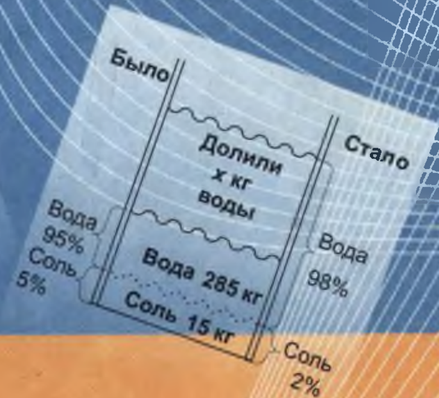
Г.Л. Муравьева
А.А. Покало
Н.В. Толстик

МАТЕМАТИКА



Часть

3

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»

Г. Л. Муравьева, А. А. Покало, Н. В. Толстик

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

В трех частях

Часть 3

Минск 2010

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
М91

Печатается по решению редакционно-издательского совета БГПУ,
рекомендовано секцией физико-математических и технических наук
(протокол № 17 от 14.02.08)

Рецензенты:
доктор педагогических наук, профессор кафедры педагогики и проблем образования БГУ *А.П. Сманцер*;
кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики БГПУ *Е.П. Кузнецова*

Муравьева, Г.Л.
М91 Математика: учеб.-метод. пособие. В 3 ч. Ч. 3 / Г.Л. Муравьева, А.А. Покало, Н.В. Толстик. – Минск: БГПУ, 2010. – 124 с.
ISBN 978-985-501-984-1.

Пособие написано в соответствии с программой для студентов III курса дневной и заочной форм обучения факультета начального образования БГПУ и содержит теоретический материал и решение типовых примеров по темам: «Рациональные и действительные числа», «Величины и их измерение». По каждой теме предложены упражнения для самостоятельной работы.

Адресуется студентам III курса дневной и заочной форм обучения факультета начального образования БГПУ, а также преподавателям и учащимся педагогических колледжей.

УДК 51(075.8)
ББК 21.1я73

ISBN 978-985-501-894-1 (ч. 3)
ISBN 978-985-501-547-6

Глава 1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Положительные рациональные числа

1.1. Положительные рациональные числа

Расширение множества целых неотрицательных чисел сводится, главным образом, к решению двух основных задач:

1) подсчет количества элементов конечных множеств;

2) измерение различных величин и представление их числами.

При подсчете количества элементов конечных множеств результат подсчета всегда выражается некоторым натуральным числом (например, 25 учеников, 3 машины и т. д.). Натуральных чисел достаточно, чтобы обеспечить подсчет количества предметов в конечном множестве и указать порядок размещения предметов (когда это необходимо) в данной совокупности.

При измерении величин результат измерения не всегда может быть выражен натуральным числом.

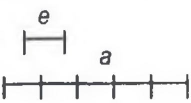


Рис. 1

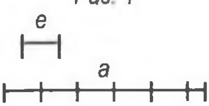


Рис. 2

Рассмотрим задачу измерения длины отрезка *a* при помощи другого отрезка *e*, который принят за эталон длины (единичный отрезок). Будем откладывать единичный отрезок *e* на отрезке *a*. Когда отрезок *e* откладывается на отрезке *a* целое количество раз (конец отрезка *e* совпадает с концом измеряемого отрезка *a*), то говорят, что длина отрезка *a* выражается натуральным числом (рис. 1).

Когда же после откладывания отрезка *e* на отрезке *a* остается часть отрезка *a*, меньшая, чем длина единичного отрезка *e*, то длину отрезка *a* нельзя выразить натуральным числом (рис. 2).

Из рассмотренного примера следует, что натуральных чисел недостаточно для того, чтобы записать длину любого отрезка. Поэтому возникает необходимость введения новых чисел, с помощью которых можно было бы более точно записать длину измеряемого отрезка.

1.2. Измерение отрезков. Понятие дроби

Рассмотрим произвольный отрезок *a*. Говорят, что отрезок *a* разделен на отрезки $a_1, a_2, \ldots, a_n$, когда он является их объединением ($a = a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$) (рис. 3).

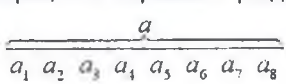


Рис. 3

Когда отрезок a разделен на отрезки $a_1, a_2, ..., a_n$, то длина отрезка a равна сумме длин данных отрезков и записывается: $a = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Возьмем произвольный единичный отрезок e.

Будем откладывать отрезок e на отрезке a. Если отрезок e укладывается в данном отрезке ровно n раз, то говорят, что отрезок a можно разбить на n равных отрезков или длина отрезка a является суммой длин указанных n отрезков. В этом случае используется запись: $a = ne$ или $m_e(a) = n$, $n \in N$. Число n называется мерой (или значением) длины отрезка a при единице измерения e.

На рис. 1 отрезок e укладывается 4 раза на отрезке a, поэтому:

$$a = 4e \text{ или } m_e(a) = 4.$$

Необходимо иметь в виду, что при переходе к другому единичному отрезку e_1 число n изменится, однако длина отрезка a останется прежней.

Отметим некоторые свойства измерения длины отрезков.

1) Каждому отрезку a при заданной единице измерения e соответствует целое число n – мера длины отрезка: $m_e(a) = n$.

2) Если отрезок a состоит из нескольких отрезков, то его длина равна сумме длин этих отрезков (рис. 4):

$$\text{если } a = b + c, \text{ то } m_e(a) = m_e(b) + m_e(c).$$

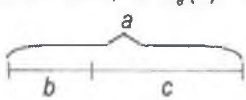


Рис. 4

3) Равные отрезки имеют равные длины: если $a = b$, то $m_e(a) = m_e(b)$, и наоборот: если $m_e(a) = m_e(b)$, то $a = b$.

4) Мерой единичного отрезка e является единица: $m_e(e) = 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда единичный отрезок e не укладывается целое количество раз в измеряемом отрезке a. Пусть, например, отрезок e укладывается 2 раза в отрезке a и остается еще отрезок f, который меньше отрезка e (рис. 5). В этом случае, при заданной единице измерения e, длина отрезка a не может быть выражена натуральным числом.

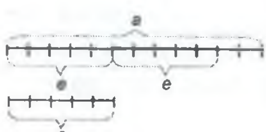


Рис. 5

Разделим отрезок e, например, на 5 равных частей и выберем один из них в качестве новой единицы измерения длины e_1, тогда длина отрезка a выразится натуральным числом 12, которое показывает, что пятая часть отрезка e содержится в отрезке a ровно 12 раз, т. е. $a = \frac{12}{5}e$.

Однако такой подход к измерению длины отрезка неточен, так как в некоторых случаях единичный отрезок необходимо разделить не на 5 равных отрезков, а, возможно, на 17 или на 23. И наконец, нельзя точно сказать, на сколько равных частей необходимо разделить единичный отрезок *е*, чтобы одна его часть стала новой единицей длины и эта единица содержалась бы целое количество раз в отрезке *а*. В таких случаях не вводят новую единицу измерения длины, а сохраняют ту же самую – *е*, но каждый раз указывают, на сколько равных отрезков мы делим отрезок *е*, и из какого количества единичных отрезков состоит измеряемый отрезок *а*.

Рассмотрим измерение длины отрезка *а* в общем виде. Пусть дан единичный отрезок *е*, который не содержится целое количество раз в отрезке *а*. Разделим отрезок *е* на *n* равных частей и одну его часть назовем *n*-й долей отрезка *е*, которую обозначим через e_1 : $e_1 = \frac{e}{n}$, $e = ne_1$.

Если отрезок e_1 укладывается в отрезке *а* целое число раз (например, *k*), а в отрезке *е* – *n* раз, то будем иметь $a = ke_1$ или $a = k \cdot \frac{e}{n} = \frac{k}{n} \cdot e$. В этом случае говорят, что **отрезок а соразмерный с отрезком е, а отрезок e_1 является их общей мерой.**

Определение. Общей мерой двух отрезков называется третий отрезок, который укладывается в каждом из данных отрезков целое число раз.

Два отрезка называют **соразмерными**, когда они имеют общую меру. Отрезки, которые не имеют общей меры, называют **несоразмерными**.

Про существование несоразмерных отрезков было известно в далекой древности. В школе Пифагора было доказано, что диагональ квадрата несоразмерна с его стороной. Таким образом, $a = \frac{k}{n} \cdot e$. Число $\frac{k}{n}$ выражает собой длину отрезка *а* при единице измерения *е*. Очевидно, что число $\frac{k}{n}$ не является натуральным. Отсюда и следует необходимость в расширении множества натуральных чисел, т. е. к натуральным числам необходимо было добавить новые числа вида $\frac{k}{n}$, которые называются дробями.

Определение. Дробью называется выражение вида $\frac{k}{n}$, которое определяется парой чисел $(k; n)$, где $k \in N_0$, $n \in N$. Число k называется числителем дроби, число n – знаменателем дроби.

Знаменатель дроби n показывает, на сколько равных частей разделили единичный отрезок, а числитель k показывает, сколько взяли таких частей.

1.3. Равносильные дроби

Вернемся еще раз к рассмотренному примеру (рис. 5). Отрезок e_1 составляет пятую часть единичного отрезка e и $a = \frac{12}{5}e$.

Но это не единственный вариант выбора такой доли отрезка e (пятой доли), которая укладывается целое число раз в отрезке a. Например, можно взять десятую часть отрезка e, тогда отрезок a будет состоять из двадцати четырех таких отрезков и его длина запишется: $a = \frac{24}{10}e$, а если взять 20-ю часть e, то длина отрезка запишется: $a = \frac{48}{20}e$. Наоборот, если отрезок $e_1 = \frac{e}{n}$ укладывается в отрезке a ровно n раз, то отрезок $e_2 = \frac{e_1}{m} = \frac{e}{nm}$, который в m раз меньше отрезка e_1, укладывается в отрезке a ровно mn раз.

Таким образом, если длина отрезка a выражается дробью $\frac{k}{n}$ при единице измерения e, то эта длина может быть выражена и дробью $\frac{km}{nm}$, где $m \in N$. Значит, длина одного и того же отрезка a может быть выражена не одним, а бесконечным множеством равных дробей:

$$\frac{12}{5}, \frac{24}{10}, \frac{48}{20}, \ldots, \frac{k}{n}, \frac{km}{nm}, \text{ где } n, k, m \in N.$$

Поскольку перечисленные дроби определяют длину одного и того же отрезка, то они равны.

Определение. Две дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ называются равными (равнозначными), если они выражают длину одного и того же отрезка при заданной единице длины.

1.4. Основные свойства дроби

Свойство 1 (основное свойство дроби)

Величина дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же не равное нулю число:

$$\frac{k}{n}=\frac{km}{nm}=\frac{\frac{k}{m}}{\frac{n}{m}},\ m\neq 0.$$

Это свойство следует из определения равенства дробей.

Основное свойство дроби дает возможность сокращать дроби, приводить их к наименьшему общему знаменателю.

Сократить дробь – это значит заменить ее другой дробью, равной ей, с меньшим числителем и знаменателем.

Чтобы сократить дробь, необходимо ее числитель и знаменатель разделить на одно и то же натуральное число. Сокращение дроби заканчивается тогда, когда в результате получится несократимая дробь.

Приведением дробей к общему знаменателю – это замена данных дробей равными им дробями, которые имеют одинаковые знаменатели.

Наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ является наименьшим общим кратным чисел n и q.

Свойство 2

Теорема 1 (признак равенства дробей). Для того чтобы дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ были равными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $mq=np$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$. Докажем, что $mq=np$.

С помощью основного свойства дроби запишем:

$$\frac{m}{n}=\frac{mq}{nq},\ \frac{p}{q}=\frac{pn}{qn},\ \text{откуда}\ \frac{mq}{nq}=\frac{pn}{qn}.$$

Поскольку числители дробей показывают, сколько раз отрезок $e_1=\frac{e}{nq}$ укладывается в измеряемом отрезке, то отсюда и следует, что у равных дробей числители равны, т. е. что $mq=np$.

Достаточность. Пусть $mq = np$ (*). Докажем, что $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$. Для этого разделим обе части равенства (*) на nq, получим: $\frac{mq}{nq} = \frac{np}{nq}$.

Но $\frac{mq}{nq} = \frac{m}{n}$, $\frac{np}{nq} = \frac{p}{q}$, поэтому $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Свойство 3

Теорема 2. Отношение равенства дробей является отношением эквивалентности.

Доказательство. Покажем, что отношение равенства дробей рефлексивно, симметрично, транзитивно.

1. Рефлексивность: $\frac{m}{n} = \frac{m}{n}$, поскольку $mn = mn$.

2. Симметричность: если $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, то $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$.

Действительно, из равенства $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ следует, что $mq = np$, или $pn = qm$, откуда $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$.

3. Транзитивность: если $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ и $\frac{p}{q} = \frac{k}{t}$, то $\frac{m}{n} = \frac{k}{t}$.

Действительно: условие транзитивности можно записать следующим образом: если $mq = np$ и $pt = qk$, то $mt = nk$. Далее обе части равенства $mq = np$ умножим на t и обе части равенства $pt = qk$ на n, получаем:

$mqt = npt$ и $npt = nqk$, откуда $mqt = nqk$, или $mt = nk$, поэтому $\frac{m}{n} = \frac{k}{t}$.

Из доказанной теоремы следует, что отношение равенства дробей дает возможность разбить множество всех дробей на классы равных (или эквивалентных) дробей.

1.5. Положительные рациональные числа

Определение. Положительным рациональным числом называется множество (класс) равных дробей.

Каждая дробь этого множества есть запись (представление) данного числа.

Например, множество $\left\{\frac{2}{3};\frac{4}{6};\frac{12}{18};...;\frac{2n}{3n};...\right\}$ есть некоторое рациональное число, а дроби $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{12}{18}$ и т. д. – это разные записи данного числа.

Множество $\left\{\frac{3}{5};\frac{6}{10};\frac{9}{15};...;\frac{3n}{5n};...\right\}$ – другое рациональное число, а дроби $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{9}{15}$, ... – это разные записи данного числа.

Запись $a=\frac{m}{n}$ понимают как рациональное число, записанное дробью $\frac{m}{n}$.

Среди всех дробей, которые представляют одно и то же рациональное число, есть одна дробь, в которой числитель и знаменатель являются взаимно простыми числами. Такая дробь называется **несократимой**.

Определение. Дробь, в которой числитель и знаменатель – взаимно простые числа, называется несократимой.

Например, дроби $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{18}$ – несократимые (объясните, почему).

Можно сказать, что каждая несократимая дробь представляет собой некоторое положительное рациональное число и наоборот, каждое положительное рациональное число определяется целой несократимой дробью.

Множество положительных рациональных чисел обозначается Q_+. Заметим еще, что **всякое натуральное число можно записать в виде дроби.**

Действительно: если n – натуральное число и n является мерой отрезка a при единице измерения e, то дробь $\frac{nk}{k}$ является мерой этого же самого отрезка, т. е. дробь $\frac{nk}{k}$ представляет собой натуральное число n при $k \in N$.

Таким образом, множество натуральных чисел является подмножеством множества положительных рациональных чисел: $N \subset Q_+$.

☺ **Задача 1.** Сократить дробь: а) $\frac{1008}{1386}$; б) $\frac{1581}{2604}$.

Решение. а) Дробь $\frac{1008}{1386}$ можно сократить на 2, на 9, на 7 (объясните, почему).

Получим: $\frac{1008}{1386}=\frac{504}{693}$; $\frac{504}{693}=\frac{56}{77}$; $\frac{56}{77}=\frac{8}{11}$. Поэтому $\frac{1008}{1386}=\frac{8}{11}$.

б) Дробь $\frac{1581}{2604}$ можно сократить на 3 (объясните, почему): $\frac{1581}{2604}=\frac{527}{868}$.

Дальнейшее применение известных признаков делимости результатов не дает, но утверждать, что дробь $\frac{527}{868}$ несократима, нельзя. С помощью алгоритма Евклида найдем НОД (527, 868):

$$
\begin{array}{r|l}
868 & 527 \\ \cline{2-2}
\underline{527} & 1 \\
341 & \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
527 & 341 \\ \cline{2-2}
\underline{341} & 1 \\
186 & \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
341 & 186 \\ \cline{2-2}
\underline{186} & 1 \\
155 & \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
186 & 155 \\ \cline{2-2}
\underline{155} & 1 \\
31 & \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
155 & 31 \\ \cline{2-2}
\underline{155} & 5 \\
0 & \\
\end{array}
$$

НОД (527, 868) = 31.

Значит, $\frac{527}{868}=\frac{527:31}{868:31}=\frac{17}{28}$.

Ответ: а) $\frac{1008}{1386}=\frac{8}{11}$; б) $\frac{1581}{2604}=\frac{17}{28}$.

1.6. Действия над положительными рациональными числами

1.6.1. Приведение дробей к общему знаменателю

Покажем, что два произвольных положительных рациональных числа a и b можно записать в виде дробей с одинаковым знаменателем.

Пусть число a представлено дробью $\frac{m}{n}$, а число b – дробью $\frac{p}{q}$.

Тогда, используя основное свойство дроби, можно записать:

$$a=\frac{m}{n}=\frac{mq}{nq};\ b=\frac{p}{q}=\frac{pn}{qn}.$$

Замена двух или нескольких дробей с разными знаменателями равными им дробями с одинаковыми знаменателями **называется приведением дробей к общему знаменателю**. В качестве общего знаменателя дробей, как правило, находят наименьшее общее кратное знаменателей данных дробей.

Наименьший общий знаменатель несократимых дробей равен наименьшему общему кратному их знаменателей.

☺ **Задача 2.** Привести дроби $\frac{5}{12}$ и $\frac{3}{14}$ к наименьшему общему знаменателю.

Решение. Найдем НОК(12, 14). Поскольку $12=2^2\cdot 3$; $14=2\cdot 7$, то

$$\text{НОК}(12, 14) = 2^2\cdot 3\cdot 7 = 84.$$

Значит, $\frac{5}{12}=\frac{5\cdot 7}{12\cdot 7}=\frac{35}{84}$; $\frac{3}{14}=\frac{3\cdot 6}{14\cdot 6}=\frac{18}{84}$.

Ответ: $\frac{5}{12}=\frac{35}{84}$; $\frac{3}{14}=\frac{18}{84}$.

1.6.2. Сложение положительных рациональных чисел

Пусть отрезок *a* состоит из суммы двух отрезков *b* и *c* (рис. 6).

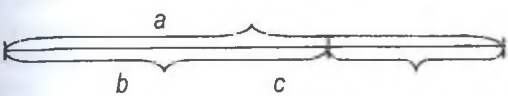


Рис. 6

Будем считать, что все эти отрезки соразмерны с отрезком e_1, который является *n*-й частью единичного отрезка *e*: $e_1=\frac{e}{n}$.

Пусть длина отрезка *b* равна $\frac{m}{n}$, а отрезка *c* равна $\frac{p}{n}$, т. е. $b=\frac{m}{n}e$, $c=\frac{p}{n}e$.

Тогда $a=b+c=\frac{m}{n}e+\frac{p}{n}e=\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{n}\right)e=\frac{m+p}{n}e$.

Таким образом, длина отрезка *a* выражается дробью $\frac{m+p}{n}$.

Каждому отрезку, составленному из двух (или нескольких) отрезков, ставится в соответствие единственное число, равное сумме чисел, поставленных в соответствие складываемым отрезкам. Получим: $\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$.

Определение. Суммой двух положительных рациональных чисел a и b, выраженных дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$ с равными знаменателями, называется положительная рациональная дробь, числитель которой равен сумме числителей слагаемых, а знаменатель равен знаменателю слагаемых, т. е.

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}.$$

Если числа $a,b \in Q_+$ представлены дробями с разными знаменателями, то необходимо привести эти дроби к дробям с наименьшим общим знаменателем и затем воспользоваться правилом сложения дробей с одинаковыми знаменателями.

В общем виде сумма двух дробей с разными знаменателями записывается следующим образом:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+pn}{nq}.$$

☺ **Задача 3.** Найти сумму дробей $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{15}$.

Решение. Найдем НОК (12, 15) = 60. Тогда

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{15}=\frac{5\cdot 5}{60}+\frac{7\cdot 4}{60}=\frac{25+28}{60}=\frac{53}{60}.$$

Ответ: $\frac{53}{60}$.

Приведенное выше определение суммы двух положительных рациональных чисел имеет место для любого числа слагаемых.

Теорема 3. Сумма двух положительных рациональных чисел всегда существует и она единственна.

Доказательство следует из того, что сложение дробей (которые представляют данные числа) сводится к сложению натуральных чисел, а сумма натуральных чисел всегда существует и единственна.

1.6.3. Законы сложения на множестве положительных рациональных чисел Q_+

Сложение положительных рациональных чисел подчиняется коммутативному и ассоциативному законам, т. е. имеют место равенства:

1) $a+b=b+a$ (1)

2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (2) , $\forall a,b,c \in Q_+$.

Докажем справедливость приведенных равенств.

1) Рассмотрим равенство (1):

$$a+b=\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}=\frac{p+m}{n}=\frac{p}{n}+\frac{m}{n}=b+a$$

(для доказательства используем коммутативность сложения натуральных чисел).

Таким образом, $a+b=b+a$.

2) Рассмотрим равенство (2):

$$a+(b+c)=\frac{m}{n}+\left(\frac{p}{n}+\frac{q}{n}\right)=\frac{m}{n}+\frac{p+q}{n}=\frac{m+(p+q)}{n}=$$

(учитывая ассоциативность сложения натуральных чисел)

$$=\frac{(m+p)+q}{n}=\frac{m+p}{n}+\frac{q}{n}=\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{n}\right)+\frac{q}{n}=(a+b)+c.$$

Таким образом, $a+(b+c)=(a+b)+c$.

Дроби можно разделить на две группы – правильные дроби и неправильные дроби.

Определение. Дробь называется правильной, если ее числитель меньше знаменателя. Дробь называется неправильной, если ее числитель больше или равен знаменателю.

Пусть $\frac{m}{n}$ – неправильная дробь (т. е. $m \geq n$). Разделим m на n с остатком, получим $m=nq+r$, где $0 \leq r < n$.

Если:

1) $r=0$, то дробь $\frac{m}{n}=\frac{nq}{n}=q$ является записью натурального числа q;

2) $r \neq 0$, то дробь $\frac{m}{n}=\frac{nq+r}{n}=\frac{nq}{n}+\frac{r}{n}=q+\frac{r}{n}$ (где $\frac{r}{n}$ – правильная дробь, так как $r<n$) можно представить в виде суммы целого числа q и правильной дроби $\frac{r}{n}$.

Таким образом, $\frac{m}{n}=q+\frac{r}{n}$.

Это действие называется **выделением целой части из неправильной дроби.**

Обычно сумму целого числа и правильной дроби записывают без знака сложения и называют смешанным числом.

✓ **Пример 1.** $\frac{30}{7}=\frac{4\cdot 7+2}{7}=4+\frac{2}{7}=4\frac{2}{7}$.

Таким образом, каждую неправильную дробь можно записать в виде смешанного числа, и обратно, каждое смешанное число можно записать в виде неправильной дроби.

✓ **Пример 2.** $3\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5+2}{5}=\frac{17}{5}$.

✓ **Пример 3.** $3\frac{1}{2}+4\frac{3}{5}=\left(3+\frac{1}{2}\right)+\left(4+\frac{3}{5}\right)=(3+4)+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)=7+\frac{5\cdot 1+3\cdot 2}{10}=$

$=7+\frac{11}{10}=7+\left(1+\frac{1}{10}\right)=(7+1)+\frac{1}{10}=8\frac{1}{10}$.

1.6.4. Вычитание положительных рациональных чисел

Вычитание положительных рациональных чисел, как и натуральных чисел, определяется как операция, обратная сложению.

Определение. Разностью положительных рациональных чисел a и b называется такое рациональное число c, при сложении которого с b получается a.

Разность чисел a и b обозначают $a-b$.

Другими словами, $a-b=c$ тогда, когда $b+c=a$.

Выведем из данного определения правило вычитания дробей (а значит, и рациональных чисел). Пусть положительные числа a, b, c представлены соответственно дробями: $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{n}$, $\frac{x}{n}$.

По определению разности двух положительных рациональных чисел будем иметь:

если $a-b=c$, то $a=b+c$ или $\frac{m}{n}=\frac{p}{n}+\frac{x}{n}=\frac{p+x}{n}$.

Из равенства дробей $\frac{m}{n}=\frac{p+x}{n}$ получим $m=p+x$, откуда $x=m-p$ (по определению разности натуральных чисел).

Таким образом, $a-b=c$ или $\frac{m}{n}-\frac{p}{n}=\frac{x}{n}$.

Учитывая, что $x = m - p$, получаем окончательно: $\frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m-p}{n}$.

Разность дробей с одинаковыми знаменателями равна дроби с тем же знаменателем и числителем, равным разности числителей уменьшаемого и вычитаемого.

✓ **Пример 4.** $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5-2}{7} = \frac{3}{7}$.

Если знаменатели дробей разные, то $\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - pn}{nq}$.

Чтобы найти разность дробей с разными знаменателями, нужно привести их к общему знаменателю и воспользоваться правилом вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

✓ **Пример 5.** $\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} - \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{21}{35} - \frac{10}{35} = \frac{11}{35}$.

Теорема 4. Разность положительных рациональных чисел всегда существует и единственна, если уменьшаемое не меньше вычитаемого.

Доказательство. Поскольку разность $m - p$ двух натуральных чисел существует и единственна при условии, что $m \geq p$, то при этом же условии существует и единственна разность $\frac{m}{n} - \frac{p}{n}$ дробей.

1.6.5. *Умножение положительных рациональных чисел*

Рассмотрим задачу об измерении длины отрезка. Пусть отрезок a соизмерим с единичным отрезком e, а отрезок e соизмерим с отрезком e_1 .

Пусть длина отрезка $a = \frac{m}{n} e$ (1), а отрезка $e = \frac{p}{q} e_1$ (2), где e_1 – новая единица измерения. Выразим длину отрезка a через отрезок e_1 .

Равенства (1) и (2) запишем в виде: $na = me$ (1'), $qe = pe_1$ (2').

Умножим равенства (1') и (2') соответственно на q и m.

Получим: $(nq)a = (mq)e$ (1''), $(mq)e = (mp)e_1$ (2'').

Отсюда: $(nq)a = (mp)e_1$ (3).

Из равенства (3) следует, что длина отрезка a определяется дробью $\frac{mp}{nq}$ при единице измерения e_1 : $a = \frac{mp}{nq} e_1$ (4).

С другой стороны, исходя из условия будем иметь

$$a=\frac{m}{n}e=\frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}e_1\right)=\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\right)e_1. \quad (5)$$

Сравнивая равенства (4) и (5) для измерения отрезка a, получим: $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}$.

Это равенство может быть использовано в качестве определения произведения двух дробей, а значит, и двух рациональных чисел.

Определение. Произведением положительного рационального числа a, выраженного дробью $\frac{m}{n}$, на положительное рациональное число b, выраженное дробью $\frac{p}{q}$, называется рациональное число, которое выражается дробью $\frac{mp}{nq}$.

Например, $\frac{3}{16}\cdot\frac{20}{27}=\frac{3\cdot20}{16\cdot27}=\frac{1\cdot5}{4\cdot9}=\frac{5}{36}$.

В школе при умножении дробей пользуются следующим правилом: **произведением двух дробей называется дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель – произведению знаменателей данных дробей.**

Любое натуральное число a можно представить в виде дроби со знаменателем, равным 1 $\left((\forall a\in N)\left(a=\frac{a}{1}\right)\right)$, поэтому умножение рациональных чисел является обобщенным правилом умножения натуральных чисел.

✓ **Пример 6.** $\frac{2}{9}\cdot4=\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{1}=\frac{2\cdot4}{9\cdot1}=\frac{8}{9}$.

Также данное произведение можно найти через сумму четырех слагаемых:

$$\frac{2}{9}\cdot4=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2+2+2+2}{9}=\frac{8}{9}.$$

Теорема 5. Произведение двух положительных рациональных чисел всегда существует и однозначно.

Доказательство следует из того, что умножение дробей (которые представляют данные числа) сводится к умножению натуральных чисел, а произведение натуральных чисел всегда существует и единственно.

1.6.6. Законы умножения положительных рациональных чисел

Поскольку операция умножения рациональных чисел сводится к умножению натуральных чисел, то справедливы следующие законы:

1) коммутативный ($ab = ba$);
2) ассоциативный ($(ab)c = a(bc)$);
3) дистрибутивный относительно сложения ($(a+b)c = ac+bc$).

Доказательство. Законы 1 и 2 докажите самостоятельно.

Докажем справедливость закона 3.

Пусть числа *a*, *b*, *c* определяются соответственно дробями $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{s}{t}$.

Получим: $(a+b)\cdot c = \left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)\cdot\frac{s}{t} = \frac{mq+np}{nq}\cdot\frac{s}{t} = \frac{(mq+np)\cdot s}{nq\cdot t} = \frac{mqs+nps}{nqt} =$

$= \frac{mqs}{nqt}+\frac{nps}{nqt} = = \frac{ms}{nt}+\frac{ps}{qt} = \frac{m}{n}\cdot\frac{s}{t}+\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{t} = ac+bc$.

Таким образом, $(a+b)c = ac+bc$.

1.6.7. Деление положительных рациональных чисел

Операция деления на множестве Q_+ определяется как операция, обратная умножению.

Определение. Частным двух положительных рациональных чисел *a* и *b* называется такое число $c \in Q_+$, что $a = bc$ $(a:b = c \Leftrightarrow a = bc)$.

Пользуясь данным определением, выведем правило деления дробей. Пусть рациональные числа *a*, *b*, *c* определяются соответственно дробями $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{x}{y}$.

По определению частного имеем:

$$a:b = c\ ,\ a = bc\text{ , или }\frac{m}{n} = \frac{p}{q}\cdot\frac{x}{y} = \frac{px}{qy}.$$

Используя условие равенства дробей, коммутативность и ассоциативность умножения на множестве *N*, получаем:

$$m(qy) = n(px).$$

$$(np)x = (mq)y\ ,$$

$$\frac{x}{y}=\frac{mq}{np}\text{, или } \frac{x}{y}=\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p}.$$

Так как $\frac{x}{y}=c=a:b=\frac{m}{n}:\frac{p}{q}$, то: $\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{mq}{np}$.

Таким образом, **чтобы разделить дробь $\frac{m}{n}$ на дробь $\frac{p}{q}$, необходимо числитель первой дроби умножить на знаменатель второй и полученное произведение записать в числитель, а знаменатель первой дроби умножить на числитель второй и полученное произведение записать в знаменатель дроби.**

Дробь $\frac{q}{p}$ называется **обратной дроби** $\frac{p}{q}$, поскольку $\frac{p}{q}\cdot\frac{q}{p}=1$.

Правило деления дробей можно сформулировать и так:

чтобы разделить дробь $\frac{m}{n}$ на дробь $\frac{p}{q}$, необходимо дробь-делимое умножить на дробь $\frac{q}{p}$, обратную делителю $\frac{p}{q}$.

Теорема 6. Частное от деления положительных рациональных чисел всегда существует и оно единственное.

Доказательство вытекает из того, что деление дробей (которые представляют данные числа) сводится к делению натуральных чисел, а деление натуральных чисел всегда существует и единственно.

Деление натуральных чисел является частным случаем деления рациональных чисел. Если $m,n\in N$, то $m:n=\frac{m}{1}:\frac{n}{1}=\frac{m\cdot 1}{1\cdot n}=\frac{m}{n}$. Таким образом, частное от деления натуральных чисел можно рассматривать как дробь, числителем которой является делимое, а знаменателем – делитель. Поэтому в записи дроби $\frac{m}{n}$ черту можно рассматривать как знак деления ($\frac{m}{n}=m:n$).

✓ **Пример 7.** а) $\frac{3}{8}:\frac{5}{12}=\frac{3\cdot 12}{8\cdot 5}=\frac{3\cdot 3}{2\cdot 5}=\frac{9}{10}$;

б) $6:\frac{2}{3}=\frac{6}{1}:\frac{2}{3}=\frac{6\cdot 3}{1\cdot 2}=\frac{3\cdot 3}{1\cdot 1}=9$; в) $\frac{3}{4}:2=\frac{3}{4}:\frac{2}{1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$.

При умножении или делении смешанных чисел их необходимо сначала записать в виде неправильных дробей, а затем выполнить указанные действия с помощью соответствующих правил.

✓ **Пример 8.** $13\frac{1}{2}:5\frac{3}{4}=\frac{27}{2}:\frac{23}{4}=\frac{27}{2}\cdot\frac{4}{23}=\frac{27\cdot 4}{2\cdot 23}=\frac{54}{23}=2\frac{8}{23}$.

☺ **Задача 4.** Выполнить указанные действия:

а) $1\frac{9}{16}\cdot 3\frac{1}{5}+16\frac{1}{3}+4:2\frac{2}{5}$; б) $\left(1\frac{7}{12}+2\frac{5}{24}-\frac{1}{8}\right)\cdot 3-\left(10\frac{1}{9}-61\frac{1}{2}:6\frac{3}{4}\right)$.

Решение. а) $1\frac{9}{16}\cdot 3\frac{1}{5}+16\frac{1}{3}+4:2\frac{2}{5}=\frac{25}{16}\cdot\frac{16}{5}+16\frac{1}{3}+\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{12}=$

$=5+16\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=21\frac{1}{3}+1\frac{2}{3}=(21+1)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=23$.

б) $\left(1\frac{7}{12}+2\frac{5}{24}-\frac{1}{8}\right)\cdot 3-\left(10\frac{1}{9}-61\frac{1}{2}:6\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{19}{12}+\frac{53}{24}-\frac{1}{8}\right)\cdot 3-\left(10\frac{1}{9}-\frac{123}{2}\cdot\frac{4}{27}\right)=$

$=\left(\frac{19}{4}+\frac{53}{8}-\frac{3}{8}\right)-\left(10\frac{1}{9}-\frac{41\cdot 2}{9}\right)=\frac{38+53-3}{8}-\left(10\frac{1}{9}-\frac{82}{9}\right)=$

$=\frac{88}{8}-\left(10\frac{1}{9}-9\frac{1}{9}\right)=11-1=10$.

Ответ: а) 23; б) 10.

1.7. Свойства на множестве положительных рациональных чисел

Рассмотрим отношение «меньше» и «больше» на множестве Q_+.

Определение. Число $a\in Q_+$ меньше числа $b\in Q_+$, если существует такое число $c\in Q_+$, что имеет место равенство $a+c=b$.

Если *a* меньше *b*, то говорят, что *b* больше *a*.

Ранее было доказано, что $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ тогда и только тогда, когда $mq=np$.

Известно, что для дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ с одинаковыми знаменателями $\frac{m}{n}>\frac{p}{q}$ тогда и только тогда, когда $m>p$.

Теорема 7. Для дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ с разными знаменателями $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$ тог
и только тогда, когда $mq > np$.

Для доказательства этой теоремы достаточно привести дроби к обще знаменателю (докажите самостоятельно).

Свойство 1

Отношение «больше» на множестве Q_+ обладает следующими свойствами:

1) антирефлексивности: $\overline{\frac{m}{n} > \frac{m}{n}}$;

2) антисимметричности: если $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, то $\overline{\frac{p}{q} > \frac{m}{n}}$;

3) транзитивности: если $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$ и $\frac{p}{q} > \frac{s}{t}$, то $\frac{m}{n} > \frac{s}{t}$.

Справедливость этих свойств можно доказать, рассматривая отношени «больше» на множестве неравных отрезков (докажите самостоятельно).

Заметим, что между двумя неравными дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ возможно только одн из двух отношений: $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$ или $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$.

Поэтому отношение «больше» («меньше») на множестве Q_+ является **отноше нием строгого линейного порядка**, а множество Q_+ – **линейно упорядоченным**.

Свойство 2

Во множестве Q_+ нет наименьшего числа и нет наибольшего числа.

Доказательство. Пусть рациональное число $\frac{m}{n}$ – наименьшее из всех положительных рациональных чисел во множестве Q_+. Но можно найти числа меньшие данного. Например, число $\frac{m}{2n} < \frac{m}{n}$ ($\frac{m}{2n} < \frac{2m}{2n}$, $m < 2m$, где $m \in N$). Таким образом, число $\frac{m}{n}$ не является наименьшим во множестве Q_+. Аналогично, если принять, что число $\frac{s}{t}$ – наибольшее среди всех положительных рациональных чисел множества Q_+. Но можно найти числа большие данного, например, число $\frac{s+1}{t} > \frac{s}{t}$ ($s+1 > s$, где $s \in N$).

Поэтому во множестве Q_+ нет наименьшего числа и нет наибольшего числа.

Свойство 3

Множество действительных рациональных чисел Q_+ плотное в себе (т. е. между всякими двумя разными числами *a* и *b* содержится бесконечное множество чисел из этого же множества).

Доказательство. Нами уже было доказано, что множество Q_+ линейно упорядоченное. Докажем, что между всякими двумя числами *a* и *b* $(a < b)$ этого множества существует хотя бы одно число $c \in Q_+$.

Пусть даны два положительных рациональных числа $a = \frac{m}{n}$ и $b = \frac{p}{n}$, причем $m < p$ (поскольку $a < b$).

Из неравенства $m < p$ следует, что $2m < m + p < 2p$, откуда

$$\frac{2m}{2n} < \frac{m+p}{2n} < \frac{2p}{2n}, \quad \frac{m}{n} < \frac{m+p}{2n} < \frac{p}{n}.$$

Из последнего неравенства следует, что $a < c < b$, где $c = \frac{m+p}{2n} = \frac{a+b}{2}$.

Таким образом, между двумя любыми положительными рациональными числами находится хотя бы одно положительное рациональное число. Можно доказать, что и между числами *a* и *b*, а также между *c* и *b* найдется хотя бы по одному числу из множества Q_+. Продолжая этот процесс, можно прийти к выводу, что между любыми двумя числами множества Q_+ существует бесконечное множество чисел этого же множества. Поэтому множество Q_+ всюду плотное (или плотное в себе).

Свойство 4

Множество Q_+ является счетным множеством.

Доказательство. Рассмотрим один из возможных способов нумерации элементов множества Q_+ («диагональный способ»).

Множество Q_+ можно записать: $Q_+ = \left\{ x \middle| x = \frac{p}{q}, p \in N, q \in N \right\}$.

Разместим все элементы множества Q_+ в бесконечной таблице (рис. 7):

– в первом ряду запишем все рациональные числа в порядке возрастания со знаменателем $q = 1$;

– в другом ряду в таком же порядке запишем все рациональные числа со знаменателем 2;

– и т. д.

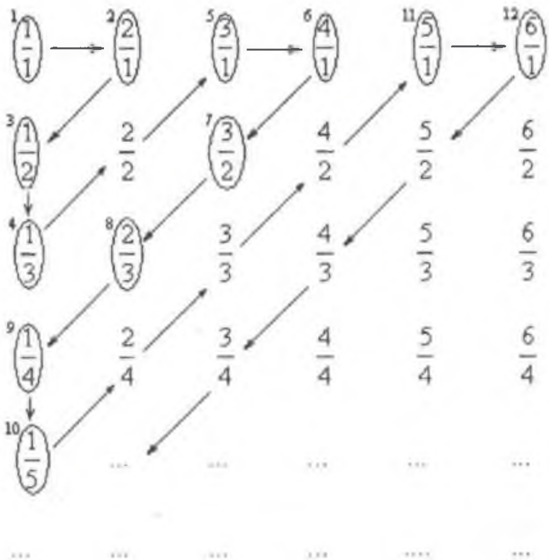


Рис. 7

Будем двигаться по пути, указанному стрелкой, и:

число 1 поставим в соответствие числу $\frac{1}{1}$,

число 2 на указанном пути поставим в соответствие другому числу, если оно не равно первому и т. д.

Мы занумеровали все положительные рациональные числа так, что каждому из них будет соответствовать ровно одно (натуральное) число и каждому натуральному числу будет соответствовать ровно одно рациональное число.

Таким образом, мы доказали, что множество Q_+ счетное.

Вопросы для самоконтроля

1. Положительные рациональные и действительные числа.
2. Измерение отрезков.
3. Понятие дроби.
4. Равносильные дроби.
5. Положительное рациональное число.
6. Несократимая запись рационального числа.
7. Приведение дробей к общему знаменателю.
8. Сложение положительных рациональных чисел. Законы.
9. Вычитание положительных рациональных чисел.
10. Умножение положительных рациональных чисел. Законы.
11. Деление положительных рациональных чисел.
12. Свойства на множестве положительных рациональных чисел.

Задания для самостоятельной работы

Занятие 1

1. 1) Какую часть развернутого угла составляет 1°?

2) Какую часть часа составляет минута?

3) Какую часть метра составляет один сантиметр?

4) Какую часть сантиметра составляет один миллиметр?

2. Какая часть фигуры (рис. 8):

1) закрашена; 2) не закрашена?

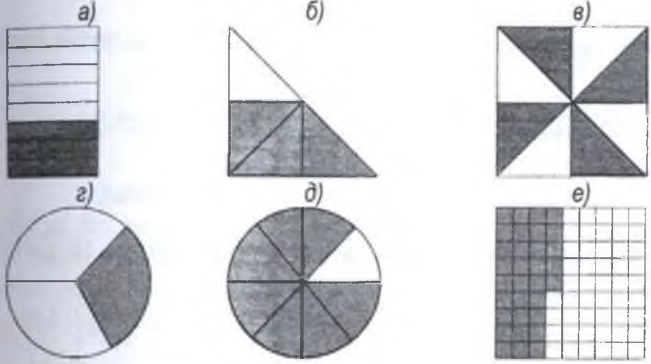


Рис. 8

3. Запишите в виде обыкновенной дроби:

1) две пятых;	2) четыре седьмых;	3) одна восьмая;
4) пять одиннадцатых;	5) три десятых;	6) сто три сто сороковых;
7) девять тысячных;	8) двенадцать сотых;	9) двадцать одна тридцатая.

4. Объясните, что означает каждая величина:

1) $\frac{3}{8}$ км; 2) $\frac{3}{5}$ пирога; 3) $\frac{1}{5}$ урока;

4) $\frac{5}{6}$ торта; 5) $\frac{1}{2}$ батона; 6) $\frac{7}{10}$ пути.

5. 1) Работник типографии выполняет набор книги за 6 часов. Какую часть набора он выполнит за 1 час?

2) Машинистка напечатала рукопись за 12 дней. Какую часть рукописи напечатала машинистка за 3 дня?

3) Трактор вспахал поле за неделю. Какую часть поля вспахивал трактор ежедневно?

4) Бассейн наполняется водой за 9 часов. Какая часть бассейна наполняется за 1 час?

6. Отрезок *MN* длиной 1 м разделили на 7 равных частей (рис. 9).

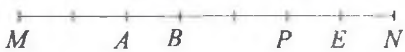


Рис. 9

Найдите:

1) длину отрезка *MA*; 2) длину отрезка *BE*; 3) длину отрезка *PN*;
4) длину отрезка *MB*; 5) длину отрезка *BN*; 6) длину отрезка *AP*.

7. Начертите в тетради квадрат со стороной 4 см. Разделите его на 4 равные части. Закрасьте $\frac{3}{4}$ квадрата. Какая часть квадрата не закрашена?

8. Начертите в тетради отрезок длиной 12 см. Начертите один под другим отрезки равные:

1) $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{6}$ этого отрезка; 2) $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{1}{4}$ этого отрезка;

3) $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{24}$, $\frac{2}{12}$ этого отрезка; 4) $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{8}{24}$ этого отрезка.

9. Постройте координатный луч, выбрав за единичный отрезок 15 клеточек тетради. Отметьте на координатном луче точки:

1) $A\left(\frac{1}{3}\right)$; 2) $B\left(\frac{1}{5}\right)$; 3) $C\left(\frac{7}{15}\right)$; 4) $M\left(\frac{11}{15}\right)$; 5) $K\left(\frac{3}{15}\right)$; 6) $P\left(\frac{5}{15}\right)$.

10. Определите, сколько сантиметров содержится:

1) в половине дециметра; 2) в четверти метра;
3) в половине метра; 4) в четверти километра.

11. Для игры в классики девочки начертили на асфальте квадрат со стороной 1 м и разделили его на девять равных частей (рис. 10).

2	5	3
7	1	8
9	4	6

Рис. 10

Запишите в виде дроби площадь:

1) 1 клетки классиков; 2) 2 клеток классиков.

3) Если девочка безошибочно прошла 8 клеток, то определите, какую часть площади квадрата смогла преодолеть эта девочка.

12. Из двенадцати спичечных коробков склеили контейнер для хранения мелких деталей (рис. 11). Какую часть контейнера составляет:

1) 1 коробок; 2) один горизонтальный ряд контейнера;

3) два вертикальных ряда контейнера?

Какая часть контейнера заполнена, если пустым остался коробок под номером 3?

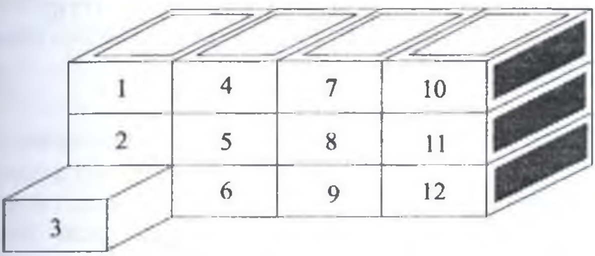


Рис. 11

13. В году 365 дней. Какую часть года составляет:

1) март; 2) сентябрь; 3) февраль?

14. Площадь поля 36 га. Льном засеяли 25 га. Какую часть поля засеяли льном? Какую часть поля не засеяли?

Занятие 2

15. Запишите дроби, которыми можно выразить закрашенную часть фигуры (рис. 12), с наименьшим возможным знаменателем.

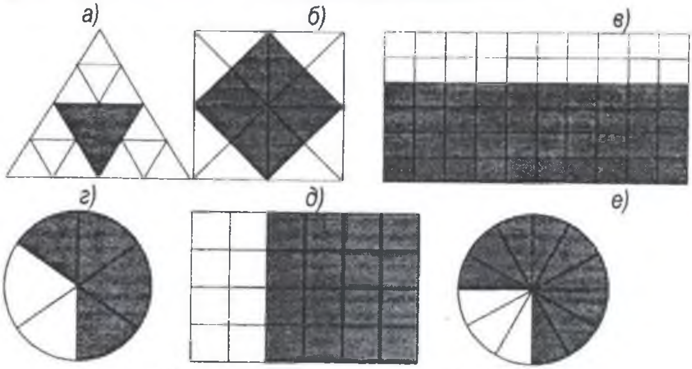


Рис. 12

16. Среди дробей $\frac{8}{16}$; $\frac{8}{24}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{9}{27}$; $\frac{5}{15}$; $\frac{14}{28}$; $\frac{21}{63}$ найдите дроби, равные:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$.

17. Среди дробей $\frac{6}{10}$; $\frac{15}{25}$; $\frac{16}{44}$; $\frac{10}{45}$; $\frac{12}{20}$; $\frac{14}{63}$; $\frac{28}{77}$; $\frac{20}{90}$; $\frac{300}{500}$; $\frac{4040}{11110}$ найдите дроби, равные: 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{2}{9}$; 3) $\frac{4}{11}$.

18. Запишите дробь $\frac{30}{90}$ равной ей дробью со знаменателем:

1) 3; 2) 9; 3) 18; 4) 180; 5) 900; 6) 2700.

19. Запишите дробь $\frac{20}{60}$ равной ей дробью со знаменателем:

1) 3; 2) 6; 3) 12; 4) 30; 5) 15; 6) 180.

Сократите дробь (**20 – 23**).

20. 1) $\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3}$; 2) $\frac{7\cdot 9}{7\cdot 11}$; 3) $\frac{19\cdot 13}{13\cdot 20}$; 4) $\frac{14\cdot 27}{28\cdot 14}$.

21. 1) $\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 11}{2\cdot 5\cdot 7\cdot 11}$; 2) $\frac{2\cdot 5\cdot 11}{2\cdot 5\cdot 13}$; 3) $\frac{3\cdot 5\cdot 17\cdot 19}{2\cdot 5\cdot 19\cdot 23}$; 4) $\frac{2\cdot 7\cdot 11\cdot 13}{3\cdot 11\cdot 13\cdot 29}$.

22. 1) $\frac{100}{125}$; 2) $\frac{96}{120}$; 3) $\frac{72}{120}$; 4) $\frac{150}{375}$;

5) $\frac{225}{600}$; 6) $\frac{500}{875}$; 7) $\frac{750}{1000}$; 8) $\frac{1250}{3750}$.

23. 1) $\frac{2^2\cdot3\cdot5}{2\cdot3\cdot5^2}$; 2) $\frac{2\cdot3^2\cdot7}{2^2\cdot3\cdot7^2}$; 3) $\frac{2\cdot3\cdot5^3\cdot7}{2^2\cdot3^3\cdot5}$; 4) $\frac{2\cdot3^2\cdot11}{3\cdot5\cdot11}$.

24. Выпишите несократимые дроби:

1) $\frac{3}{13}$; 2) $\frac{4}{64}$; 3) $\frac{9}{91}$; 4) $\frac{15}{45}$; 5) $\frac{24}{35}$; 6) $\frac{6}{7}$;

7) $\frac{15}{16}$; 8) $\frac{21}{24}$; 9) $\frac{10}{100}$; 10) $\frac{17}{51}$; 11) $\frac{253}{299}$; 12) $\frac{30}{75}$.

25. Запишите три сократимые дроби и три несократимые дроби:

1) с числителем 3; 2) с числителем 8;

3) со знаменателем 8; 4) со знаменателем 10.

26. Среди чисел 2, 3, 4, 8, 10, 15 найдите пары взаимно простых чисел и составьте несократимые дроби.

27. Подберите натуральные числа так, чтобы равенство было верным:

1) $\frac{3}{7}=\frac{a}{28}$; 2) $\frac{4}{15}=\frac{16}{c}$; 3) $\frac{b}{9}=\frac{63}{81}$; 4) $\frac{2}{p}=\frac{6}{39}$.

28. Запишите несократимую дробь, равную:

1) $\frac{18}{45}$; 2) $\frac{14}{21}$; 3) $\frac{10}{35}$; 4) $\frac{21}{27}$; 5) $\frac{49}{28}$; 6) $\frac{96}{60}$.

29. Дробь сначала сократили на 2, затем на 3, а потом на 7. На какое число сократили дробь?

30. Выполняя сокращение, Никита сократил дробь на 2, затем на 5 и потом на 11. На какое число надо умножить числитель и знаменатель полученной после сокращения дроби, чтобы получить первоначальную дробь?

31. Сокращая последовательно дробь на 2, на 3, на 5 и на 7, ученик получил в результате $\frac{2}{11}$. Найдите первоначальную дробь.

32. Какую часть километра составляет:

1) 500 м; 2) 250 м; 3) 800 м; 4) 750 м?

Результат представьте в виде несократимой дроби.

33. Какую часть тонны составляет:

1) 400 кг; 2) 350 кг; 3) 875 кг; 4) 680 кг?

Результат представьте в виде несократимой дроби.

34. Какую часть гектара составляет:

1) 50 а; 2) 40 а; 3) 350 м^2; 4) 500 м^2?

Результат представьте в виде несократимой дроби.

35. Какую часть часа составляет:

1) 45 мин; 2) 40 мин; 3) 30 мин; 4) 20 мин?

Результат представьте в виде несократимой дроби.

36. Выразите в метрах:

1) 60 см; 2) 5 дм; 3) 8 дм; 4) 7 дм 5 см.

Результат представьте в виде несократимой дроби.

37. Какую часть года составляет сентябрь, если это:

1) високосный год; 2) не високосный год?

38. Количество выходных дней может достигать 105 дней в году. Какую часть года составляют выходные дни, если это:

1) високосный год; 2) не високосный год?

39. Приведите к знаменателю 108 дробь:

1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{7}{18}$; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{1}{36}$.

40. Приведите к знаменателю 60 дробь:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $\frac{7}{12}$; 5) $\frac{4}{15}$; 6) $\frac{9}{20}$.

41. Приведите к общему знаменателю 24 дроби:

1) $\frac{5}{6}$ и $\frac{5}{8}$; 2) $\frac{7}{12}$ и $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{1}{2}$ и $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{5}{12}$ и $\frac{3}{4}$.

42. Приведите к наименьшему общему знаменателю дроби:

1) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{7}$; 2) $\frac{3}{4}$ и $\frac{2}{5}$; 3) $\frac{4}{9}$ и $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{1}{2}$ и $\frac{9}{11}$; 5) $\frac{6}{7}$ и $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{5}$.

43. Приведите к наименьшему общему знаменателю дроби:

1) $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{8}$; 2) $\frac{4}{15}$ и $\frac{2}{9}$; 3) $\frac{7}{30}$ и $\frac{4}{45}$; 4) $\frac{3}{20}$ и $\frac{6}{25}$; 5) $\frac{2}{25}$ и $\frac{4}{35}$; 6) $\frac{11}{30}$ и $\frac{2}{75}$

44. Приведите к наименьшему общему знаменателю дроби:

1) $\frac{2}{6}$ и $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{5}{9}$ и $\frac{4}{18}$; 3) $\frac{14}{21}$ и $\frac{6}{9}$; 4) $\frac{15}{25}$ и $\frac{8}{10}$; 5) $\frac{32}{48}$ и $\frac{10}{12}$; 6) $\frac{7}{8}$ и $\frac{32}{64}$.

45. Приведите к наименьшему общему знаменателю дроби:

1) $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{5}{12}$ и $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{5}$ и $\frac{7}{25}$; 4) $\frac{11}{60}$ и $\frac{8}{15}$; 5) $\frac{4}{45}$ и $\frac{2}{9}$; 6) $\frac{5}{24}$ и $\frac{25}{72}$.

46. Длина отрезка MN равна 10 см. Начертите отрезок, длина которого равна:

1) $\frac{4}{5}$ длины отрезка MN; 2) $\frac{6}{5}$ длины отрезка MN;

3) $\frac{1}{2}$ длины отрезка MN; 4) $\frac{3}{2}$ длины отрезка MN;

5) $\frac{9}{10}$ длины отрезка MN; 6) $\frac{11}{10}$ длины отрезка MN.

47. Среди дробей $\frac{5}{11}, \frac{17}{21}, \frac{32}{31}, \frac{29}{31}, \frac{99}{10}, \frac{99}{100}, \frac{35}{35}, \frac{83}{93}$ найдите:

1) правильные дроби; 2) неправильные дроби.

48. Запишите все правильные дроби со знаменателем: 1) 2; 2) 3; 3) 5; 4) 10.

49. Запишите все неправильные дроби с числителем: 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 7.

50. Запишите три правильные дроби с числителем: 1) 1; 2) 6; 3) 11; 4) 19.

51. Запишите три неправильные дроби со знаменателем: 1) 1; 2) 8; 3) 14; 4) 23.

52. Составьте, используя числа 1, 4, 8, все возможные:

1) правильные дроби; 2) неправильные дроби.

53. Составьте, используя числа 18, 139, 516, 9001, все возможные:

1) правильные дроби; 2) неправильные дроби.

54. Запишите:

1) наименьшую правильную дробь со знаменателем 20;
2) наименьшую неправильную дробь со знаменателем 20;
3) наибольшую правильную дробь со знаменателем 14;
4) наибольшую правильную дробь с числителем 14;
5) наименьшую неправильную дробь с числителем 31;
6) наибольшую неправильную дробь с числителем 140.

55. Запишите дробь $\frac{18}{c}$, если c равно:

1) 15; 2) 18; 3) 27; 4) 36; 5) 12; 6) 54.

Какие из полученных дробей являются неправильными?

56. Запишите дробь $\frac{q}{15}$, если q равно:

1) 3; 2) 25; 3) 30; 4) 10; 5) 15; 6) 9.

Какие из полученных дробей являются правильными?

57. Найдите сумму значений a, при которых дробь:

1) $\frac{a}{8}$ – правильная; 2) $\frac{8}{a}$ – неправильная.

Занятие 3

Выполните действия (**58 – 62**).

58. 1) $\left(2\frac{4}{11}-1\frac{5}{8}+7\frac{3}{4}\right)\cdot 1\frac{5}{83}$;   2) $\left(3\frac{7}{24}-2\frac{1}{16}+2\frac{5}{6}\right):1\frac{7}{8}$;

3) $\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{27}{29}-\frac{9}{58}\right)$;   4) $\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}-\frac{1}{4}\right):\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{10}\right)$.

59. 1) $\left(3\frac{3}{4}+2\frac{2}{3}\right)\cdot 1\frac{11}{14}:9\frac{1}{6}$;   2) $\left(4\frac{5}{7}+1\frac{2}{5}\right):15\frac{2}{7}:1\frac{1}{15}$;

3) $\left(3\frac{3}{4}\cdot 1\frac{2}{5}-2\frac{2}{3}:\frac{7}{9}\right):2\frac{3}{7}+4\frac{1}{4}$;   4) $\left(13\frac{1}{18}:3\frac{7}{76}-1\frac{7}{12}\cdot 2\frac{8}{19}\right)\cdot 2\frac{1}{4}+3\frac{1}{8}$.

60. 1) $\left(2\frac{2}{3}:5\frac{4}{9}\cdot 3\frac{6}{7}:1\frac{1}{8}\right):\left(\frac{2}{49}:2\frac{4}{5}:2\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{2}\right)$;

2) $\left(3\frac{5}{6}\cdot 7\frac{2}{3}:12\frac{1}{4}\cdot 5\frac{1}{2}\right):\left(75\frac{4}{7}\cdot 3\frac{2}{3}:8\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{100}\right)$;

3) $\left(5\frac{7}{12}-3\frac{5}{18}\right)\cdot 6\frac{7}{15}\Big/\left(\left(4\frac{2}{9}+1\frac{1}{6}\right):16\frac{3}{5}\right)$;

4) $\left(7\frac{5}{8}+2\frac{1}{6}\right):3\frac{11}{12}\Big/\left(\left(6\frac{2}{3}-5\frac{7}{16}\right)\cdot\frac{15}{59}\right)$.

61. 1) $\left(1\frac{29}{50}:\left(48\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}-2\frac{2}{15}\right)+\frac{1}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot 2\right):\left(\frac{3}{4}:\frac{15}{401}-5\frac{14}{25}\cdot 3\frac{1}{4}\right)$;

2) $\left(\left(15\frac{19}{32}-2\frac{3}{8}\cdot 3\frac{2}{5}\right):8\frac{17}{48}-\frac{42}{125}\right):\left(3\frac{1}{15}:3\frac{1}{3}-5\frac{1}{16}\cdot\frac{4}{45}\right)$;

3) $\left(3\frac{35}{79}+4\frac{53}{83}+2\frac{44}{79}-3\frac{53}{83}\right)\cdot 3\frac{5}{49}+78\frac{2}{7}$;

4) $\left(1\frac{36}{59}+5\frac{77}{89}+6\frac{23}{59}-3\frac{77}{89}\right)\cdot 2\frac{8}{15}-5\frac{1}{3}$.

62. 1) $\left(2\frac{1}{4}\cdot 5\frac{2}{5}+\left(12\frac{1}{4}:4-1\frac{1}{5}\cdot 2\right)\cdot 3\frac{1}{53}\right):\left(11\frac{2}{7}:8\frac{7}{9}-1\frac{9}{13}:6\frac{2}{13}\right)$;

2) $\left(\left(13\frac{7}{9}\cdot 3+18\frac{2}{3}:6\right):2\frac{2}{7}-4\frac{5}{6}\cdot 2\frac{2}{9}\right):\left(6\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{27}-1\frac{11}{18}\cdot 1\frac{2}{9}\right)$;

3) $\left(5\frac{3}{19}\cdot 5\frac{11}{26}+4\frac{5}{19}\cdot 5\frac{11}{26}\cdot 16\frac{11}{19}\right):\left(7\frac{3}{115}-1\frac{211}{230}\right)+2\frac{2}{5}$;

4) $\left(13\frac{9}{47}\cdot 3\frac{4}{15}-3\frac{4}{15}\cdot 1\frac{2}{47}-2\frac{7}{47}\cdot 3\frac{4}{15}\right):\left(2\frac{4}{27}-1\frac{106}{135}\right)\cdot 5\frac{17}{18}-35$.

63. После того как фермеры вспахали $23\frac{3}{8}$ га, им осталось вспахать на $53\frac{5}{12}$ га больше, чем уже вспахали. Какова площадь участка?

64. Бассейн наполнялся водой в течение $2\frac{7}{15}$ ч. До полного заполнения бассейна осталось на $\frac{43}{60}$ ч меньше, чем уже затрачено. Сколько времени надо на заполнение бассейна?

65. Самосвалами надо было вывезти 4000 м^3 грунта. В первый день они вывезли $\frac{5}{8}$ грунта, во второй день – $\frac{2}{3}$ остатка. Сколько грунта осталось вывезти?

66. Надо благоустроить 50000 м^2 территории парка. Предполагается выделить для клумб $\frac{74}{125}$ этой площади, под асфальтированные дорожки – $\frac{3}{4}$ оставшейся площади, а остальную площадь вымостить тротуарной плиткой. Какую площадь предполагается покрыть тротуарной плиткой?

67. Один рабочий может выполнить работу за 12 ч, а другой – за 20 ч. За какое время будет выполнена работа, если ее поручить двум рабочим?

68. Одна труба наполняет бак с водой за 4 ч, а другая – за 5 ч. За какое время наполнится бак, если открыть обе трубы одновременно?

69. Хранилище было заполнено картофелем за три дня. В первый день заполнили $\frac{3}{7}$ хранилища, во второй день – $\frac{8}{9}$ того, что заполняли в первый день. В третий день осталось завезти на 20 т картофеля меньше, чем в первый день. Сколько тонн картофеля заготовлено?

70. Наборщица набрала рукопись за три дня. В первый день она набрала $\frac{4}{11}$ рукописи, во второй день – в $1\frac{1}{2}$ раза больше, чем в первый день. Сколько страниц в рукописи, если за первый и третий дни было набрано 100 страниц?

71. Вычислите:

1) $\frac{7}{8}-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{8}{15}+\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{3}\right)^2$; 3) $\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\right):\frac{1}{18}$; 4) $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}+\frac{11}{15}$.

72. Упростите выражение:

1) $\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{3}\cdot a+\frac{1}{5}\cdot a$; 2) $\frac{1}{3}\cdot m-\frac{1}{5}\cdot m-\frac{1}{15}\cdot m$; 3) $1\frac{3}{8}\cdot k-\frac{3}{4}\cdot k+\frac{1}{2}$;

4) $\frac{3}{5}\cdot b+4\frac{1}{2}\cdot b-\frac{1}{5}$; 5) $\frac{1}{5}\cdot a+\frac{3}{5}\cdot a+\frac{2}{7}-\frac{2}{5}\cdot a$; 6) $\frac{1}{36}+\frac{7}{9}\cdot m-\frac{2}{18}\cdot m+\frac{3}{16}$.

73. Решите уравнение:

1) $x+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$; 2) $x-\frac{1}{4}=\frac{3}{7}$; 3) $\frac{1}{7}\cdot x\cdot\frac{1}{3}=2$;

4) $\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{3}\cdot x=\frac{5}{6}$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^2+x=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2$; 6) $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\cdot\left(x-\frac{3}{10}\right)=\frac{3}{8}$.

Занятие 4

74. Докажите, что: 1) $\frac{1}{4}<\frac{7}{8}$; 2) $\frac{3}{14}<\frac{16}{21}$; 3) $\frac{2}{9}<\frac{8}{13}$; 4) $\frac{17}{100}<\frac{79}{90}$.

75. Сравните числа:

1) $\frac{3}{14}$ и $\frac{14}{3}$; 2) $\frac{5}{6}$ и $\frac{6}{5}$; 3) $\frac{2}{17}$ и 1; 4) 1 и $\frac{17}{2}$; 5) $\frac{22}{23}$ и $\frac{23}{23}$;

6) $\frac{48}{48}$ и 1; 7) $\frac{3}{25}$ и $\frac{7}{25}$; 8) $\frac{14}{15}$ и $\frac{11}{15}$; 9) $\frac{72}{95}$ и $\frac{27}{95}$; 10) $\frac{111}{2000}$ и $\frac{101}{2000}$.

76. Назовите дробь, которая больше дроби:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{9}{4}$; 4) $\frac{7}{15}$; 5) $\frac{73}{75}$; 6) $\frac{105}{2}$.

77. Назовите дробь, которая меньше дроби:

1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{6}{11}$; 3) $\frac{4}{5}$; 4) $\frac{8}{17}$; 5) $\frac{26}{25}$; 6) $\frac{175}{225}$.

78. Запишите в порядке возрастания дроби:

1) $\frac{3}{17}, \frac{6}{17}, \frac{5}{17}, \frac{1}{17}, \frac{19}{17}, \frac{11}{17}, \frac{49}{17}$; 2) $\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{13}{15}, \frac{17}{20}$.

79. Запишите в порядке убывания дроби:

1) $\frac{14}{31}, \frac{1}{31}, \frac{4}{31}, \frac{28}{31}, \frac{13}{31}, \frac{102}{31}, \frac{10}{31}$; 2) $\frac{7}{12}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$.

80. Запишите все дроби со знаменателем 6, расположенные между числами:
1) $\frac{1}{6}$ и $\frac{11}{6}$; 2) 0 и $\frac{13}{6}$.

81. Сократите дроби $\frac{18}{45}$, $\frac{33}{55}$, $\frac{14}{21}$, $\frac{48}{54}$, $\frac{68}{85}$ и расположите их в порядке убывания.

82. Сократите дроби $\frac{19}{95}$, $\frac{41}{82}$, $\frac{26}{39}$, $\frac{99}{990}$, $\frac{60}{72}$ и расположите их в порядке возрастания.

83. Запишите три рациональных числа, заключенных между числами:
1) $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{3}{10}$ и $\frac{11}{20}$; 3) $\frac{11}{60}$ и $\frac{79}{180}$; 4) $\frac{12}{13}$ и $\frac{64}{65}$.

84. Докажите, что на множестве положительных рациональных чисел антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно отношение:
1) «меньше»; 2) «больше»; 3) «не меньше»;
4) «не больше»; 5) «меньше или равно»; 6) «больше или равно».

85. Известно, что a, b и c – положительные рациональные числа и $a > c$, $b < c$. Сравните числа a и b.

86. Известно, что a и b – положительные рациональные числа и $a > 8$, $b < 2$. Сравните числа a и b.

87. Решите уравнение:
1) $4(3x+1)-6(x+1)+5(2x-3)=19$; 2) $3(2x-1)-5(x-3)+6(3x-4)=83$;
3) $\frac{3}{4}(x+5)=3(x-1)-2$; 4) $\frac{2}{5}(x-2)=2(x-3)-6$;
5) $3(2x-1)-4(x+1)=2x-7$; 6) $4(5x-1)-3(3x+1)=11x-7$;
7) $29-(2k+5)(4k-7)=(6-k)(8k+2)$; 8) $(7-4a)(2a+3)-53=(a+4)(6-8a)$;
9) $2-\frac{2-b}{5}-\frac{b+1}{3}=\frac{b+3}{5}$; 10) $\frac{y-3}{5}=\frac{1+y}{2}-\frac{y+2}{4}-1$;
11) $-\frac{t+5}{10}-3=\frac{3-t}{5}+\frac{t-6}{3}$; 12) $-\frac{b+4}{6}+\frac{1-b}{3}+1=\frac{2+b}{8}$.

88. Решите неравенство:
1) $-3x-4>5$; 2) $\frac{3}{5}(3x-1)>\frac{1}{8}(4-x)$; 3) $x-\frac{1-x}{6}\le\frac{2x+1}{2}-\frac{3}{4}$;
4) $\frac{1}{2}-\left(\frac{x+1}{4}-\frac{2x+1}{9}\right)>\frac{x+3}{4}-\frac{x-4}{9}$; 5) $x^2-6x+5<0$;

6) $x^2+6x-7>0$; 7) $x^2-6x+5<0$; 8) $(x-2)^2+3>(x+5)^2$;

9) $\dfrac{x+2}{x-5}<0$; 10) $\dfrac{2x-1}{x+3}<0$; 11) $\dfrac{6+2x}{x}<0$;

12) $\dfrac{x^2-2x-15}{x-2}>0$; 13) $\dfrac{3x+1}{x^2+2x-3}\le 0$; 14) $\dfrac{x+13}{x^2-3x-10}\ge 0$;

15) $\dfrac{2x^2-3x+1}{2x^2+3x+1}\ge 1$; 16) $\dfrac{3x^2-2x+3}{4x^2-7x+9}>1$.

§ 2. Десятичные дроби и операции над ними

2.1. Десятичные дроби

При решении многих задач, особенно при измерении величин, часто используются дроби, знаменатель которых записывается единицей с нулями. Например, 37 см = $3\frac{7}{10}$ дм, 23 дм² = $\frac{23}{100}$ м²; 3 кг = $\frac{3}{100}$ ц.

Для таких дробей условились вместо «двухэтажной» записи употреблять запись в строку, отделяя целую и дробную части друг от друга запятой. Например, $3\frac{7}{10}=3{,}7$.

Дроби, записанные в таком виде, называются **десятичными.**

Определение. Дробь, в которой знаменатель выражается степенями числа 10, т. е. дробь вида $\frac{a}{10^n}$, где $a, n \in N$, называется десятичной дробью.

В метрической системе мер, новые единицы измерения получаются из исходных единиц путем уменьшения (увеличения) их в 10, 100, 1000 и т. д. раз.

✓ **Пример 9.** 1) 1 м = 10 дм = 100 см = 1000 мм; 2) 1 т = 10 ц = 1000 кг и т. д.

✓ **Пример 10.** 1) 5 м и 58 см = $5\frac{58}{100}$ м;2) 2 кг и 256 г = $2\frac{256}{1000}$ кг.

Десятичную дробь $\frac{m}{10^n}$ записывают без знаменателя: сначала записывают целую часть числа, ставят запятую, а затем числитель дробной части, причем в дробной части должно быть n знаков.

Если в числителе $\frac{m}{10^n}$ цифр меньше, чем показатель степени n, то после запятой недостающее количество цифр заменяют нулями.

✓ **Пример 11.** 1) $6\frac{51}{100} = 6{,}51$; 2) $42\frac{8}{1000} = 42{,}008$;

3) $\frac{506}{100} = 5\frac{6}{100} = 5{,}06$; 4) $\frac{7}{100} = 0{,}07$ (объясните, почему).

Рассмотрим на примере смысл записи числа в виде десятичной дроби:

$$28{,}32 = \frac{2832}{100} = \frac{2\cdot10^3 + 8\cdot10^2 + 3\cdot10 + 2}{10^2} = \underbrace{2\cdot10+8}_{целая\_часть} + \underbrace{\frac{3}{10} + \frac{2}{100}}_{дробная\_часть} =$$

$$= 28 + \frac{30}{100} + \frac{2}{100} = = 28 + \frac{32}{100} = 28\frac{32}{100}.$$

Общая запись числа десятичной дроби имеет вид:

$a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0, b_1 b_2 ... b_k}$, $0 \le a_i \le 9$, $0 \le b_i \le 9$.

Эту запись понимают так:

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + ... + \frac{b_k}{10^k} \qquad (*)$$

В десятичной дроби цифры, записанные после запятой, называются десятичными знаками.

Дробь вида $\frac{m}{n}$, знаменатель которой отличен от степени с основанием 10, называется обыкновенной дробью.

2.2. Свойства десятичных дробей

Свойство 1. Из двух соседних цифр в записи десятичной дроби левая цифра имеет разрядную единицу в 10 раз большую, чем правая.

Свойство 2. При умножении (делении) десятичной дроби на 10^k запятая переносится на k знаков вправо (влево).

✓ **Пример 12.** 1) $865{,}157 \cdot 10^2 = 86515{,}7$; 2) $24{,}567 : 10^3 = 0{,}024567$.

Свойство 3. Величина десятичной дроби не изменится, если приписать или отбросить несколько нулей в конце записи десятичной дроби:

✓ **Пример 13.** 1) $6{,}57 = 6{,}5700 = 6{,}5700000$; 2) $89{,}350000 = 89{,}350 = 89{,}35$.

Свойство 4. Для приведения десятичных дробей к общему знаменателю достаточно у дроби с меньшим количеством десятичных знаков дописать справа недостающее количество нулей так, чтобы количество десятичных знаков в числах было одинаковым.

✓ **Пример 14.** Привести к общему знаменателю дроби $47{,}4$; $14{,}25$ и $0{,}137$.

Решение. Приписываем к каждой дроби справа столько нулей, чтобы после запятой стало три десятичных знака, получим: $47{,}400$; $14{,}250$ и $0{,}137$.

Свойство 5. Из двух десятичных дробей больше та, у которой больше целая часть, а при равных целых частях больше та, у которой больше первые из неравных десятичных знаков.

✓ **Пример 15.** 1) $3{,}2891 > 3{,}2872$ (объясните, почему).

2.3. Действия над десятичными дробями

2.3.1. Сложение и вычитание десятичных дробей

Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями, как известно, сводится к сложению или вычитанию из числителей. Поэтому эти операции выполняются по правилам сложения и вычитания целых неотрицательных чисел.

Для сложения десятичные дроби подписывают одну под другой так, чтобы последние цифры целых частей складываемых чисел стояли в одном столбце (запятая должна стоять под запятой); затем выполняется сложение записанных чисел как натуральных (не обращая внимания на запятую) и в полученной сумме запятую ставят под запятой складываемых дробей.

☺ **Задача 5**. Найти сумму чисел 24,276 и 5,68.

Решение.
$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 24{,}276 \\ 5{,}680 \end{array} \\ \hline 29{,}956 \end{array}$$

Правильность вышесформулированного правила сложения десятичных дробей можно подтвердить, представив складываемые числа в виде обыкновенных дробей:

$$24{,}276 + 5{,}68 = 24{,}276 + 5{,}680 = \frac{24276}{1000} + \frac{5680}{1000} = \frac{29956}{1000} = 29{,}956.$$

Ответ: 29,956.

Аналогично находится разность десятичных дробей.

☺ **Задача 6.** Найти разность чисел 15,36 и 7,182.

Решение.
$$\begin{array}{r} -\,15{,}360 \\ 7{,}182 \\ \hline 8{,}178 \end{array}$$

Ответ: 8,178.

2.3.2. Законы сложения на множестве десятичных дробей

Сложение десятичных дробей подчиняется коммутативному и ассоциативному законам, т. е. имеют место равенства:

1) $a+b=b+a$;   2) $a+(b+c)=(a+b)+c$.

Докажите самостоятельно.

2.3.3. Умножение десятичных дробей

Пусть даны две десятичные дроби, записанные в виде обыкновенных дробей: $\frac{a}{10^k}$ и $\frac{b}{10^t}$. Найдем их произведение: $\frac{a}{10^k}\cdot\frac{b}{10^t}=\frac{ab}{10^{k+t}}$.

Чтобы записать полученную дробь $\frac{ab}{10^{k+t}}$ без знаменателя, необходимо в десятичной записи натурального числа ab (произведения чисел a и b) отделить запятой справа $k+t$ десятичных знаков.

Отсюда следует правило умножения десятичных дробей:

Чтобы перемножить две десятичные дроби, необходимо:

1) рассмотреть множители как натуральные числа, не обращая внимания на запятые;

2) найти произведение двух полученных натуральных чисел;

3) в полученном произведении отделить запятой справа столько цифр, сколько всего десятичных знаков у двух множителей.

Например, $51{,}42\cdot 6{,}3=323{,}936$.

2.3.4. Законы умножения десятичных дробей

Операция умножения десятичных дробей сводится к умножению натуральных чисел, поэтому справедливы коммутативный, ассоциативный и дистрибутивный относительно сложения законы, т. е. для любых чисел a, b, c имеют место равенства:

1) $ab=ba$ (коммутативность умножения);

2) $(ab)c=a(bc)$ (ассоциативность умножения);

3) $(a+b)c=ac+bc$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Докажите самостоятельно.

2.3.5. Деление десятичных дробей

Деление десятичных дробей также производится по правилам деления натуральных чисел. Для этого надо увеличить делитель во столько раз, чтобы он стал целым числом, а чтобы не изменилось частное, необходимо во столько же раз увеличить и делимое (необходимо перенести запятую вправо на такое же количество знаков). Затем выполнить деление по правилу деления натуральных чисел. После деления целой части в частном ставится запятая и далее продолжается деление.

☺ **Задача 7.** Разделить число 74,912 на 3,2.

Решение. $74{,}912 : 3{,}2 = 749{,}12 : 32$.

Выполним деление в столбик:

$$
\begin{array}{r|l}
-749{,}12 & 32 \\ \cline{2-2}
\underline{64} & 23{,}41 \\
-109 & \\
\underline{96} & \\
-131 & \\
\underline{128} & \\
-32 & \\
\underline{32} & \\
0 &
\end{array}
$$

Таким образом, $74{,}912 : 3{,}2 = 749{,}12 : 32 = 23{,}41$.

Ответ: 23,41.

2.4. Проценты

В практической деятельности для сравнения величин удобно пользоваться их сотыми частями. Как и некоторые другие дроби $\frac{1}{2}$ (половина), $\frac{1}{3}$ (треть), $\frac{1}{4}$ (четверть), дробь $\frac{1}{100}$ получила особое название – процент.

С понятием десятичной дроби тесно связано понятие процента.

Определение. Процентом от числа называется одна сотая часть этого числа (и обозначается %): 1 % от числа a равен $0{,}01a$.

Понятие процента возникло в древних Греции и Риме в связи с развитием торговли. Понятие «процент» происходит от латинского слова *pro centum* – «со ста», «на сто» – и вошло в математику из купеческого и финансового обихода. От сокращенной записи *cf* возник знак %; для обозначения процентов, с середины XIX в.

В наше время проценты используются во всех сферах человеческой деятельности.

Встречаются три основных вида задач на проценты:

1) *нахождение указанного количества процентов от данного числа;*
2) *нахождение числа по его процентам;*
3) *нахождение процентного отношения заданных чисел.*

☺ **Задача8.** Найти 1 % числа 758.

Решение. 1 % числа 758 равен $\frac{1}{100}$ этого числа. Значит, 758 надо разделить на 100, т. е. 758 : 100 = 7,58.

Ответ: 7,58.

☺ **Задача 9.** Найти 7 % от 13 м.

Решение. 7 % от 13 м равны 0,07 от 13 м, поэтому 13 · 0,07 = 0,91 (м) = 91 (см).

Ответ: 91 см.

Задачи такого типа называются задачами на нахождение процентов данного числа.

Чтобы найти несколько процентов данного числа, можно выразить проценты в виде десятичной дроби и умножить число на полученную дробь. Это можно записать в виде формулы. Пусть *b* равно *p* % числа *a*, тогда $b = a \cdot \frac{p}{100}$.

Заметим, что 100 % числа *a* равны самому числу *a*, так как $a = \frac{100}{100} \cdot a$.

☺ **Задача 10.** На курсе обучается 75 студентов, 20 % из них – отличники. Сколько отличников учится на курсе?

Решение. 1 способ. Один процент от числа 75 составляет 0,75, а 20 % от 75 – в 20 раз больше, т. е.: 0,75 · 20 = 15 (студентов).

2 способ. При помощи пропорции (заметим, что пропорции в начальных классах не изучаются):

75 ст. – 100 %;
x ст. – 20 %;

$$x = \frac{75 \cdot 20}{100} = \frac{3 \cdot 5}{1} = 15 \text{ (студентов)}.$$

Ответ: 15.

☺ **Задача 11.** Найти число *m*, если *p* % его составляет число *a*.

Решение. 1 способ. Делим *a* на *p* (находим 1 % от *a*) и результат умножаем на 100, получим: $m = \frac{a}{p} \cdot 100$.

2 способ. При помощи пропорции: $\begin{matrix} a & - & p\,\%; \\ m & - & 100\,\%; \end{matrix}$ $m = \frac{100a}{p}$. *Ответ:* $\frac{100a}{p}$

В задачах на смеси и сплавы идет речь о составлении растворов, смесей, сплавов и т. п.; их решение связано с понятиями «концентрация», «процентное содержание», «влажность», «проба» и т. п. и основано на следующих допущениях:

- все полученные смеси (сплавы, растворы) однородны;
- не делается различия между литром как единицей емкости и литром как единицей массы.

Определение. Если смесь (сплав, раствор) массы m состоит из веществ A, B, C (массами соответственно m_1, m_2, m_3), то величина $\frac{m_1}{m}$ (соответственно $\frac{m_2}{m}$, $\frac{m_3}{m}$) называется *концентрацией* вещества A (соответственно B, C) в смеси. Величина $\frac{m_1}{m} \cdot 100\%$ (соответственно $\frac{m_2}{m} \cdot 100\%$, $\frac{m_3}{m} \cdot 100\%$) называется *процентным содержанием* вещества A (соответственно B, C) в смеси. Ясно, что $\frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m} + \frac{m_3}{m} = 1$.

☺ **Задача 12.** Морская вода содержит 5 % соли (по массе). Сколько пресной воды необходимо добавить к 300 кг морской, чтобы соль в растворе составляла 2 %?

Решение. *Неизменной в процессе добавления пресной воды остается масса соли.* В 300 кг морской воды содержится 15 кг соли (5 %) и, соответственно, 285 кг пресной воды (95 %). Пусть надо долить x кг пресной воды, чтобы соль составила 2 % от всего раствора.

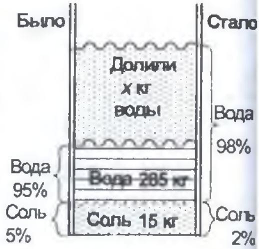


Рис. 13

Возьмем колбу (рис. 13), в которой содержится 300 кг морской воды (разложенной на части – соль и пресную воду), и нальем туда x кг пресной воды, получим следующую пропорцию:

$$\begin{matrix} 15 \text{ кг} - 2\,\%; \\ 285 + x \text{ кг} - 98\,\%; \end{matrix} \quad \text{откуда } 285 + x = \frac{15 \cdot 98}{2};$$

$$x = 15 \cdot 49 - 285 = 450 \text{ кг}.$$

Ответ: надо долить 450 кг пресной воды.

☺ **Задача 13.** Кусок сплава меди и олова массой 36 кг содержит 45 % меди. Сколько кг чистого олова необходимо добавить к куску, чтобы новый сплав содержал 40 % меди?

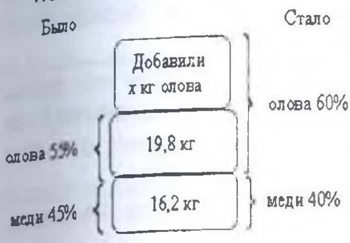


Рис. 14

Решение. *Неизменной в процессе добавления олова остается масса меди.*

Составим пропорцию.

16,2 кг – 40 %

19,8+х кг – 60 %,

откуда $19{,}8 + x = \dfrac{16{,}2 \cdot 60}{40}$,

$x = 24{,}3 - 19{,}8 = 4{,}5$ кг.

Ответ: надо добавить 4,5 кг чистого олова.

2.5. Преобразование обыкновенных дробей в десятичные

Существует два способа преобразования обыкновенных дробей в десятичные:

1) *умножением числителя и знаменателя дроби на такое число, чтобы в знаменателе получилось число – степень с основанием 10.*

Например, $\dfrac{3}{4} = \dfrac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \dfrac{75}{100} = 0{,}75$; $\dfrac{7}{125} = \dfrac{7 \cdot 8}{125 \cdot 8} = \dfrac{56}{1000} = 0{,}056$.

При таком способе бывает сложно (а иногда и невозможно) найти такое число, умножение на которое числителя и знаменателя привело бы к десятичной дроби;

2) *делением числителя на знаменатель* (это универсальный способ). При делении числителя на знаменатель процесс деления может оказаться либо конечным, либо бесконечным. В первом случае мы получим конечную десятичную дробь, а во втором – бесконечную периодическую десятичную дробь. Например, $\dfrac{9}{40} = 0{,}225$; $\dfrac{5}{11} = 0{,}454545... = 0{,}(45)$.

```
  9 | 40
 _90| 0,225
  80
 _100
   80
  _200
   200
     0
```

```
  5 | 11
 _50| 0,4545...
  44
  _60
   55
  _50
   44
   60
   ...
```

– процесс деления бесконечный.

Из этого примера видно, что остаток от деления 5 на 11 периодически повторяется, а значит, и десятичные знаки в частном также будут периодически повторяться.

При обращении дроби $\frac{5}{11}$ в десятичную процесс деления оказался бесконечным. Из этого примера видно, что остаток от деления 5 на 11 периодически повторяется, а значит, и десятичные знаки у частного также будут периодически повторяться.

Определение. Бесконечная десятичная дробь, у которой цифра или группа цифр, начиная с некоторого места после запятой, повторяются в одной и той же последовательности, называется периодической десятичной дробью, а цифра (группа цифр), которая повторяется, называется периодом этой дроби.

При записи периодической дроби период заключается в скобки. Например, 5,4432432...=2,4(432).

Рассмотрим теорему, которая дает ответ на вопрос: при каком условии обыкновенную дробь можно записать в виде конечной десятичной дроби?

Теорема 8. Для того чтобы несократимая дробь $\frac{m}{n}$ была равна конечной десятичной дроби, необходимо и достаточно, чтобы в разложении ее знаменателя n входили только простые множители 2 и 5 (т. е. если $n = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, $\alpha, \beta \in N_0$).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть несократимая дробь $\frac{m}{n}$ равна конечной десятичной дроби $\frac{k}{10^{\alpha}}$ $\left(\frac{m}{n} = \frac{k}{10^{\alpha}}\right)$, тогда получим равенство

$$m \cdot 10^{\alpha} = n \cdot k. \qquad (1)$$

Докажем, что равенство (1) возможно только в том случае, когда в каноническое разложение знаменателя n дроби $\frac{m}{n}$ входят только множители 2 и 5.

Допустим, что в каноническом разложении числа n входит простое число p ($p \neq 2$, $p \neq 5$). Тогда $n \vdots p$, значит $(nk) \vdots p$, а тогда из равенства (1) следует, что произведение $m \cdot 10^{\alpha}$ должно делиться на p. Но число 10^{α} содержит множители 2 и 5, поэтому не может делиться на p, а значит, другой множитель – число m делится на p. Но в таком случае у дроби $\frac{m}{n}$ числа m и n должны делиться на p, а это значит, что дробь $\frac{m}{n}$ сократима, что противоречит условию теоремы.

Таким образом, в каноническое разложение знаменателя n не может входить никакое простое число p, отличное от чисел 2 и 5.

Достаточность. Пусть знаменатель n дроби $\frac{m}{n}$ имеет вид $n = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, $\alpha, \beta \in N_0$, $\alpha \geq \beta$.

Докажем, что дробь $\frac{m}{n}$ эквивалентна конечной десятичной дроби. Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{m}{n}$ на $5^{\alpha-\beta}$, получим:

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot 5^{\alpha-\beta}}{2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot 5^{\alpha-\beta}} = \frac{m \cdot 5^{\alpha-\beta}}{2^{\alpha} \cdot 5^{\alpha}} = \frac{m \cdot 5^{\alpha-\beta}}{10^{\alpha}}.$$

В последнем равенстве дробь $\frac{m \cdot 5^{\alpha-\beta}}{10^{\alpha}}$ – конечная десятичная.

Заметим, что доказанную теорему можно применять только в том случае, когда дробь $\frac{m}{n}$ – несократимая.

✓ **Пример 16.** Дробь $\frac{31}{250}$ несократима, ее знаменатель $250 = 2 \cdot 5^3$. Поэтому ее можно представить в виде конечной десятичной дроби:

$$\frac{31}{250} = \frac{31 \cdot 2^2}{2 \cdot 5^3 \cdot 2^2} = \frac{31 \cdot 4}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{124}{10^3} = 0{,}124.$$

✓ **Пример 17.** Дробь $\frac{7}{60}$ несократима. Ее знаменатель $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ кроме множителей 2 и 5 имеет еще простой множитель 3. Поэтому эту дробь нельзя записать в виде конечной десятичной дроби.

☺ **Задача 14.** Можно ли представить в виде конечной десятичной дроби:

а) $\frac{39}{120}$; б) $\frac{35}{84}$?

Решение. а) Дробь $\frac{39}{120}$ – сократимая: $\frac{39}{120} = \frac{13}{40}$. Знаменатель дроби $\frac{13}{40}$ не содержит никаких простых множителей, кроме 2 и 5, поэтому ее можно представить в виде десятичной.

б) Сократим дробь: $\frac{35}{84}=\frac{5}{12}$. Знаменатель несократимой дроби $\frac{5}{12}$ содержит простой множитель 3, поэтому ее нельзя представить в виде десятичной.

Ответ: а) можно; б) нельзя.

2.6. Упражнения на все действия с десятичными дробями

☺ **Задача 15.** Выполнить указанные действия:

$$\frac{1{,}05+\frac{3}{4}}{\left(7.5-3\frac{1}{3}\right)\cdot 0{,}6}+2{,}395:8{,}5-0{,}09.$$

Решение. 1) $\frac{1{,}05+\frac{3}{4}}{\left(7.5-3\frac{1}{3}\right)\cdot 0{,}6}=\frac{1{,}05+0{,}75}{7.5\cdot 0{,}6-\frac{10}{3}\cdot 0{,}6}=\frac{1{,}8}{4{,}50-2}=\frac{1{,}8}{2{,}5}=\frac{18}{25}$;

2) $24{,}395:8{,}5=243{,}95:85=2{,}87$;

3) $\frac{18}{25}+2{,}87-0{,}09=0{,}72+2{,}87-0{,}09=3{,}5$.

Ответ: 3,5.

☺ **Задача 16.** Найти значение выражения $\frac{6{,}75^2+0{,}125\cdot 67{,}5}{5{,}9^2-\left(1{,}03+1{,}89726:0{,}618\right)^2}$ наиболее рациональным способом.

Решение. 1) $6{,}75^2+0{,}125\cdot 67{,}5=6{,}75\left(6{,}75+0{,}125\cdot 10\right)=6{,}75\left(6{,}75+1{,}25\right)=$
$=6{,}75\cdot 8=54$;

2) $1{,}89726:0{,}618=1897{,}26:618=3{,}07$;

3) $1{,}03+3{,}07=4{,}1$;

4) $5{,}9^2-4{,}1^2=\left(5{,}9+4{,}1\right)\left(5{,}9-4{,}1\right)=10\cdot 1{,}8=18$;

5) $54:18=3$.

Ответ: 3.

Вопросы для самоконтроля

1. Десятичные дроби.
2. Десятичные дроби и операции над ними.
3. Проценты. Основные задачи на проценты.
4. Обращение обыкновенных дробей в десятичные.
5. Бесконечные периодические десятичные дроби.

Задания для самостоятельной работы

Занятие 1

1. Запишите обыкновенные дроби в виде десятичных дробей:

1) $22\frac{9}{10}$; $\frac{17}{100}$; $3\frac{15}{1000}$; $\frac{657}{10000}$;   2) $\frac{7}{10}$; $5\frac{19}{100}$; $\frac{7}{1000}$; $6\frac{89}{10000}$.

2. Запишите эти десятичные дроби в виде обыкновенных дробей:

1) 85,2; 0,31; 6,0002; 0,00012;   2) 0,4; 14,66; 0,009; 3,000123.

3. Назовите цифру, которая в записи десятичной дроби 9876,5421 находится в разряде:

1) единиц;   2) тысяч;   3) сотен;   4) десятков;
5) сотых;   6) десятых;   7) тысячных;   8) десятитысячных.

4. Прочитайте дробь и назовите, сколько единиц в разряде десятых, сотых, тысячных и десятитысячных она содержит:

1) 0,2395;   2) 1,3641;   3) 15,6048;   4) 233,0591.

5. В каждой десятичной дроби назовите разряд, в котором находится цифра 5 и запишите число, которое ею обозначено:

1) 0,265;   2) 0,256;   3) 0,526;   4) 0,1625;   5) 0,6205;   6) 0,6052.

6. Запишите три десятичные дроби, равные данной обыкновенной дроби:

1) $\frac{7}{10}$;   2) $12\frac{4}{10}$;   3) $80\frac{55}{100}$;   4) $\frac{83}{100}$;   5) $43\frac{8}{1000}$;   6) $\frac{5}{10\,000}$.

7. Запишите десятичную дробь с пятью десятичными знаками после запятой, равную дроби:

1) 3,2;   2) 0,93;   3) 12,56;   4) 3,2045;
5) 0,2054;   6) 7,201;   7) 0,1208;   8) 213,4567.

8. Представьте в виде десятичной дроби:

1) 4;   2) 9;   3) 213;   4) 648.

9. Из дробей укажите ту, в которой содержится больше:

а) целых;   б) десятых;   в) сотых;   г) тысячных:

1) 2,863; 1,798;   2) 98,15; 100,066;
3) 12,504; 10,619; 21,721;   4) 5,007; 0,128; 0,435.

10. Сравните:

1) 4,598 и 4,659; 2) 1,25 и 1,2415; 3) 5,6089 и 5,6809; 4) 4,0036 и 4,0306.

11. Запишите десятичную дробь, которая расположена между двумя дробями, т. е. больше первой из них, но меньше второй:

1) 0,1 и 0,3; 2) 0,8 и 0,9; 3) 0,25 и 0,27; 4) 1,45 и 1,46.

12. Назовите все натуральные числа, которые заключены между двумя дробями, т. е. больше первой из них, но меньше второй:

1) $\frac{6}{10}$ и 4,9; 2) 3,7 и $5\frac{8}{10}$; 3) $96\frac{5}{12}$ и 102,69; 4) $78\frac{3}{11}$ и 81,71.

13. Запишите три десятичные дроби, расположенные между двумя числами, т. е. каждая из них больше первого числа, но меньше второго:

1) 1000 и 1001; 2) 309 и 310; 3) 0,5 и 0,8; 4) 1,2 и 1,3; 5) 5,4 и 5,41.

14. Укажите, между какими последовательными натуральными числами расположена десятичная дробь:

1) 1,5; 2) 3,2; 3) 12045,7; 4) 909994,984.

Занятие 2

Найдите значение выражения (**15–18**).

15. 1) $\frac{9{,}83+11{,}17}{7}$; 2) $\frac{5{,}29+4{,}71}{5}$; 3) $\frac{32{,}12+15{,}88}{7{,}35-3{,}35}$; 4) $\frac{12{,}84+23{,}16}{8{,}04-2{,}04}$.

16. 1) $\frac{5{,}6\cdot 8{,}4}{4{,}9\cdot 3{,}2}$; 2) $\frac{16{,}5\cdot 5{,}1}{3{,}4\cdot 3{,}9}$; 3) $\frac{7{,}5\cdot 5{,}2\cdot 9{,}6}{2{,}4\cdot 2{,}5\cdot 2{,}6}$;

4) $\frac{4{,}8\cdot 7{,}5\cdot 8{,}4}{1{,}4\cdot 1{,}5\cdot 1{,}6}$; 5) $\frac{4{,}26\cdot 55{,}8\cdot 20{,}25}{1{,}8\cdot 13{,}5\cdot 7{,}1\cdot}$; 6) $\frac{8{,}1\cdot 2{,}25\cdot 37{,}5}{0{,}18\cdot 1{,}25\cdot 0{,}75}$.

17. 1) $\frac{5\frac{1}{7}\cdot 1{,}4\cdot 2{,}5}{7{,}2\cdot 4\frac{2}{7}}$; 2) $\frac{6{,}4\cdot 8\frac{1}{3}\cdot 6{,}3}{7{,}5\cdot 5{,}6}$; 3) $\frac{10\frac{5}{6}\cdot 4\frac{5}{11}\cdot 0{,}121}{0{,}98\cdot 3{,}9\cdot 3\frac{2}{3}}$; 4) $\frac{7\frac{1}{7}\cdot 15\frac{3}{4}\cdot 28{,}5}{4{,}2\cdot 12{,}5\cdot 10\frac{5}{9}}$.

18. 1) $\frac{5{,}6\cdot(8{,}6-7{,}1)}{7{,}5\cdot 8{,}4}$; 2) $\frac{3{,}57\cdot(19{,}7+2{,}8)}{2{,}25\cdot(2{,}9-2{,}39)}$;

3) $\frac{(5{,}92+5{,}18)\cdot 6{,}8}{3{,}7\cdot(14{,}01-12{,}71)}$; 4) $\frac{0{,}81\cdot(14{,}61-12{,}36)}{(4{,}085+0{,}316)\cdot 0{,}75}$.

Вычислите (**19 – 21**).

19. 1) $\frac{4}{7} : 0{,}4 + 0{,}3 \cdot \frac{5}{6}$; 2) $0{,}7 \cdot \frac{3}{14} + \frac{5}{12} : 0{,}5$;

3) $14{,}4 : 1\frac{1}{8} + 5\frac{3}{7} \cdot 7{,}35$; 4) $11\frac{1}{9} \cdot 18{,}9 - 4{,}2 : 5\frac{5}{6}$.

20. 1) $1{,}8 \cdot \left(2\frac{1}{9} + 1\frac{2}{3}\right)$; 2) $7{,}5 \cdot \left(2\frac{4}{5} + 4\frac{7}{15}\right)$;

3) $0{,}64 \cdot \left(5\frac{1}{8} - 1\frac{3}{32}\right)$; 4) $3{,}6 \cdot \left(5\frac{3}{4} - 1\frac{5}{9}\right)$.

21. 1) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot (0{,}5)^3$; 2) $(0{,}8)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$; 3) $(1{,}2)^2 : \left(\frac{3}{5}\right)^3$; 4) $(2{,}4)^2 : \left(1\frac{1}{5}\right)^3$.

Найдите значение выражения (**22 – 23**).

22. 1) $\left(7\frac{5}{12} + 3{,}25\right) + \left(2\frac{5}{6} + 4{,}75\right)$; 2) $\left(4\frac{1}{15} - 1{,}089\right) + \left(3\frac{1}{3} + 2{,}089\right)$;

3) $16 - 1\frac{7}{8} \cdot \left(12{,}2 - 10\frac{2}{3}\right) : 0{,}25$; 4) $14 - 1\frac{9}{26} \cdot \left(13{,}3 - 9\frac{5}{6}\right) : 0{,}5$.

23. 1) $\frac{2{,}4 \cdot a \cdot b}{c \cdot k \cdot l}$, если $a = 7{,}5$; $b = 6\frac{2}{5}$; $c = 0{,}12$; $k = 25$; $l = \frac{1}{2}$;

2) $\frac{4{,}9 \cdot m \cdot n}{0{,}3 \cdot k \cdot l}$, если $m = 12{,}1$; $n = 1\frac{1}{5}$; $k = 7{,}7$; $l = 1\frac{1}{10}$.

Выполните действия (**24–25**).

24. 1) $\dfrac{0{,}8 : 2\frac{2}{3} - 0{,}12}{0{,}08 + 1{,}26 \cdot \frac{4}{7}}$; 2) $\dfrac{0{,}9 : 3\frac{3}{5} - 0{,}05}{0{,}25 + 1{,}17 \cdot \frac{5}{9}}$;

3) $\left(0{,}5 + \frac{4}{5} - 0{,}6\right) \cdot \left(5\frac{8}{25} - 0{,}12 + 3\right)$; 4) $\left(2{,}75 - 1\frac{8}{25} + 0{,}15\right) : \left(2{,}5 + 0{,}04 - 1\frac{3}{4}\right)$.

25. 1) $\dfrac{3{,}9 \cdot 0{,}24 : \frac{5}{16}}{\left(4{,}06 - 2\frac{1}{2}\right) \cdot 0{,}8 \cdot 4\frac{4}{5}}$; 2) $\dfrac{0{,}25 \cdot \left(4{,}75 - \frac{3}{20}\right) \cdot 3{,}2}{0{,}23 : \frac{5}{8} \cdot 0{,}5}$;

3) $\dfrac{30\cdot\left(5\dfrac{4}{45}-4\dfrac{1}{15}\right)}{1\dfrac{1}{3}}-\dfrac{4,25:0,85+1:0,5}{(5,56-4,06):3}$; 4) $\dfrac{1\dfrac{1}{4}\cdot(1,09-0,29)}{\dfrac{8}{9}\cdot\left(18,9-16\dfrac{13}{20}\right)}+\dfrac{0,02\cdot(11,81+8,19)}{9:11\dfrac{1}{4}}$.

Решите уравнение (**26–27**).

26. 1) $12,2-m=7\dfrac{2}{3}$; 2) $y+3\dfrac{2}{3}=4,375$; 3) $3\dfrac{3}{5}:x=1,44$; 4) $y:1,125=1\dfrac{1}{3}$.

27. 1) $x+0,75+\dfrac{5}{8}=2,125$; 2) $x+\dfrac{7}{12}=\dfrac{1}{3}+0,5\cdot1\dfrac{2}{3}$;

3) $1\dfrac{3}{4}-\left(0,7-2\dfrac{1}{2}\cdot x\right)=1,17$; 4) $\left(2,4\cdot x+1\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{5}{6}=5\dfrac{19}{30}$.

28. Найдите значение выражения:

1) $0,625\cdot p+\dfrac{2}{5}\cdot p-\dfrac{6}{40}\cdot p$, если $p=4\dfrac{2}{3}$;

2) $2\dfrac{4}{20}\cdot m+4,2\cdot m+2\dfrac{3}{4}\cdot m$, если $m=5,5$.

29. 1) Найдите площадь прямоугольника, если его длина $6\dfrac{5}{9}$ см, а ширина – в 1,5 раза меньше.

2) Площадь прямоугольника равна 16,8 см^2. Найдите длину прямоугольника, если его ширина равна $3\dfrac{3}{5}$ см.

30. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны $3\dfrac{5}{7}$ см, 3,5 см, 0,62 дм.

31. Периметр прямоугольного участка равен 6,8 км, причем длина на 1,5 км больше ширины. Рожью засеяно $\dfrac{4}{7}$ площади этого участка. Найдите остальную площадь, отведенную под кукурузу.

32. В школе учатся 393 ученика, среди них мальчиков на 57 меньше, чем девочек. Сколько мальчиков и сколько девочек учатся в музыкальной школе, если ее посещают $\dfrac{11}{15}$ всех девочек и 0,625 всех мальчиков?

33. Бак автомобиля наполнен бензином до 0,8 своего объема. На пробег 125 км было израсходовано $\frac{4}{9}$ содержащегося бензина. Каков расход бензина на 50 км, если полный бак вмещает 54 л бензина?

Занятие 3

34. Как изменилось число, если его сначала:
1) увеличили на 10 %, а затем уменьшили на 10 %;
2) уменьшили на 10 %, а затем увеличили на 10 %?

35. На сколько процентов и как надо изменить результат, чтобы получилось первоначальное число, после того как его:
1) увеличили на 25 %; 2) уменьшили на 25 %?

36. На сколько процентов и как изменилось данное число, если его сначала на 20 %:
1) увеличили, а затем результат увеличили еще раз на 20 %;
2) уменьшили, затем результат уменьшили еще раз на 20 %?

37. На сколько процентов и как изменилась площадь прямоугольника, если одну сторону прямоугольника увеличили:
1) на 20 %, а другую – на 25 %;
2) на 50 %, а другую уменьшили на 50 %?

38. Ягоды крыжовника содержат 99 % воды. Перед тем как положить 10 кг крыжовника в морозильник на хранение, его подсушили, и в результате содержание воды в ягодах уменьшилось до 98 %. Найдите массу ягод, которые положили в морозильник на хранение.

39. Одна землеройка уничтожает в течение суток 10 г насекомых, 40 % из которых являются вредителями леса. Найдите массу вредных насекомых, которых могут уничтожить в течение суток землеройки в лесном массиве площадью 25 га, если в среднем на 1 га леса приходится 100 землероек?

40. Прочитав 132 страницы книги, Лена выяснила, что она прочитала на 10 % страниц больше, чем ей осталось прочитать. Сколько страниц в книге, которую читает Лена?

41. На время рекламной акции цены на телевизоры «Витязь» были снижены на 20 %. В каком процентном отношении находятся цены:
1) новые и старые; 2) старые и новые?

42. На отрезке AB, равном 1,2 дм, отметили точки C и K. Оказалось, что длина отрезка AC составляет 25 % от длины отрезка CK и 20 % от длины отрезка BK. Найдите длину каждого отрезка и процентное отношение длины отрезка AC к длине отрезка: 1) AB; 2) CB.

43. Найдите число, если:

1) сумма этого числа и его 56 % равна 2184;

2) разность этого числа и его 82 % равна 445,59;

3) 96 % его на 190,4 больше, чем его $\frac{7}{8}$;

4) сумма $\frac{5}{8}$ этого числа и его 45 % равна 344.

44. Найдите число, если произведение:

1) его 28 % и его 35 % равно 980; 2) его $\frac{5}{12}$ и его 72 % равно 480.

45. Для поздравления мальчиков с 23 февраля каждая девочка класса принесла по одному сувениру. Но сувениров оказалось больше, чем мальчиков в классе. Чтобы все подарки были равноценными, девочки в одни подарки положили один большой сувенир и открытку, в другие – два маленьких сувенира и открытку. Найдите число учеников в классе, если подарков с одним сувениром оказалось на 2 больше, чем подарков с двумя сувенирами, и такие подарки составили 60 % от всех.

46. В математическом кружке занимаются 62,5 % учеников 6А класса, в спортивных секциях – 75 %, но три ученика не занимаются ни в математическом кружке, ни в спортивной секции и составляют 20 % от числа участников математического кружка. Сколько учеников 6А класса занимаются в спортивных секциях?

Занятие 4

47. Какие из данных дробей можно обратить в десятичную:

1) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{14}$; 2) $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{7}{16}$; 3) $1\frac{3}{5}$; $10\frac{5}{18}$; $5\frac{2}{55}$; 4) $3\frac{1}{2}$; $6\frac{9}{35}$; $5\frac{7}{64}$?

48. Назовите число, на которое нужно умножить числитель и знаменатель дроби, чтобы обратить ее в десятичную дробь:

1) $\frac{1}{2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5}$; 2) $\frac{1}{2\cdot5\cdot5\cdot5}$; 3) $\frac{1}{2\cdot2\cdot2\cdot2}$; 4) $\frac{1}{5\cdot5\cdot5\cdot5}$.

49. Обратите обыкновенную дробь в десятичную:

1) $\frac{9}{24}$; $\frac{21}{28}$; $\frac{14}{16}$; $\frac{17}{20}$; 2) $\frac{12}{60}$; $\frac{9}{36}$; $\frac{11}{44}$; $\frac{26}{65}$.

50. Обратите смешанную дробь в десятичную:

1) $14\frac{7}{40}$; 2) $61\frac{9}{20}$; 3) $108\frac{17}{50}$; 4) $58\frac{11}{250}$.

51. Обратите обыкновенную дробь в десятичную:

1) $\frac{17}{16}; \frac{43}{20}; \frac{961}{32}; \frac{3028}{625}$; 2) $\frac{97}{25}; \frac{189}{125}; \frac{603}{16}; \frac{1285}{64}$.

52. Запишите частное в виде обыкновенной дроби и, если возможно, в виде десятичной дроби: 1) 17 : 8; 2) 12 : 48; 3) 4 : 25; 4) 28 : 354; 5) 99 : 18; 6) 132 : 55.

53. Верно ли, что: 1) $18{,}2 - (4{,}04 + 3{,}75) = 18\frac{1}{5} - \left(4\frac{1}{25} + 3\frac{3}{4}\right)$;

2) $45\frac{1}{8} + 2{,}4 \cdot \left(16\frac{4}{5} - 15{,}8\right) = 45{,}25 + 2\frac{1}{4} \cdot \left(16{,}8 - 15\frac{4}{5}\right)$?

54. Сравните дроби:

1) 5,14 и $5\frac{1}{5}$; 2) $308\frac{2}{25}$ и 308,1; 3) $865\frac{4}{15}$ и 865,25; 4) 706,008 и $706\frac{8}{1001}$.

55. Расположите дроби в порядке а) возрастания; б) убывания:

1) 5,3; $5\frac{1}{2}$; 5,25; $5\frac{3}{4}$; 5,15; $5\frac{2}{125}$; 2) 10,72; $10\frac{3}{4}$; 10,909; $10\frac{2}{3}$; $10\frac{1}{2}$; 10,099.

56. Назовите три десятичные дроби, расположенные между числами:

1) 4,23 и $4\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$ и 0,6; 3) $12\frac{6}{25}$ и $12\frac{7}{25}$; 4) $102\frac{3}{8}$ и $102\frac{2}{5}$.

57. Найдите значение выражения двумя способами: обратив все дроби в десятичные и обратив все дроби в обыкновенные:

1) $14{,}5 + 5\frac{7}{8} + 12\frac{1}{2} \cdot 2\frac{12}{25}$; 2) $57\frac{3}{4} - 52{,}75 + 5\frac{5}{8} : 2\frac{13}{16}$;

3) $62{,}5 \cdot \frac{4}{125} + 2\frac{3}{4} + 5\frac{5}{8}$; 4) $3\frac{1}{5} : 1{,}25 + 7\frac{5}{16} - 3\frac{3}{8}$.

58. Частное двух чисел в 12 раз меньше делимого и в 3 раза меньше делителя. Найдите делимое и делитель.

59. Найдите значение выражения:

1) $0{,}3^{-3} + \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} + (-0{,}5)^{-2} \cdot \frac{3}{4} + (-1)^{-8} \cdot 6$;

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} + \left(\frac{2}{31}\right)^{0} \cdot \frac{1}{8} - 0{,}25^{-2} \cdot 16$;

3) $\left(6 - 4 \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^{0}\right)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - 3^{-2} : \left(\frac{4}{49}\right)^{0} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{-1}$;

4) $\dfrac{3^{-1}\cdot 3^0+15\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}}{4-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}$; 5) $\dfrac{2^{-3}+\left(-\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{15\cdot 10^0-(0{,}1)^{-1}}$;

6) $(1{,}5)^3\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{-2}\cdot(0{,}75)^{-1}\cdot\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}-\left(-6\frac{3}{4}\right)^0\right)$;

7) $\dfrac{3^{-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2-\left(\frac{3}{4}\right)^2}\cdot\left(8^0-\frac{1}{6}\right)^{-1}+2\cdot 10^{-1}$; 8) $\left(\dfrac{0{,}1^{-2}\cdot 2^5}{\left(\frac{5}{3}\right)^{-4}\cdot 0{,}3^{-3}}\right)^{-1}:\left(\dfrac{0{,}4}{0{,}2^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}\right)^{-1}$.

§ 3. Бесконечные периодические десятичные дроби

3.1. Представление рационального числа, записанного обыкновенной дробью, в виде периодической десятичной дроби

Если знаменатель n дроби $\frac{m}{n}$ содержит множители, которые отличны от чисел 2 и 5, то дробь $\frac{m}{n}$ нельзя выразить конечной десятичной дробью (объясните, почему). В этом случае она может быть представлена в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Теорема 9. Если дробь $\frac{m}{n}$ несократима и в каноническом разложении ее знаменателя n на простые множители входят множители, отличные от чисел 2 и 5, то эту дробь можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Доказательство. Пусть знаменатель несократимой дроби $\frac{m}{n}$ содержит простые множители, отличные от чисел 2 и 5. Тогда процесс деления числителя m на знаменатель n будет бесконечным. Действительно, если бы этот процесс закончился через целое число шагов, то в частном получилась бы конечная десятичная дробь (объясните, почему). Кроме того, при делении m на n будут получаться остатки, меньшие числа n, т. е. некоторые из чисел 1, 2, 3, ..., $(n-1)$. Поскольку множество разных остатков конечно, то после некоторых шагов деления какой-нибудь остаток повторится. Значит, в частном будет повторение цифр. Отсюда и следует, что дробь $\frac{m}{n}$ представлена бесконечной периодической дробью.

Таким образом, всякое положительное рациональное число, выраженное дробью $\frac{m}{n}$, можно представить бесконечной периодической десятичной дробью.

Будет справедливым и обратное утверждение: всякая бесконечная периодическая десятичная дробь представляет собой рациональное число.

Заметим, что конечную десятичную дробь можно записать в виде бесконечной десятичной дроби с периодом, равным нулю.

Например, $5{,}29 = 5{,}2900000... = 5{,}29(0)$.

Периодические десятичные дроби бывают двух видов:

– чисто периодические дроби (когда период у них стоит сразу после запятой);

– смешанные периодические дроби (когда между запятой и первым периодом находится несколько десятичных знаков).

Например: $0{,}818181... = 0{,}(81)$; $6{,}(258)$ – чисто периодические дроби;

$0{,}4(69)$; $21{,}53(482)$; $3{,}00(7)$ – смешанные периодические дроби.

Возникает вопрос: когда дробь $\frac{m}{n}$ представляется чисто периодической, а когда смешанно периодической?

Если в разложении знаменателя несократимой дроби $\frac{m}{n}$ на простые множители не входят множители 2 и 5, то при преобразовании этой дроби в бесконечную десятичную дробь получится чисто периодическая дробь.

А если в разложении знаменателя несократимой дроби $\frac{m}{n}$ на простые множители кроме других множителей входят и числа 2 и 5, то при преобразовании получится смешанная периодическая дробь.

Количество цифр между запятой и началом периода определяется большим показателем степеней множителей с основанием 2 и 5, которые входят в разложение знаменателя.

Например, если $n = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$, то между запятой и началом периода будут три цифры.

✓ **Пример 18.** а) $\frac{3}{7} = 0,(428571)$; б) $\frac{25}{33} = \frac{25}{3 \cdot 11} = 0,(75)$;

в) $\frac{7}{15} = \frac{7}{3 \cdot 5} = 0,4(6)$; г) $\frac{23}{60} = 0,38(3)$.

3.2. Представление рационального числа, записанного периодической десятичной дробью, в виде обыкновенной дроби

Рассмотрим периодические десятичные дроби, у которых целая часть равна нулю.

1. Правило перехода от чисто периодической дроби к обыкновенной.

Теорема 10. Чисто периодическая десятичная дробь (целая часть которой равна нулю) равна такой обыкновенной дроби, числителем которой является период данной дроби, а знаменателем – число, записанное столькими девятками, сколько цифр в периоде дроби.

Доказательство. Возьмем чисто периодическую дробь

$$a = 0,\left(\overline{n_1 n_2 \ldots n_k}\right) \qquad (*)$$

и запишем ее в виде обыкновенной дроби.

Обозначим через n натуральное число $\overline{n_1 n_2 \ldots n_k} = n$ – число, записанное цифрами периода дроби a. Умножим обе части равенства (*) на 10^k, получим:

$$10^k \cdot a = 10^k \cdot 0,\left(\overline{n_1 n_2 \ldots n_k}\right) = 10^k \cdot 0,\overline{n_1 n_2 \ldots n_k n_1 n_2 \ldots n_k n_1 n_2 \ldots n_k} =$$

$$= \overline{n_1 n_2 \ldots n_k, n_1 n_2 \ldots n_k n_1 n_2 \ldots n_k n_1 n_2 \ldots n_k} = \overline{n_1 n_2 \ldots n_k} + 0,\left(\overline{n_1 n_2 \ldots n_k}\right) = n + a;$$

$$10^k a = n + a;$$

$$10^k \cdot a - a = n;$$

$$a\left(10^k - 1\right) = n;$$

$$a = \frac{n}{10^k - 1}. \qquad (**)$$

Очевидно, что $10^k - 1$ – натуральное число, записанное k девятками.

Например, $10^2 - 1 = 99$, $10^3 - 1 = 999$.

Равенство (**), с учетом введенных ранее обозначений, можно записать следующим образом:

$$0,\left(\overline{n_1n_2...n_k}\right)=\frac{n}{10^k-1}=\frac{\overline{n_1n_2...n_k}}{\underbrace{999...9}_{k\_раз}}.$$

☺ **Задача 17.** Записать десятичную дробь 0,(34) в виде обыкновенной дроби.

Решение. Обозначим $a=0,(34)$. Умножим обе части равенства на 10^2:

$10^2\cdot a=10^2\cdot 0,34343434...=34+0,343434...=34+0,(34)=34+a$;

$10^2\cdot a=34+a$;

$(10^2-1)a=34$;

$a=\frac{34}{10^2-1}=\frac{34}{99}$.

✓ **Пример 19.** а) $0,(7)=\frac{7}{9}$; б) $0,(743)=\frac{743}{999}$; в) $0,(3501)=\frac{3501}{9999}=\frac{389}{1111}$.

2. Правило перехода от смешанно периодической дроби к записи ее в виде обыкновенной дроби.

Теорема 11. Смешанная периодическая десятичная дробь (целая часть которой равна нулю) равна такой обыкновенной дроби, числитель которой равен разности между числом, стоящим между запятой и началом второго периода, и числом, стоящим после запятой до первого периода, а в знаменателе записывается столько девяток, сколько цифр находится в периоде дроби, и еще добавляется столько нулей, сколько цифр стоит до начала первого периода.

Доказательство. Рассмотрим смешанно периодическую дробь

$a=0,\overline{n_1n_2n_3...n_k\left(n_{k+1}n_{k+2}n_{k+3}...n_{k+n}\right)}$,

в которой n цифр в периоде и k цифр до периода.

Обозначим через m натуральное число, записанное цифрами, которые стоят до периода: $m=\overline{n_1n_2n_3...n_k}$, а через l – натуральное число, составленное из цифр периода: $l=\overline{n_{k+1}n_{k+2}n_{k+3}...n_{k+n}}$.

Умножим число a на 10^k, получим:

$$10^k \cdot a = 10^k \cdot 0,\overline{n_1n_2n_3...n_k\left(n_{k+1}n_{k+2}n_{k+3}...n_{k+n}\right)} = \overline{n_1n_2n_3...n_k,\left(n_{k+1}n_{k+2}n_{k+3}...n_{k+n}\right)} =$$

$$= \overline{n_1n_2n_3...n_k} + 0,\left(\overline{n_{k+1}n_{k+2}n_{k+3}...n_{k+n}}\right) = m + 0,\left(\overline{n_{k+1}n_{k+2}n_{k+3}...n_{k+n}}\right).$$

Число $0,\left(\overline{n_{k+1}n_{k+2}n_{k+3}...n_{k+n}}\right)$ – чисто периодическая дробь. По правилу перехода от чисто периодической дроби к записи в виде обыкновенной дроби получим

$$0,\left(\overline{n_{k+1}n_{k+2}n_{k+3}...n_{k+n}}\right) = \frac{l}{10^n - 1}.$$

Таким образом, получаем равенство $10^k \cdot a = m + \dfrac{l}{10^n - 1}$, откуда

$$a = \frac{m}{10^k} + \frac{l}{10^k\left(10^n - 1\right)} = \frac{m \cdot 10^k - m + l}{10^k\left(10^n - 1\right)},$$

т. е.

$$a = \frac{(10^k m + l) - m}{10^k(10^n - 1)}, \qquad (***)$$

где $\left(10^k m + l\right)$ – число, которое стоит между запятой и началом второго периода.

Окончательно, равенство (***), с учетом ранее введенного обозначения, можно записать следующим образом:

$$0,\overline{n_1n_2n_3...n_k\left(n_{k+1}n_{k+2}n_{k+3}...n_{k+n}\right)} = \frac{\overline{n_1n_2...n_kn_{k+1}n_{k+2}...n_{k+n}} - \overline{n_1n_2...n_k}}{\underbrace{99...9}_{n\_раз}\underbrace{00...0}_{k\_раз}}.$$

✓ **Пример 20.** а) $0,5(47) = \dfrac{547-5}{990} = \dfrac{542}{990}$; б) $0,03(528) = \dfrac{3528-3}{99900} = \dfrac{3525}{99900} = \dfrac{47}{1332}$.

✓ **Пример 21.** а) $3,(17) = 3\dfrac{17}{99}$; б) $8,24(5) = 8\dfrac{245-24}{900} = 8\dfrac{221}{900}$.

☺ **Задача 18.** Найти значение выражения $\dfrac{0,7(3)+0,2(6)}{0,7(3)-0,2(6)} + \dfrac{0,8(5)+0,17(1)}{0,8(5)-0,17(1)}$.

Решение. Запишем периодические дроби, которые входят в данное выражение, в виде обыкновенных дробей и выполним указанные действия:

$$\frac{0,7(3)+0,2(6)}{0,7(3)-0,2(6)} + \frac{0,8(5)+0,17(1)}{0,8(5)-0,17(1)} = \frac{\dfrac{73-7}{90} + \dfrac{26-6}{90}}{\dfrac{73-7}{90} - \dfrac{26-6}{90}} + \frac{\dfrac{85-8}{90} + \dfrac{171-17}{900}}{\dfrac{85-8}{90} - \dfrac{171-17}{900}} =$$

$$=\frac{\frac{66+24}{90}}{\frac{66-24}{90}}+\frac{\frac{77}{90}+\frac{154}{900}}{\frac{77}{90}-\frac{154}{900}}=\frac{1}{\frac{42}{90}}+\frac{\frac{770+154}{900}}{\frac{770-154}{900}}=\frac{15}{7}+\frac{924}{616}=\frac{15}{7}+\frac{3}{2}=\frac{30+21}{14}=\frac{51}{14}=$$

$$=3\frac{9}{14}=3{,}6(428571).$$

Ответ: $3{,}6(428571)$.

§ 4. Иррациональные числа

4.1. Измерение длины отрезка, несоизмеримого с единичным отрезком

Измерение длин отрезков, соизмеримых с единицей измерения, приводит к необходимости расширения множества натуральных чисел N до множества положительных рациональных чисел Q_+. Рассматривая случай, когда $\frac{1}{10^k}$ часть единичного отрезка e укладывается целое число раз в измеряемом отрезке a, показал, что длина отрезка a выражается положительным рациональным числом Q_+. Но не всегда длину отрезка можно выразить рациональным числом при заданной единице измерения.

Пусть дан отрезок a и единичный отрезок e и пусть отрезок e укладывается на отрезке a ровно n раз и еще остается отрезок a_1, который короче отрезка e. Тогда получим: $ne<a<(n+1)e$. Числа n и $n+1$ выражают приближенное значение длины отрезка a **с недостатком** и **с избытком** с точностью до единицы измерения e.

Для измерения длины отрезка a с большей точностью рассмотрим отрезок e, длина которого $e_1=\frac{1}{10}e$ – десятая часть отрезка e. Будем откладывать его на отрезке a_1. Пусть отрезок e_1 откладывается на отрезке a_1 n_1 раз и еще останется отрезок a_2, который короче отрезка e_1. Тогда получим:

$$\left(n+\frac{n_1}{10}\right)e<a<\left(n+\frac{n_1+1}{10}\right)e.$$

Числа $n+\frac{n_1}{10}=\overline{n,n_1}$ и $n+\frac{n_1+1}{10}=\overline{n,(n+1)}$ представляют собой приближенные значения длины отрезка a **с недостатком** и **с избытком** с точностью до одной десятой (до 0,1) при той же единице измерения e.

Для более точного измерения длины отрезка а можно ввести новую единицу измерения $e_2 = \frac{1}{10}e_1 = \frac{1}{100}e$ и откладывать ее на отрезке a_2.

Продолжая процесс измерения длины отрезка a при увеличении каждый раз точности измерения, на некотором шаге (например, на $k+1$ шаге) мы будем вынуждены остановиться (процесс измерения не может быть бесконечным). При этом процесс измерения длины отрезка a приведет к одному из двух возможных случаев:

1) длину отрезка a можно записать конечной десятичной дробью: $a = \overline{n,n_1n_2...n_k}\ e$ – рациональным числом;

2) длину отрезка a можно записать бесконечной десятичной дробью: $a = \overline{n,n_1n_2...n_k...}\ e$ (периодической или непериодической)

Если полученная десятичная дробь непериодическая, то говорят, что отрезок a несоизмерим с единичным отрезком e, а это значит, длину отрезка a нельзя выразить положительным рациональным числом (бесконечной периодической десятичной дробью) при выбранной единице измерения.

Действительно, если бы длину отрезка a можно было бы записать в виде бесконечной периодической десятичной дроби, то, записав эту дробь в виде обыкновенной дроби $\frac{k}{n}$, можно было бы утверждать, что отрезок $\frac{1}{n}e$ откладывается на отрезке a целое число раз (точнее: k раз). Получили противоречие.

Существование несоизмеримых (с единичным отрезком) отрезков было известно еще в V в. до н. э. в школе Пифагора.

Теорема 12. Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной.

Доказательство проведем методом от противного. Рассмотрим квадрат, сторону которого примем за единицу измерения длины, и докажем, что при данной единице измерения длина диагонали квадрата не может быть выражена рациональным числом.

Допустим, что диагональ d квадрата со стороной 1 выражается рациональным числом $d = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь. По теореме Пифагора получим:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 1^2 + 1^2\text{, откуда } \frac{m^2}{n^2} = 2,$$

или

$$m^2 = 2n^2. \qquad (*)$$

Из (*) следует, что число m^2 – четное, а значит, и само число m тоже четное.

Пусть $m = 2k$. Подставим в равенство (*), получим:

$$4k^2 = 2n^2, \quad \text{или} \quad n^2 = 2k^2.$$

Легко видеть, что число n^2 (а значит, и число n) – четное.

Пусть $n = 2l$, $l \in N$. Подставим в равенство (*): $m^2 = 2(2l)^2 = 8l^2$.

Получили, что числа m и m^2 – четные числа.

Значит, числа m и n – четные и дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить на 2, что противоречит нашему допущению о несократимости дроби.

Полученное противоречие и доказывает, что длину диагонали квадрата нельзя выразить рациональным числом, когда за единицу измерения взять сторону этого квадрата.

А это значит, что диагональ квадрата несоразмерна с его стороной.

Из этой теоремы следует, что существуют отрезки, длины которых нельзя выразить рациональными числами при данной единице измерения. А так как каждому отрезку ставится в соответствие единственное число, выражающее его длину, то возникает необходимость расширения множества положительных рациональных чисел Q_+ путем пополнения его новыми числами. Такими числами, которые позволяют записать длину отрезка, несоразмерного с единицей измерения (в том числе и диагональ квадрата), являются иррациональные числа.

4.2. Иррациональные числа

Определение. Числа, которые выражаются бесконечными непериодическими десятичными дробями, называются иррациональными числами.

Иррациональные числа необходимы не только для записи длины некоторых отрезков, но и для вычисления:

- корней из некоторых чисел: $\sqrt{2} = 1{,}4142...$; $\sqrt[4]{5} = 1{,}4953...$;
- значений логарифмов: $\lg 2 = 0{,}301...$; $\ln 5 = 1{,}60...$; $\log_2 3 = 0{,}176...$;
- значений тригонометрических функций: $\sin 10° = 0{,}174...$; $\operatorname{tg} 61° = 1{,}422...$.

Число $\pi = 3{,}1415...$ (число, равное отношению длины окружности к ее диаметру) и число $e = 2{,}72...$ (основание натурального логарифма) также являются иррациональными числами.

Число 0,101001000100001... – иррациональное.

Множество положительных иррациональных чисел обозначается I_+.

Определение. Объединение множества положительных рациональных чисел и множества положительных иррациональных чисел является множеством положительных действительных чисел и обозначается R_+.

Таким образом: $Q_+ \cup I_+ = R_+$.

Очевидно, что: $Q_+ \subset R_+$; $I_+ \subset R_+$; $Q_+ \cap I_+ = \varnothing$.

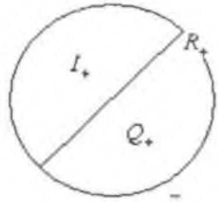


Рис. 15

Множество положительных действительных чисел R_+ можно разбить на два класса:

1) класс бесконечных периодических десятичных дробей Q_+;

2) класс бесконечных непериодических десятичных дробей I_+.

Поскольку понятие действительного числа было дано на интуитивном уровне – на основе измерения длины отрезка, то такой подход к определению понятия нельзя считать строго математическим. Существуют другие, не связанные с измерением отрезков, способы определения действительных чисел.

Впервые теория действительных чисел была строго обобщена немецким математиком Р. Дедэкиндом (1831–1916). Эта теория получила наибольшее распространение в математике.

☺ **Задача 19**. Доказать, что $\sqrt{17}$ – число иррациональное.

Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что $\sqrt{17}$ – рациональное число.

Тогда его можно записать в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{17}, \text{ где } m \in N_0,\ n \in N,$$

$$\frac{m^2}{n^2} = 17,$$

$$m^2 = 17n^2. \qquad (*)$$

Из равенства (*) следует, что m^2 кратно 17, а это значит, что m кратно 17. Запишем m в виде $m = 17k$, где $k \in N_0$.

Подставим это равенство в равенство (*):

$$289k^2 = 17n^2, \text{ откуда } n^2 = 17k^2,$$

а это значит, что n^2 (а значит, и n) кратно 17. Запишем n так:

$$n = 17t,\ t \in N_0.$$

Таким образом, дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить на 17 (поскольку $m = 17k$, $n = 17t$), что противоречит нашему допущению о несократимости исходной дроби. А это значит, что $\sqrt{17}$ – иррациональное число.

4.3. Запись положительного действительного числа

Приближенным значением положительного действительного числа по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^k}$ называется число, которое получается из данного числа, если отбросить все его цифры, которые стоят после k-го десятичного знака.

Приближенным значением положительного действительного числа по избытку с точностью до $\frac{1}{10^k}$ называется число, которое получается из данного числа, если отбросить все его цифры, которые стоят после k-го десятичного знака, и полученную последнюю цифру увеличить на 1.

Например, для числа 3,1212212221… приближенным значением по недостатку с точностью до 0,0001 будет число 3,1212, а по избытку (с той же точностью) – 3,1213:

$$3{,}1212 < 3{,}1212212221... < 3{,}1213.$$

Пусть $a = \overline{n,n_1n_2...n_kn_{k+1}...}$ – положительное действительное число, тогда его значение по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^k}$ будет число $a_k^- = \overline{n,n_1n_2...n_k}$,

а по избытку – $a_k^+ = \overline{n,n_1n_2...n_k} + \frac{1}{10^k}$,

и для произвольного действительного числа a имеет место неравенство

$$a_k^- < a < a_k^+,$$

где a_k^-, a_k^+ – значения числа a соответственно по недостатку и по избытку.

4.4. Сравнение действительных чисел

Действительные числа, записанные в виде бесконечных десятичных дробей, сравнивают по тем же правилам, что и конечные десятичные дроби.

☺ **Задача 20.** Сравнить числа:

а) $a = -13{,}27314995\ldots$ и $b = -13{,}27315321\ldots$;

б) $n = -13{,}273$ и $t = -13{,}2(73)$.

Решение. а) Поскольку $|a| = |-13{,}27314995\ldots| = 13{,}27314995\ldots$,

$|b| = |-13{,}27315321\ldots| = 13{,}27315321\ldots$,

то $13{,}27314995\ldots < 13{,}27315321\ldots$, т. е. $|a| < |b|$, значит, $a > b$.

Итак: $-13{,}27314995\ldots > -13{,}27315321\ldots$.

Ответ: $a > b$.

б) Поскольку $|n| = |-13{,}273| = 13{,}273 = 13{,}2730000\ldots$,

$|t| = |-13{,}2(73)| = 13{,}2(73) = 13{,}2737373\ldots$,

то $13{,}273 < 13{,}2(73)$, т.е. $|n| < |t|$, значит, $n > t$.

Итак: $-13{,}273 > -13{,}2(73)$.

Ответ: $n > t$.

☺ **Задача 21.** Сравнить числа $p = 317{,}18(5)$ и $m = 317{,}1(8)$.

Решение. Поскольку $p = 317{,}18555\ldots$, $m = 317{,}18888\ldots$, то

$p_0 = 317 = m_0$; $p_1 = 1 = m_1$; $p_2 = 8 = m_2$; $p_3 = 5 < 8 = m_3$, значит, $p < m$.

4.5. Сложение и умножение положительных действительных чисел. Законы сложения и умножения

Пусть даны два положительных действительных числа a и b таких, что

$$a_k^- < a < a_k^+, \qquad (*)$$

$$b_k^- < b < b_k^+. \qquad (**)$$

Известно, что сумма $a + b$ должна быть больше суммы $a_k^- + b_k^-$, но меньше суммы $a_k^+ + b_k^+$. А это можно получить, если сложить неравенства (*) и (**):

$$a_k^- + b_k^- < a + b < a_k^+ + b_k^+. \qquad (***)$$

Неравенство (***) и принимают за определение суммы двух положительных действительных чисел.

Определение. Суммой двух положительных действительных чисел a и b называется такое число $c = a + b$, которое удовлетворяет неравенству

$$a_k^- + b_k^- < c < a_k^+ + b_k^+, \qquad (1)$$

где a_k^-, b_k^- – приближенные значения чисел a и b по недостатку,

a_k^+, b_k^+ – приближенные значения чисел a и b по избытку.

Задача 22. Найти сумму $\sqrt{3} + \pi$ с точностью до 0,001.

Решение. Запишем каждое число с точностью до 0,0001 по недостатку и по избытку (приближенные значения берутся с точностью на один десятичный знак больше, чем заданная точность):

$$1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321;$$

$$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416.$$

Отсюда: $1{,}7320 + 3{,}1415 < \sqrt{3} + \pi < 1{,}7321 + 3{,}1416$,

или $4{,}8735 < \sqrt{3} + \pi < 4{,}8737$.

Таким образом, сумма $\sqrt{3} + \pi$ с точностью до 0,001 будет равна 4,874.

Ответ: 4,874.

Теорема 13. Сумма положительных действительных чисел всегда существует и она единственна.
Докажите самостоятельно.

Для суммы положительных действительных чисел справедливы законы:

1) **коммутативный:** $a + b = b + a$.
Доказательство.
Пусть $a_k^- < a < a_k^+$,

$b_k^- < b < b_k^+$,

тогда $a_k^- + b_k^- < a + b < a_k^+ + b_k^+$,

$b_k^- + a_k^- < b + a < b_k^+ + a_k^+$,

где a_k^-, b_k^-, a_k^+, b_k^+ – рациональные числа.

Из коммутативного закона суммы рациональных чисел получаем, что:

$$a_k^- + b_k^- = b_k^- + a_k^-,$$

$$a_k^+ + b_k^+ = b_k^+ + a_k^+,$$

откуда и следует, что $a+b=b+a$.

2) **ассоциативный:** $a+(b+c)=(a+b)+c$.

Докажите самостоятельно.

Определение. Произведением двух положительных действительных чисел a и b называется такое число $c=ab$, которое удовлетворяет неравенству

$$a_k^- b_k^- < c < a_k^+ b_k^+ , \tag{2}$$

где a_k^-, b_k^- – приближенные значения чисел a и b по недостатку,

a_k^+, b_k^+ – приближенные значения чисел a и b по избытку.

Это определение не противоречит правилу умножения двух неравенств $a_k^- < a < a_k^+$, $b_k^- < b < b_k^+$ одинакового смысла с положительными числами.

Теорема 14. Произведение положительных действительных чисел всегда существует и оно единственно.

Докажите самостоятельно.

☺ **Задача 23.** Найти произведение $\sqrt{2}\cdot\pi$ с точностью до 0,01.

Решение. Запишем множители с точностью до 0,001 по недостатку и по избытку:

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415;$$
$$3{,}412 < \pi < 3{,}413.$$

Тогда: $$1{,}414\cdot 3{,}412 < \sqrt{2}\cdot\pi < 1{,}415\cdot 3{,}413;$$

$$4{,}443 < \sqrt{2}\cdot\pi < 4{,}447.$$

С точностью до 0,01 произведение $\sqrt{2}\cdot\pi$ =4,44

Ответ: 4,44

Умножение положительных действительных чисел подчиняется коммутативному, ассоциативному и дистрибутивному относительно операции сложения законам:

1) $ab=ba$,

2) $a(bc)=(ab)c$,

3) $(a+b)c=ac+bc$.

Докажите эти свойства самостоятельно.

4.6. Вычитание и деление на множестве положительных действительных чисел

Заметим, что операции вычитания и деления являются обратными операциями соответственно сложению и умножению действительных чисел.

Определение. Разностью двух положительных чисел a и b $(a \geq b)$ называется такое действительное число $c = a - b$, что $a = b + c$.

Пусть $$a_k^- < a < a_k^+, \qquad (*)$$

$$b_k^- < b < b_k^+. \qquad (**)$$

Умножим неравенство (**) на (-1):

$$-b_k^+ < -b < -b_k^-. \qquad (**')$$

Сложим два неравенства одинакового смысла (*) и (**'), получим:

$$a_k^- - b_k^+ < a - b < a_k^+ - b_k^-. \qquad (3)$$

☺ **Задача 24.** Найти разность $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ с точностью до 0,01.

Решение. Запишем уменьшаемое и вычитаемое с точностью до 0,001 по недостатку и по избытку: $$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237;$$

$$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733.$$

Тогда: $$2{,}236 - 1{,}733 < \sqrt{5} - \sqrt{3} < 2{,}237 - 1{,}732;$$

$$0{,}503 < \sqrt{5} - \sqrt{3} < 0{,}505,$$

откуда $$\sqrt{5} - \sqrt{3} = 0{,}504.$$

Ответ: $\sqrt{5} - \sqrt{3} = 0{,}50$ с точностью до 0,01.

Определение. Частным от деления двух положительных чисел a и b называется такое действительное число $c = a : b$, что $a = bc$.

Операция деления противоположна операции умножения, значит:

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Пусть $$a_k^- < a < a_k^+, \qquad (*)$$

$$b_k^- < b < b_k^+. \qquad (**)$$

Из неравенства (**) можно получить неравенство

$$\frac{1}{b_k^+} < \frac{1}{b} < \frac{1}{b_k^-}. \qquad (**'')$$

(Например, если $2 < 5 < 7$, то $\frac{1}{7} < \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$.)

Перемножив два неравенства (*) и (**") одинакового смысла с положительными членами, получим:

$$\frac{a_k^-}{b_k^+} < \frac{a}{b} < \frac{a_k^+}{b_k^-}. \qquad (4)$$

☺ **Задача 25.** Найти частное от деления числа π на $\sqrt{3}$ с точностью до 0,001.

Решение. Запишем π и $\sqrt{3}$ с точностью до 0,0001 по недостатку и по избытку:

$$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416;$$

$$1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321.$$

Отсюда:

$$\frac{3{,}1415}{1{,}7321} < \frac{\pi}{\sqrt{3}} < \frac{3{,}1416}{1{,}7320};$$

$$1{,}8136 < \frac{\pi}{\sqrt{3}} < 1{,}8138.$$

С точностью до 0,001 частное $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ =1,814.

Ответ: 1,814.

Заметим, что обычные компоненты действий берутся с точностью на один разряд больше, чем требуется по условию задачи или примера. Это делается для того, чтобы получить более точный результат.

§ 5. Множество действительных чисел

5.1. Отрицательные действительные числа. Нуль. Противоположные числа

При помощи положительных действительных чисел можно записать результат измерения длины отрезка, можно записать величину площади фигуры и т. д. Однако на практике часто приходится выражать числом не только результат измерения величины, но и результат ее изменения, т. е. показать, на сколько она изменилась. А изменение величины может проходить по двум направлениям: значение величины может увеличиваться, а может и уменьшаться.

Когда значение величины увеличивается, то для ее характеристики употребляются положительные действительные числа, а когда значение величины уменьшается, то для ее характеристики необходимо новое число – т. е. возникает необходимость в расширении множества R_+ дополнением его отрицательными действительными числами.

Возьмем множества R_+ и каждому числу $x \in R_+$ поставим в соответствие новое число «$-x$» (например, числу 5 поставим в соответствие -5).

Числа вида $-x$ (где $x \in R_+$) назовем **отрицательными действительными числами**, а их множество – **множеством отрицательных действительных чисел** и обозначим его R_-: если $x \in R_+$, то $-x \in R_-$.

Каждому положительному действительному числу соответствует единственное отрицательное действительное число. Поэтому множество R_-, как и множество R_+, бесконечно.

Определение. Объединение множества действительных положительных чисел и множества отрицательных действительных чисел, а также множества, которое состоит из нуля, называется множеством действительных чисел и обозначается R: $R = R_+ \cup R_- \cup \{0\}$.

Естественно, что $R_+ \cap R_- = \varnothing$, $R_+ \cap \{0\} = \varnothing$, $R_- \cap \{0\} = \varnothing$.

Таким образом, множество R состоит их трех попарно непересекающихся подмножеств. Число «нуль» не относится ни к отрицательным, ни к положительным числам. Действительные числа принято изображать точками на координатной прямой, причем справа от нуля изображаются положительные действительные числа, слева от нуля – отрицательные действительные числа. На координатной прямой должна быть определена единица измерения (масштаб) (рис. 16).

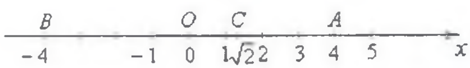


Рис. 16

Между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой существует взаимнооднозначное соответствие: каждому действительному числу соответствует одна и только одна точка координатной прямой, и наоборот, каждой точке координатной прямой соответствует одно и только одно действительное число.

Например, (рис. 16): числу 4 соответствует точка *A*, а противоположному ему числу число -4 – точка *B*; числу $\sqrt{2}$ соответствует точка *C*. Наоборот; точкам *A*, *B*, *C* соответствуют числа 4, -4, $\sqrt{2}$.

Определение. Числа вида x и $-x$, размещенные на координатной прямой симметрично относительно точки О, называются противоположными числами.

Например, числа 9 и − 9; $-2{,}7$ и 2,7 – противоположные.

Множество действительных чисел часто называют числовой прямой и обозначают $R=(-\infty;+\infty)$.

5.2. Модуль действительного числа

Определение. Модулем (абсолютным значением или абсолютной величиной) действительного числа *a* называется само это число, когда оно неотрицательное, и противоположное ему число, когда *a* – отрицательное. Модуль числа *a* обозначается $|a|$. Таким образом, $|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a\ge 0, \\ a, \text{ если } a<0. \end{cases}$

✓ **Пример 22.** 1) $|3|=3$; 2) $|-5|=5$, поскольку $|-5|=-(-5)=5$.

Геометрический смысл модуля: на координатной прямой модуль действительного числа показывает расстояние от точки, которая соответствует данному числу, до начала отсчета (до точки О).

☺ **Задача 26.** Упростить выражение:

а) $\sqrt{\left(\sqrt{19}-4\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(\sqrt{19}-5\right)^2}$; в) $\sqrt{(16-x)^2}$.

Решение. Применим известную из курса математики средней школы формулу $(\forall m\in R)\left(\sqrt{m^2}=|m|\right)$:

а) $\sqrt{\left(\sqrt{19}-4\right)^2}=\left|\sqrt{19}-4\right|=\sqrt{19}-4$, так как $\sqrt{19}-4>0$;

б) $\sqrt{\left(\sqrt{19}-5\right)^2}=\left|\sqrt{19}-5\right|=-(\sqrt{19}-5)=5-\sqrt{19}$, так как $\sqrt{19}-5<0$;

в) $\sqrt{(16-x)^2}=|16-x|=\begin{cases}(16-x), \text{ если } 16-x\ge 0; \\ -(16-x), \text{ если } 16-x<0;\end{cases}=\begin{cases}16-x, \text{ если } x\le 16; \\ x-16, \text{ если } x>16.\end{cases}$

Ответ: а) $\sqrt{\left(\sqrt{19}-4\right)^2}=\sqrt{19}-4$; б) $\sqrt{\left(\sqrt{19}-5\right)^2}=5-\sqrt{19}$;

в) $\sqrt{(16-x)^2}=\begin{cases}16-x, \text{ если } x\le 16; \\ x-16, \text{ если } x>16.\end{cases}$

☺ **Задача 27**. Решить уравнение $|x+2|+|2x-5|=11-x$.

Решение (методом интервалов). Отметим на координатной прямой точки (рис. 17), при которых значения выражений, стоящих под знаком модуля, равны нулю ($x=-2$, $x=2{,}5$).

Рис. 17

Решаем данное уравнение на каждом из трех интервалов:

$$|x+2|+|2x+5|=11-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2; \\ -(x+2)-(2x-5)=11-x; \end{cases} \\ \begin{cases} -2\le x\le 2{,}5; \\ (x+2)-(2x-5)=11-x; \end{cases} \\ \begin{cases} x>2{,}5; \\ (x+2)+(2x-5)=11-x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2; \\ -2x=8; \end{cases} \\ \begin{cases} -2\le x\le 2{,}5; \\ 7+0x=11; \end{cases} \\ \begin{cases} x>2{,}5; \\ 4x=14; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2; \\ x=-4; \end{cases} \\ \begin{cases} -2\le x\le 2{,}5; \\ 0x=4; \end{cases} \\ \begin{cases} x>2{,}5; \\ x=3{,}5; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4; \\ x\in\varnothing; \\ x=3{,}5, \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-4;3{,}5\}$.

☺ **Задача 28**. Решить неравенства: а) $|8+x|\le 3x-1$;   б) $|2x+3|>x+9$.

Решение проведем методом интервалов. При этом необходимо помнить, что в примере а) правая часть должна быть неотрицательной.

$$а)\ |8+x|\le 3x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-1\ge 0; \\ x<-8; \\ -(x+8)\le 3x-1; \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-1\ge 0; \\ x\ge -8; \\ (x+8)\le 3x-1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3}; \\ x < -8; \\ x \ge -1\dfrac{3}{4}; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3}; \\ x \ge -8; \\ x \ge 4\dfrac{1}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing; \\ x \in \left[4\dfrac{1}{2};+\infty\right); \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left[4{,}5;+\infty\right).$$

б) Заметим, что те значения переменной *x*, при которых $x+9<0$, являются решениями исходного неравенства, это $x \in (-\infty;-9)$. Для случая, когда $x+9 \ge 0$, получим следующую совокупность:

$$|2x+3| > x+9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+9 \ge 0; \\ 2x-3 < 0; \\ -(2x-3) > x+9; \end{cases} \\ \begin{cases} x+9 \ge 0; \\ 2x-3 \ge 0; \\ (2x-3) > x+9; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -9; \\ x < 1{,}5; \\ x < -2; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge -9; \\ x \ge 1{,}5; \\ x > 12; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-9;-2); \\ x \in (12;+\infty); \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-9;-2) \cup (12;+\infty).$$

Ответ: а) $x \in \left[4{,}5;+\infty\right)$; б) $x \in [-9;-2) \cup (12;+\infty)$.

5.3. Действия над действительными числами

5.3.1. Сложение и умножение действительных чисел

Определение. Суммой двух действительных чисел называется число, которое удовлетворяет следующим условиям:

а) сумма двух положительных (отрицательных) чисел есть положительное (отрицательное) число, модуль которого равен сумме модулей слагаемых, а знак совпадает со знаком слагаемых;

б) суммой двух чисел с разными знаками есть число, которое имеет такой же знак, что и слагаемое с большим модулем, а модуль суммы равен разности между большим и меньшим модулями.

✓ **Пример 23.** а) $(-3\sqrt{7})+(-5\sqrt{7})=-(3+5)\sqrt{7}=-8\sqrt{7}$;

б) $7\sqrt{10}+(-9\sqrt{10})=-(7-9)\sqrt{10}=-2\sqrt{10}$.

Теорема 15. Сумма действительных чисел всегда существует и она единственная.

Докажите самостоятельно.

> **Определение.** Произведением двух действительных чисел называется число, модуль которого равен произведению модулей множителей, а знак произведения положительный, когда знаки множителей одинаковые, и отрицательный, когда знаки множителей разные.

✓ **Пример 24.** а) $4{,}2\sqrt{2}\cdot(-3)=-12{,}6\sqrt{2}$; б) $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{13}\right)\cdot\left(-\frac{6}{7}\right)=\frac{4\sqrt{13}}{7}$.

Теорема 16. Произведение действительных чисел всегда существует и оно единственное.

Докажите самостоятельно.

Сложение и умножение на множестве R подчиняются коммутативному и ассоциативному законам. Для умножения справедлив и дистрибутивный закон относительно операции сложения.

	Сложение	Умножение
Коммутативность	$a+b=b+a$	$ab=ba$
Ассоциативность	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a(bc)=(ab)c$
Дистрибутивность	$(a+b)c=ac+bc$	

Эти законы докажите самостоятельно.

5.3.2. Вычитание и деление на множестве действительных чисел

Вычитание действительных чисел определяется как операция, обратная сложению. Для того чтобы от числа a отнять число b, достаточно к числу a прибавить число, противоположное числу b: $a-b=a+(-b)$.

Теорема 17. Разность двух действительных чисел всегда существует и она единственная.

Докажите самостоятельно.

✓ **Пример 25.** а) $4\sqrt{15}-7\sqrt{15}=4\sqrt{15}+(-7\sqrt{15})=-3\sqrt{15}$;

б) $(-2\sqrt{3})-(-5\sqrt{3})=(-2\sqrt{3})+5\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

Деление действительных чисел определяется как операция, обратная умножению. Для того чтобы число a разделить на число b, достаточно число a умножить на число, обратное числу b: $a:b=a\cdot\frac{1}{b}$, $b\neq 0$.

При делении всякого числа $a\in R$ на число $b\in R$ ($b\neq 0$) всегда найдется такое число c, что $a=bc$. Таким образом, деление на множестве R выполняется всегда, кроме деления на ноль.

✓ **Пример 26**: **а)** $(-3):5=(-3)\cdot\frac{1}{5}=-\frac{3}{5}$; б) $(-6):\left(-\frac{3}{4\sqrt{5}}\right)=6\cdot\frac{4\sqrt{5}}{3}=8\sqrt{5}$.

☺ **Задача 29**. Определить, каким числом (рациональным или иррациональным) является значение выражения:

а) $5\sqrt{27}-4\sqrt{12}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{16}{9}}+2$; б) $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$;

в) $\left(\sqrt{20}+\sqrt{12}\right):\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$.

Решение. а) $5\sqrt{27}-4\sqrt{12}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{16}{9}}+2=5\sqrt{9\cdot 3}-4\sqrt{4\cdot 3}-\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}+2=$

$=15\sqrt{3}-8\sqrt{3}-2+2=7\sqrt{3}$; $7\sqrt{3}$ – иррациональное число;

б) $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)=\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=20-7=13$; $13\in Q$;

в) $(\sqrt{20}+\sqrt{12}):(\sqrt{5}+\sqrt{3})=(2\sqrt{5}+2\sqrt{3}):(\sqrt{5}+\sqrt{3})=\left(2(\sqrt{5}+\sqrt{3})\right):(\sqrt{5}+\sqrt{3})=2$; $2\in Q$.

Ответ: а) иррациональное число; б) и в) рациональное число.

☺ **Задача 30**. Наиболее рациональным способом найти значение выражения:

а) $\sqrt{72}\cdot\sqrt{50}$; б) $\sqrt{1-\left(\frac{16}{65}\right)^2}$; в) $\sqrt{42^2+56^2}$; г) $\sqrt{\frac{2{,}5\cdot 0{,}09\cdot 2\frac{1}{4}}{0{,}4}}$.

Решение.

а) $\sqrt{72}\cdot\sqrt{50}=\sqrt{36\cdot 2}\cdot\sqrt{25\cdot 2}=6\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}=30\left(\sqrt{2}\right)^2=30\cdot 2=60$;

б) $\sqrt{1-\left(\frac{16}{65}\right)^2}=\sqrt{\frac{65^2-16^2}{65^2}}=\frac{\sqrt{(65-16)(65+16)}}{65}=\frac{\sqrt{49\cdot 81}}{65}=\frac{7\cdot 9}{65}=\frac{63}{65}$;

в) $\sqrt{42^2+56^2}=\sqrt{6^2\cdot 7^2+7^2\cdot 8^2}=\sqrt{7^2\left(6^2+8^2\right)}=7\sqrt{36+64}=7\cdot 10=70$;

г) $\sqrt{\frac{2{,}5\cdot 0{,}09\cdot 2\frac{1}{4}}{0{,}4}}=\sqrt{\frac{25\cdot 0{,}3^2\cdot\frac{9}{4}}{4}}=\frac{5\cdot 0{,}3\cdot\frac{3}{2}}{2}=\frac{5\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 10\cdot 2}=\frac{45}{40}=\frac{9}{8}=1{,}125$.

Ответ: а) 60; б) $\frac{63}{65}$; в) 70; г) 1,125.

5.4. Свойства множества действительных чисел

Теорема 18. Пусть α – произвольное иррациональное число, r – произвольное рациональное число (причем $r\neq 0$). Тогда сумма $\alpha+r$, произведение αr, разность $\alpha-r$ и $r-\alpha$, частное $\alpha:r$ и $r:\alpha$ (если $\alpha\neq 0$) – числа иррациональные.

Доказательство (методом от противного). Если бы одно или более выражений из условия теоремы были рациональными, то выполнялось бы одно из следующих равенств:

$$\alpha+r=r_1;\ \alpha-r=r_2;\ r-\alpha=r_3;\ \alpha r=r_4;\ \alpha:r=r_5;\ r:\alpha=r_6, \qquad (*)$$

где $r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6\in Q$.

Решая эти равенства относительно «неизвестного» α, получим:

$$\alpha=r_1-r;\ \alpha=r_2+r;\ \alpha=r-r_3;\ \alpha=\frac{r_4}{r};\ \alpha=r_5\cdot r;\ \alpha=\frac{r}{r_6}. \qquad (**)$$

Правые части полученных равенств – рациональные числа, а поскольку $\alpha\in I$, то ни одно из равенств (**) не может иметь место.

Поэтому ни одно из значений выражений $\alpha+r$; $\alpha-r$; $r-\alpha$, αr; $\alpha:r$; $r:\alpha$ не может быть рациональным.

Ответ на вопрос, будет ли иррациональным сумма (разность, произведение, частное) двух одинаковых иррациональных чисел, дать невозможно.

На самом деле:

- если $\alpha=2+\sqrt{5}$, $\beta=\sqrt{5}-2$, то $\alpha+\beta=2\sqrt{5}$ – иррациональное число;
- если $\alpha=\sqrt{3}+3$, $\beta=2-\sqrt{3}$, $\alpha+\beta=5$ – рациональное число;

- если $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = 2\sqrt{3}$, то $\alpha\beta = 6$ – рациональное число;
- если $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{5}$, то $\alpha\beta = \sqrt{15}$ – иррациональное число.

Аналогичные примеры можно провести для разности и частного двух иррациональных чисел.

Рассмотрим основные свойства множества действительных чисел.

Свойство 1. Множество действительных чисел замкнуто относительно четырех арифметических операций: какие бы ни были два действительных числа *a* и *b*, всегда существуют и однозначно определены действительные числа $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, $a:b$ (деление на ноль исключается).

Свойство 2. Будем считать, что $a > b$ тогда и только тогда, когда разность $a-b$ является положительным числом: $(a > b) \Leftrightarrow (a-b > 0)$.

Можно показать, что отношение «больше» на множестве R антирефлексивно, антисимметрично, транзитивно и является отношением строгого линейного порядка (т. е. при $a \neq b$ или $a > b$, или $a < b$), а множество R является линейно упорядоченным. На координатной прямой такое упорядочение означает, что действительное число *a* больше действительного числа *b* только тогда, когда число *a* находится справа от числа *b* на этой прямой.

Свойство 3. Множество действительных чисел не ограничено (ни снизу, ни сверху), т. е. у него нет ни наименьшего, ни наибольшего из элементов.

Свойство 4. Множество действительных чисел плотное. Между произвольными двумя действительными числами существует хотя бы одно промежуточное действительное число.

Важным свойством отношения порядка на множестве R является свойство непрерывности. Этого свойства не имеют множества N и Q.

Для того чтобы дать определение непрерывности множества R, введем несколько понятий.

Числовым называется всякое подмножество множества R (например, N, Q_+, всякий числовой отрезок $[a, b]$ – числовые множества).

Будем считать, что множество X размещено слева от множества Y, если для произвольных $x \in X$ и $y \in Y$ имеет место отношение $x \leq y$ (например, числовой отрезок [1, 3] размещен слева от числового отрезка [6, 9]; отрезок [1, 3] размещен слева от чисел 4, 5 и 5,8, а отрезок [6, 9] – справа от них).

В общем, число c разделяет числовые множества X и Y, если для произвольных $x \in X$ и $y \in Y$ имеет место неравенство $x \le c \le y$ (в этом случае X размещается слева от Y).

Свойство 5. Свойство непрерывности. Если числовое множество X размещено слева от множества Y, то найдется хотя бы одно число, которое разделяет это множество.

Смысл свойства непрерывности множества R заключается в том, что в этом множестве нет не только таких «скачков», как во множестве N, но и таких «отверстий», как во множестве Q_+. Другими словами, смысл прямой непрерывности множества R заключается в том, что на координатной прямой не существует ни одной точки, которой бы не соответствовало ни одно действительное число.

Как было показано выше, множество рациональных чисел Q счетное, т. е. оно эквивалентно множеству натуральных чисел N (это значит, что рациональных чисел ровно столько, сколько натуральных чисел). Оказывается, множество действительных чисел R этим свойством не обладает. Имеет место следующая теорема:

Теорема 19. Множество действительных чисел несчетное.

Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что множество R счетное и нам удалось занумеровать все действительные числа (табл.).

Таблица

N		R
1	$\leftrightarrow$	$a_1 = \overline{a_0{}', a_1{}' a_2{}' \ldots a_k{}' \ldots}$
2	$\leftrightarrow$	$a_2 = \overline{a_0{}'', a_1{}'' a_2{}'' \ldots a_k{}'' \ldots}$
3	$\leftrightarrow$	$a_3 = \overline{a_0{}''', a_1{}''' a_2{}''' \ldots a_k{}''' \ldots}$
...	$\leftrightarrow$	...
n	$\leftrightarrow$	$a_n = \overline{a_0^{(n)}, a_1^{(n)} a_2^{(n)} \ldots a_k^{(n)} \ldots}$
...	$\leftrightarrow$	...

Каждая из переменных $a_k^{(i)}$ означает одну из цифр 0, 1, 2, 3, ... , 9 (нижний индекс указывает на ее разряд, а верхний на номер того действительного числа, которому эта цифра принадлежит).

Тем не менее можно назвать действительное число, которое отличается от числа a_i ($i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$).

Возьмем, например, число $b = \overline{b_0, b_1 b_2 ... b_k ...}$. Весьма необычно, что в нем цифра $b_0 \neq a_0{}'$ (или какой-нибудь другой десятичный знак b_i не совпадает с соответствующим знаком $a_0{}'$), и поэтому число $b \neq a_0{}'$.

Аналогично рассуждая, можно получить, что $b_1 \neq a_1{}''$, или $b_2 \neq a_2{}'''$, ..., или $b_k \neq a_k^{(n)}$, т. е. число b будет отличаться от всех действительных чисел a_i $(i = 1, 2, ..., n, ...)$ хотя бы одной цифрой и поэтому оно не может быть равно ни одному из этих чисел.

Таким образом, среди всех чисел a_i нет числа b. Поэтому наше допущение, что множество действительных чисел R можно занумеровать (каждому действительному числу поставить в соответствие натуральное число, и насборот), неправильно. Отсюда следует, что множество R несчетно.

Вопросы для самоконтроля

1. Обращение рационального числа, записанного обыкновенной дробью, в виде периодической десятичной дроби.
2. Обращение рационального числа, записанного периодической десятичной дробью, в виде обыкновенной дроби.
3. Измерение длины отрезка, несоизмеримого с единичным отрезком.
4. Бесконечные непериодические десятичные дроби.
5. Запись положительного действительного числа.
6. Иррациональные числа.
7. Отношение порядка на множестве положительных действительных чисел.
8. Сложение и умножение положительных действительных чисел.
9. Законы сложения и умножения.
10. Вычитание и деление на множестве положительных действительных чисел.
11. Множество действительных чисел.
12. Отрицательные действительные числа. Нуль.
13. Противоположные числа.
14. Сложение действительных чисел. Законы сложения.
15. Вычитание на множестве действительных чисел.
16. Умножение действительных чисел. Законы умножения.
17. Деление на множестве действительных чисел.
18. Отношение порядка на множестве действительных чисел.

Задания для самостоятельной работы

Занятие 1

1. Переведите в обыкновенную дробь периодическую десятичную дробь:

1) 0,(354); 2) 0,5(36); 3) 0,06(1); 4) 5,1(08);
5) 2,72(8); 6) 3,0(152); 7) 12,16(182); 8) 24,3(7); 9) 52,2(35816).

2. Вычислите:

1) $\dfrac{17}{25}-\dfrac{0{,}01\cdot 13{,}6}{5{,}(6)\cdot 0{,}5-0{,}8(3)}$; 2) $\dfrac{\left(0{,}6+\frac{1}{4}+0{,}0(6)+0{,}125\right)}{(0{,}(3)+0{,}4+0{,}2(6))}\cdot 24$;

3) $\dfrac{\left(4{,}5\cdot 1{,}(6)-6{,}75\right)\cdot 0{,}(6)}{\left(3{,}(3)\cdot 0{,}3+0{,}(2)+0{,}(4)\right):2{,}(6)}$; 4) $\dfrac{\left(0{,}0(461538)-3{,}2(142857)\right)\cdot 5{,}8(3)}{(21-1{,}25):2{,}5}$.

3. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+2{,}(6)y=6{,}(3), \\ x-0{,}1(6)y=0{,}(6); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-0{,}58(3)y=7{,}(3), \\ x+1{,}(076923)y=0{,}(692307); \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2{,}(6)y=-2{,}(3), \\ x+0{,}8(3)y=-9{,}(6); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 0{,}(5)x-1{,}(6)y=0, \\ 0{,}8(18)x-0{,}2(72)y=1{,}6(36). \end{cases}$

4. Решите уравнение:

1) $x^2-0{,}(4)x-0{,}(2)=0$; 2) $x^2+0{,}(3)x-1{,}(6)=0$;

3) $x^2-2{,}(6)x+1{,}(6)=0$; 4) $x^2+1{,}(6)x-0{,}(6)=0$;

5) $x^2+2{,}(571428)x+0{,}(714285)=0$;

6) $x^2+2{,}(3)x-0{,}(6)=(-5{,}(3))^2+2{,}(3)\cdot(-5{,}(3))-0{,}(6)$.

5. При каких значениях x данное выражение принимает положительное значение:

1) $1{,}(7)x-2{,}(4)$; 2) $2{,}(12)x+0{,}(52)$;

3) $3{,}(2)-9{,}(21)x$; 4) $0{,}01(2)-1{,}02(6)x$.

6. При каких значениях x данное выражение принимает отрицательное значение:

1) $10{,}(17)x-20{,}(45)$; 2) $3{,}0(12)x+0{,}02(52)$;

3) $13{,}(025)-15{,}3(21)x$; 4) $0{,}61(2)-1{,}502(6)x$.

7. Решите неравенство: 1) $x^2-1{,}(6)x\ge 0$; 2) $x^2+2{,}(8)x\le 0$;

3) $0{,}(16)x^2-2{,}(4)x^3>0$; 4) $0{,}0(56)x^2-3{,}(014)x^3<0$.

8. Изобразить график уравнения с двумя переменными:

1) $0{,}(27)x+0{,}(18)y=0{,}(45)$; 2) $0{,}(230769)x-0{,}(153846)y=0{,}(307692)$.

Занятие 2

9. Упростите выражение:

1) $|2x-6|$; 2) $\frac{x-1}{|x-1|}$; 3) $\sqrt{\left(\sqrt{21}-4\right)^2}$;

4) $\sqrt{\left(4-\sqrt{21}\right)^2}$; 5) $\sqrt{(25-x)^2}$; 6) $\sqrt{(x-25)^2}$.

10. Решите уравнение:

1) $|x+3|=5$; 2) $|x-3|=2$; 3) $|x^2-5x+3|=3$;

4) $|2x-5|=|7-2x|$; 5) $|x-2|=3|3-x|$; 6) $|2x-3|=|3x+7|$;

7) $|0{,}5x-1{,}25|=x-1$; 8) $|2x+1|+|x-3|=6-x$; 9) $|x-2|-|x+3|=x$;

10) $2|x-4|+|3-x|=2$; 11) $x+|x+3|=|x+2|$;

12) $|x+1|-|x|+3|1-x|-2|x-2|=|x+2|$.

11. Решите неравенство:

1) $|2x-3|<9$; 2) $|5x+6|\geq 19$; 3) $|3x-2{,}5|\geq 2$;

4) $|5-2x|<1$; 5) $|x+8|>3x-1$; 6) $|2x-3|\geq 9+x$;

7) $|x|<x-2$; 8) $|x-5|<|x-1|$; 9) $|x|\geq|x-2|$;

10) $|x|+|2x-4|<3$; 11) $|x-2|+|x+3|<x$; 12) $|2-x|+|x+2|\leq 2x$;

13) $|2x-3|-|x|>2x$; 14) $\frac{|2-x|-|x+4|}{|x|-|x-2|}\leq 0$; 14) $\frac{|5+x|-|x+3|}{|x+4|-|x|}\leq 0$.

12. Постройте график функции:

1) $y=|x-2|$; 2) $y=|x+4|+x$; 3) $y=\frac{|2x+6|}{x+3}+x-1$;

4) $y=|2x+4|+1$; 5) $y=|x-3|+2x$; 6) $y=|2x|+3x-5$;

7) $y=x-5-|5-x|$; 8) $y=\frac{|1-x|}{x-1}-2x$; 9) $y=\frac{|2x+6|}{3+x}+x+2$;

10) $y=\frac{x^2-5x+6}{|2-x|}$; 11) $y=\frac{x-3}{|9-x^2|}$; 12) $y=\frac{2-x}{|2-x^2|}$.

13. Постройте отрезки, длины которых равны:

1) $\sqrt{2};\sqrt{5};\sqrt{10};\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{3};\sqrt{12};\sqrt{15}$.

Занятие 3

Выполните действия (**14 – 17**).

14. 1) $(5\sqrt{2}-4\sqrt{3})+(3\sqrt{2}+6\sqrt{3})$; 2) $(7\sqrt{5}-2\sqrt{6})-(5\sqrt{5}-4\sqrt{6})$;

3) $(10\sqrt{7}+\sqrt{3})-(5\sqrt{3}+2\sqrt{7})$; 4) $(2\sqrt{11}-8\sqrt{7})+(7\sqrt{7}-\sqrt{11})$;

5) $\sqrt{89+\sqrt{45}+\sqrt{245}+\sqrt{980}}$.

15. 1) $\sqrt{2}+4\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{128}-3\sqrt{18}$; 2) $\sqrt{75}-\sqrt{147}+\sqrt{48}-\frac{1}{5}\sqrt{300}$;

3) $20\sqrt{245}-\sqrt{5}+\sqrt{125}+2\frac{1}{2}\sqrt{180}$; 4) $\sqrt{275}-10\sqrt{11}-2\sqrt{99}+\sqrt{396}$;

5) $\sqrt{\frac{72}{5}}-\sqrt{40}+\frac{2}{3}\sqrt{0,4}-5\sqrt{\frac{5}{18}}+\sqrt{\frac{405}{2}}$; 6) $2\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{60}-\sqrt{15}+\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{4}{15}}$;

7) $5\sqrt{8}-8\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+6\sqrt{\frac{5}{3}-\frac{13}{9}}+\frac{4\sqrt{3}}{3}$;

8) $4\sqrt{27}-9\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{5\frac{1}{3}}-\frac{7\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{\frac{11}{2}-\frac{19}{4}}$.

16. 1) $\left(4\sqrt{8}+\frac{1}{16}\sqrt{128}-\frac{1}{4}\sqrt{32}\right)\cdot 8\sqrt{32}$; 2) $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}-8\sqrt{\frac{3}{8}}+3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cdot 3\sqrt{\frac{2}{3}}$;

3) $\left(3\sqrt{\frac{5}{6}}-5\sqrt{30}-2\sqrt{\frac{15}{2}}\right)\cdot 2\sqrt{\frac{3}{2}}$; 4) $\left(6\sqrt{\frac{7}{2}}-8\sqrt{\frac{7}{32}}-4\sqrt{14}\right)\cdot 4\sqrt{\frac{2}{49}}$;

5) $\left(3\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}-8\sqrt{\frac{3}{8}}+3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$;

6) $\left(5\sqrt{\frac{3}{5}}-3\sqrt{\frac{5}{3}}+4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(6\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{3}-\sqrt{27}\right)$.

17. 1) $\left(\sqrt{\sqrt{28}:\sqrt{7}}\right)\cdot\sqrt{2}$; 2) $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}}\right)\cdot\sqrt{125}$;

3) $\left(\sqrt{\sqrt{\frac{12}{125}}:\sqrt{\frac{3}{5}}}\right):\sqrt{\frac{2}{5}}$; 4) $2\sqrt{\frac{2}{125}}:\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

18. 1) Найдите 5 % от значения выражения $\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)$;

2) Найдите 15 % от значения выражения $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$;

3) Найдите 50 % от значения выражения $\dfrac{50}{\sqrt{25}}$;

4) Найдите 7 % от значения выражения $\dfrac{\sqrt{2700}}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{81}$.

19. 1) Найдите число, если 40 % этого числа равны $\sqrt{(9-2\sqrt{23})^2}+\sqrt{(9+2\sqrt{23})^2}$.

2) Найдите число, если 70 % этого числа равны $\sqrt{(4\sqrt{3}-7)^2}+\sqrt{(4\sqrt{3}+7)^2}$.

3) Найдите число, если 70 % этого числа равны $6+(\sqrt{5}-\sqrt{7}):(\sqrt{7}+\sqrt{5})$.

4) Найдите число, если 80 % этого числа равны $(\sqrt{6}-\sqrt{2}):(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\sqrt{3}$.

5) Найдите число, если 30 % этого числа равны $\left(7\sqrt{75}-5\sqrt{27}\right):2$.

6) Найдите число, если 80 % этого числа равны $(4\sqrt{98}-3\sqrt{72}):5\sqrt{2}$.

20. Сравните:

1) $2\sqrt{5}$ и $5\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{5\sqrt{3}}$ и $\sqrt{6\sqrt{2}}$; 3) $\sqrt{39}+\sqrt{36}$ и $\sqrt{40}+\sqrt{35}$.

21. Сравните значения выражений:

1) $3\sqrt{2}+\sqrt{20}$ и $\sqrt{32}+2\sqrt{5}$; 2) $10-\sqrt{28}$ и $\sqrt{7}-1$;

3) $\sqrt{180}-\sqrt{4}$ и $\sqrt{121}-\sqrt{235}$; 4) $\sqrt{96}+\sqrt{90}$ и $\sqrt{54}+\sqrt{160}$.

22. Сравните с нулем значение выражения:

1) $\left(\sqrt{37}-6\right)\left(\sqrt{37}+6\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{29}\right)\left(\sqrt{29}-\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{11}-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{12}+\sqrt{11}\right)$;

4) $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2-\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{45}-\sqrt{8}\right)$;

5) $\dfrac{4\sqrt{5}-\sqrt{30}}{3}$; 6) $\dfrac{-\sqrt{50}+6\sqrt{2}}{\sqrt{40}-5\sqrt{2}}$.

23. Верно ли, что:

1) $\dfrac{1}{15-2\sqrt{50}}+\dfrac{1}{15+2\sqrt{50}}=1{,}2$;   2) $\dfrac{2}{17\sqrt{2}-12}+\dfrac{2}{17\sqrt{2}+12}=0{,}4$;

3) $\dfrac{5}{4-\sqrt{11}}-\dfrac{4}{\sqrt{11}\sqrt{7}}-\dfrac{3}{3+\sqrt{7}}=1$;   4) $\dfrac{9}{5-\sqrt{7}}+\dfrac{22}{7+\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=6$?

24. 1) Разность $\sqrt{43-24\sqrt{3}}-\sqrt{43+24\sqrt{3}}$ является целым числом. Найдите это число.

2) Разность $\sqrt{53-20\sqrt{7}}-\sqrt{20\sqrt{7}+53}$ является целым числом. Найдите это число.

3) Разность $\sqrt{\left|2\sqrt{5}-29\right|}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}$ является целым числом. Найдите это число.

4) Разность $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$ является целым числом. Найдите это число.

25. Докажите, что сумма

$$\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{14}}+\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{15}}$$ меньше 1.

Упростите выражение (**26 – 29**).

26. 1) $\dfrac{(\sqrt{3}-2\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{\frac{7}{8}-0{,}125+\frac{1}{20}}$;   2) $\dfrac{0{,}625+\frac{1}{8}+2^0-2^{-1}}{(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})}$.

27. 1) $\dfrac{16}{12-5\sqrt{6}}-\dfrac{16}{5\sqrt{6}+12}$;   2) $\dfrac{2}{\sqrt{7+\sqrt{54}}+1}-\dfrac{2}{\sqrt{7+\sqrt{54}}}-1$;

3) $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2$;   4) $\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^2$;

5) $\sqrt{3-\sqrt{13-4\sqrt{3}}}$;   6) $\sqrt{4+\sqrt{9-4\sqrt{2}}}$;

7) $\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{6-\sqrt{25-4\sqrt{6}}}}$;   8) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

28. 1) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\dfrac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{\sqrt{6-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{\dfrac{17}{2}}$;

3) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}\cdot(6+4\sqrt{2})$; 4) $(\sqrt{28}-\sqrt{12})\cdot\sqrt{10+\sqrt{84}}$;

5) $\left(\dfrac{3(\sqrt{13}+2)}{\sqrt{19}-4}-\dfrac{4(\sqrt{19}-2)}{\sqrt{13}-3}-2+\sqrt{19}\right)\cdot\left(2-\sqrt{13}\right)$;

6) $\left(\dfrac{15}{\sqrt{6}+1}+\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)$.

29. 1) $\dfrac{\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{12}}+\sqrt{5}+\dfrac{1}{\sqrt{20}}}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{11\sqrt{3}-7\sqrt{5}}{59\sqrt{5}}$;

2) $\left(12{,}8\cdot\sqrt{\dfrac{1}{112}}+0{,}05\cdot\sqrt{1008}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{576^2-324^2}}{19}$;

3) $6\sqrt{2}-5\sqrt{18-8\sqrt{2}-\sqrt{52-29\sqrt{2}+\sqrt{7+10\sqrt{2}}}}$;

4) $\left(\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{\sqrt{5-\sqrt{17}}}+\dfrac{\sqrt{13-\sqrt{17}}}{\sqrt{13+\sqrt{17}}}\cdot\sqrt{19}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

30. Докажите, что значение выражения

а) $\left(\sqrt{10+5\sqrt{3}}+\sqrt{10-5\sqrt{3}}\right)^2$; б) $\sqrt{17+6\sqrt{4-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

является иррациональным числом.

31. Выполните действия:

1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$; 4) $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$;

5) $\sqrt{-130\sqrt{3}+244}-\sqrt{52+30\sqrt{3}}$; 6) $\sqrt{18+8\sqrt{2}}-\sqrt{-18\sqrt{2}+163}-0{,}5\sqrt{32}$.

32. Упростите: а) $4a^3+2a^2-8a+7$, если $a=0{,}5(\sqrt{3}+1)$;

б) $3\sqrt{18}+2\sqrt{8}+3\sqrt{32}-\sqrt{50}$;

в) $\left(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2}\right)$;

г) $\left(7\sqrt{3}+8\sqrt{12}+5\sqrt{48}\right)\cdot 0{,}5\sqrt{3}$;

д) $2a^2-5ab+2b^2$, если $a=\sqrt{6}+\sqrt{5}, b=\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

Занятие 3

33. Стороны прямоугольника 2 и $\sqrt{5}$. Каким числом (рациональным или иррациональным) выражается:
1) его площадь; 2) его периметр; 3) его диагональ?

34. Какие из чисел являются рациональными и какие иррациональными:

1) $\sqrt{16}$; 2) $\left(\sqrt{2}\right)^2$; 3) $\frac{4}{9}$; 4) 0; 5) $-\sqrt{25}$;

6) $\sqrt{-4}$; 7) 3^{π}; 8) $2+\sqrt{49}$; 9) $8-\sqrt{81}$; 10) $\sqrt{5}-2$;

11) $6-\sqrt{36}$; 12) $\sqrt{3}-2\sqrt{3}$; 13) $4\sqrt{5}$; 14) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$; 15) $\sqrt{3}:\sqrt{12}$?

35. Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом?

36. Может ли произведение двух иррациональных чисел быть рациональным числом?

37. Может ли частное двух иррациональных чисел быть рациональным числом?

38. С двумя числами, одно из которых рациональное, а другое иррациональное, производят четыре арифметических действия. Каким числом – рациональным или иррациональным – будет результат каждого действия?

39. $\sqrt{ab}$ – рациональное число. Каким числом – рациональным или иррациональным – является число $\sqrt{\frac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$?

40. $\sqrt{ab}$ – рациональное число. Какими числами – рациональными или иррациональными – являются $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$?

41. $\sqrt{ab}$ – иррациональное число. Какими числами – рациональными или иррациональными – могут быть числа $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$?

42. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ – рациональное число. Каким числом – рациональным или иррациональным – может быть разность $\sqrt{a}-\sqrt{b}$?

43. a и b – рациональные числа. Каким числом – рациональным или иррациональным – может быть $\sqrt{ab}$?

44. a и b – рациональные числа. Какими числами – рациональными или иррациональными – могут быть числа:

1) $\sqrt{a}$; 2) $\sqrt{b}$; 3) $\sqrt{a+b}$; 4) $\sqrt{a-b}$; 5) $\sqrt{ab}$; 6) $\sqrt{\frac{a}{b}}$?

45. Каким числом – рациональным или иррациональным – является число:

1) $3\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}-3$; 3) $\sqrt{2}+3$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$?

46. Докажите иррациональность числа:

1) $\sqrt{8}$;   2) $\sqrt{6}$;   3) $0{,}5\sqrt{8}$;   4) $2\sqrt{6}$;   5) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

6) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$;   7) $1-\sqrt{3}$;   8) $2+\sqrt{5}$;   9) $\left(3-\sqrt{2}\right)$.

47. Укажите иррациональные значения *a* такие, что:

1) $\sqrt{2}<a<\sqrt{3}$;   2) $\sqrt{5}<a<\sqrt{6}$.

48. Приведите пример двух иррациональных чисел:

1) сумма которых есть рациональное число;

2) произведение которых есть рациональное число.

49. Докажите, что $\sqrt{3};\sqrt{5};\sqrt{7}$ – иррациональные числа.

50. Известно, что $a, b, \sqrt{a}-\sqrt{b}$ – рациональные числа. Докажите, что $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ – рациональные числа.

51. Докажите, что $\sqrt{3n+5}$ – иррациональное число при любом натуральном значении *n*.

52. Известно, что число *m* – рациональное, а *k* – иррациональное. Что можно сказать о числе: 1) $\sqrt{m+k}$;   2) $m+\sqrt{k}$?

53. Известно, что числа $\sqrt{a+b}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ – рациональные. Следует ли из этого, что a и b – рациональные числа?

54. Найдите сторону квадрата, равновеликого прямоугольнику со сторонами 5 см и 17 см.

55. Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi R^2$, где R – длина радиуса круга, $\pi \cong 3{,}14$. Вычислите с точностью до 0,1 радиус круга, если:

1) $S = 48$ см^2;   2) $S = 175$ м^2.

56. Верно ли, что длина любого отрезка выражается:

1) целым числом;   2) рациональным числом;

3) иррациональным числом;   4) рациональным или иррациональным числом?

57. Верно ли, что записано рациональное число:

1) 2,1549783;   2) – 4,6877777... (дальше – только цифры 7);

3) 5,1753434217;   4) – 1,1891494545;

5) 0,687237828213;   6) 3,1415926666888... (дальше – только цифры 8)?

58. Верно ли, что: 1) $3{,}4(2) \in \boldsymbol{Q}$;   2) $3{,}4(2) \notin \boldsymbol{Q}$;   3) $3{,}4(2) \in \boldsymbol{R}$;

4) $3{,}4(2) \notin \boldsymbol{Z}$;   5) $\pi \notin \boldsymbol{Q}$;   6) $\pi \in \boldsymbol{R}$?

59. Как можно продолжить запись бесконечной десятичной дроби, чтобы получилось: а) рациональное число; б) иррациональное число:

1) 32,0715…;   2) 13,1444…;   3) 25,0022…;

4) 43,1789…;   5) – 5,7039…;   6) – 7,4006…?

60. Сравните числа:

1) 5,7986... и 5,7985...; 2) – 3,4825... и – 3,4826...; 3) – 16,251... и – 16,251;

4) 15,25 и $\frac{61}{4}$; 5) 0 и –0,0000033...; 6) – 51,5151... и – 51,151515;

7) – 0,375... и $-\frac{3}{8}$; 8) $\frac{5}{9}$ и 0,5555...; 9) 7,34 и $7\frac{1}{3}$;

10) 2,571428 и $2\frac{4}{7}$; 11) 3,272727 и 3,277277...; 12) 0,857143 и $\frac{6}{7}$.

61. Для числа *a* укажите: а) его модуль; б) противоположное ему число, если:

1) *a* = – 7,(31); 2) *a* = – 8,232323…;
3) *a* = 0,545454…; 4) *a* = 3,(702).

62. Верно ли, что точка **A** расположена правее точки **B** на координатной прямой, если:

1) *A*(3,29292...) и *B*(3,29272...); 2) *A*(0) и *B*(–1,6392...);
3) *A*(–15,67432...) и *B*(–15,67342...); 4) *A*(36,24...) и *B*(36,20...)?

63. Какая точка – *M* или К – находится дальше от точки О на координатной прямой, если координаты точек М и К соответственно равны:

1) 8,369... и 7,549...; 2) – 15,3946... и – 15,3937...;
3) – 0,4465... и 0,5678...; 4) – 9,353... и 9,352...;
5) – 2,7... и 2,7...; 6) – 7,356 и 7,356?

64. Сравните числа:

1) 72,1(4) и 72,(14); 2) 43,(26) и 43,2(6);
3) –4,02(3) и –4,0(23); 4) – 8,5(41) и – 8,54(1).

65. Найдите десятичные приближения числа *a* с точностью до 10^{-5} с недостатком и с избытком, если:

1) *a* = 48,13579111315…; 2) *a* = 9,97975973…;
3) *a* = 11,298297296295…; 4) *a* = 103,6775774773… .

66. Найдите десятичные приближения числа *b* с точностью до 10^{-3} с недостатком и с избытком, если:

1) *b* = – 29,56787651…; 2) *b* = – 19,132403546…;
3) *b* = – 0,410424344…; 4) *b* = – 2,389076531… .

67. Выполните сложение, вычитание, умножение и деление нечетных и четных номеров из заданий № 65–66.

Глава 2. ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ИЗМЕРЕНИЕ

При рассмотрении различных явлений природы можно обратить внимание на их непрерывное и разнообразное изменение: меняется погода, меняются окружающая флора и фауна, меняются возраст человека и условия его жизни и т. д.

Для того чтобы дать научное обоснование перечисленным процессам, необходимо знать их основные свойства.

Такие понятия, как длина, объем, масса, время, скорость, – это свойства некоторых явлений или объектов. Все эти свойства называются *величинами*. Заметим, что на сегодняшний день не существует строгого определения понятия величины. Величина рассматривается как некоторое отличительное свойство предмета или явления. Например, свойство «иметь протяженность» называется *длиной*, а «иметь вес» – *массой* предмета.

Очевидно, что возникает необходимость в количественной характеристике разных величин (разных процессов изменения свойств объектов или явлений). Для такой характеристики в математике применяется множество действительных чисел. Действительное число, которое ставится в соответствие определенной величине, называется *значением величины*.

Понятие величины является одним из основных понятий в математике. Этим понятием пронизан весь школьный курс математики, физики, биологии, химии и т. д. Школьники обычно имеют дело с измерениями, вычислениями длины отрезка, площади фигуры, объема тела и получают соответствующие величины – длину, площадь, объем и т. д.

Объекты (или явления), имеющие общее свойство (величину), называются однородными относительно этого свойства. Разнородные величины выражают разные свойства предметов. Так, например, длина и площадь – разнородные величины.

При измерении величин результат измерения при заданной единице измерения выражают некоторым соответствующим действительным числом.

Над величинами можно производить определенные операции. Однородные величины можно складывать, вычитать; величину a можно умножать на действительное число x (получится ax). В результате этих операций получаются величины того же самого рода. Например, для произвольных однородных величин a и b однозначно определяется величина $a + b$, которая называется суммой величин a и b.

Две величины одного рода можно сравнивать. Они либо равны, либо одна из них меньше другой; т. е. для произвольных величин a и b будет справедливым одно и только одно из отношений: либо $a=b$, либо $a<b$, либо $a>b$. Например, длина гипотенузы прямоугольного треугольника больше длины каждого его катета.

Отношение равенства величин является отношением эквивалентности (поскольку оно рефлексивно, симметрично, транзитивно), а отношение «больше» является отношением строгого порядка (оно антирэфлексивно, антисимметрично, транзитивно).

Для того чтобы получить более точное представление о той или иной величине, необходимо ее измерить. Измерение величины заключается в сравнении ее с величиной того же рода, принятой в качестве единицы измерения (в качестве эталона). В результате измерения величины мы получаем соответствующее данной величине число при заданной единице измерения. Значит, при измерении величины a с помощью единицы измерения e всегда найдется такое действительное число x, что $a=xe$ (например, 5 кг = 5·1 кг; 8 м = 8·1 м). Число x называется числовым значением величины a при единице измерения e, что можно записать следующим образом: $x=m_e(a)$.

Измерение величин позволяет сравнение этих величин заменить сравнением их числовых значений, а операции над величинами заменить операциями над числами: $a=b \Leftrightarrow m_e(a)=m_e(b)$;

$$a>b \Leftrightarrow m_e(a)>m_e(b).$$

Определение. Величины, которые определяются только числовым значением, называются скалярными величинами (примеры скалярных величин: длина, объем, температура).

Некоторые скалярные величины допускают неограниченное дробление предмета, явления на части, каждая из которых сохраняет те же свойства, что и целое (но в меньшей мере, в меньшем количестве). Такие скалярные величины принято называть *аддитивно-скалярными величинами* (это – длина, площадь, масса и т. д.). Величина «*плотность тела*» не будет аддитивно-скалярной, так как любая часть данного тела (например, часть куска железа) будет иметь такую же плотность, как и все тело.

Дадим аксиоматическое определение аддитивно-скалярной величине.

Пусть **M** – множество предметов (явлений), обладающих некоторым свойством **P** (например, иметь длину или площадь), и во множестве **M** определено отношение эквивалентности относительно свойства **P**. Пусть также во множестве **M** выбран некоторый элемент e в качестве единицы (эталона), при этом для произвольных элементов $a, b \in \mathbf{M}$ имеет место операция сложения $a + b = c$, $c \in \mathbf{M}$.

Определение (аксиоматическое определение величины). Свойство **P** называется аддитивно-скалярнай величиной, если существует отображение f множества **M** на множество положительных действительных чисел $\mathbf{R}_+$ $\left(\mathbf{M} \xrightarrow{f} \mathbf{R}_+\right)$, удовлетворяющее следующим условиям:

① существует элемент $e \in \mathbf{M}$, которому соответствует единица: $f(e) = 1$; e называется эталоном или единицей измерения;

② если элементы $a \in \mathbf{M}$ и $b \in \mathbf{M}$ эквивалентны относительно свойства **P**, то $f(a) = f(b)$;

③ если на множестве **M** элемент c состоит из элементов a и b, то $f(c) = f(a) + f(b)$;

④ если на множестве **M** определены два отображения f_1 и f_2, удовлетворяющие условиям ①–③, то существует такое положительное число k, что для любого элемента $x \in \mathbf{M}$ справедливо равенство $f_2(x) = kf_1(x)$.

Отображение f в данном случае называется измерением величины **P**, а положительные действительные числа $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ – мерой величины (или ее значением).

Кроме скалярных величин в математике, физике и других науках встречаются величины, которые характеризуются не только числовым значением, но и направлением. Такие величины называются *векторными величинами* (или *векторами*), например: скорость, ускорение, сила.

§ 1. Некоторые виды величин

1.1. Длина отрезка и ее измерение

Определение. Длиной отрезка называется величина, определенная для каждого отрезка таким образом, что:

① равные отрезки имеют равные длины;

② если отрезок состоит из нескольких отрезков, то его длина равна сумме длин отрезков, его составляющих.

Процесс измерения отрезков нами рассматривался ранее и мы видели, что при выбранной единице измерения длина любого отрезка выражается единственным действительным числом (рациональным, если отрезок соизмерим с единицей измерения, и иррациональным, если несоизмерим). Справедливо и обратное утверждение: для любого положительного числа при данной единице измерения существует такой отрезок, длина которого выражается этим числом.

Основные свойства длины отрезка

- если два отрезка равны, то числовые значения их длин тоже равны, и наоборот:
$$a=b \Leftrightarrow m_e(a)=m_e(b);$$
- длина суммы нескольких отрезков равна сумме длин слагаемых отрезков, и наоборот: $c=a+b \Leftrightarrow m_e(c)=m_e(a)+ m_e(b);$
- при замене единицы измерения числовое значение длины отрезка увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько раз новая единица меньше (больше), чем предыдущая: если $m_e(a)=n$, $m_{e_1}(e)=k$, то $m_{e_1}(a)=nk$ (например, если a=7 м, 1 м=100 см, то a=7·100 см=700 см).

Естественно: при переходе от одной единицы к другой длина отрезка не изменится, а изменится только числовое значение длины с учетом новой единицы измерения.

Основной единицей длины в Международной системе единиц является 1 метр, а также производные от него: 1 миллиметр (мм), 1 сантиметр (см), 1 дециметр (дм), 1 километр (км), причем 1 м = 10 дм = 100 см = 0,001 км.

Эталон метра представляет собой платиновую линейку с нанесенными на ее концах штрихами и хранится в Международном бюро мер и весов в г. Севр (Франция).

Современные единицы измерения длины вырабатывались на протяжении жизни многих поколений. Ранее применялись такие неточные единицы измерения длины (и теперь они используются в некоторых странах), как *дюйм* (длина сустава пальца), *фут* (длина ступни человека), *аршин* (длина шага человека) и др.

☺ **Задача 1.** На протяжении 796 м уложены трубы длиной 825 и 575 см. Сколько тех и других труб уложено, если их общее число равно 98?

Решение. Вначале унифицируем все единицы измерения:

825 см = 8,25 м, 575 см = 5,75 м.

Пусть уложено x труб длиной по 8,25 м, тогда труб длиной по 5,75 м будет уложено $(98 - x)$. Поскольку общая протяженность уложенных труб равна 796 м, можно составить уравнение:

$$8{,}25 \cdot x + 5{,}75 \cdot (98 - x) = 976.$$

Решая его, получим $x = 93$ – это количество труб длиной по 825 см. Значит, труб длиной по 575 см уложено 98 – 93 = 5.

Проверка: 8,25 · 93 + 5,75 · 5 = 796.

Ответ: 93 трубы длиной по 825 см, 5 труб длиной по 575 см.

☺ **Задача 2.** Купили 127 м труб для трех орошаемых участков. Стоимость труб для первого, второго и третьего из них составила соответственно 357, 323, и 336 руб. Сколько метров труб купили для каждого участка?

Решение. Решим по действиям.

1. $357 + 323 + 336 = 1016$ руб. – общая стоимость труб.
2. $1016 : 127 = 8$ руб. – стоимость 1 метра трубы.
3. $357 : 8 = 44\frac{5}{8}$ м труб купили для 1-го участка.
4. $323 : 8 = 40\frac{3}{8}$ м труб купили для 2-го участка.
5. $336 : 8 = 42$ м труб купили для 3-го участка.

Проверка. $44\frac{5}{8} + 40\frac{3}{8} + 42 = 127$.

Ответ: $44\frac{5}{8}$ м, $40\frac{3}{8}$ м, 42 м.

☺ **Задача 3.** От стальной полосы длиной 700 м отрезали 3 большие и 4 маленькие заготовки, после чего остался кусок полосы в 50 м. Определите размеры заготовок, учитывая, что большая в два раза длиннее малой.

Решение. Решим по действиям.

1. $3 \cdot 2 = 6$ заг. – если бы вместо трех больших были маленькие заготовки.
2. $6 + 4 = 10$ заг. – было бы всего маленьких заготовок.
3. $700 - 50 = 650$ м – столько м полосы отрезали.
4. $650 : 10 = 65$ м – длина одной маленькой заготовки.
5. $65 \cdot 2 = 130$ м – длина одной большой заготовки.

Проверка. $3 \cdot 130 + 4 \cdot 65 + 50 = 700$.

Ответ: 130 м, 65 м.

1.2. Площадь фигуры и ее измерение

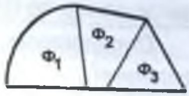


Рис. 1

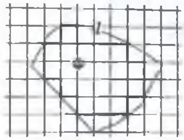


Рис. 2

Понятие о площади фигуры имеет каждый человек: мы говорим о площади земельного участка, о площади пола в комнате и т. д. При этом понимаем, что бо́льший земельный участок имеет бо́льшую площадь, а равные участки имеют равные площади. Такое житейское представление о площади применяется в геометрии, где рассматриваются способы вычисления площадей разных геометрических фигур.

Мы будем рассматривать площади только ограниченных фигур, т.е. только таких фигур, которые целиком можно поместить внутри некоторого квадрата (например, угол – неограниченная фигура), каждая из них может быть составлена из других фигур (например, фигура Ф на рис. 1 составлена из фигур Φ_1, Φ_2 и Φ_3). Пусть дана фигура Ф (ограниченная контуром *l*), площадь S(Ф) которой надо вычислить (рис. 2). Введем определение площади фигуры, связанное с аксиоматическим определением величины.

Определение. Площадью фигуры называется величина, определенная для каждой фигуры таким образом, что:

① существует единичный квадрат, площадь которого равна единице (сторона единичного квадрата равна единице длины): e^2;

② равные фигуры имеют равные площади;

③ площадь фигуры **Ф**, составленной из нескольких фигур, равна сумме площадей фигур, которые составляют фигуру **Ф**.

Теорема. Если фигура Ф удовлетворяет требованиям определения, то ее площадь всегда существует и единственна.

Для определения площади фигуры **Ф** используем палетку (прозрачный материал, на котором нанесена квадратная сетка), сторона квадрата которой имеет длину *e* (тогда площадь одного квадрата равна e^2). Наложим палетку на данную фигуру **Ф** и подсчитаем количество:

1) квадратов, целиком лежащих внутри фигуры **Ф**;

2) квадратов, через которые проходит контур *l* фигуры и которые частично лежат внутри, а частично снаружи фигуры **Ф**.

Далее вычислим: *приближенное значение площади фигуры **Ф** равно сумме количества квадратов, целиком лежащих внутри фигуры **Ф**, и половины количества квадратов, через которые проходит контур фигуры.*

Измерение площади при помощи палетки на практике применяется редко (действительно: определять площадь земельного участка или площадь крыши дома при помощи палетки очень неудобно). Как правило, пользуются другими способами измерения площадей, основанными на измерении некоторых отрезков и вычислениях по тем или другим известным формулам.

Определение. Фигуры, имеющие равные площади, называются равновеликими.

Определение. Две фигуры называются равными, если при наложении они совпадают.

Основные свойства площади

- При выбранной единице измерения каждой фигуре соответствует единственное положительное действительное число, выражающее ее площадь.
- Равные фигуры имеют равные площади (при одной и той же единице измерения). Но обратное утверждение не всегда верно (равновеликие фигуры могут быть неравными).

Например, прямоугольник со сторонами 3 см и 6 см и прямоугольник со сторонами 9 см и 2 см равновеликие (площадь каждого из них равна 18 см²), но они неравные; а очевидно неравные треугольник и трапеция могут иметь равные площади (рис. 3).

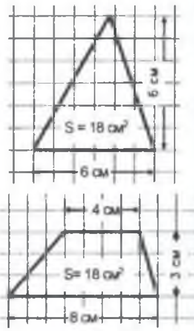


Рис. 3

- Если фигура Φ состоит из фигур Φ_1, Φ_2, Φ_3, ... , Φ_n, то площадь фигуры Φ равна сумме площадей фигур, из которых она составлена:

$$S(\Phi)=S(\Phi_1)+S(\Phi_2)+S(\Phi_3)+\ldots+S(\Phi_n).$$

- При замене единицы измерения площади числовое значение площади увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица измерения меньше (больше), чем предыдущая единица.

Например, $12\ дм^2 = 12\cdot 1\ дм^2 = 12\cdot 100\ см^2 = 1200\ см^2$;

$1\ дм^2 = 100\ см^2$; $1\ см^2 = 0{,}01\ дм^2$.

Единицу измерения уменьшили в 100 раз – числовое значение площади увеличилось в 100 раз.

Определение. Если две фигуры Φ_1 и Φ_2 равновеликие и их можно разбить на конечное количество попарно равных между собой частей, то фигуры Φ_1 и Φ_2 называются равносоставленными (рис. 4).

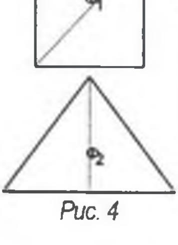


Рис. 4

☺ **Задача 4.** Внутри прямоугольного участка со сторонами 12 м и 16 м надо разбить прямоугольную клумбу площадью 32 м² так, чтобы ее границы были на одинаковом расстоянии от границы участка. На каком расстоянии от границы участка должны быть границы клумбы?

Решение. Обозначим через x расстояние от границы участка до границы клумбы (рис. 5).

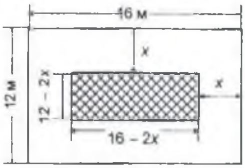


Рис. 5

Получим уравнение:

$$(16-2x)(12-2x)=32.$$

Решаем его:

$$\big(2(8-x)\big)\big(2(6-x)\big)=32;$$

$$4(8-x)(6-x)=32;$$

$$(8-x)(6-x)=8;$$

$$x^2-14x+40=0;$$

$x_1=4$; $x_2=10$ (не удовлетворяет условию задачи).

Ответ: на расстоянии 4 м.

☺ **Задача 5.** Квадратную форму доски изменили на прямоугольную, увеличив одну сторону на четверть, а другую (смежную) уменьшив на четверть. Изменилась ли площадь доски? Если да, то как?

Решение. Обозначим x – длину стороны квадратной доски, ее площадь равна x^2. При превращении квадратной доски в прямоугольную получим следующее.

1. $x+\frac{1}{4}x=\frac{5}{4}x$ – длина прямоугольной доски.
2. $x-\frac{1}{4}x=\frac{3}{4}x$ – ширина прямоугольной доски.
3. $\frac{5}{4}x\cdot\frac{3}{4}x=\frac{15}{16}x^2$ – площадь прямоугольной доски.
4. $x^2>\frac{15}{16}x^2$, значит площадь доски уменьшилась.

Ответ: уменьшилась.

1.3. Масса тела и ее измерение

Изучая разные физические тела, мы выявляем их наиболее характерные свойства. Одной из важных характеристик является масса тела.

Масса – это физическая величина, при помощи которой можно сравнивать тела и определять, какое из них имеет больше того или другого вещества, а какое – меньше.

Понятие массы тесно связано с понятием веса – силы, с которой тело притягивается Землей.

Между понятиями «*масса тела*» и «*вес тела*» существуют большие различия. Вес тела зависит не только от самого тела, но и от его местонахождения относительно центра Земли, он изменяется с изменением географической широты (так, на экваторе тело весит на 0,5 % меньше, чем на полюсе; то же самое тело на Луне будет весить приблизительно в 6 раз меньше, чем на Земле, поэтому на борту космического корабля наблюдается невесомость тел).

Если говорить о массе тела, то она неизменная (постоянная), она не зависит от расстояния до центра Земли. Масса одного и того же тела будет одинаковой и на экваторе и на полюсе, на Земле, Луне и на других планетах.

Сравнивают массы тел при помощи рычажных весов. Если на одну чашу весов положить какое-нибудь тело a, а на другую – тело b, то возможны следующие случаи:

1) *после нескольких колебаний чаши остановятся на одинаковом уровне*; в этом случае считают, что массы тел a и b равны;
2) *одна чаша окажется выше другой*; тогда считают, что масса тела, лежащего выше, меньше массы тела, лежащего на другой чаше (которая оказалась ниже).

Определение. Массой тела называется величина, удовлетворяющая следующим условиям:

① тела, которые уравновешиваются на рычажных весах, имеют равные массы;

② если объединить несколько тел, то общая масса всех этих тел равна сумме их масс.

Легко видеть, что масса определяется аналогично длине или площади. Разница только в том, что масса задается на другом множестве – множестве физических тел.

Для измерения массы необходимо ввести единицу массы. Такой основной единицей является 1 килограмм (кг). Один килограмм – это масса 1 дм^3 дистиллированной воды при температуре 4 °С. Эталоном килограмма является цилиндрическая платиновая гиря, находящаяся в Международном бюро мер и весов в г. Севр. Из основной единицы массы создаются другие единицы: грамм, центнер, тонна и т. д., причем:

$$1 \text{ кг} = 1000 \text{ г} = 0{,}01 \text{ ц} = 0{,}001 \text{ т}.$$

Масса, как длина и площадь, является аддитивно-скалярной величиной. По аналогии с длиной и площадью сравнение масс, действия над ними сводятся к соответствующим операциям над положительными действительными числами, соответствующими значениям данных масс.

Понятие массы в начальном курсе математики формируется на конкретных примерах. При этом важно обращать внимание на то, что тела равных объемов могут иметь разную массу, и наоборот: тела разных объемов могут иметь равные массы.

☺ **Задача 6.** Одна тонна дождевой воды содержит 50 г соли, а тонна морской воды – 35 кг. Сколько тонн дождевой воды нужно испарить, чтобы получить столько же соли, сколько ее содержится в 200 кг морской воды? Решите по действиям.

Решение.

1. 1 т = 1000 кг.
2. 1000 кг : 200 кг = 5 – во столько раз 1000 кг больше, чем 200 кг.
3. 35 кг : 5 = 7 кг – столько соли содержится в 200 кг морской воды.
4. 7 кг = 7000 г.
5. 7000 : 50 = 140 – во столько раз 7000 г больше, чем 50 г.
6. 1 т · 140 = 140 т – столько тонн дождевой воды нужно испарить.

Ответ: 140 тонн.

☺ **Задача 7.** Куплено два куска медной проволоки одного диаметра на сумму 150 руб. В одном куске 64 м проволоки, а в другом – 36 м. Сколько стоит килограмм этой проволоки, если известно, что один кусок был на 7 кг тяжелее другого? Решите по действиям.

Решение.

1. 64 + 36 = 100 м – общая длина купленной проволоки.
2. 150 : 100 = 1,5 руб. – стоимость 1 м проволоки.
3. 64 – 36 = 28 м – на столько один кусок длиннее другого.
4. 28 : 7 = 4 м – такова длина проволоки массой 1 кг.
5. 1,5 · 4 = 6 руб. – стоимость 1 кг проволоки.

Ответ: 140 тонн.

1.4. Время и его измерение

Понятие времени более сложное, чем понятие длины или массы. Время идет непрерывно, его не видно и не слышно. Оно существует объективно, независимо от нашего сознания. Восприятие нами времени – это отображение в нашем сознании реально проходящего времени. В повседневной жизни время (в некотором смысле) воспринимается как промежуток, отделяющий одно событие от другого.

В математике, физике время рассматривается как скалярная величина, потому что оно обладает свойствами, подобными свойствам длины, площади, массы.

Промежутки времени можно сравнивать, складывать, вычитать, умножать на положительное действительное число.

Например:

- на один и тот же путь мотоциклист затратит меньше времени, чем пешеход;
- учебный день состоит из учебных занятий, перерывов и домашних занятий, а продолжительность учебного дня равна сумме продолжительностей отдельных занятий, перерывов и домашних занятий.

Промежутки времени можно измерять. Но процесс измерения времени отличается от измерения длины. Длину одного и того же отрезка можно измерять при помощи линейки несколько раз, а промежуток времени, принятый за единицу, можно использовать только один раз. Поэтому за единицу времени надо брать промежуток выполнения процесса, который регулярно повторяется. Такой единицей в Международной системе единиц является *1 секунда*, которая определяется как $\frac{1}{315569259746}$ часть года. Кроме секунды, как известно, используются и другие единицы времени: минута, час, сутки, неделя, месяц, год, столетие.

Некоторые единицы времени связаны с вращением Земли:

- *год* – это время оборота Земли вокруг Солнца;
- *сутки* – время оборота Земли вокруг своей оси.

Год состоит приблизительно из $365\frac{1}{4}$ суток, но *год жизни людей* состоит из целого количества суток. Поэтому вместо того, чтобы к каждому году добавлять 6 часов, договорились добавлять целые сутки к каждому четвертому году. Этот год состоит из 366 дней и называется *високосным*.

Такие единицы времени, как минута, час, неделя, были придуманы человеком.

Год делят на месяцы, а месяц – на недели. Месяц не очень точная единица времени: он может иметь 30, 31, 28 (29) суток. Существование этой единицы времени известно из глубокой древности и связано с движением Луны вокруг Земли. Один оборот вокруг Земли Луна делает примерно за 29,5 суток, а за весь год Луна делает 12 таких оборотов. Это обстоятельство послужило основой для создания старинного календаря, который много раз совершенствовался и дошел до наших дней.

Календарь, которым мы пользуемся, называется *григорианским* (он принят в 1582 г. и назван так в честь тогдашнего главы католической церкви Григория XIII). Григорианским календарем пользуются не все страны. Так, например, Египет и другие страны Востока пользуются *лунным календарем*.

Современное деление суток на 24 часа – также из глубокой древности, оно было введено в Древнем Египте. Минута и секунда появились в Древнем Вавилоне. А то, что один час состоит из 60 минут, а минута – из 60 секунд, связано использованием в Вавилоне в то время 60-ричной системы счисления, разработанной вавилонскими учеными.

Первоначальное представление о времени дети получают еще в дошкольном возрасте, наблюдая за сменой дня и ночи, сменай пор года и т. п.

В начальной школе продолжается осмысление представлений о времени путем сравнения промежутков времени, наблюдая за его изменением. Ученики начальных классов знакомятся с календарем, названием месяцев (по порядку) и количеством дней в каждом месяце. Представление о часе и минуте формируется на основе практической деятельности учащихся, их наблюдений.

☺ **Задача 8.** Скорость течения реки 5 км/ч. Теплоход прошел по течению 240 км за 8 ч. Какое время он затратил на обратный путь, плывя с той же собственной скоростью? Решите по действиям.

Решение.

1. 240 : 8 = 30 км/ч – скорость теплохода по течению.
2. 30 – 5 = 25 км/ч – собственная скорость теплохода.
3. 25 – 5 = 20 км/ч – скорость теплохода против течения.
4. 280 : 20 = 14 ч. – время, затраченное теплоходом на обратный путь.

Ответ: 14 ч.

☺ **Задача 9.** Л.Н. Толстой прожил 82 года. В XIX в. он прожил на 62 года больше, чем в XX в. В каком году родился Л.Н. Толстой и в каком умер? Решите по действиям.

Решение.

1. 82 – 62 = 20 – столько лет прожил бы Л.Н. Толстой, если бы жил одинаковое количество лет и в XIX и в XX в.
2. 20 : 2 = 10 – столько лет прожил Л.Н. Толстой в XX в.
3. 1900 + 10 = 1910 – год смерти Л.Н. Толстого.
4. 10 + 62 = 72 – столько лет прожил Л.Н. Толстой в XIX в.
5. 1900 – 72 = 1828 – год рождения Л.Н. Толстого.

Ответ: 1828, 1910.

☺ **Задача 10.** С порта одновременно вышли два теплохода: один – на север, а другой – на восток. Через 2 часа расстояние между ними оказалось равным 60 км. Найти скорость каждого теплохода, если скорость одного из них на 6 км/ч больше скорости другого.

Решение. Обозначим x км/ч скорость одного теплохода, тогда скорость другого будет $(x + 6)$ км/ч. За 2 часа они прошли $2x$ и $2(x + 6)$ км соответственно. Составим уравнение, опираясь на теорему Пифагора (почему?):

$$(2x)^2 + (2(x + 6))^2 = 60^2;$$

$$4x^2 + 4(x^2 + 12x + 36) = 3600;$$

$$x^2 + x^2 + 12x + 36 = 900;$$

$$x^2 + 6x - 432 = 0;$$

$x_1 = -24$ (не подходит по смыслу задачи); $x_2 = 18$.

Скорость одного теплохода 18 км/ч, скорость второго – 18 + 6 = 24 км/ч.

Ответ: 18 км/ч; 24 км/ч.

Вопросы для самоконтроля

1. Элементы теории величин.
2. Величины и их измерения.
3. Измерения.
4. Объект измерения.
5. Область определения величины.
6. Величины.
7. Аксиоматическое построение теории аддитивных положительных скалярных величин. Примеры таких величин.
8. Измерение длин и площадей.
9. Величины как предмет изучения.
10. Подход к определению понятия величины и измерение величин, лежащих в основе школьного курса математики.
11. Понятие величины и измерение величин в начальном курсе математики.

Задачи для самостоятельного решения

Занятие 1

1. Сколько сантиметров содержится в:
1) 7,2 дм; 2) 12,1 дм; 3) 0,12 м; 4) 0,25 м?

2. Сколько килограммов содержится в:
1) 3,25 ц; 2) 12,32 ц; 3) 0,512 т; 4) 0,611 т?

3. Сколько квадратных сантиметров содержится в:
1) 3,156 м²; 2) 0,845 дм²; 3) 0,8 дм²; 4) 0,8 м²?

4. Сколько квадратных метров содержится в:
1) 0,085 га; 2) 42,6 га; 3) 0,06 а; 4) 9,009 а?

5. Сколько кубических сантиметров содержится в:
1) 7,06 м³; 2) 26,7 м³; 3) 0,2635 дм³; 4) 0,05 дм³?

6. Какую часть составляет:
1) 1 см от 1 дм; 2) 1 см от 1 м; 3) 1 см от 1 км;
4) 1 мм от 1 см; 5) 1 мм от 1 дм; 6) 1 мм от 1 м?

7. Какую часть составляет:

1) 1 кг от 1 ц; 2) 1 кг от 1 т; 3) 1 г от 1 кг;
4) 1 г от 1 ц; 5) 1 г от 1 т; 6) 1 ц от 1 т?

8. Какую часть метра составляет:

1) 4 дм; 2) 9 дм; 3) 2 см; 4) 8 см;
5) 3 мм; 6) 6 мм; 7) $\frac{1}{2}$ дм; 8) $\frac{4}{5}$ дм?

9. Какую часть дециметра составляет:

1) 2 см; 2) 7 см; 3) 3 мм; 4) 9 мм;
5) 12 мм; 6) 35 мм? 7) $1\frac{3}{5}$ см 8) $\frac{2}{5}$ см?

10. Выразите в метрах: 1) 64 см; 2) 29 см; 3) 8 дм 2 см;
4) 3 дм 9 см; 5) 8 дм 6 см; 6) 1 дм 3 см.

11. Выразите в дециметрах:

1) 6 дм 5 см 3 мм; 2) 2 дм 8 см 1 мм; 3) 4 м 2 дм 8 см 5 мм;
4) 7 м 9 дм 1 см 8 мм; 5) 3 м 1 см; 6) 9 м 5 см.

12. Выразите в дециметрах: 1) 1,2 м; 2) 0,7 м; 3) 0,92 м; 4) 2,75 м.

13. Выразите в сантиметрах:

1) 0,95 м; 2) 8,37 м; 3) 19,09 м; 4) 0,04 м;
5) 2,7 м; 6) 0,8 м; 7) 4,1 дм; 8) 0,8 дм.

14. Выразите в километрах и метрах:

1) 14,567 км; 2) 20,763 км; 3) 2,56 км;
4) 5,7 км; 5) 45,09 км; 6) 33,005 км.

15. Выразите в килограммах:

1) 980 г; 2) 64 г; 3) 1,2 т; 4) 0,25 т; 5) 0,88 ц; 6) 15,98 ц.

16. Выразите в тоннах:

1) 1 т 247 кг; 2) 2304 кг; 3) 650 кг; 4) 4 т 8 ц.

17. Какую часть часа составляют: 1) 6 мин; 2) 12 мин; 3) 15 мин; 4) 30 мин?

18. Выразите время в часах и результат запишите в виде десятичной дроби:

1) 3 ч 30 мин; 2) 2 ч 6 мин; 3) 15 мин;
4) 1 ч 12 мин; 5) 75 мин; 6) 204 мин.

19. Запишите десятичной дробью, какую часть составляет:

1) 1 м^2 от 1 а; 2) 1 а от 1 га; 3) 1 м^2 от 1 га;
4) 1 см^2 от 1 м^2; 5) 1 дм^2 от 1 м^2; 6) 1 см^2 от 1 дм^2.

20. Выразите в квадратных метрах:

1) 1 м^2 25 дм^2; 2) 448 дм^2; 3) 9 дм^2;
4) 3 м^2 98 см^2; 5) 6 400 см^2; 6) 3 м^2 5 дм^2 24 см^2.

21. Выразите расстояние 645 км 600 м: 1) в метрах; 2) в километрах.

22. Выразите длину отрезка *AB*, равную 12 м 7 дм 8 см 5 мм в:
1) метрах; 2) дециметрах; 3) сантиметрах; 4) миллиметрах.

23. Выразите массу 2 т 8 ц 12 кг 480 г в:
1) граммах; 2) в килограммах; 3) центнерах; 4) тоннах.

Занятие 2

24. Выразите каждое значение длины основной единицей измерения:
1) 9 дм, 15 дм, 2 м 7 дм;
2) 67 см, 3 см, 145 см, 3 дм 2 см, 6 м 95 см, 8 м 5 дм 7 см;
3) 255 мм, 80 мм, 6 мм, 200 9 мм, 45 см 8 мм, 3 дм 7 см 1 мм;
4) 5 м 9 дм 7 см 1 мм.

25. Выразите в дециметрах:
1) 1,2 м; 2) 0,7 м; 3) 0,92 м; 4) 42,75 м.

26. Выразите в сантиметрах:
1) 0,95 м; 2) 8,37 м; 3) 19,09 м; 4) 0,04 м;
5) 2,7 м; 6) 0,8 м; 7) 4,1 дм; 8) 0,8 дм.

27. Выразите в километрах и метрах:
1) 14,567 км; 2) 20,763 км; 3) 2,56 км;
4) 5,7 км; 5) 45,09 км; 6) 33,005 км.

28. Сколько сантиметров содержится в:
1) 7,2 дм; 2) 12,1 дм; 3) 0,12 м; 4) 0,25 м?

29. Какую часть составляет:
1) 1 см от 1 дм; 2) 1 см от 1 м; 3) 1 см от 1 км;
4) 1 мм от 1 см; 5) 1 мм от 1 дм; 6) 1 мм от 1 м?

30. Какую часть метра составляет:
1) 4 дм; 2) 9 дм; 3) 2 см; 4) 8 см;
5) 3 мм; 6) 6 мм; 7) $\frac{1}{2}$ дм; 8) $\frac{4}{5}$ дм?

31. Какую часть дециметра составляет:
1) 2 см; 2) 7 см; 3) 3 мм; 4) 9 мм;
5) 12 мм; 6) 35 мм; 7) $1\frac{3}{5}$ см 8) $\frac{2}{5}$ см?

32. Выполните действия и сравните полученные значения выражений:
1) 4 км 370 м + 985 м и 4,37 км + 0,985 км;
2) 2 м 15 см + 3 м 46 см и 2,15 м + 3,46 м.

33. Постройте луч *OK* и отложите на нем отрезок длиной:
1) 0,6 дм; 2) 3,8 см; 3) 0,11 м; 3) 0,28 дм.

34. На отрезке *KM* (рис. 6) отметили точки *A* и *B* так, что длина отрезка *KA* равна 4 см, длина отрезка *AB* на 1 см меньше длины отрезка *KA*, а длина отрезка *BM* равна сумме длин отрезков *KA* и *AB*. Найдите длину отрезка *KM*.

Рис. 6

35. Длина отрезка *AB* равна 16 дм 8 см, длина отрезка *CD* – 420 мм. Во сколько раз длина отрезка *CD* короче длины отрезка *AB*?

36. Найдите периметр треугольника, стороны которого равны: 6 см 8 мм, 59 мм, 6 см 1 мм.

37. Длины сторон треугольника 25 см, 17 см и 13 см. Найдите периметр треугольника, стороны которого в 2 раза больше.

38. Меньшая сторона четырехугольника равна 2 см 8 мм, большая – 6 см 4 мм, а сумма двух других сторон равна сумме меньшей и большей сторон. Вычислите периметр четырехугольника.

39. В четырехугольнике *EFRT* стороны *EF* и *FR* равны и стороны *RT* и *ET* равны. Найдите периметр этого четырехугольника, если *EF* = 4 дм 2 см, а *RT* меньше *FR* на 15 см.

40. В четырехугольнике *ABCD* стороны *AB* и *BC* равны и стороны *CD* и *AD* равны. Найдите периметр четырехугольника *ABCD*, если *AD* = 28 см, а сторона *AB* меньше стороны *CD* на 4 см.

41. Хватит ли 1 м проволоки, чтобы изготовить каркасную модель прямоугольника, стороны которого равны 24 см и 29 см?

42. Под пастбище отвели участок луга прямоугольной формы размерами 110 м и 140 м. Сколько метров специального провода потребуется для ограждения этого участка?

43. На изготовление одного полотенца требуется кусок льняного полотна длиной 40 см, а на изготовление шести квадратных салфеток уходит кусок этого же полотна длиной 20 см (рис. 7). Сколько комплектов из одного полотенца и 6 салфеток можно изготовить из льняного полотна длиной 9 м? Определите ширину полотна.

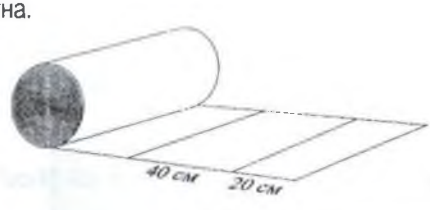


Рис. 7

44. В двух рулонах 1080 м ткани. В одном из них в 3 раза больше ткани, чем в другом. Сколько метров ткани в каждом рулоне?

45. Эдик, Паша и Дима в прыжках в высоту показали результаты 105 см, 100 м и 95 см. Эдик прыгнул не ниже Паши, а Дима прыгнул не выше Паши. На какую высоту прыгнул каждый из мальчиков?

46. Совершая однодневный поход, школьники сделали привал. Обсудив дальнейший маршрут, они пришли к выводу, что им осталось пройти путь в 3 раза меньше (т. е. на 8 км короче) пройденного. Найдите длину всего туристского маршрута.

47. Мальчик разрезал провод на две части так, что одна из них оказалась в 6 раз длиннее другой. Найдите первоначальную длину провода, если большая часть на 35 см длиннее меньшей.

48. Найдите сумму длин всех ребер прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: 1) 9 см; 4 см; 15 см; 2) 25 см; 11 см; 8 см.

49. Найдите сумму длин всех ребер куба, если его ребро равно:
1) 12 см; 2) 17 дм.

50. Длина прямоугольного параллелепипеда равна 24 см, ширина в 6 раз меньше длины, а высота на 5 см больше ширины. Найдите сумму длин всех ребер параллелепипеда.

51. Швейная мастерская израсходовала 15 м 20 см ткани на 8 платьев. Сколько ткани нужно для пошива 14 таких платьев?

52. Отрезок длиной 75 см разделили на части в отношении 7 : 8. Какова длина меньшей части?

53. Отношение длины спортивной площадки к ее ширине равно 5 : 3. Найдите ее периметр, если ширина площадки меньше ее длины на 30 м.

54. Периметр треугольника равен 60 м. Найдите длины его сторон, если они пропорциональны числам 7, 11 и 12.

55. Периметр прямоугольника равен 154 см. Найдите длины его сторон, если они пропорциональны числам 4 и 7.

56. На некотором участке железной дороги меняют старые рельсы длиной 8 м на новые длиной 12 м. Сколько потребуется новых рельсов вместо 240 старых?

Занятие 3

57. Выразите десятичной дробью, какую часть составляет:
1) 1 м^2 от 1 а; 2) 1 а от 1 га; 3) 1 м^2 от 1 га;
4) 1 см^2 от 1 м^2; 5) 1 дм^2 от 1 м^2; 6) 1 см^2 от 1 дм^2.

58. Выразите в квадратных метрах:
1) 1 м^2 25 дм^2; 2) 448 дм^2; 3) 9 дм^2;
4) 3 м^2 98 см^2; 5) 6 400 см^2; 6) 3 м^2 5 дм^2 24 см^2.

59. Сколько сантиметров содержится в:
1) 0,5 дм; 2) 0,8 дм; 3) 7,2 дм; 4) 12,1 дм;
5) 0,12 м; 6) 0,25 м; 7) 5,02 м; 8) 16,09 м?

60. Сколько квадратных сантиметров содержится в:

1) 3,156 м²; 2) 0,845 дм²; 3) 0,8 дм²;
4) 0,8 м²; 5) 6,573 м²; 6) 0,0005 дм².

61. Сколько квадратных метров содержится в:

1) 5,2 га; 2) 0.085 га; 3) 42,6 га;
4) 0,75 а; 5) 4,06 а; 6) 9,009 а.

62. Сколько кубических сантиметров содержится в:

1) 7,06 м³; 2) 0,84 м³; 3) 0,2635 дм³;
4) 0,05 дм³; 5) 26,7 м³; 6) 0,3 дм³.

63. Найдите площадь квадрата со стороной, равной:

1) 14 см; 2) 17 дм; 3) 30 мм; 4) 11 м.

64. Начертите квадрат, площадь которого равна:

1) 25 см²; 2) 9 см²; 3) 4 см²; 4) 16 см².

65. Найдите площадь прямоугольника с измерениями, равными:

1) 1 см и 8 см; 2) 8 мм и 21 мм;
3) 7 дм и 6 м; 4) 12 мм и 9 дм.

66. Начертите прямоугольник, площадь которого равна:

1) 12 см²; 2) 8 см²; 3) 14 см²; 4) 5 см².

67. Существует ли квадрат, сторона которого выражена натуральным числом сантиметров, а площадь равна:

1) 4 см²; 2) 10 см²; 3) 1 дм²; 4) 12 дм²?

Если такой квадрат существует, то найдите его сторону.

68. Найдите площадь заштрихованной части фигур на рис. 8.

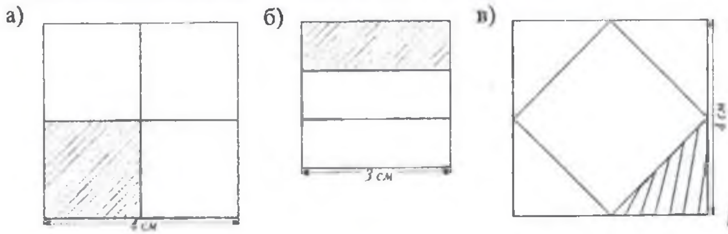


Рис.8

69. Из прямоугольника, измерения которого равны 8 см и 10 см, были вырезаны квадраты со стороной 2 см (рис. 9). Найдите площадь оставшегося многоугольника.

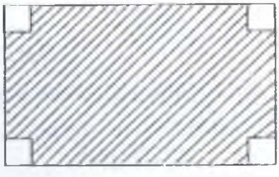


Рис. 9

70. Вычислите площадь фигуры, изображенной на рис. 10, полагая, что все размеры указаны в метрах.

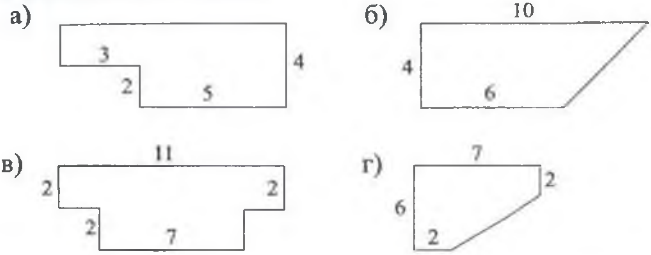


Рис. 10

71. Найдите площадь прямоугольника, если одна из его сторон равна 36 см, а другая на 4 см больше.

72. Найдите площадь прямоугольника, если одна из его сторон равна 18 см, а другая в 2 раза меньше.

73. Площадь прямоугольника равна 60 см^2, одна из сторон равна:
1) 12 см; 2) 4 см; 3) 1 дм; 4) 3 дм.
Вычислите другую сторону прямоугольника.

74. Какое количество керамической плитки размером 20 см $\times$ 20 см необходимо для покрытия панели над рабочим столом в кабинете обслуживающего труда, если размер панели 80 см $\times$ 800 см (рис. 11)?

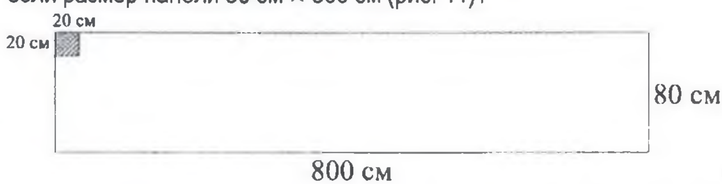


Рис. 11

75. Участок имеет форму прямоугольника шириной 6 м, длиной 12 м. Одна его часть размером 6 м $\times$ 7 м засажена газонной травой, другая – желтыми тюльпанами (рис. 12). Найдите площадь участка, отведенного под тюльпаны.

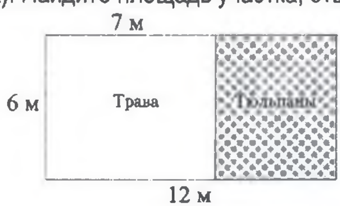


Рис. 12

76. Найдите периметр прямоугольника, стороны которого выражены простыми натуральными числами, а площадь равна:
1) 21 см^2; 2) 77 м^2; 3) 143 см^2; 4) 209 дм^2.

77. Найдите периметры квадратов, стороны которых выражены однозначными простыми числами. Полученные результаты запишите в порядке убывания.

78. Найдите сумму площадей всех граней куба, если сумма всех его ребер равна:
1) 60 см; 2) 108 дм; 3) 144 м.

79. Сколько квадратных сантиметров картона потребуется для изготовления подарочной коробки, длина которой 30 см, ширина – 40 см, высота – 20 см?

80. Сумма длин всех ребер прямоугольного параллелепипеда равна 72 см. Сумма длины и высоты равна 50 см, а ширины и высоты равна 40 см. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

81. Вычислите объем прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны:
1) 4 см, 6 см, 8 см; 2) 3 дм, 5 дм, 10 дм;
3) 6 см, 6 дм, 6 м; 4) 1 дм 2 см, 3 дм 8 см, 1 м 5 см.

82. Выразите:
1) в кубических дециметрах: а) 1 м^3; б) 6 м^3; в) 45 м^3; г) 130 м^3;
2) в кубических сантиметрах: а) 2 дм^3; б) 14 дм^3; в) 7 м^3; г) 13 м^3;
3) в кубических миллиметрах: а) 4 см^3; б) 8 дм^3; в) 16 дм^3; г) 3 м^3.

83. Сравните: 1) 90 мм^3 и 9 см^3; 2) 500 см^3 и 5 дм^3;
3) 80000 дм^3 и 8 м^3; 4) 2000 см^3 и 2 м^3;
5) 130000 мм^3 и 13 см^3; 6) 40000 мм^3 и 4 дм^3;
7) 1000000 см^3 и 1 м^3; 8) 1 м^3 25 дм^3 и 1250000 см^3.

84. Найдите объем куба, если его ребро равно:
1) 2 м; 2) 4 дм; 3) 5 см; 4) 1 м 1 дм.

85. Вычислите объем прямоугольного параллелепипеда, если высота его равна 12 см, а площадь нижней грани равна:
1) 14 см^2; 2) 98 см^2; 3) 3 м^2; 4) 12 дм^2.

86. Объем прямоугольного параллелепипеда 3024 дм^3. Вычислите площадь нижней грани, если высота равна:
1) 18 дм; 2) 7 дм; 3) 140 см; 4) 1200 мм.

87. Вычислите объем куба, если площадь его нижней грани равна:
1) 25 см^2; 2) 64 дм^2; 3) 121 м^2; 4) 10000 мм^2.

88. Какие размеры может иметь прямоугольный параллелепипед объемом V, если каждое его измерение выражено натуральным числом сантиметров и при этом:
1) V = 2 см^3; 2) V = 3 см^3; 3) V = 4 см^3; 4) V = 30 см^3?

89. Существует ли куб, длина ребра которого выражена натуральным числом, а объем равен: 1) 8 см^3; 2) 27 см^3; 3) 4 см^3;
4) 1000 мм^3; 5) 100 дм^3; 6) 64 м^3?

90. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 8 дм^3. Определите его размеры, если все его измерения различны и выражены натуральным числом.

91. Длина аквариума 90 см, ширина 40 см, высота 60 см. Сколько литров воды потребуется, чтобы наполнить аквариум?

92. От деревянного бруса, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, отпилили куб наибольшего объема. Определите объем оставшейся части, если размеры бруса равны:

1) 10 см, 20 см, 60 см; 2) 15 см, 15 см, 75 см.

93. Прямоугольный параллелепипед с измерениями 8 см, 10 см и 12 см разделили на два равных прямоугольных параллелепипеда. Определите объем каждого такого параллелепипеда.

94. Вычислите объем фигуры, изображенной на рис. 13.

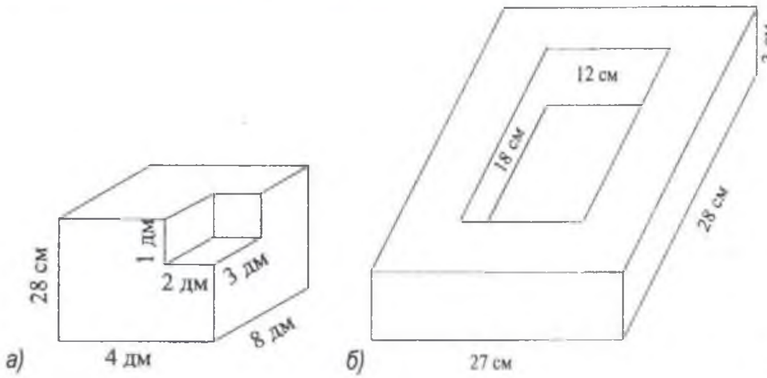


Рис. 13

95. Найдите площадь и периметр квадрата $ABCD$, если две его вершины на координатной прямой имеют координаты $A(5,7)$ и $B(-3,9)$.

Занятие 4

96. Выразите каждое значение массы в килограммах:

1) 980 г, 64 г, 1485 г, 7 кг 25 г;

2) 1,2 т; 0,25 т; 52,078 т;

3) 0,88 ц; 15,98 ц; 3,5 ц; 9 ц 8 кг.

97. Выразите основной единицей измерения массы:

1) 0,256 кг; 2) 5,847 кг; 3) 0,057 кг; 4) 16,007 кг.

98. Сколько килограммов содержится в:

1) 3,25 ц; 2) 12,32 ц; 3) 0,512 т; 4) 0,611 т?

99. Выразите в тоннах:

1) 1 т 247 кг; 2) 2304 кг; 3) 650 кг; 4) 4 т 8 ц.

100. Выразите массу 2 т 8 ц 12 кг 480 г:

1) в граммах; 2) в килограммах; 3) в центнерах; 4) в тоннах.

101. Сколько килограммов содержится в:
1) 3,25 ц; 2) 12,32 ц; 3) 0,512 т?

102. Какую часть составляет:
1) 1 кг от 1 ц; 2) 1 кг от 1 т; 3) 1 г от 1 кг?

103. Выполните действия и сравните полученные значения выражений:
1) 4 ц 52 кг + 2 ц 9 кг и 4,52 ц + 2,09 ц;
2) 156 т 35 кг + 283 т 750 кг и 156,035 т + 283,75 т.

104. В двух пакетах 1350 г печенья. В одном из них печенья в 2 раза больше, чем в другом. Сколько граммов в каждом пакете?

105. В магазине за день продано 1020 кг картофеля. После обеда продано картофеля в 2 раза меньше, чем до обеда. Сколько картофеля было продано до обеда и сколько после обеда?

106. На элеватор поступило пшеницы в 2 раза больше, чем ржи, а овса в 3 раза меньше, чем ржи. Сколько зерна каждой культуры поступило на элеватор в отдельности, если пшеницы поступило на 720 т больше, чем ржи?

107. Мороженое содержит 4 части воды, 2 части молочного жира и 4 части сахара. Сколько надо воды, молочного жира и сахара, чтобы приготовить 2 кг мороженого?

108. Для приготовления рисовой каши надо взять 2 части риса, 3 части молока и 5 частей воды. Сколько молока и сколько воды понадобится, если взяли 180 г риса?

109. Для приготовления манной каши берут 10 частей крупы, 2 части сахара, 50 частей молока и 1 часть масла. В кастрюлю влили 1 л молока. Сколько потребуется крупы, сахара и масла, чтобы сварить кашу? Считают, что 1 л молока $\approx$ 1000 г.

110. Компот из сухофруктов содержит 3 части изюма, 4 части яблок, 2 части груш и 35 частей воды.
1) Сколько яблок содержится в 6600 г компота?
2) Сколько компота получится, если взять 200 г груш?

111. Для овощного рагу нужно взять 4 части морковки, 2 части лука и 6 частей картофеля.
а) Сколько картофеля надо взять, чтобы приготовить 900 г рагу?
б) Сколько получится рагу, если взять 180 г лука?

112. Тесто для «ленивых» вареников содержит 14 частей творога, 4 части муки, 2 части масла, 3 части сметаны и 2 части сахара. Найдите массу каждого продукта, необходимого для приготовления 2 кг теста.

113. На левой чаше весов стоят гири 2 кг, 3 кг и 5 кг, а на правой – арбуз. Чтобы уравновесить чаши весов, пришлось положить на правую чашу 2 кг 250 г. Какова масса арбуза?

114. В магазин привезли 180 коробок, в каждой коробке по 46 пачек печенья. Какова масса всего печенья, если масса одной пачки 120 г?

115. В детский сад завезли 30 кг гречневой, перловой и манной крупы. Гречневой и перловой крупы было 22 кг, гречневой и манной – 20 кг. Сколько килограммов каждой крупы завезли в отдельности?

116. Как, имея лишь два сосуда вместимостью 3 л и 4 л, а также сливную раковину, налить из водопроводного крана 2 л воды?

117. Как можно деталь массой 29 г уравновесить на чашечных весах, используя только гири массой 3 г и 5 г?

118. Из сосуда с сиропом переливают 100 г в сосуд с водой, затем 100 г образовавшейся смеси переливают в первый сосуд. Чего теперь больше: воды в первом сосуде или сиропа во втором?

119. Из 12 кг сахарного тростника выходит в среднем 10 кг сока, а из 26 кг сока вырабатывается 2 кг сахара. Сколько сахарного тростника понадобится, чтобы получить 140 кг сахара?

120. В первый день колхозники собрали 5 т 800 кг картофеля. Сколько картофеля уберут колхозники во второй день, если их будет в 6 раз больше, а время будет затрачено в 4 раза меньше?

121. Танкер перевез за несколько рейсов 6540 т нефти. Сколько нефти перевезут 2 баржи, если известно, что каждая из них в 3 раза меньше танкера, грузоподъемность каждой баржи в 5 раз меньше, а количество рейсов в 6 раз больше?

122. В пансионат должны привезти 480 литровых пакетов с молоком и кефиром. Отношение числа пакетов с молоком к числу пакетов с кефиром равно 5 : 3. Сколько литров молока привезут в пансионат?

123. Для приготовления раствора берут цемент и песок в отношении 2 : 5. Сколько надо взять цемента и песка в отдельности, если:

1) масса раствора равна 56 кг;

2) песка взято на 9 кг больше, чем цемента?

124. Три утенка и четыре гусенка имеют массу 2 кг 500 г, а четыре утенка и три гусенка – 2 кг 400 г. Какова масса одного гусенка?

125. Какую часть часа составляет:

1) 6 мин; 2) 12 мин; 3) 15 мин; 4) 30 мин?

126. Выразите время в часах и результат запишите в виде десятичной дроби:

1) 3 ч 30 мин; 2) 2 ч 6 мин; 3) 15 мин;

4) 1 ч 12 мин; 5) 75 мин; 6) 200 мин.

127. Который теперь час, если прошедшая часть суток в 3 раза меньше оставшейся?

128. Который теперь час, если оставшаяся часть суток в 2 раза меньше прошедшей?

129. От дачного участка до железнодорожной остановки и обратно дачник на велосипеде едет 24 мин. Если он до железнодорожной остановки поедет на велосипеде, а назад пойдет пешком, то он затратит 42 минуты. За какое время дачник пройдет пешком путь от дачи до железнодорожной станции и обратно?

130. Три автобуса отправляются в 8 часов утра с автостанции в разные населенные пункты. По расписанию время отправления у первого автобуса каждые 3 часа, у второго – каждые 4 часа, у третьего – каждые 6 часов. Определите, в котором часу автобусы вновь отправятся от автостанции одновременно.

131. Во время тренировки четыре бегуна стартовали одновременно. Первый пробегает круг по стадиону за 75 секунд, второй – за 80 секунд, третий – за 100 секунд, четвертый – за 120 секунд. Определите, через какое время бегуны вновь одновременно окажутся на линии старта. Сколько кругов за это время пробежит каждый спортсмен по стадиону?

132. 1) Два самолета вылетели из двух городов одновременно навстречу друг другу. Один самолет это расстояние может пролететь за 5 ч, а второй – за 8 ч. Через сколько часов самолеты окажутся над одним пунктом?

2) Один кран наполняет бассейн за 20 ч, другой – за 18 ч. За сколько часов будет наполнен бассейн, если открыть оба крана одновременно?

133. 1) Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу из двух городов. Первый автомобиль может проехать все расстояние за $3\frac{1}{3}$ ч, а второй – за $2\frac{2}{9}$ ч. Сколько времени будут двигаться автомобили до встречи?

2) Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из двух городов. Первый велосипедист может проехать все расстояние за $1\frac{1}{5}$ ч, а второй – за $2\frac{2}{5}$ ч. Сколько времени будут двигаться велосипедисты до встречи?

134. 1) Одна машинистка может перепечатать некоторую рукопись за 12 ч, другая – за 16 ч. Какая часть рукописи останется не перепечатанной, если обе машинистки будут работать вместе в течение 5 ч?

2) К ванне подведены 2 крана. Через один из них ванна может наполниться за 12 мин, через другой – в полтора раза быстрее. За сколько минут наполнится $\frac{5}{6}$ всей ванны, если открыть сразу два крана?

135. 1) Выполняя задание, две швейные бригады вначале некоторое время работали вместе, после чего одна вторая бригада окончила оставшуюся часть работы за 5 дней. Сколько дней работала первая бригада, если она самостоятельно может выполнить данное задание за 10 дней, а вторая бригада – за 15 дней?

2) Одна бригада могла бы убрать весь картофель за 15 ч, а другая – за 12 ч. После того как они обе работали вместе в течение 5 ч, первая была переброшена на другую работу, и заканчивала уборку одна вторая бригада. Сколько времени ей понадобилось, чтобы одной закончить всю работу?

136. 1) Одна автомашина может перевезти груз за 20 ч, а другая – за 30 ч. К перевозке груза обе машины приступили одновременно и проработали вместе несколько часов, после чего одна первая машина закончила перевозку груза за 5 ч. Сколько часов работала первая машина?

2) Бассейн для плавания может наполниться одной трубой за 5 ч, а другая – за 6 ч. Для наполнения бассейна сначала открыли только первую трубу на 2 ч 15 мин, а затем, не закрывая первую, открыли и вторую трубу. Через какое время после этого наполнится бассейн?

137. 1) На уборке улицы работают две машины. Одна из них может убрать всю улицу за 40 мин, другой для выполнения той же работы потребуется 75 % этого времени. Уборку начали обе машины одновременно и проработали вместе четверть часа. Затем вторая машина сломалась. Сколько времени нужно одной первой машине, чтобы закончить уборку улицы?

2) Одна бригада может убрать все поле за 8 дней. Другой бригаде для выполнения той же работы потребуется 75 % этого времени. Сначала работала первая бригада в течение одного дня. Затем к ней присоединилась другая, и они вместе закончили работу. Сколько дней работали обе бригады вместе?

138. 1) Бассейн для плавания наполняется двумя трубами за 6 ч 40 мин. Если обе трубы вместе будут открыты в течение 2 ч 40 мин, а затем одна труба будет закрыта, то для наполнения оставшейся части бассейна одной второй трубой понадобится 9 ч. За какое время каждая труба отдельно может наполнить весь бассейн?

2) Из пунктов *A* и *B* вышли навстречу друг другу две автомашины. Автомашина из пункта *A* вышла на 4 ч 30 мин раньше, чем машина из пункта *B*, и они встретились через 1 ч 20 мин после выхода машины из *B*. За какое время проходит каждая машина весь путь от *A* до *B*, если скорость машины, вышедшей из *A*, относится к скорости другой машины как 8 : 7?

139. 1) Производительности двух тракторов относятся как 2 : 3. Оба трактора могут вспахать поле за 12 ч. За сколько часов мог бы вспахать это поле каждый трактор, работая отдельно?

2) Две сеялки, работая одновременно, засеяли участок земли за 10 ч. Зная, что производительности сеялок относятся как 4 : 5, определить, за какое

время каждая из сеялок, работая в отдельности, могла бы засеять весь участок земли.

140. 1) Два поезда идут в одном направлении из одного города в другой. Второй поезд выходит через 1 ч после выхода первого. Первый поезд расстояние между городами проходит за 5 ч, а второй – за 3 ч. Через сколько часов после выхода первого поезда второй поезд догонит первый? Какую часть пути пройдут оба поезда до места встречи?

2) Из города A в город B вышел пассажирский поезд, а спустя 2 ч из того же города A в город B вышел скорый поезд. Пассажирский поезд проходит расстояние между городами за 16 ч, а скорый – за 10 ч. Определите расстояние между городами A и B, зная, что, когда скорый поезд прибыл на станцию B, пассажирский проходил станцию C, находящуюся на расстоянии 141 км от станции B.

141. 1) Пароход проходит некоторое расстояние по течению реки за 10 ч, а против течения – за 20 ч. За какое время проплывет это расстояние щепка, брошенная в реку?

2) Пароход, двигаясь равномерно, проходит расстояние между двумя пристанями по течению реки за 12 ч, а против течения – за 15 ч. За какое время проплывет плот это расстояние?

142. 1) Из пунктов A и B вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода. Они встречаются через 10 ч. Первый пешеход приходит в B через 5 часов после встречи. За какое время второй пешеход может пройти расстояние AB?

2) Две швеи, работая вместе, могут выполнить заказ на пошив рабочей одежды за 6 дней. В начале четвертого дня одну из них перевели на другую работу, и первая швея закончила работу за 5 дней. За сколько дней может каждая из них, работая отдельно, выполнить заказ?

143. 1) Пароход отошел от одной пристани по направлению к другой. Пройдя половину пути, пароход увеличил скорость на $\frac{1}{4}$ первоначальной и прибыл на пристань назначения на полчаса раньше срока. За какое время пароход прошел все расстояние между пристанями?

2) Поезд вышел в полдень со станции A на станцию B. После прохождения половины пути машинист из-за неисправности пути уменьшил скорость на 25 %, и поэтому поезд прибыл на станцию B с опозданием на 10 мин. Укажите время прибытия поезда на станцию B.

Занятие 5

144. Автомобиль проезжает за 1 мин $\frac{3}{4}$ км. За сколько времени он проедет 1 км?

145. Самолет пролетел за $\frac{7}{10}$ часа $\frac{1}{4}$ расстояния между городами. Какую часть расстояния он пролетел за 1 час? За сколько времени он пролетит все расстояние?

146. 1) Путешественник проехал на автомобиле 6 ч, на поезде – 15 ч и 7 ч плыл на пароходе. Скорость автомобиля в 2 раза больше скорости поезда и в 4 раза больше скорости парохода. Определите путь, пройденный каждым транспортом, если весь маршрут составил 1220 км.

2) Три туриста прошли вместе 1992 км. Первый был в пути 12 дней, второй – 18, третий – 30 дней. Первый за 4 дня прошел столько, сколько второй за 5 дней, а третий – за 6 дней столько, сколько второй за 10 дней. Сколько километров прошел каждый турист?

147. 1) Турист Петя прошел $\frac{5}{24}$ всего пути, после этого ему осталось пройти 76 км. Найдите весь путь.

2) Турист Леня был в пути два дня. В первый день он прошел на 24 км больше, чем во второй. Расстояние, пройденное Леней во второй день, составляет $\frac{5}{13}$ расстояния, пройденного в первый день. Какое расстояние было пройдено в первый день; во второй день?

148. 1) Два пешехода выходят одновременно из пунктов *А* и *В* навстречу друг другу. Скорость одного пешехода 4 км/ч, а скорость другого – 5 км/ч. На какое расстояние они сближаются каждый час?

2) Два пешехода выходят одновременно из пункта *А* и направляются в пункт *В*. Скорость одного пешехода 4 км/ч, а скорость другого – 6 км/ч. Какое расстояние будет между пешеходами через 1 ч, 2 ч, 6 ч?

149. 1) Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из двух деревень Струсто и Пантелейки, расстояние между которыми 11,5 км, а через 30 мин встретились. Найдите скорость каждого из них, если один ехал на 1 км/ч быстрее другого.

2) Два велосипедиста отправляются одновременно из поселков Слобода и Пересады навстречу друг другу и через 2 ч встречаются. Расстояние между поселками равно 42 км. Найдите скорость каждого из велосипедистов, если один из них проезжает в час на 3 км меньше другого.

150. 1) Расстояние между двумя пешеходами, движущимися равномерно в одном направлении, равно $2\frac{1}{2}$ км. Первый пешеход проходит 8 км за 2 ч, а второй – 1 км за 12 мин. Через какое время второй пешеход догонит первого?

2) Скорый поезд проходит $302\frac{1}{2}$ км за 5 ч, а товарный – 2,7 км за 4 мин. Через два часа после выхода товарного поезда в том же направлении отправляется скорый поезд. Через какое время скорый поезд догонит товарный?

151. 1) Известно, что $\frac{7}{11}$ расстояния между станциями Негорелое и Городея равно 56 км. Из Негорелого в Городею вышла электричка, а через 12 мин навстречу ей из Городеи вышла другая электричка, скорость которой на 5 км/ч больше скорости первой. Электрички встретились через 24 мин после выхода второй. Найдите их скорости.

2) Из A в B выехал велосипедист со скоростью 12,4 км/ч. Спустя 1 ч 15 мин из B навстречу ему выехал другой велосипедист со скоростью 11,2 км/ч. Через какое время после выезда первого велосипедиста и на каком расстоянии от A встретятся велосипедисты, если $\frac{15}{49}$ расстояния AB равно 21 км?

152. 1) Расстояние между двумя городами электровоз проходит за 20 ч, а тепловоз – за 40 ч. Когда тепловоз прошел $\frac{1}{3}$ пути, следом вышел электровоз. Через какое время он догонит паровоз?

2) Из двух станций выходят одновременно навстречу друг другу два поезда; первый проходит это расстояние за $12\frac{1}{2}$ ч, а второй – за $18\frac{3}{4}$ ч. Через какое время после отправления поезда встретились?

153. 1) Скорости самолетов относятся как 3 : 4. Самолеты вылетают одновременно навстречу друг другу и встречаются через 6 ч в городе Минске, пролетев вместе 8400 км. Найдите скорости самолетов.

2) Из двух городов, расстояние между которыми 960 км, одновременно навстречу друг другу вышли два поезда. Скорости поездов относятся как 3 : 2. Найдите скорости поездов, если они встретились через 12 ч.

154. 1) Катер шел против течения 3,5 ч, а по течению – 1,3 ч. Найдите собственную скорость катера, если он прошел 63,2 км, а скорость течения реки 4 км/ч.

2) Скорость моторной лодки в стоячей воде 12 км/ч, по течению она плыла 2,6 ч,

против течения – $3\frac{2}{15}$ ч. Найдите скорость течения реки, если путь по течению на 10,8 км больше, чем против течения.

155. 1) Автомобиль в течение 6 ч ехал со скоростью 40 км/ч и 4 ч – со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость движения автомобиля.

2) Лыжники на первом участке пути в течение 7 ч шли со скоростью 8 км/ч и на втором участке в течение 3 ч со скоростью 7 км/ч. Найдите среднюю скорость движения лыжников.

156. 1) Первую половину пути велосипедист ехал со скоростью 18 км/ч, а вторую – со скоростью 12 км/ч. Какова средняя скорость велосипедиста?

2) Скорость теплохода по течению 24 км/ч, а против течения – 16 км/ч. Какова средняя скорость теплохода при его движении от пристани *A* до *B* и обратно?

157. 1) Две точки движутся с постоянными скоростями по окружности длиной 120 м. Когда точки движутся в одном направлении, то одна обгоняет другую через каждые 40 с, а когда они движутся в разных направлениях, то встречаются через каждые 24 с. Найдите скорости точек.

2) Две точки движутся с постоянными скоростями по окружности длиной 270 м. Когда точки движутся в одном направлении, то одна обгоняет другую через каждые 45 с, а когда они движутся в разных направлениях, то встречаются через каждые 27 с. Найдите скорости точек.

158. 1) Леня и его папа побежали навстречу друг другу из одной точки беговой дорожки стадиона. После встречи один из них прибежал в точку старта за 3 с, а другой – за 27 с. Найдите скорости Лени и его папы, если длина беговой дорожки 180 м.

2) Лена со своей младшей сестрой Галей побежали навстречу друг другу из одной точки беговой дорожки по кругу. После встречи одна из них прибежала в точку старта за 4 с, а другая – за 9 с. Найдите скорости девочек, если длина беговой дорожки 60 м.

159. 1) Два спортсмена стартовали по беговой дорожке стадиона одновременно в одном направлении. Скорость одного из них в 2 раза меньше скорости другого. В тот момент, когда они оба были на линии старта, оказалось, что спортсмен, бежавший медленнее, пробежал 7 кругов. Сколько раз к этому моменту его обгонял другой спортсмен?

2) Велосипедист и мотоциклист стартовали одновременно по кольцевому шоссе в противоположных направлениях. Скорость мотоциклиста в 3 раза превосходила скорость велосипедиста. В тот момент, когда они оказались вместе на линии старта, мотоциклист сделал 24 круга. Сколько раз к этому моменту они встречались во время движения?

160. 1) Из одной точки цирковой арены в одном направлении побежали большая лошадь и пони. Скорость большой лошади в 3 раза превосходит скорость пони. Сколько раз большая лошадь догоняла пони к тому моменту, когда они впервые вместе оказались в точке старта?

2) Из одной точки цирковой арены в противоположных направлениях побежали большая лошадь и пони. Скорость большой лошади в 2 раза превосходит скорость пони. Сколько раз они встретились к тому моменту, когда вместе остановились на линии старта?

161. 1) Два бегуна стартовали из одной точки беговой дорожки стадиона в одном направлении. Когда они вновь оказались в точке старта, один из них пробежал 8 кругов, а другой – 6. Сколько раз при этом один из них догонял другого?

2) Два бегуна стартовали из одной точки беговой дорожки стадиона в противоположных направлениях. Когда они вновь встретились на линии старта, оказалось, что один из них пробежал 8 кругов, а другой – 6. Сколько раз они встретились к тому моменту, когда вместе остановились, встретившись на старте?

162. 1) Группа детского сада, построенная в цепочку по одному и держась за веревочку длиной 6 м, перешла проспект по переходу за 40 с, а мимо постового милиционера она прошла за 10 с. Определите ширину проезжей части проспекта.

2) Пятнадцатиметровая колонна суворовцев прошла центральную аллею городского парка за 2 мин, а мимо пенсионера, отдыхавшего на лавочке, за 10 с. Найдите длину центральной аллеи парка.

163. 1) Пароход отошел от одной пристани по направлению к другой. Пройдя половину пути, пароход увеличил скорость на $\frac{1}{4}$ первоначальной и прибыл на пристань назначения на полчаса раньше срока. За какое время пароход прошел все расстояние между пристанями?

2) Поезд вышел в полдень со станции A на станцию B. После прохождения половины пути машинист из-за неисправности пути уменьшил скорость на 25 %, и поэтому поезд прибыл на станцию B с опозданием на 10 мин. Укажите время прибытия поезда на станцию B.

164. 1) Два поезда идут в одном направлении из одного города в другой. Второй поезд выходит через 1 ч после выхода первого. Первый поезд расстояние между городами проходит за 5 ч, а второй – за 3 ч. Через сколько часов после выхода первого поезда второй поезд догонит первый? Какую часть пути пройдут оба поезда до места встречи?

2) Из города A в город B вышел пассажирский поезд, а спустя 2 ч из того же города A в город B вышел скорый поезд. Пассажирский поезд проходит расстояние между городами за 16 ч, а скорый – за 10 ч. Определите

расстояние между городами A и B, зная, что, когда скорый поезд прибыл на станцию B, пассажирский проходил станцию C, находящуюся на расстоянии 141 км от станции B.

Занятие 6. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

165. Одна бригада выловила на 75 ц рыбы больше, чем другая. После этого первая бригада выловила еще 250 ц рыбы, а вторая – 385 ц. Какая бригада выловила больше рыбы и на сколько? *Нет однозначной связи между первым и вторым предложениями, поэтому задача имеет два ответа, исходя и связей между бригадами.*

166. В одном бидоне на 12 л молока больше, чем в другом. В первый бидон долили 4 л молока, а во второй – 12 л. В каком бидоне стало молока больше и на сколько литров? *Есть рисунок, где однозначно показано, в каком изначально больше и куда долили 4 л, а куда – 12 л. Задача имеет единственный ответ.*

Задачи на движение

167. Из двух городов, расстояние между которыми 600 км, одновременно навстречу друг другу выехали два грузовика. Скорость одного из них 54 км/ч, а второго – на 8 км/ч меньше. Через сколько часов они встретятся?

168. Из двух городов одновременно вышли навстречу друг другу два поезда. Скорость первого 40 км/ч, а второго – 50 км/ч. Они встретились через 3 часа. Найдите расстояние между городами двумя способами.

169. Расстояние между двумя портами 240 км. Одновременно из этих портов вышли навстречу друг другу два теплохода и встретились через 4 ч. Скорость одного теплохода 24 км/ч. Найдите скорость второго теплохода.

170. Из одной точки выехали одновременно в противоположных направлениях два велосипедиста. Через 3 часа расстояние между ними было 99 км. Первый велосипедист ехал со скоростью 15 км/ч. Какова скорость второго велосипедиста? Решите двумя способами.

171. Два лыжника вышли из базы одновременно в противоположных направлениях. Один из них шел со скоростью 11 км/ч, второй – 12 км/ч. Через сколько часов расстояние между ними будет 46 км?

172. Один спортсмен бежит со скоростью 8 м/с и догоняет другого, бегущего со скоростью 6 м/с. Через какое время первый спортсмен обгонит второго, если сейчас отставание составляет 10 м?

Совместная работа

173. К баку подведены 2 трубы. Через первую трубу бак заполняется водой за 3 часа, через вторую – за 4 часа. Через сколько часов бак заполнится водой, если открыть одновременно две трубы?

174. К баку подведены 2 трубы. Через первую трубу бак заполняется водой за 3 часа, а через первую и вторую вместе – за 9 часов. Через сколько часов бак заполнится водой, если открыть только вторую трубу?

175. Один человек выпивает флягу кваса за 14 дней, а вместе с женой – за 10 дней. За сколько дней жена в одиночку выпьет эту флягу кваса?

176. Лошадь съедает телегу сена за месяц, коза – за два, овца – за три. За какое время съедят эту телегу сена вместе лошадь, коза и овца?

177. Четыре строителя вместе строят дом. За какое время они построят этот дом, если первый в одиночку может построить дом за год, второй – за 2 года, третий – за 3, четвертый – за 4?

Задачи повышенной трудности

178. Пятеро детей играют в «паровозик». Каждый мальчик стоит за девочкой. Сколько мальчиков играет в «паровозик», если последней стоит девочка?

179. Масса Миши, Коли и Пети вместе равна 89 кг. Масса Миши и Коли – 63 кг, Коли и Пети – 58 кг. Определите массу каждого мальчика.

180. В парке растут липы, ели, сосны. Сосен и лип вместе 400, сосен и елей – 300, елей и лип – 440. Сколько в парке елей, сколько лип, сколько сосен?

181. В трех корзинах лежали яйца. Из первой корзины взяли 25 яиц, из второй – 19, а в третью положили 27 яиц. В трех корзинах стало 83 яйца. Сколько яиц было вначале в трех корзинах?

182. На двух тарелках лежало 9 яиц. Когда с одной тарелки взяли 1 яйцо, то на ней осталось яиц в 3 раза больше, чем на другой. Сколько яиц было на каждой тарелке?

183. Сколько зайцев и сколько уток увидел охотник, если он насчитал 10 голов и 28 ног?

184. Бабушка посчитала, что если она даст каждому внуку по 6 конфет, то ей не хватит 8 конфет, а если она даст каждому по 4 конфеты, то 6 конфет останется. Сколько у бабушки внуков?

185. Школьная футбольная команда выиграла в три раза больше игр, чем проиграла, а четыре игры закончила вничью. Всего было проведено 28 игр. Сколько игр выиграла команда?

186. На сковородке вмещается 2 кусочка хлеба. Чтобы поджарить 1 кусочек с одной стороны, требуется 1 минута. Можно ли поджарить 3 кусочка хлеба с двух сторон за 3 минуты?

187. Один блин с одной стороны жарится одну минуту. За какое время можно поджарить три блина на двух сковородках?

188. Андрей живет на 5-м этаже, а Костя – в том же доме вдвое выше, чем Андрей. На каком этаже живет Костя?

189. Я живу на 6-м этаже, а мой друг Терентий – подо мной на третьем. Возвращаясь домой, мне приходится пройти 60 ступенек. Сколько ступенек проходит Терентий, когда возвращается домой?

190. Вдоль беговой дорожки расставлены столбы. Бегун-марафонец бежит с постоянной скоростью. Старт был дан у первого столба. Через 6 минут он был же у 6-го столба. Через сколько минут после старта он будет у 12-го столба?

191. Две дюжины умножить на три дюжины. Сколько будет дюжин?

192. В полдень из Москвы отправился скорый поезд в С.-Петербург со скоростью 80 км/ч. В то же время из С.-Петербурга в Москву отправился пассажирский поезд со скоростью 40 км/ч. Какой поезд при встрече находится на большем расстоянии от Москвы?

193. В корзине 3 яблока. Как их поделить между тремя товарищами так, чтобы одно яблоко осталось в корзине?

194. Тройка лошадей пробежала 30 км. Сколько км пробежала каждая лошадь?

195. Разделить пополам число 1888, чтобы в каждой части было по 1000.

196. Из 55 роз (красных и белых) составили одинаковые букеты так, что в каждом букете оказалось 5 красных роз. Сколько было всего белых роз?

197. В солнечный день кваса продают на 25 % больше, чем в пасмурный. На сколько процентов меньше продают кваса в пасмурный день, чем в солнечный?

198. Штирлиц ехал в Берлин 6 ч пассажирским поездом со скоростью 80 км/ч. Сколько минут он сэкономил бы, если бы ехал в экспрессе со скоростью 100 км/ч?

199. Охотник вышел из лесу и отправился к дому со скоростью 5 км/ч. Навстречу ему бежала собака со скоростью 20 км/ч. Добежала до охотника – и обратно домой, потом снова к охотнику и снова домой. Сколько км набегает собака, пока охотник придет домой, если расстояние от леса до дома 10 км?

200. Замок сейфа наборный и состоит из двух колесиков, на каждом из которых цифры от 0 до 9. Комбинацию из двух колесиков можно установить за 1 с. За сколько секунд вор-медвежатник обязательно вскроет сейф (не взламывая его)?

Логические задачи

201. Три котенка – Васька, Барсик и Том – съели плотвичку, окуня и карася. Васька не ел ни плотвичку, ни окуня. Барсик не ел плотвичку. Какую рыбку съел каждый котенок? *(Васька – карась, Барсик – окунь, Том – плотвичка)*

202. Карлсон, Винни-Пух и Сиропчик участвовали в конкурсе сладкоежек. Карлсон не занял 2-го места, Винни-Пух не занял ни 1-го, ни 2-го места. Какое место занял Карлсон? Винни-Пух? Сиропчик? *(Карлсон – 1, Винни-Пух – 3, Сиропчик – 2)*

203. Трое друзей учатся в 1-м, во 2-м и 3-м классах. Их фамилии Иванов, Петров, Семенов. У самого младшего из друзей нет братьев и сестер. Семенов учится с сестрой Петрова в одном классе, он самый старший из друзей. Назовите фамилии первоклассника, второклассника, третьеклассника. *(Иванов – 1 кл., Петров – 2 кл., Семенов – 3 кл.)*

204. Рядом сидят мальчик и девочка. «Я – мальчик» – говорит черноволосый ребенок. «Я – девочка» – говорит рыжий ребенок. Какого цвета волосы у мальчика и какого – у девочки, если известно, что хотя бы один из них солгал? *(Мальчик – рыжый, девочка – черноволосая)*

205. Есть 3 разноцветные коробочки. В одной коробочке золотой ключик, в другой гадюка и одна – пустая. На коробочках написано:

1) «здесь лежит золотой ключик» (красная коробочка);
2) «здесь сидит гадюка» (зеленая);
3) «зеленая коробочка пуста» (синяя).

В какой коробочке лежит золотой ключик, если две надписи неверны?

206. Три класса соревновались в туристической эстафете. Один класс занял 1-е место, другой – 2-е, третий – 3-е. Перед началом соревнований болельщики заявили:

1) 4 «А» класс займет 1-е место;
2) 4 «В» класс не займет 1-е место;
3) 4 «Б» класс не будет последним.

Одно из этих предположений оказалось верным, а два других – ошибочными. Какое место занял каждый класс?

(1-е – 4 «В»; 2-е – 4 «Б»; 3-е – 4 «А»)

207. Четверо друзей соревновались в запуске на дальность бумажных самолетиков. Один из них занял 1-е место, другой – 2-е, третий – 3-е и четвертый – 4-е. На вопрос, какое каждый из них занял место, они ответили:

Андрей: Я был вторым, Боря – третьим;
Вася: Я был вторым, Андрей – первым;
Гриша: Я был вторым, Боря – четвертым.

Известно, что каждый мальчик один раз говорил правду, а один раз – неправду. Кто какое место занял?

(1-е – Андрей; 2-е – Гриша; 3-е – Боря, 4-е – Вася)

208. Три друга учатся в гимназии. Один из них – в математическом классе, другой – в физическом, третий – в биологическом. Определите специальность каждого, если известно:

- если Петр математик, то Сергей не физик;
- если Роман не физик, то Петр – математик;
- если Сергей не математик, то Роман биолог.

(Сергей – математик, Роман – физик, Петр – биолог)

209. Три подруги вышли в белом, зеленом и синем платьях. Туфли подруг тоже были разного цвета: у одной белые, у другой синие, у третьей – зеленые. Причем только у Вали цвет платья и туфель совпадает. Ни платье, ни туфли Ани не были белыми. Наташа была в зеленых туфлях. Определите цвет платья и туфель каждой из подруг. *(Аня: платье зеленое и туфли синие; Валя: платье и туфли белые; Наташа: платье синее, туфли зеленые)*

210. В трех ящиках находится крупа, вермишель и сахар. На первом ящике написано «крупа», на втором – «вермишель», на третьем – «крупа или сахар». Что в каком ящике находится, если содержимое каждого ящика не соответствует надписи на нем? *(1 – сахар, 2 – крупа, 3 – вермишель)*

211. Представьте, что перед вами 2 близнеца. Один всегда лжет, второй – всегда говорит правду. Одного из них зовут Джон. Вы повстречали их и хотите узнать, кто из них Джон. Какой бы вопрос вы им задали, если каждому из них разрешается задать только по одному вопросу, на который можно ответить односложно: либо «да», либо «нет»? *(вопрос: «Джон говорит правду?» – если ответ «да», то это Джон, если «нет», то Джон – второй близнец)*

212. Поверхность пруда постепенно покрывается кувшинками. Кувшинки растут так быстро, что за каждый день закрываемая ими площадь удваивается. Половина поверхности пруда заросла кувшинками за 7 дней. За сколько дней зарастет вся поверхность пруда? *(за 8)*

213. На озере росли лилии. Каждый день их число удваивалось и на 20-й день заросло все озеро. На какой день заросла половина озера?

Взвешивание

214. Из 9 одинаковых килограммовых гирь одна бракованная – легче килограмма. Как найти эту гирю при помощи рычажных весов двумя взвешиваниями?

215. Из восьми одинаковых колец одно несколько легче остальных. Найдите его не более чем двумя взвешиваниями на чашечных весах.

216. С помощью одного взвешивания на чашечных весах без гирь из трех одинаковых внешне монет найдите одну фальшивую, если известно, что она легче остальных.

217. С помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь из 9 одинаковых внешне монет найдите одну фальшивую, если известно, что она легче остальных.

218. Среди четырех монет достоинством в 1 копейку (масса 1 г), 2 копейки (масса 2 г), 3 копейки (масса 3 г) и 5 копеек (масса 5 г) есть одна фальшивая, отличающаяся массой от других. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету?

219. Имеются 4 монеты, из которых 3 настоящие и одна фальшивая, отличающаяся от них по массе неизвестно в какую сторону. Как за два взвешивания на чашечных весах найти ее?

220. Как при помощи чашечных весов без гирь разделить 24 кг гвоздей на две части – 9 кг и 15 кг?

221. На одной чаше весов 5 одинаковых яблок и 3 одинаковые груши, на другой – 4 таких же яблока и 4 такие же груши. Весы находятся в равновесии. Что легче: яблоко или груша?

Переливание

222. Степашка с Филей приготовили в кастрюле 8 л морса. С помощью 3-литровой и 5-литровой банок они разлили весь морс поровну. Как они смогли это сделать?

223. Как можно набрать из реки 6 л воды, если имеется 2 ведра: одно емкостью 4 л, другое – 9 л?

224. Можно ли, имея два сосуда емкостью 3 л и 5 л, набрать из крана 4 л воды? *(да, надо дважды налить в 5-литровый сосуд 2 л воды: наливая 5-литровый полностью и отливая 3 л, получим 2 л, которые перельем в опустошенный 3-литровый сосуд, затем опять наполним 5-литровый сосуд и выльем в 3-литровый 1 литр, останется 4 л)*

225. Хозяин, нанимая работника, предложил ему задание: «Вот тебе бочка, наполни ее водой ровно наполовину (ни больше, ни меньше). Но смотри: палкой, веревкой, ведром или чем-либо другим для измерения воды не пользуйся!» Работник справился с заданием. Как???

Теория вероятностей

226. В мешке лежало 10 пар черных перчаток и 10 пар коричневых и все они перепутаны. Какое наименьшее число перчаток надо взять из мешка, не заглядывая в него, чтобы скомплектовать хотя бы одну пару одноцветных?

227. В корзине лежат одинаковые по величине разноцветные шары: 7 красных, 5 синих, 3 зеленых, 10 белых. Сколько шаров достаточно взять (не глядя), чтобы наверняка 3 из них были разного цвета? *(18) 17 штук мало, так как могут быть только красные и белые. Поэтому 18.*

228. В темной комнате стоит коробка, в которой лежат 8 синих, 10 серых и 10 черных носков. Какое наименьшее число носков надо достать, чтобы среди них наверняка оказалось?

1) хотя бы 2 носка одного цвета; *(4)*
2) хотя бы 2 серых носка; *(20)*
3) хотя бы по 2 носка одного цвета? *(22)*

229. В шоколадном наборе 15 одинаковых внешне конфет с тремя разными начинками, поровну с каждой начинкой. Какое наименьшее число конфет надо взять, чтобы быть уверенным, что среди них есть конфеты с тремя разными начинками? *(11)*

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранцэвіч К.З., Пакала А.А. Матэматыка: у 2 ч. Ч. 2. – Мінск, 2003.
2. Кожух І.Р. Матэматыка. – Мінск, 1993.
3. Пакала А.А. Зборнік задач па матэматыцы. – Мінск, 1994.
4. Баранцэвіч К.З., Пакала А.А. Кантрольная праца № 2 па матэматыцы. – Мінск, 1997.
5. Пакала А.А. Курс матэматыкі ў прыкладах і задачах. – Мінск, 1998.
6. Лаврова Н.Н., Стойлова Л.П. Задачник-практикум по математике. – М., 1985.
7. Математика: для студ. 2 курса факультета подготовки учителей начальных классов педагогических вузов / под общ. ред. А.А. Столяра. – Минск, 1976.
8. Математика: учеб. пособие для студ. пед. фак-тов / Н.Я. Виленкин и др. – М., 1977.
9. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. – М., 1988.
10. Столяр А.А., Лельчук М.П. Математика: для студентов 1 курса факультета подготовки учителей начальных классов педагогических вузов. – Минск, 1975.
11. Задачник-практикум по математике / под ред. Н.Я. Виленкина. – М., 1985.
12. Василевский А.Б. Задачи с параметрами: учеб.-метод. пособие. – Минск, 1997.
13. Выготский М.Я. Справочник по высшей математике. – 14-е изд. – М., 2000.
14. Гончарова М.Н. Дискретная математика: учеб. пособие для студ. мат. спец. – Гродно, 1999.
15. Гусак А.А. Справочное пособие по решению задач: Математический анализ и дифференциальные уравнения. – Минск, 1998.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Муравьева Галина Леонидовна
Покало Александр Анатольевич
Толстик Наталья Владимировна

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

В трех частях

Часть 3

Корректор О.В. Юхновец
Техническое редактирование и компьютерная верстка А.А. Покало
Дизайн обложки И.И. Зирюкина

Подписано в печать 07.07.10. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура *Ариал*.
Печать Riso. Усл. печ. л. 7,21. Уч.-изд. л. 10,55. Тираж 200 экз. Заказ 284

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка».
ЛИ № 02330/0494368 от 16.03.09.
ЛП № 02330/0494171 от 03.04.09.
220050, Минск, Советская, 18.

Рациональные и действительные числа

Величины и их измерение

ISBN 978-985-501-894-1

9 789855 018941