МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Справочное пособие для студентов академических лицеев и поступающих в вузы

ТАШКЕНТ – 2012

Авторы: М.Маматкулов
М.М.Маматкулова

Рецензенты: к.ф.-м.н. А.Аманов
к.т.н. С.Бабакаев

МАТЕМАТИКА. Справочное пособие для студентов академических лицеев и поступающих в вузы.

Данная методическая разработка одобрена на заседании кафедры «Математики и естественных наук», методическим советам факультета «Управление строительством» и научно-методическим советом ТАСИ, который рекомендует данную работу к публикации.

Знаки и обозначения

1. $a \in A$ - a есть элемент множества A
2. $A \subset B$ - A подмножества множества B
3. $a \notin A$ - a не содержится в A
4. $\varnothing$ - пустое множество
5. $A \cup B$ - объединение множеств A и B
6. $A \cap B$ - пересечение множеств A и B
7. $\exists$ - существует
8. $\nexists$ - не существует
9. $\forall a \in A$ - для любого a из множества A
10. $A \Rightarrow B$ - из A следует B
11. $A \Leftrightarrow B$ - A эквивалентно B или A «равносильно» B
12. $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
13. $[x]$ – целая часть числа x
14. $\{x\}$ – дробная часть числа x
15. $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281$ ... ... , e - основание натурального логарифма
16. Факториал: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{m=1}^{n} m$, $(n \in N)$, $0! = 1$
17. Область определения функции – $D(y)$
18. Область значений функции – $E(y)$

Числовые множества

1. Множество натуральных чисел: N: $N = \{1,2,3,...\}$
2. Множество целых чисел: Z: $Z = \{ ...,-2,-1,0,1,2,..\}$
3. Множество рациональных чисел: Q: $Q = \left\{ \frac{p}{q} ; p,q \in Z, q \neq 0 \right\}$
4. Множество иррациональных чисел – I. Всякая бесконечная не периодическая десятичная дробь называется иррациональным числом. Например: $\pm 0,01001000100001...$; $\pm 0,51511511151111...$; $\pm 1,31311311131111...$
5. Множество действительных чисел – R: $R = Q \cup I$.

АЛГЕБРА
Признаки делимости

По признакам делимости можно узнать, не выполняя деления, можно ли всякое натуральное число разделить на данное число.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 - цифры.

На *2* : если запись натурального числа заканчивается четной цифрой *0, 2, 4, 6, 8* , то это число делиться без остатка на 2;

На *3* (*9*): если сумма цифр числа делится на 3 (9), то и число делится на 3 и (9);

На *4* (25): если в записи натурального числа последние две цифры заканчиваются нулями или двумя цифрами, которые делятся на 4 (25), то данное число делится без остатка на 4 (25);

На *5* : если запись натурального числа заканчивается цифрами 0 или 5, то данное число делится без остатка на 5;

На *6* : числа, которые делятся без остатка на 2 и на 3, делятся без остатка на 6;

На *8* (*125*): если в записи натурального числа последние три цифры заканчиваются нулями или тремя цифрами которые делятся на 8 (125), то данное число делится без остатка на 8 (125);

На *10* : если запись натурального числа заканчивается цифрой 0, то данное число делится без остатка на 10;

На *11*: на 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечетные места, либо равна сумме цифр, занимающих четные места, либо отличается от неё на число, делящееся на 11.

На *12*: числа, которые делятся без остатка на *3* и на *4*.

Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК)

<u>Простое число:</u> Натуральное число называют простым, если оно имеет только два делителя - единицу и само число. Например: *2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, ...*

<u>Составное число:</u> Натуральное число называют составным, если оно имеет более двух делителей. Например: *4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 21, ...*

<u>Взаимно простые числа:</u> Натуральные числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1. Например: *(15* и *22), (12* и *35), (25* и *42), (18* и *65), (24* и *49).*

НОД. Наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка числа a и b, называют наибольшим общим делителем этих чисел.

НОК. Наименьшим общим кратным натуральных чисел a и b называют наименьшее натуральное число, которое делится и на a, и на b.

Чтобы найти НОД и НОК нескольких натуральных чисел, надо разложить их на простые множители:

252	2	120	2	
126	2	60	2	$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$
63	3	30	2	$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
21	3	15	3	$НОД\,(252, 120) = 2^2 \cdot 3 = 12$
7	7	5	5	$НОК\,(252, 120) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$

Число делителей натурального числа

Разложим N натуральное число на простые множители:

$$N = q_1^n \cdot q_2^m \cdot q_3^k \cdot q_4^p, \qquad q_1, q_2, q_3, q_4 \text{ - простые числа.}$$

n, m, k, p - показатели степени.

Число делителей N натурального числа находим по формуле:

$$Ч.Д. = (n+1)(m+1)(k+1)(p+1),$$

Например: $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow Ч.Д. = (3+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 48$

Средние значения

1. Среднее арифметическое: $A_2 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $A_3 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$;

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n};$$

2. Среднее геометрическое:

$$B_2 = \sqrt{x_1 \cdot x_2}; \qquad B_3 = \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3};$$

$$B_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}; \qquad \text{где } x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n > 0$$

3. Среднее квадратичное:

$$C_2 = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}; \quad C_3 = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}};$$

$$C_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}};$$

4. Среднее гармоническое: $D_2 = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}$; $D_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$;

5. Неравенство между средними значениями

$$\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} \le \sqrt{x_1 \cdot x_2} \le \frac{x_1 + x_2}{2} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$$

Десятичные дроби

Как перевести периодическую десятичную дробь в обыкновенную дробь:

1. $0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$;

2. $2,(15) = 2\frac{15}{99} = 2\frac{5}{33}$;

3. $4,(549) = 4\frac{549}{999} = 4\frac{61}{111}$;

4. $5,45(63) = 5\frac{4563-45}{9900} = 5\frac{4518}{9900} = 5\frac{251}{550}$;

5. $14,762(8964) = 14\frac{7628964-762}{9999000} = 14\frac{7628202}{9999000}$.

Дроби

$\frac{a}{b} = a : b$ - обыкновенная правильная дробь $b \neq 0$, $a < b$

1. Сумма и разность дробей:

а) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} - \frac{d}{b} = \frac{a + c - d}{b}$; $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a - b}{m}$;

б) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$; $\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{a \cdot n - b \cdot m}{n \cdot m}$;

2. Произведение дробей:

а) $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$; б) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$; в) $m\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\cdot m=\frac{a\cdot m}{b}$;

3. Частное дробей:

а) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$; б) $m:\frac{a}{b}=\frac{b\cdot m}{a}$;

в) $\frac{a}{b}:m=\frac{a}{b\cdot m}$; г) $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a:n}{b:n}$;

Деление числа на пропорциональные части

Разделить некоторое число m:

а) пропорциональное данным числам $a:b:c:d$:

$$x=\frac{m\cdot a}{a+b+c+d};\quad y=\frac{m\cdot b}{a+b+c+d};\quad z=\frac{m\cdot c}{a+b+c+d};\quad t=\frac{m\cdot d}{a+b+c+d};$$

$$m=x+y+z+t$$

б) обратно пропорционально данным числам $a:b:c:d$:

$$x=\frac{m\cdot\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}};\quad y=\frac{m\cdot\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}};\quad z=\frac{m\cdot\frac{1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}};\quad t=\frac{m\cdot\frac{1}{d}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}};$$

Проценты. Сложные проценты

Процентом называется одна сотая часть числа. Обозначается: 1%.

Пусть A – количество, которое надо увеличить на P% , тогда:

$$A_1=A+\frac{P}{100}\cdot A=\left(1+\frac{P}{100}\right)\cdot A$$

Пусть A, нужно увеличить на P%↑ в n раз : $A_n=\left(1+\frac{P}{100}\right)^n\cdot A$

Пусть A, нужно уменьшить на $q\%\downarrow$: $A_1=\left(1-\frac{q}{100}\right)\cdot A$

Пусть A, нужно уменьшить на $q\%\downarrow$ в n раз:

$$A_n = \left(1 - \frac{q}{100}\right)^n \cdot A$$

$P_1\%\uparrow,\ P_2\%\uparrow$: $A_2 = \left(1 + \frac{P_1}{100}\right)\cdot\left(1 + \frac{P_2}{100}\right)\cdot A$

$P_1\%\uparrow,\ q_1\%\downarrow,\ q_2\%\downarrow$: $A_3 = \left(1 + \frac{P_1}{100}\right)\cdot\left(1 - \frac{q_1}{100}\right)\cdot\left(1 - \frac{q_2}{100}\right)\cdot A$

Степень и её свойства

$a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^n$, a- основание, n-показатель степени, $a \neq 0$, $n \in N$

1) $a^0 = 1$; 2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 3) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

4) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$; 5) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$; 6) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

7) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$; 8) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$; 9) $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$;

10) $(a \pm b)^0 = 1$; $a \neq b$

Формулы сокращённого умножения

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

3) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

4) $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$;

5) $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$;

6) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

$7)\ (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$

$8)\ (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc;$

$9)\ (a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc;$

$10)\ (a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc;$

$11)\ a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2);$

$12)\ (a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4;$

$13)\ (a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4;$

$14)\ a^6-b^6=(a^3-b^3)(a^3+b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2);$

$15)\ a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+a\cdot b^{n-2}+b^{n-1});$

$16)\ a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\cdots-ab^{2n-1}+b^{2n});$

$17)\ (a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^k+\cdots+nab^{n-1}+b^n;$

Некоторые суммы

$1)\ 1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2};$

$2)\ 2+4+6+8+\cdots+2n=n(n+1);$

$3)\ 1+3+5+7+\cdots+2n-1=n^2;$

$4)\ 1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$

$5)\ \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n},\ (n\geq 2);$

6) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$;

7) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$;

8) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

9) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2$;

10) $1^3+3^3+5^3+7^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$;

11) $1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$;

Арифметический корень

1) $\sqrt{a+b\sqrt{c}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2c}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2c}}{2}}$;

2) $\sqrt{a-b\sqrt{c}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2c}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2c}}{2}}$;

3) $\sqrt{a\pm\sqrt{c}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-c}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-c}}{2}}$;

4) $\sqrt[k]{x\sqrt[k]{x\sqrt[k]{x\sqrt[k]{x\cdots}}}}=\sqrt[k-1]{x}$;

5) $\sqrt{m+\sqrt{m+\sqrt{m+\sqrt{m+\cdots}}}}=\frac{1+\sqrt{4m+1}}{2},\ m>0$;

Свойства арифметического корня

1) $\sqrt{a^2}=|a|$;

2) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}\ (a,b>0)$;

3) $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}\ (a>0)$;

4) $a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2\cdot b}\ (a<0)$;

5) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{b}=\sqrt[6]{a^2\cdot b}$;

6) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{b}=\sqrt[4]{a^2\cdot b}$;

$a>0,\ b>0,\ n,m\in N$ *-натуральные числа:*

7) $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$;

8) $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

9) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

10) $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b}$;

11) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$;

12) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$;

13) $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$;

14) $\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$;

15) $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nm]{a^m}$;

16) $\sqrt{a^2}=a\ (a>0)$;

Линейное уравнение

$Ax=B$ – *линейное уравнение*

1. При $A\neq 0$, уравнение имеет один корень, то есть $x=\frac{A}{B}$

2. При $A=0$, $B\neq 0$ не имеет корней. $\begin{cases}A=0\\B\neq 0\end{cases}$ $x\in\varnothing$

3. При $\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$ имеет множество корней. $x\in R$

Пропорция

Равенство двух отношений называют пропорцией.

$$a:b=c:d \text{ или } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

a и d – крайние члены, b и c – средние члены пропорции.

В верной пропорции произведение крайних членов, равно произведению средних $a\cdot d=b\cdot c$.

Возможны следующие пропорции:

1. $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$;
2. $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$;
3. $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$;
4. $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$;
5. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$;

Квадратное уравнение

Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0.$$

1. Дискриминант: $D=b^2-4ac$,

2. Корни квадратного уравнения: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

а) Если $D>0$, то уравнение имеет два корня:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

б) Если $D=0$, то корни уравнения равны: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

в) Если $D<0$, то уравнение не имеет действительных корней: $x\in\varnothing$

г) Если $ax^2+2kx+c=0$, $a\neq 0$, то

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$$

Приведённое квадратное уравнение

$$x^2+px+q=0, \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q, \quad x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

Разложение на множители квадратного трехчлена

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \quad x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow$$

x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена.

Теорема Виета

1. Если x_1 и x_2 являются корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$, то

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

2. Если x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$, то

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$$

Обратная теорема (теорема Виета)

1. Если $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$, то x_1 и x_2 являются корнями уравнения

$ax^2+bx+c=0$ или $(x-x_1)(x-x_2)=0$

2. Если $\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1 \cdot x_2=q \end{cases}$, то x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$ или $(x-x_1)(x-x_2)=0$

Биквадратное уравнение

$$ax^4+bx^2+c=0;$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}};$$

$$x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

1. Сумма корней: $x_1+x_2+x_3+x_4=0$,

2. Произведение корней: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4=\frac{c}{a}$

Система линейных уравнений

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ система линейных уравнений

1. Если $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, система имеет единственное решение

2. Если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, система не имеет решений

3. Если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, система имеет множество решений.

Числовые промежутки

Открытый интервал: $a < x < b$  $x \in (a, b)$

Замкнутый интервал $a \le x \le b$  $x \in [a, b]$

Полуинтервал а) $a < x \le b$  $x \in (a, b]$

б) $a \le x < b$  $x \in [a, b)$

Замкнутый луч: $\begin{cases} a \le x < +\infty \\ -\infty < x \le a \end{cases}$  $x \in [a, +\infty)$

 $x \in (-\infty, a]$

Неравенства и их свойства

1. Если $a > b$, то $a - b > 0$
2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$, $a - c > 0$
3. Если $a > b$, то $a + c > b + c$
4. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$, $ac - bc > 0$
5. Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$, $ac - bc < 0$
6. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$
7. Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$
8. Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} < 0$
9. Если $a > b > 0$, то $a^n > b^n$ $(n \in N)$

10. $a + b \ge 2\sqrt{a \cdot b}$, $a, b > 0$, 11. $a > 0:$ $a + \frac{1}{a} \ge 2$

12. $a < 0;$ $a + \frac{1}{a} \le -2$ 13. $a^2 + \frac{1}{a^2} \ge 2$

14. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$, $a, b > 0$, 15. $a^2 + b^2 \ge 2|a \cdot b|$

Модуль. Свойства модуля

1. $|a| = \begin{cases} a, & если \ a \geq 0 \\ -a & если \ a < 0 \end{cases}$ 2. $|a| \geq 0$; 3. $|a| = |-a|$;

4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; 5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $b \neq 0$; 6. $|a|^2 = a^2$;

7. $|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$; 8. $|a + b| \leq |a| + |b|$;

9. $|a - b| \geq |a| - |b|$;

10. $|a| < c,\ (c > 0) \Rightarrow -c < a < c$; 11. $|a| > c,\ (c > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > c \\ a < -c \end{array}\right.$;

12. $|x - a| = \begin{cases} x - a, & если \quad x - a > 0 \Leftrightarrow x > a \\ 0, & если \quad x - a = 0 \Leftrightarrow x = a \\ -(x - a), & если \quad x - a < 0 \Leftrightarrow x < a \end{cases}$

Уравнения с модулем

Такие уравнения решаются при помощи равносильных преобразований:

1. $|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$; 2. $|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$;

3. $|F(x)| = f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} F(x) = f(x), & если \quad F(x) > 0 \\ F(x) = -f(x), & если \quad F(x) < 0 \end{array}\right.$

4. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$;

5. $F(x, |x - a|) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} F(x,\ x - a) = 0, & если \quad x - a > 0 \\ F(x,\ -x + a) = 0, & если \quad x - a < 0 \end{array}\right.$

6. $|f(x)| = a\ (a > 0) \Leftrightarrow f^2(x) = a^2$; 7. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$;

8. $|f(x)| = a\ (a > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{array}\right.$; 9. $|f(x)| = a\ (a < 0) \Leftrightarrow \varnothing$

Неравенства с модулем

Такие неравенства решаются при помощи равносильных преобразований:

1. $|f(x)| < a \ (a > 0) \Leftrightarrow -a < f(x) < a;$

2. $|f(x)| > a, \ (a > 0) \Leftrightarrow f^2(x) > a^2;$

3. $|f(x)| < |\varphi(x)|, \ \Leftrightarrow f^2(x) < \varphi^2(x);$

4. $|f(x)| > a, \ (a > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{array}\right.$

5. $F(x, |x-a|) > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - a \geq 0 \\ F(x, \ x-a) > b \end{cases} \\ \begin{cases} x - a < 0 \\ F(x, \ -x+a) > b \end{cases} \end{array}\right.$

Иррациональные уравнения

Иррациональные уравнения решаются при помощи следующих равносильных преобразований : $(n \in N)$:

1. $\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) = \varphi(x) \end{cases}$

2. $\sqrt[2n]{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) = \varphi^{2n}(x) \end{cases}$

3. $\sqrt[2n-1]{f(x)} = \sqrt[2n-1]{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) = \varphi(x)$

4. $\sqrt[2n-1]{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) = \varphi^{2n-1}(x)$

5. $\sqrt{f(x)} - \sqrt{\varphi(x)} = a(a \geq 0) \Leftrightarrow f(x) = \left(a + \sqrt{\varphi(x)}\right)^2$

6. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{\varphi(x)} = b(b > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \left(b - \sqrt{\varphi(x)}\right)^2 \\ b - \sqrt{\varphi(x)} \geq 0 \end{cases}$

Иррациональные неравенства

Иррациональные неравенства решаются при помощи следующих равносильных преобразований:

1. $\sqrt[2n]{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<(g(x))^{2n} \end{cases}, \quad n\in N.$

2. $\sqrt[2n]{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)<0 \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\geq 0, f(x)>0 \\ f(x)>(g(x))^{2n} \end{cases} \end{array}\right.$

3. $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)}>1 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0, \quad f(x)>0 \\ f(x)>(g(x))^{2n} \end{cases}$

4. $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)}<1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)<0 \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)>0, f(x)\geq 0 \\ f(x)<(g(x))^{2n} \end{cases} \end{array}\right.$

5. $g(x)<\sqrt{f(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)<0 \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\geq 0, f(x)>0 \\ g^2(x)<f(x) \end{cases} \end{array}\right.$

6. $\sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0, g(x)>0 \\ f(x)<g^2(x) \end{cases}$

7. $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)\geq 0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$

Арифметическая прогрессия

1. Если (a_n) – арифметическая прогрессия, то формула общего члена имеет вид: $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n \in N$

d - разность, a_1 – первый член, a_n – n - ый член, n – количество членов.

$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1}$ или $d = \dfrac{a_n - a_m}{n-m}$;

2. Свойства:

a) Если выполняются следующие равенства $a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$ или $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, то (a_n) последовательность есть арифметическая прогрессия.

b) $a_n - a_m = (n-m)d$; $a_n + a_m = a_k + a_p$, $n + m = k + p$;

c) $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_{n-k} + a_{k+1}$;

3. Если (a_n) – арифметическая прогрессия, то $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ сумма n первых членов арифметической прогрессии, n – количество членов.

a) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$;

b) $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$; $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$

c) $S_n - S_{n-1} = a_n$; d) $S_{n+k} = S_n + S_k + n \cdot k \cdot d$;

Геометрическая прогрессия

1) Если (b_n) – геометрическая прогрессия, то $b_n = b_1 q^{n-1}$, b_1 – первый член прогрессии, b_n - n - ый член прогрессии, $n \in N$ - номер члена геометрической прогрессии, q – знаменатель геометрической прогрессии.

$$n\text{-}1\ b_n = b_2 \cdot q^{n-2} \quad \text{или} \quad b_n = b_k \cdot q^{n-k}, \quad \text{или} \quad b_{n+k} = b_n \cdot q^k;$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = b_2 \cdot q^{n-2} = b_3 \cdot q^{n-3} = \cdots = b_{n-2} \cdot q^2 = b_{n-1} \cdot q$$

$$2)\ q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \cdots = \frac{b_n}{b_{n-1}}; \qquad q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{b_4}{b_2}; \qquad q^3 = \frac{b_4}{b_1} = \frac{b_5}{b_2};$$

$$q^k = \frac{b_n}{b_{n-k}};$$

3) Свойства:

a) $b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}$; $\quad b_n > 0$ $\qquad$ b) $b_{k-1} \cdot b_k \cdot b_{k+1} = b_k^3$;

c) $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_p$; $\qquad n+m=k+p$;

4) Если (b_n) геометрическая прогрессия, то $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$, $\quad (q>1)$.

где S_n - сумма n её первых членов, n – количество членов геометрической прогрессии.

a) $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$; $\qquad$ *b)* $S_n - S_{n-1} = b_n$;

d) $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$; $(q>1, q \neq 1)$ $\qquad$ $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$, $(q>1, q \neq 1)$

e) $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$; $(q<1, q \neq 1)$ $\qquad$ $S_n = \dfrac{b_1 - b_n q}{1-q}$, $(q<1, q \neq 1)$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad |q| < 1 \qquad b_n = b_1 q^{n-1},$$

S – сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

ФУНКЦИЯ

Область определения

1. Если $y=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$, то область определения $f(x)\neq 0$.

2. Если $y=\sqrt[2n]{f(x)}$ $(n\in N)$, то область определения $f(x)\geq 0$.

3. Если $y=\sqrt[2n+1]{f(x)}$ $(n\in N)$, то область определения $-\infty<x<\infty$.

4. Если $y=\dfrac{1}{\sqrt[2n]{f(x)}}$ $(n\in N)$, то область определения $f(x)>0$.

5. Если $y=\log_{\varphi(x)}f(x)$, то область определения $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)>0\\0<\varphi(x)<1\end{cases}\\\begin{cases}\varphi(x)>1\\f(x)>0\end{cases}\end{array}\right.$

6. Если $y=\arccos\varphi(x)$, $y=\arcsin\varphi(x)$,то область определения $-1\leq\varphi(x)\leq 1$.

Область значений

1. Если $y=a^x$, то область значений $E(y)=(0;\ \infty)$.

2. Если $y=\log_a f(x)$, то область значений $E(y)=(-\infty;\ \infty)$.

3. Если $y=a\sin x+b\cos x$, то область значений $E(y)=\left[-\sqrt{a^2+b^2};\ \sqrt{a^2+b^2}\right]$

4. Если $y=\arccos x$, то область значений $E(y)=[0;\ \pi]$.

5. Если $y=\arcsin x$, то область значений $E(y)=\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

6. Если $y=arctgx$, то область значений $E(y)=(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2})$.

7. Если $y=arcctgx$, то область значений $E(y)=(0;\ \pi)$.

8. При $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ вершиной параболы будет $(x_o,\ \sqrt{y_o})$,

$$y_o=\frac{4ac-b^2}{4a},\quad x_o=-\frac{b}{2a},\quad y_0\geq 0\ .$$

a) Если $a>0$, то $f(x)$ область значений $E(y)=[\sqrt{y_0};\infty)$.

b) Если $a<0$, то $f(x)$ область значений $E(y)=(-\infty;\sqrt{y_0}]$.

Чётность и нечётность функции

1. Если $f(-x) = f(x)$, то $f(x)$ – функция чётная.
2. Если $f(-x) = -f(x)$, то $f(x)$ – функция нечётная.
3. Если не выполняются приведенные выше условия, то функция не является ни четной, ни нечетной.
4. $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^{2n}$ $(n \in N)$, $y = \cos x$ - функции четные.
5. $y = x$, $y = x^3$, $y = x^{2n-1}$ $(n \in N)$, $y = \sin x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, - функции нечетные.
6. $y = \arcsin x$, $y = arctgx$ - функции нечетные.
7. $y = x^2-5x+2$, $y = x+3$, $y = \arccos x$, $y = arcctgx$ - функции и ни четные и ни нечетные.
8. График четной функции симметричен относительно оси ординат.
9. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Периодичность

1. Число T называют периодом функции $f(x)$, если при $x \in D(f)$ имеет место $f(x+T) = f(x) = f(x-T)$.

Периодические функции описывают процессы, которые повторяются. Например, синус, косинус, тангенс и котангенс – периодические функции.

2. У функций $y = \sin kx$ и $y = \cos kx$ период равен $T = \frac{2\pi}{|k|}$, $k \neq 0$.

3. У функций $y = tgkx$ и $y = ctgkx$ период равен $T = \frac{\pi}{|k|}$, $k \neq 0$.

4. У функций $y=\sin(ax+b)$ и $y=\cos(ax+b)$период раве $T = \frac{2\pi}{|a|}$, $a \neq 0$

5. У функций $y=tg(ax+b)$ и $y=ctg(ax+b)$ период равен $T=\frac{\pi}{|a|}$, $a\neq 0$.

6. Пример найдите период функции $y=5sin(2x+1)+2tg\frac{x}{2}+3cos4x$:

$$T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi,\qquad T_2=2\pi,\qquad T_3=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.\quad НОК\left(\pi,\ 2\pi \ и\ \frac{\pi}{2}\right)=2\pi.$$

Период данной функции равен 2π.

Линейная функция

1. $y = kx + b$ - линейная функция, k называется угловым коэффициентом прямой. Где α – угол, $k=tg\alpha$, который образует прямая $y=kx+b$ с положительным направлением оси OX.

2. Чтобы найти угол φ между двумя прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, используем формулу:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$$

а) при $k_1=k_2$ две прямые параллельны.

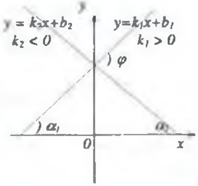
б) при $k_1\cdot k_2=-1$ две прямые перпендикулярны.

в) при $k_1=k_2$ и $b_1=b_2$ прямые совпадают.

г) $k_1=k_2$ и $b_1\neq b_2$ прямые не совпадают.

3. Если заданы две точки на координатной плоскости $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ получаем уравнение прямой проходящей через эти точки:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$



4. Если задан угловой коэффициент k и точка на плоскости $M(x_0;\ y_0)$, то уравнение прямой имеет вид:

$$y-y_0=k\,(x-x_0)$$

5. Условие расположения трех точек $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ и $C(x_3;\ y_3)$ на одной прямой линии.

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

6. Общий вид уравнения прямой:

$$Ax + By + C = 0$$

7. Расстояние от точки $A(x_0;\ y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$, вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

8. Расстояние между двумя параллельными прямыми $Ax + By + C_1 = 0$ и $Ax + By + C_2 = 0$

можно вычислить по формуле:

$$d_1 = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

9. Две прямые $A_1x + B_1y = C_1$ и $A_2x + B_2y = C_2$

а) если прямые параллельны, то $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

б) если прямые совпадают, то $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

в) если прямые пересекаются, то $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$

10. Уравнение прямой в отрезках.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Квадратичная функция

1. Квадратичной функцией называется функция вида: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

2. График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ парабола.

а) если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх;

б) если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз;

в) если $D > 0$, то парабола пересекает ось OX в двух точках;
г) если $D = 0$, то парабола касается оси OX в одной точке;
д) если $D < 0$, то парабола с осью OX не пересекается.

3. Координаты вершины $(x_o; y_o)$ параболы вычисляются:

$$x_o = -\frac{b}{2a}; \quad y_o = ax_o^2 + bx_o + c = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

4. Ось симметрии параболы: $x = x_o = -\dfrac{b}{2a}$

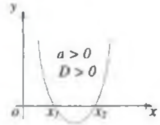
5. Область определения: $D(y) = (-\infty; \infty)$

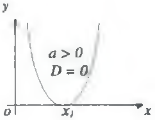
6. Область значений $E(y)$: если $a > 0$, то $E(y) = [y_o; \infty)$;
если $a < 0$, то $E(y) = (-\infty; y_o]$

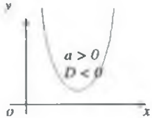
7. При параллельном сдвиге функции $y = f(x)$ на вектор $\vec{a}(m; n)$, получаем функцию вида: $y - n = f(x - m)$.

8. График параболы $y = ax^2 + bx + c$:

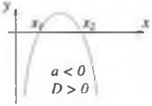
а) если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх:

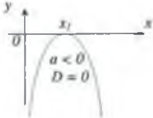


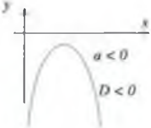




б) если $a < 0$, ветви параболы направлены вниз:

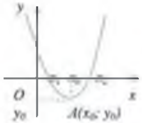






$$D(y) = (-\infty; +\infty),$$

в) в точках $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ график функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a>0)$ – парабола пересекает ось OX $(D>0)$.

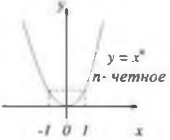


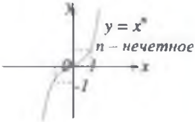
9. При $a > 0$, парабола в точке $x = x_o$, имеет минимум $y = y_o$.

10. При $a < 0$, парабола в точке $x = x_o$, имеет максимум $y = y_o$.

Степенная функция $y = x^{\alpha}$

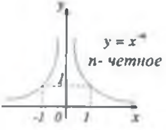
1. $y = x^n$ $(n \in N)$

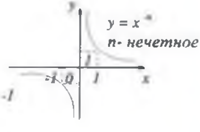




$D(y)=(-\infty; +\infty)$, $E(y)=[0; +\infty)$ $\qquad$ $D(y) = E(y)=(-\infty; +\infty)$

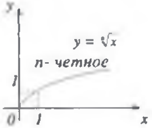
2. $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in N)$

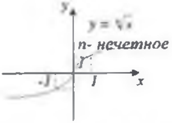




$D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, $E(y)=(0;+\infty)$ $\quad$ $D(y)=E(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

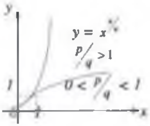
3. $\quad y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad (n\in N).$

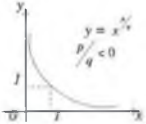




$D(y) = E(y) = [0;+\infty)$, $\quad$ $D(y) = E(y) = (-\infty;+\infty)$

4. $\quad y = x^{\frac{p}{q}} \quad (p\in Z,\ q \in N,\ q \neq 0).$

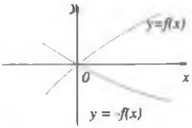




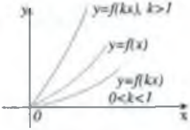
$D(y)=E(y) = [0;+\infty)$ $\quad$ $D(y) = E(y) = (0;+\infty)$

Преобразование графиков

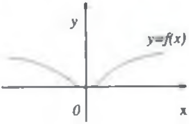
1.

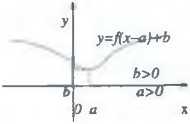


2.

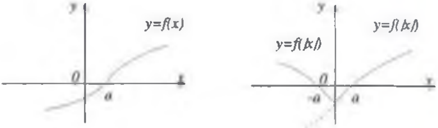


3.

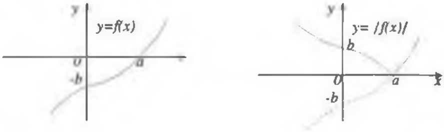




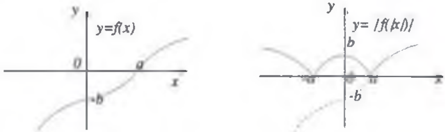
4.



5.



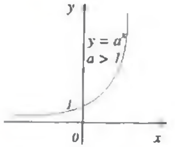
6.

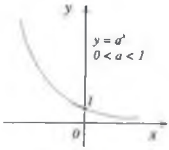


Показательная функция и её график

Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где a – основание, $(a > 0, \quad a \neq 1)$.

1. Область определения: $D(\,y\,) = (\,-\infty;\infty\,)$.
2. Множество значений функции: $E(\,y\,) = (\,0;\infty\,)$.
3. Показательная функция, возрастающая на множестве действительных чисел, если $a > 1$. При $0 < a < 1$ функция убывающая.
4. Показательная функция имеет постоянную точку $(0;\ 1)$, и график этой функции расположен над осью OX .
5. Показательная функция ни четная, ни нечетная и не периодическая.
6. График функции $y = a^x$:





$D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = (0; +\infty)$

Показательные уравнения

Эквивалентные или равносильные преобразования при решении уравнений:

1. $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) = \varphi(x)$. $(a > 0, a \neq 1)$

2. $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$. $(a > 0, a \neq 1, b > 0)$

3. $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b \leq 0 \quad \textit{уравнениене имеет решений} \\ \begin{cases} f(x) = \log_a b \\ a \neq 1, \quad b > 0, \quad a > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

4. $a^{\varphi(x)} = f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \leq 0 \quad \textit{уравнение не имеет решений} \\ \begin{cases} \varphi(x) = \log_a f(x) \\ a > 0, \ a \neq 1 \end{cases} \end{array}\right.$

5. $|f(x)|^{g(x)} = |f(x)|$ имеет решение при следующих условиях:

   a) $g(x)=1$,
   b) $f(x)=1$,
   d) $f(x)=-1$,
   e) $f(x)=0$, $g(x)>0$

Показательные неравенства

Решаем при помощи следующих эквивалентных или равносильных преобразований:

$$1.\ a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$2.\ a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} f(x) > \log_a b, & a > 1, & b > 0; \\ f(x) < \log_a b, & 0 < a < 1, & b > 0 \\ x \in D(f), & a > 0, & b \le 0. \end{array}\right.$$

$$3.\ [f(x)]^{g(x)} > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Например: $\left(\frac{1}{25}\right)^{x^2+5x} \ge 5^{-5-x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{2(x^2+5x)} \ge \left(\frac{1}{5}\right)^{5+x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 10x \le 5 + x \Leftrightarrow (x+5)(x-0,5) \le 0$

Ответ: $[-5;\ 0,5]$.

Логарифм

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, \quad a \ne 1, \quad a > 0, \quad b > 0$$

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$

Свойства логарифмов

1) $\log_a a = 1, \quad a \ne 1, \ a > 0$ 2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a(X \cdot Y) = \log_a X + \log_a Y, \quad X > 0, \quad Y > 0$

4) $\log_a \frac{X}{Y} = \log_a X - \log_a Y$

5) $\log_a b^p = p \log_a b, \quad p \in R$

6) $\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q}\log_a b \quad q \neq 0,\ q \in Q$

7) $\log_{a^q} b = \frac{1}{q}\log_a b$

8) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

9) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

10) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},\ c \neq 1,\ c > 0$

11) $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$

12) $\ln x = \log_e x$ – натуральный логарифм

13) $\lg x = \log_{10} x$ – десятичный логарифм

Логарифмическая функция, её свойства и график

Логарифмической функцией с основанием равным a, называют функцию вида $y = \log_a x,\ (a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$.

1. Область определения: $D(y) = (0; \infty)$ множество положительных чисел.

2. Область значений: $E(y) = (-\infty; \infty)$ множество действительных чисел.

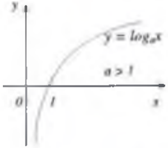
3. При $a > 1$, логарифмическая функция в области определения возрастающая, если $0 < a < 1$ убывающая.

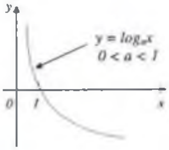
4. Если $a > 1$, логарифмическая функция принимает положительные значения при $x > 1$, и отрицательные при значении $0<x<1$.

5. При $0 < a < 1$, логарифмическая функция принимает положительные значения при $0 < x < 1$ и отрицательные значения при $x > 1$.

6. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

7. График функции $y = \log_a x$:





$D(y) = (0; +\infty)$; $E(y) = (-\infty; +\infty)$

Логарифмические уравнения

Пользуемся следующими эквивалентными преобразованиями:

1. $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b, \quad x > 0 \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$
2. $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b, \quad f(x) > 0, \quad b \in R$
3. $\log_{\varphi(x)} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = \varphi^b(x) \\ f(x) > 0,\ \varphi(x) > 0,\ \varphi(x) \neq 1 \end{cases}$
4. $\log_a f(x) = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = a^{\varphi(x)} \\ f(x) > 0 \end{cases}$
5. $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = \varphi(x) \\ f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$
6. $g(x) = a^{\log_a f(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) = f(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$
7. $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a [f(x)\,g(x)], \qquad f(x)>0, \quad g(x)>0$

Например: $\log_2 (x^2 + 2x) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 2^3 \\ x^2 + 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 8 = 0 \\ x^2 + 2x > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4,\ x_2 = 2 \\ x^2 + 2x > 0 \end{cases}$ Ответ: - 4 и 2.

Логарифмические неравенства

Пользуемся следующими эквивалентными преобразованиями:

1. $\log_a f(x) \geq b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) \leq a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$

2. $\log_a f(x) \geq b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > 1 \\ f(x) \geq a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$

3. $\log_a f(x) < \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$

4. $\log_a f(x) < \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a > 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{array} \right.$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Начальные сведения

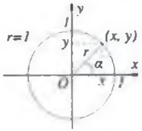
1. $\alpha_{рад} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$

2. $\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha_{рад}$

Таблица значений тригонометрических функций

Угол α, градус, (радиан)	Функции			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
0° (0)	0	1	0	Не существует
15° ($\pi/12$)	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18° ($\pi/10$)	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$22{,}5^\circ$ ($\pi/8$)	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
30° ($\pi/6$)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
36° ($\pi/5$)	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
45° ($\pi/4$)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60° ($\pi/3$)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
75° ($5\pi/12$)	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
90° ($\pi/2$)	1	0	Не существует	0
180° (π)	0	-1	0	Не существует
270° ($3\pi/2$)	-1	0	Не существует	0
360° (2π)	0	1	0	Не существует

Определение



1) $\sin\alpha = y;$ 2) $\cos\alpha = x;$

3) $tg\,\alpha = \dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0;$

4) $ctg\,\alpha = \dfrac{x}{y}, \quad y \neq 0;$

Знаки тригонометрических функций

синус

тангенс и котангенс

Основные тригонометрические тождества

1) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1;$

2) $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{ctg\alpha}; \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z$

3) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1;$

4) $ctg\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{tg\,\alpha}; \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z$

5) $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha};$

6) $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}; \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z$

Выражение тригонометрических функций

1) $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\dfrac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}};$

2) $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = \pm\dfrac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}};$

3) $tg\alpha = \dfrac{1}{ctg\alpha} = \pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}};$

4) $ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha} = \pm\dfrac{\sqrt{1-sin^2\alpha}}{sin\alpha} = \pm\dfrac{cos\alpha}{\sqrt{1-cos^2\alpha}}$;

от расположения α - в какой из четвертей выбирается знак "+" или "–".

Формулы приведения

γ	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$sin\gamma$	$cos\alpha$	$cos\alpha$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$	$sin\alpha$
$cos\gamma$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$	$sin\alpha$	$cos\alpha$	$cos\alpha$
$tg\gamma$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$
$ctg\gamma$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

1) $cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$.
2) $cos(\alpha-\beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$.
3) $sin(\alpha+\beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$.
4) $sin(\alpha-\beta) = sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta$.

5) $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}$

6) $tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}$

7) $ctg(\alpha\pm\beta) = \dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$

Формулы двойного аргумента

1) $sin\,2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$;

2) $cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

3) $tg\,2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$;

4) $ctg\,2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$

5) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; 6) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

7) $tg3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$; 8) $ctg3\alpha = \dfrac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1 - 3ctg^2\alpha}$

9) $\sin 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha}$; 10) $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$

11) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

Понижение степени

1) $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$; 2) $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

3) $\sin^3\alpha = \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$; 4) $\cos^3\alpha = \dfrac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$

5) $tg^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$; 6) $ctg^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$

7) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = -\cos 2\alpha$; 8) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

1) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$;

2) $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$;

3) $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$;

4) $tg\alpha \cdot tg\beta = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{ctg\alpha + ctg\beta} = \dfrac{tg\beta - tg\alpha}{ctg\alpha - ctg\beta}$;

5) $ctg\alpha \cdot ctg\beta = \dfrac{ctg\alpha + ctg\beta}{tg\alpha + tg\beta} = \dfrac{ctg\beta - ctg\alpha}{tg\alpha - tg\beta}$;

6) $tg\alpha \cdot ctg\beta = \dfrac{tg\alpha + ctg\beta}{ctg\alpha + tg\beta}$;

$$7)\ \cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\dots\cdot\cos 2^n\alpha=\frac{1}{2^{n+1}};$$

$$8)\ \cos\frac{\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{3\pi}{2n+1}\cdot\dots\cdot\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n};$$

Например: $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2^2},\quad 5=2\cdot 2+1,\quad n=2$

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cdots\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^7},\quad 15=2\cdot 7+1,\quad n=7.$$

$$9)\ \cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\dots\cdot\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{\sin 2\alpha}{2^{n+1}\sin\frac{\alpha}{2^n}};$$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$$1)\ \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$2)\ \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$3)\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$4)\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$5)\ tg\,\alpha+tg\,\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};\qquad 6)\ tg\,\alpha-tg\,\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};$$

$$7)\ ctg\,\alpha+ctg\,\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta};\qquad 8)\ ctg\,\alpha-ctg\,\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta};$$

$$9)\ \sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right);$$

$$10)\ 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2};\qquad 11)\ 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$12)\ \sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right);\quad 13)\ \sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right);$$

14) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; 15) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$;

16) $$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin kx=\frac{\sin\frac{kx}{2}\cdot\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}};$$

17) $$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos kx=\frac{\sin\frac{kx}{2}\cdot\cos\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}};$$

18) $$\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha=\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha};$$

19) $$\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cdots+\cos(2n-1)\alpha=\frac{\sin n\alpha\cdot\cos n\alpha}{\sin\alpha};$$

20) $$\cos kx+\cos(k+1)x+\cdots+\cos nx=\frac{\cos\frac{n+k}{2}x\cdot\cos\frac{n-k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}};$$

21) $$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{3\alpha}{2}+\sin\frac{5\alpha}{2}+\cdots+\sin\frac{(2n-1)\alpha}{2}=\frac{1-\cos n\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

1) $$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

2) $$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

3) $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

4) $$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Формулы половинного аргумента

1) $\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1;$

2) $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

3) $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2};$

4) $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

5) $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$

6) $tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

7) $ctg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}};$

8) $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

9) $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha};$

10) $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

11) $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};$

12) $tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

13) $ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$

Важные тригонометрические преобразования

1) $\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha;$

2) $\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha;$

3) $tg\alpha\, tg(60^\circ-\alpha)\, tg(60^\circ+\alpha)=tg\, 3\alpha;$

4) $ctg\alpha\, ctg(60^\circ-\alpha)\, ctg(60^\circ+\alpha)=ctg\, 3\alpha;$

5) $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha=\frac{\sin 8\alpha}{8\sin\alpha};$

6) $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha=\frac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha};$

7) $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x;$

8) $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x;$

9) $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha=\frac{1+\cos^2 2x}{2}=1-\frac{\sin^2 2x}{2}=\frac{3+\cos 4x}{4};$

10) $\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{1}{8}(5+3\cos 4x)=\frac{1}{4}(1+3\cos^2 2x);$

11) $\cos^8 x-\sin^8 x=\frac{1}{4}\cos 2x(3+\cos 4x);$

Обратная функция

Пусть $y = f(x)$, и на некотором промежутке функция возрастает (или убывает). В этом случае каждое своё числовое значение функция принимает один раз и она обратима, то есть существует обратная функция $x = g(y)$.

Для нахождения обратной функции $x = g(y)$ нужно

1) выразить x через y;

2) заменить x на y и наоборот y на x.

Например: найдите обратную функцию $y = \dfrac{5}{x+2} + 4$. Область определения $x \neq -2$.

$$a)\ y - 4 = \frac{5}{x+2} \Rightarrow x + 2 = \frac{5}{y-4} \Rightarrow x = \frac{5}{y-4} - 2;$$

$$b)\ x \Leftrightarrow y \quad \text{Ответ: } y = \frac{5}{x-4} - 2;$$

Обратные тригонометрические функции
АРКСИНУС

1. $y = \arcsin x$ Арксинус принадлежит отрезку *[-1; 1]* на котором возрастает.

2. Область определения $-1 \le x \le 1$.

3. Множество значений $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. Нечетная функция, так как $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$

5. График функции $y = \arcsin x$:

a) $\sin(\arcsin x) = x$, если $-1 \le x \le 1$

b) $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$, если $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

c) $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin\ x \le \frac{\pi}{2}$

АРККОСИНУС

1. $y = \arccos x$ Арккосинус принадлежит отрезку *[-1; 1]* на котором убывает.

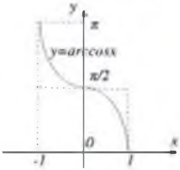
2. Область определения $-1 \le x \le 1$.

3. Множество значений $[0\,;\pi\,]$.

4. Функция ни четная и ни нечетная, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

5. График функции $y=\arccos x$:



a) $\cos(\arccos x) = x$, если $-1 \le x \le 1$

b) $\arccos(\cos a) = a$, если $0 \le a \le \pi$

c) $0 \le \arccos\ x \le \pi$

АРКТАНГЕНС

1. $y = arctgx$ Арктангенс принадлежит промежутку $(-\infty; \infty)$ на котором возрастает.

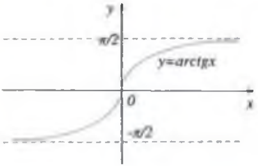
2. Область определения $(-\infty; \infty)$.

3. Множество значений $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Функция нечетная, то есть $arctg(-x) = -arctgx$.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$
$arctgx$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$

5. График функции $y=arctgx$:



a) $tg(arctgx)=x, \quad -\infty < x < \infty$

b) $arctg(tg\alpha)= \alpha, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

c) $-\frac{\pi}{2} < arctgx < \frac{\pi}{2}$

АРККОТАНГЕНС

1. $y = arctgx$ Арккотангенс убывающая на промежутке $(-\infty; \infty)$.

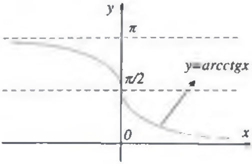
2. Область определения $(-\infty; \infty)$.

3. Множество значений $(0; \pi)$.

4. Функция ни четная, ни нечетная $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$
$arcctgx$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

5. График функции $y=arctgx$:



a) $ctg(arcctgx)=x, \quad -\infty < x < \infty$

b) $arcctg(ctg\alpha)=\alpha, \quad 0 < \alpha < \pi$

c) $0 < arcctgx < \pi$

Основные соотношения для обратных тригонометрических функций

1) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$;

2) $arctgx + arcctgx = \dfrac{\pi}{2}$;

3) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad |x| \le 1;$

4) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad |x| \le 1;$

5) $tg(\,arcctgx\,) = \dfrac{1}{x}, \quad x \ne 0;$

6) $ctg(\,arctgx\,) = \dfrac{1}{x}, \quad x \ne 0;$

7) $tg(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$

8) $\sin(arctgx) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in R;$

9) $tg(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad 0 < |x| \le 1;$

10) $\cos(arctgx) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad -\infty < x < \infty;$

$$11)\ \sin(\operatorname{arcctg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad -\infty<x<\infty;$$

$$12)\ \operatorname{ctg}(\arcsin x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\quad 0<|x|\le 1;$$

$$13)\ \operatorname{ctg}(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad |x|<1;$$

$$14)\ \sin(2\arcsin x)=2x\sqrt{1-x^2},\quad |x|\le 1;$$

$$15)\ \sin(2\arccos x)=2x\sqrt{1-x^2},\quad |x|\le 1;$$

$$16)\ \cos(2\arccos x)=2x^2-1,\quad |x|\le 1;$$

$$17)\ \operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}x)=\frac{2x}{1-x^2},\quad |x|\ne 1;$$

$$18)\ \sin(2\operatorname{arctg}x)=\frac{2x}{1+x^2},\quad -\infty<x<\infty;$$

$$19)\ \cos(2\operatorname{arctg}x)=\frac{1-x^2}{1+x^2},\quad -\infty<x<\infty$$

Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений

1. Решение уравнения $\sin x = a,\ \ (-1 \le a \le 1)$:
$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\quad n \in Z$

Частные решения:

a) $\sin x=0,\ x=\pi n,\ n \in Z;$

b) $\sin x=1,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z;$

c) $\sin x=-1,\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n \in Z.$

Решения уравнения $\sin^2 x = a,\ (0 \le a \le 1)$:

$x=\pm \arcsin\sqrt{a}+\pi n,\ n\in Z$

2. Решение уравнения $\cos x = a,\ (-1\le a\le 1)$:

$x=\pm \arccos a+2\pi n,\quad n\in Z$

<u>Частные решения:</u>

a) $\cos x=0,\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$ b) $\cos x=1,\ x=2\pi n,\ n\in Z;$

c) $\cos x=-1,\ x=\pi+2\pi n,\quad n\in Z.$

Решение уравнения $\cos^2 x=a,\ (0\le a\le 1)$:

$x=\pm \arccos\sqrt{a}+\pi n,\ n\in Z$

3. Решение уравнения $tgx=a,\ (a\in R)$:

$x=arctga+\pi n,\quad n\in Z$

Решение уравнения $tg^2x=a,\ (0\le a\le \infty)$:

$x=\pm arctg\sqrt{a}+\pi n,\ n\in Z$

4. Решение уравнения $ctgx=a,\ (a\in R)$:

$x=arcctga+\pi n,\quad n\in Z$

Решение уравнения $ctg^2x=a,\ (0\le a\le \infty)$:

$x=\pm arcctg\sqrt{a}+\pi n,\ n\in Z$

Решение уравнения $a\sin x+b\cos x=c$:

Решается при помоши вспомогательного φ – угла

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$tg\ \varphi=\frac{b}{a}\ \Rightarrow$$

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}};\qquad \left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$$

Решение некоторых тригонометрических уравнений

1. Решение уравнения $sin(ax + b) = sin(cx + d)$:

$$\left[\begin{array}{l} ax + b - (cx + d) = 2\pi n, \\ ax + b + cx + d = (2n + 1)\pi, \quad n \in Z \end{array}\right.$$

2. Решение уравнения $cos(ax + b) = cos(cx + d)$:

$$\left[\begin{array}{l} ax + b - (cx + d) = 2\pi n, \\ ax + b + cx + d = 2\pi n, \quad n \in Z \end{array}\right.$$

3. Решение уравнения $tg(ax+ b)= tg(cx + d)$ и $ctg(ax + b)= ctg(cx+d)$:

$$ax + b - (cx + d)= \pi n, \quad n \in Z.$$

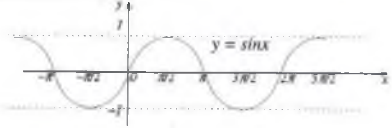
Решение простейших тригонометрических неравенств

1. $sinx > a, \quad |a| \le 1, \quad arcsina+2\pi n < x < (2n+1)\pi - arcsina, \ n \in Z$
2. $sinx \le a, \quad |a| \le 1, \quad (2n-1)\pi - arcsina \le x \le arcsina + 2\pi n, \ n \in Z$
3. $cosx \ge a, \quad |a| \le 1, \quad 2\pi n - arccosa \le x \le arccosa + 2\pi n, \ n \in Z$
4. $cosx \le a, \quad |a| \le 1, \quad arccosa+2\pi n \le x \le 2\pi(n + 1) - arccosa, \ n \in Z$
5. $tgx > a, \quad arctga + \pi n \le x < \frac{\pi}{2}(2n + 1), \ n \in Z$
6. $tgx < a, \quad -\frac{\pi}{2} + \pi n < x < arctga + \pi n, \quad n \in Z$
7. $ctgx > a, \quad \pi n < x < arcctga + \pi n, \quad n \in Z$
8. $ctgx \le a, \quad arcctga + \pi n \le x < \pi(n + 1), \quad n \in Z$
9. $arctga > arctgb \Leftrightarrow a > b$
10. $arcctga > arcctgb \Leftrightarrow a < b$
11. $arcsin\ a > arcsin\ b \Leftrightarrow \begin{cases} a > b \\ b \ge -1 \\ a \le 1 \end{cases}$
12. $arccos\ a > arccos\ b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ a \ge -1 \\ b \le 1 \end{cases}$

Тригонометрические функции, свойства и их графики

Функция $y = \sin x$, график и свойства

1. Область определения $R = (-\infty; \infty)$.
2. Множество значений : $E(y) = [-1; 1]$.
3. Периодичность $T = 2\pi$, то есть $\sin(x+2\pi n) = \sin x$, $x \in R$, $n \in Z$.
4. $y = \sin x$ нечетная функция, $\sin(-x) = -\sin x$.
5. Возрастает при $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.
6. $y = \sin x$ убывающая при $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.
7. Нули функции: $x = \pi n$, $n \in Z$, проходит через точку $(0; 0)$.
8. У функции $y = \sin x$ $y_{max} = 1$, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.
9. Самое меньшее значение $y = \sin x$ функции $y_{min} = -1$, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.
10. Положительные значения $(\sin x > 0)$: $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$
11. Отрицательные значения $(\sin x < 0)$: $x \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$, $n \in Z$
12. График функции $y = \sin x$:



Функция $y = \cos x$, свойства и её график

1. Область определения $R = (-\infty; \infty)$.
2. Множество значений $E(y) = [-1; 1]$.
3. Периодичность $T = 2\pi$. то есть $\cos(x+2\pi n) = \cos x$, $x \in R$, $n \in Z$.
4. $y = \cos x$ - чётная функция, $\cos(-x) = \cos x$.

5. Функция на отрезках $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in Z$ возрастающая.

6. Функция на отрезке $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$ с *1 до* -1 убывающая.

7. Нули функции: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, график проходит через точку $(0; 1)$.

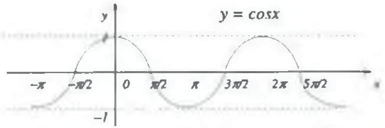
8. Наибольшее значение функции 1 при $x = 2\pi n$, $n \in Z$

9. Наименьшее значение функции -1, при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$

10. Положительные значения $(\cos x > 0)$: $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in Z$

11. Отрицательные значения $(\cos x < 0)$: $x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in Z$

12. График функции $y = \cos x$:



Функция $y = tgx$, свойства и её график

1. Область определения : $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$

2. Множество значений $E(y) = (-\infty; \infty)$.

3. Периодичность $T = \pi$, то есть $tg(x + \pi n) = tgx$, $x \in R$, $n \in Z$.

4. $y = tgx$ - нечетная функция, $tg(-x) = -tgx$.

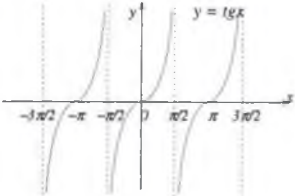
5. Нули функции: $x = \pi n$, $n \in Z$, график проходит через точку $(0; 0)$.

6. Положительные значения функции при : $x \in (\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in Z$.

7. Отрицательные значения $(tgx < 0)$: $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n)$, $n \in Z$.

8. Функция на промежутках $(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in Z$ возрастает.

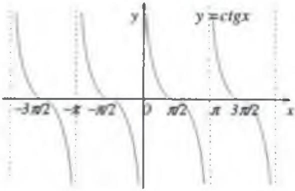
9. График функции $y = tgx$:



Функция $y = ctgx$, свойства и её график

1. Область определения : $x \neq \pi n,\ n \in Z$,
2. Множество значений : $E(y) = (-\infty;\ \infty)$.
3. Периодичность $T = \pi$, то есть $ctg(x+\pi n)=ctgx$, $x \in R$, $n \in Z$.
4. $y = ctgx$ - нечетная функция, $ctg(-x) = -ctgx$.
5. Нули функции, $ctgx = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.
6. Положительные значения $(ctgx>0)$: $x \in (\pi n,\ \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in Z$
7. Отрицательные значения функции : $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \pi n)$, $n \in Z$.
8. Функция на промежутках $(\pi n,\ \pi + \pi n)$, $n \in Z$ убывает.

9. График функции $y = ctgx$:



ПРОИЗВОДНАЯ

Производная функции $y = f(x)$ в точке x равна:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Таблица производных

1) $y = C$, C – постоянная $y' = 0$;
2) $y = x$, $y' = 1$;
3) $y = kx + b$, $y' = k$;
4) $y = x^n$, $y' = nx^{n-1}$;
5) $y = \frac{1}{x}$, $y' = -\frac{1}{x^2}$;
6) $y = \sqrt{x}$, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
7) $y = a^x$, $y' = a^x \ln a$;
8) $y = e^x$, $y' = e^x$;
9) $y = \ln x$, $y' = \frac{1}{x}$;
10) $y = \log_a x$, $y' = \frac{1}{x \ln a}$;
11) $y = \sin x$, $y' = \cos x$;
12) $y = \cos x$, $y' = -\sin x$;
13) $y = tgx$, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
14) $y = ctgx$, $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
15) $y = arcsinx$, $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
16) $y = arccosx$, $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
17) $y = arctgx$, $y' = \frac{1}{1+x^2}$;
18) $y = arcctgx$, $y' = -\frac{1}{1+x^2}$;

Вычисление производных

1. Если $U = U(x)$ va $V = V(x)$, то:

   a) $(U \pm V)' = U' \pm V'$;

   b) $(c \cdot U)' = C \cdot U'$, C – постоянноя

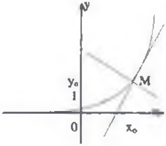
2. $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$;

3. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$

Угловой коэффициент касательной

$k = f'(x_o) = tg\alpha$ - угловой коэффициент касательной, где α -угол образованный с положительным направлением оси OX.

Уравнение касательной



$y - y_o = f'(x_o)(x - x_o)$, для $f(x)$ в точке $M(x_o, y_o)$.

Уравнение нормали, проведенной в точке $(x_0; y_0)$.

$$y - y_o = -\frac{1}{f'(x_o)}(x - x_o)$$

Правило дифференцирования сложной функции

Пусть $y = f(u)$, $u = u(x)$ и $y(x) = f(u(x))$ - сложная функция.

Дифференцирование сложной функции: $y'_x = f'_u \cdot u'_x$

Формулы дифференцирования сложных функций

1) $y = u^n$, $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;

2) $y = a^u$, $y' = a^u \cdot lna \cdot u'$;

3) $y = e^u$, $y' = e^u \cdot u'$;

4) $y = lnu$, $y' = \frac{u'}{u}$;

5) $y = log_a u$, $y' = \frac{u'}{u \cdot lna}$;

6) $y = sinu$, $y' = cosu \cdot u'$;

7) $y = cosu$, $y' = -sinu \cdot u'$;

8) $y = tgu$, $y' = \frac{u'}{cos^2 u}$;

9) $y = ctgu$, $y' = -\frac{u'}{sin^2 u}$;

Применение производной к исследованию функции

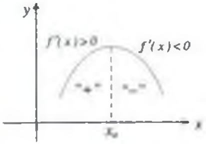
Возрастание и убывание функции на интервале

a) Если функция $f(x)$ во всех точках интервала $[a, b]$ имеет положительную производную $f'(x)>0$, то она возрастает на этом интервале.

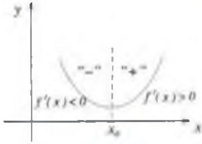
b) Если функция $f(x)$ во всех точках интервала $[a, b]$ имеет отрицательную производную $f'(x)<0$, то она убывает.

Экстремумы функции

Если точка x_o является точкой экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_o)=0$.



$x=x_o$ точка максимума



$x=x_o$ точка минимума

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $[a,b]$

a) Пусть $f'(x)=0$ и пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ - критические точки функции $f(x)$ на отрезка $[a,b]$.

б) Находятся $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k), f(a), f(b)$.

в) Из (*б*) находятся наибольшие и наименьшие значения функции.

Первообразная

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$ или $f(x) \Rightarrow F(x)$.

Таблица первообразных для некоторых функций

№	Функции $f(x)$	Первообразные $F(x)$
1	k – постоянная	$kx + c$
2	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
3	$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x} + c$
4	$1/x$	$ln\|x\| + c$
5	$a^x,\ a>0$	$\frac{a^x}{ln\,a} + c$
6	e^x	$e^x + c$
7	$sinx$	$-cosx + c$
8	$cosx$	$sinx + c$
9	tgx	$-ln\|cos\ x\| + c$
10	$ctgx$	$ln\|sin\ x\| + c$
11	$\frac{1}{cos^2 x}$	$tgx + c$
12	$\frac{1}{sin^2 x}$	$-ctgx + c$

Таблица первообразных сложных функций

№	Функции $f(x)$	Первообразные $F(x)$
1	$(ax \pm b)^n$	$\frac{1}{a}\frac{(ax \pm b)^{n+1}}{n+1} + c$
2	$\frac{1}{\sqrt{ax \pm b}}$	$\frac{2}{a}\sqrt{ax \pm b} + c$
3	$\frac{1}{ax \pm b}$	$\frac{1}{a} \ln \lvert ax \pm b \rvert + c$
4	$m^{ax \pm b},\ m > 0$	$\frac{1}{a}\frac{m^{ax \pm b}}{\ln m} + c$
5	$e^{ax \pm b}$	$\frac{1}{a} e^{ax \pm b} + c$
6	$\sin(ax \pm b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax \pm b) + c$
7	$\cos(ax \pm b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax \pm b) + c$
8	$\frac{1}{\cos^2(ax \pm b)}$	$\frac{1}{a} tg(ax \pm b) + c$
9	$\frac{1}{\sin^2(ax \pm b)}$	$-\frac{1}{a} ctg(ax \pm b) + c$

Правила нахождения первообразных

1. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ $f(x) \Rightarrow F(x)$, то функция $cF(x)$ является первообразной для функции $Cf(x)$..

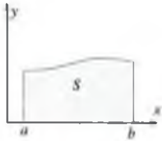
2. Если. $f(x) \Rightarrow F(x)$ то для функции $f(ax+b) \Rightarrow \frac{1}{a} F(ax+b)$, a и b – заданные числа.

Определённый интеграл

Формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

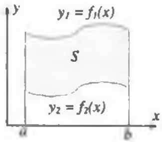
Нахождение площадей:



Площадь криволинейной трапеции

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Если $f_1(x) > f_2(x) > 0$ на. $[a;b]$ то



$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

Если $y = f(x)$ $(f(x) > 0)$, то объём тела вращения:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_a^b y^2\,dx$$

Решение нестандартных задач

1. Если $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$, то

$$\begin{cases} x-a=o \\ y-b=0 \\ z-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ y=b \\ z=c \end{cases}$$

2. Пусть x_1, x_2, x_3 корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$. Тогда:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-a \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b \\ x_1x_2x_3=-c \end{cases}$$

3. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x-a$ равен значению многочлена $P(x)$ в точке $x=a$.

4. *а)* $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+n$, сумма коэффициентов многочлена $P(x)$ равно – $P(1)$.

б) Сумма коэффициентов при чётной степени x равна:

$$P_{чет.}=\frac{1}{2}[P(1)+P(-1)]$$

в) Сумма коэффициентов при нечётной степени x равна:

$$P_{нечет.}=\frac{1}{2}[P(1)-P(-1)]\ .$$

5. Наибольшее и наименьшее значение выражения $a\sin x+b\cos x$ находится по неравенству:

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$$

ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

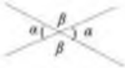
Углы

1) 

Сумма смежных углов равна 180°.

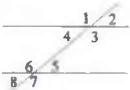
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

α и β – смежные углы.

2) 

Вертикальные углы равны

$$\alpha = \alpha, \quad \beta = \beta$$

3) 

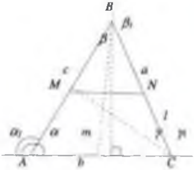
Параллельность прямых

$$\angle 7 = \angle 3, \quad \angle 5 + \angle 3 = 180^\circ$$

$$\angle 2 = \angle 5, \quad \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$$

$\angle 3$ и $\angle 5$ - внутренние односторонние углы.

Треугольник



a, b, c – стороны ΔABC ;

α, β, γ – внутренние углы треугольника;

$P = a + b + c$ – периметр треугольника;

$P = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр треугольника;

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – внешние углы ΔABC ;

h_a, h_b, h_c – высоты треугольника соответственно опущенные на стороны a, b, c;

MN – средняя линия треугольника;

R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей;

S – площади геометрических фигур.

m_a, m_b, m_c – медианы опущенные на стороны a, b, c;

l_a, l_b, l_c – биссектрисы $\angle A, \angle B, \angle C$;

1. Сумма углов треугольника равна 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

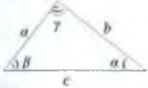
2. Сумма внешнего угла со смежным ему углом равна 180°:

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ, \quad \beta + \beta_1 = 180^\circ, \quad \gamma + \gamma_1 = 180^\circ$$

$$\alpha_1 = \beta + \gamma, \quad \beta_1 = \alpha + \gamma, \quad \gamma_1 = \alpha + \beta, \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ$$

3. Неравенство треугольника:

$$\begin{cases} a + b > c \\ a + c > b \\ b + c > a \end{cases} \qquad \begin{cases} |a - b| < c \\ |a - c| < b \\ |b - c| < a \end{cases}$$



4. Теорема синусов:

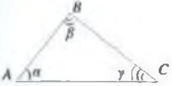
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

5. Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



6. Теорема тангенсов:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{ctg\,\frac{\gamma}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{tg\,\frac{\alpha+\gamma}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\gamma}{2}} = \frac{ctg\,\frac{\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\gamma}{2}}; \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{tg\,\frac{\beta+\gamma}{2}}{tg\,\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{ctg\,\frac{\alpha}{2}}{tg\,\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

7. Формула Мольвейдс

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}; \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}};$$

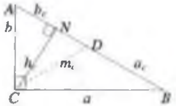
8. Если c – большая сторона в остроугольном треугольнике, то

$$a^2 + b^2 > c^2$$

9. Если c – большая сторона в тупоугольном треугольнике, то

$$a^2 + b^2 < c^2$$

Прямоугольный треугольник



a_c и b_c – проекция катетов a и b на гипотенузу, $AN = b_c$, $NB = a_c$.

h_c – высота опущенная на гипотенузу.

$a^2 + b^2 = c^2$ – теорема Пифагора.

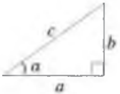
$c = a_c + b_c$, $AD = BD = CD = m_c = R$

$$S = \frac{1}{2}ab; \quad S = \frac{1}{2}ch_c; \quad R = \frac{c}{2}; \quad S = r^2 + 2R \cdot r$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}; \quad a^2 = ca_c; \quad b^2 = cb_c; \quad h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}; \quad h_c = \frac{a \cdot b}{c}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2}; \quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + b^2}; \quad m_c = c/2$$

Синус, косинус, тангенс и котангенс угла



$$\sin\alpha = \frac{b}{c}; \quad \cos\alpha = \frac{a}{c}; \quad tg\,\alpha = \frac{b}{a};$$

$$ctg\,\alpha = \frac{a}{b};$$

Высота треугольника

1. Перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется высотой треугольника.

$$h_a = \frac{2S}{a}; \quad h_b = \frac{2S}{b}; \quad h_c = \frac{2S}{c};$$

2. Около произвольного треугольника можно описать окружность, и притом только одну. Центром окружности является точка пересечения перпендикуляров, проведённых через середины сторон:

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}; \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c};$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{2h_a \cdot h_b \cdot h_c \cdot R}; \quad h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

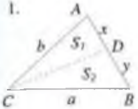
3. Сумма перпендикуляров, опущенных из внутренней точки равностороннего треугольника к его сторонам, равна его высоте:

$$h_1 + h_2 + h_3 = h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

4. Для любого треугольника: $h_a \le l_a \le m_a$

Биссектриса треугольника

1.



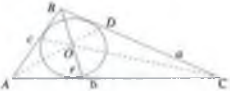
Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам треугольника.

$$\frac{b}{a} = \frac{x}{y}; \quad c = x + y; \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{x}{y} \quad CD^2 = a \cdot b - x \cdot y$$

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}; \quad l_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)};$$

$$l_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}; \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

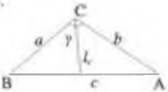
2. В любой треугольник можно вписать окружность и центром окружности будет являтся точка пересечения его биссектрис.



$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{S}{p}; \quad \frac{OA}{OD} = \frac{c+b}{a}$$

O – точка пересечения биссектрис.

3.



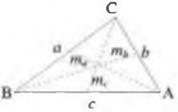
Из вершины C треугольника проведена биссектриса l_c. $\angle C = \gamma$, тогда

$$l_c(a + b) \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = ab\sin\gamma$$

Медиана треугольника

Медианной треугольника называется отрезок, который соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны треугольника.

1. В треугольнике три медианы пересекаются в одной точке. Точка пересечения делит каждую медиану в отношении 2:1, если считать от вершины, из которой проведена медиана.



2. Медиана опущенная

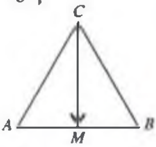
m_a – на сторону a,

m_b – на сторону b,

m_c – на c

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2};$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}; \qquad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2};$$



3. $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

4. $a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$; $\qquad b = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}$;

$$c = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}; \qquad \overline{CM} = \frac{1}{2}\left(\overline{BC} + \overline{AC}\right)$$

$\overline{CM}$ - медиана, проведённая из вершины C на AB.

5. Пусть O - точка пересечения медиан:

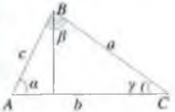
а) На плоскости: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$, $O(x;y)$

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\qquad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3};$$

б) В пространстве: $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$, $O(x;y;z)$

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\qquad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3};\qquad z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3};$$

Площадь треугольника



1. $S=\frac{1}{2}ah_a;\quad S=\frac{1}{2}bh_b;\quad S=\frac{1}{2}ch_c;$

2. $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha\quad S=\frac{1}{2}ac\sin\beta$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

3. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};\quad p=\frac{a+b+c}{2};$

4. $S=\frac{abc}{4R};\quad S=pr$

5. $S=\frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)};\quad m=\frac{m_a+m_b+m_c}{2}$

6. $S=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha};\quad S=\frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta};\quad S=\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma};$

7. Медиана треугольника делит его площадь пополам.

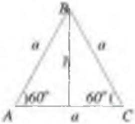
Равносторонний треугольник

$AB = AC = BC = a, \quad \alpha = \beta = \gamma = 60^\circ.$

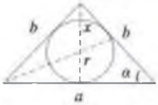
$h = l = m = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad R = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

$R = 2r, \quad R = \frac{2}{3}h, \quad r = \frac{1}{3}h, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$h = r + R = 1{,}5R = 3r$



Равнобедренный треугольник



a – основание, b – боковая сторона, h – высота, α – угол при основании.

1) $r = \frac{a}{2} \cdot tg\frac{\alpha}{2}$; 2) $r = \frac{a \cdot h}{a + 2b}$; $h = x + r$

3) $\frac{a/2}{b} = \frac{r}{x}$; $R = \frac{b^2}{2h}$ 4) $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (h-R)^2 = R^2$; 5) $S = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4}$

Радиус окружности, описанной около треугольника

1) $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$; $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$

2) Если R и r являются радиусами описанной и вписанной окружностей треугольника, а длина между центрами окружностей равна d, то

$$d^2 = R^2 - 2R \cdot r.$$

Подобие треугольников

a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 - стороны подобных треугольников, P_1 и P_2 – периметры, S_1 и S_2 – площади.

1) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{P_1}{P_2}$; $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = \cdots = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2$

Выпуклый четырёхугольник

1) d_1 и d_2 – диагонали.

φ – угол между диагоналями.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi ,$$

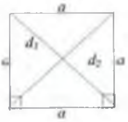
2) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - углы: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$,

3) $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ – внешние углы:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 360^\circ,$$

4) P – периметр, $P = a + b + c + d$. a, b, c, d – стороны четырёхугольника.

Квадрат

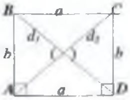


$d_1 = d_2 = d$, $d_1 \perp d_2$, $d = \sqrt{2}\, a$,

$S = a^2$, $S = \frac{1}{2} d^2$,

$R = \frac{d}{2}$, $r = \frac{a}{2}$, $P = 4a$

Прямоугольник



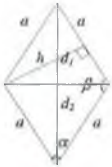
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$.

$d_1 = d_2 = d$, $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

$S = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi$, $S = ab$, $R = \frac{d}{2}$

$P = 2(a+b)$ a, b – стороны прямоугольника, d – диагональ.

Ромб



$d_1 \perp d_2$, $\alpha + \beta = 180^\circ$, $S = ah = 2ar$,

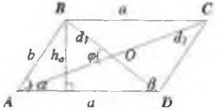
$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, $S = a^2 \sin\alpha$, $r = \frac{h}{2}$

$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$; $d_1 = 2a \cos\frac{\beta}{2}$,

$d_2 = 2a \sin\frac{\beta}{2}$, $r = \frac{1}{2} a \sin\alpha$, $P = 4a$

a – сторона ромба, d_1, d_2 – диагонали, h – высота, α – острый угол, β – тупой угол.

Параллелограмм



$AO = OC$, $BO = OD$

$\alpha + \beta = 180^\circ$, $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$;

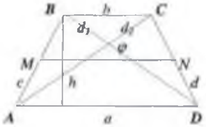
$S = ah_a$, $S = bh_b$, $S = ab \sin\alpha$

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$, $P = 2(a+b)$

$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$; $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$;

a, b – стороны параллелограмма, φ - угол между диагоналями, α – острый угол , β – тупой угол.

Трапеция



$MN = \frac{a+b}{2}$ – средняя линия

$S = \frac{(a+b)h}{2}$, $S = MN \cdot h$,

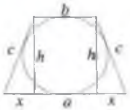
$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.

Если $a + b = c + d$, то в трапецию можно вписать окружность, если $c = d$, т[о] описать окружность.

Равнобедренная трапеция

1) Если $a+b=2c$, то в равнобедренную трапецию можно вписать окружность.

2) Радиус вписанной окружности равен $r=\frac{h}{2}$.



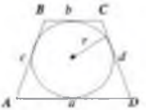
$h=\sqrt{a\cdot b}$; $\qquad r=\frac{h}{2}=\frac{\sqrt{ab}}{2}$; $\qquad x=\frac{a-b}{2}$;

$P = a + b + 2c$

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot d^2\sin\varphi$$

Четырёхугольник описанный около окружности

Если $a + b = c + d$, то можно четырёхугольник описать около окружности.



$S = pr$, $\qquad p=\frac{a+b+c+d}{2}$

$S=\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$

Четырёхугольник вписанный в окружность

Если $\alpha+\gamma=180^\circ$, $\beta+\delta=180^\circ$, то четырёхугольник можно вписать в окружност

$a\cdot b + c\cdot d = d_1\cdot d_2$

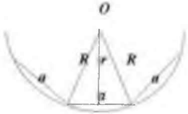
$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

$p=\frac{a+b+c+d}{2}$

Многоугольники

Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника равна $2).180^\circ(n-$ n – число сторон многоугольника. В выпуклом правильном многоугольнике градусная мера одного угла равна $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$. Сумма градусных мер внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°. Число диагоналей – N: $N = \frac{n(n-3)}{2}$

Правильный многоугольник



$S = \frac{1}{2}R^2 n \sin\frac{360^\circ}{n}$, $S = \frac{1}{2}a \cdot n \cdot r$,

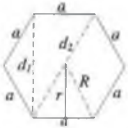
$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$, $r = \frac{a}{2tg\frac{180^\circ}{n}}$

Угол $\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$; внешний угол $\beta = \frac{360^\circ}{n}$; $\alpha + \beta = 180^\circ$

$a = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$; $a = 2r \cdot tg\frac{180^\circ}{n}$;

$r = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}$

Правильный шестиугольник



1) сумма внутренних углов – 720°

2) внутренний угол – 120°

3) внешний угол – 60°

4) $a = R$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ 5) $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = 2\sqrt{3}\cdot r^2$;

6) $d_1 = \sqrt{3}a$; $d_2 = 2R = 2a$

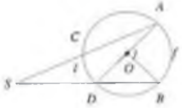
Подобные многоугольники

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 = k^2,\ k -$$ коэффициент подобия.

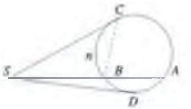
S_1 и S_2 – площади подобных многоугольников, a_1, a_2 – стороны, p_1 и p_2 – периметры.

Углы и хорды окружности

1. $AN \cdot NB = CN \cdot ND$, N – точка пересечения хорд.
2. $\angle ANC = \angle BND = \frac{1}{2}(\cup AfC + \cup BlD)$
3. $\angle ADB = \frac{1}{2} \cup AfB$
4. $\angle AOB = \cup AfB$
5. $\angle ASB = \frac{1}{2}(\cup AfB - \cup ClD)$
6. $SC \cdot SA = SD \cdot SB$



7. $\angle BSC = \angle ASC = \frac{\cup BnC}{2}$
8. $\angle CSD = \frac{1}{2}(\cup CAD - \cup CBD)$
9. $SC^2 = SA \cdot SB$, $CS = DS$



Окружность

1. $d = 2R$, $C = 2\pi R = \pi d$ – длина окружности.
2. $l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$, $l = \alpha_{рад} R$, l – длина дуги окружности.

$\alpha_{рад} = \frac{\pi\alpha}{180^\circ}$, α – центральный угол, измеряемый в градусах. $\alpha_{рад}$ – радианная мера угла α.

3. Если центр окружности находится в точке $A\ (a;\ b)$, а R – радиус окружности, то уравнение окружности имеет вид: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

4. Если центр окружности совпадает с началом координат $O(0;\ 0)$, то уравнение окружности имеет вид: $x^2+y^2=R^2$

Круг

1) Площадь круга: $S=\pi R^2$, $S=\frac{1}{4}\pi d^2$

2) Площадь кругового сектора: $S_{sek}=\dfrac{\pi R^2\alpha}{360^o}$

3) Площадь сегмента: $S_{seg}=\dfrac{\pi R^2\alpha}{360^o}\mp S_{\Delta AOB}$

$$S_{seg}=\frac{\pi R^2\alpha}{360^o}\mp\frac{1}{2}R^2\sin\alpha$$

Расстояние между точками

$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$; $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$

$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$; $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$

Координаты середины отрезка

1) $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$; $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$; $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$

2) $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$; $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$; $z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$ $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$

Векторы

1) Пусть $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ – начало вектора, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ - конец вектора $\overline{AB}$.

Тогда координаты вектора $\overline{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$

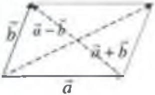
2) Длина вектора: $|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

3) Также вектор можно обозначить $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, где a_1, a_2, a_3 - координаты $\bar{a}$.

4) Длина вектора $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ равна $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

5) Если $\overrightarrow{AB} = \bar{a}$, то $\begin{cases} x_2 - x_1 = a_1 \\ y_2 - y_1 = a_2 \\ z_2 - z_1 = a_3 \end{cases}$.

6) Действия над векторами $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$:



$\bar{c} = \bar{a} \pm \bar{b}$; $\bar{c} = \{a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3\}$

$\lambda\bar{a} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\}$

7) Скалярное произведение: $\bar{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\bar{b} = (b_1; b_2; b_3)$ то

a) $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

b) или: $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$; φ - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

$\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$ - скалярный квадрат.

8) Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}; \quad \cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

9) Если: $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$, $\bar{a} \perp \bar{b}$

10) Если: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$, $\bar{a} \parallel \bar{b}$

11) Векторное произведение:

$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$; $S = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\alpha$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

12) $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ - единичные вектора соответственно осей OX, OY и OZ:

$$\vec{i} = (1;0;0); \quad \vec{j} = (0;1;0); \quad \vec{k}(0;0;1); \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}$$

Вектор, заданный координатами $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, разлагается единичным векторам: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

13) Для любого вектора $\vec{a}$, получаем его a_o – единичный вектор:

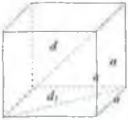
$$\overrightarrow{a_o} = \left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}; \frac{a_2}{|\vec{a}|}; \frac{a_3}{|\vec{a}|} \right)$$

С Т Е Р Е О М Е Т Р И Я

Многогранники

l – боковое ребро; P – периметр; S_{oc} – площадь основания; H – высота; $P_{сеч}$ – периметр сечения; $S_{бок}$ – боковая площадь; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности ; $S_п$ – площадь сечения; V – объём.

Куб



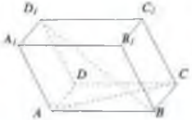
$S = a^2$, $\quad S_{полн} = 6a^2$, $\quad S_{бок} = 4a^2$;

$V = a^3$, $\quad d_1 = \sqrt{2}\,a$, $\quad d = \sqrt{3}\,a$;

$R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $r = \dfrac{1}{2}a$, d_1 – диагональ грани,

d – диагональ куба. R и r - радиусы описанного и вписанного шара. У куба 6 граней, 8 вершин и 12 рёбер. У куба 9 осей симметрии и 9 плоскостей симметрии.

Призма



$S_{бок} = P_{сеч} \cdot l$,

$P_{сеч}$ – периметр перпендикулярного сечения

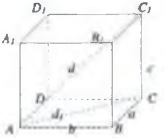
$V = SH$, $\quad V = S_{сеч} \cdot l$.

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{oc}$

Число диагоналей призмы: $N = n(n-3)$

У n – угольной призмы $3n$ - рёбер, $(n+2)$ - граней, $2n$ - вершины.

Прямоугольный параллелепипед



$d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$; $\quad d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$S_{oc} = a \cdot b$, $\quad S_{бок} = P \cdot c = 2(a+b)c$,

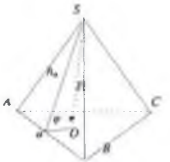
$S_{полн} = Pl + 2S_{oc}$

$S_{полн} = 2(a \cdot c + b \cdot c + a \cdot b)$

$$V = SH, \qquad V = abc$$

a, b, c – три измерения прямоугольного параллелепипеда. Имеет 3 плоскости симметрии.

Пирамида



Боковая поверхность: $S_{бок} = \dfrac{S_{oc}}{\cos\varphi}$

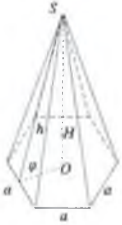
φ – угол между основанием и гранью

Площадь поверхности: $S_{полн} = S_{oc} + S_{бок}$

Объём: $V = \dfrac{1}{3} S_{oc} \cdot H$

У n – угольной пирамиды $2n$ - рёбер, $n+1$ – граней и вершин.

Правильная пирамида



1. $S_{бок} = \dfrac{ph}{2} = \dfrac{anh}{2}$, $p = a \cdot n$

h – апофема, a – длина стороны основания.

2. $\cos\varphi = \dfrac{S_{oc}}{S_{бок}}$

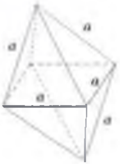
3. $S_{полн} = S_{oc} + S_{бок}$ $\quad V = \dfrac{1}{3} S_{oc} \cdot H$

4. Пусть r_1 – радиус окружности, вписанной в основание правильной пирамиды, φ – угол между основанием и гранью. Радиус r шара, вписанного в пирамиду находим по формуле:

$$r = \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi} \cdot r_1$$

Октаэдр

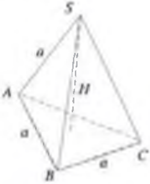
a – длина каждого ребра



$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3};\quad S_{полн} = 2a^2\sqrt{3}$$

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2};\quad r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Правильный тетраэдр



1. $S_{бок} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2;$

a – длина каждого ребра

2. $S_{полн} = \sqrt{3}a^2;\quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12};$

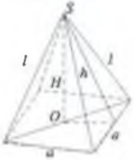
$$H = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}};\quad R = \frac{3}{4}H;\quad r = \frac{H}{4};$$

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4};\quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12};\quad R = 3r$$

R – радиус шара, описанного около тетраэдра, r – радиус шара вписанного в тетраэдр.

Правильная четырехугольная пирамида

l – длина бокового ребра, h – апофема, H – высота, a – сторона основания, φ – угол между гранью и основанием.

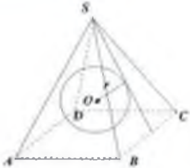


$$h = \sqrt{\frac{a^2}{4} + H^2};\quad l = \sqrt{\frac{a^2}{2} + H^2};$$

$$S_{ос} = a^2;\quad S_{бок} = 2ah;\quad S_{бок} = \frac{S_{ос}}{\cos\varphi};$$

$$S_{полн} = S_{ос} + S_{бок};\quad V = \frac{1}{3}a^2H;\quad H = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{2}}$$

Шар вписанный в многогранник



$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{полн} \cdot r$$

V – объём многогранника,

$S_{полн}$ – площадь полной поверхности многогранника

r - радиус вписанного шара.

$$S_{полн} = \frac{3V}{r}; \quad r = \frac{3V}{S_{полн}}$$

Усечённая пирамида

1. Боковая поверхность усечённой пирамиды состоит из суммы площадей боковых граней.

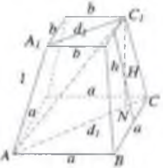
2. Объём: $V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) \cdot H_1$

3. $S_{полн} = S_1 + S_2 + S_{бок}$

4. Пусть: a_1, a_2 – подобные стороны усечённой пирамиды, высота пирамиды – H, высота усечённой пирамиды – H_1, S_1, S_2 – площадь основанием, объём пирамиды - V, объём усечённой пирамиды - V_1, тогда имеют место следующие формулы:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{H_1}{H}; \quad \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2; \quad \frac{V_1}{V} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^3$$

Правильная четырехугольная усечённая пирамида



1. $S_{бок} = 2(a+b)\cdot h = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)\cdot h$

$$p_1 = 4a; \quad p_2 = 4b$$

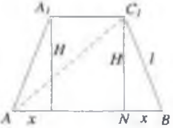
$$AN = y; \quad NC = x$$

$$A_1C_1 = d_2 = \sqrt{2}b$$

$$AC = d_1 = \sqrt{2}a; \quad d = AC_1$$

$$x = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}; \quad y = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}; \quad d = \sqrt{y^2 + H^2}$$

$$H = \sqrt{d^2 - y^2} = \sqrt{l^2 - x^2}$$



2. $S_{полн} = S_1 + S_2 + S_{бок}$

3. Объём: $V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)\cdot H$

a и b - стороны нижних и верхних оснований, H – высота усечённой пирамиды, h – апофема.

Цилиндр

R – радиус основания цилиндра, H – высота

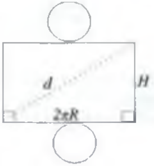
1. $S_{бок} = 2\pi R\cdot H; \qquad S_{полн} = 2\pi R(R+H)$

$$V = \pi R^2\cdot H; \qquad S_{ос} = \pi R^2$$

2. Площадь осевого сечения цилиндра:

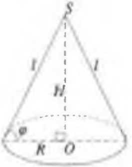
$$S_{осев} = 2R\cdot H; \qquad d^2 = 4R^2 + H^2$$

Развертка цилиндра



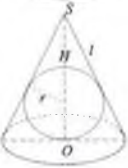
Конус

1. R – радиус основания конуса, l – длина образующей, H – высота, φ – угол между основанием и образующей.



$$S_{бок} = \pi R\, l; \qquad S_{полн} = \pi R(R + l)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H; \quad S_{бок} = \frac{S_{ос}}{\cos\varphi} = \frac{\pi R^2}{\cos\varphi}$$

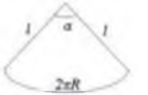


2. Радиус шара, вписанного в конус:

$$r = \frac{R \cdot H}{l + R}$$

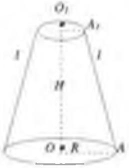
3. Развертка конуса - сектор с радиусом - l и дугой, равной длине окружности - $2\pi R$.

4. Формула угла развертка конуса:



$$\alpha = \frac{360^\circ R}{l}$$

Усечённый конус



R, r – радиусы оснований усечённого конуса, H - высота. $O_1A_1 = r$, $OA = R$

$$S_{бок} = \pi l(R + r)$$

$$S_{полн} = \pi l(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$$

От вершины конуса отсекли конус с высотой H_1 , с основанием площади S_1 и объёмом V_1 . Если объём самого конуса равен V, а площадь основания S, то имеют место следующие формулы:

$$\frac{S_1}{S}=\left(\frac{H_1}{H}\right)^2; \qquad \frac{H_1}{H}=\frac{r}{R}; \qquad \frac{V_1}{V}=\left(\frac{H_1}{H}\right)^3$$

Шар и сфера

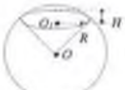
1. Поверхность шара: $S = 4\pi R^2$; $S = \pi d^2$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi}{6} d^3$$ R – радиус шара

d – расстояние от r – радиуса сечения шара до центра шара:

$$r^2 + d^2 = R^2$$

Сегмент шара



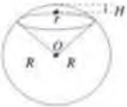
S – площадь сферической поверхности шарового сегмента:

$$S = 2\pi R H ; \qquad S_{полн} = 2\pi R H + \pi r^2$$

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3} H\right)$$

r – радиус усеченного шара, H – высота шарового сегмента.

Сектор шара

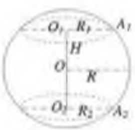


$$S_{полн} = \pi R(2H + r) ;$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$$

Шаровой пояс

$$O_1O_2 = H; \quad O_1A_1 = R_1; \quad O_2A_2 = R_2$$



$$S_{бок} = 2\pi R H : \qquad S_{полн} = \pi(2R H + R_1^2 + R_2^2)$$

$$V = \frac{1}{6}\pi H (3R_1^2 + 2R_2^2 + H^2)$$

Подобные многогранники

$$\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3=\left(\frac{H_1}{H_2}\right)^3=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^3=\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3; \quad \frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2=\left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2$$

Формула Эйлера

Обозначим у выпуклого многогранника вершины *(В)*, грани *(Г)* и рёбра *(Р)*, тогда:

$$В + Г = Р + 2$$

Таблица простых чисел от 1 до 1000

2	79	191	311	439	577	709	857
3	83	193	313	443	587	719	859
5	89	197	317	449	593	727	863
7	97	199	331	457	599	733	877
11	101	211	337	461	601	739	881
13	103	223	347	463	607	743	883
17	107	227	349	467	613	751	887
19	109	229	353	479	617	757	907
23	113	233	359	487	619	761	911
29	127	239	367	491	631	769	919
31	131	241	373	499	641	773	929
37	137	251	379	503	643	787	937
41	139	257	383	509	647	797	941
43	149	263	389	521	653	809	947
47	151	269	397	523	659	811	953
53	157	271	401	541	661	821	967
59	163	277	409	547	673	823	971
61	167	281	419	557	677	827	977
67	173	283	421	563	683	829	983
71	179	293	431	569	691	839	991
73	181	307	433	571	701	853	997

Таблица квадратов чисел от 10 до 99

единичный / десятичный	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

СОДЕРЖАНИЕ

АЛГЕБРА

ФУНКЦИЯ

ТРИГОНОМЕТРИЯ

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИ Е ФУНКЦИИ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, СВОЙСТВА И ИХ ГРАФИКИ

ПРОИЗВОДНАЯ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ

ГЕОМЕТРИЯ

СТЕРЕОМЕТРИЯ

ТАБЛИЦЫ