МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ЦЕНТР СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АЛИШЕРА НАВОИ

МАТЕМАТИКА

I, II, III части

Методическое пособие
для поступающих в ВУЗы

ПРЕДИСЛОВИЕ

С первых лет независимости нашей республики прием студентов в высшие учебные заведения осуществляется на основе результатов тестовых испытаний. В настоящее время создание учебной литературы, полностью отвечающей требованиям, обозначенным в «Законе об образовании» и «Национальной программе по подготовке кадров» и помогающей выпускникам всесторонне подготовиться к тестовым испытаниям, является актуальной проблемой.

В последние годы Правительство Республики Узбекистан приняло ряд постановлений о развитии сотрудничества между высшими учебны-ми заведениями и академическими лицеями и профессиональными колледжами в сферах воспитания, создания учебной литературы и повышения профессиональных качеств преподавателей. В частности, приказ министра высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан № 109 от 14 марта 2011 года направлен на оказание практической методической помощи средне-специальным и профессиональным учебным заведениям.

Данное методическое пособие по «Математике» разработано в ответ на вышеуказанные задачи. Пособие предназначено для учителей и учащихся академических лицеев и профессиональных колледжей. Оно охватывает программу среднего специального образования по математике и может служить важным подспорьем для выпусников в их подготовке к тестовым испытаниям.

Основной целью методического пособия является закрепление полученных теоретических знаний учащихся, повышение их умений и навыков решения примеров и задач, а также формирование у них мастерства математического рассуждения.

Методическое пособие состоит из трех частей. I часть включает примеры и задачи по «Алгебре», II часть — по «Алгебре и началам анализа», III часть — по «Геометрии». В I и II частях пособия собраны примерно 2800 тестовых заданий, из которых 500 приведены с решениями. III часть пособия включает около 1400 тестовых заданий, из них примерно 250 — с решениями. В пособии коротко изложены теоретические сведения, необходимые для решения примеров, по каждой теме приведены наиболее важные утверждения и формулы. Задачи по темам разбиты на типы, система заданий упорядочена по принципу от простого к сложному, по каждому типу решен пример (один из шести). В необходимых местах даны методические указания, построены графики и приведены рисунки геометрических фигур. В конце пособия приведены 3 варианта тестовых заданий по 36 примеров. Ответы тестовых заданий приведены по темам.

Составители выражают глубокую благодарность ответственным редакторам и рецензентам за ценные советы, способствовавшие улучшению методического пособия.

В пособии могут быть отдельные неточности и недостатки, и поэтому составители будут признательны читателям за критические замечания по его содержанию, которые просим отправлять по электронному адресу jabdullaev@mail.ru.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ЦЕНТР СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АЛИШЕРА НАВОИ

МАТЕМАТИКА

I, II, III части

Методическое пособие
для поступающих в ВУЗы

ТАШКЕНТ
«TURON-IQBOL»
2019

UDK 51(072)
KBK 22.1
A13

Ответственные редакторы:

1. Хайдар Х. Рузимуродов — кандидат физико-математических наук;
2. Курбан Н. Остонов — кандидат педагогических наук.

Составители:

1. Жаникул И. Абдуллаев — доктор физико-математических наук;
2. Ботир Э. Давранов — кандидат физико-математических наук;
3. Нурилла Х. Норалиев — кандидат физико-математических наук;
4. Ислом Н. Бозоров — кандидат физико-математических наук;
5. Дамин Н. Шамсиев — кандидат физико-математических наук;
6. Нурали Ж. Рузиев — преподаватель высшей котегории.

Рецензенты:

1. Баходир Р. Шамсуддинов — кандидат физико-математических наук;
2. Лилия С. Соколовская — старший преподаватель;
3. Икбол Э. Ниезов — кандидат физико-математических наук;
4. Норкул Т. Нишонов — старший преподаватель;
5. Хабиба Носирова — кандидат физико-математических наук;
6. Зубаер Пашаев — старший преподаватель.

Абдуллаев Ж.

A13 Математика : методическое пособие. Ч.1 / Ж. Абдуллаев. – Ташкент : TURON-IQBOL. 2019. – 320 с.

KBK 22.1

Рекомендовано учебно-методическим советом СамГУ в качестве методического пособия для преподавателей и учащихся академических лицеев и профессиональных колледжей.

Рекомендовано в печать решением учебно-методического совета СамГУ протокол №2 от 29 октября 2013 г.

ISBN 978-9943-14-291-6

Содержание

1 Действительные числа

1.1 Натуральные и целые числа

Для описания чисел в десятичной системе используются десять символов: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Эти символы называются *цифрами*. Например: $1, 18, 524, 2815, 62703$. 1-это и цифра и число. 18 - это не цифра, а число, оно состоит из цифр 1 и 8. Цифры выше приведенных чисел имеют разные значения по позициям. Например, в числе 524 (пятсот двадцать четыре) цифра 4 означает 4 единицы, 2 означает 2 десятка, 5 означает 5 сотен. Значит, $524 = 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 1$. Описание чисел с помощью 10 цифр называется десятичной системой счисления. *Натуральными называются числа, используемые для счета предметов.* Множество натуральных чисел обозначается буквой $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Множество целых чисел обозначается $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. На множестве целых чисел определены операции сложения, вычитания и умножения. Они имеют следующие свойства.

1. $a + b = b + a, \quad ab = ba.$

2. $-(-a) = a, \quad a - b = a + (-b).$

3. $(a + b) + c = a + (b + c).$

4. $-(a + b - c) = -a - b + c.$

5. $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -ab.$

6. $(ab) \cdot c = a \cdot (bc) = b \cdot (ac).$

7. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$

Степени числа $a \in \mathbb{Z}$ определяются таким образом: $a^1 = a, a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$ и так далее $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n}$. Здесь a называется *основанием, $n-$ показателем степени.*

Свойства степени с натуральным показателем. Для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ и n, $m \in \mathbb{N}$ справедливы следующие равенства:

8. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad (a : b)^n = a^n : b^n.$

9. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$

10. $a^n : a^m = a^{n-m}, \quad n > m.$

11. $a^0 = 1 = a^n : a^n, \quad a \neq 0.$

Операции сложения и вычитания называются операциями первой ступени, операции умножения и деления - операциями второй ступени, операции возведения в степень и извлечения корня - операциями третьей ступени. Операции высокой ступени выполняются раньше операций низкой ступени. В одноступенном выражении операции выполняются в порядке очередности слева направо. Если в выражении присутствуют скобки, сначала выполняются операции в скобках и затем вне скобок.

1.1.1 Задачи на вычисление

1. Вычислите значение выражения
$$18 - 6 : 2 + 3 \cdot 4,$$
учитывая ступени операций.
A) 3 B) 27 C) 18 D) 33

Решение: В выражении имеются операции 1-ой и 2-ой ступени. Сначала выполним операции 2-ой ступени (умножение и деление).
$$18 - 6 : 2 + 3 \cdot 4 = 18 - 3 + 12.$$
Теперь выполним операции 1-ой ступени.
$$18 - 3 + 12 = 15 + 12 = 27.$$
Ответ: 27 (B).

2. (96-3-1) Найдите значение выражения $12 - 6 : 3 + 2 \cdot 4$.
A) 16 B) 10 C) 18 D) 48

3. (96-11-1) Найдите значение выражения $15 - 9 : 3 + 4 \cdot 3$.
A) 24 B) 18 C) 48 D) 12

4. (96-12-1) Найдите значение выражения $18 - 12 : 2 + 5 \cdot 3$.
A) 18 B) 24 C) 4 D) 27

5. Найдите значение выражения $24 - 6 : 3 + 5 \cdot 2$.
A) 16 B) -3 C) 32 D) 22

6. Найдите значение выражения $8 : 2^2 + 4 \cdot 3 - 10$.
A) 6 B) 4 C) 18 D) 12

Решение: Сначала выполним операции 3-ей ступени (возведение в степень), потом 2-ой ступени (деление и умножение):
$$8 : 2^2 + 4 \cdot 3 - 10 = 8 : 4 + 4 \cdot 3 - 10 = 2 + 12 - 10.$$
Выполнив операции 1-ой ступени получим: $2 + 12 - 10 = 14 - 10 = 4$. **Ответ:** 4 (B).

7. Найдите значение выражения $4^2 : 2 + 3 \cdot 4 - 5$.
A) 11 B) 39 C) 15 D) 12

8. Найдите значение выражения $3 \cdot 5 + 3 \cdot 2^3 - 25$.
A) 206 B) 14 C) 119 D) 12

9. Найдите значение выражения $24 : 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2^4 - 7$.
A) 19 B) $-52,6$ C) -1243 D) 5

10. Найдите значение выражения $27 : 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 15$.
A) 22 B) 4 C) 15 D) 732

11. Найдите значение выражения $(2 \cdot 6 + 8) \cdot 2 - 2$.
A) 16 B) 0 C) 54 D) 38

Решение: Сначала вычислим выражение в скобках: $2 \cdot 6 + 8 = 12 + 8 = 20$. Теперь выполним умножение и потом вычитание: $20 \cdot 2 - 2 = 40 - 2 = 38$. **Ответ:** 38 (D).

12. Найдите значение выражения $(2+8\cdot 6)\cdot 2-2\cdot 7$.
A) 86 B) 0 C) 54 D) 38

13. Найдите значение выражения $(5+3\cdot 6)\cdot 2-2\cdot 23$.
A) 18 B) 0 C) 50 D) 13

14. Найдите значение выражения
$3+3\cdot 2(7\cdot 2-4):3$.
A) 40 B) 20 C) 23 D) 35

15. (96-7-1) Вычислите
$21\cdot 18-19\cdot 18+18\cdot 17-17\cdot 16+16\cdot 15-15\cdot 14$.
A) 50 B) 100 C) 98 D) 24

Решение: Сгруппируем члены, имеющие общие множители и вынесем обший множитель каждой группы за скобки и вычислим значение выражения:

$$21\cdot 18-19\cdot 18+18\cdot 17-17\cdot 16+16\cdot 15-15\cdot 14=$$
$$=18(21-19)+17(18-16)+15(16-14)=$$
$$=18\cdot 2+17\cdot 2+15\cdot 2=2(18+17+15)=$$
$=2\cdot 50=100$. **Ответ:** 100 (B).

16. (97-7-1) Вычислите
$36\cdot 24-33\cdot 24+17\cdot 11-14\cdot 11+18\cdot 16-15\cdot 16$.
A) 166 B) 155 C) 180 D) 153

17. (97-10-1) Вычислите
$27\cdot 23-24\cdot 23+21\cdot 19-18\cdot 19+17\cdot 11-14\cdot 11$.
A) 165 B) 159 C) 143 D) 203

18. (00-5-4) Вычислите
$139\cdot 15+18\cdot 139+15\cdot 261+18\cdot 261$.
A) 13200 B) 14500 C) 15100 D) 16200

19. (96-1-1) Найдите значение выражения
$26\cdot 25-25\cdot 24+24\cdot 23-23\cdot 22-12\cdot 8$.
A) 106 B) 1 C) 54 D) 0

1.1.2 Простые и составные числа

Если для натуральных чисел a и b число $a:b=c$ тоже является натуральным, то говорят, что *a делится на b*. Число a называется *кратным (или делимым)* числа b, а число b - *делителем* числа a, число c называется *частным*. Например, число 24 делится на числа 1,2,3,4,6,8,12 и 24. Если натуральное число имеет только два делителя (1 и само число), то оно называется *простым*. Простые числа: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$. Если натуральное число имеет более двух делителей (т.е. делится хотя бы на одно число, кроме 1 и самого числа), то оно называется *составным*. Составные числа: $4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, \ldots$. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

1. Сколько простых чисел, меньших 30?
A) 11 B) 9 C) 10 D) 12

Решение: Простые числа, меньше 30 это 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Их 10. **Ответ:** 10 (C).

2. (98-5-8) Сколько простых чисел, меньших 50?
A) 10 B) 15 C) 17 D) 9

3. Сколько простых чисел между 30 и 50?
A) 4 B) 3 C) 5 D) 7

4. (02-5-4) Сколько простых чисел имеется среди чисел 1; 2; 3; 15; 17; 23; 24; 169; 289; 361?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 7

5. Сколько составных чисел имеется среди чисел 2; 3; 15; 17; 21; 23; 29; 39; 51; 57?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 7

6. (99-3-7) Какие из числовых последовательностей состоят из простых чисел?
1) 0; 3; 5; 7; 11; 2) 1; 3; 5; 7; 13; 3) 3; 5; 7; 9; 11; 4) 2; 3; 5; 7; 17; 5) 3; 5; 17; 19; 381
A) 1; 2 B) 2; 4 C) 5 D) 4

1.1.3 НОД-наибольший общий делитель и НОК-наименьшее общее кратное

Наибольшим общим делителем (НОД) натуральных чисел a и b называется наибольшее число, на которое они оба делятся. Он обозначается $D(a;\, b)$. *Наименьшим общим кратным (НОК) натуральных чисел a и b* называется наименьшее число, которое делится на каждое из них. Оно обозначается $K(a;\, b)$. Если числа a и b не имеют общих делителей кроме 1, то они называются *взаимно простыми*. Минимумом двух чисел a и b называется меньшее из них и обозначается $min\{a,\, b\}$. Максимумом двух чисел a и b называется большее из них и обозначается $max\{a,\, b\}$. Пример, $min\{0,\, 2\}=0,\ max\{1,\, 3\}=3$.

1. **Число натуральных делителей числа, представленного в виде произведения степеней простых чисел $a=2^m\cdot 3^n\cdots p^k$ равно $(m+1)\cdot(n+1)\cdots(k+1)$.**

2. **Сумма натуральных делителей числа, представленного в виде произведения степеней простых чисел $a=2^m\cdot 3^n\cdots p^k$ равна:**
$$S(a)=\frac{2^{m+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{n+1}-1}{3-1}\cdots\frac{p^{k+1}-1}{p-1}.$$

3. **Число общих натуральных делителей a и b равно числу натуральных делителей НОД этих чисел.**

4. **Имеет место равенство $D(a;\, b)K(a;\, b)=ab$.**

Для натуральных чисел, представленных в виде произведения степеней простых множителей $a=2^{m_1}\cdot 3^{n_1}\cdots p^{k_1}$ и $b=2^{m_2}\cdot 3^{n_2}\cdots p^{k_2}$ имеют место равенства 5-6:

5. $D(a;\, b)=2^{min\{m_1,\, m_2\}}.3^{min\{n_1,\, n_2\}}\ldots p^{min\{k_1,\, k_2\}}$.

6. $K(a;\, b)=2^{max\{m_1,\, m_2\}}.3^{max\{n_1,\, n_2\}}\ldots p^{max\{k_1,\, k_2\}}$.

7. **Для взаимно простых чисел a и b имеет место $D(a;\, b)=1$ и обратно.**

1. (02-5-5) Сколько натуральных делителей имеет число 36?
A) 5 B) 7 C) 8 D) 9

Решение: 36 представим в виде произведения простых множителей $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Согласно правилу 1, находим число делителей 36: $(2+1)\cdot(2+1) = 9$. **Ответ:** 9 (D).

2. Найдите число натуральных делителей 100.
A) 4 B) 6 C) 9 D) 8

3. Найдите число натуральных делителей 480.
A) 14 B) 24 C) 48 D) 32

4. Найдите число натуральных делителей 900.
A) 27 B) 36 C) 49 D) 28

5. Найдите число натуральных делителей 1000.
A) 24 B) 16 C) 28 D) 32

6. (03-10-11) Число натуральных делителей произведения $8^{n+2} \cdot 12^{n-3}$ равно 42. Найдите n.
A) 4 B) 3 C) 2 D) 5

7. Найдите сумму натуральных делителей 48.
A) 123 B) 100 C) 108 D) 124

Решение. Число 48 представимо в виде произведения простых множителей: $48 = 2^4 \cdot 3$. Согласно правилу 2 сумма всех натуральных делителей 48 равна

$$S(48) = \frac{2^{4+1}-1}{2-1} \cdot \frac{3^{1+1}-1}{3-1} = 31 \cdot 4 = 124.$$

Ответ: 124 (D).

8. Найдите сумму всех натуральных делителей 12.
A) 12 B) 28 C) 32 D) 24

9. Найдите сумму всех натуральных делителей 24.
A) 48 B) 58 C) 60 D) 54

10. Найдите сумму всех натуральных делителей 20.
A) 48 B) 42 C) 38 D) 58

11. Найдите сумму всех натуральных делителей 28.
A) 44 B) 58 C) 62 D) 56

12. (96-3-2) Найти НОК(наименьшее общее кратное) чисел 8 и 6.
A) 16 B) 24 C) 12 D) 8

Решение: Представим эти числа в виде произведение простых множителей: $8 = 2^3 \cdot 3^0$; $6 = 2 \cdot 3$. Согласно правилу 6: $K(8; 6) = 2^3 \cdot 3 = 24$. **Ответ:** 24 (B).

13. (96-12-2) Найти НОК чисел 6 и 4.
A) 6 B) 14 C) 24 D) 12

14. (96-11-2) Найти НОК чисел 10 и 8.
A) 80 B) 10 C) 18 D) 40

15. Найти НОД чисел 36 и 48.
A) 36 B) 14 C) 24 D) 12

16. Найдите НОД чисел 480 и 600.
A) 160 B) 300 C) 240 D) 120

17. (96-9-1) Найдите число общих делителей 594 и 378.
A) 8 B) 7 C) 9 D) 5

Решение: Согласно правилу 3 число общих делителей двух чисел равно числу натуральных делителей НОД этих чисел. Так как

$$594 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^0 \cdot 11, \quad 378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11^0,$$

НОД чисел 594 и 378 согласно правилу 5 равен $D(594;\ 378) = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 7^0 \cdot 11^0 = 2^1 \cdot 3^3$. Согласно правилу 1 число его натуральных делителей равно $(1+1)(3+1) = 8$. **Ответ:** 8 (A).

18. (99-7-1) Сколько общих делителей имеют числа 56 и 16?
A) 4 B) 3 C) 2 D) 5

19. (96-3-61) Сколько общих делителей имеют числа 630 и 198?
A) 5 B) 6 C) 4 D) 7

20. (96-13-1) Сколько общих делителей имеют числа 420 и 156 ?
A) 7 B) 5 C) 6 D) 4

21. (98-2-2) Сколько натуральных делителей имеет НОК чисел 8 и 12?
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9

22. (98-10-1) Найдите сумму НОД и НОК чисел 21 и 35.
A) 108 B) 110 C) 112 D) 109

Решение: Из равенств

$$21 = 3 \cdot 5^0 \cdot 7, \quad 35 = 3^0 \cdot 5 \cdot 7$$

согласно правилам 5 и 6: $D(21;\ 35) = 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7 = 7$, $K(21;\ 35) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Их сумма равна $7 + 105 = 112$. **Ответ:** 112 (C).

23. (00-3-5) Найдите отношение НОК к НОД чисел 72 и 96?
A) 10 B) 0,1 C) 9 D) 12

24. (98-11-2) Найдите отношение НОК чисел 270 и 300 к НОК чисел 4 и 6.
A) 25 B) 45 C) 225 D) 95

25. (00-10-2) Найдите отношение НОК чисел 108 и 135 к НОК чисел 12 и 54?
A) 8 B) 5 C) 12 D) 6

26. (99-2-4) Найдите отношение НОК чисел 24, 18 и 30 к их НОД.
A) 90 B) 72 C) 48 D) 60

27. (00-7-7) Сколько взаимно простых пар имеется среди чисел 9, 10, 22 и 25?
A) 4 B) 3 C) 2 D) 6

Решение. Согласно правилу 7 НОД взаимно простых чисел равен 1. $D(9;10) = 1$, $D(9;22) = 1$, $D(9;25) = 1$, $D(10;22) = 2$, $D(10;25) = 5$, $D(22;25) = 1$. Значит количество взаимно простых пар равно 4. **Ответ:** 4 (A).

28. (03-4-3) Сколько взаимно простых пар имеется на отрезке [4; 8]?
A) 5 B) 6 C) 4 D) 7

29. (01-12-1) Сколько среди первых 30 натуральных чисел имеется чисел, взаимных простых с числом 6?
A) 7 B) 8 C) 9 D) 10

30. (97-5-10) Какая пара состоит из взаимно простых чисел?
A) (8;14) B) (11;22) C) (12;35) D) (12;34)

31. (97-9-10) Какая пара состоит из взаимно простых чисел?
A) (21;14) B) (21;10) C) (12;15) D) (10;15)

32. (99-8-19) Произведение двух чисел равно 294, и их НОД равен 7. Найдите их НОК.
A) 42 B) 52 C) 56 D) 49

Решение. Согласно 4-правилу $a \cdot b = D(a;\ b) \cdot K(a;\ b)$. Подставив нужные значения, получим $294 = 7 \cdot K(a;\ b)$. Отсюда $K(a;\ b) = 42$. **Ответ:** 42 (A).

33. Произведение двух чисел равно 192, их НОК равен 48. Найдите их НОД.
A) 4 B) 6 C) 5 D) 8

34. (00-7-2) Найдите произведение НОК и НОД чисел 18 и 12?
A) 220 B) 218 C) 214 D) 216

35. Произведение НОК и НОД чисел 7 и a равно 126. Найдите число a.
A) 18 B) 16 C) 25 D) 36

36. Найдите произведение НОК и НОД чисел 12 и 15.
A) 180 B) 160 C) 250 D) 360

1.1.4 Признаки делимости

Ноль делится на все натуральные числа. Представим в виде $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$, n значное число, составленное из цифр $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Приведем *признаки делимости* на некоторые числа.

1. **Натуральные числа, последняя цифра которых $0, 2, 4, 6, 8$, и только они делятся на 2. Они называются четными числами. Они имеют вид $2, 4, \ldots, 2n, \ldots$**

   Числа, при делении которых на 2 остаток равен 1, называются нечетными. Они имеют вид $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$

2. **Если число образованное из последних двух цифр числа a делится на 4 или 25, то это число a делится на 4 или 25, в противном случае не делится.**

3. **Если число образованное из последних трех цифр числа a делится на 8 или 125, то это число a делится на 8 или 125, в противном случае не делится.**

4. **Если последняя цифра числа 0 или 5, то это число делится на 5 и обратно.**

5. **Если сумма цифр числа делится на 3, то это число делится на 3, в противном случае не делится.**

6. **Если сумма цифр числа делится на 9, то это число делится на 9, в противном случае не делится.**

7. **Если для натурального числа вида $A = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$ разность чисел $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}}$ и $2 \cdot a_n$ делится на 7, то число A делится на 7.**

8. **Если разность сумм цифр числа, стоящих на четном и нечетном местах делится на 11, то это число делится на 11.**

9. **Если для натурального числа вида $A = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$ число $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}} + 2 \cdot a_n$ делится на 19, то число A тоже делится на 19.**

10. **Если для натурального числа n имеет место равенство $n = kl$ (k и l– взаимно простые), тогда число, делящееся и на k и на l делится на n и наоборот. Этот признак можно принять за признак делимости на составные числа. Например, так как $45 = 5 \cdot 9$ и $D(5;9) = 1$, то числа, делящиеся и на 5, и на 9, делятся на 45.**

11. **Если число A делится на n, и число B делится на m, то число $A \cdot B$ делится на $n \cdot m$.**

12. **Если каждое из чисел A и B делится на n, то $A + B$ тоже делится n.**

13. **Если одно из чисел A и B делится на n, то их произведение $A \cdot B$ тоже делится n.**

1. Найдите число, делящееся на 2.
A) 1205 B) 7806 C) 9321 D) 6843

Решение. Согласно признаку 1, число 7806, последняя цифра которого 6, делится на 2. Остальные 1205, 9321, 6843 не делятся на 2. **Ответ:** 7806 (B).

2. Найдите число, не делящееся на 2.
A) 3456 B) 5842 C) 7648 D) 8641

3. Найдите число, делящееся на 5.
A) 6348 B) 8951 C) 3965 D) 5554

4. Найдите число, не делящееся на 5.
A) 6665 B) 3335 C) 4440 D) 5554

5. Найдите число, делящееся и на 2, и на 5.
A) 5522 B) 2255 C) 3840 D) 5258

6. Найдите число, не делящееся на 4.
A) 1100 B) 1520 C) 130 D) 1008

Решение. Согласно 2-признаку, надо проверить делимость на 4 чисел, состоящих из последних двух цифр данных чисел. Число, состоящее из последних двух цифр 130 равно 30 и не делится на 4. Значит, 130 не делится на 4. **Ответ:** 130 (C).

7. Найдите число, делящееся на 4.
A) 582 B) 674 C) 804 D) 442

8. Найдите число, делящееся на 25.
A) 2540 B) 8800 C) 2552 D) 4520

9. Найдите число, не делящееся на 25.
A) 6300 B) 8975 C) 6850 D) 9855

10. Найдите число, делящееся на 3.
A) 326 B) 213 C) 475 D) 739

Решение. Согласно признаку 5, проверим делимость суммы цифр на 3. Сумма цифр 326 равна $3+2+6=11$, это число не делится на 3. Сумма цифр 213 равна $2+1+3=6$, это число делится на 3. Значит 213 делится на 3. **Ответ:** 213 (B).

11. Найдите число, не делящееся на 3.
A) 6825 B) 8937 C) 5841 D) 3133

12. Найдите число, делящееся на 9.
A) 881 B) 672 C) 432 D) 763

13. Найдите число, не делящееся на 9.
A) 8082 B) 4365 C) 1791 D) 2654

14. Найдите число, делящееся на 7.
A) 114 B) 235 C) 315 D) 370

Решение. Используем признак делимости на 7. Для 114 имеем: число $11-2\cdot4=3$ не делится на 7. Для числа 235 имеем: $23-2\cdot5=13$ не делится на 7. Для числа 315 имеем: $31-2\cdot5=21$ делится на 7. Значит, число 315 делится на 7. **Ответ:** 315 (C).

15. Найдите число, делящееся на 7.
A) 514 B) 635 C) 828 D) 546

16. Найдите число, делящееся на 8.
A) 1140 B) 2350 C) 3700 D) 3152

17. Найдите число, не делящееся на 8.
A) 5408 B) 3600 C) 7000 D) 8148

18. Найдите число, делящееся на 11.
A) 1540 B) 2350 C) 3712 D) 8152

Решение. Используем 8-признак. Сумма цифр 1540, стоящих на четном месте $5+0=5$, сумма цифр, стоящих на нечетном месте $1+4=5$, их разность $5-5=0$ делится на 11. Значит, число 1540 делится на 11. **Ответ:** 1540 (A).

19. Найдите число, не делящееся на 11.
A) 2332 B) 4554 C) 6798 D) 1011

20. Найдите число, не делящееся на 19.
A) 323 B) 266 C) 456 D) 319

21. Найдите число, делящееся на 19.
A) 2140 B) 1653 C) 3751 D) 5152

22. (97-9-61) При каких значениях цифры n число $50+n$ можно разложить на наименьшее число простых множителей?
A) 3 B) 5 C) 3; 9 D) 1; 9

Решение. Известно, что простые числа разлагаются на наименьшее число простых множителей. Цифра n может принимать значения $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Тогда число $50+n$ может принимать значение $50,51,\ldots,59$. Среди этих чисел 53 и 59 - простые числа. Значит, при $n=3$ или $n=9$ число $50+n$ можно разложить на наименьшее число простых множителей. **Ответ:** 3; 9 (C).

23. При каких значениях цифры n число $40+n$ можно разложить на наименьшее число простых множителей?
A) 1; 3; 7 B) 1; 5 C) 3; 9 D) 1; 9

24. При каких значениях цифры n число $30+n$ можно разложить на наименьшее число простых множителей?
A) 1; 3; 7 B) 1; 7 C) 3; 9 D) 1; 9

25. При скольких значениях цифры n число $25+n$ будет простым ?
A) 1 B) 7 C) 3 D) 2

26. При скольких значениях цифры n число $39+n$ будет простым ?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

27. (97-9-72) При каких цифрах n число $\overline{7851n}$ делится на 9 без остатка?
A) 2 B) 4 C) 6 D) 9

Решение: Согласно признаку 6 число делится на 9, если сумма цифр этого числа делится на 9. Сумма цифр $7+8+5+1+n=21+n$ делится 9, если $n=6$. **Ответ:** 6 (C).

28. (97-4-12) При каких значениях цифры n число $\overline{6134n}$ делится на 3.
A) 1 B) 4 C) 2 D) 1; 4; 7

29. (02-4-28) При каких цифрах * число 246*013579 делится на 9?
A) 0 B) 4 C) 7 D) 8

30. При каких цифрах n число $\overline{27n}$ делится на 7?
A) 3 B) 4 C) 2 D) 7

31. При каких значениях n число $\overline{6134n}$ делится на 11?
A) 6 B) 4 C) 2 D) 7

32. (98-10-2) Какое число не делится на 36?
A) 2016 B) 3924 C) 1782 D) 8244

Решение: Числа 4 и 9 взаимно простые, их произведение равно 36. Согласно признаку 10, число делящееся на 36, должно делится на 4 и на 9. Число 1782 не делится на 4 (признак 2). Значит, 1782 не делится на 36. **Ответ:** 1782 (C).

33. (98-10-2) Какое из следующих чисел не делится на 36?
A) 2016 B) 3924 C) 1782 D) 8244

34. (00-7-3) Какую цифру надо приписать справа к числу 752, чтобы вновь полученное четырехзначное число делилось нацело на 36.
A) 0 B) 2 C) 6 D) 4

35. (97-4-2) На какое из нижеприведенных чисел делится без остатка число 17827516?
A) 3 B) 10 C) 4 D) 5

36. (97-9-62) На какое из нижеприведенных чисел делится без остатка число 41582637?
A) 4 B) 9 C) 5 D) 10

37. (98-2-3) Какое из следующих чисел не является кратным 15?
A) 6525 B) 3105 C) 4620 D) 6145

38. (98-9-4) Какое из следующих чисел не делится на 12?
A) 9216 B) 13626 C) 12024 D) 18312

39. Какое из приведенных чисел является кратным 19?
A) 297 B) 399 C) 405 D) 810

40. (96-7-2) Какие из чисел $x = 220350$, $y = 321000$, $z = 1024145$ делятся на 15 без остатка?
A) только x B) только z
C) y и z D) x и y

Решение: Согласно 10-признаку, чтобы число делилось на 15 без остатка, оно должно делиться и на 3 и на 5. Согласно 4-признаку все три данных числа делятся на 5. Сумма цифр числа x равна $2 + 2 + 0 + 3 + 5 + 0 = 12$, сумма цифр числа y равна $3 + 2 + 1 + 0 = 6$, а сумма цифр числа z равна $1 + 0 + 2 + 4 + 1 + 4 + 5 = 17$. Согласно 5-признаку x и y делятся на 3, а z не делится на 3. Поэтому x и y делятся на 15. **Ответ:** x и y (D).

41. (98-10-51) Какие из чисел $p = 10189144$, $q = 396715256$ и $r = 78901644$ делятся на 8 без остатка?
A) ни какие B) p и q C) p и r D) p

42. (97-3-2) Какие из чисел $x = 30112$, $y = 330000$ и $z = 102588$ делятся на 12 без остатка?
A) только y B) только x
C) x и z D) y и z

43. (97-7-2) Какие из чисел $x = 10842$, $y = 54900$, $z = 306198$ делятся на 18 без остатка?
A) только x B) только y
C) x и y D) y и z

44. (97-10-2) Какие из чисел $x = 123386$, $y = 402108$, $z = 261000$ делятся на 6 без остатка?
A) только x B) только y
C) только z D) y и z

45. (01-11-2) Какое из данных произведений делится нацело на 45?
A) $42 \cdot 85$ B) $35 \cdot 61$ C) $80 \cdot 123$ D) $36 \cdot 20$

Решение: 36 делится на 9, а 20 делится на 5. Согласно 11-признаку произведение $36 \cdot 20$ делится на $9 \cdot 5 = 45$. **Ответ:** $36 \cdot 20$ (D).

46. (02-12-21) Какое из данных произведений делится нацело на 45?
A) $42 \cdot 85$ B) $35 \cdot 61$ C) $80 \cdot 123$ D) $243 \cdot 80$

47. Какое из данных произведений делится нацело на 18?
A) $42 \cdot 15$ B) $25 \cdot 61$ C) $80 \cdot 23$ D) $43 \cdot 20$

48. Какое из данных произведений делится нацело на 12?
A) $11 \cdot 15$ B) $25 \cdot 30$ C) $80 \cdot 21$ D) $43 \cdot 20$

49. Какое из данных произведений делится нацело на 21?
A) $11 \cdot 15$ B) $14 \cdot 30$ C) $20 \cdot 27$ D) $31 \cdot 20$

50. Какое из данных произведений делится нацело на 35?
A) $18 \cdot 15$ B) $28 \cdot 40$ C) $50 \cdot 27$ D) $49 \cdot 56$

1.1.5 Деление с остатком

1. **Формула деления с остатком $a = n \cdot m + r$, $0 \le r < n$. Здесь a – делимое, n – делитель, m – частное, r – остаток.**

2. **Если сумма остатков от деления чисел $A = n \cdot m_1 + r_1$ и $B = n \cdot m_2 + r_2$ на n равна $r_1 + r_2 = n$, то число $A + B$ делится на n.**

3. **Если $A = n \cdot m_1$ и $B = n \cdot m_2 + r$, то остатки от деления чисел $A + B$ и B на n будут равны r.**

1. (98-7-3) Какое равенство выражает деление с остатком?
1) $43 = 9 \cdot 5 - 2$ 2) $43 = 8 \cdot 5 + 3$
3) $43 = 7 \cdot 5 + 8$ 4) $43 = 21 \cdot 2 + 1$
A) 1; 2; 4 B) 2; 3; 4 C) 2; 4 D) 3; 4

Решение: Согласно формуле деления с остатком (см.1) остаток r меньше делителя n и складывается с $n \cdot m$. В 1) 2 вычитается, в 3) остаток

8 больше делителя 7. 2) и 4) выражают деление с остатком. **Ответ:** 2; 4 (C).

2. (98-12-3) Какое равенство выражает деление с остатком?
1) $47 = 4 \cdot 11 + 3$ 2) $47 = 6 \cdot 6 + 11$
3) $47 = 9 \cdot 5 + 2$ 4) $47 = 7 \cdot 7 - 2$
A) 1; 3 B) 1; 2; 3 C) 1; 4 D) 2; 3

3. Какое равенство выражает деление с остатком?
1) $45 = 2 \cdot 23 - 1$ 2) $45 = 8 \cdot 6 - 3$
3) $45 = 7 \cdot 6 + 3$ 4) $45 = 11 \cdot 4 + 1$
A) 1; 2; 4 B) 2; 3; 4 C) 2; 4 D) 3; 4

4. Какое равенство выражает деление с остатком?
1) $25 = 2 \cdot 12 + 1$ 2) $25 = 8 \cdot 3 + 1$
3) $25 = 4 \cdot 6 + 1$ 4) $25 = 3 \cdot 9 - 2$
A) 1; 2; 3 B) 3; 4 C) 2; 4 D) 1; 3

5. Найдите остаток от деления 723 на 6.
A) 4 B) 3 C) 1 D) 2

Решение: Разделив 723 на 6 "углом" получим в частном 120, а в остатке 3. Значит, остаток равен 3. **Ответ:** 3 (B).

6. Найдите остаток от деления 500 на 7.
A) 6 B) 3 C) 1 D) 2

7. Найдите остаток от деления 790 на 8.
A) 4 B) 3 C) 6 D) 2

8. Найдите остаток от деления 893 на 9.
A) 6 B) 3 C) 7 D) 2

9. Какая из нижеприведенных сумм делится на 6?
A) 86+628 B) 75+412 C) 83+622 D) 76+214

Решение: Проверим делимость числа 86+628 на 6 по 2-правилу: $86 = 6 \cdot 14 + 2$, $628 = 6 \cdot 104 + 4$. Первый остаток $r_1 = 2$, а второй - $r_2 = 4$. Их сумма $r_1 + r_2 = 2 + 4 = 6$ равна делимому. Следовательно, 86+628 делится на 6. **Ответ:** 86+628 (A).

10. Какая из нижеприведенных сумм делится на 7?
A) 47+701 B) 64+218 C) 76+189 D) 85+216

11. Какая из нижеприведенных сумм делится на 8?
A) 58+794 B) 68+215 C) 76+316 D) 91+217

12. Какое из нижеприведенных сумм делится на 9?
A) 48+368 B) 60+543 C) 84+692 D) 78+216

13. (98-6-7) Какое число получится в остатке при делении 3^{20} на 7?
A) 6 B) 3 C) 1 D) 2

Решение: Согласно 3-правилу, остаток от деления $(mk+r)^n$ на k равен остатку от деления r^n на k, т.е. $(mk+r)^n = m_1k + r^n$ (m_1 – частное). Поэтому получим $3^{20} = 9^{10} = (7+2)^{10} = 7n + 2^{10} = 7n + 32^2 = 7n + (4 \cdot 7 + 4)^2 = 7n + 7n_1 + 4^2 = 7(n+n_1) + 16 = 7(n+n_1+2) + 2$. Значит, остаток равен 2. **Ответ:** 2 (D).

14. (98-11-57) Найдите остаток от деления 9^{10} на 7.
A) 1 B) 3 C) 2 D) 6

15. (99-3-6) Найдите остаток от деления 4^{12} на 9.
A) 1 B) 2 C) 4 D) 7

16. Найдите остаток от деления 5^{40} на 8.
A) 1 B) 2 C) 4 D) 5

17. Найдите остаток от деления 13^9 на 5.
A) 3 B) 2 C) 4 D) 1

18. Найдите остаток от деления 2002^{2002} на 4.
A) 0 B) 1 C) 2 D) 4

19. Найдите остаток от деления 2011^{2010} на 5.
A) 0 B) 1 C) 2 D) 4

20. (96-6-2) При делении 243 на некоторое число получили в частном 15 и остаток, равный 3. Чему равен делитель?
A) 17 B) 16 C) 18 D) 19

Решение: Согласно 1-правилу справедливо равенство $243 = x \cdot 15 + 3$. Отсюда получаем: $15x = 243 - 3$ или $x = 240 : 15 = 16$. **Ответ:** 16 (B).

21. (97-2-2) При делении 215 на некоторое число получили в частном 19 и в остатке 6. Чему равен делитель?
A) 13 B) 12 C) 9 D) 11

22. (97-8-2) При делении 358 получили в частном 17 и в остатке 1. Чему равен делитель?
A) 19 B) 21 C) 22 D) 20

23. (00-7-4) При делении 624 на целое число получили в частном 41 и в остатке 9. Чему был равен делитель?
A) 16 B) 17 C) 13 D) 15

24. (97-12-2) При делении натурального числа на 18 в частном получили 15 и в остатке 3. Чему было равно делимое?
A) 173 B) 243 C) 253 D) 273

25. (99-1-3) Найдите остаток от деления $7 + 69 + 671 + 6673 + 66675$ на 6.
A) 1 B) 4 C) 3 D) 5

Решение: Согласно 3-правилу остатки от деления на 6 чисел $7 + 69 + 671 + 6673 + 66675 = 7 + 60 + 9 + 660 + 11 + 6660 + 13 + 66660 + 15$ и $7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 55$ равны. А остаток от деления 55 на 6 равен 1. **Ответ:** 1 (A).

26. Найдите остаток от деления $1+93+995+9997+9999+999901$ на 9.
A) 1 B) 4 C) 8 D) 5

27. Найдите остаток от деления $27+1029+10031+100033+1000035$ на 25.
A) 1 B) 4 C) 8 D) 5

28. Найдите сумму остатков, получающихся при делении числа 36455478354 на 2, 4, 5, 9, 10, 25.
A) 18 B) 16 C) 15 D) 14

29. Найдите сумму остатков, получающихся при делении числа 36455468 на 2, 4, 5, 10, 25
A) 18 B) 29 C) 15 D) 14

30. (00-2-10) Какое число получится в остатке, если куб числа, не делящегося на 3, разделить на 9?
A) 1 или 8 B) 0 или 1
C) 0 или 8 D) 3 или 6

Решение: Так как данное число не делится на 3, оно имеет вид $n = 3k + r, r = 1$ или $r = 2$, Поэтому $n^3 = (3k + r)^3 = 27k^3 + 3 \cdot 9k^2 \cdot r + 3 \cdot 3k \cdot r^2 + r^3$. Согласно 3-правилу остатки от деления этого числа и r^3 на 9 равны. Так как $r = 1$ или $r = 2$, $r^3 = 1$ или $r^3 = 8$. **Ответ:** 1 или 8 (A).

31. (99-8-25) Остатки от деления на 5 натуральных чисел a и b, соответственно равны 1 и 3. Чему равен остаток при делении на 5 суммы квадратов этих чисел?
A) 4 B) 1 C) 2 D) 0

32. Чему равен остаток от деления куба нечетного натурального числа на 4?
A) 1 B) 2 C) 1 или 3 D) 3

33. При делении натурального числа на 3 остаток равен 1. Найдите остаток от делении на 6 квадрата этого числа.
A) 1 или 4 B) 1 или 3 C) 2 D) 5

34. (03-4-5) Сколько двузначных чисел делятся на 15 без остатка?
A) 4 B) 5 C) 7 D) 6

Решение: Известно, что двузначные числа начинаются 10 и заканчиваются 99. Следовательно $15 = 1 \cdot 15, 30 = 2 \cdot 15, 45 = 3 \cdot 15, \ldots, 90 = 6 \cdot 15$, т.е. 6 двузначных чисел делятся на 15 без остатка. **Ответ:** 6 (D).

35. Сколько двузначных чисел делятся на 9 без остатка?
A) 9 B) 10 C) 11 D) 8

36. Сколько трехзначных чисел делятся на 50 без остатка?
A) 19 B) 20 C) 17 D) 18

37. (01-6-2) Сколько трехзначных чисел делятся на 45 без остатка?
A) 19 B) 20 C) 18 D) 21

38. (99-2-2) Какое наименьшее натуральное число нужно прибавить к 821, чтобы их сумма делилась без остатка на 6?
A) 4 B) 1 C) 5 D) 7

1.1.6 Последняя цифра

1. $10^n = \ldots 0, \quad 850^n = \ldots 0$

2. $1^n = 1, \quad 271^n = \ldots 1$

3. $2^{4k+1} = \ldots 2, \quad 2^{4k+2} = \ldots 4,$
$2^{4k+3} = \ldots 8, \quad 2^{4k} = \ldots 6.$

4. $3^{4k+1} = \ldots 3, \quad 3^{4k+2} = \ldots 9,$
$3^{4k+3} = \ldots 7, \quad 3^{4k} = \ldots 1.$

5. $4^{2k} = \ldots 6, \quad 4^{2k+1} = \ldots 4.$

6. $5^n = \ldots 5, \quad 275^n = \ldots 5$

7. $6^n = \ldots 6, \quad 2756^n = \ldots 6$

8. $7^{4k+1} = \ldots 7, \quad 7^{4k+2} = \ldots 9,$
$7^{4k+3} = \ldots 3, \quad 7^{4k} = \ldots 1.$

9. $8^{4k+1} = \ldots 8, \quad 8^{4k+2} = \ldots 4,$
$8^{4k+3} = \ldots 2, \quad 8^{4k} = \ldots 6.$

10. $9^{2k} = \ldots 1, \quad 9^{2k+1} = \ldots 9.$

1. Найдите последнюю цифру числа 2^{2012}.
A) 2 B) 0 C) 4 D) 6

Решение: Последние цифры степеней 2 повторяются через каждые 4 степени (см.3). Если показатель степени 2 делится на 4, это число оканчивается цифрой 6. **Ответ:** 6 (D).

2. Найдите последнюю цифру числа 21^{1964}.
A) 3 B) 1 C) 7 D) 9

3. Найдите последнюю цифру числа 15^{1994}.
A) 3 B) 1 C) 7 D) 5

4. (96-3-71) Найдите последнюю цифру числа 8^{99}.
A) 0 B) 2 C) 4 D) 6

5. Найдите последнюю цифру числа 3^{2010}.
A) 3 B) 1 C) 7 D) 9

6. Найдите последнюю цифру числа 6^{1991}.
A) 2 B) 6 C) 8 D) 4

7. Найдите последнюю цифру числа 7^{1971}.
A) 7 B) 9 C) 3 D) 1

8. Какой цифрой оканчивается число 9^{2009}?
A) 0 B) 1 C) 3 D) 9

9. Какой цифрой оканчивается число 24^{2011}?
A) 0 B) 6 C) 4 D) 8

10. (97-11-2) Найдите последнюю цифру суммы

$$15 \cdot 25 \cdot 37 \cdot 43 + 34 \cdot 48 \cdot 77.$$

A) 4 B) 9 C) 0 D) 5

Решение: Последняя цифра первого слагаемого совпадает с последней цифрой произведения $5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 525$, т.е. равна 5, а последняя цифра второго слагаемого совпадает с последней цифрой произведения $4 \cdot 8 \cdot 7 = 224$, т.е. равна 4. Последняя цифра суммы равна $5 + 4 = 9$. **Ответ:** 9 (B).

11. (97-1-2) Какой цифрой оканчивается разность

$$17 \cdot 28 \cdot 41 \cdot 35 - 24 \cdot 12 \cdot 87?$$

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6

12. (97-6-2) Найдите последнюю цифру суммы

$$16 \cdot 27 \cdot 38 \cdot 19 + 22 \cdot 43 \cdot 98.$$

A) 8 B) 6 C) 4 D) 2

13. (99-6-7) Какой цифрой оканчивается значение выражения

$$11^6 + 14^6 - 13^3 - 8?$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

14. (99-6-11) Найдите последнюю цифру суммы

$$9^{1996} + 9^{1997}.$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

15. (01-2-4) Какой цифрой оканчивается разность $43^{43} - 17^{17}$?
A) 5 B) 2 C) 1 D) 0

16. Найдите последнюю цифру суммы $41^{14} + 56^{65} + 75^{57}$.
A) 5 B) 2 C) 1 D) 0

1.1.7 Целые числа

Рассмотрим множество целых чисел $\mathbb{Z}$. Для его элементов справедливы равенства.

1. $(-1)^{2n} = 1,$ $\quad (-1)^{2n-1} = -1$

2. $m(-n) = -m \cdot n,$ $\quad m : (-n) = -m : n.$

3. $-m(-n) = m \cdot n,$ $\quad -m : (-n) = m : n.$

1. Какое из следующих выражений равно 1?
A) $(-(-1)^2)^3$ B) $((-1)^3)^3$
C) $(-(-1)^4)^5$ D) $((-1)^3)^4$

Решение: Согласно равенству 1 четная степень -1 равно 1. Поэтому $((-1)^3)^4 = (-1)^{12} = 1$.
Ответ: (D).

2. Какое из следующих выражений равно -1?
A) $((-1)^2)^3$ B) $(-(-1)^2)^3$
C) $((-1)^3)^2$ D) $(-(-1)^3)^3$

3. Какое из следующих выражений равно 1?
A) $(-(-1)^2)^3$ B) $((-1)^3)^5$
C) $-((-1)^5)^4$ D) $((-1)^3)^4$

4. Какое из следующих выражений равно -1?
A) $((-1)^3)^2$ B) $(-(-1)^3)^6$
C) $(-(-1)^2)^4$ D) $-((-1)^3)^4$

5. (96-12-6) Вычислите $8 + 6 : (-2) - 2 \cdot (-11)$.
A) 99 B) 15 C) 33 D) 27

Решение: Сначала выполним операции 2-ой ступени, т.е. умножение и деление согласно правилам 2 и 3, затем операции 1-ой ступени: $8 + 6 : (-2) - 2 \cdot (-11) = 8 - 3 + 22 = 5 + 22 = 27$.
Ответ: 27 (D).

6. (96-3-6) Вычислите $-8 + 6 : (-2) - 2 \cdot (-11)$.
A) 23 B) 11 C) -11 D) -10

7. (96-11-6) Вычислите $-8 - 6 : (-2) - 2 \cdot (-11)$.
A) 17 B) -55 C) 55 D) 77

8. Вычислите

$$13 \cdot 58 - 83 \cdot 42 - 58 \cdot 15 + 42 \cdot 81.$$

A) -100 B) -200 C) 100 D) -10

9. (99-3-2)* Вычислите

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \cdots + 97 - 99.$$

A) -46 B) -48 C) -50 D) -52

10. (01-1-2)* Вычислите

$$4 - 7 + 8 - 11 + 12 - 15 + \cdots + 96 - 99.$$

A) -75 B) -80 C) -72 D) -63

11. Вычислите

$$199 - 198 + 197 - 196 + \cdots + 3 - 2 + 1.$$

A) 75 B) 80 C) 100 D) 99

1.2 Рациональные числа. Дроби

Число, выражающее одно или несколько равных частей целого называется дробью. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, выражение $\frac{m}{n}$ называется обыкновенной дробью. Число m называется числителем, а n – знаменателем дроби, а черта между ними – дробной чертой. Если $n = 1$, то $\frac{m}{1} = m$. Следовательно, любое целое число можно записать в виде обыкновенной дроби со знаменателем, равным 1. *Обыкновенная дробь называется рациональным числом.* Множество рациональных чисел обозначается буквой $\mathbb{Q}$. Значит, $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$. *Если для дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ выполняется равенство $ad = bc$, они называются равными.* Например, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, так как $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$ или $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, так как $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$. В общем случае, дроби

$$\frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \frac{an}{bn}$$

равны, потому что верно равенство $abn = ban$. *Следовательно, если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, получится дробь, равная данной.* Это свойство называется основным свойством дроби. Деление числителя и знаменателя дроби на их общий делитель, не равный 1 называется *сокращением дроби.* Дробь, числитель и знаменатель которой взаимно простые, называется *несократимой дробью.* Используя основное свойство дроби можно дроби с разными знаменателями заменить другими, равными им, так чтобы у полученных дробей были одинаковые знаменатели. Такое преобразование называется приведением дробей к общему знаменателю. Например, возьмем дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Числитель и знаменатель первой дроби умножим на 3, а второй дроби на 2, и приведем их к общему знаменателю $\frac{3}{6}$ и $\frac{2}{6}$. *Дробь* $\frac{a}{b}$ *называется правильной,* если ее числитель меньше знаменателя ($a < b$), и *неправильной,* если числитель больше или равен знаменателю ($a \geq b$). Например $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ – правильные дроби, $\frac{3}{3}$ и $\frac{8}{5}$ – неправильные дроби.

1.2.1 Обыкновенные дроби

1. *Сложение и вычитание дробей с одинаковым знаменателем:*
$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$
2. *Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями:*
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.$$
3. *Разложение дроби:* $\frac{a+b-c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}$.
4. *Умножение дробей:* $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.
5. *Умножение целого числа на дробь:* $a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$.
6. *Работа со знаками:* $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$.
7. *Деление дробей:* $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.
8. *Деление целого число на дробь:* $c:\frac{a}{b}=\frac{cb}{a}$.
9. *Деление дроби на целое число:* $\frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}$.
10. *Разложение дроби на множители:*
$$\frac{1}{a\cdot b}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

1. (96-3-12) Вычислите $-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$.

A) $\frac{5}{6}$ B) $-\frac{2}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $-\frac{5}{6}$

Решение: Приведем дроби к общему знаменателю, затем их сложим:
$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=-\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=-\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)=-\frac{3+2}{6}=-\frac{5}{6}.$$
Ответ: $-\frac{5}{6}$ (D).

2. (96-3-13) Найдите разность $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$.

A) $\frac{1}{6}$ B) 1 C) $-\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{6}$

3. (96-11-13) Вычислите $-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

A) $-\frac{9}{20}$ B) $-\frac{2}{9}$ C) $-\frac{1}{10}$ D) $\frac{9}{20}$

4. (96-11-14) Найдите разность $\frac{1}{4}-\frac{4}{5}$.

A) $-\frac{11}{20}$ B) -1 C) $-\frac{7}{20}$ D) $\frac{13}{20}$

5. (96-12-13) Вычислите $-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$.

A) $-\frac{2}{7}$ B) $-\frac{7}{12}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $-\frac{1}{6}$

6. (96-3-9) Вычислите $-\frac{3}{15}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}$.

A) $-\frac{19}{30}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{19}{30}$ D) $\frac{1}{3}$

Решение: Первую дробь сократим на 3 и получим $-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$. **Ответ:** $-\frac{1}{3}$ (B).

7. (96-11-9) Вычислите $-\frac{3}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$.

A) $-\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{15}$ C) $\frac{7}{15}$ D) $\frac{1}{3}$

8. (96-12-9) Вычислите $\frac{3}{15}-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}$.

A) $\frac{1}{3}$ B) $-\frac{3}{10}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $-\frac{1}{3}$

9. Вычислите $-\frac{5}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$.

A) $-\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{15}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{3}$

10. Вычислите $\frac{5}{15}-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}$.

A) $\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $-\frac{1}{3}$

11. (00-6-16) Вычислите
$$\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\frac{1}{11\cdot14}+\frac{1}{14\cdot17}.$$
A) $\frac{15}{34}$ B) $\frac{5}{17}$ C) $\frac{5}{34}$ D) $\frac{16}{173}$

Решение: Разность множителей в знаменателе каждой дроби равна 3. Используя 10-свойство, вычислим значение выражения:
$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{14}\right)+$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{17}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{14}+\frac{1}{14}-\frac{1}{17}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{17}\right)=\frac{5}{34}.$$
Ответ: $\frac{5}{34}$ (C).

12. Вычислите

$$\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{7\cdot9}+\frac{1}{9\cdot11}+\frac{1}{11\cdot13}.$$

A) $\frac{5}{34}$ B) $\frac{5}{39}$ C) $\frac{5}{33}$ D) $\frac{5}{78}$

13. Вычислите

$$\frac{1}{3\cdot7}+\frac{1}{7\cdot11}+\frac{1}{11\cdot15}+\frac{1}{15\cdot19}+\frac{1}{19\cdot23}.$$

A) $\frac{5}{69}$ B) $\frac{7}{96}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{7}{94}$

14. Вычислите

$$\frac{1}{3\cdot8}+\frac{1}{8\cdot13}+\frac{1}{13\cdot18}+\frac{1}{18\cdot23}+\frac{1}{23\cdot28}.$$

A) $\frac{5}{84}$ B) $\frac{7}{96}$ C) $\frac{25}{84}$ D) $\frac{15}{84}$

15. Вычислите

$$\frac{1}{3\cdot10}+\frac{1}{10\cdot17}+\frac{1}{17\cdot24}+\frac{1}{24\cdot31}+\frac{1}{31\cdot38}.$$

A) $\frac{5}{114}$ B) $\frac{7}{104}$ C) $\frac{5}{104}$ D) $\frac{7}{114}$

16. (98-12-62)* Вычислите

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{999\cdot1000}.$$

A) $0,750$ B) $1,125$ C) $0,998$ D) $0,999$

Решение: Используем 10-свойство. Если вы заметили, в полученном выражении остаются первый и последний члены. Имеем

$$(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{999}-\frac{1}{1000})=$$

$$=1-\frac{1}{1000}=\frac{999}{1000}=0,999$$

Ответ: $0,999$ (D).

17. (00-3-15)* Вычислите

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{13\cdot15}.$$

A) $\frac{11}{15}$ B) $\frac{7}{30}$ C) $\frac{8}{15}$ D) $\frac{7}{15}$

18. (00-8-57)* Вычислите

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot100}.$$

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{1}{100}$ D) $\frac{99}{100}$

19. (03-7-43)* Вычислите

$$\frac{2}{5\cdot7}+\frac{2}{7\cdot9}+\frac{2}{9\cdot11}+\cdots+\frac{2}{73\cdot75}.$$

A) $\frac{16}{75}$ B) $\frac{28}{75}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{74}{75}$

20. Вычислите

$$1+\frac{1}{10\cdot11}+\frac{1}{11\cdot12}+\frac{1}{12\cdot13}+\frac{1}{13\cdot14}+\frac{1}{14\cdot15}.$$

A) $1\frac{3}{80}$ B) $1,16$ C) $1\frac{1}{30}$ D) $1\frac{7}{80}$

21. (03-1-9)* Вычислите

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}.$$

A) $0,1$ B) $0,2$ C) $0,4$ D) $0,6$

Решение: Опять используем 10-свойство:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}=\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\frac{1}{8\cdot10}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10})=$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{10})=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}=\frac{1}{5}=0,2.$$

Ответ: $0,2$ (B).

22. (00-2-4)* Вычислите

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}+\frac{1}{195}.$$

A) $\frac{4}{15}$ B) $\frac{7}{15}$ C) $\frac{17}{45}$ D) $\frac{2}{15}$

23. (99-5-1)* Вычислите

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots+\frac{1}{182}.$$

A) $\frac{11}{42}$ B) $\frac{10}{33}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{12}{35}$

24. (00-9-10)* Вычислите

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\cdots+\frac{1}{255}.$$

A) $\frac{7}{51}$ B) $\frac{2}{15}$ C) $\frac{2}{25}$ D) $\frac{3}{35}$

25. (96-11-11) Вычислите

$$\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{7}:\frac{5}{42}.$$

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{5}{441}$ C) $-\frac{4}{5}$ D) $\frac{10}{882}$

Решение: Используем правила умножения (см. 4) и деления (см. 7)

$$\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{7}:\frac{5}{42}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{42}{5}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2\cdot3\cdot7}{5}=-\frac{4}{5}.$$

Ответ: $-\frac{4}{5}$ (C).

26. (96-12-10) Вычислите

$$-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right):\frac{5}{42}.$$

A) $\frac{5}{441}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $-\frac{5}{441}$ D) $-\frac{4}{5}$

27. Вычислите

$$\frac{1}{17}:\left(-\frac{5}{51}\right)\cdot\frac{4}{15}.$$

A) $\frac{5}{441}$ B) $\frac{4}{25}$ C) $-\frac{5}{24}$ D) $-\frac{4}{25}$

28. Вычислите

$$\frac{3}{8}:\frac{3}{4}\left(-\frac{2}{5}\right):\frac{1}{20}.$$

A) $\frac{5}{4}$ B) 4 C) -4 D) $-\frac{4}{25}$

29. (98-7-5) Вычислите $243:(9:11)$.

A) 27 B) $2\frac{5}{11}$ C) $\frac{11}{27}$ D) 297

30. Вычислите

$$\frac{3}{8}:\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right):\left(-\frac{5}{42}\right).$$

A) $\frac{7}{10}$ B) $-\frac{3}{10}$ C) $\frac{5}{42}$ D) $\frac{3}{35}$

Решение: Используем правила умножения (см. 4) и деления (см.7):
$\frac{3}{8}:\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right):\left(-\frac{5}{42}\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{42}{5}=$
$=\frac{1}{2}-\frac{4}{5}=\frac{5-8}{10}=-\frac{3}{10}$. **Ответ:** $-\frac{3}{10}$ (B).

31. Вычислите

$$\frac{3}{8}:\frac{3}{4}-\frac{1}{3}:\left(-\frac{2}{9}\right).$$

A) 10 B) -1 C) 2 D) 3, 5

32. Вычислите

$$\frac{3}{8}:\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right):\left(-\frac{5}{42}\right).$$

A) $1\frac{3}{10}$ B) $-\frac{3}{10}$ C) $\frac{5}{42}$ D) $\frac{3}{35}$

33. Вычислите

$$\frac{7}{8}:\frac{7}{4}+\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right):\left(-\frac{4}{35}\right).$$

A) 1 B) 0 C) $\frac{3}{35}$ D) 3

34. Вычислите

$$\frac{5}{8}:\frac{5}{4}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right):\left(-\frac{3}{42}\right).$$

A) $1\frac{5}{6}$ B) $\frac{9}{10}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{7}{42}$

35. (96-9-58) Сколько дробей со знаменателем 36, которые больше $\frac{3}{4}$ и меньше $\frac{8}{9}$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Решение: Приведем данные дроби к знаменателю 36: $\frac{3}{4}=\frac{27}{36}$ и $\frac{8}{9}=\frac{32}{36}$. Между ними есть 4 числа со знаменателем 36: $\frac{28}{36},\frac{29}{36},\frac{30}{36},\frac{31}{36}$.
Ответ: 4 (D).

36. Сколько дробей со знаменателем 45, которые больше $\frac{3}{5}$ и меньше $\frac{11}{15}$?

A) 5 B) 2 C) 3 D) 4

37. Сколько дробей со знаменателем 40, которые больше $\frac{3}{4}$ и меньше $\frac{9}{10}$?

A) 6 B) 5 C) 3 D) 4

38. (96-1-8) Сколько дробей со знаменателем 33, которые больше $\frac{9}{11}$ и меньше 1?

A) 2 B) 1 C) 5 D) 6

39. (96-10-8) Сколько дробей со знаменателем 30, которые больше $\frac{2}{3}$ и меньше $\frac{5}{6}$?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5

1.2.2 Смешанные числа

Пусть дана неправильная дробь $\frac{a}{n}$, $a\geq n$. Согласно формуле деления с остатком, (см. 1 в п.1.1.5) найдутся такие натуральное число m и целое число r ($0\leq r<n$), что справедливо равенство $a=nm+r$. Тогда $\frac{a}{n}=\frac{nm+r}{n}=\frac{nm}{n}+\frac{r}{n}=m+\frac{r}{n}$. Следовательно, неправильную дробь $\frac{a}{n}$ можно представить в виде суммы натурального числа m и правильной дроби $\frac{r}{n}$. Эта операция называется выделением целый части из неправильной дроби. Например,

$$\frac{12}{5}=\frac{10+2}{5}=\frac{10}{5}+\frac{2}{5}=2+\frac{2}{5}.$$

Сумму натурального числа и правильной дроби принято записывать без знака сложения, т.е. вместо $2+\frac{2}{5}$ пишут $2\frac{2}{5}$. Такая запись называется смешанным числом. Теперь приведем правила сравнения положительных дробей.

1. **Среди дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$, имеющих одинаковый знаменатель, большей будет та, которая имеет больший числитель, $a>c\Longleftrightarrow\frac{a}{b}>\frac{c}{b}$.**
2. **Среди дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{c}$, с одинаковым числителем, большей будет та, которая имеет меньший знаменатель, т.е. $b<c\Longleftrightarrow\frac{a}{b}>\frac{a}{c}$.**
3. **Среди двух смешанных чисел большим будет то, которое имеет большую целую часть. Если их целые части равны, то большим будет то число, которое имеет большую дробную часть.**
4. $0<a<b<c\Longleftrightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$.
5. **Число, обратное числу $a\neq 0$ равно $\frac{1}{a}$. Например, если $a=0,8$, то обратное ему число равно $\frac{1}{0,8}=1,25$.**

6. Число, противоположное числу a равно $-a$. Например, если $a = 0,8$, то противоположное ему число равно $-0,8$.

1. (97-5-9) Выполните действие $1\frac{3}{5} - 3\frac{1}{5}$.
   A) $-1\frac{2}{5}$ B) $1\frac{2}{5}$ C) $1\frac{3}{5}$ D) $-1\frac{3}{5}$

   Решение: При вычитании смешанных чисел сначала вычитаются их целые и дробные части соответственно, затем полученные числа складываются. Значит, $1\frac{3}{5} - 3\frac{1}{5} = (1-3) + (\frac{3}{5} - \frac{1}{5}) = -2 + \frac{2}{5} = -(2 - \frac{2}{5}) = -\frac{10-2}{5} = -\frac{8}{5} = -1\frac{3}{5}$.

   Ответ: $-1\frac{3}{5}$. (D).

2. (97-9-9) Выполните действие $3\frac{4}{7} - 5\frac{2}{7}$.
   A) $-1\frac{5}{7}$ B) $1\frac{4}{7}$ C) $1\frac{5}{7}$ D) $-\frac{4}{7}$

3. Выполните действие $3\frac{4}{9} - 2\frac{5}{18}$.
   A) $-1\frac{1}{6}$ B) $1\frac{5}{6}$ C) $1\frac{1}{6}$ D) $-1\frac{1}{18}$

4. Выполните действие $2011\frac{1}{9} - 2010\frac{11}{18}$.
   A) $-0,1$ B) $0,5$ C) $0,6$ D) $-0,5$

5. (96-1-7) Найдите число, обратное числу $0,6$.
   A) $-0,6$ B) $1\frac{2}{3}$ C) $0,4$ D) -6

   Решение: Согласно определению обратного числа (см. 5), число, обратное к $0,6 = \frac{6}{10}$ есть $\frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$. **Ответ:** $1\frac{2}{3}$ (B).

6. (96-9-57) Найдите число, обратное числу $0,8$.
   A) $-0,8$ B) 8 C) $-\frac{5}{4}$ D) $1,25$

7. (96-10-7) Найдите число, обратное числу $-1,5$.
   A) $1,5$ B) $-0,75$ C) $-\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{3}$

8. (00-2-6) Найдите произведение чисел, обратных к $\frac{11}{25}$ и $4\frac{6}{11}$.
   A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{4}$ D) 2

9. (06-11-15) Найдите пару взаимно обратных чисел:
   1) $3-\sqrt{2}$ и $3+\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\frac{3\sqrt{5}}{5}$;
   3) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ и $\frac{5\sqrt{3}}{6}$; 4) $\sqrt{2}+1$ и $\sqrt{2}-1$.
   A) 1; 2; 3 B) 1; 3; 4 C) 1; 3 D) 2; 3; 4

10. Найдите число, противоположное к $2,5$.
    A) $0,4$ B) $-0,4$ C) $-2,5$ D) 2

    Решение: Согласно определению противоположного числа (см. 6) число, противоположное к $2,5$ есть $-2,5$. **Ответ:** $-2,5$ (C).

11. Найдите число, противоположное к $-1,6$.
    A) $0,125$ B) $1,6$ C) $0,8$ D) 16

12. Найдите число, обратное числу, противоположному $0,4$.
    A) $0,4$ B) $-0,4$ C) $-2,5$ D) 2

13. (03-1-56) Найдите число, противоположное числу, обратному к $0,8$.
    A) $-0,8$ B) $1,25$ C) $-1,25$ D) $-1,2$

14. (98-3-5) Расположите в порядке возрастания числа $a = \frac{5}{11}$, $b = \frac{3}{7}$, $c = \frac{6}{13}$.
    A) $a < b < c$ B) $b < a < c$
    C) $b < c < a$ D) $c < b < a$

    Решение: Сравним числа, обратные к данным $\frac{1}{a} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$, $\frac{1}{b} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$, $\frac{1}{c} = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$. Целые части этих чисел равны (2). Их дробные части сравним по 2-правилу и получим $\frac{1}{c} < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Согласно 4-правилу $c > a > b$. **Ответ:** $b < a < c$ (B).

15. (98-10-7) Расположите в порядке возрастания числа

    $$a = \frac{49}{150}; \quad b = \frac{102}{300}; \quad c = \frac{22}{75}.$$

    A) $a < c < b$ B) $b < c < a$
    C) $c < a < b$ D) $c < b < a$

16. (98-10-53) Расположите в порядке возрастания числа

    $$a = \frac{5}{11}; \quad b = \frac{6}{13}; \quad c = \frac{7}{15}.$$

    A) $a < b < c$ B) $b < a < c$
    C) $b < c < a$ D) $c < b < a$

17. (99-4-10) Расположите в порядке возрастания числа

    $$a = \frac{7}{36}; \quad b = \frac{11}{34}; \quad c = \frac{7}{32}; \quad d = \frac{9}{25}.$$

    A) $a > b > c > d$ B) $b > a > d > c$
    C) $d > a > b > c$ D) $d > b > c > a$

18. (02-3-3) Найдите наименьшее натуральное число, при делении которого на числа $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{17}$, $\frac{21}{23}$ получаются целые числа.
    A) 84 B) 36 C) 42 D) 63

    Решение: Искомое число обозначим через n. Следовательно, чтобы числа $n : \frac{3}{7} = n \cdot \frac{7}{3}$, $n : \frac{4}{17} = n \cdot \frac{17}{4}$, $n : \frac{21}{23} = n \cdot \frac{23}{21}$ были целыми необходимо, чтобы n было кратно на 3, 4 и 21. Из условия его минимальности следует, что n является их НОК. Согласно правилу нахождения НОК $K(3; 4; 21) = 84$. **Ответ:** 84 (A).

19. (03-7-6) Найдите наименьшее натуральное число, при делении которого на числа $\frac{2}{7}, \frac{4}{11}, \frac{6}{13}$ получаются целые числа.

A) 6 B) 12 C) 18 D) 24

20. (00-5-7) Сколько всего натуральных делителей у общего знаменателя дробей $\frac{1}{30}$ и $\frac{1}{45}$?

A) 11 B) 7 C) 12 D) 13

21. (03-6-5) Найдите сумму
$$\frac{2}{31}+\frac{3}{41}+\frac{4}{51},$$
если $\frac{29}{31}+\frac{38}{41}+\frac{47}{51}=a$.

A) $3-a$ B) $4-a$ C) $5-a$ D) $3-\frac{a}{2}$

Решение: Искомое число обозначим через x. Сложим числа $\frac{29}{31}+\frac{38}{41}+\frac{47}{51}=a$ и $\frac{2}{31}+\frac{3}{41}+\frac{4}{51}=x$ (левую часть - с левой, правую часть - с правой). В результате получим $1+1+1=$ $=a+x$. Отсюда $x=3-a$. **Ответ:** $3-a$ (A).

22. Найдите сумму
$$\frac{2}{5}+\frac{8}{15}+\frac{4}{25},$$
если $\frac{3}{5}+\frac{7}{15}+\frac{21}{25}=a$.

A) $3-a$ B) $4-a$ C) $5-a$ D) $3-\frac{a}{2}$

23. (03-7-8) Найдите сумму
$$\frac{2}{31}+\frac{3}{41}+\frac{4}{51}+\frac{5}{61},$$
если $\frac{29}{31}+\frac{38}{41}+\frac{47}{51}+\frac{56}{61}=a$.

A) $3-a$ B) $4-a$ C) $5-a$ D) $3-\frac{a}{2}$

24. Найдите сумму
$$\frac{2}{10}+\frac{5}{20}+\frac{8}{30}+\frac{11}{40},$$
если $\frac{3}{10}+\frac{5}{20}+\frac{7}{30}+\frac{9}{40}=a$.

A) $3-a$ B) $4-a$ C) $2-a$ D) $3-2a$

25. (97-10-6) Вычислите
$$1\frac{8}{17}\cdot 3\frac{2}{5}:\frac{11}{12}\cdot 2\frac{1}{5}:\frac{4}{9}.$$

A) 2,7 B) $24\frac{3}{17}$ C) 27 D) $29\frac{1}{9}$

Решение: Обратим смешанные числа в неправильные дроби, затем согласно 7-правилу п.1.2.1 деление заменим умножением и сократив, получим:
$$1\frac{8}{17}\cdot 3\frac{2}{5}:\frac{11}{12}\cdot 2\frac{1}{5}:\frac{4}{9}=\frac{25}{17}\cdot\frac{17}{5}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{11}{5}\cdot\frac{9}{4}=27.$$
Ответ: 27 (C).

26. (96-7-6) Вычислите
$$5\frac{5}{7}:2\frac{2}{5}\cdot 5\frac{1}{4}:1\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}.$$

A) $7\frac{1}{7}$ B) $8\frac{1}{7}$ C) $6\frac{6}{7}$ D) $5\frac{5}{7}$

27. (97-3-6) Вычислите
$$\frac{3}{4}\cdot 1\frac{1}{7}:\frac{2}{15}\cdot 12\frac{1}{4}:7\frac{1}{2}.$$

A) $10\frac{1}{2}$ B) 11 C) $9\frac{1}{4}$ D) $7\frac{1}{2}$

28. (97-7-6) Вычислите
$$\frac{42}{95}\cdot 1\frac{3}{14}:\frac{3}{5}:2\cdot 4\frac{3}{4}.$$

A) $\frac{13}{8}$ B) $1\frac{3}{8}$ C) $2\frac{1}{8}$ D) $1\frac{5}{7}$

29. (98-3-8) Вычислите
$$3\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}.$$

A) 3 B) -3 C) 2,5 D) $-2,5$

30. (98-10-56) Вычислите
$$2\frac{2}{3}:1\frac{1}{7}\cdot 3\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right).$$

A) 4 B) 3 C) -2 D) $\frac{2}{7}$

31. (07-08-1) Вычислите
$$\frac{15}{56}\cdot 1\frac{1}{7}:\frac{2}{15}\cdot 24\frac{1}{2}:7\frac{1}{2}.$$

A) 11 B) $10\frac{1}{2}$ C) $7\frac{1}{2}$ D) 21

32. (96-7-9) Вычислите
$$\left(7\frac{1}{3}-6\frac{7}{8}\right):\frac{3}{4}+8\frac{8}{9}\cdot 2\frac{1}{80}.$$

A) $17\frac{2}{3}$ B) $18\frac{1}{2}$ C) $21\frac{1}{2}$ D) $16\frac{1}{3}$

Решение: Сначала вычислим разность в скобках:
$$7\frac{1}{3}-6\frac{7}{8}=7-6+\frac{1}{3}-\frac{7}{8}=1+\frac{8\cdot 1-3\cdot 7}{24}=$$
$$=1-\frac{13}{24}=\frac{24-13}{24}=\frac{11}{24}.$$
Обратим смешанные числа в неправильные дроби и выполним действия
$$\frac{11}{24}\cdot\frac{4}{3}+\frac{80}{9}\cdot\frac{161}{80}=\frac{11}{18}+\frac{161}{9}=\frac{11+322}{18}=$$
$$\frac{333}{18}=\frac{37}{2}=18\frac{1}{2}.$$ **Ответ:** $18\frac{1}{2}$ (B).

33. (97-1-3) Вычислите
$$1\frac{1}{4}+\frac{5}{12}:(\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{2}-\frac{7}{8}).$$
A) $11\frac{1}{4}$ B) $-1\frac{1}{4}$ C) $9\frac{1}{4}$ D) $-8\frac{3}{4}$

34. (97-3-9) Вычислите
$$\left(5\frac{3}{4}-4\frac{8}{9}\right)\cdot 2+67\frac{1}{2}:2\frac{1}{7}.$$
A) $24\frac{1}{3}$ B) $33\frac{2}{9}$ C) $36\frac{1}{9}$ D) $31\frac{1}{3}$

35. (97-6-3) Вычислите
$$\left(\frac{5}{9}-1\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\right):\frac{5}{9}+\frac{1}{3}.$$
A) $\frac{3}{20}$ B) $\frac{17}{60}$ C) $\frac{7}{30}$ D) $-\frac{7}{60}$

36. (97-7-9) Вычислите
$$\left(4\frac{1}{10}-3\frac{4}{15}\right)\cdot\frac{5}{6}+4\frac{1}{10}:1\frac{1}{5}.$$
A) $3\frac{5}{9}$ B) $4\frac{1}{9}$ C) $5\frac{2}{3}$ D) $2\frac{3}{5}$

37. (97-10-9) Вычислите
$$\left(12\frac{1}{9}-10\frac{2}{5}\right):38\frac{1}{2}+2\frac{8}{9}\cdot 18.$$
A) $24\frac{1}{15}$ B) $32\frac{7}{45}$ C) $38\frac{3}{5}$ D) $52\frac{2}{45}$

38. (07-107-1) Вычислите
$$8\frac{3}{4}+\frac{5}{12}:\left(\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{2}-\frac{7}{8}\right).$$
A) $-1\frac{1}{4}$ B) $-6\frac{3}{4}$ C) $-8\frac{3}{4}$ D) $9\frac{1}{4}$

1.2.3 Десятичные дроби

1. **Если знаменатель обыкновенной дроби можно представить в виде степеней 10, то такая дробь называется десятичной.**

2. **Чтобы обратить дробь $a\cdot 10^{-n}=\frac{a}{10^n}$ в десятичную, необходимо в числе a справа налево отделить запятой n цифр. Если число цифр a меньше n, перед a добавляется необходимое количество нулей. Например, $\frac{2345}{10^3}=2,345$, $\frac{23}{10^4}=0,0023$.**

1. (96-3-64) Вычислите
$$2,701\cdot 10^{-4}+3,205\cdot 10^{-3}.$$
A) $5,906\cdot 10^{-3}$ B) $5,906\cdot 10^{-4}$
C) $3,4751\cdot 10^{-3}$ D) $3,0215\cdot 10^{-4}$

Решение: Вынесем общий множитель 10^{-3} за скобки:
$$2,701\cdot10^{-4}+3,205\cdot10^{-3}=10^{-3}(2,701\cdot10^{-1}+3,205)$$
$$=10^{-3}(0,2701+3,205)=3,4751\cdot10^{-3}.$$
Ответ: $3,4751\cdot 10^{-3}$ (C).

2. (06-11-2) Вычислите $2,014:0,19+2,5\cdot 0,3$.
A) $11,35$ B) $9,35$ C) $12,85$ D) $8,85$

3. (96-13-4) Какому из указанных чисел равна сумма
$$3,104\cdot 10^{-2}+1,81\cdot 10^{-3}.$$
A) $3,285\cdot 10^{-3}$ B) $3,285\cdot 10^{-2}$
C) $4,914\cdot 10^{-2}$ D) $4,914\cdot 10^{-3}$

4. (96-9-4) Вычислите $1,011\cdot 10^{-3}+2,1\cdot 10^{-4}$.
A) $3,111\cdot 10^{-3}$ B) $3,111\cdot 10^{-4}$
C) $3,111\cdot 10^{-7}$ D) $1,221\cdot 10^{-3}$

5. (96-12-62) Вычислите $1,015\cdot 10^{-4}+3,14\cdot 10^{-5}$.
A) $4,155\cdot 10^{-4}$ B) $4,155\cdot 10^{-5}$
C) $4,155\cdot 10^{-9}$ D) $1,329\cdot 10^{-4}$

6. (98-12-8) Вычислите
$$\frac{3,21\cdot 5,95-4,44}{2,21\cdot 5,95+1,51}.$$
A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) $1\frac{1}{2}$

Решение: В числителе дроби сделаем преобразование:
$$3,21\cdot 5,95-4,44=(2,21+1)\cdot 5,95-4,44=$$
$$=2,21\cdot 5,95+5,95-4,44=2,21\cdot 5,95+1,51$$
теперь получим:
$$\frac{3,21\cdot 5,95-4,44}{2,21\cdot 5,95+1,51}=\frac{2,21\cdot 5,95+1,51}{2,21\cdot 5,95+1,51}=1.$$
Ответ: 1 (A).

7. (98-7-9) Вычислите
$$\frac{2,21\cdot 5,95+1,51}{6,42\cdot 5,95-8,88}.$$
A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $1\frac{1}{2}$ D) $-\frac{62}{41}$

8. Вычислите
$$\frac{6,86\cdot 4,75-4,62}{2,44+4,75\cdot 2,43}.$$
A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) -2

9. Вычислите
$$\frac{1,27\cdot 3,45+2,25}{4,54\cdot 3,45-2,4}.$$
A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $1\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$

10. (01-8-17) Вычислите
$$0,21:(0,05+\frac{3}{20})-2,5\cdot 1,4.$$
A) $-2,45$ B) $-2,55$ C) -2 D) $-3,35$

Решение: Сначала выполним действие в скобках:

$$0,05+\frac{3}{20}=0,05+\frac{15}{100}=0,05+0,15=0,20.$$

Теперь выполнив операции 2-ой ступени, затем 1-ой ступени, получим

$$0,21:0,20-2,5\cdot 1,4=1,05-3,50=-2,45.$$

Ответ: $-2,45$ (A).

11. (01-2-11) Вычислите

$$4-3,3:\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right).$$

A) 3,5 B) 2,5 C) $-1,5$ D) 0,5

12. (00-5-17) Найдите значение выражения

$$-2,4+3\frac{1}{3}-(-2,6).$$

A) $-10,6$ B) 12,5 C) $3\frac{8}{15}$ D) $-12,5$

13. (00-5-18) Вычислите

$$\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot(-32)+0,5\cdot(-8).$$

A) 8 B) 4 C) 6 D) 7

14. (96-1-5) Вычислите

$$\left(2,5-2\frac{1}{3}\right)\cdot 5,2:2\frac{3}{5}.$$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 3 D) $\frac{3}{7}$

15. (96-6-1) Вычислите

$$1,75-\left(-1\frac{2}{7}\right)\cdot 6,5\frac{7}{9}.$$

A) $-4,75$ B) 2,15 C) 8,25 D) 4,75

16. (96-9-56) Вычислите

$$6\frac{3}{8}-\left(2,5-2\frac{1}{3}\right):1\frac{1}{3}.$$

A) $5\frac{2}{3}$ B) $6\frac{1}{4}$ C) $4\frac{1}{2}$ D) $2\frac{1}{3}$

Решение: Сначала выполним действие в скобках:

$$2,5-2\frac{1}{3}=2\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}=(2-2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Теперь обратим $1\frac{1}{3}$ в неправильную дробь и выполним действия:

$$6\frac{3}{8}-\frac{1}{6}:\frac{4}{3}=6\frac{3}{8}-\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=6+\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=6\frac{1}{4}.$$

Ответ: $6\frac{1}{4}$ (B).

17. (97-1-7) Вычислите

$$\left(\frac{1}{6}-1\frac{1}{15}+\frac{1}{10}\right):0,6+0,4.$$

A) $1\frac{11}{15}$ B) 0,88 C) $-1\frac{1}{3}$ D) $-\frac{14}{15}$

18. (97-2-1) Вычислите

$$-1\frac{3}{4}\cdot 6,5\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)-3,75.$$

A) $-2,75$ B) $-10,25$ C) 2,75 D) 10,25

19. (97-8-1) Вычислите

$$5,8-\frac{3}{7}\cdot 2,2\cdot\left(-2\frac{1}{3}\right).$$

A) 3,6 B) -8 C) 8 D) $-3,6$

20. (97-11-7) Вычислите

$$0,2+1,8\cdot\left(\frac{4}{9}-1\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right).$$

A) $-1,4$ B) 1,8 C) 0,04 D) $-0,36$

21. (98-8-5) Вычислите

$$\frac{3}{16}+\frac{1}{16}\cdot(0,312:0,3-3,15\cdot 1,6).$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{16}$ C) $-\frac{1}{16}$ D) $-\frac{1}{8}$

22. (98-1-3) Вычислите

$$19,9\cdot 18-19,9\cdot 16+30,1\cdot 18-30,1\cdot 16.$$

A) 98 B) 100 C) 10 D) 110

Решение: Из первого и третьего слагаемых вынесем за скобки общий множитель 18, из второго и четвертого слагаемых вынесем за скобки общий множитель 16. В результате получим: $18(19,9+30,1)-16(19,9+30,1)=18\cdot 50-16\cdot 50=50(18-16)=50\cdot 2=100$. **Ответ:** 100 (B).

23. (99-6-2) Вычислите

$$13,5\cdot 5,8-8,3\cdot 4,2-5,8\cdot 8,3+4,2\cdot 13,5.$$

A) 42 B) 52 C) 50 D) 48

24. (00-2-1) Найдите значение выражения

$$12,7\cdot 64+173\cdot 3,6+12,7\cdot 36+17,3\cdot 64.$$

A) 3000 B) 1800 C) 2000 D) 3600

25. (98-8-3) Вычислите

$$109\cdot 9,17-5,37\cdot 72-37\cdot 9,17+1,2\cdot 72.$$

A) 360 B) 350 C) 290 D) 380

26. (99-8-7) Найдите значение выражения

$$79,9-79,8+79,7-79,6+79,5-79,4+\cdots+$$
$$+60,3-60,2+60,1-60.$$

A) 100 B) 20 C) 10 D) 18,8

27. (98-8-7) Вычислите

$$\left(\frac{5}{6}\cdot 5-5\right):\frac{2}{3}-0,5^2.$$

A) 1 B) −1 C) 0,5 D) −1,5

Решение: Сначала выполним действие в скобках

$$\frac{5}{6}\cdot 5-5=\frac{25}{6}-5=\frac{25-30}{6}=-\frac{5}{6}.$$

Так как $0,5=\frac{1}{2}$, то $0,5^2=\frac{1}{4}$. Учитывая это, получим

$$-\frac{5}{6}:\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{6}{4}=-1,5.$$

Ответ: $-1,5$ (D).

28. (98-1-7) Вычислите

$$(\frac{2}{3}:3-1)\cdot 1,5^2-0,25.$$

A) 1,5 B) −2 C) −5 D) −0,2

29. (98-4-1) Вычислите

$$(1,6^2-2,2\cdot\frac{3}{11}):1,4.$$

A) 1,4 B) 1,2 C) 1,5 D) 1,6

30. (99-4-4) Вычислите

$$2,8\cdot\left(2\frac{1}{3}:2,8-1\right)+2\frac{4}{5}.$$

A) 5,6 B) $2\frac{2}{3}$ C) $2\frac{1}{3}$ D) 2,8

31. (00-6-2) Вычислите

$$(0,2\cdot 0,1-0,1):0,25+0,75.$$

A) 1,07 B) −2,45 C) 3,95 D) 0,43

32. (00-6-3) Найдите значение выражения

$$(1\frac{2}{3}\cdot 2,2+1):2\frac{1}{5}-\frac{5}{11}.$$

A) 1 B) 1,6 C) $2\frac{1}{3}$ D) $1\frac{2}{3}$

33. (07-109-1) Вычислите

$$\left(3,5-3\frac{1}{3}\right)\cdot 10,4:5\frac{1}{5}.$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{1}{12}$

34. (96-1-3) Найдите значение выражения

$$\frac{6,8\cdot 0,04\cdot 1,65}{3,3\cdot 5,1\cdot 0,16}.$$

A) 6 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{6}$

Решение: Подсчитаем число цифр после запятых в числителе, их 5. Теперь подсчитаем число цифр после запятых в знаменателе, их 4. В знаменателе дроби число 5,1 заменим равным ему числом 5,10, теперь число цифр после запятых в числителе и знаменателе дроби будет одинаковым. Умножим числитель и знаменатель дроби на 10^5

$$\frac{6,8\cdot 0,04\cdot 1,65\cdot 10^5}{3,3\cdot 5,10\cdot 0,16\cdot 10^5}=\frac{68\cdot 4\cdot 165}{33\cdot 510\cdot 16}.$$

Теперь сократим дробь

$$\frac{68\cdot 4\cdot 165}{33\cdot 510\cdot 16}=\frac{17\cdot 4\cdot 4\cdot 33\cdot 5}{33\cdot 17\cdot 30\cdot 16}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$ (D).

35. (96-9-54) Найдите значение выражения

$$\frac{0,7\cdot 1,8\cdot 2,6}{7,2\cdot 7,8\cdot 1,4}.$$

A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{2}{5}$ C) 0,04 D) $\frac{1}{12}$

36. (96-10-3) Найдите значение выражения

$$\frac{0,15\cdot 1,6\cdot 4,6}{9,2\cdot 0,03\cdot 6,4}.$$

A) $\frac{5}{8}$ B) $\frac{2}{5}$ C) 2 D) 0,2

37. (99-4-3) Найдите значение выражения

$$\frac{3,2\cdot 0,027\cdot 0,005}{0,09\cdot 0,0025\cdot 0,64}.$$

A) 3 B) 0,3 C) 30 D) 2

38. (03-5-1) Вычислите

$$\frac{0,13}{0,00013}+\frac{0,02}{0,0005}-\frac{0,7}{0,0014}.$$

A) 540 B) 580 C) 620 D) 1400

39. (03-10-3) Найдите значение выражения

$$\frac{0,07}{0,21}+\frac{0,4}{0,06}+\frac{0,9}{0,05}.$$

A) 25 B) 20 C) 15 D) 30

40. (01-6-1) Вычислите

$$\frac{400-21,5\cdot 18,5}{1,5\cdot 2\frac{1}{5}+2,8\cdot 1\frac{1}{2}}.$$

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{3}{10}$

Решение: Вычислим сначала числитель дроби $400 - 21,5 \cdot 18,5 = 400 - 397,75 = 2,25$, затем ее знаменатель $1,5 \cdot 2,2 + 2,8 \cdot 1,5 = 1,5(2,2 + 2,8) = 1,5 \cdot 5 = 7,5$. Теперь разделим полученные числа $2,25 : 7,5 = 0,3 = \frac{3}{10}$. **Ответ:** $\frac{3}{10}$ (D).

41. (96-10-5) Вычислите

$$(5\frac{1}{3} - 3,2) : 2\frac{2}{3} + 1\frac{2}{5}.$$

A) $2\frac{1}{2}$ B) 2,2 C) 3,2 D) 2

42. (98-6-4) Вычислите

$$\frac{[(1,2 : 36) + 0,3] \cdot 9}{0,2}.$$

A) 148,5 B) 1,5 C) 150 D) 15

43. (01-5-1) Вычислите

$$\frac{(6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14}) \cdot 5\frac{5}{6}}{(21 - 1,25) : 2,5}.$$

A) 2,5 B) 3 C) −2,5 D) 4

44. (99-2-1) Вычислите

$$\frac{7,4 + \frac{13}{17} \cdot 0,15 \cdot 1\frac{4}{13} \cdot 6\frac{2}{3}}{0,2 \cdot 5 - 0,16}.$$

A) 10 B) 8 C) 12 D) 6

45. (00-1-1) Вычислите

$$\frac{\frac{5}{11} \cdot 0,006 \cdot 2\frac{1}{5} + 1\frac{1}{8} \cdot 0,004 \cdot \frac{8}{9}}{0,5 \cdot 0,0009 + 0,0001 \cdot 0,5}.$$

A) 10 B) 0,4 C) 20 D) 2

46. (02-4-1) Вычислите

$$\left(2\frac{3}{4} - 0,25\right) \cdot 0,8 - 1\frac{2}{3} \cdot 1,8.$$

A) 1 B) 1,5 C) −1 D) −1,5

47. (02-6-1) Вычислите

$$32 \cdot 0,99 \cdot 25 \cdot 1,25 + 411 + 57 \cdot 5 \cdot 0,4 \cdot 25 \cdot \frac{4}{19}.$$

A) 2001 B) 2000 C) 1999 D) 2002

1.2.4 Бесконечные периодические десятичные дроби

Если в десятичной записи числа после запятой группа цифр последовательно повторяется бесконечное число раз, такая дробь называется *бесконечной периодической дробью*, а последовательно повторяющаяся группа цифр ее *периодом*. Для краткости принято период записывать один раз, заключая его в круглые скобки. Например, $0,5555\ldots = 0,(5)$; $2,1232323\ldots = 2,1(23)$. Число, представимое в виде бесконечной переодической дроби, является рациональным.

1. Если в разложении знаменателя несократимой дроби на простые множители:
а) содержатся только двойки и (или) пятерки, она обращается в конечную десятичную дробь;
b) встречаются простые множители, отличные от 2 и 5, такая дробь приводится к бесконечной периодической десятичной дроби. Примеры: $\frac{3}{48} = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$ - представляется в виде конечной десятичной дроби, $\frac{5}{12} = \frac{5}{2^2 \cdot 3}$ - представляется в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

2. Периодические дроби бывают двух типов:
а) если период начинается сразу после запятой, то дробь называется чисто периодической. Например, $0,333\ldots = 0,(3)$; $2,161616\ldots = 2,(16)$.
б) Если между запятой и периодом есть другие десятичные знаки, то дробь называется смешанно периодической. Например, $0,377\ldots = 0,3(7)$; $2,81212\ldots = 2,8(12)$.

3. Дробная часть чисто периодической дроби равна такой обыкновенной дроби, знаменатель которой состоит из стольких 9, сколько цифр имеет период, а числитель равен периоду. Например, $0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $2,(16) = 2\frac{16}{99}$.

4. Дробная часть смешанно периодической дроби равна такой обыкновенной дроби, знаменатель которой состоит из стольких 9, сколько цифр имеет период, и стольких 0, сколько цифр имеется между запятой и периодом, а числитель равен разности чисел, составленных из цифр после запятой до второго периода и до первого периода. Например, $0,3(7) = \frac{37-3}{90} = \frac{34}{90} = \frac{17}{45}$, $2,8(12) = 2\frac{812-8}{990} = 2\frac{804}{990} = 2\frac{134}{165}$.

1. (96-1-12) Какому из данных чисел равно $0,(2)$?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 0,22

Решение: $0,(2)$ - чисто периодическая дробь, согласно 3-правилу $0,(2) = \frac{2}{9}$. **Ответ:** $\frac{2}{9}$ (B).

2. (96-9-62) Какому из данных чисел равно $0,(5)$?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{5}{9}$ C) 0,555 D) $\frac{1}{5}$

3. (97-9-71) Представьте число $8,(5)$ в виде обыкновенной дроби.

A) $8\frac{4}{9}$ B) $8\frac{5}{8}$ C) $8\frac{7}{8}$ D) $8\frac{5}{9}$

4. Представьте число $0,(18)$ в виде обыкновенной дроби.

A) $\frac{2}{11}$ B) $\frac{18}{90}$ C) $\frac{8}{99}$ D) $\frac{18}{900}$

5. (99-4-27) Какому из данных чисел равно число $0,5(6)$?
A) $\frac{56}{99}$ B) $\frac{1}{18}$ C) $\frac{17}{30}$ D) $\frac{28}{45}$

6. (01-6-22) Представьте число $0,2(3)$ в виде обыкновенной дроби.
A) $\frac{7}{30}$ B) $\frac{4}{15}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{2}{7}$

7. (03-8-27) Представьте число $0,2(18)$ в виде обыкновенной дроби.
A) $\frac{12}{55}$ B) $\frac{13}{55}$ C) $\frac{28}{99}$ D) $\frac{218}{900}$

8. (02-11-2) Запишите $3\frac{127}{495}$ в виде бесконечной десятичной периодической дроби.
A) $3,(127)$ B) $3,(254)$ C) $3,2(54)$ D) $3,2(56)$

9. (99-7-6) Вычислите $0,(5)+0,(1)$.
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $1,5$ D) $\frac{1}{4}$

Решение: $0,(5)$ и $0,(1)$ - чисто периодические дроби. Обратим их в обыкновенные дроби согласно 3-правилу: $0,(5)=\frac{5}{9}$; $0,(1)=\frac{1}{9}$. Теперь их сложим: $\frac{5}{9}+\frac{1}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$. **Ответ:** $\frac{2}{3}$ (A).

10. (98-5-4) Вычислите $0,(8)+0,(7)$.
A) $0,(15)$ B) $1,(6)$ C) $1,(5)$ D) $1,(15)$

11. (01-3-39) Вычислите $0,(8)+0,(3)$.
A) $1\frac{1}{9}$ B) $1\frac{2}{9}$ C) $1,(11)$ D) $1,(1)$

12. (02-5-2) Вычислите $0,5(6)+0,(8)$.
A) $0,6(4)$ B) $1,3(6)$ C) $1,4(5)$ D) $1,36$

13. Вычислите $0,(5)+0,(6)+0,(7)$.
A) $1,(8)$ B) $1,3(6)$ C) 2 D) $1,(18)$

14. Вычислите $3,(7)+6,(2)$.
A) $9,(9)$ B) $\frac{80}{9}$ C) 10 D) $\frac{89}{9}$

15. (98-11-3) Вычислите
$$\frac{0,8(3)-0,4(6)}{0,(3)}.$$
A) $1,1$ B) $1\frac{1}{3}$ C) 3 D) $0,3$

16. (96-3-68) Какое из указанных соотношений для a, b и c верное?
$$a=0,5(3),\quad b=\frac{47}{90},\quad c=1-0,48(1).$$
A) $a<b<c$ B) $b<c<a$
C) $c<b<a$ D) $b<a<c$

Решение: Запишем данные числа в виде обыкновенных дробей $a=\frac{53-5}{90}=\frac{48}{90}=\frac{480}{900}$, $b=\frac{470}{900}$, $c=1-\frac{481-48}{900}=1-\frac{433}{900}=\frac{467}{900}$. Согласно правилу сравнения дробей с одинаковым знаменателем $c<b<a$. **Ответ:** $c<b<a$ (C).

17. (96-12-66) Какое из указанных соотношений для a, b и c верное?
$$a=0,6(4),\quad b=\frac{59}{90},\quad c=1-0,36(9).$$
A) $a<c<b$ B) $a<b<c$
C) $b<a<c$ D) $c<a<b$

18. (98-1-10) Расположите в порядке убывания числа
$$a=2,(4),\quad b=2,5-\frac{1}{8},\quad c=1,2:0,5.$$
A) $a>b>c$ B) $a>c>b$
C) $b>a>c$ D) $c>a>b$

19. Расположите в порядке возрастания числа
$$a=0,8(87),\quad b=\frac{87}{99},\quad c=1-0,(13).$$
A) $a<c<b$ B) $a<b<c$
C) $b<a<c$ D) $c<b<a$

20. Расположите в порядке возрастания числа
$$a=0,(6)+0,(7),\quad b=1,(3),\quad c=2-\frac{7}{9}.$$
A) $a<c<b$ B) $a<b<c$
C) $b<a<c$ D) $c<b<a$

21. Расположите в порядке возрастания числа
$$a=-0,1(3),\quad b=-0,13(5),\quad c=-0,103(5).$$
A) $a<c<b$ B) $a<b<c$
C) $b<a<c$ D) $c<b<a$

22. Расположите в порядке возрастания числа
$$a=\frac{10}{7},\quad b=\frac{100}{77},\quad c=\frac{1000}{777}.$$
A) $a<c<b$ B) $a<b<c$
C) $b<a<c$ D) $c<b<a$

23. (96-9-3) Какие из указанных обыкновенных дробей нельзя представить в виде конечной десятичной дроби
$$1)\ \frac{7}{32};\quad 2)\ \frac{11}{160};\quad 3)\ \frac{5}{48};\quad 4)\ \frac{5}{14}.$$
A) 2; 3 B) 3; 4 C) 4; 1 D) 1; 2

Решение: Знаменатели данных дробей разложим на простые множители $32=2^5$; $160=2^5\cdot 5$; $48=2^4\cdot 3$ и $14=2\cdot 7$. В разложении 48 и 14 содержатся отличные от 2 и 5 простые множители, 3 и 7 соответственно. Согласно 1-правилу $\frac{5}{48}$ и $\frac{5}{14}$ нельзя представить в виде конечной десятичной дроби. **Ответ:** 3; 4 (B).

24. (96-13-3) Какие из указанных обыкновенных дробей нельзя представить в виде конечной десятичной дроби

$$1)\ \frac{14}{625};\quad 2)\ \frac{3}{64};\quad 3)\ \frac{32}{75};\quad 4)\ \frac{11}{375}.$$

A) 1; 2 B) 2; 3 C) 3; 4 D) 4; 1

25. Какие из указанных обыкновенных дробей можно представить в виде конечной десятичной дроби

$$1)\ \frac{3}{48};\quad 2)\ \frac{7}{120};\quad 3)\ \frac{7}{112};\quad 4)\ \frac{3}{96}.$$

A) 1; 2 B) 2; 3 C) 1; 3; 4 D) 1; 2; 4

26. Укажите бесконечные периодические десятичные дроби, период которых отличен от 0 или 9.

$$m = 2\frac{5}{17},\quad n = \frac{7}{32},\quad p = \frac{2}{333}.$$

A) m, n B) только m C) n D) m, p

27. (98-12-5) Укажите бесконечные периодические десятичные дроби, период которых отличен от 0 или 9.

$$m = 2,32666\ldots,\quad n = \frac{7}{99},\quad p = \frac{5}{16},$$

$$q = 7,145222\ldots,\quad l = 3,222.$$

A) m, n B) m, q C) m, n, q D) m, n, p

28. (01-11-1) Вычислите

$$\left(6\frac{1}{3}\cdot 0,(5) + 0,(4) : \frac{3}{19}\right)\cdot 4\frac{5}{19}.$$

A) 28 B) 27,5 C) 27 D) 26,5

Решение: Записав периодические дроби 0, (5) и 0, (4) в виде $\frac{5}{9}$ и $\frac{4}{9}$, выполним действия в скобках:

$$\frac{19}{3}\cdot\frac{5}{9}+\frac{4}{9}\cdot\frac{19}{3} = \frac{19}{3}\left(\frac{5}{9}+\frac{4}{9}\right) = \frac{19}{3}\cdot 1 = \frac{19}{3}.$$

Теперь выполним умножение

$\frac{19}{3}\cdot 4\frac{5}{19} = \frac{19}{3}\cdot\frac{81}{19} = 27.$ **Ответ:** 27 (C).

29. (99-10-1) Вычислите

$$\frac{0,48\cdot 0,75 + 0,52 : 1\frac{1}{3}}{(0,(3)+0,(6)) : 0,012}.$$

A) 1 B) 0,08 C) 0,008 D) 0,009

30. (02-12-20) Вычислите

$$\left(\frac{81\cdot 3}{567}+\frac{22}{77}\right)\cdot 24,5 - \frac{2}{3} : 0,(3).$$

A) 16,5 B) 14,5 C) 15,5 D) 16,5

31. (03-6-2) Вычислите

$$\frac{0,(4)+0,(41)+0,(42)+0,(43)}{0,(5)+0,(51)+0,(52)+0,(53)}.$$

A) $\frac{170}{211}$ B) $\frac{83}{103}$ C) $\frac{63}{107}$ D) $\frac{65}{106}$

32. (03-7-4) Вычислите

$$\frac{0,(40)+0,(41)+0,(42)+0,(43)}{0,(50)+0,(51)+0,(52)+0,(53)}.$$

A) $\frac{170}{211}$ B) $\frac{83}{103}$ C) $\frac{63}{107}$ D) $\frac{65}{106}$

33. Вычислите

$$\left(2011\frac{1}{5} - 2010\frac{1}{6}\right)\cdot 1\frac{29}{31}.$$

A) $2\frac{28}{29}$ B) $2\frac{29}{31}$ C) $3\frac{1}{29}$ D) 2

34. Вычислите

$$\frac{0,202-0,004}{\frac{8}{9}\cdot 81\cdot 0,125}.$$

A) 0,99 B) 0,099 C) 0,022 D) 0,0099

1.2.5 Процент и пропорция

Дроби, часто используемые в повседневной жизни имеют специальные названия. Например, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ называются половиной и четвертью соответственно. Широко применяется дробь $\frac{1}{100}$ или понятие сотой части. Это дробь имеет специальное название, именуемое *процентом*. *Процентом* называется сотая часть какого-либо числа. Процент обозначается знаком %. Запись $n\,\%$ означает $\frac{n}{100}$, т.е $n\,\%$ является другой формой обыкновенной дроби $\frac{n}{100}$. Для нахождения $n\,\%$ числа a необходимо a умножить на $\frac{n}{100}$. Например, $10\,\%$ числа a равно $a\cdot\frac{10}{100} = 0,1a$, $25\,\%$ числа a равно $0,25a$.

$\frac{a}{b}$ или $a : b$ называется *отношением* a к b. *Равенство двух отношений называется пропорцией.* В общем случае пропорция записывается в виде

$$a : b = c : d \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a и d называются *крайними членами*, b и c - *средними членами* пропорции. Пропорция имеет следующие свойства.

1. $a : b = c : d \iff ad = bc.$

2. $a : b = c : d \iff na : b = nc : d.$

3. $a : b = c : d \iff a : c = b : d.$

4. $a : b = c : d \iff d : b = c : a.$

1. В школьной библиотеке имеются 40000 книг. Из них 2 % посвящены математике. Сколько книг по математике имеется в библиотеке?

A) 400 B) 200 C) 800 D) 1000

Решение: Согласно формуле нахождения процентов числа $\frac{40000 \cdot 2}{100} = 800$. **Ответ:** 800 (С).

2. В школьном саду растет 9652 фруктовых дерева, из них 75 % яблони. Сколько яблонь растет в школьном саду?

A) 7237 B) 7239 C) 7300 D) 7229

3. На математическом факультете учатся 80 отличников, это составляет 20 % всех студентов. Найдите количество студентов факультета.

A) 400 B) 320 C) 500 D) 360

4. На областной олимпиаде участвовало 80 учеников, 16 из них решили все тестовые задания. Сколько процентов участников олимпиады решили все задания?

A) 40 B) 20 C) 80 D) 10

5. На математическое направление СамГУ принимаются 70 студентов. На это направление сдали документы 20 абитуриентов с военной рекомендацией. Для абитуриентов с военной рекомендацией выделены дополнительные места в количестве 20 % от мест, выделенных для приема по направлению. Какое наибольшее число абитуриентов с военной рекомендацией может быть не принято в состав студентов?

A) 14 B) 6 C) 4 D) 0

6. Один килограмм меда стоит 10000 сум. Из-за финансивого кризиса его цена упала на 12%. Сколько теперь стоит килограмм меда?

A) 9100 B) 9200 C) 8800 D) 8200

7. Из какой группы чисел 1) 7; 8; 14; 16; 2) 1; 2; 3; 4; 3) 3; 4; 15; 20; можно составить пропорцию?

A) 1; 2 B) 1; 3 C) из всех D) 2; 3

Решение: В 1) выполняется равенство $7 \cdot 16 = 8 \cdot 14$, следовательно, из группы чисел 7, 8, 14, 16 можно составить пропорцию. В 2) $1 \cdot 4 \neq 2 \cdot 3$, $1 \cdot 3 \neq 2 \cdot 4$, $1 \cdot 2 \neq 3 \cdot 4$ поэтому из группы чисел 1, 2, 3, 4 нельзя составить пропорцию. В 3) справедливо равенство $3 \cdot 20 = 4 \cdot 15$. Значит, из группы чисел 3, 4, 15, 20 можно составить пропорцию. **Ответ:** 1, 3 (В).

8. Пешеход прошел 14 км за 2,5 часа. За какое время он пройдет 4,2 км, если будет двигаться с такой же скоростью?

A) 0,7 B) 0,5 C) 0,75 D) 0,6

9. Крайние члены пропорции равны 14 и 20, один из средних членов равен 35. Найти второй средний член.

A) 2 B) 8 C) 10 D) 7

10. Найти a, если числа 4, 8, 12, a представляют последовательные члены пропорции.

A) 20 B) 24 C) 28 D) 32

11. Найти неизвестный член пропорции $21 : x = 7 : 8$.

A) 21 B) 24 C) 22 D) 28

1.3 Иррациональные числа

Наряду с бесконечными периодическими десятичными дробями существуют и бесконечные непериодические десятичные дроби. Например, число 0,10 110111011110... является примером бесконечной непериодической десятичной дроби. Цифры, образующие это число, расположены в определенном порядке, но никакая группа цифр периодически не повторяется. *Бесконечные непериодические десятичные дроби называются иррациональными числами.* В качестве примеров иррациональных чисел можно привести следующие:

$$\sqrt{2} = 1,4142135\ldots, \quad \sqrt{3} = 1,7320508\ldots,$$

$$\pi = 3,1415926535\ldots, \quad e = 2,718281828459\ldots.$$

Иррациональные числа могут быть как положительными, так и отрицательными. *Все рациональные и иррациональные числа составляют множество действительных чисел,* которое обозначается буквой $\mathbb{R}$. Известно, что множество рациональных чисел обозначается буквой $\mathbb{Q}$. Поэтому множество иррациональных чисел можно обозначить через $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Каким числом является сумма рациональных чисел a и b?

A) всегда рациональным
B) всегда иррациональным
C) может быть как рациональным, так и иррациональным
D) нет правильного ответа

Решение: Так как a и b - рациональные числа, их можно представить в виде обыкновенной дроби. Сумма обыкновенных дробей тоже является обыкновенной дробью, т.е. рациональным числом. Следовательно, сумма рациональных чисел всегда будет рациональным числом. **Ответ:** всегда рациональным (А).

2. Каким числом является разность рациональных чисел a и b?

A) всегда рациональным
B) всегда иррациональным
C) может быть как рациональным, так и иррациональным
D) нет правильного ответа

3. a и b рациональные числа. Каким числом является их произведение?

A) всегда рациональным
B) всегда иррациональным
C) может быть как рациональным, так и иррациональным
D) нет правильного ответа

4. Каким числом является сумма иррациональных чисел α и β?
A) всегда рациональным
B) всегда иррациональным
C) может быть как рациональным, так и иррациональным
D) нет правильного ответа

5. Каким числом является разность иррациональных чисел α и β?
A) всегда рациональным
B) всегда иррациональным
C) может быть как рациональным, так и иррациональным
D) нет правильного ответа

6. Каким числом является сумма a и α, если $a-$ рациональное, а $\alpha-$ иррациональное число.
A) всегда рациональным
B) всегда иррациональным
C) может быть как рациональным, так и иррациональным
D) нет правильного ответа

7. Каким числом является разность a и α, если $a-$ рациональное, а $\alpha-$ иррациональное число.
A) всегда рациональным
B) всегда иррациональным
C) может быть как рациональным, так и иррациональным
D) нет правильного ответа

8. $a-$ рациональное число, отличное от нуля, $\alpha-$ иррациональное число. Каким числом является их произведение?
A) всегда рациональным
B) всегда иррациональным
C) может быть как рациональным, так и иррациональным
D) нет правильного ответа

9. α и β иррациональные числа. Каким числом является их отношение.
A) всегда рациональным
B) всегда иррациональным
C) может быть как рациональным, так и иррациональным
D) нет правильного ответа

Решение: Если в качестве α и β взять иррациональные числа $\alpha = 2\pi$ и $\beta = \pi$, то получим рациональное число $\alpha : \beta = 2$. Если взять иррациональные числа $\alpha = \sqrt{6}$ и $\beta = \sqrt{3}$, то получим иррациональное число $\alpha : \beta = \sqrt{2}$
Ответ: может быть как рациональным, так и иррациональным (C).

10. $a-$ рациональное число, отличное от нуля, $\alpha-$ иррациональное число. Каким числом является их отношение $\alpha : a$?
A) всегда рациональным
B) всегда иррациональным
C) может быть как рациональным, так и иррациональным
D) нет правильного ответа

11. α и $\beta-$ иррациональные числа. Каким числом является их произведение?
A) всегда рациональным
B) всегда иррациональным
C) может быть как рациональным, так и иррациональным
D) нет правильного ответа

12. α и $\beta-$ иррациональные числа, но их сумма $\alpha+\beta$ рациональное число. Какое из нижеследующих выражений всегда будет рациональным?
A) $\alpha \cdot \beta$ B) $\alpha + 2\beta$
C) $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$ D) $\alpha - \beta$

13. Какие из следующих чисел являются иррациональными: $a = 0,(123456789)$; $b = 3,12(61)$; $\alpha = \pi^2$; $\beta = 2,101001000100001\ldots$?
A) α; b B) a; α C) α; β D) a; b

1.4 Действительные числа

Как было отмечено выше, все рациональные и иррациональные числа составляют множество действительных чисел, которое обозначается буквой $\mathbb{R}$. Возьмем горизонтальную прямую ℓ. Выберем на ней произвольную точку O и назовем её началом координат. Точке O поставим в соответствие число нуль. Справа от точки O выберем точку E. Отрезок OE называется *единицей масштаба.* Точке E поставим в соответствие число 1 (единицу). Направление движения от точки O к точке E вдоль прямой ℓ считается положительным направлением. Точке, находящейся справа от точки E на единицу масштаба поставим в соответствие число 2 (два) и т.д. Точки E', находящейся слева от точки O на единицу масштаба поставим в соответствие число -1 (минус единицу), точке, находящейся слева от точки E' на единицу масштаба, поставим в соответствие число -2 (минус два) и т.д. Таким образом, между элементами множества $\mathbb{R}$ и точками прямой ℓ установлено взаимно - однозначное соответствие. В этом случае говорят, что задана координатная прямая ℓ. Известно, что любому числу $r \in \mathbb{R}$ соответствует единственная точка M координатной прямой ℓ. Число r называется координатой точки M и обозначается через $M(r)$. Числа, соответствующие точкам, расположенным справа от начала координат O называются положительными, а слева от точки O - отрицательными. Число нуль считается ни положительным, и ни отрицательным. Положительные числа записываются со знаком "плюс"(+), отрицательные числа со знаком "минус" (−). Например, $+1,\ +2,5,\ +5,8,\ldots,\ -1,\ -2,8,\ -8,7,\ldots$. Знак + перед положительными числами принято не писать. $+1 = 1,\ +2,5 = 2,5$.

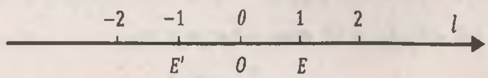


Рисунок 1.1

Модулем действительного числа называется расстояние от начала координат до соответствующей ему точки. Модуль числа a записывается в виде $|a|$. Модуль числа также называют его абсолютным значением. Модуль любого положительного числа равен самому числу, модуль отрицательного числа равен противоположному ему числу, модуль нуля равен нулю. Модуль числа также можно представить формулой:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geq 0, \\ -a, & \text{если} \quad a \leq 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Величина $|a-b|$ равна расстоянию между точками, соответствующими числами a и b. Если числам a и b соответсвуют точки A и B, такие, что точка A лежит левее точки B, то число a будет меньше числа b и наоборот. Приведем понятия целой и дробной частей действительного числа. *Целой частью* нецелого числа $a \in \mathbb{R}$ называется ближайшее ему слева целое число и обозначается через $[a]$. *Дробной частью* числа $a \in \mathbb{R}$ называется величина $a - [a]$ и обозначается через $\{a\}$. Известно, что целая часть целого числа равна самому числу, а дробная часть - нулю. Например, вычислим целые и дробные части чисел $a = 2,34$ и $b = -2,71$. Согласно определению, ближайшее слева целое число к $2,34$ равно 2, т.е $[a] = 2$. А дробная часть $a - [a] = 2,34 - 2 = 0,34$. Анологично $[b] = [-2,71] = -3$ и $\{b\} = \{-2,71\} = -2,71 - (-3) = 0,29$.

Если для числа b верно равенство $b = a \cdot 10^n$, $(1 \leq |a| < 10,\ n \in \mathbb{Z})$, выражение $a \cdot 10^n$ называется ***стандартным видом*** числа b. Например, $543,26 = 5,4326 \cdot 10^2$; $-0,000026 = -2,6 \cdot 10^{-5}$.

n факториалом называется произведение натуральных чисел от 1 до n и записывается в виде $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. Если $n \geq 5$, то произведение $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ оканчивается k нулями, где число k определяется следующим образом

$$k = \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{5^3}\right] + \left[\frac{n}{5^3}\right] + \cdots. \tag{1.2}$$

Приведем основные свойства модуля действительного числа.

1. $|a| \geq 0$.

2. $|-a| = |a|$.

3. $|a| = |b| \Longleftrightarrow a = \pm b$.

4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $(b \neq 0)$.

6. $|a|^2 = a^2$.

7. $|a+b| \leq |a| + |b|$.

8. $|a| - |b| \leq |a-b|$.

9. $|a| < c$, $(c > 0) \Longleftrightarrow -c < a < c$.

10. $|a| > c$, $(c > 0) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > c \\ a < -c. \end{array}\right.$

1. (97-12-13) Упростите выражение

$$|n-m| + |n+k| - |m-k|,$$

если известно, что $m > n > k > 0$.
A) $2k - 2m$ B) $2k - 2n$ C) $2k$ D) $2m - 2k$

Решение: Известно, что

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Так как $m > n > k > 0$, то $n - m < 0$, поэтому $|n-m| = -(n-m)$; $n+k > 0$, поэтому $|n+k| = n+k$; $m-k > 0$, поэтому $|m-k| = m-k$. Тогда

$$|n-m| + |n+k| - |m-k| = -(n-m) + n + k -$$

$$-(m-k) = -n + m + n + k - m + k = 2k.$$

Ответ: $2k$ (C).

2. (98-5-9) Вычислите

$$\frac{|4 - 5|4-6| + 4|3-6||}{|3 - 4|7-5||}.$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $1\frac{2}{5}$ D) $1\frac{1}{5}$

3. (99-7-11) Вычислите

$$\frac{|4 - 4 \cdot |3-6| - 8|}{|4 - |3-8| - 7|}.$$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 2,5

4. (96-6-14) Упростите выражение

$$|a-b| + |c-a| - |b-c|,$$

если известно, что $a > b > c$.
A) $a - 2b$ B) $2c$ C) $2a$ D) $2a - 2b$

5. (97-2-14) Упростите выражение

$$|x-y| - |z-y| - |z-x|,$$

если известно, что $x > y > z$.
A) $2x$ B) $2y - 2x$ C) $2z - 2y$ D) $2y$

6. (97-8-14) Упростите выражение

$$|p+q| - |k-q| + |k-p|,$$

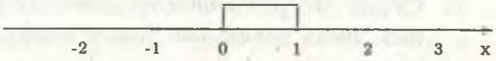
если известно, что $p > q > k > 0$.
A) $2p$ B) $2p + 2q - 2k$
C) $2p + 2q + 2k$ D) $2p + 2k$

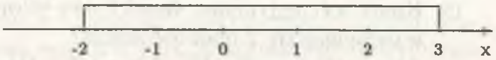
7. Упростите выражение

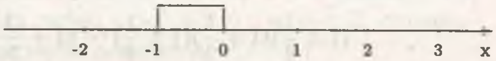
$$\left|xy - \frac{x^2+y^2}{2}\right| + \left|\frac{x^2+y^2}{2} + xy\right| - 2y^2,$$

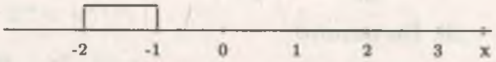
если известно, что $x > y > 0$.
A) $x^2 - y^2$ B) $x^2 + y^2$ C) y^2 D) x^2

8. (96-3-7) Укажите, какой из рисунков соответствует правильному ответу для $|a-b|$, если $a = -2$ и $b = 3$.

A) 

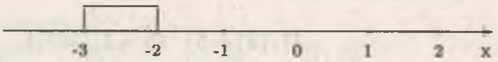
B) 

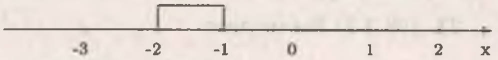
C) 

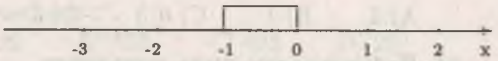
D) 

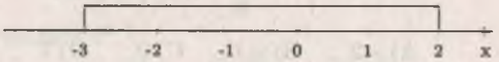
Решение: Известно, что величина $|a-b|$ есть расстояние между точками, соответствующими числам a и b. Расстояние между точками, соответствующими числам -2 и 3 приведено на рисунке B).**Ответ:** (B).

9. (96-12-7) Укажите, какой из рисунков соответствует правильному ответу для $|a-b|$, если $a = -3$ и $b = 2$.

A) 

B) 

C) 

D) 

10. (97-4-9) Расположить в порядке убывания числа: $m = |4,8|$; $n = |-4,(8)|$; $p = |4\frac{3}{5}|$ и $q = |-3,2|$.
A) $n > m > p > q$ B) $m > n > p > q$
C) $m > p > q > n$ D) $p > m > q > n$

11. (97-9-69) Расположить в порядке убывания числа: $m = |8,(8)|$; $n = |-8,8|$; $p = |8\frac{7}{9}|$ и $q = |-8\frac{6}{7}|$.
A) $n > m > p > q$ B) $m > n > p > q$
C) $m > q > n > p$ D) $q > m > n > p$

12. (03-2-63) $a > 0$; $b < 0$; $|a| \neq |b|$. Какое из следующих выражений не обязательно положительное?
A) $a-b$ B) $|a+b|$ C) a^3b^2 D) $|a|-|b|$

13. (98-5-6) Сколько целых чисел расположено между числами $-5,2$ и $10,4$?
A) 16 B) 10 C) 15 D) 12

Решение: На числовой оси обозначим точки $-5,2$ и $10,4$. Теперь подсчитаем целые числа, расположенные между ними: Отрицательных целых чисел 5: -5, -4, -3, -2, -1. Положительных - 10: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, нуль тоже целое число, всего 16. **Ответ:** 16 (A).

14. (99-7-8) Сколько целых чисел расположено между числами, координаты которых $-3,2$ и $4,2$?
A) 7 B) 6 C) 9 D) 8

15. (98-7-11) На числовой оси найдите числа, расположенные от числа -4 на расстоянии 2, 3 ед.
A) $-6,3$ B) $-6,3$ и $1,7$
C) $6,3$ и $1,7$ D) $-6,3$ и $-1,7$

16. (02-10-40) Найдите целую часть суммы
$$-\frac{21}{6} + 2,(2).$$
A) -2 B) -1 C) 0 D) 1

17. Найти дробную часть суммы
$$0,(4) + 1,(5) - 2,(3).$$
A) $0,(5)$ B) $0,(6)$ C) $0,6$ D) $0,56$

18. (03-6-44) Напишите число 3602, 1 в стандартном виде.
A) $3,6 \cdot 10^3$ B) $0,36 \cdot 10^4$
C) $36,02 \cdot 10^2$ D) $3,6021 \cdot 10^3$

19. Напишите число 0, 00003602 в стандартном виде.
A) $3,6 \cdot 10^{-5}$ B) $0,36 \cdot 10^{-4}$
C) $36,02 \cdot 10^{-6}$ D) $3,602 \cdot 10^{-5}$

1.4.1 Задачи смешанного типа

1. Каким количеством нулей оканчивается разность $60! - 50!$?
A) 14 B) 12 C) 10 D) 8

Решение: Если используем формулу (1.2), получим, что 50! оканчивается 12 нулями, 60! - 14 нулями. Вычитая их столбиком, получаем в конце разности 12 нулей. **Ответ:** 12 (B).

2. Каким количеством нулей оканчивается число 150!?
A) 30 B) 33 C) 36 D) 37

3. Найдите последнюю цифру суммы
$$3! + 6! + 9! + \cdots + 33!.$$
A) 0 B) 1 C) 2 D) 6

4. Найдите последнюю цифру суммы
$$(1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + 33!)^{33}.$$
A) 9 B) 1 C) 2 D) 3

5. На какое число не делится сумма $10!+11!+12!$?
A) 144 B) 350 C) 800 D) 500

6. Найдите остаток от деления числа 15! на 1001.
A) 0 B) 1 C) 11 D) 7

Решение: Разложим 1001 на простые множители $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Согласно определению факториала 15! делится на $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ без остатка, т.е. остаток равен нулю. **Ответ:** 0 (A).

7. Сколько не простых, натуральных общих делителей имеют числа 48 и 60?
A) 4 B) 6 C) 3 D) 5

8. Найти n, если число $4 \cdot 45^n$ имеет 198 натуральных делителей.
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

9. Найти наибольшее натуральное n, при котором выражение $\frac{80!}{8^n}$ будет целым числом.
A) 10 B) 18 C) 20 D) 26

10. Сколько натуральных делителей имеет число 5200 000?
A) 48 B) 56 C) 64 D) 96

11. Найти сумму всех натуральных делителей 1440.
A) 5225 B) 4914 C) 2317 D) 198

12. Сколько цифр имеет произведение $4^{10} \cdot 15^3 \cdot 25^8$?
A) 21 B) 18 C) 19 D) 20

Решение: Произведение $4^{10} \cdot 15^3 \cdot 25^8$ запишем в виде $4^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 25^8$. Затем, используя свойства степени с натуральным показателем, приведем его к виду

$$4^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 25^8 = 27 \cdot 5 \cdot 4^{10} \cdot 25^9 = 27 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 100^9 =$$

$$= 54 \cdot 10 \cdot (10^2)^9 = 54 \cdot 10 \cdot 10^{18} = 54 \cdot 10^{19}.$$

Это число состоит из цифр 5 и 4 и 19 нулей. Таким образом, произведение $4^{10} \cdot 15^3 \cdot 25^8$ является 21 значным числом. **Ответ:** 21 (A).

13. Сколько цифр имеет произведение $8^{18} \cdot 5^{55}$?
A) 36 B) 54 C) 55 D) 73

14. Сколько цифр имеет произведение
$$2^{10} \cdot 5^9 \cdot 4^6 \cdot 25^4?$$
A) 21 B) 18 C) 19 D) 20

15. (02-1-3) Найти одну треть числа
$$\frac{(-2) \cdot (-3)^{17} - (-3)^{16}}{9^7 \cdot 15}.$$
A) 1 B) 3 C) 2 D) 9

16. Натуральные числа a и b удовлетворяют равенству $\frac{5a-b}{b} = 11$. Найти наименьшее значение суммы $a+b$.
A) 17 B) 16 C) 14 D) 13

17. Сумма трех различных трехзначных натуральных чисел равна 349. Найти наибольшее из них.
A) 101 B) 146 C) 148 D) 147

18. Какое из следующих чисел будет четным, если a отличное от 2 простое число?
A) a B) $2a-3$ C) a^2+a+1 D) a^3-3a

19. Вычислите
$$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{2n}).$$
A) $\frac{1}{2n}$ B) $\frac{n+1}{2}$ C) $2n+1$ D) $\frac{2n+1}{2}$

20. Вычислите
$$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\cdots(1-\frac{1}{100}).$$
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{10}$ C) 2 D) $\frac{1}{100}$

21. Вычислите
$$\frac{\frac{0,(3)}{0,44} + \frac{19}{10}}{1,9 + \frac{0,(3)}{0,44}}.$$
A) $\frac{4}{9}$ B) 1 C) 3 D) $\frac{11}{9}$

22. Вычислите
$$(1,(3)+5) : (5+1,(333)).$$
A) $\frac{1}{9}$ B) 1 C) 3 D) $\frac{5}{9}$

23. (98-7-2) Вычислите
$$\frac{488 \cdot 475 - 462}{244 + 475 \cdot 243}.$$
A) 3 B) 1 C) 0,5 D) 2

24. Найдите целую часть выражения
$$2\frac{5}{9} - 3,2(7) + 0,55.$$
A) −2 B) −1 C) 0 D) 1

25. Найдите дробную часть выражения
$$1 - 5,(8) - 6,(5).$$
A) 0,(5) B) 0,(4) C) 0,4 D) 0,44

2 Алгебраические выражения

Если некоторые или все числа числового выражения заменить буквами, получится буквенное выражение. В алгебре изучаются буквенные выражения. Конечное число буквенных выражений, связанных знаками алгебраических операций называется *алгебраическим выражением.* Обычно между буквенными выражениями знак умножения не ставится. Например, $5 \cdot a \cdot b \cdot c^2 = 5abc^2$; $4 \cdot x \cdot y \cdot z = 4xyz$.

2.1 Степень с целым показателем

Натуральная степень действительного числа a определяется следующим образом $a^1 = a,\ a^2 = a \cdot a,\ a^3 = a \cdot a \cdot a$ и т.д $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n}$. Здесь a называется *основанием*, $n-$ *показателем степени.* Отрицательная степень числа $a \neq 0$ определяется следующим образом $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ и $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n = \dfrac{1}{a^n}$. Нулевая степень действительного числа $a \neq 0$ равна 1, т.е. $a^0 = 1$. Для любых $a > 0$, $b > 0$ и $n,\ m \in \mathbb{Z}$ справедливы следующие равенства:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

2. $a^n : a^m = a^{n-m}$.

3. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

4. $(a^n)^m = a^{nm}$.

5. $a^0 = 1$.

6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

7. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

8. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$.

1. Вычислите 2^5.
A) 10 B) 7 C) 32 D) 16
Решение: По определению степени $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$. **Ответ:** 32 (C).

2. Вычислите 3^5.
A) 81 B) 15 C) 243 D) 27

3. Вычислите 5^4.
A) 20 B) 125 C) 625 D) 25

4. Вычислите 4^3.
A) 12 B) 16 C) 64 D) 32

5. Вычислите 6^3.
A) 12 B) 216 C) 36 D) 18

6. Представьте в виде степени 2 выражение $2^2 \cdot 2^3$.
A) 2^4 B) 2^3 C) 2^5 D) 2^6
Решение: Согласно 1-свойству $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$. **Ответ:** 2^5 (C).

7. Запишите в виде степени 3 выражение $3 \cdot 3^2 \cdot 3^5$.
A) 3^7 B) 3^8 C) 3^5 D) 3^6

8. Запишите в виде степени 4 выражение $4 \cdot 4 \cdot 4^5$.
A) 4^7 B) 4^8 C) 4^5 D) 4^6

9. Запишите в виде степени 5 выражение $5 \cdot 5^3 \cdot 5^5$.
A) 5^7 B) 5^8 C) 5^9 D) 5^6

10. Запишите в виде степени 7 выражение $7 \cdot 7^2 \cdot 7^4$.
A) 7^7 B) 7^8 C) 7^9 D) 7^6

11. Запишите в виде степени 2 выражение $2^{30} \cdot 4^{20} \cdot 8^{10}$.
A) 2^{60} B) 2^{100} C) 2^{80} D) 2^{90}

12. Запишите 30^4 в виде произведения простых чисел.
A) $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4$ B) $6^4 \cdot 5^4$ C) $3^4 \cdot 10^4$ D) $2^4 \cdot 15^4$
Решение: Разложим 30 на простые множители $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. следовательно, $30^4 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^4$. Согласно 3-свойству $30^4 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4$. **Ответ:** $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4$ (A).

13. Запишите 6^8 в виде произведения простых чисел.
A) $2^8 \cdot 3^8$ B) $6^4 \cdot 6^4$ C) $1^8 \cdot 6^8$ D) $2^4 \cdot 3^4$

14. Запишите 15^5 в виде произведения простых чисел.
A) $3^8 \cdot 5^3$ B) $3^3 \cdot 5^2$ C) $3^5 \cdot 5^5$ D) $2^5 \cdot 3^5$

15. Запишите 18^9 в виде произведения простых чисел.
A) $2^9 \cdot 3^9$ B) $2^9 \cdot 3^{18}$ C) $2^{18} \cdot 3^9$ D) $2^9 \cdot 9^9$

16. Запишите 20^7 в виде произведения простых чисел.
A) $2^7 \cdot 10^7$ B) $2^{14} \cdot 5^7$ C) $4^7 \cdot 5^7$ D) $2^5 \cdot 5^2$

17. Запишите 21^6 в виде произведения простых чисел.
A) $3^3 \cdot 7^3$ B) $3^4 \cdot 7^2$ C) $3^6 \cdot 7^6$ D) $3^5 \cdot 7^5$

18. Запишите в виде степени отношение $2^6 : 2^3$.
A) 2^3 B) 2^2 C) 2^6 D) 2^1
Решение: Согласно 2-свойству $2^6 : 2^3 = 2^{6-3} = 2^3$. **Ответ:** 2^3 (A).

19. Запишите в виде степени отношение $3^8 : 3^5$.
A) 3^3 B) 3^2 C) 3^6 D) 3^1

20. Запишите в виде степени отношение $5^{12} : 5^7$.
A) 5^3 B) 5^2 C) 5^5 D) 5^8

21. Запишите в виде степени отношение $7^{12} : 7^4$.
A) 7^3 B) 7^4 C) 7^5 D) 7^8

22. Запишите в виде степени отношение $6^5 : 6$.
A) 6^3 B) 6^4 C) 6^5 D) 6^2

23. Запишите в виде степени $(3^4)^5$.
A) 3^9 B) 3^{11} C) 3^{20} D) 3^{15}
Решение: Согласно 4-свойству $(3^4)^5 = 3^{4 \cdot 5} = 3^{20}$. **Ответ:** 3^{20} (C).

24. Запишите в виде степени $(2^5)^3$.
A) 2^8 B) 2^{11} C) 2^{20} D) 2^{15}

25. Запишите в виде степени $(3^4)^8$.
A) 3^{12} B) 3^{11} C) 3^{24} D) 3^{32}

26. Запишите в виде степени $(5^2)^7$.
A) 5^9 B) 5^{11} C) 5^{49} D) 5^{14}

27. Запишите в виде степени $(7^4)^6$.
A) 7^9 B) 7^{10} C) 7^{24} D) 7^{12}

28. Возведите в степень дробь $(\frac{2}{3})^2$.

A) $\frac{4}{6}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{4}{3}$

Решение: В силу 6-свойства $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$.

Ответ: $\frac{4}{9}$ (B).

29. Возведите в степень дробь $(\frac{2}{5})^3$.

A) $\frac{6}{15}$ B) $\frac{8}{5}$ C) $\frac{8}{125}$ D) $\frac{8}{25}$

30. Возведите в степень дробь $(\frac{3}{7})^4$.

A) $\frac{24}{56}$ B) $\frac{81}{2401}$ C) $\frac{81}{28}$ D) $\frac{81}{343}$

31. Возведите в степень дробь $(\frac{2}{7})^3$.

A) $\frac{6}{21}$ B) $\frac{8}{21}$ C) $\frac{8}{343}$ D) $\frac{8}{49}$

32. Запишите в виде степени с натуральным показателем $(\frac{2}{3})^{-7}$.

A) $(\frac{3}{2})^7$ B) $(\frac{2}{3})^7$ C) $(\frac{2}{3})^5$ D) $(\frac{3}{2})^{14}$

Решение: В силу 8-свойства $(\frac{2}{3})^{-7} = (\frac{3}{2})^7$.

Ответ: $(\frac{3}{2})^7$ (A).

33. Запишите в виде степени с натуральным показателем $(\frac{2}{5})^{-3}$.

A) $(\frac{5}{2})^3$ B) $(\frac{2}{5})^3$ C) $(\frac{5}{3})^3$ D) $(\frac{5}{2})^5$

34. Запишите в виде степени с натуральным показателем $(\frac{3}{7})^{-5}$.

A) $(\frac{7}{5})^3$ B) $(\frac{7}{3})^5$ C) $(\frac{7}{3})^8$ D) $(\frac{5}{3})^7$

35. Запишите в виде степени с натуральным показателем $(\frac{2}{9})^{-1}$.

A) 9^2 B) $\frac{9}{2}$ C) $(\frac{1}{2})^9$ D) 2^9

36. (99-8-20) Упростите

$$5 \cdot 4^{2n-3} - 20 \cdot \left(2^{n-2}\right)^4.$$

A) 2 B) 4^{2n} C) 4 D) 0

Решение: Запишем 4 в виде 2^2, а 20 в виде $5 \cdot 2^2$, и используя 3, 4-свойства получим:

$$5 \cdot 4^{2n-3} - 20 \cdot \left(2^{n-2}\right)^4 = 5 \cdot \left(2^2\right)^{2n-3} -$$
$$-5 \cdot 2^2 \cdot 2^{4n-8} = 5 \cdot 2^{4n-6} - 5 \cdot 2^{4n-6} = 0.$$

Ответ: 0 (D).

37. (98-7-25) Упростите

$$\frac{2^{5n-3} \cdot 2^{3n+2}}{2^{4n-1}}.$$

A) 2^{3n} B) 2^{4n+1} C) 2^{4n+2} D) 2^{4n}

38. (98-12-24) Упростите

$$\frac{3^{4n+3} \cdot 3^{3n-2}}{3^{2n-1}}.$$

A) 3^{5n+2} B) 3^{5n+3} C) 3^{5n+1} D) 3^{5n-1}

39. (01-3-30) Упростите

$$\frac{2^{5n+3} \cdot 2^{3n-4}}{2^{4n+1}}.$$

A) 2^{4n-1} B) 2^{n-2} C) 2^{2n-2} D) 2^{4n-2}

40. (96-10-25) Вычислите

$$\frac{0,5^5 \cdot 32^2}{4^3}.$$

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 4 D) $\frac{1}{4}$

Решение: Запишем 0,5 в виде $\frac{1}{2}$, 32 в виде 2^5, 4 в виде 2^2, и используя 4,6-свойства, получим

$$0,5^5 \cdot \frac{32^2}{4^3} = (\frac{1}{2})^5 \cdot \frac{(2^5)^2}{(2^2)^3} = \frac{1^5}{2^5} \cdot \frac{2^{10}}{2^6} = \frac{2^{10}}{2^{11}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$ (B).

41. (96-1-24) Вычислите $\frac{9^2 \cdot 3^5}{81^2}$.

A) 1 B) 3 C) $\frac{1}{81}$ D) 9

42. (96-9-65) Вычислите $\frac{27^3}{3^4 \cdot 9^2}$.

A) 3 B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) 9

43. (98-7-24) Вычислите

$$\frac{5(3 \cdot 7^{15} - 19 \cdot 7^{14})}{7^{16} + 3 \cdot 7^{15}}.$$

A) 7 B) 49 C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{49}$

44. (98-12-23) Вычислите

$$\frac{5 \cdot 2^{32} - 4 \cdot 2^{30}}{4^{16}}.$$

A) 4 B) 2 C) 5 D) 16

45. (99-6-1) Вычислите

$$\frac{10^9 \cdot 3^5}{3^3 \cdot 10^{11}}.$$

A) 0,09 B) 0,9 C) 9 D) 0,03

46. (97-9-78) Вычислите

$$\frac{72^6 \cdot 24^4}{36^8 \cdot 8^3}.$$

A) 24 B) 32 C) 16 D) 36

47. (99-7-7) Вычислите

$$\frac{100^5}{(80+20)^{10}} \cdot 50^5.$$

A) $\frac{1}{32}$ B) 16 C) 8 D) $\frac{1}{64}$

2.2 Одночлен и его свойства

Выражение, представляющее собой произведение чисел, переменных и их натуральных степеней называется одночленом. Одно число или переменное тоже считаются одночленами. *Числа и переменные, содержащиеся в одночлене, называются его множителями.* Одночлен имеет следующие свойства

1. **В одночлене можно менять местами его множители. Например,** $ab \cdot 5xy = 5abxy$.

2. **Имеющиеся в одночлене числовые множители можно заменить их произведением. Например,** $5ab \cdot 3xy \cdot 4tz = 60abtxyz$.

3. **Имеющиеся в одночлене одинаковые буквенные множители можно заменить множителем с соответствующей степенью. Например,** $5ab \cdot a^2b^3 = 5a^{1+2}b^{1+3} = 5a^3b^4$.

4. **Если один из множителей одночлена равен нулю, такой одночлен равен нулю. Например,** $5ab \cdot 0 \cdot 8xy = 0$.

5. **В одночлене множитель, равный 1, можно опустить. Например,** $4ab \cdot 0,25x^2y = 1 \cdot abx^2y = abx^2y$.

6. **Если перед одночленом поставить знак "+", получится одночлен, равный данному. Например,** $+abc = abc$.

7. **Если перед одночленом поставить знак −, это будет означать то, что данный одночлен умножен на −1. Например,** $-a(-5)c = (-1)(-5)ac = 5ac$.

Одночлены, отличающиеся только знаком, называется *противоположными*. Например, $5xyz$ и $-5xyz$ или $4x^2y^3$ и $-4x^2y^3$. *Стандартным видом* одночлена называется произведение, составленное из единственного числового множителя, стоящего на первом месте и степеней различных переменных (написанных в алфавитном порядке). Например, $15a^2b^3x^5y^8$ - одночлен стандартного вида. Числовой множитель одночлена стандартного вида называется его *коэффициентом*. Например, коэффициент одночлена $5a^2b^3x^5y^8$ равен 5. Одночлены стандартного вида, отличающиеся только числовым коэффициентом или равные между собой, называются *подобными*. Например, одночлены $5a^2bc$ и $-3a^2bc$ - подобные. *Степенью одночлена* стандартного вида называется сумма показателей степеней содержащихся в нем переменных. Например степень одночлена $a^2b^3x^5y^8z$ равна $2+3+5+8+1 = 19$.

1. Какое из данных выражений является одночленом?
   1) $3ab^{-2}$, 2) $a+b$, 3) $\frac{1}{2}abc$, 4) $1:(2c)$
   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4
   Решение: В выражении 1) содержится степень с отрицательным показателем, значит, оно не является одночленом. Выражение 2) содержит операцию " + ", значит оно тоже не является одночленом. А выражение 4) содержит операцию " : ", значит оно тоже не является одночленом. В выражении 3) число и переменные связаны только операцией умножения, т.е. оно является одночленом. **Ответ:** 3 (C).

2. Какое из данных выражений является одночленом? 1) ab^{-1}, 2) $a-b$, 3) $\frac{1}{2}a^3b^2$, 4) $2c:3$
   A) 1; 2 B) 2; 3 C) 3; 4 D) 2; 4

3. Найдите коэффициент одночлена $3ab^2 \cdot 2xy^3$.
   A) 3 B) 2 C) 6 D) 5

4. Найдите коэффициент одночлена $4ab^2 \cdot 0,25xy^3$.
   A) 3 B) 2 C) 1 D) 5

5. Найдите одночлен первой степени.
   A) abc B) 6^3a C) $2^{-2}a^3$ D) $5xyz$

6. Найдите одночлен второй степени.
   A) $2abc$ B) 6^3a^2 C) $2^2a^2b^2$ D) $2xyz$

7. Найдите одночлен третьей степени.
   A) abc B) 3^3a C) $2a^3b$ D) $3x^3y^3$

8. Найти степень одночлена $3^2a^3b^2xy^3$.
   A) 11 B) 9 C) 8 D) 10

9. Приведите одночлен $3ab^2 \cdot 2a^3b^5$ к стандартному виду.
   A) $6ab^2 \cdot a^3b^5$ B) $6a^3b^{10}$ C) $6a^4b^7$ D) $6a^3b^7$

10. Приведите одночлен $3x^2 \cdot 2x^3y^5$ к стандартному виду.
    A) $6x^6y^6$ B) $6x^5y^9$ C) $6x^5y^5$ D) $5x^5y^5$

11. Укажите одночлены стандартного вида.
    1) $3x^2 \cdot 2x^3y^5$; 2) $6ab^2x^3z^5$; 3) $7x^6y^6$.
    A) 1; 2 B) 1; 3 C) 2; 3 D) 1; 2; 3

12. При каком значении n степень одночлена $8a^2x^3y^n$ будет равна его коэффициенту?
    A) 6 B) 5 C) 3 D) 4
    Решение: Коэффициент одночлена равен 8, а его степень равна $2+3+n$. Приравняем их: $2+3+n = 8$. Отсюда получим, что $n = 3$. **Ответ:** 3 (C).

13. При каком значении n степень одночлена $5a^2x^3y^n$ будет в 5 раз больше его коэффициента?
    A) 16 B) 15 C) 23 D) 20

14. Найти одночлен, равный $10a^3b^5$.
    A) $2ab \cdot 5a^2b$ B) $a \cdot 10a^2b^5$
    C) $\frac{1}{2}ab^2 \cdot 20ab^3$ D) $ab \cdot 5ab^2 \cdot 2ab^3$

15. Найти противоположные одночлены:
    1) $3ab$ и $\frac{1}{3ab}$ 2) a и a^{-1}
    3) $\frac{1}{2}ab^2$ и $-0,5ab^2$ 4) $a+b$ и $a-b$.
    A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

16. Найти одночлен, подобный $-0,5ab^2x^3$.
A) $3abx$ B) ba^2x^3 C) ab^2x D) $2ab^2x^3$

17. Укажите подобные одночлены.
1) $3ab$ и $\frac{ab}{3}$ 2) ab и $-ab$
3) $\frac{1}{2}ab^2$ и $-0,5ab^2$ 4) $7a^2b$ и $7^{-1}a^2b$.
A) 1; 2 B) 2; 3 C) 1; 2; 3 D) 1; 2; 3; 4

2.3 Многочлен и его свойства

Алгебраическая сумма одночленов называется многочленом. Одночлены, образующие многочлен, называются его *членами*. Многочлены могут состоять из двух, трех и т.д. n членов. Например, среди выражений $x^2+2xy+y^2$; x^4-y^4; a^2+b-c^2+d первое является трехчленом, второе - двучленом, третье - четырёхчленом. Если все члены многочлена записать в стандартном виде и привести подобные члены, то получиться многочлен *стандартного вида*. Многочлен имеет следующие свойства.

1. **В многочлене можно менять места его членов:** $x^2+y^2=y^2+x^2$, $x^4-y^4=-y^4+x^4$.
2. **Если к многочлену прибавить одночлен, равный нулю, то получится многочлен, равный данному.** $x^2+y^2+0=x^2+y^2$, $x^4+0-y^4=x^4-y^4$.
3. **В многочлене можно приводить подобные члены.** $x^2+xy+xy+y^2=x^2+2xy+y^2$, $3x^2+x-x+y^2=3x^2+0+y^2=3x^2+y^2$.
4. **Чтобы умножить одночлен на многочлен, достаточно одночлен умножить на каждый член многочлена и сложить полученные произведения.** $x^2(x-xy+y)=x^2x-x^2xy+x^2y=x^3-x^3y+x^2y$.
5. **Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена и сложить полученные произведения. Например,** $(x+y)(x-y)=x(x-y)+y(x-y)=$
$=x^2-xy+xy-y^2=x^2+0-y^2=x^2-y^2$.

1. (97-10-5) Упростите
$$2\frac{2}{3}\cdot\left(1\frac{1}{2}a-2\frac{1}{4}\right)+1\frac{1}{5}\cdot\left(2\frac{1}{2}a-\frac{5}{6}\right).$$
A) $a+5$ B) $7a-7$ C) 7 D) $3a-5$

Решение: Обратим смешанные числа в неправильные дроби и раскроем скобки.
$$2\frac{2}{3}\cdot\left(1\frac{1}{2}a-2\frac{1}{4}\right)+1\frac{1}{5}\cdot\left(2\frac{1}{2}a-\frac{5}{6}\right)=$$
$$=\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}a-\frac{9}{4}\right)+\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}a-\frac{5}{6}\right)=$$
$$=4a-6+3a-1=7a-7.$$
Ответ: $7a-7$ (B).

2. (97-5-2) Упростите $4a-13a+5a$.
A) $4a$ B) $-4a$ C) $6a$ D) $-6a$

3. (97-9-2) Упростите $7x-14x+6x$.
A) x B) $-2x$ C) $2x$ D) $-x$

4. (97-9-6) Упростите $-8-2(1-b)-2b+1$.
A) 9 B) $9-4b$ C) $9+4b$ D) -9

5. (98-1-14) Упростите
$$a(b-c)+b(c-a)-c(b-a).$$
A) $-2ac$ B) $2ab$ C) 0 D) 2

6. (97-3-5) Упростите
$$2\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{6}{7}m+3\right)-1\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}m-3\right).$$
A) $m-2$ B) 4 C) $m+12$ D) $4+m$

7. (99-4-13) Упростите
$$\frac{4}{9}\cdot\left(4\frac{1}{2}y-1\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{7}\cdot\left(1\frac{1}{6}-3\frac{1}{2}y\right).$$
A) $0,2y-1$ B) $2y+1$ C) $3y-1$ D) $y-1$

8. (96-1-25) Преобразуйте выражение
$$2x(x-1)-(2x-1)\cdot(x+1)$$
в многочлен стандартного вида.
A) $4x^2-1$ B) $2x^2-3x$
C) $3x+1$ D) $-3x+1$

Решение: Сначала выполним умножение, используя свойства 4,5, затем приведем подобные члены. $2x(x-1)-(2x-1)\cdot(x+1)=2x^2-2x-2x\cdot(x+1)+1\cdot(x+1)=2x^2-2x-2x^2-2x+x+1=-3x+1$. **Ответ:** $-3x+1$ (D).

9. Найдите разность многочленов P и Q:
$$P=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y-(x+2y),\ Q=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y-(x-y).$$
A) $-\frac{11}{3}y$ B) $4y$ C) $-4y$ D) $\frac{13}{3}y$

10. Умножить многочлены $a-b$ и $a+b$.
A) a^2-b B) a^2-2b C) a^2+b^2 D) a^2-b^2

11. Умножить многочлены $a-b$ и a^2+ab+b^2.
A) a^3-b^3 B) a^2-b^3 C) a^3+b^3 D) a^2-b^2

12. Умножить многочлены $a+b$ и a^2-ab+b^2.
A) a^3-b^3 B) a^2-b^3 C) a^3+3b^3 D) a^3+b^3

13. (01-8-12) Приведите в многочлен стандартного вида выражение
$$(a+3b)(a+b+2)-(a+b)(a+3b+2).$$
A) $2a-b$ B) $a-2b$ C) $4a+2b$ D) $4b$

14. (99-8-10) Найдите значение выражения

$$3,8a + 7,7 + 1,7b + 2,5a + 11,2 + 4,6b$$

если $a + b + 3 = 10$.
A) 53 B) 58 C) 72 D) 63

15. (06-21-4) После упрощения выражения

$$(y^4 - y^2 + 1)(y^2 + 1) - (y - 1)(y + 2) + y^4 + y^3$$

получили многочлен. Сколько в нем членов?
A) 4 B) 3 C) 5 D) 6

16. Сколько членов содержится у многочлена стандартного вида, получаемого после упрощения выражения $(a^4 + a^2)(a^4 - a^2)$?
A) 4 B) 3 C) 5 D) 2

17. Сколько членов содержится у многочлена стандартного вида, получаемого после упрощения выражения $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2) - b^3$?
A) 4 B) 3 C) 5 D) 2

2.4 Формулы сокращенного умножения

1. **Квадрат суммы**
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2. **Квадрат разности**
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

3. **Разность квадратов**
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

4. **Куб суммы**
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

5. **Куб разности**
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

6. **Разность кубов**
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

7. **Сумма кубов**
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

1. Представьте многочлен $a^2 + 4a + 4$ в виде квадрата суммы.
A) $(2a + 1)^2$ B) $(a + 2)^2$
C) $(2a + 3)^2$ D) $(a + 0,5)^2$

Решение: Запишем данный многочлен в виде $a^2 + 2 \cdot a \cdot 2 + 2^2$. А это в силу 1-формулы равно $(a + 2)^2$. **Ответ:** $(a + 2)^2$ (B).

2. Представьте многочлен $4a^2 + 12a + 9$ в виде квадрата суммы.
A) $(2a + 1)^2$ B) $(a + 2)^2$
C) $(2a + 3)^2$ D) $(a + 0,5)^2$

3. Представьте многочлен $4x^4 + 20x^2 + 25$ в виде квадрата суммы.
A) $(2x^2 + 5)^2$ B) $(x^2 + 2)^2$
C) $(2x^2 + 3)^2$ D) $(2x^2 + 0,5)^2$

4. Выделить квадрат суммы (полный квадрат) в многочлене $9x^6 + 12x^3 + 5$.
A) $(2x^3 + 5)^2 - 1$ B) $(x^2 + 2)^2$
C) $(3x^3 + 2)^2 + 1$ D) $(3x^3 + 0,5)^2$

5. Выделить квадрат суммы (полный квадрат) в многочлене $4x^2 + 2x + 2,25$.
A) $(2x + 5)^2$ B) $(2x + 1)^2 + 1,5$
C) $(2x + 3)^2$ D) $(2x + 0,5)^2 + 2$

6. Представьте многочлен $25x^6 - 10x^3 + 1$ в виде квадрата разности.
A) $(5x^3 - 1)^2$ B) $(x^2 - 2)^2$
C) $(3x^3 - 2)^2$ D) $(3x^3 - 0,5)^2$

Решение: Запишем данный многочлен в виде $25x^6 - 10x^3 + 1 = (5x^3)^2 - 2 \cdot 5x^3 \cdot 1 + 1^2$. А это в силу 2-формулы равно $(5x^3 - 1)^2$. **Ответ:** $(5x^3 - 1)^2$ (A).

7. Представьте многочлен $x^2 - 6x + 9$ в виде квадрата разности.
A) $(x - 1)^2$ B) $(x^2 - 3)^2$
C) $(x - 3)^2$ D) $(3x - 0,5)^2$

8. Представьте многочлен $x^2 - 4x + 4$ в виде квадрата разности.
A) $(x - 4)^2$ B) $(2(x - 1))^2$
C) $(2x - 2)^2$ D) $(x - 2)^2$

9. Выделить квадрат разности (полный квадрат) в многочлене $4x^4 - 2x^2 + 1,25$.
A) $(2x^2 - 1)^2 + 0,25$ B) $(x^2 - 0,2)^2$
C) $(2x - 0,5)^2 + 1$ D) $(2x^2 - 0,5)^2$

10. Выделить квадрат разности (полный квадрат) в многочлене $9x^4 - 12x^2 + 3$.
A) $(3x^2 - 1)^2$ B) $(3x^2 - 2)^2 - 1$
C) $(3x - 2)^2$ D) $(3x^2 - 2)^2 + 1$

11. Представьте многочлен $27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3$ в виде куба суммы.
A) $(2a + b)^3$ B) $(a + 3b)^3$
C) $(3a + b)^3$ D) $(3a - b)^3$

Решение: Данный многочлен можно записать в виде $(3a)^3 + 3 \cdot (3a)^2 \cdot b + 3 \cdot 3a \cdot b^2 + b^3$. А это в силу 4-формулы равно $(3a + b)^3$. **Ответ:** $(3a + b)^3$ (C).

12. Представьте многочлен $1 + 3a + 3a^2 + a^3$ в виде куба суммы.
A) $(a + 1)^3$ B) $(1 + a^2)^3$
C) $(3a + 1)^3$ D) $(1 - a)^3$

13. Представьте многочлен $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ в виде куба суммы.
A) $(a + 3)^3$ B) $(x + 2)^3$
C) $(x - 2)^3$ D) $(a + 2)^3$

14. Представьте многочлен $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$ в виде куба суммы.
A) $(2x + 3)^3$ B) $(3x + 2)^3$
C) $(2x - 3)^3$ D) $(2a + 3)^3$

15. Представьте многочлен $y^6+3y^4+3y^2+1$ в виде куба суммы.
A) $(x^2+1)^3$ B) $(y^2+1)^3$
C) $(y^2-1)^3$ D) $(a^2+1)^3$

16. Представьте многочлен $1-3a^2+3a^4-a^6$ в виде куба разности.
A) $(1-a^2)^3$ B) $(1+a^2)^3$
C) $(2a+1)^3$ D) $(1-a)^3$

Решение: Данный многочлен можно записать в виде $1^3-3\cdot1\cdot a^2+3\cdot1\cdot(a^2)^2-(a^2)^3$. А это в силу 5-формулы равно $(1-a^2)^3$. **Ответ:** $(1-a^2)^3$ (A).

17. Представьте многочлен $1-3b+3b^2-b^3$ в виде куба разности.
A) $(a-1)^3$ B) $(1-b^2)^3$
C) $(3b+1)^3$ D) $(1-b)^3$

18. Представьте многочлен $125z^3-75z^2+15z-1$ в виде куба разности.
A) $(5a-1)^3$ B) $(1-5z)^3$
C) $(5z+1)^3$ D) $(5z-1)^3$

19. Представьте многочлен $1-3y+3y^2-y^3$ в виде куба разности.
A) $(1-y^2)^3$ B) $(1+y)^3$
C) $(2y+1)^3$ D) $(1-y)^3$

20. Представьте многочлен $125-75z+15z^2-z^3$ в виде куба разности.
A) $(5a-1)^3$ B) $(1-5z)^3$
C) $(5z+1)^3$ D) $(5-z)^3$

21. (96-1-17) Упростите $(2a-b)^2-(2a+b)^2$.
A) 0 B) $-2b^2$ C) $-8ab$ D) $-4ab+2b^2$

Решение: *1-способ.* Используем формулы квадратов суммы и разности (см. формулы 1 и 2):

$$(2a-b)^2-(2a+b)^2=4a^2-4ab+b^2-(4a^2+4ab+b^2)=$$
$$=4a^2-4a^2-4ab-4ab+b^2-b^2=-8ab.$$

2-способ. Используем формулу разности квадратов (см. 3-формулу):

$$(2a-b)^2-(2a+b)^2=(2a-b-2a-b)(2a-b+2a+b)=$$
$$=-2b\cdot4a=-8ab.$$ **Ответ:** $-8ab$ (C).

22. (96-9-68) Упростите $(a-3b)^2-(a+b)^2$.
A) $8b^2-8ab$ B) $8b^2$ C) $2b^2-8ab$ D) $-8b^2$

23. (96-9-76) Представьте выражение $(4x-3)^2-x(4x+1)$ в виде многочлена стандартного вида.
A) $2x^2+x-9$ B) $12x^2-25x+9$
C) $4x^2-13x$ D) $8x^2-x+7$

24. (96-10-18) Упростите $(1-2a)^2+(1+2a)(2a-1)$.
A) $8a^2-4a$ B) $-2a$ C) $-2a+2$ D) $8a^2$

25. (98-11-8) Упростите
$$12^2-(x+7)^2-(5-x)\cdot(19+x).$$
A) 0 B) 50 C) 140 D) 90

26. (96-11-20) Найдите значение выражения $(b-c)(b^2+bc+c^2)$ при $b=-2$ и $c=1$.
A) 7 B) 5 C) -9 D) -7

Решение: В силу 6-формулы (разности кубов) $(b-c)(b^2+bc+c^2)=b^3-c^3$. Подставим сюда значения $b=-2$, $c=1$ и получим $(-2)^3-1^3=-8-1=-9$. **Ответ:** -9 (C).

27. (96-12-20) Найдите значение выражения $(x^2+xy+y^2)(x-y)$ при $x=1$ и $y=-2$.
A) 5 B) -9 C) 7 D) 9

28. (00-5-21) Найдите значение выражения $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$ при $a=2$ и $b=1$.
A) 91 B) 93 C) 96 D) 99

29. (00-5-23) Найдите значение выражения $(x+3)(x^2-3x+9)$ при $x=\frac{1}{2}$.
A) $-26,875$ B) $\frac{343}{27}$ C) $27\frac{1}{2}$ D) $27,125$

30. (97-12-9) После упрощения выражения
$$(y^3-1)^2+(y^2+1)(y^4-y^2+1)$$
получили многочлен. Сколько членов в нем содержится?
A) 4 B) 5 C) 6 D) 3

Решение: Используя формулы 2 и 7 данное выражение можно записать в виде $y^6-2y^3+1+y^6+1^3$. Приведя подобные члены, получим $2y^6-2y^3+2$, которое содержит 3 члена. **Ответ:** 3 (D).

31. Сколько членов содержится у многочлена, получаемого после упрощения выражения
$$(a-5)(a+5)-a^2?$$
A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

32. Сколько членов содержится у многочлена, получаемого после упрощения выражения
$$(x^3-1)(x^3+1)+x^6?$$
A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

33. Сколько членов содержится у многочлена, получаемого после упрощения выражения
$$(1-2a)(2a+1)+4a^2?$$
A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

34. (03-8-44)* Вычислить a^2+a^{-2}, если $a+a^{-1}=3$.
A) 7 B) 4 C) 9 D) 13

Решение: Возьведем обе стороны равенства $a+a^{-1}=3$ в квадрат: $(a+a^{-1})^2=3^2$. По формуле 1 (квадрата суммы) имеем
$$a^2+2a\cdot a^{-1}+a^{-2}=a^2+2+a^{-2}=9.$$
Отсюда получим $a^2+a^{-2}=9-2=7$.
Ответ: 7 (A).

35. (00-6-7)* Найдите значение выражения

$$\frac{a^4+1}{a^2}, \quad \text{если} \quad a-\frac{1}{a}=\frac{2}{3}.$$

A) $2\frac{4}{9}$ B) $1\frac{1}{3}$ C) $1\frac{5}{9}$ D) $2\frac{5}{9}$

36. (99-6-40)* Найдите значение выражения

$$a-\frac{3}{a}, \quad \text{если} \quad a^2+\frac{9}{a^2}=22.$$

A) 3 B) −3 C) 2 D) ±4

37. (01-8-7)* Найдите значение выражения

$$\frac{a^6+1}{a^3}, \quad \text{если} \quad a+\frac{1}{a}=3.$$

A) 27 B) 24 C) 18 D) $21\frac{1}{3}$

38. Найдите значение выражения

$$a^4+\frac{1}{a^4}, \quad \text{если} \quad a-\frac{1}{a}=2.$$

A) 36 B) 34 C) 49 D) 63

39. (02-9-6)* Найдите значение выражения

$$\frac{a^4+1}{2a^2}, \quad \text{если} \quad a+\frac{1}{a}=3.$$

A) 3,5 B) 4 C) 5,5 D) 7

2.5 Разложение многочлена на множители

Преобразование многочлена в произведение двух или более многочленов (среди которых могут быть и одночлены) называется разложением многочлена на множители. Остановимся на двух наиболее часто применяемых способах разложения многочленов на множители.

1) *Вынесение общего множителя за скобки.* Этот способ разберём на следующих двух примерах.

Пример 1. Разложите на множители многочлен

$$4x^4y^2-8x^3y^2+12x^2yz^2.$$

Решение: Все члены данного многочлена имеют общий множитель $4x^2y$, вынесем его за скобки:

$$4x^4y^2-8x^3y^2+12x^2yz^2=4x^2y(x^2y-2xy+3z^2).$$

Таким образом, данный многочлен представляется в виде произведения двух сомножителей.

Пример 2. Разложите на множители многочлен

$$3x^2(a-b)-8x^3y^2(a-b)+5xy^2(a-b).$$

Решение: Все члены многочлена имеют общий множитель $x(a-b)$. Поэтому данный многочлен разлагается на множители следующим образом:

$$x(a-b)(3x-8x^2y^2+5y^2).$$

2) *Способ группировки.* Если не все члены многочлена имеют общий множитель, отличный от 1, то следует попытаться разложить такой многочлен способом группировки.

Пример 3. Разложите на множители многочлен

$$2ac+bc-3b-6a.$$

Решение: Не все члены многочлена имеют общий множитель. Объединим в группы первый и четвертый члены, имеющие общий множитель $2a$, а также второй и третий члены, имеющие общий множитель b, затем вынесем за скобки общий множитель получившихся групп. В результате получим:

$$2ac+bc-3b-6a=2a(c-3)+b(c-3)=(c-3)(2a+b).$$

1. Разложите на множители многочлен

$$2x^2y-2xy^2.$$

A) $2xy(y-x^2)$ B) $2xy(x-y)$
C) $2xy(x-y^2)$ D) $2xy(y-x)$

Решение: Используем 1-способ. Общий множитель для всех членов данного многочлена $2xy$, вынесем его за скобки:

$$2x^2y-2xy^2=2xy(x-y).$$

Ответ: $2xy(x-y)$ (B).

2. Разложите на множители многочлен

$$2x^2y^7-8x^5y^5.$$

A) $2x^2y^5(y^2-x^3)$ B) $2x^2y^5(x^2-4y^3)$
C) $2x^2y^5(x^2-y^3)$ D) $2x^2y^5(y^2-4x^3)$

3. Разложите на множители многочлен

$$x^2y^7-x^5y^5+2x^3y^5.$$

A) $x^2y^5(y^2-x^3+xy)$ B) $x^2y^5(x^2-y^3+2xy)$
C) $x^2y^5(x^2-y^3+2x)$ D) $x^2y^5(y^2-x^3+2x)$

4. Разложите на множители многочлен

$$2a^2b^3-6ab^2.$$

A) $2ab^2(ab-5)$ B) $2ab^2(ab-3)$
C) $2ab(3-ab)$ D) $2a^2b(ab-3)$

5. Разложите на множители многочлен

$$2a^2b^3-6ab^2+8a^2b^2.$$

A) $2ab^2(ab-5+4a)$ B) $2ab^2(ab-3+4a)$
C) $2ab(3-ab+4a)$ D) $2a^2b(ab-3+4a)$

6. (98-1-18) Разложите на множители многочлен

$$2a^2b-3a+10ab^2-15b.$$

A) $(2ab+3)(a-5b)$ B) $(a+5b)(2ab-3)$
C) $(3+ab)(2a-5b)$ D) $(2a^2+b)(b-5a)$

Решение: Используем 2-способ, способ группировки. Поменяем местами 2-й и 3-й члены данного многочлена

$$2a^2b-3a+10ab^2-15b=2a^2b+10ab^2-3a-15b.$$

Из первого и второго членов вынесем за скобки общий множитель $2ab$, а из третьего и четвертого членов - -3:

$$2a^2b+10ab^2-3a-15b=2ab(a+5b)-3(a+5b).$$

Теперь вынесем за скобки общий множитель $a+5b$ и получим $(a+5b)(2ab-3)$. **Ответ:** $(a+5b)(2ab-3)$ (B).

7. (98-8-18) Разложите на множители многочлен $2n^2-3an-10n+15a$.
A) $(5-n)(3a-2n)$ B) $(5+n)(2n-3a)$
C) $(3a-n)(5-2n)$ D) $(2n+3a)(n+5)$

8. (00-6-18) Найдите наибольшее значении выражения $4y(5x-y)-(5x-2)(5x+2)$.
A) 10 B) 5 C) 4 D) 2

9. (97-1-13) Разложите на множители выражение $1-(2x-3)^2$.
A) $2(x+2)(x+1)$ B) $3(x-2)(x+1)$
C) $4(2-x)(x-1)$ D) $2(1-x)(x-2)$

Решение: Используем 3-формулу сокращенного умножения (разности квадратов):

$$1-(2x-3)^2=1^2-(2x-3)^2=(1-2x+3)(1+2x-3)=$$

$$=(4-2x)(2x-2)=2(2-x)\cdot 2(x-1)=4(2-x)(x-1).$$

Ответ: $4(2-x)(x-1)$ (C).

10. (97-6-13) Разложите на множители многочлен $9-(2c-1)^2$.
A) $2(c-1)(c+2)$ B) $4(c-2)(c+1)$
C) $(3c-1)(c+4)$ D) $4(c+1)(2-c)$

11. (97-10-18) Разложите на множители

$$(x^2+9)^2-36x^2.$$

A) $(x^2-5)(x^2+4)$ B) $(x-3)^2\cdot(x+3)^2$
C) $(x-6)^2\cdot(x+6)^2$ D) $x^2(x^2-6)$

12. (97-11-13) Разложите на множители выражение

$$1-(8a-3)^2.$$

A) $8(4a+1)\cdot(1-2a)$ B) $(16a-1)\cdot(4a-3)$
C) $4(2a+1)\cdot(4a-1)$ D) $8(1-2a)\cdot(4a-1)$

13. (96-7-18) Разложите на множители

$$(a^2+16)^2-64a^2.$$

A) $(a^2-8)\cdot(a^2+4)$ B) $(a-2)^2\cdot(a+2)^2$
C) $(a-4)^2\cdot(a+4)^2$ D) $a^2\cdot(a^2-60)$

14. Разложите на множители $9a^4-1$.
A) $(3a^2-1)(3a^2+1)$ B) $(9a^2-1)(a^2+1)$
C) $(3a-1)(3a+1)$ D) $(9a^2-1)(a^2-1)$

Решение: Многочлен $9a^4-1$ запишем в виде $9a^4-1=(3a^2)^2-1^2$. Теперь используем 3-формулу (разности квадратов) $(3a^2)^2-1^2=(3a^2-1)(3a^2+1)$. **Ответ:** $(3a^2-1)(3a^2+1)$ (A).

15. Разложите на множители $25a^4-9b^2$.
A) $(5a^2-3)(5a^2+3b)$ B) $(5a^2-3b)(5a^2+3b)$
C) $(5a-3b)(5a+3b)$ D) $(25a^2-b)(a^2-9b)$

16. (01-8-8) Разложите на множители

$$(a+b)(a+b+2)-(a-b)(a-b-2).$$

A) $2(a+b)(b+1)$ B) $4a(b+1)$
C) $2a(b-1)$ D) $4a(b-1)$

17. Разложите на множители y^4-9.
A) $(y^2-1)(y^2+9)$ B) $(y^2-9)(y^2+1)$
C) $(y^2-3)(y^2+3)$ D) $(y^2-3)(y^2-3)$

18. На какое количество множителей с рациональными коэффициентами разложится многочлен $a^6-b^6c^6$?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 6

Решение: Представим многочлен $a^6-b^6c^6$ в виде $a^6-b^6c^6=(a^3)^2-(b^3c^3)^2$. Теперь используем 3-формулу (разности квадратов) $a^6-b^6c^6=(a^3-b^3c^3)(a^3+b^3c^3)$. К первой скобке применим 6-формулу (разности кубов), а ко второй - 7-формулу (суммы кубов), и получим

$$a^6-b^6c^6=(a^3-b^3c^3)(a^3+b^3c^3)$$

$$=(a-bc)(a^2+abc+b^2c^2)(a+bc)(a^2-abc+b^2c^2).$$

Ответ: 4 (C).

19. На какое количество множителей с рациональными коэффициентами разложится многочлен $a^6+b^6c^6$?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 6

20. На какое количество множителей с рациональными коэффициентами разложится многочлен y^6-64?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 6

21. На какое количество множителей с рациональными коэффициентами разложится многочлен $27^2x^6-y^6$?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 6

22. На какое количество множителей с рациональными коэффициентами разложится многочлен $9^3x^6-y^6$?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 6

23. На какое количество множителей с рациональными коэффициентами разложится многочлен $x^6y^6-4^3$?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 6

24. Разложите на множители выражение $(x+3y)^3 + (x-3y)^3 - 52xy^2$.
A) $2x(x^2+y^2)$ B) $2y(x^2+y^2)$
C) $2x(x^2-y^2)$ D) $x(x^2-y^2)$

25. Какое из данных выражений не участвует в разложении многочлена $x^5 - 16x$?
A) x B) $x-2$ C) $x+2$ D) $x+1$

Решение: Вынесем общий множитель x за скобки и представим x^4 в виде $(x^2)^2$, а 16 в виде 4^2. Имеем $x^5 - 16x = x((x^2)^2 - 4^2)$. Применяя формулу разности квадратов, получим $x^5 - 16x = x(x^2-4)(x^2+4) = x(x-2)(x+2)(x^2+4)$. Итак, $x, x-2, x+2$, участвуют в разложении многочлена $x^5 - 16x$. **Ответ:** $x+1$ (D).

26. Какое из данных выражений не участвует в разложении многочлена $x^5 + x^3 + x$?
A) x B) x^2-x+1 C) $x+2$ D) x^2+x+1

27. (99-4-16)* Разложите на множители
$$(a+b+2)\cdot(a+b)-(a-b)^2+1.$$
A) $(a+b)(2a-1)$ B) $(a+1)(b+1)$
C) $2b\,(a+1)$ D) $(2b+1)(2a+1)$

28. (99-10-7)* Разложите на множители
$$a^5+a^4-2a^3-2a^2+a+1.$$
A) $(a+1)^2\cdot(a-1)^3$ B) $(a+1)^3\cdot(a-1)^2$
C) $(a+1)^4\cdot(a-1)$ D) $(a+1)\cdot(a-1)^4$

29. (00-6-9) Разложите на множители
$$b^2+ab-2a^2-b+a.$$
A) $(a-b)(2a-b)$ B) $(a+b)(2a-b-1)$
C) $(a-b)(2a-b-1)$ D) $(b-a)(2a+b-1)$

30. (00-10-77)* Разложите многочлен на множители
$$(x-y)^3-(z-y)^3+(z-x)^3.$$
A) $3(x-y)(y-z)(x-z)$ B) $-3(x-y)(z-y)(x-z)$
C) $3(y-x)(y-z)(z-x)$ D) $-3(x-y)(z-y)(z-x)$

2.6 Алгебраические дроби

Пусть P и Q - многочлены, отличные от нуля. Отношение $\frac{P}{Q}$ многочлена P на многочлен Q называется алгебраической дробью. Многочлен P называется числителем алгебраической дроби $\frac{P}{Q}$, а многочлен Q ее знаменателем. Приведем примеры алгебраических дробей
$$\frac{3a^2-2a}{a^2+12a+36};\ \frac{3a+16}{a^2-36};\ \frac{6(a^2-36)}{a+6};\ \frac{a^2+b}{7}.$$

Арифметические действия над алгебраическими дробями $\frac{P}{Q}$ и $\frac{M}{N}$ выполняются следующим образом:

1. **Сложение и вычитание:**
$$\frac{P}{Q}+\frac{M}{N}=\frac{PN+QM}{QN},\quad \frac{P}{Q}-\frac{M}{N}=\frac{PN-QM}{QN}.$$

2. **Умножение и деление:**
$$\frac{P}{Q}\cdot\frac{M}{N}=\frac{PM}{QN},\quad \frac{P}{Q}:\frac{M}{N}=\frac{PN}{QM}.$$

1. (96-12-72) Упростите
$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}.$$
A) $x-1$ B) x C) $2x$ D) $x+1$

Решение: Преобразуем числитель данной дроби. $x^3+x^2+x+1 = x^3+x+x^2+1 = x(x^2+1)+(x^2+1)$. Общий множитель x^2+1 вынесем за скобки и получим
$$\frac{x(x^2+1)+(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)(x+1)}{x^2+1}=x+1.$$
Ответ: $x+1$ (D).

2. (96-9-15) Упростите
$$\frac{1-x^{-1}+x^{-2}}{1-x+x^2}.$$
A) 1 B) x^2 C) $\frac{1}{x^2}$ D) $1-\frac{1}{x}$

3. (97-4-21) Упростите
$$\frac{a^{-3}+b^{-3}}{a^2-ab+b^2}\cdot a^3\cdot b^3.$$
A) $(a+b)^2$ B) 1 C) ab D) $a+b$

4. (96-3-21) Сократите дробь
$$\frac{x^2-3xy}{9y^2-x^2}.$$
A) $\frac{x}{x+3y}$ B) $\frac{-x}{x+3y}$ C) $\frac{x}{x-3y}$ D) $\frac{-x}{x-3y}$

5. (96-3-74) Упростите
$$\frac{x^3+2x^2+x}{(x+1)^2}.$$
A) $2x$ B) $x+1$ C) $x+2$ D) x

6. (98-11-9) Упростите
$$\frac{x^6-x^4}{x^3+x^2}.$$
A) x^3-x^2+1 B) x^3+x^2+1
C) x^3-x^2 D) x^3+x^2

7. (00-8-54) Упростите
$$\frac{a^8-a^4}{a^4+a^2}.$$

A) a^6 B) a^4-a^2 C) a^4-1 D) a^4+a^2

Решение: Представим числитель данной дроби в виде

$$a^8-a^4=(a^4)^2-(a^2)^2=(a^4-a^2)(a^4+a^2).$$

Отсюда

$$\frac{a^8-a^4}{a^4+a^2}=\frac{(a^4-a^2)(a^4+a^2)}{a^4+a^2}=a^4-a^2.$$

Ответ: a^4-a^2 (B).

8. (99-1-10) Упростите

$$\frac{p-q}{p^3\cdot q^2}-\frac{p+q}{p^2\cdot q^3}.$$

A) $-\frac{p^2+q^2}{p^3\cdot q^3}$ B) $\frac{2pq-p^2-q^2}{p^3\cdot q^3}$
C) $-\frac{2}{p^3\cdot q^2}$ D) $-\frac{2}{p^3\cdot q-p^2\cdot q^2}$

9. (99-6-5) Упростите

$$\left(\frac{-16x^{31}}{9y^3}\right)^3:\left(\frac{8x^{23}}{3y^2}\right)^4.$$

A) $\frac{-y}{x}$ B) $\frac{-x}{y}$ C) $\frac{x}{9y}$ D) $\frac{-x}{9y}$

10. (01-2-14) Упростите

$$\frac{a^2+\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}-1}.$$

A) $a-1$ B) a^2-a+1
C) a^2+a+1 D) $a+1$

11. (02-8-2) Упростите

$$\frac{1-b^{-1}+b^{-2}}{1-b+b^2}.$$

A) b^{-1} B) b^{-2} C) b^2 D) $b+1$

2.7 Рациональные выражения

Выражение, составленное из чисел и переменных с помощью конечного числа знаков арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) называется рациональным выражением. Рациональное выражение называется целым, если оно не содержит деления на выражение с переменными, а в противном случае - дробным. Например,

$$\left(\frac{5m}{m+3}-\frac{14m}{m^2+6m+9}\right):\frac{5m+1}{m^2-9}+\frac{3\cdot(m-3)}{m+3}$$

дробное выражение.

1. (97-10-19) Упростите

$$\left(\frac{3a}{a+6}-\frac{2a}{a^2+12a+36}\right):\frac{3a+16}{a^2-36}+\frac{6(a-6)}{a+6}.$$

A) 6 B) $\frac{6}{a+6}$ C) $\frac{1}{a-6}$ D) $a-6$

Решение: Преобразуем выражение в скобках, приведя дроби к общему знаменателю. В числителе полученный дроби вынесем за скобки общий множитель a, и выполним остальные операции

$$\frac{3a}{a+6}-\frac{2a}{a^2+12a+36}=\frac{3a}{a+6}-\frac{2a}{(a+6)^2}=$$
$$=\frac{3a^2+18a-2a}{(a+6)^2}=\frac{3a^2+16a}{(a+6)^2}$$
$$\frac{a(3a+16)}{(a+6)^2}\cdot\frac{(a-6)(a+6)}{3a+16}+\frac{6(a-6)}{a+6}=$$
$$=\frac{a(a-6)}{a+6}+\frac{6(a-6)}{a+6}=\frac{(a-6)(a+6)}{a+6}=a-6.$$

Ответ: $a-6$ (D).

2. (96-7-19) Упростите

$$\left(\frac{5m}{m+3}-\frac{14m}{m^2+6m+9}\right):\frac{5m+1}{m^2-9}+\frac{3\cdot(m-3)}{m+3}.$$

A) $\frac{3}{m+3}$ B) 3 C) $m-3$ D) 1

3. (97-7-19) Упростите выражение

$$\left(\frac{2x}{x-5}+\frac{x}{x^2-10x+25}\right):\frac{2x-9}{x^2-25}-\frac{5(x+5)}{x-5}.$$

A) 5 B) $\frac{x+5}{x-5}$ C) $\frac{5}{x+5}$ D) $5+x$

4. (98-1-21) Упростите выражение

$$\left(\frac{4a}{4-a^2}-\frac{a-2}{4+2a}\right)\cdot\frac{4}{a+2}-\frac{a}{2-a}.$$

A) -1 B) $\frac{2a}{2-a}$ C) $\frac{3+a}{2-a}$ D) 1

5. (98-2-8) Упростите выражение

$$\frac{x^3-8}{x^2+2x+4}-\frac{x^2-4}{x-2}.$$

A) 4 B) $2x$ C) $-2x$ D) -4

6. (98-2-29) Найти значение выражения

$$\frac{x^{-3}+8}{x^{-2}-2x^{-1}+4}$$

при $x=0,5$.

A) 4,5 B) 3 C) 4 D) 5

Решение: Произведя замену $x^{-1}=y$ преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\frac{y^3+2^3}{y^2-2y+2^2}=\frac{(y+2)(y^2-2y+2^2)}{y^2-2y+2^2}=y+2.$$

Если $x=0,5$, то $y=2$ и тогда $y+2=2+2=4$.
Ответ: 4 (C).

7. (01-11-6) Найти значение выражения
$$\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}\cdot(a-b)\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}\cdot(a+b)$$
при $a=3$ и $b=2$.
A) 24 B) 25 C) 30 D) 32

8. (98-10-12) Упростите выражение
$$\frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}-\frac{x^2-y^2}{x+y}.$$
A) $2x$ B) $2y$ C) $-2y$ D) $-2x$

9. (99-4-26) Упростите выражение
$$\frac{5x+6}{x^2-4}-\frac{x}{x^2-4}:\frac{x}{x-2}-\frac{x+2}{x-2}.$$
A) 1 B) -1 C) $\frac{x-2}{x+2}$ D) $\frac{x^2+4}{4-x^2}$

10. (99-9-19) Упростите выражение
$$\left(\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}\right)\cdot\frac{a^2+2a}{8}.$$
A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{4}$

11. (00-3-16) Упростите выражение
$$\left(\frac{a^2-4}{a^2+4}\right)^2+\left(\frac{4a}{a^2+4}\right)^2.$$
A) $a-4$ B) 2 C) $\frac{a^2-4}{a^2+4}$ D) 1

12. (00-7-13) Упростите выражение
$$(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)\cdot(a+b):\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}-ab\right).$$
A) b^2-a^2 B) a^2-b^2 C) $(a-b)^2$ D) $(a+b)^2$

13. (01-5-6) Упростите выражение
$$\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y\cdot(x-y)^2}{x^4-y^4}.$$
A) $\frac{1}{x+y}$ B) $\frac{1}{x-y}$ C) $x+y$ D) $x-y$

14. (01-6-10) Упростите выражение
$$\left(2a+\frac{2ab}{a-b}\right)\left(\frac{ab}{a+b}-a\right):\frac{4,5a^2}{a^2-b^2}.$$
A) $\frac{4a^2}{9}$ B) $-\frac{2a^2}{9}$ C) $\frac{2a^2}{9}$ D) $-\frac{4a^2}{9}$

15. (01-8-18) Упростите выражение
$$\frac{a^2}{a^2-1}+\frac{1}{a+1}:\left(\frac{1}{2-a}+\frac{2}{a^2-2a}\right).$$
A) $\frac{a}{a^2-1}$ B) $\frac{1}{a-1}$ C) $\frac{2a^2-a}{a^2-1}$ D) 1

16. (02-9-14) Упростите выражение
$$\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{2}{(x-1)^2}\right)\cdot(1-x)^2-\frac{4}{1+x}.$$
A) 4 B) -4 C) 0 D) $\frac{1-x}{1+x}$

17. (03-4-10) Упростите выражение
$$\left(\frac{a+x}{a}-\frac{x-y}{x}\right)\cdot\frac{a^2}{x^2+ay}:\frac{a}{8x}.$$
A) 10 B) 6 C) 7 D) 8

18. (03-6-7) Упростите выражение
$$\frac{x^3y+2x^2y-3xy}{x^3+5x^2+6x}:\frac{1-x^2}{x^2+3x+2}.$$
A) $\frac{y}{x}$ B) $-x$ C) $-y$ D) x

19. (03-7-10) Упростите выражение
$$\frac{x^3y+2x^2y-3xy}{x^3+5x^2+6x}:\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}.$$
A) $\frac{y}{x}$ B) $-x$ C) $-y$ D) y

2.8 Задачи смешанного типа

1. (97-9-80) Вычислите
$$\frac{1000^3+3\cdot1000\cdot995\cdot1995+995^3}{1000^2+2\cdot1000\cdot995+995^2}.$$
A) 1995 B) 195 C) 995 D) 2195

Решение: Представим число 1995 в числителе дроби в виде суммы 1000 + 995 и используем 7-формулу сокращенного умножения. Имеем:
$$1000^3+3\cdot1000^2\cdot995+3\cdot1000\cdot995^2+995^3=$$
$$=(1000+995)^3,$$
а знаменатель дроби в силу 1-формулы сокращенного умножения равен $(1000+995)^2$. Следовательно, получаем
$$\frac{(1000+995)^3}{(1000+995)^2}=1995.$$
Ответ: 1995 (A).

2. (99-7-2) Вычислите
$$889^3+3000\cdot889\cdot111+111^3+889+111.$$
A) 10001000 B) 1001000
C) 1001001000 D) 1000001000

3. (96-1-13) Вычислите
$$\frac{1^2-0,4^2}{2,8\cdot0,4-2,8}.$$
A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) -5 D) 5

4. (00-6-5) Упростите выражение

$$\frac{1,6^2 - 1,6 \cdot 0,8 + 0,4^2}{1,4^2 - 0,2^2}.$$

A) $1,6$ B) $0,375$ C) $1,2$ D) $0,75$

5. (96-10-13) Вычислите

$$\frac{4,5^2 - 1,5^2}{0,3 \cdot 0,7 - 0,3}.$$

A) -20 B) 20 C) 200 D) -200

6. Вычислите

$$\frac{10^{45} + 10^{46} + 10^{50}}{10^{49} + 10^{45} + 10^{44}}.$$

A) 10 B) 30 C) 100 D) 1000

7. (98-7-10) Вычислите

$$\frac{(3,7^2 - 6,3^2) \cdot (13^2 - 12,6^2)}{(4,2^2 - 5,8^2) \cdot (2,3^2 - 0,3^2)}.$$

A) 32 B) $0,32$ C) $3,2$ D) $\frac{1}{32}$

8. (98-8-9) Вычислите

$$\frac{0,5^2 - 0,5}{0,4^2 + 2 \cdot 0,04 + 0,1^2}.$$

A) 1 B) -1 C) $-0,1$ D) 10

9. Вычислите

$$(17\frac{5}{13})^2 - 16\frac{5}{13} \cdot 18\frac{5}{13}.$$

A) $0,2$ B) -1 C) 1 D) $0,25$

10. (99-6-6) Вычислите

$$(202^2 - 54^2 + 256 \cdot 352) : (4^4 \cdot 10^2).$$

A) 4 B) 1 C) 2 D) 5

Решение: Преобразуем разность $202^2 - 54^2$ в силу 3-формулы п. 2.4: $202^2 - 54^2 = 148 \cdot 256$. Вычислим значение выражения в первой скобке $148 \cdot 256 + 256 \cdot 352 = 256(148 + 352) = 256 \cdot 500$. Затем во второй скобке $4^4 \cdot 10^2 = 256 \cdot 100$. Теперь выполним деление $256 \cdot 500 : (256 \cdot 100) = 5$. Ответ: 5 (D).

11. (97-4-14) Вычислить значение выражения

$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$$

если $x = 4,5$ и $y = 3,5$.

A) 10 B) $9,5$ C) 8 D) $7,2$

12. (01-8-5) Вычислите

$$\frac{0,6 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 1,2}{0,2^2 - 0,4^2}.$$

A) -10 B) 10 C) $-0,1$ D) -100

13. (02-5-6) Вычислите

$$\frac{2,7(1,7^3 - 1,5^3)}{5,1^2 + 5,1 \cdot 4,5 + 4,5^2}.$$

A) $0,45$ B) $0,27$ C) $0,3$ D) $0,06$

14. (03-11-61) Вычислите

$$\frac{0,6^2 - 0,6 \cdot 0,2 + 0,1^2}{1,5 - 1,5^2}.$$

A) $-0,5$ B) $-\frac{1}{3}$ C) -3 D) $-1\frac{2}{3}$

15. (00-10-12) Упростите выражение

$$\frac{5 \cdot 2^{k-2} + 10 \cdot 2^{k-1}}{10^{k+2}}.$$

A) $4^{-1} \cdot 5^{-k}$ B) $4^{-2} \cdot 5^{-k}$
C) $4 \cdot 5^{-k}$ D) $2^{-1} \cdot 5^{-k}$

16. (00-10-74) Сократите дробь

$$\frac{2^{m+1} + 2^{-m+1}}{(4^m + 1)(3^{m+2} + 3^{m+1})}.$$

A) $0,5 \cdot 6^{-m}$ B) $\left(\frac{2}{3}\right)^m$ C) 6^{-m-1} D) 3^m

17. (97-2-6) Сколько натуральных значений может принимать n, чтобы дробь $\frac{12 - 3n}{n}$ была натуральным числом?

A) 6 B) 3 C) 5 D) 4

Решение: Справедливо равенство $\frac{12 - 3n}{n} = \frac{12}{n} - \frac{3n}{n} = \frac{12}{n} - 3$. Для того, чтобы это разность была натуральным числом частное $\frac{12}{n}$ должно быть натуральным числом, большим 3. Таких значений n три, т.е. $n = 1, 2, 3$. **Ответ:** 3. (B).

18. (97-8-6) Сколько натуральных значений может принимать n, чтобы дробь $\frac{10n - 24}{n}$ была натуральным числом?

A) 4 B) 7 C) 6 D) 5

19. (97-12-5) Сколько натуральных значений может принимать n, чтобы дробь

$$\frac{16n^2 - 128}{n^2}$$

была натуральным числом?

A) 5 B) 3 C) 2 D) 6

20. (98-8-11) Сколько существует целых значений n, при которых выражение $\frac{3n - 1}{n + 2}$ является натуральным числом?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 2

21. (96-6-6) Сколько значений может принимать $n \in \mathbb{Z}$, чтобы дробь $\frac{6n-12}{n}$ была натуральным числом?
A) 6 B) 5 C) 3 D) 4

22. (03-10-10) Сколько существует целых значений a, при которых выражение

$$\frac{a^4-9}{a^3-3a} : \frac{a^3+3a}{a-5a^2}$$

является целым числом?
A) 2 B) 3 C) 1 D) 4

23. (01-7-7) Сколько целых значений может принимать n, чтобы дробь $\frac{n^2-n+3}{n+1}$ была целым числом?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

24. (01-11-30) На сколько значение выражения

$$\frac{4^{a+1}-2^{2a-1}}{2^{2a}}$$

меньше 9?
A) 4 B) 3,5 C) 3 D) 5,5

Решение: Так как $4^{a+1} = (2^2)^{a+1} = 2^{2a+2}$, то данная дробь равна

$$\frac{2^{2a+2}-2^{2a-1}}{2^{2a}} = \frac{2^{2a}(2^2-2^{-1})}{2^{2a}} = 4-\frac{1}{2} = 3,5.$$

Вычитая это значение из 9, получим $9-3,5 = 5,5$. **Ответ:** 5,5 (D).

25. (02-1-39) Вычислите x^2-4y^2, если $\frac{x}{y} = 2$.
A) 4 B) 8 C) 0 D) −8

26. (02-6-2) Найдите значение выражения $a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3$, если $a+b+c=0$.
A) 0 B) 1 C) 2 D) −1

27. Упростите выражение

$$\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-d}{cd}+\frac{d-a}{ad}.$$

A) 1 B) $abcd$ C) $(abcd)^{-1}$ D) 0

28. При каком целом значении m можно сократить дробь

$$\frac{x^2+mx+36}{x^2+8x+7}?$$

A) −37 B) −36 C) −35 D) 37

29. Найти разность наибольшего и наименьшего значений m, при которых сократима дробь

$$\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2+mx+6}.$$

A) 12 B) 5 C) 7 D) 10

3 Корни

3.1 Квадратный корень. Арифметический квадратный корень

Квадратным корнем неотрицательного числа a называется число b, квадрат которого равен a. Нахождение квадратного корня b числа a, называется извлечением квадратного корня из a. Квадратный корень числа $a \geq 0$ обозначается через

$$\sqrt{a} = b. \tag{3.1}$$

Здесь a называется *подкоренным числом* или выражением. Равенство (3.1) означает, что между числами a и b имеется связь $b^2 = a$. Если $a < 0$, то не существует действительного числа b, удовлетворяющего равенству $b^2 = a$. Поэтому когда речь идет о квадратном корне, подразумевается неотрицательность подкоренного выражения. Для любого числа $a \geq 0$ существует единственное число $b \geq 0$, удовлетворяющее равенству $b^2 = a$. Это число называется арифметическим квадратным корнем из a. Например, $\sqrt{16} = 4$, т.е. 4 является арифметическим квадратным корнем из 16. Часто вместо термина *корень* используется термин *радикал*. Арифметический квадратный корень имеет следующие свойства.

1. $(\sqrt{a})^2 = a, \quad a \geq 0.$

2. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad a \geq 0,\ b \geq 0.$

3. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0,\ b > 0.$

4. $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}, \quad a \geq 0.$

5. $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}, \quad a \leq 0.$

6. $\sqrt{a^2} = |a|, \quad a \in \mathbb{R}.$

1. (97-11-8) Упростить

$$2\sqrt{5\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{99}-2\sqrt{2\frac{3}{4}}.$$

A) $3\sqrt{11}$ B) $2\sqrt{22}$ C) $\sqrt{22}$ D) 2

Решение: Применяя 4-формулу, получим

$$2\sqrt{5\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{99}-2\sqrt{2\frac{3}{4}} = \sqrt{4\cdot\frac{11}{2}}+\sqrt{\frac{1}{9}\cdot 11-}$$

$$-\sqrt{4\cdot\frac{11}{4}} = \sqrt{22}+\sqrt{11}-\sqrt{11} = \sqrt{22}.$$

Ответ: $\sqrt{22}$ (C).

2. (02-2-6) Вычислите

$$3\sqrt{\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}\sqrt{20}+\sqrt{\frac{4}{5}}.$$

A) $2\sqrt{5}$ B) $\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$ D) $\frac{6}{\sqrt{5}}$

3. (02-9-10) Вычислите

$$3\sqrt{3\frac{2}{3}}-\sqrt{132}+4\sqrt{2\frac{1}{16}}.$$

A) 0 B) $2\sqrt{33}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{11}$

4. (97-1-8) Вычислите

$$4\sqrt{3\frac{1}{2}}-0,5\sqrt{56}-3\sqrt{1\frac{5}{9}}.$$

A) $2\sqrt{14}$ B) $2\sqrt{7}$ C) 0 D) 2

5. (97-6-8) Вычислите

$$15\sqrt{\frac{3}{5}}-0,5\sqrt{60}+2\sqrt{3\frac{3}{4}}.$$

A) 0 B) $\sqrt{15}$ C) $5\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{15}$

6. (98-6-9) Вычислите

$$\frac{\sqrt{32}+\sqrt{98}-\sqrt{50}}{\sqrt{72}}.$$

A) 2 B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$

7. (99-6-36) Вычислите

$$\sqrt{192}-\sqrt{108}+\frac{\sqrt{243}}{3}.$$

A) $5\sqrt{3}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{5}$ D) $3\sqrt{3}$

8. (01-1-6) Исключите иррациональность в знаменателе дроби

$$\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}.$$

A) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3\sqrt{2})$ B) $\frac{1}{2}(3\sqrt{5}-2\sqrt{2})$
C) $9+2,5\sqrt{10}$ D) $2,5\sqrt{10}-9$

Решение: Под исключением иррациональности в знаменателе дроби понимается такое тождественное преобразование дроби, при котором извлечение корня в знаменателе исчезает. Умножим числитель и знаменатель данной дроби на $2\sqrt{5}+3\sqrt{2}$:

$$\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}=\frac{18+5\sqrt{10}}{4\cdot 5-9\cdot 2}.$$

Так как знаменатель этой дроби равен 2, получим $9+2,5\sqrt{10}$. **Ответ:** $9+2,5\sqrt{10}$ (C).

9. (96-7-24) Вычислите

$$\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}+\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}.$$

A) 2 B) $3\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) 4, 5 D) 7

10. (97-7-24) Найдите значение выражения

$$\frac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}-\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}.$$

A) $4+\sqrt{7}$ B) $-3\sqrt{7}$ C) $6\sqrt{7}$ D) 3

11. Избавтесь от иррациональности в знаменателе

$$\frac{4}{1-\sqrt{5}+\sqrt{20}}.$$

A) $\sqrt{5}+1$ B) $\sqrt{5}-1$ C) $\sqrt{10}$ D) $1-\sqrt{5}$

12. (01-6-23) Вычислите

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2.$$

A) 12 B) 14 C) 18 D) 16

13. (02-6-26) Вычислите

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}.$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

14. (03-8-24) Вычислите

$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot(\sqrt{6}+11).$$

A) -115 B) 127 C) 100 D) -116

15. (03-10-17) Вычислите

$$\frac{\sqrt{2}+1}{3+2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}}.$$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2

16. (96-6-50) Вычислите

$$\frac{1}{3-\sqrt{8}}-2\sqrt{2}+6.$$

A) 8 B) 7 C) 9 D) 10

Решение: Сначала избавимся от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{3-\sqrt{8}}$. Для этого её числитель и знаменатель умножим на $3+\sqrt{8}$:

$$\frac{1}{3-\sqrt{8}}\cdot\frac{3+\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}}-2\sqrt{2}+6=\frac{3+\sqrt{8}}{9-8}-2\sqrt{2}+6.$$

Так как $9-8=1$ и $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, то имеем $3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+6=9$. **Ответ:** 9 (C).

17. (97-2-50) Вычислите

$$2\sqrt{3}-5-\frac{11}{\sqrt{12}-1}.$$

A) $2\sqrt{3}-4$ B) 4 C) -4 D) -6

18. (97-8-50) Вычислите

$$\frac{19}{\sqrt{20}-1}-2\sqrt{5}+3.$$

A) $4\sqrt{5}+4$ B) $4\sqrt{5}-4$
C) $2\sqrt{5}+4$ D) 4

19. (97-12-49) Вычислите

$$\frac{19}{\sqrt{20}+1}+6-2\sqrt{5}.$$

A) 6 B) 5 C) $4\sqrt{5}-7$ D) $4\sqrt{5}-6$

20. (98-2-20) Вычислите

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}-1}.$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) $\sqrt{3}$

Решение: Числитель и знаменатель первой дроби умножим на $2-\sqrt{3}$, а второй дроби - на $\sqrt{3}+1$, и учитывая, что $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$ и $(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}-1)=2$, получим

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=$$

$=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1=3$. **Ответ:** 3 (B).

21. (99-6-38) Вычислите

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}-\frac{10}{\sqrt{5}}.$$

A) 1 B) 4 C) 3 D) 5

22. (99-10-15) Вычислите

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)\cdot(2+\sqrt{2}).$$

A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 2 D) $3\sqrt{2}$

23. (00-10-47) Выполните действия

$$\frac{9}{5-\sqrt{7}}+\frac{22}{7+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}.$$

A) 1 B) 6 C) $\frac{1}{5}$ D) 5

24. (98-7-17) Определите пару взаимно обратных чисел:

1) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ и $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 2) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ и $\sqrt{6}+\sqrt{5}$
3) $\frac{2\sqrt{5}}{9}$ и $\frac{9\sqrt{5}}{10}$ 4) $\sqrt{3}-1$ и $\sqrt{3}+1$.

A) все B) 2; 3; 4
C) 1; 3; 4 D) 1; 2; 3

25. (01-7-4) Упростите выражение

$$4+5\sqrt{2}+\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}.$$

A) $2\sqrt{2}+1$ B) 3 C) 2 D) -1

26. (01-11-8) Вычислите

$$\left(\sqrt{18}+\sqrt{72}-\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{18}+\sqrt{72}+\sqrt{12}\right).$$

A) 148 B) 149 C) 147 D) 150

27. (99-2-13) На сколько значение выражение

$$\sqrt{9+\sqrt{65}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{65}}$$

меньше 14?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11

Решение: Используя 2-свойство, получим:

$$\sqrt{9+\sqrt{65}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{65}}=\sqrt{(9+\sqrt{65})\cdot(9-\sqrt{65})}$$

$=\sqrt{81-65}=\sqrt{16}=4$. Значение выражения меньше 14 на 10. **Ответ:** 10 (C).

28. (99-7-4) Вычислите

$$\sqrt{9+\sqrt{77}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{77}}.$$

A) 3 B) 12 C) 2 D) 4

29. (00-1-48) Вычислите

$$\sqrt{7+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{10}}.$$

A) 2 B) 3,2 C) 3 D) 2,5

30. (03-5-2) Вычислите

$$\frac{\sqrt{196}\cdot\sqrt{19,6}}{\sqrt{0,196}\cdot\sqrt{1,96}}.$$

A) 1000 B) 100 C) 196 D) 10

31. (96-7-14) Вычислите

$$\sqrt{\frac{65^3+35^3}{100}-35\cdot 65}.$$

A) 100 B) 30 C) 10 D) 45

Решение: Используем формулу суммы кубов, имеем $65^3+35^3=100\cdot(65^2-65\cdot 35+35^2)$. Подставив это в подкоренное выражение получим

$$\sqrt{\frac{100\cdot(65^2-65\cdot 35+35^2)}{100}-35\cdot 65}=$$

$$=\sqrt{65^2-2\cdot 65\cdot 35+35^2}=\sqrt{(65-35)^2}=30.$$

Ответ: 30 (B).

32. (97-3-14) Найдите значение выражения

$$\sqrt{\frac{68^3-32^3}{36}+68\cdot 32}.$$

A) $16\frac{2}{3}$ B) 85 C) 100 D) $25\frac{5}{6}$

33. (99-5-11) Чему равно значение выражения

$$\sqrt{t^5+3}+\sqrt{t^5-2},$$

если $\sqrt{t^5+3}-\sqrt{t^5-2}=1$?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

34. (98-7-20) Вычислите a^2-5b^2, если $a:b=-\sqrt{5}$.
A) 0 B) $\sqrt{5}$ C) 5 D) -5

35. (03-5-12) Выразите $\sqrt{560}$ через m и n, если $\sqrt{5}=m$, $\sqrt{7}=n$.
A) $4mn$ B) $2mn$ C) $6mn$ D) $8mn$

3.1.1 Примеры на вычисление

Следующие формулы применяются при вычислении значений (упрощений) выражений с корнем.

1. $\sqrt{a+b\sqrt{c}}=\sqrt{\frac{a+A}{2}}+\sqrt{\frac{a-A}{2}}$, $A=\sqrt{a^2-b^2c}$.

2. $\sqrt{a-b\sqrt{c}}=\sqrt{\frac{a+A}{2}}-\sqrt{\frac{a-A}{2}}$, $A=\sqrt{a^2-b^2c}$.

3. $\sqrt{a+b+2\sqrt{a\cdot b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $a\geq 0$; $b\geq 0$.

4. $\sqrt{a+b-2\sqrt{a\cdot b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a\geq b\geq 0$.

1. (03-4-11) Вычислите

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}$

Решение: Используем формулы 1 и 2. Итак, $a=2,\ b=1,\ c=3$. Поэтому $A=\sqrt{2^2-1^2\cdot 3}=\sqrt{4-3}=1$. Тогда по формуле 1

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично по формуле 2

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Вычитая полученные выражения, получим $2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. **Ответ:** $\sqrt{2}$ (D).

2. (01-1-4) Вычислите

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}.$$

A) $2\sqrt{2}$ B) $-4\sqrt{6}$ C) $\sqrt{2}$ D) $-2\sqrt{2}$

3. (01-11-36) Вычислите

$$\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}.$$

A) 3,8 B) 3,6 C) 4 D) 4,2

4. (02-10-43) Вычислите

$$\sqrt{52-30\sqrt{3}}-\sqrt{52+30\sqrt{3}}.$$

A) -10 B) 10 C) -8 D) 8

5. (03-11-74) Вычислите

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}\cdot(6+4\sqrt{2}).$$

A) $\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ D) 2

6. Вычислите

$$\sqrt{15-\sqrt{56}}-\sqrt{14}.$$

A) $\sqrt{3}$ B) $-2\sqrt{14}$ C) -1 D) 1

7. (96-3-73) Найдите разность

$$\sqrt{9-2\sqrt{20}}-\sqrt{9+2\sqrt{20}}.$$

A) -3 B) -6 C) -4 D) -5

Решение: *1-способ.* Обозначим $x=\sqrt{9-2\sqrt{20}}-\sqrt{9+2\sqrt{20}}$. Очевидно, $x<0$. Тогда

$$x^2=9-2\sqrt{20}-2\sqrt{(9-2\sqrt{20})(9+2\sqrt{20})}+9+$$
$$+2\sqrt{20}=18-2\sqrt{81-80}=18-2=16.$$

Из $x<0$ и $x^2=16$ получим $x=-4$.

2-способ. Используем формулы 3 и 4. Подкоренное выражение $9-2\sqrt{20}$ запишем в виде $5+4-2\sqrt{5\cdot 4}$. Тогда в силу 3-формулы первый корень равен $\sqrt{5}-\sqrt{4}=\sqrt{5}-2$. А второй корень $\sqrt{9+2\sqrt{20}}$ равен $\sqrt{5}+\sqrt{4}=\sqrt{5}+2$. Вычитая полученные значения, получим $\sqrt{5}-2-\sqrt{5}-2=-4$. **Ответ:** -4 (C).

8. (96-6-28) Вычислите

$$\sqrt{23-8\sqrt{7}}+\sqrt{23+8\sqrt{7}}.$$

A) 7 B) 6 C) 8 D) 9

9. (96-9-13) Вычислите сумму

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}.$$

A) 6 B) 4 C) 8 D) 5

10. (96-12-71) Найдите разность

$$\sqrt{9+2\sqrt{20}}-\sqrt{9-2\sqrt{20}}.$$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 3

11. (97-2-28) Вычислите

$$\sqrt{19+8\sqrt{3}}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}.$$

A) 6 B) 7 C) 9 D) 8

12. (96-13-13) Вычислите

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}.$$

A) 3 B) 5 C) 4 D) 6

13. (00-10-4) Вычислите

$$\sqrt{21-2\sqrt{21+2\sqrt{19-6\sqrt{2}}}}.$$

A) $3\sqrt{2}+1$ B) $3\sqrt{2}+2$ C) $3\sqrt{2}-2$ D) $3\sqrt{2}-1$

14. (01-7-6) Найдите наибольший общий делитель чисел $\sqrt{45\cdot10\cdot18}$ и $\sqrt{21\cdot56\cdot6}$.

A) 9 B) 10 C) 18 D) 6

15. (97-5-21) Упростите выражение $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

A) $2+\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}-2$ C) $3+\sqrt{3}$ D) $2-\sqrt{3}$

Решение: Используем 3-формулу. Подкоренное выражение $7-4\sqrt{3}$ запишем в виде

$$4+3-2\sqrt{4\cdot3}.$$

Тогда в силу 3- формулы, значение корня будет равно $\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$. **Ответ:** $2-\sqrt{3}$ (D).

16. (98-5-10) Вычислите $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$.

A) $4-\sqrt{3}$ B) $4+\sqrt{3}$ C) $3+\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{3}$

17. (00-8-28) Вычислите $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

A) $\sqrt{5}-1$ B) $1-\sqrt{5}$ C) $\sqrt{3}$ D) $1+\sqrt{5}$

18. (98-10-41) Вычислите $\sqrt{19-8\sqrt{3}}+\sqrt{3}$.

A) -4 B) 4 C) $4+2\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}-4$

19. (03-7-50) Вычислите $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$.

A) $\sqrt{7}+2$ B) $\sqrt{7}-2$ C) $\sqrt{7}$ D) $2-\sqrt{7}$

20. (97-8-27) Вычислите $\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

A) 8 B) 4 C) 3 D) 6

21. (97-12-27) Вычислите $\sqrt{9-4\sqrt{2}}-\sqrt{9+4\sqrt{2}}$.

A) 2 B) 3 C) -3 D) -2

22. (98-7-14) Вычислите

$$\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2\cdot0,5^{-2}.$$

A) 38 B) 30 C) 40 D) 44

23. (99-10-14) Вычислите

$$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}.$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $0,5$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $0,75$

24. (03-1-1) Вычислите

$$\sqrt{(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\frac{\pi}{3}-\sqrt{2})^2}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}.$$

A) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ B) $\frac{5\pi}{6}-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

C) $\frac{5\pi}{6}$ D) $\frac{-5\pi}{6}$

3.1.2 Упрощение выражений с корнем

Примеры из этого пункта решаются применением свойств арифметического квадратного корня и формул сокращенного умножения.

1. (01-1-62) Упростите выражение

$$\sqrt{a^2}-\sqrt{a^2+a+0,25}+\sqrt{a^2-a+0,25}$$

при $a\geq0,5$.

A) $a-0,25$ B) $a-0,5$ C) $a-0,75$ D) $a-1$

Решение: Из условия $a\geq0,5$ и равенств $a^2+a+0,25=(a+0,5)^2$, $a^2-a+0,25=(a-0,5)^2$, в силу 6-свойства из 3.1 получим

$$\sqrt{a^2}-\sqrt{a^2+a+0,25}+\sqrt{a^2-a+0,25}=$$

$$=a-(a+0,5)+(a-0,5)=a-1.$$

Ответ: $a-1$ (D).

2. (97-6-56) Вычислите значение выражения

$$\frac{(\sqrt{m}+n)\sqrt{m-2\sqrt{m}\cdot n+n^2}}{m-n^2}$$

при $m=15$ и $n=3\sqrt{2}$.

A) 1 B) -1 C) -3 D) 0

3. (01-7-14) Вычислите значение выражения

$$(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$$

при $a=(2+\sqrt{3})^{-1}$ и $b=(2-\sqrt{3})^{-1}$.

A) 2 B) $0,5$ C) $2\sqrt{3}$ D) 1

4. (01-10-1) Найдите значение выражения

$$\sqrt{a^2-2ab+b^2}+\sqrt{a^2+2ab+b^2}$$

при $a=\sqrt{2}$ и $b=\sqrt[3]{3}$.

A) $\sqrt{8}$ B) $\sqrt[3]{12}$ C) $\sqrt{18}$ D) $\sqrt[3]{24}$

5. (02-6-8) Найдите значение выражения

$$\sqrt{x^2+2xy+y^2}-\sqrt{x^2-2xy+y^2}$$

при $x=5\sqrt{6}$ и $y=6\sqrt{5}$.

A) $\sqrt{720}$ B) $\sqrt{700}$ C) $\sqrt{640}$ D) $\sqrt{600}$

6. (97-1-57) Вычислите значение выражения

$$\frac{(x+\sqrt{y})\cdot\sqrt{y-2\cdot\sqrt{y}\cdot x+x^2}}{y-x^2}$$

при $x=2\sqrt{6}$ и $y=23$.

A) 1 B) -1 C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$

7. (03-10-12) Вычислите значение выражения

$$\frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}}$$

при $x=\frac{4}{5}m$.

A) 2 B) $2m$ C) 4 D) -2

8. (03-10-15) Упростите

$$\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2},$$

если $x<0$.

A) 6 B) -6 C) $6-2x$ D) $2x-6$

9. (01-11-7) Упростите

$$\frac{3}{a-\sqrt{a^2-3}}+\frac{3}{a+\sqrt{a^2-3}}.$$

A) $1,5a$ B) $3a$ C) $2a$ D) $2,5a$

Решение: Числитель и знаменатель первой дроби умножим на $a+\sqrt{a^2-3}$, а второй дроби на $a-\sqrt{a^2-3}$, в результате избавимся от иррациональности в знаменателях дробей и получим

$$a+\sqrt{a^2-3}+a-\sqrt{a^2-3}=2a.$$

Ответ: $2a$ (C).

10. (02-12-25) Упростите

$$\frac{3}{a-\sqrt{a^2-3}}-\frac{3}{a+\sqrt{a^2-3}}.$$

A) $3a$ B) $3\sqrt{a^2-3}$ C) $6a$ D) $2\sqrt{a^2-3}$

11. (02-11-12) Упростите

$$\left(\frac{1+\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-1}\right)^{-1}-x^{\frac{1}{2}}.$$

A) $\sqrt{x}+1$ B) 1 C) $\sqrt{x}-1$ D) -1

12. (02-12-13) Упростите

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{\sqrt{x}-x^2}+x.$$

A) $2x$ B) 2 C) 1 D) $2x-1$

13. (03-8-41) Сократите дробь

$$\frac{c-2\sqrt{c}+1}{\sqrt{c}-1}.$$

A) $\sqrt{c}-1$ B) $c-1$ C) $c+1$ D) $\sqrt{c}+1$

14. (03-11-5) Упростите

$$a\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}.$$

A) $2ab$ B) ab C) $4ab$ D) $0,5ab$

15. (99-1-15) Упростите

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)\cdot\frac{a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b}{2\sqrt{b}}.$$

A) $\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ B) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

C) $\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ D) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+b}$

16. (00-1-20) Упростите

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right)(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}).$$

A) 1 B) 2 C) $2\sqrt{a}$ D) $2\sqrt{a-1}$

3.2 Корень n-й степени

Для натурального числа $n>1$ действительное число b, n-я степень которого равна a, называется корнем n-й степени из a. Нахождение корня n-й *степени* b числа a, называется извлечением корня n-й степени из a. Корень n-й степени из a, обозначается через

$$\sqrt[n]{a}=b. \qquad (3.2)$$

Здесь a называется подкоренным числом, а n – показателем корня. Равенство (3.2) означает, что между числами a и b имеется связь $b^n=a$. Если $a\geq 0$ и $n>1$– натуральное число, то существует неотрицательное число b, удовлетворяющее равенству $b^n=a$, и оно единственно. Это число называется *арифметическим корнем n-й степени* из $a\geq 0$. Если $a<0$, n - четное число, то не существует действительного числа b, удовлетворяющего равенству $b^n=a$. Если $a<0$ и n - нечетное число ($n\geq 3$), то справедливо равенство $\sqrt[n]{a}=-\sqrt[n]{|a|}$. Поэтому когда речь идет о $\sqrt[n]{a}$ подразумевается $a\geq 0$ и арифметический корень. Корень n-й степени из a пишут и в виде $a^{\frac{1}{n}}$. Так как числа в виде дроби $\dfrac{m}{n}$ являются рациональными $a^{\frac{m}{n}}$ называется *степенью с рациональным показателем*. Часто вместо термина *корень* используется термин *радикал*. Из равенства $\dfrac{1}{n}=\dfrac{k}{kn}$ следуют равенства $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{k}{kn}}=\sqrt[kn]{a^k}$. Применяя это свойство, корни с разными степенями можно привести к корням с одинаковым степенем. Например, $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[4]{4}$ можно записать в виде $\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[12]{16}$ и $\sqrt[12]{4^3}=\sqrt[12]{64}$. Подчеркнем, что для любого натурального числа $n>1$: $\sqrt[n]{0}=0$, так как $0^n=0$. Приведем основные свойства арифметического корня n-й степени. Здесь $a>0$, $b>0$ и $n,m\in\mathbb{N}$.

1. $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$.
2. $\sqrt[m]{a\cdot b}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}$.
3. $\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$.
4. $a\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a^m\cdot b}$.
5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$.
6. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.
7. $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nm]{a^m}$
8. $(\sqrt[n]{a})^n=a,\quad a\geq 0$.
9. $\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$.
10. $(\dfrac{a}{b})^{-n}=(\dfrac{b}{a})^n$.

1. (00-3-17) Упростите выражение

$$\frac{a-a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[6]{a^5}+a}+\frac{\sqrt[3]{a^2}-a}{\sqrt[3]{a}+\sqrt{a}}+2\sqrt{a}.$$

A) $2\sqrt[3]{a}$ B) $2\sqrt{a}$ C) $\sqrt[3]{a}+2\sqrt{a}$ D) 0

Решение: Обозначим $\sqrt[6]{a} = x$. Тогда $a = x^6$, $\sqrt[3]{a^2} = x^4$, $\sqrt{a} = x^3$, $\sqrt[3]{a} = x^2$ и данное выражение принимает вид

$$\frac{x^6 - x^6 \cdot x^3}{x^4 + x^5 + x^6} + \frac{x^4 - x^6}{x^2 + x^3} + 2x^3.$$

Упростим его:

$$\frac{x^6(1 - x^3)}{x^4(1 + x + x^2)} + \frac{x^4(1 - x^2)}{x^2(1 + x)} + 2x^3 =$$

$$= \frac{x^2(1 - x)(1 + x + x^2)}{1 + x + x^2} + \frac{x^2(1 - x)(1 + x)}{1 + x} + 2x^3 =$$

$$= x^2(1 - x) + x^2(1 - x) + 2x^3 = x^2 - x^3 +$$

$$+ x^2 - x^3 + 2x^3 = 2x^2 = 2\sqrt[3]{a}.$$

Ответ: $2\sqrt[3]{a}$ (A).

2. (99-5-5) Упростите выражение

$$\frac{27a + 1}{9a^{\frac{2}{3}} - 3\sqrt[3]{a} + 1} - \frac{27a - 1}{9\sqrt[3]{a^2} + 3a^{\frac{1}{3}} + 1}.$$

A) $\sqrt[3]{a} - 1$ B) 1 C) 2 D) $a + 1$

3. (00-8-53) Упростите выражение

$$\frac{a^{\frac{3}{4}} - 36a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} - 6a^{\frac{1}{4}}}.$$

A) $\sqrt[4]{a} - 6$ B) $\sqrt[4]{a} + 6$ C) $\sqrt{a} - 6$ D) $\sqrt{a} + 6$

4. (00-9-14) Упростите выражение

$$\frac{729a + 1}{81\sqrt[3]{a^2} - 9a^{\frac{1}{3}} + 1} - \frac{729a - 1}{81a^{\frac{2}{3}} + 9\sqrt[3]{a} + 1}.$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 9

5. (97-9-81) Упростите выражение

$$\frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 1}{x + 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 1}.$$

A) 1 B) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x} + 1}$ C) $\sqrt[3]{x}$ D) 0

6. (98-5-17) Упростите выражение и вычислите сумму показателей степеней с основаниями a и b:

$$(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a + a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b).$$

A) 2 B) 1 C) 4 D) 3

Решение: Если положить $a^{\frac{1}{2}} = x$ и $b^{\frac{1}{2}} = y$, то $a = x^2$, $b = y^2$. Тогда данное выражение в силу 6-формулы сокращенного умножения примет вид

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3 = a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}.$$

Теперь сложим показатели степеней a и b: $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$. **Ответ:** 3 (D).

7. (99-7-19) Упростите выражение и вычислите сумму показателей степеней с основаниями a и b

$$(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a - a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b).$$

A) 1 B) 4 C) 2 D) 3

8. (98-5-18) Упростите выражение

$$\frac{(5b^{\frac{1}{4}} + 10)(b^{\frac{3}{4}} - 2b^{\frac{1}{2}})}{b - 4b^{\frac{1}{2}}}.$$

A) $1\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{5}$ C) 1 D) 5

9. (02-10-7) Упростите выражение

$$\left(\frac{9}{a + 8} - \frac{a^{\frac{1}{3}} + 2}{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}} + 4}\right) \cdot \frac{a^{\frac{4}{3}} + 8a^{\frac{1}{3}}}{1 - a^{\frac{2}{3}}} + \frac{5 - a^{\frac{2}{3}}}{1 + a^{\frac{1}{3}}}.$$

A) 5 B) $\dfrac{1}{1 - a}$ C) $\dfrac{2}{1 - a^{\frac{2}{3}}}$ D) 4

10. (01-5-5) Упростите выражение

$$\frac{a - b}{a + b + 2\sqrt{ab}} : \frac{a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}.$$

A) -1 B) $a + b$ C) $\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ D) $\dfrac{ab}{a + b}$

11. (98-9-18) Вычислите $\sqrt[3]{n\sqrt{n}}$ при $n = 81$.
A) 3 B) 6 C) 9 D) 4

Решение: Используя свойства 4 и 5, получим $\sqrt[3]{n\sqrt{n}} = \sqrt[3]{\sqrt{n^2 \cdot n}} = \sqrt[6]{n^3} = \sqrt{n}$. Теперь положив $n = 81$, имеем $\sqrt{81} = 9$. **Ответ:** 9 (C).

12. (02-12-44) Найдите значение выражения

$$\frac{a^{\frac{4}{3}} - 8a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} + 4} : (\sqrt[3]{a} - 2),$$

если $a = 729$.
A) 9 B) 6 C) 12 D) 15

13. (03-4-9) Найдите значение выражения

$$\frac{x - 1}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} + 1} \cdot x^{\frac{1}{4}} + 1$$

при $x = 256$.
A) 14 B) 15 C) 16 D) 13

14. (03-4-28) Найдите значение выражения

$$\frac{a^{\frac{4}{3}} - 8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 4b^{\frac{2}{3}}} : \left(1 - \frac{2b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right) - 4a^{\frac{2}{3}}$$

при $a = 64$.
A) -46 B) -48 C) -44 D) -50

15. (03-8-14) Найдите значение выражения

$$\frac{x^2 - 2x\sqrt{3} - \sqrt[3]{4} + 3}{x - \sqrt{3}}$$

при $x = \sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$.
A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) 1 D) 0

Решение: Сначала упростим выражения, затем подставим вместо x его значение. Числитель дроби $x^2 - 2x\sqrt{3} - \sqrt[3]{4} + 3$ представим в виде

$$x^2 - 2x\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - \sqrt[3]{2^2} = (x - \sqrt{3})^2 - (\sqrt[3]{2})^2.$$

Применив к этому выражению формулу разности квадратов, получим $(x - \sqrt{3} - \sqrt[3]{2})(x - \sqrt{3} + \sqrt[3]{2})$. Если вместо x подставить $\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$, то выражение во второй скобке обратится в нуль, поэтому произведение тоже будет равняться нулю. **Ответ:** 0 (D).

16. (99-9-2) Вычислите

$$\left(\frac{a-b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} + \sqrt[3]{ab}\right) : \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right) +$$

$$+\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}\right) : \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)$$

при $a = 27$.
A) 4 B) 4,5 C) 5 D) 6

17. (99-2-11) Вычислите

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}$$

при $a = 8$ и $b = 2$.
A) 10 B) 6 C) 8 D) 12

18. (01-6-32) Вычислите

$$\left(\frac{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} - x - y\right) \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$$

при $x = 16^{\frac{1}{3}}$ и $y = 4^{\frac{1}{3}}$.
A) 2 B) 4 C) $2\sqrt[3]{4}$ D) 3

3.2.1 Примеры на вычисление

1. (99-8-16) Представьте число 243 в виде степени с основанием 9.
A) $9^{5/2}$ B) $9^{3/4}$ C) $9^{5/3}$ D) $9^{3/2}$

Решение: Известно, что $243 = 3^5$. А 3 равно $\sqrt{9} = 9^{1/2}$. Отсюда получим $243 = 3^5 = (9^{1/2})^5 = 9^{5/2}$. **Ответ:** $9^{5/2}$ (A).

2. Представьте число $25 \cdot 5^{n+2}$ в виде степени с основанием 25.
A) $25^{1+n/2}$ B) $25^{2+n/4}$ C) $25^{2+n/2}$ D) $25^{n/2}$

3. Представьте число $64^{0,5} \cdot 16^{3n+9}$ в виде степени с основанием 8.
A) 8^{12+4n} B) 8^{13+4n} C) 8^{13+3n} D) 8^{4n}

4. (02-1-1) Представьте число $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$ в виде степени с основанием 2.
A) $2^{5/9}$ B) $2^{4/3}$ C) $2^{2/3}$ D) $2^{3/2}$

5. (99-2-12) Вычислите $\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[6]{96}}$.
A) 6 B) 18 C) 9 D) 10

6. (98-5-7) Вычислите

$$\frac{15^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}}{5^{-\frac{1}{3}}}.$$

A) 45 B) 15 C) 5 D) 3

Решение: 15 запишем в виде произведения $3 \cdot 5$ и используя свойство $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, получим

$$\frac{15^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}}{5^{-\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 3^1 \cdot 5^1 = 15.$$

Ответ: 15 (B).

7. (99-7-9) Вычислите $30^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} : 10^{-\frac{2}{3}}$.
A) 15 B) 20 C) 60 D) 30

8. (00-3-6) Вычислите

$$0,027^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{\frac{3}{4}} - 3^{-1} + 5,5^0.$$

A) 33 B) 32,97 C) 31 D) 32

9. Вычислите

$$\frac{\sqrt[4]{0,0016}}{\sqrt[5]{0,00032}} - \frac{\sqrt[3]{0,027}}{\sqrt[6]{0,000064}}.$$

A) 1,5 B) −1,5 C) −0,5 D) 0,5

10. Вычислите $\sqrt[5]{(15^{10} - 10^{10}) : (3^{10} - 2^{10})}$.
A) 3 B) 5 C) 25 D) 9

11. (98-11-59) Вычислите

$$\frac{\sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{-375}}.$$

A) −1 B) 1 C) $-\frac{83}{125}$ D) $\frac{83}{125}$

Решение: Используя свойства 4 и 9, имеем

$$\frac{-\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} + \sqrt[3]{4^3 \cdot 3}}{-\sqrt[3]{5^3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt[3]{3}(-2 + 3 + 4)}{-5\sqrt[3]{3}}$$

Упростив это выражение, получим значение −1. **Ответ:** −1 (A).

12. (98-5-2) Вычислите

$$\sqrt[3]{9 + \sqrt{73}} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{73}}.$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 1

13. (98-7-18) Вычислите

$$\sqrt{2\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt[4]{9 + 4\sqrt{2}}.$$

A) 7 B) $\sqrt[4]{7}$ C) $2\sqrt{2} + 1$ D) $\sqrt{7}$

14. (98-12-13) Вычислите

$$\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4

15. (00-3-2) Вычислите

$$\sqrt[3]{216\cdot 512}+\sqrt[5]{32\cdot 243}.$$

A) 45 B) 48 C) 49 D) 54

16. (00-7-18) Вычислите

$$\frac{\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}.$$

A) 2 B) 1,5 C) 0,5 D) 1

17. (00-8-55) Вычислите

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}.$$

A) 1 B) -1 C) 0 D) 7

18. (99-10-3) Вычислите

$$\sqrt[4]{\frac{4,1^3-2,15^3}{1,95}+4,1\cdot 2,15}.$$

A) 1,5 B) 1,75 C) 2,25 D) 2,5

19. (01-3-22) Вычислите

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}.$$

A) 2 B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$

20. (01-9-7) Вычислите

$$\sqrt{4-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}.$$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4

Решение: Второй из корней $\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}$ запишем в виде $\sqrt{\sqrt{4+2+2\sqrt{4\cdot 2}}}=\sqrt{\sqrt{4}+\sqrt{2}}$. В первом подкоренном выражении вынесем 2 за скобки и умножим корни $\sqrt{2(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\sqrt{2(4-2)}=2$. **Ответ:** 2 (A).

21. (02-3-6) Вычислите

$$\sqrt[4]{68+8\sqrt{72}}\cdot\sqrt[8]{4-\sqrt{15}}\cdot\sqrt[8]{4+\sqrt{15}}+1.$$

A) $3+\sqrt{2}$ B) $1+\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{2}$

22. (02-7-44) Вычислите

$$\sqrt[3]{2000\cdot 1998-1997\cdot 2001+5}.$$

A) 2 B) 3 C) $\sqrt[3]{17}$ D) 4

23. (03-4-18) Вычислите

$$\sqrt[3]{16+16\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{48-32\sqrt{2}}.$$

A) 2 B) 6 C) 4 D) 8

24. (03-6-46) Вычислите

$$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}.$$

A) $-\sqrt{2}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) $-\sqrt[3]{2}$ D) $\sqrt{2}$

25. Вычислите

$$\sqrt[3]{5-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{5+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{12}}.$$

A) $2+\sqrt{3}$ B) $\sqrt[3]{8}$ C) $4+\sqrt{3}$ D) $4+\sqrt{12}$

Решение: Используя 2-свойство, произведение первого и второго множителей запишем в виде $\sqrt[3]{(5-\sqrt{17})(5+\sqrt{17})}=\sqrt[3]{25-17}$. Значение этого корня равно 2. Применяя 3-свойство из п. 3.1.1, имеем $\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{7+2\sqrt{4\cdot 3}}=2+\sqrt{3}$. Умножая полученные значения, получим $2(2+\sqrt{3})=4+\sqrt{12}$. **Ответ:** $4+\sqrt{12}$ (D).

26. Вычислите

$$\sqrt[4]{11+2\sqrt{18}}\cdot\sqrt[8]{9-\sqrt{80}}\cdot\sqrt[8]{9+\sqrt{80}}.$$

A) $\sqrt{3}+2$ B) $\sqrt{2}+3$ C) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{2}$

27. Вычислите

$$\sqrt[4]{4-\sqrt{12}}\cdot\sqrt[6]{(1+\sqrt{3})^5}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}.$$

A) 4 B) $2^{5/6}$ C) $3^{2/3}$ D) $1+\sqrt{2}$

28. Вычислите

$$\sqrt[4]{0,0016}\cdot\sqrt[3]{0,125}.$$

A) 0,4 B) 0,01 C) 0,1 D) 1

29. Вычислите

$$\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{5+\sqrt{24}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}.$$

A) 1 B) 2 C) -1 D) -2

Решение: Первый множитель $\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}$, используя 5-свойство из п. 3.2, представим в виде

$$\sqrt[3]{\sqrt{3+2-2\sqrt{3\cdot 2}}}=\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

Используя 9-свойство, 3–й множитель запишем в виде $-\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ и умножив его с первым множителем, получим $-\sqrt[3]{5-\sqrt{24}}$. Умножив это выражение с $\sqrt[3]{5+\sqrt{24}}$, имеем $-\sqrt[3]{25-24}=-1$. **Ответ:** -1 (C).

30. Вычислите

$$\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt[3]{8}}}}.$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

31. Вычислите

$$\frac{\sqrt{72}-\sqrt{108}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

A) 6 B) 3 C) -3 D) -6

32. Найдите наибольшее значение n, при котором выражение

$$\sqrt[n]{3^8+9^4+81^2}$$

является натуральным числом.

A) 4 B) 6 C) 8 D) 9

33. Вычислите

$$\left(\sqrt{\frac{3}{14}}-\sqrt{\frac{2}{21}}\right)\cdot\frac{42}{\sqrt{7}}.$$

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $-\sqrt{6}$ D) $-2\sqrt{6}$

34. (03-8-9) Исключите иррациональность в знаменателе дроби

$$\frac{2}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}.$$

A) $2-\sqrt[3]{4}$ B) $1-\sqrt[3]{4}$ C) $1+\sqrt[3]{4}$ D) $\sqrt[3]{2}$

35. (97-4-3) Найдите наибольшее число.

A) $\sqrt{15}$ B) $\sqrt[3]{65}$ C) $\sqrt[4]{81}$ D) 4

Решение: Известно, что если $0<a<b$, то $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$. Из трех чисел $\sqrt{15}$; $\sqrt[4]{81}$ и 4 наибольшим является 4. $4=\sqrt[3]{64}<\sqrt[3]{65}$. Следовательно, наибольшее число $\sqrt[3]{65}$. **Ответ:** $\sqrt[3]{65}$ (B).

36. (97-9-63) Найдите наибольшее число.

A) 3 B) $\sqrt[3]{26}$ C) $\sqrt{10}$ D) $\sqrt[4]{82}$

37. (02-5-3) Расположите в порядке возрастания числа $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt[3]{5}$ и $c=\sqrt[4]{7}$.

A) $a<b<c$ B) $c<b<a$
C) $b<a<c$ D) $b<c<a$

38. (02-10-42) Расположите в порядке возрастания числа

$$m=\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{3}{4}},\ n=\left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{3}{8}},\ k=\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

A) $k<m<n$ B) $m<k<n$
C) $m<n<k$ D) $k<n<m$

39. (02-12-34) Расположите в порядке возрастания числа $a=\sqrt[3]{2}$, $b=\sqrt[4]{3}$, $c=\sqrt[6]{5}$.

A) $a<b<c$ B) $c<b<a$
C) $a<c<b$ D) $b<a<c$

3.3 Средние значения

Среди средних значений наиболее часто используются среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее весовое и среднее гармоническое значения, объясним их на примерах.

Среднее арифметическое значение. Средним арифметическим чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется число

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}. \tag{3.3}$$

Например, среднее арифметическое чисел 10, -12, 20 равно $(10-12+20):3=18:3=6$.

Среднее геометрическое значение. Средним геометрическим чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ называется число

$$B=\sqrt[n]{b_1\cdot b_2\cdots b_n}. \tag{3.4}$$

Например, среднее геометрическое значение чисел 4, 10, 25 равно $\sqrt[3]{4\cdot10\cdot25}=\sqrt[3]{1000}=10$. Кроме случая, когда значения данных величин равны между собой, среднее геометрическое значение меньше среднего арифметического значения. Когда данные числа равны, то их среднее геометрическое значение равно среднему арифметическому значению. В частности, при $n=2$

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}.$$

Величину $\sqrt{ab}$ называют также *средним пропорциональным* чисел a и b. Известно, что в пропорции $a:x=x:b$, средний член пропорции $x=\sqrt{ab}$ тоже называется средним пропорциональным чисел a и b. Например, среднее пропорциональное чисел 4 и 9 равно $\sqrt{4\cdot9}=6$.

Среднее весовое значение. Рассмотрим следующую задачу. Для изготовления ювелирного украшения расплавили 8 грамм золота с 32 граммами серебра. Если 1 грамм золота стоит 20000 сум, а 1 грамм серебра стоит 5000 сум, то сколько стоит 1 грамм полученного сплава?

Для решения задачи найдем:

1) Цена всего золота: $8\cdot20000=160000$ сум.
2) Цена всего серебра: $32\cdot5000=160000$ сум.
3) Масса сплава $8+32=40$ грамм.
4) Цена 1 грамма сплава

$$\frac{160000+160000}{40}=\frac{320000}{40}=8000.$$

Ответ: 8000 сум.

Средним весовым значением чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ называется число

$$C=\frac{a_1\cdot n_1+a_2\cdot n_2+\cdots+a_m\cdot n_m}{n_1+n_2+\cdots+n_m} \tag{3.5}$$

Если $n_1=n_2=\cdots=n_m$, то среднее весовое значение будет равно среднему арифметическому значению.

Среднее гармоническое значение. Рассмотрим следующую задачу. Расстояние между городами A и B равно S км. Поезд от A до B движется со скоростью v_1 км/ч, а от B до A - со скоростью v_2 км/ч. Чему равна средняя скорость поезда при движении от A до B и обратно?

Для решения задачи найдем.

1) Путь от A до B поезд прошёл за $t_1 = S : v_1$ часа.
2) Путь от B до A поезд прошёл за $t_2 = S : v_2$ часа.
3) Время, потраченное на путь туда и обратно, равно

$$t_1 + t_2 = \frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2} = \frac{Sv_1 + Sv_2}{v_1 v_2}.$$

4) Так как всё пройденное расстояние равно $2S$, средняя скорость поезда равна

$$\frac{2S}{\dfrac{Sv_1 + Sv_2}{v_1 v_2}} = 2S \cdot \frac{v_1 v_2}{Sv_1 + Sv_2} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}.$$

Ответ: $\dfrac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$ км/ч.

Средним гармоническим значением чисел a и b называется число

$$D = \frac{2ab}{a+b}. \qquad (3.6)$$

Прямая и обратная пропорциональность. Остановимся на прямо и обратно пропорциональных зависимостях. Зависимость $y = kx$, $k > 0$ между величинами x и y называется ***прямо пропорциональной зависимостью***, а $y = \dfrac{k}{x}$ - ***обратно пропорциональной зависимостью***. Для нахождения из равенства $y = kx + b$ переменной x из обоих частей равенства вычитается число b, затем обе части равенства делятся на $k \neq 0$. В результате получается равенство $x = \dfrac{y-b}{k}$. Рассмотрим следующую задачу.

Пример 1. Разделить число 300 на части, прямо пропорциональные числам 3, 5, 7.

Решение: По условию задачи число 300 делится на части $3x$, $5x$ и $7x$. Значит, $3x + 5x + 7x = 300$. Отсюда получим $15x = 300$. Разделив обе части этого равенства на 15, находим $x = 20$. Тогда $3x = 60$, $5x = 100$ и $7x = 140$. **Ответ:** 60, 100 и 140.

Пример 2. Разделить число 240 на части, обратно пропорциональные числам 5 и 7.

Решение: По условию задачи, число 240 делится на части $x/5$ и $x/7$. Следовательно, $\dfrac{x}{5} + \dfrac{x}{7} = 240$. Умножив обе части этого равенства на 35, получим

$$7x + 5x = 240 \cdot 35 \iff 12x = 240 \cdot 35.$$

Отсюда находим, что $x = 700$. Тогда $700 : 5 = 140$ и $700 : 7 = 100$. **Ответ:** 140, 100.

1. Чему равно a, если среднее арифметическое значение чисел a, $1,8$ и $-5,6$ равно $1,2$?
   A) 7,4 B) 7 C) 6,8 D) 7,(6)

   Решение: Согласно условию задачи по формуле (3.3) имеем

   $$\frac{a + 1,8 - 5,6}{3} = 1,2 \iff a - 3,8 = 3,6.$$

   Отсюда находим, что $a = 7,4$. **Ответ:** 7,4 (A).

2. Найдите среднее арифметическое значение чисел $0,32$, $0,28$, $0,4$ и 7.
   A) 0,7 B) 2 C) 1,8 D) 2,(6)

3. Среднее арифметическое чисел a_1, a_2, a_3 равно 4, а среднее арифметическое чисел a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 равно 5. Найдите значение суммы $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8$.
   A) 37,4 B) 37 C) 36,8 D) 37,(6)

4. Средний возраст 11 игроков футбольного клуба Динамо равен 21 году. Один из игроков выбыл из строя. Средний возраст оставшихся 10 игроков равен 20,8 годам. Определите возраст выбывшего из строя игрока.
   A) 22 B) 23 C) 19 D) 18

5. (96-1-10) Среднее арифметическое чисел x; $-2,1$ и $3,3$ равно $0,2$. Найдите x.
   A) 0,6 B) −0,6 C) 0,8 D) 2

6. (96-9-60) Среднее арифметическое чисел $5,4$; y; $-2,2$ равно $1,2$. Найдите y.
   A) 1,2 B) −0,8 C) 0,4 D) −0,4

7. (98-1-12) Одно число больше другого на 6. Среднее арифметическое этих чисел равно 20. Найдите большее число.
   A) 23 B) 27 C) 33 D) 26

   Решение: Если обозначить большее число через x, то меньшее число будет равно $x - 6$. По условию задачи их среднее арифметическое равно 20, т.е.

   $$\frac{x + x - 6}{2} = 20 \iff 2x - 6 = 40 \iff 2x = 46.$$

   Отсюда получим, что $x = 23$. **Ответ:** 23 (A).

8. (98-6-6) Среднее арифметическое трех чисел равно 17,4. Найдите третье число, если два других равны 17,5 и 21,6.
   A) 12,1 B) −0,2 C) −8,4 D) 13,1

9. (98-8-12) Одно число меньше другого на 15. Среднее арифметическое этих чисел равно 11,5. Укажите меньшее из данных чисел.
   A) 3 B) 3,5 C) 4 D) 7

10. (02-6-11) Среднее арифметическое трех чисел равно 20, а среднее арифметическое двух других чисел равно 25. Чему равно среднее арифметическое этих пяти чисел?
    A) 22,5 B) 22,6 C) 24 D) 22

11. (02-8-6) Среднее арифметическое 7 чисел равно 13. Какое число следует прибавить к этим числам, чтобы их среднее арифметическое равнялось 18.
    A) 53 B) 50 C) 45 D) 56

12. (00-7-5) Относительно трех чисел известно, что среднее арифметическое первых двух чисел равно 25, а среднее арифметическое всех трех чисел равно 30. Чему равно третье число?
    A) 44 B) 40 C) 45 D) 38

13. (03-12-52) Средний рост шести учеников 120 см. А рост самого низкого 105 см. Чему равен средний рост остальных пяти учеников?
A) 122 B) 123 C) 121 D) 124

14. Среднее геометрическое чисел b_1, b_2 равно 3. Как нужно выбрать число b_3, чтобы среднее геометрическое чисел b_1, b_2, b_3 равнялось 4?
A) 7 B) 6,9 C) 7,(1) D) 7,1

Решение: По условию задачи $\sqrt{b_1 \cdot b_2} = 3$ и $\sqrt[3]{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3} = 4$. Из первого равенства имеем $b_1 \cdot b_2 = 9$. Подставим это во второе равенство: $\sqrt[3]{9 \cdot b_3} = 4$. Отсюда получим $b_3 = 64 : 9$. **Ответ:** 7,(1) (C).

15. Найдите среднее геометрическое чисел 0,027, 8, 64.
A) 2,7 B) 2 C) 2,8 D) 2,4

16. Найдите среднее геометрическое чисел 2, 9, 12.
A) 7 B) 6 C) 6,(1) D) 7,1

17. Среднее геометрическое чисел x, 25 и -5 равно -5. Найдите x.
A) 1,4 B) 1 C) 1,6 D) -1

18. Среднее геометрическое чисел b_1, b_2 равно 2, а среднее геометрическое чисел b_3, b_4 равно 3. Найдите значение $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4$.
A) 37 B) 49 C) 36 D) 32

19. Во сколько раз среднее арифметическое чисел 4 и 64 больше их среднего геометрического?
A) $2\frac{1}{4}$ B) $2\frac{3}{4}$ C) 2,2 D) $2\frac{1}{8}$

Решение: Среднее арифметическое чисел 4 и 64 равно $(4 + 64) : 2 = 34$, а их среднее геометрическое равно $\sqrt{4 \cdot 64} = 2 \cdot 8 = 16$. Их отношение $34 : 16 = 2\frac{1}{8}$. **Ответ:** $2\frac{1}{8}$ (D).

20. Среднее арифметическое двух чисел равно 10, а их среднее геометрическое равно 6. Найдите эти числа.
A) 2; 8 B) 2; 18 C) 5; 15 D) 6; 14

21. (98-11-56) Среднее геометрическое трех чисел равно 6. Найдите третье число, если два других равны 8 и 9.
A) 3 B) 7 C) -5 D) -3

22. (01-6-4) При каком значении $a > 0$ среднее арифметическое чисел a и 4 будет равно их среднему геометрическому?
A) 3 B) 7 C) 5 D) 4

23. (01-9-31) Среднее геометрическое двух положительных чисел равно 8, а среднее геометрическое двух других положительных чисел равно 32. Найдите среднее геометрическое этих четырех чисел.
A) 12 B) 16 C) 15 D) 14

24. (01-12-16) Среднее геометрическое двух чисел относится к их среднему арифметическому как 3 : 5. Найдите отношение меньшего из этих чисел к большему числу.
A) 1 : 9 B) 9 : 25 C) 3 : 5 D) 4 : 15

25. Найдите среднее пропорциональное чисел 3 и 48.
A) 7 B) 12 C) 11 D) 16

26. Найдите большее число, получаемое при делении числа 180 на части, прямо пропорциональные числам 3, 5, 7.
A) 84 B) 62 C) 48 D) 92

Решение: По условию задачи число 180 делится на части $3x$, $5x$ и $7x$. Значит, $3x + 5x + 7x = 180$. Отсюда имеем $15x = 180$. Разделив обе части этого равенства на 15, получим $x = 12$. Большее число равно $7x$, т.е $7 \cdot 12 = 84$. **Ответ:** 84 (A).

27. Разделите число 120 на части, обратно пропорциональные числам 5, 7.
A) 60; 84 B) 70; 50 C) 48; 72 D) 56; 64

28. Найдите среднее гармоническое значение чисел $\frac{1}{n-1}$ и $\frac{1}{n+1}$.
A) $\frac{1}{n}$ B) $2n$ C) $\frac{1}{2n}$ D) $\frac{2}{n}$

29. Расстояние между речными пристанями A и B равно 60 км. Скорость течения реки 5 км/ч, а собственная скорость моторной лодки 30 км/ч. Моторная лодка проплыла от пристани A до пристани B и обратно. Найдите её среднюю скорость при этом движении.
A) 30 B) 31 C) 29,1(6) D) 29,16

30. (98-4-4) Смешали раствор массой 300 г и концентрацией 15% с раствором массой 500 г и концентрацией 9%. Чему равна концентрация полученной смеси?
A) 12,75 B) 11,75 C) 12,25 D) 11,25

Решение: Данная задача является задачей о среднем весовом значении. По формуле (3.5) имеем

$$\frac{300 \cdot 15 + 500 \cdot 9}{300 + 500} = \frac{100(3 \cdot 15 + 5 \cdot 9)}{100 \cdot 8} = 11,25.$$

Ответ: 11,25% (D).

31. (98-12-65) Смешали раствор массой 400 г и концентрацией 8% с раствором массой 600 г и концентрацией 13%. Чему равна концентрация полученной смеси?
A) 11 B) 12 C) 9 D) 10

32. (00-4-29) Сколько литров молока 5% жирности нужно смешать с 80 л молока 2% жирности, чтобы получить молоко 3% жирности?
A) 20 B) 30 C) 40 D) 50

33. (97-2-3) Сплав состоит из меди и олова. Меди в нем 60%, что больше олова на 2 кг. Сколько килограммов меди содержится в сплаве?
A) 5 B) 7 C) 6 D) 5,5

34. (00-4-28) 1 т фруктов на 82% состоит из воды. Через некоторое время содержание воды в фруктах составило 70%. Какова теперь масса этих фруктов?
A) 810 B) 820 C) 700 D) 600

35. (01-12-35) В составе 800 кг свежих фруктов содержится 80% воды. Через некоторое время они стали весить 500 кг. Сколько процентов воды содержат фрукты теперь?
A) 62 B) 68 C) 66 D) 60

36. В двух сосудах имеются 40%-ный и 35%-ный растворы. По сколько литров нужно взять из этих растворов, чтобы получить 1 л 37%-ного раствора?
A) $0,3$ и $0,7$ B) $0,5$ и $0,5$
C) $0,2$ и $0,8$ D) $0,4$ и $0,6$

37. (00-5-15) Сколько процентов соли содержится в растворе, полученном добавлением к 140 г воды 60 г соли?
A) 20 B) 30 C) 25 D) 35

38. (01-11-4) Масса сплава из серебра и меди 2 кг. Масса серебра равна $\frac{1}{7}$ части массы меди. Сколько граммов серебра имеется в сплаве?
A) 310 г B) 300 г C) 270 г D) 250 г

Решение: Обозначим массу серебра, имеющегося в сплаве через x. Тогда по условию задачи масса меди будет равна $7x$ и мы получим равенство $x + 7x = 2$. Отсюда $x = 0,25$ кг $= 250$ г.
Ответ: 250 г. (D).

39. (01-12-14) 35 процентов раствора массой 15 кг состоит из соли. Сколько кг пресной воды нужно добавить в раствор, чтобы количество соли в нем составило 25 процентов?
A) 6 B) 5 C) 5,5 D) 5,25

40. (02-7-52) В 20 литрах солёной воды содержится 12% соли. Сколько литров воды нужно выпарить, чтобы количество соли в растворе составило 15%?
A) 4 B) 3 C) 5 D) 4,2

41. (03-8-25) Сплав состоит из серебра и золота в отношении 3 : 5. Найдите массу сплава, если в нем содержится $0,45$ кг золота.
A) 0,72 B) 0,21 C) 1,21 D) 0,8

42. (03-5-15) В сплаве меди и цинка массой 36 кг имеется 45% меди. Сколько нужно добавить меди к этому сплаву, чтобы в нем было 60% меди?
A) 13,5 B) 14 C) 12 D) 15

43. (03-8-7) В смеси из цемента и песка массой 30 кг цемент составляет 60%. Сколько следует добавить песка, чтобы цемент составлял 40% смеси?
A) 10 B) 12 C) 15 D) 18

44. (03-12-12) Один килограмм смеси A стоит 1000 сум, а один килограмм смеси B стоит 2000 сум. Сколько сумов стоит 1 кг смеси, приготовленной из смесей B и A в отношении 3 : 1?
A) 1500 B) 1750 C) 1650 D) 1800

4 Уравнения

4.1 Тождество и уравнение

Если при всех допустимых значениях переменных, участвующих в выражении, числовое значение выражения равно нулю, такое выражение называется *тождественным нулем*. Два выражения называются *тождественно равными*, если их разность является тождественным нулем. Равенство, левая и правая части которого - тождественно равные выражения, называется *тождеством*. Например, каждое из равенств $a + b = b + a$, $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ является тождеством. Замена одного выражения другим, тождественно равным ему, называется *тождественным преобразованием* выражения. Равенство с переменными называется уравнением. Различают уравнение в зависимости от количества переменных и показателей их степеней. Например,

$$3x + 15 = 0;\ 2 - 7x = 9;\ ax + b = 0; \qquad (4.1)$$

$$3x - y = 15;\ 0,2z - 7x = 14;\ ax + by = c; \qquad (4.2)$$

$$5x^2 - 6x = 11;\ x^2 = 4;\ ax^2 + bx + c = 0. \qquad (4.3)$$

равенства в (4.1) являются уравнениями первой степени с одной переменной или линейными уравнениями. Равенства в (4.2) являются уравнениями первой степени с двумя переменными. Равенства в (4.3) являются уравнениями второй степени с одной переменной или квадратными уравнениями. Пусть дано уравнение с одной переменной. Значения переменной, обращающее уравнение в верное равенство называется *корнем или решением* уравнения. Уравнения могут иметь одно, несколько или бесконечно много решений или вообще не иметь решения. Например, уравнение $3x + 15 = 0$ имеет один корень, уравнение $2(x+3) = 2x + 6$ имеет бесконечно много корней, а уравнение $x^2+1 = 0$ не имеет действительных корней. *Решить уравнение* – значит найти все его корни или показать, что их нет. Два уравнения, имеющие одни и те же корни или не имеющие корней, называются *равносильными (эквивалентными)*. Равносильные уравнения имеют следующие свойства.

1. **Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же, отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.**

2. Если к обоим частям уравнения прибавить или отнять одно и то же выражение, то получится уравнение, равносильное данному.

Из 2-свойства следуют следующие:

1) Если в обоих частях уравнения имеются одинаковые члены, их можно отбросить. Например, уравнение $3x+1+6x^2=7+6x^2$ равносильно уравнению $3x+1=7$.

2) Любое слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком. Например, уравнения $3x+1=6x$, $1=6x-3x$ и $1=3x$ равносильны.

1. Какое равенство не является тождеством?
A) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
B) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
C) $a^2+b^2=(a-b)(a+b)$
D) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Решение: *1-способ.* Раскроем скобки в правой части равенства, приведённого в C) $(a-b)(a+b)=a^2+ab-ba-b^2=a^2-b^2$. Это выражение не равно тождественно левой части равенства a^2+b^2.

2-способ. Покажем, что равенство, приведённое в C) не является тождеством. Для этого положим $a=1$, $b=1$. Тогда левая часть равенства равна $1^2+1^2=2$, а правая часть - $(1-1)(1+1)=0$. Значит, равенство приведённое в C) не является тождеством. **Ответ:** (C).

2. (97-8-12) Какое равенство является тождеством?
A) $\dfrac{m^3-n^3}{m+n}=m^2+mn+n^2$
B) $2mn-n^2-m^2=(m+n)^2$
C) $m-(m-n)-(m-n)=2n-m$
D) $-\dfrac{m-n}{n}=\dfrac{-m-n}{n}$

3. Какое равенство не является тождеством?
A) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
B) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
C) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
D) $a^2-b^2=(a-b)(a-b)$

4. Какое равенство не является тождеством?
A) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
B) $(a-b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2-b^3$
C) $-(a-b^2)=b^2-a$
D) $x^2=|x|^2$

5. Какое равенство не является тождеством?
A) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$ B) $(ab)^n=a^n\cdot b^n$
C) $(a^n)^m=a^{n+m}$ D) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

6. (98-9-9) Если выражение $9x^2+kx+kx^2-9x=x^2-17x$ является тождеством, то чему равно k?
A) -6 B) -8 C) -7 D) -9

Решение: Так как данное равенство является тождеством, то

$$9x^2+kx+kx^2-9x-x^2+17x=(8+k)x^2+(k+8)x\equiv 0.$$

Отсюда получим $8+k=0$ или $k=-8$. **Ответ:** -8 (B).

7. (98-1-19) При каких значениях a и b равенство

$$\frac{1}{x^2-5x-6}=\frac{a}{x-6}+\frac{b}{x+1}$$

является тождеством?
A) $a=7,\ b=-1$ B) $a=\dfrac{1}{7},\ b=-\dfrac{1}{7}$
C) $a=1,\ b=1$ D) $a=-\dfrac{1}{7},\ b=\dfrac{1}{7}$

8. (02-3-9) Если выражение $a(x-1)^2+b(x-1)+c=2x^2-3x+5$ является тождеством, то найдите сумму $a+b+c$.
A) 7 B) 8 C) 6 D) 4

9. (00-3-14) При каких значениях a и b равенство

$$\frac{1}{4x^2-1}=\frac{a}{2x-1}-\frac{b}{2x+1}$$

является тождеством?
A) $a=-\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$ B) $a=1,\ b=-1$
C) $a=-1,\ b=1$ D) $a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

10. (02-10-6) При каких значениях a, b и c равенство

$$\frac{1}{(x+1)^2\cdot(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{x+2}$$

является тождеством?
A) $-1;\ 1;\ 1$ B) $0;\ 1;\ 2$
C) $1;\ -1;\ \dfrac{1}{2}$ D) $2;\ -2;\ \dfrac{1}{2}$

11. (96-13-12) Найдите коэффициент β из тождества

$$(-3x+\alpha y)(\beta x-2y)=\gamma x^2+7xy+2y^2.$$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2

12. Найдите пару не равносильных уравнений.
A) $2x+1=0$ и $2x+2=1$
B) $x+y=5$ и $x=5-y$
C) $x^2+7=0$ и $|x|+1=0$
D) $2x-x^2=1$ и $x^2-2x-1=0$

Решение: *1-способ.* Найдём уравнение, равносильное второму уравнению в D). Обе части уравнения умножим на -1 и поменяв местами первый и второй члены левой части, получим $2x-x^2+1=0$. Теперь перенесем 1 из левой части равенства в правую с противоположным знаком, имеем: $2x-x^2=-1$. А это уравнение не равносильно первому уравнению в D).

2-способ. $x=1$ является решением первого уравнения в D). Но $x=1$ не является решением второго уравнения в D). Действительно $1^2-2\cdot 1-1=-2\neq 0$. **Ответ:** (D).

13. Найдите пару не равносильных уравнений.
A) $2x + 1 = 0$ и $2x = 1$
B) $x + y = 5$ и $x = y + 5$
C) $x^2 - 6x = 7$ и $x^2 - 6x - 7 = 0$
D) $-x^2 = 1$ и $|x|^2 = 1$

14. Найдите пару не равносильных уравнений.
A) $x^2 + 1 = 0$ и $x^2 + 5 = 1$
B) $x + 3 = 5$ и $x(x + 3) = 5x$
C) $5x^2 - 6x = 7x$ и $5x^2 - 13x = 0$
D) $-x^2 = -4$ и $|x|^2 = 4$

15. Найдите пару не равносильных уравнений.
A) $x(y^2 + 1) = 0$ и $x(y + 1)(y - 1) = 0$
B) $(x + 7)(x + y) = 5(x + 7)$ и $x + y = 5$
C) $7x - 6 = 6x + 7$ и $x - 13 = 0$
D) $x^2y^2 = xy$ и $xy(xy + 1) = 0$

4.2 Линейные уравнения

Линейным уравнением с одной переменной называется уравнение

$$ax + b = 0 \tag{4.4}$$

или уравнение, которое с помощью тождественных преобразований можно привести к виду (4.4).

1. **Если $a \neq 0$, уравнение $ax + b = 0$ имеет единственное решение $x = -\frac{b}{a}$.**

2. **Если $a = 0$, $b = 0$, уравнение $ax + b = 0$ имеет бесконечно много решений. В этом случае любое действительное число является его решением.**

3. **Если $a = 0$, $b \neq 0$, уравнение $ax + b = 0$ не имеет решения.**

1. (97-1-6) Решите уравнение

$$\frac{3x - 11}{4} - \frac{3 - 5x}{8} = \frac{x + 6}{2}.$$

A) 5 B) $-4,5$ C) $6,5$ D) 7

Решение: Обе части уравнения умножим на 8 :

$$6x - 22 - 3 + 5x = 4x + 24.$$

Все члены, содержащие x, перенесём в левую часть, а числа перенесем в правую часть равенства

$$6x + 5x - 4x = 24 + 22 + 3 \iff 7x = 49.$$

Разделив обе части равенства на 7, получим $x = 7$. **Ответ:** 7 (D).

2. (97-6-6) Решите уравнение

$$6 - \frac{x - 1}{2} = \frac{3 - x}{2} + \frac{x - 2}{3}.$$

A) $4,5$ B) 8 C) 17 D) 11

3. (97-7-3) Решите уравнение

$$0,9(4x - 2) = 0,5(3x - 4) + 4,4.$$

A) $1,2$ B) $2,5$ C) -3 D) 2

4. (98-1-4) Решите уравнение

$$2,8x - 3(2x - 1) = 2,8 - 3,19x.$$

A) -20 B) 20 C) -2 D) 200

5. (98-8-4) Решите уравнение

$$5,6 - 7(0,8x + 1) = 14 - 5,32x.$$

A) $5,5$ B) 55 C) -55 D) $-5,5$

6. (98-7-1) Найдите x, если

$$420 : (160 - 1000 : x) = 12.$$

A) 8 B) $\frac{1}{8}$ C) 35 D) 36

7. (98-12-1) Найдите x, если

$$(360 + x) \cdot 1002 = 731460.$$

A) 370 B) 270 C) 470 D) 730

8. (97-11-6) Решите уравнение

$$\frac{x - 3}{6} + x = \frac{2x - 1}{3} - \frac{4 - x}{2}.$$

A) 3 B) 2 C) -2 D) $\emptyset$

Решение: Обе части уравнения умножим на 6–общий знаменатель содержащихся в нем дробей, получим:

$$x - 3 + 6x = 2(2x - 1) - 3(4 - x).$$

Раскроем скобки

$$x - 3 + 6x = 4x - 2 - 12 + 3x.$$

Слагаемые, содержащие x перенесем в левую часть, а числа в правую часть уравнения

$$7x - 7x = -14 + 3 \iff 0 \cdot x = -11.$$

Это равенство не верно ни при каком $x \in \mathbb{R}$. Значит, данное уравнение не имеет решения. **Ответ:** $\emptyset$ (D).

9. Решите уравнение

$$1,6 \cdot (2 + 3x) = 6 \cdot (0,8x - 1) + 6,8.$$

A) 5 B) $-0,5$ C) $\emptyset$ D) -2

10. (99-4-12) Решите уравнение

$$0,(3)\,x - 3 = x - 2(0,5 + 0,(3)x).$$

A) 20 B) $\emptyset$ C) $0,2$ D) $0,5$

11. (96-1-20) При каких значениях m уравнение $my + 1 = m$ не имеет решений?
A) $m = 1$ B) $m = 0$ C) $m = -1$ D) $m = 2$

12. (97-10-22) При каких значениях n уравнение $nx + 5 = n - 2x$ не имеет решений?
A) 5 B) -2 C) 1 D) -5

13. (99-7-21) Найдите произведение всех значений a, при которых уравнение

$$(a^2 - 4)x + 5 = 0$$

не имеет решений.
A) 4 B) -4 C) 0 D) 2

14. (99-8-21) При каких значениях a уравнение

$$6x - a - 6 = (a + 2)(x + 2)$$

не имеет решений?
A) 4 B) 2 C) -2 D) 6

15. (00-3-11) При каких значениях k уравнение

$$k(k + 6)x = k + 7(x + 1)$$

не имеет решений?
A) 1 и 7 B) 1 C) 7 D) 1 и -7

16. (02-7-7) При каких значениях a уравнение

$$\frac{3x - a}{5} = \frac{ax - 4}{3}$$

не имеет решений?
A) 1,8 B) 2 C) 2,2 D) 1

17. (02-11-9) Решите уравнение

$$\frac{2x + 3}{2} + \frac{2 - 3x}{3} = 2,1(6).$$

A) $\emptyset$ B) 2 C) -2 D) $x \in \mathbb{R}$

Решение: Обе части уравнения умножим на 6 :

$$6x + 9 + 4 - 6x = 6 \cdot 2,1(6).$$

Периодическую дробь 2,1(6) обратим в обыкновенную дробь: $2\frac{16-1}{90} = 2\frac{1}{6} = \frac{13}{6}$. В результате получим равенство $(6-6)x = 13-13$. Оно верно для всех $x \in \mathbb{R}$. **Ответ:** $x \in \mathbb{R}$ (D).

18. (03-8-11) Решите уравнение

$$\frac{6x + 2}{4} + \frac{2x + 3}{2} - 2,5x + 2 = 4.$$

A) $\emptyset$ B) $x \in \mathbb{R}$ C) 10 D) -10

19. Решите уравнение

$$\frac{x + 2}{3} + \frac{7x - 1}{2} = 3,8(3)x + 0,1(6).$$

A) $\emptyset$ B) $x \in \mathbb{R}$ C) 10 D) -10

20. (98-1-20) При каких значениях m уравнение

$$m(mx - 1) = 9x + 3$$

имеет бесконечно много корней?
A) $m = 0$ B) $m = 3$
C) $m = -3$ D) $m = -1$

Решение: Раскроем скобки:

$$m^2x - m = 9x + 3.$$

Приведем это уравнение к виду $(m^2 - 9)x - (m+3) = 0$, чтобы оно имело бесконечно много решений, необходимо выполнение

$$\begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ m + 3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $m = -3$. **Ответ:** -3 (C).

21. (96-7-22) При каких значениях a уравнение $ax - a = x - 1$ имеет бесконечно много корней?
A) $a = 1$ B) $a = 2$ C) $a = -1$ D) $a \in \mathbb{R}$

22. (96-10-21) При каких значениях n уравнение $nx + 1 = n + x$ имеет бесконечно много корней?
A) $n = 0$ B) $n = 1$ C) $n = 2$ D) $n \neq 1$

23. (97-7-22) При каких значениях m уравнение $m^2x - m = x + 1$ имеет бесконечно много корней?
A) $m = 1$ B) $m = 0$ C) $m = -1$ D) $m = \pm 1$

24. (98-12-28) При каких значениях a уравнение

$$10(ax - 1) = 2a - 5x - 9$$

имеет бесконечно много корней?
A) $-\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) -2

25. (01-1-10) При каких значениях a уравнение

$$(a^2 + 2)x = a(x - a) + 2$$

имеет бесконечно много корней?
A) $-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$ D) $\emptyset$

26. (03-7-44) Решите уравнение

$$\frac{3 + 25x}{3x + 7} = 5.$$

A) $-3,2$ B) 1,5 C) $-1\frac{1}{5}$ D) 3,2

27. (03-7-48) Решите уравнение

$$\left(1,7 : \left(1\frac{2}{3} \cdot x - 3,75\right)\right) : \frac{8}{25} = 1\frac{5}{12}.$$

A) 5,2 B) $5\frac{3}{4}$ C) 4 D) 4,5

28. (99-8-11) Решите уравнение

$$\frac{(x - 12) : \frac{3}{8}}{0,3 \cdot 3\frac{1}{3} + 7} = 1.$$

A) 25 B) 14 C) 15 D) 16

29. (01-8-4) Решите уравнение

$$\left(4\frac{3}{8}x + 5\frac{1}{16}\right) \cdot \frac{4}{15} = \frac{5}{12}x + 2\frac{2}{5}.$$

A) $\frac{1}{15}$ B) $1\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{185}$ D) $2\frac{1}{5}$

30. (02-7-43) Найдите значение n, если

$$986^2 - 319^2 = 2001 \cdot n.$$

A) 435 B) 443 C) 515 D) 475

31. (03-11-57) Решите уравнение

$$12\left(1\frac{3}{4}x + \frac{5}{8}\right) = -6\frac{1}{2}.$$

A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{13}{21}$

32. (02-7-6) При каком значении m уравнение

$$\frac{6x - m}{2} = \frac{7mx + 1}{3}$$

имеет корень, равный нулю?

A) $-\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $\frac{1}{2}$

4.2.1 Уравнения в виде пропорции

1. (96-9-75) Найдите неизвестный член пропорции

$$3\frac{3}{5} : 2\frac{7}{10} = 3\frac{3}{4} : x.$$

A) $2\frac{13}{16}$ B) $2\frac{3}{10}$ C) $3\frac{1}{3}$ D) $1\frac{15}{16}$

Решение: Из равенства произведения средних членов пропорции произведению ее крайних членов имеем:

$$2\frac{7}{10} \cdot 3\frac{3}{4} = x \cdot 3\frac{3}{5} \iff \frac{27}{10} \cdot \frac{15}{4} : \frac{18}{5} = x.$$

Выполнив умножение и деление, получим $x = 2\frac{13}{16}$. **Ответ:** $2\frac{13}{16}$ (A).

2. (00-5-10) Решите уравнение

$$1\frac{1}{12}x : 2\frac{1}{12} = 2\frac{3}{5}.$$

A) 5 B) 3 C) $1\frac{5}{12}$ D) 4

3. (98-12-12) Решите уравнение

$$(12,5 - x) : 5 = (3,6 + x) : 6.$$

A) $5\frac{2}{11}$ B) $5\frac{3}{11}$ C) $5\frac{4}{11}$ D) $5\frac{1}{11}$

4. (96-7-12) Найдите неизвестный член пропорции

$$6,9 : 4,6 = x : 5,4.$$

A) 7,1 B) 7,7 C) 8,1 D) 8,4

5. (97-3-12) Найдите неизвестный член пропорции

$$3,5 : x = 0,8 : 2,4.$$

A) 10,5 B) 9,2 C) 13,5 D) 7,8

6. (97-7-12) Найдите неизвестный член пропорции

$$5,4 : 2,4 = x : 1,6.$$

A) 3,6 B) 4 C) 2,8 D) 4,6

7. (97-10-12) Найдите неизвестный член пропорции

$$0,25 : 1,4 = 0,75 : x.$$

A) 3,6 B) 2,4 C) 4,2 D) 5,2

8. (98-7-13) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{3} + x\right) : 7 = \left(\frac{3}{4} + x\right) : 9.$$

A) $1\frac{3}{8}$ B) $1\frac{1}{8}$ C) $1\frac{5}{8}$ D) $1\frac{7}{8}$

9. (03-11-55) Найдите неизвестный член пропорции

$$12\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} = 16\frac{2}{3} : y.$$

A) $3\frac{1}{3}$ B) $3\frac{2}{3}$ C) $3\frac{1}{6}$ D) $3\frac{5}{6}$

4.3 Квадратные уравнения

Уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \tag{4.5}$$

или уравнение, которое с помощью тождественных преобразований можно привести к виду (4.5) называется *уравнением второй степени с одной переменной* или *квадратным уравнением.* Здесь x – переменная, a ($a \neq 0$), b и c – произвольные числа. (4.5) называется *нормальной формой* квадратного уравнения, a – называется первым коэффициентом, b – вторым коэффициентом, c – третьим коэффициентом или свободным членом. Корни квадратного уравнения находятся по формуле

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{4.6}$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного уравнения и обозначается буквой D : $D = b^2 - 4ac$.

Если $a = 1$, уравнение (4.5) называется *приведенным квадратным уравнением.* Приведенное квадратное уравнение обычно записывают в виде

$$x^2 + px + q = 0 \tag{4.7}$$

Если в (4.5) $b = 0$ или $c = 0$ или $b = c = 0$, такое уравнение называется *неполным квадратным уравнением.* Например, корнями неполного квадратного уравнения $ax^2 + bx = 0$ являются $x_1 = 0$, $x_2 =$

$-b/a$. Неполное квадратное уравнение $ax^2 + c = 0$ разрешимо при $ac < 0$ и его корни имеют вид $x_{1,2} = \pm\sqrt{-c/a}$. Неполное квадратное уравнение $ax^2 = 0$ имеет корень $x_1 = 0$.

1. **Теорема Виета. Если числа x_1, x_2 являются корнями уравнения (4.7), то** $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$
2. **Если $D > 0$, то уравнение (4.5) имеет два различных действительных корня.**
3. **Если $D = 0$, то уравнение (4.5) имеет единственный корень.**
4. **Если $D < 0$, то уравнение (4.5) не имеет действительных корней.**
5. **Если числа $x_1,\ x_2$ являются корнями квадратного уравнения (4.5), квадратный трёхчлен ax^2+bx+c будет равен произведению $a,\ x-x_1$ и $x-x_2$: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.**
6. **Уравнение $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ имеет корни $x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta$.**

   Корни приведенного квадратного уравнения (4.7) имеют свойства:

7. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q.$
8. $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q.$
9. $x_1^3 + x_2^3 = 3pq - p^3.$
10. $x_1^4 + x_2^4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2.$

1. Решите квадратное уравнение

$$x^2 + 5x - 6 = 0.$$

A) $-6;\ 1$ B) $-1;\ 6$ C) $1;\ 6$ D) $2;\ 3$

Решение: В данном квадратном уравнении $a = 1,\ b = 5,\ c = -6$. Определим, имеет ли оно решение. Для этого вычислим его дискриминант $D = 5^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 25 + 24 = 49$. Так как дискриминант положителен, уравнение имеет два корня. Вычислим их по формуле (4.6):

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{-5-7}{2} = -6,$$

$$x_2 = \frac{-5+\sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{-5+7}{2} = 1.$$

Ответ: $-6;\ 1$ (A).

2. Решите квадратное уравнение

$$2x^2 + 3x - 14 = 0.$$

A) $-7;\ 2$ B) $-2;\ 3\frac{1}{2}$ C) $-3\frac{1}{2};\ 2$ D) $2;\ 3\frac{1}{2}$

3. Решите квадратное уравнение

$$4x^2 + 12x + 9 = 0.$$

A) $-7;\ 2$ B) $-1,5$ C) -3 D) $\emptyset$

4. Решите квадратное уравнение

$$9x^2 + 6x + 3 = 0.$$

A) $-1;\ \frac{1}{3}$ B) $-2;\ \frac{1}{6}$ C) -3 D) $\emptyset$

5. (00-8-64) Решите уравнение

$$1998x^2 - 2000x + 2 = 0.$$

A) $1;\ \frac{2}{1998}$ B) $-1;\ \frac{2}{1998}$
C) $1;\ -\frac{2}{1998}$ D) $-1;\ -\frac{2}{1998}$

Решение: Разделив обе части уравнения на 1998, запишем его в виде

$$x^2 - (1 + \frac{2}{1998})x + 1\cdot\frac{2}{1998} = 0.$$

Согласно свойству 6, его корни равны $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{2}{1998}$. **Ответ:** $1;\ \frac{2}{1998}$ (A).

6. Решите уравнение

$$x^2 - 97x + 2010 = 0.$$

A) $30;\ 67$ B) $-30;\ -67$ C) $15;\ 134$ D) $2;\ 1005$

7. Решите неполное квадратное уравнение

$$2x^2 - 6x = 0.$$

A) $0;\ 3$ B) $-2;\ 6$ C) 3 D) $\emptyset$

Решение: *1-способ.* В уравнении $a = 2,\ b = -6,\ c = 0$. Поэтому его дискриминант $D = (-6)^2 - 4\cdot 2\cdot 0 = 36 > 0$. Уравнение имеет два корня. По формуле (4.6) находим $x_1 = 0,\ x_2 = 3$.

2-способ. Разложим левую часть уравнения на множители $2x(x-3) = 0$. Из равенства произведения нулю получим $x_1 = 0,\ x_2 = 3$. **Ответ:** $0;\ 3$ (A).

8. Решите неполное квадратное уравнение

$$x^2 - 7x = 0.$$

A) $0;\ 3$ B) 7 C) $0;\ 7$ D) 0

9. Решите неполное квадратное уравнение

$$9x^2 - 1 = 0.$$

A) $0;\ \frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}$ C) $0;\ -\frac{1}{3}$ D) $\emptyset$

10. Решите неполное квадратное уравнение

$$3x^2 + \frac{1}{3} = 0.$$

A) $0;\ \frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{3};\ 1$ C) $0;\ -\frac{1}{3}$ D) $\emptyset$

11. (96-1-18) Сколько корней имеет уравнение

$$3 - x = -\frac{4}{x}?$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) ни одного

Решение: Считая $x \neq 0$, обе части равенства умножим на x. Имеем: $3x - x^2 + 4 = 0$. Дискриминант этого уравнения $D = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 25 > 0$. Поэтому оно имеет два корня. **Ответ:** 2 (B).

12. (96-9-69) Сколько корней имеет уравнение

$$\frac{2}{x} = x + 2?$$

A) 3 B) 2 C) 1 D) ни одного

13. Сколько корней имеет уравнение

$$x^2 - 6x + 9 = 0?$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) ни одного

14. Сколько действительных корней имеет уравнение

$$4x^2 + 8x + 7 = 0?$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) ни одного

15. (96-7-13) Какие значения принимает $3x - 1$, если известно, что $(3x - 1) \cdot (x - 2) = 0$?

A) только $\frac{1}{3}$ B) только 0
C) $\frac{1}{3}$ или 0 D) 0 или 5

Решение: Из $(3x - 1) \cdot (x - 2) = 0$ следует $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 2$. Подставив эти значения в $3x - 1$ получим $3x_1 - 1 = 0$ и $3x_2 - 1 = 5$. **Ответ:** 0 или 5 (D).

16. (97-3-13) Какие значения принимает $2x + 1$, если известно, что $(2x + 1) \cdot (x - 1,5) = 0$?

A) только 0 B) только $-\frac{1}{2}$
C) 0 или $-\frac{1}{2}$ D) 4 или 0

17. (97-7-13) Какие значения принимает $\frac{1}{5}x + 4$, если известно, что $(x - 5) \cdot (\frac{1}{5}x + 4) = 0$?

A) только 0 B) только -20
C) 0 или 5 D) 0 или 8

18. (97-10-13) Какие значения принимает $4x + 1$, если известно, что $(4x + 1) \cdot (x - \frac{1}{4}) = 0$?

A) только $-\frac{1}{4}$ B) только $\frac{1}{4}$
C) только 0 D) 0 или 2

19. (96-3-18) Разложите на линейные множители квадратный трехчлен $x^2 - x - 2$.

A) $(x - 1)(x + 2)$ B) $(x - 1)(x - 2)$
C) $(x + 1)(x + 2)$ D) $(x + 1)(x - 2)$

Решение: Для разложения квадратного трехчлена используем 5-свойство. С целью найдем корни квадратного уравнения $x^2 - x - 2$. Его дискриминант равен $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$. Так как $D > 0$, уравнение имеет два корня. Найдем их по формуле (4.6)

$$x_1 = \frac{1 - 3}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{1 + 3}{2} = 2.$$

По 5-свойству $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$. **Ответ:** $(x + 1)(x - 2)$ (D).

20. (96-11-19) Разложите на линейные множители квадратный трехчлен $x^2 - 3x + 2$.

A) $(x - 1)(x + 2)$ B) $(x - 2)(x + 1)$
C) $(x - 1)(x - 2)$ D) $(x + 1)(x + 2)$

21. (97-2-27) Сократите дробь

$$\frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}.$$

A) $\frac{4 + x}{1 - x}$ B) $\frac{4 - x}{x + 1}$ C) $\frac{x + 4}{x + 1}$ D) $\frac{x + 4}{x - 1}$

22. (97-8-26) Сократите дробь

$$\frac{y^2 - 3y - 4}{y^2 - 1}.$$

A) $\frac{y + 4}{y + 1}$ B) $\frac{4 - y}{y - 1}$ C) $\frac{y + 4}{y - 1}$ D) $\frac{y - 4}{y - 1}$

23. (00-8-37) Разложите на множители

$$3x^2 - 6xm - 9m^2.$$

A) $3(x + m)(x - 3m)$ B) $(x - 3m)^2$
C) $3(x - m)(x + 3m)$ D) $(3x - m)^2$

24. (00-3-18) Найдите $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$, где x_1 и x_2-корни уравнения

$$x^2 - 3x - 6 = 0.$$

A) 0,(3) B) 0,5 C) $-0,5$ D) $-0,375$

Решение: Для данного приведённого квадратного уравнения $p = -3$, $q = -6$. Выражение, значение которого требуется найти, запишем в виде

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 x_2)^3}.$$

Согласно теореме Виета и 9-свойству значение этой дроби равно

$$\frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 x_2)^3} = \frac{3 \cdot (-3) \cdot (-6) - (-3)^3}{(-6)^3} = -\frac{81}{216}.$$

Обратим это число в десятичную дробь $-0,375$. **Ответ:** $-0,375$ (D).

25. (96-13-18) Вычислите $x_1^2 + x_2^2$, если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2 + x - 5 = 0$.

A) 10 B) 12 C) 11 D) 9

26. (97-4-24) Вычислите a^2+b^2, если a и b корни уравнения $3x^2-2x-6=0$.
A) 6 B) 8 C) $4\frac{4}{9}$ D) $4\frac{2}{9}$

27. (98-4-25) Найдите $x_1^3+x_2^3$, если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2+x-1=0$.
A) 1 B) 3 C) 2 D) -4

28. (98-5-21) Вычислите $x_1^3\cdot x_2^3$, если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2+4x-5=0$.
A) 124 B) -125 C) 130 D) 5

29. (99-7-23) Найдите $x_1^3-x_2^3$, если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2+2x+1=0$.
A) 1 B) 3 C) 4 D) 0

30. (01-10-2) Вычислите $x_1^2x_2^4+x_1^4x_2^2$, если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2+x-5=0$.
A) 225 B) 145 C) 125 D) 275

31. (03-1-5) Вычислите $x_1^4+x_2^4$, если x_1 и x_2 корни уравнения $x^2+3x-3=0$.
A) 207 B) 192 C) 243 D) 168

32. (03-8-19) Найдите разность кубов большего и меньшего корней уравнения

$$x^2-\frac{\sqrt{85}}{4}x+1\frac{5}{16}=0.$$

A) -2 B) -1 C) 2 D) 1

33. (01-2-23) Найдите среднее пропорциональное корней уравнения

$$x^2-13x+36=0.$$

A) 4 B) 9 C) 6,5 D) 6

Решение: Под средним пропорциональным чисел a и b понимается значение $\sqrt{a\,b}$. Дискриминант данного уравнения $D=(-13)^2-4\cdot 36=25>0$. Поэтому это уравнения имеет два корня. $\sqrt{x_1\cdot x_2}=\sqrt{q}=\sqrt{36}=6$. **Ответ:** 6 (D).

34. (00-1-12) Найдите среднее пропорциональное корней уравнения

$$2x^2-26x+72=0.$$

A) 4 B) 5 C) 7 D) 6

35. (99-10-5) На сколько среднее арифметическое корней уравнения

$$\frac{x^2+16}{x}=10$$

меньше их произведения?
A) 13 B) 12 C) 14 D) 11

36. (02-11-14) Составьте квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, один из корней которого равен $3+\frac{\sqrt{2}}{2}$.
A) $x^2-3x+9=0$ B) $x^2-6x+17=0$
C) $x^2-12x+9=0$ D) $2x^2-12x+17=0$

37. (02-1-49) Решениями какого уравнения являются числа 3 и -2?
A) $x^2-x=6$ B) $x^2+x=6$
C) $x^2+6=x$ D) $x^2+6=-x$

4.3.1 Квадратные уравнения с параметром

Уравнение, получаемое заменой в уравнении $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ по крайней мере одного из фиксированных чисел a,b,c буквой или буквенным выражением, принимающих значения из интервала $(-\infty;\infty)$ называется *квадратным уравнением с параметром*. А эта буква называется параметром.

1. **Квадратное уравнение (4.5) при $D=b^2-4ac=0$ или $a=0$, $b\neq 0$ имеет единственное решение.**
2. **Квадратное уравнение (4.5) при $D>0$ и $ac>0$ имеет два корня одинакового знака.**
3. **Квадратное уравнение (4.5) при $D>0$ и $ac<0$ имеет два корня разного знака.**
4. **Если $x=0$ является корнем квадратного уравнения (4.5), то $c=0$ и наоборот.**
5. **Если $a>0$ и $D=0$, то квадратный трехчлен ax^2+bx+c является полным квадратом: $ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$.**

1. (97-2-24) Найдите произведение всех значений m, при которых один из корней уравнения

$$x^2-9x+(m^2-4)(m^2-9)=0$$

равен 0.
A) 36 B) $4\sqrt{3}$ C) -6 D) 6

Решение: *1-способ.* Согласно 4-свойству, 0 является корнем квадратного уравнения, тогда и только тогда, когда его свободный член $c=0$. Это условие приводит к равенству $(m^2-4)(m^2-9)=0$. Отсюда имеем $m_{1,2}=\pm 2$ и $m_{3,4}=\pm 3$, их произведение равно $m_1\cdot m_2\cdot m_3\cdot m_4=36$.

2-способ. Нуль является корнем данного уравнения. Подставив значение $x=0$ в уравнение получим $(m^2-4)(m^2-9)=0$. Корни этого уравнения суть ± 2 и ± 3. Их произведение равно 36. **Ответ:** 36 (A).

2. (00-10-21) При каком значении p один из корней уравнения $x^2+px+15=0$ равен 5?
A) -4 B) 4 C) -2 D) -8

3. (01-6-13) При каком значении a один из корней уравнения $x^2-(a-1)x+36=0$ равен 4?
A) 13 B) 14 C) 11 D) 10

4. (98-10-43) Один корень уравнения

$$2x^2 + x - a = 0$$

равен 2. Найти второй корень.
A) $2,5$ B) $-2,5$ C) $1,5$ D) $-1,5$

5. (97-12-24) Один из корней уравнения

$$x^2 + px - 12 = 0$$

равен 2. Чему равно $p : (-12)$?
A) $\frac{1}{3}$ B) $-\frac{5}{12}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$

6. (00-8-31) При каком значении b трехчлен

$$x^2 + \frac{2}{3}x + b$$

представляет собой полный квадрат?
A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{2}{3}$

Решение: В данном квадратном трехчлене $a = 1$. Согласно 5-свойству он является полным квадратом тогда и только тогда, когда $D = (\frac{2}{3})^2 - 4b = 0$. Из этого условия получаем $b = \frac{1}{9}$. **Ответ:** $\frac{1}{9}$ (A).

7. (00-8-34) При каком значении k трехчлен

$$x^2 + 2(k-9)x + k^2 + 3k + 4$$

представляет собой полный квадрат?
A) $\frac{11}{3}$ B) 3 C) 4 D) $\frac{5}{7}$

8. (03-3-14) При каком значении m трехчлен

$$(m-1)x^2 + 2mx + 3m - 2$$

представляет собой полный квадрат?
A) $2; \frac{1}{2}$ B) -2 C) 2 D) $\frac{1}{2}$

9. Найдите разность корней уравнения

$$x^2 + px + 6 = 0,$$

если сумма квадратов его корней равна 40.
A) $\sqrt{40}$ B) 4 C) -4 D) -4 и 4

10. (98-12-32) При каких значениях m корни уравнения

$$3x^2 + (3m - 15)x - 27 = 0$$

являются противоположными числами?
A) 5 B) 0 C) $-3; 3$ D) -5

11. (98-12-33) Найдите сумму корней уравнения

$$x^2 + px + 6 = 0$$

если разность квадратов его корней равна 40.
A) $-8; 8$ B) 8 C) -8 D) $4 + \sqrt{10}$

12. (99-1-18) Один корень уравнения $x^2 + px - 35 = 0$ равен 7. Найти второй корень и значение p.
A) $-5; -2$ B) $-5; 2$ C) $5; 2$ D) $5; -2$

Решение: По теореме Виета имеем $x_1 x_2 = 7x_2 = -35$. Отсюда получим $x_2 = -5$. Снова по теореме Виета имеем $x_1 + x_2 = -p \iff 7 + (-5) = -p$. Следовательно, $p = -2$. **Ответ:** $-5; -2$ (A).

13. (01-11-9) Один корень уравнения

$$x^2 + 2ax + a = 0$$

равен 1. Найти второй корень.
A) $-\frac{4}{3}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$

14. (01-1-9) При каком значении k уравнение

$$kx^2 + 12x - 3 = 0$$

имеет корень, равный $0,2$?
A) 135 B) 60 C) -135 D) 15

15. (01-12-39) При каких значениях k уравнение

$$(k-2)x^2 + 7x - 2k^2 = 0$$

имеет корень, равный $x = 2$?
A) $1; 3$ B) $1; -3$ C) $-1; 3$ D) $-2; 3$

16. (02-5-17) Найдите все значения a, при которых один из корней уравнения

$$x^2 - 4x - (a-1)(a-5) = 0$$

равен 2.
A) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ B) $(-\infty; \infty)$
C) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$ D) $\{3\}$

17. (00-7-12) Укажите уравнение, корни которого обратны корням уравнения $x^2 + px + q = 0$.
A) $px^2 + qx + 1 = 0$ B) $qx^2 + px - 1 = 0$
C) $qx^2 + px + 1 = 0$ D) $qx^2 - px + 1 = 0$

18. (00-7-47) При каких значениях m один из корней уравнения

$$x^2 - 4mx + 48 = 0$$

больше другого в 3 раза?
A) 2 B) ± 4 C) ± 3 D) 4

Решение: Из условия задачи имеем $x_2 = 3x_1$. По теореме Виета получим

$$x_1 + x_2 = 4m \iff x_1 + 3x_1 = 4m.$$

Отсюда следует $x_1 = m$. Снова используя теореме Виета имеем

$$x_1 x_2 = 48 \iff x_1 \cdot 3x_1 = 3m^2 = 48 \iff m^2 = 16.$$

Значит, $m = \pm 4$. **Ответ:** ± 4 (B).

19. (00-4-9) В уравнении $x^2 - 5x + a = 0$ один из корней в 9 раз больше другого. Найдите a?
A) $2,5$ B) $2,4$ C) $2,25$ D) $3,5$

20. (02-11-15) При каком значении q один из корней уравнения

$$x^2 - 8x + q = 0$$

в 3 раза больше другого?
A) 6 B) 8 C) 12 D) 16

21. (03-7-78) При каком значении m один из корней уравнения

$$4x^2 - (3 + 2m)x + 2 = 0$$

в 8 раз меньше другого?
A) 3 B) -6 C) $-6; 3$ D) $3; 5$

22. (00-8-9) x_1 и x_2 -корни уравнения

$$3x^2 + 2x + b = 0.$$

Найдите свободный член b, если известно, что $2x_1 = -3x_2$.
A) -8 B) 6 C) 4 D) -3

23. (01-1-15) При каких значениях a уравнение

$$5(a + 4)x^2 - 10x + a = 0$$

имеет действительные корни различных знаков?
A) $(-1; 5)$ B) $(-4; 0)$
C) $(-5; 1)$ D) $(-5; -4) \cup (0; 1)$

24. (01-2-62) При каких значениях a расстояние на числовой оси между корнями уравнения

$$x^2 + ax + 12 = 0$$

равно 1?
A) ± 5 B) ± 6 C) ± 7 D) ± 8

Решение: По условию задачи имеем $|x_1 - x_2| = 1$. Обе части этого равенства возведем в квадрат и пользуясь тождеством $|x|^2 = x^2$, получим

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q = 1^2.$$

Подставив в это равенство значения $p = a$, $q = 12$, получаем $a^2 - 4 \cdot 12 = 1 \iff a^2 = 49$. Значит, $a = \pm 7$. **Ответ:** ± 7 (C).

25. (01-5-20) При каком положительном значении a один корень уравнения

$$8x^2 - 30x + a^3 = 0$$

равен квадрату другого корня?
A) 3 B) 1 C) 2 D) 4

26. (02-1-50) При каких значения a уравнение

$$ax^2 - 2x + 3 = 0$$

имеет один корень?
A) $\frac{1}{3}$ B) 0 va 1 C) 3 va 1,5 D) $\frac{1}{3}$ va 0

27. (02-7-2) Решите уравнение

$$x^2 - 3ax + 2a^2 - ab - b^2 = 0.$$

A) $a - b; 2a + b$ B) $-a + b; -2a + b$
C) $-a - b; 2a - b$ D) $a + b; 2a + b$

28. (02-7-4) При каком значении n один корень уравнения

$$x^2 - 12x + n = 0$$

больше другого корня на $2\sqrt{5}$?
A) 31 B) 30 C) 3 D) 29

29. (02-8-21) При каком значении a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + (a + 2)x + a = 0$$

равно 3?
A) -1 B) 1 C) -2 D) 3

30. (97-2-25) Один из корней уравнения $x^2 - 6x + q = 0$ равен 2. Чему равна сумма всех коэффициентов уравнения?
A) 2 B) -6 C) 3 D) -5

Решение: Подставив в уравнение $x^2 - 6x + q = 0$ значение $x = 2$ получим $4 - 12 + q = 0$. Отсюда следует, что $q = 8$. Тогда сумма коэффициентов равна $1 + (-6) + 8 = 3$. **Ответ:** 3 (C).

31. (02-9-13) Найти среднее арифметическое целых значений k, при которых уравнение

$$kx^2 + 3kx + 2k - 1 = 0$$

не имеет корней.
A) -3 B) -2 C) $-1,5$ D) 3

32. (96-3-77) $x_1^2 + x_2^2 = 13$, где x_1 и x_2 - корни уравнения

$$x^2 + |a|x + 6 = 0.$$

Чему равна сумма $x_1 + x_2$?
A) 5 B) -6 C) 6 D) -5

33. (01-8-22) При каких значениях a уравнение

$$\frac{3x - a}{3 - x} + \frac{x + a}{x + 1} = 2$$

имеет один корень?
A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

Решение: Перенесем 2 из правой части равенства в левую и сложив дроби, получим уравнение

$$\frac{2x^2 + 6x - 2ax + 2a - 2(2x - x^2 + 3)}{(3 - x)(1 + x)} = 0.$$

Раскрыв скобки в числителе и приведя подобные члены, запишем его в виде

$$4\left(x^2 - (1 + \frac{a - 3}{2})x + \frac{a - 3}{2}\right) = 0.$$

Используя 6-свойство из п.4.3 для приведенного квадратного уравнения, получим корни $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{a - 3}{2}$. Область определения данного уравнения $\mathbb{R} \backslash \{-1;\ 3\}$. Если положить $x_2 = 1$, то уравнение будет иметь единственное решение $x_1 = x_2 = 1$. Отсюда следует $a = 5$. Если положить $x_2 = -1$ или $x_2 = 3$, то эти значения не входят в область определения уравнения. Поэтому уравнение имеет только корень $x_1 = 1$. Отсюда получим, что $a = 1$ или $a = 9$. Значит, при 3 значениях a уравнение имеет одно решение: **Ответ:** 3 (B).

34. (99-4-19) При каких значениях a уравнение

$$ax^2 - (a+1)x + 2a - 1 = 0$$

имеет один корень?
A) $-1; \frac{1}{7}$ B) $0; -1$ C) $1; -\frac{1}{7}$; D) $1; 0; -\frac{1}{7}$

35. (03-1-58) Найдите произведение всех значений параметра k, для каждого из которых уравнение

$$9x^2 + kx = 2x - k + 6$$

имеет равные корни?
A)100 B) -120 C) 220 D) -196

36. (03-3-11) Известно, что $3x_1 - 2x_2 = 14$, где x_1 и x_2 - корни уравнения

$$x^2 - 3x + m = 0$$

Найдите m.
A) -4 B) 4 C) 6 D) -6

37. (03-3-12) При каком значении p один корень уравнения

$$x^2 - px + 5 = 0$$

больше другого корня на 4?
A) 6 B) 4 C) -4 D) ± 6

38. (03-3-25) При каких значениях a уравнение

$$x + 4 = \frac{a}{x}$$

имеет различные действительные корни?
A) $(-4; \infty)$ B) $(-4; 0) \cup (0; \infty)$
C) $[-4; \infty)$ D) $[-4; 0) \cup (0; \infty)$

39. (03-4-12) При каких значениях a оба корня уравнения

$$x^2 + 3x + a + 0,75 = 0$$

отрицательны?
A) $0,5 < a < 2$ B) $-0,75 < a < 1,5$
C) $0,6 < a < 1,8$ D) $0,8 < a < 1,2$

40. (03-5-16) При каком значении a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - (a-2)x - a - 1 = 0$$

принимает наименьшее значение?
A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) 4

Решение: По условию задачи нужно найти значение a, при котором значение выражение $x_1^2 + x_2^2$ будет наименьшим. По 7- равенству из п. 4.3 имеем $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q = (a-2)^2 - 2(-a-1) = a^2 - 2a + 6 = (a-1)^2 + 5$. Из неотрицательности квадрата действительного числа имеем $x_1^2 + x_2^2 = (a-1)^2 + 5 \geq 5$. Значение этого выражения будет наименьшим при $a - 1 = 0$, т.е. $a = 1$. **Ответ:** 1 (A).

41. (99-2-16) x_1 и x_2 - корни уравнения

$$x^2 - px + p - 1 = 0.$$

При каком значении p сумма $x_1^2 + x_2^2$ будет наименьшей?
A) 2 B) -2 C) 1 D) -1

42. (00-1-13) y_1 и y_2 - корни уравнения

$$y^2 - by + b - 1 = 0.$$

При каком значении b сумма $y_1^2 + y_2^2$ будет наименьшей?
A) 1, 2 B) 0, 85 C) 1 D) 1, 5

43. (01-7-16) При каком значении m сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + (m-1)x + m^2 - 1,5 = 0$$

будет наибольшей?
A) 1, 5 B) $-1, 5$ C) 1 D) -1

44. (01-8-16) При каком значении m сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + (2-m)x - m - 3 = 0$$

будет наибольшей?
A) 2 B) 1 C) -1 D) -3

45. (01-12-25) При каком значении a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + (a+2)x + a = 3$$

будет наибольшей?
A) 0 B) -1 C) 1 D) 3

46. (03-7-62) Найдите q, если сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 8x + q = 0$ равна 34.
A) 15 B) -12 C) 12 D) -15

Решение: По условию задачи $x_1^2 + x_2^2 = 34$. По 7- равенству из п.4.3 имеем $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$: $p^2 - 2q = 34 \Longleftrightarrow (-8)^2 - 2q = 34 \Longleftrightarrow q = 15$.

Ответ: 15 (A).

47. (03-10-14) При каком значении q сумма кубов корней уравнения $x^2 - x - q = 0$ равна 19?
A) 6 B) 5 C) 7 D) 4

48. (03-11-1) При каком целом значении a сумма квадратов корней уравнения

$$2x^2 + 6ax + a = 0$$

равна 38?
A) -2 B) 2 C) -3 D) -1

49. (03-11-6) Найдите $n - m$, если m и n - корни уравнения $x^2 + 3mx - 5n = 0$ $(m \cdot n \neq 0)$.
A) 25 B) 24 C) 18 D) 12

50. (03-5-29) Найдите k в уравнении
$$x^2 + 3x + k = 0,$$
если его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $\frac{x_1}{x_2} = -\frac{2}{5}$.
A) -10 B) -7 C) -12 D) -8

51. (03-9-4) При каком значении m сумма квадратов корней уравнения $3x^2 - 21x + m = 0$ равна 25?
A) 36 B) -36 C) 24 D) 42

4.4 Рациональные уравнения

Если степень многочлена $P(x)$ не меньше трех, то уравнение $P(x) = 0$ называется *уравнением высокой степени.* При решении таких уравнений в основном используются два метода. Это метод *введения новой переменной* и метод *разложения на множители.*

1 – *метод* – введение новой переменной. Уравнение
$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \ a \neq 0 \qquad (4.8)$$
называется *биквадратным уравнением.* Если ввести новую переменную $x^2 = y \geq 0$, то уравнение (4.8) приведется к квадратному уравнению
$$ay^2 + by + c = 0. \qquad (4.9)$$
Если уравнение (4.9) не имеет решений или имеет только отрицательные корни, то уравнение (4.8) не имеет решения. Если уравнение (4.9) имеет неотрицательные решения y_1 и y_2, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}$ и $x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$ являются решениями уравнения (4.8). Если биквадратное уравнении имеет решение, то *сумма всех его корней равна нулю.*

2 – *метод* – метод разложения на множители.

Пример 1. Решить уравнение
$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x = 0. \qquad (4.10)$$
Решение: В силу тождества
$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x = (x^2 - 1)(x^2 - 4x)$$
данное уравнение равносильно уравнению $(x^2-1)(x^2-4x) = 0$. Из равенства произведения нулю получаем уравнения
$$x^2 - 1 = 0, \qquad (4.11)$$
$$x^2 - 4x = 0. \qquad (4.12)$$
Любое решение уравнения (4.10) является решением одного из уравнений (4.11) или (4.12), и наоборот. Уравнение (4.11) имеет корни $x_1 = -1, x_2 = 1$, а уравнение (4.12) имеет корни $x_3 = 0$, $x_4 = 4$. Значит уравнение (4.10) имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$. **Ответ:** ±1; 0; 4.

Если дано рациональное уравнение вида $P(x) : Q(x) = 0$, то его решения получаются отбрасыванием из корней уравнения $P(x) = 0$ корней уравнения $Q(x) = 0$. Рассмотрим пример.

Пример 2. Решите уравнение
$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2} = 0.$$
Решение: Известно, что дробь равна нулю, когда ее числитель равен нулю. Поэтому данное уравнение равносильно системе
$$\begin{cases} x^2 + 5x + 6 = 0 \\ x^2 + x - 2 \neq 0. \end{cases}$$
Корни первого уравнения $x_1 = -2$, $x_2 = -3$. Проверим, удовлетворяют ли они второму условию системы:
$$(-2)^2 + (-2) - 2 = 0; \quad (-3)^2 + (-3) - 2 = 4 \neq 0.$$
$x = -2$ не удовлетворяет второму условию. Следовательно корнем данного уравнения является $x = -3$. **Ответ:** -3.

1. (00-3-26) Найдите сумму действительных корней уравнения
$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 120.$$
A) 3 B) -3 C) 2 D) -5

Решение: Введя новую переменную $y = x^2 + 5x$, данное уравнение запишем в виде $(y+4)(y+6) = 120$. Раскроем скобки
$$y^2 + 10y + 24 - 120 = 0 \iff y^2 + 10y - 96 = 0.$$
Корни этого квадратного уравнение $y_1 = 6$, $y_2 = -16$. Теперь данное уравнения распадается на два уравнения

1) $x^2+5x = 6$, $x^2+5x-6 = 0$, $x_1 = -6$, $x_2 = 1$,

2) $x^2 + 5x + 16 = 0$, $D = 25 - 64 = -39 < 0$.

2)- уравнение не имеет решения. Значит, данное уравнение имеет два корня $x_1 = -6$ и $x_2 = 1$, их сумма $x_1 + x_2 = -5$. **Ответ:** -5 (D).

2. (96-7-15) Найдите сумму корней уравнения
$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$
A) 13 B) 5 C) 0 D) 36

3. (97-7-15) Найдите разность наибольшего и наименьшего корней уравнения
$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$
A) 1 B) 8 C) 2 D) 6

4. (98-4-33) Найдите сумму корней уравнения
$$2x^4 - 7x^2 + 2 = 0.$$
A) 7 B) 3,5 C) 0 D) 2

5. (98-6-20) Найдите произведение корней уравнения

$$(x+\frac{1}{x})^2-2(x+\frac{1}{x})-3=0.$$

A) 3 B) −1 C) 4 D) 1

6. (98-11-10) Найдите произведение действительных корней уравнения

$$y^4-2y^2-8=0.$$

A) 4 B) −16 C) 16 D) −4

7. (00-1-16) На какое число множителей с рациональными коэффициентами разлагается выражение

$$(x^4+x^2+1)\cdot(x^4+x^2+2)-12?$$

A) 4 B) 2 C) 3 D) 5

8. (98-6-22) Решите уравнение

$$\frac{2x^2-5x+3}{(10x-5)(x-1)}=0.$$

A) 1 B) 1; $\frac{3}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) 5

Решение: Числитель дроби в левой части уравнения приравниваем к нулю. Корни квадратного уравнения $2x^2-5x+3=0$ равны $x_1=1,\ x_2=1,5$. Знаменатель дроби в левой части уравнения при $x=1$ обращается в нуль, а при $x=1,5$ не равен нулю. Следовательно, $x=1,5$ является корнем уравнения. **Ответ:** $\frac{3}{2}$ (C).

9. (98-11-18) В каком промежутке содержатся решения уравнения

$$\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-2,5.$$

A) $(-\infty;-1)$ B) $[-1;8)$ C) $[2;8)$ D) $[3;8)$

10. (98-11-71) Решите уравнение

$$\frac{1-\frac{1}{x-1}}{1+\frac{1}{x-1}}=0.$$

A) −2 B) 0 C) −1 D) 2

11. (98-12-63) Найдите сумму корней уравнения

$$\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{x(3-x)}.$$

A) 4 B) 7 C) 3 D) 10

12. (00-5-36) Сколько корней имеет уравнение

$$\frac{x^2-x-2}{x^2+x}=0?$$

A) 2 B) 4 C) 1 D) 3

13. (01-1-8) Решите уравнение

$$\frac{2}{x-3}=\frac{x+5}{x^2-9}.$$

A) −2 B) 2 C) 1 D) −1

14. (02-3-25) Найдите произведение корней уравнения

$$\frac{26}{5(x+x^{-1})}=1.$$

A) 1 B) 5 C) 2 D) 2,4

15. (02-4-4) Определите число корней уравнения

$$x^4-(\sqrt{5}+\sqrt{3})x^2+\sqrt{15}=0.$$

A) 2 B) 4 C) 1 D) 0

16. (02-7-41) Найдите сумму корней уравнения

$$(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=40 \quad (x\in\mathbb{R}).$$

A) −6 B) 0 C) −5 D) 6

Решение: Левую часть уравнения запишем в виде произведения $(x+1)(x+5)=x^2+6x+5$ и $(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$. Такая группировка основана на равенстве $1+5=2+4$ и обеспечивает равенство 1−го и 2−го членов получаемых трехчленов. В результате получим уравнение

$$(x^2+6x+5)(x^2+6x+8)-40=0,$$

равносильное данному. Обозначив $x^2+6x+5=y$ приходим к квадратному уравнению

$$y(y+3)-40=0 \quad \text{или} \quad y^2+3y-40=0.$$

Его корни равны $y_1=-8,\ y_2=5$. Подставим эти значение вместо y в обозначении:

$$1)\ x^2+6x+5=-8; \quad 2)\ x^2+6x+5=5.$$

Первое квадратное уравнение не имеет действительных корней, так как его дискриминант $D=6^2-4\cdot13=-14<0$ отрицателен. Второе уравнение является неполным квадратным уравнением вида $x^2+6x=0$ и имеет корни $x_1=-6,\ x_2=0$. Их сумма равна $-6+0=-6$. **Ответ:** −6 (A).

17. (02-11-20) Найдите сумму корней уравнения

$$\frac{3x^2+8x-3}{x+3}=x^2-x+2.$$

A) −8 B) −6 C) −4 D) 4

18. (03-3-28) Найдите произведение корней уравнения

$$\frac{3x^2+8x-3}{x+3}=x^2-x+2.$$

A) 2 B) −2 C) 6 D) 3

19. (03-6-8) Известно, что

$$\frac{4x^2-4xy+3y^2}{2y^2+2xy-5x^2}=1.$$

Вычислите $\frac{x+y}{x-y}$.

A) 2 B) -2 C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$

20. (03-7-56) Найдите модуль разности корней уравнения

$$\frac{x+8}{3}=x-\frac{x-3}{x}.$$

A) 5,5 B) 5 C) 3,5 D) 4

21. (03-8-17) Найдите сумму корней уравнения

$$\frac{3x^2+4x-4}{x+2}=x^2-4x+4.$$

A) 10 B) -5 C) -4 D) 7

22. (03-8-42) Найдите сумму целых корней уравнения

$$x^2+3x+\frac{6}{2-3x-x^2}=1.$$

A) -3 B) 1 C) -5 D) 3

23. (03-11-63) Найдите сумму корней уравнения

$$\frac{x^3-8}{x-2}=6x+1.$$

A) 6 B) 4 C) -4 D) 3

24. (03-12-2) Найдите разность наибольшего и наименьшего корней уравнения

$$3x^4-5x^2+2=0.$$

A) 2 B) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ C) $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ D) -2

4.5 Система уравнений

4.5.1 Система линейных уравнений

Система двух линейных уравнений с двумя переменными записывается так:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \tag{4.13}$$

Здесь a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 известные числа, x, y неизвестные числа (переменные). *Решением системы* (4.13) называется пара $(x;\ y)$, обращающая в верное равенство каждое уравнение системы. *Решить систему* – значит найти все ее решения или показать их отсутствие. Рассмотрим следующие два основных метода решения систем вида (4.13).

Метод подстановки. При решении методом подстановки сначала из какого - нибудь уравнения одну переменную выражают через вторую, затем полученное выражение подставляют в другое уравнение. В результате получается линейное уравнение с одной переменной. Решают это уравнение, и подставив найденное значение в выражение одной переменной через другую находят значение второй переменной. Рассмотрим пример.

1-пример. Решить систему

$$\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+2y=5. \end{cases} \tag{4.14}$$

Решение: Из второго уравнения системы находим $x=5-2y$. Подставив выражение $5-2y$ вместо x в первое уравнение системы, получим:

$$2(5-2y)-3y=3 \iff 7=7y.$$

Это уравнение имеет единственное решение $y=1$. Подставив это значение в выражение $x=5-2y$ найдем $x=5-2=3$. Значит, система (4.14) имеет решение $(3;\ 1)$. **Ответ:** $(3;\ 1)$.

Метод сложения. При решении методом сложения данная система заменяется равносильной ей системой, в которой коэффициенты перед y (или x) в двух уравнениях являются противоположными числами. Сложив почленно левые и правые части уравнений системы, получают линейное уравнение с одной переменной относительно x (или y). Решив ее, находят значение x (или y) и подставив полученное значение x (или y) в любое уравнение системы находят соответсвующее значение y (или x). Рассмотрим пример.

2-пример. Решить систему

$$\begin{cases} 3x-4y=3 \\ x+2y=1. \end{cases} \tag{4.15}$$

Решение: Второе уравнение системы умножим на 2 и сложив почленно уравнения приходим к уравнению $5x=5$. Отсюда получаем $x=1$. Подставив это значение во второе уравнение системы, имеем $1+2y=1$, откуда $y=0$. Итак, пара $(1;\ 0)$– решение системы (4.15). **Ответ:** $(1;\ 0)$.

1. **Если в системе (4.13) $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, то она имеет единственное решение.**

2. **Если в системе (4.13) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, то она имеет бесконечно много решений.**

3. **Если в системе (4.13) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, то она не имеет решений (система не совместна).**

1. (96-6-17) Известно, что

$$\begin{cases} 3x+y=45 \\ z+3y=-15 \\ 3z+x=6. \end{cases}$$

Чему равно $x+y+z$?

A) 12 B) 10 C) 15 D) 9

Решение: Сложим уравнения системы

$$4x + 4y + 4z = 45 - 15 + 6.$$

Отсюда получим

$$4(x + y + z) = 36 \iff x + y + z = 9.$$

Ответ: 9 (D).

2. (96-1-21) Пара чисел $(x; y)$ является решением системы
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 2y = 4. \end{cases}$$
Чему равна разность $x - y$?
A) 1 B) −1 C) 3 D) 0

3. (96-3-24) Определите пару чисел, удовлетворяющих системе уравнений
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1. \end{cases}$$
A) (2; 3) B) (−2; 3) C) (3; 2) D) (−2; −3)

4. (96-3-76) Из системы найдите x
$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + 2y = 5. \end{cases}$$
A) 1 B) 2 C) 3 D) −2

5. (96-9-17) Из системы найдите x
$$\begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$
A) 1 B) 0 C) −1 D) 2

6. (96-9-72) Пара чисел $(x; y)$ является решением системы
$$\begin{cases} 3x - 2y = -8 \\ x + 3y = 1. \end{cases}$$
Чему равна разность $y - x$?
A) 0 B) −1 C) −2, 5 D) 3

7. (96-11-25) Какая из указанных пар удовлетворяет системе уравнений
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1. \end{cases}$$
A) (2; 3) B) (1; 4) C) (4; 1) D) (3; 2)

8. (96-12-74) Решите систему и найдите y.
$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + 2y = 5. \end{cases}$$
A) 2 B) 1 C) 3 D) 1, 5

9. (96-13-17) Из системы найдите x
$$\begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$
A) −1 B) 3 C) 2 D) 1

10. (97-1-11) Пара чисел $(x; y)$ является решением системы
$$\begin{cases} 2x + y - 8 = 0 \\ 3x + 4y - 7 = 0. \end{cases}$$
Чему равно произведение $x \cdot y$?
A) −90 B) 12 C) −10 D) 80

Решение: Из первого уравнения системы найдем $y = 8 - 2x$ и подставим выражение $8 - 2x$ вместо y во второе уравнение

$$3x + 4(8 - 2x) = 7 \iff 25 = 5x.$$

Откуда $x = 5$. Подставим это значение вместо x в уравнение $y = 8 - 2x$ и получим $y = -2$. Произведение найденных значений x и y равно $xy = 5 \cdot (-2) = -10$. **Ответ:** −10 (C).

11. (97-3-21) Найдите $x^2 - y^2$, если
$$\begin{cases} 5x + 2y = -3 \\ x - 3y = -4. \end{cases}$$
A) 2 B) 1 C) 0 D) 2, 5

12. (97-6-11) Пара чисел $(x; y)$ является решением системы
$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - 3y + 8 = 0. \end{cases}$$
Чему равна сумма $x + y$?
A) −1 B) 1 C) 3 D) 4, 5

13. (97-10-21) Найдите $y^2 - x^2$, из системы уравнений
$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 4x - y = -2. \end{cases}$$
A) −1 B) −3 C) 3 D) 5

14. (98-3-16) Из системы найдите x
$$\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5x - 2y = 1. \end{cases}$$
A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$ D) 1

15. (98-10-64) Из системы найдите y
$$\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5x - 2y = 1. \end{cases}$$
A) 0 B) 1 C) 2 D) −2

16. Найдите решение системы
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x + 2y = 12. \end{cases}$$
A) (4; 4) B) (−4; −4) C) (−4; 4) D) (4; 6)

17. (97-4-7) Вычислите $\frac{a}{c}$, если $a = 4b$ и $c + 3b = 0$ $(b \neq 0)$.
A) $-\frac{1}{3}$ B) $1\frac{1}{3}$ C) $1\frac{2}{3}$ D) $-\frac{4}{3}$

Решение: Из условий задачи следует $a = 4b$, $c = -3b$. Значит, $\frac{a}{c} = \frac{4b}{-3b} = -\frac{4}{3}$. **Ответ:** $-\frac{4}{3}$ (D).

18. (97-8-17) Если $2m+n=2$, $2n+p=6$ и $2p+m=4$, то чему равно $m+n+p$?
A) 6 B) 4 C) 5 D) 3

19. (97-12-16) Если $2q-4p=-9$, $2t-4q=-7$ и $2p-4t=2$, то чему равно $p+q+t$?
A) -7 B) 8 C) 7 D) -8

20. (00-4-39) Вычислите $3a+8c$, если $3a+4b=16$ и $2c-b=1$.
A) 18 B) 4 C) 20 D) 23

21. (00-1-11) Если $a^2-4a+5+b^2-2b=0$ то чему равно $(a+b)^3$?
A) 26 B) 27 C) 28 D) 25

22. (02-12-2) Если $x+y=4$, $y+z=8$ и $x+z=6$, то чему равно $x-y+2z$?
A) 8 B) 6 C) 7 D) 10

23. (02-12-19) Сколько пар натуральных чисел удовлетворяет равенству

$$x^2-y^2=105?$$

A) 3 B) 4 C) 2 D) 5

4.5.2 Системы уравнений с параметром

1. (00-5-27) При каких значениях k система уравнений

$$\begin{cases} kx+4y=4 \\ 3x+y=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?
A) $k\neq 12$ B) $k=9$ C) $k\neq 19$ D) $k=12$

Решение: Согласно 1-правилу п. 4.5.1 система имеет единственное решение при $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$. Это условие для данной системы имеет вид $\frac{k}{3}\neq\frac{4}{1}$. Откуда $k\neq 12$. **Ответ:** $k\neq 12$ (A).

2. (01-7-19) При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=9 \end{cases}$$

имеет единственное решение?
A) 3 B) 6 C) -3 D) $-6;6$

3. (01-10-28) Для какого значения a система

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-y=2 \\ x+4y=a \end{cases}$$

может иметь решение?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

4. (02-1-46) Если система уравнений

$$\begin{cases} ax+by=3 \\ bx+ay=2 \end{cases}$$

имеет решение $x=3$ и $y=2$, то найдите значение a.
A) 4 B) 5 C) 3 D) 1

5. (02-9-15) Решить систему

$$\begin{cases} y^2-x^2=8a \\ y+x=a^2, \end{cases}$$

если $y-x=2$ и $a>0$.
A) $(5;7)$ B) $(7;9)$ C) $(4;6)$ D) $(-6;-4)$

6. (99-9-16) При каком значении k система

$$\begin{cases} 3x+6y=k \\ 9x+18y=k+1 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?
A) $\frac{1}{3}$ B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$

Решение: Из условия существования бесконечного множества решений линейной системы т.е. 2-правила п-4.5.1, имеем: $\frac{3}{9}=\frac{6}{18}=\frac{k}{k+1}$. Отсюда получаем $k=\frac{1}{2}$. **Ответ:** $\frac{1}{2}$ (C).

7. (01-2-15) При каком значении k система

$$\begin{cases} 3x+(k-1)y=k+1 \\ (k+1)x+y=3 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?
A) -1 B) -2 C) 0 D) 2

8. (98-3-24) При каких значениях k система

$$\begin{cases} (k^2-k-1)x+2,5y=5 \\ 2x+y=-k \end{cases}$$

не имеет решений?
A) -2 B) -2 va 3 C) 3 D) 4 va 3

Решение: Из условия несовместности системы линейных уравнений, т.е. 3 – правилу п.4.5.1 имеем $\frac{k^2-k-1}{2}=\frac{2,5}{1}\neq\frac{5}{-k}$ или

$$\begin{cases} k^2-k-1=5 \\ k\neq -2. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет корни $k_1=-2$ и $k_2=3$. Учитывая второе соотношение $k\neq -2$, заключаем, что решением задачи является только $k=3$. **Ответ:** $k=3$ (C).

9. (98-5-20) При каких значениях a система

$$\begin{cases} ax-y=0 \\ x+y=10 \end{cases}$$

не имеет решений?
A) -1 B) 2 C) 1 D) -2

10. (98-10-71) При каких значениях k система

$$\begin{cases} (k^2+k+1)x+3y-6=0 \\ x+y+k=0 \end{cases}$$

не имеет решений?
A) -2 B) 1 C) -2 и 1 D) 2 и 3

11. (02-5-10) При каких значениях m система
$$\begin{cases} mx+2y+4=0 \\ 2x+my-8=0 \end{cases}$$
не имеет решений?
A) 4 B) -4 C) 2 D) $-2; 2$

12. (99-2-17) При каких значениях a система
$$\begin{cases} 2x+ay=2 \\ ax+2y=3 \end{cases}$$
не имеет решений?
A) 3 B) ± 3 C) 4 D) ± 2

13. (99-1-17) При каком значении a система уравнений
$$\begin{cases} a^2x+3y=3 \\ 3x+y=4 \end{cases}$$
не имеет решений?
A) ± 3 B) ± 1 C) $\pm\sqrt{3}$ D) 0

14. (03-10-30) При каком значении a система уравнений
$$\begin{cases} (a-2)x+3y=5 \\ 7x-18y=1 \end{cases}$$
не имеет решений?
A) 1 B) 2 C) 4 D) $\emptyset$

15. (97-4-23) При каком значении k решение $(x; y)$ системы
$$\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x+y=k \end{cases}$$
удовлетворяет условию $x+y=2$?
A) 2 B) 4 C) 1 D) 5

Решение: Сложим уравнения системы:
$$3x+3y=2+k \iff 3(x+y)=2+k.$$
Отсюда учитывая, что $x+y=2$, получим $3\cdot 2=2+k$. Значит, $k=4$. **Ответ:** 4 (B).

16. (97-9-83) При каком значении k решение $(x_0; y_0)$ системы
$$\begin{cases} x+3y=6 \\ 2x+ky=8 \end{cases}$$
удовлетворяет условию $x_0+y_0=2$?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 4

4.5.3 Системы уравнений второй и высших степеней

1. (97-8-20) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y+4=2 \\ x^2y=-2. \end{cases}$$
A) $(1;-2)$ B) $(-1;-2)$
C) $(1;2)$ D) $(-1;-2)$ и $(1;-2)$

Решение: Из первого уравнения системы найдем $y=-2$. Подставим это значение во второе уравнение
$$x^2\cdot(-2)=-2 \iff x^2=1.$$
Корни этого неполного квадратного уравнения $x_1=-1$, $x_2=1$. Следовательно, система имеет решения $(x_1; y)=(-1;-2)$ и $(x_2; y)=(1;-2)$.
Ответ: $(-1;-2)$ и $(1;-2)$ (D).

2. (96-9-70) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2+y^2-2xy=16 \\ x+y=-2. \end{cases}$$
A) $(1;-3)$ B) $(-3;1)$
C) $(0;-2)$ D) $(1;-3)$ va $(-3;1)$

3. (96-10-20) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-y=4 \\ x^2+y^2+2xy=4. \end{cases}$$
A) $(3;1)$ B) $(3;-1)$
C) $(3;-1)$ va $(1;-3)$ D) $(2;-2)$

4. (97-12-19) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2-y^2+2x+4=0 \\ x-y=0. \end{cases}$$
A) $(2;2)$ B) $(-2;-2)$ C) $(-1;-1)$ D) $(1;1)$

5. (97-2-20) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x+2=0 \\ xy^2=-8. \end{cases}$$
A) $(-2;-2)$ B) $(-2;2)$
C) $(-2;2)$ и $(-2;-2)$ D) $(2;2)$

6. (96-1-19) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2+y^2-2xy=1 \\ x+y=3. \end{cases}$$
A) $(2;1)$ B) $(1;2)$
C) $(1,5;1,5)$ D) $(2;1)$ и $(1;2)$

7. (96-6-20) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2-y^2-3x=12 \\ x-y=0. \end{cases}$$
A) $(-4;4)$ B) $(4;-4)$ C) $(4;4)$ D) $(-4;-4)$

8. (01-3-34) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x+3=0 \\ xy^2=-12. \end{cases}$$
A) $(-3;2)$ B) $(-3;-2)$
C) $(-3;-2), (-3;2)$ D) $\emptyset$

9. (96-7-23) Сколько решений имеет система
$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y-x=-3? \end{cases}$$
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Решение: Из второго уравнение системы найдём $y = x - 3$ и подставим его в первое уравнение вместо y

$$x^2 + (x-3)^2 = 9 \iff 2x^2 - 6x = 0.$$

Это неполное квадратное уравнение имеет решение $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Подставив эти значения вместо x в выражение $y = x - 3$ получим $y_1 = -3$, $y_2 = 0$. Таким образом, система имеет два решение $(x_1; y_1) = (0; -3)$ и $(x_2; y_2) = (3; 0)$. **Ответ:** 2 (B).

10. (97-10-23) Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = -2? \end{cases}$$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

11. (97-3-23) Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 5? \end{cases}$$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

12. (98-12-19) Найдите значение a, если $a - b = 12$ и $-ab + a^2 = 144$.

A) 12 B) −12 C) 36 D) 6

Решение: 2-равенство запишем в виде $a(a - b) = 144$ и пользуясь равенством $a - b = 12$, получим $12a = 144$, откуда $a = 12$. **Ответ:** 12 (A).

13. (98-11-60) Найдите xy, если $x^2 + y^2 = 281$ и $x - y = 11$.

A) 80 B) 160 C) −80 D) 40

14. (02-12-30) Вычислите xy, если $x^2 - 4xy + y^2 = 4 - 2xy$ и $x + y = 12$.

A) 32 B) 35 C) 30 D) 34

15. (97-9-67) Вычислить ac, если $ab = 9$ и $3b = 8c$ $(b \neq 0)$.

A) $3\frac{1}{3}$ B) $3\frac{5}{8}$ C) $3\frac{4}{9}$ D) $3\frac{3}{8}$

16. (01-3-33) Найдите $3xy$ из системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 1 \\ x + y = -2. \end{cases}$$

A) 1 B) −1 C) 3 D) −3

Решение: Первое уравнение системы запишем в виде $(x + y)^2 - 3xy = 1$. Теперь учитывая второе уравнение $x + y = -2$, получим $(-2)^2 - 3xy = 1$. Отсюда находим $3xy = 3$. **Ответ:** 3 (C).

17. (01-3-32) Найдите x из системы

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 - y^2 = 12. \end{cases}$$

A) 4 B) 2 C) 1 D) 3

18. (96-3-75) Найдите x из системы

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 - y^2 = 6. \end{cases}$$

A) 1,5 B) 2,5 C) 3 D) 1

19. (96-12-73) Найдите $x \cdot y$ из системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x - y = 1. \end{cases}$$

A) 2 B) 3 C) 1,5 D) 1

20. (98-12-64) Найдите $x^5 \cdot y + x \cdot y^5$ из системы

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x \cdot y = 1. \end{cases}$$

A) 47 B) 29 C) 51 D) 24

Решение: В выражении $x^5 \cdot y + x \cdot y^5$ вынесем общий множитель xy за скобки и учитывая равенство $xy = 1$, получим

$$x^5y + xy^5 = xy(x^4 + y^4) = x^4 + y^4 =$$
$$= (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2.$$

Теперь вычислим значение $x^2 + y^2$:

$$x^2 + y^2 = (\underbrace{x + y}_{3})^2 - 2\underbrace{xy}_{1} = 9 - 2 = 7.$$

Поэтому $(x^2 + y^2)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 47$. **Ответ:** 47 (A).

21. (01-4-23) Найдите $x - y$, если

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 6 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

A) 1 B) −1 C) 6 D) −6

22. (03-12-3) Найдите ab, если

$$\begin{cases} b + a = 18 \\ a^2 + b^2 = 170. \end{cases}$$

A) 45 B) 72 C) 77 D) 80

23. (98-10-17) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ xy^2 = -4. \end{cases}$$

A) $(-1; 2)$ B) $(2; -1)$
C) $(2; 1)$ D) $(-1; -2)$ и $(-1; 2)$

Решение: Из первого уравнения системы получим $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Рассмотрим два случая:

$$1)\ x_1y^2 = -4 \iff -y^2 = -4 \iff y^2 = 4.$$

Это уравнение имеет корни $y_1 = -2$ и $y_2 = 2$. Значит, пары $(-1; -2)$ и $(-1; 2)$ являются решениями данной системы.

$$2)\ x_2y^2 = -4 \iff y^2 = -4.$$

Это уравнение не имеет действительных корней. Таким образом, решениями системы являются $(-1; -2)$ и $(-1; 2)$. **Ответ:** $(-1; -2)$ и $(-1; 2)$ (D).

24. (02-9-11) Сколько решений имеет система
$$\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = -x^2 + 6x - 5? \end{cases}$$
A) $\emptyset$ B) 1 C) 2 D) 3

25. (03-9-6) Найдите сумму всех значений x и y, являющихся решением системы уравнений
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$$
A) 0 B) 2 C) 6 D) 10

26. (02-11-27) Найди сумму всех значений x, при которых пара $(x; y)$ является решением системы уравнений
$$\begin{cases} x^5 \cdot y^7 = 32 \\ x^7 \cdot y^5 = 128. \end{cases}$$
A) 0 B) 4 C) 8 D) 12

27. (97-4-25) Вычислите $\frac{x-y}{2}$, если
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2y = 5 \\ xy^2 = 1. \end{cases}$$
A) 2 B) 1 C) 3 D) 4,5

Решение: Используя данные равенства, получим
$$(x-y)^3 = \underbrace{x^3 - y^3 - 3x^2y}_{5} + 3\underbrace{xy^2}_{1} = 5 + 3 \cdot 1 = 8.$$
Тогда $x - y = 2$ и
$$\frac{x-y}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$
Ответ: 1 (B).

28. (98-2-16) Найдите $m - n$, если $m^2 - mn = 48$ и $n^2 - mn = 52$.
A) 10 B) 8 C) ± 10 D) ± 8

29. (98-5-22) Вычислите $|x + y|$, если
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 9 \\ xy = 10. \end{cases}$$
A) 7 B) 6 C) 5 D) 8

30. (98-10-65) Вычислите $(x + y)^2$, если
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3. \end{cases}$$
A) 13 B) 7 C) 16 D) 19

31. (99-6-37) Вычислите $\sqrt{abc}$, если $ab = 18$, $bc = 25$ и $ac = 8$.
A) $2\sqrt{15}$ B) $15\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{5}$ D) $8\sqrt{3}$

32. (99-10-11) Найдите xy, если $x^2 \cdot y = 50$, $x \cdot y^2 = 20$.
A) 8 B) 10 C) 6 D) 12

33. (00-1-23) Чему равно ab, если $a - b = 1$ и $(a^2 - b^2) \cdot (a - b) = 9$
A) 19 B) 22 C) 21 D) 20

34. (97-8-11) Найдите $x + 2y$, если $(x-4)^2 + (x - y^2)^2 = 0$.
A) 0 B) 4 C) 6 D) 0 или 8

35. (00-8-14) Найдите $x + y + z$, если
$$\begin{cases} xy = 6 \\ yz = 12 \\ zx = 8. \end{cases}$$
A) -9 или 9 B) 18 C) 0 D) 36

Решение: *1-способ.* Умножив равенства, имеем $x^2y^2z^2 = 576$. Возможны два случая:
1) $xyz = 24$. Разделив это равенство последовательно на первое, второе и третье равенства системы получим $z = 4$; $x = 2$; $y = 3$. Тогда $x + y + z = 2 + 3 + 4 = 9$.
2) $xyz = -24$. В этом случае поступая как выше, получим $z = -4$; $x = -2$; $y = -3$. Тогда $x + y + z = -2 + (-3) + (-4) = -9$.

2-способ. Разделив 2-уравнение системы на первое, получим $\frac{z}{x} = 2$ или $z = 2x$. Подставив выражение $2x$ вместо z в 3-уравнение системы, имеем, $2x^2 = 8$ или $x^2 = 4$. Корни этого уравнения $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Подставив эти значения в первое уравнение системы, получим $y_1 = -3$, $y_2 = 3$. Тогда из второго уравнения системы следует, что $z_1 = -4$, $z_2 = 4$. Следовательно, $x_1 + y_1 + z_1 = -2 - 3 - 4 = -9$ или $x_2 + y_2 + z_2 = 2 + 3 + 4 = 9$. **Ответ:** -9 или 9 (A).

36. (03-8-40) Найдите x, если
$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{10}{7} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{40}{13} \\ \frac{zx}{x+z} = \frac{5}{8}. \end{cases}$$
A) $\frac{80}{79}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{7}{13}$ D) $\frac{79}{80}$

37. (98-6-2) Найдите xyz, если $xy = 6$, $yz = 2$ и $xz = 3$ $(x > 0)$.
A) -6 B) 6 C) 5 D) 12

38. (98-11-52) Найдите xyz, если $xy = 4$, $yz = 7$ и $xz = 28$ $(y > 0)$.
A) -28 B) 28 C) 27 D) 56

39. (98-6-11) m и n– натуральные числа. Найдите $n - m$, если
$$\sqrt{2}(n-5) + n^2 - 6mn + 5m = 0.$$
A) 2 B) 5 C) 6 D) 4

Решение: Если $\sqrt{2}(n-5)$ не равно нулю, то выражение $\sqrt{2}(n-5) + n^2 - 6mn + 5m$ тоже не равно нулю, так как сумма иррационального и целого чисел является иррациональным числом. Поэтому из равенства $\sqrt{2}(n-5)+n^2-6mn+5m=0$ следуют равенства $\sqrt{2}(n-5)=0$ и $n^2-6mn+5m=0$. Из первого равенства $n=5$. Подставив это значение во второе уравнение, имеем $25-30m+5m=0$. Его корень $m=1$. Значит, $n-m=5-1=4$. **Ответ:** 4 (D).

40. (01-10-8) Сколько пар целых чисел $(x;y)$ удовлетворяет равенству $x^2-y^2=31$?
A) $\emptyset$ B) 1 C) 2 D) 4

41. (99-10-22) Найдите $\frac{x}{y}$, если $x^2\cdot y+x\cdot y^2=48$ и $x^2\cdot y-x\cdot y^2=16$.
A) $\frac{1}{4}$ B) -2 C) 2 D) $-\frac{1}{2}$

42. (02-6-32) Найдите $x\cdot y$, если
$$\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x+y=5. \end{cases}$$
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

43. (02-7-54) Найдите $2a-b$, если $8a^3-b^3=37$ и $ab^2-2a^2b=-6$.
A) 1 B) -1 C) 2 D) -2

44. (02-8-11) Найдите наибольшее значение $x+y$, если
$$\begin{cases} xy+x+y=11 \\ x^2y+y^2x=30. \end{cases}$$
A) 6 B) 5 C) 7 D) 4

Решение: Из первого уравнения системы имеем $xy=11-(x+y)$. Если обозначить $x+y$ через t, то 2-уравнение системы примет вид
$$xy(x+y)=30 \Longleftrightarrow (11-t)t=30.$$
Корни этого квадратного уравнения $t_1=5$, $t_2=6$. Так как $x+y=t$ наибольшее значение $x+y$ равно 6. **Ответ:** 6 (A).

45. (02-12-26) Найдите mn, если $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{7}$ и $m+n=-4$.
A) 20,5 B) $-20,5$ C) 21 D) -28

46. (02-12-29) Вычислите $x-y$, если $x^3+3xy^2=185$ и $y^3+3x^2y=158$.
A) 4 B) 3,5 C) 2 D) 3

47. (03-11-3) Найдите $x+y$, если
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{4}{3} \\ xy=9. \end{cases}$$
A) 10 B) 9 C) 8 D) 12

Решение: Из второго уравнения системы следует, что $\sqrt{xy}=\sqrt{9}=3$. С учетом этого первое уравнение системы приобретает вид
$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{9}}=\frac{4}{3} \Longleftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}=4.$$
Обе стороны последнего уравнения возведем в квадрат и еще раз пользуясь равенством $\sqrt{xy}=3$, получим
$$x+y+2\sqrt{xy}=16 \Longleftrightarrow x+y=10.$$
Ответ: 10 (A).

48. (03-1-65) Вычислите x^2-y^2, если
$$\begin{cases} x^2y+xy^2=120 \\ x^2y-xy^2=30. \end{cases}$$
A) 16 B) 20 C) 25 D) 34

49. (07-112-29) Найдите сумму всех x и y, являющихся решением системы уравнений
$$\begin{cases} x^3+y^3=126 \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$$
A) 2 B) 12 C) 10 D) 6

50. (98-6-10) Найдите $|x|-|y|$, если $x^2+y^2=225$ и $x^2-y^2=63$.
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

51. Найдите наибольшее значение $x+y$, если $x^2-y^2=51$ и $x,\ y\in\mathbb{N}$.
A) 3 B) 17 C) 51 D) 20

5 Неравенства

Соотношение, в котором два выражения (или числа) соединены знаком $>$ или $<$ ($\geq$ или $\leq$) называется *неравенством*. Например, $3x+5>0$; $13x+1<5$; $x^2-7<0$. Неравенства, составленные с помощью знаков $>$ или $<$ называются строгими. Например, $x-5<7$; $x^2-3>0$. Неравенства, составленные с помошью знаков $\geq$ или $\leq$ называются *нестрогими*. Например, $x-9\geq 7$; $x^2-5\leq 0$. Выражение, стоящее слева (справа) от знака неравенства, называется левой (правой) частью неравенства. Если обе части неравенства состоят из чисел, оно называется *числовым неравенством*. Неравенства вида $a<b$, $c<d$ называются неравенствами *одинакового смысла*, а неравенства вида $a<b$, $c>d$ неравенствами *противоположного смысла*. Числовые неравенства имеют следующие свойства.

1. **Если $a>b$, то $b<a$.**
2. **Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.**
3. **Если $a>b$ и c – любое число, то $a+c>b+c$ и $a-c>b-c$.**
4. **Если $a>b$ и $c>0$, то $a\cdot c>b\cdot c$ и $a:c>b:c$. То есть, если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится.**

5. **Если $a > b$ и $c < 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$ и $a : c < b : c$. То есть если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный.**

6. **Неравенства одинакового смысла можно почленно складывать, т.е. если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.**

7. **Неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, т.е. если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$. В разности остаётся знак того неравенства, из которого производится вычитание.**

8. **Неравенства одинакового смысла с неотрицательными членами можно почленно умножать. То есть если $0 \le a < b$ и $0 \le c < d$, то $a \cdot c < b \cdot d$.**

9. **Обе части неравенства с неотрицательными членами можно возводить в одну и ту же натуральную степень. То есть если $0 \le a < b$ и $n \in \mathbb{N}$, то $a^n < b^n$.**

Решением неравенства, содержащего переменную называется множество значений переменной, при которых это неравенство обращается в верное числовое неравенство. Два неравенства называются *равносильными*, если множества решений этих неравенств совпадают. Неравенства, не имеющие решения тоже считаются равносильными.

5.1 Линейные неравенства

Линейными неравенствами называются неравенства вида

$$ax + b > 0, \quad ax + b \ge 0 \qquad (5.1)$$

$$ax + b < 0, \quad ax + b \le 0 \qquad (5.2)$$

В (5.1) и (5.2) x – переменная, a и b – действительные числа, a называется коэффициентом перед переменной, b – свободным членом. Решения простейших неравенств $x > a$, $x \ge a$, $x < b$, $x \le b$ или $a < x < b$, $a < x \le b$, $a \le x < b$, $a \le x \le b$ принято записывать в виде $(a; \infty)$, $[a; \infty)$, $(-\infty; b)$, $(-\infty; b]$ и соответственно $(a; b)$, $(a; b]$, $[a; b)$, $[a; b]$.

1. Решите неравенство $3x + 1 < 10$.
A) $(3; \infty)$ B) $(1; \infty)$ C) $(-\infty; 3)$ D) $\emptyset$

Решение: Переведя 1 из левой части неравенства в правую, затем разделив обе части полученного неравенства на 3, имеем $x < 3$. **Ответ:** $(-\infty; 3)$ (C).

2. Решите неравенство $7x + 5 > 19$.
A) $(2; \infty)$ B) $(7; \infty)$ C) $(-\infty; 2)$ D) $\emptyset$

3. Решите неравенство $2x + 7 \le 11$.
A) $[2; \infty)$ B) $(7; \infty)$ C) $(-\infty; 2]$ D) $\emptyset$

4. Решите неравенство $5x + 9 \ge 14$.
A) $[1; \infty)$ B) $[5; \infty)$ C) $(-\infty; 1]$ D) $\emptyset$

5. (00-6-10) Решите неравенство

$$1 - \frac{17 - 3x}{2} > 1,5x.$$

A) $(-2,5; 0)$ B) $(-\infty; -2,5)$
C) $(-\infty; 0)$ D) $\emptyset$

Решение: Умножим обе части неравенства на 2, при этом знак неравенства не изменится

$$2 - 17 + 3x > 3x \iff -15 > 0 \cdot x.$$

Это неравенство не имеет решения. **Ответ:** $\emptyset$ (D).

6. Решите неравенство

$$\frac{1 - x}{2} < \frac{2x - 1}{4}.$$

A) $(\frac{3}{4}; \infty)$ B) $(1; \infty)$ C) $(-\infty; \frac{3}{4})$ D) $\emptyset$

7. (01-8-10) Решите неравенство

$$\frac{1 - x}{2} + 3 < 3x - \frac{2x + 1}{4}.$$

A) $(1\frac{1}{3}; \infty)$ B) $(1\frac{1}{13}; \infty)$ C) $(1\frac{1}{4}; \infty)$ D) $\emptyset$

8. (98-2-17) Дано неравенство $3x - a > b - 2x$. Какое из следующих неравенств ему не равносильно?
A) $5x - a > b$ B) $6x - 2a > 2b - 4x$
C) $3x > a + b - 2x$ D) $a - 3x > 2x - b$

9. Найдите неравенство, равносильное неравенству

$$2x + 5 > a.$$

A) $2x + 5 - a \ge 0$ B) $2x + 5 - a > 0$
C) $2x < a - 5$ D) $-2x < -5 - a$

10. (00-8-33) Найдите наименьшее целое значение k, при котором уравнение $4y^2 - 3y + k = 0$ не имеет действительных корней.
A) 1 B) 3 C) 4 D) 5

Решение: Квадратное уравнение $4y^2 - 3y + k = 0$ не имеет корней в том случае, когда $D < 0$:

$$D = 9 - 16k < 0 \iff k > \frac{9}{16}.$$

Наименьшее целое число, удовлетворяющее этому неравенству $k = 1$. **Ответ:** 1 (A).

11. (02-2-10) Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$(x + 1)^2 > (x + 2)^2.$$

A) -2 B) -1 C) -3 D) -4

12. (02-3-18) Найдите наименьшее целое отрицательное решение неравенства

$$8+\frac{6x-8}{10}>\frac{x-2}{6}+\frac{1-5x}{8}+\frac{1}{4}.$$

A) -6 B) -7 C) -5 D) -4

13. (03-11-64) Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{2x-7}{6}+\frac{7x-2}{3}<3-\frac{1-x}{2}.$$

A) 2 B) -1 C) 1 D) 0

5.2 Системы линейных неравенств

1. (97-7-25) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3x+7\geq 5(x+1)+6 \\ (x-2)^2-8<x(x-2)+10. \end{cases}$$

A) $(-11;2]$ B) $[-2;7)$ C) $(-7;-2]$ D) $[2;11)$

Решение: Раскроем скобки:

$$\begin{cases} 3x+7\geq 5x+5+6 \\ x^2-4x+4-8<x^2-2x+10. \end{cases}$$

Теперь члены, содержащие x перенесем в левые части, а числа в правые части неравенств и получим:

$$\begin{cases} -2x\geq 4 \\ -2x<14 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\leq -2 \\ x>-7 \end{cases} \Longleftrightarrow -7<x\leq -2.$$

Значит, $x\in(-7;-2]$. **Ответ:** $(-7;-2]$ (C).

2. (97-3-25) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x-3(x-5)>10-3x \\ x(x+2)-4\leq (x-1)^2+7. \end{cases}$$

A) $[2;12,5)$ B) $[2,5;\infty)$ C) $[-3;2)$ D) $(-2,5;3]$

3. (96-7-25) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x(x+1)+10>(x+1)^2+3 \\ 3x-4(x-7)\geq 16-3x. \end{cases}$$

A) $[-3;5)$ B) $(2;4]$ C) $[-6;6)$ D) $[6,\infty)$

4. (97-10-25) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4(x-3)-3>8x+1 \\ 2+x(x+3)\leq (x+2)^2+5. \end{cases}$$

A) $(4;7]$ B) $(-\infty;-7)$ C) $(-4;\infty)$ D) $[-7;-4)$

5. (01-8-14) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{3x-2}{4}>\dfrac{1-5x}{6} \\ 3x-1\leq 3-2x. \end{cases}$$

A) $(\frac{8}{19};\infty)$ B) $(\frac{8}{19};\frac{4}{5}]$ C) $(-\infty;\frac{4}{5}]$ D) $x\in\mathbb{R}$

6. (97-6-14) Найдите среднее арифметическое целых решений системы

$$\begin{cases} 7x+3\leq 9x-1 \\ 20-3x\geq 4x-15. \end{cases}$$

A) 3,5 B) 7 C) 4 D) 3

Решение: Переведя члены, содержащие x в левые части, а свободные члены в правые части неравенств, получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} -2x\leq -4 \\ -7x\geq -35 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x\leq 5 \end{cases} \Longleftrightarrow 2\leq x\leq 5.$$

Целыми решениями последнего неравенства являются 2, 3, 4, 5. Их среднее арифметическое равно $(2+3+4+5):4=14:4=3,5$. **Ответ:** 3,5 (A).

7. (97-1-14) Найдите среднее арифметическое целых решений системы

$$\begin{cases} 5x-2\geq 2x+1 \\ 2x+3\leq 18-3x. \end{cases}$$

A) 3 B) 2,5 C) 2 D) 1,5

8. (97-11-14) Найдите среднее арифметическое целых решений системы

$$\begin{cases} 2x-1\geq 3x-4 \\ 8x+7>5x+4. \end{cases}$$

A) 2 B) 2,5 C) 1,5 D) 0,75

9. (02-2-11) Найдите среднее арифметическое целых решений системы

$$\begin{cases} 2x-10>0 \\ 27-x>0. \end{cases}$$

A) 16 B) 18 C) 17 D) 15

10. (96-1-22) Сколько целых решений имеет система неравенств

$$\begin{cases} 3+4x\geq 5 \\ 2x-3(x-1)>-1? \end{cases}$$

A) 5 B) 3 C) 4 D) 2

11. (96-6-16) Найдите наибольшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} -2x<22 \\ x+4<8. \end{cases}$$

A) 4 B) 3 C) -11 D) -12

12. (96-9-73) Сколько целых решений имеет система неравенств

$$\begin{cases} 3-4x>5 \\ 2+3(x-1)\leq 4x+3? \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6

13. (97-2-16) Найдите наименьшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} x+8<12 \\ -3x<15. \end{cases}$$

A) -5 B) -3 C) -6 D) -4

14. (97-8-16) Найдите произведение всех целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} -4y<12 \\ y+6<6. \end{cases}$$

A) 2 B) 6 C) -6 D) -2

15. (97-12-15) Найдите сумму наибольшего и наименьшего целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} -2x>-26 \\ x-3>1. \end{cases}$$

A) 17 B) 16 C) 18 D) 19

16. (98-3-15) Найдите сумму всех целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} x+1<2x-4 \\ 3x+1<2x+10. \end{cases}$$

A) 9 B) 5 C) 20 D) 21

17. (98-1-6) Решите двойное неравенство

$$-3<2-5x<1.$$

A) $(-1;0,2)$ B) $(-1;-0,2)$
C) $(-0,2;1)$ D) $(0,2;1)$

Решение: Вычитая из каждой части неравенства 2, получим $-5<-5x<-1$. Разделим это неравенство на -5 (так как $-5<0$, знаки неравенств при этом меняются на противоположные). В результате имеем $1>x>0,2$ или $0,2<x<1$. **Ответ:** $(0,2;1)$ (D).

18. (98-8-6) Решите двойное неравенство

$$-4<2-4x<-2.$$

A) $(-1,5;-1)$ B) $(1;2)$ C) $(0;1)$ D) $(1;1,5)$

19. (99-8-9) Сколько существует натуральных чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $5<x<98$, делителем которых является 12?
A) 8 B) 10 C) 12 D) 6

20. (99-8-79) Сколько натуральных решений имеет система неравенств

$$17,556:5,7\le y<31,465:3,5?$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5

21. (98-8-1) Найдите все натуральные решения неравенства

$$1256:314<9x-32\le 2976:96.$$

A) $4;5;6$ B) $5;6;7$ C) $6;7;8$ D) $7;8$

22. (98-1-1) Найдите все натуральные решения неравенства

$$6798:103<54+6x<9156:109.$$

A) $2;3;4$ B) $4;5;6$ C) $3;4$ D) $4;5$

23. (99-9-24) На сколько больше наибольшее целое, чем наименьшее целое решение системы

$$\begin{cases} 2x-3\le 17 \\ 14+3x>-13? \end{cases}$$

A) 17 B) 19 C) 16 D) 18

Решение: Переведя свободные члены в правые части неравенств системы, получим равносильную ей систему

$$\begin{cases} 2x\le 20 \\ 3x>-27 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\le 10 \\ x>-9 \end{cases} \Longleftrightarrow -9<x\le 10.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства равно 10, а наименьшее целое решение равно -8. Их разность $10-(-8)=18$. **Ответ:** 18 (D).

24. (98-10-40) Найдите сумму наибольшего и наименьшего целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} 2x-3<17 \\ 4x+6>8. \end{cases}$$

A) 8 B) 11 C) 12 D) 10

25. (98-10-63) Найдите сумму всех целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} -x-5<-2x-2 \\ -2x+2>3-3x. \end{cases}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

26. (98-11-25) Найдите сумму всех целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} 0,4(2x-3)>x-2 \\ 3x-7\ge x-6. \end{cases}$$

A) 10 B) 5 C) 6 D) 8

5.3 Метод интервалов

Один из наиболее удобных способов решения дробно-рациональных неравенств – *метод интервалов.* Пусть требуется решить неравенство

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x-8}>0. \tag{5.3}$$

Известно, что дробь (5.3) является положительной тогда и только тогда, когда ее числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки. Следовательно, неравенство (5.3) равносильно двум системам неравенств:

$$\begin{cases} x^2+2x-3>0 \\ x^2+2x-8>0 \end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases} x^2+2x-3<0 \\ x^2+2x-8<0. \end{cases}$$

Эти системы тоже распадаются на части. Ситуация еще больше осложняется, когда требуется решить неравенства вида

$$\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x+2)(x+4)(x+6)} > 0.$$

Поэтому неравенства такого вида обычно решаются с помощью метода интервалов. Суть метода интервалов состоит в следующем. Пусть $P(x)$ - многочлен, который можно представить в виде

$$P(x) = p(x)(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_n)^{r_n}. \quad (5.4)$$

Здесь многочлен $p(x)$, не имеющий действительных корней, при всех значениях x принимает только положительные или только отрицательные значения. Пусть для определенности $p(x) > 0$ и $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Если $x > x_n$ то все множители в (5.4) будут положительными и $P(x) > 0$. Если линейный множитель $(x - x_n)$ участвует в (5.4) с нечетной ($r_n = 2m - 1-$ нечетное число) степенью, тогда при $x_{n-1} < x < x_n$ последний множитель в (5.4) будет отрицательным, а все остальные множители будут положительными. Тогда $P(x) < 0$. В этом случая говорят, что при переходе через корень x_n многочлен $P(x)$ меняет знак. Если линейный множитель $(x - x_n)$ участвует в (5.4) с четной ($r_n = 2m-$ четное число) степенью, то все множители в (5.4) будут положительными и $P(x) > 0$. В этом случая говорят, что при переходе через корень x_n многочлен $P(x)$ не меняет знак. С помощью аналогичных рассуждений можно прийти к выводу: при переходе переменной x через корень x_k многочлен $P(x)$ меняет знак, если линейный множитель $(x - x_k)$ имеет нечетную степень, и не меняет знак, если линейный множитель $(x-x_k)$ имеет четную степень. Это свойство многочлена используется при решении неравенств высоких степеней. Рассмотрим два примера.

Пример 1. Решить неравенство

$$P(x) = (x^2+2x+3)(x-1)^2(x-3)^5(x-7)^9 \leq 0. \quad (5.5)$$

Решение: Здесь $p(x) = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$. Корни многочлена 1; 3 и 7 обозначим на числовой оси. В результате числовая ось разобьется на интервалы $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$, $(3; 7)$ и $(7; \infty)$ (см. рис. 5.1). Если $x > 7$ то все множители в (5.5) являются положительными и $P(x) > 0$. Пусть теперь $3 \leq x \leq 7$, тогда $(x - 7)^9 \leq 0$ остальные множители положительны и $P(x) \leq 0$. Пусть $1 < x < 3$, тогда так как $(x-3)$ участвует в разложением $P(x)$ с нечетной степенью , то $P(x)$ меняет знак т.е. $P(x) > 0$. Если $x < 1$, многочлен $P(x)$ не меняет знак, так как в его разложении линейный множитель $x - 1$ участвует с четной степенью, т.е. $P(x) > 0$. Так как $P(1) = 0$, точка 1 тоже является решением неравенства (5.5). Таким образом, решение неравенства (5.5) состоит из множества $[3; 7] \cup \{1\}$.

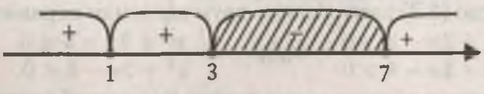


Рисунок 5.1.

Пример 2. Решите неравенство

$$\frac{(x-1)^2(x-3)^4(x-5)^3}{(x+2)^5(x+4)^7(x+6)^8} > 0. \quad (5.6)$$

Решение: Отметим на числовой оси корни многочленов в числителе и знаменателе левой части неравенства – числа 1, 3, 5 и -2, -4, -6 и поставим знаки + и − на интервалы (см. рис. 5.2). Значит, решение неравенства (5.6) состоит из множества $(-4; -2) \cup (5; \infty)$.

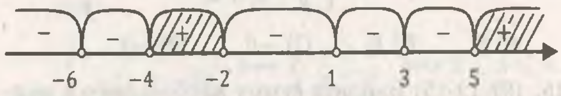


Рисунок 5.2

1. Метод интервалов

1. (96-3-25) Решите неравенство

$$(x-2)(x+3) > 0.$$

A) $(-\infty; 2) \cup (3; \infty)$ B) $(-\infty; -3) \cup (2; \infty)$
C) $(-\infty; -2) \cup (3; \infty)$ D) $(-\infty; \infty)$

Решение: Отметим на числовой оси точки -3, 2 при которых выражение $(x-2)(x+3)$ обращается в нуль, в результате числовая ось разобьется на интервалы $(-\infty; -3)$, $(-3; 2)$ и $(2; \infty)$ (см. рис. 5.3). Если $x > 2$, оба множителя в левой части неравенства положительны, а значит их произведение тоже положительно. На интервале $(-3; 2)$ левая часть меняет знак, т.е. принимает отрицательные значения. На интервале $(-\infty; -3)$ левая часть снова меняет знак, т.е принимает положительные значения. Таким образом, решением неравенства является множество $(-\infty; -3) \cup (2; \infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (2; \infty)$ (B).

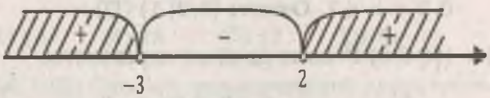


Рисунок 5.3

2. (96-11-26) Решите неравенство

$$(x-1)(x+2) > 0.$$

A) $(-\infty; 1) \cup (2; \infty)$ B) $(0; \infty)$
C) $(-\infty; -2) \cup (1; \infty)$ D) $(-\infty; \infty)$

3. (96-12-26) Решите неравенство

$$(x+2)(x-3) > 0.$$

A) $(-\infty; \infty)$ B) $(-\infty; -3) \cup (2; \infty)$
C) $(0; \infty)$ D) $(-\infty; -2) \cup (3; \infty)$

4. (97-5-23) Решите неравенство

$$\frac{x-1}{x-2} \geq 0.$$

A) $[1; 2)$ B) $(-\infty; 1) \cup (2; \infty)$
C) $(1; 2)$ D) $(-\infty; 1] \cup (2; \infty)$

5. (97-9-23) Решите неравенство

$$\frac{x-2}{x-1} \le 0.$$

A) $(1; 2]$ B) $[1; 2)$ C) $[1; 2]$ D) $(-\infty; 1)$

6. (97-9-24) Решите неравенство

$$\frac{(x+3)(x-5)}{x+1} \ge 0.$$

A) $(-3; -1] \cup [5; \infty)$ B) $(-3; -1) \cup [5; \infty)$
C) $[-3; -1) \cup [5; \infty)$ D) $[-3; -1)$

7. (01-3-35) Решите неравенство

$$\frac{x+1}{x-2} \le 0.$$

A) $(-\infty; 1]$ B) $[-1; 2)$ C) $(-1; 2]$ D) $(2; \infty)$

8. Решите неравенство

$$(x-2)(x-4)(x-5)^2 \le 0.$$

A) $(-\infty; 2]$ B) $[2; 4] \cup \{5\}$ C) $[2; 4]$ D) $\emptyset$

9. (97-12-22) Найти сумму наибольшего и наименьшего целых решений неравенства

$$\frac{(x+4)(3-x)}{(x-2)^2} > 0.$$

A) 1 B) -1 C) -2 D) 2

Решение: Отметим на числовой оси точки, соответствующие числам -4 и 3, при которых числитель, а также 2, при котором знаменатель левой части неравенства обращаются в нуль. Используем метод интервалов (см. рис. 5.4). Из рисунка приходим к выводу, что решение неравенства состоит из множества $(-4; 2) \cup (2; 3)$. Наибольшим и наименьшим целыми числами на этом множестве соответственно являются 1 и -3. Их сумма равна $1 + (-3) = -2$. **Ответ:** -2 (C).

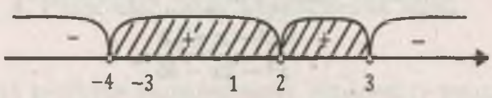


Рисунок 5.4

10. (96-6-23) Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$(y+6)(y+2) < 0.$$

A) 12 B) 20 C) -12 D) -20

11. (99-5-13) Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$(x-1)(x+1)^2(x-3)^3(x-4)^4 \le 0.$$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9

12. (00-9-21) Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$(x+3)(x-2)^2(x+1)^3(x-5)^4 \le 0.$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

13. (01-6-15) Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$\frac{x-4}{2x+6} \le 0.$$

A) 7 B) 6 C) 8 D) 5

14. (02-4-12) Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{x+5}{(x+6)^2} < 0.$$

A) 6 B) -6 C) 5 D) -7

2. Приведите к удобному виду и решите методом интервалов

15. (98-6-23) Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+3}{x-1} \ge 0.$$

A) $(1; \infty)$ B) $[1; \infty)$ C) $(-\infty; 1)$ D) $(-\infty; 1]$

Решение: Числитель дроби в левой части неравенства всегда положителен

$$x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0.$$

Поэтому его знаменатель тоже должен быть положительным, т.е. $x - 1 > 0 \iff x > 1$. **Ответ:** $(1; \infty)$ (A).

16. (99-3-13) Решите неравенство

$$\frac{x+2-x^2}{x^3+1} \ge 0.$$

A) $(-\infty; 2]$ B) $[2; \infty)$
C) $(-\infty; -1) \cup (-1; 2]$ D) $(-1; 2)$

17. (01-3-36) Решите неравенство

$$\frac{x^2-4x+5}{x-2} \ge 0.$$

A) $[2; \infty)$ B) $(-\infty; 2)$ C) $(-\infty; 2]$ D) $(2; \infty)$

18. (02-10-48) Решите неравенство

$$(9x^2+12x+4)(x-2) < 0.$$

A) $(-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}; 2)$ B) $(-\infty; -2)$
C) $(2; \infty)$ D) $(-\frac{2}{3}; 2)$

19. (98-10-60) Сколько целых решений имеет неравенство

$$\frac{(x^2+x+1)(x^2+2x-3)}{x^2+3x+2} \le 0?$$

A) 5 B) 4 C) 3 D) бесконечно много

20. (99-9-7) Найдите разность между наибольшим и наименьшим целыми решениями неравенства

$$\frac{(x+3)(x-7)}{2x^2-x+4}<0.$$

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7

21. (00-4-33) Найдите произведение наибольшего целого отрицательного и наименьшего целого положительного решений неравенства

$$\frac{x^4-3x^3+2x^2}{30-x^2-x}<0.$$

A) -30 B) -35 C) -36 D) -42

Решение: Разложим на множители числитель и знаменатель дроби в левой части неравенства:

$$x^4-3x^3+2x^2=x^2(x^2-3x+2)=x^2(x-1)(x-2),$$

$$30-x^2-x=-(x-5)(x+6).$$

Теперь к неравенству

$$\frac{x^4-3x^3+2x^2}{30-x^2-x}=\frac{x^2(x-1)(x-2)}{-(x-5)(x+6)}<0$$

применим метод интервалов и получим решение $(-\infty;\ -6)\cup(1;\ 2)\cup(5;\ \infty)$. Наибольшее целое отрицательное число из этого множества равно -7, а наименьшее целое положительное число равно 6. Их произведение равно $-7\cdot 6=-42$. **Ответ:** -42 (D).

22. (96-7-20) Найдите произведение целых решений неравенства

$$2x^2-9x+4<0.$$

A) 0 B) 4 C) 24 D) 6

23. (97-3-20) Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$2x^2\le 5x+12.$$

A) 4 B) 9 C) 7 D) 5

24. (97-7-20) Найдите произведение целых решений неравенства

$$3x^2\le 13x-4.$$

A) 12 B) 6 C) 30 D) 24

25. (97-10-20) Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$2x^2-3x\le 9.$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

26. (00-7-46) Найдите сумму наибольшего и наименьшего целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-3x-4\le 0\\ x^2-6x+8\le 0.\end{cases}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

27. (01-10-18) Найдите все значения x, для которых дробь отрицательна

$$\frac{x^2-4x-5}{2x-5}.$$

A) $(2,5;5)$ B) $(-\infty;-1]\cup(2,5;5]$
C) $(-\infty;-1)$ D) $(-\infty;-1)\cup(2,5;5)$

28. (02-2-2) Сколько целых значений n удовлетворяют неравенству

$$(n^2-3)(n^2-21)<0?$$

A) 6 B) 5 C) 3 D) 4

Решение: Данное неравенство запишем в виде

$$(n-\sqrt{3})(n+\sqrt{3})(n-\sqrt{21})(n+\sqrt{21})<0.$$

Применив метод интервалов, получим его решение $(-\sqrt{21};\ -\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};\ \sqrt{21})$. Если учесть, что $\sqrt{3}\approx 1,732$ и $\sqrt{21}\approx 4,582$, то получим, что на интервале $(\sqrt{3};\ \sqrt{21})$ содержатся целые числа 2, 3 и 4. Аналогично на интервале $(-\sqrt{21};\ -\sqrt{3})$ содержатся целые числа -4, -3, -2. Значит, данному неравенству удовлетворяют 6 целых значений n. **Ответ:** 6 (A).

29. (01-7-22) Сколько простых чисел являются решением неравенства $x^2-50<0$?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

30. (00-7-19) Найдите сумму всех натуральных значений n, удовлетворяющих неравенству

$$n^2(n^2-n-6)\le 0.$$

A) 4 B) 2 C) 5 D) 6

31. (03-4-14) Найдите разность наибольшего и наименьшего целых решений неравенства

$$\frac{x^2-13x+36}{x^4+25}\le 0.$$

A) 6 B) 4 C) 5 D) 7

32. (03-7-63) Найдите разность наибольшего и наименьшего целых решений неравенства

$$\frac{x^2-x-12}{x^2-2x-35}\le 0.$$

A) 10 B) 12 C) 11 D) 9

33. (03-8-56) Сколько натуральных решений имеет неравенство

$$\frac{x^2-5x-14}{x+4}\le 0?$$

A) 7 B) 8 C) 9 D) 5

34. (03-3-24) Найдите число целых решений неравенства

$$\frac{(x-1)^2+2x-2}{(x-5)^3}\ge 0$$

на отрезке $[-3;8]$.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

35. (03-11-75) Найдите число целых решений неравенства
$$\frac{(x+4)^2-8x-25}{(x-6)^2}>0$$
на отрезке $[-5;6]$.
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

3. Квадратные неравенства

Если квадратный трехчлен разлагается на линейные множители, то для решения квадратного неравенства можно применить метод интервалов.

36. (97-1-10) Решите неравенство
$$(x-2)^2+3(x-2)\geq 7-x.$$
A) $[-2;1]$ B) $[0;1]\cup[3;\infty)$
C) $[-3;3]$ D) $(-\infty;-3]\cup[3;\infty)$

Решение: В данном неравенстве раскроем скобки, перенесем $7-x$ с правой части неравенства в левую и приведя подобные члены, получим равносильное неравенство
$$x^2-9\geq 0\iff(x-3)(x+3)\geq 0.$$
Применив метод интервалов, находим решение этого неравенства $(-\infty;-3]\cup[3;\infty)$.
Ответ: $(-\infty;-3]\cup[3;\infty)$ (D).

37. (97-6-10) Решите неравенство
$$(x+2)(x-2)-2(x-1)\leq 23-2x.$$
A) $(-\infty;5]$ B) $(0;25]$
C) $[-5;5]$ D) $[-\sqrt{21};\sqrt{21}]$

38. (97-11-10) Решите неравенство
$$2\cdot(x-1)\cdot(x+1)-x(x+3)<2-3x.$$
A) $(-\infty;2)$ B) $(-2;2)$ C) $(0;4)$ D) $(1;\infty)$

39. (01-2-26) Найдите произведение натуральных решений неравенства $x^2+2x-15<0$.
A) 0 B) 2 C) 4 D) 6

4. Рациональные неравенства вида $f(x)>g(x)$

Для решения рациональных неравенств вида $f(x)>g(x)$ нужно привести их к виду $f(x)-g(x)>0$ и применить метод интервалов.

40. (99-1-20) Решите неравенство $\frac{1}{x}>x$.
A) $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ B) $[0;1)$
C) $(0;1)$ D) $\emptyset$

Решение: Перенесем x из правой части неравенства в левую и приведем неравенство к виду
$$\frac{1-x^2}{x}>0\iff\frac{(1-x)(1+x)}{x}>0.$$
С помощью метода интервалов получим решение $(-\infty;-1)\cup(0;1)$. **Ответ:** $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ (A).

41. (99-6-30) Решите неравенство
$$\frac{x^2}{x+3}<x-3.$$
A) $(-\infty;-3)$ B) $(-3;3)$ C) $(0;3)$ D) $\emptyset$

42. (99-6-45) Решите неравенство
$$\frac{5x+8}{4-x}<2.$$
A) $(-\infty;0)\cup(4;\infty)$ B) $(-\infty;-4)\cup(0;4)$
C) $[-4;4]$ D) $\emptyset$

43. (00-4-32) Решите неравенство
$$1-\frac{6}{x}>\frac{2}{1-x}.$$
A) $(0;1)\cup(2;3)$ B) $(-\infty;0)\cup(1;2)\cup(3;\infty)$
C) $(0;1)\cup(3;\infty)$ D) $(-\infty;1)\cup(2;3)\cup(5;\infty)$

44. (01-5-22) Решите неравенство
$$\frac{1}{x-1}\leq 2.$$
A) $(-\infty;1)\cup[1,5;\infty)$ B) $(1;2]$
C) $(1;2)$ D) $(1;1,5]$

45. (02-12-12) Решите неравенство
$$\frac{x^2-5x+2}{x-3}>x.$$
A) $(-3;1)$ B) $(1;3)$ C) $(-1;3)$ D) $(-\infty;1)$

46. (03-1-66) Решите неравенство
$$\frac{2}{x^2-9}<\frac{3}{x^2-16}.$$
A) $(-\infty;\infty)$
B) $(-4;-3)\cup(3;4)$
C) $(-\infty;-4)\cup(-3;3)\cup(4;\infty)$
D) $(-\infty;-4)\cup(4;\infty)$

47. (03-5-17) Решите неравенство
$$\frac{1}{x-2002}\leq\frac{x}{x-2002}.$$
A) $(-\infty;1]\cup(2002;\infty)$ B) $(-\infty;1]$
C) $(2002;\infty)$ D) $[1;2002)$

48. (01-1-72) Найдите отношение наименьшего целого положительного решения к наименьшему отрицательному целому решению неравенства $x\geq\frac{6}{x-5}$.
A) -1 B) -2 C) $-0,5$ D) -4

49. (01-2-68) Найдите разность между наибольшим и наименьшим целыми решениями неравенства
$$(x^2-x-1)(x^2-x-7)\leq -5.$$
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

Решение: Если принять обозначение $x^2-x-4=t$, то данное неравенство примет вид

$$(t+3)(t-3)+5\le 0 \Longleftrightarrow (t-2)(t+2)\le 0.$$

Возвращаясь к переменной x, имеем

$$(x^2-x-4-2)(x^2-x-4+2)\le 0.$$

Разложим на множители квадратные трехчлены в левой части неравенства

$$x^2-x-6=(x+2)(x-3),\; x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$

и получим неравенство

$$(x+2)(x-3)(x+1)(x-2)\le 0$$

равносильное данному. Применив метод интервалов, приходим к решению $[-2;\,-1]\cup[2;\,3]$. На этом множестве наибольшим целым числом является 3, а наименьшим целым числом -2. Их разность равна $3-(-2)=5$. **Ответ:** 5 (D).

50. (97-1-58) Сколько целочисленных решений имеет неравенство $x^4<9x$?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

51. (01-1-12) Сколько простых чисел являются решениями неравенства

$$3<\frac{5x-1}{2x-3}<5.$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

52. (02-1-63) Сколько простых чисел являются решениями неравенства

$$2<\frac{x+7}{2x-19}<4.$$

A) 1 B) 13 C) 7 D) 3

53. (01-10-17) Сколько простых чисел являются решениями неравенства

$$x^4-8x^2+7\le 0.$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4

54. (02-1-21) Найдите промежуток, на котором равносильны неравенства $x>1$ и $x^2>x$.
A) $(0;\infty)$ B) $(-\infty;0)$ C) $(-\infty;\infty)$ D) $\emptyset$

Решение: Если обе части первого неравенства умножить на $x>0$ (при умножении на положительное число знак неравенства сохраняется), то получится второе неравенство. Значит, при $x>0$ неравенства равносильны. **Ответ:** $(0;\,\infty)$ (A).

55. (02-8-7) Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{x-10}{2-x}>1.$$

A) 3 B) 4 C) 1 D) -2

56. (02-10-13) Найдите неотрицательные целые решения неравенства

$$\frac{x+3}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}<\frac{2x}{2x-x^2}.$$

A) 1 B) 0; 1; 2 C) 1; 2; 3 D) 1; 2

57. (03-1-14) Укажите число целых решений неравенства

$$x^4-10x^2+9\le 0.$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6

58. (03-3-19) Сколько целых решений имеет неравенство

$$\frac{x^2-12x+23}{(x+1)(x-4)}\le -\frac{2}{x-4}.$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

59. (03-6-42) Решите неравенство

$$\frac{x+1}{x}\le 1.$$

A) $-1\le x<0$ B) $x<0$
C) $-1<x<0$ D) $x>0$

5. Применение неравенств

60. (97-1-16) При каких значениях k уравнение $k(x+1)=5$ имеет положительный корень?
A) $(0;\infty)$ B) $(0;5)$ C) $(-5;0)$ D) $(5;\infty)$

Решение: Уравнение имеет решение только при $k\ne 0$. Его решением является $x=5:k-1$. По условию задачи оно должно быть положительным, т.е.

$$\frac{5}{k}-1>0 \Longleftrightarrow \frac{5-k}{k}>0.$$

Пользуясь методом интервалов получим, что решением этого неравенства является множество $(0;\,5)$. **Ответ:** $(0;\,5)$ (B).

61. (97-11-16) При каких значениях b уравнение $b(2-x)=6$ имеет отрицательный корень?
A) $b\in(-\infty;0)$ B) $b\in(0;3)$
C) $b\in(-3;0)$ D) $b\in[3;\infty)$

62. (99-10-4) Найдите сумму целых положительных значений k, при которых корни уравнения

$$(k-2)^2\cdot y=k^2-25$$

отрицательны.
A) 10 B) 13 C) 11 D) 8

63. (00-3-13) При каких значениях k уравнение

$$\frac{4x-1}{x-1}=k+3$$

имеет отрицательное решение?
A) $(-\infty;-2)$ B) $(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$
C) $(1;\infty)$ D) $(-2;1)$

64. (02-12-6) При каких значениях m уравнение

$$4 - m = \frac{2}{x-1}$$

имеет положительные корни?
A) $(4;6)$ B) $(-\infty;1)\cup(1;4)$
C) $(-\infty;4)\cup(6;\infty)$ D) $(-\infty;2)\cup(4;\infty)$

65. (02-9-20) При каких значениях t уравнение

$$3x - 4 = 2(x - t)$$

имеет положительный корень?
A) $t > -2$ B) $t < 2$ C) $t \le 1$ D) $t \ge 2$

66. (03-3-6) При каких значениях k уравнение

$$\frac{3x+1}{x+1} = k - 2$$

имеет отрицательный корень?
A) $(3;5)$ B) $(-\infty;3)\cup(5;\infty)$
C) $(2;4)$ D) $(1;3)$

67. (99-2-18) Найдите наибольшее целое значение k, при котором уравнение

$$kz^2 + 2(k-12)z + 2 = 0$$

не имеет действительных корней.
A) 16 B) 18 C) 20 D) 17

Решение: Если $k = 0$, это уравнение имеет решение $z = 1 : 12$. Поэтому рассмотрим случай $k \ne 0$. Квадратное уравнение не имеет действительных корней при условии, что дискриминант $D = (2(k-12))^2 - 4 \cdot 2k < 0$. Решив это квадратное неравенство, получим $k \in (8; 18)$. Итак, наибольшее целое значение k равно 17. **Ответ:** 17 (D).

68. (00-9-12) Найдите сумму всех натуральных чисел m, таких, что уравнение

$$\frac{t-6}{m-8} = \frac{m}{t}$$

не имеет корней.
A) 20 B) 25 C) 28 D) 30

69. (00-3-19) Найдите наименьшее целое значение k при котором уравнение

$$x^2 - 2(k+2)x + 6 + k^2 = 0$$

имеет два различных действительных корня.
A) -2 B) -1 C) 2 D) 1

5.3.1 Неравенства с параметром

1. (96-3-78) При каких значениях a система

$$\begin{cases} ax > 5a - 1 \\ ax < 3a + 1 \end{cases}$$

не будет иметь решений?
A) $\{1\}$ B) $(-\infty;0)\cup[1;\infty)$
C) $(-\infty;0)$ D) $[1;\infty)$

Решение: Данная система равносильна двойному неравенству

$$5a - 1 < ax < 3a + 1. \qquad (5.7)$$

Рассмотрим два случая: 1) $a = 0$ и 2) $a \ne 0$. В 1– случае получаем неравенство $-1 < 0 \cdot x < 1$, которое верно при любых значениях x. Итак, в этом случае система имеет решение. 2-случай, пусть $a \ne 0$. Известно, что множество решений неравенства $a < x < b$ является пустым множеством тогда и только тогда, когда $b \le a$. Значит, условие отсутствия решения двойного неравенства (5.7) равносильно неравенству $5a - 1 \ge 3a + 1$. Отсюда имеем

$$5a - 3a \ge 2 \Longleftrightarrow 2a \ge 2 \Longleftrightarrow a \ge 1.$$

Таким образом, система не имеет решение при значениях a из $[1;\infty)$. **Ответ:** $[1;\infty)$ (D).

2. (98-10-61) Найдите наибольшее целое значение k, при котором неравенство $kx^2+2x+k+2 > 0$ не имеет решений.
A) -1 B) -2 C) наибольшего нет D) -3

3. (00-6-20) При каких значениях a система

$$\begin{cases} 3 - 7x < 3x - 7 \\ 1 + 2x < a + x \end{cases}$$

не имеет решений?
A) $a < 4$ B) $a \le 1$ C) $a < 2$ D) $a \le 2$

4. (96-9-19) При каких значениях a система

$$\begin{cases} ax > 7a - 3 \\ ax \le 3a + 3 \end{cases}$$

не имеет решений?
A) $(1,5;\infty)$ B) $[1,5;\infty)$
C) $(-\infty;0)$ D) $(-\infty;0)\cup(1,5;\infty)$

5. (96-13-19) При каких значениях b система

$$\begin{cases} bx \ge 5b - 3 \\ bx \le 4b + 3 \end{cases}$$

не имеет решений?
A) $(6;\infty)$ B) $[6;\infty)$
C) $(-\infty;0)$ D) $(-\infty;0)\cup(6;\infty)$

6. (98-3-13) Найдите наибольшее целое значение k, при котором неравенство

$$kx^2 + 4x + k + 1 > 0$$

не имеет решений?
A) -1 B) наибольшего нет C) -3 D) -2

7. (00-5-33) При каком значении a неравенство

$$a(x-1) > x - 2$$

верно при всех значениях x?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

Решение: Данное неравенство равносильно неравенству $(a-1)x > a-2$. Рассмотрим два случая: 1) $a=1$ и 2) $a \neq 1$.

В 1– случае имеем неравенство $0 \cdot x > -1$, справедливое при любых значениях x. Значит, $a=1$ удовлетворяет условию задачи.

2-случай, пусть $a \neq 1$. Сначала допустим, что $a > 1$. Так как в этом случае $a-1>0$, то решением неравенства $(a-1)x > a-2$ будет $x > (a-2):(a-1)$, т.е. при значениях $x \leq (a-2):(a-1)$ неравенство не выполняется. Значит, числа $a>1$ не удовлетворяют условию задачи. Теперь предположим, что $a<1$. Так как в этом случае $a-1<0$, то решение неравенства $(a-1)x > a-2$ имеет вид $x < (a-2):(a-1)$, т.е. при значениях $x \geq (a-2):(a-1)$ неравенство не выполняется. Значит, числа $a<1$ тоже не удовлетворяют условию задачи. **Ответ:** $a=1$ (B).

8. (99-9-17) При каком значении a неравенство

$$ax^2+8x+a<0$$

верно при всех значениях x?
A) $(0;4)$ B) $(-4;0)$ C) $(-4;4)$ D) $(-\infty;-4)$

9. (01-2-78) Сколько существует натуральных значений n, не превосходящих 10, для каждого из которых неравенство $nx^2+4x > 1-3n$ справедливо для любого значения x?
A) 10 B) 9 C) 8 D) 7

10. (03-8-12) Найдите m, при котором наибольшее отрицательное решение неравенства равно -3

$$\frac{mx+9}{x} \geq -10.$$

A) -9 B) -8 C) -7 D) -6

5.3.2 Условные неравенства

1. (97-9-68) Сравнить выражения

$$\frac{1}{a^3+b^3},\quad \frac{1}{a^4+b^3},\quad \frac{1}{a^3}$$

если $a<0<b$ и $|a|>|b|$.
A) $\frac{1}{a^3} > \frac{1}{a^3+b^3} > \frac{1}{a^4+b^3}$
B) $\frac{1}{a^4+b^3} > \frac{1}{a^3} > \frac{1}{a^3+b^3}$
C) $\frac{1}{a^4+b^3} > \frac{1}{a^3+b^3} > \frac{1}{a^3}$
D) $\frac{1}{a^3+b^3} > \frac{1}{a^3} > \frac{1}{a^4+b^3}$

Решение: Из того, что $a<0<b$, $|a|>|b|$ получаем неравенства $a^3 < a^3+b^3 < 0 < a^4+b^3$. Поэтому

$$\frac{1}{a^4+b^3} > \frac{1}{a^3} > \frac{1}{a^3+b^3}.$$ **Ответ:** (B).

2. (96-6-11) Какое из неравенств
1) $a^2>0$, 2) $a^2-10<0$
3) $(a-5)^2 \geq 0$, 4) $\frac{1}{a^2}+a^2>2$

верно при всех значениях a?
A) 1 B) 2 C) 1; 3 и 4 D) 3

3. (98-12-34) Укажите верные соотношения для чисел a и b, удовлетворяющих условию $a > b > 0$.
1) $a^3>ab^2$; 2) $a^4 \geq a^2b^2$
3) $a^2b^2<b^4$; 4) $\frac{2}{a} > \frac{2}{b}$
A) 1 B) 1; 2 C) 3 D) 4

4. (99-5-24) Числа x и y таковы, что $x \cdot y = 20$ и $0<x<0,8$. Какое неравенство будет всегда верным?
A) $\frac{x}{y}<20$ B) $x+y<20$
C) $y<16$ D) $y>25$

5. (99-5-34) Известно, что $2<a<3$ и $-3<b<-2$. Что будет всегда верным для a и b?
A) $a^2b^2-50<0$ B) $\frac{(a+b)^2-2ab}{a-b}<0$
C) $b^3a^2-5<0$ D) $a^3b^2-2<0$

6. (01-6-16) Известно, что

$$\begin{cases} p^2+q^2<20 \\ pq<22. \end{cases}$$

Сколько целых значений может принимать $|p+q|$?
A) 5 B) 6 C) 9 D) 7

Решение: Так как $2pq \leq p^2+q^2$, то в силу системы $2pq<20$. Поэтому данная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} p^2+q^2<20 \\ 2pq<20. \end{cases}$$

Сложив почленно эти неравенства получим: $p^2+q^2+2pq<40 \iff (p+q)^2<40$. Отсюда следует, что $|p+q|<\sqrt{40}$, то $|p+q|$ принимает 7 целых значений, т,е. 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6. **Ответ:** 7 (D).

7. (99-8-15) Между какими числами заключена разность $a-b$, если $-2<a<-1$ и $-3<b<-2,5$?

A) $(0,5;2)$ B) $(1;1,5)$
C) $(-1,5;-1)$ D) $(-1,5;1)$

8. (00-4-31) $a<-1$. Какое из выражений наибольшее?
A) a^{-1} B) a^{-3} C) a^{-5} D) a^3

6 Уравнения, неравенства и системы с модулем

6.1 Уравнения с модулем

Свойства модуля (абсолютного значения) действительного числа приведены в п. 1.4. Приведем некоторые правила, используемые при решении уравнений с модулем.

1. $|f(x)| = f(x) \iff f(x) \geq 0.$

2. $|f(x)| = -f(x) \iff f(x) \leq 0.$

3. $|f(x)| = |g(x)| \iff \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right.$

4. $|f(x)| = a \ (a \geq 0) \iff \left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a. \end{array} \right.$

Изложим следующие три способа решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля.
1-метод. Решение с помощью определения модуля.
2-метод. Возведения обоих частей уравнения в квадрат.
3-метод. Геометрический метод.

Разберем их на примерах.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 3|x| - 40 = 0$ 1-методом.

Решение: По определению абсолютного значения данное уравнение равносильно системам:

$$\left\{ \begin{array}{c} x \leq 0 \\ x^2 + 3x - 40 = 0 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{c} x \geq 0 \\ x^2 - 3x - 40 = 0. \end{array} \right.$$

Корни квадратного уравнения в первой системе равны $x_1 = -8$ и $x_2 = 5$. Но $x_2 = 5$ не удовлетворяет условию $x \leq 0$. Значит, решение первой системы есть $x_1 = -8$. Корни квадратного уравнения во второй системе равны $x_1 = -5$ va $x_2 = 8$. Но $x_1 = -5$ не удовлетворяет условию $x \geq 0$. Поэтому решением второй системы является только $x_2 = 8$. **Ответ:** $x_1 = -8$, $x_2 = 8$.

Пример 2. Решить уравнение $|x| = |2x - 5|$ 2-методом.

Решение: В силу тождества $|x|^2 = x^2$ данное уравнение равносильно уравнению

$$x^2 = (2x - 5)^2 \iff 3x^2 - 20x + 25 = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения равны $x_1 = 5/3$, $x_2 = 5$. **Ответ:** $x_1 = 5/3$, $x_2 = 5$.

При решении некоторых примеров эффективным оказывается "геометрический метод".

Пример 3. Решить уравнение $|x - 3| = 5$ геометрическим методом.

Решение: Величина $|x-3|$ выражает расстояние между точками x и 3 на числовой оси. Значит, мы должны найти числа, соответствующий точкам, лежащим на расстояние 5 единиц от точки, координата которой равна 3. Эти точки $3 - 5 = -2$, $3 + 5 = 8$. (см. рис. 6.1). **Ответ:** $x_1 = -2$, $x_2 = 8$.

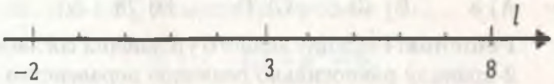


Рисунок 6.1

При решении уравнений вида $|x| = ax^2 + bx + c$ рекомендуется использовать 1-метод (определение модуля).

При решении уравнений вида $|ax + b| = |cx + d|$ эффективным оказывается 2-метод (метод возведения в квадрат).

При решении уравнений вида $|x-a|+|x-b|+|x-c| = d$ целесообразно использовать "геометрический метод".

1. (99-6-48) Решить уравнение
$$|2 - 3x| - |5 - 2x| = 0.$$
A) $-3; \frac{7}{5}$ B) $3; \frac{7}{5}$ C) $3; -1$ D) $-3; 0$

Решение: Перепишем данное уравнение в виде
$$|2 - 3x| = |5 - 2x|.$$
Согласно 3-правилу, оно распадается на два уравнения:
1) $2 - 3x = 5 - 2x$, его решение $x = -3$.
2) $2-3x = -(5-2x)$, а решение этого уравнения равно $x = \frac{7}{5}$. **Ответ:** $-3; \frac{7}{5}$ (A).

2. (97-1-75) Сколько корней имеет уравнение
$$|x + 1| = |2x - 1|?$$
A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

3. (97-6-71) Сколько корней имеет уравнение
$$|x| = |2x - 5|?$$
A) 1 B) 2 C) 3 D) бесконечно много

4. (02-10-10) Решите уравнение
$$|x - 2| = 3 \cdot |3 - x|.$$
A) $2,75; 3,5$ B) $2,75$ C) 2 D) $2,5$

5. (02-11-26) Найдите сумму корней уравнения
$$|x + 1| = 2|x - 2|.$$
A) 7 B) 5 C) 4 D) 6

6. (02-12-11) Сколько целых корней имеет уравнение
$$|x - 1| \cdot |x + 2| = 4?$$
A) 2 B) 3 C) 4 D) 1

7. (98-4-24) Чему равна сумма всех натуральных чисел, являющихся корнями уравнения
$$|x^2 - 8x + 7| = -7 + 8x - x^2?$$

A) 8 B) 40 C) 25 D) 28

Решение: Решение данного уравнения согласно 2-правилу равносильно решению неравенства

$$x^2 - 8x + 7 \leq 0 \iff (x-1)(x-7) \leq 0.$$

Это неравенство решается методом интервалов. Множество решений состоит из отрезка $[1; 7]$. На этом отрезке содержатся 7 натуральных чисел $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. Их сумма равна $1+2+3+4+5+6+7=28$. **Ответ:** 28 (D).

8. (00-5-22) Решите уравнение

$$|2x-3| = 3-2x.$$

A) $\frac{3}{2}$ B) $(-\infty; \frac{3}{2}]$ C) $(-\infty; \frac{3}{2})$ D) $(-\infty; \infty)$

9. (99-4-24) Сколько целых корней имеет уравнение

$$|x^2-2x| = 2x - x^2?$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) ни одного

10. (98-1-8) При каких значениях m верно равенство $|m+1| = m+1$?

A) $m=-1$ B) $m \in \mathbb{R}$ C) $m=0$ D) $m \geq -1$

11. (98-8-8) При каких значениях a верно равенство

$$|a+2| = -a-2?$$

A) $a=-2$ B) $a \in \emptyset$ C) $a<-2$ D) $a \leq -2$

12. (99-6-47) Найдите сумму корней уравнения

$$|x^2+5x| = 6.$$

A) 10 B) -6 C) -3 D) -10

Решение: Множество решений данного уравнения согласно 4-правилу совпадает с множеством решений двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x=6 \\ x^2+5x=-6. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x^2+5x-6=0 \\ x^2+5x+6=0. \end{array}\right.$$

Корни первого квадратного уравнения равны $x_1=-6$, $x_2=1$, корнями второго квадратного уравнения являются $x_1=-3$, $x_2=-2$. Их сумма равна $-6+1+(-3)+(-2)=-10$. **Ответ:** -10 (D).

13. (99-10-9) Сколько отрицательных корней имеет уравнение

$$\left(\frac{y}{6}+\frac{y}{3}+\frac{y}{2}\right)(y^2-3|y|+2)=0?$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

14. (00-4-11) Найдите произведение корней уравнения

$$x^2-3|x|-40=0.$$

A) -40 B) 40 C) -32 D) -64

15. (99-2-14) Найдите произведение корней уравнения

$$(x-2)^2-4|x-2|+3=0.$$

A) 3 B) 15 C) -3 D) -15

16. (00-6-12) Найдите сумму корней уравнения

$$|1-|1-x||=0,5.$$

A) 0 B) 4 C) 3 D) 1

Решение: Решение данного уравнения в силу 4-правила эквивалентно решению совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 1-|1-x|=0,5 \\ 1-|1-x|=-0,5. \end{array}\right.$$

Корни первого уравнения

$$1-|1-x|=0,5 \iff |1-x|=0,5$$

согласно 4-правилу совпадают с корнями уравнений $1-x=0,5$ и $1-x=-0,5$. Решения последних двух уравнений есть $x_1=0,5$ и $x_2=1,5$. Аналогично корни второго уравнения

$$1-|1-x|=-0,5 \iff |1-x|=1,5$$

совпадают с корнями уравнений $1-x=1,5$ и $1-x=-1,5$. А их решениями являются $x_3=-0,5$ и $x_4=2,5$. Сумма всех корней равна $0,5+1,5+(-0,5)+2,5=4$. **Ответ:** 4 (B).

17. (01-8-13) Найдите произведение корней уравнения

$$|3-|2+x||=1.$$

A) 24 B) 48 C) -12 D) 0

18. (96-1-11) Найдите все значения y, если $|y|:(-0,5)=-2,5$.

A) 0,5 B) 5 и -5 C) $\frac{5}{4}$ и $-\frac{5}{4}$ D) 5

19. (96-9-61) Найдите все значения x, если $-4,8:|x|=-0,5$.

A) 2,4 B) 2,4 и $-2,4$ C) 9,6 и $-9,6$ D) 9,6

20. (96-9-20) Сколько корней имеет уравнение

$$|x+2|+|x|+|x-2|=4?$$

A) 2 B) бесконечно много C) 1 D) 0

Решение: Известно, что величина $|a-b|$ определяет расстояние между точками a и b. При всех $x \in [-2; 2]$ верно равенство $|x+2|+|x|+|x-2| = x+2+|x|-(x-2) = 4+|x|$. В этом случае данное уравнения принимает вид $4+|x|=4$. Это уравнение, а следовательно данное уравнение на отрезке $[-2; 2]$ имеет единственное решение $x=0$. Если $x \notin [-2; 2]$, то $|x+$

$2|$ или $|x-2|$ будет больше четырех. Поэтому выполняется неравенство $|x+2|+|x|+|x-2|>4$. Значит, данное уравнение не имеет решений на множестве $(-\infty;\ -2)\cup(2;\infty)$. Таким образом, данное уравнение имеет единственное решение $x=0$. **Ответ:** 1 (C).

21. (96-12-77) Найдите сумму корней уравнения

$$|x+4|+|x-2|+|x-3|=7.$$

A) 2 B) нет корней C) 0 D) -2

22. (96-13-20) Сколько корней имеет уравнение

$$|x-4|+|x-1|+|x+2|=6?$$

A) нет корней B) 2 C) 3 D) 1

23. (98-3-19) Сколько корней имеет уравнение

$$x^2+|x|-2=0?$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

24. (98-12-97) Найдите произведение корней уравнения

$$|x-1|^2-8=2|x-1|.$$

A) 15 B) -3 C) 5 D) -15

25. (98-9-17) При каких значениях y справедливо равенство

$$|x-y^2|+|x+9|-25=0,$$

если $y^2>x>0$?
A) 4 B) ± 3 C) ± 4 D) 3

26. (01-3-5) Найдите сумму корней уравнения

$$|x|=x^2+x-4.$$

A) $2-\sqrt{5}$ B) $1-2\sqrt{5}$ C) $-1-\sqrt{5}$ D) $1-\sqrt{5}$

27. (98-2-15) Решите уравнение

$$|z|z^4-27|z^2|=0.$$

A) 0; 3 B) 3; -3 C) 0; ± 9 D) -3; 0; 3

Решение: Согласно тождеству $|a|^2=a^2$, равенство $z^4=|z|^4$ тоже являются тождеством. Поэтому данное уравнение равносильно уравнению

$$|z|^5-27|z|^2=0\iff|z|^2(|z|^3-27)=0.$$

Решения этого уравнения состоят из решений уравнений $|z|^2=0$ и $|z|^3-27=0$. А решениями последних двух уравнений являются соответственно $z_1=0$ и $z_2=-3$, $z_3=3$. **Ответ:** $-3; 0; 3$ (D).

28. (01-9-42) Решите уравнение

$$2|x|=\frac{1}{2}x-1.$$

A) 1 B) $\frac{2}{5}$ C) $-\frac{2}{3}$ D) $\emptyset$

29. (03-1-21) Решите уравнение

$$|x|=x^2-6.$$

A) 2; 3 B) ± 2 C) -3 D) ± 3

30. (03-3-16) Решите уравнение

$$x|x|+2x+1=0.$$

A) 1 B) -1 C) $1-\sqrt{2}$ D) $1+\sqrt{2}$

31. (02-2-16) Найдите $|x|$, если $|x-2|+3x=-6$.
A) 4 B) 3 C) 2 D) 6

32. (02-5-9) Найдите произведение корней уравнения

$$(2|x|-1)^2=|x|.$$

A) $\frac{1}{16}$ B) $-\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $-\frac{1}{4}$

33. (02-8-8) Чему равно $5+x$, если $|5-x|=2(2x-5)$?
A) 8 B) 7 C) 9 D) 11

6.2 Неравенства с модулем

При решении неравенств, содержащих переменную под знаком модуля используются следующие соотношения эквивалентности.

1. $|f(x)|<a,\ (a>0)\iff -a<f(x)<a.$

2. $|f(x)|>a,\ (a>0)\iff \left[\begin{array}{l} f(x)>a \\ f(x)<-a. \end{array}\right.$

3. $|f(x)|<|g(x)|\iff f^2(x)<g^2(x)\iff$

$$\iff(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))<0.$$

Существуют несколько способов решения неравенств, содержащих переменную под знаком модуля. Разберем их на примерах.

Пример. Решить неравенство $|x-1|\le 3$.

Решение: ***1-метод – с помощью определения модуля.*** По определению абсолютного значения данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left\{\begin{array}{l} x-1\le 0 \\ -(x-1)\le 3 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{l} x-1\ge 0 \\ x-1\le 3. \end{array}\right.$$

Второе неравенство первой системы умножим на -1, полученная при этом система неравенств равносильна двойному неравенству $-3\le x-1\le 0$. Прибавив ко всем частям этого неравенства 1, получим $-2\le x\le 1$. Итак, решение первой системы – отрезок $[-2;1]$. Вторая система эквивалентна двойному неравенству $0\le x-1\le 3$. Прибавив ко всем частям этого неравенства 1, имеем $1\le x\le 4$, т.е решение второй системы – отрезок $[1;4]$. Объединив полученные отрезки, получим решение данного неравенства $[-2;1]\cup[1;4]=[-2;4]$. **Ответ:** $[-2;4]$.

2-метод – возведение в квадрат. Так как обе части данного неравенства неотрицательны при всех значениях x, то возведя обе части неравенства в квадрат, получим равносильное ему неравенство $|x-1|^2 \leq 3^2$. Это неравенство в силу тождества $|a|^2 = a^2$ равносильно неравенству

$$x^2 - 2x - 8 \leq 0 \iff (x+2)(x-4) \leq 0. \qquad (6.1)$$

Применив к неравенству (6.1) метод интервалов, получим решение $[-2; 4]$. **Ответ:** $[-2; 4]$.

3-метод – "геометрический метод". Величина $|x-1|$ означает расстояние на числовой прямой между точками x и 1. Значит, решение данного неравенства состоит из всех точек x координатной прямой, удаленных от точки с координатой 1 на расстояние, меньшее или равное 3 (см. рис. 6.2). На числовой прямой на 3 единицы левее и правее от точки с координатой 1, находим точки соответственно с координатами -2 и 4. Таким образом, решением неравенства является отрезок $[-2; 4]$. **Ответ:** $[-2; 4]$.

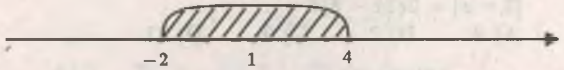


Рисунок 6.2

1. (99-4-5) Сколько целых решений имеет неравенство $4 \leq |x| \leq 8$.
A) 12 B) 10 C) 8 D) 6

Решение: Используем 1-метод. Решение данного неравенства состоит из совокупности решений систем неравенств

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ 4 \leq -x \leq 8 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

Умножив второе неравенство первой системы на -1 получаем решения первой системы $-8 \leq x \leq -4$. Решение второй системы $4 \leq x \leq 8$. Объединив решения систем находим решение данного неравенства $[-8; -4] \cup [4; 8]$. На этом множестве содержатся 10 целых чисел: $-8, -7, -6, -5, -4, 4, 5, 6, 7, 8$. **Ответ:** 10 (B).

2. (99-1-7) Решите неравенство

$$1 < |x| < 4.$$

A) $(-\infty; -4) \cup (4; \infty)$ B) $(-4; -1) \cup (1; 4)$
C) $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ D) $(-1; 1)$

3. (03-5-20) Решите неравенство

$$1 < |x-2| < 3.$$

A) $(-1; 1) \cup (3; 5)$ B) $(-1; 1)$
C) $(3; 5)$ D) $(-1; 5)$

4. (00-3-24) Сколько целых решений имеет неравенство

$$|x-3| \leq 6 - x?$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4

5. (00-6-6) Решите неравенство

$$|x^2 - 5| < 4.$$

A) $(-3; 0) \cup (0; 3)$ B) $(-3; 3)$
C) $(-3; -1) \cup (1; 3)$ D) $(-3; -1)$

6. (00-10-70) Решите неравенство

$$\frac{|x-3|}{x^2 - 5x + 6} \geq 2.$$

A) $[\frac{3}{2}; 2)$ B) $[\frac{5}{2}; 4)$ C) $\emptyset$ D) $[-10; 10]$

7. (01-3-7) Найдите сумму целых решений неравенства

$$x^2 - 3|x| - 4 \leq 0.$$

A) 0 B) 2 C) 3 D) 1

8. (02-11-23) Сколько целых решений имеет неравенство

$$|x^2 - 3| < 2?$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

9. (03-12-69) Сколько целых решений имеет неравенство

$$x^2 - 2|x| < 3?$$

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4

10. (98-10-66) Сколько целых решений имеет неравенство

$$2 \cdot |x-1| \leq |x+3|?$$

A) 6 B) 5 C) бесконечно много D) 0

Решение: Используем 2-метод. Обе части неравенства возведем в квадрат и все члены неравенства перенесем в левую часть

$$(2x-2)^2 - (x+3)^2 \leq 0.$$

Используя формулу разности квадратов, левую часть неравенства разложим на множители:

$$(2x - 2 + x + 3)(2x - 2 - x - 3) \leq 0$$

$$\iff (3x+1)(x-5) \leq 0.$$

Решив это неравенство методом интервалов, получим решение $[-\frac{1}{3}; 5]$. На этом отрезке содержатся 6 целых чисел: $0, 1, 2, 3, 4, 5$. **Ответ:** 6 (A).

11. (01-12-17) Решите неравенство

$$|x+1| > 2|x+2|.$$

A) $(-2; -1)$ B) $[-3; -1]$
C) $(-3; -\frac{5}{3})$ D) $(-3; 0)$

12. (03-7-22) Решите неравенство $|x-4| < |x+4|$.
A) $(-4; 4)$ B) $(0; 4) \cup (4; \infty)$
C) $(0; \infty)$ D) $(-\infty; -4) \cup (-4; 0)$

13. (01-5-24) Найдите сумму целых решений неравенства
$$|5-2x| \leq 3.$$
A) 10 B) 15 C) 6 D) 3

14. (02-1-47) Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству
$$|3x+8| \leq 2?$$
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

15. (96-3-26) Решите неравенство $|x-1| \geq 2$.
A) $(-\infty; -1]$ B) $[-1; 3]$
C) $(-\infty; -1] \cup [3; \infty)$ D) $[1; 3]$

Решение: Используем 3-метод, т.е. "геометрический метод". $|x-1|$ означает расстояние на числовой оси между точками x и 1. Значит, решение данного неравенства состоит из всех точек x координатной прямой, удаленных от точки с координатой 1 на расстояние, большее или равное 2 (см. рис. 6.3). Найдем на числовой оси слева и справа от точки с координатой 1 на расстоянии 2 единиц точки, соответственно с координатами -1 и 3. Итак, решение неравенства лежит вне интервала $(-1; 3)$, т.е оно состоит из множества $(-\infty; -1] \cup [3; \infty)$. **Ответ:** $(-\infty; -1] \cup [3; \infty)$ (C).

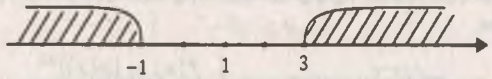


Рисунок 6.3

16. (96-7-8) Сколько целых решений имеет неравенство
$$|x-2| \leq 5?$$
A) 11 B) 10 C) 8 D) 7

17. (96-11-27) Решите неравенство
$$|x-1| \geq 1.$$
A) $[0; 2]$ B) $(-\infty; 0] \cup [2; \infty)$
C) $[-2; 0]$ D) $[2; \infty)$

18. (96-12-27) Решите неравенство
$$|x-1| \leq 2.$$
A) $(-\infty; 3]$ B) $(-\infty; -1] \cup [3; \infty)$
C) $[-1; 3]$ D) $[1; 3]$

19. (97-7-8) Сколько целых решений имеет неравенство
$$|x+2| \leq 3?$$
A) 5 B) 6 C) 7 D) 4

20. (97-1-73) Найти наибольшее натуральное решение неравенства
$$|3x-7| < 5.$$
A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

21. (97-3-8) Сколько целых решений имеет неравенство
$$|3-x| < 4?$$
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7

22. (97-10-8) Сколько целых решений имеет неравенство
$$|4-x| < 6?$$
A) 3 B) 5 C) 8 D) 11

23. (98-5-23) Найти наименьшее натуральное решение неравенства
$$|x-7| \leq 1.$$
A) 5 B) 7 C) 8 D) 6

24. (99-7-24) Найти наименьшее натуральное решение неравенства
$$|x-6| \leq 8.$$
A) 2 B) 7 C) 3 D) 1

25. (99-9-18) Найдите сумму наименьшего и наибольшего целых решений неравенства $|x-4| \leq 12$.
A) 6 B) 8 C) -6 D) -8

6.3 Системы уравнений и неравенств с модулем

1. (98-8-25) При каких значениях b система
$$\begin{cases} x = 3 - |y| \\ 2x - |y| = b \end{cases}$$
имеет единственное решение?
A) $b=0$ B) $b>0$ C) $b<1$ D) $b=6$

Решение: Если $(x_0; y_0)$ является решением данной системы, то в силу равенства $|y| = |-y|$, пара $(x_0; -y_0)$ тоже будет ее решением. Значит для того, чтобы система имела единственное решение необходимо, чтобы $y_0 = 0$. Подставив это значение в первое уравнение системы, имеем $x = 3$. Тогда из второго уравнения системы следует $b = 6$. Теперь покажем, что при $b = 6$ система имеет единственное решение. Перенеся $|y|$ в левую часть первого уравнения и сложив уравнения системы, получим $3x = 9$. Это уравнение имеет единственное решение $x = 3$. Подставив это значение в первое уравнение системы имеем $y = 0$. Значит, при $b = 6$ система имеет единственное решение (3; 0). **Ответ:** $b = 6$ (D).

2. (98-1-25) При каких значениях a система
$$\begin{cases} 3|x| + y = 2 \\ |x| + 2y = a \end{cases}$$
имеет единственное решение?
A) $a=0$ B) $a>0$ C) $a=2$ D) $a=4$

3. (98-8-23) Найдите разность $x - y$ из системы

$$\begin{cases} x + 2|y| = 3 \\ x - 3y = 5. \end{cases}$$

A) 3 B) 2 C) 1 D) -1

4. (98-1-23) Найдите сумму $x + y$ из системы

$$\begin{cases} |x| + y = 2 \\ 3x + y = 4. \end{cases}$$

A) 3 B) 1 C) 2,5 D) 2

5. (00-1-18) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ |x - 3| \leq 1. \end{cases}$$

A) $2 \leq x \leq 3$ B) $-2 \leq x \leq 4$
C) $3 \leq x \leq 4$ D) $x \leq 4$

Решение: Из первого соотношения эквивалентности в 6.2 второе неравенство системы равносильно двойному неравенству $1 - 1 \leq x - 3 \leq 1$. Прибавив ко всем частям неравенства 3, имеем $2 \leq x \leq 4$. Учитывая 1-неравенство $x \geq 3$ получаем решение $3 \leq x \leq 4$. **Ответ:** $3 \leq x \leq 4$ (C).

6. (02-10-55) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} |2x - 3| \leq 1 \\ 5 - 0,4x > 0. \end{cases}$$

A) $[1; 2]$ B) $(-\infty; 2]$
C) $(-\infty; 1] \cup (2; \infty)$ D) $(-0,4; 2)$

7. (01-7-20) Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = 4? \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) $\emptyset$

8. (02-12-17) Какие значения принимает сумма $x + y$, если

$$\begin{cases} |x - 1| + |y - 5| = 1 \\ y = 5 + |x - 1|. \end{cases}$$

A) 6 или 8 B) 7 C) 8 или 10 D) 6 или 7

9. (00-7-20) Найдите $x + y$, если имеет место

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + |y| = 4 \\ |x - 2| + |y| = 2. \end{cases}$$

A) 4 или 2 или 0 B) 0 или 3
C) 2 или 4 D) 0 или 4

10. (03-10-31) Числа x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} |x + y| = 5 \\ xy = 4,75. \end{cases}$$

Каково расстояние между числами x и y на числовой оси?
A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{7}$

11. (99-1-7) Решите двойное неравенство

$$1 < |x| < 4.$$

A) $(-\infty; -4) \cup (4; \infty)$ B) $(-4; -1) \cup (1; 4)$
C) $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ D) $(-1; 1)$

7 Иррациональные уравнения и неравенства

7.1 Иррациональные уравнения

Уравнения, содержащие переменную под знаком корня, называются ***иррациональными***. Например, уравнения

$$\sqrt[4]{x - 3} = 3 - \sqrt{x}; \quad (5 - x)\sqrt{x - 3} = 3 - \sqrt[3]{2x}$$

являются иррациональными. Решение иррациональных уравнений основано на приведении их к рациональным уравнениям с помощью определенных преобразований. С целью избавления от радикалов (знаков корня) обе части уравнения возводят в одинаковую степень. Но при этом могут возникнуть посторонние корни. Поэтому корни последнего уравнения нужно проверить подстановкой в исходное уравнение.

Приведем соотношения эквивалентности, часто используемые при решение иррациональных уравнение.

1. $\sqrt[2k]{f(x)} = \varphi(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = [\varphi(x)]^{2k} \\ \varphi(x) \geq 0. \end{cases}$

2. $\sqrt[2k+1]{f(x)} = \varphi(x) \Longleftrightarrow f(x) = [\varphi(x)]^{2k+1}.$

Способы решения иррациональных уравнений разберем на примерах.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x + 2} + x = 0$.

Решение: Перенесем x из левой части уравнения в правую и возведя обе части в квадрат, имеем

$$x + 2 = (-x)^2 \Longleftrightarrow x^2 - x - 2 = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения равны $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Подставим их в данное уравнение. Для $x_1 = -1$ получаем: $\sqrt{-1 + 2} + (-1) = 1 - 1 = 0$. Для $x_2 = 2$ имеем $\sqrt{2 + 2} + 2 = 2 + 2 = 4 \neq 0$. Значит, $x_1 = -1$ является корнем данного уравнения, а $x_2 = 2$ является посторонним корнем. **Ответ:** $x = -1$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x + 1} = -7$.

Решение: Из неотрицательности арифметического квадратного корня следует $\sqrt{x + 1} \geq 0$. А правая часть уравнения, т.е. -7 является отрицательным числом. Поэтому уравнение не имеет решения. **Ответ:** $\emptyset$.

Аналигично можно показать, что уравнение

$$|x^2 - 1| + \sqrt{2x + 1} = -1$$

тоже не имеет решения.

Пример 3. Решите уравнение

$$x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 7. \qquad (7.1)$$

Решение: Обозначим $x^2 - 3x = t$, тогда данное уравнение примет вид $t + \sqrt{t+5} = 7$. Перенесем t из левой части этого уравнения в правую, затем возведя обе части равенства в квадрат, получим квадратное уравнение $t+5 = (7-t)^2$. Решив его, находим корни $t_1 = 4$, $t_2 = 11$. Корень $t_1 = 4$ удовлетворяет, а корень $t_2 = 11$ не удовлетворяет иррациональному уравнению $t+\sqrt{t+5} = 7$. Подставив значение $t_1 = 4$ в обозначение $x^2 - 3x = t$, приходим к квадратному уравнению

$$x^2 - 3x = t_1 \Longleftrightarrow x^2 - 3x = 4.$$

Его корни равны $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. Они оба удовлетворяют уравнению (7.1). **Ответ:** $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

Примечание. Данное уравнение можно решить и по другому, а именно с помощью обозначения $t = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$, сведя его к уравнению $t^2 + t - 12 = 0$.

1. (98-9-19) Найдите сумму корней уравнения

$$\sqrt{x^4 + 5x^2} = -3x.$$

A) 0 B) -2 C) -4 D) 2

Решение: В силу 1-соотношения эквивалентности данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^4 + 5x^2 = 9x^2 \\ -3x \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение этой системы перепишем в виде

$$x^4 - 4x^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2(x^2 - 4) = 0.$$

Его решениями являются $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$. Теперь проверим условие $-3x \geq 0$. Ему удовлетворяют только $x_1 = 0$ и $x_2 = -2$. Итак, корнями данного уравнения являются $x_1 = 0$ и $x_2 = -2$. Их сумма равна $0 + (-2) = -2$. **Ответ:** -2 (B).

2. (97-1-72) Решите уравнение

$$\sqrt{x+2} + x = 0.$$

A) -1 B) -2 C) 2 D) 0

3. (97-5-39) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2} = x + 2 \\ \sqrt{(x-2)^2} = 2 - x. \end{cases}$$

A) $x \geq -2$ B) $x < 2$
C) $x \leq 2$ D) $-2 \leq x \leq 2$

4. (97-7-61) При каком значении x верно равенство $\sqrt{3+2x} = -x$?
A) -1 B) 1 C) -3 D) 3

5. (98-2-21) Если x_0- больший корень уравнения $\sqrt{x^4 - 9x^2} = -4x$, то чему равно $x_0 + 10$?
A) 10 B) 12 C) 20 D) 15

Решение: Возведя обе части уравнения в квадрат, затем перенеся члены из правой части равенства в левую часть, получим уравнение

$$x^4 - 25x^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2(x^2 - 25) = 0.$$

Его корни равны $x_1 = -5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$. Но $x_3 = 5$ не удовлетворяет исходному уравнению. Поэтому больший корень уравнения равен $x_2 = 0$. Тогда $x_0 + 10 = 0 + 10 = 10$. **Ответ:** 10 (A).

6. (99-2-19) Найдите сумму корней уравнения

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 - 3x = 7.$$

A) 4 B) -3 C) 3 D) -4

7. (99-6-41) Вычислите сумму $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, если $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 4$ и $a - b = 24$.
A) 6 B) 4 C) 5 D) 3

8. (99-5-15) Сколько натуральных чисел являются корнями уравнения

$$\sqrt{(3x-13)^2} = 13 - 3x?$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4

9. (99-8-3) Решите уравнение

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1.$$

A) -1 B) 3 C) $-1; 3$ D) 1

10. (99-9-11) Найдите среднее арифметическое корней уравнения

$$(x^2 - 25)(x-3)(x-6)\sqrt{4-x} = 0.$$

A) $4\frac{1}{3}$ B) $1\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $4\frac{1}{2}$

11. (99-9-12) Найдите произведение корней уравнения

$$\sqrt{x^2 + 77} - 2\sqrt[4]{x^2 + 77} - 3 = 0.$$

A) -3 B) 3 C) 4 D) -4

Решение: Введем обозначение $\sqrt[4]{x^2 + 77} = t$ и запишем данное уравнение в виде $t^2 - 2t - 3 = 0$. Корни этого квадратного уравнения равны $t_1 = -1$, $t_2 = 3$. Подставив эти значения в обозначение $\sqrt[4]{x^2 + 77} = t$ получим уравнения $\sqrt[4]{x^2 + 77} = -1$ и $\sqrt[4]{x^2 + 77} = 3$. Но первое уравнение $\sqrt[4]{x^2 + 77} = -1$ не имеет корней (так как левая часть уравнения положительна, а правая – отрицательна). Возведя обе части второго уравнение в четвертую степень, получим уравнение

$$x^2 + 77 = 3^4 \Longleftrightarrow x^2 = 4.$$

Его корнями являются $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Их сумма равна $(-2) \cdot 2 = -4$. **Ответ:** -4 (D).

12. (00-1-19) Если
$$\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}-6,$$
то чему равно $6\frac{1}{8}+x$?

A) -7 B) 6 C) 7 D) -6

13. (00-2-19) Решить уравнение
$$\sqrt{(2x-1)^2(3-x)}=(2x-1)\sqrt{3-x}.$$

A) $[0,5;3]$ B) $[0;3]$ C) $[1;3]$ D) $(-\infty;0,5]$

Решение: Уравнение имеет смысл при $x\le 3$. Значит, данное уравнение равносильно системе
$$\begin{cases}\sqrt{(2x-1)^2(3-x)}=(2x-1)\sqrt{3-x}\\ x\le 3.\end{cases}$$
Уравнение этой системы при условии $x\le 3$ равносильно уравнению
$$|2x-1|\sqrt{3-x}-(2x-1)\sqrt{3-x}=0,$$
которое, в свою очередь, равносильно уравнению
$$\sqrt{3-x}\cdot(|2x-1|-(2x-1))=0.$$
Решения этого уравнения совпадают с решениями уравнений $\sqrt{3-x}=0$ и $|2x-1|=2x-1$. Из первого уравнения находим $x=3$. Второе уравнение в силу 1-соотношения эквивалентности из п. 6.1 равносильно неравенству $2x-1\ge 0$, которое имеет решение $x\ge 0,5$. Учитывая условие $x\le 3$, получим $x\in[0,5;3]$. **Ответ:** $[0,5;3]$ (A).

14. (00-3-10) Решить уравнение
$$3\sqrt{2x}-5\sqrt{8x}+7\sqrt{18x}=28.$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

15. (00-3-22) Найдите сумму корней уравнения
$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1.$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) -1

16. (00-4-7) Решите уравнение
$$\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{2x}}{2}+3=\sqrt{x}+1.$$

A) 8 B) 4 C) 9 D) 1

17. (00-5-29) Решите уравнение
$$\sqrt{x^2-x-2}=x-3.$$

A) 5 B) 2,2 C) 4 D) $\emptyset$

18. (00-6-33) Укажите значение выражения $x^2\cdot(x+2)$, если
$$\sqrt{3x^2-6x+16}=2x-1.$$

A) -75 B) -45 C) 15 D) 45

19. (00-8-5) Решите уравнение
$$(x^2-9)\sqrt{x+1}=0.$$

A) $-1;3$ B) ± 3 C) $\pm 3;1$ D) 2

20. (00-8-25) Найдите $\sqrt{(8-a)(5+a)}$, если
$$\sqrt{8-a}+\sqrt{5+a}=5.$$

A) 6 B) 20 C) 12 D) 10

Решение: Возведя обе части уравнения в квадрат, приходим к уравнению
$$8-a+2\sqrt{8-a}\sqrt{5+a}+a+5=25$$
$$\Longleftrightarrow 2\sqrt{(8-a)(5+a)}=12.$$
Отсюда получим $\sqrt{(8-a)(5+a)}=6$.
Ответ: 6 (A).

21. (00-8-26) Найдите $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}$, если
$$\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}=5.$$

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6

22. (00-9-31) $\sqrt[4]{ab}=2\sqrt{3}$ и $a,b\in\mathbb{N}$. Какому из приведенных значений не может равняться $a-b$?

A) -32 B) 10 C) 0 D) 25

23. (97-5-26) Вычислить $x+y$, где пара $(x;y)$ – решение системы
$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3\\ \sqrt{xy}=2.\end{cases}$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

24. (01-1-19) Найдите $x+y$ из решения системы уравнений
$$\begin{cases}x-y=21\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3.\end{cases}$$

A) 7 B) 12 C) 23 D) 29

25. (01-2-24) Найдите среднее арифметическое корней уравнения
$$x-5\sqrt{x}+4=0.$$

A) 16 B) 8,5 C) 3 D) 2

26. (01-5-9) Найдите сумму корней уравнения
$$(x^2-4)\sqrt{x+1}=0.$$

A) 1 B) -1 C) 3 D) 2

Решение: Левая часть уравнения имеет смысл при $x\ge -1$. Из условия равенства нулю произведения следуют условия (уравнения) $x^2-4=0$ или $x+1=0$. Их корни $x_1=-2$, $x_2=2$ и $x_3=-1$. Корень $x_1=-2$ не удовлетворяет условию $x\ge -1$. Значит, решениями данного уравнения являются $x_2=2$ и $x_3=-1$. Их сумма равна $2+(-1)=1$. **Ответ:** 1 (A).

27. (01-6-25) Найдите $x+12$, если

$$\sqrt{x+1}+x-11=0.$$

A) 15 B) 16 C) 20 D) 19

28. (01-9-12) Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} y=\sqrt{16-x^2} \\ y-x=4? \end{cases}$$

A) 2 B) 1 C) 0 D) 3

29. (01-10-20) Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{x-9}{\sqrt{x+3}}=x-15?$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

30. (03-7-20) Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\cdots}}}=8.$$

A) 56 B) 48 C) 60 D) 64

Решение: Так как в уравнении содержится бесконечное число произведений, то его можно переписать в виде

$$\sqrt[3]{x\underbrace{\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\cdots}}}}_{8}}=8 \iff \sqrt[3]{x\cdot 8}=8.$$

Отсюда имеем $8x=8^3$ или $x=64$. **Ответ:** 64 (D).

31. (01-12-43) Решите уравнение

$$\sqrt{3x-7}-\sqrt{7-3x}=0.$$

A) 2,3 B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\emptyset$

32. (02-1-8) Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=1?$$

A) $\emptyset$ B) 1 C) 2 D) 3

33. (03-8-38) Решите уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-12=0.$$

A) 81 B) 16 C) 25 D) 9

7.2 Иррациональные неравенства

При решении иррациональных неравенств используются следующие соотношения эквивалентности.

1. $\sqrt[2k]{f(x)}>\varphi(x)\iff$

$$\iff \begin{cases} f(x)>[\varphi(x)]^{2k} \\ \varphi(x)\ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ \varphi(x)<0. \end{cases}$$

2. $\sqrt[2k+1]{f(x)}>\varphi(x)\iff f(x)>[\varphi(x)]^{2k+1}.$

3. $\sqrt[2k]{f(x)}<\varphi(x)\iff \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ \varphi(x)\ge 0 \\ f(x)<[\varphi(x)]^{2k}. \end{cases}$

4. $\sqrt[2k+1]{f(x)}<\varphi(x)\iff f(x)<[\varphi(x)]^{2k+1}.$

1. (97-10-34) Решите неравенства

$$(x-1)\sqrt{6+x-x^2}\le 0.$$

A) $(-\infty;1]$ B) $[-2;3]$
C) $[-2;1]\cup\{3\}$ D) $[3;\infty)$

Решение: Рассмотрим два случая: 1) $6+x-x^2=0$. Корни этого уравнения равны $x_1=-2$, $x_2=3$. Эти числа являются также решениями данного неравенства.

$$2)\ \begin{cases} 6+x-x^2>0 \\ x-1\le 0. \end{cases}$$

Первое неравенство умножим -1, затем его левую часть разложим на множители, получим

$$\begin{cases} (x+2)(x-3)<0 \\ x-1\le 0. \end{cases}$$

Решение этой системы состоит из множества $(-2;1]$. Объединив оба случая, находим решение данного неравенства $[-2;1]\cup\{3\}$.
Ответ: $[-2;1]\cup\{3\}$ (C).

2. (96-7-34) Укажите решение неравенства

$$(x+3)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0.$$

A) $[-3;\infty)$ B) $[-1;2]$
C) $[-3;-1]\cup[2;\infty)$ D) $[2;\infty)$

3. (97-3-34) Укажите решение неравенства

$$(x-3)\sqrt{x^2+x-2}\le 0.$$

A) $(-\infty;3]$ B) $(-\infty;-2]\cup[1;3]$
C) $[-2;3]$ D) $[-1;2]\cup[3;\infty)$

4. (97-7-34) Укажите решение неравенства

$$(x-2)\sqrt{3+2x-x^2}\ge 0.$$

A) $[2;\infty)$ B) $[-1;3]$ C) $[3;\infty)$ D) $[2;3]\cup\{-1\}$

5. (00-3-21) Решите неравенство

$$\sqrt{3x+10}>\sqrt{6-x}.$$

A) $[-1;6]$ B) $[-\frac{10}{3};6]$
C) $(-1;6]$ D) $[-\frac{10}{3};-1)\cup(-1;6]$

6. (01-10-19) Решите неравенство

$$\sqrt{3x-8}>\sqrt{5-x}.$$

A) $(3,25;\infty)$ B) $(\frac{8}{3};5)$
C) $(3,25;5]$ D) $(3,25;5)$

7. (01-12-46) Решите неравенство
$$\sqrt{5x-2x^2-42} > 3.$$
A) $\{-2\}$ B) $\{1\}$ C) $\{2\}$ D) $\emptyset$

8. (02-1-48) Решите неравенство
$$\sqrt{x+1} < 4.$$
A) $(-\infty; 15)$ B) $[0; 15]$ C) $[0; 15)$ D) $[-1; 15)$

9. (02-1-68) Решите неравенство
$$(x+3)\sqrt{10-3x-x^2} \geq 0.$$
A) $[-3; \infty)$ B) $[2; \infty)$
C) $[-3; 2]$ D) $\{-5\} \cup [-3; 2]$

10. (02-10-12) Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$$
A) $[-2; -1] \cup \{3\}$ B) $[-2; 1]$ C) $[1; 3]$ D) $[-2; 3]$

11. (98-4-23) Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству
$$\sqrt{x+2} > x?$$
A) 3 B) 2 C) 4 D) 1

Решение: В силу 1-соотношения эквивалентности данное неравенство равносильно совокупности систем
$$\left\{\begin{array}{l} x+2 > x^2 \\ x \geq 0 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} x+2 \geq 0 \\ x < 0. \end{array}\right.$$
Решим 1-систему. Ее первое неравенство равносильно квадратному неравенству
$$x^2 - x - 2 < 0 \iff (x+1)(x-2) < 0,$$
которое имеет решение $(-1; 2)$. Учитывая второе неравенство системы $x \geq 0$ получим, что решение 1-системы состоит из множества $[0; 2)$.

2-систему перепишем в виде:
$$\left\{\begin{array}{l} x+2 \geq 0 \\ x < 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \geq -2 \\ x < 0 \end{array}\right. \iff -2 \leq x < 0.$$
Это двойное неравенство означает, что решением 2-системы является множество $[-2; 0)$. Объединив полученные решения, получаем решение данного неравенства – полуинтервал $[-2; 2)$. В нем содержатся 4 целых числа $-2, -1, 0, 1$. **Ответ:** 4 (C).

12. (98-12-82) Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству
$$\sqrt{5-x^2} > x-1?$$
A) 5 B) 3 C) 4 D) 2

13. (99-2-20) Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству
$$\sqrt{x^2-6x+9} < 3?$$
A) 4 B) 6 C) 7 D) 5

14. (00-2-15) Найдите наименьшее целое положительное решение неравенства
$$\frac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1.$$
A) 6 B) 3 C) 5 D) 2

15. (00-7-23) Чему равна разность между наибольшим целым и наименьшим целым решениями неравенства
$$\sqrt{x^2-16} < \sqrt{4x+16}?$$
A) 4 B) 5 C) 2 D) 3

16. (01-5-23) Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству
$$\sqrt{\frac{3x-4}{8-x}} > 1?$$
A) 4 B) 1 C) 2 D) 3

17. (02-4-26) Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству
$$\sqrt{x-50} \cdot \sqrt{100-x} > 0?$$
A) 43 B) 54 C) 49 D) 51

Решение: В силу неотрицательности арифметического квадратного корня данное неравенство равносильно системе неравенств
$$\left\{\begin{array}{l} x-50 > 0 \\ 100-x > 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x > 50 \\ x < 100. \end{array}\right.$$
Его решение состоит из интервала $(50; 100)$, который содержит 49 целых чисел. **Ответ:** 49 (C).

18. (01-6-26) Найдите сумму всех целых решений неравенства
$$\frac{\sqrt{2x+7}}{6-3x} \geq 0.$$
A) -4 B) -3 C) 4 D) -5

19. (02-9-26) Чему равна разность между наименьшим целым и наибольшим целым решениями неравенства
$$x - 4\sqrt{x} - 5 \leq 0?$$
A) -25 B) -24 C) -27 D) -5

20. (02-9-28) Сколько целочисленных решений имеет неравенство
$$\frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x-2} \leq 0?$$
A) 3 B) 4 C) 5 D) 2

21. (02-12-14) Сколько целочисленных решений имеет неравенство
$$\frac{5-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} > 0?$$
A) 20 B) 19 C) 21 D) 2

22. (02-12-35) Каково наименьшее целое решение неравенства
$$\sqrt{12-x} < 2?$$
A) 8 B) 9 C) 6 D) 10

23. (03-1-8) Найдите наименьшее целое решение неравенства
$$\sqrt{\frac{2-3x}{x+4}} > -2.$$
A) 0 B) -1 C) -2 D) -3

Решение: Если учесть неотрицательность арифметического квадратного корня, то достаточно решить неравенство
$$\frac{2-3x}{x+4} \geq 0.$$
Решив его методом интервалов, получим полуинтервал $(-4; 2/3]$. Наименьшее целое число в котором равно -3. **Ответ:** -3 (D).

24. (03-1-30) Найдите сумму целых чисел, удовлетворяющих неравенству
$$\sqrt{x} \geq x-6.$$
A) 6 B) 15 C) 28 D) 45

25. (03-3-20) Сколько целочисленных решений имеет неравенство
$$\sqrt{x-4} - \sqrt{x-7} \geq 1?$$
A) 0 B) 1 C) 2 D) 4

26. (03-3-30) Сколько целочисленных решений имеет неравенство
$$\sqrt{5-|2x-1|} < 2?$$
A) 2 B) 3 C) 4 D) 6

27. (03-8-37) Найдите наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству
$$\sqrt{x^2-3x+2} \geq 0.$$
A) 1 B) 2 C) 3 D) 5

28. (03-9-9) Сколько целочисленных решений имеет неравенство
$$\sqrt{\frac{x^2-2}{x}} \leq 1?$$
A) $\emptyset$ B) 1 C) 2 D) 3

29. (03-11-73) Сколько целочисленных решений имеет неравенство
$$\sqrt{8+2x-x^2} > 6-3x?$$
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

8 Прогрессии

Если каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие определенное действительное число a_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Числовая последовательность записывается также в виде $\{a_n\}$. Если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_n < a_{n+1}$, последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей.* Если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_n > a_{n+1}$ последовательность $\{a_n\}$ называется *убывающей.* Если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_n = a_{n+1}$ последовательность $\{a_n\}$ называется *постоянной.*

8.1 Арифметическая прогрессия

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену сложенному с одним и тем же числом d называется ***арифметической прогрессией.*** Например, последовательности 1) $1, 2, 3, 4, \ldots$; 2) $10, 12, 14, 16, \ldots$ составляют арифметические прогрессии. Так как каждый член последовательностей, начиная со второго равен сумме предыдущего члена с 1 или 2 соответственно.

Числа, образующие арифметическую прогрессию, называются *его членами.* Их в общем случае записывают в виде
$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots \tag{8.1}$$
Из определения арифметической прогрессии следует, что разность между любым ее членом и ему предшествующим равна одному и тому же числу d, которое называется *разностью арифметической прогрессии.* Если $d > 0$, то арифметическая прогрессия является возрастающей, если $d < 0$, то - убывающей. Если $d = 0$, все члены арифметической прогрессии равны между собой.

n-й член арифметической прогрессии a_n определяется формулой $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Свойства членов арифметической прогрессии.

1-свойство. Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних членов
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$
2-свойство. В конечной арифметической прогрессии сумма членов, равноудаленных от начала и конца равна сумме первого и последнего членов, т.е.
$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_k + a_{n-k+1}.$$
3-свойство. Обозначим через S_n сумму n первых членов арифметической прогрессии $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$. Эта сумма равна произведению среднего арифметического крайних членов на число членов арифметической прогрессии:
$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

Собрав воедино свойства арифметической прогрессии, приведем их в следующем порядке.

1. $a_n = a_1 + (n-1)d; \quad a_n = a_{n-1} + d.$

2. $a_n - a_m = (n-m)d.$

3. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \ 1 \le k < n.$

4. $a_k + a_m = a_p + a_q, \qquad k + m = p + q.$

5. $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n, \quad S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$

6. $S_n - S_{n-1} = a_n.$

1. В арифметической прогрессии $a_1 = 5$, $d = 2$. Найдите a_7.
A) 12 B) 18 C) 17 D) 10

Решение: Из 1-свойства имеем $a_7 = a_1 + 6d$. Подставим вместо a_1 и d данные значения и получим $a_7 = 5 + 6 \cdot 2 = 5 + 12 = 17$. **Ответ:** 17 (C) .

2. В арифметической прогрессии $a_1 = 3$, $d = 4$. Найдите a_9.
A) 36 B) 35 C) 39 D) 34

3. В арифметической прогрессии $a_2 = 5$, $a_3 = 8$. Найдите разность прогрессии.
A) 2 B) 3 C) 5 D) 1,6

4. В арифметической прогрессии $a_5 = 16$, $d = 5$. Найдите a_9.
A) 36 B) 35 C) 39 D) 34

5. В арифметической прогрессии $a_3 = 5$, $a_9 = 25$. Найдите a_6.
A) 16 B) 15 C) 19 D) 14

6. В арифметической прогрессии $a_1 + a_9 = 20$. Найдите $a_7 + a_3$.
A) 16 B) 15 C) 20 D) 25

7. В арифметической прогрессии $a_9 - a_1 = 32$ Найдите d.
A) 6 B) 5 C) 2 D) 4

8. (96-9-78) В арифметической прогрессии $a_4 - a_2 = 4$ и $a_7 = 14$. Найдите пятый член прогрессии.
A) 12 B) 8 C) 7 D) 10

Решение: В силу 2-свойства из первого условия задачи имеем $2d = 4$. Снова используя 2-свойства, находим:

$$a_7 - a_5 = 2d \Longleftrightarrow a_5 = a_7 - 2d = 14 - 4 = 10.$$

Ответ: $a_5 = 10$ (D).

9. (96-1-27) В арифметической прогрессии $a_2 = 12$ и $a_5 = 3$. Найдите десятый член прогрессии.
A) −6 B) 0 C) −12 D) −30

10. (98-12-36) Какие из формул верны для арифметической прогрессии?
1) $a_1 - 2a_2 + a_3 = 0$ 2) $a_1 = a_3 - a_2$
3) $n = \dfrac{a_n - a_1 + d}{d}$
A) 1; 3 B) 1 C) 2 D) 1; 2

11. (99-1-22) В арифметической прогрессии $a_{20} = 0$ и $a_{21} = -41$. Найдите a_1.
A) 779 B) −779 C) 41 D) −41

12. (99-9-26) В арифметической прогрессии $a_2 - a_1 = 6$. Найдите $a_8 - a_6$.
A) 10 B) 12 C) 9 D) 18

13. (00-5-32) В арифметической прогрессии $a_2 = 9$ и $a_{26} = 105$. Найдите среднее геометрическое первого члена и разности прогрессии.
A) 20 B) 4,5 C) $2\sqrt{5}$ D) 9

14. (00-10-22) Дана арифметическая прогрессия: 4; 9; 14; ... На сколько ее восьмой член больше четвертого?
A) 16 B) 18 C) 20 D) 22

15. (02-4-16) В арифметической прогрессии $a_1 = 3$ и $d = 2$ Найдите $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{25} - a_{26} + a_{27}$.
A) 31 B) 30 C) 29 D) 28

16. В арифметической прогрессии $-\frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \ldots$ определить число отрицательных членов.
A) 10 B) 6 C) 5 D) 7

Решение: Так как $a_1 = -\frac{1}{4}$, $a_2 = -\frac{1}{5}$, разность прогрессии $d = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$. В силу 1-свойства следует, что $a_n = -\frac{1}{4} + (n-1)\frac{1}{20}$. По условию задачи, нужно найти наибольшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$a_n = -\frac{1}{4} + (n-1)\frac{1}{20} < 0.$$

Решение этого линейного неравенства $n < 6$. Значит, 5 членов арифметической прогрессии отрицательны. **Ответ:** 5 (C).

17. (02-11-38) Найдите сумму третьего и десятого членов арифметической прогрессии, если ее 4-ый и 11-ый члены равны соответственно 2 и 30.
A) 16 B) 18 C) 24 D) 28

18. (03-2-67) В первом ряду кинотеатра 21 кресло. В каждом последующим ряду на 2 кресла больше, чем в предыдущем. Сколько кресел в 40 ряду?
A) 42 B) 80 C) 99 D) 100

19. (03-3-36) Найдите десятый член арифметической прогрессии, в которой $a_2 + a_5 - a_3 = 10$ и $a_1 + a_6 = 17$.
A) 24 B) 26 C) 28 D) 29

Примеры на использование 3-4 свойств

20. (97-4-27) Вычислить сумму $a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, если $7, a_2, a_3, a_4, a_5$ и 22 являются первыми шестью членами арифметической прогрессии.
A) 65 B) 60 C) 82 D) 58

Решение: По условию $a_1 = 7$, $a_6 = 22$. В силу 4-свойства арифметической прогрессии

$$a_2 + a_5 = a_3 + a_4 = a_1 + a_6 = 7 + 22 = 29.$$

Тогда $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 29 + 29 = 58$.
Ответ: 58 (D).

21. (97-12-36) В арифметической прогрессии $a_2 + a_4 + a_6 = -18$. Найдите a_4.
A) 6 B) -5 C) -6 D) -4

22. (98-3-20) Найдите шестой член арифметической прогрессии, если первый член ее равен 1, и одиннадцатый член 13.
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7

23. (98-10-67) Найдите пятый член арифметической прогрессии, если второй член равен 5, а восьмой 15.
A) 7,5 B) 12,5 C) 10 D) 8,5

Решение: По условию $a_2 = 5$, $a_8 = 15$. В силу 3-свойства арифметической прогрессии

$$\frac{a_2 + a_8}{2} = a_5 \Longleftrightarrow \frac{5 + 15}{2} = 10 = a_5.$$

Ответ: 10 (C).

24. (02-1-40) Среднее арифметическое трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию равно 2,6. Найдите разность этой прогрессии, если первое число равно 2,4.
A) $\frac{1}{3}$ B) 0,1 C) $\frac{1}{4}$ D) 0,2

25. (02-5-29) Сумма первого и четвертого членов арифметической прогрессии равна 26, а ее второй член больше пятого на 6. Найдите сумму третьего и пятого членов прогрессии.
A) 20 B) 21 C) 22 D) 23

26. (08-03-27) В арифметической прогрессии $a_4 = 15$ и $a_{11} = 43$. Найдите $a_3 + a_{10}$.
A) 68 B) 60 C) 50 D) 24

Примеры на использование формулы суммы первых n членов

27. (96-3-27) В арифметической прогрессии сумма третьего и девятого членов равна 8. Найдите сумму первых 11-ти членов этой прогрессии.
A) 22 B) 33 C) 44 D) 55

Решение: По условию $a_3 + a_9 = 8$. В силу 4-свойства $a_1 + a_{11} = a_3 + a_9 = 8$. В силу 5-свойства

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{8}{2} \cdot 11 = 44.$$

Ответ: 44 (C).

28. (96-11-28) В арифметической прогрессии $a_3 + a_5 = 12$. Найдите S_7.
A) 18 B) 36 C) 42 D) 48

29. (96-12-28) В арифметической прогрессии $a_4 + a_6 = 10$. Найдите S_9.
A) 25 B) 30 C) 35 D) 45

30. (98-10-18) В арифметической прогрессии всего 20 членов. Известно, что $a_2 + a_{19} = 40$. Чему равна сумма всех членов этой прогрессии?
A) 300 B) 360 C) 400 D) 420

31. (96-6-36) В арифметической прогрессии всего 20 членов. Известно, что сумма второго и девятнадцатого членов прогрессии равна 12. Найдите сумму всех членов этой прогрессии.
A) 110 B) 120 C) 130 D) 115

32. (96-10-29) В арифметической прогрессии $a_2 = 10$ и $a_5 = 22$. Найдите сумму восьми первых членов прогрессии.
A) 162 B) 170 C) 115 D) 160

33. (98-11-26) Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии, если ее третий и пятый члены соответственно равны 11 и 19.
A) 210 B) 190 C) 230 D) 220

34. (98-11-75) В арифметической прогрессии $a_1 = 3$, $a_{60} = 57$. Найдите сумму шестидесяти первых членов этой прогрессии.
A) 1500 B) $\frac{3423}{2}$ C) 1600 D) 1800

35. (00-4-22) Пятый член арифметической прогрессии равен 6. Найдите сумму первых девяти ее членов.
A) 36 B) 48 C) 54 D) 45

Решение: В силу 3-свойства $\frac{a_1 + a_9}{2} = a_5 = 6$. В силу 5-свойства

$$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = 6 \cdot 9 = 54.$$ **Ответ:** 54 (C).

36. (99-4-28) Тридцатый член арифметической прогрессии равен 5. Найдите сумму первых 25 ее членов.
A) 125 B) 100 C) 75 D) 225

37. (03-6-56) В арифметической прогрессии $a_{10} = 56$. Найдите сумму первых 19 ее членов.
A) 1024 B) 1032 C) 1056 D) 1064

38. (00-7-25) В арифметической прогрессии сумма первого и девятого членов равна 64. Найдите разность между суммой ее девяти первых членов и пятым членом прогрессии.
A) 256 B) 260 C) 270 D) 208

39. (03-4-19) Восьмой член арифметической прогрессии, состоящей из 15 членов, равен 18. Чему равна сумма всех членов этой прогрессии.
A) 280 B) 270 C) 250 D) 300

40. (08-06-27, 08-23-27) В арифметической прогрессии сумма первых 16 членов равна 528 и $a_{16} = 63$. Найдите d.
A) 7 B) 4 C) 5 D) 6

41. (08-22-27) В арифметической прогрессии шестой член равен 17, а сумма первых 16 членов равна 392. Найдите девятый член прогрессии.
A) 24 B) 26 C) 13 D) 18

42. (97-2-36) Сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n) равна 120. Сколько членов участвует в этой прогрессии, если $a_3 + a_{n-2} = 30$?
A) 6 B) 10 C) 8 D) 12

Решение: В силу 4-свойства $a_1 + a_n = a_3 + a_{n-2} = 30$. Из условия залачи имеем

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{30}{2} \cdot n = 15n = 120.$$

Отсюда получаем, что $n = 8$. **Ответ:** 8 (C).

43. (08-26-27) Между числами 25 и 4 вставлены несколько чисел, образующие вместе с ними арифметическую прогрессию. Если сумма вставленных чисел равна 87, то сколько чисел было вставлено?
A) 6 B) 11 C) 12 D) 9

44. (98-8-27) В арифметической прогрессии третий член равен 8, четвертый член равен 5 и сумма нескольких первых членов равна 28. Сколько членов участвовало в сумме?
A) 10 B) 7 C) 11 D) 8

45. (99-6-54) Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна 91. Найдите n, если $a_3 = 9$ и $a_7 - a_2 = 20$.
A) 7 B) 5 C) 3 D) 9

46. (03-12-63) Сколько членов арифметической прогрессии 10; 15; 20; ... нужно взять, чтобы их сумма равнялась 2475?
A) 40 B) 25 C) 30 D) 35

47. (97-7-27) Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 4 и не превосходящих 100.
A) 1250 B) 1300 C) 1120 D) 1000

Решение: Известно, что числа, кратные 4 имеют вид $4n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ и составляют арифметическую прогрессию. Для этой прогрессии $a_n = 4n$. Значит, $a_1 = 4$, $a_{25} = 100$. В силу 5-свойства имеем

$$S_{25} = \frac{4 + 100}{2} \cdot 25 = 52 \cdot 25 = 1300.$$

Ответ: 1300 (B).

48. (96-7-27) Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 3 и не превосходящих 100.
A) 1683 B) 2010 C) 1500 D) 1080

49. (97-6-17) Найдите сумму первых пятидесяти членов последовательности, заданной формулой $a_n = 4n - 2$.
A) 4500 B) 5050 C) 3480 D) 5000

50. (97-11-17) Найдите сумму первых шестидесяти членов последовательности, заданной формулой $b_n = 3n - 1$.
A) 4860 B) 4980 C) 5140 D) 5430

51. (02-11-37) Найдите сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 9 дают в остатке 4.
A) 527 B) 535 C) 536 D) 542

52. (03-9-26) Найдите сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 2.
A) 640 B) 647 C) 650 D) 654

53. (03-1-70) Чему равно среднее арифметическое первых тысячи натуральных чисел?
A) 500 B) 501 C) 501,5 D) 500,5

54. (00-2-11) Сумма 25 последовательных натуральных чисел равно 1000. Найдите наименьшее из этих чисел.
A) 30 B) 28 C) 26 D) 27

55. (98-1-27) Арифметическая прогрессия имеет 16 членов. Их сумма равна 840, последний член равен 105. Найдите разность прогрессии.
A) 9 B) 7 C) 15 D) 5

56. (98-2-18) В арифметической прогрессии $S_{20} - S_{19} = -30$ и $d = -4$. Найдите a_{25}.
A) −40 B) −50 C) −48 D) −56

Решение: В силу 6-свойства имеем $a_{20} = S_{20} - S_{19} = -30$. Пользуясь 2-свойством, находим $a_{25} - a_{20} = 5d$. Подставив в это выражение значения $a_{20} = -30$ и $d = -4$, получим $a_{25} = -50$. **Ответ:** −50 (B).

57. (00-3-44) Чему равен квадрат седьмого члена арифметической прогрессии, если сумма первых тринадцати членов равна 104.
A) 25 B) 36 C) 49 D) 64

58. (00-5-1) Какой цифрой заканчивается сумма нечетных чисел от 1 до 75?
A) 0 B) 2 C) 3 D) 4

59. (00-9-13) В арифметической прогрессии y; $3y+5$; $5y+10$; ... сумма первых восьми членов равна 396. Найдите y.
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

60. (01-1-26) Сколько раз бьют часы за сутки, если в 1 час они бьют один раз, в 2 часа – два раза, и так далее, в 12 часа – двенадцать раз?
A) 72 B) 78 C) 108 D) 156

61. (01-5-28) В арифметической прогрессии $a_{17} = 2$. Найдите $S_{21} - S_{12}$.
A) 18 B) 15 C) 16 D) 17

62. (02-1-55) Найдите $a_2 + a_9$, если сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 140.
A) 24 B) 26 C) 30 D) 28

63. (02-4-22) Найдите разность арифметической прогрессии, если для её членов верно равенство $a_1 + a_3 + \cdots + a_{19} = a_2 + a_4 + \cdots + a_{20} + 10$.
A) 1 B) -1 C) 0 D) -2

Решение: Известно, что для всех $n \geq 2$ справедливо равенство $a_n - a_{n-1} = d$. Равенство из условия задачи перепишем в виде

$$-10 = (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{20} - a_{19}).$$

Выражение в каждой скобке равно d, таких скобок 10. Значит, верно равенство $-10 = 10d$. Отсюда получим,что $d = -1$. **Ответ:** -1 (B).

64. (02-4-18) Найдите a_{11}, если для членов арифметической прогрессии верно равенство $a_1 + a_3 + \cdots + a_{21} = a_2 + a_4 + \cdots + a_{20} + 15$.
A) 11 B) 13 C) 15 D) 17

65. (03-5-27) В арифметической прогрессии $a_6 = 10$ и $S_{16} = 200$. Найдите a_{12}.
A) 16 B) 14 C) 18 D) 20

8.2 Геометрическая прогрессия

Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену умноженному на одно и то же не равное нулю число q, называется *геометрической прогрессией*. Например, последовательности 1) $1, 3, 9, \ldots$; 2) $20, 10, 5, \ldots$ образуют геометрические прогрессии. В первом примере $q = 3$, во втором $q = 0,5$.

Числа, образующие геометрическую прогрессию, называются его *членами*. Обычно геометрическую прогрессию, записывают в виде

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n, \ldots \qquad (8.2)$$

Из определения геометрической прогрессии следует, что отношение любого ее члена к предшествующему равно числу q, которое называется *знаменателем геометрической прогрессии*. Если $b_1 > 0$ ($b_1 < 0$) и $q > 1$, то геометрическая прогрессия является *возрастающей (убывающей)*, в случае $q \in (0;\ 1)$ – *убывающей (возрастающей)*. При $q < 0$ геометрическая прогрессия называется *знакопеременной*, а при $|q| < 1$ она называется *бесконечно убывающей*. Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны между собой, т.е. имеем постоянную последовательность.

n-й член геометрической прогрессии b_n определяется формулой $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Свойства членов геометрической прогрессии.

1-свойство. Последовательность $\{b_n\}$ является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, равен по модулю среднему геометрическому соседних членов

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1}\, b_{n+1}} \iff b_n^2 = b_{n-1}\, b_{n+1},\ n \geq 2.$$

2-свойство. В конечной геометрической прогрессии произведение членов, равноудаленных от начала и конца прогрессии равно произведению ее крайних членов, т.е.

$$b_1\, b_n = b_2\, b_{n-1} = b_3\, b_{n-2} = \cdots = b_k\, b_{n-k+1}.$$

3-свойство. Обозначим через S_n сумму n первых членов геометрической прогрессии $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n$. Справедливы формулы ($q \neq 1$)

$$S_n = \frac{b_1 - b_n\, q}{1-q}, \quad S_n = \frac{b_n\, q - b_1}{q-1}, \quad S_n = \frac{b_1\,(q^n-1)}{q-1}.$$

Очевидно, $S_n = b_1\, n$ при $q = 1$.

4-свойство. Для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии справедлива формула

$$S = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots = \frac{b_1}{1-q}.$$

Собрав воедино свойства геометрической прогрессии, приведем их в следующем порядке.

1. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad b_n = q\, b_{n-1}.$
2. $b_n : b_m = q^{n-m}.$
3. $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, \quad n \geq 2.$
4. $b_k b_m = b_p b_q, \quad k + m = p + q.$
5. $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}, \quad S_n = \dfrac{b_n\, q - b_1}{q-1}, \quad (q \neq 1).$
6. $S_n - S_{n-1} = b_n.$
7. $S = \dfrac{b_1}{1-q}, \quad |q| < 1.$

1. В геометрической прогрессии $b_1 = 2$, $q = 3$. Найдите b_5.
A) 162 B) 158 C) 120 D) 254

Решение: В силу 1-свойства $b_5 = b_1 q^4$. Подставив сюда значения b_1 и q получим $b_5 = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$. **Ответ:** 162 (A).

2. В геометрической прогрессии $b_2 = 1$, $q = 2$. Найдите $b_5 - b_4$.
A) 2 B) 5 C) 4 D) 8

3. В геометрической прогрессии $b_3 = 10$, $q = 3$. Найдите b_5.
A) 90 B) 85 C) 60 D) 270

4. В геометрической прогрессии с положительными членами $b_5 = 64$, $b_7 = 16$. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.
A) 0,2 B) 0,5 C) 4 D) 2

5. В геометрической прогрессии $b_3 b_5 = 64$. Найдите b_4.
A) 8 B) -8 C) ± 8 D) 4

6. Найдите пятый член знакопеременной геометрической прогрессии, в которой $b_3 = 4$, $b_7 = 9$.
A) 2 B) -6 C) 6 D) 5

7. (98-4-21) Не равные нулю числа x, y, z образуют в указанном порядке знакопеременную геометрическую прогрессию, а числа $x+y; y+z; z+x$ арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.
A) -2 B) -1 C) -3 D) -4

Решение: Пусть знаменатель геометрической прогрессии равен q. Тогда $y = qx$, $z = q^2x$. Так как числа $x+y$, $y+z$, $z+x$ составляют арифметическую прогрессию, то $2(y+z) = x + y + z + x$, т.е. $y + z = 2x$. Подставив вместо y и z их выражения через x и q, приходим к уравнению $qx + q^2x - 2x = 0$, откуда получим $x(q^2+q-2) = 0$. По условию задачи $x \neq 0$, поэтому $q^2+q-2 = 0$. Корни этого уравнения равны $q_1 = 1$, $q_2 = -2$. В силу знакопеременности геометрической прогрессии следует, что $q = -2$. **Ответ:** -2 (A).

8. (08-20-27) В возрастающей геометрической прогрессии первый член равен 2, а разность седьмого и четвертого членов равна 1404. Найдите знаменатель прогрессии.
A) 2 B) 3 C) $2\sqrt{2}$ D) 4

9. (97-9-87) Вычислить сумму $b_2+b_3+b_4+b_5$, если $2, b_2, b_3, b_4, b_5$ и 486, являются первыми шестью членами геометрической прогрессии.
A) 200 B) 260 C) 230 D) 240

10. (98-7-38) Какая последовательность является геометрической прогрессией.

$$1)\ a_n = 2x^n \quad 2)\ c_n = ax^n + 1 \quad 3)\ b_n = (\frac{3}{5})^n?$$

A) 1;3 B) 2;3 C) ни какая D) 1;2;3

11. (00-2-21) Начиная с какого члена, члены геометрической прогрессии $-8; 4; -2; \ldots$ по модулю меньше 0,001?
A) 16 B) 12 C) 15 D) 14

12. (00-10-23) Дана геометрическая прогрессия: 64, 32, 16, ... На сколько ее девятый член меньше шестого?
A) 1,025 B) 1,5 C) 1,25 D) 1,75

Решение: В данной геометрической прогрессии $b_1 = 64$, $b_2 = 32$. Отсюда имеем $q = 1/2$. Тогда в силу 1-свойства

$$b_6 = b_1 q^5 = \frac{64}{32} = 2, \quad b_9 = b_1 q^8 = \frac{64}{256} = \frac{1}{4}.$$

Их разность равна $b_6 - b_9 = 2 - 0,25 = 1,75$. **Ответ:** 1,75 (D).

13. (02-4-23) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если для её членов верно равенство $128\, b_1 b_3 \cdots b_{13} = b_2 b_4 \cdots b_{14}$.
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

14. (03-2-5) В геометрической прогрессии $b_4 - b_2 = 24$ и $b_2 + b_3 = 6$. Найдите b_1.
A) 0,4 B) 1 C) $1\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{5}$

15. (03-6-57) В возрастающей геометрической прогрессии $b_2 = 6$, а сумма первых трех членов равна 26. Найдите разность между третьим и первым членами этой прогрессии.
A) 15 B) 16 C) 14 D) 13

16. (03-12-66) В возрастающей геометрической прогрессии $b_1 = 3$, и $b_7 - b_4 = 168$. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.
A) 3 B) $\frac{3}{2}$ C) $\sqrt{7}$ D) 2

Примеры на использование 3-4-свойств

17. (00-9-40) При каких значениях x числа 0, (16); x и 0, (25) являются последовательными членами знакопеременной геометрической прогрессии?
A) 0,(20) B) $\pm 0,(20)$ C) $-0,(20)$ D) $-0,(21)$

Решение: Так как геометрическая прогрессия является знакопеременной, то $x < 0$, а в силу 3-свойства выполняется равенство

$$x^2 = 0,(16) \cdot 0,(25) = \frac{16}{99} \cdot \frac{25}{99}.$$

Поэтому

$$x = -\frac{4 \cdot 5}{99} = -\frac{20}{99} = -0,(20).$$

Ответ: $-0,(20)$ (C).

18. (96-6-37) В геометрической прогрессии $b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 = 216$. Чему равен третий член прогрессии?
A) 12 B) 8 C) 4 D) 6

19. (97-8-36) В геометрической прогрессии имеет место равенство $b_3 \cdot b_4 \cdot b_5 = 64$. Каким должен быть четвертый член прогрессии?
A) 10 B) 12 C) 4 D) 8

20. (00-3-46) Чему равен пятый член геометрической прогрессии, если произведение третьего и седьмого ее членов равно 144?
A) 6 B) ± 12 C) -8 D) -12

21. (00-3-47) Между числами $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{48}$ вставлены три положительных числа так, что они совместно с данными числами образуют геометрическую прогрессию. Найдите сумму вставленных чисел.
A) 0,5 B) $\frac{7}{12}$ C) 0,375 D) $\frac{7}{24}$

22. (00-7-26) Все члены геометрической прогрессии положительны. Известно, что первый её член равен 2, а пятый равен 18. Найдите разность между пятым и третьим членами этой прогрессии.
A) 10 B) 12 C) 8 D) 11

23. (02-8-9) Между числами 3 и 19683 вставлены 7 положительных чисел таким образом, что получившиеся 9 чисел образуют геометрическую прогрессию. Найдите число, стоящее на 5 месте.
A) 243 B) 343 C) 286 D) 729

Примеры на сумму первых n членов

24. В геометрической прогрессии $b_1 = 3$, $q = 2$. Найдите сумму первых шести ее членов.
A) 63 B) 189 C) 126 D) 184

Решение: В силу 5-свойства

$$S_6 = \frac{b_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{3(1-2^6)}{1-2} = 3 \cdot 63 = 189.$$

Ответ: 189 (B).

25. Найти сумму пяти первых членов геометрической прогрессии: $-4, 16, -64, \ldots$.
A) 760 B) -820 C) 980 D) -640

26. Сумма какого числа членов геометрической прогрессии 81, 27, 9, ... равна 120?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

27. В геометрической прогрессии $b_6 - b_1 = 84$, $q = 3$. Найдите сумму первых пяти ее членов.
A) 63 B) 89 C) 42 D) 21

28. (97-12-35) Сумма шести первых членов геометрической прогрессии равна -126, а сумма пяти первых членов той же прогрессии равна -62. Чему равен первый член прогрессии, если ее знаменатель равен 2?
A) -1 B) -3 C) -4 D) -2

Решение: Так как $S_5 = -62$, $S_6 = -126$, то используя 7-свойство, находим $b_6 = S_6 - S_5 = -126 + 62 = -64$. В силу того, что $q = 2$ и $b_6 = b_1 \cdot q^5$ получим $-64 = b_1 \cdot 2^5$. Откуда имеем $b_1 = -2$. **Ответ:** -2 (D).

29. (98-2-19) В геометрической прогрессии $S_6 - S_5 = -128$ и $q = -2$. Найдите b_8.
A) 512 B) 256 C) -512 D) -256

30. (98-3-21) Найдите четвертый член геометрической прогрессии, знаменатель которой равен 3, а сумма четырех первых ее членов равна 80.
A) 24 B) 32 C) 54 D) 27

31. (98-8-26) В геометрической прогрессии первый член равен 486, а знаменатель равен $\frac{1}{3}$. Найдите сумму четырех первых членов этой прогрессии.
A) 680 B) 840 C) 720 D) 760

32. (98-1-26) Знаменатель геометрической прогрессии равен -2, сумма её первых пяти членов равна 5,5. Найдите пятый член прогрессии.
A) 4 B) -8 C) 8 D) -16

33. (98-11-27) Найдите первый член геометрической прогрессии, состоящей из шести членов, если суммы первых и последних трех членов соответственно равны 112 и 14.
A) 72 B) 64 C) 56 D) 63

34. (99-4-29) В геометрической прогрессии $q = 2$ и $S_4 = 5$. Найдите b_2.
A) 0,4 B) 0,8 C) $1\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$

35. (00-6-25) Сумма первых четырех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 15, а сумма следующих четырех членов равна 240. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.
A) 31 B) 48 C) 63 D) 127

Решение: Из условия задачи и в силу 1-свойства имеем

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = b_1(1 + q + q^2 + q^3) = 15 \\ b_5 + b_6 + b_7 + b_8 = q^4 b_1(1 + q + q^2 + q^3) = 240 \end{cases}$$

и $q > 1$. Разделив второе уравнение системы на первое, получим $q^4 = 16$, откуда следует, что $q = 2$. Подставив это значение q в первое уравнение системы, находим: $b_1 = 1$. Используя 5-свойство вычислим $S_6 = 2^6 - 1 = 63$. **Ответ:** 63 (C).

36. (01-1-28) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, состоящей из 6 членов, зная, что сумма трех первых её членов равна 168, а сумма трех последних равна 21.
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2

37. (02-1-56) Сумма первых трех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 7, а их произведение равно 8. Найдите пятый член этой прогрессии.
A) 6 B) 32 C) 12 D) 16

38. (02-4-21) В геометрической прогрессии $b_1 = 1$ и $q = \sqrt{2}$. Найдите сумму $b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{15}$
A) 253 B) 254 C) 255 D) 256

39. (02-5-28) Найдите сумму первого и пятого членов геометрической прогрессии, если сумма шести ее первых членов равна 1820, а знаменатель прогрессии равен 3.
A) 164 B) 246 C) 328 D) 410

40. (02-11-39) Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, у которой второй и пятый члены равны соответственно 2 и 16.
A) 81 B) 72 C) 65 D) 63

41. (03-9-25) Первый член и знаменатель геометрической прогрессии равны 2. Сколько первых членов этой прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равна 1022?
A) 5 B) 8 C) 9 D) 10

42. (03-4-20) Разность между шестым и первым членами геометрической прогрессии равна 1210 и знаменатель прогрессии равен 3. Найдите сумму первых пяти членов этой прогрессии.
A) 610 B) 615 C) 600 D) 605

43. (99-1-23) Найдите сумму геометрической прогрессии.

$$\sqrt{5},\ 1,\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ \ldots$$

A) $\frac{5}{\sqrt{5}-1}$ B) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}$ D) 4,16

Решение: Данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, в ней $b_1 = \sqrt{5}$ и $q = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Тогда по 7-формуле находим

$$S = \frac{\sqrt{5}}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{5}{\sqrt{5}-1}.\quad \textbf{Ответ:}\quad \frac{5}{\sqrt{5}-1}\ (A).$$

44. (99-10-25) Все члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии положительны, сумма ее членов равна 8, а сумма ее первых четырех членов равна $\frac{15}{2}$. Найдите первый член прогрессии.
A) 2 B) 4,5 C) 4 D) 3

45. (00-3-48) Найдите разность между первым и третьим членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма этой прогрессии равна 9, а ее знаменатель равен $\frac{1}{3}$
A) $5\frac{1}{3}$ B) $4\frac{2}{3}$ C) $5\frac{2}{3}$ D) $2\frac{1}{3}$

46. (01-8-25) Первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии на 8 больше второго, а сумма ее членов равна 18. Найдите третий член прогрессии.
A) $1\frac{1}{3}$ B) $-33\frac{1}{3}$ C) $-1\frac{1}{3}$ D) $2\frac{2}{3}$

47. (02-1-16) Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 56, а сумма квадратов членов этой прогрессии равна 448. Найдите знаменатель прогрессии.
A) 0,75 B) 0,8 C) 0,25 D) 0,5

Решение: По условию задачи $S = \frac{b_1}{1-q} = 56$ и $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2+\cdots = b_1^2(1+q^2+\cdots+q^{2(n-1)}+\cdots) = 448$. Выражение в скобках определяет сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем q^2. Ее сумма равна $\frac{1}{1-q^2}$. В результате имеем систему

$$\begin{cases} b_1 : (1-q) = 56 \\ b_1^2 : (1-q^2) = 448. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы найдем $b_1 = 56(1-q)$. Подставив это выражение во второе уравнение системы, приходим к уравнению $7(1-q) = 1+q$. Корень этого уравнения равен $q = 6/8 = 0,75$. **Ответ:** $0,75$ (A).

48. (02-5-30) При каком значении a сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b_1 = 2a$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ равна 8?
A) 1 B) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ C) $2-\sqrt{2}$ D) $2(2-\sqrt{2})$

49. (02-12-32) Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 243, а сумма первых ее пяти членов равна 275. На сколько знаменатель этой прогрессии меньше $\frac{1}{5}$?
A) $\frac{7}{15}$ B) $\frac{8}{15}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{13}{15}$

9 Текстовые задачи

9.1 Задачи на числа

1. Через n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно провести $n(n-1):2$ различных прямых.

2. Если $N(A)$ означает число элементов множества A, то верно равенство $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$.

3. Среди натуральных чисел от 1 до n количество чисел, не делящихся на p и q равно

$$\ell = n - \left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{q}\right] + \left[\frac{n}{pq}\right].$$

Здесь $[x]$ – целая часть x, p и q – взаимно-простые числа.

1. (96-10-39) Даны 6 точек. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько всего различных прямых можно провести через эти 6 точек?
A) 6 B) 12 C) 10 D) 15

Решение: В силу 1-правила через 6 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно провести $6(6-1):2 = 15$ различных прямых. **Ответ:** 15 (D).

2. (96-1-36) Даны 7 точек. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько всего различных прямых можно провести через эти 7 точек?
A) 28 B) 21 C) 42 D) 35

3. (01-2-43) Даны четыре точки на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько отрезков получится, если их попарно соединить отрезками?
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7

4. (98-12-101) 13 друзей обменялись рукопожатиями. Сколько было сделано рукопожатий?
A) 169 B) 156 C) 78 D) 130

5. (96-6-4) Сколько секунд содержится в 2 часах 30 минутах 3 секундах?
A) 10203 B) 8203 C) 9003 D) 9803

6. (97-8-4) Сколько секунд содержится в 1 часе 160 минутах 2 секундах?
A) 106002 B) 12202 C) 14202 D) 13202

7. (97-2-4) Сколько квадратных сантиметров содержится в 3 м^2 1 дм^2 5 см^2?
A) 3015 B) 3105 C) 30015 D) 30105

8. (97-12-4) Сколько квадратных сантиметров содержится в 2 м^2 3 дм^2 4 см^2?
A) 2034 B) 20244 C) 21034 D) 20304

9. (97-5-8) Сколько метров проходит муравей за 1 минуту, если он за 5 минут проходит $15\frac{5}{6}$ м?
A) $3\frac{5}{6}$ B) $15\frac{1}{6}$ C) $3\frac{1}{6}$ D) 3

Решение: Пусть муравей проходит x метров за 1 минуту. Тогда верно равенство $15\frac{5}{6} : 5 = x : 1$. Отсюда $x = 3\frac{1}{6}$. **Ответ:** $3\frac{1}{6}$ (C).

10. (03-2-64) Черепаха проходит 50 см пути за 1 минуту. За какое время она проходит расстояние в 0,1 км?
A) $2\frac{2}{3}$ B) $2\frac{1}{2}$ C) $3\frac{1}{3}$ D) $3\frac{1}{2}$

11. (97-9-8) Сколько раз вращается колесо за 1 минуту, если оно за 7 минут вращается $12\frac{3}{5}$ раза?
A) $1\frac{4}{5}$ B) 1 C) $1\frac{3}{5}$ D) $1\frac{2}{5}$

12. (98-7-12) Пешеход 1 км пути проходит за $\frac{2}{9}$ часа. За сколько часов он пройдет путь в $\frac{3}{4}$ км?
A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{8}{27}$ D) $\frac{1}{4}$

13. (00-5-24) В 1 л морской воды содержится 0,00001 мг золота. Сколько килограммов золота содержится в 1 км^3 морской воды?
A) 0,1 B) 0,01 C) 1 D) 10

14. (01-2-6) Автомашина Тико на 100 км тратит 5,8 горючего. Какое растояние можно пройти на этой автомашине, потратив 8,7 л горючего?
A) 160 B) 154,8 C) 150 D) 145,4

15. (98-11-21) На карте расстояние между двумя городами равно 4,5 см. Найдите истинное расстояние (км) между этими городами, если масштаб карты 1 : 2000000.
A) 0,9 B) 9 C) 90 D) 900

16. (00-5-11) Отрезку длиной в 3,6 см на карте соответствует расстояние в 72 км на местности. Какое расстояние между двумя городами на местности, если расстояние между ними на карте 12,6 см?
A) 240 B) 244 C) 246 D) 252

17. Боксерский ринг – квадрат со стороной 6 м. Он окружается канатами в три ряда. Сколько метров канатов требуется для этого?
A) 80 B) 72 C) 76 D) 88

18. (97-9-11) В баке автомобиля было 70 л бензина. Чтобы доехать до Гулистана было израсходовано $\frac{2}{5}$, а до Чимгана $\frac{3}{7}$ части этого бензина. Сколько литров бензина осталось в баке?
A) 13 B) 15 C) 18 D) 12

19. (98-2-6) Как изменится разность, если уменьшаемое увеличить на 16, а вычитаемое увеличить на 20?
A) уменьшится на 4 B) увеличится на 36
C) уменьшится на 36 D) увеличится на 4

20. (98-3-7) На сколько увеличилось число $4\frac{3}{5}$, если оно увеличилось в $2\frac{1}{2}$ раза?
A) 6,6 B) 6 C) 7 D) 6,9

Решение: Если число $4\frac{3}{5}$ увеличить в $2\frac{1}{2}$ раза, получится число $4\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{2} = \frac{23}{2}$. Разность полученного и данного чисел равна $\frac{23}{2} - 4\frac{3}{5} = \frac{69}{10} = 6,9$. **Ответ:** 6,9 (D).

21. (99-6-59) Найдите среднее арифметическое целых частей следующих неправильных дробей: $\frac{65}{6}$ и $\frac{39}{8}$.
A) 7 B) 6 C) 8 D) 5

22. (99-9-21) Найдите сумму всех несократимых дробей из отрезка [1; 3] со знаменателем, равным 3.
A) $8\frac{1}{3}$ B) $8\frac{2}{3}$ C) $7\frac{1}{3}$ D) 8

23. (00-2-2) После зачеркивания первой цифры двухзначного числа a, удовлетворяющего условию $32 < a < 92$, оно уменьшилось в 31 раз. Найдите зачеркнутую цифру.
A) 5 B) 4 C) 6 D) 7

24. Найдите отрицание утверждения "все учащиеся 9^A класса – отличники".
A) Все учащиеся 9^A класса – двоечники
B) В 9^A классе нет ни одного отличника
C) В 9^A классе по крайне мере один учащийся не является отличником
D) В 9^A классе есть только один отличник

25. Найдите отрицание утверждения "уравнение имеет единственное решение".
A) Уравнение не имеет решения
B) Уравнение имеет бесконечно много решений
C) Уравнение имеет более двух решений

D) Уравнение не имеет решений или имеет более одного решений

26. Найдите отрицание утверждения "действительное число x больше 1".
A) Действительное число x меньше 1
B) Действительное число x меньше или равно 1
C) $x-$ отрицательное действительное число
D) Действительное число x меньше или равно 0

27. (00-2-14) Сумма двух нечетных чисел делится на 5. Какой цифрой оканчивается сумма кубов этих чисел?
A) 6 B) 5 C) 4 D) 0

Решение: 1-вывод: сумма двух нечетных чисел - четное число. 2-вывод: четное число, делящееся на 5, оканчивается цифрой 0. 3-вывод: Последние цифры данных чисел или 1 и 9 или 3 и 7 или 5 и 5. Во всех трех случаях сумма кубов этих чисел оканчивается цифрой

$$\ldots 1^3 + \ldots 9^3 = \ldots 1 + \ldots 9 = \ldots 0,$$

$$\ldots 3^3 + \ldots 7^3 = \ldots 7 + \ldots 3 = \ldots 0,$$

$$\ldots 5^3 + \ldots 5^3 = \ldots 5 + \ldots 5 = \ldots 0.$$

Ответ: 0 (D).

28. (02-1-28) Найдите сумму всех трехзначных чисел с различными цифрами, составленных из цифр 1, 2 и 3.
A) 1233 B) 2133 C 1332 D) 2331

29. Найдите произведение наибольшего и наименьшего четырехзначных чисел, написанных с помощью цифр 2 и 0.
A) 2222 B) 2000 C) 4222 D) 4444000

30. На ферме содержатся 43 коровы и столько же телят. В день каждой корове требуется 8 кг, каждому теленку 5 кг корма. Сколько корма для скота требуется на 30 дней?
A) 28770 B) 12560 C) 16770 D) 3000

31. (02-1-30) Если a и $b-$ произвольные натуральные числа, то на какое число делится без остатка выражение $2a + 8b$?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 12

32. (01-10-11) В группе туристов отношение числа мужчин к числу женщин как 3 : 4. Какому из нижеприведенных чисел не может равняться число туристов в группе?
A) 28 B) 21 C) 23 D) 35

33. (99-5-8) В деревне детей в два раза больше чем взрослых, а пенсионеров в три раза меньше чем остальных жителей. Если к числу 15 слева и справа приписать одну и ту же цифру, получится число жителей деревни. Какая это цифра?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 6

34. (96-3-62) Сколько чисел от 1 до 100 не делятся ни на 2, ни на 3?
A) 33 B) 30 C) 32 D) 21

Решение: В силу 3-правила

$$\ell = 100 - \left[\frac{100}{2}\right] - \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{2\cdot 3}\right] = 100 - 50 - 33 + 16$$

$= 33$. **Ответ:** 33 (A).

35. (96-12-60) Сколько чисел от 1 до 100 не делятся ни на 2, ни на 5?
A) 35 B) 40 C) 41 D) 32

36. (98-9-3) Из 35 учащихся выпускного класса 28 состоят в секции по плаванию и 14 в секции по волейболу. Какой процент учащихся состоит в обоих секциях, если каждый учащийся состоит хотя бы в одной секции?
A) 20 B) 18 C) 25 D) 15

37. (03-10-34) В клубе 30 человек. 22 человека участвуют в танцевальном кружке, а 17 поют в хоре. Сколько человек занимаются только танцами?
A) 8 B) 10 C) 12 D) 13

38. (03-12-54) Из 30 человек в туристической группе 20 человек знают английский язык, а 15 человек французский язык. Сколько туристов в этой группе знают оба этих языка?
A) 5 B) 10 C) 15 D) 8

Задачи, решаемые с помощью составления уравнений или систем уравнений

39. (98-12-61) Если из двузначного числа вычесть число, полученное перестановкой мест цифр в первоначальном числе, то результат обязательно делится на:
A) 5 B) 11 C) 9 D) 4

Решение: Двузначное число состоящее из цифр a и b можно представить в виде $10a + b$. Число, полученное сменой мест его цифр равно $10b + a$. Их разность

$$10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b).$$

Значить, разность делится без остатка на 9. **Ответ:** 9 (C).

40. (00-1-5) Если к двузначному числу приписать справа цифру 0, то получится число, равное сумме половины данного числа и числа 323. Какое это было число?
A) 54 B) 14 C) 24 D) 34

41. (98-4-2) Результат сложения двузначного числа с числом, полученным сменой мест цифр в первоначальном числе, обязательно делится на:
A) 3 B) 11 C) 9 D) 4

42. (98-12-67) A, B – цифры; $\overline{AB}$ и $\overline{5A}$ - двузначные числа. Вычислите $A^2 + B^2$, если $\overline{AB} \cdot 3 = \overline{5A}$
A) 65 B) 13 C) 50 D) 37

43. (99-7-13) Двузначное число в четыре раза больше суммы своих цифр, а сумма квадратов этих цифр равна 5. Найдите квадрат данного двузначного числа.
A) 441 B) 169 C) 121 D) 144

44. (01-2-5) Найдите двузначное число, которое равно утроенной сумме своих цифр.
A) 17 B) 21 C) 13 D) 27

45. (03-1-63) Сколько существует двузначных чисел, при делении которых на сумму их цифр получается 4 без остатка?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

46. (96-3-22) Матери 50, а дочери 28 лет. Сколько лет назад дочь была вдвое моложе матери?
A) 5 B) 6 C) 8 D) 4

Решение: Пусть x лет назад дочь было моложе матери в два раза. В то время матери было $50 - x$ лет, а дочери $28 - x$ лет. По условию задачи $2(28-x) = 50-x$. Отсюда $x = 6$. **Ответ:** 6 (B).

47. (96-12-23) Бабушке 100, а внучке 28 лет. Сколько лет назад бабушка была старше внучки в 4 раза?
A) 8 B) 5 C) 4 D) 6

48. (02-1-41) Саша моложе отца на 32 года. Отец моложе дедушки на столько же. Сколько лет дедушке теперь, если три года назад сумма их возрастов равнялась 111?
A) 69 B) 72 C) 75 D) 80

49. (02-7-50) Возраст 36-летней матери в 3 раза больше суммы возрастов четырех ее детей. Через сколько лет возраст матери будет равен сумме возрастов детей?
A) 8 B) 9 C) 10 D) 7

50. (03-1-61) Сумма возрастов двух братьев близнецов за последние 10 лет удвоилась. Каков будет возраст каждого из них еще через 10 лет?
A) 20 B) 30 C) 40 D) 25

51. (96-1-2) Дано несколько натуральных чисел, сумма которых равна 75. Если каждое из этих чисел уменьшить на 2, то сумма новых чисел будет равна 61. Сколько чисел было дано?
A) 5 B) 7 C) 14 D) 8

Решение: Предположим, что в сумме участвует n чисел. По условию задачи $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 75$ и $a_1 - 2 + a_2 - 2 + \cdots + a_n - 2 = 61$. Отсюда имеем

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n - 2n = 61 \iff 75 - 2n = 61.$$

Решив это уравнение, получим $n = 7$. **Ответ:** 7 (B).

52. (98-9-57) Каждый множитель произведения увеличили в два раза и произведение увеличилось в 1024 раза. Сколько множителей состояло в произведении?
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11

53. (98-10-49) Каждое из пяти данных чисел умножили на 3 и к полученным числам прибавили по 2. Сумма полученных чисел оказалась равной 70. Чему была равна сумма данных чисел?
A) 20 B) 22 C) 15 D) 25

54. (96-3-5) Сумма двух чисел равна 51, а их разность 21. Найдите эти числа.
A) 36; 15 B) 35; 16 C) 37; 14 D) 33; 18

Решение: Обозначим искомые числа через x и y. Тогда по условию задачи имеем

$$\begin{cases} x + y = 51 \\ x - y = 21. \end{cases}$$

Решим эту систему методом сложения. Сложив уравнения системы получим $2x = 72$. Отсюда следует $x = 36$. Подставив найденное значение x в 1-уравнение системы, получим $y = 51 - 36 = 15$. **Ответ:** 36; 15 (A).

55. У фермера имеются куры и зайцы. Голов у всех кур и зайцев 100, а ног у них 314. Сколько у фермера зайцев?
A) 46 B) 37 C) 57 D) 43

56. В одной коробке имеются купюры по 100 сумов и 500 сумов, всего 90 купюр. Сколько денег в коробке, если сумма купюр по 100 сумов равна сумме купюр по 500 сумов?
A) 21 B) 25 C) 15 D) 18

57. Воинское подразделение из 60 человек было обеспечено продовольствием на 25 дней. Через 5 дней 10 человек получили ранение в сражении с противником и были отправлены в госпиталь. На сколько дней хватит оставшегося продовольствия подразделению?
A) 28 B) 25 C) 24 D) 20

58. (98-12-30) Сумма двух чисел равна 6,5. Одно из них в 4 раза меньше другого. Найдите большее из чисел.
A) 5,2 B) 5 C) 4 D) 5,3

59. (96-11-5) Сумма двух чисел равна 7. Одно из них в 4 раза меньше другого. Найдите большее из чисел.
A) 5,2 B) 6,2 C) 5,6 D) 5,4

60. (03-3-1) Разность квадратов двух чисел равна 48, а сумма этих чисел равна 6. Найдите произведение этих чисел.
A) 8 B) −8 C) 7 D) −7

61. (03-12-5) Произведение двух чисел больше их суммы на 29 и их разности - на 41. Чему равно одно из этих чисел?
A) 7 B) 8 C) 9 D) 10

62. (00-2-12) Число 100 разбили на два положительных слагаемых так, что первое слагаемое делится на 7, а другое на 11. Найдите модуль разности этих слагаемых.
A) 8 B) 14 C) 10 D) 12

63. (00-4-15) Если число разделить на 2, то оно увеличится на 4. Найдите данное число.
A) 4 B) 6 C) 8 D) -8

64. (00-8-30) Сумма числителя и знаменателя дроби равна 23. Найдите эту дробь, если числитель меньше знаменателя на 9.
A) $\frac{7}{16}$ B) $\frac{8}{15}$ C) $\frac{16}{7}$ D) $\frac{10}{13}$

65. (00-10-81) Если числитель увеличить на 2, то дробь станет равной 1. Если знаменатель увеличить на 3, то она станет равной $\frac{1}{2}$. Найдите $\frac{3}{5}$ части этой дроби.
A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{3}{4}$

66. (01-3-27) Знаменатель дроби на 4 единицы больше числителя. Если числитель и знаменатель дроби увеличить на 1 единицу, то получится $\frac{1}{2}$. Найдите квадрат данной дроби.
A) $\frac{25}{81}$ B) $\frac{49}{121}$ C) $\frac{9}{49}$ D) $\frac{121}{225}$

67. (01-7-11) Сумма двух чисел равна 64. Найдите большее из этих чисел, если при делении его на меньшее число в частном получится 3, а в остатке 4.
A) 54 B) 42 C) 56 D) 49

68. (02-1-37) При каком значении a выражения $9-a$ и $15-a$ являются противоположными числами?
A) 9 B) 10 C) 12 D) 15

69. (03-10-7) Сумма двух чисел равна 6, а их произведение 7. Найдите сумму кубов этих чисел.
A) 90 B) 48 C) 64 D) 72

Решение: Пусть x и $y-$ искомые числа. По условию задачи имеем

$$\begin{cases} x+y=6 \\ xy=7. \end{cases}$$

Сначала 1-уравнение системы возведем в квадрат, а 2-уравнение умножим на -3, затем сложим полученные уравнения. В результате получим уравнение $x^2-xy+y^2=15$. По формуле суммы кубов $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ следует $x^3+y^3=6\cdot15=90$. **Ответ:** 90 (A).

70. (03-11-60) Одно число больше второго на 2,5. $\frac{1}{5}$ часть первого числа равна $\frac{4}{5}$ частям второго числа. Найдите сумму этих чисел.
A) 4 B) 6 C) $6\frac{1}{3}$ D) $4\frac{1}{6}$

71. (02-7-47) Отношение a к b равно $\frac{2}{3}$, а отношение c к b равно $\frac{1}{2}$. Найдите отношение c к a.
A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{2}{3}$

72. (02-9-9) Некоторое число a при делении на 3 дает остаток 1, а при делении на 4 - остаток 3. Найдите остаток от деления числа a на 12.
A) 1 B) 3 C) 5 D) 7

73. (03-5-8) Числа a и b^2-3 прямо пропорциональны. Найдите значение a при $b=-3$, если $a=88$ при $b=5$.
A) 24 B) 6 C) 18 D) 12

74. (03-8-21) Найдите наименьшую часть числа $25\frac{1}{2}$ при разбиении его на пропорциональные числам 7; 8; 2 части.
A) 3 B) 4 C) 5 D) 3,5

75. (03-6-30) Найдите число, $\frac{5}{7}$ часть которого равна 4.
A) $5\frac{6}{7}$ B) $5\frac{1}{5}$ C) $5\frac{2}{5}$ D) $5\frac{3}{5}$

Решение: Пусть искомое число x. Тогда по условию задачи $x\cdot\frac{5}{7}=4$. Отсюда получим $x=5\frac{3}{5}$. **Ответ:** $5\frac{3}{5}$ (D).

76. (03-6-33) Найдите число, 0,23 часть которого равна 690.
A) 3000 B) 2500 C) 2800 D) 3500

77. (03-8-26) Найдите число, 0,4(6) часть которого равна 0,6(4) части числа 360.
A) $497\frac{1}{7}$ B) $506\frac{2}{7}$ C) $400\frac{3}{7}$ D) $497\frac{5}{7}$

78. (97-10-10) Когда турист преодолел 0,85 намеченного пути, ему осталось пройти еще 6,6 км. Какова длина всего пути?
A) 52 км B) 44 км C) 36,6 км D) 64,4 км

Решение: Пусть длина всего пути x км. Тогда по условию задачи имеем $x\cdot0,85+6,6=x$. Отсюда следует $6,6=0,15x \iff x=44$. **Ответ:** 44 (B).

79. (96-7-10) Когда турист проехал 0,35 всего пути, ему осталось проехать до середины пути еще 18,3 км. Какова длина всего пути?
A) 110 км B) 102 км C) 122 км D) 98 км

80. (97-3-10) За первый час велосипедист проехал 0,65 всего пути, что на 7,5 км больше половины пути. Какова длина всего пути?
A) 47,5 км B) 62,5 км C) 50 км D) 65 км

81. (00-1-6) Для экскурсии надо было собрать определенную сумму денег. Если каждый экскурсант внесет 750 сумов, то на оплату не хватит 1200 сумов, а если каждый экскурсант внесет 800

сумов, то сверх нужной суммы останется 1200 сумов. Сколько человек должны были принять участие в экскурсии?
A) 38 B) 48 C) 45 D) 46

82. (01-2-10) У фермера имеются куры и овцы. Голов у всех кур и овец 170, а ног у них 440. На сколько овец меньше, чем кур?
A) 50 B) 60 C) 70 D) 80

83. (01-8-2) Костюм на 5950 сум дешевле пальто. Сколько стоит костюм, если пальто дороже костюма в 1, 7 раза?
A) 8750 B) 7550 C) 3500 D) 8500

84. (01-10-10) За 490 сумов куплены тетради по 30 сумов и 35 сумов. Какое из следующих чисел может быть числом тетрадей по 30 сумов?
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8

Решение: Пусть $x-$ число тетрадей, купленных по 30 сумов, а $y-$ число тетрадей, купленных по 35 сумов. Тогда по условию задачи, справедливо равенство

$$30x + 35y = 490 \Longleftrightarrow 30x = 7(70 - 5y),\ x,\ y \in \mathbb{N}.$$

Правая часть этого равенства кратна 7, значит и левая часть $30x$ тоже кратна 7, откуда следует, что x делится на 7. Если учесть условия задачи, x может равняться только 7 или 14. **Ответ:** 7 (C).

85. (02-6-16) Куплены тетради по 20 сумов и по 25 сумов за тетрадь всего на сумму 350 сумов. Какое из следующих чисел может быть числом тетрадей по 25 сумов?
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7

86. (02-1-34) В магазин первый день привезли 5, 42 т муки. Во второй день привезли на 2, 43 т меньше, чем в первый день. В третий день привезли на 3, 21 т меньше, чем в первые два дня. Сколько тонн муки привезли в третий день?
A) 13,61 B) 2,99 C) 7,85 D) 5,2

87. (02-3-4) Если отношение числа мальчиков к числу всех учащихся классе равно $\frac{4}{7}$, то чему равно отношение числа девочек к числу мальчиков?
A) 0, 75 B) 0, 6 C) 0, 5 D) 0, 4

88. (00-5-12) В цехе изготовили 120 самоваров и 20 подносов. Масса одного самовара 3, 2 кг. Определите массу одного подноса, если на изготовление самоваров израсходована 0, 96 частей всего материала.
A) 0,8 B) 0,04 C) 7,68 D) 0,768

89. Купили два мотка одинаковой проволоки. Первый моток стоит 30600 сумов, а второй 19040 сумов. В первом мотке имеется на 17 м больше проволоки, чем во втором. Сколько метров проволоки имеется в первом мотке?
A) 40 B) 45 C) 47 D) 28

Решение: Пусть x цена 1 м проволоки, $y-$ длина проволоки в первом мотке. Тогда длина проволоки во втором мотке $y-17$ м. По условию задачи

$$\begin{cases} xy = 30600 \\ x(y-17) = 19040. \end{cases}$$

Второе уравнение системы перепишем в виде $xy - 17x = 19040$ и используя 1-уравнение получим $30600 - 17x = 19040$. Отсюда следует, что $x = 680$. Подставив это значение x в первое уравнение системы, находим $y = 45$. **Ответ:** 45 (B).

90. (03-6-32) На намеченной малярной работе работали трое рабочих. Первый выполнил $\frac{5}{13}$ частей работы. Второй выполнил в 3 раза больше частей, чем третий. Какую часть работы выполнил третий рабочий?
A) $\frac{1}{18}$ B) $\frac{1}{13}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{2}{13}$

91. (03-10-19) Суммарная стоимость 7 книг и 4 журналов больше, чем суммарная стоимость 4 книг и 7 журналов на 525 сумов. На сколько книга дороже, чем журнал?
A) 150 B) 175 C) 200 D) 125

92. (00-8-2) Для нумерации страниц книги использованы 1012 цифр. Сколько страниц у книги, если нумерация страниц начинается с цифры 3?
A) 374 B) 400 C) 506 D) 421

9.2 Задачи на проценты

1. **Зарплата рабочего a сумов. Если зарплату повысить на $p\%$, рабочий будет получать $(1 + p : 100) \cdot a$ сумов.**

2. **Цена товара a сумов. Если цену снизить на $p\%$, товар будет стоить $(1 - p : 100) \cdot a$ сумов.**

3. **Если зарплату рабочего повысить сначала на $p\%$, затем на $q\%$, то первоначальная зарплата повысится на $p + q + pq : 100$ процентов.**

4. **Если цену товара снизить сначала на $p\%$, затем на $q\%$, первоначальная цена товара снизится на $p + q - pq : 100$ процентов.**

1. Студент получает 120000 сумов стипендии. Сколько будет получать студент, если его стипендия увеличится на 20%?
A) 140000 B) 144000 C) 142000 D) 148000

Решение: В силу 1-правила стипендия студента составит $(1 + 20 : 100) \cdot 120000 = 144000$ сумов. **Ответ:** 144000 (B).

2. (96-11-4) Месячное пособие пенсионера 450 тыс сумов. Сколько будет получать пенсионер, если пособие увеличится на 20%?
A) 540 B) 470 C) 900 D) 490

3. (98-3-4) Рабочий получает 600 тыс. сумов зарплаты. Сколько будет получать рабочий, если его зарплата увеличится на 30%?
A) 705 B) 680 C) 850 D) 780

4. (98-3-6) На сколько процентов повысилась заработная плата рабочих, если она сначала повысилась на 20%, а затем снова на 20%?
A) 40 B) 50 C) 42 D) 44

Решение: В силу 3-правила зарплата рабочего повысилась на $20 + 20 + 20 \cdot 20 : 100 = 44$ процента. **Ответ:** 44 (D).

5. (01-10-7) На сколько процентов вырастет производительность труда за 2 года, если в первый год она вырастет на 15%, а во второй год на 12%?
A) 27 B) 28 C) 28,6 D) 28,8

6. (01-5-7) Когда сотруднику два раза повысили зарплату на один и тот же процент, его зарплата повысилась на 69%. На сколько процентов повышали зарплату каждый раз?
A) 30 B) 34,5 C) 40 D) 35

7. (01-2-72) Производство хлопка в хозяйстве каждый год возрастает на 10%. На сколько процентов возрастет производство хлопка за 3 года?
A) 30 B) 32 C) 33 D) 33,1

8. (00-1-3) В результате инфляции цену товара увеличили на 25%. В связи с низким спросом цену товара снизили на 10%. На сколько процентов последняя цена стала больше первоначальной?
A) 12,8 B) 11,5 C) 12 D) 12,5

9. (00-7-6) Первый раз цену товара увеличили на 25%, а второй раз новую цену товара увеличили еще на 20%. На сколько процентов надо снизить последнюю цену товара, чтобы его цена стала равной первоначальной?
A) 45 B) 48 C) 50 D) $33\frac{1}{3}$

10. (96-1-4) В магазин привезли 96 т капусты. 80% капусты продали. Сколько тонн капусты осталось?
A) 16 B) 19,2 C) 24 D) 20,2

11. (96-6-3) 56% поступивших в магазин арбузов продали в первый день. Остальные 132 арбуза были проданы во второй день. Сколько арбузов продали в первый день?
A) 168 B) 148 C) 178 D) 138

12. (96-1-9) Разность двух чисел равна 33. Найдите эти числа, если 30% большего из них равны $\frac{2}{3}$ частям меньшего.
A) 56; 23 B) 27; 60 C) 17; 50 D) 37; 70

13. (96-10-9) Разность двух чисел равна 5. Найдите эти числа, если 20% большего из них равны $\frac{2}{9}$ частям меньшего.
A) 30; 35 B) 36; 41 C) 45; 50 D) 63; 68

14. (96-9-59) Сумма двух чисел равна 24. Найдите эти числа, если 85% одного из них равны $\frac{7}{20}$ частям другого.
A) 18; 6 B) 20; 4 C) 7; 17 D) 8; 16

15. (02-12-1) Сумма двух чисел равна 24. Найдите эти числа, если 35% одного из них равны 85% другого.
A) 3,5 B) 7 C) 6 D) 9

16. (96-12-63) При варении мясо теряет 40% массы. На сколько килограмм уменьшится масса 6 кг свежего мяса при варении?
A) 2,4 B) 2,2 C) 1,9 D) 2

Решение: Найдем 40% числа 6:

$$\frac{6}{100} \cdot 40 = 2,4.$$

Значит, масса мяса уменшится на 2,4 кг. **Ответ:** 2,4 (A).

17. (96-9-55) Из свежих слив получилось 35% сушеных. Сколько получилось сушеных слив, если взяли 64 кг свежих?
A) 20 B) 18,2 C) 22,4 D) 25

18. (99-7-5) Из пшеницы получается 90% муки. Сколько муки получается из 3 т пшеницы?
A) 2,5 B) 2,6 C) 2,1 D) 2,7

19. (98-5-3) Из хлопка получается 30% волокна. Сколько потребуется хлопка, чтобы получить 60 т волокна?
A) 100 B) 400 C) 200 D) 300

20. (07-18-26) Раствор массой 15 кг содержит 40% соли. Сколько кг пресной воды нужно добавить в раствор, чтобы концентрация соли составила 25%?
A) 6 B) 9 C) 8 D) 10

21. (97-4-5) 25 студентов из 30 сдали зимнюю сессию успешно. Какой процент составляет число неуспевающих студентов от числа успевающих?
A) 10% B) 15% C) 20% D) 25%

22. (97-5-5) В ящик можно поместить 25 кг груза. Найти массу ящика, если она составляет 12% от массы груза.
A) 3 кг B) 3,5 кг C) 4 кг D) 4,5 кг

23. (97-6-5) 14% неизвестного числа равно 35% от 80. Найдите неизвестное число.
A) 120 B) 168 C) 200 D) 280

24. (97-8-3) В библиотеке 55% книг на узбекском языке. Остальные 270 книг на русском языке. Сколько книг в библиотеке на узбекском языке?
A) 325 B) 310 C) 320 D) 330

25. (98-1-2) Найдите 10% разности чисел $2\frac{3}{5}$ и $\frac{1}{2}$.
A) 0,22 B) 0,3 C) 0,021 D) 0,21

26. (98-10-5) Для изготовления мороженого взяли 21 кг сахара, 129 кг других продуктов. Определите процент сахара в полученном мороженом?
A) 13 B) 15 C) 16 D) 14

27. (99-1-5) Девушки составляют 35% от общего числа студентов института. Юношей на 252 больше чем девушек. Сколько всего студентов в институте.
A) 840 B) 640 C) 546 D) 740

Решение: Из условия задачи следует, что юноши составляют 65% от числа студентов. Юношей больше девушек на 30%. Общее число студентов обозначим через x, тогда имеем $\frac{x}{100} \cdot 30 = 252$. Отсюда получим $x = 840$. **Ответ:** 840 (A).

28. (99-1-6) Число 520 представили в виде суммы двух чисел так, чтобы 80% одного числа составили 24% другого. Чему равно большее из этих чисел?
A) 400 B) 120 C) 420 D) 460

29. (99-3-3) Число 200 увеличили на 30%, а затем полученное число уменьшили на 20%. Какое число получили в итоге?
A) 206 B) 210 C) 208 D) 212

30. (00-9-57) На сколько процентов уменьшится произведение двух чисел, если одно из них уменьшится на 20%, другое на 12,5%?
A) 40 B) 50 C) 45 D) 30

31. (01-1-63) 40% числа умножили на 5 и получили 8. Найдите это число.
A) 2 B) 4 C) 6 D) 8

32. (01-2-71) Хозяйка купила орехи по цене 1500 сумов за килограмм. После чистки орехов от скорлупы осталось 60% их веса. Сколько стоит килограмм очищенных орехов?
A) 1900 B) 1800 C) 2200 D) 2500

33. (03-1-64) Рыба куплена по цене 6000 сумов за 1 кг. После чистке осталось 80% её веса. Во сколько обошелся 1 кг чищенной рыбы?
A) 7800 B) 6500 C) 6400 D) 7500

34. (01-10-5) Сколько составляет 17% от 17?
A) 1 B) 3,24 C) 2,89 D) 10

35. (02-6-12) Сколько составляет 19% от 19?
A) 1 B) 2,89 C) 3,69 D) 3,61

36. (01-12-26) Фирма реализовав продукцию на 380 сумов, потерпела убыток на 4%. Найдите сибестоимость продукции.
A) 400 B) 495 C) $395\frac{5}{6}$ D) $395\frac{1}{6}$

Решение: Пусть x– сибестоимость товара, тогда $x - \frac{x}{100} \cdot 4 = 380$. Отсюда находим $x = 395\frac{5}{6}$.
Ответ: $395\frac{5}{6}$ (C).

37. (02-1-36) Цена книги была 2000 сумов. Два раза книгу уценили по 5%. Какая цена книги теперь?
A) 1800 B) 1802 C) 1803 D) 1805

38. (02-2-7) В связи с повышением производительности труда на 40% предприятие начало изготавливать 560 изделий в день. Сколько изделий в день изготавливало предприятие прежде?
A) 400 B) 420 C) 380 D) 440

39. (02-10-44) Найдите число, 6 процентов которого равно 22 процентам 30.
A) 110 B) 108 C) 96 D) 90

40. (03-2-36) После удешевления на 12% товар продается по цене 1100 сумов. Какова первоначальная цена товара?
A) 1200 B) 1240 C) 1280 D) 1250

41. (01-6-4) ($x > 0$). Величина, обратная x, составляет 36% от x. Найдите x.
A) $2\frac{1}{3}$ B) $1\frac{2}{3}$ C) $1\frac{1}{3}$ D) $3\frac{1}{3}$

Решение: Из условия задачи получаем равенство $\frac{1}{x} = \frac{36\,x}{100}$. Отсюда имеем

$$x^2 = \frac{100}{36} \Longleftrightarrow x = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3}.$$ **Ответ:** $1\frac{2}{3}$ (B).

42. (03-10-23) Бизнесмен потерял 50% имеющегося у него капитала. Купив на остальные деньги акции он получил прибыль 40%. Какой процент составляет его капитал от первоначального?
A) 60 B) 70 C) 80 D) 100

9.3 Задачи на движение

1. **Расстояние S, проходимое со скоростью v за время t равно $S = vt$.**

2. **S– расстояние между пунктами A и B.**

a) если два пешехода (автомобилиста или др.) выйдут одновременно из A и B навстречу друг-другу со скоростью v_1 и v_2 соответственно и встретятся через время t, то $(v_1 + v_2)t = S$.

b) если два пешехода (автомобилиста или др.) выйдут одновременно из A и B в одном направлении со скоростью v_1 и v_2 соответственно и через время t 1-пешеход догонит 2-пешехода, то $v_1t - v_2t = S$.

3. **Если скорость увеличится на $p\%$, то время, затрачиваемое на прохождение определенного растояния, сократится на $100p : (100 + p)$ процентов.**

1. (97-12-6) Мотоциклист со скоростью 30 км/ч догоняет движущегося впереди него велосипедиста. Через какое время мотоциклист догонит велосипедиста, если скорость велосипедиста 12 км/ч и рассояние в момент старта мотоциклиста между мотоциклистом и велосипедистом было 72 км?
A) 3 B) 4 C) 3,5 D) 2,5

Решение: Пусть мотоциклист догонит велосипедиста через t часов. За t часов мотоциклист проезжает $30t$ км, а велосипедист - $12t$ км. Отсюда с учетом условия задачи получим уравнение $30t - 12t = 72$. Решив его, находим $t = 4$. **Ответ:** 4 (B).

2. (96-3-3) Пассажирский и товарный поезда едут навстречу друг другу. Расстояние между ними 275 км. Скорость таварного поезда 50 км/час. Скорость пассажирского поезда на 20% больше. Через сколько часов они встретятся?
A) 3 B) 2 C) 2,5 D) 4

3. (96-11-3) Катер и теплоход движутся навстречу друг-другу. Расстояние между ними 120 км. Скорость теплохода 50 км/час. Скорость катера на 60% меньше скорости теплохода. Через сколько часов они встретятся?
A) $1\frac{5}{7}$ B) 2 C) $2\frac{1}{4}$ D) $2\frac{1}{3}$

4. (96-6-7) Из двух городов одновременно вышли навстречу друг-другу два туриста. Один на автомашине со скоростью 62 км/ч, другой на автобусе со скоростью 48 км/ч. Чему равно расстояние между городами, если они встретятся через 0, 6 часа?
A) 70 км B) 64 км C) 62 км D) 66 км

5. (97-8-7) Из пунктов A и B, расстояние между которыми 200 км, одновременно навстречу друг-другу выехали один турист на автобусе со скоростью 40 км/ч, а другой - на автомобиле. Найдите скорость автомобиля, зная, что они встретились через 2 часа.
A) 58 км/soat B) 55 км/ч
C) 65 км/ч D) 60 км/ч

6. (96-3-69) Поезд, длина которого 400 м, проехал туннель длиной 500 м за 30 с. Найдите скорость поезда.
A) 35 м/с B) 30 м/с C) 40 м/с D) 45 м/с

7. (96-9-9) Поезд, длина которого 800 м, проходит мимо столба за 40 с. Найдите скорость поезда.
A) 30 м/с B) 15 м/с C) 25 м/с D) 20 м/с

8. (99-3-9) Пассажирский поезд проходит за 3 ч на 10 км больше, чем товарный поезд за 4 ч. Какова скорость товарного поезда, если его скорость на 20 км меньше скорости пассажирского?
A) 40 B) 45 C) 48 D) 50

Решение: Пусть скорость товарного поезда равно v. Тогда скорость пассажирского поезда $v+20$. Пассажирский поезд за 3 часа проходит $3(v+20)$ км, а товарный поезд за 4 ч $-$ $4v$ км. По условию задачи

$$3(v+20) = 4v + 10.$$

Отсюда получим $v = 50$. **Ответ:** 50 (D).

9. (97-10-4) На сколько процентов надо увеличить скорость, чтобы время, затраченное на некоторый путь, сократилось на 25%?
A) 25 B) 20 C) $33\frac{1}{3}$ D) 30

10. (99-9-4) Расстояние между городами A и B 188 км. Из города A в город B выехал велосипедист со скоростью 12 км/ч. Одновременно из города B в город A выехал мотоциклист. Они встретились в 48 км от города A. Найдите скорость мотоциклиста.
A) 45 B) 42 C) 30 D) 35

11. (01-10-15) Поезд длиной 200 м проезжает мимо столба высотой 40 м за 50 сек. Сколько времени (мин) понадобится поезду, чтобы проехать по мосту длиной 520 м с той же скоростью?
A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 4

12. (98-2-7) Расстояние между пристанями A и B равно 96 км. Из пристана A вниз по течению реки отправили плот. Одновременно с этим из второй пристани B на встречу с плотом отплыла моторная лодка и встретилась с ним через 4 ч. Какова собственная скорость (км/ч) лодки, если скорость течения реки равна 3 км/ч.
A) 20 км/ч B) 19 км/ч
C) 17 км/ч D) 24 км/ч

Решение: Скорость плота равна скорости течения реки, т.е. 3 км/ч. Пусть собственная скорость лодки равна v км/ч, тогда ее скорость против течения равна $v - 3$ км/ч. Согласна п. а) 2-правила имеем $(3 + v - 3) \cdot 4 = 96$. Отсюда находим $v = 24$. **Ответ:** 24 (D).

13. (98-9-6) Расстояние между двумя пристанями на реке равно 63 км. Из одной пристани вниз по течению отправили плот. Одновременно из второй пристани в догонку за плотом отправили моторную лодку, которая догнала плот через 3 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 км/ч.
A) 21 B) 20 C) 22 D) 19

14. (01-9-34) Скорость моторной лодки по течению реки больше 21 км/ч и меньше 23 км/ч, а скорость против течения больше 19 км/ч и меньше 21 км/ч. В каком промежутке будет собственная скорость (в стоячей воде) лодки?
A) (18;20) B) (19;21) C) (18;19) D) (20;22)

15. (02-1-2) Сумма скоростей катера по течению и против течения равна 30 км/ч. Найдите собственную скорость (км/ч) катера.
A) 15 B) 16 C) 10 D) 18

16. (03-3-10) Пароход прошел по течению реки 48 км и столько же против течения, затратив на весь путь 5 ч. Найдите скорость парохода в стоячей воде, если скорость течения реки 4 км/ч.
A) 12 B) 16 C) 20 D) 24

17. (03-6-10) Автомобиль проехал $\frac{3}{7}$ части всего пути за 1 час, остальную часть за 1,5 часа. Во сколько раз его первая скорость больше второй?
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{9}{8}$ D) $\frac{8}{9}$

18. (03-7-15) Автомобиль проехал $\frac{3}{7}$ части всего пути за 1 час, остальную часть за 2 часа. Во сколько раз его первая скорость больше больше второй?
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{9}{8}$ D) $\frac{8}{9}$

9.4 Задачи на работу

1. Если 1– комбайн может убрать уражай за x часов, 2– комбайн – за y часов, оба комбайн на – за z часов, тогда

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}. \qquad (9.1)$$

1. (98-10-11) Один комбайн может убрать уражай с поля за 15 ч, а второй этот же уражай за 10 ч. За сколько часов могут убрать уражай с поля оба комбайна при совместной работе?
A) 7 B) 8 C) 5,5 D) 6

Решение: В равенстве (9.1) положим $x = 15$, $y = 10$ и найдем z:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{2+3}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}, \qquad z=6.$$

Ответ: $z = 6$ (D).

2. (96-3-67) Анвару воды в бурдюке хватает на 20 дней, а его брату на 60 дней. На сколько дней хватит воды в том же бурдюке с братом на двоих?
A) 15 B) 14 C) 12 D) 16

3. (96-9-7) Анвару воды в бурдюке хватает на 14 дней, а с братом на двоих на 10 дней. На сколько дней хватит воды в том же бурдюке брату Анвара?
A) 35 B) 39 C) 28 D) 26

4. (96-12-8) В первый день выполнили $\frac{1}{3}$ часть всей работы. Во второй день выполнили на $\frac{1}{6}$ часть работы больше, чем первый день. Какую часть работы выполнили за два дня?
A) 0,5 B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{13}{18}$ D) $\frac{5}{6}$

5. (98-12-73) Первая труба может наполнить бассейн за 3 ч, а второй - 5 ч. За какое время наполняет бассейн обе трубы?
A) $1\frac{7}{8}$ B) $2\frac{1}{2}$ C) $2\frac{1}{5}$ D) $1\frac{4}{5}$

6. (99-2-7) В бассейне проведены две трубы. Через первую трубу пустой бассейн может наполниться за 10 ч, а через вторую трубу полный бассейн может опорожиться за 15 ч. Когда бассейн был пуст одновременно открыли обе трубы. За сколько часов после этого бассейн будет полным?
A) 25 B) 28 C) 30 D) 32

7. Али вместо с другом выполнили 20% работы. Затем один за 4 дня выполнил 25% оставшейся работы. За сколько дней Али может выполнить всю работу?
A) 20 B) 25 C) 30 D) 16

Решение: Али за 4 дня выполнил 25 процентов 0,8 части работы, оставшейся после совместной работы с другом. Значит, он за 4 дня выполнил

$$\frac{0,8\cdot 25}{100}=\frac{20}{100}=20\%$$

всей работы. Отсюда следует, что Али может выполнить 100% работы за 20 дней. **Ответ:** 20 (A).

8. (00-4-19) Мастер может выполнить всю работу за 12 дней, а его ученик - за 30 дней. За сколько дней будет закончена работа, если будет работать 3 мастера и 5 учеников?
A) 2,4 B) 3,6 C) 2,5 D) 1,2

9. (00-7-9) Один рабочий может выполнить работу за 3 ч. Второму рабочему для выполнения той же работы потребуется 6 ч. После того как первый рабочий проработал 1 ч, к нему присоединился второй рабочий. Через сколько времени совместной работы они окончат работу?
A) 2 ч 30 мин B) 1 ч 40 мин
C) 1 ч 20 мин D) 2 ч

10. (03-9-7) Двое рабочих совместно могут выполнить заданную работу за 12 дней. Если первый рабочий сделает половину работы, а затем второй - вторую половину, то вся работа будет закончина за 25 дней. Во сколько раз один из рабочих работает быстрее другого?
A) 1,2 B) 1,5 C) 1,6 D) 1,8

10 Функции

В природе встречаются величины двух видов: постоянные и переменные. Например, пусть даны несколько окружностей различного радиуса. Для всех окружностей отношение длины окружности к ее радиусу является постоянным и равно 2π, но их диаметры и длины меняются в соответствии с изменением радиусов. Если нам даны различные квадраты, то их площади меняются в соответствии с изменением сторон, а величины их углов остаются постоянными, то есть равными 90^0. Обычно постоянные величины обозначаются буквами $a, b, c, d, \ldots$, а переменные величины – буквами $x, y, z, u, v, \ldots$ В математике часто рассматриваются величины, меняющиеся в зависимости друг от друга. В вышеприведенном примере между длиной окружности ℓ и ее радиусом R имеется связь $\ell = 2\pi R$. Площадь квадрата S и длина его стороны a связаны соотношением $S = a^2$. Если каждому значению величины x соответствует единственное значение величины y, величина y называется функцией величины x. В этом случае x называется аргументом функции или независимой переменной, а y– функцией или зависимой переменной. Соответствие, установливающее зависимость между величинами x и y обозначается через f и пишется в виде $y = f(x)$. Множество значений, которые может принимать аргумент, называется областью определения функция, а множество значений, которые может принимать сама функция, областью изменения или множеством значений функции. Область определения функции f обозначается через $D(f)$, а множество ее значений через $E(f)$. Функция может быть задана аналитическим, графическим или табличным способом. Если функциональная зависимость задана некоторой формулой, то говорят, что функция задана аналитически. Например функции

$$1)\, y = 3x;\ 2)\, y = x^2;\ 3)\, y = \sqrt{5-x};\ 4)\, y = \frac{x^3+8}{x-2}$$

заданы аналитически. Если на область определения функции $y = f(x)$, заданной аналитически не наложено специальное условие, то область определения функции состоит из всех значений x, при которых имеет смысл выражение $f(x)$.

Областью определения вышеприведенных 1 – и 2 – функций является множество всех действительных чисел, то есть $D(f) = \mathbb{R}$. Область определения 3 – функции состоит из множества $D(f) = (-\infty; 5]$, а областью определения 4 – функции является множество $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.

Четные и нечетные функции.

Функция $y = f(x)$ называется четной, если:
1) из $x \in D(f)$ следует, что $-x \in D(f)$;
2) для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если:
1) из $x \in D(f)$ следует, что $-x \in D(f)$;
2) для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Например, функция $y = 2x$ – является нечетной, а функция $y = 3x^2$ – четной. Для обозначения того, что f – четная функция, используем запись f_+, а в случае, когда f – нечетная функция используем запись f_-. Четные и нечетные функции обладают следующими свойствами.

1. **Произведение четной функции на число $\alpha \cdot f_+ = \varphi_+$ является четной функцией, а произведение нечетной функции на число $\alpha \cdot f_- = \varphi_-$ – нечетной функцией.**

2. **Сумма $f_+ + g_+ = \varphi_+$ и разность $f_+ - g_+ = \psi_+$ четных функций являются четными функциями.**

3. **Произведение $f_+ \cdot g_+ = \varphi_+$ и частное $f_+ : g_+ = \psi_+$, $g \neq 0$ четных функций являются четными функциями.**

4. **Произведение $f_+ \cdot g_- = \varphi_-$ и частное $f_+ : g_- = \psi_-$ ненулевых четной и нечетной функций являются нечетными функциями.**

5. **Любая натуральная степень четной функции $f_+^n = \varphi_+, n \in \mathbb{N}$ является четной функцией.**

6. **Сумма $f_- + g_- = \varphi_-$ и разность $f_- - g_- = \psi_-$ нечетных функций являются нечетными функциями.**

7. **Произведение $f_- \cdot g_- = \varphi_+$ и частное $f_- : g_- = \psi_+$ ненулевых нечетных функций являются четными функциями.**

8. **Любая четная натуральная степень $f_-^{2n} = \varphi_+, n \in \mathbb{N}$ нечетной функции является четной функцией.**

9. **Любая нечетная натуральная степень $f_-^{2n-1} = \varphi_-, n \in \mathbb{N}$ нечетной функции является нечетной функцией.**

10. **Сумма $f_+ + g_-$ ненулевых четных и нечетных функций не является ни четной, ни нечетной.**

11. **Разность $f_+ - g_-$ ненулевых четных и нечетных функций не является ни четной, ни нечетной.**

Периодические функции.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что:
1) из $x \in D(f)$ следует, что $T + x \in D(f)$;
2) для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(T + x) = f(x)$.

В этом случае говорят, что функция f имеет период T. В качестве примера периодической функции можно привести дробную часть x, то есть функцию $f(x) = \{x\}$. Ее период равен $T = 1$. Действительно $f(x+1) = \{x+1\} = \{x\} = f(x)$. Если f и

g являются периодическими функциями с периодом T, тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже имеют период T. В дальнейшем мы покажем, что тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют период 2π, а $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ имеют период π. Если для функций f и g с периодами T_f и T_g, отношение $T_g : T_f$ не является рациональным числом, то тогда их сумма (разность) не является периодической функцией. Например, для периодических функций $f(x) = \{x\}$ $(T_f = 1)$ и $g(x) = \sin x$, $(T_g = 2\pi)$ их сумма $\varphi(x) = \{x\} + \sin x$ не является периодической функцией.

Монотонные функции.

Функция $y = f(x)$, определенная на отрезке $[a; b]$, называется *возрастающей* на нем, если для любых двух точек x_1, x_2 из этого отрезка таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$, определенная на отрезке $[a; b]$, называется *убывающей* на нем, если для любых двух точек x_1, x_2 из этого отрезка таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Функции, которые только возрастают или убывают на данном отрезке, называются *монотонными*.

Возрастающие и убывающие функции объединяются термином монотонные функции. Например, функция $y = 2x$ является возрастающей на отрезке $[-1; 0]$ (даже на всей числовой оси $(-\infty, \infty)$), а функция $y = x^2$ является убывающей на отрезке $[-1; 0]$ (даже на полуоси $(-\infty; 0]$). Если функции f и g являются возрастающими (убывающими) функциями на отрезке $[a; b]$, то и их сумма тоже будет возрастающей (убывающей) на этом отрезке. Но разность возрастающих (убывающих) функций может не быть возрастающей (убывающей) функцией. Например, функции $f(x) = x^2 + 1$ и $g(x) = 2x$ являются возрастающими на отрезке $[0; 2]$. Но их разность, то есть функция $\varphi(x) = x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2$ на отрезке $[0; 1]$ убывает, а на отрезке $[1; 2]$ возрастает. Значит, функция $\varphi(x)$ не является монотонной на отрезке $[0; 2]$.

1. (96-9-10) Найти область определения функции
$$y = \sqrt{\frac{x(x+1)}{(x-2)(4-x)}}.$$
A) $[-1; 0] \cup (2; 4)$ B) $(-1; 0) \cup [2; 4]$
C) $(-1; 0] \cup [2; 4)$ D) $(-\infty; -1) \cup (0; 2) \cup (4; \infty)$

Решение: Квадратный корень имеет смысл, когда подкоренное выражение неотрицательно, то есть
$$\frac{x(x+1)}{(x-2)(4-x)} \geq 0.$$
Решив это неравенство методом интервалов, получим что $x \in [-1; 0] \cup (2; 4)$. **Ответ:** $[-1; 0] \cup (2; 4)$ (A).

2. (96-3-16) Найти область определения функции
$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}.$$
A) $(0; \infty)$ B) $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$
C) $\mathbb{R}$ D) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$

3. (96-12-17) Найти область определения функции
$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}.$$
A) $\mathbb{R}$ B) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$
C) $(-\infty; 0)$ D) $(0; \infty)$

4. (99-1-12) Найти область определения функции
$$f(x) = \frac{2x-3}{x(x+2)}.$$
A) $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; \infty)$
B) $(-\infty; 0) \cup (2; \infty)$
C) $(-\infty; -2) \cup (0; \infty)$
D) $(-\infty; 1,5) \cup (1,5; \infty)$

5. (00-6-21) Найти область определения функции
$$y = \sqrt{\frac{x^2-4x+4}{1-x^2}}.$$
A) $(-1; 1)$ B) $(-1; 1) \cup \{2\}$
C) $(-1; 2)$ D) $(-\infty; -1) \cup \{2\}$

6. (96-3-70) Найти область определения функции
$$y = \sqrt{\frac{(x-1)(3-x)}{x(4-x)}}.$$
A) $[0; 1) \cup [3; 4)$ B) $(0; 1] \cup [3; 4)$
C) $(0; 1] \cup (3; 4)$ D) $(-\infty; 0) \cup [1; 3] \cup (4; \infty)$

7. (96-13-10) Найти область определения функции
$$y = \sqrt{\frac{(x-2)(4-x)}{x(x+1)}}.$$
A) $(-1; 0) \cup [2; 4]$ B) $[-1; 0] \cup (2; 4)$
C) $(-1; 0] \cup [2; 4)$ D) $(-\infty; -1) \cup (0; 2] \cup [4; \infty)$

8. (99-4-23) Найти область определения функции
$$y = \sqrt{x^2-9} + \frac{2}{\sqrt{-x}}.$$
A) $(0; 3)$ B) $[-3; 0)$ C) $(-\infty; 0)$ D) $(-\infty; -3]$

9. (99-6-46) Найти область определения функции $y = \sqrt{3x - x^3}$.
A) $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [0; \sqrt{3}]$ B) $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$
C) $[0; \sqrt{3})$ D) $(-\infty; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$

10. Найти область изменения функции $y = [x]$.
A) $\mathbb{N}$ B) $\mathbb{R}$ C) $\mathbb{Z}$ D) 0, 1

Решение: Областью определения данной функции является $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$. Так как для каждого $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{Z}$, то $E(f) \subset \mathbb{Z}$; а так как для любого $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = n$, то $\mathbb{Z} \subset E(f)$. Из этих двух соотношений следует, что $E(f) = \mathbb{Z}$. **Ответ:** $\mathbb{Z}$ (C).

11. Найти множество значений функции $y = \{x\}$.
A) $\mathbb{N}$ B) $[0;1)$ C) $[0;1]$ D) $0, 1$

12. Найти множество значений функции $y = x^2$.
A) $(0;\infty)$ B) $\mathbb{R}$ C) $[0;\infty)$ D) $(2;\infty)$

13. Найти множество значений функции $y = \sqrt{x^2+4}$.
A) $(0;\infty)$ B) $[2;\infty)$ C) $(2;\infty)$ D) $(-\infty;2)$

14. Найти множество значений функции $y = 7 - x^2$.
A) $(7;\infty)$ B) $(-\infty;7)$ C) $(-\infty;7]$ D) $(0;\infty)$

15. (98-11-66) Укажите множество значений функции $y = \sqrt{9-x^2}$.
A) $\mathbb{R}$ B) $[-3;3]$ C) $[0;\infty)$ D) $[0;3]$

16. (96-7-26) Какая из следующих функций является четной?
A) $g(x) = \dfrac{5x^3}{(x-3)^2}$ B) $g(x) = \dfrac{x(x-2)(x-4)}{x^2-6x+8}$
C) $g(x) = \dfrac{9x^2}{x^2-25}$ D) $g(x) = x^2 + |x+1|$

Решение: $9x^2$ – четная функция и $x^2 - 25$ – четная функция, по свойству 3 их отношение также является четной функцией. **Ответ:** (C).

17. (97-3-26) Какая из следующих функций является нечетной?
A) $y = \dfrac{5x^3}{(x-3)^2}$ B) $y = \dfrac{x(x-4)(x-2)}{x^2-6x+8}$
C) $y = \dfrac{9x^2}{x^2-25}$ D) $y = \dfrac{x^4-2x^2}{3x}$

18. Какая из следующих функций является нечетной?
A) $y = 5x^4 - 7x^8$ B) $y = 2|x|$
C) $y = \dfrac{9x^3}{x^3-x}$ D) $y = \dfrac{x^4-8x^2}{7x}$

19. Какая из следующих функций является четной?
A) $y = x+1$ B) $y = 4x^9 - 8x^7$
C) $y = x|x|$ D) $y = x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$

20. Найти функцию, которая является ни четной и ни нечетной.
A) $y = x^8 - 7x^{100}$ B) $y = 2x - 5$
C) $y = |x| + 5x^{64}$ D) $y = x$

21. Найти функцию, которая является ни четной и ни нечетной.
A) $y = x$ B) $y = [x]$
C) $y = |x|$ D) $y = x^2$

22. (99-1-13) Какое из утверждений верно для функции $y = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$.
A) нечетная функция
B) четная функция
C) убывающая функция
D) ни четная, ни нечетная.

23. Найти функцию, возрастающую на промежутке $[0;\infty)$.
A) $y = 1 - x$ B) $y = (x-5)^2$
C) $y = x|x|$ D) $y = 7 - x^3$

Решение: Данные функции определены на $[0;\infty)$, т.е. при $x \geq 0$. Поэтому $y = x|x| = x^2$. Покажем, что эта функция возрастает на $[0;\infty)$. Допустим, что числа $x_1, x_2 \in [0;\infty)$ – произвольные и удовлетворяют условию $x_1 < x_2$. Неравенство с неотрицательными членами можно возвести в квадрат (5-глава, 9-свойство). Отсюда следует, что $f(x_1) = x_1^2 < x_2^2 = f(x_2)$. Значит, функция $y = x|x|$ возрастает на промежутке $[0;\infty)$. **Ответ:** $y = x|x|$ (C).

24. Найти функцию, убывающую на промежутке $(-\infty;0)$.
A) $y = 5 - x^2$ B) $y = x^2$
C) $y = x|x|$ D) $y = x^3$

25. Укажите функцию, монотонную на промежутке $\mathbb{R} = (-\infty;\infty)$.
A) $y = 1 - 7x$ B) $y = (x-3)^2$
C) $y = 1 + |x|$ D) $y = x^2 - 5x - 6$

26. Найти функцию, не монотонную на отрезке $[0;2]$.
A) $y = (x-1)^2$ B) $y = x^2$
C) $y = (x-2)^2$ D) $y = (x-3)^2$

27. Найти функцию, не монотонную на отрезке $[0;2]$.
A) $y = \{0,2 \cdot x\}$ B) $y = \{0,3 \cdot x\}$
C) $y = \{0,4 \cdot x\}$ D) $y = \{0,5 \cdot x\}$

28. (00-2-8) Если $f(x) = x^2 - 8x + 7$, то чему равно $f(4-\sqrt{11})$?
A) 2 B) $2-\sqrt{2}$ C) $2+\sqrt{11}$ D) 3

Решение: Данную функцию запишем в виде $f(x) = (x-4)^2 - 9$ и возьмем $x = 4 - \sqrt{11}$, тогда
$$f(4-\sqrt{11}) = (4-\sqrt{11}-4)^2 - 9 = 11 - 9 = 2.$$
Ответ: 2 (A).

29. (96-1-16) Вычислить $f(-\frac{1}{2})$, если
$$f(x) = (1 + \frac{1}{x})(7 + 4x).$$
A) 9 B) -3 C) 15 D) -5

30. (02-8-17) Вычислить
$$f(\sqrt[3]{x^2+1}), \quad \text{если} \quad f(x) = \sqrt{x^3-1}.$$
A) $|x|$ B) x C) $-x$ D) 0

31. (03-1-15) Вычислить $f(-1) - f(-3)$, если
$$f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x > -2 \\ 3 - 4|x|, & x \leq -2. \end{cases}$$
A) 0 B) 3 C) 6 D) 9

32. (03-6-13) Вычислить $f(0)$, если
$$f(\frac{3x-2}{2}) = x^2 - x - 1.$$
A) $-\frac{5}{9}$ B) $-\frac{13}{9}$ C) $-\frac{7}{9}$ D) $-\frac{11}{9}$

33. (03-11-17) Вычислить $f(\sqrt{3})$, если $f(x+2) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.
A) $3\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) 12

10.1 Система координат на плоскости

Пусть на плоскости заданы две перпендикулярные прямые. Для удобства одну из них возьмем горизонтально, а другую – вертикально. Точку пересечения этих прямых обозначим через O и будем ее называть началом отсчета. Горизонтальную прямую будем называть осью абсцисс или осью Ox, а вертикальную - осью ординат или осью Oy. Все это вместе называется прямоугольной системой координат на плоскости. Пусть кроме этого между точками этих осей и действительными числами установлено соответствие. Пусть на оси абсцисс точкам справа от точки O соответствуют положительные числа, а точкам слева O – отрицательные числа. Также и на оси ординат, точкам выше точки O поставлены в соответствие положительные числа, а точкам ниже O – отрицательные. Направление по правую сторону от точки O считается положительным направлением оси абсцисс. Угол поворота против часовой стрелки от положительного направления оси Ox считается положительным, а по часовой стрелке отрицательным. Координатная плоскость состоит из 6 частей: оси абсцисс, оси ординат и 4 четверти.

Порядковые номера четвертей указаны на рис. 10.1.

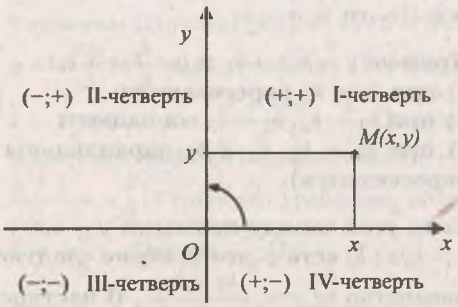


Рисунок 10.1

Положение точки в прямоугольной системе координат определяется следующим образом. Пусть на плоскости задана точка M. Опустим перпендикуляры с этой точки на координатные оси. Точку пересечения перпендикуляра с осью абсцисс обозначим через x, а с осью ординат - через y (рис. 10.1) и будем называть их координатами точки M. Для указания координат точки M будем использовать запись $M(x;\ y)$. Таким образом, установлено взаимно- однозначное соответствие между точками $M(x;\ y)$ плоскости и упорядоченными парами чисел $(x;\ y)$, $x,\ y \in \mathbb{R}$. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $\{(x;\ f(x)) : x \in D(f)\} = Gr(f)$ на плоскости.

1. **Если $x > 0$, $y > 0$, то точка $M(x;\ y)$ лежит в I четверти и наоборот.**

2. **Если $x < 0$, $y > 0$, то точка $M(x;\ y)$ лежит в II четверти и наоборот.**

3. **Если $x < 0$, $y < 0$, то точка $M(x;\ y)$ лежит в III четверти и наоборот.**

4. **Если $x > 0$, $y < 0$, то точка $M(x;\ y)$ лежит в IV четверти и наоборот.**

5. **Чтобы точка $M(x_0;\ y_0)$ принадлежала графику функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $y_0 = f(x_0)$.**

6. **Решения системы $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ являются точками пересечения графиков функций f и g и наоборот.**

7. **Решения уравнения $f(x) = g(x)$ являются абсциссами точек пересечения графиков функций f и g и наоборот.**

1. В какой координатной четверти расположена точка $M(3;\ 2)$?
A) I B) II C) III D) IV

Решение: Абсцисса данной точки M положительна ($3 > 0$), ордината тоже положительна ($2 > 0$). По правилу 1 точка $M(3;\ 2)$ лежит в I четверти (смотрите рис. 10.2). **Ответ:** I (A).

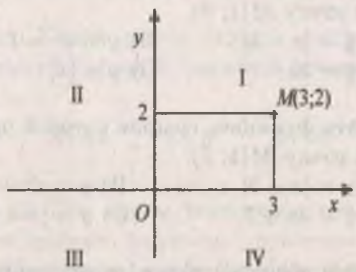


Рисунок 10.2

2. В какой координатной четверти расположена точка $M(-1;\ 2)$?
A) I B) II C) III D) IV

3. В какой координатной четверти расположена точка $M(-3;\ -2)$?
A) I B) II C) III D) IV

4. В какой координатной четверти расположена точка $M(5;\ -4)$?
A) I B) II C) III D) IV

5. Какая из указанных точек принадлежит графику функции $y = 2x$?
A) (2; 4) B) (1; −3) C) (−1; 2) D) (0; 1)

Решение: По правилу 5 графику функции принадлежит та точка, координаты которой удовлетворяет равенству $y = 2x$. Координаты точки (2; 4) удовлетворяет равенству $y = 2x$, т.е. $4 = 2 \cdot 2$. **Ответ:** (2; 4) (A).

6. Какая из указанных точек принадлежит графику функции $y = x^3 - 5$?
A) (1; −3) B) (2; 3) C) (1; 4) D) (0; 0)

7. Какая из указанных точек принадлежит графику функции $y = [x]+3$, где $[x]$ – целая часть x?

A) $(1,5;\ 3)$ B) $(2,2;\ 3)$ C) $(1,7;\ 4)$ D) $(0;\ 0)$

8. Какая из указанных точек принадлежит графику функции $y = \{x\}$? Здесь $\{x\}$ – дробная часть x.

A) $(1;\ 0)$ B) $(2;\ 1)$ C) $(1,7;\ 1)$ D) $(0;\ 1)$

9. Какая из указанных точек принадлежит графику функции $y = |x+1|$?

A) $(1;\ 1)$ B) $(2;\ 1)$ C) $(1;\ 2)$ D) $(1;\ 0)$

10. (96-3-15) Какая из указанных точек принадлежит графику функции $f(x) = -3x+4$?

A) $(3;-5)$ B) $(-3;5)$ C) $(5;-3)$ D) $(2;4)$

11. (96-12-16) Какая из указанных точек принадлежит графику функции $f(x) = -4x+3$?

A) $(-1;1)$ B) $(2;5)$ C) $(-5;2)$ D) $(1;-1)$

12. (07-112-3) Какая из указанных точек принадлежит графику функции $f(x) = -2x+7$?

A) $(2;1)$ B) $(1;2)$ C) $(2;4)$ D) $(3;1)$

13. Найти функцию, график которой проходит через точку $M(1;\ 0)$.

A) $y = |x-3|$ B) $y = x^2-1$
C) $y = 3x$ D) $y = [x]$

14. Найти функцию, график которой проходит через точку $M(1;\ 5)$.

A) $y = |x+3|$ B) $y = x^2+1$
C) $y = 3x+1$ D) $y = [x+4,5]$

15. Найти абсциссу точки пересечения графика функции $y = x^2-2x+1$ с осью Ox.

A) -3 B) 3 C) -1 D) 1

Решение: Точки, лежащие на оси Ox имеют вид $(x;0)$. Поэтому решениями задачи будут корни уравнения $x^2-2x+1=0$. Отсюда получим $x=1$. **Ответ:** 1 (D).

16. (02-4-5) Найти ординату точки пересечения графика функции $y = (x+3)(x^2+x+1)$ с осью Oy.

A) -3 B) 3 C) -1 D) 1

17. Сколько общих точек имеют графики функций $y = |x-1|$ и $y = 1-x^2$?

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4

18. Найти точку пересечения графиков функций $y = |x|$ и $y = x^2$.

A) $(-1;\ 1)$ B) $(-1;\ 1)$ и $(1;-1)$
C) $(-1;\ -1)$ D) $(1;1)$ и $(-1;\ 1)$

19. Сколько общих точек имеют графики функций $y = |x+1|$ va $y = 1-x^2$?

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3

10.2 Линейная функция

Функция $y = kx+b$ называется *линейной функцией*. Здесь $k \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ – вещественные числа. Область определения этой функции $D(f) = \mathbb{R}$, множество значений $E(f) = \mathbb{R}$. Графиком функции $y = kx+b$ является прямая (рис. 10.3), k называется *угловым коэффициентом* этой прямой.

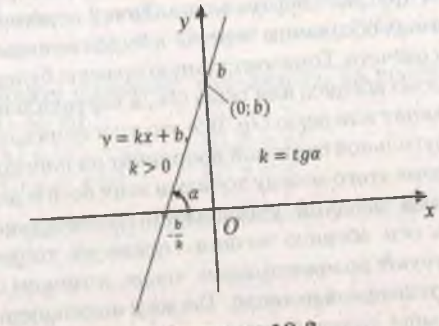


Рисунок 10.3

Свойства линейной функции

1. **График функции $y = kx+b$ пересекает ось Oy в точке $(0;b)$.**

Функция $y = kx+b$ является:

a) **возрастающей при $k > 0$;**

b) **убывающей при $k < 0$.**

2. **Если график функции $y = kx+b$ образует угол α с положительным направлением оси Ox, то $\operatorname{tg}\alpha = k$.**

3. **Прямые $y = k_1x+b_1$ и $y = k_2x+b_2$:**

a) **при $k_1 \neq k_2$ пересекаются;**

b) **при $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$ совпадают;**

c) **при $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$ параллельны (не пересекаются).**

4. **Если угол между прямыми $y = k_1x+b_1$ и $y = k_2x+b_2$ есть φ, тогда верно следующее равенство $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$. В частности:**

a) **при $k_1 = k_2$ прямые параллельны;**

b) **при $k_1 \cdot k_2 = -1$ прямые перпендикулярны.**

5. **Расстояние от точки $(x_0;y_0)$ до прямой $ax+by+c=0$ равно $d = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.**

6. **Уравнение прямой, пересекающей ось абсцисс в точке $x=a$, а ось ординат в точке $y=b$ имеет вид $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$. Длина отрезка, отсекаемой этой прямой координатными осями равно $\sqrt{a^2+b^2}$.**

7. **Прямая, симметричная графику функции $y = kx+b$:**

a) **относительно прямой $x=a$ есть $y = -kx+2ak+b$;**

b) **относительно прямой $y=a$ есть $y = -kx+2a-b$.**

1. (99-1-47) Чему равен угол, образованный прямой $2y = 2x + 3$ с положительным направлением оси Ox?
A) 45^0 B) 30^0 C) 60^0 D) 75^0

Решение: Решив уравнение $2y = 2x + 3$ относительно y находим: $y = x + 1,5$. Если угол между прямой $y = kx + b$ и осью Ox есть α, то по второму свойству $\operatorname{tg}\alpha = k$. Так как $k = 1$, то $\operatorname{tg}\alpha = 1$, т.е. $\alpha = 45^0$. **Ответ:** $\alpha = 45^0$ (A).

2. Чему равен угол между прямой $y = x + 7$ и положительным направлением оси Ox?
A) 45^0 B) 30^0 C) 60^0 D) 75^0

3. Чему равен угол между прямой $y = \sqrt{3}x - 9$ и положительным направлением оси Ox?
A) 45^0 B) 30^0 C) 60^0 D) 75^0

4. Чему равен угол, образованный прямой $3y = \sqrt{3}x - 9$ с положительным направлением оси Ox?
A) 45^0 B) 30^0 C) 60^0 D) 75^0

5. Чему равен угол, образованный прямой $y = 7 - x$ с положительным направлением оси Ox?
A) 145^0 B) 135^0 C) 120^0 D) 75^0

6. (98-3-44) При каких значениях k прямые $kx + 3y + 5 = 0$ и $(k+1)\cdot x - 2y - 1 = 0$ параллельны?
A) -3 и 5 B) $\frac{3}{5}$ C) -5 и 3 D) $-\frac{3}{5}$

Решение: Из уравнения $kx+3y+5 = 0$ находим $y = -\frac{kx}{3} - \frac{5}{3}$ и из уравнения $(k+1)x - 2y - 1 = 0$ имеем $y = \frac{(k+1)x}{2} - \frac{1}{2}$. По пункту а) четвертого свойства (параллельности) находим, $\frac{k+1}{2} = -\frac{k}{3}$. Решив это уравнение, получим $k = -\frac{3}{5}$. **Ответ:** $-\frac{3}{5}$ (D).

7. При каких значениях k прямые $kx + 4y + 7 = 0$ и $x - 2y - 1 = 0$ параллельны?
A) -3 B) $-1\frac{1}{4}$ C) -2 D) $-\frac{3}{4}$

8. (01-12-3) Найти угол между прямыми $y_1 = \sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $y_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \sqrt{3}$.
A) 90^0 B) 60^0 C) 80^0 D) 95^0

9. При каких значениях a прямые $ax + 2y = 3$ и $2x - y = -1$ перпендикулярны?
A) $a = -1$ B) $a = 2$ C) $a = 0$ D) $a = 1$

10. (96-1-26) При каких значениях a прямые $ax + 2y = 3$ и $2x - y = -1$ пересекаются?
A) $a \neq 4$ B) $a \neq 2$ C) $a \in \mathbb{R}$ D) $a \neq -4$

11. (99-9-13) Под каким острым углом пересекаются прямые $y = \sqrt{3}x + 2$ и $y = -x + 2$.
A) 65^0 B) 75^0 C) 60^0 D) 85^0

12. (96-7-16) При каком значении k график функции $y = kx+6$ проходит через точку $M(0,5; 4,5)$?
A) 3 B) -3 C) -2 D) 4

13. (99-6-4) При каком значении k график функции $y = kx-10$ проходит через точку $A(-4; 14)$?
A) -2 B) -1 C) -6 D) -3

14. (99-3-10) При каких значениях a точка пересечения прямых $2ax + 3y = 3$ и $4x + 3y = 7$ имеет отрицательную абсциссу?
A) $a < 3$ B) $a > 3$ C) $a < 2$ D) $a > 2$

Решение: При $a = 2$ данные прямые параллельны (пункт а) свойства 4), при $b_1 \neq b_2$ прямые не пересекаются. Рассмотрим случай $a \neq 2$. По свойству 6 пункта 10.1 решения системы $\begin{cases} 2ax + 3y = 3 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$ являются точками пересечения прямых. Умножив на -1 второе уравнение системы и прибавив к первому, получим $(2a-4)x = -4$. Отсюда $x = \frac{2}{2-a}$. По условию задачи $\frac{2}{2-a} < 0$. Значит $2 - a < 0$ или $2 < a$. **Ответ:** $a > 2$ (D).

15. (98-9-15) Какой длины отрезок отсекают оси координат от прямой, заданной уравнением $\frac{x}{8} - \frac{y}{6} = 1$.
A) 12 B) 14 C) 9 D) 10

16. (98-10-42) При каком значении n точка пересечения прямых, заданных уравнениями $2y = 8+n-(3n+4)x$ и $3y = 5-2n-(4n-3)x$, лежит на оси Oy?
A) 2 B) 1,5 C) $-1,5$ D) -2

17. (99-8-33) Найти линейную функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям $f(-2) = 3$ и $f(2) = 5$
A) $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$ B) $f(x) = 2x - 1$
C) $f(x) = 2x + 1$ D) $f(x) = 3x + 9$

18. (96-6-13) В каких координатных четвертях расположен график функции $y = kx + l$, если $k < 0$ и $l > 0$?
A) I; II B) I; II; III
C) II; I; IV D) I; III; IV

Решение: Найдем точки пересечения прямой $y = kx + l$ с координатными осями: если $x = 0$, то $y = l$, если $y = 0$, то $x = -l/k$. Значит график функции $y = kx + l$ пересекает оси кординат в точках $(0; l)$ и $(-l/k; 0)$. Они расположены в положительных направлениях осей координат (рис. 10.4). Таким образом, график функции лежит II; I и IV четвертях. **Ответ:** II; I; IV (C).

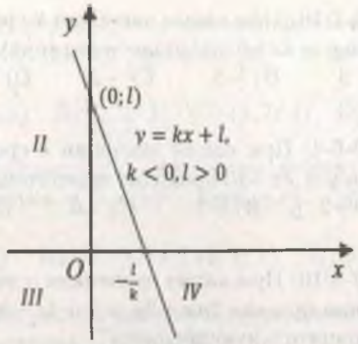
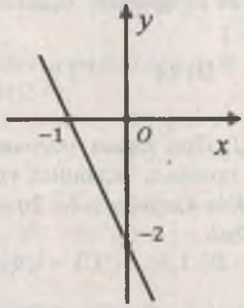


Рисунок 10.4

19. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = kx + l$, если $k > 0$ и $l > 0$?
A) I; II va III B) I va II
C) I; III va IV D) I; II va IV

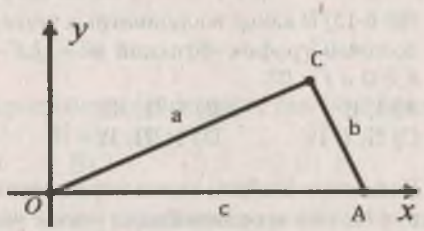
20. (97-8-13) В каких координатных четвертях расположен график функции $y = kx + l$, если $k < 0$ и $l < 0$?
A) I; II va III B) I; III va IV
C) II va IV D) II;III va IV

21. (96-12-24) При каких значениях x значения функции, график которой изображен на рисунке, меньше -2?



A) $x \geq 0$ B) $x > 0$ C) $x < 0$ D) $x \leq 0$

22. (97-8-60) Найти угловой коэфициент прямой OC (см.рис.), если $a = 4$; $b = 3$ и $c = 5$.



A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{3}{4}$

23. (98-10-91) При каких значениях k прямые $kx + 3y + 1 = 0$ и $2x + (k+1)y + 2 = 0$ параллельны?
A) 2 B) -2 C) -3 D) -3 и 2

24. (98-11-14) При каком значении k графики функций $y = -\frac{41}{5}x$ и $y = kx + \frac{41}{5}$ параллельны?
A) $(\frac{5}{41})^{-1}$ B) $\frac{5}{41}$ C) $-(\frac{5}{41})^{-1}$ D) $-\frac{5}{41}$

25. (99-1-46) Укажите прямую, параллельную прямой $x + y = 1$.
A) $2x + 2y + 3 = 0$ B) $y = x - 1$
C) $x - y = 2$ D) $y = x + 1$

26. (98-3-41) Укажите уравнение прямой, симметричной прямой $y = 2x + 1$, относительно $y = 1$.
A) $y = 2x - 1$ B) $y = 2x + 1$
C) $y = 1 - 2x$ D) $y = 2x$

Решение: По пункту b) седьмого свойства прямой, симметричной прямой $y = 2x + 1$ ($b = 1$, $k = 2$) относительно $y = 1$ ($a = 1$), является $y = -2x + 1$. **Ответ:** $y = 1 - 2x$ (C).

27. (98-10-88) Укажите уравнение прямой, симметричной прямой $y = 2x + 1$, относительно $y = x$.
A) $y = 2x - 1$ B) $y = \frac{x}{2} - 1$
C) $y = \frac{x}{2} + 1$ D) $y = \frac{x-1}{2}$

28. (98-12-29) Напишите уравнение прямой, симметричной прямой $y = 2x + 3$ относительно оси Ox.
A) $y = -2x - 3$ B) $y = 2x - 3$
C) $y = -2x + 3$ D) $y = 3x - 2$

29. (01-3-12) При каких значениях a прямая
$$(a + 3)x + (a^2 - 16)y + 2 = 0$$
параллельна оси абсцисс?
A) -3 B) 2 C) -2 D) 3

30. (01-12-40) При каких значениях m и n прямые $2xm - 3ny = 12$ и $3xm + 2ny = 44$ пересекаются в точке $(1; 2)$?
A) $m = 10$, $n = 4$ B) $m = 8$, $n = 6$
C) $m = 4$, $n = 10$ D) $m = 12$, $n = 2$

31. (02-1-45) Найти угловой коэффициент прямой $y = f(x - 1)$, если $f(x) = 6x - 3$.
A) 6 B) 5 C) 7 D) -6

32. (02-12-5) В какой координатной четверти пересекаются графики функций $y = 2x + 1$ и $y = -2 - x$?
A) I B) II C) III D) IV

33. (96-11-31) Найти расстояние от точки $M(2; 1)$ до прямой $y = x + 2$
A) 2,25 B) $1,5\sqrt{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$

Решение: По свойству 5 расстояние от точки $M(2; 1)$ до прямой $x - y + 2 = 0$ равно
$$d = \frac{|2 - 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 1,5\sqrt{2}.$$
Ответ: $1,5\sqrt{2}$ (B).

34. (96-12-31) Найти расстояние от точки $M(2;2)$ до прямой $y = x + 1$.
A) 1,5 B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2,25

35. (03-11-30) Найти расстояние от начала координат до прямой $5x + 12y = 60$.
A) $4\frac{8}{13}$ B) 5 C) $5\frac{3}{13}$ D) $4\frac{7}{13}$

10.3 Квадратная функция

Функция вида $y = ax^2 + bx + c$ называется *квадратной функцией*. Здесь a, b, c – заданные числа и $a \neq 0$. Область определения квадратной функции $D(y) = \mathbb{R}$. Квадратная функция имеет следующие свойства.

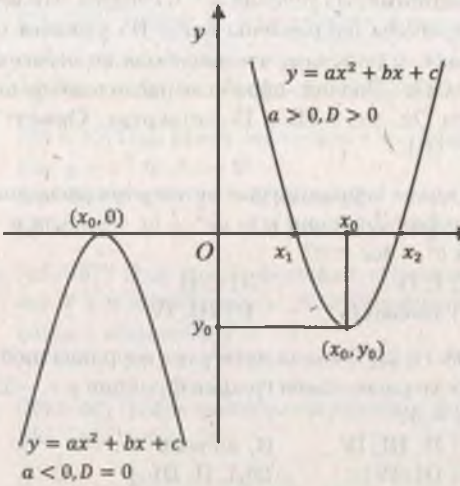


Рисунок 10.5

1. **График квадратной функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ есть парабола (рис. 10.5):**
a) при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх;
b) при $a < 0$ ветви параболы направлены вниз;
c) при $D > 0$ парабола имеет 2 общие точки с осью Ox (рис. 10.5);
d) при $D = 0$ парабола касается оси Ox, т.е. имеет с ней 1 общую точку;
e) при $D < 0$ парабола не имеет общих точек с осью Ox.

2. **Координаты вершины параболы $(x_0; y_0)$ находятся по формулам:**

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

3. **Квадратную функцию $y = ax^2 + bx + c$ можно представить в виде $y = a(x - x_0)^2 + y_0$. Здесь $(x_0; y_0)$ вершина параболы.**

4. **Область значений квадратной функции $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$ есть:**
a) $E(y) = [y_0; \infty)$ при $a > 0$,
b) $E(y) = (-\infty; y_0]$ при $a < 0$.

5. **Уравнение оси симметрии параболы: $x = x_0$. Здесь x_0 – абсцисса вершины параболы.**

6. **Корни x_1, x_2 уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называются нолями функции $y = ax^2 + bx + c$ и верно равенство $\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0$. Здесь x_0 – абсцисса вершины параболы.**

1. (98-8-24) Определите значения k и m, если $B(-2;-7)$ является вершиной параболы $y = kx^2 + 8x + m$.
A) $k = 1, m = -9$ B) $k = 2, m = -1$
C) $k = -1, m = -16$ D) $k = 2, m = 1$

Решение: Из условия задачи и 2 свойства квадратной функции для абсциссы вершины параболы x_0 имеем $-2 = -\frac{8}{2k}$. Отсюда $k = 2$. Теперь поставляя координаты точки B в уравнение $y = 2x^2 + 8x + m$, найдем значение m: $-7 = 8 - 16 + m \iff m = 1$. **Ответ:** $k = 2, m = 1$. (D).

2. (96-6-21) Где на координатной плоскости находится вершина параболы $y = x^2 - 4x + 3$?
A) IV четверти B) на оси Ox
C) III четверти D) II четверти

3. (97-2-21) Где на координатной плоскости находится вершина параболы $y = x^2 + 4x - 2$?
A) I четверти B) II четверти
C)на оси Oy D) III четверти

4. (97-8-21) Где на координатной плоскости лежит вершина параболы $y = x^2 - 6x + 10$?
A) II четверти B) III четверти
C) на оси Oy D) I четверти

5. (97-3-16) При каком значении k график функции $y = kx^2 - 2$ проходит через точку $A(-1;1)$?
A) 4 B) -3 C) 3 D) 2

6. (98-4-45) Сколько существует целых чисел k таких, что графики функций $y = kx^2 - 2kx + 3$ и $y = 2 - kx$ не пересекаются?
A) 3 B) 2 C) бесконечно много D) 4

Решение: По свойству 6 пункта 10.1, если графики функций не пересекаются, то система

$$\begin{cases} y = kx^2 - 2kx + 3 \\ y = 2 - kx \end{cases}$$

не имеет решений. Отсюда следует, что уравнение $kx^2 - 2kx + 3 = 2 - kx$ не имеет решений. Если $k = 0$, то $3 = 2$, что неверно. Значит, при $k = 0$ графики функций не пересекаются. Теперь рассмотрим случай $k \neq 0$. В этом случае квадратное уравнение $kx^2 - kx + 1 = 0$ не имеет решений. Значит, его дискриминант отрицательный. Имеем $D = k^2 - 4k = k(k-4) < 0$. Методом интервалов получим решение этого неравенства – $(0; 4)$. Этот интервал содержит следующие целые числа 1, 2, 3. Выше было показано, что при $k = 0$ система не имеет решений.

Таким образом, при 4-х целых значениях k графики функций не пересекаются. **Ответ:** 4 (D).

7. (98-12-94) Найти сумму всех целых значений k, при которых графики функций $y = (k-2)x^2 - 3kx + 2$ и $y = kx^2 + kx + 4$ не пересекаются.
A) 0 B) 1 C) −2 D) 3

8. (01-12-18) При каких значениях a графики функций $y = 2ax + 1$ и $y = (a-6)x^2 - 2$ не пересекаются?
A) $(-3; 6)$ B) $(-\infty; 6) \cup (3; \infty)$
C) $\emptyset$ D) $(-6; 3)$

9. (99-3-11) При каких значениях a парабола $y = 9x^2 - 12x + 35a$ имеет с осью абсцисс две общие точки?
A) $a = \frac{4}{35}$ B) $a < \frac{4}{35}$ C) $a > \frac{4}{35}$ D) $a < \frac{18}{35}$

10. (98-8-17) Найти значения a и b, если функции $f(x) = 2 - ax^2$ и $g(x) = 2b + x$ принимают одинаковые значения при $x = -1$ и $x = 0$.
A) $a = -1$, $b = 1$ B) $a = 1$, $b = 1$
C) $a = 1$, $b = -1$ D) $a = 5$, $b = -1$

11. (98-10-59) График какой из указанных функций проходит через точки $A(1; 1)$, $B(0; 3)$ и $C(2; 3)$?
A) $y = 2x^2 + 2x - 3$ B) $y = 2x^2 - 2x - 3$
C) $y = 2x^2 - 4x + 3$ D) $y = 2x^2 - 3x + 2$

12. (98-11-79)При каких значениях m прямая $y = 1$ касается параболы $y = x^2 - 2x + m$?
A) 4 B) 1 C) 3 D) 2

13. (00-6-11) При каких значениях a парабола $y = ax^2 + 4x + c$ пересекает оси координат в точках A$(1; 0)$ и B$(0; 4)$?
A) −8 B) 4 C) −4 D) 1

14. (00-7-22) Вершина параболы, заданной уравнением $y = x^2 - 4x + 12 - a$, находится в точке M$(2; 4)$. Чему в этом случае равно a?
A) 3 B) 2 C) 4 D) 5

Решение: По свойству 3 уравнение параболы имеет вид $y = (x-2)^2 + 4$. Сопоставляя это уравнение с уравнением $y = x^2 - 4x + 12 - a$, получим $4 + 4 = 12 - a$. Отсюда $a = 4$. **Ответ:** 4 (C).

15. (98-6-31) Вершина параболы $y = 2x^2 + bx + c$ расположена в точке $(-3; -5)$. Найти среднее арифметическое нулей этой функции.
A) −1 B) −2 C) −3 D) 1

16. (00-2-26) Точка $A(1; 9)$ лежит на параболе $y = -x^2 + ax + 4$. Найти ординату вершины параболы.
A) 13 B) 6 C) 4 D) 2

17. (02-11-18) Найти сумму координат вершины параболы $y = -3x^2 + 12x - 16$.
A) −1 B) 1 C) 0 D) −2

18. (02-11-19) Найти число целых значений параметра a, при которых абсцисса вершины параболы $y = (x-4a)^2 + a^2 + 10a + 21$ – положительна, а ордината вершины – отрицательна.
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

19. (03-8-18) Найти число целых значений параметра a, при которых абсцисса вершины параболы $y = (x-2a)^2 + a^2 - 9a + 14$ – положительна, а ордината вершины – отрицательна.
A) 1 B) 2 C) 4 D) 5

20. (97-12-21) В каких координатных четевертях расположен график функции $y = ax^2 + bx + c$, если $a < 0$ и $b^2 - 4ac < 0$?
A) I, II B) III, IV C) И, III D) I, II и IV

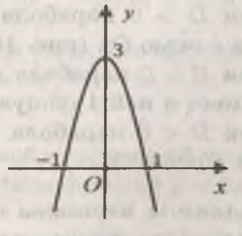
Решение: Из условия $a < 0$ следует, что ветви параболы направлены вниз. Из условия $b^2 - 4ac < 0$ получим, что парабола не пересекает ось Ox. Значит, парабола расположена ниже оси Ox, т.е. в III и IV четвертях. **Ответ:** III, IV (B).

21. В каких координатных четевертях расположен график функции $y = ax^2 + bx + c$, если $a > 0$ va $b^2 - 4ac < 0$?
A) I, IV B) I, II
C) только IV D) III, IV

22. (98-11-13) В каких четвертях координатной плоскости расположен график функции $y = -3x^2 + 8x - 8$?
A) II, III, IV B) во всех
C) III, IV D) I, II, III

23. (00-8-11) В каких четвертях координатной плоскости расположен график функции $f(x) = -4x^2 + 2x - 1$?
A) III; IV B) I; II; III C) I; III D) II; IV

24. (98-1-16) График какой функции изображен на рисунке?



A) $y = 3x - x^2$ B) $y = 3x^2 - 3$
C) $y = 3(1 - x^2)$ D) $y = x^2 + 3x$

25. (01-9-38) Парабола $y = x^2 + px + q$ касается оси Ox при $x = 5$. Найти $\frac{q}{p}$.
A) 1 B) −2 C) 2,5 D) −2,5

Решение: Из условия задачи следует, что вершина параболы находится в точке $(5; 0)$. По свойству 3 получим, что $y = (x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$. Отсюда следует, что $p = -10$, $q = 25$. Значит, $q/p = -2,5$. **Ответ:** $-2,5$ (D).

26. (01-12-41) При каких значениях t функция $f(x) = 3x^2 + 2tx - (t-1)^2$ удовлетворяет условию $f(-1) = -2$?
A) ± 3 B) ± 1 C) 3 D) ± 2

27. (01-2-25) Найти сумму координат точек пересечений графиков функций

$$y = 4x^2 + 4x + 1, \qquad y = 2x + 1.$$

A) $-0,5$ B) 1 C) $0,5$ D) $1,5$

28. (02-5-12) При каких значениях m график квадратной функции $y = (m+4)x^2 - 2(m+2)x + 1$ расположен ниже оси абсцисс?
A) $(-\frac{1}{4}; 1)$ B) $(-2; 1)$ C) $\emptyset$ D) $(-\infty; \infty)$

29. (03-5-34) Найти $\frac{c}{a}$, если график функции $y = ax^2 + c$ проходит через точки $A(-1; -3)$ и $B(3; 0)$.
A) -9 B) 9 C) -8 D) -10

30. (03-6-50) При каких значениях x значения функции $y = x^2$ больше 9?
A) $-3 < x < 3$ B) $x < -3$
C) $x > 3$ D) $x < -3$, $x > 3$

31. (03-7-57) При каком значении m прямая $y = mx + 2$ и парабола $y = -5x^2$ пересекаются в точке с абсциссой $x = -1$?
A) 3 B) -3 C) -7 D) 7

32. (03-8-46) Найти наибольшее значение функции $y = -2x^2 + 5x - 3$.
A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 5 D) -3

10.4 Обратная функция

Пусть дана функция $y = f(x)$, отображающая множество X на множество Y. Допустим, что $D(f) = X$ и $E(f) = Y$. Если для каждого $y \in Y$ уравнение

$$f(x) = y \qquad (10.1)$$

имеет единственное решение $x \in D(f)$, то f называется *обратимой функцией*. Если f обратимая функция, то отображение, которое ставит в соответствие каждому $y \in E(f)$ единственное решение $x \in D(f)$ уравнения (10.1) называется *функцией, обратной* к функции f и обозначается через f^{-1}, то есть $x = f^{-1}(y)$. Из определения обратной функции следуют следующие ее свойства.

1. **Имеют место следующие равенства $D(f) = E(f^{-1})$ и $D(f^{-1}) = E(f)$.**

2. **Для всех $x \in D(f)$ имеет место $f^{-1}(f(x)) = x$.**

3. **Для всех $x \in D(f^{-1})$ имеет место $f(f^{-1}(x)) = x$.**

4. **Если точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции f, то точка $(y_0; x_0)$ принадлежит графику функции f^{-1}.**

Если для функции $f : D(f) \to \mathbb{R}$ при некотором $y \in E(f)$ уравнение (10.1) имеет два или более решения, то функция f необратима, т.е. f не имеет обратной функции. В этом случае "уменьшая"область определения $D(f)$ функции можно добиться, что уравнение (10.1) при всех $y \in E(f)$ будет иметь единственное решение. Этот метод обьясним на примере:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0; \infty), \quad f(x) = x^2.$$

Уравнение $f(x) = 4 \iff x^2 = 4$ имеет два решения $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Поэтому $f-$ необратима на $\mathbb{R}$. Если в качестве области определения этой функции взять $\mathbb{R}_+$, то для всех $y \in E(f)$ уравнение $x^2 = y$ в области $D(f) = \mathbb{R}_+$ будет иметь единственное решение $x = \sqrt{y}$. Значит, функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ имеет обратную функцию $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

1. (97-1-9) Укажите функцию, обратную к функции $y = \frac{3}{x+1} - 2$.
A) $y = \frac{3}{x-2}$ B) $y = \frac{x+1}{3} - 2$
C) $y = \frac{x+1}{3} - \frac{1}{2}$ D) $y = \frac{3}{x+2} - 1$

Решение: Область определения данной функции состоит из $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$, а область значений - $E(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$. Для проивольного $y \in E(f)$ уравнение $\frac{3}{x+1} - 2 = y$ имеет единственное решение $x = \frac{3}{y+2} - 1$. Значит, $y = f^{-1}(x) = \frac{3}{x+2} - 1$. **Ответ:** (D).

2. (97-11-9) Укажите функцию, обратную к функции $y = \frac{3}{2-x} - 1$.
A) $y = x - 2$ B) $y = \frac{3}{x-2} + 1$
C) $y = \frac{x-2}{3} + 1$ D) $y = 2 - \frac{3}{x+1}$

3. (00-3-61) Найти функцию, обратную к функции $y = x^2 - 4x + 7$, на $(-\infty; 2]$.
A) $2 \pm \sqrt{x-3}$ B) $2 - \sqrt{x-3}$
C) $2 + \sqrt{x-3}$ D) $2 + \sqrt{3-x}$

4. Найти функцию, обратную к функции $y = \sqrt{x} + 1$, $x \geq 0$.
A) $y = (x-1)^2$ B) $y = (x+1)^2$
C) $y = x^2 + 1$ D) $y = x^2 - 1$

5. (01-8-19) Укажите функцию, обратную к функции $y = \frac{4}{2-x} - 3$.
A) $y = \frac{4}{x-3} - 2$ B) $y = \frac{4}{3-x} - 2$
C) $y = \frac{4}{x+3} + 2$ D) $y = -\frac{4}{x+3} + 2$

6. (97-6-9) Укажите функцию, обратную к функции $y = \frac{2}{x-1} - 1$.

A) $y = 1 - \frac{2}{x+1}$ B) $y = 2 - \frac{3}{x}$

C) $y = -\frac{2}{x+1}$ D) $y = \frac{2}{x+1} + 1$

7. (99-3-29) Найти функцию, обратную к функции

$$y = \frac{x-1}{2-3x}.$$

A) $y = \frac{2-3x}{x-1}$ B) $y = -\frac{2-3x}{x-1}$

C) $y = \frac{2-3x}{1-x}$ D) $y = \frac{2x+1}{3x+1}$

8. (01-1-66) Дана функция $y = x^2 - 8$ $(x \geq 0)$. Найти область определения обратной функции.
A) $(-8; \infty)$ B) $[-8; \infty)$ C) $(-8; 8)$ D) $[-8; 8]$

Решение: Область определения данной функции $D(f) = [0; \infty)$, а область значений - $E(f) = [-8; \infty)$. По правилу 1 находим $D(f^{-1}) = [-8; \infty)$. **Ответ:** $[-8; \infty)$ (B).

9. (98-11-15) Найти функцию, обратную к функции $y = 2x^2 - \frac{1}{2}$ $(x \geq 0)$.
A) $\sqrt{2x+1} \cdot 2^{-1}$ B) $\sqrt{2x+1} \cdot 4^{-1}$
C) $\sqrt{2x+1} \cdot 2^{-1} - \frac{1}{2}$ D) $\sqrt{2x+1} \cdot 4^{-1} - \frac{1}{2}$

10. Как выбрать $D(f)$, чтобы существовала функция, обратная к функции $f(x) = x^2 - 2x + 3$?
A) $[0; \infty)$ B) $[1; \infty)$ C) $[-2; \infty)$ D) $[-2; 2)$

11. Как выбрать $D(f)$, чтобы существовала функция, обратная к функции $f(x) = |x-3|$?
A) $[3; \infty)$ B) $[1; \infty)$ C) $[-2; \infty)$ D) $[-3; 5)$

12. Как выбрать $D(f)$, чтобы существовала функция, обратная к функции $f(x) = \{x\}$?
A) $[1; \infty)$ B) $[1; 5)$ C) $[-2; 0)$ D) $[0; 1)$

13. (98-6-14) Какая из указанных точек принадлежит графику функции, обратной к функции $y = x^3 + 5x - 2$?
A) $(-2; 1)$ B) $(0; -2)$ C) $(4; 1)$ D) $(-8; 1)$

Решение: По правилу 4, если $(x_0; y_0) \in Gr(f)$, то $(y_0; x_0) \in Gr(f^{-1})$. Поэтому, поменяем координаты точек, приведенных в ответах, затем подставим в выражение функции и проверим равенство. Так как $y(1) = 4$, то точка $(1; 4)$ принадлежит графику заданной функции. Значит, точка $(4; 1)$ принадлежит графику обратной функции. **Ответ:** $(4; 1)$ (C).

10.5 Задачи смешанного типа

1. **Абсциссы точек пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ являются корнями уравнения $f(x) = g(x)$.**

2. **Расстояние между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ находится по формуле**

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

3. **Множество значений функции $y = |x - a| + |x - b|$ $(a < b)$ состоит из $E(y) = [b - a; \infty)$.**

1. (00-3-59) Найти $f(x)$, если $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$.
A) $x^2 - 3x - 1$ B) $x^2 - 5x + 1$
C) $x^2 - 5x + 6$ D) $x^2 - 4$

Решение: Обозначим $x+1 = t$, тогда $x = t-1$. Подставляя это значение в функцию $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$, находим:

$$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2 = t^2 - 5t + 6.$$

Ответ: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ (C).

2. (00-9-60) Найти $f(x)$, если $f(x-1) = x^2 + 3x - 2$.
A) $x^2 + 2x - 3$ B) $x^2 + 5x - 4$
C) $x^2 + 5x + 2$ D) $x^2 - x - 2$

3. (97-7-16) При каком значении k график функции $y = \frac{k}{x} - 1$ проходит через точку $C(-\frac{1}{2}; -3)$?
A) 1 B) -2 C) -1 D) $\frac{1}{2}$

4. (97-10-16) При каком значении k график функции $y = kx^3 + 2$ проходит через точку $B(-2; 10)$?
A) 2 B) 1 C) $-0,5$ D) -1

5. (99-4-15) Через какие четверти проходит график функции $y = \frac{k}{x+2}$, где $(k > 0)$?
A) I va III B) II va IV
C) I, III, IV D) I, II va III

6. (03-6-40) В какой четверти координатной плоскости расположен график функции $y = x|x|^{-1}$?
A) III B) IV C) II, III D) I, III

7. (99-5-40) Найти область значений функции $y(x) = |x-1| + |x-3|$.
A) $[0; \infty)$ B) $[1; \infty)$ C) $[2; \infty)$ D) $[3; \infty)$

Решение: По правилу 3, получим $E(y) = [2; \infty)$. **Ответ:** $[2; \infty)$ (C).

8. (03-12-26) Найти наименьшее значение функции $y = |x-1| + |x-3|$.
A) 3 B) 4 C) 2 D) 1

9. (00-9-45) Найти область значений функции $f(x) = |x+2| + |x+8|$.
A) $[0; \infty)$ B) $[3; \infty)$ C) $[4; \infty)$ D) $[6; \infty)$

10. (02-7-13) Найти область значений функции $f(x) = \frac{3}{x-4}$.
A) $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ B) $(-\infty; 4) \cup (4; \infty)$
C) $(-\infty; 3) \cup (3; \infty)$ D) $(-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$

11. (00-3-60) При каком значении аргумента значение функции

$$y = \frac{5x}{2|x+1| - 5}$$

равно 2?
A) $-\frac{4}{3}$ B) $-\frac{5}{3}$ C) -2 D) $-\frac{14}{9}$

12. (00-7-17) Найти расстояние от начала координат до точки пересечения графиков функций, заданных уравнениями $y = x^2$ и $y = \frac{1}{x}$.
A) 2 B) 1,5 C) $\sqrt{2}$ D) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Решение: По правилу 1, абсциссы точек пересечения графиков функций удовлетворяют уравнению $x^2 = \frac{1}{x} \iff x^3 = 1$. Отсюда $x = 1$ и $y = 1$. Расстояние от начала координат $O(0;\ 0)$ до точки $A(1;\ 1)$ равно (см. 2)

$$|OA| = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$ (C).

13. (03-12-32) На каком расстоянии расположена точка пересечения прямых $3x + 4y + 7 = 0$ и $3x + y - 5 = 0$ от начала координат?
A) 5 B) 6 C) 8 D) $8\sqrt{2}$

14. (01-4-12) Сумма координат точки $M(x, y)$ равно 3. Найти наименьшее расстояние от начала координат до этой точки.
A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $1,5\sqrt{2}$ D) $4,5\sqrt{2}$

15. (00-10-8) Найти сумму квадратов абсцисс точек пересечения графиков функций $y = |x-1| - 5$ и $y = 0$.
A) 36 B) 48 C) 24 D) 52

Решение: По правилу 1, абсциссы точек пересечения графиков функций удовлетворяют уравнению $|x-1| - 5 = 0 \iff |x-1| = 5$. Решая это уравнение, находим что $x = -4$ и $x = 6$. Отсюда, $(-4)^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52$. **Ответ:** 52 (D).

16. (98-11-12) Найти сумму квадратов абсцисс точек пересечения графиков функций $y = |x-2| + 1$ и $y = 5$.
A) 52 B) 32 C) 40 D) 36

17. (01-11-14) Сколько общих точек имеют графики функций $y = x^4$ и $y = 2x^2 - 1$?
A) 4 B) 3 C) 1 D) 2

18. (02-1-53) Если $y = x^3 + 1$ и $-1 < x < 2$, то какому промежутку принадлежит y?
A) $(-1; \infty)$ B) $(0; 9)$ C) $(1; 8)$ D) $(-1; 9)$

19. (02-12-47) Кубическая парабола $y = ax^3 + b$ проходит через точки $A(1; 18)$ и $B(-1; 14)$. В какой точке график этой функции пересекает ось Ox?
A) $(0; 2)$ B) $(-3; 0)$ C) $(3; 0)$ D) $(-2; 0)$

20. (98-4-41) Задана функция $f(x) = 1 - 2x$. Найти функцию $\varphi(x)$ такую, что $f(\varphi(x)) = x$.
A) $\frac{1-x}{2}$ B) $\frac{x+1}{2}$ C) $\frac{x-1}{2}$ D) $\frac{2x-1}{4}$

Решение: По условию задачи $f(\varphi(x)) = 1 - 2\varphi(x) = x$. Отсюда $1 - x = 2\varphi(x)$, т.е. $\varphi(x) = \frac{1-x}{2}$. **Ответ:** $\frac{1-x}{2}$ (A).

21. (00-9-43) $f(x) = 2x^2$ и $\varphi(x) = x + 1$. Сколько существует значений x таких, что $f(\varphi(x)) = \varphi(f(x))$?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

22. Если $f(x) = x^2 - 1$ и $\varphi(x) = x + 1$, то чему равно $f(\varphi(x))$?
A) x^2 B) $x^2 + 2x$ C) $2x$ D) $x^2 - 2x$

23. (01-7-46) Если $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, то чему равно $f(\frac{1}{x}) + \frac{1}{f(x)}$?
A) $\frac{4x}{1-x^2}$ B) $\frac{4x}{x^2-1}$ C) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ D) $\frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$

24. (01-6-18) При каком значении p окружность, заданная уравнением $x^2 + y^2 = 64$ и график функции $y = x^2 + p$ имеют три общие точки?
A) 8 B) 6 C) -8 D) -6

25. (99-2-22) Найти расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = |x|$, которые не лежат на оси Ox.
A) 2 B) 2, 5 C) 2, 3 D) 1, 5

11 Показательные уравнения и неравенства

11.1 Показательная функция

Функция вида $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ называется *показательной* функцией. Ее область определения состоит из $D(y) = \mathbb{R}$, а область значений из $E(y) = (0; \infty)$. Функция $y = a^x$ при $a > 1$ является возрастающей, а при $0 < a < 1$ – убывающей. График функции $y = a^x$ проходит через I и II четверти (см. рис. 11.1).

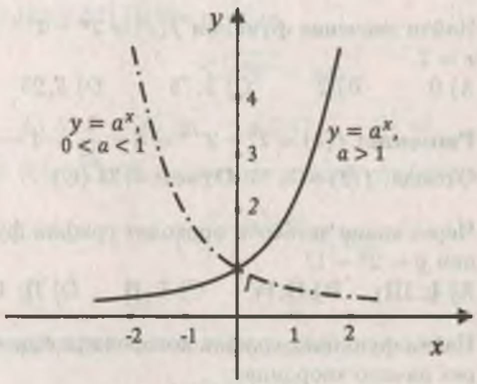


Рисунок 11.1

Для произвольных чисел $a > 0, b > 0$ имеют место следующие равенства.

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

2. $(a^x)^y = a^{xy}$.

3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

4. $\left(a\cdot b\right)^x = a^x \cdot b^x$.

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$.

7. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

8. $a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}$.

1. (98-7-23) Определите убывающие функции:
1) $y = 0,37^x$; 2) $y = (\sqrt[3]{11})^x$; 3) $y = 3\cdot(\frac{1}{2})^x$;
4) $y = (\frac{3}{4})^x$; 5) $y = \frac{1}{2}\cdot 3^x$.
A) 1; 3; 5 B) 2; 3; 4 C) 1; 4 D) 1; 3; 4

Решение: Так как функция $y = a^x$ при $0 < a < 1$ – убывающая, то функции 1; 3; 4 – убывающие. **Ответ:** 1; 3; 4 (D).

2. Определить убывающие функции:
$y_1 = 2^x$; $y_2 = e^x$; $y_3 = \pi^{-x}$; $y_4 = (\frac{e}{\pi})^x$.
A) y_1; y_2 B) y_2; y_3 C) y_3; y_4 D) y_4; y_1

3. Определить возрастающие функции:
$y_1 = 3^x$; $y_2 = e^x$; $y_3 = \pi^x$.
A) y_1 B) y_2 C) y_3 D) все функции

4. Найти множество значений функции $f(x) = e^x - 1$.
A) $(0;\infty)$ B) $(1;\infty)$ C) $(-1;\infty)$ D) $[0;\infty)$

5. Найти множество значений функции $f(x) = 2^x - 2^{-x}$.
A) $(0;\infty)$ B) $(1;\infty)$ C) $\mathbb{R}$ D) $[0;\infty)$

6. Найти значение функции $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ при $x = 2$.
A) 0 B) 2 C) 3,75 D) 3,25

Решение: $f(2) = 2^2 - 2^{-2} = 4 - \frac{1}{2^2} = 4 - \frac{1}{4}$. Отсюда, $f(2) = 3,75$. **Ответ:** 3,75 (C).

7. Через какие четверти проходит график функции $y = 2^x - 1$?
A) I; III B) II; IV C) I; II D) II; III

8. Найти функцию, график которой проходит через начало координат.
A) $y = 2^x - e^x$ B) $y = e^x + 1$
C) $y = 3^x - 3$ D) $y = 2^x - 2$

9. Через какую точку проходит график функции $y = 7^x - 1$?
A) (0; 1) B) (1; 6) C) (2; 13) D) (−1; 0)

10. (97-7-16) При каком значении k график функции $y = 2^{kx} - 1$ проходит через точку $C(2; 15)$?
A) 1 B) −2 C) 4 D) 2

Решение: Из условия задачи получим $15 = 2^{2k} - 1$. Отсюда следует, что

$$16 = 2^{2k} \iff 2^4 = 2^{2k} \iff 4 = 2k.$$

Значит, $k = 2$. **Ответ:** 2 (D).

11. (98-2-30) Какое из следующих выражений больше 1?
$a = 0,7^{2,3}\cdot 0,3^{0,8}$, $b = 3,2^{-4,2}\cdot 1,2^{-0,8}$,
$c = 0,7^{-1,2}\cdot 0,6^{-0,4}$, $d = 0,6^{0,4}\cdot 0,3^{0,6}$.
A) a, d B) b, c C) c D) d, c

12. (98-5-31) Какое утверждение неверно для функции $y = a^x$?
A) область определения есть множество всех действительных чисел
B) множеством значений является множество всех положительных действительных чисел
C) график функции проходит через точку (0;1)
D) возрастает в области определения.

13. Среди функций
$y_1 = a^x - a^{-x}$; $y_2 = x(a^x + a^{-x})$; $y_3 = x\cdot e^{|x|}$
найти нечетные.
A) y_1 B) y_2 C) $y_2; y_3$ D) все

14. (99-3-27) Какие из функций
$y_1 = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$; $y_2 = \frac{a^x+1}{a^x-1}$;
$y_3 = \frac{x}{a^x+1}$; $y_4 = x\frac{a^x-1}{a^x+1}$;
являются четными?
A) y_1 B) y_2 C) $y_2; y_3$ D) $y_1; y_4$

11.2 Показательные уравнения

1. Уравнения, решаемые приведением к одинаковому основанию

Здесь использована следующая равносильность:

1. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$.

1. (97-9-94) Решите уравнение

$$\left(\frac{25}{64}\right)^{7x^2-6} = \left(\frac{64}{25}\right)^{2+3x-6x^2}.$$

A) −4; 1 B) −1; 4 C) 1; 4 D) −4; −1

Решение: Обе стороны уравнения приведем к одинаковому основанию (свойство 6 пункта 11.1)

$$\left(\frac{64}{25}\right)^{-(7x^2-6)} = \left(\frac{64}{25}\right)^{2+3x-6x^2}.$$

В силу равносильности имеем $-7x^2 + 6 = 2 + 3x - 6x^2$. Отсюда приходим к квадратному уравнению $x^2 + 3x - 4 = 0$. Решив это уравнение, получим $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. **Ответ:** −4; 1 (A).

2. (96-1-34) Решите уравнение

$$3^1\cdot 3^2\cdot 3^3\cdot\dots\cdot 3^x = \frac{1}{9^{-33}}.$$

A) 12 va −11 B) 11 C) 12 D) 33

3. (96-6-51) Сравните корень x_0 уравнения

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^x = 2$$

с числом -1.

A) $x_0 > -1$ B) $x_0 < -1$
C) $x_0 = -1$ D) $\frac{x_0}{2} = -1$

4. (97-1-76) Решите уравнение

$$(0,75)^{x-1} = \left(1\frac{1}{3}\right)^3.$$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2

5. (97-6-57) Решите уравнение

$$(0,8)^{3-2x} = (1,25)^3.$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

6. (99-1-29) Решите уравнение

$$4^{x-4} = 0,5.$$

A) 3,5 B) 4,5 C) $-4,5$ D) $-3,5$

7. (99-6-8) Решите уравнение

$$(3,5)^{x-5} = \left(\frac{4}{49}\right)^2.$$

A) 3 B) 2 C) 1 D) 4

8. (99-6-27) Решите уравнение

$$\frac{1}{27} \cdot \sqrt[4]{9^{3x-1}} = 27^{-\frac{2}{3}}.$$

A) -1 B) 2 C) 1 D) -2

Решение: Умножим обе стороны уравнения на 27, представим числа 27 и 9 в виде 3^3 и 3^2, тогда получим

$$\sqrt[4]{(3^2)^{3x-1}} = 3^3 \cdot (3^3)^{-\frac{2}{3}} \Longleftrightarrow 3^{(3x-1):2} = 3^1.$$

Приравнивая показатели, имеем $(3x-1) : 2 = 1$. Отсюда $x = 1$. **Ответ:** 1 (C).

9. (99-6-58) Решите уравнение

$$(0,1(6))^{3x-5} = 1296.$$

A) $\frac{1}{3}$ B) 3 C) -3 D) $-\frac{1}{3}$

10. (99-10-39) На сколько корень уравнения

$$3^{x+1} \cdot 27^{x-1} = 9^7$$

меньше 10?

A) 5 B) 4 C) 8 D) 6

11. (00-3-32) Решите уравнение

$$0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}.$$

A) 2 B) -2 C) 4 D) 6

12. (96-10-37) Решите уравнение

$$5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \ldots \cdot 5^{2x} = 0,04^{-28}.$$

A) 5 B) 10 C) 14 D) 7

13. (01-5-13) Найти произведение корней уравнения

$$2^{x^2 - 6x - 5/2} = 16\sqrt{2}.$$

A) -7 B) -2 C) 3 D) 2

14. (01-6-35) Найти $x - y$, если

$$\frac{2^x \cdot 3^y}{2^y \cdot 3^x} = \frac{24}{81}.$$

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3

15. (01-7-30) Решите уравнение

$$(0,25)^{2-x} = \frac{1}{2^{x+3}}.$$

A) 2 B) 3 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$

16. (02-2-23) Найти произведение корней уравнения

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{(4-x^2)/2} = 8^x.$$

A) -4 B) 6 C) 4 D) -6

17. (02-3-17) Вычислите $3^{5-\alpha}$, если $3^{\alpha-3} = 11$.

A) $\frac{9}{11}$ B) 99 C) $\frac{3}{16}$ D) $\frac{11}{9}$

Решение: Преобразуем выражение $3^{5-\alpha}$:

$$3^{5-\alpha} = \frac{1}{3^{\alpha-5}} = \frac{3^2}{3^{\alpha-3}} = \frac{9}{11}.$$

Ответ: $\frac{9}{11}$ (A).

18. (02-7-53) Найти n, если

$$\sqrt[4]{9^{\frac{n-3}{5}}} = 243.$$

A) 53 B) 38 C) 47 D) 43

19. (03-3-31) Найти сумму корней уравнения

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{2x^2-5x} = 1,8.$$

A) 5 B) -5 C) 2,5 D) $-2,5$

20. (03-4-29) На сколько корень уравнения

$$\frac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}} = 64$$

меньше 12?

A) 8 B) 9 C) 6 D) 10

21. (03-6-45) Решите уравнение

$$\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt[x]{81}.$$

A) 2 B) 4 C) 3 D) 6

2. Вынесение общего множителя за скобки

22. (98-2-31) Найти меньшей корень уравнения

$$2^{-4x^2+2}-3\cdot 2^{-4x^2}=2^{-16}.$$

A) 2   B) −3   C) −2   D) −1

Решение: Общий множитель 2^{-4x^2} в левой части уравнения вынесем за скобки

$$2^{-4x^2}(2^2-3)=2^{-16}\Longleftrightarrow 2^{-4x^2}=2^{-16}.$$

Согласно 1-равносильности $-4x^2=-16\Longleftrightarrow x^2=4$. Корнями этого уравнения являются $x_1=-2$, $x_2=2$. Меньший из них $x_1=-2$. **Ответ:** −2 (C).

23. (98-8-34) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{-2x+3}+49^{x-1}+7^{2x-1}=399.$$

A) 5   B) 4   C) 3   D) 2

24. (98-9-31) Найти разность между числом 18 и корнем уравнения $2^{x-4}+2^{x+1}=132$.
A) 9   B) 10   C) 8   D) 12

25. (99-3-18) Вычислите $\dfrac{x}{x+1}$, если

$$3^{5x+1}+3^{5x-1}=30.$$

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{4}{9}$

26. (01-7-31) Решите уравнение

$$6\cdot 9^{0,5x-2}+2\cdot 3^{x-6}=56.$$

A) 1   B) 2   C) 6   D) 3

27. (02-12-43) Найти значение $x+13$, если

$$4^{x-1}-\frac{1}{2}\cdot 2^{2x}=-64.$$

A) 19   B) 15   C) 17   D) 13

3. Метод введения новой переменной

28. (99-6-49) Решите уравнение

$$3^{\sqrt{x}}-3^{1-\sqrt{x}}=\frac{26}{3}.$$

A) ∅   B) 9   C) 2   D) 4

Решение: Положим $3^{\sqrt{x}}=y>0$, тогда

$$y-\frac{3}{y}=\frac{26}{3}\Longleftrightarrow 3y^2-26y-9=0.$$

Решив это квадратное уравнение, получим $y_1=-3^{-1}$, $y_2=9$. Решение y_1 не удовлетворяет условию $y>0$. Из $3^{\sqrt{x}}=y_2\Longleftrightarrow 3^{\sqrt{x}}=9$ получим $x=4$. **Ответ:** 4 (D).

29. (99-8-2) Решите уравнение $5^x-5^{3-x}=20$.
A) −5   B) 1   C) −5; 1   D) 2

30. (01-1-20) Решите уравнение $5^x-24=5^{2-x}$.
A) −2   B) 0   C) −1   D) 2

31. (02-9-37) Найти сумму корней уравнения

$$25^{x^2+0,5}-5^{x^2}=5^{x^2+3}-25.$$

A) 0   B) 1   C) $2\sqrt{2}$ D) 2

32. (02-11-28) Найти произведение корней уравнения

$$8\cdot 4^{|x|}-33\cdot 2^{|x|}+4=0.$$

A) 4   B) $\frac{1}{4}$ C) −4   D) $-\frac{1}{4}$

33. (03-7-19) Решите уравнение

$$4^{x+1}-2^{x+4}+3\cdot 2^{x+2}=48.$$

A) 1   B) 2   C) 3   D) 4

4. Метод группировки

34. (97-6-26) Решите уравнение

$$2^{3x+7}+5^{3x+4}+2^{3x+5}-5^{3x+5}=0.$$

A) 1   B) 0   C) −1   D) 2

Решение: Степени с основанием 2 оставим в левой части, а степени с основанием 5 перенесем в правую часть. Вынося общие множители за скобки, получим

$$2^{3x+5}(2^2+1)=5^{3x+4}(5-1)\Longleftrightarrow 2^{3x+3}=5^{3x+3}.$$

Разделив обе части равенства на 5^{3x+3}, имеем: $0,4^{3x+3}=1=0,4^0$. Отсюда следует $3x+3=0$ или $x=-1$. **Ответ:** −1 (C).

35. Решите уравнение

$$5^{3x}-7^x-35\cdot 5^{3x}+35\cdot 7^x=0.$$

A) 1   B) 0   C) −1   D) 2

36. Решите уравнение $2^x=5^x$.
A) 1   B) 0   C) −1   D) 2

37. Решите уравнение $3\cdot 2^x=2\cdot 3^x$.
A) 1   B) 0   C) −1   D) 2

38. Решите уравнение

$$9\cdot 16^x-7\cdot 12^x=16\cdot 9^x.$$

A) 2   B) −2   C) 3   D) −1

Решение: Уравнение вида $m_1\cdot a^x+m_2\cdot b^x=m_3\cdot c^x$ при условии $ac=b^2$ $(a<b<c)$ можно привести к квадратному уравнению. В этом примере $16\cdot 9=12^2$. Разделив обе стороны данного уравнения на $16^x>0$, получим

$$9-7\cdot\left(\frac{12}{16}\right)^x=16\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^x\Longleftrightarrow 9-7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x=16\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{2x}.$$

Вводя обозначение $(\frac{3}{4})^x = y > 0$, приведем уравнение к виду $16y^2 + 7y - 9 = 0$. Корни этого уравнения $y_1 = -1$, $y_2 = 9/16$. Решение $y_1 = -1$ не удовлетворяет условию $y > 0$. Из $(\frac{3}{4})^x = y_2 \iff (\frac{3}{4})^x = (\frac{3}{4})^2$ получим $x = 2$. **Ответ:** 2 (A).

39. Решите уравнение $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$.
A) 0 B) 0; -1 C) -1 D) 1

5. Системы уравнений

40. (96-7-17) Найти значение $x + y$, если известно, что
$$\begin{cases} 3^x = 9^{y+1} \\ 4y = 5 - x. \end{cases}$$
A) 3,5 B) 5 C) 2 D) -4

Решение: Из второго уравнения системы получим $x = 5 - 4y$. Подставляя это в первое уравнение, имеем: $3^{5-4y} = 9^{y+1} \iff 3^{5-4y} = 3^{2y+2}$. Приравнивая показатели, получим $5 - 4y = 2y + 2$. Отсюда $y = 0,5$. Из второго уравнения находим $x = 3$. Их сумма $x + y = 3 + 0,5 = 3,5$. **Ответ:** 3,5 (A).

41. (97-3-17) Найти $x - y$, если известно, что $3^{x-1} = 9^y$ и $2x - y = 5$.
A) 2 B) 3 C) -1 D) $-0,5$

42. (97-7-17) Найти $y - x$, если известно, что $2^{x+1} = 4^y$ и $x + y = -4$.
A) 4 B) -2 C) 2 D) -3

43. (00-3-30) Найти значение $x^2 - y^2$, если
$$\begin{cases} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y-1} = 1. \end{cases}$$
A) 1 B) 4 C) 3 D) 2

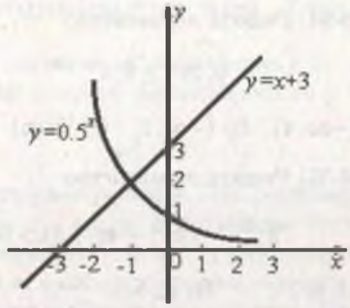
44. (02-1-58) Найти $x \cdot y$, если известно, что
$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 5 \\ 2^{x+y} = 4. \end{cases}$$
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

45. (03-4-31) Найти $|x + y|$, если $2^{x^2} \cdot 2^{y^2} = 64$ и $2^{xy} = \sqrt{8}$.
A) 4,5 B) 3,5 C) 2,5 D) 3

6. Графический метод

46. (97-3-35) Сколько корней имеет уравнение $(0,5)^x = x + 3$?
A) 1 B) 2 C) 3 D) не имеет корней

Решение: Положим $f(x) = (0,5)^x$ и $g(x) = x+3$. По свойству 7 пункта 10.1 абсциссы точек пересечения графиков функций f и g являются решениями данного уравнения. Прямая $g(x) = x+3$ пересекает график функции $f(x) = (0,5)^x$ в единственной точке $(-1; 2)$. **Ответ:** 1 (A).



47. (01-7-29) Сколько корней имеет уравнение $2^{-x} = 2x - x^2 - 1$?
A) 4 B) 3 C) 2 D) 0

48. (00-9-30) Сколько корней имеет уравнение
$$3^{-x} = 4 + x - x^2?$$
A) $\emptyset$ B) 1 C) 2 D) 3

49. (03-5-24) Сколько действительных корней имеет уравнение
$$2^x = x^3?$$
A) 2 B) 1 C) 3 D) $\emptyset$

11.3 Показательные неравенства

Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ или $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ называются *простейшими показательными неравенствами*. Решение этих неравенств основывается на возрастании показательной функции $y = a^x$ при $a > 1$, и убывании при $0 < a < 1$, т.е.

1. **Если $0 < a < 1$, то**
$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) < g(x).$$

2. **Если $a > 1$, то**
$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) > g(x).$$

1. (98-2-32) Найти наибольшее целое решение неравенства
$$\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x}.$$
A) 2 B) 3 C) 4 D) 1

Решение: К левой части неравенства применим формулу $a^x \cdot b^x = (ab)^x$, а к правой части формулу - $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Тогда получим
$$\left(\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^{6-2x} \iff \left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^{6-2x}.$$
Основание степени $\frac{2}{3} < 1$, поэтому имеем
$$x < 6 - 2x \iff 3x < 6 \iff x < 2.$$
Наибольшее целое число, удовлетворящее этому условию равно 1. **Ответ:** 1 (D).

2. (96-6-54) Решите неравенство

$$0,25^x \geq 0,5^{4x-8}.$$

A) $(-\infty; 4)$ B) $(-\infty; 2]$ C) $[2; \infty)$ D) $[4; \infty)$

3. (97-6-55) Решите неравенство

$$2^{\sqrt{x}-1} \cdot (4x^2 - 4x + 1) > 0.$$

A) $(1; \infty)$ B) $[1; \infty)$
C) $[\frac{1}{2}; \infty)$ D) $[0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$

4. (97-9-76) При каких значениях x функция $y = 5^x - 5$ принимает положительные значения?
A) $x < 1$ B) $x > 1$ C) $x \geq 1$ D) $x \leq 2$

5. (99-1-30) Решите неравенство

$$(\sqrt{6})^x \leq \frac{1}{36}.$$

A) $(-\infty; -4]$ B) $[-4; \infty)$
C) $[-4; 4]$ D) $(-\infty; 6]$

Решение: Перпишем неравенство в виде:

$$6^{x/2} \leq 6^{-2} \iff \frac{x}{2} \leq -2 \iff x \leq -4.$$

Ответ: $(-\infty; -4]$ (A).

6. (99-2-35) Найти наименьшее целое решение неравенства $\left(\frac{1}{2}\right)^{20-2x} > 1.$
A) 6 B) 11 C) 10 D) 9

7. (99-6-16) Найти наибольшее целое решение неравенства

$$2^{3-6x} > 1.$$

A) 0 B) 1 C) -1 D) -2

8. (00-8-10) Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} > \frac{1}{16}.$$

A) $(-\infty; 2,5)$ B) $(2,5; \infty)$
C) $(-2,5; \infty)$ D) $(-\infty; 0) \cup (0; 2,5)$

9. (03-4-30) Найти наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{1}{8} \cdot 2^{4x-2} > (\sqrt{2})^{10}.$$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4

10. (03-5-31) Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{3^x - 4^x}$.
A) $(-\infty; 0]$ B) $(0; 1)$ C) $[0; 1)$ D) $[0; \infty)$

11. (00-6-31) Определите сумму целых решений неравенства

$$3^{8x} - 4 \cdot 3^{4x} \leq -3.$$

A) 8 B) 7 C) 4 D) 0

Решение: Положив $3^{4x} = y > 0$, перепишем неравенство в виде

$$y^2 - 4y + 3 \leq 0 \iff (y-1)(y-3) \leq 0.$$

Решив это неравенство методом интервалов, получим $1 \leq y \leq 3$. Вернувшись к обозначению, имеем $1 \leq 3^{4x} \leq 3 \iff 3^0 \leq 3^{4x} \leq 3^1$. Отсюда $0 \leq 4x \leq 1 \iff 0 \leq x \leq 0,25$. Единственное целое решение неравенства есть 0.
Ответ: 0 (D).

12. (02-5-20) Решите неравенство

$$4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 \leq 0.$$

A) $(1; 3)$ B) $(0; 1) \cup (3; \infty)$
C) $[1; 3]$ D) $[0; 1] \cup [3; \infty)$

13. (01-4-30) Решите неравенство

$$9^{-x} - 28 \cdot 3^{-x-1} + 3 < 0.$$

A) $(-2; 1)$ B) $(-\infty; 2]$ C) $[1; \infty)$ D) $(-2; 0)$

14. (01-1-21) Решите неравенство

$$3^{\frac{1}{x+1}} > 9.$$

A) $(-1; 1)$ B) $(-1; -\frac{1}{2})$
C) $(-\frac{1}{2}; 1)$ D) $(0; 1)$

15. (01-2-70) Сколько натуральных чисел удовлетворяют неравенству

$$(0,7)^{2+4+\dots+2n} > (0,7)^{72}?$$

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10

Решение: Воспользовавшись формулой для суммы первых n членов арифметической прогрессии, получим

$$S_n = 2 + 4 + \dots + 2n = n(n+1).$$

Так как основание степени $0,7 < 1$, то по пункту 1 верно

$$n(n+1) < 72 \iff (n-8)(n+9) < 0.$$

Решив это неравенство методом интервалов, получим $-9 < n < 8$. Натуральные числа, удовлетворящие этому условию следующие: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Их ровно 7. **Ответ:** 7 (A).

16. Сколько натуральных значений n удовлетворяют двойному неравенству $14 \leq 2^n < 64$?
A) 2 B) 3 C) 1 D) 4

17. Сколько натуральных значений n удовлетворяют двойному неравенству

$$9 \leq 3^n \leq 79?$$

A) 1 B) 3 C) 4 D) 2

18. (01-8-32) Определите сумму целых решений неравенства $3^{|x|+2} \leq 81$.
A) -1 B) 3 C) 4 D) 0

19. (01-9-18) Найти среднее арифметическое всех целых решений неравенства $0,5^{x^2-4} > 0,5^{3x}$.
A) 1,5 B) 2 C) 1 D) 3

20. (02-2-25) Решите неравенство

$$5^{\frac{1}{x}} + 5^{\frac{1}{x}+2} > 130.$$

A) (0; 1) B) (0; 3) C) $(0; \frac{3}{4})$ D) (1; 2)

Решение: Общий множитель $5^{\frac{1}{x}}$ вынесем за скобки:

$$5^{\frac{1}{x}}(1+25) > 130 \Longleftrightarrow 5^{\frac{1}{x}} > 5^1.$$

Так как основание $5 > 1$, то

$$\frac{1}{x} > 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} - 1 > 0 \Longleftrightarrow \frac{1-x}{x} > 0.$$

Решив это неравенство методом интервалов, получим $0 < x < 1$. **Ответ:** (0; 1) (A).

21. (06-121-34) Решите неравенство

$$3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+3} > 84.$$

A) $(0; 1)$ B) $(-\infty; 0)$
C) $(1; \infty)$ D) $(0; 1) \cup (1; \infty)$

22. (03-6-58) Решите неравенство

$$3^{3x-2} + 3^{3x+1} - 3^{3x} < 57.$$

A) $x > 1$ B) $x < 1\frac{1}{2}$ C) $x < 1$ D) $x > \frac{2}{3}$

23. (03-7-79) Определите сумму натуральных решений неравенства

$$3^{x+2} + 3^{x+3} \leq 972.$$

A) 1 B) 3 C) 6 D) 10

24. (02-5-22) Сколько простых чисел содержит решение неравенства

$$(1,25)^{1-x} > (0,64)^{2(1+\sqrt{x})}?$$

A) 5 B) 7 C) 9 D) 12

25. (97-2-54) Решите неравенство

$$0,2^{x^2+1} + 0,2^{x^2-1} < 1,04.$$

A) $(-\infty; -1)$ B) $(1; \infty)$
C) $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$ D) $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

26. (03-10-32) Если

$$\begin{cases} 5^x + 5^{-x} = 13 \\ 28^x < 17^x, \end{cases}$$

то найти $5^x - 5^{-x} = ?$
A) $\sqrt{135}$ B) $-\sqrt{145}$ C) $\sqrt{175}$ D) $-\sqrt{165}$

12 Логарифмическая функция

Рассмотрим показательную функцию $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$. Для каждого фиксированного $y \in (0; \infty)$ уравнение

$$a^x = y \tag{12.1}$$

имеет единственное решение. Это решение записывается в виде $x = \log_a y$. Логарифмом числа y ($y > 0$) по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени x, в которую следует возвести число a, чтобы получить y. Значит, в равенстве (12.1) число x есть логарифм числа y по основанию a. Отсюда следует, что функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ является обратной функцией к показательной функции $f(x) = a^x$. Функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ называется *логарифмической* функцией. Ее область определения состоит из $D(y) = (0; \infty) = E(f)$, а область значений - $E(y) = \mathbb{R} = D(f)$. Из определения обратной функции вытекает следующее: для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется $\log_a a^x = x$ и

$$a^{\log_a x} = x, \quad x > 0. \tag{12.2}$$

Это равенство называется основным логарифмическим тождеством. Функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ является возрастающей, а при $0 < a < 1$ – убывающей. Логарифм с основанием $e = 2,71\ldots$, записывается в виде $\ln x = \log_e x$. Логарифм по основанию 10 записывается в виде $\lg x = \log_{10} x$. График логарифмической функции лежит в I и IV четвертях (рис. 12.1).

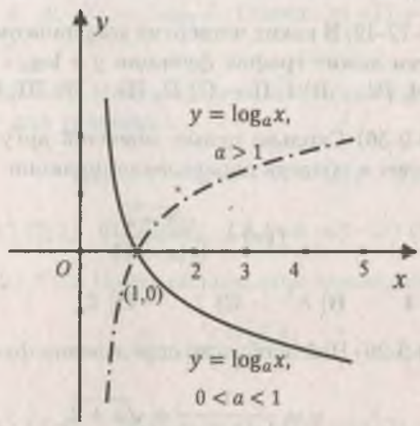


Рисунок 12.1

Логарифмическая функция имеет следующие свойства.

Для произвольных $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ имеют место следующие равенства

1. $a^{\log_a x} = x, \quad x > 0.$

2. $\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0.$

3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0.$

4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad x, y > 0.$

5. $\log_a x^p = p \log_a x, \quad x > 0.$

6. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p}\log_a x, \quad x > 0.$

7. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}.$

8. $\log_a b \cdot \log_b a = 1 \Longleftrightarrow \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}.$

9. $\log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d.$

10. $\log_{a^x} b^y = \dfrac{y}{x}\log_a b.$

11. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}.$

12. $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}.$

12.1 Область определения и свойства

1. (96-6-52) Найти область определения функции
$$y = \log_3(2 - x).$$
A) $(-\infty; 2)$ B) $(2; \infty)$ C) $(0; 2)$ D) $(0; 2]$

Решение: Область определения логарифмической функции состоит из интервала $(0; \infty)$. Поэтому, $2 - x > 0 \Longleftrightarrow x < 2$. Значит, данная функция определена на множестве $(-\infty; 2)$. **Ответ:** $(-\infty; 2)$ (A).

2. Найти область определения функции
$$y = \log_7(4 - x^2).$$
A)$(0; 2)$ B) $(2; 4)$ C) $(-2; 2)$ D) $(0; 2]$

3. (98-12-42) В каких четвертях координатной плоскости лежит график функции $y = \log_3 x$?
A) I, IV B) I, II C) II, III D) III, IV

4. (99-2-36) Сколько целых значений аргумента входит в область определения функции
$$f(x) = \frac{\sqrt{8-x}}{\lg(x-1)}?$$
A) 4 B) 8 C) 7 D) 6

5. (99-3-26) Найти область определения функции
$$y = \frac{1}{\ln(1-x)} + \sqrt{x+2}.$$
A) $[-2; \infty)$ B) $[-2; 1]$
C) $(-\infty; 1)$ D) $[-2; 0) \cup (0; 1)$

6. (99-5-39) Найти область определения функции
$$f(x) = \log_2(64^{-x} - 8^{1-x}).$$
A) $(-\infty; 0)$ B) $(-\infty; -1)$
C) $(-\infty; -2)$ D) $(1; \infty)$

7. (99-6-29) Найти область определения функции
$$y = \log_3(x(x-3)) - \log_3 x.$$
A) $(3; \infty)$ B) $(-\infty; 3)$ C) $[3; \infty)$ D) $(-\infty; 3]$

8. (97-2-52) Найти область определения функции
$$y = \log_{x^2}(4 - x).$$
A) $(-\infty; 4)$
B) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4)$
C) $(-\infty; -1) \cup [-1; 1] \cup (1; 4)$
D) $(-\infty; 1) \cup (4; \infty)$

Решение: Выражение $\log_a b$ определено при $b > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$, поэтому получим систему неравенств
$$\begin{cases} 4 - x > 0 \\ x^2 > 0 \\ x^2 \neq 1. \end{cases}$$
Решение этой системы есть
$$\begin{cases} x < 4 \\ x \neq -1, 0, 1. \end{cases}$$
Отсюда следует, что данная функция определена на множестве $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4)$. **Ответ:** (B).

9. (97-1-63) Найти область определения функции
$$y = \log_x(3 - x).$$
A) $(-\infty; 3)$ B) $(0; \infty)$
C) $(0; 1) \cup (1; 3)$ D) $(0; 3)$

10. (97-6-64) Найти область определения функции
$$f(x) = \log_x(6 - x).$$
A) $(-\infty; 6)$ B) $(1; 6)$
C) $(0; 1)$ D) $(0; 1) \cup (1; 6)$

11. (97-8-52) Найти область определения функции
$$y = \log_{x-1}(x - \frac{1}{4}).$$
A) $(\frac{1}{4}; \infty)$ B) $(1; 2) \cup (2; \infty)$
C) $(-0,25; 2) \cup (2; \infty)$ D) $[-0,25; 2) \cup [2; \infty)$

12. (97-9-75) При каких целых значениях n областью определения функции $y = \lg(nx^2 - 5x + 1)$ является множество $(-\infty; \frac{1}{4}) \cup (1; \infty)$?
A) 1 B) 4 C) 3 D) 5

Решение: По условию задачи следует найти значения $n \in \mathbb{Z}$, при которых неравенство $nx^2 - 5x + 1 > 0$ имеет решение $(-\infty; \frac{1}{4}) \cup (1; \infty)$. Значит, ветви параболы направлены вверх и пересекают ось Ox в точках $\frac{1}{4}$ и 1. Отсюда следует, что нулями квадратного трехчлена $nx^2 - 5x + 1$ являются точки $x_1 = \frac{1}{4}$ и $x_2 = 1$. По теореме Виета
$$\frac{1}{n} = 1 \cdot \frac{1}{4} \Longleftrightarrow n = 4.$$
Ответ: 4 (B).

13. (99-7-15) При каких целых значениях k функция $y = \lg(kx^2 - 2x + 1)$ не определена только в точке $x = 1$?
A) $k < 2$ B) $k < 3$ C) $k \leq 1$ D) $k = 1$

14. (99-8-34) Областью определения какой из функций является промежуток $(0; 1)$?
A) $y = \sqrt{1/(1-x)} + \log_2 x$ B) $y = 1/\sqrt{1-x^2}$
C) $y = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$ D) $y = \dfrac{1}{1-x}$

15. (99-8-36) Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = \log_3(x^2 - 6x + 36).$$

A) 1 B) 9 C) 2 D) 3

16. (96-12-90) $a = \log_{\frac{1}{6}} 4$, $b = \log_{\frac{1}{5}} 6$ и $c = \log_{\frac{1}{5}} 4$. Какое из указанных соотношений верно для a, b и c?
A) $c < b < a$ B) $b < c < a$
C) $c < a < b$ D) $a < b < c$

Решение: Если $a \in (0; 1)$, то функция $y = \log_a x -$ убывающая, поэтому

$$b = \log_{\frac{1}{5}} 6 < \log_{\frac{1}{5}} 4 = c.$$

Теперь сравним числа a и c. Их представим в виде логарифмов по основанию 4:

$$a = \frac{\log_4 4}{\log_4 \frac{1}{6}} = -\frac{1}{\log_4 6}, \quad c = \frac{\log_4 4}{\log_4 \frac{1}{5}} = -\frac{1}{\log_4 5}.$$

Отсюда $5 < 6 \Longrightarrow \log_4 5 < \log_4 6$, далее

$$\frac{1}{\log_4 5} > \frac{1}{\log_4 6} \Longrightarrow c = -\frac{1}{\log_4 5} < -\frac{1}{\log_4 6} = a.$$

Таким образом, $b < c < a$. **Ответ:** $b < c < a$ (B).

17. (96-13-31) $a = \log_{\frac{1}{5}} 4$, $b = \log_{\frac{1}{5}} 6$, $c = \log_{\frac{1}{6}} 4$. Какое из указанных соотношений верно для a, b и c?
A) $b < c < a$ B) $c < a < b$
C) $a < c < b$ D) $b < a < c$

18. (03-5-63) Расставьте в порядке возрастания

$$a = 2\log_2 5, \ b = 3\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{23}, \ c = 4\log_{\frac{1}{4}} \frac{5}{26}.$$

A) $b < a < c$ B) $a < b < c$
C) $b < c < a$ D) $c < b < a$

19. (02-2-20) Какое число отрицательное?
A) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ B) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$
C) $\log_{\frac{1}{7}} \dfrac{1}{\sqrt{45}}$ D) $\log_2 1,2$

20. (99-9-47) Если $0 < p < 1$ и $1 < n < m$, какое из следующих произведений положительно?
A) $\log_p m \cdot \log_m 1$ B) $\log_p n \cdot \log_p m$
C) $\log_m p \cdot \log_n m$ D) $\log_p m \cdot \log_m 1$

21. (01-3-21) Найти сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции

$$y = \log_{\sqrt{10}}(6 + x - x^2).$$

A) 0 B) 3 C) 2 D) 5

22. (01-9-46) Сколько всего натуральных чисел в области определения функции

$$y = \log_\pi \frac{x^2 - 13x - 30}{25 - 9x^2}?$$

A) 13 B) 15 C) 0 D) 8

23. (01-9-47) Найти наибольшее целое отрицательное число из области определения функции

$$y = \log_{15} \frac{x^2 - 2x - 15}{2x + 3}$$

и вычислить значение функции в этой точке.
A) $y(-1) = \log_{15} 2$ B) $y(-5) = \log_{15} 20$
C) $y(-3) = 4$ D) $y(-2) = \log_{15} 7$

Решение: Область определения данной функции есть решение неравенства

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{2x + 3} > 0 \Longleftrightarrow \frac{(x+3)(x-5)}{2(x+1,5)} > 0.$$

С помощью метода интервалов получим решение этого неравенства $(-3; -1,5) \cup (5; \infty)$. Наибольшее целое отрицательное число на этом интервале -2. $y(-2) = \log_{15} 7$. **Ответ:** $y(-2) = \log_{15} 7$ (D).

24. (98-7-21) Найти область допустимых значений x для уравнения

$$\lg(x-3) - \lg(x+9) = \lg(x-2).$$

A) $(2; 3)$ B) $(9; \infty)$ C) $(-9; \infty)$ D) $(3; \infty)$

25. (02-7-20) Найти область определения функции

$$y = \lg\left(\frac{3x+1}{x+2} - 1\right).$$

A) $(-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$ B) $(-2; \frac{1}{2})$
C) $(-\infty; -2)$ D) $(\frac{1}{2}; \infty)$

26. (02-9-29) Найти область определения функции

$$y = \sqrt{2 + \log_{\frac{1}{2}}(3 - x)}.$$

A) $(-1; 3)$ B) $[-1; 3)$ C) $(-\infty; 3)$ D) $(-\infty; -1]$

27. (02-12-51) Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{x+4} + \log_2(x^2 - 4).$$

A) $[-2; 2]$ B) $(-4; 2)$
C) $(-2; 2)$ D) $[-4; -2) \cup (2; \infty)$

28. (03-6-43) Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{8}{|x|}-1}+\lg(x^2-1).$$

A) $-8<x<-1$ B) $1<x<8$
C) $-1<x<1$ D) $-8\le x<-1,\ 1<x\le 8$

29. (03-10-38) Найти сумму целых чисел из области определения функции

$$y=\frac{\ln(7-x^2)}{x+1}.$$

A) 0 B) 1 C) -1 D) 2

12.1.1 Тождественные преобразования логарифмических выражений

1. Вычислите $\log_2 8$.
A) 4 B) 3 C) 1 D) 2

Решение: Используя $8=2^3$ и 5-свойство, получим $\log_2 2^3=3\cdot\log_2 2=3$. **Ответ:** 3 (B).

2. Вычислите $\log_4 8+\log_4 32$.
A) 4 B) 3 C) 5 D) 2

3. (02-4-38) Вычислите

$$\log_{\frac{1}{6}}2+\log_{\frac{1}{6}}3.$$

A) -3 B) -1 C) 0 D) 1

4. Вычислите $\log_2 18-\log_2 9$.
A) 4 B) 3 C) 1 D) 2

5. (08-121-28) Вычислите $\log_2\log_3 81$.
A) 4 B) 3 C) 1 D) 2

6. (97-5-37) Вычислите $\log_2\lg 100$.
A) 1 B) 4 C) 3 D) 2

7. (08-120-28) Вычислите

$$\frac{\log_9 12}{\log_{36}3}-\frac{\log_9 4}{\log_{108}3}.$$

A) 2 B) 3 C) 6 D) 1

8. (96-9-31) Вычислите

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{3}{\log_9 7}}.$$

A) 10 B) 9 C) 3 D) 7

Решение: Используя 8-свойство, получим $\frac{1}{\log_9 7}=\log_7 9$. Теперь по основному тождеству (12.2), имеем

$$\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{3\cdot\log_7 9}=7^{\log_7 9}=9.$$

Ответ: 9 (B).

9. (96-3-89) Вычислите $\left(2^{\frac{1}{\log_3 16}}\right)^4$.
A) $\sqrt{3}$ B) 4 C) 2 D) 3

10. (98-4-15) Вычислите

$$\frac{5^{\lg 20}}{20^{\lg 5+1}}.$$

A) 0,25 B) 0,1 C) 0,2 D) 0,05

11. (99-2-31) Вычислите

$$100^{\frac{1}{2}\lg 27-\lg 3}\cdot 10.$$

A) 20 B) 40 C) 30 D) 10

12. (00-3-34) Вычислите

$$343^{\log_{49}4}.$$

A) 8 B) 4 C) 7 D) 6

13. (00-10-42) Вычислите

$$\log_{2\sqrt{2}}512.$$

A) 8 B) 6 C) 4 D) 10

14. (01-3-14) Вычислите

$$4^{\log_2(\sqrt[3]{2\sqrt{2}})^2}.$$

A) 16 B) 2 C) 4 D) 64

15. (01-5-16) Найти значение выражения

$$49^{1-\log_7 2}+5^{-\log_5 4}.$$

A) 12,5 B) 13 C) 14 D) 23

16. (96-9-84) Вычислите

$$\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8\cdot\log_8 9.$$

A) 1 B) 3 C) 6 D) 2

Решение: Переходим к логарифмам по основанию 10

$$\frac{\lg 4}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 5}{\lg 4}\cdot\frac{\lg 6}{\lg 5}\cdot\frac{\lg 7}{\lg 6}\cdot\frac{\lg 8}{\lg 7}\cdot\frac{\lg 9}{\lg 8}=\frac{\lg 3^2}{\lg 3}=2.$$

Ответ: 2 (D).

17. (00-5-66) Вычислите

$$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$

18. (99-6-13) Вычислите

$$\log_9 17\cdot\log_{17}7\cdot\log_7 3.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{7}$ C) 1 D) 2

19. (96-6-53) Среди данных чисел найти меньшее 2.
$M = \log_5 100 - \log_5 4$, $\quad N = 4\log_2 3 - \log_2 9$
$P = \log_6 72 - \log_6 2$, $\quad Q = \log_4 16 + \log_4 \frac{1}{8}$
A) N B) P C) M D) Q

Решение: Используя формулу приведения суммы к произведению (12-глава, 3-свойство) и 5-свойство, получим

$$Q = \log_4 16 + \log_4 \frac{1}{8} = \log_4 2 = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: Q (D).

20. (97-8-53) Среди данных чисел найти меньшее 2.
A) $\log_4 2 + \log_4 8$ B) $\log_2 36 - \log_2 3$
C) $2\log_2 5 - \log_2 25$ D) $\log_2 6 + \dfrac{1}{2}\log_2 9$

21. (97-12-52) Найти число, не меньшее 1.
A) $\log_3 12 - \log_3 4$ B) $\dfrac{1}{2}\log_4 36 + \log_4 \dfrac{2}{3}$
C) $\log_5 125 - \dfrac{1}{2}\log_5 625$ D) $2\log_2 5 - \log_2 30$

22. (00-1-39) Укажите наибольшее среди следующих чисел.
A) $\log_2 18 - \log_2 9$ B) $3^{\log_3 6}$
C) $\lg 25 + \lg 4$ D) $\log_{13} 169^2$

23. (03-1-20) Если $x = \log_5 2 + \log_{11} 3$, то укажите наибольшее среди следующих чисел.
A) x B) x^2 C) x^3 D) $\sqrt[3]{x}$

24. (98-1-33) Вычислите

$$\frac{\log_2^2 14 + \log_2 14 \log_2 7 - 2\log_2^2 7}{\log_2 14 + 2\log_2 7}.$$

A) 2 B) $\log_2 7$ C) $-\log_2 7$ D) 1

Решение: Положим $\log_2 7 = x$, тогда $\log_2 14 = \log_2 2 + \log_2 7 = 1 + x$. Вычислим числитель: $(1+x)^2 + (1+x)x - 2x^2 = 1 + 2x + x^2 + x + x^2 - 2x^2 = 1 + 3x$. Знаменатель равен $1 + x + 2x = 1 + 3x$. Их отношение равно 1. **Ответ:** 1 (D).

25. (98-8-33) Вычислите

$$\frac{2\log_3^2 2 - \log_3^2 18 - \log_3 2 \cdot \log_3 18}{2\log_3 2 + \log_3 18}.$$

A) 1 B) $\dfrac{1}{2}$ C) -2 D) $-\dfrac{1}{2}$

26. (01-6-36) Вычислите

$$2\log_2 12 + \log_2 20 - \log_2 15 - \log_2 3.$$

A) 4 B) 5 C) 7 D) 6

27. (01-9-17) Упростите

$$\frac{\lg^2(x^3)}{\lg^3(x^2)} \cdot \lg\sqrt{x}.$$

A) $\dfrac{9}{16}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) $1\dfrac{7}{9}$ D) $\dfrac{3}{2}$

28. (01-11-25) Вычислите

$$\log_5 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_4 243 \cdot \log_3 4.$$

A) 4 B) 3 C) 5 D) 6

Решение: По свойству 8 логарифма получим, $\log_5 2 \cdot \log_2 5 = 1$. Далее, используя 5 и 8-свойства получим

$\log_4 243 \cdot \log_3 4 = \log_4 3^5 \log_3 4 = 5\log_4 3 \cdot \log_3 4 =$

$= 5$. **Ответ:** 5 (C).

29. (01-11-26) Вычислите

$$\frac{3\lg 2 + 3\lg 5}{\lg 1300 - \lg 13}.$$

A) 1,8 B) 1,6 C) 2,3 D) 1,5

30. (02-2-53) Вычислите

$$\frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \frac{\log_5 150}{\log_6 5}.$$

A) 1 B) -1 C) $\dfrac{1}{2}$ D) $-\dfrac{1}{2}$

31. (02-3-32) Найти значение выражения $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{a}$, если $a > 0$ и $a \neq 1$.
A) $\dfrac{2}{3}$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) 3 D) 6

32. (02-3-33) Вычислите

$$\frac{1}{\log_2 4} + \frac{1}{\log_4 4} + \frac{1}{\log_8 4} + \frac{1}{\log_{16} 4} +$$
$$+ \frac{1}{\log_{32} 4} + \frac{1}{\log_{64} 4} + \frac{1}{\log_{128} 4}.$$

A) 14 B) 16 C) 7 D) 32

33. (02-5-24) Вычислите

$$\log_3^{-1} \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}.$$

A) 27 B) -27 C) $\dfrac{1}{27}$ D) 3

Решение: Используя свойство 5 и свойства корней, имеем:

$$\log_3^{-1} \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}} = \frac{1}{\log_3 3^{\frac{1}{27}}} = \frac{1}{\frac{1}{27}\log_3 3} = 27.$$

Ответ: 27 (A).

34. (03-5-39) Вычислите

$$y = \log_5 \log_5 \sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{5}}}}.$$

A) -4 B) $\dfrac{1}{5}$ C) $-\dfrac{1}{4}$ D) 4

35. (02-10-73) Вычислите

$$\left(\frac{\log_6 27 + 2\log_6 2}{\log_6 \sqrt[3]{0,25} + \log_6 \frac{1}{3}}\right)^3.$$

A) -27 B) 27 C) -8 D) $8\log_6 27$

36. (02-12-48) Вычислите

$$\frac{3\lg 2 + 3\lg 5}{\lg 1300 - \lg 0,13}.$$

A) $0,8$ B) $0,6$ C) $0,7$ D) $0,75$

37. (03-2-20) Вычислите

$$\frac{1 + 2\log_3 2}{(1 + \log_3 2)^2} + \log_6^2 2.$$

A) 2 B) $0,5$ C) 1 D) $\frac{1}{4}$

38. (03-3-33) Вычислите

$$\log_8 5^{2\log_{25} 32}.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 2

39. (03-4-32) На сколько значение выражения $\ln(3^{\log_3 0,64} + 8^{\log_8 0,36})$ больше -11?
A) 10 B) 9 C) 11 D) 12

40. (03-4-33) Вычислите

$$2\log_4 8 - 3\log_8 4 + \log_2 32 + 18.$$

A) 22 B) 24 C) 26 D) 20

41. (98-5-29) Выразить $\log_6 45$ через a и b, если $\log_3 5 = a$, $\log_3 2 = b$.
A) $\frac{b+2}{a+2}$ B) $\frac{2+a}{1+b}$ C) $\frac{a}{1+b}$ D) $\frac{b}{1+a}$

Решение: Даны $\log_3 5 = a$, $\log_3 2 = b$. Используя свойства 7, 6, 3 и 2, получим

$$\log_6 45 = \frac{\log_3(9\cdot 5)}{\log_3(2\cdot 3)} = \frac{\log_3 3^2 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 3} = \frac{2+a}{b+1}.$$

Ответ: $\frac{2+a}{b+1}$ (B).

42. (96-10-36) $\log_4 125 = a$. Выразить $\lg 64$ через a.
A) $\frac{3}{2}a + 4$ B) $\frac{2}{3}a + 6$ C) $\frac{18}{2a+3}$ D) $\frac{6}{3a+2}$

43. (96-9-28) $a = \log_{50} 40$. Выразить $\log_5 2$ через a.
A) $\frac{3a-1}{2-a}$ B) $\frac{a-3}{1-2a}$ C) $\frac{a-3}{2a-1}$ D) $\frac{1-2a}{a-3}$

44. (96-3-86) $a = \log_{98} 56$. Выразить $\log_7 2$ через a.
A) $\frac{3-a}{2a-1}$ B) $\frac{2a-1}{3-a}$ C) $\frac{a-3}{2a-1}$ D) $\frac{1-2a}{3-a}$

45. (00-1-38) $a = \log_{12} 2$. Выразить $\log_6 16$ через a.
A) $\frac{4a}{1+a}$ B) $\frac{2a}{1-a}$ C) $\frac{4a}{1-a}$ D) $\frac{3a}{1+a}$

46. (00-6-32) Чему равно число $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{1,5}$, если $\log_{0,5} 27 = a$?
A) $\frac{1}{3} + a^{-1}$ B) $a^2 - 1$ C) $3 + a^{-1}$ D) $1 + a^{-3}$

47. Выразить $\log_8 0,75$ через a, если $a = \log_2 3$.
A) $\frac{1}{3}(a-1)$ B) $\frac{1}{3}(a+1)$
C) $\frac{1}{3}(a-2)$ D) $\frac{1}{3}(a+2)$

48. (00-10-66) Выразить $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$ через b, если $\log_a 27 = b$.
A) $\frac{1}{b}$ B) $\frac{2}{b}$ C) $-\frac{b}{2}$ D) $2b$

49. (99-10-35) Чему равен $\log_6 ab$, если $\log_2 a = 2$ и $\log_3 b = 2$?
A) -2 B) 3 C) -3 D) 2

50. (02-8-12) Вычислите $b^{\log_5 \sqrt{7}}$, если $7^{\log_5 b} = 4$.
A) 2 B) 3 C) 1 D) 4

51. (02-8-13) Выразить $\log_9 20$ через a и b, если $\lg 2 = a$ и $\lg 3 = b$.
A) $\frac{1+a}{2b}$ B) $\frac{1-a}{2b}$ C) $\frac{b}{1+2a}$ D) $\frac{b}{1-2a}$

Решение: По формуле 7 перехода к другому основанию, получим

$$\log_9 20 = \frac{\lg 20}{\lg 9} = \frac{\lg 10 + \lg 2}{\lg 3^2} = \frac{1+a}{2b}.$$

Ответ: $\frac{1+a}{2b}$ (A).

52. (02-9-38) Найти $\log_{a^2b}(ab)$, если $\log_{\frac{b}{a}}(\frac{a^2}{b}) = -\frac{1}{2}$.
A) $-\frac{1}{4}$ B) -1 C) 1 D) $0,8$

53. (02-10-27) Выразить $\lg 56$ через a и b, если $\lg 2 = a$ и $\log_2 7 = b$.
A) $3a + ab$ B) $2a + 3b$ C) $3a + 2b$ D) $\frac{2a+5b}{3}$

54. (03-4-37) Если $\log_a 8 = 3$ и $\log_b 243 = 5$, то чему равно ab?
A) 4 B) 5 C) 6 D) 8

55. (03-7-67) Найти $\log_{30} 8$, если известно, что $\lg 5 = a$ и $\lg 3 = b$.
A) $\frac{a}{2a+3b}$ B) $\frac{b-3}{1-2a}$ C) $\frac{3a-3}{b+2}$ D) $\frac{3(1-a)}{1+b}$

56. (03-8-43) Выразить $\log_{25} 12$ через a и b, если $a = \log_5 4$ и $b = \log_5 3$.
A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{a-b}{4}$ C) $\frac{ab}{2}$ D) $\frac{a^2+b}{4}$

12.2 Логарифмические уравнения

Если в уравнении неизвестное находится под знаком логарифма, то такое уравнение называется *логарифмическим*. Например,

$$\log_2 x = 3, \quad \log_x 2 = 1, \quad \log_3(x^2 - 5x + 3) = 0.$$

Уравнение $\log_a x = b$ называется *простейшим логарифмическим уравнением*, его решение находится по формуле $x = a^b$. Если для уравнения

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \qquad (12.3)$$

выполняется условие $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, то оно равносильно уравнению

$$f(x) = g(x). \qquad (12.4)$$

При переходе от уравнения (12.3) к уравнению (12.4) могут появляться посторонние корни. Для определения посторонних корней следует их проверять подстановкой в исходное уравнение.

Приведем основные равносильности,которые используются при решении логарифмических уравнений.

1. $\log_a f(x) = b \Longleftrightarrow f(x) = a^b$.

2. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$

3. $\log_{f(x)} g(x) = b \Longleftrightarrow \begin{cases} [f(x)]^b = g(x) \\ f(x) > 0, \quad f(x) \neq 1. \end{cases}$

1. Уравнения вида $\log_a f(x) = b$, $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

1. Решите уравнение $\log_5 x = 2$.
A) 10 B) 25 C) $\sqrt{5}$ D) 32

Решение: По свойству 1 получим $x = 5^2 = 25$. **Ответ:** 25 (B).

2. Решите уравнение $\lg x = -1$.
A) 10 B) 0,1 C) $\sqrt{10}$ D) -1

3. Решите уравнение $\ln x = \ln(8 - x)$.
A) e^2 B) 0,8 C) $\sqrt{8}$ D) 4

4. Решите уравнение $\log_2 x^2 = 4$.
A) 4 B) ± 2 C) ± 4 D) 16

5. Решите уравнение $\log_2 \log_3 x = 0$.
A) 8 B) ± 3 C) 3 D) 9

6. Сколько корней имеет уравнение $\lg(x - 4) = \lg(4 - x)$?
A) 1 B) 2 C) 0 D) 4

7. (00-7-33) При каких значениях a уравнение

$$\lg x + \lg(x - 6) = \lg(-a)$$

имеет единственное решение?
A) 9 B) $a \in (-\infty; 0)$ C) 7 D) 6

Решение: Область определения данного уравнения состоит из множества $x > 6$. Используя формулу $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$ преобразуем левую часть уравнения: $\lg x(x - 6) = \lg(-a)$. Из равносильности 2 получим $x(x - 6) = -a$ ($x > 6$, $a < 0$). Решаем полученное уравнение.

$$x^2 - 6x + a = 0; \quad D = 36 - 4a = 4(9 - a).$$

Это уравнение при $a \leq 9$ имеет решения, равные

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{9 - a}}{2} = 3 \pm \sqrt{9 - a}.$$

Так как $x_1 = 3 - \sqrt{9 - a} \leq 3$, то x_1 не входит в область определения уравнения. Значит, x_1 – посторонний корень. Для того, чтобы $x_2 = 3 + \sqrt{9 - a}$ было корнем данного уравнения, необходимо $x_2 > 6$. Решая это неравенство, получим:

$$\sqrt{9 - a} > 3 \Longleftrightarrow 9 - a > 9 \Longleftrightarrow a < 0.$$

Таким образом, при $a \in (-\infty; 0)$ данное уравнение имеет одно решение. **Ответ:** $a \in (-\infty; 0)$ (B).

8. (98-9-34) Решите уравнение

$$\lg(x^2 + 2x - 3) = \lg(x - 3).$$

A) 0 B) -1 C) 0; -1 D) $\emptyset$

9. (99-6-26) Решите уравнение

$$\log_{18} \log_2 \log_2 \left(-\frac{1}{x}\right) = 0.$$

A) $-\frac{1}{16}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $-\frac{1}{4}$

10. (99-6-50) Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{5}} \log_5 \sqrt{5x} = 0.$$

A) -5 B) 1 C) 0 D) 5

11. (00-2-22) Вычислите xy, если

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2. \end{cases}$$

A) 14 B) 12 C) 10 D) 8

12. (01-3-26) Найти сумму корней уравнения

$$\lg\left(3^{\sqrt{\frac{x^2 - 4x}{x - 3}}} + 1\right) = 1.$$

A) 10 B) 2 C) 8 D) 25

13. (01-7-25) Решите уравнение

$$\lg(3 + 2\lg(1 + x)) = 0.$$

A) 0 B) 1 C) -15 D) $-0,9$

Решение: Данное уравнение запишем в виде

$$\lg(3 + 2\lg(1 + x)) = \lg 1.$$

Отсюда получим $3 + 2\lg(1 + x) = 1$, далее имеем $\lg(1 + x) = -1$. По определению $1 + x = 10^{-1} \Longleftrightarrow x = -0,9$. Непосредственная проверка показывает, что $x = -0,9$ удовлетворяет уравнению. **Ответ:** $-0,9$ (D).

14. (01-7-26) Решите уравнение

$$\log_2|x-1| = 1.$$

A) 3 B) 2 C) −1 D) 3; −1

15. (01-9-41) Найти область определения уравнения

$$\lg(5x-2) = \lg(2-5x).$$

A) $(0,4;\infty)$ B) $\emptyset$ C) $(-\infty;0,4)$ D) $\{2,5\}$

16. (02-3-35) Найти модуль разности корней уравнения

$$\log_3(4\cdot 3^x - 1) = 2x+1.$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0

17. (02-10-69) Решите уравнение

$$\log_2(2^{2x}+16^x) = 2\log_4 12.$$

A) $\log_4 3$ B) $\log_2 3$ C) 2 D) $\log_4 6$

18. (02-10-71) Найти среднее пропорциональное x и y, если

$$\begin{cases} \log_2(x-y) = 1 \\ 2^x\cdot 3^{y+1} = 72. \end{cases}$$

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$

2. Уравнения вида $a^{\log_a f(x)} = g(x)$

19. (96-6-55) Найдите корни уравнения

$$3^{2\log_3 x} = 16.$$

A) 3 B) −4 C) 4 D) ±4

Решение: Уравнение определено при $x > 0$. используя 5 свойство логарифма, преобразуем уравнение

$$3^{\log_3 x^2} = 16.$$

По основному логарифмическому тождеству получим $x^2 = 16$. Отсюда следует $x_1 = -4$, $x_2 = 4$. Корень $x_1 = -4$ не входит в область определения уравнения. $x = 4$ удовлетворяет уравнению. **Ответ:** 4 (C).

20. (97-2-55) На сколько корень уравнения

$$4^{\log_4(x-5)} = 19$$

больше 20?

A) 6 B) 2 C) 4 D) 3

21. (97-8-40) Решите уравнение

$$4^{2\log_4 x} = 25.$$

A) 5 B) ±5 C) −5 D) 10

22. Решите уравнение

$$2^{\log_4 x} = \frac{1}{4}.$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{4}$

23. (01-5-12) Решите уравнение

$$x^{\log_x(x^2-1)} = 3.$$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4

3. Уравнения, решаемые с использованием свойств 3, 4 и 5

24. (97-12-54) На сколько корень уравнения

$$\log_2(x+2) + \log_2(x+3) = 1$$

меньше 8?

A) 7 B) 9 C) 10 D) 6

Решение: Область определения уравнения $x > -2$. Преобразуем уравнение, используя свойство 3: $\log_2(x+2)(x+3) = \log_2 2$. Отсюда следует

$$(x+2)(x+3) = 2 \iff x^2+5x+4 = 0.$$

Корнями этого квадратного уравнения являются числа $x_1 = -4$, $x_2 = -1$. $x_1 = -4$ не входит в область определения. $x = -1$ удовлетворяет уравнению. $8-(-1) = 9$. **Ответ:** 9 (B).

25. (00-3-38) Решите уравнение

$$\lg\left(\frac{1}{2}+x\right) = \lg\frac{1}{2} - \lg x.$$

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) −1

26. (99-3-20) Решите уравнение

$$\lg\sqrt{x-5} + \lg\sqrt{2x-3} + 1 = \lg 30.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 6 C) $\frac{1}{2}$; 6 D) $\frac{1}{2}$; 8

27. (02-12-50) Если $\lg(x^2+y^2) = 2$, $\lg 2 + \lg xy = \lg 96$ и $x > 0$, то чему равна сумма $x+y$?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18

28. (03-7-21) Решите уравнение

$$\log_{\sqrt{5}}(4^x-6) - \log_{\sqrt{5}}(2^x-2) = 2.$$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{4}$ C) 2 D) 2,5

29. (99-6-28) Решите уравнение

$$\log_2(54-x^3) = 3\log_2 x.$$

A) −3 B) 2 C) 1 D) 3

Решение: Преобразуем уравнение, используя свойство 5: $\log_2(54-x^3) = \log_2 x^3$. Отсюда следует

$$54-x^3 = x^3 \iff 27 = x^3 \iff x = 3.$$

$x = 3$ удовлетворяет уравнению. **Ответ:** 3 (D).

30. (00-2-24) Решите уравнение

$$\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 7.$$

A) 441 B) 125 C) 256 D) 400

31. (00-3-28) Решите уравнение

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\lg 4}{\lg 8}.$$

A) 3 B) 4 C) 2 D) 1

32. (00-8-15) Решите уравнение

$$\log_2(9^{x-1}+7) = 2\log_2(3^{x-1}+1).$$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4

33. (01-5-11) Решите уравнение

$$\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \frac{3}{4}.$$

A) a B) a^2 C) a^4 D) 2

34. (03-4-34) Вычислите $x-27$, если

$$\log_4 \frac{(2-x)^2}{(3-x)^3} = -3\log_4|3-x|.$$

A) -25 B) -29 C) -26 D) -24

35. (03-11-13) Решите уравнение

$$7^{(2x^2-5x-9)/2} = (\sqrt{2})^{3\log_2 7}.$$

A) $-1,5;1$ B) $1,5$ C) $-2,5;4$ D) $-1,5;4$

4. Уравнения, решаемые с использованием свойств 6, 7 и 8

36. (99-6-55) Решите уравнение

$$\log_{\sqrt{2}} x + \frac{2}{\log_x 2} = 4.$$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4

Решение: Преобразуем уравнение, используя свойства 6-8:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_2 x + 2\log_2 x = 4 \Longleftrightarrow 4\log_2 x = 4.$$

Отсюда следует $\log_2 x = 1$. По определению логарифма получим $x = 2^1$. **Ответ:** 2 (A).

37. (98-11-45) Найти произведение корней уравнения

$$\log_x 2\log_{2x} 2 = \log_{4x} 2.$$

A) 1 B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{1}{2}$

38. (99-3-21) Решите уравнение

$$\log_4(x+12)\cdot\log_x 2 = 1.$$

A) 4 B) -3 C) 2 D) 4;2

39. (02-3-36) Найти произведение корней уравнения

$$\log_x 2 + \log_{4x} 4 = 1.$$

A) 2 B) 4 C) 1 D) 8

5. Уравнения, решаемые по свойству 11 и логарифмированием

40. (97-6-59) Решите уравнение

$$x^{\lg 9} + 9^{\lg x} = 6.$$

A) 1 B) 10 C) $\sqrt{10}$ D) 2

Решение: Преобразуем уравнение, используя свойство 11:

$$9^{\lg x} + 9^{\lg x} = 6 \Longleftrightarrow 2\cdot 9^{\lg x} = 6 \Longleftrightarrow 9^{\lg x} = 3.$$

Логарифмируя по основанию 3 обе части этого равенства, получим

$$\log_3 9^{\lg x} = \log_3 3 \Longleftrightarrow \lg x\cdot 2 = 1 \Longleftrightarrow \lg x = \frac{1}{2}.$$

По определению логарифма, получим $x = 10^{1/2}$. **Ответ:** $\sqrt{10}$ (C).

41. (00-3-39) Найти произведение корней уравнения

$$x^{\lg x - 1} = 100.$$

A) 10 B) 20 C) 100 D) 1

42. (01-2-73) Найти произведение корней уравнения

$$x^{(\lg x+5)/3} = 10^{5+\lg x}.$$

A) 100 B) 10 C) 1 D) 0,01

43. (01-9-9) Найти среднее пропорциональное корней уравнения

$$x^{3-\log_3 x} = 9.$$

A) $3\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}$

44. (02-6-34) Найти произведение корней уравнения

$$x^{2\lg x} = 10x^2.$$

A) 1 B) 10 C) 100 D) 0,1

45. (02-7-9) Решите уравнение

$$2\cdot 3^{\log_7 x} + 3x^{\log_7 3} = 45.$$

A) 49 B) 4 C) 7 D) 8

46. (03-4-36) Найдите y, если пара $(x;y)$ – решение системы

$$\begin{cases} x^{\lg y} = 1000 \\ \log_y x = 3. \end{cases}$$

A) 10 B) 0,01 C) 10 или 0,1 D) 30

6. Уравнения, решаемые введением новой переменной

47. (96-10-38) Найти произведение корней уравнения

$$\log_2^2 x - 5 \cdot \log_2 x + 6 = 0.$$

A) 5 B) 6 C) 32 D) $\frac{3}{2}$

Решение: Положим $\log_2 x = y$, тогда уравнение примет вид $y^2 - 5y + 6 = 0$. Решив это квадратное уравнение, получим $y_1 = 2$, $y_2 = 3$. Подставляя эти значения вместо y, имеем, $\log_2 x = y_1 = 2$ и $\log_2 x = y_2 = 3$. Отсюда $x_1 = 2^{y_1} = 4$, $x_2 = 2^{y_2} = 8$. Их произведение равно $x_1 \cdot x_2 = 2^{y_1+y_2} = 2^5 = 32$. **Ответ:** 32 (C).

Заключение: Если известно, что уравнение $\log_a^2 x + b \cdot \log_a x + c = 0$ имеет два корня, то $x_1 \cdot x_2 = a^{-b}$. Используя это заключение, решите примеры 48-51.

48. (96-1-35) Найти произведение корней уравнения

$$\lg^2 x - \lg x - 2 = 0.$$

A) 1 B) −2 C) 10 D) 100

49. (96-9-86) Найти произведение корней уравнения

$$\log_3^2 x - 4 \log_3 x + 3 = 0.$$

A) 4 B) 81 C) 24 D) $9\frac{1}{3}$

50. (98-3-33) Найти произведение корней уравнения

$$\log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2 = 0.$$

A) 6 B) 3 C) 27 D) 15

51. (98-6-24) Найти произведение корней уравнения

$$\log_2^2 x - 4 \log_2 x - 1 = 0.$$

A) 8 B) 4 C) 16 D) $\frac{1}{8}$

52. (00-1-47) Найти сумму корней уравнения

$$\log_2^2 x - 2 \log_2 x^2 + 3 = 0.$$

A) 4 B) −4 C) −10 D) 10

53. (02-11-33) Найти произведение корней уравнения

$$\log_2^2 \frac{x}{2} - \log_2 4x = 3.$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8

54. (03-3-34) Найти произведение корней уравнения

$$\log_{0,2}^2 \frac{x}{25} + \log_{0,2}^2 \frac{x}{5} = 1.$$

A) $\frac{1}{125}$ B) 125 C) 25 D) $\frac{1}{25}$

12.3 Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ или $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ называются *логарифмическими неравенствами.* Решение этих неравенств основывается на возрастании при $a > 1$ и убывании при $0 < a < 1$ логарифмической функции $y = \log_a x$, т.е.:

1. Если $a > 1$, то

$$\log_a g(x) < \log_a f(x) \iff 0 < g(x) < f(x).$$

2. Если $0 < a < 1$, то

$$\log_a g(x) < \log_a f(x) \iff 0 < f(x) < g(x).$$

1. (97-1-56) Решите неравенство

$$\log_5(5 - 2x) \leq 1.$$

A) $(-\infty; 2,5)$ B) $(0; 2,5)$
C) $(-\infty; 2,5]$ D) $[0; 2,5)$

Решение: Преобразуем неравенство следующим образом $\log_5(5 - 2x) \leq \log_5 5$. По равносильности 1 получим $0 < 5 - 2x < 5$. Отсюда следует $-5 < -2x < 0$, далее имеем $2,5 > x > 0$. **Ответ:** $(0; 2,5)$ (B).

2. Решите неравенство

$$\log_2(5 - x) \leq 1.$$

A) $(-\infty; 5)$ B) $[3; 5)$ C) $(-\infty; 3)$ D) $(3; 5]$

3. (97-3-33) Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{3x}{3x - 1,5}\right) > 0.$$

A) $(0,5; \infty)$ B) $(0; 0,5)$ C) $(-\infty; 0)$ D) $(0; \infty)$

4. (08-101-10) Решите неравенство

$$3^{\log_3(4-x)} > 9.$$

A) $-5 < x < 4$ B) $x < 4$
C) $x \leq -5$ D) $x < -5$

5. (08-104-10) Решите неравенство

$$9^{\log_9(x-4)} > 3.$$

A) $4 < x < 7$ B) $x \geq 8$
C) $x \geq 9$ D) $x > 7$

6. (08-110-10) Решите неравенство

$$5^{\log_5(x-7)} \leq 4.$$

A) $x \geq 11$ B) $7 \leq x \leq 11$
C) $x > 11$ D) $7 < x \leq 11$

7. (99-5-14) Решите неравенство

$$\log_{0,5}(x+5)^4 > \log_{0,5}(3x-1)^4.$$

A) $(3;\infty)$ B) $(-\infty;1)$ C) $(-\infty;1)\cup(3;\infty)$ D) $(-\infty;-5)\cup(-5;-1)\cup(3;\infty)$

Решение: По равносильности 2, получим $0<(x+5)^4<(3x-1)^4$. Отсюда следует $0<(x+5)^2<(3x-1)^2$. Это двойное неравенство равносильно следующему неравенству

$$(x+5)^2-(3x-1)^2<0, \quad x\neq -5.$$

Левую часть неравенства разложим на множители $(x+5-3x+1)(x+5+3x-1)<0$, отсюда получим $(6-2x)(4x+4)<0$, далее имеем

$$2\cdot 4(3-x)(x+1)<0 \iff (3-x)(x+1)<0.$$

С помощью метода интервалов находим решение этого неравенства $(-\infty;-1)\cup(3;\infty)$. Так как $x\neq -5$, из решения исключаем -5, тогда получим $(-\infty;-5)\cup(-5;-1)\cup(3;\infty)$. **Ответ:** $(-\infty;-5)\cup(-5;-1)\cup(3;\infty)$ (D).

8. (96-3-87) Найти область определения функции

$$y=\log_2\log_3\sqrt{4x-x^2-2}.$$

A) $(1,5;2,5)$ B) $(1;3)$ C) $\{2\}$ D) $(-\infty;1)\cup(3;\infty)$

9. (96-7-33) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{4x-1}{4x+8}<0.$$

A) $(\frac{1}{4};\infty)$ B) $(2;\infty)$ C) $(-2;\infty)$ D) $(-\infty;-2)$

10. (97-1-24) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x-5)+2\log_{\sqrt{3}}(x-5)<4.$$

A) $(6;15)$ B) $(5;14)$ C) $(5;81)$ D) $(10;20)$

Решение: Используя равенство $\frac{1}{\sqrt{3}}=(\sqrt{3})^{-1}$ и свойство 6 логарифма, преобразуем неравенство следующим образом

$$-\log_{\sqrt{3}}(x-5)+2\log_{\sqrt{3}}(x-5)<4.$$

Упрощая левую часть неравенства и используя равенство $4=\log_{\sqrt{3}}9$, по свойству 1 получим

$$\log_{\sqrt{3}}(x-5)<\log_{\sqrt{3}}9 \iff 0<x-5<9.$$

Прибавляя ко всем частям этого неравенства число 5, имеем $5<x<14$. **Ответ:** $(5;14)$ (B).

11. (97-6-24) Решите неравенство

$$\log_2(3-2x)-\log_{\frac{1}{8}}(3-2x)>\frac{4}{3}.$$

A) $(-\infty;0,5)$ B) $(-\infty;1,5)$ C) $(-4;-1)$ D) $(0;1)$

12. (97-11-24) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+2)-\log_9(x+2)>-\frac{3}{2}.$$

A) $(0;1)$ B) $(1;\infty)$ C) $(2;3)$ D) $(-2;1)$

13. (98-2-37) Найти множество всех отрицательных решений неравенства

$$\log_{0,2}(x^4+2x^2+1)>\log_{0,2}(6x^2+1).$$

A) $(-2;2)$ B) $(-2;0)$ C) $(-\infty;-2)\cup(0;2)$ D) $(-\infty;-2)$

14. (97-4-16) При каких значениях x функция $y=2-\lg x$ принимает отрицательные значения?
A) $x>100$ B) $x>10$ C) $x\leq 100$ D) $x<10$

15. (98-3-32) Сколько целых чисел удовлетворяют неравенству $\log_5(3-x)-\log_5 12<0$?
A) бесконечно много B) 5 C) 10 D) 11

16. (99-2-33) Найти целое решение неравенства

$$\log_{3x^2+5}(9x^4+27x^2+28)>2.$$

A) 1 B) 2 C) -1 D) 0

17. (99-3-17) Решите неравенство

$$\log_2\log_{\frac{1}{3}}\log_5 x>0.$$

A) $(0;\infty)$ B) $(-\infty;\sqrt[3]{5})$ C) $(-\infty;0)\cup(\sqrt[3]{5};\infty)$ D) $(1;\sqrt[3]{5})$

Решение: Используя равенство $0=\log_2 1$ и по свойству 1 получим $\log_{\frac{1}{3}}\log_5 x>1=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$, по свойству 2

$$0<\log_5 x<\frac{1}{3}\iff \log_5 1<\log_5 x<\log_5 5^{\frac{1}{3}}.$$

Решив это неравенство, имеем $1<x<\sqrt[3]{5}$. **Ответ:** $(1;\sqrt[3]{5})$ (D).

18. (99-6-9) Найти наибольшее целое решение неравенства

$$\log_2(2x-1)<3.$$

A) 2 B) 5 C) 1 D) 4

19. (00-9-22) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{8}}(x+17)^8\leq\log_{\frac{1}{8}}(x+13)^8.$$

A) $(-15;-13)\cup(-13;\infty)$
B) $[-15;-13)\cup(-13;\infty)$
C) $(-13;\infty)$
D) $(-\infty;-17)\cup(-17;-13)\cup(-13;\infty)$

20. (96-12-87) Найти область определения функции

$$y=\log_2\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{4x-4x^2}.$$

A) $\{\frac{1}{2}\}$ B) $(0;\frac{1}{2})$ C) $(\frac{1}{2};1)$ D) $(0;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};1)$

21. (96-13-28) Найти область определения функции

$$y = \log_2(\log_3 \sqrt{4x - 4x^2}).$$

A) $\{\frac{1}{2}\}$ B) $\emptyset$

C) $(0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 1)$ D) $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$

22. (98-11-39) Решите неравенство

$$\log_x 6 > \log_x 12.$$

A) $(0; \frac{1}{2})$ B) $(\frac{1}{2}; 1)$ C) $(0; 1)$ D) $(0; 2)$

23. (98-11-49) Решите неравенство

$$x^{\log_2 x + 4} < 32.$$

A) $(2^{-1}; 2)$ B) $(2^{-2}; 2)$ C) $(2^{-3}; 2)$ D) $(2^{-5}; 2)$

24. (98-4-39) Сколько натуральных чисел удовлетворяет неравенству

$$\frac{\sqrt{6 - x}}{\log_{\frac{1}{3}}(x - 3)} \geq 0.$$

A) таких значений нет
B) 1 C) 2 D) 3

25. (01-1-24) Решите неравенство

$$\log_2 x \leq \frac{2}{\log_2 x - 1}.$$

A) $(0; 1)$ B) $(0; 4]$ C) $(0; 2)$ D) $(0; \frac{1}{2}] \cup (2; 4]$

26. (01-2-28) Сколько целых решений имеет неравенство $\log_{x^2}(3 - 2x) > 1$?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

27. (00-4-41) Решите неравенство

$$\log_{x^2}(x + 2) \leq 1.$$

A) $(-\infty; -1] \cup [2; \infty)$
B) $(-\infty; -1) \cup [2; \infty)$
C) $(-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup [2; \infty)$
D) $(-1; 2]$

28. (01-4-28) Решите неравенство

$$\log_{1/3}(5 - 2x) > -2.$$

A) $(-2; -1)$ B) $(-2; 2,5)$
C) $(0; 2,5)$ D) $(0; 2)$

29. (01-6-38) Найти целое решение неравенства

$$\log_{\frac{1}{2}}(2^x - 128) \geq -7.$$

A) 5 B) 6 C) 9 D) 8

Решение: Используя равенство $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ и 6 свойство логарифма, получим

$$-\log_2(2^x - 128) \geq -7 \log_2 2.$$

Умножая обе части неравенства на -1, по свойству 5 логарифма и из равносильности 1 получим

$$\log_2(2^x - 128) \leq \log_2 2^7 \iff 0 < 2^x - 128 \leq 2^7.$$

Прибавляя $128 = 2^7$ ко всем частям этого неравенства, имеем

$$2^7 < 2^x \leq 2^8 \iff 7 < x \leq 8.$$

Среди решений только одно целое число – 8.
Ответ: 8 (D).

30. (01-6-39) Сколько целых чисел удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} \log_2 x^2 \geq 2 \\ \log_5 x^2 \leq 2? \end{cases}$$

A) 6 B) 7 C) 9 D) 8

31. (01-7-28) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x - 1) - 2 \log_{\frac{1}{9}}(2x - 3) < 0.$$

A) $(\frac{3}{2}; 2)$ B) $(-\infty; 2)$ C) $(2; \infty)$ D) $(\frac{3}{2}; \infty)$

32. (97-12-53) Найти наименьшее целое положительное решение неравенства

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{0,5} x(x-4)} > 0.$$

A) 4 B) 6 C) 5 D) 5,5

33. (01-7-35) Найти наибольшее целое положительное решение неравенства

$$0,5^{\log_3(x^2+6x-7)} \geq \frac{1}{4}.$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 1,5

34. (02-4-42) Найти наименьшее целое решение неравенства

$$-\lg x < 1.$$

A) -2 B) -1 C) 10 D) 1

35. (02-4-43) Найти наименьшее целое решение неравенства

$$\log_{16}(3x + 1) > \frac{1}{2}.$$

A) -2 B) -1 C) 0 D) 2

36. (01-9-45) Решите неравенство

$$\sqrt{4x^2 - 5x - 9} < \ln \frac{1}{2}.$$

A) $(-5; 4)$ B) $(2; 3)$ C) $(-5; 2)$ D) $\emptyset$

Решение: Основание логарифма $\ln \frac{1}{2}$ равно $e = 2,71\ldots$. По свойству 4 и используя равенство $\ln 1 = 0$, получим

$$\sqrt{4x^2 - 5x - 9} < -\ln 2.$$

Правая часть неравенства $-\ln 2 < 0$ отрицательна, а левая часть неотрицательна. Поэтому неравенство не имеет решений. **Ответ:** $\emptyset$ (D).

37. (01-11-32) Найти сумму целых решений неравенства

$$\frac{x-5}{\log_x^2 3} < 0.$$

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10

38. (01-9-3) Решите неравенство

$$\frac{2\log_2(3-2x)}{\log_2 0,1} < 0.$$

A) $(-\infty; 1)$ B) $(-\infty; 1]$ C) $(1; \infty)$ D) $(-1; 2)$

39. (02-5-26) Решите неравенство

$$2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}.$$

A) $(-\infty; 4)$ B) $\{2\} \cup (4; \infty)$
C) $(-\infty; 4) \cup (4; \infty)$ D) $(3; 4) \cup (4; \infty)$

40. (02-6-38) Решите неравенство

$$(x^2 - 8x + 7) \cdot \sqrt{\log_5(x^2-3)} \leq 0.$$

A) $[-2; 1] \cup [2; 7]$ B) $[2; 7] \cup \{-2\}$
C) $[1; 7]$ D) $[3; 7]$

Решение: Область определения данного неравенства находится из условия $\log_5(x^2-3) \geq 0$. Решение последного неравенства состоит из множества $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$. Рассмотрим два случая.

1-случай. $\log_5(x^2-3) = 0$. Отсюда следует, что $x = \pm 2$ и эти значения удовлетворяют данному неравенству.

2-случай. $\log_5(x^2-3) > 0$. В этом случае $\sqrt{\log_5(x^2-3)} > 0$, поэтому данное неравенство равносильно неравенству

$$x^2 - 8x + 7 \leq 0 \iff (x-1)(x-7) \leq 0.$$

Решив методом интервалов это неравенство, получим $[1; 7]$. Пересечение найденных решений с областью определения $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$ неравенства есть множество $[2; 7] \cup \{-2\}$. **Ответ:** $[2; 7] \cup \{-2\}$ (B).

41. (02-9-35) Определить количество целых решений неравенства

$$\lg(x-2) < 2 - \lg(27-x).$$

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6

42. (02-11-35) Найти сумму простых чисел, являющихся решением неравенства

$$\frac{2\log_3 x}{2 + \log_3 x} \leq 1.$$

A) 5 B) 6 C) 16 D) 17

43. (03-1-29) Решите неравенство

$$\log_x 3 < 2.$$

A) $(\sqrt{3}; \infty)$ B) $(3; \infty)$
C) $(0; 1) \cup (\sqrt{3}; \infty)$ D) $(0; 1)$

44. Сколько целых решений имеет неравенство

$$\log_4(2 - \sqrt{x+3}) < 1?$$

A) 6 B) 4 C) 5 D) 3

45. (07-121-32) Решите неравенство

$$x^{\log_2 x + 2} < 8.$$

A) $(2^{-2}; 2)$ B) $(2^{-5}; 2)$ C) $(2^{-4}; 2)$ D) $(2^{-3}; 2)$

Решение: Область определения неравенства $x > 0$. Так как логарифмическая функция с основанием 2 – возрастающая, то

$$\log_2 x^{\log_2 x + 2} < \log_2 8 \iff (\log_2 x + 2)\log_2 x < 3.$$

В этом неравенстве положим $t = \log_2 x$, тогда получим $(t+2)t < 3 \iff t^2 + 2t - 3 < 0$ или $(t-1)(t+3) < 0 \iff -3 < t < 1$. Возвращаясь к обозначению, имеем

$$-3 < \log_2 x < 1 \iff 2^{-3} < x < 2^1.$$

Ответ: $(2^{-3}; 2)$ (D).

46. (07-128-32) Решите неравенство

$$\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_8 x > 0.$$

A) $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$ B) $(1; 2)$
C) $(-\infty; 2)$ D) $(0; 2)$

47. (06-111-34) При каких значениях x имеет место неравенство

$$(x-2)^{\log_2(x^2-5x+5)} < (x-2)^{\log_2(x-3)}?$$

A) $(2; 4)$ B) $(3; 8)$
C) $(-\infty; 2) \cup (4; \infty)$ D) $(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; 4)$

48. (07-112-32) Найти сумму целых решений неравенства

$$4^{\log_2 x} + x^2 < 50.$$

A) 10 B) 6 C) 7 D) 15

49. (07-117-32) Найти сумму простых чисел, являющихся решением неравенства

$$\frac{2\log_4 x}{2 + \log_4 x} \leq 1.$$

A) 28 B) 17 C) 21 D) 41

13 Тригонометрия

13.1 Угол и дуга, их измерения

Геометрическая фигура, состоящая из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости, называется *углом*. Если стороны угла образуют прямую, то такой угол называется ***развернутым***. Величина развернутого угла равна 180^0. Любой угол можно получить вращением луча OA вокруг начальной точки O (рис. 13.1). Полный оборот вокруг точки O принято обозначать 360^0.

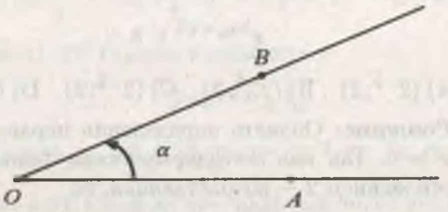


Рисунок 13.1

Если луч OA делает вокруг точки O четверть оборота, полученный угол есть прямой угол (90^0) (рис. 13.2 *a*), если луч OA делает вокруг точки O полоборота, то получится развернутый угол (180^0) (рис. 13.2 *b*).

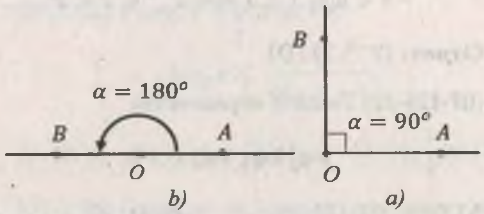


Рисунок 13.2

Когда луч OA, вращаясь вокруг точки O образует угол, то любая другая точка луча рисует дугу окружности. Вокруг начальной точки луч вращается в двух направлениях, по часовой стрелке и против часовой стрелки. Вращение против часовой стрелки называется положительным направлением, угол и дугу образованные при этом тоже называют положительными. Угол и дугу, образованные при вращении по часовой стрелке принято называть отрицательными (рис. 13.3).

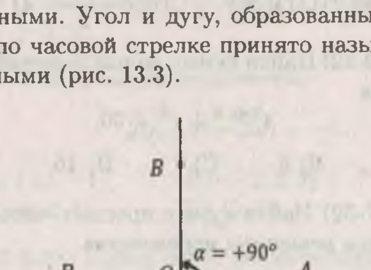


Рисунок 13.3

За единицу измерения углов и дуг принимают соответственно угол в один градус (1^0) и дугу в 1 градус. Угол в 1^0 градус - это угол, который опишет поворот луча против часовой стрелки вокруг начальной точки на 1/360 части полного оборота. Дуга в один градус - это дуга, которую рисует любая точка луча при получении угла в один градус.

1/60 часть градуса называется минутой и обозначается через ($1'$),

1/60 часть минуты называется секундой и обозначается через ($1''$).

Угол, вершина которой находится в центре окружности, а стороны есть радиусы этой окружности называется центральным. В рисунке 13.4 AOB – центральный угол, а дуга AB - это дуга, соответствующая центральному углу.

Рассмотрим еще одну единицу измерения величины угла - 1 радиан.

Угол в 1 радиан есть центральный угол, опирающийся на такую дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности.

Если начальный радиус совершит один полный оборот, то получится угол, равный 360^0 или 2π радианам.

Радианная мера 1^0 равна $\dfrac{2\pi}{360} = \dfrac{\pi}{180}$.

Длина дуги ℓ в α радиан определяется по формуле $\ell = \alpha r$, где r радиус окружности.

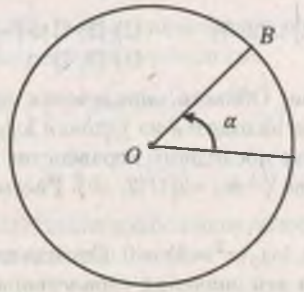


Рисунок 13.4

1. **Переход от радиана к градусу:**
   $\alpha(rad) = \alpha\dfrac{180^0}{\pi}$.

2. **Переход от градуса к радиану:**
   $n^0 = n\dfrac{\pi}{180}(rad)$.

1. (97-2-31) Чему равна градусная мера угла в $\dfrac{5\pi}{4}$ радиан?
   A) 220^0 B) 230^0 C) 225^0 D) 240^0

   Решение: Используя 1-формулу, получим
   $$\frac{5\pi}{4} = \frac{180^0}{\pi}\cdot\frac{5\pi}{4} = \frac{5\cdot 180^0}{4} = 225^0.$$
   Ответ: 225^0 (C).

2. Чему равна градусная мера угла в $\dfrac{\pi}{4}$ радиан?
   A) 20^0 B) 30^0 C) 45^0 D) 60^0

3. Найти градусную меру в точности до минуты угла 1 радиан.
   A) $57^020'$ B) $57^018'$ C) $57^017'$ D) $57^019'$

4. (97-12-30) Чему равна градусная мера угла в $\frac{4\pi}{3}$ радиан?
A) 230^0 B) 220^0 C) 250^0 D) 240^0

5. Чему равна градусная мера угла в $\frac{5\pi}{6}$ радиан?
A) 130^0 B) 120^0 C) 150^0 D) 140^0

6. Найти радианную меру угла в 240^0.
A) $\frac{5\pi}{4}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{4\pi}{3}$ D) $\frac{5\pi}{3}$

Решение: Используя 2-формулу, получим

$$240^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 240 = \frac{24 \cdot \pi}{18} = \frac{4\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{4\pi}{3}$ (C).

7. Найти радианную меру угла в 15^0.
A) $\frac{\pi}{15}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{12}$ D) $\frac{\pi}{9}$

8. (97-8-30) Найти радианную меру угла в 216^0.
A) $\frac{4\pi}{3}$ B) $\frac{5\pi}{4}$ C) $\frac{3\pi}{2}$ D) $\frac{6\pi}{5}$

9. Найти радианную меру угла в 30^0.
A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{6}$

10. Найти радианную меру угла в 45^0.
A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{6}$

11. (00-8-58) Найти радианную меру угла в 72^0.
A) 72 B) 1 C) 0,3 D) $\frac{2\pi}{5}$

12. Найти длину дуги в 120^0 окружности радиуса 3.
A) π B) 2π C) $1,5\pi$ D) $1,6\pi$

13.2 Тригонометрические функции

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy. Окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице называется единичной окружностью. Ее уравнение имеет вид $x^2 + y^2 = 1$.

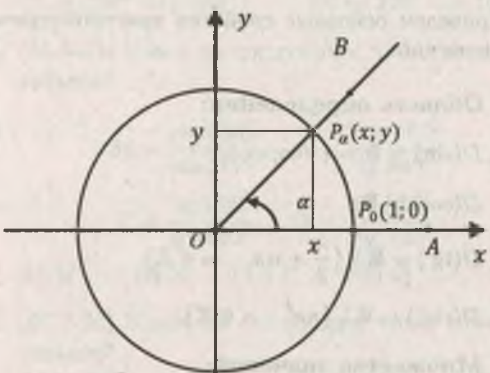


Рисунок 13.5

Пусть начало координат O есть вершина угла, а положительное направление оси абсцисс есть луч OA. Луч OA пересекает единичную окружность в точке P_0 с координатами (1; 0). Поворачивая луч OA на угол α, получим луч OB. Пусть луч OB пересекает единичную окружность в точке $P_\alpha(x;\, y)$ (рис. 13.5).

Синусом угла α называется ордината точки $P_\alpha(x;\, y)$ и обозначается в виде $\sin\alpha = y$.

Косинусом угла α называется абсцисса точки $P_\alpha(x;\, y)$ и обозначается в виде $\cos\alpha = x$.

Тангенсом угла α называют отношение ординаты точки $P_\alpha(x;\, y)$ к ее абсциссе и пишут в следующем виде:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Котангенсом угла α называют отношение абсциссы точки $P_\alpha(x;\, y)$ к ее ординате и пишут в следующем виде:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Каждому углу α соответствует единственная точка $P_\alpha(x;\, y)$ и, следовательно, единственное значение синуса и косинуса этого числа. Таким образом, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ являются функциями числового аргумента. Их называют тригонометрическими функциями.

Следующее определение тангенса и котангенса удобно при нахождении их значений. Прямая $x = 1$ называется осью тангенсов, а прямая $y = 1$ называется осью котангенсов. Поворачиваем луч OA на угол α ($\alpha \neq 90^0 + 180^0 n$, $n \in \mathbb{Z}$), тогда этот луч или его продолжение пересекает ось тангенсов в точке $P_\alpha(1;\, y)$ (рис. 13.6). Ордината этой точки называется *тангенсом угла* α, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = y$.

Рисунок 13.6

Аналогично, можно дать определение котангенса. Поворачиваем луч OA на угол α ($\alpha \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$), тогда этот луч или его продолжение пересекает ось котангенсов в точке $P_\alpha(x;\, 1)$ (рис. 13.7). Абсцисса этой точки называется *котангенсом угла* α, т.е. $x = \operatorname{ctg}\alpha$. $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ тоже называются тригонометрическими функциями.

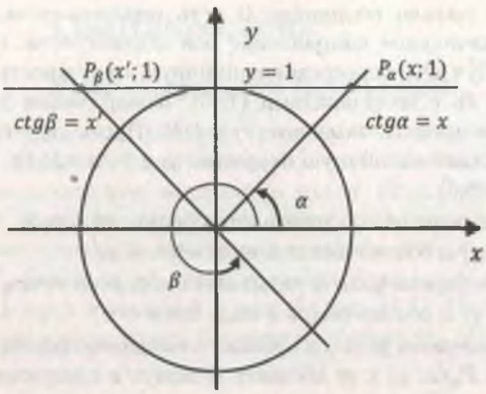


Рисунок 13.7

Используя определения тригонометрических функций можно вычислить числовые значения тригонометрических функций некоторых углов. Например, если $\alpha = 0^0$, то точка P_0 имеет координаты (1; 0). Поэтому $\sin 0^0 = 0,\ \cos 0^0 = 1,\ \mathrm{tg}\ 0^0 = 0$, а $\mathrm{ctg}\ 0^0$ не существует. Если $\alpha = 90^0 (\alpha = \frac{\pi}{2})$, то точка P_α имеет координаты (0; 1). Поэтому $\sin 90^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$, $\mathrm{ctg}\ 90^0 = 0$, а $\mathrm{tg}\ 90^0$ не существует. Теперь пусть $\alpha = 45^0$, тогда координаты точки P_α имеют вид (x, x). Так как эта точка лежит на единичной окружности, то $x^2 + x^2 = 1$. Отсюда следует, что $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому,

$$\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{tg}\ 45^0 = 1,\ \mathrm{ctg}\ 45^0 = 1.$$

Кроме того, можно вычислить значения тригонометрических функций углов в 30^0, 60^0 и 180^0. Эти значения приведем в виде таблицы 13.1.

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\mathrm{tg}\ \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$\mathrm{ctg}\ \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0

таблица 13.1.

Известно, что если точка $M(x;\ y)$ лежит в I координатной четверти, то ее координаты удовлетворяют неравенствам $x > 0,\ y > 0$, если точка $M(x;\ y)$ лежит во II координатной четверти, то $x < 0,\ y > 0$, если точка $M(x;\ y)$ лежит в III координатной четверти, то $x < 0,\ y < 0$ и если точка $M(x;\ y)$ лежит в IV координатной четверти, то $x > 0,\ y < 0$. Отсюда, получим следующую таблицу 13.2 для определения знаков тригонометрических функций.

функция	I чет. $(0;\frac{\pi}{2})$	II чет. $(\frac{\pi}{2};\pi)$	III чет. $(\pi;\frac{3\pi}{2})$	IV чет. $(\frac{3\pi}{2};2\pi)$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\mathrm{tg}\ \alpha$	+	−	+	−
$\mathrm{ctg}\ \alpha$	+	−	+	−

таблица 13.2.

Графики функций синус и косинус изображены на рисунке 13.8, а графики функций тангенс и котангенс на рисунке 13.9.

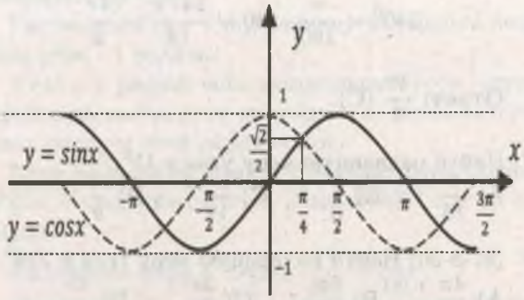


Рисунок 13.8

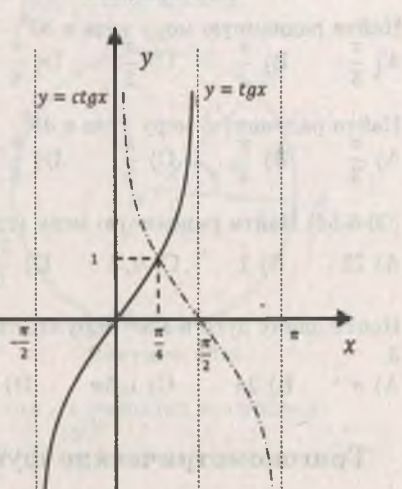


Рисунок 13.9

Приведем основные свойства тригонометрических функций.

1. **Область определения:**
2. $D(\sin) = \mathbb{R} = (-\infty;\ \infty)$.
3. $D(\cos) = \mathbb{R}$.
4. $D(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi,\quad n \in \mathbb{Z}\}$.
5. $D(\mathrm{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{n\pi,\quad n \in \mathbb{Z}\}$.
6. **Множество значений:**
7. $E(\sin) = [-1;\ 1]$.

8. $E(\cos) = [-1;\ 1]$.

9. $E(\mathrm{tg}) = \mathbb{R}$.

10. $E(\mathrm{ctg}) = \mathbb{R}$.

11. Периодичность:

12. $\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad T = 2\pi$.

13. $\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad T = 2\pi$.

14. $\mathrm{tg}\,(x + \pi) = \mathrm{tg}\ x, \quad T = \pi$.

15. $\mathrm{ctg}\,(x + \pi) = \mathrm{ctg}\,x, \quad T = \pi$.

16. Четность:

17. $\sin(-x) = -\sin x \Rightarrow \sin x$ – нечетная функция.

18. $\cos(-x) = \cos x \Rightarrow \cos x$ – четная функция.

19. $\mathrm{tg}\,(-x) = -\,\mathrm{tg}\ x \Rightarrow \mathrm{tg}\,x$ – нечетная функция.

20. $\mathrm{ctg}\,(-x) = -\,\mathrm{ctg}\ x \Rightarrow \mathrm{ctg}\,x$ – нечетная функция.

21. Монотонность приведена в следующей таблице: ↗ означает возрастание, ↘ означает убывание.

функ	I-четверть	II-четверть	III-четверть	IV-четверть
$\sin\alpha$	↗	↘	↘	↗
$\cos\alpha$	↘	↘	↗	↗
$\mathrm{tg}\ \alpha$	↗	↗	↗	↗
$\mathrm{ctg}\ \alpha$	↘	↘	↘	↘

таблица 13.3.

1. (00-2-32) Какое из следуюших чисел положительное?
A) $\cos 3$ B) $\sin 4$ C) $\sin 2$ D) $\mathrm{tg}\ 2$

Решение: Так как $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, угол, соответствующий 2 радианам лежит во II четверти. Поэтому $\sin 2 > 0$. **Ответ:** $\sin 2$ (C).

2. (97-12-32) Какое из следуюших чисел отрицательное?
A) $\sin 122^0 \cdot \cos 322^0$ B) $\cos 148^0 \cdot \cos 289^0$
C) $\mathrm{tg}\ 196^0 \cdot \mathrm{ctg}\ 189^0$ D) $\mathrm{tg}\ 220^0 \cdot \sin 100^0$

3. (96-6-33) Какое из следуюших чисел положительное?

$$M = \frac{\cos 320^0}{\sin 217^0}, \quad N = \frac{\mathrm{ctg}\ 187^0}{\mathrm{tg}\ 340^0}$$

$$P = \frac{\mathrm{tg}\ 185^0}{\sin 140^0}, \quad Q = \frac{\sin 135^0}{\mathrm{ctg}\ 140^0}$$

A) M B) N C) P D) Q

4. (97-2-33) Какое из следуюших чисел отрицательное?
A) $\mathrm{tg}\ 247^0 \cdot \sin 125^0$ B) $\mathrm{ctg}\ 215^0 \cdot \cos 300^0$
C) $\mathrm{tg}\ 135^0 \cdot \mathrm{ctg}\ 340^0$ D) $\sin 247^0 \cdot \cos 276^0$

5. Какое из следуюших чисел отрицательное?
1) $\cos 3,78$; 2) $\mathrm{ctg}\ 2,91$; 3) $\mathrm{tg}\ 4,45$

A) 1; 2 B) 1 C) 2; 3 D) 1; 3

6. (96-3-56) Вычислите

$$5\sin 90^0 + 2\cos 0^0 - 2\sin 270^0 + 10\cos 180^0.$$

A) -3 B) -6 C) -1 D) 9

Решение: Из таблицы 13.1 следует, что

$$\sin 90^0 = \cos 0^0 = 1,\ \sin 270^0 = \cos 180^0 = -1.$$

Поэтому имеем

$$5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 10 \cdot (-1) = 5 + 2 + 2 - 10 = -1.$$

Ответ: -1 (C).

7. Вычислите

$$5\sin 30^0 + 7\cos 60^0 - 11\sin 90^0 + 10\cos 0^0.$$

A) 3 B) 6 C) 5 D) 9

8. Вычислите

$$\sqrt{2}\sin 45^0 + 8\sqrt{3}\cos 30^0 - \sqrt{27}\ \mathrm{tg}\ 30^0 + \mathrm{ctg}\ 45^0.$$

A) 10 B) 11 C) 15 D) 13

9. (96-11-58) Вычислите

$$\sin 180^0 + \sin 270^0 - \mathrm{ctg}\ 90^0 + \mathrm{tg}\ 180^0 - \cos 90^0.$$

A) -1 B) 0 C) 1 D) -2

10. (96-12-11) Вычислите

$$3\,\mathrm{tg}\ 0^0 + 2\cos 90^0 + 3\sin 270^0 - 3\cos 180^0.$$

A) 6 B) 0 C) -6 D) 9

11. (01-2-58) Вычислите

$$\cos\left(\frac{12\pi}{5}(\log_2 0,25 + \log_{0,25} 2)\right).$$

A) 0 B) 1 C) -1 D) $\frac{1}{2}$

12. (96-12-58) Какой четверти принадлежит угол α, если $\sin\alpha \cdot \cos\alpha < 0$?
A) I или II B) I или III
C) I или IV D) II или IV

13. (96-3-42) В какую точку перейдет точка $P(3;0)$ при вращении на 90^0 вокруг начала координат?
A) $(-3;0)$ B) $(0;-3)$ C) $(3;3)$ D) $(0;3)$

Решение: Данная точка $P(3;0)$ лежит на оси абсцисс. При повороте на 90^0 луч OA совпадает с положительным направлением оси ординат. Значит P перейдет в точку с координатами $(0;3)$. **Ответ:** $(0;3)$ (D).

14. В какую точку перейдет точка $P(3;0)$ при вращении на 180^0 вокруг начала координат?
A) $(-3;0)$ B) $(0;-3)$ C) $(3;3)$ D) $(0;3)$

15. (96-11-43) В какую точку перейдет точка $P(-3;0)$ при вращении на 90^0 вокруг начала координат?
A) $(3;0)$ B) $(0;-3)$ C) $(3;3)$ D) $(0;3)$

16. В какую точку перейдет точка $P(0;2)$ при вращении на 270^0 вокруг начала координат?
A) $(-2;0)$ B) $(0;-2)$ C) $(2;2)$ D) $(2;0)$

17. Найти координаты точки, получающейся при вращении точки $P(1;1)$ вокруг начала координат на 135^0.
A) $(\sqrt{2};0)$ B) $(0;\sqrt{2})$ C) $(-\sqrt{2};0)$ D) $(-1;1)$

13.2.1 Основные тригонометрические тождества

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ **– основное тождество тригонометрии.**

2. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

3. $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

4. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$.

Из тождеств 1-4 следуют еще несколько производные тригонометрические формулы . Они приведены в следующей таблице 13.4:

Функ	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\pm\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{\pm\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\pm\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\pm\sin\alpha}$	$\dfrac{\pm\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

таблица 13.4.

В частности, если даны значения $\operatorname{ctg}\alpha$, то значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ va $\operatorname{tg}\alpha$ находятся по следующим формулам:

$$\sin\alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}};\quad \cos\alpha = \frac{\pm\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

В вышеприведенных формулах знаки $+$ или $-$ выбираются исходя из того, в какой четверти находится угол α.

1. (98-5-48) Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.
A) $-\frac{4}{5}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $-\frac{3}{5}$

Решение: Из таблицы 13.4, получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\pm\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}.$$

Если в этом равенстве положим $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{3}{5} : \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \pm\frac{3}{4}.$$

Угол α находится во II четверти, значения функции тангенс во II четверти отрицательные. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$. **Ответ:** $-\frac{3}{4}$ (B).

2. (99-7-47) Найти $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\alpha \in (\frac{\pi}{2};\pi)$ и $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.
A) -4 B) $-\sqrt{17}$ C) $-\frac{1}{\sqrt{15}}$ D) $-\sqrt{15}$

3. (00-8-61) Найти $\cos\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = 2$.
A) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D) $\sqrt{5}$

4. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\alpha \in (\frac{3\pi}{2};2\pi)$ и $\cos\alpha = \frac{1}{4}$.
A) $-\sqrt{15}$ B) $-\sqrt{17}$ C) $-\frac{1}{\sqrt{15}}$ D) $\sqrt{15}$

5. Найти $\sin\alpha$, если $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{15}$.
A) $-\frac{5}{\sqrt{5}}$ B) $-\frac{2}{5}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $-\sqrt{5}$

6. (01-7-37) Найти разность $\sin\alpha - \cos\alpha$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.
A) $-\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $-\frac{7}{5}$

7. Чему равно
$$\frac{3\sin\alpha}{5\sin^3\alpha + 10\cos^3\alpha},$$
если $\operatorname{tg}\alpha = 2$?
A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{8}{15}$ D) $\frac{7}{15}$

Решение: Разделим числитель и знаменатель данной дроби на $\sin\alpha \neq 0$:

$$\frac{3}{5\sin^2\alpha + 10\cos^2\alpha\ \operatorname{ctg}\alpha}.$$

По тождеству 4 найдем $\operatorname{ctg}\alpha = 2^{-1}$. Подставляя это значение в последное выражение, получим

$$\frac{3}{5\sin^2\alpha + 10\cos^2\alpha\ \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{3}{5\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha} =$$

$\frac{3}{5}$. **Ответ:** $\frac{3}{5}$ (B).

8. (98-4-17) Чему равно
$$\frac{3\sin\alpha}{5\sin^3\alpha+10\cos^3\alpha},$$
если $\operatorname{tg}\alpha=3$?
A) $\frac{16}{39}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{8}{15}$ D) $\frac{18}{29}$

9. (02-8-41) Чему равно
$$\frac{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}{3\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha},$$
если $\operatorname{ctg}\alpha=2$?
A) $-0,7$ B) $-0,5$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. (01-9-23) Чему равно
$$\frac{1-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{1+\sin\alpha},$$
если $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$?
A) $\frac{3}{4}$ B) $1,5$ C) $1\frac{1}{3}$ D) 1

11. (98-11-97) Чему равно значение выражения
$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha},$$
если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=a,\quad a>0$?
A) $\sqrt{a+2}$ B) $a-2$ C) $\sqrt{2}+\sqrt{a}$ D) $a+2$

Решение: Введем обозначение $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}=x\geq 0$. Возведя это равенство в квадрат, имеем:
$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+2=x^2\iff x^2=a+2.$$
Отсюда $x=\pm\sqrt{a+2}$. Из неотрицательности x получим $x=\sqrt{a+2}$. **Ответ:** $\sqrt{a+2}$ (A).

12. (98-8-62) Выразите $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$ через p, если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=p$.
A) $-p^3-3p$ B) p^3-3p C) p^3+3p D) $3p-p^3$

13. (99-6-33) Вычислить $\operatorname{tg}x$, если
$$\frac{2\sin x-\cos x}{2\cos x+\sin x}=3.$$
A) 7 B) -3 C) 3 D) -7

14. (99-6-51) Упростите выражение
$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha.$$
A) -1 B) 0 C) 1 D) 2

Решение: Из формулы суммы кубов двух чисел найдем
$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3=$$
$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha).$$
Теперь используем основное тождество тригонометрии и преобразуем данное выражение следующим образом
$$\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2.$$
Еще раз применяя основное тождество тригонометрии получим, что значение выражение равно 1. **Ответ:** 1 (C).

15. (99-8-80) Упростите выражение
$$\sin^2x+\cos^2x+\operatorname{tg}^2x.$$
A) $-\frac{1}{\cos^2x}$ B) $-\frac{1}{\sin^2x}$ C) $\frac{1}{\sin^2x}$ D) $\frac{1}{\cos^2x}$

16. (97-1-47) Упростите выражение
$$(\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha)\cdot\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\right).$$
A) $\cos^2\alpha$ B) $\operatorname{tg}\alpha$ C) $\frac{1}{\cos\alpha}$ D) $\operatorname{ctg}^2\alpha$

17. (98-1-55) Упростить
$$\frac{3\sin^2\alpha+\cos^4\alpha}{1+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}.$$
A) $2\sin\alpha$ B) 2 C) $\operatorname{ctg}^2\alpha$ D) 1

18. (98-8-55) Упростите выражение
$$\frac{1+\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{3\cos^2\alpha+\sin^4\alpha}.$$
A) 3 B) 2 C) $1\frac{1}{2}$ D) 1

19. (02-4-30) Упростите выражение
$$(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2-(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)^2.$$
A) 0 B) -4 C) -2 D) 4

20. (02-7-39) Упростите выражение
$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-2.$$
A) 0 B) 4 C) $2\sin 2\alpha$ D) 1

21. (01-1-69) Найти $16(\sin^3x+\cos^3x)$, если $\sin x+\cos x=0,5$.
A) 8 B) 14 C) 11 D) 16

Решение: По формуле суммы кубов двух чисел и основному тождеству тригонометрии имеем:
$$\sin^3x+\cos^3x=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cdot\cos x).$$
Из равенств $\sin x+\cos x=0,5$ и
$$\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\left((\cos x+\sin x)^2-1\right)$$
получим
$$16\cdot 0,5(1-\cos x\sin x)=16\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)=11.$$
Ответ: 11 (C).

22. (00-2-45) Найти значение дроби

$$\frac{2\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - 2\sin\alpha},$$

если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{13}{4}$.

A) 6 B) 5 C) 6,2 D) 4,8

23. (03-8-55) Найти значение выражения

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x,$$

если $\cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3 D) $\frac{2}{\sqrt{10}}$

13.2.2 Свойства тригонометрических функций

Известно, что косинус — четная функция (18-свойство пункта 13.2), а синус, тангенс и котангенс — нечетные функции (пункт 13.2, свойства 17, 19 и 20).

1. **Наименьший положительный период функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ равен 2π.**
2. **Наименьший положительный период функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ равен π.**
3. **Если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $a\,f(x) + b$ также имеет период T.**
4. **Если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $f(ax + b)$ имеет период T/a.**
5. **Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют наименьшие положительные периоды T_f и T_g соответственно и $T_f : T_g$ рациональное число, то функция $f(x) \pm g(x)$ периодическая и имеет наименьший положительный период, равный $T_{f\pm g} = K(T_f;\, T_g)$.**
6. **Если функция $g(x)$ — периодическая, то функция $f(g(x))$ также периодическая.**
7. **Если $f(x) + f(-x) \equiv 0$, то f — нечетная функция, если $f(x) - f(-x) \equiv 0$, то f является четной функцией.**

Замечание. Приведенное в 5-свойстве $K(T_f;\, T_g) :=$ НОК$(T_f;\, T_g)$ равно наименьшему натуральному числу, которое при делении на T_f и T_g дает натуральное число. Например, найдем наименьший положительный период суммы следующих функций

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{19x}{18} + 1\right), \quad g(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{28x}{29} - 2\right).$$

По свойствам 2 и 4, получим $T_f = \frac{18\pi}{19}$, $T_g = \frac{29\pi}{28}$. Их отношение

$$\frac{T_f}{T_g} = \frac{18\pi}{19} \cdot \frac{28}{29\pi} = \frac{504}{551} -$$

рациональное число. Поэтому функция $f(x)+g(x)$ — периодическая. Ее наименьший положительный период равен наименьшему натуральному числу $T > 0$, при котором $T : T_f = T \cdot \frac{19}{18\pi}$ и $T : T_g = T \cdot \frac{28}{29\pi}$ являются натуральными числами. Отсюда получим

$$T = K(18\pi;\, 29\pi) = \pi K(18;\, 29) = 522\pi.$$

Значит, $T_{f+g} = K(T_f;\, T_g) = 522\pi$.

1. (03-1-17) Найти наименьший положительный период функции $y = 2 + 3\cos(8x - 7)$.

A) 2π B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{4}$

Решение: По свойствам 1 и 4 наименьший положительный период функции $y = \cos(8x - 7)$ равен

$$T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

По 3-свойству наименьший положительный период функции $y = 2 + 3\cos(8x - 7)$ тоже равен $\frac{\pi}{4}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{4}$ (D).

2. Найти наименьший положительный период функции $y = 3 + \sin 2x$.

A) $\frac{2\pi}{3}$ B) π C) $\frac{\pi}{3}$ D) 2π

3. (98-10-102) Найти наименьший положительный период функции $y = \sin(3x + 1)$.

A) $\frac{2\pi}{3}$ B) π C) $\frac{\pi}{3}$ D) 2π

4. (98-12-56) Найти наименьший положительный период функции $y = \cos(\frac{5x}{2} - \frac{5}{2})$.

A) $\frac{4\pi}{5}$ B) 2π C) π D) $\frac{2\pi}{5}$

5. (01-11-35) Найти наименьший положительный период функции

$$f(x) = 2^{\sin x} + 3^{\operatorname{tg} x}.$$

A) $\frac{\pi}{2}$ B) 2π C) 3π D) 4π

6. (96-12-105) Найти наименьший положительный период функции

$$y = \operatorname{tg}\frac{x}{3} - 2\sin x + 3\cos 2x.$$

A) 6π B) 3π C) 4π D) 9π

Решение: По свойству 4 наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$ равен $T_1 = \pi : \frac{1}{3} = 3\pi$, наименьший положительный период функции $y = \sin x$ равен $T_2 = 2\pi$, а наименьший положительный период функции $y = \cos 2x$ равен $T_3 = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Их наименьшее общее кратное равно $K(T_1;\, T_2;\, T_3) = 6\pi$, поэтому наименьший, положительный период данной функции равен 6π. **Ответ:** 6π (A).

7. (96-9-48) Найти наименьший положительный период функции

$$y = \text{tg}\,\frac{x}{3} - 2\sin\frac{x}{2} + 3\cos\frac{2}{3}x.$$

A) 4π B) 6π C) 3π D) 12π

8. (96-13-14) Найти наименьший положительный период функции

$$y = \text{ctg}\,\frac{x}{3} + \text{tg}\,\frac{x}{2}.$$

A) 6π B) 2π C) 3π D) 12π

9. Найти функцию с наименьшим периодом. Чему равен ее период?
$y_1 = \text{tg}\,3x$, $y_2 = \text{ctg}\,6x$,
$y_3 = \cos(3x+1)$, $y_4 = \sin(6x+4)$.
A) y_1; $\frac{2\pi}{3}$ B) y_2; $\frac{\pi}{6}$ C) y_3; $\frac{2\pi}{3}$ D) y_4; $\frac{\pi}{3}$

10. (02-3-41) Какая из следующих функций непериодическая?
A) $y = \sin\sqrt{x}$ B) $y = \sqrt{\sin x}$
C) $y = |\sin|x||$ D) $y = \sin^2 x$

11. (02-3-45) Какая из следующих функций непериодическая?
1) $y = \sin\sqrt{x}$; 2) $y = \lg|\cos x|$
3) $y = x\cos x$; 4) $y = \sin^2 x + 1$
A) 1;3 B) 1;2 C) 2;3 D) 1;4

12. Укажите непериодическую функцию.
A) $y = \{x\} + \sin\pi x$ B) $y = \lg(\frac{3}{5+\cos x})$
C) $y = \sin x + \sin\pi x$ D) $y = \sqrt{\sin x}$

13. (97-2-41) Какая из следующих функций четная?
A) $f(x) = \sin x + x^3$ B) $f(x) = \cos x\,\text{tg}\,x$
C) $f(x) = x^2 \cdot \text{ctg}\,x$ D) $f(x) = \frac{x^4 + x^2}{\cos x}$

Решение: Функция $f(x) = \sin x + x^3$ как сумма нечетных функций нечетная (10-глава, 7-свойство), функции $f(x) = \cos x\,\text{tg}\,x$ и $f(x) = x^2 \cdot \text{ctg}\,x$ как произведение четной и нечетной функций – нечетные (10-глава, 4-свойство). Функция f в ответе D является четной функцией, как отношение четных функций (10-глава, 3-свойство). **Ответ:** (D).

14. (97-4-17) При каких натуральных значениях k функция $y = (\sin x)^{5k+4}$ будет четной?
A) при нечетных значениях
B) при четных значениях
C) при значениях, кратных 5
D) при всех значениях

15. (00-10-72) Какая из следующих функций нечетная?
A) $y = \lg\frac{1+x}{1-x}$ B) $y = \lg x^3$
C) $y = \cos(x-a)$ D) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$

16. (97-12-40) Какая из следующих функций нечетная?
A) $f(x) = \frac{\cos 5x + 1}{|x|}$ B) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1}$
C) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{x(x^2-1)}$ D) $f(x) = \frac{\sin\frac{x}{2}}{x^3}$

17. (99-2-38) Какая из следующих функций нечетная?
A) $f(x) = \sin x \cdot \text{tg}\,x$ B) $f(x) = \cos x \cdot \text{ctg}\,x$
C) $f(x) = \sin|x|$ D) $f(x) = e^{|x|}$

18. (99-7-17) Какие из следующих функций ни нечетные, ни четные?
$y_1 = 2^x + 2^{-x}$; $y_2 = 5^x - 5^{-x}$;
$y_3 = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$; $y_4 = \cos x + x^3$.
A) y_1; y_2 B) y_1; y_3 C) y_3; y_4 D) y_3

Решение: По свойству 7 можно показать, что y_1 – четная, y_2 – нечетная функции. Функция y_4, как сумма четной и нечетной функций, является ни нечетной, ни четной (10-глава, 11-свойство). Теперь можно найти правильный ответ, не определяя четность или нечетность функции y_3. Для этого поступаем следующим образом. Если в ответе участвуют функции y_1 или y_2, то этот ответ неправильный, так как одна из них является четной, другая – нечетной. В правильном ответе обязательно должна присутствовать функция y_4. Значит, правильный ответ только C.
Ответ: y_3; y_4 (C).

19. Какие из следующих функций ни нечетные, ни четные?
$y_1 = \sin x + \cos(-x)$; $y_2 = \text{tg}\,x - \text{ctg}\,^2x$;
$y_3 = \sin^2 x + \cos^2 x$; $y_4 = \cos^5 x + \sin^3 x$.
A) y_1; y_2; y_4 B) y_1; y_3 C) y_3; y_4 D) y_2; y_3

20. Какие из следующих функций ни нечетные, ни четные?
$y_1 = \sin^3 x : \cos x$; $y_2 = \cos(x-2)$;
$y_3 = \sin^7 x + 7$; $y_4 = \cos^5 x \cdot \sin^3 x$.
A) y_1; y_2; y_4 B) y_1; y_3 C) y_3; y_4 D) y_2; y_3

21. Найти функцию, которая является ни нечетной, ни четной.
A) $1 + \sin x$ B) $1 - \cos^5 3x$
C) $1 + \text{tg}\,^2x$ D) $1 - \text{ctg}\,^2x$

22. (01-2-16) Какая из следующих функций нечетная?
A) $x^3 + x + 4$ B) $\cos x + \text{tg}\,x$
C) $\sin x + \text{tg}\,x - 1$ D) $\sin 2x \cdot \cos x / \text{tg}\,^2x$

23. (01-11-34) Какая из следующих функций нечетная? $y_1 = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$; $y_2 = \text{ctg}\,^2x\sin^2 x$ и $y_3 = \lg(|x|+1)$.
A) y_1 B) y_2 C) y_3
D) Среди данных функций нет нечетной функции.

13.2.3 Формулы сложения и приведения

Приведем формулы суммы и разности тригонометрических функций двух аргументов. Их еще называют теоремами сложения.

1. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
2. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.
3. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.
4. $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.
5. $\mathrm{tg}\,(x+y) = \dfrac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y}{1 - \mathrm{tg}\,x\ \mathrm{tg}\,y}$.
6. $\mathrm{tg}\,(x-y) = \dfrac{\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y}{1 + \mathrm{tg}\,x\ \mathrm{tg}\,y}$.

Значения тригонометрических функций любого аргумента можно выразить через значения тригонометрических функций аргумента, лежащего в первой четверти, что упрощает составление таблиц тригонометрических функций и пользование ими, а также построение графиков. Для этого тригонометрическую функцию любого аргумента вида $\frac{n\pi}{2} \pm \alpha$, $n \in \mathbb{Z}$ приводят к тригонометрической функции аргумента α, где $0 < \alpha < \frac{n\pi}{2}$, по так называемым формулам приведения (таблица 13.5).

x	$\sin x$	$\cos x$	tgx	ctgx
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\ \alpha$	$\mathrm{tg}\ \alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\ \alpha$	$-\mathrm{tg}\ \alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\ \alpha$	$-\mathrm{ctg}\ \alpha$
$\pi + \alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\ \alpha$	$\mathrm{ctg}\ \alpha$
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\ \alpha$	$\mathrm{tg}\ \alpha$
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\ \alpha$	$-\mathrm{tg}\ \alpha$
$2\pi - \alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\ \alpha$	$-\mathrm{ctg}\ \alpha$

таблица 13.5.

Приведем правила, которые облегчают запоминание формул приведения.

2) При переходе от функций аргументов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ (для половинных π) к функциям аргумента α название функции меняют: синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот.

При переходе от функций аргументов $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ к функциям аргумента α название функции сохраняют.

3) Считая α острым углом (т.е.$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) перед функцией угла α ставят такой знак, какой имеет приводимая функция угла $\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ($\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$).

Рассмотрим это правило на примере.

1-пример. Выразить $\sin 300^0$ через тригонометрическую функцию острого угла.

Решение: *1-способ.* Выражение $\sin 300^0$ запишем в виде $\sin(360^0 - 60^0)$. Угол 360^0 – соответсвует 2π радианам, поэтому при переходе к 60^0, синус не меняет название. Теперь определим знак данного выражения. Угол $360^0 - 60^0 = 300^0$ лежит в IV четверти, в ней функция синус – отрицательная, поэтому $\sin(360^0 - 60^0) = -\sin 60^0$.

2-способ. Данное выражение преобразуем следующим образом $\sin 300^0 = \sin\frac{10\pi}{6} = \sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6})$. Так как острый угол отличается от данного угла на $\frac{3\pi}{2}$, то при переходе к углу $\frac{\pi}{6}$ синус меняется на косинус. Теперь определим знак. Угол $\frac{3\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} < 2\pi$ принадлежит IV четверти, в ней синус отрицателен, поэтому $\sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\sin 300^0 = -\sin 60^0 = -\cos\frac{\pi}{6}$.

1. Вычислите $\sin 15^0$.
   A) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ B) $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
   C) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$ D) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

   Решение: Представим $\sin 15^0$ в виде $\sin(45^0 - 30^0)$, тогда применяя 2-формулу, получим

   $$\sin(45^0 - 30^0) = \sin 45^0 \cos 30^0 - \cos 45^0 \sin 30^0.$$

   По таблице 13.1 найдем значения синуса и косинуса углов в 30^0 и 45^0, тогда:

   $$\sin 15^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$$

   Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ (A).

2. Вычислите $\cos 15^0$.
   A) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ B) $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
   C) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$ D) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$
3. Вычислите $\sin 75^0$.
   A) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ B) $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
   C) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$ D) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$
4. Вычислите $\cos 75^0$.
   A) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ B) $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
   C) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$ D) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
5. Вычислите $\cos 75^0 + \cos 105^0$.
   A) 0 B) $\sqrt{3}$ C) 1 D) $\sqrt{2}$
6. (98-6-54) Вычислите

   $$\cos 45^0 \cdot \cos 15^0 + \sin 45^0 \cdot \sin 15^0.$$

   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) 0

7. (01-6-27) Вычислите
$$\cos 15^0 + \sqrt{3}\sin 15^0.$$
A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. (00-5-31) Вычислите $\sin 2010^0$.
A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) 1

Решение: Используя равенство $\sin 2010^0 = = \sin(6 \cdot 360^0 - 150^0)$ и то, что функция синус – нечетная и имеет период 2π, получим
$$\sin 2010^0 = -\sin 150^0 = -\sin(180^0 - 30^0).$$
Применяя формулу приведения и учитывая $\sin 30^0 = 0,5$, имеем $\sin 2010^0 = -0,5$. **Ответ:** $-\frac{1}{2}$ (A).

9. (01-2-17) Вычислите $\cos 870^0$.
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{1}{2}$

10. (02-4-29) Вычислите $\sin^2 3570^0$.
A) 0,2 B) 0,3 C) 0,25 D) 0,35

11. (03-2-41) Вычислите $\mathrm{tg}\ 1395^0$.
A) $\sqrt{3}$ B) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) -1 D) 1

12. Вычислите $\mathrm{tg}\ 105^0$.
A) $-2-\sqrt{3}$ B) $2-\sqrt{3}$
C) $-2+\sqrt{3}$ D) $2+\sqrt{3}$

Решение: Представим $\mathrm{tg}\ 105^0$ в виде $\mathrm{tg}\,(45^0+60^0)$, применяя 5-формулу получим
$$\mathrm{tg}\ 105^0 = \frac{\mathrm{tg}\ 45^0 + \mathrm{tg}\ 60^0}{1 - \mathrm{tg}\ 45^0\,\mathrm{tg}\ 60^0}.$$
Подставим значения тангенса углов в 45^0 и 60^0 из таблицы 13.1:
$$\mathrm{tg}\ 105^0 = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}.$$
Ответ: $-2-\sqrt{3}$ (A).

13. Вычислите $\mathrm{ctg}\ 105^0$.
A) $\frac{-1}{2+\sqrt{3}}$ B) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$
C) $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$ D) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

14. Вычислите $\mathrm{ctg}\ 15^0$.
A) $-2-\sqrt{3}$ B) $2-\sqrt{3}$
C) $-2+\sqrt{3}$ D) $2+\sqrt{3}$

15. Вычислите $\mathrm{tg}\ 75^0$.
A) $-2-\sqrt{3}$ B) $2-\sqrt{3}$
C) $-2+\sqrt{3}$ D) $2+\sqrt{3}$

16. Вычислите $\mathrm{ctg}\ 75^0 + \mathrm{tg}\ 15^0$.
A) $-4-2\sqrt{3}$ B) $4-2\sqrt{3}$
C) $-4+2\sqrt{3}$ D) $4+2\sqrt{3}$

17. (03-4-23) Вычислите
$$(\mathrm{tg}\ 60^0\cos 15^0 - \sin 15^0)\cdot 7\sqrt{2}.$$
A) 16 B) 12 C) 18 D) 14

18. (96-1-54) Найти значение $2\,\mathrm{tg}\,(-765^0)$.
A) $-\sqrt{2}$ B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ C) -2 D) 4

Решение: Используя равенство $765^0 = 2\cdot 360^0 + 45^0$, нечетность и периодичность тангенса, получим
$$2\,\mathrm{tg}\,(-765^0) = -2\,\mathrm{tg}\,(2\cdot 360^0 + 45^0) = -2\,\mathrm{tg}\ 45^0.$$
Из $\mathrm{tg}\ 45^0 = 1$ следует, что $2\,\mathrm{tg}\,(-765^0) = -2$.
Ответ: -2 (C).

19. (97-11-43) Вычислите
$$\cos(-45^0) + \sin 315^0 + \mathrm{tg}\,(-855^0).$$
A) 0 B) $\sqrt{2}-1$ C) $1+\sqrt{3}$ D) 1

20. (98-5-49) Вычислите $\mathrm{tg}\ 1^0\cdot\mathrm{tg}\ 2^0\cdots\mathrm{tg}\ 88^0\cdot\mathrm{tg}\ 89^0$.
A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\sqrt{3}$

21. (98-10-36) Вычислите
$$\mathrm{tg}\ \frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\mathrm{ctg}\ \frac{5\pi}{4}.$$
A) 1,5 B) 0,5 C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

22. (02-3-76) Вычислите
$$\sin\frac{\pi}{9} - \cos\frac{7\pi}{18}.$$
A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

23. (03-12-77) Вычислите
$$\left(\left(\mathrm{tg}^2\frac{7\pi}{24} - \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{24}\right) : \left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{7\pi}{24}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{24}\right)\right)^2.$$
A) $\frac{1}{9}$ B) 9 C) $\frac{1}{3}$ D) 3

24. (96-3-111) Найти $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4}-\alpha) = 2$.
A) 3 B) -3 C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$

Решение: Применяя формулу 6 к правой части равенства $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\left(\frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{4}-\alpha)\right)$, получим
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} - \mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4}-\alpha)}{1 + \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}\,\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4}-\alpha)} = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}.$$
Ответ: $-\frac{1}{3}$ (D).

25. (96-9-46) Найти $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4}-\alpha) = 2$.
A) 3 B) $\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) -3

26. (01-1-42) Найти значение $\alpha+\beta$, если

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{1}{2},\quad \text{tg}\,\beta=\frac{1}{3},\quad \pi<\alpha+\beta<2\pi.$$

A) $\frac{7\pi}{3}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{5\pi}{4}$ D) $\frac{7\pi}{4}$

27. (97-1-60) Вычислить $\text{tg}\,2x$, если

$$\begin{cases}\text{tg}\,(x+y)=3\\ \text{tg}\,(x-y)=2.\end{cases}$$

A) 5 B) 2,5 C) 1 D) -1

Решение: Если к правой части равенства $\text{tg}\,2x = \text{tg}\,\big((x+y)+(x-y)\big)$ применим формулу 5, то получим

$$\text{tg}\,2x=\frac{\text{tg}\,(x+y)+\text{tg}\,(x-y)}{1-\text{tg}\,(x+y)\cdot\text{tg}\,(x-y)}=\frac{3+2}{1-3\cdot 2}=$$

$=-1$. **Ответ:** -1 (D).

28. (97-6-60) Вычислить $\text{tg}\,2\beta$, если

$$\begin{cases}\text{tg}\,(\alpha+\beta)=5\\ \text{tg}\,(\alpha-\beta)=3.\end{cases}$$

A) 15 B) 8 C) $\frac{1}{8}$ D) 1

29. (97-6-68) Найти x, если

$$\begin{cases}2\,\text{tg}\,\alpha=3+\sqrt{x}\\ 2\,\text{tg}\,\beta=3-\sqrt{x}\\ 4(\alpha+\beta)=\pi.\end{cases}$$

A) $\frac{\pi}{3}$ B) -17 C) $-\frac{\pi}{6}+\pi k$ D) 17

30. (98-6-48) Найти $\text{tg}\,y$, если $\text{tg}\,(x+y)=5$ и $\text{tg}\,x=3$.

A) 2 B) $\frac{1}{8}$ C) 8 D) $\frac{1}{2}$

Решение: Если к правой части равенства $\text{tg}\,y = \text{tg}\,\big((x+y)-x\big)$ применим 6-формулу, то получим

$$\text{tg}\,y=\frac{\text{tg}\,(x+y)-\text{tg}\,x}{1+\text{tg}\,(x+y)\cdot\text{tg}\,x}=\frac{5-3}{1+5\cdot 3}=\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\frac{1}{8}$ (B).

31. (00-1-29) Найти значение выражения $\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\cdot\sin\beta$, если $\alpha=-45^0$ и $\beta=15^0$.

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{1}{2}$

32. (02-6-46) Найти значение $\cos(x+y)$, если

$$\begin{cases}\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{6}\\ \text{tg}\,x\cdot\text{tg}\,y=2.\end{cases}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{6}$

33. (01-1-49) Найти значение выражения $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$ и $\cos\beta=-\frac{1}{2}$.

A) $-\frac{23}{36}$ B) $\frac{23}{36}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $-\frac{3}{4}$

34. (03-1-25) Вычислить $\text{ctg}\,(x-y)$, если

$$\begin{cases}3\sin x\cdot\cos y=-1\\ 3\cos x\cdot\sin y=2.\end{cases}$$

A) 0 B) 1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$

35. (00-1-26) Упростите выражение

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cdot\cos(\pi+\alpha)}{\text{ctg}\,(\pi+\alpha)\cdot\text{tg}\,(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}.$$

A) $-\sin^2\alpha$ B) $-\sin^2\alpha\cdot\text{tg}\,^2\alpha$
C) $-\cos^2\alpha$ D) $\cos^2\alpha\cdot\text{ctg}\,^2\alpha$

Решение: Применяя к числителю и знаменателю дроби формулы приведения, соответственно, получим $\cos\alpha(-\cos\alpha)=-\cos^2\alpha$, $\text{ctg}\,\alpha\cdot\text{ctg}\,\alpha=\text{ctg}\,^2\alpha$. Тогда

$$-\cos^2\alpha\cdot\text{tg}\,^2\alpha=-\cos^2\alpha\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=-\sin^2\alpha.$$

Ответ: $-\sin^2\alpha$ (A).

36. (96-1-57) Упростите выражение

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)-2\cos\beta\cdot\sin\alpha}.$$

A) $\text{ctg}\,(\beta-\alpha)$ B) $\text{tg}\,(\alpha-\beta)$
C) $2\,\text{tg}\,(\alpha+\beta)$ D) $2\,\text{ctg}\,(\alpha-\beta)$

37. (01-11-24) Упростите выражение

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)}.$$

A) 1,6 B) $\text{ctg}\,(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ C) 1,5 D) 1

38. (99-1-41) Упростите выражение

$$\text{tg}\,\alpha\cdot\text{ctg}\,(\pi+\alpha)+\text{ctg}\,^2\alpha.$$

A) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$ B) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ C) $\text{tg}\,\alpha$ D) $\text{tg}\,^2\alpha$

39. (00-8-60) Упростите выражение

$$\frac{\text{tg}\,(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{\text{tg}\,(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}.$$

A) $\text{tg}\,^2\alpha$ B) $\text{ctg}\,^2\alpha$ C) $-\text{tg}\,^2\alpha$ D) $\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$

13.2.4 Формулы двойного и половинного угла

Из теорем сложения получаются формулы двойного угла.

1. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.
2. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.
3. $\sin 2x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$.
4. $\cos 2x = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$.
5. $\mathrm{tg}\, 2x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$.

Из формул двойного угла получаются формулы для половинного угла.

1. $\sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2}$, $\sin\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$.
2. $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$, $\cos\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$.
3. $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.
4. $\mathrm{ctg}\,\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$.
5. $\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, $\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$.

1. (97-6-51) Вычислите

$$\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos^3\frac{\pi}{8} - \sin^3\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}.$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) $\frac{1}{4}$

Решение: Из формул 1 и 2, т.е. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ и $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ получим

$$\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos^3\frac{\pi}{8} - \sin^3\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot$$

$$\cdot\left(\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\ \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{8} =$$

$$= \frac{1}{2}\ \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\ \sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$ (D).

2. (97-1-52) Вычислите

$$\sin\frac{\pi}{16}\cdot\cos^3\frac{\pi}{16} - \sin^3\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{16}.$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

3. (99-6-53) Вычислите

$$\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}.$$

A) $-\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{8}$

Решение: Используя формулу приведения $\cos\alpha = -\cos(\pi-\alpha)$, преобразуем данное выражение следующим образом:

$$A = \cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\frac{\pi}{7}\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos(\pi-\frac{5\pi}{7}) = -\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}.$$

Умножая это равенство на $8\sin\frac{\pi}{7}$ и применяя формулу 1 несколько раз, получим

$$8A\sin\frac{\pi}{7} = -8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} =$$

$$= -4\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7} = -2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} =$$

$= -\sin\frac{8\pi}{7}$. Отсюда,

$$A = -\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin(\pi+\frac{\pi}{7})}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}.$$

Ответ: $\frac{1}{8}$ (D).

4. (98-1-54) Вычислите

$$\frac{2\cos^2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin^2\alpha - \sin 2\alpha},$$

если $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{4}$.

A) -4 B) 4 C) $\frac{1}{4}$ D) $-\frac{1}{2}$

5. (98-10-101) Найти $\mathrm{tg}\, 2\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$.

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$

6. (98-8-54) Вычислите,

$$\frac{\sin 2\alpha + 2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha},$$

если $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{8}$.

A) $\frac{1}{8}$ B) 8 C) $\frac{1}{4}$ D) 4

7. (96-10-35) Вычислите

$$\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha},$$

если $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.

A) 0,5 B) 1,5 C) 3 D) $\frac{2}{3}$

8. (98-11-17) Вычислить $\operatorname{tg} 22,5^0 + \operatorname{tg}^{-1} 22,5^0$.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2^{-1}}$ C) $4\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$

Решение: Используя формулу 8, получим

$$\operatorname{tg} 22,5^0 + \operatorname{tg}^{-1} 22,5^0 = \frac{1-\cos 45^0}{\sin 45^0} + \frac{\sin 45^0}{1-\cos 45^0}.$$

Так как $\cos 45^0 = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то после упрощения получим $2\sqrt{2}$. **Ответ:** $2\sqrt{2}$ (D).

9. (98-10-32) Вычислить $\operatorname{tg} 15^0 - \operatorname{ctg} 15^0$.

A) $2\sqrt{3}$ B) $-2\sqrt{3}$ C) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10. (98-4-29) Вычислите

$$\cos 92^0 \cdot \cos 2^0 + 0,5 \cdot \sin 4^0 + 1.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 0 D) 2

11. (99-6-12) Вычислите

$$\frac{2\operatorname{tg} 240^0}{1-\operatorname{tg}^2 240^0}.$$

A) $-\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

12. (00-10-13) Вычислите

$$\cos\frac{\pi}{5} \cdot \cos\frac{2\pi}{5}.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{12}$

13. (96-9-47) Упростите выражение

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} - \sin\alpha.$$

A) $\cos\alpha$ B) $\sin\alpha$ C) $-\cos\alpha$ D) $-2\sin\alpha$

Решение: Используя основное тождество тригонометрии и формулу 1 преобразуем числитель дроби следующим образом:

$$1+\sin 2\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = (\sin\alpha+\cos\alpha)^2.$$

Теперь упрощая, имеем

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha} - \sin\alpha = \sin\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha.$$

Приводя подобные члены, получим $\cos\alpha$. **Ответ:** $\cos\alpha$ (A).

14. (97-7-56) Упростить

$$\frac{\sin(\pi-2\alpha)}{1-\sin(\frac{\pi}{2}-2\alpha)}.$$

A) $-\operatorname{tg}\alpha$ B) $2\sin\alpha$ C) $\operatorname{ctg}\alpha$ D) $\operatorname{tg}\alpha$

15. (96-3-112) Упростите выражение

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}.$$

A) $2\cos\alpha$ B) 2 C) $2\sin\alpha$ D) 1

16. (96-12-85) Упростите выражение

$$\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}.$$

A) $\cos 2\alpha$ B) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$ C) $\frac{1}{\sin 2\alpha}$ D) $\sin 2\alpha$

17. (96-13-38) Упростите выражение

$$\frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}.$$

A) $\operatorname{ctg} 2\alpha$ B) $\sin 2\alpha$ C) $\operatorname{tg} 2\alpha$ D) $\cos 2\alpha$

18. (00-1-27) Упростите выражение

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} + 1.$$

A) $\cos^{-2}\alpha$ B) $\sin^{-2}\alpha$ C) $\sin^2\alpha$ D) $\cos^2\alpha$

19. (00-2-48) Упростите выражение

$$(\cos 3x + \cos x)^2 + (\sin 3x + \sin x)^2.$$

A) $4\cos^2 x$ B) $2\cos^2 x$
C) $3\sin^2 x$ D) $4\sin^2 x$

20. (96-7-56) Упростите выражение

$$\frac{\sin 2\alpha + \cos(\pi-\alpha)\cdot\sin\alpha}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}.$$

A) $\cos\alpha$ B) $\sin\alpha$ C) $-2\sin\alpha$ D) $-\cos\alpha$

21. (97-3-56) Упростите выражение

$$\frac{\cos 2\alpha + \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cdot\sin\alpha}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}.$$

A) $\cos\alpha$ B) $2\sin\alpha$ C) $-\cos\alpha$ D) $\operatorname{tg}\alpha$

22. (97-10-56) Упростите выражение

$$\frac{\sin(2\alpha-\pi)}{1-\sin(\frac{3\pi}{2}+2\alpha)}.$$

A) $\operatorname{tg}\alpha$ B) $-\operatorname{tg}\alpha$ C) $-2\operatorname{ctg}\alpha$ D) $\sin\alpha$

23. (99-6-23) Упростите выражение

$$1 + \frac{\operatorname{tg}^2(-\alpha) - 1}{\sin(0,5\pi+2\alpha)}.$$

A) $-\operatorname{tg}^2\alpha$ B) $\operatorname{tg}^2\alpha$ C) $\operatorname{ctg}^2\alpha$ D) $-\operatorname{ctg}^2\alpha$

24. (98-8-57) Вычислите

$$\sin^4\left(\frac{23\pi}{12}\right)-\cos^4\left(\frac{13\pi}{12}\right).$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение: Преобразуем аргументы следующим образом $\frac{23\pi}{12}=2\pi-\frac{\pi}{12}$ и $\frac{13\pi}{12}=\pi+\frac{\pi}{12}$, далее применяя формулы приведения, получим

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{12}\right)-\cos^4\left(\frac{\pi}{12}\right)=\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^2-\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^2.$$

Используя формулу разности квадратов и основное тождество тригонометрии имеем

$$\sin^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{\pi}{12}=-(\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12})=-\cos\frac{2\pi}{12}.$$

Отсюда по таблице 13.1 получим $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Ответ:** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C).

25. (98-12-90) Вычислите

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 100^0}+\frac{1}{\cos 260^0}.$$

A) 2 B) -4 C) -3 D) -1

26. (01-11-18) Вычислите

$$\frac{1}{\sin 10^0}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0}.$$

A) 3,5 B) 2,5 C) 3 D) 4

27. (02-7-11) Вычислите

$$\sin^4 105^0\cdot\cos^4 75^0.$$

A) $\frac{1}{256}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{128}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

28. (00-8-41) Вычислите

$$\log_2\cos 20^0+\log_2\cos 40^0+\log_2\cos 60^0+\log_2\cos 80^0.$$

A) -4 B) -3 C) $\frac{1}{2}$ D) 1

29. (03-3-39) Вычислите

$$\text{ctg } 35^0-\text{tg } 35^0-2\,\text{tg } 20^0.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) 1 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

30. (03-8-53) Вычислите

$$\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\text{tg }\frac{\pi}{8}\cdot\text{ctg }\frac{9\pi}{8}.$$

A) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

31. (00-8-46) Вычислите

$$\cos 50^0\cdot\cos 40^0-2\cos 20^0\cdot\sin 50^0\cdot\sin 20^0.$$

A) 0 B) 1 C) -1 D) $\cos 20^0$

32. (01-3-1) Вычислить значение выражения

$$\sin 50^0+\sin 40^0\cdot\text{tg } 20^0.$$

A) $\sin^2 20^0$ B) 0,5 C) 1 D) $\cos^2 20^0$

33. (01-1-43) Найти значение выражения $\sin 2\alpha$, если $\text{tg }\alpha=-\frac{3}{4}$.

A) 0,96 B) $-0,96$ C) 0,25 D) $-0,5$

Решение: Используя формулу 3, получим

$$\sin 2\alpha=\frac{2\,\text{tg }\alpha}{1+\text{tg }^2\alpha}=\frac{2\cdot(-\frac{3}{4})}{1+(-\frac{3}{4})^2}=-\frac{3}{2}:\frac{25}{16}.$$

Отсюда находим $\sin 2\alpha=-0,96$. **Ответ:** $-0,96$ (B).

34. (99-9-31) Вычислите $\sin 2\alpha$, если $\text{tg }\alpha+\text{ctg }\alpha=4$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$

35. (01-7-38) Найти значение острого угла α, если $\text{tg }\alpha=2-\sqrt{3}$.

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{5}{12}\pi$ D) $\frac{3}{8}\pi$

36. (03-2-26) Найти значение $\cos 2\alpha$, если $\text{ctg }\alpha=\sqrt{2}-1$.

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ C) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $-\frac{1}{2}$

Решение: Из тождества 4 и $\text{tg }\alpha=\frac{1}{\text{ctg }\alpha}$ имеем

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\text{tg }^2\alpha}{1+\text{tg }^2\alpha}=\frac{\text{ctg }^2\alpha-1}{\text{ctg }^2\alpha+1}.$$

Теперь подставляя $\text{ctg }\alpha=\sqrt{2}-1$ в правую часть последнего выражения получим

$$\cos 2\alpha=\frac{(\sqrt{2}-1)^2-1}{(\sqrt{2}-1)^2+1}=\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=$$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C).

37. (02-10-59) Вычислить $\text{tg } 2\alpha$, если $90^0<\alpha<180^0$ и $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

A) $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$ B) $-\frac{4\sqrt{3}}{7}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

38. (03-6-26) Выразить $\sin 16^0$ через a, если $\sin 37^0=a$.

A) a^2-1 B) $a-1$ C) $2a^2-1$ D) $1-2a^2$

39. (03-9-31) Вычислить значение $\sin\alpha + 2\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = -2$.

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $-\dfrac{1}{2}$ C) -2 D) $\dfrac{4}{5}$

40. (03-10-40) Вычислить значение.

$$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right),$$

если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$.

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ B) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ C) $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$ D) $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

41. (03-11-22) Вычислить значение α, если α острый угол и

$$\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha = \frac{1}{64}.$$

A) $\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{3\pi}{8}$ B) $\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{\pi}{4}$ C) $\dfrac{\pi}{16}$ D) $\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{8}$

42. (98-10-100) Вычислить $\sin 105^0 + \sin 75^0$.

A) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
C) $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Решение: Полагая $105^0 = 90^0 + 15^0$, $75^0 = 90^0 - 15^0$ из формул приведения получим

$$\sin 105^0 + \sin 75^0 = \cos 15^0 + \cos 15^0 = 2\cos 15^0.$$

Учитывая то, что угол 15^0 принадлежит 1 четверти и тождество 7, имеем

$$2\cos 15^0 = 2\sqrt{\frac{1+\cos 30^0}{2}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (D).

43. (96-7-55) Вычислить $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

A) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ B) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
C) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ D) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

44. (97-7-55) Вычислить $\cos\dfrac{5\pi}{12}$.

A) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
C) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ D) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

45. (00-3-50) Вычислить $\sin 112,5^0$.

A) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ B) $\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}$
C) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ D) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}$

46. (01-2-85) Вычислить $\cos 2227^0 30'$.

A) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}$
C) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ D) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$

47. (02-3-73) Вычислите

$$8\sin^2\frac{7\pi}{8}\cdot\cos^2\frac{9\pi}{8}.$$

A) 0 B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C) 1 D) $\dfrac{1}{2}$

Решение: Полагая $\dfrac{7\pi}{8} = \pi - \dfrac{\pi}{8}$, $\dfrac{9\pi}{8} = \pi + \dfrac{\pi}{8}$ и используя формулы приведения, получим

$$8\sin^2\frac{7\pi}{8}\cdot\cos^2\frac{9\pi}{8} = 8\sin^2\frac{\pi}{8}\cdot\cos^2\frac{\pi}{8}.$$

Теперь в силу тождества $2\sin x\cos x = \sin 2x$ имеем

$$8\sin^2\frac{\pi}{8}\cdot\cos^2\frac{\pi}{8} = 2\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2\cdot\frac{2}{4} = 1.$$

Ответ: 1 (C).

48. (98-1-57) Вычислите

$$8\sin^2\frac{15\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{17\pi}{16} - 1.$$

A) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C) $-\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{2}$

49. (00-3-53) Для какого острого угла α верно равенство

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}?$$

A) $7,5^0$ B) $22,5^0$ C) 75^0 D) 15^0

Решение: Из свойств квадратного корня получим

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos 30^0}{2}}.$$

Отсюда $\alpha = 15^0$. **Ответ:** 15^0 (D).

50. (97-5-28) Вычислить $8\cos 30^0 + \operatorname{tg}^2 15^0$.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8

51. (01-3-3) Вычислите

$$\sin^4 15^0 + \cos^4 15^0.$$

A) $\dfrac{5}{6}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{7}{8}$ D) $\dfrac{5}{7}$

52. (02-9-39) Вычислите

$$\frac{2\sin^2 70^0 - 1}{2\operatorname{ctg} 115^0\cdot\cos^2 155^0}.$$

A) -1 B) 1 C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

53. (97-9-28) Вычилить $4\operatorname{ctg} 30^0 + \operatorname{tg}^2 15^0$.

A) 5 B) 7 C) 9 D) 8

54. (97-6-44) Найти $\sin(\pi - \frac{\alpha}{2})$, если

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$

Решение: По формуле приведения имеем $\sin(\pi - \frac{\alpha}{2}) = \sin\frac{\alpha}{2}$. Из тождества 6 и из того, что угол $\frac{\alpha}{2}$ лежит во второй четверти, получим

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$ (D).

55. (96-1-55) Вычислить значение $\cos^2\alpha$, если $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{8}$

56. (97-1-45) Вычислить значение $\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2})$, если

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$

57. (98-11-20) Вычислить значение $6\cos\frac{\alpha}{2}$, если

$$\cos\alpha = \frac{7}{18}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

A) 3 B) 5 C) 6 D) 4

Решение: Из тождества 7 и из того, что $\frac{\alpha}{2}$ лежит в первой четверти, получим

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Отсюда имеем

$$6\cos\frac{\alpha}{2} = 6\sqrt{\frac{1+\frac{7}{18}}{2}} = 6\sqrt{\frac{25}{36}} = 5.$$

Ответ: 5 (B).

58. (01-1-68) Вычислить значение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если

$$\sin\alpha = -0,8, \quad \alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2}).$$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2

59. (02-3-74) Вычислить значение $\cos^4(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$, если $\cos(\pi - 4\alpha) = -\frac{1}{3}$.

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{8}{9}$

60. (02-7-16) Упростите выражение

$$\frac{2\cos^2(45^0 - \frac{\alpha}{2})}{\cos\alpha}.$$

A) $\operatorname{ctg}(45^0 - \frac{\alpha}{2})$ B) $\sin\frac{\alpha}{2}$
C) $2\sin(45^0 - \frac{\alpha}{2})$ D) $\cos\frac{\alpha}{2}$

61. (02-11-42) Вычислить значение $\sin\frac{\alpha}{2}$, если

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}, \quad \alpha \in (540^0; 630^0).$$

A) $\frac{3}{4}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{3}{\sqrt{13}}$

62. (03-5-40) Вычислить значение

$$\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)\cdot\sin(\frac{3\pi}{4} - \alpha),$$

если $\sin\alpha\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

63. (03-7-35) Вычислить значение a, если

$$\cos 15^0 + \sin 15^0 = \frac{a}{4\cos 15^0}.$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}+1$ C) $\sqrt{3}+2$ D) $\sqrt{3}+3$

64. (02-8-40) Упростите выражение

$$\cos(\pi + 2\alpha) + \sin(\pi + 2\alpha)\cdot\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha).$$

A) 1 B) 2 C) $\sin\alpha$ D) $\cos\alpha$

Решение: Согласно формулам приведения имеем $-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$. Упростим это выражение, используя равенства $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$:

$$-\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= -\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Ответ: 1 (A).

65. (01-9-21) Упростите выражение

$$\sin^2\alpha\operatorname{tg}\alpha + \cos^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \sin 2\alpha.$$

A) $\frac{2}{\sin 2\alpha}$ B) $\frac{2}{\sin\alpha\cos\alpha}$ C) 1 D) $\sin^2\alpha$

66. (03-4-24) Упростите выражение

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

A) $\sin^2 2\alpha$ B) $\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$ C) $\cos^2 2\alpha$ D) $\frac{1}{2}\cos^2 2\alpha$

67. (02-11-41) Упростите выражение

$$\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

A) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$ B) $\cos\frac{\alpha}{2}$ C) $-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$ D) $\sin\frac{\alpha}{4}$

68. (02-12-38) Упростите выражение

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

A) $\operatorname{ctg}\alpha$ B) $\operatorname{tg}\alpha$ C) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ D) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$

69. (99-8-76) Упростите выражение

$$\frac{\sin^2 2,5\alpha-\sin^2 1,5\alpha}{\sin 4\alpha\cdot\sin\alpha+\cos 3\alpha\cdot\cos 2\alpha}.$$

A) $2\operatorname{tg}2\alpha$ B) $\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$
C) $2\sin 2\alpha$ D) $4\sin^2\alpha$

13.2.5 Формулы для суммы и разности

1. $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$

2. $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$

3. $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$

4. $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$

В формулах 1, 2 и 3 переходя от переменных x, y к переменным $\alpha=\frac{x+y}{2}$, $\beta=\frac{x-y}{2}$ для *произведения* получим следующие формулы:

5. $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$

6. $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)).$

7. $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)).$

1. (98-11-103) Вычислить $\sin 75^0-\sin 15^0$.

A) $\frac{\sqrt2}{2}$ B) $\frac{\sqrt3}{2}$ C) $\sqrt2$ D) $-\sqrt2$

Решение: Из тождества 4 получим

$$\sin 75^0-\sin 15^0=2\cos 45^0\sin 30^0=\frac{\sqrt2}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt2}{2}$ (A).

2. (00-1-28) Вычислите

$$\frac{\sin 35^0+\cos 65^0}{2\cos 5^0}.$$

A) 0,25 B) 0,75 C) 0,5 D) 0,6

3. (00-8-59) Вычислите

$$\sin 10^0+\sin 50^0-\cos 20^0.$$

A) 0 B) -1 C) 1 D) $\cos 20^0$

4. (99-5-54) Вычислите

$$\sqrt[3]{8+\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}\right)^3}.$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

5. (96-6-35) Упростите выражение

$$\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{\sin\alpha}.$$

A) $-2\cos 2\alpha$ B) $2\cos 2\alpha$ C) $\sin 2\alpha$ D) $2\sin 2\alpha$

Решение: Учтя тождество 1 и то, что синус – нечетная функция, преобразуем данное выражение следующим образом

$$\frac{-2\sin\frac{\alpha+3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-3\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{-2\sin 2\alpha(-\sin\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Отсюда получим, что значение выражения равно $2\sin 2\alpha$. **Ответ:** $2\sin 2\alpha$ (D).

6. (97-12-34) Упростите выражение

$$\frac{\cos 6\alpha-\cos 4\alpha}{\sin 5\alpha}.$$

A) $2\sin\alpha$ B) $2\cos\alpha$ C) $-2\cos\alpha$ D) $-2\sin\alpha$

7. (98-10-35) Упростите выражение

$$\frac{\sin 4\alpha-\sin 6\alpha}{\cos 5\alpha}.$$

A) $\sin 2\alpha$ B) $2\sin\alpha$ C) $-2\cos\alpha$ D) $-2\sin\alpha$

8. (98-8-58) Упростите выражение

$$\frac{1-\sin\alpha-\cos 2\alpha+\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha+2\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha}.$$

A) $2\operatorname{ctg}\alpha$ B) $\operatorname{tg}\alpha$ C) $2\sin\alpha$ D) $\operatorname{ctg}\alpha$

9. (01-7-40) Упростите выражение

$$\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha-\sin(\pi+3\alpha)}{2\cos\alpha+1}.$$

A) $\sin\alpha$ B) $\cos\alpha$ C) $\sin 2\alpha$ D) $\cos 2\alpha$

10. (00-8-48) Вычислите

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}.$$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{\sqrt2}{3}$

Решение: Обозначим данное выражение через A

$$A=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}.$$

Умножим это равенство на $2\sin\frac{\pi}{7}$ и применим формулу 7

$$2A\sin\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} +$$

$$+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} +$$

$$+\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{7} + \sin\frac{7\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}.$$

Отсюда получим $A = -\frac{1}{2}$. **Ответ:** $-\frac{1}{2}$ (A).

11. (96-3-57) Вычислите

$$\sin 20^0 \cdot \sin 40^0 \cdot \sin 80^0.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

12. (01-1-45) Углы $5^0, 10^0, 15^0, \ldots$ образуют арифметическую прогрессию. Сколько надо взять членов этой арифметической прогрессии, начиная с первого, чтобы сумма их косинусов равнялась нулю?
A) 18 B) 17 C) 19 D) 35

13. (03-9-30) Вычислите

$$\cos 55^0 \cdot \cos 65^0 \cdot \cos 175^0.$$

A) $-\frac{1}{8}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ D) $-\frac{1}{8}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

13.2.6 Множество значений и монотонность

1. **Множество значений функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ состоит из отрезка $[-1; 1]$.**
2. **Множество значений функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ состоит из $(-\infty; \infty)$.**
3. **Множество значений функций $y = a\sin x + c$ и $y = a\cos x + c$ состоит из отрезка $[c - |a|; c + |a|]$.**
4. **Множество значений функции $y = a\sin x + b\cos x + c$ состоит из отрезка $[c - \sqrt{a^2+b^2}; c + \sqrt{a^2+b^2}]$.**
5. **Множество значений функции $y = a\sin^2 x + b\cos^2 x$ $(a < b)$ состоит из $[a; b]$.**
6. **Функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает.**
7. **Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ убывает.**
8. **Функция $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ возрастает.**
9. **Функция $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $(0; \pi)$ убывает.**

1. Найти множество значений функции $y = 3\sin x$.
A) $[0; 3]$ B) $(-3; 3)$ C) $[-3; 0]$ D) $[-3; 3]$

Решение: По третьему свойству множество значений функции $y = 3\sin x$ $(a = 3,\ c = 0)$ состоит из отрезка $[-3; 3]$. **Ответ:** $[-3; 3]$ (D).

2. Найти множество значений функции $y = 2\cos x$.
A) $[0; 2]$ B) $(-2; 2)$ C) $[-2; 2]$ D) $[-2; 0]$

3. Найти множество значений функции $y = 2 + 5\operatorname{tg} 3x$.
A) $(-\infty; 2]$ B) $(-\infty; \infty)$
C) $[2; \infty)$ D) $[-2; 2]$

4. Найти множество значений функции $y = 5 - 7\operatorname{ctg}(3x + 2)$.
A) $(-\infty; 5]$ B) $(-\infty; \infty)$
C) $[2; \infty)$ D) $[12; \infty)$

5. Найти множество значений функции $y = 2\cos x - 3$.
A) $[-5; 2]$ B) $[-5; 1)$ C) $[-5; -1]$ D) $[-3; 2]$

6. (01-10-51) Найти множество значений функции

$$y = (\sin x + \cos x)^2 - \frac{1 - \cos 4x}{2\sin 2x} - \cos x.$$

A) $[0; 2]$ B) $(0; 2)$
C) $(0; 1) \cup (1; 2)$ D) $[0; 1) \cup (1; 2]$.

Решение: Используя тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и $1 - \cos 4x = 2\sin^2 2x$ преобразуем данную функцию следующим образом:

$$y = (\sin x + \cos x)^2 - \frac{1 - \cos 4x}{2\sin 2x} - \cos x = 1 - \cos x.$$

Из третьего свойства получим, что множество значений функции $y = 1 - \cos x$ $(a = -1,\ c = 1)$ состоит из отрезка $[0; 2]$. По условию $\sin 2x \neq 0 \iff x \neq \frac{\pi}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}$. Поэтому множество значений данной функции состоит из $(0; 1) \cup (1; 2)$. **Ответ:** $(0; 1) \cup (1; 2)$ (C).

7. (01-11-23) Найти множество значений функции $f(x) = 2\cos\frac{x}{2} + 3$.
A) $[3; 5]$ B) $[4; 5]$ C) $[2; 5]$ D) $[1; 5]$

8. (02-2-60) Найти наименьшее значение функции $y = \cos^4 x - 2\sin^2 x + 7$.
A) 5 B) 3 C) 2 D) 1

9. (02-12-53) Найти множество значений функции

$$f(x) = 3^{\log_3(3\sin^2 x + 1)}.$$

A) $[1; 9]$ B) $[0; 9]$ C) $[0; 9)$ D) $(1; 9)$

10. (00-1-25) Найти наибольшее число
A) $\sin 1$ B) $\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2})$ C) $\sin 4$ D) 1.

Решение: В силу формул приведения $\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}) = \sin\frac{1}{2}$ и $\sin 4 = \sin(\pi - (\pi - 4)) = \sin(\pi - 4)$. Теперь $-\frac{\pi}{2} < \pi - 4 < \frac{1}{2} < 1 < \frac{\pi}{2}$ и принимая во внимание, что функция синус на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ – возрастающая, получим $\sin(\pi-4) < \sin\frac{1}{2} < \sin 1 < \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Значит, наибольшее среди данных чисел равно 1. **Ответ:** 1 (D).

11. (03-4-22) Найти произведение наибольшего и наименьшего чисел среди $\operatorname{tg} 240^0, \sin 120^0$, $\cos 150^0$ и $\operatorname{ctg} 225^0$.
A) $-1,4$ B) $-1,5$ C) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ D) $1,5$

12. (03-2-11) Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции $y = \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$.
A) 1,5 B) 0,5 C) 1 D) 2

13. (03-2-29) Найти множество значений функции
$$y = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x - \frac{\sin 2x}{2\cos x}.$$
A) $[0; 2]$ B) $(0; 2)$ C) $[-1; 1]$ D) $(-2; 0)$

14. (01-3-15) Найти наибольшее значение функции
$$f(x) = \sin\frac{x}{2}\cdot\cos^3\frac{x}{2} - \sin^3\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}.$$
A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) $\frac{1}{4}$

Решение: Разлагая на множители данное выражение, получим
$$f(x) = \sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right).$$
Используя формулы 1 и 2 пункта 13.2.4, имеем
$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x = \frac{1}{4\sin 2x}.$$
Так как наибольшее значение функции $g(x) = \sin 2x$ равно 1, то получим, что функция $f(x) = \frac{1}{4}\sin 2x$ имеет наибольшее значение, равное $\frac{1}{4}$. **Ответ:** $\frac{1}{4}$ (D).

15. (03-7-36) Найти наибольшее значение функции $y = (\cos x + 5)\cdot(3 - \cos x)$.
A) 8 B) 12 C) 15 D) 16

16. (03-7-49) Найти множество значений функции $y = \frac{3}{4}\cdot\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - 1$.
A) $\left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right]$ B) $[-1; 0]$
C) $[-1; -0,25]$ D) $[-0,25; 0]$

17. (96-10-15) Найти наибольшее значение функции $y = 2\sin x + \cos x$.
A) 3 B) $\sqrt{5}$ C) 2 D) -1

Решение: По правилу 4 множество значений функции $y = 2\sin x + \cos x$ есть отрезок $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$. Поэтому наибольшее значение функции равно $\sqrt{5}$. **Ответ:** $\sqrt{5}$ (B).

18. (00-1-30) Если α - переменная величина, то найти наибольшее значение $4(\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha)$.
A) 9,5 B) 7 C) 8 D) 6,5

19. (00-3-57) Найти множество значений функции $y = 6\sin 2x + 8\cos 2x$.
A) $[-10; 10]$ B) $[-14; 14]$
C) $(-\infty; \infty)$ D) $[0; 6]$

20. (01-6-43) Найти наибольшее значение функции $f(x) = \sin x + \cos x$.
A) 1,4 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 1,6

21. (01-7-45) Найти множество значений функции $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$.
A) $[-1; 1]$ B) $[-2; 2]$ C) $[0; 2]$ D) $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

22. (02-1-18) Найти множество значений функции
$$y = (2,(1) + 1,(8))\sin x + (1,(2) + 1,(7))\cos x.$$
A) $[-5; 5]$ B) $[-4; 4]$ C) $[-3; 3]$ D) $(-4; 4)$

23. (02-4-34) Найти наибольшее значение функции $y = 3\sin x - 4\cos x$.
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

24. (03-12-23) Найти наибольшее значение функции $y = 1 - 6\sin 2x + 8\cos 2x$.
A) 15 B) 14 C) 13 D) 11

25. (03-12-27) Найти наибольшее значение функции
$$y = \frac{8\sin x - 15\cos x + 3}{4}.$$
A) 6,5 B) 7,5 C) 5 D) 6

26. (96-7-57) Расставьте в порядке возрастания числа
$$x = \cos\frac{11\pi}{12},\quad y = \cos(-\frac{\pi}{3}),\quad z = \sin\frac{11\pi}{12}.$$
A) $x < y < z$ B) $x < z < y$
C) $y < z < x$ D) $z < y < x$

Решение: Используя четность косинуса получим
$$y = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3},$$
По формуле приведения $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ имеем
$$z = \sin\frac{11\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{12}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) =$$
$\cos\frac{5\pi}{12}$. Теперь сравним числа $x = \cos\frac{11\pi}{12}$, $y = \cos\frac{\pi}{3}$, $z = \cos\frac{5\pi}{12}$. Из неравенства
$$\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{12} < \frac{11\pi}{12}$$

и из убывания функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ получим

$$\cos\frac{\pi}{3} > \cos\frac{5\pi}{12} > \cos\frac{11\pi}{12}.$$

Ответ: $x < z < y$ (B).

27. (97-3-57) Расставьте в порядке убывания числа

$$x = \text{tg}\,\frac{5\pi}{7}; \quad y = \sin\frac{\pi}{6}; \quad z = \text{tg}\,\frac{3\pi}{7}.$$

A) $z > y > x$ B) $x > z > y$
C) $y > x > z$ D) $x > y > z$

28. (97-7-57) Расставьте в порядке убывания числа
$x = \text{tg}\,(\frac{5\pi}{6})$, $y = \cos(\frac{2\pi}{5})$, $z = \text{tg}\,(-\frac{\pi}{8})$.
A) $x > y > z$ B) $y > x > z$
C) $x > z > y$ D) $y > z > x$

29. (98-9-21) Какая разность отрицательная?
A) $\sin 140^0 - \sin 150^0$ B) $\cos 10^0 - \cos 50^0$
C) $\text{tg}\,87^0 - \text{tg}\,85^0$ D) $\text{ctg}\,45^0 - \text{ctg}\,40^0$

30. (98-11-98) Найти наибольшее число.
A) $\sin 170^0$ B) $\sin 20^0$
C) $\sin(-30^0)$ D) $\sin 100^0$

31. (99-1-50) Расставьте в порядке убывания числа
$x = \sin 60^0$, $y = \cos(-600^0)$, $z = \text{ctg}\,\frac{31\pi}{6}$.
A) $z > x > y$ B) $x > y > z$
C) $y > z > x$ D) $z > y > x$

32. (99-6-32) Расставьте в порядке возрастания числа

$$a = \cos(-13^0), \quad b = -\sin(-75^0), \quad c = \sin 100^0.$$

A) $b < a < c$ B) $a < b < c$
C) $a < c < b$ D) $b < c < a$

33. (99-9-27) Расставьте в порядке убывания числа

$$M = \sin 72^0,\ N = \cos 220^0 \ \text{ и } \ Q = \text{ctg}\,184^0 \sin 4^0.$$

A) $N > Q > M$ B) $N > M > Q$
C) $Q > M > N$ D) $Q > N > M$

34. (99-10-26) Расставьте в порядке возрастания числа

$$k = \text{tg}\,248^0, \quad t = \cos 32^0 \text{и} \quad q = \sin 112^0.$$

A) $q < t < k$ B) $k < t < q$
C) $t < k < q$ D) $t < q < k$

35. (96-6-32) Найти наибольшее значение функции

$$y = 2\sin^2 x + \cos^2 x.$$

A) 1 B) 1,5 C) 2,6 D) 2

Решение: По правилу 5 множеством значений функции $y = 2\sin^2 x + \cos^2 x$ является отрезок $[1; 2]$. Значит, наибольшее значение функции равно 2. **Ответ:** 2 (D).

36. (96-1-56) Найти наибольшее значение функции $y = 2\sin 3x + \cos 3x$.
A) 3 B) 2 C) $\sqrt{5}$ D) 4

37. (96-7-30) Найти наименьшее значение функции

$$y = 5^{1-\sin x} - e^{\ln 2}$$

A) $1 - e^2$ B) 3 C) -1 D) $-2,29$

Решение: По основному логарифмическому тождеству $e^{\ln 2} = 2$. По правилу 3 множеством значений функции $g(x) = 1 - \sin x$ является отрезок $[0; 2]$. Так как функция $f(t) = 5^t$ – возрастающая, то наименьшее значение функции $y = 5^{1-\sin x} - e^{\ln 2}$ равно $y_0 = 5^0 - 2 = 1 - 2 = -1$. **Ответ:** -1 (C).

38. (97-1-21) Найти наименьшее значение функции $y = 1 + \cos x$ на отрезке $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$.
A) 0 B) 1 C) $1\frac{1}{2}$ D) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

39. (97-8-31) Найти наибольшее значение выражения $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$.
A) 1,2 B) 1,4 C) 1,6 D) 2

40. (97-10-30) Найти наибольшее значение функции

$$y = \frac{10}{5^{|\cos x|}} + 2\ln e^3.$$

A) 8 B) 16 C) $2 + 2e^3$ D) 18

41. (97-11-21) Найти наименьшее значение функции $y = 2 - 2\sin x$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{6}]$.
A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $2 - \sqrt{3}$ D) 1

Решение: Если функция $y = f(x)$ – возрастающая, то для произвольного числа $c < 0$ функция $y = c\,f(x) + b$ будет убывающей. Отсюда и из того, что функция синус на отрезке $[0; \frac{\pi}{6}]$ – возрастающая следует, что функция $y = 2 - 2\sin x$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{6}]$ будет убывающей. Значит наименьшее значение данной функции на отрезке $[0; \frac{\pi}{6}]$ равно $y_0 = 2 - 2\sin\frac{\pi}{6} = 2 - 1 = 1$. **Ответ:** 1 (D).

42. (97-3-30) Найти наибольшее значение функции

$$y = \frac{1}{2^{\cos x}} + \ln e^2.$$

A) 2,5 B) 3 C) $1 + e^2$ D) 4

43. (98-8-30) Найти наибольшее значение функции $y = 2 - \sin x$ на отрезке $[0; \frac{7\pi}{6}]$.
A) 3 B) 2 C) 2,5 D) 1

44. (98-5-14) Найти наибольшее значение функции $f(x) = 5\sin x + 6$.
A) -1 B) 11 C) 1 D) 6

45. (98-1-30) Найти наименьшее значение функции $y = 0,5\cos x$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$.

A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) 0 D) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

46. (00-7-24) Найти наименьшее значение выражения

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\cos 2x.$$

A) -1 B) 1 C) $2-\sqrt{3}$ D) $3-2\sqrt{2}$

47. (00-2-30) Какая функция принимает только положительные значения на интервале $(-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$?

A) $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ B) $y = \sin(x + \frac{5\pi}{6})$

C) $y = \sin(x - \frac{5\pi}{6})$ D) $y = \sin(x - \frac{\pi}{6})$

48. (01-2-18) Найти наибольшее значение функции

$$y = \frac{x}{2} + \sin^2 x$$

на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

A) $-\frac{\pi}{2}+1$ B) $-\frac{\pi}{4}+1$ C) $\frac{\pi}{6}+1$ D) $\frac{\pi}{4}+1$

13.3 Обратные тригонометрические функции

Известно, что для фиксированного $y \in [-1; 1]$ уравнение $\sin x = y$ не имеет единственного решения на $\mathbb{R}$. Например, числа $x_0 = 0$ и $x_1 = \pi$ являются решениями уравнения $\sin x = 0$. Это означает, что обратная для функции $y = \sin x$ не существует. Рассуждая аналогично, получим что для функций $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ заданных во всей области определения не существуют обратные функции.

Если область определения функции $y = \sin x$ сократим до отрезка $D(y) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, тогда для каждого фиксированного $y \in [-1; 1]$ уравнение $\sin x = y$ будет иметь единственное решение, то есть обратная функция существует. Для функции $y = \sin x$ с областью определения $D(\sin) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ существует обратная функция, которая называется *арксинусом* и пишется в виде $x = \arcsin y$.

Рассуждая аналогичным образом, получим что существуют обратные функции для функций $y = \cos x$, $D(\cos) = [0; \pi]$; $y = \operatorname{tg} x$, $D(\operatorname{tg}) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $y = \operatorname{ctg} x$, $D(\operatorname{ctg}) = (0; \pi)$. Обратные функции, соответствующие этим функциям называются *арккосинусом, арктангенсом и арккотангенсом* и обозначаются как $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ va $y = \operatorname{arcctg} x$. Значения обратных тригонометрических функций можно найти по следующим таблицам 13.6*a* – 13.6*b*:

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

таблица 13.6*a*.

b	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} b$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} b$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

таблица 13.6*b*.

Приводим основные свойства обратных тригонометрических функций

1. **Область определения:**
$D(\arcsin) = D(\arccos) = [-1; 1]$,
$D(\operatorname{arctg}) = D(\operatorname{arcctg}) = \mathbb{R}$.

2. **Арксинус и арктангенс – нечетные функции:**
$\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$

3. **Для арккосинуса и арккотангенса имеют место следующие равенства**
$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$,
$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

Из определений прямой и обратной функций вытекают следующие свойства 4-11:

4. $\arcsin(\sin x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

5. $\sin(\arcsin x) = x, \quad -1 \le x \le 1$.

6. $\arccos(\cos x) = x, \quad 0 \le x \le \pi$.

7. $\cos(\arccos x) = x, \quad -1 \le x \le 1$.

8. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

9. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$.

10. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \quad 0 < x < \pi$.

11. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$.

В равенствах 12-17 $x, y \in [0; 1]$, а в равенствах 18-20 $x, y \in \mathbb{R}$.

12. $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

13. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

14. $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$.

15. $\arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2})$.

16. $\arccos x - \arccos y = \arccos(xy + \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2})$.

17. $\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})$.

18. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

19. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$.

20. $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x-y}{1+xy}$.

1. (98-9-20) Вычислите

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

A) $\frac{11\pi}{12}$ B) $\frac{7\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{12}$ D) $\frac{5\pi}{6}$

Решение: Используя свойства 2 и 3, преобразуем данное выражение следующим образом $\pi - \arccos\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$. Из таблицы 13.6$a$ – найдем значения $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ и $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Подставив эти значения в данное выражение, найдем $\frac{11\pi}{12}$. **Ответ:** $\frac{11\pi}{12}$ (A).

2. (98-2-22) Вычислите

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

A) -75^0 B) 75^0 C) -105^0 D) 105^0

3. (98-9-23) Вычислите

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

A) $\frac{7\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{13}{12}\pi$ D) $\frac{5\pi}{12}$

4. (99-8-68) Вычислите

$$2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A) $-\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) 0 D) $\frac{\pi}{3}$

5. (01-6-31) Вычислите

$$\sin(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

6. (98-3-57) Вычислите

$$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{8}\right) + \arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right).$$

A) $\frac{99\pi}{56}$ B) $\frac{83\pi}{56}$ C) $\frac{85\pi}{56}$ D) $\frac{69\pi}{56}$

Решение: 1) Из формулы $\sin\alpha = \sin(\pi-\alpha)$ получим

$$\sin\frac{5\pi}{8} = \sin(\pi - \frac{5\pi}{8}) = \sin\frac{3\pi}{8}.$$

Из соотношений

$$\arcsin(\sin\alpha) = \alpha,\ -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

и $-\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ следует

$$\arcsin(\sin\frac{5\pi}{8}) = \arcsin(\sin\frac{3\pi}{8}) = \frac{3\pi}{8}.$$

2) Согласно формуле $\cos\alpha = \cos(2\pi-\alpha)$ имеем

$$\cos\frac{8\pi}{7} = \cos(2\pi - \frac{8\pi}{7}) = \cos\frac{6\pi}{7}.$$

Из $\arccos(\cos\alpha) = \alpha,\ 0 \le \alpha \le \pi$ следует

$$\arccos(\cos\frac{8\pi}{7}) = \arccos(\cos\frac{6\pi}{7}) = \frac{6\pi}{7}.$$

Таким образом, значение данного выражения равно $\frac{3\pi}{8} + \frac{6\pi}{7} = \frac{69\pi}{56}$. **Ответ:** $\frac{69\pi}{56}$ (D).

7. (98-5-47) Вычислите

$$\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

A) 0 B) 1 C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. (99-7-46) Вычислите

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right).$$

A) $\sqrt{3}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $-\sqrt{3}$

9. (98-4-16) Вычислите

$$\arccos\left(\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

A) $1-(\frac{\pi}{8})^2$ B) $\frac{5\pi}{8}$ C) $\frac{7\pi}{8}$ D) $\frac{3\pi}{8}$

10. (98-10-104) Вычислите

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-\frac{3\pi}{5})) + \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{3\pi}{5})).$$

A) $-\frac{6\pi}{5}$ B) $-\frac{7\pi}{10}$ C) $\frac{4\pi}{5}$ D) $-\frac{4\pi}{5}$

11. (00-4-46) Найти значение выражения

$$\sin(2\,\mathrm{arctg}\,3).$$

A) 0,6 B) 0,8 C) 0,75 D) 0,36

Решение: Пусть $\alpha = \mathrm{arctg}\,3$. Тогда $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$ и

$$\sin 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot 3}{1+9} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Ответ: $0,6$ (A).

12. (99-2-25) Расставьте в порядке убывания числа

$$m = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2},\quad n = \arccos(-\frac{1}{2})\quad \text{и}\quad p = \mathrm{arctg}\,1.$$

A) $m > p > n$ B) $m > n > p$
C) $n > m > p$ D) $p > n > m$

13. (01-12-31) Какое выражение не имеет смысла?

1) $\sqrt{\lg\frac{11\pi}{8}}$; 2) $\sqrt{\sin\frac{19\pi}{12}}$; 3) $\log_{\sqrt{\frac{\pi}{3}}}\sqrt[3]{\frac{3\pi}{8}}$.

A) 1; 3 B) 3 C) 2 D) 1; 2

Решение: Так как $1 < \frac{11\pi}{8}$, то выражение 1) $\lg\frac{11\pi}{8}$ положительно. Поэтому $\sqrt{\lg\frac{11\pi}{8}}$ имеет смысл. Так как

$$\sin\frac{19\pi}{12} = \sin\left(2\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) < 0$$

корень в выражение 2) не существует. Так как $\sqrt[3]{\frac{3\pi}{8}} > 0$ выражение 3) $\log_{\sqrt{\frac{\pi}{3}}}\sqrt[3]{\frac{3\pi}{8}}$ имеет смысл.

Ответ: 2 (C).

14. (97-4-37) Укажите выражения, которые имеют смысл:

1) $\arcsin(\log_2 5)$; 2) $\arccos\frac{\pi}{\sqrt{17}}$.

3) $\arccos\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}$ 4) $\arcsin\frac{a^2+b^2+\sqrt{2}}{a^2+b^2+1}$.

A) 1; 2 B) 1; 3 C) 2; 3 D) 3; 4

15. (97-9-97) Укажите выражения, которые имеют смысл:

1) $\lg(\arccos 1)$; 2) $\arcsin(\lg\frac{1}{2})$

3) $\arccos\left(\frac{a^4+1}{(a^2+1)^2}\right)$ 4) $\arcsin(\sqrt[10]{2})$.

A) 1; 2 B) 2; 4 C) 3; 4 D) 2; 3

16. (01-9-19) Вычислите

$$\frac{\sin(\pi + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})}{\cos(0,5\pi + \arcsin\frac{1}{2})}.$$

A) $\sqrt{3}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. (97-9-30) Вычислите

$$\mathrm{arcctg}\,(\mathrm{ctg}\,(-3)).$$

A) $\pi+3$ B) $2\pi-3$ C) $\frac{2\pi}{3}-3$ D) $\pi-3$

Решение: Используя равенство $\mathrm{ctg}\,(-3) = -\,\mathrm{ctg}\,3$ и свойство 3, получим $\mathrm{arcctg}\,(\mathrm{ctg}\,(-3)) = \pi - \mathrm{arcctg}\,(\mathrm{ctg}\,3)$. Теперь используя неравенство $0 < 3 < \pi$ и свойство 10, имеем

$$\mathrm{arcctg}\,(\mathrm{ctg}\,(-3)) = \pi - \mathrm{arcctg}\,(\mathrm{ctg}\,3) = \pi - 3.$$

Ответ: $\pi - 3$ (D).

18. (96-7-60) Вычислите

$$\sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right).$$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ D) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$

19. (97-4-63) Вычислите

$$\sin\left(2\arccos\frac{1}{3}\right).$$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ D) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

20. (00-6-54) Найти значение выражения

$$\cos\left(2\arcsin\frac{2}{5}\right).$$

A) $\frac{9}{25}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{17}{25}$

21. (98-12-76) Вычислите

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right).$$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{8}{9}$ D) $\frac{3}{4}$

22. (01-1-47) Найти значение выражения

$$\mathrm{arctg}\,3 - \arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

A) 0 B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{4}$

23. (02-1-54) Вычислите

$$\cos(\mathrm{arctg}\,\sqrt{3} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

A) 1 B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 0

24. (02-2-50) Решить уравнение

$$\frac{\pi}{24}(8x+1) = \arccos(-\frac{1}{2}) + \arcsin\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,1.$$

A) 4 B) 6 C) 5 D) 2

25. (02-4-31) Вычислите

$$12\arcsin(-\frac{1}{2}) : \pi.$$

A) 0 B) −2 C) 2 D) 1

26. (02-4-32) Вычислить tg (arctg 3 + arctg 7).
A) 0 B) 0,5 C) −0,5 D) 0,25

Решение: Если положим $\text{arctg } 3 = \alpha$, $\text{arctg } 7 = \beta$, то по свойству 9 имеем $\text{tg } \alpha = 3$, $\text{tg } \beta = 7$. Тогда по 5-ой формуле сложения получим

$$\text{tg } (\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \text{ tg } \beta} = \frac{3+7}{1-3\cdot 7} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-0,5$ (C).

27. (02-7-19) Вычислите

$$\text{arcctg } 3 - \text{arctg } 2.$$

A) $-\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{2}$

28. (02-7-34) Вычислить $\text{tg } (\pi - \arcsin\frac{3}{5})$.
A) $-\frac{3}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$

29. (02-12-39) Вычислите

$$\cos\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right).$$

A) −0,28 B) 0,28 C) −0,26 D) 0,26

13.4 Тригонометрические уравнения

1. Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\text{tg } x = a$, $\text{ctg } x = a$ называются простейшими тригонометрическими уравнениями. При $|a| > 1$ уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$ не имеют решений. А уравнения $\text{tg } x = a$, $\text{ctg } x = a$ имеют решения при любых $a \in \mathbb{R}$. Теперь приведем формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

1. **Решение уравнения** $\sin x = a$, $|a| \le 1$: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Частные случаи уравнения $\sin x = a$ **(2-4):**

2. $\sin x = 0$, **решение** − $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
3. $\sin x = -1$, **решение** − $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
4. $\sin x = 1$, **решение** − $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
5. **Решение уравнения** $\cos x = a$, $|a| \le 1$: $x = \pm\arccos a + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$.

Частные случаи уравнения $\cos x = a$ **(6-8):**

6. $\cos x = 0$, **решение** − $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
7. $\cos x = -1$, **решение** − $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
8. $\cos x = 1$, **решение** − $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
9. **Решение уравнения** $\text{tg } x = a$, $x = \text{arctg } a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
10. **Решение уравнения** $\text{ctg } x = a$, $x = \text{arcctg } a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
11. **Решение уравнения** $\cos x = \cos y$, $y = \pm x + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
12. **Решение уравнения** $\sin x = \sin y$, $y = (-1)^n x + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
13. **Решение уравнения** $\text{tg } x = \text{tg } y$, $y = x + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
14. **Решение уравнения** $\text{ctg } x = \text{ctg } y$, $y = x + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
15. **Решение уравнения** $\sin^2 x = a$, $0 \le a \le 1$, $x = \pm\arcsin\sqrt{a} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
16. **Решение уравнения** $\cos^2 x = a$, $0 \le a \le 1$: $x = \pm\arccos\sqrt{a} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

1. (96-6-43) Решите уравнение

$$2\sin x = -1.$$

A) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
B) $-\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
C) $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
D) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Решение: Данное уравнение эквивалентно уравнению $\sin x = -0,5$. Здесь $a = -0,5 \in [-1;\ 1]$, поэтому уравнение имеет решение. Решение уравнения находим по формуле 1:

$$x = (-1)^k \arcsin(-0,5) + \pi k = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. (D).

2. (97-12-42) Решите уравнение

$$2\sin x = -\sqrt{3}.$$

A) $(-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k,\quad k \in \mathbb{Z}$
B) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\quad k \in \mathbb{Z}$
C) $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\quad k \in \mathbb{Z}$
D) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k,\quad k \in \mathbb{Z}$

3. (96-11-60) Решите уравнение

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

A) $\frac{\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z}$
C) $3\pi n, n \in \mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z}$

4. (96-12-44) Решите уравнение

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

A) $\frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{2}$
C) $\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}n, \quad n \in \mathbb{Z}$

5. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

A) $\frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{2}$
C) $\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}n, \quad n \in \mathbb{Z}$

6. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}.$$

A) $\frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{2}$
C) $\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}n, \quad n \in \mathbb{Z}$

7. (98-12-58) Решите уравнение

$$2\sin 2x = -1.$$

A) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$
B) $(-1)^{n}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$
C) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
D) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$

8. (96-3-58) Решите уравнение

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

A) $\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$ D) $\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

9. (97-1-53) Какое из следующих чисел не является корнем уравнения

$$\sin\frac{\pi x}{2} = 1?$$

A) 2005 B) 2010 C) 2001 D) 2009

10. (97-6-52) Какое из следующих чисел не является корнем уравнения

$$\cos\frac{\pi x}{2} = 1?$$

A) 2000 B) 2010 C) 2004 D) 2012

11. (97-4-40) Найдите корни уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ принадлежащие интервалу $(0; 2\pi)$.
A) $\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$ C) $\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$ D) $\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{6}$

Решение: По формуле 5 находим все корни уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из этих решений только $\frac{\pi}{4}$ (при $k = 0$) и $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$ (при $k = 1$) принадлежат интервалу $(0; 2\pi)$. **Ответ:** $\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$ (B).

12. (01-5-17) Сколько корней имеет уравнение

$$\sin\frac{\pi}{x} = 1$$

на отрезке $[0,05; 0,1]$?
A) 5 B) 1 C) 2 D) 3

13. (98-3-59) Сколько корней имеет уравнение

$$\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$$

на отрезке $[0; 2\pi]$?
A) 4 B) 8 C) 2 D) 1

14. (02-9-40) Сколько корней имеет уравнение

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = 0$$

на интервале $(1; 5)$?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

15. (03-5-43) Сколько корней имеет уравнение

$$\frac{|\cos x|}{\cos x} = \cos 2x - 1$$

на отрезке $[\pi; 2\pi]$?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

16. (98-11-102) Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg}\pi x^2 = \operatorname{tg}(\pi x^2 + 2\pi x).$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{4}$

Решение: По формуле 13 все решения данного уравнения имеют вид

$$\pi x^2 + 2\pi x = \pi x^2 + n\pi \Longleftrightarrow x = \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Положительные решения имеют вид $x = \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Так как наименьшее натуральное число 1, наименьший положительный корень $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$ (A).

17. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin^2\pi x = 1.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{4}$

18. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos x = \cos(2x+\pi)$.
A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) π D) 2π

19. (02-7-12) Решите уравнение

$$\sin(\pi\cos x) = 0.$$

A) $\frac{n\pi}{2},\quad n\in\mathbb{Z}$ B) $\pi+2n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{2}+n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$ D) $2n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$

20. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 3x$.
A) $\pi+2n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$ B) $n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{2}+n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$ D) $\frac{n\pi}{2},\quad n\in\mathbb{Z}$

2. Уравнения, решаемые с помощью формул сложения

21. Решите уравнение

$$\cos 3x\cdot\cos x + 1 = \sin 3x\cdot\sin x.$$

A) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$ D) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$

Решение: Данное уравнение эквивалентно уравнению

$$\cos 3x\cdot\cos x - \sin 3x\cdot\sin x = -1.$$

По формуле 3 пункта 13.11.3, это уравнение можно записать в виде $\cos 4x = -1$. Решение уравнения находим по формуле 7:

$$4x = \pi+2\pi n \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$ (A).

22. (96-3-60) Решите уравнение

$$\sin x\cdot\cos 2x + \cos x\cdot\sin 2x = 0.$$

A) $\frac{\pi n}{4},\quad n\in\mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi n}{3},\quad n\in\mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi n}{2},\quad n\in\mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi n}{5},\quad n\in\mathbb{Z}$

23. (96-10-28) Решите уравнение

$$\sin 5x\cdot\cos 2x = \cos 5x\cdot\sin 2x - 1.$$

A) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$
C) $-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

24. (96-11-10) Решите уравнение

$$\cos 2x\cdot\sin 3x + \sin 2x\cdot\cos 3x = \frac{1}{2}.$$

A) $(-1)^n\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{5}n,\quad n\in\mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{4}n,\quad n\in\mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{30}n,\quad n\in\mathbb{Z}$ D) $(-1)^n\frac{\pi}{30}+\frac{\pi}{5}n,\quad n\in\mathbb{Z}$

25. (96-12-53) Решите уравнение

$$\sin x\cdot\cos 3x + \cos x\cdot\sin 3x = 1.$$

A) $\frac{\pi}{2}n,\quad n\in\mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{8}+n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{5}n,\quad n\in\mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n,\quad n\in\mathbb{Z}$

26. (97-4-42) При каком из указанных значений k решения уравнения

$$\sin kx\cdot\cos x - \sin x\cdot\cos kx = 0$$

имеют вид $\frac{\pi n}{5},\quad n\in\mathbb{Z}$?
A) 5 B) 4 C) 6 D) 7

3. Уравнения, решаемые разложением на множители

27. (97-1-51) Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$(3\cos\pi x - \pi)\cdot(2\sin\pi x - \sqrt{3}) = 0.$$

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$

Решение: Корнями уравнения является совокупности корней уравнений

$$1)\ \cos\pi x = \frac{\pi}{3};\quad 2)\ \sin\pi x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1 – уравнение не имеет корней, так как $\frac{\pi}{3}>1$. Корни уравнения 2 по формуле 1 имеют вид

$$\pi x = (-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n \Longleftrightarrow x = (-1)^n\frac{1}{3}+n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

При $n=0$ имеем корень $x_0 = 1/3$, являющийся наименьшим положительным корнем уравнения. **Ответ:** $\frac{1}{3}$ (C).

28. (97-6-49) Найдите корень уравнения

$$\cos 2x\cdot\sin x - \cos 2x = 0.$$

принадлежащий промежутку $(90^0; 180^0]$.
A) 120^0 B) 135^0 C) 150^0 D) 180^0

29. (97-6-50) Сколько корней имеет уравнение

$$(3\sin\pi x - \pi)(2\cos\pi x - 1) = 0$$

на отрезке $[0;3]$?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

30. (97-6-54) Решите уравнение

$$\sqrt{\cos x}\cdot\sin x = 0.$$

A) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$ B) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$
C) $2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

31. (97-8-42) Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x \cdot \cos x = 0.$$

A) $2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

C) $\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

32. (97-12-63) Найдите корень уравнения

$$\cos x - \sin 2x \cos x = 0$$

принадлежащий отрезку $[0^0; 60^0]$.
A) 0^0 B) 30^0 C) 45^0 D) 15^0

33. (98-2-27) Найдите все значения b, для которых уравнение

$$\cos x + \cos(120^0 - x) = b$$

имеет решение.
A) $0 \le b \le 1$ B) $-1 \le b \le 1$
C) $-1 < b < 1$ D) $b \le 1$

Решение: Преобразовав сумму косинусов к произведению получим уравнение, равносильное данному уравнению:

$$2\cos 60^0 \cdot \cos(x - 60^0) = b \Longleftrightarrow \cos(x - 60^0) = b.$$

Это уравнение имеет решение только при $b \in [-1; 1]$. **Ответ:** $-1 \le b \le 1$ (B).

34. (98-9-25) При каких значениях k уравнение

$$\sin(60^0 + x) - \sin(60^0 - x) = k$$

имеет решение?
A) $k \in (-1; 1)$ B) $k \in [-1; 1]$
C) $k \le 1$ D) $k \le -1$

35. (02-7-18) Решите уравнение

$$\sin 5x + \sin 3x + \sin x = 0.$$

A) $\frac{\pi n}{3}; \quad \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
B) $\frac{n\pi}{3}; \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$
D) $\frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$

Решение: Преобразовав сумму синусов $\sin 5x + \sin x$ к произведению получим уравнение, эквивалентное данному уравнению $2\sin 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x = 0$ или $\sin 3x(2 \cdot \cos 2x + 1) = 0$. Решение этого уравнения состоит из совокупности решений уравнений

$$\sin 3x = 0 \quad \text{и} \quad \cos 2x = -\frac{1}{2}.$$

Эти уравнения являются простейшими тригонометрическими уравнениями, их решения находятся по формулам 2 и 5: $x = \frac{\pi n}{3}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **Ответ:** $\frac{\pi n}{3}$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. (A).

36. (00-10-57) Сколько корней имеет уравнение

$$\sin 2x + \sin 4x = 0$$

на отрезке $[0; 2\pi]$?
A) 0 B) 7 C) 4 D) 9

37. (02-1-61) Решите уравнение

$$\sin 6x + \sin 2x = \sin 4x.$$

A) $\frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
C) $-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi n}{4}, \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

38. (03-6-63) Найти наименьший острый угол, удовлетворяющий уравнению

$$\sin(2x + 45^0) = \cos(30^0 - x).$$

A) 25^0 B) 5^0 C) 45^0 D) 15^0

39. (98-1-59) Сколько корней имеет уравнение

$$\cos x \cdot \cos 4x - \cos 5x = 0$$

на отрезке $[0; \pi]$?
A) 1 B) 2 C) 4 D) 5

Решение: Применяя к $\cos 5x = \cos(x + 4x)$ формулу сложения (3 свойство пункта 13.2.3) и приводя подобные члены, получим уравнение $\sin x \cdot \sin 4x = 0$ равносильное данному уравнению. Из этого уравнения имеем $\sin x = 0$ и $\sin 4x = 0$. Они соответственно имеют решения $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. Так как при $n = 4k$ $x = \frac{\pi n}{4} = \pi k$, числа $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$ составляют полное решение данного уравнения. Теперь определим корни уравнения, лежащие на отрезке $[0; \pi]$:

$$0 \le x \le \pi \Longleftrightarrow 0 \le \frac{\pi n}{4} \le \pi \Longleftrightarrow 0 \le n \le 4.$$

Итак, значения $n = 0, 1, 2, 3, 4$ определяют 5 решений уравнения на отрезке $[0; \pi]$. **Ответ:** 5 (D).

40. (98-8-59) Сколько корней имеет уравнение

$$\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x$$

на отрезке $[0; 2\pi]$?
A) 5 B) 4 C) 3 D) 2

41. Найдите сумму корней уравнения

$$\sin(3x - 45^0) = 0$$

на интервале $(0; 180^0)$.
A) 135^0 B) 150^0 C) 210^0 D) 225^0

42. (02-1-19) Найдите сумму корней уравнения

$$\cos 4x \cdot \cos 5x = \cos 6x \cdot \cos 7x$$

на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$.
A) $\frac{41\pi}{22}$ B) $\frac{31\pi}{22}$ C) $\frac{30\pi}{11}$ D) $\frac{43\pi}{22}$

43. (02-10-60) Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{3\pi+x}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{9\pi+2x}{6}\right)=\frac{1}{4}.$$

A) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2};\quad n\in\mathbb{Z}$
B) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n;\quad n\in\mathbb{Z}$
C) $(-1)^{n}\frac{\pi}{3}+2\pi n;\quad n\in\mathbb{Z}$
D) $(-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi n}{2};\quad n\in\mathbb{Z}$

4. Уравнения, приводящиеся к уравнениям относительно одной трогонометрической функции

44. (97-1-46) Решите уравнение

$$2\cos^2(x-\pi)+3\sin(\pi+x)=0.$$

A) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ B) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$
C) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ D) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

Решение: Применяя формулы приведения

$$\cos(x-\pi)=-\cos x;\ \sin(\pi+x)=-\sin x,$$

данное уравнение запишем в виде

$$2\cos^2 x-3\sin x=0.$$

Для приведения этого уравнения к уравнению относительно одной трогонометрической функции воспользуемся тождеством $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$, в итоге имеем уравнение

$$2\sin^2 x+3\sin x-2=0.$$

Введем обозначение $\sin x=y$, тогда последнее уравнение примет вид квадратного уравнения $2y^2+3y-2=0$. Его корни $y_1=-2$ и $y_2=0,5$. Уравнение $\sin x=y_1=-2$ не имеет решения, так как $|-2|>1$. Корни уравнения $\sin x = y_2=0,5$ имеют вид

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: (B).

45. (97-11-45) Решите уравнение

$$2\sin^2(\pi-x)+5\sin(1,5\pi+x)=2.$$

A) $\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ D) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

46. (97-1-50) Найдите корень уравнения

$$2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=0$$

принадлежащий промежутку $(0^0;90^0]$.
A) 30^0 B) 45^0 C) 60^0 D) 90^0

47. (00-3-52) Найдите разность наибольшего и наименьшего корней уравнения

$$\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x=0$$

на отрезке $[0;2\pi]$.
A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) π D) $\frac{5\pi}{4}$

48. (02-3-79) Сколько корней имеет уравнение

$$\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}=2$$

на отрезке $[-2\pi;\pi]$?
A) 3 B) 5 C) 4 D) 6

49. (00-5-41) Решите уравнение

$$\cos 2x-5\sin x-3=0.$$

A) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$
B) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$
C) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$
D) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

Решение: Воспользовавшись тождеством $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$, данное уравнение запишем в виде

$$2\sin^2 x+5\sin x+2=0.$$

В этом уравнении обозначим $\sin x=y$ и получим квадратное уравнение $2y^2+5y+2=0$. Корни этого уравнения $y_1=-2$ и $y_2=-0,5$. Уравнение $\sin x = y_1 = -2$ не имеет решения, так как $|-2|>1$. Корни уравнения $\sin x=y_2=-0,5$ имеют вид

$$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: (B).

50. (02-11-43) Найдите сумму корней уравнения

$$3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0,$$

принадлежащих интервалу $(-90^0;180^0)$.
A) 90^0 B) 105^0 C) 180^0 D) 135^0

51. (02-11-44) Сколько корней имеет уравнение

$$\cos 2x+5\cos x=6$$

на отрезке $[-4\pi;4\pi]$?
A) 4 B) 5 C) 6 D) 8

52. (02-12-40) Найдите сумму корней уравнения

$$\cos 2x-2\sin^2 x=0$$

принадлежащих отрезку $[0;2\pi]$.
A) $3,5\pi$ B) $3\frac{1}{6}\pi$ C) 4π D) $4\frac{1}{6}\pi$

53. (03-4-25) Найдите сумму корней уравнения

$$1-\sin x-\cos 2x=0 \quad (x\in[0;2\pi]).$$

A) $3,5\pi$ B) $4,2\pi$ C) 4π D) $3,8\pi$

5. Уравнения, решаемые понижением степени

Формулами понижения степени являются:

- $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2} \iff 1-\cos 2x=2\sin^2 x.$
- $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2} \iff 1+\cos 2x=2\cos^2 x.$

54. (98-2-26) Решите уравнение

$$2\cos^2 x-1=-\frac{1}{2}.$$

A) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k; \quad k\in\mathbb{Z}$
B) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$
C) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$
D) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$

Решение: Воспользовавщись 2- формулой понижения степени, данное уравнение записываем в виде $\cos 2x=-0,5$. Последнее является простейшим тригонометрическим уравнением, его решение имеет вид

$$2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n \iff x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: (D).

55. (98-6-50) Решите уравнение

$$4\cos^2 2x-1=\cos 4x.$$

A) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, \quad n\in\mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi n}{2}, \quad n\in\mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, \quad n\in\mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}, \quad n\in\mathbb{Z}$

56. (96-9-50) Сколько корней имеет уравнение

$$4\sin\frac{x}{2}-\cos x+1=0$$

на отрезке $[0;2\pi]$?
A) 0 B) 2 C) 3 D) 1

57. (96-12-97) Сколько корней имеет уравнение

$$\sin\frac{x}{2}+\cos x-1=0$$

на отрезке $[0;2\pi]$?
A) 3 B) 4 C) 0 D) 2

58. (96-13-43) Сколько корней имеет уравнение

$$4\cos\frac{x}{2}+\cos x+1=0$$

на отрезке $[0;2\pi]$?
A) 1 B) 2 C) 0 D) 3

59. (98-11-99) Решите уравнение

$$2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x+\cos 2x.$$

A) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, \quad k\in\mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{4}+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi k}{2}, \quad k\in\mathbb{Z}$ D) $\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$

60. (01-1-48) Решите уравнение

$$4\sin^2 x(1+\cos 2x)=1-\cos 2x.$$

A) $\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ B) $\pi n; \pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$
C) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ D) $\pi n; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

Решение: По формуле 1 понижения степени имеем

$$2(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)=1-\cos 2x.$$

Перенесем все члены в левую часть и вынесем общий множитель $1-\cos 2x$ за скобки. Тогда получим уравнение

$$(1-\cos 2x)(1+2\cos 2x)=0.$$

Отсюда придем к простейшим тригонометрическим уравнениям $\cos 2x=1$ и $\cos 2x=-0,5$. Их корни имеют вид

$$x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}; \quad x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: (B).

61. (99-10-34) Решите уравнение

$$(1+\cos x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0.$$

A) $\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$ B) $\pi+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$
C) $2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$ D) $\pi+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$

62. (01-2-81) Найдите сумму корней уравнения

$$7\cos 2x-6=\cos 4x,$$

принадлежащих отрезку $[0;628]$.
A) 200π B) 199π C) 20100π D) 19900π

63. (02-6-44) Сколько корней имеет уравнение

$$3\sin 2x-2\cos 2x=2$$

на отрезке $[0;2\pi]$?
A) 5 B) 1 C) 2 D) 4

64. (03-10-41) Решите уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 4x=\sin^2 2x+\sin^2 3x.$$

A) $\frac{\pi n}{2}, \quad n\in\mathbb{Z}$
B) $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}, \quad n\in\mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}, \quad n\in\mathbb{Z}$
D) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi n}{2}, \quad n\in\mathbb{Z}$

6. При решении следующих уравнений обратите внимание на их области определения

65. (98-1-56) Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x}{\text{tg } x - 1} = 0.$$

A) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
C) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ D) πk, $k \in \mathbb{Z}$

Решение: Данное уравнение определено при условии

$$\text{tg } x - 1 \neq 0, \quad \cos x \neq 0.$$

Для того чтобы дробь равнялась нулю, необходимо, чтобы числитель был нулем, т.е. $\sin 2x = 0$. Это уравнение запишем в виде $2 \sin x \cos x = 0$. Отсюда имея ввиду $\cos x \neq 0$, получим $\sin x = 0$ или $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. В этих точках выполняется и условие $\text{tg } x - 1 \neq 0$. **Ответ:** πk, $k \in \mathbb{Z}$ (D).

66. (97-7-59) Сколько корней имеет уравнение

$$\frac{\sin^2 x + \sin x}{\cos x} = 0$$

на отрезке $[0; 4\pi]$?
A) 5 B) 4 C) 7 D) 2

67. (97-12-65) Сколько корней имеет уравнение

$$\frac{\cos^2 x - \cos x}{\sin x} = 0$$

на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$?
A) 6 B) 4 C) 3 D) 2

68. (98-9-26) Решите уравнение

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 2 \text{ tg }^2 x.$$

A) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ B) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
C) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ D) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

69. (99-1-44) Найдите корень уравнения

$$\text{ctg}\,(x+1) \cdot \text{tg}\,(2x-3) = 1$$

принадлежащий отрезку $[\pi; 2\pi]$.
A) 4 B) 2 C) 3 D) 5

70. (00-4-47) Найдите сумму корней уравнения

$$\sqrt{1 - \cos x} = \sin x$$

на отрезке $[\pi; 3\pi]$.
A) 2π B) 5π C) 6π D) $4,5\pi$

71. (98-10-105) Сколько корней имеет уравнение

$$\frac{1 + \cos x}{\sin x} = \cos \frac{x}{2}$$

на отрезке $[0; 2\pi]$?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

72. (01-2-32) Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\sin 3x - 2 \sin x} = \text{tg } x.$$

A) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$, $n \in \mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$

73. (01-6-30) Найдите сумму корней уравнения

$$\text{tg }^2 x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0$$

на отрезке $[0; 4\pi]$.
A) 7π B) $7\frac{2}{3}\pi$ C) 8π D) $7\frac{1}{3}\pi$

Решение: Данное уравнение определено при $\cos x \neq 0$. Воспользовавшись тождеством $1 + \text{tg }^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, запишем его в виде

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\cos x} = 0 \iff \frac{1 - 2\cos x}{\cos^2 x} = 0.$$

Отсюда $\cos x = 0,5$, а решение этого уравнения $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из этих решений только 4 лежат на $[0; 4\pi]$: $\frac{\pi}{3}$; $2\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $4\pi - \frac{\pi}{3}$. Их сумма равна 8π. **Ответ:** 8π (C).

74. (01-10-37) Сколько корней имеет уравнение

$$\cos 4x + \frac{10 \text{ tg } x}{1 + \text{tg }^2 x} = 3$$

на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

75. (01-11-21) Решите уравнение

$$\text{tg } x \text{ tg } 3x = -1.$$

A) $\frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$ B) πk, $k \in \mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

76. (98-3-58) Сколько корней имеет уравнение

$$\frac{\cos 2x}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x} = 0$$

на отрезке $[0; 4\pi]$?
A) 8 B) 6 C) 4 D) 2

77. (03-7-39) Решите уравнение

$$\sqrt{\cos 2x + \sqrt{3} \sin x} = -2 \cos x.$$

A) $\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

B) $\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

C) $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$

D) $(-1)^k\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

7. Уравнения вида $\sin^m x+\cos^n x=1$

Если в уравнении

$$\sin^m x+\cos^n x=1 \qquad (13.1)$$

$m>2,\quad n>2$ или $0<m<2,\quad 0<n<2$, то уравнение (13.1) эквивалентно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\sin^m x=1\\ \cos^n x=1.\end{array}\right. \qquad (13.2)$$

78. Решите уравнение

$$\sin^{2011}x+\cos^{2011}x=1.$$

A) $\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$
B) $\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$
C) $2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$
D) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

Решение: Данное уравнение имеет вид (13.1) и $m=n=2011$. В этом случае совокупность (13.2) имеет вид

$$\left[\begin{array}{l}\sin^{2011}x=1\\ \cos^{2011}x=1.\end{array}\right.$$

Так как 2011 нечетное натуральное число, уравнение $\sin^{2011}x=1$ эквивалентно уравнению $\sin x=1$, а $\cos^{2011}x=1$ уравнению $\cos x=1$. По 4- и 8- формулам 13.4, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ и $x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ являются решениями данного уравнения. **Ответ:** $\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ (A).

79. (97-9-32) Решите уравнение

$$\sin^{1993}x+\cos^{1993}x=1.$$

A) $\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$
B) $2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$
C) $2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$
D) $\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

80. Сколько корней имеет уравнение

$$\cos^{2012}x+\sin^{2011}x=1$$

на отрезке $[-\pi;\pi]$?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

81. (00-9-59) Сколько корней имеет уравнение

$$\cos^4 x+\sin^3 x=1$$

на отрезке $[-\frac{3\pi}{2};2\pi]$?
A) 4 B) 8 C) 6 D) 7

82. (01-4-5) Найдите сумму корней уравнения

$$\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}=1$$

на отрезке $[-3\pi;\pi]$.
A) -3π B) -2π C) $-\pi$ D) $\frac{3}{2}\pi$

Решение: Данное уравнение имеет вид (13.1) и $m=n=0,5$. Это уравнение эквивалентно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{\sin x}=1\\ \sqrt{\cos x}=1\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \cos x=1.\end{array}\right.$$

Все решения совокупности имеют вид $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. Теперь определим все решения уравнения на отрезке $[-3\pi;\pi]$. Для этого найдем целые числа, удовлетворяющие неравенству

$$-3\pi\le\frac{\pi}{2}+2\pi n\le\pi\Longleftrightarrow-3\le\frac{1}{2}+2n\le 1.$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству $-1,75\le n\le 0,25$. Целые числа, удовлетворяющие этому неравенству -1 и 0. Точно также решениями неравенств $-3\pi\le 2\pi n\le\pi$ или $-3\le 2n\le 1$ являются $n=-1$ и $n=0$. Итак, корнями данного уравнения, принадлежащими отрезку $[-3\pi;\pi]$ являются $-\frac{3\pi}{2};\ \frac{\pi}{2};\ -2\pi;\ 0$.

Их сумма равна $-\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+(-2\pi)+0=-3\pi$.

Ответ: -3π (A).

83. (03-10-44) Найдите разность наибольшего и наименьшего корней уравнения

$$\sin^5 x+\cos^6 x=1$$

на отрезке $[-\frac{7\pi}{4};\frac{5\pi}{4}]$.
A) 2π B) $1,5\pi$ C) $3,5\pi$ D) $2,5\pi$

84. (97-1-61) Сколько корней имеет уравнение $\sin x+\cos x=1$ на отрезке $[-\pi;\ 2\pi]$?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

85. (97-6-61) Сколько корней имеет уравнение $\sin x+\cos x=1$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

8. Разные уравнения

86. (98-5-50) Решите уравнение

$$4^{\cos^2 x+2\cos x}=1.$$

A) $\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$
C) $\pi n; -\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ D) $2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

Решение: Запишем уравнение в виде $4^{\cos^2 x+2\cos x}=4^0$. Это уравнение эквивалентно

$$\cos^2 x+2\cos x=0\Longleftrightarrow(\cos x+2)\cos x=0.$$

Так как $\cos x+2\ge 1$, остается $\cos x=0$, его решение $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$ (B).

87. (99-7-48) Решите уравнение

$$5\cdot 5^{\sin^2 x+\cos 2x}=\frac{1}{25}.$$

A) $\emptyset$ B) $\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ D) $2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

88. (97-3-58) Решите уравнение

$$2^{1-\log_2\sin x}=4.$$

A) $\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ n\in\mathbb{Z}$ B) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$
C) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

89. (97-7-58) Решите уравнение

$$3^{1+\log_3\operatorname{ctg} x}=\sqrt{3}.$$

A) $\frac{\pi}{6}+\pi n;\quad n\in\mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$

90. (02-9-36) Решите уравнение

$$9^{\cos x}+2\cdot 3^{\cos x}=15.$$

A) $\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ B) $2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$

91. (03-5-41) Решите уравнение

$$8^{\sin^2 x}-2^{\cos^2 x}=0$$

A) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$
C) $-\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

92. Сколько корней имеет уравнение

$$2x+\operatorname{tg} x=0$$

на отрезке $[-2\pi;\ 2\pi]$?
A) 5 B) 2 C) 4 D) 6

93. (99-2-37) При каких значениях a уравнение

$$\log_a \sin x=1$$

имеет решение?
A) $a\in[-1;1]$ B) $a\in(-1;1)$
C) $a\in(0;1]$ D) $a\in(0;1)$

94. (03-12-61) При каких значениях a уравнение

$$\sin^6 x+\cos^6 x=a$$

имеет решение?
A) $[0;1]$ B) $[0,5;1]$
C) $[0,25;0,5]$ D) $[0,25;1]$

13.5 Тригонометрические неравенства

Неравенства вида $\sin x\ge a$, $\cos x\ge a$, $\operatorname{tg} x\ge a$, $\operatorname{ctg} x\ge a$ называются *простейшими тригонометрическими неравенствами*. Здесь вместо знака $\ge$ может стоять любой из знаков $>$, $\le$ или $<$. Мы будем рассматривать неравенства, которые с помощью тождественных преобразований приводятся к простейшим тригонометрическим неравенствам или системам таких неравенств. Приведем решения простейших тригонометрических неравенств.

1. **Решение неравенства** $\sin x\ge a,\ -1\le a\le 1$
$2n\pi+\arcsin a\le x\le-\arcsin a+(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

2. **Решение неравенства** $\sin x\le a,\ -1\le a\le 1$
$(2n-1)\pi-\arcsin a\le x\le \arcsin a+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

3. **Решение неравенства** $\cos x\ge a,\ -1\le a\le 1$
$2n\pi-\arccos a\le x\le\arccos a+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

4. **Решение неравенства** $\cos x\le a,\ -1\le a\le 1$
$2n\pi+\arccos a\le x\le 2(n+1)\pi-\arccos a,\ n\in\mathbb{Z}$.

5. **Если** $a>1$, **то неравенства** $\sin x\ge a$ **и** $\cos x\ge a$ **не имеют решения.**

6. **Если** $a<-1$, **то неравенства** $\cos x\le a$ **и** $\sin x\le a$ **не имеют решения.**

7. **Если** $a\ge 1$, **то решением неравенств** $\sin x\le a$ **и** $\cos x\le a$ **является множество всех действительных чисел, т.е.** $x\in\mathbb{R}$.

8. **Если** $a\le -1$, **то решением неравенств** $\sin x\ge a$ **и** $\cos x\ge a$ **является множество всех действительных чисел, т.е.** $x\in\mathbb{R}$.

9. **Решение неравенства** $\operatorname{tg} x\ge b$,
$\operatorname{arctg} b+n\pi\le x<\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

10. **Решение неравенства** $\operatorname{tg} x\le b$,
$-\frac{\pi}{2}+\pi n<x\le\operatorname{arctg} b+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

11. **Решение неравенства** $\operatorname{ctg} x\ge b$,
$n\pi<x\le\operatorname{arcctg} b+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

12. **Решение неравенства** $\operatorname{ctg} x\le b$,
$\operatorname{arcctg} b+n\pi\le x<\pi+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

Если неравенства строгие, то в решениях вместо знаков $\le$, $\ge$ ставятся знаки $<$, $>$.

1. (97-6-47) Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{2\sin x-1}.$$

A) $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right),\quad n\in\mathbb{Z}$
B) $[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n],\quad n\in\mathbb{Z}$
C) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\quad n\in\mathbb{Z}$
D) $[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n],\quad n\in\mathbb{Z}$

Решение: функция $y = \sqrt{2\sin x - 1}$ определена при $2\sin x - 1 \geq 0$. Это неравенство запишем в виде

$$\sin x \geq \frac{1}{2}.$$

По формуле 1 его решение

$2\pi n + \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **Ответ:** (B).

2. (96-9-51) При каких значениях x ($x \in [0; 2\pi]$) справедливо неравенство $\sin^2 x - \frac{5}{2}\sin x + 1 < 0$?

A) $[0; \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6}; 2\pi]$ B) $(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$
C) $(0; \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2\pi}{3}; 2\pi]$ D) $[0; \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2\pi}{3}; 2\pi]$

3. (99-1-43) Решите неравенство

$$2\sin x \geq \sqrt{2}.$$

A) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
B) $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
D) $\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

4. (96-9-105) Решите неравенство

$$2\sin 2x \geq \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}.$$

A) $[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n], \quad n \in \mathbb{Z}$
B) $(\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{5\pi}{12} + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$
C) $[\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{5\pi}{12} + \pi n], \quad n \in \mathbb{Z}$
D) $[\frac{\pi}{12} + 2\pi n; \frac{5\pi}{12} + 2\pi n], \quad n \in \mathbb{Z}$

5. (97-9-101) Решите неравенство

$$\sin x \cdot \cos x > \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

A) $\frac{\pi}{8} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{8} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
B) $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{8} + \pi k < x < \frac{3\pi}{8} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
D) $\frac{\pi}{8} + \pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

6. (98-5-51) Решите неравенство

$$\sin 5x \cdot \cos 4x + \cos 5x \cdot \sin 4x > \frac{1}{2}.$$

A) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
B) $\frac{\pi}{54} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{54} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi}{36} + \frac{2\pi n}{9} < x < \frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi n}{9}, \quad n \in \mathbb{Z}$
D) $\frac{\pi}{54} + \frac{2\pi n}{9} < x < \frac{5\pi}{54} + \frac{2\pi n}{9}, \quad n \in \mathbb{Z}$

7. (98-8-60) Решите неравенство

$$1 - 2\sin 4x < \cos^2 4x.$$

A) $(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$
B) $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$
C) $(\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}), \quad k \in \mathbb{Z}$
D) $(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$

Решение: Если воспользуемся тождеством $\cos^2 4x = 1 - \sin^2 4x$, то данное неравенство можно записать в виде

$$1 - 2\sin 4x < 1 - \sin^2 4x \iff \sin 4x(\sin 4x - 2) < 0.$$

По формуле 7 для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $\sin 4x - 2 < 0$, поэтому данное неравенство равносильно неравенству $\sin 4x > 0$. По формуле 1 его решение $2\pi n < 4x < \pi(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Разделив все части этого неравенства на 4 получим $\frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **Ответ:** (C).

8. (98-1-60) Решите неравенство

$$1 - 2\cos 2x > \sin^2 2x.$$

A) $(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$
B) $(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$
C) $(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$
D) $(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$

9. (98-12-59) Решите неравенство

$$\sin^2 3x - \cos^2 3x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A) $\left[-\frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}\right], \quad n \in \mathbb{Z}$
B) $\left(-\frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}\right), \quad n \in \mathbb{Z}$
C) $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z}$
D) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z}$

10. (99-3-38) Решите неравенство

$$4\cos^2 x - 3 \geq 0.$$

A) $[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k], \quad k \in \mathbb{Z}$
B) $[-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k], \quad k \in \mathbb{Z}$
C) $[-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k], \quad k \in \mathbb{Z}$
D) $[-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k], \quad k \in \mathbb{Z}$

11. (99-7-49) Решите неравенство

$$\cos 5x \cdot \cos 4x + \sin 5x \cdot \sin 4x < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A) $\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

B) $\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{11\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

C) $\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

D) $\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{11\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

12. (96-12-111) При каких значениях x ($x\in[0;2\pi]$) справедливо неравенство

$$\cos^2 x-\frac{5}{2}\cos x+1>0?$$

A) $[0;\frac{\pi}{3}]\cup(\frac{5\pi}{3};2\pi]$ B) $(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{3})$

C) $(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3})$ D) $(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}]$

Решение: Обозначим $\cos x=y$, тогда данное неравенство примет вид

$$y^2-2,5y+1>0\iff(y-0,5)(y-2)>0.$$

Вернувшись к исходной переменной, получим неравенство, равносильное данному

$$(\cos x-0,5)(\cos x-2)>0.$$

По формуле 7 для всех $x\in\mathbb{R}$ справедливо неравенство $\cos x-2<0$, поэтому данное неравенство равносильно

$$\cos x-0,5<0\iff\cos x<\frac{1}{2}.$$

По формуле 4 решение этого неравенства $2\pi n+\frac{\pi}{3}<x<2\pi(n+1)-\frac{\pi}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. Если возьмем $n=0$, то интервал $(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3})$ является частью отрезка $[0;2\pi]$. Если $n\neq0$, то интервал $(2\pi n+\frac{\pi}{3};2\pi(n+1)-\frac{\pi}{3})$ не имеет общих точек с отрезком $[0;2\pi]$. **Ответ:** $(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3})$ (C).

13. (96-13-26) При каких значениях x ($x\in[0;2\pi]$) справедливо неравенство

$$\cos^2 x-\frac{5}{2}\cos x+1\le 0?$$

A) $[0;\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{5\pi}{3};2\pi]$ B) $[0;\frac{\pi}{3}]$

C) $[\frac{5\pi}{3};2\pi]$ D) $[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{3}]$

14. (97-4-41) Решите неравенство

$$\cos^2 x<\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin^2 x.$$

A) $\frac{\pi}{8}+2\pi n<x<\frac{7\pi}{8}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

B) $\frac{\pi}{8}+\pi n<x<\frac{7\pi}{8}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

C) $-\frac{\pi}{8}+2\pi n<x<\frac{\pi}{8}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

D) $\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{7\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

15. (98-6-55) Найдите решение неравенства

$$\cos 2x\le-\frac{1}{2}$$

на отрезке $[0;\pi]$.

A) $[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}]$ B) $[0;\frac{2\pi}{3}]$

C) $[-\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}]$ D) $[\frac{4\pi}{3};2\pi]$

16. (00-3-55) Сколько целых решений имеет неравенство

$$-1-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos x>0$$

на отрезке $[-\pi;\pi]$?

A) 4 B) 3 C) 6 D) 2

17. (00-6-56) Решите неравенство

$$\cos x<\sin x.$$

A) $(\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k),\quad k\in\mathbb{Z}$

B) $(\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{5\pi}{4}+\pi k),\quad k\in\mathbb{Z}$

C) $(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi k),\quad k\in\mathbb{Z}$

D) $(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{5\pi}{4}+2\pi k),\quad k\in\mathbb{Z}$

18. (96-1-59) Решите неравенство

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ge 1.$$

A) $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right],\quad k\in\mathbb{Z}$

B) $[\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k),\quad k\in\mathbb{Z}$

C) $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right],\quad k\in\mathbb{Z}$

D) $\left[\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right),\quad k\in\mathbb{Z}$

19. (96-12-91) При каких значениях x ($x\in[0;\ 2\pi]$) определена функция

$$y=\sqrt{1-\log_{\frac{1}{2}}\cos x}?$$

A) $[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2})$ B) $(\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{3}]$

C) $[0;\frac{\pi}{3}]$ D) $[0;\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{5\pi}{3};2\pi]$

20. (96-13-34) Определите все значения x из отрезка $[0;2\pi]$, входящих в область определения функции

$$y=\sqrt{1+\log_{\frac{1}{2}}\sin x}.$$

A) $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ B) $\left(0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};\pi\right)$

C) $\left(0;\frac{\pi}{6}\right]$ D) $(0;\pi)$

21. (01-4-3) Определите все значения x из отрезка $[-\pi;\pi]$, входящих в область определения функции $y=\arccos(2\sin x)$.)

A) $[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}]$ B) $[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$ C) $[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}]$

D) $[-\pi;-\frac{5\pi}{6}]\cup[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{5\pi}{6};\pi]$

22. (01-10-39) Решите неравенство

$$\sin 2x < \cos 2x.$$

A) $(-\frac{3\pi}{8} + 2\pi n; \frac{\pi}{8} + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$
B) $(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$
C) $(-\frac{\pi}{8} + \pi n; \frac{\pi}{8} + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$
D) $(-\frac{3\pi}{8} + \pi n; \frac{\pi}{8} + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$

23. (01-11-22) Вычислите сумму наибольшего и наименьшего решений неравенства

$$2^{\frac{1}{2}} \le 2^{\sin x} \le 2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

на отрезке $[0; 2\pi]$.

A) $\frac{2\pi}{3}$ B) π C) $\frac{4\pi}{5}$ D) $\frac{\pi}{2}$

24. (02-1-62) Решите неравенство

$$\cos(\sin x) < 0.$$

A) $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$
B) $(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{3\pi}{2} + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$
C) $(0; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$
D) не имеет решения.

Решение: Как известно, для всех $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \in [-1; 1]$. А косинус положителен при $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Итак, при любом $t = \sin x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ справедливо $\cos(\sin x) = \cos t > 0$. Отсюда следует, что данное неравенство не имеет решения. **Ответ:** не имеет решения. (D).

25. (02-6-45) Решите неравенство

$$\sin x > \sqrt{3} \cdot \cos x.$$

A) $(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$
B) $(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$
C) $(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$
D) $(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$

26. (02-8-19) Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\log_3 \sin x}.$$

A) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
C) $(0; 1)$ D) $(0; \pi)$

27. (02-10-62) Решите неравенство

$$\sqrt{\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4}} \ge \frac{1}{2}.$$

A) $[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n] \cup \{2\pi n\}, \quad n \in \mathbb{Z}$
B) $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n] \cup \{2\pi n\}, \quad n \in \mathbb{Z}$
C) $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n] \cup \{2\pi n\}, \quad n \in \mathbb{Z}$
D) $[\frac{2\pi}{3} + \pi n; \frac{7\pi}{6} + \pi n], \quad n \in \mathbb{Z}$

28. (03-2-31) Решите неравенство

$$\cos(\pi \sin x) > 0.$$

A) $\left(\pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$
B) $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$
C) $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$
D) $\left(\pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$

13.6 Задачи различного типа

1. **Область определения функции $y = \arcsin x$ – отрезок $[-1; 1]$, а область значений - $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Функция $y = \arcsin x$ возрастает на $[-1; 1]$.**

2. **Область определения функции $y = \arccos x$ – отрезок $[-1; 1]$, а область значений - $[0; \pi]$. Функция $y = \arccos x$ убывает на $[-1; 1]$.**

3. **Область определения функции $y = \operatorname{arctg} x$ – множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$, а область значений - $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает на $(-\infty; \infty)$.**

4. **Область определения функции $y = \operatorname{arcctg} x$ – множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$, а область значений - $(0; \pi)$. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ убывает на $\mathbb{R}$.**

5. $\arcsin a > \arcsin b \iff \begin{cases} a > b \\ b \ge -1 \\ a \le 1. \end{cases}$

6. $\arccos a > \arccos b \iff \begin{cases} a < b \\ a \ge -1 \\ b \le 1. \end{cases}$

7. $\operatorname{arctg} a > \operatorname{arctg} b \iff a > b.$

8. $\operatorname{arcctg} a > \operatorname{arcctg} b \iff a < b.$

1. (98-6-51) Решите неравенство

$$\arcsin x < \arcsin(1 - x).$$

A) $[0; \frac{1}{2})$ B) $[-1; 1]$ C) $(-\infty; \frac{1}{2}]$ D) $[0; 2]$

Решение: По 5- неравенству данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x < 1 - x \\ -1 \le x \le 1 \\ -1 \le 1 - x \le 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x < 1 \\ -1 \le x \le 1 \\ 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Ее решение промежуток $0 \le x < \frac{1}{2}$.

Ответ: $[0; \frac{1}{2})$ (A).

2. (98-6-53) Найдите наименьшее положительное решение уравнения

$$\arcsin(2\sin x) = \frac{\pi}{2}.$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5\pi}{6}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\pi}{6}$

3. (98-11-30) Сколько решений имеет уравнение

$$\operatorname{arctg}|x| = -\frac{\pi}{6}?$$

A) 1 B) 0 C) 2 D) бесконечно много

4. (98-11-74) Решите неравенство

$$\arccos x > \arccos x^2.$$

A) $(0;1)$ B) $[-1;0)$
C) $[-1;1]$ D) $(-\infty;0)\cup(1;\infty)$

5. (00-1-33) Найдите сумму решений уравнения

$$2(\arccos x)^2 + \pi^2 = 3\pi\arccos x.$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) -1 C) 1 D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. (01-4-4) Найдите середину отрезка, для которого справедливо неравенство

$$\arccos^2 x - \frac{5\pi}{6}\cdot\arccos x + \frac{\pi^2}{6} \le 0.$$

A) 0,5 B) 0,4 C) 0,25 D) $\frac{\pi}{4}$

Решение: Разложим на множители левую часть данного неравенства:

$$(\arccos x - \frac{\pi}{3})(\arccos x - \frac{\pi}{2}) \le 0.$$

Решаем это неравенство методом интервалов. Имеем

$$\frac{\pi}{3} \le \arccos x \le \frac{\pi}{2}.$$

Из убывания косинуса на $[0;\frac{\pi}{2}]$ получим

$$\cos\frac{\pi}{3} \ge x \ge \cos\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \ge x \ge 0.$$

Итак, решение данного неравенства отрезок $[0;\frac{1}{2}]$.

Середина этого отрезка 0,25. **Ответ:** 0,25 (C).

7. (01-5-18) Сколько корней имеет уравнение

$$x\cdot\operatorname{arctg} x = 1?$$

A) 2 B) 1 C) 0 D) 3

8. (01-5-19) Сколько корней имеет уравнение

$$\cos(10\operatorname{arctg} x) = 1?$$

A) 5 B) бесконечно много C) 1 D) 3

9. (01-9-14) Найдите произведение корней уравнения

$$4\operatorname{arctg}(x^2 - 3x + 3) - \pi = 0.$$

A) 2 B) 3 C) -3 D) 1

10. (01-12-27) Решите неравенство

$$\lg(\arcsin x) > -1.$$

A) $(0;\frac{\pi}{2}]$ B) $[\sin 0,1;\ 1]$
C) $(\sin 0,1;\ 1)$ D) $(\sin 0,1;\ 1]$

11. (00-10-25) Сколько корней имеет уравнение

$$\operatorname{arctg}|x| = \frac{\pi}{2}?$$

A) 2 B) 1 C) 0 D) бесконечно много

12. (02-4-37) Найдите наибольшее значение x, удовлетворяющее неравенству $\operatorname{arctg} x < 0$.

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1

13. (99-8-35) Найдите множество значений функции $y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$.

A) $[0;\pi]$ B) $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$
C) $[\frac{\pi}{2}-1;\frac{\pi}{2}+1]$ D) $[0;\frac{\pi}{2}]$

Решение: По 1-свойству множество значений функции $y = \arcsin x$ – отрезок $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. Поэтому множеством значений функции $y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$ является отрезок $[0;\pi]$. **Ответ:** $[0;\pi]$ (A).

14. (98-6-49) Расположите в порядке возрастания числа $x = \arccos 0,9$; $y = \arccos(-0,7)$; $z = \arccos(-0,2)$.

A) $y < z < x$ B) $x < y < z$
C) $y < x < z$ D) $x < z < y$

15. (07-156-36) Найдите значение $\cos(2\arccos\frac{4}{5})$.

A) $\frac{7}{25}$ B) $\frac{24}{25}$ C) $-\frac{24}{25}$ D) $-\frac{7}{25}$

16. (07-158-36) Найдите значение $\cos(2\arccos\frac{4}{9})$.

A) $\frac{49}{81}$ B) $\frac{8}{9}$ C) $-\frac{49}{81}$ D) $-\frac{8}{9}$

17. (99-3-30) Найдите область определения функции

$$y = \arcsin\frac{x-3}{2} - \lg(4-x).$$

A) $[1;4]$ B) $[1;5]$ C) $(1;4)$ D) $[1;4)$

Решение: Область определения функции $y = \arcsin x$ – отрезок $[-1;1]$, а функции $y = \lg x$ – интервал $(0;\infty)$. Поэтому областью определения данной функции является решение системы

$$\begin{cases} -1 \le \frac{x-3}{2} \le 1 \\ 4 - x > 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является $[1;4)$. **Ответ:** $[1;4)$ (D).

18. (99-8-73) Найдите область определения функции

$$y = \arcsin \frac{x^3}{8}.$$

A) $[-2;2]$ B) $[-1;1]$ C) $(-2;2)$ D) $[1;2]$

19. (99-10-41) Найдите область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x+0,2}}{\arccos x}.$$

A) $(-0,2;1)$ B) $(-0,2;1]$
C) $[-0,2;1]$ D) $[-0,2;1)$

20. (03-6-62) Найдите область определения функции

$$y = \arcsin \frac{2}{2+\sin x}.$$

A) $-\pi + 2\pi k \le x \le \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
B) $x \le \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
C) $x > 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
D) $2\pi k \le x \le \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

21. (03-6-67) Найдите область определения функции

$$y = \arccos|x-2|.$$

A) $1 \le x \le 3$ B) $x > 1$
C) $x < 3$ D) $2 \le x \le 3$

22. (03-7-58) Найдите область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\lg(x+5)^2} + \frac{1}{\arccos(x+3)}.$$

A) $(-4;-2]$ B) $(-\infty;2)\cup[3;\infty)$
C) $(-\infty;-3)\cup(-3;2]$ D) $(-4;-2)$

23. (02-4-35) Найдите наименьшее значение абсцисс точек пересечения графика функции $y = (x-10)\,\mathrm{arctg}\, x$ с осью Ox.
A) -2 B) -1 C) 0 D) 1

Решение: Ординаты точек на оси Ox равны нулю, т.е. $y = 0$. Поэтому решим уравнение $(x-10)\,\mathrm{arctg}\, x = 0$. Его корни находятся из $x - 10 = 0$ и $\mathrm{arctg}\, x = 0$. Итак, данное уравнение имеет корни $x_1 = 10$, $x_2 = 0$. Меньший из них $x = 0$. **Ответ:** 0 (C).

24. (02-7-5) Сколько целых значений x принадлежит области определения функции
$y = \arcsin(3x-7)$?
A) 2 B) 3 C) 1 D) 4

25. (02-11-48) Сколько целых значений x принадлежит области определения функции
$y = \arccos(\log_3 x - 1)$?
A) 12 B) 9 C) 8 D) 7

14 Производная и интеграл

Непрерывность функции, производная и интеграл тесно связаны с понятием предела функции. Поэтому приведем понятие предела. Пусть нам дана функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ и точка $x_0 \in (a;b)$. Если для произвольного $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in [a;b]$ удовлетворяющих $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят функция f имеет предел A при $x \to x_0$ и пишут:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция f называется *непрерывной в точке* x_0. Если функция непрерывна во всех точках области определения, то она называется *непрерывной*. Примеры непрерывных функций: $y = ax + b$ – линейная функция, $y = ax^2 + bx + c$ – квадратная функция, произвольный многочлен $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, показательная функция $y = a^x$, логарифмическая функция $y = \log_a x$ и тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$. Функция знака

$$y = signx = \begin{cases} -1 & \text{если} \quad x < 0 \\ 0 & \text{если} \quad x = 0 \\ 1 & \text{если} \quad x > 0. \end{cases}$$

Эта функция имеет разрыв только в одной точке $x = 0$, во всех остальных точках непрерывна. Функции целой части $x - y = [x]$ и дробной части $x - y = \{x\}$ разрывны в точках, соответствующих целым числам. Теперь дадим определение понятия производной. Пусть x и $x + \Delta x$ принадлежат отрезку $[a;b]$. Если отношение

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

имеет конечный предел при $\Delta x \to 0$, тогда говорят, что функция f *имеет производную в точке* x и записывают следующим образом:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Производная широко применяется в математике, механике и физике. Теперь приведем таблицу производных для элементарных функций и основные правила вычисления производной.

14.1 Производные элементарных функций

Таблица производных

1. $c' = 0, \quad c = const.$
2. $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}.$
3. $x' = 1, \; (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \; (\dfrac{1}{x})' = -\dfrac{1}{x^2}.$
4. $(|x|)' = \dfrac{|x|}{x}, \quad x \ne 0.$

5. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x.$

6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

7. $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$

8. $(\text{tg } x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad (\text{ctg } x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

Производная суммы и разности

9. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x).$

10. $(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x),$ C- **константа.**

1. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = 2x + 3$.
A) 1 B) 2 C) 0 D) 5
Решение: По правилам 9 и 10
$$f'(x) = (2x+3)' = 2x' + 3'.$$
Теперь воспользуемся формулами 1 и 3: $f'(x) = 2 \cdot 1 + 0 = 2$. **Ответ:** 2 (B).

2. Вычислите $f'(x)$, если $f(x) = 2x^2 + 3x + 7$.
A) $2x+3$ B) $4x+3$ C) $4x$ D) 3

3. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x}$.
A) $2x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ B) $2x + \sqrt{x}$ C) x D) $2x + x^{-1/2}$

4. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = -\dfrac{2}{x}$.
A) $2x^{-2}$ B) $\dfrac{-2}{x^2}$ C) $\dfrac{4}{x^2}$ D) $x^{-1/2}$

5. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = 2^x + 7$.
A) $2^x \cdot \ln 2$ B) $\dfrac{2^x}{\ln 2}$ C) 2^{x-1} D) $-2^x \cdot \ln 2$

6. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = \ln x + 5$.
A) $\dfrac{1}{x}$ B) $\dfrac{1}{x \cdot \ln 2}$ C) $-\dfrac{1}{x}$ D) $\dfrac{\ln 2}{x}$

7. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = x - \text{tg } x$.
A) $-\text{tg}^2 x$ B) $1 + \dfrac{1}{\cos^2 x}$
C) $1 - \dfrac{1}{\sin^2 x}$ D) $1 - \text{ctg } x$

8. (96-7-28) Вычислите $f'(\frac{\pi}{4})$, если $f(x) = 5\sin x + 3\cos x$.
A) $-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $-2\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{2}$
Решение: По правилам 9-10 и 7 имеем
$$f'(x) = 5(\sin x)' + 3(\cos x)' = 5\cos x - 3\sin x.$$
Теперь считая $x = \dfrac{\pi}{4}$, вычислим $f'(\frac{\pi}{4})$:
$$f'(\frac{\pi}{4}) = 5\cos\frac{\pi}{4} - 3\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(5-3) = \sqrt{2}.$$
Ответ: $\sqrt{2}$ (B).

9. (97-6-19) Вычислите $g'(\frac{\pi}{6})$, если
$$g(x) = \text{ctg } x + \frac{12x^3}{\pi^2} + \pi.$$
A) -1 B) -3 C) 5 D) 3

10. (97-7-28) Вычислите $f'(\frac{\pi}{3})$, если
$$f(x) = 2\sin x - 4\sqrt{3}\cos x.$$
A) 7 B) -5 C) $2+4\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}-2$

11. (97-9-34) Найдите производную функции $y = \dfrac{1}{3}6^x - 6$ в точке $x = 1$.
A) $\ln 12$ B) $\ln 36$ C) $\ln 6$ D) $\ln\dfrac{6}{e}$

12. (97-12-55) Найдите $f'(4)$, если
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 16x.$$
A) 1 B) 2 C) 3 D) 0

13. (98-1-28) Вычислите $f'(\ln 3)$, если $f(x) = e^x + 5x$.
A) 8 B) 5 C) $e^3 + 5$ D) e^3

14. (98-5-26) Найдите производную функции $y = \sin^2 x + \cos^2 x$.
A) $2\sin 2x$ B) 0 C) $4\sin x$ D) $\sin 4x$

15. (99-7-27) Найдите производную функции $y = \text{tg } x \cdot \text{ctg } x$.
A) 1 B) 2 C) $-\dfrac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ D) 0

16. (96-1-30) Найдите наименьшее целое решение неравенства
$$\frac{f'(x)}{x-5} \geq 0,$$
где $f(x) = x^3 - 3x - 4$.
A) 1 B) -1 C) -5 D) 0
Решение: По правилам 1-2 и 9-10
$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$
Теперь решим неравенство
$$\frac{3x^2-3}{x-5} \geq 0 \iff \frac{3(x-1)(x+1)}{x-5} \geq 0.$$
Методом интервалов (рис. 14.1) получим, что его решением является множество $[-1; 1] \cup (5; \infty)$. Наименьшее целое число в этом множестве -1.
Ответ: -1 (B).

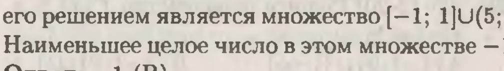


Рисунок 14.1

17. (96-10-32) Найдите наибольшее целое решение неравенства
$$\frac{f'(x)}{x-4} \le 0,$$
где $f(x) = x^3 - 12x + 7$.
A) 2 B) −4 C) 3 D) −2

18. (98-5-25) При каких значениях x для функций $f(x) = \sin x$ и $g(x) = 5x + 3$ выполняется неравенство $f'(x) < g'(x)$?
A) $(-\infty; 5)$ B) $(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
C) $(-\infty; \infty)$ D) $(0; \infty)$

19. (00-6-27) Сколько целых решений имеет неравенство $f'(x) \ge 0$, если $f(x) = -4x^3 - 11x^2 - 8x + 7$?
A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

20. (97-5-34) Найдите производную функции $y = 2^x - 1$ в точке $x = 1$.
A) 1 B) $\ln 2$ C) $\ln\frac{4}{e}$ D) $\ln 4$

21. (01-6-42) Найдите $f'(8)$, если
$f(x) = x^{2/3} + 85\frac{1}{3}\ln x$.
A) 10 B) 12 C) 9 D) 11

22. (02-2-29) Решите неравенство $f'(x) < 0$, где $f(x) = 3x + \frac{3}{x}$.
A) $(-1; 0) \cup (0; 1)$ B) $(-\infty; -1)$
C) $(1; \infty)$ D) $(0; 1)$

23. (02-2-32) В скольких точках равны значения функции $f(x) = x^3$ и ее производной?
A) 2 B) 1 C) $\emptyset$ D) 3

Решение: По правилу 2 найдем $f'(x) = 3x^2$. По условию задачи имеем уравнение
$$f(x) = f'(x) \iff x^3 = 3x^2 \iff x^2(x-3) = 0.$$
Корни этого уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$. **Ответ:** 2 (A).

24. (03-2-9) Найдите наименьшее натуральное решение неравенства $f'(x) > g'(x)$, если
$$f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}, \quad g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}.$$
A) 3 B) 2 C) 6 D) 5

25. (03-8-48) Найдите наименьшее натуральное решение неравенства $f'(x) \le 0$, если $f(x) = x^4 + x^3 - 13,5x^2 + 2003$.
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

26. (03-12-20) Решите неравенство $f'(x) \le x$, если $f(x) = \ln x$.
A) $[-1; 0) \cup [1; \infty)$ B) $(-1; 0) \cup [1; \infty)$
C) $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$ D) $[1; \infty)$

27. (03-12-73) Найдите наименьший корень уравнения $f'(x) = f(1)$, если $f(x) = x^3 + 5x^2 + 4x + 2$.
A) −6 B) $-\frac{1}{3}$ C) −2 D) −4

14.1.1 Производная сложной функции

Производная произведения и частного

1. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

2. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \ne 0.$

Производные сложных функций

3. **Общее правило** $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$.

4. $(u^\alpha(x))' = \alpha\, u^{\alpha-1}(x)\, u'(x)$.

5. $(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \ln a \cdot u'(x)$, $(e^{u(x)})' = e^{u(x)}\, u'(x)$.

6. $(\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)\ln a}$, $(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

7. $(\sin u(x))' = \cos u(x)\, u'(x)$.

8. $(\cos u(x))' = -\sin u(x)\, u'(x)$.

9. $(\operatorname{tg} u(x))' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$.

10. $(\operatorname{ctg} u(x))' = -\frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$.

1. (96-9-79) Найдите $f'(0)$, если $f(x) = 3x \cdot 2^x$.
A) −3 B) 3 C) 1 D) −1

Решение: По 1− и 5− правилам 14.1 имеем
$$f'(x) = (3x)' \cdot 2^x + 3x \cdot (2^x)' = 3 \cdot 2^x + 3x \cdot 2^x \cdot \ln 2.$$
Теперь вычислим $f'(0)$:
$$f'(0) = 3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 0 \cdot 2^0 \cdot \ln 2 = 3 + 0 = 3.$$
Ответ: 3 (B).

2. (96-10-30) Найдите $f'(0)$, если $f(x) = 2x \cdot 3^x$.
A) −1 B) 2 C) −2 D) 3

3. (98-12-39) Найдите производную функции $y = e^x \cdot x^2$.
A) $e^x(x^2 + 2x)$ B) $e^x(x^2 + 2)$
C) $e^x(2x + 1)$ D) $e^x(x^2 + x)$

4. (00-5-46) Найдите производную функции $y = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$ в точке $x = 3$.
A) 0 B) 3 C) 27 D) −27

5. (96-9-22) Вычислите $f'(-2)$, для функции
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$
A) $\frac{4}{9}$ B) $-\frac{4}{9}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $-\frac{3}{4}$

Решение: По правилу 2 нахождения производной частного
$$f'(x) = \frac{(x^2)' \cdot (x^2 - 1) - x^2(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2}.$$

Теперь вычислим производные и упростим:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \Longrightarrow f'(-2) = \frac{-2(-2)}{((-2)^2-1)^2} = \frac{4}{9}.$$

Ответ: $\frac{4}{9}$ (A).

6. (96-3-81) Найдите $f'(2)$, если $f(x) = x(1-x)^{-1}$.
A) -1 B) -2 C) 2 D) 1

7. (96-13-22) Найдите $f'(1)$ для функции

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{2}{3}$

8. (98-10-69) Найдите $f'(1)$ для функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $-\frac{1}{2}$ D) 1

9. (02-1-27) Найдите $f'(1)$, если

$$f(x) = \frac{8x\sqrt{x}+2}{x}.$$

A) 2 B) 1 C) 0 D) 3

10. (97-5-33) Найдите производную функции

$$y = e^{\sin^2 x}.$$

A) $e^{\sin^2 x}$ B) $e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x$
C) $2e^{\sin^2 x} \cdot \sin x$ D) $\sin^2 x \cdot e^{\sin^2 x - 1}$

Решение: Обозначим $u(x) = \sin^2 x$, тогда по правилам 4 и 7 пункта 14.1 имеем

$$u'(x) = 2\sin^{2-1} x\,(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$$

Из правила 5 вычисления производной сложной функции следует

$$y' = (e^{u(x)})' = e^{u(x)}u'(x) = e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x.$$

Ответ: $e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x$ (B).

11. (96-3-34) Найдите производную функции

$$f(x) = e^{\sin 2x}.$$

A) $\sin 2x \cdot e^{\sin 2x - 1}$ B) $2\cos 2x \cdot e^{\sin 2x}$
C) $2\cos 2x \cdot e^{\cos 2x}$ D) $\cos 2x \cdot e^{\sin 2x}$

12. (96-12-36) Найдите производную функции

$$f(x) = e^{\cos 2x}.$$

A) $2\sin 2x \cdot e^{\cos 2x}$ B) $\cos 2x \cdot e^{\cos 2x - 1}$
C) $-2\sin 2x \cdot e^{-2\sin 2x}$ D) $-2\sin 2x \cdot e^{\cos 2x}$

13. (97-6-48) Вычислите производную функции $g(x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{ctg}\,3x$ в точке $x = \frac{\pi}{18}$.
A) -2 B) $\frac{4}{3}$ C) 4 D) -4

14. (00-6-26) Найдите $f'(\pi)$, если $f(x) = 3x^2 \cdot e^{\sin x}$.
A) $3\pi(2+\pi)$ B) $3\pi^2(3-\pi)$
C) $2\pi(3+\pi)$ D) $3\pi(2-\pi)$

15. (99-4-33) Решите неравенство $f'(x) \le 0$, если $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x+4)$.
A) $[-4;2]$ B) $[2;4]$
C) $[-2;2]$ D) $[-3;2]$

16. (96-1-28) Найдите $f'(0)$, если $f(x) = x \cdot 2^{x+1}$.
A) -2 B) -1 C) 1 D) 2

17. (96-3-29) Найдите производную функции

$$y = \cos(x^3 - 5).$$

A) $-3x^2\sin(x^3-5)$ B) $3x^2\sin(x^3-5)$
C) $-\sin(3x^2-5)$ D) $\sin(3x^2-5)$

18. (96-3-33) Найдите производную функции

$$f(x) = \ln(x^2 - 3\sin x).$$

A) $\frac{3}{x^2-3\sin x}$ B) $\frac{2x+3\cos x}{x^2-3\sin x}$
C) $\frac{2x-3\cos x}{x^2-3\sin x}$ D) $\frac{2x}{x^2-3\sin x}$

Решение: По 6- правилу вычисления производных сложных функций находим

$$f'(x) = \frac{(x^2-3\sin x)'}{x^2-3\sin x} = \frac{2x-3\cos x}{x^2-3\sin x}.$$

Ответ: (C).

19. (96-12-34) Найдите производную функции

$$f(x) = \ln(x^2 + 3\sin x).$$

A) $\frac{3}{x^2+3\sin x}$ B) $\frac{2x+3\sin x}{x^2+3\sin x}$
C) $\frac{2x+3\cos x}{x^2+3\sin x}$ D) $\frac{2x-3\cos x}{x^2+3\sin x}$

20. (98-7-40) Найдите производную функции

$$y = \log_5 2x.$$

A) $\frac{1}{x\ln 2}$ B) $\frac{1}{x\ln 5}$ C) $\frac{2}{x\ln 5}$ D) $\frac{2}{x\ln 2}$

21. (98-7-39) Найдите производную функции

$$y = -\frac{1}{7}\sin(7x-5).$$

A) $-\frac{1}{7}\cdot\cos(7x-5)$ B) $-7\cos(7x-5)$
C) $\cos(7x-5)$ D) $-\cos(7x-5)$

22. (99-1-24) Вычислите производную функции

$$y = 2 - \cos 2x.$$

A) $2\sin 2x$ B) $\sin 2x$
C) $4\cos 2x$ D) $-\sin 2x$

23. (00-8-67) Найдите производную функции

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

A) $\frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x} - 1)$ B) $-\frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x} - 1)$
C) $\frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x} + 1)$ D) $-\frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x} - 1)$

24. (97-3-28) Вычислите $f'(\frac{\pi}{6})$, если $f(x) = 2\sqrt{3}\cos 4x - 2\cos x$.
A) -11 B) 13 C) $\sqrt{3}+1$ D) $\sqrt{3}-2$

Решение: Из равенства $(\cos ax)' = -a\sin ax$ и правил 9-10 пункта 14.1 имеем

$$f'(x) = -8\sqrt{3}\sin 4x + 2\sin x.$$

Отсюда

$$f'(\frac{\pi}{6}) = -8\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = -12 + 1 = -11.$$

Ответ: -11 (A).

25. (96-6-56) Найдите $f'(\frac{\pi}{6})$, если $f(x) = \ln\sin x$.
A) $-\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\sqrt{3}$ D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

26. (97-6-62) Вычислите $f'(\frac{\pi}{4})$, если $f(x) = \ln\sin x$.
A) -1 B) 3 C) $-\sqrt{3}$ D) 1

27. (97-8-57) Найдите $f'(\frac{1}{2})$, если $f(x) = (x^2+1)^2$.
A) 2,5 B) $-1\frac{2}{5}$ C) $-1\frac{4}{5}$ D) $\frac{2}{5}$

28. (97-10-28) Вычислите $f'(\frac{\pi}{8})$, если $f(x) = 3\cos 2x - \sin 2x$.
A) $-4\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{3}$

29. (97-12-62) Найдите $f'(\frac{\pi}{6})$, если $f(x) = 0,5\ \mathrm{tg}\ 2x$.
A) $\frac{4}{3}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 4 D) 2

30. (98-8-28) Вычислите $f'(\ln 2)$, если $f(x) = 3x - 2e^{-x}$.
A) 1 B) 2 C) 5 D) 4

31. (99-1-25) Производные каких из следующих функций равны $y_1 = \cos^2 3x$, $y_2 = -\sin^2 3x$ $y_3 = 2\sin 6x$?
A) $y_1; y_2$ B) $y_1; y_3$ C) $y_2; y_3$ D) $y_1; y_2; y_3$

32. (99-10-43) Вычислите $f'(\frac{\pi}{12})$, если $f(x) = \sin^2 3x$.
A) -3 B) 3 C) 2 D) -2

33. (00-2-27) Найдите $f'(1)$, если $f(x) = 5\sin(2x + \frac{2}{x})$.
A) 5 B) 0 C) 2,5 D) $-\frac{1}{5}$

34. (01-8-26) Найдите $f'(0)$, если $f(x) = e^{1-2x}\cdot\cos 2x$.
A) $-2e$ B) 0 C) e D) $2e$

Решение: Из правил нахождения производной произведения, а также правил 5 и 8 вычисления производных сложных функций находим

$$f'(x) = -2e^{1-2x}\cdot\cos 2x - 2e^{1-2x}\cdot\sin 2x.$$

Подставляя в это выражение значение $x = 0$, получим $f'(0) = -2e$. **Ответ:** $-2e$ (A).

35. (02-1-64) Вычислите $f'(\pi)+f(\pi)+2$, если $f(x) = x\cdot\sin 2x$.
A) 2π B) 2 C) $2+2\pi$ D) $2-2\pi$

36. (00-3-62) Найдите $f'(\frac{\pi}{6})$ для функции $f(x) = \sin 2x + \ln\cos 2x$.
A) $\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$ B) $1-2\sqrt{3}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $\frac{3}{2}$

37. (01-10-49) Даны $f(x) = \sin^4 3x$, $\varphi(x) = 6\sin 6x$. Найдите все значения x, для которых выполняется равенство $f'(x) = \varphi(x)$.
A) $\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi n}{6}$, $n\in\mathbb{Z}$
C) $\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$

38. (02-1-66) Найдите

$$\frac{f'(x)}{2\cos 2x},$$

если $f(x) = \sin^2 2x$.
A) $\sin 2x$ B) $\cos 2x$ C) $-\sin 2x$ D) $2\sin 2x$

39. (02-2-28) Найдите $f'(\frac{\pi}{4})$, если $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$.
A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение: Запишем данную функцию в виде $f(x) = (\sin 2x)^{1/2}$ и применим к ней правила 4 и 7 вычисления производных сложных функций, тогда

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}} = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}.$$

Теперь вычислим значение производной в точке $x = \frac{\pi}{4}$:

$$f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\cos(2\cdot\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ответ: 0 (A).

40. (02-3-46) Найдите $f'(\frac{\pi}{4})$, если $f(x) = \sqrt{\mathrm{tg}\ x}$.
A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$

41. (02-9-32) Вычислите $f'(\alpha)$, если

$$f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}), \quad \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}.$$

A) $-0,6$ B) $\frac{3}{5}$ C) $0,8$ D) $-\frac{1}{3}$

42. (03-1-50) Найдите производную функции

$$y = \sin^4 2x.$$

A) $2\sin^2 2x \sin 4x$ B) $4\sin^2 4x \sin 2x$
C) $4\sin 2x \sin^2 4x$ D) $4\sin^2 2x \sin 4x$

43. (03-2-10) Найдите значение $f'(1)$, если

$$f(x) = e^{1-x} \cdot \sin\frac{\pi x}{2}.$$

A) 1 B) 2 C) $-\sqrt{2}$ D) -1

44. (03-6-21) Найдите $f'(6)$, если
$f(x) = |x^2 - 14x + 45|$.
A) 0 B) 5 C) 2 D) 7

14.2 Исследование функции с помощью производной. Максимум и минимум

При исследовании функций особую роль играет нахождение отрезков возрастания и убывания. Пусть задана функция $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$, определенная на отрезке $[a;\, b]$ и имеющая производные во всех точках этого отрезка. Функции, имеющие производные во всех точках области определения называются *дифференцируемыми функциями*. Если, для некоторой $\delta > 0$ и для всех $x \in (x_0 - \delta;\, x_0 + \delta) \cap [a;\, b]$ выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$), точка $x = x_0$ называется *точкой максимума* (*точкой минимума*) функции $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$. Точки минимума и максимума функции называются ее *точками экстремума*, а значения функции в этих точках *экстремумами* функции.

Точки, где производная функции равна нулю или не существует называются *стационарными точками* функции.

Приведем теорему Ферма о необходимом условии экстремума. *Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ достигает минимума или максимума в точке $x = x_0$, то $f'(x_0) = 0$.* Итак, точки экстремума дифференцируемой функции будем искать в точках, где производная равна нулю.

Для дифференцируемых функций справедливы следующие свойства 1-5.

1. **Если для дифференцируемой на отрезке $[a;\, b]$ функции $y = f(x)$ выполняется $f'(x) > 0$, $x \in (a_1;\, b_1) \subset [a;\, b]$, то на отрезке $[a_1;\, b_1]$ функция возрастает.**

2. **Если для дифференцируемой на отрезке $[a;\, b]$ функции $y = f(x)$ выполняется $f'(x) < 0$, $x \in (a_1;\, b_1) \subset [a;\, b]$, то на отрезке $[a_1;\, b_1]$ функция убывает.**

3. **Если существует такая $\delta > 0$ окрестность точки $x_0 \in (a;\, b)$, что для всех $x \in (x_0 - \delta;\, x_0)$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$ и для всех $x \in (x_0;\, x_0 + \delta)$ верно $f'(x) > 0$, то точка $x = x_0$ является точкой минимума функции f.**

4. **Если существует такая $\delta > 0$ окрестность точки $x_0 \in (a;\, b)$, что для всех $x \in (x_0 - \delta;\, x_0)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$ и для всех $x \in (x_0;\, x_0 + \delta)$ верно $f'(x) < 0$, то точка $x = x_0$ является точкой максимума функции f.**

5. **Если $f'(x_0) = 0$, для некоторого $\delta > 0$ и для всех $x \in (x_0 - \delta;\, x_0) \cup (x_0;\, x_0 + \delta)$ выполняется $f'(x) > 0$ (или $f'(x) < 0$), то точка $x = x_0$ является точкой перегиба функции f. Точка перегиба не может быть точкой экстремума функции.**

1. (98-6-18) Найдите промежутки возрастания функции

$$y = \frac{x^2}{2} - \ln x.$$

A) $[-1; 0) \cup [1; \infty)$ B) $[1; \infty)$
C) $[-1; \infty)$ D) $(-\infty; -1) \cup [1; \infty)$

Решение: Данная функция определена при $x > 0$, т.е. на множестве $(0; \infty)$. По 1-свойству, если для функции $f(x)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, $x \in (a;\, b)$, то функция $f(x)$ возрастает на $[a;\, b]$. Найдем производную данной функции

$$f'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

Неравенство $f'(x) > 0$ $(x > 0)$ легко решается методом интервалов. Его решение $(1; \infty)$, поэтому по 1-свойству на $[1; \infty)$ функция возрастает.
Ответ: $[1; \infty)$ (B).

2. (97-9-25) Найдите промежутки убывания функции $y = x^2 - 2$.
A) $(-\infty; -2)$ B) $(-\infty; 2)$
C) $(2; \infty)$ D) $(-\infty; 0]$

3. (97-11-20) Определите промежутки убывания функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.
A) $(-\infty; -2] \cup [1; \infty)$ B) $[-2; 1]$
C) $[-1; 2]$ D) $[-2; \infty)$

4. (96-11-21) Найдите промежутки возрастания функции $f(x) = x^2 + 2x + 4$.
A) $(-\infty; -1)$ B) $[-1; \infty)$
C) $(1; \infty;)$ D) $(0; \infty)$

5. (96-12-21) Найдите промежутки возрастания функции $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
A) $(0; \infty)$ B) $(-\infty; 1)$
C) $[1; \infty)$ D) $(-\infty; -1)$

6. (01-2-35) Найдите промежутки убывания функции $y = x + \frac{1}{x-1}$.
A) $[0;1) \cup (1;2]$ B) $(0;2)$ C) $(0;1)$ D) $(1;2)$

7. (96-3-20) Найдите промежутки возрастания функции $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.
A) $(1;\infty)$ B) $(0;\infty)$
C) $(-\infty;-1)$ D) $(-\infty;1]$

8. (96-6-44) При каких значениях a функция $f(x) = ax + \sin x$ возрастает во всей своей области определения.
A) $|a| > 1$ B) $0 < a < 1$ C) $a \geq 1$ D) $a = 0$

Решение: Область определения данной функции $D(f) = \mathbb{R}$. По 8- свойству 13.5, неравенство $f'(x) = a + \cos x > 0$ выполняется при $a > 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Итак, по 1- свойству при условии $a > 1$ функция $f(x) = ax + \sin x$ возрастает во всей своей области определения. При $a = 1$ функция также возрастает. **Ответ:** $a \geq 1$ (C).

9. (96-10-14) Какая из следующих функций убывает на интервале $(0;\infty)$?
A) $y = x + 8$ B) $y = 3 - x$
C) $y = -\frac{4}{x}$ D) $y = 2x^2$

10. (96-1-14) Какая из следующих функций возрастает на интервале $(-\infty;0)$?
A) $y = 3x + 2$ B) $y = \frac{3}{x}$
C) $y = 6 - 3x$ D) $y = x^2$

11. (96-9-64) Какая из следующих функций возрастает на интервале $(-\infty;0)$?
A) $y = 0,5 - 2x$ B) $y = \frac{5}{x}$
C) $y = 2 + 3x$ D) $y = 2\sqrt{-x}$

12. (97-8-44) При каких значениях k функция $f(x) = \sin x - kx$ возрастает во всей своей области определения?
A) $(-\infty;1)$ B) $(1;\infty)$
C) $(-1;0)$ D) $(-\infty;-1]$

13. (02-11-54) Какая из следующих функций возрастает в своей области определения?
A) $y = \sin x$ B) $y = \frac{\ln x}{x}$
C) $y = \frac{1}{x^2+1}$ D) $y = 2x^7 - 8$

14. (01-1-35) Найдите промежутки возрастания функции

$$f(x) = x^2 e^{-2x}$$

A) $(-\infty;-1)$ B) $[-1;1]$
C) $(-\infty;-1) \cup [0;1]$ D) $[0;1]$

Решение: По правилу вычисления производной произведения находим производную данной функции:

$$f'(x) = 2x\,e^{-2x} - 2x^2\,e^{-2x} = 2x\,e^{-2x}(1-x).$$

Теперь решим неравенство

$$f'(x) = 2xe^{-2x}(1-x) > 0.$$

С учетом того, что $2e^{-2x} > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, неравенство $f'(x) > 0$ равносильно $x(1-x) > 0$. Решив это неравенство методом интервалов получим $(0;1)$. По 1-свойству, функция f возрастает на отрезке $[0;1]$. **Ответ:** $[0;1]$ (D).

15. (00-1-44) На каком интервале убывает функция

$$f(x) = \ln(4x - x^2)?$$

A) $(0;2)$ B) $(-\infty;0)$ C) $(0;4)$ D) $(2;4)$

16. (00-7-37) Найдите сумму всех целых значений x из промежутка убывания функции

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 3.$$

A) 9 B) 8 C) 10 D) 7

17. (01-3-13) Найдите отрезок убывания функции

$$y = \frac{x^2}{2} - 12\ln(x-4).$$

A) $[6;\infty)$ B) $(4;\infty)$ C) $(2;4)$ D) $(4;6]$

18. (01-11-37) На каком промежутке функция

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 4x^2$$

убывает?
A) $[0;2]$ B) $(0;2]$ C) $[0;2)$ D) $(0;2)$

19. (02-1-65) Найдите промежуток убывания функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 2$.
A) $(0;8)$ B) $(-\infty;-1]$ C) $[-1;\infty)$ D) $[-1;0]$

20. (02-5-43) Определите промежуток убывания функции

$$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + 10.$$

A) $(2;3)$ B) $(-\infty;0] \cup [2;3]$
C) $(-\infty;3)$ D) $(-\infty;0) \cup (3;+\infty)$

21. (02-9-31) Найдите длину отрезка возрастания функции $f(x) = -2x^3 + 15x^2 + 12$.
A) 5 B) 4 C) 6 D) 4,5

22. (02-12-55) Определите промежуток убывания функции

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 4x^2.$$

A) $(-2;0]$ B) $[0;2]$ C) $[-2;0)$ D) $(0;3)$

Экстремумы функции

23. (96-7-29) Найдите максимум функции

$$f(x) = 3x - x^3.$$

A) -1 B) 2 C) -2 D) 4

Решение: По теореме Ферма в точках, где функция достигает максимума ее производная равняется нулю. Поэтому для решения задачи сначала найдем промежутки возрастания и убывания функции, т.е. решим уравнение

$$f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) = 3(1 - x)(1 + x) = 0.$$

Корни этого уравнения $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Легко можно проверить, что на $(-1;\ 1)$ - $f'(x) > 0$ и на $(1;\ \infty)$ - $f'(x) < 0$. По 4-свойству, данная функция в точке $x = 1$ достигает максимума. Итак, $f(1) = 2$ – максимум функции. **Ответ:** 2 (B).

24. (97-3-29) Найдите минимум функции

$$g(x) = 12x - x^3.$$

A) -32 B) -16 C) 0 D) 16

25. (97-10-29) Найдите минимум функции

$$y = -4x^3 + 12x.$$

A) 0 B) -8 C) -16 D) 8

26. (98-1-29) Найдите значение функции в точке максимума $f(x) = x^3 + 2{,}5x^2 - 2x$.

A) -8 B) 6 C) 10,5 D) -12

27. (98-9-8) При каком значении t квадратный трехчлен $-t^2 + 14t - 31$ принимает наибольшее значение?

A) 6 B) 5 C) 8 D) 7

28. (99-3-16) Пусть x_1 и x_2 корни уравнения

$$x^2 - ax + a - 1 = 0.$$

При каком значении a сумма $x_1^2 + x_2^2$ принимает наибольшее значение?

A) 1 B) 2 C) 1,5 D) 2,5

29. (99-4-21) Чему равно наибольшее значение xy, если $2x + y = 6$?

A) 2,5 B) 4,5 C) 3 D) $-2,5$

30. (99-4-25) Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}.$$

A) $\sqrt{2}$ B) 1,5 C) 3 D) $2\sqrt{2}$

Решение: Так как функция $y = \sqrt{t}$ возрастает на $[0;\ \infty)$, наибольшее значение данной функции достигается при наибольшем значении подкоренной функции $g(x) = 2 - x - x^2$. По теореме Ферма точки максимума функции g являются корнями уравнения $g'(x) = -1 - 2x = 0$. Это уравнение имеет единственный корень $x_0 = -0{,}5$. Поэтому наибольшее значение функции равно $f(x_0) =$

$$= \sqrt{2 - (-0{,}5) - (0{,}5)^2} = \sqrt{2{,}5 - 0{,}25} = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5 (B).

31. (99-3-28) Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{3x^2 - 4x + 5}.$$

A) $[0; \infty)$ B) $[\sqrt{3}; \infty)$

C) $[\sqrt{\frac{3}{2}}; \infty)$ D) $[\sqrt{\frac{11}{3}}; \infty)$

32. (99-9-48) Найдите множество значений функции $y = -x^2 + 6x - 12$.

A) $(-3; \infty)$ B) $[-3; \infty)$

C) $(-\infty; -3)$ D) $(-\infty; -3]$

33. (97-11-15) Найдите множество значений функции $y = x^2 - 8x + 7$.

A) $(2; \infty)$ B) $[-9; \infty)$ C) $[9; \infty)$ D) $[-4; \infty)$

34. (03-2-7) Укажите множество значений функции

$$y = \sqrt{x^2 + 2x + 4}.$$

A) $[0; \infty)$ B) $[2; \infty)$ C) $(0; \infty)$ D) $[\sqrt{3}; \infty)$

35. (99-8-37) Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{3 - x^2 - 2x}.$$

A) -2 B) 4 C) 2 D) 3

36. (00-7-35) Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = 3^{1+x} + 3^{1-x}.$$

A) 9 B) 4 C) 8 D) 6

37. (99-10-42) Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + 10}.$$

A) $[3; \infty)$ B) $(3; \infty)$ C) $[5; \infty)$ D) $[2; \infty)$

38. (01-1-34) Вычислить сумму значений функции $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 3$ в точках экстремума.

A) -9 B) -6 C) -8 D) -4

Решение: Найдем точки экстремума функции. По теореме Ферма, экстремумы функции находятся среди корней уравнения

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x - 1)(x + 1) = 0.$$

Это уравнение имеет корни $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. При переходе аргумента x через точки $x_0 = -1$ и $x_2 = 1$ производная функции меняет свой знак. По свойствам 3 и 4, в этих точках функция достигает экстремума. Так как при переходе аргумента через точку $x_1 = 0$ производная не меняет свой знак, по свойству 5 эта точка не является точкой экстремума данной функции. Теперь вычислим сумму $f(x_0) + f(x_2)$:

$$f(-1)+f(1) = 3(-1)^5-5(-1)^3-3+3-5-3 = -6.$$

Ответ: -6 (B).

39. (01-2-60) Найдите наименьшее значение произведения $x(x+1)(x+2)(x+3)$.
A) 3 B) 2 C) 1 D) -1

40. (01-12-38) Найдите $y(1)$, если функция $y = -x^2 + bx + c$ в точке $x = -1$ принимает наименьшее значение, равное 5.
A) -1 B) 0 C) 1 D) 1,5

41. (02-4-6) Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 + 4x + 11$.
A) 4 B) 11 C) $\frac{11}{4}$ D) 7

42. (02-2-4) При каком значении a выражение

$$(a-7)^2 + (a-8)^2 + (a-12)^2$$

достигает наименьшего значения?
A) 9 B) 10 C) 8 D) 11

43. (02-11-52) Найдите точку минимума функции $f(x) = 0,9x^5 - 4,5x^3 + 4$.
A) -1 B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$

44. (03-5-30) Найдите множество значений функции

$$f(x) = 9^x + 5 \cdot 3^{-2x}.$$

A) $[2\sqrt{5}; \infty)$ B) $(0; \infty)$ C) $[5; \infty)$ D) $[6; \infty)$

Решение: Множеством значений функций $g(x) = 9^x$ и $\varphi(x) = 5 \cdot 3^{-2x}$ является $(0; \infty)$. Поэтому множеством значений функции $f(x) = 9^x + 5 \cdot 3^{-2x}$ является $[m; \infty)$, где m – ее наименьшее значение. Запишем функцию в виде $f(x) = 9^x + 5 \cdot 9^{-x}$ и найдем ее стационарные точки. Для этого решим уравнение

$$f'(x) = 9^x \cdot \ln 9 - 5 \cdot 9^{-x} \cdot \ln 9 = \ln 9 \cdot (9^x - 5 \cdot 9^{-x}) = 0.$$

Оно является показательным уравнением и его корень $x_0 = \log_9 \sqrt{5}$. Кроме этого $f'(x) < 0, \ \ x \in (-\infty; x_0)$ и $f'(x) > 0, \ \ x \in (x_0; \infty)$. По 3-свойству x_0 – точка минимума. Вычислим значение функции в этой точке:

$$f(x_0) = 9^{\log_9 \sqrt{5}} + 5 \cdot 9^{-\log_9 \sqrt{5}} = \sqrt{5} + 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Таким образом, множество значений функции – $[2\sqrt{5}; \infty)$. **Ответ:** $[2\sqrt{5}; \infty)$ (A).

45. (03-1-57) Сумма квадрата какого числа и самого числа будет наименьшим?
A) -1 B) $-0,4$ C) $-0,8$ D) $-0,5$

46. (03-3-52) Пусть числа m и M – значения функции $y = x + \frac{1}{x}$ соответственно в точках максимума и минимума. Найдите значение $m - 2M$.
A) -6 B) 6 C) -4 D) 4

47. (03-7-81) Найдите множество значений функции $y = -x^4 + 2x^2 + 5$.
A) $(-\infty; 6]$ B) $(-\infty; 6)$ C) $[5; 6]$ D) $(-\infty; 5]$

48. (03-9-46) Найдите сумму значений функции $f(x) = 0,6x^5 - 2x^3 - 1$ в точках максимума и минимума.
A) -3 B) -2 C) -1 D) 1

49. (03-11-7) m и n натуральные числа. Найдите наибольшее значение x, если $\frac{6}{x} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ и $m + n = 18$.
A) 27 B) 24 C) 18 D) 30

Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке

Для отыскания наименьшего и наибольшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, дифференцируемой внутри отрезка и непрерывной на его концах, предварительно следует найти стационарные точки у этого отрезка, т.е. корни уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[a; b]$. После этого вычислить значения функции в этих точках, а также на концах $x = a, \ x = b$ отрезка. Затем среди всех полученных таким образом чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

50. (97-9-90) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 3x^2 - 4x - 4$ на отрезке $[0; 3]$.
A) 10 B) 20 C) 11 D) 16

Решение: По вышеприведенному правилу решим уравнение

$$f'(x) = 6x - 4 = 0.$$

Его решение $x = \frac{2}{3} \in [0; 3]$. Теперь вычислим значения функции в точках $x = 0, x = 3, x = \frac{2}{3}$:

$$f(0) = -4, \ \ f(3) = 11, \ \ f(\frac{2}{3}) = -\frac{16}{3}.$$

Среди этих чисел наибольшим является 11. Значит, наибольшее значение функции на отрезке $[0; 3]$ равно 11. **Ответ:** 11 (C).

51. (97-4-30) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 3x + 1,25$ на отрезке $[-1; 1]$.
A) 0 B) $-0,75$ C) 5,25 D) 6,25

52. (98-5-27) Найдите наибольшее значение функции $y = x^2 - 2x + 5$ на отрезке $[0; 1]$.
A) 5 B) 4 C) -2 D) 0

53. (98-9-38) Найдите разность наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = x^3 + 2x - 5$ на отрезке $[-1; 1]$.
A) -6 B) 6 C) -5 D) 5

54. (98-10-72) Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ на отрезке $[0; 2]$.
A) 0 B) −2 C) −5 D) −7

55. (98-11-33) Определите наименьшее значение функции
$$y = 0,25x^4 - \frac{x^3}{3} - x^2$$
на промежутке $[-2,5; \infty)$.
A) $-\frac{3}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{8}{3}$ D) $-\frac{8}{3}$

56. (99-2-42) Найдите наименьшее значение функции $y = 3x^4 - 4x^3$ на отрезке $[0; 2]$.
A) 0 B) −16 C) −1 D) 1

57. (99-3-53) Найдите разность наибольшего и наименьшего значений функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $[-1; 4]$.
A) 20 B) 14 C) 15 D) 18

58. (99-7-28) Найдите наибольшее значение функции $y = x^2 - 2x - 1$ на отрезке $[-1; 1]$.
A) 4 B) 2 C) 0 D) 6

59. (00-1-15) Найдите наибольшее значение mn, если $m > 0$, $n > 0$ и $m + n = 16$.
A) 62 B) 72 C) 64 D) 60

Решение: Из условия задачи следует $m = 16 - n$ и $mn = (16-n)n$, $n \in (0; 16)$. Обозначим $f(n) = (16-n)n = 16n - n^2$. Теперь необходимо найти наибольшее значение этой функции на интервале $(0; 16)$. Уравнение $f'(n) = 16 - 2n = 0$ имеет единственное решение $n = 8$. $f(0) = f(16) = 0$, $f(8) = 8 \cdot 8 = 64$. Итак, наибольшее значение mn равно 64. **Ответ:** 64 (C).

60. (00-3-66) Найдите разность наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = 3x - x^3$ на отрезке $[-2; 3]$.
A) 20 B) 18 C) 16 D) 12

61. (00-3-67) Найдите наибольшее значение площади прямоугольного участка окружаемого с одной стороны зданием, а с трех других сторон решеткой длиной 120.
A) 1600 B) 1500 C) 1800 D) 2000

62. (00-10-28) Найдите разность наибольшего и наименьшего значений функции $y = 12x - x^3$ на отрезке $[-1; 3]$.
A) 27 B) 15 C) 5 D) 32

63. (01-3-18) Определите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2(x-6)$ на отрезке $[-1; 3]$.
A) 2; −4 B) 0; −32 C) 6; −21 D) 0; −27

64. (03-2-60) Найдите разность наибольшего и наименьшего значений функции
$$y = \log_{1/3}(x^2 + x - 2)$$
на отрезке $[3; 6]$.
A) $\log_{1/3} 6$ B) $\log_{1/3} 4$ C) $\log_3 6$ D) $\log_3 4$

Решение: Сначала найдем наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + x - 2$ на отрезке $[3; 6]$. Так как для всех $x \in [3; 6]$, $z' = 2x + 1 > 0$, эта функция возрастает на $[3; 6]$. Поэтому ее наибольшее значение $z(6) = 6^2 + 6 - 2 = 40$, наименьшее значение $z(3) = 3^2 + 3 - 2 = 10$. Производная данной функции равна
$$y' = -\frac{1}{\ln 3}\frac{2x+1}{x^2+x-2},$$
и она отрицательна для всех $x \in [3; 6]$, т.е. функция $y = \log_{1/3}(x^2+x-2)$ убывает на $[3; 6]$. Итак, ее наибольшее значение $y(3) = \log_{1/3} 10$, а наименьшее значение $y(6) = \log_{1/3} 40$. Их разность равна $\log_{1/3} 10 - \log_{1/3} 40 = \log_{1/3}\frac{1}{4} = \log_3 4$. **Ответ:** $\log_3 4$ (D).

65. (01-7-49) Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений функции $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$ на отрезке $[\frac{1}{4}; 1]$.
A) $7\frac{1}{4}$ B) $9\frac{1}{4}$ C) $10\frac{1}{4}$ D) 8

66. (01-11-39) Найдите разность наибольшего и наименьшего значений функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ на отрезке $[0; 2]$.
A) $5\frac{1}{3}$ B) $15\frac{2}{3}$ C) $10\frac{2}{3}$ D) $15\frac{1}{5}$

67. (02-9-33) Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 2^x + 2^{2-x}$ на отрезке $[0; 2]$.
A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 4

68. (03-8-52) Вычислите наибольшее значение функции $y = \frac{x}{2} - \sqrt{x}$ на отрезке $[0; 16]$.
A) 4 B) 8 C) −3 D) 5

14.3 Геометрический и механический смысл производной. Касательная и скорость

Пусть k – угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$, а α – угол между этой касательной и положительным направлением оси Ox (рис. 14.2). Тогда справедливы следующие:

1. $k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.
2. **Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$:**
$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (14.1)$$
3. **Условие параллельности касательных, проведенных к графикам функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в точках с абсциссой x_0:**
$$f'(x_0) = g'(x_0).$$

Пусть материальная точка движется по закону $S(t)$, а ее скорость и ускорение соответственно $\vartheta(t)$ и $a(t)$. Тогда справедливы следующие:

4. $\vartheta(t) = S'(t)$.

5. $a(t) = \vartheta'(t)$.

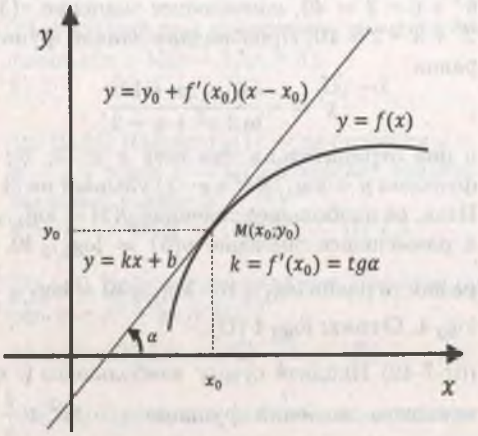


Рисунок 14.2

1. (96-13-23) Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если α – угол между касательной к графику функции $y = \frac{x}{1-x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$ и положительным направлением оси Ox.
A) $\frac{7}{15}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{8}{15}$ D) $\frac{3}{5}$

Решение: Из 1- свойства имеем $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$. Теперь найдем производную функции:

$$y' = \frac{1 - x + x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Подставляя вместо x значение $x = 3$ находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{(1-3)^2} = \frac{1}{4}.$$

По формуле двойного угла получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8}{15}.$$

Ответ: $\frac{8}{15}$ (C).

2. (97-4-29) Какой угол составляет касательная, проведенная к графику функции $y = 3x^2 + 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = -3$ с положительным направлением оси Ox?
A) arctg 3 B) π – arctg 16
C) π – arctg 3 D) – arctg 16

3. (98-9-39) Найдите угол между касательной к графику функции $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x^3 - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ и положительным направлением оси Ox.
A) 60^0 B) 30^0 C) 45^0 D) 120^0

4. (98-11-76) В точке с какой абсциссой касательная, проведенная к графику функции $y = 1 + e^{x-1}$ составляет с осью Ox угол 45^0?
A) $x = 1$ B) $x = 0$ C) $x = -1$ D) $x = 2$

5. (99-2-41) Какой угол составляет с осью Oy касательная, проведенная к графику функции $f(x) = \sqrt{3} \ln x$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$?
A) arctg 3 B) 60^0 C) 30^0 D) arctg 2

6. (99-10-44) Какой угол составляет с осью Oy касательная, проведенная к графику функции $y = \sqrt{3} \cdot x^2 - 3\sqrt{3} \cdot x + 4$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$?
A) 120^0 B) 60^0 C) 30^0 D) 150^0

7. (98-10-73) При каких значениях x касательная, проведенная к графику функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 6x$ параллельна прямой $y = 6x + 1$?
A) -2 и 3 B) 1 и 3
C) -2 и 1 D) 2 и -1

Решение: Из условия параллельности прямых следует равенство

$$6 = f'(x_0) = 6x^2 + 6x - 6.$$

Корни этого уравнения $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$.
Ответ: -2 и 1 (C).

8. (98-11-37) Касательная, проведенная через какую точку графика функции $y = x^2 - 2x + 1$ параллельна прямой $y = -4(x+1)$?
A) $(-1; \frac{1}{4})$ B) $(-1; 4)$ C) $(1; \frac{1}{4})$ D) $(1; 4)$

9. (98-11-77) Уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$ имеет вид $2x - 3y = 6$. Найти $f'(2)$.
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) 3

10. (99-3-54) Касательная, проведенная к кривой $y = x^2 + 1$ параллельна прямой $y = 2x + 3$. Найдите ординату точки касания.
A) 0 B) 2 C) 4 D) $\frac{1}{2}$

11. (00-9-41) Касательная, проведенная к кривой $y = (2x+1)^2$ в точке $(x_0; y_0)$ параллельна прямой $y = 2x + \frac{1}{2}$. Найдите расстояние между этой точкой и началом координат.
A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ D) 1

12. (00-10-32) Касательная, проведенная в какой точке к графику функции $y = x^2 + 2x + 8$ параллельна прямой $y + 2x - 8 = 0$?
A) $(-2; 8)$ B) $(2; 8)$ C) $(-2; -8)$ D) $(2; -8)$

13. (01-3-25) Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = x^2 + \ln(x-1)$ в точке с абсциссой $x = 2$.
A) 12 B) 5 C) 3 D)1

Решение: Обозначим через k угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой $x = 2$. Тогда в силу 1- свойства справедливо равенство

$$k = f'(2) = \left(2x + \frac{1}{x-1}\right)\Big|_{x=2} = 2 \cdot 2 + \frac{1}{2-1} = 5.$$

Ответ: 5 (B).

14. (96-6-46) Чему равен угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = x^2 - 3x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$?
A) 1 B) 2 C) -3 D) 3

15. (97-2-46) Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \ln x + x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{1}{2}$.
A) 3 B) 6 C) 4 D)6,5

16. (97-8-46) Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - \ln x$ в точке $x_0 = 2$.
A) 4 B) 3 C) 2 D) 3,5

17. (02-6-53) Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 0,5x^2 + x - 1,5$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.
A) 1 B) 2 C) 3 D)4

18. (03-3-51) Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \sin\frac{x}{2}$ $(x \in (0;\pi))$ в точке $(x_0; y_0)$ равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Вычислите $x_0 \cdot y_0$.
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{6}$

Решение: В силу 1- свойства имеем:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = f'(x_0) = \frac{1}{2}\cos\frac{x_0}{2} \Longleftrightarrow \cos\frac{x_0}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда и из условия $x_0 \in (0;\pi)$ следует $x_0 = \frac{\pi}{3}$ и

$$y_0 = \sin\frac{x_0}{2} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Итак, $x_0 \cdot y_0 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. **Ответ:** $\frac{\pi}{6}$ (D).

19. (02-12-54) Касательная к графику функции $f(x) = x^2 - x$ параллельна прямой $y = -5x + 3$. Найдите координаты точки касания.
A) $(-2; 6)$ B) $(1; 0)$ C) $(2; 4)$ D) $(0; 0)$

20. (03-2-8) Какая прямая параллельна касательной, проведенной к графику функции $y = 4 - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$?
A) $y = 4 - 4x$ B) $y = 2x + 8$
C) $y = x + 8$ D) $y = 4x + 8$

21. (03-11-19) Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к окружности $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 45$ в точке $A(0; 11)$.
A) $-\frac{1}{2}$ B) -2 C) $\frac{1}{2}$ D) 2

Уравнение касательной

22. (99-4-31) Укажите уравнение касательной, проведенной к графику функции

$$y = e^{2-x} \cdot \cos\frac{\pi x}{2}$$

в точке с абсциссой $x_0 = 2$.
A) $y = x - 1$ B) $y = 1 - x$
C) $y = 2x - 1$ D) $y = x - 3$

Решение: Для решения задачи воспользуемся свойством 2. Для этого вычислим y_0 и $f'(x_0)$:

$$y_0 = e^{2-2} \cdot \cos\frac{2\pi}{2} = e^0 \cdot \cos\pi = -1,$$

$$f'(2) = \left(-e^{2-x}\cdot\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2}e^{2-x}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}\right)\Big|_{x=2} = 1.$$

Теперь найденные значения подставим в (14.1):

$$y = -1 + 1 \cdot (x - 2) = x - 3.$$

Ответ: $y = x - 3$ (D).

23. (96-1-29) Укажите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2x^2 - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.
A) $y = -1$ B) $y = 2$
C) $y = 2x + 1$ D) $y = 1$

24. (96-9-80) Укажите уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = -2x^2 - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.
A) $y = 1$ B) $y = -2x$
C) $y = x - 1$ D) $y = -1$

25. (96-10-31) Укажите уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = 1 - 2x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.
A) $y = 1$ B) $y = -1$
C) $y = -x$ D) $y = 1 - 4x$

26. (99-9-52) Укажите уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.
A) $y = x$ B) $y = -0,5x$
C) $y = 0$ D) $y = 0,5x$

27. (00-5-48) К графику функции $y = 4 - x^2$ проведена касательная в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Найдите координаты точки пересечения этой касательной с осью Oy.
A) $(0; 5)$ B) $(0; 1)$ C) $(0; -5)$ D) $(0; -1)$

Решение: Сначала составим уравнение касательной. Для этого найдем y_0 и $f'(x_0)$:

$$y_0 = 4 - 1^2 = 3, \quad f'(1) = -2x|_{x=1} = -2.$$

Эти значения подставим в формулу (14.1) и получим уравнение касательной $y = 3 - 2(x - 1)$. На оси Oy, $x = 0$. Поэтому в уравнении возьмем $x = 0$, тогда $y = 5$. **Ответ:** (0; 5)(A).

28. (00-6-28) Составьте уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = 3\ln x - 0,5x$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.
A) $y = 0,5x - 1,5$ B) $y = 3x - \ln 3$
C) $y = x - 3\ln 3$ D) $y = 0,5x + 3\ln 3 - 3$

29. (00-10-58) Укажите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = \cos 2x$ в точке $(\frac{\pi}{4}; f(\frac{\pi}{4}))$.
A) $y = \frac{\pi}{2} - 2x$ B) $y = \pi - 3x$
C) $y = \frac{\pi}{2} + 3x$ D) $y = \pi - 2x$

30. (01-4-35) Укажите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x^3$ в точке $A(-1; -1)$.
A) $y = 3x - 2$ B) $y = 3x + 2$
C) $y = x + 2$ D) $y = x - 2$

31. (02-1-67) Запишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = x - 3x^2$ в точке $x_0 = 2$.
A) $y = 1 - 6x$ B) $y = -11x + 12$
C) $y = 3x + 1$ D) $y = x - 3$

32. (03-6-69) Угловой коэффициент касательной в некоторой точке графика параболы $y = x^2 - 2x$ равен 4. Найдите уравнение этой касательной.
A) $y = 4x - 4$ B) $y = 4x + 9$
C) $y = 4x + 4$ D) $y = 4x - 9$

Механический смысл производной

33. (99-2-39) Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 3t^3 - 3t^2 + 12t(m)$. Чему равна ее скорость в момент, когда ее ускорение равно 0?
A) 8 B) 7 C) 9 D) 11

Решение: По свойствам 4 и 5 для скорости и ускорения справедливы $\vartheta(t) = S'(t)$, $a(t) = \vartheta'(t)$. Итак, $\vartheta(t) = 9t^2 - 6t + 12$, $a(t) = \vartheta'(t) = 18t - 6$. Из равенства нулю ускорения $18t - 6 = 0 \iff t = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$. Подставив это значение в выражение скорости находим

$$\vartheta(\frac{1}{3}) = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 6 \cdot \frac{1}{3} + 12 = 1 - 2 + 12 = 11.$$

Ответ: 11 (D).

34. (96-3-83) Через сколько секунд после начала движения остановится материальная точка, движущаяся прямолинейно по закону $x(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 5

35. (96-9-14) Через сколько секунд после начала движения остановится материальная точка, движущаяся прямолинейно по закону

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 4t?$$

A) 5 B) 3 C) 2 D) 4

36. (98-9-40) Материальная точка движется по закону $S(t) = e^t + \cos t + 5t$. Найдите скорость этой точки в момент $t = 0$.
A) 5 B) 8 C) 4 D) 6

Решение: По свойству 4, скорость точки равна $\vartheta(t) = S'(t) = e^t - \sin t + 5$. Итак, $\vartheta(0) = e^0 - \sin 0 + 5 = 1 - 0 + 5 = 6$. **Ответ:** 6 (D).

37. (98-12-107) Материальная точка движется по закону $S(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 3t^2 - 5$. Чему равна ее скорость в момент, когда ее ускорение равно нулю?
A) 24 B) 18 C) 12 D) 6

38. (99-3-57) Две материальные точки, движутся прямолинейно по законам $S_1(t) = 2,5t^2 - 6t + 1$ и $S_2(t) = 0,5t^2 + 2t - 3$. В какое время скорость первой точки втрое больше скорости второй?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 6

39. (99-9-51) Материальная точка, движется прямолинейно по закону $S(t) = 6t^2 - 2t^3 + 5$. Чему равна ее мгновенная скорость, когда ее ускорение равно нулю?
A) 8 B) 6 C) 7 D) 9

40. (02-3-50) Вычислите ускорение материальной точки в момент $t = 2$, движущейся прямолинейно по закону $S(t) = t\sqrt{t}$.
A) $\frac{3}{8}\sqrt{2}$ B) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ C) $\frac{3}{16}\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{2}$

41. (02-11-51) Определите скорость (м/с) материальной точки, движущейся прямолинейно по закону $S(t) = \frac{3t+2}{t+3}$, в момент $t = 2$.
A) 0,2 B) 0,25 C) 0,28 D) 0,32

42. (03-4-44) Две материальные точки движутся по законам $S_1(t) = 2t^3 - 5t^2 - 3t()$ и $S_2(t) = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7()$. Найдите ускорение (м/с^2) первой точки в момент, когда их скорости равны.
A) 10 B) 8 C) 14 D) 9

14.4 Первообразная и интеграл

Пусть на некотором интервале даны функции f и F, и они связаны соотношением

$$F'(x) = f(x). \qquad (14.2)$$

Как известно, функция f называется производной функции F. Мы изучили способы нахождения функции f, зная F. Теперь изучим обратную задачу, т.е. ознакомимся способами нахождения функции F по ее производной f. Если функция F дифференцируема на некотором интервале и для всех точек из этого интервала выполняется равенство (14.2), то функция F называется *первообразной* для функции f. Нахождение первообразной для данной функции f называется *интегрированием функции.* Во многих случаях обратная операция к данной определяется неоднозначно. Такое случается и при нахождении первообразной для данной функции. Если функция F является первообразной для функции f, тогда для любого постоянного числа C функция $F(x)+C$ тоже является первообразной.

Семейство функций $F(x)+C$, т.е. множество всех первообразных называется ***неопределенным интегралом*** от функции f и обозначается следующим образом:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Теперь приведем таблицу неопределенных интегралов для элементарных функций.

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1).$

2. $\int x^{-1}dx = \ln|x| + C.$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

5. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

6. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C.$

8. $\int |x-a|dx = \frac{1}{2}(x-a)|x-a| + C.$

9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$

10. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$

Правила нахождения первообразных

11. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

12. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

13. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx.$

14. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, **то**

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

1. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = 2x - 1$.
A) $2x^2 - x + C$ B) $x^2 - x + C$
C) $x^2 - 1 + C$ D) $x^2 + x + C$

Решение: Запишем функцию в виде $f(x) = 2x^1 - x^0$ и используя формулы 1, 12, 13, получим

$$\int f(x)dx = 2\cdot\frac{x^{1+1}}{2} - \frac{x}{1} + C = x^2 - x + C.$$

Ответ: $x^2 - x + C$ (B).

2. Найдите неопределенный интеграл от функции $f(x) = 3x^2 - \sin x$.
A) $x^3 + \cos x + C$ B) $x^3 - \cos x + C$
C) $3x^3 - \cos x + C$ D) $x^3 + \operatorname{tg} x + C$

3. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = e^x + \cos x$.
A) $e^x - \cos x + C$ B) $e^x + \sin x + C$
C) $e^x - \sin x + C$ D) $e^x + \cos x + C$

4. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = 1 + \cos^{-2} x$.
A) $x + 2\cos^{-3} x + C$ B) $x - \operatorname{tg} x + C$
C) $x - \operatorname{ctg} x + C$ D) $x + \operatorname{tg} x + C$

5. (99-8-40) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$.
A) $\frac{3}{2}\sqrt{x} + C$ B) $3\sqrt{x} + C$
C) $\frac{4}{3}\sqrt{x} + C$ D) $-\frac{3}{2}\sqrt{x} + C$

6. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = x^{-1} - \operatorname{tg} x$.
A) $\ln|x\cos x| + C$ B) $\ln|x| + \operatorname{ctg} x + C$
C) $\ln|\frac{\cos x}{x}| + C$ D) $\ln|x| - \operatorname{ctg} x + C$

7. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = 3(x-1)(x+3)$.
A) x^3+3x^2-9x+C B) x^3-3x^2-9x+C
C) x^3+3x^2+9x+C D) x^3+3x^2-3x+C

Решение: Раскрыв скобки, запишем функцию в виде $f(x) = 3x^2+6x-9$ и используя формулы 1, 12, 13, получим

$$\int f(x)dx = x^3 + 3x^2 - 9x + C.$$

Ответ: $x^3 + 3x^2 - 9x + C$ (A).

8. Найдите неопределенный интеграл от функции

$$f(x) = (3x+1)^2.$$

A) $3x^3+3x^2+x+C$ B) x^3-3x^2-x+C
C) x^3-3x^2+x+C D) x^3-3x^2+x+C

9. Найдите неопределенный интеграл от функции

$$f(x) = (e^{0,5x} + e^{-0,5x})^2.$$

A) $e^x+e^{-x}+x+C$ B) $e^x-e^{-x}+x+C$
C) $e^x+e^{-x}+2x+C$ D) $e^x-e^{-x}+2x+C$

10. Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x) = \sqrt{x}(x+1).$$

A) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$ B) $\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} + C$
C) $\frac{5}{2}x^2\sqrt{x} + \frac{3}{2}x\sqrt{x} + C$ D) $\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{3}{2}x^{3/2} + C$

11. Найдите общий вид первообразных для функции
$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}.$$
A) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$ B) $\frac{3}{2}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$
C) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$ D) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}+C$

12. (00-3-70) Найдите неопределенный интеграл от функции
$$f(x)=2x-\frac{1}{x^2}-\cos 2x.$$
A) $x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\sin 2x+C$
B) $x^2-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\sin 2x+C$
C) $x^2+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin 2x+C$
D) $x^2+\frac{1}{x}-\sin 2x+C$

Решение: Воспользуемся формулами 1 и 12 вычисления неопределенных интегралов и получим
$$\int f(x)dx=x^2+x^{-1}-\int\cos 2xdx. \qquad (14.3)$$
Теперь используя формулы 4 и 14, найдем
$$\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$
Подставив это выражение в (14.3), имеем
$$\int f(x)dx=x^2+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$
Ответ: (C).

13. (98-8-31) Найдите общий вид первообразных для функции $y=\frac{2}{e^x}$.
A) $\frac{2}{e^x}+C$ B) $2\ln x+C$
C) $e^{-x}+C$ D) $-2e^{-x}+C$

14. (96-1-32) Найдите общий вид первообразных для функции
$$f(x)=1-\frac{1}{\cos^2 3x}.$$
A) $x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg} x+C$ B) $x-\frac{1}{3}\operatorname{tg} x+C$
C) $x-\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x+C$ D) $\operatorname{tg} 3x+C$

15. (96-3-31) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=2\sin 3x$.
A) $-\frac{2}{3}\cos 3x+C$ B) $\frac{2}{3}\cos 3x+C$
C) $-\frac{3}{2}\sin 2x+C$ D) $\frac{3}{2}\sin 2x+C$

16. (96-7-32) Укажите общий вид первообразных для функции $f(x)=2\cos^2 x$.
A) $2\sin^2 x+C$ B) $x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$
C) $\frac{2}{3}\cos^3 x+C$ D) $2x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$

Решение: Применим формулу понижения степени $2\cos^2 x=1+\cos 2x$, а также формулы 4 и 14. В итоге получим
$$\int f(x)dx=\int(1+\cos 2x)dx=x+\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$
Ответ: (B).

17. (97-5-35) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\sin^2 x$.
A) $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$ B) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$
C) $\frac{1}{4}\sin 2x+C$ D) $-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

18. (96-10-34) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=1+\frac{1}{\sin^2 4x}$.
A) $x-\frac{1}{4}\operatorname{ctg} 4x+C$ B) $x+\frac{1}{4}\operatorname{tg} 4x+C$
C) $x-\operatorname{ctg} 4x+C$ D) $x+\frac{1}{4}\operatorname{ctg} x+C$

19. (96-11-32) Укажите общий вид первообразных для функции $f(x)=3\sin 2x$.
A) $-\frac{3}{2}\cdot\cos 2x+C$ B) $-\frac{2}{3}\cdot\cos 2x+C$
C) $\frac{3}{2}\cdot\sin 2x+C$ D) $-\frac{3}{2}\cdot\sin 2x+C$

20. Для функции $f(x)=x^2$ найдите первообразную, график которой проходит через точку (3; 2).
A) $\frac{x^3}{3}+7$ B) $\frac{x^3}{3}-7$ C) $2x-4$ D) $2x+4$

Решение: По формуле 1 имеем
$$\int f(x)dx=\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C=F(x).$$
Если использовать, что график функции F проходит через точку (3; 2), получим равенство $F(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3+C=2$. Отсюда следует $C=-7$.
Ответ: $\frac{x^3}{3}-7$ (B).

21. Для функции $f(x)=x-\frac{x^2}{2}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку (6; 0) .
A) $1-x+5$ B) $1-x-5$
C) $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-18$ D) $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+18$

22. (97-6-23) Найдите $F(x)$, если $F'(x)=2x-1$ и $F(1)=2$.
A) $F(x)=3x^2-3x+2$ B) $F(x)=x^2-x+2$
C) $F(x)=x^2+x$ D) $F(x)=\frac{x^2}{2}-x+2\frac{1}{2}$

23. (97-7-32) Укажите общий вид первообразных для функции $f(x) = \sin x \cdot \cos 2x$.
A) $\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin x + C$
B) $\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + C$
C) $\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$
D) $-\cos x \cdot \sin 2x + C$

24. (97-10-32) Какая функция является общим видом первообразных для функции $f(x) = \sin 2x \cdot \cos x$?
A) $-\frac{1}{2}\cos 2x \cdot \sin x + C$
B) $\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + C$
C) $-\frac{1}{6}\cos 6x - \frac{1}{6}\cos x + C$
D) $-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$

25. (98-1-31) Укажите общий вид первообразных для функции $y = e^{1-3x}$.
A) $-3e^x + C$ B) $e^{1-3x} + C$
C) $-3e^{1-3x} + C$ D) $-\frac{1}{3}e^{1-3x} + C$

26. (96-6-47) Для какой из следующих функций $F(x) = 2\cos x + \sin x + C$ является первообразной?
A) $f(x) = -2\sin x - \cos x$
B) $f(x) = 2\sin x + \cos x$
C) $f(x) = -2\sin x + \cos x$
D) $f(x) = 2\sin x - \cos x$

Решение: Вычислим производную функции F:
$$F'(x) = -2\sin x + \cos x = f(x).$$
Ответ: $f(x) = -2\sin x + \cos x$ (C).

27. (98-2-43) Для какой из следующих функций $F(x) = e^x - \frac{1}{3}\sin 3x + \operatorname{ctg} x + C$ является первообразной?
A) $f(x) = e^x - \cos 3x - \frac{1}{\sin^2 x}$
B) $f(x) = e^x + \cos 3x - \frac{1}{\sin^2 x}$
C) $f(x) = e^x - \cos 3x + \frac{1}{\sin^2 x}$
D) $f(x) = e^x + \cos 3x + \frac{1}{\sin^2 x}$

28. (96-6-48) Если $F(x)$ – первообразная для функции $y = f(x)$, то найдите первообразную для функции $2f(2x)$.
A) $2F(2x)$ B) $\frac{1}{2}F(2x)$ C) $F(2x)$ D) $2F(x)$

29. (98-9-41) Для какой из следующих функций $F(x) = 2\cos 2x + \sin x + C$ является первообразной?
A) $-4\sin 2x - \cos x$ B) $4\sin x + \cos x$
C) $-2\sin 2x + \cos x$ D) $-4\sin 2x + \cos x$

30. (99-2-43) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos x + C$ – первообразная функции $y = f(x)$. Найдите производную функции $y = f(x)$.
A) $2\cos^2\frac{x}{2}$ B) $2\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$
C) $1 + 2\cdot\cos x$ D) $2\cdot\sin^2\frac{x}{2}$

31. (99-3-59) Найдите все первообразные для функции
$$f(x) = x + \operatorname{ctg}^2 x.$$
A) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C$ B) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C$
C) $\frac{x^2}{2} - x - \operatorname{ctg} x + C$ D) $\frac{x^2}{2} - x + \operatorname{ctg} x + C$

Решение: Применяя одно из основных тригонометрических тождеств $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, заданную функцию запишем в виде:
$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{\sin^2 x}.$$
Теперь пользуясь формулами 1 и 5 имеем
$$\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} - x - \operatorname{ctg} x + C.$$
Ответ: $\frac{x^2}{2} - x - \operatorname{ctg} x + C$ (C).

32. (01-12-50) Найдите все первообразные для функции $f(x) = (\ln\sin x + 1)\cdot\cos x$.
A) $\cos x \cdot \ln\sin x + C$ B) $\sin x \cdot \ln\sin x + C$
C) $\sin x \cdot \ln\cos x + C$ D) $x + \ln\sin x + C$

33. (02-3-51) Найдите все первообразные для функции
$$f(x) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2.$$
A) $tgx - ctgx + C$ B) $\operatorname{tg} x - ctgx + 2x + C$
C) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + 4x + C$ D) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 4x + C$

34. (99-8-41) Какая из первообразных функции $f(x) = 3x^2 - 2$ проходит через точку $M(2;4)$?
A) $F(x) = x^3 - 2x$ B) $F(x) = x^3 - 2x + 1$
C) $F(x) = x^3 - 2x + 5$ D) $F(x) = x^3 - 2x + 8$

35. (99-10-45) Для функции $f(x) = 2\cos^2(\frac{x}{2})$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(0;3)$.
A) $F(x) = x - \sin x + 3$
B) $F(x) = -x + \sin x + 3$
C) $F(x) = x + \sin x + 3$
D) $F(x) = x + \cos x + 3$

36. (02-10-32) Для функции $f(x) = 6x^2 - 6x + 7$ укажите первообразную, график которой проходит через точку $M(1;0)$.
A) $2x^3 - 3x^2 + 7x - 6$ B) $6x^2 - 6x$
C) $6x^3 - 6x^2 + 7x - 7$ D) $3x^3 - 3x^2 + 7x - 7$

37. (01-1-36) Для функции
$$f(x) = 3x^2 - 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$$

найдите первообразную, график которой проходит через начало координат.

A) $x^3 - \frac{1}{2}\sin(2x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

B) $3x^3 - \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

C) $x^3 - \sin x + \frac{1}{2}$

D) $x^3 - \sin(2x + \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$

38. (01-4-24) Для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(e; 2)$.
A) $2\ln|x|$ B) $3 - \ln|x|$
C) $e\ln|x|$ D) $\ln|x| + 1$

39. (01-7-51) Для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $A(3; 5)$.
A) $\sqrt{x-2} + 4$ B) $2\sqrt{x-2} + 3$
C) $\sqrt{x-2} + 3$ D) $2\sqrt{x-2} + 4$

14.4.1 Определенный интеграл

Рассмотрим правила вычисления и применение определенного интеграла. Если F – первообразная для функции f на отрезке $[a; b]$, то число

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

называется *определенным интегралом функции* $f(x)$ *по отрезку* $[a; b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Значение определенного интеграла не зависит от выбора первообразной, потому что для любого значения C имеем

$$(F(x) + C)\Big|_a^b = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(x)\Big|_a^b.$$

По определению определенного интеграла следует.

1. **Формула Ньютона- Лейбница**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (14.4)$$

2. **Для любого $c \in (a; b)$ имеет место**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Понятие определенного интеграла тесно связано с вычислением площадей геометрических фигур.

Пусть на отрезке $[a; b]$ нам задана неотрицательная функция f, а F –ее первообразная. Фигура ограниченная сверху графиком функции f, снизу осью абсцисс и с боковых сторон вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ называется криволинейной трапецией.

Для площади криволинейной трапеции (рис. 14.3) справедлива формула:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (14.5)$$

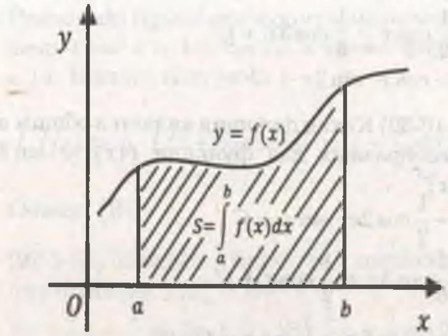


Рисунок 14.3

1. **Вычислите**

$$\int_0^2 2xdx.$$

A) 4 B) −4 C) 16 D) 2

Решение: Первообразная для функции $f(x) = 2x$ есть $F(x) = x^2$. По формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_0^2 2xdx = x^2\Big|_0^2 = 2^2 - 0^2 = 4.$$

Ответ: 4 (A).

2. Вычислите

$$\int_0^1 (1 + 4x)dx.$$

A) 4 B) 3 C) 6 D) 2

3. Вычислите

$$\int_0^1 (2 + 3x^2)dx.$$

A) 4 B) 3 C) 6 D) 2

4. (99-1-27) Вычислите

$$\int_0^2 x^3dx.$$

A) 4 B) −4 C) 16 D) 2

5. (98-8-32) Вычислите

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x|dx.$$

A) 1 B) 3 C) −1 D) 4

Решение: На $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ из $\cos x \ge 0$ следует равенство $|\cos x| = \cos x$, а на $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ из $\cos x \le 0$ имеем $|\cos x| = -\cos x$. По свойству

2 заданный интеграл представим в виде суммы двух интегралов:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x| dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx.$$

Теперь по формуле 4 пункта 14.4 и формуле Ньютона – Лейбница имеем

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2}) = 2,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1.$$

В итоге $2 - (-1) = 3$. **Ответ:** 3 (B).

6. Вычислите

$$\int_{-2}^{3} |1 - x| dx.$$

A) 9 B) 6,5 C) 4 D) 12,5

7. (96-1-31) Вычислите

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $-\sqrt{2}$

8. (96-6-49) Вычислите

$$\int_{0}^{e^2-1} \frac{dx}{x+1}.$$

A) 3 B) 2 C) −2 D) −3

9. (96-7-31) Вычислите

$$\int_{0}^{2} (1-2x)^2 dx.$$

A) $4\frac{1}{2}$ B) $-3\frac{1}{3}$ C) 9 D) $4\frac{2}{3}$

10. (97-3-31) Вычислите

$$\int_{0}^{1} (3x-1)^2 dx.$$

A) 3 B) 1 C) $-\frac{1}{3}$ D) $\frac{7}{9}$

11. (96-9-82) Вычислите

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) −1 C) $-\frac{1}{2}$ D) 1

Решение: Из формул 3 и 14 пункта 14.4, а также формулы Ньютона – Лейбница имеем

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$ (A).

12. (96-10-33) Вычислите

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) 0 D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

13. (97-1-22) Вычислите

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos 3x dx.$$

A) $\frac{1}{3}$ B) 0 C) $-\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$

14. (97-11-22) Вычислите

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x dx.$$

A) $\frac{1}{5}$ B) $-\frac{2}{5}$ C) 1 D) −1

15. (97-8-49) Вычислите

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{ctg}^2 x) dx.$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) 1 C) $\sqrt{3} - 1$ D) −1

16. (97-7-31) Вычислите

$$\int_{-1}^{0} (2x+1)^2 dx.$$

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{1}{3}$

17. (97-10-31) Вычислите

$$\int_{-1}^{0} (1+3x)^2 dx.$$

A) 1 B) −1 C) $\frac{7}{9}$ D) $-\frac{1}{3}$

18. (98-4-43) При каких значениях a выполняется равенство

$$\int_{0}^{2} (t - \log_2 a) dt = 2\log_2 \frac{2}{a}?$$

A) $a \in (2;\infty)$ B) $a \in (1;2)$
C) $a \in (0;\infty)$ D) $a \in (-1;1)$

19. (98-7-41) Вычислите

$$\int_{-2}^{0} (|x| + 1) dx.$$

A) 3 B) 2 C) 4 D) −4

20. (98-12-40) Вычислите

$$\int_{0}^{2} (|x| + 1) dx.$$

A) 4 B) 2 C) 3 D) 8

21. (98-11-41) Вычислите

$$\int_0^{\ln 3}(e^{2t}-e^{-t/2})dt.$$

A) $2+\frac{2}{\sqrt{3}}$ B) $2-\frac{2}{\sqrt{3}}$

C) $\frac{2}{\sqrt{3}}-2$ D) $2+\frac{1}{\sqrt{3}}$

Решение: Для подынтегральной функции $f(t)=e^{2t}-e^{-t/2}$ первообразной является

$$F(t)=\frac{1}{2}\cdot e^{2t}+2e^{-t/2}.$$

По формуле Ньютона – Лейбница найдем

$$F(\ln 3)-F(0)=\frac{1}{2}\cdot e^{2\ln 3}+2e^{-\ln 3/2}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot e^0-2e^0=\frac{9}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}-2,5=2+\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: (A).

22. Вычислите

$$\int_{\frac{4\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}|\sin x|dx.$$

A) 1,5 B) -2 C) 1 D) -1

23. (99-6-24) Вычислите

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{2\pi}\cos(0,25x)dx$$

A) -2 B) 1 C) -1 D) 2

24. (00-2-29) Вычислите

$$\int_0^{2\pi}\cos 7x\cdot\cos 2x dx.$$

A) 0,5 B) 1 C) 2 D) 0

Решение: Преобразовав произведение косинусов к сумме, имеем

$$\cos 7x\cdot\cos 2x=\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos 9x).$$

По формулам 4 и 14 пункта 14.4 найдем первообразную подынтегральной функции:

$$F(x)=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{9}\sin 9x\Big).$$

Так как для первообразной $F(2\pi)=F(0)=0$, по формуле Ньютона – Лейбница значение интеграла тоже равно нулю. **Ответ:** 0 (D).

25. (00-2-44) При каком значении b значение интеграла

$$\int_{-1}^{1}(4x+b)dx$$

равно 1?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 2

26. (00-3-68) Вычислите

$$\int_{-3}^{6}x|x|dx.$$

A) 81 B) 63 C) 60 D) 84

27. (01-1-38) Вычислите

$$\int_{-4}^{4}x|x|dx.$$

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$

28. (00-3-71) Вычислите

$$\int_{-\pi/2}^{-\pi/4}\frac{dx}{\cos^2(\frac{\pi}{2}+x)}.$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}-1$ C) 0 D) 1

29. (00-4-54) Вычислите

$$\frac{1}{16}\int_0^{\pi}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{4}}.$$

A) 1 B) 0,5 C) 0,25 D) 2

30. (00-10-36) Вычислите

$$\int_0^1\frac{e^x+e^{-1}}{e^{x-1}}dx.$$

A) $\frac{e^2-e+1}{e}$ B) $\frac{e^2-e-1}{e}$

C) $\frac{-e^2+e-1}{e}$ D) $\frac{e^2+e-1}{e}$

31. (01-7-52) Вычислите

$$\int_0^{\pi/2}\sin x\cos x dx.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 1 D) $\frac{1}{8}$

Площадь криволинейной трапеции

32. (97-9-92) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=2x$.

A) $1\frac{1}{3}$ B) 1 C) $1\frac{1}{4}$ D) $1\frac{1}{2}$

Решение: Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $y=x^2$, $y=2x$. Для этого решим уравнение $x^2=2x$. Его корни $x_1=0$, $x_2=2$. По (14.5) площадь фигуры, ограниченной данными линиями равна (см. рис. 14.4)

$$S=\int_0^2(2x-x^2)dx=\Big(x^2-\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_0^2=$$

$$=4-\frac{8}{3}=\frac{12-8}{3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}.$$

Ответ: $1\frac{1}{3}$ (A).

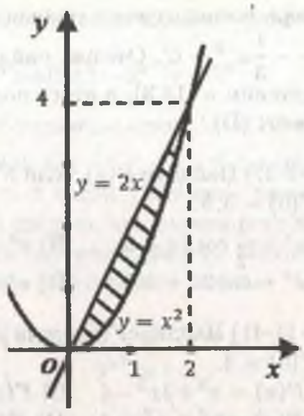


Рисунок 14.4

33. (96-3-32) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = 2$.
A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) 4 D) $2\frac{2}{3}$

34. (96-11-33) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$ и $x = -2$.
A) $2\frac{2}{3}$ B) $2\frac{1}{3}$ C) $2\frac{5}{6}$ D) 2

35. (96-12-33) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$ и $x = 2$.
A) 8 B) 4 C) $\frac{1}{2}$ D) $2\frac{2}{3}$

36. (97-4-32) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ и $x = 4$.
A) $5\frac{1}{3}$ B) $5\frac{2}{3}$ C) 5 D) $6\frac{1}{4}$

37. (97-5-36) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4.$$

A) 5 B) 2 C) 3 D) 1

38. (97-9-36) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{3}{\sqrt{x}} \quad y = 0, \quad x = 1 \quad \text{и} \quad x = 4.$$

A) 6 B) 7 C) 5 D) 4

39. (99-8-75) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sin 2x, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$

40. (99-10-46) При каких значениях t площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 0$ и $x = t$ равна 9?
A) 6 B) 4 C) 5 D) 3

Решение: По (14.5) площадь фигуры, ограниченной данными линиями равна

$$S = \int_0^t x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^t = \frac{t^3}{3}.$$

Она равна 9 при $t = 3$. **Ответ:** 3 (D).

41. (01-4-22) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 2$.
A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{2}$

42. (01-4-29) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2}$ и $y = \frac{x^3}{2}$.
A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{24}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{13}$

43. (01-9-53) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2$, $y = \frac{2}{x}$, $y = 0$ и $x = e$.
A) 2 B) $2\frac{1}{3}$ C) 1,5 D) $2\frac{2}{3}$

44. (02-2-34) Чему равна площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2$ $y = 0$ и $x = 3$?
A) 18 B) 27 C) 54 D) 36

45. (02-3-52) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $2x - 3y + 2 = 0$, $y = 0$, $x = 2$ и $x = 5$.
A) 9 B) 7 C) 11 D) 10

46. (02-6-55) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$ и $y = \sqrt{x}$.
A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{5}{12}$

47. (03-6-23) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 9 - x^2$ и $y = x^2 + 1$.
A) $10\frac{1}{3}$ B) $10\frac{2}{3}$ C) $13\frac{2}{3}$ D) $21\frac{1}{3}$

48. (03-6-24) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 1 - |x - 1| \quad \text{и} \quad y = -1 + |x - 1|.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) 2

49. Найдите площадь фигуры ограниченной линиями

$$x = 0, \quad x = \ln 3, \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y = e^x.$$

A) 2 B) $\ln 3 - 1$ C) 1 D) 3

14.5 Простейшие дифференциальные уравнения

Уравнение, в котором неизвестная функция участвует вместе со своей производной, называется *дифференциальным уравнением.* Приведем общие решения простейших дифференциальных уравнений.

1. $y' = ay$, **решение** – $y(x) = Ce^{ax}$.

2. $y' = f(x)y$, **решение** – $y(x) = Ce^{\int f(x)dx}$.

3. $y' = g(x)$, **решение** – $y(x) = \int g(x)dx + C$.

Здесь a и C произвольные числа.

1. Найдите общее решение уравнения $y' = 3y$.
A) $y = Ce^{3x}$ B) $y = C + e^{3x}$
C) $y = 3x$ D) $y = e^{x+C}$

Решение: Из 1 следует, что общим решением уравнения $y' = 3y$ является $y(x) = Ce^{3x}$. **Ответ:** $y = Ce^{3x}$ (A).

2. Найдите общее решение уравнения $y' = -y$.
A) $y = -e^{-x}$ B) $y = Ce^{-x}$
C) $y = C - e^{-x}$ D) $y = Ce^{x}$

3. Найдите общее решение уравнения $y' = \sin x\ y$.
A) $y = Ce^{\cos x}$ B) $y = e^{C-\cos x}$
C) $y = C - \cos -x$ D) $y = C\cos x$

4. Найдите общее решение уравнения $y' = \operatorname{tg} x$.
A) $y = C - \ln\cos x$ B) $y = \operatorname{ctg} x + C$
C) $y = C\ln\cos x$ D) $y = C + \ln\cos x$

5. Найдите решение уравнения $y' = -2x\,y$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.
A) $y = 2e^{-x^2} - 1$ B) $y = e^{-x^2}$
C) $y = 2 - e^{-2x}$ D) $y = e^{-2x}$

Решение: По формуле 2 общее решение уравнения $y' = -2x\,y$ имеет вид $y(x) = Ce^{-x^2}$. Теперь из условия $y(0) = Ce^{-0} = 1$ имеем $C = 1$. Таким образом, функция $y = e^{-x^2}$ является решением данного уравнения, удовлетворяющим условию $y(0) = 1$. **Ответ:** $y = e^{-x^2}$ (B).

6. Найдите решение уравнения $y' = \dfrac{1}{x}y$, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$.
A) $y = x$ B) $y = e^{x-1}$
C) $y = 2x - 1$ D) $y = \dfrac{1}{x}$

7. Найдите решение уравнения $y' = 5\,y$, удовлетворяющее условию $y(0) = 3$.
A) $y = e^{5x}$ B) $y = 3e^{5x}$
C) $y = 4 - e^{5x}$ D) $y = 2 + e^{5x}$

8. Найдите решение уравнения $y' = \operatorname{ctg} x$, удовлетворяющее условию $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.
A) $y = \ln\sin x$ B) $y = \ln\sin x + x - \pi$
C) $y = \ln\sin x + x - \dfrac{\pi}{2}$ D) $y = \ln\sin x + x + \dfrac{\pi}{2}$

9. (01-8-30) Найдите $F(x)$, если $F'(x) = e^{-3x}$ и $F(1) = 0$.
A) $-3e^{-3x} + 1$ B) $-\dfrac{1}{3}e^{-3x} + \dfrac{1}{3}$
C) $\dfrac{1}{3}e^{-3x} + e$ D) $-\dfrac{1}{3}e^{-3x} + \dfrac{1}{3}e^{-3}$

Решение: По формуле 3, имеем F:
$$F(x) = \int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C. \qquad (14.3)$$

Теперь воспользуемся условием $F(1) = 0$: $0 = -\dfrac{1}{3}e^{-3} + C$. Отсюда найдем $C = \dfrac{1}{3}e^{-3}$ и подставим в (14.3), в итоге получим ответ D). **Ответ:** (D).

10. (01-1-37) Найдите $F(x)$, если $F'(x) = e^x + \sin 2x$ и $F(0) = 3,5$..
A) $e^x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + 3$ B) $e^x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + 4$
C) $e^x - \cos 2x + 4,5$ D) $e^x - \cos x + 3$

11. (01-11-41) Найдите$F(x)$, если $F'(x) = 3x^2 - 2x$ и $F(0) = 4$.
A) $F(x) = x^4 + 2x^2 - 4$ B) $F(x) = x^4 - 2x^2 + 4$
C) $F(x) = x^4 - x^2 - 4$ D) $F(x) = x^3 - x^2 + 4$

12. (97-11-23) Найдите $F(x)$, если $F'(x) = x - 4$, $F(2) = 0$.
A) $F(x) = x^2 - 2x$ B) $F(x) = x^2 - 4x + 4$
C) $F(x) = 2x^2 - 4x$ D) $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 6$

14.6 Специальные задачи

Справедливы следующие утверждения.

1. Если $A + B + C = 0$, $A \geq 0$, $B \geq 0$, $C \geq 0$, то одновременно выполняются равенства $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$.

2. Если для числа A имеют место $f(x) \leq A$ и $g(x) \geq A$, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$.

3. Сумма всех коэффициентов многочлена $P(x)$ равна $P(1)$, сумма всех коэффициентов перед четными степенями x равна $\frac{1}{2}(P(1) + P(-1))$; а сумма всех коэффициентов перед нечетными степенями x равна $\frac{1}{2}(P(1) - P(-1))$.

4. Пусть x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Тогда $x_1 + x_2 + x_3 = -a$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$, $x_1x_2x_3 = -c$.

5. При нахождении наименьшего и наибольшего значений выражений применяются неравенства:
1) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $a, b \geq 0$;
2) $p^2 + q^2 + r^2 \geq pq + qr + pr$, p, q, r– произвольные числа.

6. Если функция f возрастает на отрезке $[a;\ b]$ и для всех $x \in [a;\ b]$ выполняется условие $a \leq f(x) \leq b$, то уравнение $f(f(f\cdots f(x))) = x$ равносильно уравнению $f(x) = x$.
Замечание. **Это утверждение справедливо и при $b = \infty$.**

7. Сумма цифр числа вида $\overline{1234\cdots n0}$, $1 \leq n \leq 9$, $n \in \mathbb{N}$ равна $S(n) = 5n^2 + 41n$.

1. (99-5-16) Сколько корней имеет уравнение?

$$\cos(\lg(2-3^{x^2}))=3^{x^2}$$

A) $\emptyset$ B) бесконечно много C) 1 D) 2

Решение: Так как $-1\le\cos x\le 1$, наибольшее значение левой части уравнения равно 1. Из $3^{x^2}\ge 3^0=1$ следует, что наименьшее значение правой части уравнения равно 1. Поэтому, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos(\lg(2-3^{x^2}))=1\\ 3^{x^2}=1\end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $x^2=0$ или $x=0$. Число $x=0$ удовлетворяет и первому уравнению. Итак, данное уравнение имеет единственное решение $x=0$. **Ответ:** 1 (C).

2. (97-12-10) Найдите значение $2a-3b$, если $(a-|b|)^2+(a-2)^2=0$.

A) -2 B) 10 C) 2 и 10 D) -2 и 10

3. (98-11-61) Найдите $x+y$, если числа x и y удовлетворяют равенству

$$x^2+y^2+(y-1)^2=2xy.$$

A) 4 B) 1 C) 3 D) 2

4. (98-12-80) Найдите $x+y+z$, если

$$x^2+y^2+2(2x-3y)+|z-xy|+13=0.$$

A) 8 B) 11 C) -5 D) -7

5. (99-9-8) Чему равно $a+b+c$, если $n-m=(a-2)^2$, $p-n=(b-3)^2$ и $m-p=(c-4)^2$?

A) 8 B) 10 C) 11 D) 9

6. (99-10-8) Найдите $x\cdot y$, если $m-n=(2x+y)^2$, $n-m=(4x-y-12)^2$.

A) -6 B) 6 C) -8 D) 8

7. (00-6-14) Сколько корней имеет система уравнений

$$\begin{cases}y=x^2+7x+11\\ y=x^2+3x+15?\end{cases}$$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

8. (00-9-39) Вычислите x^2+y^2, если

$$9(x^4+y^4)-6(x^2+y^2)+2=0.$$

A) $\frac{1}{3}$ B) 1 C) $\frac{2}{3}$ D) 3

Решение: Данное уравнение запишем в виде

$$9x^4-6x^2+1+9y^4-6y^2+1=0$$

или

$$(3x^2-1)^2+(3y^2-1)^2=0.$$

Квадрат действительного числа неотрицателен. Из свойства 1 следует, что если сумма неотрицательных чисел равна нулю, то все они равны нулю. Поэтому данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(3x^2-1)^2=0\\ (3y^2-1)^2=0\end{cases}\iff\begin{cases}3x^2-1=0\\ 3y^2-1=0.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем $x^2=\frac{1}{3}$, из второго $y^2=\frac{1}{3}$. Их сумма равна $x^2+y^2=\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$ (C).

9. (02-9-8) Найдите число, обратное $a+b+c$, если

$$16a^2+9b^2+4c^2+3=8a+6b+4c.$$

A) $-1\frac{1}{12}$ B) $\frac{12}{13}$ C) $\frac{12}{11}$ D) $-\frac{11}{12}$

10. (01-9-44) Решите уравнение

$$\log_7^2(x^2+5x-13)+\log_{1/7}^2(x^2-8x+13)=0.$$

A) 3 B) 2 C) 5 D) 1

11. (03-5-42) Решите уравнение

$$\cos^2(\frac{\pi x}{2})+\sqrt{2x^2-5x-3}=0.$$

A) 3 B) $\frac{3}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) -3

12. (99-5-31) Сколько корней имеет уравнение

$$\sin(\frac{\pi\sqrt{5}}{20}\cdot x)=21-4\sqrt{5}x+x^2$$

на отрезке $[-3\pi;3\pi]$?

A) $\emptyset$ B) 1 C) 2 D) 3

13. (00-5-42) Решите уравнение

$$\sin 5x-3\cdot\cos 2x=4.$$

A) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$
C) $\pi+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$

14. (00-6-55) Сколько корней имеет уравнение

$$\cos x\cos 2x\cos 4x=1$$

на отрезке $[-2\pi;2\pi]$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

15. (00-9-24) Сколько корней имеет уравнение

$$\log_3 x+\log_x 3=2\cos(6\pi x^2)?$$

A) $\emptyset$ B) 1 C) 2 D) 3

16. (01-2-31) Решите неравенство

$$\cos^2(x+1)\cdot\lg(9-2x-x^2)\ge 1.$$

A) $(-\infty;-1]$ B) $\{-1\}$ C) $[-1;0)$ D) $(0;1)$

Решение: Так как $\cos^2(x+1) \geq 0$, для всех $x \in \mathbb{R}$, необходимым условием выполнения неравенства является

$$\lg(9 - 2x - x^2) = \lg(10 - (x+1)^2) \geq 0.$$

Из неравенства $10 - (x+1)^2 \leq 10$ и из возрастания функции $\lg x$ имеем неравенство $\lg(10 - (x+1)^2) \leq 1$. Умножая почленно неотрицательные неравенства $\cos^2(x+1) \leq 1$ и $\lg(10 - (x+1)^2) \leq 1$ одинакового знака, получим

$$\cos^2(x+1) \cdot \lg(10 - (x+1)^2) \leq 1.$$

Отсюда и из данного неравенства следует

$$\cos^2(x+1) \cdot \lg(10 - (x+1)^2) = 1 \qquad (14.6).$$

Еще раз воспользуемся неравенствами

$$0 \leq \cos^2(x+1) \leq 1 \quad \text{и} \quad \lg(10 - (x+1)^2) \leq 1,$$

и приходим к выводу, что уравнение (14.6) равносильно системе

$$\begin{cases} \cos^2(x+1) = 1 \\ \lg(10 - (x+1)^2) = 1 \end{cases}$$

Из втрого уравнения системы имеем $10 - (x+1)^2 = 10$ или $(x+1)^2 = 0$. Корень этого уравнения $x = -1$. Он удовлетворяет и первому уравнению. Таким образом, неравенство имеет единственное решение $x = -1$. **Ответ:** $\{-1\}$ (B).

17. (01-2-67) Сколько корней имеет уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2?$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

18. (01-8-34) Найдите сумму корней уравнения

$$3 - 4x - 4x^2 = 2^{4x^2+4x+3}.$$

A) 2 B) $-0,5$ C) 6 D) 4,5

19. (01-12-22) Сколько корней имеет уравнение

$$\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) = 1$$

на отрезке $[-\pi; \pi]$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0

20. (03-2-19) Найдите сумму корней уравнения

$$6x - x^2 - 5 = 2^{x^2-6x+11}.$$

A) -5 B) -3 C) 6 D) 3

21. (03-9-15) Какому из приведенных промежутков принадлежат корни уравнения

$$\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{9 - x^2} = 9x^4 + 8?$$

A) $[-3; -1]$ B) $(-2; 0)$ C) $[0; 2]$ D) $(0; 2)$

22. (99-10-6) Один из корней уравнения

$$x^3 - px^2 - qx + 4 = 0$$

равен 1. Найти сумму всех коэффициентов этого уравнения.

A) -1 B) 0 C) 1 D) 1,5

23. (03-3-26) Найдите сумму коэффициентов всех членов с четными степенями x многочлена

$$P(x) = (x^3 + 2x^2 - 1)^2 - 3x^2.$$

A) -6 B) -2 C) 3 D) -1

Решение: По 3- свойству сумма коэффициентов всех членов с четными степенями равна

$$\frac{1}{2}(P(1) + P(-1)) = \frac{1}{2}(1 + (-3)) = -1.$$

Ответ: -1 (D).

24. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена

$$P(x) = (5x^8 + 3x^6 - 7x^4 + x^2)^2 - 3x.$$

A) 1 B) -2 C) 3 D) -1

25. Найдите сумму всех коэффициентов членов с нечетными степенями x многочлена

$$Q(x) = (7x^6 + 3x^5 - 4x^3 - 6x^2)^3 - 2x + 3.$$

A) -6 B) -2 C) 6 D) -1

26. (97-1-12) Найдите сумму корней уравнения

$$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0.$$

A) 9 B) -2 C) 6 D) 2

Решение: Разложим левую часть уравнения на множители методом группоровки

$$x^2(x+2) - 9(x+2) = 0 \iff (x+2)(x^2-9) = 0.$$

Это уравнение имеет 3 корня, по 4-свойству их сумма равна $x_1 + x_2 + x_3 = -2$. **Ответ:** -2 (B).

27. (97-6-12) Найдите произведение корней уравнения

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0.$$

A) 6 B) -4 C) 12 D) -12

28. (97-11-12) Найдите произведение корней уравнения

$$x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = 0.$$

A) -10 B) 20 C) -4 D) -20

29. (00-8-12) Найдите сумму корней уравнения

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0.$$

A) -3 B) -7 C) 4 D) 12

30. (02-11-22) Найдите произведение корней уравнения

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0.$$

A) 3 B) −6 C) 6 D) −3

31. (98-12-77) Чему равно наибольшее значение выражения

$$\frac{10}{x^2 + 8x + 41} + \cos 5y?$$

A) 1,8 B) 1,5 C) 1,4 D) 2

Решение: Одно из слагаемых зависит только от x, а второе зависит только от y. Поэтому найдем наибольшее значение каждого из них. Наибольшее значение второго равно 1. Знаменатель первого запишем в виде $(x+4)^2 + 25$. И числитель и знаменатель дроби положительны, кроме этого числитель – постоянное число. Поэтому дробь достигает наибольшего значения при наименьшем значении знаменателя. Наименьшее значение знаменателя достигается при $x = -4$ и оно равно 25. Таким образом, число $\frac{10}{25} + 1 = 1,4$ – наибольшее значение выражения.
Ответ: 1,4 (C).

32. (02-6-39) Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{2\sin\alpha - 1}{5 - 2\sin\beta} + \frac{\operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{ctg}^2\gamma}{2}.$$

A) 0 B) 1 C) −1 D) $\frac{4}{7}$

33. (99-8-22) Найдите наименьшее значение произведения

$$x^2 - 2x + 2y^2 + 8y + 9.$$

A) 0 B) 8 C) 1 D) 9

34. (00-1-17) Какое значение принимает xy при наименьшем значении многочлена

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 2y + 3?$$

A) 1 B) −2 C) 2 D) −1

35. (97-9-56) Из 18 спичек не ломая их, построен прямоугольник с наибольшей площадью. Найдите площадь этого прямоугольника.
A) 16 B) 20 C) 24 D) 28

36. (00-3-20) Сравните выражения

$$p = a^2 + b^2 + c^2, \quad q = ab + ac + bc.$$

A) $p < q$ B) $p = q$ C) $p > q$ D) $p \geq q$

37. (98-11-64) Чему равно наибольшее значение выражения $\arccos a - 4\arcsin b$, если $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$?
A) 2π B) 1 C) 3π D) 5π

38. (02-9-17) Найдите наименьшее значение выражения

$$2a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2.$$

A) −2 B) 1 C) 2 D) 4

39. (00-2-23) Вычислите сумму

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}.$$

A) 6 B) 5 C) 3 D)4

Решение: Избавив от иррациональности знаменатели дробей в данном выражении имеем,

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{1}) + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \cdots + \frac{1}{2}(\sqrt{81}-\sqrt{79}).$$

Вынесем общий множитель $\frac{1}{2}$ за скобки. Тогда после упрощений имеем

$$\frac{1}{2}(\sqrt{81}-\sqrt{1}) = \frac{1}{2}(9-1) = 4.$$

Ответ: 4 (D).

40. (00-10-54) Вычислите значение выражения

$$\sqrt{2^3\sqrt{5^3\sqrt{2^3\sqrt{5^3\ldots}}}}.$$

A) 17 B) 12 C) 14 D) 20

41. (97-5-15) Указать значение z в решении уравнения

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7},$$

состоящем из натуральных чисел.
A) 3 B) 4 C) 1 D) 2

42. (97-5-18) Решите уравнение $[x^2] = 9$.
A) 3 B) $(-\sqrt{10}; -3) \cup (3; \sqrt{10})$
C) −3 D) $(-\sqrt{10}; -3] \cup [3; \sqrt{10})$

43. (99-3-12) При каких значениях n уравнение

$$4x^2 - 3nx + 36 = 0$$

имеет два отрицательных корня?
A) $|n| \geq 8$ B) $n \leq -8$ C) $n < 8$ D) $n < -8$

44. (97-5-30) Вычислите $\arcsin(\sin 10)$.
A) $\pi - 10$ B) $2\pi - 10$
C) $3\pi - 10$ D) $\frac{3\pi}{2} - 10$

Решение: Используем соотношение $\arcsin(\sin x) = x, x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ из темы обратные тригонометрические функции. С помощью формул приведения получим равенство $\sin 10 = \sin(3\pi - 10)$. Так как $3\pi - 10 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, то

$$\arcsin(\sin 10) = \arcsin(\sin(3\pi - 10)) = 3\pi - 10.$$

Ответ: $3\pi - 10$ (C).

45. (98-12-18) При каком значении a значение дроби $\frac{a^3}{a^2-1}$ равно $\frac{27}{8}$?
A) 3 B) 2 C) 27 D) 8

46. (99-6-42) Найдите $x+y$, если

$$\begin{cases} x^3+y^3=10 \\ 3xy^2+3x^2y=17. \end{cases}$$

A) 3 B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{3}$

47. (99-8-13) Сколько пар целых чисел $(x;y)$ удовлетворяют равенству

$$(x+1)(y-2)=2?$$

A) 4 B) 2 C) 1 D) 3

48. (00-10-49) При каком значении m выражение

$$x(x+a)(x+b)(x+a+b)+4m^2$$

является полным квадратом?
A) $\frac{a^2b^2}{4}$ B) $\pm\frac{ab}{4}$ C) $\pm\frac{a+b}{4}$ D) $\frac{ab^2}{4}$

Решение: Произведение в данном выражении запишем в виде произведения $x(x+a+b)=x^2+(a+b)x$ и $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ и введем обозначение $x^2+(a+b)x=t$, тогда имеем

$$t(t+ab)+4m^2=t^2+abt+4m^2.$$

Полученный квадратный трехчлен является полным квадратом при $D=(ab)^2-4\cdot 4m^2=0$. Отсюда следует $m=\pm\frac{ab}{4}$. **Ответ:** $\pm\frac{ab}{4}$ (B).

49. (98-5-30) Какому промежутку принадлежит корень уравнения $4^x=4\cdot 5^x$?
A) $(-\infty;-1)$ B) $(0;1)$ C) $[2;\infty)$ D) $(-1;0)$

50. (98-6-17) Найдите область значений функции

$$y=2^{x+\frac{1}{x}}.$$

A) $(-\infty;\infty)$ B) $(0;\infty)$
C) $[2;\infty)$ D) $(0;\frac{1}{4}]\cup[4;\infty)$

51. (98-12-81) При каком значении k графики функций $f(x)=|\log_5(k-x)|$ и $g(x)=-|x-7|$ пересекаются на оси Ox?
A) 1 B) 4 C) 5 D) 8

52. (98-11-65) Чему равен $f(4)$, если

$$(x-2)f(x-2)+f(2x)+f(x+2)=x+6?$$

A) 13 B) 2 C) 3 D) 4

53. (99-5-27) Сколько корней имеет уравнение

$$5\sin 2x+8\cos x=13$$

на отрезке $[-\pi;2\pi]$?
A) $\emptyset$ B) 1 C) 2 D) 3

54. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-x+7}=\sqrt{2x^2-2x+21}.$$

A) $\emptyset$ B) -1 C) $-1;2$ D) 3

Решение: Введем новую переменную $x^2-x+2=y$, $y\geq 0$ и данное уравнение запишем в виде

$$\sqrt{y}+\sqrt{y+5}=\sqrt{2y+17},\quad y\geq 0.$$

Все слагаемые уравнения неотрицательны, поэтому возведем его в квадрат и получим равносильное ему уравнение:

$$y+2\sqrt{y^2+5y}+y+5=2y+17.$$

Преобразовав уравнение, имеем $\sqrt{y^2+5y}=6$, а отсюда получим квадратное уравнение $y^2+5y=36$. Его корни $y_1=-9$; $y_2=4$. Учитывая условие $y\geq 0$, приходим к квадратному уравнению $x^2-x+2=4$ относительно корней данного уравнения. Корни этого уравнения $x_1=-1$; $x_2=2$. **Ответ:** $-1;2$ (C).

55. Решите уравнение

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

A) $\emptyset$ B) 15 C) 0; 2 D) -15

56. Решите уравнение

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+3}+3x-16.$$

A) 3 B) 1 C) 3; -3 D) -5

57. Решите уравнение

$$\left(\frac{x}{x-2}\right)^2+\left(\frac{x}{x+2}\right)^2=2.$$

A) ± 3 B) ± 1 C) $\pm 4\sqrt{3}$ D) $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

58. Найдите сумму корней уравнения

$$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right).$$

A) 3 B) 10 C) 40 D) 30

59. Решите уравнение

$$\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=x^2.$$

A) ± 2 B) ± 1 C) ± 4 D) ± 3.

Решение: Введем обозначение $x^2=y$, $y\geq 0$. Областью определения уравнения является множество x, удовлетворяющих неравенствам

$$12-\frac{12}{x^2}\geq 0 \quad\text{и}\quad x^2-\frac{12}{x^2}\geq 0.$$

Отсюда следует условие $x^4 \geq 12$ или $y \geq 2\sqrt{3}$. Итак, данное уравнение можно записать в виде

$$\sqrt{12 - \frac{12}{y}} = y - \sqrt{y - \frac{12}{y}}.$$

При условии $y \geq 2\sqrt{3}$ обе части уравнения принимают только неотрицательные значения. Поэтому возведем это уравнение в квадрат и получим следующее равносильное ему уравнение:

$$12 - \frac{12}{y} = y^2 - 2y\sqrt{y - \frac{12}{y}} + y - \frac{12}{y},$$

$$y^2 + y - 12 = 2y\sqrt{y - \frac{12}{y}}.$$

Разделим обе части этого уравнения на y и введем обозначение $\sqrt{y - \frac{12}{y}} = z$, тогда получим уравнение $z^2 + 1 = 2z$. Отсюда имеем $z = \sqrt{y - \frac{12}{y}} = 1$ или $y = 4$. Из $x^2 = y$ следует $x^2 = 4$ или $x = \pm 2$. **Ответ:** $x = \pm 2$ (A).

60. Решите уравнение

$$\sqrt{12 - \frac{48}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - \frac{48}{x^2}} = \frac{x^2}{4}.$$

A) ± 2 B) ± 1 C) ± 4 D) ± 3

61. Решите уравнение

$$(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x = 0.$$

A) $2; -4$ B) $-2; 4$ C) $-2; -4$ D) ± 3

Решение: Данное уравнение запишем в виде:

$$(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = 0.$$

Так как число $x = 0$ не является корнем уравнения, разделим обе части уравнения на x^2 и получим уравнение:

$$\left(\frac{x^2 + 4x + 8}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{x^2 + 4x + 8}{x}\right) + 2 = 0.$$

Теперь введем новую переменную

$$y = \frac{x^2 + 4x + 8}{x},$$

тогда имеем уравнение $y^2 + 3y + 2 = 0$. Его корни $y_1 = -1, y_2 = -2$. В итоге получим два уравнения

$$\frac{x^2 + 4x + 8}{x} = -1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2 + 4x + 8}{x} = -2.$$

Первое из них не имеет корней, а второе имеет корни $x_1 = -2, x_2 = -4$. **Ответ:** $-2; -4$ (C).

62. Найдите сумму корней уравнения

$$(x^2 - 6x - 9)^2 = x(x^2 - 4x - 9).$$

A) 2 B) 1 C) 14 D) 13

63. Найдите произведение корней

$$(x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 8) = 10x^2.$$

A) 8 B) -1 C) 4 D) 15

64. Решите уравнение

$$\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6.$$

A) 2 B) $2; \frac{3}{4}$ C) 1 D) 12

65. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{4 - \sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right)^x = \left(2\sqrt{2}\right)^x.$$

A) 2 B) 5 C) 1 D) 15

Решение: Разделим обе части уравнения на $(2\sqrt{2})^x$. Тогда получится уравнение

$$\left(\frac{\sqrt{4 - \sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{4 + \sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}\right)^x = 1.$$

Методом подбора найдем корень $x = 2$ и докажем единственность этого корня. Для этого введем обозначения

$$\frac{\sqrt{4 - \sqrt{15}}}{2\sqrt{2}} = u \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{4 + \sqrt{15}}}{2\sqrt{2}} = v.$$

Видно, что справедливо неравенство $0 < u < v < 1$. Поэтому каждая из функций $y = u^x$ и $y = v^x$ непрерывна и монотонна, а также выполняется равенство $u^2 + v^2 = 1$. Если $x < 2$, тогда справедливы соотношения $u^x > u^2, v^x > v^2$ и $u^x + v^x > u^2 + v^2 = 1$. Если $x > 2$, тогда справедливы соотношения $u^x < u^2, v^x < v^2$ и $u^x + v^x < u^2 + v^2 = 1$. Поэтому при $x < 2$ и $x > 2$ уравнение не имеет корней. **Ответ:** 2 (A).

66. Решите уравнение

$$3 \cdot 5^{2x+1} - 7 \cdot 2^{4x+1} = 19.$$

A) 2 B) -5 C) 1 D) $\frac{1}{2}$

67. Решите уравнение

$$\log_2(7 - x) = x - 1.$$

A) 2,5 B) 3 C) 10 D) $\frac{1}{2}$

68. Решите уравнение

$$\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x.$$

A) 9 B) 3 C) 10 D) $\frac{1}{9}$

69. Решите уравнение

$$x \cdot 3^{x+1} = 5x + 4.$$

A) ± 9 B) ± 3 C) ± 1 D) $\pm\frac{1}{9}$

70. Решите уравнение

$$x^{\log_2 3} + 1 = x^2.$$

A) ± 2 B) 2 C) ± 1 D) 4

71. Решите уравнение

$$x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}}.$$

Здесь квадратный корень берется n раз ($n \geq 2$).

A) 2 B) 8 C) 1 D) 4

Решение: Из данного уравнения видно, что переменная x удовлетворяет условию $x \geq 2$. Введем функцию $f(x) = 2 + \sqrt{x}$. Тогда данное уравнение приводится к функциональному уравнению вида $f(f(f \cdots f(x))) = x$. Функция $f(x) = 2 + \sqrt{x}$, $x \geq 2$ возрастает и $f(x) \geq 2$, поэтому в силу 6-утверждения, данное уравнение равносильно уравнению $x = f(x)$ или $x = 2 + \sqrt{x}$. Решив последнее уравнение, имеем $x = 4$.
Ответ: 4 (D).

72. Решите уравнение

$$x^3 - 6 = \sqrt[3]{x + 6}.$$

A) ± 2 B) 2 C) ± 1 D) 4

73. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \sqrt{x}} = x - 1.$$

A) $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ B) $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ C) 2 D) $\sqrt{3}$

74. Решите уравнение

$$(x^2 + 4x + 2)^2 + 4(x^2 + 4x + 2) + 2 = x.$$

A) -3; 4 B) 2; 4 C) -2; -1 D) -4

75. Решите уравнение

$$x + \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{2}(2x^2 - 1).$$

A) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ B) 2; 1

C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ D) $2\sqrt{3}$

Решение: Областью определения уравнения является отрезок $-1 \leq x \leq 1$. Поэтому можно ввести обозначение $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0;\ \pi]$. В этом случае уравнение приводится к виду:

$$\cos\alpha + |\sin\alpha| = \sqrt{2}(2\cos^2\alpha - 1).$$

С учетом соотношения $\sin\alpha \geq 0$ и $|\sin\alpha| = \sin\alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$, последнее равенство приобретает вид

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos 2\alpha.$$

Отсюда

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha),$$

$$(\cos\alpha + \sin\alpha)(\sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha - 1) = 0.$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю. Поэтому получим совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha + \sin\alpha = 0 \\ \sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности $\cos\alpha + \sin\alpha = 0$ имеет общее решение $\alpha = -\dfrac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Так как $\alpha \in [0;\ \pi]$, получится решение $\alpha_1 = \dfrac{3\pi}{4}$. Общее решение второго уравнения

$$\sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha = 1 \Longleftrightarrow \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$$

$\alpha = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. $\alpha \in [0;\ \pi]$, поэтому получится решение $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{12}$. Таким образом, $x_1 = \cos\alpha_1 = \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \cos\alpha_2 = \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (A).

76. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{5}{8\sqrt{x^2 + 1}}.$$

A) 0,75 B) $-3,75$ C) $-0,75$ D) $\dfrac{1}{2}$

77. Решите уравнение

$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}.$$

A) 0,75 B) 2,75 C) 7,5 D) $\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{5}{4}$

78. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x.$$

A) $\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C) $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{5}{4}$

79. Числа a, b, c, d удовлетворяют условиям $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$. Найдите значение $ab + cd$.

A) 0 B) 2 C) -1 D) $\dfrac{1}{4}$

80. Решите неравенство

$$\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x - 3} + \sqrt{50 - 3x} \leq 12.$$

A) $\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{2} \le x \le \frac{50}{3}$

C) $-\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{3}$ D) $\frac{3}{4} \le x \le \frac{5}{3}$

Решение: В данном неравенстве множеством допустимых значений переменной x является $\frac{3}{2} \le x \le \frac{50}{3}$. В трехмерном пространстве рассмотрим векторы $\vec{a}(1;\ 1\ ;1)$ и $\vec{b}(\sqrt{x+1};\sqrt{2x-3};\sqrt{50-3x})$. Имеем

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x}.$$

Так как $|\vec{a}| = \sqrt{3}$,

$$|\vec{b}| = \sqrt{x+1+2x-3+50-3x} = 4\sqrt{3},$$

известное нам неравенство $\vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ равносильно данному неравенству. Итак, решение данного неравенства состоит из множества $\frac{3}{2} \le x \le \frac{50}{3}$. **Ответ:** $\frac{3}{2} \le x \le \frac{50}{3}$ (B).

81. Найдите сумму корней уравнения

$$x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}.$$

A) $2+\sqrt{2}$ B) $2-\sqrt{2}$

C) $1+\sqrt{2}$ D) $2+\sqrt{3}$.

82. Решите уравнение

$$x\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2+x-1}\sqrt{2x+3}.$$

A) $2+3\sqrt{2}$ B) $2-3\sqrt{2}$ C) $1+2\sqrt{2}$ D) $\emptyset$

83. Решите уравнение

$$2\sqrt{x-1} + 5x = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}.$$

A) 2 B) 5 C) 6 D) $\emptyset$

84. Решите уравнение

$$\arcsin^2 x + \arccos^2 x = \frac{5\pi^2}{32}.$$

A) $\cos\frac{3\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$ B) 0

C) $-\cos\frac{3\pi}{8}$, $-\cos\frac{\pi}{8}$ D) $\emptyset$

Решение: Введем обозначение $\arccos x = y$. Тогда в силу тождества $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1;\ 1]$ имеем $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - y$, а данное уравнение приобретает следующий вид:

$$(\frac{\pi}{2} - y)^2 + y^2 = \frac{5\pi^2}{32}.$$

Решив это квадратное уравнение, найдем $y_1 = \frac{3\pi}{8}, y_2 = \frac{\pi}{8}$. Эти решения удовлетворяют условию $0 \le y \le \pi$, поэтому получим корни $x_1 = \cos\frac{3\pi}{8}, x_2 = \cos\frac{\pi}{8}$. **Ответ:** $\cos\frac{3\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$ (A).

85. Решите уравнение

$$\lg(\operatorname{arctg} x) + \lg(\operatorname{arcctg} x) = 0.$$

A) $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$ B) $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}$ C) 0 D) $\emptyset$

86. Решите уравнение

$$2^{x^2+1} = 1 - x^8.$$

A) ±1 B) 2 C) 0 D) $\emptyset$

Решение: Оценим обе части этого уравнения. Справедливы следующие: $2^{x^2+1} = 2\cdot 2^{x^2} \ge 2$, $1 - x^8 \le 1$, т.е. левая часть уравнения больше или равно 2, а правая часть принимает значения, не превосходящее 1. Итак, уравнение не имеет решения. **Ответ:** $\emptyset$ (D).

87. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+1} = 3 - 5x^2.$$

A) -1 B) 2 C) 0 D) $\emptyset$

88. Решите уравнение

$$3^{|x-2|} + 3^{|x+2|} = 3^x.$$

A) -2 B) 2 C) 0 D) $\emptyset$

89. Решите уравнение

$$\log_2(\sqrt{x^4+x^2}+1) + \log_2(x^2+1) = 0.$$

A) -1 B) 2 C) 0 D) 4

90. Решите уравнение $\sin\pi x = x^2 - x + 1,25$.

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) 0 D) -4π

91. Решите неравенство $\sqrt{1-x^2} < \sqrt[8]{5-x}$.

A) $(-1;\ 1)$ B) $[-1;\ 1]$ C) $[0;\ 2]$ D) $[-4;\ 4]$

92. Решите уравнение $[x^2 - 5x] = x + 7$.

A) 1; 7 B) 2; 6 C) -1; 7 D) $[-3;\ 2]$

Решение: $[x^2 - 5x]$ – целое число, поэтому $x + 7$ тоже целое число. Значит, x тоже целое число. Поэтому справедливо равенство $[x^2 - 5x] = x^2 - 5x$ и данное уравнение принимает вид $x^2 - 5x = x + 7$. Целые решения этого уравнения $x_1 = -1$ и $x_2 = 7$. **Ответ:** -1; 7 (C).

93. Решите уравнение

$$[\frac{2x-1}{3}] = \frac{x-1}{2}.$$

A) 2; 3 B) ±1; 3 C) 4; 5 D) $[-3;\ 2)$

94. Решите уравнение $[x] + [2x] = 3$.

A) $[2;\ 3)$ B) $[1;\ 3)$ C) $[4;\ 5)$ D) $[1;\ \frac{3}{2})$

95. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{t},$$

если переменные x, y, z, t удовлетворяют условию $a \le x \le y \le z \le t \le b$, $(b > a > 0)$.

A) $2\sqrt{ab}$ B) $3\frac{a}{b}$ C) $2\sqrt{\frac{a}{b}}$ D) $\frac{a+b}{ab}$

Решение: По условию задачи выполняются неравенства

$$\frac{x}{y} \ge \frac{a}{y} \ge \frac{a}{z}, \quad \frac{z}{t} \ge \frac{z}{b},$$

поэтому

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{t} \ge \frac{a}{z}+\frac{z}{b}.$$

Из 5- утверждения, связывающего среднее арифметическое и среднее геометрическое значения имеем соотношение:

$$\frac{a}{z}+\frac{z}{b} \ge 2\sqrt{\frac{a}{z}\cdot\frac{z}{b}} = 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Таким образом, при выполнении условия задачи для переменных x, y, z, t справедливо неравенство $\frac{a}{z}+\frac{z}{b} \ge 2\sqrt{\frac{a}{b}}$. **Ответ:** $2\sqrt{\frac{a}{b}}$ (C).

96. (00-10-53) Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{t},$$

если $16 \le x \le y \le z \le t \le 100$.

A) 0,9 B) 200 C) 0,8 D) 0,2

97. (02-1-7) Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{t},$$

если $9 \le x \le y \le z \le t \le 81$.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{3}$

98. (02-2-62) Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{t},$$

если $16 \le x \le y \le z \le t \le 121$.

A) $\frac{8}{11}$ B) $\frac{11}{8}$ C) $\frac{4}{11}$ D) $\frac{2}{11}$

99. (02-3-23) Найдите наименьшее значение выражения $\frac{x}{y}+\frac{z}{t}$, если $8 \le x \le y \le z \le t \le 200$.

A) 0,4 B) 0,9 C) 0,7 D) 0,2

100. Найдите сумму цифр числа

$$31323334\ldots585960.$$

A) 265 B) 280 C) 258 D) 245

Решение: Сначала найдем сумму цифр числа 313233343536373839. Эта сумма равна сумме цифр чисел 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39. Здесь 9 двузначных чисел, у всех из них первая цифра равна 3, их сумма $3\cdot 9 = 27$. Сумма вторых цифр равна $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$. Таким образом, сумма цифр числа 313233343536373839 равна $27+45 = 72$. Теперь вычислим сумму цифр числа 40414243444546474849. Здесь 10 двузначных чисел, поэтому сумма цифр этого числа равна $4\cdot 10+45 = 85$. Сумма цифр числа 50515253545556575859 равна $5\cdot 10+45 = 95$. А сумма цифр числа 60 равна 6. Сумма цифр данного числа равна $72+85+95+6 = 258$.

2-метод. По 7- утверждению сумма цифр этого числа равна $S(6)-S(3)$. Из $S(6) = 5\cdot 6^2+41\cdot 6 = 426$ и $S(3) = 5\cdot 3^2+41\cdot 3 = 168$ имеем $S(6)-S(3) = 258$. **Ответ:** 258 (C).

101. (96-3-80) Найдите сумму цифр числа

$$31323334\ldots7980.$$

A) 473 B) 480 C) 460 D) 490

102. (96-9-21)* Найдите сумму цифр числа

$$1234567891011\ldots4950.$$

A) 335 B) 330 C) 320 D) 315

103. (96-12-78)* Найдите сумму цифр числа

$$21222324\ldots6970.$$

A) 400 B) 430 C) 410 D) 420

104. (96-13-21)* Найдите сумму цифр числа

$$11121314\ldots5960.$$

A) 380 B) 370 C) 360 D) 400

105. (00-9-15)* $\overline{MN}+\overline{ABC} = \overline{FEDP}$. ($\overline{MN}$ – двузначное, $\overline{ABC}$ – трехзначное, $\overline{FEDP}$ – четырехзначное числа). Вычислите

$$F^{M+N}+A^F.$$

A) 3 B) 1 C) 2 D) 10

Решение: При сложении двузначного числа $\overline{MN} = 10M+N$ с трехзначным $\overline{ABC} = 100A+10B+C$ получилось четырехзначное число

$$\overline{FEDP} = 1000F+100E+10D+P.$$

Можно догадаться, что здесь $A = 9$ и $F = 1$. Итак,

$$F^{M+N}+A^F = 1^{M+N}+9^1 = 1+9 = 10.$$

Ответ: 10 (D).

106. Вычислите $B+D$, если $A+\overline{BC} = \overline{DEB}$.

A) 5 B) 10 C) 8 D) 9

107. (99-5-6)*$\overline{ABC}+\overline{DEC} = \overline{FKMC}$. ($\overline{ABC}$ и $\overline{DEC}$ – трехзначные, $\overline{FKMC}$ - четырехзначное числа). Вычислите $F^{A+D}+(B+D)^C$.

A) 5 B) 1 C) 2 D) 3

15 ПЛАНИМЕТРИЯ

Геометрия - предмет, изучающий свойства геометрических фигур. Мы будем изучать два ее раздела - планиметрию и стереометрию. В планиметрии изучаются плоские фигуры, т.е. фигуры на плоскости. Точка и прямая являются основными фигурами на плоскости.

15.1 Отрезок и угол

Часть прямой между двумя различными точками, называется отрезком (рис. 15.1). Эти две заданные точки называются концами отрезка. Отрезок обозначается указанием своих концов. Под обозначением "отрезок АВ"понимается отрезок с концами в точках А и В.

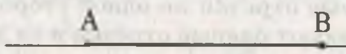


Рисунок 15.1

Каждый отрезок имеет определенную длину, отличную от нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, разделенных произвольной точкой этого отрезка. Расстоянием между точками А и В называется *длина* отрезка АВ.

Часть прямой, лежащей по одну сторону от заданной точки этой прямой, называется *полупрямой или лучом* (рис. 15.2). Заданная точка называется начальной точкой или просто началом полупрямой.

Рисунок 15.2

Фигура, состоящая из двух лучей с общим началом называется углом (рис. 15.3). Эти лучи называются сторонами, а их общее начало вершиной угла.

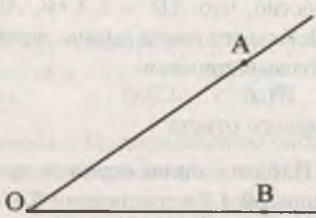


Рисунок 15.3

Если стороны угла являются взаимно дополняющими полупрямыми одной прямой, то угол называется развернутым (рис. 15.4). Величина развернутого угла принята равной 180^0. Угол в 1^0 – это $1/180$ часть развернутого угла.

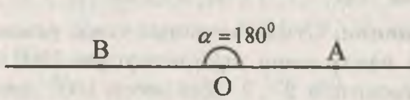


Рисунок 15.4

Каждый угол имеет определенную положительную числовую величину градусной меры. Угол, равный половине развернутого угла (90^0) называется прямым (рис. 15.5a). Угол меньший 90^0 называется острым (рис. 15.5b), больший 90^0 и меньший 180^0– тупым (рис. 15.5c).

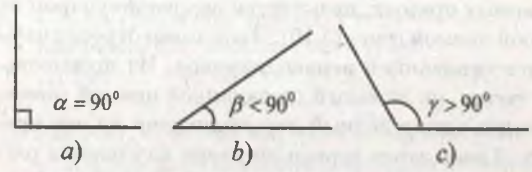


Рисунок 15.5

Если одна сторона двух углов общая, а остальные стороны дополняющие полупрямые, то они называются смежными углами. На рисунке 15.6 углы α и β смежные.

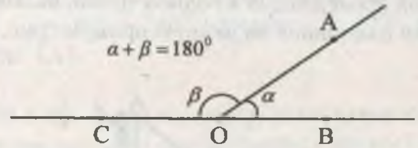


Рисунок 15.6

Если стороны одного угла являются дополняющими полупрямыми сторон другого угла, то они называются вертикальными углами. На рисунке 15.7 углы α и β вертикальные.

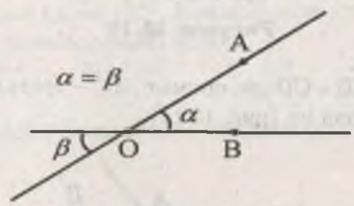


Рисунок 15.7

Луч, имеюший общее начало с вершиной угла и делящий его пополам называется биссектрисой угла (рис. 15.8).

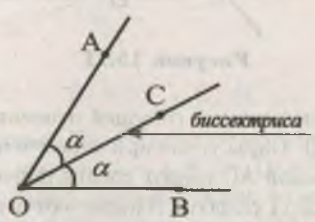


Рисунок 15.8

Две прямые, не пересекаюшиеся между собой, называются параллельными (рис. 15.9a). Если две прямые пересекаются под прямым углом, то они называются перпендикулярными (рис. 15.9 b).

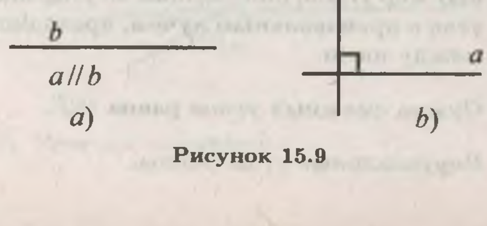


Рисунок 15.9

Параллельность прямых обозначается знаком $\parallel$, а перпендикулярность $\perp$. Отрезок прямой, один конец которого лежит в точке пересечения двух перпендикулярных прямых, называется перпендикуляром ко второй прямой (рис. 15.10). Этот конец отрезка называется основанием перпендикуляра. Из произвольной точки, не лежащей на заданной прямой можно опустить единственный перпендикуляр на эту прямую. Длина этого перпендикуляра называется расстоянием от этой точки до прямой. Любой отрезок, соединяющий произвольную точку, не лежащую на прямой с точкой этой прямой и не перпендикулярный к ней называется наклонной. Конец наклонной, лежащий на прямой называется основанием наклонной. Отрезок, соединяющий основания перпедикуляра и наклонной проведенных из одной точки, называется проекцией наклонной на данную прямую (рис. 15.10).

Рисунок 15.10

Пусть AB и CD две прямые, AC – третья прямая, пересекающая их (рис. 15.11).

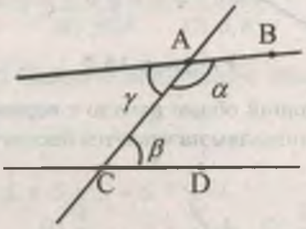


Рисунок 15.11

Прямая AC называется секущей относительно прямых AB и CD. Пары углов при пересечении прямых AB и CD прямой AC имеют специальные названия. На рисунке 15.11 углы α и β называются внутренними односторонними, а γ и β внутренними накрест лежащими.

1. **Если на отрезке AB взята внутренняя точка C, то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC.**

2. **Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, полученных со сторонами угла и произвольным лучом, проходящим между ними.**

3. **Сумма смежных углов равна 180^0.**

4. **Вертикальные углы равны.**

5. **Сумма внутренних односторонних углов при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, равна 180^0 и обратно.**

6. **Накрест лежашие углы при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, равны и наоборот.**

7. **Если для точек A, B и C выполняется равенство $AC = AB + BC$, то эти точки лежат на одной прямой. В этом случае точка B лежит между точками A и C. В случае, когда три точки A, B и C лежат на одной прямой, одна и только одна из них лежит между двумя другими.**

8. **Теорема Фалеса. Если параллельные прямые пересекающие стороны угла отсекают равные отрезки на одной стороне, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне.**

1. На отрезке AB взята точка C. Если $AC = 2,5$ и $CB = 3,5$, то найдите длину отрезка AB.
A) 6 B) 1 C) 5 D) 7
Решение: Из первого свойства следует, что длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и CB, т.е. $AB = AC + CB = 2,5 + 3,5 = 6$.
Ответ: 6 (A).

2. На отрезке AB взята точка C. Если $AB = 7$ и $CB = 3,5$, то найдите длину отрезка AC.
A) 10,5 B) 3,5 C) 2,5 D) 3

3. На отрезке AB длиной 8 единиц взята точка C. При какой длине отрезка AC, отрезок AB делится в отношении 1:3, считая от конца A.
A) 5 B) 3 C) 2 D) 6

4. Три точки A, B и C лежат на одной прямой. Если известно, что $AB = 3,3$ см, $AC = 7$ см и $BC = 3,7$ см, то какая из них лежит между двумя другими точками.
A) A B) B C) C
D) нет верного ответа

5. (01-1-64) Найдите длины отрезков при делении отрезка длиной 4,2 в отношении 3:4.
A) 1,2 и 3 B) 1,3 и 2,9
C) 1,4 и 2,8 D) 1,8 и 2,4

6. (96-3-37) Найдите смежные углы получающиеся при пересечении двух прямых, если их градусные меры относятся как 2:3.
A) $72^0; 108^0$ B) $60^0; 120^0$
C) $30^0; 150^0$ D) $50^0; 130^0$

Решение: Сумма смежных углов равна 180^0. Для нахождения искомых углов 180^0 делим в отношении 2 : 3. Для этого 180^0 делим на 2+3=5 и умножим результат на 2 и 3:

$$180^0 : 5 = 36^0, \ \ 36^0 \cdot 2 = 72^0, \ \ 36^0 \cdot 3 = 108^0.$$

Итак, искомые углы 72^0 и 108^0. **Ответ:** $72^0; 108^0$ (A).

7. (96-11-38) Найдите смежные углы которые получаются при пересечении двух прямых, если их градусные меры относятся как 5 : 7.
A) $36^0; 144^0$ B) $75^0; 105^0$
C) $42^0; 138^0$ D) $38^0; 142^0$

8. Сумма трех углов, полученных при пересечении двух прямых, равна 300^0. Найдите больший из этих углов.
A) 60^0 B) 120^0 C) 110^0 D) 105^0

9. (96-1-37) Сумма трех углов при пересечении двух прямых, равна 315^0. Найдите меньший из этих углов.
A) 60^0 B) 45^0 C) 10^0 D) 85^0

10. (96-10-40) Разность двух углов, полученных при пересечении двух прямых, равна 40^0. Найдите меньший угол.
A) 60^0 B) C) 50^0 D) 70^0

11. Один из смежных углов в 4 раза больше другого. Найдите больший угол.
A) 125^0 B) 130^0 C) 140^0 D) 144^0

Решение: Если меньший угол обозначим через x, то больший угол будет равен $4x$. Так как они смежные углы: $x + 4x = 180^0$. Отсюда $x = 36^0$, $36^0 \cdot 4 = 144^0$. **Ответ:** 144^0 (D).

12. (96-3-36) Один из смежных углов больше другого на 16^0. Найдите эти смежные углы.
A) $16^0; 164^0$ B) $80^0; 96^0$
C) $148^0; 32^0$ D) $82^0; 98^0$

13. (96-11-37) Один из смежных углов больше другого на 20^0. Найдите эти смежные углы.
A) $160^0; 20^0$ B) $28^0; 152^0$
C) $20^0; 160^0$ D) $80^0; 100^0$

14. (97-5-41) Найдите угол, биссектриса которого составляет с его стороной угол 15^0.
A) 45^0 B) 30^0 C) 60^0 D) 90^0

Решение: По определению биссектрисы она и со второй стороной угла тоже составляет угол в 15^0. Из второго свойства следует, что сумма величин этих углов $15^0 + 15^0 = 30^0$ равна величине данного угла. **Ответ:** 30^0 (B).

15. (98-6-33) Найдите угол между биссектрисами смежных углов.
A) 90^0 B) 80^0 C) 100^0 D) 70^0

16. (99-3-44) Прямые AB и CD пересекаются в точке O. Сумма углов AOD и COB равна 230^0. Найдите угол AOC.
A) 70^0 B) 120^0 C) 65^0 D) 95^0

17. OC – биссектриса угла AOB, OD – биссектриса угла AOC. Если угол AOD равен 30^0, то найдите угол AOB.
A) 60^0 B) 120^0 C) 90^0 D) 80^0

18. Угол AOB равен 40^0, угол BOC равен 80^0. Найдите угол между биссектрисами этих углов.
A) 60^0 yoki 20^0 B) 20^0 C) 40^0 D) 30^0

19. Сумма градусных мер двух вертикальных углов равна 60^0. Найдите этот угол.
A) 120^0 B) 30^0 C) 20^0 D) 90^0

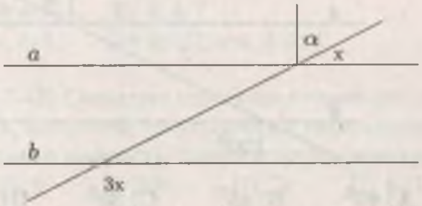
20. (98-1-39) Один из внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей на 60^0 меньше другого. Найдите больший из этих углов.
A) 120^0 B) 110^0 C) 118^0 D) 130^0

Решение: Пусть больший из этих односторонних углов x. Тогда по условию задачи второй угол будет $x - 60^0$. Из пятого свойства получим $x + x - 60^0 = 180^0$. Отсюда $x = 120^0$. **Ответ:** 120^0 (A).

21. (98-8-39) Один из внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей в 17 раз меньше другого. Найдите меньший из этих углов.
A) 20^0 B) 24^0 C) 15^0 D) 10^0

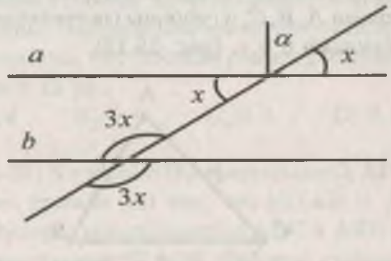
22. Сумма двух накрест лежащих углов при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой равна 120^0. Найдите разность внутренних односторонних углов.
A) 20^0 B) 120^0 C) 60^0 D) 30^0

23. (96-3-91) Если $a \| b$, то найдите α.

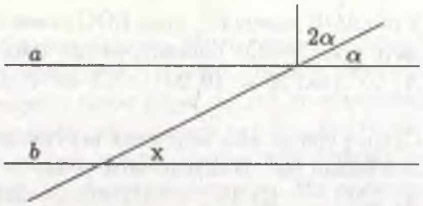


A) 30^0 B) 60^0 C) 45^0 D) 40^0

Решение: На рисунке обозначим углы, вертикальные углы к x и $3x$. Оказывается, они внутренние односторонние углы. Поэтому $x + 3x = 180^0$. Отсюда $x = 45^0$. Из того, что $x + \alpha = 90^0$ следует $\alpha = 45^0$. **Ответ:** 45^0 (C).

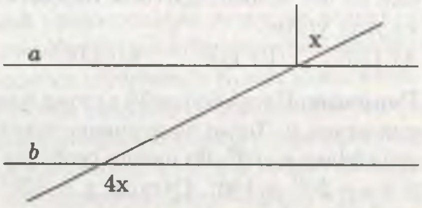


24. Если $a \| b$, то найдите x.



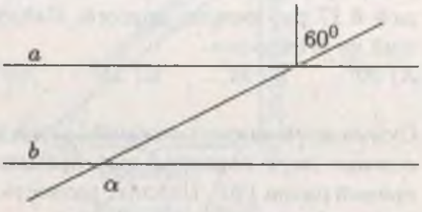
A) 50^0 B) 60^0 C) 45^0 D) 30^0

25. (96-9-26) Если $a \| b$, то найдите x.



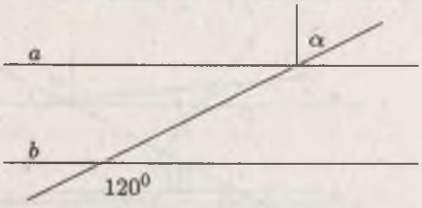
A) 45^0 B) 40^0 C) 35^0 D) 30^0

26. (96-12-92) Если $a \| b$, то найдите α.



A) 120^0 B) 110^0 C) 140^0 D) 150^0

27. (96-13-32) Если $a \| b$, то найдите α.



A) 60^0 B) 45^0 C) 30^0 D) 50^0

15.2 Треугольники

15.2.1 Периметр и средняя линия

Фигура, полученная из трех точек не лежащих на одной прямой и отрезков попарного соединения этих точек называется *треугольником.* Заданные точки называются *вершинами*, а отрезки соединения *сторонами* треугольника. Вершины обозначаются большими буквами A, B, C, а стороны соответственно маленькими буквами a, b, c. (рис. 15.12).

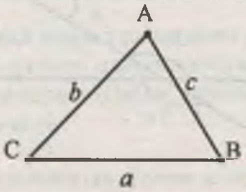


Рисунок 15.12

Сумма длин сторон треугольника называется *периметром* треугольника. *Высотой* треугольника, проведенной из заданной вершины называется перпендикуляр, опущенный к прямой, на которой лежит противоположная сторона (рис. 15.13).

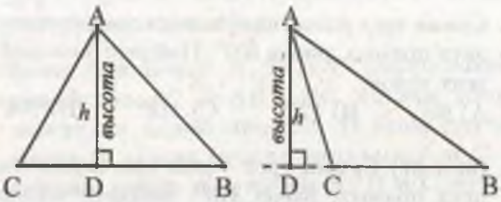


Рисунок 15.13

Биссектрисой, проведенной из заданной вершины треугольника называется отрезок биссектрисы угла, соединяющий эту вершину с противоположной стороной (рис. 15.14).

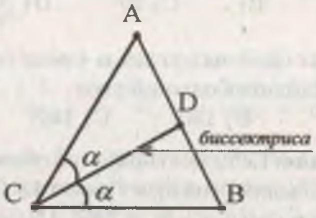


Рисунок 15.14

Медианой, проведенной из заданной вершины треугольника, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противоположной стороны (рис. 15.15).

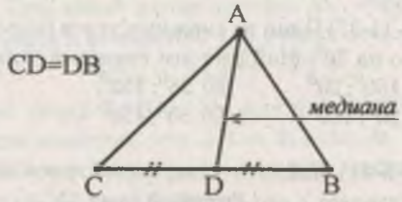


Рисунок 15.15

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника называется *средней линией* треугольника (рис. 15.16).

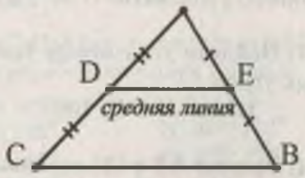


Рисунок 15.16

Каждый треугольник имеет по три высоты, биссектрисы, медианы и средней линии. Любую сторону треугольника можно принять за основание (на рис. 15.12-15.16 - BC), остальные две стороны за боковые стороны (на рис. 15.12- 15.16 - AB и AC). Высота треугольника обозначается через h, медиана через

m, биссектриса через l. Если необходимо указать в какую сторону проведена высота, то высота (медиана, биссектриса) проведенная к стороне a обозначается через h_a (m_a, l_a). Задача о нахождении стороны означает найти длину этой стороны.

1. **Периметр треугольника $P = a + b + c$.**
2. **Из отрезков с длинами a, b и c можно построить треугольник тогда и только тогда, когда $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$.**
3. **Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна ее половине.**
4. **Сумма средних линий треугольника равна половине его периметра.**

1. (97-7-37) Медиана, проведенная к основанию треугольника, делит его на два треугольника с периметрами 18 и 24. Меньшая боковая сторона равна 6. Найти большую боковую сторону.
A) 10 B) 12 C) 14 D) 9

Решение: Пусть $b-$ большая боковая сторона, $a-$ основание, $m-$ медиана, проведенная к основанию. Тогда для периметров полученных треугольников имеем:
$$\begin{cases} b + m + \frac{a}{2} = 24 \\ 6 + m + \frac{a}{2} = 18. \end{cases}$$
Вычитая из первого уравнения второе, получим $b - 6 = 6$ или $b = 12$. **Ответ:** 12 (B).

2. (96-3-17) Одна сторона треугольника равна x ($x > 5$) см, вторая на 3 см меньше, а третья на 2 см больше первой. Найдите периметр этого треугольника.
A) $3x + 1$ B) $3x + 5$ C) $3x - 1$ D) $3x + 2$

3. (96-7-37) Высота треугольника, периметр которого 24, делит его на два треугольника с периметрами 14 и 18. Найти высоту данного треугольника.
A) 10 B) 8 C) 6 D) 4

4. (96-11-18) Одна сторона треугольника равна $x(x > 7)$ см, вторая на 4 см меньше, а третья на 3 см больше первой. Найдите периметр этого треугольника.
A) $3x - 1$ B) $3x + 4$ C) $3x - 3$ D) $3x + 7$

5. (96-12-18) Одна сторона треугольника равна $x(x > 5)$ см, вторая на 2 см меньше, а третья на 3 см больше первой. Найдите периметр этого треугольника.
A) $3x - 1$ B) $3x + 2$ C) $3x - 2$ D) $3x + 1$

6. (96-3-97) При каких значениях параметра a ($-1 < a < \frac{1}{2}$) из трех отрезков с длинами $1 + a, 1 - 2a$ и 2 можно построить треугольник?
A) $(-1; 0)$ B) $(0; \frac{1}{2})$ C) $(-\frac{1}{3}; 0)$ D) $(-\frac{2}{3}; 0)$

Решение: Длина произвольной стороны треугольника меньше суммы длин двух его других сторон (см. 2-правило). Эти условия для данной задачи равносильны следующей системе:
$$\begin{cases} 1 + a + 1 - 2a > 2 \\ 1 + a + 2 > 1 - 2a \\ 1 - 2a + 2 > 1 + a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -a > 0 \\ 3a > -2 \\ 2 > 3a. \end{cases}$$
2- и 3- неравенства системы равносильны двойному неравенству $-2 < 3a < 2$. Его решение $-\frac{2}{3} < a < \frac{2}{3}$. Учитывая 1- неравенство получим $-\frac{2}{3} < a < 0$. **Ответ:** (D).

7. (96-9-33) При каких значениях параметра a из трех отрезков с длинами $1 + 2a, 1 - a$ и 2 можно построить треугольник?
A) $\emptyset$ B) $(-\frac{2}{3}; 0)$ C) $(0; \frac{2}{3})$ D) $(-\frac{1}{2}; 0)$

8. (96-12-99) При каких значениях параметра a из трех отрезков с длинами $1 + 4a, 1 - a$ и $2a$ можно построить треугольник?
A) $(-0,5\,; 0)$ B) $(0\,; 1)$ C) $\emptyset$ D) $(-0,7\,; 0)$

9. (97-7-64) Две стороны треугольника соответственно равны $0,8$ и $1,9$. Какому целому числу может равнятся длина третьей стороны?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

10. (00-8-66) Если стороны треугольника различные целые числа, а периметр равен 15, то определите его стороны.
A) $3; 5; 7$ B) $4; 4; 7$
C) $4; 5; 6$ D) $3; 5; 7$ или $4; 5; 6$

11. (98-7-45) Соединив середины сторон треугольника, получили треугольник с периметром 65. Найдите периметр данного треугольника.
A) $32,5$ B) 260 C) 75 D) 130

Решение: По 4-правилу периметр данного треугольника равен удвоенной сумме средних линий. Итак, $P = 2 \cdot 65 = 130$. **Ответ:** 130 (D).

12. (03-5-25) Стороны треугольника равны $9; 15$ и x. Какому интервалу принадлежит полупериметр треугольника?
A) $(15; 24)$ B) $(6; 28)$ C) $(9; 15)$ D) $(30; 48)$

13. Боковые стороны треугольника с периметром 10 равны. Найдите основание треугольника, если известно, что боковая сторона больше основания в 12 раз.
A) $0,4$ B) $0,8$ C) $0,5$ D) $0,6$

14. (99-4-35) К стороне BC треугольника ABC проведена прямая AD так, что $\angle CAD = \angle ACD$. Периметры треугольников ABC и ABD равны соответственно 37 и 24. Найдите сторону AC.
A) $6,5$ B) 13 C) 10 D) 7

15.2.2 Углы и стороны треугольника

Если один из углов треугольника равен 90^0, то он называется *прямоугольным* треугольником (рис. 15.17a). Стороны прилежащие к прямому углу называются *катетами*, противолежащая сторона – *гипотенузой* треугольника. Обычно катеты обозначаются через a и b, а гипотенуза через c. Если все углы треугольника острые, то он называется *остроугольным* (рис. 15.17b). Если один из углов треугольника тупой, то треугольник называется *тупоугольным* (рис. 15.17c).

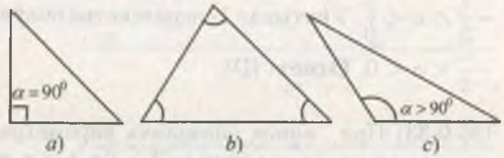


Рисунок 15.17

Треугольник, все стороны которого равны, называется *равносторонним* или *правильным* треугольником (рис. 15.18a). Если две стороны треугольника равны, то он называется *равнобедренным* треугольником (рис. 15.18b). Эти равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона *основанием* треугольника. Треугольник с разными сторонами называется *разносторонним* (рис. 15.18c).

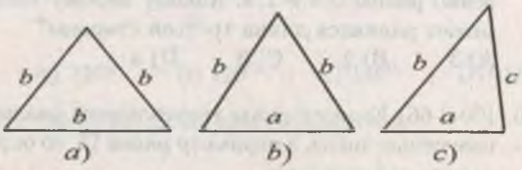


Рисунок 15.18

Внешним углом при заданной вершине называется угол, смежный с углом при этой вершине (рис. 15.19). Чтобы отличить угол при вершине от внешнего угла назовем его внутренним углом.

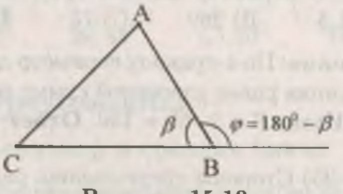


Рисунок 15.19

Приведем соотношения (1-10), справедливые для прямоугольных треугольников.

1. **Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$. Здесь c– гипотенуза, a и b– катеты (рис. 15.20).**

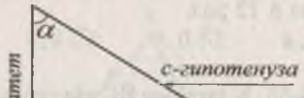


Рисунок 15.20

2. **Медиана проведенная к гипотенузе равна ее половине, т.е. $m_c = \frac{c}{2}$.**

Проекции катетов на гипотенузу.

3. **$a^2 = a_{pr}c$ (через a_{pr} обозначена проекция катета a на гипотенузу). Точно также $b^2 = b_{pr}c$. (рис. 15.21). Поэтому $\frac{a_{pr}}{b_{pr}} = \frac{a^2}{b^2}$.**

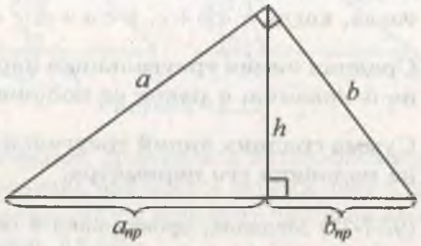


Рисунок 15.21

4. $h^2 = a_{pr}b_{pr}$.

5. **В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла 30^0 равен половине гипотенузы и наоборот.**

6. **Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90^0.**

Синус, косинус, тангенс и котангенс угла.

7. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$ (рис. 15.20).

8. $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$ (рис. 15.20).

9. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$ (рис. 15.20).

10. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$ (рис. 15.20).

Приведем следующие важные для треугольников утверждения.

11. **Если стороны треугольника расположены в порядке возрастания $a \le b \le c$ и**

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

то треугольник – прямоугольный; если

$$a^2 + b^2 > c^2,$$

то треугольник – остроугольный; если

$$a^2 + b^2 < c^2,$$

то треугольник – тупоугольный.

12. **Сумма внутренних углов треугольника равна 180^0, т.е. $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.**

13. **Сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360^0.**

14. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

15. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является и медианой, и биссектрисой.

Прямоугольный треугольник.

1. Катеты прямоугольного треугольника 3 и 4 см. Найдите длину гипотенузы.
A) 5 B) 4,7 C) 6,5 D) 4,8

Решение: По теореме Пифагора $c = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$ **Ответ:** 5 (A).

2. Катеты прямоугольного треугольника 7 и 24 см. Найдите длину гипотенузы.
A) 25 B) 26 C) 27 D) 28

3. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 12 см, а гипотенуза 13 см. Найдите длину второго катета.
A) 9 B) 7 C) 5 D) 6

4. (96-10-43) Один из катетов прямоугольного треугольника равен 12 см, а гипотенуза больше другого катета на 6 см. Найдите длину гипотенузы.
A) 15 B) 25 C) 26 D) 18

5. (96-9-91) Один из катетов прямоугольного треугольника равен 12 см, а второй катет меньше гипотенузы на 8 см. Найдите гипотенузу этого треугольника.
A) 15 B) 16 C) 25 D) 13

6. Один из углов прямоугольного треугольника 50^0. Найдите меньший угол треугольника.
A) 10^0 B) 20^0 C) 30^0 D) 40^0

Решение: Пусть второй острый угол треугольника x. Тогда по 6- правилу $x + 50^0 = 90^0$. Отсюда $x = 40^0$. Меньший угол равен 40^0. **Ответ:** 40^0 (D).

7. Острые углы прямоугольного треугольника относятся как 1 : 2. Найдите его меньший угол.
A) 10^0 B) 20^0 C) 30^0 D) 35^0

8. Если разность острых углов прямоугольного треугольника равна 20^0, найдите его меньший угол.
A) 10^0 B) 20^0 C) 30^0 D) 35^0

9. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника составляет с противоположной стороной угол 85^0. Найдите больший острый угол.
A) 50^0 B) 40^0 C) 30^0 D) 35^0

10. Найдите тупой угол при пересечении биссектрис острых углов прямоугольного треугольника.
A) 150^0 B) 140^0 C) 130^0 D) 135^0

11. (96-1-40) Гипотенуза прямоугольного треугольника 25 см, а катеты относятся как 3 : 4. Чему равен меньший катет?
A) 10 B) 12 C) 9 D) 15

Решение: По условию задачи катеты треугольника можно записат в виде $3x$ и $4x$. По теореме Пифагора $(3x)^2 + (4x)^2 = 25^2 \iff 25x^2 = 25^2$. Отсюда имеем $x = 5$. Итак, катеты треугольника равны $3x = 15$ и $4x = 20$. Меньший из них 15. **Ответ:** 15 (D).

12. (96-9-34) Один из катетов прямоугольного треугольника равен 10 см, а высота опущенная к гипотенузе равна 6 см. Найдите его второй катет.
A) 9 B) 7 C) 6,5 D) 7,5

13. (97-6-32) Катет прямоугольного треугольника равен 7 см, его проекция на гипотенузу 1,96 см. Найдите длину второго катета.
A) 12 B) 16 C) 24 D) 15

Решение: Пусть проекция катета a на гипотенузу a_{pr}. По третьему правилу $a^2 = c \cdot a_{pr}$. Поэтому $72 = 1,96c$, т.е. $c = \dfrac{49}{1,96} = 25$. Тогда второй катет $b = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$. **Ответ:** 24 (C).

14. (98-8-38) Катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 12. Найдите проекцию меньшего катета на гипотенузу.
A) 6 B) $5\frac{2}{3}$ C) 5,4 D) 4,8

15. (98-12-46) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 8, один из катетов равен 4. Найдите проекцию второго катета на гипотенузу.
A) 9 B) 4 C) 5 D) 25

16. (99-7-34) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13, а опущенная на гипотенузу высота равна 6. Найдите проекцию большего катета на гипотенузу.
A) 4 B) 3 C) 5 D) 6

17. (97-1-32) Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите проекцию большего катета на гипотенузу.
A) 12 B) 14,5 C) 16 D) 16,5

18. (97-2-26) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10, один из катетов равен 6. Найдите проекцию этого катета на гипотенузу.
A) 4 B) 3,6 C) 4,2 D) 3,4

Решение: Из соотношения $a^2 = c \cdot a_{pr}$ имеем $6^2 = 10 \cdot a_{pr}$. Отсюда $a_{pr} = 3,6$. **Ответ:** 3,6 (B).

19. (98-5-34) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 6, один из катетов равен 4. Найдите проекцию этого катета на гипотенузу.
A) 3 B) $2\frac{1}{3}$ C) $2\frac{2}{5}$ D) $2\frac{2}{3}$

20. (08-04-29) Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите проекцию меньшего катета на гипотенузу.
A) 10 B) 12 C) 9 D) 8

21. (98-1-38) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25, один из катетов равен 10. Найдите проекцию второго катета на гипотенузу.
A) 14 B) 15,5 C) 18 D) 21

22. (98-3-36) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 5, а проекция одного из катетов на гипотенузу равна 1,6. Найдите квадрат второго катета.
A) 14 B) 16 C) 17 D) 18

23. (97-4-45) Найдите отношение гипотенузы прямоугольного треугольника к проведенной к ней медиане.
A) 3 B) 4 C) 2,5 D) 2

24. Один из катетов прямоугольного треугольника равен $a = 4\sqrt{3}$. Если угол между этим катетом и гипотенузой 30^0, то найдите длину второго катета.
A) 3 B) 6 C) 5 D) 4

Решение: Пусть второй катет равен b. Тогда по формуле 9 находим:

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{b}{a} \iff \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{b}{4\sqrt{3}}.$$

Отсюда имеем $b = 4$. **Ответ:** 4 (D).

25. Воспользовавшись рисунком, найдите высоту Ташкентской телебашни.
A) 375 B) 342 C) 394 D) 412

26. (02-4-49) Углы треугольника находятся в отношении 1 : 2 : 3. Найдите отношение большей стороны к меньшей стороне.
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

27. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3 : 4, а гипотенуза равна 10. Найдите длины отрезков, отсекаемых высотой на гипотенузе.
A) 4,5 и 5,5 B) 4 и 6
C) 5,6 и 4,4 D) 3,6 и 6,4

28. (96-9-34) Один из катетов прямоугольного треугольника равен 10 см, а высота, опущенная на гипотенузу равна 6 см. Найдите его второй катет.
A) 9 B) 7 C) 6,5 D) 7,5

29. (98-10-83) Высота прямоугольного треугольника опушенная на гипотенузу делит ее на отрезки 3 и 12. Найдите эту высоту.
A) 5,5 B) $5\frac{5}{6}$ C) $5\frac{1}{6}$ D) 6

Решение: Отрезки от гипотенузы, отсекаемые высотой являются проекциями катетов на гипотенузу, т.е. $a_{pr} = 3$, $b_{pr} = 12$. По 4− формуле $h^2 = 3 \cdot 12 = 36$. Отсюда $h = 6$. **Ответ:** 6 (D).

30. (97-5-49) Один из катетов прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол 60^0. Найдите гипотенузу этого треугольника.
A) 4 B) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}$

31. (97-9-49) Один из катетов прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол 60^0. Найдите второй катет.
A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

32. (98-11-82) Один из углов прямоугольного треугольника 60^0, а высота, проведенная к гипотенузе равна 9. Найдите гипотенузу данного треугольника.
A) $12\sqrt{3}$ B) $12\sqrt{2}$ C) 12 D) $9\sqrt{3}$

Равносторонние и равнобедренные треугольники

33. Найдите сторону равностороннего треугольника с периметром 21 см.
A) 9 B) 7 C) 6 D) 8

Решение: Пусть сторона заданного равностороннего треугольника x. По условию задачи $x + x + x = 21 \iff 3x = 21$, тогда $x = 7$. **Ответ:** 7 (B).

34. Найдите периметр равностороннего треугольника со стороной 5 см.
A) 18 B) 17 C) 16 D) 15

35. Найдите периметр равностороннего треугольника со средней линией 3,5 см.
A) 18 B) 21 C) 19,5 D) 15

36. Найдите сторону равностороннего треугольника с высотой $5\sqrt{3}$.
A) 8 B) 10 C) $10\sqrt{3}$ D) 12

37. Найдите периметр равностороннего треугольника с медианой $2\sqrt{3}$ см.
A) 10 B) 12 C) 16 D) 15

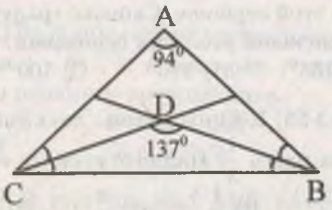
38. Найдите тупой угол образованной биссектрисами углов при основании равностороннего треугольника.
A) 150^0 B) 140^0 C) 130^0 D) 120^0

39. (97-1-28) Угол между высотой, проведенной к боковой стороне и второй боковой стороной равнобедренного треугольника равен 20^0. Найти угол при основании равнобедренного треугольника.
A) 50^0 B) 48^0 C) 55^0 D) 58^0

40. (97-2-18) Внешний угол при вершине равнобедренного треугольника в 4 раза больше внутреннего угла при этой вершине. Чему равны внешние углы при основании.
A) 100^0 B) 102^0 C) 96^0 D) 108^0

41. (97-6-28) Угол при вершине равнобедренного треугольника 94^0. Найдите острый угол, образованный биссектрисами углов при основании треугольника.
A) 37^0 B) 43^0 C) 48^0 D) 47^0

Решение: *1- способ.* Углы при основании равнобедренного треугольника равны (14-правило). Если угол при основании x, тогда по 12-правилу $x+x+94^0=180^0$. Отсюда $x=43^0$. Из рисунка имеем $\angle CDB=180^0-43^0=137^0$. Смежный с ним угол будет 43^0.



2- способ. Если D точка пересечения биссектрис, проведенных из вершин B и C произвольного треугольника, то справедливо равенство $\angle BDC=\dfrac{\angle A}{2}+90^0$. Поэтому тупой угол, образованной биссектрисами $\angle BDC=94^0:2+90^0=137^0$. Тогда острый угол между биссектрисами $180^0-137^0=43^0$. **Ответ:** 43^0 (B).

42. (99-4-37) Угол при вершине равнобедренного треугольника 30^0. Найти угол между высотой, проведенной к боковой стороне и основанием.
A) 75^0 B) 15^0 C) 20^0 D) 45^0

43. (00-6-37) Если в равнобедренном треугольнике ABC основание - AC, CD- биссектриса угла C и $\angle ADC=150^0$, то найдите угол B.
A) 140^0 B) 120^0 C) 110^0 D) 80^0

44. (01-6-52) Внешний угол при основании равнобедренного треугольника больше смежного с ним угла на 40^0. Найти угол при вершине треугольника.
A) 30^0 B) 40^0 C) 42^0 D) 36^0

45. (02-4-45) Угол при основании равнобедренного треугольника равен 75% угла при вершине. Найдите угол при вершине.
A) 90^0 B) 120^0 C) 135^0 D) 72^0

Решение: Пусть угол при вершине равнобедренного треугольника x. По условию задачи, угол при основании $0,75x$ и по 12- правилу $0,75x+0,75x+x=180^0$. Отсюда имеем $2,5x=180^0 \iff x=72^0$. **Ответ:** 72^0 (D).

46. (02-5-48) Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 40^0. Найти угол между биссектрисой угла при основании и противолежащей этому углу стороной.
A) 60^0 B) 75^0 C) 85^0 D) 65^0

47. (97-5-45) Высота равнобедренного треугольника равна 4, а основание 6. Найти его боковую сторону.
A) 5,5 B) 7 C) 5 D) 9

48. (97-6-29) Высота равнобедренного треугольника равна 6, а основание больше боковой стороны на 6. Найти основание треугольника.
A) 16 B) 15 C) 18 D) 24

49. Если две стороны треугольника соответственно равны 3 и 4, а третья сторона $c\in(5;7)$, определите тип треугольника.
A) равнобедренный треугольник
B) прямоугольный треугольник
C) остроугольный треугольник
D) тупоугольный треугольник

Решение: Из неравенства $c^2>25=3^2+4^2$ и 11-правила приходим к выводу, что треугольник тупоугольный. **Ответ:** (D).

50. Две стороны треугольника соответственно равны 6 и 8. Какому интервалу, должна принадлежат длина его третьей стороны чтобы треугольник был остроугольным?
A) (5; 10) B) $(\sqrt{28};10)$ C) (6; 10) D) (6; 13)

51. Если известно, что стороны тупоугольного треугольника 6, 8 и $c>8$, то определите промежуток изменения c.
A) (8; 14) B) (9; 10) C) (10; 14) D) (10; 13)

52. Если известно, что треугольник со сторонами a $(a<12)$, 12 и 13 прямоугольный, то определите значение a.
A) 10 B) 9 C) 11 D) 5

53. (98-12-87) Длины сторон остроугольного треугольника – натуральные числа и образуют арифметическую прогрессию с разностью 4. Чему может равняться наименьшее значение меньшей стороны треугольника?
A) 8 B) 15 C) 14 D) 13

Решение: Пусть наименьшая сторона треугольника a. Тогда две другие стороны будут,$a+4$ и $a+8$. Так как треугольник остроугольный, из 11- свойства следует неравенство $a^2+(a+4)^2>(a+8)^2$. Это неравенство равносильно неравенствам

$$a^2-8a-48>0 \iff (a+4)(a-12)>0$$

Применив к последнему неравенству метод интервалов, получим $a \in (-\infty; -4) \cup (12; \infty)$. Учитывая, что a натуральное число, имеем $a \in (12; \infty)$. Так как из отрезков с длинами a, $a+4$ и $a+8$ можно построить треугольник при условии $a+a+4 > a+8$ или $a > 4$, получим условия $a > 12$ и $a > 4$. Наименьшее натуральное число, удовлетворяющее этим неравенствам 13. **Ответ:** 13 (D).

54. (98-4-44) Длины сторон тупоугольного треугольника – натуральные числа и образуют арифметическую прогрессию с разностью 5. Чему может равняться наибольшее значение меньшей стороны треугольника?
A) 5 B) 10 C) 15 D) 14

55. (03-1-19) Длины сторон треугольника равны $\sin 30^0$, $\sin 40^0$ и $\sin 60^0$. Определите тип треугольника.
A) остроугольный B) тупоугольный
C) прямоугольный D) нельзя определить

56. (03-1-41)Сколько неравнобедренных тупоугольных треугольников можно построить из отрезков с длинами 3; 4; 5; 6 и 7.
A) 5 B) 2 C) 3 D) 4

57. (03-2-44) Какая из следующих троек чисел выражает стороны остроугольного треугольника?
A) 2; 3; 4 B) 4; 5; 7 C) 5; 6; 7 D) 8; 15; 17

58. Найдите угол при основании равнобедренного треугольника, если угол при вершине равен 70^0.
A) 60^0 B) 50^0 C) 55^0 D) 70^0

59. (99-6-3) Величины углов треугольника пропорциональны числам 2; 3 и 10. Найдите углы треугольника.
A) $24^0; 36^0; 120^0$ B) $20^0; 46^0; 120^0$
C) $10^0; 50^0; 120^0$ D) $30^0; 40^0; 110^0$

Решение: Так как углы треугольника пропорциональны числам 2; 3 и 10, они имеют вид $2x$, $3x$ и $10x$. По 12-правилу $2x + 3x + 10x = 180^0$. Отсюда $15x = 180^0$ или $x = 12^0$. Углы треугольника $2x = 24^0$, $3x = 36^0$ и $10x = 120^0$. **Ответ:** $24^0; 36^0; 120^0$ (A).

60. (97-10-36) Два угла треугольника относятся как 3 : 2. Третий угол на 60^0 меньше большего из этих углов. Найдите меньший угол треугольника.
A) 50^0 B) 45^0 C) 40^0 D) 30^0

61. (97-5-43) Углы треугольника A, B и C пропорциональны числам 1, 2 и 3. Найдите угол B.
A) 30^0 B) 60^0 C) 90^0 D) 45^0

62. (97-3-36) Два угла треугольника относятся как 3 : 4, а третий угол на 4^0 больше большего из них. Найдите больший угол треугольника.
A) 84^0 B) 68^0 C) 96^0 D) 64^0

63. (00-6-34) Два внешних угла треугольника равны 120^0 и 160^0. Найдите третий внешний угол треугольника.
A) 100^0 B) 80^0 C) 90^0 D) 70^0

Решение: Пусть третий внешний угол x. По 13- правилу $x + 120^0 + 160^0 = 360^0$. Отсюда $x = 80^0$. **Ответ:** 80^0 (B).

64. (96-6-18) Внешний угол при вершине A треугольника ABC равен 120^0, а внутренний угол при вершине C равен 80^0. Найдите внешний угол при вершине B.
A) 160^0 B) 150^0 C) 130^0 D) 140^0

65. (00-3-73) Два внутренних угла, не смежных с внешним углом 108^0 относятся как 5 : 4. Найдите меньший из этих внутренних углов.
A) 45^0 B) 40^0 C) 72^0 D) 48^0

66. (03-2-45) Сумма двух углов треугольника равна 70^0. Найдите меньший угол образованной биссектрисами этих углов.
A) 50^0 B) 45^0 C) 40^0 D) 35^0

67. Внешний угол при вершине равнобедренного треугольника в 5 раз больше внутреннего угла при этой вершине. Сколько градусов составляет внешний угол при основании?
A) 105^0 B) 110^0 C) 100^0 D) 102^0

68. (96-3-55) Косинус суммы двух углов треугольника равен $\frac{1}{3}$. Найдите косинус третьего угла.
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$

Решение: По условию задачи $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$. По 12- правилу $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$. Отсюда $\cos\gamma = \cos(180^0 - (\alpha + \beta))$. Из формулы приведения получим $\cos\gamma = -\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{3}$ (D).

69. (96-11-57) Косинус суммы двух углов треугольника равен $\frac{1}{4}$. Найдите косинус третьего угла.
A) $-\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $-\frac{2}{3}$

70. (96-12-35) Косинус суммы двух углов треугольника равен $\frac{1}{2}$. Найдите косинус третьего угла.
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$

71. (97-4-46) Синус суммы двух углов треугольника равен $\frac{1}{3}$. Вычислить синус третьего угла.
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$

72. (00-8-62) Если A, B, C – углы треугольника, то чему равен $\sin\frac{A+B}{2}$?
A) $\sin\frac{C}{2}$ B) $\cos\frac{C}{2}$ C) $-\sin\frac{C}{2}$ D) $\sin C$

73. (97-11-33) Углы треугольника относятся как $9:5:4$, а медиана, проведенная к большей стороне равна $12,5$. Найдите большую сторону треугольника.
A) 20 B) 16 C) 25 D) 32

Решение: По условию задачи, углы треугольника имеют вид $9x$, $5x$, $4x$. По 12- правилу $9x+5x+4x=180^0 \iff 18x=180^0$. Отсюда $x=10^0$. Углы треугольника равны $9x=90^0$ и $5x=50^0$, $4x=40^0$. Значит, треугольник – прямоугольный, а его большая сторона (гипотенуза) равна удвоенному значению медианы проведенной к этой стороне (2- правило), т.е. $c=2m_c=2\cdot 12,5=25$. **Ответ:** 25 (C).

74. (00-7-42) Внешний угол при вершине C треугольника ABC равен 90^0. Если $CA=12$ и $CB=5$, то найдите медиану CD, проведенную к стороне AB.
A) 6 B) 6,5 C) 5 D) 5,5

75. (96-6-30) Найдите длину медианы, проведенной к большей стороне треугольника со сторонами 10, 8 и 6.
A) 7 B) 6 C) 3 D) 5

76. (97-6-73) Величины углов треугольника относятся как $1:2:3$, а большая сторона $4\sqrt{3}$. Найдите периметр треугольника.
A) $8+3\sqrt{3}$ B) $3(2+\sqrt{3})$
C) $11\sqrt{3}$ D) $6+6\sqrt{3}$

77. (99-1-31) В треугольнике ABC угол B равен 90^0, угол C равен 60^0, высота $BB_1=2$. Найдите AB.
A) 4 B) 2 C) $2\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{2}$

78. (03-5-53) В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе проведена высота CD. Если $\angle B=60^0$ и $BD=2$, то найдите длину гипотенузы.
A) 8 B) 9 C) 6 D) 7

15.2.3 Теоремы косинусов и синусов

Приводим две замечательные теоремы - теоремы косинусов и синусов, выражающие связь между сторонами и углами треугольников.

1. *Теорема косинусов.* Квадрат стороны треугольника равен разности суммы квадратов двух других сторон и удвоенного произведения этих сторон, умноженного на косинус угла между ними, т.е.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

2. *Теорема синусов.* Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, т.е.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

3. *Следствие.* Напротив большей стороны лежит больший угол, напротив меньшей стороны лежит меньший угол.

1. (98-5-33) Стороны треугольника равны 3, 5 и 6. Найдите косинус угла, противолежащей стороне, равной 5.
A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{5}{18}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{1}{2}$

Решение: Пусть α – угол, лежащий напротив стороны a треугольника со сторонами $a=5$, $b=3$, $c=6$. По теореме косинусов $5^2=3^2+6^2-2\cdot3\cdot6\cdot\cos\alpha$. Отсюда $36\cos\alpha=20$. Из этого равенства получим $\cos\alpha=\frac{5}{9}$. **Ответ:** $\frac{5}{9}$ (C).

2. (02-11-58) В треугольнике ABC - $AB=6$, $BC=7$ и $CA=8$. Найдите синус угла C.
A) $\frac{2\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{11}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

3. (96-12-95) Стороны треугольника равны 2, 3 и 4. Найдите тангенс угла, противолежащей стороне, равной 3.
A) $\frac{\sqrt{137}}{11}$ B) 1,1 C) 2 D) $\frac{\sqrt{135}}{11}$

4. (99-7-33) В треугольнике ABC- $AB=3$, $CB=4$ и $\cos B=\frac{2}{3}$ Найдите значение AC.
A) 2 B) 4 C) 3 D) 6

5. Длины сторон треугольника a, b и c связаны зависимостью $a^2=b^2+c^2-bc$. Найдите угол, противолежащей стороне, длина которой a.
A) 60^0 B) 150^0 C) 120^0 D) 90^0

Решение: Из теоремы косинусов и равенства $a^2=b^2+c^2-bc$ имеем $2\cos\alpha=1$ или $\cos\alpha=0,5$. Отсюда получим $\alpha=60^0$. **Ответ:** 60^0 (A).

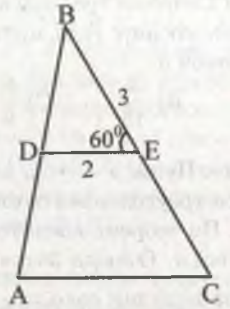
6. (97-2-40) Длины сторон треугольника m, n, k связаны зависимостью $m^2=n^2+k^2+\sqrt{2}nk$. Найдите угол, противолежащей стороне, длина которой m.
A) 45^0 B) 150^0 C) 120^0 D) 135^0

7. (97-8-39) Длины сторон треугольника a, b и c удовлетворяют равенству $a^2=b^2+c^2+\sqrt{3}\cdot bc$. Чему равен угол, противолежащей стороне a?
A) 135^0 B) 140^0 C) 125^0 D) 150^0

8. (97-12-39) Длины сторон треугольника a, b и c удовлетворяют равенству $a^2=b^2+c^2-\sqrt{3}\cdot bc$. Чему равен угол, противолежащей стороне a?
A) 60^0 B) 45^0 C) 150^0 D) 30^0

9. (98-5-35) В треугольнике ABC проведена средняя линия DE. Если $\angle DEB=60^0$, $BE=3$ и $DE=2$, то найдите AB.
A) $3\sqrt{7}$ B) 5 C) $2\sqrt{6}$ D) $2\sqrt{7}$

Решение: Построим треугольник. Если обозначим $DB=x$, то по теореме косинусов $x^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos60^0$. Отсюда $x^2=7$ или $x=\sqrt{7}$. Так как DE средняя линия, то $AD=DB$. Итак $AB=AD+DB=\sqrt{7}+\sqrt{7}\iff AB=2\sqrt{7}$. **Ответ:** $2\sqrt{7}$ (D).



10. (96-13-36) Два угла треугольника равны 30^0 и 45^0. Если сторона противолежащая углу 30^0 равна 2, то найдите сторону, противолежащую углу 45^0.
A) $\sqrt{3}$ B) 2,5 C) 2 D) $\sqrt{5}$

11. (98-10-48) В треугольнике ABC - $\angle BAC = 45^0$, $\angle ACB = 30^0$, $BC = 14\sqrt{2}$. Найдите длину стороны AB.
A) 12 B) 15 C) 14 D) $12\sqrt{2}$

12. Найдите длину стороны AC треугольника ABC, если $AB = 4$, $\cos B = \frac{1}{3}$, $\sin C = \frac{2}{3}$.
A) $3\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{3}$

13. (03-12-82) В треугольнике ABC медиана AK образует со стороной AC угол в 30^0. Если $AK = 3,25\sqrt{24}$ и $\angle BCA = 45^0$, то найдите длину стороны BC.
A) $4\sqrt{3}$ B) $5\sqrt{2}$ C) 5,5 D) 6,5

15.2.4 Некоторые свойства высоты, медианы и биссектрисы треугольника

Свойства высот треугольника

1. Прямые, на которых лежат высоты треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка называется *ортоцентром* треугольника.

2. Средняя линия треугольника делит высоту (медиану, биссектрису) пополам.

3. Сумма перпендикуляров, опущенных из произвольной внутренней точки к сторонам равностороннего треугольника равна высоте этого треугольника.

Свойства медиан треугольника

4. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и в этой точке, считая от вершины треугольника, медианы делятся в отношении 2 : 1.

5. Медиана проведенная к стороне a равна $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Свойства биссектрис треугольника

6. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

7. Пусть биссектриса отсекает отрезки $x = AD$ и $y = DB$ на стороне c (рис. 15.22). Тогда справедливы равенства $ax = by$ и $x = \frac{c}{a+b} \cdot b$, $y = \frac{c}{a+b} \cdot a$.

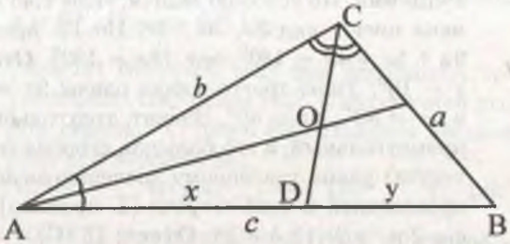


Рисунок 15.22

8. Биссектриса l_c, проведенная из вершины C вычисляется по формулам: $l_c^2 = ab - xy$, $l_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

9. Если O – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, то справедливо равенство $\frac{OC}{OD} = \frac{a+b}{c}$.

10. Пусть из вершины C проведена биссектриса l_c. Тогда $l_c = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$, где γ– угол между сторонами a и b.

1. (08-03-29) Основание треугольника равно $a = 8\sqrt{6}$, а боковые стороны $b = 13$ и $c = 19$. Найдите медиану, проведенную к основанию.
A) 12 B) 18 C) 13 D) 16

Решение: По 5-правилу медиана, проведенная к основанию равна

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 13^2 + 2 \cdot 19^2 - (8\sqrt{6})^2}.$$

Проведя вычисления, получим $m_a = 0,5 \cdot 26 = 13$. **Ответ:** 13 (C).

2. (98-1-42) Основание треугольника равно 22, а боковые стороны 13 и 19. Найдите медиану, проведенную к основанию.
A) 18 B) 12 C) 16 D) 13

3. (98-8-42) Стороны треугольника равны 11 и 23, а медиана проведенная к третьей стороне равна 10. Найдите третью сторону треугольника.
A) 30 B) 15 C) 25 D) 28

4. (03-4-46) Стороны треугольника равны 11, 12 и 13. Найдите длину медианы треугольника, проведенную к большей стороне.
A) 10 B) 9 C) 8,5 D) 9,5

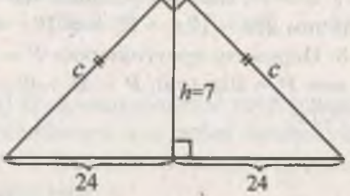
5. (03-7-61) Две стороны треугольника 7 и 11, а медиана третьей стороны равна 6. Определите третью сторону.
A) 12 B) 8 C) 14 D) 10

6. (96-3-39) Стороны треугольника 4, 5 и 6 см. Найдите проекцию стороны длиной 4 на сторону длиной 6 см.
A) $1\frac{1}{4}$ B) $1\frac{1}{2}$ C) $2\frac{1}{4}$ D) $2\frac{1}{2}$

7. (96-11-40) Стороны треугольника равны 7; 5 и 6м. Сколько метров составляет проекция стороны длиной 5 м на сторону длиной 7 м?
A) $2\frac{5}{7}$ B) $2\frac{5}{6}$ C) $2\frac{4}{5}$ D) $2\frac{2}{3}$

8. (97-9-45) Основание равнобедренного треугольника 48, а опущенная к ней высота 7. Найдите боковую сторону.
A) 25 B) 27 C) 18 D) 19

Решение: Построим треугольник. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является и медианой (15- свойство 15.16.2). Поэтому она делит основание пополам. В итоге получим прямоугольный треугольник с катетами 7 и 24. Гипотенуза этого треугольника является боковой стороной данного треугольника. По теореме Пифагора получим $c = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$. **Ответ:** 25 (A).



9. (97-1-29) Высота равнобедренного треугольника равна 15. Боковая сторона меньше основания на 15. Найдите основание этого треугольника.
A) 20 B) 40 C) 30 D) 24

10. (98-12-86) Внутри правильного треугольника со стороной $\sqrt{3}$ выбрана произвольная точка. Чему равна сумма расстояний от этой точки до сторон треугольника?
A) 3 B) 1,5 C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

11. Воспользовавшись рисунком, найдите ширину реки.
A) $40\sqrt{3}$ B) 65 C) $80\sqrt{3}$ D) $40\sqrt{2}$

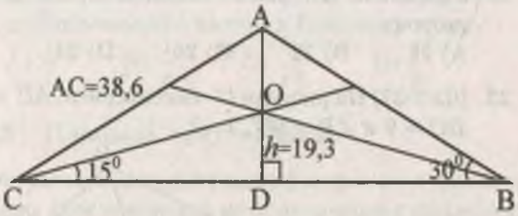
12. (01-1-53) Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120^0, а высота опущенная из этой вершины равна 3. Найдите длину отрезка, соединяющего середины боковой стороны и основания.
A) 1,5 B) 2 C) 3 D) 4

13. (01-5-31) Если в треугольнике ABC, $\angle A = 60^0$, $\angle C = 45^0$, BD - высота, $AD = 3$, то найдите длину стороны BC.
A) $3\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{3}$ D) $\sqrt{6}$

14. (03-5-52) Высота треугольника равна 12 и она делит основание в отношении 5 : 16. Если длина основания равна 21, то найдите периметр треугольника.
A) 54 B) 52 C) 56 D) 108

15. (97-11-28) Боковая сторона треугольника равна 38, 6, а высота, опущенная на основание равна 19, 3. Найдите тупой угол между биссектрисами углов при основании треугольника.
A) 110^0 B) 120^0 C) 135^0 D) 150^0

Решение: Пусть в треугольнике ABC : $AB = AC = 38,6$, $AD = 19,3$. В прямоугольном треугольнике ABD - $AB = 2AD$, поэтому $\angle B = 30^0$ (5- правило 15.16.2). Итак, в треугольнике ABC : $\angle C = \angle B = 30^0$ и $\angle A = 120^0$. Используем 2- метод при решении задачи 41 пункта 15.16.2, тогда $\angle BOC = \angle A : 2 + 90^0 = 150^0$
Ответ: 150^0 (D).



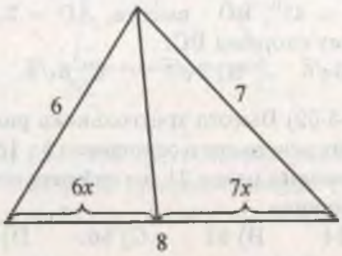
16. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 20^0. Найдите острый угол между биссектрисами углов при основании треугольника.
A) 70^0 B) 40^0 C) 65^0 D) 80^0

17. Стороны треугольника равны 4; 5 и 6. Найдите длину биссектрисы, проведенной к стороне длиной 4.
A) $\frac{1}{4}\sqrt{14}$ B) $\frac{5}{11}$ C) $\frac{15}{11}\sqrt{14}$ D) $\frac{15}{11}\sqrt{7}$

18. Стороны треугольника равны 7; 5 и 6. Найдите длину биссектрисы, проведенной к стороне длиной 5.
A) $\frac{12}{13}\sqrt{42}$ B) $\frac{5}{13}\sqrt{14}$ C) $\frac{4}{13}$ D) $\frac{12}{13}\sqrt{6}$

19. (98-3-35) Стороны треугольника равны 6, 7 и 8. Найдите меньший из отрезков, на которые делит большую сторону проведенная к ней биссектриса.
A) 3 B) 5 C) $\frac{49}{13}$ D) $\frac{48}{13}$

Решение: Отсекаемые биссектрисой отрезки пропорциональны сторонам 6 и 7, т.е. $6x$, $7x$, $(x > 0)$. Большая сторона 8 и $6x + 7x = 8$, поэтому $x = 8 : 13$. Отсюда $6x = \frac{48}{13}$ и $7x = \frac{56}{13}$. Меньший из отрезков $\frac{48}{13}$. **Ответ:** $\frac{48}{13}$ (D).

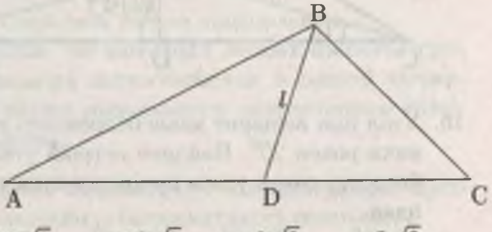


20. (98-10-82) Боковые стороны треугольника равны 5 и 7. Биссектриса делит основание треугольника на отрезки, меньший из которых равен 3. Найдите длину другого отрезка.
A) 4 B) 4, 1 C) 4, 2 D) 4, 3

21. (99-8-43) Стороны треугольника равны соответственно 6; 9 и 12. Найдите больший из отрезков, на которые делит сторону треугольника биссектриса наибольшего угла.
A) 7, 2 B) 4, 8 C) 6, 8 D) 8, 4

22. (00-2-35) Две стороны треугольника относятся как 2 : 3, а третья сторона 40. Найдите больший отрезок, на которые делит биссектриса третью сторону.
A) 25 B) 22 C) 26 D) 24

23. (02-7-37) На рисунке l – биссектриса, $AB = 12$, $BC = 9$ и $\angle B = 90^0$, $l = ?$

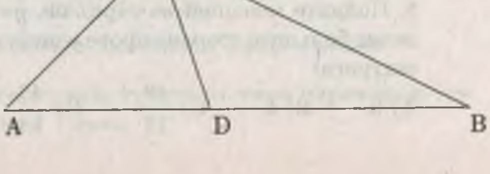


A) $\frac{36\sqrt{2}}{7}$ B) $\frac{18\sqrt{2}}{7}$ C) $\frac{9\sqrt{2}}{7}$ D) $\frac{3\sqrt{2}}{7}$

Решение: Из свойства 10 получим
$$l = \frac{2 \cdot 12 \cdot 9 \cos 45^0}{12 + 9} = \frac{36\sqrt{2}}{7}.$$

Ответ: $\frac{36\sqrt{2}}{7}$ (A).

24. (00-10-69) На рисунке $AC = 5$, $BC = 10$, $BD = 8$. Найдите биссектрису CD.



A) $3\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) 2

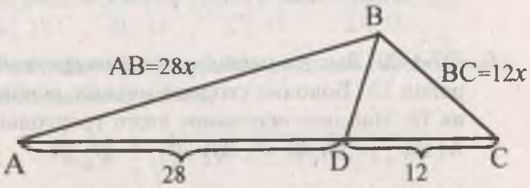
25. (00-6-41) Катеты прямоугольного треугольника равны 4 и 6. Найдите длину биссектрисы, проведенной из вершины прямого угла.
A) 3, 6 B) $4, 8\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{2}$ D) $2, 4\sqrt{2}$

26. Катеты прямоугольного треугольника равны $2\sqrt{2}$ и $6\sqrt{2}$. Найдите длину биссектрисы, проведенной из вершины прямого угла.
A) 3 B) $4\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) 4

27. Угол C треугольника ABC равен 60^0, а стороны, прилежащие к этому углу 4 и 6. Найдите длину биссектрисы, опущенной из вершины C.
A) $3\sqrt{3}$ B) $2, 4\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{3}$

28. (01-1-52) Биссектриса треугольника ABC делит сторону AC на отрезки 28 и 12. Найдите периметр треугольника, если $AB - BC = 18$.
A) 42 B) 80 C) 85 D) 72

Решение: Построим треугольник ABC и проведем биссектрису BD, тогда $AD = 28$, $DC = 12$. Отрезки, отсекаемые биссектрисой пропорциональны сторонам (7- свойство), т.е. $AB = 28x$, $BC = 12x$. Из условия $AB - BC = 18$ получим $28x - 12x = 18 \iff 16x = 18 \iff x = 9 : 8$. Периметр треугольника $P = 28x + 12x + 40 \iff P = 40x + 40$, $P = 45 + 40 = 85$. **Ответ:** 85 (C).



29. (03-11-31) Биссектриса угла A треугольника ABC делит строну BC на отрезки 12 и 9. Найдите периметр треугольника, если AC – AB = 4.
A) 49 B) 52 C) 46 D) 50

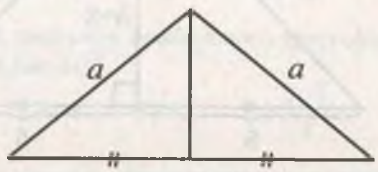
30. (08-22-29) Биссектриса треугольника ABC делит сторону AC на отрезки 28 и 12. Найдите периметр треугольника, если $AB - BC = 20$.
A) 80 B) 90 C) 72 D) 85

31. (03-2-14) Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит противоположный катет на отрезки длиной 4 и 5. Найдите периметр этого треугольника.
A) 32 B) 40 C) 36 D) 45

32. Биссектриса угла A треугольника ABC делит сторону BC в отношении 3:4, считая от вершины B. Если $AB = 12$, то найдите длину стороны AC.
A) 32 B) 14 C) 16 D) 15

33. (01-12-6) В треугольнике биссектриса делит основание пополам. Во сколько раз больше сумма квадратов боковых сторон треугольника от произведения этих же сторон?
A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5

Решение: Так как биссектриса делит основание пополам, данный треугольник является равнобедренным. Итак, боковые стороны равны. Если обозначим их через a, то $(a^2+a^2):a^2=2$.
Ответ: 2 (C).



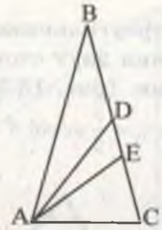
34. (01-4-19) Стороны треугольника равны 5; 7 и 10. В каком отношении, считая от вершины треугольника, точка пересечения биссектрис делит биссектрису большего угла?
A) 2 : 1 B) 3 : 2 C) 4 : 3 D) 6 : 5

35. (99-8-44) В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении 3 : 2. Найдите отношение проекций катетов на гипотенузу.
A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{2}{3}$

36. (97-5-54) В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении 1 : 2. В каком отношении делит гипотенузу опущенная на нее высота?
A) 2 : 1 B) 1 : 2 C) 3 : 1 D) 1 : 4

37. (01-4-8) Основание равнобедренного треугольника равно 1, а боковые стороны равны 2. Из вершины при основании проведены биссектриса и медиана. Найдите расстояние между точками пересечения медианы и биссектрисы с боковой стороной.
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$

Решение: Построим треугольник ABC, где $AB=BC=2$, $AC=1$, AD - медиана, AE - биссектриса. По определению медианы $BD=DC=1$. Отрезки, отсекаемые делит биссектрисой пропорциональны сторонам: $BE=2x$, $EC=x$. Отсюда $3x=2 \iff x=2:3$. Значит $DE=DC-EC=1-x$ т.е. $DE=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.
Ответ: $\frac{1}{3}$ (B).



38. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите расстояние между точками пересечения медианы и биссектрисы, проведенных из вершины прямого угла с гипотенузой треугольника.
A) $\frac{11}{14}$ B) $\frac{6}{7}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{4}{7}$

39. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите расстояние между точками пересечения медианы и высоты, проведенных из вершины прямого угла с гипотенузой треугольника.
A) 1,6 B) 1,4 C) 1,8 D) 2,4

40. (02-8-25) Найдите отношение суммы квадратов медиан к сумме квадратов сторон треугольника.
A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{9}$

41. (09-2-18) Высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла прямоугольного треугольника относятся как 7 : 25. Найдите отношение меньшего катета к большему катету.
A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{1}{8}$

15.2.5 Площадь треугольника

Задачи вычисления площадей фигур имеют давнюю историю. Они появились из практических потребностей людей. Приводим следующие правила вычисления площади S треугольника.

1. **Площадь треугольника равна половине произведения стороны и высоты, проведенной к этой стороне (рис. 15.23).**
$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$.

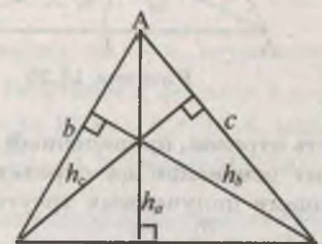


Рисунок 15.23

Следствие. *Высота, проведенная к наибольшей стороне, является наименьшей высотой.*

2. Площадь треугольника равна половине произведения двух сторон и синуса угла между ними. (рис. 15.24).

$S = \frac{1}{2}\, a\, b \sin\gamma = \frac{1}{2}\, ac \sin\beta = \frac{1}{2}\, bc \sin\alpha.$

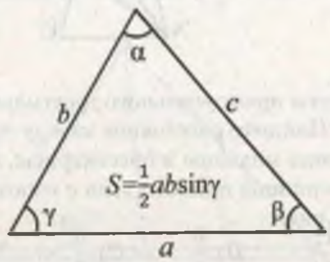


Рисунок 15.24

3. Если даны три стороны треугольника, то площадь треугольника вычисляется по формуле Герона:

$S = \sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$

4. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов:

$S = \frac{1}{2}\, ab.$

5. Площадь равностороннего треугольника равна $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

6. Медиана треугольника делит площадь треугольника пополам.

7. Медианы треугольника делят его на шесть треугольников с одинаковой площадью, (рис. 15.25), т.е. $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = \frac{1}{6} S.$

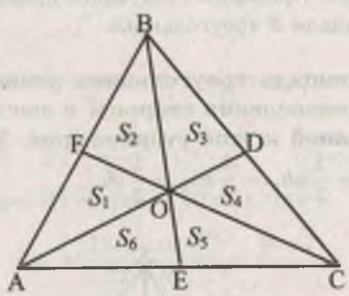
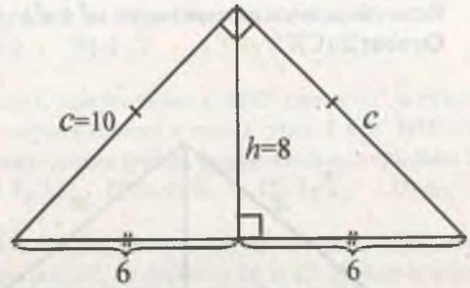


Рисунок 15.25

8. Пусть отрезок, проведенный из вершины делит основание на отрезки a_1 **и** a_2, **а площади полученных треугольников** S_1 **и** S_2. **Тогда** $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1}{a_2}$.

1. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10, а высота проведенная к основанию равна 8. Найти площадь треугольника.
A) 48 B) 64 C) 96 D) 56

Решение: Треугольник равнобедренный, высота делит основание пополам и сам треугольник на два прямоугольных треугольника. Их гипотенуза равна 10, один из катетов 8. По теореме Пифагора второй катет 6. Тогда основание данного треугольника 12. Его площадь равна $S = 0,5 \cdot 12 \cdot 8 = 48$. **Ответ:** 48 (A).



2. Если одна сторона треугольника равна 7, а высота, проведенная к этой стороне 8, то чему равна площадь треугольника?
A) 42 B) 24 C) 21 D) 18

3. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Чему равна площадь треугольника?
A) 48 B) 24 C) 18 D) 32

4. Две стороны треугольника равны 4 и $7\sqrt{3}$ см, угол между ними 120^0. Найдите площадь треугольника.
A) $14\sqrt{3}$ B) $7\sqrt{3}$ C) $18\sqrt{2}$ D) 21

5. (98-4-28) Сумма расстояний от произвольной точки до сторон правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника.
A) 4 B) 3 C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Решение: По 3 - свойству пункта 15.16.4 высота треугольника равна $h = \sqrt{3}$. Эта высота делит треугольник на два прямоугольных треугольника с углами 30^0 и 60^0. Их гипотенуза a, а катеты $a : 2$ и $h = \sqrt{3}$. По теореме Пифагора получим $a = 2$. Итак, площадь треугольника равна $S = 0,5 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$. **Ответ:** $\sqrt{3}$ (C).

6. Найти площадь правильного треугольника со стороной $4\sqrt{3}$.
A) 14 B) $12\sqrt{3}$ C) 12 D) 16

7. Расстояние от точки пересечения медиан до вершины правильного треугольника равно 2. Найти площадь этого треугольника.
A) 4 B) 3 C) $3\sqrt{3}$ D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

8. Расстояние от точки пересечения биссектрис до стороны правильного треугольника равно 1. Найти площадь этого треугольника.
A) 4 B) 3 C) $3\sqrt{3}$ D) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

9. (98-2-48) Площадь правильного треугольника равна $25\sqrt{3}$. Найти его сторону.
A) 15 B) 20 C) 10 D) 12

Решение: По 5- правилу

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \iff 25\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Отсюда $a = 10$. **Ответ:** 10 (C).

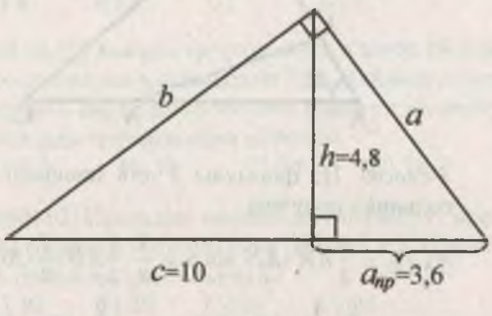
10. Площадь правильного треугольника равна $12\sqrt{3}$. Найти его высоту.
A) 5,6 B) 6 C) 10 D) 12

11. Найти периметр правильного треугольника с площадью $4\sqrt{3}$.
A) 4 B) 3 C) 12 D) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

12. Найти площадь треугольника со сторонами 3, 6, 7 см.
A) $4\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{5}$ C) $8\sqrt{5}$ D) 6

13. (96-10-41) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10, проекция меньшего катета на гипотенузу равна 3,6. Найти площадь этого треугольника?
A) 48 B) 24 C) 18 D) 32

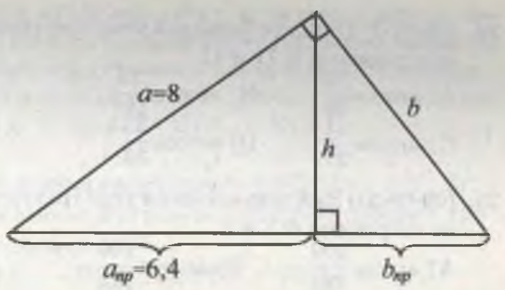
Решение: Пусть меньший катет a, большой катет b. По условию задачи $b_{pr} = 10 - a_{pr} = 6,4$. По формуле 4 пункта 15.16.2 $h^2 = a_{pr}b_{pr} = 3,6 \cdot 6,4$ или $h = 4,8$. Из формулы 1 получим $S = 0,5 \cdot 10 \cdot 4,8 = 24$. **Ответ:** 24 (B).



14. Найти площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 8 см и острым углом 60^0.
A) 8 B) $4\sqrt{3}$ C) $8\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{2}$

15. (00-10-31) Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна $5\sqrt{2}$. Найти его площадь.
A) 14,5 B) 12,5 C) 10,5 D) 8,5

16. (96-1-38) Один из катетов прямоугольного треугольника равен 8 см, а его проекция на гипотенузу 6,4 см. Сколько см^2 составляет площадь треугольника?
A) 25,6 B) 48 C) 51,2 D) 24



Решение: По теореме о проекциях $a^2 = a_{pr}c \iff 8^2 = 6,4c$. Отсюда получим c=10. По теореме Пифагора $b = 6$. Из формулы 4 имеем $S = 0,5 \cdot 6 \cdot 8 = 24$ **Ответ:** 24 (D).

17. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 12 см, его проекция на гипотенузу $11\frac{1}{13}$. Сколько см^2 составляет площадь треугольника?
A) 30 B) 24 C) 60 D) 48

18. (96-7-38) Один из катетов прямоугольного треугольника равен 12, а гипотенуза больше другого катета на 6. Найти площадь треугольника.
A) 36 B) 40 C) 42 D) 54

19. (96-9-89) Гипотенуза прямоугольного треугольника 50 см, проекция большего катета на гипотенузу равна 32 см. Найти площадь этого треугольника.
A) 1200 B) 576 C) 300 D) 600

20. (96-13-35) Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найти высоту проведенную к гипотенузе.
A) 4,8 B) 5 C) 4,5 D) 4,7

21. (96-3-104) Чему равна наименьшая высота треугольника со сторонами 13; 14 и 15?
A) 11,2 B) 11,1 C) 11 D) 11,5

Решение: По первому правилу вычисления площади треугольника, наименьшей является высота, проведенная к стороне 15. Вычислим площадь треугольника по формуле Герона. Полупериметр треугольника $p = (13 + 14 + 15) : 2 = 21$, поэтому

$$S = \sqrt{21 \cdot (21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84.$$

Теперь найдем высоту h_c, опущенную к стороне $c = 15$. Подставим в формулу $S = \frac{1}{2}c\,h_c$, $c = 15$ и $S = 84$. Из $84 = 0,5 \cdot 15 \cdot h_c$ находим $h_c = \frac{2 \cdot 84}{15} = 11,2$. **Ответ:** 11,2 (A).

22. Чему равна наименьшая высота треугольника со сторонами 6; 8 и 10 см?
A) 6 B) 8 C) 4,8 D) 6,4

23. Чему равна наибольшая высота треугольника со сторонами 10; 12 и 14 см?
A) $4,8\sqrt{6}$ B) 8 C) 4,8 D) $4,8\sqrt{3}$

24. (09-07-7) Найдите больший угол треугольника со сторонами 9; 11 и 12

A) $\arccos\frac{29}{99}$ B) $\arccos\frac{29}{198}$

C) $\arccos\frac{13}{27}$ D) $\arccos\frac{23}{33}$

25. (09-08-33) Найдите меньший угол треугольника со сторонами 6; 8 и 9

A) $\arccos\frac{109}{288}$ B) $\arccos\frac{109}{144}$

C) $\arccos\frac{53}{108}$ D) $\arccos\frac{19}{96}$

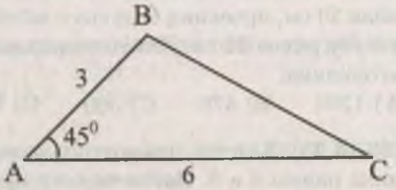
26. (96-12-50) В треугольнике ABC, $AB = 3$ см, $AC = 6$ см и угол A равен 45^0. Найти площадь треугольника.

A) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ D) $4\sqrt{2}$

Решение: По формуле 2 вычисления площади треугольника

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\sin 45^0 = 9\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (C).



27. (96-11-48) В треугольнике ABC, $AB = 4$ см, $AC = 5$ см и $\angle A = 45^0$. Найти площадь треугольника.

A) $3\sqrt{2}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C) $4\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{2}$

28. (97-10-38) Один из катетов прямоугольного треугольника равен 6, другой катет меньше гипотенузы на 2. Найти площадь треугольника.

A) 24 B) 18 C) 15 D) 12

29. (97-3-38) Катеты прямоугольного треугольника относятся как 2 : 3, а гипотенуза равна 13. Найдите площадь треугольника.

A) $5\sqrt{13}$ B) 24 C) 39 D) 36

30. (97-12-37) Площадь треугольника равна 6. Найдите угол между сторонами 3 и 8.

A) 30^0 B) 45^0 C) 60^0 D) 30^0; 150^0

Решение: По формуле 2, $S = 0,5\cdot ab\sin\gamma \Longleftrightarrow 6 = 0,5\cdot 3\cdot 8\sin\gamma$. Отсюда $\sin\gamma = 0,5$. По таблице значений синуса угла $\gamma = 30^0$ или $\gamma = 150^0$. **Ответ:** 30^0; 150^0 (D).

31. (98-1-40) Периметр равнобедренного треугольника равен 14. Основание меньше боковой стороны в 3 раза. Найти площадь треугольника.

A) $4\sqrt{2}$ B) $8\sqrt{2}$ C) $\sqrt{35}$ D) 12

32. (98-8-40) Основание равнобедренного треугольника равно 18, а площадь 108. Найдите боковую сторону треугольника.

A) 15 B) 16 C) 12,5 D) 21

33. (98-10-85) В треугольнике ABC, $\angle A = 30^0$, а $AB = \sqrt{3}$, $AC = 6$. Найти высоту, опущенную из вершины A.

A) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ B) $\frac{2}{7}\sqrt{7}$ C) $\frac{3}{7}\sqrt{7}$ D) $\frac{4}{7}\sqrt{7}$

34. (98-11-36) Если площадь равнобедренного прямоугольного треугольника равна 18, то чему равна длина гипотенузы?

A) 6 B) $2\sqrt{6}$ C) 2 D) $6\sqrt{2}$

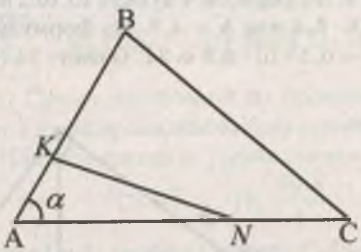
35. (99-3-46) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты две точки K и N так, что $AK = \frac{1}{3}AB$ и $AN = \frac{2}{3}AC$. Найдите площадь треугольника AKN, если площадь треугольника ABC равна 18.

A) 4 B) 6 C) 9 D) 2

Решение: *1-способ.* Построим треугольник ABC на сторонах AB и AC отметим точки K и N. Если $AK = x$, то $AB = 3x$. Точно так же, если $AC = 3y$, то $AN = 2y$. Из формулы 2

$$S_{ABC} = 0,5\cdot bc\sin\alpha \Longleftrightarrow 18 = 0,5\cdot 3x\cdot 3y\sin\alpha$$

получим $xy\sin\alpha = 4$. Используя еще раз формулу 2, имеем, $S_{AKN} = 0,5\cdot x\cdot 2y\sin\alpha = xy\sin\alpha = 4$.



2-способ. Из формулы 2 для площади треугольника получим

$$S_{AKN} = \frac{1}{2}AK\cdot AN\,\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}AB\cdot\frac{2}{3}\cdot AC\sin\alpha$$
$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\sin\alpha = \frac{2}{9}\cdot 18 = 4.$$

Ответ: 4 (A).

36. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки K и N так, что KN параллельна BC и $AK = \frac{1}{3}AB$. Если площадь треугольника ABC равна 18, то найдите площадь треугольника AKN.

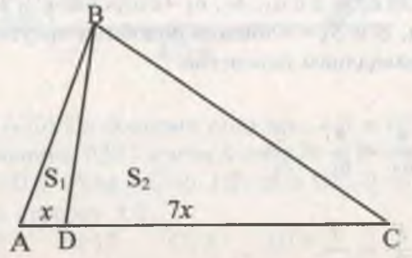
A) 4 B) 6 C) 9 D) 2

37. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки K и N так что, KN параллельна BC и $AK = KB$. Если площадь треугольника ABC равна 16, найдите площадь треугольника AKN.

A) 4 B) 6 C) 9 D) 2

38. (01-3-9) В точке D сторона AC, треугольника ABC с площадью 48, разделена в отношении $AD : DC = 1 : 7$. Найдите площадь треугольника ABD.
A) 4 B) 6 C) 5,5 D) 8

Решение: По формуле 8 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{7}$. Отсюда и $S_1 + S_2 = 48$ получим $8S_1 = 48$. Итак, $S_{ABD} = S_1 = 6$. **Ответ:** 6 (B).



39. В точке D сторона AC, треугольника ABC с площадью 40, разделена в отношении $AD : DC = 1 : 4$. Найдите площадь треугольника ABD.
A) 4 B) 6 C) 5,5 D) 8

40. (00-1-53) В треугольнике ABC, $AB = AC$, BM перпендикулярна AC, $BM = 9$ и $MA = 12$. Найдите площадь треугольника ABC.
A) 63,5 B) 64,5 C) 65,5 D) 67,5

41. (09-04-15) Высота треугольника длиной 10 делит его основание в отношении 7:25. Найдите длину отрезка, параллельного этой высоте и делящего площадь треугольника пополам.
A) 8 B) 9 C) 7 D) 5,5

42. (09-08-30) Высота треугольника длиной 18 делит его основание в отношении 7:18. Найдите длину отрезка, параллельного этой высоте и делящего площадь треугольника пополам.
A) 9,5 B) 15 C) 14 D) 16,5

43. (99-8-51) Проекции катетов на гипотенузу прямоугольного треугольника равны 8 и 2. Найдите площадь треугольника.
A) 10 B) 20 C) 40 D) 24

Решение: Сумма проекций равна $8+2 = c$. По теореме о проекциях справедливы равенства $a^2 = 8c$, $b^2 = 2c$. Так как $c = 10$ получим $a = 4\sqrt{5}$, $b = 2\sqrt{5}$. Из 4-формулы $S = 0,5ab = 0,5 \cdot 4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 20$. **Ответ:** 20 (B).

44. (99-10-47) В треугольнике ABC медиана AD равна 6, сторона AC равна 8, а угол между ними 30^0. Найдите площадь треугольника.
A) 28 B) 26 C) 22 D) 24

45. (00-8-49) Если площадь равнобедренного прямоугольного треугольника равна 1225, то найдите длину гипотенузы.
A) 70 B) 65 C) 72 D) 49

46. (99-8-45) Длины двух сторон треугольника равны 6 и 3. Если половина суммы высот, проведенных к этим сторонам равна высоте, проведенной к третьей стороне, найдите третью сторону.
A) 6 B) 5 C) 3 D) 4

47. (01-5-30) В треугольнике ABC $\angle C = 135^0$, $AC = 6$ и высота BD равна 2. Найдите площадь треугольника ABD.
A) 8 B) 6 C) 16 D) 12

48. (01-12-23) В прямоугольном треугольнике катеты равны $\log_4 9$ и $\log_3 16$. Найдите его площадь.
A) 3 B) 4 C) 5 D) 2

49. (02-3-58) В треугольнике ABC расстояние от точки пересечения медиан до стороны AB равно 1. Если $AB = 8$, найдите площадь треугольника ABC.
A) 12 B) 16 C) 9 D) 13

50. (02-8-26) Периметр прямоугольного треугольника равен 84, а гипотенуза рвна 37. Найдите площадь этого треугольника.
A) 210 B) 240 C) 105 D) 420

51. (02-8-28) Длины двух сторон треугольника и биссектрисы между ними равны соответственно 60, 40 и 24. Найдите площадь треугольника.
A) $600\sqrt{3}$ B) $800\sqrt{2}$ C) $100\sqrt{3}$ D) $300\sqrt{3}$

52. (02-9-52) Площадь треугольника ABC равна 12. Из ее вершины B опущена медиана $BD = 3$. Если $\angle ABD = 90^0$, то найдите длину стороны AC.
A) $2\sqrt{73}$ B) $\sqrt{73}$ C) 8 D) 10

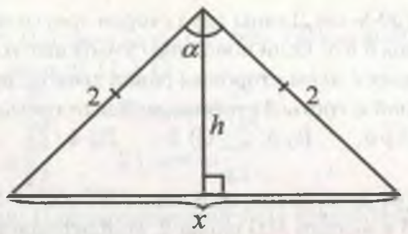
53. (01-4-9) Из внутренней точки M треугольника проведены прямые, параллельные сторонам. В результате получили три треугольника с общей вершиной в точке M и площадями равными, 3; 12 и 27. Найдите площадь данного треугольника.
A) 84 B) 72 C) 108 D) 144

54. (03-3-53) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2. Чему должно равняться основание, чтобы площадь треугольника была наибольшей?
A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}$

Решение: Пусть угол между боковыми сторонами α. Тогда из формулы 2 следует $S = 0,5 \cdot 2 \cdot 2\sin\alpha = 2\sin\alpha$. Из максимальности площади получим $\alpha = 90^0$. По теореме Пифагора основание, т.е. гипотенуза равна

$$c = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $2\sqrt{2}$ (A).



55. (09-01-14) Основание равнобедренного треугольника равно 42, а высота, опущенная к основанию равна отрезку, соединяюшему середину основания с боковой стороной. Найдите площадь данного треугольника.
A) $441\sqrt{3}$ B) $147\sqrt{3}$ C) 220, 5 D) 441

56. (03-10-48) Один из катетов прямоугольного треугольника в 2 раза больше другого. Высота проведенная к гипотенузе этого треугольника равна 12. Найдите площадь треугольника.
A) 180 B) 84 C) 120 D) 96

57. (03-10-51) Один из катетов прямоугольного треугольника больше другого на 3, а площадь равна 18. Найдите гипотенузу этого треугольника.
A) 15 B) 12 C) 10 D) 9

15.2.6 Подобие треугольников

Если в преобразовании фигуры F в фигуру F' расстояния между точками меняются в одинаковом отношении, то такое преобразование называтся *преобразованием подобия*. Пусть в результате преобразования подобия точки A, B фигуры F переходят в точки A', B' фигуры F', тогда $A'B' = k \cdot AB$. Это число k называется *коэффициентом подобия*. Если в преобразовании подобия фигура F переходит в фигуру F', то они называются *подобными фигурами*. Подобие треугольников обозначается $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. У подобных треугольников соответствуюшие стороны пропорциональны, а углы равны.

рис. 15.26

Пусть в плоскости задан треугольник $A_1B_1C_1$ и точка O (рис. 15.27). Через произвольную точку X треугольника $A_1B_1C_1$ проведем луч OX и отметим на нем точку X' такую, что $OX' = kOX$ $(k > 0)$. Преобразование треугольника ABC, при котором каждая точка X переходит в точку X', указанном способом называется *гомотетией с коэффициентом* k и центром O. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ на рисунке 15.27 называются *гомотетичными треугольниками*.

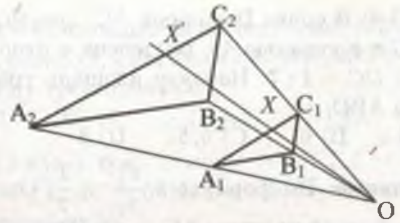


Рисунок 15.27

Если a, b, c и a_1, b_1, c_1– стороны, P и P_1– периметры, S и S_1– площади подобных треугольников, то справедливы равенства.

1. $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1}$.

2. $\dfrac{P}{P_1} = \dfrac{a}{a_1}$.

3. $\dfrac{S}{S_1} = \left(\dfrac{a}{a_1}\right)^2 = \left(\dfrac{P}{P_1}\right)^2$.

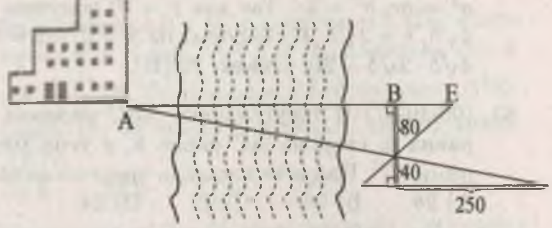
1. (97-3-46) Периметры двух подобных треугольников соответственно равны 24 и 36, а площадь одного из них больше другого на 10. Найдите площадь меньшего треугольника.
A) 20 B) 16 C) 8 D) 12

Решение: Пусть площадь меньшего треугольника S, и приметр $P = 24$. Тогда площадь большего треугольника равна $S_1 = S + 10$, и приметр $P_1 = 36$. Из формулы 3 получим уравнение

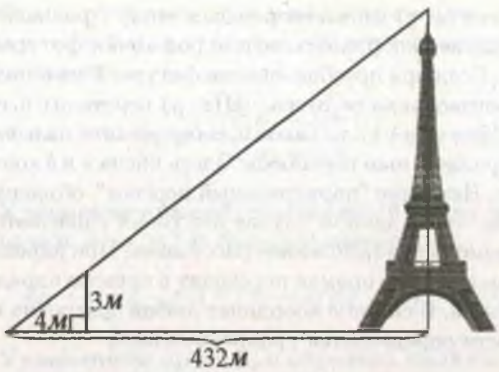
$$\frac{S}{S_1} = \left(\frac{P}{P_1}\right)^2 \iff \frac{S}{S+10} = \left(\frac{24}{36}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

или $9S = 4S + 40$. Отсюда $S = 8$. **Ответ:** 8 (C).

2. Воспользовавшись рисунком, найдите расстояние от точки B до точки A.
A) 320 B) 560 C) 500 D) 480



3. Найдите высоту Эйфелевой башни.
A) 310 B) 395 C) 324 D) 432



4. (99-7-35) На боковых сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки D и E так, что $AC \| DE$. Если AC=6, DB=3 и DE=2, то найдите сторону AB.
A) 6 B) 12 C) 8 D) 9

5. (96-7-46) Площади подобных треугольников 6 и 24, периметр одного из них больше другого на 6. Найдите периметр большего треугольника.
A) 18 B) 12 C) 20 D) 8

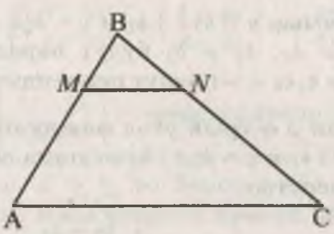
6. (96-9-38) $AB \| CD$, прямые CA и DB пересекаются в точке O. Если OA=5 см, OB=4 см, OD=9 см, то найдите OC.
A) 10,8 B) 10,5 C) 11,25 D) 11,3

7. (97-2-39) Стороны треугольника ABC пересечены прямой $MN \| AC$. Периметры треугольников ABC и MBN относятся как 3 : 1. Площадь треугольника ABC равна 144. Найдите площадь треугольника MBN.
A) 16 B) 48 C) 32 D) 64

Решение: Обозначая площадь треугольника ABC через S, а площадь треугольника MBN через S_1 из 3 формулы получим

$$\frac{144}{S_1} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 \Longleftrightarrow S_1 = \frac{144}{9} \Longleftrightarrow S_1 = 16.$$

Ответ: 16 (A).



8. (98-10-25) Сторона AB треугольника ABC пересечена прямой $MN \| AC$, которая делит сторону AB на отрезки $BM = 2$ и $MA = 4$. Площадь треугольника MBN равна 16. Чему равна площадь треугольника ABC?
A) 48 B) 96 C) 80 D) 144

9. (97-4-44) Стороны треугольника $A_1B_1C_1$ с периметром 1 соединяют середины сторон треугольника $A_2B_2C_2$, стороны треугольник $A_2B_2C_2$ соединяют середины сторон треугольника $A_3B_3C_3$, а стороны которого соединяют середины сторон треугольника $A_4B_4C_4$. Найдите периметр треугольника $A_4B_4C_4$.
A) 3 B) 5 C) 4 D) 8

10. (97-7-46) Периметры двух подобных треугольников равны 18 и 36, а сумма их площадей равна 30. Найдите площадь большего треугольника.
A) 20 B) 24 C) 21 D) 18

11. (97-10-46) Площади двух подобных треугольников 8 и 32, а сумма их периметров равна 48. Найдите периметр меньшего треугольника.
A) 12 B) 16 C) 20 D) 9,6

12. (98-7-47) Стороны треугольника ABC в $2\sqrt{3}$ раза больше сторон треугольника $A_1B_1C_1$. Во сколько раз площадь треугольника ABC больше площади треугольника $A_1B_1C_1$?
A) 12 B) 6 C) $2\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$

Решение: Обозначим площадь треугольника ABC через S, а площадь треугольника $A_1B_1C_1$ через S_1. Из формулы 3 следует $\dfrac{S}{S_1} = (2\sqrt{3})^2$ или $S = 12S_1$. Итак, площадь треугольника ABC в 12 раз больше площади треугольника $A_1B_1C_1$. **Ответ:** 12 (A).

13. (98-12-47) Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны. Площадь треугольника $A_2B_2C_2$ больше площади трегольника $A_1B_1C_1$ в 9 раз. Найдите сторону треугольника $A_2B_2C_2$, соответствующей стороне длиной 3 треугольника $A_1B_1C_1$.
A) 9 B) 27 C) 12 D) 6

14. (98-12-45) Каждая сторона треугольника с периметром 48 разделена на 4 равные части. Точки деления соединены отрезками параллельными сторонам. Найдите сумму длин этих отрезков.
A) 72 B) 96 C) 24 D) 144

15. (98-12-102) Если прямая, параллельная основанию делит площадь треугольника пополам, то в каком отношении она делит боковые стороны считая от основания?
A) $(\sqrt{2}-1) : 1$ B) $1 : 1$
C) $1 : 2$ D) $(\sqrt{3}-1) : 1$

16. (99-4-44) Боковая сторона треугольника разделена в отношении 2 : 3 : 4, считая от вершины и через точки деления проведены прямые, параллельные основанию. В каком отношении разделилась площадь треугольника?
A) 4 : 9 : 16 B) 2 : 5 : 9
C) 4 : 25 : 49 D) 4 : 21 : 56

17. (01-8-46) Если в треугольнике ABC, $\angle A = 30^0$ и $\angle B = 50^0$, то какое из следующих утверждений верно для сторон треугольника?

A) $a = \dfrac{c^2 - 2b^2}{b}$ B) $a = \dfrac{c^2 - 2b^2}{2b}$

C) $a = \dfrac{c^2 - b^2}{4b}$ D) $a = \dfrac{c^2 - b^2}{b}$

18. (02-2-40) Периметр треугольника составляет $\frac{11}{13}$ часть ей периметра подобного с ним треугольника. Если разность одной из сторон большего треугольника и соответствуюшей стороны меньшего треугольника равна 1, то найдите эту сторону большего треугольника.
A) 6, 5 B) 5, 5 C) 6 D) 5

15.3 Система координат на плоскости

Пусть даны две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy, пересекаюшиеся в точке O плоскости. Для удобства прямую Ox берем горизонтально, а прямую Oy вертикально. Точку пересечения O назовем *началом координат*, прямую Ox *осью абсцисс*, прямую Oy *осью ординат*. Вместе они называются *прямоугольной системой координат на плоскости*. Точка пересечения O делит эти прямые на две полупрямые. Одна из них называется *положительной полупрямой*, а вторая *отрицательной полупрямой*. Эти прямые делят плоскость на шесть частей – ось абсцисс, ось ординат и 4 четверти. Их расположение указано на рисунке 15.28.

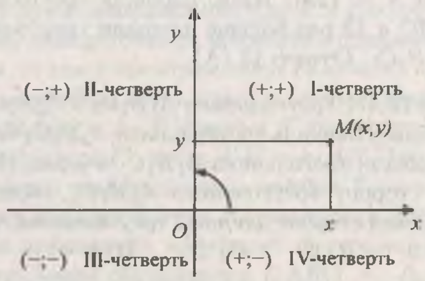


Рисунок 15.28

Каждой точке M плоскости поставим в соответствие два числа – координаты точки следуюшим образом. Из точки M опустим перпендикуляры на оси абсцисс и ординат. Основания этих перпендикуляров обозначим соответственно через x и y (рис. 15.28). Они называются *координатами* точки M. Координаты точки M указывают записью - $M(x; y)$.
Пусть на плоскости даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Тогда длина отрезка AB определяется равенством:

$$d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (15.1)$$

Если точка $C(x; y)$ делит отрезок AB пополам, то ее координаты находятся по формуле:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (15.2)$$

Уравнением фигуры в системе координат на плоскости называется уравнение с двумя неизвестными, которому удовлетворяют координаты всех точек, принадлежащих данной фигуре. И обратно, любая пара чисел $(x; y)$ удовлетворяюшая этому уравнению определяет координаты некоторой точки фигуры.

Если при преобразовании фигуры F на плоскости произвольная ее точка $M(x; y)$ переходит в точку $M'(x+a; y+b)$, то такое преобразование называется параллельным переносом. Здесь числа a и b константы. Название "параллельный перенос" объясняется тем, что в данном случае все точки сдвигаются по прямой на определенное расстояние. При пареаллельном переносе прямая переходит в прямую параллельную ей. В системе координат любая прямая на плоскости определяется уравнением вида

$$ax + by + c = 0. \qquad (15.3)$$

Иначе говоря, геометрическим местом решений уравнения (15.3) является прямая. Уравнение (15.3) называется общим уравнением прямой. Частные случаи:

a) Если в (15.3) $c = 0,\ b \neq 0$, то прямая $y = -\frac{a}{b}x$ проходит через начало координат.

b) Если в (15.3) $b = 0,\ a \neq 0$, то получится прямая $x = -\frac{c}{a}$, параллельная оси Oy.

c) Если в (15.3) $a = 0,\ b \neq 0$, то получится прямая $y = -\frac{c}{b}$, параллельная оси Ox.

d) Если в (15.3) $a \neq 0,\ b = 0,\ c = 0$, то получится ось ординат $Oy : ax = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

e) Если в (15.3) $b \neq 0,\ a = 0,\ c = 0$, то получится ось абсцисс – $Ox : by = 0 \Longleftrightarrow y = 0$.

Уравнение $y = kx + b$ называется уравнением прямой с угловым коэффициентом, а k называется угловым коэффициентом прямой. Если прямая $y = kx+b$ составляет угол α с положительным направлением оси Ox, то $\operatorname{tg}\alpha = k$ (рис. 15.29).

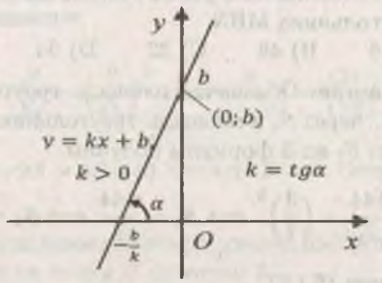


Рисунок 15.29

1. **Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ при $k_1 = k_2,\ b_1 \neq b_2$ будут параллельными, при $k_1k_2 = -1$ будут перпендикулярными.**

2. **Если φ острый угол между прямыми $y = k_1x+b_1$ и $y = k_2x+b_2$ φ, тогда справедливо равенство**

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|. \qquad (15.4)$$

3. **Если прямые заданы общими уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$, то условием параллельности является $a_1b_2 = a_2b_1$, а условием перпендикулярности $a_1a_2 = -b_1b_2$.**

4. Тангенс острого угла между прямыми $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$ определяется равенством

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1a_2+b_1b_2}\right|. \quad (15.5)$$

5. Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1;\,y_1)$ и $B(x_2;\,y_2)$ имеет вид:

$$(y_2-y_1)(x-x_1)=(x_2-x_1)(y-y_1). \quad (15.6)$$

6. Уравнением прямой, в отрезках является уравнение $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

7. Уравнение прямой, проходящей через точку плоскости $M(x_0;\,y_0)$ и перпендикулярной к прямой $ax+by+c=0$ или $y=kx+l$ имеет вид

$$b(x-x_0)=a(y-y_0),\ \ y=y_0-\frac{1}{k}(x-x_0). \quad (15.7)$$

8. Биссектриса угла между прямыми $ax+by+c=0$ и $a_1x+b_1y+c_1=0$ определяется уравнением

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}. \quad (15.8)$$

9. *Деление отрезка в данном отношении.* **Если точка $M(x;y)$ делит отрезок с концами в точках $A(x_1;\,y_1)$ и $B(x_2;\,y_2)$ в отношении $AM:MB=\lambda$, то**

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \quad (15.9)$$

В частности, если отрезок делится пополам ($AM:MB=\lambda=1$), то из формулы (15.9) следует формула (15.2).

10. Пусть точки $A(x_1;\,y_1)$, $B(x_2;\,y_2)$ и $C(x_3;\,y_3)$ вершины треугольника ABC, тогда площадь этого треугольника определяется по формуле

$$S=\pm\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & y_3\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right\}. \quad (15.10)$$

Здесь $\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$ — определитель второго порядка, он равен $x_1y_2-x_2y_1$. Так как площадь $S\geq 0$, то берется абсолютное значение выражения в правой части.

11. Координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами в точках $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ определяется равенством:

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right). \quad (15.11)$$

1. Найти длину отрезка с концами в точках $A(3;\,5)$ и $B(0;\,1)$.
A) 7 B) 6 C) 5 D) 9

Решение: Длина отрезка AB равна расстоянию между точками $A(3;\,5)$ и $B(0;\,1)$. По формуле (15.1)

$$AB=\sqrt{(0-3)^2+(1-5)^2}=5.$$

Ответ: 5 (C).

2. Найти расстояние между точками $A(-3;\,0)$ и $B(0;\,4)$.
A) 7 B) 6 C) 5 D) 9

3. Найти расстояние от начала координат до точки $A(-5;\,12)$.
A) 13 B) 12 C) 7 D) 17

4. (96-7-41) Найти половину расстояния между точками $B(1;-2)$ и $C(-2;-6)$.
A) $0,5\sqrt{65}$ B) $3,5$ C) $0,5\sqrt{10}$ D) $2,5$

5. (97-3-41) Найти половину расстояния между точками $C(-2;3)$ и $D(1;6)$.
A) $0,5\sqrt{10}$ B) $1,5$ C) $\sqrt{3}$ D) $1,5\sqrt{2}$

6. (97-7-41) Найти $\frac{2}{3}$ часть расстояния между точками $M(3;-2)$ и $N(-1;1)$.
A) $1,5$ B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ D) $3\frac{1}{3}$

7. Найти координаты середины отрезка с концами в точках $A(3;\,5)$ и $B(5;\,-3)$.
A) $(4;4)$ B) $(4;1)$ C) $(8;2)$ D) $(4;4)$

Решение: По формуле (15.2) деления отрезка пополам

$$x=\frac{3+5}{2}=4,\quad y=\frac{5+(-3)}{2}=1.$$

Ответ: $(4;1)$ (B).

8. (07-04-9) Найти координаты середины отрезка с концами в точках $A(3;-1)$ и $B(3;5)$.
A) $(0;3)$ B) $(3;0)$ C) $(3;3)$ D) $(3;2)$

9. (96-3-41) Найти координаты середины отрезка AB, если $A(-3;2)$ и $B(4;1)$.
A) $(-0,5;1,5)$ B) $(1,5;-0,5)$
C) $(1,5;0,5)$ D)$(0,5;1,5)$

10. (96-11-42) Найти координаты середины отрезка AB, если $A(3;-1)$ и $B(2;4)$.
A) $(2,5;1,5)$ B) $(-2,5;1,5)$
C) $(2,5;-1,5)$ D) $(2,5;3)$

11. (96-12-43) Найти координаты середины отрезка AB, если $A(2;-2)$ и $B(3;1)$.
A) $(-2,5;0,5)$ B) $(0,5;2,5)$
C) $(-0,5;2,5)$ D) $(2,5;-0,5)$

12. (98-9-53) Один конец отрезка в точке $(8; 2)$, а середина - в точке $(4; -12)$. Найдите координаты второго конца отрезка.
A) $(1; 13)$ B) $(0; -24)$ C) $(0; -26)$ D) $(0; 6)$
Решение: Пусть второй конец отрезка $B(x_2; y_2)$. Тогда по формуле (15.2)получим

$$8 + x_2 = 8, \quad 2 + y_2 = -24.$$

Отсюда $x_2 = 0$, $y_2 = -26$. **Ответ:** $(0; -26)$ (C).

13. Концы отрезка находятся в точках $A(4; 2)$ и B, а середина в точке $C(4; 3)$. Найдите координаты точки B.
A) $(1; -3)$ B) $(4; 4)$ C) $(0; -6)$ D) $(0; 8)$

14. Точка $C(2; 1)$ – середина отрезка, концы которого в точках $A(x; 4)$ и $B(0; -2)$. Найдите x.
A) 3 B) 4 C) 6 D) -4

15. Найдите y, если расстояние между точками $A(-3; y)$ и $B(5; -4)$ равно 10.
A) 4 B) 2 C) 3 D) 6

16. Найдите x, если расстояние между точками $A(x; 4)$ и $B(5; -4)$ равно 10.
A) 4 B) -1 C) 3 D) 6

17. Найти координаты точки $M(x; y)$, которая делит отрезок с концами в точках $A(1; -5)$ и $B(1; 4)$ в отношении $2 : 1$.
A) $(0; 1)$ B) $(1; 1)$ C) $(2; -1)$ D) $(1; 0,5)$
Решение: По формуле (15.9) деления отрезка в данном отношении (в этом случае $\lambda = 2 : 1 = 2$) имеем

$$x = \frac{1 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = 1, \quad y = \frac{-5 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = 1.$$

Ответ: $(1; 1)$ (B).

18. Найти координаты точки $M(x; y)$, делящей отрезок с концами в точках $A(-1; 5)$ и $B(7; 5)$ в отношении $3 : 1$.
A) $(5; 5)$ B) $(1; 5)$ C) $(3; 5)$ D) $(5; 1)$

19. Найти координаты точки $M(x; y)$, делящей отрезок с концами в точках $A(-1; -1)$ и $B(4; 4)$ в отношении $1 : 2$.
A) $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ B) $(1; 1)$ C) $(0; 1)$ D) $(1; 0)$

20. Найти координаты точки $M(x; y)$, делящей отрезок с концами в точках $A(2; 3)$ и $B(7; 7)$ в отношении $2 : 7$.
A) $(0; 0)$ B) $(\frac{28}{9}; \frac{35}{9})$ C) $(\frac{36}{7}; \frac{45}{7})$ D) $(\frac{24}{9}; \frac{35}{9})$

21. Укажите уравнение прямой, проходящей через начало координат.
A) $x + y + 7 = 0$ B) $3x + 7y = 0$
C) $y = x + 7$ D) $y = 5$
Решение: Известно, что если в общем уравнении прямой $c = 0$, то прямая проходит через начало координат. Поэтому, прямая $3x+7y = 0$ проходит через начало координат. **Ответ:** $3x + 7y = 0$ (B).

22. Найдите уравнение прямой, параллельной оси абсцисс.
A) $x + y + 7 = 0$ B) $y = 7$
C) $3x + 7y = 0$ D) $y = x$

23. Найдите уравнение прямой, параллельной оси ординат.
A) $x + y + 7 = 0$ B) $x = 5$
C) $3x + 7y = 0$ D) $y = 7$

24. Найдите уравнение прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей от начала координат на расстоянии 5.
A) $3x + 4y + 25 = 0$ B) $y = 7$
C) $3x + 7y = 0$ D) $y = 5$

25. Найдите уравнение прямой, проходяшей через начало координат и составляющей с осью абсцисс угол 45^0.
A) $x + y = 45$ B) $y = 45x$
C) $y = \operatorname{tg} 45^0$ D) $y = x$

26. Укажите уравнение прямой, параллельной прямой $y = x$.
A) $3x + 3y + 25 = 0$ B) $y = x + 7$
C) $3x + 7y = 0$ D) $x + y = 0$
Решение: Условие параллельности прямых – $k_1 = k_2$. В данной прямой $k_1 = 1$. Угловой коэффициент прямой $y = x + 7$ равен $k_2 = 1$. Поэтому эти прямые параллельны. **Ответ:** $y = x + 7$ (B).

27. Найдите уравнение прямой, перпендикулярной прямой $y = 2x + 1$ и проходящей через точку $M(1; 2)$.
A) $x + 2y - 5 = 0$ B) $y = 2x + 7$
C) $3x + 6y = 0$ D) $x - 2y = 3$

28. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; 3)$ и перпендикулярной прямой $y + x + 1 = 0$.
A) $x + y - 6 = 0$ B) $y = 2x - 3$
C) $y = x$ D) $x - 2y = -3$

29. Укажите значение k, при котором угол между прямыми $y = 2x + 1$ и $y = kx + 5$ составляет 45^0.
A) 5 B) -5 C) 3 D) -3

30. Найдите уравнение прямой, проходящей через сторону AB треугольника с вершинами в точках $A(1; 1)$, $B(4; 4)$ и $C(1; 7)$.
A) $x + y - 6 = 0$ B) $y = 2x - 3$
C) $y = x$ D) $x - 2y = -3$
Решение: Воспользовавшись уравнением прямой проходящей через две точки (15.6), для точек $A(1; 1)$ и $B(4; 4)$, получим уравнение

$$(x - 1)(4 - 1) = (y - 1)(4 - 1) \iff x = y.$$

Ответ: $y = x$ (C).

31. Найдите уравнение биссектрисы, угла A треугольника с вершинами в точках $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 4)$ и $C(1;\ 7)$.
A) $x-(1+\sqrt{2})y=0$ B) $x-(1+\sqrt{2})y=\sqrt{2}$
C) $(1+\sqrt{2})x-y=\sqrt{2}$ D) $(1-\sqrt{2})x-y=\sqrt{2}$

32. Найдите длину биссектрисы, исходящей из вершины A треугольника с вершинами в точках $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 4)$ и $C(4;\ -2)$.
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

33. (98-10-29) Точки $A(9,7)$; $B(6,-1)$ и $C(4,9)$ – вершины треугольника ABC. Найдите длину медианы, опущенной к стороне BC.
A) 4,5 B) 4 C) 6 D) 5

Решение: Пусть $D(x;\ y)$ середина стороны BC. По формуле (15.2) координаты точки D равны

$$x=\frac{6+4}{2}=5,\quad y=\frac{-1+9}{2}=4.$$

По формуле (15.1) длина медианы AD равна

$$AD=\sqrt{(5-9)^2+(4-7)^2}=\sqrt{16+9}=5.$$

Ответ: 5 (D).

34. Составьте уравнение прямой, содержащей медиану проведенную из вершины A треугольника с вершинами в точках $A(1;\ 1)$, $B(3;\ 5)$ и $C(1;\ 7)$.
A) $5x-y=4$ B) $5x-2y=4$
C) $5x-y=6$ D) $5x-3y=4$

35. Найдите длину медианы, исходящей из вершины A треугольника с вершинами в точках $A(5;\ 2)$, $B(3;\ 5)$ и $C(1;\ 7)$.
A) 6 B) 3 C) 5 D) 2

36. Составьте уравнение прямой, содержащей высоту, опущенную из вершины B треугольника с вершинами в точках $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 5)$ и $C(6;\ 1)$.
A) $x=4$ B) $y=5$ C) $x=5$ D) $y=4$

Решение: Воспользовавшись уравнением (15.6), составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(1;\ 1)$ и $C(6;\ 1)$

$$(x-1)(1-1)=(y-1)(6-1)\iff y=1.$$

По формуле (15.7), перпендикулярной ей и проходящей через точку $B(4;\ 5)$ прямой будет $x-4=0$. **Ответ:** $x=4$ (A).

37. Найдите длину высоты, опущенной из вершины B треугольника с вершинами в точках $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 5)$ и $C(1;\ 6)$.
A) 6 B) 3 C) 5 D) 2

38. Найдите длину отрезка, соединяюшего середины сторон AB и BC треугольника с вершинами $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 5)$ и $C(6;\ 1)$.
A) 6 B) 4 C) 5 D) 2,5

39. Найдите значение определителя $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{vmatrix}$ второго порядка.
A) 3 B) 4 C) -3 D) 27

40. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 5)$ и $C(1;\ 6)$.
A) 6 B) 15 C) 7,5 D) 12

Решение: Для вычисления площади данного треугольника воспользуемся формулой (15.10). Тогда

$$S=\pm\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right\}=$$

$$=\pm\frac{1}{2}(5-4+24-5+1-6)=\pm 7,5.$$

Из положительности площади получим $S=7,5$. **Ответ:** 7,5 (C).

41. Вычислите площадь треугольника с вершинами в точках $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 1)$ и $C(2;\ 0)$.
A) 6 B) 4 C) 5 D) 1

42. Вычислите площадь треугольника с вершинами в точках $A(-1;\ 1)$, $B(4;\ -5)$ и $C(7;\ 1)$.
A) 16 B) 24 C) 25,5 D) 23,5

43. (98-4-34) Вершины треугольника расположены в точках $(1;2)$; $(3;4)$ и $(5;-1)$. Найдите координаты точки пересечения медиан этого треугольника.
A) $(2;3)$ B) $(3;2)$ C) $(3;3)$ D) $(3;\frac{5}{3})$

Решение: По формуле (15.11), координаты точки пересечения медиан равны

$$x=\frac{1+3+5}{3}=3,\quad y=\frac{2+4+(-1)}{3}=\frac{5}{3}.$$

Ответ: $(3;\frac{5}{3})$ (D).

44. (98-12-104) Вершины треугольника расположены в точках $(2;2)$; $(3;3)$ и $(1;4)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника.
A) $(2;3)$ B) $(2,5;3,5)$ C) $(3,5;3)$ D) $(2;3,5)$

45. (01-3-6) Если в треугольнике ABC $A(8;-5)$, $B(2;5)$ $C(-7;-9)$, то найдите координаты точки пересечения медиан треугольника.
A) $(2;-3)$ B) $(1;-3)$ C) $(2;-2)$ D) $(1;-2)$

15.4 Четырехугольники

Четыре заданные точки плоскости и фигура, ограниченная отрезками, последовательно соединяющими эти точки называется *четырехугольником*. Здесь никакие три точки не должны лежать на одной прямой и отрезки, соединяющие их, не должны пересекаться. Данные точки называются *вершинами*, а соединяющие их отрезки *сторонами* четырехугольника. Две вершины, которые явлютя концами одной стороны называются *смежными*. Не смежные вершины называются *противоположными*. Отрезки, соединяющие противоположные вершины, называются *диагоналями*. Стороны, выходящие из одной вершины называются *смежными сторонами*. Стороны, не имеюшие общих вершин называются *противоположными* сторонами. Углы, прилежашие к одной стороне называются *смежными углами*. Углы, при противоположных вершинах называются *противоположными углами*. Если четырехугольник лежит на одной полуплоскости относительно прямой, содержащей любую сторону, то он называется *выпуклым четырехугольником*. Сумма всех сторон четырехугольника называется его *периметром*. Перпендикуляр, опущенный на прямую, содержашую противоположную сторону называется *высотой* четырехугольника. Четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны называется *параллелограммом* (рис. 15.30).

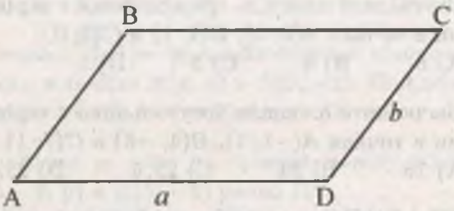


Рисунок 15.30

Параллелограмм, все стороны которого равны называется *ромбом* (рис. 15.31).

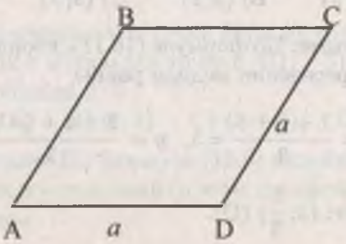


Рисунок 15.31

Если один угол параллелограмма прямой (90^0), то он называется *прямоугольником* (рис. 15.32).

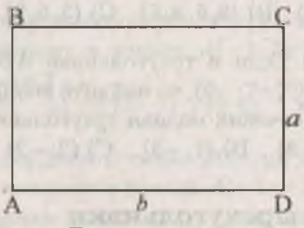


Рисунок 15.32

Прямоугольник, все стороны которого равны называется *квадратом* (рис. 15.33).

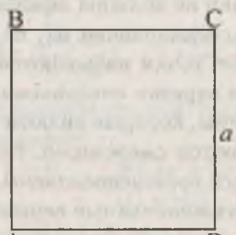


Рисунок 15.33

1. Сумма внутренних углов выпуклого четырехугольника равна 360^0.

2. Площадь выпуклого четырехугольника равна $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$. φ - угол между диагоналями d_1 и d_2.

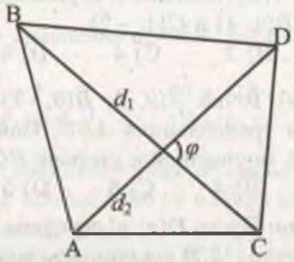


Рисунок 15.34

1. (96-10-44) Один из углов четырехугольника прямой, а остальные относятся как $4:3:2$. Найдите меньший угол четырехугольника.
   A) 30^0 B) 45^0 C) 50^0 D) 60^0

   Решение: По условию один из углов четырехугольника 90^0, а остальные $\alpha = 4x, \beta = 3x, \gamma = 2x$. В силу первого свойства справедливо равенство $90^0 + 4x + 3x + 2x = 360^0$. Отсюда $x = 30^0$. Итак углы четырехугольника равны 90^0, 120^0, 90^0 и 60^0. Меньший угол равен 60^0.
   Ответ: 60^0 (D).

2. (96-1-41) Углы четырехугольника относятся как $3:5:4:6$. Найдите меньший угол четырехугольника.
   A) 80^0 B) 30^0 C) 60^0 D) 40^0

3. (98-10-21) Сумма трех внутренних углов выпуклого четырехугольника равна 240^0. Найдите угол, смежный четвертому внутреннему углу.
   A) 30^0 B) 45^0 C) 90^0 D) 60^0

4. (00-5-55) На сколько треугольников разбивается выпуклый четырехугольник своими диагоналями?
   A) 4 B) 5 C) 6 D) 8

5. (02-10-75) Диагонали выпуклого четырехугольника равны 16 и 30 и составляют угол 30^0. Найдите площадь четырехугольника.
   A) 120 B) 240 C) $120\sqrt{3}$ D) $160\sqrt{2}$

   Решение: Из формулы $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$ для площади выпуклого четырехугольника следует

   $$S = 0,5 d_1 d_2 \sin\gamma = 0,5 \cdot 16 \cdot 30 \cdot \sin 30^0 = 120.$$

   Ответ: 120 (A).

6. Площадь выпуклого четырехугольника равна 18, а диагонали равны 8 и 9. Найдите острый угол между диагоналями.
   A) 20^0 B) 40^0 C) 30^0 D) 60^0

7. (00-6-35) Диагональ четырехугольника разбивает его на два треугольника с периметрами 25 и 27. Найдите длину этой диагонали, если периметр четырехугольника равен 32.
A) 6 B) 8 C) 10 D) 11

15.4.1 Квадрат и прямоугольник

Для квадрата справедливы следующие утверждения.

1. **Диагонали квадрата равны. Они пересекаются под прямым углом и в точке пересечения делятся пополам.**

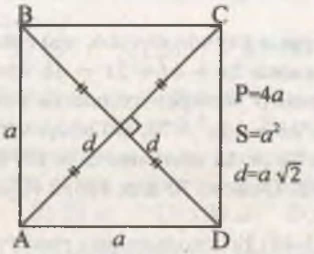


Рисунок 15.35

2. **Периметр квадрата со стороной a равен $P = 4a$ (рис. 15.35).**
3. **Диагональ квадрата со стороной a равна $d = a\sqrt{2}$ (рис. 15.35).**
4. **Площадь квадрата со стороной a равна: $S = a^2$ (рис. 15.35).**
5. **Площадь квадрата с диагональю d равна: $S = 0,5\,d^2$.**

Для прямоугольника справедливы следующие утверждения.

6. **Диагонали прямоугольника равны. Они в точке пересечения делятся пополам.**
7. **Периметр прямоугольника со сторонами a и b: $P = 2(a + b)$ (рис. 15.36).**
8. **Диагональ прямоугольника со сторонами a и b: $d^2 = a^2 + b^2$ (рис. 15.36).**
9. **Площадь прямоугольника со сторонами a и b: $S = ab$ (рис. 15.36).**
10. **Площадь прямоугольника с диагональю d: $S = 0,5d^2 \sin\varphi$, $\varphi-$ угол между диагоналями (рис. 15.36).**

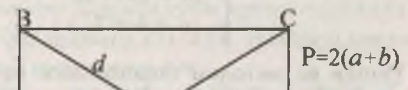


Рисунок 15.36

1. Найдите площадь квадрата, если сумма его диагоналей равна 8.
A) 4 B) 10 C) 16 D) 8

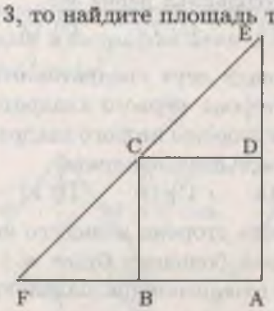
Решение: У квадрата две диагонали. По 1-утверждению они равны. Поэтому $d = 4$. Из 5-утверждения получим $S = 0,5 \cdot 4^2 = 8$. **Ответ:** 8 (D).

2. (96-9-98) Во сколько раз уменьшается площадь квадрата если его сторону уменьшить в 5 раз?
A) 5 B) 10 C) 20 D) 25

3. (96-10-49) Во сколько раз уменьшается площадь квадрата если его сторону уменьшать в 2 раз?
A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) 4 D) 8

4. (97-5-50) Во сколько раз следует уменьшить сторону квадрата чтобы, его площадь уменьшилось в 4 раза?
A) 1,5 B) 2 C) 2,5 D) 3

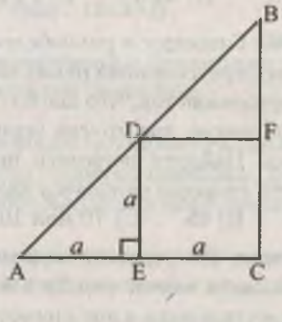
5. (97-9-108) Из вершины A изображенного на рисунке квадрата ABCD проведены прямые AE и AF, а через вершину C прямая CF параллельная диагонали BD. Если площадь квадрата равна 3, то найдите площадь треугольника AFE.



A) 5 B) 6 C) 7 D) 9

6. (98-2-46) В прямоугольный треугольник вписан квадрат, имеющий с ним общий прямой угол. Одна из вершин квадрата лежит на середине гипотенузы. Найдите периметр квадрата, если длина гипотенузы равна $24\sqrt{2}$.
A) 36 B) 48 C) 42 D) 28

Решение: Построим чертеж по условиям задачи.



Пусть сторона квадрата a. Так как D середина гипотенузы и DE параллельна BC, отрезок DE является средней линией тругольника

ABC. Отсюда следует $AE = EC = a$. В прямоугольном треугольнике AED, $AD = 12\sqrt{2}$. Из теоремы Пифагора следует $a^2 + a^2 = (12\sqrt{2})^2$ или $a = 12$. Периметр квадрата $P = 4a = 48$. **Ответ:** 48 (B).

7. (02-7-14) В прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 и 6, вписан квадрат, имеющий с ним общий прямой угол. Найдите периметр квадрата.
A) 8 B) 6 C) 10 D) 7

8. (01-10-6) На сколько процентов увеличится площадь квадрата, если его периметр увеличить на 20%?
A) 20 B) 25 C) 40 D) 44

9. (02-6-13) На сколько процентов увеличится площадь квадрата, если его периметр увеличить на 10%?
A) 10 B) 11 C) 16 D) 19

10. (03-4-51) Вершины вписанного в квадрат четырехугольника лежат на серединах сторон квадрата. Чему равна площадь квадрата, если площадь четырехугольника равна 36?
A) 70 B) 74 C) 77 D) 72

11. (03-7-60) Площади двух квадратов относятся как 25 : 9. Сторона первого квадрата на 10 единиц больше стороны второго квадрата. Найдите сторону меньшего квадрата.
A) 25 B) 15 C) 16 D) 12

Решение: Пусть сторона меньшего квадрата a, тогда сторона большего будет $a + 10$. Из равенства для отношения площадей подобных фигур получим

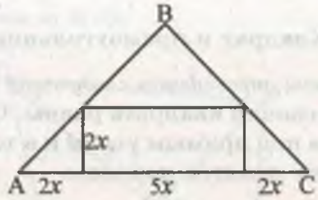
$$\frac{(a+10)^2}{a^2} = \frac{25}{9}.$$

Это квадратное уравнение относительно a, его корни $a_1 = -3,75$ и $a_2 = 15$. Длина стороны квадрата положительна, поэтому $a = 15$. **Ответ:** 15 (B).

12. (03-12-35) Вне квадрата ABCD построен правильный треугольник AFB. Найдите длину отрезка FC, если сторона квадрата равна $\sqrt{6}$.
A) $2\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{2}$ D) $3+\sqrt{3}$

13. (99-4-40) Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна 45. В него вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на гипотенузе, две другие вершины лежат на катетах. Найдите периметр прямоугольника, если его стороны относятся как 5 : 2.
A) 50 B) 65 C) 70 или 105/2 D) 90

Решение: По условию задачи стороны прямоугольника имеют вид $2x$ и $5x$. Внутри данного треугольника и вне прямоугольника получатся три равнобедренных прямоугольных треугольника. Итак два крайних отрезка на гипотенузе равны боковой стороне прямоугольника. Возможны два случая: 1) большая сторона прямоугольника лежит на гипотенузе; 2) меньшая сторона прямоугольника лежит на гипотенузе. Эти случаи рассмотрим отдельно.



В первом случае из того, что гипотенуза равна 45, имеем $2x + 5x + 2x = 45$ или $x = 5$. Тогда периметр четырехугольника равен $5x + 5x + 2x + 2x = 14x = 70$. Во втором случае из $5x + 2x + 5x = 45$ получим $x = 15/4$. Тогда $14x = 105/2$. **Ответ:** 70 или 105/2 (C).

14. (96-1-46) Во сколько раз увеличится площадь прямоугольника, если все его стороны увеличить в 4 раза?
A) 4 B) 8 C) 12 D) 16

15. (96-10-48) Стороны прямоугольника 72 и 8 м. Найти сторону равновеликого ему квадрата.
A) 36 B) 28 C) 24 D) 18

16. (97-5-1) Ширина прямоугольника 7 см, а длина больше ширины на 3 см. Вычислить периметр прямоугольника.
A) 22 B) 20 C) 34 D) 30

17. (97-9-1) Одна из двух сторон прямоугольника 5 см, а другая на 7 см больше. Вычислить периметр прямоугольника.
A) 32 B) 34 C) 24 D) 26

18. (98-1-44) Площадь прямоугольника равна 400, а стороны относятся как 4 : 1. Вычислить периметр прямоугольника.
A) 100 B) $100\sqrt{2}$ C) 200 D) $50\sqrt{2}$

19. (98-7-32) Периметр прямоугольника равен 32. Найти стороны прямоугольника, если разность его соседних сторон равен 2.
A) 8 и 6 B) 12 и 10 C) 10 и 8 D) 9 и 7

Решение: Пусть стороны прямоугольника равны a и b. Из условий задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2a + 2b = 32 \\ a - b = 2. \end{cases}$$

Решив ее методом подстановки ($a = b + 2$) получим, $a = 9$, $b = 7$. **Ответ:** 9 и 7 (D).

20. (98-8-44) Периметр прямоугольника равен 60 и одна сторона больше другой на 6. Найти площадь прямоугольника.
A) 196 B) 216 C) 108 D) 144

21. (98-9-46) Большая сторона прямоугольника равна 12, расстояние от точки пересечения диагоналей до большей стороны равно 3. Найти площадь прямоугольника.
A) 96 B) 54 C) 48 D) 72

22. (98-12-99) Сколько квадратных плиток, со стороной 20 см нужны для покрытия зала размерами 24 м × 15 м?
A) 900 B) 18000 C) 9000 D) 1800

23. (00-4-50) Длину прямоугольника увеличили на 25%. На сколько процентов нужно уменьшить его ширину чтобы площадь прямоугольника не изменилась?
A) 20 B) 16 C) 25 D) 18

24. (01-4-11) Квадрат со стороной 10 м разбили на квадратики со стороной 5 см. Если из этих квадратиков составить полосу шириной 10 см, то чему будет равна длина этой полосы?
A) 100 м B) 20 м C) 200 м D) 1 км

Решение: Площадь большего квадрата равна 1000000 см^2, а меньшего 25 см^2. Так как сторона большого квадрата кратно стороне меньшего квадрата, при разбиении большого квадрата на квадратики со стороной 5 см получим 1000000 : 25 = 40000 квадратиков. Ширина полосы 10 см, поэтому квадратики располагаются в два ряда и ее длина равна $5 \cdot 20000 = 100000$ см. Переходим из см в км, тогда длина полосы будет 1 км. **Ответ:** 1 км (D).

25. (02-2-36) В прямоугольный треугольник, катет которого 6 см, вписан прямоугольник, имеющий с ним общий прямой угол. Найдите периметр этого прямоугольника.
A) 12 B) 16 C) 20 D) 10

26. (03-4-50) Диагонали прямоугольника делят его на четыре треугольника. Площадь одного из них равна 27. Найдите площадь прямоугольника.
A) 112 B) 108 C) 111 D) 96

27. (03-6-27) Ширина прямоугольного земельного участка равна 32 м. Чему равна длина участка, если площадь равна 2 гектарам?
A) 610 B) 615 C) 620 D) 625

28. (03-6-34) Если длину прямоугольника увеличить на 20%, а ширину на 10%, то на сколько процентов увеличится его площадь?
A) 30 B) 20 C) 27 D) 32

29. Угол между диагоналями прямоугольника 60^0, а диагональ равна $d = 4\sqrt{2}$. Найдите меньшую сторону прямоугольника.
A) $2\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{3}$ C) 6 D) $3\sqrt{2}$

30. Диагональ прямоугольника равна 25. Найдите меньшую сторону прямоугольника, если его стороны целые числа.
A) 20 B) 15 C) 16 D) 24

15.4.2 Ромб и параллелограмм

Сторону ромба обозначим через a, а диагонали через d_1 и d_2. α и β – углы ромба, h – его высота.

Ромб имеет следующие свойства.

1. **Периметр ромба со стороной a равен $P = 4a$ (рис. 15.37a).**

2. **Диагонали ромба пересекаются под прямым углом (рис. 15.37a).**

3. **Диагонали ромба являются биссектрисами его углов (рис. 15.37a).**

4. **Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \frac{d_1 d_2}{2}$ (рис. 15.37a).**

5. **Площадь ромба равна произведению стороны и высоты: $S = ah$, (рис. 15.37b).**

6. **Площадь ромба равна произведению квадрата стороны и синуса угла α или β: $S = a^2 \sin\alpha = a^2 \sin\beta$ (рис. 15.37b).**

7. **Сумма квадратов диагоналей ромба равна сумме квадратов всех его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$.**

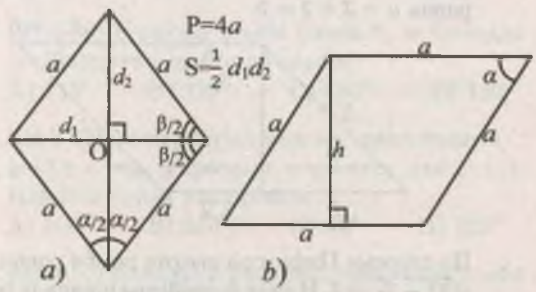


Рисунок 15.37

Свойства параллелограмма.

8. **Противоположные углы параллелограмма равны (рис. 15.38a).**

9. **Противоположные стороны параллелограмма равны (рис. 15.38a).**

10. **В точке пересечения диагонали параллелограмма делятся пополам.**

11. **Если диагонали четырехугольника в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник является параллелограммом.**

12. **Площадь параллелограмма равна произведению основания и высоты: $S = a \cdot h_a$.**

13. **Площадь параллелограмма равна произведению сторон и синуса угла между ними: $S = ab\sin\alpha = ab\sin\beta$, (рис. 15.38$a$).**

14. Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей и синуса угла между ними: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.

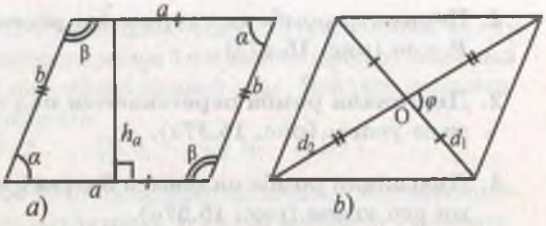


Рисунок15.38

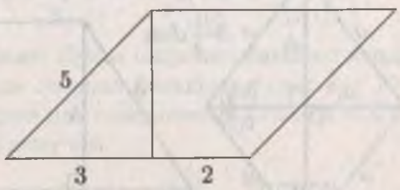
15. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

15-свойство называется тождеством параллелограмма.

16. Диагональ параллелограмма делит его площадь пополам.

1. (98-6-36) Высота ромба делит его сторону на отрезки равные 3 и 2, считая от вершины острого угла. Найдите площадь ромба.
A) 10 B) 20 C) 15 D) 18

Решение: По условию задачи сторона ромба равна $a = 3 + 2 = 5$.



По теореме Пифагора высота ромба равна $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. В силу 5-свойства площадь ромба равна $S = a\,h = 5 \cdot 4 = 20$. **Ответ:** 20 (B).

2. (96-6-38) Площадь ромба равна 18, а одна из диагоналей равна 9. Чему равна вторая диагональ?
A) 3,5 B) 5 C) 4,5 D) 4

3. (97-7-44) Высота ромба, равная $3\sqrt{3}$ делит его сторону пополам. Найдите периметр ромба.
A) $12\sqrt{3}$ B) 24 C) 36 D) $36\sqrt{3}$

4. (96-7-47) Площадь ромба равна 384, а диагонали относятся как 3 : 4. Найдите его сторону.
A) 18 B) 20 C) 24 D) 28

Решение: По условию задачи $d_1 = 3x$ и $d_2 = 4x$. Из 4-свойства для площади ромба S получим

$$S = 0,5 d_1 d_2 \Longleftrightarrow 384 = 0,5 \cdot 3x \cdot 4x.$$

Отсюда $x = 8$. Итак, диагонали ромба $d_1 = 3x = 24$ и $d_2 = 4x = 32$. Из тождества параллелограмма $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ имеем

$$24^2 + 32^2 = 4a^2 \Longleftrightarrow 12^2 + 16^2 = a^2.$$

Отсюда следует, что $a = 20$. **Ответ:** 20 (B).

5. (96-7-48) Диагональ ромба образует с его стороной угол 25^0. Найдите больший угол ромба.
A) 165^0 B) 150^0 C) 130^0 D) 120^0

6. (97-3-47) Площадь ромба равна 24, а одна из диагоналей равна 6. Найдите его сторону.
A) 10 B) 5 C) 8 D) 4,8

7. (97-7-47) Найдите площадь ромба, если его сторона равна 10, а диагонали относятся как 4 : 3.
A) 192 B) 96 C) 24 D) 60

8. (97-9-114) Отношение сторон двух подобных ромбов равно 3. Найти отношение их площадей.
A) 7 B) 8 C) 10 D) 9

Решение: Отношение площадей подобных фигур равно квадрату отношения их соответствующих сторон. Итак отношение площадей равно 9. **Ответ:** 9 (D).

9. (97-9-115) Как изменится площадь ромба, если одну из ее диагоналей увеличить на 10%, а вторую уменьшить на 15%?
A) увеличится на 5%
B) не изменится
C) уменьшится на 6,5%
D) уменьшится на 5,65%

10. (97-10-47) Сторона ромба равна $2\sqrt{5}$ и одна из диагоналей равна 4. Найти площадь ромба.
A) 20 B) $8\sqrt{5}$ C) 16 D) 32

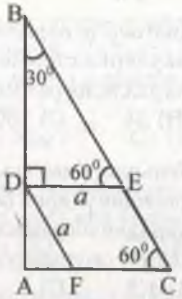
11. (97-10-48) Углы, образованные диагоналями ромба с его сторонами относятся как 2 : 7. Найдите меньший угол ромба.
A) 20^0 B) 30^0 C) 40^0 D) 60^0

12. (98-1-45) Один из углов прямоугольного треугольника равен 60^0. В этот треугольник вписан ромб так, что угол 60^0 у них общий, и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите больший катет треугольника, если сторона ромба равна $\frac{\sqrt{12}}{5}$.
A) 1,8 B) 2,4 C) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ D) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$

Решение: Построим соответствующий Рисунок Пусть сторона ромба $DE = a$. Тогда из прямоугольного треугольника DEB получим $BE = 2a$ (катет, лежащий напротив угла в 30^0 равен половине гипотенузы). Для большего катета треугольника AB

$$\sin 60^0 = \frac{AB}{3a} \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5AB}{3\sqrt{12}}.$$

Из этого равенства имеем $AB = 1,8$. **Ответ:** 1,8 (A).



13. (98-2-50) Высота ромба равна 5, а произведение диагоналей 80. Найдите его периметр.
A) 32 B) 16 C) 24 D) 28

14. (98-8-45) В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан ромб так, что острый угол у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите сторону ромба, если катет треугольника равен $\frac{2+\sqrt{2}}{5}$.
A) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ B) $0,2$ C) $0,4$ D) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

15. (98-10-23) Сторона ромба равна 6, а острый угол 30^0. Найдите произведение его диагоналей.
A) 27 B) 18 C) 42 D) 36

Решение: Из формул 4 и 6 для нахождения площади ромба следует

$$0,5d_1d_2 = a^2 \sin\alpha \iff d_1d_2 = 2\cdot 6^2 \cdot \sin 30^0.$$

Проведя вычисления получим, $d_1d_2 = 36$.
Ответ: 36 (D).

16. (99-2-49) Сторона ромба равна 4, а площадь 9. Найдите сумму диагоналей ромба.
A) 12 B) 11 C) 10 D) 9,5

17. (99-4-45) Меньшая диагональ ромба равна $\sqrt[4]{3}$, а площадь 1,5. Найдите тупой угол ромба.
A) 150^0 B) 120^0 C) 135^0 D) 110^0

18. (00-1-52) Сторона ромба равна 5, одна из диагоналей 6. Найти площадь ромба.
A) 24 B) 28 C) 30 D) 20

19. (00-5-58) Чему равна площадь ромба, если его сторона равна 10, а один из углов равен 150^0 ?
A) 100 B) 80 C) 90 D) 50

20. (00-9-3) Больший угол ромба равен 120^0, а меньшая диагональ равна $8\sqrt[4]{3}$. Найдите площадь ромба.
A) 54 B) 102 C) 84 D) 96

21. (01-10-43) Найдите тангенс острого угла ромба с диагоналями 16 и 12.
A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{7}{6}$ D) $\frac{24}{7}$

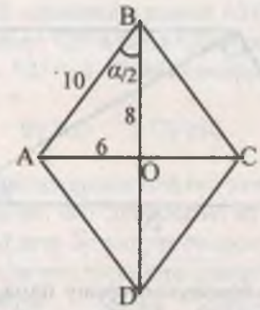
Решение: Построим соответствующий рисунок. По второму свойству диагонали ромба пересекаются под прямым углом и в точке пересечения делятся пополам. Из этого свойства следует, что катеты OA и OB треугольника AOB равны 6 и 8. Если острый угол ромба α, то согласно рисунку имеем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Подставим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$ в тождество

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

и получим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$. **Ответ:** $\frac{24}{7}$ (D).



22. Найти высоту ромба с диагоналями 12 и 16.
A) 10,2 B) 9,4 C) 9,8 D) 9,6

23. (97-2-38) Сторона ромба равна 6, а площадь 18. Найдите тупой угол ромба.
A) 135^0 B) 120^0 C) 150^0 D) 140^0

24. (02-2-37) Углы, образованные диагоналями ромба с его сторонами относятся как 5 : 4. Найдите тупой угол ромба.
A) 100^0 B) 120^0 C) 96^0 D) 120^0

25. (02-6-50) Найдите котангенс тупого угла ромба с диагоналями 32 и 24.
A) $-\frac{5}{21}$ B) $-\frac{7}{24}$ C) $-\frac{9}{28}$ D) $-\frac{7}{16}$

26. (02-12-60) Сторона ромба равна 10, а меньшая диагональ 12. Найдите площадь ромба.
A) 98 B) 96 C) 94 D) 102

Решение: В силу свойства 7 $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ с учетом $a = 10, d_1 = 12$, получим $d_2 = 16$. Из свойства 4 $S = 0,5\,d_1\cdot d_2 = 96$. **Ответ:** 96 (B).

27. (03-3-60) Площадь ромба 12, а отношение диагоналей 1 : 2. Найдите длину стороны ромба.
A) 4 B) $\sqrt{7}$ C) $\sqrt{15}$ D) 6

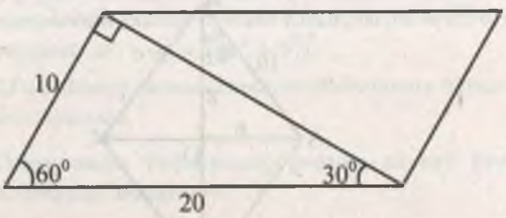
28. (03-5-60) Периметр ромба 24, а одна из диагоналей образует с его стороной угол 75^0. Найдите расстояние между противоположными сторонами ромба.
A) 3 B) 4 C) 3,2 D) 3,5

29. (03-7-45) Площадь ромба 24, а отношение диагоналей равно 0,75. Найдите сторону этого ромба.
A) 7 B) 4 C) 5 D) 10

30. (03-11-35) Периметр ромба равен 52, а сумма диагоналей равна 34. Найдите площадь ромба.
A) 30 B) 128 C) 32 D) 120

31. (98-2-49) Острый угол параллелограмма равен 60^0. Его меньшая диагональ образует с большей стороной угол 30^0. Найдите площадь параллелограмма, если его большая сторона равна 20.
A) $100\sqrt{2}$ B) 85 C) $95\sqrt{3}$ D) $100\sqrt{3}$

Решение: Меньшая диагональ составляет с его боковой стороной угол $180^0-(60^0+30^0)=90^0$. Итак меньшая диагональ перпендикулярна боковой стороне.



Найдем боковую сторону параллелограмма x: $x=20\cdot\sin 30^0=10$. Тогда площадь параллелограмма равна

$$S=20\cdot 10\cdot\sin 60^0=20\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=100\sqrt{3}.$$

Ответ: $100\sqrt{3}$ (D).

32. (96-9-97) Диагонали параллелограмма равны 6 и 8, а угол между ними 30^0. Найдите площадь параллелограмма.
A) 48 B) 24 C) $24\sqrt{3}$ D) 12

33. (96-3-102) Боковая сторона параллелограмма, равной 3, перпендикулярна меньшей диагонали. Найдите высоту, опущенную к основанию, если площадь параллелограмма равна 12.
A) 2 B) 2,2 C) 2,3 D) 2,4

34. (96-1-45) Найдите периметр параллелограмма, если его площадь равна 144 см^2, а высоты равны 8 см и 12 см.
A) 40 B) 30 C) 80 D) 60

Решение: Из 12-ой формулы для площади параллелограмма, для его сторон имеем

$$a=\frac{S}{h_a},\ b=\frac{S}{h_b}\Longleftrightarrow a=\frac{144}{8}=18,\ b=\frac{144}{12}=12.$$

Итак, периметр параллелограмма $P=2(a+b)=2(18+12)=60$. **Ответ:** 60 (D).

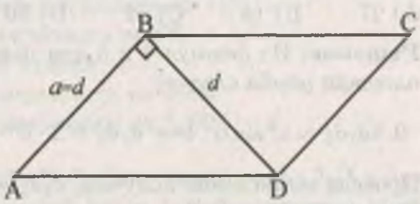
35. (96-12-106) Меньшая диагональ параллелограмма, равная 4 см, перпендикулярна к боковой стороне. Найдите основание параллелограмма, если его площадь 12 см^2.
A) 6 B) 7 C) 5,5 D) 5

36. (96-7-44) Диагональ параллелограмма, равная 5, перпендикулярна стороне, равной 12. Найдите периметр параллелограмма.
A) 50 B) 34 C) 100 D) 48

37. (96-9-36) Меньшая диагональ параллелограмма равна и перпендикулярна боковой стороне. Если площадь параллелограмма равна 32 см^2, то найдите высоту, опущенную к основанию.
A) 4 B) 4,5 C) 3 D) 3,5

38. (96-13-44) Меньшая диагональ параллелограмма равна и перпендикулярна боковой стороне. Если площадь параллелограмма равна 32 см^2, то найдите его основание.
A) 6 B) 9 C) 7 D) 8

Решение: По условиям задачи построим рисунок. По 16-ой свойству площадь треугольника ABD равна половине площади параллелограмма $32:2=16$. С другой стороны, площадь прямоугольного треугольника ABD равна: $0,5\cdot a\cdot a=0,5\cdot d^2=16$. Отсюда получим $a=4\sqrt{2}$. По теореме Пифагора $AD=\sqrt{32+32}=8$. **Ответ:** 8 (D).



39. (97-1-30) Стороны параллелограмма относятся как 3 : 5. Найдите площадь параллелограмма, если его периметр равен 48, а один из углов 120^0.
A) 67,5 B) $135\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) 48 D) $67,5\sqrt{3}$

40. (97-3-44) Один из углов параллелограмма равен 150^0, а диагональ, равная 6 перпендикулярна стороне. Найдите периметр параллелограмма.
A) 36 B) 48 C) $12(2+\sqrt{3})$ D) 32

41. (97-3-48) Диагональ параллелограмма образует со сторонами углы в 20^0 и 50^0. Найдите большой угол параллелограмма.
A) 100^0 B) 145^0 C) 130^0 D) 110^0

42. (97-5-44) Разность двух углов параллелограмма равна 70^0. Найдите эти углы.
A) $45^0;115^0$ B) $65^0;135^0$
C) $75^0;105^0$ D) $55^0;125^0$

Решение: Пусть смежные углы параллелограмма α и β. По условию задачи $\alpha-\beta=70^0$. По 8 свойству противоположные углы параллелограмма равны и сумма смежных углов 180^0. Поэтому $\alpha+\beta=180^0$. Решив систему уравнений найдем $\alpha=125^0$, $\beta=55^0$. **Ответ:** 55^0; 125^0 (D).

43. (97-6-30) Одна из сторон параллелограмма в 4 раза больше другой. Найдите площадь параллелограмма, если его периметр равен $20\sqrt{2}$, а острый угол 45^0.
A) $8\sqrt{2}$ B) $32\sqrt{2}$ C) 16 D) $16\sqrt{2}$

44. (97-7-48) Найдите больший угол параллелограмма, если сумма двух его углов равна 100^0.
A) 100^0 B) 110^0 C) 120^0 D) 130^0

45. (97-8-37) Площадь параллелограмма равна 16 , а его смежные стороны 4 м и 8 м. Найдите тупой угол параллелограмма.
A) 120^0 B) 150^0 C) 135^0 D) 105^0

Решение: Из формулы 13 для площади параллелограмма следует

$$S = a \cdot b \cdot \sin\alpha \iff 16 = 4 \cdot 8 \cdot \sin\alpha.$$

Отсюда $\alpha = 30^0$. Тупой угол дополняет 30^0 до 180^0. Итак, $\beta = 150^0$. **Ответ:** 150^0 (B).

46. (97-9-44) Разность двух углов параллелограмма равна 50^0. Найдите эти углы.
A) $65^0; 115^0$ B) $60^0; 110^0$
C) $45^0; 135^0$ D) $55^0; 115^0$

47. (97-10-44) Один из углов параллелограмма 45^0, а диагональ, равная 4, перпендикулярна стороне. Найдите периметр параллелограмма.
A) 32 B) $8(1+\sqrt{2})$ C) $16\sqrt{2}$ D) $4+8\sqrt{2}$

48. (97-11-30) Периметр параллелограмма равен 60. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны относятся как 2 : 3, а острый угол равен 30^0.
A) 108 B) 54 C) 96 D) $48\sqrt{3}$

49. (99-2-45) Угол между перпендикулярами, опущенными из вершины острого угла параллелограмма к сторонам, не проходящим через эту вершину равен 130^0. Найдите острый угол параллелограмма.
A) 40^0 B) 45^0 C) 50^0 D) 55^0

50. (99-2-46) Меньшая диагональ параллелограмма равная 6 перпендикулярна меньшей стороне, равной 8. Найдите высоту, опущенную к большей стороне параллелограмма.
A) 4,2 B) 4,4 C) 4,6 D) 4,8

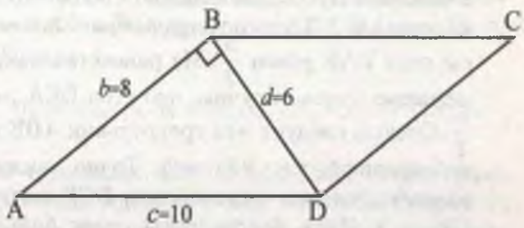
Решение: По условиям задачи построим рисунок. Из теоремы Пифагора следует, что основание параллелограмма равно $a = 10$. Из формулы для площади прямоугольного треугольника ABD :

$$S = 0,5\,a\,b, \quad S = 0,5c\,h_c$$

еледует $a\,b = c\,h_c$. Отсюда получим

$$8 \cdot 6 = 10h_c \iff h_c = 4,8.$$

Ответ: 4,8 (D).



51. (99-4-41) Найти площадь параллелограмма, если его высоты $12\sqrt{3}$ и 4, а угол между ними равен 60^0.
A) $48\sqrt{3}$ B) 48 C) $24\sqrt{3}$ D) 96

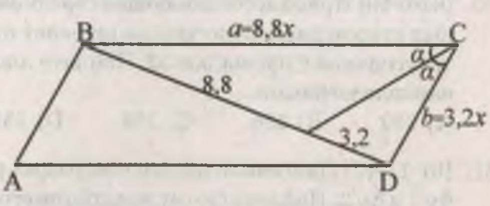
52. (00-1-51) В параллелограмме ABCD - AC перпендикулярен CD и CE перпендикулярен AD, $AE = 16$ и $ED = 4$. Найти площадь параллелограмма.
A) 150 B) 145 C) 155 D) 160

53. (00-3-80) Биссектриса острого угла параллелограмма делит его диагональ на отрезки 3,2 и 8,8. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 30.
A) 8 B) 9 C) 12 D) 11

Решение: Из свойства биссектрисы (7- свойство 15.16.4) следует, что стороны параллелограмма равны $a = 8,8x$, $b = 3,2x$. Периметр параллелограмма равен

$$P = 2(a+b) \iff 30 = 2(8,8x + 3,2x),$$

отсюда $x = 1,25$. Итак большая сторона параллелограмма равна $a = 8,8 \cdot 1,25 = 11$. **Ответ:** 11 (D).

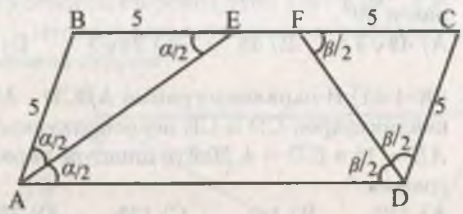


54. (00-3-82) Стороны параллелограмма равны 11 и 23, а диагонали относятся как 2 : 3. Найдите большую диагональ параллелограмма.
A) 18 B) 20 C) 24 D) 30

55. (00-5-57) Площадь параллелограмма со сторонами 5 см и 6 см равна 24 см^2. Найдите меньшую диагональ параллелограмма.
A) $\sqrt{97}$ B) 5 C) 4,5 D) 4

56. (00-6-42) Стороны параллелограмма равны 12 и 5. Биссектрисы прилежащих к большей стороне углов делят противоположную сторону на три части. Найдите длину меньшей из этих частей.
A) 2 B) 2,5 C) 3,2 D) 3,6

Решение: Пусть прилежашие к большей стороне углы α и β. Тогда по определению биссектрисы угол DAE равен $\frac{\alpha}{2}$. Из равенства накрест лежащих углов получим, что угол BEA равен $\frac{\alpha}{2}$. Отсюда следует, что треугольник ABE равнобедренный, т.е. $BE = 5$. Точно также из равнобедренного треугольника DCF получим $CF = 5$. Итак, биссектрисы делят большую сторону на отрезки 5; 2 и 5. Меньший из них 2. **Ответ:** 2 (A).



57. (01-1-54) Один из углов параллелограмма больше другого в три раза. Найдите больший угол параллелограмма.
A) 105^0 B) 110^0 C) 120^0 D) 135^0

58. (01-2-45) Найдите периметр параллелограмма, если его диагонали 6 и 8, а угол между ними 60^0.
A) $20\sqrt{2}$ B) $2(\sqrt{13}+\sqrt{37})$
C) $4\sqrt{13}$ D) $4\sqrt{37}$

59. (01-5-42) Одна из сторон параллелограмма больше высоты, опущенной на эту сторону в 3 раза. Найдите эту сторону, если площадь параллелограмма равна 48.
A) 12 B) 16 C) 8 D) 24

60. (01-6-50) Прямая, соединяющая середины смежных сторон параллелограмма отсекает от него треугольник с площадью 32. Найдите площадь параллелограмма.
A) 250 B) 256 C) 254 D) 258

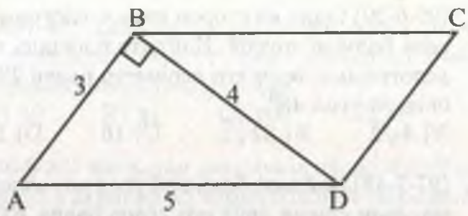
61. (01-11-47) Диагонали параллелограмма равны $6\sqrt{2}$ и $8\sqrt{2}$. Найдите сумму квадратов его сторон.
A) 100 B) 200 C) 196 D) 198

62. (02-1-70) Стороны параллелограмма равны 3 и 5, а меньшая диагональ, равная 4 и она перпендикулярна меньшей стороне. Найдите площадь этого параллелограмма.
A) 6 B) 8 C) 10 D) 12

Решение: Из равенства $3^2+4^2=5^2$ следует, что треугольник ABD – прямоугольный. По свойству 5 площадь треугольника ABD равна половине площади параллелограмма, т.е.

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b$$

или $S_{ABD} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = 6$. Итак, $S = 2\cdot S_{ABD} = 12$. **Ответ:** 12 (D).



63. (02-9-54) Среди всех параллелограммов с диагоналями 16 и 12 найти периметр параллелограмма, имеющего наибольшую площадь.
A) 28 B) 32 C) 64 D) 40

64. (02-12-59) Сумма двух смежных сторон параллелограмма равна 10, а разность 6. Найдите сумму квадратов диагоналей этого параллелограмма.
A) 120 B) 20 C) 136 D) 64

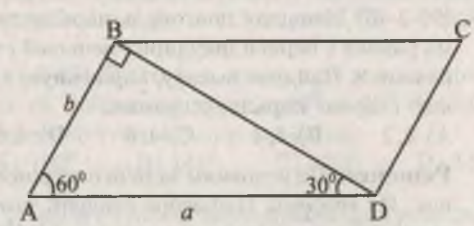
65. (03-4-48) Периметр параллелограмма равен 44. Его диагонали делят параллелограмм на четыре треугольника. Разность периметров двух из них равна 2. Найдите длину большей стороны параллелограмма.
A) 10 B) 12 C) 8 D) 10,5

66. (03-5-55) Диагональ параллелограмма делит его тупой угол в отношении 1 : 3. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 60, а острый угол 60^0.
A) 20 B) 18 C) 22 D) 25

Решение: Из условия задачи и 8- свойства следует, что тупой угол параллелограмма равен 120^0. Если разделить этот угол в отношении 1 : 3, получим углы 30^0 и 90^0. Итак, угол ABD равен 90^0, а угол ADB равен 30^0. Из прямоугольного треугольника ABD имеем

$$AB = \frac{1}{2}\cdot AD = \frac{1}{2}\cdot a.$$

Периметра параллелограмма $P = 2(a+b)$ равен $60 = 2\cdot(a+\frac{1}{2}\cdot a)$. Отсюда $a = 20$. **Ответ:** 20 (A).



67. (03-5-54) Сумма диагоналей параллелограмма равна 8. Найдите наименьшее значение суммы квадратов сторон параллелограмма.
A) 32 B) 30 C) 64 D) 48

68. (03-11-28) Диагонали параллелограммов равны 4 и $\sqrt{32}$. Они пересекаются под углом 45^0. Найдите большую высоту параллелограмма.
A) 4 B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}$

15.4.3 Трапеция

Четырехугольник, у которого только две стороны параллельны, называется *трапецией* (рис. 15.39a). Эти пралллельные стороны называются *основаниями* трапеции. Две другие стороны называются *боковыми сторонами.* Трапеция с двумя равными боковыми сторонами называется *равнобедренной трапецией* (рис. 15.39b). Отрезок, соединяющий середины боковых сторон называется *средней линией трапеции* (рис. 15.39a).

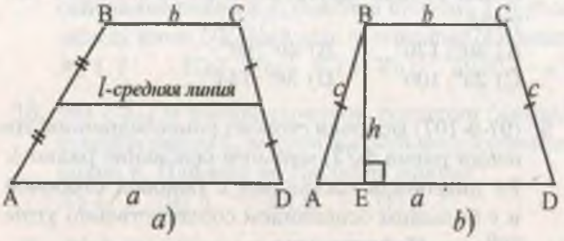


Рисунок 15.39

Пусть l– средняя линия трапеции ABCD ($AD \| BC$), O– точка пересечения диагоналей AC и BD. $AD = a, BC = b$.

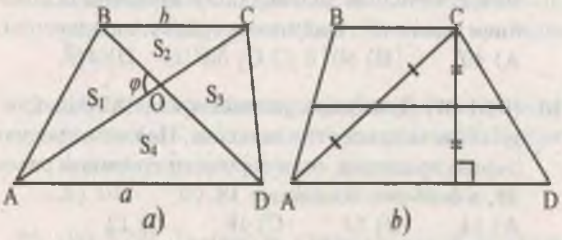


Рисунок 15.40

Для трапеции справедливы следующие утверждения

1. **Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна половине их суммы:** $l = \dfrac{a+b}{2}$.

2. $\dfrac{AO}{CO} = \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{AD}{BC}$ **(рис. 15.40a).**

3. **Если ABCD равнобедренная трапеция, а BE ее высота, тогда справедливы (рис. 15.39b):** $AE = \dfrac{a-b}{2}, \quad ED = l = \dfrac{a+b}{2}$.

4. **Средняя линия трапеции делит пополам ее высоту и диагональ.**

Площадь трапеции равна:

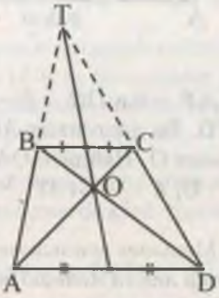
5. **Площадь трапеции равна произведению половины суммы оснований и высоты:** $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$.

6. **Площадь трапеции равна половине произведения диагоналей и синуса угла φ между ними:** $S = \dfrac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.

7. **Пусть O – точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции ABCD (рис. 15.40a). Тогда:**

$$S_1 = S_3, \quad S_1 S_3 = S_2 S_4, \quad S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 S_4}.$$

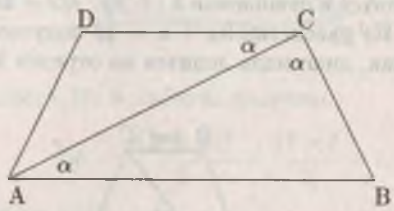
8. **В трапеции ABCD ($AD \| BC$) точка пересечения продолжений боковых сторон T, точка пересечения диагоналей O и середины оснований лежат на одной прямой.**



9. **Пусть в трапеции ABCD ($AD \| BC$, $AD > BC$) точки E, F – середины диагоналей AC, BD. Тогда,** $EF = \dfrac{AD - BC}{2}$.

1. (98-8-37) Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 3, а периметр 42. Ее диагональ делит тупой угол пополам. Найдите среднюю линию трапеции.
A) 8 B) 8,5 C) 12 D) 7,5

Решение: Накрест лежашие углы, получающиеся при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой равны. Поэтому треугольник ACB равнобедренный ($AB = CB = x$).

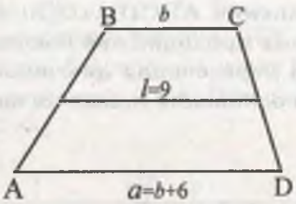


Из равнобедренности трапеции следует, что меньшее основание и боковые стороны равны. Обозначив эти стороны через x, получим $x + x + x + 3 = 42$, отсюда $x = 13$. Тогда средняя линия трапеции равна $l = \dfrac{13+3}{2} = 8$. **Ответ:** 8 (A).

2. (96-10-46) Периметр равнобедренной трапеции равен 36 см, а средняя линия 10 см. Найдите длину боковой стороны.
A) 10 B) 8 C) 9 D) 13

3. (96-1-43) Средняя линия трапеции равна 9 см, одно из оснований на 6 см меньше другого. Найдите большее основание трапеции.
A) 15 B) 18 C) 14 D) 12

Решение: Даны: $l = \dfrac{a+b}{2} = 9$, $a = b + 6$. Требуется найти: a. Если подставить $b = a - 6$ в формулу для l, получим $a = 12$. **Ответ:** 12 (D).



4. (96-6-27) $AB = 6$ и $DC = 3$ – основания трапеции ABCD. Ее диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Найдите OA, если $OC = 2$.
A) 16 B) 4 C) 12 D) 14

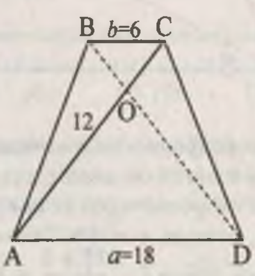
5. (96-9-95) Меньшее основание трапеции равно 4 см. Средняя линия меньше большего основания на 4 см. Найдите среднюю линию трапеции.
A) 6 B) 10 C) 8 D) 9

6. (96-10-47) Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 18 см, диагональ равна 12 см. На какие отрезки делится диагональ в точке пересечения диагоналей?
A) 4 и 8 B) 3 и 9 C) 2 и 10 D) 5 и 7

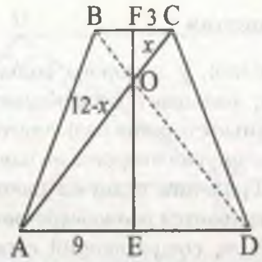
Решение: *1-способ.* Из условия задачи и из формулы 2 следует

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AD}{BC} \Longleftrightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{18}{6} = 3.$$

Таким образом, в точке пересечения диагонали делятся в отношении 3 : 1, т.е. $AO = 3x$, $OC = x$. Из равенства $3x + x = 12$ получим $x = 3$. Итак, диагональ делится на отрезки 9 и 3.



2-способ. Пусть точки F и E середины оснований BC и AD соответственно, O – точка пересечения диагоналей. Тогда $FC = 3$, $AE = 9$. По 8-правилу точка O лежит на отрезке FE. Если обозначить $OC = x$, то $AO = 12 - x$. Так как $\triangle OFC \sim \triangle OEA$, имеем $\dfrac{12 - x}{x} = \dfrac{9}{3}$ или $x = 3$. Итак, $OC = 3$, $AO = 12 - 3 = 9$. **Ответ:** 3 и 9 (B).



7. (97-9-103) Один из углов равнобедренной трапеции больше другого в 4 раза. Найдите эти углы.
A) $30^0; 120^0$ B) $40^0; 60^0$
C) $25^0; 100^0$ D) $36^0; 144^0$

8. (97-9-107) Боковая сторона равнобедренной трапеции равна $4\sqrt{2}$, меньшее основание равно 4. Ее диагональ составляет с боковой стороной и с большим основанием соответственно углы 30^0 и α. Найдите угол α.
A) 60^0 B) 35^0 C) 30^0 D)45^0

9. (97-12-17) В прямоугольной трапеции ABCD ($AB \| DC$ и AB перпендикулярна AD) меньшая диагональ равна большей боковой стороне. Угол между меньшей диагональю и меньшим основанием равен 40^0. Найдите острый угол трапеции.
A) 40^0 B) 50^0 C) 30^0 D) 45^0

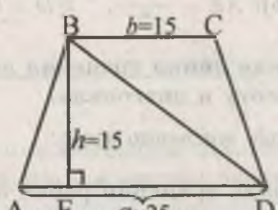
10. (98-1-37) Диагональ равнобедренной трапеции делит ее острый угол пополам. Найдите среднюю линию трапеции, если периметр трапеции равен 48, а большее основание 18.
A) 14 B) 15 C) 16 D) 12

11. (98-2-51) Основания трапеции равны 15 и 25, а высота равна 15. Найдите диагональ трапеции.
A) 35 B) 28 C) 25 D) 30

Решение: Даны: $AD = 25$, $BC = 15$, $BE = 15$, $AB = CD$. Нужно найти BD. По 3- свойству $ED = \dfrac{25 + 15}{2} = 20$. Гипотенуза BD прямоугольного треугольника BED по теореме Пифагора равна

$$d = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25.$$

Ответ: 25 (C).



12. (09-01-17) Средняя линия трапеции равна 13, углы при большем основании равны 30^0 и 60^0. Отрезок, соединяющий середины оснований равен 7. Найдите меньшее основание трапеции.
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7

13. (09-09-3) Средняя линия трапеции равна 12, углы при большем основании равны 30^0 и 60^0. Отрезок, соединяющий середины оснований равен 1. Найдите большее основание трапеции.
A) 14 B) 13 C) 12 D) 15

14. (98-5-38) В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 41, высота равна 40 и средняя линия 45. Найдите большее основание трапеции.
A) 50 B) 54 C) 55 D) 60

15. (99-1-45) В равнобедренной трапеции большее основание равно 2,7, боковая сторона 1, а угол между ними 60^0. Найдите ее меньшее основание.
A) 1,7 B) 2,35 C) 1,35 D) $2,7-\sqrt{3}$

16. (99-7-37) В равнабедренной трапеции боковая сторона равна 5, высота 4 и большее основание равно 9. Найдите ее среднюю линию.
A) 4 B) 5 C) 3 D) 6

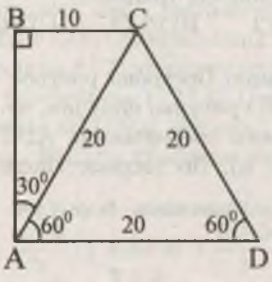
17. (99-8-46) Основания трапеции равны 44 и 16, а боковые стороны 25 и 17. Найдите высоту трапеции.
A) 15 B) 14 C) 12 D) 16

18. (99-8-47) В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 7, диагональ 8, а средняя линия равна 4. Найдите меньшее основание трапеции.
A) 3 B) 4 C) 5 D) 2

19. (00-3-78) Основания равнобедренной трапеции равны 4 и 6, а боковая сторона равна 5. Найдите сумму длин диагоналей трапеции.
A) 10 B) 12 C) 14 D) 15

20. (00-3-79) Диагональ прямоугольной трапеции делит ее на правильный треугольник со стороной 20 и на прямоугольный треугольник. Найдите среднюю линию трапеции.
A) 10 B) 12 C) 15 D) 16

Решение: По условию задачи ACD – правильный треугольник со стороной 20. Тогда его углы 60^0. Так как угол BAD прямой, угол BAC равен 30^0. Из треугольника ABC следует, что катет, лежащий напротив угла 30^0, $BC=\frac{c}{2}$, т.е. $BC = 20:2 = 10$. А средняя линия трапеции $l = \frac{10+20}{2} = 15$. **Ответ:** 15 (C).



21. (00-7-45) Диагональ AC трапеции ABCD перпендикулярна боковой стороне и лежит на биссектрисе угла DAB. Найдите среднюю линию трапеции, если $AC = 8$ и $DAB = 60^0$.
A) $1,5\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2,5\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$

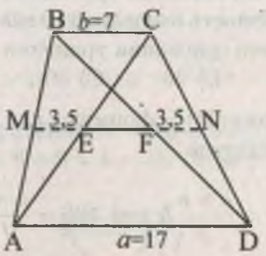
22. (01-1-55) Найдите периметр равнобедренной трапеции с тупым углом 120^0 и основаниями 6 и 2.
A) 12 B) 16 C) 18 D) 20

23. (01-5-37) В трапеции ABCD- $(AD\|BC)$ $\angle A = 90^0$, $\angle C = 135^0$ $AB = 2$. Найдите среднюю линию трапеции, если ее диагональ перпендикулярна большей боковой стороне.
A) 3 B) 4 C) 6 D) 2

24. (01-5-38) Боковые стороны трапеции 3 и 4, основания равны 10 и 5. Под каким углом пересекаются продолжения боковых сторон?
A) 90^0 B) 60^0 C) 45^0 D) 120^0

25. (01-10-44) Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции с основаниями 17 и 7.
A) 3,5 B) 4 C) 5 D) 4,5

Решение: *1-способ.* По условию задачи ME – средняя линия треугольника ABC (см. рисунок), а FN – средняя линия треугольника BCD. Из свойства средней линии получим $ME = 7:2$ и $FN = 7:2 = 3,5$. Средняя линия трапеции $l = (7+17):2 = 12$. С другой стороны, $l = ME + EF + FN$ или $12 = 3,5 + EF + 3,5$. Отсюда $EF = 5$.



2-способ. Из 9- свойства получим

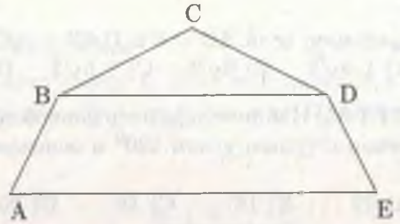
$$EF = \frac{AD-BC}{2} = \frac{17-7}{2} = 5.$$

Ответ: 5 (C).

26. (02-2-39) Острый угол равнобедренной трапеции равен 60^0, а основания относятся как 1 : 2. Найдите большее основание трапеции, если ее периметр равен 50.
A) 20 B) 18 C) 22 D) 24

27. (02-3-64) Длины оснований трапеции равны 28 и 12. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.
A) 8 B) 10 C) 6 D) 9

28. (97-9-111) Угол BCD равнобедренного треугольника BCD, изображенного на рисунке равен 135^0. Найдите отношение $\frac{AB}{BC}$, если угол ABD равнобедренной трапеции ABDE равен $112,5^0$.



A) 2 B) 3 C) 1,5 D) определить нельзя.

29. (03-2-47) Диагональ равнобедренной трапеции равна $8\sqrt{3}$ и составляет с большим основанием угол 30^0. Чему равна средняя линия трапеции?
A) 16 B) 12 C) 10 D) 20

30. (03-5-59) Средняя линия трапеции ABCD делит ее на две трапеции со средними линиями 13 и 17. Найдите большее основание трапеции ABCD.
A) 19 B) 21 C) 18 D) 30

31. (03-10-54) Разность оснований равнобедренной трапеции равна боковой стороне. Найдите больший угол трапеции.
A) 120^0 B) 135^0 C) 150^0 D) 100^0

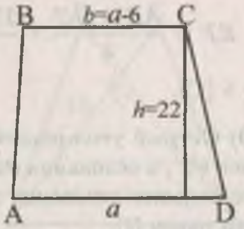
32. (03-11-45) Основания трапеции равны 8 и 12, один из острых углов равен 30^0, а продолжения боковых стороне пересекаются под прямым углом. Найдите высоту трапеции.
A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{3}$

33. (08-04-30) Площадь трапеции равна 506, высота 22, а разность оснований равна 6. Найдите длину большего основания трапеции.
A) 32 B) 26 C) 30 D) 28

Решение: Из 5- формулы для вычисления площади следует

$$S = \frac{a+b}{2}h \Longleftrightarrow 506 = \frac{a+a-6}{2} \cdot 22.$$

Отсюда $a = 26$. **Ответ:** 26 (B).

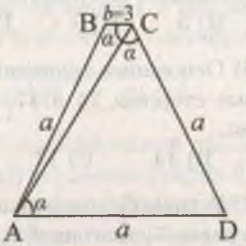


34. (08-08-30) Диагональ равнобедренной трапеции делит ее острый угол пополам. Если периметр трапеции равен 66, а большее основание 18, то найдите среднюю линию трапеции.
A) 13 B) 14 C) 17 D) 16

35. (06-16-31) Основания равнобедренной трапеции равны 30 и 50, а высота равна 30. Найдите диагональ трапеции.
A) 56 B) 70 C) 60 D) 50

36. (06-18-31) Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 3, а периметр равен 72. Ее диагональ делит тупой угол пополам. Найдите среднюю линию трапеции.
A) 8,5 B) 13 C) 7,5 D) 12

Решение: Пусть тупой угол трапеции 2α. Углы CAD и BCA равны как накрест лежашие углы. Отсюда следует равнобедренность треугольника ACD ($AD = CD$). Тогда три стороны трапеции равны $AD = AB = CD = a$. Из формулы для периметра трапеции $P = b + a + 2l$ получим $72 = 3 + 3a$. Отсюда $a = 23$ и средняя линия трапеции $l = \dfrac{3+23}{2} = 13$.
Ответ: 13 (B).



37. (06-02-31) Диагональ равнобедренной трапеции равна $16\sqrt{3}$ и составляет с основанием угол 30^0. Найдите среднюю линию трапеции.
A) 12 B) 16 C) 20 D) 24

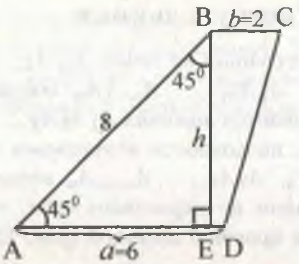
38. Какие из следующих утверждений для трапеции верны?
1) Средняя линия трапеции равна половине суммы ее оснований.
2) Диагонали равнобедренной трапеции равны.
3) Высота трапеции равна половине суммы ее оснований.
A) 1; 2; 3 B) 1; 2 C) 2; 3 D) 3

39. (96-3-48) Основания трапеции равны 6 и 2, одна боковая сторона равна 8, угол между этой боковой стороной и большим основанием 45^0. Найдите площадь трапеции.
A) $18\sqrt{2}$ B) $16\sqrt{2}$ C) $14\sqrt{2}$ D) $15\sqrt{2}$

Решение: Построим рисунок по условиям задачи. Из рисунка получим, что катеты прямоугольного треугольника ABE равны ($AE = BE = h$). По теореме Пифагора $h = 4\sqrt{2}$. Воспользовавшись формулой 5, $S = \dfrac{a+b}{2}h$ имеем

$$S = \frac{6+2}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}.$$

Ответ: $16\sqrt{2}$ (B).



40. (96-7-43) Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, ее тупой угол 135^0. Найдите площадь этой трапеции.
A) 60 B) 30 C) $10\sqrt{3}$ D) 136,5

41. (96-11-49) Основания трапеции равны 5 и 3, а одна боковая сторона 2 и составляет с большим основанием угол 45^0. Найдите площадь трапеции.
A) $4\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{2}$ D) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

42. (97-1-38) Основания равнобедренной трапеции равны 2,1 и 7,5, а диагональ равна 6. Найдите площадь трапеции.
A) 16,8 B) 14,5 C) 20,4 D) 17,28

43. (97-3-43) Основания равнобедренной трапеции равны 10 и 20, а угол при большем основании 60^0. Вычислить площадь трапеции.
A) $500\sqrt{3}$ B) $75\sqrt{3}$ C) $25\sqrt{3}$ D) $250\frac{\sqrt{3}}{3}$

44. (97-6-38) Основания равнобедренной трапеции равны 4,2 и 5,4, а угол при меньшем основании 135^0. Вычислить площадь трапеции.
A) 24,8 B) 9,6 C) 16,8 D) 2,88

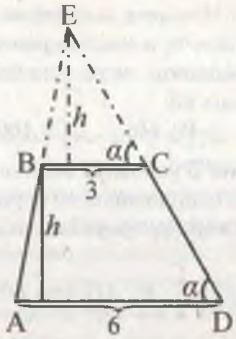
45. (97-10-43) Основания равнобедренной трапеции равны 12 и 16, а тупой угол 120^0. Вычислить площадь трапеции.
A) $56\sqrt{3}$ B) $\frac{56}{\sqrt{3}}$ C) $28\sqrt{3}$ D) 14

46. (98-9-49) Основания трапеции $ABCD$ равны $AD = 6, BC = 3$, а площадь 30. Ее боковые стороны продолжены до пересечения в точке E. Найдите площадь треугольника BEC.
A) 12 B) 10 C) 8 D) 15

Решение: Из параллельности $AD \| BC$ и $AD = 2BC$ следует, что $BC-$ средняя линия треугольника AED. Эта средняя линия делит высоту треугольника AED, опущенную из вершины E пополам (2- свойство 15.16.4). Поэтому высота h треугольника BEC (см. рисунок) равна высоте трапеции. Высота трапеции находится из формулы

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h \Longleftrightarrow 30 = \frac{6+3}{2} \cdot h \ .$$

Отсюда $h = \frac{20}{3}$. Итак, $S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{20}{3} = 10$.
Ответ: 10 (B).



47. (98-3-47) Диагонали трапеции с основаниями 8 и 12 взаимно перпендикулярны. Чему равна площадь трапеции?
A) 100 B) 64 C) 144 D) 52

48. (98-11-38) Чему равна средняя линия трапеции, если площадь трапеции равна 30, а высота 6?
A) 2,5 B) 5 C) 7,5 D) 4,5

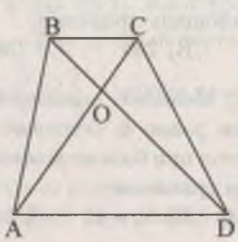
49. (99-2-47) Боковая сторона и меньшее основание трапеции равны 5, а высота 4. На сколько площадь трапеции больше 12?
A) 19 B) 22 C) 20 D) 18

50. (99-5-44) BC и AD основания трапеции; $O-$ точка пересечения диагоналей AC и BD. Площади треугольников BOC и AOD соответственно равны 4 и 9. Найдите площадь трапеции.
A) 16 B) 25 C) 26 D) 30

Решение: По 7- свойству

$$S_{AOB} = S_{COD} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6.$$

Площадь трапеции $S = S_{AOB} + S_{COD} + S_{AOD} + S_{BOC} = 6 + 6 + 9 + 4 = 25$. **Ответ:** 25 (B).



51. (00-2-38) Площадь трапеции равна 594, высота 22, а разность оснований равна 6. Найти длину большего основания трапеции.
A) 34 B) 32 C) 28 D) 30

52. (00-10-33) Средняя линия трапеции равна 3, высота равна 8. Вычислить ее площадь.
A) 24 B) 12 C) 16 D) 32

53. (01-2-44) Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 5, а ее диагональ делит среднюю линию на отрезки 3 и 7. Вычислить площадь трапеции.
A) 45 B) 40 C) 35 D) 30

54. (01-3-10) Меньшее основание трапеции ABCD равно $BC = 8$, а высота равна 10. Найти площадь трапеции, если площадь треугольника ACD равна 60.
A) 120 B) 140 C) 100 D) 180

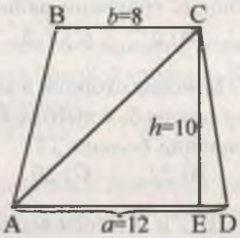
Решение: В условиях задачи высота треугольника ACD, опущенная из вершины C тоже равна 10. Площадь треугольника ACD равна

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AD \Longleftrightarrow 60 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot AD$$

отсюда получим $AD = 12$. Из формулы для площади трапеции следует

$$S = \frac{BC + AD}{2} h \Longleftrightarrow \frac{12 + 8}{2} \cdot 10 = 100.$$

Ответ: 100 (C).



55. (01-6-49) Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне. Высота, опущенная из вершины тупого угла равна 4 и делит основание в отношении 4 : 1. Найти площадь трапеции.
A) 30 B) 28 C) 32 D) 34

56. (01-11-46) Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Большее основание трапеции равно $18\sqrt{2}$, а меньшее основание $6\sqrt{2}$. Найти площадь трапеции.
A) 290 B) 296 C) 288 D) 286

57. (02-1-73) Меньшее основание прямоугольной трапеции равно b, большая боковая сторона $6\sqrt{2}$, а угол при большем основании 45^0. Найти площадь трапеции.
A) $3b + 6$ B) $6b + 12$ C) $6b + 18$ D) $b + 6$

58. Диагональ равнобедренной трапеции равна 8 и она составляет с большим основанием угол 60^0. Если площадь трапеции равна $16\sqrt{3}$, то найдите ее среднюю линию.
A) 4 B) 2,9 C) 2,8 D) $4\sqrt{2}$

15.5 Многоугольники

Фигура, состояшая из точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и отрезков A_1A_2, A_2A_3, $\ldots, A_{n-1}A_n$ соединяющих эти точки называется *ломаная* $A_1A_2A_3\ldots A_n$. Точки A_1, $A_2, \ldots$, A_n называются *вершинами* ломаной, а отрезки A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ *звеньями* ломаной. Если ломаная не пересекает себя, такая ломаная называется *простой ломаной* (рис. 15.41).

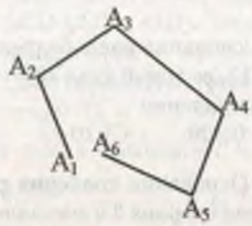


Рисунок 15.41

На рисунке 15.41 указана простая ломаная. Сумма длин всех звеньев ломаной называется *длиной* ломаной. Если начало и конец ломаной совпадают, то такая ломаная называется *замкнутой* (рис. 15.42). Простая замкнутая ломаная, соседние звенья которой не лежат на одной прямой называется *многоугольником* (рис. 15.42).

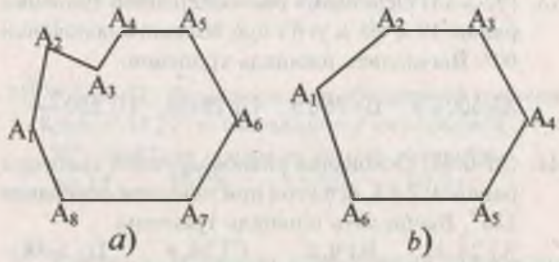


Рисунок 15.42

Вершины ломаной называются *вершинами многоугольника*, звенья ломаной *сторонами многоугольника*. Отрезки, соединяющие не смежные вершины называются *диагоналями многоугольника* (рис. 15.43). Многоугольник с n вершинами или с n сторонами называется *n угольником*.

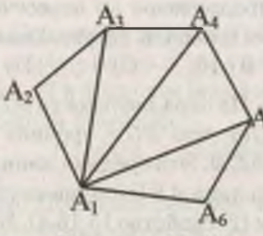


Рисунок 15.43

Часть плоскости, ограниченная многоугольником назывется *плоским многоугольником* или *многоугольной областью*. Если многоугольник лежит на одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону, то он называется *выпуклым многоугольником*. В этом случае прямая считается принадлежащей этой полуплоскости. На рисунке

15.42*b* приведен выпуклый многоугольник, на рисунке 15.42*a* - невыпуклый многоугольник. *Углом* при данной вершине многоугольника называется угол, образованный сторонами многоугольника при этой вершине.

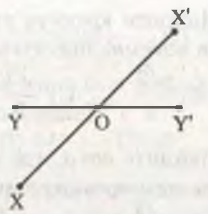


Рисунок 15.44

Далее приводим понятия симметрии относительно *точки и оси.* На плоскости дана точка O, а X произвольная точка плоскости. На продолжении отрезка OX (см. рис. 15.44) строим отрезок OX' равный отрезку OX. Точка X' называется *точкой симметричной* точке X относительно точки O. Симметричной O точкой является сама точка O. Очевидно точкой, симметричной X' является точка X.

Если при преобразовании фигуры F в фигуру F' произвольная точка X фигуры F переходит в точку X', симметричной относительно O, то это преобразование называется *симметричным преобразованием относительно точки O*. В этом случае фигуры F и F' называются *симметричными фигурами относительно точки O* (рис. 15.45*a*). Если симметричное преобразование относительно точки O переводит фигуру F на себя, то оно называется *центральным симметричным преобразованием* (рис. 15.45*b*). Точка O называется *центром симметрии*.

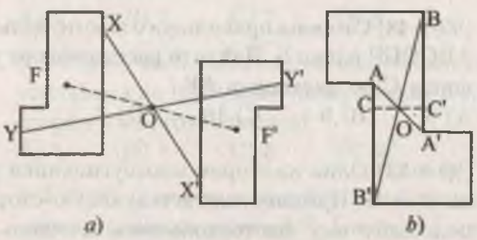


Рисунок 15.45

Пусть на плоскости дана прямая a и $X-$ произвольная точка плоскости. Из точки X к прямой a опустим перпендикуляр XO. На продолжении этого перпендикуляра (см. рис. 15.46*a*) отложим отрезок OX', равный отрезку OX. Точка X' называется *симметричной* точке X относительно прямой a (рис. 15.46*a*).

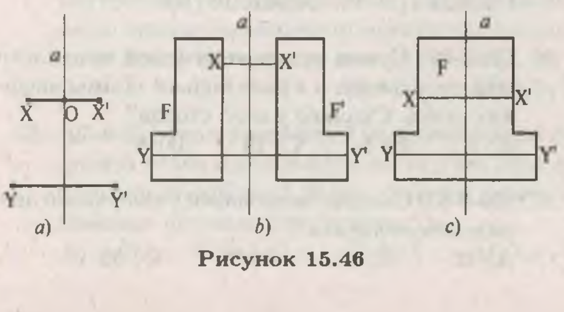


Рисунок 15.46

Если точка X лежит на прямой a, то симметричной ей точкой будет сама же точка. Очевидно, симметричной точке X' относительно прямой a, будет точка X.

Если при преобразовании фигуры F в фигуру F' каждая точка X фигуры F переходит в точку X' симметричной относительно прямой a, то такое преобразование называется *симметричным преобразованием относительно прямой* (рис. 15.46*b*). В этом случае фигуры F и F' называются *симметричными фигурами относительно прямой a*. Если при симметрии относительно прямой a фигура F переходит в себя, то такая фигура называется *симметричной относительно прямой a* (рис. 15.46), а прямая a называется *осью симметрии* (рис. 15.46).

1. **Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника равна $(n-2)\pi = 180^0(n-2)$.**

2. **Сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360^0.**

3. **Число диагоналей выпуклого многоугольника равно $\frac{(n-3)n}{2}$.**

1. (99-4-39) Сумма внутренних углов и одного внешнего угла выпуклого многоугольника $\frac{23\pi}{2}$. Сколько сторон у этого многоугольника?
   A) 10 B) 11 C) 13 D) 15

   Решение: Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника равна $(n-2)\pi$. Пусть внешний угол из условия задачи равен α. Тогда по условию $(n-2)\pi + \alpha = \frac{23}{2}\pi$. Это равенство делим на π и получим $n - 2 + \frac{\alpha}{\pi} = 11 + \frac{1}{2}$. Из $\alpha < \pi$ следует, что целая часть левой стороны равенства равна $n-2$, а дробная часть $\frac{\alpha}{\pi}$. Поэтому $n - 2 = 11$ и $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{2}$. Отсюда $n = 13$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
   Ответ: 13 (C).

2. (96-3-45) Сколько сторон у выпуклого многоугольника, каждый внутренний угол которого равен 150^0?
   A) 5 B) 7 C) 10 D) 12

3. (96-3-92) Сумма внешних углов треугольника, четырехугольника и пятиугольника соответственно равны α_3, α_4 и α_5. Какое из следуюших утверждений справедливо?
   A) $\alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5$ B) $\alpha_3 = \alpha_4 < \alpha_5$
   C) $\alpha_3 < \alpha_4 = \alpha_5$ D) $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5$

4. (96-6-39) Периметры двух подобных многоугольников относятся как 2 : 3. Найдите площадь меньшего многоугольника, если площадь большего многоугольника равна 27.
   A) 12 B) 18 C) 16 D) 14

5. (96-7-42) Найдите $\operatorname{ctg}\beta$, если $\beta-$ внутренний угол правильного восьмиугольника.
A) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ B) -1 C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D) $-\sqrt{3}$

6. (96-9-27) Сколько градусов составляет сумма внутренних углов выпуклого пятиугольника?
A) 900^0 B) 720^0 C) 540^0 D) 600^0

Решение: Из 1-свойства сумма внутренних углов выпуклого пятиугольника равна $(5-2)\cdot 180^0 = 540^0$. **Ответ:** 540^0 (C).

7. (96-9-93) Два угла выпуклого пятиугольника прямые, остальные относятся между сабой как $2:3:4$. Найдите больший угол пятиугольника.
A) 90^0 B) 120^0 C) 150^0 D) 160^0

8. Найдите сумму внутренних углов выпуклого шестиугольника.
A) 900^0 B) 720^0 C) 540^0 D) 600^0

9. Найдите сумму внутренних углов выпуклого восьмиугольника.
A) 900^0 B) 1080^0 C) 840^0 D) 1060^0

10. (96-11-46) Сколько сторон у многоугольника, каждый внутренний угол которого равен 135^0?
A) 5 B) 6 C) 8 D) 10

Решение: Пусть число сторон выпуклого многоугольника n. Из первого свойства следует $(n-2)\cdot 180^0 = n\cdot 135^0$. Решение этого линейного уравнения $n = 8$. Ответ: 8 (C).

11. (96-12-48) Сколько сторон у многоугольника, каждый внутренний угол которого равен 120^0?
A) 6 B) 8 C) 10 D) 12

12. (96-12-93) Сколько градусов составляет внешний угол правильного восьмиугольника?
A) 40^0 B) 60^0 C) 72^0 D) 45^0

13. (96-13-33) Чему равен внутренний угол правильного пятиугольника?
A) 135^0 B) 105^0 C) 102^0 D) 108^0

14. (97-3-42) Найдите $\sin\alpha$, где $\alpha-$ внутренний угол правильного двенадцатиугольника.
A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{1}{2}$

Решение: Из 1-свойства имеем $(12-2)\cdot 180^0 = 12\cdot\alpha$. Отсюда следует $\alpha = 150^0$. $\sin 150^0 = \frac{1}{2}$. Ответ: $\frac{1}{2}$ (D).

15. (97-4-52) Найдите синус внутреннего угла правильного восьмиугольника.
A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

16. (97-7-42) Найдите $\operatorname{tg}\beta$, где $\beta-$ внутренний угол правильного шестиугольника.
A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $-\sqrt{3}$ D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

17. (97-8-38) Площади двух подобных многоугольников относятся как $9:4$. Найдите периметр большего многоугольника, если периметр меньшего 4 см.
A) 9 B) 8 C) 6 D) 4

18. (97-9-112) Найдите косинус утроенного внутреннего угла восемнадцатиугольника.
A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) 0]

19. (97-10-42) Найдите $\cos\alpha$, где $\alpha-$ внутренний угол правильного восьмиугольника.
A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

20. (98-6-40) Чему равен внутренний угол правильного восьмиугольника?
A) 225^0 B) 120^0 C) 130^0 D) 135^0

21. (98-8-48) Сколько сторон у правильного многоугольника, каждый внешний угол которого равен 24^0?
A) 24 B) 18 C) 15 D) 12

22. (98-11-89) Сколько диагоналей у правильного восьмиугольника?
A) 8 B) 10 C) 24 D) 20

Решение: Из 3-свойства получим число диагоналей $\frac{8-3}{2}\cdot 8 = 20$. **Ответ:** 20(D).

23. (99-1-37) Сколько сторону у правильного многоугольника, если его внешний угол равен 36^0?
A) 10 B) 6 C) 8 D) 12

24. (99-2-48) Сторона правильного шестиугольника ABCDEF равна 6. Найдите расстояние от вершины C до диагонали AE.
A) 8 B) 9 C) 10 D) 7

25. (99-8-52) Одна из сторон многоугольника равна $a = 5$. Найдите соответсвующую сторону подобного ему многоугольника, площадь которого в 4 раза больше площади первого.
A) 20 B) 10 C) 12 D) 16

Решение: Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату отношений сторон. Итак,

$$\frac{S}{S_1} = \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \Longleftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{25}{a_1^2}.$$

Отсюда $a_1 = 10$. **Ответ:** 10 (B).

26. (00-3-81) Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника в 4 раза больше суммы внешних углов. Сколько у него сторон?
A) 5 B) 6 C) 10 D) 8

27. (00-5-62) Сколько диагоналей у выпуклого двенадцатиугольника?
A) 42 B) 36 C) 54 D) 52

28. (01-3-40) Найдите сумму внешних углов семиугольника взятых по одному в каждой вершине.
A) 5π B) 7π C) 2π D) $3,5\pi$

29. Найдите внутренний угол правильного девятиугольника.
A) 140^0 B) 135^0 C) 136^0 D) 110^0

30. (01-3-42) Сколько диагоналей у выпуклого двенадцатиугольника?
A) 24 B) 54 C) 36 D) 30

31. (01-3-43) Во сколько раз сумма внутренних углов выпуклого двенадцатиугольника больше суммы внутренних углов выпуклого шестиугольника?
A) 2 B) 3 C) 2,5 D) 4

32. (02-8-29) Найдите число диагоналей правильного $n-$ угольника, если его внутренний угол в 5 раз больше внешнего угла.
A) 54 B) 32 C) 36 D) 42

Решение: По 1- свойству внутренний угол правильного $n-$ угольника равен $\frac{n-2}{n}\cdot 180^0$. По 2- свойству внешний угол равен $\frac{360}{n}$. По условию задачи $\frac{n-2}{n}\cdot 180^0 = \frac{5\cdot 360}{n} \iff n-2=10$, отсюда получим $n=12$. Из 3- свойства число диагоналей равно $\frac{12-3}{2}\cdot 12 = 54$. **Ответ:** 54 (A).

33. (02-9-50) Число диагоналей многоугольника в 2,5 раза больше числа сторон. Сколько сторон у многоугольника?
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8

34. (02-11-60) Число диагоналей выпуклого многоугольника на 12 больше числа сторон. Сколько сторон у многоугольника?
A) 5 B) 6 C) 8 D) 9

35. (02-12-58) Один из внешних углов правильного многоугольника равен 30^0. Сколько сторон у многоугольника?
A) 15 B) 13 C) 14 D) 12

36. (03-1-47) Число диагоналей выпуклого n угольника не меньше 25 и не больше 30. Чему может равняться n?
A) 7 B) 8 C) 9 D) 10

37. (03-7-3) Сумма расстояний от произвольной внутренней точки правильного шестиугольника до прямых, на которых лежат стороны равна 9. Найдите периметр шестиугольника.
A) $5\sqrt{3}$ B) $4,5\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{3}$ D) $5,5\sqrt{3}$

38. (03-8-3) Сумма расстояний от произвольной внутренней точки правильного шестиугольника до прямых, на которых лежат стороны равна 9. Найдите площадь шестиугольника.
A) $5\sqrt{3}$ B) $4,5\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{3}$ D) $5,5\sqrt{3}$

15.6 Окружность и круг

Окружность. Множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки называется *окружностью* (рис. 15.47). Данная точка называется *центром* окружности. Расстояние от центра до точек окружности называется *радиусом* окружности. Отрезок, соединяюший точку окружности с центром тоже называется *радиусом* (рис. 15.47*a*). Отрезок, соединяющий две точки окружности называется *хордой*. Хорда проходящая через центр называется *диаметром*. На рис. 15.47*b* BC – хорда, AD – диаметр.

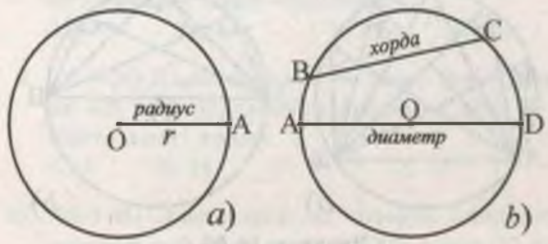


Рисунок 15.47

Прямая, проходящая через точку окружности и перпендикулярная радиусу, проведенному к этой точке называется *касательной* к окружности (рис. 15.48). Здесь точка окружности называется *точкой касания.*

Рисунок 15.48

Угол с вершиной в центре окружность и сторонами, состоящими из радиусов называется *центральным углом* (рис. 15.48). Часть окружности, лежащая внутри центрального угла называется *дугой* соответствующей центральному углу. *Градусной мерой дуги окружности* называется градусная мера соответствующего центрального угла. Угол с вершиной на окружности, сторонами, пересекающими окружность называется *вписанным углом окружности.* На рисунке 15.49*a* BAC- вписанный угол окружности. Его вершина A лежит на окружности, а стороны пересекают окружность в точках B и C. Здесь говорят, что угол A опирается на хорду BC.

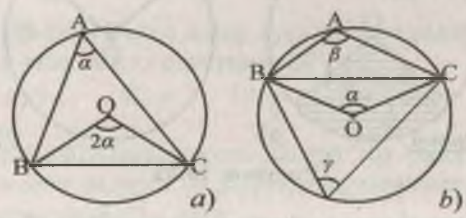


Рисунок 15.49

Прямая ВС делит окружность на две дуги. Центральный угол, соответствующий дуге, на которой не лежит точка А, называется центральным углом, соответствующим вписанному углу ВАС (рис. 15.49a). Вписанный угол равен половине соответвующего центрального угла (рис. 15.49a).

Вписанные углы, проходящие через точки окружности А и В, вершины которых лежат по одну сторону прямой АВ взаимно равны (рис. 15.50a). В частности, если АВ диаметр, то вписанные углы равны 90^0 (рис. 15.50b).

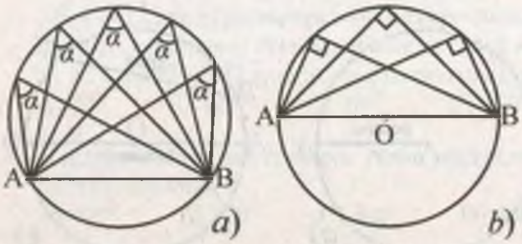


Рисунок 15.50

Если в плоскости введена система координат, то уравнение окружности с центром в точке $O(a;\ b)$ и радиусом R имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Круг. Множество точек плоскости, расположенных от данной точки на расстоянии, не превосходящим заданное расстояние называется *кругом* (рис. 15.51). Данная точка называется *центром* , а расстояние *радиусом круга.* Границей круга является окружность и их центры и радиусы совпадают.

Рисунок 15.51

Круговым сектором (рис. 15.52a) называется часть круга, лежащая внутри центрального угла. Общая часть круга и полуплоскости называется *круговым сегментом* (рис. 15.52b).

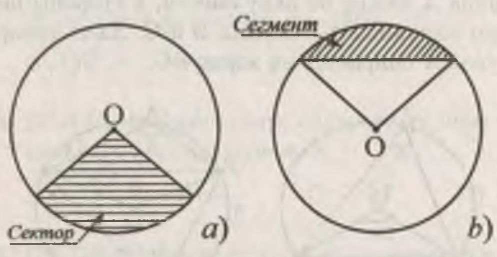


Рисунок 15.52

Справедливы следующие утверждения об элементах окружности и круга:

1. **Длина окружности радиуса R равна $L=2\pi R$.**

2. **Длина дуги, соответствующей центральному углу α окружности радиуса R равна $l=R\alpha$.**

3. **Вписанный угол окружности равен половине соответствующего центрального угла (рис. 15.49a).**

4. **Вписанные углы, опираюшиеся на одну хорду равны (рис. 15.50a) или дополняют друг друга до 180^0 (рис. 15.49b). $\beta+\gamma=180^0,\ \ \alpha=2\gamma$.**

5. **Если две хорды окружности АВ и CD пересекаются в точке S, тогда (рис. 15.53a):**

$$AS\cdot BS=CS\cdot DS.$$

6. **Если из точки Р проведены две прямые, пересекаюшие окружность в точках А, В и С, D, тогда справедливо равенство (рис. 15.53b):**

$$AP\cdot BP=CP\cdot DP.$$

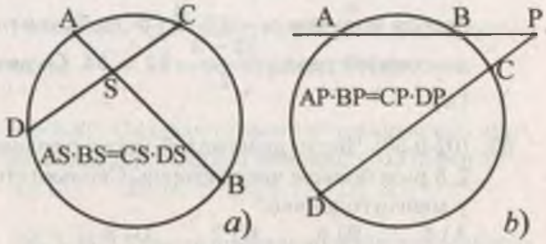


Рисунок 15.53

7. **Если через точку Р проведены касательная РА и секущая, пересекающая окружность в точках D и C, тогда справедливо равенство (рис. 15.54):**

$$AP^2=DP\cdot CP.$$

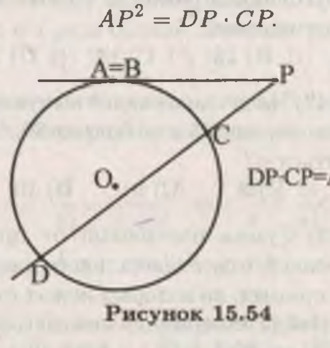


Рисунок 15.54

8. **Площадь круга радиуса R равна $S=\pi R^2$ (рис. 15.51).**

9. **Площадь сектора круга радиуса R с центральным углом α равна $S=\dfrac{1}{2}\alpha R^2$ (рис. 15.52a).**

10. Площадь сегмента круга радиуса R с центральным углом α равна $S = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$ (рис. 15.52b).

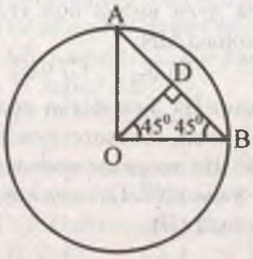
Касательная, хорда, радиус, диаметр

1. (97-9-105) Хорда AB стягивает дугу 90^0. Из центра окружности O к AB опущен перпендикуляр OD. Вычислить отношение $\frac{AB}{OD}$.
A) 3 B) 4 C) 2 D) 2,5

Решение: В условиях задачи получается прямоугольный равнобедренный треугольник OAB $(OA = OB)$. Поэтому OD является и перпендикуляром и медианой. Отсюда следует

$$\angle DOB = \angle OBD = 45^0.$$

Итак, $OD = DB = AD$. Отсюда имеем $\frac{AB}{OD} = 2$. **Ответ:** 2 (C).



2. (00-2-36) Длины хорд AB и AC, проведенных из точки окружности A соответственно равны 5 и 12. Если соединить их другие концы, получается треугольник с площадью 15. Найдите острый угол между хордами AB и AC.
A) 30^0 B) 15^0 C) 45^0 D) 60^0

3. (98-2-52) Через точку, отстояшей от центра окружности радиуса 5 на расстоянии 4 проведена хорда перпендикулярная диаметру. Найти длину этой хорды.
A) 8 B) 6 C) 7 D) 9

4. (99-8-53) На сколько см удалена хорда длиной 8 см от центра окружности радиуса 5?
A) 3 B) 4 C) 2,6 D) 2,8

5. (02-1-33) Один из углов, образованных двумя пересекаюшимися хордами окружности 80^0. Найти сумму углов, смежных с этим углом.
A) 100^0 B) 90^0 C) 200^0 D) 160^0

Длина окружности

6. (98-1-43) Если длина дуги окружности радиуса 5 равна длине окружности радиуса 2. Найдите центральный угол, соответствуюший этой дуге.
A) 120^0 B) 150^0 C) 144^0 D) 135^0

Решение: Пусть центральный угол, соответствуюший дуге окружности радиуса 5 равен α. По 2- утверждению длина этой дуги равна $l = \alpha \cdot 5$. А длина окружности радиуса 2 равна $2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$. По условию задачи длина дуги первой окружности и длина второй окружности равны, т.е. $5\alpha = 4\pi$. Отсюда $\alpha = \frac{4\pi}{5} = 144^0$.
Ответ: 144^0 (C).

7. (96-6-29) Хорда длиной $6\sqrt{3}$ стягивает дугу 120^0. Найдите длину окружности.
A) 12π B) 10π C) 13π D) 14π

8. (97-2-29) Хорда длиной $12\sqrt{2}$ стягивает дугу 90^0. Найдите длину окружности.
A) 24π B) 20π C) 22π D) 26π

9. (97-8-28) Длина окружности равна $18\pi\sqrt{2}$. Хорда AB этой окружности стягивает дугу 90^0. Найти длину хорды.
A) 8 B) 18 C) 16 D) 15

10. (96-3-46) Длина дуги, на которую опирается центральный угол равный 100^0, равна 10 см. Найдите радиус окружности $(\pi = 3)$?
A) 5 B) 6 C) 3 D) 2

11. (96-11-47) Длина дуги, на которую опирается центральный угол равный 90^0, равна 15 см. Чему равена радиус окружности?
A) $\frac{15}{\pi}$ B) $\frac{18}{\pi}$ C) $\frac{24}{\pi}$ D) $\frac{30}{\pi}$

12. (96-12-49) Длина дуги, на которую опирается центральный угол равный 60^0, равен 10 см. Чему равен радиус окружности?
A) $\frac{15}{\pi}$ B) $\frac{18}{\pi}$ C) $\frac{30}{\pi}$ D) $\frac{36}{\pi}$

Решение: Из 2- свойства получим $10 = R \cdot \frac{\pi}{3}$. Отсюда $R = \frac{30}{\pi}$. **Ответ:** $\frac{30}{\pi}$ (C).

13. (97-12-28) Длина окружности 30π. Чему равна длина дуги стягивающая угол 60^0?
A) 12π B) 6π C) 5π D) 3π

14. (98-8-43) Длина окружности равна длине дуги радиуса 4 с центральным углом 120^0. Найдите радиус окружности.
A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ C) $2\frac{2}{3}$ D) $1\frac{1}{3}$

15. (98-11-28) Найти длину дуги окружности радиуса 8, соответствующей углу $\frac{\pi}{8}$.
A) $\frac{\pi}{64}$ B) π C) 2π D) $\frac{\pi}{32}$

16. (99-8-56) Найти длину дуги сектора радиуса 5 и угла между радиусами 36^0.
A) 2π B) π C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{3}$

17. (99-8-57) Окружность длиной 10π разогнута в дугу радиуса 20. Найти получившийся центральный угол дуги.
A) 90^0 B) 60^0 C) 120^0 D) 75^0

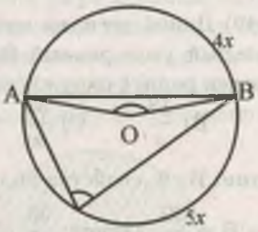
18. (00-10-24) Определить длину дуги окружности радиуса 32 равной $\frac{\pi}{16}$ радиану.
A) $0,5\pi$ B) π C) 2π D) 4π

19. (01-5-46) Длина окружности равна 8π. Найти радиус окружности длина которого равна длине ее дуги в 90^0.
A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) 3

Вписанные и центральные углы

20. (96-6-19) Хорда AB делит окружность на две дуги, которые относятся как 4:5. Под каким углом видна хорда AB из любой точки большей дуги?
A) 100^0 B) 95^0 C) 80^0 D) 85^0

Решение: Хорда AB делит окружность на две дуги. По условию задачи меньшая из них $\frac{360^0}{9}\cdot 4 = 160^0$, а большая $\frac{360^0}{9}\cdot 5 = 200^0$. Из рисунка видно, что центральный угол AOB равен 160^0. Из 3- свойства следует, что хорда AB видна из любой точки большей дуги под углом $160^0 : 2 = 80^0$. **Ответ:** 80^0 (C).



21. (97-2-19) Хорда AB окружности видна из любой точки одной из дуг, на которые делит хорда окружность под углом 80^0. Чему равны дуги с концами в точках A и B?
A) 160^0 и 200^0 B) 80^0 и 280^0
C) 100^0 и 260^0 D) 110^0 и 250^0

22. (97-5-42) Дуга, соответствующая центральному углу равна $\frac{1}{6}$ части окружности. Найти величину этого центрального угла.
A) 45^0 B) 60^0 C) 90^0 D) 30^0

23. (97-8-19) Хорда MN окружности стягивает дугу в 140^0. Под каким углом видна хорда MN из любой точки меньшей из дуг, на которые хорда делит окружность?
A) 270^0 B) 70^0 C) 100^0 D) 110^0

24. (97-9-42) Дуга, соответствующая центральному углу равна $\frac{2}{5}$ части окружности. Найти величину центрального угла.
A) 72^0 B) 144^0 C) 15^0 D) 216^0

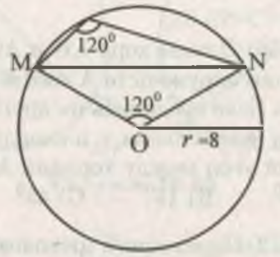
25. (97-12-18) Хорда стягивает дугу окружности в 140^0. Под каким углом видна эта хорда из любой точки большей дуги, на которые хорда делит окружность?
A) 110^0 B) 115^0 C) 120^0 D) 70^0

26. (98-7-44) Через концы хорды, равной радиусу, проведены касательные к окружности. Найдите углы, образующиеся при пересечений касательных и прямой, содержащей данную хорду.
A) 30^0, 150^0 B) 60^0, 120^0
C) 90^0, 90^0 D) 40^0, 140^0

27. (98-12-44) Через концы хорды, равной радиусу, проведены касательные к окружности. Найдите углы, образующиеся при пересечении этих касательных.
A) 120^0, 60^0 B) 90^0, 90^0
C) 100^0, 80^0 D) 140^0, 40^0

28. (99-9-39) Хорда MN делит окружность радиуса 8 на две неравные дуги. Она из любой точки меньшей дуги видна под углом 120^0. Найти длину хорды MN.
A) $8\sqrt{2}$ B) 8 C) $9\sqrt{3}$ D) $8\sqrt{3}$

Решение: Из 3-свойства получим, что центральный угол, соответствующей хорде MN равен 120^0. Из теоремы косинусов $MN^2 = 8^2 + 8^2 - 2\cdot 8\cdot 8\cos 120^0$. Отсюда следует $MN = 8\sqrt{3}$. **Ответ:** $8\sqrt{3}$ (D).



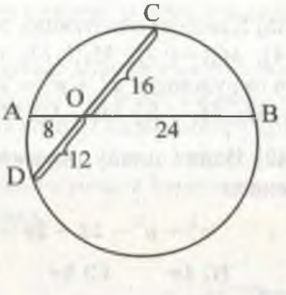
29. (96-3-93) Через точку B окружности проведены хорда равная радиусу и касательная. Найти угол между касательной и хордой.
A) 120^0 B) 150^0 C) 140^0 D) 135^0

30. (03-3-57) Через точку B окружности проведены хорда BA и диаметр BC. Хорда BA стягивает дугу в 46^0. Найти угол между проведенными хордой и диаметром.
A) 23^0 B) 30^0 C) 134^0 D) 67^0

Пересекающиеся хорды

31. (96-1-44) Одна из пересекающихся хорд равна 32 см, а вторая в точке пересечения делится на отрезки 12 см и 16 см. Найти отрезки первой хорды.
A) 12 и 20 B) 15 и 17
C) 24 и 8 D) 22 и 10

Решение: По 5-свойству $AO \cdot BO = 16 \cdot 12$. Если длина отрезка AO равна x, то $BO = 32 - x$.



Тогда получим уравнение $x(32 - x) = 16 \cdot 12$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 8$, $x_2 = 24$. Итак, отрезки первой хорды 24 и 8. **Ответ:** (C).

32. (98-10-84) Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Найдите DE, если $AE = 4$, $EB = 10$, $CE = 2$.
A) 15 B) 16 C) 18 D) 20

33. (99-3-47) На расстоянии 5 от центра круга радиуса 13 взята точка M. Через точку M проведена хорда AB длиной 25. На какие отрезки делит точка M хорду AB?
A) 15; 10 B) 16; 9 C) 18; 7 D) 13; 12

34. (99-8-49) Перпендикуляр, опущенный из точки окружности радиуса 6 на диаметр делит его в отношении 1 : 3. Найти длину перпендикуляра.
A) $3\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) 4 D) 3, 6

35. (98-3-37) Из точки B к окружности проведены касательная BA и секущая. Секущая пересекает окружность в точках C и D. Найдите AB, если $BD = 54$ и $BC = 24$.
A) 40 B) 32 C) 38 D) 36

Решение: По 6-свойству $BA^2 = BD \cdot BC$ или $BA^2 = 24 \cdot 54$. Отсюда получим $BA = 36$. **Ответ:** 36 (D).

36. (98-11-84) Из точки P, лежащей вне окружности проведена касательная PA. Отрезок соединяющий точку P и центр окружности O пересекает окружность в точке B. Если $PA = 4$, $PB = 2$, то найдите радиус окружности.
A) 3 B) 5 C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{2}$

37. (00-9-4) Ближайшее расстояние от точки вне окружности до нее равно 2, до точки касания 6. Найдите радиус окружности.
A) 12 B) 4 C) 10 D) 8

38. (01-11-48) Из точки, лежащей вне окружности проведены к ней касательная длиной 12 и наибольшая секущая длиной 24. Найдите наименьшее расстояние от точки до окружности.
A) 5 B) 7 C) 8 D) 6

39. (03-6-76) Из точки A к окружности с центром O проведена касательная AB. Найдите длину окружности, если AB=10 см, OA=26 см.
A) 36π B) 40π C) 46π D) 48π

Площадь круга

40. (98-11-31) Вычислить длину окружности круга с площадью $6,25\pi$.
A) 5π B) $2,25\pi$ C) $2,5\pi$ D) $5,25\pi$

Решение: Из условия задачи имеем $\pi R^2 = 6,25\pi$. Отсюда $R = 2,5$. Из формулы длины окружности $L = 2\pi R$ получим $L = 2\pi \cdot 2,5 = 5\pi$. **Ответ:** 5π (A).

41. (00-10-26) Вычислить длину окружности круга с площадью 9π.
A) $\frac{3\pi}{2}$ B) 3π C) 6π D) $\frac{4\pi}{3}$

42. (02-4-27) На сколько процентов уменьшится площадь круга, если его радиус уменьшить на 20%?
A) 25 B) 36 C) 45 D) 40

43. (98-7-53) Три одинаковые трубы с диаметрами по 50 заменены новую трубу пропускной способностью, равной сумме их пропускных способностей. Найдите диаметр новой трубы.
A) 85 B) 150 C) $50\sqrt{3}$ D) 75

44. (98-12-53) Две водопроводные трубы с диаметрами по 50 заменены на одну трубу с пропускной способностью равной сумме их пропускных способностей. Найдите диаметр большой трубы.
A) $50\sqrt{2}$ B) 100 C) $50\sqrt{3}$ D) 70

45. (99-6-34) Длина дуги AB окружности с центром O равна 6. Найдите площадь сектора OAB, если радиус окружности равен 4.
A) 12 B) 8 C) 10 D) 14

Решение: Центральный угол равен $\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{R} = 1,5$. По 9- формуле площадь сектора OAB равна $S = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 4^2 = 12$. **Ответ:** 12 (A).

46. (98-8-41) Хорда длиной m опирается на дугу в 90^0. Найдите площадь полученного сегмента.
A) $\frac{\pi m^2}{8}$ B) $\frac{m^2}{8}(\pi - 2)$
C) $\frac{(\pi - \sqrt{3})m^2}{4}$ D) $\frac{\pi m^2}{4}$

47. (98-1-41) Радиус круга равен r. Найти площадь сегмента соответствующего дуге в 90^0.
A) $\frac{\pi r^2}{8}$ B) $\frac{r^2}{2}(\pi - 2)$ C) $\frac{\pi r^2}{4}$ D) $\frac{r^2}{4}(\pi - 2)$

48. (01-8-43) Площадь круга радиуса 6 равна площади сектора с центральным углом 90^0. Найдите периметр сектора.
A) $2\pi+10$ B) $6(\pi+4)$
C) $3(\pi+8)$ D) $4\pi+15$

49. (01-11-49) Площадь сектора круга равна 72π. Найдите длину окружности круга, если дуга сектора равна 45^0.
A) 46π B) 40π C) 42π D) 48π

50. (03-2-50) Найдите площадь сектора с радиусом $\sqrt{13}$, радианная мера дуги которого равна 2.
A) 13 B) 26 C) 39 D) 52

Уравнение окружности

51. (96-3-96) Найдите радиус окружности, заданной уравнением $x^2+y^2+4x+6y-3=0$.
A) 3 B) 6 C) 4 D) 5

Решение: Заданное уравнение приводим к виду $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Для этого в уравнении производим следующие преобразования: $x^2+4x+4+y^2+6y+9=16$ или $(x+2)^2+(y+3)^2=4^2$. Из последнего уравнения имеем, что радиус окружности равен 4. **Ответ:** 4 (C).

52. (96-9-32) Найдите центр окружности, заданной уравнением $x^2+y^2+4x-6y-3=0$.
A) $(-2;3)$ B) $(2;-3)$ C) $(4;-3)$ D) $(-4;6)$

53. (96-12-96) Найдите центр окружности, заданной уравнением

$$x^2+y^2-4x+6y-3=0$$

A) $(-4;-3)$ B) $(4;-4)$ C) $(-4;6)$ D) $(2;-3)$

54. (96-13-37) Найдите радиус окружности, заданной уравнением.

$$x^2+y^2-4x-6y-3=0$$

A) 3 B) 5 C) 6 D) 4

55. (98-5-41) Укажите уравнение окружности с центром в точке (1;1) и проходящей через начало координат.
A) $x^2+y^2-2x-2y=1$
B) $x^2+y^2-x-2y=0$
C) $x^2+y^2-2x-y=0$
D) $x^2+y^2-2x-2y=0$

Решение: Расстояние от точки $A(1;1)$ до начала координат равно радиусу окружности:

$$AO=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}.$$

Тогда уравнение окружности с центром в точке $(1;1)$ и радиусом $R=\sqrt{2}$

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2 \iff x^2+y^2-2x-2y=0.$$

Ответ: $x^2+y^2-2x-2y=0$ (D).

56. (99-1-35) Какие из следующих точек: $M_1(1;2)$, $M_2(3;4)$, $M_3(-4;3)$, $M_4(0;5)$, и $M_5(5;-1)$ лежат на окружности $x^2+y^2=25$?
A) M_2,M_3,M_4 B) M_1 C) M_5 D) M_1,M_5

57. (99-4-42) Найти длину окружности заданной уравнением

$$x^2+y^2-2x-2y=0.$$

A) 2π B) 4π C) 8π D) $2\pi\sqrt{2}$

58. (99-7-40) Укажите уравнение окружности с радиусом равным 2 и с центром в точке (2; 3).
A) $x^2+y^2-4x-6y=0$
B) $x^2+y^2-6x-4y+6=0$
C) $x^2+y^2-4x-6y+9=0$
D) $x^2+y^2-6x-4y+10=0$

59. (00-8-22) Найдите расстояние от центра окружности $x^2+y^2-6x-8y+9=0$ до начала координат.
A) 5 B) 4 C) 3 D) 7

60. (01-5-41) Найдите длину хорды, полученной при пересечении прямой $y+x-5=0$ с окружностью $x^2+y^2=25$.
A) $5\sqrt{2}$ B) 5 C) $\sqrt{5}$ D) $2,5\sqrt{2}$

Решение: $\begin{cases} y+x=5 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ решение этой системы дает точки пересечения прямой с окружностью. Эта система решается методом подстановки ($x=5-y$) и её решением является точки: (5;0), (0;5). Теперь вычислим расстояние между этими точками: $\sqrt{(5-0)^2+(0-5)^2}=5\sqrt{2}$. **Ответ:** $5\sqrt{2}$ (A).

61. (02-3-48) В какой координатной четверти находится центр окружности $36x^2+36y^2+48x+36y-299=0$?
A) III B) I C) II D) IV

62. (02-10-77) Найдите расстояние от точки $M(3;-1)$ до окружности $x^2+2x+y^2-4y=11$.
A) 1 B) 0,5 C) 1,5 D) 2

63. (02-10-78) Составьте уравнение прямой, содержащей общую хорду окружностей: $x^2+y^2=25$ и $(x-8)^2+y^2=25$.
A) $x=4$ B) $y=3$
C) $y=x+1$ D) $y=3x-4$

64. (03-2-52) Найдите длину хорды, образованной при пересечении прямой $x+y=2$ с окружностью $x^2+y^2=10$.
A) 6 B) $4\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{3}$

65. (03-7-2) Найдите длину отрезка, полученного при пересечении окружности $x^2+y^2-5x-6y+4=0$ с осью ординат.
A) $\sqrt{3}$ B) 4 C) $2\sqrt{5}$ D) 5

66. (03-7-40) Найдите длину отрезка, полученного при пересечении окружности $x^2+y^2-5x-6y+4=0$ с осью абсцисс.
A) $\sqrt{3}$ B) 4 C) $2\sqrt{5}$ D) 3

15.7 Треугольник и окружность

В любой треугольник можно вписать окружность. Если окружность касается все сторон треугольника, (рис. 15.55*a*) то она называется окружностью, вписанной в трегольник. Центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения биссектрис этого треугольника.

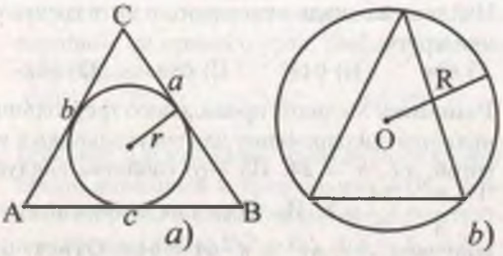


Рисунок 15.55

Около любого треугольника можно описать окружность. Окружность, проходящая через все вершины треугольника, называется окружностью, *описанной около треугольника* (рис. 15.55*b*). Центр описанной окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника.

1. **Если стороны треугольника равны:** a, b, c, **то радиус окружности, вписанной в треугольник равен:** $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$.

2. **В равнобедренном треугольнике с основанием, равным** a, **с боковыми сторонами, равными** b, **с высотой, опущенной к основанию, равной** h, **и с углами при основании, равными** α :

   a) $r = \dfrac{1}{2} a \cdot tg \dfrac{\alpha}{2}$;

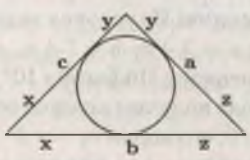
   b) $r = \dfrac{ah}{2b+a}$.

3. **Для любого треугольника верны следующие соотношения:**

   $x = \dfrac{b+c-a}{2}$,

   $y = \dfrac{a+c-b}{2}$,

   $z = \dfrac{a+b-c}{2}$.



4. **Радиус, вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен:** $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

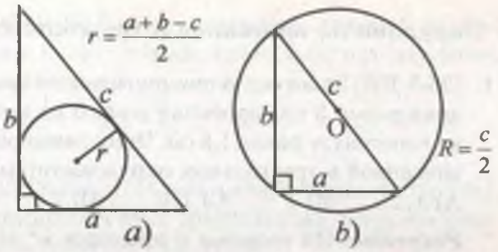


Рисунок 15.56

Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы. Поэтому: $R = \dfrac{c}{2}$.

5. **В правильном треугольнике со стороной равной** a: $r = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$, $R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, **Рисунок - 15.57.**

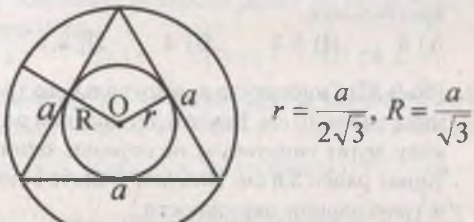


Рисунок 15.57

Если задана высота h **правильного треугольника, тогда:** $r = \dfrac{h}{3}$, $R = \dfrac{2h}{3}$.

6. **Если заданы одна сторона треугольника и противолежащий ей угол, то радиус описанной окружности** R **находится следующим образом:**

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}.$$

7. **Радиус окружности описанной около треугольника со сторонами** a, b, c: $R = \dfrac{abc}{4S}$.

8. **Если радиусы описанной около треугольника и вписанного в треугольник окружностей равны** R **и** r, **то расстояние** d **между центрами окружностей равно:** $d^2 = R^2 - 2rR$.

9. **В равнобедренном треугольнике с основанием** a **и высотой** h : $(\dfrac{a}{2})^2 + (h-R)^2 = R^2$.

10. **Центр описанной около остроугольного треугольника окружности лежит внутри треугольника.**

11. **Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы.**

12. **Центр описанной около тупоугольного треугольника окружности лежит вне треугольника.**

Окружность, вписанная в треугольник

1. (96-3-103) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 5 см, проекция одного из катетов на гипотенузу равна 1,8 см. Чему равен радиус вписанной в треугольник окружности(см)?
A) $1,2$ B) 1 C) $1,5$ D) 2

Решение: Из теоремы о проекции $a^2 = a_{pr}c$ следует $a^2 = 1,8 \cdot 5$, отсюда получаем $a = 3$. Второй катет b находится по теореме Пифагора, он равен 4. Из формулы для радиуса окружности вписанной в прямоугольный треугольник получаем: $r = \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{3+4-5}{2} = 1$.
Ответ: 1 (B).

2. (96-1-39) Высота правильного треугольника 9 см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.
A) 6 B) $4,5$ C) 3 D) $2,5$

3. (96-9-37) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см. Высота, опущенная на гипотенузу делит гипотенузу на отрезки, один из которых равен 3,6 см. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.
A) 3 B) $2,5$ C) 2 D) $1,5$

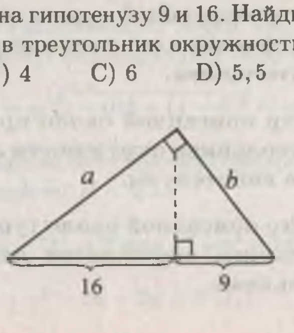
4. (96-9-90) Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна $4\sqrt{3}$, а угол при вершине равен 60^0.
A) $2\sqrt{3}$ B) 4 C) 2 D) $\sqrt{3}$

Решение: Из условия задачи можно сделать вывод, что треугольник равносторонний. Из 5-го свойства следует: $r = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 2$.
Ответ: 2 (C).

5. (96-12-107) Один из катетов прямоугольного треугольника равен 6 см, проекция этого катета на гипотенузу равна 3,6 см. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.
A) 3 B) $2,5$ C) 2 D) $2,4$

6. (00-2-40) Точка касания вписанной в прямоугольный треугольник окружности, делит гипотенузу на отрезки, равные 3 и 10. Найдите площадь треугольника.
A) 15 B) 12 C) 30 D) 21

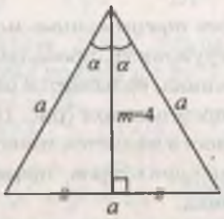
7. (98-3-42) Проекции катетов прямоугольного треугольника на гипотенузу 9 и 16. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.
A) 5 B) 4 C) 6 D) $5,5$



Решение: Пусть больший катет прямоугольного треугольника равен a, меньший катет равен b. Из условия задачи следует $c = a_{pr} + b_{pr} = 16 + 9 = 25$. Из теоремы о проекции следует $a^2 = 16 \cdot 25$, $b^2 = 9 \cdot 25$. Отсюда: $a = 20$, $b = 15$. Радиус вписанной в треугольник окружности $r = \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{20+15-25}{2} = 5$. **Ответ:** 5 (A).

8. Медиана правильного треугольника равна 24. Найдите площадь вписанного в этот треугольник круга.
A) 60π B) 64π C) 68π D) 56π

Решение: Медиана правильного треугольника является одновременно для треугольника и высотой, т.е. $h = 24$. Из 5-го свойства следует: $r = \dfrac{h}{3} = \dfrac{24}{3} = 8$. Из формулы площади круга получаем: $S = \pi r^2 = \pi \cdot 64 = 64\pi$. **Ответ:** 64π (B).



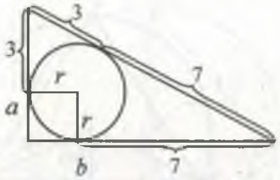
9. (00-3-75) Круг, с радиусом равным 4 вписан в прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 26. Найдите периметр треугольника.
A) 60 B) 64 C) 52 D) 56

10. (01-1-56) Центр вписанной в равнобедренный треугольник окружности, делит ее высоту, опущенную на основание, на отрезки 5 и 3, считая от вершины триугольника Найти основание треугольника.
A) 8 B) 9 C) 10 D) 12

11. (01-2-41) Найдите радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности, катеты которого равны 40 и 30.
A) 10 B) 7 C) $6,5$ D) $7,5$

12. (02-3-54) Вписанная в прямоугольный треугольник окружность в точке касания с гипотенузой делит ее на отрезки 7 и 3. Найдите площадь треугольника.
A)21 B) 24 C) 18 D) $10,5$

Решение: Из условия задачи и 3-свойства найдем: $a = 3 + r$, $b = 7 + r$, $c = 10$ (см.рисунок). Из теоремы Пифагора $10^2 = (3+r)^2 + (7+r)^2$, отсюда получим квадратное уравнение $r^2 + 10r - 21 = 0$, его корни $r_1 = -5 - \sqrt{46}$, $r_2 = -5 + \sqrt{46}$. Из условия для радиуса $r > 0$ получаем $r = \sqrt{46} - 5$. Площадь прямоугольного треугольника $S = \dfrac{1}{2}ab = \dfrac{1}{2}(3+r)(7+r) =$
$= \dfrac{1}{2}(\sqrt{46} - 2)(\sqrt{46} + 2) = 21$. **Ответ:** 21 (A).



13. (02-10-74) Вписанная в прямоугольный треугольник окружность, в точке касания делит один из катетов, на отрезки равные 6 и 10 считая вершины от прямого угла. Найдите периметр треугольника.
A)80 B) 74 C) 82 D) 75

14. (02-3-63) Касательная, проведенная к окружности, вписанной в треугольник ABC, пересекает стороны BC и AC в точках A_1 и B_1 соответственно. Если $BC = 5$, $AC = 6$, $AB = 7$, то найдите периметр треугольника $A_1\ B_1\ C$.
A)4 B) 5 C) 3 D) 6

15. (03-7-85) Центр вписанного в равнобедренный треугольник круга делит ее высоту в отношении 17:15. Основание треугольника равно 60. Найдите площадь этого круга.
A) $56,25\pi$ B) $22,5\pi$ C) 900π D) 15π

16. (03-11-39) Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности.
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8

17. (03-12-37) Вписанная В треугольник ABC ($AB = BC = 15$) окружность касается ее боковых сторон на расстоянии 5, считая от вершины B. Найдите площадь треугольника.
A) $50\sqrt{2}$ B) $25\sqrt{2}$ C) $50\sqrt{5}$ D) $20\sqrt{5}$

Окружность, описанная около треугольника

18. (97-7-39) Два угла треугольника равны 45^0 и 75^0, средняя по длине сторона равна $3\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.
A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ C) 3 D) $\sqrt{6}$

Решение. Найдем третий угол треугольника. $\alpha = 180^0 - (45^0 + 75^0) = 60^0$. В треугольнике напротив большего угла лежит большая сторона, напротив меньшего угла лежит меньшая сторона. Поэтому напротив среднего угла 60^0 лежит сторона $3\sqrt{3}$. Из свойства 6 следует:

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{2\cdot\sin 60^0} = \frac{3\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3.$$

Ответ: 3 (C).

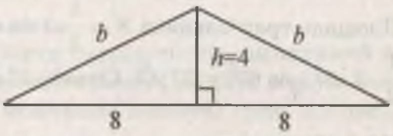
19. (96-10-42) Радиус окружности равен 10 см. Найдите длину медианы правильного треугольника, вписанного в окружность.
A) 12 B) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ C) 15 D) 18

20. (96-12-108) Найдите радиус окружности (см), описанной около треугольника, стороны которого равны 8; 15 и 17 см.
A) 8,5 B) 9 C) 8 D) 9,5

21. (96-7-39) Два угла треугольника равны 25^0 и 65^0, а его большая сторона $4\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.
A) 4 B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{2}$

22. (96-13-46) Найдите радиус окружности (см), описанной около равнобедренного треугольника, основание которого равно 16 см, а высота равна 4 см.
A) 10 B) 11 C) 12 D) 10,5

Решение: Из условия задачи получаем что, боковая сторона $b^2 = 4^2 + 8^2 = 80$, т.е. $b = 4\sqrt{5}$. Площадь заданного треугольника $S = \frac{1}{2}ah = 32$. Радиус описанной окружности $R = \frac{abc}{4S} = \frac{16\cdot4\sqrt{5}\cdot4\sqrt{5}}{4\cdot32} = 10$. **Ответ:** 10 (A).



23. (97-1-71) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, одна из сторон которого равна 10, а прилежащие к ней углы равны 105^0 и 45^0.
A) 5 B) 10 C) 15 D) 20

24. (97-3-39) В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 3, угол при вершине равен 120^0. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
A) 1,5 B) $2\sqrt{3}$ C) 3 D) $0,5\sqrt{3}$

25. (97-6-75) Одна из сторон треугольника равна 17, а прилежащие к ней углы равны 103^0 и 47^0. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.
A) 8,5 B) $8,5\sqrt{3}$ C) $17\sqrt{2}$ D) 17

26. (97-7-62) Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной 81.
A) $27\sqrt{3}$ B) $28\sqrt{3}$ C) $23\sqrt{3}$ D) $24\sqrt{3}$

Решение: Из свойства 5 следует $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{81}{\sqrt{3}} = 27\sqrt{3}$. **Ответ:** $27\sqrt{3}$ (A).

27. (97-9-55) Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной 8.
A) $25\sqrt{3}$ B) $28\sqrt{3}$ C) $26\sqrt{3}$ D) $42\sqrt{3}$

28. (97-9-113) Площадь прямоугольного равнобедренного треугольника равна 8. Найти длину окружности, описанной около этого треугольника
A) 4π B) $3\sqrt{2}\pi$ C) $4\sqrt{2}\pi$ D) 3π

29. (97-10-39) Меньшая сторона треугольника равна $2\sqrt{2}$, а два его угла равны 75^0 и 60^0. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.
A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

30. (98-8-36) В треугольнике ABC сторона AB равна 5, высота BD равна 4. Найдите длину стороны BC, если радиус окружности, описанной около этого треугольника равен 5.
A) 4,5 B) 8 C) 6 D) 10

31. (98-10-93) Радиус окружности равен 6. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в эту окружность.
A) 27 B) $27\sqrt{2}$ C) $27\sqrt{3}$ D) $18\sqrt{5}$

Решение: Из свойства 5, $a = \sqrt{3}R = \sqrt{3}\cdot 6$. Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\alpha = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 6^2\cdot\sin 60^0 = 27\sqrt{3}$. **Ответ:** $27\sqrt{3}$ (C).

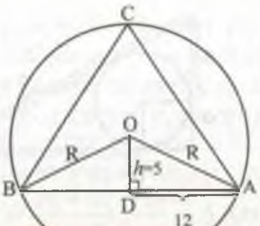
32. (99-3-45) Один из катетов прямоугольного треугольника равен 6, а противолежащий ему угол равен $\dfrac{\pi}{6}$. Найдите площадь круга, описанного около этого треугольника.
A) 6π B) 9π C) 36π D) 144π

33. (99-8-54) Основание равнобедренного треугольника равно 12, высота равна 3. Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника.
A) 17 B) 18 C) 14 D) 15

34. (00-5-53) Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, катеты которого равны 20 и 21.
A) 7,25 B) 14,5 C) 10 D) 20,5

35. (01-5-34) Треугольник ABC вписан в окружность. $AB = 24$ и расстояние от этой стороны до центра окружности равно 5. Найдите радиус окружности.
A) 13 B) 12 C) 10 D) 9

Решение: Из условия задачи $OD = 5$ (O центр окружности, D основание перпендикуляра), отсюда $DA = 12$. Из теоремы Пифагора $R^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Значит, $R = 13$. **Ответ:** 13 (A).



36. (1-9-24) Углы треугольника относятся как 2:3:7, длина меньшей стороны равна a. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
A) a B) $2a$ C) $a\sqrt{2}$ D) $0,5a$

37. (01-11-44) Внешний угол при вершине C треугольника ABC равен 90^0, внешний угол при вершине A равен 150^0. Найдите диаметр окружности описанной около этого треугольника. Если его меньшая сторона равна 12,5.
A) 24 B) 26 C) 20 D) 25

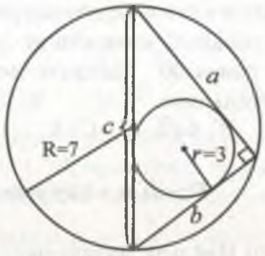
38. (02-4-46) Радиус окружности, описанной около треугольника равен 1, а один из углов равен 150^0. Найдите длину большей стороны треугольника.
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

39. (02-4-47) Угол при вершине A треугольника ABC равен 45^0, длина стороны BC равна $\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

40. В треугольнике ABC стороны a и b равны соответственно 8 и 10, а угол между ними равен 60^0. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
A) $4\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{7}$ D) $\sqrt{23}$

41. (03-1-39) Площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника равна 49π, а площадь круга, вписанного в этот треугольник равна 9π. Найдите площадь этого треугольника.
A) 49 B) 52 C) 43 D) 51

Решение: Из условия задачи следует, $R = 7$, $r = 3$. Из свойства 4, $c = 2R = 14$. Радиус вписанной окружности $r = \dfrac{a+b-c}{2} \iff 3 = \dfrac{a+b-14}{2}$, отсюда получаем $a + b = 20$. Теперь воспользуемся формулой $S = \dfrac{a+b+c}{2}r$. Имеем: $S = \dfrac{20+14}{2}\cdot 3 = 51$. **Ответ:** 51 (D).



42. (03-2-12) В круг с радиусом 5 вписан прямоугольный треугольник. Радиус окружности, вписанной в этот треугольник равен 1. Найдите площадь треугольника.
A) 12 B) $8\sqrt{2}$ C) 11 D) 22

43. (3-10-52) Длина окружности, описанной около треугольника, равна 7π. Найдите медиану, опущенную из большего угла этого треугольника, если большая сторона треугольника равна диаметру окружности.
A) $2,5$ B) 3 C) $3,5$ D) 4

44. (03-11-32) Стороны треугольника равны $5, 7$ и 8. Найдите площадь круга, описанного около этого треугольника.
A) $16\frac{1}{3}\pi$ B) $18\frac{2}{3}\pi$ C) 17π D) $15\frac{2}{3}\pi$

45. (03-12-30) Одна из сторон треугольника является диаметром окружности описанной около этого треугольника. Меньшая высота треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, равные 9 и 16. Найдите длину меньшей стороны треугольника.
A) 20 B) 15 C) 10 D) 12

15.8 Четырехугольник и окружность

Четырехугольник, все вершины которого лежат на окружности называется *вписанным в окружность*, а окружность называется *описанной около* четырехугольника. *Около некоторых выпуклых четырехугольников можно описать окружность, а около некоторых нельзя.* Проясним этот вопрос. Если сумма противолежащих углов четырехугольника равна 180^0, то около этого четырехугольника можно описать окружность (рис. 15.58a). Обратно, если около выпуклого четырехугольника описать окружность, то сумма противолежащих углов четырехугольника равна 180^0. Следовательно, если сумма противолежащих углов четырехугольника не равна 180^0, то около четырехугольника нельзя описать окружность.

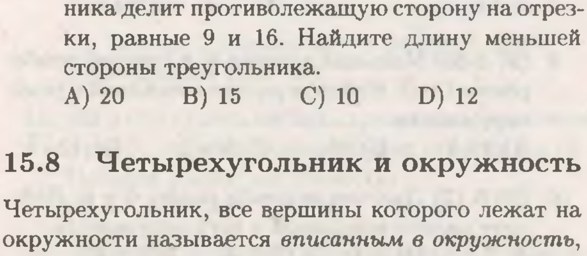


Рис. 15.58

Четырехугольник, все стороны которого касаются окружности, называется *описанным около окружности четырехугольником.* В этом случае окружность называется *вписанной* в четырехугольник. В некоторые выпуклые четырехугольникам можно вписать окружность, а в некоторые нельзя. Когда в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность? Ответим на этот вопрос следующим образом. Если суммы противолежащих сторон выпуклого четырехугольника равны (рис. 15.58b), то в него можно вписать окружность. Обратно, если в выпуклый четырехугольник вписана окружность, то суммы противолежащих сторон четырехугольника равны. Следовательно, если суммы противолежащих сторон четырехугольника не равны, то в него нельзя вписать окружность.

Радиус окружности, описанной около четырехугольника обозначим через R, а радиус окружности, вписанной в четырехугольник обозначим через r.

1. **В квадрате со стороной a, с диагональю d: $r = \frac{a}{2}$, $R = \frac{d}{2}$.**

2. **Диаметр окружности, описанной около прямоугольника равен его диагонали, а радиус равен половине диагонали прямоугольника. (рис. 15.59b), т.е. $R = \frac{d}{2}$.**

3. **Диаметр окружности, вписанной в ромб равен его высоте, радиус окружности равен половине высоты (рис. 15.59a), т.е. $d = h$, $r = \frac{h}{2}$.**

4. **Трапеция, вписанная в окружность, имеет равные боковые стороны.**

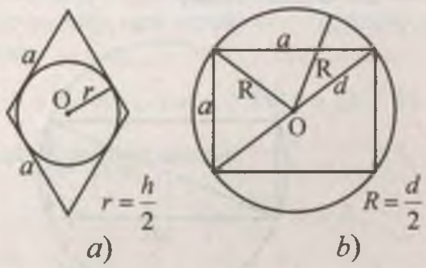


Рисунок 15.59

5. **Высота трапеции h, описанной около окружности с радиусом r равна ее диаметру, т.е. $h = 2r$.**

6. **Боковая сторона равнобедренной трапеции описанной около окружности равна средней линии, т.е. $c = l = \frac{a+b}{2}$.**

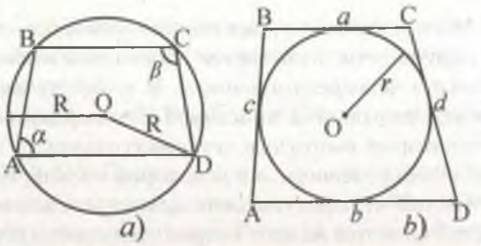


Рисунок 15.60

Прямоугольник и окружность

1. (98-5-36) Площадь квадрата равна 25. Вычислите площадь вписанного в него круга.
A) 6π B) $6,25\pi$ C) $\frac{5\sqrt{2}}{2}\pi$ D) $6,16\pi$

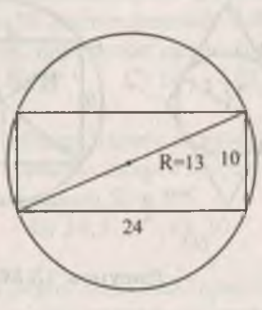
Решение: Из условия задачи $S = 25$ получаем $a = 5$. Из 1-го утверждения радиус вписанного круга будет равен $r = \frac{a}{2} = \frac{5}{2}$. По формуле площадь круга $S = \pi r^2$ получаем $S = \frac{25\pi}{4} = 6,25\pi$. **Ответ:** $6,25\pi$ (B).

2. (96-1-48) В квадрат с диагональю $2\sqrt{2}$ см вписана окружность. Найдите длину этой окружности.
A) 2π B) 4π C) $\pi\sqrt{2}$ D) 8π

3. (03-4-49) Сторона квадрата равна 20. Найдите площадь фигуры, заключенной между описанной и вписанной в нее окружностями.
A) 96π B) 110π C) 100π D) 108π

4. (97-11-31) Одна из сторон прямоугольника, вписанного в круг с площадью 169π, равна 24. Найдите вторую сторону прямоугольника.
A) 7 B) 10 C) 5 D) 12

Решение: Площади круга равна $S = 169\pi$, отсюда получаем $R = 13$, из 2-ой формулы имеем $d = 2R = 26$. Из теоремы Пифагора $d^2 = a^2 + b^2$ получаем $26^2 = 24^2 + b^2$. Отсюда $b = 10$. **Ответ:** 10 (B).



5. (97-1-31) В круг вписан прямоугольник, стороны которого равны 12 и 16. Найдите площадь круга.
A) 200π B) 100π C) 400π D) 120π

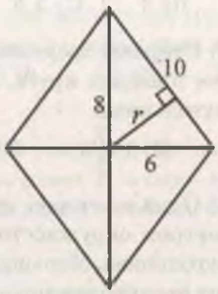
6. (97-6-31) В окружность вписан прямоугольник, стороны которого равны 32 и 24. Найдите длину окружности.
A) 40π B) 20π C) 80π D) 48π

7. (99-8-55) В круг с радиусом, равным 6, вписан прямоугольник, угол между диагоналями которого равен 60^0. Найдите меньшую сторону прямоугольника.
A) 6 B) $6\sqrt{3}$ C) 3 D) 4

Ромб и окружность

8. (00-6-40) Найдите радиус окружности вписанной в ромб, диагонали которого равны 12 и 16.
A) 9, 6 B) 8 C) 6 D) 4, 8

Решение: Из тождества параллелограмма $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ имеем $12^2 + 16^2 = 4a^2$. Отсюда $a = 10$. Из формулы площади ромба $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$ получаем $S = \frac{1}{2}12 \cdot 16 = 96$. С другой стороны верно равенство $S = ah$. Так как $S = 96$, $a = 10$ то $96 = 10h \iff h = 9,6$. Из 3-свойства $r = h : 2$ получаем $r = 4,8$. **Ответ:** $4,8$ (D).



9. (97-2-30) Меньшая диагональ и сторона ромба равны $18\sqrt{3}$. Найдите радиус вписанной в ромб окружности.
A) 13, 5 B) 27 C) $36\sqrt{2}$ D) $12\sqrt{3}$

10. (99-6-17) Диагонали ромба равны 6 и 8. Найдите радиус вписанной в него окружности.
A) 2 B) 1, 4 C) 0, 4 D) 2, 4

11. (96-13-47) Радиус окружности, вписанной в ромб со стороной 6 см, равен 1 см. Найдите синус острого угла ромба.
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{5}$

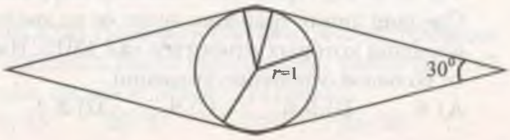
Решение: Приравнивая $S = a^2 \sin\alpha$ и $S = 2ar$, $6^2 \sin\alpha = 2 \cdot 6 \cdot 1$ получаем $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.
Ответ: $\frac{1}{3}$ (C).

12. (96-3-105) Радиус окружности, вписанной в ромб со стороной 4 см, равен 1 см. Найдите синус острого угла ромба.
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{2}$

13. (96-9-40) Радиус окружности, вписанной в ромб со стороной 4 см, равен 1 см. Найдите косинус острого угла ромба.
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. (96-9-101) Длина окружности, вписанной в ромб с острым углом 30^0, равна 2π. Найдите периметр ромба.
A) 2 B) 10 C) 8 D) 16

Решение: Длина окружности равна $2\pi r = 2\pi$ отсюда $r = 1$. Приравнивая выражения для площади ромба $S = a^2 \sin 30^0$ и $S = 2ar$, имеем $\frac{1}{2}a^2 = 2a$ отсюда $a = 4$, $P = 4a = 16$. **Ответ:** 16 (D).



15. (96-12-109) Радиус окружности, вписанной в ромб со стороной 6 см, равен 1 см. Найдите косинус острого угла ромба.
A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. (97-9-109) Параллелограмм, одна из сторон которого равна 6, описан около окружности. Найдите вторую сторону параллелограмма.
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7

17. (98-9-48) Найдите площадь круга, вписанного в ромб, высота которого равна 28.
A) 198π B) 190π C) 192π D) 196π

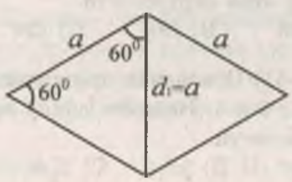
Решение: Из 3-формулы $r = \frac{h}{2}$ получаем $r = 14$. Значит, площадь круга равна $S = \pi r^2 = 196\pi$. **Ответ:** 196π (D).

18. (98-11-85) Точка касания кружности, вписанной в ромб, делит сторону ромба на отрезки 2 и 18. Найдите радиус окружности.
A) 9 B) 10 C) 4 D) 6

19. (99-8-50) Около окружности радиуса 5, описан ромб, острый угол которого равен 30^0. Найдите площадь ромба.
A) 100 B) 240 C) 200 D) 250

20. (02-3-62) В ромб, меньшая диагональ которого равна стороне ромба, вписан круг. Найдите площадь этого круга, если сторона ромба равна 4.
A) 3π B) 4π C) 9π D) $\frac{9\pi}{2}$

Решение: Из условия задачи $d_1 = a = 4$ следует, что острый угол ромба 60^0. Приравнивая $S = a^2 \sin\alpha$ и $S = 2ar$ имеем, $r = \frac{a}{2}\sin 60^0$, отсюда получаем $r = \sqrt{3}$. Площадь круга $S = \pi r^2 = 3\pi$. **Ответ:** 3π (A).



21. (02-5-49) Найдите диаметр окружности, вписанной в ромб, со стороной 16 и острым углом 30^0.
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9

22. (02-11-59) Радиус окружности, вписанной в ромб, тупой угол которого равен 150^0, равен 3. Найдите площадь ромба.
A) 28 B) 72 C) 18 D) 36

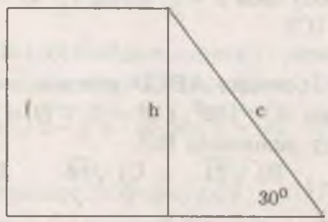
23. (03-2-13) Радиус окружности, вписанной в ромб равен 6. Найдите тупой угол ромба,если периметр ромба равен 96.
A) 150^0 B) 120^0 C) 135^0 D) 110^0

24. (03-2-51) Площадь круга, вписанного в параллелограмм с тупым углом 135^0, равна 9π. Найдите периметр параллелограмма.
A) 24 B) $18\sqrt{2}$ C) 32 D) $24\sqrt{2}$

Трапеция и окружность

25. (99-9-37) Прямоугольная трапеция с острым углом 30^0, описана около окружности диаметр которой равен 8. Найдите площадь трапеции.
A) 106 B) 98 C) 96 D) 104

Решение: Из свойства 3 получаем $h = 8$. Найдем большую боковую сторону трапеции c.



Из свойства 5 – пункта 15.16.2 гипотенуза равна удвоенному значению длины катета напротив, угла 30^0 (см рисунок) т.е. $c = 2h = 16$. Из равенства сумм противолежащих сторон четырехугольника, описанной около окружности получаем

$$a + b = 8 + c \Longleftrightarrow a + b = 8 + 16 = 24.$$

Тогда площадь трапеции

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{24}{2} \cdot 8 = 96.$$

Ответ: 96 (C).

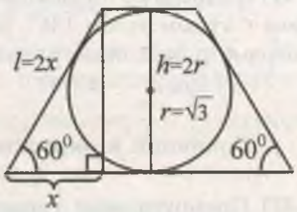
26. (97-1-68) Радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с углом при основании 60^0, равен $\sqrt{3}$. Найдите площадь трапеции.
A) $8\sqrt{3}$ B) 3 C) 10 D) $\frac{3}{2}$

27. (97-4-49) Равнобедренная трапеция, описанная около окружности, имеет среднюю линию равную 5. Найдите боковую сторону трапеции.
A) 4 B) 6 C) 7 D) 5

28. (00-8-50) Равнобедренная трапеция имеет основания 20 и 12, а центр окружности, описанной около трапеции, лежит на большем основании. Найдите диагональ трапеции.
A) $8\sqrt{5}$ B) $4\sqrt{5}$ C) $6\sqrt{5}$ D) 16

29. (97-6-72) Около окружности с радиусом $\sqrt{3}$ описана равнобедренная трапеция с острым углом 60^0. Найдите среднюю линию трапеции.
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

Решение: Равнобедренная трапеция, описанная около окружности, имеет среднюю линию, равную боковой строне трапеции.



По теореме Пифагора (см. рисунок)

$$4x^2 = h^2 + x^2 \iff 4x^2 - x^2 = 4\cdot 3.$$

Отсюда получаем $x = 2$, тогда $l = 4$.
Ответ: 4 (C).

30. (97-6-74) Трапеция ABCD вписана в окружность. Угол $A = 120^0$, $CB = 3$, $CD = 7$. Найдите длину диагонали BD.
A) $11\sqrt{2}$ B) $\sqrt{21}$ C) $\sqrt{58}$ D) $\sqrt{37}$

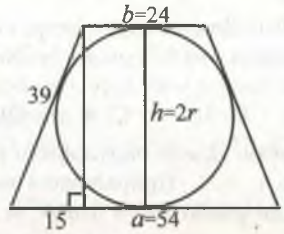
31. (98-3-40) Равнобедренная трапеция, описанная около окружности имеет основания 54 и 24 см. Чему равна высота трапеции (см)?
A) 42 B) 40 C) 32 D) 36

32. (98-4-7) Основания равнобедренной трапеции, вписанной около окружность равны 4 и 16. Найдите площадь круга вписанного в трапецию.
A) 20π B) 25π C) 36π D) 16π

33. (98-10-26) Периметр равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равен 44. Чему равна площадь трапеции, если радиус круга равна 5?
A) 200 B) 120 C) 220 D) 110

34. (98-10-87) Основании равнобедренной трапеции, описанной около окружности равны 54 и 24. Чему равен радиус окружности (см)?
A) 15 B) 16 C) 17 D) 18

Решение: В силу 6-свойства боковая сторона трапеции $l = \dfrac{24+54}{2} = 39$. По теореме Пифагора $h^2 = 39^2 - 15^2 = 24\cdot 54 = 36^2$. Отсюда $h = 36$, следовательно, $r = 18$. **Ответ:** 18 (D).



35. (09-13-24) Боковые стороны трапеции равны 5 и 9. В эту трапецию вписана окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, площади которых относятся как 13:15. Найдите большее основание трапеции.
A) 8 B) 9,5 C) 9 D) 8,5

36. (09-05-19) Боковые стороны трапеции равны 3 и 5. В эту трапецию вписана окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, площади которых относятся как 7:9. Найдите большое основание трапеции.
A) 4,5 B) 5 C) 5,75 D) 5,5

37. (99-5-45) В равнобедренную трапецию с углом 60^0, большим основанием 10, вписана окружность. Найдите расстояние от вершины меньшего основания до центра окружности.
A) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ C) $3\dfrac{2}{5}$ D) $3\dfrac{1}{3}$

38. (99-8-48) Основания равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равны 18 и 8. Найдите диаметр окружности.
A) 14 B) 10 C) 12 D) 11

39. (99-10-48) Периметр равнобедренной трапеции, описанной около круга радиуса 4, равен 40. Найдите меньшее основание трапеции.
A) 3 B) 4 C) 5 D) 2 6

40. (00-5-56) Равнобедренная трапеция с боковой стороной равной 3, вписана в круг. Площадь трапеции равна 6. Найти площадь описанного круга.
A) 2π B) 3π C) π D) $\dfrac{\pi}{2}$

Решение: В силу свойства 6 средняя линия трапеции $\dfrac{a+b}{2} = 3$. Если площадь трапеции равна $S = \dfrac{a+b}{2}h = 6$, то $h = 2$. Из свойства 5, $r = \dfrac{h}{2}$ получаем $r = 1$. Площадь круга $S = \pi r^2 = \pi$. **Ответ:** π (C).

41. (01-10-45) В равнобедренную трапецию с основаниями 9 и 16, вписана окружность. Найдите длину этой окружности.
A) 24π B) 18π C) 12π D) 20π

42. (02-9-51) Основания прямоугольной трапеции равны 6 и 4. Найдите длину вписанной в нее окружности.
A) 2π B) 3π C) $2,4\pi$ D) $4,8\pi$

43. (03-2-49) Расстояние от центра окружности, вписанной в равнобедренную трапецию до вершины меньшего основания равно 15, а до вершины большего основания равно 20. Вычислите площадь этой трапеции.
A) 300 B) 360 C) 540 D) 600

44. (03-3-58) Периметр равнобедренной трапеции равен 40. В нее вписана окружность радиуса 3. Вычислите площадь этой трапеции.
A) 40 B) 50 C) 60 D) 80

45. (03-5-58) Периметр равнобедренной трапеции описанной около окружности, равен 60. Найдите среднюю линию трапеции.
A) 15 B) 30 C) 20 D) 18

Решение: В силу свойства-6, средняя линия трапеции равна ее боковой стороне. Из

$$P = a + b + 2l = 2l + 2l = 4l = 60$$

получаем

$$l = \frac{a+b}{2} = 15.$$

Ответ: 15 (A).

46. (03-7-53) Около окружности радиуса 2 описана равнобедренная трапеция с площадью 20. Найдите боковую сторону трапеции.
A) 7 B) 10 C) 5 D) 6

47. (03-10-49) Окружность вписанная в равнобедренную трапецию, делит боковую сторону в отношении 1:9. Найдите периметр трапеции, если длина окружности равна 6π,
A) 20 B) 30 C) 40 D) 50

48. (03-11-37) В равнобедренную трапецию с боковой стороной 12, вписана окружность радиуса 5. Найдите площадь трапеции.
A) 120 B) 240 C) 60 D) 180

49. (03-12-33) Центр окружности, вписанной в трапецию, находится на расстоянии 3, считая от вершины верхнего основания и на расстоянии 4, считая от вершины нижнего основания. Найдите площадь круга вписанного в трапецию.
A) $2{,}56\pi$ B) $4{,}84\pi$ C) $3{,}24\pi$ D) $5{,}76\pi$

50. (03-2-15) В равнобедренную трапецию с боковой стороной 10, вписан круг радиуса 2. Найдите отношение площади трапеции к площади круга.
A) $\frac{4}{\pi}$ B) $\frac{20}{\pi}$ C) $\frac{5}{\pi}$ D) $\frac{10}{\pi}$

51. (09-13-24) Боковые стороны трапеции равны 5 и 9. В эту трапецию вписана окружность. Средняя линия трапеции делит ее площадь в отношении 13 : 15. Найдите большее основание трапеции.
A) 8 B) 9,5 C) 9 D) 8,5

15.9 Многоугольник и окружность

Выпуклый многоугольник, у которого все стороны и углы равны называется *правильным многоугольником*. Многоугольник называется *многоугольником, вписанным в окружность* если все его вершины лежать на окружности. Многоугольник называется *многоугольником, описанным около окружности*, если все его стороны касаются окружности. Правильный выпуклый многоугольник может быть вписан в окружность или описан около окружности. Найдем радиус описанной около правильного многоугольника окружности R и радиус вписанной в него окружности r. Если сторона правильного многоугольника равна a и количество сторон равно n, то

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}}, \quad r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^0}{n}}.$$

Если S_n — площадь правильного многоугольника, P_n — периметр правильного многоугольника, то верны следующие формулы:

1. $S_n = \frac{1}{2}P_n r.$

2. $a = 2R\sin\frac{180^0}{n} = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^0}{n}.$

3. $S_n = n\cdot\frac{1}{2}R^2\ \sin\frac{360^0}{n}.$

1. (96-3-100) Найдите сторону правильного 12-угольника, вписанного в окружность радиуса R.
A) $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ B) $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ C) R D) $R\frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение: Из формулы 2, $a = 2R\sin\frac{180^0}{n}$ получаем $a = 2R\sin 15^0$. Учитывая $\sin 15^0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ получаем $a = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
Ответ: $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (A).

2. Радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, равен $8\sqrt{3}$. Найдите расстояние между параллельными сторонами шестиугольника.
A) 12 B) 18 C) 16 D) 24

3. Радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, равен $10\sqrt{3}$. Найдите радиус вписанной в шестиугольник окружности.
A) 12 B) 18 C) 15 D) 24

4. (96-3-101) Четырехугольник ABCD описан около окружности. Найдите BC, если $AB = 6$, $AD = 4$, $DC = 3$.
A) 4 B) 4,5 C) 5 D) 5,5

5. (96-9-35) Найдите сторону правильного 12-угольника, описанного около окружности радиуса r.
A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$ B) $\frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}r$
C) $1{,}2r$ D) $2(2-\sqrt{3})r$

Решение: Из формулы 2 получаем $a = 2r\operatorname{tg}15^0$. Так как $\operatorname{tg}15^0 = 2-\sqrt{3}$, имеем $a = 2(2-\sqrt{3})r$. **Ответ:** $2(2-\sqrt{3})r$ (D).

6. (96-12-102) Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности радиуса R.
A) $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}R$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$
C) $1,5R$ D) $1,2R$

7. (96-13-42) Найдите сторону правильного восьмиугольника, вписанного в окружность радиуса R.
A) $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ B) $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ C) R D) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$

8. (97-1-70) Четырехугольник $ABCD$ вписан в круг. $\angle A = 120^0$, BC=4 и CD=5. Найдите длину диагонали BD.
A) 8 B) 20 C) $\sqrt{20}$ D) $\sqrt{21}$

9. (98-3-45) Найти радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, меньшая диагональ которого равна $12\sqrt{3}$.
A) $4\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) 12 D) 14

10. (98-3-46) Радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника равен $5\sqrt{3}$. Найти расстояние между параллельными сторонами шестиугольника.
A) 10 B) 12 C) 15 D) 16

Решение: Из 2-формулы $a = 2R\sin 30^0$ получим $a = R = 5\sqrt{3}$. Расстояние между параллельными сторонами шестиугольника равно диаметру вписанной окружности, т.е. $d = 2r$. Еще раз из 2-формулы $2r = \frac{a}{\operatorname{tg}30^0}$ имеем
$d = 5\sqrt{3} : \frac{1}{\sqrt{3}} = 15$. **Ответ:** 15 (C).

11. (98-5-39) Если радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника равен $\sqrt{3}$, то найдите радиус вписанной в него окружности.
A) $1,5$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D) $1,2$

12. (98-6-39) Найти сторону правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R.
A) R B) $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ C) $\sqrt{3}R$ D) $\sqrt{2}R$

13. (98-7-48) Длина окружности, описанной около правильного шестиугольника, равна 4π. Найдите площадь этого шестиугольника.
A) 6 B) $\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$

14. (98-10-92) Радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, равен 12. Найдите меньшую диагональ шестиугольника.
A) $12\sqrt{2}$ B) $12\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{5}$ D) $8\sqrt{5}$

15. (98-11-88) Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности радиуса R.
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ B) $\sqrt{3}R$ C) $\frac{4}{3}R$ D) $\frac{2}{\sqrt{3}}R$

16. (00-7-43) Сторона правильного шестиугольника равна $4\sqrt{3}$. Найдите площадь фигуры, расположенной между вписанной и описанной в этот шестиугольник окружностями.
A) 12π B) 10π C) 11π D) 13π

17. (01-10-41) Площадь восемнадцатиугольника равна 4, площадь вписанной в него круга равна π. Найдите периметр восемнадцатиугольника.
A) 6 B) 9 C) 12 D) 8

Решение: Из условия задачи имеем $S_{18} = 4$ и $r = 1$. Из 1-формулы $P_{18} = \frac{2S_{18}}{r}$ получим $P_{18} = 8$. **Ответ:** 8 (D).

18. (02-6-47) Площадь правильного двадцатиугольника равна 8, а площадь вписанного в него круга равна 2π. Найдите периметр двадцатиугольника.
A) 16 B) $4\sqrt{2}$ C) $12\sqrt{3}$ D) $8\sqrt{2}$

19. (02-8-27) Длины трех последовательных сторон четырехугольника равны 2; 3 и 4. Найдите площадь четырехугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 1,2.
A) $7,2$ B) $8,6$ C) $7,8$ D) $6,8$

20. (03-3-59) Площадь правильного двадцатиугольника равна 16, а площадь вписанного в него круга равна 4π. Найдите периметр двадцатиугольника.
A) 12 B) 16 C) 18 D) 20

21. (03-12-36) Найдите площадь круга, вписанного в правильный восьмиугольник со стороной 1.
A) $\pi\frac{2\sqrt{3}+1}{4}$ B) $\pi\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$
C) $\pi\frac{6+4\sqrt{2}}{9}$ D) $\pi\frac{3+2\sqrt{2}}{16}$

22. (98-12-48) Периметр правильного многоугольника равен 60, радиус вписанной окружности равен 8. Найдите площадь этого многоугольника.
A) 240 B) 480 C) 120 D) 60

Решение: Из 1-формулы получим $S = 0,5 \cdot 60 \cdot 8 = 240$. **Ответ:** 240 (A).

23. (98-2-47) Сторона вписанного в окружность правильного шестиугольника равна 20. В эту окружность вписан квадрат. Найдите площадь круга, вписанного в этот квадрат.
A) 400π B) 300π C) 150π D) 200π

24. (99-7-38) Длина окружности, описанной около правильного шестиугольника, равна 2π. Вычислить площадь круга, вписанного в шестиугольник.
A) 2π B) 3π C) π D) $0,75\pi$

25. Найдите площадь части круга радиуса 2, расположенной вне вписанного в эту окружность квадрата.
A) $4(\pi - 2)$ B) $2(2\pi - 3)$ C) $4\pi - 6$ D) $4\pi - 5$

26. Найдите площадь части круга радиуса 2, расположенной вне вписанного в эту окружность правильного шестиугольника.
A) $4(\pi - \sqrt{3})$ B) $2(2\pi - 3\sqrt{3})$
C) $4\pi - 3\sqrt{3}$ D) $8\pi - 6\sqrt{3}$

15.10 Векторы

Направленный отрезок называется *вектором*. Направление вектора определяется указанием его начала и конца (вершины). На рисунке направление вектора указывается стрелкой. Для обозначения векторов используются строчные буквы латинского алфавита $a, b, c, \ldots$. Вектор также можно обозначить, двумя заглавными буквами указывая его начало и конец. В этом случае начало вектора ставится первым. Иногда вместо слова вектор используется стрелка наверху буквенного обозначения вектора. На рисунке 15.61 вектор можно обозначить $\vec{a}$ или $\vec{AB}$. Если полупрямые AB и CD одинаково направлены, то векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ называются *одинаково направленными векторами* (рис. 15.61b). Если полупрямые AB и CD противоположно направлены, то векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ называются *противоположно направленными векторами* (рис. -15.61c). *Длиной* или *абсолютным значением* вектора $\vec{AB}$ называется расстояние между точками A и B.

На рисунке 15.61b векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, а на рисунке 15.61c векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены.

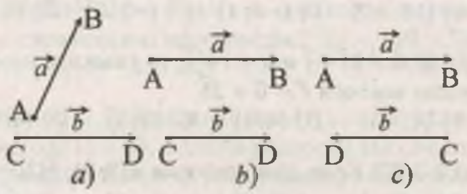


Рисунок 15.61

Если при параллельном переносе два вектора совпадают, то такие векторы называются *равными векторами*. Это означает, что существует параллельный перенос, переводящий начало и конец одного вектора соответственно в начало и конец другого вектора. Равные векторы одинаково направлены и их абсолютные значения равны и обратно. Пусть точка $A_1(x_1; y_1)$– начало, а точка $A_2(x_2; y_2)$– конец вектора $\vec{a}$. Числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ назовем *координатами* вектора $\vec{a}$. Координаты вектора записываем рядом с его буквенной записью, в рассматриваемом случае $\vec{a}(a_1; a_2)$. Координаты нулевого вектора равны нулю. Соответствуюшие координаты равных векторов равны. Если соответствующие координаты векторов равны, то эти векторы равны.

Если два ненулевых вектора лежат на одной или на параллельных прямых, то эти векторы называются *коллинеарными векторами*. Соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны и обратно.

Вектор с координатами (1; 0) обозначается буквой $\vec{i}$, а вектор с координатами (0; 1) обозначается буквой $\vec{j}$. Они называются *единичными векторами*, направленными вдоль координатных осей. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с координатами $(a_1; a_2)$ и $(b_1; b_2)$ называется вектор $\vec{c}$ с координатами $(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$, т.е.

$$\vec{a}(a_1; a_2) + \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2). \qquad (15.12)$$

Теперь приводим основные правила выполнения действий над векторами.

1. **Координаты вектора $\vec{AB} = \vec{a}$ с началом в точке $A(a_1;\ a_2)$ и концом в точке $B(b_1;\ b_2)$:**
$$\vec{AB} = \vec{a}(b_1 - a_1;\ b_2 - a_2).$$

2. **Разность векторов $\vec{a}(x_1;\ y_1)$ и $\vec{b}(x_2;\ y_2)$:**
$$\vec{a}(x_1;\ y_1) - \vec{b}(x_2;\ y_2) = \vec{c}(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2).$$

3. **Умножение вектора на число:**
$$\lambda\vec{a}(x_1;\ y_1) = \vec{b}(\lambda x_1;\ \lambda y_1).$$

4. **Правило треугольника сложения векторов (рис. -15.62a): $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.**

5. **Правило параллелограмма сложения векторов (рис. 15.62b). Для параллелограмма ABCD:**
$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}.$$

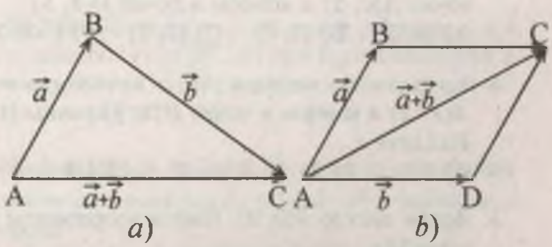


Рисунок 15.62

6. **Длина вектора $\vec{a}(x_1;\ y_1) = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j}$;**
$$|\vec{a}\,| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

7. **Тождество параллелограмма:**
$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\,\vec{a}\,|^2 + |\,\vec{b}\,|^2)$.

8. **Скалярное произведение векторов $\vec{a}(x_1;\ y_1)$ и $\vec{b}(x_2;\ y_2)$:** $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

9. Если известны длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и угол α между ними, то: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$. В частности $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

10. Условие перпендикулярности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

11. Уравнение прямой, перпендикулярной вектору $\vec{a}(x_1;\ y_1)$ и проходяшей через точку $(x_0;\ y_0)$: $x_1(x - x_0) + y_1(y - y_0) = 0$.

12. Косинус угла между векторами $\vec{a}(x_1;\ y_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ и $\vec{b}(x_2;\ y_2) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$:

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\cdot\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}.$$

13. Если известны длины и скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то угол между этими векторами:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

14. Условие коллинеарности векторов $a(x_1;\ y_1)$ и $b(x_2;\ y_2)$: $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$, $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, $\lambda \neq 0$.

15. Медиана AD треугольника ABC: $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

Координаты вектора

1. Найти координаты вектора $\vec{AB}$ с началом в точке $A(1;\ 2)$ и концом в точке $B(1;\ 4)$.
A) (0; 2) B) (2; 6) C) (0; 1) D) (2; 3)

Решение: По 1-правилу имеем $\vec{AB}(1-1;\ 4-2) = \vec{AB}(0;\ 2)$. **Ответ:** (0; 2) (A).

2. Найти координаты вектора $\vec{AB}$ с началом в точке $A(-1;\ -3)$ и концом в точке $B(0;\ 1)$.
A) (0; 2) B) (1; 4) C) (−1; −2) D) (1; −4)

3. Найти координаты вектора $\vec{AB}$ с началом в точке $A(0;\ 2)$ и концом в точке $B(3;\ 5)$.
A) (3; 3) B) (3; 7) C) (3; 2) D) (−3; 3)

4. Координаты вектора $\vec{AB}$ с началом в точке $A(x;\ 2)$ и концом в точке $B(3;\ 5)$ равны (1; 3). Найдите x.
A) 2 B) 3 C) −2 D) 3

5. Задан вектор $\vec{a}(0;\ 2)$. Найти координаты вектора $3\vec{a}$.
A) (0; 6) B) (3; 6) C) (3; 5) D) (0; 5)

Решение: По 3-правилу получим $3\vec{a} = \vec{c}(3\cdot 0;\ 3\cdot 2) = \vec{c}(0;\ 6)$. **Ответ:** (0; 6) (A).

6. Задан вектор $\vec{b}(-1;\ 2)$. Найти координаты вектора $-2\vec{b}$.
A) (2; 4) B) (−2; −4) C) (2; −4) D) (1; −4)

7. Задан вектор $\vec{c}(-1;\ -0,5)$. Найти координаты вектора $-4\vec{c}$.
A) (4; 4) B) (4; 2) C) (2; 4) D) (4; −2)

8. Найдите y, если $\vec{b}(-1;\ y)$ и $-3\vec{b} = \vec{c}(3;\ 6)$.
A) 2 B) 3 C) −2 D) 3

9. (97-11-35) Даны векторы $\vec{a}(0;\ -4)$; $\vec{b}(-2;\ 2)$. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{b} = 3\vec{a} - \vec{c}$,
A) (2; −14) B) (3; −6) C) (−2; 10) D) (2; −10)

Решение: Из равенства $\vec{b} = 3\vec{a} - \vec{c}$ получим $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$. согласно 2- и 3- правилам следует

$$3\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}(3\cdot 0 + 2;\ 3\cdot(-4) - 2) = \vec{c}(2;\ -14).$$

Ответ: (2; −14) (A).

10. (07-09-9) Даны векторы $\vec{m}(-3;1)$ и $\vec{n}(5;-6)$. Найдите координаты вектора $\vec{a} = \vec{n} - 3\vec{m}$.
A) (4; −3) B) (14; −9) C) (9; 3) D) (14; −3)

11. (96-1-42) Даны векторы $\vec{b}(0;-2)$ и $\vec{c}(-3;4)$. Найдите координаты вектора $\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c}$.
A) (0; 8) B) (3; −6) C) (6; −8) D) (6; −14)

12. (96-9-94) Даны векторы $\vec{a}(2;-3)$ и $\vec{b}(-2;-3)$. Укажите координаты вектора $\vec{m} = \vec{a} - 2\vec{b}$.
A) (6; 3) B) (−3; 6) C) (−2; −9) D) (2; −3)

13. (97-1-35) Даны векторы $\vec{a}(4;1)$ и $\vec{b}(-2;2)$. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{a} = \vec{c} + 3\vec{b}$.
A) (−2; 5) B) (2; −5) C) (−10; 4) D) (10; −5)

14. (97-6-35) Даны векторы $\vec{c}(-5;0)$ и $\vec{b}(-1,4)$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.
A) (−2; 2) B) (−3; 2) C) (1; 0) D) (2; 2)

15. (98-1-47) $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ Укажите координаты вектора, если $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ и $\vec{b} = 2\vec{j}$.
A) (−4; 12) B) (−4; 0) C) (4; 0) D) (2; −6)

Решение: Подставляя разложения векторов получим $2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(2\vec{i} + 3\vec{j}) - 3\cdot 2\vec{j} = 4\vec{i} = 4\vec{i}(1;\ 0) = \vec{p}(4;\ 0)$. **Ответ:** (4; 0) (C).

16. (98-8-47) Если $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 2\vec{i}$, то укажите координаты вектора $\vec{c} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$.
A) (10; −3) B) (−6; 4) C) (−2; 3) D) (4; −4)

17. Если $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, то укажите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.
A) (4; −3) B) (4; 4) C) (2; 3) D) (4; 3)

18. (02-3-77) Если для векторов $\vec{a}(2;3)$, $\vec{b}(3;-2)$ и $\vec{c}(4;19)$ справедливо равенство $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, то найдите значение произведения $m\cdot n$.
A) −10 B) −12 C) 6 D) −8

19. (96-3-40) Дан вектор $\vec{a}(1;\ \frac{4}{3})$. Найти длину вектора $3\cdot\vec{a}$.
A) 4,5 B) 3,5 C) 5 D) 5,5

Решение: По 3- правилу $3\vec{a} = \vec{b}(3;4)$. Из 6-правила для длины вектора получим

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Ответ: 5 (C).

20. (96-11-41) Дан вектор $\vec{a}(2; \frac{15}{4})$. Найти длину вектора $4 \cdot \vec{a}$.
A) 13 B) 17 C) 18 D) 15

21. (96-12-42) Дан вектор $\vec{a}(\frac{3}{2}; 2)$. Найдите длину вектора $2 \cdot \vec{a}$.
A) 5 B) 4 C) 7 D) $1\frac{1}{3}$

22. Найдите y, если длина вектора $6 \cdot \vec{a}(2; y)$ равна 13.
A) 0,3 B) $\pm\frac{5}{6}$ C) 0,8 D) 1,5

23. (99-1-36) Дан вектор $\vec{a}(-6; 8)$. Найдите k, если известно, что $|k\vec{a}| = 5$.
A) $\pm\frac{1}{2}$ B) $-\frac{5}{6}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\pm\frac{5}{14}$

24. (97-5-29) Даны векторы $\vec{a}(5; 1)$ и $\vec{b}(-2; 3)$. Вычислить $|\vec{a} + \vec{b}|$.
A) 5 B) 3 C) 4 D) 2

Решение: По формуле (15.12), сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(5 - 2;\ 1 + 3) = \vec{c}(3; 4)$. По формуле 6 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. **Ответ:** 5 (A).

25. (97-9-29) Даны векторы $\vec{a}(7; 3)$ и $\vec{b}(5; 2)$. Вычислить $|\vec{a} + \vec{b}|$.
A) 19 B) 5 C) 8 D) 13

26. (98-9-52) $\vec{m} = 4\vec{p} + 2\vec{q}$. Найдите длину вектора, если $\vec{p}(2,5; -1)$ и $\vec{q}(-2; 2)$. A) 12 B) 8 C) 14 D) 6

27. (02-1-71) Даны векторы $\vec{m}(4; -4)$ и $\vec{n}(-1; 8)$. $|\vec{m} - \vec{n}| =?$
A) 9 B) 12 C) 13 D) 15

28. (99-6-19) Даны векторы $\vec{a}(3; 2)$ и $\vec{b}(0; -1)$. Найдите модуль вектора $-2\vec{a} + 4\vec{b}$.
A) 10 B) 6 C) 8 D) 3

29. (00-2-34) Если $\vec{a} \neq 0$, то при каких значениях x справедливо неравенство? $|(x - 1)\vec{a}| < |2\vec{a}|$
A) $(-1; 3)$ B) $(0; 2)$ C) $(1; 2)$ D) $(-3; -1)$

30. (01-4-14) Длины векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ соответственно равны 11 и 23, а длина разности этих векторов равна 30. Найдите длину суммы этих векторов..
A) 34 B) 64 C) 42 D) 20

Решение: Из тождества параллелограмма получим $|\vec{x} + \vec{y}|^2 + 30^2 = 2(11^2 + 23^2)$. Отсюда $|\vec{x} + \vec{y}|^2 = 400 \Longleftrightarrow |\vec{x} + \vec{y}| = 20$. **Ответ:** 20 (D).

31. (02-5-47) Найдите сумму длин диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(3; 1)$ и $\vec{b}(1; 3)$.
A) $2\sqrt{2}$ B) 6 C) $6\sqrt{2}$ D) $8\sqrt{2}$

32. (02-11-46) Если $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{a}+\vec{b}| = 11$ и $|\vec{a}-\vec{b}| = 7$, то вычислите значение $|\vec{b}|$.
A) 7 B) 5 C) $2\sqrt{7}$ D) $4\sqrt{7}$

33. (03-3-46) Если $|\vec{a}| = \sqrt{137}$, $|\vec{a}+\vec{b}| = 20$ и $|\vec{a}-\vec{b}| = 18$, то найдите $|\vec{b}|$.
A) $7\sqrt{2}$ B) $7\sqrt{3}$ C) $8\sqrt{2}$ D) 15

34. (03-9-36) Если $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 17$ и $|\vec{a} - \vec{b}| = 3\sqrt{35}$, то найдите значение $|\vec{a} + \vec{b}|$.
A) 19 B) 20 C) $8\sqrt{3}$ D) $9\sqrt{2}$

Скалярное произведение векторов

35. (98-6-37) Угол между единичными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60^0. Найдите $|\vec{a} + \vec{b}|$.
A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 1 D) $\sqrt{3}$

Решение: Из того, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичные векторы имеем $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$. Воспользовавшись 9-правилом, вычислим $|\vec{a} + \vec{b}|^2$:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 =$$

$$= 1 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^0 + 1 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3.$$

Тогда $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$. **Ответ:** $\sqrt{3}$ (D).

36. (08-23-32) Если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60^0, то найдите скалярное произведение векторов $3\vec{a} - 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 6\vec{b}$.
A) $252 - 56\sqrt{3}$ B) 140
C) $252 + 56\sqrt{3}$ D) 264

37. (96-9-39) Пусть $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол 60^0. При каком значении λ вектор $(2\vec{a} - \lambda \cdot \vec{b})$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$.
A) 1 B) $-\frac{3}{4}$ C) $-\frac{4}{3}$ D) $\frac{4}{3}$

Решение: Из условия задачи и 9- правила получим $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^0 = 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 6$. Из равенства $(2\vec{a} + \lambda\vec{b})\vec{b} = 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \lambda\vec{b} \cdot \vec{b} = 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \lambda|\vec{b}|^2 = 12 - 9\lambda = 0$ имеем $\lambda = \frac{4}{3}$. **Ответ:** $\frac{4}{3}$ (D).

38. (96-3-99) Если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол 60^0, то при каком значении λ вектор $(\vec{a} - \lambda \cdot \vec{b})$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 1,5

39. (99-3-41) Если $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$, то при каком значении α векторы $\vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$ и $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ перпендикулярны?
A) $-\frac{3}{5} < \alpha < \frac{3}{5}$ B) $-\frac{3}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\pm\frac{3}{5}$

40. (96-13-41) Пусть $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60^0. При каком значении k векторы $(\vec{a} + k \cdot \vec{b})$ и $\vec{a}$ перпендикулярны?
A) $-\frac{7}{3}$ B) $-\frac{7}{4}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $-\frac{8}{3}$

41. (98-10-30) При каких значениях x векторы $\vec{a}(4; -10)$ и $\vec{b}(-2; x)$ перпендикулярны?
A) 0,8 B) 0,6 C) $-0,8$ D) $-0,6$

Решение: Так как $\vec{a} \perp \vec{b}$ получим $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ или $4 \cdot (-2) - 10x = 0 \iff 10x = -8$. Отсюда $x = -0,8$. **Ответ:** $-0,8$ (C).

42. (02-10-57) Пусть $\vec{a}(2; x)$, $\vec{b}(-4; 1)$. При каком значении x векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?
A) -9 B) 8 C) 9 D) -7

43. (02-10-58) Даны векторы $\vec{a}(2; m)$ и $\vec{b}(3; n)$. При каких натуральных значениях m векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны?
A) 3; 2 B) 1; 6 C) 2; 3 D) 6; 1

44. (97-4-50) Даны векторы $\vec{a}(0; 1)$ и $\vec{b}(2; 1)$. При каких значениях x вектор $(\vec{b}+x\cdot\vec{a})$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$?
A) -4 B) -6 C) -7 D) -5

45. (97-9-110) Даны векторы $\vec{a}(2; 1)$ и $\vec{b}(1; 2)$. При каких значениях x вектор $x\cdot\vec{a}+\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$?
A) 1 B) 2 C) 4 D) $-1,25$

46. (98-2-55) При каком значении m векторы $\vec{a}(2; 5)$ и $\vec{b}(m; -6)$ перпендикулярны?
A) 14 B) 16 C) 15 D) -15

47. (97-1-37) Найдите длину вектора $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$, если $\vec{m}$ и $\vec{n}$-взаимно перпендикулярные единичные векторы .
A) 2 B) 3 C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{3}$

Решение: По условию задачи $\vec{m}\cdot\vec{n} = 0$, $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$.Воспользовавшись условием перпендикулярности получим $|2\vec{m} + \vec{n}|^2 = 4\vec{m}\vec{m} + \vec{n}\vec{n} = 4 + 1 = 5$. Отсюда следует $|2\vec{m} + \vec{n}| = \sqrt{5}$. **Ответ:** $\sqrt{5}$ (C).

48. (98-11-86) Если угол между единичными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30^0, то найдите $|\vec{a} + \vec{b}|$.
A) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ D) 1

49. (98-12-103) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол в 120^0 и $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определите $|\vec{a} - \vec{b}|$?
A) 2 B) 8 C) 7 D) 6

50. (01-1-41) Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 2$ и $|\vec{b}| = 4$, найдите скалярное произведение векторов $3\vec{a} - 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 6\vec{b}$.
A) 364 B) 264 C) $252 - 56\sqrt{3}$ D) 140

51. (03-10-63) Длина суммы двух векторов равна 20, а длина разности этих векторов равна 12. Найти скаляное произведение этих векторов.
A) 16 B) 48 C) 24 D) 64

52. (03-12-79) Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 135^0. Если $|\vec{a}| = 2$ и $|\vec{b}| = 4$,то найдите значение $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.
A) $2\sqrt{10}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $15\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{17-4\sqrt{2}}$

Угол между векторами

53. (96-7-40) Найти угол между векторами $\vec{a}(2; 5)$ и $\vec{b}(-7; -3)$
A) 150^0 B) 135^0 C) 120^0 D) 60^0

Решение: Пусть искомый угол φ. Из 6- правила для длины вектора получим

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58},$$

из 8- правила $\vec{a}\vec{b} = 2 \cdot (-7) + 5 \cdot (-3) = -29$. Тогда по 13- правилу

$$\cos\varphi = \frac{-29}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{58}} = \frac{-29}{29\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда $\varphi = 135^0$. **Ответ:** 135^0 (B).

54. (98-5-37) Найти угол между векторами $\vec{a}(2; \sqrt{2})$ и $\vec{b}(4; 2\sqrt{2})$.
A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) 0 D) $\frac{\pi}{2}$

55. (97-3-40) Найти угол между векторами $\vec{n}(5; -3)$ и $\vec{m}(4; 1)$.
A) 135^0 B) 120^0 C) 60^0 D) 45^0

56. (97-7-40) Найти угол между векторами $\vec{c}(7; 3)$ и $\vec{d}(-2; -5)$.
A) 30^0 B) 45^0 C) 60^0 D) 135^0

57. (97-10-40) Найти угол между векторами $\vec{a}(1; 0)$ и $\vec{b}(1; -1)$.
A) 30^0 B) 45^0 C) 60^0 D) 90^0

58. (99-7-36) Найти синус угла между векторами $\vec{a}(1; 2)$ и $\vec{b}(2; 1)$.
A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{1}{6}$

59. (96-3-43) Даны неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$, то какой угол составляют векторы $(\vec{a} + \vec{b})$ и $(\vec{a} - \vec{b})$?
A) 30^0 B) 45^0 C) 90^0 D) 60^0

Решение: По правилу параллелограмма сложения векторов $(\vec{a}+\vec{b})$ и $(\vec{a}-\vec{b})$ являются диагоналями параллелограмма, т.е. ромба со сторонами $|\vec{a}| = 3$ и $|\vec{b}| = 3$. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом (90^0). **Ответ:** 90^0 (C).

60. (96-11-44) Даны неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$, то какой угол составляют векторы $(\vec{a} + \vec{b})$ и $(\vec{a} - \vec{b})$?
A) 30^0 B) 45^0 C) 60^0 D) 90^0

61. (96-12-46) Даны неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, то какой угол составляют векторы $(\vec{a} + \vec{b})$ и $(\vec{a} - \vec{b})$?
A) 45^0 B) 90^0 C) 75^0 D) 60^0

62. (97-6-37) Если векторы $\vec{c}-2\vec{b}$ и $4\vec{b}+5\vec{c}$ перпендикулярны, то найдите угол между единичными векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
A) 30^0 B) 45^0 C) 60^0 D) 120^0

Решение: Пусть α угол между векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$. По условию задачи $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$. Из 9 получим $\vec{b}\cdot\vec{c} = \cos\alpha$. Воспользовавшись условием перпендикуляности имеем $(\vec{c}-2\vec{b})(4\vec{b}+5\vec{c}) = 0 \iff 4\vec{b}\vec{c}+5-8-10\vec{b}\vec{c} = 0$ или $-6\cos\alpha = 3$. Отсюда следует $\cos\alpha = -0,5 \iff \alpha = 120^0$. **Ответ:** 120^0 (D).

63. (97-11-37) Если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ единичные векторы составляющие угол 120^0, то найдите угол между векторами $2\vec{m}+4\vec{n}$ и $\vec{m}-\vec{n}$.
A) 120^0 B) 90^0 C) 135^0 D) 150^0

64. (00-7-44) Если $(\vec{m}-2\vec{n})^2+(\vec{m}+\vec{n})^2 = 73$, $|\vec{m}| = 2\sqrt{2}$ и $|\vec{n}| = 3$,то найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$.
A) 120^0 B) 130^0 C) 128^0 D) 135^0

65. (02-8-33) Если $(\vec{a}-\vec{b})^2+(2\vec{a}-\vec{b})^2 = 56$, $|\vec{a}| = 2$ и $|\vec{b}| = 3$, то найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
A) 120^0 B) 150^0 C) 30^0 D) 60^0

66. (03-6-77) Найти косинус угла между векторами $\vec{a}(-2;4)$ и $\vec{b}(6;3)$.
A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) 0

Коллинеарность векторов

67. (00-5-65) При каком значении a точки $A(2;1)$ $B(3;-2)$ и $C(0;a)$ лежат на одной прямой?
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7

Решение: Если точки $A(2;1)$, $B(3;-2)$ и $C(0;a)$ лежат на одной прямой, то векторы $\vec{AB}(1;\ -3)$ и $\vec{BC}(-3;\ a+2)$ коллинеарны. Из условии коллинеарности 14 следует, что

$$-3:1 = (a+2):(-3) \iff 9 = a+2.$$

Отсюда имеем $a = 7$. **Ответ:** 7 (D).

68. (02-10-76) При каком значении t точки $A(3;8)$ $B(9;t)$ и $C(-5;0)$ лежат на одной прямой?
A) 14 B) 13 C) 12 D) 15

69. (99-1-48) Какие из следуюших векторов коллинеарны $\vec{a}(2;-4)$, $\vec{b}(1;2)$, $\vec{c}(1;-2)$ и $\vec{d}(-2;-4)$?
A) $\vec{a},\vec{c};\vec{b},\vec{d}$ B) $\vec{b},\vec{c}$ C) $\vec{a},\vec{d}$ D) $\vec{a},\vec{b}$

70. (99-6-20)При каком значении n $(n>0)$ векторы $\vec{a}(2n;3)$ и $\vec{b}(6;n)$ коллинеарны?
A) 1 B) 3 C) 2 D) 4

71. (98-8-46) Если векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ образуют угол в 30^0 и $\vec{m}\cdot\vec{n} = \sqrt{3}$, то вычислите площадь параллелограмма построенного на этих векторах.
A) 2 B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 1 D) $2\sqrt{3}$

Решение: Из правила 9 для скалярного произведения векторов , имеем

$$\sqrt{3} = |\vec{m}|\,|\vec{m}|\cos 30^0 \iff |\vec{m}|\,|\vec{m}| = 2.$$

Тогда площадь параллелограмма построенного на этих векторах будет

$$S = |\vec{m}|\,|\vec{m}|\sin 30^0 \iff S = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Ответ: 1 (C).

72. (02-9-46) Вычислить площадь четырехугольника с вершинами в точках $O(0;0)$,$A(-1;3)$, $B(2;4)$ в $C(3;1)$.
A) $10\sqrt{2}$ B) 10 C) 20 D) $2\sqrt{5}$

73. (02-10-56) Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}(1;2)$ и $\vec{b}(3;-5)$.
A) $5,5$ B) 7 C) 13 D) $6,5$

74. (96-3-44) Найдите углы A и B треугольника с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(-2;3)$ и $C(-1;-2)$.
A) $60^0;30^0$ B) $90^0;45^0$
C) $30^0;90^0$ D) $45^0;90^0$

Решение: Угол А треугольника - это угол между векторами $\vec{AB} = \vec{c}(-3;\ 2)$ и $\vec{AC} = \vec{b}(-2;\ -3)$. Их скалярное произведение в силу 8 равно. $\vec{c}\,\vec{b} = (-3)\cdot(-2)+2\cdot(-3) = 6-6 = 0$. По 10-правилу имеем $\angle A = 90^0$. Угол между векторами $\vec{BC} = \vec{a}(1;\ -5)$ и $\vec{BA} = \vec{c}(3;\ -2)$ - это угол B. Из $\vec{a}\,\vec{c} = 3+10 = 13$, $|\vec{a}| = \sqrt{26}$, $|\vec{c}| = \sqrt{13}$. в силу 13 имеем $\cos B = 13:\sqrt{26\cdot 13} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, отсюда $\angle B = 45^0$. **Ответ:** 90^0; 45^0 (B).

75. (96-11-45) Найдите углы A и C треугольника с вершинами в точках $A(-2;3)$, $B(-1;-2)$ и $C(1;1)$.
A) $45^0;90^0$ B) $90^0;45^0$
C) $30^0;90^0$ D) $45^0;45^0$

76. (96-12-47) Найдите углы A и B треугольника с вершинами в точках $A(-1;5)$, $B(3;1)$ и $C(-1;-3)$.
A) $60^0;30^0$ B) $90^0;45^0$
C) $30^0;45^0$ D) $45^0;90^0$

77. (97-1-36) Если $M(1;1)$, $N(2;3)$ и $K(-1;2)$, то найдите наибольший угол треугольника MNK.
A) 75^0 B) 90^0 C) 120^0 D) 135^0

78. (97-6-36) Найти угол между диагоналями четырехугольника OMPK с вершинами в точках $O(0;0)$,$M(1;1)$, $P(0;2)$ $K(-1;1)$.
A) 90^0 B) 30^0 C) 60^0 D) 45^0

79. Найти координаты вектора длиной 5 и коллинеарного вектору $\vec{a}(2;\ -1,5)$.
A) $(4;\ -3)$ и $(-4;\ 3)$ B) $(-4;\ -3)$ и $(4;\ 3)$
C) $(-3;\ 4)$ и $(4;\ -3)$ D) $(-3;\ -4)$ и $(4;\ 3)$

16 СТЕРЕОМЕТРИЯ

Стереометрия – раздел геометрии, в котором изучаются пространственные фигуры. В стереометрии, как и в планиметрии изучаются свойства геометрических фигур и тел. В пространстве основными фигурами являются точка, прямая и плоскость.

16.1 Прямые и плоскости в пространстве

Две непересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости называются *параллельными прямыми.* Из точки вне прямой можно провести прямую, параллельную данной прямой, причем единственным образом. Прямые, параллельные третьей прямой, взаимно параллельны. Если прямая и плоскость не пересекаются, то они называются *параллельными.* Если две плоскости не пересекаются, то они называются параллельными. Как и в плоскости две прямые, пересекающиеся под прямым углом называются *перпендикулярными прямыми.* Если прямая, пересекающая плоскость перпендикулярна любой прямой проходящей через точку пересечения, то она называется *перпендикулярной* плоскости (рис. 16.1*a*).

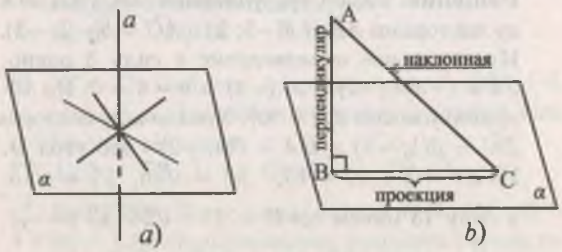


Рисунок 16.1

Перпендикуляром, опущенным из данной точки к данной плоскости называется отрезок, соединяющий точку и плоскость и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра* (на рис. 16.1*b* точка B). *Расстоянием* от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. *Наклонной,* проведенной из данной точки к плоскости, называется любой не перпендикулярный плоскости отрезок, с одним концом в данной точке и другим концом на плоскости (рис. 16.1*b*). Конец отрезка, лежащий на плоскости называется *основанием* наклонной (на рис. 16.1*b* точка C). Отрезок, соединяющий концы перпендикуляра и наклонной проведенной из одной точки называется *проекцией* наклонной (на рис. 16.1*b* отрезок BC).

Теорема о трех перпендикулярах. Прямая на плоскости, проведенная перпендикулярно проекции наклонной, перпендикулярна и наклонной. Обратно, прямая на плоскости перпендикулярная к наклонной, перпендикулярна и к проекции наклонной. (рис. 16.2).

Если плоскость, перпендикулярная прямой пересечения двух данных плоскостей пересекает эти плоскости под перпендикулярными прямыми, то эти данные плоскости называются *перпендикулярными плоскостями.*

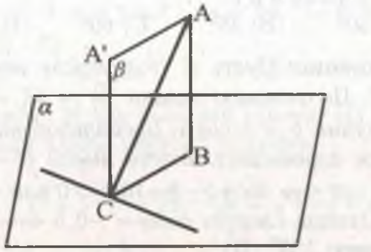


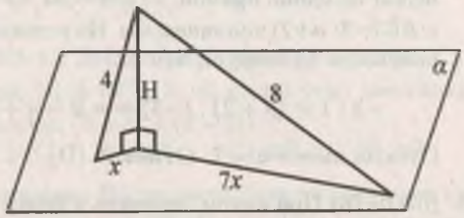
Рисунок 16.2

Прямые, не пересекающиеся и не лежащие в одной плоскости называются *скрещивающимися.* Отрезок, с концами на двух скрещивающихся прямых называется их *общим перпендикуляром*, если он перпендикулярен каждому из них. Длина общего перпендикуляра скрещивающихся прямых называется *расстоянием* между ними. Это расстояние равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

1. (97-10-49) Из одной точки проведены две наклонные длиной 4 и 8. Отношение проекций наклонных равно 1:7. Найдите расстояние от точки до плоскости.

   A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{15}$ D) $2,5$

   Решение Каждая наклонная, ее проекция и перпендикуляр, опущенный из этой точки составляют прямоугольный треугольник. Если проекция первой наклонной x, то проекция второй наклонной будет $7x$. Пусть расстояние от точки до плоскости H. Из теоремы Пифагора имеем $H^2 = 4^2 - x^2 = 8^2 - (7x)^2$. Отсюда решив уравнение $16 - x^2 = 64 - 49x^2$ находим $x = 1$. Тогда $H^2 = 16 - x^2 = 15$ и $H = \sqrt{15}$. **Ответ:** $\sqrt{15}$ (C).

   Вывод. *Разность квадратов наклонных, проведенных из одной точки равна разности квадратов их проекций.*

2. (97-3-49) Из точки к плоскости проведены две наклонные длиной 23 и 33. Найдите расстояние от точки до плоскости, если проекции наклонных относятся 2 : 3.

   A) 12 B) $6\sqrt{5}$ C) 11 D) 9

3. (96-7-49) Из точки к плоскости проведены две наклонные, длины которых относятся 2 : 1, а их проекции равны 7 и 1. Найдите расстояние от данной точки до плоскости.

   A) 4 B) $5\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{2}$ D) $\sqrt{15}$

4. (97-5-52) Из точки к плоскости проведены две наклонные. Отношение длин наклонных равно 1 : 2, а их проекции равны 1 и 7. Найдите длины наклонных.
A) 2; 4 B) 3; 6 C) 4; 8 D) 5; 10

5. (97-7-49) Из точки к плоскости проведены наклонные, длины которых равно 5 : 6, а их проекции равны 4 и $3\sqrt{3}$. Найдите расстояние от данной точки до плоскости.
A) 2, 5 B) 3 C) $2\sqrt{3}$ D) 1, 8

6. (97-9-52) Из точки к плоскости проведены две наклонные, которые относятся как 3 : 5, а их проекции равны $\sqrt{33}$ и 17. Найдите длины этих наклонных.
A) 2; 10 B) 3; 5 C) 3; 15 D) 12; 20

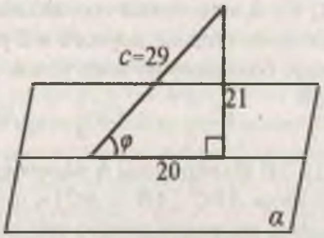
7. (99-4-51) Из данной точки к плоскости проведены наклонные разность длин которых равна 6. Проекции наклонных равны 27 и 15. Найдите расстояние от данной точки до плоскости.
A) 32 B) 36 C) 44 D) $30\sqrt{2}$

8. (09-01-24) Из одной точки к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная. Проекция наклонной равна 20, а длина перпендикуляра равна 21. Найдите угол между наклонной и перпендикуляром.
A) $\arcsin\dfrac{20}{29}$ B) $\arccos\dfrac{20}{21}$
C) $\operatorname{arcctg}\dfrac{21}{29}$ D) $\arcsin\dfrac{20}{21}$

Решение: Длина наклонной равна

$$c = \sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{841} \Longleftrightarrow c = 29.$$

Если угол между наклонной и перпендикуляром φ, тогда из рисунка $\sin\varphi = \dfrac{20}{29}$. Отсюда $\varphi = \arcsin\dfrac{20}{29}$. **Ответ:** $\arcsin\dfrac{20}{29}$ (A).



9. (96-10-52) Угол между перпендикуляром и наклонной к плоскости равен 60^0. Длина перпендикуляра равна 20. Найдите длину наклонной.
A) $20\sqrt{2}$ B) $10\sqrt{3}$ C) 40 D) $20\sqrt{3}$

10. (96-1-49) Угол между перпендикуляром и наклонной к плоскости равен 30^0, а длина перпендикуляра равна 10. Найдите длину наклонной.
A) 20 B) $10\sqrt{3}$ C) $20\sqrt{3}$ D) $\dfrac{20}{\sqrt{3}}$

11. (96-3-38) Из одной точки к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная. Длина наклонной 10 см, а перпендикуляра 6 см. Чему равна проекция наклонной на плоскость?
A) 4 B) 2 C) 8 D) 5

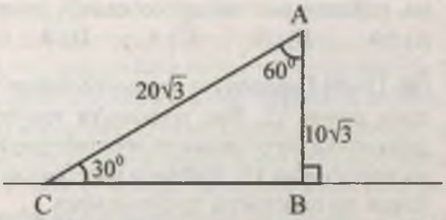
12. (96-3-49) Дана плоскость α и не пересекающий ее отрезок $AB = 13$ см. Найдите синус угла наклона прямой, содержащей отрезок AB и плоскостью α, если расстояния от концов отрезка до плоскости α равны $AA_1 = 5$ см и $BB_1 = 8$ см.
A) $\dfrac{5}{13}$ B) $\dfrac{8}{13}$ C) $\dfrac{2}{13}$ D) $\dfrac{3}{13}$

13. (96-12-51) Дана плоскость α и не пересекающий ее отрезок $AB = 11$ см. Найдите синус угла между прямой, содержащей отрезок AB, и плоскостью α, если расстояния от концов отрезка до плоскости α равны $AA_1 = 4$ см и $BB_1 = 7$ см.
A) $\dfrac{3}{11}$ B) $\dfrac{4}{11}$ C) $\dfrac{5}{11}$ D) $\dfrac{6}{11}$

14. (02-2-41) Из одной точки к плоскости проведены перпендикуляр и две наклонные. Длины наклонных равны 41 и 50, а отношение их проекций равно 3 : 10. Найдите длину перпендикуляра.
A) 40 B) 32 C) 38 D) 36

15. (96-9-102) Угол между перпендикуляром и наклонной к плоскости равен 60^0, а длина наклонной равна $20\sqrt{3}$. Найдите длину перпендикуляра.
A) 10 B) 40 C) $10\sqrt{3}$ D) $5\sqrt{3}$

Решение: Построим соответствующий рисунок. Из свойств прямоугольного треугольника, т.е. из того, что катет лежащий против угла 30^0 равен половине гипотенузы получим, что длина перпендикуляра AB равна $AB = 0,5AC = 10\sqrt{3}$ (см. рисунок). **Ответ:** $10\sqrt{3}$ (C).



16. (96-11-39) Из одной точки к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная. Длина наклонной равна 5 см, а длина перпендикуляра 4 см. Чему равна длина проекции наклонной на плоскость?
A) 2 B) 3 C) 2, 5 D) 1

17. (96-12-40) Из одной точки к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная. Длина наклонной равна 5 см, а длина перпендикуляра 3 см. Чему равна длина проекции наклонной на

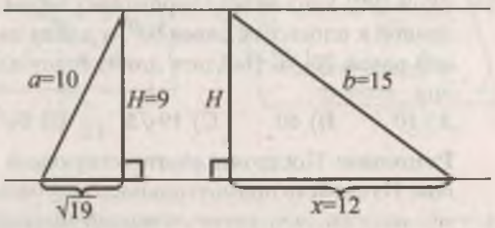
плоскость?
A) 2 B) $2\frac{1}{3}$ C) $1,5$ D) 4

18. (97-5-51) Через конец A отрезка AB проведена плоскость. Через другой конец B и точки C этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость в точках B_1 и C_1 соответственно. Найдите длину отрезка BB_1, если $CC_1 = 15$ и $AC : BC = 2 : 3$.
A) 10 B) $25,5$ C) $37,5$ D) $30,5$

19. (97-9-51) Через конец A отрезка AB проведена плоскость. Через другой конец B и точки C этого отрезка проведены параллельные прямые пересекающие плоскость в точках B_1 и C_1 соответственно. Найдите длину отрезка BB_1, если $AB = 8$ и $CC_1 : AC = 3 : 4$.
A) 3 B) 5 C) 4 D) 6

20. (98-3-48) Концы двух отрезков длиной 10 и 15 лежат в параллельных плоскостях. Если проекция первого отрезка равна $\sqrt{19}$ см, то чему равна проекция второго отрезка?
A) 12 B) 11 C) 10 D) 13

Решение: По теореме Пифагора расстояние между плоскостями равно $H = \sqrt{10^2 - 19} = 9$. Еще раз из теоремы Пифагора
$b_{pr} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$. **Ответ:** 12 (A).



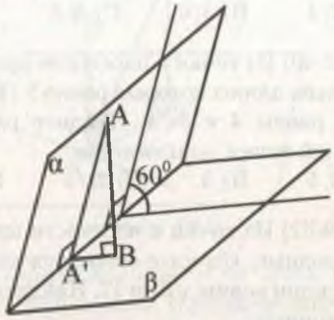
21. Телефонный кабель длиной 15 м проведен от столба высотой 8 м к дому на высоту 20 м. Предполагая, что кабель натянут прямолинейно, найдите расстояние от столба до дома.
A) 10 B) 12 C) 8 D) 9

22. (98-12-49) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12. Вне плоскости треугольника дана точка, отстоящая от вершин треугольника на расстоянии 10. Найдите расстояние от этой точки до плоскости треугольника.
A) 8 B) 6 C) 10 D) $\sqrt{44}$

23. (02-1-74) Сторона правильного треугольника равна 3 м. Найдите расстояние от точки вне плоскости, отстоящей от вершин треугольника на расстоянии 2 м, до плоскости треугольника.
A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) $1,5$ D) $\sqrt{2}$

24. (99-7-41) Угол между плоскостями α и β равен 60^0. Расстояние от точки A на плоскости α до линии пересечения плоскостей равно 3. Найдите расстояние от точки A до плоскости β.
A) 2 B) 1 C) 3 D) $1,5\sqrt{3}$

Решение: По условию задачи $AA' = 3$ и $\angle A' = 60^0$. Из точки A проводим перпендикуляр к плоскости β (см. рисунок).



Основание перпендикуляра обозначим через B. Тогда $\angle ABA' = 90^0$. Из треугольника ABA' получим $\sin 60^0 = \frac{AB}{AA'}$. Отсюда

$$AB = AA' \sin 60^0 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,5\sqrt{3}.$$

Ответ: $1,5\sqrt{3}$ (D).

25. (00-5-60) Стороны треугольника равны 10, 17 и 21. Через вершину большего угла к плоскости треугольника проведен перпендикуляр длиной 15. Найдите расстояние от конца перпендикуляра, не лежащего в плоскости до большей стороны треугольника.
A) 17 B) 16 C) 18 D) 20

26. (00-9-8) Площадь прямоугольника равна 72. Ее ортогональной проекцией на плоскост является квадрат. Угол между плоскостями квадрата и прямоугольника равен 60^0. Найдите периметр квадрата.
A) 30 B) 26 C) 20 D) 24

27. (00-10-51) Отрезки, расположенные между двумя параллельными плоскостями относятся как $2 : 3$, а с плоскостями составляют углы, один из которых больше другого в 2 раза. Найдите косинус большего из этих углов.
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{8}$

28. (07-12-34) Из вершины A равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) к плоскости треугольника проведен перпендикуляр AD длиной 32. Расстояние от точки D до стороны BC равно 40. Чему равна высота треугольника ABC проведенная к стороне BC?
A) 12 B) 24 C) 20 D) 14

29. (07-16-10) К плоскости проведены наклонная и перпендикуляр. Угол между наклонной и плоскостью равен $\arccos 0,96$, а проекция наклонной на плоскость равна 72. Найдите длину перпендикуляра.
A) 42 B) $20\frac{4}{25}$ C) $10\frac{2}{25}$ D) 21

16.2 Система координат в пространстве

Возьмем три перпендикулярные прямые x, y, z пересекающиеся в одной точке O (рис. 16.3a). Через каждую пару прямых проведём плоскости. Плоскость, проходящая через прямые x и y называется плоскостью xy. Две другие плоскости соответственно называются xz и yz. Прямые x, y, z называются *координатными осями*. Точнее, прямая x – называется осью абсцисс, y – осью ординат, z – осью аппликат. Их точка пересечения O называется *началом координат*, а плоскости xy, yz и xz *координатными плоскостями*. Точка O разделяет каждую координатную ось на две полуоси. Одну из них назовем положительной, другую отрицательной полуосями.

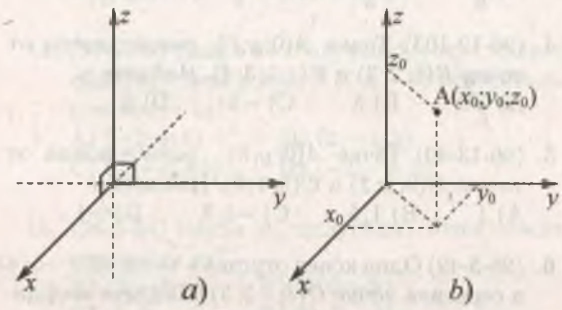


Рисунок16.3

Теперь возьмем произвольную точку A и из нее проведём перпендикуляр к плоскости xy. Из основания перпендикуляра к оси x опустим перпендикуляр, он пересекает ось x в некоторой точке x_0. *Координатой* x точки A называется число, модуль которого равен длине отрезка Ox_0, это число положительно, если точка x_0 лежит на положительной полуоси прямой x и отрицательно, если лежит на отрицательной полуоси. Если точка x_0 совпадает с точкой O, то принимаем $x_0 = 0$. Точно также определяются координаты y, z точки A. Координаты точки записываем в скобках рядом с буквенным обозначением точки: $A(x; y; z)$. Иногда просто пишут $(x; y; z)$.

Понятие преобразования в пространстве определяется точно также, как в плоскости. Точно также как в плоскости определяются симметрия относительно точки и прямой, а также понятие гомотетии. В пространстве кроме симметрии относительно точки и прямой рассматривается преобразование симметрии относительно плоскости. Это преобразование состоит в следующем: пусть α- произвольная плоскость. Из точки X к плоскости α опустим перпендикуляр XO и в продолжении точки O отложим отрезок OX' равный отрезку XO. Это преобразование, переводящее точку X в *симметричную* ей точку X' называется *симметричным преобразованием* относительно плоскости α. Если симметричное преобразование относительно плоскости α переводит фигуру на себя, то фигура называется *симметричной* относительно плоскости α, а плоскость α называется *плоскостью симметрии*.

Если при преобразовании фигуры F ее произвольная точка $(x; y; z)$ переходит в точку $(x+a; y+b; z+c)$, то такое преобразование называется *параллельным переносом*. Здесь числа a, b и c одинаковы для всех точек $(x; y; z)$. Параллельный перенос задается формулой

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c.$$

Эта формула выражает координаты точки x', y', z' в которую при параллельном переносе переходит точка $(x; y; z)$.

Две пересекающиеся прямые составляют смежные и вертикальные углы. Вертикальные углы равны, а смежные углы дополняют друг друга до 180^0. Меньший из смежных углов называется *углом между прямыми*. Угол между перпендикулярными прямыми по определению равен 90^0. Угол между параллельными прямыми будем считать равным нулю. *Углом между накрест лежащими прямыми* называется угол между параллельными им прямыми. Этот угол не зависит от выбора параллельных прямых.

Угол между прямой и плоскостью. Пусть α – плоскость и a – прямая, пересекающая ее (рис. 16.4). Основания перпендикуляров, опущенных из точек прямой a к плоскости α составляют прямую (рис. 16.4). Эту прямую обозначим через b. Прямая b называется *проекцией* прямой a на плоскость α. Угол между прямой и ее проекцией называется *углом между прямой и плоскостью* (на рис. 16.4 угол φ). Если прямая и плоскость параллельны, то угол между ними считается равным нулю, а если перпендикулярны, то равным 90^0.

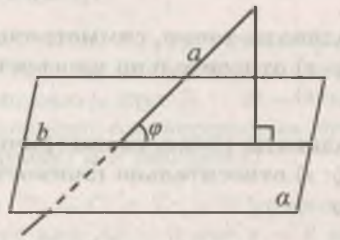


Рисунок 16.4

Угол между плоскостями. Угол между параллельными плоскостями считается равным нулю. Предположим, что заданные плоскости пересекаются (рис. 16.5). К линии их пересечения проведём перпендикулярную плоскость. Эта плоскость пересекает заданные плоскости по двум прямым (на рис. 16.5 прямые b и c). Угол между этими прямыми называется *углом между заданными плоскостями* (на рис. 16.5 угол φ). Угол между плоскостями не зависит от выбора секущей плоскости.

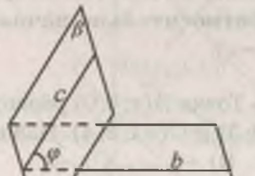


Рисунок 16.5

Ортогональной проекцией фигуры на плоскость называется параллельная проекция фигуры в направлении перпендикулярном плоскости. Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскости равна произведению площади многоугольника на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскости проекции (рис. 16.6).

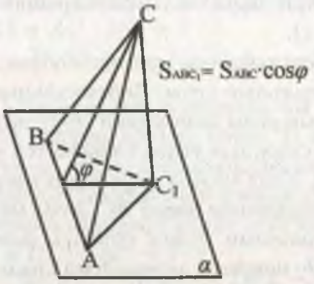


Рисунок 16.6

Приводим следующие правила, часто используемые при решении задач.

1. **Координаты середины отрезка с вершинами в точках $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$:**
$$C\Big(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\Big). \qquad (16.1)$$

2. **Длина отрезка**
$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

3. **Координаты точки, симметричной точке $A(x;\ y;\ z)$ относительно плоскости xy : $(x;\ y;\ -z)$.**

4. **Координаты точки, симметричной точке $A(x;\ y;\ z)$ относительно плоскости yz: $(-x;\ y;\ z)$.**

5. **Координаты точки, симметричной точке $A(x;\ y;\ z)$ относительно плоскости xz: $(x;\ -y;\ z)$.**

6. **Координаты точки, симметричной точке $A(x;\ y;\ z)$ относительно оси x: $(x;\ -y;\ -z)$.**

7. **Координаты точки, симметричной точке $A(x;\ y;\ z)$ относительно оси y: $(-x;\ y;\ -z)$.**

8. **Координаты точки, симметричной точке $A(x;\ y;\ z)$ относительно оси z: $(-x;\ -y;\ z)$.**

9. **Координаты точки, симметричной точке $A(x;\ y;\ z)$ относительно начала координат $(-x;\ -y;\ -z)$.**

1. (96-3-107) Точка $A(x;0;0)$ равноудалена от точек $B(1;2;3)$ и $C(-1;3;4)$. Найдите x.
A) -1 B) -2 C) -3 D) 3

Решение: По условию задачи $AB = AC$, т.е.
$$\sqrt{(1-x)^2+2^2+3^2} = \sqrt{(-1-x)^2+3^2+4^2}.$$

Отсюда имеем уравнение
$$(1-x)^2+13 = (-1-x)^2+25.$$

Если раскроем скобки, упростим подобные члены, то получим $-2x = 2x+12$. Решение этого уравнения $x=-3$. **Ответ:** -3 (C).

2. (01-8-50) Найдите длину медианы BD треугольника с вершинами в точках $A(4;5;1)$, $B(2;3;0)$ и $C(2;1;-1)$.
A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2

3. (96-9-42) Точка $A(x;0;0)$ равноудалена от точек $B(0;1;2)$ и $C(3;1;0)$.Найдите x.
A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{6}{5}$ C) $-\frac{6}{5}$ D) $-\frac{5}{6}$

4. (96-12-103) Точка $A(0;y;0)$ равноудалена от точек $B(1;2;3)$ и $C(-1;3;4)$. Найдите y.
A) -6 B) 5 C) -5 D) 6

5. (96-13-49) Точка $A(0;y;0)$ равноудалена от точек $B(0;2;2)$ и $C(3;1;0)$. Найдите y.
A) 1 B) 1,5 C) $-1,5$ D) -1

6. (98-3-49) Один конец отрезка в точке $A(1;-5;4)$, а середина точке $C(4;-2;3)$. Найдите координаты второго конца отрезка.
A) $(6;5;3)$ B) $(7;-1;2)$
C) $(7;1;2)$ D) $(5;4;6)$

Решение: Пусть второй конец отрезка $B(x;y;z)$, тогда по формуле (16.1) имеем
$$4 = \frac{1+x}{2},\ -2 = \frac{-5+y}{2},\ 3 = \frac{4+z}{2}.$$

Отсюда получим $x=7,\ y=1,\ z=2$. **Ответ:** $(7;1;2)$ (C).

7. Один конец отрезка находится в точке $A(2;-5;-4)$, а середина в начале координат. Найдите координаты второго конца отрезка.
A) $(-2;5;4)$ B) $(-2;5;-4)$
C) $(-2;5;4)$ D) $(2;5;4)$

8. Найдите координаты середины отрезка, если один его конец в точке $A(2;6;8)$, а другой конец в начале координат.
A) $(-1;3;4)$ B) $(-2;3;4)$
C) $(1;\ 3;\ 4)$ D) $(1;-3;4)$

9. Найдите координаты середины отрезка, если концы его в точках $A(1;-2;4)$ и $B(3;-4;2)$.
A) $(2;-4;3)$ B) $(3;-3;3)$
C) $(2;-3;3)$ D) $(2;-3;4)$

10. (01-9-5) Даны точки $A(2;-1;0)$ и $B(-2;3;2)$. Найти расстояние от начала координат до середины отрезка AB.
A) $\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 2

11. (96-3-106) Найти точку, симметричную точке $A(1;2;3)$ относительно плоскости xz.

A) $(-1;2;3)$ B) $(-1;-2;3)$
C) $(1;2;-3)$ D) $(1;-2;3)$

Решение: По 5-правилу,точкой, симметричной к точке $A(1;2;3)$ относительно плоскости xz будет точка $(1;-2;3)$. **Ответ:** $(1;-2;3)$ (D).

12. (96-12-110) Найти точку, симметричную точке $(1;2;3)$ относительно плоскости xy.
A) $(-1;2;3)$ B) $(-1;-2;3)$
C) $(1;2;-3)$ D) $(1;-2;3)$

13. (96-13-48) Найти точку, симметричную точке $(1;2;3)$ относительно плоскости yz.
A) $(-1;2;3)$ B) $(-1;-2;3)$
C) $(1;2;-3)$ D) $(1;-2;3)$

14. (97-1-40) Какая из следующих точек является симметричной точке $K(2;4;-5)$ относительно плоскости xz?
A) $(-2;4;5)$ B) $(2;-4;5)$
C) $(2;-4;-5)$ D) $(-2;-4;5)$

15. (98-2-54) Какая из следующих точек лежит в плоскости yz?
A) $(2;-3;0)$ B) $(2;0;-5)$
C) $(1;0;-4)$ D) $(0;9;-7)$

16. (98-9-51) Какая из следующих точек лежит в плоскости xz?
A) $(-4;3;0)$ B) $(0;-7;0)$
C) $(2;0;-8)$ D) $(2;-4;6)$

17. (01-2-54) Найти точку, симметричную точке $(2;-3;5)$ относительно оси y.
A) $(-2;3;-5)$ B) $(-2;3;5)$
C) $(-2;-3;-5)$ D) $(-2;-3;5)$

Решение: По 7-правилу, точкой, симметричной точке $(2;-3;5)$ относительно оси y будет $(-2;-3;-5)$. **Ответ:** $(-2;-3;-5)$ (C).

18. Найти точку, симметричную точке $(2;-3;5)$ относительно оси x.
A) $(-2;3;-5)$ B) $(-2;3;5)$
C) $(2;3;-5)$ D) $(-2;-3;5)$

19. Найти точку, симметричную точке $(2;-3;5)$ относительно оси z.
A) $(-2;3;-5)$ B) $(-2;3;5)$
C) $(-2;-3;-5)$ D) $(-2;-3;5)$

20. (96-9-41) Найти точку, симметричную точке $A(1;2;3)$ относительно начала координат.
A) $(-1;2;3)$ B) $(-1;-2;3)$
C) $(1;2;-3)$ D) $(-1;-2;-3)$

21. Найти точку, симметричную точке $A(-1;2;-3)$ относительно начала координат.
A) $(-1;2;3)$ B) $(-1;-2;3)$
C) $(1;-2;3)$ D) $(-1;-2;-3)$

16.2.1 Уравнение плоскости и прямой

Уравнением фигуры в системе координат пространства называется уравнение с тремя неизвестными,которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры. Обратно, любая тройка $(x;\ y;\ z)$ удовлетворяющая этому уравнению дает координатами некоторой точки фигуры.

Общее уравнение плоскости в пространстве:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (16.2)$$

Геометрическое место точек решений уравнения (16.2) в пространстве определяет некоторую плоскость α. Вектор $\vec{n}$ с координатами $(A;\ B;\ C)$ называется *нормалью плоскости* α, так как определяемой вектор $\vec{n}(A;\ B;\ C)$ перпендикулярен плоскости α с уравнением (16.2).

Приводим сведения о частных случаях 1-4 уравнения (16.2) и взаимного расположения плоскости и прямой:

1. **При $D = 0$ уравнение (16.2) имеет вид $Ax + By + Cz = 0$ и плоскость проходит через начало координат.**

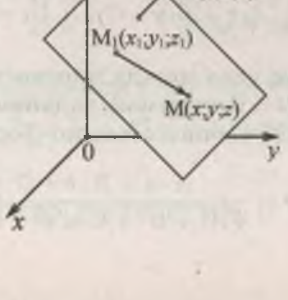
2. **При $C = 0$ уравнение (16.2) имеет вид $Ax + By + D = 0$, и плоскость параллельна оси z (аппликат), при $B = 0$ имеет вид $Ax + Cz + D = 0$, и плоскость параллельна оси y (ординат), при $A = 0$ имеет вид $By + Cz + D = 0$ и плоскость параллельна оси x (абсцисс).**

3. **При $C = D = 0$ уравнение (16.2) имеет вид $Ax + By = 0$, и проходит через ось z (апликат), при $B = D = 0$ и $A = D = 0$ проходит соответственно через оси y (ординат) и x (абсцисс).**

4. **При $B = C = D = 0$ уравнение (16.2) имеет вид $Ax = 0 \iff x = 0$ и является уравнением координатной плоскости yz, а в случаях $B = C = D = 0$ и $A = B = D = 0$ имеет вид $By = 0 \iff y = 0$ и $Cz = 0 \iff z = 0$, которые являются уравнениями координатных плоскостей xz и xy.**

5. **Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}(a;\ b;\ c)$ имеет вид (см. рисунок)**

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0. \qquad (16.3)$$



6. **Уравнение плоскости в отрезках:**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (16.4)$$

7. **Угол между плоскостями, заданных общими уравнениями** $Ax + By + Cz + D = 0$ **и**

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad (16.5)$$

равен углу φ **между векторами** $\vec{a}(A;\ B;\ C)$ **и** $\vec{a_1}(A_1;\ B_1;\ C_1)$ **т.е. справедливо равенство:**

$$\cos\varphi = \frac{|AA_1 + BB_1 + CC_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}. \qquad (16.6)$$

8. **Условие параллельности плоскостей, заданных уравнениями (16.2) и (16.5):**

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}. \qquad (16.7)$$

9. **Условие перпендикулярности плоскостей, заданных уравнениями (16.2) и (16.5)**

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0. \qquad (16.8)$$

10. **Формула расстояния от данной точки** $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ **до плоскости, заданной уравнением** $Ax + By + Cz + D = 0$**:**

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (2.9)$$

11. **Уравнение прямой, проходящей через точку** $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ **и параллельной вектору** $\vec{P}(a;\ b;\ c)$ **имеет вид**

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \qquad (16.10).$$

Уравнение (16.10) называется ***каноническим уравнением*** **прямой. А вектор** $\vec{P}(a;\ b;\ c)$ **называется ее** ***направляющим вектором.***

12. **Уравнение прямой, проходящей через две данные точки** $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ **и** $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$**:**

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (16.11)$$

13. **Прямая в пространстве может быть задана в виде пересечения двух плоскостей:**

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \end{cases} \qquad (16.12)$$

14. **Синус угла между плоскостью** $Ax + By + Cz + D = 0$ **и прямой, заданной уравнением (16.10) вычисляется по формуле:**

$$\sin\theta = \frac{A\cdot a + B\cdot b + C\cdot c}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (16.13)$$

15. **Условие параллельности плоскости** $Ax + By + Cz + D = 0$ **и прямой, заданной уравнением (16.10):**

$$A\cdot a + B\cdot b + C\cdot c = 0. \qquad (16.14)$$

16. **Условие перпендикулярности плоскости** $Ax + By + Cz + D = 0$ **и прямой, заданной уравнением (16.10):**

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}. \qquad (16.15)$$

17. **Координаты точки пересечения плоскости** $Ax+By+Cz+D = 0$ **и прямой, заданной уравнением (16.10) являются решением системы уравнений**

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \dfrac{x-x_1}{a} = \dfrac{y-y_1}{b} \\ \dfrac{y-y_1}{b} = \dfrac{z-z_1}{c} \end{cases} \qquad (16.16)$$

и обратно.

18. **Условие, при котором прямые заданные уравнениями (16.10) и**

$$\frac{x-x_2}{a_1} = \frac{y-y_2}{b_1} = \frac{z-z_2}{c_1} \qquad (16.17)$$

лежат в одной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (16.18)$$

Левая часть равенства (16.18) является определителем третьего порядка $(x_1-x_2)bc_1 + (y_1-y_2)ca_1 + (z_1-z_2)ab_1 - (z_1-z_2)ba_1 - (y_1-y_2)ac_1 - (x_1-x_2)cb_1$.

1. Укажите уравнение плоскости, проходящей через начало координат.
   A) $x+y-z-1=0$ B) $x+3y+9z-1=0$
   C) $x+y+z=0$ D) $2x-2y+5z-5=0$

Решение: По 1- правилу в уравнении плоскости, проходящей через начало координат необходимо и достаточно, чтобы $D=0$. Итак, приведенная в ответе C плоскость $x+y+z=0$ проходит через начало координат. **Ответ:** $x+y+z=0$ (C).

2. Укажите уравнение плоскости, проходящей через начало координат.
   A) $x+y-1=0$ B) $x+3y+9z-1=0$
   C) $x+y+1=0$ D) $2x-2y+5z=0$

3. Укажите уравнение плоскости, параллельной оси абсцисс.
   A) $y-z-1=0$ B) $x+3y+9z-1=0$
   C) $x+y+1=0$ D) $2x-2y+5z=0$

4. Укажите уравнение плоскости, параллельной оси ординат.
A) $y - z - 1 = 0$ B) $x + 9z - 1 = 0$
C) $x + y + 1 = 0$ D) $2x - 2y + 5 = 0$

5. Укажите уравнение плоскости, параллельной оси аппликат.
A) $y - z - 1 = 0$ B) $x + 3y + 9z - 1 = 0$
C) $x + y + 1 = 0$ D) $2x - 2y + 5 = 0$

6. Укажите уравнение плоскости, проходящей через ось аппликат.
A) $y - z - 1 = 0$ B) $x + 3y + 9z - 1 = 0$
C) $x + y + 1 = 0$ D) $x - y = 0$

Решение: Для того, чтобы плоскость проходила через ось аппликат необходимо и достаточно, чтобы в уравнении плоскости выполнялось условие $C = D = 0$. Итак, плоскость $x - y = 0$, указанная в ответе D проходит через начало координат **Ответ:** $x - y = 0$ (D).

7. Укажите уравнение плоскости проходящей через оси абсцисс.
A) $y - z = 0$ B) $y + 3z = 0$
C) $x + y = 0$ D) $2x - 2y + 2z = 0$

8. Укажите уравнение плоскости, проходящей через ось ординат.
A) $y - z = 0$ B) $x + 9z = 0$
C) $x + y = 0$ D) $2x - 2y + 5 = 0$

9. Укажите уравнение плоскости xy.
A) $y = 0$ B) $z = 0$
C) $x = 0$ D) $x - y = 0$

10. Укажите уравнение плоскости xz.
A) $y = 0$ B) $z = 0$
C) $x = 0$ D) $x - z = 0$

11. Укажите уравнение плоскости yz.
A) $y = 0$ B) $z = 0$
C) $x = 0$ D) $z - y = 0$

12. Найдите угол между плоскостями $x - 2y + 2z + 1 = 0$ и $x + z - 7 = 0$.
A) 30^0 B) 60^0 C) 90^0 D) 45^0

Решение: Угол между плоскостями находится по формуле (16.7), т.е.

$$\cos\varphi = \pm\frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}}.$$

Отсюда имеем $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ или $\varphi = 45^0$.

Ответ: 45^0 (D).

13. Найдите уравнение плоскости, проходящей через ось z и составляющей с плоскостью $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ угол в 60^0.
A) $x - 3y = 0$ B) $3x + y = 0$
C) $x + y = 0$ D) $x + 3y = 0$

14. При каком значении b плоскости $x + y + 3z + 1 = 0$ и $2x + by + z + 7 = 0$ перпендикулярны?
A) $b = -3$ B) $b = 0$ C) $b = 3$ D) $b = -5$

15. При каком значении b плоскости $x + y + 3z + 1 = 0$ и $2x + by + 6z + 7 = 0$ перпендикулярны.
A) $b = -3$ B) $b = 0$ C) $b = 3$ D) $b = 2$

16. Найдите угол между плоскостью $x + 2y - 3z + 1 = 0$ и прямой $x = y = z$.
A) 0^0 B) 30^0 C) 60^0 D) 90^0

17. Найдите угол между плоскостью $x + y + z - 7 = 0$ и прямой $x = y = z$.
A) 0^0 B) 30^0 C) 60^0 D) 90^0

18. Найдите точку, лежащую на плоскости $x + 2y + 4z - 7 = 0$.
A) $(1; 1; 1)$ B) $(1; 2; 3)$ C) $(1; 3; 4)$ D) $(1; 2; 4)$

Решение: Если точка $M(x_0; y_0; z_0)$ лежит на плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости, т.е. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Для точки $(1; 1; 1)$, указанной в ответе A выполняется равенство $1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 7 = 0$. Итак, точка $(1; 1; 1)$ лежит на плоскости $x + 2y + 4z - 7 = 0$. **Ответ:** $(1; 1; 1)$ (A).

19. Найдите точку, лежащую на плоскости $2x - 3y + 2z + 2 = 0$.
A) $(2; 1; 1)$ B) $(1; 2; 1)$ C) $(1; 1; 2)$ D) $(1; 2; 2)$

20. Найдите расстояние от точки $M(2; 3; 4)$ до плоскости $2x + 2y + z - 2 = 0$.
A) 1 B) 3 C) 4 D) 2

21. Найдите координаты направляющего вектора прямой $x = y = z$.
A) $(1; 1; 1)$ B) $(1; 2; 3)$
C) $(1; 3; 4)$ D) $(1; 2; 4)$

22. Найдите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $P(1; 2; 3)$.
A) $x = 2y = 3z$ B) $6x = 3y = 2z$
C) $3x = 2y = z$ D) $6x = 2y = 3z$

23. При каких значениях c прямая $x = y = cz$ составляет с плоскостью xy угол 45^0?
A) $\dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$ B) $\dfrac{2 \pm \sqrt{17}}{4}$
C) $\dfrac{1 + \sqrt{17}}{4}$ D) $\dfrac{1 - \sqrt{17}}{4}$

24. Укажите уравнение плоскости, параллельной прямой $x = y = z$ и проходящей через начало координат.
A) $x + 3y - 4z = 0$ B) $x - 3y - 4z = 0$
C) $x + 3y - 4z = 1$ D) $3x + 3y - 6z = 1$

25. Найдите координаты точки пересечения плоскости $x + 2y + 2z - 20 = 0$ и прямой $\dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y + 1}{4} = \dfrac{z}{5}$.
A) $(3; 4; 5)$ B) $(4; 3; 5)$ C) $(5; 3; 4)$ D) $(5; 4; 3)$

Решение: Из системы (16.17) имеем

$$\begin{cases} x+2y+2z-20=0 \\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{4} \\ \dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{5}. \end{cases}$$

Решив эту систему методом подстановки, получим $x=4$, $y=3$ и $z=5$. **Ответ:** $(4;3;5)$ (B).

26. Найдите точку пересечения плоскости $x+2y+2z-15=0$ и прямой $x-2=y+1=z-5$.
A) $(3;0;6)$ B) $(2;3;4)$
C) $(6;0;3)$ D) $(3;4;2)$

27. Найдите уравнение прямой, параллельной плоскости $x+2y+3z-15=0$.
A) $-5x=y=z$ B) $6(x-2)=3y=z-3$
C) $x=2y=3z$ D) $x-5=3y-7=2z-3$

28. Найдите уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $x+2y+3z-15=0$.
A) $6x=3y=2z$ B) $6(x-2)=3y=z-3$
C) $x=2y=3z$ D) $x-5=3y-7=2z-3$

29. При каком значении a прямые $x=2y=2z$ и $x-1=a(y-1)=(z-1)$ лежат на одной плоскости?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

16.3 Векторы в пространстве

Координаты вектора. *Вектором* в пространстве, как и на плоскости, называется направленный отрезок. Основные понятия для векторов в пространстве: модуль вектора (длина), направление вектора, равенстве векторов определяются как на плоскости. Координатами вектора с началом и концом в точках $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ называются числа $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$. Соответствующие координаты равных векторов равны и обратно. Это дает основу для выражения вектора через его координаты. Вектор $\vec{a}$ с координатами $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ записывается в виде $\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$.

Вектор с координатами (1; 0; 0) обозначается через $\vec{i}$, а векторы с координатами (0; 1; 0) и (0; 0; 1) соответственно через $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Они называются *единичными векторами*, направленными вдоль координатных осей. Вектор $\vec{a}$ с координатами $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ по единичным векторам разлагается по формуле:

$$\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}. \tag{16.19}$$

Теперь приведём основные правила выполнения действий над векторами

1. **Координаты вектора $\vec{AB}$ с началом в точке $A(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и концом в точке $B(b_1;\ b_2;\ b_3)$ равны $\vec{AB}=(b_1-a_1;\ b_2-a_2;\ b_3-a_3)$.**

2. **Сложение и вычитание векторов $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$:** $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)\pm\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)=\vec{c}(x_1\pm x_2;\ y_1\pm y_2;\ z_1\pm z_2)$.

3. **Умножение вектора на число:**
$$\lambda\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)=\vec{b}(\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1).$$

4. **Длина вектора $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ равна:**
$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.$$

5. **Тождество параллелограмма:**
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2).$$

6. **Скалярным произведением векторов $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ называется:**
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

7. **Если известны длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и угол между ними α, то скалярное произведение равно: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$. В частности $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.**

8. **Косинус угла между векторами $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ равен**
$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}.$$

9. **Если известны длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и их скалярное произведение, то угол между этими векторами находится по формуле**
$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

10. **Условие перпендикулярности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ или** $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

11. **Условие коллинеарности ненулевых векторов $a(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $b(x_2;\ y_2;\ z_2)$:**
$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1} \quad \text{или} \quad \vec{a}=\lambda\vec{b},\ \ \lambda\neq 0.$$

12. **Медиана AD треугольника ABC:** $\vec{AD}=\dfrac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$.

13. **Координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами в точках $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C(x_3;\ y_3;\ z_3)$:**
$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3};\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right).$$

1. (96-11-52) Найдите координаты начала вектора $\vec{a}(1;-2;3)$, если конец его в точке $B(2;0;4)$.
A) $(1;2;1)$ B) $(-1;2;1)$
C) $(1;-2;1)$ D) $(1;2;-1)$

Решение: Если точка $A(x;y;z)$-начало вектора $\vec{a}(1;-2;3)$, тогда по 1-правилу,
$$2-x=1,\ \ 0-y=-2,\ \ 4-z=3.$$
Отсюда имеем $x=1$, $y=2$, $z=1$. **Ответ:** $(1;2;1)$ (A).

2. (96-12-54) Найдите координаты начала вектора $\vec{a}(2;-3;1)$, если точка $B(0;4;2)$.
A) $(2;7;1)$ B) $(-2;7;1)$
C) $(-2;-7;1)$ D) $(-2;7;-1)$

3. (97-7-66) Даны точки $A(3;-2;5)$ и $B(-4;5;-2)$. Найдите координаты вектора $\vec{BA}$.
A) $(7;-7;-7)$ B) $(-1;3;3)$
C) $(-7;7;-7)$ D) $(7;-7;7)$

4. (97-9-60) Даны точки $A(-3;0;7)$ и $B(5;-4;3)$. Найдите координаты вектора $\vec{BA}$.
A) $(-8;-4;4)$ B) $(-8;4;4)$
C) $(2;-4;10)$ D) $(8;-4;-4)$

5. (97-10-50) Найдите длину вектора $\vec{n}=\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}(2;0;1)$ и $\vec{b}(1;-2;3)$.
A) 9 B) $6\sqrt{2}$ C) 16 D) 13

Решение: Найдем координаты вектора $\vec{n}$.

$$\vec{a}+2\cdot\vec{b}=\vec{a}(2;0;1)+2\vec{b}(1;-2;3)=$$
$$=\vec{a}(2;0;1)+\vec{c}(2;-4;6)=\vec{n}(4;-4;7).$$

Теперь найдем длину вектора.

$$|\vec{n}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+7^2}=\sqrt{81}=9.$$

Ответ: 9 (A).

6. (96-7-50) Если $\vec{a}(1;2;3)$ и $\vec{b}(4;-2;9)$, то найдите длину вектора $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.
A) $5\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{3}$ C) 13 D) 11

7. (97-3-50) Если $\vec{a}(6;2;1)$ и $\vec{b}(0;-1;2)$, то найдите длину вектора $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$.
A) 13 B) $4\sqrt{13}$ C) 15 D) $6\sqrt{2}$

8. (97-7-50) Если $\vec{a}(-1;2;8)$ и $\vec{b}(3;-2;1)$, то найдите длину вектора $\vec{m}=\vec{b}-\vec{a}$.
A) 8 B) $9\sqrt{2}$ C) $12\sqrt{3}$ D) 9

9. (97-12-23) Длина вектора $\vec{a}(x;1;2)$ равна 3. Найдите значение x.
A) 2 B) ±2 C) 0 D) 1

Решение: Из 4-формулы найдем длину вектора $\vec{a}$

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+1^2+2^2}=3.$$

Отсюда $x^2=4$ или $x=\pm2$. **Ответ:** ±2 (B).

10. (01-2-55) Модуль вектора $\vec{a}(4;-12;z)$ равен 13. Найдите значение z.
A) 3 B) 4 C) -3 D) ±3

11. (98-1-49) При каких значениях z длина вектора $\vec{c}=2\vec{i}-9\vec{j}+z\vec{k}$ равна 11?
A) $z=6$ B) $z=\pm6$ C) $z=4$ D) $z=\pm5$

12. (98-8-49) При каких значениях y длина вектора $\vec{b}=12\vec{i}-y\vec{j}+15\vec{k}$ равна 25?
A) 14 B) 16 C) ±14 D) ±16

13. (06-16-32) При каких значениях m длина вектора $\vec{a}(m-1;m-2;2)$ меньше 3?
A) $-2<m<1$ B) $0<m<3$
C) $-1<m<2$ D) $-1<m<3$

Решение: Длину данного вектора $\vec{a}(m-1;m-2;2)$ найдем по 4-формуле:

$$|\vec{a}|^2=(m-1)^2+(m-2)^2+2^2=2m^2-6m+9.$$

Из условия задачи $|\vec{a}|<3$ имеем $2m^2-6m+9<9$. Решив это неравенство методом интервалов, получим $0<m<3$. **Ответ:** $0<m<3$ (B).

14. (99-3-43) При каких значениях m длина вектора $\vec{a}(m;m+1;2)$ меньше 3?
A) $-2<m<2$ B) $-2<m<1$
C) $-1<m<3$ D) $-1<m<2$

15. (06-14-32, 06-23-32) Найти все значения m, при которых длина вектора $\vec{a}(m-1;\sqrt{5};4)$ меньше 5.
A) $(-1;3)$ B) $(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$
C) $(-2;2)$ D) $(-\infty;-1)\cup(3;\infty)$

16. Найти все значения m, при которых длина вектора $\vec{a}(3;\sqrt{m};4)$ больше 5.
A) $(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$ B) $(2;5)$
C) $(-\infty;-4)\cup(4;\infty)$ D) $(0;\infty)$

Скалярное произведение векторов

17. (96-10-53) Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}(2;-3;4)$ и $\vec{b}(-2;-3;1)$.
A) 9 B) 17 C) 13 D) 4

Решение: Из определения скалярного произведения имеем

$$\vec{a}\vec{b}=2\cdot(-2)+(-3)\cdot(-3)+4\cdot1=9.$$

Ответ: 9 (A).

18. (96-1-50) Найти скалярное произведение векторов $\vec{m}(-1;5;3)$ и $\vec{n}(2;-2;4)$.
A) -24 B) 2 C) 0 D) -10

19. (96-9-103) Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}(0;-4;2)$ и $\vec{b}(-2;2;3)$.
A) 14 B) 2 C) -2 D) 10

20. Найти x, если скалярное произведение векторов $\vec{m}(x;\ 5;\ 3)$ и $\vec{n}(2;\ -2;\ 4)$ равно 6.
A) -2 B) 2 C) 0 D) -1

21. Найти y, если скалярное произведение векторов $\vec{a}(0;\ -4;\ 2)$ и $\vec{b}(-2;\ y;\ 3)$ равно 2.
A) 1 B) 2 C) -2 D) 0

22. (00-4-4) При каком значении m векторы $\vec{a}(1;m;-2)$ и $\vec{b}(m;3;-4)$ перпендикулярны?
A) 2 B) -2 C) 4 D) -4

Решение: Из условия перпендикулярности векторов имеем $\vec{a}\vec{b}=m+3m+(-2)\cdot(-4)=0$. Отсюда $m=-2$. **Ответ:** -2 (B).

23. (97-4-56) При каких значениях x векторы $\vec{a}(2;x;x)$ и $\vec{b}(2;5;x)$ перпендикулярны?
A) $-4;1$ B) $-1;4$ C) $-4;-1$ D) $-1;3$

24. (97-5-53) При каком значении n векторы $\vec{a}(n;-2;1)$ и $\vec{b}(n;n;1)$ перпендикулярны?
A) 3 B) 1 C) 2 D) 5

25. (97-9-53) При каком значении n векторы $\vec{a}(n;-2;4)$ и $\vec{b}(n;4n;4)$ перпендикулярны?
A) 2 B) 5 C) 6 D) 4

26. (98-7-51) При каких значениях n векторы $\vec{a}(n;-2;1)$ и $\vec{b}(n;1;-n)$ перпендикулярны?
A) 0 B) -2 C) 2 D) 2 va -1

27. (97-9-116) При каких значениях x векторы $\vec{a}(8;4;5x)$ и $\vec{b}(2x;x;1)$ перпендикулярны?
A) $2\sqrt{5}$ B) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C) 0 D) $\pm 3\frac{\sqrt{5}}{4}$

28. (98-11-19) Найдите x, если векторы $\vec{m}(2;3;x)$ и $\vec{n}(-1;4;2)$ перпендикулярны.
A) $\sqrt{5}$ B) 5 C) 0 D) -5

29. (96-12-101) $|a| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60^0. При каком значении λ вектор $(\vec{a} + \lambda \cdot \vec{b})$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$?
A) -2 B) $-1,5$ C) $-\frac{8}{3}$ D) $-2,5$

Решение: Из условия перпендикулярности 10 имеем

$$(\vec{a} + \lambda \cdot \vec{b})\vec{a} = |\vec{a}|^2 + \lambda|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 60^0 = 0.$$

Если воспользоваться условием задачи $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, то получим уравнение $16 + 6\lambda = 0$. Решение этого уравнения $\lambda = -\frac{8}{3}$. **Ответ:** $-\frac{8}{3}$ (C).

30. (99-3-41) Если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, то при каких значениях α векторы $\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$ и $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ перпендикулярны?
A) $-\frac{3}{5} < \alpha < \frac{3}{5}$ B) $-\frac{3}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\pm\frac{3}{5}$

31. (01-1-40) При каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i}+m\vec{j}-7\vec{k}$ перпендикулярны?
A) 5 B) -5 C) 4 D) -4

32. (01-3-11) Даны векторы $\vec{a}(1;-1;3)$ и $\vec{b}(4;3;0)$. При каком значении α векторы $2\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$ и $\vec{b}-\vec{a}$ перпендикулярны?
A) $\frac{7}{11}$ B) 2,1 C) $-\frac{6}{13}$ D) $\frac{5}{6}$

33. (02-8-32) Если для векторов $\vec{a}(x;1;-1)$ и $\vec{b}(1;0;1)$ справедливо равенство $(\vec{a}+3\vec{b})^2 = (\vec{a}-2\vec{b})^2$, то найдите x.
A) 0 B) 1 C) -1 D) 0,5

34. (02-10-20) Пусть $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ и $|\vec{c}| = 8$. Если углы между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равны $\frac{\pi}{3}$, то найдите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
A) $9\sqrt{2}$ B) 18 C) $5\frac{1}{3}$ D) 9

Угол между двумя векторами

35. (06-03-32, 06-11-32) Даны векторы $\vec{a}(-4;2;2)$ и $\vec{b}(\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$. Найдите угол между векторами $2\vec{a}$ и $\frac{1}{2}\vec{b}$.
A) 60^0 B) 150^0 C) 135^0 D) 120^0

Решение: Из равенств $2\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} = -6\sqrt{2}$ и

$$|2\vec{a}|\cdot|\frac{1}{2}\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = \sqrt{24}\cdot 2 = 4\sqrt{6}$$

и из 9 формулы имеем $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, отсюда получим $\varphi = 150^0$. **Ответ:** 150^0 (B).

36. (06-25-32) Даны векторы $\vec{a}(-6;3;3)$ и $\vec{b}(3;-3;0)$. Найдите угол между векторами $2\vec{a}$ и $\frac{1}{2}\vec{b}$.
A) $\frac{3\pi}{4}$ B) $\arccos\frac{2}{3}$ C) $\frac{5\pi}{6}$ D) $\arccos\frac{5}{6}$

37. (08-01-32) Даны векторы $\vec{a}(1;2;1)$ и $\vec{b}(2;-1;0)$. Если α угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, то вычислите $ctg^2\alpha$.
A) $\frac{1}{25}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{120}$ D) $\frac{1}{60}$

38. (00-2-33) Если $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ единичные векторы, направленные вдоль координатных осей и $\vec{a} = 5\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}-3\vec{k}$, то найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{i}$.
A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{2}$

39. (01-8-52) Даны векторы $\vec{a}(-4;2;4)$ и $\vec{b}(2;-2;0)$. Найдите угол между векторами $2\vec{a}$ и $\frac{1}{2}\vec{b}$.
A) 45^0 B) 60^0 C) 120^0 D) 135^0

40. (08-06-32) Вершины треугольника расположены в точках $A(3;-2;1)$, $B(2;1;3)$ и $C(1;2;5)$. Найдите угол между медианой BD этого треугольника и его основанием AC.
A) 60^0 B) $\arccos\frac{1}{3}$ C) $\pi - \arccos\frac{2}{3}$ D) 45^0

Решение: Из 12 формулы для медианы получим $\vec{BD} = \vec{b}(0;\,-1;\,0)$. По 8 формуле угол между векторами $\vec{BD}$ и $\vec{AC}(-2;\,4;\,4)$ равен

$$\cos\varphi = \frac{-4}{\sqrt{36\cdot 1}} = -\frac{2}{3}.$$

Отсюда имеем $\varphi = \arccos(-\frac{2}{3}) = \pi - \arccos\frac{2}{3}$.

Ответ: $\pi - \arccos\frac{2}{3}$ (C).

41. (06-21-32) Найдите угол при основании равнобедренного треугольника с вершинами в точках $A(2;3;1)$, $B(3;2;1)$ и $C(3;4;1)$.
A) $\arccos\frac{1}{3}$ B) $\arccos\frac{2}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$

42. (08-10-32) Векторы $\vec{a}(-3;2;-4)$ и $\vec{b}(4;3;-2)$ являются сторонами равнобедренного треугольника, выходящими из вершины $C(-6;4;3)$. Из вершины C проведена высота CD. Найдите сумму координат точки D.
A) 1 B) -1 C) 2,5 D) $-2,5$

43. (02-2-43)Даны точки $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$ и $D(-5;-5;3)$. Найдите угол между векторами $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$.
A) 90^0 B) 60^0 C) 30^0 D) 45^0

44. (08-08-32) Найдите угол между стороной MN и медианой EF треугольника с вершинами в точках $M(-3;3;1)$, $N(3;-5;1)$ и $E(-4;-1;-2)$.
A) $\arccos 0,64$ B) 45^0
C) $\arccos 0,48$ D) 60^0

45. (06-10-32) Даны точки $A(-4;1;1)$, $B(1;4;0)$ $C(1;-2;2)$ и $D(-5;-5;3)$. Найдите угол между векторами $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$.
A) 60^0 B) 90^0 C) 45^0 D) 30^0

46. (01-2-52) Определите координаты единичного вектора, направленного вдоль биссектрисы угла BAC треугольника ABC с вершинами в точках $A(1;1;1)$, $B(3;0;1)$ и $C(0;3;1)$.
A) $(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$ B) $(\frac{\sqrt{3}}{2};0;\frac{\sqrt{3}}{2})$
C) $(\frac{1}{3};\frac{1}{3};0)$ D) $(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0)$

Коллинеарность векторов

47. (00-9-5) Векторы $\vec{a}(3;x;6)$ и $\vec{b}(6;6;y)$ коллинеарны. Найдите значение произведения xy.
A) 32 B) 48 C) 52 D) 36

Решение: Из условия коллинеарности векторов 11 получим равенство

$$\frac{6}{3}=\frac{6}{x}=\frac{y}{6}.$$

Отсюда следует $xy=36$. **Ответ:** 36 (D).

48. (98-6-45) Найти вектор $\vec{a}$ коллинеарный вектору $\vec{b}(3;-6;6)$ и удовлетворяюший равенству $\vec{a}\cdot\vec{b}=27$.
A) $\vec{a}(1;-2;-2)$ B) $\vec{a}(1;2;3)$
C) $\vec{a}(\frac{1}{2};-1;1)$ D) $\vec{a}(1;-2;2)$

49. (01-7-53) Вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{a}\cdot\vec{b}=7$.Найдите длину вектора $\vec{a}$.
A) 2 B) $\frac{\sqrt{14}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ D) 1 15

50. (06-22-32) Если вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{a}\cdot\vec{b}=28$, то найдиту длину вектора $\vec{a}$.
A) $\frac{\sqrt{14}}{2}$ B) 14 C) $2\sqrt{14}$ D) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

51. (08-20-32) Даны вектор $\vec{a}(-2;1;4)$ и точка $M(2;-\frac{23}{21};-\frac{19}{3})$. Найдите координаты точки N, если $2\vec{a}+3\vec{NM}=0$.
A) $\left(\frac{2}{3};-\frac{7}{3};-\frac{11}{3}\right)$ B) $\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$
C) $\left(\frac{7}{3};-\frac{2}{3};-\frac{11}{3}\right)$ D) $\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{7};-\frac{11}{3}\right)$

52. (08-24-32) Вектор $\vec{b}$, лежащий в плоскости xy перпендикулярен вектору $\vec{a}(2;-4;5)$. Если $|\vec{b}|=4\sqrt{5}$, то найдите произведение его абсциссы и ординаты.
A) 16 B) 8 C) 36 D) 32

53. (99-7-42) При каком значении x векторы $\vec{a}(2;x;4)$ и $\vec{b}(4;2;8)$ параллельны?
A) 2 B) 1,5 C) $\emptyset$ D) 1

Решение: Из условия параллельности векторов 11 получим

$$\frac{4}{2}=\frac{2}{x}=\frac{8}{4}\Longleftrightarrow x=1.$$

Ответ: 1 (D).

54. (98-5-43) При каком значении x векторы $\vec{a}(3;1;6)$ и $\vec{b}(6;3;x)$ параллельны?
A) при всех значениях
B) $\emptyset$ C) 18 D) 12

55. (00-4-5) При каком значении m векторы $\vec{a}(2;3;-4)$ и $\vec{b}(m;-6;8)$ параллельны?
A) 2 B) 4 C) -4 D) 3

56. (98-12-51) При каком значении n векторы $\vec{a}(2;n;6)$ и $\vec{b}(1;2;3)$ коллинеарны?
A) 4 B) -4 C) 2 D) 1

57. (98-11-35) При каких m и n векторы $\vec{a}(-2;m;-2)$ и $\vec{b}(-1;3;n)$ коллинеарны?
A) $3;-1$ B) $3;1$ C) $6;-1$ D) $6;1$

58. (98-11-94) Если векторы $\vec{a}(3;6;-n)$ и $\vec{b}(-2;m;4)$ коллинеарны, то чему равны n и m?
A) $n=6$, $m=-4$ B) $n=-6$, $m=-4$
C) $n=-4$, $m=6$ D) $n=6$, $m=4$

59. (00-10-30) При каких значениях m и n векторы $\vec{a}(-1;m;2)$ и $\vec{b}(-2;-4;n)$ коллинеарны?
A) $-2;4$ B) $-2;-4$ C) $2;4$ D) $2;-4$

16.4 Многогранники

Фигура, состоящая из двух полуплоскостей и ограничивающей их прямой называется *двугранным углом.* Полуплоскости называются *гранями* двугранного угла, а их ограничивающая прямая *ребром* двугранного угла. Плоскость перпендикулярная ребру двугранного угла пересекает их грани по двум полупрямым. Угол, составляющий эти полупрямые называются *линейным углом* двугранного угла. Мерой двугранного угла принято считать соответствующий ему линейный угол. Все линейные углы двугранного угла при параллельном переносе совпадают, значит они равны. Поэтому мера двугранного угла не зависить от выбора линейного угла. Фигура, состоящая из трех плоских углов (ab), (bc) и (ac) произвольные два из которых не лежат на одной плоскости называется *трехгранным углом* (abc). Эти плоские углы называются *гранями,* а их стороны *ребрами* трехгранного угла. Общая вершина плоских углов называется *вершиной* трехгранного угла. Двугранные углы, состоящие из граней трехгранного угла называются *двугранными углами трехгранного угла.* Точно также понятие многогранного угла $(a_1a_2a_3 \dots a_n)$ определяется как фигура, составленная из плоских углов (a_1a_2), (a_2a_3), (a_3a_4),..., (a_na_1). Понятия граней, ребр и двугранных углов многогранного угла точно также, как с случае трехгранного угла.

В стереометрии изучаются пространственные фигуры, называемые телами. Геометрическое тело можно представить как ограниченную часть пространства.

Тело, ограниченное конечным числом плоскостей называется *многогранником.* Граница многогранника называется его *поверхностью.* Если многогранник лежит по одну сторону каждой из его ограничивающих плоскостей, то он называется *выпуклым многогранником.* Общая часть поверхности выпуклого многогранника и ограничивающей его плоскости называется *гранью* многогранника. Стороны грани многогранника называются его *ребрами,* а вершины - *вершинами многогранника.*

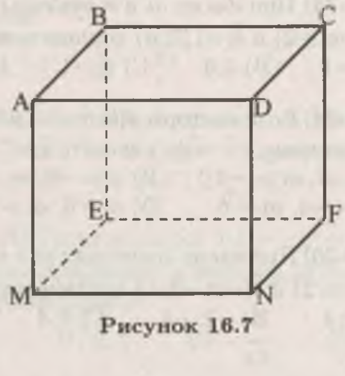


Рисунок 16.7

Обьясним это на примере куба (рис. 16.7). Куб -выпуклый многогранник. Его поверхность состоит из шести квадратов: $ABCD$, $BEFC$,.... Эти квадраты являются гранями куба. Стороны этих квадратов AB, BC, BE, ... являются ребрами куба. Вершины квадратов A, B, C, D, E, F, M, N - вершины куба. Куб имеет шесть граней, двенадцать ребер и восемь вершин.

16.4.1 Призма

Многогранник, состоящий из двух равных многоугольников, лежащих в параллельных плоскостях и отрезков параллельных прямых соединяющих точки многоугольников, расположенных между данными плоскостями, называется *призмой* (рис. 16.8). Грани призмы, лежащие в параллельных плоскостях называются *основаниями призмы* (рис. 16.9). Другие грани называются *боковыми гранями* (рис. 16.10). Все боковые грани призмы - параллелограммы.

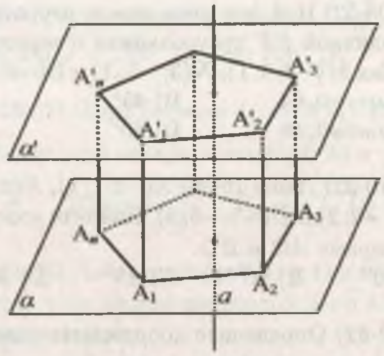


Рисунок 16.8

Отрезки, соединяющие вершины оснований призмы называются ее *боковыми ребрами* (рис. 16.9). Все боковые ребра призмы взаимно параллельны и равны. Расстояние между плоскостями, в которых лежат основания призмы, называется *высотой призмы.* Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани называется *диагональю призмы* (рис. 16.9)

Рисунок 16.9

Сечение призмы плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не лежащих в одной грани называется *диагональным сечением призмы* (рис. 16.10). Если боковые ребра призмы перпендикулярны основаниям, то такая призма называется *прямой призмой.*

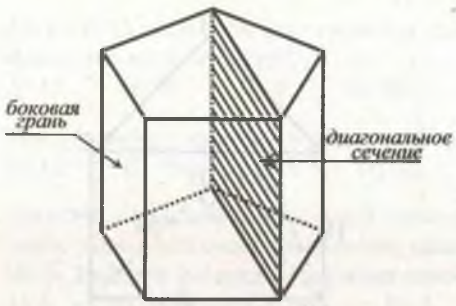


Рисунок 16.10

На рисунках 16.8-16.10 изображены прямые призмы. На рисунке 16.11 изображена наклонная призма. Если основания прямой призмы правильные многоугольники, то она называется *правильной призмой*. Изображенный на рисунке 16.7 куб – пример правильной призмы. Площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей ее боковых граней Сумма площадей боковой поверхности и оснований призмы называется *площадью полной поверхностью призмы*. Два тела с одинаковыми объемами называются *равновеликими телами*

Рисунок 16.11

Относительно призмы справедливы следующие утверждения.

1. **Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения и бокового ребра:** $S_{bok} = Pl$.
2. **Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания и высоты призмы:** $S_{bok} = PH$.
3. **Объем призмы равен произведению площади основания и высоты призмы:** $V = S_{os}H$.
4. **Объем призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения и бокового ребра:** $V = S_{se}l$. **(рис. 16.11).**
5. **У** n **- угольной призмы имеется** $3n$ **ребер и** $n+2$ **граней.**

1. Найти боковую поверхность куба с ребром 2 см.
A) 8   B) 48   C) 16   D) 32

Решение: В нашем примере высота куба $H = 2$. Основание куба квадрат со стороной $a = 2$. Его периметр равен $P = 4a = 8$. Из утверждения 2 $S_{bok} = PH$ имеем $S_{bok} = 8 \cdot 2 = 16$. **Ответ:** 16 (C).

2. Стороны основания прямой треугольной призмы равны 15; 20 и 25, а боковое ребро равно меньшей высоте основания. Найти боковую поверхность призмы .
A) 960   B) 720   C) 800   D) 1200

3. Основание прямой призмы - равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой $24\sqrt{2}$. Диагональ боковой грани, проходящей через катет равна 26. Найти боковую поверхность призмы.
A) $24(2+\sqrt{2})$ B) $240(2+\sqrt{2})$
C) $120(2+\sqrt{2})$ D) $80(2+\sqrt{2})$

4. Объем куба 64 cm^3. Найти его полную поверхность.
A) 84   B) 48   C) 96   D) 72

5. (98-1-51) Высота прямой треугольной призмы равна 50. Стороны основания равны 13, 37 и 40. Найти полную поверхность призмы.
A) 2730   B) 3900   C) 4500   D) 4980

6. (98-10-97) Высота правильной четырехугольной призмы равна 4, а диагональ равна $\sqrt{34}$. Найти боковую поверхность призмы.
A) 34   B) 38   C) 42   D) 48

7. (97-7-51) Стороны основания прямой треугольной призмы равны 15; 20 и 25, а боковое ребро равно меньшей высоте основания. Найти объем призмы.
A) 600   B) 750   C) 1800   D) 1200

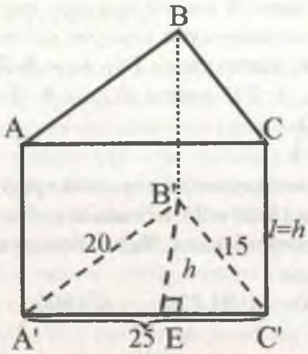
Решение: Из равенства $20^2+15^2 = 25^2$ имеем, что основание призмы - прямоугольный треугольник (11- свойство 15.16.2). Высота, опущенная на большую сторону, т.е.на гипотенузу является наименьшей (см. 1 вывод 15.16.5). Из формул для площади прямоугольного треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab, \quad S = \frac{1}{2}ch$$

получим $ab = hc$, а отсюда имеем $20 \cdot 15 = 25 \cdot h$ или $h = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12$. По условию задачи высота H призмы равна меньшей высота основания, т.е. $H = 12$. Площадь основания равна $S_{os} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 = 150$ и в силу 3-утверждения получим

$$V = S_{os} \cdot H = 150 \cdot 12 = 1800.$$

Ответ: 1800 (C).



8. (97-3-51) Стороны основания прямой треугольной призмы равны 29; 25 и 6, а боковое ребро равно большей высоте основания. Найти объем призмы.
A) 1425 B) 878 C) 400 D) 1200

9. (97-10-51) Стороны основания прямой треугольной призмы равны 10; 17 и 21, а боковое ребро равно меньшей высоте основания. Найти объем призмы.
A) 224 B) 672 C) 840 D) 368

10. (08-23-34) Основание прямой призмы - равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой $24\sqrt{2}$. Диагональ боковой грани проходящей через катет равна 26. Найти объем призмы.
A) 960 B) 2880 C) 1920 D) 5760

11. (00-1-59) Плоскость, проходяшая через сторону нижнего основания куба и противоположной стороны верхнего основания делит куб на две призмы. Объем одной из призм равен 256. Найти полную поверхность куба.
A) 364 B) 374 C) 372 D) 384

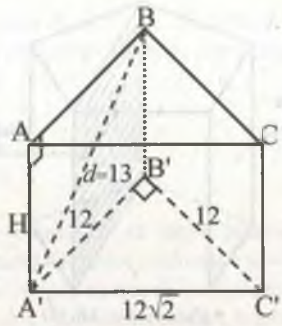
12. (97-2-57) Площади оснований равновеликих призм удовлетворяют условию $S_1 > S_2 > S_3 > S_4$. Какому из следующих соотношений удовлетворяют высоты h_1, h_2, h_3 и h_4 этих призм?
A) $h_1 > h_2 > h_3 > h_4$
B) $h_4 < h_3 < h_1 < h_2$
C) $h_4 > h_3 > h_2 > h_1$
D) $h_1 > h_4 > h_3 > h_2$

13. (97-1-42) Основание прямой призмы - равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой $12\sqrt{2}$. Диагональ боковой грани, проходящей через катет равна 13. Найти объем призмы .
A) 360 B) 120 C) 720 D) 240

Решение: Катеты основания призмы равны $a = b = 12$. Его площадь $S = 0,5 \cdot 12 \cdot 12 = 72$. Из условий задачи для высоты H призмы получим соотношение $H^2 + 12^2 = 13^2$. Отсюда следует $H = 5$. Из третьего утверждения имеем

$$V = S \cdot H = 72 \cdot 5 = 360.$$

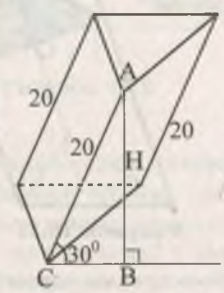
Ответ: 360 (A).



14. (98-3-50) Основание призмы - правильный шестиугольник со стороной $2\sqrt{5}$, а боковые грани квадраты. Найти большую диагональ призмы.
A) $4\sqrt{5}$ B) 10 C) $3\sqrt{5}$ D) 12

15. (98-6-41) Боковое ребро наклонной призмы равно 20 и составляет угол 30^0 с плоскостью основания. Найти высоту призмы.
A) 12 B) $10\sqrt{3}$ C) 10 D) $10\sqrt{2}$

Решение: По условиям задачи построим рисунок. Из прямоугольного треугольника ABC находим AB. По 5- свойству 15.16.2 катет, лежащий напротив угла 30^0 равен половине гипотенузы, т.е. $H = AC : 2 = 10$. **Ответ:** 10 (C).



16. Объем наклонной равен 96, а высота равна 6. Найти площадь перпендикулярного сечения призмы.
A) 20 B) 16 C) 10 D) 18

17. (98-8-51) Стороны основания прямой треугольной призмы равны 36; 29 и 25, а полная поверхность равна 1620. Найдите высоту призмы.
A) 20 B) 12, 6 C) 10 D) 18

18. (98-11-93) Стороны основания прямой треугольной призмы равны 3; 4 и 5. Найти высоту призмы, если ее объем равен 18.
A) 12 B) 6 C) 9 D) 3

19. (01-12-12) Сколько граней имеет призма, если у нее 60 ребер?
A) 20 B) 21 C) 22 D) 24

Решение: Если призма n - угольная, то по 5-утверждению у нее $3n$ ребер. Отсюда имеем $3n = 60$ или $n = 20$. Опять по 5- утверждению у призмы $20 + 2 = 22$ грани. **Ответ:** 22 (C).

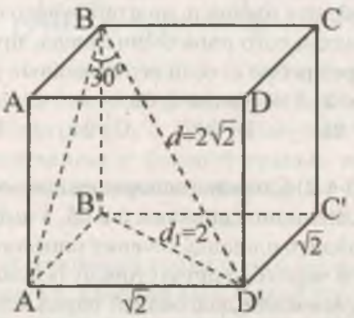
20. (02-8-34) Сколько боковых граней у призмы, если у нее всего 36 ребер?
A) 12 B) 16 C) 9 D) 10

21. Сколько ребер у призмы, если у нее 16 граней?
A) 52 B) 46 C) 48 D) 32

22. (02-8-36) У прямой треугольной призмы все ребра равны, а полная поверхность равна $8 + 16\sqrt{3}$. Найдите площадь основания призмы.
A) 4 B) $2\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 3

23. (97-6-42) Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна $\sqrt{2}$, а диагонали составляет с боковой гранью 30^0. Найдите объем призмы.
A) $8\sqrt{2}$ B) 4 C) 16 D) $4\sqrt{2}$

Решение: Основание правильной четырехугольной призмы - квадрат. Площадь основания призмы $S = a^2 = 2$. На рисунке угол при вершине B прямоугольного треугольника равен 30^0. Из 5- свойства 15.16.2 следует, что диагональ призмы равна $2\sqrt{2}$. Диагональ основания призмы равна 2. Из прямоугольного треугольника $BB'D'$ для высоты призмы $H = BB'$ имеем соотношение $H^2 + 2^2 = (2\sqrt{2})^2$. Отсюда $H = 2$. Из формулы $V = SH$ для объема призмы получим $V = 2 \cdot 2 = 4$. **Ответ:** 4 (B).



24. (03-11-52) Большая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 8 и составляет с боковым ребром угол 30^0. Найти объем призмы.
A) 72 B) 64 C) 76 D) 80

25. (98-5-44) Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 22, а площадь основания равна 144. Найти высоту призмы.
A) 20 B) 14 C) 16 D) 26

26. (96-9-92) Площадь основания правильной четырехугольной призмы равна 144 ^{2}, а высота 14 см. Найти диагональ этой призмы.
A) $12\sqrt{2}$ B) 18 C) 22 D) 16

27. (99-8-65) Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 4 и составляет с боковым ребром угол 30^0. Найти площадь боковой поверхности призмы.
A) $16\sqrt{2}$ B) 16 C) 18 D) $18\sqrt{2}$

28. (99-9-43) Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы равна 160, а полная поверхность равна 210. Найдите диагональ основания этой призмы.
A) $6\sqrt{2}$ B) $8\sqrt{2}$ C) $7\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{2}$

29. Полная поверхность правильной четырехугольной призмы равна 24. Найдите наибольшее значение объема этой призмы.
A) 8 B) 16 C) 24 D) 32

16.4.2 Параллелепипед

Если основанием призмы является параллелограмм, то такая призма называется *параллелипипедом* (рис. 16.12). Все грани параллелепипеда параллелограммы. Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин называются *противпopoложными гранями.* Протиположные грани параллелепипеда параллельны и равны. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и в точке пересечения делятся пополам. Точка пересечения диагоналей параллелипипеда является его центром симметрии. Прямой параллелепипед, основание которого прямоугольник называется *прямоугольным параллелепипедом.* Все грани прямоугольного параллелипипеда прямоугольники. Если все ребра прямоугольного параллелепипеда равны, то такой параллелепипед называется *кубом* (рис. 16.7). Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его линейных размерностей.

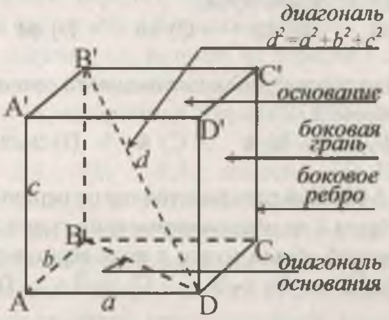


Рисунок 16.12

1. **Диагональ грани куба с ребром** a**:** $d_1 = a\sqrt{2}$.

2. **Диагональ куба с ребром** a**:** $d = a\sqrt{3}$

3. **Полная поверхность куба с ребром** a**:** $S_{pol} = 6a^2$.

4. **Объем куба с ребром** a**:** $V = a^3$.

5. **Боковая поверхность параллелепипеда равна произведению периметра основания на боковое ребро:** $S_{bok} = Pl$.

6. **Площадь полной поверхности параллелипипеда**
$S_{pol} = 2S_{os} + S_{bok}$.

7. **Объем параллелепипеда:** $V = S_{os}H$.

8. **Объем наклонного параллелепипеда:** $V = S_{per}l$, S_{per} **- площадь перпендикулярного сечения,** l **– боковое ребро.**

9. **Пусть** a, b, c **три ребра, выходящие из одной вершины прямоугольного параллелепипеда(рис. 16.12). Справедливы следующие формулы:**
   а) Объем: $V = abc$.
   б) Диагональ: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
   в) Полная поверхность:
   $S_{pol} = 2(ab + bc + ac)$.

1. (96-6-8) Сумма всех ребер куба равна 96. Найти его объем.
   A) 256 B) 216 C) 384 D) 512

   Решение: Число ребер куба 12 и они взаимно равны, поэтому длина ребра равна $a = 96 : 12 = 8$. По 4- утверждению обьем куба равен $V = 8^3 = 512$. **Ответ:** 512 (D).

2. (97-8-8) Сумма всех ребер куба равна 48. Найдите полную поверхность куба.
   A) 96 B) 24 C) 36 D) 48

3. (96-3-108) Сколько плоскостей симметрии имеет куб?
   A) 8 B) 9 C) 7 D) 10

4. (97-2-8) Площадь боковой грани куба равна 16. Найдите обьем куба.
   A) 60 B) 62 C) 66 D) 64

5. Найдите площадь диагонального сечения куба с ребром 2.
   A) $4\sqrt{2}$ B) 4 C) 8 D) $2\sqrt{2}$

6. (97-4-60) Найдите расстояние от вершины куба с ребром 4 до центра симметрии грани куба, не имеющей общей точки с этой вершиной.
   A) $2\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 3

7. (97-12-8) Площадь полной поверхности куба равна 96. Найдите объем куба.
   A) 60 B) 62 C) 64 D) 66

   Решение: Из 3-утверждения $S = 6a^2$ имеем $6a^2 = 96$.Отсюда следует $a = 4$, тогда $V = 4^3 = 64$. **Ответ:** 64 (C).

8. (98-7-52) Диагональ куба равна $\sqrt{3}$. Найдите его объем.
   A) $9\sqrt{3}$ B) 9 C) $3\sqrt{3}$ D) 1

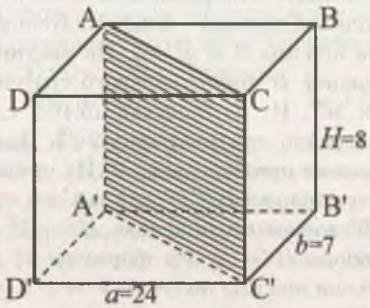
9. (98-12-52) Найдите полную поверхность куба с диагональю $\sqrt{3}$.
   A) 6 B) 3 C) 9 D) 4, 5

10. (00-4-27) Если ребро куба уменьшить на 10%, то на сколько процентов уменьшится его объем?
   A) 10 B) 30 C) 33 D) 27, 1

11. (00-4-51) Во сколько раз увеличится объем куба, если площадь его грани увеличить в 2 раза?
   A) 2 B) 8 C) 4 D) $\sqrt{8}$

12. (96-10-54) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 7 см и 24 см. Высота параллелепипеда 8 см. Найдите площадь диагонального сечения.
   A) 168 B) 1344 C) 100 D)200

   Решение: Основание прямоугольного параллелепипеда - прямоугольник. По теореме Пифагора диагональ основание параллелепипеда равна $AC = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$. Площадь диагонального сечения (см. рисунок) $ACC'A'$ равна $S = AC \cdot H = 25 \cdot 8 = 200$. **Ответ:** 200 (D).



13. Найдите площадь диагонального сечения прямоугольного параллелипипеда, проходяшего через ребро c, если его линейные размеры $a = 3$; $b = 4$ и $c = 5$ см.
   A) 25 B) 20 C) 24 D) 60

14. (00-4-2) Стороны основания прямоугольного параллелипипеда равны 6 и 13, а высота равна 8. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через большую сторону основания и точку пересечения диагоналей параллелепипеда.
   A) 136 B) 124 C) 140 D) 130

15. (96-9-43) Чему равна диагональ прямоугольного параллелепипеда с ребрами 3; 4 и $2\sqrt{14}$ см?
   A) 8 B) 7 C) 10 D) 9

16. (96-12-104) Сколько плоскостей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед, основание которого квадрат?
   A) 9 B) 7 C) 3 D)5

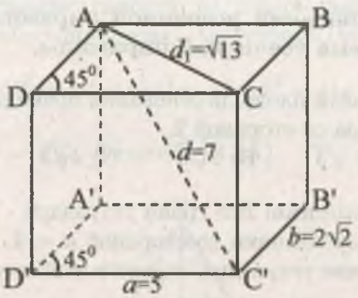
17. Сколько плоскостей симметрии имеет параллелепипед с линейными размерами 3; 4 va 5?
   A) 4 B) 2 C) 3 D)5

18. (99-5-46) Какое наибольшее число целых кубиков с ребром 3 можно поместить внутри прямоугольного параллелепипеда с размерами $11 \times 20 \times 16$ (ребра всех кубиков параллельны ребрам параллелепипеда)?
   A) 137 B) 138 C) 130 D) 90

19. (00-9-50) Какое наибольшее число целых кубиков с ребром 5 можно поместить внутри прямоугольного параллелепипеда с размерами $21 \times 27 \times 9$ (ребра всех кубиков параллельны ребрам параллелепипеда)?
A) 20 B) 25 C) 30 D) 40

20. (00-8-17) Стороны основания прямого параллелепипеда равны $2\sqrt{2}$ и 5 см и образуют угол 45^0. Меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Чему равен его объем?
A) 60 B) 120 C) 80 D)90

Решение: Диагональ основания AC находим по теореме косинусов. $AC^2 = 5^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos 45^0 = 25 + 8 - 20 = 13$. Отсюда имеем $AC = \sqrt{13}$. Теперь по теореме Пифагора находим высоту параллелепипеда $H = CC'$. Из $H^2 = 7^2 - \sqrt{13}^2 = 49 - 13 = 36$ получим $H = 6$. Тогда объем параллелепипеда $V = SH = 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 45^0 \cdot 6 = 60$. **Ответ:** 60 (A).



21. Диагональ боковой грани правильного параллелепипеда равна $\sqrt{6}$. Диагональ параллелепипеда составляет с боковой гранью угол 30^0. Найдите объем параллелепипеда.
A) $2\sqrt{2}$ B) 4 C) $4\sqrt{3}$ D)8

22. Сторона основания правильного параллелепипеда равна 4, а высота $4\sqrt{6}$. Какой угол составляет диагональ параллелепипеда с плоскостью основания?
A) 30^0 B) 45^0 C) 35^0 D) 60^0

23. (01-2-48) Стороны основания прямого параллелепипеда равны 3 и 4 и образуют угол 120^0. Найдите меньшую диагональ параллелепипеда, если его боковое ребро равно $\sqrt{12}$.
A) 5 B) 6 C) 8 D)7

24. (01-8-51) Основание прямого параллелепипеда ромб, диагонали которого относятся как 2 : 5. Найдите объем параллелепипеда, если его диагонали равны 10 и 17.
A) 360 B) 240 C) 720 D)480

Решение: Диагонали основания параллелепипеда можно взять в виде $d_1 = 2x$, $d_2 = 5x$. Для диагоналей прямого параллелепипеда имеем

$$\begin{cases} (2x)^2 + H^2 = 10^2 \\ (5x)^2 + H^2 = 17^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + H^2 = 100 \\ 25x^2 + H^2 = 289 \end{cases}$$

Вычитая из 2- уравнения системы первое получим $21x^2 = 189$, отсюда $x = 3$. Подставив значение x в первое уравнение системы находим $H = 8$. Площадь основания параллелепипеда равна $S = 0,5 d_1 d_2 = 0,5 \cdot 6 \cdot 15 = 45$. Из формулы для объема параллелепипеда $V = S_{os} H$ следует $V = 45 \cdot 8 = 360$. **Ответ:** 360 (A).

25. (03-2-18) Основание прямой призмы - ромб. Площади диагональных сечений равны 9 и 12. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
A) 15 B) 30 C) 7,5 D) $6\sqrt{7}$

26. (02-2-45) Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна 1818, а ребра находятся в отношении 3 : 7 : 8. Найдите его меньшее ребро.
A) 9 B) 8 C) 6 D) 4

16.4.3 Пирамида

Многогранник, состоящий из отрезков, соединяющих все точки плоского многоугольника с данной точкой вне плоскости этого многоугольника называется *пирамидой* (рис. 16.13-16.14). Данная точка называется *вершиной пирамиды*, а многоугольник - *основанием пирамиды* (рис. 16.13). Поверхность пирамиды состоит из основания и боковых граней. Каждая боковая грань — треугольник. Одна из ее вершин находится в вершине пирамиды, а противолежащая ей сторона является стороной основания. Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания называются *боковыми ребрами* (рис. 16.13). Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды к основанию называется *высотой пирамиды*. На рисунке 16.13 изображена пирамида. Ее основание - многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$, вершина $- S$, боковые ребра $- SA_1, SA_2 \ldots SA_n$, высота $- SO$. Если основание пирамиды n- угольник, то она называется n-угольной пирамидой. Треугольная пирамида иногда называется *тетраэдром*. Если основание пирамиды - правильный многоугольник и основание высоты совпадает с центром многоугольника, то она называется *правильной пирамидой* (рис. 16.14). Прямая, на которой лежит высота правильной пирамиды, называется ее *осью*.

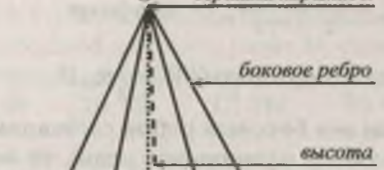


Рисунок 16.13

Боковые ребра правильной пирамиды равны, так как они имеют равные проекции. Итак, боковые грани правильной пирамиды - равнобедренные треугольники. Высота грани, проведенная из вершины пирамиды называется *апофемой* (рис. 16.14). Сумма площадей боковых граней пирамиды называется *площадью боковой поверхности*. Площадь боковой поверхность правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему пирамиды.

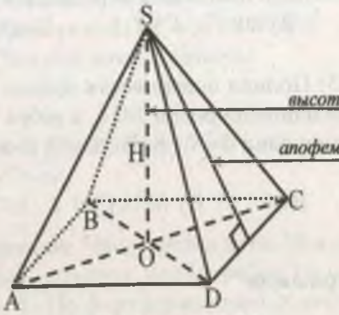


Рисунок 16.14

Плоскость, параллельная основанию и пересекающая пирамиду отделяет от нее подобную пирамиду (рис. 16.15). Другая часть тоже многогранник и она называется *усеченной пирамидой* (рис. 16.15).

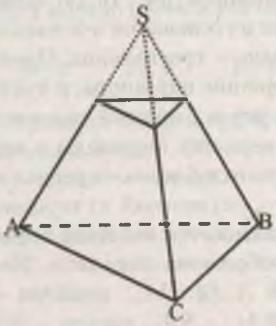


Рисунок16.15

1. **Площадь полной поверхности пирамиды равна сумме площадей основания и боковой поверхности: $S_{pol} = S_{oc} + S_{bok}$.**
2. **Если все двугранные углы при основании равны α, то справедливо равенство** $S_{oc} = S_{bok}\cos\alpha$.
3. **Для правильной пирамиды:** $S_{bok} = \frac{P\ell}{2} = \frac{an\ell}{2}$, **$\ell$– апофема.**
4. **Объем пирамиды:** $V = \frac{1}{3}S_{oc}H$.
5. **Если все боковые ребра составляют с основанием одинаковые углы, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания.**
6. **Если все двугранные углы при основании равны, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание.**
7. **Пирамида усечена плоскостью параллельной основанию. Если стороны основания данной и полученной пирамид a, a_1, высоты H, H_1, площади оснований S, S_1 то справедливы равенства**

$$\frac{a_1}{a} = \frac{H_1}{H}, \quad \frac{S_1}{S} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^2, \quad \frac{V_1}{V} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^3.$$

8. **Объем усеченной пирамиды:**

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S} + S)H,$$

где H - высота усеченной пирамиды, S и S_1– площади нижнего и верхнего оснований.

9. **Площадь боковой поверхности правильной n - угольной усеченной пирамиды:** $S_{bok} = \frac{1}{2}(a+b)nl$. **Здесь a и b- длины сторон оснований усеченной пирамиды, l -апофема усеченной пирамиды.**

1. Найти площадь основания правильного тетраэдра со стороной 2.
A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{3}$

Решение: Все грани тетраэдра - правильные треугольники со стороной $a = 2$. Итак, основание тетраэдра - правильный треугольник со стороной $a = 2$. Его площадь $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3}$.
Ответ: $\sqrt{3}$ (A).

2. Высота правильного тетраэдра равна $\sqrt{3}$. Найдите его боковую поверхность.
A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\frac{27\sqrt{3}}{8}$ D) $3\sqrt{3}$
3. (03-6-80) Чему равна полная поверхность правильного тетраэдра ребро которого равно 6?
A) $12\sqrt{3}$ B) $18\sqrt{3}$ C) $27\sqrt{3}$ D) $36\sqrt{3}$
4. (96-1-51) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 6см, а апофема 6, 5 см. Найдите периметр основания пирамиды.
A) 10 B) 12 C) 24 D) 20
5. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 4см,сторона основания 6 см. Найдите ее апофему.
A) 2 B) 3 C) 5 D) 4
6. (97-8-55) Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна 96, периметр основания равен 24. Найдите апофему пирамиды.
A) 16 B) 10 C) 6 D) 8
7. (97-4-61) Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна 48, а апофема равна 8. Найдите периметр основания пирамиды.
A) 6 B) 12 C) 8 D) 10

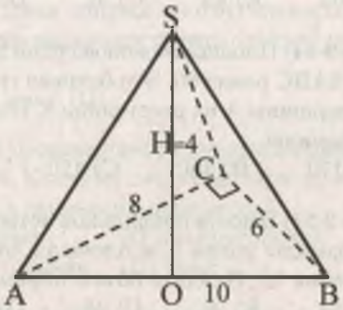
8. (00-10-43) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12, а сторона основания равна 10. Найдите апофему пирамиды.
A) 15 B) 13 C) 14 D) 16

9. (98-11-91) Стороны основания треугольной пирамиды равны 6; 8 и 10. Все боковые ребра составляют равные углы с плоскостью основания. Высота пирамиды равна 4. Чему равно боковое ребро пирамиды?
A) $\sqrt{41}$ B) 3 C) 4 D) 5

Решение: Так как боковые ребра пирамиды составляют равные углы с плоскостью основания, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания. Из равенства $6^2 + 8^2 = 10^2$ следует, что основание пирамиды прямоугольный треугольник. По 4-свойству 15.7 центр описанной окружности находится в середине гипотенузы и $R = c : 2 = 5$. Таким образом высота пирамиды H проходит через середину гипотенузы. Теперь находим боковое ребро пирамиды l. По теореме Пифагора

$$l^2 = H^2 + (\frac{c}{2})^2 = 4^2 + 5^2 = 41.$$

Итак, $l = \sqrt{41}$. **Ответ:** $\sqrt{41}$ (A).



10. (09-01-34) Стороны основания треугольной пирамиды 5, 12 и 13. Все ее боковые ребра составляют с плоскостью основанием угол 60^0. Найдите высоту пирамиды.
A) $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{13\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{13}{4}$ D) $\frac{13\sqrt{3}}{6}$

11. (02-4-51) Основание пирамиды - прямоугольный треугольник с гипотенузой равной 10. Найдите высоту пирамиды, если ее боковые ребра равны 13.
A) 11 B) 12 C) 10 D) 13

12. (97-12-61) Высота правильной треугольной пирамиды равна 4, а высота основания 4,5. Найдите боковое ребро пирамиды.
A) 6 B) 6, 5 C) 5 D) 5, 5

13. Основанием правильной пирамиды является многоугольник с суммой внутренних углов 540^0 и стороной $12\sin 36^0$. Боковое ребро пирамиды равно 10. Найдите ее высоту.
A) 8 B) 6 C) 9 D) 7

14. (08-23-33) Основанием правильной пирамиды является многоугольник с суммой внутренних углов 720^0 и стороной 6. Найдите высоту пирамиды, если ее боковое ребро равно $\sqrt{205}$.
A) 16 B) 8 C) 13 D) 12

15. (03-9-65) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 10. Боковая грань составляет с основанием угол 45^0. Найдите высоту пирамиды.
A) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ B) $5\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $5\sqrt{2}$

16. (03-11-48) Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 10, а сторона основания 12. Найдите высоту пирамиды.
A) $2\sqrt{13}$ B) $\sqrt{13}$ C) 2 D) $2\sqrt{7}$

17. (96-6-59) Боковая поверхность пирамиды равна 24, а площадь основания 12. Найдите угол между боковой гранью и плоскостью основания.
A) 45^0 B) 30^0 C) 60^0 D) 35^0

Решение: Даны: $S_{bok} = 24$, $S_{os} = 12$. Нужно найти угол α между боковой гранью и плоскостью основания. Из формулы - 2 $S_{os} = \cos\alpha \cdot S_{bok}$ имеем $12 = 24 \cdot \cos\alpha \iff \cos\alpha = \frac{1}{2}$. Отсюда $\alpha = 60^0$. **Ответ:** 60^0 (C).

18. (02-7-25) Основание пирамиды - прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Боковые грани наклонены к основанию под углом 60^0. Найдите полную поверхность пирамиды.
A) 18 B) 20 C) 15 D) 24

19. (02-10-80) Двугранные углы при основании пирамиды равны 60^0, а ее основание ромб со стороной 6 и острым углом 30^0. Найдите полную поверхность пирамиды.
A) 54 B) 27π C) 36π D) 36

20. (03-12-40) Боковая поверхность правильной пирамиды составляет 80 процентов от ее полной поверхности. Найдите угол между боковыми гранями и плоскостью основания.
A) 60^0 B) $\arccos\frac{1}{4}$
C) $\arccos\frac{1}{5}$ D) $\arccos\frac{2}{3}$

21. (96-7-53) Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды равна 36, а боковая поверхность равна 60. Найдите объем пирамиды.
A) 64 B) 120 C) 144 D) 48

22. (01-9-56) Полная поверхность правильной треугольной пирамиды со стороной 2 не меньше $7\sqrt{3}$ и не больше $13\sqrt{3}$. Какому отрезку принадлежит апофема этой пирамиды?
A) $[2; 3]$ B) $[\sqrt{3}; 3\sqrt{3}]$ C) $[2\sqrt{3}; 4\sqrt{3}]$ D) $[3; 4]$

Решение: Пусть апофема пирамиды ℓ. Площадь правильного треугольника со стороной 2 равна $S_{os} = \sqrt{3}$. По 3 свойству боковая поверхность пирамиды $S_{bok} = 3\ell$. Из 1 свойства следует $S_{pol} = \sqrt{3} + 3\ell$. Из условия задачи имеем

$$7\sqrt{3} \le \sqrt{3} + 3\ell \le 13\sqrt{3} \iff 2\sqrt{3} \le \ell \le 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $[2\sqrt{3}; 4\sqrt{3}]$ (C).

23. (02-3-65) Центр верхнего основания куба с ребром 6 соединен с вершинами нижнего основания. Найдите боковую поверхность полученной пирамиды.
A) $36\sqrt{5}$ B) $18\sqrt{5}$ C) $48\sqrt{3}$ D) $36\sqrt{3}$

24. (02-3-67) Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 5, а полная поверхность 85. Найдите угол наклона боковой грани к плоскости основания.
A) $\arccos\frac{5}{12}$ B) 45^0 C) 30^0 D) 75^0

25. (03-1-43) Сколько граней у пирамиды с 28 ребрами?
A) 12 B) 14 C) 15 D) 18

26. (03-5-62) Высота правильной треугольной пирамиды вдвое меньше стороны основания. Какой угол составляет боковая грань с плоскостью основания?
A) 60^0 B) 30^0 C) 15^0 D) 45^0

27. (03-10-61) Все боковые ребра четырехугольной пирамиды составляют с основанием угол 60^0. Ее основание - равнобедренная трапеция с тупым углом 120^0. Диагонали трапеции - биссектрисы ее острых углов. Высота пирамиды равна $4\sqrt{3}$. Найдите большее основание трапеции.
A) $4\sqrt{3}$ B) 8 C) $8\sqrt{3}$ D) 12

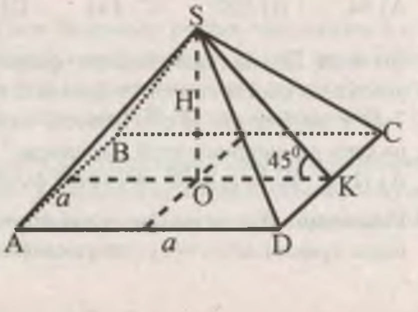
Объем пирамиды

28. (99-8-62) Двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды 45^0, а объем пирамиды равен 36. Найдите сторону основания пирамиды.
A) 6 B) 8 C) 4 D) 12

Решение: По условиям задачи построим рисунок. В прямоугольном треугольнике SOK- $\angle S = \angle K = 45^0$. Отсюда имеем $OK = OS = H = a : 2$. Из формулы 4 для объема $V = \frac{1}{3}S_{os}H$ получим

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H \iff V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{2} = 36,$$

а отсюда $a = 6$. **Ответ:** 6 (A).



29. (96-11-53) Сторону основания правильной четырехугольной пирамиды увеличили в 4 раза, а высоту уменьшили в 4 раза. Найдите отношение объема полученной пирамиды к объему исходной пирамиды.
A) 1 : 16 B) 16 : 1 C) 1 : 1 D) 4 : 1

30. (96-12-55) Сторону основания правильной четырехугольной пирамиды увеличили в 3 раза, а высоту уменьшили в 3 раза. Найдите отношение объема полученной пирамиды к объему исходной пирамиды.
A) 3 : 1 B) 1 : 3 C) 9 : 1 D) 1 : 9

31. (97-3-53) Объем правильной четырехугольной пирамиды равен 48, а высота равна 4. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
A) 120 B) 144 C) 60 D) 96

32. (97-7-53) Объем правильной четырехугольной пирамиды 48, а сторона основания равна 6. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
A) 144 B) 60 C) 72 D) 120

33. (99-4-49) Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и соответственно равны 4; 6 и 8. Найдите объем пирамиды.
A) 64 B) 48 C) 32 D) 24

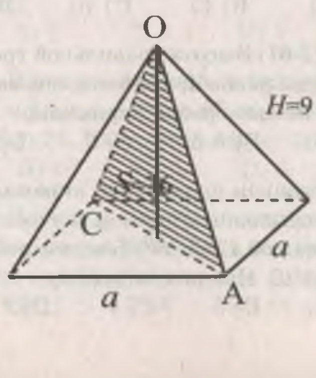
34. (99-9-44) Площадь боковой грани SBC пирамиды SABC равна 60. Эта боковая грань удалена от вершины A на расстоянии 8. Найдите объем пирамиды.
A) 170 B) 150 C) 120 D) 160

35. (98-2-57) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 9, а площадь диагонального сечения 36. Найдите объем пирамиды.
A) 84 B) 96 C) 48 D) 72

Решение: По условиям задачи построим рисунок. В $S_{OAC} = \frac{1}{2}AC \cdot H$ из $S_{OAC} = 36$, $H = 9$ получим $AC = 8$. По теореме Пифагора $AC^2 = a^2 + a^2 = 8^2$. Отсюда следует $a = 4\sqrt{2}$. Из формулы объема имеем

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 9 = 96.$$

Ответ: 96 (B).



36. (08-06-34) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 15, а площадь диагонального сечения равна 120. Найдите объем этой пирамиды.
A) 1280 B) 640 C) 600 D) 980

37. (00-8-20) Найдите объем правильного тетраэдра с ребром a.
A) $\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$ B) $\frac{1}{24}a^3$ C) $\frac{1}{12}a^3\sqrt{3}$ D) $\frac{1}{24}a^3\sqrt{3}$

38. (01-1-61) Найдите высоту правильного тетраэдра с объемом $8\sqrt{3}$.
A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) 4

39. (97-8-59) Боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания равные углы. Какой из следующих многоугольников не может лежать в основании пирамиды?
A) треугольник
B) правильный шестиугольник
C) прямоугольник
D) ромб

Решение: Если боковые ребра составляют с основанием равные углы, то высота пирамиды опускается на центр окружности, описанной около основания (5- свойство). Итак, около основания этой пирамиды можно описать окружность. Среди данных многоугольников только для ромба нельзя построить описанную окружность.
Ответ: ромб (D).

40. (96-6-58) Боковые ребра пирамиды равны между собой. Какая из следующих фигур не может лежать в основании пирамиды?
A) квадрат B) прямоугольник
C) треугольник D) ромб

41. (97-12-56) Высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды равны между собой. Какая из следующих фигур не может лежать основании пирамиды?
A) ромб B) правильный шестиугольник
C) треугольник D) прямоугольник

42. (98-6-47) Все двугранные углы при основании треугольной пирамиды равны 30^0. Высота пирамиды равна 6. Найдите радиус окружности вписанной в основание.
A) 2 B) 6 C) $2\sqrt{3}$ D) $6\sqrt{3}$

43. (00-2-46) Стороны основания треугольной пирамиды равны 9, 10 и 17. Найдите объем пирамиды, если все боковые грани пирамиды составляют с основанием угол 45^0.
A) 24 B) 36 C) 32 D) 21

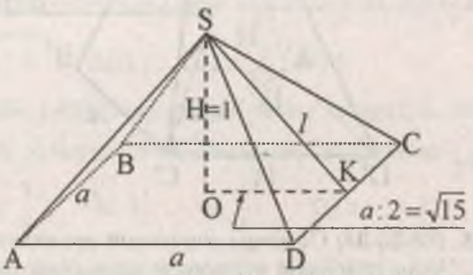
44. (02-5-50) Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно $3\sqrt{2}$, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 45^0. Найдите объем пирамиды.
A) $12\sqrt{2}$ B) 18 C) $9\sqrt{2}$ D) 24

45. (02-12-64) Объем правильной шестиугольной пирамиды равен 324, а высота равна $6\sqrt{3}$. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания.
A) 45^0 B) 30^0 C) 75^0 D) 60^0

46. (03-1-49) Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна $2\sqrt{2}$, все боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 45^0. Найдите объем пирамиды.
A) $56-30\sqrt{2}$ B) $64-32\sqrt{3}$
C) $68-48\sqrt{2}$ D) $64-32\sqrt{2}$

47. (03-11-49) Объем правильной четырехугольной пирамиды равен 20, а высота равна 1. Найдите апофему пирамиды.
A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) 6

Решение: Из формулы для объема $V=\frac{1}{3}SH$ при $V=20$, $H=1$ имеем $S=60$. По условию задачи основание пирамиды квадрат. Если обозначим сторону квадрата через a, то $a=2\sqrt{15}$. Тогда (см. рисунок) квадрать апофемы пирамиды равен $\ell^2=1^2+15$ или $\ell=4$. **Ответ:** 4 (A).



48. (08-24-34) Объем правильной четырехугольной пирамиды 384, а сторона основания равна 12. Найдите площадь боковой поверхности пирамида.
A) 240 B) 576 C) 480 D) 288

49. (03-12-41) Через середины трех ребер параллелепипеда, исходящих из одной вершины проведена плоскость, отсекающая от него пирамиду объемом 6. Найдите объем параллелепипеда.
A) 120 B) 144 C) 180 D) 288

50. Чему равно наибольшее значение объема пирамиды, полная поверхность которого равна $12\sqrt{3}$?
A) $2\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{4}$ D) $4\sqrt{3}$

51. (08-01-34) Объем правильной четырехугольной пирамиды 10368, а сторона основания равна 36. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.
A) 2160 B) 1080 C) 1800 D) 720

52. (96-3-110) Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 14 и 10 см, а диагональ 18 см. Чему рано высота усеченной пирамиды?
A) 6 B) 7 C) 8 D) 5

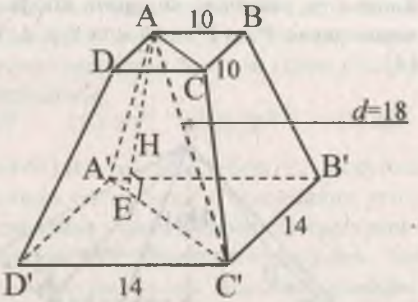
Решение: Высота усеченной пирамиды равна высоте равнобедренной трапеции $ACC'A'$. По теореме Пифагора основания этой равнобедренной трапеции равны $a = 10\sqrt{2}$ и $b = 14\sqrt{2}$. По 3- утверждению 15.4.3 отрезок EC' равен средней линии этой трапеции, т.е.

$$EC' = l = \frac{10\sqrt{2} + 14\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}.$$

Из прямоугольного реугольника AEC' находим $H = AE$. Еще раз из теоремы Пифагора имеем

$$H^2 + (12\sqrt{2})^2 = 18^2 \iff H = 6.$$

Ответ: 6 (A).



53. (08-20-34) Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 8 и 2, а высота равна 4. Найдите площадь ее полной поверхности.
A) 169 B) 168 C) 170 D) 168, 1

54. (96-9-44) Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 и 7 см, а диагональ 10 см. Чему равно высота усеченной пирамиды?
A) 5 B) $5\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$ D) 4

55. (96-12-83) Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 4 и 8 см, а диагональ 12 см. Чему равно высота усеченной пирамиды?
A) 3 B) $6\sqrt{2}$ C) 5 D) 4, 5

56. (96-13-52) Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 и 5 см, а диагональ 9 см. Найдите высоту усеченной пирамиды?
A) 6 B) 7 C) 5 D) 8

57. (02-2-44) Диагонали правильной четырехугольной усеченной пирамиды взаимно перпендикулярны и каждая из них равна 8. Найдите высоту пирамиды.
A) $4\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 4 D) 6

58. (02-8-37) Площади оснований усеченной пирамиды равны 96 и 24, высота соответствующей ей целой пирамиды равна 16. Найдите объем усеченной пирамиды.
A) 448 B) 436 C) 472 D) 384

59. (03-9-60) Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 16, стороны оснований равны 24 и 40. Найдите диагональ усеченной пирамиды.
A) 48 B) 24 C) 36 D) 40

16.5 Тела вращения

16.5.1 Цилиндр

Тело, расположенное между двумя параллельными плоскостями и составленное из отрезков параллельных прямых, пересекающих круг, лежащий в одной из плоскостей называется *цилиндром*. Отрезки, концы которых лежат на окружности круга, называются *образующими цилиндра* . Поверхность цилиндра состоит из *оснований цилиндра* (кругов, лежащих в параллельных плоскостях) и *боковой поверхности*. Если образующие цилиндра перпендикулярны плоскости основания, то цилиндр называется *прямым цилиндром*. На рисунке 16.16 изображен прямой цилиндр. Он состоит из отрезков XX' параллельных прямых, расположенных между плоскостями α и α'. Круги K, K' плоскостей α, α' являются основаниями цилиндра.

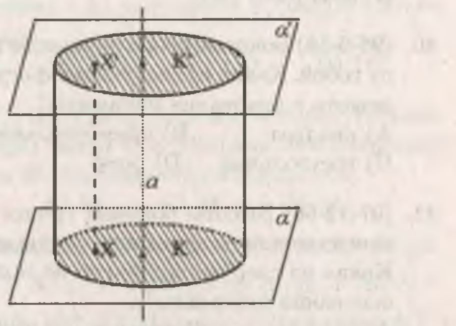


Рисунок 16.16

Прямой цилиндр можно рассматривать как тело, полученное вращением прямоугольника вокруг некоторой стороны (здесь сторона является осью вращения) (рис. 16.17).

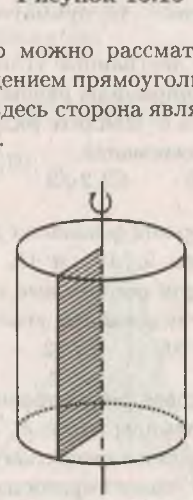


Рисунок 16.17

Радиус основания называется *радиусом* цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований называется *высотой цилиндра.* Прямая проходящая через центры оснований называется *осью цилиндра.* Эта ось параллельна образующей цилиндра.

Сечение цилиндра, проходящее через ось называется *осевым сечением.* Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная осевому сечению, проходящую через эту образующую называется *касательной плоскостью.* Плоскость, пересекающая цилиндр и перпендикулярная оси цилиндра пересекает боковую поверхность цилиндра по окружности, равной окружности основания цилиндра.

Основные сведения о цилиндре.

1. **Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту:** $S_{bok} = 2\pi RH$.

2. **Развертка боковой поверхности цилиндра - прямоугольник с основанием, равным** $2\pi R$, **и высотой** H.

3. **Площадь полной поверхности цилиндра вычисляется по формуле** $S_{pol} = 2\pi R(R + H)$.

4. **Площадь осевого сечения цилиндра:** $S_{oss} = 2RH$.

5. **Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту:** $V = \pi R^2 H$.

1. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра радиуса 5 и высотой 3.
A) 30π B) 20π C) 60π D) 45π

Решение: Подставив значения $R = 5$, $H = 3$ в формулу для площади боковой поверхности цилиндра $S_{bok} = 2\pi RH$, получим $S_{bok} = 2\pi \cdot 5 \cdot 3 = 30\pi$. **Ответ:** 30π (A).

2. Найдите радиус цилиндра, площадь боковой поверхности которого 60π, высота 2.
A) 5 B) 10 C) 15 D) 20

3. Высота и радиус цилиндра равны, а площадь полной поверхности равна 64π. Найдите высоту цилиндра.
A) 3 B) 4 C) 6 D) 8

4. Высота и диаметр основания цилиндра, площадь боковой поверхности которого 16π, взаимно равны. Найдите радиус цилиндра.
A) 1 B) 2 C) 4 D) 8

5. Развертка боковой поверхности цилиндра - прямоугольник с основанием 10 и высотой 5. Найдите радиус цилиндра.
A) $\frac{5}{\pi}$ B) $\frac{4}{\pi}$ C) $\frac{3}{\pi}$ D) $\frac{5}{\pi}$

6. (96-9-99) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π, а объем равен 48π. Найдите высоту цилиндра.
A) 2 B) 4 C) 8 D) 3

Решение: Пусть высота цилиндра H, а радиус основания R. Из условия задачи а также из 1- и 5- правил получим систему

$$\begin{cases} 2\pi R \cdot H = 24\pi, \\ \pi R^2 \cdot H = 48\pi \end{cases}$$

Разделив почленно, второе уравнение на первое получим, $\frac{R}{2} = 2$. В первом уравнении, считая $R = 4$, имеем $H = 3$. **Ответ:** 3 (D).

7. (98-5-45) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, площадь осевого сечения которого 10.
A) 10π B) 20π C) 30π D) 15π

8. (02-2-57) Площадь осевого сечения цилиндра равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
A) 4π B) 8π C) 2π D) 7π

9. (98-6-43) Высота цилиндра равна 3, диагональ осевого сечения равна 5. Найдите радиус основания.
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

10. (98-11-43) Чему равен объем цилиндра, если его осевое сечение - квадрат со сторонами $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$?
A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{1}{4}$ D) 4

11. (00-10-38) Осевое сечение цилиндра - квадрат со сторонами $\frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$. Найдите его объем.
A) 27 B) 9 C) 54 D) 36

12. (99-1-39) Во сколько раз увеличивается объем цилиндра, если радиус его основания увеличить в 2 раза?
A) 4 B) 2 C) 3 D) 6

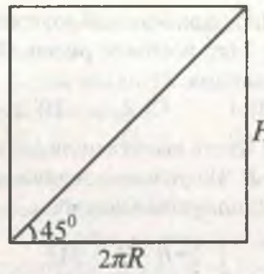
13. (99-2-54) Прямоугольник со сторонами 2 и 4 вращается вокруг большей стороны. Найдите площадь полной поверхности полученного тела.
A) 22π B) 23π C) 24π D) 20π

14. (99-2-56) Развертка боковой поверхности цилиндра - прямоугольник, диагональ которого составляет с основанием угол 45^0. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $144\pi^2$. Найдите радиус основания цилиндра.
A) 5 B) 4 C) 6 D) 8

Решение: Из условия задачи и 2- утверждения имеем $2\pi R = H$. В формуле $S_{bok} = 2\pi RH$ при $S_{bok} = 144\pi^2$, $H = 2\pi R$ получим

$$144\pi^2 = (2\pi R)^2 \iff 2\pi R = 12\pi \iff R = 6.$$

Ответ: 6 (C).



15. (01-8-49) Высота и радиус основания цилиндра равны 6. Найдите радиус круга площадь которого равна площади полной поверхности этого цилиндра.
A) $6\sqrt{3}$ B) 8 C) 9 D) 12

16. (01-9-55) Полная поверхность цилиндра с радиусом основания 3 не меньше 28 и не больше 30.ъ Какому отрезку принадлежит высота этого цилиндра?
A) $[\frac{1}{3};2]$ B) $[1;2\frac{2}{3}]$ C) $[1;2]$ D) $[\frac{5}{3};2]$

17. (02-7-33) Высота цилиндра равна 8, а диагональ развертки боковой поверхности равна 10. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
A) 48 B) $\frac{48}{\pi}$ C) 24 D) 48π

18. (02-8-38) Площадь основания цилиндра равна 4, а площадь боковой поверхности $12\sqrt{\pi}$. Найдите высоту цилиндра.
A) 3 B) 4 C) 2 D) 2,8

Решение: Из условия задачи $S_{oc}=\pi R^2=4$ имеем $R=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Из формулы $S_{bok}=2\pi RH$ при $S_{bok}=12\sqrt{\pi}$ и $R=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, имеем $2\pi\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}H=12\sqrt{\pi}$. Отсюда $H=3$. **Ответ:** 3 (A).

19. (03-2-54) Во сколько раз увеличится объем цилиндра, если площадь его боковой поверхности увеличить в 2 раза.
A) 2 B) 4 C)8 D) нельзя определить

20. (03-5-61) Объем цилиндра равен 120π, а боковая поверхность равна 60π. Найдите радиус основания цилиндра.
A) 4 B) 5 C) 6 D) 4, 2

21. (03-6-81) Из квадрата стороной 2 свернут цилиндр. Найдите площадь основания этого цилиндра.
A) $\frac{2}{\pi}$ B) $\frac{1}{2\pi}$ C) $\frac{1}{\pi}$ D) $\frac{1}{3\pi}$

22. (03-7-54) Развертка боковой поверхности цилиндра - прямоугольник, диагональ которого равна 12, и эта диагональ составляет с основанием угол 30^0. Найдите объем этого цилиндра.
A) $\frac{182\sqrt{3}}{\pi}$ B) 91π C) $\frac{91}{\pi}$ D) $\frac{162}{\pi}$

23. Бочка цилиндрической формы наполнена маслом. Если диаметр бочки равен $\frac{100}{\sqrt{\pi}}$ см, высота 160 см, то сколько литров масла находится в бочке?
A) 200 B) 300 C) 400 D) 80π

Решение: Вместимость этой бочки (объем цилиндра), при $R=\frac{d}{2}=\frac{50}{\sqrt{\pi}}$

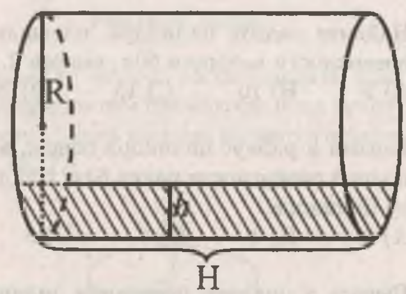
$$V=\pi R^2H=\pi\frac{50^2}{\pi}160=400\,000^3.$$

Известно что, $1000^3=1$ литр. Отсюда получим, что в бочке имеется $400\,000:1000=400$ литров масла. **Ответ:** 400 (C).

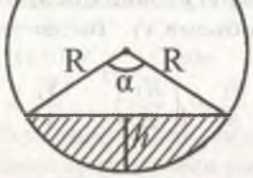
24. Из всех цилиндров, имеющих площадь полной поверхности 24π, найдите цилиндр наибольшего объема.
A) 16π B) 12π C) 24π D) 32π

25. В автозаправочной станции имеется цистерна цилиндрической формы. Ее диаметр $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$ м, длина 8 м. Если 1 литр бензина имеет вес 880 грамм, то сколько тонн бензина вмещается в цистерну?
A) 20 B) 30 C) 44 D) 50

26. В автозаправочной станции имеется цистерна цилиндрической формы. Ее диаметр $d=4$ м, длина 7 м. Если высота горючего $h=1$ м (см. рисунок), то сколько литров горючего в цистерне?
A) $7000(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{2})$ B) $7000(\frac{8\pi}{3}-\sqrt{3})$
C) $7000(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3})$ D) $7000(\frac{8\pi}{3}-\sqrt{2})$



Решение: Задачу решим в общем случае. Объем части цистерны занимаемой горючим равен $V=S_{seg}H$, здесь $S_{seg}-$ площадь сегмента круга, а H - длина цистерны, т.е. высота цилиндра. По 10 утверждению 15.6 площадь сегмента $S_{seg}=\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)$, $\alpha-$ центральный угол (см. рис.)



Нашей целью является найти выражение α и $\sin\alpha$ через h и радиус цистерны R. Выполнив несложные вычисления, получим

$$\alpha = 2\arccos\frac{R-h}{R},\ \sin\alpha = \frac{2(R-h)}{R^2}\sqrt{h(2R-h)}.$$

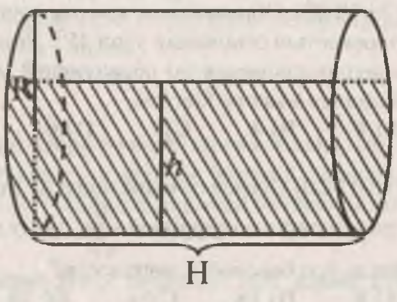
Итак искомый объем

$$V = H\left(R^2\arccos\frac{R-h}{R} - (R-h)\sqrt{2h(R-h)}\right).$$

Подставив в эту формулу значения $H = 7$ м, $R = \frac{d}{2} = 2$ м, $h = 1$ м, получим $V = 7000(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3})$ литров. Это означает, что в цистерне имеется приблизительно 17360 литров горючего. **Ответ:** $7000(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3})$ (C).

27. В автозаправочной станции имеется цистерна цилиндрической формы. Ее диаметр $d = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$ м, длина 6 м. Если высота горючего $h = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ м, то сколько литров горючего в цистерне?
A) 27000 B) 54000 C) 6400 D) 28000

28. В автозаправочной станции имеется цистерна цилиндра ической формы. Ее радиус $R = 2$ м, длина 7 м. Если высота горючего (см. рисунок) $h = 3$ м, то сколько литров горючего в цистерне?
A) $7000(\frac{8\pi}{3} + \sqrt{2})$ B) $7000(\frac{8\pi}{3} - \sqrt{3})$
C) $7000(\frac{8\pi}{3} - \sqrt{2})$ D) $7000(\frac{8\pi}{3} + \sqrt{3})$



29. (99-3-58) Чему может равняться наибольшее значение объема цилиндра, полная поверхность которого равна 24π?
A) 16π B) 20π C) 28π D) 18π

16.5.2 Конус

Тело, составленное из всех отрезков, соединяющих данную точку пространства с точками некоторого круга называется *конусом*. Данная точка называется *вершиной конуса*, а круг - *основанием конуса* (рис. 16.18). Если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания перпенндикулярна плоскости основания, то такой конус называется *прямым конусом*. На рисунке 16.18 изображен прямой конус.

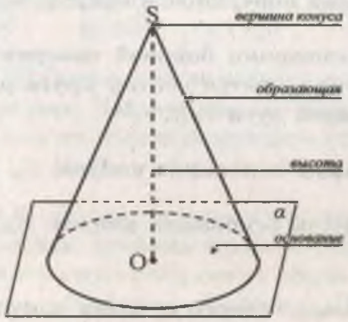


Рисунок 16.18

Его вершина точка S, основание - круг на плоскости α. Конус состоит из всех отрезков SX соединяющих вершину S с точками X основания конуса. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания называютя *образующими конуса* (рис. 16.18). Прямой конус можно рассматривать как тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов (рис. 16.19).

Рисунок 16.19

Перпендикуляр, опущенный из вершины к основанию называется *высотой* конуса (рис. 16.18). Основание высоты прямого конуса совпадает с центром его основания. Прямая проходяшая через высоту конуса называется его *осью*. Сечение плоскостью по оси конуса называется его *осевым сечением*. Осевое сечение конуса является равнобедренным треугольником. Если осевое сечение конуса - правильный треугольник, то он называется *правильным конусом*. Плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная к плоскости осевого сечения, проведенной через эту образующую, называется *касательной плоскостью*. Плоскость, пересекающая конус и перпендикулярная к его оси пересекает конус по кругу, а боковую поверхность по окружности с центром на оси конуса. Плоскость, перпендикулярная оси конуса, отсекает от него меньший конус. Остальная часть конуса называется *усеченным конусом* (рис. 16.20).

Пусть радиус основания конуса – R, высота – H, образующая – l. а α - угол между образующей и плоскостью основания конуса.

Относительно конуса справедливы следующие утверждения.

1. **Боковая поверхность конуса:** $S_{bok} = \pi Rl$.

2. **В разложении боковой поверхности конуса получается сектор круга радиуса l и длиной дуги $2\pi R$.**

3. **Площадь основания конуса:** $S_{os} = \pi R^2$.

4. **Площадь основания конуса:** $S_{os} = S_{bok} \cdot \cos\alpha$.

5. **Площадь осевого сечения конуса:** $S_{oss} = RH$.

6. **Площадь полной поверхности конуса равна сумме площадей его основания и боковой поверхности:** $S_{pol} = S_{os} + S_{bok} = \pi R(R + l)$.

7. **Объем конуса равен одной трети произведения площади основания и высоты конуса:** $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

8. **Объем конуса** $V = \frac{1}{3}S_{bok}h$, **где** $h-$ **расстояние от центра основания до образующей конуса.**

Пусть радиусы оснований усеченного конуса R и r, высота H, а образующая l.

Рисунок 16.20

9. **Площадь боковой поверхности:** $S_{bok} = \pi l(R + r)$.

10. **Площадь полной поверхности усеченного конуса:** $S_{pol} = \pi(R^2 + r^2 + l(R + r))$.

11. **Объем усеченного конуса:** $V_{uskon} = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr)$.

12. **Пусть плоскость, проходящая от вершины конуса на расстоянии H_1 и пересекающая его по кругу площади S_1 отсекает от него конус объема V_1. Тогда:**

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^2, \quad \frac{V_1}{V} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^3.$$

1. Найти площадь боковой поверхности конуса с радиусом 2 и образующей 5.
A) 10π B) 12π C) 8π D) 10

Решение: По 1-утверждению $S_{bok} = \pi Rl = \pi \cdot 2 \cdot 5 = 10\pi$. **Ответ:** 10π (A).

2. При развертке конуса получили сектор радиуса 8 и длиной дуги 8π. Найти отношение радиуса конуса к образующей.
A) 0,5 B) 0,4 C) 0,2 D) 0,8

3. Площадь основания конуса равна π. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол 60^0. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
A) π B) 2π C) 3π D) 4π

4. Площадь основания конуса равна 4π, а образующая конуса равна 3. Найдите площадь полной поверхности конуса.
A) 8π B) 6π C) 10π D) 12π

5. Найдите объем конуса с радиусом 4 и образующей 5.
A) 16π B) 18π C) 24π D) 12π

6. (98-9-55) Боковая поверхность конуса равна 60π, а полная поверхность 96π. Найдите образующую конуса.
A) 12 B) 9 C) 8 D) 10

Решение: По условию задачи $S_{os} = 36\pi$, $S_{pol} = 96\pi$. Нужно найти образующую конуса l. Из данных следует $S_{bok} = S_{pol} - S_{os} = 60\pi$. Из $S_{os} = 36\pi = \pi R^2$ имеем $R = 6$, а из $S_{bok} = 60\pi = \pi Rl$ получим $l = 10$. **Ответ:** 10 (D).

7. (98-10-98) Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол 45^0. Расстояние от центра основания до образующей равно $3\sqrt{2}$. Найдите высоту конуса.
A) 5 B) 4 C)7 D) 6

8. (98-11-50) Осевое сечение конуса - правильный треугольник со стороной $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$. Чему равна площадь его боковой поверхности?
A) 9 B) 18 C)24 D) 28

9. (99-7-44) Площадь осевого сечения конуса равна 8, радиус основания равен 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
A) 6π B) $4\sqrt{5}\pi$ C)$5\sqrt{5}\pi$ D) 5π

10. (99-8-67) Найдите площадь полной поверхности тела, полученного вращением прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 вокруг меньшего катета
A) 144π B) 100π C)80π D) 150π

Решение: Из условия задачи следует, что гипотенуза данного треугольника равна $c = 10$. Радиус и образующая полученного конуса соответственно равны $R = 8$, и $l = 10$. Из 6-формулы $S_{pol} = \pi R(R + l)$ получим $S_{pol} = \pi \cdot 8 \cdot (8 + 10) = 144\pi$. **Ответ:** 144π (A).

11. (00-7-52) Разверткой боковой поверхности конуса является сектор с центральным углом 30^0. Найдите отношение образующей конуса к радиусу основания.
A) 10 B) 12 C)11 D) 9

12. (01-3-17) Высота конуса равна 8, радиус основания 6. Найдите угол при вершине развертки конуса.
A) 216^0 B) 270^0 C)180^0 D) 312^0

13. (01-9-15) Осевое сечение конуса - правильный треугольник. Полная поверхность конуса равна 18.
Найдите площадь основания конуса.
A) 6 B) 12 C)$3\sqrt{2}$ D) 3

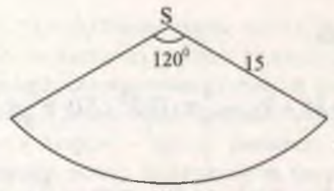
14. (01-11-51) Площадь осевого сечения правильного конуса равна $16\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности этого конуса.
A) 30π B) 32π C)34π D) 28π

15. (02-2-46) Из окружности вырезан сектор с центральным углом 90^0 и оставшаяся часть свернута в конус. Найдите отношение диаметра основания этого конуса к образующей.
A) $1,5$ B) 2 C) $1,25$ D) $1,75$

16. (02-3-69) Образующая конуса равна 100, а синус угла между образующей и плоскостью основания равен 0,6. Определите периметр осевого сечения конуса.
A) 360 B) 320 C) 420 D) 340

17. (02-7-26) Образующая конуса равна 15, угол при вершине развертки боковой поверхности равен 120^0. Найдите диаметр основания конуса.
A) 10 B) 15 C) 20 D) 25

Решение: По 2 свойству 15.6 длина дуги с радиусом $R = 15$ и центральным углом $\alpha = 120^0 = \dfrac{2\pi}{3}$ равна $l = \alpha R = 10\pi$. Если обозначим диаметр основания $d = 2r$, то для длины окружности основания имеем $d\pi = 10\pi$. Отсюда получим $d = 10$. **Ответ:** 10 (A).



18. (02-7-27) Радиус основания конуса 12, а образующая 40. Найдите угол при вершине развертки боковой поверхности этого конуса.
A) 108^0 B) 90^0 C) 120^0 D) 75^0

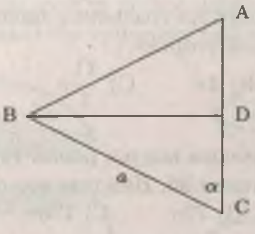
19. (02-8-39) Осевое сечение конуса - правильный треугольник. Найдите диаметр основания конуса, если его полная поверхность равна 243π.
A) 18 B) 11 C) 9 D) 21

20. (02-12-63) Осевое сечение конуса - правильный треугольник, площадь которого равна $16\sqrt{3}$. Найдите полную поверхность конуса.
A) 48π B) 44π C) 46π D) $48\sqrt{3}\pi$

21. (03-9-58) Две стороны осевого сечения конуса равны 4 и 9. Найдите боковую поверхность этого конуса.
A) 12π B) 16π C) 18π D) 24π

22. (00-6-50) Найдите объем тела, полученного вращением равнобедренного треугольника с основанием a и углом при основании α вокруг боковой стороны.
A) $\dfrac{\pi a^3 \sin\alpha}{3}$ B) $\dfrac{\pi a^3 \sin^2\alpha}{6\cos\alpha}$
C) $\dfrac{\pi a^3 \operatorname{tg}\alpha}{2}$ D) $\dfrac{\pi a^3 \cos\alpha}{6\sin^2\alpha}$

Решение: Вращаем треугольник ABC (AB=AC) вокруг боковой стороны AC. Объем V полученного тела равен сумме объемов V_1, V_2 двух конусов. Вершина первого конуса расположена в точке A, а второго в точке C. Радиус основания каждого конуса равен высоте BD треугольника ABC.



Найдем BD и AC. Из треугольника BDC имеем $BD = a\sin\alpha$. В равнобедренном треугольнике ABC основание a находим по теореме косинусов $a = 2AC\cos\alpha$, отсюда получим $AC = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$. По формуле объема конуса

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot BD^2 \cdot AD, \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot BD^2 \cdot DC.$$

Тогда

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot BD^2 \cdot AD + \frac{1}{3}\pi \cdot BD^2 \cdot DC =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot BD^2 \cdot (AD + DC) = \frac{1}{3}\pi \cdot BD^2 \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot a^2 \sin^2\alpha \cdot \frac{a}{2\cos\alpha} = \frac{\pi a^3 \sin^2\alpha}{6\cos\alpha}.$$

Ответ: $\frac{\pi a^3 \sin^2\alpha}{6\cos\alpha}$ (B).

23. (96-1-52) Найдите объем конуса с длиной основания $8\sqrt{\pi}$ и высотой 9 см.
A) 16π B) 24 C) 16 D) 48

24. (98-5-46) В основание конуса вписан правильный треугольник со стороной $3\sqrt{3}$. Найдите объем конуса, если его образующая равна 5.
A) 8π B) 48π C) 36π D) 12π

25. (98-6-44) Образующая конуса равна 6 и она составляет с плоскостью основания угол 30^0. Найдите объем конуса.
A) 9π B) $9\sqrt{3}\pi$ C) 27π D) $27\sqrt{3}\pi$

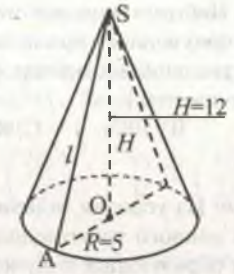
26. (96-11-55) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = |x+2|$, $x = -3$, $x = 0$ и $y = 0$.
A) 2π B) 3π C) π D) 4π

27. (96-12-57) Найти объем тела полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры ограниченную линиями $y = |x-1|$, $x = -1$, $x = 2$ и $y = 0$.
A) 3π B) 4π C) 5π D) π

28. (01-1-57) Сторона правильного треугольника равна 2. Найти объем тела, полученного вращением триугольника вокруг оси, проходящей через вершину треугольника параллельно противолежащей стороне.
A) 6π B) 4π C) $\frac{11}{2}\pi$ D) 8π

29. (01-8-48) Высота конуса равна 12, а периметр осевого сечения 36. Найдите его объем.
A) 36π B) 72π C) 100π D) 300π

Решение: Даны: $H = 12$, $2l + 2R = 36$. Отсюда следует $l + R = 18$. Из прямоугольного треугольника SOA полученного в осевом сечении имеем $H^2 = l^2 - R^2 \iff 12^2 = (l+R)(l-R) \iff 144 = 18 \cdot (l-R)$. Отсюда $l - R = 8$. Если иметь в виду $l + R = 18$, то получим $R = 5$. Из формулы для объема конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ следует $V = 100\pi$. **Ответ:** 100π (C).



30. (03-9-57) Стороны равнобедренного треугольника равны 10 и 22. Его вращали вокруг оси симметрии. Найдите полную поверхность полученного тела.
A) 105π B) 125π C) 135π D) 150π

31. (03-9-63) Отношение объема конуса к π равно 9, его образующая составляет с плоскостью основания угол 45^0. Найдите высоту конуса.
A) 3 B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) 1, 5

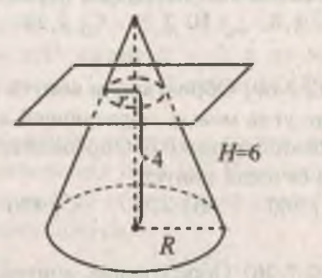
Усеченный конус

32. (97-4-58) Высота конуса равна 6. На расстоянии 4 от основания конуса проведена плоскость параллельная основанию. Найдите отношение площади полученного сечения к площади основания конуса.
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{1}{9}$

Решение: Плоскость, параллельная основанию конуса отсекает от него конус высотой $H_1 = 2$. Пусть площадь основания этого конуса равна S_1. Из 12 свойства

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Ответ: $\frac{1}{9}$ (D).



33. (97-9-59) Конус с образующей 5 и высотой 4 пересечен плоскостью на расстоянии 2 от основания. Вычислить площадь полученного сечения.
A) $2,25\pi$ B) $3,16\pi$ C) $2,64\pi$ D) $1,81\pi$

34. (98-11-92) Радиусы оснований усеченного конуса равны 1 и 5. Чему равна образующая конуса, если его высота равна 3?
A) 6 B) 3 C) 4 D) 5

35. (01-6-54) Площадь боковой поверхности конуса равна 96π. Найти площадь боковой поверхности усеченного конуса, полученного проведением плоскости через середину высоты перпендикулярно к ней.
A) 70π B) 74π C) 72π D) 68π

36. (02-5-52) Найти площадь боковой поверхности усеченного конуса с радиусами оснований 2 и 7, диагональю осевого сечения 15.
A) 112π B) 115π C) 117π D) 120π

37. Найти объем усеченного конуса с радиусами оснований, равными 2 и 5, высотой 3.
A) 12π B) 15π C) 30π D) 39π

Решение: Объем усеченного конуса вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$. Здесь при $r = 2$, $R = 5$ и $H = 3$ имеем $V = 39\pi$.
Ответ: 39π (D).

38. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси симметрии равнобедренной трапеции с основаниями 2 и 4, высотой 3.
A) 12π B) 7π C) 8π D) 9π

39. Диагональное сечение усеченного конуса - равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 6 и диагональю 5. Найдите объем усеченного конуса.
A) 12π B) 15π C) 13π D) 39π

16.5.3 Шар, сфера

Тело, составленное из множества точек, расположенных на расстоянии не более, чем данной длины от данной точки называется *шаром*(рис. 16.21*a*). Данная точка называется *центром шара,* а данное расстояние *радиусом шара.* Граница шара называется *поверхностью шара* или *сферой.* Любой отрезок, соединяющий центр шара с точкой поверхности шара также называется *радиусом.*

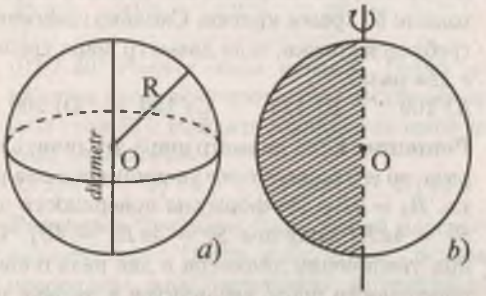


Рисунок 16.21

Отрезок, соединяющий две точки поверхности шара и проходяший через центр называется *диаметром.* Концы любого диаметра называются *диаметрально противоположными точками шара.* Шар, также как цилиндр и конус, является телом вращения. Он получается в результате вращения полукруга вокруг диаметра (рис. 16.21*b*).

Плоскость, проходящая через точку A поверхности шара и перпендикулярная радиусу называется *касательной плоскостью.* Точка A называется *точкой касания.* Касательная плоскость имеет одну общую точку с шаром - точку касания. Прямая, проходящая через точку поверхности шара и перпендикулярная радиусу называется *касательной.* Через точку поверхности шара проходит бесконечно много касательных, они лежат на касательной плоскости. Сечение шара любой его пересекающей плоскостью - есть круг. *Центр этого круга* - основание перпендикуляра, опущенного из центра шара к плоскости. Радиус круга R', полученного пересечением шара плоскостью можно вычислить по формуле

$$R' = \sqrt{R^2 - O'O^2}$$

(рис. 16.22*a*). Отсюда следует, что плоскости, равноудаленные от центра шара пересекают шар по равным кругам. Чему ближе плоскость α к центру шара, т.е. чем меньше расстояние OO' , тем больше круг в сечении плоскости α. В сечении плоскости, проходяшей через центр получается наибольший круг. Радиус этого круга равен радиусу шара. Плоскость, проходщая через центр шара называется *диаметральной плоскостью.* Сечение диаметральной плоскостью шара называется ***большим кругом*** (рис. 16.22*b*), а сечение сферы ***большой окружностью.***

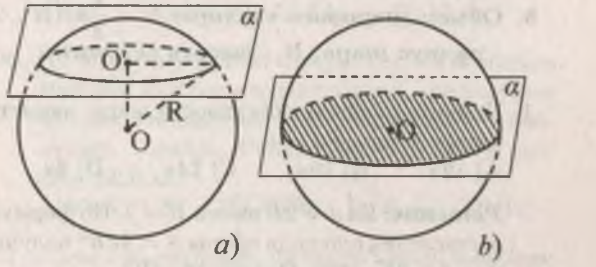


Рисунок 16.22

Произвольная диаметральная плоскость шара является для него плоскостью симметрии. Центр шара его центр симметрии. Часть шара, отсеченная плоскостью называется *сегментом шара* (рис. 16.23*a*). Часть шара, лежащая между двумя параллельными плоскостями называется *шаровым слоем* (рис. 16.23*a*).

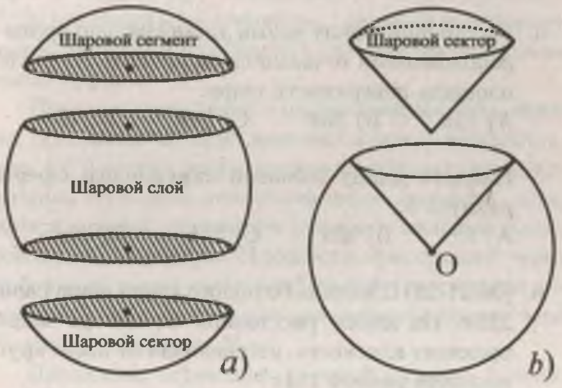


Рисунок 16.23

Тело составленное из сегмента шара и конуса как на рисунке 16.23b называется *шаровым сектором.*

В системе координат x, y, z уравнением сферы с центром в точке $A(a;\ b;\ c)$ и радиусом R является

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Если центр сферы находится в начале координат, то ее уравнение имеет вид

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

Линия пересечения двух произвольных пересекающихся сфер - окружность.

1. **Площадь сферы: $S=4\pi R^2$, $R-$ радиус шара.**

2. **Если радиус сегмента шара r и расстояние от центра шара до сегмента равно d, то $r^2+d^2=R^2$.**

3. **Объем шара: $V=\dfrac{4\pi R^3}{3}$.**

4. **Объем сегмента шара высоты H равен: $V=\pi H^2(R-\dfrac{H}{3})$.**

5. **Объем шарового сектора: $V=\dfrac{2}{3}\pi HR^2$, R - радиус шара, H - высота сегмента.**

1. Найдите площадь поверхности шара, диаметр которого равен $d=4$.
A) 12π B) 16π C) 24π D) 8π

Решение: Из $d=2R$ имеем $R=2$. По формуле вычисления площади сферы $S=4\pi R^2$ получим $S=4\pi\cdot 2^2=16\pi$. **Ответ:** 16π (B).

2. Площадь поверхности шара равна 64π. Найдите его радиус.
A) 2 B) 6 C) 4 D) 8

3. Площадь большой окружности шара равна 9π. Найдите диаметр шара.
A) 6 B) 3 C) 9 D) 4, 5

4. Расстояние между двумя диаметрально противоположными точками шара равно 6. Найдите площадь поверхности шара.
A) 12π B) 36π C) 24π D) 18π

5. Найдите длину большой окружности сферы радиуса 5.
A) 5π B) 10π C) 25π D) 20π

6. (06-21-23) Площадь большого круга шара равна 225π. На каком расстоянии от центра шара проходит плоскость, отсекающая от шара круг площади равной 161π?
A) 6 B) 7 C) 8 D) 3, 5

7. (98-11-95) Стороны треугольника касаются поверхности шара. Радиус шара равен 4. Чему равен радиус окружности вписанной, в треугольник, если расстояние от центра шара до плоскости треугольника равно 3?
A) $\sqrt{7}$ B) 1 C) 5 D) 3, 5

Решение: По условию задачи радиус шара $R=4$, расстояние от центра шара до плоскости треугольника $d=3$. Нужно найти радиус r вписанной окружности, в треугольник. При сечении шара плоскостью треугольника получается круг. В свою очередь этот круг вписан в треугольник. Из 2-свойства $r^2+d^2=R^2$ имеем $r^2+3^2=4^2 \Longleftrightarrow r=\sqrt{7}$. **Ответ:** $\sqrt{7}$ (A).

8. (02-7-32) Стороны ромба равны 12, 5 и они касаются поверхности шара. Радиус шара равен 10. Найдите площадь ромба, если расстояние от центра шара до плоскости ромба равно 8.
A) 150 B) $\dfrac{\sqrt{481}}{2}$ C) 120 D) 135

9. (02-7-28) Треугольник со сторонами 10; 10 и 12 касается поверхности шара. Найдите радиус шара, если расстояние от центра шара до плоскости треугольника равно 4.
A) 5 B) 6 C) 8 D) 4

10. (02-7-29) Стороны ромба с диагоналями 30 и 40 касаются поверхности шара радиуса 13. Найдите расстояние от центра шара до плоскости ромба.
A) 5 B) 6 C) 7 D) 4

11. (03-9-55) Расстояния между тремя точками, лежащими на поверхности шара равны 26, 24 и 10, а площадь сферы равна 900π. Найдите расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти точки.
A) $2\pi\sqrt{14}$ B) $2\sqrt{14}$ C) $4\sqrt{14}$ D) 56π

12. (98-11-40) Для покраски поверхности шара необходимо 50 грамм краски. Сколько граммов потребуется краски, если диаметр шара увеличить в два раза?
A) 100 B) 125 C) 150 D) 200

Решение: Если диаметр шара увеличить в два раза, то его радиус тоже увеличится в два раза, т.е. $R_2=2R_1$. Из формулы поверхности шара $S_1=4\pi R_1^2$ получим $S_2=4\pi R_2^2=4S_1$. Итак при увеличении диаметра в два раза площадь поверхности шара увеличится в четыре раза. Поэтому для покраски поверхности нового шара требуется $4\cdot 50=200$ грамм краски. **Ответ:** 200 (D).

13. (00-10-35) Для покраски поверхности шара необходимо 100 грамм краски. Сколько граммов краски потребуется, если диаметр шара увеличить в три раза?
A) 900 B) 300 C) 600 D) 450

14. (98-4-40) Если радиус сферы увеличить на 50%, то на сколько процентов увеличится площадь ее поверхности?
A) 125 B) 100 C) 150 D) 75

15. (03-11-47) Если радиус сферы увеличить на 60%, то на сколько процентов увеличится площадь ее поверхности?
A) 156 B) 120 C) 150 D) 160

16. (98-6-46) Шар, радиуса которого 13, пересечен плоскостью на расстоянии 10 от центра. Найдите площадь сечения.
A) 69π B) $3\sqrt{6\pi}$ C) 100π D) 3

17. (98-7-54) Расплавив три металлических шара с радиусами 2; 3 и 4 отлили один шар. Найдите объем этого шара.
A) 144π B) 396π C) 99π D) 132π

18. (00-5-61) Отношение площадей двух сфер равно 2. Найдите отношение диаметров этих сфер.
A) 2 B) 4 C) 8 D) $\sqrt{2}$

19. (00-7-50) Определите длину радиуса сферы, определенной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10z - 35 = 0.$$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8

Решение: Из $(x-2)^2 + y^2 + (z-5)^2 = 35 + 4 + 25 = 64 = R^2$ имеем $R = 8$. **Ответ:** 8 (D).

20. (01-2-47) Определите площадь поверхности шара, объем которого равен $\frac{9\pi}{16}$.
A) $3\frac{3}{4}\pi$ B) $2\frac{1}{4}\pi$ C) $4\frac{1}{4}\pi$ D) 9π

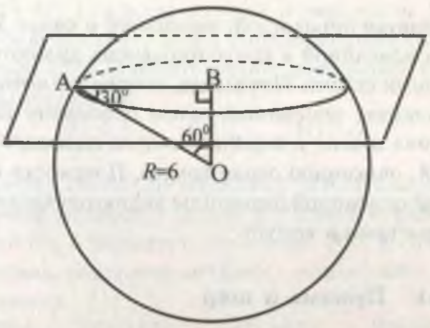
21. (01-9-25) Шар с радиусом $\sqrt[3]{2}$, и конус, боковая поверхность которого в три раза больше площади основания равновелики. Определите высоту конуса.
A) 4 B) 3 C) 5 D) 2

22. (02-7-30) Радиус шара равен 6. Через конец радиуса проведена плоскость, составляющая с ним угол 30^0. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью.
A) 27π B) 8π C) 64π D) 25π

Решение: Сечением шара любой плоскостью является круг. Центр этого круга - основание перпендикуляра, опущенного из центра шара к плоскости. В полученном прямоугольном треугольнике OAB (см. рисунок) $AB = r$. Итак,

$$\sin 60^0 = \frac{AB}{AO} \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{6}.$$

Отсюда имеем $r = 3\sqrt{3}$. Таким образом, площадь полученного круга равна $S = \pi r^2 = 27\pi$. **Ответ:** 27π (A).



23. (02-7-31) Расстояние между центрами шаров с радиусами 15 и 20 равно 25. Найдите длину окружности, полученной при пересечении поверхностей этих шаров.
A) 24π B) 20π C) 25π D) 15π

24. (03-7-84) Через середину высоты полушара радиуса 2 проведена плоскость, параллельная основанию полушара. Найдите объем полученного шарового слоя.
A) $\frac{10\pi}{3}$ B) $\frac{11\pi}{3}$ C) 4π D) 3π

25. (00-1-58) Из точки M вне шара проведена касательная MN к поверхности шара. Расстояние от точки M до поверхности шара равно 6, а до центра шара равно 15. Найдите длину MN.
A) 10 B) 16 C) 14 D) 12

26. На берегу моря стоит башня высотой 30 метров. Найдите наибольшее расстояние, при котором человек стоящий на верху башни может наблюдать корабль. Радиус Земли считать равным 6400 км.
A)$10\sqrt{2}$ B) $\sqrt{384,0009}$ C) $8\sqrt{6}$ D) 12

27. Даны куб, тетраэдр, цилиндр и шар, имеющие равные площади поверхностей. Объем какого из них наибольший?
A) куб B) цилиндр C) тетраэдр D) шар

16.6 Комбинации тел

Если все вершины многогранника лежат на поверхности шара, то *многогранник называется вписанным в шар*, (шар - описанным к многограннику). Если все грани многогранника касаются поверхности шара, то такой многогранник называется *описанным около шара*.

Призмой, вписанной в цилиндр называется призма, основания которой вписаны в основания цилиндра. Ее боковые ребра являются образующими цилиндра. *Призмой, описанной около цилиндра* называется призма, основания которого описаны около оснований цилиндра. Плоскости проходящие через ее боковые грани касаются боковой поверхности цилиндра. Радиус основания цилиндра обозначим через R, его высоту через H.

Пирамида, основание которой вписано в основание конуса, а вершина лежит в вершине конуса называется пирамидой, *вписанной в конус*. Боковые ребра вписанной в конус пирамиды являются образующими конуса. Пирамида, основание которой многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина лежит в вершине конуса называется пирамидой, *описанной около конуса*. Плоскости боковых граней описанной пирамиды являются касательными плоскостями к конусу.

16.6.1 Призма и шар

1. **Если в призму с высотой H вписан шар радиуса r, то $H = 2r$.**

2. **Если около призмы с большой диагональю равной d описан шар с радиусом R, тогда $d = 2R$.**

3. **Если в многогранник с объемом V, полной поверхностью S вписан шар радиуса r, то** $V = \frac{1}{3} S_{pol}\, r$.

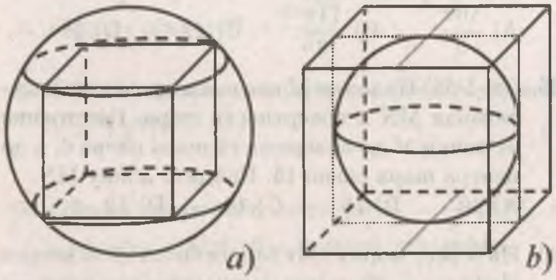


Рисунок 16.24

1. (96-1-53) Найдите радиус шара, описанного около куба, поверхность которого равна 72.
A) 3 B) 6 C) $3\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}$

Решение: Полная поверхность куба $S_{pol} = 6a^2$. По условию задачи $6a^2 = 72$. Отсюда $a^2 = 12$. Диагональ этого куба $d = \sqrt{3a^2} = \sqrt{36} = 6$. По 2-правилу $d = 2R$ или $R = 3$. **Ответ:** 3 (A).

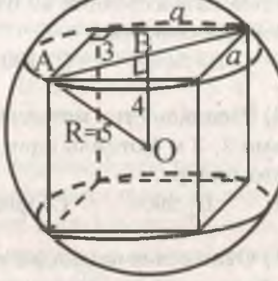
2. (97-8-56) Найти площадь поверхности шара, вписанного в куб, объем которого 125.
A) 125π B) 25π C) $24,5\pi$ D) 105π

3. (98-12-95) Найти площадь поверхности шара, описанного около куба, расстояние между центрами смежных граней которого равно $2\sqrt{2}$.
A) 28π B) 36π C) 48π D) $18\sqrt{2}\pi$

4. (96-6-60) Ребро куба равно 6. Найдите объем шара, вписанного в куб.
A) 12π B) 36π C) 27π D) 18π

5. (00-5-59) В шар радиуса 5 вписана правильная четырехугольная призма с высотой 8. Найдите объем призмы.
A) 136 B) 144 C) 169 D) 172

Решение: По условию задачи основанием вписанной в шар призмы является квадрат. Пусть его сторона a, тогда диагональ квадрата равна $d = a\sqrt{2}$. Из центра шара O к диагонали квадрата опустим перпендикуляр. Этот перпендикуляр в точке B делит диагональ квадрата пополам. Отрезок OB равен половине высоты H, т.е. $OB = 4$. Так как $OA = R = 5$, по теореме Пифагора $AB = 3$. Из $AB = \frac{d}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} = 3$ следует $a = 3\sqrt{2}$. Итак, $V = SH = a^2 \cdot 8 = 18 \cdot 8 = 144$. **Ответ:** 144 (B).



6. (02-11-61) Найдите радиус сферы, проходящей через все вершины куба, длина ребра которого равно 8.
A) $3\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{3}$ D) $6\sqrt{3}$

7. (03-2-53) Площадь сечения, проходящего через середины трех ребер куба, исходящих из одной вершины равна $16\sqrt{3}$. Вычислить площадь поверхности шара, вписанного в этот куб.
A) 96π B) 256π C) 144π D) 128π

8. (03-10-58) Во сколько раз объем описанного около куба шара больше объема вписанного в куб шара?
A) 8 B) 4 C) $4\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{3}$

16.6.2 Пирамида и шар

1. **Пусть в правильную пирамиду, радиус окружности, вписанной в основание которой равен r_1, а двугранные углы при основании равны α вписан шар радиуса r. Тогда**

$$r = r_1 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r_1 H}{r_1 + \sqrt{H^2 + r_1^2}} \qquad (16.20).$$

Здесь H - высота пирамиды.

Формула (16.20) справедлива для любой пирамиды, двугранные углы при основании которой равны.

2. **Если около правильной пирамиды с высотой H, боковым ребром l, описан шар радиуса R, то справедливо равенство**

$$l^2 = 2HR = R_1^2 + H^2 \quad \text{или} \quad R = \frac{R_1^2 + H^2}{2H}.$$

Здесь R_1– радиус окружности, вписанной в основание пирамиды.

1. (98-12-71) Полная поверхность пирамиды равна 60, радиус вписанного в нее шара равен 5. Найдите объем пирамиды.
A)120   B) 80   C) 90   D) 100

Решение: По формуле 3 пункта 16.6.1 $V = \frac{1}{3} S r$
$V = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 5 = 100$. **Ответ:** 100 (D).

2. (99-5-48) Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна 5, площадь круга, описанного около основания, равна 12π. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.
A) 3   B) 3,2   C) 1,5   D) 2,5

3. (99-5-50) Все ребра правильного тетраэдра равны 1. Найдите радиус шара, описанного около этого тетраэдра.
A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ C) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ D) $\frac{11\sqrt{2}}{24}$

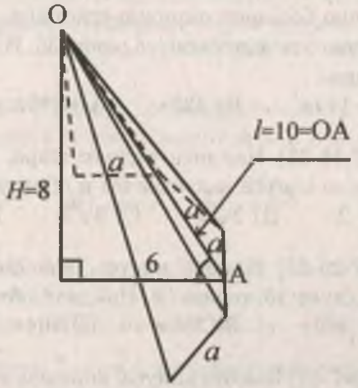
4. (00-6-49) Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 12, а радиус вписанного в нее шара равен 3. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
A) 240   B) 120   C) 480   D) 360

5. (00-9-52) Апофема правильной восьмиугольной пирамиды равна 10, площадь круга, вписанного в основание, равна 36π. Найдите радиус шара вписанного в пирамиду.
A) 1   B) 2   C) 3   D) 4

Решение: Площадь круга, вписанного в основание $S = \pi r_1^2 = 36\pi$ отсюда $r_1 = AO_1 = 6$.используя теорему Пифагора, получим $H = OO_1 = 8$. По 1-свойству имеем

$$r = \frac{8 \cdot 6}{6 + \sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{48}{16} = 3.$$

Ответ: 3 (C).



6. (98-4-12) Объем пирамиды равен 25, а радиус вписанного в нее шара 1,5. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
A) 20   B) 15   C) 25   D) 50

7. (02-11-62) Площадь полной поверхности правильной шестиугольной пирамиды равна 2000, а объем 4800. Найдите радиус вписанного в эту пирамиду шара.
A) 4   B) 4,5   C) 7   D) 7,2

8. (03-2-56) Площадь меньшего основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 50, а большего основания 200. Найдите площадь, поверхности сферы, вписанной в эту пирамиду.
A) 96π B) 125π C) 120π D) 100π

16.6.3 Цилиндр и шар

1. **Если шар радиуса R описан около цилиндра, диагональ осевого сечения которого равна d (рис. 16.25a), то $d = 2R$.**

2. **Если шар вписан в цилиндр, то осевое сечение цилиндра - квадрат и радиус шара равен радиусу окружности, вписанной в квадрат (рис. 16.25b)**

3. **Если высота цилиндра H, радиус основания R, радиус вписанного шара r, тогда (рис. 16.25b) $H = 2r$, $R = r$.**

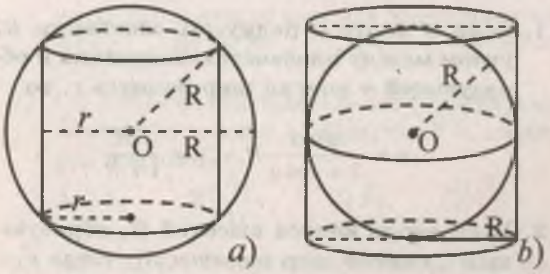


Рисунок 16.25

1. (97-12-58) Объем шара, вписанного в цилиндр, осевое сечение которого квадрат, равен $\frac{9\pi}{16}$. Найдите боковую поверхность цилиндра.
A) $\frac{3\pi}{4}$ B) $\frac{7\pi}{4}$ C) $\frac{9\pi}{4}$ D) $\frac{5\pi}{4}$

Решение: По условию задачи

$$V_{shar} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{9\pi}{16}.$$

Отсюда имеем $r = \frac{3}{4}$. Из 2-свойства получим, что высота цилиндра равна $H = \frac{3}{2}$, а радиус основания $R = \frac{3}{4}$. Из формулы боковой поверхности цилиндра $S = 2\pi RH$ имеем

$$S = 2\pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{9\pi}{4}$ (C).

2. (98-2-58) В равносторонний цилиндр вписан шар радиуса 3. Найдите объем тела, заключенного между поверхностью цилиндра и поверхностью шара.
A) 27π B) 24π C) 18π D)12π

3. (98-5-53)* Определите высоту цилиндра наибольшего объема, вписанного в сферу радиуса 1.
A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

4. (98-6-57) В равносторонний цилиндр вписан шар радиуса 3. Найдите объем тела расположенного между цилиндром и поверхностью шара.
A) 27π B) 24π C) 18π D)12π

5. (00-7-48) В равносторонний цилиндр вписан шар. Найдите боковую поверхность цилиндра, если объем шара равен $10\frac{2}{3}$.
A) 12π B) 13π C) 16π D)15π

6. (01-9-20) В цилиндр вписан шар. Найдите объем шара, если объем цилиндра равен 16π.
A) $\frac{32\pi}{3}$ B) $\frac{16\pi}{3}$ C) $\frac{64\pi}{3}$ D)$10\frac{1}{3}\pi$

16.6.4 Конус и шар

1. **Если в конус с радиусом основания R, углом между плоскостью основания и образующей α вписан шар радиуса r, то**

$$r = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}R, \quad r = \frac{RH}{l+R}$$

2. **Если около конуса высотой H, образующей l, описан шар радиуса R_1, тогда $l^2 = 2HR_1$.**

3. **Если в усеченный конус с радиусами оснований R, r, высотой H, образующей l вписан шар радиуса r_1, тогда $H = 2r_1$ и $l = R + r$.**

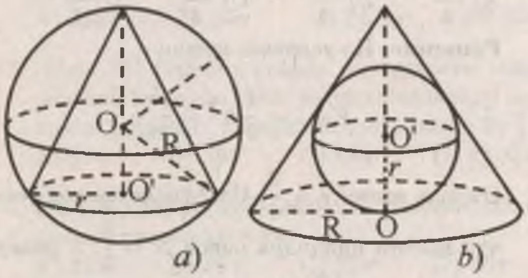


Рисунок 16.26

1. (97-12-59) В усеченный конус вписан шар. Площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через середины образующих равна 4π. Найдите образующую конуса.
A) 2 B) 4 C) 3 D) 5

Решение: Плоскость, проходящая через середины образующих усеченного конуса отсекает от конуса круг. Пусть радиус этого круга r. По условию задачи $\pi r^2 = 4\pi$. Отсюда находим $r = 2$. В осевом сечении усеченного конуса получится равнобедренная трапеция. Найдем среднюю линию этой трапеции: $l = 2r = 4$. Так как усеченный конус описан около шара, в трапецию можно вписать окружность. Поэтому боковая сторона трапеции x равна ее средней линии l: $x = l = 4$. **Ответ:** 4 (B).

2. (06-11-36) Конус вписан в шар. Образующая конуса равна диаметру основания. Найдите отношение объема шара к объему конуса.
A) 8 : 3 B) 32 : 9 C) 27 : 4 D) 16 : 9

3. (07-12-35) Образующая конуса равна 20, а диаметр основания 24. Найдите площадь поверхности вписанного в него шара.
A) 156π B) 169π C) 289π D) 144π

4. (07-13-35) Найдите площадь поверхности шара, вписанного в конус с высотой 9 и образующей 15.
A) 72π B) 56π C) 48π D) 64π

5. (07-14-35) Шар радиуса 6 вписан в конус. Угол между образующей и высотой равен 30^o. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
A) 96π B) 48π C) 216π D) 72π

6. (07-15-35) Найдите радиус шара, вписанного в конус с радиусом основания 9 и образующей 15.
A) 6 B) 4,5 C) $3\sqrt{2}$ D) $4,5\sqrt{3}$

Решение: Из данных задачи $l = 15$, $R = 9$ следует, что высота конуса равна $H^2 = 15^2 - 9^2 = 12^2$ или $H = 12$. Из формулы 1 имеем $r = \frac{9\cdot 12}{15+9} = \frac{9}{2} = 4,5$. **Ответ:** 4,5 (B).

7. (07-16-35) Основание конуса, вписанного в шар равно большой окружности шара. Площадь осевого сечения конуса равна 36. Найдите объем шара.
A) 144π B) 432π C) 288π D) 334π

8. (07-18-35) Найдите радиус шара, описанного около конуса высотой $\sqrt{3}$ и образующей $2\sqrt{3}$
A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{2}$

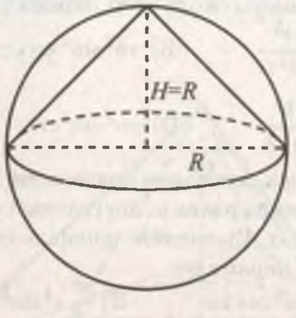
9. (07-25-35) Высота конуса, вписанного в шар радиуса 15, равна 12. Найдите объем конуса.
A) 486π B) 756π C) 864π D) 672π

10. (96-7-52) Высота конуса, вписанного в шар, равна 3, радиус основания $3\sqrt{3}$. Найдите радиус шара.
A) 5 B) 6 C) $4\sqrt{3}$ D) $5\sqrt{2}$

11. (97-1-41) Основание конуса вписанного в шар совпадает с большим кругом шара. Во сколько

раз объем шара больше объема конуса?
A) 2 B) 4 C) 3 D) 1,5

Решение: Вычислим объемы $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R$. Их отношение $\frac{V}{V} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi R^3} = 4$. **Ответ:** 4 (B).



12. (97-3-52) Высота конуса равна 6, а образующая 10. Найдите радиус вписанного в конус шара.
A) 3 B) $2\frac{2}{3}$ C) 4 D) $3\sqrt{3}$

13. (97-7-52) Высота конуса равна 3, а образующая 6. Найдите радиус шара, описанного около конуса.
A) $3\sqrt{3}$ B) 5 C) 6 D) $4\sqrt{2}$

14. (97-10-52) Найдите радиус шара, вписанного в конус с образуюшей 10 и радиусом основания 6.
A) 3 B) 4 C) $3\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{2}$

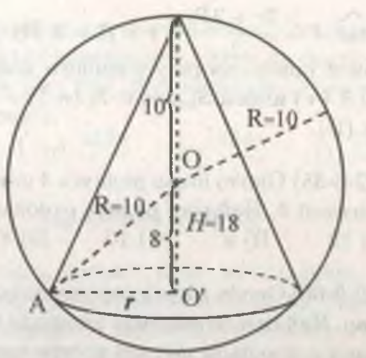
15. (98-12-66) В усеченный конус вписан шар. Площади верхнего и нижнего оснований конуса соответственно равны 36π и 64π. Найдите площадь поверхности шара.
A) 172π B) 100π C) 144π D) 192π

16. (99-2-55) Высота конуса, вписанного в шар радиуса 5 равна 4. Найдите объем конуса.
A) 28π B) 18π C) 24π D) 32π

17. (99-4-48) Найдите площадь поверхности шара, вписанного в конус высотой 6 и образующей 10.
A) $\frac{32\pi}{3}$ B) $\frac{64\pi}{3}$ C) $\frac{256\pi}{9}$ D) $\frac{64\pi}{9}$

18. (99-9-46) В сферу радиуса 10 вписан конус с высотой 18. Найдите объем конуса.
A) 210π B) 216π C) 220π D) 228π

Решение: Выота конуса проходит через центр сферы. Отсюда имеем $OO' = 8$. Радиус сферы $OA = R = 10$. Отсюда по теореме Пифагора получим $O'A = r = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$. Из формулы объема конуса $V_{kon} = \frac{1}{3}S_{os}H$ получим $V_{kon} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 18 = 216\pi$. **Ответ:** 216π (B).



19. (00-3-84) В шар вписан конус с высотой, равной диаметру основания. Найдите площадь поверхности шара, если площадь основания конуса равна 2,4.
A) 9π B) 6 C) 12,5 D) 15

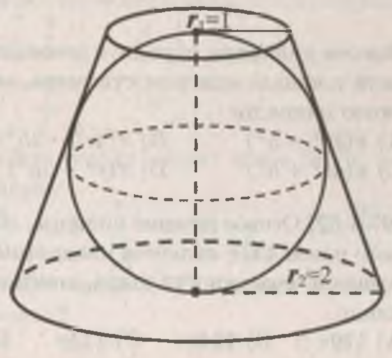
20. (00-9-7) Основание конуса вписанного в шар равна большому кругу шара. Площадь осевого сечения конуса равна 9. Найдите объем шара.
A) 30π B) 32π C) 42π D) 36π

21. (01-3-29) В шар вписан конус так, что образующая конуса равна диаметру основания. Какой процент составляет площадь полной поверхности конуса от площади поверхности шара?
A) 62 B) 56,25 C) 54,5 D) 60,75

22. (02-5-53) Найдите площадь поверхности шара, вписанного в конус с образующей 5, диаметром основания 6.
A) 16π B) $\frac{64}{11}\pi$ C) 9π D) $\frac{71}{9}\pi$

23. (02-6-52) В усеченный конус вписан шар. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если площади оснований равны π и 4π.
A) 6π B) 7π C) 8π D) 9π

Решение: Из условия задачи следует, что радиус меньшего основания равен $r = 1$, а радиус большего основания $R = 2$. В осевом сечении конуса получится равнобедренная трапеция и вписанная в нее окружность. Боковая сторона этой трапеции равна ее средней линии $l = \frac{a+b}{2}$.



Итак, $l = \dfrac{2r + 2R}{2} = r + R = 3$. Из формулы боковой поверхности усеченного конуса $S_{bok} = \pi l(R+r)$ имеем $S_{bok} = \pi \cdot 3(2+1) = 9\pi$. **Ответ:** 9π (D).

24. (02-8-35) Около шара радиуса 4 описан конус с высотой 9. Найдите радиус основания конуса.
A) 12 B) 9 C) 10 D) 8

25. (02-9-60) Около равностороннего конуса описан шар. Найдите отношение площади поверхности шара к площади полной поверхности конуса.
A) 9 : 4 B) 7 : 4 C) 16 : 9 D) 4 : 3

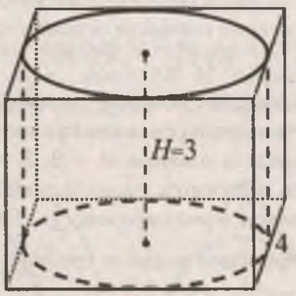
26. (97-6-41) В шар вписан конус. Образующая конуса равна диаметру основания. Найдите отношение объема шара к объему конуса.
A) 32 : 9 B) 8 : 3 C) 16 : 9 D) 27 : 4

27. (01-4-16) Боковая поверхность усеченного конуса равна 10π, а полная поверхность 18π. На сколько площадь полной поверхности конуса больше площади поверхности вписанного в него шара?
A) 14π B) 6π C) 8π D) 10π

16.6.5 Смешанный раздел

1. (97-4-59) Высота цилиндра и описанного около него правильного параллелепипеда равна 3, а сторона основания параллелепипеда 4. Найдите объем цилиндра.
A) 10π B) 12π C) 16π D) 20π

Решение: Из условия задачи следует $R = 2$. Из формулы объема цилиндра $V = S_{os}H$ имеем $V = \pi R^2 H = 4\pi \cdot 3 = 12\pi$. **Ответ:** 12π (B).



2. Высота цилиндра h, радиус основания r. Найдите площадь поверхности шара, описанного около цилиндра.
A) $\pi(2r^2 - h^2)$ B) $\pi(4r^2 - 2h^2)$
C) $\pi(4r^2 + h^2)$ D) $\pi(r^2 + 2h^2)$

3. (97-4-62) Осевое сечение цилндра, объем которого равен 432π является квадратом. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в цилиндр.
A) 120π B) 134π C) 144π D) 150π

4. (98-2-59) В куб с ребром 12 вписан конус. Основание конуса вписано в нижнее основание куба, а вершина находится в центре верхнего основания. Найдите объем конуса.
A) 120π B) 132π C) 126π D) 144π

5. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно b и составляет с основанием угол α. Вычислите площадь поверхности шара описанного около этой пирамиды.
A) $\dfrac{\pi b^2}{\cos^2 \alpha}$ B) $\pi b^2 \sin^2 \alpha$
C) $\dfrac{\pi b^2}{\sin^2 \alpha}$ D) $\pi b^2 \cos^2 \alpha$

6. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании α. Вычислите площадь сферы, вписанной в пирамиду.
A) $\dfrac{\pi}{3} a^2 \cos 2\alpha$ B) $\dfrac{\pi}{2} a^2 \sin^2 \alpha$
C) $\dfrac{\pi}{4} a^2 \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\alpha}{2}$ D) $\dfrac{\pi}{3} a^2 \operatorname{tg}^2 \dfrac{\alpha}{2}$

7. В куб с ребром 12 вписан конус. Основание конуса вписано в нижнее основание куба, а вершина находится в центре верхнего основания. Найдите площадь боковой поверхнлсти конуса.
A) 36π B) $32\sqrt{3}\pi$ C) $36\sqrt{3}\pi$ D) $36\sqrt{5}\pi$

8. (98-9-54) Найдите отношение площади боковой поверхности цилиндра, описанного около правильной треугольной призмы, к площади боковой поверхности, вписанного в призму цилиндра.
A) 3 B) 2 C) 1,5 D) 2,5

9. (00-1-56) В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Боковые грани пирамиды составляют с основанием угол 60^0, а радиус окружности вписанной в основание пирамиды равен 16. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
A) 524π B) 512π C) 536π D) 514π

10. (00-1-57) В правильную четырехугольную призму вписан цилиндр. Найдите отношение к объему цилиндра на объем призмы.
A) $\dfrac{\pi}{3}$ B) $\dfrac{\pi}{5}$ C) $\dfrac{\pi}{4}$ D) $\dfrac{2\pi}{3}$

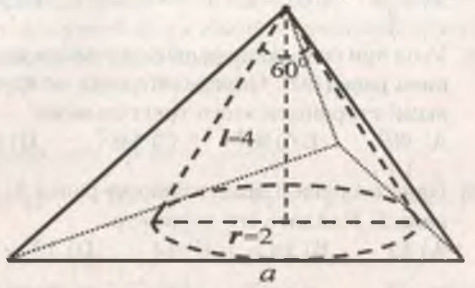
11. (00-7-49) В правильную четырехугольную призму вписан конус. Основание конуса лежит на нижнем основании призмы, а вершина лежит в центре верхнего основания. Найдите отношение объема призмы к объему конуса.
A) $\dfrac{8}{\pi}$ B) $\dfrac{9}{\pi}$ C) $\dfrac{12}{\pi}$ D) $\dfrac{10}{\pi}$

12. (01-1-60) Радиус основания конуса равен 2, угол при вершине осевого сечения 60^0. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, описанной около конуса.
A) 12 B) $12\sqrt{3}$ C) $18\sqrt{3}$ D) 24

Решение: Осевым сечением конуса является правильный треугольник. Диаметр основания конуса $d = 4$, тогда апофема пирамиды тоже $l = 4$. Высота пирамиды $H = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$. Из формулы объема пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{oc}H$ получим

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \sin 60^0 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{48}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 24.$$

Ответ: 24 (D).



13. (02-6-49) Объем цилиндра, вписанного в куб больше объема вписанного в него конуса на π. Найдите объем куба.
A) 4 B) 6 C) 8 D) 12

14. (03-1-44) Объем цилиндра вписанного, в куб равен 2π. Найдите площадь сферы, описанной около куба.
A) 12π B) 18π C) 20π D) 24π

15. (03-4-54) В цилиндр с радиусом основания 6 вписан конус. Основание конуса совпадает с нижним основанием цилиндра, а вершина с центром верхнего основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь боковой поверхности конуса равна 60π.
A) 92π B) 94π C) 96π D) 98π

16. (03-7-83) Середины сторон нижнего основания куба последовательно соединены. Вершины полученного четырехугольника соединены с центром верхнего основания куба. Если ребро куба равно a, то найдите полную поверхность полученной пирамиды.
A) $\frac{2a^2}{3}$ B) $3a^2$ C) $1,5a^2$ D) $2a^2$

17. (03-11-50) В конус с высотой 16 и радиусом основания 12 вписан цилиндр, с высотой 10. Найдите радиус основания цилиндра.
A) 4, 5 B) 4 C) 4, 8 D) 4, 2

18. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине пирамиды α. Найдите площадь сферы, вписанной в пирамиду.
A) $\pi a^2 \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$ B) $\frac{\pi a^2}{4}\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$
C) $\pi a^2 \operatorname{ctg}\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$ D) $\pi a^2 \sin(60^0 - \alpha)$

19. В шар вписан усеченный конус. Основания конуса делят поверхность шара на части с площадями 10π, 70π, 20π. Найдите объем усеченного конуса.
A) 64π B) $\frac{259\pi}{3}$ C) $\frac{264\pi}{3}$ D) $\frac{289\pi}{3}$

Проверка знаний

Вы окончили полный курс математики. У Вас есть возможность проверить свои знания. Ниже приведены три варианта заданий по 36 вопросов. Варианты 201 и 202 легкие, задачи, приведенные в варианте 203 относительно трудные. Если во время упражнений больше трудных задач, то в день ТЕСТов Вам будет настолько легче. Поэтому в 103 вариант ввели трудные задачи. Попробуйте решить эти задачи в течении 60 минут.

Ученики (абитуриенты), правильно ответившие на 31 и более вопросы, считаются отлично усвоившими материал. Ученики, давшие 25-30 правильных ответов, считаются хорошо усвоившими материал. Ученикам, правильно ответившим на 24 и менее вопрпосов, рекомендуется побольше заниматься над собой.

Вариант 201

1. В каком ответе приведены только натуральные числа?
A) 0; 2; 3; 5 B) 1; 2; 3; 5
C) −1; 0; 1 D) −2; 0; 2; 3

2. Найдите сумму цифр десятичной счетной системы.
A) 10 B) 50 C) 45 D) 100

3. В каком ответе приведены только простые числа?
A) 1; 2 ; 3 ; 5 B) 2; 3; 7; 11; 51
C) 5; 11; 13; 61 D) 3; 7; 17; 57

4. Произведение двух чисел равен 48, а их НОД равен 4. Найдите НОК этих чисел.
A) 12 B) 16 C) 8 D) 24

5. Найдите число, которое делится на 7.
A) 512 B) 624 C) 828 D) 623

6. Найдите последнюю цифру числа $3^{2010} + 5^{2011}$.
A) 4 B) 3 C) 8 D) 2

7. В каком ответе приведены правильные дроби?
A) $\frac{3}{5}; \frac{7}{8}; \frac{9}{7}$ B) $\frac{3}{11}; \frac{9}{5}; \frac{2}{9}$
C) $\frac{3}{7}; \frac{8}{5}; \frac{1}{7}$ D) $\frac{5}{9}; \frac{3}{8}; \frac{4}{7}$

8. Обратите перодическую дробь $0,3(8)$ в обыкновенную.
A) $\frac{38}{90}$ B) $\frac{7}{16}$ C) $\frac{7}{18}$ D) $\frac{35}{99}$

9. Запишите число $(2^2)^3 \cdot 2$ в виде степени с основанием 2.
A) 2^5 B) 2^3 C) 2^7 D) 2^8.

10. На какое максимальное число рациональных множителей можно разложить многочлен $b^7x - x^7b$.
A) 8 B) 7 C) 5 D) 6

11. Упростите выражение
$$\frac{x^6 - y^6}{(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)}.$$
A) $x^2 - y^2$ B) y^2 C) x^2 D) $x^2 + 2y^2$

12. Вычислите $\sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$.
A) $\sqrt{8} - 1$ B) $2\sqrt{2} + 1$
C) $2 + \sqrt{3}$ D) $3 + \sqrt{2}$

13. Найдите $a + b$, если $\dfrac{1}{x^2 - 1} = \dfrac{a}{x - 1} - \dfrac{b}{x + 1}$ тождество.
A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) 0

14. Найдите половину корня уравнения $2x + 1 = 5$.
A) 0,5 B) 1 C) 2 D) 0,7

15. Сколько корней имеет уравнение $x^2 - 2010x + 2011 = 0$?
A) 1 B) 2 C) 0 D) 3

16. Найдите наибольшее целое решение неравенства $3x + 1 < 7$.
A) 2 B) 1 C) 0 D) -1

17. Найдите сумму целых решений уравнения $|x - 2| + |x - 5| = 3$.
A) 14 B) 7 C) 8 D) 12

18. Насколько корень уравнения $\sqrt{x - 2} = 3$ больше 7?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

19. Найдите сумму нечетных натуральных чисел, меньших 16.
A) 65 B) 64 C) 81 D) 49

20. Вычислите сумму $4 + 2 + 1 + \cdots + \frac{1}{16}$.
A) $8\frac{1}{16}$ B) $7\frac{1}{16}$ C) $7\frac{15}{16}$ D) $7\frac{13}{16}$

21. В каких четвертях лежит график функции $y = 2x$?
A) I,II,III B) I,II C) I,III D) II,IV

22. Найдите координаты вершины параболы $y = x^2 - 8x + 12$.
A) $(4, -4)$ B) $(4, 4)$
C) $(-8, 12)$ D) $(-4, 4)$

23. Решите уравнение $2^x + 4^x = 20$.
A) 2 B) 1 C) 3 D) 4

24. Решите неравенство $\lg(\lg x) < 1$.
A) $1 < x < 10^{10}$ B) $0 < x < 10^{-10}$
C) $0 < x \le 10^{10}$ D) $1 \le x \le 10^{10}$

25. Вычислите $\sin 30^0 \cdot \cos 60^0 \cdot \operatorname{tg} 45^0$.
A) 0,5 B) 0,25 C) 0,2 D) 0,55

26. Найдите все решения уравнения $\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = 1$.
A) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$ B) $\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
C) $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ D) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

27. Вычислите $f'(\pi)$, если
$$f(x) = 2\cos x - \frac{(\sqrt{\pi})^3}{\sqrt{x}} + \frac{\pi}{2}.$$
A) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ B) $-1,5$ C) 0,5 D) 2,5

28. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 40^0. Определите угол между боковыми сторонами этого треугольника.
A) 90^0 B) 100^0 C) 140^0 D) 80^0

29. Одна сторона прямоугольника равна 3, диагональ 5. Найдите его периметр.
A) 12 B) 16 C) 14 D) 10

30. Сторона ромба 4, тупой угол 120^0. Найдите площадь ромба.
A) $8\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) 16 D) 8

31. Боковая сторона и меньшее основание равнобедренной трапеции равны 6, угол при большем основании 60^0. Найдите большее основание этой трапеции.
A) 9 B) 12 C) 15 D) $9\sqrt{2}$

32. Хорда окружности AB равна ее радиусу. Под каким углом видна хорда AB из любой точки большей дуги AB?
A) 60^0 B) 30^0 C) 45^0 D) 24^0

33. В пространстве даны векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.
A) (1; −1; 1) B) (2; −1; −3)
C) (1; 2; −3) D) (2; −2; −3)

34. Найдите объем правильного тетраэдра с ребром 6.
A) $18\sqrt{2}$ B) $54\sqrt{2}$ C) $27\sqrt{2}$ D) $16\sqrt{3}$

35. Площадь боковой поверхности цилиндра, диагональное сечение которого квадрат, равна 64π. Найдите радиус основания цилиндра.
A) 4 B) $2\sqrt{3}$ C) 6 D) $3\sqrt{2}$

36. Объем шара, вписанного в куб, равен $85\frac{1}{3}\pi$. Найдите площадь полной поверхности этого куба.
A) 382 B) 386 C) 385 D) 384

Вариант 202

1. Вычислите $64 : 2^3 \cdot 4 + 3 \cdot 2^2$.
A) 14 B) 44 C) 38 D) 20

2. Найдите остаток при делении 2^{2011} на 5.
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

3. Вычислите $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{49\cdot50}$.
A) $\frac{24}{25}$ B) $\frac{1}{50}$ C) $\frac{49}{50}$ D) $1\frac{1}{50}$

4. Вычислите $0,(5)+0,(6)+0,(7)$.
A) 1 B) 3 C) 2 D) $\frac{17}{9}$

5. Произведение крайних членов пропорции равно 60, один из средних членов равен 12. Найдите второй средний член пропорции.
A) 8 B) 5 C) 4 D) 15

6. Приведите одночлен $8a^2b\cdot7ab^2\cdot0,125a^3b^5$ в стандартный вид и найдите отношение степени одночлена к его коэффиценту.
A) 7 B) 4 C) 14 D) 2

7. Упростите дробь $\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^2+y^2}$.
A) xy B) x^2y^2 C) $x^{-2}y^{-2}$ D) 1

8. Упростите $\sqrt{2a^{-3}\sqrt[3]{-8}\sqrt[4]{a^4}}$, если $a<0$.
A) $2a$ B) $2a^{-1}$ C) $-2a$ D) $-2a^{-1}$

9. Вычислите $\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}$.
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

10. Преподаватель высшей категории получает зарплату 600 тыс. сум. Сколько он будет получать, если его зарплату повысят на 50%?
A) 750 B) 900 C) 800 D) 760

11. При скольких натуральных значениях a уравнение $x^2-10x+11a=0$ имеет два различных корня.
A) 1 B) 2 C) 3 D) 0

12. Найдите сумму целых решений системы

$$\begin{cases} 2x+5<15 \\ 3(x+5)>15. \end{cases}$$

A) 15 B) 14 C) 10 D) 5

13. Найдите произведение натуральных решений неравенства $x^2-5x<0$.
A) 0 B) 24 C) 120 D) 16

14. Найдите сумму цифр всех двузначных чисел.
A) 850 B) 854 C) 800 D) 855

15. При каких значениях a неравенство $3a-1<x<a+1$ не имеет решений?
A) 2 B) $(2;\infty)$ C) $[1;\infty)$ D) $\emptyset$

16. Найдите сумму корней уравнения

$$|x-3|+|x-7|=6.$$

A) 2 B) 8 C) 10 D) 11

17. Решите уравнение $\sqrt{2x-1}-2\sqrt[4]{2x-1}=3$.
A) 41 B) 27 C) 39 D) 11

18. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 16. Найдите ее шестой член.
A) 6 B) 8 C) 9 D) 12

19. Первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен 1, а сумма всех членов равна 5. Найдите ее знаменатель.
A) 0,5 B) 0,6 C) 0,7 D) 0,8

20. Книгу, продаваемую со 100 процентной прибылью продавец продал ученикам с 20 процентной скидкой. Сколько процентов прибыли получает продавец в этом случае?
A) 80 B) 40 C) 50 D) 60

21. Найдите наибольший корень уравнения

$$3^{x^2-7x}=1.$$

A) 2 B) 7 C) -1 D) 1

22. Вычислите $\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8\cdot\log_8 9\cdot\log_9 10$.
A) $\frac{2}{\lg 5}$ B) $\frac{1}{1-\lg 2}$ C) $\lg 2$ D) $\lg 5$

23. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\alpha\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$ и $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.
A) $\frac{3}{4}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $-\frac{4}{3}$ D) $\frac{4}{3}$

24. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=6\cos x+8\cos(\frac{\pi}{2}-x)$.
A) 6 B) 8 C) 10 D) 14

25. Сколько корней имеет уравнение $\sin x+\sin 5x=0$ на отрезке $[0;\ \pi]$?
A) 0 B) 7 C) 4 D) 6

26. Решите неравенство

$$2\sin(x+\frac{\pi}{4})\geq\sqrt{2}.$$

A) $2\pi n\leq x\leq 2\pi n+\frac{\pi}{2},\quad n\in\mathbb{Z}$
B) $2\pi n+\frac{\pi}{4}\leq x\leq 2\pi(n+1)-\frac{\pi}{4},\quad n\in\mathbb{Z}$
C) $2\pi n+\frac{\pi}{2}\leq x\leq 2\pi(n+1)-\frac{\pi}{2},\quad n\in\mathbb{Z}$
D) $2\pi n+\frac{\pi}{3}\leq x\leq 2\pi(n+1)-\frac{\pi}{3},\quad n\in\mathbb{Z}$

27. Вычислите $g'(\frac{\pi}{12})$, если $g(x)=\cos^2 3x$.
A) -6 B) 10 C) 0 D) -3

28. Вычислите интеграл

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x dx.$$

A) π B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) 1

29. Один из углов, обраованных при пересечении двух прямых равен 30^0. Найдите остальные углы.
A) $150^0,150^0,30^0$ B) $110^0,110^0,110^0$
C) $60^0,60^0,30^0$ D) $120^0,120^0,90^0$

30. В треугольнике ABC $a = 5$, $b = 7$. Биссектриса l_c, проведенная из вершины C делит сторону AB на отрезки 2 и 4. Найдите биссектрису l_c.
A) $2\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{3}$ C) 5 D) $4\sqrt{2}$

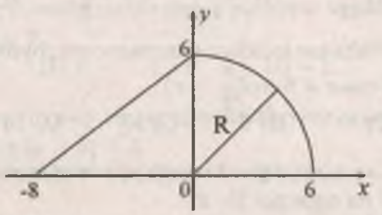
31. Тупой угол ромба 120^0, большая диагональ равна $\sqrt[4]{3}$. Найдите площадь ромба.
A) $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{2}$

32. Даны точки $A(3;-2;5)$ и $B(-4;5;-2)$. Найдите длину вектора $\vec{AB}$.
A) $6\sqrt{3}$ B) $7\sqrt{3}$ C) $9\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{7}$

33. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 2. Найдите высоту треугольника.
A) 6 B) 8 C) $2\sqrt{14}$ D) 7

34. Объем правильной четырехугольной призмы равен 60, площадь боковой поверхности равна 120. Найдите площадь основания призмы.
A) 2 B) 5 C) 4 D) 9

35. Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, приведенной на рисунке ($R = 6$).



A) 120π B) 135π C) 130π D) 132π

36. Объем шара, описанного около куба равен $10\frac{2}{3}\pi$. Найдите расстояние от вершины куба до диагонали, не проходящей через эту вершину.
A) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ D) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

Вариант 203

1. Найдите сумму общих делителей чисел 56 и 84.
A) 28 B) 48 C) 54 D) 56

2. Укажите число, которое делится на 11.
A) 5454 B) 1120 C) 2453 D) 4342

3. Запишите неправильную дробь $\frac{12}{5}$ в виде смешанного числа.
A) $2\frac{2}{5}$ B) $4\cdot\frac{3}{5}$ C) $3\cdot\frac{4}{5}$ D) 2,2

4. Вычислите $\frac{\frac{4}{5}}{8} - \frac{4}{\frac{5}{8}}$.
A) 0 B) 6,3 C) $-6{,}3$ D) $-2{,}3$

5. Пусть α и β - иррациональные числа, а $\alpha - \beta$ рациональное число. Какое из следующих чисел рациональное.
A) $\alpha\cdot\beta$ B) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
C) $\alpha:\beta$ D) $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

6. Запишите число $\underbrace{4+4+4+\cdots+4}_{16}$ в виде степени с основанием 2.
A) 2^4 B) 2^5 C) 2^6 D) 2^8

7. Упростите $\frac{x^a - x^{-a}}{x^{-a}}$.
A) $x^{2a} - 1$ B) $1 - x^{2a}$
C) 0 D) $x^{-2a} - 1$

8. Вычислите $(\sqrt{2}-\sqrt{6})\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
A) $\sqrt{3}$ B) -2 C) $-\sqrt{2}$ D) 2

9. При условии $x < 0$ упростите выражение.
$$\sqrt[3]{\frac{x^3}{64}} - \sqrt{\frac{x^2}{144} - \frac{x^2}{169}}$$
A) $\frac{11x}{39}$ B) $\frac{5x}{39}$ C) $\frac{10x}{39}$ D) $\frac{x}{39}$

10. При броске мяч прыгает на $\frac{3}{5}$ высоты броска. Найдите высоту броска, если при 2 прыжках высота мяча 27 см.
A) 30 B) 45 C) 75 D) 90

11. Найдите сумму квадратов корней уравнения
$$x^2 - 7x + 12 = 0$$
A) 9 B) 16 C) 25 D) 49

12. Решите неравенство $7x - 7 \le x + 11$.
A) $(-\infty;3)$ B) $(-\infty;3]$ C) $(0;3]$ D) $(0;4]$

13. Найдите функцию, не монотонную на отрезке $[1;3]$.
A) $f(x) = (x-1)^2$ B) $f(x) = (x-2)^2$
C) $f(x) = (x-3)^2$ D) $f(x) = (x-4)^2$

14. Сколько простых решений имеет неравенство
$$4 < \frac{16x^2 - 4x + 16}{x^2+1} < 15?$$
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

15. Если пара чисел $(x;y)$ решение системы
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases},$$
то найдите $x + y$.
A) 3 B) -3 C) 4 D) 0

16. Решите неравенство
$$ax > \frac{1}{x}$$

при условии $a < 0$.

A) $(-\infty; 0)$ B) $(-\frac{1}{\sqrt{-a}}; \infty)$

C) $(\frac{1}{\sqrt{-a}}; \infty)$ D) $(-\frac{1}{\sqrt{-a}}; 0)$

17. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{x^2}{|x| - 3}}.$$

A) $(3; \infty)$ B) $(0; 3)$

C) $(-3; 0)$ D) $(-\infty; -3) \cup (3; \infty) \cup \{0\}$

18. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x+5)^2} = x + 5 \\ \sqrt{(x-5)^2} = 5 - x. \end{cases}$$

A) $-5 \le x \le 5$ B) $x \le 5$
C) $x \ge -5$ D) $-5 < x < 5$

19. Упростите

$$\frac{a + 2a + 3a + \cdots + na}{n^2 - 2n - 3} - \frac{3a}{2(n-3)}.$$

A) $\frac{n}{a}$ B) $\frac{a}{n}$ C) $\frac{a}{2}$ D) $\frac{na}{2}$

20. Решите уравнение

$$1 - 3x + 9x^2 - \cdots - 3^9x^9 = 0.$$

A) $\pm\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{5}$

21. В селе детей в 2 раза больше чем взрослых, а пенсионеров в три раза меньше, чем остальное население. Если слева и справа числа 15 приписать одну и ту же цифру получится число жителей села. Какая это цифра?

A) 2 B) 3 C) 4 D 6

22. Решите неравенство

$$0,2^{x^2+1} + 0,2^{x^2-1} < 1,04.$$

A) $(-\infty; -1)$ B) $(1; \infty)$
C) $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$ D) $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

23. Найдите сумму корней уравнения

$$\lg(x + 11) - \frac{1}{2}\lg(2x + 7) = 2 - \lg 25.$$

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10

24. Найдите наименьший положительный период функции

$$y = 2\sin\frac{\pi x}{3} + 3\cos\frac{\pi x}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$$

A) 12 B) 12π C) 2π D) 24

25. Вычислите

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{9} + \operatorname{arctg}\frac{7}{19}.$$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) 0

26. Вычислите $f'(\pi)$, если

$$f(x) = 2\cos x - \frac{(\sqrt{\pi})^3}{\sqrt{x}} + \frac{\pi}{2}.$$

A) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ B) $-1,5$ C) 0,5 D) 2,5

27. Вычислите интеграл

$$\int_{-1}^{0} |5^x - 5^{-x}| dx.$$

A) $\frac{10}{\ln 5}$ B) $\frac{8}{5\ln 5}$ C) $\frac{4}{\ln 5}$ D) $\frac{16}{5\ln 5}$

28. Сколько корней имеет уравнение

$$\cos(\frac{\sqrt{3}\pi}{12}x) = 13 + 4\sqrt{3}x + x^2$$

на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$?

A) $\emptyset$ B) 1 C) 2 D) 3

29. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 40^0. Найдите значение внешнего угла при вершине этого треугольника.

A) 90^0 B) 100^0 C) 140^0 D) 80^0

30. Перпендикуляр проведенный из вершины прямоугольника к диагонали делит прямой угол на части в отношении 3 : 1. Найдите угол между этим перпендикуляром и другой диагональю.

A) $22,5^0$ B) 30^0 C) 45^0 D) 40^0

31. Сторона ромба a, тупой угол α. Какое из приведенных выражений верно для площади ромба?

A) $a^2 \cdot \cos\alpha$ B) $\frac{1}{2}a^2 \cdot \cos\alpha$

C) $\frac{1}{2}a^2 \cdot \sin\alpha$ D) $a^2 \cdot \sin\alpha$

32. Боковая сторона и меньшее основание равнобедренной трапеции равны b, угол при большем основании равен α. Найдите площадь этой трапеции.

A) $2b^2\sin\alpha$ B) $b^2\sin 2\alpha$
C) $\sin\frac{\alpha}{2}$ D) $2b^2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$

33. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна b, а угол при вершине 2α. Чему равен радиус вписанной окружности?

A) $b\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})$ B) $b\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})$
C) $b\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})$ D) $b\cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})$

34. Найдите координаты единичного вектора перпендикулярного векторам $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$.

A) $(1; -1; 1)$ B) $(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$

C) $(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}})$

D) $(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}})$

35. Основание прямой призмы равнобедренная трапеция, один из углов которой равен 80^0. Найдите наибольший двугранный угол, образованный боковыми гранями призмы.

A) 100^0 B) 80^0 C) 120^0 D) 90^0

36. Шар радиуса 5 разбит на два тела плоскостью, проходящей на расстоянии 3 от центра шара. Найдите объем меньшего из этих тел.

A) $17\frac{1}{3}\pi$ B) $15\frac{2}{3}\pi$ C) $17\frac{2}{3}\pi$ D) $16\frac{1}{3}\pi$

17 Ответы

1.1.1 Задачи на вычисления

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	C	A	D	C	B	C	B	D
1	B	D	A	B	C	B	D	B	A	D

1.1.2 Простые и составные числа

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	B	C	B	C	D			

1.1.3 НОД и НОК

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	C	B	A	B	A	D	B	C
1	B	D	B	D	D	D	D	A	A	B
2	C	C	C	D	C	B	D	A	D	D
3	C	B	A	A	D	A	A			

1.1.4 Признаки делимости

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	D	C	D	C	C	C	B	D
1	B	D	C	D	C	D	D	D	A	D
2	D	B	C	A	B	D	C	C	D	D
3	A	D	C	D	C	B	D	B	B	D
4	B	D	D	D	D	D	A	C	B	B

1.1.5 Деление с остатком

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	A	D	A	B	B	C	D	A
1	D	C	B	D	C	A	A	A	A	B
2	B	D	B	D	D	A	C	D	D	B
3	A	D	C	A	D	B	D	B	B	

1.1.6 Последняя цифра

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	B	D	B	D	B	C	D	C
1	B	C	D	B	A	D	B			

1.1.7 Целые числа

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	B	D	D	D	B	A	B	C
1	C	C								

1.2.1 Обыкновенные дроби

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	D	A	A	B	B	D	D	C
1	B	C	B	A	A	A	D	D	D	D
2	C	B	D	A	A	C	B	D	C	D
3	B	C	A	A	A	D	A	B	C	C

1.2.2 Смешанные числа

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	A	C	B	B	D	C	A	D
1	C	B	C	C	B	C	A	D	A	B
2	C	A	A	B	C	C	A	A	C	B
3	C	C	B	D	B	B	B	D	A	

1.2.3 Десятичные дроби

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	A	B	D	D	A	B	C	B
1	A	D	C	A	B	C	B	D	C	C
2	A	C	B	B	A	A	C	D	B	A
3	C	D	D	A	D	A	A	A	A	A
4	D	B	D	A	A	C	C	A		

1.2.4 Бесконечные периодические десятичные дроби

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	B	D	A	C	A	A	D	A
1	B	B	C	C	C	A	C	D	B	D
2	D	C	D	B	C	C	D	C	C	D
3	C	A	B	D	C					

1.2.5 Процент и пропорция

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	B	A	B	B	C	B	C	B
1	B	B								

1.3 Иррациональные числа

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	A	A	C	C	B	B	B	C
1	B	C	C	C						

1.4 Действительные числа

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	D	A	D	C	A	A	B	D
1	A	C	D	A	D	D	A	B	D	

1.4.1 Задачи смешанного типа

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	D	D	D	D	A	A	D	D
1	D	B	A	C	C	A	A	C	D	D
2	D	B	B	D	B	B				

2.1 Степень с целым показателем

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	C	C	C	B	C	B	A	C
1	A	B	A	A	C	B	B	C	A	A
2	C	D	B	C	D	D	D	C	B	C
3	B	C	A	A	B	B	D	D	A	D
4	B	B	A	C	A	A	B	A		

2.2 Одночлен и его свойства

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	C	C	C	B	B	A	B	C
1	C	C	C	D	B	C	D	D		

2.3 Многочлен и его свойства

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	B	D	D	C	C	C	D	A
1	D	A	D	D	D	D	D	D		

2.4 Формулы сокращенного умножения

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	C	A	C	D	A	C	D	D
1	B	C	A	B	A	B	A	D	D	D
2	D	C	A	B	A	A	C	D	A	D
3	D	D	C	D	A	A	D	C	B	A

2.5 Разложение многочлена на множители

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	D	D	B	B	B	A	C	C
1	D	B	D	C	A	B	B	C	C	A
2	C	C	C	C	A	D	C	D	B	D
3	D									

2.6 Алгебраические дроби

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	C	D	B	D	C	B	A	D
1	D	B								

2.7 Рациональные выражения

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	C	D	D	D	C	B	B	B
1	D	D	B	A	D	A	B	D	C	D

2.8 Задачи смешанного типа

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	D	B	D	D	A	C	B	C
1	D	C	A	D	B	B	C	B	C	C
2	B	D	A	D	D	C	A	D	D	A

3.1 Квадратный корень. Арифметический квадратный корень

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	A	A	C	D	B	A	C	D
1	C	B	D	A	A	D	C	D	D	B
2	D	D	C	B	D	D	D	C	C	C
3	B	B	C	D	A	A				

3.1.1 Примеры на вычесления

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	D	C	A	D	C	C	C	A
1	A	D	C	D	D	D	A	A	B	B
2	D	D	C	B	D					

3.1.2 Упрощение выражений с корнем

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	B	D	D	D	B	A	A	C
1	D	D	C	A	A	A	B			

3.2 Корень n–й степени

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	C	B	B	D	D	D	D	A
1	A	C	A	C	B	D	D	C	C	

3.2.1 Примеры на вычесления

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	C	B	A	A	B	D	D	C
1	C	A	A	D	A	D	D	A	D	B
2	A	A	A	C	C	D	C	B	C	C
3	C	D	D	A	A	B	C	B	A	C

3.3 Средние значения

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	B	B	B	B	C	A	D	C
1	D	A	B	B	C	D	B	B	C	D
2	B	A	D	B	A	B	A	B	A	C
3	D	A	C	C	D	B	D	B	D	A
4	A	A	A	C	B					

4.1 Тождество и уравнение

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	C	D	B	C	B	B	A	D
1	A	B	D	C	B	C				

4.2 Линейные уравнения

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	C	D	B	C	A	A	D	C
1	B	B	B	B	A	B	A	D	B	B
2	C	A	B	C	A	D	D	D	C	B
3	A	B	A							

4.2.1 Уравнения в виде пропорции

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	A	A	C	A	A	C	B	A

4.3 Квадратные уравнения

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	C	B	D	A	A	A	C	B
1	D	B	B	A	D	D	D	C	D	D
2	C	D	D	A	D	C	C	D	B	D
3	D	A	D	D	D	D	D	A		

4.3.1 Квадратные уравнения с параметром

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	D	B	B	D	A	A	C	D
1	A	A	A	D	D	C	D	C	B	C
2	C	C	A	B	C	A	D	A	A	A
3	C	C	D	B	D	C	A	D	B	B
4	A	C	C	D	B	B	A	A	A	A
5	A	A								

4.4 Рациональные уравнения

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	C	D	C	D	D	A	C	B
1	D	A	C	D	A	B	A	D	D	B
2	C	D	A	B	D					

4.5.1 Система линейных уравнений

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	C	C	C	A	D	A	B	D
1	C	C	B	C	D	C	A	D	B	C
2	C	B	A	B						

4.5.2 Система уравнений с параметром

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	D	D	D	B	C	D	C	A
1	B	D	D	A	A	B	D			

4.5.3 Система уравнений второй и высших степеней

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	D	C	B	C	D	D	C	B
1	C	C	A	A	B	D	C	A	B	D
2	A	C	C	D	D	D	A	B	C	A
3	C	A	B	D	D	A	A	B	B	D
4	D	C	D	A	A	D	D	A	A	D
5	A	C								

5.1 Линейные неравенства

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	A	C	A	D	A	C	D	B
1	A	A	A	C						

5.2 Системы линейных неравенств

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	D	C	D	B	A	C	C	A
1	B	B	C	D	A	A	D	D	D	A
2	D	B	C	D	D	C	C			

5.3 Метод интервалов

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	C	D	D	A	C	B	B	C
1	C	D	A	A	D	A	C	D	A	C
2	C	D	D	B	D	C	D	D	A	C
3	D	C	A	A	D	C	D	C	B	B
4	A	A	A	B	A	B	C	A	A	D
5	B	D	A	D	A	A	A	D	D	B
6	B	B	D	D	C	B	B	D	A	D

5.3.1 Неравенства с параметром

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	D	D	B	A	C	B	D	B
1	C									

5.3.2 Условные неравенства

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	D	B	D	C	D	A	C	

6.1 Уравнения с модулем

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	C	B	A	D	A	D	B	C
1	D	D	D	B	D	D	B	D	C	C
2	C	A	D	C	D	C	D	D	D	D
3	C	A	A	A						

6.2 Неравенства с модулем

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	B	A	D	C	A	A	A	C
1	A	C	C	A	B	C	A	B	C	C
2	B	D	D	D	D	B				

6.3 Системы уравнений и неравенств с модулем

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	D	C	D	C	A	D	D	D
1	A	B								

7.1 Иррациональные уравнения

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	A	D	A	A	C	A	D	A
1	C	D	B	A	B	D	A	D	D	A
2	A	A	D	D	D	B	A	C	A	B
3	D	C	C	A						

7.2 Иррациональные неравенства

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	C	B	D	C	C	D	D	D
1	A	C	C	D	D	D	A	C	D	A
2	B	A	B	D	D	C	C	A	C	B

8.1 Арифметическая прогрессия

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	B	B	A	B	C	D	D	C
1	A	A	B	C	C	C	C	C	C	C
2	D	C	D	C	D	A	C	C	C	D
3	C	B	D	A	D	C	A	D	A	B
4	B	B	C	A	D	A	C	B	A	D
5	D	B	D	D	B	B	B	D	D	C
6	D	A	D	B	C	A				

8.2 Геометрическая прогрессия

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	C	A	B	C	C	A	B	D
1	A	D	D	B	D	B	D	C	D	C
2	B	D	B	A	B	B	B	C	D	C
3	C	C	C	B	D	C	C	D	C	D
4	D	C	D	A	C	A	A	A	D	A

9.1 Задачи на числа

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	B	C	C	C	D	D	D	C
1	C	A	B	D	C	C	D	B	D	A
2	D	A	D	C	C	D	B	D	C	D
3	C	A	C	D	A	B	A	D	A	C
4	D	B	C	D	D	C	B	C	B	A
5	B	B	C	A	A	C	C	C	A	C
6	D	A	D	D	A	A	C	D	C	A
7	D	A	D	A	A	D	A	A	B	C
8	C	B	C	D	C	C	D	A	A	B
9	D	B	A							

9.2 Задачи на проценты

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	A	D	D	D	A	D	D	D
1	B	A	B	C	C	B	A	C	D	C
2	B	C	A	C	D	D	D	A	A	C
3	D	B	D	D	C	D	C	D	A	A
4	B	B	B							

9.3 Задачи на движение

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	C	A	D	D	B	D	D	C
1	D	C	D	A	D	A	C	C	B	

9.4 Задачи на работу

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	A	A	C	A	C	A	A	C
1	B									

10 Функции

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	D	B	A	B	D	A	D	A
1	C	B	C	B	C	D	C	D	D	A
2	B	B	A	C	B	A	A	D	A	D
3	A	D	D	A						

10.1 Система координат на плоскости

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	B	C	D	A	B	C	A	C
1	A	D	D	B	D	D	B	A	D	C

10.2 Линейная функция

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	A	C	B	B	D	C	A	D
1	D	B	B	C	D	D	D	A	C	A
2	D	B	D	D	C	A	C	D	A	A
3	D	A	C	B	B	A				

10.3 Квадратная функция

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	A	D	D	C	D	A	D	B
1	B	C	D	A	C	C	A	D	A	C
2	B	B	C	A	C	D	D	C	C	A
3	D	D	A							

10.4 Обратная функция

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	D	B	A	D	D	D	B	A
1	B	A	D	C						

10.5 Задачи смешанного типа

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	C	A	D	D	D	C	C	D
1	A	D	C	A	C	D	C	D	B	D
2	A	B	B	A	C	A				

11.1 Показательная функция

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	C	D	C	C	C	A	A	B
1	D	C	D	D	D					

11.2 Показательные уравнения

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	B	C	D	D	A	C	C	A
1	D	D	D	A	D	D	A	A	A	C
2	D	B	C	D	D	C	C	C	D	D
3	D	A	C	B	C	B	B	A	A	A
4	A	A	C	C	A	D	A	D	C	A

11.3 Показательные неравенства

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	D	D	B	A	B	A	A	C
1	A	D	C	A	B	A	A	D	D	A
2	A	A	C	C	C	D	D			

12.1 Область определения и свойства

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	C	A	D	D	B	A	B	C
1	D	B	B	D	A	D	B	D	A	A
2	B	C	A	D	D	A	B	D	D	B

12.1.1 Тождественные преобразования логарифмических выражений

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	A	B	C	D	A	D	B	D
1	D	C	A	B	C	A	D	B	A	D
2	C	D	B	D	D	C	D	A	C	D
3	A	A	A	A	A	A	D	C	C	C
4	B	B	C	D	B	C	A	C	A	D
5	A	A	D	A	C	D	A			

12.2 Логарифмические уравнения

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	B	D	C	C	C	B	D	D
1	D	C	C	D	D	B	A	A	A	C
2	C	A	C	A	B	B	B	B	C	D
3	A	C	A	A	C	D	A	A	A	A
4	C	A	D	A	B	A	C	C	C	B
5	C	C	D	D	B					

12.3 Логарифмические неравенства

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	B	A	D	D	D	D	B	D
1	B	A	D	B	A	D	D	D	D	B
2	D	B	C	D	B	D	D	D	B	D
3	D	A	C	B	D	D	D	C	A	D
4	B	B	D	C	B	D	B	D	A	A

13.1 Угол и дуга, их измерения

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	C	B	D	C	C	C	D	D
1	B	D	B							

13.2 Тригонометрические функции

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	B	C	D	A	C	C	B	A
1	B	B	D	D	A	B	D	C		

13.2.1 Основные тригонометрические тождества

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	D	C	A	C	C	B	D	A
1	A	A	B	D	C	D	A	D	D	D
2	A	C	A	A						

13.2.2 Свойства тригонометрических функций

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	B	A	A	B	A	D	A	B
1	A	A	C	D	B	A	C	B	C	A
2	D	A	D	D						

13.2.3 Формулы сложения и приведения

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	A	A	A	A	C	B	A	C
1	C	C	A	A	D	D	B	D	C	D
2	C	B	A	D	D	D	C	D	C	D
3	B	D	D	A	A	A	A	D	A	A

13.2.4 Формулы двойного и половинного угла

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	D	D	B	B	B	B	D	B
1	B	A	C	A	C	B	D	C	A	A
2	B	A	B	A	C	B	D	A	A	B
3	A	A	C	B	A	B	C	A	D	C
4	D	A	D	C	D	C	C	C	A	D
5	C	C	A	B	D	C	D	B	D	A
6	A	D	A	D	A	A	B	C	B	D

13.2.5 Формулы для суммы и разности

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	C	A	B	D	D	D	B	C
1	A	D	D	D						

13.2.6 Множество значений и монотонность

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	C	B	B	C	C	D	A	A
1	D	B	C	B	D	D	C	B	C	A
2	B	C	A	C	D	C	B	A	D	D
3	D	A	A	C	D	D	C	C	B	D
4	B	D	D	C	B	D	C	A	D	

13.3 Обратные тригонометрические функции

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	D	C	A	C	D	A	D	D
1	C	A	C	C	C	D	A	D	C	C
2	D	A	D	D	D	B	C	A	A	A

13.4 Тригонометрические уравнения

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	D	B	A	C	A	A	C	B
1	B	B	A	A	B	A	A	A	A	A
2	C	A	B	C	D	D	C	C	B	C
3	C	C	C	B	B	A	D	D	D	D
4	A	D	A	A	B	B	C	D	A	B
5	D	B	C	C	D	A	B	B	A	A
6	B	C	D	D	D	D	A	B	B	A
7	D	A	C	C	C	C	C	A	A	B
8	D	C	A	D	D	C	B	A	B	B
9	B	A	A	D	D					

13.5 Тригонометрические неравенства

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	B	A	C	C	D	C	C	A
1	C	B	C	A	B	A	D	D	D	D
2	D	D	D	B	D	A	A	A	B	

13.6 Задачи различного типа

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	D	B	B	B	C	A	A	A
1	D	C	B	A	D	D	C	D	A	D
2	D	A	D	C	C	B	C			

14.1 Производные элементарных функций

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	B	D	A	A	A	A	B	B
1	A	B	D	A	B	D	B	C	C	D
2	D	D	A	A	A	A	D	D		

14.1.1 Производная сложной функции

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	B	A	C	A	D	B	C	A
1	B	B	D	D	D	C	D	A	C	C
2	B	D	A	D	A	C	D	A	A	C
3	D	A	B	B	A	C	B	B	D	A
4	A	A	D	D	C					

14.2 Исследование функции с помощью производной. Максимум и минимум

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	D	B	B	C	A	D	C	B
1	A	C	D	D	D	D	C	D	A	D
2	B	A	B	B	B	B	B	D	A	B
3	B	D	D	B	D	C	D	A	B	D
4	C	D	A	D	A	D	B	A	B	A
5	C	C	A	B	D	D	C	A	B	C
6	A	C	D	A	D	D	A	D	A	

14.3 Геометрический и механический смысл производной. Касательная и скорость

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	B	A	A	B	C	C	B	A
1	C	B	A	B	B	A	D	C	D	A
2	A	A	D	A	D	A	C	A	D	A
3	B	B	D	D	D	D	D	B	D	B
4	A	C	C							

14.4 Первообразная и интеграл

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	A	B	D	A	A	A	A	D
1	A	A	C	D	C	A	B	B	A	A
2	B	D	B	C	D	D	C	A	C	D
3	D	C	B	A	A	C	A	D	D	B

14.4.1 Определенный интеграл

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	B	B	A	B	B	C	B	D
1	B	A	B	C	A	B	D	A	C	C
2	A	A	C	D	D	A	B	A	D	C
3	D	A	A	D	A	B	A	B	A	A
4	D	A	B	D	A	A	D	D	D	A

14.5 Простейшие дифференциальные уравнения

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	B	B	A	B	A	B	A	D
1	A	D	D							

14.6 Специальные задачи

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	D	D	C	D	C	D	C	B
1	B	A	B	D	C	B	B	B	B	A
2	D	C	B	D	A	C	B	D	B	A
3	B	C	A	A	D	B	D	C	B	D
4	D	A	D	D	C	A	A	A	B	A
5	D	D	D	D	C	B	A	D	B	A
6	C	C	D	A	B	A	D	B	A	C
7	B	D	B	A	C	A	A	D	A	A
8	B	A	D	B	A	D	D	C	D	C
9	A	B	C	B	D	C	C	A	A	A
10	C	B	B	B	A	D	B	C		

15.1 Отрезок и угол

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	B	C	B	D	A	B	B	B
1	D	D	D	D	B	A	C	B	A	B
2	A	D	C	C	D	D	D	C		

15.2.1 Периметр и средняя линия

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	C	D	A	D	D	C	C	B
1	D	D	A	A	B					

15.2.2 Углы и стороны треугольника

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	A	C	A	D	D	C	D	A
1	D	D	D	C	C	A	D	C	B	D
2	C	D	C	D	D	A	B	D	D	D
3	B	C	A	B	D	B	B	B	D	C
4	D	B	B	A	B	D	B	C	A	D
5	B	C	D	D	D	B	D	C	C	A
6	D	B	B	B	D	D	D	A	D	A
7	C	B	B	C	B	D	D	D	A	

15.2.3 Теорема косинусов и синусов

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	D	D	C	A	D	D	D	D
1	C	C	B	D						

15.2.4 Некоторые свойства высоты, медианы и бессектрисы треугольника

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	B	A	D	C	C	A	A	B
1	B	A	C	A	A	D	D	C	A	D
2	C	A	D	A	A	D	A	B	C	A
3	B	C	C	C	D	A	D	B	C	B
4	A	A								

15.2.5 Площадь треугольника

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	C	B	D	C	C	C	C	C
1	B	C	B	B	C	B	D	A	D	D
2	A	A	C	A	A	B	C	D	A	C
3	D	C	A	C	D	A	D	A	B	D
4	D	A	B	B	D	A	D	A	D	A
5	A	A	D	C	A	D	A	D		

15.2.6 Подобие треугольников

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	C	C	D	B	C	A	D	D
1	B	B	A	A	A	A	D	D	A	

15.3 Система координат в плоскости

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	C	A	D	D	D	B	D	D
1	A	D	C	B	B	B	B	B	A	A
2	B	B	B	B	D	D	B	A	C	D
3	C	C	B	D	A	C	A	B	D	C
4	C	D	B	D	A	B				

15.4 Четырехугольников

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	C	D	D	A	C	C		

15.4.1 Квадрат и прямоугольник

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	D	C	B	B	B	A	D	D
1	D	B	D	C	D	C	C	B	A	D
2	B	D	C	A	D	A	B	D	D	A
3	B									

15.4.2 Ромб и параллелограмм

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	D	B	B	C	B	B	D	C
1	C	C	A	A	C	D	C	B	A	D
2	D	D	C	C	A	B	B	C	A	C
3	D	D	D	D	D	D	A	A	D	D
4	C	D	D	D	D	B	A	B	A	C
5	D	D	D	D	D	B	A	D	B	A
6	B	A	D	D	C	B	A	A	A	

15.4.3 Трапеция

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	B	D	B	C	B	D	D	A
1	A	C	C	B	B	A	D	A	A	C
2	C	D	B	A	A	C	A	A	D	B
3	A	A	A	B	C	D	B	D	B	B
4	A	D	B	D	C	C	B	A	B	C
5	B	D	A	D	C	C	C	C	A	

15.5 Многоугольники

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	D	D	A	B	C	D	B	B
1	C	A	A	D	D	D	C	C	C	C
2	D	D	D	A	B	B	C	C	C	A
3	B	C	A	D	C	D	C	C	B	

15.6 Окружность и круг

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	A	B	A	C	C	A	A	B
1	B	D	C	C	D	B	B	A	C	A
2	C	A	B	D	B	D	A	A	D	B
3	D	C	D	B	A	D	A	D	D	D
4	A	C	B	C	A	A	B	D	B	D
5	A	C	A	D	D	D	A	D	C	A
6	A	A	A	A	B	C	D			

15.7 Треугольник и окружность

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	C	C	C	C	C	A	B	A
1	D	A	A	A	A	A	A	C	C	C
2	A	C	A	B	C	D	A	B	C	B
3	B	C	C	D	B	A	A	D	A	A
4	C	D	C	C	A	B				

15.8 Четырехугольник и окружность

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	A	C	B	B	A	A	D	A
1	D	C	D	D	D	B	C	D	D	C
2	A	C	B	A	D	C	A	D	A	C
3	D	D	D	D	D	A	B	D	C	B
4	C	C	D	D	C	A	C	C	A	D
5	D	A								

15.9 Многоугольник и окружность

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	D	C	C	D	B	A	D	C
1	C	A	A	C	B	D	A	D	D	A
2	B	B	A	D	D	A	B			

15.10 Векторы

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	B	A	A	A	C	B	C	A
1	B	D	A	D	B	C	A	D	A	C
2	B	A	B	A	A	D	D	C	A	A
3	D	C	A	D	A	D	B	D	D	D
4	D	C	A	A	D	D	C	C	A	C
5	D	D	D	B	C	D	D	B	A	C
6	D	B	D	A	D	A	D	D	A	A
7	B	C	B	A	B	A	D	B	A	A

16.1 Прямые и плоскости в пространстве

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	D	D	C	B	D	B	A	C
1	D	C	D	A	A	C	B	D	C	D
2	A	D	A	A	D	A	D	D	B	D

16.2 Система координат в пространстве

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	A	A	D	D	C	C	C	C
1	A	D	C	A	C	D	C	C	C	B
2	D	C								

16.2.1 Уравнение плоскости и прямой

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	D	A	B	D	D	A	B	B
1	A	C	D	D	D	D	A	D	A	B
2	C	A	B	A	A	B	A	A	C	A

16.3 Векторы в пространстве

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	B	D	B	A	C	A	D	B
1	D	B	D	B	B	D	D	A	C	C
2	B	A	B	C	B	D	D	C	D	C
3	D	C	D	A	A	B	C	C	A	D
4	C	C	A	A	A	B	D	D	D	B
5	C	D	D	D	B	C	A	C	A	A

16.4.1 Призма

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	B	B	C	D	D	C	D	B
1	B	D	C	A	B	C	B	C	D	C
2	A	A	A	B	A	B	C	A	D	A

16.4.2 Параллелепипед

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	A	B	D	A	A	C	D	A
1	D	D	D	A	D	D	D	C	D	A
2	A	B	D	A	A	B	A			

16.4.3 Пирамида

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	C	D	D	C	D	B	B	A
1	A	B	C	A	C	A	A	C	A	A
2	B	D	C	A	A	B	A	B	A	D
3	A	C	B	C	D	B	B	A	D	D
4	D	D	D	A	B	D	B	A	A	D
5	A	A	A	B	B	B	B	A	A	A

16.5.1 Цилиндр

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	C	B	B	A	D	A	A	A
1	B	C	A	C	C	D	D	A	A	D
2	A	C	D	C	A	C	C	A	D	A

16.5.2 Конус

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	C	B	C	A	D	D	B	B
1	A	B	A	A	B	A	A	A	A	A
2	A	C	B	D	D	C	B	A	B	C
3	C	A	D	A	D	C	C	D	B	C

16.5.3 Шар и сфера

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	C	A	B	B	C	A	A	A
1	A	B	D	A	A	A	A	D	D	D
2	B	A	A	A	B	D	B	D		

16.6.1 Призма и шар

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	B	C	B	B	B	D	D	

16.6.2 Пирамида и шар

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	C	B	A	C	D	D	D	

16.6.3 Цилиндр и шар

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	C	C	C	C	A			

16.6.4 Конус и шар

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	B	D	D	C	B	C	B	C
1	B	B	B	C	A	D	D	C	B	D
2	D	B	C	D	A	C	A	A		

16.6.5 Смешанный раздел

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	C	C	D	A	D	D	B	B
1	C	C	D	B	A	C	D	A	A	B

201-вариант

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	C	C	A	D	A	D	C	C
1	D	A	B	A	B	B	B	A	C	B
2	C	C	A	A	A	B	A	C	B	C
3	A	B	B	B	A	A	D			

202-вариант

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	C	C	C	B	D	C	D	C
1	B	B	C	B	D	C	C	A	B	D
2	D	B	B	C	C	D	A	D	B	A
3	B	D	B	A	C	D	A			

203-вариант

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	C	A	C	B	C	A	B	A
1	C	C	B	B	B	D	A	D	A	C
2	B	D	D	D	D	A	C	D	A	D
3	C	D	D	A	D	A	A			

Список использованной литературы

1. Алгебра и начала математического анализа (базовый курс). 10-11 класс. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и др. М.: "Просвещение", 2012.
2. Алгебра. 7 класс. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и др. М.: "Просвещение", 2000.
3. Алгебра. 8 класс. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и др. М.: "Просвещение", 2010.
4. Алгебра. 9 класс. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и др. М.: "Просвещение", 2001.
5. А.Г.Мордкович. Алгебра и начала анализа. М.: "Высшая школа", 1997.
6. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и анализа. М.: "Просвешение", 1991.
7. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы. Под редакцией Сканави М.: "Высшая школа", 2011.
8. R.Azimov, N.Sherboyev, Sh.Mirhamidov, A.Karimova. Matematika (Algebra va analiz asoslari). T.: O‘qituvchi. 1992.
9. F.Usmonov, R.Isomov, B.Xo‘jayev. Matematikadan qo‘llanma. I qism. T.: Yangi asr avlodi. 2006.
10. А.В.Погорелов. Геометрия. Учебник для 7-11 классов. Т.: Укитувчи. 1991.
11. В.П.Минорский. Сборник задач по высшей математике. Москва. Наука. 1987.
12. И.Ф.Шарыгин. Геометрия. Учебник для 7-9 классов. Москва. Дрофа. 2002.
13. И.Исроилов, З.Пашаев. Задачи по геометрии. Т. Укитувчи. 2001.
14. "Вестник" 1996-2003 гг.

Жаникул И. Абдуллаев, Ботир Э. Давранов
Нурилла Х. Норалиев, Ислом Н. Бозоров
Дамин Н. Рахимов, Нурали Ж. Рузиев

МАТЕМАТИКА

I, II, III части

Методическое пособие для поступающих в ВУЗы

Ташкент — «TURON-IQBOL» — **2019**
100182. Ташкент. улица Х.Байкаро, 51.
Тел.: 244-35-38. Факс: 244-25-58.

Редактор Б. Давранов
Художественный редактор Э. Муратов
Технический редактор Т. Смирнова
Корректор С. Абдунабиева

Лицензия издательства AI № 223, 16.11.2012.
Подписано в печать **01.07.19** г. Формат 84x108 1/16. Гарнитура «SchoolBook».
Печать офсетная. Усл. п. л. 37,2 Уч. -изд. л. 36,86.
Тираж 2000. Заказ № 44.

Отпечатано в типографии ЧП «PRINT LINE GROUP»
100097, г. Ташкент, проспект Бунёдкор, 44.
Тел.: (+998) 71-276-37-00. Заказ № 260.

6000.

ISBN 978-9943-14-291-6

9 789943 142916