($a_{33} < 0$ bo‘lgan holda);

c. Mavhum kesishuvchi tekisliklar ($a_{33} = 0$ bo‘lgan holda);

Masala yechish namunasi

1-misol. To‘g‘ri burchakli koordinatalar tenglamalar sistemasiga nisbatan

$$5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 4yz + 10x - 4y - 2z + 4 = 0$$

tenglama bilan berilgan sirtning ko‘rinishi va joylashishi aniqlansin.

Yechish.

$$I_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$K_4 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 & -1 \\ 5 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 36,$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -36,$$

$$I_1 = 5 + 2 + 5 = 12.$$

$$I_3 = K_4 = 0, I_2 > 0, I_1K_3 < 0$$

bo‘lgani uchun berilgan tenglama elliptik silindrni aniqlaydi.

Xarakteristik $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda = 0$ tenglama ildizlari: $\lambda_1 = \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0$

Sodda tenglamasi

$$6x^2 + 6y^2 - \frac{36}{36} = 0$$

yoki

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{6}$$

ko‘rinishga ega.

Bu tenglama radiusi $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ga teng aylanma silindrni aniqlaydi.

Silindrning o‘qi ushbu

$$\begin{aligned} &5x - 2y - z + 5 = 0, \\ &-2x + 2y - 2z - 2 = 0, \\ &-x - 2y + 5z - 1 = 0 \end{aligned}$$

tenglamalar sistemasidan topiladi, ammo bu sistemadagi ikkita tenglamani olish kifoya.

2-misol. Koordinatalarning to‘g‘ri burchakli sistemasida

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$$

tenglama bilan berilgan sirtning ko‘rinishi va joylashishi aniqlansin.

Yechish.

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

$$I_1 = 1 + 1 + 4 = 6$$

Berilgan tenglama parabolik silindrni aniqlaydi.

Sodda tenglamasi: $6x^2 - 2\sqrt{+\frac{18}{6}}y = 0$

yoki $x^2 = \frac{y}{\sqrt{3}}$. Silindr yasovchilariga perpendikular kesimining parametri $P = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Silindrning vaziyatini aniqlash uchun uning tenglamasini

$$(x+y+2z+m)^2 - [2mx+2my+2(2m+3)z+1=0]$$

ko'rinishda yozib olamiz.

m sonini ikkita tekislikning perpendikularlik shartidan foydalanib topamiz:

$$x+y+2z+m=0,$$
$$2mx+2my+2(2m+3)z+1=0,$$
$$1m+1m+2(2m+3)=0.$$

bu yerdan $m=-1$. Shunday qilib silindr yasovchilariga parallel bo'lgan simmetriya tekisligining tenglamasi: $x+y+2z-1=0$ bu tekislikka perpendikular urinma tekislik tenglamasi: $-2x-2y+2z+1=0$. Bu yerdan esa, shu urinma tekislikka perpendikular va silindrning botiqlik tomoniga yo'nalgan $\{-2,-2,2\}\downarrow\downarrow\{-1,-1,1\}$ vektorni topamiz.

3-misol. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida ushbu

$$y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y=0$$

tenglama bilan berilgan sirtning ko'rinishi va joylashishi aniqlansin.

Yechish:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$K_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$I_1 = 0+1+0=1$$

Bu yerda $I_3 = K_4 = 0, I_2 < 0, K_3 = 0$ bo'lgani uchun berilgan tenlama kesishuvchi ikkita tekislikni aniqlaydi.

Bu tekisliklar tenglamalarini topish uchun berilgan tenglamaning chap tomonini x, y, z ga nisbatan chiziqli ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$y^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4x - 2y = y^2 + 2(x + z - 1)y + 4xz - 4x = y^2 + 2(x + z - 1)y + (x + z - 1)^2 +$$
$$+ 4xz - 4x - (x + z - 1)^2 = (x + y + z - 1)^2 + 4xz - 4x - x^2 - 2xz - z^2 - 1 + 2x + 2z = (x + y + z - 1)^2 -$$
$$- x^2 + 2xz - 2x - z^2 + 2z - 1 = (x + y + z - 1)^2 - (x^2 - 2xz + 2x + z^2 - 2z + 1) = (x + y + z - 1)^2 - [x^2 +$$
$$+ 2(1 - z)x + (1 - z)^2] = (x + y + z - 1)^2 - (x - z + 1)^2 = (2x + y)(y + 2z - 2)$$

Bu yerdan berilgan tenglama aniqlagan tekislik tenglamalari

$$2x + y = 0, y + 2z - 2 = 0$$

ekanligini topamiz.

Mastaqil ishlash uchun masalalar

1. Koordinata boshini sirtning simmetriya markaziga ko‘chirish yordamida quyidagi sirtlarning tenglamasini soddalashtiring.

1) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z = 0;$

2) $y^2 + 3xy + 2yz + zx + 3x + 2y = 0;$

3) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x - 2y + 2z + 1 = 0$

2. Ikkinchi tartibli sirt $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ tenglama bilan berilgan. Bu sirtning M(2, 1, -1) nuqtadan o‘tuvchi va bu nuqtada teng ikkiga bo‘linuvchi vatarining tenglamasini yozing.

3. Ikkinchi tartibli sirt $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = -1$ tenglama bilan berilgan.Bu sirtga (-6; 2; 6) nuqtada urinuvchi tekislik tenglamasini yozing.

4. Ellipsoid $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$ tenglama bilan berilgan. Unining (-2; 1; -1/2) nuqtadagi normali tenglamasini yozing.

5. Ikkinchi tartibli sirt $2x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 12yz + 6zx + 2xy + 8x + 14y + 18z = 0$ tenglama bilan berilgan. Bu sirtning 1) $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-5}$ to‘g‘ri chiziqqa; 2) Ox o‘qiga; 3) Oy o‘qiga; 4)Oz o‘qiga parallel vatarlarga qo‘shma diametrial tekisligi tenglamasini yozing.

6. $x^2+3z^2-6xy+8x+5=0$ tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli sirtning $\frac{x+3}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{3}$ to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi diametrial tekisligi tenglamasini yozing.

7. Ikinchi tartibli sirtning bitta $M(2,0,-1)$ nuqtasi, markazi $C(0,0,-1)$ va Oxy tekislik bilan kesimi

$$\begin{cases} x^2-4xy-1=0 \\ z=0 \end{cases}$$

malum bo‘lsa,uning tenglamasini tuzing.

8. Ikkinchi tartibli sirtning berilgan tekislik bilan kesishishidan hosil bo‘lgan chiziqni tekshiring

1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1,\ 4x-3y-12z-6=0$

2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+z^2=1,\quad x+4z-4=0.$

9. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ paraboloidning $3x+2y-4z=0$ tekislikka parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqli yasovchilarini toping.

10. Berilgan $M(6,2,8)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ sirtda yotuvchi to‘g‘ri chiziqlarni toping.

11. Quyidagi sirtlarning kanonik tenglamasi va joylashishini aniqlansin.

1. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0.$
2. $2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x-2y=0.$
3. $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z+1=0.$
4. $4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+4zx+4x-6y+2z-5=0$.
5. $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0.$
6. $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0.$
7. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0.$
8. $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0.$
9. $2x^2+5y^2+2z^2-2xy+2yz-4xz+2x-10y-2z-1=0.$
10. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0;$
11. $5x^2+2y^2+5z^2-4xy-2xy-4yz+10x-4y-2z+4=0;$
12. $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+2x+4y-10z-1=0.$

13. $5x^2-y^2+z^2+4xy+6xz+2x+4y+6z-8=0.$

14. $2x^2+10y^2-2z^2+12xy+8yz+12x+4y+8z-1=0.$

Test namunalari

1. Quyidagi tenglamalardan qaysi biri ellipsoidni aniqlaydi?

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

d) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

2. Quyidagi tenglamalardan qaysi biri bir pallali giperboloidni aniqlaydi?

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

d) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

3. Quyidagi tenglamalardan qaysi biri ikki pallali giperboloidni aniqlaydi?

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

d) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

4. Quyidagi tenglamalardan qaysi biri konusni aniqlaydi?

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

d) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

4. Quyidagi tenglamalardan qaysi biri giperbolik paraboloidni aniqlaydi?

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

c) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$ tenglama bilan berilgan sirt qanday nomlanadi ?

a) elliptik paraboloid
b) Elliptik silindr
c) Giperbolik silindr
d) Parabolik silindr

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglama bilan berilgan sirt qanday nomlanadi ?

a) Elliptik silindr
b) elliptik paraboloid
c) Giperbolik silindr
d) Parabolik silindr

8. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglama bilan berilgan sirt qanday nomlanadi ?

a) Giperbolik silindr
b) elliptik paraboloid
c) Elliptik silindr
d) Parabolik silindr

9. $y^2=2px$ tenglama bilan berilgan sirt qanday nomlanadi ?

a) Parabolik silindr
b) elliptik paraboloid
c) Elliptik silindr
d) Giperbolik silindr

10. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ (p\geq q>0)$ tenglama bilan berilgan sirt qanday nomlanadi ?

a) elliptik paraboloid

b) Elliptik silindr

c) Giperbolik silindrParabolik silindr

ASOSIY VA QO‘SHIMCHA ADABIYOTLAR HAMDA AXBOROT MANBAALARI

Nazariy-metodologik adabiyotlar:

1. Мирзиёев Ш.М. Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Т.: Ўзбекистон, 2016. -53 б.
2. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан қурамиз. Т.: Ўзбекистон, 2017 - 484 б.
3. Мирзиёев Ш.М. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш-юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови. Т.: 2017. -28 б.
4. Каримов И.А. Асарлар тўплами. 1 - 24 жилдлар.- Т.: Ўзбекистон, 1996-2015.
5. Каримов И.А. Юксак маънавият – енгилмас куч. 2 - нашр –Т.: Маънавият, 2013, - 176 б.
6. Каримов И.А. Ўзбекистон мустақилликка эришиш остонасида. – Т.: “Ўзбекистон”, 2011. – 440 б
7. Каримов И.А. Она юртимиз бахту иқболи ва буюк келажаги йўлида хизмат қилиш – энг олий саодатдир. – Т.: “Ўзбекистон”, 2015. – 304 б.

Asosiy adabiyotlar:

1. Izu. Vaisman. Analytical Geometry. World Scientific. 1997.
2. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometriyadan masalalar to’plami T. Universitet, 2006.
3. Narmanov A. Ya. Analitik geometriya.T. O’zbekiston Respublikasi faylasuflar milliy jamiyati nashriyoti, 2008.

Qo‘shimcha adabiyotlar:

4.Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр 1. М., Наука, 1983.

5. A.Robson. Introduction to Analytical Geometry Cambridge University Press, 2009.

4. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М., Наука, 1968.

5. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., Гостехиздат, 1962.

6. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М., Гостехиздат, 1957 (Таржима).

MUNDARIJA

J. O. ASLONOV

CHIZIQLI ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYA

1-kitob. Analitik geometriya

o'quv qo'llanma

Toshkent - "Innovatsiya-Ziyo" - 2020

Muharrir: F. Xolsaidov
Texnik muharrir: L.Muhiddinova

Nashriyot litsenziyasi AI №023, 27.10.2018.
Bosishga 30.11.2020. da ruxsat etildi. Bichimi 60x84.
"Times New Roman" garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.

Shartli bosma tabog'i 13. Nashr bosma tabog'i 13.
Adadi 200 nusxa.

"Innovatsiya-Ziyo" MCHJ matbaa bo'limida chop etildi.
Manzil: Toshkent shahri, Farhod ko'chasi, 6-uy.

ISBN 978-9943-6793-7-5