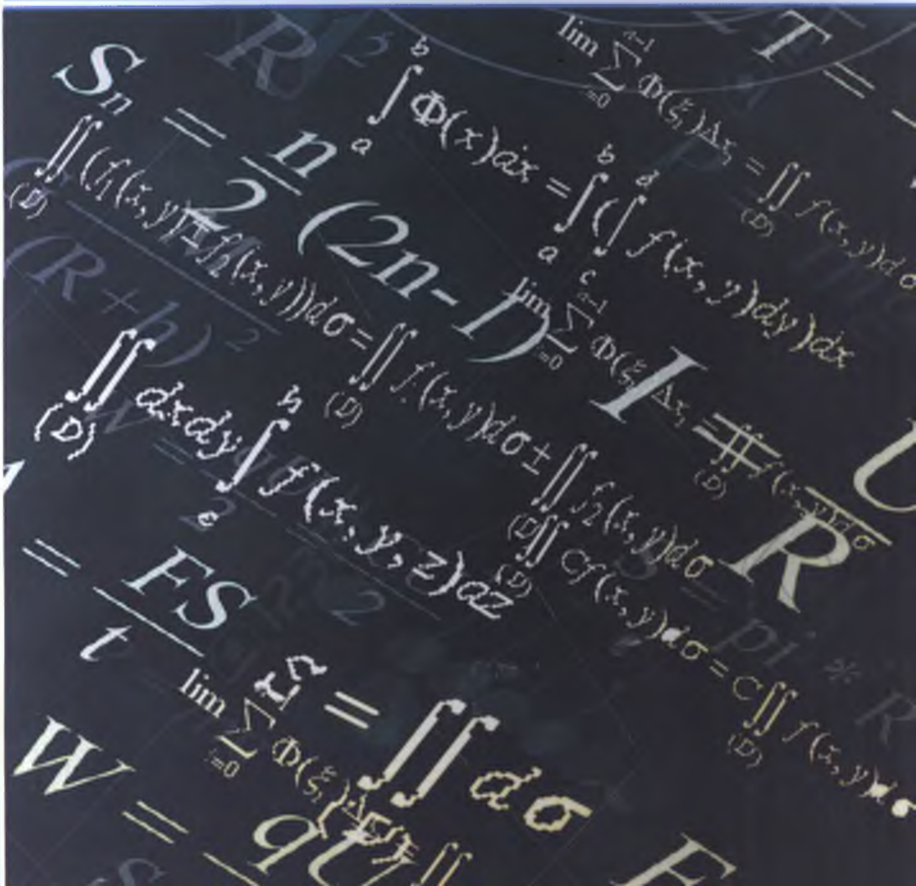
R.M.TURGUNBAEV, K.R.KODIROV, T.YU.BAKIROV

MATEMATIK ANALIZ

(KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING

DIFFERENSIAL VA INTEGRAL HISOBI)



O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI
FARG'ONA DAVLAT UNIVERSITETI

R .TURGUNBAYEV, K.KODIROV, T.BAKIROV

MATEMATIK ANALIZ. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING DIFFERENSIAL VA INTEGRAL HISOBI

o'quv qo'llanma

5110100 –Matematika o'qitish metodikasi

Toshkent-2020

KBK : 22.12(5Ўзб)
UO'K: 180.18.22.12

Taqrizchilar:

A.Q.O'rinov - FarDU, Matematik analiz va differensial tenglamalar kafedrasi professori, fizika-matematika fanlari doktori, professor

I.Tojiboyev - TATU Farg'ona filiali o'quv va tarbiyaviy ishlar bo'yicha direktor o'rinbosari, fizika-matematika fanlari nomzodi.

Ushbu o'quv qo'llanma pedagogika oliy ta'lim muassasalari «Matematika o'qitish metodikasi» bakalavriat ta'lim yonalishining «Matematik analiz» fani dasturiga mos yozilgan bo'lib, bunda matematik analizning ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensial va integral hisobi bo'limlaridan nazariy materiallar, asosiy masalalar yechish usullari, misol va masalalar berilgan. Qo'llanmadan «Fizika va astronomiya o'qitish metodikasi» bakalavriat yonalishida ta'lim olayatgan talabalar ham foydalanishi mumkin.

O'zbekiston Respublikasi oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2019 yil 20-iyuldagi 654-sonli buyrug'iga asosan nashr etishga ruxsat berildi.

Ro'yxatga olingan raqami 654-183

ISBN: 978-99436025-3-3

KIRISH

Pedagogika universitetlari va pedagogika institutlari matematika, fizika-matematika fakultetlari bakalavr talabalari uchun darslar, matematik analizdan tuzilgan dastur bo'yicha turli o'quv qo'llanma va adabiyotlardan foydalanib olib boriladi.

O'quv qo'llanmada, mana shu ko'p xillilikni bartaraf yetish, talabalar qiynalmasdan, bitta kitobdan foydalansalar mavzularni o'zlashtirishlari osonlashishi hisobga olindi.

Ushbu o'quv qo'llanma pedagogika oliy ta'lim muassasalari matematika o'qitish metodikasi bakalavriat ta'lim yo'nalishida tahsil olayotgan talabalar uchun mo'ljallangan bo'lib, "Matematik analiz" fan dasturiga mos yozilgan. O'quv qo'llanma ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi va ko'p o'zgaruvchili funksiyaning integral hisobi- bo'limlaridan iborat va yetti bobdan tashkil topgan. Matematik analiz dasturida yuqorida aytilgan bo'limlar bo'yicha ko'rsatilgan barcha mavzulardan nazariy va amaliy materiallar keltirilgan.

O'quv qo'llanmani tayyorlashda ta'lim bosqichlari orasidagi izchillikka va ta'limning kasbiy yo'nalganlik tamoyillariga, hamda mualliflar o'zining ko'p yillar davomida matematik analiz bo'yicha o'qigan leksiyalari va olib borgan amaliy mashg'ulotlaridan kelib chiqqan xulosalariga asoslandi. Qo'llanmaning tuzilishi, mavzularning tanlanishi mana shu tajribalar natijasi bo'lib, shuningdek, shu paytgacha o'zbek tilida mavjud bo'lgan darslik va o'quv qo'llanmalardan, horijiy davlatlarda chop etilgan yangi adabiyotlardan ijobiy foydalanildi. Foydalanilgan adabiyotlardagi atamalar, tushunchalar va belgilashlarni saqlab qolishga harakat qilindi.

Nazariy va amaliy materiallarni o'zlashtirishni ta'minlash maqsadida har bir bob yakunida mashq va masalalar berildi.

O'quv qo'llanmada teorema, ta'rif, misol, formulalar har bir paragraf bo'yicha, rasmlar har bir bo'lim uchun alohida nomerlangan.

I BOB. m-O‘LCHAMLI FAZODA NUQTAVIY TO‘PLAMLAR

1-§.Sodda ikki o‘lchamli va uch o‘lchamli nuqtaviy to‘plamlar

Ma’lumki, har bir haqiqiy songa sonlar o‘qida bitta nuqta, va aksincha, sonlar o‘qidagi har bir nuqtaga yagona haqiqiy son mos keladi. Bu haqiqiy sonning geometrik ma’nosi sonlar o‘qidagi nuqta, haqiqiy sonlar to‘plamining geometrik ma’nosi sonlar o‘qidagi nuqtalar to‘plamidan iborat deb qarashga imkon beradi. Shu sababli ham “bir o‘zgaruvchili funksiya biror oraliqda (kesmada) aniqlangan” kabi iboralarni ishlatgan edik. Ushbu paragrafda ko‘p o‘zgaruvchili funksiya holi uchun bir o‘zgaruvchili funksiyalarni o‘rganganda ishlatgan geometrik tushunchalarni umumlashtiramiz.

Aytaylik, tekislikda (fazoda) koordinatalar sistemasi berilgan bo‘lsin. U holda, ma’lumki, har bir M nuqtaga aniq bitta haqiqiy sonlar juftligi (x,y) (uchligi (x,y,z)) mos keladi. Shuningdek, har bir haqiqiy sonlar juftligiga (x,y) (uchligiga (x,y,z)) tekislikda (fazoda) aniq bitta nuqta mos keladi. Demak, koordinatalar tekisligi (fazosi) haqiqiy sonlarning barcha tartiblangan juftliklari (uchliklari) to‘plamining geometrik tasviri, aksincha barcha tartiblangan juftliklari (uchliklari) to‘plami tekislikning (fazoning) arifmetik tasviri vazifasini bajaradi.

Odatta haqiqiy sonlarning barcha tartiblangan juftliklari (uchliklari) to‘plami ikki (uch) o‘lchamli fazo deyiladi va R^2 (R^3) kabi belgilanadi. Bu fazoning bo‘sh bo‘lmagan E qism to‘plami nuqtaviy to‘plam deyiladi.

Ma’lumki, E to‘plamni uning nuqtalari koordinatalari uchun o‘rinli bo‘lgan tenglamalar yoki tengsizliklar orqali berish mumkin. Masalan, $y<2x+1$ tengsizlik koordinatalar tekisligida $y=2x+1$ to‘g‘ri chiziqdan pastda yotgan barcha nuqtalar to‘plamini aniqlaydi; $2\leq x\leq 4$, $-1\leq y\leq 3$ tengsizliklar $x=2$, $x=4$, $y=-1$, $y=3$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan to‘g‘ri to‘rtburchak nuqtalaridan tashkil topgan nuqtaviy to‘plamni aniqlaydi. Shunga o‘xshash, $0\leq x\leq 4$, $-1\leq y\leq 5$, $1\leq z\leq 3$ tengsizliklarfazoda $x=0$, $x=4$, $y=-1$, $y=5$, $z=1$, $z=3$ tekisliklar bilan chegaralangan to‘g‘ri burchakli parallelepipedni, $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}<2$ tengsizlik esa markazi (1,2,3) nuqtada radiusi 2 ga teng bo'lgan sharning "ichki" nuqtalaridan iborat to'plamni aniqlaydi.

2-§. m-o'lchamli nuqtaviy to'plamlar. m-o'lchamli fazo

1-ta'rif. m-ta $x_1, x_2, \ldots, x_m$ haqiqiy sonlardan tashkil topgan tartiblangan $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ sistema m-o'lchamli nuqta, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sonlar $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ nuqtaning koordinatalari, biror m-o'lchamli nuqtalardan tashkil topgan E toplam m-o'lchamli nuqtaviy to'plam deyiladi.

m-o'lchamli nuqtalarni lotin alifbosining kichik harflari bilan quyidagicha $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ belgilanadi.

Haqiqiy sonlarning barcha $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ sistemalari to'plami m-o'lchamli arifmetik fazo deyiladi.

Sonlar o'qi, tekislik yoki uch o'lchamli fazodagi kabim-o'lchamli arifmetik fazoda ham ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasi kiritiladi.

2-ta'rif. $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ va $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ nuqtalar orasidagi masofa deb

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_m-y_m)^2} \qquad (1)$$

songa aytiladi.

Odatda, bu ikki nuqta orasidagi masofa $\rho(x,y)$ kabi belgilanadi. Demak, $\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_m-y_m)^2}$.

Ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa tushunchasi (1) formula yordamida kiritilgan m-o'lchamli arifmetik fazo m-o'lchamli Evklid fazo deyiladi va R^m kabi belgilanadi.

Ikki nuqta orasidagi $\rho(x,y)$ masofa, odatda metrika deb ataladi va u quyidagi xossalarga ega:

1. $\rho(x,y)\geq 0$, $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;
3. $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$, bu yerda x, y, z R^m fazodagi ixtiyoriy nuqtalar.

Quyida R^m fazodagi asosiy nuqtaviy to'plamlarning ta'riflarini ko'ramiz.

3-ta'rif. R^m fazoning ushbu

$$\rho(x,a)=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_m-a_m)^2}\leq r \qquad (2)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ nuqtalari to'plami markazi $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ nuqtada, radiusi r ($r>0$) bo'lgan m-o'lchamli (yopiq) shar debataladi.

R^m fazoning $\rho(x,a)=r$ tenglamani qanoatlantiruvchi barcha $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ nuqtalari to'plami esa markazi $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ nuqtada, radiusi r ($r>0$) bo'lgan m-o'lchamli sfera deyiladi.

Bu ta'rifdan m=3 bo'lganda uch o'lchamli Evklid fazosidagi yopiq shar va sferaning, m=2 bo'lganda tekislikdagi yopiq doira va aylananing arifmetik ta'riflari kelib chiqadi.

4-ta'rif. R^m fazoning ushbu

$$a_i < x_i < b_i \quad (i=1,2,\ldots,m) \qquad (3)$$

$$(a_i \le x_i \le b_i \quad (i=1,2,\ldots,m) \qquad (3'))$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ nuqtalari to'plami (a_i, b_i, bu yerda $b_i>a_i$ ($i=1, 2, \ldots, m$) haqiqiy sonlar bilan berilgan)m-o'lchamli ochiq (yopiq) parallelepiped deyiladi.

Xususan, agar (3) da ((3') da) $b_i-a_i=2a$($i=1, 2, \ldots, m$) bo'lsa, bunday parallelepiped m-o'lchamli kub deyiladi. m=3 (m=2) bo'lganda 4-ta'rif odatdagi parallelepiped (to'g'ri to'rtburchak) ta'rifini beradi.

5-ta'rif. R^m fazoning

$$\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_m-a_m)^2} < \varepsilon \qquad (4)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ nuqtalari to'plami berilgan $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ nuqtaning m-o'lchamli ε-sferik atrofi deb ataladi.

6-ta'rif. R^m fazoning koordinatalari $|x_i-a_i|<\delta_i$ ($i=1, 2, \ldots, m$), bu yerda δ_i ($i=1, 2, \ldots, m$)-biror musbat haqiqiy sonlar, tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ nuqtalari to'plami berilgan $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ nuqtaning m-o'lchamli parallelepiped atrofi deb ataladi.

Xususan, agar $\delta_1=\delta_2=\ldots=\delta_m=\delta$ bo'lsa, m-o'lchamli parallelepiped atrof m-o'lchamli kubik δ-atrof deyiladi. U ushbu tengsizliklar bilan aniqlanadi:

$$|x_1-a_1|<\delta, |x_2-a_2|<\delta, \ldots, |x_m-a_m|<\delta \qquad (5)$$

Teorema. Berilgan a nuqtaning har bir kubik (sferik) atrofi uchun uning qismi bo'lgan shu nuqtaning sferik (kubik) atrofi mavjud.

Isbot. Agar $\varepsilon=\delta$ deb olsak, u holda ushbu

$$|x_i - a_i| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k - a_k)} \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

tengsizliklarga asosan (4) tengsizlikdan (5) tengsizliklar kelib chiqadi. Demak, a nuqtaning ε-sferik atrofiga tegishli nuqta uning kubik ε-atrofiga tegishli bo'ladi. Ya'ni anuqtaning kubik ε-atrofining qismi bo'lganε-sferik atrofi mavjud.

Endi anuqtaning (4) tengsizlik bilan aniqlangan biror ε-sferik atrofi berilgan bo'lsin.U holda $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ deb olsak, (5) tengsizliklardan (4) tengsizlik kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar $|x_i - a_i| < \delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ (i=1, 2, …,m) bo'lsa, $\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k - a_k)} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m} \cdot m} = \varepsilon$, ya'ni topilgan kubik $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ -atrofining har bir nuqtasi ε-sferik atrofga ham tegishli bo'ladi.

7-ta'rif. R^m fazoning E nuqtalar to'plamini o'z ichida saqlaydigan kub (shar) mavjud bo'lsa, u chegaralangan to'plam deyiladi.

8-ta'rif. Aytaylik, har biri D (D⊂R) sohada aniqlangan m ta funksiya berilgan bo'lsin:

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), ..., x_m = \varphi_m(t) \qquad (6)$$

U holda R^m fazoning koordinatalari (6) tengliklarni qanoatlantiruvchi L nuqtalari to'plami R^m fazodagi egri chiziq, (6) tengliklar sistemasi shu egri chiziqni aniqlovchitenglamalar sistemasi deyiladi. Agar $x_i = \varphi_i(t)$(i=1, 2, …, m) funksiyalar biror $[t_0,t_1]$ segmentda ($(-\infty;+\infty)$intervalda) uzluksiz bo'lsa, egri chiziq uzluksiz chiziq yoki Jordan chizig'i deyiladi.

Agar (6) tenglamalar sistemasi bilan aniqlangan uzluksiz chiziq uchun $[t_0,t_1]$ segmentdan ($(-\infty;+\infty)$intervaldan) olingan har xil t larga (segment uchlari bundan istisno) har xil x=(x_1, x_2, …, x_m) nuqtalar mos kelsa, chiziq sodda chiziq deyiladi.

9-ta'rif. Agar (6) sodda chiziq uchun$\varphi_i(t)$(i=1, 2, …, m) funksiyalar $[t_0,t_1]$ segmentda ($(-\infty;+\infty)$intervalda) bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\varphi_i'(t)$(i=1, 2, …, m) uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, u holda (6)chiziq $t_0,t_1]$ segmentda ($(-\infty;+\infty)$intervalda) silliq chiziq deyiladi.

Agar $[t_0,t_1]$ segmentni chekli sondagi o'zaro kesishmaydigan oraliqlarga ajratish mumkin bo'lib, bu oraliqlarni har birining ichida L chiziq silliq bo'lsa, u holda bu chiziq $[t_0,t_1]$ segmentda ($(-\infty;+\infty)$ intervalda) bo'lakli-silliq chiziq deyiladi.

3-§. m-o'lchamli nuqtaviy to'plamning limit nuqtalari. Ochiq va yopiq to'plamlar. Soha

Bizga E m-o'lchamli nuqtaviy to'plam (ya'ni $E\subset R^m$) berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $a\in R^m$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida E to'plamning a nuqtadan farqli kamida bitta x nuqtasi mavjud bo'lsa, anuqta E to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

Bu ta'rifdan bir o'lchamli fazodagi (sonlar o'qidagi kabi) quyidagi tasdiq o'rinli ekanligi kelib chiqadi: agar anuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda bu nuqtaning ixtiyoriy atrofida E to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari mavjud bo'ladi.

E to'plamning alimit nuqtasi shu to'plamga tegishli bo'lishi ham, tegishli bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, tekislikning $E=\left\{\left(\frac{1}{k},\frac{1}{m}\right):k,n\in N\right\}$ nuqtalari to'plami uchun a=(0,0) limit nuqta bo'ladi, ammo u berilgan to'plamga tegishli emas. $E=\{x=(x_1,x_2):\alpha\le x_1\le\beta,\ \gamma\le x_2\le\delta\}$ to'plamning barcha limit nuqtalari o'ziga tegishli.

2-ta'rif. Agar E to'plamning barcha limit nuqtalari o'ziga tegishli bo'lsa, u yopiq to'plam deyiladi.

$E=\{x=(x_1,x_2):\alpha\le x_1\le\beta,\ \gamma\le x_2\le\delta\}$ yopiq to'plamga, nuqtaning ε-atrofi yopiq bo'lmagan to'plamga misol bo'ladi.

Ta'rifga ko'ra R^m fazoning barcha nuqtalaridan tashkil topgan to'plam, xususan tekislik nuqtalari to'plami yopiq bo'ladi. Shuningdek, hech bir limit nuqtaga ega bo'lmagan to'plam (masalan, chekli to'plam) ham yopiq to'plam bo'ladi, chunki uning limit nuqtalari to'plami bo'sh to'plam, bo'sh to'plam har qanday to'plamning qismi bo'ladi.

3-ta'rif. Agar E to'plamning anuqtasi o'zining biror atrofi bilan E to'plamga tegishli bo'lsa, u E to'plamning ichki nuqtasi deyiladi.

Masalan, tekislikda radiusi r bo'lgan doiraning markazdan r_1 $(r_1<r)$ masofada joylashgan nuqtalari doiraning ichki nuqtasi bo'ladi. Shu doira aylanasi nuqtalari doiraning ichki nuqtasi bo'lmaydi.

R^m fazoning har bir nuqtasi uning ichki nuqtasi bo'ladi. Shuningdek, nuqta atrofining ixtiyoriy nuqtasi uning ichki nuqtasi bo'ladi.

4-ta'rif. Agar to'plamning barcha nuqtalari uning ichki nuqtasi bo'lsa, u ochiq to'plam deyiladi.

Masalan, R^m fazodagi ixtiyoriy nuqtaning ε-sferik atrofi, kubik atrofi, umuman har qanday parallelepiped atrofi ochiq to'plamlarga misol bo'ladi.

1-izoh. Ba'zi to'plamlar ichki nuqtaga ega bo'lmasligi mumkin. Masalan, tekislikda aylana nuqtalari to'plami ichki nuqtaga ega emas.

2-izoh. Bir vaqtda yopiq va ochiq to'plamlar mavjud. Masalan, R^m fazoning barcha nuqtalaridan tashkil topgan to'plam bunga misol bo'ladi.

5-ta'rif. Agar E to'plamning ixtiyoriy ikki $a=(a_1, a_2, ..., a_m)$ va $b=(b_1,b_2, ..., b_m)$ nuqtasini tutashtiruvchi va barcha nuqtalari shu to'plamga tegishli bo'lgan sodda chiziq mavjud bo'lsa, u holda E to'plam bog'lamli to'plam deyiladi.

Masalan, tekislikning $4<x^2+y^2<16$ shartni qanoatlantiruvchi E nuqtalar to'plami (halqa) bog'lamli to'plam bo'ladi, chunki uning ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi va barcha nuqtalari shu to'plamga tegishli bo'lgan sodda chiziq mavjud. Agar E to'lam sifatida $1<x^2+y^2<9$ va $16<x^2+y^2<25$ halqalarning birlashmasidan iborat bo'lsa, u bog'lamli to'plam bo'lmaydi. Chunki, agar A nuqtani $1<x^2+y^2<9$ halqadan, B nuqtani $16<x^2+y^2<25$ halqadan tanlab olsak, bu nuqtalarni tutashtiruvchi va barcha nuqtalari shu to'plamga tegishli bo'lgan sodda chiziq mavjud emas.

6-ta'rif. Har qanday ochiq va bog'lamli to'plam soha deyiladi.Har qanday yopiq va bog'lamli to'plam yopiq soha deyiladi.

Nuqtaning parallelepiped, sferik atroflari sohaga misol bo'ladi.

4-§. Ichma-ich joylashgan m-o'lchamli kublar prinsipi

Teorema. Agar K_1, K_2, ..., K_n, ... yopiq m-o'lchamli kublar ketma-ketligi quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$;

2) qirralari uzunliklaridan tuzilgan $2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_n, \ldots$ketma-ketlik nolga intilsa, u holda shu kublarning barchasiga tegishli bo'lgan yagona nuqta mavjud bo'ladi.

Isbot. Teoremani m=2 hol (kvadratlar) uchun isbotlaymiz.K_n kvadrat nuqtalari quyidagi tengsizliklar bilan aniqlanadi:

$$|x_1-a_{1n}|\leq\delta_n, \quad |x_2-a_{2n}|\leq\delta_n, \qquad (1)$$

bu yerda $a_n=(a_{1n},a_{2n})$-kvadratning markazi, $x=(x_1,x_2)$ uning ixtiyoriy nuqtasi. Agar $|x_1-a_{1n}|\leq\delta_n$ $(n=1,2,\ldots)$, tengsizliklarni alohida qarasak, ular Oxo'qidagi segmentlar ketma-ketligini aniqlaydi:

$$[a_{11}-\delta_1, a_{11}+\delta_1], [a_{12}-\delta_2, a_{12}+\delta_2], \ldots, [a_{1n}-\delta_n, a_{1n}+\delta_n], \ldots \qquad (2)$$

Bu segmentlar ketma-ketligi ichma-ich joylashgan (mustaqil isbotlang) va uzunliklaridan tuzilgan ketma-ketlik nolga intiladi. U holda ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipiga ko'ra, (2) segmentlarning barchasiga tegishli yagona ξ nuqta mavjud bo'ladi: $|\xi-a_{1n}|\leq\delta_n(n=1, 2, \ldots)$. Huddi shunga o'xshash $[a_{21}-\delta_1, a_{21}+\delta_1]$, $[a_{22}-\delta_2, a_{22}+\delta_2], \ldots, [a_{2n}-\delta_n, a_{2n}+\delta_n], \ldots$segmentlar ketma-ketligi ichma-ich joylashganligi isbotlanadi. Yuqoridagi kabi shu segmentlarning barchasiga tegishli bo'lgan yagona η nuqta mavjud bo'ladi: $|\eta-a_{2n}|\leq\delta_n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Demak, $c=(\xi,\eta)$ nuqta barcha kvadratlarga tegishli bo'ladi. Endi shunday nuqtaning yagonaligini ko'rsatamiz. Agar $c_1=(\xi_1,\eta_1)$ nuqta barcha kvadratlarga tegishli bo'lsa, u holda (1) ga ko'ra $|\xi_1-a_{1n}|\leq\delta_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ va ξ_1 nuqta (2) segmentlarning barchasiga tegishli. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipiga ko'ra $\xi_1=\xi$ bo'ladi. Shunga o'xshash, $\eta=\eta_1$ ekanligini isbotlaymiz. Shunday qilib, c va c_1 nuqtalar ustma-ust tushadi.

5-§. m-o'lchamli fazoning yaqinlashuvchi nuqtalari ketma-ketligi

Bir o'lchamli fazodagi yaqinlashuvchi sonlar ketma-ketligi tushunchasini m-o'lchamli fazo uchun ham umumlashtirish mumkin.

Bizga R^m fazoda $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, bu yerda $x_n=(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn})$, nuqtalar ketma-ketligi hamda $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ nuqta berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlikni $\{x_n\}$ ko'rinishda belgilaymiz.

1-ta'rif. Agar ixtiyoriy ε musbat son uchun shunday $n_0$nomer topilib, barcha $n>n_0$ da $\rho(x_n,a)<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi. Bu holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik a nuqtaga yaqinlashadi deyiladi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ yoki $n\to\infty$ da $x_n\to a$ deb yoziladi.

2-§ da isbotlangan teoremaga ko'ra, ta'rifdagi sferik ε-atrof o'rniga kubik δ-atrofini ham qarash mumkinligini ta'kidlab o'tamiz. Shunday qilib, yaqinlashuvchi nuqtalar ketma-ketligiga quyidagicha ta'rif berish mumkin.

2-ta'rif. Agar ixtiyoriy δ musbat son uchun shunday $n_0$nomer topilib, barcha $n>n_0$ da $|x_{1n}-a_1|<\delta$, $|x_{2n}-a_2|<\delta$, ... , $|x_{mn}-a_m|<\delta$tengsizliklar o'rinli bo'lsa, a nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

U holda yaqinlashuvchi sonli ketma-ketlik ta'rifiga ko'ra $\{x_{1n}\}$, $\{x_{2n}\}$, ... , $\{x_{mn}\}$ ketma-ketliklarning har biri yaqinlashuvchi bo'ladi. Aksincha, ravshanki, agar $\{x_{1n}\}$, $\{x_{2n}\}$, ... , $\{x_{mn}\}$ ketma-ketliklarning har biri yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, quyidagi teorema o'rinli:

1-teorema. $\{x_n\}$ nuqtalar ketma-ketligia$=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ nuqtaga yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $\{x_{1n}\}$, $\{x_{2n}\}$, ... , $\{x_{mn}\}$ ketma-ketliklarning har biri mos ravishda $a_1, a_2, \ldots, a_m$ larga yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va yetarli.

Bu teoremani qisqacha $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{kn} = a_k,\ \ (k=1,2,\ldots,m)$ kabi yozish mumkin.

Bu teorema yordamida yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklarning xossalarini yaqinlashuvchi nuqtalar ketma-ketliklari uchun umumlastirish mumkin.

1-xossa. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti yagona bo'ladi.

2-xossa. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan, ya'ni $\{x_n\}$ nuqtalar ketma-ketligi hadlaridan tuzilgan to'plamni o'z ichida saqlaydigan shar (kub) mavjud bo'ladi.

R^m fazoda ketma-ketliklarni yig'indisi, ketma-ketlikni songa ko'paytmasi tushunchalarini aniqlash mumkin. Bizga umumiyi hadlari $x_n=(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn})$,$y_n=(y_{1n}, y_{2n}, \ldots, y_{mn})$ bo'lgan ketma-ketliklar va k son berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketliklarning yig'indisi deb umumiy hadi $(x_{1n}+y_{1n}, x_{2n}+y_{2n}, \ldots, x_{mn}+y_{mn})$ bo‘lgan ketma-ketlikga aytiladi va u $\{x_n+y_n\}$ kabi belgilanadi.

Umumiyi hadi $x_n=(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn})$ bo‘lgan ketma-ketlikni k songa ko‘paytmasi deb umumiy hadi $(kx_{1n}, kx_{2n}, \ldots, kx_{mn})$ bo‘lgan ketma-ketlikga aytiladi va u $\{kx_n\}$ kabi belgilanadi.

3-xossa. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ nuqtaga yaqinlashsa, u holda $\{kx_n\}$ ketma-ketlik $ka=(ka_1, ka_2, \ldots, ka_m)$ nuqtaga yaqinlashadi:

$$\lim_{n\to\infty} kx_n = ka .$$

4-xossa. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ nuqtaga, $\{y_n\}$ ketma-ketlik $b=(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ nuqtaga yaqinlashsa, u holda $\{x_n+y_n\}$ ketma-ketlik $a+b=(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_m+b_m)$ nuqtaga yaqinlashadi:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b .$$

2-teorema. Agar R^m fazodagi cheksiz E to‘plam $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ limit nuqtaga ega bo‘lsa, u holda E to‘plamdan a nuqtaga yaqinlashuvchi ketma-ketlik ajratib olish mumkin.

Isbot. Aytaylik $\{r_n\}$ nolga yaqinlashuvchi musbat sonlar ketma-ketligi bo‘lsin: $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. a nuqta E to‘plamning limit nuqtasi bo‘lganligi sababli, bu nuqtaning sferik r_n-atrofidaE to‘plamninga nuqtadan farqli kamida bitta x_n nuqtasi mavjud. Har bir shunday atrofdan bittadan nuqta tanlab, $\{x_n\}$ cheksiz nuqtalar ketma-ketligiga ega bo‘lamiz. Endi $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ ekanligidan berilgan $\varepsilon>0$ son uchun n_0 nomer topilib, $n>n_0$ da $r_n<\varepsilon$ boladi. U holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $n>n_0$ nomerli barcha hadlari a nuqtaning ε-atrofiga tegishli, demak, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ bo‘ladi. Shunday qilib, E to‘plamdan ajratib olingan $\{x_n\}$ cheksiz nuqtalar ketma-ketligi E to‘plamning a limit nuqtasiga yaqinlashadi.

Eslatib o‘tamizki, bunday ketma-ketliklarni cheksiz ko‘p usulda ajratib olish mumkin.

3-teorema (Bolsano-Veyershtrass). R^m fazoning har qanday E chegaralangan cheksiz to‘plami kamida bitta limit nuqtaga ega.

Natija. Har qanday chegaralangan $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin.

Isbot. Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning turli nuqtalaridan iborat to‘plamni E bilan belgilaylik. Agar E chekli to‘plam bo‘lsa, u holda ketma-ketlikning kamida bitta $x_k \in E$ huqtasi cheksiz marta takrorlanishi kerak. U holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x_k ga teng hadlaridan (turli nomerlardan) tuzilgan qism ketma-ketlikx_k ga yaqinlashuvchi bo'ladi. Agar E cheksiz to'plam bo'lsa, u chegaralanganligi tufayli 3-teoremaga ko'ra a limit nuqtaga ega. 2-teoremaga asosan E to'plamdan a nuqtaga yaqinlashuvchi $\{y_n\}$ ketma-ketlik ajratib olish mumkin. Shuningdek, $\{y_n\}$ ning hadlari $\{x_n\}$ da uchrashish tartibida nomerlanishiga erishish mumkin: 2-teoremadagi kabi mulohaza yuritib, navbatdagi r_{n+1}-atrofday_{n+1} ni $\{x_n\}$ ketma-ketlikda avval tanlangan had nomeriga nisbatan katta nomerga mos qilib tanlash mumkin, chunki bu atrofda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari mavjud.

Yuqorida isbotlangan 1-teorema R^m fazoda $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashishining zaruriy va yetarli shartini beradi. Shu teorema yordamida sonli ketma-ketliklar uchun isbotlangan yaqinlashishning Koshi alomatini isbotlash mumkin.

3-ta'rif. Agar ixtiyoriy ε musbat son uchun shunday n_0 nomer topilib, barcha $n>n_0$, $p>n_0$ larda $\rho(x_p,x_n)<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik deyiladi.

Ravshanki, agar $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lsa, u holda nuqtalarning mos koordinatalaridan tuzilgan $\{x_{1n}\}$, $\{x_{2n}\}$, ..., $\{x_{mn}\}$ sonli ketma-ketliklar fundamental bo'ladi. Va aksincha, $\{x_{1n}\}$, $\{x_{2n}\}$, ..., $\{x_{mn}\}$ sonli ketma-ketliklar fundamental bo'lsa, u holda $\{x_n\}$, bu yerda $x_n=(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn})$ ketma-ketlik fundamental bo'ladi. Bundan quyidagi teoremaning (Koshi alomati) o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

4-teorema. $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning fundamental bo'lishi zarur va yetarli.

I-bobga doir mashq va masalalar

1. R^m fazoda ushbu

$$\rho(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_m-x_m)^2}$$

formula bilan aniqlangan masofa metrika ekanini, ya'ni quidagi shartlarni (metrika aksiomalarini) qanoatlantirishini isbotlang:

a) $\rho(x,y)\geq 0, \forall x,y\in R^m, \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

b) $\rho(x,y)=\rho(y,x), \forall x,y\in R^m$;

c) $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,y), \forall x,y,z\in R^m$.

2. R^m fazoda ushbu $\rho(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\cdots+|x_m-y_m|$ funksiya metrika aksiomalarini qanoatlantirishini isbotlang.

3. R^m fazoda ushbu $\rho(x,y)=\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\dots,|x_m-y_m|)$ funksiya metrika aksiomalarini qanoatlantirishini isbotlang.

4. Ushbu $x_n=(x_{1n},x_{2n},\dots;x_{mn})\in R^m$ ketma-ketlikning $a=(a_1,a_2,\dots;a_m)\in R^m$ nuqtaga yaqinlashishi uchun

$$\lim_{n\to\infty} x_{in}=a_i, i=1,2,3,\dots,m.$$

bo 'lishi zaruz va yetarli ekanini isbotlang.

5. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning xossalarini isbotlang.

6. Quyidagi ketma-ketliklar uchun $\lim_{n\to\infty} x_n$ ni hisoblang:

1) $x_n=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n};\frac{n-1}{n};\frac{2n^2-1}{n^2};\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$;

2) $x_n=\left(\frac{(-1)^n}{n};(-1)^n\right)$;

3) $x_n=\left(\frac{\cos\varphi_n}{\varphi_n};\frac{\sin\varphi_n}{\varphi_n}\right)$, bu yerda a) φ_n – cheksiz katta ketma-ketlik; b) φ_n – cheksiz kichik ketma-ketlik, $\varphi_n\neq 0$;

4) $x_n=(r^n\cos n\varphi;r^n\sin n\varphi), r,\varphi\in R$;

5) $x_n=\left(n\left(\sqrt[n]{r}\cos\frac{\varphi}{n}-1\right);n\sqrt[n]{r}\sin\frac{\varphi}{n}\right), r,\varphi\in R, r>0.$

7. Agar R^m fazoda $\{x_n\}$ nuqtalar ketma-ketligi cheksizga intilsa, u holda:

1) $n\to\infty$ da R^m fazoning ixtiyoriy tayinlangan a nuqtasi uchun $\rho(x_n;a)\to+\infty$ ekanini isbotlang.

2) $\lim_{n\to\infty} x_{in}=\infty$ bo'ladigan $x_{in}, 1\le i\le n,$ koordinata bo'lmasligi mumkinligini isbotlang.

8. R^m fazoda quyidagi to 'plamlarning ochiq ekanini isbotlang:

1) ixtiyoriy m-o'lchamli shar;

2) ixtiyoriy m- o'lchamli kub;

3) ixtiyoriy m- o'lchamli to'g'ri burchakli parallelepiped;

4) markazi a nuqtada radiusi $\delta > 0$ bo'lgan $(m-1)$- o'lchamli sferaning tashqi qismi, ya'ni $E = \{ x \in R^m : \rho(x;a) > \delta\}$ to'plam.

9. R^m $(m > 1)$ fazoda ushbu to'plam ochiq bo'ladimi?

$$E = \{x \in R^m : x_1^2 + x_2^2 < \delta^2, x_i = 0, i = 3, \dots, m\}?$$

10. Quyidagi tasdiqlar rostmi:

1) to'plamning har qanday chegaraviy nuqtasi uning limit nuqtasi bo'ladi;

2) to'plamning chegaraviy nuqtasining ixtiyoriy atrofi shu to'plamning ham ichki, ham tashqi nuqtalarini saqlaydi?

11. Quyidagi uchta shartni qanoatlantiruvchi E to'plamni quring:

1) E ning barcha nuqtalari yakkalangan;

2) E to'plam limit nuqtaga ega emas;

3) $\inf_{x,y \in E} \rho(x;y) = 0.$

12. Quyidagi to'plamlar yopiq ekanini isbotlang:

1) R^m fazo;

2) ixtiyoriy m-o'lchamli yopiq shar;

3) markazi a nuqtada radiusi $\delta \geq 0$ bo'lgan $(m-1)$- o'lchamli sfera.

13. R^2 fazoda quyidagi E to'plam a) bo'glamli; b) ochiq; c) soha bo'ladimi

1) $E = \{x_1^2 + x_2^2 > 1\};$

2) $E = \{x_1^2 + x_2^2 = 1\};$

3) $E = \{x_1^2 + x_2^2 \neq 1\};$

4) $E = \{x_1^2 + x_2^2 = 0\};$

5) $E = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\} \cup \{(x_1^2 - 2)^2 + x_2^2 < 1\};$

6) $E = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \cup \{(x_1^2 - 2)^2 + x_2^2 < 1\};$

7) $E = \{x_1^2 - x_2^2 < 1\};$

8) $E = \{x_1^2 - x_2^2 = 1\};$

9) $E = \{x_1^2 - x_2^2 > 1\};$

10) $E = \left\{x_1 \in (0;1), \left|x_2 - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2x_1}\right| < \frac{1}{4}\right\};$

11) $E = \left\{x_2 = \sin\left(\frac{1}{x_1}\right)\right\} \cup \{x_1 = 0, |x_2| \leq 1\}$;
12) $E = \{5x_1^2 + 12x_1x_2 - 22x_1 - 12x_2 > 19\}$?

14. R^3 fazoda quyidagi E to'plam soha bo'ladimi:
1) $E = \{x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 = 3\}$;
2) $E = \{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 < 4\}$;
3) $E = \{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 1\}$;
4) $E = \{x_1^2 + x_2^2 + 1 < x_3^2\}$;
5) $E = \{x_1^2 + x_2^2 > x_3\}$;
6) $E = \{x_1^2 + x_2^2 < x_3^2\}$;
7) $E = \{x_1^2 - x_2^2 < x_3\}$
8) $E = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$;
9) $E = \{x_1x_2 > 1\}$;
10) $E = \{x_2^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3 > x_1 - x_2\}$?

15. Quyidagi to 'plamning ochiq ekanini isbotlang:
a) $\{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 < x_2\}$;
б) $a \in R^m$ nuqtaning teshik δ – atrofi;
в) $\{(x_1, x_2) \in R^2 : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2\}$;
г) $\{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 + x_2 < 1\}$.

16. Quyidagi to 'plamlar kompakt ekanini isbotlang:
a) $\{x \in R^m : \rho(x, a) \leq \delta\}$;
б) $\{x \in R^m : \rho(x, a) = r\}$.

17. Tekislikda quyidagi to'plamlarning soha ekanini isbotlang:
a) $\{(x, y) \in R^2 : x > 1\}$;
б) $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \neq 0\}$;
в) $\{(x, y) \in R^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$.

II-BOB. KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYA TUSHUNCHASI. FUNKSIYANING LIMITI VA UZLUKSIZLIGI

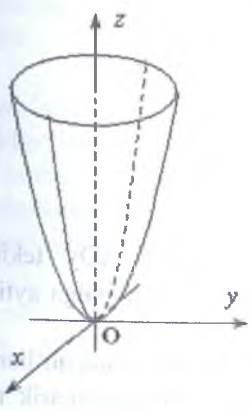
1-§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya

Aytaylik, R^m fazoda biror D to‘plam berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar D to‘plamdagi har bir $x=(x_1,x_2,...,x_m)$ nuqtaga biror f qoida yoki qonunga ko‘ra bitta haqiqiy u ($u\in R$)son mos qo‘yilgan bo‘lsa,u holda D to‘plamda m-o‘zgaruvchili funksiya berilgan (aniqlangan) deyiladi va u $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ kabi belgilanadi.

D to‘plamga funksiyaning aniqlanish sohasi,$x_1,x_2,...,x_m$- erkli o‘zgaruvchilar yoki argumentlar, u–erksiz o‘zgaruvchi- funksiya deyiladi.Ta’rifga ko‘ra $x_1,x_2,...,x_m$lar x nuqtaning koordinatalari, shuning uchun yuqoridagi funksiya $u=f(x)$ko‘rinishda ham belgilanadi va uni R^m fazoni x nuqtasining funksiyasi ham deyiladi.

Funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan $x=x_0$ nuqtadagi funksiyaning u_0 qiymatiga funksiyaning xususiy qiymati deyiladi. Funksiyaning barcha xususiy qiymatlaridan iborat to‘plam funksiyaning qiymatlar to‘plami deyiladi.



3-rasm

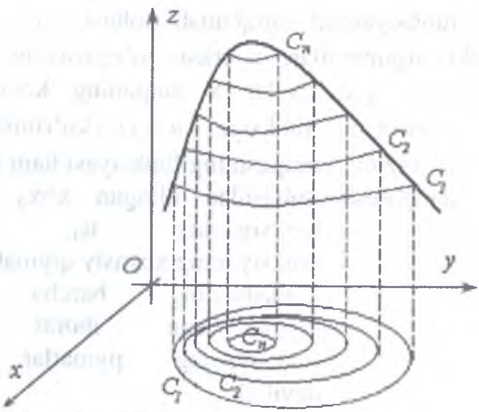
Misol. 1) R^m fazodagi har birx nuqtaga uning koordinatalari yig‘indisini mos qo‘yamiz. U holda bu moslik R^m fazoda aniqlangan $u=x_1+x_2+...+x_m$ funksiyani aniqlaydi. Bu funksiyaning qiymatlar to‘plami R-haqiqiy sonlar to‘plamidan iborat.

3) $D=\{x\in R^m: \ \rho(x,0)\le 2\}$ to‘plamdan olingan har bir $x=(x_1,x_2,...,x_m)$ nuqtaga ushbu$\sqrt{4-x_1^2-x_2^2-...-x_m^2}$ haqiqiy sonni mos qo‘yamiz. Bu moslik D to‘plamda $u=\sqrt{4-x_1^2-x_2^2-...-x_m^2}$ funksiyani aniqlaydi. Bu funksiyaning qiymatlar to‘plami [0,2] kesmadan iborat.

$z = f(x,y)$ ikkio'zgaruvchili funksiyaga geometrik talqin berish mumkin. Fazoda koordinatalari (x,y,z) bo'lgan nuqtalar to'plami $z = f(x,y)$ funksiyaning grafigi deyiladi.

Ko'p hollarda $z = f(x,y)$ funksiyaning grafigi tenglamasi $z = f(x,y)$ bo'lgan biror sirtdan iborat bo'ladi. Masalan, $z = x^2 + y^2$ funksiyaning grafigi elliptik paraboloiddan iborat bo'ladi (3-rasm).

Ko'p hollarda $z = f(x,y)$ funksiyaning geometrik tasvirini tasavvur qilish maqsadida sath chiziqlari tushunchasidan foydalaniladi.



4-rasm

$z = f(x,y)$ funksiyaning sath chiziqlari deb xOy tekislikning $f(x,y) = C$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalari to'plamiga aytiladi, bu yerda C-parametr (4-rasm).

Sirtlarni o'rganishning ushbu metodi topografiyada qo'llaniladi.

m≥3 bo'lganda $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiyani geometrik tasavvur qilish mumkin emas (m=3 bo'lganda sath sirtlarini o'rganish mumkin, holos).

Ko'p o'zgaruvchili funksiya analitik usulda (ya'ni formulalar yordamida) berilganda, odatda ko'p hollarda, uning aniqlanish sohasi bevosita berilmaydi. Bu holda uning aniqlanish sohasi deb funksiyani aniqlaydigan analitik ifoda ma'noga ega bo'lgan barcha $(x_1, x_2, ..., x_m)$ nuqtalar to'plami tushuniladi.

Misol. 1) $u = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2$ funksiyaning aniqlanish sohasi R^m fazo nuqtalaridan iborat.

2) $u = \ln(1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_m^2)$ funksiyaning aniqlanish sohasi R^m fazoning $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 < 1$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamidan, ya'ni markazi O(0,0,…,0) nuqtada radiusi 1 ga teng ochiq shardan iborat bo'ladi.

Bir o'zgaruvchili funksiyaning ko'pgina (bir qator) tushunchalarini deyarli o'zgartirmasdan ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun ham o'tkazish mumkin. Masalan, chegaralangan (chegaralanmagan) funksiya tushunchasi, ikki funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, bo'linmasi tushunchalari, murakkab funksiya tushunchalari va boshqalar.

Quyida ko'p o'zgaruvchili murakkab funksiya tushunchasini kiritamiz.

Faraz qilaylik, R^k fazodagi D_1 to'plamda k o'zgaruvchili m ta funksiya

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k),\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k),\ \ldots,\ x_m = \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k) \qquad (1)$$

bu yerda $(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in D_1$, R^m fazodagi D to'plamda m o'zgaruvchili funksiya

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (2)$$

berilgan bo'lsin. Shuningdek, $\forall (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in D_1$ uchun $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in D$ bo'lsin.

U holda R^k fazodagi D_1 to'plamda $t_1, t_2, \ldots, t_k$ o'zgaruvchilarning yangi funksiyasini qurish mumkin: $F(t_1, t_2, \ldots, t_k)$. Bu funksiya $t_1, t_2, \ldots, t_k$ o'zgaruvchilarning murakkab funksiyasi deyiladi va quyidagicha (simvolik) yoziladi:

$$u = F(t_1, t_2, \ldots, t_k) = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k)) \qquad (3)$$

Bu holda $F(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ murakkab funksiya $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ funksiya va $x_i = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ funksiyalarning superpozitsiyasi deyiladi.

Misol. Ushbu $D = \{(t_1, t_2, t_3) \in R^3 : t_3^2 < t_1^2 + 2t_2^2\}$ to'plamda aniqlangan $u = \sin(\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} + 5\ln(t_1^2 + 2t_2^2 - t_3^2))$ funksiyani $u = \sin(x_1 + 5x_2)$, bu yerda $x_1 = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}$, $x_2 = \ln(t_1^2 + 2t_2^2 - t_3^2)$, murakkab funksiya deb qarash mumkin.

Elementar funksiyalar ustida to'rtta arifmetik amal va superpozitsiya amalini chekli marta qo'llash yordamida ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni hosil qilish mumkin.

2-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning nuqtadagi limiti. Takroriy limitlar

1-ta'rif. Aytaylik $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ m o'zgaruvchili funksiya D to'plamda aniqlangan va $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Agar ixtiyoriy ε musbat son uchun a nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lib, bu atrofning funksiya aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan barcha $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ nuqtalarida $(x \neq a)$ $|f(x_1, x_2, ..., x_m) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, A soni $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiyaning $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ nuqtadagi limiti deyiladi.

$u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiya $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ nuqtada A ga teng limitga egaligi quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, ..., x_m) = A, \text{ yoki } \lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Yuqoridagi ta'rifda a nuqtaning atrofi sifatida (I bob 2-§dagi teoremaga asosan) bu nuqtaning sferik yoki kubik atfoflarini olish mumkinligini ta'kidlab o'tamiz. Kubik atrof uchun yuqoridagi ta'rifni quyidagicha qayta shakllantirish mumkin: agar ixtiyoriy ε musbat son uchun shunday δ>0 son topilib, $|x_i - a_i| < \delta \ (i = 1, 2, ..., m)$ shartlarni qanoatlantiruvchi va funksiya aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan barcha $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ $(x \neq a)$ nuqtalarida $|f(x_1, x_2, ..., x_m) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa,A soni $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiyaning $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ nuqtadagi limiti deyiladi.

1-misol. u=f(x,y)=3xy+4x-7y+5 funksiyaning a=(2,1) nuqtadagi limiti A=12 ekanligini ko'rsating.

Yechish. f(x,y) funksiya R^2 fazoning barcha nuqtalarida aniqlangan va a=(2,1) nuqta uning limit nuqtasi bo'ladi (boshqa nuqtalari kabi). Ushbu f(x,y)-A ayirma uchun quyidagiga egamiz: |f(x,y)-A|=|3xy+4x-7y+5-12|=|3xy+4x-7y-7|= |3(x-2)(y-1)-(y-1)+7(x-2)|≤3|x-2||y-1|+|y-1|+7|x-2|.

Aytaylik, ε>0 son berilgan bo'lsin. $\delta=\frac{\varepsilon}{11}$ sonni tanlaymiz. U holda |x-2|<δ, |y-1|<δ bo'lganda 3|x-2||y-1|+|y-1|+7|x-2|<3δ^2+δ+7δ<<11δ=ε bo'ladi. Demak, |f(x,y)-12|<ε tengsizlik o'rinli. Bundan ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(3xy+4x-7y+5)=12$

2-misol. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ tenglikni isbotlang.

Yechish. (0,0) nuqta $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ funksiya aniqlanish sohasining limit nuqtasi ekanligi ravshan. Elementar matematikadan barcha x va y lar uchun $2|x||y|\le|x|^2+|y|^2$ tengsizlik o'rinli ekanligi ma'lum. U holda $x^2+y^2\neq 0$ shartda $\frac{2|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\sqrt{x^2+y^2}$ tengsizlik o'rinli. Shunga asosan quyidagini yozish mumkin:

$$|f(x,y)-0|=\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Demak, ixtiyoriy berilgan ε>0 son uchun δ=2ε deb olsak, $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ da $|f(x,y)-0|\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<\frac{\delta}{2}=\varepsilon$ bo'ladi.

Bundan ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Bir o'zgaruvchili funksiyadagi kabi funksiyaning nuqtadagi limitiga ketma-ketliklar tilida ham (Geyne) ta'rif berish mumkin.

2-ta'rif. Aytaylik u=f(x_1,x_2,...,x_m) m o'zgaruvchili funksiya D to'plamda aniqlangan va $a=(a_1,a_2,...,a_m)$ shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Agar hadlari D ga tegishli bo'lgan va a nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x^{(n)}\}=\{x_1^{(n)},x_2^{(n)},...,x_m^{(n)}\}$nuqtalar ketma-ketligi uchun unga mos {f($x^{(n)}$)} sonli ketma-ketlik har doim bitta A soniga intilsa, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty}f(x^{(n)})=A$ bo'lsa, u holda A soni u=f(x_1,x_2,...,x_m) funksiyaning $a=(a_1,a_2,...,a_m)$ nuqtadagi limiti deyiladi.

1- va 2-ta'riflarning ekvivalentligi bir o'zgaruvchili funksiya holidagi kabi isbotlanadi.

3-misol. $f(x,y)=\dfrac{x-2y}{x+y}$ funksiyaninga=(0,0) nuqtada limiti mavjud emasligini isbotlang.

Yechish. a=(0,0) nuqtaga yaqinlashuvchi ikkita $a^{(n)}=\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)$ va $b^{(n)}=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ nuqtalar ketma-ketligini olamiz. U holda barchan lar uchun $f(a^{(n)})=f\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)=0$ va $\lim\limits_{n\to\infty} f(a^{(n)})=0$, $f(b^{(n)})=f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{2}$ va $\lim\limits_{n\to\infty} f(b^{(n)})=-\frac{1}{2}$ bo'ladi.

a=(0,0) nuqtaga yaqinlashuvchi turli ketma-ketliklar uchun $\{f(a^{(n)})\}$ va $\{f(b^{(n)})\}$ ketma-ketliklar turli sonlarga intiladi. Demak, 2-ta'rifga asosan, $f(x,y)$ funksiya (0,0) nuqtada limitga ega emas.

Yuqorida berilgan ta'rifni A=∞ bo'lgan hol uchun ham aytish mumkin. Shuningdek, ko'p o'zgaruvchili funksiyaning cheksizlikdagi limitini aniqlash mumkin. Ikki o'zgaruvchili funksiya uchun bu limitlar quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} f(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}} f(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to+\infty}} f(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to-\infty}} f(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to\infty}} f(x,y)$.

Masalan, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)=A$ (A-chekli son) yozuv quyidagini anglatadi: agar ixtiyoriy ε musbat son uchun shunday K>0 son topilib, $|x|>K, |y|>K$ shartlarni qanoatlantiruvchi va funksiya aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan barcha (x,y) nuqtalarida $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, A soni f(x,y) funksiyaning $x\to\infty$, $y\to\infty$ dagi limiti deyiladi.

Bir o'zgaruvchili funksiyaning limiti uchun isbotlangan asosiy teoremalar ko'p o'zgaruvchili funksiya holida ham o'rinli bo'ladi.

Bu teoremalarni ikki o'zgaruvchili funksiya uchun keltiramiz.

Faraz qilaylik, $\alpha(x,y)$ funksiya D to'plamda aniqlangan va(a,b) shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \alpha(x,y)=0$ bo'lsa, $\alpha(x,y)$ funksiya (a,b) nuqtada cheksiz kichik funksiya deyiladi.

1-teorema. $f(x,y)$ funksiya (a,b)nuqtada chekli A limitga ega bo‘lishi uchun $\alpha(x,y)=f(x,y)-A$ funksiya(a,b)nuqtada cheksiz kichik bo‘lishi zarur va yetarli.

Bu teoremaning isboti funksiya limiti ta’rifidan bevosita kelib chiqadi.

2-teorema. Агар $f(x,y)$ funksiya (a,b)nuqtada chekli limitga ega bo‘lsa, u holda funksiya(a,b)nuqtaning yetarli kichik atrofida chegaralangan bo‘ladi.

3-teorema. Agar $f(x,y)$ va $g(x,y)$funksiyalar (a,b) nuqtada chekli limitga ega bo‘lib, shu nuqtaning biroratrofidagi barcha nuqtalarida $f(x,y)\le g(x,y)$bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)\le \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} g(x,y)$ bo‘ladi.

4-teorema. Agar $f(x,y)$va $g(x,y)$funksiyalar (a,b) nuqtada chekli limitga ega bo‘lsa, u holda

a) $f(x,y)\pm g(x,y)$ funksiyalar ham limitga ega va $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}(f(x,y)\pm g(x,y))=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)\pm \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} g(x,y)$ bo‘ladi.

b) $f(x,y)\cdot g(x,y)$ funksiya ham limitga ega va $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}(f(x,y)\cdot g(x,y))=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)\cdot \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} g(x,y)$ bo‘ladi.

c) $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ funksiya ham limitga ega va $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)}{\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} g(x,y)}$

bo‘ladi (bu yerda $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} g(x,y)\ne 0$ deb qaraladi).

5-teorema.Agar $f(x,y)$ funksiya (a,b)nuqtada chekli A>0 (A<0) limitga ega bo‘lsa, u holda (a,b)nuqtaning biror atrofidagi barcha nuqtalarida $f(x,y)$>0 ($f(x,y)$<0) bo‘ladi.

6-teorema. Agar $x=\varphi(t_1,t_2,...,t_k)$, $y=\psi(t_1,t_2,...,t_k)$ funksiyalar $(c_1,c_2,...,c_k)$ nuqtada chekli a, b limitlarga ega, $f(x,y)$ funksiya (a,b) nuqtada chekli A limitga ega bo‘lsa, u holda $f(\varphi(t_1,t_2,...,t_k),\psi(t_1,t_2,...,t_k))$ murakkab funksiya $(c_1,c_2,...,c_k)$ nuqtada chekli limitga ega va u A ga teng bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan teoremalarning isbotlari bir o'zgaruvchili funksiya holidagi isbotlarga o'xshash. Quyida 5-teoremaning isbotini keltiramiz.

5-teoremaning isboti. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A$ bo'lganligi sababli, ixtiyoriy, masalan ε=|A| uchun (a,b) nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lib, bu atrofdan olingan barcha (x,y) $((x,y)\neq(a,b)$ nuqtalarda $|f(x,y)-A|<\varepsilon=|A|$ yoki $A-|A|<f(x,y)<A+|A|$ bo'ladi. Demak, agar A<0 bo'lsa, $f(x,y)<A+|A|=0$, agar A>0 bo'lsa, $0=A-|A|<f(x,y)$ bo'ladi.

Takroriy limitlar. mo'zgaruvchili funksiya uchun yuqorida kiritilgan limit m karrali limit deyiladi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarga xos bo'lgan boshqa shakldagi limit tushunchasini ham kiritish mumkin. Buni biz ikki o'zgaruvchili funksiya uchun bayon qilamiz.

Aytaylik f(x,y) funksiya D to'plamda aniqlangan va (a,b) shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Bu funksiyada y ni tayinlab, x→a da limitga o'taylik. Agar bu limit mavjud bo'lsa, u yo'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi: $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$. Endi, y→b da $\varphi(y)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lsin deb faraz qilaylik. U holda f(x,y) funksiyaning avval x o'zgaruvchi, keyin esa y o'zgaruvchi bo'yicha limiti mavjud bo'ladi: $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$. Bu limit f(x,y) funksiyaning takroriy limiti deyiladi. Yuqoridagi kabi $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ takroriy limitni aniqlash mumkin.

4-misol. $f(x,y)=\dfrac{x-2y}{x+y}$ funksiyaning (0,0) nuqtadagi takroriy limitlarini hisoblang.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-2y}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1,$

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2y}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2y}{y}=-2.$

Bu misoldan ko'rinadiki, funksiyaning takroriy limitlari teng bo'lishi shart emas. 3-misolda bu funksiyaning (0,0) nuqtada karrali limiti mavjudmasligini ko'rsatgan edik. Demak, takroriy limitlarning mavjudligi karrali limitning mavjudligini ta'minlamas ekan.

Quyida karrali va takroriy limitlar orasidagi munosabatni ifodalovchi teoremalarni keltiramiz.

7-teorema. Agar 1)f(x,y) funksiyaning (a,b) nuqtadagi karrali limitimavjud: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A$; 2) f(x,y) funksiyaning tayinlangan x da limiti mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ takroriy limit ham mavjud va $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$=A bo'ladi.

Isbot. f(x,y) funksiyaning (a,b) nuqtadagi karrali limiti A ga teng. Limitning ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy ε>0 son olinganda ham shunday δ>0 son topilib, |x-a|<δ, |y-b|<δ shartlarni qanoatlantiruvchi D to'plamning (x,y) nuqtalari uchun

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon \qquad (1)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Teoremaning 2-shartiga ko'ra tayinlangan x da, demak, |x-a|<δ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x da ham $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)=\varphi(x)$ limit mavjud. Buni e'tiborga olgan holda (1) tengsizlikda limitga o'tamiz. Natijada |φ(x)-b|≤ε tengsizlikka ega bo'lamiz. Demak, ixtiyoriy ε>0 son olinganda ham shunday δ>0 son topilib, |x-a|<δ bo'lganda |φ(x)-b|≤ε tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$, ya'ni $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$=A ekanligi kelib chiqadi.

Quyidagi teorema yuqoridagi kabi isbotlanadi.

8-teorema. Agar 1) f(x,y) funksiyaning (a,b) nuqtadagi karrali limiti mavjud: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A$; 2) f(x,y) funksiyaning tayinlangan y da limiti mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ takroriy limit ham mavjud va $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$=A bo'ladi.

Bir o'zgaruvchili funksiyalardagi kabi ikki (ko'p) o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham nuqtada limitga ega bo'lishning quyidagi zaruriy va yetarli sharti o'rinli.

Faraz qilaylik, $f(x,y)$ funksiya D to'plamda berilgan va(a,b) uning limit nuqtasi bo'lsin.

9-teorema (Koshi). $f(x,y)$funksiyaning(a,b)nuqtada chekli limitga ega bo'lishi uchun, ixtiyoriy ε>0son berilganda ham shunday $\delta>0$son topilib, $0<\rho((\overline{x},\overline{y}),(a,b))<\delta,\ 0<\rho((x,y),(a,b)<\delta$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $(\overline{x},\overline{y})\in D$, $(x,y)\in D$ larda $|f(\overline{x},\overline{y})-f(x,y)|<\varepsilon$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Teoremani isbotlashni o'quvchilarga havola qilamiz.

3-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi

Aytaylik $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ mo'zgaruvchili funksiya D to'plamda aniqlangan va $a=(a_1,a_2,...,a_m)\in D$ shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1-ta'rif. Agar x→a da $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib,

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \vdots\\ x_m\to a_m}} f(x_1,x_2,...,x_m)=f(a_1,a_2,...,a_m)$$

bo'lsa, $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya $a=(a_1,a_2,...,a_m)$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Agar funksiya berilgan nuqtada uzluksiz bo'lmasa, funksiya shu nuqtada uzilishga ega, nuqta esa funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

Agar funksiya D to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u D to'plamda uzluksiz deyiladi.

Masalan, $P(x_1,x_2,...,x_m)=\sum\limits_{i=1}^{m}A_i x_1^{\alpha_i}x_2^{\beta_i}...x_m^{\lambda_i}$ ko'phad funksiya har bir $(x_1,x_2,...,x_m)$ nuqtada, uzluksiz $\dfrac{P_1(x_1,x_2,...,x_m)}{P_2(x_1,x_2,...,x_m)}$ ratsional funksiya $P_2(x_1,x_2,...,x_m)\neq 0$ bo'lgan nuqtalarda uzluksiz bo'ladi.

1-misol. Ushbu tengliklar bilan aniqlangan

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & agar \quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & agar \quad x^2+y^2=0\end{cases}$$

funksiyani uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ nuqta uchun funksiyaning limiti haqidagi teoremalarga asosan

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} xy}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x_0 y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=f(x_0,y_0),$$

(0,0) nuqta uchun $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$ ekanligini 2-§ dagi 2-misolda ko'rsatilgan edi, bu holda ham f(0,0)=0 bo'ladi. Demak, berilgan funksiya R^2 fazoning barcha nuqtalarida uzluksiz bo'ladi.

2-misol. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & agar \quad x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & agar \quad x^2+y^2=0 \end{cases}$

funksiyani uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ nuqtalarda funksiyaning uzluksizligi funksiyaning limiti haqidagi teoremalardan kelib chiqadi. (0,0) nuqtada bu funksiyaning limiti mavjud emasligini Geyne ta'rifidan foydalanib ko'rsatish mumkin ($\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)$ ketma-ketlik uchun $f\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}$, $\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$ ketma-ketlik uchun $f\left(0,\dfrac{1}{n}\right)=0$) Demak, berilgan funksiya (0,0) nuqtada uzilishga ega. Funksiya R^2 fazoning (0,0) dan farqli barcha nuqtalarda uzluksiz.

3-misol. $f(x,y)=\dfrac{1}{x-2y}$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Berilgan ratsional funksiya $x-2y\neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalarda uzluksiz. $x=2y$ to'g'ri chiziq nuqtalarida funksiya aniqlanmagan. Demak, berilgan funksiya $x=2y$ to'g'ri chiziq nuqtalaridan farqli barcha nuqtalarda uzluksiz.

2-ta'rif (Koshi). Agar ixtiyoriy ε musbat son uchun a nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lib, bu atrofning funksiya aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan barcha $x=(x_1,x_2,...,x_m)$ nuqtalarida $|f(x_1,x_2,...,x_m)-f(a_1,a_2,...,a_m)|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya $a=(a_1,a_2,...,a_m)$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Yuqoridagi ta'rifda a nuqtaning atrofi sifatida (I bob 2-§dagi teoremaga asosan) bu nuqtaning sferik yoki kubik atfoflarini olish mumkinligini ta'kidlab o'tamiz. Kubik atrof uchun yuqoridagi ta'rifni quyidagicha qayta shakllantirish mumkin: agar ixtiyoriy ε musbat son uchun shunday δ>0 son topilib, $|x_i-a_i|<\delta\ (i=1,2,...,m)$ shartlarni qanoatlantiruvchi va funksiya aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan barcha $x=(x_1,x_2,...,x_m)$ nuqtalarida $|f(x_1,x_2,...,x_m)-f(a_1,a_2,...,a_m)|<\varepsilon$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya $a=(a_1,a_2,...,a_m)$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

3-ta'rif (Geyne). Agar hadlari D ga tegishli bo'lgan va a nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x^{(n)}\}$ nuqtalar ketma-ketligi uchun unga mos $\{f(x^{(n)})\}$ sonli ketma-ketlik har doim bitta f(a) soniga intilsa, $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya $a=(a_1,a_2,...,a_m)$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

4-ta'rif. Agar $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya $D\subset R^m$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u D to'plamda uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham bir o'zgaruvchili funksiyalar uchun o'rinli bo'lgan teoremalarga o'xshash teoremalar o'rinli. Bu teoremalarni ikki o'zgaruvchili funksiyalar uchun bayon qilamiz.

1-teorema. Arap $f(x,y)$ funksiya $D\subset R^2$ to'plamda aniqlangan va $(a,b)\in D$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u shu (a,b) nuqtaning yetarli kichik atrofida chegaralangan bo'ladi.

2-teorema. Agar $f(x,y)$ va $g(x,y)$ funksiyalar $D\subset R^2$ to'plamda aniqlangan va $(a,b)\in D$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda

a) $f(x,y)\pm g(x,y)$ b) $f(x,y)\cdot g(x,y)$ c) $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}(g(a,b)\neq 0)$

funksiyalarham (a,b)nuqtada uzluksiz bo'ladi.

3-teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya (a,b) nuqtada uzluksiz va $f(a,b)>0$ $(f(a,b)<0)$ bo'lsa, u holda (a,b) nuqtaning biror atrofida $f(x,y)>0$ ($f(x,y)<0$) bo'ladi.

4-teorema. Agar $x=\varphi(t_1,t_2,...,t_k)$, $y=\psi(t_1,t_2,...,t_k)$ funksiyalar $(c_1,c_2,...,c_k)$ nuqtada uzluksiz va $a=\varphi(c_1,c_2,...,c_k)$, $b=\psi(c_1,c_2,...,c_k)$ bo'lib, $f(x,y)$ funksiya (a,b) nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(\varphi(t_1,t_2,...,t_k),\psi(t_1,t_2,...,t_k))$ murakkab funksiya $(c_1,c_2,...,c_k)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Bu teoremalarning isbotini o'quvchilarga havola qilamiz.

4-§. Yopiq to'plamda uzluksiz funksiyalarning xossalari

Yopiq va chegaralangan to'plamda uzluksiz ko'p o'zgaruvchili funksiyalar bir qator muhim xossalarga ega.

1-teorema (Veyershtrassning birinchi teoremasi). Agar $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya yopiq chegaralangan D to'plamda uzluksiz bo'lsa, u shu to'plamda chegaralangan bo'ladi.

Isbot. Yozuvlarni soddalashtirish maqsadida teorema isbotini ikki o'zgaruvchili funksiya uchun keltiramiz. Bu yerda keltirilgan mulohazalarni hech bir o'zgarishsiz mo'zgaruvchili funksiya uchun ham o'tkazish mumkin.

Teskaridan faraz qilamiz: berilgan f(x,y) funksiya D to'plamda uzluksiz. lekin chegaralanmagan bo'lsin.

Teorema sharti bo'yicha D chegaralangan to'plam, demak, bu to'plamni o'zida saqlaydigan va tomonlari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan K_1 kvadrat mavjud. Bu kvadratni to'rtta teng kvadratga bo'lamiz. Bu kvadratlarning kamida bittasiD to'plamningf(x,y) funksiya chegaralanmaganqismini o'zida saqlaydi (aks holda f(x,y) funksiya chegaralangan bo'ladi). Shunday kvadratlardan birini tanlab olamiz va K_2 bilan belgilaymiz. K_2 kvadratni yana to'rtta teng kvadratga bo'lamiz, ulardan kamida biriD to'plamningf(x,y) funksiya chegaralanmagan qismini o'zida saqlaydi. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, $\{K_n\}$ ichma-ich joylashgan kvadratlar ketma-ketligiga ega bolamiz. Ichma-ich joylashgan kvadratlar ketma-ketligi haqidagi teoremaga asosan, bu kvadratlarning barchasi uchun umumiy bo'lgan (x_0,y_0) nuqta mavjud.

f(x,y) funksiya har bir K_n kvadratda chegaralanmagan, demak, har bir kvadratda D ga tegishli cheksiz ko'p nuqtalar mavjud (chekli to'plamda funksiya chegaralangan bo'ladi). Bundan (x_0,y_0)nuqtaning ixtiyoriy kvadrat atrofida D to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari mavjud, chunki K_n kvadrat tomonlari $n\to\infty$ da o ga intilishi va (x_0,y_0) $\in K_n$ (n=1, 2,...) ekanligidan, yetarlicha katta n uchun $K_n(x_0,y_0)$ nuqtaning kvadrat atrofida yotadi. Shunday qilib, (x_0,y_0) nuqta D to'plamning limit nuqtasi, D yopiqligidan $(x_0,y_0)\in$D bo'ladi.

Ikkinchi tomondan f(x,y) funksiya D da, demak (x_0,y_0) nuqtada ham uzluksiz. U holda (x_0,y_0) nuqtaning kvadrat δ-atrofi topilib, bunda funksiya chegaralangan bo'ladi. Ammo biror n nomerdan K_n kvadrat (x_0,y_0) nuqtaning kvadrat δ-atrofida yotadi. Ziddiyat vujudga keldi: K_n kvadratda funksiya chegaralanmagan, K_n kvadratni o'zida saqlaydigan (x_0,y_0) nuqtaning kvadrat δ-atrofida funksiya chegaralangan. Bu ziddiyat teoremaning o'rinli ekanligini isbotlaydi.

2-teorema (Veyershtrassning ikkinchi teoremasi). Agar $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya yopiq chegaralangan D to'plamda uzluksiz bo'lsa, u shu to'plamda aniq quyi va aniq yuqori chegaralariga erishadi.

Bu teoremaning usboti bir o'zgaruvchili funksiya uchun aytilgan shunga o'xshash teorema isbotidan farq qilmaydi.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham tekis uzluksizlik tushunchasi kiritiladi.

Aytaylik, f(x)($x=(x_1,x_2,...,x_m)$) funksiya $D\subset R^m$ to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy ε musbat son uchun shunday δ musbat son topilib, D to'plamning $\rho(x',x'')<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x'=(x'_1,x'_2,...,x'_m)$ va $x''=(x''_1,x''_2,...,x''_m)$ nuqtalarida $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, f(x)funksiya D to'plamda tekis uzluksiz funksiya deyiladi.

Ravshanki, agar f(x)funksiya D to'plamda tekis uzluksiz bo'lsa, u shu to'plamda uzluksiz bo'ladi. Ammo aksinchasi har doim o'rinli emas. Quyidagi teorema funksiyaning to'plamda tekis uzluksiz bo'lishining yetarli shartini ifodalaydi.

3-teorema (Kantor). Agar $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiya yopiq chegaralangan D to'plamda uzluksiz bo'lsa, u shu to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi.

4-teorema (Bolsano-Koshining birinchi teoremasi). Agar $f(x_1,x_2,...,x_m)$funksiya bog'lamli D to'plamda uzluksiz, to'plamning ikkita $a=(a_1,a_2,...,a_m)$ va $b=(b_1,b_2,...,b_m)$ nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, u holda D to'plamga tegishli shunday $c=(c_1,c_2,...,c_m)$ nuqta topilib, bu nuqtada funksiya nolga aylanadi: $f(c_1, c_2, ..., c_m)=0$.

5-teorema (Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi). Agar $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiya bog'lamli D to'plamda uzluksiz, shu to'plamda ikkita har xil A, B (A<B) qiymatlarni qabul qilsa, u holda funksiya A va B oralig'idagi ixtiyoriy C qiymatni D to'plamda kamida bir marta qabul qiladi.

II-bobga doir mashq va masalalar

18. $f(x,y)=\dfrac{3xy}{x^2+y^2}$ funksiyani $x=-2,\ y=8$ dagi qiymatini toping;

19. $f(x,y)=\sqrt{y^2-2x^2}$ funksiyani $x=-4,\ y=10$ dagi qiymatini toping;

20. $F(x,y)=\dfrac{2x-y}{x-2y}$, $F(3,1)$, $F(1,3)$, $F(-2,-4)$, $F(-4,-2)$, $F(a;a)$, $F(a;-a)$ larni hisoblang;

21. $F(x,y)=\dfrac{x+2y}{x-y}$, $F(2;1)$, $F(-3;-1)$, $F(a;b)$, $(a\neq b)$ larni toping;

22. $f(x,y)=e^{\sin(x+y)}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{\pi}{2},2\pi\right)$ larni toping;

23. $f(x,y)=x^y+y^{x-1}$, $f(1,1)$, $f(1,2)$, $f(2;2)$ larni toping;

Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping (24-39).

24. $z=\dfrac{1}{x-y}$;

25. $z=\dfrac{1}{x+y}$;

26. $z=\sqrt{x+y}$;

27. $z=\sqrt{x-y}$;

28. $z=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$;

29. $z=\sqrt{x}+\sqrt{y}$;

30. $z=\sqrt{x^2+y^2-9}$;

31. $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$;

32. $z=\ln\left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1\right)$;

33. $z=\ln(y^2-4x+8)$;

34. $z=\dfrac{1}{2-x^2-y^2}$;

35. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$;

36. $z = \arcsin\frac{y-1}{x}$;

37. $z = \arcsin\frac{x}{2} + \arccos\frac{y}{2}$;

38. $u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$;

39. $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}\ (r < R)$.

Quyidagi funksiyalarning sath chiziqlarini yasang (40-43).

40. $z = x + y$;

41. $z = x^2 + y^2$;

42. $z = x^2 - y^2$;

43. $z = x^2 + y$;

44. $u = \frac{x+y+z}{x-y+z}$ funksiyaning yuksaklik sirtlarini toping;

45. $u = z^2 + y^2 + z^2$ funksiyaning yuksaklik sirtlarini toping.

Funksiya limitining ta'rifiga asoslanib tengliklarni isbotlang (46-47).

46. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}(2x+3y) = 13$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -1}} x^2 y = -4$.

47.a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}(3x-y) = 2$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\left(x^2+y^2\right) = 2$.

Limitlarni toping (48-55).

48. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$;

49. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin\left(x^2 y\right)}{x y}$;

50. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}$;

51. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$;

52. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}$;

53. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}$;

54. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{x+y}{x-y}$ mavjudmi?

55. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$ mavjudmi?

$(0;0)$nuqtada quyidagi funksiyalarning uzluksizligini tekshiring (56-59).

56. $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}, \quad f(0;0)=2;$

57. $f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x}, \quad f(0;0)=0;$

58. $f(x,y)=\frac{tg(xy)}{x}, \quad f(0;0)=0;$

59. $f(x,y)=\frac{1-\sqrt{xy+1}}{xy}, \quad f(0;0)=-\frac{1}{2}.$

Quyidagi funksiyalarning uzulish nuqtalarini toping(60-65).

60. $z=\frac{y-1}{(x+1)^2+y^2};$

61. $z=\frac{x+y}{x^2+y^2};$

62. $z=\frac{x+3y}{2y-x};$

63. $z=\frac{4x-y}{x+y^2};$

64. $z=\frac{5x+2y^2}{\sqrt{xy}};$

65. $z=\frac{1}{4-x^2-y^2}.$

III BOB. KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANI DIFFERENSIALLASH

1-§. Xususiy hosilalar

Bundan keyingi ta’rif, teoremalarni ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun keltiramiz. Lekin ularning barchasi m o‘zgaruvchli funksiya uchun qiyinchiliksiz umumlashtirilishi mumkin.

Aytaylik $u=f(x,y)$ funksiya D ($D\subset R^2$)sohada berilgan va (x_0,y_0) nuqta D sohaning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. x_0 argumentga y argument qiymati y_0 ni o‘zgartirmagan holda shunday Δx orttirma beraylikki, $(x_0+\Delta x,y_0)\in D$ bo‘lsin. U holda f(x,y) funksiya ham biror orttirma oladi: $\Delta_x u=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$.

Quyidagi nisbatni tuzamiz: $\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$. Bu nisbat berilgan (x_0,y_0) nuqta uchun Δx ning funksiyasi bo‘ladi.bu funksiyaning $\Delta x\to 0$ da limiti, ya’ni $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ mavjud bo‘lishi mumkin. U holda bu limit $u=f(x,y)$ funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi x argument (erkli o‘zgaruvchi) bo‘yicha xususiy hosilasi deyiladi va u'_x yoki f'_x, yoki $f'_x(x_0,y_0)$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Bu simvollar bilan bir qatorda $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ yoki $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ simvollardan ham foydalaniladi.

Birinchi uchta belgilashdagi x indeks hosila x o‘zgaruvchi bo‘yicha hisoblanayotganligini bildiradi. Keyingi belgilashlarda bir o‘zgaruvchili funksiya hosilasida ishlatiladigan d (tik) harfi o‘rniga ∂ (dumoloq) harfi ishlatilib, u ko‘po‘zgaruvchili funksiyadan hosila olinayotganligini bildiradi. Kiritilgan belgilashlar yordamida xususiy hosila ta’rifini quyidagicha yoziladi:

$$u'_x=\frac{\partial u}{\partial x}=f'_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

Shunga o‘xshash berilgan funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi y argument boyicha xususiy hosilasi ta’riflanadi.

Agar $\Delta y\to 0$ da $\dfrac{\Delta_y u}{\Delta y}=\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ nisbatning limiti mavjud bo‘lsa, bu limit $u=f(x,y)$ funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi y argument (erkli o'zgaruvchi) bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va yuqoridagilarga o'xshash simvollarning biri bilan belgilanadi. Demak,

$$u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

$f'_x(x_0, y_0)$ va $f'_y(x_0, y_0)$ xususiy hosilalar mos ravishda $u = f(x, y)$ funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi x o'zgaruvchi (y=y_0 to'g'ri chiziq bo'ylab) va y o'zgaruvchi (x=x_0 to'g'ri chiziq bo'ylab) bo'yichao'zgarish tezligini tavsiflaydi.

Uch va undan ortiq erkli o'zgaruvchilarga bog'liq funksiyalarning xususiy hosilalari ikki o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalariga o'xshash kiritiladi.

Ta'rif. $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ funksiyaning $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0})$ nuqtadagi x_i (i=1,2, …, m) argument bo'yicha xususiy hosilasi deb bu funksiyaning x_i argument bo'yicha xususiy orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitiga aytiladi.

$u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ funksiyaning xususiy hosilalari yuqoridagilarga o'xshash belgilanadi. Masalan, funksiyaning x_i argument bo'yicha xususiy hosilasi quyidagicha belgilash mumkin:

$$f'_{x_i}(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{i0}, \ldots, x_{m0}) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i}.$$

Xususiy hosilalar mavjud bo'lgan har bir (x_0,y_0) nuqtaga $f'_x(x_0, y_0)$ ($f'_y(x_0, y_0)$) sonni mos qoyish orqali D sohada yoki uning biror D_1 qismida $f'_x(x, y)$ ($f'_y(x, y)$) funksiyani aniqlash mumkin. Bu funksiyalar $f(x, y)$ funksiyaning x va y o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalari deyiladi.

Biror argument bo'yicha xususiy hosilani aniqlaganda boshqa argumentlar o'zgarmas (doimiy) deb qaralganligi sababli, bu xususiy hosila odatdagi bir argumentli funksiyaning hosilasi kabi topilishi mumkin.

1-misol. $u = f(x, y, z) = (x - yz^2)^3$ funksiyaning ixtiyoriy (x, y, z) nuqtadagi barcha xususiy hosilalarini toping.

Yechish. y va z argumentlarni o'zgarmas, x argumentni o'zgaruvchi deb qarab hamda bir argumentli funksiyani differensiallash qoidalaridan foydalanib ixtiyoriy (x,y,z) nuqtada x bo‘yicha xususiy hosilani topamiz: $\frac{\partial u}{\partial x}=3(x-yz^2)^2$.

Shunga o‘xshash, y bo‘yicha xususiy hosila

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3(x-yz^2)^2\cdot(-z^2)=-3z^2(x-yz^2)^2,$$

z bo‘yicha xususiy hosila $\frac{\partial u}{\partial z}=3(x-yz^2)^2\cdot(-2yz)=-6yz(x-yz^2)^2$.

2-misol. $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}\cos(xy)$funksiya xususiy hosilalarining (0,1) nuqtadagi qiymatlarini hisoblang.

Yechish. Berilgan funksiyaning ixtiyoriy (x,y) (y≠0) nuqtadagi xususiy hosilalarini topamiz:

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\cos(xy)-ye^{\frac{x}{y}}\sin(xy),\quad f'_y(x,y)=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\cos(xy)-xe^{\frac{x}{y}}\sin(xy)$$

.

Bundan x=0, y=1 bo‘lganda $f'_x(0,1)=1,\ f'_y(0,1)=0$.

3-misol. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & agar\quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & agar\quad x^2+y^2=0\end{cases}$

funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

Yechish. Berilgan funksiyaning ixtiyoriy (x,y)≠(0,0) nuqtadagi xususiy hosilalarini topamiz: $f'_x(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-2xxy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$,

$$f'_y(x,y)=\frac{x(x^2+y^2)-2yxy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Endi (x,y)=(0,0) bo‘lsin. U holda

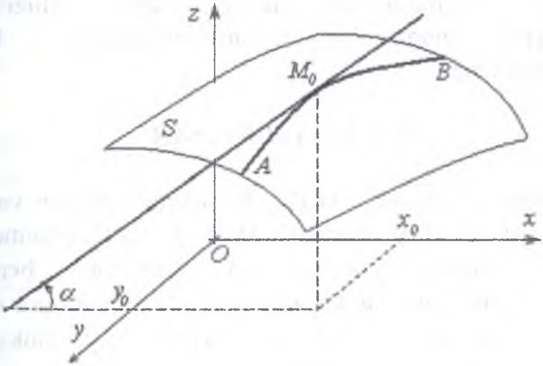
$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,\qquad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

bo‘ladi.

Eslatma. Bir o‘zgaruvchili funksiyauchun berilgan nuqtada hosilasining mavjudligidan uning shu nuqtada uzluksizligi kelib chiqar edi. Yuqoridagi funksiya (0,0) nuqtada uzluksiz emas (qarang 2-bob, 2-§, 2-misol), lekin shu nuqtada xususiy hosilalari mavjud. Bundan ko‘p o‘zgaruvchili funksiya uchun yuqorida aytilgan xossaning o‘rinli emasligi kelib chiqadi.

Ikki o‘zgaruvchili funksiya xususiy hosilalarining geometrik ma’nosi

Aytaylik, $z=f(x,y)$ funksiya aniqlanish sohasining (x_0,y_0) nuqtasida x va y bo‘yicha xususiy hosilalari $f_x'(x_0,y_0)$ va $f_y'(x_0,y_0)$ mavjud bo‘lsin. Shuningdek $z=f(x,y)$ funksiyaning uch o‘lchamli fazodagi geometrik tasviri S sirtdan iborat bo‘lsin (5-rasm). (x_0,y_0) nuqtaga S sirtda $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ nuqta mos keladi.



5-rasm

f(x,y) funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi x bo‘yicha $f_x'(x_0,y_0)$ xususiy hosilasini topish uchun funksiyaning f(x,y) ifodasida $y=y_0$ ni qo‘yish va keyin esa $f(x,y_0)$ funksiyaning x bo‘yicha hosilasining x_0 dagi qiymatini topish kerak. Shunday qilib, $f_x'(x_0,y_0)=\left(\frac{df(x,y_0)}{dx}\right)_{x=x_0}$.

Ravshanki, $y=y_0$ tekislik va S sirtning kesishishidan hosil bo‘lgan BM_0C egri chiziq $f(x,y_0)$ funksiyaning grafigi bo‘lib xizmat qiladi. Bir o‘zgaruvchili funksiya hosilasining geometrik ma’nosidan kelib chiqib, quyidagicha xulosalashimiz mumkin. $f_x'(x_0,y_0)$ xususiy hosila $y=y_0$ tekislik va S sirtning kesishishidan hosil bo‘lgan egri chiziqqa uning $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ nuqtasida o‘tkazilgan urinmaning Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan α burchakning tangensiga teng: $f_x'(x_0,y_0)=\left(\frac{df(x,y_0)}{dx}\right)_{x=x_0}=tg\alpha$.

Huddi shunga o‘xshash $f_y'(x_0,y_0)$ xususiy hosilaning geometrik ma’nosini aniqlash mumkin. $f_y'(x_0,y_0)$ xususiy hosila $x=x_0$ tekislik va S sirtning kesishishidan hosil bo‘lgan egri chiziqqa uning $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ nuqtasida o‘tkazilgan urinmaning Oy o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan β burchakning tangensiga teng: $f'_y(x_0,y_0)=\left(\frac{df(x_0,y)}{dx}\right)_{y=y_0}=tg\beta$.

Shunday qilib, $f'_x(x_0,y_0)$ va $f'_y(x_0,y_0)$ xususiy hosilalar geometrik nuqtai nazardan $y=y_0$ va $x=x_0$ tekisliklarda $z=f(x,y_0)$ va $z=f(x_0,y)$ funksiyalarning grafiklaridan iborat egri chiziqlarning $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ nuqtasidagi urinmalarning burchak koeffitsiyentlariga teng.

2-§. To‘la differensial

Aytaylik $u=f(x,y)$ funksiya D ($D\subset R^2$)sohada berilgan va (x_0,y_0) nuqta D sohaning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. x_0 va y_0 argumentlarga mos ravishda shunday Δx va Δy orttirmalar beraylikki, $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in D$ bo‘lsin. U holda f(x,y) funksiya ham biror orttirma oladi: $\Delta u=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$. Bu orttirmau=f(x,y) funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi to‘la orttirmasi deyiladi.

1-ta’rif. Agar $u=f(x,y)$ funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi to‘la orttirmasini

$$\Delta u=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y \qquad (1)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lsa, $u=f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi deyiladi, bu yerda A va B larΔx va Δy orttirmalarga bog‘liq emas, α va β lar Δx va Δy orttirmalarning biror funksiyalari bo‘lib, Δx va Δy nolga intilganda nolga intiladi hamda $\Delta x=0$ va $\Delta y=0$ da nolga teng.

(1) tenglik $u=f(x,y)$ funksiyaning berilgan (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchanlik sharti deyiladi.

Agar $u=f(x,y)$ funksiya biror D to‘plamning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo‘lsa, u shu to‘plamda differensiallanuvchi deyiladi.

Masalan, $u=x^3+4xy+y^2$ funksiya xOy tekislikda differensiallanuvchi bo‘ladi. Haqiqatan ham, berilgan funksiyaning ixtiyoriy (x,y) nuqtadagi to‘la orttirmasi quyidagicha bo‘ladi:

$\Delta u=(x+\Delta x)^3+4(x+\Delta x)(y+\Delta y)+(y+\Delta y)^2-x^3-4xy-y^2=$

$=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3+4y\Delta x+4x\Delta y+4\Delta x\Delta y+2y\Delta y+(\Delta y)^2$,

yoki

$$\Delta u=(3x^2+4y)\Delta x+(4x+2y)\Delta y+(3x\Delta x+(\Delta x)^2)\Delta x+(4\Delta x+\Delta y)\Delta y \quad (2)$$

So'ngi tenglikda $3x^2+4y=A$, $4x+2y=B$, $3x\Delta x+(\Delta x)^2=\alpha$, $4\Delta x+\Delta y=\beta$ deb olsak, Δu ni (1) ko'rinishdagi ifodasini olamiz, chunki A va B lar Δx va Δy orttirmalarga bog'liq emas, Δx□0 va Δy□0 da α□0 va β□0 o'rinli.

Funksiyaning (1) differensiallanuvchanlik shartini boshqa ko'rinishda ham yozish mumkin. Buning uchun quyidagi igodani qaraymiz:

$$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

bu yerda Δx va Δy lar bir vaqtda nolga teng emas. Geometrik nuqtai nazardan ρ (x_0,y_0) va $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ nuqtalar orasidagi masofaga teng.

Ravshanki, agar $\Delta x\to 0$ va $\Delta y\to 0$ bo'lsa, u holda $\rho\to 0$ bo'ladi, va aksincha agar $\rho\to 0$ bo'lsa, u holda $\Delta x\to 0$ va $\Delta y\to 0$ bo'ladi (demak $\alpha\to 0$ va $\beta\to 0$ bo'ladi). Shunday qilib, biz bir biriga bo'liq bo'lmagan holda nolga intiluvchi Δx va Δy o'zgaruvchilar o'rniga bitta ρ cheksiz kichikni qarayabmiz. Bu cheksiz kichikka nisbatan boshqa cheksiz kichiklarning tartibini aniqlashimiz mumkin bo'ladi.

(1) tenglikdagi $\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ yig'indini quyidagicha yozib olamiz:

$$\alpha\Delta x+\beta\Delta y=\left(\alpha\frac{\Delta x}{\rho}+\beta\frac{\Delta y}{\rho}\right)\rho.$$

$\varepsilon=\alpha\dfrac{\Delta x}{\rho}+\beta\dfrac{\Delta y}{\rho}$ belgilash kiritib, $\alpha\Delta x+\beta\Delta y=\varepsilon\rho$ tenglikka ega bo'lamiz, bu yerda $\rho\to 0$ da $\varepsilon\to 0$ bo'ladi. Chunki $\rho\to 0$ da $\Delta x\to 0$ va $\Delta y\to 0$, ular oldidagi ko'paytuvchilar esa chegaralangan: $\left|\dfrac{\Delta x}{\rho}\right|\le 1$, $\left|\dfrac{\Delta y}{\rho}\right|\le 1$.

Shunday qilib, agar $u=f(x,y)$ funksiyaning Δu orttirmasini (1) ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u holda Δu orttirmani

$$\Delta u=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon\rho \quad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ va $\rho\to 0$ da $\varepsilon\to 0$.

Aksincha, Δu orttirmani (4) ko'rinishda ifodalash mumkinligidan uni (1) ko'rinishda ifodalash mumkinligi kelib chiqadi. Buni isbotlashni o'quvchilarga havola qilamiz.

(4) formulada $\varepsilon\rho$ qo'shiluvchi ρ ga nisbatan, demak $A\Delta x+B\Delta y$ ga nisbatan ham (A va B bir vaqtda nolga teng bo'lmaganda) cheksiz kichik. Shu sababli $A\Delta x+B\Delta y$ ifoda Δu orttirmaning bosh qismi deyiladi.

Ta'rif. (x,y) nuqtada differensiallanuvchi u=f(x,y) funksiyaning Δu orttirmasini bosh qismi, ya'ni $A\Delta x+B\Delta y$ ifoda uning to'la differensiali deyiladi va du yoki df(x,y) kabi belgilanadi.

Masalan, (2) tenglikka ko'ra $u=x^3+4xy+y^2$ funksiyaning to'la differensiali mavjud va $du=(3x^2+4y)\Delta x+(4x+2y)\Delta y$ bo'ladi.

Shunday qilib, u=f(x,y) funksiyaning to'la differensiali quyidagi ko'rinishga ega: $du=A\Delta x+B\Delta y$, bu yerda A va B lar Δx va Δy larga bog'liq emas.

Quyidagi teoremalar u=f(x,y) funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishining zaruriy shartlarini ifodalaydi.

1-teorema. Agar u=f(x,y) funksiya biror (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda u shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isbot.Haqiqatan ham, agar u=f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning shu nuqtadagi orttirmasini (1) shaklda ifodalash mumkin. Bundan bevosita $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta u=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, $\Delta u=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ va $\Delta x\to 0$ da $x\to x_0$, $\Delta y\to 0$ da, $y\to y_0$ ekanligini e'tiborga olsak, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ bo'ladi. Demak, u=f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'ladi.

2-teorema. Agar u=f(x,y) funksiya biror sohada aniqlangan, shu sohaning (x_0,y_0) nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u holda shu nuqtada uning $f'_x(x_0,y_0)$ va $f'_y(x_0,y_0)$ xususiy hosilalari mavjud bo'ladi.

Isbot.u=f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lganligi sababli uning shu nuqtadagi orttirmasini (1) ko'rinishda ifodalash mumkin. (1) formulada $\Delta x\neq 0$, $\Delta y=0$ deb olsak, $\Delta_x u=A\Delta x+\alpha\Delta x$ bo'ladi. Bu tenglikning ikkala tomonini Δx ga bo'lib, $\Delta x\to 0$ da limitga o'tamiz: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(A+\alpha)$, bundan $f'_x(x_0,y_0)=A$.

Demak, (x_0,y_0) nuqtada u=f(x,y) funksiyaning x bo'yicha xususiy hosilasi mavjud.

Shunga o'xshash, (x_0,y_0) nuqtada u=f(x,y) funksiyaning y bo'yicha xususiy hosilasi mavjudligi va $f'_y(x_0,y_0)=B$ ekanligi ko'rsatiladi.

Natija. Biror (x_0,y_0) nuqtada uzilishga ega bo'lgan yoki xususiy hosilalaridan biri mavjud bo'lmagan u=f(x,y) funksiya shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lmaydi.

Izoh. 1- va 2- teoremalarga teskari tasdiqlar o'rinli emas. Ya'ni f(x,y) funksiyaning berilgan nuqtada uzluksizligidan, hamda shu nuqtada xususiy hosilalarning mavjudligidan uning differensiallanuvchanligi kelib chiqmaydi. Bunga ishonch hosil qilish uchun quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$u=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & agar\ \ x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & agar\ \ x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Bu funksiya (0,0) nuqtada uzluksiz (2-bob, 3-§, 1-misol) va bu nuqtada xususiy hosilalari mavjud: $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$, shunga o'xshash $f'_y(0,0)=0$.

Bu funksiyaning (0,0) nuqtadagi to'la differensiali $\Delta u=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$.

Agar qaralayotgan funksiya (0,0) nuqtada differensiallanuvchi desak, u holda $\Delta u=0\Delta x+0\Delta y+\varepsilon\rho$ yoki $\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, bu yerda $\rho\to 0$ da $\varepsilon\to 0$ bo'lishi kerak. So'ngi tenglik ixtiyoriy Δx va Δy da, xususan $\Delta x=\Delta y$ da ham o'rinli bo'lishi kerak. U holda $\dfrac{\Delta x}{2}=\varepsilon\sqrt{2}\,|\Delta x|$ va bundan $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ ga ega bo'lamiz. ε nolga intilmaydi. Bu esa farazga zid.

Shunday qilib, qaralgan funksiya (0,0) nuqtada uzluksiz, xususiy hosilalari mavjud, lekin differensiallanuvchi emas. Bu misoldan ko'rinadiki, bir o'zgaruvchili funksiyalar uchun o'rinli bo'lgan quyidagi tasdiqning analogi ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun o'rinli emas: funksiya biror nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada chekli hosilaga ega bo'lishi zaruz va yetarli.

2-teoremadan foydalsak, funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi to'la differensiali $du = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$ bo'ladi.

x va y erkli o'zgaruvchilarning dx, dy differensiallari deb bu o'zgaruvchilarning ixtiyoriy Δx, Δy orttirmalarini tushunishga kelishib olamiz, ya'ni dx=Δx, Δy=dy deb qabul qilamiz. U holda funksiyaning (x,y) nuqtadagi to'la differensialini quyidagicha yozish mumkin bo'ladi:

$$du = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

yoki

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad (5)$$

Shunday qilib, (x,y) nuqtada differensiallanuvchi f(x,y) funksiyaning to'la differensiali uning shu nuqtadagi xususiy hosilalarini mos erkli o'zgaruvchilar differensiallariga ko'paytmalari yig'indisiga teng ekan. Demak, to'la differensialni topish xususiy hosilalarni topishga keltiriladi. Va aksincha, agar funksiyaning to'la differensiali ma'lum bo'lsa, uning ifodasidan xususiy hosilalarni topish mumkin bo'ladi.

Endi f(x,y) funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishining yetarli shartlarini o'rganamiz.

3-teorema. Agar u=f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtaning biror atrofida $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ xususiy hosilalarga ega va ular (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.

Natija. Agar u=f(x,y)funksiyaning biror (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz xususiy hosilalari mavjud bo'lsa, u holda bu funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

3-teorema ikki o'zgaruvchili funksiyalarning differensiallanuvchanligini aniqlash va ularning to'la differensialini topishga imkon beradi.

1-misol. $u = \ln^2(x-y)$ funksiyani differensiallanuvchanlikka tekshiring, to'la differensialini toping.

Yechish. berilgan funksiya y=x to'g'ri chiziqning pastki qismidan iborat yarim tekislikda aniqlangan. Uning xususiy hosilalari

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2\ln(x-y)}{x-y}, \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2\ln(x-y)}{y-x}$ shu to‘plamda uzluksiz. Demak, bu to‘plamda funksiya differensiallanuvchi va (5) formulaga ko‘ra

$$\Delta u=\frac{2\ln(x-y)}{x-y}dx+\frac{2\ln(x-y)}{y-x}dy,$$

yoki

$$\Delta u=\frac{2\ln(x-y)}{x-y}(dx-dy).$$

To‘la differensial tushunchasi taqribiy hisoblashda muhim ahamiyatga ega. Differensiallanuvchi funksiyaning to‘la differensiali formulasi (1) ni du=AΔx+BΔy ni e’tiborga olgan holda quyidagicha yozib olamiz: Δu=du+αΔx+βΔy, bundan Δu-du=αΔx+βΔy, bu yerda Δx→0 va Δy→0 da α→0 va β→0.

Ma’lumki, funksiyaning to‘la orttirmasi va to‘la differensiali orasidagi farq Δx va Δy cheksiz kichik bo‘lganda, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik bo‘ladi. Demak, quyidagi taqribiy tenglikni yozish mumkin:

$$\Delta u\approx du. \qquad (10)$$

Bu taqribiy tenglik Δx va Δy qanchalik kichik (absolyut qiymati bo‘yicha) bo‘lsa, Δu ni shunchalik yaqin qiymatini aniqlaydi.

(10) munosabat taqribiy hisoblashda keng qo‘llaniladi. Uni quyidagicha yozib olish mumkin:

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx f_x'(x,y)\Delta x+f_y'(x,y)\Delta y$$

yoki

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f_x'(x,y)\Delta x+f_y'(x,y)\Delta y\ . \qquad (11)$$

(11) formula f(x,y) funksiyaning f(x+Δx,y+Δy) qiymatini taqribiy hisoblashda foydalaniladi.

2-misol. $\ln(\sqrt[3]{1,01}+\sqrt[4]{0,98}-1)$ ni taqriby hisoblang.

Yechish. Ushbu $f(x,y)=\ln(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)$ funksiyani qaraymiz. Ravshanki, berilgan masalaning yechimi f(1,01;0,98) ni hisoblashga keladi. Bu funksiyaning (1,01;0,98) nuqtaga yaqin bo‘lgan (1,1) nuqtadagi qiymatini hisoblash oson. Haqiqatan ham, $f(1,1)=\ln(\sqrt[3]{1}+\sqrt[4]{1}-1)=0$. Shuni hisobga olgan holda x=1, y=1 deb olamiz. U holda Δx=0,01 va Δy=-0,02 bo‘ladi.

f(x,y) funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblaymiz:

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)},\quad f'_y(x,y)=\frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)}.$$

Bu hosilalar (1,1) nuqtada uzluksiz, demak, f(x,y) funksiya shu nuqtada differensiallanuvchi va (11) formuladan foydalanishimiz mumkin.

$$f(1+0,01;1-0,02)\approx f'_x(1,1)\cdot 0,01+f'_y(1,1)\cdot(-0,02).$$

$f'_x(1,1)=\frac{1}{3}$, $f'_y(1,1)=\frac{1}{4}$ ekanligini e'tiborga olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f(1,01;0,98)\approx\frac{1}{3}\cdot 0,01+\frac{1}{4}\cdot(-0,02)=0,0033-0,005=-0,0017.$$

Demak, $\ln(\sqrt[3]{1,01}+\sqrt[4]{0,98}-1)\approx -0,0017$.

Differensiallanuvchanlik va to'la differensial tushunchalari uch va undan ko'p o'zgaruvchilar uchun ham ikki o'zgaruvchi funksiya uchun aniqlangan kabi aniqlanadi.

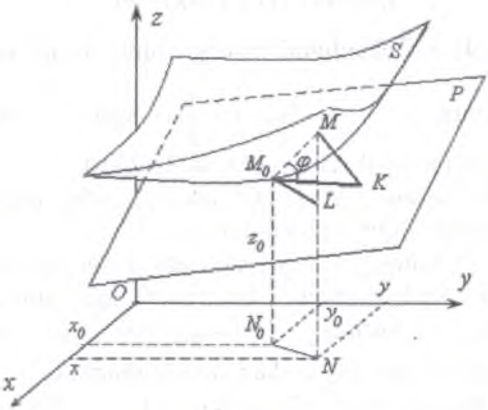
3-misol. $u=z^2e^{\sin(xy)}$ funksiyaning to'la differensialini toping.

Yechish. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz^2\cos(xy)e^{\sin xy}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz^2\cos(xy)e^{\sin xy}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2ze^{\sin(xy)}$.

Bu xususiy hosilalar ixtiyoriy (x,y,z) nuqtalarda uzluksiz. Demak, barcha nuqtalarda differensiallanuvchi va uning to'la differensiali $du=e^{\sin(xy)}\left(yz^2\cos(xy)dx+xz^2\cos(xy)dy+2zdz\right)$ bo'ladi.

3-§. Urinma tekislik. Ikki o'zgaruvchili funksiya to'la differensialining geometrik ma'nosi

Aytaylik, S sirt z=f(x,y) tenglama bilan berilgan bo'lsin. Shu sirtga tegishli biror $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtani tayinlab olamiz va M(x,y,z) shu sirtning boshqa bir ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. M_0M kesuvchini o'tkazamiz (6–rasm).



6-rasm

Ta'rif. Agar M nuqta S sirt bo'ylab M_0 nuqtaga ixtiyoriy ravishda intilganda M_0M kesuvchi va M_0 nuqtadan o'tuvchi P tekislik orasidagi burchak nolga intilsa, P tekislik S sirtga M_0 nuqtasidan o'tkazilgan urinma tekislik deyiladi.

Quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. Agar z=f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda z=f(x,y) tenglama bilan berilganS sirtning $M_0(x_0,y_0, f(x_0,y_0))$ nuqtasida o'tkazilgan urinmasi mavjud va uning tenglamasi quyidagica bo'ladi:

$$Z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(X-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(Y-y_0), \qquad (1)$$

bu yerda X,Y va Z mos ravishda P tekislikdagi nuqta abssissasi, ordinatasi va applikatasi.

Izoh. Odatda (1) formuladan foydalanganda X, Y, Z bosh harflar o'rniga kichik harflar ishlatishadi.

Misol. $z=f(x,y)=\sqrt{26-x^2-y^2}$ funksiya grafigiga (tenglama bilan berilgan sirtning) (1,4,3) nuqtasida o'tkazilgan urinma tekislik tenglamasini yozing.

Yechish. Berilgan funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$f'_x(x,y)=-\dfrac{x}{\sqrt{26-x^2-y^2}}$, $f'_y(x,y)=-\dfrac{y}{\sqrt{26-x^2-y^2}}$. Bu hosilalar (1,4) nuqtaning kichik atrofida uzluksiz. Demak, berilgan nuqtada urinma mavjud. (1) formuladan foydalanib, urinma tenglamasini yozamiz:

$$z-3=f'_x(1,4)(x-1)+f'_y(1,4)(y-4).$$

$f'_x(1,4)=-\frac{1}{3},\ f'_y(1,4)=-\frac{4}{3}$ ekanligini hisobga olib, so'ngi tenglikni quyidagicha yozamiz: $z-3=-\frac{1}{3}(x-1)-\frac{4}{3}(y-4)$, bu tenglamani soddalashtirib, quyidagini hosil qilamiz: $x+4y+3z-26=0$.

Urinma tekislik tushunchasidan foydalanib, to'la differensial tushunchasiga geometrik talqin berish mumkin.

Aytaylik, $z=f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda funksiyaning shu nuqtadagi differensiali $dz=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$ bo'ladi. $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$ ekanligini e'tiborga olsak, dz uchun quyidagi ifodani yozish mumkin:

$$dz=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) \qquad (3)$$

(1) va (3) ni solishtirib, quyidagini olamiz: $dz=Z-z_0$.

Shunday qilib, $z=f(x,y)$ funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi to'la differensiali geometrik nuqtai nazardan $z=f(x,y)$ tenglama bilan berilganS sirtning $M_0(x_0,y_0, f(x_0,y_0))$ nuqtasida o'tkazilgan urinmasi NL applikatasining (x_0,y_0) nuqtadan $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ nuqtaga o'tgandagi LM orttirmasiga teng (6-rasm).

4-§. Murakkab funksiyaning hosilasi

Bir o'zgaruvchili funksiyalarni o'rganganda murakkab funksiya hosilasi bilan tanishganmiz va quyidagi muhim formula isbotlangan edi: $u'_t=u'_x\cdot x'_t$, bu yerda $u=f(x)$, $x=\varphi(t)$. Bir o'zgaruvchili funksiyalarni differensiallash deyarli shu formulaga asoslangan. Bu formulani ko'p o'zgaruvchili murakkab funksiyalarga umumlastiramiz.

1. Aytaylik, $u=f(x,y)$ funksiya D sohada, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$funksiyalar T oraliqda berilib, ular yordamida T oraliqda $u=f(\varphi(t),\psi(t))$ murakkab funksiya aniqlangan bo'lsin. Shu funksiyaning t bo'yicha hosilasi mavjudligi haqidagi masalani o'rganamiz.

Teorema. Agar T oraliqdan olingan o'zgaruvchining t qiymatida $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$funksiyalarning $\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$, $\frac{dy}{dt}=\psi'(t)$ hosilalari mavjud, shu t ga mos (x,y) nuqtaning biror atrofida $u=f(x,y)$ funksiya differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda u=f(φ(t),ψ(t)) murakkab funksiyaning t nuqtada hosilasi mavjud va quyidagi formula o‘rinli bo‘ladi:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

Isbot. t o‘zgaruvchiga biror Δt≠0 orttirma (t+Δt∈T) beramiz, u holda x va y lar ham mos ravishda Δx va Δy orttirmalar oladi. Buning natijasida u=f(x,y) funksiya ham Δu orttirma oladi. u=f(x,y) funksiya (x,y) nuqtada differensiallanuvchi bo‘lganligi sababli uning orttirmasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y \qquad (2)$$

bu yerda Δx=Δφ(t) va Δy=Δψ(t) (x=φ(t), y=ψ(t) funksiyalarning Δt≠0 orttirmaga mos orttirmalari), α va β esa Δx→0 va Δy→0 da cheksiz kichiklar. (2) tenglikning ikkala tomonini Δt ga bo‘lib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\beta\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}. \qquad (3)$$

Endi Δt→0 bo‘lsin. $\frac{\partial u}{\partial x}$ va $\frac{\partial u}{\partial y}$ kattaliklar t ning tayin qiymatida o‘zgarmas kattaliklar bo‘lib, Δt ga bog‘liq emas. Shu sababli Δt→0 da limitga o‘tganda doimiy ko‘paytiruvchi deb qarash mumkin. $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ va $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ nisbatlarning Δt→0 da limiti mavjudligi x=φ(t), y=ψ(t) funksiyalarning hosilalari mavjudligi bilan ta’minlanadi. Bu hosilalarning mavjudligidan x=φ(t), y=ψ(t) funksiyalarning t nuqtada uzluksizligi, ya’ni Δt→0 da Δx→0 va Δy→0, demak α→0, β→0 ekanligi kelib chiqadi. Bundan (3) tenglikning o‘ng tomonidagi har bir qo‘shiluvchining Δt→0 da limiti mavjudligi, demak $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ nisbatning Δt→0 da $\frac{du}{dt}$ limiti mavjudligi kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$\frac{du}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\beta\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

1-misol. Agar $u=x^2+xy+y^2$, $x=e^{2t}$, $y=\cos 3t$ bo‘lsa, $\frac{du}{dt}$ ni toping.

Yechish. x va y funksiyalar t ning barcha qiymatlarida hosilaga ega: $\frac{dx}{dt}=2e^{2t}$, $\frac{dy}{dt}=-3\sin 3t$. $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x+2y$ xususiy hosilalar ixtiyoriy (x,y) nuqtada mavjud va uzluksiz. Demak, (1) formuladan foydalanishimiz mumkin. U holda

$$\frac{du}{dt}=2(2x+y)e^{2t}-3(x+2y)\sin 3t=2(2e^{2t}+\cos 3t)-3(e^{2t}+2\cos 3t)\sin 3t.$$

Izoh. (1) formula $u'_t=u'_x\cdot x'_t$ formulaning umumlashmasi ekanligi ravshan. $u'_t=u'_x\cdot x'_t$ formulani keltirib chiqarishda u'_x hosilaning mavjudligini talab qilish yetarli edi. Lekin (1) formula o‘rinli bo‘lishi uchun u'_x va u'_y hosilalarning mavjudligini talab qilish yetarli emas. Bunga ishonch hosil qilish uchun quyidagi misolni qaraymiz.

$$u=f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & agar\ \ x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & agar\ \ x^2+y^2=0\end{cases}\qquad (4)$$

funksiyaning barcha nuqtalarda, xususan (0,0) nuqtada ham xususiy hosilalari mavjud va $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$ ekanligini 2-§ da ko‘rgan edik.

f(x,y) ifodada quyidagicha yangi o‘zgaruvchi kiritamiz:

$$x=\varphi(t)=t,\quad y=\psi(t)=t \qquad (5)$$

U holda (4) va (5) formulalar yordamida u(t) murakkab funksiya aniqlanadi. (1) formulaga ko‘ra uning uning t=0 nuqtadagi hosilasi $u'_t=u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t=0$ bo‘ladi.

Ammo, (4) va (5) formulalardan $u=\frac{|t|}{\sqrt{2}}$ ekanligi, bundan t=0 da u'_t mavjud emasligi kelib chiqadi.

Demak, berilgan funksiyaning (0,0) nuqtada xususiy hosilalari mavjud bo‘lsa ham, (1) formulani bu funksiyaga t=0 nuqtada qo‘llab bo‘lmaydi.

2. Endi umumiyroq holni qaraymiz. Aytaylik u=f(x,y) funksiya biror D sohada va x hamda y argumentlar o‘z navbatida ko‘p o‘zgaruvchilarning, masalan ikki o‘zgaruvchining funksiyalari bo‘lsin:

$$x=\varphi(t,\tau),\quad y=\psi(t,\tau), \qquad (6)$$

bunda t va τo‘zgaruvchilar shunday D_1 sohada o‘zgaradiki, ularga mos x va y D sohaga tegishli bo‘ladi. Bu holda u D_1 sohada t va τo‘zgaruvchilarning murakkab funksiyasi bo‘ladi: $u=f\left(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)\right)$. Shu funksiyaning t va τo‘zgaruvchilar bo‘yicha xususiy hosilalari mavjud bo‘lish shartlarini hamda hisoblash formulalarini aniqlaymiz.

Berilgan (t,τ) nuqtada (6) funksiyalar $\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial x}{\partial \tau},\frac{\partial y}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial \tau}$ xususiy hosilalarga ega va (t,τ) nuqtaga mos (x,y) nuqtaning biror atrofida u=f(x,y) funksiya differensiyallanuvchi deb faraz qilaylik. U holda bu masalani hal etish uchun (1) formuladan foydalanishimiz mumkin. Haqiqatan ham, xususiy hosilani, masalan $\frac{\partial u}{\partial t}$ni hisoblash uchun τ ni o‘zgarmas deb qarashimiz zarur. U holda (5) ga ko‘ra x va y o‘zgaruvchilar faqat bitta t o‘zgaruvchining funksiyalari bo‘ladi va masala u dan t bo‘yicha hosila topishga, ya’ni 1-punktdagi masalaga keltiriladi. Yuqorida aytilgan farazlarda (t,τ) nuqtada $\frac{\partial u}{\partial t}$ hosila mavjud va (1) formula yordamida hisoblash mumkin, ammo bu yerda $\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}$ o‘rniga $\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t}$ xususiy hosilalarni yozish kerak. Demak,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}. \qquad (7)$$

Shunga o‘xshash τ bo‘yicha xususiy hosila hisoblanadi:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau}. \qquad (8)$$

Shunday qilib, quyidagi qoidao‘rinli: $u=f\left(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)\right)$ murakkab funksiyaning xususiy hosilasi berilgan funksiyaning oraliq o‘zgaruvchilar (x va y) bo‘yicha xususiy hosilalari va shu o‘zgaruvchilarning mos (t va τ) o‘zgaruvchilar bo‘yicha xususiy hosilalari ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng.

Bu qoyda ixtiyoriy chekli sondagi oraliq o‘zgaruvchili murakkab funksiyalar uchun ham tabiiy ravishda umumlashtiriladi. Masalan, agar $F(\xi,\eta,\tau)$ funksiya $u=f(x,y,z)$, bu yerda $x=x(\xi,\eta,\tau),\ y=y(\xi,\eta,\tau),\ z=z(\xi,\eta,\tau)$ munosabatlar bilan berilgan bo‘lsa, u holda bularga mos shartlarda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi},$$
$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \tau}.$$

2-misol. $u=\sqrt{x^2+y^2}$, bu yerda $x=\varphi(t,\tau)=t\cos\tau,\ y=\psi(t,\tau)=\tau\sin t$ bo'lgan murakkab funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

Yechish. $\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)$ funksiyalarning ixtiyoriy (t,τ) nuqtada xususiy hosilalari mavjud: $\frac{\partial x}{\partial t}=\cos\tau,\ \frac{\partial x}{\partial \tau}=-t\sin\tau,\ \frac{\partial y}{\partial t}=\tau\cos t,\ \frac{\partial y}{\partial \tau}=\sin t$.

$u=\sqrt{x^2+y^2}$ funksiyaning xususiy hosilalari $x^2+y^2\neq 0$ bo'lgan barcha nuqtalarda mavjud va uzluksiz: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(7) va (8) formulalardan foydalanib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\tau+\frac{y\tau}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos t=\frac{t\cos^2\tau+\tau^2\cos t\sin t}{\sqrt{t^2\cos^2\tau+\tau^2\sin^2 t}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{-tx}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sin\tau+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sin t=\frac{\tau\sin^2 t-t^2\cos\tau\sin\tau}{\sqrt{t^2\cos^2\tau+\tau^2\sin^2 t}}.$$

5-§. To'la differensial formasining invariantligi

Aytaylik, $u=f(x,y)$, bu yerda

$$x=\varphi(t,\tau),\ y=\psi(t,\tau) \qquad (1)$$

munosabatlar bilan t va τ erkli o'zgaruvchilarning u murakkab funksiyasi berilgan bo'lsin. $x=\varphi(t,\tau),\ y=\psi(t,\tau)$ funksiyalar (t,τ) nuqtada t va τo'zgaruvchilar bo'yicha uzluksiz xususiy hosilalarga ega, shuningdek (x,y) nuqtaning biror atrofida $\frac{\partial u}{\partial x}$ va $\frac{\partial u}{\partial y}$ xususiy hosilalar ham mavjud va (x,y) nuqtada uzluksiz deb faraz qilaylik. Bu shartlarda $u=f(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau))$ murakkab funksiya (t,τ) nuqtada xususiy hosilalarga ega:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t},\quad \frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau} \qquad (2)$$

(2) formulalardan $\frac{\partial u}{\partial t}$ va $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ xususiy hosilalar (t,τ) nuqtada uzluksizligi, demak $u = f(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau))$ funksiyaning shu nuqtada to'la differensiali mavjudligi kelib chiqadi. Bu to'la differensial quyidagiga teng:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial \tau}d\tau. \qquad (3)$$

(3) formulada $\frac{\partial u}{\partial t}$ va $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ o'rniga ularning (2) dagi ifodalarini qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)d\tau.$$

Qavslarni ochib, qo'shiluvchilarni quyidagicha quruhlaymiz:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}dt + \cdot\frac{\partial x}{\partial \tau}d\tau\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial \tau}d\tau\right) \qquad (4)$$

Shartga ko'ra $x = \varphi(t,\tau),\ y = \psi(t,\tau)$ funksiyalar (t,τ) nuqtada uzluksiz xususiy hosilalarga ega, u holda x va y funksiyalarning shu nuqtada to'la differensiallari bor: $dx = \frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial x}{\partial \tau}d\tau, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial \tau}d\tau$.
Buni e'tiborga olsak, (4) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \qquad (5)$$

Demak, (1) murakkab funksiyaning to'la differensiali aytilgan shartlarda mavjud va (5) formula bilan ifodalanadi. Ammo x va y erkli o'zgaruvchi bo'lgan holda ham u=f(x,y) funksiyaning to'la differensiali aynan shunday ifodaga ega. Ya'ni, bir o'zgaruvchili funksiya holidagi kabi ikki o'zgaruvchili funksiya holida ham to'la differensial formasining invariantligi xossasi o'rinli ekan.Shunday qilib, biz quyidagi teoremani isbotladik.

Teorema. u=f(x,y) funksiyaning to'la differensiali x va y erkli o'zgaruvchi bo'lganda ham, yoki birnechta erkli o'zgaruvchilarning funksiyalari bo'lganda ham (bu funksiyalar uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsa) aynan bitta formula bilan ifodalanadi.

To'la differensial formasining invariantligi xossasiga asoslanib, differensiallash qoidalarini isbotlash mumkin.

Natija. Agar u va v qandaydir o‘zgaruvchilarning differensiallanuvchi funksiyalari bo‘lsa, u holda quyidagi formulalar o‘rinli bo‘ladi:

$$1)\ d(u\pm v)=du\pm dv;\ 2)\ d(uv)=vdu+udv;\ 3)\ d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}\ (v\neq 0)\quad (6)$$

Isbot. 2) formulaning isbotini keltiramiz. Qolganlari shunga o‘xshash isbotlanadi. Ushbu z=uv funksiyani qaraymiz. Dastlab u va v argumentlarni erkli o‘zgaruvchilar deb qaraymiz. U holda $\frac{\partial z}{\partial u}=v,\ \frac{\partial z}{\partial v}=u$ bo‘lib, qaralayotgan funksiyaning to‘la differensiali $dz=vdu+udv$ bo‘ladi.

To‘la differensial formasining invariantligi xossasiga ko‘ra bu formula u va v lar birnechta o‘zgaruvchlarning differensiallanuvchi funksiyalari bo‘lganda ham o‘rinli bo‘ladi.

Isbotlangan teoremadan quyidagi tasdiqning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi: agar u ixtiyoriy (chekli) sondagi o‘zgaruvchilarning differensiallanuvchi funksiyasi va f(u) differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda

$$df(u)=f'(u)du \qquad (7)$$

bo‘ladi.

Misol. $u=\ln(2+x^3+y^4)$ funksiyaning to‘la differensialini va xususiy hosilalarini toping.

Yechish. (7) va (6) formulaning birinchisidan foydalanib, quyidagini topamiz:

$$du=\frac{1}{2+x^3+y^4}d(2+x^3+y^4)=\frac{3x^2dx+4y^3dy}{2+x^3+y^4}.$$

Bundan $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3x^2}{2+x^3+y^4},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{4y^3}{2+x^3+y^4}$ ekanligi ravshan.

6-§. Yuqori tartibli xususiy hosilalar

Aytaylik u=f(x,y) funksiya biror D sohada o‘zgaruvchilarining biri, masalan, x bo‘yicha xususiy hosilaga ega bo‘lsin. U holda $f'_x(x,y)$ ham D sohada x va y o‘zgaruvchilarning funksiyasi bo‘ladi. Bu funksiya aniqlanish sohasining biror $D_1\subset D$ qismida x yoki y o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy hosilaga ega bo‘lishi mumkin. Shu tarzda hosil qilingan xususiy hosilalar u=f(x,y) funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari yoki ikkinchi xususiy hosilalari deyiladi. $f'_x(x,y)$ esa birinchi tartibli xususiy hosila yoki birinchi xususiy hosila deb ataladi.

u=f(x,y) funksiyaning x bo'yicha ikkinchi tartibli xususiy hosilasi $f''_{x^2}(x,y)$, yoki u''_{x^2}, yoki $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, yoki $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ kabi belgilanadi. Shunday qilib, ta'rif bo'yicha

$$f''_{x^2}(x,y)=u''_{x^2}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(f'_x(x,y)\right)'_x.$$

$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$ va $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ belgilashlar simvolik yozuv bo'lib, ularni kasrlar kabi qarash mumkin emas. Ba'zi hollarda maxrajdagi ∂x^2 simvol shartli ravishda $\partial x \partial x$ simvol bilan, shunga o'xshash x^2 indeks xx yozuv bilan almashtiriladi.

f(x,y) funksiyaning (ya'ni $f'_x(x,y)$ funksiyaning) y bo'yicha ikkinchi tartibli xususiy hosilasi $f''_{xy}(x,y)$, yoki u''_{xy}, yoki $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$, yoki $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ kabi belgilanadi. Shunday qilib, ta'rif bo'yicha

$$f''_{xy}(x,y)=u''_{xy}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\left(f'_x(x,y)\right)'_y.$$

Bu yozuvlarda x va y harflarning ∂x, ∂y simvollarda yozilish tartibi differensiallash tartibiga mos keladi.

Shunga o'xshash ketma-ket uchinchi, to'rtinchi va n-tartibli xususiy hosilalar topiladi va yoziladi. Masalan, ushbu yozuvlarning har biri f(x,y) funksiyaning uchinchi tartibli xususiy hosilasini belgilaydi:

$$f'''_{xyx}(x,y)=u'''_{xyx}=\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y \partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x}=\left(f''_{xy}\right)'_x.$$

Bu yerda f(x,y) funksiya avval x bo'yicha, keyin y bo'yicha, so'ngra yana x bo'yicha differensiallanadi.

Uch va undan ortiq o'zgaruvchili funksiyalarning yuqori tartibli xususiy hosilalari ikki o'zgaruvchili funksiyalarning yuqori tartibli xususiy hosilalari kabi aniqlanadi va belgilanadi.

Berilgan funksiyalarning n-tartibli (n>1) xususiy hosilasi uning yuqori tartibli xususiy hosilasi deyiladi.

Turli o‘zgaruvchilar bo‘yicha hisoblangan yuqori tartibli xususiy hosilalar aralash xususiy hosilalar deyiladi. Masalan, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}, \frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}$ va b. aralash xususiy hosilalarga misol bo‘ladi.

Misol sifatida $u = f(x,y,z) = 6x^2y^2 - 2y^2z + 6xz$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini topamiz. Dastlab birinchi tartibli xususiy hosilalarini hisoblaymiz: $\frac{\partial u}{\partial x} = 12xy^2 + 6z$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 12x^2y - 4yz$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -2y^2 + 6x$. Endi ketma-ket ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini hisoblaymiz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12y^2, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 24xy, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = 6;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = 24xy, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12x^2 - 4z, \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = -4y;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} = 6, \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} = -4y, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Bunda quyidagilarni ko‘rish qiyin emas: $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}$, ya’ni turli tartibda, lekin bir xil o‘zgaruvchilar bo‘yicha olingan aralash hosilalar teng. Quyidagi teorema aralash xususiy hosilalarning differensiallash tartibiga bog‘liq bo‘lmasligining yetarli shartini beradi.

Teorema. Agar f(x,y) funksiya (x_0, y_0) nuqtaning biror atrofida $f''_{xy}(x,y)$ va $f''_{yx}(x,y)$ aralash xususiy hosilalarga ega va bu hosilalar (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda ular bu nuqtada teng bo‘ladi:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Natija. Agar $f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$ xususiy hosilalar biror D to‘plamda uzluksiz bo‘lsa, u holda ular bu to‘plamda aynan teng bo‘ladi.

Agar f(x,y) funksiya (x_0, y_0) nuqtaning biror atrofida yuqori tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lsa, bu hosilalarga nisbatan yuqoridagi teoremani takror qo‘llash mumkin. Masalan, $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ larga teoremani tatbiq etib, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$f'''_{xxy}(x,y)=f'''_{xyx}(x,y),\ f'''_{yxy}(x,y)=f'''_{yyx}(x,y), \qquad (6)$$

$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$f'''_{xyx}(x,y)=f'''_{yxx}(x,y),\ \ f'''_{xyy}(x,y)=f'''_{yxy}(x,y) \qquad (7)$$

bo'ladi. (6) va (7) dan quyidagini topamiz:

$$f'''_{xxy}(x,y)=f'''_{xyx}(x,y)=f'''_{xxy}(x,y),\ f'''_{yxy}(x,y)=f'''_{yyx}(x,y)=f'''_{xyy}(x,y).$$

Bu aralash hosilalarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2\partial y}=f'''_{xxy}(x,y)=f'''_{xyx}(x,y)=f'''_{xxy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\partial y^2}=f'''_{yxy}(x,y)=f'''_{yyx}(x,y)=f'''_{xyy}(x,y)$$

Demak, aralash hosilalarning differensiallash tartibiga bog'liq bo'lmaslik sharti bajarilsa, bir-biridan farqli bo'lgan yuqori tartibli hosilalar soni kamayadi va ularni ihcham ko'rinishda yozish imkoni tug'iladi.

Yuqorida isbotlangan teoremani m (m>2) o'zgaruvchili funksiya va istalgan tartibli aralash hosilalar uchun umumlastirish mumkin.

7-§. Yuqori tartibli differensiallar

Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli differensiallari bir o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli differensiallari kabi aniqlanadi. Yozuvni ihchamlashtirish maqsadida bu masalani ikki o'zgaruvchili funksiya uchun bayon qilamiz.

Aytaylik, u=f(x,y) funksiya D_1 sohada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda shu sohada uning to'la differensiali mavjud

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\ , \qquad (1)$$

bu yerda $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$ x va y erkli o'zgaruvchilarning ixtiyoriy orttirmalari. Bu Δx va Δy orttirmalarni tayinlab olamiz, u holda du differensial faqat x va y o'zgaruvchilarning D_1 sohada aniqlangan funksiyasi bo'ladi.

Biror D_2 ($D_2\subset D_1$) sohadau=f(x,y) funksiya uzluksiz ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lsin. U holda $\frac{\partial u}{\partial x}$ va $\frac{\partial u}{\partial y}$ uzluksiz birinchi tartibli xususiy hosilalarga ega va D_2 sohada differensiallanuvchibo'ladi. Demak, du funksiya ham D_2 sohada differensiallanuvchibo‘ladi. Bu holda du differensialning to‘la differensiali mavjud. Bu differensial u=f(x,y) funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deyiladi va d^2u yoki $d^2f(x,y)$ kabi belgilanadi. Shunga bog‘liq holda du differensialni birinchi tartibli differensial deb atashtabiiy. Shunday qilib, aniqlashimiz bo‘yicha $d^2u=d(du)$.

Bunda d(du) ni hisoblaganda du ni hisolagandagi x va y erkli o‘zgaruvchilarning $dx=\Delta x$ va $dy=\Delta y$ orttirmalari olinadi.

Differensiallash qoidalaridan (4-§.) foydalanib, hamda dx va dy larning o‘zgarmas kattaliklar ekanligini hisobga olgan holda d^2u uchun ifoda topamiz:

$$d^2u=d(du)=d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)=d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)+d\left(\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)=$$

$$=dxd\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+dyd\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ va $\frac{\partial u}{\partial y}$ funksiyalarga (1) formulani tatbiq etamiz:

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dy,$$

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy.$$

Bu olingan natijalarni d^2u ifodasiga qo‘yib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2.$$

Aralash hosilalarning uzluksizligidan $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ va $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ lar teng. Shu sababli

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2. \qquad (2)$$

Agar, biror D_3 ($D_3\subset D_2$) sohadau=f(x,y) funksiya uzluksiz uchinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo‘lsa, u holda tayinlangan dx va dy larda d^2u differensial x va y ning funksiasi sifatida D_3 sohada differensialga ega bo‘ladi. Bu differensial u=f(x,y) funksiyaning uchinchi tartibli differensiali deyiladi va d^3u kabi belgilanadi.

(2) dan d^3u uchun quyidagi ifodani keltirib chiqarish murakkablik tug'dirmaydi:

$$d^3u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3 \qquad (3)$$

Shunga o'xshash, to'rtinchi, beshinchi va n-tartibli differensiallar kiritiladi. Umuman olganda, biror sohada u=f(x,y) funksiya uzluksiz barcha-birinchi, ikkinchi, va xokaza n-tartibli (n>1) - xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda d^nu n-tartibli differensial tushunchasini quyidagicha induktiv usulda kiritish mumkin: $d^nu=d(d^{n-1}u)$.

(2) va (3) formulalarning o'ng tomonlari ikki kattalik yig'indisining kvadrati va kubining yoyilmasini eslatadi. Matematik induksiya metodi yordamida ixtiyoriy tartibli differensial uchun quyidagi formula o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin:

$$d^nu = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}dx^n + n\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}dy^2 + \ldots +$$

$$+n\frac{\partial^n u}{\partial x\partial y^{n-1}}dxdy^{n-1} + \frac{\partial^n u}{\partial y^n}dy^n.$$

Yuqori tartibli differensiallarni ixcham simvolik ko'rinishda yozish uchun quyidagi belgilashni kiritamiz (birinchi differensial ifodasida "u harfini qavsdan tashqariga chiqaramiz"): $du = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)u$.

Endi, agar d^2u ning ifodasida "u harfini qavsdan tashqariga chiqarsak", u holda qavs ichida qolgan ifoda formal ravishda $\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)$ qavsning kvadrati yoyilmasiga teng bo'ladi. Buni e'tiborga olgan holda ikkinchi differensialni quyidagicha simvolik yozamiz:

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 u. \qquad (4)$$

Shunga o'xshash n-tartibli differensialni ham simvolik yozish mumkin:

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u. \qquad (5)$$

(5) formulani ixtiyoriy sondagi erkli o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham umumlashtirish mumkin.

Agar $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ m o'zgaruvchili funksiya uzluksiz barcha-birinchi, ikkinchi, va xokaza n-tartibli (n>1) - xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$d^n u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n u$$

formula o'rinli bo'ladi.

Misol. $u=x^2y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensialini toping.

Yechish. Dastlab birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz: $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^3$, $\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y^2$. Keyin esa ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2y^3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=6xy^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6x^2y$. Bu hosilalarning barchasi tekislikda uzluksiz. Demak, tekislikda d^2u mavjud. Uni (6) formuladan foydalanib topamiz:

$$d^2u=2y^3dx^2+12xy^2dxdy+6x^2ydy^2.$$

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning yuqori tartibli differensiallarini, birinchi tartibli differensialga o'xshash, differensiallash qoidalaridan foydalanib hisoblash mumkin. Bunda ketma-ket birinchi, ikkinchi va h. k-tartibli differensiallar hisoblanadi. Shu jarayonda barcha k-tartibli hosilalar ham topiladi. Shu usulda yuqoridagi 1-misolni yechaylik. Dastlab differensiallash qoidalaridan foydalanib, birinchi tartibli differensialni hisoblaymiz:

$$du=d(x^2y^3)=y^3d(x^2)+x^2d(y^3)=2xy^3dx+3x^2y^2dy=xy^2(2ydx+3xdy).$$

d^2u ni topish uchun du ni differensiallaymiz, bunda dx va dy ni o'zgarmas ko'paytuvchilar sifatida qaralishini va uni differensial belgisi oldiga chiqarish mumkinligi hisobga olamiz. Natijada

$$d^2u=d(xy^2(2ydx+3xdy))=d(xy^2)(2ydx+3xdy)+xy^2d(2ydx+3xdy)=$$
$$=(y^2dx+2xydy)(2ydx+3xdy)+xy^2(2dydx+3dxdy)=$$
$$=2y^3dx^2+12xy^2dxdy+6x^2ydy^2.$$

d^2u ning ifodasi bo'yicha $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2y^3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=6xy^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6x^2y$ ekanligini topamiz.

u=f(x,y) funksiyaning yuqori tartibli differensiallari haqidagi masalani x va y erkli o‘zgaruvchi bo‘lgan holda o‘rgandik.

Endi, aytaylik, u=f(x,y) funksiyaning argumentlari erkli o‘zgaruvchilar emas, balki biror ko‘p ozgaruvchilarning, masalan ikki (t va τ) o‘zgaruvchining funksiyalari bo‘lsin: $x=\varphi(t,\tau)$, $y=\psi(t,\tau)$, bunda bu funksiyalarning x va y qiymatlari u=f(x,y) funksiyaning aniqlanish sohasida yotadi deb faraz qilamiz. U holda $u=f(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau))$ murakkab funksiya mavjud bo‘ladi. Faraz qilaylik, bu funksiyaning du, d^2u, d^3u va hokazo differensiallari bor bo‘lsin. Birinchi differensial formasining invariantlik xossasiga ko‘ra $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ deb yozish mumkin, lekin bu formulada dx va dy ko‘paytuvchilar erkli o‘zgaruvchilarning differensiali emas, balki funksiyalarning differensiali bo‘lib, t va τ ga bog‘liq bo‘ladi va umuman olganda o‘zgarmas bo‘lmasligi mumkin.

Bularni e’tiborga olib, qaralayotgan murakkab funksiyaning ikkinchi tartibli differensialini topamiz:

$$d^2u=d(du)=d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)=dxd\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}d(dx)+$$

$$+dyd\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}d(dy)=dx\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dy\right)+\frac{\partial u}{\partial x}d^2x+$$

$$+dy\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right)+\frac{\partial u}{\partial y}d^2y=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x}d^2x+\frac{\partial u}{\partial y}d^2y,\text{ yoki}$$

$$d^2u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2+\frac{\partial u}{\partial x}d^2x+\frac{\partial u}{\partial y}d^2y \qquad (6)$$

Olingan (6) formula (2) formulaning umumlashmasi bo‘lib, undan sezilarli farq qiladi. Agar (6) da dx=const, dy=const bo‘lsa, $d^2x=0$, $d^2y=0$ bo‘lib, (2) formula hosil bo‘ladi.

Shunday qilib, ikkinchi tartibli differensial, demak boshqa yuqori tartibli differensiallar uchun ham umumiy holda invariantlik xossasi o‘rinli emas.

Ammo quyidagi tasdiq o‘rinli.

Agar x va y oraliq o‘zgaruvchilar t va τ erkli
chiziqli funksiyalari, ya’ni $x=a_1t+b_1\tau+c_1,\ y=a_2t+b_2$
c_1, c_2 - o‘zgarmas sonlar) bo‘lsa, u holda
differensiallar uchun invariantlik xossasi o‘rinli bo‘l

Haqiqatan ham, bu holda $dx=a_1dt+b_1d\tau,\ dy=a_2$
va dτ doimiy bo‘lganda dx va dy lar ham doimiy b
va d^2y, va umuman x va y ning yuqori tartibli dif
tengligi kelib chiqadi. Shu sababli qaralayotgan
funksiyaning barcha differensiallari ifodalari erl
funksiyasining differensiallari ifodalariga teng bo‘
dx va dy lar Δx va Δy larga teng bo‘ladi, lekin b
ixtiyoriy emas, balki Δt va Δτ orttirmalarga bog‘liq

Shunday qilib, (5) simvolik formula x va y e
bo‘lganda ham, erkli o‘zgaruvchilarning chiziqli fu
ham o‘rinli bo‘ladi.

8-§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya uchun Te

Bir o‘zgaruvchili φ(t) funksiya uchun quyidag
o‘rinli edi:

$$\Delta\varphi(t_0)=d\varphi(t_0)+\frac{1}{2!}d^2\varphi(t_0)+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}\varphi(t_0)+\frac{1}{n!}d^n\varphi(\qquad (1)$$

Bu formulani ko‘p o‘zgaruvchili funksiya b
umumlashtiramiz. Yozuvlarni ixchamlashtirish uc
ikki o‘zgaruvchili funksiyani qaraymiz.

Aytaylik, f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtaning biro
ikkinchi va hokazo n-tartibli uzluksiz xususiy hosil
x_0 va y_0 larga shunday h va k orttirmalar beramizki,
qaralayotgan atrofga tegishli bo‘lsin.

x va y o‘zgaruvchilar bilan quyidagi formulala
yangi t o‘zgaruvchi kiritamiz:

$$x=x_0+ht,\quad y=y_0+kt,$$

bu yerda $t\in[0,1]$. U holda f(x,y) quyidagi ko‘rinishd

$$f(x,y)=f(x_0+ht,y_0+kt).$$

x_0, y_0, h va k doimiy kattaliklar bo'lganligi sababli f(x,y) t ga bog'liq murakkab funksiya bo'ladi. Uni φ(t) orqali belgilaymiz: $\varphi(t)=f(x_0+ht, y_0+kt)$.

f(x,y) funksiyaga qo'yilgan shartlardan φ(t) funksiya [0,1] segmentda birinchi, ikkinchi,..., n-tartibli hosilalarga ega bo'ladi. Demak, shu segmentda (1) Teylor formulasini tatbiq etish mumkin. Bu formula bo'yicha quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\Delta\varphi(0)=d\varphi(0)+\frac{1}{2!}d^2\varphi(0)+...+\frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}\varphi(0)+\frac{1}{n!}d^n\varphi(\theta),\ 0<\theta<1$$

(3)

Endi $\Delta\varphi(0)$ orttirmani, $d^p\varphi(0)$ $(p=1,2,...,n-1)$ va $d^n\varphi(\theta)$ differensiallarni f(x,y) funksiya bilan ifodalaymiz.

Ravshanki, $\varphi(0)=f(x_0,y_0)$, $\varphi(1)=f(x_0+h,y_0+k)$, bundan

$$\Delta\varphi(0)=\varphi(1)-\varphi(0)=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\Delta f(x_0,y_0). \qquad (4)$$

$\varphi(t)=f(x,y)$ murakkab funksiyada x va y oraliq o'zgaruvchilar t ga nisbatan chiziqli funksiyalar, shu sababli $d^p\varphi(0)$ $(p=1,2,...,n-1)$ differensiallarni oldingi paragrafdagi (5) simvolik formula yordamida hisoblash mumkin. Shunday qilib,

$$d^p\varphi(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^p f(x,y).$$

t=0 da $x=x_0$, $y=y_0$, $t=\theta$ da esa $x=x_0+\theta t,\ y=y_0+\theta t$ ekanligini hisobga olsak,

$$d^p\varphi(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^p f(x_0,y_0), \quad (p=1,2,...n-1), \qquad (5)$$

$$d^n\varphi(\theta)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x_0+\theta h,y_0+\theta k) \qquad (6)$$

bo'ladi.

(4), (5), (6) tengliklardan foydalanib, (3) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$\Delta f(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x_0,y_0)+...+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n-1} f(x_0,y_0)+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x_0+\theta h,y_0+\theta k) \quad (7)$$

bu yerda $0<\theta<1$, yoki

$$\Delta f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+...+$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f(x_0,y_0)+\frac{1}{n!}d^nf(x_0+\theta h,y_0+\theta k). \qquad (8)$$

Bu tenglik ikki o'zgaruvchili funksiya uchun Teylor formulasini ifodalaydi.

$R_n=\frac{1}{n!}d^nf(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$ qo'shiluvchi Teylor formulasining qoldiq hadi (Lagranj formasidagi) deyiladi.

(8) ko'rinishdagi Teylor formulasi f(x,y) funksiyaning $\Delta f(x_0,y_0)$ orttirmasini uning turli tartibli differensiallari orqali ifodasini beradi va bu orttirmani taqribiy hisoblashga tatbiq etish imkonini beradi. (8) da qoldiq hadini olib tashlab, quyidagi taqribiy formulaga ega bo'lamiz:

$$\Delta f(x_0,y_0)\approx df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+...++\frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f(x_0,y_0) \qquad (9)$$

(9) formula bo'yicha hisoblashda yol qoyilgan xatolik, qoldiq hadning absolut qiymatiga teng bo'ladi.

Endi, Teylor formulasining boshqa shakllarini keltiramiz.

(2) dan dx=hdt, dy=kdt bo'ladi. t erkli o'zgaruvchi va $dt=\Delta t$, ammo $\Delta t=1-0=1$. Shu sababli (7) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+$$
$$\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)+...++\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}f(x_0,y_0)+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(x_0+\theta h,y_0+\theta k) \qquad (10)$$

(10) da $x_0+h=x$, $y_0+k=y$ deb belgilab, quyidagini topamiz:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^if(x_0,y_0)+$$
$$+\frac{1}{n!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)) \qquad (11)$$

(7) va (11) formulalar uch va undan ortiq o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham umumlashtirilishi mumkin.

(11) formulada $x_0=0$, $y_0=0$ deb olsak, quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$f(x,y)=f(0,0)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(0,0)+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(\theta x,\theta y).$$

Bu formula Makloren formulasi deyiladi.

1-izoh. Agar (10) formulada n=1 deb olsak, ikki o'zgaruvchili funksiya uchun Lagranj formulasining umumlashmasini hosil qilamiz:

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=$$
$$=hf'_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+kf'_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k).\quad (0<\theta<1)\qquad (12)$$

2-izoh. Agar f(x,y) funksiya bog'lamli D sohada uzluksiz, sohaning har bir nuqtasida birinchi tartibli xususiy hosilalari mavjud va nolga teng bo'lsa, u holda bu funksiya D sohada o'zgarmas funksiya bo'ladi.

Bu tasdiqning isbotini [T.Azlarov va X.Mansurov Matematik analiz. 2-q. T.1995. 95-96bb.]dan qarang.

Bu tasdiqdan quyidagi natija kelib chiqadi:

Agar f(x,y) funksiyaning to'la differensiali biror bir bog'lamli D sohada nolga teng bo'lsa, u holda bu funksiya D sohada o'zgarmas funksiya bo'ladi.

III-bobga doir mashq va masalalar

Berilgan funksiyalarning xususiy hosilalarini toping (66-77; 80-85).

66. $z=x^2-3y^2+5xy$;
67. $z=x^3+6xy^2-4y^3-2xy$;
68. $z=(5x^2y-y^3+7)^3$;
69. $z=\sqrt{x^2-y^2}$;
70. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$;
71. $z=\ln(x+\ln y)$;
72. $z=e^{x^2\sin y}$;
73. $z=ye^{-xy}$;
74. $z=arctg\dfrac{x}{y}$;
75. $z=\ln\arcsin(xy)$;
76. $z=y^x$;

77. $z = x^{y^2}$;

78. $f(x,y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiya uchun $f'_x\,(3,4)$, $f'_y\,(3,4)$ larni hisoblang;

79. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 + y^3}$ funksiya uchun $f'_x\,(1,1)$, $f'_y\,(1,1)$ larni hisoblang.

80. $u = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2 + 2xz}$;

81. $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

82. $u = e^{x(x^2+y^2+z^2)}$;

83. $u = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$;

84. $u = x^{\frac{y}{z}}$;

85. $u = x^{y^z}$;

86. $z = \ln(x^2 + y^2)$ funksiya uchun $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ tenglikning o'rinli ekanligini ko'rsating.

87. $z = arctg\dfrac{y}{x}$ funksiya uchun $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ tenglikning o'rinli ekanligini ko'rsating.

88. $u = (x-y)(y-z)(z-x)$ funksiya $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ tenglikni qanotlantirishini ko'rsating.

89. $u = x + \dfrac{x-y}{y-z}$ funksiya $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 1$ tenglikni qanotlantirishini ko'rsating.

Funksiyalarning to'la differensiallarini toping (90-101).

90. $z = x^2 y^3$;

91. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$;

92. $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$;

93. $z = xy - x^2y^3 + x^3y$;

94. $z = e^{y^2 - xy}$;

95. $z = \cos(xy)$;

96. $z = arctg\,(xy)$;

97. $z = \arcsin\frac{x}{y}$;

98. $u = x^2yz^4$;

99. $u = \ln\left(x^3 - y^3 + 2z^3\right)$;

100. $u = \frac{y}{xz}$;

101. $u = xy^z$;

Murakkab funksiyalarni differensiallang (102-113)

102. $z = e^{x-3y}$, $x = \sin t$, $y = t^2$. $\frac{dz}{dt}$ ni toping;

103. $z = \frac{y}{x}$ $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$. $\frac{dz}{dt}$ ni toping;

104. $z = \arcsin(x - y)$, $x = 4t^2$, $y = t^3$. $\frac{dz}{dt}$ ni toping;

105. $z = e^{x^2+y^2}$, $x = a\cos t$, $y = a\sin t$. $\frac{dz}{dt}$ ni toping;

106. $z = \ln\frac{x}{y}$, $x = tg^2 t$, $y = ctg^2 t$. $\frac{dz}{dt}$ ni toping;

107. $z = \ln\left(e^x + e^y\right)$, $y = x^2$. $\frac{dz}{dx}$ ni toping;

108. $z = \arcsin\frac{x}{y}$, $y = \sqrt{x^2 + 1}$. $\frac{dz}{dx}$ ni toping;

109. $z = x^2 + y^2$, $x = u + v$, $y = u - v$ $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ larni toping;

110. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$. $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ larni toping;

111. $z = x^2y - y^2x$, $x = u\cos v$, $y = u\sin v$. $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ larni toping;

112. $u = \sin(x - 3y - 2z)$, $x = 2t^3$, $y = t^2$, $z = -t^4$; $\frac{du}{dt}$ ni toping;

113. $u = tg\left(x^2 + 4y - z\right)$, $y = \sqrt{x}$, $z = -\frac{1}{x}$. $\frac{du}{dx}$ ni toping.

Quyidagi funksiyalarning ko'rsatilgan tartibli xususiy hosilalarni toping (114-123).

114. $z = x + y + \dfrac{xy}{x-y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

115. $z = xe^y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

116. $z = y \ln x, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

117. $z = \sqrt{2xy + y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

118. $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

119. $z = xe^{xy^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

120. $z = \ln(x + y)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$;

121. $z = \sin(xy)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$;

122. $z = e^{xy^2}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$;

123. $u = 3^{xyz}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$;

124. $z = e^x \cos y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ tenglikni o‘rinli ekanligini ko‘rsating.

125. $z = \ln(x^2 + y^2)$. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ tenglikni o‘rinli ekanligini ko‘rsating.

Quyidagi funksiyalarning ko‘rsatilgan tartibli differensiallarini toping (126-133).

126. $z = x + xy$, $d^2 z$;

127. $z = e^{x+y^2}$, $d^2 z$;

128. $z = \ln(x - y)$, $d^2 z$;

129. $z = \dfrac{x}{x+y}$, $d^2 z$;

130. $z = x\sin^2 y,\ d^2z$;

131. $u = x + y + xy,\quad d^3z$;

132. $z = e^{x+y},\ d^n z$;

133. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z,\ d^2z$.

Urinma tekislik va normal tenglamalarini yozing (134-137).

134. $z = xy,\ (2;1;2)$ nuqtada;

135. $z = x^2 + y^2,\ (1;1;2)$ nuqtada;

136. $z = \sin\frac{x}{y},\ (\pi;1;0)$ nuqtada;

137. $z = arctg\frac{y}{x},\ \left(1;1;\frac{\pi}{4}\right)$ nuqtada;

Quyidagi funksiyalar uchun Teylor formulasini yozing (birinchi va ikkinchi tartibli hosillar bilan cheklaning) (138-143).

138. $z = \frac{1}{x-y}$;

139. $z = \ln(x+y)$;

140. $z = e^{xy}$;

141. $z = \sin x \cdot \cos y$;

142. $z = arctg\frac{x}{y}$;

143. $z = e^x \cos y$.

IV BOB. OSHKORMAS FUNKSIYALAR. YO‘NALISH BO‘YICHA HOSILA

1-§. Bir o‘zgaruvchili oshkormas funksiyalar

Ta’rif. Aytaylik, F(x,y) funksiya biror D to‘plamda aniqlangan va (x,y)∈D bo‘ladigan x ning biror qiymatlari to‘plami E da shunday y=f(x) funksiya mavjud bo‘lib, ular birgalikda E to‘plamda

$$F(x,y)=0 \qquad (3)$$

tenglamani x ga nisbatan ayniyatga aylantirsin: F(x,f(x))≡0. U holda E to‘plamda y=f(x) funksiya (3) tenglama bilan oshkormas berilgan deyiladi yoki x ning y oshkormas funksiyasi (3) tenglama bilan aniqlangan deyiladi.

Masalan, $x^2+y^3-3=0$ tenglama bilan x ning barcha haqiqiy qiymatlarida $y=\sqrt[3]{3-x^2}$ funksiya oshkormas ko‘rinishda aniqlangan. Haqiqatan ham, $x^2+y^3-3=0$ tenglamada yo‘rniga shu funksiyani qo‘ysak, ayniyat hosil bo‘ladi:

$$x^2+(3-x^2)-3\equiv 0\,.$$

Oshkor, oshkormas funksiya deyilganda funksiyaning alohida xossasiga emas, balki uning berilish shakliga urg‘u beramiz. Oshkor funksiya y ga nisbatan yechilgan y=f(x) tenglama bilan, oshkormas funksiya y ga nisbatan yechilmagan F(x,y)=0 tenglama bilan beriladi. Har bir y=f(x) oshkor funksiya y-f(x)=0 tenglama bilan aniqlangan oshkormas funksiya ko‘rinishda berilishi mumkin. (3) tenglama bilan aniqlangan x ning y funksiyasini oshkor ko‘rinishda berish uchun (3) ni y ga nisbatan yechish zarur.

Ammo, oshkormas funksiyani aniqlaydigan har qanday tenglamani ham y ga nisbatan yechib bolavermaydi. Masalan, quyidagi y ning funksiyasini qaraylik:

$$x=\varphi(y)=y-\frac{1}{2}\sin y \quad (-\infty<y<+\infty)\,.$$

Bu yerda y ning barcha qiymatlarida $\frac{dx}{dy}=1-\frac{1}{2}\cos y>0$bo‘lganligi sababli$\varphi(y)$ funksiya (-∞;+∞) da o‘suvchi bo‘ladi. U holda teskari funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremaga ko‘ra $x=\varphi(y)$ funksiyaga teskari bo‘lgan $y=f(x)$ funksiya mavjud. Bu funksiya

$x-y-\frac{1}{2}\sin y=0$ tenglama bilan oshkormas ko'rinishda aniqlangan. Ammo, bu tenglamadan y ni x orqali elementar funksiyalar bilan ifodalab bo'lmaydi.

Ko'p hollarda (3) tenglamadan y ni oshkor ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa ham, uni oshkormas ko'rinishda o'rganish qulay bo'ladi. Shu sababli (3) tenglama y ni (x ni) x ning (y ning) oshkormas funksiyasi sifatida aniqlaydigan shartlarni bilish muhim hisoblanadi. Shuningdek, bunda oshkormas berilgan funksiyaning ba'zi xossalsrini aniqlash masalalari ham qaraladi.

Quyidagi teoremada (3) tenglama nuqtaning biror atrofida differensiallanuvchi oshkormas funksiyani aniqlashining yetarli sharti beriladi.

Teorema (differensiallanuvchi oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema). Aytaylik F(x,y) funksiya:

1) biror $\Pi=\{(x,y): x_0-a\le x\le x_0+a,\ y_0-b\le y\le y_0+b\}$ to'g'ri to'rtburchakda aniqlangan hamda uzluksiz F'_x va F'_y xususiy hosilalarga ega;

2) (x_0,y_0) nuqtada nolga teng: $F(x_0,y_0)=0$;

3) (x_0,y_0) nuqtada nolga teng bo'lmagan F'_y hosilaga egabo'lsin: $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

U holda $F(x,y)=0$ tenglama x_0 nuqtaning biror $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ $(0<\delta\le a)$ atrofida y=f(x) oshkormas funksiyani aniqlaydi, shuningdek $y_0=f(x_0)$ bo'ladi. Bu funksiya x_0 nuqtaning aytilgan atrofida uzluksiz y' hosilaga ega va

$$y'=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

o'rinli bo'ladi.

2-§. m o'zgaruvchili oshkormas funksiyalar

Aytaylik, $F(x_1,x_2,...,x_m,y)$ $m+1$ o'zgaruvchili funksiya R^{m+1} fazoning biror to'plamida aniqlangan va R^m fazoning to'plami E da shunday $y=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya mavjud bo'lib, y

$$F(x_1,x_2,...,x_m,y)=0 \qquad (1)$$

tenglamani $x_1, x_2, ..., x_m$ ga nisbatan ayniyatga aylantirsin:

$$F(x_1, x_2, ..., x_m, f((x_1, x_2, ..., x_m)) \equiv 0 \ (x_1, x_2, ..., x_m) \in E.$$

U holda E to'plamda $y = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiya (1) tenglama bilan oshkormas berilgan deyiladi yoki $x_1, x_2, ..., x_m$ o'zgaruvchilarning y oshkormas funksiyasi (1) tenglama bilan aniqlangan deyiladi.

Masalan, $z^3 - 2y^2 - x^2 - 3 = 0$ tenglama tekislikda $z = \sqrt[3]{x^2 + 2y^2 + 3}$ funksiyani oshkormas ko'rinishda aniqlaydi. Haqiqatan ham, agar berilgan tenglamada z o'rniga bu funksiyani qo'ysak, ayniyat hosil bo'ladi: $(2y^2 + x^2 + 3) - 2y^2 - x^2 - 3 \equiv 0$.

$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ tenglamax, y va z ning hech bir haqiqiy qiymatida yechimga ega emas, shu sababli u z ni x va y o'zgaruvchilarning oshkormas funksiya sifatida aniqlamaydi.

$x^2 + y^2 + z^2 = 0$ tenglamani faqat x=0, y=0, z=0 qiymatlar qanoatlantiradi. Shu sababli bu tenglama z o'zgaruvchini bitta nuqtadan tashkil topgan $E = \{(0,0)\}$ to'plamda x va y o'zgaruvchilarning z=0 funksiyasi sifatida aniqlaydi. Bu turdagi funksiyalar muhim emasligi tufayli, kelgusida qaralmaydi.

Bir o'zgaruvchili oshkormas funksiyalar uchun aytilgan fikrlarni muhim o'zgarishlarsiz ko'p o'zgaruvchili oshkormas funksiyalar uchun aytish mumkin. $F(x, y) = 0$ tenglama holidagi kabi (1) tenglama barcha argumentlari bo'yicha uzluksiz hosilalarga ega bo'lgan y oshkormas funksiyani aniqlaydigan yetarli shartlarni berish mumkin.

Teorema. Aytaylik $F(x_1, x_2, ..., x_m, y)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) u markazi $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, y_0)$ nuqtada bo'lgan $\Pi = \{(x_1, x_2, ..., x_m, y) : x_i^0 - a_i < x < x_i^0 + a_i \ (i = 1, 2, ..., m), \ y_0 - b < y < y_0 + b\}$ $m+1$ o'lchamli parallelepipedda aniqlangan va $F'_{x_1}, F'_{x_2}, ..., F'_{x_m}, F'_y$ uzluksiz xususiy hosilalarga ega;

2) $F(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, y_0) = 0$ va y bo'yicha xususiy hosilasi shu nuqtada noldan farqli: $F'_y(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, y_0) \neq 0$. U holda $F(x_1, x_2, ..., x_m, y) = 0$ tenglama $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ nuqtaning biror ω parallelepiped atrofida $y_0 = f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ bo'ladigan $y = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiyani oshkormas ko'rinishda aniqlaydi. Bu funksiya ω atrofda barcha argumentlari bo'yicha uzluksiz xususiy hosilalarga ega:

$$f'_{x_1}=-\frac{F'_{x_1}}{F'_y},\ f'_{x_2}=-\frac{F'_{x_2}}{F'_y},\ldots,f'_{x_m}=-\frac{F'_{x_m}}{F'_y}. \qquad (2)$$

Bu teoremaning isboti 1-§ dagi teorema isbotiga o'xshash.

3-§. Oshkormas funksiyalarni differensiallash

1. Oshkormas funksiyaning hosilasi. $F(x,y)=0$ (1) tenglama berilgan bo'lsin, bu yerda $F(x,y)$ funksiya 1-§dagi teorema shartlarini qanoatlantirsin. U holda bu tenglama x_0 nuqtaning biror $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ atrofida $y=f(x)$ funksiyani oshkormas ko'rinishda aniqlaydi, bu funksiya shu atrofda uzluksiz hosilaga ega bo'ladi. Quyida bu funksiyaning hosilasini hisoblash usullarini qaraymiz.

Agar (1) tenglamada y funksiyani elementar funksiyalar yordamida ifodalash mumkin bo'lsa, u holda hosilani bizga ma'lum bo'lgan elementar funksiyalarni differensiyallash formulalari yordamida topish mumkin bo'ladi. Ammo, oshkormas funksiyani aniqlaydigan har qanday tenglamani ham bu funksiyaga nisbatan yechib bo'lavermaydi. Bu holda 1-§ da ko'rsatilganidek, oshkormas funksiyaning hosilasi x_0 nuqtaning biror $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ atrofida $F(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalari orqali quyidagi formulalar bo'yicha ifodalanishi mumkin:

$$y'=f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad (2)$$

Bu hosilani, ko'p hollarda boshqa usulda topishadi. Agar (1) tenglamaning chap tomonida y ning o'rniga $f(x)$ni qo'ysak, u holda $F(x,y)$x ning murakkab funksiyasi bo'lib, u $f(x)$ aniqlangan oraliqda aynan nolga teng bo'ladi: $F(x,f(x))\equiv 0$. U holda $F(x,f(x))$ funksiyaning x bo'yicha hosilasi ham aynan nolga teng bo'ladi:

$$\frac{dF(x,f(x))}{dx}=0. \qquad (3)$$

Shartga ko'ra П da $F(x,y)$ funksiya uzluksiz xususiy hosilalarga ega va $f(x)$ mos oraliqda x bo'yicha hosilasi mavjud. U holda murakkab funksiyaning hosilasi formulasiga ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{dF(x,y)}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \text{ yoki } \frac{dF(x,y)}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

(3) tenglikka asosan quyidagi ayniyatni hosil qilamiz:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0. \qquad (4)$$

(1) tenglamadan (4) ayniyatga o'tishni qisqacha (1) tenglamani x argument bo'yicha differensiallash deb ataladi. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\neq 0$ ekanligini e'tiborga olib, (4) dan quyidagini topamiz:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}.$$

Biz yana (2) formulani hosil qildik. Shunday qilib, oshkormas funksiyaning hosilasini bevosita (1) tenglamani x bo'yicha differensiallash orqali topish mumkin.

$y'=\frac{dy}{dx}$ hosila uchun (2) formula bo'yicha olingan ifoda, x bilan bir qatorda y ga ham bog'liq. Ammo, bunda y deganda (1) tenglama bilan aniqlangan $y=f(x)$ funksiya tushuniladi. Demak, (2) formula bo'yicha aniqlanadigan y' hosila x erkli o'zgaruvchining murakkab funksiyasi bo'ladi. Bu hosilaning x nuqtadagi qiymatini hisoblash uchun, umuman olganda, y oshkormas funksiyaning shu nuqtadagi qiymatini ham bilish kerak.

Biror sohada $F(x,y)$ funksiya uzluksiz ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga ega deb faraz qilib, berilgan oshkormas funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblash masalasini qaraymiz.

(2) ga ko'ra y' hosilani quyidagi $y'=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$ va $y=f(x)$ munosabatlar bilan berilgan x ning murakkab funksiyasi deb qarashimiz mumkin. Murakkab funksiyaning hosilasi haqidagi teoremaga ko'ra $\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$ funksiyaning x bo'yicha hosilasi mavjud, demak y' ning ham x bo'yicha hosilasi, ya'ni y'' mavjud. Murakkab funksiyaning hosilasi formulasini tatbiq etib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right)\frac{dx}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right)\frac{dy}{dx},$$

yoki

$$y'' = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right)y'.$$

Bundan $y'' = -\dfrac{F'_y F''_{x^2} - F'_x F''_{xy}}{(F'_y)^2} - \dfrac{F'_y F''_{xy} - F'_x F''_{y^2}}{(F'_y)^2} \cdot y'$. Bu tenglikning o'ng tomonida y' ni $-\dfrac{F'_x}{F'_y}$ bilan almashtirib, soddalashtirishlardan so'ng, quyidagini olamiz:

$$y'' = -\frac{(F'_y)^2 F''_{x^2} - 2F''_{xy}F'_x F'_y + (F'_x)^2 F''_{y^2}}{(F'_y)^3}. \qquad (5)$$

Shunday qilib, agar biror sohada $F(x,y)$ funksiya uzluksiz ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga ega va $F'_y(x,y) \neq 0$ bo'lsa, u holda $F(x,y)=0$ tenglama bilan aniqlanadigan $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'ladi.

Ikkinchi tartibli hosilani (4) ayniyatni x bo'yicha differensiallash orqali ham topishimiz mumkin. Bunda y va y' larni x ning funksiyasi ekanligini e'tiborga olish lozim.

(4) ayniyatni x bo'yicha differensiallassk, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}y' + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'\right)y' + \frac{\partial F}{\partial y}y'' = 0.$$

Bunda y' ni $-\dfrac{F'_x}{F'_y}$ bilan almashtirib, y'' topiladi.

$F(x,y)$ funksiya uzluksiz uchinchi (to'rtinchi, ...) tartibli xususiy hosilalarga ega deb faraz qilib, yuqoridagi kabi qaralayotgan oshkormas funksiyaning uchinchi (to'rtinchi, ...) tartibli hosilasi mavjudligini isbotlashimiz va uning uchun ifoda topishimiz mumkin.

Misol. Ushbu $e^y + y\sin x - x^3 + 26 = 0$ tenglama berilgan. Bu tenglama biror nuqta atrofida bir o'zgaruvchini ikkinchisining differensiallanuvchi funksiyasi sifatida aniqlaydimi? Agar aniqlasa, birinchi tartibli hamda ikkinchi tartibli (agar mavjud bo'lsa) hosilalarini toping.

Yechish. $F(x,y)=e^y+y\sin x-x^3+26$ funksiya xOy tekislikning barcha nuqtalarida aniqlangan. Bu funksiyaning xususiy hosilalari $F'_x(x,y)=y\cos x-3x^2$ va $F'_y(x,y)=e^y+\sin x$ ixtyoriy (x,y) nuqtada uzluksiz. Funksiya, masalan (3,0) nuqtada nolga teng, lekin $F'_y(3,0)=1+\sin 3\neq 0$. Demak, 1-§ dagi teoremaga ko'ra berilgan tenglama x=3 nuqtaning biror atrofida y ni x ning oshkormas funksiyasi sifatida aniqlaydi. (2) formuladan foydalanib, (3,0) nuqta atrofida

$$y'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{y\cos x-3x^2}{e^y+\sin x} \qquad (6)$$

ekanligini topamiz.

Bu hosilani (2) formuladan foydalanmasdan ham topishimiz mumkin. Buning uchun berilgan tenglamani x bo'yicha differensiallaymiz:

$$e^y y'+y'\sin x+y\cos x-3x^2=0, \qquad (7)$$

bundan y' uchun yuqoridagi ifoda hosil bo'ladi.

Endi funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi mavjudligini tekshiramiz. Buning uchun ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz: $F''_{x^2}(x,y)=-y\sin x-6x,\ F''_{xy}(x,y)=\cos x,\ F''_{y^2}(x,y)=e^y$. Qaralayotgan (3,0) nuqta atrofida $F(x,y)$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari uzluksiz, demak $y''(x)$ mavjud. Bu hosilani tayyor (5) formuladan topish mumkin. Ammo, tayyor formulalar murakkab, ularni eslab qolish qiyin. Shu sababli oshkormas funksiya hosilasini topishda oshkormas funksiya aniqlangan tenglamani ketma-ket differensiallash usulidan foydalanadi. Berilgan misolda $y''(x)$ ni (6) ning ikkala tomonini x bo'yicha differensiallash yordamida topishimiz mumkin. Lekin, $y''(x)$ ni (7) ayniyatni x bo'yicha differeniallash orqali hisoblash oson. Shunday qilib,

$$e^y y'^2+y''e^y+y''\sin x+2y'\cos x-y\sin x-6x=0.$$

Bundan quidagini hosil qilamiz:

$$y''=\frac{y\sin x+6x-2y'\cos x-y'^2e^y}{e^y+\sin x}.$$

So'ngi formulada y' o'rniga uning (6) ifodasini qo'yish mumkin.

2.Oshkormas funksiyaning xususiy hosilalari. Aytaylik $z=f(x,y)$ funksiya

$$F(x,y,z)=0 \quad (8)$$

tenglama bilan aniqlangan bo'lsin, bu yerda $F(x,y,z)$ funksiya 2-§dagi teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi. U holda $z=f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalari mavjud va 2-§dagi (2) formulalar yordamida hisoblanishi mumkin:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}. \qquad (9)$$

Bu xususiy hosilalarni (9) formulalardan foydalanmasdan ham oson topish mumkin. Quyida bir o'zgaruvchili oshkormas funksiyadagi kabi fikr yuritamiz. Agar (8) tenglamada z ni shu tenglama bilan aniqlanadigan $f(x,y)$ funksiya deb qarasak, u holda bu tenglamaning o'ng tomonidagi ifoda (bevosita x va y ga, bilvosita z ga) aynan nolga teng murakkab funksiya bo'ladi. Demak, bu funksiyaning x va y bo'yicha xususiy hosilalari ham nolga teng bo'ladi, shunday qilib (8) munosabatni x bo'yicha va y bo'yicha differensiallab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} F'_x+F'_z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, & (10) \\ F'_y+F'_z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0. & (11) \end{cases}$$

Shartga ko'ra, $F'_z\neq 0$, (10) va (11) dan $\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ larni topish mumkin. Topilgan ifodalar (9) dan farq qilmaydi. (9) formulaning o'ng tomoni, umuman olganda, x, y va z ga bog'liq bo'lib, z o'zgaruvchi (8) tenglama bilan aniqlangan x va y ning funksiyasi deb qaraladi.

$F(x,y,z)$ funksiyaning barcha argumentlari bo'yicha ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalari mavjud deb faraz qilib, (10) ayniyatni x bo'yicha, (11) ayniyatni y bo'yicha differensiallab quyidagilarni topamiz:

$$F''_{x^2}+2F''_{xz}\frac{\partial z}{\partial x}+F''_{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+F'_z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$F''_{y^2}+2F''_{yz}\frac{\partial z}{\partial y}+F''_{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+F'_z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Bu ayniyatlardan $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ va $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarni topish mumkin.

(10) ayniyatni o'zgarmas x da y bo'yicha yoki (11) ayniyatni o'zgarmas y da x bo'yicha differensiallab, quyidagi ayniyatni hosil qilamiz:

$$F''_{xy} + F''_{xz}\frac{\partial z}{\partial y} + F''_{yz}\frac{\partial z}{\partial x} + F''_{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + F'_z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

bundan $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ xususiy hosilani topish mumkin.

Agar $F(x,y,z)$ funksiya yetarlicha marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda (10 va (11) ayniyatlarni ketma-ket differensiallash usulidan foydalanib, $z = f(x,y)$ funksiyaning berilgan tartibdagi xususiy hosilalarini topishimiz mumkin bo'ladi.

Qaralayotgan holda oshkormas funksiyaning xususiy hosilalarini ketma-ket (8) ayniyatni to'la shaklda differensiallash usuli bilan hisoblash qo'lay bo'ladi.

Bu ayniyatni birinchi marta differensiallab, quyidagini olamiz:

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0.$$

Bundan $z = f(x,y)$ funksiyaning to'la differensialini topamiz:

$$dz = -\frac{F'_x}{F'_z}dx - \frac{F'_y}{F'_z}dy \qquad (12)$$

Bu yerda dx va dy oldidagi koeffitsiyentlar z funksiyaning xususiy hosilalariga teng, shunday qilib yana (9) formulalarni hosil qilamiz.

(8) ayniyatni ikkinchi marta to'la shaklda differensiallab, ushbu ayniyatni hosil qilamiz: $\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 F + \frac{\partial F}{\partial z}d^2 z = 0$, bundan

$$d^2 z = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 F}{F'_z}.$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi dz o'rniga (12) dagi ifodasini qo'yib, quyidagini olamiz:

$$d^2 z = A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2, \qquad (13)$$

bu yerda A, B va C orqali x, y va z larga bog'liq funksiyalar belgilangan bo'lib, ular ma'lum F'_x, F'_y va F'_z funksiyalar yordamida ratsional ifodalanadi.

Ikkinchi tomondan, d^2z ning umumiy ifodasi quyidagicha edi:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 . \qquad (14)$$

(13) va (14) ni solishtirib, barcha ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz: $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Shunga o'xshash uchinchi, to'rtinchi va boshqa tartibli hosilalari hisoblanadi.

Misol. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (15) tenglama berilgan. Bu tenglama biror sohada biror o'zgaruvchini qolganlarining, masalan, z o'zgaruvchini x va y ning oshkormas funksiyasi sifatida aniqlashini tekshiring. Agar aniqlasa, $z'_x, z'_y, z''_{x^2}, z''_{xy}, z''_{y^2}$ larni toping.

Yechish. $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ funksiya x, y va z ning barcha qiymatlarida aniqlangan. Bu funksiyaning xususiy hosilalari $F'_x = 2x,\ F'_y = 2y,\ F'_z = -2z$ ixtiyoriy (x,y,z) nuqtada uzluksiz. Endi, masalan (3,4,5) nuqtada $F(x,y,z)$ funksiya nolga teng, lekin $F'_z(3,4,5) = -10 \neq 0$. Demak, 2-§dagi teoremaga ko'ra (15) tenglama (3,4) nuqtaning biror atrofida $z = f(x,y)$ funksiyani oshkormas ko'rinishda aniqlaydi. Bu funksiyaning xususiy hosilalarini bir nechta usulda aniqlashimiz mumkin.

Birinchi usul. (9) formuladan foydalanamiz, u holda $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{-2z} = \frac{x}{z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{-2z} = \frac{y}{z}$. Demak,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}. \qquad (16)$$

$F(x,y,z)$ funksiya ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga ega, demak $z = f(x,y)$ funksiya ham ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga ega. Shu sababli (16) ni x va y bo'yicha differensiallash mumkin. Differensiallashni bajarib, hamda (15) va (16) formulalardan foydalanib, quyidagilarni topamiz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{z-x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=\frac{z-x\frac{x}{z}}{z^2}=\frac{z^2-x^2}{z^3}=\frac{y^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{z-y\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}=\frac{z-y\frac{y}{z}}{z^2}=\frac{z^2-y^2}{z^3}=\frac{x^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}=-\frac{x\frac{y}{z}}{z^2}=-\frac{xy}{z^3}.$$

Ikkinchi usul. (15) ayniyatni x va y bo'yicha differensiallab, hamda 2 ga qisqartirib, quyidagini olamiz:

$$\begin{cases} x-z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \\ y-z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \end{cases} \qquad (17)$$

Bundan (16) formulalarni hosil qilamiz.

Birinchi ayniyatni x bo'yicha, ikkinchi ayniyatni y bo'yicha differensiallaymiz:

$$1-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \quad 1-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

bundan (15) va (16) foydalanib, quyidagilarni topamiz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{z}=\frac{1-\left(\frac{x}{z}\right)^2}{z}=\frac{y^2}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{z}=\frac{1-\left(\frac{y}{z}\right)^2}{z}=\frac{x^2}{z^3}.$$

Ikkinchi tartibli aralash hosilani topish uchun (17) dagi birinchi ayniyatni y bo'yicha, yoki ikkinchi ayniyatni x bo'yicha differensiallaymiz:

$$-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, \text{bundan} \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}}{z}=-\frac{xy}{z^3}.$$

Uchinchi usul. (15) ni to'la shaklda differensiallab, hamda 2 ga qisqartirib, quyidagini hosil qilamiz: $xdx+ydy-zdz=0$, bundan $dz=\frac{x}{z}dx+\frac{y}{z}dy$. Demak, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{z}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{z}$.

(15) ni ikkinchi marta to'la shaklda differensiallaymiz:

$dx^2 + dy^2 - dz^2 - zd^2z = 0$, bu ayniyatda dz o'rniga $\frac{x}{z}dx + \frac{y}{z}dy$ ni qo'yamiz va soddalashtirib quyidagini topamiz:

$d^2z = \frac{z^2 - x^2}{z^3}dx^2 - \frac{2xy}{z^3}dxdy + \frac{z^2 - y^2}{z^3}dy^2$, bu yerda (15) ni e'tiborga olsak,

$d^2z = \frac{y^2}{z^3}dx^2 - \frac{2xy}{z^3}dxdy + \frac{x^2}{z^3}dy^2$ bo'ladi. Bundan quyidagilarni olamiz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2xy}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{z^3}.$$

4-§. Ba'zi bir geometrik tatbiqlar

Oshkormas ko'rinishdagi tenglama bilan berilgan chiziqqa o'tkazilgan urinma va normal. Ushbu,

$$F(x,y) = 0 \qquad (1)$$

tenglamani qaraymiz, bu yerda $F(x,y)$ aniqlanish sohasining qismi bo'lgan D sohada uzluksiz xususiy hosilalari mavjud. Umuman olganda, bu tenglama tekislikda biror geometrik obrazni (koordinatalari berilgan tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami) aniqlaydi.

Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada $F'_x(x,y)$ va $F'_y(x,y)$ hosilalardan biri noldan farqli bo'lsa, u holda bu nuqta (1) tenglama bilan aniqlangan geometrik obrazning oddiy yoki to'g'ri nuqtasi deyiladi. Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada $F'_x(x,y)$ va $F'_y(x,y)$ hosilalar bir vaqtda nolga teng bo'lsa, u holda bu nuqta maxsus nuqta deyiladi.

Aytaylik $M_0(x_0, y_0)$ oddiy nuqta va aniqlik uchun $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ bo'lsin. U holda 1-§ dagi teoremaga ko'ra (1) tenglama $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror atrofida differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyani oshkormas ko'rinishda aniqlaydi. Demak, $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror atrofiga tegishli va (1) shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami sodda yoydan- $y = f(x)$ funksiyaning grafigidan iborat bo'ladi. Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan har qanday to'g'ri chiziq bu yoyni ko'pi bilan bitta nuqtada kesib o'tadi.

Agar D sohaning (1) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami bo'sh bo'lmasa va maxsus nuqtalarni o'zida saqlamasa, u holda bu to'plam sodda yoylarning birlashmasidan iborat bo'ladi. Shu ma'noda (1) tenglama tekislikda egri chiziqni oshkormas holda aniqlaydi va (1) shu egri chiziqning oshkormas (yoki oshkormas ko'rinishdagi) tenglamasi deyiladi.

(1) tenglama bilan aniqlangan $y = f(x)$ funksiya oddiy nuqtada hosilaga ega bo'lganligi sababli, bu funksiyaning grafigi bo'lgan egri chiziq shu nuqtada urinma va normalga ega bo'ladi.

Shu egri chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ oddiy nuqtasidagi urinma va normal tenglamalarini tuzamiz. Bu nuqtadagi hosila $f'(x) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$.

Demak, M_0 nuqtadagi urinma va normal tenglamalari mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$Y - y_0 = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}(X - x_0),$$

$$Y - y_0 = \frac{F'_y(x_0, y_0)}{F'_x(x_0, y_0)}(X - x_0), \qquad (F'_x(x_0, y_0) \neq 0),$$

bu yerda $y_0 = f(x_0)$, X va Y urinma va normaldagi nuqtaning koordinatalari. Odatda urinma va normaldagi nuqtaning koordinatalarini ham kichik x va y harflari bilan yozishadi. Buni e'tiborga olgan holda yuqoridagi formulalarni quyidagicha yozish mumkin:

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \qquad (2)$$

urinma tenglamasi,

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)} \qquad (3)$$

normal tenglamasi.

1-misol. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsga uning ordinatasi noldan farqli bo'lgan (x_0, y_0) nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi va normalining tenglamalarini toping.

Yechish. $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ funksiyani xususiy hosilalarini topamiz: $F'_x(x,y)=\frac{2x}{a^2}$, $F'_y(x,y)=\frac{2y}{b^2}$. Ularning (x_0,y_0) nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz va (2) formuladan foydalanamiz. U holda $\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)=0$, yoki $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=0$, yoki

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}.$$

(x_0,y_0) nuqtaning ellipsga tegishli ekanligini hisobga olsak, quyidagiga ega bo'lamiz: $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$. Bu formula $y_0\neq 0$ shartda olingan bo'lsa ham, u $y_0=0$ da ham o'rinli bo'ladi.

(3) formuladan foydalansak, (x_0,y_0) nuqtadagi normal tenglamasi quyidagicha bo'ladi: $\frac{a^2(x-x_0)}{x_0}=\frac{b^2(y-y_0)}{y_0}$.

Oshkormas ko'rinishdagi tenglama bilan berilgan sirtga o'tkazilgan urinma tekislik va normal. Quyidagi,

$$F(x,y,z)=0 \qquad (4)$$

tenglamani qaraymiz, bu yerda $F(x,y,z)$ funksiya biror uch o'lchamli D sohada aniqlangan va birinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega.

Aytaylik, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta koordinatalari (4) tenglamani qanoatlantirsin. Agar bu nuqtada F'_x, F'_y, F'_z hosilalardan kamida biri noldan farqli bo'lsa, u holda bu nuqta (4) tenglama bilan aniqlangan sirtning oddiy yoki to'g'ri nuqtasi deyiladi.Aks holda $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta berilgan sirtning maxsus nuqtasi deyiladi. Aytaylik $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta sirtning oddiy nuqtasi va aniqlik uchun $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ bo'lsin. U holda 2-§dagi teoremaga asosan (4) tenglama $M_0(x_0,y_0,z_0)$ oddiy nuqtaning biror atrofida oshkormas ko'rinishda berilgan differensiallanuvchi $z=f(x,y)$ funksiyani aniqlaydi. Bu nuqtada shu funksiyaning xususiy hosilalari quyidagiga teng:

$$f'_x(x_0,y_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)},\quad f'_y(x_0,y_0)=-\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Demak, berilgan sirtga $M_0(x_0,y_0,z_0)$nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasi (3-bob 3-§) quyidagicha yoziladi:

$$z-z_0=-\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)-\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0), \qquad (5)$$

yoki, ixchamroq ko'rinishda

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

(5')

Berilgan sirtning M_0 nuqtasidan o'tuvchi va shu nuqtadagi urinma tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqshu sirtning M_0 nuqtasidagi normali deyiladi.

Urinma tekislikning (5) tenglamasini bilgan holda, (4) sirtning $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadagi normali tenglamasini tuzish qiyin emas. Haqiqatan ham, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad (6)$$

bu yerda m, n va p – biror koeffitsiyentlar.

(6) to'g'ri chiziq va (5) tekislikning perpendikulyarlik shartidan normalning quyidagi tenglamasini hosil qilamiz (uchala xususiy hosilalar noldan farqli bo'lgan holda):

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}. \qquad (7)$$

Xususiy holda, sirt oshkor ko'rinishdagi tenglama $z=f(x,y)$ bilan berilganda $F(x,y,z)=f(x,y)-z$ bo'lib, normal tenglamasi quyidagi shaklda bo'ladi:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

2-misol. $x^2+y^2+z^2=R^2$ sferaning $M_0(x_0,y_0,z_0)$ $(z_0\neq 0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tekislik va normal tenglamalarini toping.

Yechish. $F'_x(x_0,y_0,z_0)=2x_0$, $F'_y(x_0,y_0,z_0)=2y_0$, $F'_z(x_0,y_0,z_0)=2z_0\neq 0$ bo'lganligi sababli, urinma tekislik tenglamasi (5') ga asosan

$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$, yoki $x_0x+y_0y+z_0z=x_0^2+y_0^2+z_0^2$

bo'ladi. $M_0(x_0,y_0,z_0)$nuqta sferaga tegishli ekanligini e'tiborga olsak, urinma tekislik tenglamasi quyidagi ko'rinish oladi:

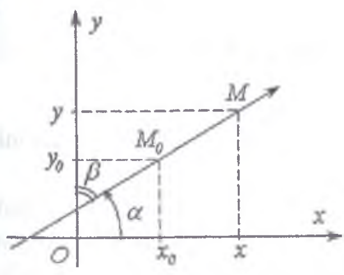
$$x_0x+y_0y+z_0z=R^2.$$

(7) formulaga asosan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadagi normal tenglamasi
$\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0}=\frac{z-z_0}{z_0}$, yoki $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}$ $(x_0\neq 0,\ y_0\neq 0,\ z_0\neq 0)$ bo'ladi.

5-§. Yo'nalish bo'yicha hosila. Gradiyent

Ma'lumki, $u=f(x,y)$ funksiyaning $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ va $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ hosilalari bu funksiyaning Ox va Oy o'qlarining musbat yo'nalishi bo'yicha o'zgarish tezligini ifodalaydi. Ammo matematik analizning bir qator tatbiqlarida (x,y) nuqta ixtiyoriy yo'nalishda harakatlangandagi $f(x,y)$ funksiyaning o'zgarish tezligi haqidagi masalani qarashga to'g'ri keladi. Bu masalaning yechimi funksiyaning yo'nalish bo'yicha hosilasi tushunchasiga olib keladi.

Aytaylik, biror D sohada $u=f(x,y)$ funksiya berilgan bo'lsin. D sohada $M_0(x_0,y_0)$ nuqtani olib, u orqali ixtiyoriy lto'g'ri chiziqni o'tkazamiz va bu to'g'ri chiziqda ma'lum yo'nalish tanlaymiz (8-rasm). Faraz qilaylik, $M(x,y)$ nuqta D sohaning a to'g'ri chiziqqa tegishli shunday nuqtasi bo'lsinki, M_0M kesma D sohaga tegishli bo'lsin. $u=f(x,y)$ funksiyaning M_0 va M nuqtadagi qiymatlari $f(M_0)$ va $f(M)$ bo'lsin. $f(M)-f(M_0)$ ayirma $f(x,y)$ funksiyaning lyo'nalish bo'yicha (M_0 nuqtadan M nuqtaga o'tgandagi) orttirmasi deyiladi va $\Delta_l f$ kabi belgilanadi. Shunday qilib, $\Delta_l f=f(M)-f(M_0)$. Quyidagi nisbatni tuzamiz:



8-rasm

$$\frac{\Delta_l f}{M_0M}=\frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}, \qquad (1)$$

M_0M kesma uzunligi bo'lib, u, agar kesmaning yo'nalishi a yo'nalish bilan ustma-ust tushsa, musbat ishora bilan, aks holda manfiy ishora bilan olinadi. (1) nisbat $u=f(x,y)$ funksiyaning a yo'nalish bo'yicha (a to'g'ri chiziq bo'ylab) M_0 nuqtadan M nuqtaga o'tgandagi o'rtacha o'zgarish tezligi deb ataladi.

Ta'rif. Agar M_0 nuqta *a* to'g'ri chiziq bo'ylab M nuqtaga cheksiz yaqinlashganda (1) nisbatning chekli limiti mavjud bo'lsa, u holda bu limit $u=f(x,y)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi *a* yo'nalish bo'yicha hosilasi deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}$, yoki $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$, yoki $\frac{\partial f}{\partial l}$.

Shunday qilib,

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\lim_{M\to M_0}\frac{\Delta_l f}{M_0M}=\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}.$$

Bu hosilani $u=f(x,y)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi *a* yo'nalish bo'yicha o'zgarish tezligi deb qarash tabbiiydir. Bunda $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ ning absolut qiymati tezlikning absolut qiymatini, hosilaning ishorasi o'zgarish xarakterini aniqlaydi deb hisoblaymiz.

Yuqoridagi ta'rif ma'nosida $u=f(x,y)$ funksiyaning $\frac{\partial f}{\partial x}$ hosilasini Oxo'qi, $\frac{\partial f}{\partial y}$ hosilasini Oy o'qi yo'nalishi bo'yicha hosila deb qarash mumkinligini ko'rish qiyin emas.

Quyidagi teorema yo'nalish bo'yicha hosila mavjudligining yetarli shartini beradi.

Teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya D sohaning $M_0(x_0,y_0)$ nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya shu nuqtada ixtiyoriy l yo'nalish bo'yicha hosilaga ega va quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta,$$

bu yerda α va β *a* to'gri chiziq yo'nalishining Ox va Oy o'qlarning musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchaklari (8-rasm).

Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning yo'nalish bo'yicha hosilasi ham yuqoridagi kabi aniqlanadi va hisoblanadi. Xususan, berilgan nuqtada differensiallanuvchi $u=f(x,y,z)$ funksiyaning shu nuqtadagi ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha hosilasi mavjud va quyidagi tenglik bilan ifodalanadi:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma, \tag{4}$$

bunda α, β, γ mos ravishdal to'g'ri chiziqning Ox, Oy, Oz koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchaklari.

1-misol. $u = arctg\frac{x}{y}$ funksiyaning $M_0(3,4)$ nuqtadagi birinchi chorak bissektrisasi yo'nalishi bo'yicha hosilasini toping.

Yechish. Berilgan funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$. Bu hosilalarning $M_0(3,4)$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz: $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = \frac{4}{25}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = -\frac{3}{25}$. 1 yo'nalish Oxo'qining musbat yo'nalishi bilan $\alpha = \frac{\pi}{4}$ burchak tashkil etadi. (3) formuladan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz: $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{4}{25}\cos\frac{\pi}{4} - \frac{3}{25}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{50}$.

2-misol. $u = \sqrt{x^2+y^2}$ funksiyaning $M(0,0)$ nuqtadagi ixtiyoriy 1 yo'nalish bo'yicha hosilasini toping.

Yechish. Berilgan funksiyaning $M(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi emasligini ko'rish qiyin emas. shu sababli (3) formuladan foydalanib bo'lmaydi. $\frac{\partial u}{\partial l}$ni bevosita izlaymiz. Bunda

$$\Delta_l u(0,0) = \sqrt{x^2+y^2}, \frac{\Delta_l u}{M_0 M} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} = 1.$$

Demak, $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta_l u}{\rho} = 1, \ \frac{\partial u}{\partial l} = 1$.

Bu misol funksiyaning divverensiallanuvchi bo'lishi uning ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha hosilasining mavjud bo'lishi uchun faqat yetarli shart ekanligini, funksiyaning ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha hosilasining mavjudligi uning differensiallanuvchi bo'lishini ta'minlamasligini ko'rsatadi.

Berilgan funksiyaning biror nuqtadagi o'zgarishini o'rganganda bu funksiyaning shu nuqtada tez o'sadigan yo'nalishini aniqlash masalasi muhim ahamiyatga ega. Bu masalani biz ikki o'zgaruvchili funksiya uchun o'rganamiz.

Boshi $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ va $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ bo'lgan vektorni qaraymiz. Bu vektor $f(x,y)$ funksiyaning $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi gradiyenti deyiladi va $\overline{gradf}(x_0,y_0)$ kabi belgilanadi. Ixtiyoriy (x,y) nuqtadagi gradiyent $\overline{gradf}(x,y)$ yoki $\overline{gradu}$ kabi belgilanadi. Shunday qilib,

$$\overline{gradu}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}. \qquad (5)$$

Gradiyent tushunchasi turli bilim sohalarida, xususan fizika va texnikada muhim tatbiqlarga ega.

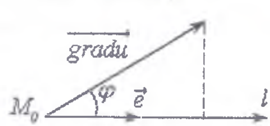
Faraz qilaylik, $u=f(x,y)$ funksiya biror sohada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda shu sohaga tegishli bo'lgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada ixtiyoriy l yo'nalish bo'yicha (2) formula yordamida aniqlanadigan hosila mavjud bo'ladi. Ushbu $\vec{e}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\sin\alpha$ vektorni qaraymiz.U holda (2) formulaningo'ng tomoni $\overline{gradu}$ va $\vec{e}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasidan iborat. Shu sababli

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\vec{e}\,\overline{gradu}.$$

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi ta'rifiga ko'ra bu formulani quyidagicha yozish mumkin: $\frac{\partial u}{\partial l}=|\vec{e}|\cdot|\overline{gradu}|\cdot\cos\varphi$, bu yerda φ $\overline{gradu}$ va $\vec{e}$ vektorlar orasidagi burchak. $|\vec{e}|=1$ bo'lganligi sababli

$$\frac{\partial u}{\partial l}=|\overline{gradu}|\cdot\cos\varphi,$$

ya'ni yo'nalish bo'yicha hosila gradiyentning shu yo'nalishdagi proyeksiyasiga teng bo'ladi (9-rasm).



9-rasm

So'ngi formuladan ko'rinadiki, yo'nalish bo'yicha hosila $\varphi=0$ bo'lganda, ya'ni gradiyent yo'nalishi bo'yicha olinganda eng katta qiymatga ega bo'ladi. Bu holda

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{max}=|grad u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\right)^2}$$

bo'ladi.

Shunday qilib, differensiallanuvchi funksiya gradiyentining moduli $\frac{\partial u}{\partial l}$ yo'nalish bo'yicha hosilaning eng katta qiymatiga, ya'ni u funksiyaning berilgan M_0 nuqtadagi eng katta o'zgarish tezligiga teng.Berilgan funksiyaning qaralayotgan nuqtadagi gradiyenti yo'nalishi $\frac{\partial u}{\partial l}$ eng katta qiymatga erishadigan yo'nalish bilan ustma-ust tushadi.

IV-bobga doir mashq va masalalar

Berilgan misollarda $\frac{dy}{dx}$ ni toping (144-153).

144. $x^3y-y^3x=16$;
145. $x^2+y^2+\ln(x^2+y^2)=1$;
146. $xy-\ln y=0$;
147. $ye^x+e^y=0$;
148. $x^y=y^x$;
149. $x+y=e^{\frac{y}{x}}$;
150. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;
151. $e^x\sin y=e^y\cos x$;
152. $x^3+y^3+6xy=0$;
153. $\sin y+e^x-xy^2=0$.

Berilgan misollarda $\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ larni toping (154-161).

154. $z=\sqrt{xy}$;
155. $x+y+z=e^z$;
156. $x^3+y^3+z^3=3xyz$;
157. $x^2+y^2+z^2-8x=0$;

158. $e^z = \cos x \sin y$;

159. $z^3 + 3xyz = a^3$;

160. $e^Z - xyz = 0$;

161. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Urinma tekislik va normal tenglamalarini yozing (162-163).

162. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,\quad (x_0; y_0; z_0)$ nuqtada;

163. $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5;\quad (1;1;2)$ nuqtada;

164. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ ellipsoidning $x - y + 2z = 0$ tekislikka parallel bo'lgan urinma tekislik tenglamasini tuzing.

165. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoidning koordinata musbat yarim o'qlarida bir hil kesma ajratuvchi urinma tekislik tenglamasini tuzing.

166. $f(x,y) = 3x^4 + xy + y^3$ funksiyaning (1, 2) nuqtadagi abtsissa o'qi bilan 135^0 burchak tashkil qiluvchi yo'nalish bo'yicha hosilasini toping.

167. $f(x,y) = arctg(xy)$ funksiyaning (1, 1) nuqtadagi birinchi chorak burchagi bissektrisasi yo'nalishi bo'yicha hosilasini toping.

168. $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ funksiyaning (3, 1) nuqtadagi shu nuqtadan (6, 5) nuqtaga qaratilgan yo'nalish bo'yicha hosilasini toping.

169. $f(x,y) = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ funksiyaning (2, 1) nuqtadagi shu nuqtadan koordinata boshiga qaratilgan yo'nalish bo'yicha hosilasini toping.

170. $f(x,y) = arctg\frac{y}{x}$ funksiyaning $x^2 + y^2 - 2x = 0$ aylanada yotuvchi $(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ nuqtada aylananing shu nuqtadagi yo'nalishi bo'yicha hosilasini toping.

171. $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$ funksiyaning $2x^2 + y^2 = 1$ ellipsning ixtiyoriy nuqtasida ellipsning o'sha nuqtadagi normali yo'nalishi bo'yicha olingan hosila nolga tengligini isbotlang.

Funksiyalarning gradientlarini toping (172-175).

172. $z=\sqrt{4+x^2+y^2}$, $(2,1)$ nuqtada;

173. $z=arctg\frac{x}{y}$, $(1;2)$ nuqtada;

174. $z=x^2+y^2$, (x_0, y_0) nuqtada;

175. $z=2xy$, (x_0, y_0) nuqtada.

V BOB. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING EKSTREMUMLARI

1-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning maksimumi va minimumi tushunchalari

Aytaylik, biror m-o'lchamli D sohada (yoki yopiq sohada) m-o'zgaruvchili $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya aniqlangan va $(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ nuqta D sohaning biror ichki nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif. Agar $(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ nuqtaning shunday δ>0 atrofi topilib, bu atrofdan olingan ixtiyoriy $(x_1,x_2,...,x_m)$ nuqta uchun

$$f(x_1,x_2,...,x_m)\le f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0) \quad \left(f(x_1,x_2,...,x_m)\ge f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)\right) \quad (1)$$

tensizlik o'rinli bo'lsa, $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya $(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ nuqtada maksimumga (minimumga) ega deyiladi, $f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ son funksiyaning maksimum (minimum) qiymati yoki maksimumi (minimumi) deyiladi.

Odatda, maksimumlarni (minimumlarni) qat'iy va noqat'iy deb ikkiga ajratishadi. Agar (1) munosabatda $(x_1,x_2,...,x_m)\ne(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ lar uchun qat'iy tengsizlik bajarilsa, qat'iy maksimum (qat'iy minimum), aks holda noqat'iy maksimum (noqat'iy minimum) deyiladi.

1-misol. $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ funksiya (0,0) nuqtada qat'iy maksimumga ega ekanligini ko'rsating.

Yechish. (0,0) nuqtaning δ (0<δ<2) atrofida, ya'ni $x^2+y^2<\delta^2$ shartni qanoatlantiruvchi (x,y) ((x,y)≠(0,0) nuqtalarda $f(x,y)-f(0,0)=\sqrt{4-x^2-y^2}-2<0$ bo'ladi. Demak, funksiya (0,0) nuqtada qat'iy maksimumga ega va $f_{\max}(0,0)=2$.

2-misol. $f(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2$ funksiya (1,1) nuqtada qat'iy minimumga ega ekanligini ko'rsating.

Yechish. (1,1) nuqtaning δ (δ>0) atrofida, ya'ni $(x-1)^2+(y-1)^2<\delta^2$ shartni qanoatlantiruvchi (x,y) ((x,y)≠(1,1) nuqtalarda $f(x,y)-f(1,1)=(x-1)^2+(y-1)^2-0>0$ bo'ladi. Demak, funksiya (1,1) nuqtada qat'iy minimumga ega va $f_{\min}(1,1)=0$.

3-misol. $f(x,y)=(x+y)^2$ funksiya $x+y=0$ to'g'ri chiziq nuqtalarida noqat'iy minimumga ega ekanligini ko'rsating.

Yechish. (x,-x) nuqta va uning biror atrofini qaraymiz. U holda bu atrofdan olingan ixtiyoriy nuqta uchun $f(x,y)-f(x,-x)=(x+y)^2-0\geq 0$ bo‘ladi. Shuningdek, bu atrofda (t,-t)≠(x,-x) nuqtalar ham mavjud bo‘lib, $f(t,-t)-f(x,-x)=0$ bo‘ladi. Demak, funksiya x+y=0 to‘g‘ri chiziq nuqtalarida noqat’iy minimumga ega.

Funksiyaning maksimumi va minimumini farqlash zarurati bo‘lmagan hollarda, ular bitta nom bilan-funksiyaning ekstremumi deb ataladi.

2-§. Ekstremum mavjud bo‘lishining zaruriy shartlari

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ekstremumi mavjud bo‘lishining zaruriy sharti quyidagi teoremada ifodalangan.

Teorema. Agar biror D sohada aniqlangan $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya shu sohaning $(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ nuqtasida ekstremumga ega va barcha birinchi tartibli xususiy hosilalari mavjud bo‘lsa, u holda bu funksiyaning barcha birinchi tartibli xususiy hosilalari shu nuqtada nolga teng bo‘ladi, ya’ni

$$f'_{x_i}(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)=0 \quad (i=1,2,...m).$$

Isbot. Bu teorema ikki o‘zgaruvchili differensiallanuvchi $z=f(x,y)$ funksiya uchun sodda geometrik talqinga ega. Aytaylik, $z=f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. Bu nuqtada $z=f(x,y)$ sirtga o‘tkazilgan urinma tekislik tenglamasini yozamiz:

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Agar (x_0,y_0) nuqta $z=f(x,y)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘lsa, u holda isbotlangan teoremaga ko‘ra $f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0$ bo‘ladi. Va urinma tenglamasi $z=z_0$ ko‘rinishga keladi.

Shunday qilib, agar (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo‘lgan $z=f(x,y)$ funksiya shu nuqtada ekstremumga ega bo‘lsa, u holda unga mos $z=f(x,y)$ sirt (x_0,y_0,z_0) nuqtada xOy tekislikka parallel urinma tekislikka ega bo‘ladi.

Isbotlangan teorema ba’zida qaralayotgan nuqtada ekstremumning mavjudmasligini aniqlashga imkon beradi. Masalan,

$f(x,y,z)=e^{ax+by+cz}$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$ funksiya uchun $f'_x(x,y,z)=ae^{ax+by+cz}$, $f'_y(x,y,z)=be^{ax+by+cz}$, $f'_z(x,y,z)=ce^{ax+by+cz}$ bo‘lib, xususiy hosilalar hech bir nuqtada nolga teng emas. Demak, funksiya ekstremumga ega emas.

Izoh. Funksiya birinchi tartibli xususiy hosilalarning kamida biri mavjud bo‘lmagan (mavjudlari nolga teng) nuqtalarda ham ekstremumga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ funksiya (0,0) nuqtada birinchi tartibli xususiy hosilalarga ega emas. Ammo bu nuqtada minimumga ega, sababi (0,0) nuqtaning ixtiyoriy atrofida $f(x,y)-f(0,0)=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$.

Funksiyaning barcha birinchi tartibli xususiy hosilalari nolga teng yoki ularning kamida biri mavjud bo‘lmagan (mavjudlari nolga teng) nuqtalari ekstremumga shubhali nuqtalar deyiladi.

Shunday qilib, funksiya faqat ekstremumga shubhali nuqtalarda ekstremumga ega bo‘lishi mumkin. Teskari tasdiq o‘rinli emas, ya’ni funksiya ekstremumga shubhali nuqtalarda ekstremumga ega bo‘lmasligi mumkin. Unga misollarda ishonch hosil qilamiz.

$f(x,y)=xy$ funksiya uchun $f'_x(x,y)=y$, $f'_y(x,y)=x$ bo‘lib, (0,0) nuqta ekstremumga shubhali nuqta bo‘ladi. Ammo bu nuqtada qaralayotgan funksiya ekstremumga ega emas. Chunki (0,0) nuqtaning $f(x,y)-f(0,0)=xy$ ayirma nomusbat (nonanfiy) bo‘ladigan atrofi yoq.

$z=xy$ tenglama bilan ifodalanuvchi sirt (giperbolik paraboloid) qisman xOy tekislikning ustida, qisman xOy tekislik ostida joylashadi.

$f(x,y)=\sqrt[3]{x+y}$ funksiya uchun (0,0) nuqtada xususiy hosilalar mavjud emas. Demak, (0,0) ekstremumga shubhali nuqta. Ammo bu nuqtada ekstremum yoq, chunki bu nuqtaning ixtiyoriy atrofida $f(x,y)-f(0,0)=\sqrt[3]{x+y}$ ayirma ham musbat, ham manfiy qiymatlar qabul qiladi.

Shunday qilib, berilgan funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalarining funksiya aniqlanish sohasining ichki nuqtasida nolga tengligi yoki shu nuqtada bu hosilalarning mavjudmasligi qaralayotgan nuqtada funksiyaning ekstremumga ega bo‘lishining zaruriy sharti bo‘lib, yetarli shart bo‘la olmaydi.

3-§. Ekstremum mavjud bo'lishining yetarli shartlari

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni ekstremumga tekshirish umumiy holda bir o'zgaruvchili funksiyalarni ekstremumga tekshirishga nisbatan ancha murakkab masala hisoblanadi. Shu sababli quyida ikki o'zgaruvchili funksiyalarning ekstremumga ega bo'lishining yetarli shartlarini qaraymiz. Bunda ekstremum haqida gapirganda faqat qat'iy ekstremumni tushinamiz.

Teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtaning biror atrofida birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga ega va bunda $f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0$ hamda ikkinchi tartibli xususiy hosilalar (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x,y)$ funksiya bu nuqtada

1) $\Delta>0$ bo'lsa, bu yerda $\Delta=f''_{x^2}(x_0,y_0)\cdot f''_{y^2}(x_0,y_0)-\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2$, ekstremumga-agar $f''_{x^2}(x_0,y_0)<0$ bo'lsa, maksimumga; agar $f''_{x^2}(x_0,y_0)>0$ bo'lsa, minimumga- ega bo'ladi;

2) $\Delta<0$ bo'lsa, ekstremumga ega bo'lmaydi.

Isbot [2].

$\Delta=0$ bo'lgan holda $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada ekstremumga ega bo'lishi ham mumkin, bo'lmasligi ham mumkin. Shu sababdan ham $\Delta=0$ bo'lgan holni shubhali hol deyishadi. Masalan, $f(x,y)=x^4+y^4$ funksiya uchun $f'_x(x,y)=4x^3;\ f'_y(x,y)=4y^3;\ f''_{x^2}(x,y)=12x^2;\ f''_{y^2}(x,y)=12y^2;\ f''_{xy}(x,y)=0$ bo'lib, (0,0) nuqtada birinchi tartibli xususiy hosilalar nolga teng, demak bu nuqta ekstremumga shubhali nuqta. Bu nuqtada $A=B=C=0$, bundan $\Delta=0$, ya'ni shubhali hol. Ammo (0,0) nuqtadan farqli barcha nuqtalarda $\Delta f(0,0)=x^4+y^4>0$ bo'lganligi sababli, berilgan funksiya (0,0) nuqtada minimumga ega.

$f(x,y)=x^4+y^3$ funksiya uchun ham (0,0) nuqta ekstremumga shubhali nuqta va $\Delta=0$ bo'ladi. Ammo $f(0,y)-f(0,0)=y^3$ va (0,0) nuqta atrofida bu ayirma ham manfiy, ham musbat ishorali qiymatlar qabul qiladi. Demak, (0,0) nuqtada berilgan funksiya ekstremumga ega emas.

Oldingi va shu paragraflardagi teoremalar ikki o'zgaruvchili $f(x,y)$ funksiyani erstremumga tekshirishning quyidagi qoidasini shakllantirishga imkon beradi:

1) $f(x,y)$ funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalarini va

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \qquad (5)$$

sistemaning (x_0,y_0) haqiqiy yechimlarini to'pish hamda ulardan berilgan funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishlilarini ajratib olish;

2) funksiyaning barcha ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini to'pish va ularning ajratib olingan (x_0,y_0) da qiymatlarini hisoblash;

3) (x_0,y_0) nuqtada $\Delta = AC - B^2$ ifoda qiymatini hisoblash.

Agar $\Delta > 0, A < 0$ bo'lsa $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada maksimumga ega bo'ladi; agar $\Delta > 0, A > 0$ bo'lsa $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada minimumga ega bo'ladi.

Agar $\Delta < 0$ bo'lsa $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

Izoh. Agar $\Delta > 0$ bo'lsa, u holda $A = f''_{x^2}(x_0,y_0)$ va $C = f''_{y^2}(x_0,y_0)$ sonlar bir xil ishorali bo'ladi, aks holda $\Delta > 0$ shart bajarilmaydi. Shu sababli A ning ishorasini tekshirish o'rniga C ning ishorasini tekshirish ham mumkin.

1-misol. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy \ (a \neq 0)$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

Yechish. yuqorida shakllantirilgan qoidaga ko'ra funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalarini topamiz: $f'_x(x,y) = 3x^2 - 3ay;\ f'_y(x,y) = 3y^2 - 3ax$. Bu hosilalar x va y ning ixtiyoriy qiymatlarida mavjud. Ushbu sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3ay = 0, \\ 3y^2 - 3ax = 0 \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimlari $x_1 = 0,\ y_1 = 0$ va $x_2 = a,\ y_2 = a$.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz: $f''_{x^2}(x,y) = 6x,\ f''_{y^2}(x,y) = 6y,\ f''_{xy}(x,y) = -3a$. Bu hosilalar barcha nuqtalarda, xususan (0,0) va (a,a) nuqtalarda uzluksiz. Shu nuqtalardagi ikkinchi tartibli xususiy hosilalarning qiymatlarini hisoblaymiz:

$f''_{x^2}(0,0) = 0,\ f''_{y^2}(0,0) = 0,\ f''_{xy}(0,0) = -3a$,

$f''_{x^2}(a,a) = 6a,\ f''_{y^2}(a,a) = 6a,\ f''_{xy}(x,y) = -3a$.

(0,0) nuqta uchun A=0, B=-3a, C=0 va $\Delta = 0\cdot 0-(-3a)^2=-9a^2<0$, demak, (0,0) nuqtada funksiya ekstremumga ega emas.

(a,a) nuqta uchun A=6a, B=-3a, C=6a va $\Delta = 6a\cdot 6a-(-3a)^2=27a^2>0$. demak, (a,a) nuqtada: agar $a<0$ bo'lsa, funksiya maksimumga ega va $f_{max}(a,a)=-a^3>0$; agar $a>0$ bo'lsa, minimumga ega va $f_{min}(a,a)=-a^3<0$ bo'ladi.

Funksiyani ekstremumga tekshirish qoidasidan foydalanganda birinchi tartibli xususiy hosilalaridan kamida biri mavjud bo'lmagan ekstremumga shubhali nuqtalar chetda qoladi. Shu sababli bunday nuqtalar alohida qaralishi lozim.

2-misol. $f(x,y)=(x-5)\sqrt[3]{x^2+y^2}$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

Yechish. Bu funksiya x va y ning ixtiyoriy qiymatlarida aniqlangan. Uning xususiy hosilalarini topamiz:

$$f'_x(x,y)=\frac{5x^2+3y^2-10x}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}},\ f'_y(x,y)=\frac{2y(x-5)}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

Bu hosilalar (0,0) nuqtada mavjud emas, demak u ekstremumga shubhali nuqta.

Ikkala $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ hosilalar bir vaqtda nolga aylanadigan nuqtalarni topamiz. Buning uchun ushbu sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^2+3y^2-10x=0, \\ y(x-5)=0, \\ x^2+y^2\neq 0. \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimi (2,0) nuqtadan iborat. Shunday qilib, (0,0) va (2,0) nuqtalar ekstremumga shubhali nuqtalar ekan.

(0,0) nuqtada $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ hosilalar mavjud emas, shu sababli ekstremumga tekshirish qoidasidan foydalana olmaymiz. Ammo, bu nuqtada funksiya maksimumga ega ekanligini bevosita ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham, agar 0<δ<5 va 0<|h|<δ, 0<|k|<δ deb olsak,

$$f(0+h,0+k)-f(0,0)=(h-5)\sqrt[3]{h^2+k^2}<0$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, $f(x,y)$ funksiya (0,0) nuqtada maksimumga ega va $f_{max}(0,0)=0$.

Endi $f(x,y)$ funksiyani (2,0) nuqtada ekstremumga tekshiramiz. Bu nuqtaning ixtiyoriy atrofida $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ hosilalar mavjud. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini topamiz:

$$f''_{x^2}(x,y)=\frac{10x^3+18xy^2+10x^2-30y^2}{9(x^2+y^2)^{\frac{5}{3}}},\quad f''_{y^2}(x,y)=\frac{6x^3-2xy^2-30x^2+10y^2}{9(x^2+y^2)^{\frac{5}{3}}},$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{6y^3-2x^2y+40xy}{9(x^2+y^2)^{\frac{5}{3}}}.$$

Ravshanki bu hosilalar (2,0) nuqtada uzluksiz. Demak, yuqorida shakllantirilgan qoidadan foydalanish mumkin.

Bunda $A=f''_{x^2}(2,0)=\frac{5}{3\sqrt[3]{2}}$, $C=f''_{y^2}(2,0)=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $B=f''_{xy}(2,0)=0.$

$\Delta=AC-B^2=\frac{5}{3\sqrt[3]{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)-0^2=-\frac{5}{3\sqrt[3]{4}}<0$, demak, $f(x,y)$ funksiya (2,0) nuqtada ekstremumga ega emas.

4-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

Aytaylik, $u=f(x,y)$ funksiya biror chegaralangan yopiq D sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. U holda Veyershtrass teoremasiga ko'ra bu funksiya shu sohada eng kichik va eng katta qiymatlariga erishadi. $f(x,y)$ funksiya bu eng kichik (eng katta) qiymatni D sohaning ichki nuqtasida yoki sohaning chegarasida (konturida) yotgan biror nuqtada qabul qilishi mumkin. Agar $f(x,y)$ funksiya eng kichik (eng katta) qiymatni D sohaning ichki nuqtasida qabul qilsa, u holda, ravshanki, funksiya shu nuqtada ekstremumga ega bo'ladi.

Demak, chegaralangan yopiq D sohada uzluksiz bo'lgan $f(x,y)$ funksiyaning shu sohadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini toppish uchun ekstremumga shubhali bo'lgan nuqtalarni topib, funksiyaning shu nuqtadagi qiymatlarini hisoblash, hamda berilgan funksiyaning D soha chegaralaridagi eng katta va eng kichik qiymatlarini hisoblash yetarli. Topilgan sonlarning eng kichigi (eng kattasi) $f(x,y)$ funksiyaning shu sohadagi eng kichik (eng katta) qiymati bo'ladi.

Faraz qilaylik D sohaning chegarasi $\varphi(x,y)=0$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. U holda D soha chegarasidagi funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish bir o'zgaruvchili funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topishga keltiriladi (chunki D sohaning chegarasi tenglamasi $\varphi(x,y)=0$ x va y o'zgaruvchilarni bog'laydi).

Misol. $u=2x^3-6xy+3y^2$ funksiyaning x=0, y=2 to'g'ri chiziqlar va $y=\frac{1}{2}x^2$ $(x\geq 0)$ parabola bilan chegaralangan yopiq D sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. Dastlab D sohaga tegishli bo'lgan ekstremumga shubhali nuqtalarni topamiz. Buning uchun birinchi tartibli xususiy hosilalarni hisoblaymiz: $u'_x=6x^2-6y, u'_y=-6x+6y.$ bu xususiy hosilalar D sohada uzluksiz. Demak, ekstremumgashubhalinuqtalar $\begin{cases}6x^2-6y=0,\\ -6x+6y=0\end{cases}$ sistema yechimlaridan iborat bo'ladi. Bu sistemani yechib, (0,0) va (1,1) ekstremumga shubhali nuqtalarni topamiz. Bulardan (0,0) nuqta D sohaning chegarasiga tegishli. Demak, agar funksiya D sohaning ichki nuqtasida eng katta (eng kichik) qiymat qabul qilsa, u holda bu (1,1) nuqta bo'ladi va $u(1,1)=-1$.

Funksiyani D sohaning chegarasida tekshiramiz. OA kesmada x=0, va demak $u=3y^2$ bo'ladi, bu bir o'zgaruvchili funksiyani $[0,2]$ da qaraymiz. Bu kesmada u o'suvchi. Shu sababli uning eng kichik qiymati 0, eng katta qiymati 12 ga teng bo'ladi.

AB kesmada y=2, shu sababli bunda $u=2x^3-12x+12$bo'lib, x o'zgaruvchi $[0,2]$ kesmadan qiymat qabul qiladi. Uning shu kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini izlaymiz. x bo'yicha hosilasini topamiz: $u'_x=6x^2-12$ va $u'_x=0$ tenglamani yechib, $\pm\sqrt{2}$ ni topamiz. Bulardan faqat $\sqrt{2}$ qaralayotgan kesmaga tegishli. Bu nuqtada funksiya qiymati $12-8\sqrt{2}$, kesma uchlarida 12 va 4 qiymatlar qabul qiladi.

$y=\frac{1}{2}x^2$ parabola yoyida $u=2x^3-6x\left(\frac{1}{2}x^2\right)+3\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2=\frac{3}{4}x^4-x^3,$ $x\in[0,2]$ bo'ladi. Bundan $u'_x=3x^3-3x^2=3x^2(x-1)$ va $x^2(x-1)=0$ tenglamani yechib, 0 va 1 statsionar nuqtalarni topamiz. Funksiyaning topilgan nuqtadagi va kesma uchlaridagi qiymatlarini hisoblaymiz: x=0 da u=0, x=1 da u=-0,25, x=2 da u=4.

Shunday qilib, $u(1,1)=-1$, $u(0,2)=12$, $u(0,0)=0$, $u(2,2)=4$, $u(1,\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$,

$u(\sqrt{2},2)=12-8\sqrt{2}$. Bundan $u_{max}=u(0,2)=12$; $u_{min}=u(1,1)=-1$.

5-§. Shartli ekstremum

Shartli ekstremum tushunchasi. Ko'pgina amaliy masalalar $u=f(x,y)$ funksiyaning ekstremumini uning D aniqlanish sohasida emas, balki uning biror qismida, masalan biror $L\subset D$ chiziqda aniqlashni taqoza qiladi. Boshqacha aytganda, L chiziqda shunday (x_0,y_0) nuqtani topish kerakki, bu nuqtadagi funksiyaning qiymati L chiziqning shu nuqta atrofidagi qiymatlaridan katta yoki kichik bo'lsin. Bunday nuqtalar $u=f(x,y)$ funksiyaning L chiziqdagi shartli ekstremum nuqtalari deyiladi.Odatdagi ekstremum nuqtadan farqliroq funksiyaning shartli ekstremum nuqtasidagi qiymati (x_0,y_0) nuqtaning biror δ-atrofiga tegishli barcha nuqtalardagi qiymatlari bilan emas, balki shu atrofning L chiziqqa tegishli nuqtalaridagi qiymatlari bilan taqqoslanadi.

Yuqorida aytilganlarni misolda tushuntiramiz. Faraz qilaylik, $u=x^2+y^2$ funksiyaning ekstremumlarini x va y o'zgaruvchilar $x+y-1=0$ tenglama bilan bog'langan shartda topish talab qilinsin. Bu tenglama bog'lanish tenglamasi deyiladi. $x+y-1=0$ tenglama fazoda Oz o'qiga parallel bo'lgan tekislikni aniqlaydi. Bu tekislik xOy tekislikni L to'g'ri chiziq bo'ylab kesib o'tadi.

$u=x^2+y^2$ funksiya tekislikning barcha nuqtalarida aniqlangan, uning ekstremumlarini tekislikning L: $x+y-1=0$ to'g'ri chiziqda yotgan nuqtalarida izlash talab qilinadi.

Bog'lanish tenglamasidan y ni topamiz: $y=1-x$. Bu ifodani $u=x^2+y^2$ tenglamaga qo'yib, xo'zgaruvchining $u=2x^2-2x+1$ funksiyasiga ega bo'lamiz. Demak, masala bir o'zgaruvchili funksiyaning oddiy ekstremumini topishga keltirildi. Bu funksiyaning L chiziqdagi ekstremum nuqtalarini topamiz. Buning uchun hosilani hisoblaymiz: $u' = 4x - 2$, bundan $x_0 = \frac{1}{2}$ statsionar nuqta. Bu nuqta funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo‘ladi, chunki $u''(x_0) = u''\left(\frac{1}{2}\right) = 4 > 0$ va $u\left(\frac{1}{2}\right) = 0,5$. Demak, $u = x^2 + y^2$ funksiya $x + y - 1 = 0$ shartda $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nuqtada $u = 0,5$ shartli minimumga ega.

$u = x^2 + y^2$ funksiyaning aniqlanish sohasidagi minimum 0 ga teng va bu qiymatni (0,0) nuqtada qabul qiladi. U funksiyaning shartli minimumidan farq qiladi.

Endi ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun shartli ekstremumni topish masalasini qaraymiz.

Aytaylik, $u = f(x, y)$ funksiyaning x va y o‘zgaruvchilar $\varphi(x, y) = 0$ bo‘glanish tenglamasini qanoatlantiradigan qiymatlaridagi ekstremumlarini topish talab qilinsin.

Agar bog‘lanish tenglamasini y o‘zgaruvchiga nisbatan birqiymatli yechish mumkin bo‘lsa, ya’ni y ni x ning funksiyasi $y = \psi(x)$ sifatida ifodalash mumkin bo‘lsa, u holda $u = f(x, y)$ funksiya ifodasida y o‘rniga $\psi(x)$ funksiyani qo‘yib, $u = f(x, \psi(x))$ bir o‘zgaruvchili funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiya ekstremumlarga erishadigan x ning qiymatlarini topib, bog‘lanish tenglamasidan ularga mos y larni hisoblaymiz va shartli ekstremum nuqtalarini topamiz. Agar $\varphi(x, y) = 0$ tenglamani x o‘zgaruvchiga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa, bu holda ham aynan shu natijaga kelamiz.

Agar bo‘glanish sharti (L chiziq) $x = x(t),\ y = y(t)\ t \in T$ parametrik tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, u holda shartli ekstremumlarni topish masalasi ancha osonlashadi. $x(t), y(t)$ larni $u = f(x, y)$ funksiya ifodasiga qo‘yib, bir o‘zgaruvchili funksiyani hosil qilamiz va uning ekstremumini topish masalasiga kelamiz.

Ammo, bog‘lanish tenglamasini biror o‘zgaruvchiga nisbatan yechish mumkin bo‘lmasa va parametrik ko‘rinishda ifodalab bo‘lmasa, u holda shartli ekstremumni topish birmuncha murakkablashadi.

Qo‘yilgan masalani $\varphi(x, y) = 0$ bo‘glanish tenglamasini x yoki y ga nisbatan yechmasdan topish metodini qaraymiz. Bu metod

Lagranjning ko'paytuvchilar metodi deyiladi. Uning mohiyati quyidagidan iborat.

$u=f(x,y)$ funksiya maksimum yoki minimumga x ning u'_x nolga teng bo'ladigan qimatlarida ega bo'lishi mumkin. y ni x ning funksiyasi deb qarab, u'_x ni topamiz: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$.

Demak, ekstremum nuqtalarida

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad (1)$$

$\varphi(x,y)=0$ bog'lanish tenglamasini x bo'yicha differensiallab quyidagiga ega bo'lamiz: $\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$, yoki

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0. \qquad (2)$$

(2) tenglikni $\varphi(x,y)=0$ bog'lanish tenglamasi bilan aniqlangan L chiqdagi barcha nuqtalar qanoatlantiradi. Bu tenglikning barcha hadlarini hozircha noma'lum bo'lgan λ songa ko'paytirib va ularni (1) tenglikning mos hadlariga qo'shib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)=0,$$

$$\text{yoki}\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad (3)$$

(3) tenglik L chiziqda yotuvchi ekstremum nuqtalarda bajariladi. Noma'lum λ ko'paytuvchini shunday tanlaymizki, $u=f(x,y)$ funksiya ekstremumiga mos x va y larda $\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ koeffitsiyent nolga teng bo'lsin. U holda $\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ifoda ham nolga teng bo'ladi. Shunday qilib, L chiziqda yotuvchi ekstremum nuqtalari quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\\ \varphi(x,y)=0.\end{cases} \qquad (4)$$

(4) sistemani yechib, ekstremumga shubhali nuqtalarni va noma'lum λ ni topamiz.

Bu sistema shartli ekstremum mavjud bo'lishining zaruriy shartini ifodalaydi, ya'ni koordinatalari (4) sistemani qanoatlantiruvchi har qanday (x_0,y_0) nuqta shartli ekstremum nuqtasi bolavermaydi. Ekstremumga shubhali nuqtaning xarakterini tekshirish uchun qo'shimcha ravishda L chiziqning shu nuqta atrofidagi nuqtalarida Δu ayirmaning ishorasini aniqlash lozim.

(4) sistemadagi tenglamalarning chap tomonlari yordamchi uch o'zgaruvchili $F(x,y,\lambda)$ funksiyaning xususiy hosilalaridan iborat. Bu yordamchi funksiya Lagranj funksiyasi deyiladi va quyidagi ko'rinishga ega:

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

bu yerda $f(x,y)$ - berilgan funksiya, $\varphi(x,y)$ - bog'lanish tenglamasining chap tononidagi ifoda.

Lagranj yordamchi funksiyasini kiritish shartli ekstremumni topish qoidasini shakllantirishga imkon yaratadi. $u=f(x,y)$ funksiyaning $\varphi(x,y)=0$ bog'lanish tenglamasini qanoatlantiradigan shartli ekstremumini aniqlash uchun

1) Lagranj funksiyasini tuzish: $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$;

2) Lagranj funksiyasining x, y, λ o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalarini hisoblash;

3) topilgan hosilalarni nolga tenglashtirib, (4) sistemani tuzish;

4) tuzilgan sistemani yechib, shartli ekstremumga shubhali nuqtalarni aniqlash;

5) shubhali nuqtalar atroflaridagi L chiziq nuqtalarida Δu orttirmalarning ishoralarini aniqlash lozim.

Agar shartli ekstremumga shubhali bo'lgan (x_0,y_0) nuqta atroflaridagi L chiziqning (x,y) nuqtalarida $\Delta u=f(x,y)-f(x_0,y_0)>0$ bo'lsa, u holda (x_0,y_0) shartli minimum nuqtasi; agarda $\Delta u=f(x,y)-f(x_0,y_0)<0$ bo'lsa, u holda (x_0,y_0) shartli maksimum nuqtasi bo'ladi.

1-misol. $u=x^2+y^2$ funksiyaning $x+y-1=0$ bog'lanish tenglamasini qanoatlantiradigan shartli ekstremumlarini toping.

Yechish. Lagranj tenglamasini tuzamiz:

$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$.

Bu funksiyaning x, y, λ o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalarini hisoblaymiz:

$$F'_x = 2x + \lambda,\ F'_y = 2y + \lambda,\ F'_\lambda = x + y - 1.$$

(4) ko'rinishdagi sistemani tuzamiz va yechamiz:

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0, \\ 2y + \lambda = 0, \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{bundan } x_0 = 0{,}5;\ y_0 = 0{,}5;\ \lambda = -1.$$

Demak, yagona ekstremumga shubhali nuqta $(0{,}5;0{,}5)$ mavjud,va $u(0{,}5;0{,}5) = 0{,}5$. $x + y - 1 = 0$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy (x, y) nuqtalarda $\Delta u = f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$ bo'lishini ko'rish qiyin emas. Demak $(0{,}5;0{,}5)$ shartli minimum nuqtasi bo'ladi.

Lagranjning ko'paytuvchilar metodi uch va undan ortiq o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham o'rinli. Undan foydalanish metodikasini quyidagi misolda ko'rsatamiz.

2-misol. Yuzi $2a^2$ ga teng bo'lgan tunikadan parallelepiped shaklidagi yopiq quti yasash kerak. Qutining o'lchamlari qanday bo'lganda uning hajmi eng katta bo'ladi?

Yechish. Qutining uzunligi, eni va balandligini mos ravishda x, y va z bilan belgilaymiz. U holda masalaning yechimi $V = xyz$ uch o'zgaruvchili funksiyaning $2xy + 2xz + 2yz = 2a^2$ yoki $xy + xz + yz = a^2$ bog'lanish tenglamasini qanoatlantiradigan shartli ekstremumlarini topishga keladi.

Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a^2)$.

$F'_x, F'_y, F'_z, F'_\lambda$ hosilalarni topamiz va ularni nolga tenglashtirib, quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} yz + \lambda(y + z) = 0, \\ xz + \lambda(x + z) = 0, \\ xy + \lambda(x + y) = 0, \\ xy + xz + yz - a^2 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, shartli ekstremumga shubhali bo'lgan nuqtaning koordinatalarini topamiz: $x_0 = y_0 = z_0 = a / \sqrt{3}$.

Masalaning mazmunidan ravshanki, topilgan nuqta shartli maksimum nuqtasi bo'ladi. Chunki, qutining hajmi cheksiz katta bo'lishi mumkin emas. Tabiiyki, bu hajm qirralarning ma'lum qiymatlarida eng katta bo'ladi.

Shunday qilib, yuzi $2a^2$ ga teng bo'lgan tunikadan yasash mumkin bo'lgan parallelepiped shaklidagi yopiq quti qirrasi $a/\sqrt{3}$ ga teng kub shaklida bo'ladi.

V-bobga doir mashq va masalalar

Quyidagi funksiyalarning ekstremum nuqtalarini toping (176-187).

176. $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$;

177. $z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$;

178. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$;

179. $z = 3\ln x + xy^2 - y^3$;

180. $z = x^2 + y^2 - 8x - 2$;

181. $z = 3x^2 - y^2 + 4y + 5$;

182. $z = x^3 + xy^2 + 6xy$;

183. $z = x^3 + 8y^3 + 6xy - 1$;

184. $z = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{2}{3}} + 4$;

185. $z = 1 - x^4 - (y-2)^6$;

186. $e^z - xyz + x^2y^2 = 0$;

187. $3x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy = 0$;

188. $z = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{a^3}{y}$ funksiyani $x = y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{3}}$ nuqtada minimumga ega ekanligini tekshiring .

189. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$ funksiyani $x = y = \sqrt{2}$ nuqtada minimumga ega ekanligini tekshiring.

Qu'yidagi funksiyalarni ko'rsatilgan yopiq sohalardagi eng kichik va eng katta qiymatlarni toping (190-195).

190. $z = x^2y$; $x^2 + y^2 \le 1$ doirada;

191. $z = x^2 - y^2$; $x^2 + y^2 \le 4$ doirada;

192. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$; $x \le 0$, $y \ge 0$, $y - x \le 1$ uchburchakda.

193. $z=x^3+y^3-9xy-25;$ $0\le x\le 5,$ $0\le y\le 5$ kvadratda

194. $z=x^2+y^2-xy+x+y$. $x=0,$ $y=0$ $x+y=-3$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchakda;

195. $z=x^3+8y^3-6xy+1$ $x=0,$ $x=2,$ $y=-1,$ $y=1$ to‘g‘ri burchakli to‘rtburchakda.

Shartli ekstemumlarni toping (196-199).

196. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},$ $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1;$

197. $z=x^2+y^2$. $x+y=1;$

198. $z=e^{xy},$ $x+y=a;$

199. $z=x^m+y^m\ (m>1),$ $x+y=2$ $(x\ge 0, y\ge 0);$

200. $A(1;0)$ nuqtadan $4x^2+9y^2=36$ ellipsgacha bo‘lgan eng qisqa masofani toping.

201. $A(-1;5)$nuqtadan $y^2=x$ parabolagacha bo‘lgan eng qisqa masofani toping.

202. $x-y=5$ to‘g‘ri chiziq va $y=x^2$ parabola orasidagi eng qisqa masofani toping.

203. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ellipsda $3x+y-9=0$ to‘g‘ri chiziqqa eng yaqin va eng uzoq nuqtalarni toping.

VI BOB. KARRALI INTEGRALLAR

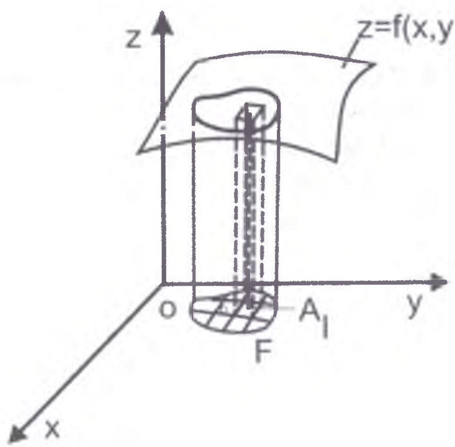
1-§. Ikki karrali integral tushunchasi

1. Ikki karrali integral tushunchasiga olib keladigan masalalar.

Silindrik g‘o‘laning hajmi haqidagi masala.

Egri chiziqli trapetsiyaning yuzi to‘g‘risidagi masala aniq integral tushunchasini kiritishga keltirilgani singari silindrik g‘o‘laning hajmi haqidagi masala bizni yangi tushunchaga-ikki karrali integral tushunchasiga olib keladi.

Yuqoridan $z=f(x,y)$ sirt (bu yerda $f(x,y)$ funksiya D sohada uzluksiz va $f(x,y)\geq 0$) quyidan kvadratlanuvchi yopiq D soha va yon tomonlaridan yo‘naltiruvchisi D sohaning chegarasi yopiq Γ chiziqdan va yasovchilari $0z$ o‘qqa parallel bo‘lgan T jismni qaraylik (1-rasm)



1-rasm

Yopiq D sohani n ta kvadratlanuvchi $D_1, D_2, ..., D_i, ..., D_n$ sohalarga ajratamiz (oddiy yopiq konturlar yordamida). Ularning yuzalarini mos ravishda $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, .., \Delta\sigma_i, ..., \Delta\sigma_n$ orqali belgilaylik. Har bir D_i

bo'lakchadan bittadan $A_i(\xi_i,\eta_i)$ nuqtalarni tanlab olib, ushbu ko'paytmalarni tuzamiz:

$$v_i = f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1,2,...,n)$$

Har bir ko'paytma asosi D_i balandligi $h_i = f(\xi_i,\eta_i)$ bo'lgan to'g'ri silindrning hajmini ifodalaydi. $V_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ yig'indi esa shunday figuralardan tuzilgan "pag'onali jism"ning hajmini ifodalaydi.

$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{diamD_i\}$ deb olaylik. λ nolga intilganda (shu bilan birga $n\to\infty$) yuqoridagi yig'indining limiti silindrik g'o'laning hajmini ifodalaydi, ya'ni $V = \lim\limits_{\lambda\to 0} V_n = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

Tekis moddiy figuraning massasi haqidagi masala.

Tekis moddiy D figurani qaraymiz. Geometrik jihatdan D figurani chegaralangan yopiq soha deb hisoblaymiz. Bu figuraning massasini hisoblash masalasini qaraymiz. Agar figura bir jinsli bo'lib, uning zichligi δ, yuzasi S bo'lsa, u holda uning massasi $m = S\cdot\delta$ formula bo'yicha hisoblanadi.

Faraz qilaylik, figura bir jinsli bo'lmasin. Plastinkaning har bir $M(x,y)$ nuqtasidagi zichligi $\delta = f(x,y)$ bo'lsin. D figurani o'zaro umumiy ichki nuqtalarga ega bo'lmagan yuzalari $\Delta\sigma_i$ $(i=1,2,...,n)$ bo'lgan n ta kvadratlanuvchi bo'lakchalarga bo'lamiz. Har bir D_i bo'lakchadan bittadan $A_i(\xi_i,\eta_i)$ nuqta tanlab olamiz. D_i bo'lakchaning massasi taqriban $\delta_i\cdot\Delta\sigma_i$ ga teng, $m_n = \sum_{i=1}^{n}\delta_i\Delta\sigma_i$ yig'indi taqriban plastinkaning massasiga teng.

$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{diam\,D_i\}$ deb olaylik. D figuraning massasi deb $m = \lim\limits_{\lambda\to 0} m_n = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ sonni qabul qilamiz.

2. Ikki karrali integral tushunchasi.

Biror yopiq kvadratlanuvchi D sohada aniqlangan va chegaralangan $z = f(x,y)$ funksiya berilgan bo'lsin. D sohani o'zaro umumiy ichki nuqtaga ega bo'lmagan kvadratlanuvchi

$D_1, D_2, ..., D_i, ..., D_n$ bo'lakchalarga ajratamiz. Ularning yuzalari mos ravishda $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_i, ..., \Delta\sigma_n$ bo'lsin. Har bir D_i bo'lakchadan ixtiyoriy ravishda bittadan $A_i(\xi_i, \eta_i)$ nuqta olib, ushbu $\sum_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ yig'indini tuzamiz. Bu ko'rinishdagi ixtiyoriy yig'indini $f(x,y)$ funksiyaning D soha bo'yicha tuzilgan integral yig'indisi deyiladi.

Bo'lish usuli yoki tanlab olingan nuqta o'zgarishi bilan yig'indi o'zgarishi mumkin. Bunday yig'indilarni cheksiz ko'p usul bilan tuzish mumkin.

$\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{diam D_i\}$ deb olaylik.

Ta'rif. Agar $\lambda \to 0$ da $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ limit mavjud bo'lib, u D sohani bo'laklarga bo'lish usuliga, bo'lakchalardan $A_i(\xi_i, \eta_i)$ nuqtalarni tanlab olinishiga bo'g'liq bo'lmasa, bu limit $f(x,y)$ funksiyaning D soha bo'yicha olingan ikki karrali integrali deyiladi va $\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma$ ko'rinishda yoziladi. Bu holda $f(x,y)$ funksiya D sohada integrallanuvchi funksiya deyiladi.

Yuqoridagi masalalarga qaraydigan bo'lsak silindrik g'o'laning hajmi $V = \iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma$ ga teng. Agar D sohada $f(x,y) \equiv 1$ bo'lsa, u holda $\sum_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i = S$ (S-D sohaning yuzasi). Demak, D sohaning yuzasi $S = \iint\limits_{(D)} d\sigma$ ga teng. Xuddi shunga o'xshash moddiy figuraning massasi $m = \iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma$ formula yordamida hisoblanadi.

2-§. Ikki karrali integralning xossalari

Ikki karrali integral aniq integral xossalariga o'xshash ba'zi xossalarga ega. Ularning isbotlari aniq integral xossalarining isbotlariga o'xshash. Shu sababli ularni isbotlab o'tirmaymiz.

1°. Agar $f(x,y)$ funksiya D sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy o'zgarmas C uchun $Cf(x,y)$ funksiya ham D sohada integrallanuvchi bo'lib, $\iint\limits_{(D)} Cf(x,y)d\sigma = C\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma$ tenglik o'rinli.

2°. Agar $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ funksiyalarning har biri D sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f_1(x,y) \pm f_2(x,y)$ funksiyalarning har biri D sohada integrallanuvchi bo'lib,

$$\iint\limits_{(D)} (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))d\sigma = \iint\limits_{(D)} f_1(x,y)d\sigma \pm \iint\limits_{(D)} f_2(x,y)d\sigma$$

tenglik o'rinli.

3°. Agar $f(x,y)$ va $g(x,y)$ funksiyalar D sohada integrallanuvchi bo'lib, $f(x,y) \le g(x,y)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma \le \iint\limits_{(D)} g(x,y)d\sigma$ tengsizlik o'rinli.

4°. Agar D sohada $f(x,y)$ funksiya integrallanuvchi bo'lsa, u holda $|f(x,y)|$ funksiya ham integrallanuvchi bo'lib, $|\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma| \le \iint\limits_{(D)} |f(x,y)|d\sigma$ tengsizlik o'rinli.

5°. Agar $f(x,y)$ funksiya yuzasi S bo'lgan bog'lamli D sohada uzluksiz bo'lsa, u holda shunday $(\xi,\eta) \in D$ nuqta topilib, $\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)S$ tenglik o'rinli.

6°. Agar D soha biror oddiy chiziq yordamida umumiy ichki nuqtalarga ega bo'lmagan D_1 va D_2 sohalarga ajratilgan bo'lib, $f(x,y)$ funksiya D_1 va D_2 sohalarni har birida integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(x,y)$ funksiya D sohada integrallanuvchi bo'lib, $\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)d\sigma$ tenglik o'rinli.

3-§. Uzluksiz funksiyalarni integrallanuvchanligi

Bu yerda integrallanuvchi funksiyalar sinfidan faqat uzluksiz funksiyalar sinfini qaraymiz.

1-teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya chegaralangan yopiq D sohada uzluksiz bo'lsa, u D sohada integrallanuvchi bo'ladi.

Isbot. Aytaylik $f(x,y)$ funksiya D sohada uzluksiz, m va M sonlar uning D sohadagi eng kichik va eng katta qiymatlari bo'lsin. D sohani $D_1, D_2, ..., D_n$ sodda sohalarga ajratamiz. $f(x,y)$ funksiya bo'lakchalarning har birida uzluksiz bo'ladi va D_i larda eng kichik va eng katta qiymatlarga ega. Ularni m_i va M_i $(i=1,2,...,n)$ orqali belgilaylik.

Quyidagicha yig'indilar tuzaylik: $s=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\sigma_i$ va $S=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\sigma_i$. Bu yig'indilar mos ravishda quyi va yuqori integral yig'indilar deyiladi.

s va S yig'indilar quyidagi xossalarga ega:

1°. D sohaning har bir bo'linishi uchun $s \le \sum_n \le S$ tengsizlik o'rinli.

2°. D sohaning bo'linish chiziqlari qatoriga yangi bo'linish chiziqlari (nol o'lchovli) qo'shish bilan yangi bo'linish hosil qilinganda quyi yig'indi kamaymaydi, yuqori yig'indi ortmaydi.

3°. D sohaning ixtiyoriy bo'linishiga mos kelgan yuqori yig'indi uning har bir bo'linishiga mos kelgan quyi yig'indidan kichik emas. Ya'ni, D sohani biror bo'linishiga mos kelgan yig'indilar s_1 va S_1, boshqa bo'linishga mos kelgan yig'indilarni s_2 va S_2 desak, u holda $s_1 \le S_2$, $s_2 \le S_1$ bo'ladi.

4°. $f(x,y)$ funksiyaning D sohadagi barcha yuqori yig'indilari to'plami aniq quyi chegaraga ega, uni I deb olsak, u holda ixtiyoriy s va S yig'indilar uchun $s \le I \le S$ tengsizlik o'rinli.

Bu xossalarning isboti aniq integraldagi kabi isbotlanadi (o'quvchi mustaqil tekshirib ko'rishi mumkin).

Teoremaning isbotini davom ettiramiz. $f(x,y)$ funksiya chegaralangan yopiq D sohada uzluksiz bo'lgani uchun u shu sohada tekis uzluksiz bo'ladi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, ixtiyoriy (x',y') va $(x'',y'') \in D$ nuqtalar orasidagi masofa δ dan kichik bo'lganda

$$|f(x',y') - f(x'',y'')| < \frac{\varepsilon}{Q} \qquad (1)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda Q son D sohaning yuzasi.

D sohani har birining diametri δ dan kichik bo'ladigan D_i $(i=1,2,...,n)$ bo'lakchalarga bo'lamiz. U holda (1) ga binoan $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{Q}$ $(i=1,2,...,n)$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan ixtiyoriy s va S yig'indilar uchun $S-s=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\sigma_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta\sigma_i < \frac{\varepsilon}{Q}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i = \frac{\varepsilon}{Q}\cdot Q=\varepsilon$ ga ega bo'lamiz.

Yuqorida sanab o'tilgan xossalarga binoan $s \le I \le S$ va ixtiyoriy $\sum_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ integral yig'indi uchun $s \le \sum_n \le S$ (mos bo'linish uchun) tengsizlik o'rinli. Bu tengsizliklarni taqqoslab, $|\sum_n - I| \le S-s$ tengsizlikni hosil qilamiz. $S-s<\varepsilon$ bo'lganligidan $|\sum_n - I| < \varepsilon$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan ta'rifga binoan $f(x,y)$ funksiyani D sohada integrallanuvchi ekanligi kelib chiqadi.

4-§. Ikki karrali integralni hisoblash

1.Takroriy integral.

D soha [a,b;c,d] to'g'ri burchakli to'rtburchak bo'lsin. Har bir tayin $x\in[a,b]$ uchun $\int_c^d f(x,y)dy$ integral mavjud bo'lsin. Har bir $x\in[a;b]$ songa $\int_c^d f(x,y)dy$ integralni mos qo'ysak [a;b] kesmada aniqlangan funksiyaga ega bo'lamiz va uni $\Phi(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ orqali belgilaymiz. Bu funksiya o'z navbatida [a;b] kesmada integrallanuvchi bo'lsin, ya'ni $\int_a^b \Phi(x)dx = \int_a^b(\int_c^d f(x,y)dy)dx$. Bu integral $f(x,y)$ funksiyaning takroriy integrali deyiladi va u $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$ ko'rinishida yoziladi. Xuddi shu kabi avval x bo'yicha keyin y bo'yicha olingan $\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy$ takroriy integralni ta'riflash mumkin.

Takroriy integral tushunchasini chegaralari o'zgaruvchi bo'lgan integrallar uchun ham umumlashtirish mumkin. $f(x,y)$ funksiya $D=\{(x,y): a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ sohada aniqlangan, bu yerda $y=\varphi_1(x)$ va $y=\varphi_2(x)$ [a;b] kesmada uzluksiz funksiyalar. Agar $f(x,y)$ funksiya har bir tayin $x \in [a;b]$ uchun $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ funksiyaga ega bo'lamiz. $\Phi(x)$ funksiya [a;b] kesmada integrallanuvchi bo'lsa, $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ takroriy integralga ega bo'lamiz. Xuddi shu kabi $\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ takroriy integralni kiritish mumkin.

2. Integrallash sohasi to'g'ri to'rt burchak bo'lgan hol

Teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya $D=\{(x,y): a \le x \le b; c \le y \le d\}$ to'g'ri to'rtburchakda uzluksiz va har bir $x \in [a,b]$ uchun $\Phi(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ aniq integral mavjud bo'lsa, u holda $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$ takroriy integral ham mavjud bo'ladi va ushbu tenglik bajariladi:

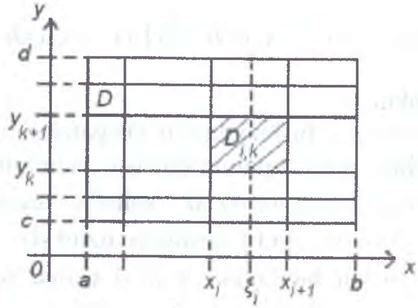
$$\iint_{(D)} f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \qquad (2)$$

Isbot. Agar [a;b] va [c;d] oraliqlarni

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b,$$

$$y_o = c < y_1 < y_2 < \ldots < y_k < y_{k+1} < \ldots < y_n = d$$

nuqtalar bilan bo'laklarga ajratsak, u holda D to'g'ri to'rtburchak mayda to'rtburchaklarga ajraladi (2-rasm).



2-rasm

$f(x,y)$ funksiyaning $D_{i,k}$ dagi aniq quyi va aniq yuqori chegaralarini mos ravishda $m_{i,k}$ va $M_{i,k}$ bilan belgilaymiz, unda bu to'g'ri to'rtburchakning barcha (x,y) nuqtalari uchun $m_{i,k} \le f(x,y) \le M_{i,k}$ bo'ladi. $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqda x ni ixtiyoriy tarzda $x = \xi_i$ deb tasvirlab, y bo'yicha $[y_k, y_{k+1}]$ oraliqda integrallasak, u holda $m_{i,k}\Delta y_k \le \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)dy \le M_{i,k}\Delta y_k$ ga ega bo'lamiz, bunda $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$.

Bu tengsizliklarni k bo'yicha 0 dan m-1 gacha yig'ib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\Delta y_k \le \Phi(\xi_i) = \int\limits_c^d f(\xi_i, y)dy \le \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k}\Delta y_k .$$

Endi har bir hadni $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ga ko'paytirib, so'ngra i boyicha 0 dan n-1 gacha qo'shib chiqsak,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\Delta y_k \le \sum_{i=0}^{n-1}\Phi(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k}\Delta y_k$$

hosil bo'ladi.

O'rtadagi miqdor $\Phi(x)$ funksiya uchun integral yig'indidir. Ikki chetdagi yig'indilar esa $\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma$ integral uchun s va S Darbu yig'indilaridir.

Shunday qilib, oxirida quyidagiga ega bo'lamiz:

$$s \le \sum_{i=0}^{n-1}\Phi(\xi_i)\Delta x_i \le S .$$

Endi Δx_i va Δy_k larni bir paytda nolga intiltiramiz. $f(x,y)$ funksiya D sohada integrallanuvchi bo‘lgani uchun $\lim s = \lim S = \iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma$, shunday ekan, $\lim\sum\limits_{i=0}^{n-1}\Phi(\xi_i)\Delta x_i = \iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma$ bo‘ladi. Bundan $\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma = \int\limits_a^b \Phi(x)dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$ tenglikka ega bo‘lamiz.

Ravshanki, o‘zgaruvchi x va y larning o‘rinlarini almashtirib, $y = const$ bo‘lganda $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ integral mavjud degan shart bilan

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx \qquad (3)$$

formulani ham isbotlash mumkin.

Eslatma. Agar ikki karrali integral bilan birga ikkala oddiy integrallar $\int\limits_c^d f(x,y)dy\ (x = const)$ va $\int\limits_a^b f(x,y)dx\ (y = const)$ ham mavjud bo‘lsa, u holda ikkala (2) va (3) formulalar ham o‘rinli bo‘ladi, bundan esa

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx. \qquad (4)$$

Agar $f(x,y)$ funksiya uzluksiz bo‘lsa, u holda yuqoridagi formulalarning barchasi o‘rinli bo‘ladi. (2) formulani isbotlaganda D to‘rtburchakni koordinata o‘qlariga parallel chiziqlar bilan maydalab, yuzalari $\Delta x_i\Delta y_i$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak ko‘rinishdagi elementlar olinishi tabiiy bo‘lar edi. Ikki karrali integral simvolida uning ana shu usul bilan hosil qilinganini ko‘rsatish uchun $\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma$ o‘rniga ko‘pincha $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$ (yoki $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dydx$) ni yozish mumkin.

1–misol. $\iint\limits_{(D)}(4-x^2-y^2)dxdy$ ikki karrali integralni hisoblang. Bunda $D - x=0, x=1, y=0, y=\frac{3}{2}$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan to‘g‘ri to‘rtburchak.

Yechish.

$$\iint\limits_{(D)}(4-x^2-y^2)dxdy=\int\limits_0^{\frac{3}{2}}\Big(\int\limits_0^1(4-x^2-y^2)dx\Big)dy=\int\limits_0^{\frac{3}{2}}\Big(4x-\frac{x^3}{3}-y^2x\Big)\Big|_0^1dy=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{3}{2}}\Big(3\frac{2}{3}-y^2\Big)dy=\Big(3\frac{2}{3}y-\frac{y^3}{3}\Big)\Big|_0^{\frac{3}{2}}=\frac{35}{8}$$

2-Misol. $\iint\limits_{(D)}x\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2 y}\;dxdy$ integralni hisoblang.

Bunda $D - x=0, x=1, y=\frac{\pi}{4}, y=\frac{\pi}{2}$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan to‘g‘ri to‘rtburchak.

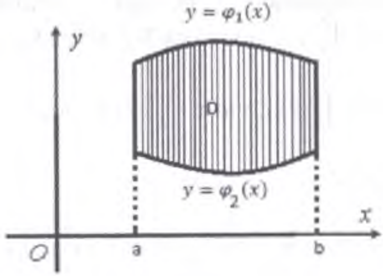
Yechish.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}dy\int\limits_0^1 x\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2 y}\;dx=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sin^2 y}\cdot\frac{2}{3}(1+(x^2-1)\sin^2 y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1dy=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^3 y}{\sin^2 y}dy=\frac{1}{3}\Big(-ctgy+\frac{1}{\sin y}+\sin y\Big)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

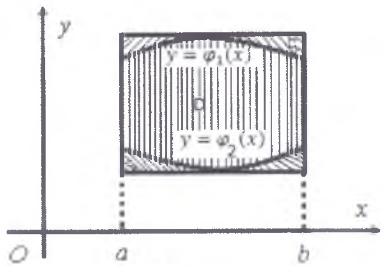
3.Soha egri chiziq bilan chegaralangan hol

D soha yon tomonlaridan x=a va x=b to‘g‘ri chiziqlar, quyidan $y=\varphi_1(x)$, yuqoridan $y=\varphi_2(x)$ chiziqlar ($\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ lar [a;b] kesmada uzluksiz) bilan chegaralangan yopiq soha bo‘lsin (3-rasm).



3-rasm

Bunday sohani 1-tip sodda soha deymiz. D sohaning chegarasi nol o'lchovli chiziq, ya'ni kvadratlanuvchi. $y=\varphi_1(x)$ va $y=\varphi_2(x)$ funksiyalar [a;b] yopiq oraliqda uzluksiz bo'lganliklari uchun ular shu oraliqda eng kichik va eng katta qiymatlarga ega. $\varphi_1(x)$ funksiyaning eng kichik qiymati c, $\varphi_2(x)$ funksiyaning eng katta qiymati d bo'lsin. D soha $D'=\{(x,y): a\le x\le b; c\le y\le d\}$ to'g'ri to'rtburchakda to'la joylashgan (4-rasm) D' sohada aniqlangan quyidagi $f(x,y)$ funksiyani tuzib olamiz:



4-rasm

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, \; agar \; (x,y)\in D_1, \\ f(x,y), \; agar \; (x,y)\in D, \\ 0, \; agar \; (x,y)\in D_2 \end{cases}$$

Bu funksiya D_1, D, D_2, D' sohalarning har birida integrallanuvchi, chunki $f(x,y)$ funksiya D' sohaning $y=\varphi_1(x)$ va $y=\varphi_2(x)$ (nol o'lchovli) chiziqlardan boshqa nuqtalarida uzlulksiz. $\iint\limits_{(D_1)} f(x,y)d\sigma = 0 = \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)d\sigma$ va 3-§, 6° ga binoan

$$\iint\limits_{(D')} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma$$

D'-to'g'ri to'rtburchak bo'lgani uchun oldingi teoremagadan

$$\iint\limits_{(D')} f(x,y)d\sigma = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^{\varphi_1(x)} f(x,y)dy + \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy + \int\limits_{\varphi_2(x)}^{d} f(x,y)dy \right)dx$$

tenglikka ega bo'lamiz.

$f(x,y)$ funksiyaning aniqlanishiga ko'ra, $\int\limits_c^{\varphi_1(x)} f(x,y)dy = 0$ va $\int\limits_{\varphi_2(x)}^{d} f(x,y)dy = 0$ bo'lib, $\int\limits_{(D')} f(x,y)d\sigma = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right)dx$ ga ega bo'lamiz.

Bu tengliklardan

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (5)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Agar D soha $x=\psi_1(y), x=\psi_2(y)$ chiziqlar ($\psi_1(y),\psi_2(y)$ lar [c,d] oraliqda uzluksiz va $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$) va y=c, y=d to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan soha bo'lsa, bunday soha 2-tip soha deyiladi. Yuqoridagi mulohazalardan foydalanib

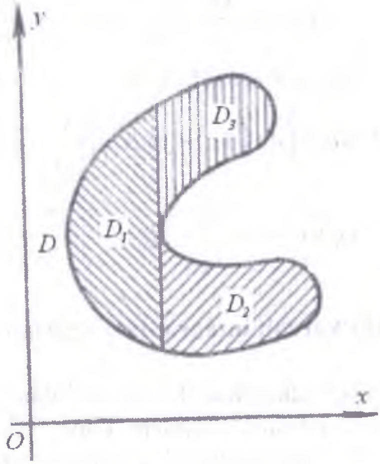
$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (6)$$

tenglikni isbotlash mumkin.

Agar soha ham 1-tip, ham 2-tip soha bo'lsa, u holda (5) va (6) tengliklarni ikkalasi ham o'rinli bo'ladi.

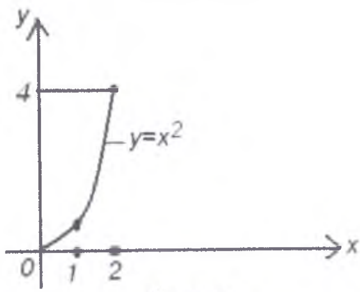
$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

Ba'zida D soha 1-tip soha ham, 2-tip soha ham bo'lmasligi mumkin. Bunday holda D sohani birinchi va ikkinchi tip sohalarga ajratib, keyin integrallashni bajarish mumkin (5-rasm).



5-rasm

3-misol. $\iint\limits_{(D)} (x^2 - y)dxdy$ integralni hisoblang, bu yerda D $x=0, y=4$ to'g'ri chiziqlar va $y=x^2$ parabola bilan chegaralangan soha (6-rasm).



6-rasm

Yechish. Bu yerda D ham 1-tip, ham 2-tip soha bo'lganligi uchun integralni (5) formula bo'yicha ham, (6) formula bo'yicha ham hisoblash mumkin.

(5) formula bo'yicha hisoblaylik.

$$\iint_{(D)} (x^2-y)dxdy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^4 (x^2-y)dy = \int_0^2 (x^2 y - \frac{y^2}{2})\Big|_{x^2}^4 dx =$$

$$= \int_0^2 (4x^2 - \frac{x^4}{2} - 8)dx = (\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{10} - 8x)\Big|_0^2 = -\frac{128}{15}$$

(6) formula bo'yicha hisoblaylik.

$$\iint_{(D)} (x^2-y)dxdy = \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} (x^2-y)dx = \int_0^4 (\frac{x^3}{3} - xy)\Big|_0^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int_0^4 (\frac{y\sqrt{y}}{3} - y\sqrt{y})dy = -\frac{2}{3}\int_0^4 y^{\frac{3}{2}} dy = -\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 = -\frac{128}{5}$$

5-§. Ikki karrali integralda o'zgaruvchlarni almashtirish

Aytaylik, Oxy tekislikda L chiziq bilan chegaralangan D soha berilgan bo'lsin (7-rasm). Ikkinchi Ouv tekislikda L' chiziq bilan chegaralangan D' soha berilgan bo'lsin (8-rasm).

Endi D' sohani D sohaga quyidagicha akslantirishni qaraylik:

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v) \qquad (1)$$

1) $\varphi(u,v), \psi(u,v)$ lar bir qiymatli, uzluksiz va uzluksiz xususiy hosilalarga ega;

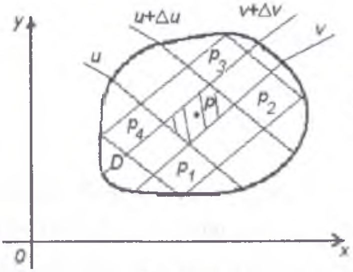
2) x va y larga aniq qiymatlarni qo'ysak, u holda (1) sistemani qanoatlantiruvchi aniq u va v lar mavjud.

3) D' sohaning chegarasi L' chiziq D sohaning chegarasi L chiziqqa o'tsin.

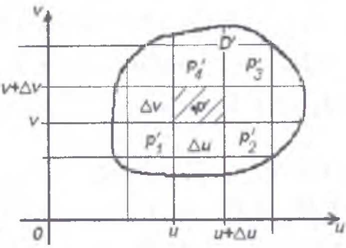
Bu holda (1) sistema D va D' sohalar orasida o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'ladi. Bunday akslantirish teskari akslantirishga ega, uni

$$u = \overline{\varphi}(x,y),\ v = \overline{\psi}(x,y) \qquad (2)$$

orqali belgilaylik.



7-rasm



8-rasm

D' sohada $u = const$ chiziqni qaraylik. (1) formulaga binoan unga Oxy tekislikda biror chiziq (umuman olganda to'g'ri chiziq bo'lmasligi mumkin) mos keladi. Xuddi shu kabi $v = const$ to'g'ri chiziqqa Oxy tekislikda biror chiziq mos qo'yiladi.

$u = const$ va $v = const$ to'g'ri chiziqlar yordamida D' sohani to'g'ri to'rtburchaklarga bo'lamiz (bu yerda D' sohani chegarasiga teguvchi bo'lakchalarni hisobga olmaymiz). Bu to'g'ri chiziqlarga mos kelgan chiziqlar yordamida D soha egri chiziqli to'rtburchaklarga bo'linadi (7-rasm).

Ouv tekislikda $u = const, u + \Delta u = const, v = const, v + \Delta v = const$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri to'rturchakning yuzini $\Delta s'$, Oxy tekislikda unga mos kelgan egri chiziqli to'rtburchakning yuzini Δs orqali belgilaylik. U holda $\Delta s' = \Delta u \cdot \Delta v$. Umuman olganda Δs va $\Delta s'$ lar turlicha bo'lishi mumkin.

D sohada uzluksiz $z = f(x,y)$ funksiya berilgan bo'lsin. $z = f(x,y)$ funksiyaning $(x,y) \in D$ nuqtadagi qiymatiga D' sohaning (2) sistema bo'yicha aniqlangan (u,v) nuqtadagi unga teng $z = F(u,v)$ qiymati mos keladi, bunda $F(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$.

$z = f(x,y)$ funksiyaning D soha bo'yicha integral yig'indisini qaraylik:

$$\sum f(x,y)\Delta s = \sum F(u,v)\Delta s' \; (3)$$

Oxy tekislikdagi $P_1P_2P_3P_4$ egri chiziqli to'rtburchakning yuzasi Δs ni hisoblaymiz (7-rasm).

To'rtburchakning koordinatalarini aniqlaylik:

$$\begin{aligned}
&P_1(x_1,y_1),\ x_1=\varphi(u,v),\ y_1=\psi(u,v)\\
&P_2(x_2,y_2),\ x_2=\varphi(u+\Delta u,v),\ y_2=\psi(u+\Delta u,v)\\
&P_3(x_3,y_3),\ x_3=\varphi(u+\Delta u,v+\Delta v),\ y_3=\psi(u+\Delta u,v+\Delta v)\\
&P_4(x_4,y_4),\ x_4=\varphi(u,v+\Delta v),\ y_4=\psi(u,v+\Delta u)
\end{aligned} \tag{4}$$

$P_1P_2P_3P_4$ egri chiziqli to'rtburchakning yuzasini hisoblashda P_1P_4 va P_2P_3, P_3P_4 va P_2P_1 chiziqlarni o'zaro parallel, funksiyalarning orttirmalarini ularning mos differensiallari bilan almashtiramiz. U holda (4) formulalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned}
&x_1=\varphi(u,v),\ y_1=\psi(u,v)\\
&x_2=\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u,\ y_2=\psi(u,v)+\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\\
&x_3=\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v,\ y_3=\psi(u,v)+\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\\
&x_4=\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v,\ y_4=\psi(u,v)+\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v
\end{aligned} \tag{5}$$

Yuqoridagi kelishuvga binoan $P_1P_2P_3P_4$ egri chiziqli to'rtburchakni parallelogram deb qarash mumkin. Geometriyadan ma'lumki, bu paralelogramning yuzasi $\Delta s\approx\left|(x_3-x_1)(y_3-y_2)-(x_3-x_2)(y_3-y_1)\right|=$

$$=\left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta u\cdot\Delta v-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\cdot\Delta v\right|=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|\Delta u\cdot\Delta v=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\end{matrix}\right\|\Delta u\cdot\Delta v$$

Quyidagicha belgiash kiritamiz: $\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\end{matrix}\right\|=I$

Bu determinant $\varphi(u,v), \psi(u,v)$ funksiyalarning Yakobi determinanti yoki Yakobiani deyiladi.

Shunday qilib,

$$\Delta s \approx |I|\Delta s'. \qquad (6)$$

Bu tenglik taqribiy tenglik bo'lib, Δs va $\Delta s'$ yuzalar qancha kichik bo'lsa, u shunchalik aniq tenglik bo'la boshlaydi. Δs va $\Delta s'$ bo'lakchalarning diametrlari nolga intilganda (6) tenglik haqiqiy tenglikka aylanadi, ya'ni $\lim \frac{\Delta s}{\Delta s'} = |I|$.

Endi olingan tenglikni ikki karrali integralni hisoblashga qo'llaymiz. (3) tenglikka binoan $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \approx \sum F(u,v)|I|dudv$ tenglikni hosil qilamiz va $diam\Delta s' \to 0$ da limitga o'tsak,

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D')} F(u,v)|I|dudv$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu esa ikki karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish formulasi deyiladi.

Qutb koordinatalarda ikki o'lchovli integralni ko'rib o'taylik.

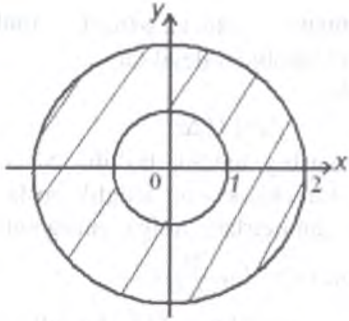
$u=\theta, v=\rho$ desak: $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$ bo'ladi.

Bundan Yakobian $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\rho} \\ \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta & \cos\theta \\ \rho\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -\rho$

Yakobian $|I| = \rho$ bo'lib, bundan ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D')} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

Misol. $\iint\limits_{(D)} \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$ ikki karrali integralni hisoblang. Bunda $D - x^2+y^2=1\ va\ x^2+y^2=4$ aylanalar bilan chegaralangan halqa (9-rasm).



9-rasm

Yechish.

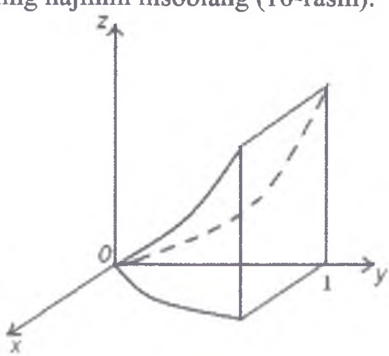
$$\iint\limits_{(D)}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy=\iint\limits_{(D')}\sqrt{1-(\rho\cos\theta)^2-(\rho\sin\theta)^2}\,\rho d\rho d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^2\sqrt{4-\rho^2}\,\rho d\rho=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot(-\frac{1}{3}(4-\rho^2))^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=2\pi\sqrt{3}$$

6-§. Ikki karrali integralning ba'zi tatbiqlari

1. Hajmlarni hisoblash. Ikki karrali integral ta'rifi mavzusida silindrik g'o'lani hajmi $V=\iint\limits_{(D)}f(x,y)d\sigma$ formula bo'yicha hisoblanishi keltirilgan edi.

1-misol. y=1, x=0, z=0 tekisliklar, $y=x^2, z=x^2+y^2$ sirtlar bilan chegaralangan jismning hajmini hisoblang (10-rasm).



10-rasm

Yechish. Yuqoridagi formulaga binoan

$$V=\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^1(x^2+y^2)dy=\int\limits_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^1 dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_0^1=\frac{44}{105}\quad \text{(kub birlik)}$$

2. Tekis figuralar yuzalarini hisoblash. Agar $f(x,y)\equiv 1$ bo'lsa, u holda tekis figura yuzasini topish formulasi $S=\iint\limits_{(D)}dxdy$ ekanligi ma'lum edi. Qutb koordinatalar sistemasida bu formula quyidagicha bo'ladi: $S=\iint\limits_{(D')}\rho d\rho d\varphi$.

2-misol. $a^2x^2-b^2y^2=x^4$ $(a>b>0)$ chiziq bilan chegaralangan figuraning yuzasini hisoblang.

Yechish. Chiziq koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik. Yuzani qutb koordinatalariga o'tib hisoblash ma'qul.

$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ larni $a^2x^2-b^2y^2=x^4$ tenglikka qo'ysak, chiziq tenglamasi $\rho^2\cos^4\theta=a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta$ ko'rinishni oladi. Bundan $\rho^2=\dfrac{a^2-b^2tg^2\theta}{\cos^2\theta}$, $\rho^2\ge 0$ bo'lgani uchun $a^2-b^2tg^2\theta\ge 0$ bo'ladi, bundan birinchi chorakdagi nuqtalar bilan cheklanib, $tg\theta\le\dfrac{a}{b}$, $0\le\theta\le arctg\dfrac{a}{b}$ larni topamiz.

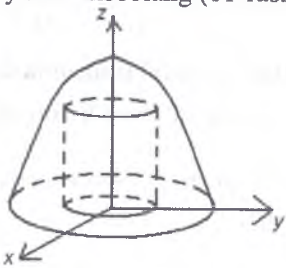
$$S=\iint\limits_{(D)}dxdy=4\int\limits_0^{arctg\frac{a}{b}}d\theta\int\limits_0^{\sqrt{\frac{a^2-b^2tg^2\theta}{\cos^2\theta}}}\rho d\rho=2\int\limits_0^{arctg\frac{a}{b}}\frac{a^2-b^2tg^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta=$$

$$=2\int\limits_0^{arctg\frac{a}{b}}(a^2-b^2tg^2\theta)d(tg\theta)=2(a^2tg\theta-\frac{b^2}{3}tg^3\theta)\Bigg|_0^{arctg\frac{a}{b}}=\frac{4a^3}{3b}kv.b.$$

3. Ikki karrali integral yordamida sirt yuzalarini hisoblash. Sirt D sohada aniqlangan $z=f(x,y)$ funksiya yordamida berilgan bo'lsin. Agar $z=f(x,y)$ funksiya D sohada uzluksiz $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda sirt yuzasi

$$s=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2}\,dxdy$$ formula yordamida hisoblanadi (o'quvchiga mustaqil o'rganishni tavsiya qilamiz).

3-Misol. $x^2+y^2+z^2=4$ $(z\geq 0)$ yarim sferani $x^2+y^2=1$ silindr bilan kesilgan qismining yuzini hisoblang (11-rasm).



11-rasm

Yechish. D soha $x^2+y^2=1$ doira, sirt tenglamasi $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ dan iborat. $z'_x=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $z'_y=\dfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$. Demak,

$$s=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}\,dxdy=2\iint\limits_{(D)}\frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

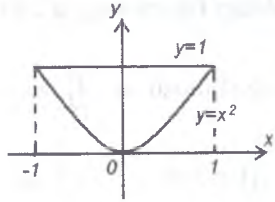
qutb koordinatalariga o'tsak,

$4-x^2-y^2=4-(\rho\cos\theta)^2-(\rho\sin\theta)^2=4-\rho^2$ ni hosil qilamiz. $(\rho=1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi)$. U holda,

$$s=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}=2\cdot\int_0^{2\pi}(-\sqrt{4-\rho^2})\Big|_0^1=4\pi(2-\sqrt{3})$$ (kvadrat birlik).

4. Moddiy figura massasini hisoblash. 2-§ da moddiy figura massasi $m=\iint\limits_{(D)}\delta(x,y)dxdy$ formula bo'yicha hisoblanishi ko'rib o'tilgan edi.

4-misol. $y=x^2$ parabola va y=1 to'g'ri chiziq bilan chegaralangan plastinkaning har bir nuqtadagi zichligi uning ordinatasiga teng bo'lsa, uning massasini hisoblang (12-rasm)



12-rasm.

Yechish. Masala shartiga ko'ra $\delta(x,y)=y$ bo'lgani uchun $m=\iint\limits_{(D)} ydxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}ydy=\int\limits_{-1}^{1}\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{1}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(1-x^4)dx=\frac{1}{2}(x-\frac{x^5}{5})\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{5}$

5. Tekis figuraning og'irlik markazi. Figuraning har bir (x,y) nuqtadagi zichligi D sohada uzluksiz $\delta(x,y)$ funksiyadan iborat bo'lsin. D sohani n ta sodda $D_i(i=1,2,...,n)$ bo'laklarga bo'lamiz. Ularning yuzalari $\Delta\sigma_i$ $(i=1,2,...,n)$ bo'lsin. Har bir bo'lakchadan bittadan (ξ_i,η_i) nuqtalarni olib, quyidagi kasrlarni tuzamiz:

$$\bar{x}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\delta(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i},\quad \bar{y}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i\delta(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i}$$

Bo'lakchalarning diametrlarini eng kattasini λ deb olaylik. D sohaning og'irlik markazi koordinatalari x_c,y_c larni yuqoridagi kasrlarning $\lambda\to 0$ dagi limiti deb qarash tabiiy hol. Kasrlarning surat va maxrajlari $x\delta(x,y),y\delta(x,y)$ va $\delta(x,y)$ uzluksiz funksiyalarning integral yig'indilari bo'lgani uchun $x_c=\frac{\iint\limits_{(D)}x\delta(x,y)dxdy}{\iint\limits_{(D)}\delta(x,y)dxdy},\ y_c=\frac{\iint\limits_{(D)}y\delta(x,y)dxdy}{\iint\limits_{(D)}\delta(x,y)dxdy}$ bo'ladi. $\delta=const$ bo'lsa, u holda bir jinsli D sohaning og'irlik markazi koordinatalari $x_c=\frac{\iint\limits_{(D)}xdxdy}{s},\ y_c=\frac{\iint\limits_{(D)}ydxdy}{s}$ ko'rinishda bo'ladi, bu yerda s-D sohaning yuzasi.

5-misol. 4-misoldagi figuraning og'irlik markazi koordinatalarini toping (12-rasm).

Yechish. 1-misolga binoan $m=\iint\limits_{(D)}\delta(x,y)dxdy=\frac{4}{5}$.

$$\iint\limits_{(D)} x\delta(x,y)dxdy=\iint\limits_{(D)} xydxdy=\int\limits_{-1}^{1} xdx\int\limits_{x^2}^{1} ydx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\frac{xy^2}{2}\Big|_{x^2}^{1}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(x-x^5)dx=0$$

$$\iint\limits_{(D)} y\delta(x,y)dxdy=\iint\limits_{(D)} y.ydxdy=\iint\limits_{(D)} y^2dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}y^2dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\frac{y^3}{3}\Big|_{x^2}^{1}dx=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1}(1-x^7)dx=\frac{4}{7}$$

Demak,

$$x_c=\frac{\iint\limits_{(D)} xy(x,y)dxdy}{\iint\limits_{(D)} y(x,y)dxdy}=\frac{0}{4/5}=0,\quad y_c=\frac{\iint\limits_{(D)} y^2(x,y)dxdy}{\iint\limits_{(D)} y(x,y)dxdy}=\frac{4/7}{4/5}=\frac{5}{7}$$

7-§. Uch karrali integral

1. Kublanuvchi jismlar. Uch o'lchovli yevklid fazosida chegaralangan yopiq T soha berilgan bo'lsin. Unda to'la joylashgan ko'pyoqlikni M, ko'pyoqlikning hajmini σ orqali belgilaylik. T sohani o'zida saqlovchi ko'pyoqlikni M', ko'pyoqlikning hajmini σ' orqali belgilaylik.

Ixtiyoriy M va har bir M' uchun $M\subset M'$, demak $\sigma\le\sigma'$ tengsizlik o'rinli.

Bundan ko'rinadiki T da to'la joylashgan barcha ko'pyoqliklar hajmlarini to'plami $\{\sigma\}$ yuqoridan chegaralangan, uning aniq yuqori chegarasini $\underline{V}$ orqali belgilaylik. T ni o'zida saqlovchi barcha ko'pyoqliklar hajmlari to'plami $\{\sigma'\}$ quyidan chegaralangan, uning aniq quyi chegarasini $\overline{V}$ orqali belgilaylik.

Ta'rif. Agar $\underline{V}=\overline{V}$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda T kublanuvchi jism deyiladi va $V=\underline{V}=\overline{V}$ son uning hajmi deb qabul qilinadi.

Bu yerda ham kvadratlanuvchi figura kabi jismning kublanuvchi bo'lish kriteriyasini keltirish mumkin.

1-teorema. T jism kublanuvchi bo'lishi uchun, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olganda ham shunday ikkita $M\subset T$ va $M'\supset T$ ko'pyoqliklar mavjud bo'lib, $\sigma'-\sigma<\varepsilon$ tengsizlikning o'rinli bo'lishligi zarur va yetarlidir.

2. Uch karrali integral tushunchasi. Aytaylik, kublanuvchi yopiq T sohada aniqlangan chegaralangan $f(x,y,z)$ funksiya berilgan bo'lsin. T sohani o'zaro umumiy ichki nuqtalarga ega bo'lmagan T_i $(i=1,2,...,n)$ bo'lakchalarga bo'laylik, ularning hajmlarini Δv_i $(i=1,2,...,n)$ orqali belgilaylik. Har bir T_i bo'lakchada bittadan $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ nuqta tanlab olib, quyidagi yig'indini tuzaylik: $\sum_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$. Bu yig'indi $f(x,y,z)$ funksiyaning T soha bo'yicha integral yig'indisi deyiladi. $\lambda=\max\{diamT_i\}$ deb olaylik.

Ta'rif. Agar $\lambda\to 0$ da $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ mavjud bo'lib, u T sohani bo'laklarga bo'lish usuliga, bo'lakchalardan $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ nuqtalarni tanlab olinishiga bog'liq bo'lmasa, bu limitga $f(x,y,z)$ funksiyaning T soha bo'yicha olingan uch karrali integrali deyiladi va $\iiint\limits_{(T)}f(x,y,z)dv$ ko'rinishda yoziladi. Bu holda $f(x,y,z)$ funksiya T sohada integrallanuvchi deyiladi.

Ushbu teorema ikki karrali integraldagi kabi isbotlanadi.

2-teorema. Kublanuvchi yopiq T sohada uzluksiz bo'lgan $f(x,y,z)$ funksiya shu sohada integrallanuvchi bo'ladi.

Uch karrali integrallar quyidagi xossalarga ega:

1°. Agar $f(x,y,z)$ funksiya T sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy o'zgarmas c uchun $cf(x,y,z)$ funksiya ham T sohada integrallanuvchi bo'lib, $\iiint\limits_{(T)}cf(x,y,z)dv=c\iiint\limits_{(T)}f(x,y,z)dv$ tenglik o'rinli.

2°. Agar $f_1(x,y,z)$, $f_2(x,y,z)$ funksiyalarning har biri T sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f_1(x,y,z) \pm f_2(x,y,z)$ funksiyalarning har biri ham T sohada integrallanuvchi bo'lib,

$$\iiint\limits_{(T)} (f_1(x,y,z) \pm f_2(x,y,z))dv = \iiint\limits_{(T)} f_1(x,y,z)dv \pm \iiint\limits_{(T)} f_2(x,y,z)dv$$

tenglik o'rinli.

3°. Agar $f(x,y,z)$ va $g(x,y,z)$ funksiyalar T sohada integrallanuvchi bo'lib, $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dv \le \iiint\limits_{(T)} g(x,y,z)dv$ tengsizlik o'rinli.

4°. Agar $f(x,y,z)$ funksiya T sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $|f(x,y,z)|$ funksiya ham integrallanuvchi bo'lib, $|\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dv| \le \iiint\limits_{(T)} |f(x,y,z)|dv$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

5°. Agar $f(x,y,z)$ funksiya hajmi V bo'lgan bog'lamli T sohada uzluksiz bo'lsa, u holda shunday $(\xi,\eta,\zeta) \in T$ nuqta topilib, $\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dv = f(\xi,\eta,\zeta)V$ tenglik o'rinli.

6°. Agar T soha biror oddiy sirt yordamida umumiy ichki nuqtalarga ega bo'lmagan T_1 va T_2 sohalarga ajratilgan bo'lib, $f(x,y,z)$ funksiya T_1 va T_2 sohalarning har birida integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(x,y,z)$ funksiya T sohada integrallanuvchi bo'lib, $\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{(T_1)} f(x,y,z)dv + \iiint\limits_{(T_2)} f(x,y,z)dv$ tenglik o'rinli.

Bu xossalarning isbotini keltirib o'tirmaymiz (aniq integraldagi kabi isbotlanadi).

3. Uch karrali integralni hisoblash. a) T soha $a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ e \le z \le h$ parallelepipeddan iborat bo'lsin.

Agar $f(x,y,z)$ funksiya T sohada uzluksiz bo'lsa, u holda $\Phi(x,y) = \int\limits_e^h f(x,y,z)dz$ funksiya mavjud va $D - a \le x \le b,\ c \le y \le d$ to'g'ri to'rtburchakda uzluksiz va quyidagi formula o'rinli:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{(D)} \Phi(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D)} (\int\limits_{e}^{h} f(x,y,z)dz)dxdy$$

Bu yerda $\iint\limits_{(D)} (\int\limits_{e}^{h} f(x,y,z)dz)dxdy$ integral takroriy integral deyiladi

va uni $\iint\limits_{(D)} dxdy\int\limits_{e}^{h} f(x,y,z)dz$ ko'rinishda yoziladi.

Ikki karrali integral uchun quyidagi $\iint\limits_{(D)} \Phi(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx\int\limits_{c}^{d} \Phi(x,y)dy$ tenglik o'rinli edi, bundan $\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dv = \int\limits_{a}^{b} dx\int\limits_{c}^{d} dy\int\limits_{e}^{h} f(x,y,z)dr$ tenglikka ega bo'lamiz. Tenglikning o'ng tomoni takroriy integral deyiladi.

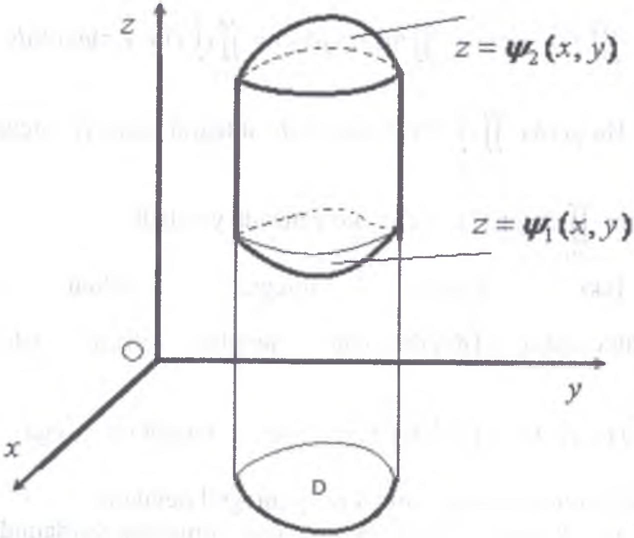
Uch karrali integrallarni quyidagi formulalar yordamida hisoblash mumkin:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dv = \int\limits_{c}^{d} dy\int\limits_{e}^{h} dz\int\limits_{a}^{b} f(x,y,z)dx,$$

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dv = \int\limits_{e}^{h} dz\int\limits_{c}^{d} dy\int\limits_{a}^{b} f(x,y,z)dx$$

va hokazo.

b) Endi integrallash sohasi quyidagicha bo'lsin: T quyidan $z=\psi_1(x,y)$ yuqoridan $z=\psi_2(x,y)$, yon tomonlaridan silindrik sirtlar bilan chegaralangan va uning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi kvadratlanuvchi D sohadan iborat bo'lsin (13-rasm).



13-rasm.

Agar $f(x,y,z)$ funksiya T sohada uzluksiz bo‘lsa, $\Phi(x,y)=\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ funksiya D sohada uzluksiz va quyidagi tenglik o‘rinli:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dv=\iint\limits_{(D)}\Phi(x,y)dxdy=\iint\limits_{(D)}dxdy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,.$$

Agar D soha x=a, x=b to‘g‘ri chiziqlar va $y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x)\le\varphi_2(x))$ chiziqlar bilan chegaralangan 1-tip soha bo‘lsa (5-§, 3), yuqoridagi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dv=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,.$$

Agar D soha 2-tip soha bo‘lsa, u holda $\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dv=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dx\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Integralni hisoblashda odatda dv ni o'rniga $dxdydz$ yoziladi, ya'ni

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz$$

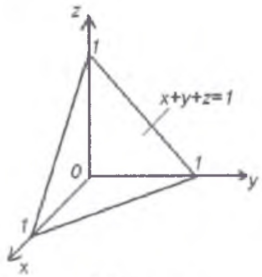
1-misol. $\iiint\limits_{(T)} (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ integralni hisoblang. Bu yerda T jism x=0, x=1, y=0, y=2, z=0, z=1 tekisliklar bilan chegaralangan parallelepiped.

Yechish. a) holda keltirib chiqarilgan formuladan foydalanamiz. U holda $\iiint\limits_{(T)} (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^1 (x^2+y^2+z^2)dz =$

$$= \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 (x^2z+y^2z+\frac{z^3}{3})\Big|_0^1 dy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 (x^2+y^2+\frac{1}{3})dy = \int\limits_0^1 (x^2y+\frac{y^3}{3}+\frac{y}{3})\Big|_0^2 dx =$$

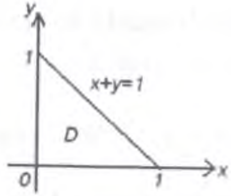
$$= \int\limits_0^1 (2x^2+\frac{8}{3}+\frac{2}{3})dx = (\frac{2x^3}{3}+\frac{10}{3}x)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}+\frac{10}{3} = 4.$$

2-misol. $\iiint\limits_{(T)} xyzdxdydz$ uch karrali integralni hisoblang. Bu yerda T soha x=0, y=0, z=0 va x+y+z=1 tekisliklar bilan chegaralangan piramida (14-rasm).



14-rasm

Yechish. T sohani Oxy tekisligiga proyeksiyalasak, D sohani hosil qilamiz (15-rasm).



15-rasm

$$\iiint\limits_{(T)} xyzdxdydz = \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} ydy \int_0^{1-x-y} zdz = \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} ydy \frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x-y} =$$

$$= \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} \frac{yz^2}{2}\Big|_0^{1-x-y} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 xdx \int_0^{1-x} y(1-x-y)^2 dy = \frac{1}{24}\int_0^1 x(1-x)^4 dx = \frac{1}{720}$$

8-§. Uch karrali integralda o'zgaruvchini almashtirish

xyz fazoda T soha, uvw fazoda T' soha berilgan bo'lsin (T va T' lar yopiq sohalar). Bu sohalar orasida

$$x = \varphi_1(u,v,w), y = \varphi_2(u,v,w), z = \varphi_3(u,v,w) \qquad (1)$$

sistema yordamida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lib,

$$u = \overline{\varphi_1}(x,y,z), v = \overline{\varphi_2}(x,y,z), w = \overline{\varphi_3}(x,y,z) \qquad (2)$$

sistema unga teskari almashtirish bo'lib, (1) va (2) dagi barcha funksiyalar birinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. Bu almashtirishda T sohaning chegarasi T' sohaning chegarasiga o'tishi va aksincha T' sohaning chegarasi T sohaning chegarasiga o'tishi zarur.

Ushbu determinant (1) sistemaning Yakobi determinanti yoki Yakobiani deyiladi:

$$I(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Bu determinantni hamma vaqt noldan farqli deb qaraymiz.

Yuqoridagi shartlar bajarilganda

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(T')} f(\varphi_1(u,v,w),\varphi_2(u,v,w),\varphi_3(u,v,w))\cdot|I|\,dudvdw$$

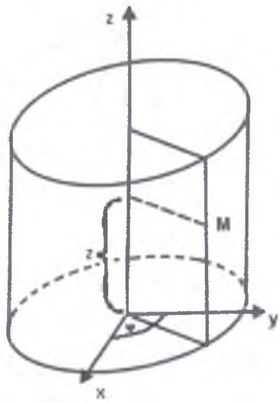
(3) tenglik o'rinli bo'ladi.

Silindrik koordinatalar.

Fazoda M(x, y, z) nuqta berilgan bo'lsin. Oxy tekislikda x,y koordinatalar o'rniga qutb koordinatalari r,φ kiritib, z ni o'zgartirmay qoldirsak, u holda M nuqtaning r,φ,z silindrik koordinatalariga ega bo'lamiz:

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z \quad (0 \le r < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty)$$

(16-rasm).



16-rasm.

Bu yerda koordinata sirtlari oilasi quyidagicha bo'ladi:

1) $r = r_0(const)$ bo'lsa, $x^2 + y^2 = r_0^2$ doiraviy silindrlar

2) $\varphi = \varphi_0(const) - 0z$ o'qi orqali o'tuvchi barcha yarim tekisliklar

3) $z = z_0(const) - 0xy$ tenglikka parallel bo'lgan tekisliklar.

Bu sistemaning Yakobianini hisoblaylik:

$$I(r,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

(3) formulaga binoan

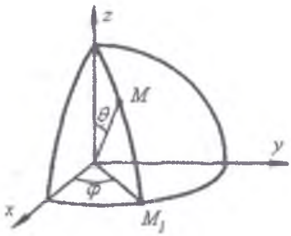
$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(T')} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz \qquad (4)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Sferik koordinatalar.

xyz fazodagi M(x,y,z) nuqtani o‘rnini quyidagicha ham aniqlash mumkin. M nuqtadan koordinata boshigacha bo‘lgan masofani r orqali, z o‘qining musbat yo‘nalishi 0M radius vektori orasidagi burchakni φ orqali belgilaylik. M nuqtani Oxy tekislikdagi proyeksiyasi M_1 nuqta bo‘lsin. x o‘qning musbat yo‘nalishi bilan OM_1 kesma orasidagi burchakni θ orqali belgilaylik: $0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta < 2\pi$

r, φ, θ lar M nuqtaning sferik koordinatalari deyiladi (17-rasm).



17-rasm

Bu yerda $x = OM_1 \cos\theta,\ y = OM_1 \sin\theta,\ OM_1 = OM \sin\varphi = r\sin\varphi$. Bundan $x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi$.

Bu yerda koordinata sirtlari oilasi quyidagicha bo‘ladi:

1) $r = r_0(const)$ – $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$ sferalar,

2) $\varphi = \varphi_0(const)$ – $x^2 + y^2 = z^2 tg^2\varphi_0$ yarim konuslar $(\varphi_0 \ne \frac{\pi}{2})$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ bo‘lsa, z o‘qining manfiy yo‘nalishi bo‘ladi.

3) $\theta = \theta_0(const)$ – $y = xtg\theta_0$ -Oz o‘qi orqali o‘tuvchi yarim tekislik $(\theta_0 \ne \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ va $= 0, y \ge 0, x = 0, y < 0$ yarim tekisliklar.

Yakobianni hisoblaymiz.

$$I(r,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=r^2\sin\varphi$$

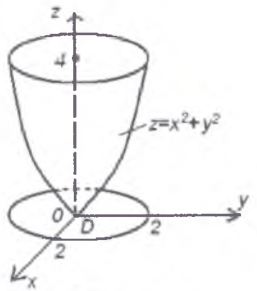
Bulardan (3) formulaga binoan,

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{(T')} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

(5)

tenglikni hosil qilamiz.

3-misol. $\iiint\limits_{(T)}\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ uch karrali integralni hisoblang, bu yerda T – $z=x^2+y^2$ paraboloid va z=4 tekislik bilan chegaralangan soha (18-rasm).



18-rasm

Yechish. Integralni silindrik koordinaatlarga o‘tib hisoblaymiz. T sohaning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi D – $x^2+y^2\le 4$ doiradan iborat. $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ larni yuqoridagi tengliklarga qo‘ysak, u holda $z=x^2+y^2$ paraboloidning teglamasi $z=(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=r^2$, ya’ni $z=r^2$ ko‘rinishni oladi. $x^2+y^2=4$ aylana esa r=2 ko‘rinishni, x^2+y^2 ifoda esa r^2 ko‘rinishni oladi. Topilganlarni hisobga olsak,

Yechish.

$$V=\iiint\limits_{(T)}dxdydz=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy\int_{0}^{3-x-y}dz=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(3-x-y)dy=$$

$$=\int_{-1}^{1}(3y-xy-\frac{y^2}{2})\Big|_{x^2}^{1}dx=\int_{-1}^{1}(3-x-\frac{1}{2}-3x^2+x^3+\frac{x^4}{2})dx=\frac{16}{5}$$

Jism massasini hisoblash.

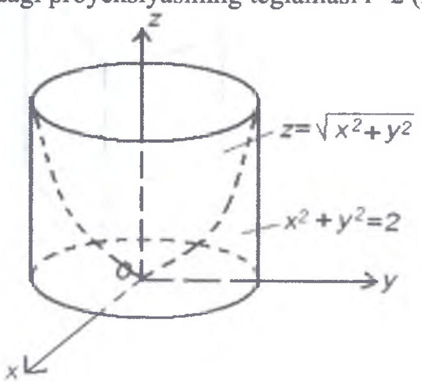
T sohaning har bir (x,y,z) nuqtasidagi zichligi $\delta(x,y,z)$ bo‘sin. Ikki karrali integraldagi kabi fikr yuritsak, uch karrali integralda jism massasini quyidagi $m=\iiint\limits_{(T)}\delta(x,y,z)dxdydz$ formula yordamida hisoblash kerakligini keltirib chiqarish mumkin.

6-misol. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konus, z=0 tekislik va $x^2+y^2=2$ silindr bilan chegaralangan jismning har bir nuqtasidagi zichligi shu nuqtadan Oz o‘qigacha bo‘lgan masofaga teng bo‘lsa, uning massasini toping.

Yechish. Shartga ko‘ra $\delta(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$ va $m=\iiint\limits_{(T)}\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ Silindrik koordinatalarga o‘tsak,

$$m=\iiint\limits_{(T')}r^2drd\varphi dz$$

Jism chegaralarining tenglamalari yuqoridan z=r, quyidan z=0, uning Oxy tekislikdagi proyeksiyasining teglamasi r=2 (21-rasm).



21-rasm

Jism Oxy, Oyz tekisliklarga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun

$$m = 4\int_0^{\pi} dx \int_0^{2} r^2 dr \int_0^{r} dz = 16\pi$$

Jism og'irlik markazining koordinatalari.

Aytaylik, T sohaning har bir (x,y,z) nuqtasidagi zichligi $\delta(x,y,z)$ funksiya bilan aniqlangan bo'lib, bu funksiya T sohada uzluksiz bo'lsin.

Ikki karrali integralda figura og'irlik markazlarini koordinatalarini topish mavzusidagi fikrlarni yuritib, uch karrali integral yordamida jism og'irlik markazi koordinatalarini aniqlovchi ushbu formulalarni keltirib chiqarish mumkin:

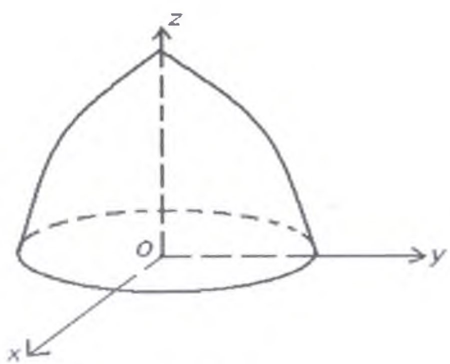
$$x_c = \frac{\iiint\limits_{(T)} x\delta(x,y,z)dxdydz}{m}$$

$$y_c = \frac{\iiint\limits_{(T)} y\delta(x,y,z)dxdydz}{m}$$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_{(T)} z\delta(x,y,z)dxdydz}{m}$$

Bu yerda m-T sohaning massasi.

7-misol. $z = 9 - x^2 - y^2$ parabola va z=0 tekislik bilan chegaralangan bir jinsli jismning og'irlik markazi koordinatalarini toping (22-rasm).



22-rasm

Yechish. Jism Oz o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘lgani uchun $x_c = y_c = 0$. Endi z_c ni topamiz. Jism massasi $m = \iiint\limits_{(T)} \gamma dxdydr = \gamma \iiint\limits_{(T)} dxdydr$ Bu yerda zichlik $\gamma = const$.

Integralni silindrik koordinatalarga o‘tib hisoblaymiz. Parabola tenglamasi $z = 9 - r^2$ ko‘rinishda bo‘ladi. Jismning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi D-chegarasi $x^2 + y^2 = 9$ aylanadan iborat doira bo‘ladi: $0 \le r \le 3,\ 0 \le \varphi < 2\pi$.

Demak, $m = \gamma \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 rdr \int\limits_0^{9-r^2} dr = 2\pi\gamma \int\limits_0^3 r(9 - r^2)dr = \dfrac{81\pi\gamma}{2}$

$$\iiint\limits_{(T)} \gamma zdxdydz = \gamma \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 rdr \int\limits_0^{9-r^2} zdz = 2\pi\gamma \int\limits_0^3 \frac{r(9-r^2)^2}{2} dr = \frac{243\pi\gamma}{2}$$

Shunday qilib $z_c = \dfrac{\iiint\limits_{(T)} \gamma zdxdydr}{\iiint\limits_{(T)} \gamma zdxdydz} = \dfrac{243\pi\gamma/2}{81\pi\gamma/2} = 3$

VI-bobga doir mashq va misollar

Takroriy integrallarni hisoblang (204-215).

204. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^1 xydy$;

205. $\int\limits_2^3 dx \int\limits_1^2 x^2 ydy$;

206. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_1^3 \dfrac{dx}{x^2}$;

207. $\int\limits_2^3 dy \int\limits_1^2 \dfrac{xdx}{y^2}$;

208. $\int\limits_2^4 dx \int\limits_0^{x^2} xdy$;

209. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x x^2 dy$;

210. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{y} x dx$;

211. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{y^3} \frac{4}{y^3} dx$;

212. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x (x^2 + 2xy) dy$;

213. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{y^2} (x + 2y) dx$;

214. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x e^{\frac{y}{x}} dx$;

215. $\int\limits_0^5 dx \int\limits_0^{5-x} \sqrt{4 + x + y}\, dy$.

$\iint\limits_D f(x,y) dxdy$ ilkki karrali integralni takroriy integralga keltiring (216-225)

216. $D: \begin{cases} y^2 = x \\ x = 1 \end{cases}$;

217. $D: \begin{cases} xy = 6 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases}$;

218. $D: \begin{cases} y^2 = x \\ y = x \end{cases}$;

219. $D: \begin{cases} y^2 = 4x \\ y \geq 0 \\ x = 4 \end{cases}$;

220. $D - x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchak;

221. $D - x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$;

222. $D - x + y \leq 1,\ x - y \leq 1,\ x \geq 0$;

223. $D - y \geq x^2,\ y \leq 4 - x^2$;

224. $D - y = x^2$ va $y = \sqrt{x}$ parabolalar bilan chegaralangan.

225. $D - y = x,\ y = x + 3,\ y = -2x + 1,\ y = -2x + 5$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan parallelogramm.

Berilgan misollarda integrallash tartibini o'zgartiring (226-233).

226. $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$;

227. $\int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$;

228. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$;

229. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy$;

230. $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y)dx$;

231. $\int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} f(x,y)dy$;

232. $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$;

233. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy$.

Ikki karrali integrallarni hisoblang (234-243).

234. $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, $D - x=3,\ x=4,\ y=1,\ y=2$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri burchakli to'rtburchak.

235. $\iint_D xydxdy,\ D - y=0,\ y=0,\ y=1-x^2$ chiziqlar bilan chegaralangan soha.

236. $\iint_D (x+y)dxdy,\ D - x=0,\ y=0,\ x+y=3$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchak.

237. $\iint_D x\sqrt{y}dxdy,\ D - y=1,\ y=x$ va $y=3x$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan soha.

238. $\iint_D x^3y^2dxdy,\ D - x^2+y^2 \le R$ doira.

239. $\iint_D (x^2+y)dxdy,\ D - y=x^2,\ y^2=x$ parabolalar bilan chegaralangan soha.

240. $\iint\limits_D xy^2 dxdy$, $D - y^2 = x$, $x = 1$ chiziqlar bilan chegaralangan soha.

241. $\iint\limits_D (x + y^2) dxdy$, $D - y^2 = x + 2$, $y = x$ chiziqlar bilan chegaralangan soha.

242. $\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy$, $D - x^2 + y^2 \le 1$ doiraning birinchi kvadrantdagi qismi.

243. $\iint\limits_D x^2 y^2 \sqrt{1 - x^3 - y^3} dxdy$, $D -$ koordinata o‘qlari va $x^3 + y^3 = 1$ chiziq bilan chegaralangan soha.

$\iint\limits_D f(x, y) dxdy$ integralda qutb koordinatalariga o‘ting (244-249).

244. $D - x^2 + y^2 \le R^2$ doira.

245. $D - x^2 + y^2 \le ax$ doira.

246. $D - x^2 + y^2 \le by$ doira.

247. $D - x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$ aylanalar; $y = x$ va $y = 2x$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan soha.

248. $D - x^2 + y^2 \le ax$ va $x^2 + y^2 \le by$ doiralarning umumiy qismi.

249. $D - y = x$, $y = 0$, $x = 1$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchak.

Qutb koordinatalariga o‘tib qo‘yidagi integrallarni hisoblang (250-255).

250. $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$, $D - x^2 + y^2 \le 9$ doiraning 1-kvadrantdagi qismi.

251. $\iint\limits_D y dxdy$, $D - x^2 + y^2 \le 1$ doiraning yuqori yarim qismi.

252. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $D - x^2 + y^2 \ge 1$, $x^2 + y^2 \le 4$ halqa.

253. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{1 + x^2 + y^2}$, $D - x^2 + y^2 \le 1$, $y \ge 0$ yarim doira.

254. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,\quad D - x^2+y^2 \le 4x$ doira.

255. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy$.

Berilgan chiziqlar bilan chegaralangan tekis figuralarning yuzalarini hisoblang (256-267).

256. $y=0$, $y=4$, $y=-x$, $y=\frac{x-1}{2}$;

257. $y=\frac{9}{x}$, $y=x$, $x=6$;

258. $y^2=-x,\ x=-4$;

259. $y=x^2$, $x+y=6$;

260. $y^2=2x,\ y=-x$;

261. $y^2=\frac{b^2}{a}x$, $y=\frac{b}{a}x$;

262. $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ x=4$;

263. $x^2+y^2-2ax=0$ va $x^2+y^2-2ay=0$ (Qutb koordinatalariga o'ting);

264. $x^2+y^2-2ax=0,\quad x^2+y^2-ax=0$;

265. $x^2+y^2=r^2,\ x^2+y^2-2ry=0$;

266. $\rho=3\cos\varphi$;

267. $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

Ko'rsatilgan sirtlar bilan chegaralangan jismlarning hajmlarini hisoblang (268-283).

268. $3x+2y+z-6=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

269. $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ x+z=4,\ z=0$;

270. $z=x^2+y^2, x+y=3,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

271. $z=x^2+y^2+1,\ x=4,\ y=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

272. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

273. $z=x^2+y^2,\ z=0,\ y=1,\ y=2x,\ y=6-x$;

274. $y=x^2,\ y+z=2,\ z=0$;

275. $x^2+y^2=1,\quad x+y+z=3,\quad z=0$;

276. $z=x^2-y^2,\quad x=1,\ y=0,\ z=0$;

277. $x^2+y^2=9, \quad x^2+z^2=9$;

278. $z=2-\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0$ (Qutb koordinatasiga o'ting).

279. $x^2+y^2=9, \quad z=5x, \quad z=0$;

280. $z=1-x^2-y^2, \quad y=x, \quad y=x\sqrt{3}, \quad z=0$ (I oktantdagi qismi).

281. $z=x^2+y^2, \quad x^2+y^2=2x, \quad z=0$;

282. $z=4-x^2-y^2, \quad z=\dfrac{2+x^2+y^2}{2}$;

283. $x^2+y^2+z-4=0, \quad z=0$.

Berilgan sirt bo'laklarining yuzini hisoblang (284-291).

284. $6x+3y+2z=12$ tengsizlikning I oktantdagi bo'lagi.

285. $x^2+y^2=R^2$ silindrning $z=0, z=H$ tekisliklar orasidagi bo'lagi.

286. $x^2+y^2=R^2$ silindrning $z=0, z=kx$ tekisliklar orasidagi bo'lagi.

287. $x^2+z^2=9$ silindrning $x^2+y^2=9$ silindr bilan kesilgan bo'lagi.

288. $x^2+y^2=2z$ paraboloidning $x^2+y^2=3$ silindr ichida joylashgan bo'lagi.

289. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konusning $x^2+y^2=2x$ silindr ichida joylashgan bo'lagi.

290. $z^2=x^2+y^2$ konusning $z^2=2py$ silindr bilan kesilgan bo'lagi.

291. $x^2+y^2+z^2=9$ sferaning $x^2+y^2=4$ silindr bilan kesilgan bo'lagi.

Quyidagi bir jinsli tekis figuraning og'irlik markazini koordinatalarini toping (292-295).

292. $D-y=x^2$ parabola va $x+y=2$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan soha.

293. $y=\sqrt{R^2-x^2}, \; y\geq 0$;

294. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \quad y\geq 0$;

295. $D - y = \sqrt{2x - x^2}$ va $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan soha.

Takroriy integrallarni hisoblang (296-299).

296. $\int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^4 (x + y + z)dz$;

297. $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^2 (z + 4)dz$;

298. $\int_0^2 dx \int_0^x dy \int_0^y xyzdz$;

299. $\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz$.

Uch karrali integrallarni hisoblang (300-309).

300. $\iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz,\ \ x = 0,\ \ x = a,\ \ y = 0,\ \ y = b,\ \ z = 0,\ \ z = c$;

301. $\iiint_G ydxdydz,\ \ x = 0,\ \ x = 2,\ \ y = 0,\ \ y = 1,\ \ z = 0,\ \ z = 1 - y$;

302. $\iiint_G xz^2dxdydz,\ \ x = \sqrt{2y - y^2},\ \ x = 2,\ \ y = 0,\ \ y = 2,\ \ z = 0,\ \ z = 3$;

303. $\iiint_G (2x + 3y - z)dxdydz,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ x + y = 3,\ \ z = 0,\ \ z = 4$;

304. $\iiint_G xyzdxdydz,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0,\ \ x + y + z = 1$;

305. $\iiint_G xy^2z^3dxdydz,\ \ x = 1,\ \ y = x,\ \ z = 0,\ \ z = xy$;

306. $\iiint_G z^2dxdydz,\ \ z = x^2 + y^2,\ \ z = 2,\ \ z = 6$;

307. $\iiint_G z^3dxdydz,\ \ z = 4 - x^2 - y^2,\ \ z = 0,\ \ z = 3$

308. $\iiint_G \frac{1}{z}dxdydz,\ (x - 1)^2 + y^2 = 1\ \ \ z = 3,\ \ z = 6$

309. $\iiint_G \frac{1}{z^2}dxdydz,\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ \ z = 1,\ \ z = 2$

Silindrlik koordinatalarga o‘tib uch karrali integralni hisoblang (310-313).

310. $\iiint_G (x^2 + y^2)dxdydz;\ \ G - z = \sqrt{9 - x^2 + y^2}$ yarim sfera va $z = 0$ tengsizlik bilan chegaralangan soha.

311. $\iiint_G z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz,\ G - x^2 + y^2 = 2x$ silindr va $z = 0,\ \ z = 3$ tekisliklar bilan chegaralangan soha.

312. $\iiint\limits_G zdxdydz$, $G - z^2 = x^2 + y^2$ konus va $z = 2$ tekislik bilan chegaralangan soha.

313. $\iiint\limits_G (x^2 + y^2)dxdydz$, $G - z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ aylanma paraboloid va $z = 2$ tengsizlik bilan chegaralangan soha.

Sferik koordinatalarga o'tib uch karrali integralni hisoblang (314-317).

314. $\iiint\limits_G x^2\,dxdydz$, $G - x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ shar.

315. $\iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$; $G - x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ shar.

316. $\iiint\limits_G z\,dxdydz$; $G - x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sfera va $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konus bilan chegaralangan soha (Konusning ichki qismi).

317. $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $G - x^2 + y^2 + z^2 = 4$ va $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ sferalar bilan chegaralangan soha.

Uch karrali integrallar yordamida ko'rsatilgan sirtlar bilan chegaralangan jisimlarning hajmlarini hisoblang (318-329).

318. $x = 0,\ y = 1,\ y = 3,\ z = 0,\ x + 2z = 3;$

319. $y = 4 - x^2,\ y = x^2 + 2,\ z = -1,\ z = 2;$

320. $y^2 = \frac{x}{2},\ x + 2y + z = 4,\ y = 0\ \ z = 0;$

321. $x^2 + y^2 = z + 1,\ \ z = 3;$

322. $x^2 + y^2 = 1,\ y + z = 2;$

323. $z = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2};$

324. $x^2 + y^2 = 9 - 2z, x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$ (silindrning tashqarisida).

325. $3z = 10 - x^2 - y^2,\ \ z = \sqrt{x^2 + y^2};$

326. $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 2x$ (silindrning ichi).

327. $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ \ x^2 + y^2 = 3x$ (paraboloidning ichi).

328. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x, \qquad a > 0;$

329. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz, \qquad a > 0.$

Bir jinsli jismlarning og'irlik markazlarining koordinatalarini toping (330-333).

330. $z=9-x^2-y^2$ paraboloid va $z=0$ tekislik bilan chegaralangan jism.

331. $z^2=xy,\ x=5,\ y=5,\ z=0$ sirtlar bilan chegaralangan jism.

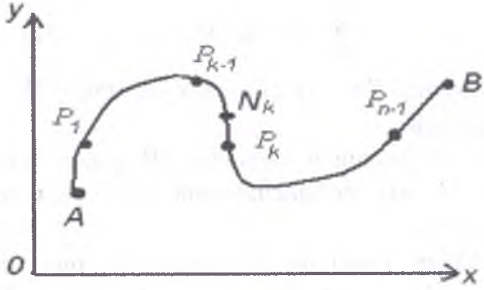
332. $x^2+y^2+z^2=3$ sfera va $x^2+y^2=2z$ paraboloid bilan chegaralangan jism.

333. $x^2+y^2+z^2=16$ sfera va $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konus bilan chegaralangan jism.

VII BOB. EGRI CHIZIQLI INTEGRALLAR

1-§. Birinchi tur egri chiziqli integrallar

1. Tekis moddiy yoy massasi haqidagi masala. Tekislikda to'g'rilanuvchi AB yoy berilgan bo'lib, uning har bir (x,y) nuqtasidagi chiziqli zichligi $\delta(x,y)$ bo'lsin (1-rasm).



1-rasm

Egri chiziq yoyi massasini topish talab qilinsin.

Shu maqsadda egri chiziqni $P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1}$ nuqtalar yordamida ixtiyoriy ravishda n ta bo'lakka bo'lamiz ($P_0 = A$, $P_n = B$ deb olamiz).

Egri chiziqning $P_{k-1}P_k$ yoyidan biror $N_k(\xi_k, \eta_k)$ nuqta olib, shu nuqtadagi zichlik $\delta(\xi_k, \eta_k)$ ni hisoblab chiqamiz. Bu yoyning barcha nuqtalardagi zichlik ham taqriban ana shu $\delta(\xi_k, \eta_k)$ ga teng deb hisoblasak va $P_{k-1}P_k$ yoy uzunligini Δs_k bilan belgilasak, bu yoyning massasi m_k uchun ushbu $m_k = \delta(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k$ taqribiy ifodani hosil qilamiz. Izlanayotgan umumiy massa uchun esa

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \delta(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k \qquad (1)$$

ifoda hosil bo'ladi.

Δs_k uzunliklarning eng kattasini λ bilan belgilab, limitga o'tsak, aniq $m = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \delta(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k$ formulaga ega bo'lamiz.

Matematika va mexanikadagi ko'pgina masalalarni yechish (1) ko'rinishdagi yig'indilarning limitini topishga olib keladi.

Umuman, shu xildagi limitlarni o'rganaylik. Shu maqsadda ko'rilayotgan masaladan bir oz chetga chiqamiz. Tekislikdagi to'g'rilanuvchi uzluksiz AB yoyda aniqlangan $f(x,y)$ funksiya olib, yuqorida tasvirlangan jarayonni takrorlaymiz: AB yoyni elementar $M_{k-1}M_k$ yoylarga ajratib, ularda bittadan $N_k=(\xi_k,\eta_k)$ nuqtalar tanlaymiz va funksiyaning shu nuqtalaridagi qiymatlari $f(\xi_k,\eta_k)$ larni hisoblab,

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k \qquad (2)$$

yig'indini tuzamiz, bu $f(x,y)$ funksiyaning AB yoydagi integral yig'indisi deyiladi.

(2) yig'indi umuman olganda AB yoyni bo'laklarga bo'lish usuliga va $M_{k-1}M_k$ bo'lakchalardan $N_k(\xi_k,\eta_k)$ nuqtalarni tanlab olinishiga bog'liq.

Ta'rif. Agar $\lambda\to 0$ da (2) integral yig'indi chekli limitga ega bo'lib, u AB yoyni bo'laklarga bo'lish usuliga va $P_{k-1}P_k$ bo'lakchalardan $N_k(\xi_k,\eta_k)$ nuqtalarni tanlab olinishiga bog'liq bo'lmasa, bu limit $f(x,y)$ funksiyadan AB yoyi uzunligi bo'yicha olingan birinchi tur egri chiziqli integrali deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $\int_{AB} f(x,y)ds$.

Bu holda $f(x,y)$ funksiya AB yoy boyicha integrallanuvchi deyiladi.

Bu yerda s-AB yoyning uzunligi va ds-elementar Δs_k uzunliklarni eslatadi.

Shunday qilib, yuqoridagi moddiy egri chiziqning massasi uchun chiqarilgan ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$m=\int_{AB}\delta(x,y)ds \qquad (3)$$

2. Birinchi tur egri chiziqli integrallarning hossalari

1°. Agar $f(x,y)$ funksiya AB yoy bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa, u holda $kf(x,y)$ funksiya ham AB yoy bo'yicha integrallanuvchi bo'lib, $\int_{AB} kf(x,y)ds = k\int_{AB} f(x,y)ds$ tenglik o'rinli.

2°. Agar $f_1(x,y)$ va $f_2(x,y)$ funksiyalarning har biri AB yoy bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f_1(x,y)\pm f_2(x,y)$ funksiyalar ham AB yoy bo'yicha integrallanuvchi bo'lib,

$$\int\limits_{AB}(f_1(x,y)\pm f_2(x,y))ds=\int\limits_{AB}f_1(x,y)ds\pm\int\limits_{AB}f_2(x,y)ds$$

tengliklar o'rinli.

3°. (additivlik xossasi). Agar AB yoy biror C nuqta orqali ikkita AC va CB yoylarga ajratilgan bo'lib, $f(x,y)$ funksiya AC va CB yoylarning har birirda integrallanuvchi bo'lsa, u holda u AB yoy bo'yicha ham integrallanuvchi bo'lib,

$$\int\limits_{AB}f(x,y)ds=\int\limits_{AC}f(x,y)ds+\int\limits_{CB}f(x,y)ds$$

tenglik o'rinli.

4°. Agar $\int\limits_{AB}f(x,y)ds$ integral mavjud bo'lsa, u holda $\int\limits_{BA}f(x,y)ds$ integral ham mavjud bo'lib, $\int\limits_{AB}f(x,y)ds=\int\limits_{BA}f(x,y)ds$ tenglik o'rinli.

Bu xossalarni integral yig'indi limiti sifatida osongina keltirib chiqarish mumkin.

3. Birinchi tur egri chiziqli integralni hisoblash

Egri chiziqdagi M nuqtaning holati boshlang'ich A nuqtadan hisoblangan $\breve{AP}$ yoy uzunligi s bilan aniqlanishi mumkin. U holda AB egri chiziq $x=x(s)$, $y=y(s)$, $(0\le s\le S)$ tenglamalar bilan parametrik ifodalanadi va egri chiziq nuqtalarida berilgan $f(x,y)$ funksiya esa o'zgaruvchi s ning murakkab funksiyasi $f(x(s),y(s))$ ga keltiriladi.

AB yoyning P_k bo'linish nuqtalariga mos s ning qiymatlarini s_k $(k=1,2,...,n)$ bilan belgilasak, ravshanki, $\Delta s_k=s_k-s_{k-1}$ bo'ladi. $P_{k-1}P_k$ yoydan ixtiyoriy tanlangan N_k nuqtaga mos kelgan s ning qiymatini σ_k orqali belgilasak, u holda (2) integral yig'indini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\sum_{k=1}^{n}f(x(\sigma_k),y(\sigma_k))\Delta s_k \qquad (4)$$

Bu $f(x(s),y(s))$ funksiyaga mos kelgan integral yig'indi va (2), (4) larga binoan, $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} f(x(\sigma_k),y(\sigma_k))\Delta s_k$ bo'ladi.

Agar $f(x,y)$ funksiya AB yoyda uzluksiz bo'lsa, u holda $x=x(s), y=y(s)$ funksiyalar [0;S] segmentda uzluksiz bo'lib, $\int\limits_{AB} f(x,y)ds$ va $\int\limits_{0}^{S} f(x(s),y(s))ds$ integrallar mavjud va

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = (R)\int\limits_{0}^{S} f(x(s),y(s))ds \qquad (5)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda (R) Riman ma'nosidagi integralni bildiradi.

a) AB yoy $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ parametrik tenglama bilan berilgan to'g'rilanuvchi chiziq bo'lsin. $\varphi(t),\psi(t),\varphi'(t),\psi'(t)$ funksiyalar $[\alpha;\beta]$ oraliqda uzluksiz bo'lsin. Agar $s=s(t)$ o'suvchi bo'lsa, u holda $s'(t)=\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}$ tenglik o'rinli.

(5) tenglikning o'ng tomonida o'zgaruvchini almashtirib,

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = (R)\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt \qquad (6)$$

formulani hosil qilamiz.

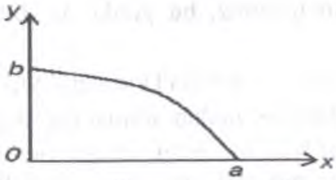
b) AB yoy $y=g(x)$ $(a \le x \le b)$ tenglama bilan berilgan bo'lib, $g(x)$ va $g'(x)$ lar $[a;b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda (6) formula

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = (R)\int\limits_{a}^{b} f(x,g(x))\sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx \qquad (7)$$

ko'rinishni oladi.

Agar chiziq $x=h(y)$ $(c \le y \le d)$ tenglik bilan berilgan bo'lsa, u holda $\int\limits_{AB} f(x,y)ds = (R)\int\limits_{c}^{d} f(h(y),y)\sqrt{1+(h'(y))^2}\,dy$ formulaga ega bo'lamiz.

1-misol. AB yoy $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ellipsning birinchi chorakda yotuvchi qismi bo'lsa, $\int\limits_{AB} xyds$ integralni hisoblang (2-rasm).



2-rasm

Yechish. (6) formuladan foydalanamiz:

$x'_t=-a\sin t, y'_t=b\cos t, \sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}$ va

$$\int_{AB} xyds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos tb\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\sin^2 t}dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{a^2\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\frac{1+\cos 2t}{2}}dt=\left|\begin{array}{c}\cos 2t=z \text{ desak}\\ \sin 2t=-\dfrac{dr}{2} bo'ladi\end{array}\right|=$$

$$=\frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z}dz=\frac{ab}{2}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

2-misol. Agar $y=e^x$ chiziqning har bir nuqtasidagi chiziqli zichligi ordinataning kvadratiga proporsional bo‘lsa, uning x=0 dan x=2 gacha bo‘lgan bo‘lagining massasini toping.

Yechish. $ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+e^{2x}}dx$

$\delta(x,y)=ky^2 (k>0)$ (1) formulani qo‘llab, massani topamiz:

$$m=\int_{AB} ky^2ds=k\int_0^2 e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}dx=\frac{k}{3}(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{k}{3}((1+e^4)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}})$$

1. Tekislikdagi to‘g‘rilanuvchi sodda egri chiziqda “nuqta funksiyasi” $f(M)=f(x,y)$, egri chiziqni A_iA_{i+1} bo‘laklarga bo‘lish usuli $T=\{A_0,A_1,...,A_n\}$ berilgan bo‘lsin. Har bir $A_i\,A_{i+1}$ bo‘laklarda ixtiyoriy $M_i(\xi_i,\eta_i)$ nuqta tanlab,

$$S_T(f)=\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta s_i=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \qquad (1)$$

integral yig'indini tuzamiz, bu yerda Δs_i bilan $A_i A_{i+1}$ yoy uzunligi belgilangan.

Agar $\lambda(T) = \max \Delta s_i \to 0$da (1) integral yig'indining bo'lish usuli T ga va M_i nuqtalarning tanlab olinishiga bog'liq bo'lmagan chekli limiti mavjud bo'lsa, bu limit f(x,y) funksiyadan G egri chiziq bo'yicha olingan birinchi tur egri chiziqli integral deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$I = \int_{\Gamma} f(x,y)\,ds \qquad (2)$$

bu yerda ds – yoy differensali.

2. Oddiy aniq integralga keltirish.

AB chiziq $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ (\alpha \le t \le \beta)$ parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsin, bu yerda $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ hosilalari bilan birga uzluksiz bo'lgan funksiyalar. U holda (2) egri chiziqli integral quyidagicha hisoblanadi: $\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$.

Agar AB chiziq oshkor $y=g(x),\ a \le x \le b$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, (2) integral $\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{a}^{b} f(x,g(x))\sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx$ ko'rinishini oladi.

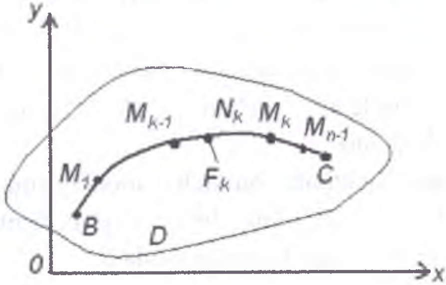
Agar AB chiziq qutb koordinatalari sistemasida $\rho=g(\theta)\ (\theta_0 \le \theta \le \theta_1)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, (2) integral

$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$ formula bo'yicha hisoblaymiz.

2-§. Ikkinchi tur egri chiziqli integral

1. Tekis kuch maydonining bajargan ishi. Oxy tekislikda moddiy figurani ifodalovchi yopiq D soha berilgan bo'lsin va har bir $M(x,y) \in D$ nuqtadagi massaga ta'sir qiluvchi $\overline{F}(x,y)$ kuch berilgan bo'lsin. Bu holda D sohada $\overline{F}(x,y)$ kuch maydoni berilgan deyiladi.

Aytaylik, kuch maydoni ta'sirida moddiy nuqta D sohada joylashgan to'g'rilanuvchi BC chiziq bo'ylab harakat qilsin. Moddiy nuqtani kuch maydoni ta'sirida B nuqtadan C nuqtaga o'tguncha bajargan A ishini topish talab qilingan bo'lsin (3-rasm).



3-rasm

Masalani hal qilish uchun BC yoyni $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$ nuqtalar yordamida ixtiyoriy ravishda n ta bo'lakka ajratamiz. Bir xillik bo'lishi uchun $B = M_0, C = M_n$ deb belgilaylik. M_k nuqtaning koordinatalarini x_k, y_k $(x = 1, 2, ..., n)$ orqali belgilab, M_{k-1} va M_k nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha tutashtirib, BC chiziqqa ichki chizilgan siniq chiziqni hosil qilamiz. $M_{k-1} M_k$ yoyda ixtiyoriy $N_k(\xi_k, \eta_k)$ nuqta olib kuchning bu nuqtadagi qiymatini $\overrightarrow{F_k}$ orqali belgilaymiz.

$M_{k-1} M_k$ to'g'ri chiziq kesmasida ta'sir etuvchi $\overrightarrow{F}$ kuch o'zgarmas va u $\overrightarrow{F_k}(\xi_k, \eta_k)$ deb olsak, u holda kuchning $M_{k-1} M_k$ to'g'ri chiziqli qismda bajargan ishi quyidagi formula bo'yicha topiladi:

$$\Delta A_k = \left|\overrightarrow{F_k}\right| \cdot \left|\overline{M_{k-1} M_k}\right| \cdot \cos\varphi_k, \qquad (1)$$

bu yerda $\left|\overrightarrow{F_k}\right|$ – $\overrightarrow{F_k}$ vektorning uzunligi, $\left|\overline{M_{k-1} M_k}\right|$ – $\overline{M_{k-1} M_k}$ vektorning uzunligi, φ_k esa $\overrightarrow{F_k}$ va $\overline{M_{k-1} M_k}$ vektorlar orasidagi burchak.

$\overrightarrow{F}(x, y)$ kuchning abssissa va ordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini mos ravishda $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ orqali belgilasak, u holda $\overrightarrow{F}(x, y) = P(x, y)\overline{i} + Q(x, y)\overline{j}$ va $\overrightarrow{F}(\xi_k, \eta_k) = P(\xi_k, \eta_k)\overline{i} + Q(\xi_k, \eta_k)\overline{j}$ tengliklarga ega bo'lamiz, bu yerda $\overline{i}$ va $\overline{j}$ lar birlik vektorlar.

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ va $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ lar $\overline{M_{k-1}M_k}$ vektorning abssissa va ordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari bo‘lgani uchun, quyidagi tenglikni yozib olamiz: $\overline{M_{k-1}M_k} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}$

(1) tenglikning o‘ng tomoni $\overline{F_k}$ va $\overline{M_{k-1}M_k}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi bo‘lgani uchun $\Delta A_k = P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$ tenglikni hosil qilamiz.

Yuqoridagi farazimiz bo‘yicha moddiy nuqta $\vec{F}(x,y)$ kuch ta’sirida $M_0M_1...M_{n-1}M_n$ siniq chiziq bo‘ylab, B nuqtadan C nuqtaga o‘tganda bajargan ishi quyidagicha topiladi:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_n = \sum_{k=1}^{n} (P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k) \qquad (2)$$

$M_{k-1}M_k$ bo‘lakchalar qancha kichik bo‘lsa, A_n ning qiymati kuch maydonining bajargan ishi A ga yetarlicha yaqin bo‘ladi. $M_{k-1}M_k$ bo‘lakchalarning uzunliklarining eng kattasi λ deb olaylik.

Agar (2) yig‘indi $\lambda \to 0$ da limitga ega bo‘lib, bu limit BC yoyni bo‘laklarga bo‘lish usuliga va bo‘lakchalardan N_k nuqtalarni tanlab olinishiga bog‘liq bo‘lmasa, u holda bu limit kuch maydonining BC yoy bo‘ylab, B dan C ga o‘tganda bajargan ishi deb olinadi, ya’ni

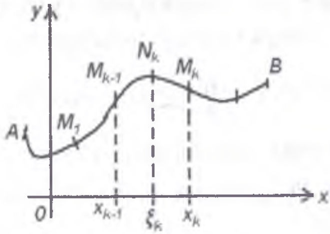
$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k).$$

Agar $Q(x,y)=0$ yoki $P(x,y)=0$ bo‘lsa, u holda (2) formula o‘rniga mos ravishda quyidagi yug‘indilarga ega bo‘lamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k \qquad (3).$$

Ko‘pgina nazariy va tatbiqiy masalalarni yechish (2) va (3) yig‘indilarni limitlarini topishga keltiriladi. Shuning uchun bunday yig‘indilarning limitlarini topishni o‘rganish katta ahamiyatga ega.

2. Ikkinchi tur (koordinatalar bo‘yicha) egri chiziqli integral tushunchasi. To‘g‘rilanuvchi AB yoy va unda aniqlangan $P(x,y)$ funksiya berilgan bo‘lsin. AB yoyni $M_1,M_2,...,M_n$ nuqtalar yordamida ixtiyoriy ravishda n ta bo‘lakka ajratamiz (4-rasm).



4-rasm

Bo'lishni A nuqtadan B nuqtaga qarab olib boramiz va $A = M_0, B = M_n$ deb olamiz. M_k nuqtaning koordinatalarini x_k, y_k $(k = 1,2,...,n)$ orqali belgilab, har bir $M_{k-1}M_k$ yoydan ixtiyoriy ravishda bittadan $N_k(\xi_k, \eta_k)$ $(k = 1,2,...,n)$ nuqtalar tanlab olib, quyidagi yig'indini tuzamiz:

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k, \; \Delta x_k = x_k - x_{k-1}. \qquad (4)$$

Bu yig'indi $P(x,y)$ funksiya uchun AB yoyda x koordinatasi bo'yicha tuzilgan integral yig'indi deyiladi. Bu yig'indining qiymati AB yoyni bo'lish usuliga va bo'lakchalardan $N_k(\xi_k, \eta_k)$ nuqtalarni tanlab olinishiga bog'liq. $M_{k-1}M_k$ bo'lakchalarning uzunliklarini eng kattasini λ deb olib, uni nolga intiltiramiz, ravshanki unda bo'lakchalar soni n cheksiz kattalashadi.

Ta'rif. Agar $\lambda \to 0$ da (4) integral yig'indi chekli limitga ega bo'lib, u AB yoyni bo'laklarga bo'lish usuliga va bo'lakchalardan $N_k(\xi_k, \eta_k)$ nuqtalarni tanlab olinishiga bog'liq bo'lmasa, u holda bu limit $P(x,y)$ funksiyaning AB yoy bo'ylab, x koordinata bo'yicha ikkinchi tur egri chiziqli integrali deyiladi.

Bu holda $P(x,y)$ funksiya AB yoy bo'ylab integrallanuvchi deyiladi.

Egri chiziqli integral $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ kabi belgilanadi. Demak, ta'rif bo'yicha

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k.$$

Xuddi shu kabi $Q(x,y)$ funksiyadan y koordinata bo'yicha olingan ikkinchi tur egri chiziqli integral quyidagicha ta'riflanadi:

$$\int_{AB} Q(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k,\ \Delta y_k = y_k - y_{k-1}.$$

Agar AB yoyda aniqlangan $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar berilgan bo'lib, $\int_{AB} P(x,y)dx$ va $\int_{AB} Q(x,y)dy$ intetgrallar mavjud bo'lsa, u holda $\int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy$ yig'indi to'la ikkinchi tur egri chiziqli integral (umumiy ko'rinishdagi ikkinchi tur egri chiziqli integral) deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy \qquad (5)$$

Agar A va B nuqtalar ustma-ust tushsa, yopiq kontur hosil bo'ladi. Yopiq kontur bo'yicha olingan egri chiziqli integral $\oint$ ko'rinishda belgilanadi.

Birinchi bandda ko'rilgan tekis kuch maydonining bajargan ishi A quyidagi formula bo'yicha topiladi:

$$A = \int_{BC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (6)$$

3-§. Ikkinchi tur egri chiziqli integralning asosiy xossalari

1°. Agar $P(x,y)$ funksiya AB yoy bo'ylab integrallanuvchi bo'lsa, u holda $kP(x,y)$ funksiya ham AB yoy bo'ylab integrallanuvchi bo'lib $\int_{AB} kP(x,y)dx = k\int_{AB} P(x,y)dx$ tenglik o'rinli.

2°. Agar $P_1(x,y)$ va $P_2(x,y)$ funksiyalar AB yoy bo'ylab integrallanuvchi bo'lsa, u holda $P_1(x,y)\pm P_2(x,y)$ funksiyalar ham shu yoy bo'ylab integrallanuvchi bo'lib, $\int_{AB} (P_1(x,y)\pm P_2(x,y))dx = \int_{AB} P_1(x,y)dx \pm \int_{AB} P_2(x,y)dx$ tenglik o'rinli.

3°. (additivlik xossasi). Agar AB yoy biror C nuqta orqali AC va CB yoylarga ajratilgan bo'lib, $P(x,y)$ funksiya AC va CB yoylarning har biri bo'ylab integrallanuvchi bo'lsa, u holda $P(x,y)$ funksiya AB yoy bo‘ylab integrallanuvchi bo‘lib, $\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_{AC} P(x,y)dx + \int\limits_{CB} P(x,y)dx$ tenglik o‘rinli.

Bu xossalarning isboti ta’rifdan osongina kelib chiqadi.

4°. Agar $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ egri chiziqli integral mavjud bo‘lsa, u holda $\int\limits_{BA} P(x,y)dx$ egri chiziqli integral ham mavjud bo‘lib $\int\limits_{AB} P(x,y)dx = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx$ tenglik o‘rinli.

Haqiqatdan, B nuqtani AB yoyning boshlang‘ich nuqtasi A ni esa oxirgi nuqtasi deb hisoblasak, u holda M_k bo‘linish nuqta M_{k-1} $(k=1,2,...,n)$ nuqtadan oldin keladi va integral yig‘indidagi $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ son $x_{k-1} - x_k$ songa almashib, Σ_n integral yig‘indi $\sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)(x_{k-1} - x_k)$ yig‘indiga almashadi.

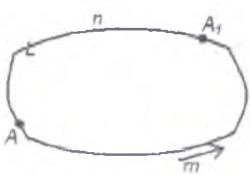
Bundan $\sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)(x_{k-1} - x_k) = -\sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)(x_k - x_{k-1})$ tenglikni hosil qilib, limitga o‘tsak

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)(x_{k-1} - x_k) = -\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)(x_k - x_{k-1})$$ ya’ni,

$\int\limits_{BA} P(x,y)dx = -\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ tenglikni hosil qilamiz.

5°. Agar $P(x,y)$ funksiya yopiq L-kontur bo‘ylab integrallanuvchi bo‘lsa, u holda $\int\limits_{L} P(x,y)dx$ egri chiziqli integralning qiymati L konturdagi qaysi nuqtani boshlang‘ich nuqta (bu nuqta oxirgi nuqta ham bo‘ladi) deb olinishiga bog‘liq emas.

Isbot. A va A_1 lar teng bo‘lmagan ixtiyoriy nuqtalar bo‘lsin (5-rasm).



5-rasm

A nuqtani boshlang'ich (va albatta oxirgi) nuqta deb, egri chiziqli integralni ko'rsatilgan yo'nalish bo'yicha hisoblasak

$$\int_{AmA_1nA} P(x,y)dx = \int_{AmA_1} P(x,y)dx + \int_{A_1nA} P(x,y)dx \quad (1)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Agar A_1 nuqtani boshlang'ich nuqta deb olsak, u holda

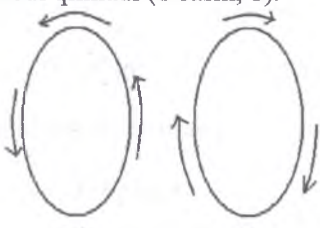
$$\int_{A_1nAmA_1} P(x,y)dx = \int_{A_1nA} P(x,y)dx + \int_{AmA_1} P(x,y)dx \quad (2)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

(1) va (2) larning o'ng tomonlari bir hil qo'shiluvchilardan iborat. Shuning uchun chap tomonlari ham teng bo'ladi. Demak, xossa isbotlandi.

L-o'z-o'zini kesmaydigan yopiq kontur bo'lganda musbat va manfiy yo'nalishlar hisobga olinadi.

Agar yopiq kontur bo'ylab harakatlanma kontur bilan chegaralangan sohaning shu nuqtaga yaqin bo'lgan qismi kuzatuvchidan chap tomonda qolsa, bunday yo'nalish musbat yo'nalish (28-rasm, a), agar o'ng tomonda qolsa, bunday yo'nalish manfiy yo'nalish deb qabul qilinadi (6-rasm, b).



6-rasm

1. Sodda AB egri chiziqda $P(M) = P(x,y)$ va $Q(M) = Q(x,y)$ funksiyalar va bu egri chiziqni $A_i\,A_{i+1}$ bo'laklarga ajratish usuli $T = \{A_0, A_1, ..., A_n\}$ berilgan bo'lsin. Har bir $A_i\,A_{i+1}$ bo'laklarda ixtiyoriy $M_i(\xi_i, \eta_i)$ nuqta tanlab olib,

$$S_T(P) = \sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_i,\ \eta_i)\Delta x_i$$

$$S_T(Q) = \sum_{i=0}^{n-1} Q(\xi_i,\ \eta_i)\Delta y_i$$

integral yig'indilarni tuzamiz, bu yerda Δx_i va Δy_i lar bilan mos ravishda $A_i A_{i+1}$ yoyning x va u o'qlaridagi proeksiyalari belgilangan.

Agar $\lambda(T) = \max A_i A_{i+1} \to 0$ da S_T (P) va S_T(Q) yig'indilarning limitlari mavjud bo'lsa, u holda bu limitlar P(x,y) va Q(x,y) funksiyalardan olingan ikkinchi tur egri chiziqli integrallar deyiladi va mos ravishda $\int_{AB} P(x,y)dx$, $\int_{AB} Q(x,y)dy$ belgilanadi.

$\int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy$ yig'indini Ikkinchi tur egri chiziqli integrallarning umumiy ko'rinishi deb atash va $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ kabi yozish qabul qilingan.

2. Oddiy aniq integralga keltirish.

Agar AB egri chiziq $x = \varphi(t),\ y = \phi(t),\ (a \le t \le \beta)$ parametrik tenglamalar bilan berilsa, u holda ikkinchi tur egri chiziqli integral

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b (P(\varphi(t),\phi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\phi(t))\phi'(t))dt \qquad (1)$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

Agar egri chiziq $y = f(x)(a \le x \le b)$ tenglama bilan berilsa, (1) formula

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b (P(xf(x)) + Q(x,f(x))f'(x))dx \qquad (2)$$

ko'rinishni oladi.

Agar $\vec{F}(x,y) = \{P(x,y),\ Q(x,y)\}$ - kuch maydoni bo'lsa, bu kuchning moddiy nuqtani egri chiziq bo'ylab siljitishda bajargan ishi W ikkinchi tur egri chiziqli integral bilan ifodalanadi:

$$W = \int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

3. Agar P(x,y) va Q(x,y) funksiyalar uchun

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad (1)$$

shart bajarilsa, u holda $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ ifoda biror u(x,y) funksiyaning to'la differensiali bo'ladi va $\int_{AB} (x,y)dx + Q(x,y)dy$ integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaydi, faqat A va V nuqtalarning berilishi bilan bir qiymatli aniqlanadi.

To'la differensiali bo'yicha funksiyaning o'zi

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)\,dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)\,dt+C$$

yoki

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y)\,dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)\,dt+C$$

formula orqali topiladi.

4. Ikki karrali va egri chiziqli integrallarni bog'lovchi

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_\Gamma Pdx+Q\,dy$$

formula Grin formulasi deyilib, bu formuladan foydalanib, D sohaning yuzini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$S=\oint_\Gamma xdy=-\oint_\Gamma ydx=\frac{1}{2}\oint_\Gamma xdy-ydx,$$

bu yerda G – D sohaning chegarasi.

4-§. Ikkinchi tur egri chiziqli integralni mavjudlik sharti va uni hisoblash

1. Egri chiziqli integralni mavjudligi. Biz ikkinchi tur integralni mavjud bo'lishligining ba'zi yetarli shartlarini ko'rib chiqamiz.

Aytaylik, to'g'rilanuvchi AB egri chiziq $x=\varphi(t), y=\varphi(t)$ tenglamalar bilan berilgan bo'lib, $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha;\beta]$ oraliqda uzluksiz, $\varphi(t)$ funksiya shu oraliqda uzluksiz hosilaga ega va parametrning $t=\alpha$ qiymatiga A nuqta, $t=\beta$ qiymatida B nuqta mos kelsin (3-rasm).

$P(x,y)$ funksiya uchun integral yig'indini tuzamiz:

$$\Sigma_n=\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k$$

Σ_n yig'indini t o'zgaruvchi orqali ifodalaymiz.

t parametning AB egri chiziqning $M_k(x_k,y_k)$ bo'linish nuqtalariga mos kelgan qiymatlarini t_k $(k=1,2,...,n)$, $M_{k-1}M_k$ bo'lakchadan olingan $N_k(\xi_k,\eta_k)$ nuqtalarga mos kelgan qiymatlarni τ_k $(k=1,2,...,n)$ orqali belgilaymiz, ya'ni,

$$x_k=\varphi(t_k), y_k=(t_k),\quad \xi_k=\varphi(\tau_k), \eta_k=\psi(\tau_k)$$

va

$$\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) \quad (k = 1, 2, ..., n).$$

U holda Σ_n integral yig'indi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))$$

$\varphi(\tau)$ funksiya har bir $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, ..., n)$ oraliqda Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun $[t_{k-1}, t_k]$ oraliqda biror θ_k nuqta topilib, $\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi'(\theta_k)\Delta t_k$ tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

Bularga asosan integral yig'indi Σ_n ni quyidagicha yozib olamiz:

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))\ \varphi'(\theta_k)\Delta t_k$$

Bu yig'indida $\tau_k = \theta_k$ bo'lganda, u $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)$ funksiyaning integral yig'indisini ifodalagan bo'lar edi. Umuman olganda τ_k va θ_k lar turlicha bo'lib, bu yig'indi integral yig'indini ifodalamaydi.

$\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)$ ayirmani γ_k $(k = 1, 2, ..., n)$ orqali belgilab, Σ_n yig'indini quyidagicha yozib olamiz:

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))\varphi'(\tau_k)\Delta t_k + \sum_{k=1}^{n} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))\gamma_k \Delta t_k \quad (1)$$

$P(x, y)$ funksiya AB egri chiziqda, $\varphi(t), \psi(t)$ funksiyalar $[\alpha; \beta]$ oraliqda uzluksiz bo'lgani uchun (1) tenglikning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi $[\alpha; \beta]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)$ funksiyaning integral yig'indisi.

Demak, y $[\alpha; \beta]$ oraliqda integrallanuvchi, ya'ni

$\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))\varphi'(\tau_k)\Delta t_k = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt$ bu yerda λ – $M_{k-1}M_k$ bo'lakchalarning uzunliklarini eng kattasi.

(1) tenglikning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchi $\lambda \to 0$ da nolga intiladi. Haqiqatan, $P(\varphi(t), \psi(t))$ funksiya $[\alpha; \beta]$ oraliqda uzluksiz bo'lgani uchun u shu segmentda chegaralangan, ya'ni shunday K son topilib, ixtiyoriy $t \in [\alpha; \beta]$ uchun

$$|P(\varphi(t), \psi(t))| < K \quad (2)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$\varphi'(t)$ funksiya $[\alpha; \beta]$ oraliqda uzluksiz bo'lgani uchun u shu oraliqda tekis uzluksiz, ya'ni, har bir $\varepsilon > 0$ uchun, shunday $\delta > 0$ son topilib, $|\theta-\tau|<\delta$ bo'lganda $|\varphi'(\theta)-\varphi'(\tau)|<\dfrac{\varepsilon}{K(\beta-\alpha)}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

AB yoyni shunday $M_{k-1}M_k$ mayday bo'laklarga bo'laylikki, natijada $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ayirma uchun $|\Delta t_k|<\delta$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $|\theta_k-\tau_k|<\delta$ tengsizlik o'rinli bo'lib, bundan

$$|\gamma_k| = |\varphi'(\theta_k)-\varphi'(\tau_k)| < \frac{\varepsilon}{K(\beta-\alpha)} \qquad (3)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

(2) va (3) tengsizliklardan

$$\left|\sum_{k=1}^{n} P(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\gamma\Delta t_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |P(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))||\gamma_k||\Delta t_k| < \frac{K\cdot\varepsilon(\beta-\alpha)}{K\cdot(\beta-\alpha)} = \varepsilon$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bundan esa

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\gamma_k\Delta t_k = 0 \qquad (4)$$

kelib chiqadi.

(1) va (4) tengliklardan

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt \qquad (5)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Shunga o'xshash $Q(x,y)$ funksiya AB yoyda uzluksiz, $y=\psi(t)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ oraliqda uzluksiz $\psi'(t)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)dt \qquad (6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar AB yoyda $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar uzluksiz, $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha;\beta]$ oraliqda uzluksiz $\varphi'(t)$ va $\psi'(t)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda $\int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy$ integral mavjud va ushbu formula o'rinli:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t))dt\,. \quad (7)$$

2. Ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblash. Egri chiziqli integrallar odatda aniq integralga keltirilib hisoblanadi.

Silliq AB chiziq $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ tenglamalar orqali berilib, t parametrning $t=\alpha$ qiymatiga A nuqta, $t=\beta$ qiymatiga B nuqta mos kelsin.

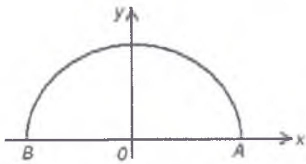
Agar oldingi banddagi (1-band) shartlar bajarilsa, u holda $\int\limits_{AB} P(x,y)dx, \int\limits_{AB} Q(x,y)dy, \int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ integrallar mavjud va quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt \tag{8}$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)dt \tag{9}$$

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}(P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t))dt \tag{10}$$

1-misol. $\int\limits_{AB}(2xy-y^2)dx$ egri chiziqli integralni hisoblang, bu yerda AB egri chziq $x=R\cos t, y=R\sin t$ aylananing yuqori yarim qismi (7-rasm).



7-rasm

Yechish. Bu yerda $A(R;0)$ nuqta parametrning t=0 qiymatiga, $B(-R;0)$ nuqta esa parametrning $t=\pi$ qiymatiga mos keladi.

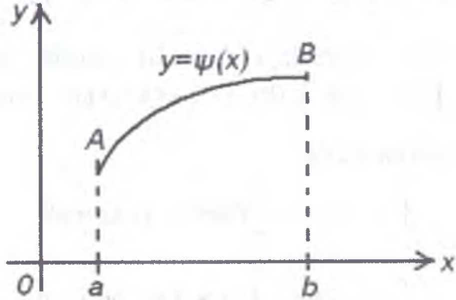
$$\int\limits_{AB}(2xy-y^2)dx=-\int\limits_{0}^{\pi}(2R^2\sin t\cos t-R^2\sin^2 t)R\sin t dt=$$

$$=-2R^3\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 t\cos t dt+R^3\int\limits_{0}^{\pi}\sin^3 t dt=(-2R^3\frac{\sin^3 t}{3}+R^3(-\cos t+\frac{\cos^3 t}{3}))\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{4}{3}R^3$$

AB egri chiziq $y=\psi(x), x\in[a;b]$ tenglama bilan berilgan uzluksiz funksiya bo‘lsin.

Bu yerda parametr t=x deb olib, AB chiziqning parametrik tenglamasiga ega bo‘lamiz. $x=x,\ y=\psi(x),\ (a\le x\le b)$ (8-rasm).



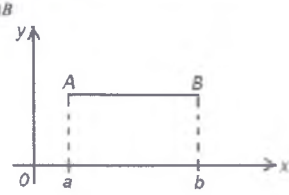
8-rasm

(8) formulaga binoan, $\int\limits_{AB} P(x,y)dx=\int\limits_a^b P(x,\psi(x))dx$ tenglikni hosil qilamiz.

Agar $y=\psi(x)$ funksiya $[a;b]$ oraliqda uzluksiz $\psi'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy=\int\limits_a^b Q(x,\psi(x))\psi'(x)dx$,

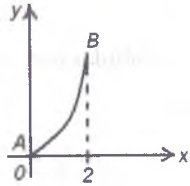
$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b (P(x,\psi(x))+Q(x,\psi(x))\psi'(x))dx$ tengliklarni hosil qilamiz.

Agar AB chiziq $y=y_0$ to‘g‘ri chiziqning kesmasi bo‘lsa, u holda $dy=(y_0)'dx=0$ bo‘lib, $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy=0$ bo‘ladi (9-rasm).



9-rasm

2-misol. $\int\limits_{AB}(2+xy^2)dx-(3-x^2y)dy$ integralni hisoblang, bu yerda AB chiziq $y=x^2$ parabolani $A(0;0)$ va $B(2;4)$ nuqtalari orasidagi qismi (10-rasm).

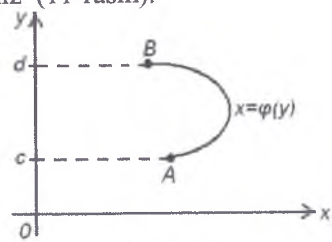


10-rasm

Yechish. $\int\limits_{AB}(2+xy^2)dx-(3-x^2y)dy=\int\limits_0^2(2+x^5-(3-x^4)2x)dx=$

$$=\int\limits_0^2(2+3x^5-6x)dx=(2x+\frac{x^6}{2}-3x^2)\Big|_0^2=24$$

Agar AB chiziq $x=\varphi(y)$ $(y\in[c;d])$ tenglama bilan berilgan va $[c;d]$ oraliqda $\varphi'(y)$ uzluksiz hosila mavjud bo'lsa, u holda quyidagiga ega bo'lamiz (11-rasm).



11-rasm

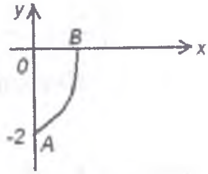
$$\int\limits_{AB}P(x,y)dx=\int\limits_c^d P(\varphi(y),y)\varphi'(y)dy,$$

$$\int\limits_{AB}Q(x,y)dy=\int\limits_c^d Q(\varphi(y),y)dy,$$

$$\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_c^d(P(\varphi(y),y)\varphi'(y)+Q(\varphi(y),y))dy$$

Xususiy holda, AB chiziq $x = x_0$ to‘g‘ri chiziq kesmasi bo‘lsa, u holda $\int\limits_{AB} P(x,y)dx = 0$ bo‘ladi.

3-misol. $\int\limits_{AB} (2+xy^2)dx - (3-x^2y)dy$ integralni hisoblang, bu yerda AB chiziq $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ parabolaning $A(0;-2)$ va $B(1;0)$ nuqtalari orasidagi qismi (12-rasm).



12-rasm

Yechish. Bunda $dx = -\frac{ydy}{2}, -2 \le y \le 0$

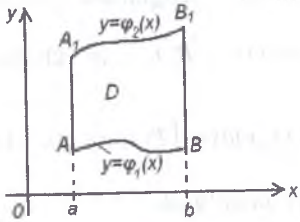
$$\int\limits_{AB} (2+xy^2)dx - (3-x^2y)dy = \int\limits_{-2}^{0} (-\frac{y}{2}(2+(1-\frac{y^2}{4})y^2) -$$

$$-(3-(1-\frac{y^2}{4})^2 y))dy = \int\limits_{-2}^{0} (\frac{3}{16}y^5 - y^3 - 3)dy = -4$$

5-§. Grin formulasi

Bu paragrafda biz ikki karrali va egri chiziqli integrallarni bog‘lovchi muhim formulani keltirib chiqaramiz.

xOy tekislikda 1-tip yopiq D sohani qaraylik ($(x=a,\ x=b)$ $(a<b)$ to‘g‘ri chiziqlar va $y=\varphi_1(x),\ y=\varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x)\le\varphi_2(x))$ uzluksiz chiziqlar bilan chegaralangan). Sohaning chegarasini L orqali belgilaylik (13-rasm).



13-rasm

Shu sohada $P(x,y)$ funksiya uzluksiz va $\frac{\partial P}{\partial y}$ uzluksiz hosilaga ega. $\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$ ikki karrali integralni hisoblaylik.

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx =$$

$$= \int\limits_a^b (P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))dx$$

Shunday qilib, $\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx$, yoki

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_b^a P(x,\varphi_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx \qquad (1).$$

Endi $\int\limits_L P(x,y)dx$ egri chiziqli integralni hisoblaylik:

$$\int\limits_L P(x,y)dx = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{BB_1} P(x,y)dx + \int\limits_{B_1A_1} P(x,y)dx + \int\limits_{A_1A} P(x,y)dx,$$

(2)

bu yerda BB_1 va A_1A lar Ox o‘qqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar bo‘lgani uchun $\int\limits_{BB_1} P(x,y)dx = 0$, $\int\limits_{A_1A} P(x,y)dx = 0$.

AB egri chiziq tenglamasi $y=\varphi_1(x)$ bo'lgani uchun $\int\limits_{AB} P(x,y)dx=\int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx$, B_1A_1 egri chiziq tenglamasi $y=\varphi_2(x)$ bo'lgani uchun $\int\limits_{B_1A_1} P(x,y)dx=\int\limits_b^a P(x,\varphi_2(x))dx$ tenglik o'rinli bo'ladi.

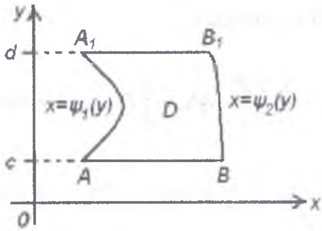
Topilganlarni (2) ga qo'ysak:

$$\int\limits_L P(x,y)dx=\int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx+\int\limits_b^a P(x,\varphi_2(x))dx. \qquad (3)$$

(1) va (3) tengliklarga binoan quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}dxdy=-\int\limits_L P(x,y)dx. \qquad (4)$$

Endi D 2-tip soha ($y=c, y=d$ to'g'ri chiziqlar chap va o'ng tomonlardan mos ravishda $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$ $(y\in[c,d])$ uzluksiz chiziqlar bilan chegaralangan) bo'lsin (14-rasm).



14-rasm

D sohada $Q(x,y)$ funksiya uzluksiz va u uzluksiz $\frac{\partial Q}{\partial x}$ xususiy hosilaga ega.

Yuqoridagi mulohazalarni yuritib, quyidagi tenglikni isbotlash mumkin:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int\limits_L Q(x,y)dy \qquad (5)$$

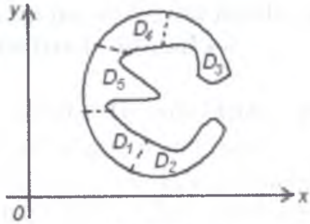
Agar soha ham 1-tip, ham 2-tip soha bo'lsa, u holda (4) va (5) tengliklarni ikkalasi ham o'rinli bo'ladi.

(5) tenglikdan (4) tenglikni hadma-had ayirib, ushbu formulani hosil qilamiz:

$$\iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{L} Pdx + Qdy \qquad (6)$$

Bu Grin formulasi deyiladi.

Eslatma. Agar D soha 1-tip soha ham, 2-tip soha ham bo'lmasa, uni chiziqlar yordamida bir nechta 1-tip va 2-tip sohalarga keltirib (15-rasm) yuqoridagi formulalarni isbotlash mumkin.



15-rasm

6-§. Egri chiziqli integral yordamida tekis figuralar yuzalarini hisoblash

Agar $P(x,y)=y$ deb olsak, $\frac{\partial P}{\partial y}=1$ bo'lib, 4-§ (4) formulaga binoan $\iint\limits_{(D)} dxdy = -\int\limits_{L} ydx$ tenglikni hosil qilamiz. $\iint\limits_{(D)} dxdy$ integral D sohaning yuzasini ifodalagan uchun

$$S = -\int\limits_{L} ydx \qquad (1)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Xuddi shu kabi 4-§ (5) formulaga binoan $Q(x,y)=x$ deb, ushbu formulani hosil qilamiz:

$$S = \int\limits_{L} xdy. \qquad (2)$$

(1) va (2) tengliklarni hadma-had qo'shib, ushbu formulani hosil qilamiz: $S = \frac{1}{2}\int\limits_{L} xdy - ydx.$ (3)

Misol. $x = a\cos t, y = b\sin t$ ellips bilan chegaralangan tekis figura yuzasini hisoblang.

Yechish. Ellipsni musbat yo'nalish bo'yicha aylanib chiqqanda t parametr 0 dan 2π gacha o'zgaradi. $dx = a\sin t, dy = b\cos t$ bo'lgani uchun (3) formulaga binoan

$$S = \frac{1}{2}\int_L xdy - ydx = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \pi ab\ .$$

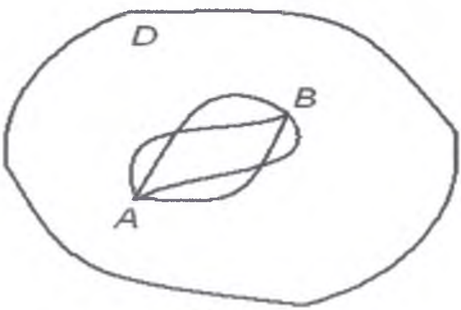
7-§. Egri chiziqli integralni integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaslik shartlari

Aytaylik, xOy tekislikdagi D sohada aniqlangan va uzluksiz $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar berilgan bo'lsin. D sohadan ixtiyoriy ikkita A va B nuqtalar olamiz. D sohada to'la joylashgan va A, B nuqtalarni tutashtiruvchi bo'lakli silliq L konturni olib,

$$\int_L Pdx + Qdy \qquad (1)$$

integralni hisoblaymiz.

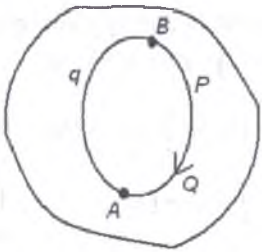
Agar bu integralning A va B nuqtalarni tutashtiruvchi ixtiyoriy bo'lakli silliq L chiziqlar bo'yicha olingan qiymatlari teng bo'lsa (16-rasm), u holda $\int_L Pdx + Qdy$ integral D sohada integrallash yo'liga bog'liq emas deyiladi (faqat boshlang'ich va oxirgi nuqtalarga bog'liq).



16-rasm

1-teorema. $\int\limits_L Pdx+Qdy$ egri chiziqli integral D sohada integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasligi uchun D sohada to'la joylashgan, o'zi-o'zini kesmaydigan ixtiyoriy yopiq C kontur bo'yicha olingan integral nolga teng bo'lishligi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriy shart. $\int\limits_L Pdx+Qdy$ integral D sohada integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasin. D sohada joylashgan, o'z-o'zini kesmaydigan yopiq C kontur olaylik (17-rasm).



17-rasm

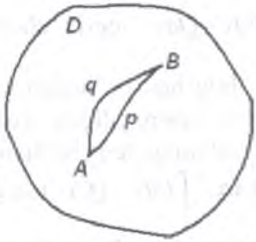
Unda ikkita A va B nuqtalarni olsak, ular L konturni ApB va AqB qismlarga ajratadi.

Shartga binoan $\int\limits_{ApB} Pdx+Qdy=\int\limits_{AqB} Pdx+Qdy$, bundan $\int\limits_{ApB} Pdx+Qdy-\int\limits_{AqB} Pdx+Qdy=0$, yoki $\int\limits_{ApB} Pdx+Qdy+\int\limits_{BqA} Pdx+Qdy=0$

Apb va BqA egri chiziqlar birgalikda yopiq L konturni tashkil qiladi, shuning uchun yuqoridagi tenglikni $\oint\limits_C Pdx+Qdy=0$ ko'rinishda yozish mumkin.

Yetarli shart. D sohada to'la joylashgan ixtiyoriy yopiq C kontur bo'yicha $\oint\limits_C Pdx+Qdy=0$ bo'lsin. $\int\limits_L Pdx+Qdy$ ning D sohada integrallash yo'liga bog'liq emasligini ko'rsatamiz.

D sohada ikkita A va B nuqtalar olib, ularni D sohada joylashgan va umumiy nuqtalarga ega bo'lmagan ApB va AqB chiziqlar bilan tutashtiramiz (18-rasm).



18-rasm

Bu chiziqlar birgalikda ApBqA yopiq egri chiziqni tashkil qiladi. Demak, shartga ko'ra $\oint\limits_{ApBqA} Pdx+Qdy=0$

Bundan $\int\limits_{ApB} Pdx+Qdy+\int\limits_{BqA} Pdx+Qdy=0$ yoki

$\int\limits_{ApB} Pdx+Qdy=-\int\limits_{BqA} Pdx+Qdy,\qquad \int\limits_{AqB} Pdx+Qdy=\int\limits_{ApB} Pdx+Qdy$

tengliklarni hosil qilamiz.

Yuqoridagi teoremaga teng kuchli ushbu teoremani keltiraylik.

2-teorema. $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar chegaralangan yopiq bir bog'lamli D sohada uzluksiz va uzluksiz $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ xususiy hosilalarga ega bo'lsin. U holda D sohada to'la joylashgan bo'lakli silliq yopiq C kontur bo'yicha olingan integral

$$\oint\limits_C Pdx+Qdy=0 \qquad (2)$$

bo'lishi uchun D sohaning barcha nuqtalarida

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (3)$$

tenglikning o'rinli bo'lishligi zarur va yetarli.

Isbot. Yetarli shart. Aytaylik, D sohaning barcha nuqtalarida (3) shart bajarilsin. D sohada joylashgan bo'lakli silliq yopiq C kontur olaylik. D sohaning C kontur bilan chegaralangan qismini D_1 orqali belgilaylik. D_1 sohada Grin formulasini qo'llasak, ushbu tenglik hosil bo'ladi:

$$\oint_C Pdx+Qdy=\iint_{(D_1)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$ (3) tenglikka binoan

$$\iint_{(D_1)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

Demak, $\oint_C Pdx+Qdy=0$.

Zaruriy shart. Faraz qilaylik (2) o'rinli, (3) tenglikni o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. Teoremani teskari faraz qilish yo'li bilan isbotlaymiz. Faraz qilaylik biror $(x_0,y_0)\in D$ nuqtada (3) tenglik o'rinli bo'lmasin, ya'ni $\frac{\partial Q(x_0,y_0)}{\partial y}\neq\frac{\partial P(x_0,y_0)}{\partial x}$, demak, bu nuqtada $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq 0$.

Aniqlik uchun $\frac{\partial Q(x_0,y_0)}{\partial x}-\frac{\partial P(x_0,y_0)}{\partial y}>0$ deb olaylik.

Shartga ko'ra $f(x,y)=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ funksiya D sohada uzluksiz, xususan (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz. Shuning uchun (x_0,y_0) nuqtaning biror w atrofi topilib, shu atrofning barcha nuqtalarida $f(x,y)=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}>0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu atrofdan biror bo'lakli silliq C kontur olib, u bilan chegaralangan sohani G orqali belgilasak, u holda Grin formulasini qo'llab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\oint_C Pdx+Qdy=\iint_{(G)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \qquad (4).$$

O'ng tomondagi ikki karrali integralga o'rta qiymat haqidagi teoremani qo'llasak, biror $(\xi,\eta)\in G$ topilib, $\iint_{(G)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=f(\xi,\eta)\cdot S_1$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bunda S_1 – G sohaning yuzi. $G\subset w$ sohaning barcha nuqtalarida $f(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ funksiyaning qiymatlari musbat bo'lgani uchun $f(\xi,\eta)>0$ bo'lib,

$\iint\limits_{(G)} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy > 0$ ekanligi kelib chiqadi. (4) ga asosan tanlangan G kontur uchun $\oint\limits_{C} Pdx + Qdy \neq 0$ tengsizlik hosil bo'ladi.

Bu teorema shartiga qarama-qarshi, ya'ni farazimiz noto'g'ri.

1- va 2-teoremalardan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Bir bog'lamli chegaralangan yopiq D sohada uzluksiz bo'lgan $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar berillib, ular uzluksiz $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ xususiy hosilalarga ega bo'lsin. U holda $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ egri chiziqli integral D sohada integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasligi uchun, D sohaning barcha nuqtalarida $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

8-§. To'la differensiallik sharti

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy \qquad (1)$$

egri chiziqli integral ostidagi

$$Pdx + Qdy \qquad (2)$$

ifoda ko'rinishi jixatidan qandaydir ikki argumentli $u(x,y)$ funksiyaning to'la differensialini eslatadi: $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Shuning uchun to'la differensiali (2) dan iborat bo'lgan $u(x,y)$ funksiya mavjudmi degan savol tug'iladi: $du = Pdx + Qdy$.

Bu savolga quyidagi teorema javob beradi:

Teorema. Chegaralangan yopiq bir bog'lamli D sohada $P(x,y)$, $Q(x,y)$ funksiyalar uzluksiz va ular D sohada uzluksiz $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ xususiy hosilalarga ega bo'lsin. U holda $Pdx + Qdy$ ifoda D sohada qandaydir funksiyaning to'la differensiali bo'lishi uchun D sohada

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (3)$$

tenglikning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriy shart. Shunday $u(x,y)$ funksiya mavjud bo'lib, D sohaning barcha nuqtalarida

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=Pdx+Qdy \qquad (4)$$

tenglik o'rinli bo'lsin, bu holda (3) tenglik o'rinli ekanlagini ko'rsatamiz.

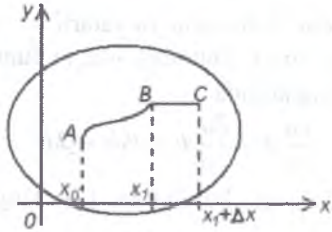
(4) tenglikda $P=\frac{\partial u}{\partial x}, Q=\frac{\partial u}{\partial y}$ tenglik kelib chiqadi. P ni y bo'yicha, Q ni x bo'yicha differensiallab, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}. \qquad (5)$$

Teorema shartiga ko'ra $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ xususiy hosilalar D sohada uzluksiz, shuning uchun $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ va $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ aralash xususiy hosilalar ham uzluksiz bo'lib, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ o'rinli bo'ladi. Bundan $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ tenglik kelib chiqadi.

Yetarli shart. Aytaylik D sohada $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ tenglik o'rinli bo'lsin, u holda D sohada aniqlangan $u(x,y)$ funksiya topilib uning to'la differensiali $Pdx+Qdy$ dan iborat bo'lishini ko'rsatamiz. (3) tenglik o'rinli bo'lganda (1) egri chiziqli integral D sohada integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaydi. D sohadan $A(x_0,y_0)$ nuqta olib uni o'zgarmas, $B(x,y)$ nuqta olib uni o'zgaruvchi deb qaraylik. U holda (1) egri chiziqli integral x va y $((x,y)\in D)$ o'zgaruvchilarning qandaydir ikki argumentli funksiyasi bo'ladi. Bu funksiyani quyidagicha belgilaylik: $u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

$U(x,y)$ funksiyaning D sohadagi to'la differensiali (2) ga tengligini ko'rsatamiz. $B(x_1,y_1)$ D sohaning biror tayin nuqtasi bo‘lsin. y_1 ni o‘zgarmas qoldirib, x_1 ga shunday Δx beramizki, natijada $C(x_1+\Delta x, y_1)\in D$ bo‘lsin (19-rasm).



19-rasm

Bu funksiyaning x bo‘yicha xususiy orttirmasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\Delta_x u = u(x_1+\Delta x_1 y_1) - u(x_1, y_1) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1+\Delta x, y_1)} Pdx + Qdy = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy.$$

(6)

Egri chiziqli integral qiymati integrallash yo‘liga bog‘liq bo‘lmaganligi uchun $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx+Qdy$ integralni AB chiziq va BC to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lgan AC chiziq bo‘yicha integrallaymiz. Bundan $\Delta_x u = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} Pdx+Qdy - \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx+Qdy =$

$$= \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx+Qdy + \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} Pdx+Qdy - \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx+Qdy =$$

$$= \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} Pdx+Qdy = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} Pdx + \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} Qdy.$$

BC kesmada y o‘zgarmas bo‘lgani uchun $\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} Qdy = 0$ bo‘lib, $\Delta_x u = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} P(x,y)dx$ tenglik hosil bo‘ladi. BC chiziq tenglamasi

$y=y_1$ bo'lgani uchun egri chiziqli integralni aniq integralga keltiramiz: $\Delta_x u=\int\limits_{x_1}^{x_1+\Delta x} P(x,y_1)dx$

Bu aniq integralga o'rta qiymat haqidagi teoremani qo'llab ushbu tenglikni hosil qilamiz: $\Delta_x u=P(x_1+\theta\Delta x,y_1)\Delta x$ $(0<\theta<1)$. Ikkala tomoni Δx ga bo'lsak: $\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=P(x_1+\theta\Delta x,y_1)$

$P(x,y)$ funksiya D sohada uzluksiz bo'lgani uchun $\lim\limits_{\Delta x\to 0} P(x_1+\theta\Delta x,y_1)=P(x_1,y_1)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Bularga asosan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} P(x_1+\theta\Delta x,y_1)=P(x_1,y_1) \qquad (7)$$

Xuddi shu kabi

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y) \qquad (8)$$

tenglikni keltirib chiqarish mumkin.

(7) va (8) tengliklardan $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ tenglikni keltirib chiqaramiz.

Eslatma. To'la differensiali $Pdx+Qdy$ ifodaga teng bo'lgan $u(x,y)$ funksiya bu ifodaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$ funksiya $Pdx+Qdy$ ifodaning boshlang'ich funksiyalaridan bittasi bo'lib, barcha boshlang'ich funksiyalari $u(x,y)+C$ (C-ixtiyoriy o'zgarmas) ko'rinishda bo'ladi.

Yuqoridagi teoremadan ushbu natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar o'zlarining $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ xususiy hosilalari bilan chegaralangan yopiq bir bog'lamli D sohada uzluksiz bo'lsa, u holda $\int\limits_L Pdx+Qdy$ egri chiziqli integral D sohada integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasligi uchun $Pdx+Qdy$ ifoda shu sohada qandaydir funksiyaning to'la differansiali bo'lishi zarur va yetarli.

9-§. Funksiyani o'zining to'la differensiali bo'yicha tiklash

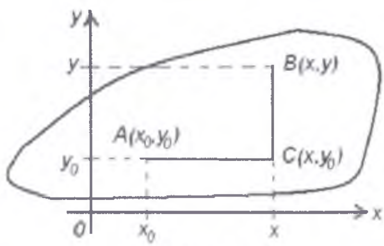
Aytaylik, $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar va $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ xususiy hosilalar chegaralangan yopiq bir bog'lamli D sohada uzluksiz va bu sohada $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ tenglik o'rinli bo'lsin. U holda yuqoridagi teoremaga binoan $Pdx + Qdy$ ifoda D sohada qandaydir $u(x,y)$ funksiyaning to'la differensiali bo'ladi.

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy. \qquad (1)$$

Demak, $u(x,y)$ funksiyani topish uchun D sohadan qo'zg'almas $A(x_0, y_0)$ va qo'zg'aluvchi $B(x,y)$ nuqtalar olib, bu nuqtalarni tutashtiruvchi va D sohada yotuvchi bo'lakli silliq chiziq bo'ylab $\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} Pdx + Qdy$ integralni hisoblash kerak. Bu integralning qiymati integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaganligi uchun, ko'p hollarda integrallash yo'li sifatida $A(x_0, y_0)$, $C(x, y_0)$ va $B(x,y)$ nuqtalarni koordinata o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlar bilan tutashtirishdan hosil bo'lgan siniq chiziqni olish integrallashni ancha osonlashtiradi (20-rasm).

Bu holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{A(x_0,y_0)}^{C(x,y_0)} P(x,y_0)dx + \int_{C(x,y_0)}^{B(x,y)} Q(x,y)dy.$$



20-rasm

Tenglikning o‘ng tomonidagi integrallarni aniq integralga keltirsak:

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy,$$

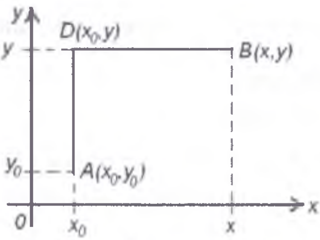
demak,

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C \qquad (2)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Shunga o‘xshash integrallash yo‘li sifatida $A(x_0,y_0), D(x_0,y)$, $B(x,y)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziq olinsa, u holda $u(x,y)$ funksiya quyidagicha topiladi (21-rasm).

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C \qquad (3)$$



21-rasm

Eslatma. (2) va (3) formulalarni qo‘llashda $A(x_0,y_0)$ nuqta sifatida D sohadan xoxlagan nuqtani olish mumkin. Amalda $A(x_0,y_0)$ nuqtani (2) va (3) formulalardagi integrallarni hisoblash osonlashadigan qilib tanlanadi (albatta, bu nuqtada teorema shartlari buzilmasligi kerak), ba’zida $x_0 = 0$ yoki $y_0 = 0$(yoki $x_0 = 0$ va $y_0 = 0$) deb olishlik ham mumkin.

Misol. $(3x^2y^2 - y^3 + 4x)dx + (2x^3y - 3xy^2 + 5)dy$ ifoda biror sohada qandaydir ikki o‘zgaruvchili funksiyaning to‘la differensiali bo‘lishini tekshirib ko‘ring va o‘sha funksiyani toping.

Yechish. $P=3x^2y^2-y^3+4x, Q=2x^3y-3xy^2+5$. Bunda, $\frac{\partial P}{\partial y}=6x^2y-3y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y-3y^2$. Demak, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ tenglik o'rinli, berilgan ifoda qandaydir $u(x,y)$ funksiyaning to'la differensiali. O'sha funksiyani topamiz.

(0;0) nuqta olib, funksiyani (2) formula bo'yicha topamiz:

$$u(x,y)=\int_0^x(3x^2\cdot 0-0+4x)dx+\int_0^y(2x^3y-3xy^2+5)dy+C=$$

$$=2x^2+x^3y^2-xy^3+5y+C.$$

VII-bobga doir mashq va misollar

Quyidagi egri chiziqli integrallarni hisoblang (334-341).

334. $\int_L \frac{ds}{x-y}$, $L-y=\frac{x}{2}-2$ to'g'ri chiziqning $A(0;-2)$ va $B(4;0)$ nuqtalar orasidagi kesma.

335. $\int_L xyds$, $L-$uchlari $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(4;2)$ va $D(0;2)$ nuqtalarda bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning konturi.

336. $\int_L (x^2+y^2)^n ds$, $L-x=a\cos t$, $y=a\sin t$ aylana;

337. $\int_L \sqrt{2y}ds$, $L-x=a(t-\sin t,)$ $y=a(1-\cos t)$ sikloidaning birinchi arki;

338. $\int_L yds$, $L-y^2=2px$ parabolaning $x^2=py$ parabola bilan kesilgan yoyi;

339. $\int_L y^2ds$, $L-x=a(t-\sin t,)$, $y=a(1-\cos t)$ sikloidaning birinchi arki.

340. $\int_L (x-y)ds$, $L-x^2+y^2=ax$ aylana.

341. $\int_L x\sqrt{x^2-y^2}ds$, $L-\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniskataning o'ng yaprog'i.

Integrallarni hisoblang (342-351)

342. $\int\limits_L \left(x-\frac{1}{y}\right)dy$, $L-y=x^2$ parabolaning $(1;1)$ nuqtadan $(2;4)$ nuqtagacha bo‘lgan yoyi.

343. $\int\limits_L xydx$, $L-y=\sin x$ sinusoidaning $x=\pi$ dan $x=0$ gacha bo‘lgan yoyi.

344. $\int\limits_L xds$, $L-x=2$, $y=x$, $y=0$ to‘g‘ri yaiziqlardan tashkil topgan uchburchakning konturi (Musbat yo‘nalishi bo‘yicha)

345. $\int\limits_L (x^2-y)dx$, $L-x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$ to‘g‘ri chiziqlardan tashkil topgan to‘g‘ri to‘rtburchak perimetri (musbat yo‘nalish bo‘yicha).

346. $\int\limits_L (xy-y^2)dx+xdy$, $L-$quyidagi chiziqlarning $(0;0)$ nuqtadan $(1;2)$ nuqtagacha bo‘lgan qismi; a) $y=2x$, b) $y=2x^2$, c) $y=2\sqrt{x}$.

347. $\int\limits_L 2xydx+x^2dy$, $L-$ quyidagi chiziqlarning $(0;0)$ nuqtadan $(1;1)$ nuqtagacha bo‘lgan qismi: a) $y=x^2$, b) $y=x^3$, c) $y^2=x$.

348. $\int\limits_L ydx+xdy$, $L-x=R\cos t$, $y=R\sin t$ aylananing $t=0$ dan $t=\frac{\pi}{2}$ gacha bo‘lgan yoyi.

349. $\int\limits_L ydx-xdy$, $L-$ $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ellips (musbat yo‘nalishi bo‘yicha).

350. $\int\limits_L \frac{y^2dx-x^2dy}{x^2+y^2}$, $L-$ $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ aylananing $t=0$ dan $t=\pi$ gacha bo‘lgan yoyi (yarim aylana).

351. $\int\limits_L (2a-y)dx-(a-y)dy$, $L-x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ sikloidaning birinchi arki ($t=0$ dan $t=2\pi$ gacha).

To‘la differensiali bo‘yicha funksiyani o‘zini toping (352-359).

352. $dz=(3x^2y-y^3)dx+(x^3-3y^2x)dy$;

353. $dz=\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dy$;

354. $dz=x^2dx+y^2dy$;

355. $dz=4(x^2-y^2)(xdx-ydy)$;

356. $dz = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$;

357. $dz = e^{xy}\left((1+xy)dx + x^2dy\right)$;

358. $dz = xy\left(xy^3dx + \frac{4}{3}x^2y^2dy\right)$;

359. $dz = \sin(x+y)(dx+dy)$.

Quyidagi to'la differensiallardan olingan integrallarni hisoblang (360-363).

360. $\int\limits_{(-1;2)}^{(2,3)} ydx + xdy$;

361. $\int\limits_{(0;0)}^{(2;1)} 2xydx + x^2dy$;

362. $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} (x+y)(dxtdy)$;

363. $\int\limits_{(3;4)}^{(5,12)} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$ (koordinatalar boshi integrallash yo'liga tegishli emas).

Quyidagi birinchi tur egri chiziqli integralning tatbiqlariga oid masalalarni yeching (364-367).

364. Har bir nuqtadagi zichligi shu nuqtaning ordinatasiga teng bo'lgan $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ ellipsining birinchi kvadrantda yotuvchi bo'lagining massasini hisoblang.

365. Har bir nuqtadagi zichligi $\mu = (x, y) = |y|$ bo'lgan $y^2 = 2px$ $(0 \le x \le \frac{p}{2})$ parabola yoyining massasini toping.

366. Bir jinsli $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le \pi)$ sikloida yoyining og'irlik markazi koordinatalarini toping.

367. Bir jinsli $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $(0 \le t \le \pi)$ astroida yoyining og'irlik markazi koordinatalarini toping.

Ikkinchi tur egri chiziqli integral yordamida yopiq egri chiziqlar bilan chegaralangan tekis figura yuzalarini hisoblang (368-371).

368. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, ellips bilan.

369. $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$ astroida bilan.

370. $x = 2r\cos t - r\cos 2t, \quad y = 2r\sin t - r\sin 2t$ kardioida bilan.

371. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right)$ Bernulli lemniskatasi bilan.

Adabiyotlar ro‘yxati

1. Азларов.Т., Мансуров. Х., Математик анализ. Т.: «Ўзбекистон».1 т:1994 й.

2. Азларов.Т., Мансуров. Х., Математик анализ. Т.: «Ўзбекистон».2 т:1995 й.

3. Turgunbayev R. Matematik analiz. 2-qism. T.TDPU, 2008 y.

4. Jo‘rayev T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 2-q. T.: «O‘zbekiston». 1999. 303b.

5. Turgunbayev R., Ismailov Sh., Abdullayev O. Differensial tenglamalar kursidan misol va masalalar to‘plami. T.:TDPU. 2007 y.

6. Xudayberganov G va boshq. “Matematik analizdan ma’ruzalar” II qism. Toshkent 2010 y.

7. Toshmetov O‘.,Turgunbayev R. Matematik analizdam misol va masalalar. 2-qism. T.TDPU, 2010 y.

8. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Том 3. Функции нескольких переменных. М.:Физмат.-2003г.

MUNDARIJA

R .TURGUNBAYEV, K.QODIROV, T.BAKIROV

MATEMATIK ANALIZ

ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning differensial va integral hisobi

fanidan

O‘QUV QO‘LLANMA

Bosishga ruxsat etildi: 2020-yil. Nashriyot bosma tabog`i – 11,9.
Shartli bosma tabog`i – 5,93. Bichimi 84x108 1/16.
Adadi 100. Buyurtma № 170
«Poligraf Super Servis» MChJ
150100, Farg`ona viloyati, Farg`ona shahar, Aviasozlar ko`chasi, 2-uy.

ISBN 978-9943-6025-3-3
9 789943 602533