

МАТЕМАТИКА
В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

X

В.Д. Морозова

**ТЕОРИЯ
ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО
ПЕРЕМЕННОГО**

Издательство МГТУ имени Н.Э.Баумана

**Математика в техническом
университете**

Выпуск X

*Серия удостоена
Премии Правительства
Российской Федерации
в области науки и техники
за 2003 год*

Комплекс учебников из 21 выпуска

Под редакцией В.С. Зарубина и А.П. Крищенко

- I. Введение в анализ
- II. Дифференциальное исчисление функций
одного переменного
- III. Аналитическая геометрия
- IV. Линейная алгебра
- V. Дифференциальное исчисление функций
многих переменных
- VI. Интегральное исчисление функций
одного переменного
- VII. Кратные и криволинейные интегралы.
Элементы теории поля
- VIII. Дифференциальные уравнения
- IX. Ряды
- X. Теория функций комплексного переменного
- XI. Интегральные преобразования
и операционное исчисление
- XII. Дифференциальные уравнения
математической физики
- XIII. Приближенные методы математической физики
- XIV. Методы оптимизации
- XV. Вариационное исчисление и оптимальное управление
- XVI. Теория вероятностей
- XVII. Математическая статистика
- XVIII. Случайные процессы
- XIX. Дискретная математика
- XX. Исследование операций
- XXI. Математическое моделирование в технике

В.Д. Морозова

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Под редакцией

д-ра техн. наук, профессора В.С. Зарубина
и д-ра физ.-мат. наук, профессора А.П. Крищенко

Издание третье, исправленное

*Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений*

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
2009

УДК 517.3(075.8)

ББК 22.161.5

М80

Рецензенты: проф. А.В. Манжиров, доц. Н.В. Копченова

Морозова В.Д.

М80 Теория функций комплексного переменного: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., исправл. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 520 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. X.)

ISBN 978-5-7038-3189-2 (Вып. X)

ISBN 978-5-7038-3022-2

Книга является десятым выпуском комплекса учебников „Математика в техническом университете“ и посвящена теории функций одного комплексного переменного. В ней уделено внимание вопросам, связанным с конформными отображениями, а также применению теории к решению прикладных задач. Приведены примеры и задачи из физики, механики и разных отраслей техники.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, который автор читает в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов технических университетов. Может быть полезен преподавателям, аспирантам и инженерам.

Ил. 174. Табл. 1. Библиогр. 26 назв.

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161.5



ISBN 978-5-7038-3189-2 (Вып. X)
ISBN 978-5-7038-3022-2

- © Морозова В.Д., 2000;
2009, с изменениями
- © Московский государственный
технический университет
им. Н.Э. Баумана, 2000;
2009, с изменениями
- © Издательство МГТУ
им. Н.Э. Баумана, 2000;
2009, с изменениями

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга посвящена теории функций комплексного переменного, являющейся ядром современной математики. Переход к рассмотрению функций комплексного переменного необходим в ряде вопросов и столь же естествен, как переход от действительных чисел к комплексным. Именно комплексные числа, согласно знаменитой теореме, сформулированной и доказанной немецким математиком Ф.Г. Фробениусом (1849–1917), дают единственно возможное расширение поля действительных чисел с сохранением алгебраических свойств. Для функций от комплексных чисел удается построить теорию, столь же полную и стройную, какой является теория, лежащая в основе математического анализа функций действительного переменного.

Одной из отличительных и привлекательных черт теории функций комплексного переменного можно считать ее подлинную „комплексность“ в том смысле, что она органически сочетает в себе аналитические и геометрические методы, уже ставшими классические подходы и вновь возникающие идеи. Наряду с достаточно конкретными и прикладными задачами в ней находят решение весьма общие и абстрактные проблемы. Понятия и конструкции теории функций комплексного переменного служат основными моделями, источниками и отправными пунктами как различных разделов математики, так и многих прикладных наук.

Исходные идеи теории функций комплексного переменного возникли во второй половине XVIII в. и связаны они прежде всего с именем Л. Эйлера. Основной массив теории был создан в XIX в. главным образом трудами О. Коши, Б. Римана и К. Вейерштрасса. В наши дни классическая часть комплексного математического анализа — теория функций одного комплексного переменного — приобрела вполне законченный

вид. Однако и в этой области еще есть нерешенные проблемы, связанные как с новыми постановками математических задач, так и с прикладными вопросами.

В учебной литературе существует немало удачных курсов теории функций одного комплексного переменного. Эта книга входит в серию выпусков „Математика в техническом университете“, что определило направленность в изложении материала и его адаптацию к особенностям математической подготовки студентов технических университетов.

Автор выражает искреннюю благодарность всем, кто помог в работе над книгой: научным редакторам профессору Зарубину В.С. и профессору Крищенко А.П., доцентам Е.А. Власовой и А.Н. Канатникову, прочитавшим рукопись книги и сделавшим поправки и ценные замечания. Глава 11 написана автором при непосредственном участии В.С. Зарубина.

Используемые в этой книге сведения из линейной алгебры и математического анализа функций действительного переменного можно найти в предшествующих выпусках серии „Математика в техническом университете“. Ссылкой в тексте на конкретный выпуск этой серии служит его номер, записанный римскими цифрами и заключенный в квадратные скобки. Например, [I-4.3] означает ссылку на третий параграф четвертой главы в первом выпуске, где, кстати, изложены начальные сведения о поле комплексных чисел, тогда как (см. 1.2) отсылает читателя ко второму параграфу первой главы, а (см. Д.5.1) — к первому дополнению пятой главы этой книги. Ссылки в тексте на номера формул и рисунков набраны обычным шрифтом (например, (2.1) — первая формула в главе 2, (рис. 1.5) — пятый рисунок в главе 1).

Большинство используемых в этой книге обозначений введено в первом выпуске серии. Они помещены в следующем за предисловием перечне основных обозначений, где наряду с их краткой расшифровкой указаны глава и параграф, в которых можно найти более подробное объяснение каждого обозначения. После этого перечня приведены написание и русское про-

изношение входящих в формулы букв латинского и греческого алфавитов.

В конце книги помещены список рекомендуемой литературы и предметный указатель, в который входят в алфавитном порядке (по существительному в именительном падеже) все выделенные в тексте *полужирным курсивом* термины с указанием страницы, где они строго определены или описаны. Выделение термина *светлым курсивом* означает, что в данном параграфе он отнесен к ключевым словам и читателю для понимания излагаемого материала должно быть известно значение этого термина. Читатель может уточнить это значение, найдя при помощи предметного указателя необходимую страницу. Если перед номером страницы стоит римская цифра, то определение или пояснение этого термина следует искать в соответствующем выпуске. Например, I-215 означает страницу 215 первого выпуска, а IX — девятый выпуск (соответствующее место в этом выпуске можно найти по его предметному указателю). В этих случаях курсивом указан номер страницы этой книги, где можно найти некоторые сведения о значении данного термина.

Перед чтением этой книги предлагаем в целях самоконтроля выполнить следующие несложные задания. При возникновении затруднений все необходимые сведения можно найти в предшествующих выпусках, номера которых указаны в конце каждого задания. Значения терминов, выделенных в тексте этих заданий **прямым полужирным шрифтом**, далее будем считать известными (в основном тексте книги эти термины не выделены и не входят в предметный указатель).

Задания для самопроверки

1. Из каких **чисел** состоят множества \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и \mathbb{C} ? Что такое **абсолютная величина (модуль)** числа? [I]
2. Каков ход доказательства по **методу математической индукции**? [I]

3. Запишите обозначения промежутков числовой прямой: интервала, отрезка, полуинтервала, бесконечных интервала и полуинтервала. [I]

4. Изобразите на числовой прямой окрестности конечной (радиуса r) и бесконечной точек расширенной числовой прямой. В чем отличие этих окрестностей от проколотых окрестностей и полуокрестностей? [I]

5. Сформулируйте определение и дайте геометрическую интерпретацию предела последовательности действительных чисел $\{x_n\}$. Являются ли сходящимися последовательности $\{2^n\}$; $\{1/n^2\}$; $\{\cos(\pi n/2)\}$? Есть ли среди них бесконечно большая последовательность? [I]

6. Укажите области определения (существования) и значений и постройте графики однозначных ветвей многозначной функции $y^2 = 1/x^2$. [I]

7. Сформулируйте определения предела, производной и дифференциала скалярной функции действительного переменного в точке. В каком случае такую функцию называют непрерывной и дифференцируемой в точке, в промежутке? Как вычислить производные сложной и обратной функций и функции, заданной параметрическим способом? [I], [II]

8. При каком изменении аргумента функции $\sin x$ и $1/x$ являются бесконечно малыми, а функции x^2 и $\operatorname{ctg} x$ — бесконечно большими? Приведите примеры бесконечно малых при $x \rightarrow a$ функций: а) одного порядка; б) более высокого порядка малости; в) первого порядка малости; г) несравнимых; д) эквивалентных. [I]

9. Напишите выражения для производной и дифференциала логарифмической функции действительного переменного. Что такое полное приращение функции многих переменных в точке и ее частная и смешанная производные? Каков геометрический смысл частных производных и производной по направлению функции двух переменных? [I], [II], [V]

10. В чем различие между **первообразной** функции и **неопределенным интегралом** от этой функции? Каковы условия применения **формулы Ньютона — Лейбница**? Чему равны производные **определенного интеграла** по **переменным верхнему и нижнему пределам**? [VI]

11. Каковы основные свойства и правила вычисления **криволинейного интеграла**? В каком случае его значение не зависит от пути интегрирования? [VII]

12. Перечислите свойства **суммы и частичной суммы сходящегося числового ряда**. Сформулируйте **необходимое условие сходимости числового ряда** и достаточные признаки сходимости **знакоположительных рядов: признаки сравнения, Даламбера и Коши (радикальный и интегральный)**. [IX]

13. Выясните, применим ли к числовому ряду

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \dots$$

признак сходимости Лейбница. [IX]

14. Сформулируйте **теорему Абеля** для **степенных рядов** с действительными членами. Как может вести себя такой ряд в граничных точках **интервала сходимости**? [IX]

15. При каких условиях функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы **ряда Тейлора**? Запишите ряды Тейлора для e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ и укажите их радиусы сходимости. Сформулируйте **критерий Коши** и **признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда**. [IX]

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- ◀ и ▶ — начало и окончание доказательства
- # — окончание примера, замечания, теоремы без доказательства
- $a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A I-1.1
- $A \subset B$ — множество A включено в множество B I-1.2
- $A = \{a, b, c\}$ — множество A состоит из элементов a, b, c I-1.1
- $A = \{x: \dots\}$ — множество A состоит из элементов x , обладающих свойством, указанным после двоеточия 1.1
- \emptyset — пустое множество 1.1
- $A \implies B$ — из высказывания A следует B I-1.5
- $A \iff B$ — высказывания A и B равносильны I-1.5
- \mathbb{N} — множество натуральных чисел I-1.3
- \mathbb{Z} — множество целых чисел I-1.3
- \mathbb{Q} — множество рациональных чисел I-1.3
- \mathbb{R} — множество действительных чисел I-1.3
- \mathbb{C} — множество комплексных чисел 1.1, I-4.3
- $[a, b]$ — отрезок с концами в точках a и b I-1.3
- (a, b) — интервал с концами в точках a и b I-1.3
- $[a, b), (a, b]$ — полуинтервалы с концами в точках a и b I-1.3
- ∞ — бесконечно удаленная точка расширенной комплексной плоскости I-1.3
- $\sum_{k=1}^n a_k$ — сумма n слагаемых $a_1, \dots, a_k, \dots, a_n$ I-2.6
- $\prod_{m=1}^n a_m$ — произведение n сомножителей $a_1, \dots, a_m, \dots, a_n$ I-2.6

- $n!$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно **I-2.6**
- $k = \overline{1, n}$ — число k принимает последовательно все значения из множества натуральных чисел от 1 до n включительно **I-2.6**
- $M(x; y)$ — точка M плоскости с координатами x (абсцисса) и y (ордината) **I-2.5, 1.1**
- (x, y) — упорядоченная пара действительных чисел x и y **1.1, I-4.3**
- \mathbb{R}^2 — декартово произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (множество упорядоченных пар действительных чисел) **I-2.5**
- i — мнимая единица **1.1, I-4.3**
- $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ — действительная и мнимая части комплексного числа z **1.1, I-4.3**
- \bar{z} — число, комплексно сопряженное числу z **1.1, I-4.3**
- (z) — комплексная плоскость **1.1, I-4.3**
- $|z|$ — модуль комплексного числа z **1.2, I-4.3**
- $\operatorname{Arg} z$ — аргумент комплексного числа z **1.2, I-4.3**
- $\arg z$ — главное значение аргумента комплексного числа z **1.2, I-4.3**
- \bar{C} — расширенная комплексная плоскость **1.3**
- $Z(\xi, \eta, \chi)$ — стереографическая проекция комплексного числа z **1.3**
- ∂D — граница области D **1.4**
- \bar{D} — замыкание области D **1.4**
- $\{z_n\}$ — бесконечная последовательность элементов $z_n \in C$ **2.1**
- $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ — предел последовательности $\{z_n\}$ **2.1**
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} z_n, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} z_n$ — верхний и нижний частичные пределы последовательности $\{z_n\}$ **2.4**

$f(a) = f(z)|_{z=a}$ — значение функции $f(z)$ комплексного переменного z в точке $z = a$ **3.1**

$D(f)$ — область определения (существования) функции $f(z)$ комплексного переменного z **3.1**

$R(f)$ — область значений функции $f(z)$ комплексного переменного z **3.1**

$z = f^{-1}(w)$ — функция, обратная к функции $w = f(z)$ **3.1**

$u(x, y), v(x, y)$ — действительная и мнимая части функции $w = f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ **3.1**

$U(z_0)$ — окрестность точки $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ **3.2**

$U(z_0, \varepsilon)$ — ε -окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ **1.4**

$U(\infty, E)$ — E -окрестность бесконечно удаленной точки **1.4**

$\overset{\circ}{V}(z_0)$ — проколота окрестность точки $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ **3.2**

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ — предел функции $f(z)$ в точке $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ (при $z \rightarrow z_0$)

3.2

$(g \circ f)(z)$ — композиция функций комплексного переменного $f(z)$ и $g(w)$, т.е. сложная функция $g(f(z))$ **3.2**

e^z — экспоненциальная функция (экспонента) аргумента $z \in \mathbb{C}$ **3.3**

$\ln x$ — натуральный логарифм числа $x > 0$ (по основанию e) **7.8**

$\operatorname{Ln} z$ — логарифм комплексного числа z **3.5**

$\ln z$ — главное значение логарифма комплексного числа z **3.5**

$\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, \operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$ — гиперболические функции синус, косинус, тангенс и котангенс комплексного переменного **3.3**

$\operatorname{Arcsin} z, \operatorname{Arccos} z, \operatorname{Arctg} z, \operatorname{Arcctg} z$ — функции комплексного переменного, обратные функциям $\sin z, \cos z, \operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z$ **3.5**

$f(z) \underset{z \rightarrow a}{\sim} g(z)$ — функции $f(z)$ и $g(z)$ являются эквивалентными при $z \rightarrow a$ **I-10.2**

$f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$ — производная функции $f(z)$ комплексного переменного z **4.1**

$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ — частная производная функции $u(x, y)$ по переменному x **4.2**

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа **4.9**

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ — определенный интеграл от функции $f(x)$ действительного переменного x с нижним пределом α и верхним пределом β **VI**

$\int_{\gamma} f(z) dz$ — интеграл от функции $f(z)$ комплексного переменного z по ориентированной кривой γ **5.1**

$\oint_L f(z) dz$ — интеграл от функции $f(z)$ комплексного переменного z по замкнутому контуру L при его обходе против хода часовой стрелки B **5.1**

$\int_{z_A}^{z_B} f(z) dz$ — интеграл от функции $f(z)$ комплексного переменного z по кривой между точками z_A и z_B , не зависящий от пути интегрирования **5.3**

$\operatorname{Res}_{z=a} f(z)$ — вычет функции $f(z)$ комплексного переменного z в точке $a \in \overline{\mathbb{C}}$ **8.1**

$\operatorname{Res}_L \frac{f'(z)}{f(z)}$ — логарифмический вычет функции $f(z)$ комплексного переменного z относительно замкнутого контура L **8.6**

$P_n(z)$ — многочлен степени $n \in \mathbb{N}$ **8.6**

$\Delta_{\gamma} \operatorname{Arg} z$ — приращение аргумента комплексного числа z при перемещении на комплексной плоскости по кривой γ **3.4**

Буквы латинского алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A a A a	а	N n N n	эн
B b B b	бэ	O o O o	о
C c C c	цэ	P p P p	пэ
D d D d	дэ	Q q Q q	ку
E e E e	е	R r R r	эр
F f F f	эф	S s S s	эс
G g G g	же	T t T t	тэ
H h H h	аш	U u U u	у
I i I i	и	V v V v	вэ
J j J j	йот	W w W w	дубль-вэ
K k K k	ка	X x X x	икс
L l L l	эль	Y y Y y	игрек
M m M m	эм	Z z Z z	зэт

Представлен наиболее употребительный (но не единственный) вариант произношения (в частности, вместо „йот“ иногда говорят „жи“).

Буквы греческого алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A α	альфа	I ι	йота	P ρ	ро
B β	бета	K κ	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	ламбда	Τ τ	тау
Δ δ	дельта	Μ μ	ми	Υ υ	ипсилон
Ε ε	эпсилон	Ν ν	ни	Φ φ	фи
Z ζ	дзета	Ξ ξ	кси	Χ χ	хи
Η η	эта	Ο ο	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ θ θ	тэта	Π π	пи	Ω ω	омега

Наряду с указанным произношением также говорят „лямбда“, „мю“ и „ню“.

1. КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Начнем с описания *комплексных чисел* и действий над ними. Полагая, что этот материал уже известен [I-4.3], даем лишь краткое описание с акцентом на те особенности, которые будут существенны в дальнейшем изложении.

1.1. Алгебраическая форма записи комплексного числа

Рассмотрим множество \mathbb{R}^2 *упорядоченных пар* $z = (x, y)$ действительных чисел $x, y \in \mathbb{R}$. На этом множестве введем совокупность операций, превращающих его в поле [I-4.2], обозначаемое, как правило, \mathbb{C} и называемое *полем (множеством) комплексных чисел*, а каждый его элемент — *комплексным числом*.

Суммой $z_1 + z_2$ двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называют комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (1.1)$$

а *произведением* $z_1 z_2$ этих комплексных чисел — комплексное число

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.2)$$

Элемент $O = (0, 0)$ поля комплексных чисел является *нейтральным* относительно операции сложения, и его называют *нулевым элементом* этого *поля*. На плоскости xOy он совпадает с началом координат. Элемент $(1, 0)$ является нейтральным относительно операции умножения, и его называют *единицей поля* комплексных чисел.

Особую роль играет комплексное число $(0, 1)$, которое обозначают i и называют *мнимой единицей*. Согласно (1.2), имеем

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0), \quad i(y, 0) = (0, 1)(y, 0) = (0, y). \quad (1.3)$$

Каждую упорядоченную пару $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ сопоставим с числом $x \in \mathbb{R}$. Возникает взаимно однозначное соответствие между множеством \mathbb{R} действительных чисел и множеством упорядоченных пар вида $(x, 0)$, при котором сумме и произведению действительных чисел отвечают сумма и произведение соответствующих им упорядоченных пар. Поэтому каждую упорядоченную пару вида $(x, 0)$ отождествляют с числом x . В этом случае каждую упорядоченную пару можно представить в виде

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy. \quad (1.4)$$

Выражение $z = x + iy$ представляет собой *алгебраическую* (или декартову) *форму записи* (представления) *комплексного числа*. В этой записи x и y — действительные числа, причем x называют *действительной частью комплексного числа* z и обозначают $\operatorname{Re} z$, а y называют *мнимой частью комплексного числа* z и обозначают $\operatorname{Im} z$. Таким образом, в записи (1.4)

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{и} \quad y = \operatorname{Im} z. \quad (1.5)$$

Комплексное число равно нулю ($z = 0$) в том и только в том случае, когда его действительная и мнимая части одновременно равны нулю.

Элементы поля \mathbb{C} комплексных чисел можно отождествить с точками плоскости, рассматривая действительную x и мнимую y части комплексного числа $x + iy$ как

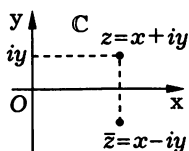


Рис. 1.1

координаты точки $M((x; y))$ в некоторой фиксированной *прямоугольной системе координат* Oxy (рис. 1.1). В этом случае плоскость xOy называют *комплексной плоскостью* (или *плоскостью комплексных чисел*)

и обозначают либо (как и это поле) символом \mathbb{C} , либо заключенным в круглые скобки обозначением комплексного числа: (z) , (w) . Произвольному действительному числу x соответствует точка $(x; 0)$ комплексной плоскости, лежащая на *оси абсцисс*, которую применительно к плоскости \mathbb{C} называют *действительной* (или *вещественной*) *осью*. Чисто мнимому числу iy соответствует точка $(0; y)$ плоскости \mathbb{C} , расположенная на *оси ординат*, называемой в данном случае *мнимой осью* (но по традиции обозначаемой y , а не iy !).

Комплексному числу $z = x + iy$ соответствует точка $M(x; y)$ комплексной плоскости. При этом *абсцисса точки* совпадает с действительной частью комплексного числа, а *ордината точки* — с его мнимой частью. Интерпретация комплексных чисел как точек плоскости позволяет говорить о *геометрической форме представления комплексного числа*. Далее точку $M(x; y)$ плоскости \mathbb{C} с координатами x и y будем обозначать так же, как и соответствующее ей комплексное число $z = x + iy$.

Операции сложения (1.1) и умножения (1.2) обладают свойствами *коммутативности* и *ассоциативности*, а умножение обладает свойством *дистрибутивности* относительно сложения.

Два комплексных числа, записанных в алгебраической форме, равны в том и только в том случае, когда равны соответственно их действительные и мнимые части. Применительно к этой форме записи правила (1.1) и (1.2) дают

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (1.6)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (1.7)$$

и приводят практически к простому условию, что все действия над комплексными числами аналогичны действиям над *многочленами*, но с учетом свойств мнимой единицы

$$i^2 = ii = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = 1 \quad \text{и т.д.} \quad (1.8)$$

Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называют комплексно сопряженными. На плоскости \mathbb{C} им соответствуют точки, расположенные симметрично относительно действительной оси (см. рис. 1.1). Сумма и произведение сопряженных комплексных чисел являются действительными числами, а разность — чисто мнимым числом:

$$z + \bar{z} = 2x = 2\operatorname{Re} z, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2, \quad z - \bar{z} = 2iy = 2i \operatorname{Im} z. \quad (1.9)$$

Для сложения и умножения существуют обратные операции: соответственно вычитание и деление (кроме деления на нуль), которые в алгебраической форме можно записать следующим образом:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \quad (1.10)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad z_2 \neq 0. \quad (1.11)$$

Пример 1.1. а. Пусть $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i$. Согласно (1.6), (1.7) и (1.10), (1.11), находим

$$z_1 + z_2 = (1 - i) + (1 + i) = 2,$$

$$z_1 - z_2 = (1 - i) - (1 + i) = -2i,$$

$$z_1z_2 = (1 - i)(1 + i) = 1 - i^2 = 2,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - 2i + i^2}{2} = -i.$$

б. Пусть $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = 5 - i$. Тогда

$$z_1 + z_2 = (-3 + 4i) + (5 - i) = 2 + 3i,$$

$$z_1 - z_2 = (-3 + 4i) - (5 - i) = -8 + 5i,$$

$$z_1z_2 = (-3 + 4i)(5 - i) = (-15 + 4) + i(20 + 3) = -11 + 23i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3+4i}{5-i} = \frac{(-3+4i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{-15-4}{25+1} + i\frac{20-3}{25+1} = -\frac{19}{26} + i\frac{17}{26}.$$

1.2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Каждому комплексному числу z можно поставить в соответствие на комплексной плоскости \mathbb{C} радиус-вектор точки, изображающей это число (рис. 1.2). Из (1.6) и (1.10) следует, что сложение и вычитание комплексных чисел аналогично нахождению суммы и разности векторов в комплексной плоскости по правилу параллелограмма (рис. 1.3).

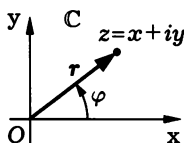


Рис. 1.2

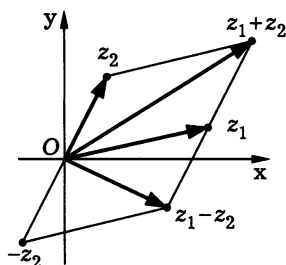


Рис. 1.3

Введенная в 1.1 алгебраическая форма записи комплексного числа удобна для выполнения операции сложения и обратной к ней операции вычитания. Однако, как видно из (1.7) и (1.11), умножение и деление при этом представлении комплексного числа выполнить не столь просто. Для умножения и деления комплексных чисел, а также для возведения в степень комплексного числа и извлечения корня из комплексного числа, удобна **тригонометрическая** (или полярная) **форма записи комплексного числа**

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.12)$$

Такое представление комплексного числа получается из алгебраической формы записи (1.4) переходом к **полярным координатам точки**, изображающей комплексное число:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (1.13)$$

Полярными координатами точки, изображающей комплексное число z , являются *полярный радиус* r , равный длине радиус-вектора точки z , и *полярный угол* φ , равный углу между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором точки z (см. рис. 1.2).

Полярные координаты r и φ точки, изображающей комплексное число z на комплексной плоскости, называют соответственно *модулем* и *аргументом комплексного числа* и обозначают $|z|$ и $\text{Arg } z$. Нетрудно увидеть, что

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{tg}(\text{Arg } z) = \text{tg } \varphi = \frac{y}{x}. \quad (1.14)$$

При $x = 0$, $y \neq 0$ имеем мнимое число $z = iy$. В этом случае аргумент комплексного числа имеет значения $\text{Arg } z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $y > 0$ и $\text{Arg } z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ при $y < 0$. Поэтому второе равенство (1.14) можно считать верным и при $x = 0$, $y \neq 0$. Для комплексного числа $z = 0$ аргумент не определен.

Модуль комплексного числа определен однозначно, а аргумент — с точностью до слагаемого, кратного 2π . Угол φ отсчитывают так же, как в тригонометрии: положительным направлением изменения угла считают направление против часовой стрелки. Для комплексного числа $z = 0$ аргумент не определен. Это комплексное число определяют единственным условием $r = |z| = 0$. Итак, в форме (1.12) можно представить любое комплексное число z . Отметим еще раз, что для $z = 0$ модуль r обязательно равен нулю, а аргумент φ может иметь любое значение.

Для модулей комплексных чисел z_1 и z_2 справедливы неравенства

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|, \quad (1.15)$$

геометрический смысл которых ясен из рис. 1.3.

Главное значение аргумента комплексного числа, обозначаемое $\text{arg } z$, есть значение аргумента комплексного числа, удо-

влетворяющее условию

$$-\pi < \arg z \leq \pi. \quad (1.16)$$

Каждому комплексному числу $z \neq 0$ соответствует единственное главное значение его аргумента. Так, $\arg 1 = 0$, $\arg(-3) = \pi$, $\arg(-1+i) = 3\pi/4$, $\arg(-1-i) = -3\pi/4$, $\arg(-i) = -\pi/2$. Очевидно, что

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.17)$$

Иногда под главным значением аргумента понимают то, которое попадает в промежуток $[0, 2\pi)$. В этом случае главное значение аргумента также определено однозначно.

С учетом ограничений (1.16), налагаемых на главное значение аргумента комплексного числа $z = x + iy$, с помощью тригонометрической функции $\operatorname{arctg} x$ получаем

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}(y/x), & x < 0 \text{ и } y \geq 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}(y/x), & x < 0 \text{ и } y < 0; \\ \pi/2, & x = 0 \text{ и } y > 0; \\ -\pi/2, & x = 0 \text{ и } y < 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Это нетрудно установить, рассматривая в каждом из указанных в (1.18) случаев произвольную точку, изображающую комплексное число.

Очевидно, что два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на слагаемое, кратное 2π .

Используя для комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, записанных в тригонометрической форме, равенство (1.7), можно установить, что

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (1.19)$$

и в случае $z_2 \neq 0$ (а значит, и $r_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (1.20)$$

Согласно (1.19) и (1.20), при умножении комплексных чисел их модули следует перемножить, а аргументы сложить, а при делении — модуль делимого разделить на модуль делителя, а аргумент делителя вычесть из аргумента делимого (рис. 1.4).

Итак,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2; \quad (1.21)$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2. \quad (1.22)$$

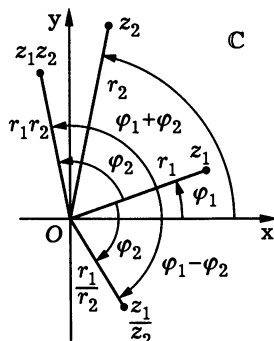


Рис. 1.4

Учитывая (1.14), получаем

$$|\bar{z}| = |z|, \quad |\bar{z}z| = |z|^2, \quad \text{Arg } \bar{z} = -\text{Arg } z. \quad (1.23)$$

Рассматривая возведение комплексного числа z в натуральную степень как умножение z на себя n раз, находим

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1.24)$$

Это соотношение называют *формулой Муавра* возведения комплексного числа в целую положительную степень. Отметим,

что при вычислении z^n по формуле (1.24) можно считать, что $\varphi = \arg z$, поскольку в силу периодичности тригонометрических функций $\cos x$ и $\sin x$ слагаемое, кратное 2π , можно не писать.

Извлечение корня — это операция, обратная возведению в степень, т.е.

$$w = \sqrt[n]{z}, \quad \text{если } w^n = z. \quad (1.25)$$

Если $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ и $w = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, то, согласно (1.24), (1.25) и условию равенства комплексных чисел в тригонометрической форме, имеем

$$\rho^n = r \quad \text{и} \quad n\vartheta = \varphi + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \vartheta = \frac{\varphi + 2l\pi}{n} = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k, l \in \mathbb{Z},$$

и в итоге

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right), \\ k = 0, 1, \dots, n-1. \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Из этого соотношения, называемого *формулой Муавра* извлечения корня целой положительной степени из комплексного числа, следует, что среди возможных значений $\sqrt[n]{z}$ различными будут n значений, соответствующих, например, значениям $k = \overline{0, n-1}$. Нетрудно установить, что при других значениях k значения $\sqrt[n]{z}$ повторяются. В формуле (1.26) вместо указанных n значений параметра k можно было бы указать любой другой набор значений, среди которых нет чисел, различающихся на слагаемое, кратное n , например $k = 1, 2, \dots, n$.

Все n различных значений для $\sqrt[n]{z}$ имеют один и тот же модуль, а их аргументы отличны на углы, кратные $2\pi/n$. Значениям $\sqrt[n]{z}$ отвечают точки комплексной плоскости, расположенные в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат. При

этом радиус-вектор одной из вершин образует с осью Ox угол $\arg z/n$.

Из (1.24) и (1.26) следует формула для возведения комплексного числа в рациональную степень. Возведение комплексного числа $z \neq 0$ в рациональную степень $q = m/n$, где m/n — несократимая дробь, можно рассматривать как две последовательные операции: сперва возведение комплексного числа в целую степень $m \in \mathbb{Z}$, а затем извлечение из результата корня n -й степени. Учитывая, что $\text{Arg}(z^m) = m \text{Arg} z$, получаем

$$\begin{cases} z^q = r^q \left(\cos \frac{m \arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{m \arg z + 2k\pi}{n} \right), \\ k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (1.27)$$

Пример 1.2. а. Пусть $z = 1 + i\sqrt{3}$. Найдем z^{12} . Для этого запишем комплексное число z в тригонометрической форме, вычислив предварительно $|z|$ и $\arg z$. Имеем

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2, \quad \arg z = \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \quad \text{и} \quad z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Тогда, согласно (1.24),

$$z^{12} = 2^{12} \left(\cos \frac{12\pi}{3} + i \sin \frac{12\pi}{3} \right) = 2^{12} (\cos 4\pi + i \sin 4\pi) = 2^{12}.$$

б. Пусть $z = -1$. Найдем $\sqrt[4]{z}$. Запишем z в тригонометрической форме:

$$z = -1 = \cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi).$$

В силу (1.26) запишем

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{-1} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}.$$

Полагая $k = 0, 1, 2, 3$, выпишем все четыре значения корня:

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),$$

$$z_2 = \cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i),$$

$$z_3 = \cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i),$$

$$z_4 = \cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

Точки, изображающие эти комплексные числа, являются вершинами квадрата и расположены на окружности радиуса 1 с центром в точке $z = 0$ (рис. 1.5).

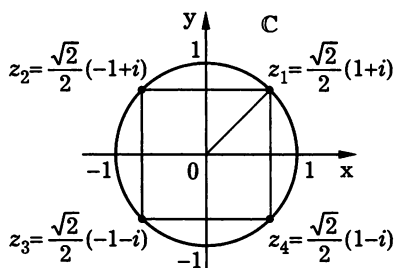


Рис. 1.5

1.3. Бесконечно удаленная точка. Сфера Римана

Выберем в пространстве прямоугольную систему координат $O\xi\eta\chi$, оси $O\xi$ и $O\eta$ которой совпадают с осями Ox и Oy системы координат Oxy комплексной плоскости (рис. 1.6), и рассмотрим сферу S единичного диаметра с уравнением

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\chi - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad (1.28)$$

касающуюся плоскости \mathbb{C} в начале координат.

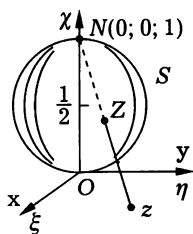


Рис. 1.6

Каждому комплексному числу $z = x + iy$, изображаемому в плоскости \mathbb{C} точкой $(x; y)$, поставим в соответствие точку $Z(\xi; \eta; \chi)$ пересечения со сферой S луча, соединяющего „северный полюс“ $N(0; 0; 1)$ сферы с точкой z . Точку Z называют **сферическим изображением комплексного числа** $z \in \mathbb{C}$. При такой геометрической интерпретации „южному полюсу“ сферы S

соответствует комплексное число $z = 0$, ее „меридианам“ — комплексные числа z с одинаковым *главным значением аргумента* $\arg z = \text{const}$ (лучи комплексной плоскости, исходящие из начала координат), а „параллелям“ — комплексные числа z с одинаковым значением *модуля* $|z| = \text{const}$ (окружности плоскости \mathbb{C} с центром в начале координат).

Итак, если сферу рассматривать как множество S точек Z , то можно говорить о взаимно однозначном соответствии между точками множеств \mathbb{C} и $S \setminus \{N\}$, поскольку точке N не соответствует ни одна точка $z \in \mathbb{C}$. Условимся считать, что точка N соответствует **бесконечно удаленной точке** $z = \infty$. Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между сферой S и **расширенной комплексной плоскостью** $\overline{\mathbb{C}}$, которая получается добавлением к комплексной плоскости \mathbb{C} бесконечно удаленной точки ∞ . Далее будем отождествлять расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ со сферой S , называемой **сферой комплексных чисел**, или **сферой Римана**. Тогда плоскости \mathbb{C} будет соответствовать множество $S \setminus \{N\}$ — сфера с выколотым „северным полюсом“ (точкой N).

Чтобы установить формулы связи между декартовыми координатами x и y точки, изображающей комплексное число $z = x + iy$, и координатами ξ , η и χ ее сферического изображения Z , составим **параметрические уравнения прямой** Nz (см. рис. 1.6), проходящей через точку $N(0; 0; 1)$ и имеющей

направляющий вектор $\{x; y; -1\}$:

$$\xi = tx, \quad \eta = ty, \quad \chi = 1 - t. \quad (1.29)$$

Подставляя (1.29) в (1.28) в точке Z пересечения луча Nz с поверхностью сферы получаем

$$t = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + |z|^2}.$$

Отсюда с учетом (1.29) находим координаты точки Z стереографической проекции комплексного числа z :

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \chi = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}. \quad (1.30)$$

Последнее из равенств (1.30) позволяет написать

$$|z|^2 = \frac{\chi}{1 - \chi}.$$

Тогда из первых двух равенств (1.30) получаем формулы обратного преобразования:

$$x = \frac{\xi}{1 - \chi}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \chi}. \quad (1.31)$$

В соответствии с введенным понятием бесконечно удаленной точки полагают, что такая точка одна на комплексной плоскости, тогда как, например, при рассмотрении *пополненного множества действительных чисел* и соответствующей ему *расширенной числовой прямой* были введены две бесконечные точки: $+\infty$ и $-\infty$ [I-1.3].

В отличие от конечных точек комплексной плоскости бесконечно удаленная точка не участвует в алгебраических операциях: она введена лишь для удобства геометрических представлений.

Замечание 1.1. Сфера Римана S , будучи ограниченным и замкнутым множеством, является *компактным множеством*

[I-5.5]. Поэтому добавление к множеству \mathbb{C} комплексных чисел бесконечно удаленной точки называют часто компактификацией этого множества, а полученную в результате этого расширенную плоскость $\bar{\mathbb{C}}$ — компактифицированной комплексной плоскостью. #

Отображение, ставящее каждому комплексному числу в соответствие его сферическое изображение, обладает важным свойством: при этом отображении окружности на комплексной плоскости переходят в окружности на сфере Римана и, наоборот, окружностям на сфере Римана, не проходящим через „северный полюс“, соответствуют окружности на комплексной плоскости. Докажем это.

Любую окружность на комплексной плоскости \mathbb{C} можно задать уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$ — центр окружности, а R — ее радиус. Заменяя в этом уравнении переменные x и y переменными ξ , η , χ в соответствии с формулами (1.31), находим

$$\left(\frac{\xi}{1-\chi} - x_0\right)^2 + \left(\frac{\eta}{1-\chi} - y_0\right)^2 = R^2. \quad (1.32)$$

Таким образом, кривая на сфере Римана, которой на комплексной плоскости соответствует рассматриваемая окружность, может быть задана системой уравнений

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 - 2(\xi x_0 + \eta y_0)(1 - \chi) + (x_0^2 + y_0^2)(1 - \chi)^2 = R^2(1 - \chi)^2, \\ \xi^2 + \eta^2 + \chi^2 = \chi, \end{cases}$$

где первое уравнение получено простым преобразованием уравнения (1.32), а второе описывает сферу Римана. Заменяя в первом уравнении выражение $\xi^2 + \eta^2$ с помощью второго уравнения, а затем сокращая на $1 - \chi$, получаем эквивалентную

систему

$$\begin{cases} 2x_0\xi + 2y_0\eta + (x_0^2 + y_0^2 - R^2 - 1)\chi + (R^2 - x_0^2 - y_0^2) = 0, \\ \xi^2 + \eta^2 + \chi^2 = \chi. \end{cases}$$

Легко заметить, что первое уравнение системы — это уравнение плоскости. Значит, искомая кривая является сечением сферы Римана плоскостью, т.е. окружностью.

Рассмотрим на сфере Римана произвольную окружность, которую можно определить как сечение сферы некоторой плоскостью $A\xi + B\eta + C\chi + D = 0$. Окружность (а значит, и плоскость) не проходит через „северный полюс“, если $A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + D \neq 0$, или $C + D \neq 0$. В уравнении плоскости заменим переменные ξ, η, χ в соответствии с формулами (1.30):

$$\frac{Ax}{1 + |z|^2} + \frac{By}{1 + |z|^2} + \frac{C|z|^2}{1 + |z|^2} + D = 0.$$

Отсюда с учетом равенства $|z|^2 = x^2 + y^2$ находим

$$(C + D)(x^2 + y^2) + Ax + By + D = 0.$$

При $C + D \neq 0$ это алгебраическое уравнение второго порядка описывает в плоскости \mathbb{C} окружность.

Отметим особый случай, когда окружность на сфере Римана проходит через „северный полюс“. В этом случае окружность получается сечением сферы Римана плоскостью $A\xi + B\eta + C\chi + D = 0$, для которой $C + D = 0$. Повторяя рассуждения, изложенные выше, приходим к выводу, что такой окружности на комплексной плоскости соответствует прямая $Ax + By + D = 0$.

Несложно показать, что любой прямой $Ax + By + D = 0$ на комплексной плоскости соответствует окружность сферы Римана, расположенная в плоскости $A\xi + B\eta - D\chi + D = 0$ и проходящая через „северный полюс“. Таким образом, прямым комплексной плоскости на сфере Римана соответствуют окружности, проходящие через „северный полюс“, и только они.

1.4. Геометрия на комплексной плоскости

Введем на множестве \mathbb{C} обычную *евклидову метрику*, в которой под *расстоянием* между двумя точками $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ из \mathbb{C} понимают

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.33)$$

Имея в виду *сферическое изображение* комплексного числа, можно ввести на комплексной плоскости и иную метрику. В этой метрике, называемой *сферической метрикой*, под расстоянием между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ понимают расстояние в *евклидовом пространстве* \mathbb{R}^3 между их сферическими изображениями Z_1 и Z_2 . Используя (1.30) и проводя соответствующие алгебраические преобразования (или же обратившись к элементарной геометрии), можно показать, что это расстояние равно

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{|z_2 - z_1|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}. \quad (1.34)$$

Введение каждой из двух метрик (1.33) или (1.34) превращает множество \mathbb{C} в *метрическое пространство*, так как при этом удовлетворяются обычные аксиомы расстояния [I-5.1]. В частности, *неравенство треугольника* для метрики (1.33) равносильно уже указанному ранее (см. 1.2) неравенству

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (1.35)$$

Отсюда, как следствие, получаем

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|. \quad (1.36)$$

Используя сферическую метрику (1.34), можно ввести расстояние между точкой z и *бесконечно удаленной точкой* $z = \infty$ как евклидово расстояние между их сферическими изображениями Z и N (см. рис. 1.6):

$$\rho(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}. \quad (1.37)$$

Нетрудно убедиться, что (1.37) в сочетании с (1.34) превращает множество $\overline{\mathbb{C}}$ в метрическое пространство.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Под ε -окрестностью $U(z_0, \varepsilon)$ **точки** $z_0 \in \mathbb{C}$ в евклидовой метрике понимают открытый круг радиуса ε с центром в этой точке, т.е.

$$U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}: d(z, z_0) < \varepsilon\}. \quad (1.38)$$

Под ε -окрестностью точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ в сферической метрике понимают множество

$$\{z \in \overline{\mathbb{C}}: \rho(z, z_0) < \varepsilon\}. \quad (1.39)$$

Рассмотрим на плоскости \mathbb{C} *ограниченное множество*

$$M = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R\},$$

где $0 < R < \infty$. В силу неравенства

$$\frac{|z_2 - z_1|}{1 + R^2} \leq \rho(z_1, z_2) \leq |z_2 - z_1|, \quad z_1, z_2 \in M, \quad (1.40)$$

получаем: в каждой ε -окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ в евклидовой метрике содержится некоторая ε^* -окрестность этой точки в сферической метрике, и наоборот. Из (1.37) следует, что неравенство $\rho(z, \infty) < \varepsilon$ равносильно неравенству $|z| > E = \sqrt{1/\varepsilon^2 - 1}$. Следовательно, ε -окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ на *расширенной комплексной плоскости* в евклидовой метрике соответствует **внешность круга** радиуса E с центром в начале координат, т.е. множество

$$U(\infty, E) = \{z \in \overline{\mathbb{C}}: |z| > E\}, \quad E > 0. \quad (1.41)$$

С увеличением параметра E окрестность бесконечно удаленной точки сужается. В дальнейшем мы, как правило, будем использовать окрестности точек в евклидовой метрике (1.38) и (1.41).

На расширенной комплексной плоскости, как и в любом другом метрическом пространстве, важны такие понятия, как

внутренняя и граничная точка множества, открытое и замкнутое множества и т.п. [I]. Кратко опишем эти понятия.

Точка $z_0 \in M \subset \bar{C}$ является *внутренней точкой множества* M , если существует ε -окрестность этой точки, целиком включенная в множество M . Множество $M \subset \bar{C}$ *открытое*, если каждая точка $z_0 \in M$ является внутренней точкой M . Любое открытое множество, содержащее данную точку z_0 , рассматривают как окрестность этой точки (в широком смысле), такую окрестность обычно обозначают $U(z_0)$.

Точка z_0 является *граничной точкой множества* $M \subset \bar{C}$, если в любой ее ε -окрестности есть точки как принадлежащие M , так и не принадлежащие ему. Совокупность всех граничных точек множества M образует *границу* этого множества, обычно обозначаемую ∂M . Точка z_0 является *внешней точкой множества* M , если у нее есть окрестность, не пересекающаяся с M .

Точка $z_0 \in \bar{C}$ является *предельной точкой множества* $M \subset \bar{C}$, если в любой ее окрестности есть точки множества M , отличные от z_0 . Предельные точки множества, как и его граничные точки, могут принадлежать множеству, а могут и не принадлежать ему. Отметим, что предельная точка множества, ему не принадлежащая, является граничной точкой этого множества. Если множество M содержит все свои предельные точки (или, что то же самое, все свои граничные точки), то такое множество называют *замкнутым*. Из любого множества M можно получить замкнутое множество \bar{M} , присоединив к M все его предельные (граничные) точки. Множество \bar{M} называют *замыканием множества* M .

Любое множество $M \subset \bar{C}$ само является метрическим пространством с той же метрикой, что и метрика, заданная в \bar{C} . Поэтому можно говорить о множестве $F \subset M$ как об открытом или замкнутом в M , рассматривая F как подмножество метрического пространства M . При этом множество $F \subset M$ является открытым в M , если любая точка $z_0 \in F$ имеет такую ε -окрестность $U(z_0, \varepsilon)$, что $(U(z_0, \varepsilon) \cap M) \subset F$. Множество

$F \subset M$ замкнуто в M , если его предельные (граничные) точки, принадлежащие M , принадлежат и F . Каждое открытое (замкнутое) множество в M можно представить как пересечение с M некоторого открытого (замкнутого) множества (в $\bar{\mathbb{C}}$).

Если множество $F \subset M$ является замкнутым в M , то его дополнение $M \setminus F$ является открытым множеством в M . Если же множество $G \subset M$ открыто в M , то множество $M \setminus G$ замкнуто в M .

Под **кривой на плоскости** \mathbb{C} будем понимать *непрерывное отображение* $\gamma: T \rightarrow \mathbb{C}$ промежутка T действительной оси в комплексную плоскость \mathbb{C} . Если $T = [\alpha, \beta]$ — отрезок, то точки $A = \gamma(\alpha)$ и $B = \gamma(\beta)$ будем называть соответственно **начальной** и **конечной точками кривой**. В этом случае кривую часто обозначают AB . Возрастание аргумента вдоль промежутка задает на кривой направление обхода от начальной точки к конечной. Изменить направление обхода кривой можно, заменив отображение $\gamma(t)$ отображением $\gamma(-t)$, заданным на отрезке $[-\beta, -\alpha]$. Под **кривой на расширенной плоскости** $\bar{\mathbb{C}}$ будем понимать отображение промежутка T действительной оси в $\bar{\mathbb{C}}$, непрерывное относительно сферической метрики.

Отображение $\gamma: T \rightarrow \mathbb{C}$ можно представить в виде $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, где функции действительного переменного $x(t)$ и $y(t)$ определены на промежутке T . При этом непрерывность отображения $\gamma(t)$ означает, что функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на промежутке T . Уравнение вида

$$z = \gamma(t), \quad t \in T,$$

называют **комплексным уравнением кривой**. Если $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, то комплексное уравнение кривой можно преобразовать в *параметрические уравнения* этой кривой на комплексной плоскости:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in T.$$

Две кривые, заданные уравнениями $z = \gamma_1(t)$, $t \in [\alpha_1, \beta_1]$, и $z = \gamma_2(\tau)$, $\tau \in [\alpha_2, \beta_2]$, считают равными, а **отображения** γ_1 и γ_2 — **эквивалентными**, если существует действительная функция $t = s(\tau)$, $\tau \in [\alpha_2, \beta_2]$, непрерывная и возрастающая на отрезке $[\alpha_2, \beta_2]$, такая, что $s(\alpha_2) = \alpha_1$, $s(\beta_2) = \beta_1$ и $\gamma_1(s(\tau)) = \gamma_2(\tau)$, $\tau \in [\alpha_2, \beta_2]$. Каждой из равных кривых, очевидно, отвечает одно и то же множество точек плоскости (z), а выбор одной из этих кривых означает задание конкретного параметра для кривой. Таким образом, под кривой понимают не конкретное отображение промежутка действительной оси в комплексную плоскость, а некоторый класс эквивалентных отображений. Переход от одного отображения к другому, эквивалентному исходному, представляет собой **замену параметра кривой**.

Для любой кривой AB с начальной точкой A и конечной точкой B параметр можно выбрать так, что он будет меняться на отрезке $[0, 1]$. В самом деле, если кривая AB определена как отображение $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, то можно заменить это отображение ему эквивалентным отображением $\gamma_1(\tau) = \gamma(s(\tau))$, где $t = s(\tau) = \alpha + (\beta - \alpha)\tau$.

Если двум различным значениям t_1 и t_2 параметра кривой $\gamma(t)$ соответствует одна и та же точка комплексной плоскости (z), т.е. $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ и $t_1 \neq t_2$, то эту точку называют **точкой самопересечения кривой AB** , заданной уравнением $z = \gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Кривую, не имеющую точек самопересечения, называют **простой кривой** или **кривой Жордана**. Кривая, у которой совпадают начальная и конечная точки, является **замкнутой** (или **замкнутым контуром**). Если у замкнутой кривой нет других точек самопересечения, кроме начальной (конечной) точки, то эту кривую называют **простым замкнутым контуром**.

Пример 1.3. а. Кривая, заданная уравнением $z = i \sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, — это отрезок мнимой оси, соединяющий точки $z = -i$ и $z = i$ (рис. 1.7, а). Кривая имеет направление от точки

$z = -i$ (начальная точка кривой) к точке $z = i$ (конечная точка кривой). Уравнение этой кривой можно также записать в виде $z = it$, $t \in [-1, 1]$, или $z = i(2t - 1)$, $t \in [0, 1]$.

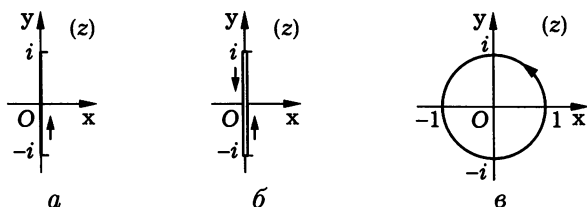


Рис. 1.7

б. Кривая, заданная уравнением $z = i \sin t$, $t \in [-\pi/2, 3\pi/2]$, представляет собой тот же отрезок мнимой оси, проходимый дважды: сначала от точки $z = -i$ к точке $z = i$, а затем от точки $z = i$ к точке $z = -i$ (рис. 1.7, б). Хотя эта кривая и кривая из пункта а определяют одно и то же множество на плоскости (z), мы имеем две разные кривые, так как ни одно представление первой кривой не может быть сведено к представлению второй заменой параметра.

в. Кривая, заданная уравнением $z = \gamma(t) = \cos t + i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, — это окружность $|z| = 1$, проходимая против часовой стрелки. У кривой совпадают начальная $\gamma(0) = 1$ и конечная $\gamma(2\pi) = 1$ точки (рис. 1.7, в). #

Кривую AB , заданную уравнением $z = \gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in T$, называют *гладкой*, если существуют производные $x'(t)$ и $y'(t)$, непрерывные на промежутке T , одновременно не обращающиеся в нуль, т.е.

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0, \quad t \in T.$$

Так как ненулевой вектор $\{x'(t); y'(t)\}$ задает направление *касательной к кривой*, то гладкость кривой означает, что в каждой ее точке можно провести касательную, которая непрерывно поворачивается при движении точки M по кривой AB (рис. 1.8, а).

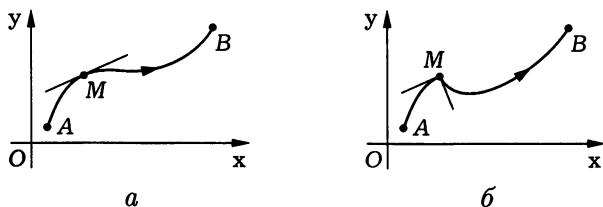


Рис. 1.8

Кривую называют *кусочно гладкой*, если ее можно разделить на конечное число гладких участков. Кусочно гладкая кривая во всех своих точках имеет касательную, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых существует предельное положение касательной слева и справа. Эти исключительные *точки кривой* называют *угловыми* (на рис. 1.8, б угловой является точка M).

Множество на расширенной комплексной плоскости называют *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

Одним из основных в теории функций комплексного переменного является понятие области. Это понятие используется в формулировках многих теорем.

Определение 1.1. Множество D точек расширенной комплексной плоскости называют *областью*, если это множество открытое и линейно связное, т.е.

- 1) все точки D являются внутренними;
- 2) любые две точки области D можно соединить кривой, целиком лежащей в D .

Область D называют *ограниченной*, если существует такой круг $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, что $D \subset K$.

Все точки комплексной плоскости по отношению к данной области D можно разделить на три класса: точки самой области (они же внутренние точки области); граничные точки области; внешние точки области, не принадлежащие области и

не являющиеся граничными точками области. Каждая внешняя точка z_0 области D имеет некоторую ε -окрестность, которая не пересекается с D . Множество всех граничных точек области D составляет *границу* этой области.

В \mathbb{C} существует единственная область, не имеющая граничных точек и, следовательно, не имеющая границы, — вся расширенная комплексная плоскость. Во всех остальных случаях область имеет границу. Область D , объединенная со своей границей, представляет собой замкнутое множество \bar{D} , которое называют *замкнутой областью*. Обратим внимание на то, что замкнутая область не есть область в смысле определения 1.1. Единственное исключение из этого правила — расширенная комплексная плоскость, которая одновременно является и областью, и замкнутой областью, так как не имеет границы. Термин „замкнутая область“, не совсем удачен, так как может приводить к путанице, но является общепринятым.

Область может не иметь внешних точек, и можно привести много подобных примеров. Так, областью без внешних точек является расширенная комплексная плоскость без отрезка $[-1, 1]$ действительной оси, или, как говорят, область \mathbb{C} с *разрезом* по отрезку $[-1, 1]$. В общем случае под разрезом области понимают любую простую кривую в этой области, точки которой удаляются из области. Отметим, что в результате разреза области получается снова область, если либо начальная, либо конечная точка лежит внутри области. Разрез может соединять две граничные точки области. В этом случае исходная область распадается на две области, расположенные по разные стороны разреза.

Французский математик К. Жордан (1838–1922) показал, что любая простая замкнутая кривая на плоскости делит плоскость на две не пересекающиеся области: первая не ограничена, ее называют внешней по отношению к кривой (*внешностью кривой*), а вторая ограничена, ее называют внутренней по отношению к кривой (*внутренностью кривой*). Для обеих этих областей кривая является границей.

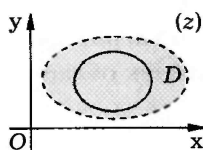


Рис. 1.9

Область D на комплексной плоскости называют **односвязной**, если она обладает следующим свойством: для любой простой замкнутой кривой, лежащей в D , внутренность этой кривой также целиком принадлежит D (рис. 1.9). **Область**, не обладающую указанным свойством, называют **многосвязной**.

Например, область, внутренняя по отношению к многоугольнику, является односвязной, а внешность того же многоугольника есть многосвязная область, так как окружность достаточно большого радиуса будет целиком лежать во внешности многоугольника, но ограниченный этой окружностью круг содержит также и внутренность многоугольника.

В дальнейшем будем рассматривать только такие области, границы которых состоят из конечного числа кусочно гладких кривых и изолированных точек. Пусть на комплексной плоскости даны простые замкнутые кривые C_1, C_2, \dots, C_n , причем кривые C_2, \dots, C_n попарно не пересекаются и все лежат внутри C_1 . Множество точек плоскости, расположенных внутри C_1 и вне C_2, \dots, C_n , представляет собой многосвязную область D , границу которой составляют контуры C_1, C_2, \dots, C_n . При этом контур C_1 называют **внешней границей многосвязной области**, а совокупность контуров C_2, \dots, C_n — **внутренней границей многосвязной области**. Каждый из этих контуров ограничивает „дырку“ (или „отверстие“), наличие таких „дырок“ характерно для многосвязных областей. Область D указанного вида часто называют **n -связной**.

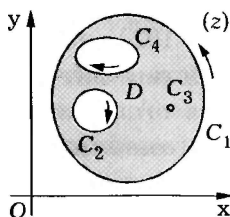


Рис. 1.10

„Дырки“ в многосвязной области могут вырождаться в точки, т.е. вместо каких-либо контуров C_i могут рассматриваться изолированные точки (точка C_3 на рис. 1.10).

Для контуров C_1, C_2, \dots, C_n , ограничивающих многосвязную область, часто фиксируют направление обхода. **Поло-**

жительным обходом границы области называют такое движение по границе, при котором область все время остается слева. Для внешней границы такой обход противоположен движению часовой стрелки, а для контуров внутренней границы положительный обход соответствует движению часовой стрелки (см. рис. 1.10). Движение в противоположном направлении называют **отрицательным обходом границы**. Границу многосвязной области с положительным ее обходом часто называют **составным контуром**.

Пример 1.4. а. Для области $D = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ границей являются точка $z = a$ и окружность $|z - a| = \varepsilon$. Эту ограниченную двусвязную область называют кругом радиуса $\varepsilon > 0$ с выколотым центром — точкой a , или проколотой ε -окрестностью точки $a \in \mathbb{C}$. Положительным обходом этой области является движение по окружности $|z - a| = \varepsilon$ против часовой стрелки (рис. 1.11).

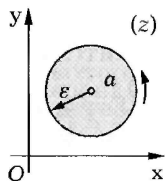


Рис. 1.11

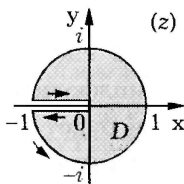


Рис. 1.12

б. Область $D = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z| < 1, \arg z \in (-\pi, \pi)\}$ изображена на рис. 1.12. Она является кругом $|z| < 1$ с разрезом по отрезку действительной оси, соединяющему точки $z = -1$ и $z = 0$. Граничная кривая этой односвязной области состоит из следующих частей (с учетом положительного обхода области): отрезка $[-1, 0]$ действительной оси, проходимогo от точки $z = 0$ до точки $z = -1$ (**нижний берег разреза**); окружности $|z| = 1$, проходимогo от точки $z = -1$ против часовой стрелки до той же точки; отрезка $[-1, 0]$, который проходится вторично, но уже от точки $z = -1$ до точки $z = 0$ (**верхний берег разреза**).

в. Граница области $D = \{z \in \mathbb{C}: 1 < |z| < 2\}$ состоит из двух кривых: окружности $|z| = 2$, при положительном обходе области, проходимой против часовой стрелки, и окружности $|z| = 1$, проходимой при таком обходе по часовой стрелке (рис. 1.13). Эта область является двусвязной. #

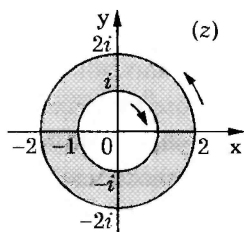


Рис. 1.13

На расширенной комплексной плоскости понятие односвязности (многосвязности) области изменяется. **Об-**

ласть D расширенной комплексной плоскости считают **односвязной**, если для любой простой замкнутой кривой, лежащей в D , области целиком принадлежит одна из областей, ограниченной этой кривой. Так, внешность многоугольника, будучи многосвязной (двусвязной) на комплексной плоскости, становится односвязной на расширенной комплексной плоскости. Точно так же внешность круга радиуса R не является односвязной на плоскости, но становится односвязной на расширенной комплексной плоскости. Односвязной на расширенной плоскости будет и область $D = \{z \in \overline{\mathbb{C}}: z \neq a\}$, т.е. вся расширенная комплексная плоскость с выколотой точкой $z = a$. Многосвязными на расширенной комплексной плоскости являются, например, $\overline{\mathbb{C}}$ с выколотыми точками $z_1 = 1$ и $z_2 = i$ и $\overline{\mathbb{C}}$ с разрезами по двум отрезкам, соединяющим пары точек $z = 0, z = 1$ и $z = i, z = 2i$.

Отметим, что область, односвязная на комплексной плоскости \mathbb{C} , остается односвязной и на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 1.1. Пусть $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ — линейно связное множество и L — его непустое подмножество. Если L одновременно и замкнуто и открыто в M , то $L = M$. #

1.5. Задание множества точек на комплексной плоскости

Рассмотрим множество $E \subset \mathbb{C}$, состоящее из комплексных чисел, и условимся, что z может иметь в качестве значения любое комплексное число из множества E . В этом случае мы будем называть z **комплексным переменным**, а множество E — его **областью изменения**. Отметим, что термин „область изменения“ никак не связан с термином „область“, введенным в определении 1.1. Область изменения комплексного переменного может быть областью или *замкнутой областью*, но может и не являться таковыми. Если область изменения комплексного переменного z не оговорена, то предполагается вся *комплексная плоскость*, т.е. z может принимать любое комплексное значение.

В этом параграфе кратко остановимся на том, каким образом можно задавать множества точек на комплексной плоскости, рассматривая эти множества как области изменения комплексного переменного. Познакомимся, по сути дела, с уравнениями некоторых кривых в комплексной форме и с построением множества точек $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих заданным условиям. Необходимыми при этом будут знания действий над комплексными числами, сведения из курса аналитической геометрии о прямой и кривых второго порядка [III], об уравнениях известных кривых в полярной системе координат [II], [III], о геометрическом смысле *модуля* и *аргумента* комплексного числа, *главного значения аргумента* комплексного числа, *расстояния* на комплексной плоскости и т.д. Отметим, что:

$|z|$ — расстояние точки $z \in \mathbb{C}$ от начала координат;

$|z - z_0|$ — расстояние между точками z и z_0 ;

$\text{Arg } z$ — угол, образованный *радиус-вектором* точки z с положительным направлением оси Ox ;

$\arg(z - z_0)$ — угол, образованный вектором, идущим из точки z_0 в точку z , с положительным направлением оси Ox , причем этот угол удовлетворяет условию $-\pi < \arg(z - z_0) \leq \pi$.

Множества, которые описываются комплексными уравнениями и неравенствами, часто удобно строить, находя простую геометрическую интерпретацию заданных уравнений и неравенств. Если такой подход реализовать не удастся, то необходимо проанализировать заданные уравнения и неравенства, если возможно, упростить их. Затем можно перейти к соотношениям, связывающим действительные переменные $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$. Такой переход в ряде случаев позволяет получить удобную геометрическую интерпретацию заданных соотношений.

Дальнейшее изложение построим на примерах.

Пример 1.5. Установим множества точек на плоскости \mathbb{C} , определяемые следующими условиями: а) $\operatorname{Re}(iz^2) < 2$; б) $|z - 1| < |z - i|$; в) $|z - 2| - |z + 2| \geq 3$; г) $\arg(z - i) < \pi/4$; д) $\arg z > |z|$.

а. Полагаем $z = x + iy$. Тогда

$$iz^2 = i(x^2 + 2ixy - y^2) = -2xy + i(x^2 - y^2).$$

Следовательно, условие $\operatorname{Re}(iz^2) < 2$ эквивалентно неравенству $-2xy < 2$, или $xy > -1$. Это условие определяет множество точек, расположенных между ветвями гиперболы $xy = -1$. Соответствующая этому множеству часть комплексной плоскости (z) на рис. 1.14 выделена (штриховой линией отмечена та часть границы множества точек, которая этому множеству не принадлежит).

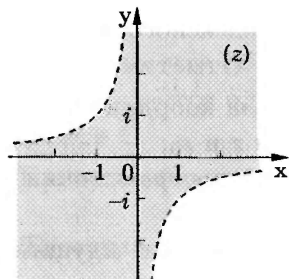


Рис. 1.14

б. Множество точек, заданное соотношением $|z - 1| < |z - i|$, можно установить из геометрического смысла неравенства. Дело в том, что $|z - 1|$ — расстояние между точками z и 1, а $|z - i|$ — расстояние между точками z и i . Известно, что на плоскости геометрическим местом точек, равноудаленных от двух заданных точек z_1 и

z_2 , является прямой, которая проходит через середину отрезка, соединяющего точки, и перпендикулярна этому отрезку. В данном случае $z_1 = 1$ и $z_2 = i$. Точки, находящиеся на этой прямой, удовлетворяют условию $|z - 1| = |z - i|$, ее уравнение $y = x$. Нас же интересуют точки z , расположенные ближе к точке $z = 1$, чем к точке $z = i$. Значит, множество, удовлетворяющее условию $|z - 1| < |z - i|$, имеет вид $\{z = x + iy: y < x\}$.

Тот же результат можно получить, если, как и в предыдущем случае, использовать так называемый аналитический подход. Положим $z = x + iy$. Тогда

$$|z - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \quad \text{и} \quad |z - i| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

и условие $|z - 1| < |z - i|$ приводит к неравенству

$$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} < \sqrt{x^2 + (y - 1)^2},$$

упрощая которое получаем $y < x$. На рис. 1.15 искомое множество выделено.

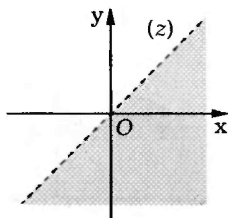


Рис. 1.15

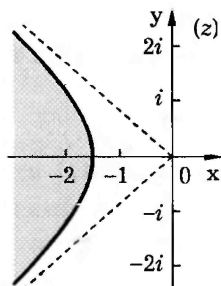


Рис. 1.16

в. По условию разность расстояний точки z , принадлежащей искомому множеству, до точек $z_1 = 2$ и $z_2 = -2$ должна быть не меньше чем 3. Напомним, что множество точек z , удовлетворяющих условию $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$, представляет собой ветвь *гиперболы* с *фокусами* z_1 и z_2 , причем ту, которая ближе к фокусу z_2 . Итак, множество точек, для которых

$|z - 2| - |z + 2| = 3$, представляет собой левую ветвь гиперболы с фокусами в точках $z_1 = 2$ и $z_2 = -2$, действительной полуосью a , определяемой из равенства $2a = 3$, и расстоянием $c = 2$ каждого из фокусов до центра гиперболы в начале координат. Уравнение этой гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a = 3/2$ и $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{7}/2$. Искомое множество точек соответствует части плоскости (z), выделенной на рис. 1.16 (в данном случае точки, лежащие на левой ветви гиперболы, принадлежат искомому множеству и поэтому его граница отмечена на рис. 1.16 сплошной линией).

г. Величина $\arg(z - i)$ равна углу, который вектор, идущий из точки $z_0 = i$ в точку z , образует с положительным направлением оси Ox . Поэтому точки z , удовлетворяющие условию $\arg(z - i) = \pi/4$, лежат на луче, выходящем из точки $z_0 = i$ под углом $\pi/4$ к оси Ox . Учитывая ограничение $-\pi < \arg(z - i)$ на главное значение аргумента комплексного числа, получаем искомое множество точек плоскости (z) (рис. 1.17).

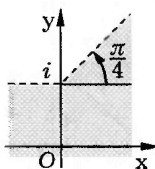


Рис. 1.17

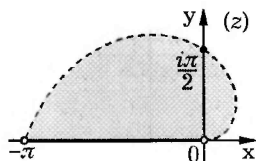


Рис. 1.18

д. Заданное условие $\arg z > |z|$ определяет ограничение на угол φ , образованный радиус-вектором точки z с положительным направлением оси Ox : $\varphi > r \geq 0$, где r — модуль комплексного числа z (полярный радиус точки z). Соотношение $r = \varphi$ представляет собой в полярных координатах уравнение **архимедовой спирали**. Архимедова спираль является траекторией точки, которая движется с постоянной скоростью по

лучу, вращающемуся с постоянной угловой скоростью вокруг начала координат. При этом скорость движения точки по лучу и угловая (в радианах) скорость вращения луча совпадают. Искомое множество точек изображено на рис. 1.18.

Вопросы и задачи

1.1. Упростите следующие выражения:

- а) $(3-7i)+(-2+i)+(-1+5i)$; б) $(3-7i)(3+7i)$; в) $(1+i)(1+i\sqrt{3})$;
 г) $\frac{1+i)^2}{(1-i)^2}$; д) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$.

1.2. Используя формулу Муавра, вычислите:

- а) $\sqrt[5]{-4+3i}$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}$; в) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{217}$; г) $\sqrt[3]{-2+2i}$.

1.3. Запишите условие, означающее, что различные точки z_1, z_2, z_3 и z_4 лежат на одной окружности или на одной прямой.

1.4. Постройте на плоскости (z) множества, заданные следующими условиями:

- а) $|z+2|=2$; б) $|z-2|+|z+2|=5$; в) $|z-2|+|z+2|>3$;
 г) $|z-z_1|=|z-z_2|$; д) $0 < \operatorname{Re}(5z) < 1$; е) $-1 < \operatorname{Im}(z-i) < 5$;
 ж) $|2z| > |1+z^2|$.

1.5. Множество точек на плоскости (z) задано уравнением $|z^2-1|=\lambda$, $\lambda > 0$. Для каких значений λ множество будет состоять из одной простой кривой, а для каких оно будет распадаться на несколько простых кривых? Выясните тот же вопрос для множества, заданного уравнением $|z^2+az+b|=\lambda$, $\lambda > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1.6. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат до точек заданного множества ($a > 0$):

- а) $\left|\frac{z+1}{z}\right|=a$; б) $\left|\frac{z+b}{z}\right|=a$, $b \in \mathbb{R}$.

2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Многие положения этой главы следовало бы отнести к теории рядов [IX]. Однако мы включили их и в эту книгу для более цельного представления о курсе по теории функций комплексного переменного, изучаемом в техническом университете.

2.1. Последовательности комплексных чисел

Последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел можно рассматривать как отображение в \mathbb{C} множества натуральных чисел \mathbb{N} (иными словами — как функцию целого положительного аргумента n , принимающую комплексные значения $z_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$). Как и в случае последовательности $\{x_n\}$ действительных чисел $x_n \in \mathbb{R}$, последовательность $\{z_n\}$ будет задана, если известно правило f , которое позволяет найти любой ее элемент $z_n \in \mathbb{C}$ по его номеру n . Это правило чаще всего задают при помощи формулы, устанавливающей зависимость значения n -го элемента последовательности от его номера (например, $z_n = i^n$, $z_n = i/n^2$ и т.п.).

Определение 2.1. Комплексное число a называют *пределом последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел* и записывают $\lim\{z_n\} = a$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, или $z_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти натуральное число N , такое, что при $n > N$ все элементы последовательности попадают в ε -окрестность точки a , или кратко

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : (n > N \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon). \quad (2.1)$$

Геометрический смысл предела последовательности комплексных чисел заключается в том, что точки z_n , начиная с

некоторого номера, лежат в круге радиуса ε с центром в точке a комплексной плоскости (z). Следовательно, точка $a \in \mathbb{C}$ является пределом последовательности $\{z_n\}$, если круг любого радиуса ε с центром в точке a содержит все элементы этой последовательности за исключением их конечного числа.

Определение предела последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел формально такое же, как и определение предела последовательности действительных чисел [I-6.2].

Положим $z_n = x_n + iy_n$, $a = \alpha + i\beta$. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ действительных чисел называют соответственно последовательностями действительных и мнимых частей для данной последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел. В силу неравенства треугольника имеем

$$|z_n - a| = \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} \leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| \quad (2.2)$$

и, кроме того,

$$|x_n - \alpha| \leq |z_n - a|, \quad |y_n - \beta| \leq |z_n - a|. \quad (2.3)$$

Учитывая эти неравенства и определение предела последовательности действительных чисел [I-6.3], можно сформулировать следующий результат.

Утверждение 2.1. Последовательность $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ имеет своим пределом комплексное число $a = \alpha + i\beta$ в том и только в том случае, когда последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют своими пределами соответственно числа α и β , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a = \alpha + i\beta \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta. \end{cases} \quad (2.4)$$

Последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел, имеющую своим пределом комплексное число $a \in \mathbb{C}$, называют **сходящейся** к точке a . В частности, это число может оказаться

действительным или чисто мнимым. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, то последовательность $\{z_n\}$ называют бесконечно малой. В этом случае

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad (n > N \implies |z_n| < \varepsilon).$$

Вспоминая определение бесконечно малой последовательности действительных чисел, заключаем, что последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел является бесконечно малой в том и только в том случае, когда бесконечно малой является последовательность $\{|z_n|\}$ действительных чисел. Другими словами,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0.$$

Если же последовательность $\{z_n\}$ не имеет конечного предела, то ее называют расходящейся. Среди расходящихся последовательностей в дальнейшем будем часто выделять те, которые стремятся к бесконечности.

Определение 2.2. Последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел называют *стремящейся к бесконечности*, или *бесконечно большой*, если

$$\forall E > 0 \quad \exists N = N(E) \in \mathbb{N}: \quad (n > N \implies |z_n| > E). \quad (2.5)$$

Условие (2.5) означает, что начиная с некоторого номера $N + 1$ все точки комплексной плоскости, составляющие последовательность $\{z_n\}$, располагаются вне круга достаточно большого радиуса E с центром в начале координат. Поэтому *сферические изображения* членов последовательности $\{z_n\}$, начиная с некоторого номера, попадают в окрестность „северного полюса“ сферы Римана (см. рис. 1.6). Поэтому про последовательность, стремящуюся к бесконечности, можно сказать, что она имеет своим пределом точку $z = \infty$, так как именно этой точке на сфере Римана соответствует „северный полюс“. Для последовательности $\{z_n\}$, стремящейся к бесконечности, используют запись $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ или $z_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Отметим,

что условие $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ равносильно условию $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$, т.е. последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел является бесконечно большой тогда и только тогда, когда бесконечно большой является последовательность $\{|z_n|\}$ действительных чисел.

Пример 2.1. а. Покажем, исходя из определения 2.1, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n^2} = 0. \quad (2.6)$$

Действительно, $|i^n/n^2 - 0| = |i|^n/n^2 = 1/n^2$. Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ мы в (2.1) можем положить $N = [1/\sqrt{\varepsilon}]$, т.е. в качестве $N(\varepsilon)$ взять целую часть числа $1/\sqrt{\varepsilon}$. Тогда при $n > N$ будет выполнено условие $1/n^2 < \varepsilon$, что доказывает соотношение (2.6).

б. Исходя из определения 2.2, докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+i)^n = \infty. \quad (2.7)$$

В самом деле,

$$|(1+i)^n| = |1+i|^n = (\sqrt{2})^n.$$

Поэтому, рассматривая для произвольного достаточно большого числа E неравенство $(\sqrt{2})^n > E$, получаем, что n должно удовлетворять условию $n > \log_{\sqrt{2}} E = \log_2 E^2$. Значит, в (2.5) достаточно положить $N = N(E) = [\log_2 E^2]$, т.е. выбрать в качестве $N(E)$ целую часть числа $\log_2 E^2 = 2 \log_2 E$. Тогда при $n > N$ будет выполнено условие $(\sqrt{2})^n > E$, что означает справедливость (2.7).

в. Покажем, что предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \{i^n\}$ не существует, ни конечный, ни бесконечный. Согласно (1.24), имеем $i^n = \cos(\pi n/2) + i \sin(\pi n/2)$. Таким образом, последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ действительных и мнимых частей комплексных чисел i^n имеют соответственно вид $\{\cos(\pi n/2)\}$ и $\{\sin \pi n/2\}$. Эти последовательности, очевидно, не имеют предела (ни конечного, ни

бесконечного). Действительно, при различных значениях n элементы последовательности $\{\cos(\pi n/2)\}$ (равно как и последовательности $\{\sin(\pi n/2)\}$) принимают поочередно значения 0, 1 или -1 , а потому не могут, начиная с некоторого номера, быть расположены в достаточно малой окрестности какой-либо конечной точки действительной прямой или в произвольно выбранной окрестности бесконечно удаленной точки. #

Утверждение 2.1 позволяет свойства сходящихся последовательностей действительных чисел [I-6.4] перенести на сходящиеся последовательности комплексных чисел. В частности, если последовательности $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$ комплексных чисел сходятся, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = b$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) = a \pm b, \quad (2.8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n w_n) = ab, \quad (2.9)$$

и если, кроме того, $b \neq 0$, то и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{a}{b}. \quad (2.10)$$

Как и в случае последовательности действительных чисел, можно сформулировать **критерий Коши** сходимости последовательности комплексных чисел: для сходимости последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел необходимо и достаточно, чтобы она была **фундаментальной**, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ должен существовать такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при любых $n > N$ и $m > N$ будет выполнено неравенство $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел называют **ограниченной**, если существует такое число $M > 0$, что $|z_n| \leq M$ для всех номеров n , т.е. все комплексные числа z_n расположены в замкнутом круге $|z| \leq M$ радиуса M с центром в точке $z = 0$.

Из геометрической интерпретации предела последовательности комплексных чисел вытекает, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. Обратное утверждение, вообще

говоря, неверно. Однако, как и для последовательностей действительных чисел, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1 (теорема Больцано — Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. #

С последовательностью $\{z_n\}$ комплексных чисел можно также связать последовательность $\{|z_n|\}$ модулей и последовательность $\{\operatorname{arg} z_n\}$ аргументов этих чисел. Относительно этих последовательностей можно сформулировать следующие свойства.

1. Из определения 2.1 предела последовательности комплексных чисел и неравенства (1.15) $||z_n| - |a|| \leq |z_n - a|$ вытекает следующее: если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |a|$.

2. Из тригонометрической формы представления (1.12) комплексного числа $z_n = r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$, где $r_n = |z_n|$ и $\varphi_n = \operatorname{arg} z_n$, следует достаточное условие сходимости последовательности комплексных чисел: если $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \rho$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \vartheta$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$.

Для бесконечно больших последовательностей справедливы следующие свойства:

1) если $z_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/z_n) = 0$;

2) если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = a \neq \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (w_n/z_n) = 0$.

3) если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = a$, где $a \neq 0$ и $a \neq \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n w_n) = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n/w_n) = \infty$.

Пример 2.2. Выясним, при каких значениях комплексного параметра a последовательность $\{a^n/(1+a^n)\}$ является сходящейся. Пусть $|a| > 1$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = \infty$$

(показательная функция $|a|^x$ с основанием $|a|$, бóльшим единицы, является бесконечно большой при $x \rightarrow +\infty$). Следовательно, $1/|a|^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а потому и $1/a^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, при $|a| > 1$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a^n} + 1} = 1.$$

Пусть теперь $|a| < 1$. Тогда $|a|^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а значит, и $a^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому в случае $|a| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a^n}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a^n} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Рассмотрим случай $|a| = 1$, записав $a = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Согласно (1.24), $a^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$, и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{1+a^n} &= \frac{\cos n\varphi + i \sin n\varphi}{(1 + \cos n\varphi) + i \sin n\varphi} \frac{(1 + \cos n\varphi) - i \sin n\varphi}{(1 + \cos n\varphi) - i \sin n\varphi} = \\ &= \frac{(1 + \cos n\varphi) + i \sin n\varphi}{2 + 2 \cos n\varphi} = \frac{1}{2} + i \frac{2 \sin \frac{n\varphi}{2} \cos \frac{n\varphi}{2}}{4 \cos^2 \frac{n\varphi}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{tg} \frac{n\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Из полученного выражения видно, что при $|a| = 1$ последовательность имеет предел только в том случае, если $\varphi = 0$, но тогда $a = 1$.

Итак, рассматриваемая последовательность является сходящейся при $|a| > 1$, $|a| < 1$ и $a = 1$.

2.2. Комплексные числовые ряды

Пусть дана последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел. Тогда суммы $S_1 = z_1$, $S_2 = z_1 + z_2$, $S_3 = z_1 + z_2 + z_3$, ... называют **частичными суммами ряда**, обозначаемого

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + i y_n) \quad (2.11)$$

и обычно называемого **комплексным числовым рядом**. Сумму $S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ называют, как правило, n -й частичной суммой ряда, а z_n — **общим** (n -м) **членом комплексного числового ряда**.

Определение 2.3. *Комплексный числовой ряд* (2.11) называют *сходящимся*, если *последовательность* $\{S_n\}$ его частичных сумм является *сходящейся*. Конечный предел S этой последовательности называют *суммой* данного *ряда*.

Итак, если S — сумма ряда (2.11), то

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \quad (2.12)$$

В случае сходящегося ряда часто записывают

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Каждому ряду с комплексными слагаемыми $z_n = x_n + iy_n$ можно сопоставить два ряда с действительными слагаемыми x_n и y_n , составленные соответственно из действительных и мнимых частей слагаемых исходного ряда. Исследование сходимости ряда с комплексными слагаемыми состоит в исследовании сходимости последовательности его частичных сумм, а оно, в свою очередь, приводит к исследованию последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. В частности, из свойств сходящихся последовательностей [I-6.4] вытекают приведенные ниже утверждения (доказательство этих утверждений можно найти в [IX]).

Утверждение 2.2. Для сходимости ряда (2.11) с комплексными слагаемыми $z_n = x_n + iy_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходились оба ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n. \quad (2.13)$$

Ряд (2.11) называют **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|. \quad (2.14)$$

Сходящийся **ряд** (2.11), которому соответствует **расходящийся ряд** (2.14) из **модулей**, называют **условно сходящимся**.

Утверждение 2.3. Ряд (2.11) абсолютно сходится тогда и только тогда, когда абсолютно сходятся оба ряда (2.13).

Утверждение 2.4. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Отметим, что **необходимое условие** (необходимый признак) **сходимости комплексного числового ряда** (2.11) с **комплексными слагаемыми** остается аналогичным случаю ряда с действительными слагаемыми, а именно: если ряд (2.11) сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0. \quad (2.15)$$

Иначе говоря, если нарушается условие (2.15), ряд расходится.

Одной из важнейших задач в теории комплексных рядов является исследование ряда на сходимость. При таком исследовании выясняют, сходится ряд или расходится. Если ряд сходится, то определяют, сходится ли ряд абсолютно.

Исследование комплексного ряда (2.11) на сходимость целесообразно начать, выяснив, сходится ли ряд (2.14). Во-первых, если $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$ и можно утверждать, что ряд (2.11) расходится. Во-вторых, если ряд (2.14) расходится на основании **признака Даламбера** или **радикального признака Коши**, то это означает нарушение необходимого условия сходимости для этого ряда. Следовательно, и в этом случае можно констатировать расходимость ряда (2.11). В-третьих, установив сходимость ряда (2.14), мы, согласно утверждению 2.4, установим сходимость и ряда (2.11). Кроме того, даже если

сначала доказать сходимость ряда (2.11), то затем все равно обычно представляет интерес поведение ряда (2.14), так как абсолютно сходящиеся ряды обладают дополнительными свойствами по сравнению с условно сходящимися рядами [IX].

Пример 2.3. Исследуем на сходимость следующие ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}, \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{2^n}.$$

а. Общим членом ряда из модулей для исходного ряда будет $1/n^2$, т.е. ряд из модулей представляет собой ряд Дирихле с показателем $p = 2 > 1$. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

б. Ряд из модулей, соответствующий заданному ряду, является гармоническим с общим членом $1/n$, а гармонический ряд, как известно, расходится. Для проверки на условную сходимость заданного ряда выделим ряды из действительных и мнимых частей. Так как $i^n/n = (\cos(\pi n/2) + i \sin(\pi n/2))/n$, то

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} x_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2} = \\ &= 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} y_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = \\ &= 1 + 0 - \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + 0 - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что для этих рядов выполнены условия признака Лейбница, который дает возможность сделать заключение об их условной сходимости, а значит, и об условной сходимости заданного ряда.

в. Общим членом ряда из модулей для исходного ряда будет $|z_n| = (\sqrt{5}/2)^n$. Ясно, что в данном случае $|z_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, для исходного ряда также не выполнено необходимое условие сходимости, а потому он расходится.

2.3. Степенные ряды

Пусть $\{c_n\}$ — некоторая последовательность комплексных чисел. Ряд вида

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad (2.16)$$

где z — комплексное переменное, называют **комплексным степенным рядом**. При этом комплексные числа c_n называют **коэффициентами** этого **степенного ряда**. В частном случае $z_0 = 0$ из (2.16) получаем степенной ряд

$$c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n. \quad (2.17)$$

Далее ряды вида (2.16) и (2.17) будем называть для краткости просто степенными.

Если в (2.16), равно как и в (2.17), переменное z положить равным конкретному комплексному числу $z^* \in \mathbb{C}$, то получим **комплексный числовой ряд**. В случае сходимости (абсолютной, условной) такого ряда **степенной ряд** называют **сходящимся (абсолютно, условно) в точке z^*** . Если же полученный числовой ряд расходится, то **степенной ряд** называют **расходящимся в точке z^*** .

Определение 2.4. Множество точек $z \in \mathbb{C}$, в которых степенной ряд сходится (абсолютно, условно), называют **областью сходимости (абсолютной, условной)** этого степенного ряда.

Теорема 2.2 (теорема Абеля). Если степенной ряд (2.16) сходится в некоторой точке $z^* \in \mathbb{C}$, $z^* \neq z_0$, то он сходится абсолютно во всех точках z , удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| < |z^* - z_0|. \quad (2.18)$$

Если же ряд (2.16) расходится в некоторой точке z_* , то он расходится во всех точках z , для которых

$$|z - z_0| > |z_* - z_0|. \quad (2.19)$$

◀ Докажем первое утверждение теоремы. По условию ряд (2.16) сходится в точке z^* . Это означает сходимость числового ряда с общим членом $c_n(z^* - z_0)^n$. В силу сходимости этого ряда его *общий член* стремится к нулю, т.е. $c_n(z^* - z_0)^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В силу ограниченности всякой *сходящейся последовательности* заключаем, что существует такое $M > 0$, для которого

$$|c_n(z^* - z_0)^n| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

Рассмотрим теперь произвольную точку z , удовлетворяющую условию (2.18). Тогда

$$\left| \frac{z - z_0}{z^* - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z^* - z_0|} = q < 1.$$

В силу (2.20) имеем

$$\begin{aligned} |c_n(z - z_0)^n| &= \left| c_n(z^* - z_0)^n \left(\frac{z - z_0}{z^* - z_0} \right)^n \right| = \\ &= \left| \frac{z - z_0}{z^* - z_0} \right|^n |c_n(z^* - z_0)^n| \leq Mq^n. \end{aligned}$$

Так как ряд с общим членом Mq^n при $0 \leq q < 1$ сходится (поскольку сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии конечна), то по первому *признаку сравнения знакоположительных рядов* сходится ряд с общим членом $|c_n(z - z_0)^n|$, т.е. ряд (2.16) сходится абсолютно во всех точках z , удовлетворяющих неравенству (2.18).

Докажем второе утверждение теоремы. Предположим, что числовой ряд с общим членом $c_n(z_* - z_0)^n$ расходится. Если бы в точке z , для которой выполнено неравенство (2.19), ряд (2.16) сходил, то в силу первой части этой теоремы этот ряд сходил бы и в точке z_* , что противоречит условию теоремы. Следовательно, в каждой точке z , удовлетворяющей (2.19), степенной ряд (2.16) является расходящимся. ►

2.4. Круг сходимости

Остановимся на вопросе о том, как найти множество точек, в которых данный степенной ряд вида (2.16) сходится. Оказывается, что такое множество легко охарактеризовать геометрически и описать аналитически, используя геометрическое изображение комплексных чисел.

Отметим прежде всего, что в точке z_0 ряд (2.16) сходится при любых значениях коэффициентов, так как в этой точке все слагаемые ряда равны нулю (кроме первого, соответствующего нулевой степени $z - z_0$).

Пусть на плоскости (z) наряду с точками сходимости ряда вида (2.16) имеются точки, в которых этот ряд расходится. Из *теоремы Абеля* следует, что всякая точка сходимости находится ближе к точке z_0 , чем любая точка расходимости (см. неравенства (2.18) и (2.19)). Рассмотрим множество значений $|z - z_0|$ для всех точек z , в которых рассматриваемый ряд сходится. Это множество ограничено сверху любым числом $|z^* - z_0|$, где z^* — точка расходимости ряда. Оно не пусто, так как содержит, по крайней мере, точку z_0 . Поэтому рассматриваемое множество, как и всякое непустое ограниченное множество, имеет точную верхнюю грань [I-2.7], которую мы обозначим через R .

Пусть теперь точка z удовлетворяет условию $|z - z_0| < R$. Выбрав $\varepsilon = R - |z - z_0|$, исходя из свойств точной верхней грани, заключаем, что существует точка сходимости z^* рассматриваемого ряда, удовлетворяющая условию $R - \varepsilon < |z^* - z_0| < R$. Но

тогда $|z - z_0| = R - \varepsilon < |z^* - z_0|$, и по теореме Абеля ряд в точке z сходится абсолютно. Итак, в любой точке z , для которой $|z - z_0| < R$, степенной ряд сходится абсолютно. Очевидно, что в любой точке z , удовлетворяющей условию $|z - z_0| > R$, степенной ряд расходится. Отсюда, в частности, следует, что число R является точной нижней гранью множества значений $|z - z_0|$ для всех точек z , в которых рассматриваемый ряд расходится.

Мы показали, что для каждого степенного ряда существует такое действительное неотрицательное число R , что этот ряд при $|z - z_0| < R$ сходится абсолютно, а при $|z - z_0| > R$ он расходится.

Множество всех комплексных чисел z , удовлетворяющих условию $|z - z_0| < R$, образует на комплексной плоскости круг радиуса R с центром в точке z_0 . Этот круг называют **кругом сходимости степенного ряда**, а его радиус R — **радиусом сходимости степенного ряда**. При $R = 0$ степенной ряд вида (2.16) сходится только в точке z_0 .

Степенной ряд может и не иметь точек расходимости, тогда он сходится абсолютно во всех точках плоскости. В этом случае полагают, что $R = \infty$, и говорят о бесконечном радиусе сходимости ряда.

Говоря о круге сходимости ряда, мы имеем в виду абсолютную сходимость ряда во всех точках внутри круга и расходимость ряда во всех точках вне этого круга. На границе круга сходимости поведение степенного ряда может быть разным: в одних точках границы он может сходиться, а в других точках — расходиться. Исследование на сходимость ряда в точках границы связано с более или менее сложным анализом индивидуальных свойств конкретного ряда.

Обратим внимание на то, что во всех точках границы круга сходимости ряд из модулей членов ряда (2.16), т.е. ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z - z_0|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| R^n,$$

является одинаковым и не зависит от точки границы. Это значит, что если степенной ряд сходится абсолютно хотя бы в одной точке границы круга сходимости, то он сходится абсолютно во всех точках границы. Аналогично, если степенной ряд вида (2.16) расходится в некоторой точке z границы круга сходимости вследствие нарушения необходимого признака сходимости, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| |z - z_0|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| R^n \neq 0,$$

то этот ряд будет расходиться во всех точках границы, так как из нарушения необходимого признака сходимости в одной точке границы автоматически следует его нарушение во всех точках границы.

Чтобы найти радиус сходимости комплексного степенного ряда (2.16), поступают так же, как и в случае действительных степенных рядов [IX]. Применим к ряду из модулей радикальный признак Коши. Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad (2.21)$$

конечный или бесконечный, то, согласно радикальному признаку Коши, в точках z , удовлетворяющих условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n(z - z_0)^n|} = |z - z_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1, \quad (2.22)$$

сходится ряд из модулей степенного ряда (2.16), а потому сам степенной ряд сходится абсолютно. В точках z , удовлетворяющих условию

$$|z - z_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} > 1, \quad (2.23)$$

степенной ряд (2.16) расходится.

Обозначим

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \quad (2.24)$$

Тогда в точках z , для которых $|z - z_0| < R$, ряд (2.16) сходится абсолютно, а в точках z , для которых $|z - z_0| > R$, этот ряд расходится. Следовательно, круг $|z - z_0| < R$ и есть круг сходимости рассматриваемого степенного ряда, а число R , вычисленное по формуле (2.24), есть радиус его сходимости.

Формулу (2.24) часто называют **формулой Коши — Адамара** (Ж.С. Адамар (1865–1963) — французский математик).

Формула Коши — Адамара была получена при помощи радикального признака Коши. Аналогичные рассуждения можно провести, используя признак Даламбера. Предположим, что все коэффициенты c_n ряда (2.16) отличны от нуля (или, по крайней мере, коэффициенты ряда отличны от нуля, начиная с некоторого номера). Тогда для радиуса сходимости R рассматриваемого ряда имеем

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \quad (2.25)$$

если предел в равенстве справа существует. В самом деле, достаточно к ряду из модулей членов ряда (2.16) применить признак Даламбера и повторить соответствующие рассуждения.

Пример 2.4. Найдем круг сходимости степенного ряда с общим членом $(z - 2i)^n / (3^n n)$ и исследуем сходимость этого ряда в точках $z_1 = 3 + 2i$ и $z_2 = 5i$.

Применим признак Даламбера к исследованию сходимости ряда из модулей с общим членом $|z_n| = |z - 2i|^n / (3^n n)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z - 2i|^{n+1} 3^n n}{3^{n+1} (n+1) |z - 2i|^n} = \frac{|z - 2i|}{3},$$

так как $n/(n+1) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. При $|z - 2i|/3 < 1$, т.е. при $|z - 2i| < 3$, исходный степенной ряд сходится абсолютно. Множество точек z , удовлетворяющих последнему неравенству, и есть круг сходимости (рис. 2.1). При $|z - 2i| > 3$ исходный ряд расходится.

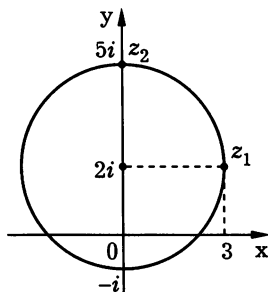


Рис. 2.1

Точки z_1 и z_2 расположены на границе круга. Для исследования поведения ряда в этих точках рассмотрим числовые ряды, получающиеся после их подстановки в исходный ряд. В точке $z_1 = 3 + 2i$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + 2i - 2i)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который является *гармоническим рядом* и, как известно, расходится. Таким образом, исходный степенной ряд в точке $z_1 = 3 + 2i$ расходится. В точке $z_2 = 5i$ имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5i - 2i)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3i)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n},$$

который, согласно примеру 2.3.б, является условно сходящимся, т.е. исходный степенной ряд в точке $z_2 = 5i$ сходится условно. #

Отметим, что область сходимости степенного ряда (2.16) представляет собой круг $|z - z_0| < R$, дополненный некоторым множеством точек окружности $|z - z_0| = R$ (возможно, пустым). Область сходимости ряда может и не являться открытым множеством, т.е. она может не быть *областью* (см. определение 1.1). Не следует путать термины „область“ и „область сходимости ряда“.

Пример 2.5. Кругом сходимости каждого из трех степенных рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

является единичный круг $|z| < 1$, поскольку для всех указанных рядов предел (2.25) равен единице в силу того, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Однако области сходимости этих трех рядов различны. Первый ряд расходится во всех точках окружности $|z| = 1$, так как его общий член при $|z| = 1$ не стремится к нулю. Второй ряд в некоторых точках этой окружности сходится (например, в точке $z = -1$), а в некоторых расходится (например, в точке $z = 1$). Третий ряд сходится во всех точках окружности $|z| = 1$, причем абсолютно, ибо ряд из модулей членов этого ряда для всех точек этой окружности является сходящимся числовым рядом с общим членом $1/n^2$.

Пример 2.6. Вычислим сумму ряда с общим членом $z_n = z^n$ и сумму ряда с общим членом $w_n = (-1)^n z^n$. Первый ряд имеет круг сходимости $|z| < 1$ (см. пример 2.5). Можно показать, что круг $|z| < 1$ является кругом сходимости и второго ряда.

Рассмотрим первый ряд. Для любой точки z в круге $|z| < 1$, учитывая формулу для суммы членов геометрической прогрессии [I-1.5], получаем

$$\begin{aligned} S(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z + z^2 + \dots + z^n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

так как при $|z| < 1$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^{n+1} = 0$, а значит, $z^{n+1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Итак, для рассматриваемого ряда можно записать

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1. \quad (2.27)$$

Аналогично для ряда с общим членом $(-1)^n z^n$ находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1. \quad \# \quad (2.28) \end{aligned}$$

Пределы в формулах (2.24) и (2.25) для радиуса сходимости степенного ряда могут не существовать. В некоторых таких случаях круг сходимости можно найти, непосредственно применяя радикальный признак Коши или признак Даламбера.

Пример 2.7. Найдем круг сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n} = \frac{z^2}{1} + \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{3} + \dots$$

Здесь $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$, $c_4 = 1/2$ и т.д. Коэффициенты степенного ряда имеют вид

$$c_n = \begin{cases} \frac{2}{n}, & n \text{ — четное;} \\ 0, & n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Следовательно, пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

не существуют. Применим к ряду из модулей рассматриваемого степенного ряда признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z^{2(n+1)}|}{|z^{2n}|} \frac{n}{n+1} = |z|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |z|^2.$$

Отсюда заключаем, что при $|z|^2 < 1$, т.е. при $|z| < 1$, ряд из модулей сходится, а исходный ряд, стало быть, сходится абсолютно. При $|z|^2 > 1$, т.е. при $|z| > 1$, ряд из модулей расходится вследствие нарушения необходимого признака сходимости.

Значит, расходится и исходный степенной ряд. Из приведенных рассуждений вытекает, что круг сходимости есть $|z| < 1$.

Пример 2.8. Найдем радиусы сходимости степенных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} n^n e^{-n\alpha} (z-i)^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} (3+(-1)^n)^n z^n.$$

а. Для нахождения радиуса сходимости используем формулу (2.25):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!(n+1)^{n+1}}{(n+1)!n^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

б. Предварительно запишем

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{n^n e^{-n\alpha}} = \frac{n}{e^{n\alpha-1}}.$$

Если $\alpha > 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{n\alpha-1}} = \left| \begin{array}{l} y = n^{\alpha-1}, \\ n = y^{\beta}, \quad \beta = \frac{1}{\alpha-1} > 0 \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^{\beta}}{e^y} = 0,$$

так как показательная функция e^y при $y \rightarrow +\infty$ является бесконечно большой функцией более высокого порядка по сравнению со степенной функцией y^{β} [II]. Значит, радиус сходимости ряда бесконечен ($R = +\infty$) и ряд сходится в любой точке z комплексной плоскости (z).

Если $\alpha < 1$, то $n^{\alpha-1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Если же $\alpha = 1$, то $n^{\alpha-1} = 1$, $n \in \mathbb{N}$. И в том и в другом случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{n\alpha-1}} = \infty,$$

а степенной ряд имеет радиус сходимости $R = 0$. Следовательно, ряд сходится только в точке $z = 0$.

в. Для этого ряда $\sqrt[n]{|c_n|} = 3 + (-1)^n$, т.е. в последовательности $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ чередуются два значения 2 и 4. Ясно, что эта последовательность не сходится. Определить радиус сходимости по формуле (2.24) не удастся. Запишем

$$\sqrt[n]{|(3 + (-1)^n)^n z^n|} = (3 + (-1)^n)|z| \leq 4|z|.$$

Согласно радикальному признаку Коши, при $4|z| < 1$, т.е. при $|z| < 1/4$, ряд из модулей сходится и исходный степенной ряд сходится абсолютно. При $z = 1/4$ степенной ряд имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2^2} + 1 + \frac{1}{2^3} + \dots$$

и является расходящимся из-за нарушения необходимого признака сходимости. Стало быть, значение $1/4$ является точной нижней гранью множества расстояний от точек расходимости до точки $z = 0$, т.е. равно радиусу сходимости ряда. Итак, $R = 1/4$. #

В заключение отметим хотя и очевидное, но важное в решении задач свойство степенных рядов.

Теорема 2.3. Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots$$

и

$$\sum_{n=m}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n-m} = c_m + c_{m+1} (z - z_0) + \dots + c_{m+n} (z - z_0)^n + \dots$$

имеют один и тот же круг сходимости.

◀ Если первый из указанных рядов сходится в точке $z \neq z_0$, то в этой точке сходится и его *остаток*

$$c_m (z - z_0)^m + c_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \dots$$

Значит, в той же точке сходится и второй ряд, который получается умножением остатка первого ряда на число $(z - z_0)^{-m}$. Наоборот, сходимость в точке $z \neq z_0$ второго ряда означает сходимость в этой точке остатка первого ряда, а значит, и самого ряда. В точке $z = z_0$ оба рассматриваемых ряда сходятся. Таким образом, области сходимости двух рядов совпадают. Следовательно, совпадают и их круги сходимости. ►

2.5. Двусторонний степенной ряд

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots, \quad (2.29)$$

содержащий целые отрицательные степени $z - z_0$. Сделав подстановку $1/(z - z_0) = w$, получим *степенной ряд* с общим членом $c_{-n}w^n$. Если R — *радиус сходимости* этого *степенного ряда*, то для всех точек z , удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| > 1/R$, исходный *ряд* (2.29) будет являться *абсолютно сходящимся*. При $|z - z_0| < 1/R$ этот ряд будет расходиться. В точках z на окружности $|z - z_0| = 1/R$ ряд может как сходиться, так и расходиться: для этого ряда остаются в силе все замечания относительно сходимости в *граничных точках* (см. 2.4), в том числе указанный там порядок исследования сходимости.

Областью сходимости ряда (2.29) (как и степенного ряда (2.16)) будем называть множество точек сходимости этого ряда. Отсюда следует, что областью сходимости ряда (2.29) является множество точек z , для которых $|z - z_0| > 1/R$, дополненное некоторым множеством точек окружности $|z - z_0| = 1/R$ (возможно, пустым). При этом множество $|z - z_0| > 1/R$ представляет собой множество *внутренних точек* области сходимости ряда (2.29).

Пример 2.9. Найдем множество внутренних точек области сходимости ряда с общим членом $(3^n + 1)/(z + 2i)^n$. К ряду из

модулей с общим членом $(3^n + 1)/|z + 2i|^n$ применим признак Даламбера. Для этого найдем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3^{n+1} + 1)|z + 2i|^n}{|z + 2i|^{n+1}(3^n + 1)} = \frac{1}{|z + 2i|} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 1}{3^n + 1} = \frac{3}{|z + 2i|}.$$

Согласно этому признаку, при $3/|z + 2i| < 1$, т.е. при $|z + 2i| > 3$, ряд из модулей сходится. Следовательно, искомым множеством является внешность окружности $|z + 2i| = 3$, т.е. множество точек z , для которых $|z + 2i| > 3$. #

В теории функций комплексного переменного часто возникает необходимость рассмотрения степенных рядов, в которых присутствуют как положительные, так и отрицательные степени $z - z_0$, причем и тех и других бесконечное количество. Такой ряд мы будем называть **двусторонним степенным рядом**. Его можно разделить на два самостоятельных ряда, первый с неотрицательными степенями $z - z_0$, а второй — с отрицательными степенями $z - z_0$. Такое разделение аналогично разделению *несобственного интеграла* по промежутку $(-\infty, +\infty)$ на два независимых *несобственных интеграла*. Другими словами, будем считать, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \\ &= \dots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + \\ &\quad + c_1(z-z_0) + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ряд (2.30) называют сходящимся в точке z , если в этой точке сходятся оба составляющих его ряда (2.16) и (2.29). Пусть множеством внутренних точек области сходимости степенного ряда (2.16) является *внутренность окружности* радиуса R с центром в точке z_0 , а ряда (2.29), расположенного по целым отрицательным степеням $(z - z_0)$, — *внешность окружности*

радиуса r с центром в той же точке. Напомним, что радиусы r и R могут быть вычислены по формулам

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}, \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}, \quad (2.31)$$

или

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}, \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}. \quad (2.32)$$

Тогда:

- 1) при $r > R$ ряд (2.30) расходится всюду;
- 2) при $r < R$ множество внутренних точек области сходимости ряда (2.30) — это кольцо $r < |z - z_0| < R$, $r \geq 0$, $0 < R \leq +\infty$ (**кольцо сходимости** ряда).

В последнем случае возможны так называемые вырожденные (исключительные) варианты:

- а) $r > 0$, $R = \infty$ (это означает, что кольцом сходимости ряда (2.30) является внешность окружности $|z - z_0| = r$);
- б) $r = 0$, $R = \infty$ (кольцом сходимости является вся комплексная плоскость, за исключением точки z_0);
- в) $r = 0$, $0 < R < +\infty$ (в такой ситуации кольцом сходимости ряда (2.30) является проколотый круг $0 < |z - z_0| < R$).

Пример 2.10. Определим кольцо сходимости рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n}.$$

а. Применяя к ряду из модулей (общий член $(2^n - 1)/|z + 1|^n$) признак Даламбера, вычисляем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^{n+1} - 1)|z + 1|^n}{|z + 1|^{n+1}(2^n - 1)} = \frac{1}{|z + 1|} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 1/2^n}{1 - 1/2^n} = \frac{2}{|z + 1|}.$$

Таким образом, при $2/|z + 1| < 1$, т.е. при $|z + 1| > 2$, что соответствует $r = 2$, ряд с общим членом $(2^n - 1)/(z + 1)^n$ абсолютно сходится, а при $|z + 1| < 2$ — расходится.

Для исследования сходимости ряда из модулей с общим членом $|z+1|^n/|i+n|^n$ удобнее применить признак Коши. Находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|z+1|^n}{|i+n|^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z+1|}{|i+n|} = |z+1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} = 0.$$

Это означает, что ряд с общим членом $(z+1)^n/(i+n)^n$ сходится абсолютно на всей комплексной плоскости ($R = \infty$).

Итак, кольцом сходимости исходного ряда является внешность окружности $|z+1| = 2$, т.е. множество точек z , для которых $|z+1| > 2$ (вырожденный случай кольца, при котором $R = \infty$).

б. Для того чтобы найти кольцо сходимости ряда с общим членом $(-1)^n/(z^n n^4)$, вычислим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^n n^4}{|z|^{n+1} (n+1)^4} = \frac{1}{|z|} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{(n+1)^4} = \frac{1}{|z|}.$$

Следовательно, при $1/|z| < 1$, т.е. при $|z| > 1$, этот ряд абсолютно сходится, а при $|z| < 1$ — расходится.

Аналогично для ряда с общим членом $z^n/(2^n n)$ вычисляем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^{n+1} 2^n n}{2^{n+1} (n+1) |z|^n} = \frac{|z|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|z|}{2},$$

что означает: при $|z|/2 < 1$, т.е. при $|z| < 2$, этот ряд сходится абсолютно, а при $|z| > 2$ — расходится.

Таким образом, кольцом сходимости исходного ряда является кольцо $1 < |z| < 2$. #

В заключение отметим, что круг сходимости степенного ряда, кольцо сходимости двустороннего степенного ряда представляют собой множество всех внутренних точек области сходимости рассматриваемого ряда, определение которого и составляет основной вопрос при исследовании ряда на сходимую. Исследование ряда в граничных точках часто и не требуется. Двусторонний степенной ряд сходится абсолютно во всех точках кольца сходимости, так как в этих точках сходится абсолютно каждый из составляющих его рядов.

Вопросы и задачи

2.1. Исследуйте на сходимость числовые ряды с комплексными слагаемыми:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+i}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+i)^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}.$$

2.2. Найдите круг сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (1+in)z^n$ и исследуйте поведение этого ряда на границе круга сходимости.

2.3. Вычислите радиус сходимости каждого из следующих степенных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i}\right)^n; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (n+i)z^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{in}\right)^n; \quad \text{г) } \sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n.$$

2.4. Найдите множество внутренних точек области сходимости следующих рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i\sqrt{3}}{z^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)(z+1-i)^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+4i)^n z^n};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n(z+1)^n}; \quad \text{д) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^n + \frac{1}{2^n z^n}\right); \quad \text{е) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{n^2}{z^n}\right).$$

2.5. Установите кольцо сходимости для каждого из следующих рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{z-i}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{5}\right)^n; \quad \text{б) } -\frac{1}{z+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+1)^n;$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n (z-1+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (1+in)(z-1+i)^n;$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n.$$

3. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3.1. Определение и геометрическое представление функции комплексного переменного

Наряду со „всеохватным“ понятием *отображения (функции)* — одним из самых важных математических понятий, — в [I] было подчеркнуто, что по мере продвижения вперед это понятие будет снова и снова появляться в своих разнообразных обличьях. Эти обличья зависят прежде всего от вида области определения $D(f)$ и области значений $R(f)$ функции f . В дальнейшем будем полагать, что эти области включены в множество \mathbb{C} комплексных чисел (или в расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$).

Итак, на множестве $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ задана **функция комплексного переменного z** , если задан закон f , по которому каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие единственное комплексное число $w \in \overline{\mathbb{C}}$ (конечное или бесконечное). В этом случае говорят также, что f является функцией из D в $\overline{\mathbb{C}}$, и пишут $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, или $w = f(z)$, $z \in D \subset \mathbb{C}$ (последнее является наиболее распространенным обозначением функции комплексного переменного).

Основные понятия теории функций комплексного переменного являются обобщением соответствующих понятий теории функций действительного переменного, которую подробно изучают в общем курсе высшей математики. Это обстоятельство, с одной стороны, несколько облегчает знакомство с функциями комплексного переменного, но, с другой стороны, требует повышенного внимания, так как обобщение всегда сопряжено с добавлением ряда особенностей, специфичных для нового объ-

екта исследования. Далее в каждом отдельном случае будем подчеркивать эти особенности.

Для функций $f(z)$ и $\varphi(z)$, $z \in D$, на множестве D определена сумма $f + \varphi$, разность $f - \varphi$, произведение $f\varphi$ и частное f/φ (частное для всех $z \in D$, при которых $\varphi(z) \neq 0$).

Функцию $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ называют ограниченной на множестве D , если множество $R(f)$ ее значений ограничено, т.е. если существует такая константа $M > 0$, что $|f(z)| \leq M$, $z \in D$.

Пусть $z = x + iy$ и $w = f(z) = u + iv$. Тогда комплекснозначная функция w комплексного переменного z определяется двумя действительными функциями двух действительных переменных

$$u = u(x, y) \quad \text{и} \quad v = v(x, y). \quad (3.1)$$

Задание двух функций u и v наводит на мысль проиллюстрировать функцию f геометрически в виде двух поверхностей в трехмерном пространстве, однако такой способ неудобен, ибо он не иллюстрирует упорядоченную пару (u, v) как комплексное число. Ограничимся представлением о функции $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ как об отображении множества D в множество расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Чтобы сделать это представление более наглядным, будем изображать множества, соответствующие друг другу при рассматриваемом отображении, причем значениям аргумента z будут отвечать точки комплексной плоскости (z) , а значениям функции w — точки комплексной плоскости (w) .

Таким образом, функция $w = f(z)$ устанавливает соответствие между точками плоскости (z) , в которых эта функция рассматривается, и точками плоскости (w) . Другими словами, функция $w = f(z)$ осуществляет отображение множества D точек плоскости (z) на множество $R(f)$ точек плоскости (w) ($R(f)$ является образом множества D при отображении, осуществляемом функцией $w = f(z)$, а D — прообразом множества $R(f)$ при этом отображении).

Пример 3.1. Рассмотрим функцию $w = z^2$. Если $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ и $w = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, то в силу (1.24) имеем

$$\rho = r^2, \quad \vartheta = 2\varphi. \quad (3.2)$$

Отсюда нетрудно представить, что при отображении $w = z^2$:

а) полуокружность $r = r_0$, $\varphi \in (0, \pi)$ переходит в окружность $\rho = r_0^2$, $\vartheta \in (0, 2\pi)$ с выколотой точкой $w = r_0^2$ (рис. 3.1);

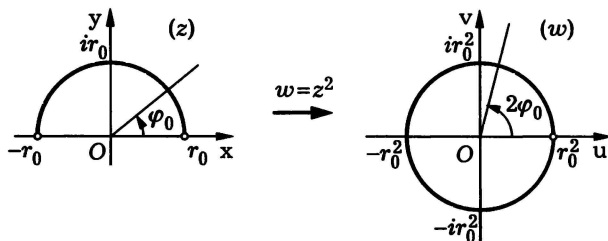


Рис. 3.1

б) луч $0 \leq r < \infty$, $\varphi = \varphi_0$ переходит в луч $0 \leq \rho < \infty$, $\vartheta = 2\varphi_0$ (см. рис. 3.1);

в) полуплоскость $\text{Im} z > 0$ переходит в плоскость (w) с выброшенной положительной полуосью Ou (рис. 3.2), поскольку для точек положительной полуоси имеем $\vartheta = 2k\pi$, откуда $\varphi = k\pi$, а эти значения исключаются условием $\text{Im} z > 0$. В этом случае полуплоскость удобно представить в виде эластичной пленки, натянутой на две полуоси Ox (положительную и отрицательную), которые шарнирно соединены в начале координат. Тогда отображение $w = z^2$ можно интерпретировать как растяжение пленки, происходящее при повороте отрицательной полуоси и ее совмещении с положительной полуосью.

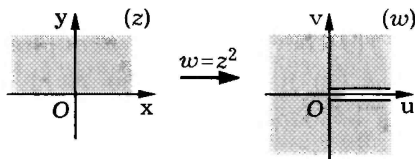


Рис. 3.2

Пример 3.2. Отображение $w = z^2$ можно представить в виде двух соотношений (3.1), выражающих декартовы координаты точки плоскости (w) через декартовы координаты точки плоскости (z). Полагая $z = x + iy$, получаем $w = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$. Следовательно, если $w = u + iv$, то

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy. \quad (3.3)$$

Из соотношений (3.3) легко увидеть, что:

а) прямой $y = y_0$ на плоскости (z) соответствует кривая, для которой соотношения

$$\begin{cases} u = x^2 - y_0^2, \\ v = 2xy_0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},$$

можно рассматривать как параметрические уравнения с параметром x . Нетрудно убедиться, что этой кривой будет *парабола*, имеющая уравнение $u = v^2/(4y_0^2) - y_0^2$ (рис. 3.3), причем она будет соответствовать и прямой $y = -y_0$;

б) полупрямой $x = x_0 > 0$, $0 < y < +\infty$ соответствует дуга кривой (рис. 3.4), заданной соотношениями

$$\begin{cases} u = x_0^2 - y^2, \\ v = 2x_0y, \end{cases} \quad y \in (0, +\infty),$$

т.е. дуга параболы с уравнением $u = x_0^2 - v^2/(4x_0^2)$ ($v > 0$ при $x_0 > 0$). #

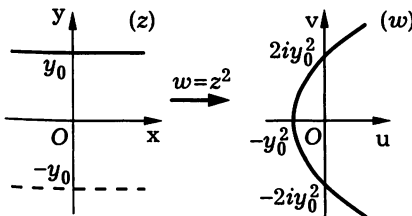


Рис. 3.3

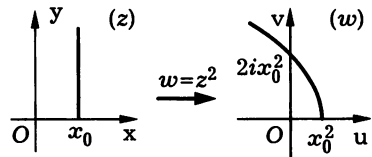


Рис. 3.4

В общем случае, если на плоскости (z) кривая Γ задана уравнением $F(x, y) = 0$, то для нахождения уравнения кривой Υ в плоскости (w) , на которую функция

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (3.4)$$

отображает кривую Γ , нужно исключить x и y из соотношений

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

после чего получим уравнение вида $\Phi(u, v) = 0$ кривой Υ . Если же кривая Γ задана на плоскости (z) параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in T \subseteq \mathbb{R},$$

то параметрические уравнения образа этой кривой при отображении (3.4) будут

$$\begin{cases} u = u(x(t), y(t)), \\ v = v(x(t), y(t)), \end{cases} \quad t \in T \subseteq \mathbb{R}.$$

В зависимости от вида отображающей функции (3.4) и множества, на котором она рассматривается, иногда удобно перейти к уравнениям кривых Γ и Υ в полярных координатах.

Пример 3.3. При отображении, осуществляемом функцией $w = z^2$, найдем образ окружности радиуса $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, заданной уравнением

$$x^2 - 2xx_0 + y^2 - 2yy_0 = 0, \quad (3.5)$$

проходящей через начало координат и имеющей центр в точке $x_0 + iy_0$ (рис. 3.5). Переходя в (3.5) к полярным координатам, получаем

$$r = 2x_0 \cos \varphi + 2y_0 \sin \varphi. \quad (3.6)$$

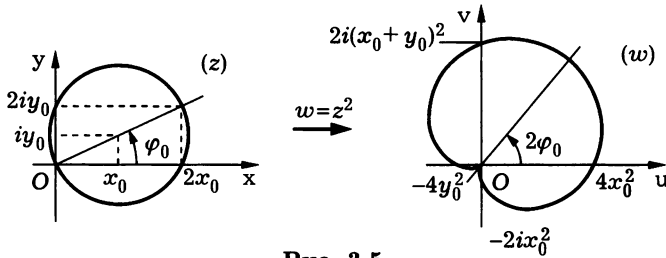


Рис. 3.5

Луч $0 \leq r < \infty$, $\varphi = \varphi_0$, проходящий через центр окружности, перейдет в комплексной плоскости (w) в луч, расположенный под углом $\vartheta_0 = 2\varphi_0$ (см. пример 3.1).

Чтобы записать уравнение образа этой окружности в полярных координатах, достаточно в (3.6) заменить r и φ , согласно отображающей функции $w = z^2$, на ρ и ϑ из (3.2), т.е. положить $r = \sqrt{\rho}$ и $\varphi = \vartheta/2$.

В результате найдем

$$\sqrt{\rho} = 2 \left(x_0 \cos \frac{\vartheta}{2} + y_0 \sin \frac{\vartheta}{2} \right).$$

После возведения в квадрат получим

$$\begin{aligned} \rho &= 4 \left(x_0^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + 2x_0y_0 \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} + y_0^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) = \\ &= 2x_0^2(1 + \cos \vartheta) + 4x_0y_0 \sin \vartheta + 2y_0^2(1 - \cos \vartheta) = \\ &= 2(x_0^2 + y_0^2) + 2(x_0^2 - y_0^2) \cos \vartheta + 4x_0y_0 \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Используя формулу

$$a \sin \varphi + b \cos \varphi = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\varphi - \varphi_0),$$

где угол φ_0 определяется равенствами

$$\sin \varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

находим

$$\rho = 2(x_0^2 + y_0^2) (1 + \cos(\vartheta - \vartheta_0)),$$

где угол ϑ_0 определяется равенствами

$$\sin \vartheta_0 = \frac{2x_0y_0}{x_0^2 + y_0^2}, \quad \cos \vartheta_0 = \frac{x_0^2 - y_0^2}{x_0^2 + y_0^2}.$$

Это уравнение *кардиоиды* (см. рис. 3.5). В частности, при $y_0 = 0$ и $x_0 \neq 0$ имеем $\vartheta_0 = 0$ и образом окружности будет кардиоида, заданная уравнением $\rho = 2x_0^2(1 + \cos \vartheta)$ (рис. 3.6), а при $x_0 = 0$ и $y_0 \neq 0$ находим $\vartheta_0 = \pi$, так что образом будет кардиоида, заданная уравнением $\rho = 2y_0^2(1 - \cos \vartheta)$ (рис. 3.7). #

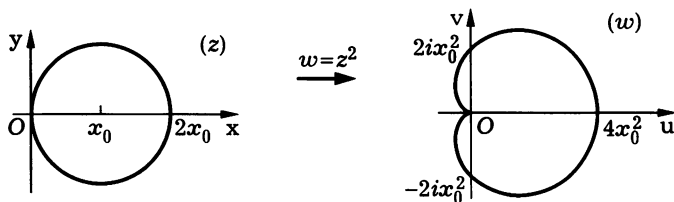


Рис. 3.6

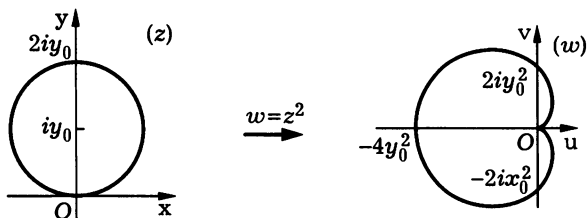


Рис. 3.7

Иногда используют иной способ геометрического представления функции комплексного переменного: в прямоугольной системе координат $Ox\rho$ изображают поверхность $\rho = |f(z)|$, которую называют *поверхностью модуля*, или *рельефом функции* $f(z)$. На этой поверхности часто стараются выделить кривые, которые проектируются на плоскость xOy в линии уровня $\text{Arg } f(z) = \text{const}$. Имея достаточно густую сетку таких линий, можно составить представление о распределении значений функции $f(z)$ в полярных координатах ρ, ϑ . На рис. 3.8

представлена поверхность модуля функции $f(z) = z^2$, являющаяся параболоидом вращения относительно вертикальной оси, так как

$$\rho = |f(z)| = |z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2.$$

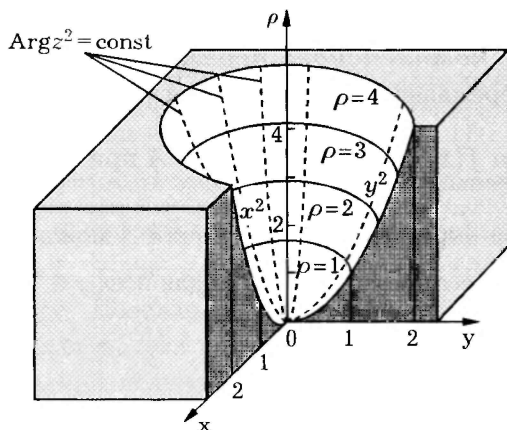


Рис. 3.8

Линии уровня функции $\text{Arg } f(z)$ описываются уравнением

$$\text{tg } \text{Arg } f(z) = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = C.$$

Это уравнение описывает пару прямых на плоскости xOy . При $C = 0$ это прямые $x = 0$ и $y = 0$, а при $C \neq 0$ — прямые $y = k_1x$ и $y = k_2x$, где $k_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1 + C^2})/C$. Проведем через линии уровня цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси $O\rho$ (в данном случае это плоскости, проходящие через ось $O\rho$). В пересечении с поверхностью модуля цилиндрические поверхности дают сетку кривых, характеризующих изменение аргумента функции. В частности, при $C = 0$ получаем кривые

$$\begin{cases} \rho = y^2, \\ x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = y^2, \\ y = 0. \end{cases}$$

3.2. Предел и непрерывность функций комплексного переменного

Пусть функция $f(z)$ комплексного переменного z определена в проколотой окрестности точки $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$.

Определение 3.1. Точку $A \in \bar{\mathbb{C}}$ называют *пределом функции $f(z)$ комплексного переменного z в точке $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$* (или при z , стремящемся к z_0) и пишут

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad \text{или} \quad f(z) \rightarrow A \quad \text{при} \quad z \rightarrow z_0, \quad (3.7)$$

если для любой окрестности $U(A)$ точки A можно найти такую проколотую окрестность $\overset{\circ}{V}(z_0)$, что для всех $z \in \overset{\circ}{V}(z_0)$ значения $f(z)$ принадлежат $U(A)$, или короче

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad :\Leftrightarrow \quad \forall U(A) \exists \overset{\circ}{V}(z_0) : \\ (z \in \overset{\circ}{V}(z_0) \implies f(z) \in U(A)). \quad (3.8)$$

Если $z_0, A \neq \infty$, то (3.8) можно заменить на

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \\ (0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - A| < \varepsilon). \quad (3.9)$$

В случае $z_0 = \infty, A \neq \infty$ имеем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \\ (|z| > \delta \implies |f(z) - A| < \varepsilon), \quad (3.10)$$

а при $A = \infty$ и $z_0 \neq \infty$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad :\Leftrightarrow \quad \forall E > 0 \exists \delta(E) > 0 : \\ (0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z)| > E). \quad (3.11)$$

Как и для действительной функции действительного переменного определение 3.1 равносильно следующему: точка A является пределом функции f при $z \rightarrow z_0$, если для каждой последовательности $\{z_n\}$ точек проколота́й окрестности точки z_0 , имеющей своим пределом z_0 , соответствующая последовательность $\{f(z_n)\}$ имеет предел, равный A .

Из определения предела функции получаем, что утверждение $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$ (в этом случае $f(z)$ называют бесконечно малой (б.м.) функцией при $z \rightarrow z_0$) равносильно $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0$, а утверждение $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ (в этом случае $f(z)$ называют бесконечно большой (б.б.) функцией при $z \rightarrow z_0$) равносильно $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$.

Пусть $A \neq \infty$. Положим $A = A_1 + iA_2$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда с учетом (1.14) для модуля комплексного числа, (3.4) и неравенства треугольника получаем

$$|f(z) - A| = \sqrt{(u - A_1)^2 + (v - A_2)^2} \leq |u - A_1| + |v - A_2|.$$

Так как $|u - A_1| \leq |f(z) - A|$ и $|v - A_2| \leq |f(z) - A|$, то (3.9) равносильно двум равенствам

$$\lim_{(x; y) \rightarrow (x_0; y_0)} u(x, y) = A_1 \quad \text{и} \quad \lim_{(x; y) \rightarrow (x_0; y_0)} v(x, y) = A_2. \quad (3.12)$$

Итак, предел функции комплексного переменного в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ существует и равен $A_1 + iA_2$ тогда и только тогда, когда в точке $(x_0; y_0)$ существуют пределы ее действительной и мнимой частей, равные A_1 и A_2 соответственно.

Из равенств (3.12) и непрерывности элементарной функции $y = \sqrt{x}$ действительного переменного следует, что, если существует предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A = A_1 + iA_2$, то

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{(x; y) \rightarrow (x_0; y_0)} \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = |A|.$$

Аналогично можно показать, что при $A \neq 0$ и $\arg A \neq \pi$ верно равенство

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg f(z) = \arg A.$$

Наоборот, если существуют пределы

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = R \quad \text{и} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \arg f(z) = \varphi,$$

то существуют пределы

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z) = R \cos \varphi, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z) = R \sin \varphi.$$

Поэтому существует предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Итак, равенства

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |A|, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \arg f(z) = \arg A \quad (3.13)$$

в случае $A \neq 0$, $\arg A \neq \pi$ можно рассматривать как критерий существования предела $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$. При $A = 0$ для существования этого предела достаточно выполнения лишь первого равенства.

Замечание 3.1. Поскольку определение 3.1 предела функции комплексного переменного в точности повторяет определение предела действительной функции действительного переменного [I-7.1], а алгебраические действия над комплексными и действительными числами выполняются по одним и тем же правилам, то в комплексный анализ переносятся без изменений основные теоремы о пределе функции в точке и о свойствах функций, имеющих предел [I], а также часто используемую теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции. #

Далее в ряде случаев будет использовано понятие *предела отображения (функции) в точке по множеству*. Пусть z_0 — предельная точка множества $S \subseteq D$, где $D \subset \mathbb{C}$ — область определения функции $f(z)$ комплексного переменного z . Будем говорить, что $f(z)$ стремится к A при z , стремящемся к точке

z_0 по множеству S , и писать

$$\lim_{z \xrightarrow[S]{} z_0} f(z) = A \quad \text{или} \quad f(z) \rightarrow A \text{ при } z \xrightarrow[S]{} z_0, \quad (3.14)$$

если

$$\forall U(A) \exists \mathring{V}(z_0): (z \in \mathring{V}(z_0) \cap S \implies f(z) \in U(A)). \quad (3.15)$$

Пусть теперь функция $f(z)$ комплексного переменного z определена в некоторой окрестности точки $a \in \overline{\mathbb{C}}$.

Определение 3.2. Функцию $w = f(z)$ комплексного переменного z называют **непрерывной в точке $z = a$** , если

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a). \quad (3.16)$$

В случае $f(a) \neq \infty$ будем говорить о непрерывности в смысле \mathbb{C} , а в случае $f(a) = \infty$ — о непрерывности в смысле $\overline{\mathbb{C}}$. Определение 3.2 равносильно следующему: данная функция f непрерывна в точке a , если для каждой последовательности $\{z_n\}$ точек окрестности $\mathring{U}(a)$, имеющей своим пределом точку a , имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a)$. В силу (3.12) заключаем, что функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ в смысле \mathbb{C} тогда и только тогда, когда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке $(x_0; y_0)$.

По причине, аналогичной упомянутой при определении предела функции в точке, в комплексный анализ можно перенести основные теоремы о свойствах функций, непрерывных в точке [I-9.2] (здесь непрерывность следует понимать в смысле \mathbb{C}).

Сумма, разность, произведение и частное непрерывных в точке a функций являются функциями, непрерывными в этой точке (для частного — при условии, что знаменатель в окрестности точки a не обращается в нуль). Если множество $R(f)$ значений функции $w = f(z)$ включено в область D_1 определения функции $W = g(w)$, $w \in D_1$, функция f непрерывна в точке $a \in D$, а функция g — в точке $f(a) \in R(f) \subseteq D_1$, то сложная функция $W = g(f(z))$ непрерывна в точке $z = a$.

Пусть a является предельной точкой множества S . Если выполнено условие (3.16), предел в котором понимается как предел по множеству S , то говорят о непрерывности функции $f(z)$ в точке $z = a$ по множеству S . **Функцию комплексного переменного**, непрерывную в каждой точке множества M по множеству M , называют **непрерывной на множестве M** . Отметим, что если множество M является областью, то непрерывность функции $f(z)$ на множестве M означает, что функция непрерывна в каждой точке этого множества в смысле определения 3.2, так как каждая точка z входит в M вместе с некоторой своей окрестностью.

Укажем свойства функций комплексного переменного, непрерывных на *ограниченном замкнутом множестве* $K \subset \mathbb{C}$.

1. Если функция $f(z)$ непрерывна на множестве K , то эта **функция ограничена на множестве K** , т.е. существует такая константа $C > 0$, что $|f(z)| \leq C$, $z \in K$.

2. Модуль всякой функции $f(z)$, непрерывной на множестве K , достигает на K своих наибольшего и наименьшего значений, т.е. существуют такие точки $z_1, z_2 \in K$, что $|f(z)| \leq |f(z_1)|$ и $|f(z)| \geq |f(z_2)|$, $z \in K$.

3. Любая **функция $f(z)$** , непрерывная на множестве K , **равномерно непрерывна на этом множестве**, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \forall z_1, z_2 \in K \left(|z_1 - z_2| < \delta \implies |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon \right).$$

Эти свойства вытекают из общих теорем о функции, непрерывной на компактном множестве в метрическом пространстве [I-5.7, 5.9].

3.3. Элементарные функции комплексного переменного

Введем определения основных элементарных функций для комплексных значений независимого переменного.

Если *показатель степени* является комплексным числом, то определение показательной функции [I-3.5] теряет смысл. При

комплексных значениях аргумента не применимы и определения *тригонометрических функций*: синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Принимая во внимание известные для действительных значений $x \in \mathbb{R}$ разложения функций e^x , $\sin x$ и $\cos x$ в ряд Маклорена и учитывая, что ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

сходятся абсолютно для любого $z \in \mathbb{C}$, положим по определению, что

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Эти равенства определяют на всей комплексной плоскости *показательную функцию* e^z , а также *тригонометрические функции* $\sin z$ и $\cos z$ *комплексного переменного* z , совпадающие при действительных значениях z с соответствующими функциями действительного переменного.

Напомним, что в абсолютно сходящемся ряде можно переставлять неограниченное число слагаемых, сумма ряда при этом не изменяется. Кроме того, сходящиеся ряды можно складывать почленно и умножать на постоянный коэффициент [IX].

Поэтому, умножив ряд (3.18) на число i и сложив с рядом (3.19), мы получим ряд (3.17), в котором вместо z подставлено iz . Итак, мы приходим к соотношению

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad (3.20)$$

называемому **формулой Эйлера**. Если в (3.20) z заменить на $-z$, то получим

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \quad (3.21)$$

Складывая и вычитая (3.20) и (3.21), находим

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (3.22)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (3.23)$$

Иногда формулой Эйлера называют каждое из соотношений (3.20)–(3.23).

Замечание 3.2. Формула Эйлера позволяет перейти от *тригонометрической формы представления комплексного числа* к показательной, а именно: если $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то запись

$$z = r e^{i\varphi} \quad (3.24)$$

называют *показательной формой представления комплексного числа*. Теперь формулы (1.24) и (1.26) Муавра приобретают достаточно простой вид

$$z^n = r^n e^{in\varphi} \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i(\arg z + 2k\pi)/n}, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad \# \quad (3.25)$$

Остановимся на некоторых свойствах введенных функций комплексного переменного.

1. Покажем, что при $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \quad (3.26)$$

Напомним, что абсолютно сходящиеся ряды (в частности, степенные ряды в круге их сходимости) можно перемножать [IX]. Ряд, являющийся произведением таких рядов, сходится абсолютно, а его сумма равна произведению сумм перемножаемых рядов. Члены ряда, полученного перемножением двух рядов — разложений e^{z_1} и e^{z_2} , — запишем в виде бесконечной прямоугольной таблицы

1	$\frac{z_2}{1!}$	$\frac{z_2^2}{2!}$	$\frac{z_2^3}{3!}$...	$\frac{z_2^n}{n!}$...
$\frac{z_1}{1!}$	$\frac{z_1}{1!} \cdot \frac{z_2}{1!}$	$\frac{z_1}{1!} \cdot \frac{z_2^2}{2!}$...	$\frac{z_1}{1!} \cdot \frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{z_1}{1!} \cdot \frac{z_2^n}{n!}$...
$\frac{z_1^2}{2!}$	$\frac{z_1^2}{2!} \cdot \frac{z_2}{1!}$	$\frac{z_1^2}{2!} \cdot \frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{z_1^2}{2!} \cdot \frac{z_2^n}{n!}$...
$\frac{z_1^3}{3!}$	$\frac{z_1^3}{3!} \cdot \frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{z_1^3}{3!} \cdot \frac{z_2^n}{n!}$...
...

Выписывая из этой таблицы элементы по диагоналям, идущим вправо вверх, начиная с верхнего левого угла, замечаем, что сумму элементов первой диагонали $z_1/1! + z_2/1!$ можно записать в виде $(z_1 + z_2)/1!$, сумму трех элементов второй диагонали — в виде $(z_1 + z_2)^2/2!$ и т.д. Сумма элементов n -й диагонали, согласно *биномиу Ньютона*, равна $(z_1 + z_2)^n/n!$ При такой группировке все члены ряда будут учтены, причем по одному разу. В результате получим

$$e^{z_1} e^{z_2} = 1 + \frac{z_1 + z_2}{1!} + \frac{(z_1 + z_2)^2}{2!} + \dots + \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} + \dots = e^{z_1 + z_2}.$$

В частности, (3.26) и формула (3.20) Эйлера дают

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (3.27)$$

Отсюда следует, что $|e^z| = e^x$, а одно из значений $\text{Arg } e^z$ есть y . Таким образом, (3.27) позволяет вычислить значения показателя

тельной функции e^z комплексного переменного $z \in \mathbb{C}$ при любых его значениях. Ясно, что $e^z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$.

2. Функция e^z периодическая, и ее период $T = 2i\pi$. Действительно, согласно (3.26) и (3.27), для $f(z) = e^z$ имеем

$$f(z + 2\pi i) = e^{z+2i\pi} = e^z e^{2i\pi} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z = f(z).$$

Отметим, что если $T = T_1 + iT_2$ является комплексным периодом функции e^z , то $e^{z+T} = e^z$, откуда, используя условие равенства комплексных чисел в тригонометрической форме, приходим к соотношениям

$$e^{x+T_1} = |e^{z+T}| = |e^z| = e^x, \quad z = x + iy.$$

В силу монотонности функции e^x действительного переменного заключаем, что $T_1 = 0$. Из равенства $e^{z+iT_2} = e^z$ получаем равенство аргументов $y + T_2 = y + 2k\pi$, откуда находим, что T_2 является кратным числа 2π . Итак, число $2\pi i$ действительно является периодом показательной функции.

3. Если m — целое число, то с учетом (3.27) имеем

$$\begin{aligned} (e^z)^m &= (e^x(\cos y + i \sin y))^m = \\ &= e^{mx}(\cos my + i \sin my) = e^{m(x+iy)} = e^{mz}. \end{aligned}$$

4. Из равенств (3.22) и (3.23) можно заключить, что функции $\cos z$ и $\sin z$ имеют период 2π , т.е.

$$\cos(z + 2\pi k) = \cos z \quad \text{и} \quad \sin(z + 2\pi k) = \sin z,$$

и что для этих функций остаются в силе основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$

и т.п.

Докажем, например, первое тождество. Имеем

$$\begin{aligned}\sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1.\end{aligned}$$

Для доказательства второго тождества используем соответствующие преобразования:

$$\begin{aligned}\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 &= \\ &= \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \cos(z_1 + z_2).\end{aligned}$$

Аналогично доказываются и другие тождества.

Как и в случае действительного переменного, через синус и косинус определяют еще две функции комплексного переменного — тангенс и котангенс:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Первая из этих функций определена для всех z , кроме решений уравнения $\cos z = 0$, а вторая — кроме решений уравнения $\sin z = 0$.

5. Хотя (3.22) и (3.23) с учетом (3.27) позволяют вычислить $\cos z$ и $\sin z$, на практике удобнее использовать связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями комплексного переменного. По определению полагаем

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, & \operatorname{cth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.\end{aligned}$$

Легко проверить, что $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$. При помощи (3.27) можно установить и другие тождества для введенных гиперболических функций:

$$\begin{aligned} \sin iz &= i \operatorname{sh} z, & \operatorname{sh} iz &= i \sin z, \\ \cos iz &= \operatorname{ch} z, & \operatorname{ch} iz &= \cos z, \\ \operatorname{tg} iz &= i \operatorname{th} z, & \operatorname{th} iz &= i \operatorname{tg} z, \\ \operatorname{ctg} iz &= -i \operatorname{cth} z, & \operatorname{cth} iz &= -i \operatorname{ctg} z. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Проверим, например, первое из соотношений (3.28):

$$\sin iz = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = i \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \operatorname{sh} z.$$

Из (3.28) и основных тригонометрических тождеств можно получить тождества

$$\begin{aligned} \sin(x \pm iy) &= \sin x \operatorname{ch} y \pm i \cos x \operatorname{sh} y, \\ \cos(x \pm iy) &= \cos x \operatorname{ch} y \mp i \sin x \operatorname{sh} y. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \\ &= \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}, \\ |\cos z| &= \sqrt{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \\ &= \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}. \end{aligned}$$

Поэтому $|\operatorname{sh} y| \leq |\sin z| \leq \operatorname{ch} y$ и $|\operatorname{sh} y| \leq |\cos z| \leq \operatorname{ch} y$. Так как функция $\operatorname{sh}^2 y$ может принимать сколь угодно большие значения, то последние неравенства убеждают в том, что $\sin z$ и $\cos z$ не являются на комплексной плоскости ограниченными по мо-

дулю функциями. Отметим, что при больших значениях $|y|$

$$|\cos z| \approx |\sin z| \approx \operatorname{ch} y \approx \frac{1}{2} e^{|y|}.$$

Воспользовавшись равенствами (3.29), можно решить уравнения $\cos z = 0$ и $\sin z = 0$. Рассмотрим первое из них. Равенство $\cos z = 0$ означает, что $\cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sh} x \sin y = 0$, откуда, разделяя действительные и мнимые части, находим

$$\cos x \operatorname{ch} y = 0, \quad \sin x \operatorname{sh} y = 0.$$

Из первого уравнения с учетом $\operatorname{ch} y \neq 0$ получаем $\cos x = 0$. При этом $\sin x = \pm 1$, и из второго уравнения заключаем, что $\operatorname{sh} y = 0$, или $y = 0$. Итак, уравнение $\cos z = 0$ в комплексных числах сводится к уравнению $\cos x = 0$ в действительных числах. Его решения: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Аналогичным образом можно решить и второе уравнение $\sin z = 0$, которое имеет только действительные решения $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

С помощью (3.29) можно вычислить значения $\sin z$ и $\cos z$ для произвольного значения $z \in \mathbb{C}$. Отметим, что под вычислением значения функции комплексного переменного понимаем представление этого значения в алгебраической форме, т.е. вычисление действительной и мнимой частей этого значения. Вычислять значения функций $\operatorname{tg} z$ ($z \neq (2k+1)\pi/2$) и $\operatorname{ctg} z$ ($z \neq k\pi$) можно, либо представляя эти функции через $\sin z$ и $\cos z$, либо используя совместно с (3.28) формулу элементарной тригонометрии для тангенса суммы двух углов. Для $z = x + iy$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(x + iy) &= \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} iy}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} iy} = \frac{\operatorname{tg} x + i \operatorname{th} y}{1 - i \operatorname{tg} x \operatorname{th} y} = \\ &= \frac{(\operatorname{tg} x + i \operatorname{th} y)(1 + i \operatorname{tg} x \operatorname{th} y)}{(1 - i \operatorname{tg} x \operatorname{th} y)(1 + i \operatorname{tg} x \operatorname{th} y)} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{th}^2 y}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{th}^2 y} \operatorname{tg} x + i \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{th}^2 y} \operatorname{th} y. \quad (3.30) \end{aligned}$$

Несложно получить следующие оценки:

$$\frac{2e^{-2y}}{1+e^{-2y}} < |\operatorname{tg}(x+iy) - i| < \frac{2e^{-2y}}{1-e^{-2y}}, \quad y > 0;$$

$$\frac{2e^{2y}}{1+e^{2y}} < |\operatorname{tg}(x+iy) + i| < \frac{2e^{2y}}{1-e^{2y}}, \quad y < 0.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

$$\operatorname{tg} z \rightarrow i \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z} \rightarrow -i \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z = y \rightarrow +\infty,$$

$$\operatorname{tg} z \rightarrow -i \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z} \rightarrow i \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z = y \rightarrow -\infty.$$

На рис. 3.9 представлена *поверхность модуля* $\rho = |f(z)|$ функции $f(z) = \sin z$. Эта поверхность в направлении действительной оси Ox является периодической с периодом π , и ее сечение вертикальной плоскостью, проходящей через эту ось, дает график функции $|\sin x|$, а сечения плоскостями $x = k\pi$ и

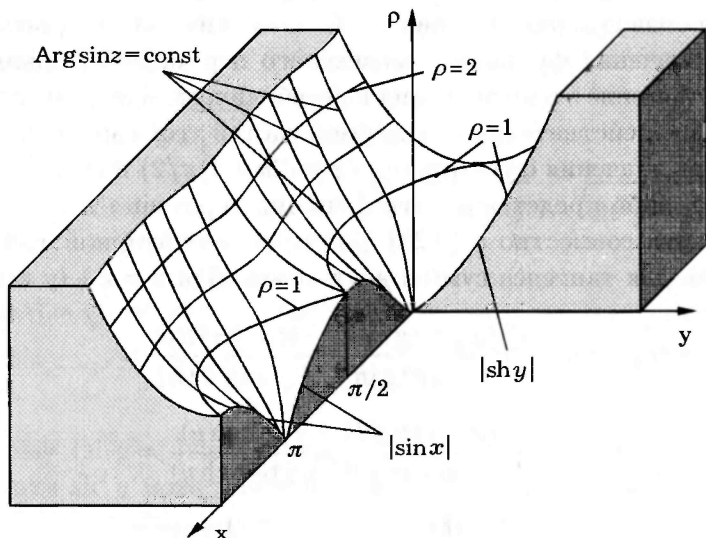


Рис. 3.9

$x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, дают графики функций $|\operatorname{sh} y|$ и $\operatorname{ch} y$ соответственно. По мере удаления точки z от оси Ox значения $\rho = |\sin z|$ неограниченно возрастают и по форме поверхность модуля приближается к цилиндрической поверхности с уравнением $\rho = e^{|y|}/2$. Ясно, что при параллельном переносе системы координат вдоль оси Ox так, чтобы ее начало перешло в точку $(\pi/2; 0; 0)$, поверхность на рис. 3.9 будет рельефом функции $\cos z = \sin(z + \pi/2)$.

Пример 3.4. Используя (3.27), вычислим e^z при $z = i\pi/2$, $z = i\pi$ и $z = \ln 2 + i\pi/2$:

$$e^{i\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

$$e^{\ln 2 + i\pi/2} = e^{\ln 2} e^{i\pi/2} = 2i. \quad \#$$

Пример 3.5. Используя (3.28)–(3.30), вычислим

$$\cos i = \operatorname{ch} 1,$$

$$\sin(1 + 2i) = \sin 1 \cos 2i + \cos 1 \sin 2i = \sin 1 \operatorname{ch} 2 + i \cos 1 \operatorname{sh} 2,$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + i \ln 2\right) &= \cos \frac{\pi}{2} \cos(i \ln 2) - \sin \frac{\pi}{2} \sin(i \ln 2) = \\ &= -i \operatorname{sh} \ln 2 = -i \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = -i \frac{2 - 1/2}{2} = -\frac{3i}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + i \ln 2\right) &= \frac{(1 - \operatorname{th}^2 \ln 2) \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} \operatorname{th}^2 \ln 2} + i \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4}) \operatorname{th} \ln 2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} \operatorname{th}^2 \ln 2} = \\ &= \frac{1 - (3/5)^2}{1 + 1 \cdot (3/5)^2} \cdot 1 + i \frac{1 + 1}{1 + 1 \cdot (3/5)^2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8}{17} + i \frac{15}{17}, \end{aligned}$$

поскольку $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, а

$$\operatorname{th} \ln 2 = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}} = \frac{2 - 1/2}{2 + 1/2} = \frac{3}{5}.$$

3.4. Многозначная функция $\text{Arg } z$

Самые простые задачи приводят к необходимости рассматривать многозначные функции. Например, уравнение $z = w^n$ при любом фиксированном $z \neq 0$ имеет n различных решений, вычисляемых по формуле Муавра. Совокупность этих решений, которую обозначают через $\sqrt[n]{z}$, нельзя рассматривать как функцию переменного z , поскольку определение функции предполагает, что каждому значению переменного соответствует единственное значение функции $w = f(z)$. Попытка отказаться от однозначности в определении функции привела бы к значительным неудобствам. В самом деле, какой смысл, например, надо вкладывать в сумму $\sqrt[n]{z} + \sqrt[n]{z}$, если каждое слагаемое принимает n значений, и можно ли эту сумму заменить выражением $2\sqrt[n]{z}$? Самые простые правила анализа при таком допущении оказываются под вопросом.

Если каждому числу $z \in E \subset \overline{\mathbb{C}}$ поставлено в соответствие несколько комплексных чисел, обозначаемых $w = f(z)$, то говорят о **многозначной функции комплексного переменного**, заданной на множестве E . Говорят, что в области $D \subset E$ выделена **однозначная ветвь многозначной функции $f(z)$** , если в каждой точке этой области выбрано одно из возможных значений многозначной функции $f(z)$, причем так, что полученная однозначная функция является непрерывной в области D .

Определение ветви многозначной функции можно было бы дать без условия непрерывности. Однако в теории функций комплексного переменного, равно как и в теории функций действительного переменного, в основном рассматривают непрерывные ветви многозначных функций, что и учтено в данном выше определении.

Многозначная функция может иметь как конечное число ветвей, так и бесконечное их число. Отметим, что не во всякой области, в которой определена многозначная функция, можно выделить ее однозначную ветвь.

В теории функций комплексного переменного особую роль отводят многозначной функции $\text{Arg } z$. С этой функцией связаны многие другие многозначные функции: построение однозначных ветвей этих функций определяется выбором значения аргумента комплексного переменного, т.е. выбором однозначной ветви многозначной функции $\text{Arg } z$. Согласно определению аргумента комплексного числа, каждому числу $z = x + iy \neq 0$ можно поставить в соответствие бесчисленное множество значений $\varphi = \text{Arg } z$, которые отличаются друг от друга на слагаемое, кратное 2π . Эти значения φ определяются соотношениями

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Неоднозначное определение аргумента комплексного числа — первый и, пожалуй, самый важный пример неоднозначности в теории функций комплексного переменного.

Однозначные ветви многозначных функций можно выделять, анализируя приращение функции вдоль непрерывных кривых. Такой подход фактически сводит комплексный случай к действительному. Будем рассматривать приращение аргумента комплексного переменного вдоль непрерывных кривых.

Пусть кривая γ не проходит через точку $z = 0$. Геометрически аргумент комплексного числа z на кривой представляет собой угол наклона радиус-вектора точки z на комплексной плоскости к оси Ox , а приращение аргумента при движении точки по кривой γ есть угол поворота радиус-вектора. Угол поворота радиус-вектора точки z при ее движении вдоль кривой γ от начальной точки A до конечной точки B обозначим $\Delta_\gamma \text{Arg } z$ (рис. 3.10).

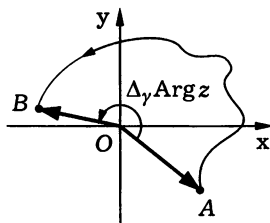


Рис. 3.10

Пример 3.6. а. Если γ — отрезок прямой, соединяющий точку $1 - i$ (начальная точка) с точкой $1 + i$ (конечная точка), то приращение аргумента равно $\Delta_\gamma \text{Arg } z = \pi/2$ (рис. 3.11, а).

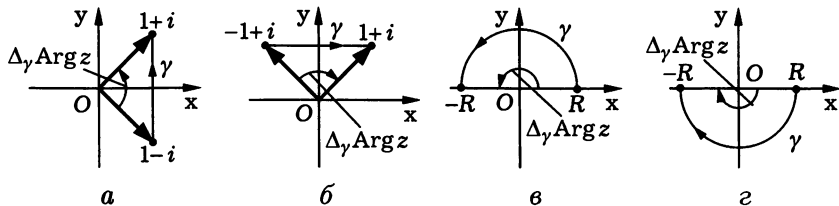


Рис. 3.11

б. Если γ — отрезок прямой, соединяющий точку $-1 + i$ с точкой $1 + i$, то $\Delta_\gamma \text{Arg} z = -\pi/2$ (рис. 3.11, б).

в. Если γ — полуокружность $|z| = R$, $\text{Im} z \geq 0$ с направлением обхода против часовой стрелки, то $\Delta_\gamma \text{Arg} z = \pi$ (рис. 3.11, в).

г. Если γ — полуокружность $|z| = R$, $\text{Im} z \leq 0$ с направлением обхода по часовой стрелке, то $\Delta_\gamma \text{Arg} z = -\pi$ (рис. 3.11, г). #

Найдем формулу для приращения аргумента вдоль кривой. Из формул $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ имеем

$$dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi,$$

откуда $r d\varphi = -\sin \varphi dx + \cos \varphi dy$. Следовательно,

$$d\varphi = d \text{Arg} z = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$

Рассмотрим интеграл от $d\varphi$ вдоль кривой γ , равный разности значений аргумента z в конечной и начальной точках кривой γ , или приращению аргумента $\Delta_\gamma \text{Arg} z$ вдоль γ . Итак,

$$\Delta_\gamma \text{Arg} z = \int_\gamma \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}. \quad (3.31)$$

Свойства приращения аргумента оказались связанными со свойствами криволинейного интеграла, стоящего в последнем равенстве справа. Исходя из свойств криволинейного интеграла, имеем следующие свойства приращения аргумента.

1°. $\Delta_\gamma \text{Arg} z = -\Delta_{-\gamma} \text{Arg} z$, где $-\gamma$ обозначает кривую γ , на которой направление обхода изменено на противоположное.

2°. Если кривая γ составлена из двух кривых γ_1 и γ_2 так, что конечная точка кривой γ_1 является начальной точкой кривой γ_2 , то $\Delta_\gamma \text{Arg} z = \Delta_{\gamma_1} \text{Arg} z + \Delta_{\gamma_2} \text{Arg} z$.

Криволинейный интеграл определяет в области D функцию, если он не зависит от пути. Известно [VII], что в односвязной области D криволинейный интеграл от $P dx + Q dy$, определяемый непрерывно дифференцируемыми функциями $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, не зависит от пути тогда и только тогда, когда всюду в области выполняется равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Полагая $P(x, y) = -x/(x^2 + y^2)$, $Q(x, y) = y/(x^2 + y^2)$, непосредственной проверкой убеждаемся, что указанное соотношение будет выполнено в любой области, не содержащей точки $z = 0$. Учитывая это, приходим к новым свойствам приращения аргумента.

3°. $\Delta_{\gamma_1} \text{Arg} z = \Delta_{\gamma_2} \text{Arg} z$ для любых двух кривых γ_1 и γ_2 , лежащих в односвязной области $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и имеющих общие начальную и конечную точки.

4°. Приращение аргумента вдоль любой простой замкнутой кривой γ в области D , не содержащей точку $z = 0$, равно нулю: $\Delta_\gamma \text{Arg} z = 0$.

Если простая замкнутая кривая γ окружает точку $z = 0$ и обходится против часовой стрелки, то значение интеграла (3.31) равно его *циклической постоянной* для точки $z = 0$. Циклическую постоянную в точке $z = 0$ можно вычислить, взяв в качестве γ окружность $|z| = R$ с центром в начале координат. Этот несложный подсчет приводит к значению 2π .

5°. Приращение аргумента вдоль любой простой замкнутой кривой γ в области D , окружающей точку $z = 0$, которая обходится против часовой стрелки, равно 2π : $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z = 2\pi$.

Пусть D — односвязная область на комплексной плоскости, не содержащая точку $z = 0$. Зафиксируем в этой области некоторую точку z_0 и выберем в этой точке одно из значений $a_{z_0} = \operatorname{Arg} z_0$. Положим

$$f(z) = a_{z_0} + \Delta_\gamma \operatorname{Arg} z, \quad (3.32)$$

где γ — произвольная кривая с началом в точке z_0 и концом в точке z , лежащая в области D . Поскольку приращение аргумента не зависит от выбора кривой, соединяющей точки z_0 и z и лежащей в D (свойство 3°), равенство (3.32) определяет в области D (однозначную) функцию $f(z)$, которая является непрерывной, так как приращение аргумента, представленное криволинейным интегралом с переменным верхним пределом (3.31), является непрерывной функцией [VII]. Эта функция, следовательно, является однозначной ветвью многозначной функции $\operatorname{Arg} z$, определенной в области D , так как значением функции $f(z)$ является одно из значений аргумента точки z . Очевидно, что таких ветвей бесконечно много и другие ветви многозначной функции $\operatorname{Arg} z$ можно получить, добавляя к $f(z)$ слагаемые $2k\pi$:

$$\begin{aligned} (\operatorname{Arg} z)_k &= f(z) + 2k\pi = \\ &= a_{z_0} + \Delta_\gamma \operatorname{Arg} z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (3.33)$$

Итак, многозначная функция $\operatorname{Arg} z$ в области D распадается на бесконечное число однозначных ветвей. Любая из этих ветвей полностью определяется своим значением в одной точке $z_0 \in D$.

Пример 3.7. Пусть область D_π представляет собой комплексную плоскость (z) с разрезом по отрицательной части действительной оси. Положим $z_0 = 1$ и $a_{z_0} = \operatorname{arg} z_0 = 0$. В

области D_π выделяется однозначная ветвь $f_\pi(z)$ многозначной функции $\text{Arg} z$, которая определяется равенством

$$f_\pi(z) = \Delta_\gamma \text{Arg} z = \text{arg} z$$

и представляет собой *главное значение аргумента*. В качестве кривой γ можно взять любую кривую с началом в точке $z_0 = 1$, которая лежит в области D_π , т.е. не пересекает луч $(-\infty, 0]$ действительной оси. В частности, имеем

$$f_\pi(z) = 0, \quad \text{если } x > 0, y = 0;$$

$$f_\pi(iy) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } y > 0;$$

$$f_\pi(iy) = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{если } y < 0. \quad \#$$

В приведенном построении точка z_0 может быть не внутренней точкой области D , а лежать на границе этой области.

Пример 3.8. Пусть D_0 — комплексная плоскость (z) с разрезом по положительной части действительной оси — лучу $[0, +\infty)$. Положим $z_0 = 1$, причем считаем, что эта точка лежит на *верхнем берегу разреза*. Пусть $a_{z_0} = \text{arg} z_0 = 0$. Тогда для любой точки области D_0 значением однозначной ветви $f_0(z)$ многозначной функции $\text{Arg} z$ будет значение аргумента точки z , попадающее в интервал $(0, 2\pi)$. Например,

$$f_0(z) = \pi, \quad \text{если } x < 0, y = 0;$$

$$f_0(iy) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } y > 0;$$

$$f_0(iy) = \frac{3\pi}{2}, \quad \text{если } y < 0.$$

Отметим, что выделенная ветвь $\text{Arg} z$ на нижнем берегу разреза имеет значение 2π , так как с верхнего берега разреза можно попасть на нижний берег разреза только вдоль

кривой, окружающей начало координат. При обходе такой кривой приращение аргумента равно 2π . Мы видим, что значения выделенной ветви на верхнем и нижнем берегах разреза не совпадают, т.е. эту ветвь нельзя „склеить“ вдоль разреза так, чтобы она оказалась непрерывной во всей комплексной плоскости.

Если изменить значение аргумента в точке z_0 и положить, что $a_{z_0} = 2\pi$, т.е. взять значение аргумента $f_0(z_0)$ с нижнего берега разреза, мы получим другую ветвь $f_1(z)$ функции $\text{Arg} z$ в области D_0 . В этом случае имеем

$$f_1(z) = 3\pi, \quad \text{если } x < 0, y = 0;$$

$$f_1(iy) = \frac{5\pi}{2}, \quad \text{если } y > 0;$$

$$f_1(iy) = \frac{7\pi}{2}, \quad \text{если } y < 0. \quad \#$$

Если в области D существует простой контур, обходящий точку $z = 0$, то приращение аргумента вдоль такого контура будет равно 2π или -2π , т.е. будет ненулевым. Следовательно, возвращаясь в исходную точку z_0 по контуру, мы приходим к другому значению аргумента комплексного числа z_0 . Это означает, что в области D нельзя выделить однозначную ветвь многозначной функции $\text{Arg} z$. Такая ситуация складывается, например, в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Таким образом, выделение однозначной ветви $\text{Arg} z$ в области D возможно лишь тогда, когда эта область не содержит контуров, окружающих точку $z = 0$. Такой областью является, например, комплексная плоскость с разрезом по неограниченной кривой с началом в точке 0. Эта область является односвязной и не содержит точки 0. В ней, а также в любой ее подобласти функция $\text{Arg} z$ допускает выделение однозначных ветвей. Все ветви при этом будут различаться на аддитивную постоянную, кратную 2π .

Пример 3.9. Пусть D — комплексная плоскость с разрезом вдоль *архимедовой спирали* $z = \frac{t}{\pi} e^{it}$, $t \geq 0$ (рис. 3.12).

Выберем $z_0 = 5$ и положим $a_{z_0} = 2\pi$. Тогда получим однозначную ветвь $g(z)$ функции $\text{Arg } z$, определяемую равенством $g(z) = 2\pi + \Delta_\gamma \text{Arg } z$, где γ — любая кривая в D с начальной точкой $z_0 = 5$ и конечной точкой z . В частности, имеем $g(-6) = 3\pi$, $g(7) = 4\pi$, $g(-4) = \pi$, $g(3) = 0$, $g(-2) = -\pi$, $g(1) = -2\pi$.

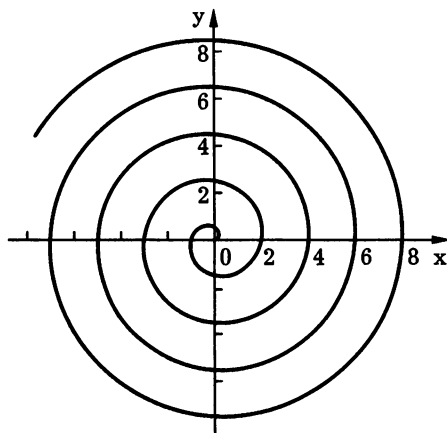


Рис. 3.12

3.5. Логарифмическая функция

Рассмотрим произвольное комплексное число $z \neq 0$. Если $e^w = z$, то w называют **логарифмом комплексного числа** z и обозначают

$$w = \text{Ln } z. \quad (3.34)$$

При $w = u + iv$ в силу (3.27) получаем

$$e^w = e^{u+iv} = e^u (\cos v + i \sin v).$$

Из условия равенства комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, имеем $e^u = |z|$, т.е. $u = \ln |z|$, и $v = \text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Стало быть,

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi). \quad (3.35)$$

Равенство (3.35) позволяет по заданному комплексному числу $z \neq 0$ вычислить его логарифм. Значение логарифма определено неоднозначно (действительная часть его определена однозначно, а мнимая часть — с точностью до слагаемого, кратного 2π). Значение $\text{Ln } z$, отвечающее в (3.35) значению $k = 0$, называют **главным значением логарифма** и обозначают $\ln z$. Итак,

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z. \quad (3.36)$$

Соотношение (3.36) показывает, что главное значение логарифма комплексного числа соответствует выбору в (3.35) главного значения аргумента этого числа. Отметим, что если $z = x$ — действительное положительное число, то $|z| = x$, $\arg z = 0$, т.е. главное значение логарифма положительного числа является числом действительным и совпадает с *натуральным логарифмом* этого числа.

В отличие от главного значения логарифма комплексного числа соотношение (3.35) определяет все возможные значения логарифма комплексного числа, или, как говорят, **общее значение логарифма**.

Естественно ожидать, что на логарифм комплексного числа распространяются известные свойства натурального логарифма, т.е. имеют место соотношения

$$\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2, \quad \text{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2,$$

$$\text{Ln}(z^n) = n \text{Ln } z, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{Ln } \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \text{Ln } z.$$

Но в каком смысле нужно понимать эти равенства? Можно показать, что указанные равенства верны, если их понимать не как равенства чисел, а как равенства множеств — множеств значений. Например, первое равенство имеет следующий смысл: какое бы из значений $\text{Ln}(z_1 z_2)$ мы ни взяли, найдутся такие значения $\text{Ln } z_1$ и $\text{Ln } z_2$, что $\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2$. И на-

оборот, для любых значений $\operatorname{Ln} z_1$ и $\operatorname{Ln} z_2$ их сумма есть одно из значений $\operatorname{Ln}(z_1 z_2)$. Аналогичный смысл имеют и остальные равенства.

Пример 3.10. Вычислим значения логарифма для некоторых комплексных чисел:

$$\text{а) } \operatorname{Ln}(-i) = \ln 1 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -i\left(\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right), \quad \ln(-i) = -\frac{\pi}{2};$$

$$\text{б) } \operatorname{Ln}(-1 - i) = \ln \sqrt{2} + i\left(-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) = \frac{1}{2} \ln 2 - i\left(\frac{3}{4}\pi - 2k\pi\right),$$

$$\ln(-1 - i) = \frac{1}{2} \ln 2 - i\frac{3}{4}\pi. \quad \#$$

Соотношение (3.35) в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ определяет многозначную функцию, называемую **логарифмической функцией**. Ее обозначают $w = \operatorname{Ln} z$. Ветви этой многозначной функции определяются ветвями функции $\operatorname{Arg} z$. Стало быть, функция $\operatorname{Ln} z$ допускает выделение ветви в любой области, в которой допускает выделение ветви многозначная функция $\operatorname{Arg} z$. Например (см. 3.4), такой областью является комплексная плоскость с разрезом по любой неограниченной кривой, соединяющей точки $z = 0$ и $z = \infty$, а также любая ее подобласть.

Пример 3.11. Пусть D — комплексная плоскость с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ действительной прямой. Рассмотрим ту ветвь функции $\operatorname{Ln} z$, для которой $\operatorname{Ln}(-1) = \pi i$. Эта ветвь будет соответствовать той ветви многозначной функции $\operatorname{Arg} z$, для которой $\operatorname{Arg}(-1) = \pi$. Вычислим значения $\operatorname{Ln} i$ и $\operatorname{Ln}(-i)$ для заданной ветви логарифма. Для этого нужно найти значения $\operatorname{Arg} i$ и $\operatorname{Arg}(-i)$ соответствующей ветви аргумента. Имеем

$$\operatorname{Arg} i = \operatorname{Arg}(-1) + \Delta_{\gamma_1} \operatorname{Arg} z = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{Arg}(-i) = \operatorname{Arg}(-1) + \Delta_{\gamma_2} \operatorname{Arg} z = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi,$$

где в качестве кривых γ_1 и γ_2 можно взять дуги окружности $|z| = 1$, соединяющие точку -1 с точками i и $-i$. Итак,

$$\operatorname{Ln} i = \ln|i| + i \operatorname{Arg} i = \ln 1 + i \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} i,$$

$$\operatorname{Ln}(-i) = \ln|-i| + i \operatorname{Arg}(-i) = \ln 1 + i \frac{3\pi}{2} = \frac{3}{2} \pi i. \quad \#$$

Можно говорить о возведении комплексного числа в произвольную комплексную степень. По определению полагают, что

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}, \quad a \neq 0. \quad (3.37)$$

При фиксированном $a \neq 0$ это соотношение определяет, как говорят, *общую показательную функцию*. Как и в случае логарифма, выделяют *главное значение показательной функции* a^z , равное $e^{z \operatorname{Ln} a}$. Значение, заданное равенством (3.37), иногда называют *общим значением показательной функции*.

Соотношение

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$$

при фиксированном a определяет многозначную функцию в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, называемую *общей степенной функцией*.

Пример 3.12. Вычислим i^i и $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$. Имеем

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln 1 + i(\pi/2 + 2k\pi))} = e^{-\pi/2 - 2k\pi}.$$

Главное значение i^i равно $e^{-\pi/2}$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i} &= e^{(1-i) \operatorname{Ln}((1+i)/\sqrt{2})} = \\ &= e^{(1-i)(\ln 1 + i(\pi/4 + 2k\pi))} = e^{\pi/4 + 2k\pi + i(\pi/4 + 2k\pi)} = \\ &= e^{\pi/4 + 2k\pi} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) e^{\pi/4 + 2k\pi}. \end{aligned}$$

Главное значение $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$ равно $\frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) e^{\pi/4}$.

3.6. Обратные тригонометрические функции

Функции $\text{Arcsin } z$, $\text{Arccos } z$, $\text{Arctg } z$ и $\text{Arcctg } z$ определяют как обратные к синусу, косинусу, тангенсу и котангенсу соответственно и называют обратными тригонометрическими функциями комплексного переменного.

Например, если $z = \cos w$, то w называют арккосинусом числа z и обозначают $\text{Arccos } z$. Для вычисления w при любом $z \in \mathbb{C}$ воспользуемся представлением $\cos w = (e^{iw} + e^{-iw})/2$. Обозначив $e^{iw} = t$, найдем

$$z = \cos w = \frac{t + t^{-1}}{2},$$

откуда $t^2 - 2zt + 1 = 0$. Решив квадратное уравнение относительно неизвестного t , получим два его решения ξ_1 и ξ_2 , которые определяются формулой* $\xi_{1,2} = z + \sqrt{z^2 - 1}$. А так как $t = e^{iw}$, то $iw = \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$. Итак,

$$\text{Arccos } z = -i \text{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right). \quad (3.38)$$

Поскольку для решений $\xi_{1,2}$ квадратного уравнения $t^2 - 2zt + 1 = 0$ верно соотношение $\xi_1 \xi_2 = 1$, то $|\xi_1| |\xi_2| = 1$ и $\arg \xi_1 + \arg \xi_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Главное значение аргумента комплексного числа есть число из промежутка $(-\pi, \pi]$, т.е. это число не превосходит π по абсолютной величине, причем $-\pi$ исключается. Поэтому либо $\arg \xi_1 + \arg \xi_2 = 0$, либо $\arg \xi_1 + \arg \xi_2 = 2\pi$. Значит, либо два аргумента отличаются лишь знаком, либо оба равны π .

Это рассуждение показывает, что из двух значений ξ_1 и ξ_2 одно имеет главное значение аргумента, принадлежащее отрезку $[0, \pi]$. Обозначим его через ξ . Ему соответствует значение

*В этой формуле квадратный корень имеет два значения: в рамках комплексных чисел нет понятия арифметического корня. Подчеркивая существование у квадратного корня двух значений, иногда пишут $\xi_{1,2} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$.

многозначной функции $\text{Arccos } z$, равное $-i \ln \xi = -i \ln |\xi| + \arg \xi$, которое называют **главным значением арккосинуса** и обозначают $\arccos z$.

Итак, по определению

$$\arccos z = \arg \xi - i \ln |\xi|,$$

где $\xi = z + \sqrt{z^2 - 1}$, причем из двух возможных значений выбирается то, аргумент которого попадает в промежуток $[0, \pi]$. Другие значения $\text{Arccos } z$ либо отличаются от главного значения арккосинуса слагаемым $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, либо формируются вторым значением выражения $z + \sqrt{z^2 - 1}$, равным $1/\xi$:

$$\begin{aligned} \text{Arccos } z &= -i \text{Ln} \left(\frac{1}{\xi} \right) = -i (-\ln |\xi| - i \arg \xi + 2k\pi i) = \\ &= -\arg \xi + i \ln |\xi| - 2k\pi = -\arccos z - 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Таким образом, все значения $\text{Arccos } z$ описываются формулой

$$\text{Arccos } z = \pm \arccos z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.39)$$

Аналогично с помощью логарифмической функции можно выразить и другие обратные тригонометрические функции:

$$\text{Arcsin } z = -i \text{Ln} i \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right), \quad (3.40)$$

$$\text{Arctg } z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}, \quad (3.41)$$

$$\text{Arcctg } z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{z+i}{z-i}. \quad (3.42)$$

Можно показать, что для любого значения $\text{Arccos } z$ существует такое значение $\text{Arcsin } z$, что сумма этих значений равна $\pi/2$. Аналогичное утверждение справедливо для пары функций $\text{Arctg } z$ и $\text{Arcctg } z$. Именно в этом смысле и следует понимать равенства

$$\text{Arcsin } z + \text{Arccos } z = \frac{\pi}{2}, \quad \text{Arctg } z + \text{Arcctg } z = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 3.13. а. Решим уравнение $4 \cos z + 5 = 0$. Учитывая (3.38), получаем $\cos z = -5/4$, или*

$$z = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{5}{4}\right) = -i \operatorname{Ln}\left(-\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1}\right) = -i \operatorname{Ln}\left(-\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}\right).$$

Отсюда, используя (3.35), находим

$$z_1 = -i \operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{2}\right) = -i\left(\ln \frac{1}{2} + i\pi + 2ik\pi\right) = i \ln 2 + (2k + 1)\pi,$$

$$z_2 = -i \operatorname{Ln}(-2) = -i(\ln 2 + i\pi + 2ik\pi) = -i \ln 2 + (2k + 1)\pi.$$

Итак, $z = \pm i \ln 2 + (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

б. Найдем z из уравнения $\operatorname{sh} iz = -i$. В силу (3.28) имеем $\operatorname{sh} iz = i \sin z = -i$, т.е. $\sin z = -1$. Отсюда, учитывая (3.40) и (3.35), получаем

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{Arcsin}(-1) = -i \operatorname{Ln}\left(-i + i\sqrt{1-1}\right) = \\ &= -i \operatorname{Ln}(-i) = -i\left(\ln 1 - i\frac{\pi}{2} + 2ik\pi\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

в. Вычислим $\operatorname{Arctg}(i/3)$. Используя (3.41) и (3.35), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctg} \frac{i}{3} &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1-1/3}{1+1/3} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1}{2} = \\ &= -\frac{i}{2}(-\ln 2 + 0 + 2ik\pi) = \frac{i}{2} \ln 2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Вопросы и задачи

3.1. Найдите при отображении $w = 1/z$ образы следующих множеств:

а) $|z| = \frac{1}{3}$; б) $\operatorname{Re} z = 0$; в) $\operatorname{Im} z = 0$; г) $\arg z = \frac{\pi}{4}$.

*Здесь под радикалом стоит действительное число и подразумевается арифметическое значение квадратного корня.

3.2. Найдите образы координатных осей Ox и Oy при следующих отображениях:

$$\text{а) } w = \frac{z-1}{z+1}; \quad \text{б) } w = 1 + \frac{1}{z}; \quad \text{в) } w = \frac{z+1}{z-1}; \quad \text{г) } w = 1 - \frac{1}{z}.$$

3.3. Запишите определение предела функции комплексного переменного в случае $z_0 = \infty$ и $A = \infty$, аналогичное (3.10) и (3.11).

3.4. Найдите модуль и главное значение аргумента для значений следующих функций в указанных точках:

$$\text{а) } w = \sin z, \quad z = \pi + i \ln 2; \quad \text{б) } w = ze^z, \quad z = i\pi.$$

3.5. Вычислите значения $\operatorname{Ln} z$ и $\ln z$ в точках: а) $z = 4 + 3i$; б) $z = 1 - i$; в) $z = -i$.

3.6. Вычислите общее и главное значения указанных выражений: а) $i^{1/i}$; б) 1^i ; в) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^i$.

3.7. Найдите модуль и аргумент следующих комплексных чисел: а) 2^i ; б) 3^{2+i} ; в) $\operatorname{th} i\pi$.

3.8. Запишите в алгебраической форме указанные комплексные числа:

$$\text{а) } \sin\left(\frac{\pi}{2} + i \ln 2\right); \quad \text{б) } \cos(\pi - i \ln 2); \quad \text{в) } \operatorname{sh} \frac{i\pi}{2}; \quad \text{г) } \operatorname{ctg} i\pi.$$

3.9. Найдите действительные и мнимые части следующих комплексных чисел: а) $\cos(2 + i)$; б) $\sin 2i$; в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right)$.

3.10. Для каждой из функций e^z , $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{tg} z$ найдите множество всех точек z , в которых функция принимает: а) действительные значения; б) мнимые значения.

3.11. Докажите, что любому значению $\operatorname{Arccos} z$ соответствует такое значение $\operatorname{Arcsin} z$, что сумма этих двух значений равна

$\pi/2$. Докажите аналогичное утверждение для функций $\operatorname{Arctg} z$ и $\operatorname{Arcctg} z$.

3.12. Для каких значений z все значения функций $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arctg} z$ являются действительными?

3.13. Найдите все значения следующих выражений:

а) $\operatorname{Arcsin} \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{Arccos} 2$; в) $\operatorname{Arcsin} i$; г) $\operatorname{Arctg}(1 + 2i)$.

3.14. Решите следующие уравнения: а) $e^{2z} + 5e^z - 6 = 0$;
б) $e^z + i = 0$; в) $\ln(z + i) = 0$; г) $\operatorname{ch} z + 1 = 0$; д) $\sin z = i\pi$;
е) $\operatorname{th} z - 1 + i = 0$.

4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4.1. Производная функции комплексного переменного

Определения производной и дифференциала *функции комплексного переменного* дословно совпадают с соответствующими определениями для действительной функции одного действительного переменного [II]. Далее в случаях, когда ясно, что речь идет о функции комплексного переменного, будем называть ее для краткости просто функцией.

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности $U(z_0)$ точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Дадим z_0 приращение Δz , такое, что $z_0 + \Delta z \in U(z_0)$. Разность $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$, как и в случае действительной функции, назовем *приращением функции* $w = f(z)$ в точке z_0 (соответствующим заданному приращению Δz аргумента z в этой точке) и обозначим $\Delta f(z_0)$, или просто Δw .

Определение 4.1. Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \quad (4.1)$$

то его называют *производной функции $f(z)$ комплексного переменного z в точке z_0* и обозначают $f'(z_0)$ или $df(z_0)/dz$ (иногда $w'(z_0)$ либо $dw(z_0)/dz$).

Итак, если существует конечный предел (4.1), то

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}. \quad (4.2)$$

Определение 4.2. Функцию комплексного переменного z называют *дифференцируемой в точке z_0* , если ее приращение $\Delta f(z_0)$ в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta f(z_0) = A \Delta z + o(\Delta z), \quad (4.3)$$

где A — комплексное число, которое не зависит от Δz , но может зависеть от z_0 ; $o(\Delta z)$ обозначает функцию, бесконечно малую (б.м.) при $\Delta z \rightarrow 0$ более высокого порядка по сравнению с Δz , т.е. $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} o(\Delta z)/\Delta z = 0$.

Как и в случае действительной функции [II], функция комплексного переменного $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует производная $f'(z_0)$. В этом можно убедиться, используя определения 4.1 и 4.2, а также теорему о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией [I-7.5], верной и в комплексном случае (см. замечание 3.1). Итак, дифференцируемость функции $f(z)$ в точке z_0 можно отождествить с существованием у нее в этой точке (конечной) производной.

Пример 4.1. Функция $f(z) = z^m$ (m — натуральное) дифференцируема в каждой точке $z \in \mathbb{C}$, так как

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^m - z^m}{\Delta z} &= \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^m + mz^{m-1}\Delta z + \frac{m(m-1)}{2}z^{m-1}(\Delta z)^2 + \dots + (\Delta z)^m - z^m}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{mz^{m-1}\Delta z + o(\Delta z)}{\Delta z} = mz^{m-1}. \end{aligned}$$

При этом

$$(z^m)' = mz^{m-1}, \quad (4.4)$$

что по форме совпадает с производной степенной функции действительного переменного. #

Главную часть приращения $\Delta f(z_0)$, линейную относительно Δz , называют **дифференциалом функции комплексного переменного $f(z)$ в точке z_0** и обозначают $df(z_0)$. Так же как и в действительном случае, получаем $df(z_0) = f'(z_0) \Delta z$. Учитывая, что $dz = \Delta z$, приходим к соотношению

$$df(z_0) = f'(z_0) dz. \quad (4.5)$$

Отметим, что функции комплексного переменного, дифференцируемые в каждой точке некоторой области, по сравнению с дифференцируемыми действительными функциями обладают многими дополнительными свойствами. Причина состоит в том, что условия существования производной в комплексном случае являются более сильными, чем в действительном случае.

4.2. Необходимые условия дифференцируемости

Теорема 4.1. Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ имеет конечную производную в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются дифференцируемыми в точке $(x_0; y_0)$ и в этой точке выполняются равенства

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \quad (4.6)$$

◀ Пусть функция $f(z)$ имеет производную $f'(z_0) = A + iB$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда приращение $\Delta f(z_0)$ этой функции в точке z_0 можно представить в виде

$$\Delta f(z_0) = f'(z_0) \Delta z + o(\Delta z). \quad (4.7)$$

Обозначим $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta f(z_0) &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \\ &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - \\ &\quad - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0) = \Delta u(x_0, y_0) + i \Delta v(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Условие $\Delta z \rightarrow 0$ равносильно одновременному выполнению условий $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, или, что то же самое, условию $\rho = |\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$. Пусть $o(\Delta z) = o_1(\rho) + i o_2(\rho)$, где $o_1(\rho)$ и $o_2(\rho)$ — б.м. при $\rho \rightarrow 0$ более высокого порядка по сравнению с ρ . Условие существования производной функции $f(z)$ в точке z_0 (дифференцируемости в этой точке) означает выполнение равенства

$$\Delta u(x_0, y_0) + i \Delta v(x_0, y_0) = (A + iB)(\Delta x + i \Delta y) + o_1(\rho) + i o_2(\rho).$$

Приравнявая в этом равенстве действительные и мнимые части, получаем

$$\begin{cases} \Delta u(x_0, y_0) = A \Delta x - B \Delta y + o_1(\rho), \\ \Delta v(x_0, y_0) = B \Delta x + A \Delta y + o_2(\rho). \end{cases} \quad (4.8)$$

Тем самым доказано, что в точке $(x_0; y_0)$ функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы [V], причем

$$\begin{cases} A = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}, & -B = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}, \\ B = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}, & A = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Из приведенных равенств вытекают условия (4.6). ►

Замечание 4.1. Из равенств (4.9) можно получить формулу для вычисления производной функции комплексного переменного

$$f'(z_0) = A + iB = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Соотношения (4.6) обычно называют **условиями Коши — Римана**, хотя эти соотношения можно встретить уже в работах Ж. Даламбера и Л. Эйлера, относящихся к середине XVIII в. Сто лет спустя немецкий математик Б. Риман использовал (4.6) в приложении к геометрии и математической физике.

4.3. Достаточные условия дифференцируемости

Теорема 4.2. Если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке $(x_0; y_0)$ и в этой точке выполнены условия Коши — Римана, то функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ имеет в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ производную $f'(z_0)$, которую можно вычислить по одной из формул:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}; \quad (4.10)$$

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} - i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}; \quad (4.11)$$

$$f'(z_0) = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}; \quad (4.12)$$

$$f'(z_0) = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \quad (4.13)$$

◀ В силу дифференцируемости функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке $(x_0; y_0)$ их приращения в этой точке могут быть представлены в виде [V]

$$\Delta u(x_0, y_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \alpha(\rho),$$

$$\Delta v(x_0, y_0) = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \beta(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = |\Delta z|$; $\alpha(\rho)$ и $\beta(\rho)$ — б.м. при $\rho \rightarrow 0$ более высокого порядка по сравнению с ρ . Поэтому приращение функции $f(z)$ в точке z_0 с учетом замены, согласно (4.6), $\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}$ на $-\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$ и $\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}$ на $\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta f(z_0) &= \Delta u(x_0, y_0) + i \Delta v(x_0, y_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + \\ &+ i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + \alpha(\rho) + i \beta(\rho) = \\ &= \left(\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \right) \Delta x + (\alpha(\rho) + i \beta(\rho)). \end{aligned}$$

Теперь в силу определения 4.1 производной имеем

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\alpha(\rho) + i\beta(\rho)}{\Delta z} \right) = \\ &= \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \end{aligned}$$

При вычислении предела учтено, что

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\alpha(\rho) + i\beta(\rho)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\alpha(\rho) + i\beta(\rho)}{\rho} \frac{\rho}{\Delta z} = 0$$

как предел произведения функции $(\alpha(\rho) + i\beta(\rho))/\rho$, б.м. при $\rho = |\Delta z| \rightarrow 0$, и функции $\rho/\Delta z = |\Delta z|/\Delta z$, ограниченной по модулю $\left(\left| \frac{|\Delta z|}{\Delta z} \right| = 1 \right)$.

Итак, доказана справедливость (4.10). Любое из остальных равенств (4.11)–(4.13) следует из (4.10) с использованием условий (4.6) Коши — Римана. ►

Опираясь на доказанные в теоремах 4.1 и 4.2 необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного, можно сформулировать следующий **критерий дифференцируемости функции комплексного переменного**. Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке $(x_0; y_0)$;
- 2) в точке $(x_0; y_0)$ выполнялись условия (4.6) Коши — Римана.

При выполнении всех условий этого критерия производную $f'(z_0)$ можно вычислить по любой из формул (4.10)–(4.13).

Пример 4.2. Функция $f(z) = e^z$ дифференцируема на всей комплексной плоскости. Действительно, используя формулу Эйлера, имеем

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (4.14)$$

Стало быть, $u(x, y) = e^x \cos y$ и $v(x, y) = e^x \sin y$. Эти функции дифференцируемы в \mathbb{R}^2 , причем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

т.е. выполнены условия Коши — Римана. Следовательно, функция e^z дифференцируема в каждой точке комплексной плоскости. Согласно (4.10) и (4.14), находим

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z. \quad (4.15)$$

4.4. Условия Коши — Римана в полярных координатах

Пусть $z = r e^{i\varphi}$. Тогда можно записать $f(z) = u(r, \varphi) + i v(r, \varphi)$. По формулам вычисления частных производных сложной функции двух переменных [V] находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned}$$

Учитывая формулы связи между декартовыми и полярными координатами точки на плоскости

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x},$$

получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos \varphi}{r} = \cos \varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{1}{1 + y^2/x^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{r \sin \varphi}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \sin \varphi}{r} = \sin \varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{1 + y^2/x^2} \frac{1}{x} = \frac{r \cos \varphi}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r}.\end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения для частных производных в формулы дифференцирования функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, получаем выражения частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ через переменные r и φ и частные производные $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial v}{\partial r}$, $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi, & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi, & \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cos \varphi. \end{cases} \quad (4.16)$$

Подставляя полученные выражения в условия (4.6) Коши — Римана, приходим к равенствам

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi &= \frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cos \varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi &= -\frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Умножая первое равенство на $\cos \varphi$, второе — на $\sin \varphi$, а затем складывая, находим

$$\frac{\partial u}{\partial r} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi).$$

Умножая первое равенство на $\sin \varphi$, второе — на $\cos \varphi$, а затем вычитая из первого второе, получаем

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \frac{\partial v}{\partial r} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi).$$

С учетом тождества $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ приходим к **условиям Коши — Римана в полярных координатах**

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \quad (4.17)$$

Производную $f'(z)$ удобно вычислять по одной из формул

$$f'(z) = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (4.18)$$

$$f'(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right), \quad (4.19)$$

которые нетрудно получить подстановкой (4.16) в (4.10)–(4.13) с последующим учетом (4.17). Например, докажем формулу (4.18). Согласно (4.10) и (4.16), имеем

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi \right). \end{aligned}$$

В полученном представлении производной функции $f(z)$ заменим в соответствии с (4.17) частные производные $\frac{\partial u}{\partial r}$ и $\frac{\partial v}{\partial r}$ частными производными $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial v}{\partial r}$:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial r} (\cos \varphi - i \sin \varphi) + \frac{\partial v}{\partial r} (\sin \varphi + i \cos \varphi). \end{aligned}$$

Так как $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то

$$\cos \varphi - i \sin \varphi = \frac{\bar{z}}{r}, \quad \sin \varphi + i \cos \varphi = i(\cos \varphi - i \sin \varphi) = i \frac{\bar{z}}{r}.$$

Поэтому

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\bar{z}}{r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\bar{z}}{r} = \frac{\bar{z}}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right).$$

Наконец, учитывая, что $z\bar{z} = r^2$, получаем равенство (4.18).

Пример 4.3. а. Функция \sqrt{z} является двузначной. Рассмотрим в комплексной плоскости \mathbb{C} с разрезом по отрицательной части действительной оси ту ее ветвь $f(z)$, для которой $f(1) = 1$. Функцию $f(z)$ можно записать в виде $f(z) = \sqrt{r} e^{i\varphi/2}$, где $z = r e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < \pi$. Эта функция при $r \neq 0$ (т.е. при $z \neq 0$) удовлетворяет условиям (4.17) Коши — Римана в полярных координатах. Действительно, если $f(z) = u(r, \varphi) + i v(r, \varphi)$, то

$$u(r, \varphi) = \sqrt{r} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad v(r, \varphi) = \sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\sqrt{r}}{2} \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\sqrt{r}}{2} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Стало быть, $\partial u / \partial r = (1/r) \partial v / \partial \varphi$ и $\partial v / \partial r = -(1/r) \partial u / \partial \varphi$. Из (4.18) находим при $r \neq 0$ (при $z \neq 0$)

$$f'(z) = \frac{r}{z} \left(\frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\varphi}{2} + i \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{r} e^{i\varphi/2}} = \frac{1}{2f(z)}. \quad (4.20)$$

Последнее соотношение можно записать в виде

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}},$$

имея в виду, что в левой и правой частях равенства используется одна и та же ветвь многозначной функции \sqrt{z} . Мы проверили это равенство лишь для одной ветви функции. Для второй ветви оно верно в силу того, что вторая ветвь отличается от первой лишь знаком. Кроме того, выбор области определения ветви также не является существенным, и равенство верно при $z \neq 0$.

б. Функция $\ln z = \ln r + i\varphi$ ($z = re^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $r > 0$) удовлетворяет условиям (4.17), так как $u(r, \varphi) = \ln r$, $v(r, \varphi) = \varphi$,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 1.$$

Поэтому функция дифференцируема во всей области определения. Согласно (4.18), при $z \neq 0$ получаем

$$(\ln z)' = \frac{r}{z} \frac{1}{r} = \frac{1}{z}. \quad (4.21)$$

4.5. Правила дифференцирования функций комплексного переменного

Из определения 4.1 *производной функции комплексного переменного* и свойств предела получаем основные правила дифференцирования, аналогичные соответствующим правилам дифференцирования действительной функции [II], а именно:

1) постоянная функция $f(z) \equiv A = \text{const}$, $z \in \mathbb{C}$, имеет производную в каждой точке *комплексной плоскости* \mathbb{C} , причем $f'(z) \equiv 0$, $z \in \mathbb{C}$;

2) функция $f(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$, дифференцируема в каждой точке *комплексной плоскости* \mathbb{C} , причем $f'(z) \equiv 1$, $z \in \mathbb{C}$ (см. пример 4.1);

3) если функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют производные в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, то функции $\alpha f(z) + \beta g(z)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$), $f(z)g(z)$ и $f(z)/g(z)$ (последняя при условии $g(z_0) \neq 0$) также имеют производные в

точке z_0 , причем

$$\begin{cases} (\alpha f(z) + \beta g(z))' \Big|_{z=z_0} = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0); \\ (f(z)g(z))' \Big|_{z=z_0} = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0); \\ \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' \Big|_{z=z_0} = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}; \end{cases} \quad (4.22)$$

4) если функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z_0 , а функция $W = g(w)$ дифференцируема в точке $w_0 = f(z_0)$, то сложная функция $W = g(f(z))$ дифференцируема в точке z_0 , причем

$$W'(z_0) = (g(f(z)))' \Big|_{z=z_0} = g'(w_0) f'(z_0). \quad (4.23)$$

Пример 4.4. Из (4.4) и (4.22) следует, что:

а) функция $f(z) = z^m$, где m — целое отрицательное число, дифференцируема на всей комплексной плоскости, кроме точки $z = 0$, причем $(z^m)' = mz^{m-1}$. В частности,

$$(z^{-1})' = \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}; \quad (4.24)$$

б) многочлен $P_n(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$ является дифференцируемой на всей комплексной плоскости функцией, и

$$P'_n(z) = na_0z^{n-1} + (n-1)a_1z^{n-2} + \dots + 2a_{n-2}z + a_{n-1}; \quad (4.25)$$

в) рациональная функция $R(z) = P_n(z)/Q_m(z)$ имеет производную во всех точках $z \in \mathbb{C}$, для которых $Q_m(z) \neq 0$, причем формула для $R'(z)$ аналогична формуле для $R'(x)$ при $x \in \mathbb{R}$.

4.6. Аналитические функции

Дифференцируемость функции комплексного переменного в одной точке еще не влечет за собой дополнительных свойств функции по сравнению с дифференцируемыми действительными функциями, о которых упоминалось в 4.1. Наличие таких свойств связано с одним из наиболее фундаментальных понятий в теории функций комплексного переменного — с понятием *аналитической функции*.

Определение 4.3. *Функцию $f(z)$, определенную в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, называют **аналитической** (также **голоморфной** или **регулярной**) в этой точке, если $f(z)$ дифференцируема в некоторой окрестности z_0 . Функцию, аналитическую в каждой точке области $D \subset \mathbb{C}$, называют **аналитической** (**голоморфной**, **регулярной**) в этой области.*

Согласно определению, функция, аналитическая в области, по сути является просто дифференцируемой в этой области. Если функция аналитична в точке, то в силу определения она аналитична в некоторой окрестности этой точки. Поэтому вместо „функция, аналитическая в точке“, всегда можно говорить „функция, аналитическая в окрестности точки“.

Нарушение аналитичности функции в точке z_0 вовсе не означает, что функция не дифференцируема в этой точке. Согласно определению, функция не является аналитической в точке z_0 , если в любой окрестности этой точки можно указать точку, в которой функция не является дифференцируемой.

Часто говорят о *функции, аналитической в замкнутой области \bar{D}* (или о функции, аналитической в области D и на ее границе), подразумевая под этим, что все точки \bar{D} являются точками аналитичности $f(z)$. Это значит, что функция является аналитической в некоторой области G , включающей в себя \bar{D} . Существуют функции комплексного переменного, аналитические во всей комплексной плоскости \mathbb{C} . Их называют *целыми функциями*.

Для проверки, обладает ли функция $f(z)$ свойством аналитичности в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, или, кратко, для проверки функции на аналитичность можно использовать *критерий дифференцируемости функции комплексного переменного*. Для этого надо выделить действительную $u = \operatorname{Re} f(z)$ и мнимую $v = \operatorname{Im} f(z)$ части функции $f(z)$, а затем проверить в окрестности точки $(x_0; y_0)$ дифференцируемость функций u и v (например, установив непрерывность частных производных этих функций), а также выполнение *условий Коши — Римана*.

Проверять функцию на аналитичность можно также при помощи свойств дифференцируемых функций (см. пример 4.4). Отметим, что, как и в случае действительных функций действительного переменного, функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в этой точке. Таким образом, непрерывность функции в данной точке z_0 можно рассматривать как необходимое условие ее аналитичности в точке z_0 .

Пример 4.5. Проверим на аналитичность следующие функции: а) $\cos z$; б) $z\bar{z}$; в) $z \operatorname{Re} z$; г) $\operatorname{Re} z$.

а. Согласно (3.29), имеем

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Функции $u(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$ и $v(x, y) = -\sin x \operatorname{sh} y$ дифференцируемы в \mathbb{R}^2 , так как их частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\sin x \operatorname{ch} y, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \cos x \operatorname{sh} y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\cos x \operatorname{sh} y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\sin x \operatorname{ch} y \end{aligned}$$

являются непрерывными в \mathbb{R}^2 . При этом в \mathbb{R}^2 выполнены условия Коши — Римана. Это означает, что функция $\cos z$ является аналитической в \mathbb{C} , т.е. целой функцией. Используя (4.10) и (3.29), находим

$$(\cos z)' = -\sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y = -\sin(x + iy) = -\sin z. \quad (4.26)$$

б. Имеем $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$. Следовательно, $u(x, y) = x^2 + y^2$ и $v(x, y) \equiv 0$. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в \mathbb{R}^2 , но условия Коши — Римана выполнены лишь в одной точке $(0; 0)$. Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$$

и $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ только при $x = 0$. Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0$$

и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ только при $y = 0$. Стало быть, функция $f(z) = z\bar{z}$ дифференцируема только в точке $z = 0$, причем $f'(0) = 0$, но нигде не является аналитической.

в. Так как $\operatorname{Re} z = x$, то $z \operatorname{Re} z = (x + iy)x = x^2 + ixy$, т.е. $u(x, y) = x^2$, $v(x, y) = xy$. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в \mathbb{R}^2 , а условия Коши — Римана выполнены лишь в одной точке $(0; 0)$, что нетрудно проверить. Значит, функция $f(z) = z \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в точке $z = 0$ ($f'(0) = 0$) и нигде не является аналитической.

г. Для $f(z) = \operatorname{Re} z$ имеем $u(x, y) = x$, $v(x, y) \equiv 0$. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в \mathbb{R}^2 , но условия Коши — Римана не выполняются ни в одной точке комплексной плоскости. Следовательно, функция $f(z) = \operatorname{Re} z$ ни в одной точке не является ни дифференцируемой, ни тем более аналитической. #

Легко проверить, что каждая из основных элементарных функций комплексного переменного является аналитической в своей области определения. Так, функции e^z , $\sin z$, $\cos z$ аналитичны на всей комплексной плоскости \mathbb{C} (аналитичность e^z установлена в примере 4.2, аналитичность $\sin z$ можно проверить так же, как и аналитичность $\cos z$). При этом выражения для производных $(e^z)' = e^z$, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$ совпадают с выражениями для производных соответствующих действительных функций действительного переменного.

Учитывая правила дифференцирования (см. 4.5), заключаем, что линейная комбинация и произведение двух аналитических (в области) функций являются аналитическими (в этой области) функциями, а частное двух аналитических (в области) функций есть функция, аналитическая в тех точках (этой области), в которых знаменатель не обращается в нуль. Можно аналогично правилу дифференцирования сложной функции сформулировать условия аналитичности сложной функции.

Из сказанного следует, что, например, многочлен $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ — аналитическая функция на всей комплексной плоскости \mathbb{C} , $\operatorname{tg} z$ — аналитическая функция во всех точках комплексной плоскости \mathbb{C} , в которых $\cos z \neq 0$, т.е. при $z \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, а $\operatorname{ctg} z$ есть аналитическая функция во всех точках комплексной плоскости, в которых $\sin z \neq 0$, т.е. при $z \neq k\pi$ (в таком случае говорят: на всей комплексной плоскости \mathbb{C} за исключением точек $z \neq k\pi$). Функция $e^{1/z}$ аналитична во всех точках $z \in \mathbb{C}$, кроме точки $z = 0$.

4.7. Геометрический смысл аргумента и модуля производной

Предположим, что $w = f(z)$ — аналитическая в точке z_0 функция и $f'(z_0) \neq 0$. Для выяснения геометрического смысла аргумента производной рассмотрим на плоскости (z) кривую γ , заданную уравнением $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in T = [a, b]$, которая проходит через точку z_0 . Последнее означает, что $z(t_0) = z_0$ для некоторого значения $t_0 \in T$. Не теряя общности, мы можем считать, что функция аналитична во всех точках кривой γ .

Предположим, что $z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0) \neq 0$. Следовательно, $x'(t_0)$ и $y'(t_0)$ одновременно не равны нулю, а потому в точке z_0 можно к кривой γ провести касательную и вектор $(x'(t_0) \ y'(t_0))^T$ направлен по касательной. На плоскости (w) образом кривой γ при отображении $w = f(z)$ будет кривая Γ (рис. 4.1), заданная уравнением $w = f(z(t))$, причем кривая Γ будет проходить через точку $w_0 = f(z_0)$.

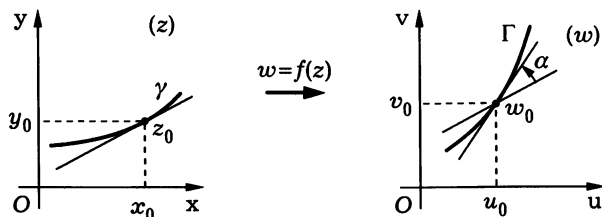


Рис. 4.1

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$w'(t_0) = f'(z_0) z'(t_0). \quad (4.27)$$

В силу сделанных предположений $w'(t_0) \neq 0$, а это означает, что к кривой Γ в точке w_0 можно провести касательную. Поскольку *аргумент* произведения комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей, то, согласно (4.27),

$$\text{Arg } w'(t_0) = \text{arg } f'(z_0) + \text{Arg } z'(t_0). \quad (4.28)$$

Обозначим $\text{arg } f'(z_0) = \alpha$. Тогда вместо (4.28) запишем

$$\text{Arg } w'(t_0) = \alpha + \text{Arg } z'(t_0). \quad (4.29)$$

Если производная аналитической в точке z_0 функции $f(z)$ отлична от нуля в этой точке, то в силу (4.29) производной можно придать следующий геометрический смысл: ее аргумент равен углу α , на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к кривой, проходящей через эту точку, чтобы получить направление касательной в соответствующей z_0 точке w_0 к образу этой кривой при отображении $w = f(z)$ (см. рис. 4.1). При $\alpha > 0$ поворот происходит против часовой стрелки, а при $\alpha < 0$ — в противоположном направлении.

Пусть в плоскости (z) через точку z_0 проходят две кривые γ_1 и γ_2 , имеющие касательные в этой точке, причем угол между этими касательными равен ψ . Тогда при отображении $w = f(z)$ эти кривые переходят соответственно в кривые Γ_1 и Γ_2 в

плоскости (w), имеющие касательные в точке $w_0 = f(z_0)$. Так как при этом отображении касательную к каждой из кривых γ_1 и γ_2 следует повернуть на один и тот же угол α , чтобы получить направление касательной соответственно к Γ_1 и Γ_2 , то угол между касательными в точке w_0 к кривым Γ_1 и Γ_2 также будет равен ψ (рис. 4.2).

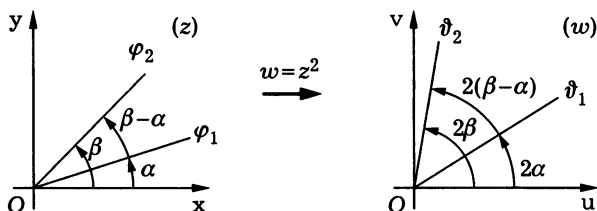


Рис. 4.2

Угол между касательными к кривым в точке пересечения кривых называют углом между кривыми. Таким образом, угол между кривыми γ_1 и γ_2 в точке z_0 их пересечения такой же, как и между их образами при отображении $w = f(z)$ — кривыми Γ_1 и Γ_2 в точке w_0 пересечения этих кривых.

Определение 4.4. *Отображение $w = f(z)$ называют конформным в точке z_0 , если оно сохраняет углы между кривыми.*

Предполагается, что при таком отображении направление отсчета углов не изменяется, т.е. сохраняется взаимное расположение (ориентация) кривых. Иногда такое отображение называют конформным отображением первого рода, тогда как при сохранении углов, но изменении ориентации кривых говорят о конформном отображении второго рода. Таким образом, в соответствии с определением 4.4 отображение, осуществляемое аналитической функцией, является конформным (первого рода) во всех точках, в которых производная этой функции отлична от нуля. Так, линейное отображение $w = az + b$ ($a \neq 0$) является конформным во всех точках комплексной плоскости, поскольку $w'(z) = a \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$.

Функция $f(z) = z^2$ имеет производную $f'(z) = 2z$, которая обращается в нуль в точке $z_0 = 0$. Докажем, что отображение $w = z^2$ не является конформным в этой точке. Рассмотрим два луча $\arg z = \alpha$ и $\arg z = \beta$, выходящих из точки z_0 (рис. 4.3). Угол $\beta - \alpha$ между этими лучами в плоскости (z) при отображении $w = z^2$ удваивается и составляет $2(\beta - \alpha)$, так как эти лучи переходят в плоскости (w) в лучи $\arg w = 2\alpha$ и $\arg w = 2\beta$.

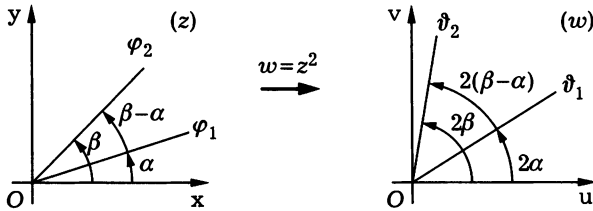


Рис. 4.3

Для выяснения геометрического смысла модуля производной используем возможность перестановки знака предела и непрерывной функции [1] и запишем

$$|f'(z_0)| = \left| \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}. \quad (4.30)$$

Поскольку $|\Delta w|/|\Delta z|$ является отношением расстояний между точками $w_0 = f(z_0)$ и $w_0 + \Delta w = f(z_0 + \Delta z)$ в плоскости (w) и точками z_0 и $z_0 + \Delta z$ в плоскости (z) соответственно, то это отношение показывает, во сколько раз при отображении $w = f(z)$ изменяется расстояние между двумя точками плоскости (z) в окрестности точки z_0 . Поэтому модуль $|f'(z_0)|$ производной естественно назвать **коэффициентом растяжения в точке z_0 при отображении $w = f(z)$** .

Если $|f'(z_0)| > 1$, то в достаточно малой окрестности z_0 расстояние между двумя точками при отображении $w = f(z)$ увеличивается, т.е. отображение осуществляет растяжение в окрестности точки z_0 . Если же $|f'(z_0)| < 1$, то это отображение

приводит к сжатию в окрестности точки z_0 , так как расстояния между образами точек уменьшаются.

Пример 4.6. Найдем угол поворота луча, выходящего из точки $z_0 = 1$, и коэффициент растяжения в этой точке при отображении $w = z^3$. Имеем $f(z) = z^3$ и $f'(z) = 3z^2$, т.е. $f'(z_0) = f'(1) = 3$. Поскольку $\arg f'(z_0) = 0$, то любой луч, выходящий из точки $z_0 = 1$, при отображении $w = z^3$ сохраняет свое направление в плоскости (w). Коэффициент растяжения в точке $z_0 = 1$ при этом отображении равен 3.

Замечание 4.2. Отображение $w = f(z)$ комплексной плоскости эквивалентно отображению

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad (4.31)$$

где $w = u + iv$, а $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Якобиан этого отображения равен [V]

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Используя условия Коши — Римана, получаем

$$J(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2.$$

Так как $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$, то

$$J(x, y) = |f'(z)|^2. \quad (4.32)$$

Таким образом, учитывая геометрический смысл якобиана [VII], можем сказать, что величина $|f'(z)|^2$ представляет собой коэффициент изменения площади при отображении $w = f(z)$. Эта величина зависит от значений двух переменных x и y , являющихся координатами точки $z \in \mathbb{C}$. При этом, если $f'(z_0) \neq 0$, то якобиан в точке z_0 также отличен от нуля.

Исходя из геометрического смысла величин $|f'(z)|$ и $|f'(z)|^2$, можно получить формулы вычисления площади образа области и длины образа кривой при отображении $w = f(z)$. Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает область D на D^* (т.е. отображение $w = f(z)$ конформно в каждой точке области D). Известно [VII], что площадь S^* области D^* выражается двойным интегралом $\iint_{D^*} du dv$. Используя правило замены переменных в двойном интеграле, получаем

$$S^* = \iint_{D^*} du dv = \iint_D |J(x, y)| dx dy = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy. \quad (4.33)$$

Пусть теперь γ — кривая в области D , а γ^* — ее образ при отображении $w = f(z)$. Дифференциал dl длины дуги в плоскости (z) равен $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = |dz|$, $dz = dx + i dy$, а дифференциал dl^* длины дуги в плоскости (w) равен

$$dl^* = \sqrt{(du)^2 + (dv)^2} = |dw| = |f'(z) dz| = |f'(z)| |dz|.$$

Учитывая представление длины кривой с помощью криволинейного интеграла и формулу замены переменных в таком интеграле, заключаем, что длину l^* образа γ^* кривой γ при отображении $w = f(z)$ можно вычислить по формуле

$$l^* = \int_{\gamma^*} |dw| = \int_{\gamma} |f'(z)| |dz|. \quad (4.34)$$

4.8. Теорема о единственности аналитической функции

Теорема 4.3. Если $f(z)$ — аналитическая в точке $z = a$ функция и $f(a) = 0$, то либо $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности этой точки, либо у точки $z = a$ есть окрестность, в которой нет других нулей функции $f(z)$, кроме $z = a$. #

Приведенная теорема доказана далее (см. 7.1). А здесь мы воспользуемся ею, чтобы доказать одну из самых фундаментальных теорем теории функций комплексного переменного.

Теорема 4.4 (о единственности аналитической функции). Если две аналитические в области $D \subseteq \mathbb{C}$ функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают на множестве $E \subset D$, которое имеет хотя бы одну предельную точку $a \in D$, то $f_1(z) \equiv f_2(z)$ всюду в области D .

◀ Функция $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ является аналитической в области D как разность аналитических функций. На множестве $E \subset D$ по условию теоремы $f(z) \equiv 0$. Надо показать, что $f(z) \equiv 0$ в D , т.е. что множество $M = \{z \in D: f(z) = 0\}$, включающее E , совпадает с D .

Так как $E \subset M$, то точка a , являясь предельной точкой множества E , будет предельной точкой и множества M .

В силу аналитичности $f(z)$ в области D эта функция непрерывна в каждой точке $z \in D$, и в частности в точке a , предельной для множества M . Поэтому

$$\lim_{z \xrightarrow{M} a} f(z) = 0 = f(a). \quad (4.35)$$

Это означает, что $z = a$ — нуль функции $f(z)$. По теореме 4.3 либо $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $z = a$, либо у этой точки есть окрестность, в которой нет других нулей функции $f(z)$. В последнем случае точка $z = a$ не могла бы быть предельной для множества M . Итак, в некоторой окрестности точки $z = a$ имеем $f(z) \equiv 0$.

Рассмотрим множество $\overset{\circ}{M}$ внутренних точек множества M . Это множество не пусто, так как содержит точку a . Это множество открыто согласно своему определению. В то же время это множество замкнуто в D , т.е. содержит все свои предельные точки, принадлежащие D . Действительно, если точка $b \in D$ является предельной точкой множества $\overset{\circ}{M}$, то в любой проколотовой окрестности этой точки есть точки, в которых $f(z) = 0$.

Согласно теореме 4.3, $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки b , т.е. точка b является внутренней точкой множества M и принадлежит множеству $\overset{\circ}{M}$. Так как область D является линейно связным множеством, то множество $\overset{\circ}{M}$, одновременно и открытое и замкнутое в D , по теореме 1.1 совпадает с D . Итак, $\overset{\circ}{M} = D$, и, следовательно, $f(z) \equiv 0$ в D . ►

Теорема 4.4 устанавливает одно из важнейших свойств аналитических функций и подчеркивает существенное отличие понятия аналитичности функции комплексного переменного от понятия дифференцируемости действительной функции. В самом деле, две даже бесконечно дифференцируемые действительные функции с одинаковой областью определения могут совпадать на ее части, не совпадая тождественно во всей этой области. В противоположность этому две функции комплексного переменного, совпадающие на любом множестве, которое имеет предельную точку в области D их аналитичности (например, в некоторой окрестности точки или на дуге, лежащей в D), совпадают тождественно во всей этой области.

Очень часто в теории функций комплексного переменного используют следующий (ослабленный) вариант теоремы единственности.

Следствие 4.1. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области D и $f(z) \equiv c = \text{const}$ на некоторой кривой γ , лежащей в D . Тогда $f(z) \equiv c = \text{const}$ в области D .

Опираясь на теорему единственности, можно показать, что известные тождества для элементарных функций (например, общеизвестные формулы тригонометрии или функциональное тождество $e^{x+y} = e^x e^y$ для показательной функции) остаются верными при переходе к комплексным значениям переменных. Для элементарных функций также сохраняются все формулы дифференцирования, известные для действительных функций действительного переменного [II].

Пример 4.7. а. Покажем, что

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.36)$$

Так как $\sin z$ и $\cos z$ — аналитические в \mathbb{C} функции, то $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ также является аналитической в \mathbb{C} функцией. Поскольку $f(z) = 0$ при $z = x \in \mathbb{R}$, то в силу следствия 4.1 $f(z) \equiv 0$ всюду в \mathbb{C} .

б. Докажем справедливость равенства

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \quad (4.37)$$

При действительных z_1 и z_2 (4.37) справедливо. Пусть z_2 действительно и фиксировано. Тогда левая и правая части (4.37) являются целыми функциями переменного $z_1 \in \mathbb{C}$. При действительном z_1 эти целые функции совпадают. Следовательно, по теореме 4.4 эти функции совпадают при всех комплексных z_1 . Итак, равенство (4.37) верно при любых комплексных z_1 и действительных z_2 .

Пусть теперь фиксировано $z_1 \in \mathbb{C}$. Тогда обе части (4.37) являются целыми функциями переменного $z_2 \in \mathbb{C}$. Так как эти функции совпадают при любых действительных z_2 , то в силу той же теоремы они совпадают и при любых комплексных z_2 . Тем самым справедливость (4.37) доказана для любых комплексных чисел z_1 и z_2 . Отметим, что в 3.3 справедливость (4.37) доказана путем перемножения двух абсолютно сходящихся рядов.

4.9. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части

Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является аналитической в области D и, кроме того, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка

включительно*. Дифференцируя первое из *условий Коши — Римана* (4.6) по переменному x , а второе — по переменному y , получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Складывая эти равенства и учитывая, что смешанные производные функции v не зависят от порядка дифференцирования в силу их непрерывности [V], находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (4.38)$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (4.39)$$

Итак, действительная и мнимая части аналитической функции являются решениями дифференциального уравнения в частных производных.

Действительную функцию $u(x, y)$, имеющую непрерывные частные производные второго порядка в области D и удовлетворяющую дифференциальному уравнению (4.38), называют *гармонической функцией* в D , а дифференциальное уравнение — *уравнением Лапласа*. Уравнение Лапласа часто записывают в виде $\Delta u = 0$ или $\nabla^2 u = 0$, где

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

обозначает *оператор Лапласа*.

Приведенные рассуждения показывают, что действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями. Отметим, что не любая пара гармонических функций образует аналитическую функцию. Функция

*Условие существования частных производных на самом деле является излишним, так как всегда выполняется для аналитических функций. Это станет ясным из дальнейшего изложения материала.

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ будет аналитической, если гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ связаны друг с другом условиями Коши — Римана (это следует из теоремы 4.2).

Пару гармонических функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, связанных условиями Коши — Римана, называют **сопряженными гармоническими функциями**. Таким образом, действительная и мнимая части функции, аналитической в некоторой области, являются в этой области сопряженными гармоническими функциями. Верно и обратное утверждение: пара сопряженных в области D функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ составляют функцию комплексного переменного $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, аналитическую в D . Отметим, что если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ составляют пару сопряженных гармонических функций, то парой сопряженных гармонических функций являются также $v(x, y)$ и $-u(x, y)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить для этой пары функций условия Коши — Римана: они сводятся к условиям Коши — Римана для пары функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Зная одну из сопряженных гармонических в области D функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, можно восстановить другую. А именно покажем, что для всякой гармонической в односвязной области D функции $u(x, y)$ существует сопряженная с ней гармоническая в D функция $v(x, y)$. При этом функция $v(x, y)$ определена с точностью до постоянного слагаемого.

Действительно, условия Коши — Римана можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений относительно неизвестной функции $v(x, y)$. При этом задача состоит в восстановлении функции по ее частным производным. Составим выражение

$$-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy. \quad (4.40)$$

Оно является *полным дифференциалом*, если

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Но это равенство верно, так как функция $u(x, y)$ является гармонической. Поэтому в односвязной области D существует такая функция $v(x, y)$, что указанное выражение является дифференциалом $v(x, y)$, т.е. всюду в D верны равенства

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Но это и означает, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются сопряженными гармоническими функциями. Остается добавить, что по своим частным производным функцию можно восстановить только с точностью до постоянного слагаемого [VII].

Функцию $v(x, y)$ по ее дифференциалу (4.40) можно восстановить с помощью *криволинейного интеграла*:

$$v(x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C, \quad (4.41)$$

где точки $(x_0; y_0)$ и $(x; y)$ принадлежат области D . Так как под знаком криволинейного интеграла стоит полный дифференциал, рассматриваемый в односвязной области D , этот интеграл не зависит от пути и представляет собой функцию верхнего предела, т.е. переменных x и y [VII].

Если область D является многосвязной, то интеграл (4.41) может зависеть от пути интегрирования. В этом случае подынтегральное выражение не является дифференциалом функции во всей области D и для функции $u(x, y)$ сопряженной гармонической функции нет.

Для определения функции $v(x, y)$ можно непосредственно использовать условия Коши — Римана, и иногда это более удобно. Действительно, из уравнения $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ находим, что

$$v(x, y) = -\int \frac{\partial u}{\partial y} dx + \varphi(y), \quad (4.42)$$

где неопределенный интеграл в правой части от функции $\frac{\partial u}{\partial y}$ двух переменных x и y взят по переменному x . Поскольку в этом случае переменное y рассматривается как параметр, то постоянная интегрирования может зависеть от этого переменного и входит в правую часть в виде некоторой функции $\varphi(y)$. Таким образом, с помощью второго условия Коши — Римана неизвестную функцию $v(x, y)$ можно определить с точностью до функции одного переменного y . Эту функцию можно найти исходя из первого условия Коши — Римана.

Подставим представление (4.42) неизвестной функции $v(x, y)$ в уравнение $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$. В результате получим

$$-\frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial u}{\partial y} dx + \varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial x},$$

откуда

$$\varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial u}{\partial y} dx.$$

Правая часть найденного уравнения не зависит от переменного x , поскольку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int \frac{\partial u}{\partial y} dx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Поэтому это уравнение позволяет найти функцию $\varphi(y)$ с точностью до постоянного слагаемого.

Замечание 4.3. Если аналитическая функция восстанавливается по своей действительной или мнимой части через определение сопряженной гармонической функции, то ответ будет получен в форме $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$. На практике функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, как правило, задаются некоторыми выражениями, возможно включающими элементарные аналитические функции типа показательной функции или тригонометрических функций. В этом случае и саму функцию $f(z)$ можно представить некоторым выражением, включающим переменное

z. Для этого в записи $u(x, y) + iv(x, y)$ достаточно выполнить формальную замену $x = z$, $y = 0$:

$$f(z) = \left(u(x, y) + iv(x, y) \right) \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}}. \quad (4.43)$$

Пример 4.8. Проверим, является ли функция $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ действительной частью некоторой аналитической функции, и если является, то найдем эту аналитическую функцию.

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

Таким образом, функция $u(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

т.е. она гармоническая на всей плоскости xOy и поэтому является действительной частью некоторой аналитической в \mathbb{C} функции. Найдем гармоническую функцию $v(x, y)$, сопряженную с функцией $u(x, y)$.

Из условий (4.6) Коши — Римана следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2.$$

Значит, можно записать

$$v(x, y) = \int (2x + 2) dy + \psi(x) = 2xy + 2y + \psi(x).$$

Дифференцируя это равенство по x и учитывая, что $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \psi'(x) = 2y,$$

что приводит к условию $\psi'(x) = 0$, откуда $\psi(x) \equiv C = \text{const.}$ Таким образом, $v(x, y) = 2xy + 2y + C$. Используя (4.43), окончательно находим

$$\begin{aligned} f(z) &= (u(x, y) + i v(x, y)) \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}} = \\ &= (x^2 - y^2 + 2x + i(2xy + 2y + C)) \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}} = z^2 + 2z + Ci. \end{aligned}$$

Пример 4.9. Проверим, является ли функция $v(x, y) = -2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y + y$ мнимой частью аналитической функции, и если да, то найдем аналитическую функцию $f(z)$, для которой $f(0) = 2$.

Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -4 \cos 2x \operatorname{sh} 2y, & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 8 \sin 2x \operatorname{sh} 2y, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -4 \sin 2x \operatorname{ch} 2y + 1, & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= -8 \sin 2x \operatorname{sh} 2y. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $v(x, y)$ является гармонической функцией в \mathbb{R}^2 и поэтому является мнимой частью некоторой аналитической в \mathbb{C} функции.

Используя условия (4.6) Коши — Римана, запишем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -4 \sin 2x \operatorname{ch} 2y + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 4 \cos 2x \operatorname{sh} 2y$$

гармонической функции $u(x, y)$, сопряженной с заданной функцией $v(x, y)$. Тогда

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \varphi(y) = \\ &= - \int (4 \sin 2x \operatorname{ch} 2y - 1) dx + \varphi(y) = 2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y + x + \varphi(y). \end{aligned}$$

Дифференцирование этого равенства по y с учетом выражения для $\partial u/\partial y$ дает $\varphi'(y) = 0$, т.е. $\varphi(y) = C = \text{const}$. Итак, $u(x, y) = 2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y + x + C$ и, согласно (4.43),

$$f(z) = \left(2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y + x + C + i(y - 2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y) \right) \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}} = \\ = 2 \cos 2z + z + C.$$

Для нахождения постоянного слагаемого C используем условие $f(0) = 2$, которое приводит к равенству $2 = 2 + C$, откуда $C = 0$. В итоге искомой аналитической в \mathbb{C} функцией будет $f(z) = 2 \cos 2z + z$.

Замечание 4.4. К восстановлению аналитической функции можно подойти иначе. По заданной действительной $u(x, y)$ (или мнимой $v(x, y)$) части, которая является гармонической в односвязной области D функцией, находят производную искомой функции. Для этого сначала используют одну из формул (4.11) или (4.13) и находят производную в форме „действительная часть плюс мнимая часть“. Затем выполняют преобразование так, как отмечено в замечании 4.3. Тогда в случае применения формулы (4.11) имеем

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}}, \quad (4.44)$$

а в случае применения формулы (4.13) имеем

$$f'(z) = \left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right) \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}}.$$

Вводя, как и в действительном случае, понятие первообразной и неопределенного интеграла (при этом остаются в силе все обозначения и правила вычисления неопределенных интегралов), заключаем, что функция $f(z)$ будет являться первообразной,

найденной в односвязной области D функции $f'(z)$:

$$f(z) = \int f'(z) dz. \quad (4.45)$$

Можно показать, что множество всех первообразных имеет вид $F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных, а постоянное слагаемое C может принимать любые комплексные значения. В данном случае это позволяет найти функцию $f(z)$ с точностью до произвольного комплексного слагаемого. Но по условию задачи действительная часть (или мнимая часть) функции известна. Значит, из уравнения $\operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Re} C = u(x, y)$ (или $\operatorname{Im} f(z) + \operatorname{Im} C = v(x, y)$) можно найти действительную (мнимую) часть слагаемого C . В результате получаем искомую функцию с точностью до мнимого (действительного) слагаемого.

Пример 4.10. Восстановим аналитическую функцию $f(z)$ по ее действительной части $u(x, y) = e^x \cos y + x^2 - y^2 + 3x$ и значению $f(0) = 0$. Функция $u(x, y)$ гармоническая в \mathbb{R}^2 , так как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \cos y + 2 - e^x \cos y - 2 = 0, \quad (x; y) \in \mathbb{R}^2.$$

Поэтому $u(x, y)$ является действительной частью некоторой аналитической в \mathbb{C} функции $f(z)$. Используя (4.44), находим

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}} = \\ &= (e^x \cos y + 2x + 3) \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}} = e^z + 2z + 3 \end{aligned}$$

и, согласно (4.45), имеем

$$f(z) = \int (e^z + 2z + 3) dz = e^z + z^2 + 3z + C.$$

Из условия $f(0) = 0$ получаем $0 = 1 + C$, или $C = -1$. Итак, $f(z) = e^z + z^2 + 3z - 1$.

4.10. Понятие об аналитическом продолжении

В теории функций комплексного переменного находит широкое применение понятие *продолжения отображения*.

Определение 4.5. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) функция $f(z)$ определена на множестве $E \subset \mathbb{C}$;
- 2) функция $\Phi(z)$ аналитическая в области $D \supset E$;
- 3) $\Phi(z) = f(z)$ при $z \in E$.

Тогда функцию $\Phi(z)$ называют *аналитическим продолжением функции $f(z)$* (с множества E в область D).

Важнейшим свойством аналитического продолжения функции является его единственность при простом дополнительном условии.

Теорема 4.5. Если множество E имеет предельную точку a , принадлежащую области D , то аналитическое продолжение $\Phi(z)$ функции $f(z)$ с множества E в область D единственно.

◀ Допустим, что функция $f(z)$, определенная на E , имеет два аналитических продолжения $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ в область D . Так как в силу определения 4.5 $\Phi_1(z) = \Phi_2(z)$, $z \in E$, и по условию теоремы точка $a \in D$ является предельной для множества E , то, согласно теореме 4.4 о единственности аналитической функции, $\Phi_1(z) \equiv \Phi_2(z)$ в области D . ▶

В частности, если E является кривой, лежащей в области D , или подобластью области D , то существует не более одного аналитического продолжения функции с E в область D .

Пример 4.11. Найдем аналитическое продолжение функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Этот степенной ряд сходится в круге $|z| < 1$, и сумма этого ряда равна $1/(1-z)$ (см. примеры 2.5 и 2.6). Итак, $f(z) = 1/(1-z)$ при $|z| < 1$. Функция $\Phi(z) = 1/(1-z)$ является

в силу определения 4.3 аналитической на всей комплексной плоскости за исключением точки $z = 1$ и $\Phi(z) = f(z)$ при $|z| < 1$. Следовательно, согласно определению 4.5, $\Phi(z) = 1/(1 - z)$ — аналитическое продолжение функции $f(z)$ из круга $|z| < 1$ в область $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, по теореме 4.5 — единственное. #

Примером аналитического продолжения может служить переход от действительных функций e^x , $\cos x$, $\sin x$ действительного переменного x (т.е. функций, определенных на множестве $E = \mathbb{R}$) к функциям e^z , $\cos z$, $\sin z$ комплексного переменного z , аналитическим в области $D = \mathbb{C}$ и совпадающим на E с соответствующими функциями действительного переменного. Такой переход был осуществлен заменой действительного переменного x в степенных разложениях этих функций комплексным переменным z . Ранее отмечено (см. 3.3), что полученные при этом ряды сходятся абсолютно на всей комплексной плоскости \mathbb{C} . Теорема 4.5 единственности аналитического продолжения фактически не только позволяет строить аналитические продолжения, но и переносит в комплексную плоскость известные соотношения для соответствующих функций действительного переменного (см. пример 4.7).

Вопросы и задачи

4.1. Проверьте на аналитичность функции $\sin z$, $\ln z$ и докажите, что $(\sin z)' = \cos z$, $(\ln z)' = 1/z$.

4.2. Найдите постоянные a , b и c , при которых функция $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$ будет аналитической.

4.3. Найдите области, в которых функция $f(z) = x^2 - y^2 + 2i|xy|$ является аналитической.

4.4. Проверьте, являются ли функции $|z|^2 + 2z$ и $(|z| + z)/2$ аналитическими.

4.5. Докажите, что функция $f(z) = \bar{z}$ нигде не является дифференцируемой.

4.6. Докажите, что если для аналитической в области D функции $f(z)$ выполнено в этой области условие $|f(z)| = \text{const}$, то $f(z)$ в D является постоянной.

4.7. Определите, существуют ли аналитические функции $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, для которых: а) $u = x^2 - y^2$; б) $v = x^2 - y^2$; в) $u = y/(x^2 + y^2)$; г) $v = x/y^2$. Если такие функции существуют, то найдите их.

4.8. Найдите аналитическую функцию $f(z)$, если известна ее мнимая часть $v(x, y) = e^x \sin y + 2xy + 5y$ и задано условие $f(0) = 10$.

4.9. Установите области сжатия и растяжения плоскости (z) при отображениях: а) $w = z^2$; б) $w = 1/z$; в) $w = e^z$.

4.10. Пусть u и v — сопряженные гармонические функции в области D , одновременно не обращающиеся в этой области в нуль. Будут ли функции $u/(u^2 + v^2)$ и $-v/(u^2 + v^2)$ гармоническими в D ?

4.11. Используя (4.33), найдите площадь области, являющейся образом прямоугольника $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 4\}$ при отображении $w = e^z$.

4.12. Найдите область G , на которую функция e^z отображает прямоугольник $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 8\}$, и объясните, почему применение (4.33) для вычисления площади этой области дает неверный результат.

4.13. Используя (4.34), найдите длину участка спирали, который является образом отрезка $y = x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) при отображении $w = e^z$.

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

5.1. Понятие и вычисление интеграла от функции комплексного переменного

Пусть на плоскости (z) дана *кусочно гладкая кривая* AB (A и B — начальная и конечная точки этой кривой соответственно). Предположим, что в каждой точке этой кривой определена функция $f(z)$. Рассмотрим разбиение кривой AB на дуги $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ точками z_0, z_1, \dots, z_n , взятыми в порядке следования по кривой от A к B , причем точка A совпадает с z_0 , а точка B — с z_n (рис. 5.1).

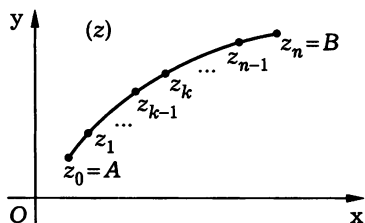


Рис. 5.1

Обозначим через l_k , $k = \overline{1, n}$, длину дуги γ_k (z_{k-1} и z_k — начальная и конечная точки этой дуги соответственно) и пусть l — максимальная из длин l_k , $k = \overline{1, n}$.

На каждой дуге γ_k выберем точку \tilde{z}_k и составим *интегральную сумму*

$$\sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k)\Delta z_k, \quad (5.1)$$

где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Если при $l \rightarrow 0$ существует конечный предел интегральной суммы (5.1) (не зависящий ни от способа

разбиения кривой AB на дуги γ_k , ни от выбора промежуточных точек $\tilde{z}_k \in \gamma_k$), то этот предел называют **интегралом от функции $f(z)$ комплексного переменного z по кривой** (или вдоль кривой) AB и обозначают $\int_{AB} f(z) dz$. Итак,

$$\int_{AB} f(z) dz = \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k) \Delta z_k. \quad (5.2)$$

Кривую AB в таком случае будем называть **путем интегрирования**.

Сформулируем легко проверяемые достаточные условия существования предела в (5.2), не останавливаясь на их обосновании.

Теорема 5.1. Интеграл от функции $f(z)$ по кривой AB существует, если кривая AB кусочно гладкая, а функция $f(z)$ непрерывна на этой кривой.

Далее будем считать, что все рассматриваемые кривые являются кусочно гладкими.

В (5.2) положим $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и введем обозначения $z_k = x_k + iy_k$, $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, $y_k - y_{k-1} = \Delta y_k$. Тогда получим

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i \Delta y_k.$$

Если $\tilde{z}_k = \tilde{x}_k + i\tilde{y}_k$, то $f(\tilde{z}_k) = u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) + iv(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$. В итоге запишем

$$\begin{aligned} f(\tilde{z}_k) \Delta z_k &= u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \Delta x_k - v(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \Delta y_k + \\ &+ i(u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \Delta y_k + v(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \Delta x_k). \end{aligned}$$

Условие $l \rightarrow 0$ можно заменить условием $\max_{k=1, n} |\Delta z_k| \rightarrow 0$, которое будет выполнено тогда и только тогда, когда одновременно $\max_{k=1, n} |\Delta x_k| \rightarrow 0$ и $\max_{k=1, n} |\Delta y_k| \rightarrow 0$. Поскольку кривая AB

кусочно гладкая, а функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны на ней в силу непрерывности $f(z)$, существуют пределы

$$\lim_{l \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \Delta x_k - v(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \Delta y_k)$$

и

$$\lim_{l \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \Delta y_k + v(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \Delta x_k),$$

представляющие собой криволинейные интегралы вдоль кривой AB . Учитывая (5.2) и свойства предела функции комплексного переменного, заключаем, что

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{AB} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{AB} v(x, y) dx + u(x, y) dy. \quad (5.3)$$

Таким образом, существование интеграла от функции комплексного переменного по кривой AB равносильно существованию двух криволинейных интегралов от действительных функций двух действительных переменных. Из (5.3) следует, что для перехода к этим криволинейным интегралам нужно с помощью равенств $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ и $dz = dx + i dy$ преобразовать подынтегральное выражение, выделив действительную и мнимую части.

Напомним, что если кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

то для вычисления криволинейного интеграла надо подставить в подынтегральную функцию вместо x и y их выражения через t , а вместо dx и dy — дифференциалы функций $x(t)$ и $y(t)$,

выраженные через t и dt [VII]. В итоге криволинейные интегралы в (5.3) переходят в обычные определенные интегралы по отрезку $[\alpha, \beta]$:

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} \left(u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t) \right) dt + \\ + i \int_{\alpha}^{\beta} \left(v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t) \right) dt. \quad (5.4)$$

Равенство (5.4) можно записать следующим образом:

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} \left(u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t)) \right) (x'(t) + i y'(t)) dt = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt.$$

Поэтому иногда при вычислении интеграла (5.3) можно поступить более рационально, а именно составить уравнение кривой AB в комплексной форме $z = z(t) = x(t) + i y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, вычислить $dz = z'(t) dt$ и воспользоваться равенством

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt. \quad (5.5)$$

Использование формулы (5.5) вместо (5.4) позволяет обойтись без явного выделения действительной и мнимой частей подынтегрального выражения.

Отметим, что, выбирая способ вычисления интеграла от функции комплексного переменного, следует учитывать особенности как функции $f(z)$, так и кривой AB .

Если кривая AB является замкнутой, т.е. представляет собой некоторый замкнутый контур L , то используют обозначения

$$\oint_L f(z) dz, \quad \oint f(z) dz$$

в зависимости от направления обхода контура L при интегрировании, а сам **интеграл** в этом случае часто называют **контурным**.

Пример 5.1. Пусть $f(z) \equiv 1$ и начальная точка кривой AB изображает число z_A , а конечная — число z_B . Тогда интегральная сумма (5.1) будет равна

$$\sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \dots + (z_n - z_{n-1}) = z_n - z_0,$$

где $z_0 = z_A$, $z_n = z_B$. Отсюда $\int_{AB} dz = z_B - z_A$. Таким образом, значение интеграла от функции $f(z) \equiv 1$ по кривой AB зависит лишь от положения начальной и конечной точек этой кривой и не зависит от пути интегрирования. #

Из (5.3) и свойств криволинейного интеграла следуют некоторые свойства интегралов от функции комплексного переменного, используемые при вычислении таких интегралов.

1. Линейность. Если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ непрерывны на кусочно гладкой кривой AB , то для любых (вообще говоря, комплексных) постоянных a и b

$$\int_{AB} (af_1(z) + bf_2(z)) dz = a \int_{AB} f_1(z) dz + b \int_{AB} f_2(z) dz. \quad (5.6)$$

2. Аддитивность. Пусть даны две кусочно гладкие кривые AB и BC . Для любой непрерывной на кривой AC функции $f(z)$ справедливо соотношение

$$\int_{AC} f(z) dz = \int_{AB} f(z) dz + \int_{BC} f(z) dz. \quad (5.7)$$

3. Ориентированность. Для любой непрерывной на кривой AB функции $f(z)$ верно равенство

$$\int_{AB} f(z) dz = - \int_{BA} f(z) dz, \quad (5.8)$$

т.е. при изменении ориентации кривой интеграл по ней меняет знак.

4. Оценка интеграла. Для любой функции $f(z)$, непрерывной на кривой AB , справедливо неравенство

$$\left| \int_{AB} f(z) dz \right| \leq \int_{AB} |f(z)| dl, \quad (5.9)$$

где правая часть неравенства представляет собой *криволинейный интеграл первого рода*. Если, кроме того, функция $f(z)$ на кривой AB удовлетворяет условию $|f(z)| \leq M$, то верно неравенство

$$\left| \int_{AB} f(z) dz \right| \leq ML_{AB}, \quad (5.10)$$

где L_{AB} — длина кривой AB .

Пример 5.2. Вычислим

$$\int_{AB} \operatorname{Re} z dz$$

при условии, что путь интегрирования AB в первом случае задан уравнением $z = (2 + i)t$, $t \in [0, 1]$, а во втором случае представляет собой ломаную, составленную из отрезка $[0, 2]$ действительной оси и отрезка, соединяющего точки $z_1 = 2$ и $z_2 = 2 + i$.

В первом случае путь интегрирования — прямая, изображенная на рис. 5.2 штриховой линией, так как комплексное уравнение $z = (2 + i)t$ эквивалентно параметрическим уравнениям прямой $x = 2t$, $y = t$. Учитывая, что

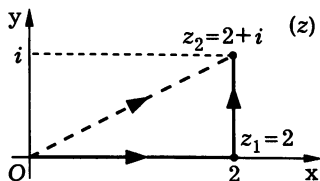


Рис. 5.2

$$\operatorname{Re} z = x = 2t \quad \text{и} \quad dz = (2 + i) dt, \quad t \in [0, 1],$$

получаем

$$\int_{AB} \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 2t(2 + i) dt = (2 + i)t^2 \Big|_0^1 = 2 + i.$$

Во втором случае путь интегрирования состоит из двух отрезков (на рис. 5.2 он изображен сплошной линией). Для отрезка $[0, 2]$ действительной оси имеем $y = 0$, $dy = 0$, $dz = dx$ и $\operatorname{Re} z = x \in [0, 2]$, а для отрезка, соединяющего точки $z_1 = 2$ и $z_2 = 2 + i$, получаем $\operatorname{Re} z = x = 2$, $dx = 0$, $dz = i dy$ и $y \in [0, 1]$. Учитывая (5.3) и аддитивность интеграла от функции комплексного переменного, находим

$$\int_{AB} \operatorname{Re} z dz = \int_0^2 x dx + \int_0^1 2i dy = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + 2iy \Big|_0^1 = 2 + 2i.$$

Этот пример показывает, что интеграл от непрерывной функции может зависеть от пути интегрирования. Обратим внимание на то, что функция $f(z) = \operatorname{Re} z$ не является аналитической (см. пример 4.5).

Пример 5.3. Вычислим интеграл от функции $f(z) = z\bar{z}$ по окружности $|z| = 1$. Так как $z\bar{z} = |z|^2$, то для точек окружности $|z| = 1$ имеем $z\bar{z} = 1$. Согласно примеру 5.1, интеграл от функции $f(z) \equiv 1$ зависит лишь от начальной и конечной точек

пути интегрирования. Для замкнутого контура начальная и конечная точки совпадают. Следовательно,

$$\oint_L z \bar{z} dz = \oint_L dz = 0.$$

Пример 5.4. Вычислим интеграл

$$J_n = \oint_L (z - a)^n dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

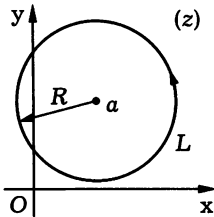


Рис. 5.3

вдоль окружности $L: |z - a| = R$, которая обходится против часовой стрелки (рис. 5.3). Эту окружность можно задать комплексным уравнением $z - a = R(\cos t + i \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$. На окружности имеем

$$(z - a)^n = R^n(\cos nt + i \sin nt), \quad dz = R(-\sin t + i \cos t) dt,$$

откуда

$$\begin{aligned} (z - a)^n dz &= R^{n+1}(\cos nt + i \sin nt)(-\sin t + i \cos t) dt = \\ &= iR^{n+1}(\cos(n+1)t + i \sin(n+1)t) dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_n &= \oint_L (z - a)^n dz = \\ &= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} (\cos(n+1)t + i \sin(n+1)t) dt = \begin{cases} 0, & n \neq -1; \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Обратим внимание, что полученный результат не зависит от радиуса окружности. В частном случае при $a = 0$ имеем

$$\oint_{|z|=R} z^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1; \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \quad (5.11)$$

5.2. Интегральные теоремы Коши

Перейдем к рассмотрению одного из наиболее важных результатов теории функций комплексного переменного.

Теорема 5.2 (теорема Коши для односвязной области). Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D и на ограничивающем ее кусочно гладком контуре L (т.е. аналитическая в замкнутой области \bar{D}), то

$$\oint_L f(z) dz = 0. \quad (5.12)$$

◀ Доказательство теоремы проведем, дополнительно предположив, что производная $f'(z)$ данной функции непрерывна в односвязной области D и на ограничивающем ее контуре L (это предположение на самом деле излишнее, но позволяет заметно упростить доказательство). Пусть $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$. Тогда в силу (4.10) и (4.12) имеем

$$f'(z) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y},$$

так что из непрерывности функции $f'(z)$ в \bar{D} следует непрерывность функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ и их частных производных в \bar{D} .

Напомним, что криволинейный интеграл вида

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

вдоль кусочно гладкой кривой не зависит от пути интегрирования в односвязной области тогда и только тогда, когда функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в этой области вместе со своими частными производными и удовлетворяют условию [VII]

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (5.13)$$

Если к тому же путь интегрирования замкнутый, то в этом случае интеграл равен нулю.

Согласно (5.3), имеем

$$\oint_L f(z) dz = \oint_L u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \oint_L v(x, y) dx + u(x, y) dy. \quad (5.14)$$

Для функции $f(z)$ как аналитической в \bar{D} выполнены условия Коши — Римана:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

Первое из этих условий совпадает с (5.13) при $P(x, y) = v(x, y)$, $Q(x, y) = u(x, y)$, и его выполнение означает, что равен нулю второй интеграл в правой части (5.14). Второе условие совпадает с (5.13) при $P(x, y) = u(x, y)$, $Q(x, y) = -v(x, y)$, и его выполнение обеспечивает равенство нулю первого интеграла в правой части (5.14), что в итоге доказывает справедливость (5.12). ►

Замечание 5.1. Теорему 5.2 часто формулируют так: если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D , то интеграл от $f(z)$ по любому кусочно гладкому контуру L , целиком лежащему в этой области, равен нулю.

Замечание 5.2. В условии теоремы 5.2 достаточно потребовать аналитичности функции $f(z)$ лишь в самой области D , т.е. верен такой результат: если $f(z)$ аналитична в односвязной области D , ограниченной кусочно гладким контуром L , и непрерывна в \bar{D} (иногда говорят: непрерывна в D вплоть до границы), то интеграл $f(z)$ вдоль L равен нулю*.

Теорема 5.3 (теорема Коши для многосвязной области). Пусть многосвязная область D ограничена внешним

* Доказательство см., например, в книге: Шабат Б.В.

кусочно гладким контуром L_0 и внутренними кусочно гладкими контурами L_1, L_2, \dots, L_n . Если функция $f(z)$ аналитична в области D и на ограничивающем ее составном контуре L , то

$$\oint_{L_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{L_k} f(z) dz \quad \text{или} \quad \oint_L f(z) dz = 0, \quad (5.15)$$

где интеграл по составному контуру L есть сумма интегралов по контурам L_0, L_1, \dots, L_n , ограничивающим область D и проходимым в положительном направлении.

◀ Проведем разрезы области D по дугам $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, соединяющим последовательно контуры $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$ (рис. 5.4). При этом многосвязная область D станет односвязной областью D^* , ограниченной замкнутым контуром L^* , который состоит из дуг контуров $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$ и дуг $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Отметим, что при обходе контура L^* против часовой стрелки обход дуг контуров L_1, L_2, \dots, L_n происходит по часовой стрелке, а каждая из дуг $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ проходится дважды в противоположных направлениях.

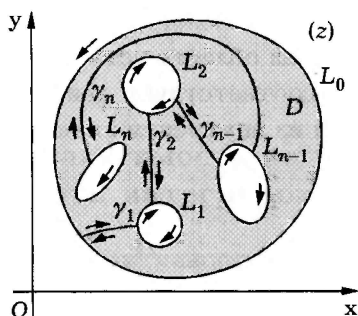


Рис. 5.4

Для замыкания \bar{D}^* односвязной области D^* , ограниченной контуром L^* , выполнены условия теоремы 5.2, и поэтому

$$\oint_{L^*} f(z) dz = 0.$$

Отсюда, учитывая свойства аддитивности и ориентированности интеграла от функции комплексного переменного (см. 5.2) и принимая во внимание, что интегралы по дугам $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ взаимно уничтожаются, получаем

$$0 = \oint_{L_0} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \oint_{L_k} f(z) dz = \oint_{L_0} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \oint_{L_k} f(z) dz,$$

что равносильно (5.15). ►

В частности, если $f(z)$ является аналитической функцией в двусвязной области D и на ограничивающих ее внешнем L_0 и внутреннем L_1 контурах (рис. 5.5), то

$$\oint_{L_0} f(z) dz = \oint_{L_1} f(z) dz. \quad (5.16)$$

Отметим еще раз, что утверждение теоремы 5.3 записывают в той же форме, что и утверждение теоремы 5.2, т.е. в виде (5.12). В этом случае имеют в виду интеграл по составному контуру L , обходимому в положительном направлении. При таком обходе многосвязная область остается все время слева, что на внешнем контуре соответствует движению против часовой стрелки, а на каждом из внутренних контуров — движению по часовой стрелке.

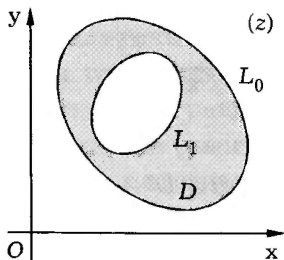


Рис. 5.5

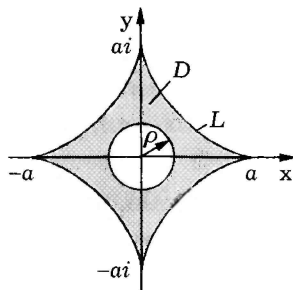


Рис. 5.6

Пример 5.5. Вычислим интеграл от функции $f(z)$ вдоль *астроиды*, заданной параметрическими уравнениями $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$ (рис. 5.6), если этот контур обходится против часовой стрелки, а функция имеет вид: а) $f(z) = e^z$; б) $f(z) = 1/z$.

а. Функция e^z является *целой* (см. пример 4.2). Поэтому в силу теоремы Коши для односвязной области имеем

$$\oint_L e^z dz = 0. \quad (5.17)$$

б. Функция $1/z$ является аналитической на всей комплексной плоскости (z) за исключением точки $z = 0$, так как в этой точке она недифференцируема. Окружим точку $z = 0$ окружностью $|z| = \rho$, целиком лежащей внутри астроиды (см. рис. 5.6). Тогда функция $1/z$ будет аналитической в двусвязной области D , ограниченной астроидой и этой окружностью (на рис. 5.6 область затенена). Используя (5.16) и (5.11), получаем

$$\oint_L \frac{dz}{z} = \oint_{|z|=\rho} \frac{dz}{z} = 2\pi i. \quad (5.18)$$

5.3. Независимость интеграла от пути интегрирования

Используя свойства аддитивности и ориентированности *интеграла от функции комплексного переменного* (см. 5.1), можно прийти к выводу, что если интеграл от функции $f(z)$ по всякому замкнутому контуру, расположенному в некоторой области D , равен нулю, то интеграл от $f(z)$ по любой кривой, лежащей в D , зависит лишь от положения *начальной и конечной точек* этой кривой и не зависит от *пути интегрирования*. Действительно, рассмотрим любые две кусочно гладкие кривые γ_1 и γ_2 , соединяющие точки A и B в области D (рис. 5.7).

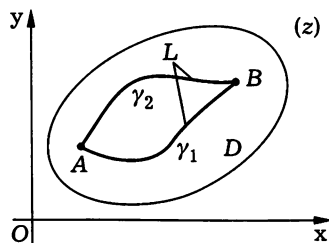


Рис. 5.7

Эти кривые образуют замкнутый контур L , и поэтому в силу аддитивности интеграла и указанного выше условия имеем

$$\oint_L f(z) dz = \int_{A\gamma_1 B} f(z) dz + \int_{B\gamma_2 A} f(z) dz = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание ориентированность интеграла от функции комплексного переменного, получаем

$$\int_{A\gamma_1 B} f(z) dz = \int_{A\gamma_2 B} f(z) dz.$$

С учетом сказанного и теоремы Коши для односвязной области приходим к следующему утверждению.

Теорема 5.4. Если $f(z)$ — аналитическая функция в некоторой односвязной области D , то для любых точек $A, B \in D$ значение интеграла от $f(z)$ вдоль кусочно гладкой кривой γ , соединяющей точки A и B , не зависит от выбора этой кривой, лежащей в D , а зависит только от положения ее начальной A и конечной B точек.

Для такого интеграла часто используют запись

$$\int_A^B f(z) dz \quad \text{или} \quad \int_{z_A}^{z_B} f(z) dz,$$

где z_A и z_B — комплексные числа, соответствующие точкам A и B комплексной плоскости.

Теорема 5.5. Пусть $f(z)$ — функция, непрерывная в односвязной области D , и интеграл от $f(z)$ по любой кусочно гладкой кривой, лежащей в D , зависит лишь от положения начальной и конечной точек. Тогда для любой точки $z_0 \in D$ функция

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad z \in D, \quad (5.19)$$

является аналитической в этой области и

$$F'(z) = \frac{dF(z)}{dz} = f(z), \quad z \in D. \quad (5.20)$$

◀ Для доказательства теоремы необходимо установить справедливость (5.20). Для этого в δ -окрестности $U_\delta(z) \subset D$ произвольной точки z возьмем некоторую точку $z_1 \neq z$ и покажем, что разность

$$\frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} - f(z)$$

есть бесконечно малая величина при $z_1 \rightarrow z$. Зафиксируем некоторую кривую γ , лежащую в D и соединяющую точку z_0 с точкой z . Соединим точку z_1 с z прямолинейным отрезком длиной $s_1 = |z_1 - z|$ (рис. 5.8). В силу свойства аддитивности интеграла от функции комплексного переменного (см. 5.1) можно записать

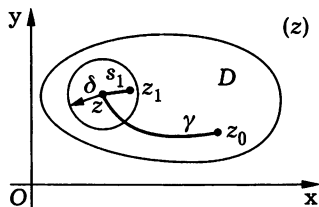


Рис. 5.8

$$F(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta) d\zeta = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + \int_z^{z_1} f(\zeta) d\zeta = F(z) + \int_z^{z_1} f(\zeta) d\zeta.$$

Отсюда с учетом того, что

$$\int_z^{z_1} f(\zeta) d\zeta = f(z)(z_1 - z)$$

(см. пример 5.1), получаем равенство

$$\frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} - f(z) = \frac{1}{z_1 - z} \int_z^{z_1} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta.$$

В силу непрерывности функции $f(z)$ для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое δ , что для любого ζ при условии $|\zeta - z| < \delta$ будет выполнено неравенство $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. Если ζ принадлежит отрезку, соединяющему точки z и z_1 , то $|\zeta - z| < \delta$ и, следовательно, $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. Используя оценку интеграла вида (5.9), получаем

$$\left| \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} - f(z) \right| = \frac{1}{|z_1 - z|} \left| \int_z^{z_1} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \leq \frac{\varepsilon s_1}{|z_1 - z|} = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{z_1 \rightarrow z} \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} = f(z),$$

что, принимая во внимание определение 4.1 производной функции комплексного переменного, доказывает равенство (5.20), а вместе с этим и утверждение теоремы в целом. ►

Отметим, что условиям этой теоремы удовлетворяет любая функция $f(z)$, аналитическая в односвязной области D . Поэтому такая функция имеет в D первообразную, одной из которых будет интеграл (5.19) с переменным верхним пределом.

5.4. Формула Ньютона — Лейбница

Теорема 5.6. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области D и $f'(z) = g'(z)$, $z \in D$, то $f(z) = g(z) + C$, $z \in D$, где C — некоторое комплексное число

◀ В силу условий теоремы функция $h(z) = f(z) - g(z)$ аналитична в D и $h'(z) \equiv 0$ в D . Пусть $h(z) = u(x, y) + i v(x, y)$. Согласно формулам (4.10)–(4.13), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} \equiv \frac{\partial v}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$$

в области D . Выберем произвольную точку $a \in D$, и пусть ее окрестность $U(x)$ целиком включена в D . Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, имеющие нулевые частные производные в односвязной области $U(x)$, постоянны в этой области. Значит, $h(z) \equiv C$ в $U(x)$. Согласно теореме 4.4, аналитическая в D функция $h(z) - C$, тождественно равная нулю в $U(x)$, тождественно равна нулю во всей области D , т.е. $f(z) - g(z) \equiv C$ в D . Это равносильно утверждению теоремы. ▶

Теорема 5.7. Пусть $f(z)$ — аналитическая в некоторой односвязной области D функция, а $\Phi(z)$ — некоторая первообразная этой функции в D , т.е. $\Phi'(z) = f(z)$, $z \in D$. Тогда

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = \Phi(z_2) - \Phi(z_1), \quad z_1, z_2 \in D. \quad (5.21)$$

◀ Аналитическая в области D функция дифференцируема в ней (см. 5.6), а значит, и непрерывна в D . Согласно теореме 5.4, интеграл от аналитической в односвязной области функции зависит лишь от положения начальной и конечной точек пути интегрирования. Таким образом, для функции $f(z)$ выполнены

условия теоремы 5.5, и поэтому функция

$$F(z) = \int_{z_1}^z f(\zeta) d\zeta$$

является одной из первообразных функции $f(z)$. Согласно теореме 5.6, любая другая первообразная $\Phi(z)$ функции $f(z)$ связана с функцией $F(z)$ соотношением $F(z) = \Phi(z) + C$, т.е.

$$\int_{z_1}^z f(\zeta) d\zeta = \Phi(z) + C, \quad z \in D.$$

Полагая в последнем равенстве $z = z_1$, получаем $0 = \Phi(z_1) + C$ и $C = -\Phi(z_1)$. Итак,

$$\int_{z_1}^z f(\zeta) d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_1),$$

откуда при $z = z_2$ следует (5.21). ►

Аналогично случаю действительной функции используют запись

$$\Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \Phi(z) \Big|_{z_1}^{z_2},$$

так что (5.21) приобретает вид

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \Phi(z) \Big|_{z_1}^{z_2}, \quad z_1, z_2 \in D. \quad (5.22)$$

Формулу (5.22), как и в случае функций действительного переменного, называют **формулой Ньютона — Лейбница**. Она упрощает вычисление интеграла от аналитической функции в односвязной области.

Отметим также, что если функции $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими в односвязной области D , а γ — любая кривая

с начальной точкой z_1 и конечной точкой z_2 , то справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_{\gamma} f(z)g'(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dg(z) = \\ = f(z)g(z) \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} g(z)f'(z) dz. \quad (5.23)$$

Пример 5.6. а. Вычислим интеграл от функции z^2 по ломаной OAB с вершинами в точках $O(0; 0)$, $A(1; 1)$ и $B(2; 1)$ (рис. 5.9). Эта функция является аналитической на всей комплексной плоскости (z). Поэтому интеграл от этой функции не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от положения его начальной точки $z_O = 0$ и конечной точки $z_B = 2 + i$. Функция имеет первообразную $\Phi(z) = z^3/3$, так что, используя (5.22), находим

$$\int_{OAB} z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_0^{2+i} = \frac{(2+i)^3}{3} = \frac{8 + 12i - 6 - i}{3} = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i.$$

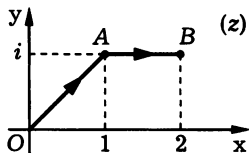


Рис. 5.9

б. Рассмотрим интеграл от функции $(z-i)e^{-z}$ по некоторой кривой, соединяющей точки $z_1 = 0$ и $z_2 = i$. Эта функция аналитична на всей комплексной плоскости (z). Используя (5.23) и формулу Эйлера, получаем

$$\int_0^i (z-i)e^{-z} dz = - \int_0^i (z-i) d(e^{-z}) = \\ = -(z-i)e^{-z} \Big|_0^i + \int_0^i e^{-z} dz = -(z-i)e^{-z} \Big|_0^i - e^{-z} \Big|_0^i = \\ = -i - e^{-i} + 1 = 1 - \cos 1 - i(1 - \sin 1).$$

5.5. Интегральная формула Коши

Теорема 5.8. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области D и на ограничивающем ее контуре L . Тогда для любой точки $z_0 \in D$ справедлива формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (5.24)$$

◀ Функция $f(z)/(z - z_0)$ является аналитической всюду в области D , за исключением точки $z_0 \in D$, в которой свойство аналитичности нарушено. Окружим точку z_0 окружностью L_1 радиуса r с центром в этой точке, причем так, чтобы окружность лежала в D (рис. 5.10). Тогда $f(z)/(z - z_0)$ будет аналитической функцией в двусвязной области, ограниченной внешним контуром L и внутренним L_1 . Согласно теореме Коши для многосвязной области, которая в частном случае двусвязной области приводит к равенству (5.16), имеем

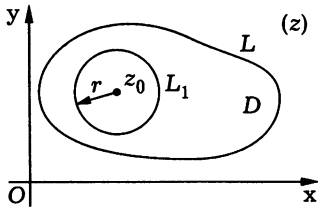


Рис. 5.10

уса r с центром в этой точке, причем так, чтобы окружность лежала в D (рис. 5.10). Тогда $f(z)/(z - z_0)$ будет аналитической функцией в двусвязной области, ограниченной внешним контуром L и внутренним L_1 . Согласно теореме Коши для многосвязной области, кото-

рая в частном случае двусвязной области приводит к равенству (5.16), имеем

$$\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{L_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (5.25)$$

Рассмотрим разность

$$f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (5.26)$$

С одной стороны, в силу равенства (5.25) эта разность не зависит от радиуса r окружности L_1 . С другой стороны, эта разность является бесконечно малой при $r \rightarrow 0$. Действительно,

согласно примеру 5.4, верно равенство

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz. \quad (5.27)$$

Так как функция $f(z)$ аналитична, а значит, и непрерывна в точке $z_0 \in D$ (см. 4.6), для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $|z - z_0| < \delta$ будет верным неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Пусть радиус r контура L_1 настолько мал, что $r < \delta$. Тогда всюду на контуре L_1 выполнено неравенство

$$\left| \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} \right| = \frac{|f(z_0) - f(z)|}{r} < \frac{\varepsilon}{r}.$$

Используя равенство (5.27) и оценку интеграла от функции комплексного переменного (см. 5.1), получаем

$$\begin{aligned} \left| f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| &= \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} dz \right| < \frac{1}{2\pi|i|} \frac{\varepsilon}{r} 2\pi r = \varepsilon. \end{aligned}$$

Это соотношение означает, что разность (5.26) является бесконечно малой при $r \rightarrow 0$. Но так как она в то же время постоянна, то просто равна нулю. С учетом (5.25) заключаем, что справедливо (5.24). ►

Правую часть формулы (5.24) называют *интегралом Коши*, а саму формулу (5.24) — *интегральной формулой Коши*. Для вычисления интеграла Коши нужно знать только значения аналитической функции на контуре L , ограничивающем односвязную область D , которой принадлежит точка z_0 . Следовательно, интегральная формула Коши позволяет для аналитической на замыкании \bar{D} функции $f(z)$ находить ее значение в любой точке $z_0 \in D$, если известны значения этой функции на контуре L .

Если точка z_0 лежит вне односвязной области D , то интеграл Коши равен нулю, так как в этом случае подынтегральная функция будет аналитической в D (см. теорему 5.2). В итоге для односвязной области D , ограниченной контуром L , можно записать

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin D. \end{cases} \quad (5.28)$$

Интегральную формулу Коши можно использовать для вычисления *контурных интегралов*. Пусть требуется вычислить интеграл от функции $\varphi(z)$ по замкнутому контуру L .

1. Если $\varphi(z)$ является функцией, аналитической в односвязной области D и на ограничивающем ее контуре L , то в силу теоремы 5.2

$$\oint_L \varphi(z) dz = 0. \quad (5.29)$$

2. Если в односвязной области D , ограниченной контуром L , есть точка z_0 , в которой нарушена аналитичность функции $\varphi(z)$ (это так называемая **особая точка** данной **функции комплексного переменного**), причем эту функцию можно представить в виде $\varphi(z) = f(z)/(z - z_0)$, где $f(z)$ — аналитическая функция на замыкании \bar{D} , то в силу (5.24) имеем

$$\oint_L \varphi(z) dz = \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0). \quad (5.30)$$

3. Если в ограниченной контуром L области D есть конечное число особых точек z_1, z_2, \dots, z_n ($n > 1$) функции $\varphi(z)$, причем эта функция представима в виде

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)}, \quad (5.31)$$

где $f(z)$ — аналитическая функция на замыкании \bar{D} , то последовательно выполняют следующие этапы:

а) строят не пересекающиеся друг с другом и не выходящие за пределы области D вспомогательные контуры L_k , $k = \overline{1, n}$, каждый из которых окружает только одну особую точку с соответствующим номером (рис. 5.11);

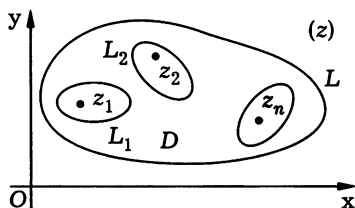


Рис. 5.11

б) согласно теореме Коши для многосвязной области и (5.15), имеет место равенство

$$\oint_L \varphi(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{L_k} \varphi(z) dz, \quad (5.32)$$

т.е. исходный интеграл сводится к сумме интегралов по контурам, каждый из которых окружает лишь одну особую точку;

в) в каждом k -м слагаемом правой части (5.32) подынтегральную функцию представляют в виде

$$\varphi(z) = \frac{g_k(z)}{z - z_k}, \quad g_k(z) = \frac{f(z)}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (z - z_m)},$$

так что функция $g_k(z)$ является аналитической в односвязной области, ограниченной контуром L_k , и на самом этом контуре, а поэтому в силу (5.30)

$$\oint_{L_k} \varphi(z) dz = 2\pi i g_k(z_k) = 2\pi i \frac{f(z_k)}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (z_k - z_m)}; \quad (5.33)$$

г) в итоге, согласно (5.32) и (5.33), находят

$$\oint_L \varphi(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{f(z_k)}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (z_k - z_m)}. \quad (5.34)$$

На практике формулу (5.34) как таковую использовать не очень удобно. Проще повторить весь процесс вычислений, последовательно выполнив пункты а), б) и в).

Пример 5.7. Вычислим контурный интеграл

$$\oint_L \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz,$$

в котором контуром L является окружность: а) $|z| = 1/2$; б) $|z - i| = 1$; в) $|z| = 2$.

а. Подынтегральная функция является аналитической в замкнутом круге $|z| \leq 1/2$ (на рис. 5.12 он затенен). Поэтому на основании теоремы Коши для односвязной области искомый интеграл равен нулю.

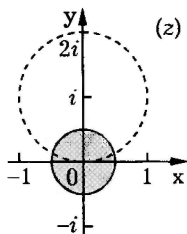


Рис. 5.12

б. В области, ограниченной окружностью $|z - i| = 1$ (на рис. 5.12 она изображена штриховой линией) находится точка $z = i$, в которой нарушена аналитичность подынтегральной функции, поскольку в этой точке

знаменатель данной функции обращается в нуль. Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{e^{iz}}{z^2 + 1} = \frac{1}{z - i} \frac{e^{iz}}{z + i}.$$

В силу аналитичности функции $e^{iz}/(z+i)$ в круге $|z-i| \leq 1$, используя (5.30), получаем

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \oint_{|z-i|=1} \frac{1}{z-i} \frac{e^{iz}}{z+i} dz = 2\pi i \frac{e^{iz}}{z+i} \Big|_{z=i} = \frac{\pi}{e}. \quad (5.35)$$

в. В круге $|z| < 2$ (рис. 5.13) находятся две точки $z_1 = i$ и $z_2 = -i$, в которых знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль, т.е. нарушена ее аналитичность. Окружим эти точки контурами L_1 и L_2 , не пересекающимися между собой и с окружностью $|z| = 2$. Тогда подынтегральная функция будет аналитической в трехсвязной области D , выделенной на рис. 5.13. По теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \oint_{L_1} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz + \oint_{L_2} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz.$$

Вычисление первого контурного интеграла справа совпадает с (5.35), а для второго, используя (5.30), имеем

$$\oint_{L_2} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \oint_{L_2} \frac{1}{z+i} \frac{e^{iz}}{z-i} dz = 2\pi i \frac{e^{iz}}{z-i} \Big|_{z=-i} = -\pi e.$$

В итоге находим

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \frac{\pi}{e} - \pi e = -2\pi \frac{e - e^{-1}}{2} = -2\pi \operatorname{sh} 1.$$

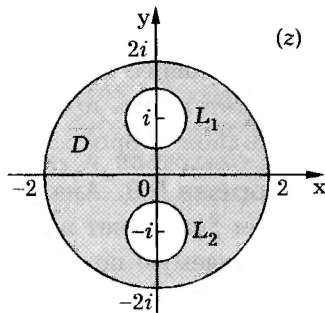


Рис. 5.13

5.6. Высшие производные аналитической функции

Условие, что функция комплексного переменного аналитична в точке z_0 , оказывается настолько сильным, что из него следует существование в точке z_0 всех производных рассматриваемой функции. Таким образом, производная аналитической функции сама является аналитической функцией. Это важнейшее отличие функций комплексного переменного от функций действительного переменного: в действительном случае функция может иметь производную первого порядка, но не иметь производной второго порядка.

Теорема 5.9. Аналитическая в окрестности $U(z_0)$ точки z_0 функция $f(z)$ имеет в этой точке производную любого порядка n , вычисляемую по формуле

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (5.36)$$

где L — любой простой кусочно гладкий контур, охватывающий точку z_0 и целиком лежащий в $U(z_0)$.

◀ В силу интегральной формулы Коши имеем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \text{и} \quad f(z_0 + h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - (z_0 + h)} dz$$

для любого приращения $h \in \mathbb{C}$, не выводящего точку $z_0 + h$ за пределы области D . Отсюда

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_0 - h)} dz. \quad (5.37)$$

Покажем, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_0 - h)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz. \quad (5.38)$$

Это равносильно тому, что контурный интеграл

$$\oint_L \left(\frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)} - \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} \right) dz = \oint_L \frac{f(z)h}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} dz$$

стремится к нулю при $h \rightarrow 0$.

Простой замкнутый контур L является ограниченным замкнутым множеством точек этой плоскости. Поэтому непрерывная на этом множестве функция $|z - z_0|$ комплексного переменного z достигает на L своего наименьшего значения δ , а функция $|f(z)|$ — своего наибольшего значения Δ (см. 3.2).

Поскольку в равенстве (5.38) предел рассматривается при $h \rightarrow 0$, будем рассматривать приращения h настолько малые, что $|h| < \delta$. В этом случае $|z - z_0 - h| \geq ||z - z_0| - |h|| \geq \delta - |h|$. Поэтому

$$\left| \frac{f(z)h}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} \right| \leq \frac{|h|\Delta}{\delta^2(\delta-|h|)}, \quad z \in L.$$

Используя оценку интеграла (5.9), запишем

$$\left| \oint_L \frac{f(z)h}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} dz \right| \leq \frac{|h|l_L\Delta}{\delta^2(\delta-|h|)}, \quad (5.39)$$

где l_L — длина контура L . Так как правая часть (5.39) стремится к нулю при $h \rightarrow 0$, то и его левая часть также стремится к нулю. Это означает, что справедливо (5.38). После перехода в (5.37) к пределу при $h \rightarrow 0$, учитывая определение 4.1 производной, получаем

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz. \quad (5.40)$$

Аналогично можно доказать, что

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz, \quad f'''(z_0) = \frac{3!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^4} dz \quad (5.41)$$

и т.д. ►

Пусть подынтегральная функция $\varphi(z)$ контурного интеграла имеет представление вида

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}},$$

где функция $f(z)$ аналитична на замыкании \bar{D} некоторой односвязной области D , ограниченной простым контуром L , а $z_0 \in D$. Тогда для вычисления контурного интеграла можно использовать формулу (5.36), которая принимает вид

$$\oint_L \varphi(z) dz = \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0). \quad (5.42)$$

Если подынтегральная функция $\varphi(z)$ теряет аналитичность в конечном числе n особых точек $z_k \in D$, $k = \overline{1, n}$, но ее можно представить в виде

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{n \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{m_k}},$$

где $m_k \in \mathbb{N}$, а $f(z)$ — аналитическая функция на \bar{D} , то контурный интеграл можно вычислить по схеме, аналогичной изложенной выше (см. 5.5).

Пример 5.8. Вычислим контурный интеграл

$$\oint_L \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2 z} dz$$

вдоль окружности L : $|z| = 2$. В области, ограниченной контуром L , лежат особые точки $z_1 = 0$, $z_2 = i$ и $z_3 = -i$ подынтегральной функции (рис. 5.14). Окружим каждую из этих

точек соответственно контурами L_1 , L_2 и L_3 , не пересекающимися между собой и с контуром L . Тогда подынтегральная функция будет аналитической в четырехсвязной области D (на рис. 5.14 она выделена) и на ограничивающем ее составном контуре (на внешнем L и внутренних L_1 , L_2 и L_3). Согласно теореме Коши для многосвязной области,

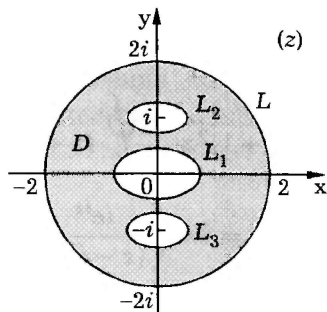


Рис. 5.14

$$\oint_L \frac{e^{iz} dz}{(z^2+1)^2 z} = \oint_{L_1} \frac{e^{iz} dz}{(z^2+1)^2 z} + \oint_{L_2} \frac{e^{iz} dz}{(z^2+1)^2 z} + \oint_{L_3} \frac{e^{iz} dz}{(z^2+1)^2 z}.$$

К каждому из интегралов справа применим либо (5.30), либо (5.36).

Так как контур L_1 окружает лишь одну особую точку $z_1 = 0$, то функция $e^{iz}/(z^2+1)^2$ будет аналитической на L_1 и в области, ограниченной этим контуром. Используя (5.30), находим

$$\oint_{L_1} \frac{e^{iz} dz}{(z^2+1)^2 z} = \oint_{L_1} \frac{1}{z} \frac{e^{iz} dz}{(z^2+1)^2} = 2\pi i \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} \Big|_{z=0} = 2\pi i.$$

Контур L_2 окружает особую точку $z_2 = i$. Следовательно, функция $e^{iz}/((z+i)^2 z)$ является аналитической на этом контуре и в ограниченной им области. Используя (5.36) при $n = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \oint_{L_2} \frac{e^{iz} dz}{(z^2+1)^2 z} &= \oint_{L_2} \frac{1}{(z-i)^2} \frac{e^{iz} dz}{(z+i)^2 z} = 2\pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2 z} \right) \Big|_{z=i} = \\ &= 2\pi i \left(\frac{ie^{iz}}{(z+i)^2 z} - \frac{2e^{iz}}{(z+i)^3 z} - \frac{e^{iz}}{(z+i)^2 z^2} \right) \Big|_{z=i} = \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{-1}}{(2i)^2} - \frac{2e^{-1}}{(2i)^3 i} - \frac{e^{-1}}{(2i)^2 i^2} \right) = \frac{2\pi i}{e} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{3\pi i}{2e}. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляем интеграл по контуру L_3 , выделяя аналитическую функцию $e^{iz}/((z-i)^2z)$:

$$\begin{aligned} \oint_{L_3} \frac{e^{iz} dz}{(z^2+1)^2z} &= \oint_{L_2} \frac{1}{(z+i)^2} \frac{e^{iz} dz}{(z-i)^2z} = 2\pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{(z-i)^2z} \right) \Big|_{z=-i} = \\ &= 2\pi i \left(\frac{ie^{iz}}{(z-i)^2z} - \frac{2e^{iz}}{(z-i)^3z} - \frac{e^{iz}}{(z-i)^2z^2} \right) \Big|_{z=-i} = \\ &= 2\pi i \left(-\frac{e}{(-2i)^2} - \frac{2e}{(-2i)^3(-i)} - \frac{e}{(-2i)^2(-i)^2} \right) = \\ &= 2\pi i e \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi e}{2} i. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\oint_L \frac{e^{iz} dz}{(z^2+1)^2z} = 2\pi i - \frac{3\pi}{2e} i - \frac{\pi e}{2} i = \pi i \left(2 - \frac{3}{2e} - \frac{e}{2} \right).$$

5.7. Достаточные условия аналитичности функции

Согласно определению (см. 4.6), функция $f(z)$ является аналитической в области D , если она дифференцируема в каждой точке этой области. Из достаточных условий дифференцируемости функции комплексного переменного заключаем, что для аналитичности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в области D достаточно, чтобы $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были сопряженными гармоническими функциями в этой области. Рассмотрим другие достаточные условия.

Теорема 5.10 (теорема Мореры). Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D , а интеграл от этой функции по любому замкнутому кусочно гладкому контуру, лежащему в D , равен нулю. Тогда функция $f(z)$ аналитична в D .

◀ Из условий теоремы следует, что интеграл от функции $f(z)$ по любой кривой, лежащей в D , не зависит от *пути интегрирования*, а зависит лишь от положения *начальной и конечной точек* этой кривой (см. 5.3). Стало быть, интеграл

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

при фиксированной точке $z_0 \in D$ есть функция верхнего предела z . В силу теоремы 5.5 функция $F(z)$ является аналитической в области D , причем $F'(z) = f(z)$. Но производная аналитической функции также является аналитической функцией (см. 5.6), что доказывает утверждение теоремы. ▶

Эта теорема установлена в 1886 г. итальянским математиком Дж. Морерой (1856–1909). Если обратиться к доказательству теоремы 5.9 о бесконечной дифференцируемости аналитической функции, которое построено на возможности представления значений непрерывной в области D функции *интегралом Коши*, то можно сформулировать следующее достаточное условие аналитичности функции.

Теорема 5.11. Если функция $f(z)$ непрерывна на замыкании \bar{D} односвязной области D , ограниченной кусочно гладким контуром L , и для любого $z \in D$ верно равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

то функция $f(z)$ аналитична в области D .

Дополнение 5.1. Комплексный потенциал плоского векторного поля

При помощи функции комплексного переменного можно описать стационарное (не зависящее от времени) **плоскопараллельное (плоское) векторное поле**. Все векторы та-

кого поля параллельны некоторой плоскости, причем во всех точках прямой, перпендикулярной этой плоскости, векторы поля равны. Это значит, что в системе координат $Oxuz$, в которой указанная плоскость совпадает с координатной плоскостью xOy , векторы поля имеют нулевую аппликуату и зависят

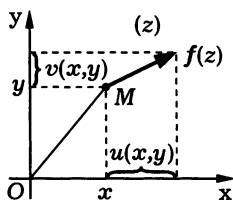


Рис. 5.15

только от координат x и y точки приложения вектора. Две ненулевые координаты векторного поля, абсциссу и ординату, можно описать парой функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ (рис. 5.15), которые можно рассматривать как действительную и мнимую части функции комплексного переменного: $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, где $z = x + iy$.

Отметим еще раз, что вектор с началом в точке z комплексной плоскости (z) характеризует плоскопараллельное поле во всех точках прямой, проходящей через эту точку перпендикулярно плоскости (z). С любым замкнутым контуром L мы будем ассоциировать тело, которое ограничено цилиндрической поверхностью с направляющей L и двумя плоскостями, параллельными плоскости (z) и отстоящими друг от друга на расстоянии 1. Такое тело далее будем называть **цилиндрическим**.

Понятие векторного поля подробно обсуждается в [VII], и мы будем опираться на это обсуждение. Далее будем предполагать, что векторное поле $f(z)$ является лапласовым, т.е. одновременно и потенциальным, и соленоидальным. Для плоскопараллельных полей это означает, что

$$\begin{cases} \operatorname{div} f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \operatorname{rot} f(z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0, \end{cases} \quad (5.43)$$

где $\frac{\partial}{\partial z}$ в данном случае обозначает частную производную по аппликате точки.

Векторные линии плоскопараллельного векторного поля $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{u(x, y)} = \frac{dy}{v(x, y)}, \quad \text{или} \quad v(x, y) dx - u(x, y) dy = 0. \quad (5.44)$$

Условие соленоидальности векторного поля означает, что выражение $-v(x, y) dx + u(x, y) dy$ является полным дифференциалом некоторой скалярной функции $\Psi(x, y)$, а уравнение векторных линий является уравнением в полных дифференциалах. Итак,

$$-v(x, y) dx + u(x, y) dy = d\Psi(x, y). \quad (5.45)$$

Функцию $\Psi(x, y)$ называют **функцией тока** (также **силовой функцией**) плоского векторного поля $f(z)$. Векторные линии этого поля являются *линиями уровня* функции $\Psi(x, y)$ и описываются уравнением

$$\Psi(x, y) = C = \text{const}. \quad (5.46)$$

Условие потенциальности векторного поля $f(z)$ означает, что выражение $u(x, y) dx + v(x, y) dy$ тоже является полным дифференциалом некоторой функции $\Phi(x, y)$:

$$u(x, y) dx + v(x, y) dy = d\Phi(x, y). \quad (5.47)$$

Функция $\Phi(x, y)$ представляет собой *потенциальную функцию*, (также называемую **потенциалом скоростей**) векторного поля $f(z)$.

Частные производные потенциальной функции $\Phi(x, y)$ и функции тока $\Psi(x, y)$ выражаются через функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u(x, y), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v(x, y); \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v(x, y), \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u(x, y). \end{cases} \quad (5.48)$$

Из этих выражений видно, что потенциальная функция и функция тока являются сопряженными гармоническими функциями в области дифференцируемости функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, а функция комплексного переменного $W(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ аналитична в этой области.

Через функцию $W(z)$ можно записать основные характеристики плоского лапласова поля $f(z)$. Во-первых, само векторное поле $f(z)$ можно записать так:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - i \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \overline{W}'(z). \quad (5.49)$$

Во-вторых, с помощью этой функции можно записать *поток* плоского *векторного поля*. В общем случае поток векторного поля r через поверхность S с заданным направлением единичной нормали n^0 выражается поверхностным интегралом от скалярного произведения rn^0 по поверхности S . Но если поле является плоскопараллельным, направленным вдоль плоскости (z) , то поток Q_γ этого поля через цилиндрическую поверхность S , которая образована перемещением вдоль кривой γ отрезка единичной длины, перпендикулярного (z) , можно записать с помощью криволинейного интеграла вдоль кривой γ :

$$Q_\gamma = \int_\gamma -v(x, y) dx + u(x, y) dy = \int_\gamma d\Psi(x, y). \quad (5.50)$$

Если функция комплексного переменного $f(z)$ задает плоскопараллельное векторное поле скорости текущей жидкости, то по физическому смыслу интеграл в (5.50) равен расходу жидкости через поверхность S , т.е. количеству жидкости, протекающей в единицу времени через эту поверхность. Далее будем говорить о потоке векторного поля (в частности, о расходе жидкости) через кривую γ , имея в виду цилиндрическую поверхность с образующей единичной длины и направляющей γ .

В-третьих, с помощью функции $W(z)$ можно записать *линейный интеграл векторного поля* $f(z)$ вдоль кривой γ (цир-

куляцию в случае замкнутой кривой). Этот интеграл представляет собой криволинейный интеграл вдоль γ и записывается следующим образом:

$$\Gamma_\gamma = \int_\gamma u(x, y) dx + v(x, y) dy = \int_\gamma d\Phi(x, y). \quad (5.51)$$

Напомним, что для силового векторного поля (например, поля тяготения или электростатического) линейный интеграл выражает работу этого поля при перемещении вдоль кривой единичной массы (единичного заряда).

Поток и линейный интеграл являются действительной и мнимой частями комплексного интеграла от производной функции $W(z)$:

$$\begin{aligned} \Gamma_\gamma + iQ_\gamma &= \int_\gamma u(x, y) dx + v(x, y) dy + i \int_\gamma -v(x, y) dx + u(x, y) dy = \\ &= \int_\gamma \overline{f(z)} dz = \int_\gamma W'(z) dz. \end{aligned}$$

Функцию $W(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$, составленную из потенциальной функции $\Phi(x, y)$ и функции тока $\Psi(x, y)$ плоского лапласова векторного поля $f(z)$, называют **комплексным потенциалом** этого векторного поля. Комплексный потенциал и векторное поле связаны соотношением

$$W'(z) = \overline{f(z)},$$

т.е. плоское лапласово векторное поле описывается функцией комплексного переменного $f(z)$, комплексно сопряженной к аналитической функции $W'(z)$.

Верно и обратное, т.е. если функция $\overline{f(z)}$ аналитична, то плоское векторное поле, заданное функцией $f(z)$, является лапласовым. Действительно, условия потенциальности и соленоидальности плоского векторного поля $f(z)$ означают выполнение

равенств (5.43), в которых нетрудно увидеть условия Коши — Римана для функции $\overline{f(z)}$. Аналитичность функции $\overline{f(z)}$ означает (в случае односвязной области) существование функции $W(z)$, для которой $W'(z) = \overline{f(z)}$, т.е. комплексного потенциала. Отметим, что комплексный потенциал, как первообразная аналитической функции $\overline{f(z)}$, определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Функцию комплексного переменного $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ можно рассматривать как векторную функцию $(u(x, y), v(x, y))$ двух переменных x и y . С этой точки зрения

$$\begin{aligned} \overline{W'(z)} &= \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = \\ &= \left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \right) = \text{grad } \Phi(x, y). \end{aligned}$$

Линии равного потенциала (эквипотенциальные линии) представляют собой линии уровня потенциальной функции $\Phi(x, y)$, а линии уровня функции тока $\Psi(x, y)$ известны как **линии тока** (в некоторых приложениях **силовые линии**). Линии равного потенциала и линии тока в области D описываются соответственно уравнениями

$$\Phi(x, y) = \text{const} \quad \text{и} \quad \Psi(x, y) = \text{const}, \quad (x; y) \in D. \quad (5.52)$$

Если в точке $z \in D$ функция $f(z)$ не равна нулю, то $W'(z) = \overline{f(z)} \neq 0$. В этом случае линия равного потенциала и линия тока, проходящие через эту точку, взаимно перпендикулярны. Действительно, линии $\Phi(x, y) = \text{const}$, проходящей через точку z , перпендикулярен вектор градиента

$$\text{grad } \Phi(x, y) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right),$$

а линии тока $\Psi(x, y)$ перпендикулярен вектор

$$\text{grad } \Psi(x, y) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right). \quad (5.53)$$

Ясно, что два этих ненулевых вектора взаимно перпендикулярны. Отметим, что вектор $f(z) = \text{grad } \Phi(x, y)$ в точке z касается линии тока. При графическом изображении линий тока на них обычно указывают стрелками направление возрастания потенциальной функции.

Если функция $f(z)$ задает лапласово поле в односвязной области D на комплексной плоскости (z), то функция $\overline{f(z)}$ является аналитической в D и по теореме Коши для односвязной области комплексный интеграл от этой функции по замкнутому контуру $\gamma \subset D$ равен нулю. Но действительная часть этого интеграла есть циркуляция векторного поля по контуру γ , а мнимая часть есть поток векторного поля через кривую γ . Таким образом, утверждение теоремы Коши означает, что циркуляция лапласова поля по замкнутому контуру и поток лапласова поля через замкнутую кривую равны нулю. Первое утверждение верно для всех потенциальных полей, а второе — для всех соленоидальных полей [VII].

Пример 5.9. Пусть плоское векторное поле задано в плоскости (z) функцией $f(z) = a = a_x + i a_y$, где a_x, a_y — некоторые действительные числа. Тогда сопряженная ей функция имеет вид $\overline{f(z)} = \bar{a} = a_x - i a_y$, и в силу (5.49) комплексный потенциал этого поля равен

$$\begin{aligned} W(z) &= \int \overline{f(z)} dz = \int \bar{a} dz = \bar{a}z + c = \\ &= a_x x + a_y y + c_x + i(a_x y - a_y x + c_y), \end{aligned} \quad (5.54)$$

где $c = c_x + i c_y$ — постоянная интегрирования. Потенциальная функция данного поля будет $\Phi(x, y) = a_x x + a_y y + c_x$, а функция тока — $\Psi(x, y) = -a_y x + a_x y + c_y$. На рис. 5.16 для случая $a_x > 0$ и $a_y > 0$ изображены семейство линий равного потенциала (сплошными линиями) и линии тока этого векторного поля (штриховыми линиями). Если функция $f(z)$ определена лишь в полосе, ограниченной двумя прямыми (они выделены на

рис. 5.16), то (5.54) будет задавать комплексный потенциал в этой полосе.

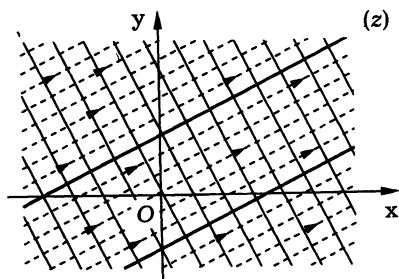


Рис. 5.16

Пример 5.10. Выясним, какое векторное поле описывает комплексный потенциал $W(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Эта функция является аналитической во всей комплексной плоскости и потому определяет в этой плоскости лапласово поле, которое описывается функцией

$$f(z) = \overline{W'(z)} = 2\bar{z}.$$

Потенциальная функция и функция тока этого поля имеют вид соответственно

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re} W(z) = x^2 - y^2 \quad \text{и} \quad \Psi(x, y) = \operatorname{Im} W(z) = 2xy.$$

На рис. 5.17 сплошными линиями изображены линии равного потенциала, а штриховыми — линии тока. Оба семейства содержат равнобочные гиперболы, но, кроме того, линиями равного потенциала являются биссектрисы координатных углов, а линиями тока — координатные оси. В точке $z = 0$ имеем $W'(0) = 0$ и нулевой вектор $f(0) = 0$. Именно в этой точке нарушено условие взаимной перпендикулярности линий равного потенциала и линий тока.

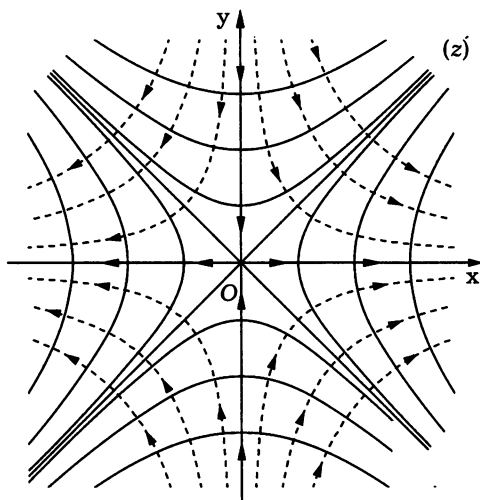


Рис. 5.17

Рассматриваемое векторное поле описывает, например, течение жидкости в пространстве, разделенном двумя перпендикулярными стенками (они соответствуют координатным осям). #

Комплексные потенциалы, описывающие часто встречающиеся в прикладных задачах плоские векторные поля, не являются аналитическими функциями на всей комплексной плоскости. Эти потенциалы имеют особые точки, в которых теряется их аналитичность, причем физическая интерпретация каждой такой точки непосредственно связана с причиной, порождающей рассматриваемое векторное поле (например, источник теплоты, создающий температурное поле; электрический заряд, образующий электростатическое поле; протекающий по проводнику электрический ток, порождающий магнитное поле, и т.д.).

Пусть функция $\overline{f(z)}$ аналитична в некоторой *многосвязной области* D . Тогда циркуляция и поток задаваемого этой функцией плоского векторного поля, вообще говоря, не будут

обращаться в нуль на любом контуре L , целиком лежащем в D , т.е. в общем случае имеем

$$\oint_L \overline{f(z)} dz = \oint_l W'(z) dz = \Gamma_L + iQ_L. \quad (5.55)$$

Рассмотрим несколько характерных примеров.

Пример 5.11. Функция $\overline{f(z)} = Q/(2\pi z)$, где Q — ненулевое действительное число, аналитична всюду на плоскости (z), кроме точки $z = 0$. Поэтому функция $f(z) = Q/(2\pi\bar{z})$ задает в двусвязной области $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ плоское векторное поле. Комплексный потенциал этого поля имеет вид

$$W(z) = \int \overline{f(z)} dz = \frac{Q}{2\pi} \int \frac{dz}{z} = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Ln} z + c, \quad (5.56)$$

где $c = c_1 + ic_2$ — постоянная интегрирования. Выделяя в (5.56) действительную и мнимую части, находим потенциальную функцию и функцию тока

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re} W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln|z| + c_1,$$

$$\Psi(x, y) = \operatorname{Im} W(z) = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Arg} z + c_2.$$

Полагая $z = \rho e^{i\varphi}$, получаем уравнения линий равного потенциала и линий тока в полярных координатах:

$$\frac{Q}{2\pi} \ln \rho = \text{const}, \quad \frac{Q}{2\pi} \varphi = \text{const}. \quad (5.57)$$

Линии равного потенциала — это окружности $\rho = \text{const}$ с центром в точке $z = 0$, а линии тока — это лучи $\varphi = \text{const}$, выходящие из нуля (на рис. 5.18 стрелки на линиях тока соответствуют случаю $Q > 0$).

Интеграл от функции $\overline{f(z)} = Q/(2\pi z)$ по любому контуру, не охватывающему точку $z = 0$, в силу теоремы Коши для

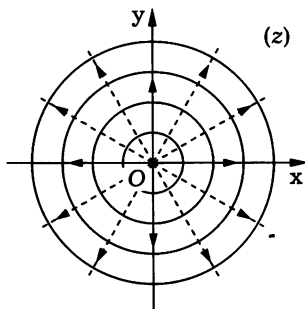


Рис. 5.18

односвязной области равен нулю, т.е. на таком контуре равны нулю и циркуляция, и поток векторного поля. Но если контур L охватывает точку $z = 0$, то, используя (5.16) и (5.11), получаем

$$\oint_L \overline{f(z)} dz = \oint_{|z|=r} \overline{f(z)} dz = \frac{Q}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{dz}{z} = \frac{Q}{2\pi} \cdot 2\pi i = iQ.$$

В данном случае циркуляция вдоль любого контура L , охватывающего точку $z = 0$, равна нулю, а поток векторного поля через такой контур при обходе его в положительном направлении равен $Q_L = Q = \text{const}$ и не зависит от формы контура.

Заданное векторное поле можно интерпретировать как поле скорости жидкости, вытекающей из точечного источника $z = 0$. Расход жидкости через любую окружность $|z| = r$ (как и через любой другой однократно охватывающий точку $z = 0$ контур) равен Q , что соответствует физической сути явления. Если $Q < 0$, расход жидкости отрицателен, а точка $z = 0$ соответствует не источнику, а стоку жидкости. Параметр Q определяет мощность точечного источника. Если говорить не о плоском течении жидкости (например, между двумя близкими плоскостями), а плоскопараллельном, то точка $z = 0$ будет соответствовать не точечному источнику (стоку), а линейному, т.е. источнику, распределенному по прямой, перпендикулярной плоскости (z) и проходящей через точку $z = 0$. Параметр Q в

этом случае будет определять интенсивность линейного источника, приходящуюся на единицу его длины.

Гидромеханическая интерпретация рассматриваемого векторного поля дала ему название *поле источника*, причем центральную точку поля называют *источником*, а значение Q — *интенсивностью источника*. Но это векторное поле может иметь и другие интерпретации. Например, оно описывает электростатическое поле вектора напряженности для зарядов, равномерно распределенных по прямой, или же поле вектора плотности теплового потока, порожденного источниками, равномерно распределенными на прямой. Для полей плотности теплового потока линии равного потенциала называют *изотермами*, т.е. линиями равной температуры.

Пример 5.12. Функция $\overline{f(z)} = \frac{\Gamma}{2\pi iz}$, где Γ — ненулевое действительное число, аналитична в области $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому в этой области функция $f(z) = i \frac{\Gamma}{2\pi \bar{z}}$ определяет плоское векторное поле. Комплексный потенциал этого поля имеет вид

$$W(z) = \int \overline{f(z)} dz = \int \frac{\Gamma}{2\pi iz} dz = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z + c_1 + ic_2. \quad (5.58)$$

Выделяя в комплексном потенциале $W(z)$ потенциальную функцию и функцию тока, полагая, что $z = \rho e^{i\varphi}$, приходим к уравнениям линий равного потенциала и линий тока в полярных координатах:

$$\frac{\Gamma}{2\pi} \varphi = \operatorname{const}, \quad -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \rho = \operatorname{const}. \quad (5.59)$$

Линии равного потенциала — это лучи $\varphi = \operatorname{const}$, а линии тока — окружности с центром в точке $z = 0$ (на рис. 5.19 стрелки на линиях тока соответствуют случаю $\Gamma > 0$). Сравнивая (5.57) и (5.59) (соответственно рис. 5.18 и 5.19), заключаем, что линии равного потенциала и линии тока меняются местами.

Комплексный потенциал (5.58) описывает *поле вихря*. При этом центральную точку $z = 0$ поля называют *вихрем*, а параметр Γ — *интенсивностью вихря*. Интенсивность вихря равна циркуляции векторного поля по любому простому замкнутому контуру L , охватывающему вихрь и обходимому в положительном направлении. Действительно, используя формулы (5.11), (5.16) и (5.58), находим

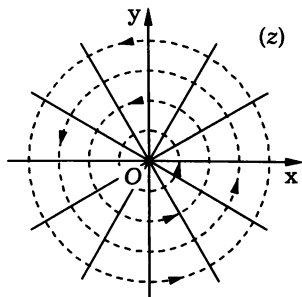


Рис. 5.19

$$\oint_L \overline{f(z)} dz = \oint_{|z|=r} \overline{f(z)} dz = \frac{\Gamma}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{dz}{z} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot 2\pi i = \Gamma.$$

Сравнивая с (5.55), устанавливаем, что поток векторного поля вихря через такой контур равен нулю. Отметим, что аналогично полю источника равны нулю поток и циркуляция для любого контура, целиком лежащего в односвязной области, не содержащей точку $z = 0$.

Гидромеханическую интерпретацию поля вихря дает плоскопараллельное движение жидкости, частицы которой вращаются относительно некоторой оси. Поле вихря также описывает напряженность магнитного поля, создаваемого постоянным током силой Γ , протекающим по прямолинейному проводнику, проходящему через точку $z = 0$ перпендикулярно плоскости (z) .

Пример 5.13. Если в точку $z = 0$ поместить одновременно источник интенсивностью Q и вихрь интенсивностью Γ , то получим плоское векторное поле, задаваемое функцией $f(z) = (Q + i\Gamma)/(2\pi z)$ и имеющее комплексный потенциал

$$W(z) = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln} z + c_1 + ic_2. \quad (5.60)$$

Полагая $z = \rho e^{i\varphi}$ и выделяя в комплексном потенциале потенциальную функцию и функцию тока, приходим к уравнениям линий равного потенциала и линий тока

$$Q \ln \rho + \Gamma \varphi = \text{const} \quad \text{и} \quad \Gamma \ln \rho - Q \varphi = \text{const}. \quad (5.61)$$

Этим уравнениям отвечают семейства взаимно перпендикулярных логарифмических спиралей (на рис. 5.20 стрелки на линиях тока соответствуют случаю $Q > 0$ и $\Gamma > 0$). Говорят, что комплексный потенциал (5.60) описывает *поле вихреисточника*, а точку $z = 0$ называют *вихреисточником*. Значение $Q - i\Gamma$ называют *комплексной интенсивностью вихреисточника*.

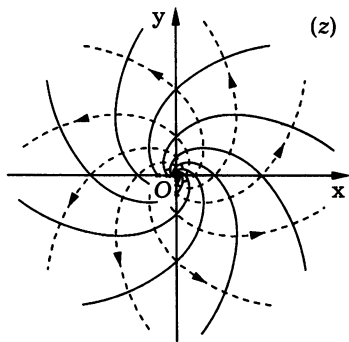


Рис. 5.20

Пример 5.14. Поместим в точки $z = -h$ и $z = 0$ источники интенсивностью Q и $-Q$ соответственно. Тогда возникшее плоское векторное поле будет суммой векторных полей этих источников, а его комплексный потенциал в силу аддитивности интеграла (см. 5.1) можно представить в виде

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \text{Ln}(z+h) - \frac{Q}{2\pi} \text{Ln} z + c_1 + ic_2. \quad (5.62)$$

Таким образом, из аддитивности интеграла следует свойство **аддитивности комплексного потенциала**.

Потенциал (5.62) определен при условиях $z + h \neq 0$ и $z \neq 0$, или при $(z + h)z \neq 0$. Выделяя в комплексном потенциале действительную и мнимую части, приходим к уравнениям линий равного потенциала и линий тока:

$$\ln \frac{|z + h|}{|z|} = \text{const}, \quad \text{Arg}(z + h) - \text{Arg} z = \text{const}. \quad (5.63)$$

После упрощения эти уравнения принимают вид

$$\left| \frac{z + h}{z} \right| = \text{const}, \quad \text{Arg} \frac{z + h}{z} = \text{const}.$$

Линиями тока рассматриваемого векторного поля являются дуги окружностей, соединяющие точки $-h$ и 0 . Линиями равного потенциала также будут окружности, которые разделяют точки $z + h$ и 0 и перпендикулярны линиям тока. Действительно, полагая $z = x + iy$ и принимая для определенности $h > 0$, из (5.63) находим соответственно

$$\frac{\sqrt{(x + h)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k_\Phi > 0, \quad \arctg \frac{y}{x + h} - \arctg \frac{y}{x} = k_\Psi \in \mathbb{R}, \quad (5.64)$$

или с учетом формулы для тангенса разности двух углов

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{h}{k_\Phi^2 - 1}\right)^2 + y^2 &= \frac{k_\Phi^2 h^2}{(k_\Phi^2 - 1)^2}, \\ \left(x + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{h}{2} \text{ctg} k_\Psi\right)^2 &= \frac{h^2}{4 \sin^2 k_\Psi}. \end{aligned}$$

Эти формулы определяют радиусы $R_\Phi = \frac{k_\Phi h}{|k_\Phi^2 - 1|}$ и центры $z = \frac{h}{k_\Phi^2 - 1}$ линий равного потенциала, а также радиусы $R_\Psi = \frac{h}{2|\sin k_\Psi|}$ и центры $z = -\frac{h}{2} - i\frac{h}{2} \text{ctg} k_\Psi$ линий тока. Центры

линий равного потенциала лежат на действительной оси, а центры линий тока — на прямой $\operatorname{Re} z = -h/2$, перпендикулярной мнимой оси и равноудаленной от точек $z+h$ и 0 (рис. 5.21). Эти окружности взаимно перпендикулярны, а плоское векторное поле симметрично относительно действительной оси, на которой расположены линии тока, соответствующие дугам окружности бесконечно большого радиуса при $k_\Psi \rightarrow 0$. Прямая $\operatorname{Re} z = -h/2$ будет одной из линий равного потенциала (окружностью бесконечно большого радиуса при $k_\Phi \rightarrow 1$). Линии равного потенциала левее этой прямой соответствуют значениям $k_\Phi \in (0, 1)$, а правее — $k_\Phi > 1$.

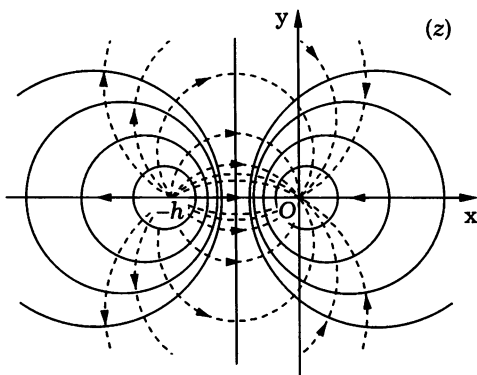


Рис. 5.21

Полученные геометрические соотношения, исключив из них параметры k_Φ и k_Ψ , можно привести к двум равенствам

$$d^2 + R_\Phi^2 = l_{R_\Phi}^2 \quad \text{и} \quad d^2 + l_{R_\Psi}^2 = R_\Psi^2, \quad (5.65)$$

где $d = h/2$, l_{R_Φ} — расстояние от точки $z = -h/2$ до центра окружности $\Phi(z) = \text{const}$ радиуса R_Φ , а l_{R_Ψ} — расстояние от этой точки до центра окружности $\Psi(z) = \text{const}$ радиуса R_Ψ .

Комплексный потенциал векторного поля, порожденного двумя источниками интенсивности Q и $-Q$ на некотором расстоянии $h = 2d > 0$ друг от друга, часто применяют при ре-

шении прикладных задач. Пусть эти источники расположены в точках z^* и z_* соответственно ($|z^* - z_*| = 2d$). Тогда, если опустить постоянные, комплексный потенциал векторного поля, создаваемого этой системой источников, можно записать в виде

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Ln} \frac{z - z^*}{z - z_*}. \quad (5.66)$$

Ясно, что центры окружностей, являющихся линиями равного потенциала $\Phi(z) = \operatorname{const}$ этого поля, будут лежать на прямой, проходящей через точки z^* и z_* , а центры окружностей — линий тока $\Psi(z) = \operatorname{const}$ — на перпендикулярной ей прямой и проходящей через точку $z_0 = (z^* + z_*)/2$ (рис. 5.22). Если расстояния от точки z_0 до центров окружностей радиусов R_Φ и R_Ψ обозначить l_{R_Φ} и l_{R_Ψ} соответственно, то сохраняют силу соотношения (5.65).

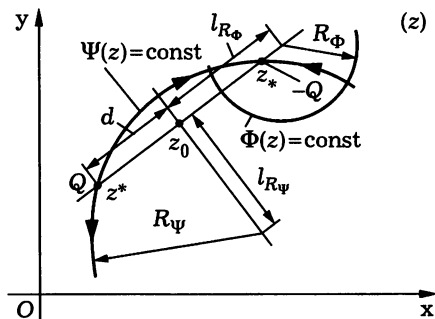


Рис. 5.22

Рассматриваемое векторное поле порождается, например, электростатическим полем двух разноименно заряженных тонких прямолинейных проводников, параллельных друг другу и расположенных друг от друга на расстоянии h . Интенсивность $Q > 0$ будет соответствовать положительному заряду, приходящемуся на единицу длины проводника.

Пример 5.15. В ряде случаев векторное поле двух разноименных (противоположной по знаку интенсивности) источни-

ков, рассмотренное в примере 5.14, исследуется на расстояниях от источников, значительно превышающих расстояние h между источниками, т.е. на удалении $l \gg h$. Согласно примеру 5.14, комплексный потенциал векторного поля двух разноименных источников интенсивности Q , помещенных в точки $z = -h$ и $z = 0$, равен (с точностью до постоянного слагаемого)

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Ln} \frac{z+h}{z} = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Ln} \left(1 + \frac{h}{z}\right).$$

На значительном удалении от источников величина h/z мала по модулю. Поэтому комплексный потенциал $W(z)$ при больших значениях z приближенно можно заменить функцией

$$\widetilde{W}(z) = \frac{Q}{2\pi} \frac{h}{z}.$$

Влияние векторного поля с таким потенциалом зависит от величины $P = Qh$. Если мы хотим сохранить эту величину, то при сближении источников следует увеличивать их интенсивность. Векторное поле с комплексным потенциалом

$$W(z) = \frac{P}{2\pi z} + c,$$

где P — фиксированное действительное число, $c \in \mathbb{C}$, называют *полем диполя*. При этом P определяет *момент диполя*. Точка $z = 0$, в которой совмещаются два разноименных источника, соответствует *диполю*. Отметим, что поле диполя можно рассматривать как предельный случай поля двух источников $z+h$ и 0 , когда $h \rightarrow 0$, а интенсивность источников растет обратно пропорционально расстоянию h .

Полагая $z = x + iy$, в комплексном потенциале $W(z) = P/(2\pi z)$ поля диполя выделим действительную и мнимую части:

$$W(z) = \frac{P\bar{z}}{2\pi z\bar{z}} = \frac{P\bar{z}}{2\pi|z|^2} = \frac{px}{2\pi(x^2+y^2)} - i \frac{py}{2\pi(x^2+y^2)}.$$

Отсюда можно получить уравнения линий равного потенциала и линий тока:

$$(x - c_\Phi)^2 + y^2 = c_\Phi^2 \quad \text{и} \quad x^2 + (y - c_\Psi)^2 = c_\Psi^2,$$

где $c_\Phi, c_\Psi \in \mathbb{R}$. Эти уравнения показывают, что линии равного потенциала и линии тока — это дуги взаимно перпендикулярных окружностей. Линии равного потенциала имеют радиусы $R_\Phi = |c_\Phi|$ и центры $z = c_\Phi$ на действительной оси, а линии тока — радиусы $R_\Psi = |c_\Psi|$ и центры $z = ic_\Psi$ на мнимой оси (рис. 5.23), причем на всех дугах выколота точка $z = 0$, в которой поле диполя не определено.

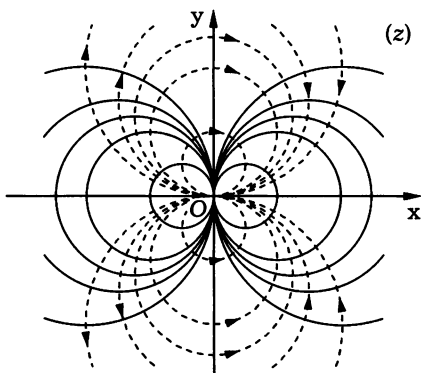


Рис. 5.23

Хотя поле диполя введено для моментов $P > 0$ (через P было обозначено произведение Qh), он естественным образом обобщается на случай отрицательного значения момента ($P < 0$) и, более того, на случай произвольного комплексного (ненулевого) момента. При $P < 0$ направление стрелок на рис. 5.23 изменится на противоположное. При $P = ip_1$ изображение на рис. 5.23 следует повернуть на угол $\pi/2$ против часовой стрелки при $p_1 > 0$ и по часовой стрелке при $p_1 < 0$. Если $P \in \mathbb{C}$, то исходящая из точки $z = 0$ прямолинейная линия тока, называемая *осью диполя*, будет направлена под углом $\arg(-P) = \arg P - \pi$. По-

ле диполя с комплексным моментом можно получить, сближая вихреисточники с противоположными значениями комплексных интенсивностей при условии, что интенсивности вихреисточников возрастают обратно пропорционально расстоянию между ними. В частности, изображенное на рис. 5.23 поле может быть образовано двумя вихрями с интенсивностями Γ и $-\Gamma$, причем первый из них стремится к точке $z = 0$ вдоль отрицательной ветви мнимой оси, а второй — вдоль ее положительной ветви.

Для любого замкнутого контура L , охватывающего диполь, используя (5.16) и (5.11), находим

$$\oint_L \overline{f(z)} dz = \oint_l W'(z) dz = -\frac{p}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{dz}{z^2} = 0.$$

Отсюда, согласно (5.55), следует, что поток и циркуляция для любого замкнутого контура в поле диполя равны нулю.

Пример 5.16. Для плоского векторного поля, заданного комплексным потенциалом $W(z) = z + \ln z$, найдем потенциальную функцию $\Phi(x, y)$, функцию тока $\Psi(x, y)$, линии тока и линии равного потенциала, а также критические точки поля — те, в которых векторное поле обращается в нуль.

Потенциальная функция и функция тока являются действительной и мнимой частями комплексного потенциала. Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \operatorname{Re} W(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re}(\ln z) = \\ &= x + \ln \sqrt{x^2 + y^2} = x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

$$\Psi(x, y) = \operatorname{Im} W(z) = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} \ln z = y + \arg z = y + \varphi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ — функция $\arg z$, записанная в переменных x и y и равная полярному углу точки с координатами $(x; y)$.

Линии равного потенциала задаются уравнением $\Phi(x, y) = C$, или $x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = C$. Линии равного потенциала описываются уравнением $\Psi(x, y) = C$, или $y + \varphi(x, y) = C$. В

полярных координатах r и φ на плоскости (z) уравнения линий равного потенциала и линий тока выглядят следующим образом:

$$r \cos \varphi + \ln r = C, \quad r \sin \varphi + \varphi = C.$$

Наконец, так как векторное поле описывается функцией

$$f(z) = \overline{W'(z)} = 1 + \frac{1}{z},$$

критические точки являются решением уравнения

$$1 + \frac{1}{z} = 0,$$

которое имеет единственное решение $z = -1$. Стало быть, векторное поле имеет единственную критическую точку $z = -1$.

Рассматриваемое векторное поле представляет собой композицию плоского векторного поля, изученного в примере 5.11, и поля источника интенсивности 2π , помещенного в точку $z = 0$. Вид линий тока этого векторного поля изображен на рис. 5.24.

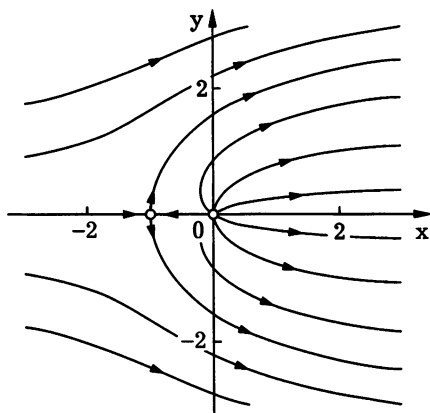


Рис. 5.24

Вопросы и задачи

5.1. Вычислите контурные интегралы:

$$\text{а) } \oint_{|z|=2} z \operatorname{Im} z^2 dz; \quad \text{б) } \oint_{|z|=1} |z|^2 dz.$$

5.2. Вычислите интеграл от функции $f(z) = \bar{z}$ по следующим путям интегрирования, соединяющим точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$: а) прямая; б) парабола $y = x^2$; в) парабола $y = \sqrt{x}$; г) двухзвенная ломаная с промежуточной точкой $z_* = i$.

5.3. Зависит ли интеграл от функции ze^{z^2} от пути интегрирования, соединяющего точки $z_1 = -i$ и $z_2 = i$? Вычислите этот интеграл.

5.4. Вычислите интеграл от однозначной ветви многозначной функции $1/\sqrt{z}$, принимающей в точке $z = 1$ значение, равное 1, по дуге полуокружности $|z| = 4$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, проходимой от точки $z_1 = -4$ до точки $z_2 = 4$.

5.5. Вычислите интеграл от функции $e^{\bar{z}}$ вдоль двухзвенной ломаной с начальной точкой $z_1 = 0$, конечной точкой $z_2 = 1 + i$ и промежуточной точкой z_* , равной: а) $z_* = 1$; б) $z_* = i$.

5.6. Объясните, почему формула

$$\oint_L \frac{\zeta^2 - 1}{(\zeta^2 + 1)(\zeta - z)} d\zeta = 2\pi i \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}, \quad z \in D,$$

верна, когда контур L , ограничивающий область D , есть окружность $|z + 1| = 1$, и не верна, когда контуром L будет окружность $|z + i| = 1$.

5.7. Вычислите интеграл от функции $\operatorname{tg} z$ вдоль дуги параболы $y = x^2$, соединяющей точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$.

5.8. Вычислите интегралы вдоль отрезка прямой, соединяющей точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$, от следующих функций:

а) $e^{|z|^2} \operatorname{Re} z$; б) $e^{z^2} \operatorname{Re} z$; в) $\frac{|z|}{|z|+1}$.

5.9. Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой односвязной области D , ограниченной контуром L , непрерывна в замыкании этой области и постоянна на L . Докажите, что она постоянна в D .

5.10. Пусть для функций $f(z)$ и $g(z)$, аналитических в круге $|z| < R$, верно равенство

$$\int_0^z f(\zeta)g(z-\zeta)d\zeta = 0, \quad |z| < R.$$

Докажите, что в этом круге $f(z) \equiv 0$ или $g(z) \equiv 0$.

5.11. Вычислите контурные интегралы:

а) $\oint_{L_1} \frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z+1} dz$; б) $\oint_{L_2} \frac{\sin z \sin(z-1)}{z^2-z} dz$; в) $\oint_{L_3} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2-1} dz$;

г) $\oint_{L_4} \frac{e^{\pi z} dz}{(z^2+1)^2}$.

Здесь L_1 — астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = 3^{2/3}$, L_2 — окружность $|z| = 2$, L_3 — окружность $x^2 + y^2 - 2x = 0$, L_4 — окружность $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

5.12. Найдите уравнения линий равного потенциала и линий тока и постройте эти линии для плоского векторного поля, образованного двумя вихрями. Первый интенсивностью Γ находится в точке $z = -ih$, а второй интенсивностью $-\Gamma$ — в точке $z = 0$.

6. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

6.1. Равномерная сходимость функциональных рядов

Пусть на некотором множестве $A \subset \mathbb{C}$ определена последовательность $\{f_n(z)\}$ функций $f_n(z)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) комплексного переменного z .

Определение 6.1. *Функциональный ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad (6.1)$$

называют *сходящимся в точке* $z_0 \in A$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$.

Определение 6.2. Множество всех точек $z \in A$, в которых функциональный ряд сходится, называют *областью сходимости* этого *функционального ряда*.

Отметим, что последний термин никак не связан с понятием „область“. В общем случае область сходимости функционального ряда может иметь на комплексной плоскости (z) самую различную конфигурацию: быть связным множеством или не являться таковым, быть как открытым множеством, так и замкнутым. Ранее (см. 2.3, 2.5) были рассмотрены частные случаи функциональных рядов: степенные ряды, имеющие вид $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, степенные ряды с отрицательными степенями $z - z_0$, а также двусторонние степенные ряды. Было показано (см. 2.4), что область сходимости степенного ряда представляет собой его *круг сходимости* $|z - z_0| < R$, дополненный некото-

рым множеством точек окружности $|z - z_0| = R$ (быть может, пустым). Если степенной ряд не имеет точек сходимости на указанной окружности, то область сходимости этого ряда будет линейно связным открытым множеством, т.е. областью. Если же степенной ряд сходится во всех точках окружности $|z - z_0| = R$, то его областью сходимости будет замкнутое множество $\{z: |z - z_0| \leq R\}$, которое не является областью.

Область сходимости степенного ряда, состоящего из отрицательных степеней $z - z_0$, представляет собой *внешность окружности* $|z - z_0| = r$, дополненную некоторым (возможно, пустым) множеством точек этой окружности. Наконец, область сходимости двустороннего степенного ряда представляет собой кольцо $r < |z - z_0| < R$, быть может, дополненное некоторым множеством точек окружностей $|z - z_0| = r$ и $|z - z_0| = R$.

Если D — область сходимости функционального ряда (6.1), то на D определена сумма ряда

$$S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_k(z), \quad (6.2)$$

где $S_n(z)$ — n -я *частичная сумма ряда* (6.1). В символическом виде условие (6.2) означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n^* = n^*(\varepsilon, z) \in \mathbb{N}: \left(n > n^* \Rightarrow \left| S(z) - \sum_{k=0}^n f_k(z) \right| < \varepsilon \right).$$

Номер n^* здесь зависит от ε и от точки $z \in D$, на что указывает обозначение $n^* = n^*(\varepsilon, z)$. Практически важным является случай, когда номер n^* можно выбрать один и тот же для всех точек z некоторого множества $M \subset D$, т.е. когда он не зависит от z .

Определение 6.3. *Функциональный ряд* (6.1) называют *равномерно сходящимся* на множестве $M \subset D$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n^* = n^*(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \left(n > n^*, z \in M \Rightarrow |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon \right),$$

где $S(z)$ — сумма этого функционального ряда, а $S_n(z)$ — его n -я частичная сумма.

Обозначая остаток ряда $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$, получаем условие равномерной сходимости ряда на множестве M в следующем виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n^* = n^*(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \left(n > n^*, z \in M \Rightarrow |R_n(z)| < \varepsilon \right). \quad (6.3)$$

Ясно, что если функциональный ряд (6.1) сходится равномерно на множестве M , то он равномерно сходится и на любом его подмножестве $M_1 \subset M$.

Пример 6.1. Исходя из определения 6.3 равномерной сходимости, докажем, что ряд $1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$ не является равномерно сходящимся в своем круге сходимости $|z| < 1$ (см. пример 2.5), но сходится равномерно в любом замкнутом круге $|z| \leq 1 - \delta$, где $0 < \delta < 1$ — любое малое положительное число.

Пользуясь формулой для суммы геометрической прогрессии [IX], при $|z| < 1$ получаем

$$R_n(z) = z^{n+1} + z^{n+2} + \dots = z^{n+1}(1 + z + z^2 + \dots) = \frac{z^{n+1}}{1 - z}.$$

Круг $|z| < 1$ содержит точки, сколь угодно близкие к точке $z = 1$. Так как

$$\lim_{z \rightarrow 1} R_n(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{n+1}}{1 - z} = \infty,$$

то для любого номера n можно указать такую точку z в круге $|z| < 1$, что $|R_n(z)| \geq \varepsilon_0$, где в качестве ε_0 можно взять произвольное положительное число, например положить $\varepsilon_0 = 1$. Тогда при $0 < \varepsilon < 1$ нельзя будет подобрать такой номер n^* , чтобы при $n > n^*$ во всех точках круга $|z| < 1$ выполнялось неравенство $|R_n(z)| < \varepsilon$. Это означает, согласно определению 6.3, нарушение условия равномерной сходимости на множестве $\{z: |z| < 1\}$, т.е.

сходимость рассматриваемого ряда в круге $|z| < 1$ не является равномерной.

Согласно *неравенству треугольника*, имеем $1 = |1 - z + z| \leq |1 - z| + |z|$ и поэтому для замкнутого круга $|z| \leq 1 - \delta$, $\delta \in (0, 1)$, получаем $|1 - z| \geq 1 - |z| \geq \delta$. В этом случае $|R_n(z)| = |z^{n+1}|/|1 - z| \leq (1 - \delta)^{n+1}/\delta$. Взяв любое $\varepsilon > 0$, потребуем, чтобы было выполнено неравенство $(1 - \delta)^{n+1}/\delta < \varepsilon$. Отсюда $(n + 1) \ln(1 - \delta) < \ln(\varepsilon\delta)$, или, принимая во внимание, что $\ln(1 - \delta) < 0$,

$$n + 1 > \frac{\ln(\varepsilon\delta)}{\ln(1 - \delta)}.$$

Таким образом, выбрав $n^* = \left\lceil \frac{\ln(\varepsilon\delta)}{\ln(1 - \delta)} - 1 \right\rceil$, где квадратные скобки обозначают *целую часть* числа, убеждаемся, что при $n > n^*$ действительно $|R_n(z)| < \varepsilon$ для всех точек z , принадлежащих замкнутому кругу $|z| \leq 1 - \delta$. Следовательно, в силу определения 6.3 рассматриваемый ряд сходится равномерно в этом круге. #

Утверждение 6.1. Если ряд (6.1) равномерно сходится на множестве M и $\varphi(z)$ — ограниченная по модулю на множестве M функция, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(z) f_n(z)$ равномерно сходится на M .

◀ Пусть ряд (6.1) сходится равномерно на множестве M , а $\varphi(z)$ — ограниченная по модулю на этом множестве функция, т.е. на множестве M верно неравенство $|\varphi(z)| \leq A$, где A — ненулевое действительное число. Согласно определению 6.3, для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер n^* , вообще говоря зависящий от ε , что при $n > n^*$ для всех $z \in M$ выполняется неравенство $|R_n(z)| < \varepsilon/A$. Значит,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi(z) f_k(z) \right| = |\varphi(z)| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq A |R_n(z)| \leq A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$$

при $n > n^*$ и $z \in M$. Это по определению 6.3 означает, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(z) f_k(z)$ сходится равномерно на множестве M . ►

Приведем формулировки критерия Коши и признака Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда, которые в комплексном случае доказываются так же, как и в действительном случае [IX].

Теорема 6.1 (критерий Коши). Для равномерной сходимости ряда (6.1) на множестве M необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $n^* \in \mathbb{N}$, что для всех точек $z \in M$ при любых $n > n^*$ и $p \in \mathbb{N}$ было выполнено неравенство

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon. \quad (6.4)$$

Теорема 6.2 (признак Вейерштрасса). Если существует сходящийся знакоположительный числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, такой, что, начиная с некоторого номера $n^0 \in \mathbb{N}$, выполнено неравенство $|f_n(z)| \leq a_n$ ($n > n^0$), $z \in M$, то ряд (6.1) сходится равномерно на множестве M . #

Как и в случае функционального ряда с действительными членами, числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, используемый в признаке Вейерштрасса, называют **мажорантой ряда** (6.1), а сам ряд (6.1) именуют **мажорируемым** (имеющим мажоранту) на множестве M .

Используя признак Вейерштрасса, исследуем степенной ряд с точки зрения его равномерной сходимости.

Теорема 6.3. Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (6.5)$$

с кругом сходимости $|z - z_0| < R$ сходится равномерно в любом замкнутом круге $|z - z_0| \leq R_1$, где $R_1 < R$.

◀ Выберем произвольное положительное число $R_1 < R$ и рассмотрим такую точку z^* , что $|z^* - z_0| = R_1$. В этой точке ряд (6.5) в силу теоремы 2.2 Абеля сходится абсолютно, т.е. сходится числовой знакоположительный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z^* - z_0)^n|.$$

Для любой точки z в замкнутом круге $|z - z_0| \leq R_1$ имеем $|z - z_0| \leq |z^* - z_0|$, откуда $|c_n(z - z_0)^n| \leq |c_n(z^* - z_0)^n|$. Поэтому, согласно признаку Вейерштрасса (см. теорему 6.2), ряд (6.5) сходится равномерно в замкнутом круге $|z - z_0| \leq R_1$. ▶

Замечание 6.1. Если функциональный ряд сходится равномерно на любом ограниченном замкнутом подмножестве данной области D , то такой ряд называют **равномерно сходящимся внутри** области D . Обратим внимание на то, что новое понятие получается простым добавлением слова „внутри“ и по звучанию схоже с понятием равномерно сходящегося ряда. Однако смысл двух понятий разный. Если ряд сходится равномерно в области D , то он сходится равномерно и на любом подмножестве D , в том числе на любом замкнутом ограниченном подмножестве. Таким образом, из равномерной сходимости в области D вытекает равномерная сходимость внутри области D , но обратное утверждение неверно.

Поскольку любое замкнутое подмножество круга $|z - z_0| < R$ можно заключить в некоторый замкнутый круг $|z - z_0| \leq R_1$, то, согласно теореме 6.3, степенной ряд сходится равномерно на любом замкнутом подмножестве, содержащемся внутри круга сходимости, или, другими словами, сходится равномерно внутри круга сходимости. Пример 6.1 показывает, что степенной ряд может не сходиться равномерно в круге сходимости.

6.2. Свойства равномерно сходящихся рядов

Рассмотрим произвольный комплексный функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$. Через $S(z)$, $S_n(z)$, $R_n(z)$ обозначим соответственно сумму этого ряда (определенную в области сходимости этого ряда), его n -ю частичную сумму и n -й остаток.

Теорема 6.4. Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ непрерывны на множестве M , а сам ряд сходится на этом множестве равномерно, то сумма $S(z)$ этого ряда также будет непрерывной на M .

◀ Выберем произвольную точку $z \in M$. Согласно определению 3.2 непрерывности функции комплексного переменного, надо доказать, что разность $S(z + \Delta z) - S(z)$ является бесконечно малой при $\Delta z \rightarrow 0$. Используя n -й остаток функционального ряда, запишем его сумму в виде $S(z) = S_n(z) + R_n(z)$. Для любого Δz , удовлетворяющего условию $z + \Delta z \in M$, имеем

$$S(z + \Delta z) - S(z) = S_n(z + \Delta z) - S_n(z) + R_n(z + \Delta z) - R_n(z).$$

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости ряда на множестве M найдется такой номер $n^* \in \mathbb{N}$, что при всех $n > n^*$ и $z + \Delta z \in M$ выполняются неравенства $|R_n(z)| < \varepsilon/3$ и $|R_n(z + \Delta z)| < \varepsilon/3$. В силу непрерывности функции $S_n(z)$ как суммы непрерывных функций $f_1(z), \dots, f_n(z)$ существует такое $\delta > 0$, что при $|\Delta z| < \delta$ имеем $|S_n(z + \Delta z) - S_n(z)| < \varepsilon/3$. При таких Δz получаем

$$\begin{aligned} |S(z + \Delta z) - S(z)| &\leq |S_n(z + \Delta z) - S_n(z)| + \\ &+ |R_n(z + \Delta z)| + |R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

что означает непрерывность $S(z)$ в произвольно выбранной точке $z \in M$. ►

Теорема 6.5. Пусть все члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ непрерывны на некоторой кусочно гладкой дуге γ и этот ряд сходится на дуге γ равномерно. Тогда этот ряд можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int_{\gamma} S(z) dz = \int_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz. \quad (6.6)$$

◀ В силу теоремы 6.4 сумма $S(z)$ равномерно сходящегося функционального ряда, составленного из непрерывных функций, непрерывна на дуге γ . Поэтому интеграл от функции $S(z)$ по дуге γ существует (см. 5.1). Пусть σ_n — частичная сумма ряда, стоящего в правой части (6.6), т.е.

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n \int_{\gamma} f_k(z) dz.$$

Согласно свойству линейности интеграла (см. 5.1), имеем

$$\int_{\gamma} S(z) dz - \sigma_n = \int_{\gamma} (S(z) - S_n(z)) dz = \int_{\gamma} R_n(z) dz.$$

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости функционального ряда на дуге γ можно найти такой номер $n^* \in \mathbb{N}$, что при всех $n > n^*$ и $z \in \gamma$ будет выполнено неравенство $|R_n(z)| \leq \varepsilon / (2l_{\gamma})$, где l_{γ} — длина дуги γ . Используя оценку интеграла (см. 5.1), получаем

$$\rho_n = \left| \int_{\gamma} S(z) dz - \sigma_n \right| = \left| \int_{\gamma} R_n(z) dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{2l_{\gamma}} \cdot l_{\gamma} < \varepsilon. \quad (6.7)$$

Итак, $\rho_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Стало быть, из (6.7) следует, что

$$\int_{\gamma} S(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_{\gamma} f_k(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_k(z) dz,$$

что доказывает утверждение теоремы. ►

Теорема 6.6. Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ являются аналитическими функциями в области D и этот ряд сходится равномерно внутри D , то справедливы утверждения:

1) сумма $S(z)$ этого ряда является аналитической функцией в области D ;

2) функциональный ряд можно дифференцировать почленно в области D любое число раз, т.е. для любого $k \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \quad z \in D; \quad (6.8)$$

3) ряд в правой части (6.8) сходится равномерно внутри D .

◀ Рассмотрим произвольную точку $z_0 \in D$. Выберем число $r > 0$ настолько малое, что замкнутый круг $|z - z_0| \leq r$ будет целиком попадать в область D . Обозначим через U_r открытый круг $|z - z_0| < r$. Рассматриваемый функциональный ряд сходится равномерно в U_r . Поэтому в силу теоремы 6.4 его сумма $S(z)$ непрерывна в U_r и ее можно интегрировать по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в U_r . Согласно теореме 6.5, функциональный ряд можно почленно интегрировать вдоль любого замкнутого кусочно гладкого контура $\gamma \subset U_r$, т.е.

$$\oint_{\gamma} S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\gamma} f_n(z) dz. \quad (6.9)$$

Но так как все члены ряда — аналитические функции в U_r , по теореме Коши для односвязной области все слагаемые ряда в правой части равенства равны нулю (см. замечание 5.1).

Следовательно, интеграл от суммы ряда вдоль любого кусочно гладкого замкнутого контура $\gamma \subset U_r$ также равен нулю. Согласно *теореме Мореры*, функция $S(z)$ является аналитической в круге U_r , или, другими словами, в окрестности точки $z_0 \in D$. Так как эта точка была выбрана произвольно, то $S(z)$ аналитична в D . Тем самым доказано первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения теоремы снова выберем произвольную точку $z_0 \in D$ и круг U_r , целиком лежащий в D вместе со своей границей. Для любого натурального числа k в силу теоремы 5.9 верны равенства

$$\begin{cases} S^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_L \frac{S(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}}, \\ f_n^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_L \frac{f_n(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}}, \end{cases} \quad (6.10)$$

где в качестве контура L , окружающего точку z_0 , можно взять окружность $|z - z_0| = r$. В то же время

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \frac{S(z)}{(z - z_0)^{k+1}},$$

причем ряд слева сходится равномерно на контуре L , так как этот ряд получается умножением функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ на функцию $\frac{1}{(z - z_0)^{k+1}}$. Интегрируя ряд почленно вдоль L , получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \oint_L \frac{f_n(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}} = \oint_L \frac{S(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}}.$$

Учитывая равенства (6.10), заключаем, что равенство (6.8) верно в точке $z = z_0$. Но так как точка $z_0 \in D$ может быть выбрана произвольно, равенство (6.8) верно всюду в D .

Третье утверждение теоремы заключается в том, что функциональный ряд (6.8) сходится равномерно на любом ограниченном замкнутом подмножестве K области D . Для этого достаточно доказать, что он сходится равномерно в любом замкнутом круге $|z - z_0| \leq r$, целиком лежащем в D . Действительно, ограниченные замкнутые множества в \mathbb{C} являются компактными множествами [I-5.5]. Пусть $K \subset D$ — компактное множество. Для каждой точки $z \in K$ выберем окрестность $U_z = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r_z\}$, целиком принадлежащую D вместе со своей границей. Такие окрестности в совокупности образуют открытое покрытие компактного множества K . Согласно определению компактного множества, из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, т.е. такой конечный набор окрестностей U_1, \dots, U_m , объединение которых включает в себя множество K . Если функциональный ряд (6.8) сходится равномерно в каждой окрестности U_i , то он сходится равномерно и на их конечном объединении $U_1 \cup \dots \cup U_m$. Следовательно, он сходится равномерно и на множестве K .

Итак, выберем произвольную точку $z_0 \in D$ и замкнутый круг $U_r = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| \leq r\}$ целиком попадающий в область D . Выберем чуть больший круг $|z - z_0| \leq \rho$ ($\rho > r$), также целиком попадающий в D . Зафиксировав натуральное число k , оценим остаток $R_n^{(k)}(z)$ ряда (6.8) в замкнутом круге U_r . Так как функциональный ряд $\sum_{m=n+1}^{\infty} f_m(z)$ сходится равномерно в U_r , то при $z \in U_r$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{k!}{2\pi i} \oint_L \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{f_m(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta &= \frac{k!}{2\pi i} \oint_L \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{f_m(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \\ &= \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \oint_L \frac{f_m(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \sum_{m=n+1}^{\infty} f_m^{(k)}(z) = R_n^{(k)}(z), \end{aligned}$$

где в качестве контура L выбрана окружность $|z - z_0| = \rho$.

Поэтому, учитывая, что $|\zeta - z| \geq \rho - r$ при $\zeta \in L$ и $z \in U_r$, а также используя оценку интеграла (см. 5.1), получаем

$$\begin{aligned} |R_n^{(k)}(z)| &\leq \frac{k!}{2\pi} \oint_L \frac{\left| \sum_{m=n+1}^{\infty} f_m(\zeta) \right|}{|\zeta - z|^{k+1}} dl \leq \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \oint_L \frac{|R_n(\zeta)|}{(\rho - r)^{k+1}} dl = \frac{k!}{2\pi(\rho - r)^{k+1}} \oint_L |R_n(\zeta)| dl, \end{aligned}$$

где $R_n(\zeta) = \sum_{m=n+1}^{\infty} f_m(\zeta)$ — n -й остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

По условию теоремы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно внутри D , а значит, и на контуре L . Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ будем иметь $|R_n(\zeta)| < \varepsilon$, $\zeta \in L$. Но это значит, что при $n > N(\varepsilon)$ и $z \in U_r$ верны неравенства

$$\begin{aligned} |R_n^{(k)}(z)| &\leq \frac{k!}{2\pi(\rho - r)^{k+1}} \oint_L |R_n(\zeta)| dl < \\ &< \frac{k! 2\pi \rho}{2\pi(\rho - r)^{k+1}} \varepsilon = \frac{k! \rho}{(\rho - r)^{k+1}} \varepsilon. \end{aligned}$$

Неравенства показывают, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно в замкнутом круге U_r . Это завершает доказательство третьего утверждения теоремы. ►

Следствие 6.1. Сумма степенного ряда является аналитической функцией в круге его сходимости. Степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз в круге сходимости, а также интегрировать по любой кусочно гладкой кривой, целиком лежащей в круге сходимости.

◀ Согласно теореме 6.3, степенной ряд сходится равномерно внутри своего круга сходимости. Поэтому для степенного ряда в круге сходимости верны теоремы 6.5 и 6.6. ►

6.3. Ряд Тейлора

Одной из основных в теории функций комплексного переменного является теорема о представлении *аналитической функции* суммой степенного ряда.

Теорема 6.7. Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$, то она представима в виде суммы степенного ряда:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R. \quad (6.11)$$

◀ Пусть z — произвольная точка круга $|z - z_0| < R$. Выберем число r так, что $r < R$ и круг $|z - z_0| < r$ содержит выбранную точку z . Обозначим через L окружность $|z - z_0| = r$ (рис. 6.1). Так как функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < r$ и на его границе L , то, согласно *интегральной формуле Коши*, верно равенство

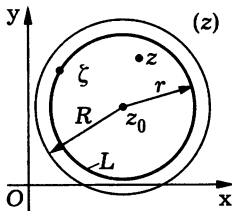


Рис. 6.1

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (6.12)$$

Чтобы представить значение функции $f(z)$ в точке z как сумму ряда, разложим в ряд правую часть равенства (6.12). С этой целью преобразуем выражение $1/(\zeta - z)$ следующим образом:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

Для фиксированной точки z при $\zeta \in L$ имеем

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{r} < 1,$$

так как $|z - z_0| < r$ согласно выбору числа r . Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}},$$

поскольку ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем q , по модулю меньшим единицы. Таким образом, при $\zeta \in L$ имеем

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \quad (6.13)$$

Отметим, что функциональный ряд в равенстве (6.13) справа (при фиксированном z он зависит от переменного $\zeta \in L$) имеет мажоранту:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{r^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r} (q^*)^n,$$

где $q^* = |z - z_0|/r < 1$. Поэтому, согласно *признаку Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда*, этот ряд сходится на L равномерно. В силу утверждения 6.1 равномерная сходимость не будет нарушена, если все члены ряда умножить на непрерывную (значит, ограниченную на L) функцию. Учитывая это, подставим представление (6.13) в (6.12) и проинтегрируем почленно. В результате получим

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} f(\zeta) d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Обозначив

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad (6.15)$$

из (6.14) получим (6.11). ►

Определение 6.4. Степенной ряд (6.11), коэффициенты которого находят по формулам (6.15), называют *рядом Тейлора для функции $f(z)$ комплексного переменного z* по степеням $z - z_0$ (или с *центром разложения* в точке z_0). При этом c_n в (6.11) называют *коэффициентами Тейлора* для функции комплексного переменного. Представление функции ее рядом Тейлора называют *разложением этой функции в ряд Тейлора*

Сравнивая (6.15) для вычисления коэффициентов c_n с формулой (5.36) для n -й производной аналитической функции, устанавливаем, что

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.16)$$

Отметим, что, хотя формулы (6.15) для вычисления коэффициентов Тейлора допускают свободу в выборе контура интегрирования, сами коэффициенты от выбора контура не зависят. С одной стороны, это следует из формул (6.16), а с другой стороны, это согласуется с теоремой Коши для многосвязной области. В качестве контура интегрирования естественно выбрать контур простого вида, например окружность с центром в точке z_0 .

Теорема 6.8. Всякий степенной ряд, имеющий положительный радиус сходимости, является рядом Тейлора своей суммы.

◀ Согласно следствию 6.1, сумма $S(z)$ степенного ряда $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$ является аналитической функцией в круге сходимости, а сам ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, т.е.

$$\begin{aligned} S^{(k)}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} [c_n(z - z_0)^n]^{(k)} = \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)\dots(n-k+1)(z - z_0)^{n-k}. \end{aligned}$$

Полагая в этих равенствах $z = z_0$, находим

$$S^{(k)}(z_0) = c_k k!,$$

так как в этом случае все члены ряда, кроме первого, обнуляются. Таким образом, коэффициенты степенного ряда вычисляются через производные суммы этого ряда по формулам (6.16). Значит, степенной ряд есть ряд Тейлора своей суммы. ►

Следствие 6.2. Если аналитическая функция в окрестности точки z_0 имеет представление в виде степенного ряда по степеням $z - z_0$, то это представление единственно.

◀ Если функция $f(z)$ есть сумма степенного ряда по степеням $z - z_0$ в окрестности точки z_0 , то этот ряд, согласно теореме 6.8, является рядом Тейлора функции $f(z)$. ►

Теорема 6.9. Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутом круге $|z - z_0| \leq r$ и на границе $L: |z - z_0| = r$ этого круга удовлетворяет неравенству $|f(z)| \leq A$. Тогда коэффициенты ряда Тейлора функции $f(z)$ с центром в точке z_0 удовлетворяют неравенствам

$$|c_n| \leq \frac{A}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.17)$$

◀ Учитывая, что $|\zeta - z_0| = r$ при $\zeta \in L$, и используя оценку интеграла (см. 5.1), из (6.15) получаем

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{A}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{A}{r^n}. \quad \blacktriangleright$$

Неравенства (6.17) называют **неравенствами Коши**. Из них вытекает следующая интересная теорема, носящее имя французского математика Ж. Лиувилля (1809–1882).

Теорема 6.10 (теорема Лиувилля). Целая функция, ограниченная на всей плоскости, постоянна.

◀ Пусть $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости и удовлетворяет неравенству $f(z) \leq A$, $z \in \mathbb{C}$. По теореме 6.7 она представима всюду в комплексной плоскости своим рядом Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Согласно теореме 6.9, в любом замкнутом круге $|z| \leq R$ для коэффициентов c_n ряда Тейлора функции $f(z)$ верны неравенства Коши $|c_n| \leq \frac{A}{R^n}$, $n = 0, 1, \dots$. Так как в этих неравенствах число R можно выбрать произвольно, заключаем, что $|c_n| = 0$ при $n = 1, 2, \dots$. Действительно, за счет выбора R правую часть этих неравенств при $n > 0$ можно сделать сколь угодно малой. Итак, все коэффициенты Тейлора, начиная с первого, равны нулю, а функция тождественно равна нулевому коэффициенту Тейлора, т.е. постоянна. ►

6.4. Разложение функций в ряд Тейлора

Согласно теореме 6.7, функцию $f(z)$, аналитическую в точке z_0 , а стало быть, и в некоторой окрестности этой точки, можно разложить в ряд Тейлора (6.11) по степеням $z - z_0$, причем коэффициенты этого ряда можно найти из (6.15) или (6.16).

В качестве окрестности точки z_0 можно взять любой круг с центром в точке z_0 , в котором функция остается аналитической. Естественно радиус такого круга выбирать максимально большим. Оказывается, максимальный радиус R равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей точки, в которой функция не определена или теряет аналитичность (особой точки функции). Действительно, если R — наименьшее расстояние от z_0 до особых точек, то в круге $|z - z_0| < R$ функция аналитична, а потому имеет разложение в ряд Тейлора. На окружности $|z - z_0| = R$ есть особые точки. Значит, в круге $|z - z_0| < R'$, где $R' > R$, представить функцию рядом Тейлора уже нельзя, так

как функция аналитична в круге сходимости своего ряда Тейлора. Следовательно, R есть радиус сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$.

Эти соображения показывают, что определять круг сходимости ряда Тейлора можно, анализируя особые точки аналитической функции. Разумеется, возможно и непосредственное исследование ряда Тейлора на сходимость, но первый способ во многих случаях проще второго. Например, многие применяемые на практике функции являются элементарными, т.е. определяются с помощью ограниченного круга основных элементарных функций и арифметических операций. Для таких функций можно выделить особые точки, опираясь на следующие положения:

- основные элементарные функции (многочлены, показательная функция, тригонометрические и гиперболические функции и др.) являются аналитическими функциями в своей области определения;
- сумма, разность, произведение двух аналитических функций являются аналитическими функциями в тех точках, в которых аналитичны обе функции;
- частное двух аналитических функций является аналитической функцией в тех точках, в которых и числитель, и знаменатель аналитичны, причем знаменатель не обращается в нуль;
- композиция аналитических функций является аналитической функцией.

Набор подобных положений можно было бы продолжить.

Отметим, что изложенный способ определения радиуса сходимости ряда Тейлора не применим для функций действительного переменного. Например, функция $f(x) = 1/(1+x^2)$ действительного переменного не имеет особых точек и, опираясь на сказанное выше, можно было бы сделать вывод, что ее ряд Тейлора по степеням x сходится на всей числовой оси. Однако это не так: непосредственное исследование ряда Тейлора показывает, что его радиус сходимости равен единице.

В комплексном случае функция $f(z) = 1/(1+z^2)$, как частное двух многочленов $\varphi(z) \equiv 1$ и $\psi(z) = 1+z^2$, является аналитической всюду в комплексной плоскости, кроме точек $z = \pm i$, в которых обращается в нуль знаменатель $\psi(z)$. Эти точки для функции $f(z)$ особые, так как в них функция не является непрерывной. Расстояние от точки $z = 0$ до любой из двух особых точек $z = \pm i$ равно единице. Поэтому радиус сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$ с центром в точке $z = 0$ равен единице. К тому же результату приводит и непосредственное исследование степенного ряда, например, с помощью признака Коши.

Пример 6.2. Найдем первые три члена разложения в ряд Тейлора функции $f(z) = e^{1/(1-z)}$ по степеням z , т.е. с центром разложения в точке $z_0 = 0$. Коэффициенты Тейлора вычислим, используя (6.16):

$$c_0 = f(z_0) = f(0) = e^{1/(1-z)} \Big|_{z=0} = e,$$

$$c_1 = f'(z_0) = f'(0) = \frac{e^{1/(1-z)}}{(1-z)^2} \Big|_{z=0} = e,$$

$$c_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{e^{1/(1-z)}}{2} \left(\frac{1}{(1-z)^4} + \frac{2}{(1-z)^3} \right) \Big|_{z=0} = \frac{3e}{2}.$$

Итак, $e^{1/(1-z)} = e + ez + 3ez/2 + \dots$. Единственная особая точка функции $f(z)$ есть $z = 1$. Стало быть, радиус сходимости ряда Тейлора в данном случае $R = 1$. #

Нахождение коэффициентов Тейлора при помощи (6.15) или (6.16) не очень удобно, ибо требует вычисления либо интегралов, либо производных. В силу следствия 6.2 о единственности разложения аналитической функции в степенной ряд, который обязательно будет рядом Тейлора, для нахождения коэффициентов такого разложения можно использовать и другие пути, поскольку все они должны привести к одинаковому результату.

Для целых функций e^z , $\cos z$ и $\sin z$ имеем следующие разложения, сходящиеся на всей комплексной плоскости:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (6.18)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad (6.19)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (6.20)$$

Указанные функции были введены в **3.3** именно как суммы степенных рядов, стоящих справа.

Ряды в представлениях (6.18)–(6.20) можно рассматривать как ряды, полученные из разложений элементарных функций e^x , $\sin x$, $\cos x$ действительного переменного путем замены действительного переменного комплексным. В результате такой замены мы получаем комплексные ряды, сходящиеся во всей комплексной плоскости. Суммы этих рядов являются аналитическими функциями и при действительных значениях комплексного переменного совпадают с указанными выше элементарными функциями. Поэтому эти суммы являются аналитическими продолжениями элементарных функций действительного переменного в комплексную плоскость, причем эти продолжения единственны в силу теоремы единственности. Таким образом, формальное определение функций e^z , $\sin z$, $\cos z$, данное в **3.3**, оказывается самым естественным, если мы хотим, чтобы такое распространение функций действительного переменного на комплексное переменное сохраняло свойство дифференцируемости.

Итак, разложения в ряд Тейлора функций комплексного переменного можно получать из известных разложений функций действительного переменного простой заменой аргумента. С

учетом этого можно записать

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}; \quad (6.21)$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}; \quad (6.22)$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1; \quad (6.23)$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + \dots + (-1)^n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1. \quad (6.24)$$

Так как *ветвь* $\ln(1+z)$ *многозначной функции* $w = \operatorname{Ln}(1+z)$ при действительных значениях $z = x$ совпадает с функцией действительного переменного $\ln(1+x)$, разложение в степенной ряд которой известно [IX], получаем

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1. \quad (6.25)$$

Аналогично

$$(1+z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots, \quad |z| < 1. \quad (6.26)$$

С помощью стандартных разложений можно получить ряд Тейлора для многих элементарных функций. Приемы получения разложений повторяют те, которые применяются в действительном случае (см., например, [IX]). К таким приемам можно отнести замену в стандартном разложении переменного z на его некоторую целую степень, почленное дифференцирование и интегрирование стандартного разложения внутри круга сходимости, а также арифметические операции над степенными рядами.

Пример 6.3. Разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функцию $1/(1-z)^2$ и найдем область сходимости полученного разложения. Если в (6.26) положить $\alpha = -2$ и вместо z подставить $-z$, то можно написать

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^2} &= (1+(-z))^{-2} = 1 + \frac{-2}{1!}(-z) + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-z)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{(-2)(-2-1)\dots(-2-n+1)}{n!}(-z)^n + \dots, \quad |-z| < 1. \end{aligned}$$

После упрощения окончательно получаем

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, \quad |z| < 1. \quad (6.27)$$

Пример 6.4. Разложим в ряд Тейлора по степеням z функцию $1/(4-z^2)$ и найдем область сходимости полученного разложения. Используя стандартное разложение (6.23), запишем

$$\frac{1}{4-z^2} = \frac{1/4}{1-z^2/4} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^{n+1}}.$$

Поскольку в (6.23) z было заменено на $z^2/4$, то полученное разложение сходится при условии $|z^2/4| < 1$, т.е. в круге $|z| < 2$. Итак, имеем

$$\frac{1}{4-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^{n+1}}, \quad |z| < 2. \quad (6.28)$$

Пример 6.5. Найдем ряд Тейлора с центром в точке $z = 0$ для функции

$$f(z) = \frac{1}{(1-z^2)(z^2+16)}.$$

Представим эту функцию в виде

$$f(z) = \frac{1}{17} \left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{z^2+16} \right) = \frac{1}{17} \left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1/16}{1+z^2/16} \right).$$

Применяя стандартные разложения (6.23) и (6.24) и складывая почленно полученные степенные ряды, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z^2)(z^2+16)} &= \frac{1}{17} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{16^{n+1}} \right) = \\ &= \frac{1}{17} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{16^{n+1}} \right) z^{2n}. \end{aligned}$$

Этот ряд имеет круг сходимости с центром в точке $z = 0$ радиуса 1, равного расстоянию от точки $z = 0$ до ближайшей особой точки ($z = \pm 1$). Этот же ответ можно получить, определяя общую часть кругов сходимости двух складываемых рядов. Разложение для функции $1/(1+z^2)$ имеет радиус сходимости $R_1 = 1$ (находится из неравенства $|z^2| < 1$), а разложение для функции $1/(1+z^2/16)$ имеет радиус сходимости $R_2 = 4$ (находится из неравенства $|z^2/16| < 1$). В качестве радиуса сходимости суммы этих разложений следует взять наименьший, т.е. R_1 .

Итак,

$$\frac{1}{(1-z^2)(z^2+16)} = \frac{1}{17} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{16^{n+1}} \right) z^{2n}, \quad |z| < 1. \quad (6.29)$$

Пример 6.6. Найдем разложение функции $e^z \cos z$ в степенной ряд в окрестности точки $z = 0$. Это разложение можно получить как *произведение абсолютно сходящихся* на всей комплексной плоскости рядов (6.18) и (6.19). Однако вычислять коэффициенты произведения рядов сложно, и мы применим другой метод. Согласно (3.22), верно тождество

$$e^z \cos z = e^z \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{(1+i)z} + e^{(1-i)z}}{2}.$$

Поскольку $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ и $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, то, учитывая разложение (6.18), имеем для любого $z \in \mathbb{C}$

$$e^{(1+i)z} = e^{\sqrt{2}ze^{i\pi/4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \frac{e^{in\pi/4}}{n!} z^n,$$

$$e^{(1-i)z} = e^{\sqrt{2}ze^{-i\pi/4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \frac{e^{-in\pi/4}}{n!} z^n.$$

Окончательно, еще раз используя (3.22), получаем разложение

$$e^z \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \frac{e^{in\pi/4} + e^{-in\pi/4}}{2n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{n!} z^n, \quad (6.30)$$

сходящееся на всей комплексной плоскости (z) (и в частности, в любой окрестности точки $z = 0$). #

Приведенные примеры показывают, что при разложении функции в ряд часто полезно при помощи тождественных преобразований представить функцию в виде, удобном для применения того или иного стандартного разложения. Стандартные разложения применяют, учитывая замену переменного z соответствующими выражениями. Затем, как правило, необходимо собрать подобные члены разложения по степеням $z - z_0$ и упростить коэффициенты разложения. Наконец, находят область сходимости полученного разложения, исходя из известных областей сходимости стандартных разложений или проводя непосредственное исследование полученного разложения.

6.5. Ряд Лорана

Ряды Тейлора представляют аналитические функции в кругах комплексной плоскости (z). Перейдем к более общему случаю двусторонних рядов, содержащих как положительные, так и отрицательные степени $z - z_0$. Такие ряды представляют аналитические функции в концентрических кольцах $r < |z - z_0| < R$. Особенно важны разложения в кольцах с нулевым внутренним радиусом r . Возможность таких разложений устанавливает теорема, доказанная в 1843 г. французским математиком и военным инженером П.А. Лораном (1813–1854).

Теорема 6.11 (теорема Лорана). Любую функцию $f(z)$, аналитическую в кольце $r < |z - z_0| < R$, можно в этом кольце представить суммой сходящегося ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (6.31)$$

с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6.32)$$

где L — окружность $|z - z_0| = \rho$ ($r < \rho < R$).

◀ Выберем два параметра r_1 и R_1 так, чтобы $r < r_1 < R_1 < R$, и рассмотрим в кольце $r_1 < |z - z_0| < R_1$ произвольную точку z (рис. 6.2). Обозначим внешнюю границу $|z - z_0| = R_1$ кольца через L_1 , а внутреннюю границу $|z - z_0| = r_1$ — через L_2 . Окружим точку z простым кусочно гладким контуром L_* , который вместе с внутренностью целиком лежит внутри построенного кольца $r_1 < |z - z_0| < R_1$.

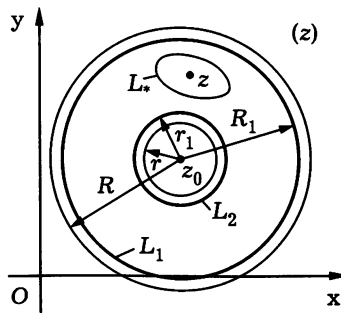


Рис. 6.2

Функция $f(\zeta)/(\zeta - z)$ является аналитической в трехсвязной области, ограниченной составным контуром: внешним L_1 и внутренними L_* и L_2 . Из теоремы Коши для многосвязной

области следует, что

$$\oint_{L_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \oint_{L_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \oint_{L_*} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Но в силу интегральной формулы (5.24) Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{L_*} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f(z).$$

В результате получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (6.33)$$

Если $\zeta \in L_1$, то $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$, а значит, $|z - z_0|/|\zeta - z_0| < 1$. Поэтому, согласно (6.13),

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Полученный ряд сходится на L_1 равномерно, так как имеет мажоранту — сходящуюся геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$. Его равномерная сходимость не будет нарушена после умножения на ограниченную по модулю на контуре L_1 функцию $f(\zeta)/(2\pi i)$ (см. утверждение 6.1). Подставляя разложение функции $1/(\zeta - z)$ в первое слагаемое правой части равенства (6.33) и интегрируя почленно (это возможно в силу теоремы 6.5), находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} C'_n (z - z_0)^n. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Коэффициенты ряда в правой части (6.34) равны

$$C'_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.35)$$

Если же $\zeta \in L_2$, то $|z - z_0| > |\zeta - z_0|$ и $|\zeta - z_0|/|z - z_0| < 1$. В этом случае, учитывая стандартное разложение (6.24), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \\ &= -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n. \end{aligned}$$

Этот ряд сходится на L_2 равномерно, так как его *мажорантой* является сходящаяся геометрическая прогрессия со знаменателем $q^* = \frac{|\zeta - z_0|}{|z - z_0|} < 1$. Поэтому аналогично (6.34) можно записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{L_2} \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n d\zeta = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{L_2} f(\zeta) (\zeta - z_0)^n d\zeta\right). \end{aligned}$$

Изменив в найденной сумме индекс суммирования, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} (z - z_0)^n \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{L_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right) = \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} C''_n (z - z_0)^n. \quad (6.36) \end{aligned}$$

Коэффициенты ряда в правой части (6.36) равны

$$C''_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n = -1, -2, -3, \dots \quad (6.37)$$

Подставляя в (6.33) разложения (6.34) и (6.36), получаем представление (6.31), в котором коэффициенты вычисляются по формулам (6.35) и (6.37). В этих формулах использованы разные контуры интегрирования. Но в силу теоремы Коши для многосвязной области интегралы в правых частях (6.35) и (6.37) не изменят своего значения, если контур интегрирования заменить на произвольную окружность $|z - z_0| = \rho$, где $r_1 \leq \rho \leq R_1$. Поэтому полученные формулы для коэффициентов равносильны формулам (6.32).

Наконец, отметим, что разложение функции получено в кольце $r_1 < |z - z_0| < R_1$. Но так как параметры r_1 и R_1 выбирались произвольным образом, полученное представление функции будет верным во всем кольце $r < |z - z_0| < R$, а в качестве радиуса ρ контура интегрирования в формулах для коэффициентов можно взять любое число между r и R . ►

Определение 6.5. Ряд (6.31), коэффициенты которого вычислены по формулам (6.32), называют *рядом Лорана* функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$ (или с центром в точке z_0).

Рассмотрим в отдельности те два ряда, из которых состоит ряд Лорана (6.31) функции $f(z)$ в кольце $r < |z - z_0| < R$. Первый ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ — это ряд по неотрицательным степеням $z - z_0$, а второй ряд $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z - z_0)^n$ содержит отрицательные степени $z - z_0$. Оба ряда сходятся в каждой точке z внутри рассматриваемого кольца (см. 2.5). При этом первый ряд, как обыкновенный степенной ряд, сходится не только в кольце, но и в круге $|z - z_0| < R$. Согласно следствию 6.1, его сумма является аналитической функцией в круге $|z - z_0| < R$. Этот ряд, состоящий из неотрицательных степеней ряда Лорана, будем называть *правильной частью ряда Лорана*.

Второй ряд $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z - z_0)^n$ также можно преобразовать в степенной ряд (см. 2.5), полагая $c_{-n} = b_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и

$1/(z - z_0) = w$. Преобразованный ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$, он сходится в круге $|w| < 1/r$. Сумма этого ряда — аналитическая в этом круге функция. Следовательно, исходный ряд $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится в области $|z - z_0| > r$, а его сумма является аналитической функцией в этой области. Этот ряд, содержащий отрицательные степени ряда Лорана, будем называть **главной частью ряда Лорана**.

Итак, функция $f(z)$, аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$, представима в виде

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

где $f_1(z)$ аналитична в области $|z - z_0| < R$, а $f_2(z)$ аналитична в области $|z - z_0| > r$. Кольцо $r < |z - z_0| < R$ является пересечением областей аналитичности функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$.

Говорят, что двусторонний степенной ряд сходится абсолютно в точке z , если в этой точке абсолютно сходятся оба составляющих его ряда. Аналогично двусторонний степенной ряд сходится равномерно на множестве M , если на этом множестве равномерно сходятся оба составляющих его ряда. Согласно этим определениям можно сделать следующие выводы:

1) ряд Лорана функции, являющейся аналитической в кольце $r < |z - z_0| < R$, сходится абсолютно в этом кольце;

2) ряд Лорана аналитической в кольце $r < |z - z_0| < R$ функции сходится равномерно внутри этого кольца (т.е. равномерно на любом замкнутом ограниченном множестве, целиком лежащем в кольце), в частности, он сходится равномерно в любом замкнутом кольце $r_1 \leq |z - z_0| \leq R_1$, где $r < r_1 \leq R_1 < R$.

Определение равномерно сходящегося двустороннего ряда позволяет на такие ряды перенести теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании. Поэтому ряд Лорана можно почленно дифференцировать внутри кольца сходимости любое число раз и можно почленно интегрировать по любой дуге

в кольце сходимости. Эти операции фактически сводятся к их отдельному выполнению для правильной и главной частей ряда Лорана.

Наконец, подчеркнем, что функция разлагается в ряд Лорана в любом кольце, в котором она аналитична. В качестве такого кольца можно взять максимально возможное кольцо с центром в заданной точке z_0 , в котором сохраняется аналитичность функции. Рассуждая так же, как и в случае ряда Тейлора, заключаем, что и на внешней границе максимального кольца, и на его внутренней границе есть хотя бы одна особая точка функции, причем особые точки на внешней границе кольца — это особые точки суммы правильной части ряда Лорана, а особые точки на внутренней границе относятся к сумме главной части ряда Лорана.

Отметим, что радиусы r и R , определяющие кольцо, внутри которого сходится ряд Лорана, могут принимать, в частности, следующие значения:

- 1) $r = 0$, $R < \infty$ (в этом случае имеем круг с выколотым центром — точкой z_0 , т.е. проколотую окрестность этой точки);
- 2) $r = 0$, $R = \infty$ (ряд Лорана сходится во всей комплексной плоскости, за исключением точки z_0);
- 3) $0 < r < \infty$, $R = \infty$ (в этом случае кольцом сходимости ряда Лорана является *внешность окружности* $|z - z_0| = r$).

Теорема 6.12. Всякий сходящийся двусторонний степенной ряд является рядом Лорана своей суммы.

◀ Пусть ряд $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ сходится в кольце $r < |z - z_0| < R$ и его сумма равна $S(z)$:

$$S(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n. \quad (6.38)$$

Тогда

$$\frac{S(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n-k-1}. \quad (6.39)$$

Рассмотрим контур L : $|z-z_0| = \rho$, где $r < \rho < R$. На этом контуре ряд в (6.39) справа сходится равномерно (он сходится равномерно на любом замкнутом ограниченном подмножестве рассматриваемого кольца). Поэтому равенство (6.39) можно проинтегрировать по контуру L почленно:

$$\oint_L \frac{S(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oint_L c_n (z-z_0)^{n-k+1} dz.$$

Из результатов примера 5.4 имеем

$$\oint_L (z-z_0)^{n-k-1} dz = \begin{cases} 0, & n \neq k; \\ 2\pi i, & n = k. \end{cases}$$

Значит,

$$\oint_L \frac{S(z) dz}{(z-z_0)^{k+1}} = 2\pi i c_k,$$

т.е. коэффициенты в (6.38) совпадают с коэффициентами ряда Лорана, вычисляемыми по формулам (6.32). ►

Формулы (6.32) для вычисления коэффициентов ряда Лорана, как формулы (6.15) для вычисления коэффициентов ряда Тейлора, на практике используют редко, ибо эти формулы требуют вычисления *контурных интегралов*. Доказанная теорема фактически означает, что разложение функции в ряд Лорана единственно. Поэтому для определения коэффициентов ряда Лорана можно использовать и другие приемы — результат в любом случае будет один и тот же.

Для коэффициентов ряда Лорана верны *неравенства Коши*, которые выше мы установили для коэффициентов Тейлора

(см. теорему 6.9). При этом сохраняется не только вид этих неравенств, но и процедура их вывода.

Теорема 6.13. Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z - z_0| < R$, а ее модуль на окружности $|z - z_0| = \rho$ ($r < \rho < R$) не превосходит числа $A > 0$. Тогда коэффициенты ряда Лорана этой функции удовлетворяют неравенствам

$$|c_n| \leq \frac{A}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6.40)$$

Пример 6.7. Найдем разложение в ряд Лорана по степеням z для функции $f(z) = \cos^2(1/z)$. Эта функция является аналитической всюду на комплексной плоскости (z), за исключением точки $z = 0$, т.е. в вырожденном кольце $0 < |z| < \infty$, для которого $r = 0$, $R = \infty$. Чтобы воспользоваться стандартным разложением, представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \cos^2 \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2}{z} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2}{z}.$$

Используя разложение (6.19), в котором переменное z заменено на $2/z$, получаем

$$\cos^2 \frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{2}{z} \right)^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)! z^{2n}}, \quad |z| > 0.$$

Пример 6.8. Найдем разложение в ряд Лорана функции $f(z) = e^{2z}/(z-1)$ по степеням $z-1$. Эта функция является аналитической в кольце $|z-1| > 0$. Представим ее в виде

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{z-1} = \frac{e^{2(z-1)+2}}{z-1} = \frac{e^2}{z-1} e^{2(z-1)}$$

и используем стандартное разложение (6.18) с заменой z на $2(z-1)$:

$$\frac{e^{2z}}{z-1} = \frac{e^2}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2(z-1))^n}{n!} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (z-1)^{n-1}, \quad |z-1| > 0.$$

6.6. Нахождение всевозможных разложений функции по заданным степеням

Рассмотрим задачу о разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_0$, т.е. в ряд с центром в точке z_0 . Такое разложение тесно связано с наличием и расположением особых точек функции (см. 6.4 и 6.5). На границе круга сходимости ряда Тейлора, на внутренней и внешней границах кольца сходимости ряда Лорана имеются особые точки разлагаемой в ряд функции. Упрощая задачу, будем предполагать, что функция является аналитической всюду в *комплексной плоскости*, за исключением некоторого конечного множества особых точек. Каждая такая точка имеет окрестность, в которой нет других особых точек, т.е. все эти точки являются *изолированными особыми точками*.

Через каждую изолированную особую точку функции проведем окружность с центром в заданной точке z_0 . Система этих концентрических окружностей разделит комплексную плоскость на конечное число концентрических колец, в каждом из которых рассматриваемая функция $f(z)$ аналитична. Стало быть, в каждом из этих колец, согласно *теореме Лорана*, функцию можно представить рядом Лорана. Отметим, что ряды Лорана функции $f(z)$ в разных кольцах не могут совпадать. Действительно, область сходимости ряда Лорана есть кольцо, быть может дополненное частью его границы. Между двумя концентрическими кольцами, на которые разделена комплексная плоскость, имеются особые точки функции. Если бы ряды Лорана для двух колец совпадали, то это означало бы, что один и тот же ряд сходится в обоих кольцах, а значит, и в более широком кольце, охватывающем оба исходных кольца. Такое возможно лишь в случае, когда функция не имеет особых точек между двумя рассматриваемыми кольцами, что противоречит их построению. Таким образом, одна и та же функция имеет несколько разложений Лорана, в каждом из концентрических колец — свое разложение в ряд Лорана.

Чтобы найти все разложения Лорана данной функции, рекомендуется выполнить следующие этапы.

1. Найти все особые точки функции $f(z)$.
2. Отметить на комплексной плоскости (z) центр разложения z_0 и найденные особые точки.
3. Провести окружности с центром в точке z_0 через все особые точки. При этом может случиться, что несколько особых точек будут расположены на одной окружности. Проведенные окружности разделят всю плоскость (z) на области аналитичности функции $f(z)$: круг (если точка z_0 не является для $f(z)$ особой) и концентрические кольца, внутри которых нет особых точек функции $f(z)$.
4. В каждой из полученных областей аналитичности функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Тейлора по теореме 6.7 (для самой внутренней области в случае, когда z_0 не является особой точкой) или в ряд Лорана по теореме 6.11.
5. Коэффициенты разложений в областях аналитичности проще находить с помощью стандартных разложений (см. примеры 6.2–6.6 для ряда Тейлора и примеры 6.7 и 6.8 для ряда Лорана).

Пример 6.9. Найдем все возможные разложения функции $f(z) = 1/((z-1)(z-2))$ в ряд Лорана по степеням z . Для этого на комплексной плоскости (z) отметим центр разложения $z_0 = 0$ и особые точки $z_1 = 1$ и $z_2 = 2$ функции $f(z)$ (рис. 6.3). Проведем через особые точки окружности $|z| = 1$ и $|z| = 2$. Эти окружности выделяют на плоскости (z) три кольцевые области аналитичности D_1 , D_2 и D_3 , которые описываются неравенствами $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ и $|z| > 2$ соответственно. Для удобства использования в каждой из этих

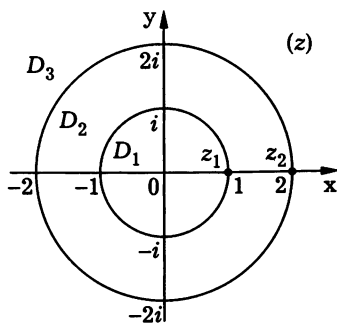


Рис. 6.3

областей стандартных разложений представим заданную функцию в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}. \quad (6.41)$$

Теперь необходимо построить разложения каждой из дробей в правой части (6.41) по степеням z . Используя стандартное разложение (6.23), для функции $1/(z-1)$ в области $|z| < 1$ получаем

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1. \quad (6.42)$$

Для той же функции в области $|z| > 1$ имеем

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad |z| > 1. \quad (6.43)$$

Аналогично находим разложения функции $1/(z-2)$ в областях $|z| < 2$ и $|z| > 2$:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad |z| < 2; \quad (6.44)$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-2/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad |z| > 2. \quad (6.45)$$

Чтобы получить разложения функции $f(z)$ в каждой из областей D_1 , D_2 и D_3 , остается, учитывая (6.41), правильно скомбинировать построенные разложения.

Для области D_1 разложение в ряд Тейлора получаем, подставляя в (6.41) разложения (6.42) и (6.44):

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \quad |z| < 1.$$

Для области D_2 используем разложения (6.43) и (6.44):

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad 1 < |z| < 2,$$

где $c_n = -1$ при $n \leq -1$ и $c_n = -1/2^{n+1}$ при $n \geq 0$. Отметим, что разложение в D_2 содержит как отрицательные, так и неотрицательные степени z .

Наконец, для области D_3 в представлении (6.41) следует использовать (6.43) и (6.45):

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 2.$$

Разложение в D_3 содержит лишь отрицательные степени z .

Пример 6.10. Найдем все разложения функции $f(z) = 1/(z(z-2))$ в ряд по степеням $z-1$. Отметив на плоскости (z) центр разложения $z_0 = 1$, особые для этой функции точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 2$ и проведя окружность $|z-1| = 1$, на которую попадают обе особые точки (рис. 6.4), получим две области D_1 и D_2 аналитичности данной функции, которые задаются неравенствами $|z-1| < 1$ и $|z-1| > 1$. Для применения стандартных разложений представим исходную функцию в виде

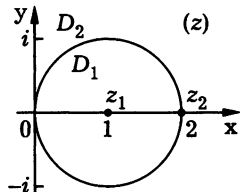


Рис. 6.4

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z} \right) = \frac{1/2}{(z-1)-1} - \frac{1/2}{(z-1)+1}. \quad (6.46)$$

Для первой дроби в правой части (6.46), используя разложение (6.23) в двух областях, получаем

$$\frac{1/2}{(z-1)-1} = -\frac{1/2}{1-(z-1)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n, \quad |z-1| < 1; \quad (6.47)$$

$$\frac{1/2}{(z-1)-1} = \frac{1/2}{z-1} \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}, \quad |z-1| > 1. \quad (6.48)$$

Аналогично находим разложения и для второй дроби в правой части (6.46), используя стандартное разложение (6.24):

$$\frac{1/2}{(z-1)+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, \quad |z-1| < 1, \quad (6.49)$$

$$\frac{1/2}{(z-1)+1} = \frac{1/2}{z-1} \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}, \quad |z-1| > 1. \quad (6.50)$$

Подставляя разложения (6.47) и (6.49) в представление (6.46), получаем разложение заданной функции в области D_1 :

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) (z-1)^n, \quad |z-1| < 1. \end{aligned}$$

Для области D_2 используем разложения (6.48) и (6.50):

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{(z-1)^{n+1}}, \quad |z-1| > 1. \end{aligned}$$

6.7. Связь ряда Лорана с рядом Фурье

Ряд Фурье для действительной функции $\varphi(t)$ действительного переменного t , интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]$, имеет вид [IX]

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (6.51)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (6.52)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.53)$$

Ряд Фурье можно представить в комплексной форме. В этом случае он имеет вид [IX]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}, \quad (6.54)$$

а его коэффициенты c_n вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-int} \, dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (6.55)$$

Рассмотрим теперь функцию $f(z)$ комплексного переменного z , аналитическую в кольце $1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В этом кольце в силу теоремы 6.11 ее можно представить рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \quad (6.56)$$

с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) \, dz}{z^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6.57)$$

где L — окружность $|z| = 1$, целиком лежащая в указанном кольце. Вводя для этой окружности параметрическое представление $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, при котором $dz = ie^{it} dt$ и $z^{n+1} = e^{i(n+1)t}$,

вместо (6.57) получим

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it}) i e^{it} dt}{e^{i(n+1)t}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6.58)$$

Сравнивая (6.54) с (6.56) при $z = e^{it}$ и (6.55) с (6.58), устанавливаем, что ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности единичной окружности L совпадает с рядом Фурье для функции $\varphi(t) = f(e^{it})$ на отрезке $[0, 2\pi]$, которая получается сужением функции $f(z)$ на единичную окружность.

Заметим, что, вообще говоря, даже в случае сходимости ряда Фурье к функции $\varphi(t)$ в каждой точке отрезка $[0, 2\pi]$ для соответствующего ряда Лорана область сходимости может оказаться пустым множеством. Иными словами, может не существовать такой аналитической на окружности $|z| = 1$ функции $f(z)$, что $f(e^{it}) = \varphi(t)$. Лишь при весьма ограничительных условиях, наложенных на функцию $\varphi(t)$, ряд Лорана, соответствующий ряду Фурье, имеет непустую область сходимости.

Пример 6.11. Найдем сумму ряда

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n!}$$

для значений $t \in [0, 2\pi]$.

Преобразуем этот ряд при помощи *формулы Эйлера* к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int} - e^{-int}}{n! 2i} = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n - z^{-n}}{n!},$$

где $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Полученный функциональный ряд фактически является двусторонним степенным рядом и сходится в кольце $0 < |z| < \infty$, содержащем окружность $|z| = 1$. Сумма этого ряда, согласно стандартному разложению (6.18), совпадает

с функцией

$$f(z) = \frac{e^z - e^{1/z}}{2i}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

Поэтому для суммы исходного ряда с учетом формулы Эйлера (3.20) получим

$$\begin{aligned} \varphi(t) = f(e^{it}) &= \frac{1}{2i}(e^{e^{it}} - e^{e^{-it}}) = \frac{1}{2i}(e^{\cos t + i \sin t} - e^{\cos t - i \sin t}) = \\ &= e^{\cos t} \frac{e^{i \sin t} - e^{-i \sin t}}{2i} = e^{\cos t} \operatorname{si} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Вопросы и задачи

6.1. Докажите, что $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$ и $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$.

6.2. Докажите следующие тождества:

$$\text{а) } \frac{2}{(1+z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)z^n, \quad |z| < 1;$$

$$\text{б) } \frac{1}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

6.3. Разложите в ряд Тейлора следующие функции в окрестности точки $z = 0$:

$$\text{а) } \frac{2z-5}{z^2-5z+6}; \quad \text{б) } \frac{1}{(z^2-1)(z^4+4)}; \quad \text{в) } \sin^4 z + \cos^4 z.$$

6.4. Разложите в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ функции:

$$\text{а) } \frac{ze^{2z}}{z-1}, \quad z_0 = 1; \quad \text{б) } \frac{z}{z-1} + \cos \frac{1}{z^2}, \quad z_0 = 0.$$

Укажите области, где справедливы эти разложения.

6.5. Разложите в ряд Лорана в указанной области функции:

$$\text{а) } \frac{z}{(z^2 - 4)(z^2 - 1)}, \quad 1 < |z| < 2; \quad \text{б) } \cos^2 \frac{1}{z}, \quad |z| > 0.$$

6.6. Разложите в ряд Тейлора по степеням ζ функции

$$\text{а) } \ln(2 - z), \quad \zeta = z; \quad \text{б) } \frac{1}{3z + 1}, \quad \zeta = z + 2; \quad \text{в) } \cos z, \quad \zeta = z + \frac{\pi}{4}.$$

Найдите радиусы сходимости полученных рядов.

6.7. Найдите все разложения по степеням $z - z_0$ функций:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{2z + 1}{z^2 + z - 2}, \quad z_0 = 0; & \text{б) } \frac{2}{z^2 - 1}, \quad z_0 = -2; \\ \text{в) } \frac{z + 2}{z^2 - 4z + 3}, \quad z_0 = 1; & \text{г) } \frac{1}{(z^2 - 4)^2}, \quad z_0 = -2. \end{array}$$

Укажите области сходимости полученных рядов.

6.8. Докажите, что если функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

является аналитической в круге $|z| < 1$, то среднее значение

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2} dz$$

функции $f(z)/z^2$ на окружности $|z| = 1$ равно a_1 .

6.9. Найдите три-четыре первых члена разложения в степенной ряд по степеням z для функций:

$$\text{а) } \frac{1}{1 + e^z}; \quad \text{б) } \frac{1}{5 + e^{-z}}; \quad \text{в) } \ln(1 + \cos z); \quad \text{г) } \ln \cos z.$$

Укажите радиусы сходимости этих рядов.

6.10. Просуммируйте в круге $|z| < 1$ следующие ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} n z^n; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}; \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}; \quad \text{г) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}.$$

7. НУЛИ И ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

7.1. Нули аналитической функции

Определение 7.1. Точку $a \in \mathbb{C}$ называют **нулем функции** $f(z)$ **комплексного переменного** z , если $f(a) = 0$.

Пусть точка $a \in \mathbb{C}$ является нулем аналитической в этой точке функции $f(z)$. Аналитичность функции $f(z)$ в точке a означает аналитичность $f(z)$ в некоторой окрестности этой точки. В силу теоремы 6.7 в окрестности точки a существует разложение этой функции в степенной ряд (*ряд Тейлора*) вида (6.11)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \quad (7.1)$$

Так как точка $z = a$ является нулем функции $f(z)$, то из (7.1) и определения 7.1 следует, что $c_0 = f(a) = 0$. Остальные коэффициенты в (7.1), согласно (6.16), будут равны

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.2)$$

Пусть c_m — младший по номеру коэффициент разложения в (7.1), отличный от нуля, т.е. $c_k = 0$, $k = \overline{0, m-1}$, и $c_m \neq 0$. Тогда число $m \in \mathbb{N}$ называют **кратностью** (иногда **порядком**) **нуля** $z = a$ **аналитической функции** $f(z)$, а саму точку $z = a$ называют нулем кратности m функции $f(z)$. Из (7.2) следует, что кратность нуля $z = a$ функции $f(z)$ равна наименьшему порядку отличной от нуля в точке $z = a$ производной этой функции. Ноль кратности единица ($m = 1$) называют **простым нулем аналитической функции**.

Разложение (7.1) функции $f(z)$, имеющей в точке $z = a$ нуль кратности m , имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots, \quad (7.3)$$

где $c_m \neq 0$.

Теорема 7.1. Точка $a \in \mathbb{C}$ тогда и только тогда является нулем кратности m аналитической в точке a функции $f(z)$, когда эта функция может быть представлена в виде

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z), \quad \varphi(a) \neq 0, \quad (7.4)$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая в точке $z = a$ функция.

◀ Используя представление (7.3) функции $f(z)$, можем записать

$$f(z) = (z-a)^m (c_m + c_{m+1}(z-a) + \dots),$$

где степенной ряд $\varphi(z) = c_m + c_{m+1}(z-a) + \dots$ имеет тот же круг сходимости, что и ряд в представлении (7.3) (см. теорему 2.3). В силу следствия 6.1 функция $\varphi(z)$ как сумма этого ряда является аналитической в точке $z = a$, причем $\varphi(a) = c_m \neq 0$.

Обратно, пусть функция $f(z)$ представима в виде (7.4) и в точке $z = a$ функция $\varphi(z)$ аналитическая. Тогда $\varphi(z)$ можно разложить в окрестности точки $z = a$ в ряд Тейлора по степеням $z - a$, причем коэффициент этого разложения при нулевой степени $z - a$, согласно условию $\varphi(a) \neq 0$, будет отличен от нуля. Подставляя разложение $\varphi(z)$ в представление (7.4), получим представление (7.3), в котором c_m, c_{m+1}, \dots обозначают коэффициенты ряда Тейлора функции $\varphi(z)$, причем c_m соответствует нулевой степени $z - a$. Мы получили разложение в ряд Тейлора функции $f(z)$ в окрестности точки a , из которого следует, что $z = a$ — нуль функции $f(z)$ кратности m . ▶

Следствие 7.1. Если точка $a \in \mathbb{C}$ является нулем кратности m аналитической в точке a функции $f(z)$, то для функции $g(z) = (f(z))^p$, $p \in \mathbb{N}$, эта точка будет нулем кратности pm .

Замечание 7.1. Полагая в (7.4) $A = \varphi(a)$, находим, что

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{(z-a)^m A} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)^m \varphi(z)}{(z-a)^m \varphi(a)} = 1.$$

Поэтому, сохраняя терминологию функций действительного переменного, можно сказать, что функции $f(z)$ и $(z-a)^m A$ являются эквивалентными бесконечно малыми при $z \rightarrow a$. Итак,

$$f(z) \underset{z \rightarrow a}{\sim} A(z-a)^m, \quad A \neq 0, \quad (7.5)$$

является необходимым и достаточным условием, чтобы аналитическая в точке $a \in \mathbb{C}$ функция $f(z)$ имела в этой точке нуль кратности m .

Определение 7.2. Бесконечно удаленную точку $z = \infty$ называют нулем функции $f(z)$, если существует предел

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0. \quad (7.6)$$

Предположим, что функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = \infty$, т.е. $f(z)$ аналитична в области $|z| > R$, $R \geq 0$, и точка $z = \infty$ является нулем $f(z)$. Тогда в силу теоремы 6.11 функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана по степеням z :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n. \quad (7.7)$$

Поскольку $f(\infty) = 0$, то в окрестности бесконечно удаленной точки функция $f(z)$ ограничена, т.е. для некоторого числа M выполняется неравенство $|f(z)| \leq M$, $|z| > R'$. При этом

число R' можно взять настолько большим, что $R' \geq R$. В силу неравенств Коши для коэффициентов ряда Лорана имеем

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\rho > R'$ можно выбрать произвольно. Но за счет выбора ρ в правой части этих неравенств при $n = 1, 2, \dots$ можно получить сколь угодно малое значение. Значит, коэффициенты для указанных номеров равны нулю. Отсюда следует, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = c_0.$$

Но по условию этот предел равен нулю, т.е. $c_0 = 0$. Следовательно, разложение (7.7) фактически имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n. \quad (7.8)$$

Пусть в представлении (7.8) c_{-m} — первый отличный от нуля коэффициент, т.е. $c_{-k} = 0$, $k = \overline{0, m-1}$, $c_{-m} \neq 0$. Тогда число $m \in \mathbb{N}$ называют **кратностью нуля функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке** (или кратностью нуля $z = \infty$ функции $f(z)$). В этом случае вместо (7.8) имеем

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-m} c_n z^n = \frac{1}{z^m} \left(c_{-m} + \frac{c_{-m-1}}{z} + \dots \right) = z^{-m} \psi(z), \quad (7.9)$$

где $\psi(z)$ — функция, представимая степенным рядом, содержащим лишь неположительные степени z . Поэтому $\varphi(z)$ является аналитической функцией в окрестности точки $z = \infty$, причем $\lim_{z \rightarrow \infty} \psi(z) = \psi(\infty) = c_{-m} \neq 0$.

Аналогично теореме 7.1 и замечанию 7.1 устанавливаем, что представление аналитической функции $f(z)$ в окрестности

точки $z = \infty$ в виде (7.9) необходимо и достаточно для того, чтобы бесконечно удаленная точка была нулем кратности m функции $f(z)$. Это возможно в том и только в том случае, когда

$$f(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{z^m}, \quad A = \text{const} \neq 0. \quad (7.10)$$

Таким образом, асимптотические формулы (7.5) и (7.10) можно принять в качестве определения кратности нуля функции $f(z)$ в точке $a \in \mathbb{C}$ и в бесконечно удаленной точке.

Пример 7.1. а. Функция $f(z) = \sin(1/z)$ имеет нули в точках, определяемых равенством $\sin(1/z) = 0$. Отсюда $1/z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, или $z = 1/(k\pi)$. Функция имеет нуль и в точке $z = \infty$, поскольку $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Точки $z = 1/(k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, являются простыми нулями, так как младшей отличной от нуля производной в каждой из этих точек будет производная первого порядка. Действительно,

$$f'(z) = \cos \frac{1}{z} \left(-\frac{1}{z^2} \right), \quad f' \left(\frac{1}{k\pi} \right) = -(k\pi)^2 \cos k\pi \neq 0.$$

Точка $z = \infty$ также будет, согласно (7.10), простым нулем, поскольку $\sin(1/z) \sim 1/z$ при $z \rightarrow \infty$.

б. Функция $f(z) = (e^z + 1)^2$ имеет нули в точках, определяемых равенством $e^z + 1 = 0$, или

$$z = \text{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\arg(-1) + 2k\pi) = (2k + 1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Все эти точки для функции $g(z) = e^z + 1$ являются простыми нулями, так как с учетом формул Эйлера

$$g'((2k + 1)\pi i) = e^{(2k+1)\pi i} = \cos(2k + 1)\pi + i \sin(2k + 1)\pi = -1 \neq 0.$$

Следовательно, для исходной функции $f(z) = g^2(z) = (e^z + 1)^2$, согласно следствию 7.1, точки $z = (2k + 1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, будут нулями кратности 2.

в. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{(z^3 + 1)^6 e^{1/z}}{(z^2 + 4)^{11}}.$$

Так как $e^{1/z} \neq 0$, то эта функция имеет нули в точках, определяемых условием $z^3 + 1 = 0$, т.е. $z_k = e^{(2k+1)i\pi/3}$, $k = 0, 1, 2$, а также в точке $z = \infty$, ибо $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. В силу следствия 7.1 точки z_0, z_1, z_2 являются нулями кратности 6, поскольку для функции $g(z) = z^3 + 1$ это простые нули ($g'(z_k) = 3z_k^2 \neq 0$), а $z_k^2 + 4 \neq 0$. Точка $z = \infty$ будет нулем кратности 4, так как

$$f(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{z^{18}}{z^{22}} e^{1/z} \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{z^4}. \quad \#$$

В заключение приведем доказательство теоремы 4.3 о нулях аналитической функции: если функция $f(z)$ аналитична в точке $a \in \mathbb{C}$, являющейся нулем $f(z)$, то либо $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $z = a$, либо существует проколота окрестность этой точки, не содержащая нулей функции $f(z)$.

В силу аналитичности $f(z)$ в точке $z = a$ в некоторой окрестности этой точки имеет место разложение (7.1). Возможны два случая: 1) все коэффициенты ряда Тейлора (7.1) равны нулю и тогда $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $z = a$; 2) существует такое натуральное число m , что в представлении (7.1) $c_k = 0$, $k = \overline{0, m-1}$, но $c_m \neq 0$. Во втором случае точка $z = a$ является нулем кратности m функции $f(z)$ и поэтому, согласно теореме 7.1, $f(z) = (z - a)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — функция, аналитическая в точке $z = a$, причем $\varphi(a) \neq 0$. В силу непрерывности функции $\varphi(z)$ в точке $z = a$ из условия $\varphi(a) \neq 0$ следует, что эта функция отлична от нуля и в некоторой окрестности данной точки. Это означает, что существует окрестность точки $z = a$, в которой нет нулей функции $\varphi(z)$.

Итак, если $f(a) = 0$, но $f(z) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $z = a$, то существует окрестность этой точки, не содержащая нулей функции $f(z)$, отличных от a , т.е. нули непостоянной аналитической функции являются изолированными.

7.2. Изолированные особые точки

В комплексном анализе многие важные замечательные результаты связаны с *особыми точками функций*, в которых эти функции утрачивают свойство аналитичности.

Определение 7.3. Точку $a \in \mathbb{C}$ называют *изолированной особой точкой функции* $f(z)$, если у точки a существует проколота окрестность $\mathring{U}(a) = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - a| < r\}$ некоторого радиуса r , в которой данная функция аналитична, но в самой точке a функция $f(z)$ не определена или теряет аналитичность.

В зависимости от поведения функции $f(z)$ вблизи точки $z = a$ различают следующие три типа изолированных особых точек.

Определение 7.4. Изолированную особую точку $z = a$ функции $f(z)$ называют:

- 1) *устранимой особой точкой*, если существует предел $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \neq \infty$;
- 2) *полюсом*, если $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$;
- 3) *существенно особой точкой*, если не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции $f(z)$ при $z \rightarrow a$.

Пример 7.2. а. Для функции $\frac{\sin z}{z}$ точка $z = 0$ будет *устранимой особой точкой*. Действительно, эта функция является аналитической при всех $z \neq 0$ как частное аналитических функций. Стало быть, проколота окрестность точки $z = 0$ является ее областью аналитичности. Используя стандартное разложение (6.20), вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right) = 1. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали то обстоятельство, что степенной ряд под знаком предела имеет бесконечный радиус сходимости. Следовательно, его сумма определена в окрестности точки $z = 0$ и непрерывна в этой точке, т.е. для вычисления предела достаточно вычислить сумму ряда при $z = 0$.

б. Для функции $1/(1 - z)$ точка $z = 1$ будет полюсом, поскольку эта функция является аналитической всюду на комплексной плоскости за исключением точки $z = 1$, причем

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 - z} = \infty.$$

в. Для функции $e^{1/z}$ точка $z = 0$ будет существенно особой точкой. В самом деле, эта функция является аналитической в области $z \neq 0$ как композиция аналитических функций e^ζ и $\zeta = 1/z$. Покажем, что при $z \rightarrow 0$ не существует ни конечного, ни бесконечного предела этой функции. При стремлении z к точке $z = 0$ вдоль действительной оси ($z = x$) имеем

$$\lim_{x \rightarrow +0} e^{1/x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} e^{1/x} = 0.$$

Этих равенств уже достаточно, чтобы заключить: предела функции $e^{1/z}$ при $z \rightarrow 0$ не существует ни конечного, ни бесконечного. *Поверхность модуля* этой функции представлена на рис. 7.1.

г. Для функции $1/\sin(\pi/z)$ точки $z_n = 1/n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, являются изолированными особыми точками — полюсами, так как функция аналитична в проколотой окрестности каждой точки z_n и $1/\sin(\pi/z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow z_n$. Однако точка $z = 0$ не является для этой функции изолированной особой точкой, поскольку каждая ее окрестность $\mathring{U}(0) = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z| < r\}$ содержит другие особые точки (точки $z_n = 1/n$, для которых $|n| > 1/r$). Другими словами, у точки $z = 0$ нет проколотой окрестности, в которой функция $1/\sin(\pi/z)$ была бы аналитической, а это противоречит определению 7.3 изолированной

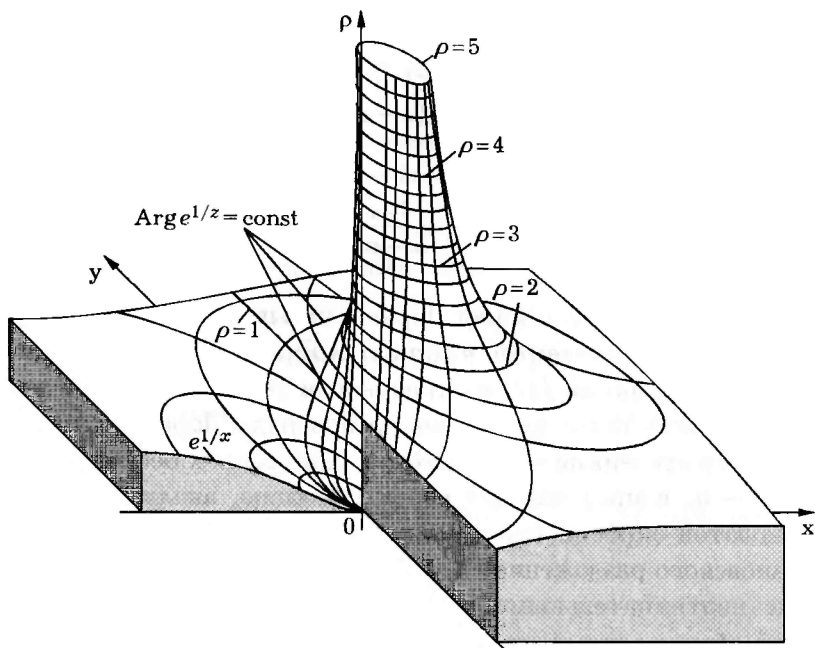


Рис. 7.1

особой точки. Точка $z = 0$ является предельной точкой полюсов этой функции (точек $z_n = 1/n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Данный пример показывает, что при исследовании конкретной особой точки целесообразно найти все другие особые точки. #

В проколотой окрестности изолированной особой точки $a \in \mathbb{C}$ функцию можно разложить, согласно *теореме Лорана*, в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}. \quad (7.11)$$

В этом случае говорят о *лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности особой точки $z = a$* , причем ряд в правой части представления (7.11) называют *рядом Лорана*

в окрестности этой особой точки. Ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad (7.12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, \quad (7.13)$$

на которые разделяется ряд Лорана, называют соответственно **правильной** и **главной частью лорановского разложения** (7.11) функции $f(z)$ в окрестности точки $z = a$. При этом главная часть есть сумма всех членов ряда Лорана с отрицательными степенями $z - a$, которые стремятся к бесконечности при $z \rightarrow a$, и представляет собой функцию, аналитическую в проколотой окрестности точки a (см. 6.5). Правильная часть лорановского разложения (7.11) функции $f(z)$, содержащая члены с неотрицательными степенями $z - a$ и представляющая собой обыкновенный степенной ряд, в силу теоремы 6.6 является аналитической функцией в точке $z = a$ и некоторой ее окрестности.

Пример 7.3. а. Найдем лорановское разложение функции $z^2 e^{1/z}$ в окрестности точки $z = 0$. Используя стандартное разложение (6.18) для показательной функции, получаем

$$\begin{aligned} z^2 e^{1/z} &= z^2 \left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots \right) = \\ &= z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!z^n}, \quad |z| > 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что правильная часть лорановского разложения есть $z^2 + z + 1/2$, а главная часть представляет собой ряд с общим членом $1/((n+2)!z^n)$.

б. Для функции $\cos(z/(z-1))$ найдем лорановское разложение в окрестности точки $z = 1$. Тождественными преобразова-

ниями получаем

$$\cos \frac{z}{z-1} = \cos \left(1 + \frac{1}{z-1} \right) = \cos 1 \cos \frac{1}{z-1} - \sin 1 \sin \frac{1}{z-1}.$$

Используя стандартные разложения (6.19) и (6.20) для косинуса и синуса соответственно, имеем при $|z-1| > 0$

$$\begin{aligned} \cos \frac{z}{z-1} &= \left(1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^4} - \dots \right) \cos 1 - \\ &\quad - \left(\frac{1}{1!(z-1)} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \frac{1}{5!(z-1)^5} - \dots \right) \sin 1 = \\ &= \cos 1 - \frac{\sin 1}{1!(z-1)} - \frac{\cos 1}{2!(z-1)^2} + \frac{\sin 1}{3!(z-1)^3} + \frac{\cos 1}{4!(z-1)^4} - \dots = \\ &= \cos 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{(1+(-1)^n) \cos 1 + (1-(-1)^n) \sin 1}{2n!(z-1)^n}. \quad (7.14) \end{aligned}$$

В полученном разложении правильная часть содержит одно слагаемое $\cos 1$, а ряд по отрицательным степеням $z-1$ будет главной частью этого разложения.

в. Найдем правильную часть лорановского разложения функции $z^2 \cos(z/(z-1))$ в окрестности точки $z=1$. Для этого предварительно разложим функцию z^2 , аналитическую в окрестности этой точки, по степеням $z-1$. Тождественными преобразованиями получаем

$$z^2 = ((z-1) + 1)^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1. \quad (7.15)$$

Перемножив разложения (7.14) и (7.15), выделим неотрицательные степени $z-1$

$$\cos 1 - 2 \sin 1 - \frac{\cos 1}{2!} + \left(2 \cos 1 - \frac{\sin 1}{1!} \right) (z-1) + \cos 1 \cdot (z-1)^2,$$

или

$$\frac{\cos 1}{2} - 2 \sin 1 + (2 \cos 1 - \sin 1)(z-1) + \cos 1 \cdot (z-1)^2.$$

Это выражение и является правильной частью лорановского разложения данной функции в окрестности точки $z = 1$. #

Тип (характер) изолированной особой точки тесно связан с видом лорановского разложения функции в окрестности этой точки. Эту связь выявляют следующие теоремы.

Теорема 7.2. Изолированная особая точка $z = a \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$ является устранимой в том и только в том случае, когда лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности $z = a$ не содержит главной части, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < r. \quad (7.16)$$

◀ Предположим, что $z = a$ — устранимая особая точка функции $f(z)$. Согласно определению 7.4, существует конечный предел этой функции при $z \rightarrow a$. Следовательно, функция $f(z)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности радиуса R точки $z = a$, т.е. $|f(z)| \leq M$ при $0 < |z-a| < R$.

Рассмотрим лорановское разложение (7.11) функции $f(z)$ в окрестности $0 < |z-a| < r < R$ точки $z = a$. Запишем *неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана*

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (7.17)$$

Так как r можно выбрать сколь угодно малым, правую часть в неравенствах (7.17) при $n < 0$ тоже можно сделать сколь угодно малой. Это значит, что левая часть этих неравенств равна нулю, т.е. $c_n = 0$, $n = -1, -2, \dots$. Следовательно, главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности устранимой особой точки $z = a$ равна нулю.

Предположим теперь, что лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности (радиуса r) изолированной особой точки $z = a$ не содержит главной части, т.е. справедливо (7.16). В силу

теоремы 6.3 степенной ряд в правой части (7.16) сходится равномерно внутри круга $|z - a| < r$, а на основании теоремы 6.4 его сумма, т.е. функция $f(z)$, является в этом круге непрерывной функцией. В частности, существует конечный предел функции $f(z)$ в точке a , равный значению функции в этой точке:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0. \quad (7.18)$$

Согласно определению 7.4, $z = a$ — устранимая особая точка. ►

Замечание 7.2. Доопределив функцию $f(z)$ в точке $z = a$ в соответствии с пределом (7.18) значением $f(a) = c_0$, получим функцию, которая имеет представление

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad |z - a| < r.$$

Согласно следствию 6.1, доопределенная функция является аналитической в точке $z = a$. Именно этим оправдано название устранимой особой точки. Поэтому устранимые особые точки часто причисляют к точкам аналитичности функции.

Теорема 7.3. Изолированная особая точка $z = a \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$ является полюсом в том и только в том случае, когда главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности этой точки содержит лишь конечное число отличных от нуля слагаемых, т.е. в представлении (7.11) для некоторого натурального m имеем $c_{-k} = 0$, $k = m + 1, m + 2, \dots$, и $c_{-m} \neq 0$, так что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^m \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}, \quad 0 < |z - a| < r. \quad (7.19)$$

◀ Пусть $z = a$ — полюс функции $f(z)$. Тогда в силу определений 7.3 и 7.4 эта функция является аналитической в некоторой

проколотой окрестности точки $z = a$ и $f(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow a$. Отсюда следует, что

$$|f(z)| > 1 \quad (7.20)$$

в некотором кольце $0 < |z - a| < r$, причем r можно выбрать так, что в этом кольце функция $f(z)$ будет аналитической. Поэтому функция $1/f(z)$ также является в этом кольце аналитической, поскольку, согласно неравенству (7.20), $f(z) \neq 0$ в этом кольце. Так как

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0, \quad (7.21)$$

точка $z = a$ на основании определения 7.4 будет устранимой особой точкой функции $1/f(z)$. Согласно теореме 7.2, имеем представление

$$\frac{1}{f(z)} = b_m(z - a)^m + b_{m+1}(z - a)^{m+1} + \dots, \quad 0 < |z - a| < r,$$

в котором $b_m \neq 0$, причем $m > 0$ в силу условия (7.21). Следовательно,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{b_m(z - a)^m + b_{m+1}(z - a)^{m+1} + \dots} = \\ &= \frac{1}{(z - a)^m} \frac{1}{b_m + b_{m+1}(z - a) + \dots}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Поскольку $b_m \neq 0$, то второй сомножитель в правой части последнего равенства является аналитической функцией в круге $|z - a| < r$ (как частное двух аналитических функций, не обращающихся в нуль). В силу теоремы 6.7 в некоторой окрестности точки a существует разложение в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_m + b_{m+1}(z - a) + \dots} &= \\ &= c_{-m} + c_{-m+1}(z - a) + c_{-m+2}(z - a)^2 + \dots, \end{aligned}$$

причем $c_{-m} = 1/b_m \neq 0$. В итоге, учитывая (7.22), получаем при $0 < |z - a| < r$

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-a)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

что совпадает с (7.19).

Предположим теперь, что главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в некоторой окрестности радиуса r точки $z = a$ имеет лишь конечное число отличных от нуля слагаемых, т.е. при $0 < |z - a| < r$ справедливо представление (7.19), в котором $c_{-m} \neq 0$. Тогда при $0 < |z - a| < r$ имеем

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \dots \\ \dots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+m}. \quad (7.23)$$

Сумма ряда в правой части (7.23) в силу теоремы 6.4 непрерывна в точке $z = a$, и поэтому $(z-a)^m f(z) \rightarrow c_{-m} \neq 0$ при $z \rightarrow a$. Следовательно (см. замечание 3.1), у точки $z = a$ существует окрестность, в которой функция $\psi(z) = (z-a)^m f(z)$ ограничена и не обращается в нуль, т.е. функция $f(z) = \psi(z)/(z-a)^m$ является бесконечно большой и ее предел при $z \rightarrow 0$ бесконечен. Согласно определению 7.4, точка $z = a$ является полюсом функции $f(z)$. ►

Определение 7.5. *Порядком полюса* $z = a \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$ называют число $m \in \mathbb{N}$, при котором существует конечный отличный от нуля предел:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)^m = A, \quad A \neq 0, \quad A \neq \infty. \quad (7.24)$$

Полюс порядка $m = 1$ называют *простым*.

Замечание 7.3. Из доказательства теоремы 7.3 следует, что порядок полюса функции совпадает с номером $m \in \mathbb{N}$

старшего члена главной части лорановского разложения этой функции в окрестности полюса.

Теорема 7.4. Точка $z = a$ является полюсом функции $f(z)$ порядка m тогда и только тогда, когда эта точка является нулем функции $1/f(z)$ кратности m .

◀ Если точка $z = a$ является полюсом функции $f(z)$, то функция $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности точки $z = a$ и для нее верно равенство (7.24). Рассмотрим функцию $\psi(z)$, которая при $z \neq a$ определяется равенством $\psi(z) = f(z)(z - a)^m$, а в точке $z = a$ принимает значение A . Согласно замечанию 7.2, функция $\psi(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки $z = a$, причем $\psi(a) = A \neq 0$. Значит, $\psi(z)$ (в силу непрерывности) не обращается в нуль в некоторой окрестности точки $z = a$, и в этой окрестности аналитична функция $\varphi(z) = 1/\psi(z)$. Поэтому в окрестности точки $z = a$ имеем представление

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z - a)^m}{\psi(z)} = (z - a)^m \varphi(z),$$

в котором $\varphi(z)$ не обращается в нуль при $z = a$. Из этого представления следует, что точка $z = a$ является нулем функции $1/f(z)$ кратности m .

Пусть точка $z = a$ является нулем* функции $1/f(z)$ кратности m . Тогда в окрестности точки $z = a$ имеет место представление

$$\frac{1}{f(z)} = (z - a)^m \varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в окрестности точки $z = a$ и $\varphi(a) \neq 0$. Значит,

$$f(z) = \frac{1}{(z - a)^m \varphi(z)},$$

*Точнее говоря, предполагается, что функция $1/f(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки $z = a$ и имеет предел при $z \rightarrow a$, равный нулю.

откуда заключаем, что функция $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности точки $z = a$, а точка $z = a$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$. Кроме того, существует конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^m = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z)} = \frac{1}{\varphi(a)} \neq 0.$$

Согласно определению 7.5, точка $z = a$ является полюсом функции $f(z)$ порядка m . ►

Отметим следующий простой факт. Если точка $z = a$ является нулем кратности m (полюсом порядка m) функции $f(z)$, то эта точка $z = a$ является нулем кратности m (полюсом порядка m) и функции $\varphi(z)f(z)$, где функция $\varphi(z)$ аналитична в окрестности точки $z = a$ и $\varphi(a) \neq 0$. Учитывая это, можем сформулировать такое утверждение.

Утверждение 7.1. Следующие три условия эквивалентны:

- 1) точка $z = a$ является полюсом функции $f(z)$ порядка m ;
- 2) точка $z = a$ является нулем функции $\varphi(z)/f(z)$ кратности m , где функция $\varphi(z)$ аналитична в окрестности точки $z = a$ и $\varphi(a) \neq 0$;
- 3) точка $z = a$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$ и верна асимптотическая формула

$$\frac{1}{f(z)} \underset{z \rightarrow a}{\sim} \frac{(z - a)^m}{A} \quad \left(f(z) \underset{z \rightarrow a}{\sim} A(z - a)^{-m} \right), \quad A \neq 0. \quad (7.25)$$

Пример 7.4. а. Для функции $g(z) = \sin \frac{\pi}{z}$ точки $z_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, являются простыми нулями, так как $g'(1/n) \neq 0$ (см. пример 7.1.а). В силу утверждения 7.1 эти точки будут простыми полюсами функции

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{z}}.$$

б. Для функции

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{(e^z - 1)^3}$$

точка $z = 0$ будет простым полюсом, ибо, во-первых, $f(z)$ является аналитической функцией в проколотой окрестности этой точки, а во-вторых, с учетом стандартных разложений (6.18) и (6.19) для функций e^z и $\cos z$ имеем

$$\frac{1 - \cos z}{(e^z - 1)^3} \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{z^2/2}{z^3} = \frac{A}{z},$$

где $A = 1/2 \neq 0$.

Теорема 7.5. Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$ является существенно особой в том и только в том случае, когда главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки a содержит бесконечное число отличных от нуля слагаемых.

◀ Если главная часть лорановского разложения (7.11) функции $f(z)$ в окрестности точки $z = a$ содержит бесконечное число отличных от нуля слагаемых, то в силу теорем 7.2 и 7.3 изолированная особая точка $z = a$ этой функции не может быть ни устранимой, ни полюсом, т.е. должна быть существенно особой.

Если же $z = a$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то, согласно тем же теоремам, главная часть лорановского разложения (7.11) $f(z)$ в окрестности этой точки не может ни отсутствовать (как в случае устранимой особой точки), ни содержать конечное число отличных от нуля слагаемых (как в случае полюса). Поэтому число таких слагаемых главной части этого разложения должно быть бесконечным. ►

Поведение функции в окрестности существенно особой точки характеризует теорема, доказанная в 1873 г. российским математиком Ю.В. Сохоцким (1842–1927).

Теорема 7.6 (теорема Сохоцкого). Пусть $a \in \mathbb{C}$ — существенно особая точка функции $f(z)$. Тогда для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ найдется последовательность $\{z_n\}$ точек $z_n \in \mathbb{C}$, сходящаяся к точке $z = a$ и такая, что $f(z_n) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$.

◀ Пусть $A = \infty$. Функция $f(z)$ не является ограниченной в окрестности точки $z = a$, ибо в противном случае можно доказать (см. доказательство теоремы 7.2), что коэффициенты лорановского разложения этой функции при отрицательных степенях $z - a$ равны нулю, т.е. $z = a$ — устранимая особая точка этой функции. Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ в кольце $0 < |z - a| < 1/n$ можно выбрать такую точку z_n , что $|f(z_n)| > n$. Тем самым построена последовательность $\{z_n\}$, сходящаяся к точке $z = a$ и такая, что $f(z_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $A \neq \infty$. Если в любой окрестности точки a есть точки, в которых $f(z) = A$, то из этих точек можно построить последовательность $\{z_n\}$, сходящуюся к a . Для такой последовательности $f(z_n) = A$ и утверждение теоремы справедливо. Пусть $f(z) \neq A$ в некоторой окрестности $0 < |z - a| < \delta$ точки a . Тогда функция $g(z) = 1/(f(z) - A)$ аналитична в $0 < |z - a| < \delta$ и не имеет предела в точке a . Согласно уже доказанному, существует последовательность $\{z_n\} \rightarrow a$, для которой $g(z_n) = \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow a} (f(z_n) - A) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow a} f(z_n) = A. \quad \blacktriangleright$$

Приведем без доказательства еще одну теорему, характеризующую поведение аналитической функции в окрестности существенно особой точки, которая перекликается с теоремой Сохоцкого.

Теорема 7.7 (теорема Пикара). Если $z = a$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа A (за исключением, возможно, одного значения), можно указать такую последовательность $\{z_n\} \rightarrow a$, что $f(z_n) = A$, $n \in \mathbb{N}$. #

Классификацию изолированных особых точек функции $f(z)$ можно установить, согласно теоремам 7.2–7.5, по виду лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности этих точек. В силу указанных теорем вид лорановского разложения функции можно взять за основу в определении типов особых точек. Изолированная особая точка $z = a \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$ является:

1) устранимой особой точкой, если лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = a$ не содержит отрицательных степеней $z - a$ (отсутствует его главная часть), т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < r;$$

2) полюсом, если лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = a$ имеет конечное число ненулевых слагаемых с отрицательными степенями $z - a$, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < r;$$

где $m > 0$ и $c_{-m} \neq 0$ (число m есть порядок полюса $z = a$);

3) существенно особой точкой, если лорановское разложение $f(z)$ в окрестности $z = a$ содержит бесконечное число ненулевых слагаемых с отрицательными степенями $z - a$, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < r,$$

где среди коэффициентов c_{-1}, c_{-2}, \dots есть бесконечное число ненулевых.

Определение 7.4 и приведенная классификация особых точек позволяют двумя способами определить тип особой точки. В конкретной ситуации следует выбирать способ в зависимости от того, что быстрее и проще удастся выяснить: существование предела функции в особой точке или ее лорановское разложение в окрестности особой точки. Как правило, выбор метода связан с видом функции.

Пример 7.5. Лорановское разложение функции $\cos(1/z)$ в окрестности точки $z = 0$ (изолированной особой точки этой функции в силу определения 7.3) можно получить непосредственно из стандартного разложения (6.19) для косинуса:

$$\cos \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \dots, \quad |z| > 0. \quad (7.26)$$

Это разложение содержит бесконечное количество слагаемых с отрицательными степенями z , и поэтому точка $z = 0$ является существенно особой точкой рассматриваемой функции. Аналогично можно установить, что $z = 0$ — существенно особая точка и для функций $e^{1/z}$ и $\sin(1/z)$.

Согласно теореме Сохоцкого, в окрестности существенно особой точки $z = a$ можно построить сходящуюся к a последовательность $\{z_n\}$, такую, что $f(z_n) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$. Для функции $\cos(1/z)$ в случае $A = \infty$ такой будет, например, последовательность $\{i/n\}$, сходящаяся к $z = 0$. Действительно, учитывая (3.28), имеем

$$\cos \frac{1}{z_n} = \cos \frac{n}{i} = \cos(-in) = \cos(in) = \operatorname{ch} n,$$

так что $|\cos(1/z_n)| = \operatorname{ch} n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тот же результат получим и для последовательности $\{-i/n\}$. Согласно теореме Пикара, для любого комплексного числа A , за исключением, возможно, одного, можно указать последовательность $\{z_n\}$, сходящуюся к существенно особой точке $z = a$, для которой $f(z_n) = A$, $n \in \mathbb{N}$. Например, отметим три последовательности точек, соответствующие значениям $A = 0, -1, 1$:

$$z'_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}, \quad z''_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}, \quad z'''_n = \frac{1}{2n\pi}.$$

Эти последовательности, как нетрудно увидеть, сходятся к точке $z = 0$, и для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\cos \frac{1}{z'_n} = 0, \quad \cos \frac{1}{z''_n} = -1, \quad \cos \frac{1}{z'''_n} = 1. \quad \#$$

В отличие от рассмотренных функций лорановское разложение функции $g(z) = (1 - z)^{-1} \cos(1/z)$ в окрестности изолированных особых точек $z_0 = 0$ и $z_1 = 1$ построить не так просто. Например, в случае точки z_0 следует в ее окрестности разложить функцию $1/(1 - z)$, используя (6.23), по степеням z :

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots, \quad |z| < 1, \quad (7.27)$$

а затем перемножить это разложение и разложение (7.26) для функции $\cos(1/z)$, что является довольно громоздкой операцией. В данном случае тип изолированных особых точек функции $g(z)$ проще выяснить, анализируя ее предел в особых точках. В точке $z = 1$ имеем

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\cos(1/z)}{1 - z} = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow 1} g(z)(z - 1) = - \lim_{z \rightarrow 1} \cos \frac{1}{z} = - \cos 1 \neq 0,$$

т.е. точка $z = 1$, согласно определению 7.5, — простой полюс функции $g(z)$. Предел функции $g(z)$ при $z \rightarrow 0$ не существует, так как $1/(1 - z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow 0$, а предел $\cos(1/z)$ при $z \rightarrow 0$ не существует ни конечный, ни бесконечный. Следовательно, точка $z_0 = 0$ в силу определения 7.4 является существенно особой точкой функции $g(z)$.

Пример 7.6. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в точке $z = a$, причем $g(z) \neq 0$ в окрестности точки a . Тогда либо функция $\varphi(z) = f(z)/g(z)$ в точке $z = a$ является аналитической (при этом функцию считаем аналитической и в устранимой особой точке), либо точка $z = a$ — полюс. В самом деле, если $g(a) \neq 0$, то $\varphi(z)$ является аналитической в точке $z = a$. Если же $z = a$ — нуль кратности m функции $g(z)$ и $f(a) \neq 0$, то эта точка будет полюсом порядка m функции $\varphi(z)$ (см. утверждение 7.1). Наконец, если $z = a$ — нуль кратности l для $f(z)$ и нуль кратности m для $g(z)$, то при $l \geq m$ функция $\varphi(z)$ является аналитической в точке $z = a$, а при $l < m$ точка $z = a$ — полюс порядка $m - l$ этой функции.

Пример 7.7. Пусть $z = a$ — существенно особая точка функции $f(z)$. Тогда для функции $g(z) = 1/f(z)$ эта точка будет либо существенно особой, либо не будет изолированной особой точкой. Действительно, если существует кольцо $0 < |z - a| < \delta$, в котором $f(z) \neq 0$, то $z = a$ является изолированной особой точкой функции $g(z)$, а именно существенно особой, ибо в силу определения 7.4 не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции $f(z)$ при $z \rightarrow a$ и, следовательно, не существует предела функции $g(z)$ при $z \rightarrow a$. Если же в любой окрестности точки $z = a$ расположены нули $f(z)$, то для функции $g(z)$ они являются полюсами и, следовательно, $z = a$ будет предельной точкой полюсов функции $g(z)$ и не будет изолированной особой точкой (см. пример 7.2 для случая $f(z) = \sin(\pi/z)$ и $g(z) = 1/\sin(\pi/z)$).

Пример 7.8. Покажем, что если точка $z = a$ — полюс функции $f(z)$, то для функции $g(z) = e^{f(z)}$ эта точка будет существенно особой.

Пусть m — порядок полюса $z = a$ функции $f(z)$. Полагая в асимптотической формуле (7.25), что $A = |A|e^{i\alpha}$ и $z - a = re^{i\varphi}$, запишем

$$f(z) \underset{z \rightarrow a}{\sim} |A|r^{-m}e^{i(\alpha - m\varphi)}. \quad (7.28)$$

Для точек z комплексной плоскости (z) на луче $z - a = re^{i\alpha/m}$, проходящем через точку $z = a$ под углом $\varphi = \alpha/m$ к действительной оси, из (7.28) имеем $f(z) \underset{z \rightarrow a}{\sim} |A|r^{-m}$. При стремлении $z \rightarrow a$ вдоль этого луча $r \rightarrow 0$, а аргументы точек имеют значения, близкие к нулю. Поэтому $f(z) \rightarrow \infty$, причем $f(z)$ не выходит за пределы малого сектора $-\delta \leq \arg w \leq \delta$, а $e^{f(z)} \rightarrow \infty$.

Аналогично для точек луча $z - a = re^{i(\alpha + \pi)/m}$, проходящего через точку $z = a$ под углом $\varphi = (\alpha + \pi)/m$ к действительной оси, из (7.28) имеем $f(z) \underset{z \rightarrow a}{\sim} -|A|r^{-m}$. При стремлении $z \rightarrow a$ вдоль этого луча $r \rightarrow 0$ и $f(z) \rightarrow \infty$, но теперь $f(z)$ имеет аргумент, близкий к π или $-\pi$, а $e^{f(z)} \rightarrow 0$.

Это означает, что функция $g(z)$ не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного) при $z \rightarrow a$, и поэтому в силу определения 7.4 $z = a$ — существенно особая точка для $g(z)$.

7.3. Бесконечно удаленная точка как особая

Определение 7.6. Бесконечно удаленную точку $z = \infty$ назовем *изолированной особой точкой функции* $f(z)$, если в некоторой окрестности этой точки (т.е. вне некоторого круга с центром в точке $z = 0$) функция $f(z)$ аналитична.

Определение фактически подтверждает общепринятое правило, согласно которому бесконечно удаленная точка всегда считается особой точкой аналитической функции, если, конечно, эта точка является предельной точкой области определения функции. Однако для некоторых функций $z = \infty$ является изолированной особой точкой, а для некоторых — нет. Например, для функции $f(z) = 1/\sin z$ точка $z = \infty$ не является изолированной особой точкой, ибо в любой окрестности $|z| > R$ этой точки есть особые точки функции $f(z)$ (точки $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, являющиеся полюсами $f(z)$). В таких случаях бесконечно удаленную точку $z = \infty$ называют предельной точкой полюсов.

Тип особой точки $z = \infty$ в зависимости от поведения функции в ее окрестности устанавливает следующее определение, аналогичное определению 7.4.

Определение 7.7. Изолированную особую точку $z = \infty$ называют:

- 1) *устранимой особой точкой* функции $f(z)$, если существует и конечен предел этой функции при $z \rightarrow \infty$;
- 2) *полюсом* функции $f(z)$, если существует предел $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$;
- 3) *существенно особой точкой* функции $f(z)$, если эта функция не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z \rightarrow \infty$.

Замечание 7.4. Если $z = \infty$ — устранимая особая точка функции $f(z)$, то, доопределив функцию в этой точке значением ее предела при $z \rightarrow \infty$, можно причислить точку $z = \infty$ к точкам аналитичности функции $f(z)$.

Пример 7.9. Для функции $(1/z) \cos(1/z)$ точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой. Действительно, $\cos(1/z) \rightarrow 1$ и $1/z \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Следовательно, рассматриваемая функция имеет предел при $z \rightarrow \infty$, равный нулю. В таких случаях точку $z = \infty$ называют *нулем функции*.

Для функции z^2 точка $z = \infty$ будет *полюсом*. Для функций e^z , $\cos z$ и $\sin z$ точка $z = \infty$ является существенно особой, так как эти функции не имеют предела, ни конечного, ни бесконечного, при $z \rightarrow \infty$. #

Так как

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{w \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{w}\right),$$

то исследование функции $f(z)$ в окрестности особой точки $z = \infty$ можно свести к исследованию функции $f(1/w)$ в окрестности конечной точки $w = 0$. В этом смысле очевидным является следующее понятие.

Определение 7.8. Лорановским разложением функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки $z = \infty$ назовем ряд Лорана функции $f(z)$ по степеням z , в который эта функция разложена в области $|z| > R$, т.е. вне круга достаточно большого радиуса R с центром в точке $z = 0$.

Итак, если

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad |z| > R, \quad (7.29)$$

то говорят о лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Если тип конечной изолированной особой точки $a \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$ определяли члены с отрицательными степенями $z - a$,

для которых точка a является особой, то в бесконечно удаленной точке поведение функции определяется членами ряда Лорана с положительными степенями z . Отрицательные степени z разложения Лорана имеют в $z = \infty$ устранимую особую точку и, как говорят, являются правильными. Поэтому **главной частью лорановского разложения (7.29)** функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки называют ту часть этого разложения, которая содержит все положительные степени z , а совокупность нулевой степени z и всех отрицательных степеней z образует **правильную часть лорановского разложения**.

Сравнивая определения 7.4 и 7.7, заключаем, что тип особой точки $z = \infty$ функции $f(z)$ совпадает с типом особой точки $w = 0$ функции $f(1/w)$. Но из лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ легко получить лорановское разложение функции $f(1/w)$ в окрестности точки $w = 0$ простой заменой $z = 1/w$ в ряде Лорана. Учитывая связь типа особой точки $w = 0$ с видом лорановского разложения $f(1/w)$ в окрестности точки $w = 0$ (см. 7.2), приходим к следующим выводам. Изолированная особая точка $z = \infty$ функции $f(z)$ является:

1) устранимой особой точкой, если лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности $z = \infty$ не содержит положительных степеней z (отсутствует его главная часть), т.е.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}, \quad |z| > R;$$

2) полюсом, если лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности $z = \infty$ имеет конечное число ненулевых слагаемых с положительными степенями z , т.е.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^m c_n z^n, \quad |z| > R, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (7.30)$$

где $m > 0$ и $c_m \neq 0$. Целое число m равно порядку полюса $z = \infty$ функции $f(z)$;

3) существенно особой точкой, если лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности $z = \infty$ содержит бесконечное число ненулевых слагаемых с положительными степенями z , т.е.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad |z| > R,$$

где среди коэффициентов c_1, c_2, \dots при положительных степенях z бесконечное число ненулевых.

Например, для функций $e^z, \sin z, \cos z$ бесконечно удаленная точка является существенно особой точкой. Действительно, стандартные разложения этих функций по степеням z можно рассматривать как их лорановские разложения в окрестности $z = \infty$, а они содержат бесконечное число слагаемых с положительными степенями z .

Из представления (7.30) следует, что порядком полюса $z = \infty$ будет число m , для которого

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^m} = A,$$

где A отлично и от 0, и от ∞ . Последнее дает возможность записать следующую асимптотическую формулу в полюсе $z = \infty$ порядка m :

$$f(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} Az^m.$$

Для случая бесконечно удаленной точки верно утверждение, аналогичное теореме 7.4.

Теорема 7.8. Бесконечно удаленная точка является полюсом функции $f(z)$ порядка m тогда и только тогда, когда эта точка является нулем функции $1/f(z)$ кратности m . #

Отметим, что при рассмотрении лорановского разложения функции следует четко представлять, в окрестности какой

точки оно имеет смысл. Например, разложения

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots, \quad \cos \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \dots$$

являются лорановскими соответственно для функций $\sin(1/z)$ и $\cos(1/z)$ как в окрестности точки $z = 0$, так и в окрестности точки $z = \infty$, поскольку они верны при всех $z \neq 0$. А вот разложение

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots,$$

верное при $|z| < 1$, является лорановским разложением функции $1/(1-z)$ в окрестности точки $z = 0$. Для получения лорановского разложения этой функции в окрестности точки $z = \infty$ необходимо рассмотреть другую область $|z| > 1$ и построить другое разложение. Проводя тождественные преобразования и используя стандартное разложение, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots - \frac{1}{z^n} - \dots, \quad |z| > 1. \end{aligned}$$

Пример 7.10. Пусть $P_m(z)$ и $Q_n(z)$ — многочлены степени m и n соответственно, не имеющие общих нулей. Тогда для рациональной функции $R(z) = P_m(z)/Q_n(z)$ нули знаменателя $Q_n(z)$, и только они, являются полюсами. Других конечных изолированных особых точек у функции $R(z)$ нет. Точка $z = \infty$ будет для $R(z)$ полюсом порядка $m - n$, если $m > n$, и точкой аналитичности (при условии, что устранимую особую точку относим к таковой), если $m \leq n$.

Пример 7.11. Для функции $e^{1/\sin z}$ точки $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, существенно особые (см. пример 7.8), а бесконечно удаленная точка не является изолированной особой точкой, будучи предельной точкой последовательности $\{z_k\}$ существенно особых точек.

Пример 7.12. Для функции

$$f(z) = \frac{z^3}{\sin^2 \frac{1}{z+1}}$$

точки $z_k = -1 + \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, согласно утверждению 7.1, будут полюсами второго порядка. Действительно, эти точки являются простыми нулями функции $\sin(z+1)^{-1}$ и поэтому будут нулями второго порядка для $\sin^2(z+1)^{-1}$, а $z_k^3 \neq 0$. Точка $z = -1$ при этом будет предельной для полюсов z_k , а бесконечно удаленная точка $z = \infty$ — полюсом пятого порядка функции $f(z)$, так как

$$f(z) = \frac{z^3}{\sin^2 \frac{1}{z+1}} \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{z^3}{\left(\frac{1}{z+1}\right)^2} = z^3(z+1)^2 \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} z^5.$$

Пример 7.13. Рассмотрим функцию $f(z) = e^{1/z} \operatorname{sh} \frac{1}{z}$. Ее особыми точками являются $z = 0$ и $z = \infty$. Используя известные стандартные разложения, получаем

$$f(z) = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots\right) \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \dots\right).$$

Такое представление функции $f(z)$ верно в окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$. Из него видно, что лорановское разложение функции в окрестности этих точек не содержит положительных степеней z . Поскольку все коэффициенты перемножаемых рядов положительны, коэффициент при произвольной отрицательной степени z в ряде Лорана положителен. Следовательно, ряд Лорана имеет бесконечное число ненулевых слагаемых с отрицательными степенями z . Точка $z = 0$ является существенно особой точкой $f(z)$, а $z = \infty$ — устранимой особой точкой (простым нулем) $f(z)$.

Пример 7.14. Найдем все особые точки функции $1/(z^3 - z^5)$ (включая бесконечно удаленную точку) и выясним их тип. Осо-

быми будут бесконечно удаленная точка $z = \infty$ и нули знаменателя, т.е. многочлена $z^3 - z^5 = z^3(1 - z)(1 + z)$. В силу утверждения 7.1 точка $z_0 = 0$ будет полюсом третьего порядка, а точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$ — простыми полюсами рассматриваемой функции, так как для ее знаменателя эти точки являются нулями.

Поскольку $1/(z^3 - z^5) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, то в силу определения 7.2 бесконечно удаленная точка $z = \infty$ будет нулем рассматриваемой функции, причем на основании (7.10) кратность этого нуля $m = 5$, так как

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^5 \frac{1}{z^3 - z^5} = -1, \quad \text{или} \quad \frac{1}{z^3 - z^5} \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{-1}{z^5}.$$

Замечание 7.5. Если по виду функции $f(z)$ ясно, что при некотором значении $m \in \mathbb{N}$ предел

$$\lim_{z \rightarrow z^*} (z - z^*)^m f(z) \quad \left(\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^m} \right)$$

конечен и отличен от нуля, то целесообразно сразу приступить к нахождению m , т.е. к выяснению порядка полюса в точке z^* (точке ∞), не стремясь вычислить предел функции, так как ясно, что в данном случае этот предел бесконечен.

Пример 7.15. Для функции $\frac{e^z}{z^2(z^2 + 9)}$ точка $z_0 = 0$ является полюсом второго порядка, а точки $z_{1,2} = \pm 3i$ — простыми полюсами, так как числитель дроби — функция e^z — не обращается в нуль, а знаменатель дроби — многочлен $z^2(z^2 + 9)$ — имеет нуль кратности 2 в точке z_0 и нули кратности 1 в точках $z_{1,2}$. Точка $z = \infty$ является существенно особой точкой этой функции, так как не существует ее предела (ни конечного, ни бесконечного) при $z \rightarrow \infty$. Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2(x^2 + 9)} = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2(x^2 + 9)} = 0.$$

7.4. Классификация аналитических функций по их особым точкам

Из теоремы Лиувилля следует, что функции, совсем не имеющие особых точек (имеется в виду, что $z = \infty$ — устранимая особая точка), являются постоянными. Действительно, согласно замечанию 7.3 и определению 7.7, аналитичность функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ означает, что существует и конечен предел этой функции при $z \rightarrow \infty$. Поэтому $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, т.е. при $|z| > R$. В остальной части плоскости — круге $|z| \leq R$ — эта функция ограничена как непрерывная на ограниченном и замкнутом множестве (см. 3.2). Следовательно, $f(z)$ ограничена на всей комплексной плоскости \mathbb{C} и, будучи на \mathbb{C} аналитической, является в силу теоремы Лиувилля постоянной, т.е. $f(z) = \text{const}$.

Следующий по простоте класс составляют *целые функции*, не имеющие конечных особых точек и аналитические на всей комплексной плоскости \mathbb{C} . Для целой функции $f(z)$ точка $z = \infty$ всегда является *изолированной особой точкой*. Если $z = \infty$ — *устранимая особая точка*, то, в силу сказанного выше, $f(z) = \text{const}$. Если же $z = \infty$ — полюс порядка $m \in \mathbb{N}$ функции $f(z)$, то *главная часть лорановского разложения* функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ имеет конечное число слагаемых с положительными степенями z , т.е. имеет вид

$$g(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_m z^m.$$

Вычитая из $f(z)$ эту главную часть, получаем также целую функцию $\varphi(z) = f(z) - g(z)$, но с лорановским разложением в окрестности точки $z = \infty$, не содержащим слагаемых с положительными степенями z . Для такой функции $z = \infty$ будет *устраняемой особой точкой*, т.е. с учетом замечания 7.3 приходим к тому, что $\varphi(z) = \text{const}$. Следовательно, целая функция $f(z)$ с полюсом порядка m в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ является многочленом степени m .

Целые **функции**, для которых $z = \infty$ является *существенно особой точкой*, называют **целыми трансцендентными**. Таковы, например, функции e^z , $\cos z$ и $\sin z$.

Используя установленные только что результаты, нетрудно доказать следующую *основную теорему алгебры*.

Теорема 7.9. Всякий многочлен степени $n \in \mathbb{N}$

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

имеет по крайней мере один нуль.

◀ Пусть многочлен $P_n(z)$ не имеет нулей. Тогда функция $g(z) = 1/P_n(z)$ является целой. Так как $g(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, то $g(z)$ будет аналитической функцией на всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ и, следовательно, $g(z) = \text{const}$. Это противоречит построению функции $g(z)$. Поэтому исходное предположение неверно, т.е. многочлен $P_n(z)$ имеет по крайней мере один нуль. ▶

Теорема 7.9 подтверждает тесную взаимную связь всех разделов математики, в частности, связь теории функций комплексного переменного с алгеброй: методы теории функций действительного переменного позволяют доказать важнейшую теорему высшей алгебры о многочленах.

Следующее определение вводит более общий по сравнению с целыми функциями класс функций.

Определение 7.9. **Функцию**, не имеющую в комплексной плоскости \mathbb{C} помимо полюсов других особых точек, называют **мероморфной**.

В каждом круге $|z| < n \in \mathbb{N}$ мероморфная функция может иметь лишь конечное число полюсов. Иначе существовала бы их конечная предельная точка, которая представляла бы собой неизолированную особую точку, а это противоречит определению 7.9, поскольку полюсы, согласно определению 7.4, являются изолированными особыми точками. Следовательно,

мероморфная функция может иметь в комплексной плоскости \mathbb{C} не более чем *счетное множество* полюсов, т.е. все полюсы можно пронумеровать. Примерами мероморфных функций с бесконечным, но счетным множеством полюсов будут $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $1/\sin z$, $1/(e^z - 1)$. Рациональная функция как отношение двух многочленов является мероморфной функцией и имеет на всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ лишь конечное число полюсов. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 7.10. Если функция имеет конечное число изолированных особых точек в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ и все они — полюсы, то эта функция рациональная.

◀ Пусть

$$g_\nu(z) = \frac{c_{-m_\nu}^{(\nu)}}{(z - a_\nu)^{m_\nu}} + \frac{c_{-m_\nu+1}^{(\nu)}}{(z - a_\nu)^{m_\nu-1}} + \dots + \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{z - a_\nu} \quad (7.31)$$

есть главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности полюса a_ν . Обозначим

$$g(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_m z^m \quad (7.32)$$

главную часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$. Если $z = \infty$ является устранимой особой точкой для $f(z)$, то полагаем $g(z) \equiv 0$.

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(z) = f(z) - g(z) - \sum_{\nu=1}^n g_\nu(z).$$

Она является аналитической функцией на всей расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, и, следовательно, $\varphi(z) = \operatorname{const} = c_0$. Таким образом,

$$f(z) = c_0 + g(z) + \sum_{\nu=1}^n g_\nu(z), \quad (7.33)$$

т.е. $f(z)$ является рациональной функцией. ▶

Итак, представление (7.33) — это разложение рациональной функции $f(z)$ на целую часть и на правильные простейшие дроби. Существование такого разложения является попутным результатом доказательства теоремы 7.10. Шведский математик М.Г. Миттаг-Лёффлер (1846–1927), по инициативе которого к чтению лекций в Стокгольмском университете в 1883 г. была привлечена С.В. Ковалевская, получил представление, аналогичное (7.33), для произвольной мероморфной функции. Это объясняет название мероморфной функции, происходящее от греческих слов *μερος* — часть, дробь и *μορφοσ* — форма, вид, т.е. подобная дроби. В отличие от этого названия первые два слога одного из синонимов аналитической функции — *голоморфной функции* — созвучны греческому слову *δλοσ* — весь, целый. Это означает, что аналитическая функция подобна целой функции в том смысле, что в окрестности точки аналитичности она представима степенным рядом.

Дополнение 7.1. Физическое толкование полюсов аналитической функции

Рассмотрим простейшую функцию комплексного переменного, имеющую в точке $z = a$ полюс первого порядка:

$$W_1(z) = \frac{c_{-1}}{z - a}. \quad (7.34)$$

Эту функцию можно трактовать как *комплексный потенциал* плоского векторного поля, которое является полем диполя, помещенного в точку $z = a$ с *моментом диполя* $p = 2\pi c_{-1}$ (см. пример 5.15). При этом угол $\text{Arg}(-c_{-1}) = \text{Arg} c_{-1} - \pi$ задает направление оси диполя. Примером такого поля является плоское электростатическое поле двух параллельных противоположно заряженных проводников, если его рассматривать на расстояниях от проводников, достаточно больших по сравнению с расстоянием между ними.

Продолжим изучение плоских векторных полей, начатое в Д.5.1.

Пример 7.16. Пусть в точках $z_1 = a - h$ и $z_0 = a$ расположены два диполя с противоположными моментами $-p$ и p (в общем случае комплексными). Комплексный потенциал поля этих диполей, согласно примеру 5.15, имеет вид (постоянные слагаемые опущены)

$$W_h(z) = \frac{p}{2\pi(z-a)} - \frac{p}{2\pi(z-a+h)} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{ph}{2\pi(z-a)^2}.$$

Поле, описываемое комплексным потенциалом

$$W(z) = \frac{q}{2\pi(z-a)^2}, \quad (7.35)$$

называют *полем квадруполья*, помещенного в точку $z = a$ и имеющего момент q . Поле квадруполья можно рассматривать как предельный случай поля двух диполей с противоположными моментами, помещенных на расстоянии h друг от друга, когда $h \rightarrow 0$, а произведение $q = ph$ остается постоянным. Этот предельный случай соответствует ситуации, когда векторное поле двух диполей рассматривается на значительном удалении от них.

Полагая $z - a = \rho e^{i\varphi}$ в (7.35), получаем

$$W(z) = \frac{q}{2\pi\rho^2} e^{-2i\varphi}.$$

Из этого представления находим уравнения линий равного потенциала и линий тока в полярных координатах:

$$\rho^2 = c_\Phi \cos 2\varphi, \quad \rho^2 = c_\Psi \sin 2\varphi.$$

И те и другие линии представляют собой *лемнискаты Бернулли* (на рис. 7.2 принято $z_0 = a = 0$, а стрелки на линиях тока соответствуют $q > 0$).

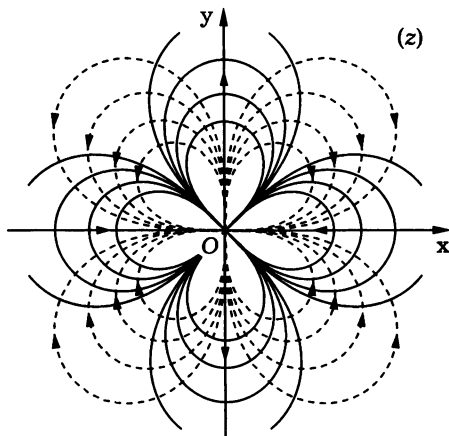


Рис. 7.2

Полем квадруполья, например, будет плоское электростатическое поле четырех параллельных проводников, имеющих одинаковый по абсолютному значению заряд и пересекающих плоскость в вершинах квадрата с пренебрежимо малой длиной стороны, причем каждой из диагоналей квадрата соответствуют проводники, имеющие заряд одинакового знака. #

Итак, простейшая функция $W(z) = c_{-2}(z - a)^{-2}$, имеющая в точке $z_0 = a$ полюс второго порядка, будет комплексным потенциалом поля квадруполья, являющегося объединением в этой точке двух диполей с противоположными моментами, и момент квадруполья равен $2\pi c_{-2}$.

В более общем случае главная часть лорановского разложения функции в окрестности точки $z = a$, имеющей в этой точке полюс второго порядка, согласно теореме 7.3, имеет вид

$$W_1(z) + W_2(z) = \frac{c_{-1}}{z - a} + \frac{c_{-2}}{(z - a)^2}. \quad (7.36)$$

Такая главная часть, если ее рассматривать как комплексный потенциал, описывает суперпозицию полей квадруполья с моментом $2\pi c_{-2}$ и диполя с моментом $2\pi c_{-1}$.

Плоское векторное поле, которое описывается комплексным потенциалом

$$W_m(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m}, \quad (7.37)$$

т.е. простейшей функцией с полюсом в точке $z = a$ порядка m , называют **полем мультиполя (2m)-го порядка**, помещенного в точку $z = a$ и имеющего момент $2\pi c_{-m}$. Такое поле можно рассматривать как суперпозицию двух мультиполей порядка $2(m-1)$ с противоположными моментами. При этом мультиполь второго порядка — это диполь, а мультиполь четвертого порядка — квадруполь*.

Функция $W(z)$, имеющая в точке $z_0 = a$ полюс первого порядка, согласно теореме 7.3, в некоторой окрестности этой точки имеет лорановское разложение вида

$$W(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

в котором $c_{-1} \neq 0$. Правильная часть этого разложения является функцией, аналитической в окрестности точки $z = a$, и, следовательно, представляет собой комплексный потенциал плоского лапласова поля (см. Д.5.1). Главная часть рассматриваемого разложения — это комплексный потенциал диполя, помещенного в точку $z = a$ и имеющего момент $2\pi c_{-1}$ (в общем случае комплексный). В итоге $W(z)$ есть комплексный потенциал плоского векторного поля в окрестности точки $z = a$, являющегося суперпозицией лапласова поля и поля диполя.

Если функция $W(z)$ имеет в точке $z = a$ полюс порядка $m > 1$, то ее разложение в окрестности $z = a$ имеет вид

$$W(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots \\ \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad (7.38)$$

*В физике диполь называют мультиполем первого порядка, а квадруполь — мультиполем второго порядка

в котором $c_{-m} \neq 0$. Такую функцию можно рассматривать как комплексный потенциал поля, получающегося суперпозицией лапласова поля, соответствующего правильной части лорановского разложения (7.38), и набора полей мультиполей вплоть до порядка $2m$ (т.е. диполя, квадруполь и т.д.), каждое из которых описывается слагаемым главной части этого разложения.

Вопросы и задачи

7.1. Установите кратность нуля $z = 0$ для функций:

а) $z^2(e^{z^2} - 1)$; б) $z^3(z^6 - 1) + \sin z^3$; в) $e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$.

7.2. Пусть точка $z = a$ является нулем кратности l для функции $f(z)$ и нулем кратности m для функции $\varphi(z)$. Установите, чем будет эта точка для функций: а) $f(z)\varphi(z)$; б) $f(z) + \varphi(z)$; в) $f(z)/\varphi(z)$.

7.3. Найдите нули и установите кратность каждого из них для функций: а) $z^2 + 4$; б) $(z^2 + 4)/z^4$; в) $z \sin z$; г) $1 - \cos z$; д) $(1 - e^z)(z^2 - 4)^2$; е) $\sin z - \operatorname{tg} z$; ж) $\cos^3 z$; з) $(1 - \sqrt{2 - 2\cos z})^2$.

7.4. Установите, существует ли функция $f(z)$, аналитическая в точке $z = 0$ и принимающая в точках $z_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$,

значения: а) $0, 1, 0, \dots, \frac{1 + (-1)^n}{2}, \dots$; б) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \dots, 0, \frac{1}{2n}, \dots$; в) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \dots$; г) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

7.5. Разложите в ряд Лорана в окрестности изолированных особых точек (включая $z = \infty$) функции:

а) $\frac{1}{z(1-z)}$; б) $z^2 e^{1/z}$; в) $\frac{1}{z^2 + 1}$; г) $z^2 \sin \frac{1}{z-1}$.

Установите области, в которых эти разложения имеют место.

7.6. Выясните, существует ли функция $f(z)$, аналитическая в точке $z = 0$ и удовлетворяющая условиям:

$$\text{а) } f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}; \quad \text{б) } f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}.$$

7.7. Найдите особые точки (включая точку $z = \infty$) и установите их тип для следующих функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{1}{z - z^3}; & \text{б) } & \frac{z^5}{(z^2 - 1)^2}; & \text{в) } & \frac{e^z}{1 + z^2}; & \text{г) } & \frac{z^2 + 1}{e^z}; & \text{д) } & \frac{1 - e^z}{2 + e^z}; \\ \text{е) } & ze^{-z}; & \text{ж) } & e^{-1/z^2}; & \text{з) } & e^{z-1/z}; & \text{и) } & \sin \frac{1}{z-1}; & \text{к) } & \frac{1}{\sin z - \cos z}; \\ \text{л) } & \frac{z^7}{(z^2 - 1)^2 \cos \frac{1}{z-1}}; & \text{м) } & \frac{1}{z^2} + \sin \frac{1}{z}; & \text{н) } & \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

7.8. Постройте примеры функций, имеющие на расширенной комплексной плоскости только следующие особенности:

- а) полюс второго порядка в точке $z = \infty$;
- б) один полюс порядка m ;
- в) полюс второго порядка в точке $z = 0$ с главной частью $1/z^2$ лорановского разложения функции в окрестности этой точки и простой полюс в бесконечно удаленной точке;
- г) полюс порядка n в точке $z = 0$ и полюс порядка m в точке $z = \infty$.

7.9. Для функции $\varphi(z)$ точка $a \in \bar{\mathbb{C}}$ — либо полюс, либо точка аналитичности. Установите, к какому типу особых точек принадлежит $z = a$ для сложной функции $f(\varphi(z))$, если точка $w_0 = \varphi(a)$ для функции $f(w)$ является:

- а) устранимой особой точкой;
- б) полюсом порядка n ;
- в) существенно особой точкой.

7.10. Найдите общий вид функции, имеющей на расширенной комплексной плоскости: а) один простой полюс; б) один полюс порядка m ; в) n простых полюсов.

8. ВЫЧЕТЫ В ИЗОЛИРОВАННЫХ ОСОБЫХ ТОЧКАХ

8.1. Вычет в конечной точке

Пусть функция $f(z)$ является аналитической по крайней мере в проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ ($a \neq \infty$), т.е. в некотором кольце $0 < |z - a| < r$ с внешним радиусом r . Сама точка $z = a$ может быть либо точкой аналитичности функции $f(z)$, либо ее *изолированной особой точкой*.

Определение 8.1. *Вычетом функции $f(z)$ в конечной точке $a \in \mathbb{C}$ называют значение контурного интеграла*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz,$$

где L — некоторый замкнутый простой кусочно гладкий контур, охватывающий точку $z = a$ и лежащий целиком в кольце $0 < |z - a| < r$.

Обозначают вычет, как правило, одним из следующих символов:

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z), \quad \operatorname{res}_a f(z), \quad \operatorname{Res}[f(z), a].$$

Для дальнейшего изложения выберем первое обозначение. Тогда, согласно определению, можем записать

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz. \quad (8.1)$$

Обозначение „Res“ происходит от французского слова *residu* — остаток. Понятие вычета ввел французский математик О. Коши (1789–1852), рассматривая разность значений интегралов

от функции по таким двум путям, имеющим общие начало и конец, что полюсы функции лежат между этими путями.

Отметим сразу, что если $z = a$ является точкой аналитичности функции $f(z)$, то по *теореме Коши для односвязной области* вычет этой функции в точке $z = a$ равен нулю. Так что о вычете функции в конечной точке $z = a$ целесообразно говорить, если $z = a$ является изолированной особой точкой этой функции. Именно с такими точками связана теория вычетов. Поэтому в определении 8.1 сразу можно было бы указать, что речь идет об изолированной особой точке $a \in \mathbb{C}$.

На основании теоремы Коши для многосвязной области получаем, что вычет $\operatorname{Res}_{z=a} f(z)$ функции $f(z)$, аналитической в проколотой окрестности точки $z = a$, не зависит от формы контура L . Действительно, пусть L_1 и L_2 — простые контуры, охватывающие точку $z = a$ (рис. 8.1) и целиком лежащие в кольце $0 < |z - a| < r$, в котором функция $f(z)$ является аналитической. При любом расположении контуров L_1 и L_2 существует третий контур L , окружающий точку $z = a$, настолько малый, что не пересекается ни с L_1 , ни с L_2 . По теореме Коши для двусвязной области оба интеграла по контурам L_1 и L_2 равны интегралу по контуру L . Следовательно, эти два интеграла равны друг другу.

Так как вычет не зависит от формы контура, для вычисления контурного интеграла в (8.1) целесообразно выбрать наиболее удобную форму контура L . Например, можно взять окружность с центром в точке $z = a$. Благодаря достаточно простому ее комплексному уравнению

$$z - a = \rho e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (8.2)$$

где ρ — радиус окружности, контурный интеграл сводится к вычислению определенного интеграла по переменному φ

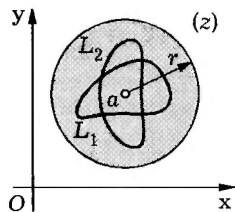


Рис. 8.1

(см. пример 5.4). По этой причине вычет функции $f(z)$ в ее изолированной особой точке $z = a$ часто определяют как контурный интеграл функции $f(z)$ по окружности $|z - a| = \rho$ настолько малого радиуса ρ , что эта окружность целиком содержится в кольце $0 < |z - a| < r$, в котором функция $f(z)$ аналитична.

Пример 8.1. Найдем вычет функции $f(z) = z/(z - 1)$ в точке $z = 1$. Эта точка для $f(z)$ является изолированной особой точкой. Внутри окружности $|z - 1| = \rho$ произвольного радиуса ρ функция не имеет особых точек, т.е. в любой проколотой окрестности точки $z = 1$ она является аналитической. Поэтому в (8.1) в качестве контура L можно выбрать окружность. В этом случае имеем $z = 1 + \rho e^{i\varphi}$, $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, и

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=1} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} i\rho e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\varphi = 1, \end{aligned}$$

поскольку интеграл от $e^{i\varphi}$ в пределах от 0 до 2π равен нулю (см. пример 5.4).

Тот же результат можно получить, применив *интегральную формулу Коши* для вычисления интеграла, определяющего вычет. Так как функция $\varphi(z) = z$ аналитична во всей плоскости \mathbb{C} , то, используя (5.24), получаем

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\varphi(z) dz}{z - 1} = \varphi(1) = 1.$$

Теорема 8.1 (теорема Коши о вычетах). Пусть функция $f(z)$ аналитична на простом контуре L и в ограниченной этим контуром области D , за исключением конечного числа

изолированных особых точек $a_\nu \in D$, $\nu = \overline{1, n}$. Тогда

$$\oint_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_\nu} f(z). \quad (8.3)$$

◀ Построим окружности L_ν , $\nu = \overline{1, n}$, с центрами в точках a_ν столь малых радиусов, что эти окружности не пересекаются друг с другом и все лежат в области D (рис. 8.2). По теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\oint_L f(z) dz = \sum_{\nu=1}^n \oint_{L_\nu} f(z) dz.$$

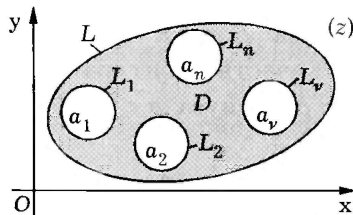


Рис. 8.2

Разделив почленно это равенство на $2\pi i$, получаем утверждение теоремы, так как в силу определения 8.1 вычета

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{L_\nu} f(z) dz = \operatorname{Res}_{z=a_\nu} f(z), \quad \nu = \overline{1, n}. \quad \blacktriangleright$$

Таким образом, вычисление контурного интеграла от функции $f(z)$ по контуру L при выполнении условий теоремы 8.1 сводится к вычислению вычетов этой функции в изолированных особых точках, охватываемых этим контуром. Оказывается, что вычет функции в особой точке легко вычислить, если известно лорановское разложение функции в окрестности этой

особой точки. Более того, для вычисления вычета нужно знать лишь один коэффициент лорановского разложения.

Теорема 8.2. Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = a$ равен коэффициенту c_{-1} лорановского разложения $f(z)$ в окрестности a (говорят: „при минус первой степени $z - a$ “):

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1}. \quad (8.4)$$

◀ Представим функцию $f(z)$ в проколотой окрестности $0 < |z - a| < r$ точки a некоторого радиуса r рядом Лорана (см. теорему 6.11):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n, \quad 0 < |z - a| < r.$$

Коэффициенты c_n ряда Лорана вычисляются по формулам (6.32), в которых в качестве контура L можно взять любую окружность $|z - a| = \rho$ радиуса $\rho < r$. В частном случае при $n = -1$ получаем

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz.$$

Но правая часть равенства есть вычет функции $f(z)$ в точке $z = a$, т.е. это равенство фактически равносильно утверждению теоремы. ▶

Если в точке $z = a$ функция $f(z)$ является аналитической, то $c_{-1} = 0$ и соответственно $\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = 0$. Это согласуется с тем, что было сказано о вычете в точке аналитичности функции после определения 8.1.

Отметим, что иногда понятие вычета вводят непосредственно через значение коэффициента c_{-1} в лорановском разложении функции. Согласно теореме 8.2, это равносильно данному выше определению, в котором вычет введен через контурный интеграл.

Теорема 8.2 позволяет находить вычет не через интеграл, а с помощью коэффициента c_{-1} лорановского разложения, что во многих случаях оказывается более удобным.

Пример 8.2. а. Найдем вычет функции $e^{1/z}$ в точке $z = 0$. Так как

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots, \quad |z| > 0,$$

то $\operatorname{Res}_{z=0} e^{1/z} = c_{-1} = 1$. Отсюда, кстати, согласно теоремам 8.1 и 8.2, следует, что

$$\oint_L e^{1/z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} e^{1/z} = 2\pi i$$

для любого простого контура L , охватывающего точку $z = 0$.

б. Найдем вычет функции $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1}$ в точке $z = 1$. Для этого используем разложение $f(z)$ по степеням $z - 1$. Запишем $z^2 = ((z-1) + 1)^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1$. С помощью стандартного разложения (6.20) для синуса получаем при $|z-1| > 0$

$$f(z) = ((z-1)^2 + 2(z-1) + 1) \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \frac{1}{5!(z-1)^5} + \dots \right).$$

Теперь нетрудно вычислить коэффициент разложения функции $f(z)$ при $(z-1)^{-1}$: $c_{-1} = 1 - 1/3! = 5/6$. Стало быть, $\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = 5/6$.

в. Найдем вычет функции $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^3}$ в точке $z = 0$. Используя стандартное разложение (6.19) для косинуса, при $|z| > 0$ получаем

$$\frac{\sin^2 z}{z^3} = \frac{1 - \cos 2z}{2z^3} = \frac{1}{2z^3} \left(\frac{(2z)^2}{2!} - \frac{(2z)^4}{4!} + \frac{(2z)^6}{6!} - \dots \right).$$

Следовательно, коэффициент разложения при z^{-1} равен $c_{-1} = 1$ и $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1$.

г. Вычислим вычет функции $f(z) = (z^5 - 2z^3 + 1)/z^4$ в точке $z = 0$. Поскольку представление этой функции в виде

$$f(z) = z - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^4}$$

можно рассматривать как ее лорановское разложение в окрестности точки $z = 0$, то сразу получаем $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = -2$. #

Следствие 8.1. Вычет функции в ее конечной *устранимой особой точке* равен нулю.

◀ Действительно, достаточно использовать теорему 7.1, согласно которой лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности *устранимой особой точки* $z = a$ не содержит отрицательных степеней $z - a$, в том числе не содержит и $(z - a)^{-1}$, а это означает, что $c_{-1} = \operatorname{Res}_{z=a} f(z) = 0$. ▶

Так, для функции $f(z) = (e^{z^2} - 1)/(z^3 - z^2)$ точка $z = 0$, согласно определению 7.4, является *устранимой особой точкой*, поскольку, учитывая эквивалентность $e^{z^2} - 1 \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z^2$, имеем

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{z^2(z - 1)} = -1.$$

Отсюда в силу следствия 8.1 $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$.

8.2. Вычисление вычета в полюсе

Рассмотрим сначала случай *простого полюса* (полюса *первого порядка*) функции $f(z)$ в точке $z = a$. В этом случае лорановское разложение (7.11) $f(z)$ в окрестности (радиуса r) точки $z = a$ имеет, согласно теореме 7.3, следующий вид:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad 0 < |z - a| < r.$$

Отсюда $c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)$. Стало быть, в простом полюсе $z = a$ вычет функции $f(z)$ равен

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a). \quad (8.5)$$

Отметим, что существование конечного ненулевого предела в равенстве (8.5) справа равносильно асимптотической формуле

$$f(z) \underset{z \rightarrow a}{\sim} \frac{\operatorname{Res} f(z)}{z - a}, \quad (8.6)$$

где $\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = A \neq 0$.

Для вычисления вычета в простом полюсе особенно удобна следующая модификация формулы (8.5). Пусть функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad (8.7)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции, аналитические в окрестности точки $z = a$ и удовлетворяющие условиям

$$\varphi(a) \neq 0, \quad \psi(a) = 0, \quad \psi'(a) \neq 0. \quad (8.8)$$

Согласно утверждению 7.1, представление (8.7) при выполнении условий (8.8) является необходимым и достаточным для того, чтобы точка $z = a$ была полюсом первого порядка функции $f(z)$. Учитывая (8.5) и определение производной функции комплексного переменного, получаем

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)(z - a)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z - a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Итак, если функция $f(z)$ имеет представление (8.7), удовлетворяющее условиям (8.8), то

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \quad (8.9)$$

Если точка $z = a$ является простым полюсом дробно-рациональной функции $f(z)$ или же $f(z) = \varphi(z)/P_n(z)$, где $\varphi(z)$ — функция, аналитическая в некоторой окрестности этой точки, причем $\varphi(a) \neq 0$, а $P_n(z)$ — многочлен, имеющий простой нуль в точке $z = a$, то (8.9) намного удобнее для вычисления вычета функции $f(z)$ в данной точке, чем (8.5) или (8.6), так как не требует выделения в знаменателе $f(z)$ линейного множителя $z - a$.

Пример 8.3. Найдем вычет функции $e^z/(z^3 + 1)$ в точке $z = -1$. Поскольку многочлен $z^3 + 1$ имеет три различных простых нуля, один из которых — точка $z = -1$, и $e^z|_{z=-1} \neq 0$, то точка $z = -1$ является, согласно утверждению 7.1, простым полюсом этой функции. Используя (8.9), находим

$$\operatorname{Res}_{z=-1} \frac{e^z}{z^3 + 1} = \frac{e^z}{(z^3 + 1)'} \Big|_{z=-1} = \frac{e^z}{3z^2} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{3e}. \quad \#$$

Пусть теперь точка $z = a$ является полюсом функции $f(z)$ порядка m . Тогда в проколотой окрестности этой точки, согласно теореме 7.3,

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

причем $c_{-m} \neq 0$. Умножив это равенство на $(z-a)^m$, получим

$$\begin{aligned} f(z)(z-a)^m &= c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \dots \\ &\dots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{m+n}. \end{aligned}$$

Полученное равенство представляет собой лорановское разложение функции $f(z)(z-a)^m$ в окрестности точки $z = a$, в котором отсутствуют отрицательные степени $z - a$. Стало быть, точка a является устранимой особой точкой функции $f(z)(z-a)^m$, а лорановское разложение этой функции мож-

но рассматривать как ряд Тейлора функции $\varphi(z)$, полученной доопределением функции $f(z)(z-a)^m$ в точке a ее пределом. Коэффициент c_{-1} лорановского разложения функции $f(z)$ является коэффициентом Тейлора функции $\varphi(z)$ при $(z-a)^{m-1}$, и его можно найти стандартным образом через производную функции $(m-1)$ -го порядка:

$$c_{-1} = \frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname{Res}_{z=a} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m} = \frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}. \quad (8.10)$$

Учитывая вид функции $\varphi(z)$ и непрерывность всех ее производных, можем записать

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z-a)^m).$$

Следовательно, в силу теоремы 8.2 вычет функции $f(z)$ в полюсе m -го порядка равен

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z-a)^m). \quad (8.11)$$

При $m=1$ с учетом соглашения $0! = 1$, а также соглашения о том, что производная нулевого порядка — это сама функция, формула (8.11) совпадает с (8.5).

Пример 8.4. Функция

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)}$$

имеет простой полюс в точке $z=1$ и полюс второго порядка в точке $z=0$. Используя (8.5), в точке $z=1$ получаем

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} f(z)(z-1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+1}{z^2} = 2,$$

а в точке $z = 0$, полагая $\varphi(z) = (z + 1)/(z - 1)$ в (8.10), находим

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)' \Big|_{z=0} = \frac{z-1-(z+1)}{(z-1)^2} \Big|_{z=0} = -2. \quad \#$$

Для вычисления вычета функции $f(z)$ в существенно особой точке $z = a$ нет формулы, аналогичной (8.11). В таком случае стараются непосредственно найти тем или иным способом коэффициент c_{-1} лорановского разложения функции в окрестности этой точки.

Пример 8.5. Для функции

$$f(z) = \frac{\sin(1/z)}{1-z}$$

точка $z = 0$ является существенно особой, так как эта функция не имеет предела при $z \rightarrow 0$ (см. определение 7.4). Действительно, $1/(1-z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow 0$, а у функции $\sin(1/z)$ не существует ни конечного, ни бесконечного предела при $z \rightarrow 0$. Используя стандартные разложения (6.20) и (6.23) для синуса и дроби $1/(1-z)$, в области $0 < |z| < 1$ получаем

$$\frac{\sin(1/z)}{1-z} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right) (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots).$$

Отсюда находим коэффициент при z^{-1} :

$$c_{-1} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots = \sin 1.$$

Стало быть, в силу теоремы 8.2 $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \sin 1$.

8.3. Вычет в бесконечно удаленной точке

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в проколотой окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$, т.е. в области $|z| > R$ для некоторого числа $R \geq 0$. Тогда $z = \infty$ будет для $f(z)$ изолированной особой точкой.

Определение 8.2. Вычетом $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)$ функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$, являющейся изолированной особой точкой $f(z)$, называют значение интеграла

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz, \quad (8.12)$$

вычисляемого по простому кусочно гладкому контуру L , который вместе со своей внешностью расположен в области аналитичности функции и проходит по часовой стрелке.

Отметим, что, как и в случае конечной точки, значение контурного интеграла не зависит от выбора простого контура L , охватывающего точку $z = \infty$. В качестве такого контура чаще всего берут окружность $|z| = \rho$, имеющую радиус $\rho > R$, проходимую по часовой стрелке.

Пример 8.6. Вычислим вычет функции $e^z/(z-1)^2$ в точке $z = \infty$. Выбирая окружность L радиуса $\rho > 1$, применим формулу (5.36) при $n = 1$. В результате, учитывая изменение знака при изменении ориентации контура интегрирования, получаем

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{e^z}{(z-1)^2} dz = -(e^z)' \Big|_{z=1} = -e.$$

Теорема 8.3. Вычет функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке равен коэффициенту c_{-1} лорановского разложения функции в окрестности этой точки при z^{-1} , взятому с обратным знаком:

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}. \quad (8.13)$$

◀ Вне окружности достаточно большого радиуса R функцию $f(z)$ можно представить лорановским разложением (7.29). Согласно формуле (6.32) для коэффициентов ряда Лорана, находим

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz.$$

Из этого равенства и равенства (8.12), изменяя ориентацию контура интегрирования, получаем (8.13). ►

Заметим, что в случае, когда $z = \infty$ — устранимая особая точка функции $f(z)$, вычет в этой точке может быть отличен от нуля. Этим бесконечно удаленная точка отличается от конечных особых точек функции.

Пример 8.7. Для функции $e^{1/z}$ точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой, так как $e^{1/z} \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$. Тем не менее вычет функции в точке $z = \infty$ отличен от нуля. Действительно, используя стандартное разложение (6.18) для экспоненциальной функции, получаем при $|z| > 0$

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots$$

Отсюда, согласно (8.13), заключаем, что $\operatorname{Res}_{z=\infty} e^{1/z} = -c_{-1} = -1$. #

Пусть точка $z = \infty$ является нулем функции $f(z)$ кратности m . Тогда в окрестности $z = \infty$ функцию можно представить, согласно (7.9), в следующем виде:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{z^m} + \frac{c_{-m-1}}{z^{m+1}} + \dots, \quad c_{-m} \neq 0, \quad (8.14)$$

т.е. для $A = c_{-m}$ справедлива асимптотическая формула

$$f(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{z^m}, \quad A \neq 0.$$

Если $m = 1$, то $A = c_{-1} \neq 0$ и в силу теоремы 8.3 вычет функции в точке $z = \infty$ равен $-A$, т.е.

$$f(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{z} \implies \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -A = -\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z). \quad (8.15)$$

Если же $m \geq 2$, то в представлении (8.14) коэффициент c_{-1} отсутствует, т.е. $c_{-1} = 0$. Поэтому, согласно теореме 8.3,

$$f(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{z^m}, \quad m \geq 2, \implies \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0. \quad (8.16)$$

Пример 8.8. а. Для функции

$$f(z) = \frac{\cos(1/z)}{z-1}$$

точка $z = \infty$ — простой нуль, так как $f(z) \sim 1/z$ при $z \rightarrow \infty$. Поэтому, согласно (8.15), $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

б. Для функции

$$g(z) = \frac{\sin(1/z)}{z-1}$$

точка $z = \infty$ будет нулем кратности 2, поскольку $g(z) \sim 1/z^2$ при $z \rightarrow \infty$. Следовательно, $\operatorname{Res}_{z=\infty} g(z) = 0$.

Теорема 8.4 (теорема о сумме вычетов). Пусть функция $f(z)$ является аналитической во всей комплексной плоскости (z) за исключением конечного числа изолированных особых точек a_ν , $\nu = \overline{1, n}$. Тогда сумма всех вычетов этой функции, включая вычет в бесконечно удаленной точке, равна нулю:

$$\sum_{\nu=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_\nu} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0. \quad (8.17)$$

◀ Пусть L — окружность $|z| = R$, ориентированная против часовой стрелки, причем R выбрано так, что все точки a_ν , $\nu = \overline{1, n}$, лежат внутри L . По *теореме Коши о вычетах*

$$\oint_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_\nu} f(z).$$

В то же время, согласно определению 8.2 и с учетом ориентации контура интегрирования,

$$\oint_L f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z).$$

Из двух этих равенств вытекает утверждение теоремы. ▶

Пример 8.9. Найдем все особые точки функции $f(z)$, выясним их тип (включая точку $z = \infty$) и вычислим в них вычеты для функций: а) $e^{1/z}/(z-1)^2$; б) $\sin(1/z^2) + e^{z^2} \cos z$; в) $e^{z-1/z}$.

а. Особыми точками функции $f(z) = e^{1/z}/(z-1)^2$ являются:

$z_1 = 0$ — существенно особая точка, так как не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции $e^{1/z}$ при $z \rightarrow 0$ (см. пример 7.2), а $(z-1)^2 \rightarrow 1$ при $z \rightarrow 0$;

$z_2 = 1$ — полюс второго порядка, поскольку $f(z)(z-1)^2 \rightarrow e$ при $z \rightarrow 1$ и $e \neq 0$;

$z_3 = \infty$ — нуль кратности 2, так как $f(z) \sim 1/z^2$ при $z \rightarrow \infty$.

Из соображений удобства вычисление вычетов функции $f(z)$ в этих точках начнем с последней. Согласно (8.16), сразу получаем $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$. Далее, используя формулу (8.11) при $m = 2$, находим

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} (e^{1/z}) = \lim_{z \rightarrow 1} e^{1/z} \left(-\frac{1}{z^2} \right) = -e.$$

Наконец, по теореме 8.4 о сумме вычетов определяем вычет в особой точке $z = 0$:

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) - \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = e.$$

Обратим внимание на то, что в данном случае удалось избежать непосредственного вычисления вычета функции $f(z)$ в существенно особой точке $z_1 = 0$.

б. Особыми точками функции $f(z) = \sin(1/z^2) + e^{z^2} \cos z$ являются $z_1 = 0$ и $z_2 = \infty$. Точка $z_1 = 0$ — существенно особая точка функции, так как $e^{z^2} \cos z \rightarrow 1$ при $z \rightarrow 0$, а $\sin(1/z^2)$ не имеет предела при $z \rightarrow 0$ ни конечного, ни бесконечного. Точка $z_2 = \infty$ также является существенно особой, поскольку $\sin(1/z^2) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, а функция $h(z) = e^{z^2} \cos z$ не имеет предела при $z \rightarrow \infty$. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть

две последовательности $z'_n = \pi/2 + \pi n$ и $z''_n = 2\pi n$, сходящиеся к бесконечно удаленной точке. Для первой из них $h(z'_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, в то время как для второй — $h(z''_n) = e^{4\pi^2 n^2} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Для вычисления вычета функции $f(z)$ в указанных точках представим функцию в области $|z| > 0$, используя стандартные разложения (6.18)–(6.20), в следующем виде:

$$\sin \frac{1}{z^2} + e^{z^2} \cos z = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} - \dots + \\ + \left(1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \dots\right) \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right).$$

После перемножения рядов в правой части этого представления получаем лорановское разложение функции $f(z)$ как в окрестности точки $z_1 = 0$, так и в окрестности бесконечно удаленной точки $z_2 = \infty$. Очевидно, что полученное разложение не будет содержать слагаемое с z^{-1} , т.е. $c_{-1} = 0$. Следовательно, $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

в. Особыми точками функции $f(z) = e^{z-1/z}$ являются снова точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \infty$. Обе эти точки существенно особые, так как не существует ни конечного, ни бесконечного пределов функции $e^{-1/z}$ при $z \rightarrow 0$ и функции e^z при $z \rightarrow \infty$ (см. пример 7.2), а из этого следует, что в указанных точках не существует и предела функции $f(z)$. Используя стандартное разложение (7.14) для экспоненциальной функции, запишем

$$e^{z-1/z} = e^z e^{-1/z} = \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots\right) \left(1 - \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} - \dots\right).$$

Раскрывая скобки и выбирая слагаемые, содержащие z^{-1} , находим

$$c_{-1} = -1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{3!4!} - \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{k!(k+1)!} + \dots$$

Сумму такого числового ряда можно записать компактно с помощью функции Бесселя первого рода первого порядка [XI]

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}.$$

С учетом этого получим $c_{-1} = -J_1(2)$ и $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = -J_1(2)$. Согласно теореме о сумме вычетов, $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = J_1(2)$.

8.4. Применение вычетов для вычисления интегралов

Теорема Коши о вычетах является одной из самых важных в теории функций комплексного переменного. При помощи этой теоремы можно эффективно вычислять многие интегралы. Рассмотрим несколько примеров вычисления контурных интегралов при помощи вычетов.

Пример 8.10. а. Вычислим интеграл

$$\oint_L \frac{\operatorname{ch} z \, dz}{(z+1)^3(z-1)}$$

по окружности L : $|z| = 2$. Подынтегральная функция $f(z) = \operatorname{ch} z / ((z+1)^3(z-1))$ является аналитической всюду в области $|z| < 2$, кроме точек $z_1 = -1$ и $z_2 = 1$. Найдем вычеты функции $f(z)$ в этих точках. Так как $z = -1$ — полюс $f(z)$ третьего порядка, то, используя (8.11) при $m = 3$, находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-1} f(z) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\operatorname{ch} z}{z-1} \right) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z-1)\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z}{(z-1)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z-1)^2 \operatorname{ch} z - 2(z-1)\operatorname{sh} z + 2\operatorname{ch} z}{(z-1)^3} = \frac{2\operatorname{sh} 1 - 3\operatorname{ch} 1}{8}. \end{aligned}$$

Точка $z_2 = 1$ является простым полюсом функции $f(z)$. Поэтому, используя (8.5), получаем

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} f(z)(z-1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3} = \frac{\operatorname{ch} 1}{8}.$$

Согласно теореме 8.1, имеем

$$\oint_L \frac{\operatorname{ch} z \, dz}{(z+1)^3(z-1)} = 2\pi i \left(\frac{2\operatorname{sh} 1 - 3\operatorname{ch} 1}{8} + \frac{\operatorname{ch} 1}{8} \right) = -\frac{\pi i}{2e}.$$

б. Вычислим интеграл

$$\oint_L \sin \frac{1}{z} \, dz$$

по окружности $L: |z| = 1$. Функция $f(z) = \sin(1/z)$ имеет в \mathbb{C} единственную особую точку $z = 0$. Используя стандартное разложение (6.20) для синуса, запишем

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots, \quad |z| > 0.$$

Видно, что в лорановском разложении этой функции в окрестности точки $z = 0$ коэффициент при z^{-1} равен $c_{-1} = 1$. Поэтому в силу теоремы 8.2 $\operatorname{Res}_{z=0} \sin(1/z) = c_{-1} = 1$, и, согласно теореме 8.1, имеем

$$\oint_L \sin \frac{1}{z} \, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \sin \frac{1}{z} = 2\pi i.$$

в. Вычислим контурный интеграл

$$\oint_L \frac{e^{1/z} - 1}{z^4 + 1} \, dz$$

по окружности $L: |z| = 2$. Внутри этой окружности подынтегральная функция $f(z) = (e^{1/z} - 1)/(z^4 + 1)$ имеет существенно

особую точку $z_0 = 0$ и простые полюсы $z_k, k = \overline{1, 4}$, являющиеся нулями многочлена $z^4 + 1$. В силу теоремы Коши о вычетах и теоремы о сумме вычетов

$$\oint_L \frac{e^{1/z} - 1}{z^4 + 1} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^4 \operatorname{Res} f(z) = -2\pi i \operatorname{Res} f(z)_{z=\infty}.$$

Поскольку $f(z) \sim 1/z^5$ при $z \rightarrow \infty$, точка $z = \infty$, согласно (7.10), является нулем функции $f(z)$ кратности 5. На основании (8.16) $\operatorname{Res} f(z)_{z=\infty} = 0$, т.е. искомый интеграл равен нулю.

8.5. Логарифмический вычет

Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в проколотой окрестности точки $z = a$ и не обращается в этой окрестности в нуль. Сама точка $z = a$ может быть как точкой аналитичности этой функции, так и ее изолированной особой точкой.

Определение 8.3. Логарифмическим вычетом функции $f(z)$ в точке $z = a$ называют вычет ее логарифмической производной $f'(z)/f(z)$ в этой точке, т.е. значение

$$\operatorname{Res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

где в качестве контура L интегрирования можно взять любую окружность с центром в точке $z = a$, целиком лежащую в указанной проколотой окрестности этой точки.

Ясно, что логарифмический вычет функции $f(z)$ может быть отличен от нуля в ее изолированных особых точках, а также в ее нулях, поскольку точка $z = a$ будет особой точкой функции $f'(z)/f(z)$ лишь в указанных случаях.

Теорема 8.5. В нуле аналитической функции $f(z)$ ее логарифмическая производная $f'(z)/f(z)$ имеет простой полюс, а логарифмический вычет равен кратности этого нуля.

◀ Пусть точка $z = a$ — нуль кратности m функции $f(z)$, аналитической в этой точке. Тогда, согласно теореме 7.1, в некоторой окрестности этой точки

$$f(z) = (z - a)^m \varphi(z), \quad (8.18)$$

где $\varphi(z)$ — функция, аналитическая в точке $z = a$, причем $\varphi(a) \neq 0$ и, стало быть, $\varphi(z) \neq 0$ в некоторой окрестности этой точки. Вычисляя логарифмическую производную функции $f(z)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m(z-a)^{m-1}\varphi(z) + (z-a)^m\varphi'(z)}{(z-a)^m\varphi(z)} = \\ &= \frac{1}{z-a} \frac{m\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \\ &= \frac{1}{z-a} \left(m + (z-a) \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right) \underset{z \rightarrow a}{\sim} \frac{m}{z-a}. \end{aligned}$$

Согласно утверждению 7.1, заключаем, что точка $z = a$ является полюсом функции $f'(z)/f(z)$, а в соответствии с (8.6) находим, что вычет в этой точке равен $\operatorname{Res}_{z=a} f'(z)/f(z) = m$. ▶

Следствие 8.2. Если точка $z = a$ — полюс функции $f(z)$ порядка m , то для логарифмической производной $f'(z)/f(z)$ этой функции точка $z = a$ является простым полюсом, и вычет в нем равен $-m$.

◀ Если точка $z = a$ является полюсом функции $f(z)$ порядка m , то в окрестности этой точки имеет место представление

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

в котором $\varphi(z)$ — аналитическая в окрестности точки $z = a$ функция и $\varphi(a) \neq 0$ (см. 7.2). Повторяя доказательство теоремы, получаем утверждение следствия. ▶

Пример 8.11. Вычислим логарифмический вычет функции $f(z) = (z^2 - 5z + 6)/(z - 1)^2$ в нулях этой функции и в полюсе. Эта функция имеет простые нули в точках $z_1 = 2$ и $z_2 = 3$. Поэтому в силу теоремы 8.5

$$\operatorname{Res}_{z=2} \frac{f'(z)}{f(z)} = \operatorname{Res}_{z=3} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1.$$

Точка $z = 1$ является полюсом второго порядка этой функции, так что на основании следствия 8.2 получаем

$$\operatorname{Res}_{z=1} \frac{f'(z)}{f(z)} = -2. \quad \#$$

Определение 8.4. Если $f(z)$ является аналитической функцией на замкнутом контуре L и не имеет нулей на этом контуре, то значение

$$\operatorname{Res}_L \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (8.19)$$

называют **логарифмическим вычетом функции $f(z)$ относительно контура L** .

Теорема 8.6 (теорема о логарифмическом вычете).

Пусть непостоянная функция $f(z)$ аналитична всюду в односвязной области D и на ее границе — кусочно гладком контуре L , кроме, возможно, некоторого конечного числа полюсов. Пусть также функция имеет конечное число нулей, причем на контуре L нет ни нулей, ни полюсов функции. Тогда

$$\operatorname{Res}_L \frac{f'(z)}{f(z)} = N - P, \quad (8.20)$$

где N и P — общее число соответственно нулей и полюсов функции $f(z)$ в D , причем каждый нуль следует считать столько раз, какова его кратность, а каждый полюс — каков его порядок.

◀ Пусть a_1, a_2, \dots, a_l — нули функции $f(z)$ в D кратностей n_1, n_2, \dots, n_l , а b_1, b_2, \dots, b_m — ее полюсы в области D порядков p_1, p_2, \dots, p_m . Все эти точки, согласно теореме 8.5 и следствию 8.2, будут простыми полюсами функции $f'(z)/f(z)$, аналитической на контуре L , так как по условию теоремы $f(z)$ аналитична на L и не имеет нулей. В силу теоремы Коши о вычетах имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_L \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \\ &= \sum_{\nu=1}^l \operatorname{Res}_{z=a_\nu} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{\mu=1}^m \operatorname{Res}_{z=b_\mu} \frac{f'(z)}{f(z)}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Согласно теореме 8.5 и следствию 8.2, имеем

$$\operatorname{Res}_{z=a_\nu} \frac{f'(z)}{f(z)} = n_\nu, \quad \nu = \overline{1, l}, \quad \text{и} \quad \operatorname{Res}_{z=b_\mu} \frac{f'(z)}{f(z)} = -p_\mu, \quad \mu = \overline{1, m}.$$

Учитывая принятое соглашение о подсчете числа нулей и полюсов в D , по которому

$$\sum_{\nu=1}^l n_\nu = N \quad \text{и} \quad \sum_{\mu=1}^m p_\mu = P, \quad (8.22)$$

из (8.21) и (8.22) получаем (8.20). ▶

Следствие 8.3. Логарифмический вычет многочлена $P_n(z)$ степени n относительно простого контура L , на котором нет нулей $P_n(z)$, равен числу нулей многочлена (с учетом их кратности) внутри контура.

Пример 8.12. Найдем логарифмический вычет функции $(e^z - 2)^2$ относительно контура $|z| = 8$. В области, ограниченной этим контуром, данная функция не имеет полюсов, а ее нули определяются уравнением $e^z - 2 = 0$, из которого находим $z_k = \operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + i2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Чтобы найти все нули, попавшие

внутри окружности $|z| = 8$, надо найти все целые значения k , для которых $|z_k| < 8$. Несложно установить, что этому условию удовлетворяют значения 0, 1 и -1 , т.е. внутрь контура попадают $z_0 = \ln 2$, $z_1 = \ln 2 + 2\pi i$ и $z_{-1} = \ln 2 - 2\pi i$. Каждый из этих трех нулей имеет кратность 2, так что по теореме 8.6 искомый логарифмический вычет равен 6. #

Теореме 8.6 можно дать геометрическую интерпретацию. Так как по условию теоремы функция $f(z)$ аналитична на контуре L и на нем отлична от нуля, то на этом контуре имеем

$$\oint_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_L d \operatorname{Ln} f(z). \quad (8.23)$$

Здесь под $\operatorname{Ln} f(z)$ понимается ветвь многозначной логарифмической функции $\operatorname{Ln} f(z) = \ln |f(z)| + i \operatorname{Arg} f(z)$, заданная своим значением в некоторой точке z_0 контура. Так как функция $\ln |f(z)|$ однозначна и непрерывна, то для выделения такой ветви достаточно выделить ветвь функции $\operatorname{Arg} f(z)$, задав значение аргумента в точке z_0 . При этом для произвольной точки $z_1 \in L$ будем иметь

$$\operatorname{Arg} f(z_1) = \operatorname{Arg} f(z_0) + \Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z), \quad (8.24)$$

где $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z)$ — приращение функции $\operatorname{Arg} f(z)$ при движении точки $z \in L$ из положения z_0 в положение z_1 вдоль дуги γ контура L в положительном направлении в *комплексной плоскости* (z) (рис. 8.3).

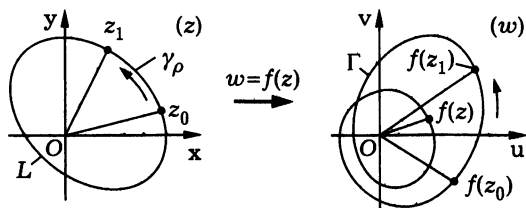


Рис. 8.3

Если уравнение контура L можно задать в виде $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то, используя (8.23) и (8.24), находим

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \int_{\alpha}^{\beta} d \operatorname{Ln} f(z(t)) = \operatorname{Ln} f(z(\beta)) - \operatorname{Ln} f(z(\alpha)) = \\ &= \ln |f(z(\beta))| + i \operatorname{Arg} f(z(\beta)) - \ln |f(z(\alpha))| - \\ &\quad - i \operatorname{Arg} f(z(\alpha)) = i \Delta_L \operatorname{Arg} f(z), \quad (8.25) \end{aligned}$$

поскольку в силу замкнутости контура и однозначности функции $\ln |f(z)|$ имеем $\ln |f(z(\beta))| = \ln |f(z(\alpha))|$. В (8.25) $\Delta_L \operatorname{Arg} f(z)$ есть приращение аргумента $\operatorname{Arg} w$ вдоль кривой в плоскости (w), которую проходит точка $f(z)$, когда точка z проходит в положительном направлении кривую L . Из (8.20) и (8.25) получаем равенство

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_L \operatorname{Arg} f(z), \quad (8.26)$$

называемое **принципом аргумента**. Этот принцип можно сформулировать так: разность числа N нулей (с учетом их кратности) и числа P полюсов (с учетом их порядка) функции $f(z)$ в области D , ограниченной контуром L , равна деленному на 2π приращению аргумента этой функции при обходе L точкой z в положительном направлении (при условии, что функция $f(z)$ является аналитической во всех точках D , за исключением конечного числа полюсов, и на L не имеет ни нулей, ни полюсов).

Выясним геометрический смысл $\Delta_L \operatorname{Arg} f(z)$. Пусть Γ является образом замкнутого контура L при отображении $w = f(z)$ (см. рис. 8.3). При полном обходе L точкой z соответствующая точка $w = f(z)$ описывает в комплексной плоскости (w) замкнутую кривую Γ . Тогда приращение аргумента функции $f(z)$ на Γ будет равно числу полных оборотов, совершаемых точкой $w = f(z)$ вокруг точки $w = 0$ при однократном обходе точкой z

контура L в комплексной плоскости (z). Число оборотов считают положительным, если отрезок, соединяющий точку $w = 0$ с точкой $w = f(z)$, поворачивается против часовой стрелки, и отрицательным — в противном случае. Если использовать векторную интерпретацию комплексного числа, то замкнутую кривую Γ следует считать *годографом радиус-вектора* точки $w = f(z)$, поворачивающегося в плоскости (w).

Итак, разность числа N нулей (с учетом их кратности) и числа P полюсов (с учетом их порядка) функции $f(z)$ в области D , удовлетворяющей условиям теоремы 8.6, равна числу поворотов радиус-вектора точки $w = f(z)$ вокруг точки $w = 0$ при однократном обходе точкой z границы области D в положительном направлении.

Следствие 8.4. Если функция $f(z)$ аналитична в области D и на ограничивающем D кусочно гладком контуре L , причем она не имеет нулей на L , то

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_L \operatorname{Arg} f(z) = N. \quad (8.27)$$

Отметим, что вместо нулей функции $f(z)$ можно рассматривать так называемые ее a -точки, т.е. корни уравнения $f(z) = a$, $a \in \mathbb{C}$. Для этого во всех рассуждениях достаточно заменить $f(z)$ на функцию $f(z) - a$. Если при этом контур L не содержит a -точек функции $f(z)$, т.е. не содержит нулей функции $f(z) - a$, то вместо (8.26) получим

$$N_a - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_L \operatorname{Arg}(f(z) - a), \quad (8.28)$$

где N_a — общее число a -точек (с учетом их кратности), а P — общее число полюсов (с учетом их порядка) функции $f(z)$ в области D , ограниченной контуром L .

Принцип аргумента может быть использован, например, для подсчета числа нулей многочлена $P_n(z)$ в полуплоскости и их расположения по квадрантам комплексной плоскости (z).

Пример 8.13. Найдем число нулей многочлена $P_5(z) = z^5 + 5z^4 - 5$ в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Поскольку любой многочлен имеет конечное число нулей в комплексной плоскости и, в частности, в правой полуплоскости, то можно рассмотреть контур L , состоящий из полуокружности $\gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C}: |z| = \rho, \operatorname{Re} z > 0\}$ и ее диаметра γ — отрезка мнимой оси между точками $i\rho$ и $-i\rho$ (рис. 8.4). При этом $\rho > 0$ считаем столь большим, что все нули многочлена $P_5(z)$ из правой полуплоскости лежат внутри контура L . Заметим, что многочлен $P_5(z)$ не имеет нулей, расположенных на мнимой оси. Действительно, при наличии нуля вида $z = iy$ должно быть выполнено равенство $(iy)^5 + 5(iy)^4 - 5 = 0$, или $iy^5 + 5y^4 - 5 = 0$, откуда получаем, что одновременно $y^4 = 1$ и $y = 0$, но это невозможно.

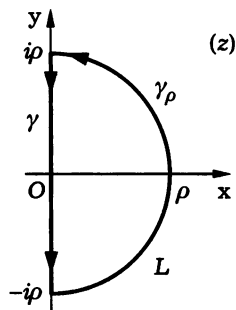


Рис. 8.4

Согласно принципу аргумента, многочлен $P_5(z)$ имеет $N = \frac{1}{2\pi} \Delta_L \operatorname{Arg} P_5(z)$ нулей, охваченных построенным контуром L . Переходя к пределу при $\rho \rightarrow \infty$ и учитывая аддитивность приращения непрерывной на L функции $\operatorname{Arg} P_5(z)$, получаем

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta_L \operatorname{Arg} P_5(z) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta_{\gamma_\rho} \operatorname{Arg} P_5(z) + \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta_\gamma \operatorname{Arg} P_5(z), \quad (8.29) \end{aligned}$$

где $\Delta_{\gamma_\rho} \operatorname{Arg} P_5(z)$ и $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} P_5(z)$ обозначают приращения функции $\operatorname{Arg} P_5(z)$ на дугах γ_ρ и γ , составляющих контур L .

Для вычисления первого из пределов в правой части (8.29) запишем

$$P_5(z) = z^5 \left(1 + \frac{5}{z} - \frac{5}{z^5} \right), \quad \operatorname{Arg} P_5(z) = 5 \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{5}{z} - \frac{5}{z^5} \right).$$

Следовательно,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta_{\gamma\rho} \operatorname{Arg} P_5(z) = 5\pi + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta_{\gamma\rho} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{5}{z} - \frac{5}{z^5} \right) = 5\pi,$$

поскольку

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{z} - \frac{5}{z^5} \right) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta_{\gamma\rho} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{5}{z} - \frac{5}{z^5} \right) = 0.$$

Перед вычислением второго предела в правой части (8.29) проследим, по какому пути на плоскости (w) движется точка $w = P_5(z)$ при движении точки z сверху вниз вдоль мнимой оси плоскости (z). Для построения образа Γ' отрезка γ мнимой оси между точками $i\rho$ и $-i\rho$ с учетом направления движения точки z (см. рис. 8.4) запишем параметрическое комплексное уравнение этого отрезка: $z = -it$, $t \in (-\rho, \rho)$. Подставляя $z = -it$ в $P_5(z)$ и выделяя действительную и мнимую части, находим параметрические уравнения искомого образа в плоскости (w):

$$u(t) = 5t^4 - 5, \quad v(t) = -t^5, \quad t \in [-\rho, \rho].$$

Так как $u(t)$ является четной функцией, а $v(t)$ — нечетной, то Γ' является кривой, симметричной относительно действительной оси плоскости (w). При этом точке $z = 0$ ($t = 0$) будет отвечать точка $w_0 = -5$, а точкам $z = \pm i\rho$ — точки $w_{1,2} = 5\rho^4 - 5 \pm i\rho^5$ (рис. 8.5). При движении точки w из положения w_1 в положение w_0 отрезок, соединяющий ее с точкой $w = 0$, поворачивается против часовой стрелки на угол $\pi - \arg w_1$, а при дальнейшем

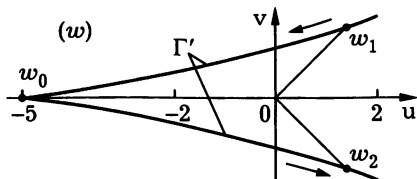


Рис. 8.5

движении в положение w_2 — в силу симметрии еще на тот же угол. Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta_\gamma \operatorname{Arg} P_5(z) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2(\pi - \arg w_1) = \\ &= 2\pi - 2 \lim_{\rho \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{\rho^5}{5\rho^4 - 5} = 2\pi - 2\frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения пределов в (8.29), получаем $N = (5\pi + \pi)/(2\pi) = 3$. #

В теории автоматического регулирования принцип аргумента находит применение при анализе устойчивости линейных систем: условием устойчивости является расположение всех корней *характеристического уравнения*, соответствующего дифференциальному уравнению системы, в левой полуплоскости (когда действительные части этих корней отрицательны) [VIII].

Пример 8.14. Выясним, устойчива ли система автоматического регулирования, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{IV} + 2x''' + 3x'' + x' + 2x = g(t),$$

где t — время, $x = x(t)$ — выходной сигнал системы, $g(t)$ — входное воздействие. Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение $P_4(\lambda) = 0$, корнями которого являются нули многочлена $P_4(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2$. Используя контур, построенный в примере 8.13, заключаем, что число нулей этого многочлена в правой полуплоскости равно

$$N = \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta_{\gamma_\rho} \operatorname{Arg} P_4(z) + \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta_\gamma \operatorname{Arg} P_4(z). \quad (8.30)$$

Используя представления

$$P_4(z) = z^4 \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^4} \right)$$

и

$$\operatorname{Arg} P_4(z) = 4 \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^4} \right),$$

находим $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta_{\gamma_\rho} \operatorname{Arg} P_4(z) = 4\pi$.

Для построения образа Γ' отрезка γ между точками $i\rho$ и $-i\rho$ мнимой оси при отображении $w = P_4(z)$ с учетом направления движения точки z (см. рис. 8.4) подставим $z = -it$, $t \in [-\rho, \rho]$, в $P_4(z)$ и, выделив действительную и мнимую части, придем к параметрическим уравнениям искомого образа в плоскости (w):

$$u(t) = t^4 - 3t^2 + 2, \quad v(t) = 2t^3 - t, \quad t \in [-\rho, \rho].$$

Как и в примере 8.13, $u(t)$ является четной функцией, а $v(t)$ — нечетной. Поэтому кривая Γ' симметрична относительно действительной оси плоскости (w).

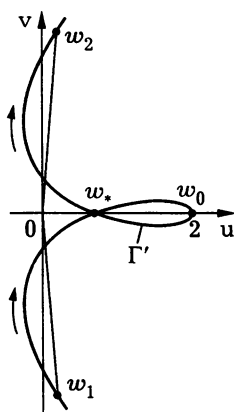


Рис. 8.6

При этом точке $z = 0$ ($t = 0$) будет отвечать точка $w_0 = 2$, двум точкам $z_{1,2}^* = \pm i\sqrt{2}/2$ ($t = \mp\sqrt{2}/2$) — точка $w^* = 3/4$ самопересечения кривой Γ' , а точкам $z = \pm i\rho$ — точки $w_{1,2} = \rho^4 - 3\rho^2 + 2 \mp i\rho(2\rho^2 - 1)$ (рис. 8.6). При движении точки w из положения w_1 в положение w_0 ее радиус-вектор поворачивается против часовой стрелки на угол $-\arg w_1$, а при дальнейшем движении в положение w_2 — в силу симметрии еще на тот же угол. Таким образом,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta_\gamma \operatorname{Arg} P_5(z) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2(-\arg w_1) = 2 \lim_{\rho \rightarrow \infty} \arctg \frac{\rho(2\rho^2 - 1)}{\rho^4 - 3\rho^2 + 2} = 0.$$

Подставляя вычисленные значения пределов в (8.30), получаем $N = (4\pi + 0)/(2\pi) = 2$. Следовательно, характеристическое уравнение $P_4(\lambda)$ имеет корни в правой полуплоскости, т.е. их действительные части положительны. Это означает, что

рассматриваемая система автоматического регулирования неустойчива [VIII].

Пример 8.15. Выясним, как расположены по квадрантам комплексной плоскости (z) корни уравнения $z^6 + z + 3 = 0$. Сначала убедимся, что это уравнение не имеет действительных и мнимых корней. В самом деле, при $z = x \in \mathbb{R}$ имеем $x^6 > -x - 3$, а если бы корнем уравнения $z^6 + z + 3 = 0$ было число $z = iy$, то из равенства $-y^6 + iy + 3 = 0$ следовало бы одновременно $-y^4 + 3 = 0$ и $y = 0$, что неверно.

Подсчитаем число корней данного уравнения в первом квадранте. Для этого построим замкнутый контур L , состоящий из дуги γ_ρ окружности $|z| = \rho$ в первом квадранте ($\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$) и отрезков γ_1 и γ_2 действительной и мнимой осей (на рис. 8.7 стрелки указывают положительное направление обхода этого контура). Выберем радиус ρ окружности столь большим, чтобы контур L охватывал все корни уравнения из первого квадранта. Тогда по принципу аргумента, используя (8.27), имеем

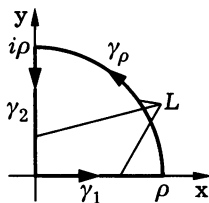


Рис. 8.7

$$N = \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\Delta_{\gamma_1} \operatorname{Arg} P_6(z) + \Delta_{\gamma_\rho} \operatorname{Arg} P_6(z) + \Delta_{\gamma_2} \operatorname{Arg} P_6(z) \right), \quad (8.31)$$

где $P_6(z) = z^6 + z + 3 = z^6(1 + 1/z^5 + 3/z^6)$ и

$$\operatorname{Arg} P_6(z) = 6 \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{1}{z^5} + \frac{3}{z^6} \right).$$

Ясно, что

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta_{\gamma_\rho} \operatorname{Arg} P_6(z) = 6 \frac{\pi}{2} = 3\pi.$$

Образы Γ_1 правой части действительной оси и Γ_2 верхней части мнимой оси при отображении $w = P_6(z)$ описываются

соответственно параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} u(t) = t^6 + t + 3, \\ v(t) = 0, \end{cases} \quad t \geq 0, \quad \begin{cases} u(t) = -t^6 + 3, \\ v(t) = t, \end{cases} \quad t \geq 0,$$

причем точке $z = 0$ отвечает точка $w_0 = 3$ (рис. 8.8). При движении точки z по действительной оси из положения $z = 0$ в положение $z = \rho$ (см. рис. 8.7) точка $w = P_6(z)$ движется в плоскости (w) также по действительной оси из положения w_0 в положение $w_1 = \rho^6 + \rho + 3$ ($t = \rho$), так что $\Delta_{\gamma_1} \text{Arg } P_6(z) = 0$. Движению точки z по мнимой оси из положения $z = i\rho$ в положение $z = 0$ соответствует движение точки $w = P_6(z)$ в плоскости (w) по дуге Γ_2 из положения $w_2 = -\rho^6 + 3 + i\rho$ ($t = \rho$) в положение w_0 . При этом радиус-вектор точки $w = P_6(z)$ поворачивается (с учетом направления поворота) на угол $-\arg w_2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta_{\gamma_2} \text{Arg } P_6(z) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} (-\arg w_2) = \\ &= -\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\pi + \arctg \frac{\rho}{-(\rho^6 - 3)} \right) = -\pi. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения пределов в (8.31), получаем, что в первом квадранте плоскости (z) число корней данного уравнения равно $N = (0 + 3\pi - \pi)/(2\pi) = 1$.

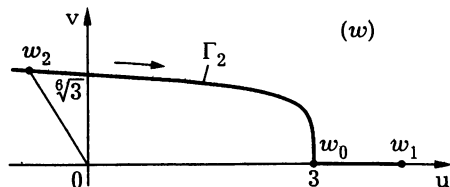


Рис. 8.8

Таким образом, многочлен $P_6(z)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный нуль z_1 в первом квадранте. Но тогда нулем этого многочлена будет и комплексно сопряженное число \bar{z}_1 [I-4.4], т.е. уравнение $P_6(z) = 0$ имеет также один корень и в четвертом квадранте. Так как всего у этого

уравнения шесть корней, то во втором квадранте должно быть два комплексных корня z_2 и z_3 , а в третьем — два сопряженных им корня \bar{z}_2 и \bar{z}_3 (возможно, что $z_2 = z_3$, т.е. корни кратные).

Теорема 8.7 (теорема Руше). Пусть $f(z)$ и $\varphi(z)$ — функции, аналитические на замыкании \bar{D} области D , ограниченной контуром L , и во всех точках этого контура удовлетворяют неравенству

$$|\varphi(z)| > |f(z)|, \quad z \in L. \quad (8.32)$$

Тогда их сумма $\varphi(z) + f(z)$ и функция $\varphi(z)$ имеют в D одинаковое число нулей (с учетом их кратности).

◀ Так как $|f(z)| \geq 0$, $z \in \bar{D}$, то, согласно (8.32), $|\varphi(z)| > 0$ на контуре L и в силу (1.15) $|\varphi(z) + f(z)| \geq |\varphi(z)| - |f(z)| > 0$. Итак, функции $\varphi(z)$ и $\varphi(z) + f(z)$ отличны от нуля на L . Запишем

$$\varphi(z) + f(z) = \varphi(z) \left(1 + \frac{f(z)}{\varphi(z)} \right),$$

откуда

$$\Delta_L \operatorname{Arg}(\varphi(z) + f(z)) = \Delta_L \operatorname{Arg} \varphi(z) + \Delta_L \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{f(z)}{\varphi(z)} \right). \quad (8.33)$$

Поскольку $|f(z)/\varphi(z)| < 1$ на L , то при любом изменении $z \in L$ радиус-вектор точки $w = 1 + f(z)/\varphi(z)$ не может повернуться в плоскости (w) вокруг точки $w = 0$. Следовательно, второе слагаемое в правой части (8.33) равно нулю и $\Delta_L \operatorname{Arg}(\varphi(z) + f(z)) = \Delta_L \operatorname{Arg} \varphi(z)$. Отсюда в силу принципа аргумента вытекает утверждение теоремы. ▶

Замечание 8.1. Теорема Руше позволяет получить простое доказательство *основной теоремы алгебры* (см. теорему 7.9).

Пусть $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ — произвольный многочлен степени n ($a_0 \neq 0$). Обозначим $\varphi(z) = a_0 z^n$, $f(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$. Тогда $P_n(z) = \varphi(z) + f(z)$. Так как

$f(z)/\varphi(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, то существует такое число $\rho > 0$, что для всех z , удовлетворяющих условию $|z| \geq \rho$, будет выполнено неравенство

$$\left| \frac{f(z)}{\varphi(z)} \right| < 1. \quad (8.34)$$

В частности, на окружности $|z| = \rho$ имеет место неравенство $|f(z)| < |\varphi(z)|$. По теореме Руше количество нулей у функций $\varphi(z)$ и $P_n(z) = \varphi(z) + f(z)$, аналитических в \mathbb{C} , совпадает. Но функция $\varphi(z) = a_0 z^n$ имеет n нулей внутри окружности $|z| = \rho$, поскольку точка $z = 0$ является нулем кратности n этой функции. Значит, функция $P_n(z)$ внутри окружности имеет n нулей. Отметим, что многочлен степени n не может иметь более n нулей. Следовательно, $P_n(z)$ имеет ровно n нулей, и все они внутри окружности $|z| = \rho$.

При помощи теоремы Руше можно находить число корней некоторых уравнений в ограниченной области.

Пример 8.16. Найдем число корней уравнения $z^5 + z^2 + 1 = 0$ внутри окружности $|z| = 2$. На этой окружности имеем $|z^2| = 4$, и в силу (1.15) $|z^5 + 1| \geq |z^5| - 1 = 32 - 1 = 31 > |z^2|$. Поэтому, согласно теореме Руше, у функций $\varphi(z) = z^5 + 1$ и $\varphi(z) + f(z) = z^5 + z^2 + 1$ внутри окружности $|z| = 2$ одинаковое число нулей. Но у уравнения $z^5 + 1 = 0$ пять корней, и все они расположены на окружности $|z| = 1$, т.е. внутри окружности $|z| = 2$. Таким образом, исходное уравнение имеет пять корней внутри окружности $|z| = 2$.

Пример 8.17. Выясним, сколько корней имеет уравнение $z^6 - 8z + 10 = 0$ в кольце $1 < |z| < 3$. Найдем сначала число корней этого уравнения внутри окружности $|z| = 3$, а затем — на окружности $|z| = 1$ и внутри ее. Тогда разность полученных результатов будет искомым числом корней данного уравнения.

Рассмотрим функции $\varphi(z) = z^6$ и $f(z) = -8z + 10$. На окружности $|z| = 3$ имеем $|z^6| = 3^6$ и $|-8z + 10| \leq |-8z| + 10 = 24 + 10$, т.е. $|\varphi(z)| > |f(z)|$. В силу теоремы Руше у функций $\varphi(z)$ и

$\varphi(z) + f(z)$ внутри этой окружности по шесть нулей, поскольку уравнение $\varphi(z) = 0$ имеет корень $z = 0$ кратности 6. Таким образом, у данного уравнения внутри окружности $|z| = 3$ будет шесть корней.

На окружности $|z| = 1$ выполнено неравенство

$$|f(z)| = |-8z + 10| \geq |10 - |8z|| = 2 > |\varphi(z)| = |z^6| = 1.$$

Следовательно, на этой окружности данное уравнение не имеет корней, а внутри ее число его корней и корней уравнения $-8z + 10 = 0$ одинаково. Но последнее уравнение не имеет там корней. Значит, там нет и корней данного уравнения.

В итоге заключаем, что данное уравнение имеет шесть корней в кольце $1 < |z| < 3$.

Дополнение 8.1. Вычисление интегралов от действительных функций

При помощи вычетов можно вычислять многие определенные интегралы от действительных функций действительного переменного, причем такой подход часто быстрее приводит к цели, нежели известные методы интегрирования [VI].

Рассмотрим интегралы вида

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx,$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция двух переменных. Заменим $z = e^{ix}$ ($dz = ie^{ix} dx$, $dx = -(i/z) dz$) этот интеграл можно свести к контурному по окружности $L: |z| = 1$, причем изменению x от 0 до 2π будет отвечать движение точки в комплексной плоскости (z) по окружности L в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки. Так как, согласно (3.22) и (3.23),

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + 1/z}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i},$$

то

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx = \\ = \oint_L R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \left(-\frac{i}{z}\right) dz = \oint_L R_1(z) dz,$$

где $R_1(z)$ — рациональная функция z . Если эта рациональная функция не имеет особых точек (полюсов) на окружности L , в силу *теоремы Коши о вычетах* можно записать

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx = 2\pi i \sum_{\nu=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_\nu} R_1(z), \quad (8.35)$$

где z_ν , $\nu = \overline{1, n}$, — все полюсы рациональной функции $R_1(z)$, лежащие внутри окружности $|z| = 1$.

Пример 8.18. Вычислим интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2}, \quad p \in (0, 1).$$

При замене $z = e^{ix}$ имеем $dx = -(i/z) dz$, $\cos x = (z + 1/z)/2$ и

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2} = \oint_L \frac{-i dz}{z \left(1 - p \left(z + \frac{1}{z}\right) + p^2\right)} = \\ = i \oint_L \frac{dz}{pz^2 - z(p^2 + 1) + p}, \quad (8.36)$$

где L — окружность $|z| = 1$. Особыми точками подынтегральной функции контурного интеграла в правой части (8.36) будут нули многочлена $pz^2 - z(p^2 + 1) + p = p(z - p)(z - 1/p)$, т.е. точ-

ки $z_1 = p$ и $z_2 = 1/p$. Внутри контура интегрирования попадает лишь точка $z_1 = p$. Она является *простым полюсом* подынтегральной функции, и поэтому, согласно теореме 8.1 и (8.5),

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2} = 2\pi i \cdot i \left(\operatorname{Res}_{z=p} \frac{1}{p(z-p)(z-1/p)} \right) =$$

$$= -2\pi \lim_{z \rightarrow p} \frac{1}{p(z-1/p)} = \frac{2\pi}{1-p^2}. \quad \#$$

С помощью вычетов можно вычислять некоторые *несобственные интегралы*, включая и те, которые *сходятся в смысле главного значения*. Напомним, что главным значением несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ называют предел

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

Если функция не ограничена в окрестности точки $c \in (a, b)$, то главным значением несобственного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ называют предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

Значение сходящегося несобственного интеграла совпадает с его главным значением [VI].

Рассмотрим несобственный интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \tag{8.37}$$

предполагая, что функция $f(x)$ имеет *аналитическое продолжение* в комплексную плоскость. Чтобы вычислить этот интег-

рал, можно действовать так. Продолжаем подынтегральную функцию $f(x)$ в верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$, т.е. рассматриваем функцию $f(z)$ комплексного переменного z , аналитическую в области $\text{Im } z > 0$ и на ее границе, совпадающую при действительных значениях z с функцией $f(x)$. Затем выбираем

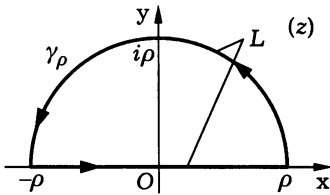


Рис. 8.9

замкнутый контур L , состоящий из отрезка $[-\rho, \rho]$ действительной оси и дуги γ_ρ окружности $|z| = \rho$ в верхней полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$, соединяющей концы отрезка (рис. 8.9). По теореме Коши о вычетах для контурного интеграла функции $f(z)$ вдоль контура L имеем

$$\oint_L f(z) dz = \int_{-\rho}^{\rho} f(x) dx + \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^n \text{Res}_{z=a_\nu} f(z),$$

где $a_\nu, \nu = \overline{1, n}$, — все особые точки функции внутри контура L . Пусть ρ выбрано настолько большим, что все особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости попадают внутрь контура L , т.е. $a_\nu, \nu = \overline{1, n}$, — все особые точки $f(z)$ в верхней полуплоскости. Переходя к пределу при $\rho \rightarrow \infty$, получаем

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^{\rho} f(x) dx + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^n \text{Res}_{z=a_\nu} f(z).$$

Если удастся вычислить предел интеграла по дуге γ_ρ , то интеграл (8.37) можно найти из равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\nu=1}^n \text{Res}_{z=a_\nu} f(z) - \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz. \quad (8.38)$$

При вычислении таких интегралов полезна лемма, доказанная французским математиком К. Жорданом (1838–1922).

Теорема 8.8 (лемма Жордана)*. Пусть функция $f(z)$ аналитична в полуплоскости $\text{Im } z \geq a$ ($a \in \mathbb{R}$ — фиксированное число), за исключением конечного числа *изолированных особых точек*, и пусть

$$M(\rho) = \max_{z \in \gamma_\rho} |f(z)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty, \quad (8.39)$$

где $\gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C}: |z| = \rho, \text{Im } z \geq a\}$ — дуга окружности $|z| = \rho$ в полуплоскости $\text{Im } z \geq a$. Тогда для любого действительного числа $\lambda > 0$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\gamma_\rho} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0. \quad (8.40)$$

Замечание 8.2. Лемму Жордана можно переформулировать для случая нижней дуги окружности. Если функция $f(z)$ аналитична в полуплоскости $\text{Im } z \leq a$, $a \in \mathbb{R}$, за исключением конечного числа *изолированных особых точек*, и на дуге $\gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C}: |z| = \rho, \text{Im } z \leq a\}$ выполняется условие (8.39), то

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\gamma_\rho} f(z) e^{-i\lambda z} dz = 0, \quad \lambda > 0. \quad (8.41)$$

Чтобы это доказать, достаточно применить лемму Жордана к функции $g(z) = f(-z)$.

Точно так же можно сформулировать лемму Жордана для полуплоскости $\text{Re } z \leq a$, применив теорему 8.8 к функции $g(z) = f(iz)$. В результате получим следующее утверждение. Если функция $f(z)$ аналитична в полуплоскости $\text{Re } z \leq a$, за исключением конечного числа *особых точек*, и на дуге γ_ρ , которая задается соотношениями $|z| = \rho$, $\text{Re } z \leq a$, удовлетворяет условию (8.39), то

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\gamma'_\rho} f(z) e^{\lambda z} dz = 0, \quad \lambda > 0. \quad \# \quad (8.42)$$

* Доказательство см. в книге: Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся виды несобственных интегралов, которые можно вычислить при помощи вычетов.

1. Интеграл от рациональной функции, представимой несократимой рациональной дробью $f(x) = P_m(x)/Q_n(x)$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степеней m и n соответственно. Если функция $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси, т.е. знаменатель $Q_n(x)$ не имеет нулей на действительной оси, и $n \geq m + 2$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z=a_\nu} \operatorname{Res} f(z), \quad (8.43)$$

где вычеты берутся во всех полюсах a_ν функции $f(z)$, расположенных в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Действительно, для дуги γ_ρ окружности $|z| = \rho$, определяемой ограничением $\operatorname{Im} z \geq 0$, имеем

$$\max_{z \in \gamma_\rho} |f(z)| = M(\rho) \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{\rho^k}, \quad A \neq 0, \quad k = n - m \geq 2.$$

Используя эту асимптотическую формулу и оценку интеграла (см. 5.1), получаем

$$\left| \int_{\gamma_\rho} f(z) dz \right| \leq M(\rho) \pi \rho \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi A}{\rho^{k-1}}, \quad k \geq 2,$$

откуда

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = 0.$$

Поэтому равенство (8.38) сводится к (8.43).

Пример 8.19. а. Вычислим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Особые точки функции $f(z) = 1/(z^2 + 2z + 2)^2$ являются нулями многочлена $z^2 + 2z + 2 = (z + 1)^2 + 1 = (z + 1 - i)(z + 1 + i)$, т.е. это точки $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = -1 - i$. Эти точки, являясь нулями знаменателя кратности 2, будут полюсами второго порядка функции $f(z)$. В верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ попадает лишь один полюс $z_1 = -1 + i$. Поэтому, используя (8.43) и (8.11), получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1+i} \frac{1}{(z^2 + 2z + 2)^2} = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+1+i)^2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{-2}{(z+1+i)^3} = \frac{-4\pi i}{(2i)^3} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

б. Для вычисления интеграла от функции $(x^2 + 1)/(x^4 + 1)$ по неограниченному промежутку $[0, +\infty)$ в силу ее четности запишем

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

Особыми точками функции $f(z) = (z^2 + 1)/(z^4 + 1)$ в \mathbb{C} будут нули многочлена $z^4 + 1$. Из них в верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ попадают лишь две точки $z_1 = (1 + i)/\sqrt{2}$ и $z_2 = (-1 + i)/\sqrt{2}$, являющиеся простыми полюсами функции. Учитывая (8.43) и (8.9), находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=z_1} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} + \operatorname{Res}_{z=z_2} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{z^2 + 1}{4z^3} \Big|_{z=z_1} + \frac{z^2 + 1}{4z^3} \Big|_{z=z_2} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{1 + i}{4i(1 + i)/\sqrt{2}} + \frac{1 - i}{-4i(-1 + i)/\sqrt{2}} \right) = \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

В итоге искомый интеграл равен $\pi/\sqrt{2}$.

2. Для вычисления интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos \lambda x dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \lambda x dx, \quad \lambda > 0, \quad (8.44)$$

где $R(x)$ — правильная рациональная дробь, рассмотрим функцию $f(z) = R(z)e^{i\lambda z}$, имеющую конечное число изолированных особых точек — полюсов, которыми являются нули знаменателя рациональной дроби. Нетрудно увидеть, что, согласно формуле (3.20) Эйлера, $\operatorname{Re} f(x) = R(x) \cos \lambda x$ и $\operatorname{Im} f(x) = R(x) \sin \lambda x$.

Если степень числителя рациональной функции $R(z)$ меньше степени ее знаменателя, то $R(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, или, по-другому,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \max_{|z|=\rho} |R(z)| = 0.$$

Отсюда вытекает условие (8.39) леммы Жордана. Если $R(z)$ не имеет особых точек на действительной оси, то, согласно лемме Жордана,

$$\int_{\gamma_\rho} R(z) e^{i\lambda z} dz \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow \infty,$$

а формула (8.38) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{z=a_\nu} \operatorname{Res} R(z) e^{i\lambda z}, \quad (8.45)$$

где вычеты берутся по всем полюсам в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Для вычисления интегралов вида (8.44) в равенстве (8.45) следует выделить действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos \lambda x dx &= \operatorname{Re} \left(2\pi i \sum_{z=a_\nu} \operatorname{Res} R(z) e^{i\lambda z} \right) = \\ &= -2\pi \operatorname{Im} \left(\sum_{z=a_\nu} \operatorname{Res} R(z) e^{i\lambda z} \right), \quad (8.46) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \lambda x dx = \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{\nu} \operatorname{Res} R(z) e^{i\lambda z} \right) = \\ = 2\pi \operatorname{Re} \left(\sum_{\nu} \operatorname{Res} R(z) e^{i\lambda z} \right). \quad (8.47)$$

Пример 8.20. Вычислим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20}.$$

Особыми точками функции $f(z) = ze^{iz}/(z^2 + 4z + 20)$ являются нули многочлена $z^2 + 4z + 20$, т.е. точки $z_1 = -2 + 4i$ и $z_2 = -2 - 4i$. Обе точки являются простыми полюсами функции, первая z_1 попадает в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, а вторая z_2 — в нижнюю. Чтобы применить (8.47), вычислим вычет в точке z_1 , используя формулу (8.9):

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \operatorname{Res}_{z=-2+4i} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 4z + 20} = \frac{ze^{iz}}{2z + 4} \Big|_{z=-2+4i} = \\ = \frac{(-2 + 4i) e^{i(-2+4i)}}{2(-2 + 4i) + 4} = \frac{2 + i}{4} e^{-4-2i}.$$

Затем выделим, используя формулу Эйлера, действительную часть этого вычета:

$$\operatorname{Re} \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{2+i}{4} e^{-4} (\cos 2 - i \sin 2) \right) = \frac{2 \cos 2 + \sin 2}{4} e^{-4}.$$

В итоге получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20} = 2\pi \operatorname{Re} \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \pi \frac{2 \cos 2 + \sin 2}{2} e^{-4}. \quad \#$$

Техника вычисления интегралов вида (8.44) может использоваться и в некоторых других случаях.

Пример 8.21. Вычислим интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Функция e^{iz}/z имеет особую точку $z = 0$. Выберем замкнутый контур L интегрирования, изображенный на рис. 8.10. Внутри этого контура нет особых точек, так что в силу *теоремы Коши для односвязной области* имеем

$$\oint_L \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

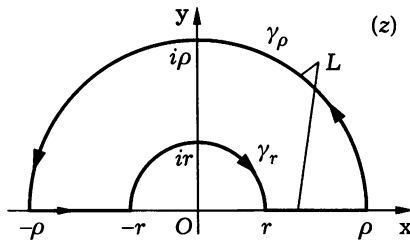


Рис. 8.10

Согласно свойству аддитивности интеграла (см. 5.1), получаем

$$\int_{-\rho}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^{\rho} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \quad (8.48)$$

Заменой переменного интегрирования устанавливаем, что

$$\int_{-\rho}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = \left| \begin{array}{l} x = -t, \\ dx = -dt \end{array} \right| = \int_{\rho}^r \frac{e^{-it}}{-t} (-dt) = - \int_r^{\rho} \frac{e^{-it}}{t} dt.$$

Поэтому, учитывая (3.23), получаем

$$\int_{-\rho}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^{\rho} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_r^{\rho} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_r^{\rho} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Используя это равенство в (8.48) и переходя к пределу при $r \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow +\infty$, запишем

$$2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx + \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \quad (8.49)$$

К первому пределу можно применить лемму Жордана, так как подынтегральная функция контурного интеграла имеет вид $R(z)e^{iz}$, где у рациональной функции $R(z) = 1/z$ степень числителя 0 меньше степени знаменателя 1. Поэтому этот предел равен нулю.

Для точек дуги γ_r с учетом формулы (3.20) Эйлера имеем $z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, причем φ при движении по этой дуге по часовой стрелке изменяется от π до 0. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{e^{ir(\cos \varphi + i \sin \varphi)}}{re^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi = \\ &= - \int_0^{\pi} \left(\lim_{r \rightarrow 0} e^{-r \sin \varphi} e^{ir \cos \varphi} \right) i d\varphi = -i \int_0^{\pi} d\varphi = -\pi i. \end{aligned}$$

Законность перехода к пределу по параметру r под знаком определенного интеграла, зависящего от этого параметра, следует из непрерывности подынтегральной функции по совокупности двух переменных [VI]. Подставляя этот результат в (8.49), получаем

$$2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \pi i = 0.$$

Итак,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad \#$$

Эффективность использования вычетов для вычисления несобственных интегралов часто зависит от удачного выбора контура L интегрирования, позволяющего затем достаточно просто найти пределы по отдельным дугам, составляющим этот контур.

Вопросы и задачи

8.1. Найдите вычеты в изолированных особых точках функций: а) $\frac{1}{\sin z}$; б) $\frac{e^z}{z^2+1}$; в) $\cos z - \sin z$; г) $e^z \cos \frac{1}{z}$; д) $\frac{1}{1-z} \sin \frac{1}{z}$.

8.2. Вычислите

$$\operatorname{Res}_{z=-1} \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} + \dots + \frac{1}{(z+1)^n} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

8.3. Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ являются аналитическими в точке $z = a$, причем $f(a) \neq 0$ и $\varphi(z)$ имеет в этой точке нуль кратности 2. Чему равен $\operatorname{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{\varphi(z)}$?

8.4. Пусть функция $f(z)$ является аналитической во всех точках комплексной плоскости \mathbb{C} за исключением конечного числа изолированных особых точек. Докажите, что для четной функции $f(z)$ верны равенства

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) - \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0, \quad \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = - \operatorname{Res}_{z=-z_0} f(z), \quad z_0 \in \mathbb{C},$$

а для нечетной функции $f(z)$ — равенство

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{Res}_{z=-z_0} f(z), \quad z_0 \in \mathbb{C}.$$

8.5. Пусть функция $f(z)$ в бесконечно удаленной точке имеет полюс порядка m . Докажите, что

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} (z^{m+2} f^{(m+1)}(z)).$$

8.6. Вычислите контурные интегралы:

- а) $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z(z^2+4)}$; б) $\oint_{|z|=1/2} \left(\sin \frac{1}{z^2} + e^{z^2} \cos z \right) dz$; в) $\oint_{|z|=1} z^3 \cos \frac{1}{z} dz$;
- г) $\oint_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} dz$; д) $\oint_{|z|=1/2} \frac{\operatorname{ch} 3z - \cos 4iz}{z^2 \sin 5z} dz$; е) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz$;
- ж) $\oint_{|z|=3} \frac{e^{1/z} + 1}{z} dz$; з) $\oint_{|z|=1/2} \frac{z^5 - 3z^3 + 5}{z^4} dz$; и) $\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} 4z - 8z^2 - 1}{z^4 \sin(8z/3)} dz$;
- к) $\oint_{|z|=2} \frac{e^{1/z}}{1+z^6} dz$; л) $\oint_{|z|=0,3} \frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z} dz$; м) $\oint_{|z|=5} \frac{\operatorname{sh} 2z - z}{z^2 \sin^2(z/3)} dz$.

8.7. Вычислите при помощи вычетов интегралы:

- а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+13)^2}$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2-2x+10}$;
- г) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$; д) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+5x) \sin x dx}{x^4+10x^2+9}$; е) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 5x dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$;
- ж) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2+25}$; з) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+1}$; и) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(p+q \cos x)^2}$, $p > q > 0$;
- к) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4 \sin x}$; л) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{5} + \cos x)^2}$; м) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-4 \sin x}$.

8.8. Найдите логарифмические вычеты следующих функций относительно указанных контуров:

- а) $\frac{z}{1+z^3}$, $|z|=2$; б) $\cos z + \sin z$, $|z|=4$; в) $\operatorname{tg}^3 z$, $|z|=6$.

8.9. Установите число нулей многочленов $P_4(z)$, лежащих в правой полуплоскости: а) $2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1$; б) $z^4 - 5z^3 + 3$; в) $z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$; г) $z^4 + 6z^3 - 4$.

8.10. Установите число корней следующих уравнений в указанных областях:

а) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$, $|z| < 1$;

б) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$, $|z| < 1$;

в) $z^4 - 5z + 1 = 0$, $1 < |z| < 2$;

г) $z^4 - 8z + 10 = 0$, $1 < |z| < 3$.

8.11. Докажите, что если функция $f(z)$ в замкнутой области $|z| \leq 1$ аналитична и удовлетворяет неравенству $|f(z)| < 1$, то уравнение $f(z) = z$ в круге $D: |z| < 1$ имеет единственный корень, т.е. отображение $f: \overline{D} \rightarrow D$ имеет единственную неподвижную точку.

8.12. Выясните число корней в каждом квадранте комплексной плоскости у следующих уравнений:

а) $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$; б) $2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0$;

в) $z^4 + z^3 + 4z^2 + 3z + 3 = 0$.

9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

9.1. Взаимно однозначные отображения

Любая функция $w = f(z)$ комплексного переменного z представляет собой отображение *комплексной плоскости* (z) (или некоторого множества этой плоскости) в комплексную плоскость (w). Как правило, представляют интерес *непрерывные отображения*. Поэтому далее будем считать, что функция $f(z)$ непрерывна на рассматриваемом подмножестве плоскости (z). При этом допускаем, что функция $f(z)$ может принимать значение $w = \infty$. Напомним, что прообразом открытого множества при непрерывном отображении является открытое множество [I-5.7], тогда как образ открытого множества может и не быть открытым.

Среди непрерывных отображений наиболее важны *инъективные отображения*. Такие отображения иначе называют *однолиственными функциями комплексного переменного* (однолиственными отображениями). Для однолистной функции $f(z)$ верно соотношение $f(z_1) \neq f(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$. Отметим два очевидных признака однолиственности функции.

1. Однолиственность функции $f(z)$ в области $E \subset \bar{\mathbb{C}}$ равносильна существованию на множестве $E' = f(E)$ функции $\varphi(w)$, обратной к $f(z)$, т.е. такой, что

$$\varphi(f(z)) = z, \quad z \in E, \quad \text{и} \quad f(\varphi(w)) = w, \quad w \in E'. \quad (9.1)$$

2. Если функция $f(z)$ однолистка на множестве E , а функция $F(w)$ однолистка на множестве $f(E)$, то функция $F(f(z))$ однолистка на множестве E .

Первый из этих признаков было бы неплохо дополнить легко проверяемыми условиями существования обратной функции, а для эффективного применения второго признака необходимо знать области однолиственности элементарных функций.

Теорема 9.1 (теорема об обратной функции). Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в точке $z = z_0$, $w_0 = f(z_0)$ и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда:

- 1) существуют такие круги $K = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\}$ и $K' = \{w \in \mathbb{C}: |w - w_0| < \mu\}$, что для каждого $w \in K'$ уравнение $f(z) = w$ имеет единственное решение $z = \psi(w)$ в круге K , т.е. в круге K' определена функция $\psi(w)$, обратная к функции $f(z)$;
- 2) функция $z = \psi(w)$ аналитична в круге K' ;
- 3) в круге K' справедлива формула

$$\psi'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'(\psi(w))}. \quad (9.2)$$

◀ Так как функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то существует окрестность точки z_0 , в которой функция $f(z) - w_0$ не имеет нулей, кроме точки z_0 (см. теорему 4.3). В этой окрестности функция $f(z)$ принимает значение w_0 только в точке z_0 . В указанной окрестности выберем замкнутый круг $\bar{K} = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| \leq r\}$ с границей $\gamma = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = r\}$. Замкнутый круг \bar{K} выберем настолько малого радиуса, что $f'(z) \neq 0$ в \bar{K} (это возможно, так как $f'(z_0) \neq 0$ и $f'(z)$ непрерывна в точке z_0).

Функция $|f(z) - w_0|$ в силу своей непрерывности достигает на окружности γ наименьшего значения (см. 3.2)

$$\mu = \inf_{z \in \gamma} |f(z) - w_0|. \quad (9.3)$$

Поскольку функция $|f(z) - w_0|$ не обращается на γ в нуль, то $\mu > 0$.

Рассмотрим круг $K' = \{w \in \mathbb{C}: |w - w_0| < \mu\}$ и выберем в нем произвольную точку w_1 , т.е. считаем, что $|w_1 - w_0| < \mu$. Функция $g(z) = f(z) - w_1$ может быть представлена в виде

$$g(z) = f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + (w_0 - w_1),$$

где функция $f(z) - w_0$ и постоянная функция $h(z) \equiv w_0 - w_1$ аналитичны в замкнутом круге \overline{K} и на его границе γ удовлетворяют неравенству

$$|f(z) - w_0| \geq \mu > |w_1 - w_0| = |h(z)|.$$

В силу *теоремы Руше* функции $f(z) - w_0$ и $f(z) - w_0 + h(z) = g(z)$ в круге $K = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\}$ имеют одинаковое число нулей с учетом их кратности, т.е. один нуль, так как функция $f(z) - w_0$ в этом круге имеет один простой нуль в точке z_0 . Итак, функция $f(z) - w_1$ в круге K имеет единственный нуль. Это значит, что функция $f(z)$ принимает в этом круге значение w_1 только один раз. Так как точка $w_1 \in K'$ выбиралась произвольно, заключаем, что в круге K' определена функция $z = \psi(w)$, которая каждой точке $w \in K'$ ставит в соответствие ее прообраз z при отображении $w = f(z)$, т.е. функция, обратная к функции $w = f(z)$.

Отметим, что функция $z = \psi(w)$ отображает круг K' радиуса μ в круг K радиуса r . Приведенным выше рассуждениям можно придать следующий смысл. Каков бы ни был круг K радиуса r с центром в точке z_0 существует круг K' радиуса μ с центром в точке w_0 , образ которого при отображении $z = \psi(w)$ целиком содержится в круге K . Но это означает, что функция $\psi(w)$ является непрерывной в точке w_0 . Эти рассуждения можно провести для любой точки в круге K' , т.е. функция $\psi(w)$ непрерывна в круге K' .

Выберем произвольную точку $w \in K'$, и пусть $w + \Delta w \in K'$. Рассмотрим отношение $\Delta z / \Delta w$, где $\Delta w \neq 0$, а $\Delta z = \psi(w + \Delta w) - \psi(w)$. Заметим, что если $\Delta w \neq 0$, то также и $\Delta z \neq 0$, поскольку функция $w = f(z)$ взаимно однозначно отображает

достаточно малую окрестность точки z_0 на окрестность точки w_0 . Запишем тождество

$$\frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{\Delta w / \Delta z}. \quad (9.4)$$

Если $\Delta w \rightarrow 0$, то в силу непрерывности функции $z = \psi(w)$ имеем $\Delta z \rightarrow 0$. Перейдем в (9.4) к пределу при $\Delta w \rightarrow 0$. Так как функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z = \psi(w)$, причем $f'(z) \neq 0$, то предел правой части при $\Delta z \rightarrow 0$ (а значит, и при $\Delta w \rightarrow 0$) существует и равен $1/f'(z)$. Следовательно, при $\Delta w \rightarrow 0$ существует предел и левой части (9.4), представляющий собой значение производной $\psi'(w)$ функции $\psi(w)$ в точке w . Поскольку точка $w \in K'$ была выбрана произвольно, всюду в круге K' верно соотношение (9.2), а в силу определения 4.3 функция $z = \psi(w)$ аналитична в каждой точке круга K' . ►

Теорема 9.2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 , $w_0 = f(z_0)$, и ее производная $f'(z)$ имеет в этой точке нуль порядка $m - 1$. Тогда существуют такие круги $K = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\}$ и $K' = \{w \in \mathbb{C}: |w - w_0| < \mu\}$, что для любого числа $w \in K'$, $w \neq w_0$, уравнение $f(z) = w$ имеет в круге K ровно m различных корней.

◄ Из условий теоремы следует, что функция $f(z) - w_0$ имеет в точке z_0 нуль m -го порядка. Как и в доказательстве теоремы 9.1, выберем замкнутый круг $\bar{K} = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| \leq r\}$, в котором у функций $f(z) - w_0$ и $f'(z)$ нет нулей, кроме точки z_0 . Выбрав действительное число μ согласно формуле (9.3) и повторив рассуждения из доказательства теоремы 9.1, заключаем, что для любой точки w_1 из круга $K' = \{w \in \mathbb{C}: |w - w_1| < \mu\}$ функция $f(z) - w_1$ имеет в круге $K = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\}$ столько же нулей (с учетом кратности), что и функция $f(z) - w_0$, т.е. m . Все эти нули простые, так как производная $f'(z)$ функции $f(z) - w_1$ в круге K при $z \neq z_0$ не обращается в нуль. Поэтому функция $f(z) - w_1$ имеет m различных нулей, а уравнение $f(z) = w_1$ имеет m различных корней. ►

Определение 9.1. Будем говорить, что *функция* $f(z)$ *однолистка в точке* $z = a$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ однолистка.

Теорема 9.3. Функция $f(z)$, аналитическая в точке $a \neq \infty$, однолистка в этой точке тогда и только тогда, когда $f'(a) \neq 0$.

◀ Если $f'(a) \neq 0$, то, согласно теореме 9.2, существуют такие круги $K = \{z \in \mathbb{C}: |z - a| < r\}$ и $K' = \{w \in \mathbb{C}: |w - w_a| < \mu\}$, $w_a = f(a)$, что для любого комплексного числа $w \in K'$ уравнение $f(z) - w = 0$ в круге K имеет только одно решение. В силу непрерывности функции $f(z)$ в точке $z = a$ существует такой круг $K_0 = \{z \in \mathbb{C}: |z - a| < r_0\}$, целиком содержащийся в круге K , что для любого $z \in K_0$ имеем $f(z) \in K'$. В круге K_0 функция однолистка. Действительно, равенство $f(z_1) = f(z_2)$ означает, что z_1 и z_2 являются решениями уравнения $f(z) - w = 0$ из круга K , где $w = f(z_1) = f(z_2)$ принадлежит K' . Но в круге K такое уравнение имеет единственное решение, т.е. $z_1 = z_2$.

Если $f'(a) = 0$, то точка $z = a$ является нулем функции $f'(z)$ некоторой кратности $m - 1$, где $m > 1$. Согласно теореме 9.2, можно выбрать такие круги $K = \{z \in \mathbb{C}: |z - a| < r\}$ и $K' = \{w \in \mathbb{C}: |w - w_a| < \mu\}$, $w_a = f(a)$, что для любого комплексного числа $w \in K'$ уравнение $f(z) - w = 0$ в круге K имеет $m > 1$ решений. Стало быть, функция $f(z)$ не является однолистной в круге K . Из доказательства теоремы 9.2 можно заключить, что ее утверждение сохраняется при уменьшении радиуса r круга K . Это значит, что $f(z)$ не является однолистной в круге K , сколь малым бы ни был этот круг, т.е. в точке $z = a$ функция $f(z)$ не однолистка. ►

Рассмотрим теперь понятие однолиственности функции в бесконечно удаленной точке.

Аналитичность функции в точке $z = \infty$ означает, что $f(z)$ аналитична вне некоторого круга на комплексной плоскости (т.е. в проколотой окрестности точки $z = \infty$) и имеет конечный предел при $z \rightarrow \infty$. Заметим, что функция $\zeta = 1/z$ осуществляет

взаимно однозначное отображение окрестности точки $z = \infty$ на окрестность точки $\zeta = 0$. Если функция $f(z)$ аналитична в точке $z = \infty$, то для функции $g(\zeta) = f(1/\zeta)$ точка $\zeta = 0$ является *устранимой особой точкой*, в которой функцию $g(\zeta)$ можно считать аналитической. Функция $f(z)$ однолистка в точке $z = \infty$ тогда и только тогда, когда функция $g(\zeta)$ однолистка в точке $\zeta = 0$. В этом случае, согласно теореме 9.3, выполняется условие $g'(\zeta) \neq 0$, а лорановское разложение функции $g(\zeta)$ в некоторой окрестности $|\zeta| < r$ точки $\zeta = 0$ имеет вид

$$g(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \dots,$$

где $c_1 = g'(0) \neq 0$. Стало быть,

$$f(z) = g(1/z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots, \quad |z| > \frac{1}{r} = R,$$

причем $-c_1 \neq 0$ — это вычет функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке. В итоге приходим к следующему утверждению.

Следствие 9.1. Аналитическая в точке $z = \infty$ функция $f(z)$ однолистка в этой точке тогда и только тогда, когда $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) \neq 0$.

Рассмотрим теперь понятие однолиственности функции в ее полюсе (конечном или бесконечном).

Пусть теперь точка $z = a$ (конечная или бесконечно удаленная) является полюсом функции $f(z)$. Тогда эта точка является нулем функции $1/f(z)$. Очевидно, что однолиственность $f(z)$ в точке a равносильна однолиственности в этой точке функции $1/f(z)$. Функция $1/f(z)$ однолистка в своем нуле $z = a$ тогда и только тогда, когда производная функции в этой точке не равна нулю, т.е. этот нуль простой. Поэтому критерием однолиственности $f(z)$ в полюсе $z = a$ является условие, что этот полюс простой. Сформулируем полученный результат.

Следствие 9.2. Функция $f(z)$ однолистка в своем полюсе $z = a$ (конечном или бесконечно удаленном) тогда и только тогда, когда этот полюс простой.

Пример 9.1. Функции $f(z) = z^2$ и $g(z) = 1/z^2$ имеют производные, не обращающиеся в нуль в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому они однолиственны во всех точках расширенной комплексной плоскости, кроме точек 0 и ∞ . В точках $z = 0$ и $z = \infty$ эти функции не являются однолиственными, так как каждая из этих точек является полюсом второго порядка или нулем кратности два. Этот же вывод можно сделать с помощью непосредственного анализа функций. Действительно, в любой окрестности точки $z = 0$ (или $z = \infty$) можно выбрать пару точек z_1 и z_2 , для которых $z_2 = -z_1$. Тогда в этих точках обе рассматриваемые функции будут иметь одинаковые значения.

Замечание 9.1. Необходимым условием однолистности функции в области является ее однолистность в каждой точке области (т.е. локальная однолистность). Однако это условие не является достаточным. Например, функция e^z является локально однолистной на всей комплексной плоскости, так как ее производная нигде не обращается в нуль, но она не является однолистной в плоскости, поскольку принимает одинаковые значения в точках z и $z + 2\pi i$.

Проверка однолистности функции в области значительно сложнее, чем в точке.

9.2. Свойства конформных отображений

Перейдем к геометрическим свойствам, характерным для отображений, осуществляемых *однолиственными аналитическими функциями*. Отличаясь удивительным разнообразием и богатством особенностей, такие отображения вместе с тем имеют и нечто общее, а именно сохраняют неизменными углы между соответствующими кривыми.

Напомним (см. 4.7), что для аналитической функции $f(z)$, удовлетворяющей условию $f'(z_0) \neq 0$, значение $\arg f'(z_0)$ есть угол, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к кривой, проходящей через эту точку, чтобы получить направление касательной к образу этой кривой при отображении

$w = f(z)$ в точке $w_0 = f(z_0)$ (часто об этом угле говорят как об угле поворота кривой в точке z_0 при отображении $w = f(z)$). Кроме того, значение $|f'(z_0)|$ представляет собой коэффициент линейного растяжения в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. Поэтому аналитическая функция $f(z)$, в точке z_0 удовлетворяющая условию $f'(z_0) \neq 0$, обладает следующими свойствами:

1) все кривые, проходящие через точку z_0 , отображаются функцией $f(z)$ в кривые, проходящие через точку $w_0 = f(z_0)$, причем все они поворачиваются на один и тот же угол $\arg f'(z_0)$, так что углы между такими кривыми в точке z_0 сохраняются;

2) при отображении $w = f(z)$ у всех кривых, проходящих через точку z_0 , линейное растяжение в этой точке одинаково.

Отображение $w = f(z)$, которое в точке z_0 сохраняет углы между кривыми, согласно определению, является *конформным* в этой точке. Из сказанного выше вытекает, что условие $f'(z_0) \neq 0$ является достаточным для того, чтобы отображение, осуществляемое этой функцией, было конформным в точке z_0 . Можно показать, что условие $f'(z_0) \neq 0$ является и необходимым для конформности отображения $w = f(z)$ в точке z_0 , осуществляемого аналитической функцией $f(z)$. Таким образом, согласно теореме 9.3, конформность аналитической функции в точке $z \neq \infty$ равносильна ее однолиственности в этой точке.

Отметим два очевидных свойства конформных отображений:

1) если отображение $w = f(z)$ конформно и однолистно, то обратное к нему отображение $z = f^{-1}(w)$ также конформно и однолистно, причем, если при отображении $w = f(z)$ кривые в точке z_0 поворачиваются на угол φ , то при отображении $z = f^{-1}(w)$ кривые в точке $w_0 = f(z_0)$ поворачиваются на угол $-\varphi$ (т.е. на тот же угол, но в противоположном направлении);

2) композиция $f \circ g$ двух конформных отображений f и g есть конформное отображение, причем угол поворота кривых в точке z_0 при отображении $f \circ g$ равен сумме угла поворота кривых в точке z_0 при отображении g и угла поворота кривых в точке $g(z_0)$ при отображении f .

Остановимся на понятии конформного отображения в бесконечно удаленной точке. В данном случае естественно в качестве модели расширенной комплексной плоскости взять *сферу Римана*, а кривые, проходящие через бесконечно удаленную точку, рассматривать как кривые на сфере Римана, проходящие через „северный полюс“.

Определение 9.2. Углом между кривыми γ_1 и γ_2 в точке $z = \infty$ называют угол между изображениями этих кривых на сфере Римана в „северном полюсе“.

Отметим, что отображение $w = 1/z$ осуществляет взаимно однозначное отображение расширенной комплексной плоскости на себя, причем точка $z = \infty$ переходит в точку $w = 0$. Можно показать, что это отображение осуществляет поворот сферы Римана на 180° вокруг оси, параллельной действительной оси комплексной плоскости и проходящей через центр сферы. Ясно, что при этом отображении углы между кривыми в точке $z = \infty$ сохраняются. Другими словами, угол между двумя кривыми в точке $z = \infty$ равен углу между образами этих кривых в точке $w = 0$ при отображении $w = 1/z$. После этого уточнения ясно, что следует понимать под отображением, конформным в точке $z = \infty$: такое отображение должно сохранять углы между кривыми в точке $z = \infty$.

Понятие угла между кривыми в бесконечно удаленной точке позволяет определить конформность отображения $w = f(z)$ расширенной комплексной плоскости в себя в тех точках z , для которых либо $z = \infty$, либо $f(z) = \infty$. Проверять конформность отображения в таких точках удобно с привлечением отображения $w = 1/z$. Это дает возможность провести нужное исследование так же, как и в обычных точках области. Так, чтобы проверить конформность отображения $w = f(z)$ в точке z_0 , в которой $f(z_0) = \infty$, нужно рассмотреть отображение $w_1 = g(z) = 1/f(z)$ и выяснить, является ли оно конформным в точке z_0 . Действительно, отображение $w = f(z)$ является ком-

позицией отображений $w = 1/w_1$ и $w_1 = g(z)$. Конформность отображения $w_1 = g(z)$ в точке z_0 влечет за собой конформность в этой точке отображения $w = f(z)$. Но отображение $w_1 = g(z)$ переводит точку $z = z_0$ в точку $w_1 = 0$. Критерием конформности этого отображения в точке z_0 является условие $g'(z_0) \neq 0$, означающее, что точка z_0 является нулем первого порядка функции $g(z)$. В этом случае эта точка является простым полюсом функции $f(z)$.

Таблица 9.1

Тип точки	Тип значения функции	Критерий конформности	Альтернативный критерий
$z_0 \neq \infty$	$w_0 \neq \infty$	$f'(z_0) \neq 0$	$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) \neq 0$
$z_0 = \infty$	$w_0 \neq \infty$	$h'(0) \neq 0$, где $h(\zeta) = f(1/\zeta)$	
$z_0 \neq \infty$	$w_0 = \infty$	$g'(z_0) \neq 0$, где $g(z) = 1/f(z)$	z_0 — простой полюс
$z_0 = \infty$	$w_0 = \infty$	$w'(0) \neq 0$, где $w(\zeta) = \frac{1}{f(1/\zeta)}$	z_0 — простой полюс

Как уже было отмечено, если функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z_0 \neq \infty$, то для конформности отображения $w = f(z)$ в точке z_0 необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ была однолистной в точке z_0 . Однолистность как критерий конформности сохраняется и в бесконечно удаленной точке, т.е. в случае, когда $z_0 = \infty$ или $f(z_0) = \infty$. В табл. 9.1 указаны критерии конформности, которые в конечном счете сводятся к проверке локальной однолистности функции.

Далее под **отображением, конформным в области**, будем понимать отображение, которое конформно в каждой точке области и осуществляется аналитической функцией, однолистной в этой области.

9.3. Теорема Римана

В теории конформных отображений фундаментальной является следующая теорема*.

Теорема 9.4 (теорема Римана). Пусть D — односвязная область расширенной комплексной плоскости, граница которой содержит не менее двух точек. Тогда:

1) существует аналитическая в D функция $w = f(z)$, конформно отображающая D на единичный круг $G: |w| < 1$;

2) эту функцию можно выбрать так, что будут выполняться условия

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha, \quad (9.5)$$

где $z_0 \in D$, $w_0 \in G$ — заданные точки, α — заданное действительное число. При этом функция этими условиями определяется однозначно. #

Область расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$, граница которой состоит из единственной точки, есть расширенная комплексная плоскость с выколотой точкой и в частном случае, когда выколота бесконечно удаленная точка, представляет собой комплексную плоскость \mathbb{C} . Единственной областью в $\bar{\mathbb{C}}$ без границы является вся расширенная комплексная плоскость. Не существует конформного отображения (с помощью аналитической функции) комплексной плоскости или расширенной комплексной плоскости на единичный круг $|w| < 1$. В самом деле, пусть аналитическая функция $w = f(z)$ конформно отображает \mathbb{C} или $\bar{\mathbb{C}}$ на единичный круг $|w| < 1$. Тогда эта аналитическая функция будет ограниченной на всей комплексной плоскости. По *теореме Лиувилля* такая функция постоянна и поэтому не может отображать плоскость на круг. Аналогично, если аналитическая функция $w = f(z)$ конформно отображает расширенную комплексную плоскость с одной выколотой точкой z_0 на единичный круг, то эта функция является

* Доказательство этой теоремы см., например, в книге: Шабат Б.В.

аналитической и ограниченной в области $\overline{C} \setminus \{z_0\}$. В этом случае z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$. Это означает, по сути, что $f(z)$ является аналитической на всей расширенной комплексной плоскости. Согласно теореме Лиувилля, $f(z) \equiv \text{const}$, такая функция тоже не может отображать расширенную комплексную плоскость с одной выколотой точкой на единичный круг.

Из теоремы 9.4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 9.3. Пусть границы односвязных областей D и D^* в расширенной комплексной плоскости состоят более чем из одной точки. Тогда существует аналитическая в D функция $w = f(z)$, конформно отображающая D на D^* . Эта функция определяется однозначно условиями (9.5), в которых $w_0 \in D^*$.

◀ Докажем сначала существование такой функции. По теореме 9.4 существует такое конформное отображение $\zeta = \varphi(z)$ области D на единичный круг $|\zeta| < 1$, что $\varphi(z_0) = 0$ и $\arg \varphi'(z_0) = 0$ (рис. 9.1). Аналогично, существует конформное отображение $\zeta = h(w)$ области D^* на тот же единичный круг $|\zeta| < 1$, такое, что $h(w_0) = 0$ и $\arg h'(w_0) = -\alpha$. Тогда функция $w = h^{-1}(\zeta)$, обратная к функции $\zeta = h(w)$, конформно отображает круг $|\zeta| < 1$ на область D^* так, что $h^{-1}(0) = w_0$ и $\arg (h^{-1})'(0) = \alpha$. Следовательно, функция $w = f(z) = h^{-1}(\varphi(z))$ конформно

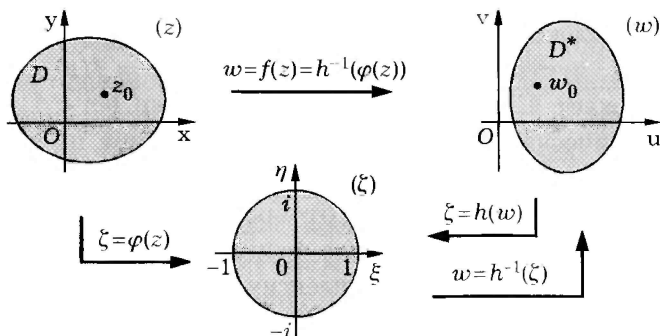


Рис. 9.1

отображает область D на область D^* и удовлетворяет условиям (9.5).

Перейдем к доказательству единственности функции $f(z)$. Пусть две функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ конформно отображают D на D^* и удовлетворяют условиям $f_k(z_0) = w_0$ и $\arg f'_k(z_0) = \alpha$, $k = 1, 2$. По теореме 9.4 существует конформное отображение $\zeta = h(w)$ области D^* на единичный круг $|\zeta| < 1$, такое, что $h(w_0) = 0$ и $\arg h'(w_0) = 0$. Функции $\varphi_k(z) = h(f_k(z))$, $k = 1, 2$, конформно отображают область D на круг $|\zeta| < 1$ и удовлетворяют условиям $\varphi_k(z_0) = 0$ и $\arg \varphi'_k(z_0) = \alpha$, $k = 1, 2$. По теореме 9.4 имеем $\varphi_1(z) \equiv \varphi_2(z)$ в D , или $h(f_1(z)) \equiv h(f_2(z))$ в D . Вследствие биективности отображения $\zeta = h(w)$ заключаем, что $f_1(z) \equiv f_2(z)$ в D . ►

Замечание 9.2. Следствие 9.3 показывает, что в качестве канонической области можно выбрать не единичный круг $|z| < 1$, а любую другую односвязную область, имеющую не менее двух граничных точек. В дальнейшем, как правило, в качестве канонических областей будем рассматривать либо единичный круг, либо верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$. #

Итак, если границы односвязных областей D и D^* состоят более чем из одной точки, то существует конформное отображение D на D^* , причем это отображение не единственно. Для однозначного определения конформного отображения достаточно задать условия (9.5), которые часто называют **нормировкой конформного отображения**. Эта нормировка содержит три произвольных действительных параметра: действительную u_0 и мнимую v_0 части комплексного числа w_0 , а также аргумент производной α . Условия нормировки (9.5) можно заменить другими, также содержащими три независимых действительных параметра. Например, если области D и D^* ограничены простыми контурами, то конформное отображение D на D^* непрерывно вплоть до границы (см. теорему 9.5). В этом случае в условия нормировки можно ввести значения функции на границе: $f(z_0) = w_0$ и $f(z_1) = w_1$, где $z_0 \in D$,

$w_0 \in D^*$, а z_1 и w_1 — граничные точки областей D и D^* соответственно, или $f(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$, где z_k и w_k — различные граничные точки областей D и D^* , пронумерованные в направлении положительного обхода границ этих областей.

В случае *многосвязных областей* вопрос о существовании конформного отображения является гораздо более сложным и этот вопрос далее рассматривать не будем.

9.4. Принцип соответствия границ

Согласно следствию 9.3, две односвязные области, каждая из которых имеет не менее двух граничных точек, можно конформно отобразить одну на другую. Важным теоретическим положением, характеризующим поведение конформного отображения вблизи границы области, является следующий *принцип соответствия границ*.

Теорема 9.5*. Пусть D и D^* — односвязные области, ограниченные простыми кусочно гладкими контурами Γ и Γ^* , а функция $f(z)$ однолистно и конформно отображает область D на область D^* . Тогда:

1) функция $f(z)$ имеет непрерывное продолжение на границу Γ области D , т.е. ее можно так доопределить в точках контура Γ , что получится функция, непрерывная в замыкании \bar{D} области D ;

2) функция $f(z)$, доопределенная на границе, отображает контур Γ взаимно однозначно на контур Γ^* , причем так, что положительному обходу контура Γ будет соответствовать положительный обход контура Γ^* . #

Верно также и обратное утверждение.

Теорема 9.6. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, ограниченной кусочно гладким контуром Γ ,

* Доказательство см. в книгах: Маркушевич А.И. Теория аналитических функций, т. 2; Гурвиц А., Курант Р.

и непрерывна в замыкании \bar{D} этой области. Если функция $f(z)$ осуществляет взаимно однозначное отображение контура Γ на некоторый простой кусочно гладкий контур Γ^* , то $f(z)$ отображает область D конформно и однолистно на область D^* , ограниченную контуром Γ^* , причем обходу контура Γ в положительном направлении соответствует обход контура Γ^* также в положительном направлении

◀ По сути, нужно доказать, что:

1) для каждой точки $w_0 \in D^*$ существует только одна такая точка $z_0 \in D$, что $f(z_0) = w_0$, т.е. функция $f(z) - w_0$ имеет только один нуль в области D ;

2) для каждой точки $w_1 \notin D^*$ функция $f(z)$ не принимает значение w_1 ни при каком $z \in D$.

Докажем первое утверждение. По условию теоремы функция $f(z) - w_0$ не обращается в нуль на контуре Γ , так как при $z \in \Gamma$ точка $w = f(z)$ попадает на контур Γ^* , а w_0 лежит в D^* и не может принадлежать Γ^* . Значит, согласно *принципу аргумента*, число нулей N функции $f(z) - w_0$ в области D равно

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg}(f(z) - w_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma^*} \operatorname{Arg}(w - w_0).$$

Так как точка w_0 лежит в области D^* , ограниченной контуром Γ^* (рис. 9.2), то $\Delta_{\Gamma^*} \operatorname{Arg}(w - w_0) = \pm 2\pi$, где знак плюс соответствует положительному направлению обхода контура Γ^* . Отрицательное значение в данном случае невозможно, так как свидетельствует о наличии в области D полюсов функции

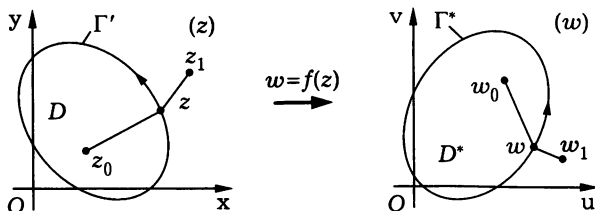


Рис. 9.2

$f(z)$, а по условию $f(z)$ аналитична в D . Следовательно, $N = 1$ и уравнение $f(z) = w_0$ в области D имеет только одно решение.

Если точка w_1 расположена во внешности контура Γ^* , то $\Delta_{\Gamma^*} \operatorname{Arg}(w - w_1) = 0$ и уравнение $f(z) - w_1$ не имеет решений в области D . ►

Замечание 9.3. Теоремы 9.5 и 9.6 верны и для областей D и D^* расширенной комплексной плоскости, ограниченных простыми кусочно гладкими контурами Γ и Γ^* .

Теорема 9.7 (принцип сохранения области). Если функция $f(z)$ аналитична в области D и не является постоянной, то образ $D^* = f(D)$ области D также является областью.

◀ Нужно доказать, что множество D^* линейно связное и открытое. Так как $w = f(z)$ в силу аналитичности является непрерывным отображением, то образ любого линейно связного множества при этом отображении является линейно связным множеством [I-5.8]. Следовательно, D^* — линейно связное множество.

Докажем теперь, что D^* — открытое множество, т.е. любая точка $w_0 \in D^*$ входит в D^* вместе с некоторой своей окрестностью. Пусть $z_0 \in D$ — один из прообразов точки w_0 . Если $f'(z_0) \neq 0$, то, согласно теореме об обратной функции, в некоторой окрестности $|w - w_0| < \mu$ точки w_0 определена функция $\psi(w)$, обратная к функции $f(z)$. Следовательно, все точки этой окрестности являются образами при отображении $w = f(z)$ и она целиком принадлежит D^* . Если $f'(z_0) = 0$, то к этому же выводу приходим, опираясь на теорему 9.2. ►

9.5. Принцип максимума модуля функции

Теорема 9.8 (принцип максимума модуля). Если функция $f(z)$ аналитическая в области D , а ее модуль $|f(z)|$ достигает локального максимума в некоторой точке $z_0 \in D$, то $f(z)$ постоянна в D .

◀ Пусть $w_0 = f(z_0)$. Для точки z_0 выберем произвольную окрестность $|z - z_0| < r$, целиком принадлежащую области D , и предположим, что $f(z)$ не является постоянной в рассматриваемой окрестности. Согласно *принципу сохранения области*, образ круга $|z - z_0| < r$ при отображении $w = f(z)$ является областью. Значит, все точки некоторой окрестности $|w - w_0| < \mu$ точки w_0 являются образами точек из круга $|z - z_0| < r$. В этой окрестности выберем точку w_1 , для которой $|w_1| > |w_0|$ (если $w_0 \neq 0$, то можно взять $w_1 = (1 + 0,5\mu/|w_0|)w_0$, а если $w_0 = 0$, то в качестве w_1 можно взять любую точку указанной окрестности). Существует точка z_1 , удовлетворяющая неравенству $|z_1 - z_0| < r$, для которой $f(z_1) = w_1$. Для этой точки имеем $|f(z_1)| = |w_1| > |w_0| = |f(z_0)|$. Поскольку окрестность точки z_0 можно выбрать сколь угодно малого радиуса, заключаем, что точка z_0 не является точкой локального максимума функции $|f(z)|$.

Итак, если функция $f(z)$ не является постоянной в окрестности $|z - z_0| < r$ точки z_0 , то $|f(z)|$ не имеет максимума в точке z_0 . Если же $|f(z)|$ достигает максимума в некоторой точке z_0 области D , то функция $f(z)$ постоянна в некоторой окрестности точки z_0 , т.е. $f(z) \equiv C$ при $|z - z_0| < r$. Согласно *теореме о единственности аналитической функции*, аналитические функции $f(z)$ и $h(z) \equiv C$ совпадают в области D . Другими словами, функция $f(z)$ постоянна в D . ▶

Из принципа максимума модуля вытекает следующее утверждение.

Теорема 9.9. Если функция $f(z)$ аналитична в ограниченной области D и непрерывна на замыкании \overline{D} этой области, то функция $|f(z)|$ достигает наибольшего значения на границе ∂D области D .

◀ Если функция $f(z)$ постоянна в D , то в силу непрерывности она постоянна в \overline{D} и утверждение теоремы очевидно.

Если же $f(z)$ не является постоянной в D , то, согласно теореме 9.8, функция $|f(z)|$ не может достигать наибольшего

значения в области D , так как в противном случае она имела бы в D точку локального максимума. Но $|f(z)|$, будучи непрерывной на замкнутом ограниченном множестве \bar{D} , достигает на этом множестве своего наибольшего значения $[V]$. Это может произойти только на границе ∂D области D . ►

Аналогичное утверждение для наименьшего значения модуля функции, вообще говоря, неверно. Действительно, любой нуль функции $f(z)$ является точкой локального минимума модуля функции $|f(z)|$. Например, функция $f(z) = z$ в круге $|z| < 1$ достигает минимального значения модуля в точке $z = 0$. Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 9.10. Если функция $f(z)$ аналитична в области D , не имеет в D нулей и ее модуль достигает в D локального минимума, то $f(z)$ постоянна в этой области.

◄ Для доказательства достаточно применить теорему 9.8 к функции $g(z) = 1/f(z)$, являющейся аналитической в D , так как $f(z) \neq 0$ при $z \in D$. ►

Полученные результаты показывают, что поверхность модуля $\rho = |f(z)|$ аналитической в области D функции $f(z)$ не может иметь локальных максимумов, а локальные минимумы могут располагаться только на уровне $\rho = 0$.

Принцип максимума модуля приводит к следующему результату, установленному немецким математиком Г. Шварцем (1843–1921).

Теорема 9.11 (лемма Шварца). Если аналитическая в круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция $f(z)$ удовлетворяет условиям $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leq 1$, $z \in D$, то

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \text{и} \quad |f(z)| \leq |z|, \quad z \in D. \quad (9.6)$$

При этом равенство $|f'(0)| = 1$ или $|f(z_0)| = |z_0|$ возможно хотя бы в одной точке $z_0 \in D$ лишь тогда, когда $f(z) = ze^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

◀ В силу того, что точка $z = 0$ является нулем функции $f(z)$, эту функцию можно представить в виде $f(z) = z\psi(z)$, где $\psi(z)$ — аналитическая функция в D , причем $\psi(0) = f'(0)$. Рассмотрим круг $D_1 \subset D$, ограниченный окружностью $|z| = r < 1$. Функция $\psi(z)$ аналитична в D_1 и непрерывна в \bar{D}_1 . Поэтому, согласно теореме 9.9, она достигает наибольшего значения на границе ∂D_1 . При этом $|\psi(z)| = |f(z)|/|z| \leq 1/r$ при $z \in \partial D_1$, так как по условию теоремы $|f(z)| \leq 1$. Следовательно, всюду в D_1 имеем $|\psi(z)| \leq 1/r$.

Предположим, что в некоторой точке $z_0 \in D$ выполнено неравенство $|\psi(z_0)| > 1$. Выберем $r < 1$ так, что $r > |z_0|$ и $r > 1/|\psi(z_0)|$. Тогда $z_0 \in D_1$ и, следовательно, $|\psi(z_0)| \leq 1/r < < |\psi(z_0)|$. Получили противоречие, которое показывает, что на самом деле $|\psi(z)| \leq 1$ всюду в D . В частности, $|f'(0)| = |\psi(0)| \leq 1$ и $|f(z)| = |z|\psi(z) \leq |z|$ в D .

Если $|f'(0)| = 1$, то функция $|\psi(z)|$ достигает максимума в точке $z = 0$, равного единице. Аналогично равенство $|f(z_0)| = |z_0|$ означает, что $|\psi(z)|$ достигает максимума в точке z_0 , равного единице. И в том и в другом случае, согласно принципу максимума модуля, функция $\psi(z)$ является постоянной, причем $|\psi(z)| = 1$. Следовательно, $\psi(z) = e^{i\alpha}$ и $f(z) = z\psi(z) = ze^{i\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ ▶

Замечание 9.4. Утверждение теоремы 9.9, справедливо и для неограниченной области D , являющейся *внешностью* некоторого *простого замкнутого контура* L , если дополнительно потребовать, чтобы функция была ограниченной в D . Действительно, выберем внутри контура L точку z_0 . Отображение $w = 1/(z - z_0)$ конформно отображает область D в некоторую ограниченную область D^* , границей которой является контур L^* — образ контура L при указанном отображении. Если функция $f(z)$ аналитична и ограничена в D , непрерывна в \bar{D} , то функция $g(w) = f(z_0 + 1/w)$ аналитична и ограничена всюду в D^* , за исключением точки $w = 0$. Но эта точка является устранимой особой точкой $g(w)$, так что можно считать, что

функция аналитична и в этой точке. Согласно теореме 9.9, $g(w)$ достигает максимума модуля на границе области D^* . Но тогда и функция $f(z) = g\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$ достигает максимума модуля на границе области D . #

Для гармонических функций справедлив следующий принцип максимума.

Теорема 9.12. Пусть функция $u(x, y)$ гармоническая в ограниченной области D и непрерывная в замыкании этой области. Если $u(x, y)$ непостоянна в D , то она достигает наибольшего и наименьшего значений только на границе этой области.

◀ Достаточно доказать теорему для наибольшего значения, так как наименьшее значение гармонической в D функции $u(x, y)$ является наибольшим значением функции $-u(x, y)$, также гармонической в D . Отметим, что функция $u(x, y)$, будучи непрерывной на замкнутом ограниченном множестве \bar{D} , достигает на этом множестве максимального значения, и нам нужно лишь показать, что функция не может принимать максимального значения в точках области D .

Предположим противное, т.е. пусть наибольшего значения гармоническая функция $u(x, y)$ достигает во внутренней точке $z_0 = x_0 + iy_0$ области D . Рассмотрим некоторую окрестность $U: |z - z_0| < r$ точки z_0 , целиком лежащую в D . В окрестности U существует такая аналитическая функция $f(z)$, что $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ (см. 4.9). Функция $g(z) = e^{f(z)}$ является аналитической в U как суперпозиция аналитических функций. Так как по предположению модуль $|g(z)| = e^{u(x, y)}$ этой функции достигает максимального значения в точке $z_0 \in U$, то, согласно принципу максимума модуля, $g(z) = \operatorname{const}$ в U . Отсюда имеем $|g(z)| = e^{u(x, y)} = \operatorname{const}$ и $u(x, y) = \operatorname{const}$ в U .

Пусть $C = f(z_0)$. Рассмотрим множество A_C таких точек z^* области D , для которых $f(z) \equiv C$ в некоторой окрестности точки z^* . Тогда множество A_C не пусто, так как содержит

точку z_0 локального максимума функции $u(x, y)$. Множество A_C является открытым, так как вместе с каждой своей точкой z содержит и некоторую ее окрестность. В то же время множество A_C является замкнутым в D , так как в любой точке $z \in D$, являющейся предельной точкой A_C , функция $u(x, y)$ достигает максимума, а потому постоянна в некоторой окрестности z и равна C . Таким образом, непустое множество A_C является одновременно и открытым и замкнутым в D . Согласно теореме 1.1, $A_C = D$, т.е. $u(x, y) \equiv C$ всюду в D . ►

Замечание 9.5. Рассуждая так же, как и в замечании 9.4, можно доказать следующее утверждение. Пусть функция $u(x, y)$ является гармонической и ограниченной в неограниченной области D — внешности простого замкнутого контура L . Пусть также $u(x, y)$ непрерывна в $\bar{D} = D \cup L$. Тогда эта функция достигает наибольшего и наименьшего значений на контуре L , ограничивающем область D .

9.6. Принцип симметрии

Теорема 9.13 (принцип непрерывности). Пусть две односвязные области D_1 и D_2 в расширенной комплексной плоскости не пересекаются, но имеют общий участок границы в виде простой кусочно гладкой дуги γ (рис. 9.3). Если функция $f_1(z)$ аналитична в области D_1 и непрерывна на множестве $D_1 \cup \gamma$, а функция $f_2(z)$ аналитична в D_2 и непрерывна на множестве $D_2 \cup \gamma$, причем $f_1(z) = f_2(z)$ при $z \in \gamma$, то функция

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1; \\ f_2(z), & z \in D_2; \\ f_1(z) = f_2(z), & z \in \gamma, \end{cases} \quad (9.7)$$

аналитична в области $D = D_1 \cup \gamma \cup D_2$.

◀ Доказательство опирается на теорему Мореры. Из условий теоремы следует, что функция $f(z)$ непрерывна в области D .

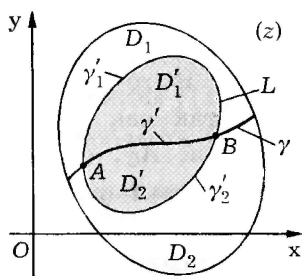


Рис. 9.3

Убедимся, что интеграл от функции $f(z)$ по любому простому замкнутому контуру L , лежащему в D , равен нулю. Если L лежит в D_1 или в D_2 , то равенство нулю интеграла следует из теоремы Коши для односвязной области.

Пусть контур L пересекает дугу γ , располагаясь частично в области D_1 , частично в области D_2 .

Доказательство проведем лишь для простейшего варианта расположения контура L , когда он пересекает дугу γ ($L \cap \gamma \neq \emptyset$) в точках A и B , а дуга $\gamma' \subset \gamma$, заключенная между этими точками, делит область, ограниченную L , на две части: D'_1 и D'_2 (см. рис. 9.3). Таким образом, граница L'_1 области D'_1 состоит из участка $\gamma'_1 \subset L$ и дуги γ' , а граница области D'_2 — из участка $\gamma'_2 \subset L$ и той же дуги γ' , причем $\gamma'_1 \cup \gamma'_2 = L$. Функция $f(z)$ является аналитической в областях D'_1 , D'_2 и непрерывной на их замыканиях $\overline{D'_1}$, $\overline{D'_2}$. Поэтому, учитывая замечание 5.1, а также свойства аддитивности и ориентированности интеграла от функции комплексного переменного (см. 5.1), получаем

$$\oint_{L'_1} f(z) dz = \int_{A\gamma'_1 B} f(z) dz + \int_{B\gamma'_1 A} f(z) dz = 0,$$

$$\begin{aligned} \oint_{L'_2} f(z) dz &= \int_{A\gamma'_2 B} f(z) dz + \int_{B\gamma'_2 A} f(z) dz = \\ &= \int_{A\gamma'_2 B} f(z) dz - \int_{A\gamma'_2 B} f(z) dz = 0. \end{aligned}$$

Складывая почленно эти равенства, получаем

$$\int_{B\gamma'_1 A} f(z) dz + \int_{A\gamma'_2 B} f(z) dz = \oint_L f(z) dz = 0. \quad \blacktriangleright$$

Функцию $f(z)$, определенную соотношением (9.7), можно рассматривать как *аналитическое продолжение* в область D каждой из функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ из областей D_1 или D_2 соответственно. Поэтому принцип непрерывности можно сформулировать так: если дуга γ является общим участком границы непересекающихся областей D_1 и D_2 , а функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ являются аналитическими в D_1 и D_2 соответственно, непрерывными и равными на дуге γ , то эти функции будут *аналитическими продолжениями* друг друга.

Отметим, что принцип непрерывности нельзя перенести на дифференцируемые функции действительного переменного. Например, интервалы $(0, 1)$ и $(-1, 0)$, являющиеся областями на действительной оси, имеют общую граничную точку $x_0 = 0$, а функции $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = -x$ дифференцируемы в D_1 и D_2 соответственно, но $f(x) = |x|$ не является дифференцируемой функцией в объединенном интервале $(-1, 1)$, поскольку эта функция не дифференцируема в точке $x_0 \in D$.

Теорема 9.14 (принцип симметрии). Пусть D_1 — односвязная область, лежащая в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, граница Γ_1 которой содержит интервал γ действительной оси $\text{Im } z = 0$, а D_2 — область, симметричная D_1 относительно этой оси (рис. 9.4). Если функция $f_1(z)$ непрерывна в области D_1 и на ее границе, является аналитической в D_1 и принимает действительные значения при $z \in \gamma$, то эту функцию можно аналитически продолжить в область $D = D_1 \cup \gamma \cup D_2$ по формуле

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \cup \gamma; \\ \overline{f_1(\bar{z})}, & z \in D_2. \end{cases} \quad (9.8)$$

◀ Рассмотрим в области D_2 функцию $f_2(z) = \overline{f_1(\bar{z})}$. Эта функция корректно определена, так как для любой точки $z \in D_2$ точка \bar{z} принадлежит области D_1 . Докажем, что $f_2(z)$ является аналитической в D_2 . Рассмотрим произвольную точку $z_0 \in D_2$ и некоторую ее окрестность $U: |z - z_0| < r$, целиком попадающую

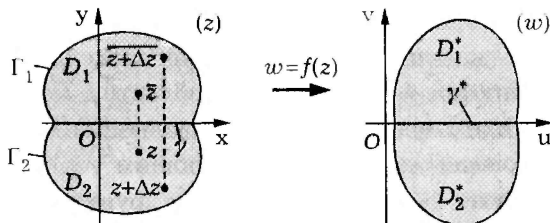


Рис. 9.4

в D_2 . Тогда окрестность U' : $|z - \bar{z}_0| < r$ целиком попадает в D_1 и в ней в силу аналитичности функцию $f_1(z)$ можно разложить в ряд Тейлора:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \bar{z}_0)^n, \quad z \in U'.$$

Пусть $z \in U$. Тогда $\bar{z} \in U'$, и мы имеем

$$f_1(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\bar{z} - \bar{z}_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n (z - z_0)^n}, \quad z \in U.$$

Следовательно,

$$f_2(z) = \overline{f_1(\bar{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n (z - z_0)^n, \quad z \in U,$$

т.е. в окрестности точки $z_0 \in U$ функция $f_2(z)$ представима степенным рядом, а потому аналитична. Так как $z_0 \in D_2$ можно выбрать произвольно, то $f_2(z)$ аналитична всюду в D_2 .

Функция $f(z)$, определяемая соотношением (9.8), непрерывна в областях D_1 и D_2 , так как в этих областях аналитичны (а потому и непрерывны) функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Покажем, что функция $f(z)$ непрерывна и в точках интервала γ . Возьмем произвольную точку $x_0 \in \gamma$ (см. рис. 9.4). В силу непрерывности функции $f_1(z)$ в точке x_0 для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для точек $z \in D_1 \cup \gamma$, удовлетворяющих неравенству $|z - x_0| < \delta$, верно неравенство $|f_1(z) - f_1(x_0)| < \varepsilon$.

Отметим, что по условию теоремы значение $f_1(x_0)$ является действительным. Для произвольной точки $z \in D$, для которой $|z - x_0| < \delta$, имеем либо $z \in D_1 \cup \gamma$, либо $z \in D_2$. В первом случае в силу выбора δ верно соотношение $|f(z) - f(x_0)| < \varepsilon$, так как тогда $f(z) = f_1(z)$ и $f(x_0) = f_1(x_0)$. Во втором случае получаем

$$\begin{aligned} |f(z) - f(x_0)| &= |f_2(z) - f_1(x_0)| = \\ &= |\overline{f_1(\bar{z})} - \overline{f_1(x_0)}| = |f_1(\bar{z}) - f_1(x_0)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

так как точка \bar{z} попадает в область D_1 и для нее $|\bar{z} - x_0| = |z - x_0| < \delta$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $x \in D$ и $|z - x_0| < \delta$ верно неравенство $|f(z) - f(x_0)| < \varepsilon$. Это означает, что функция $f(z)$ непрерывна в точке x_0 , а в силу произвольности выбора $x_0 \in \gamma$ она непрерывна на всем интервале γ .

Применяя принцип непрерывности (см. теорему 9.13), заключаем, что функция $f(z)$ является аналитической в области D , т.е. является, согласно определению 4.5, *аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ из области D_1 в область D* . ►

Принцип симметрии в ряде случаев позволяет упростить построение конформных отображений областей, симметричных относительно действительной оси. Использование этого принципа основано на следующем рассуждении. Пусть функция $f_1(z)$ конформно отображает односвязную область D_1 на область D_1^* в верхней полуплоскости $\text{Im } w > 0$, причем граница D_1 содержит интервал γ действительной оси, который при отображении переходит в интервал γ^* действительной оси $\text{Im } w = 0$ (см. рис. 9.4). Тогда функция $f(z)$ вида (9.8) конформно отображает область $D = D_1 \cup \gamma \cup D_2$ на область $D^* = D_1^* \cup \gamma^* \cup D_2^*$, где D_2 — область, симметричная D_1 относительно действительной оси $\text{Im } z = 0$, а D_2^* — область, симметричная D_1^* относительно действительной оси $\text{Im } w = 0$. В силу сказанного для построения конформного отображения области D на область D^* достаточно построить конформное отображение области D_1 („половинки“ D) на область D_1^* („половинки“ D^*), которое переводит

интервал γ в интервал γ^* . А построение конформного отображения лишь части области может оказаться более простой задачей.

Принцип симметрии распространяется на более общий случай областей, симметричных относительно произвольной прямой. Сформулируем это без доказательства. Пусть граница области D_1 содержит интервал γ некоторой прямой L , а граница области D_1^* содержит интервал γ^* некоторой прямой L^* , причем D_1 и D_1^* находятся по одну сторону от прямой L и L^* . Если функция $f_1(z)$ конформно отображает область D_1 на область D_1^* , преобразуя интервал γ в интервал γ^* , то эта функция имеет аналитическое продолжение $f(z)$, которое конформно отображает область $D_1 \cup \gamma \cup D_2$ на область $D_1^* \cup \gamma^* \cup D_2^*$, где D_2 и D_2^* — области, симметричные D_1 и D_1^* относительно прямых L и L^* . При этом функция $f(z)$ отображает точки, симметричные относительно прямой L , в точки, симметричные относительно прямой L^* .

Вопросы и задачи

9.1. Докажите теорему 9.1 об обратной функции с помощью теории функций многих действительных переменных.

9.2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < R$, непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$ и $f(z) > a$ при $|z| = R$. Докажите, что если $|f(0)| < a$, то в круге $|z| < R$ есть хотя бы один нуль функции $f(z)$.

9.3. Пусть функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z| < 1$ и непрерывная в замкнутом круге $|z| \leq 1$, удовлетворяет условиям $|f(z)| \leq M$, $|z| = 1$, и $f(a) = 0$, где a — некоторая точка круга $|z| < 1$. Докажите, что в круге $|z| < 1$ верно неравенство

$$|f(z)| \leq M \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|.$$

9.4. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$, причем $f(0) = 0$, $|f(z)| < 1$ при $|z| < 1$, а в точке $z = 1$ функция $f(z)$

непрерывна и $f(1) = 1$. Докажите, что если существует производная $f'(1)$, то $|f'(1)| \geq 1$.

9.5. Докажите, что функция $f(z) = z/(1-z)^3$ однолистка в круге $|z| < 1/2$, но не является однолистной ни в каком круге $|z| < r$ радиуса $r > 1/2$.

9.6. Докажите, что если многочлен $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, $a_n \neq 0$, является однолистной функцией в круге $|z| < R$, то $n|a_n| \leq |a_1|R^{1-n}$.

9.7. Пусть функция $f(z) = c_1z + c_2z^2 + \dots$ аналитична в некоторой окрестности точки $z = 0$ и $c_1 \neq 0$. Докажите, что в некоторой окрестности точки $w = 0$ определена обратная к $f(z)$ функция $g(w)$, представляемая степенным рядом $g(w) = a_1w + a_2w^2 + \dots$, коэффициенты a_n которого удовлетворяют равенствам

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left[z f'(z) \left(\frac{z}{f(z)} \right)^{n+1} \right]_{z=0}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и равенствам

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\left(\frac{z}{f(z)} \right)^n \right]_{z=0}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

10. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Теория конформных отображений подчинена решению двух основных задач:

- 1) найти образ области при заданном отображении;
- 2) найти конформное отображение одной заданной области на другую.

Практические пути решения этих задач открывает прежде всего принцип соответствия границ, согласно которому конформное отображение одной области на другую определяется непрерывным и взаимно однозначным соответствием между их границами. Для решения первой задачи нужно найти образ границы заданной области, а для решения второй — аналитическую функцию, устанавливающую взаимно однозначное соответствие между границами двух областей. Помощь в решении этих задач теории конформных отображений могут оказать и другие геометрические принципы теории функций комплексного переменного.

В теории конформных отображений нет универсального метода, обеспечивающего решение какой-либо из двух задач. Нет общего алгоритма, позволяющего найти образ заданной области при заданном конформном отображении, а тем более нет алгоритма построения конформного отображения из одной области в другую. Ситуация здесь та же, что и во многих других разделах математического анализа: решение конкретной задачи можно найти, хорошо зная конформные отображения, осуществляемые элементарными аналитическими функциями, а также конформные отображения типовых областей. Решение конкретной задачи сводят к решению одной из стандартных задач.

Перейдем к рассмотрению конформных отображений, осуществляемых основными элементарными функциями.

10.1. Линейное отображение

Отображение, осуществляемое линейной функцией

$$w = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0, \quad (10.1)$$

аналитической в комплексной плоскости, называют **линейным**. Добавим к (10.1) условие

$$w(\infty) = \infty \quad (10.2)$$

в *бесконечно удаленной точке* $z = \infty$. Соотношения (10.1) и (10.2) определяют *однолистное отображение* расширенной комплексной плоскости (z) на расширенную комплексную плоскость (w).

Однолистность нетрудно проверить: если $w_1 = az_1 + b$ и $w_2 = az_2 + b$, то $w_1 - w_2 = a(z_1 - z_2)$ и, следовательно, равенство $w_1 = w_2$ возможно только при $z_1 = z_2$. Однолистность можно доказать и так: выражаем из (10.1) $z = (w - b)/a$ и убеждаемся, что при различных $w \in \overline{\mathbb{C}}$ соответствующие значения $z \in \overline{\mathbb{C}}$ различны.

Так как $dw/dz = a \neq 0$ при любых z , то *отображение* является *конформным* всюду в плоскости (z) (см. табл. 9.1). Кроме того, линейная функция имеет в точке $z = \infty$ простой полюс. Поэтому линейное отображение конформно и в бесконечно удаленной точке. Таким образом, это отображение конформно во всей расширенной комплексной плоскости.

Установим геометрические свойства линейного отображения (10.1), рассмотрев сначала некоторые частные случаи этого отображения.

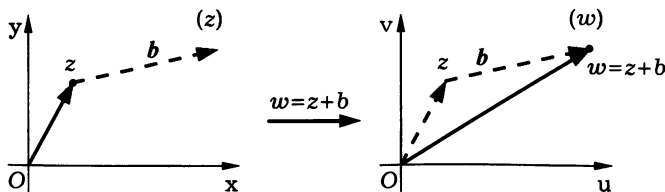


Рис. 10.1

1. $w = z + b$, $b \in \mathbb{C}$. В этом случае каждая конечная точка z смещается в точку $z + b$, т.е. происходит параллельный перенос всех точек комплексной плоскости (z) на вектор, соответствующий комплексному числу b (рис. 10.1).

2. $w = e^{i\alpha}z$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Это отображение осуществляет преобразование поворота вокруг начала координат на угол α (рис. 10.2), так как для $z = re^{i\varphi}$ имеем $w = re^{i(\varphi+\alpha)}$.

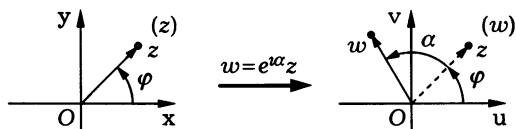


Рис. 10.2

3. $w = rz$, $r > 0$. В этом случае отображение оставляет неизменным *аргумент* комплексного числа z , но его модуль изменяется в r раз (рис. 10.3). Такое отображение представляет собой преобразование подобия с центром подобия в точке $z = 0$ и коэффициентом подобия r .

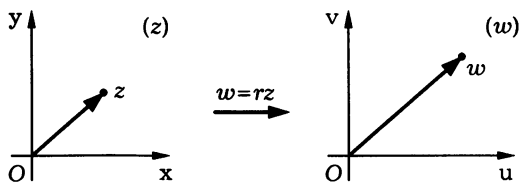


Рис. 10.3

Любая линейная функция $w = az + b$, где $a = re^{i\alpha}$, может быть представлена в виде композиции трех линейных функций частного вида: $w_1 = e^{i\alpha}z$, $w_2 = rw_1$, $w = w_2 + b$. Отсюда заключаем, что линейное отображение общего вида (10.1) можно осуществить путем последовательного применения:

- 1) поворота около начала координат на угол $\alpha = \arg a$;
- 2) преобразования подобия с центром подобия в точке $z = 0$ и коэффициентом подобия $r = |a|$;

3) параллельного переноса на вектор, изображающий комплексное число b .

Так как каждое из трех составляющих отображений преобразует окружность в окружность, а прямую в прямую, то любое линейное отображение преобразует окружность в окружность и прямую в прямую. Его неподвижные точки можно найти из условия $z = az + b$. Отсюда при $a \neq 1$ получаем $z_1 = b/(1 - a)$ и $z_2 = \infty$. При $a = 1$ получаем преобразование параллельного переноса, которое имеет единственную неподвижную точку $z_1 = \infty$. Отметим, что при $a \neq 1$ линейное отображение $w = az + b$ можно представить в виде $w - z_0 = a(z - z_0)$, где z_0 — неподвижная точка отображения (для этого достаточно из равенства $w = az + b$ вычесть тождество $z_0 = az_0 + b$). Из этого представления видно, что линейное отображение $w = az + b$ при $a \neq 1$ представляет собой композицию поворота комплексной плоскости вокруг точки z_0 на угол $\alpha = \arg a$ и преобразования подобия (растяжения) с центром в точке z_0 и коэффициентом растяжения $|a|$.

Линейное отображение определено однозначно условиями, при которых однозначно определены параметры a и b . Можно, например, потребовать, чтобы две различные точки z_1 и z_2 переходили соответственно в произвольно заданные, но различные точки w_1 и w_2 . Тогда параметры a и b будут удовлетворять системе уравнений $w_1 = az_1 + b$ и $w_2 = az_2 + b$, имеющей относительно a и b единственное решение. Соответствующее отображение имеет вид

$$\frac{w - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (10.3)$$

Линейное отображение будет определено однозначно и в том случае, когда в некоторой точке z_1 заданы значение функции w_1 и значение ее производной (эта производная постоянна и на самом деле не зависит от точки z_1). При этих условиях отображение можно записать в виде $w - w_1 = a(z - z_1)$.

Пример 10.1. Найдем линейное отображение с неподвижной точкой $z = 1 + 2i$, переводящее точку $z = i$ в точку $w = -i$.

Для нахождения параметров a и b в (10.1) составим условия $1 + 2i = a(1 + 2i) + b$ и $-i = ai + b$. Отсюда

$$a = \frac{1 + 3i}{1 + i} = \frac{(1 + 3i)(1 - i)}{2} = 2 + i, \quad b = -i - (2 + i)i = 1 - 3i.$$

Итак, искомое отображение имеет вид $w = (2 + i)z + 1 - 3i$. Этот же результат следует из равенства (10.3), если в нем положить $z_1 = i$, $w_1 = -i$ и $z_2 = w_2 = 1 + 2i$.

Пример 10.2. Построим линейное отображение, переводящее полукруг $D = \{z \in \mathbb{C}: |z - i| < 1/2, \operatorname{Re} z > 0\}$ в полукруг $D^* = \{w \in \mathbb{C}: |w - 1| < 1, \operatorname{Im} w > 0\}$. Для этого последовательно выполним следующие отображения (рис. 10.4):

1) $w_1 = z - i$, которое переводит область D в область $D_1 = \{w_1 \in \mathbb{C}: |w_1| < 1/2, \operatorname{Re} w_1 > 0\}$;

2) $w_2 = e^{i\pi/2}w_1 = iw_1$, переводящее область D_1 в полукруг $D_2 = \{w_2 \in \mathbb{C}: |w_2| < 1/2, \operatorname{Im} w_2 > 0\}$;

3) $w_3 = 2w_2$, переводящее полукруг D_2 в полукруг $D_3 = \{w_3 \in \mathbb{C}: |w_3| < 1, \operatorname{Im} w_3 > 0\}$;

4) $w = w_3 + 1$, переводящее полукруг D_3 в D^* .

Таким образом, получаем искомое отображение

$$w = w_3 + 1 = 2w_2 + 1 = 2iw_1 + 1 = 2i(z - i) + 1 = 2iz + 3.$$

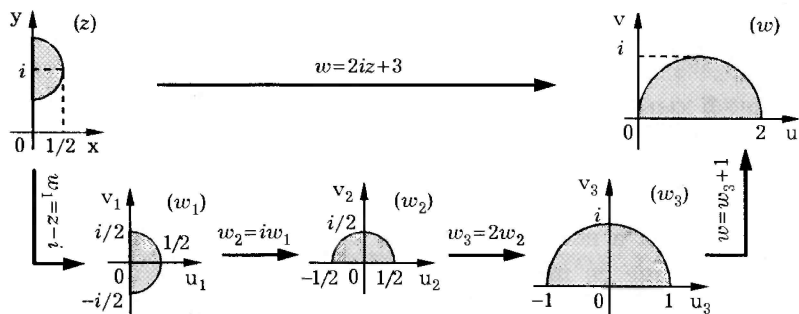


Рис. 10.4

Пример 10.3. Найдем все линейные отображения, переводящие круг $|z - z_0| < r$ в круг $|w - w_0| < R$.

Так как любое линейное отображение есть либо поворот, либо параллельный перенос, либо преобразование подобия, то при отображении круга $|z - z_0| < r$ в круг $|w - w_0| < R$ центр первого z_0 перейдет в центр второго w_0 , т.е. $w_0 = az_0 + b$. Поэтому линейное отображение можно записать в виде $w - w_0 = a(z - z_0)$. Отсюда находим, что $|w - w_0| = \rho|z - z_0|$, где $\rho = |a|$. При рассматриваемом отображении окружность $|z - z_0| = r$ переходит в окружность $|w - w_0| = R$. Следовательно, $R = \rho r$ и $\rho = R/r$. Итак, все отображения, при которых круг $|z - z_0| < r$ переходит в круг $|w - w_0| < R$, имеют вид

$$w - w_0 = \frac{R}{r} e^{i\alpha} (z - z_0), \quad (10.4)$$

где $\alpha = \arg a$ можно выбрать произвольно. Несложно убедиться, что отображение, имеющее указанный вид, действительно переводит круг $|z - z_0| < r$ в круг $|w - w_0| < R$. Следовательно, формула (10.4) описывает все искомые отображения. Конкретное отображение определяется значением параметра α .

Пример 10.4. Найдем линейную функцию, отображающую полосу, заключенную между прямыми $y = kx$ и $y = kx + h$, $h > 0$, на полосу $0 < u < 1$ и удовлетворяющую условию $w(0) = 0$.

Полагая $w = az + b$, из условия $w(0) = 0$ находим, что $b = 0$. Поворотом вокруг начала координат на угол $\alpha = -\arctg k - \pi/2$ переведем прямую $y = kx$ в прямую $u = 0$ (рис. 10.5). Этот поворот осуществляется линейной функцией $w_1 = e^{i\alpha} z = e^{-i(\pi/2 + \arctg k)} z$. При этом прямая $y = kx + h$ перейдет в прямую $u = d$, где $d = h/\sqrt{1+k^2}$ — расстояние между прямыми $y = kx$ и $y = kx + h$. Теперь, чтобы прямая $u = d$ перешла в прямую $u = 1$, достаточно применить преобразование подобия с коэффициентом подобия $1/d$. В итоге получим

$$w = \frac{w_1}{d} = e^{i\alpha} \frac{z}{d} = \frac{\sqrt{1+k^2}}{h} e^{-i(\pi/2 + \arctg k)} z.$$

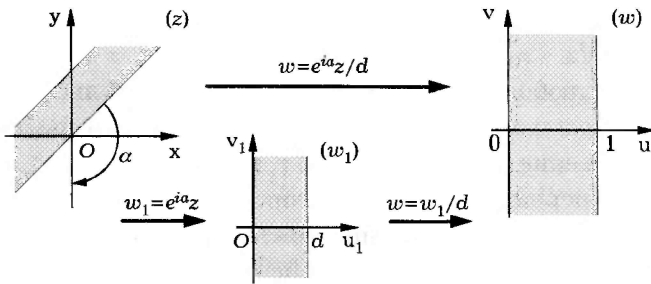


Рис. 10.5

10.2. Дробно-линейное отображение

Отображение, которое осуществляется *дробно-линейной функцией*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (10.5)$$

называют *дробно-линейным*. Отметим, что в случае $ad = bc$ числитель и знаменатель дроби $\frac{az+b}{cz+d}$ пропорциональны, т.е. отображение (10.5) становится постоянным. Таким образом, условие $ad - bc \neq 0$ исключает вырожденный случай постоянной функции.

Если $c = 0$, то $d \neq 0$ и дробно-линейное отображение (10.5) сводится к *линейному отображению*:

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = Az + B.$$

Поэтому в этом параграфе предполагаем, что $c \neq 0$.

Функция (10.5) определена для всех z , кроме точек $z = -d/c$ и $z = \infty$. Определим (10.5) и в этих точках, положив

$$w = \infty \text{ при } z = -\frac{d}{c} \quad \text{и} \quad w = \frac{a}{c} \text{ при } z = \infty. \quad (10.6)$$

Теорема 10.1. Функция (10.5) с дополнением (10.6) осуществляет *взаимно однозначное и непрерывное отображение*

расширенной комплексной плоскости (z) на расширенную комплексную плоскость (w).

◀ С дополнительным условием (10.6) функция (10.5) определена всюду в $\bar{\mathbb{C}}$. Из соотношения (10.5) выразим переменную z :

$$z = \frac{dw - b}{a - cw}. \quad (10.7)$$

Отсюда и из (10.6) следует, что каждому $w \in \bar{\mathbb{C}}$ отвечает определенное значение $z \in \bar{\mathbb{C}}$, т.е. установлено взаимно однозначное отображение $\bar{\mathbb{C}}$ на $\bar{\mathbb{C}}$.

Остается доказать непрерывность отображения (10.5). При $z \neq -d/c$ и $z \neq \infty$ отображение (10.5) непрерывно как отношение двух непрерывных функций. Из равенств

$$\lim_{z \rightarrow -d/c} \frac{az + b}{cz + d} = \infty = w\left(-\frac{d}{c}\right), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} = w(\infty)$$

следует непрерывность и в точках $z = -d/c$, $z = \infty$. ▶

Теорема 10.2. Дробно-линейное отображение конформно в расширенной комплексной плоскости.

◀ Отметим, что функция, определяющая дробно-линейное отображение (10.5), является аналитической всюду в комплексной плоскости, за исключением точки $z = -d/c$. Конформность отображения будет установлена, если мы докажем, что во всех конечных точках $z \neq -d/c$ производная не обращается в нуль. Так как $ad - bc \neq 0$, то

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

при всех конечных $z \neq -d/c$.

Отображение (10.5) конформно в точке $z = -d/c$, так как эта точка является простым полюсом функции (см. табл. 9.1).

Наконец, конформность отображения $w(z)$ в точке $z = \infty$ равносильна конформности отображения $w(1/z)$ в точке $z = 0$ (см. 9.2). Но если $w(z)$ имеет вид (10.5), то

$$w\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{a}{z} + b}{\frac{c}{z} + d} = \frac{a + bz}{c + dz}.$$

Если $c \neq 0$, то имеем

$$\frac{dw(1/z)}{dz} = \frac{b(c + dz) - (a + bz)d}{(c + dz)^2} = \frac{bc - ad}{(c + dz)^2}.$$

Полагая $z = 0$, получаем

$$\left. \frac{dw(1/z)}{dz} \right|_{z=0} = \frac{bc - ad}{c^2} \neq 0.$$

Таким образом, при $c \neq 0$ функция $w(1/z)$ аналитична в точке $z = 0$ и имеет в этой точке ненулевую производную. Значит, это отображение конформно в точке $z = 0$, а отображение $w(z)$ конформно в точке $z = \infty$.

Если $c = 0$, то отображение (10.5) представляет собой линейное отображение, являющееся конформным в бесконечно удаленной точке (см. 10.1). Мы заключаем, что дробно-линейное отображение конформно во всей расширенной комплексной плоскости. ►

Теорема 10.3. Дробно-линейными отображениями являются:

- композиция двух любых дробно-линейных отображений;
- отображение, обратное к дробно-линейному отображению.

◀ Чтобы доказать эти два утверждения, нужно показать, что соответствующее отображение может быть представлено в виде (10.5). Рассмотрим две дробно-линейные функции

$$f_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}, \quad f_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2},$$

где $a_i d_i - b_i c_i \neq 0$, $i = 1, 2$. Их композицией является функция

$$\begin{aligned} f(z) = f_2(f_1(z)) &= \frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_2 c_1)z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(a_1 c_2 + c_1 d_2)z + (b_1 c_2 + d_1 d_2)} = \frac{az + b}{cz + d}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a &= a_1 a_2 + b_2 c_1, & b &= a_2 b_1 + b_2 d_1, \\ c &= a_1 c_2 + c_1 d_2, & d &= b_1 c_2 + d_1 d_2. \end{aligned}$$

Остается проверить условие $ad - bc \neq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} ad - bc &= (a_1 a_2 + b_2 c_1)(b_1 c_2 + d_1 d_2) - (a_2 b_1 + b_2 d_1)(a_1 c_2 + c_1 d_2) = \\ &= (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0. \end{aligned}$$

Для дробно-линейного отображения (10.5) обратное отображение имеет вид

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a} = \frac{a_1 w + b_1}{c_1 w + d_1},$$

где

$$a_1 = d, \quad b_1 = -b, \quad c_1 = -c, \quad d_1 = a.$$

Это представление получается, если в (10.5) выразить переменное z через w . Отсюда следует, что обратное отображение имеет тот же вид (10.5), что и исходное отображение. Кроме того, $a_1 d_1 - b_1 c_1 = ad - bc \neq 0$, т.е. обратное отображение является дробно-линейным. ►

Для рассмотрения дальнейших свойств дробно-линейного отображения условимся называть окружностью в $\bar{\mathbb{C}}$ любую окружность комплексной плоскости или любую прямую в \mathbb{C} , дополненную точкой $z = \infty$. В 1.3 было показано, что при стереографической проекции как окружностям, так и прямым комплексной плоскости на сфере Римана соответствуют окружности. Различие между теми и другими состоит лишь в том,

что окружность на сфере Римана, изображающая прямую, проходит через „северный полюс“ сферы, а окружность на сфере Римана, изображающая окружность на комплексной плоскости, через „северный полюс“ не проходит. Эта общность и позволяет ввести термин „окружность в $\bar{\mathbb{C}}$ “, относящийся к множествам, которым на сфере Римана соответствуют окружности.

Теорема 10.4 (круговое свойство дробно-линейного отображения). Произвольное дробно-линейное отображение преобразует любую окружность в $\bar{\mathbb{C}}$ в окружность в $\bar{\mathbb{C}}$.

◀ При $c = 0$ в (10.5) дробно-линейное отображение становится линейным и утверждение теоремы очевидно, так как такое отображение переводит окружности на комплексной плоскости в окружности, а прямые в прямые (см. 10.1). Если в (10.5) $c \neq 0$, то отображение можно записать в виде

$$w = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)} = A + \frac{B}{z + D},$$

где

$$A = \frac{a}{c}, \quad B = \frac{bc - ad}{c^2}, \quad D = \frac{d}{c}.$$

Из этого представления видно, что дробно-линейное отображение является композицией трех отображений:

$$f_1(z) = z + D, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = A + Bz.$$

Линейные отображения $f_1(z)$ и $f_3(z)$, как уже сказано, обладают круговым свойством. Остается доказать, что круговым свойством обладает и отображение $f_2(z)$.

Заметим, что уравнение любой окружности в $\bar{\mathbb{C}}$ (т.е. любой окружности в \mathbb{C} и любой прямой в \mathbb{C}) можно записать в виде

$$E(x^2 + y^2) + F_1x + F_2y + G = 0, \quad (10.8)$$

где возможен случай $E = 0$ (это соответствует прямым в \mathbb{C}). Переходя к комплексному переменному $z = x + iy$ и учитывая,

что $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/(2i)$, из (10.8) получаем комплексное уравнение окружности в $\bar{\mathbb{C}}$

$$Ez\bar{z} + Fz + \bar{F}\bar{z} + G = 0, \quad (10.9)$$

в котором $F = (F_1 - iF_2)/2$. Чтобы получить уравнение образа окружности в $\bar{\mathbb{C}}$ при отображении $f_2(z)$, достаточно в (10.9) подставить $z = 1/w$:

$$\frac{E}{w\bar{w}} + \frac{F}{w} + \frac{\bar{F}}{\bar{w}} + G = 0,$$

или

$$Gw\bar{w} + \bar{F}w + F\bar{w} + E = 0.$$

Мы пришли к уравнению того же вида, что и уравнение (10.9). Следовательно, образ окружности в $\bar{\mathbb{C}}$ при отображении $w = 1/z$ есть окружность в $\bar{\mathbb{C}}$.

Доказательство теоремы завершает очевидное соображение: если два отображения обладают круговым свойством, то и их композиция обладает круговым свойством. Мы представили произвольное дробно-линейное отображение в виде композиции трех отображений, два из которых являются линейными, а третье есть отображение $w = 1/z$. Каждое из этих трех отображений обладает круговым свойством. Значит, и их композиция обладает круговым свойством. ►

Замечание 10.1. Дробно-линейное отображение $w = \frac{az+b}{cz+d}$ преобразует окружность C в прямую, если C проходит через точку $z = -\frac{d}{c}$, которая переходит в бесконечно удаленную точку. Если окружность C не проходит через точку $z = -\frac{d}{c}$, то при указанном дробно-линейном отображении C перейдет в окружность. Аналогичным образом преобразуются и прямые: прямая L при отображении $w = \frac{az+b}{cz+d}$ переходит в прямую, если L проходит через точку $z = -\frac{d}{c}$. Иначе L переходит в окружность. #

Переходя ко второму геометрическому свойству дробно-линейного отображения, введем следующее определение.

Определение 10.1. Точки z и z^* называют *симметричными относительно окружности* Γ в \mathbb{C} , если они лежат на

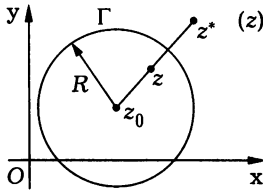


Рис. 10.6

одном луче, выходящем из центра z_0 окружности Γ , и произведение их расстояний до центра окружности равно квадрату радиуса R окружности (рис. 10.6), т.е. $|z^* - z_0||z - z_0| = R^2$ и $\arg(z^* - z_0) = \arg(z - z_0)$.

Так как для точек z и z^* , симметричных относительно окружности Γ : $|z - z_0| = R$, верно соотношение $\arg(z - z_0) = \arg(z^* - z_0)$, то $(z - z_0)\overline{(z^* - z_0)}$ равно действительному положительному числу. А поскольку, согласно определению,

$$|(z - z_0)\overline{(z^* - z_0)}| = |z - z_0||z^* - z_0| = R^2,$$

то

$$(z - z_0)\overline{(z^* - z_0)} = R^2,$$

или

$$z^* - z_0 = \frac{R^2}{z - z_0}. \quad (10.10)$$

Так как при приближении точки z к центру окружности Γ симметричная ей точка z^* стремится к бесконечно удаленной точке, то центр z_0 окружности Γ и бесконечно удаленную точку естественно считать симметричными относительно окружности Γ .

Введенное понятие симметрии относительно окружности (ее в элементарной геометрии называют *инверсией*) можно рассматривать как развитие понятия симметрии относительно прямой. Общность двух симметрий становится понятной,

если для них сформулировать единый критерий. Напомним, что точки z и z^* называют симметричными относительно прямой γ , если они лежат по разные стороны от этой прямой на одинаковом от нее расстоянии, а соединяющий их отрезок перпендикулярен γ (рис. 10.7).

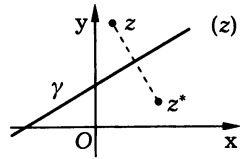


Рис. 10.7

Теорема 10.5 (критерий симметричности точек).

Две несовпадающие точки z и z^* симметричны относительно окружности (прямой) Γ тогда и только тогда, когда любая окружность или прямая, проходящая через эти точки и пересекающаяся с Γ , перпендикулярна Γ в точке пересечения.

◀ Перпендикулярность окружности и прямой означает, что прямая перпендикулярна касательной к окружности в точке пересечения. Это возможно в том и только в том случае, когда прямая проходит через центр окружности.

Пусть точки z и z^* симметричны относительно прямой Γ . Через эти точки можно провести единственную прямую, и эта прямая, согласно определению симметрии относительно прямой, перпендикулярна Γ . Рассмотрим окружность C , проходящую через точки z и z^* . Центр окружности C равноудален от точек z и z^* , а потому лежит на прямой Γ . Значит, окружность C перпендикулярна Γ .

Теперь перейдем к случаю, когда Γ — это окружность. Отметим, что две пересекающиеся окружности перпендикулярны, если перпендикулярны касательные к этим окружностям в точке пересечения. Но касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведенному в точку касания. Поэтому в качестве критерия перпендикулярности двух окружностей можно взять одно из двух условий:

- радиусы двух окружностей, проведенные в точку пересечения, перпендикулярны;
- радиус одной окружности, проведенный в точку пересечения окружностей, касается другой окружности.

Пусть точки z и z^* симметричны относительно окружности $\Gamma: |z - z_0| = R$. Единственная прямая, проходящая через точки z и z^* , согласно определению симметрии относительно окружности, проходит через центр Γ , а значит, перпендикулярна Γ . Рассмотрим произвольную окружность C , проходящую через точки z и z^* . Из точки z_0 проведем касательную к окружности C , и пусть z_1 — соответствующая точка касания.

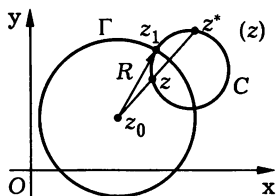


Рис. 10.8

известной теореме элементарной геометрии, произведение секущих постоянно и равно квадрату касательной. В нашем случае, учитывая определение симметрии относительно окружности, получаем равенство (рис. 10.8)

$$|z_1 - z_0|^2 = |z - z_0| |z^* - z_0| = R^2.$$

Но равенство $|z_1 - z_0| = R$ означает, что точка z_1 лежит на окружности Γ , т.е. касательная, проведенная из точки z_0 , совпадает с радиусом окружности Γ . Следовательно, окружности Γ и C перпендикулярны.

Итак, доказано, что если точки z и z^* симметричны относительно прямой (окружности) Γ , то любая прямая или окружность, проходящая через z и z^* и пересекающая Γ , перпендикулярна Γ . Теперь докажем обратное утверждение. Пусть Γ — прямая, а любая окружность или прямая C , проходящая через точки z и z^* , перпендикулярна Γ . Через точки z и z^* проходит единственная прямая L и, как условлено, она перпендикулярна Γ . Рассмотрим произвольную окружность, проходящую через точки z и z^* . Так как эта окружность перпендикулярна Γ , ее центр расположен на Γ . Но тогда хорда окружности C , соединяющая точки z и z^* и перпендикулярная Γ , делится прямой Γ пополам. Следовательно, точки z и z^* симметричны.

Пусть Γ — это окружность, а любая окружность или прямая, проходящая через точки z и z^* , перпендикулярна Γ . Это значит, что прямая L , проходящая через точки z и z^* , проходит и через центр z_0 окружности Γ . Рассмотрим какую-либо

окружность C , проходящую через точки z и z^* и пересекающую Γ в некоторой точке z_1 . Так как C перпендикулярна Γ , радиус окружности Γ , проведенный в точку пересечения z_1 , касается окружности C . Согласно теореме о секущих, верно равенство

$$|z - z_0| |z^* - z_0| = |z_1 - z_0|^2 = R^2.$$

Остается показать, что точки z и z^* лежат на одном луче, выходящем из точки z_0 , или, иначе, на прямой L точка z_0 находится вне отрезка с концами z и z^* . Но если бы точка z_0 попала на отрезок с концами z и z^* , т.е. находилась бы на хорде окружности C , то из этой точки нельзя было бы провести касательную к окружности C и окружность C не была бы перпендикулярна окружности Γ . Все условия определения симметрии относительно окружности выполнены. Значит, точки z и z^* симметричны относительно Γ . ►

Теорема 10.6. Произвольное дробно-линейное отображение преобразует любые точки z и z^* , симметричные относительно окружности Γ в $\bar{\mathbb{C}}$, в точки w и w^* , симметричные относительно образа Γ' этой окружности.

◀ Рассмотрим семейство $\{\gamma\}$ всех окружностей на $\bar{\mathbb{C}}$, проходящих через z и z^* . Каждая из этих окружностей перпендикулярна Γ . Дробно-линейное отображение переводит каждую окружность γ в окружность γ' в $\bar{\mathbb{C}}$, перпендикулярную (в силу теоремы 10.1 о конформности этого отображения) образу Γ' окружности Γ . Согласно критерию симметричности точек, получаем, что точки w и w^* , через которые проходят все окружности семейства $\{\gamma'\}$, симметричны относительно окружности Γ' . ►

Теорема 10.7*. Для любых трех различных точек z_1, z_2, z_3 в $\bar{\mathbb{C}}$ и трех различных точек w_1, w_2, w_3 в $\bar{\mathbb{C}}$ существует дробно-линейное отображение $w = f(z)$, для которого $w_i = f(z_i)$, $i = 1, 2, 3$, и такое отображение единственно. #

* Доказательство теоремы см. в книге: Привалов И.И.

Замечание 10.2. Дробно-линейное отображение $w = f(z)$, переводящее три различные точки z_1, z_2, z_3 в три различные точки w_1, w_2, w_3 , можно определить уравнением

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}. \quad (10.11)$$

Каждая из точек z_k и w_k входит в равенство дважды, один раз в числителе, один раз в знаменателе. Отметим, что соотношение (10.11) имеет смысл и тогда, когда одна из точек z_k и w_k является бесконечно удаленной. В этом случае разности, в которые входит эта точка, следует заменить единицей. Например, для $z_1 = \infty$ и $w_2 = \infty$ равенство (10.11) будет иметь вид

$$\frac{1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{1} = \frac{w - w_1}{1} \frac{1}{w_3 - w_1},$$

или

$$\frac{z_3 - z_2}{z - z_2} = \frac{w - w_1}{w_3 - w_1}.$$

Пример 10.5. Найдем дробно-линейную функцию, отображающую верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на единичный круг $|w| < 1$ так, что заданная точка z_1 ($\text{Im } z_1 > 0$) переходит в центр $w_1 = 0$ круга.

Искомое отображение переводит действительную ось $\text{Im } z = 0$ в единичную окружность $|w| = 1$ (рис. 10.9). По условию $w(z_1) = 0$. В силу свойств дробно-линейного отображения точка $z_1^* = \bar{z}_1$, симметричная точке z_1 , перейдет в точку, симметричную $w = 0$ относительно окружности $|w| = 1$, т.е. в бесконечно

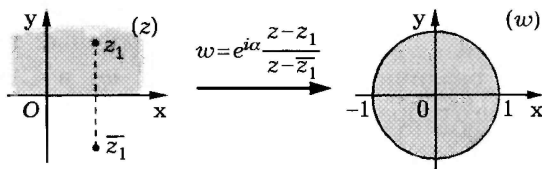


Рис. 10.9

удаленную точку. Таким образом, $w(\bar{z}_1) = \infty$. Используя (10.11) и учитывая замечание 10.2, получаем

$$\frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1} \frac{z_3 - \bar{z}_1}{z_3 - z_1} = \frac{w - 0}{1} \frac{1}{w_3 - 0},$$

или, обозначая $A = w_3(z_3 - \bar{z}_1)/(z_3 - z_1)$,

$$w = A \frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1}. \quad (10.12)$$

Покажем, что $|A| = 1$. Если $z = x \in \mathbb{R}$, то $|z - z_1| = |z - \bar{z}_1|$. Поэтому из (10.12) следует, что отображение (10.12), переводящее действительную ось $\text{Im } z = 0$ в единичную окружность $|w| = 1$, удовлетворяет условию

$$|w| = 1 = |A| \frac{|x - z_1|}{|x - \bar{z}_1|},$$

откуда $|A| = 1$ и $A = e^{i\alpha}$. Значение $\alpha \in \mathbb{R}$ можно выбрать произвольно, а чтобы оно определялось однозначно, нужно дополнительное условие. Например, можно потребовать, чтобы при отображении точка $z_3 = \text{Re } z_1$ переходила в точку $w_3 = 1$. Тогда получим

$$A = 1 \cdot \frac{\text{Re } z_1 - (\text{Re } z_1 - i \text{Im } z_1)}{\text{Re } z_1 - (\text{Re } z_1 + i \text{Im } z_1)} = \frac{i \text{Im } z_1}{-i \text{Im } z_1} = -1,$$

т.е. $\alpha = \pi$.

Пример 10.6. Найдём дробно-линейное отображение, переводящее единичный круг $|z| < 1$ в единичный круг $|w| < 1$ так, что точка z_1 первого круга переходит в центр $w_1 = 0$ второго.

Согласно (10.10), точкой, симметричной точке z_1 относительно окружности $|z| = 1$, является точка $z_1^* = 1/\bar{z}_1 = z_2$, которая в силу теоремы 10.6 и определения 10.1 искомым отображением переводится в точку $w(1/\bar{z}_1) = w_2 = \infty$. Используя (10.11)

и принимая во внимание замечание 10.2, получаем

$$\frac{z - z_1}{z - 1/\bar{z}_1} \frac{z_3 - 1/\bar{z}_1}{z_3 - z_1} = \frac{w - 0}{1} \frac{1}{w_3 - 0},$$

или, обозначая $A = -w_3(z_3\bar{z}_1 - 1)/(z_3 - z_1)$,

$$w = A \frac{z - z_1}{1 - z\bar{z}_1}. \quad (10.13)$$

Так как точка $z = 1$ искомым отображением переводится в точку единичной окружности $|w| = 1$, то из (10.13) находим

$$1 = |A| \left| \frac{1 - z_1}{1 - \bar{z}_1} \right| = |A| \frac{|1 - z_1|}{|1 - z_1|} = |A|,$$

т.е. $A = e^{i\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ можно выбрать произвольно.

Пример 10.7. Построим дробно-линейное отображение круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы $w(1/2) = \arg w'(1/2) = 0$. Используя (10.13) при $z_1 = 1/2$ и $A = e^{i\alpha}$, получаем

$$w(z) = e^{i\alpha} \frac{z - 1/2}{1 - z/2} = e^{i\alpha} \frac{2z - 1}{2 - z}.$$

Дифференцируя, находим

$$w'(z) = e^{i\alpha} \frac{2(2 - z) - (2z - 1)(-1)}{(2 - z)^2} = \frac{3e^{i\alpha}}{(2 - z)^2}.$$

Из условия $\arg w'(1/2) = 0$ следует, что $\arg(4e^{i\alpha}/3) = \alpha = 0$. Значит, искомого отображение имеет вид $w(z) = (2z - 1)/(2 - z)$.

Пример 10.8. Для функции $w = 1/z$ найдем образы: а) окружности $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$; б) параболы $y = x^2$.

а. Согласно замечанию 10.1, отображение $w = 1/z$ переводит любую окружность или прямую, проходящую через точку $z = 0$, в прямую.

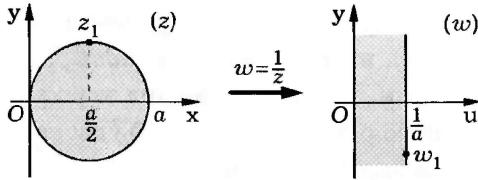


Рис. 10.10

Окружность $x^2 + y^2 = ax$ (рис. 10.10) проходит через начало координат $z = 0$, которое при отображении $w = 1/z$ переходит в точку $w = \infty$. Поэтому образом данной окружности является прямая. Так как прямая вполне определяется двумя точками, то достаточно выяснить образы двух точек, лежащих на окружности. В качестве таких точек, как правило, берут те, положение которых можно легко определить. На окружности $x^2 + y^2 = ax$ также расположена точка $z = a$, переходящая при отображении $w = 1/z$ в точку $w = 1/a$, и точка $z_1 = a/2 + ia/2$, переходящая в точку

$$w_1 = \frac{1}{a/2 + ia/2} = \frac{2}{a} \frac{1 - i}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1}{a} - \frac{i}{a}.$$

Сравнивая образы точек $z = a$ и z_1 , заключаем, что заданная окружность при отображении $w = 1/z$ переходит в вертикальную прямую $\operatorname{Re} w = u = 1/a$.

б. В общем случае для нахождения образа заданной кривой следует выделить действительную и мнимую части отображающей функции, положив $z = x + iy$ и $w = u + iv$. В данном случае имеем

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = u + iv,$$

т.е.

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Теперь, используя уравнение параболы $y = x^2$, найдем связь между u и v . Последовательно находим $u^2 + v^2 = 1/(x^2 + y^2)$, $x = u/(u^2 + v^2)$, $y = -v/(u^2 + v^2)$ и $-v/(u^2 + v^2) = u^2/(u^2 + v^2)^2$, или

$-v = u^2/(u^2 + v^2)$, откуда получаем уравнение $u^2 = -v^3/(1 + v)$ кривой Γ (рис. 10.11), называемой *циссоидой Диоклеса* (древнегреческий математик Диоклес применил эту кривую во II в. до н.э. для графического решения задачи об удвоении куба). образом точки $z = 0$, лежащей на параболе $y = x^2$, является точка $w = \infty$, а образом точки $z = \infty$ — точка $w = 0$ (циссоида проходит через точку $w = 0$ и является неограниченной кривой).

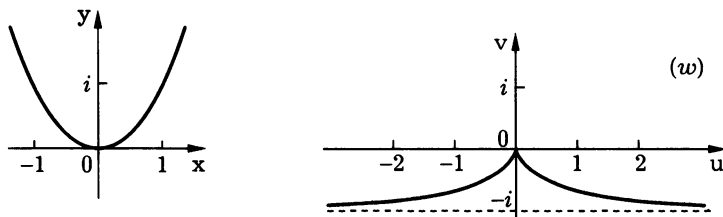


Рис. 10.11

Пример 10.9. Найдем образ правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ при отображении $w = -i(z - 1)/(z + 1)$.

Границей правой полуплоскости является мнимая ось $\operatorname{Re} z = 0$. При заданном отображении эта ось переходит в окружность $|w| = 1$. Действительно,

$$|w| = \left| -i \frac{iy - 1}{iy + 1} \right| = \frac{|1 - iy|}{|1 + iy|} = 1,$$

поскольку комплексные числа $1 - iy$ и $1 + iy$ являются комплексно сопряженными, а значит, имеют равные модули.

Согласно *принципу соответствия границ*, образом правой полуплоскости является либо круг $|w| < 1$, либо область $|w| > 1$, так как окружность $|w| = 1$ является общей границей двух областей. Взяв точку $z_1 = 1$ в правой полуплоскости, находим ее образ $w_1 = 0$, который попадает в круг $|w| < 1$. Следовательно, образом полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ является круг $|w| < 1$ (рис. 10.12).

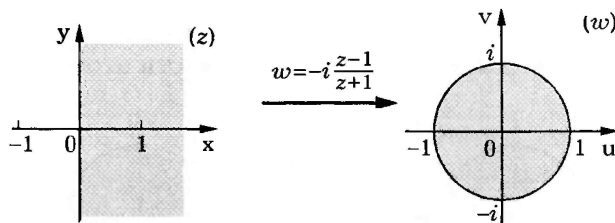


Рис. 10.12

Пример 10.10. Выясним, на какую область D^* отображается полукруг $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ с помощью функции $w = (2z - i)/(2 + iz)$.

Граница области D состоит из верхней полуокружности $|z| = 1, \operatorname{Im} z > 0$ и отрезка $[-1, 1]$ действительной оси. Найдем образ границы. Отрезок действительной оси, не проходящей через точку $z = -2/i = 2i$, согласно замечанию 10.1, переходит в дугу окружности некоторого радиуса R с центром в некоторой точке w_0 .

Для нахождения R и w_0 в заданную функцию подставим $z = x$ и выделим действительную и мнимую части:

$$w = \frac{2x - i}{2 + ix} = \frac{(2x - i)(2 - ix)}{(2 + ix)(2 - ix)} = \frac{3x}{4 + x^2} - 2i \frac{1 + x^2}{4 + x^2}.$$

Стало быть,

$$u = \frac{3x}{4 + x^2}, \quad v = -\frac{2(1 + x^2)}{4 + x^2}.$$

Отсюда $x^2 = -(4v + 2)/(v + 2)$ и

$$u^2 = \frac{9x^2}{(4 + x^2)^2} = -\frac{9(4v + 2)}{(v + 2)\left(4 - \frac{4v + 2}{v + 2}\right)^2} = -\frac{(4v + 2)(v + 2)}{4},$$

или $4u^2 + 4v^2 + 10v + 4 = 0$. Приводя это уравнение окружности к каноническому виду $u^2 + (v + 5/4)^2 = (3/4)^2$, устанавливаем, что $R = 3/4$ и $w_0 = -5i/4$. Итак, образом действительной оси будет окружность $|w + 5i/4| = 3/4$ (рис. 10.13). Поскольку точке

$z = i/2$ полукруга D соответствует точка $w = 0$, то область D^* , очевидно, будет располагаться во внешности этой окружности.

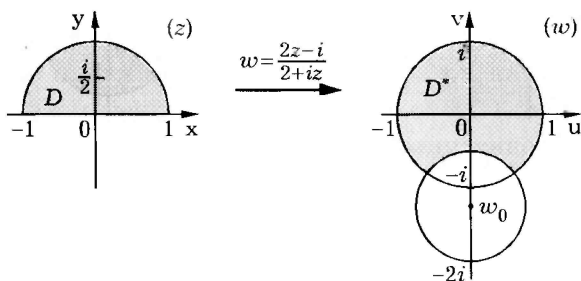


Рис. 10.13

Рассмотрим оставшуюся часть границы области D . Образом окружности $|z| = 1$, которая не проходит через точку $z = 2i$, согласно замечанию 10.1, является окружность. Чтобы установить уравнение этой окружности, в заданную функцию подставим $z = e^{i\varphi}$:

$$w = \frac{2e^{i\varphi} - i}{2 + ie^{i\varphi}} = e^{i\varphi} \frac{2 + e^{-\pi i/2} e^{-i\varphi}}{2 + e^{\pi i/2} e^{i\varphi}} = e^{i\varphi} \frac{2 + e^{-i(\pi/2+\varphi)}}{2 + e^{i(\pi/2+\varphi)}}.$$

Переходя в этом равенстве к абсолютным величинам и учитывая, что числитель и знаменатель дроби справа являются комплексно сопряженными числами и их модули равны, получаем $|w| = 1$. Следовательно, образом окружности $|z| = 1$ является окружность $|w| = 1$, а образом полукруга D будет область D^* , полученная пересечением внутренности окружности $|w| = 1$ и внешности окружности $|w + 5i/4| = 3/4$ (см. рис. 10.13).

Пример 10.11. Найдем образ полосы $0 < \operatorname{Re} z < 1$ при отображении $w = (z - 1)/z$.

Граница области D состоит из двух прямых: $\operatorname{Re} z = 0$ и $\operatorname{Re} z = 1$. Образом первой прямой, проходящей через точку $z = 0$, согласно замечанию 10.1, является прямая, которую можно найти, определив образы w_1 и w_2 двух точек прямой $\operatorname{Re} z = 0$.

Возьмем, например, точки $z_1 = i$ и $z_2 = -i$:

$$w_1 = \frac{i-1}{i} = \frac{-i(i-1)}{1} = 1+i, \quad w_2 = \frac{-i-1}{-i} = \frac{i(-i-1)}{1} = 1-i.$$

Следовательно, образом прямой $x = 0$ является прямая $u = 1$ (рис. 10.14).

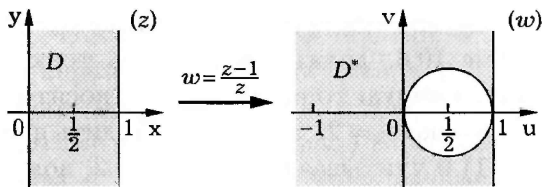


Рис. 10.14

Прямая $\operatorname{Re} z = 1$, не проходящая через точку $z = 0$, при этом отображении переходит в окружность. Подставим в заданную функцию $z = 1 + iy$ и выделим действительную и мнимую части:

$$w = \frac{1 + iy - 1}{1 + iy} = \frac{iy(1 - iy)}{(1 + iy)(1 - iy)} = \frac{y^2}{1 + y^2} + i \frac{y}{1 + y^2}.$$

Отсюда $u = y^2/(1 + y^2)$, $v = y/(1 + y^2)$, $y^2 = u/(1 - u)$ и

$$v^2 = \frac{y^2}{(1 + y^2)^2} = \frac{u}{(1 - u) \left(1 + \frac{u}{1 - u}\right)^2} = u - u^2,$$

или $u^2 - u + v^2 = 0$, что приводит к каноническому уравнению $(u - 1/2)^2 + v^2 = (1/2)^2$ окружности радиуса $1/2$ с центром в точке $w = 1/2$ (см. рис. 10.14). Итак, образом прямой $\operatorname{Re} z = 1$ является окружность $|w - 1/2| = 1/2$. Точка $z = 1/2$ заданным отображением переводится в точку $w = -1$, лежащую во внешности этой окружности. Поэтому образом полосы $0 < \operatorname{Re} z < 1$ будет область $D^* = \{w \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} w < 1, |w - 1/2| > 1/2\}$ (см. рис. 10.14).

Пример 10.12. Построим отображение круга $|z - 4i| < 2$ на полуплоскость $\text{Im } w > \text{Re } w$ так, чтобы центр круга перешел в точку $w = -4$, а точка $z = 2i$ окружности перешла в начало координат $w = 0$.

По условию искомое отображение должно переводить окружность $|z - 4i| = 2$ в прямую $v = u$ (рис. 10.15), а точку $z_1 = 4i$ — в точку $w_1 = -4$. Точка $z_2 = \infty$ симметрична точке z_1 относительно окружности $|z - 4i| = 2$. Искомое отображение, согласно теореме 10.6, должно переводить точку z_2 в точку $w_2 = -4i$, симметричную точке $w_1 = -4$ относительно прямой $v = u$. Наконец, точка $z_3 = 2i$ должна переходить в точку $w_3 = 0$. Используя (10.11) и учитывая замечание 10.2, получаем

$$\frac{z - 4i}{1} \frac{1}{2i - 4i} = \frac{w - (-4)}{w - (-4i)} \frac{0 - (-4i)}{0 - (-4)},$$

или $(w + 4)/(w + 4i) = (z - 4i)/2$. Итак, искомым отображением будет $w = -4(iz + 2)/(z - 2 - 4i)$.

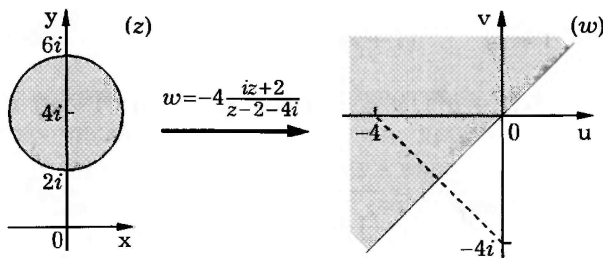


Рис. 10.15

Пример 10.13. Выясним, какая область является образом области D при отображении $w = (z - 1)/(z + 1)$, если область D ограничена двумя окружностями L и L_1 , имеющими общую точку $z = 1$ касания с прямой l . При этом прямая l составляет с действительной осью угол α , а окружность L проходит через точку $z_1 = -1$ (рис. 10.16).

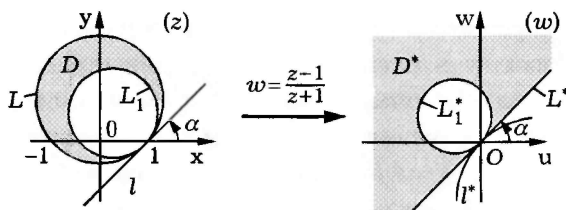


Рис. 10.16

Очевидно, что действительная ось $\text{Im } z = 0$ при заданном отображении переходит в действительную ось $\text{Im } w = 0$, точка $z = 1$ — в начало координат $w = 0$, а точка $z_1 = -1$ — в точку $w_1 = \infty$. Поэтому в силу теоремы 10.4 образом окружности L будет прямая L^* , проходящая через начало координат $w = 0$. Согласно теореме 10.2, дробно-линейное отображение конформно в точке $z = 1$ и сохраняет угол α между образами действительной оси $\text{Im } z = 0$ и окружности L . Следовательно, прямая L^* будет составлять тот же угол α с действительной осью $\text{Im } w = 0$ (см. рис. 10.16).

Окружность L_1 и прямая l не проходят через точку $z_1 = -1$, и поэтому они переходят в окружности L_1^* и l^* соответственно, касающиеся прямой L^* в точке $w = 0$. Итак, искомая область D^* ограничена прямой L^* и окружностью L_1^* . Прямая L^* и окружность L_1^* разделяют комплексную плоскость (w) на три области, но лишь у одной из этих трех областей граница включает и окружность, и прямую (см. рис. 10.16). Эта область, расположенная левее прямой L^* и вне окружности L_1^* , и является образом области D при рассматриваемом отображении.

10.3. Целая степенная функция

Линейная и дробно-линейная функции (см. 10.1 и 10.2) являются однолиственными в $\bar{\mathbb{C}}$ и осуществляют конформное отображение расширенной комплексной плоскости на расширенную комплексную плоскость. Других функций, обладающих таким свойством, не существует. Действительно, согласно табл. 9.1,

такая функция (обозначим ее через $f(z)$) должна быть аналитической всюду в расширенной комплексной плоскости, за исключением одной точки, являющейся простым полюсом. Если этот полюс — конечная точка z_0 и вычет в ней равен A , то функция $g(z) = f(z) - A/(z - z_0)$ аналитична в области $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ и точка z_0 для $g(z)$ оказывается устранимой особой точкой. В силу *теоремы Лиувилля* функция $g(z)$ постоянная, а функция $f(z)$ — дробно-линейная. Если же полюс функции $f(z)$ — бесконечно удаленная точка, то в этой точке главная часть лорановского разложения имеет вид Az , а функция $f(z) - Az$ является ограниченной аналитической функцией в \mathbb{C} , т.е. постоянной в силу *теоремы Лиувилля*. В этом случае $f(z) = Az + B$ — линейная функция.

Линейную и дробно-линейную функции удобно использовать для построения конформных отображений областей, границы которых состоят из отрезков прямых и дуг окружностей. Если же граница области иная, то для построения конформного отображения, скорее всего, придется привлекать другие аналитические функции. Для таких функций важно прежде всего выяснить, в каких областях они однолиственны.

Если установлены области однолиственности функции $f(z)$ и область D лежит в одной из них, то образ D^* области D можно найти, определив его границу $\partial D^* = f(\partial D)$. Зная, куда переходит контур ∂D при отображении $f(z)$, по принципу соответствия границ находим и область D^* . Если $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in T$, — комплексное уравнение кривой в плоскости (z) , то комплексное уравнение образа этой кривой в плоскости (w) при отображении $w = f(z)$ имеет вид

$$w = f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)).$$

В общем случае исследование отображения, осуществляемого данной функцией, лучше всего проводить следующим образом: выбираем семейство кривых, покрывающее интересующую нас область, и находим образы кривых этого семейства. Ясно,

что выбор семейства кривых зависит от конкретного вида области и отображающей функции. Покажем, как таким образом можно исследовать отображения, осуществляемые основными элементарными функциями. Это даст нам некоторый запас простейших отображений, которыми можно оперировать в дальнейшем как стандартными (или „табличными“).

При изучении различных отображений приходится иметь дело с областями, границы которых включают лучи, выходящие из начала координат. Такие лучи можно задать уравнением $\arg z = \alpha$.

Рассмотрим сначала наиболее популярную из степенных функций $w = z^2$, некоторые сведения о которой были приведены в 3.1. Ясно, что эта функция однолистка в области D тогда и только тогда, когда в D нет точек z_1 и z_2 , связанных равенством $z_1 = -z_2$, т.е. симметричных относительно точки $z = 0$.

Итак, функция $w = z^2$ однолистка в области D в том и только в том случае, когда эта область не содержит ни одной пары точек, симметричных относительно начала координат $z = 0$. В частности, эта функция однолистка в любой полуплоскости, граница которой проходит через точку $z = 0$. Так как $dw/dz = 2z \neq 0$ при $z \neq 0$, то отображение $w = z^2$ конформно во всей плоскости (z), кроме точки $z = 0$. При $z = 0$ конформность отображения нарушена, причем оказывается, что углы между кривыми в этой точке при отображении удваиваются.

Рассмотрим, куда функция $w = z^2$ отображает координатные сетки полярной и декартовой систем координат. Начнем с нахождения образов лучей $\arg z = \varphi = \text{const}$ и окружностей $|z| = r = \text{const}$.

Из примера 3.1 следует, что луч $\arg z = \alpha$ переходит в луч $\arg w = 2\alpha$ (рис. 10.17), а дуга окружности $|z| = r$, $\alpha \leq \arg z \leq \beta$ ($\beta - \alpha < \pi$) — в дугу окружности $|w| = r^2$, $2\alpha \leq \arg w \leq 2\beta$. В примере 3.1 показано, что полуокружность $|z| = r_0$, $0 < \arg z < \pi$ переходит при этом в окружность $|w| = r_0^2$ с выколотой точкой $w = r_0^2$.

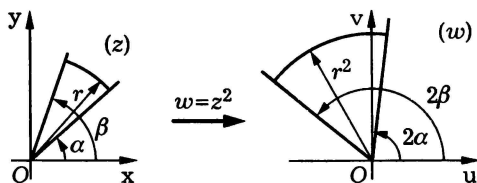


Рис. 10.17

Пример 10.14. В силу сказанного в 3.1 функция $w = z^2$ конформно отображает кольцевой сектор

$$D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R, 0 < \arg z < \alpha\}, \quad \alpha < \pi, \quad r > 0,$$

на кольцевой сектор

$$D^* = \{w \in \mathbb{C} : r^2 < |z| < R^2, 0 < \arg w < 2\alpha\}$$

(рис. 10.18). #

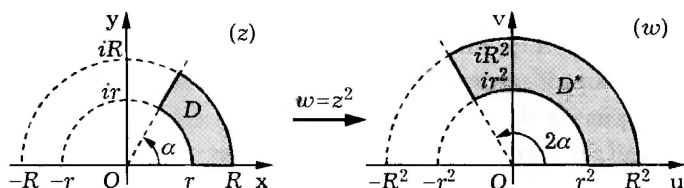


Рис. 10.18

Из примера 3.2 следует, что функция $w = z^2$ взаимно однозначно отображает прямые $\text{Im } z = y = y_0 \neq 0$ и $\text{Re } z = x = x_0 \neq 0$ на параболы

$$u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2 \quad \text{и} \quad u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}. \quad (10.14)$$

В случаях $y_0 = 0$ и $x_0 = 0$, т.е. при отображении действительной и мнимой осей, эти параболы вырождаются в полуоси действительной оси $u \geq 0$ и $u \leq 0$, проходимые дважды. Отметим, что

параболы (10.14) пересекаются под прямым углом в силу сохранения углов при конформном отображении. Фокусы всех парабол расположены в одной и той же точке $w = 0$.

Пример 10.15. Функция $w = z^2$ конформно отображает квадрат $D = \{z \in \mathbb{C}: a < \operatorname{Re} z < b, a < \operatorname{Im} z < b\}$, $a > 0$, с вершинами A, B, B_1 и A_1 на криволинейный четырехугольник $A^*B^*B_1^*A_1^*$ (рис. 10.19), ограниченный дугами парабол вида (10.14), а полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по отрезку мнимой оси, соединяющему точки $z = 0$ и $z = ih$ ($h > 0$), — на плоскость (w) с разрезом по лучу $u \geq -h^2$ действительной оси $\operatorname{Im} w = 0$ (рис. 10.20). #

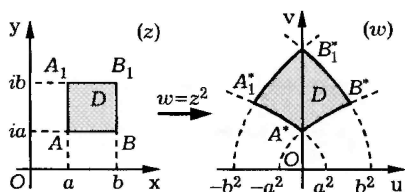


Рис. 10.19

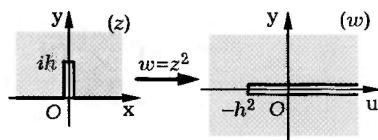


Рис. 10.20

Перейдем теперь к более общему случаю *целой степенной функции* $w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. При $n \geq 2$ отображение, осуществляемое такой функцией, является конформным во всей плоскости (z), кроме точки $z = 0$. Действительно, при $z \neq 0$ имеем $dw/dz = n z^{n-1} \neq 0$. Нетрудно убедиться в том, что в точках $z = 0$ и $z = \infty$ исследуемое отображение изменяет углы между кривыми, т.е. в этих точках нарушается конформность. Покажем это, например, для точки $z = 0$. Рассмотрим в плоскости (z) лучи $\arg z = \pi/(2n)$ и $\arg z = \pi/n$. Эти лучи при отображении $w = z^n$ перейдут в лучи $\arg w = \pi/2$ и $\arg w = \pi$ — угол между лучами увеличивается в n раз.

Функция $w = z^n$ однолистка в области D тогда и только тогда, когда в этой области нет различных между собой точек z_1 и z_2 , связанных равенством $z_1^n = z_2^n$, или $(z_2/z_1)^n = 1$. Ис-

пользуя формулу Муавра, получаем $z_2 = z_1 e^{2\pi i k/n}$, $k = \overline{0, n-1}$, т.е. для однолистности этой функции в области D необходимо и достаточно, чтобы в этой области не было точек, которые переходят друг в друга при повороте на угол, кратный $2\pi/n$.

Область между действительной осью и лучом $\arg z = 2\pi/n$ (неограниченный сектор с углом при вершине $2\pi/n$) функция $w = z^n$ конформно отображает на всю плоскость (w) с разрезом вдоль положительной части действительной оси, причем лучу $\arg z = 0$ соответствует верхний берег разреза, а лучу $\arg z = 2\pi/n$ — нижний (рис. 10.21). Тот же образ соответствует любому из секторов, ограниченных лучами $\arg z = 2\pi(k-1)/n$ и $\arg z = 2\pi k/n$ ($k \in \mathbb{Z}$), причем первому из этих лучей отвечает верхний берег разреза, а второму — нижний.

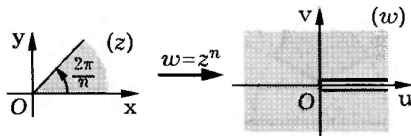


Рис. 10.21

Функцию $w = z^n$ удобно использовать тогда, когда нужно отобразить угол с прямолинейными сторонами на другой угол также с прямолинейными сторонами, но в n раз больший первого.

Пример 10.16. Найдем функцию $w = f(z)$, конформно отображающую полукруг $|z| < 1$, $\text{Im } z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$ при условии, что $w(-1) = 0$, $w(0) = 1$ и $w(1) = \infty$.

Рассмотрим сначала дробно-линейное отображение $\zeta(z)$, переводящее три заданные граничные точки полукруга в точки 0 , 1 и ∞ плоскости (ζ): $\zeta(-1) = 0$, $\zeta(0) = 1$ и $\zeta(1) = \infty$. Используя (10.11) и учитывая замечание 10.2, находим

$$\frac{z - (-1)}{z - 0} \frac{1 - 0}{1 - (-1)} = \frac{\zeta - 0}{\zeta - 1} \frac{1}{1}.$$

Отсюда получаем $\zeta = (1+z)/(1-z)$. Согласно замечанию 10.1, образом диаметра полукруга является действительная полуось $\text{Im}\zeta = 0$, $\text{Re}\zeta \geq 0$, так как ей принадлежат точки $\zeta(-1) = 0$ и $\zeta(0) = 1$, а образом окружности $|z| = 1$ — мнимая полуось $\text{Re}\zeta = 0$, $\text{Im}\zeta \geq 0$, поскольку $\zeta(1) = \infty$ и прямой угол между диаметром и полуокружностью в точке $z = -1$ при конформном отображении останется в точке $\zeta(-1) = 0$ прямым (рис. 10.22). Итак, образом полукруга является первый квадрант плоскости (ζ), отображаемый функцией $w = \zeta^2$ на полуплоскость $\text{Im} w > 0$. В итоге получаем

$$w = \zeta^2 = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2.$$

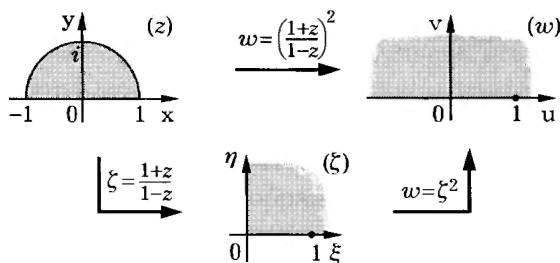


Рис. 10.22

Пример 10.17. Построим конформное отображение области $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| > 1, \text{Im} z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im} w > 0$. Дробно-линейная функция $\zeta = (1+z)/(1-z)$, рассмотренная в примере 10.16, в данном случае отображает область D на второй квадрант плоскости (ζ), который функцией $w = \zeta^2$ переводится на нижнюю полуплоскость $\text{Im} w < 0$. Искомое отображение $w(z)$ будет отличаться от отображения, построенного в примере 10.16, лишь знаком. Отметим, что можно было бы использовать другое дробно-линейное отображение $\zeta = (z-1)/(z+1)$, которое отображает область D на первый квадрант плоскости (ζ), а затем применить степенную функцию $w = \zeta^2$ (рис. 10.23).

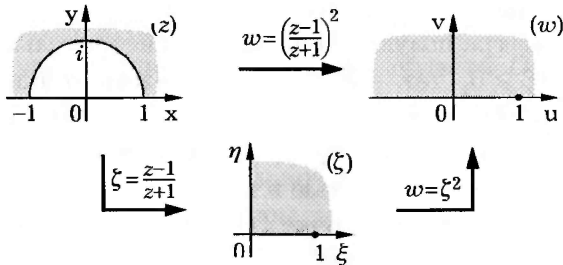


Рис. 10.23

Пример 10.18. Построим отображение, переводящее криволинейный двуугольник $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, |z - i| < 1\}$, в верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$ (такой криволинейный двуугольник обычно называют *луночкой*, рис. 10.24).

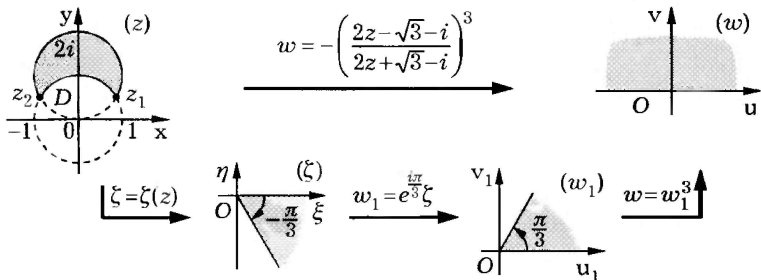


Рис. 10.24

Построим сначала дробно-линейное отображение, переводящее обе окружности, ограничивающие луночку, в прямые на плоскости (ζ) . Для этого достаточно перевести одну из точек z_1 и z_2 пересечения окружностей (одну из вершин луночки) в бесконечно удаленную точку $\zeta = \infty$. Переходя к полярным уравнениям окружностей $\rho = 1$ и $\rho = 2 \sin \varphi$, для точек пересечения получаем условие $\sin \varphi = 1/2$. Отсюда $z_1 = e^{\pi i/6}$ и $z_2 = e^{5\pi i/6}$. Нетрудно проверить, что отображение $\zeta = a(z - e^{\pi i/6}) / (z - e^{5\pi i/6})$ переводит точку z_1 в $\zeta = 0$, а точку z_2 — в точку $\zeta = \infty$. Значение a найдем, задав, например, условие $\zeta(i) = 1$, что дает

$a = e^{-2\pi i/3}$. Получим отображение

$$\zeta(z) = e^{-2\pi i/3} \frac{z - e^{\pi i/6}}{z - e^{5\pi i/6}} = e^{-2\pi i/3} \frac{z - \sqrt{3}/2 - i/2}{z + \sqrt{3}/2 - i/2},$$

которое в силу условий $\zeta(z_1) = 0$, $\zeta(i) = 1$, $\zeta(z_2) = \infty$ переводит окружность $|z| = 1$ в действительную ось плоскости (ζ). Участок границы нашей области, являющийся частью этой окружности, перейдет в положительную часть действительной оси. Угол, на который нужно повернуть касательную к окружности $|z| = 1$ в точке z_1 , чтобы получить касательную к окружности $|z - i| = 1$, равен $-\pi/3$. Это нетрудно вычислить через угол между двумя радиусами этих окружностей, проведенными в точку z_1 . Поэтому образом окружности $|z - i| = 1$ является прямая, которая составляет с действительной осью угол $-\pi/3$. Обходу границы луночки в положительном направлении соответствует обход по границе образа этой луночки, причем образом луночки будет область, остающаяся слева при движении точки ζ (см. рис. 10.24). Отображением $w_1 = e^{\pi i/3}\zeta$, означающим поворот на угол $\pi/3$, переведем выделенную в плоскости (ζ) область в стандартное положение в плоскости (w_1), а затем используем целую степенную функцию $w = w_1^3$. В итоге получим искомое отображение

$$w = w_1^3 = (e^{\pi i/3}\zeta)^3 = e^{\pi i} \left(e^{-2\pi i/3} \frac{z - e^{\pi i/6}}{z - e^{5\pi i/6}} \right)^3 = - \left(\frac{2z - \sqrt{3} - i}{2z + \sqrt{3} - i} \right)^3.$$

Пример 10.19. Отобразим на верхнюю полуплоскость луночку $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2, |z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}\}$ (рис. 10.25).

Перейдем к полярным уравнениям $r = 2$ и $r = 2\sqrt{2} \cos \varphi$ окружностей, дуги которых ограничивают луночку, и найдем точки $z_1 = 2e^{\pi i/4}$ и $z_2 = 2e^{-\pi i/4}$ пересечения этих окружностей. Отображение $\zeta = a(z - 2e^{-\pi i/4})/(z - 2e^{\pi i/4})$ переводит точку z_1 в точку $\zeta = \infty$, а точку z_2 — в точку $\zeta = 0$. Дополнительно потребовав, чтобы $\zeta(0) = 1$, находим $a = i$. Таким образом, при

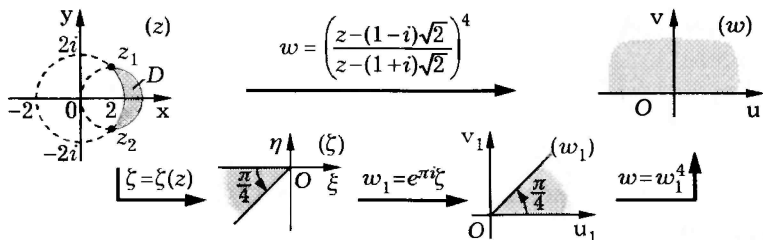


Рис. 10.25

отображении

$$\zeta(z) = i \frac{z - 2e^{-\pi i/4}}{z - 2e^{\pi i/4}} = i \frac{z - (1-i)\sqrt{2}}{z - (1+i)\sqrt{2}}$$

та часть границы луночки, которая является дугой окружности $|z - \sqrt{2}| = \sqrt{2}$, в силу условия $\zeta(0) = 1$ перейдет в отрицательную часть действительной оси. Угол в точке z_2 между окружностью $|z - \sqrt{2}| = \sqrt{2}$ и окружностью $|z| = 2$ равен $\pi/4$. Следовательно, образом окружности $|z| = 2$ является прямая, составляющая с действительной осью угол $\pi/4$, а образом луночки — неограниченный сектор между двумя лучами (см. рис. 10.25). Отображением $w_1 = e^{\pi i \zeta}$ переведем этот сектор в стандартное положение в плоскости (w_1) и затем используем целую степенную функцию $w = w_1^4$. В итоге получим искомое отображение

$$w = w_1^4 = (e^{\pi i \zeta})^4 = e^{4\pi i} \left(i \frac{z - 2e^{-\pi i/4}}{z - 2e^{\pi i/4}} \right)^4 = \left(\frac{z - (1-i)\sqrt{2}}{z - (1+i)\sqrt{2}} \right)^4.$$

10.4. Показательная функция

Показательная функция

$$w(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (10.15)$$

комплексного переменного $z = x + iy$ является аналитической во всей комплексной плоскости (z) (см. 4.6). Так как $dw/dz = e^z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, то отображение, осуществляемое показательной

функцией, будет *конформным* во всей комплексной плоскости. Функция (10.15) сохраняет все свойства показательной функции действительного переменного (см. 3.3) и является *периодической* с периодом $T = 2\pi i$. Равенство $e^{z_1} = e^{z_2}$ равносильно равенству $e^{z_1 - z_2} = 1$, откуда $z_1 - z_2 = 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$. Это указывает на то, что во всей плоскости (z) функция e^z не является *однолистной*. Более того, эта функция не будет однолистной в любой области, содержащей вместе с точкой z_1 точку вида $z_2 = z_1 + 2\pi i$. Напротив, в полосе $D = \{z \in \mathbb{C}: y_0 < \text{Im } z < y_0 + 2\pi\}$, $y_0 \in \mathbb{R}$, функция $w = e^z$ однолистка и, следовательно, конформно отображает эту полосу на некоторую область D^* плоскости (w).

Отметим, что $|e^z| = e^x$, $\text{Re}(e^z) = e^x \cos y$, $\text{Im}(e^z) = e^x \sin y$. Однако из значений аргумента e^z есть y , и, следовательно, $\text{arg}(e^z) = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим отображение функцией $w = e^z$ прямых $\text{Re } z = x_0$, $\text{Im } z = y_0$ на плоскость (w). Из соотношений (10.15) следует, что прямая $\text{Im } z = y_0$ переходит в луч $\text{arg } w = y_0$. Прямая $\text{Re } z = x_0$ при отображении $w = e^z$ перейдет в окружность $|w| = e^{x_0}$, так как $|e^z| = e^{\text{Re } z}$. Но при этом отображение на этой прямой не будет взаимно однозначным, так как точки z_1 и z_2 , удовлетворяющие соотношению $z_1 - z_2 = 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$, имеют один и тот же образ. Это говорит о том, что функция e^z является однолистной в тех областях комплексной плоскости (z), которые не содержат вертикальных отрезков длины 2π или более. Примером такой области является полоса $D = \{z \in \mathbb{C}: a \leq \text{Im } z \leq b\}$, $0 < b - a < 2\pi$. Ясно, что любой отрезок прямой $x = x_0$, лежащий в этой полосе, перейдет в дугу окружности $|w| = e^{x_0}$, $a \leq \text{arg } w \leq b$ (рис. 10.26).

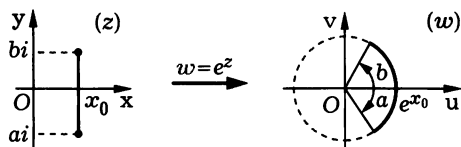


Рис. 10.26

Приведем некоторые примеры конформного отображения областей, осуществляемого функцией $w = e^z$.

Пример 10.20. Полосу $0 < \text{Im } z < 2\pi$ функция $w = e^z$ конформно отображает на всю плоскость (w) с разрезом по лучу $\arg w = 0$ (рис. 10.27). В самом деле, действительная ось $\text{Im } z = 0$ переходит, как уже было отмечено, в положительную полуось действительной оси (луч $\arg w = 0$). При движении точки z вдоль верхней части $\text{Im } z = 2\pi$ границы полосы в положительном направлении (т.е. справа налево) ее образ проходит положительную часть действительной оси от бесконечно удаленной точки до точки $w = 0$. При движении точки по нижней части $\text{Re } z = 0$ границы полосы ее образ проходит положительную часть действительной оси, но уже от точки $w = 0$ до точки $w = \infty$.

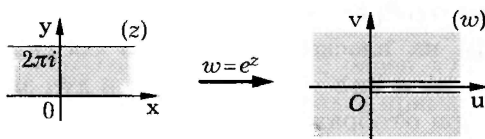


Рис. 10.27

Итак, при движении точки z по границе полосы D ее образ точка w проходит положительную полуось дважды в противоположных направлениях. Поэтому образом полосы D при отображении $w = e^z$ является плоскость с разрезом вдоль положительной части действительной оси. При этом верхней части границы полосы соответствует нижний берег разреза, а нижней части — верхний берег разреза.

В силу своей периодичности (период равен $T = 2\pi i$) показательная функция отображает на плоскость с разрезом по действительной положительной полуоси каждую из полос $2\pi k < \text{Im } z = y < 2\pi(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. И в этом случае нижней части границы полосы, т.е. прямой $y = 2\pi k$, соответствует верхний берег разреза, а верхней части границы — нижний берег разреза (см. рис. 10.27).

Так как прямые $\text{Im } z = 0$ и $\text{Im } z = \pi$ при отображении $w = e^z$ переходят в лучи $\text{arg } w = 0$ и $\text{arg } w = \pi$, то полосу $0 < \text{Im } z < \pi$ функция $w = e^z$ отображает на полуплоскость $\text{Im } w > 0$, причем нижней части границы этой полосы в плоскости (w) соответствует положительная полуось действительной оси, а верхней части границы — отрицательная полуось (рис. 10.28, а).

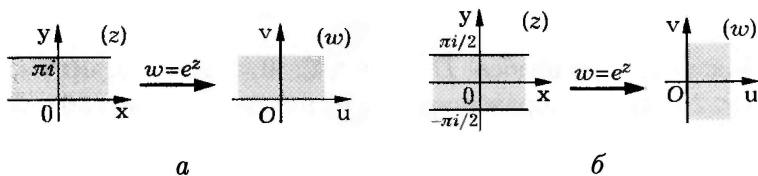


Рис. 10.28

При отображении $w = e^z$ прямая $\text{Im } z = y = \pi/2$ переходит в луч $\text{arg } w = \pi/2$, прямая $\text{Im } z = y = -\pi/2$ — в луч $\text{arg } w = -\pi/2$. Вместе эти лучи составляют мнимую ось $\text{Re } w = 0$. Так как действительная ось $\text{Im } z = 0$ переходит при отображении $w = e^z$ в луч $\text{arg } w = 0$, т.е. в положительную полуось действительной оси $\text{Im } w = 0$, то образом полосы $-\pi/2 < \text{Im } z < \pi/2$ будет правая полуплоскость $\text{Re } w > 0$ (рис. 10.28, б).

В силу того что образом отрезка $\text{Re } z = 0, 0 < \text{Im } z < \pi$ является полуокружность $|w| = 1, 0 < \text{arg } w < \pi$, функция e^z отображает полуполосу $D = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \text{Im } z < \pi, \text{Re } z > 0\}$ на область $D^* = \{w \in \mathbb{C}: \text{Im } w > 0, |w| > 1\}$, т.е. на верхнюю полуплоскость с выброшенным полукругом $|w| \leq 1, \text{Im } w > 0$ (рис. 10.29). При движении точки z по верхней части границы $\text{Im } z = \pi$ полуполосы в положительном направлении (т.е. от $z = \infty$ до $z = 0$) ее образ проходит вдоль луча $\text{arg } z = \pi$ от $w = \infty$ до $w = -1$. При дальнейшем движении точки по отрезку $\text{Re } z = 0, 0 < \text{Im } z < \pi$ ее образ проходит по окружности $|w| = 1$ от точки -1 до точки 1 по часовой стрелке. Наконец, при движении z вдоль нижней части $\text{Im } z = 0$ границы полуполосы в положительном направлении (т.е. слева направо) ее образ проходит по положительной части действительной оси от точки $w = 1$ до точки $w = \infty$. В си-

ду принципа соответствия границ образом полуполосы будет выделенная в плоскости (w) область D^* (см. рис. 10.29).

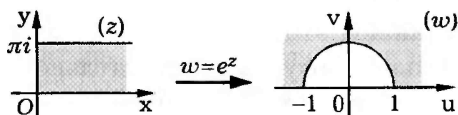


Рис. 10.29

Наконец, полуплоса $D = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Im} z < a, \operatorname{Re} z < 0\}$, $0 < a < 2\pi$, при отображении $w = e^z$ переходит в область $D^* = \{w \in \mathbb{C}: |w| < 1, 0 < \arg w < a\}$ (рис. 10.30). В самом деле, при движении точки z вдоль нижней части $\operatorname{Im} z = 0$ границы полосы в положительном направлении (слева направо) ее образ проходит положительную часть действительной оси от точки $w = 0$ до точки $w = 1$. При движении точки z вдоль вертикального отрезка $\operatorname{Re} z = 0$, $0 < \operatorname{Im} z < a$ ее образ проходит дугу окружности $|w| = 1$ от точки 1 до точки e^{ia} против часовой стрелки. А при движении z по верхней части $\operatorname{Im} z = a$ границы полуплосы ее образ проходит по лучу $\arg w = a$ от точки $w = e^{ia}$ до точки $w = 0$.

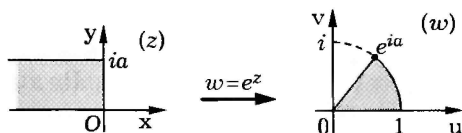


Рис. 10.30

Пример 10.21. Построим отображение $w = f(z)$ луночки, ограниченной окружностями $|z| = 2$ и $|z - 1| = 1$ (рис. 10.31), на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Чтобы получить искомое отображение, достаточно перевести исходную область в полосу $0 < \operatorname{Im} \zeta < \pi$, а затем использовать в соответствии с примером 10.20 показательную функцию. Итак, переведем сначала окружности $|z - 1| = 1$ и $|z| = 2$

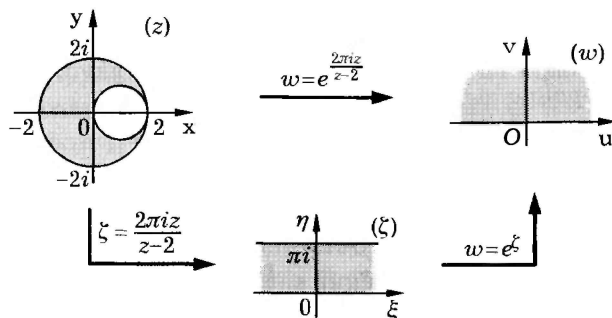


Рис. 10.31

в горизонтальные прямые $\text{Im } \zeta = 0$ и $\text{Im } \zeta = \pi$ соответственно. Для этого рассмотрим отображение $\zeta = (az + b)/(z - 2)$ и потребуем, например, чтобы точка $z = 0$ перешла в точку $\zeta = 0$, а точка $z = -2$ — в точку $\zeta = \pi i$. Тогда $b = 0$ и $a = 2\pi i$, и мы приходим к отображению

$$\zeta = \frac{2\pi iz}{z - 2}.$$

Окружности проходят через точку $z = 2$. Согласно замечанию 10.1, образами окружностей будут прямые, одна из которых проходит через точку $\zeta = 0$, а другая — через точку $\zeta = \pi i$. Так как в точке $z = 2$ окружности, ограничивающие луночку, касаются, то прямые, в которые они переходят, параллельны. Точка $z = \infty$, симметричная точке $z = 0$ относительно окружности $|z| = 2$, переходит в точку $\zeta = 2\pi i$, которая должна быть симметрична точке $\zeta = 0$ относительно образа этой окружности. Значит, образом окружности $|z| = 2$ является прямая $\text{Im } \zeta = \pi$. Образом окружности $|z - 1| = 1$ будет прямая $\text{Im } \zeta = 0$. Итак, заданная область преобразована в полосу $0 < \text{Im } z < \pi$. Осталось применить отображение $w = e^z$. В итоге получаем искомое отображение

$$w = e^\zeta = e^{2\pi iz / (z-2)}.$$

10.5. Функция Жуковского

Дробно-рациональную функцию

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (10.16)$$

называют *функцией Жуковского*. Эту функцию в 1911 г. использовал выдающийся русский механик и математик Н.Е. Жуковский (1847–1921) при построении теории крыла самолета. Она находит также применение и во многих других задачах, связанных с конформными отображениями.

Правая часть равенства (10.16) представляет собой *лорановское разложение* функции Жуковского как в окрестности точки $z = 0$, так и в окрестности $z = \infty$. Из этого разложения легко увидеть, что точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются *простыми полюсами* функции Жуковского. Во всех остальных точках *комплексной плоскости* (z) функция Жуковского является *аналитической*, причем

$$f'(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right). \quad (10.17)$$

Поскольку производная функции Жуковского обращается в нуль лишь в точках 1 и -1 , то в силу теоремы 9.3 она является *однолистной функцией* во всех точках *расширенной комплексной плоскости* (z), кроме точек $z = \pm 1$. Условие

$$\frac{1}{2} \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right) = \frac{1}{2} \left(z_2 + \frac{1}{z_2} \right)$$

приводит к равенству

$$\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} = z_1 - z_2,$$

которое эквивалентно равенству $(z_1 - z_2)(1 - z_1 z_2) = 0$. Таким образом, значения функции Жуковского в точках z_1 и z_2

совпадают лишь в том случае, когда $z_1 = z_2$ или $z_1 = 1/z_2$. Следовательно, функция Жуковского однолистка в любой области D , не содержащей ни одной пары различных точек z_1 и z_2 , для которых $z_1 z_2 = 1$, т.е.

$$|z_1||z_2| = 1 \quad \text{и} \quad \arg z_1 = -\arg z_2. \quad (10.18)$$

Эти равенства означают, что точка z_2 комплексной плоскости получается из точки z_1 двойной симметрией: относительно окружности $|z| = 1$ и относительно действительной оси. Поэтому областями однолистности функции Жуковского, например, являются: единичный круг $|z| < 1$, внешность единичной окружности $|z| > 1$, верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, нижняя полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$.

Замечание 10.3. Пусть \tilde{D} — область, в которую переходит область D при отображении $w = 1/z$. Функция Жуковского $f(z)$ отображает области D и \tilde{D} в одну и ту же область, так как для функции Жуковского верно тождество $f(z) = f(1/z)$. #

Отображение, осуществляемое функцией Жуковского, удобно исследовать, рассматривая образы лучей $\arg z = \varphi = \text{const}$ и окружностей $|z| = \rho = \text{const}$. Возьмем сначала окружность $|z| = \rho$, комплексное уравнение которой имеет вид $z = \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Образ этой окружности при отображении (10.16) описывается уравнением

$$w = \frac{1}{2} \left(\rho e^{it} + \frac{1}{\rho} e^{-it} \right), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (10.19)$$

Полагая $w = u + iv$ и используя формулу Эйлера, получаем параметрические уравнения кривой в плоскости (w):

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos t, \\ v = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (10.20)$$

Исключая из этих уравнений параметр t , приходим к каноническому уравнению эллипса

$$\frac{u^2}{a_\rho^2} + \frac{v^2}{b_\rho^2} = 1, \quad (10.21)$$

где

$$a_\rho = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right), \quad b_\rho = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right).$$

Из уравнений (10.20) следует, что если точка z обходит окружность $|z| = \rho$ в положительном направлении, то точка w обходит образ окружности (эллипс), причем этот образ при $\rho > 1$ обходится против часовой стрелки, а при $\rho < 1$ — по часовой стрелке (рис. 10.32). Замена в уравнениях (10.19)–(10.21) параметра ρ на $1/\rho$ оставляет эллипс неизменным (другими словами, окружности радиусов ρ и $1/\rho$ отображаются в один и тот же эллипс), но направление движения точки по эллипсу, соответствующее положительному обходу окружности, изменится на противоположное. Для половины фокусного расстояния c_ρ эллипса имеем

$$c_\rho^2 = a_\rho^2 - b_\rho^2 = \frac{1}{4} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 = 1,$$

т.е. фокусами эллипса являются точки $w = \pm 1$ независимо от значения параметра ρ . На окружности $|z| = 1$ (при $\rho = 1$) отображение, осуществляемое функцией Жуковского, перестает

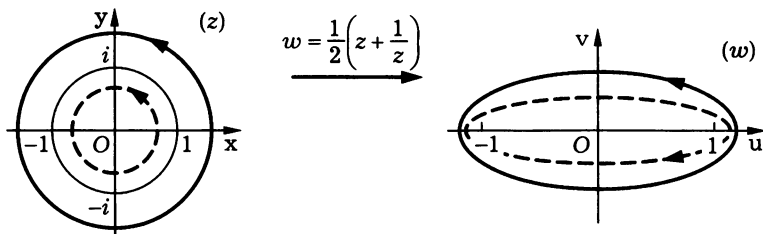


Рис. 10.32

быть взаимно однозначным, а образом этой окружности является отрезок действительной оси $\text{Im } w = 0$ между точками $w = \pm 1$, проходимый дважды в противоположных направлениях. Этот отрезок можно рассматривать как вырождение эллипса, являющегося образом окружности $|z| = \rho$ при $\rho \rightarrow 1$.

При возрастании радиуса ρ окружности начиная с $\rho = 1$ и *большая*, и *малая полуоси эллипса*, заданного уравнением (10.20), возрастают, стремясь к бесконечности при $\rho \rightarrow \infty$. Следовательно, образом области $|z| > 1$, заполненной окружностями $|z| = \rho > 1$, является вся плоскость (w) с разрезом по отрезку между точками $w = \pm 1$ (рис. 10.33), причем при обходе границы этой области в положительном направлении (при движении точки z по окружности $|z| = 1$ по часовой стрелке) положительное направление обхода образа по разрезу сохраняется. Поскольку область $|z| < 1$ можно рассматривать как образ области $|z| > 1$ при отображении $w = 1/z$, то, согласно замечанию 10.3, область $|z| < 1$ при отображении (10.16) будет иметь такой же образ (см. рис. 10.33).

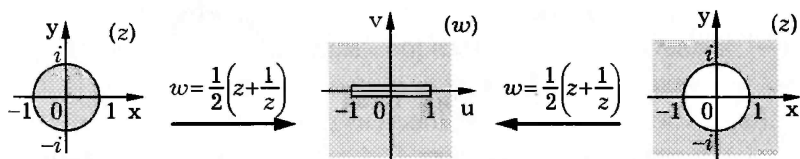


Рис. 10.33

Теперь найдем образы лучей $\arg z = \varphi = \text{const}$ при отображении (10.16). Записывая уравнение луча в виде $z = te^{i\varphi}$, $t > 0$, получаем комплексное уравнение образа этого луча: $w = (te^{i\varphi} + e^{-i\varphi}/t)/2$. Отсюда, полагая $w = u + iv$ и используя формулу Эйлера, находим

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \cos \varphi, \\ v = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \sin \varphi, \end{cases} \quad t > 0. \quad (10.22)$$

В случае $\varphi \neq k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, исключая параметр t , приходим к каноническому уравнению гиперболы

$$\frac{u^2}{a_\varphi^2} - \frac{v^2}{b_\varphi^2} = 1, \quad (10.23)$$

где

$$a_\varphi^2 = \cos^2 \varphi, \quad b_\varphi^2 = \sin^2 \varphi.$$

Фокусы гиперболы расположены в точках $w = \pm 1$, так как $c_\varphi^2 = a_\varphi^2 + b_\varphi^2 = 1$, а ее асимптоты задаются уравнениями $v = \pm u \operatorname{tg} \varphi$.

Если $0 < \varphi < \pi/2$, то уравнения (10.22) задают правую ветвь гиперболы (10.23), а при замене φ на $\pi - \varphi$, т.е. при $\pi/2 < \varphi < \pi$, — левую ветвь той же гиперболы (рис. 10.34). Отметим, что при замене φ на $-\varphi$ образ луча останется тем же, но направление его обхода изменится на противоположное.

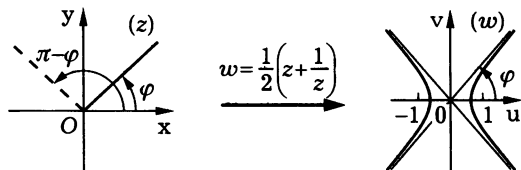


Рис. 10.34

Из (10.22) следует, что образом луча $\arg z = 0$ является луч $[1, +\infty)$ действительной оси $\operatorname{Im} w = 0$, проходимый дважды в противоположных направлениях, а образом луча $\arg z = \pi/2$ — мнимая ось $\operatorname{Re} w = 0$. В первом случае вырождается правая ветвь гиперболы, а во втором обе ветви гиперболы сливаются вместе.

В тех точках, где отображение (10.16) конформно, прямой угол между лучом и окружностью в плоскости (z) переходит в прямой угол между эллипсом и гиперболой в плоскости (w) .

Пример 10.22. а. Полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ отображается функцией Жуковского на плоскость (w) с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ действительной оси $\operatorname{Im} w = 0$ (рис. 10.35).

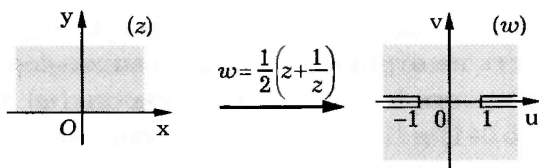


Рис. 10.35

Действительно, для луча $\arg z = \pi$ из уравнений (10.22) получаем

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), & t > 0, \\ v = 0, \end{cases}$$

т.е. образом отрицательной части действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$ будет луч $u \leq -1$, проходимый дважды в противоположных направлениях. Образом положительной части действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$ является луч $u \geq 1$. Отметим, что при отображении сохраняется положительное направление обхода области.

б. Образом полукруга $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении (10.16) будет нижняя полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$ (рис. 10.36). В самом деле, образами полуинтервалов $[-1, 0]$ и $(0, 1]$ действительной оси в плоскости (z) являются лучи $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ действительной оси в плоскости (w) , полуокружность $|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0$ переходит в отрезок $[-1, 1]$, а все полуокружности $|z| = \rho, \operatorname{Im} z \geq 0$ радиуса $\rho < 1$, заполняющие рассматриваемый полукруг, отображаются в полуэллипсы, расположенные в нижней полуплоскости. Область $D_1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ дополняет полукруг D до полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по полуокружности $|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0$.

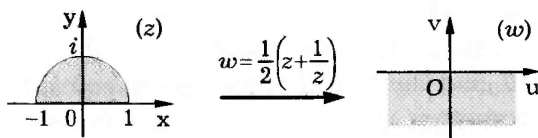


Рис. 10.36

Но функция Жуковского отображает взаимно однозначно эту полуокружность на отрезок $[-1, 1]$ действительной оси $\text{Im } w = 0$, а полуплоскость $\text{Im } z > 0$ — на плоскость (w) с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ этой оси (см. рис. 10.35). Итак, образом объединения областей D и D_1 будет плоскость (w) с выброшенной действительной осью $\text{Im } w = 0$. Но так как образом области D является нижняя полуплоскость $\text{Im } w < 0$, то образом области D_1 будет верхняя полуплоскость $\text{Im } w > 0$.

в. Круг $|z| < 1$ с разрезами по отрезкам $[-1, -a]$ и $[b, 1]$ оси $\text{Im } z = 0$ ($0 < a < 1$, $0 < b < 1$) отображается функцией Жуковского на внешность отрезка $[-\alpha, \beta]$ оси $\text{Im } w = 0$, причем $\alpha = (a + 1/a)/2$ и $\beta = (b + 1/b)/2$ (рис. 10.37). Действительно, по сравнению с рис. 10.33 разрезы в круге при отображении удлинят разрез по отрезку $[-1, 1]$ оси $\text{Im } w = 0$ слева до точки $w = -(a + 1/a)/2$, а справа до точки $w = (b + 1/b)/2$, поскольку при $\varphi_0 = \pi$ и $\varphi_0 = 0$ из (10.22) имеем $v = 0$ и соответственно

$$u = -\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad u = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad t > 0.$$

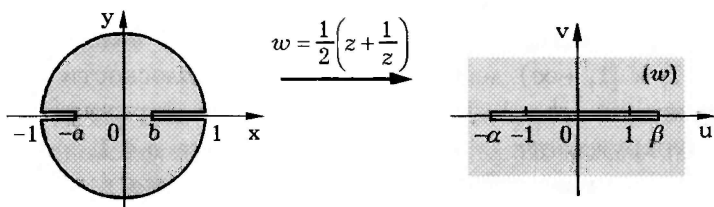


Рис. 10.37

При отображении $w = 1/z$ круг $|z| < 1$ с разрезами по отрезкам $[-1, -a]$ и $[b, 1]$ действительной оси ($0 < a < 1$, $0 < b < 1$) переходит во внешность окружности $|z| = 1$ с разрезами по отрезкам $[-1/a, -1]$ и $[1, 1/b]$ действительной оси. Согласно замечанию 10.3, образом внешности окружности $|z| = 1$ с разрезами по отрезкам $[-a, -1]$ и $[1, b]$ оси $\text{Im } z = 0$ ($a, b > 1$) будет та же внешность отрезка $[-\alpha, \beta]$ оси $\text{Im } w = 0$.

Пример 10.23. Найдем образ окружности $|z + d| = 1 + d$, $d > 0$, при отображении (10.16). Эта окружность имеет общую точку $z = 1$ с окружностью $|z| = 1$, а остальные ее точки лежат во внешности этой окружности (рис. 10.38). Поэтому искомый образ будет лежать во внешности отрезка $[-1, 1]$ действительной оси $\text{Im } w = 0$ и иметь с ним общую точку $w = 1$. Положив в (10.16) $z = x + iy$ и $w = u + iv$, запишем

$$w = u + iv = \frac{1}{2} \left(x + iy + \frac{1}{x + iy} \right) = \frac{1}{2} \left(x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right).$$

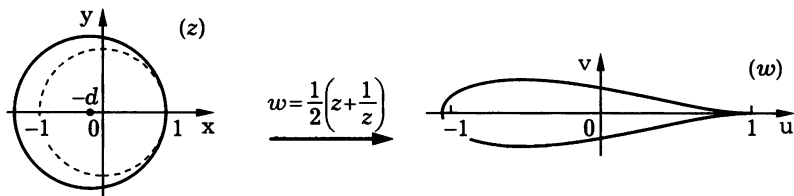


Рис. 10.38

Отсюда для образа окружности $|z + d| = 1 + d$, уравнение которой можно записать в виде $(x + d)^2 + y^2 = (1 + d)^2$, или $y = \pm \sqrt{(1 + 2d + x)(1 - x)}$, находим $x^2 + y^2 = 1 + 2d(1 - x)$. Поэтому

$$\begin{cases} u = \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = x \frac{1 + (1 - x)d}{1 + 2(1 - x)d}, \\ v = \frac{y}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = \pm \frac{d\sqrt{(1 + 2d + x)(1 - x)^3}}{1 + 2(1 - x)d}. \end{cases} \quad (10.24)$$

Кроме того, точка $z = 1$ переходит в точку $w = 1$, а точка $z = -(1 + 2d)$ — в точку $w = -(a + 1/a)/2$, где $a = 1 + 2d$ (см. рис. 10.38). Полученный образ окружности является симметричным относительно действительной оси $\text{Im } w = 0$. Его иногда называют рулем Жуковского. Он принадлежит к семейству **профилей Жуковского**, получаемых при помощи отображения (10.16) (см. пример 10.24).

Напомним, что для функции Жуковского $f(z)$, согласно (10.17), $f'(1) = 0$, т.е. в точке $w = 1$, соответствующей точке $z = 1$, нарушена конформность отображения (10.16). Можно показать, что $w = 1$ является *точкой возврата (заострения)* замкнутого контура, очерчивающего руль Жуковского, т.е. касательные в точке $w = 1$ к дугам этого контура, сходящимся к этой точке, горизонтальны. Действительно, если рассматривать (10.24) как параметрические соотношения, задающие функцию $v(u)$ при помощи параметра x , то нетрудно установить, что $u \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 1$. При этом производная $dv/du = (dv/dx)/(du/dx)$ стремится к нулю. Длина l профиля равна расстоянию между точками $w = 1$ и $w = -(a + 1/a)/2$ (образами точек $z = -(1 + 2d)$ и $z = 1$), т.е. $l = 2(1 + d)^2/(1 + 2d)$. #

Переход из плоскости (z) в плоскость (w) при отображении (10.16) можно осуществить в три этапа. Из (10.16) находим

$$w - 1 = \frac{z^2 + 1 - 2z}{2z} = \frac{(z - 1)^2}{2z}, \quad w + 1 = \frac{z^2 + 1 + 2z}{2z} = \frac{(z + 1)^2}{2z}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{w - 1}{w + 1} = \left(\frac{z - 1}{z + 1} \right)^2. \quad (10.25)$$

Это дает возможность представить функцию Жуковского как композицию трех функций

$$\zeta = \frac{z - 1}{z + 1}, \quad w_1 = \zeta^2, \quad w = \frac{w_1 + 1}{1 - w_1}. \quad (10.26)$$

Смысл замены одного отображения (10.16) тремя отображениями (10.26) состоит в том, что каждое из последовательных отображений проще, чем (10.16), и уже было изучено ранее.

Пример 10.24. Используем представление (10.26), чтобы найти образ окружности L , проходящей через точки $z = \pm 1$ так, что касательная к L в точке $z = 1$ составляет с положительным направлением действительной оси $\text{Im } z = 0$ угол α , $0 < \alpha < \pi/2$ (рис. 10.39).

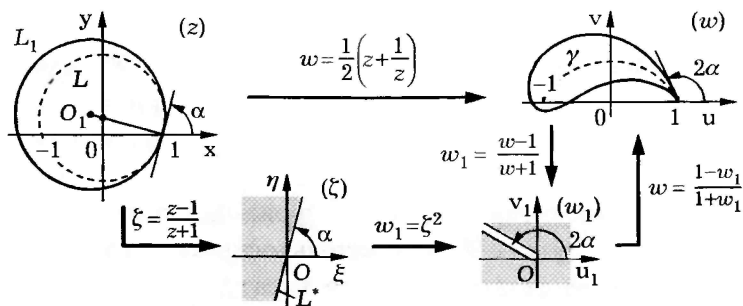


Рис. 10.39

Дробно-линейное отображение, осуществляемое первой из функций (10.26), переводит L в прямую L^* , проходящую через точку $\zeta = 0$ под углом α к действительной оси $\text{Im } \zeta = 0$ (см. пример 10.13). Функция $w_1 = \zeta^2$ переводит прямую L^* в луч $\arg w_1 = 2\alpha$, проходимый точкой w_1 дважды в противоположных направлениях при движении точки ζ вдоль L^* . Функция, обратная к третьей функции в (10.26), отображает на этот луч дугу γ окружности, проходящую через точки $w = \pm 1$ так, что касательная в точке $w = 1$ составляет с положительным направлением действительной оси $\text{Im } w = 0$ угол $2\alpha < \pi$. Поэтому функция $w = (1 + w_1)/(1 - w_1)$ отображает луч $\arg w_1 = 2\alpha$ на дугу γ . Следовательно, дуга γ и будет искомым образом окружности L . Отметим, что γ является образом каждой из дуг окружности L с концами в точках $z = \pm 1$.

Так как $\zeta(0) = -1$, первое из отображений (10.26) переводит внешность окружности L в полуплоскость $\text{Im } \zeta > (\text{tg } \alpha) \text{Re } \zeta$ (выделена на рис. 10.39), при втором отображении получаем плоскость (w_1) с разрезом по лучу $\arg w_1 = 2\alpha$, а при третьем — плоскость (w) с разрезом по дуге γ . Таким образом, функция Жуковского конформно отображает внешность окружности L на плоскость с разрезом по дуге γ .

Рассмотрим теперь окружность L_1 с центром в точке O_1 , имеющую с L общую касательную в точке $z = 1$ и охватывающую точку $z = -1$ (см. рис. 10.39). Так как L_1 лежит во

внешности окружности L и имеет с ней общую точку $z = 1$, то при отображении, осуществляемом функцией Жуковского, L_1 перейдет в плоскости (w) в некоторый замкнутый контур \tilde{L}_1 , охватывающий дугу γ и имеющий с ней общую точку $w = 1$. В этой точке будет нарушена конформность отображения, поскольку в ней, согласно (10.17), производная функции Жуковского равна нулю. Последовательность трех отображений (10.26) позволяет установить, что касательные в точке $w = 1$ к дугам контура \tilde{L}_1 , сходящимся к этой точке, совпадут с касательной к дуге γ , т.е. также составят угол 2α с положительным направлением действительной оси $\text{Im } w = 0$. Итак, для контура \tilde{L}_1 точка $w = 1$ является точкой возврата (заострения). Напомним, что таким же свойством обладает и точка $w = 1$ симметричного относительно действительной оси $\text{Im } w = 0$ профиля на рис. 10.38, для которого $\alpha = \pi/2$.

При изменении угла α и радиуса окружности L_1 можно получить в плоскости (w) семейство профилей, являющихся образами этой окружности и называемыми профилями Жуковского.

10.6. Тригонометрические и гиперболические функции

При изучении отображений, осуществляемых гиперболическими и тригонометрическими функциями, используем ранее изученные отображения. Так, функцию $\text{ch } z = (e^z + e^{-z})/2$ можно рассматривать как суперпозицию двух функций: показательной и функции Жуковского:

$$\text{ch } z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad \zeta = e^z. \quad (10.27)$$

Функцию

$$\cos z = \text{ch}(-iz) \quad (10.28)$$

можно представить как суперпозицию отображений $\zeta = -iz$ (поворот вокруг точки $z = 0$ на угол $-\pi/2$) и $w = \operatorname{ch} \zeta$. Функция

$$\sin z = \cos(z - \pi/2) \quad (10.29)$$

является суперпозицией отображении $\zeta = z - \pi/2$ (сдвиг) и $w = \cos \zeta$. Отображение $w = \operatorname{tg} z$ можно представить суперпозицией трех отображений:

$$\zeta = 2iz, \quad w_1 = e^\zeta, \quad w = -i \frac{w_1 - 1}{w_1 + 1} = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \operatorname{tg} z. \quad (10.30)$$

Рассмотрим на примерах свойства отображений, осуществляемых перечисленными функциями.

Пример 10.25. Функция $w = \operatorname{ch} z$ отображает полуплоску $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 10.40). В самом деле, учитывая (10.27), отображением $\zeta = e^z$ переводим эту полуплоску в полуплоску $\operatorname{Im} \zeta > 0$ с выброшенным полукругом $|\zeta| \leq 1, \operatorname{Im} \zeta > 0$ (см. пример 10.20), а затем с помощью функции Жуковского получаем полуплоску $\operatorname{Im} w > 0$ (см. пример 10.22).

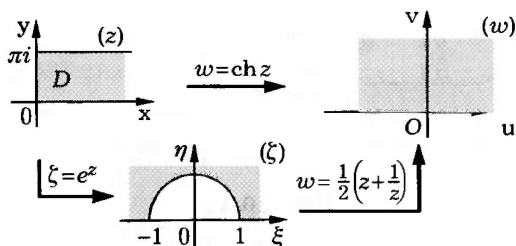


Рис. 10.40

Полуплоску $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ отображается функцией $\zeta = -iz$, т.е. поворотом на угол $-\pi/2$, на полуплоску D . Поэтому суперпозиция функций $\zeta = -iz$ и $w = \operatorname{ch} \zeta$, или, согласно (10.28), функция $w = \operatorname{ch} \zeta = \operatorname{ch}(-iz) = \cos z$ отобразит полуплоску D_1 на ту же полуплоску $\operatorname{Im} w > 0$.

Полуплоскость $\text{Im } w > 0$ при отображении $w = \sin z$ будет образом полуполосы $D_2 = \{z \in \mathbb{C}: -\pi/2 < \text{Re } z < \pi/2, \text{Im } z > 0\}$. В самом деле, используя равенство (10.29), получаем $w = \sin z = \cos(z - \pi/2) = \cos \zeta$, так что функция $\zeta = z - \pi/2$ на первом этапе сдвигом вдоль действительной оси на $-\pi/2$ отобразит полуплоску D_2 на D_1 , а затем уже функция $w = \cos \zeta$ отобразит полуплоску D_1 на полуплоску $\text{Im } w > 0$.

Пример 10.26. Найдем образ полосы $-\pi/4 < \text{Re } z < \pi/4$ при отображении $w = \text{tg } z$.

Учитывая (10.30), рассмотрим сначала отображение $\zeta = 2iz$, которое поворачивает эту полосу на угол $\pi/2$ и удваивает ее ширину (рис. 10.41). Затем с помощью отображения $w_1 = e^\zeta$ получаем правую полуплоску $\text{Re } w_1 > 0$ (см. пример 10.20). Наконец, дробно-линейное отображение $w = -i(w_1 - 1)/(w_1 + 1)$ преобразует эту полуплоску в единичный круг (см. пример 10.9).

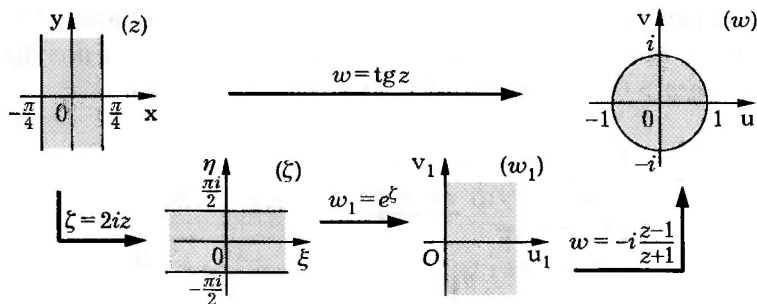


Рис. 10.41

Пример 10.27. Отобразим на верхнюю полуплоску область $D = \{z \in \mathbb{C}: |z - 1| > 1, |z - 2| < 2, \text{Im } z < 0\}$, т.е. нижнюю половину луночки, ограниченной окружностями $|z - 1| = 1$ и $|z - 2| = 2$ (рис. 10.42).

Отображение $\zeta = 1/z$ можно рассматривать как частный случай дробно-линейного. При этом точке $z = 0$ отвечает бесконечно удаленная точка $\zeta = \infty$, а точкам $z_1 = 2$ и $z_2 = 4$ —

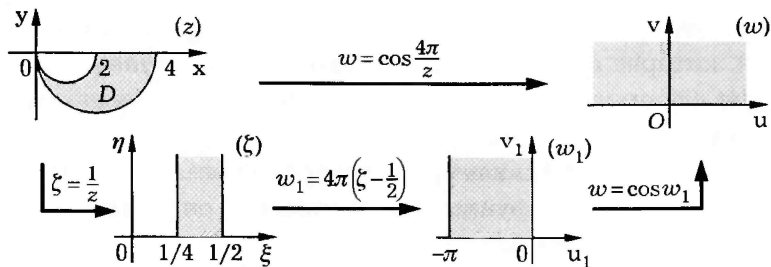


Рис. 10.42

точки $\zeta_1 = 1/2$ и $\zeta_2 = 1/4$ соответственно, т.е. отрезок $[2, 4]$ действительной оси $\text{Im } z = 0$ перейдет в отрезок $[1/4, 1/2]$ действительной оси $\text{Im } \zeta = 0$, а дуги окружностей — в прямые. В силу конформности отображения $\zeta = 1/z$ прямые углы между участками границы области D в точках $z_1 = 2$ и $z_2 = 4$ будут сохранены. Поэтому область D перейдет в полуполосу $1/4 < \text{Re } \zeta < 1/2, \text{Im } \zeta > 0$. Эту полуполосу при помощи линейной функции $w_1 = 4\pi(\zeta - 1/2)$ сдвинем вдоль действительной оси влево на расстояние $1/2$ и увеличим ее ширину в 4π раз. В результате получим полуполосу $-\pi < \text{Re } w_1 < 0, \text{Im } w_1 > 0$, образом которой при отображении $w = \cos w_1$ является верхняя полуплоскость $\text{Im } w > 0$ (см. пример 10.25). Итак, искомым отображением будет

$$w = \cos w_1 = \cos 4\pi(\zeta - 1/2) = \cos\left(\frac{4\pi}{z} - 2\pi\right) = \cos \frac{4\pi}{z}.$$

10.7. Однозначные ветви многозначных обратных функций

Пусть функция $w = f(z)$ является аналитической в области D функцией, отображает D на область D^* , но не имеет обратной функции в D^* , так как не является однолистной в D . В этом случае удобно говорить о многозначной обратной функции $\varphi(w)$. Выделим область однолистности $D_1 \subset D$ этой функции.

В области $D_1^* = f(D_1)$ функция $f(z)$ имеет обратную функцию $\varphi_1(w)$, которая является ветвью многозначной функции $\varphi(w)$.

Мы ограничимся лишь пояснениями к построению ветвей многозначных обратных функций, порожденных некоторыми элементарными функциями. В таких случаях структура многозначной обратной функции, как правило, определяется многозначной функцией $\text{Arg } z$ (см. 3.4).

Рассмотрим функцию $w = z^2$. Обратная к ней функция задается уравнением

$$z^2 = w \quad (10.31)$$

относительно переменного z . Как известно, это уравнение при $w \neq 0$ имеет два решения, которые можно вычислить по формуле Муавра извлечения корня целой положительной степени из комплексного числа. Если одно из решений обозначить через \sqrt{w} , то другим решением будет $-\sqrt{w}$.

Таким образом, функция $z = \psi(w)$, обратная к функции $w = z^2$, является двузначной. Заметим, что функция $w = z^2$ определена во всей комплексной плоскости (z) и множество ее значений есть вся комплексная плоскость (w). Возникает вопрос о том, как построить ветвь обратной двузначной функции.

Пусть D_0 — плоскость (z) с разрезом вдоль положительной части действительной оси $\text{Im } z = 0$. Эту область можно описать следующим образом:

$$D_0 = \{z = re^{i\varphi}: r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

Согласно (1.26), имеем

$$w = \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i(\varphi+2k\pi)/2}, \quad k = 0, 1.$$

При $k = 0$ получаем функцию $w = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$, а при $k = 1$ — функцию $w = \sqrt{r}e^{i\varphi/2} e^{\pi i} = -\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$.

Рассмотрим в области D_0 функцию

$$f_0(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (10.32)$$

Эта функция непрерывна в D_0 и удовлетворяет условию $f_0^2(z) = z$, т.е. функция $f_0(z)$ является обратной к функции $z = w^2$. Из представления функции (10.32) заключаем, что множеством значений функции $f_0(z)$ является верхняя полуплоскость. Это согласуется с тем, что при отображении $z = w^2$, обратном к отображению $w = f_0(z)$, верхняя полуплоскость $\text{Im } w > 0$ переходит в плоскость (z) с разрезом по положительной полуоси действительной оси $\text{Im } z = 0$ (см. пример 3.2). Таким образом, функция $w = f_0(z)$ однозначна и непрерывна в области D_0 , т.е. в плоскости (z) с разрезом по лучу $\arg z = 0$, и отображает эту область на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$ (рис. 10.43).

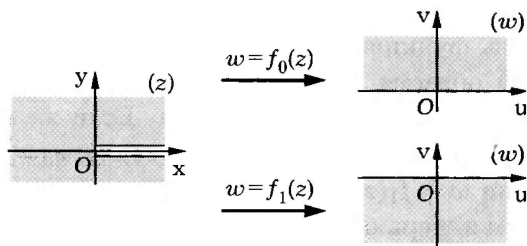


Рис. 10.43

Точно так же функция $f_1(z) = -\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$, $0 < \varphi < 2\pi$, непрерывна в области D_0 и отображает ее на нижнюю полуплоскость $\text{Im } w < 0$ (см. рис. 10.43). В силу *теоремы об обратной функции* рассматриваемые функции $f_0(z)$ и $f_1(z)$ аналитические в области D_0 , причем

$$f'_k(z) = \frac{1}{(w^2)'} \Big|_{w=f_k(z)} = \frac{1}{2f_k(z)}, \quad k = 0, 1. \quad (10.33)$$

Заметим, что аналитичность этих функций и вид производных можно установить, используя *условия Коши — Римана* и формулы для производной функции комплексного переменного в полярных координатах (см. пример 4.3).

Итак, $f_0(z)$ и $f_1(z)$ — ветви двузначной функции $w = \sqrt{z}$. Нередко обе эти ветви обозначают одним и тем же символом

\sqrt{z} . Чтобы указать, какую из двух ветвей в конкретном случае имеют в виду, задают значение функции в какой-либо точке области D_0 . Можно также задать значение и на разрезе, но при этом следует оговорить, на каком берегу разреза (верхнем или нижнем) взята точка. Например, если граничная точка $z_0 = 1$ находится на верхнем берегу разреза, то $\text{Arg } z_0 = 0$, а если она выбирается на нижнем берегу разреза, то $\text{Arg } z_0 = 2\pi$.

Если, например, в точке $z = -1$ задано значение $w = i$, то речь идет о ветви $w = f_0(z)$, отображающей область D_0 на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$. Если же в точке $z = -1$ задано значение $w_2 = -i$, то имеется в виду ветвь $w = f_1(z)$, отображающая область D_0 на нижнюю полуплоскость $\text{Im } w < 0$. Ветвь функции \sqrt{z} , принимающая значение $w_0 = 1$ в граничной для области D_0 точке $z_0 = 1$, лежащей на верхнем берегу разреза, есть функция $w = f_0(z)$. Если же точка $z_0 = 1$ на нижнем берегу разреза переходит в точку $w_0 = -1$, то речь идет о функции $w = f_1(z)$.

Рассмотрим теперь область D_π — плоскость (z) с разрезом по отрицательной части действительной оси $\text{Im } z = 0$, т.е. по лучу $\text{Arg } z = \pi$ (рис. 10.44). В этой области можно выделить две ветви двузначной функции \sqrt{z} :

$$\tilde{f}_0(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}, \quad \tilde{f}_1(z) = -\sqrt{r}e^{i\varphi/2}, \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

Первая ветвь отображает область D_π на правую полуплоскость $\text{Re } w > 0$, а вторая — на левую полуплоскость $\text{Re } w < 0$.

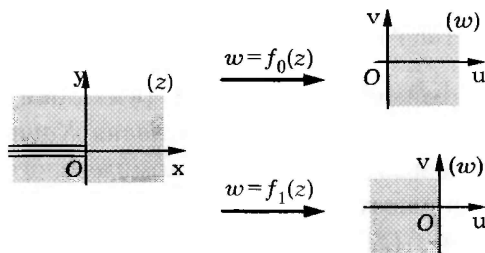


Рис. 10.44

Нетрудно убедиться, что однозначные ветви функции \sqrt{z} можно выделить и в том случае, когда областью является плоскость с разрезом по произвольному лучу $\text{Arg } z = \alpha$, которую обозначим D_α . На рис. 10.45 изображены полуплоскости, на которые область D_α отображается ветвями функции \sqrt{z} , при этом $\alpha = \pi/3$. Итак, множество значений ветвей обратной функции существенно зависит от вида области, в которой выделяют ветви, но в фиксированной точке каждая ветвь может принимать лишь одно значение из определенного набора значений. Например, ветвь функции \sqrt{z} в точке $z = 1$ может принимать либо значение 1, либо значение -1 , какой бы ни была выбрана область D .

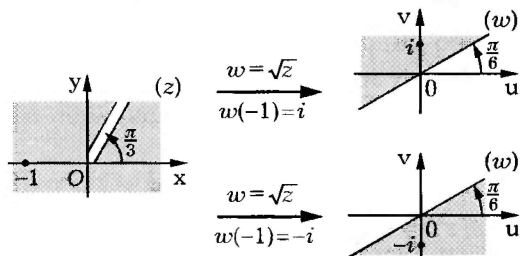


Рис. 10.45

Пример 10.28. Отобразим область D на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$, если D представляет собой плоскость с разрезами: а) по отрезку $[0, 1]$ действительной оси; б) по верхней полуокружности $|z| = 1$, $\text{Im } z > 0$; в) по лучам $(-\infty, 1]$ и $[2, +\infty)$ действительной оси.

Для решения задачи можно использовать ветвь многозначной функции \sqrt{z} . Для этого сначала необходимо с помощью *дробно-линейного отображения* преобразовать область в плоскость (ζ) со стандартным разрезом по лучу $\arg \zeta = 0$ (см. рис. 10.43). После этого можно применить отображение, осуществляемое ветвью $f_0(z)$ квадратного корня.

а. Точке $z = 0$ поставим в соответствие точку $\zeta = 0$, точке $z = 1$ — точку $\zeta = \infty$, а точке $z = 1/2$ — точку $\zeta = 1$. В

соответствии с (10.11) запишем

$$\frac{\zeta - 0}{1} \frac{1}{1 - 0} = \frac{z - 0}{z - 1} \frac{1/2 - 1}{1/2 - 0}.$$

В результате получаем $\zeta = z/(1 - z)$. Точке $\zeta = -1$, в которой ветвь $f_0(\zeta)$ квадратного корня принимает значение i , соответствует точка $z = \infty$. Поэтому искомое отображение осуществляет та ветвь $w = \sqrt{\zeta} = \sqrt{z/(1 - z)}$ многозначной функции $\sqrt{z/(1 - z)}$, для которой $w(\infty) = i$.

б. Для преобразования верхней половины окружности $|z| = 1$ в луч $\text{Arg } \zeta = 0$ потребуем, чтобы точка $z = -1$ перешла в точку $\zeta = 0$, а точка $z = 1$ — в точку $\zeta = \infty$. При условии $\zeta(i) = 1$ имеем

$$\frac{\zeta - 0}{1} \frac{1}{1 - 0} = \frac{z + 1}{z - 1} \frac{i - 1}{i + 1} = i \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Отсюда находим $\zeta = i(z + 1)/(z - 1)$ и

$$w(z) = \sqrt{\zeta} = \sqrt{i \frac{z + 1}{z - 1}}, \quad w(-i) = i,$$

поскольку в точку $\zeta = -1$ переходит точка $z = -i$.

в. Полагая $\zeta(2) = 0$, $\zeta(1) = \infty$ и $\zeta(3) = 1/2$, запишем

$$\frac{\zeta - 0}{1} \frac{1}{1/2 - 0} = \frac{z - 2}{z - 1} \frac{3 - 1}{3 + 1}.$$

В итоге получим $\zeta = (z - 2)/(z - 1)$ и

$$w(z) = \sqrt{\zeta} = \sqrt{(z - 2)/(z - 1)}, \quad w(3/2) = i,$$

так как в точку $\zeta = -1$ переходит точка $z = 3/2$.

Пример 10.29. Пусть D — полуплоскость $\text{Im } z > 0$ с разрезом по отрезку мнимой оси, соединяющему точки $z = 0$ и $z = ih$, $h > 0$ (рис. 10.46). Найдем конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$.

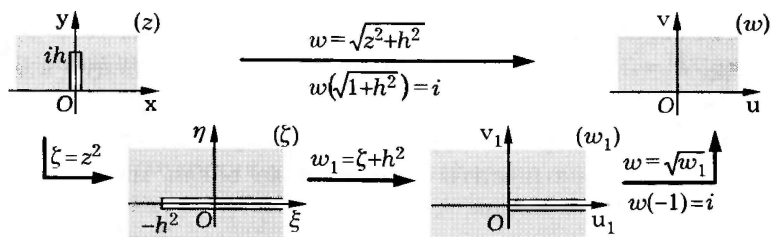


Рис. 10.46

Функция $\zeta = z^2$ конформно отображает заданную область D на плоскость (ζ) с разрезом по лучу $\text{Re } \zeta \geq -h^2$ действительной оси (см. рис. 10.20), а функция $w_1 = \zeta + h^2$ сдвигает область так, что ее разрез пройдет по лучу $\text{Arg } w_1 = 0$. Наконец, ветвь $f_0(w_1)$ квадратного корня переводит область в верхнюю полуплоскость (см. рис. 10.46). Искомое отображение является суперпозицией перечисленных отображений:

$$w(z) = \sqrt{w_1} = \sqrt{\zeta + h^2} = \sqrt{z^2 + h^2} \quad \text{при} \quad w(i\sqrt{1+h^2}) = i,$$

причем $w(i\sqrt{1+h^2}) = i$ поскольку в точку $w_1 = -1$ переходит точка $\zeta = -1 - h^2$, а в эту точку — точка $z = i\sqrt{1+h^2}$. #

Перейдем к рассмотрению многозначной функции более общего вида $w = \sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbb{C}$, где $n \geq 2$ — натуральное число. Она является обратной к *целой степенной функции* $z = w^n$. При $z = 0$ многозначная функция $w = \sqrt[n]{z}$ принимает единственное значение $w = 0$, а при $z \neq 0$ имеет n различных значений, определяемых формулой Муавра

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}, \quad (10.34)$$

где φ — одно из значений *аргумента* комплексного числа z .

Для выделения однозначных ветвей функции $\sqrt[n]{z}$ поступим следующим образом. В плоскости (w) проведем из начала координат n прямолинейных лучей $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$, каждый из

которых образует с соседним лучом угол $2\pi/n$ (рис. 10.47). Все лучи γ_k , $k = \overline{0, n-1}$, при отображении $z = w^n$ перейдут в один и тот же луч Γ плоскости (z), выходящий из точки $z = 0$. В плоскости (z) с разрезом вдоль луча Γ (эту область обозначим через D) можно выделить однозначные ветви многозначной функции $\sqrt[n]{z}$.

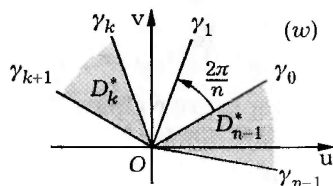


Рис. 10.47

Пусть и D_k^* — область плоскости (w), ограниченная лучами γ_k и γ_{k+1} , $k = \overline{0, n-1}$, где под γ_n понимается луч γ_0 . В каждой из областей D_k^* функция $z = w^n$ однолистка, а потому имеет обратную аналитическую функцию $f_k(z)$, которая взаимно однозначно отображает область D на область D_k^* и является ветвью многозначной функции $w = \sqrt[n]{z}$. Отметим, что для задания одной из ветвей $f_k(z)$ достаточно указать значение $\sqrt[n]{z_0}$ в любой точке $z_0 \in D$.

Согласно теореме об обратной функции, имеем

$$f'_k(z) = \frac{1}{(w^n)'} \Big|_{w=f_k(z)} = \frac{1}{n(f_k(z))^{n-1}}, \quad z \in D. \quad (10.35)$$

Вид выделенных ветвей $f_k(z)$ и их область определения D существенно зависят от вида построенных областей D_k^* однолиственности функции $z = w^n$. Например, если в качестве разрезов γ_k взять лучи $\text{Arg } w = (\pi + 2k\pi)/n$, $k = \overline{0, n-1}$, то областью D будет плоскость (z) с разрезом по лучу $\text{Arg } z = \pi$, а каждую из однозначных ветвей, согласно (10.34), можно представить в виде

$$f_k(z) = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right), \quad z \in D.$$

В качестве области D можно рассматривать не только плоскость с разрезом по лучу, но и любую ее подобласть. Например, она может представлять собой неограниченный сектор между двумя лучами с произвольным углом $\alpha < 2\pi$ при его вершине в точке $z = 0$. Функция $w = f_k(z)$ конформно отображает такой сектор на сектор с углом α/n при вершине в точке $w = 0$, т.е. уменьшает угол сектора в n раз (в отличие от функции $w = z^n$, которая при отображении сектора с углом $\beta < 2\pi/n$ при вершине в точке $z = 0$ увеличивает угол сектора в n раз).

Пример 10.30. Отобразим на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$ плоскость с вырезанным полукругом радиуса $R = 1$ (рис. 10.48).

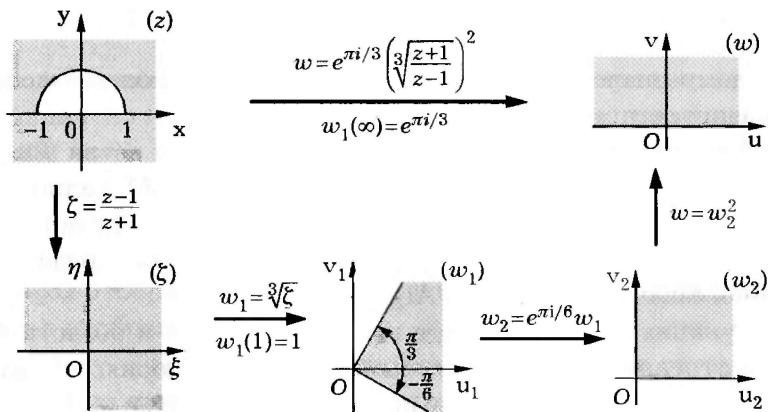


Рис. 10.48

Дробно-линейное отображение $\zeta = (z + 1)/(z - 1)$ переводит заданную область во внешность третьего квадранта плоскости (ζ) , т.е. в неограниченный сектор, заключенный между лучами $\arg \zeta = -\pi/2$ и $\arg \zeta = \pi$ с углом $3\pi/2$ при вершине в точке $\zeta = 0$. Отображением $w_1(\zeta) = \sqrt[3]{\zeta}$ уменьшим этот угол в 3 раза, приняв $w_1(1) = 1$. Затем с помощью функции $w_2 = e^{\pi i/6} w_1$ поворачиваем полученный в плоскости (w_1) сектор на угол $\pi/6$ против часовой стрелки и в результате получаем

первый квадрант плоскости w_2 , который отображением $w = w_2^2$ переводится в полуплоскость $\text{Im } w > 0$. Суперпозиция всех этих отображений дает искомое отображение:

$$w(z) = w_2^2 = (e^{\pi i/6} w_1)^2 = e^{\pi i/3} (\sqrt[3]{\zeta})^2 = e^{\pi i/3} \left(\sqrt[3]{\frac{z+1}{z-1}} \right)^2$$

при условии, что $w(\infty) = e^{\pi i/3} = (1 + i\sqrt{3})/2$. #

Понятие *логарифма комплексного числа* z было введено как решение w уравнения $e^w = z$ (см. 3.5). Из свойств показательной функции вытекает, что $\text{Ln } z$ является многозначной функцией, которую можно представить в виде

$$\text{Ln } z = \ln|z| + i \text{Arg } z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (10.36)$$

Каждому значению z соответствует бесконечное множество значений логарифма.

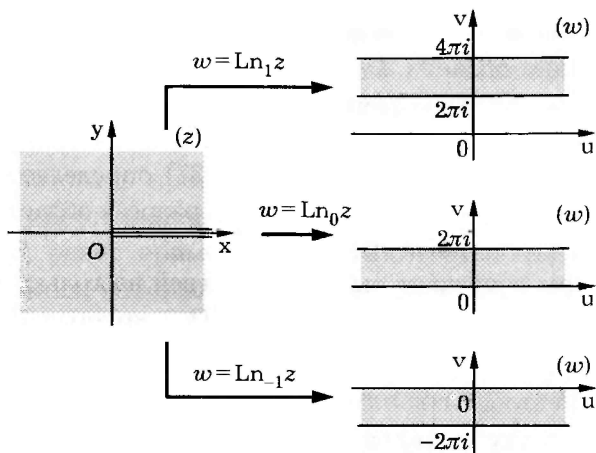
Остановимся на том, как можно выделить ветви многозначной функции $\text{Ln } z$. Из представления (10.36) видно, что действительная часть $\text{Ln } z$ является однозначной функцией, а многозначные свойства этой функции полностью определяются многозначной функцией $\text{Arg } z$ (см. 3.4).

Функция $\text{Arg } z$ допускает выделение ветвей в области D_0 , рассмотренной выше для случая квадратного корня, т.е. плоскости (z) с разрезом по лучу $\arg z = 0$. Пусть $\text{Arg}_0 z$ — та ветвь функции $\text{Arg } z$ в области D_0 , для которой $0 < \varphi < 2\pi$. Тогда в области D_0 определена функция

$$\text{Ln}_0 z = \ln|z| + i \text{Arg}_0 z, \quad z \in D_0, \quad (10.37)$$

являющаяся ветвью многозначной функции $\text{Ln } z$. Она конформна и отображает область D_0 на полосу $0 < \text{Im } w < 2\pi$ (рис. 10.49). Но в области D_0 можно выбрать другие ветви $\text{Arg } z$, причем таких ветвей бесконечно много:

$$\text{Arg}_k z = \text{Arg}_0 z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (10.38)$$


Рис. 10.49

Каждой ветви $\text{Arg}_k z$ функции $\text{Arg} z$ соответствует ветвь $\text{Ln}_k z$ функции $\text{Ln} z$, и наоборот. Например, взяв в представлении (10.38) $k = 1$, получим ветвь логарифма

$$\text{Ln}_1 z = \ln |z| + i \text{Arg}_1 z,$$

которая отображает область D_0 в полосу $2\pi < \text{Im} z < 4\pi$, а ветвь $\text{Ln}_{-1} z$ отображает D_0 в полосу $-2\pi < \text{Im} z < 0$ (см. рис. 10.49).

В силу теоремы об обратной функции каждая ветвь $w_k(z)$ логарифма имеет производную

$$w'_k(z) = \frac{1}{z'(w)} \Big|_{w=w_k(z)} = \frac{1}{(e^w)'} \Big|_{w=w_k(z)} = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0.$$

Видим, что производная не зависит от выбора ветви, и можем записать $(\text{Ln} z)' = 1/z$. Это связано с тем, что все ветви логарифма различаются на аддитивную постоянную и являются первообразными аналитической функции $1/z$.

Итак, для выделения в области D_0 ветви логарифма достаточно выбрать соответствующую ветвь аргумента. Каждая

ветвь определяется значением аргумента в какой-либо внутренней точке области D_0 . Можно также указать значение аргумента в граничной точке области D_0 , но при этом надо отметить, на каком берегу разреза выбрана эта точка, на верхнем или нижнем. Например, формула (10.37) определяет ту ветвь логарифма, которая на верхнем берегу разреза области D_0 принимает действительные значения.

Логарифм допускает выделение ветвей не только в области D_0 , но и в любой другой области D_α , которая получается разрезом плоскости по лучу $\arg z = \alpha$. Например, в области $D_\pi = \{z = re^{i\varphi}: -\pi < \varphi < \pi\}$ логарифм имеет ветвь

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z,$$

которую часто называют *главным значением логарифма*.

Отметим, что выбором области D в плоскости (z) и ветвей $\operatorname{Ln} z$ в этой области определяется разбиение плоскости (w) на области однолиственности функции $z = e^w$.

Пример 10.31. Найдем образ плоскости (z) с разрезом по лучу $\arg z = 0$ при отображении, осуществляемом той ветвью логарифма, которая точку $z_0 = -(1 + i\sqrt{3})/2$ переводит в точку $w_0 = 10\pi i/3$.

Образом рассматриваемой области (обозначим ее через D), согласно виду ветвей $\operatorname{Ln}_k z$ логарифма, является одна из полос

$$D_k^* = \{w \in \mathbb{C}: 2k\pi < \operatorname{Im} w < 2(k+1)\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Выбор полосы однозначно определяет ветвь логарифма, при этом полосу нужно выбрать так, чтобы в нее попал образ точки z_0 . Таковой является полоса

$$D_1^* = \{w \in \mathbb{C}: 2\pi < \operatorname{Im} w < 4\pi\},$$

которая и есть искомый образ области D . #

Многозначная функция

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1} \tag{10.39}$$

является обратной к функции Жуковского, так как из этого представления вытекает, что $(w - z)^2 = z^2 - 1$, или $2wz = w^2 + 1$, что определяет переменное z как функцию переменного w согласно формуле (10.16). С помощью ветвей этой функции можно реализовать преобразования областей, обратные тем, которые осуществляет функция Жуковского. Исходя из рассмотренных ранее примеров (см. 10.5), отметим три таких преобразования, которые можно отнести к табличным.

1. Плоскость (z) с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ действительной оси $\text{Im } z = 0$ одной ветвью функции (10.39), для которой $w(2) = 2 + \sqrt{3}$, отображается на внешность единичной окружности $|z| = 1$, а другой ветвью, для которой $w(2) = 2 - \sqrt{3}$, — на внутренность этой окружности (рис. 10.50).

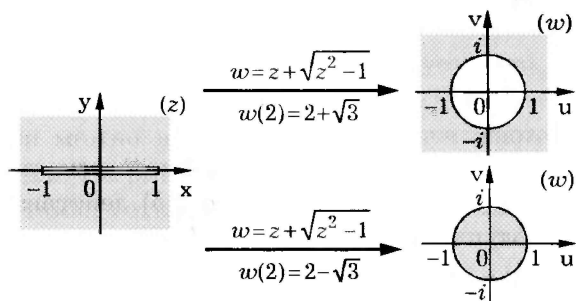


Рис. 10.50

2. Плоскость с разрезами по лучам $\text{Re } z = x \leq -1$ и $\text{Re } z = x \geq 1$ действительной оси $\text{Im } z = 0$ одной ветвью функции (10.39), для которой $w(0) = i$, отображается на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$, а другой ее ветвью, для которой $w(0) = -i$, — на нижнюю полуплоскость $\text{Im } w < 0$ (рис. 10.51).

3. Верхняя полуплоскость $\text{Im } z > 0$ одной ветвью функции (10.39), для которой $w(i) = i(1 + \sqrt{2})$, отображается на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$ с выброшенным единичным полукругом, а другой ветвью, для которой $w(i) = i(1 - \sqrt{2})$, — на нижний единичный полукруг $|w| < 1$, $\text{Im } w < 0$ (рис. 10.52).

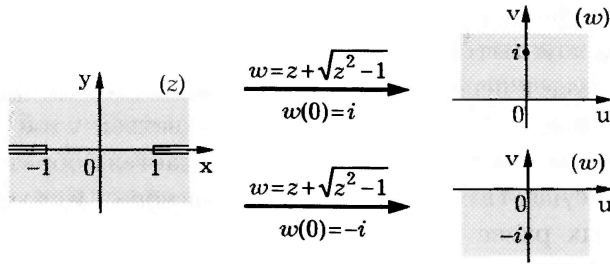


Рис. 10.51

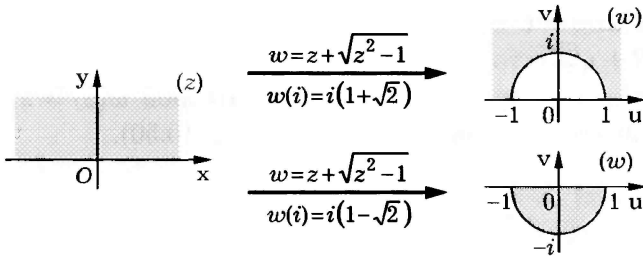


Рис. 10.52

Пример 10.32. Найдем отображение плоскости (z) с разрезами по лучам $(-\infty, a]$ и $[b, +\infty)$ ($a < b$) действительной оси на верхнюю полуплоскость $\text{Im} w > 0$. Линейным отображением

$$\zeta = \frac{2}{b-a} \left(z - \frac{a+b}{2} \right)$$

переводим плоскость (z) в плоскость (ζ) так, что отрезок $[a, b]$ действительной оси перейдет в отрезок $[-1, 1]$ действительной оси (рис. 10.53). В этом случае исходная область перейдет в плоскость (ζ) с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ действительной оси. Далее можно использовать табличное отображение 2 (см. рис. 10.51). В итоге получим функцию

$$\begin{aligned} w = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} &= \frac{2}{b-a} \left(z - \frac{a+b}{2} + \sqrt{\left(z - \frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{b-a}{2} \right)^2} \right) = \\ &= \frac{2}{b-a} \left(z - \frac{a+b}{2} + \sqrt{z^2 - z(a+b) + ab} \right), \end{aligned}$$

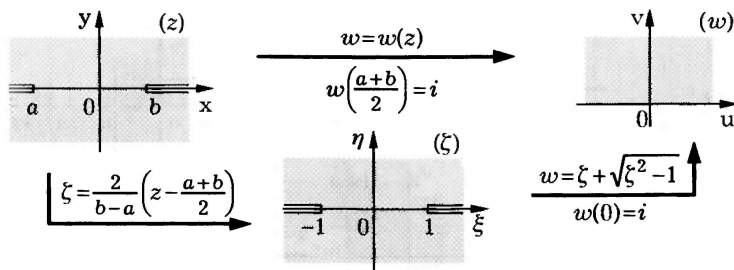


Рис. 10.53

которая должна удовлетворять условию $w((a+b)/2) = i$, поскольку в точку $\zeta = 0$ переходит точка $z = (a+b)/2$. #

Обратные тригонометрические функции $\text{Arccos } z$, $\text{Arcsin } z$, $\text{Arctg } z$ и $\text{Arcctg } z$ (см. 3.5) являются многозначными, и их можно выразить, согласно (3.38) и (3.40)–(3.42), через логарифмическую функцию $\text{Ln } z$. Из этого следует, что, например, в плоскости с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ действительной оси можно выделить бесконечное множество ветвей этих функций. На рис. 10.54 и 10.55 показаны этапы выделения по четыре таких ветви многозначных функций

$$\text{Arccos } z = -i \text{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right), \quad \text{Arcsin } z = -i \text{Ln} \left(i \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \right).$$

Каждая однозначная ветвь функции $w(z) = \text{Arccos } z$ отображает область D на одну из полос

$$D_k^* = \{w \in \mathbb{C}: k\pi < \text{Re } w < (k+1)\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

и может быть определена соотношением $w(0) = (2k+1)\pi/2$, а каждая однозначная ветвь функции $\tilde{w}(z) = \text{Arcsin } z$ отображает эту область на одну из полос

$$\tilde{D}_k^* = \{w \in \mathbb{C}: (2k-1)\pi/2 < \text{Re } w < (2k+1)\pi/2\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

и однозначно определяется условием $\tilde{w}(0) = k\pi$.

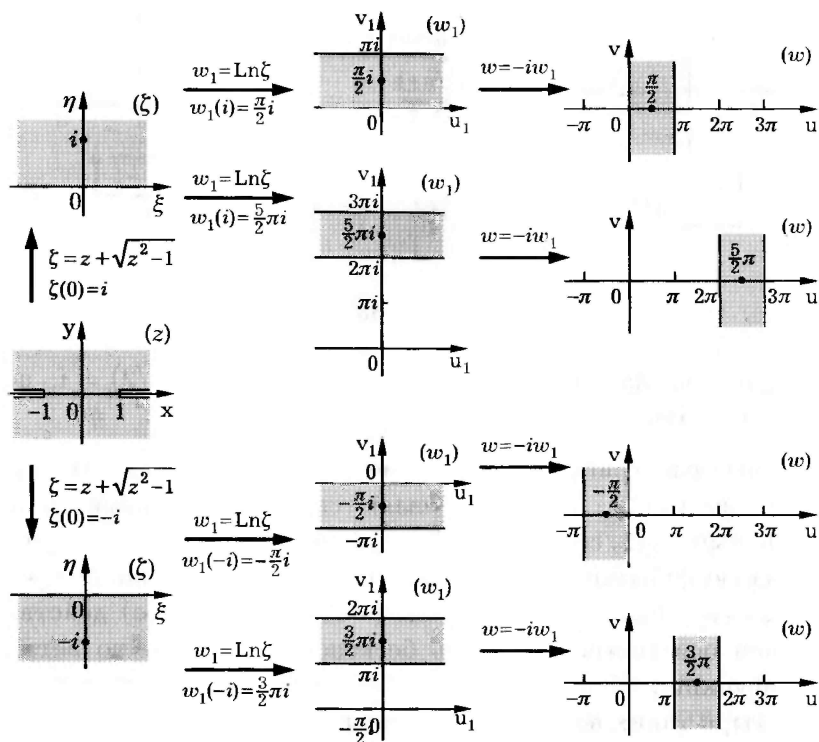


Рис. 10.54

Для функций $\text{Arctg } z$ и $\text{Arcctg } z$ простейшей областью, в которой можно выделить ветви этих функций, является плоскость (z) , имеющая либо один разрез по отрезку мнимой оси, соединяющему точки $z = \pm i$, либо два разреза по лучам $\text{Im } z = y \leq -1$ и $\text{Im } z = y \geq 1$ мнимой оси.

Благодаря связи обратных тригонометрических функций с логарифмической функцией их можно изучать, рассматривая как суперпозиции логарифмической, дробно-линейной функций и функции, обратной к функции Жуковского. Так, из примера 10.26 следует, что образом полосы $-\pi/4 < \text{Re } z < \pi/4$ при отображении $w = \text{tg } z$ является единичный круг $|w| < 1$. Поэто-

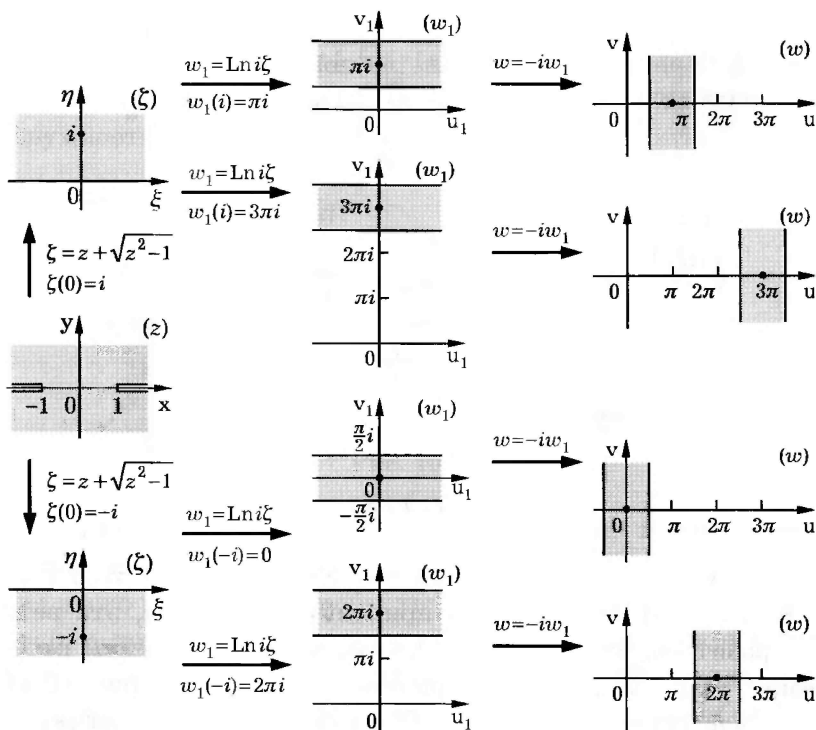


Рис. 10.55

му обратное отображение единичного круга $|z| < 1$ на полосу $-\pi/4 \operatorname{Re} w < \pi/4$ можно записать кратко в виде $w(z) = \operatorname{Arctg} z$.

Пример 10.33. Используя принцип симметрии, отобразим на внешность единичной окружности $|w| = 1$ плоскость (z) с разрезами по отрезку $[-1, 1]$ действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$ и по отрезку мнимой оси $\operatorname{Re} z = 0$, соединяющему точки $z = \pm i$ (так называемую внешность креста, рис. 10.56).

Рассмотрим сначала верхнюю половину D_1 области D , лежащую в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Согласно примеру 10.29, ветвь многозначной функции $\zeta(z) = \sqrt{z^2 + 1}$, определяемая условием $\zeta(i\sqrt{2}) = i$, отображает D_1 на полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > 0$.

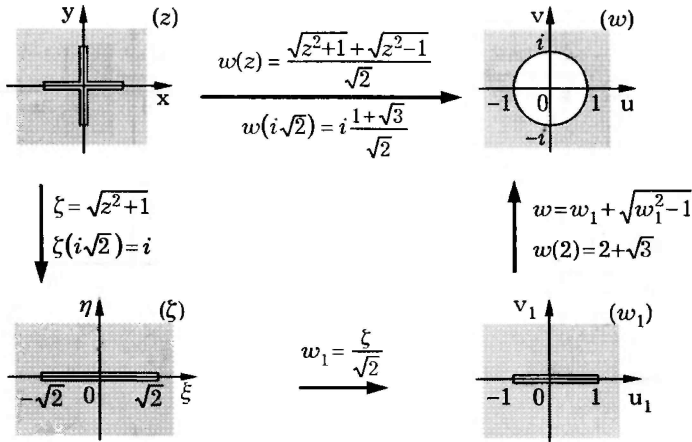


Рис. 10.56

При этом отображении точки $z = \pm 1$ перейдут в точки $\zeta = \pm\sqrt{2}$. Поэтому, согласно принципу симметрии, эта ветвь отобразит область D на всю плоскость (ζ) с разрезом по отрезку $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ действительной оси $\text{Im}\zeta = 0$ (см. рис. 10.56). *Линейное отображение* $w_1 = \zeta/\sqrt{2}$ сожмнет этот разрез до отрезка $[-1, 1]$ действительной оси. Наконец, ветвь функции $w(w_1) = w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1}$, обратной к функции Жуковского, определяемая условием $w(2) = 2 + \sqrt{3}$, отобразит плоскость (w_1) с таким разрезом на внешность единичной окружности $|w| = 1$ (см. рис. 10.50). Искомым отображением является суперпозиция перечисленных отображений:

$$\begin{aligned}
 w(z) &= w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1} = \frac{\zeta}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{\zeta^2}{2} - 1} = \\
 &= \frac{\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{z^2+1}{2} - 1} = \frac{\sqrt{z^2+1} + \sqrt{z^2-1}}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Нужная ветвь этой многозначной функции определяется условием $w(i\sqrt{2}) = i(1 + \sqrt{3})/\sqrt{2}$.

Пример 10.34. Отобразим плоскость (z) с разрезами по отрицательной части мнимой оси и по нижней половине единичной окружности $|z| = 1$ (рис. 10.57) на внешность единичной окружности $|w| = 1$.

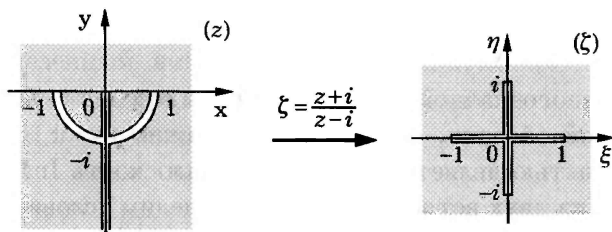


Рис. 10.57

Применим дробно-линейное отображение, переводящее и единичную окружность $|z| = 1$, и мнимую ось $\operatorname{Re} z = 0$ в прямые. Для этого потребуем, чтобы точка $z = -i$ переходила в точку $\zeta = 0$, а точка $z = i$ пересечения этой оси и этой окружности переходила в точку $\zeta = \infty$. Такое отображение имеет вид $\zeta(z) = a(z+i)/(z-i)$. Коэффициент a найдем из условия $\zeta(0) = -1$ и в итоге получим $\zeta = (z+i)/(z-i)$. При таком отображении точки $z = \pm 1$ перейдут в точки $\zeta = \pm i$, а точка $z = \infty$ — в точку $\zeta = 1$, т.е. разрез по отрицательной части мнимой оси $\operatorname{Re} z = 0$ перейдет в разрез по отрезку $[-1, 1]$ действительной оси $\operatorname{Im} \zeta = 0$, а разрез по отрезку $[-1, 1]$ действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$ — в разрез по отрезку мнимой оси $\operatorname{Re} \zeta = 0$, соединяющему точки $\zeta = \pm i$ (см. рис. 10.57). Далее, следуя примеру 10.33, находим, что искомым отображением будет

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + 1} + \sqrt{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - 1} \right).$$

Нужную однозначную ветвь этой функции определяет условие $w(3i) = (\sqrt{5} + \sqrt{3})/\sqrt{2}$.

Дополнение 10.1. Отображение полуплоскости на внутренность прямоугольника

Функция

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad 0 < k < 1, \quad (10.40)$$

является многозначной, но допускает выделение ветви в любой односвязной области, не содержащей точек $z = \pm 1$, $z = \pm 1/k$. Такой областью является верхняя полуплоскость $\text{Im } z > 0$. Выбор одной из двух ветвей функции определим условием $f(0) = 1$ и за этой ветвью сохраним обозначение $f(z)$. Рассмотрим комплексный интеграл

$$I(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}, \quad 0 < k < 1. \quad (10.41)$$

Будем предполагать, что верхний предел этого интеграла есть комплексное число z , лежащее в верхней полуплоскости, путь интегрирования, соединяющий точки 0 и z , также лежит в верхней полуплоскости.

Рассматриваемый интеграл представляет собой *эллиптический интеграл первого рода с модулем k* . Так как функция $f(z)$ является аналитической во всех точках действительной оси, кроме точек ± 1 , $\pm 1/k$, функция $I(z)$ также аналитична во всех точках действительной оси, кроме указанных четырех точек (см. 5.3). В этих точках функция $f(z)$ не ограничена, а функция $I(z)$ непрерывна в силу сходимости соответствующего *несобственного интеграла*. Таким образом, функция $I(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ и непрерывна в \bar{D} .

Оказывается, что функция $I(z)$ однолистка в верхней полуплоскости. Чтобы убедиться в этом, достаточно в силу *принципа соответствия границ* выяснить, как преобразуется граница области D — действительная ось.

Если точка $z = x$ движется по действительной оси от точки $z = 0$ до точки $z = 1$, то интеграл

$$F(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

как определенный интеграл от неотрицательной функции с переменным верхним пределом, будет возрастать от значения 0 при $x = 0$ до значения

$$F(1) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

при $x = 1$, которое называют *полным эллиптическим интегралом первого рода* и обозначают $K(k)$. Итак, образом отрезка $[0, 1]$ действительной оси при отображении $F(z)$ является отрезок $[0, K(k)]$ действительной оси.

При $\operatorname{Re} z \in (1, 1/k)$ подкоренное выражение в представлении (10.40) функции $f(z)$ отрицательно, а функция $f(z)$ принимает мнимые значения, которые могут располагаться или на верхней (положительной) части мнимой оси, или на нижней (отрицательной) части мнимой оси. Чтобы выяснить, какой из этих вариантов имеет место, рассмотрим изменение подынтегральной функции по верхней полуокружности Γ с центром в точке $z = 1$, соединяющей точки $1-r$ и $1+r$. Для этого достаточно вычислить изменение аргумента подкоренного выражения в (10.40). Так как подкоренное выражение содержит четыре сомножителя, то приращение аргумента равно сумме приращений аргумента для каждого из сомножителей. Но нетрудно увидеть, что для трех сомножителей приращение аргумента равно нулю. Например, $\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg}(1+z)$ можно вычислить как приращение аргумента при движении точки z из положения $1-r$ в положение $1+r$ вдоль действительной оси, а при таком движении $\operatorname{Arg}(1+z)$ имеет постоянное нулевое движение. Таким образом, решающую роль играет сомножитель $1-z$,

обращающийся в нуль в точке $z = 1$. Для этого сомножителя с учетом записи уравнения полуокружности Γ в виде $z = 1 + re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$, имеем

$$\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg}(1 - z) = \operatorname{Arg}(1 - (1 + re^{i\varphi})) \Big|_{\pi}^0 = -\pi.$$

Значит, приращение аргумента для всего подкоренного выражения равно $-\pi$ и в качестве значений корня в знаменателе представления (10.40) следует брать те, которые имеют аргумент $-\pi/2$, т.е. на отрицательной части мнимой оси. Поэтому на интервале $(1, 1/k)$ функция $f(z)$ принимает мнимые значения на положительной части мнимой оси, что можно выразить формулой

$$f(x) = \frac{i}{\sqrt{(x^2 - 1)(1 - k^2 x^2)}}, \quad x \in (1, 1/k), \quad (10.42)$$

где радикал обозначает арифметическое значение корня действительного числа.

Согласно (10.42), имеем

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \\ &= K(k) + i \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)(1 - k^2 x^2)}}, \quad x \in (1, 1/k), \quad (10.43) \end{aligned}$$

где несобственный интеграл в правой части сходится в точке $x = 1/k$ [VI], так как

$$\frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)(1 - k^2 x^2)}} \underset{x \rightarrow 1/k}{\sim} \sqrt{\frac{k}{2(1 - k^2)}} \frac{1}{\sqrt{1/k - x}}.$$

Поэтому при изменении аргумента от $x = 1$ до $x = 1/k$ значения функции $I(x)$ изменяются от действительного числа $K(k)$ вдоль

вертикальной прямой $\operatorname{Re} z = K(k)$ до числа с мнимой частью

$$\int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}} = \mathbf{K}(k'),$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$ — **дополнительный модуль эллиптического интеграла**, и преобразование интеграла получено заменой переменного $x = 1/\sqrt{1-k'^2\tau^2}$. Итак, при отображении $I(z)$ отрезок $[1, 1/k]$ действительной оси переходит в вертикальный отрезок, соединяющий точки $\mathbf{K}(k)$ и $\mathbf{K}(k) + i\mathbf{K}(k')$. При этом

$$I(1/k) = \int_0^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \mathbf{K}(k) + i\mathbf{K}(k'). \quad (10.44)$$

Как и выше, можно убедиться, что при переходе точки z из положения $z = 1/k - r$ в положение $z = 1/k + r$ по полуокружности с центром в точке $z = 1/k$ аргумент подынтегральной функции $f(z)$ возрастет еще на $\pi/2$ благодаря сомножителю $1 - kz$ под корнем в знаменателе правой части (10.40). Поэтому значения функции $f(z)$ при действительных значениях $z = x \in (1/k, +\infty)$ являются действительными отрицательными, и мы можем записать

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}, \quad x \in (1/k, +\infty), \quad (10.45)$$

где радикал обозначает арифметическое значение квадратного корня. Согласно (10.44), имеем

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \\ &= \mathbf{K}(k) + i\mathbf{K}(k') - \int_{1/k}^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}, \quad x \geq 1/k. \end{aligned} \quad (10.46)$$

Несобственный интеграл

$$\int_{1/k}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}$$

сходится в точке $+\infty$, так как

$$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{kx^2}.$$

Используя замену $x = 1/(kt)$ ($dx = -dt/(kt^2)$) и учитывая, что $t \rightarrow 0+0$ при $x \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow 1-0$ при $x \rightarrow 1/k+0$, находим

$$\int_{1/k}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \mathbf{K}(k).$$

Из представления (10.46) заключаем, что образом промежутка $[1/k, +\infty)$ действительной оси при отображении $I(z)$ является отрезок, соединяющий точки $\mathbf{K}(k) + i\mathbf{K}(k')$ и $i\mathbf{K}(k')$.

Итак, луч $\arg z = 0$ при отображении $w = I(z)$ переходит в трехзвенную ломаную с прямыми углами в вершинах $w = \mathbf{K}(k)$ и $w = \mathbf{K}(k) + i\mathbf{K}(k')$ (рис. 10.58). Рассуждая аналогичным образом, заключаем, что луч $\arg z = \pi$, т.е. отрицательная часть действительной оси, при отображении $w = I(z)$ перейдет также в трехзвенную ломаную с прямыми углами в вершинах $w = -\mathbf{K}(k)$ и $w = -\mathbf{K}(k) + i\mathbf{K}(k')$, симметричную полученной относительно мнимой оси. В итоге образом действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$ при отображении (10.41) будет прямоугольник (см. рис. 10.58).

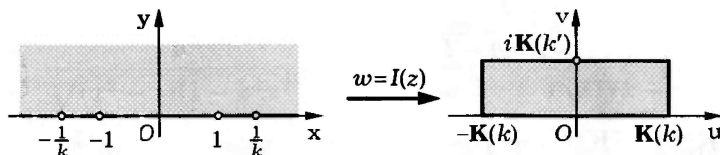


Рис. 10.58

Если точка z пробегает всю действительную ось $\operatorname{Im} z = 0$ слева направо, последовательно обходя точки $-1/k$, -1 , 1 , $1/k$, то верхняя полуплоскость будет оставаться слева. При отображении $w = I(z)$ точка w будет обходить вершины полученного прямоугольника против часовой стрелки, оставляя слева его внутренность. Поэтому, согласно принципу соответствия границ, образом верхней полуплоскости будет внутренность прямоугольника с вершинами в точках $w = \mathbf{K}(k)$, $w = \mathbf{K}(k) + i \mathbf{K}(k')$, $w = -\mathbf{K}(k) + i \mathbf{K}(k')$ и $w = -\mathbf{K}(k)$.

Чтобы отобразить верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на внутренность заданного прямоугольника L с длинами l_1 и l_2 сторон, следует подобрать значение модуля эллиптического интеграла k так, чтобы выполнялось равенство $\mathbf{K}(k)/\mathbf{K}(k') = l_1/l_2$ (это можно сделать, например, с помощью таблиц значений полного эллиптического интеграла первого рода). При таком значении k функция (10.41) отобразит верхнюю полуплоскость на внутренность прямоугольника \tilde{L} в плоскости (w), подобного заданному. Затем *линейным отображением* $\zeta = aw + b$ внутренность прямоугольника \tilde{L} можно преобразовать во внутренность заданного прямоугольника L . Другими словами, функция

$$\zeta(z) = a \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + b, \quad 0 < k < 1, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad (10.47)$$

при соответствующем выборе значений параметров k , a и b взаимно однозначно и конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на внутренность любого заданного прямоугольника.

Дополнение 10.2. Интеграл Кристоффеля — Шварца

Рассмотрим задачу построения конформного отображения верхней полуплоскости на внутренность заданного многоугольника. Многоугольник на плоскости определяется последова-

тельностью его вершин A_1, A_2, \dots, A_n , и мы будем считать, что они пронумерованы в том порядке, в котором встречаются при обходе многоугольника против часовой стрелки (в положительном направлении относительно ограниченной им области). Кроме того, так как за вершиной A_n следует вершина A_1 , мы введем для A_n дополнительное обозначение A_0 . Через $\pi\alpha_k, k = \overline{1, n}$, обозначим угол многоугольника при вершине A_k . Этот угол есть угол поворота стороны $A_k A_{k+1}$ вокруг вершины A_k против часовой стрелки до ее совпадения со стороной $A_{k-1} A_k$ (рис. 10.59, а). Предполагаем, что $0 < \pi\alpha_k \leq 2\pi, k = \overline{1, n}$, причем значение угла $\pi\alpha_k$, равное 2π , означает, что область, ограниченная многоугольником, имеет прямолинейный разрез с концевой точкой A_k (точка A_4 на рис. 10.59, б). Из элементарной геометрии известно, что сумма углов n -угольника равна $\pi(n-2)$. Поэтому параметры α_k должны подчиняться уравнению

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2. \quad (10.48)$$

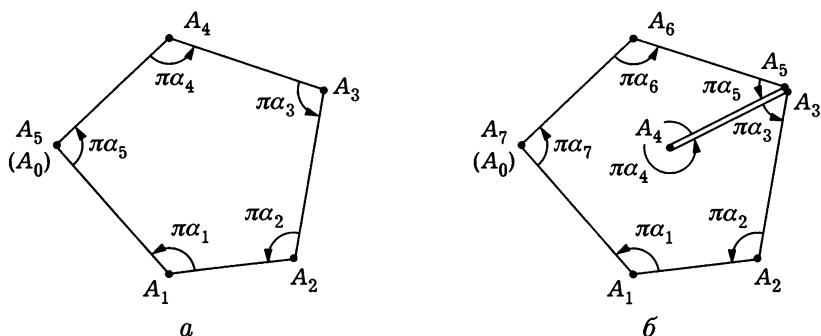


Рис. 10.59

По теореме Римана существует аналитическая функция $f(z)$, конформно отображающая верхнюю полуплоскость на внутренность D многоугольника Π . Поскольку Π многоугольник, ограничивающий область D , и граница верхней по-

луплоскости являются простыми кривыми, функция $f(z)$, согласно *принципу соответствия границ*, имеет непрерывное продолжение на границу верхней полуплоскости, при этом устанавливается непрерывное взаимно однозначное соответствие между действительной осью и многоугольником Π . Прообразы вершин A_k многоугольника при таком соответствии будем обозначать a_k . Иначе говоря, полагаем, что $f(a_k) = A_k$, $k = \overline{1, n}$. При этом условимся считать, что на действительной оси точки a_k следуют в возрастающем порядке, изменив в случае необходимости соответствующим образом нумерацию вершин многоугольника. Кроме того, можно считать, что $a_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$, так как иначе вместо функции $f(z)$ можно рассмотреть функцию $f(z+p)$, где $p \in \mathbb{R}$.

Многочленная функция $(z - a_k)^{\alpha_k - 1}$ допускает выделения ветвей в верхней полуплоскости, и мы остановимся на той из них, которая принимает действительные положительные значения на действительной оси правее точки a_k , т.е. при $z = x > a_k$. Рассмотрим функцию

$$g(z) = (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1},$$

полученную произведением выделенных ветвей многозначных функций. Эта функция аналитична в верхней полуплоскости и непрерывна во всех точках действительной оси, кроме точек a_k . Следовательно, функция

$$G(z) = \int_0^z g(\zeta) d\zeta = \int_0^z (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1} d\zeta,$$

где путь интегрирования, соединяющий точки 0 и z , целиком лежит в верхней полуплоскости, также аналитична в верхней полуплоскости. Но при этом функция $G(z)$ непрерывна всюду на действительной оси, в том числе в точках a_k , $k = \overline{1, n}$, и в точке $z = \infty$.

Непрерывность функции $G(z)$ в точке $z = a_k$ следует из непрерывности подынтегральной функции $g(z)$ в верхней полуплоскости, а также из сходимости несобственного интеграла в точке $z = a_k$ в случае $0 < \alpha_k < 1$. Непрерывность функции $G(z)$ в точке $z = \infty$ вытекает из ее аналитичности в верхней полуплоскости и из асимптотической формулы

$$|g(z)| \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{|z|^2},$$

которую нетрудно получить, опираясь на равенство (10.48). Непрерывность функции $G(z)$ в точке $z = \infty$ означает, что интеграл от функции $g(z)$ вдоль любого пути, лежащего в верхней полуплоскости и соединяющего точку $z = 0$ с точкой $z = \infty$, сходится, причем значение интеграла не зависит от выбора такого пути. Покажем это в простейшем случае, когда два пути, соединяющие точку $z = 0$ с точкой $z = \infty$, представляют собой два луча $\arg z = \varphi$ и $\arg z = \psi$.

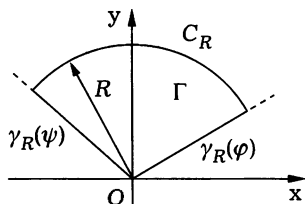


Рис. 10.60

Выберем контур Γ , показанный на рис. 10.60. Согласно теореме Коши, интеграл от функции $g(z)$ по этому контуру равен нулю. Следовательно,

$$\int_{\gamma_R(\varphi)} g(z) dz - \int_{\gamma_R(\psi)} g(z) dz = \int_{C_R} g(z) dz,$$

где $\gamma_R(\varphi)$ и $\gamma_R(\psi)$ — радиальные части контура Γ , а C_R — дуга окружности $|z| = R$, входящая в Γ . Так как в силу асимптотической формулы

$$\left| \int_{C_R} g(z) dz \right| \leq \max_{C_R} |g(z)| \cdot R |\varphi - \psi| \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A |\varphi - \psi|}{R} \underset{R \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0,$$

то, переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, заключаем, что интегралы по двум лучам, выходящим из точки O , равны.

Пусть точка z проходит действительную ось в положительном направлении. Тогда ее образ w при отображении $w = G(z)$ пройдет некоторую замкнутую кривую, которая, вообще говоря, может иметь точки самопересечения. Покажем, что эта кривая на самом деле является ломаной, а ее звенья соответствуют промежуткам действительной оси, на которые она разделяется точками $z = a_k$ и точкой $z = \infty$.

Отметим, что при движении точки w по отрезку вектор смещения имеет постоянный угол наклона по отношению к действительной оси. Это значит, что приращение функции $G(z)$ в точках соответствующего участка действительной оси имеет постоянный аргумент. А это равносильно тому, что аргумент производной функции $G(z)$ постоянен на той части контура, который переходит в отрезок. Таким образом, нам надо доказать, что $\text{Arg } G'(z)$ постоянен на интервалах (a_k, a_{k+1}) , $k = \overline{1, n-1}$, а также на интервалах $(-\infty, a_1)$ и $(a_n, +\infty)$.

Поскольку $G'(z)$ в верхней полуплоскости совпадает с подынтегральной функцией $g(z)$ рассматриваемого интеграла, а эта функция непрерывна на каждом из отмеченных интервалов, то равенство $G'(x) = g(x)$ верно на каждом из упомянутых выше интервалов.

Функция $(z - a_k)^{\alpha_k - 1}$ по предположению принимает действительные положительные значения при $z = x > a_k$, т.е. значения с нулевым аргументом. Чтобы выяснить аргументы значений функции при $z = x < a_k$, рассмотрим приращение функции $\text{Arg}(z - a_k)^{\alpha_k - 1}$ вдоль полуокружности $z = a_k + re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Так как при этом $z - a_k = re^{i\varphi}$, то вдоль указанной полуокружности $\text{Arg}(z - a_k)^{\alpha_k - 1} = (\alpha_k - 1)\varphi$. Следовательно, на левом конце полуокружности $z = a_k - r$, т.е. при $\varphi = \pi$, имеем $\text{Arg}(z - a_k)^{\alpha_k - 1} = (\alpha_k - 1)\pi$. Мы видим, что во всех точках $z = x < a_k$ значения функции $(z - a_k)^{\alpha_k - 1}$ имеют одинаковый аргумент. Можно записать, что

$$(z - a_k)^{\alpha_k - 1} = |z - a_k|^{\alpha_k - 1} e^{(\alpha_k - 1)\pi i}, \quad z = x < a_k.$$

Анализируя сомножители функции $g(z)$, приходим к выводу, что функция $\text{Arg } g(z)$ на действительной оси принимает следующие значения:

$$\text{Arg } g(x) = \begin{cases} 0, & x \in (a_n, +\infty); \\ \sum_{s=k+1}^n (\alpha_s - 1)\pi, & x \in (a_k, a_{k+1}) \quad (k = \overline{1, n-1}); \\ \sum_{s=1}^n (\alpha_s - 1)\pi, & x \in (-\infty, a_1). \end{cases}$$

Обозначим через β_k значение функции $\text{Arg } g(z)$ на интервале (a_k, a_{k+1}) , $k = \overline{1, n-1}$, через β_0 — ее значение на интервале $(-\infty, a_1)$, а через β_n — ее значение на интервале $(a_n, +\infty)$.

Из сказанного следует, что если точка z движется по действительной оси слева направо, то ее образ при отображении $w = G(z)$ проходит замкнутую ломаную, причем звенья ломаной находятся во взаимно однозначном соответствии с интервалами (a_k, a_{k+1}) и $(-\infty, a_1)$, $(a_n, +\infty)$. Вершины A'_k этой ломаной определяются значениями функции $G(z)$ в точках a_k :

$$A'_k = \int_0^{a_k} (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1} d\zeta, \quad k = \overline{1, n}.$$

Выясним, какие значения имеют углы между соседними звеньями ломаной. Если точка z перемещается по интервалу (a_k, a_{k+1}) , то направление перемещения ее образа w при отображении $w = G(z)$ определяется значением $\text{Arg } g(z) = \text{Arg } G'(z)$, т.е. угол наклона этого направления равен β_k . Поэтому угол между звеньями, стыкующимися в вершине A'_k , равен

$$\varphi_k = \beta_k - \beta_{k-1} = \pi \alpha_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Итак, если точка z проходит действительную ось слева направо, то ее образ w при отображении $w = G(z)$ проходит

ломаную, составленную из отрезков Δ_k с концами в точках A'_k и A'_{k+1} , причем угол между соседними отрезками Δ_k и Δ_{k+1} равен $\pi\alpha_k$. Если длины отрезков Δ_k согласованы так, что конец отрезка Δ_{n+1} совпадает с началом отрезка Δ_0 , и отрезки Δ_k не пересекаются, то образом действительной оси будет многоугольник, а образом верхней полуплоскости, согласно принципу соответствия границ, — внутренность этого многоугольника (рис. 10.61).

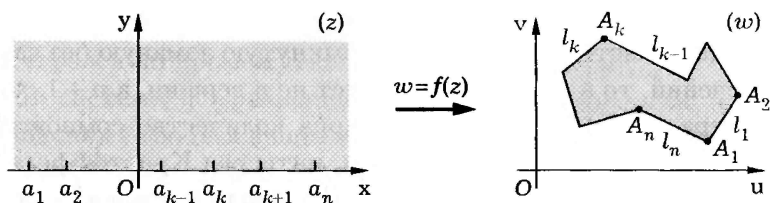


Рис. 10.61

Длины l_k звеньев Δ_k ломаной можно изменять, передвигая точки a_k на действительной оси. С помощью таких передвижений можно получить нужные пропорции между длинами сторон многоугольника и тем самым прийти к конформному отображению верхней полуплоскости на внутренность некоторого многоугольника, подобного заданному. Чтобы получить нужный многоугольник, достаточно составить композицию функции $G(z)$ с линейной функцией, которая изменит подходящим образом размеры многоугольника и его положение с помощью поворота вокруг некоторой точки комплексной плоскости. Итак, конформное отображение верхней полуплоскости на внутренность заданного многоугольника можно осуществить с помощью функции

$$G^*(z) = a \int_0^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dx + b, \quad (10.49)$$

где $a, b \in \mathbb{C}$.

Интеграл в правой части равенства (10.49) называют **интегралом Кристоффеля — Шварца** (Э.Б. Кристоффель (1829–1900) — немецкий математик).

Отметим, что отрезки, которые соответствуют промежуткам $(a_n, +\infty)$ и $(-\infty, a_0)$ действительной оси, параллельны друг другу и фактически составляют одну сторону многоугольника с вершинами A_n и A_1 . Условие параллельности вытекает из тождества (10.48). Если это тождество опустить, но по-прежнему, считать, что интеграл Кристоффеля — Шварца переводит действительную ось в замкнутую ломаную без самопересечений, то в этой ломаной будет не n вершин, а $n + 1$, хотя в интеграле Кристоффеля — Шварца количество сомножителей не изменилось. Таким образом, интеграл Кристоффеля — Шварца может отображать верхнюю полуплоскость на n -угольник или $(n + 1)$ -угольник в зависимости от того, выполняется условие (10.48) или нет. Ясно, что при отображении верхней полуплоскости на n -угольник выгодно в качестве одной из точек a_n выбрать ∞ . Тогда в подынтегральной функции будет не n сомножителей, а $n - 1$ и вместо формулы (10.49) получим

$$G^*(z) = a \int_0^z \prod_{k=1}^{n-1} (z - a_k)^{\alpha_1 - 1} dx + b, \quad (10.50)$$

т.е. выпадает сомножитель, соответствующий бесконечно удаленной точке.

Как выбрать точки a_k , соответствующие вершинам заданного многоугольника Π ? Отметим, что конформных отображений верхней полуплоскости на многоугольник Π существует бесконечно много. Однако для любых двух таких отображений $G_1(z)$ и $G_2(z)$ можно записать $G_1(z) = G_2(h(z))$, где $h(z)$ — дробно-линейное отображение, переводящее верхнюю полуплоскость на себя. С помощью выбора $h(z)$ можно добиться того, что три точки a_k займут фиксированное положение. Тогда кон-

формное отображение будет определено однозначно. Значит, остальные точки a_k тоже будут определены однозначно. Их можно найти из уравнений

$$l_k = |a| \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left(\prod_{s=1}^n |x - a_s|^{\alpha_s - 1} \right) dx, \quad k = \overline{1, n},$$

где под a_{n+1} предполагается точка a_1 , а под интегралом с пределами интегрирования a_n и a_1 — сумма несобственных интегралов по промежуткам $(a_n, +\infty)$ и $(-\infty, a_1)$.

В системе n уравнений $n + 1$ неизвестное, так что два уравнения являются лишними. Действительно, в многоугольнике длины двух сторон однозначно определяются внутренними углами и длинами остальных $n - 2$ сторон. Это значит, что соответствующие два уравнения вытекают из остальных.

Надо сказать, что в прикладных задачах $n - 3$ неизвестных параметра a_k редко находят описанным способом, поскольку, как правило, трудно решить систему из $n - 3$ уравнений, содержащую интегралы. Поэтому в каждом конкретном случае стараются использовать все резервы для того, чтобы упростить отыскание функции $w = G(z)$. Для этого одну из точек a_k обычно полагают бесконечно удаленной, что немного упрощает интеграл Кристоффеля — Шварца. Выбор оставшихся двух точек целесообразно связывать со значениями углов при соответствующих вершинах. В некоторых случаях вычисления можно упростить, если вместо неизвестных параметров a_k рассматривать некоторые соотношения между ними (например, при наличии симметрии многоугольника относительно прямой, проходящей через вершину A_m , можно в качестве прообраза точки A_m выбрать $a_m = 0$, а прообразами вершин A_{m+1} и A_{m-1} взять симметричные относительно $a_m = 0$ точки $a_{m+1} = a_*$ и $a_{m-1} = -a_*$, выразив их через один неизвестный параметр a_*).

Отметим, что выбор нижнего предела $z = 0$ в интегралах формул (10.49) и (10.50) не является существенным. Вместо

этого предела можно выбрать любую точку верхней полуплоскости или действительной оси. Этот выбор лишь изменит значение постоянной b .

Пример 10.35. Отобразим верхнюю полуплоскость на внутренность треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 10.62) с вершинами в точках $A_1 = 0$, $A_2 = 1$ и A_3 , причем вершина A_3 расположена в верхней полуплоскости.

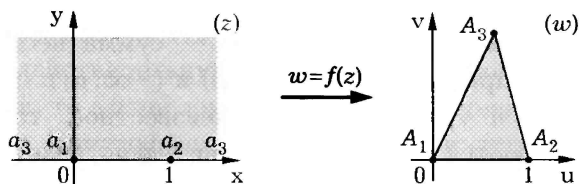


Рис. 10.62

В данном случае $0 < \alpha_k < 1$, $k = 1, 2, 3$, и $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = n - 2 = 1$. В качестве прообразов вершин треугольника выберем $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$. Тогда в интеграле Кристоффеля — Шварца будет всего лишь два множителя. Учитывая это, запишем

$$\begin{aligned} G(z) &= a \int_0^z x^{\alpha_1-1} (x-1)^{\alpha_2-1} dx + b = \\ &= a^* \int_0^z x^{\alpha_1-1} (1-x)^{\alpha_2-1} dx + b, \end{aligned}$$

где $a^* = ae^{(\alpha_2-1)\pi i}$. Так как образом точки $z = 0$ является вершина $A_1 = 0$, то $b = 0$. Из равенства

$$a^* \int_0^1 x^{\alpha_1-1} (1-x)^{\alpha_2-1} dx = a^* B(\alpha_1, \alpha_2)$$

находим $a^* = 1/B(\alpha_1, \alpha_2)$, где $B(\alpha_1, \alpha_2)$ — *бета-функция*. Таким образом, искомое конформное отображение верхней полуплос-

кости на внутренность треугольника реализуется функцией

$$G(z) = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} \int_0^z z^{\alpha_1-1} (1-z)^{\alpha_2-1} dz. \quad \#$$

Конформное отображение верхней полуплоскости на внешность заданного n -угольника можно представить интегралом такого же вида, что и интеграл Кристоффеля — Шварца:

$$f(z) = \tilde{a} \int_0^z \frac{(x-a_1)^{\beta_1-1} (x-a_2)^{\beta_2-1} \dots (x-a_n)^{\beta_n-1}}{(x-a^*)^2 (x-\bar{a}^*)^2} dx + \tilde{b}. \quad (10.51)$$

Здесь a^* — точка верхней полуплоскости, соответствующая бесконечно удаленной точке $w = \infty$; $a_k, k = \overline{1, n}$, — прообразы вершин A_k n -угольника, причем возрастающему порядку точек a_k на числовой оси соответствует обход вершин n -угольника по часовой стрелке; $\beta_k \pi, k = \overline{1, n}$, — внешние углы n -угольника; $a_1, b_1 \in \mathbb{C}$.

Внешние углы β_k многоугольника ($0 \leq \beta_k \leq 2$) связаны с его внутренними углами α_k соотношениями $\beta_k = 2 - \alpha_k, k = \overline{1, n}$, и удовлетворяют тождеству, аналогичному (10.48):

$$\sum_{k=1}^n \beta_k = n + 2.$$

Если прообразом одной из вершин является бесконечно удаленная точка (например, $a_n = \infty$), то, как и в случае внутренней многоугольника, в представлении (10.51) выпадает множитель, относящийся к этой вершине.

В ряде случаев приходится иметь дело с областями, ограниченными совокупностью отрезков прямых и лучей, которые можно рассматривать как обобщенные многоугольники, у которых одна или несколько вершин расположены в бесконечно удаленной точке. Такая интерпретация становится более понятной, если обратиться к изображению рассматриваемых областей на сфере Римана. Граница многоугольных областей,

изображаемых на сфере Римана, будет состоять из дуг окружностей, проходящих через „северный полюс“ сферы. При этом вполне возможно, что „северный полюс“, как вершина, будет повторяться несколько раз (рис. 10.63).

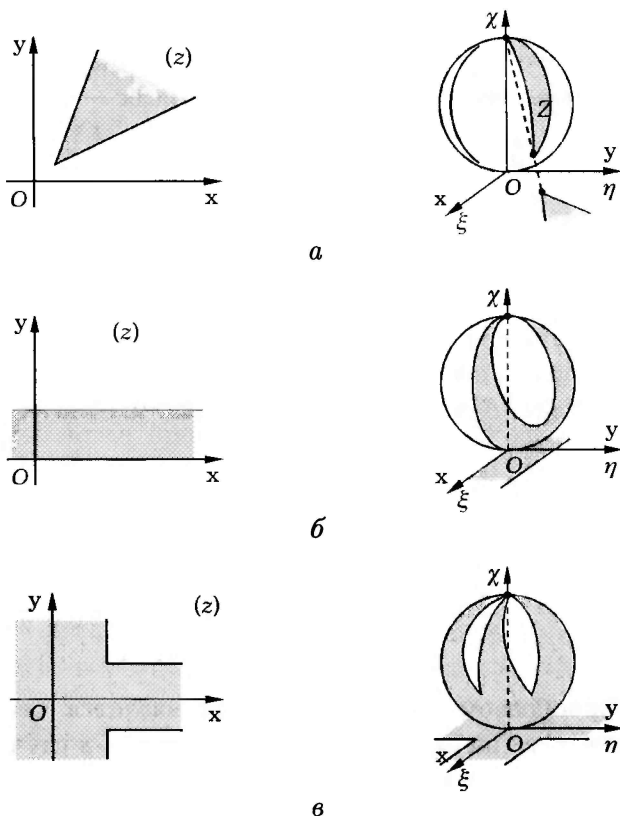


Рис. 10.63

Каждая бесконечно удаленная вершина формируется парой смежных лучей на границе области. Например, угол, образованный двумя лучами, в этом смысле представляет собой двуугольник с одной конечной и одной бесконечной вершиной (рис. 10.63, а). Полоса — это двуугольник, у которого две беско-

нечные вершины (рис. 10.63, б), а область, полученная объединением полуплоскости и полосы, — это четырехугольник с двумя конечными и двумя бесконечными вершинами (рис. 10.63, в).

Первый из этих примеров наталкивает на мысль о том, что следует считать углом при бесконечной вершине. Так как, согласно тождеству (10.48), сумма двух углов двуугольника должна быть нулевой, то угол в бесконечной вершине двуугольника должен отличаться лишь знаком от его угла в конечной вершине. Поэтому в качестве угла α_k в бесконечной вершине в случае двух пересекающихся лучей будем рассматривать угол между лучами, взятый с обратным знаком.

Лучи, образующие бесконечную вершину, могут быть параллельными. В этом случае угол при соответствующей вершине может быть нулевым, равным $-\pi$ или -2π в зависимости от того, на какой угол нужно поворачивать один из лучей до совмещения с другим. Например, на рис. 10.63, в в одной из бесконечных вершин угол равен нулю, а в другой — $-\pi$. В результате сумма всех углов равна 2π , т.е. тождество (10.48) верно.

Пример 10.36. Определим углы обобщенных треугольников, изображенных на рис. 10.64.

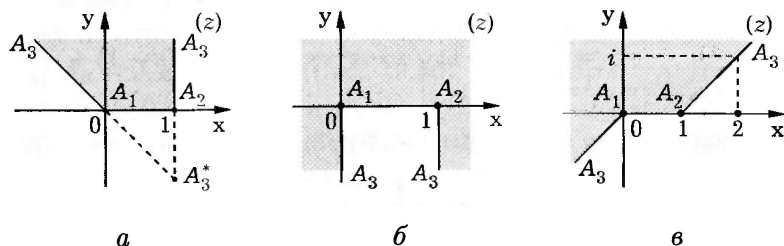


Рис. 10.64

а. Для треугольника с вершинами в точках $A_1 = 0$, $A_2 = 1$ и $A_3 = \infty$ (см. рис. 10.64, а) имеем $\alpha_1 = 3/4$, $\alpha_2 = 1/2$ и $\alpha_3 = -1/4$. Сумма всех трех углов равна единице, что соответствует тождеству (10.48).

б. Внешность полуполосы $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, $\operatorname{Im} z \leq 0$ можно рассматривать как внутренность неограниченного треугольника $A_1 A_2 A_3$ (см. рис. 10.64, б). При таком подходе $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $A_3 = \infty$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 3/2$, $\alpha_3 = -2$.

в. Область, ограниченная биссектрисой третьего квадранта плоскости (z), отрезком $[0, 1]$ действительной оси и лучом, исходящим из точки 1 и проходящим через точку $2 + i$ (см. рис. 10.64, в), представляет собой обобщенный треугольник с вершинами $A_1 = 0$, $A_2 = 1$ и $A_3 = \infty$. В данном случае имеем $\alpha_1 = 5/4$, $\alpha_2 = 3/4$, а для вычисления α_3 удобно использовать тождество (10.48), из которого находим $\alpha_3 = n - 2 - \alpha_1 - \alpha_2 = 1 - 5/4 - 3/4 = -1$. #

Пример 10.37. Найдем отображение $w = f(z)$ верхней полуплоскости на внутренность неограниченного треугольника, изображенного на рис. 10.64, б. Выберем прообразами вершин A_1 , A_2 и A_3 точки $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ и $a_3 = \infty$. Согласно примеру 10.36, $\alpha_1 = \alpha_2 = 3/2$. Так как $f(0) = 0$, то в формуле (10.50) имеем $b = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} f(z) &= a \int_0^z \zeta^{\alpha_1-1} (\zeta-1)^{\alpha_2-1} d\zeta = ai \int_0^z \sqrt{\zeta - \zeta^2} d\zeta = \\ &= \frac{ai}{4} (2z-1) \sqrt{z-z^2} + \frac{ai}{8} \arcsin(2z-1) + \frac{\pi ai}{16}. \end{aligned}$$

Из условия $f(1) = 1$ находим $1 = \pi ai/8$, откуда $a = -\frac{8i}{\pi}$. Итак,

$$f(z) = \frac{2}{\pi} (2z-1) \sqrt{z-z^2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(2z-1) + \frac{1}{2}.$$

Пример 10.38. Отобразим верхнюю полуплоскость на внутренность обобщенного треугольника с вершинами $A_1 = 0$, $A_2 = 1$ и $A_3 = \infty$ (рис. 10.65).

Находим $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1/2$ и $\alpha_3 = -3/2$. Полагая $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$ и учитывая, что $b = f(0) = 0$, с помощью интеграла

Кристоффеля — Шварца (10.50) запишем

$$f(z) = a \int_0^z \zeta^{\alpha_1-1} (\zeta - 1)^{\alpha_2-1} d\zeta = a \int_0^z \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{\zeta-1}} =$$

$$= 2a \int_0^z \zeta d\sqrt{\zeta-1} = 2az\sqrt{z-1} - \frac{4a}{3} \sqrt{(z-1)^3} - \frac{4a}{3}i.$$

Из условия $f(1) = 1$ находим $1 = -\frac{4a}{3}i$, откуда $a = \frac{3}{4}i$. Итак,

$$f(z) = 1 - \frac{z+2}{2} \sqrt{1-z}.$$

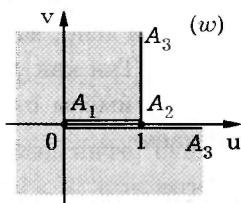


Рис. 10.65

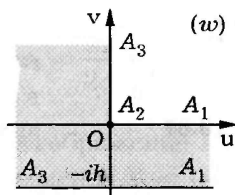


Рис. 10.66

Пример 10.39. Отообразим верхнюю полуплоскость на внутренность обобщенного треугольника с вершинами $A_1 = \infty$, $A_2 = 0$ и $A_3 = \infty$ (рис. 10.66). Для этого треугольника имеем $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 3/2$ и $\alpha_3 = -1/2$. В качестве прообразов вершин треугольника выберем $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ и $a_3 = +\infty$. Тогда с помощью интеграла Кристоффеля — Шварца можем записать

$$f(z) = a \int_0^z \zeta^{\alpha_1-1} (\zeta - 1)^{\alpha_2-1} d\zeta + b = a \int_0^z \frac{\sqrt{\zeta-1}}{\zeta} d\zeta + b.$$

Для вычисления интеграла используем подстановку $\zeta - 1 = t^2$ ($d\zeta = 2t dt$):

$$f(z) = 2a(\sqrt{z-1} - \arctg \sqrt{z-1}) + b. \quad (10.52)$$

Из условия $f(1) = 0$ находим, что $b = 0$. Поскольку при $\operatorname{Re} z = x \rightarrow +\infty$ образ точки z движется в положительном направлении мнимой оси $\operatorname{Re} w = 0$, то заключаем, что $\operatorname{Re} a = 0$ и $\operatorname{Im} a > 0$. При $\operatorname{Re} z = x \rightarrow -\infty$ образ точки z движется по прямой $\operatorname{Im} w = -h$, причем $\operatorname{Re} w = u \rightarrow -\infty$. Поэтому из (10.52) следует, что $a = ih/\pi$. Окончательно получаем

$$f(z) = \frac{2ih}{\pi} (\sqrt{z-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{z-1}). \quad \#$$

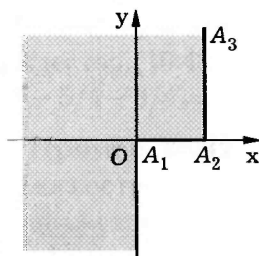


Рис. 10.67

Пример 10.40. Отобразим верхнюю полуплоскость на область, изображенную на рис. 10.67. В качестве прообразов вершин $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $A_3 = \infty$ выберем точки $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$. Из рисунка ясно, что $\alpha_1 = 3/2$, $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = -1$. Так как $f(0) = 0$, то в формуле (10.50) имеем $b = 0$. В результате получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= a \int_0^z \zeta^{\alpha_1-1} (\zeta-1)^{\alpha_2-1} d\zeta = a \int_0^z \frac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta-1}} d\zeta = \\ &= -ai \int_0^z \frac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta}} d\zeta = 2ai \int_0^z \sqrt{\zeta} d\sqrt{1-\zeta}. \end{aligned}$$

Выполнив в интеграле замену переменного $\sqrt{1-\zeta} = \xi$ (при этом $\zeta = 1 - \xi^2$), заключаем, что

$$\begin{aligned} f(z) &= 2ai \int_1^{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{1-\xi^2} d\xi = ai \left(\sqrt{z-z^2} + \arcsin \sqrt{1-z} - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= ai \sqrt{z-z^2} - ai \arcsin \sqrt{z}. \end{aligned}$$

Из условия $f(1) = 1$ находим $1 = -ai \arcsin 1$, откуда $ai = -2/\pi$. Итак,

$$f(z) = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \sqrt{z} - \sqrt{z-z^2} \right).$$

Вопросы и задачи

10.1. Найдите все линейные функции, отображающие нижнюю полуплоскость на верхнюю.

10.2. Существует ли линейное отображение, переводящее треугольник с вершинами в точках $-1 - i$, $-i$ и $-3i$ в треугольник с вершинами в точках $1 + i$, $3 + i$ и $5 + i$?

10.3. Найдите угол между двумя параллельными прямыми в бесконечно удаленной точке.

10.4. Докажите, что при дробно-линейном отображении $w = (az + b)/(cz + d)$, $ad \neq bc$, прямые $\operatorname{Re}(\lambda z) = \alpha$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, не проходящие через точку $z = -d/c$, переходят в окружности

$$|w - w_0| = \left| \frac{(ad - bc)\lambda}{2\alpha|c|^2 + 2\operatorname{Re}(cd\bar{\lambda})} \right|, \quad w_0 = \frac{ad\bar{\lambda} + \bar{c}b\lambda + 2\alpha a\bar{c}}{2\alpha|c|^2 + 2\operatorname{Re}(cd\bar{\lambda})}.$$

10.5. Выясните, существует ли отображение круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$, при котором точки $z = 0$ и $z_1 = 1/2$ переходят в точки $w = a$ и $w_1 = -a$, где $0 < a < 1$.

10.6. Найдите дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z - 2| < 1$ на круг $|w - 2i| < 2$ так, что $w(2) = i$ и $\arg w'(2) = \pi/2$.

10.7. Найдите образы следующих областей при указанных дробно-линейных отображениях:

- а) $\{z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Re} z < 1/2\}$, $w = 1/z$;
- б) $\{z \in \mathbb{C}: 0 < \arg z < \varphi_0 \leq \pi\}$, $w = 1/z$;
- в) $\{z \in \mathbb{C}: |z| > R\}$, $w = (z - i)/z$;
- г) $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = (1 + z)/(1 - z)$.

10.8. Найдите образ области, ограниченной окружностями $|z + 1| = 1$, $|z - i\sqrt{3}| = 1$ и $|z - 1| = 1$, при отображении $w = 1/z$.

10.9. Найдите отображение $w(z)$, переводящее круг $|z| < 2$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ так, что $w(0) = 0$ и $\arg w'(0) = \pi/2$.

10.10. Найдите отображение $w(z)$, переводящее круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, что $w(0) = 0$ и $\arg w'(0) = -\pi/2$.

10.11. Найдите такое отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$, что $w(a) = \bar{a}$ и $\arg w'(a) = -\pi/2$, $\operatorname{Im} a > 0$.

10.12. Докажите, что дробно-линейное отображение

$$\frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0} = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} e^{i\alpha}$$

полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ удовлетворяет условиям $w(z_0) = w_0$, $\arg w'(z_0) = \alpha$.

10.13. Отобразите на верхнюю полуплоскость круговую луночку $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| > 1, |z - i| < 1\}$.

10.14. Отобразите на верхнюю полуплоскость: а) круг $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[1/2, 1]$ действительной оси; б) круг $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[-1, 0]$ действительной оси; в) верхнюю половину круга $|z| < 1$ с разрезом по отрезку мнимой оси, соединяющему точки $z_1 = ai$ и $z_2 = i$, $0 < a < 1$.

10.15. Постройте отображение полуплоскости $\operatorname{Im} z < 1$ с выкинутым кругом $|z| \leq 1$ на следующие области с указанной нормировкой: а) круг $|w| < 1$, $w(-3i) = 0$, $\arg w'(-3i) = \pi/3$; б) круг $|w| < 1$, $w(-3i) = (-1 + i)/2$, $\arg w'(-3i) = \pi/2$; в) верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, $w(-3i) = 1 + i$, $\arg w'(-3i) = \pi$.

10.16. Отобразите на верхнюю полуплоскость плоскость с заданным разрезом: а) по отрезку $[-1, b]$ действительной оси; б) по дуге окружности $|z| = 1$, соединяющей точки $e^{\pm i\alpha}$ и проходящей через точку $z = -1$.

10.17. Отобразите на верхнюю полуплоскость: а) полосу $0 < \operatorname{Re} z < 1$ с разрезом по отрезку $[0, h]$, $h < 1$, действительной оси; б) область $\{z \in \mathbb{C}: |z - 1| > 1, |z + 1| > 1\}$ с разрезом по лучу $[2, +\infty)$ действительной оси.

10.18. Найдите образы сектора, ограниченного лучами $\arg z = \varphi_0$ и $\arg z = \varphi_0 + 2\pi/n$, полосы $y_0 < y < y_0 + 2\pi$ и полосы $-\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2$ при отображении $w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$.

10.19. Для функции Жуковского найдите образы:

а) нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$;

б) круга $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[0, 1]$ действительной оси;

в) области $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$;

г) внешности окружности $|z| = \rho$ и внутренней окружности $|z| = 1/\rho$, $\rho > 1$;

д) сектора, ограниченного лучами $\arg z = \alpha$ и $\arg z = \pi - \alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$;

е) области $D = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \arg z < \alpha\}$, $\alpha < \pi/2$;

ж) области $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| > 1, 0 < \arg z < \alpha\}$, $\alpha < \pi/2$.

10.20. Найдите образы: а) полуполосы $0 < \operatorname{Re} z < \pi$, $\operatorname{Im} z > 0$ и полосы $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ при отображении $w = \cos z$; б) полуполосы $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$, $\operatorname{Im} z < 0$ и полосы $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$ при отображении $w = \sin z$.

11. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

11.1. Предварительные замечания

Теория функций комплексного переменного находит широкое применение при решении разнообразных прикладных задач. Ниже ограничимся рассмотрением класса задач, связанного с изучением *плоского векторного поля*, описываемого при помощи *комплексного потенциала*. Изучение такого поля в *области* сложной формы часто удается существенно упростить путем *конформного отображения* этой области на более простую. Более того, нередко комплексный потенциал плоского векторного поля в сложной по конфигурации области удается построить именно при помощи ее конформного отображения.

Рассматриваемый класс задач характерен тем, что векторная функция $\mathbf{f}(x, y)$, задающая в некоторой области D на плоскости векторное поле, не зависит от времени и связана с *потенциальной функцией* $\tilde{\Phi}(x, y)$ этого поля линейным соотношением

$$\mathbf{f}(x, y) = \beta \operatorname{grad} \tilde{\Phi}(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (11.1)$$

где коэффициент $\beta \in \mathbb{R}$ связан с физическим содержанием задачи. Например, для задач гидромеханики идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости функция $\mathbf{f}(x, y)$ описывает векторное поле скорости и $\beta = 1$. Для стационарных задач теплопроводности функция $\mathbf{f}(x, y)$ характеризует векторное поле \mathbf{q} плотности теплового потока, а $\tilde{\Phi}(x, y)$ представляет собой функцию распределения температуры T в области D . Согласно известному из курса физики закону Фурье (Ж.Б.Ж. Фурье (1768–1830) — французский математик и физик), коэффициент β , взятый с обратным знаком, совпадает с коэффициентом теплопроводности λ той среды, которая заполняет область D . Знак минус

следует из второго закона термодинамики, устанавливающего, что теплота передается от участков среды с более высокой температурой к участкам с более низкой температурой, т.е. в направлении, противоположном градиенту температуры.

При диффузии в среде некоторой примеси функция $\tilde{\Phi}(x, y)$ характеризует распределение в области D концентрации этой примеси, а $\mathbf{f}(x, y)$ — вектор плотности потока примеси. В этом случае равенство (11.1) выражает закон Фика (А.Э. Фик (1829–1901) — немецкий физик), а $-\beta = \mu$ — коэффициент диффузии. Через среду в области D может просачиваться газ или жидкость. Тогда функция $\tilde{\Phi}(x, y)$ описывает распределение давления в D , функция $\mathbf{f}(x, y)$ задает вектор скорости частиц газа или жидкости в среде, равенство (11.1) выражает закон Дарси (А. Дарси (1803–1858) — французский инженер), а $-\beta = \kappa$ — коэффициент фильтрации.

Для электростатического поля функция $\mathbf{f}(x, y)$ описывает вектор напряженности, а функция $\tilde{\Phi}(x, y)$ — распределение в D потенциала этого поля. В этом случае $\beta = -1$. Если среда в области D обладает электрической проводимостью с коэффициентом σ , то равенство (11.1) сводится к соотношению $\mathbf{j}(x, y) = -\sigma \text{grad} U(x, y)$, устанавливающему связь электрического потенциала $U(z)$ с вектором $\mathbf{j}(x, y)$ плотности электрического тока, т.е. дает обобщение известного закона Ома (Г.С. Ом (1787–1854) — немецкий физик).

Поскольку равенство (11.1) содержит постоянный коэффициент β , функция $\tilde{\Phi}(x, y)$ и функция $\Phi(z)$, определяемая согласно (5.47), связаны уравнением

$$\Phi(z) = \beta \tilde{\Phi}(z), \quad z \in D. \quad (11.2)$$

Помимо (11.1) для рассматриваемого класса задач справедливо равенство

$$\text{div} \mathbf{f}(x, y) = 0, \quad z \in D, \quad (11.3)$$

отражающее закон сохранения той или иной физической субстанции в окрестности произвольной точки области D (для

задач гидромеханики и диффузии — сохранение массы жидкости или примеси, для задач теплопроводности и электростатики — теплоты или заряда). Равенства (11.1) и (11.3) означают, что рассматриваемое плоское векторное поле является *лапласовым* и позволяют ввести для него комплексный потенциал (см. Д.5.1).

Сформулируем некоторые задачи, которые часто встречаются в приложениях.

1. В плоской области D заданы две линии Γ_1 и Γ_2 , не имеющие общих точек. Требуется построить в D *потенциальное векторное поле* так, чтобы Γ_1 и Γ_2 являлись либо *линиями равного потенциала*, либо *линиями тока* этого поля с заданной разностью значений потенциальной функции или *функции тока* соответственно.

2. В неограниченной плоской области D задана *неограниченная кривая* Γ и значение производной $W'(\infty)$ комплексного потенциала в бесконечно удаленной точке. Требуется построить в D плоское векторное поле так, чтобы Γ являлась либо *линией равного потенциала*, либо *линией тока* этого поля.

3. Во внешности D плоского *простого замкнутого контура* L требуется построить векторное поле так, чтобы контур L совпадал или с *линией равного потенциала*, или с *линией тока* этого поля при заданном значении либо *потока векторного поля* через L , либо *циркуляции* вдоль L соответственно.

Эти формулировки не исчерпывают все прикладные задачи. Иногда нет необходимости в построении векторного поля, а достаточно получить лишь его некоторую интегральную характеристику (например, суммарное термическое или электрическое сопротивление, суммарный расход жидкости, подъемную силу при обтекании профиля и т.п.). Область D , в которой рассматривается векторное поле, может быть задана сложным образом. Так, в примере 11.11 эта область ограничена двумя линиями равного потенциала и двумя линиями тока.

Решение перечисленных задач в общем случае может быть не единственным. Однако дополнительные ограничения, обу-

словленные особенностями конкретной задачи, гарантируют единственность решения и позволяют построить комплексный потенциал, описывающий соответствующее плоское векторное поле, с точностью до постоянного слагаемого. Рассмотрим, например, первую из сформулированных задач.

Приведем основную идею доказательства того, что если в области D существует векторное поле, для которого кривые Γ_1 и Γ_2 являются линиями равного потенциала с заданной разностью потенциалов $\Delta \neq 0$, то такое поле единственно.

Условие $\Delta \neq 0$ означает, что кривые Γ_1 и Γ_2 в области D не пересекаются. Рассмотрим в D два комплексных потенциала $W(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ и $W_1(z) = \Phi_1(x, y) + i\Psi_1(x, y)$, которые определяют два векторных поля с линиями равного потенциала Γ_1 и Γ_2 и одинаковой разностью потенциалов Δ на них. Тогда аналитическая функция $W_*(z) = W(z) - W_1(z)$ является комплексным потенциалом некоторого векторного поля в D , причем кривые Γ_1 и Γ_2 являются линиями равного потенциала этого поля с нулевой разностью потенциалов:

$$\Phi_* \Big|_{\Gamma_1} = (\Phi - \Phi_1) \Big|_{\Gamma_1} = (\Phi - \Phi_1) \Big|_{\Gamma_2} = \Phi_* \Big|_{\Gamma_2},$$

где $\Phi(x, y) = \operatorname{Re} W_*(z)$, $z = x + iy \in D$.

Функция $\Phi_*(x, y)$, как действительная часть аналитической функции $W_*(z)$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 \Phi_* = 0$. Оператор Лапласа в каждой точке линии равного потенциала может быть представлен в виде $\nabla^2 = \partial^2 / \partial s^2 + \partial^2 / \partial n^2$, где s и n — направления по касательной и по нормали к этой линии. Но на линии равного потенциала $\partial^2 \Phi_* / \partial s^2 \equiv 0$. Поэтому в каждой точке этой линии

$$\frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial n^2} = 0. \quad (11.4)$$

Соединим кривые Γ_1 и Γ_2 какой-либо линией тока γ векторного поля, описываемого комплексным потенциалом $W_*(z)$. В каждой своей точке эта линия пересекается под прямым углом с линией равного потенциала. Поэтому вдоль всей линии тока

справедливо равенство (11.4). Вводя *натуральный параметр* s кривой γ , можем рассматривать равенство (11.4) как дифференциальное уравнение $\varphi''(s) = 0$ для функции $\varphi(s) = \Psi_*(\gamma(s))$, где $\Psi_*(x, y) = \text{Im } W_*(z)$, $z \in D$. Интегрируя это уравнение, получаем $\varphi(s) = C_1 s + C_2$. Но так как в конечных точках кривой γ , лежащих на кривых равного потенциала Γ_1 и Γ_2 , функция $\Phi_*(x, y)$ имеет одинаковые значения, то функция $\varphi(s)$ тоже имеет одинаковые значения для значений s , соответствующих этим точкам. Следовательно, $C_1 = 0$, функция $\Phi_*(x, y)$ постоянна на γ . Выбирая в качестве γ всевозможные линии тока, соединяющие Γ_1 и Γ_2 , заключаем, что $\Phi_*(x, y) = \text{const}$ в D и

$$W'_*(z) = \frac{\partial \Phi_*}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi_*}{\partial y} \equiv 0,$$

т.е. $W_*(z) \equiv \text{const}$ в D . Это означает, что комплексный потенциал плоского векторного поля при задании разности значений потенциальной функции этого поля на двух не имеющих общих конечных точек линиях Γ_1 и Γ_2 определен однозначно (с точностью до постоянного слагаемого).

Аналогично можно обосновать, что комплексный потенциал, описывающий плоское векторное поле с линиями тока Γ_1 и Γ_2 и с заданной разностью значений функции тока на этих линиях, определен однозначно.

11.2. Непосредственное использование известного комплексного потенциала

В некоторых достаточно простых случаях форма *линий тока* и *линий равного потенциала плоских векторных полей*, рассмотренных в Д.5.1, позволяет для решения конкретной задачи непосредственно применить соответствующий *комплексный потенциал*.

Пример 11.1. Используем комплексный потенциал вида (5.62) для нахождения теплопотерь трубы теплотрассы.

Пусть труба радиуса R заложена в грунте на глубине H от его горизонтальной поверхности (рис. 11.1). Примем, что перепад между температурами наружной поверхности трубы $T_{\text{тр}}$ и поверхности грунта T_0 равен ΔT , а коэффициент теплопроводности грунта λ .

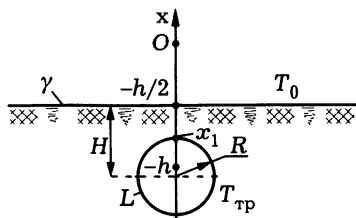


Рис. 11.1

Согласно закону Фурье (см. 11.1), вектор \mathbf{q} плотности теплового потока, передаваемого путем теплопроводности в неподвижной среде, пропорционален градиенту температуры T , причем $\mathbf{q} = -\lambda \text{grad} T$. Таким образом, векторное поле \mathbf{q} является потенциальным. В силу (11.2) потенциальная функция в данном случае имеет вид $\Phi(z) = -\lambda T$. Поскольку в грунте отсутствуют источники (или стоки) теплоты, то это векторное поле соленоидальное: $\text{div} \mathbf{q} = 0$. Поэтому установившееся распределение температуры T в нем удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 T = \text{div} \text{grad} T = \text{div} \mathbf{q} = 0.$$

Для достаточно длинной трубы (по сравнению с ее радиусом) такое поле можно считать плоскопараллельным и использовать для его описания комплексный потенциал.

В плоскости (z) поверхностям грунта и трубы, являющимся изотермическими, будут соответствовать линии равного потенциала $\Phi(z) = -\lambda T_0 = \text{const}$ и $\Phi(z) = -\lambda T_{\text{тр}} = \text{const}$, представляющие собой горизонтальную прямую γ и окружность L радиуса R (см. рис. 11.1). Форма и взаимное расположение таких линий равного потенциала характерны для плоского векторного поля системы двух источников интенсивностью $\pm Q$, размещенных в точках $(-h; 0)$ и $(0; 0)$, симметричных относительно прямой $x = -h/2$ (см. рис. 5.21). Описывающий это поле комплексный потенциал (5.62) можно использовать для решения рассматриваемой задачи, если под Q понимать мощность

теплопотерь участка трубы единичной длины, а действительную ось $\text{Im } z = 0$ на рис. 11.1 провести через центр поперечного сечения трубы перпендикулярно поверхности грунта и в точке пересечения оси с этой поверхностью принять $z = -h/2$.

Согласно условию, $\Phi(-h/2, 0) - \Phi(x_1, 0) = \lambda \Delta T$, где $x_1 = -h/2 - H + R$ — абсцисса точки пересечения действительной оси с контуром трубы (см. рис. 11.1). Учитывая (5.62), запишем

$$\begin{aligned} \lambda \Delta T &= \Phi(-h/2, 0) - \Phi(x_1, 0) = \\ &= 0 - \frac{Q}{2\pi} \ln \left| \frac{x_1 + h}{x_1} \right| = \frac{Q}{2\pi} \ln \left| \frac{x_1}{x_1 + h} \right|. \end{aligned} \quad (11.5)$$

По заданным значениям R и $H = l_R$, используя первое равенство (5.65), находим $d = h/2 = \sqrt{l_R^2 - R^2} = \sqrt{H^2 - R^2}$. Подставляя выражения для h и x_1 в (11.5), устанавливаем связь между Q и ΔT :

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{Q}{2\pi\lambda} \ln \left| \frac{R - H - \sqrt{H^2 - R^2}}{R - H + \sqrt{H^2 - R^2}} \right| = \\ &= \frac{Q}{2\pi\lambda} \ln \frac{\sqrt{H^2 - R^2} + H - R}{\sqrt{H^2 - R^2} - H + R}. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Например, при $H/R = 2$ имеем $Q = 2\pi\lambda\Delta T / \ln(2 + \sqrt{3})$.

Если труба теплотрассы покрыта кольцевым слоем теплоизоляции с коэффициентом теплопроводности λ_1 и внешним радиусом R_1 , то влияние этого слоя на теплопотери можно приближенно оценить следующим образом. Примем, что температура теплоизоляции на внешней поверхности слоя одинакова и обозначим ее T_1 . Тогда вместо (11.6) получим

$$\Delta T_1 = \frac{Q}{2\pi\lambda} \ln \frac{\sqrt{H^2 - R_1^2} + H - R_1}{\sqrt{H^2 - R_1^2} - H + R_1}, \quad \Delta T_1 = T_1 - T_0. \quad (11.7)$$

Значению теплопотерь Q соответствует перепад $\Delta T_T = T_{\text{тр}} - T_1$ температур по толщине слоя теплоизоляции, равный [VIII-11.3]

$$\Delta T_T = \frac{Q}{2\pi\lambda_1} \ln \frac{R_1}{R}. \quad (11.8)$$

Так как заданное значение ΔT связано соотношением $\Delta T = T_{\text{тр}} - T_0 = \Delta T_{\text{Т}} + \Delta T_1$, то из (11.7) и (11.8) устанавливаем связь между Q и ΔT с учетом слоя теплоизоляции:

$$\Delta T = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{1}{\lambda} \ln \frac{\sqrt{H^2 - R_1^2} + H - R_1}{\sqrt{H^2 - R_1^2} - H + R_1} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R_1}{R} \right).$$

Второе слагаемое в скобках в правой части этого равенства выполняет роль поправки, оценивающей влияние слоя теплоизоляции. Точность этой оценки зависит от достоверности сделанного предположения о том, что температуру внешней поверхности слоя теплоизоляции можно принять одинаковой.

Пример 11.2. Комплексный потенциал (5.62) можно использовать для нахождения электрического сопротивления изоляции одножильного кабеля радиуса r_1 со смещенным проводом радиуса r_0 в зависимости от эксцентриситета ε , характеризующего смещение провода (рис. 11.2).

В данном случае линиями равного потенциала являются окружности радиусов r_1 и r_0 . Обозначим разность потенциалов этих линий через ΔU и установим связь эксцентрично расположенных окружностей с линиями равного потенциала на рис. 5.21, задаваемыми первым равенством (5.64). Действительную ось $\text{Im } z = 0$ на рис. 11.2 проведем через центры окружностей, а начало координат выберем так, как показано на рис. 5.21. Тогда источники интенсивностью $\pm Q$ будут расположены в точках $z = 0$ и $z = -h$, симметричных относительно прямой $\text{Re } z = -d = -h/2$ (см. рис. 11.2). Обозначая абсциссы центров окружностей радиусов r_1 и r_0 через x_1 и x_0 соответ-

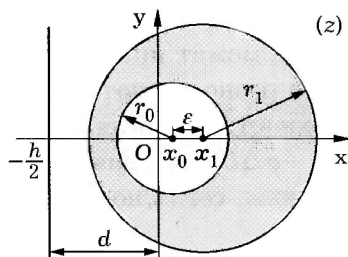


Рис. 11.2

ственно и используя первое равенство (5.65), получаем

$$\begin{aligned}x_0 &= \sqrt{r_0^2 + d^2} - d, & x_1 &= \sqrt{r_1^2 + d^2} - d, \\ \varepsilon &= x_1 - x_0 = \sqrt{r_1^2 + d^2} - \sqrt{r_0^2 + d^2}.\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$d = \frac{h}{2} = \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt{(r_1^2 - r_0^2 - \varepsilon^2)^2 - (2\varepsilon r_0)^2}$$

и затем x_0 . Это позволяет вычислить действительную часть разности значений комплексного потенциала (5.62) в точках $z = x_1 - r_1 = x_0 + \varepsilon - r_1$ и $z = x_0 - r_0$ окружностей:

$$\Delta\Phi = \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \left| \frac{x_0 + \varepsilon - r_1 + h}{x_0 + \varepsilon - r_1} \right| - \ln \left| \frac{x_0 - r_0 + h}{x_0 - r_0} \right| \right).$$

В данном случае Q характеризует силу электрического тока, который может пройти через изоляцию кабеля единичной длины при разности потенциалов ΔU между проводом и внешней поверхностью кабеля. Принимая в (11.2) $\beta = -\sigma$, получаем $\Delta\Phi = -\sigma\Delta U$, что для сопротивления изоляции кабеля единичной длины, согласно известному из курса физики закону Ома, дает

$$R = \frac{\Delta U}{Q} = -\frac{\Delta\Phi}{\sigma Q} = \frac{1}{2\pi\sigma} \ln \left| \frac{(x_0 + \varepsilon - r_1)(x_0 - r_0 + h)}{(x_0 - r_0)(x_0 + \varepsilon - r_1 + h)} \right|.$$

Отсюда следует, что $R = 0$ при $\varepsilon = r_1 - r_0$, когда провод касается внешней поверхности кабеля. Если же оси кабеля и провода совпадают, т.е. $\varepsilon = 0$, то это соответствует предельному случаю $x_0 \rightarrow 0$ и $h \rightarrow \infty$, так что $R \rightarrow \frac{\ln(r_1/r_0)}{2\pi\sigma}$. Можно показать, что при этом сопротивление изоляции стремится к своему наибольшему значению. Таким образом, эксцентричное расположение провода в изоляции понижает ее сопротивление. Исходя из допустимого уменьшения сопротивления изоляции по

сравнению с его наибольшим значением, можно установить допуск на эксцентриситет ϵ при изготовлении кабеля.

Пример 11.3. Комплексный потенциал вида (5.58) описывает плоское магнитное поле, создаваемое тонким проводником, перпендикулярным плоскости (z), по которому течет постоянный электрический ток силой I . При этом в (5.58) интенсивность вихря $\Gamma = I$, а функции $f(z) = \overline{W'(z)}$ соответствует вектор $\mathbf{H}(z)$ напряженности магнитного поля. Линии равного потенциала и силовые линии такого поля представлены на рис. 5.19.

Пусть этот проводник находится во внешнем однородном магнитном поле напряженностью H_0 , описываемом комплексным потенциалом $W_0(z) = H_0 z$. Тогда в силу аддитивности комплексного потенциала, учитывая (5.58), получаем комплексный потенциал

$$W(z) = H_0 z + \frac{I}{2\pi i} \ln z, \quad (11.9)$$

описывающий взаимодействие внешнего поля и поля проводника. Дифференцированием (11.9) найдем напряженность результирующего поля

$$H(z) = \overline{W'(z)} = H_0 + i \frac{I}{2\pi \bar{z}}.$$

В точке $z_0 = iI/(2\pi H_0)$ напряженность этого поля обращается в нуль. Уравнение семейства силовых линий следует из условия постоянства значений функции тока этого потенциала:

$$\Psi(z) = \text{Im } W(z) = H_0 y - \frac{I}{2\pi} \ln |z| = H_0 y - \frac{I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) = k,$$

где $k = \text{const}$. Отсюда можно выразить x как явную функцию переменного y :

$$x = \pm \sqrt{e^{4\pi(H_0 y - k)/I} - y^2}. \quad (11.10)$$

Точка z_0 является для проходящей через нее силовой линии *точкой самопересечения* (рис. 11.3). Часть этой силовой линии образует контур, не пронизываемый для внешнего магнитного поля и охватывающий некоторую область D^* , пересекаемую проводником с током. Подставляя в (11.10) значения $x = \operatorname{Re} z_0 = 0$ и $y = \operatorname{Im} z_0 = I/(2\pi H_0)$, находим значение константы

$$k = \frac{I}{2\pi} \left(1 - \ln \frac{I}{2\pi H_0} \right)$$

для этой силовой линии. #

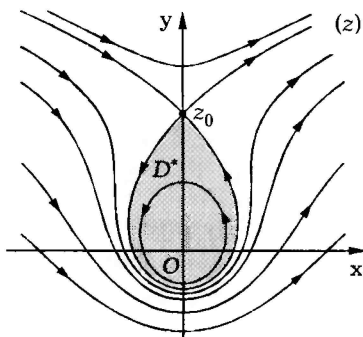


Рис. 11.3

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое двумя параллельными тонкими проводниками с постоянным током, перпендикулярными плоскости (z) и пересекающими ее в точках $z = \pm ih$. Примем, что сила тока в каждом проводнике равна I и токи одинаково направлены. Используя аддитивность комплексного потенциала вида (5.58), получаем

$$W_1(z) = \frac{I}{2\pi i} \ln(z - ih) + \frac{I}{2\pi i} \ln(z + ih) = \frac{I}{2\pi i} \ln(z^2 + h^2). \quad (11.11)$$

Уравнение семейства силовых линий этого поля можно получить из условия постоянства значений функции тока

$$\Psi_1(z) = \operatorname{Im} W_1(z) = -\frac{I}{2\pi} \ln|z^2 + h^2| = -\frac{I}{2\pi} \ln|(z - ih)(z + ih)|,$$

т.е. $|z^2 + h^2| = \sqrt{x^2 + (y-h)^2} \sqrt{x^2 + (y+h)^2} = \text{const}$. Это равенство задает семейство плоских кривых (рис. 11.4), называемых *овалами Кассини*. Каждую из таких кривых можно определить как множество точек, произведение расстояний которых до ее фокусов в точках $z = \pm ih$ постоянно. Одна из силовых линий имеет точку самопересечения $z = 0$ и представляет собой *лемнискату Бернулли*. В этой точке напряженность магнитного поля равна нулю:

$$H(z) = \overline{W_1'(z)} = \frac{I}{2\pi} \overline{\left(\frac{2z}{i(z^2 + h^2)} \right)} = \frac{I\bar{z}}{\pi(\bar{z}^2 + h^2)} = 0.$$

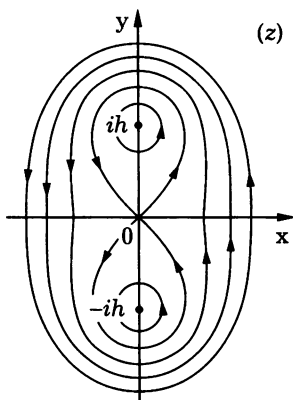


Рис. 11.4

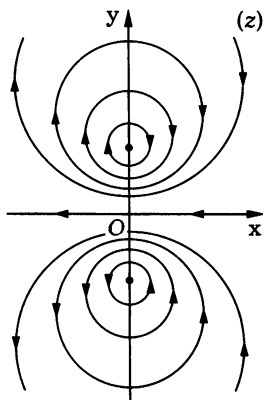


Рис. 11.5

Пусть теперь токи, текущие по проводникам, одинаковы по силе, но противоположно направлены. Тогда, считая, что точке $z = -ih$ соответствует ток силой $I > 0$, комплексный потенциал плоского магнитного поля, создаваемого такими проводниками, можем записать в виде

$$W_2(z) = \frac{I}{2\pi i} \ln(z + ih) - \frac{I}{2\pi i} \ln(z - ih) = \frac{I}{2\pi i} \ln \frac{z + ih}{z - ih}. \quad (11.12)$$

Из условия $\Psi_2 = \text{Im } W_2(z) = \text{const}$ получаем, что силовые линии будут окружностями

$$\frac{x^2 + (y + h)^2}{x^2 + (y - h)^2} = k_\Psi,$$

или

$$x^2 + \left(y - \frac{h(k_\Psi + 1)}{k_\Psi - 1} \right)^2 = \frac{4k_\Psi h^2}{(k_\Psi - 1)^2}.$$

Центры этих окружностей расположены на мнимой оси $\text{Re } z = 0$ (рис. 11.5). Силовая линия, соответствующая значению $k_\Psi = 1$, совпадает с действительной осью $\text{Im } z = 0$. Напряженность этого поля всюду отлична от нуля.

Рассмотрим взаимодействие магнитного поля таких проводников, образующих двухпроводную линию, перпендикулярную плоскости (z), с внешним однородным магнитным полем напряженностью H_0 . Для результирующего поля комплексный потенциал с учетом (11.12) примет вид

$$W_*(z) = H_0 z + \frac{I}{2\pi i} \ln \frac{z + ih}{z - ih}. \quad (11.13)$$

Дифференцируя (11.13), находим напряженность результирующего поля

$$\begin{aligned} H_*(z) &= \overline{W_*'(z)} = H_0 + \frac{I}{2\pi} \overline{\left(\frac{1}{i(z + ih)} - \frac{1}{i(z - ih)} \right)} = \\ &= H_0 - \frac{Ih}{\pi(\bar{z}^2 + h^2)}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Ее значение обращается в нуль в точках $z = \pm \sqrt{Ih/(\pi H_0) - h^2}$. В случае $I = \pi H_0 h$ такая точка единственна и совпадает с началом координат $z = 0$. Качественная картина силовых линий для этого случая показана на рис. 11.6. При $I < \pi H_0 h$ таких точек две и лежат они на мнимой оси $\text{Re } z = 0$ (рис. 11.7).

Если $I = 0$, то из (11.14) следует, что магнитное поле всюду однородно и совпадает с внешним магнитным полем. При

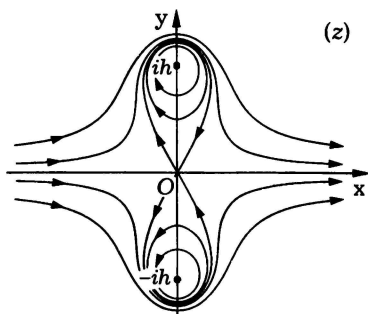


Рис. 11.6

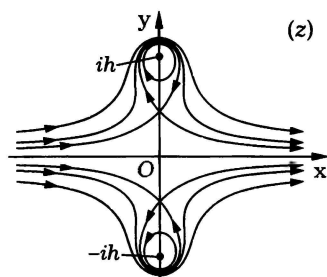


Рис. 11.7

$I < 0$, т.е. при смене направления тока в проводниках, точки с нулевым значением напряженности оказываются за пределами отрезка мнимой оси, соединяющего точки $z = \pm ih$. При этом характер расположения силовых линий близок к случаю взаимодействия одиночного проводника с внешним магнитным полем (см. рис. 11.3).

При $I > \pi H_0 h$ точек с нулевым значением напряженности также две, но они лежат на действительной оси $\text{Im } z = 0$ (рис. 11.8, а), причем с увеличением силы тока I эти точки удаляются от начала координат (рис. 11.8, б). Через эти точки проходит силовая линия, сопадающая с действительной осью и образующая контур, не проницаемый для внешнего магнитного поля и охватывающий некоторую область D , которую пересека-

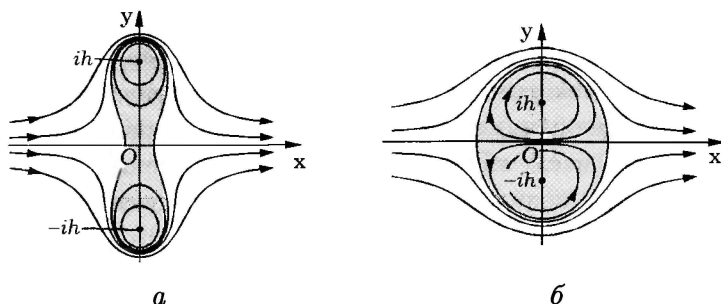


Рис. 11.8

ют проводники с током. Найдем уравнение этого контура, для чего выделим мнимую часть комплексного потенциала (11.13):

$$\Psi(z) = \operatorname{Im} W_*(z) = H_0 y - \frac{I}{2\pi} \ln \left| \frac{z + ih}{z - ih} \right| = H_0 y - \frac{I}{4\pi} \ln \frac{x^2 + (y + h)^2}{x^2 + (y - h)^2}.$$

Подставляя значение $y = 0$ в уравнение

$$H_0 y - \frac{I}{4\pi} \ln \frac{x^2 + (y + h)^2}{x^2 + (y - h)^2} = \operatorname{const} = k_0 \quad (11.15)$$

силовой линии, образующей контур, устанавливаем, что $k_0 = 0$. В итоге для контура (и всей силовой линии) получаем уравнение, явно разрешенное относительно x^2 :

$$x^2 = \frac{(y + h)^2 - (y - h)^2 e^{4\pi H_0 y / I}}{e^{4\pi H_0 y / I} - 1}.$$

11.3. Обтекание цилиндрического тела

Пусть область D комплексной плоскости (z) , являющаяся внешностью простого замкнутого контура L , занята идеальной (невязкой) несжимаемой жидкостью. Плоское векторное поле скорости жидкости имеет комплексный потенциал $W(z)$. Если контур L совпадает с какой-либо линией тока $\operatorname{Im} W(z) = \Psi(z) = \operatorname{const}$ (или ее частью), т.е. скорость жидкости в точках $z \in L$ направлена по касательной к L , то говорят, что жидкость обтекает неподвижное цилиндрическое тело. Это тело ограничено цилиндрической поверхностью с направляющей L и образующей, перпендикулярной плоскости (z) . К такой схеме можно свести и случай прямолинейного движения цилиндрического тела в неподвижной жидкости, если вектор $-\mathbf{v}$ его скорости лежит в плоскости (z) . Тогда это тело также можно считать неподвижным и обтекаемым жидкостью, имеющей в бесконечно удаленной точке скорость $v_\infty \in \mathbb{C}$, соответствующую вектору \mathbf{v} , причем $\overline{W'(\infty)} = v_\infty$.

Комплексный потенциал $W(z)$ является аналитической функцией, определенной в окрестности $z = \infty$, причем для $W'(z)$ точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой. Поэтому лорановское разложение функции $W'(z)$ имеет вид

$$W'(z) = \bar{v}_\infty + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \quad (11.16)$$

Согласно теореме 8.3, используя (5.55), можно записать

$$2\pi i c_{-1} = \oint_{L_1} W'(z) dz = \Gamma + iQ,$$

где Γ и Q — циркуляция и поток векторного поля вдоль любого простого замкнутого контура L_1 , охватывающего контур L . Но так как контур L является линией тока (или ее частью), а в области D отсутствуют источники, то $Q = 0$. Тогда из (11.16) следует, что комплексный потенциал в окрестности бесконечно удаленной точки можно представить рядом

$$W(z) = \bar{v}_\infty z + c_0 + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - \frac{c_{-2}}{z} + \dots \quad (11.17)$$

Это представление имеет место в любой точке z области D , не содержащей точки $z = 0$.

Под решением задачи обтекания жидкостью цилиндрического тела, соответствующего в плоскости (z) контуру L , понимают нахождение во внешности контура L комплексного потенциала $W(z)$ плоского векторного поля скорости жидкости, если заданы скорость v_∞ в бесконечно удаленной точке и значение циркуляции Γ вдоль любого контура, охватывающего L , а на контуре L выполняется условие $\text{Im} W(z) = \Psi(z) = \text{const}$. Комплексный потенциал может быть найден с точностью до постоянного слагаемого, не влияющего на поле вектора скорости при обтекании цилиндрического тела.

Обтекание цилиндрического тела называют безциркуляционным, если $\Gamma = 0$, и циркуляционным, если $\Gamma \neq 0$.

Покажем, что задача обтекания цилиндрического тела имеет единственное решение, если заданы циркуляция Γ векторного поля скоростей жидкости вдоль контура, охватывающего тело, и скорость потока жидкости в бесконечно удаленной точке. Другими словами, поставленными условиями комплексный потенциал плоского векторного поля определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Предположим, что два комплексных потенциала $W_1(z)$ и $W_2(z)$ удовлетворяют поставленным условиям. Тогда, согласно (11.17), в области D как в окрестности бесконечно удаленной точки имеем

$$W_1(z) = \bar{v}_\infty z + C_0^{(1)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - \frac{C_{-2}^{(1)}}{z} + \dots,$$

$$W_2(z) = \bar{v}_\infty z + C_0^{(2)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - \frac{C_{-2}^{(2)}}{z} + \dots$$

Поэтому разность этих потенциалов

$$W(z) = W_1(z) - W_2(z) = C_0^{(1)} - C_0^{(2)} - \frac{C_{-2}^{(1)} - C_{-2}^{(2)}}{z} + \dots$$

будет аналитической функцией в D (как разность двух аналитических функций). Функция $W(z)$ имеет в точке $z = \infty$ устранимую особую точку, а потому ограничена в D . Мнимая часть $\text{Im} W(z)$ этой функции также ограничена в D и является в D гармонической функцией. Согласно замечанию 9.5, она достигает своих наибольшего и наименьшего значений на контуре L . Но по условию теоремы $\text{Im} W(z)$ постоянна на L . Значит, максимальное и минимальное значения $\text{Im} W(z)$ в D совпадают и $\text{Im} W(z) = \text{const}$, $z \in D$. Аналитическая функция $W(z)$, имеющая в D постоянную мнимую часть, сама является постоянной функцией (см. 4.9). Но это и значит, что комплексные потенциалы $W_1(z)$ и $W_2(z)$ различаются лишь постоянным слагаемым и задают одно и то же векторное поле.

В случае безциркуляционного обтекания цилиндрического тела $\Gamma = 0$, и такое обтекание однозначно определяется скоростью v_∞ потока жидкости в бесконечно удаленной точке. Комплексный потенциал $W(z)$ безциркуляционного обтекания есть аналитическая (и однозначная) функция в области D , являющейся внешностью контура L . Отметим, что, согласно представлению (11.17), точка $z = \infty$ является простым полюсом функции $W(z)$. На границе области D — контуре L — функция $W(z)$ имеет значения с постоянной мнимой частью, так как L по условию является линией тока векторного поля. Но точно такими же свойствами обладает функция, осуществляющая конформное отображение области D на внешность отрезка, лежащего на прямой, параллельной действительной оси. Значит, и $W(z)$ в силу единственности комплексного потенциала для задачи обтекания цилиндрического тела осуществляет конформное отображение области D на внешность горизонтального отрезка, причем $W(\infty) = \infty$. В качестве второго условия можно взять $\arg W'(\infty) = -\arg v_\infty$, т.е. направление скорости потока в бесконечно удаленной точке. Величина $|v_\infty|$ определяется длиной горизонтального отрезка, во внешность которого отображается область D . Полагая, что $\text{Im} W(z) = 0$ на контуре L (для этого достаточно к $W(z)$ прибавить некоторую константу), можем считать, что $W(z)$ отображает область D на внешность отрезка действительной оси, причем, добавляя к комплексному потенциалу действительное слагаемое, можем переместить отрезок так, что он будет симметричным относительно начала координат.

Пример 11.4. Рассмотрим поперечное обтекание кругового цилиндра радиуса R потоком идеальной несжимаемой жидкости, имеющей вдали от цилиндра скорость $V_\infty > 0$. Такое обтекание описывается векторным полем, определенным во внешности окружности радиуса R , центр которой можно совместить с началом координат. Таким образом, контур L есть окружность $|z| = R$, а область D задается неравенством

$|z| > R$. Комплексный потенциал рассматриваемого векторного поля отображает внешность окружности L на внешность отрезка $[-r, r]$.

Из 10.5 известно, что функция $w = (\zeta + 1/\zeta)/2$ Жуковского отображает внешность окружности $|\zeta| = 1$ на внешность отрезка $[-1, 1]$ действительной оси (см. рис. 10.33). Линейным отображением $\zeta = z/R$ переведем внешность окружности $|z| = R$ во внешность окружности $|\zeta| = 1$. Тогда суперпозиция отображений

$$w(z) = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right) \quad (11.18)$$

конформно отобразит область D на внешность отрезка $[-1, 1]$ действительной оси. Следовательно, искомый комплексный потенциал должен иметь вид $W_0(z) = r w(z)$. Коэффициент $r \in \mathbb{R}$ определяется условием $W'_0(\infty) = V_\infty$. Вычислив

$$W'_0(z) = \frac{r}{2} \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{z^2} \right),$$

найдем $W'_0(\infty) = r/(2R) = V_\infty$, откуда $r = 2RV_\infty$. Итак, комплексный потенциал рассматриваемого векторного поля имеет вид

$$W_0(z) = V_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right). \quad (11.19)$$

Так как векторное поле $v_0(z)$ и его комплексный потенциал $W_0(z)$ связаны соотношением $v_0(z) = \overline{W'_0(z)}$, для скорости жидкости получаем

$$v_0(z) = V_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right). \quad (11.20)$$

Точки $z = -R$ и $z = R$, в которых в данном случае скорость жидкости равна нулю, называют **точками разветвления** и **схода потока** соответственно, объединяя их общим названием **критические точки потока**. В первой из них линия тока разветвляется на две: одна обходит окружность $|z| = R$

сверху, а другая — снизу. Во второй точке разветвленная линия тока соединяется. Из (11.20) следует, что в точках $z = \pm iR$ скорость жидкости достигает наибольшего по модулю значения на контуре L , равного $2V_\infty$.

Полагая $z = \rho e^{i\varphi}$, из представления (11.19) с учетом формулы Эйлера находим

$$\begin{aligned} W_0(\rho e^{i\varphi}) &= V_\infty \left(\rho e^{i\varphi} + \frac{R^2}{\rho} e^{-i\varphi} \right) = \\ &= V_\infty \left(\rho + \frac{R^2}{\rho} \right) \cos \varphi + i V_\infty \left(\rho - \frac{R^2}{\rho} \right) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Следовательно, потенциальная функция (или потенциал скоростей) и функция тока в полярных координатах имеют следующий вид:

$$\Phi(\varphi, \rho) = V_\infty \left(\rho + \frac{R^2}{\rho} \right) \cos \varphi, \quad \Psi(\varphi, \rho) = V_\infty \left(\rho - \frac{R^2}{\rho} \right) \sin \varphi.$$

Линии тока со стрелками, указывающими направление течения, и штриховые линии равного потенциала рассматриваемого плоского векторного поля изображены на рис. 11.9.

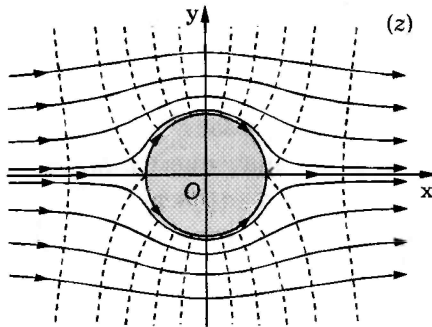


Рис. 11.9

Отметим, что если в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ скорость жидкости направлена под углом α к действительной

оси, т.е. $v_\infty = v_0(\infty) = V_\infty e^{i\alpha}$, то картину течения жидкости (см. рис. 11.9) следует повернуть на этот угол против часовой стрелки. Тогда прямолинейная часть нулевой линии тока вне окружности $|z| = R$ тоже будет составлять с действительной осью $\text{Im } z = 0$ угол α . Этот поворот осуществляется *линейным отображением* $z = e^{i\alpha} z_1$. Суперпозиция линейного отображения с функцией $W_0(z)$ даст комплексный потенциал $W_\alpha(z)$, удовлетворяющий поставленному условию:

$$W_\alpha(z) = V_\infty e^{-i\alpha} z + V_\infty e^{i\alpha} \frac{R^2}{z} = \bar{v}_\infty z + v_\infty \frac{R^2}{z}. \quad (11.21)$$

Для построения комплексного потенциала циркуляционного обтекания тела с циркуляцией $\Gamma > 0$ поместим в точку $z = 0$ *вихрь интенсивности* Γ . Линии тока создаваемого таким вихрем векторного поля будут окружностями (см. пример 5.12), в том числе одна из линий тока совпадет с окружностью $|z| = R$. Если к комплексному потенциалу $W_0(z)$ добавить комплексный потенциал (5.58) этого вихря, опустив постоянные слагаемые, то в итоге получим

$$W_*(z) = V_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (11.22)$$

Ясно, что для течения жидкости, описываемого комплексным потенциалом $W_*(z)$, окружность $|z| = R$ является частью линии тока, как и для комплексного потенциала $W_0(z)$. Поэтому этот потенциал описывает циркуляционное обтекание цилиндрического тела со значением циркуляции Γ . Дополнительное слагаемое усложняет структуру потока. Скорость этого потока находим по известному комплексному потенциалу:

$$v_*(z) = \overline{W'_*(z)} = V_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i \bar{z}}. \quad (11.23)$$

На поверхности цилиндра, полагая $z = R e^{i\varphi}$, с помощью формул Эйлера получаем

$$v_*(R) = V_\infty (1 - e^{2i\varphi}) + \frac{i\Gamma e^{i\varphi}}{2\pi R} = i e^{i\varphi} \left(\frac{\Gamma}{2\pi R} - 2V_\infty \sin \varphi \right),$$

причем модуль скорости на поверхности цилиндра равен

$$|v_*(R)| = \left| \frac{\Gamma}{2\pi R} - 2V_\infty \sin \varphi \right|. \quad (11.24)$$

Из представления (11.23) следует, что критические точки рассматриваемого потока (т.е. точки, в которых скорость потока нулевая) удовлетворяют квадратному уравнению

$$z^2 - \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty} iz - R^2 = 0,$$

Следовательно, критическими точками являются

$$z_{1,2} = \frac{i\Gamma}{4\pi V_\infty} \pm \sqrt{\left(\frac{i\Gamma}{4\pi V_\infty}\right)^2 + R^2} = \frac{i\Gamma \pm \sqrt{(4\pi V_\infty R)^2 - \Gamma^2}}{4\pi V_\infty}.$$

Если $|\Gamma| = 4\pi V_\infty R$, то обе критические точки совпадают, причем $z_{1,2} = iR$. Линии тока для этого случая изображены на рис. 11.10. В случае $|\Gamma| > 4\pi V_\infty R$ обе критические точки также чисто мнимые, причем из условия $z_1 z_2 = -R^2$ следует, что $|z_1| < R < |z_2|$, т.е. только точка z_2 лежит вне окружности $|z| = R$ (рис. 11.11).

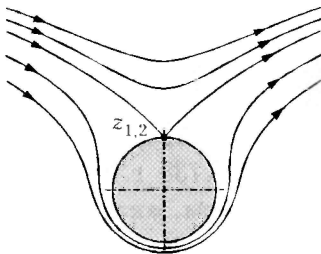


Рис. 11.10

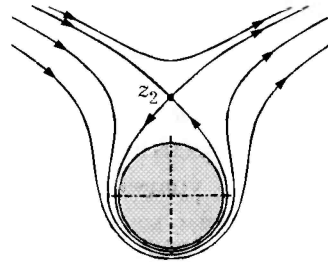


Рис. 11.11

Наконец, при $|\Gamma| < 4\pi V_\infty R$ критические точки различны, причем $|z_1| = |z_2| = R$, т.е. эти точки лежат на окружности $|z| = R$ (рис. 11.12). Аргументы φ_1 и φ_2 критических точек можно

найти, используя представление (11.24), которое приводит к уравнению

$$\frac{\Gamma}{2\pi R} - 2V_\infty \sin \varphi = 0.$$

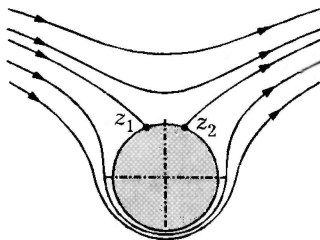


Рис. 11.12

Отсюда имеем $\sin \varphi = \Gamma / (4\pi V_\infty R)$, или

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R}, \quad \varphi_2 = \pi - \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R}. \quad (11.25)$$

Ясно, что при $\Gamma = 0$ критические точки занимают положение на действительной оси ($\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi$, см. рис. 11.9).

Найдем силу действия потока жидкости на обтекаемый цилиндр. Известно, что давление p жидкости вдоль линии тока в установившемся безвихревом потоке связано с модулем V вектора ее скорости уравнением Бернулли

$$p + \frac{\rho}{2} V^2 + \rho gh = A = \text{const},$$

где ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, h — высота, отсчитываемая от некоторого условного уровня. Это уравнение опубликовано в 1738 г. в Петербурге швейцарским математиком и механиком, академиком Петербургской академии наук Даниилом Бернулли (1700–1782) и отражает закон сохранения энергии при течении идеальной (невязкой) жидкости. Пренебрегая изменением давления, вызванным изменением высоты частиц жидкости, запишем

$$p = A - \frac{\rho}{2} V^2. \quad (11.26)$$

Поскольку сила давления жидкости, действующая на элемент dz контура L цилиндра, направлена внутрь его по нормали к контуру, то с учетом (11.26), двигаясь по L против часовой стрелки, для равнодействующей сил со стороны потока жидкости получаем

$$P = \oint_L ip dz = i \oint_L \left(A - \frac{\rho}{2} V^2 \right) dz = -\frac{i\rho}{2} \oint_L V^2 dz, \quad (11.27)$$

так как интеграл по замкнутому контуру от постоянной iA равен нулю. Для окружности, заданной уравнением $z = Re^{i\varphi}$, имеем $dz = iRe^{i\varphi} d\varphi = R(i \cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi$ и $V = |v_*(z)| = |v_*(Re^{i\varphi})|$, так что, используя (11.24) и (11.27), находим

$$\begin{aligned} P &= -\frac{i\rho}{2} \oint_L |v_*(z)|^2 dz = \\ &= -\frac{i\rho}{2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\Gamma}{2\pi R} - 2V_\infty \sin \varphi \right|^2 R(i \cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{i\rho}{2} 2V_\infty \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = -i\rho V_\infty \Gamma, \quad (11.28) \end{aligned}$$

поскольку

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, сила, действующая со стороны потока на цилиндр единичной длины, по отношению к направлению скорости V_∞ жидкости в бесконечно удаленной точке повернута на угол $\pi/2$ в сторону, противоположную направлению движения жидкости в вихре, т.е. при $\Gamma > 0$ — по часовой стрелке, а при $\Gamma < 0$ — против часовой стрелки. При $\Gamma = 0$ имеем $P = 0$. Отметим, что во всех случаях проекция силы P на направление скорости V_∞ равна нулю, т.е. при обтекании потоком идеальной (невязкой) жидкости гидравлическое сопротивление цилиндра равно нулю, что составляет существо парадокса, обнаруженного французским математиком и механиком Ж. Даламбером (1717–1783). #

При вычислении интеграла в правой части (11.27) можно учесть, что вектор скорости потока в точках контура L направлен по касательной к этому контуру, что с учетом связи векторного поля с дифференциалом дает

$$v(z) = V e^{i\varphi} = \overline{W'(z)},$$

где $\varphi = \arg dz$. Отсюда $V = \overline{W'(z)} e^{-i\varphi}$, так что вместо (11.27) получаем

$$P = -\frac{i\rho}{2} \oint_L (\overline{W'(z)})^2 e^{-2i\varphi} dz = -\frac{i\rho}{2} \oint_L (\overline{W'(z)})^2 \overline{dz}, \quad (11.29)$$

поскольку $e^{-2i\varphi} dz = e^{-2i\varphi} |dz| e^{i\varphi} = \overline{dz}$. Переходя в (11.29) к комплексно сопряженным величинам, запишем

$$\overline{P} = \frac{i\rho}{2} \oint_L (W'(z))^2 dz. \quad (11.30)$$

Эта формула установлена в 1910 г. русским механиком и математиком С.А. Чаплыгиным (1869–1942) и носит его имя.

Из представления (11.17) вытекает лорановское разложение производной $W'(z)$ комплексного потенциала:

$$W'(z) = \overline{v}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi iz} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \quad (11.31)$$

С помощью этого разложения легко определить *вычет* функции $(W'(z))^2$ в бесконечно удаленной точке, равный $i\Gamma\bar{v}_\infty/\pi$. Зная этот вычет, из (11.30) находим

$$\bar{P} = \pi\rho \operatorname{Res}_{z=\infty} (W'(z))^2 = i\rho\bar{v}_\infty\Gamma.$$

После перехода в этом равенстве к комплексно сопряженным величинам получим *формулу Жуковского*

$$P = -i\rho v_\infty\Gamma, \quad (11.32)$$

установленную Н.Е. Жуковским в 1904 г. В частном случае при $v_\infty = V_\infty > 0$ из (11.32) следует (11.28).

Комплексный потенциал для внешности D контура L можно ввести, построив функцию $f(z)$, отображающую область D на внешность окружности $|\zeta| = 1$ так, что $f(\infty) = \infty$. Тогда конформное отображение области D на внешность отрезка, реализуемое комплексным потенциалом, можно представить в виде композиции функции $f(z)$, функции Жуковского и, возможно, линейного отображения. Если функция $f(z)$ удовлетворяет условию $f'(\infty) = 1$, то комбинация функции Жуковского и линейного отображения представляет собой комплексный потенциал (11.22) обтекания кругового цилиндра. В этом случае комплексный потенциал для области D можно записать следующим образом:

$$W(z) = V_\infty \left(f(z) + \frac{R^2}{f(z)} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln f(z), \quad (11.33)$$

где $V_\infty > 0$ — скорость потока в бесконечно удаленной точке, а Γ — циркуляция векторного поля по контуру, охватывающему контур L . Если в бесконечно удаленной точке скорость жидкости направлена под углом α к действительной оси, то, принимая во внимание (11.21), комплексный потенциал можно записать в виде

$$W(z) = V_\infty e^{-i\alpha} f(z) + V_\infty e^{i\alpha} \frac{R^2}{f(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln f(z). \quad (11.34)$$

Пример 11.5. В примере 10.24 установлено, что функция Жуковского $\tilde{z} = (\chi + 1/\chi)/2$ отображает окружность \tilde{L}_* , охватывающую точку $\chi = -1$ и проходящую через точку $\chi = 1$, на контур \tilde{L} , относящийся к семейству профилей Жуковского (рис. 11.13). Этот контур имеет точку $\tilde{z} = 1$ возврата (заострения) и затупление в окрестности точки $\tilde{z} = -1$.

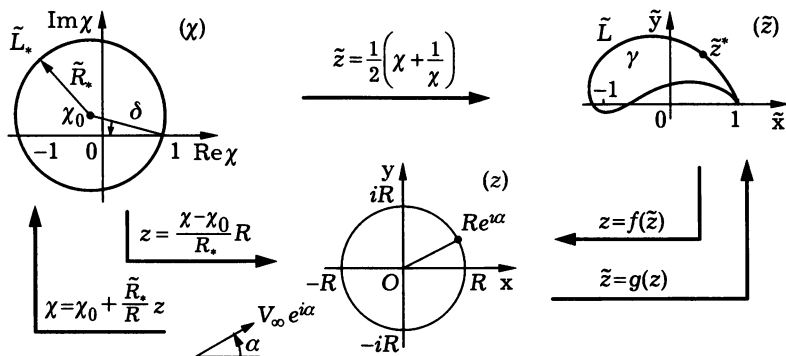


Рис. 11.13

Чтобы для изучения обтекания профиля Жуковского использовать комплексный потенциал (11.34), необходимо предварительно построить функцию $f(z)$, конформно отображающую внешность контура \tilde{L} на внешность окружности $|z| = R$ при условиях $f(\infty) = \infty$ и $f'(\infty) = 1$. Если радиус окружности \tilde{L}_* равен \tilde{R}_* и ее центр находится в точке χ_0 , то линейное отображение $z = (\chi - \chi_0)R/\tilde{R}_*$ преобразует внешность \tilde{L}_* во внешность окружности $|z| = R$ (см. рис. 11.13). Функция $\chi = \chi_0 + z\tilde{R}_*/R$ осуществляет обратное отображение, а функция

$$g(z) = \frac{1}{2R} \left(\tilde{R}_* z + R\chi_0 + \frac{R^2}{\tilde{R}_* z + R\chi_0} \right) \quad (11.35)$$

отображает внешность окружности $|z| = R$ на внешность контура \tilde{L} .

Функция $f(z) = (z - \chi_0 + \sqrt{z^2 - 1})R/\tilde{R}_*$, обратная к функции $g(z)$, многозначна, но допускает выделение ветвей во внешности отрезка $[-1, 1]$ действительной оси. Следует выбрать такую ветвь этой функции, которая бы в бесконечно удаленной точке обращалась в бесконечность. Кроме того, функция $f(z)$ должна удовлетворять условию $f'(\infty) = 1$, т.е.

$$f'(z)\Big|_{z=\infty} = \frac{R}{\tilde{R}_*} \left(1 + \frac{2z}{2\sqrt{z^2 - 1}}\right)\Big|_{z=\infty} = 2\frac{R}{\tilde{R}_*} = 1.$$

Отсюда находим $R = \tilde{R}_*/2$, и в итоге

$$f(z) = \frac{z - \chi_0 + \sqrt{z^2 - 1}}{2}. \quad (11.36)$$

Подставляя найденную функцию $f(z)$ в представление (11.34), получаем комплексный потенциал

$$W(z) = \frac{V_\infty}{2} \left(e^{-i\alpha} (z - \chi_0 + \sqrt{z^2 - 1}) + \frac{e^{i\alpha} \tilde{R}_*^2}{z - \chi_0 + \sqrt{z^2 - 1}} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z - \chi_0 + \sqrt{z^2 - 1}}{2}, \quad (11.37)$$

описывающий обтекание контура \tilde{L} потоком с заданной скоростью $V_\infty e^{i\alpha}$ жидкости в бесконечно удаленной точке $\tilde{z} = \infty$ и с некоторым значением Γ циркуляции вдоль \tilde{L} .

Дифференцированием найденного комплексного потенциала находим

$$W'(z) = \frac{1}{2} \left[V_\infty e^{-i\alpha} - \frac{V_\infty e^{i\alpha} \tilde{R}_*^2 - \Gamma/(\pi i)}{(z - \chi_0 + \sqrt{z^2 - 1})^2} \right] \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \right). \quad (11.38)$$

Чтобы производная $W'(z)$, а значит, и скорость жидкости вблизи острой кромки крыла, т.е. в окрестности точки $z = 1$, были ограничены по модулю, необходимо потребовать,

чтобы при $z = 1$ равнялось нулю выражение в квадратных скобках в представлении (11.38). Нарушение этого требования с механической точки зрения означает, что точка z^* схода потока, которой на окружности $|z| = R$ соответствует точка $z = Re^{i\alpha}$, не совпадает с точкой $z = 1$. Однако в действительности под влиянием вязкости жидкости и вихреобразования точка схода потока совпадает с точкой заострения профиля, т.е. $z^* = 1$, что равносильно ограниченности скорости вблизи острой кромки крыла.

Условие $z^* = 1$ при обтекании профиля Жуковского было предложено С.А. Чаплыгиным. Оно позволяет из равенства нулю при $z = 1$ выражения в квадратных скобках в (11.38) найти значение циркуляции:

$$\Gamma = \pi i V_{\infty} \left(\frac{e^{i\alpha} \tilde{R}_*^2}{1 - \chi_0} - (1 - \chi_0) e^{i\alpha} \right). \quad (11.39)$$

На рис. 11.13 видно, что $1 - \chi_0 = \tilde{R}_* e^{-i\delta}$. Поэтому с помощью формул Эйлера равенство (11.39) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \pi i V_{\infty} \left(\frac{e^{i\alpha} \tilde{R}_*^2}{\tilde{R}_* e^{-i\delta}} - \tilde{R}_* e^{-i\delta} e^{i\alpha} \right) = \pi i V_{\infty} \tilde{R}_* (e^{i(\delta+\alpha)} - e^{-i(\delta+\alpha)}) = \\ &= -2\pi V_{\infty} \tilde{R}_* \sin(\delta + \alpha). \quad (11.40) \end{aligned}$$

Ясно, что $\Gamma < 0$ при $0 < \delta + \alpha < \pi$.

В итоге комплексный потенциал (11.37) можно представить в виде

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{V_{\infty} \tilde{R}_*}{2} \left(\frac{\tilde{R}_* e^{-i\delta} - 1 + z + \sqrt{z^2 - 1}}{\tilde{R}_* e^{i\alpha}} + \frac{\tilde{R}_* e^{i\alpha}}{\tilde{R}_* e^{-i\delta} - 1 + z + \sqrt{z^2 - 1}} \right) + \\ &+ 2i \sin(\delta + \alpha) \ln \left(\tilde{R}_* e^{-i\delta} - 1 + z + \sqrt{z^2 - 1} \right). \quad (11.41) \end{aligned}$$

Для нахождения силы действия потока жидкости на крыло, соответствующее профилю Жуковского, подставим (11.40) в (11.32) и получим

$$P = -i\rho V_\infty e^{i\alpha}\Gamma = 2\pi\rho V_\infty^2 \tilde{R}_* e^{i(\pi/2+\alpha)} \sin(\delta + \alpha).$$

Таким образом, сила P , называемая *подъемной силой крыла*, перпендикулярна направлению скорости жидкости в бесконечно удаленной точке и при $\Gamma < 0$ повернута относительно этого направления против часовой стрелки.

11.4. Течение жидкости в каналах

Под каналом в комплексной плоскости (z) будем понимать область D , ограниченную кривыми γ_1 и γ_2 , пересекающимися лишь в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ (рис. 11.14). Плоское векторное поле скорости в таком канале описывает течение жидкости между двумя непроницаемыми цилиндрическими поверхностями, образующие которых перпендикулярны плоскости (z), а направляющими являются кривые γ_1 и γ_2 . Ясно, что эти кривые будут линиями тока, так что мнимая часть комплексного потенциала $W(z)$ течения в таком канале должна быть постоянной на каждой из этих кривых, т.е.

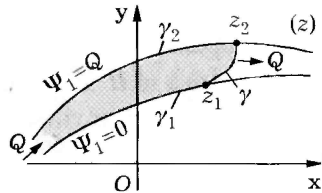


Рис. 11.14

$$\text{Im } W(z) = \Psi(z) = \begin{cases} \Psi_1 = \text{const}, & z \in \gamma_1; \\ \Psi_2 = \text{const}, & z \in \gamma_2. \end{cases}$$

Предположим, что в области D отсутствуют источники и вихри. Тогда поток Q векторного поля через любую кривую γ с произвольными начальной $z_1 \in \gamma_1$ и конечной $z_2 \in \gamma_2$ точками будет постоянным, причем $Q = \Psi_2 - \Psi_1$. При выборе $\Psi_1 = 0$ получим $\Psi_2 = Q$. Отметим, что для жидкости, вытекающей

из области, для которой кривая γ является участком границы, поток имеет положительное значение: $Q > 0$ (см. рис. 11.14).

Условие постоянства $\Psi(z)$ на кривых γ_1 и γ_2 , а также известное значение потока жидкости Q не являются достаточными для однозначного определения комплексного потенциала течения в канале. В самом деле, рассмотрим в качестве канала

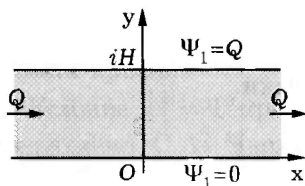


Рис. 11.15

полосу $0 < \text{Im } z < H$, в которой течение имеет заданное значение потока $Q > 0$ (рис. 11.15). Функция

$$W(z) = Q \frac{z}{H} + \lambda e^{n\pi z/H},$$

зависящая от параметров $\lambda \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{Z}$, имеет мнимую часть

$$\text{Im } W(z) = \frac{Qy}{H} + \lambda e^{n\pi x/H} \sin \frac{n\pi y}{H},$$

которая при любых значениях λ и n принимает на границах $\text{Im } z = 0$ и $\text{Im } z = H$ полосы постоянные значения $\Psi_1 = 0$ и $\Psi_2 = Q$. Однако скорость жидкости

$$\overline{W'(z)} = \frac{Q}{H} + \frac{n\pi}{H} e^{n\pi \bar{z}/H}$$

зависит от выбора значений λ и n .

Покажем, что единственность комплексного потенциала для полосы можно обеспечить, дополнительно потребовав, чтобы скорость в бесконечно удаленной точке была ограниченной. Пусть аналитические функции $W_1(z)$ и $W_2(z)$ в полосе $0 < \text{Im } z < H$, представляющей канал, удовлетворяют всем условиям: их мнимые части постоянны на кривых $\text{Im } z = 0$ и $\text{Im } z = H$, ограничивающих канал, а соответствующие векторные поля $v_1(z)$ и $v_2(z)$ ограничены в D и имеют одинаковое значение потока Q . Тогда аналитическая функция $W(z) = W_1(z) - W_2(z)$

описывает векторное поле, которое ограничено в D , имеет нулевое значение потока, а мнимая часть $\Psi(z) = \text{Im}W(z)$ этой функции обращается в нуль на прямых $\text{Im}z = 0$ и $\text{Im}z = H$.

Дополнительное условие означает, что функция $W'(z)$ ограничена в рассматриваемой полосе. Так как $\text{Im}W(z) = \text{const}$ на прямых $\text{Im}z = 0$ и $\text{Im}z = H$, то $\text{Im}W'(z) = 0$ на этих прямых. Стало быть, гармоническая функция $\text{Im}W'(z)$ ограничена в рассматриваемой полосе, а на ее границе обращается в нуль. Поэтому $\text{Im}W'(z) \equiv 0$ всюду в полосе, а функция $W'(z)$, имеющая нулевую мнимую часть, постоянна в полосе: $W'(z) = a \in \mathbb{R}$, $0 < \text{Im}z < H$. По производной восстанавливаем комплексный потенциал, опуская несущественную в данном случае постоянную интегрирования: $W(z) = az$, $0 < \text{Im}z < H$. Но тогда функция тока имеет вид $\Psi(z) = \text{Im}W(z) = ay$, где $y = \text{Im}z$. Если на прямой $\text{Im}z = 0$ принять $\Psi(z) = \Psi_1 = 0$, то на прямой $\text{Im}z = H$ получим $\Psi(z) = \Psi_2 = Q = aH$, т.е. $a = Q/H$. Таким образом, комплексный потенциал течения в данной полосе имеет вид $W(z) = (Q/H)z$ и определен однозначно.

В общем случае области D в плоскости (ζ) , ограниченной кривыми γ_1 и γ_2 , комплексный потенциал можно построить следующим образом. Пусть $z = g(\zeta)$ — конформное отображение области D на полосу $0 < \text{Im}z < H$. Тогда комплексный потенциал течения жидкости в канале D имеет вид

$$W(\zeta) = \frac{Q}{H}g(\zeta). \quad (11.42)$$

Пример 11.6. Область в комплексной плоскости (ζ) , изображенную на рис. 11.16, можно рассматривать как водоем достаточно больших размеров с подведенным к нему каналом шириной $2h$. Глубину водоема и канала примем равными единице. Пусть по каналу в водоем поступает жидкость с объемным расходом $2Q > 0$, т.е. в единицу времени через канал проходит объем жидкости, равный $2Q$. Изучение плоского векторного поля скорости при истечении жидкости из канала в водоем (или

при вытекании ее из водоема) представляет определенный интерес для различных приложений и может быть проведено при помощи комплексного потенциала вида (11.42).

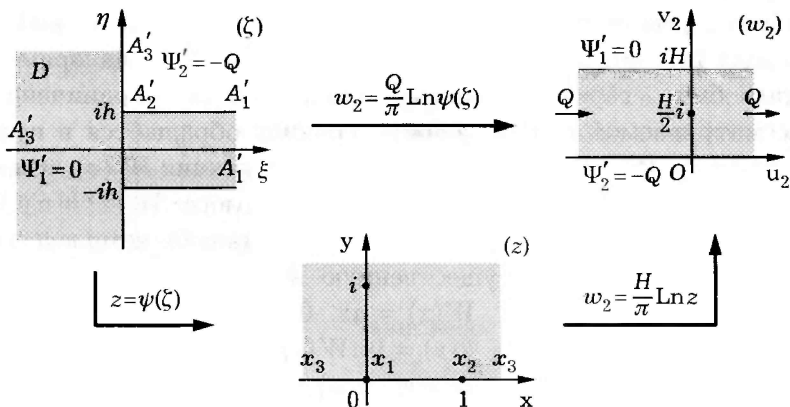


Рис. 11.16

Отметим, что в силу симметрии области D_1 относительно действительной оси $\text{Im } \zeta = 0$ течение в канале и водоеме достаточно рассматривать лишь в области D , расположенной в верхней полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ и представляющей собой внутренность неограниченного треугольника $A'_1 A'_2 A'_3$ (см. рис. 11.16). При этом через канал, образованный прямыми $A'_1 A'_2$ и $A'_1 A'_3$, в водоем будет поступать жидкость с расходом $Q > 0$, а действительная ось $\text{Im } \zeta = 0$ как граница области D станет одной из линий тока. Если считать эту линию нулевой, т.е. принять на ней для функции тока значение $\Psi'_1 = 0$, то на линии тока, соответствующей границе $A'_1 A'_2 A'_3$ области D , будем иметь $\Psi'_2 = -Q$ при истечении жидкости из канала в водоем (при вытекании жидкости из водоема на этой линии тока $\Psi_2 = Q > 0$, поскольку жидкость вытекает из области, для которой любая кривая с начальной точкой на действительной оси $\text{Im } \zeta = 0$ и конечной на прямой $A'_1 A'_2$ будет частью границы, обходимой в положительном направлении).

Чтобы построить функцию, которая конформно отображает область D на полосу $0 < \text{Im } z < H$ шириной H , воспользуемся функцией

$$f(z) = \frac{2ih}{\pi} (\sqrt{z-1} - \text{arctg } \sqrt{z-1}) \quad (11.43)$$

из примера 10.39. Ветвь этой многозначной функции конформно отображает верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на внутренность неограниченного треугольника $A_1 A_2 A_3$ в плоскости (w) (см. рис. 10.66). Этот треугольник параллельным переносом на расстояние h вдоль положительного направления мнимой оси можно совместить с неограниченным треугольником $A'_1 A'_2 A'_3$ (см. рис. 11.16). Следовательно, ветвь многозначной функции

$$f_1(z) = \frac{2ih}{\pi} (\sqrt{z-1} - \text{arctg } \sqrt{z-1}) + ih \quad (11.44)$$

конформно и взаимно однозначно отображает верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на область D в верхней полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$. При этом прообразами точек A'_1, A'_2 и A'_3 будут точки $x_1 = 0, x_2 = 1$ и $x_3 = \infty$ соответственно.

Требуемую ветвь многозначной функции (11.43) можно определить из условия, что функция принимает мнимые значения $iy, y > 0$, если аргумент z пробегает часть действительной оси правее точки $z = 1$. Тому же условию должен быть подчинен и выбор ветви функции (11.44). Функция $z = \psi(\zeta)$, обратная к выбранной ветви функции (11.44), осуществляет конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$. Эту функцию не удастся представить в явном виде. Согласно рис. 10.54, ветвь многозначной функции $w_1 = \text{Ln } z$ отображает верхнюю полуплоскость на полосу $0 < \text{Im } w_1 < \pi$, причем $w_1 = \pi i/2$ при $z = i$. Значит, функция $w_2 = (H/\pi)w_1 = (H/\pi) \text{Ln } z$ отображает верхнюю полуплоскость на полосу $0 < \text{Im } w < H$ шириной H . При этом положительная и отрицательная полуоси действительной оси $\text{Im } z = 0$ перейдут в действительную ось $\text{Im } w_2 = 0$ и в прямую $\text{Im } w_2 = H$ соответственно.

Суперпозиция отображений

$$w_2 = \frac{H}{\pi} w_1 = \frac{H}{\pi} \operatorname{Ln} z = \frac{H}{\pi} \operatorname{Ln} \psi(\zeta) = g(\zeta) \quad (11.45)$$

конформно отображает рассматриваемую область D в полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta$ на полосу $0 < \operatorname{Im} w_2 < H$ (см. рис. 11.16). Нетрудно проследить, что действительной оси $\operatorname{Im} \zeta = 0$, принятой в качестве нулевой линии тока со значением функции тока $\Psi'_1 = 0$, при этом отображении соответствует прямая $\operatorname{Im} w_2 = H$, а линии тока со значением $\Psi'_2 = -Q$ (при истечении жидкости из канала в водоем) — действительная ось $\operatorname{Im} w_2 = 0$.

Сравнивая условия течения в полосе $0 < \operatorname{Im} w_2 < H$ и в полосе, изображенной на рис. 11.15, приходим к выводу, что эти условия идентичны, поскольку $\Psi'_1 - \Psi'_2 = 0 - (-Q) = Q = \Psi_2 - \Psi_1$. Поэтому, используя (11.42) и учитывая (11.45), для комплексного потенциала, описывающего течение в области D , получаем

$$W(w) = \frac{Q}{H} g(\zeta) = \frac{Q}{H} \frac{H}{\pi} \operatorname{Ln} \psi(\zeta) = \frac{Q}{\pi} \operatorname{Ln} \psi(\zeta).$$

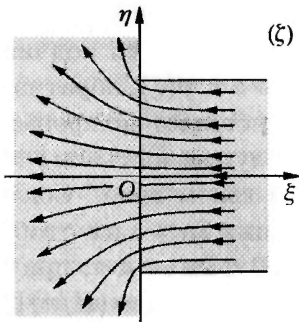


Рис. 11.17

На рис. 11.17 представлены линии тока $\Psi(z) = \text{const}$ со стрелками, указывающими направление движения жидкости при ее поступлении в водоем.

Из (11.44) следует, что $f'_1(1) = \infty$. Это означает, что для обратной функции $z = \psi(\zeta)$ в точке $\zeta = ih$, соответствующей точке $z = 1$, конформность отображения нарушена, поскольку $\psi'(ih) = 0$. Как следствие, из точки $\zeta = ih$ выходят несколько линий равного потенциала, а скорость жидкости в окрестности этой точки

не ограничена по модулю. В действительности в силу вязкости реальной жидкости и образования вихрей при обтекании углов скорость будет ограничена, но достаточно велика, что приводит к размыванию устья канала (или входа в канал, если жидкость вытекает из водоема) и скруглению углов*.

11.5. Задачи различного физического содержания

Пример 11.7. Электростатическое поле внутри плоского конденсатора вдали от его краев можно считать однородным с постоянным по значению модулем $E_0 = |\mathbf{E}(z)| = \Delta V / (2h)$ вектора напряженности $\mathbf{E}(z)$, где ΔV — разность потенциалов на пластинах конденсатора, $2h$ — расстояние между пластинами [XII]. Напомним (см. 10.1), что вектор напряженности электростатического поля связан с потенциальной функцией $\Phi(z)$ плоского векторного поля в комплексной плоскости (z) соотношением вида (11.1)

$$\mathbf{E}(z) = \text{grad } \Phi(z) = -\text{grad } \tilde{\Phi}(z), \quad (11.46)$$

где $\tilde{\Phi}(z) = -\Phi(z)$ — электрический потенциал поля.

Однако однородность электростатического поля около краев пластин нарушается. Рассмотрим это поле около одного края пластин, пренебрегая влиянием другого края. Тогда задачу можно свести к нахождению поля во внешности двух лучей $\text{Im } z = \pm h$, $\text{Re } z \leq 0$ (рис. 11.18). Каждый из лучей является следом пластины конденсатора в комплексной плоскости (z), перпендикулярной ее краю, и благодаря хорошей проводимости пластины будет линией равного потенциала $\Phi(z) = \text{const}$. В силу симметрии действительная ось $\text{Im } z = 0$ также будет линией равного потенциала, причем если для указанных лучей соответственно положить $\Phi(z) = \pm V$ ($2V = \Delta V$), считая электрический

*О приближенных приемах расчетов скругления углов многоугольников при конформном отображении см. в книге: Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.

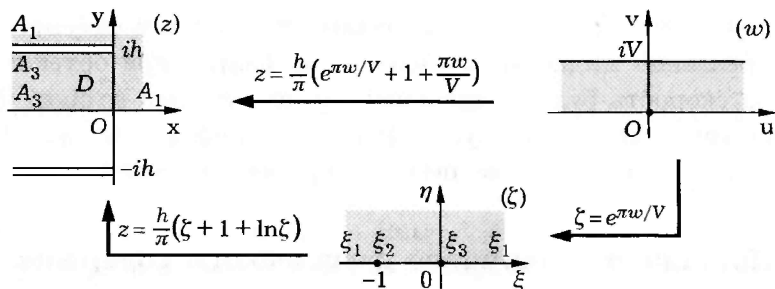


Рис. 11.18

потенциал верхней пластины отрицательным ($\tilde{\Phi} = -\Phi = -V < 0$), то для действительной оси получим $\Phi(z) = 0$. Поэтому достаточно построить электростатическое поле лишь в области D , которая представляет собой верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ с разрезом по лучу $\text{Im } z = h, \text{Re } z \leq 0$.

Задачу описания рассматриваемого электростатического поля можно упростить, если отобразить область D на полосу $0 < \text{Im } w < V$ так, чтобы лучу $\text{Im } z = h, \text{Re } z \leq 0$, проходимо-му дважды в противоположных направлениях, соответствовала прямая $\text{Im } w = V$, а действительной оси $\text{Im } z = 0$ — действительная ось $\text{Im } w = 0$. Поле в такой полосе между двумя параллельными прямыми, являющимися линиями равного потенциала, будет однородным, причем все линии равного потенциала $\text{Im } w = v = \text{const}$ ($0 < v < V$) будут параллельны действительной оси $\text{Im } w = 0$.

Область D в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ представляет собой внутренность треугольника $A_1 A_2 A_3$ с двумя вершинами A_1 и A_3 в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ и вершиной A_2 в точке $z = ih$, причем углы при вершинах кратны π с коэффициентами $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$ и $\alpha_3 = 0$ соответственно (см. Д.10.2). Отобразим полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ на внутренность этого треугольника так, чтобы прообразами его вершин были соответственно точки $\xi_1 = \infty$, $\xi_2 = -1$ и $\xi_3 = 0$ действительной оси $\text{Im } \zeta = 0$. Используя интеграл Кристоффеля — Шварца и учитывая, что множитель в подынтегральной функции, относящийся к вер-

шине A_1 , выпадает, получаем

$$\begin{aligned} z &= a \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\xi - \xi_2)^{\alpha_2 - 1} (\xi - \xi_3)^{\alpha_3 - 1} d\xi + b = a \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\xi + 1}{\xi} d\xi + b = \\ &= a \int_{\zeta_0}^{\zeta} d\xi + a \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\xi}{\xi} + b = a\zeta + a \ln \zeta + b_1, \quad (11.47) \end{aligned}$$

где $b_1 = b - a\zeta_0 - a \ln \zeta_0$. Поскольку при отображении (11.47) положительная полуось действительной оси $\text{Im} \zeta = 0$ переходит в действительную ось $\text{Im} z = 0$ и $\text{Im} z = x \rightarrow +\infty$ при $\text{Im} \zeta = \xi \rightarrow +\infty$, то $a, b_1 \in \mathbb{R}$, причем $a > 0$. образом точки $\zeta = -1$ при этом отображении является точка $z = ih$, т.е. $ih = -a + a \ln |-1| + i\pi a + b_1$. Отсюда $a = b_1 = h/\pi$. Таким образом, из (11.47) следует, что

$$z(\zeta) = \frac{h}{\pi} (\zeta + 1 + \ln \zeta). \quad (11.48)$$

Функция $\zeta = e^{w_1}$ отображает полосу $0 < \text{Im} w_1 < \pi$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im} \zeta > 0$ (см. пример 10.20), причем действительная ось $\text{Im} w_1 = 0$ переходит в положительную полуось действительной оси $\text{Im} \zeta = 0$, а прямая $\text{Im} w_1 = \pi$ — в ее отрицательную полуось. Заменяя в этой функции w_1 на $\pi w/V$ и подставляя в (11.47), находим отображение

$$z(w) = \frac{h}{\pi} \left(e^{\pi w/V} + 1 + \frac{\pi w}{V} \right), \quad (11.49)$$

переводящее полосу $0 < \text{Im} w < V$ в область D (см. рис. 11.18). При этом прообразом точки $z = ih$ является точка $w = iV$.

Выделим в (11.49) действительную и мнимую части, положив $w = u + iv$ и используя формулу Эйлера:

$$\begin{aligned} z = x + iy &= \frac{h}{\pi} e^{\pi u/V} \left(\cos \frac{\pi v}{V} + i \sin \frac{\pi v}{V} \right) + \frac{h}{\pi} + h \frac{u + iv}{V} = \\ &= \frac{h}{\pi} \left(1 + \frac{\pi u}{V} + e^{\pi u/V} \cos \frac{\pi v}{V} \right) + i \frac{h}{\pi} \left(\frac{\pi v}{V} + e^{\pi u/V} \sin \frac{\pi v}{V} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = \frac{h}{\pi} \left(1 + \frac{\pi u}{V} + e^{\pi u/V} \cos \frac{\pi v}{V} \right), \\ y = \frac{h}{\pi} \left(\frac{\pi v}{V} + e^{\pi u/V} \sin \frac{\pi v}{V} \right) \end{cases} \quad (11.50)$$

линий равного потенциала $\Phi(z) = \text{const}$ (при $v = \text{const}$) и силовых линий $\Psi(z) = \text{const}$ (при $u = \text{const}$) электростатического поля в зоне края пластин конденсатора. Поскольку в (11.50) x является четной функцией v , а y — нечетной, то эти уравнения справедливы при $-V < v < V$, т.е. и в нижней полуплоскости $\text{Im } z < 0$. На рис. 11.19 представлены сплошные линии равного потенциала и штриховые силовые линии, причем стрелки указывают, согласно (11.46), направление вектора $\mathbf{E}(z)$, касательного к силовым линиям.

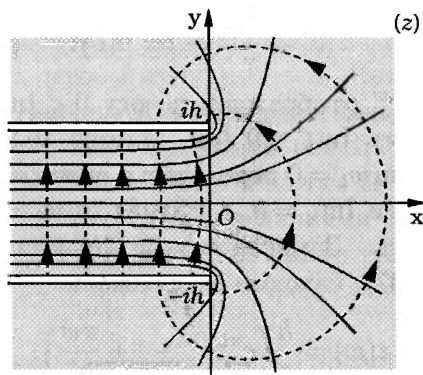


Рис. 11.19

Выясним, как изменяется модуль $E(z) = |\mathbf{E}(z)|$ вектора напряженности построенного поля вдоль линии равного потенциала $\Phi(z)|_{v=v_1} = \Phi_1 = \text{const}$, соответствующей некоторому фиксированному значению $v = v_1$ ($0 < |v_1| < V$). Поскольку вектор $\mathbf{E}(z)$ напряженности в силу (11.46) перпендикулярен линии Φ_1 , то $E = \left[\left| \frac{dv}{ds} \right| \right]_{v=v_1}$, где ds — дифференциал длины дуги сило-

вой линии $\Psi(z)|_{u=u_1} = \Psi_1 = \text{const}$, соответствующей некоторому фиксированному значению $u = u_1$. Дифференцированием (11.50) по v при $u = u_1 = \text{const}$ находим

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \\ &= \frac{h}{\pi} \sqrt{\left(-\frac{\pi}{V} e^{\pi u_1/V} \sin \frac{\pi v}{V}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{V} + \frac{\pi}{V} e^{\pi u_1/V} \cos \frac{\pi v}{V}\right)^2} dv = \\ &= \frac{h}{V} \sqrt{1 + e^{2\pi u_1/V} + 2e^{\pi u_1/V} \cos \frac{\pi v}{V}} dv. \end{aligned}$$

В результате для произвольного $u \in \mathbb{R}$ получаем

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 + e^{2\pi u/V} + 2e^{\pi u/V} \cos \frac{\pi v_1}{V}}}, \quad E_0 = \frac{V}{h}. \quad (11.51)$$

Согласно (11.50), $x \rightarrow -\infty$ при $u \rightarrow -\infty$, т.е. образ любой точки w при отображении (11.49) удаляется влево от правого края пластин (см. рис. 11.19), если $\text{Re } w = u$ неограниченно убывает. В этом случае из (11.51) следует, что $E \rightarrow E_0 = \text{const}$, т.е. электростатическое поле конденсатора с удалением от края пластин действительно приближается к однородному. Приближению точки z к ih соответствует приближение точки w к точке iV , что можно описать условиями $u \rightarrow 0$ и $v_1 \rightarrow V$ в (11.51). Но при этих условиях радикал в знаменателе стремится к нулю, т.е. в окрестности точки края пластин напряженность поля не ограничена.

Для нахождения экстремума функции $E(u)|_{v=v_1}$ при ее изменении вдоль линии равного потенциала Φ_1 достаточно найти экстремум выражения под знаком радикала в (11.51). Для этого, согласно необходимому условию экстремума, приравниваем нулю производную этого выражения по u :

$$\frac{2\pi}{V} e^{2\pi u/V} + 2\frac{\pi}{V} e^{\pi u/V} \cos \frac{\pi v_1}{V} = 0.$$

Отсюда приходим к равенству $e^{\pi u/V} + \cos(\pi v_1/V) = 0$, которое может быть выполнено лишь при условии $V/2 < |v_1| < V$, когда косинус отрицателен. Нетрудно установить, что при выполнении этого условия минимум выражения под знаком радикала в (11.51) соответствует значению $u^* = \frac{V}{\pi} \ln \left| \cos \frac{\pi v_1}{V} \right|$, т.е. максимальное значение модуля вектора напряженности равно

$$E^* = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \cos^2 \frac{\pi v_1}{V} - 2 \cos^2 \frac{\pi v_1}{V}}} = \frac{E_0}{\left| \sin \frac{\pi v_1}{V} \right|}. \quad (11.52)$$

При $|v_1| \rightarrow V - 0$ имеем $u^* \rightarrow 0 - 0$ и $E^* \rightarrow +\infty$, что соответствует окрестности края пластины конденсатора.

При $|v_1| = V/2$ необходимое условие экстремума достигается лишь при $u^* \rightarrow -\infty$, т.е. на бесконечно большом расстоянии от правого края пластин, где электростатическое поле приближается к однородному, причем из (11.52) следует, что $E^* = E_0$. Ясно, что при $0 < |v_1| < V/2$ функция $E(u)|_{v=v_1}$ изменяется монотонно вдоль соответствующей линии равного потенциала $\Phi(z)|_{v=v_1} = \text{const}$, убывая от значения E_0 до нуля при возрастании u в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Пластины реального конденсатора имеют конечные размеры. Его электростатическое поле будет симметрично относительно вертикальной прямой, равноудаленной от правого и левого краев пластин. В точках этой прямой при $0 < |v_1| < V/2$ функция $E(u)|_{v=v_1}$ будет достигать максимума, значение которого не превзойдет E_0 и стремится к нему при достаточно больших размерах пластин по сравнению с расстоянием $2h$ между ними. Если пластины конденсатора имеют форму линий равного потенциала $\Phi(z)|_{v=\pm V/2}$ (сплошные линии на рис. 11.19), то функция $E(u)|_{v=v_1}$ вдоль любой линии $\Phi(z)|_{v=v_1}$ такого конденсатора монотонно убывает при приближении к правому и левому краям пластин.

Конденсатор с пластинами такой формы используют при измерении электрической прочности на пробой изоляционных

материалов, жидкостей и газов, поскольку в его середине возникает практически однородное электростатическое поле с наибольшим значением модуля вектора напряженности, близким к известному значению $E_0 = V/h$.

Пример 11.8. Исследуем электростатическое поле, создаваемое тонким заряженным проводником, помещенным между двух параллельных заземленных пластин. Такие поля возникают при расчете электрофильтров или емкости провода, находящегося между проводящими границами.

Это электростатическое поле можно рассматривать как плоскопараллельное, а его исследование можно проводить в поперечном сечении. Расположение комплексной плоскости (z) можно выбрать так, что заземленным пластинам будут соответствовать прямые $\text{Im } z = 0$ и $\text{Im } z = H > 0$, а тонкому заряженному проводнику, параллельному пластинам, — точка $z_0 = ih$, $h < H$ (рис. 11.20). Потенциал пластин примем равным нулю, а приходящийся на единицу длины проводника заряд — равным $q > 0$. Таким образом, приходим к плоскому электростатическому полю в полосе D между прямыми $\text{Im } z = 0$ и $\text{Im } z = H > 0$, создаваемому точечным зарядом $q > 0$, помещенным в точку $z = ih$. Прямые, ограничивающие полосу, совпадают с нулевой линией равного потенциала $\Phi(z) = 0$.

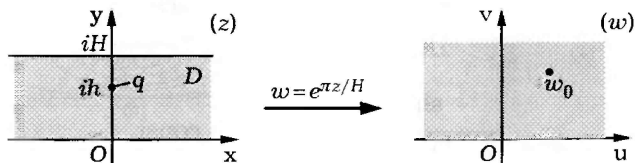


Рис. 11.20

Функция

$$w = e^{\zeta} = e^{\pi z / H} \quad (11.53)$$

конформно отображает полосу D на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$ (см. рис. 11.20). При этом образом точки $z_0 = ih$ является точка $w_0 = e^{\pi ih / H}$, а образом прямых $\text{Im } z = 0$ и $\text{Im } z = H$ —

действительная ось $\text{Im } w = 0$. Если в точку $\bar{w}_0 = e^{-\pi ih/H}$ поместить заряд $-q$, то эта ось будет линией равного потенциала для поля, создаваемого двумя разноименными зарядами, находящимися в точках w_0 и \bar{w}_0 . Комплексный потенциал такого поля, согласно (5.66), имеет вид

$$W(w) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0}. \quad (11.54)$$

Подставив выражения для w_0 , \bar{w}_0 и (11.53) в (11.54), найдем комплексный потенциал

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{q}{2\pi} \ln \frac{e^{\pi z/H} - e^{\pi ih/H}}{e^{\pi z/H} - e^{-\pi ih/H}} = \\ &= \frac{q}{2\pi} \ln \frac{e^{\frac{\pi}{2H}(z - ih)} - e^{-\frac{\pi}{2H}(z - ih)}}{e^{\frac{\pi}{2H}(z + ih)} - e^{-\frac{\pi}{2H}(z + ih)}} = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\text{sh } \pi \frac{z - ih}{2H}}{\text{sh } \pi \frac{z + ih}{2H}} \quad (11.55) \end{aligned}$$

искомого электростатического поля в полосе D . Выделяя в (11.55) действительную и мнимую части, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh}^2 \frac{\pi x}{2H} + \sin^2 \pi \frac{y - h}{2H}}{\text{sh}^2 \frac{\pi x}{2H} + \sin^2 \pi \frac{y + h}{2H}} &= \text{const}, \\ \frac{\text{sh } \frac{\pi x}{H} \sin \frac{\pi h}{H}}{\cos \frac{\pi y}{H} - \text{ch } \frac{\pi x}{H} \cos \frac{\pi h}{H}} &= \text{const} \end{aligned}$$

линий равного потенциала и линий тока соответственно, показанных на рис. 11.21 сплошными и штриховыми линиями. Согласно (11.46), вектор напряженности $\mathbf{E}(z)$ связан с комплексным потенциалом $W(z)$ соотношением $\mathbf{E}(z) = \overline{W'(z)}$, так как в силу (5.53) градиент потенциальной функции $\text{Re } W(z)$ есть векторное поле, описываемое комплексным потенциалом

$W(z)$. Дифференцированием (11.55) находим

$$\begin{aligned} \overline{E(z)} = W'(z) &= \frac{q}{2\pi} \left(\frac{\operatorname{ch} \pi \frac{z-ih}{2H}}{\operatorname{sh} \pi \frac{z-ih}{2H}} \frac{\pi}{2H} - \frac{\operatorname{ch} \pi \frac{z+ih}{2H}}{\operatorname{sh} \pi \frac{z+ih}{2H}} \frac{\pi}{2H} \right) = \\ &= \frac{q}{4H} \left(\operatorname{cth} \pi \frac{z-ih}{2H} - \operatorname{cth} \pi \frac{z+ih}{2H} \right). \end{aligned}$$

Направление вектора $E(z)$, касательного к силовым линиям, указано на рис. 11.21 стрелками.

Отметим, что (11.54) описывает электростатическое поле тонкого проводника, параллельного заземленной поверхности и находящегося от нее на расстоянии $\operatorname{Im} w_0 = \sin(\pi h/H) = d > 0$. Линии равного потенциала (сплошные) и силовые линии (штриховые со стрелками, указывающими направление вектора напряженности) этого поля являются, как и в примере 5.14, дугами окружностей и представлены на рис. 11.22.

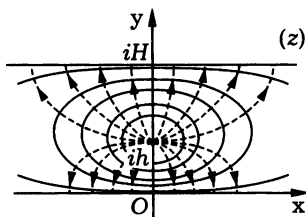


Рис. 11.21

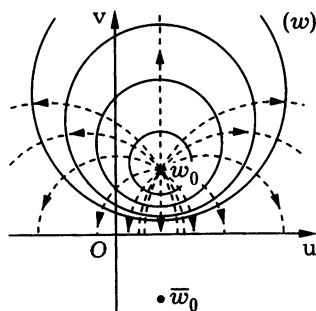


Рис. 11.22

Пусть проводник радиуса r расположен параллельно заземленной поверхности, ось проводника находится на расстоянии l от поверхности, а на единицу длины проводника приходится заряд $q > 0$. Поверхность проводника в плоскости (w) будет изображаться окружностью, которая является линией равного

потенциала. Согласно (5.65), проводник радиуса r можно, не изменяя электростатического поля, заменить тонким проводником, расположенным на расстоянии $d = \sqrt{l^2 - r^2}$ от заземленной поверхности (его положение называют электрической осью проводника). Выделяя в (11.54) действительную часть

$$\operatorname{Re} W(z) = \Phi(w) = \frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0} \right| = \frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{w - w_0}{|w - \bar{w}_0|} \right|, \quad (11.56)$$

найдем значение Φ_r потенциальной функции $\Phi(w)$ на поверхности проводника при $w = c + i(l + r)$:

$$\begin{aligned} \Phi_r &= \frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0} \right| = \frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{l + r - d}{l + r + d} \right| = \\ &= \frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{(l + r - d)(l - r - d)}{(l + r + d)(l - r - d)} \right| = \frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{2d^2 - 2ld}{-2rd} \right| = \\ &= \frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{l - d}{r} \frac{l + d}{l + d} \right| = \frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{r}{l + d} \right|. \end{aligned}$$

Учитывая, что электрический потенциал связан с потенциальной функцией соотношением $\tilde{\Phi}(z) = -\Phi(z)$ (см. пример 11.7), получаем электрический потенциал проводника

$$\tilde{\Phi}_r = \frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{l + d}{r} \right| = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 - r^2}}{r}. \quad (11.57)$$

Поскольку $r < l + d$, то в случае $q > 0$ имеем $\tilde{\Phi}_r > 0$.

Электрическую емкость C системы из двух проводящих поверхностей с различными электрическими потенциалами $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ определяют как отношение потока Q электростатического поля между этими поверхностями к разности этих потенциалов, т.е. $C = \frac{|Q|}{|\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2|}$. В рассматриваемой системе $Q = q$, $\tilde{\Phi}_1 = \tilde{\Phi}_r$ и $\tilde{\Phi}_2 = 0$. Поэтому с учетом (11.57) находим, что электрическая

емкость системы, приходящаяся на единицу длины проводника, равна

$$C_1 = \frac{q}{\tilde{\Phi}_1} = \frac{2\pi}{\ln \frac{l + \sqrt{l^2 - r^2}}{r}}.$$

Если $r \ll l$, то $d \approx l$ и $C_1 \approx \frac{2\pi}{\ln(2l/r)}$.

Комплексный потенциал (11.54) описывает также электростатическое поле двух перпендикулярных плоскости (w) проводников, электрические оси которых пересекают эту плоскость в точках w_0 и \bar{w}_0 , а заряды на единицу их длины равны $\pm q$ соответственно. Если радиус первого проводника r , то его электрический потенциал имеет вид (11.57). Для второго проводника с радиусом R из (11.56) при $w = c - i(L + R)$ и $L = \sqrt{R^2 + d^2}$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_R = -\Phi_R &= -\frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0} \right| = -\frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{-L - R - d}{-L - R + d} \right| = \\ &= \frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{R}{L + d} \right| = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{R}{L + \sqrt{L^2 - R^2}}. \end{aligned} \quad (11.58)$$

Для разности потенциалов проводников, согласно (11.58), получаем

$$\tilde{\Phi}_r - \tilde{\Phi}_R = \frac{q}{2\pi} \left(\ln \frac{l + d}{r} - \ln \frac{R}{L + d} \right) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{(l + d)(L + d)}{rR}.$$

При этом электрическая емкость системы этих проводников равна

$$C_2 = \frac{q}{\tilde{\Phi}_r - \tilde{\Phi}_R} = \frac{2\pi}{\ln \frac{(l + d)(L + d)}{rR}}.$$

Если радиусы проводников одинаковы и равны r , то $l = L$, разность потенциалов равна $2\tilde{\Phi}_r$, а электрическая емкость такой системы проводников вдвое меньше C_1 .

Вернемся к комплексному потенциалу (11.55). Соответствующие ему линии равного потенциала в малой окрестности

точки $z = ih$ близки к окружностям (см. рис. 11.21). Пусть проводник имеет радиус r , малый по сравнению с h . В этом случае приближенно можно считать, что линия равного потенциала, проходящая через точку $z^* = i(h+r)$, является окружностью радиуса r , т.е. эта линия соответствует поверхности проводника. Полагая $z^* + ih = i(r+2h) \approx 2ih$ и учитывая (3.28), для точки z^* , согласно (11.55), получаем

$$W(z^*) \approx \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi ir}{2H}}{\operatorname{sh} \frac{\pi ih}{H}} = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\sin \frac{\pi r}{2H}}{\sin \frac{\pi h}{H}} \approx \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\frac{\pi r}{2H}}{\sin \frac{\pi h}{H}} < 0.$$

Здесь в силу соотношения $\pi r \ll 2H$ синус приближенно заменен его аргументом. Полученное значение $W(z^*)$ является действительным и поэтому совпадает со значением $\Phi(z^*)$ в точке z^* потенциальной функции $\Phi(z)$. Следовательно, для электрического потенциала проводника имеем (см. пример 11.7)

$$\tilde{\Phi}(z^*) = -\Phi(z^*) \approx \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\sin(\pi h/H)}{\pi r/(2H)} > 0.$$

Электрическая емкость, приходящаяся на единицу длины системы, состоящей из проводника и двух заземленных пластин с нулевым электрическим потенциалом, равна

$$C = \frac{q}{\tilde{\Phi}(z^*)} \approx \frac{2\pi}{\ln \frac{\sin(\pi h/H)}{\pi r/(2H)}}.$$

Пример 11.9. Теория функций комплексного переменного находит применение в подземной гидромеханике, или теории фильтрации, изучающей движение жидкости и газа в пористом грунте. Рассмотрим фильтрацию воды под достаточно протяженной бетонной плотиной (рис. 11.23). В этом случае границу γ_1 соприкосновения плотины с грунтом можно считать непроницаемой для воды. Предположим, что

дно водоемов перед и за плотиной, т.е. верхнего и нижнего бьефов, расположено на одном уровне. Тогда векторное поле скорости воды при фильтрации будет плоским и может быть описано в области D комплексным потенциалом $W(z) = \Phi(z) + i\Psi(z)$, удовлетворяющим на границе $L = \gamma' \cup \gamma_1 \cup \gamma''$ этой области следующим условиям:

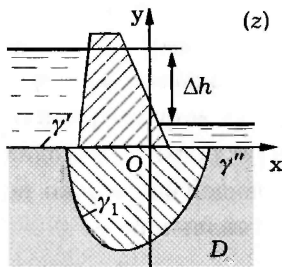


Рис. 11.23

$$\Phi(z) = \begin{cases} -\kappa \Delta p, & z \in \gamma'; \\ 0, & z \in \gamma''; \end{cases} \quad \Psi(z) = 0, \quad z \in \gamma_1, \quad (11.59)$$

где κ — коэффициент фильтрации, $\Delta p = g_0 \rho_0 \Delta h$ — перепад давления на поверхности грунта в верхнем и нижнем бьефе (g_0 — ускорение свободного падения, ρ_0 — плотность воды, Δh — разность уровней воды в верхнем и нижнем бьефах). При записи (11.59) использован закон Дарси (см. 11.1), а в (11.2) принято $\beta = -\kappa$.

Если поперечное сечение основания плотины имеет форму полукруга радиуса R , то условиям (11.59) будет удовлетворять комплексный потенциал вида (5.58) (постоянные слагаемые опущены)

$$W(z) = \frac{\kappa \Delta p}{\pi i} \ln z, \quad |z| \geq R, \quad \text{Im } z \leq 0. \quad (11.60)$$

В самом деле, выделяя в (11.60) действительную и мнимую части и полагая $z = \rho e^{i\varphi}$ ($\rho \geq R$, $-\pi \leq \varphi \leq 0$), получаем уравнения

$$\Phi(z) = \frac{\kappa \Delta p}{\pi} \varphi = \text{const}, \quad \Psi(z) = -\frac{\kappa \Delta p}{\pi} \ln \frac{\rho}{R} = \text{const} \quad (11.61)$$

семейств линий равного потенциала и линий тока в полярных координатах, причем на лучах $\arg z = 0$ и $\arg z = -\pi$ при $\rho \geq R$

имеем $\Phi(z) = 0$ и $\Phi(z) = -\kappa\Delta p$ соответственно, а на полуокружности $|z| = R$, $\text{Im } z < 0$ — $\Psi(z) = 0$.

Неравномерное распределение по основанию плотины давления p фильтрационного потока приводит к возникновению приходящейся на единицу ее длины равнодействующей силы, имеющей не только вертикальную Y , но и горизонтальную X составляющие:

$$Y = - \int_{-\pi}^0 p(\varphi) R \sin \varphi d\varphi, \quad X = - \int_{-\pi}^0 p(\varphi) R \cos \varphi d\varphi. \quad (11.62)$$

Учитывая (11.2) и (11.61), при $\rho = R$ имеем $p(\varphi) = -\frac{\Phi(\varphi)}{\kappa} = -\frac{\varphi}{\pi}\Delta p$. Поэтому из (11.62) вытекает, что $Y = R\Delta p$ и $X = \frac{2R}{\pi}\Delta p$. Если поры в грунте являются сообщающимися, то необходимо учесть наличие в нем гидростатического давления $-g_0\rho_0 y$. Оно не изменит горизонтальной составляющей равнодействующей, но к вертикальной составляющей Y добавит силу выталкивания $g_0\rho_0\pi R^2/2$, равную весу воды, вытесненной основанием плотины. Так как плотина и ее основание представляют собой единое сооружение, то при расчете действующих на это сооружение сил следует, очевидно, к горизонтальной составляющей X добавить силу $g_0\rho_0(\Delta h)^2/2$, вызванную перепадом Δh уровней воды в верхнем и нижнем бьефах, а к вертикальной — вес воды в объеме части плотины, находящемся ниже уровня воды в нижнем бьефе.

Слой грунта, через который просачивается вода под плотиной, в действительности имеет конечную толщину. Если принять нижнюю границу этого слоя, соответствующую прямой $\text{Im } z = -H$ (рис. 11.24), водонепроницаемой, т.е. считать ее линией тока, то наличие этой границы можно приближенно учесть, поместив в точку $z = -2iH$ *вихрь интенсивности* $\kappa\Delta p$, равной, но противоположной по знаку интенсивности вихря с

Используя тождество

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{q^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi q}{\pi q},$$

получаем

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{\kappa \Delta p}{\pi} \ln \frac{3R}{2H+R} - \frac{\kappa \Delta p}{\pi} \left(\ln \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{\frac{3\pi}{4}} - \ln \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \right) - \\ &\quad - \frac{\kappa \Delta p}{\pi} \left(\ln \frac{\sin \frac{\pi R}{4H}}{\frac{\pi R}{4H}} - \ln \frac{\sin \frac{\pi(2H+R)}{4H}}{\frac{\pi(2H+R)}{4H}} \right) = \\ &= -\frac{\kappa \Delta p}{\pi} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi R}{4H} = \frac{\kappa \Delta p}{\pi} \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi R}{4H}. \end{aligned}$$

Например, при $R/H = 1/2$ имеем $Q = 0,28055\kappa\Delta p$. Для сравнения обратимся к формулам (11.63) и (11.64), из которых получаем соответственно $Q = 0,34970\kappa\Delta p$ и $Q = 0,29167\kappa\Delta p$.

В заключение этого примера отметим, что если основание плотины имеет поперечное сечение, отличающееся по форме от полукруга и ограниченное некоторой кривой γ_1 и отрезком $[0, b]$ действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$ (см. рис. 11.23), то поперечное сечение целесообразно отобразить конформно на полукруг так, чтобы отрезок $[0, b]$ был образом диаметра полукруга, а кривая γ_1 — образом полуокружности. Тогда для решения задачи можно использовать изложенный выше подход, заменяя во всех соотношениях z функцией $g(z)$, осуществляющей такое отображение.

Пример 11.10. *Источник с положительной или отрицательной интенсивностью Q вызывает возмущение однородного векторного поля скорости жидкости или газа. Это возмущение позволяет оценить зону распространения в потоке подводимой*

при $Q > 0$ инородной среды (например, загрязненной жидкости или дымовой завесы). В случае $Q < 0$ зону такого возмущения можно интерпретировать как область потока, из которой происходит забор жидкости или газа.

Пусть V_0 — скорость невозмущенного потока жидкости, совпадающая с положительным направлением действительной оси $\text{Im } z = 0$. Поместим в точку $z = 0$ источник интенсивности $Q > 0$. Тогда комплексный потенциал $W(z)$, описывающий взаимодействие этого потока и источника, в силу свойства аддитивности будет суммой комплексного потенциала $W_0(z) = = V_0 z$ потока и комплексного потенциала источника, который можно представить в виде (5.56), т.е.

$$W(z) = V_0 z + \frac{Q}{2\pi} \ln z. \quad (11.66)$$

Дифференцированием (11.66) находим скорость течения:

$$V(z) = \overline{W'(z)} = V_0 + \frac{Q}{2\pi} \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = V_0 + \frac{Q}{2\pi \bar{z}}.$$

Отсюда следует, что скорость равна нулю в единственной точке $z_0 = -Q/(2\pi V_0)$, т.е. эта точка является *критической*.

Полагая $z = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ и выделяя в (11.66) мнимую часть, получаем уравнение

$$V_0 \rho \sin \varphi + \frac{Q}{2\pi} \varphi = \text{const} = k_\Psi \quad (11.67)$$

семейства линий тока (на рис. 11.26 стрелки указывают направление вектора скорости жидкости, касательного к линии тока). Значение $|z_0| = Q/(2\pi V_0)$ в данном случае характеризует расстояние от источника, на которое проникает вверх по течению инородная среда. Отметим, что $\arg z_0 = \pi$ при $Q > 0$. Для линии тока, проходящей через точку $z_0 = -Q/(2\pi V_0)$ и ограничивающей область D распространения инородной среды,

получим значение константы $k_{\Psi} = Q/2$. Поскольку $\rho \sin \varphi = y$ и $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$ при $x > 0$, уравнение для этой линии тока в области $x > 0$ можно представить в виде

$$y = \frac{Q}{2V_0} \left(1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right).$$

Анализируя полученное представление, нетрудно заключить, что эта линия тока имеет горизонтальные асимптоты $y = \pm Q/(2V_0)$, к которым она приближается при $x \rightarrow +\infty$.

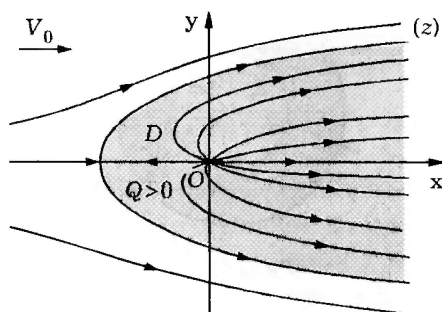


Рис. 11.26

Если в (11.66) принять $V_0 < 0$ и $Q < 0$, то характер векторного поля мало изменится: на рис. 11.26 изменится лишь направление стрелок на линиях тока. В этом случае линия тока, проходящая через точку z_0 , будет ограничивать область захвата источника с отрицательной интенсивностью (например, водозаборной скважины), а значение $|z_0| = Q/(2\pi V_0)$ будет характеризовать, на сколько граница этой области продвинута вниз по течению.

Пример 11.11. Рассмотрим кольцевой слой теплоизоляции на горячей поверхности круглой трубы, заключенный в металлический кожух с тонкими продольными ребрами (рис. 11.27). Ребра увеличивают жесткость кожуха, что необходимо, например, в случае, когда из кольцевой полости между трубой и кожухом для повышения эффективности теплоизоляции выкачивает-

ся воздух. Вместе с тем наличие металлических ребер в силу их высокой теплопроводности снижает суммарное термическое сопротивление теплоизоляции $R_T = \Delta T/Q$, где $\Delta T = T_T - T_K$ — разность температур трубы T_T и кожуха T_K , Q — тепловой поток, проходящий через изоляцию в расчете на единицу длины трубы. Найдем значение R_T при заданном количестве ребер n и известной высоте ребер h , принимая температуру ребер равной температуре T_K кожуха.

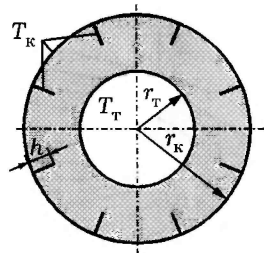


Рис. 11.27

Распределение температуры внутри кожуха можно представить комплексным потенциалом, т.е. в виде действительной части некоторой аналитической функции в кольцевой области с повторяющимися разрезами. Эта функция определяется граничными условиями: на внешней окружности, ограничивающей область, и на разрезе эта действительная часть функции имеет значение T_K , равное температуре кожуха, а на внутренней окружности — неизвестное значение T_T , равное температуре трубы.

Повторяющийся элемент кольцевого слоя теплоизоляции между двумя соседними ребрами показан на рис. 11.28. Отрезки A_1C_1 и $A'_1C'_1$ соответствуют радиальным сечениям кольцевого слоя, выделяющим из него повторяющийся элемент. В силу симметрии через эти отрезки нет переноса теплоты. Поэтому можно ограничиться рассмотрением отдельного элемента, считая, что на отрезках A_1C_1 и $A'_1C'_1$ этот элемент идеально

теплоизолирован. Температура дуги A'_1A_1 равна T_T , а температура дуги $D_1D'_1$ и отрезков C_1D_1 , $D'_1C'_1$ — T_K .

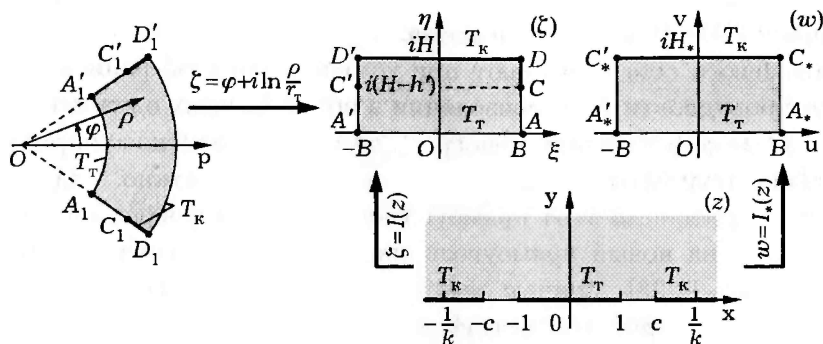


Рис. 11.28

Чтобы построить комплексный потенциал в выделенном элементе кольцевой области с нужным поведением на границе, отобразим этот элемент на область более простого вида — внутренность прямоугольника. Для этого введем полярную систему координат φ , ρ с полюсом O на оси трубы. Аналитическая в пределах выделенного элемента функция $\zeta = \varphi + i \ln(\rho/r_T)$ конформно отображает этот элемент на внутренность прямоугольника $ADD'A'$ (см. рис. 11.28) в плоскости (ζ) , характеризуемого параметрами B , H и h' , которые связаны соотношениями

$$2\frac{B}{H} = \frac{2\pi}{n \ln(r_K/r_T)}, \quad \frac{h'}{H} = -\frac{\ln(1 - h/r_K)}{\ln(r_K/r_T)},$$

где r_T и r_K — радиусы трубы и кожуха (см. рис. 11.27). Это конформное отображение переведет искомый комплексный потенциал в аналитическую внутри прямоугольника функцию, которая будет описывать распределение температуры внутри прямоугольника $ADD'A'$. При этом сторона $A'A$ этого прямоугольника будет иметь температуру T_T , а сторона $D'D$ и отрезки CD и $C'D'$ — температуру T_K . При конформном отображении линии равного потенциала (в данном случае —

изотермы) и линии тока теплового потока остаются взаимно перпендикулярными. Поэтому термические сопротивления слоя теплоизоляции с поперечным сечением в виде прямоугольника $ADD'A'$ и в виде выделенного повторяющегося элемента кольцевого слоя совпадают при условии, что коэффициент теплопроводности λ теплоизоляции в обоих случаях одинаков.

Однако вычислить непосредственно термическое сопротивление прямоугольника $ADD'A'$ достаточно сложно. Задача упростится, если этот прямоугольник удастся конформно отобразить на новый прямоугольник $A_*C_*C'_*A'_*$ в плоскости (w) (см. рис. 11.28), причем верхняя сторона $C_*C'_*$ этого прямоугольника будет соответствовать участку границы $CDD'C'$ старого прямоугольника, а нижняя сторона $A_*A'_*$ нового прямоугольника — нижней стороне AA' старого. Тогда распределение температуры для нового прямоугольника будет определяться значениями температуры на его горизонтальных сторонах A'_*A_* и C'_*C_* и условием идеальной теплоизоляции на его боковых сторонах. Такое распределение температуры имеет простой вид: $T = Cy$, где постоянная C может быть найдена из значений температуры на горизонтальных сторонах прямоугольника и его высоты.

Конформное отображение прямоугольника на прямоугольник можно осуществить в два этапа, используя в качестве промежуточной области верхнюю полуплоскость.

При помощи эллиптического интеграла первого рода

$$\zeta = I(z) = C^* \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad k < 1, \quad (11.68)$$

конформно отобразим верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на прямоугольник $ADD'A$, подбирая соответствующим образом параметры C^* и k . При этом отрезку $[-1, 1]$ действительной оси в плоскости (z) будет соответствовать сторона $A'A$ прямоугольника $ADD'A$ (см. рис. 11.28), а точке $z = 1$ будет отвечать в

плоскости (ζ) точка $\zeta = B$, т.е.

$$B = C^* \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = C^* \mathbf{K}(k), \quad (11.69)$$

где $\mathbf{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Чтобы точке $z = x = 1/k$ отвечала в плоскости (ζ) точка D ($\zeta = B + iH$), должно быть выполнено, согласно (10.44), условие

$$B + iH = C^* \int_0^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \mathbf{K}(k) + i\mathbf{K}(k'), \quad (11.70)$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнительный модуль эллиптического интеграла. Следовательно, из (11.69) и (11.70) имеем $H/B = \mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k) = \mu(k)$. Функция $\mu(k)$ монотонно убывает до нуля в промежутке $(0, 1]$ (рис. 11.29). Поэтому любому заданному отношению $H/B \in (0, +\infty)$ отвечает единственное значение модуля k .

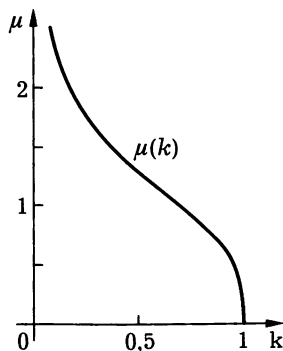


Рис. 11.29

Прообразом точки C в плоскости (ζ) при отображении (11.68) будет точка $c > 1$ действительной оси $\text{Im } z = 0$, удов-

летворяющая условию

$$\begin{aligned} B + i(H - h') &= C^* \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \\ &= B + i \frac{B}{\mathbf{K}(k)} \int_0^{1/c} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{H - h'}{B} \mathbf{K}(k) = \int_0^{1/c} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}.$$

Теперь ту же верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ конформно отобразим при помощи функции

$$w = I_*(z) = a_* \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_*^2x^2)}}$$

на прямоугольник $A_*C_*C'_*A'_*$ в плоскости (w) так, чтобы точка C_* стала образом точки $x = c > 1$ (см. рис. 11.28). В этом случае $k_* = 1/c < 1$. Из условия

$$B = a_* \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_*^2x^2)}} = \mathbf{K}(k_*)$$

получаем $a_* = B/\mathbf{K}(k_*)$, а из условия

$$\begin{aligned} B + iH_* &= a_* \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_*^2x^2)}} = \\ &= a_* \mathbf{K}(k_*) + a_* \int_1^{1/k_*} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_*^2x^2)}} = B + ia_* \mathbf{K}(k_*'), \end{aligned}$$

где $k'_* = \sqrt{1 - k_*^2}$, находим высоту $H_* = BK(k_*)/K(k_*)$ прямоугольника $A_*C_*C'_*A'_*$.

Решение задачи теплопроводности для случая прямоугольника $A_*C_*C'_*A'_*$ в силу простых граничных условий, как уже отмечалось, элементарно:

$$T_*(v) = T_T - \frac{T_T - T_K}{H_*}v.$$

Такому решению соответствуют горизонтальные изотермы и вертикальные линии тока. Через слой теплоизоляции единичной длины с поперечным сечением в виде этого прямоугольника проходит тепловой поток $Q' = 2\lambda B(T_T - T_K)/H_*$. Прямоугольник соответствует выделенному на рис. 11.28 элементу. Поэтому через кольцевой слой теплоизоляции, изображенный на рис. 11.27, проходит тепловой поток $Q = nQ'$, так что термическое сопротивление кольцевого слоя равно

$$R_T = \lambda \frac{T_T - T_K}{Q} = \frac{H_*}{2n\lambda B} = \frac{K(k'_*)}{2n\lambda K(k_*)}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебные пособия

Александров И.А., Соболев В.В. Аналитические функции комплексного переменного. М.: Высш. шк., 1984. 192 с.

Араманович И.Г., Луц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1968. 416 с.

Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 448 с.

Гурвиц А., Курант Р. Теория функций / Пер. с нем. *М.А. Евграфова.* М.: Наука, 1968. 648 с.

Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы): В 2 т. Т. 1. М.: Высш. шк., 1980. 280 с.

Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

Мантуров О.В. Курс высшей математики: Ряды. Уравнения математической физики. Теория функций комплексной переменной. Численные методы. Теория вероятностей. М.: Высш. шк., 1991. 448 с.

Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1978. 416 с.

Маркушевич А.И. Теория аналитических функций: В 2 т. Т.1. М.: Наука, 1967. 488 с.; Т. 2. М.: Наука, 1968. 624 с.

Мышкис А.Д. Математика для вузов: Специальные курсы. М.: Наука, 1971. 632 с.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1985. 432 с.

Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Высш. шк., 1999. 432 с.

Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. шк., 1983. 160 с.

Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1985. 336 с.

Шварц Л. Анализ / Пер. с франц. под ред. *С.Г. Крейна*. В 2 т. Т. 2. М.: Мир, 1972. 528 с.

Справочные издания

Александрова Н.В. Математические термины: Справочник. М.: Высш. шк., 1978. 190 с.

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.

Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Математический словарь высшей школы / Под ред. *Ю.С. Богданова*. Минск: Вышэйш. шк., 1984. 528 с.

Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы: Пер. с англ. М.: Наука, 1964. 228 с.

Коппенфельс В., Штальман Ц. Практика конформных отображений / Пер. с нем. под ред. *Л.И. Волковыского*. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 406 с.

Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. *Ю.В. Прохоров*. М.: Сов. энцикл., 1988. 848 с.

Савелов А.А. Плоские кривые: Систематика, свойства, применения. М.: Физматгиз, 1960. 293 с.

Задачники

Волковыский Л.И., Луц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1961. 368 с.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 т. Т. 2. М.: Высш. шк., 1986. 416 с.

Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1971. 256 с.

Крупин В.Г., Павлов А.П., Попов Л.Г. Сборник индивидуальных заданий по теории функций комплексного переменного. М.: Изд-во МЭИ, 1999. 80 с.

Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа: Учеб. пособие / Под ред. *А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича*: М.: Наука, 1981. 368 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсцисса точки I-78, III, 17

Аддитивность комплексного потенциала 189

Апplikата точки III

Аргумент комплексного числа I-150, 20

Ассоциативность I-45

Берег разреза верхний 39

-- нижний 39

Бета-функция VI

Бином Ньютона I-86

Вектор направляющий III

Ветвь однозначная многозначной функции 94

Вихресточник 188

Вихрь 187

Внешность кривой 37

- круга 31

Внутренность кривой 37

Вычет функции 278

-- в бесконечно удаленной точке 289

-- логарифмический 296

--- относительно контура 298

Гипербола III

Граница многосвязной области внешняя 38

--- внутренняя 38

- множества I-185, 32

Диполь 192

Дистрибутивность I-46

Дифференциал длины дуги плоской кривой II

- полный V, 135

- функции комплексного переменного в точке 112

Дополнение I-54, 33

Дробь рациональная I-133

-- правильная I-133

Единица мнимая I-149, 16

- поля 15

Замена параметра кривой 34

Замыкание множества 32

Значение аргумента главное I-150, 20

- арккосинуса главное 106

- логарифма главное 102

-- общее 102

- показательной функции главное 104

--- общее 104

Изображение комплексного числа сферическое 26

Инверсия 364

Интеграл Дирихле VI, 320

- контурный 149

- Коши 165

- криволинейный первого рода VII

Интеграл Кристоффеля — Шварца
436

- линейный векторного поля VII
- несобственный VI
- сходящийся в смысле главного значения IX, 313
- от функции комплексного переменного по кривой 146
- эллиптический первого рода VI
- полный 425

Интенсивность вихреисточника
комплексная 188

- вихря 187
- источника 186

Источник 186

Кардиоида II, 78

Касательная к кривой II

Коммутативность I-45

Контур замкнутый II, 34

- простой II, 34
- составной 39

Координаты точки I-78, III

- полярные I-151, III, 19

Котангенс I-128

Коэффициент растяжения в точке
при отображении 128

Коэффициенты комплексного
степенного ряда 56

- Тейлора 212

Кратность нуля аналитической
функции 239

- функции в бесконечно
удаленной точке 242

Кривая гладкая II, 35

- Жордана 34

Кривая замкнутая II, 34

- кусочно гладкая II, 36
- на плоскости 33
- расширенной плоскости 33
- простая 34

Критерий дифференцируемости
функции комплексного
переменного 115

- Коши 50, 202
- симметричности точек 365

Круг сходимости степенного ряда
59

Лемма Жордана 315

- Шварца 342

Лемниската Бернулли II, 273

Линия равного потенциала 180

- силовая 180
- тока 180
- эквипотенциальная 180

Логарифм комплексного числа 101

- натуральный I-288

Луночка 384

Мажоранта ряда 202

Максимум локальный II

Метрика евклидова (естественная)
I-179, 30

- сферическая 30

Минимум локальный II

Многочлен I-132

Множество действительных чисел
пополненное (расширенное) I-50,
27

- замкнутое I-186, 32
- компактное I-189, 27
- линейно связное V, 36
- ограниченное I-183

Множество открытое I-181, 32

– (подмножество) счетное I-93

Модуль интеграла эллиптического
дополнительный 427

– комплексного числа I-150, 20

Момент диполя 192

Начало координат I-77, III

Неравенства Коши 213

Неравенство треугольника I-152

Нормировка конформного
отображения 337

Ноль аналитической функции
простой 239

– функции комплексного
переменного 239

Область 36

– замкнутая 37

– изменения комплексного
переменного 41

– многосвязная 38

– ограниченная 36

– односвязная 38

– расширенной комплексной
области односвязная 40

– сходимости 56

-- абсолютной 56

-- ряда функционального 198

-- условной 56

– n -связная 38

Образ множества при отображении
I-70, 125

Обход границы отрицательный 39

-- положительный 38

Овалы Кассини II, 459

Оператор Лапласа XII, 134

Ордината точки I-78, III, 17

Остаток ряда IX, 66, 200

Ось абсцисс III, 17

– действительная I-150, 17

– диполя 193

– мнимая I-150, 17

– ординат III, 17

Отображение (функция) I-70, 72

– дробно-линейное 358

– инъективное I-74

– конформное в области 334

--- точке 127

– линейное 353

– непрерывное I-192

Отображения эквивалентные 34

Парабола III

Параметр кривой натуральный II

Пара упорядоченная I-78, 15

Переменное комплексное 41

Период функции I-121, 88

Плоскость комплексная
(комплексных чисел) I-149, 16

-- расширенная 26

Поверхность модуля 78

– цилиндрическая III

Подпоследовательность I-243

Показатель степени I-126, 84

Поле векторное лапласово VII, 176

-- плоскопараллельное (плоское)
175

-- потенциальное VII, 176

-- соленоидальное VII, 176

– вихреисточника 188

– вихря 187

– диполя 192

- Поле источника 186
- квадруполя 273
 - (множество) комплексных чисел I-149, 15
 - мультиполя ($2m$)-го порядка 275
- Полуось гиперболы действительная III
- эллипса большая III
 - малая III
- Полус 245
- простой 253
- Порядок нуля аналитической функции 239
- полюса 253
- Последовательность комплексных чисел бесконечно большая 48
- ограниченная 50
 - стремящаяся к бесконечности 48
 - сходящаяся 47
 - фундаментальная 50
- Постоянная циклическая VII, 97
- Потенциал комплексный 179
- скоростей 177
- Поток векторного поля VII
- Правило параллелограмма III
- Предел отображения в точке по множеству I-295, 82
- последовательности комплексных чисел 46
 - функции комплексного переменного в точке 80
- Признак Вейерштрасса 202
- Даламбера IX
 - Коши радикальный I
 - Лейбница IX
- Принцип аргумента 301
- максимума модуля 340
 - непрерывности 345
 - симметрии 347
 - соответствия границ 338
 - сохранения области 340
- Приращение аргумента в точке I-326, 110
- функции в точке I-326, 110
- Продолжение отображения I-73, 142
- функции аналитическое 142
- Произведение абсолютно сходящихся рядов IX, 220
- комплексных чисел I-152, 15
- Производная функции комплексного переменного в точке 110
- Прообраз множества при отображении I-70, 73
- Пространство метрическое I-177
- Профили Жуковского 399
- Прямая числовая расширенная (пополненная) I-50, 27
- Путь интегрирования 146
- Р**адиус-вектор II, III, 19
- Радиус полярный I-151, 20
- сходимости степенного ряда 59
- Разложение функции в ряд Тейлора 212
- лорановское в окрестности особой точки 247
- Разность векторов III, 19
- Разрез 37
- Расстояние I-177
- Рельеф функции 78

- Ряд гармонический IX, 55
- Дирихле IX, 55
 - комплексный степенной 56
 - Лорана 225
 - в окрестности особой точки 247
 - мажорируемый 202
 - Маклорена IX
 - расходящийся IX, 54
 - степенной двусторонний 68
 - расходящийся в точке 56
 - сходящийся в точке 56
 - абсолютно 56
 - условно 56
 - сходящийся равномерно внутри 203
 - Тейлора для функции комплексного переменного 212
 - функциональный сходящийся в точке 198
 - функциональный сходящийся равномерно 199
 - Фурье IX, 234
 - числовой комплексный IX, 53
 - сходящийся 53
- С**войство круговое дробно-линейного отображения 362
- Сила подъемная крыла 477
- Система координат прямоугольная III
- Спираль архимедова 44
- Сумма векторов III, 19
- интегральная VI, 145
 - комплексных чисел I-152, 15
 - ряда IX, 53
 - частичная IX, 52
- Сфера комплексных чисел 26
- Римана 26
- Т**ангенс I-128
- Тело цилиндрическое VII, 176
- Теорема Абеля 57
- алгебры основная I-159, 270
 - Коши для многосвязной области 154
 - односвязной области 153
 - о вычетах 280
 - Лиувилля 213
 - Мореры 174
 - об обратной функции 326
 - о логарифмическом вычете 298
 - сумме вычетов 291
 - Римана 335
- Точка бесконечная I-50, 27
- бесконечно удаленная 26
 - возврата (заострения) II, 400
 - кривой конечная 33
 - начальная 33
 - угловая 36
 - критическая потока 466
 - множества внешняя 32
 - внутренняя I-184, 32
 - граничная I-184, 32
 - предельная I-185, 32
 - особая изолированная 230
 - устранимая 245
 - функции комплексного переменного 166
 - разветвления потока 466
 - самопересечения кривой 34
 - существенно особая 245
 - схода потока 466
 - функции особая изолированная 245

Точки симметричные относительно окружности 364

Угол полярный I-151, 20

Уравнение гиперболы каноническое III, 396

– кривой комплексное 33

– Лапласа 134

– характеристическое VIII

– эллипса каноническое III, 394

Уравнения кривой параметрические II, 33

– прямой параметрические III

Условие сходимости комплексного числового ряда 54

Условия Коши — Римана 113

---- в полярных координатах 118

Фокус гиперболы III

– параболы III

Форма записи комплексного числа алгебраическая I-149, 16

---- тригонометрическая I-151, 19

– представления комплексного числа геометрическая I-150, 17

---- показательная 86

Формула Жуковского 473

– Коши интегральная 165

– Коши — Адамара 61

– Муавра I-154, 22, 23

– Ньютона — Лейбница II, 162

– Эйлера 86

Функции гармонические

сопряженные 135

– комплексного переменного тригонометрические 85

Функции тригонометрические

I-128, 85

– целые трансцендентные 270

Функция аналитическая в замкнутой области 122

--- точке 122

-- (голоморфная, регулярная) в области 122

– гармоническая XII, 134

– голоморфная в точке 122

– дробно-линейная I-133, 358

– Жуковского 392

– комплексного переменного 72

--- дифференцируемая в точке 111

---- многозначная 94

---- непрерывная в точке 83

----- на множестве 84

----- равномерно 84

--- ограниченная на множестве 84

--- показательная 85

– логарифмическая 103

– мероморфная 270

– однолиственная в точке 329

– периодическая I-121, 88

– показательная общая 104

– потенциальная VII, 177

– регулярная в точке 122

– силовая 177

– степенная общая 104

-- целая 381

– тока 177

– целая 122

Центр разложения 212

Циркуляция векторного поля VII

Циссоида Диоклеса II, 372

Часть комплексного числа

- действительная I-149, 16
- мнимая I-149, 16
- лорановского разложения главная 248, 264
- правильная 248, 264
- ряда Лорана главная 226
- правильная 225
- целая I-117

Числа комплексно сопряженные

I-150, 18

Число комплексное I-149, 15

- чисто мнимое I-150, 17

Член общий комплексного
числового ряда 53

Элемент нейтральный I-140, 15

- поля нулевой 15

- последовательности I-216, 46

Якобиан V, 129

ϵ -окрестность точки I-179, 31

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Основные обозначения	10
1. Комплексная плоскость	15
1.1. Алгебраическая форма записи комплексного числа	15
1.2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа	19
1.3. Бесконечно удаленная точка. Сфера Римана	25
1.4. Геометрия на комплексной плоскости	30
1.5. Задание множества точек на комплексной плоскости	41
Вопросы и задачи	45
2. Последовательности и ряды комплексных чисел	46
2.1. Последовательности комплексных чисел	46
2.2. Комплексные числовые ряды	52
2.3. Степенные ряды	56
2.4. Круг сходимости	58
2.5. Двусторонний степенной ряд	67
Вопросы и задачи	71
3. Функции комплексного переменного	72
3.1. Определение и геометрическое представление функции комплексного переменного	72
3.2. Предел и непрерывность функций комплексного переменного	80
3.3. Элементарные функции комплексного переменного	84
3.4. Многозначная функция $\text{Arg } z$	94
3.5. Логарифмическая функция	101
3.6. Обратные тригонометрические функции	105
Вопросы и задачи	107
4. Дифференцирование функций комплексного переменного	110
4.1. Производная функции комплексного переменного	110
4.2. Необходимые условия дифференцируемости	112
4.3. Достаточные условия дифференцируемости	114
4.4. Условия Коши — Римана в полярных координатах	116
4.5. Правила дифференцирования функций комплексного переменного	120

4.6.	Аналитические функции	122
4.7.	Геометрический смысл аргумента и модуля производной	125
4.8.	Теорема о единственности аналитической функции	130
4.9.	Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части	133
4.10.	Понятие об аналитическом продолжении	142
	Вопросы и задачи	143
5.	Интегрирование функций комплексного переменного	145
5.1.	Понятие и вычисление интеграла от функции комплексного переменного	145
5.2.	Интегральные теоремы Коши	153
5.3.	Независимость интеграла от пути интегрирования	157
5.4.	Формула Ньютона — Лейбница	161
5.5.	Интегральная формула Коши	164
5.6.	Высшие производные аналитической функции	170
5.7.	Достаточные условия аналитичности функции	174
Д.5.1.	Комплексный потенциал плоского векторного поля	175
	Вопросы и задачи	196
6.	Функциональные ряды на комплексной плоскости	198
6.1.	Равномерная сходимость функциональных рядов	198
6.2.	Свойства равномерно сходящихся рядов	204
6.3.	Ряд Тейлора	210
6.4.	Разложение функций в ряд Тейлора	214
6.5.	Ряд Лорана	221
6.6.	Нахождение всевозможных разложений функции по заданным степеням	230
6.7.	Связь ряда Лорана с рядом Фурье	234
	Вопросы и задачи	237
7.	Нули и особые точки аналитической функции	239
7.1.	Нули аналитической функции	239
7.2.	Изолированные особые точки	245
7.3.	Бесконечно удаленная точка как особая	262
7.4.	Классификация аналитических функций по их особым точкам	269
Д.7.1.	Физическое толкование полюсов аналитической функции	272
	Вопросы и задачи	276

8. Вычеты в изолированных особых точках	278
8.1. Вычет в конечной точке	278
8.2. Вычисление вычета в полюсе	284
8.3. Вычет в бесконечно удаленной точке	288
8.4. Применение вычетов для вычисления интегралов . .	294
8.5. Логарифмический вычет	296
Д.8.1. Вычисление интегралов от действительных функций	311
Вопросы и задачи	322
9. Геометрические принципы теории функций комплексного переменного	325
9.1. Взаимно однозначные отображения	325
9.2. Свойства конформных отображений	331
9.3. Теорема Римана	335
9.4. Принцип соответствия границ	338
9.5. Принцип максимума модуля функции	340
9.6. Принцип симметрии	345
Вопросы и задачи	350
10. Конформные отображения	352
10.1. Линейное отображение	353
10.2. Дробно-линейное отображение	358
10.3. Целая степенная функция	377
10.4. Показательная функция	386
10.5. Функция Жуковского	392
10.6. Тригонометрические и гиперболические функции . .	402
10.7. Однозначные ветви многозначных обратных функций	405
Д.10.1. Отображение полуплоскости на внутренность прямо-	
угольника	424
Д.10.2. Интеграл Кристоффеля — Шварца	429
Вопросы и задачи	445
11. Прикладные задачи	448
11.1. Предварительные замечания	448
11.2. Непосредственное использование известного комплекс-	
ного потенциала	452
11.3. Обтекание цилиндрического тела	462
11.4. Течение жидкости в каналах	477
11.5. Задачи различного физического содержания	483
Список рекомендуемой литературы	508
Предметный указатель	510

Учебное издание

**Математика в техническом университете
Выпуск X**

Морозова Валентина Дмитриевна

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Редактор *Е.В. Авалова*
Художник *С.С. Водчиц*
Корректор *О.В. Калашикова*

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
под руководством *А.Н. Каматникова*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003961.04.08 от 22.04.08 г.

Подписано в печать 10.09.2008. Формат 60×88/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 32,5. Уч.-изд. л. 31,92.
Тираж 1000 экз. Заказ № 2054

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Отпечатано с диапозитивов
в ГУП ППП «Типография «Наука».
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-7038-3189-2

