В ПОМОЩЬ АБИТУРИЕНТУ

Г. ДОРОФЕЕВ
М. ПОТАПОВ Н. РОЗОВ

МАТЕМАТИКА

ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

ДРОФА

В ПОМОЩЬ АБИТУРИЕНТУ

Г. ДОРОФЕЕВ
М. ПОТАПОВ
Н. РОЗОВ

МАТЕМАТИКА

ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ
В ВУЗЫ

6-е издание, стереотипное

ДРОФА
Москва · 2004

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я729
Д69

Дорофеев, Г. В.

Д69 Математика для поступающих в вузы : учеб. пособие / Г. Дорофеев, М. Потапов, Н. Розов. — 6-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2004. — 666, [6] с. : ил.

ISBN 5-7107-8688-8

В пособии собран и систематизирован опыт приемных экзаменов в Московский университет. Однако книга может использоваться не только поступающими в МГУ, но и теми, кто собирается держать вступительные экзамены в любой институт, академию или университет.

Поступающим в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов необходимо тщательно разобрать весь материал, тем, кто готовится к экзаменам в гуманитарные вузы, достаточно будет прорешать задачи по выбору.

Пособие адресовано абитуриентам и учащимся старших классов.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я729

ISBN 5-7107-8688-8

Оглавление

К читателю

Математика уже давно стала основным аппаратом физики и техники. В последние годы математические методы исследования все настойчивее проникают в такие науки, как химия, биология, геология, экономика, лингвистика, педагогика, медицина, право, археология. Поэтому не удивительно, что на многих, в том числе и гуманитарных, факультетах университетов, во всех технических и экономических вузах поступающие сдают экзамены по математике.

Этого экзамена многие боятся. Часто можно услышать разговоры, что на приемных экзаменах по математике поступающим предлагают решать головоломнейшие задачи, а экзаменаторы якобы только тем и обеспокоены, как бы «срезать» побольше поступающих.

Все это, конечно, фантазия. На приемных экзаменах речь идет не о каких-то сложных проблемах, а о задачах в пределах обычного школьного курса. Поводом же для «страхов» и слухов о «головоломках» обычно служит просто слабое и формальное владение стандартным школьным материалом — ведь в этом случае и простая задача покажется неприступной.

Конечно, сказанное отнюдь не означает, что все конкурсные задачи очень просты и решаются немедленно без всяких размышлений и усилий. Уверенно справиться с ними может лишь тот, кто глубоко владеет материалом школьной программы и имеет достаточную практику в решении задач. А это достигается лишь упорным, настойчивым трудом. Математику нельзя выучить за одну ночь — только систематические занятия могут сделать экзаменационные вопросы и задачи простыми и легкими.

Верно, что на экзамене по математике надо уметь решать задачи. Но не каждый понимает, что задачи надо решать *правильно.* В этом различии — просто решать или решать правильно — и состоит суть дела. Очень часто поступающие считают, что решить задачу — значит привести некоторое количество выкладок, имеющих отношение к предложенной задаче. Но эти выкладки далеко не всегда можно считать правильным решением.

Экзаменаторы хотят получить от поступающего *исчерпывающее, логически верное и грамотно изложенное решение* поставленных перед ним задач. Они стремятся не просто проверить знание тех или иных школьных теорем, умение формально проводить те или иные выкладки, но и выяснить, *насколько поступающий владеет логикой математических рассуждений, в какой мере он умеет применять теоретические знания при решении задач.* К сожалению, это и является самым сложным для поступающих — гораздо труднее научиться видеть сущность дела, чем запомнить некоторые формулировки или автоматически выполнить определенные рецепты.

Каждому более или менее подготовленному школьнику знакомы обычные приемы решения обычных задач — различного вида уравнений и неравенств, текстовых задач, тригонометрических примеров, геометрических задач и т. п. Но часто эти знания ограничены лишь всякого рода правилами, как надо поступать и как поступать нельзя, т. е. не выходят за пределы чисто технических умений.

Между тем никакие чисто технические навыки не принесут успеха, если не думать о законности применения тех или иных преобразований, об обоснованности того или иного заключения и т. п., если не понимать саму *логику решения задачи.*

Большинство поступающих хорошо излагает вопросы теории, но многие становятся в тупик или допускают грубые ошибки при применении этой теории на практике. Сколько раз приходилось видеть поступающих, бойко отвечающих на какой-нибудь вопрос, но которые не могли сказать ни слова, стоило лишь поставить тот же вопрос в иной, чуть необычной форме, применить иные, чем в учебнике, обозначения.

Все это свидетельствует о *формальном* усвоении теории, и такого рода знания, конечно, мало чего стоят.

В преодолении подобных недостатков и состоит, собственно говоря, цель этой книги. Мы хотим попытаться научить поступающих задумываться над логикой решения, научить задавать самим себе вопрос «почему?» и отвечать на него, в каждый момент решения задачи ясно сознавать, что сделано и что предстоит еще сделать. Другими словами, мы хотим в этой книге показать, как *правильно* решать задачи.

Эта цель наложила на книгу один существенный отпечаток: мы не всегда приводим самые лучшие решения — решения, которые может придумать опытный математик. Наоборот, мы старались смотреть на задачу глазами человека, не очень искушенного в остроумных решениях и специальных методах, искали самое естественное (с точки зрения поступающего) решение, но зато доводили его до конца логически максимально строго.

Именно это, в общем, и требуется от поступающих — не поиск наиболее короткого и оригинального решения, но умение правильно довести до конца самое обыкновенное решение. Разумеется, это ни в коей мере не означает, что остроумные решения чем-то плохи, и будет очень полезно, если в процессе работы с книгой читатель найдет такие решения для той или иной задачи. Хотя сообразительность — это не то качество поступающего, которое проверяется на экзамене в первую очередь, ее нельзя недооценивать.

Следует, впрочем, подчеркнуть, что лишь активное использование всего арсенала средств элементарной математики создает предпосылки для возникновения той или иной оригинальной идеи. Без творческого владения материалом школьного курса бессмысленно, например, надеяться справиться с любой нестандартной задачей, где подчас приходится комбинировать самые разнообразные математические идеи и факты.

В настоящее время в школах учащиеся знакомятся с понятием непрерывности, с элементами дифференциального и интегрального исчисления, с векторной алгеброй и т. д. Однако для всех экзаменационных задач мы приводим лишь «обычные» решения (хотя некоторые из этих задач могут быть решены — и даже более просто и коротко — с помощью средств «высшей» математики).

Быть может, читателю иногда покажется, что некоторые простые примеры разбираются слишком подробно. Но не следует спешить с таким выводом — очень часто кажется простым как раз то, что не воспринято достаточно глубоко. Лучше постараться понять суть такого подробного, замедленного решения. Как правило, это делается при рассмотрении тех вопросов, которые у поступающих вызывают наибольшие затруднения.

В то же время читатель легко заметит, что не все решения в книге приведены одинаково подробно и полно. Мы рассчитываем, что эта книга должна не столько читаться, сколько изучаться с карандашом и бумагой в руках, а потому сделали упор на разъяснение принципиальных моментов, надеясь, что не вызывающие особых затруднений этапы решения (например, формальные выкладки) читатель проведет сам.

Настоящая книга не является учебником по элементарной математике. Она призвана лишь помочь активизировать свои знания тем, кто уже знаком со школьным курсом в объеме принятых учебников. Мы не даем систематического изложения теории, а ограничиваемся лишь отдельными замечаниями по вопросам, которые обычно ускользают из поля зрения учащихся, анализом и иллюстрацией на примере наиболее сложных, узловых моментов теории и типичных ошибок поступающих, а также более подробным разъяснением некоторых тем, обычно оставляемых в школе без должного внимания. Поэтому, приступая к разбору какого-либо параграфа этой книги, следует предварительно еще раз просмотреть содержание соответствующих разделов школьных учебников.

Книга содержит также достаточное число задач для самостоятельного решения, снабженных ответами (а в некоторых случаях — и указаниями). Однако мы не имеем в виду, что надо выполнять эти упражнения все сразу. Лучше всего решать их выборочно, до тех пор, пока не появится уверенность, что материал уже достаточно усвоен и дальнейшие примеры для его закрепления не нужны. Тогда естественно перейти к другому параграфу, а через некоторое время вернуться к еще не решенным упражнениям, рассматривая их как своего рода задачник.

В книге помещены материалы, дающие представление о порядке проведения, характере и содержании вступительных экзаменов по математике. Мы собрали и по возможности систематизировали опыт приемных экзаменов в Московский университет. Однако книга может использоваться не только поступающими в МГУ, но и теми, кто собирается держать вступительные экзамены в любой институт, академию или университет. Дело в том, что рассматриваемые ниже вопросы носят общий характер, преследуют цель повысить культуру читателя в рамках школьного курса, научить его свободно владеть логикой математических рассуждений. И то, на примере каких задач это делается, уже не имеет существенного значения.

По степени сложности экзаменационных задач, по уровню требований к поступающим все факультеты и вузы можно условно разбить на две группы. В первую группу входят факультеты и вузы, где математика является одним из основных предметов и изучается по расширенной программе, а во вторую — все остальные. Поступающим в вузы первой группы рекомендуется внимательно разобрать и тщательно продумать весь содержащийся в книге материал. Поступающие же в вузы второй группы в процессе работы над книгой должны сами выбирать задачи, которые для них посильны, стараясь, однако, решать и более сложные задачи, с тем чтобы создать некоторый «запас прочности».

Книга может служить пособием для подготовительных отделений вузов. Учащиеся этих отделений должны не просто «освежить» свои знания, но углубить и активизировать их, развить навыки решения задач. По нашему мнению, излагаемый ниже материал вполне подходит для этой цели. Наличие в книге примеров и задач разной трудности позволит преподавателям подготовительных отделений отобрать для разбора на занятиях и для упражнений те, которые соответствуют профилю вуза и уровню подготовленности учащихся.

Нам кажется, что учителя средних школ и студенты пединститутов также почерпнут в этой книге много полезных примеров, задач и методических замечаний, которые можно было бы использовать как непосредственно на уроках, так и при организации внеклассных занятий.

Старшеклассники, желающие самостоятельно углубить свои знания по математике, также найдут в книге материал для размышлений и интересные задачи, решение которых принесет пользу и удовлетворение. Конечно, в этом случае не следует читать книгу подряд, а лучше постепенно, на протяжении всего учебного года, обращаться к тем ее параграфам (или даже их частям), в которых используется лишь уже пройденный в школе материал. Несомненно, что такое «длительное» изучение книги принесет гораздо больше пользы, чем беглое и поверхностное знакомство с ней в сравнительно короткий период подготовки к экзаменам.

Абсолютное большинство содержащихся в книге задач (как разбираемых, так и предлагаемых в качестве упражнений) — это подлинные задачи вариантов вступительных экзаменов в Московский университет. Мы считаем обязательным подчеркнуть, что не являемся авторами самих задач. К сожалению, нет никакой чисто физической возможности перечислить здесь фамилии всех лиц, принимавших участие в их составлении.

В заключение хотелось бы выразить глубокую благодарность сотрудникам механико-математического факультета МГУ, которые помогали нам своими предложениями и дружеской критикой в процессе работы над книгой и тем самым способствовали ее улучшению.

Авторы

Раздел I

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

§ 1. Общие замечания

Опыт приемных экзаменов в вузы показывает, что одни разделы алгебры особых трудностей у поступающих не вызывают, тогда как другие являются для многих настоящим камнем преткновения. Ниже мы остановимся подробно на разъяснении наиболее сложных, в определенном смысле центральных, вопросов курса элементарной алгебры. При этом предполагается, что материал программы вступительных экзаменов уже известен в объеме школьных учебников.

При решении уравнений, как и многих других задач, мы сталкиваемся с необходимостью использовать свойства чисел. Связанные с *действительными* (*вещественными*) *числами* важные понятия — абсолютной величины (модуля) и арифметического квадратного корня — рассмотрены в § 2.

Большие трудности доставляет поступающим построение *графиков функций*. Учитывая, что графики в школьном курсе изучаются недостаточно, но часто предлагаются на вступительных экзаменах, мы в § 3 разбираем некоторые методы построения графиков функций.

Традиционными на вступительных экзаменах являются так называемые *текстовые задачи*. Они позволяют выяснить, умеет ли поступающий логически рассуждать, может ли он переложить «описательное» условие на язык математических формул, не забыв никаких деталей, позволяют проверить, в какой степени он владеет техникой решения систем уравнений. Относящиеся сюда вопросы и задачи рассмотрены в § 4.

Уравнения и неравенства — это, пожалуй, самый обязательный, неотъемлемый элемент экзаменов по математике.

При их решении обычно требуется комплексное использование различных разделов курса, проверяется умение грамотно проводить алгебраические и тригонометрические преобразования. Важные аспекты решения уравнений и неравенств подробно освещены в § 5, 6. Наконец, в § 7 разобрано несколько способов *доказательства неравенств*.

В настоящем параграфе мы сделаем некоторые замечания общего характера по ряду разделов алгебры и арифметики, касающиеся вопросов, зачастую ускользающих из поля зрения поступающих, а также разберем некоторые примеры.

А. *Определения и теоремы*

Окончившего среднюю школу нет надобности убеждать, что все понятия, которыми он пользуется в математике, должны быть строго *определены* (кроме, разумеется, самых *исходных* — таких, как натуральное число, равенство, точка, прямая, плоскость). Эти определения в школьном курсе, конечно, даются, но чем дальше учащийся отдаляется от них и углубляется в теорию и решение задач, чем больше он привыкает к используемым понятиям, тем больше он склонен, сам иногда даже того не сознавая, считать, что эти понятия «ясны сами по себе» и не нуждаются в определении.

Между тем от поступающего требуется четкое логическое понимание курса элементарной математики и, в частности, знание и понимание определений. Поэтому при изучении предусмотренных программой разделов полезно обратить особое внимание на определения, добиться ясного осмысления их формулировок.

Помимо определения понятий, в математике вводятся соглашения об обозначении того или иного объекта или отношения между объектами специальным символом. Эти соглашения, являющиеся по существу *определением символа*, необходимо хорошо помнить. Так, сумму двух чисел записывают с помощью знака +; квадрат числа a, т. е. произведение $a \cdot a$ условливаются обозначать символом a^2; тот факт, что число a меньше числа b, т. е. что число $a - b$ отрицательное, договариваются записывать с помощью знака $<$ в виде $a < b$.

Поступающим хорошо знакомы знаки «нестрогих неравенств», т. е. знаки $\leqslant$ (меньше или равно) и $\geqslant$ (больше или равно); их употребление при проведении формальных преобразований ни у кого не вызывает каких-либо затруднений. Однако опыт показывает, что многие поступающие на самом деле не вполне уяснили себе смысл этих знаков.

Например, на вопрос, *верно ли неравенство* $2 \leqslant 3$, чаще всего дается ответ: «Нет, так как число 2 меньше числа 3», а на вопрос, *верно ли неравенство* $3 \leqslant 3$, ответ: «Нет, поскольку 3 равно 3». А между тем все, кто подобным образом отвечает на указанные вопросы, записывают, не задумываясь, ответ в какой-либо задаче в виде $x \leqslant 3$. Однако их понимание знака $\leqslant$ между конкретными числами означает, что ни одно конкретное число при его подстановке вместо x в неравенство $x \leqslant 3$ не дает верного числового равенства, т. е. что знаком $\leqslant$ не могут быть связаны вообще никакие числа.

В действительности дело обстоит следующим образом. По *определению* знака $\leqslant$, *неравенство* $a \leqslant b$ *считается верным и при* $a < b$, *и при* $a = b$. Таким образом, неравенство $2 \leqslant 3$ *верно*, потому что 2 *меньше* 3, а неравенство $3 \leqslant 3$ *верно*, потому что 3 *равно* 3.

Из этого определения знака $\leqslant$ следует, что неравенство $a \leqslant b$ неверно лишь в случае, когда $a > b$. Поэтому знак $\leqslant$ можно читать не только как «меньше или равно», но и как «не больше». Например, неравенства $2 \leqslant 3$ и $3 \leqslant 3$ читаются соответственно: «2 не больше 3» и «3 не больше 3».

Все сказанное относится также и к знаку $\geqslant$, который наряду с «больше или равно» читается и как «не меньше». По *определению* знака $\geqslant$, *неравенство* $a \geqslant b$ *справедливо, если* $a > b$ *и если* $a = b$; оно неверно только в случае $a < b$.

Почти каждый экзаменующийся знает, что функция $y = 2^x$ определена при всех действительных x, и без труда рисует ее график. Однако вопрос, *что такое* $2^{\sqrt{3}}$, очень часто ставит поступающего в тупик. В лучшем случае говорится, как *вычислить* это число приближенно. Но это нелогично — нельзя же, не зная определения числа, подсчитывать его приближенно!

Чтобы ответить на вопрос, что такое $2^{\sqrt{3}}$, надо вспомнить специальное определение для степени с иррациональным показателем. Следует помнить и остальные определения: степень с натуральным показателем, нулевым, рациональным, отрицательным показателем. Обратим внимание и на то, что общее определение степени с натуральным показателем n неприменимо при $n = 1$, так как произведение с одним сомножителем не имеет смысла. Поэтому равенство $a^1 = a$ является *определением* первой степени числа. Точно так же *по определению* вводится нулевая степень: $a^0 = 1$.

Выясним еще, *почему справедливо равенство*

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a. \tag{1}$$

Многие поступающие доказывают это равенство, проводя преобразования левой части. Разумеется, такой путь допустим, но он свидетельствует, что правила действий с радикалами вытеснили из сознания учащегося само определение радикала. Действительно, как определяется кубический корень из числа? Кубическим корнем из числа a *называется* число, куб которого равен a. Известно и соглашение, что кубический корень из числа a обозначается $\sqrt[3]{a}$. Таким образом, равенство (1) есть просто формульная запись кубического корня с учетом соглашения о смысле символа $\sqrt[3]{}$.

Курс алгебры включает в себя значительное число различных утверждений. Довольно широко распространено мнение, что в геометрии надо рассуждать строго, там есть теоремы, которые требуют аккуратного доказательства, использующего определения, а в алгебре есть только одна теорема — теорема Виета, все же остальное — всякие слова и формулы. Это — глубокое заблуждение. Ведь даже формула квадрата суммы — это *теорема,* а свойства логарифмической функции — уже несколько теорем. Как и в геометрии, каждая теорема алгебры должна сопровождаться доказательством, а перед проведением этого доказательства следует дать определения всем тем понятиям, которые встречаются в ее формулировке.

Опыт показывает, что чем привычнее алгебраическое рассуждение, чем чаще оно применяется при решении задач, тем чаще забывают, что его надо не только правильно формулировать и использовать, но и *доказывать*. Поэтому при подготовке к экзаменам нужно обратить особое внимание на обоснование тех или иных утверждений, особенно кажущихся «очевидными».

Все знают формулу для решения квадратного уравнения, однако просьба привести ее вывод ставит некоторых поступающих в тупик. Такие же трудности связаны с *теоремами о решении квадратных неравенств*. Даже если поступающий правильно решает такие неравенства, он зачастую не может обоснованно ответить, например, на вопрос, *почему* квадратный трехчлен с положительным коэффициентом при x^2 положителен вне интервала между корнями и положителен при любом x, если действительных корней нет.

Между тем строгие доказательства теорем о знаке квадратного трехчлена весьма несложны. Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет различные корни x_1 и x_2 (т. е. его дискриминант положителен), то этот трехчлен разлагается на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \qquad (2)$$

Отсюда видно, что при любом x, большем большего корня, оба сомножителя $x - x_1$ и $x - x_2$ положительны, а при любом x, меньшем меньшего корня, они отрицательны. Следовательно, и в том и в другом случае их произведение $(x - x_1)(x - x_2)$ положительно, а потому правая часть в (2) имеет тот же знак, что и число a. Если же x находится в интервале между корнями x_1 и x_2, то один из указанных сомножителей положителен, а другой отрицателен; поэтому знак произведения в правой части (2) противоположен знаку a.

Таким образом, доказана **теорема:** *значение квадратного трехчлена* $ax^2 + bx + c$ *с положительным дискриминантом* ($b^2 - 4ac > 0$) *при любом* x *вне интервала между корнями трехчлена имеет знак, совпадающий со знаком коэффициента* a; *при любом* x *внутри интервала между корнями — знак, противоположный знаку* a.[1]

Имеет место и другая **теорема:** *значение квадратного трехчлена* $ax^2 + bx + c$ *с отрицательным дискриминантом* ($b^2 - 4ac < 0$) *при любом* x *имеет знак, совпадающий со знаком коэффициента* a. Для доказательства этой теоремы выделим полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]. \quad (3)$$

Так как $b^2 - 4ac < 0$ (как известно, в этом случае квадратный трехчлен не имеет корней), то очевидно, что выражение в квадратных скобках положительно при любом значении x. Поэтому произведение в правой части (3) имеет при любом x тот же знак, что и число a.

Несколько слов надо сказать и по поводу самих формулировок ряда определений и теорем. В учебниках большинство формулировок дается в чисто словесной форме, без использования удобных буквенных обозначений. Иногда это вполне оправданно, но часто слишком усложняет формулировку. Например, вместо того, чтобы говорить «квадрат суммы двух любых чисел равен сумме квадратов этих чисел, сложенной с их удвоенным произведением», проще сказать: «для любых чисел a и b имеем $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$». А определение логарифма удобно дать в такой форме: «число x есть логарифм числа N ($N > 0$) по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$), если $a^x = N$».

---

[1] Аналогично формулируется и доказывается теорема, относящаяся к случаю, когда квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет равные корни, т. е. когда дискриминант равен нулю.

Нужно уметь свободно переводить словесные утверждения в формульные и обратно. Ведь именно это обычно требуется для доказательства теорем. Например, для доказательства того, что «при основании, большем единицы, логарифмы чисел, бо́льших единицы, положительны», мы прежде всего должны ввести обозначения: пусть основание $a > 1$, число $x > 1$, и пусть $y = \log_a x$, а затем установить, что число $y > 0$. Такая перефразировка бывает связана и с необходимостью использовать то или иное определение. Так, прежде чем доказывать утверждение «при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ возрастает», нужно вспомнить, что такое возрастающая функция, и тогда доказательство начинается со слов: «Пусть $a > 1$, а x_1 и x_2 — положительные числа, причем $x_1 < x_2$; докажем, что $\log_a x_1 < \log_a x_2$».

Поступающие не всегда ясно понимают, что некоторые формульные перефразировки одновременно используют и принятые для тех или иных понятий символы. Именно этим объясняется, что в формуле (1) не всегда узнают записанное с помощью знака $\sqrt[3]{}$ определение кубического корня, а в равенстве $a^{\log_a N} = N$ ($N > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$) — символическую запись «привычного» словесного определения логарифма, использующую соглашение об обозначении логарифма числа N по основанию a в виде $\log_a N$.

Задачи

1. Что такое: а) периодическая десятичная дробь; б) $a^{\frac{2}{3}}$; в) квадратное уравнение; г) $\sqrt{11}$; д) модуль числа; е) $a > b$; ж) сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии?

2. Является ли определением, аксиомой или теоремой каждое из следующих утверждений: а) сумма двух чисел не зависит от порядка слагаемых; б) модуль любого числа неотрицателен; в) $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$; г) график функции $y = -3x$ проходит через начало координат?

3. Всегда ли верно равенство $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$?

4. Рассмотрим теорему: «Если дискриминант квадратного уравнения положителен, то это уравнение имеет два различных действительных корня». Сформулировать теоремы: обратную, противоположную и противоположную обратной. Какие из этих теорем верны?

5. Доказать, что если квадратное уравнение не имеет корней, то дискриминант этого уравнения отрицателен.

6. Записать в виде формулы условие того, что среди чисел $a_1, \ldots, a_n$ по крайней мере одно число равно числу α.

7. Записать в виде одного равенства условие того, что среди чисел a, b, c по меньшей мере два равны нулю.

8. Что можно сказать о числах a и b, если $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$? Из каких свойств функции $y = \frac{1}{x}$ следует ответ на этот вопрос?

9. Записать на языке математических соотношений утверждение «функция $y = 3x - x^2$ возрастает при изменении аргумента x на отрезке от -1 до $+1$».

10. Является ли условие, что сумма цифр целого числа делится на 3, необходимым, достаточным или необходимым и достаточным условием для того, чтобы число делилось на 12?

Б. *Целые, рациональные и иррациональные числа*

Задачи, связанные с теми или иными разделами арифметики, довольно часто вызывают затруднения у поступающих. Эти трудности объясняются главным образом тем, что арифметика изучается в средних классах, где многие результаты сообщаются без доказательств. Позднее к этим вопросам фактически не возвращаются. Однако это нисколько не умаляет значения таких разделов арифметики, как вопросы делимости натуральных чисел, свойства дробей, теория пропорций и т. д.

Поступающий должен знать формулировки соответствующих результатов; более того, необходимо уметь их и доказывать: на вступительном экзамене могут предложить в качестве задачи, например, вывести тот или иной признак делимости. Хотя в учебнике эти доказательства отсутствуют, они представляют собой вполне посильное упражнение для каждого, кто успешно овладел курсом алгебры.

Докажем, для примера, *признак делимости на* 9. Пусть задано натуральное число

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}\,.$$

Здесь символ $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ означает $(n + 1)$-значное число, где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ — цифры соответствующих разрядов этого числа, причем, естественно, $a_n \neq 0$.[1] Нам нужно доказать два утверждения: а) если сумма цифр $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ числа N делится на 9, то и само число N делится на 9; б) если число N делится на 9, то и сумма его цифр делится на 9.

Согласно принципу записи чисел в десятичной системе счисления имеем

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Так как $10^k = \underbrace{99\ldots9}_{k \text{ раз}}$ при любом натуральном k, то

$$N = [a_n \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ раз}} + a_{n-1} \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-1 \text{ раз}} + \ldots + a_2 \cdot 99 + a_1 \cdot 9] +$$
$$+ (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0). \qquad (4)$$

Число в квадратных скобках делится на 9, ибо оно есть сумма n слагаемых, каждое из которых делится на 9. Если сумма $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$ также делится на 9, то из (4) следует, что и число N делится на 9; тем самым утверждение а) доказано. Утверждение б) тоже следует из рассмотрения равенства (4): если его левая часть (число N) делится на 9 и первое слагаемое его правой части (число в квадратных скобках) делится на 9, то и второе слагаемое (сумма цифр числа N) должно делиться на 9.

---

[1] Черта сверху ставится для того, чтобы не произошло смешение с произведением чисел $a_n, \ldots, a_0$.

При решении задач бывают полезны различные арифметические факты, которые целесообразно здесь напомнить, написав их с использованием буквенной символики.

Если имеется два целых числа[1] a и b, причем $b > 0$, то существуют единственное целое число q и единственное целое число r, причем $0 \leqslant r < b$, такие, что

$$a = bq + r. \tag{5}$$

Равенство (5) есть не что иное, как *деление числа a на число b с остатком*. В частности, из (5) ясно, что любое четное число имеет вид $2k$, где k — некоторое целое число, а любое нечетное число можно представить в виде $2n + 1$, где n — целое число.

Если имеется натуральное число N, большее единицы, и если $N = n_1^{\alpha_1} \ldots n_k^{\alpha_k}$ — разложение этого числа на простые сомножители (здесь $n_1, \ldots, n_k$ — различные простые делители числа N, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — число их повторений в разложении числа N), то всякий делитель числа N имеет вид $D = n_1^{\beta_1} \ldots n_k^{\beta_k}$, где

$$0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1, \ \ldots, \ 0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k.$$

Если имеются натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$, то их *общим делителем* называется натуральное число, на которое каждое из чисел $a_1, \ldots, a_n$ делится без остатка. Наибольший из общих делителей чисел $a_1, \ldots, a_n$ называется *наибольшим общим делителем*. Если наибольший общий делитель равен 1, то числа $a_1, \ldots, a_n$ называются *взаимно простыми*.

Если натуральное число N делится на каждое из двух взаимно простых чисел a_1, a_2, то N делится и на произведение a_1a_2 этих чисел[2]. Далее, если произведение NM

---

[1] Напомним, что числа 1, 2, 3, ... называются *натуральными*, а числа ..., −2, −1, 0, 1, 2, ... — *целыми*. Совокупность целых чисел удобно записывать в виде 0, ±1, ±2, ...

[2] Легко сообразить, что если a_1 и a_2 не являются взаимно простыми, то число N не обязано делиться на произведение a_1a_2.

натуральных чисел N и M делится без остатка на натуральное число D и если числа M и D взаимно просты, то N делится на D.

Наконец, напомним следующее свойство: *одно из n последовательных целых чисел $k+1$, $k+2$, ..., $k+n$, где k целое число, обязательно делится на n.*

Рассмотрим несколько примеров использования свойств целых чисел для решения задач, связанных с делимостью.

1 *Доказать, что при любом четном n число $N = n^3 + 20n$ делится на 48.*

Всякое четное число n может быть записано в виде $n = 2k$, где k — целое число, поэтому $N = 8k(k^2 + 5)$. Если мы покажем, что при любом целом k число $k(k^2 + 5)$ делится на 6, то будет ясно, что N делится на 48. Проведем очевидное преобразование:

$$k(k^2 + 5) = k(k^2 - 1 + 6) = (k-1)k(k+1) + 6k. \qquad (6)$$

В правой части (6) второе слагаемое делится на 6. Первое же слагаемое есть произведение *трех* последовательных целых чисел, а потому одно из них обязательно делится на 3. Кроме того, из двух последовательных целых чисел (а тем более — из трех) одно обязательно четное. Поскольку 2 и 3 взаимно просты, то $k(k^2 + 5)$ делится на 6 при любом целом k.

2 *Доказать, что ни при каком целом n число $N = n^2 + 1$ не делится на 3.*

Целое число при делении на 3 может дать в остатке лишь числа 0, 1 или 2 (см. (5)). Рассмотрим каждый из этих случаев.

Если целое число n при делении на 3 дает в остатке 0, т. е. представимо в виде $n = 3k$ при некотором целом k, то $N = n^2 + 1 = 9k^2 + 1$. Отсюда видно, что для таких n число N на 3 не делится.

Если $n = 3k + 1$ при некотором целом k, то

$$N = n^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2.$$

Очевидно, что и в этом случае N не делится на 3.

Аналогично рассматривается случай, когда $n = 3k + 2$.

③ *Сколькими нулями оканчивается произведение всех натуральных чисел от* 1 *до* 1962 *включительно?*

Эта задача показалась многим очень трудной из-за своей несколько необычной формулировки. А между тем идея решения проста. Если число

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1961 \cdot 1962$$

разложить на простые множители:

$$N = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p^{\alpha_q}, \qquad (7)$$

то *каждая пара* простых множителей 2 и 5 будет порождать один нуль в числе N, ибо $10 = 2 \cdot 5$. Поэтому и в разложении (7) нас интересуют лишь числа α_1 и α_3.

Займемся сначала определением числа α_3. Очевидно, что каждый делящийся на 5 сомножитель произведения N дает при разложении на простые множители по пятерке; всего таких сомножителей в произведении N имеется[1] $\left[\frac{1962}{5}\right] = 392$. Однако среди сомножителей произведения N будут и такие, которые делятся на 25 — они при разложении на простые множители дадут дополнительно по пятерке; всего таких сомножителей $\left[\frac{1962}{25}\right] = 78$. Далее, еще по одной дополнительной пятерке дадут все те сомножители произведения N, которые кратны 125; таковых имеется $\left[\frac{1962}{125}\right] = 15$. Наконец, имеется 3 сомножителя, делящихся на 625; они, в свою очередь, дадут еще по одной пятерке. Таким образом, в разложении числа N на простые множители будет $392 + 78 + 15 + 3 = 488$ пятерок; $\alpha_3 = 488$.

Аналогичный подсчет показывает, что $\alpha_1 = 1955$. Отсюда видно, что существует 488 пар простых сомножителей 2 и 5, и потому число N оканчивается 488 нулями.

Очень часто идеи, связанные с делимостью чисел, используются при решении задач из других разделов алгебры.

---

[1] Символ $[a]$ означает целую часть числа a.

4 *Найти числа, одновременно являющиеся членами двух арифметических прогрессий:*

$$3, 7, 11, \ldots, 407 \text{ и } 2, 9, 16, \ldots, 709. \qquad (8)$$

Общий член первой прогрессии имеет вид:

$$a_n = 3 + 4(n - 1);$$

указанным членам прогрессии соответствуют значения $n = 1, 2, \ldots, 102$. Точно так же члены второй прогрессии получаются по формуле

$$b_k = 2 + 7(k - 1), \ k = 1, 2, \ldots, 102.$$

Задача, таким образом, состоит в отыскании всех чисел n и k, $1 \leqslant n \leqslant 102$, $1 \leqslant k \leqslant 102$, при которых $a_n = b_k$, т. е. $4n + 4 = 7k$.

Равенство $4(n + 1) = 7k$ выполняется лишь в случае, если k кратно 4, т. е. если $k = 4s$; ясно, что s может принимать значения 1, 2, ..., 25 (ибо $1 \leqslant k \leqslant 102$). Но если $k = 4s$, то $4(n + 1) = 7 \cdot 4s$, т. е. $n = 7s - 1$; так как $1 \leqslant n \leqslant 102$, то допустимыми значениями s являются только 1, 2, ..., 14.

Итак, имеется 14 чисел, являющихся членами одновременно обеих прогрессий (8); сами эти числа легко найти либо из формулы для a_n при $n = 7s - 1$, где $s = 1, 2, \ldots, 14$, либо из формулы для b_k при $k = 4s$, $s = 1, 2, \ldots, 14$.

Как известно, *рациональными* называются числа, которые могут быть представлены в виде $\frac{p}{q}$, где p — целое число, а q — натуральное число. Если число $\frac{p}{q}$ положительное, то $p > 0$, если же число $\frac{p}{q}$ отрицательное, то $p < 0$. Дробь $\frac{p}{q}$ всегда можно считать несократимой, т. е. считать числа $|p|$ и q взаимно простыми. Числу 0 соответствует представление $\frac{p}{q}$ при $p = 0$ (и любом q).

Строгая и полная теория *иррациональных* чисел (обоснование действий над ними и их свойства) изучается в курсе высшей математики. Поступающие должны владеть этой теорией лишь в том объеме, в котором она изложена в учебнике. Однако даваемые там определения и излагаемые факты необходимо усвоить достаточно хорошо.

Эти определения и факты надо не только знать, но и уметь применять при решении задач. К сожалению, часто приходится видеть, как поступающий, дав правильное определение иррационального числа как бесконечной непериодической десятичной дроби, становится в тупик, не умея подступиться к такой, например, задаче.

(5) *Каким числом — рациональным или иррациональным — является* 0,1010010001000010000001...?

Закон построения указанной десятичной дроби достаточно ясен: после каждой единицы идет группа нулей, содержащих на один нуль больше, чем предыдущая группа. Не очень трудно сообразить, что такое построение приводит к непериодической дроби, и мы докажем это от противного.

Предположим, что эта дробь периодическая, и пусть ее период состоит из n цифр. Возьмем в этой дроби разряды, в которых подряд стоят $2n + 1$ нулей, и рассмотрим нуль, стоящий посредине этой группы. Этот нуль находится либо в начале, либо внутри, либо в конце некоторого периода; но во всех перечисленных случаях этот период целиком лежит на взятом «отрезке» из $2n + 1$ нулей. Таким образом, период состоит из одних нулей, а этого быть не может.

Одна из наиболее типичных ошибок состоит в том, что поступающие судят о рациональности или иррациональности некоторого числа просто на основании его «внешнего вида», считая, что сложная комбинация иррациональных чисел всегда будет числом иррациональным. Это, однако, не всегда верно. Например, число $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$ не является иррациональным: простой подсчет показывает, что оно равно 5. Точно так же число $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, несмотря на свой сложный «иррациональный» вид, на самом деле рациональное — оно равно 2 (в этом легко убедиться, заметив, что подкоренные выражения — полные кубы).

Поэтому при выяснении вопроса о том, является ли некоторое число рациональным или иррациональным, необходимо приводить убедительное обоснование. Именно к решению такого рода вопросов приводят нас некоторые задачи.

(6) *Доказать, что* $\log_4 18$ *есть иррациональное число.*

Так как $\log_4 18 = \frac{1}{2} + \log_2 3$, то достаточно показать, что число $\log_2 3$ — иррациональное. Допустим противное — что это число рационально. Это означает, что $\log_2 3 = \frac{p}{q}$. Поскольку $\log_2 3 > 0$, то оба числа p и q — натуральные. Воспользовавшись определением логарифма, перепишем равенство $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ в виде $2^p = 3^q$. Однако это последнее равенство невозможно ни при каких натуральных p и q: слева в нем стоит *четное* число, а справа — *нечетное*. Полученное противоречие завершает доказательство.

(7) *Доказать, что числа* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ *не могут быть членами одной арифметической прогрессии.*

Это утверждение многим кажется почти очевидным. Одни сразу утверждают, что иррациональные числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ «не могут отстоять друг от друга на одно и то же число». Другие даже «обосновывают» эту мысль вычислениями: $\sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 1{,}732 - 1{,}414 = 0{,}318$, а $\sqrt{5} - \sqrt{3} \approx$ $\approx 2{,}236 - 1{,}732 = 0{,}514$.

Прежде всего заметим, что *приближенные вычисления без оценки их точности не считаются в математике доказательством.* Но даже если привести оценку точности вычислений (что сделать нетрудно), это доказательство не является правильным, так как оно показывает, что данные числа не являются тремя *последовательными* членами арифметической прогрессии.

Однако не доказано, что они не могут быть тремя *не соседними* членами одной арифметической прогрессии.

Правильное доказательство проведем от противного. Пусть в некоторой арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью d имеем

$$\sqrt{2} = a_k = a_1 + (k-1)d,$$

$$\sqrt{3} = a_m = a_1 + (m-1)d,$$

$$\sqrt{5} = a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Вычитая первое из этих равенств из второго и второе из третьего, а затем разделив одно из получающихся соотношений на другое, придем к равенству

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{m-k}{n-m}. \qquad (9)$$

Правая часть этого равенства — число рациональное, ибо m, k, n — целые числа. Обозначим это число для краткости через r и перепишем равенство (9) в виде $\sqrt{3} - \sqrt{2} = r(\sqrt{5} - \sqrt{3})$, откуда, возводя в квадрат, имеем

$$r^2\sqrt{15} - \sqrt{6} = \frac{8r^2-5}{2}.$$

Правая часть этого последнего равенства — число снова рациональное; обозначим его через s. Возводя в квадрат обе части равенства $r^2\sqrt{15} - \sqrt{6} = s$, получим

$$\sqrt{10} = \frac{15r^4 - s^2 + 6}{6r^2}.$$

Это равенство показывает, что $\sqrt{10}$ — рациональное число, что неверно. Полученное противоречие доказывает, что равенство (9) невозможно, т. е. что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии.

8 *Определить все такие целые числа* a *и* b, *для которых один из корней уравнения* $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ *равен* $1 + \sqrt{3}$.

По определению, число $1 + \sqrt{3}$ есть корень уравнения $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$, если выполнено равенство

$$3(1 + \sqrt{3})^3 + a(1 + \sqrt{3})^2 + b(1 + \sqrt{3}) + 12 = 0,$$

или, после упрощений и группировки,

$$(4a + b + 42) + (2a + b + 18)\sqrt{3} = 0.$$

Нас интересуют только целые a и b; в этом случае числа $p = 4a + b + 42$ и $q = 2a + b + 18$ также будут целыми.

Итак, надо определить такие целые a и b, при которых $p + q\sqrt{3} = 0$. Многие поступающие считали «совершенно очевидным», что последнее равенство возможно лишь в случае $p = q = 0$. Однако оказалось, что далеко не все могут убедительно обосновать этот факт. Поэтому докажем его.

В самом деле, предположим, что равенство $p + q\sqrt{3} = 0$ справедливо при некотором целом $q \neq 0$. Тогда $\sqrt{3} = -\frac{p}{q}$, что противоречит иррациональности числа $\sqrt{3}$. Таким образом, $q = 0$. Но если $q = 0$, то из равенства $p + q\sqrt{3} = 0$ вытекает, что и $p = 0$.

Следовательно, число $1 + \sqrt{3}$ является корнем уравнения $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 4a + b + 42 = 0, \\ 2a + b + 18 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $a = -12$, $b = 6$.

Задачи

1. Сформулировать и доказать признак делимости на 11.

2. Доказать, что ни одно натуральное число с суммой цифр, равной 15, не является квадратом целого числа.

3. Доказать, что если натуральное число оканчивается цифрой 7, то оно не может быть квадратом целого числа.

4. Пусть $p \geqslant 5$ — простое число. Доказать, что число $p^2 - 1$ делится на 24.

5. Выяснить, при каких натуральных n число $n^4 + 4$ является составным.

6. Доказать, что если сумма $k + m + n$ трех натуральных чисел делится на 6, то $k^3 + m^3 + n^3$ делится на 6.

7. При каких натуральных n дробь $\frac{3n+4}{5}$ является целым числом?

8. При каких натуральных n дробь $\frac{2n+3}{5n+7}$ является целым числом?

9. Доказать, что между любыми двумя неравными рациональными числами a и b есть хотя бы одно рациональное число и хотя бы одно иррациональное число.

10. Могут ли числа 10, 11, 12 быть членами одной геометрической прогрессии?

11. Доказать иррациональность чисел:

а) $\log_{16}36$; б) $\operatorname{tg} 15°$; в) $\operatorname{tg} 5°$.

12. Рационально или иррационально число:

а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}} - \frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$;

б) 0,12345678910111213..., получающееся выписыванием после запятой последовательно всех натуральных чисел?

13. Сколько множителей 2 имеется в произведении всех целых чисел от 1 до 500 включительно?

14. Найти все пятизначные числа вида $\overline{34x5y}$ (x и y — цифры), которые делятся на 36.

15. Доказать, что при любом натуральном n число

$\underbrace{1\ldots1}_{2n \text{ раз}} - \underbrace{1\ldots1}_{n \text{ раз}}$ есть квадрат целого числа.

Найти все целочисленные решения уравнений (№ 16, 17):

16. $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 7$.

17. $2x^2y^2 + y^2 - 6x^2 - 12 = 0$.

18. Найти числа, одновременно являющиеся членами двух арифметических прогрессий:

$$2, 5, 8, \ldots, 332 \text{ и } 7, 12, 17, \ldots, 157.$$

19. Указать хотя бы одну пару целых положительных чисел k_1 и k_2 таких, что $36k_1 - 25k_2 = 1$.

20. Остаток от деления некоторого натурального числа n на 6 равен 4, остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления n на 30?

21. Сколькими способами можно составить 8 рублей из монет по 10 и 3 копейки?

22. Сколькими способами сумму 4 рубля 96 копеек можно составить из монет по 2 и 15 копеек?

23. Доказать, что если p и q — целые числа, причем $p^2 - 9q^2 = 6pq$, то $p = q = 0$.

24. Доказать, что если p и q — целые числа, причем $p^2 - 4q^2 = 4pq$, то $p = q = 0$.

25. Сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$(n^2 - 3)(n^2 - 33)(n^2 - 103)(n^2 - 203) < 0?$$

26. Решить в целых числах систему неравенств:

$$\begin{cases} x + y \geqslant 25, \\ y \leqslant 2x + 18, \\ y \geqslant x^2 + 4x. \end{cases}$$

27. Найти все целые числа k, m, n, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

а) $3k + 5m = 20n - 69$; б) $2k + 3m = 13n - 50$;

в) $k + m + n < 60$; г) $k > 12$.

28. Сумма 5 *р.* уплачена тридцатью монетами, среди которых имеются только десятикопеечные, пятнадцатикопеечные и двадцатикопеечные. Доказать, что двадцатикопеечных монет было использовано больше, чем десятикопеечных.

Найти все целые положительные решения уравнений:

29. $2x^2 - 2xy + x + 3y = 36$.

30. $3x^2 + 3xy + 2x - y = 26$.

В. *Логарифмы*

При изучении свойств логарифмов следует обратить особое внимание на то, что все свойства логарифмов вытекают из соответствующих свойств степеней, и поэтому для хорошего знания логарифмов надо уметь свободно обращаться со степенями. Такая тесная связь логарифмов и степеней существует потому, что само определение логарифма дается через понятие степени.

Процитируем обычно даваемое поступающими определение: «Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b». Таким образом, число x есть логарифм числа b по основанию a, если $a^x = b$.

В приведенном определении есть один существенный недостаток, который состоит в том, что на основание a не наложено никаких ограничений, и потому, если следовать этому определению совершенно буквально (*а определению всегда надо следовать буквально*), мы должны будем считать, например, что 3 есть логарифм -8 по основанию -2 (так как $(-2)^3 = -8$), 2 есть логарифм 4 по основанию -2 (так как $(-2)^2 = 4$) и т. д. Что же касается основания 1, то дело обстоит еще более странно: всякое число x есть логарифм 1 по основанию 1 (в самом деле, $1^x = 1$ при любом x).

Любой человек, знакомый со школьным курсом математики, может сказать: все предыдущие примеры бессмысленны, потому что мы должны рассматривать логарифмы только при *положительном основании, отличном от* 1. Действительно, такое соглашение принято в средней школе. И гораздо лучше наложить это ограничение на основание *непосредственно* в определении.

Таким образом, *определение* логарифма следует давать так:

Пусть число $a > 0$ и $a \neq 1$. Число x называется логарифмом числа N по основанию a, если $a^x = N$.

Внимательные читатели уже, быть может, обратили внимание на тот факт, что мы ни разу не написали равенство $x = \log_a N$, но всегда говорили: *x есть* логарифм N по основанию a. Это объясняется просто. До тех пор, пока мы не уверены, что ни у какого числа не может быть двух различных логарифмов по данному основанию, мы не имеем права употреблять знак равенства. В самом деле, представим на минуту, что у какого-то числа N существуют два *различных* логарифма α и β по основанию a; тогда, употребляя знак равенства, мы могли бы написать, что $\alpha = \log_a N$ и $\beta = \log_a N$, откуда получилось бы, что $\alpha = \beta$.[1]

Поэтому, прежде чем ввести обозначение для логарифма, надо убедиться в том, что *никакое число не может иметь двух различных логарифмов по одному основанию.* В самом деле, если бы различные числа α и β были бы логарифмами числа N по основанию a (где $a > 0$ и $a \neq 1$), то по определению выполнялись бы равенства $a^\alpha = N$ и $a^\beta = N$, откуда $a^\alpha = a^\beta$. Но тогда по свойству степеней с положительным основанием, отличным от единицы, $\alpha = \beta$. Таким образом, если число N имеет по основанию a логарифм, то этот логарифм *единственный*; он обозначается символом $\log_a N$.

Итак, по определению, при $a > 0$ и $a \neq 1$ $x = \log_a N$, если $a^x = N$. Следовательно, равенства $x = \log_a N$ и $a^x = N$ (при выполнении ограничений, наложенных на a) выражают в точности одно и то же соотношение между числами x, a, N, записанное в первом случае «на языке логарифмов», а во втором — «на языке степеней».

Легко доказать, что *отрицательные числа и нуль ни при каком основании a (разумеется, $a > 0$ и $a \neq 1$) логарифмов не имеют.* Действительно, если $N \leqslant 0$ и $x = \log_a N$, то $a^x = N \leqslant 0$, что противоречит свойству степеней с положительным основанием.

Что же касается положительных чисел, то *всякое положительное число при любом* (положительном и отличном от 1) *основании имеет логарифм.* Это утверждение принимается в школе без доказательства; его

---

[1] Напомним, что очень похожее положение имеет место при определении квадратного корня (§ 2 раздела I). Там мы тоже вводим определение без знака равенства и лишь впоследствии убеждаемся, что определение с равенством было бы просто невозможно, так как мы, введя обозначение для квадратного корня, сразу же смогли бы доказать «равенства» типа $2 = -2$ (оба эти числа были бы «равны» корню из 4, т. е. равны между собой). Именно поэтому нет знака для квадратного корня вообще, а есть только знак $\sqrt{\ }$ для арифметического квадратного корня из положительного числа.

справедливость не так уж просто установить (для этого потребовалось бы привлечь хорошо развитую теорию действительных чисел и теорию пределов)[1].

Естественно, каждый поступающий должен знать свойства логарифмов и, разумеется, уметь их доказывать. Прежде всего отметим так называемое *основное логарифмическое тождество*

$$a^{\log_a N} = N,$$

справедливое для любых N и a таких, что $N > 0$; $a > 0$, $a \neq 1$.

Приведем далее формулы, наиболее часто употребляющиеся при решении задач[2]:

$$\text{I. } \log_a MN = \log_a M + \log_a N \qquad (M > 0,\ N > 0);$$

$$\text{II. } \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \qquad (M > 0,\ N > 0);$$

$$\text{III. } \log_a N^\alpha = \alpha \log_a N \qquad (N > 0);$$

$$\text{IV. } \log_{a^\beta} N^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a N \qquad (N > 0,\ \beta \neq 0);$$

$$\text{V. } \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b} \qquad (N > 0);$$

$$\text{VI. } \log_b a \cdot \log_a b = 1.$$

Очень полезно помнить следующие два частных случая формулы IV:

$$\text{IVa. } \log_{a^\beta} N = \frac{1}{\beta} \log_a N \qquad (N > 0,\ \beta \neq 0);$$

$$\text{IVб. } \log_{a^\alpha} N^\alpha = \log_a N \qquad (N > 0,\ \alpha \neq 0).$$

Все эти свойства логарифмов хорошо известны поступающим. Однако многие знают их формально и не умеют применять к решению конкретных задач. Поэтому ниже мы приведем несколько примеров использования основных свойств логарифмов.

---

[1] Очевидность этого утверждения обычно иллюстрируется графиками функций $y = a^x$ и $y = b$, но эта иллюстрация, конечно, не является строгим доказательством.

[2] Напомним еще раз, что, согласно определению логарифма, основания всегда положительны и отличны от единицы.

(1) *Вычислить* $A = \left(\sqrt[7]{\frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3} + \log_{9\sqrt{3}} 125}$.

На основании формулы VI имеем $\frac{1}{5\log_5 3} = \frac{1}{5}\log_3 5$,

а формула IV дает $\log_{9\sqrt{3}} 125 = \log_{3^{5/2}} 5^3 = \left(\frac{6}{5}\right)\log_3 5$.

Далее остается только использовать свойства степеней и основное логарифмическое тождество:

$$A = \left(3^{-\frac{3}{7}}\right)^{\frac{1}{5}\log_3 5 + \frac{6}{5}\log_3 5} = 3^{-\frac{3}{5}\log_3 5} =$$

$$= \left(3^{\log_3 5}\right)^{-\frac{3}{5}} = 5^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{0{,}008}.$$

(2) *Вычислить*

$$B = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \ldots \cdot \log_{10} 9 \cdot \log_{11} 10.$$

На основании формулы V

$$\log_3 2 = \frac{\log_{11} 2}{\log_{11} 3}; \quad \log_4 3 = \frac{\log_{11} 3}{\log_{11} 4}; \quad \ldots; \quad \log_{10} 9 = \frac{\log_{11} 9}{\log_{11} 10}.$$

Отсюда

$$B = \frac{\log_{11} 2}{\log_{11} 3} \cdot \frac{\log_{11} 3}{\log_{11} 4} \cdots \frac{\log_{11} 9}{\log_{11} 10} \cdot \log_{11} 10 = \log_{11} 2.$$

(3) *Вычислить без помощи таблиц*

$$C = \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}.$$

Связь между логарифмами составных чисел иногда удается выявить, сведя эти логарифмы к логарифмам их простых делителей. Выполним такое сведение, используя последовательнс формулы VI, I, III:

$$C = \log_2 24 \cdot \log_2 96 - \log_2 192 \cdot \log_2 12 =$$
$$= (3 + \log_2 3)(5 + \log_2 3) - (6 + \log_2 3)(2 + \log_2 3) = 3.$$

④ *Вычислить* $\log_6 16$, *если* $\log_{12} 27 = a$.

Применяя последовательно формулы III, VI и I, получаем

$$\log_6 16 = 4\log_6 2 = \frac{4}{\log_2 6} = \frac{4}{1+\log_2 3}.$$

Теперь видно, что для вычисления $\log_6 16$ нам надо знать, чему равен $\log_2 3$. Найдем его из условия $\log_{12} 27 = a$. Применяя последовательно формулы III, VI, I и III, VI, имеем цепочку преобразований:

$$a = \log_{12} 27 = 3\log_{12} 3 =$$

$$= \frac{3}{\log_3 12} = \frac{3}{1+2\log_3 2} = \frac{3}{1+\dfrac{2}{\log_2 3}} = \frac{3\log_2 3}{2+\log_2 3}.$$

Отсюда $\log_2 3 = \dfrac{2a}{3-a}$ (отметим, что, очевидно, $a \neq 3$). Окончательно имеем

$$\log_6 16 = \frac{4(3-a)}{3+a}.$$

Приведем еще следующие свойства логарифмов, необходимые для решения неравенств (см. § 6 раздела I):

VII. *Если* $a > 1$, *то из* $0 < b < c$ *следует, что* $\log_a b < \log_a c$, *а из* $\log_a b < \log_a c$ — *что* $0 < b < c$.

Иными словами, при $a > 1$ неравенства $0 < b < c$ и $\log_a b < \log_a c$ равносильны.

VIII. *Если* $0 < a < 1$, *то из* $0 < b < c$ *следует, что* $\log_a b > \log_a c$, *а из* $\log_a b > \log_a c$ — *что* $0 < b < c$.

Иными словами, при $0 < a < 1$ неравенства $0 < b < c$ и $\log_a b > \log_a c$ равносильны.

Эти два свойства доказываются совершенно аналогично, и поэтому докажем только свойство VIII[1]. Пусть число a положительно и меньше единицы. Если выпол-

[1] Заметим, что справедливость свойств VII и VIII вытекает и из свойств логарифмической функции.

нено неравенство $0 < b < c$, то существуют числа $\log_a b$ и $\log_a c$. Используя основное логарифмическое тождество, перепишем неравенство $b < c$ в виде

$$a^{\log_a b} < a^{\log_a c}.$$

Отсюда на основании свойств степени с основанием, меньшим 1, заключаем, что $\log_a b > \log_a c$.

Обратно, если выполнено неравенство $\log_a b > \log_a c$, то, во-первых, оба числа b и c положительны. Во-вторых, возводя число a, $0 < a < 1$, в степень с показателями $\log_a b$ и $\log_a c$, получим (опять-таки на основании свойств степеней с основанием, меньшим 1) следующее неравенство:

$$a^{\log_a b} < a^{\log_a c},$$

т. е. $b < c$. Поскольку числа b и c положительны, то $0 < b < c$, что и требовалось доказать.

5 *Не пользуясь таблицами, определить, что больше:* $\log_3 75$ *или* $\log_2 22$.

Используя свойство VII, можем записать

$$\log_3 75 < \log_3 81, \quad \log_2 22 > \log_2 16,$$

откуда ясно, что $\log_3 75 < 4 < \log_2 22$.

Формулы I—VI успешно используются для преобразования различных выражений как с конкретными числами, так и с буквенными данными. Такие преобразования бывают необходимы прежде всего при решении уравнений и неравенств.

Однако для решения многих уравнений и неравенств приведенные формулы оказываются недостаточными, так как в них буквы должны удовлетворять сильным ограничениям. Но у формул I—IV еще бо́льшим недостатком является то, что левые и правые части в них имеют смысл при *разных* ограничениях на значения входящих букв.

Например, $\log_a MN$ в левой части формулы I имеет смысл как в случае, когда числа M и N оба положительные, так и в случае, когда эти числа оба отрицательные. В противоположность этому правая часть формулы I имеет смысл только в первом случае. Но это означает, что если, преобразуя какое-нибудь уравнение, заменить логарифм произведения двух выражений M и N, содержащих неизвестное, на сумму логарифмов этих выражений, то при значениях неизвестного, обращающих M и N в отрицательные числа, из осмысленного выражения $\log_a MN$ получится бессмысленное выражение $\log_a M + \log_a N$. Как объясняется в § 5 раздела I, в результате такого преобразования можно потерять некоторые корни решаемого уравнения.

Точно так же обстоит дело и с формулами II и III. По этим причинам при решении различных задач, содержащих неизвестные величины, пользуются более общими формулами:

$$\text{I*. } \log_a MN = \log_a |M| + \log_a |N| \quad (MN > 0);$$

$$\text{II*. } \log_a \frac{M}{N} = \log_a |M| - \log_a |N| \quad (MN > 0);$$

$$\text{III*. } \log_a N^{2k} = 2k \log_a |N| \quad (N \neq 0,\ k \text{ — целое число});$$

$$\text{IV*. } \log_{a^{2k}} N = \frac{1}{2k} \log_{|a|} N$$

$$(N > 0,\ k \neq 0 \text{ — целое число},\ a \neq 0,\ |a| \neq 1).$$

Следует заметить, что формулы I* и II* тоже страдают отмеченным выше недостатком: их левые и правые части имеют смысл при *разных* ограничениях на значения входящих в них букв. Именно, правые части имеют смысл при любых M и N, отличных от нуля, а левые части — лишь при M и N одинакового знака, т. е. подвержены более жестким ограничениям. Поэтому, например, при решении уравнений замена $\log_a MN$ на $\log_a |M| + \log_a |N|$ может привести к приобретению посторонних решений (но не к потере решений, как это может случиться при использовании формул I—IV). Поскольку приобретение посторонних решений уравнения предпочтительнее, чем потеря (лишние решения можно отбросить путем проверки, а утерянные уже не найдешь!), то при преобразованиях буквенных выражений следует пользоваться именно формулами I*—IV*.

(6) *Упростить выражение* $\log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4 4x^4$ *и вычислить затем его значение при* $x = -2$.

На этом примере хорошо видно, что вычисления по формулам I и III

$$\log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4 4x^4 =$$

$$= 2\log_4 x - \log_4 4 - 2\log_4 4 - 8\log_4 x = -3 - 6\log_4 x$$

ошибочны, ибо при $x = -2$ последнее выражение не имеет смысла, а исходное имеет смысл и равно -6.

Это противоречие получилось потому, что формулы I и III применимы лишь при положительных значениях букв. Пользуясь же формулами I* и III*, в которых значения букв могут быть и отрицательными, получаем

$$\log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4 4x^4 =$$

$$= 2\log_4 |x| - 1 - 2 - 8\log_4 |x| = -3 - 6\log_4 |x|.$$

При $x = -2$ последнее выражение равно -6.

Задачи

Вычислить (№ 1—8):

1. $(a^\alpha)^{-\beta \log_{a^\beta} N^\gamma}$.

2. $a^{\frac{\log_b \log_b N}{\log_b a}}$.

3. $-\log_8 \log_4 \log_2 16$.

4. $\lg \operatorname{tg} 1° + \lg \operatorname{tg} 2° + \ldots + \lg \operatorname{tg} 89°$.

5. $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$.

6. $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$.

7. $5^{\log_{1/5} \frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} + \log_{1/2} \frac{1}{10 + 2\sqrt{21}}$.

8. $2^{6\log_{2\sqrt{2}}(5 - \sqrt{10}) + 8\log_{1/4}(\sqrt{5} - \sqrt{2})}$.

9. Доказать, что если $\alpha = \log_{12} 18$ и $\beta = \log_{24} 54$, то

$$\alpha\beta + 5(\alpha - \beta) = 1.$$

10. Доказать, что $\log_3 5 \cdot \log_2 28 \cdot \log_{1/5} 4 < -6$.

Вычислить без помощи таблиц (№ 11—12):

11. $\dfrac{\log_3 12}{\log_{36} 3} - \dfrac{\log_3 4}{\log_{108} 3}$.

12. $\dfrac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \dfrac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$.

13. Вычислить $\log_{25} 24$, если $\log_6 15 = \alpha$ и $\log_{12} 18 = \beta$.

Не пользуясь таблицами, определить, что больше:

14. $\log_4 2$ или $\log_{0,0625} 0,25$.

15. $\log_{\log 3^2} \frac{1}{2}$ или 1.

16. $\log_4 60$ или $\log_3 30$.

17. $\log_3 70$ или $\log_2 20$.

18. $\log_3 25$ или $\log_2 11$.

19. $\log_{2\sqrt{2}} 4 \log_9^2 (3\sqrt{3})$ или $2 \sin \frac{\pi}{4} \cos^2 \frac{23\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{37\pi}{4}$.

20. $\log_{16} 32 \log_{1/8}^2 2\sqrt{2}$ или $\cos^5 \frac{19\pi}{4} \operatorname{ctg}\left(-\frac{17\pi}{6}\right) \operatorname{ctg} \frac{31\pi}{4}$.

Г. *Прогрессии*

Если понятие арифметической прогрессии никаких затруднений не вызывает, то с определением геометрической прогрессии иногда возникает путаница. Поэтому на нем целесообразно остановиться поподробнее.

Одни поступающие приводят определение геометрической прогрессии так: «Геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число, *отличное от нуля*». Другие, определяя эту последовательность, не делают выделенную нами курсивом оговорку. Таким образом, с точки зрения первого определения последовательность

$$2, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots \tag{10}$$

геометрической прогрессией не является, тогда как второе определение позволяет считать ее геометрической прогрессией «с нулевым знаменателем».

Конечно, в выборе определения всегда имеется известная свобода. Об определении бессмысленно спорить, верно оно или нет, ибо определение не доказывается. Но, давая новое определение, следует руководствоваться соображениями *целесообразности.*

С этой точки зрения рассмотрим второе из упомянутых выше определений, т. е. будем для знаменателя прогрессии допускать и нулевое значение.

Введение общего понятия геометрической прогрессии было вызвано стремлением изучить встречавшиеся в разных вопросах и задачах последовательности с положительными членами, у которых каждый последующий член больше своего предыдущего в одно *вполне определенное* число раз. Между тем для последовательности (10) вопрос о том, во сколько раз третий член больше второго, лишен смысла. Желательно, чтобы геометрическая прогрессия *однозначно* восстанавливалась по своему любому члену и знаменателю. Однако если известно, что знаменатель прогрессии равен нулю, а ее третий член также нуль, то определить однозначно первый ее член, очевидно, невозможно. Более того, если (при нулевом знаменателе) третий член отличен от нуля (например, равен единице), то удовлетворяющей этим условиям геометрической прогрессии даже не существует[1].

Из сказанного видно, что последовательности вида (10) обладают совершенно аномальными свойствами, и потому считать такие последовательности геометрическими прогрессиями нецелесообразно. Вот почему в определении геометрической прогрессии разумно потребовать, чтобы ее знаменатель был отличен от нуля.

Однако и это определение не обладает достаточной целесообразностью. В рамках этого определения ничто не мешает нам рассматривать последовательность

$$0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots \qquad (11)$$

как геометрическую прогрессию со знаменателем 2 или со знаменателем $\frac{1}{3}$. Возможность такой неоднозначности знаменателя прогрессии нежелательна[2].

---

[1] Можно привести и другие «нежелательные эффекты», которые последуют из второго упомянутого выше определения. Отметим, что все эти эффекты не имеют никаких аналогов в теории арифметической прогрессии. Между тем целесообразно, чтобы теории арифметической и геометрической прогрессий были аналогичны.

[2] Заметим также, что из самого определения суммы S бесконечной последовательности легко найти величину суммы членов последовательности (11): $S = 0$. Поэтому если (11) рассматривать как геометрическую прогрессию со знаменателем 2, то мы получили бы пример геометрической прогрессии, имеющей сумму, но не являющейся бесконечно убывающей.

Для того чтобы устранить и эту возможность, лучше всего определение геометрической прогрессии формулировать следующим образом: *геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность, у которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число, отличное от нуля.* Как следует из этого определения, среди членов геометрической прогрессии не может быть нулей.

Таким образом, если при решении какой-то задачи, в которой, скажем, первый член b_1 геометрической прогрессии есть некоторое выражение от неизвестной величины, у нас получится для неизвестной значение, обращающее b_1 в нуль, то, согласно только что принятому определению, мы отбросим это значение неизвестной как не удовлетворяющее условию задачи.

Пониманию определений прогрессий посвящен и такой вопрос, который иногда вызывает затруднения: *арифметической или геометрической прогрессией является последовательность* 1, 1, 1, ..., 1, ...? На самом деле эту последовательность можно рассматривать одновременно и как арифметическую прогрессию (с разностью 0), и как геометрическую (со знаменателем 1).

Довольно часто при решении задач бывает нужно записать условие, при котором данные величины составляют геометрическую прогрессию. В общем виде это условие формулируется так: *если квадрат каждого (кроме первого и последнего) члена числовой последовательности с ненулевыми членами равен произведению соседних с ним членов, то эта последовательность является геометрической прогрессией.* Используя это утверждение (его доказательство не вызывает затруднений), мы можем сразу написать $n - 2$ равенства, при выполнении которых n чисел составляют геометрическую прогрессию.

Непосредственно проверяется, что справедливо и обратное утверждение — характеристическое свойство геометрической прогрессии: *квадрат любого члена гео-*

метрической прогрессии (кроме первого и последнего) равен произведению соседних с ним членов.

Приведенное свойство геометрической прогрессии часто перефразируют так: любой член (кроме крайних) геометрической прогрессии является средним геометрическим своих соседних членов. Однако совершенно ясно, что в таком виде утверждение справедливо только для геометрических прогрессий с *положительными* членами. Если же его записать, например, для геометрической прогрессии 1, −3, 9, то получится неверное равенство $-3 = \sqrt{1 \cdot 9}$.

Наконец, обратим внимание еще на одно довольно распространенное, но неверное убеждение, касающееся условий, при которых данная последовательность составляет арифметическую (или геометрическую) прогрессию. Именно это заблуждение не позволило некоторым поступающим верно решить следующую задачу.

(1) *Через центр O квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке N, причем $AN : NB = 1 : 2$. На этой прямой взята произвольная точка M, лежащая внутри квадрата. Доказать, что расстояния от точки M до сторон квадрата AB, AD, BC, CD, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию.*

Обозначим (рис. 1) длину отрезка MQ — расстояние от точки M до стороны AB — через x, а длину отрезка ML — расстояние от M до стороны AD — через y; тогда расстояния MK и MT до сторон BC и CD будут равны соответственно $a - y$ и $a - x$, где a — сторона квадрата.

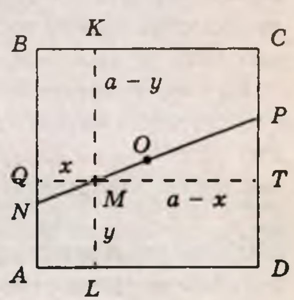


Рис. 1

Так как $AN : NB = 1 : 2$, то легко сообразить, что $AN = \frac{a}{3}$, а $NQ = y - \frac{a}{3}$. Прямая NP, о которой идет речь в условии задачи, проходит через центр O квадрата, являющийся его центром симметрии. Поэтому $CP = AN = \frac{a}{3}$, а тогда, очевидно, $PT = a - y - \frac{a}{3}$.

Заметим, что $\Delta QNM \sim \Delta TPM$; пропорция $NQ : PT = MQ : MT$ показывает, что

$$y = \frac{a+x}{3}.$$

Теперь остается проверить, что при любом $0 < x < a$ четыре числа

$$MQ = x, \quad ML = \frac{a+x}{3}, \quad MK = \frac{2a-x}{3}, \quad MT = a - x \quad .$$

образуют арифметическую прогрессию.

При решении этой задачи допускалась следующая грубая ошибка: утверждалось, что эти четыре числа образуют арифметическую прогрессию просто потому, что сумма крайних $MQ + MT = a$ равна сумме средних $ML + MK = a$. Совершенно ясна несостоятельность этого утверждения. Действительно, если четыре числа образуют арифметическую прогрессию, то сумма крайних чисел равна сумме средних чисел. Однако если для четырех чисел это свойство и выполнено, то они *не обязаны* составлять арифметическую прогрессию (например, 1, 6, 5, 10)[1].

На самом деле тот факт, что числа MQ, ML, MK, MT образуют арифметическую прогрессию, следует непосредственно из определения прогрессии:

$$\frac{a+x}{3} - x = \frac{2a-x}{3} - \frac{a+x}{3} = a - x - \frac{2a-x}{3}.$$

При решении задач на арифметическую прогрессию часто бывает удобно вместо стандартной записи членов

---

[1] Точно так же, если в последовательности (с положительными членами) произведение членов, равноудаленных от концов, равно произведению крайних членов, то эта последовательность не обязана быть геометрической прогрессией (числа 2, 3, 4, 6 не образуют геометрической прогрессии, хотя и выполнено равенство $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$).

прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ употреблять запись a, $a+d$, $a+2d$, ... — эта форма явно показывает, что выписанные члены образуют арифметическую прогрессию и зависят от двух параметров a и d. Аналогичное замечание справедливо и для геометрической прогрессии. И вообще, за счет удачного обозначения членов прогрессии иногда удается достичь значительного упрощения решения. Так обстоит дело, например, в следующей задаче.

2 *Даны две арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Известно, что*

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3,$$

а числа $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$ образуют геометрическую прогрессию. Доказать, что $a_1 = b_3$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_1$.

Для членов данных арифметических прогрессий введем новые обозначения, переписав их в виде

$$a-d,\ a,\ a+d; \quad b-e,\ b,\ b+e.$$

Тогда из равенства сумм данных прогрессий следует, что $a = b$, т. е. $a_2 = b_2$. Кроме того, по условию, числа

$$a_1 + b_1 = 2a - (d+e),\ a_2 + b_2 = 2a,\ a_3 + b_3 = 2a + (d+e)$$

образуют геометрическую прогрессию, и, по характеристическому свойству такой прогрессии, получаем

$$(2a)^2 = [2a - (d+e)][2a + (d+e)],$$

т. е. $d + e = 0$. Следовательно,

$$a_1 = a - d = b + e = b_3, \quad a_3 = a + d = b - e = b_1,$$

что и требовалось доказать.

3 *Найти все отличные от нуля значения a, при которых уравнение*

$$x^8 + ax^4 + a^4 = 0 \tag{12}$$

имеет ровно четыре корня, образующих в порядке возрастания арифметическую прогрессию.

Ясно, что уравнение (12) имеет четыре корня тогда и только тогда, когда уравнение

$$y^2 + ay + a^4 = 0 \tag{13}$$

имеет два различных положительных корня y_1 и y_2. В этом случае уравнения $x^4 = y_1$ и $x^4 = y_2$ и дадут нам четыре корня уравнения (12):

$$-\sqrt[4]{y_2}, \ -\sqrt[4]{y_1}, \ \sqrt[4]{y_1}, \ \sqrt[4]{y_2}. \tag{14}$$

Если считать, что y_1 обозначает меньший корень уравнения (13), а y_2 — больший, то очевидно, что четыре числа (14) выписаны в порядке возрастания. Остается выяснить, при каком условии они образуют арифметическую прогрессию.

По определению арифметической прогрессии это выполняется, когда

$$-\sqrt[4]{y_1} - (-\sqrt[4]{y_2}) = \sqrt[4]{y_1} - (-\sqrt[4]{y_1}) = \sqrt[4]{y_2} - \sqrt[4]{y_1},$$

или, что то же самое, когда $\sqrt[4]{y_2} = 3\sqrt[4]{y_1}$. Отсюда заключаем, что условию задачи удовлетворяют такие значения a, при которых корни уравнения (13) связаны соотношением $y_2 = 81y_1$.

Если число a удовлетворяет условию задачи, то, привлекая теорему Виета для уравнения (13), можем записать

$$y_1 + y_2 = 82y_1 = -a, \quad y_1y_2 = 81y_1^2 = a^4.$$

Из второго равенства, с учетом $y_1 > 0$, находим $y_1 = \frac{a^2}{9}$, а тогда из первого равенства для определения a получаем уравнение $82a^2 = -9a$. Отсюда $a = -\frac{9}{82}$, поскольку значение $a = 0$, очевидно, не удовлетворяет условию задачи.

Остается проверить, действительно ли значение $a = -\frac{9}{82}$ удовлетворяет условию задачи. Но при $a = -\frac{9}{82}$ уравнение (13) принимает вид

$$y^2 - \frac{9}{82}y + \left(\frac{9}{82}\right)^4 = 0$$

и имеет корни $y_1 = \dfrac{9}{82^2}$ и $y_2 = \dfrac{9^3}{82^2}$; ясно, что $y_2 = 81y_1$.

Таким образом, значение $a = -\dfrac{9}{82}$ является решением задачи.

Обычно поступающие успешно справляются с задачами на прогрессии, поскольку сведения и формулы, необходимые для их решения, ясны и легко запоминаются. Большие трудности вызывают, однако, задачи, в которых простого применения формул недостаточно.

4 *Найти все положительные числа a, при которых все различные неотрицательные значения x, удовлетворяющие уравнению*

$$\cos[(9a-7)x] = \cos[(17a+13)x] \tag{15}$$

и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

Прежде всего решим данное уравнение. Оно легко приводится к виду

$$\sin[(13a+3)x]\sin[(4a+10)x] = 0.$$

Так как по условию $a > 0$, то $13a + 3 \neq 0$, $4a + 10 \neq 0$ и неотрицательные решения уравнения (15) задаются двумя сериями:

$$x = \frac{\pi}{13a+3}k, \quad x = \frac{\pi}{4a+10}k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Но теперь видно, что множество решений состоит из двух возрастающих арифметических прогрессий, у которых первые члены равны 0, а разности равны соответственно $\dfrac{\pi}{13a+3}$ и $\dfrac{\pi}{4a+10}$.

После этих несложных рассуждений остается решить главный вопрос: при каком условии две возрастающие арифметические прогрессии с общими членами a_n и b_n, причем $a_1 = b_1$, объединенные, так сказать, «в одну кучу», составят новую прогрессию. Рассмотрим эту общую задачу.

Если $a_2 = b_2$, то данные прогрессии, очевидно, совпадают, и потому «объединенная» последовательность, естественно, является прогрессией.

Если $b_2 < a_2$, то, как легко видеть, найдется такой член прогрессии b_m, что $b_m \leqslant a_2 < b_{m+1}$, т. е.

$$a_1 = b_1 < b_2 < \ldots < b_{m-1} < b_m \leqslant a_2 < b_{m+1} < \ldots$$

Если $b_m = a_2$, то непосредственно проверяется, что $a_3 = b_{2m-1}$, $a_4 = b_{3m-2}$ и т. д. Другими словами, прогрессия $a_1, a_2, \ldots$ является частью прогрессии $b_1, b_2, \ldots$, и потому объединенная последовательность просто совпадает с прогрессией $b_1, b_2, \ldots$.

Если же $b_m < a_2$, то объединенная последовательность прогрессией не является. Действительно, в этом случае разности между соседними членами объединенной последовательности b_m и b_{m-1} и a_2 и b_m не равны между собой:

$$a_2 - b_m < b_{m+1} - b_m = b_m - b_{m-1}.$$

Точно так же обстоит дело в случае $b_2 > a_2$. Следовательно, объединенная последовательность является арифметической прогрессией в том и только в том случае, когда либо $a_2 = b_m$ при некотором m, либо $b_2 = a_n$ при некотором n. Из этих равенств вытекает, что отношение разностей прогрессий должно быть либо натуральным числом, либо числом, обратным к натуральному.

Возвращаясь к исходной задаче, мы замечаем, что ее условию удовлетворяют такие числа $a > 0$, для которых

$$\text{либо } \frac{13a + 3}{4a + 10} = r, \text{ либо } \frac{4a + 10}{13a + 3} = s,$$

где r и s — некоторые натуральные числа. Из этих равенств получаем соответственно

$$a = \frac{10r - 3}{13 - 4r}, \quad a = \frac{10 - 3s}{13s - 4}.$$

Ограничение $a > 0$ приводит к соответствующим ограничениям на числа r и s, а именно:

$$\frac{3}{10} < r < \frac{13}{4}, \quad \frac{4}{13} < r < \frac{10}{3},$$

т. е. $r = 1, 2, 3$; $s = 1, 2, 3$. Отсюда находим искомые значения: $a = \frac{7}{9}, \frac{17}{5}, 27, \frac{2}{11}, \frac{1}{35}$.

В некоторых задачах применение известных формул для арифметической или геометрической прогрессий оказывается возможным только после некоторых специальных преобразований.

(5) *Найти общий член числовой последовательности* 2, 4, 7, 11, ..., *обладающей тем свойством, что разности между соседними членами составляют арифметическую прогрессию.*

Укажем прием отыскания общего члена любой последовательности, в которой разности между соседними членами составляют арифметическую прогрессию.

Обозначим заданную последовательность через a_1, a_2, a_3, ...; тогда

$$a_2 - a_1 = r_1,$$
$$a_3 - a_2 = r_2,$$
$$\ldots$$
$$a_n - a_{n-1} = r_{n-1},$$

и согласно условию числа r_1, r_2, r_3, ... образуют арифметическую прогрессию. Сложив все выписанные равенства, получим

$$a_n = a_1 + r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}.$$

В нашем случае первый член последовательности равен 2, а сумма арифметической прогрессии (ее первый член 2, разность 1) легко вычисляется; поэтому общий член данной в условии задачи последовательности равен

$$1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

(6) *Найти сумму*

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \ldots + 100 \cdot 2^{99}.$$

Если проявить небольшую изобретательность, решение без труда получится на основе известных формул.

Именно, запишем искомую сумму — обозначим ее S — в виде

$$\begin{aligned} S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} &+ \\ + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} &+ \\ + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} &+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots \\ + 2^{98} + 2^{99} &+ \\ + 2^{99}&. \end{aligned}$$

Совершенно ясно, что в каждой из строк стоит сумма некоторой геометрической прогрессии:

$$S = \frac{1(2^{100} - 1)}{2 - 1} + \frac{2(2^{99} - 1)}{2 - 1} + \frac{2^2(2^{98} - 1)}{2 - 1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{2^{98}(2^2 - 1)}{2 - 1} + \frac{2^{99}(2 - 1)}{2 - 1} =$$

$$= (2^{100} - 1) + (2^{100} - 2) + (2^{100} - 2^2) + \ldots$$

$$\ldots + (2^{100} - 2^{98}) + (2^{100} - 2^{99}) =$$

$$= 100 \cdot 2^{100} - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{99}) = 99 \cdot 2^{100} + 1.$$

Несколько слов скажем по поводу бесконечно убывающей геометрической прогрессии. При рассмотрении этой прогрессии следует особое внимание уделить четкому выяснению принципиальной разницы между вопросом об *определении понятия суммы* такой прогрессии и вопросом о *вычислении величины* этой суммы.

Если мы имеем какой-то *конечный* набор чисел, то *сумма* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ этих чисел имеет вполне определенный смысл в соответствии с понятиями арифметики. Мы должны найти число $S_2 = u_1 + u_2$, к полученному числу S_2 прибавить третье данное число и получить $S_3 = S_2 + u_3 = u_1 + u_2 + u_3$, к этому числу прибавить четвертое данное число и получить $S_4 = S_3 + u_4$ и т. д., пока не будут исчерпаны все данные числа.

Однако если чисел *бесконечно много*, то очевидно, что приведенное определение суммы здесь неприменимо, ибо мы никогда не сможем исчерпать всех данных чисел. Поэтому запись $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ пока лишена смысла: мы ведь не знаем, что значит «сложить бесконечное число чисел».

В этом случае поступим следующим образом. Подсчитаем так называемые *частичные суммы*, т. е. суммы с конечным числом слагаемых:

$$S_1 = u_1;$$
$$S_2 = u_1 + u_2;$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Их можно вычислить (обычным способом) для любого значения k. Для получающейся таким образом числовой последовательности S_1, S_2, S_3, ..., S_k, ... имеются две возможности: либо она имеет предел, либо предела не существует. Если эта последовательность частичных сумм не имеет предела, то сумма чисел u_1, u_2, u_3, ... u_n, ... не определяется. *Если же такой предел существует, то он по определению называется суммой этих чисел*; если этот предел равен S:

$$\lim_{k \to 8} S_k = S,$$

то пишут

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = S.$$

Таким образом, сумма бесконечного множества чисел — совершенно новое понятие, существенно отличающееся от понятия суммы в арифметике.

Если теперь рассмотреть *бесконечно убывающую геометрическую прогрессию*[1]

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^n,\ \ldots;\quad 0 < |q| < 1,$$

[1] Геометрическую прогрессию с бесконечным числом членов и знаменателем q, удовлетворяющим неравенству $0 < |q| < 1$, называют *бесконечно убывающей геометрической прогрессией*. Это название не совсем удачно: такая прогрессия действительно будет убывающей только в случае, если ее первый член положителен, а знаменатель удовлетворяет неравенству $0 < q < 1$. Например, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$ в соответствии с общепринятой терминологией не является убывающей.

то, как показывается в учебнике, последовательность частичных сумм в этом случае действительно имеет предел. Таким образом, *бесконечно убывающая геометрическая прогрессия имеет сумму, и эта сумма равна*

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Следует ясно представлять себе, что, прежде чем *вычислять сумму* бесконечной последовательности чисел, нужно убедиться в ее *существовании*. Это особенно наглядно видно на следующем примере. Попытаемся найти сумму бесконечной геометрической прогрессии: 2, 4, 8, 16, ..., 2^n, ... Если не ставить вопроса о существовании суммы, а прямо обозначить ее через S:

$$S = 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n + \ldots,$$

то, умножая обе части этого равенства на 2, получим

$$4 + 8 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} + \ldots = 2S,$$

откуда видно, что $S = 2 + 2S$ и, следовательно, $S = -2$. Получившийся странный результат — сумма бесконечного числа положительных чисел отрицательна — объясняется весьма просто: исходная последовательность не имеет суммы, и потому вычисления бессмысленны. В самом деле, последовательность частичных сумм

$$S_1 = 2,\ S_2 = 2 + 4 = 6,\ \ldots,\ S_k = 2^{k+1} - 2, \ldots$$

не имеет предела.

Задачи

1. Доказать тождество

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^2 - x^n =$$
$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1}).$$

2. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии с положительными членами. Первые и вторые члены этих прогрессий соответственно совпадают. Доказать, что всякий другой член арифметической прогрессии не больше соответствующего члена геометрической прогрессии.

3. Найти сумму чисел, являющихся одновременно членами двух арифметических прогрессий 5, 9, 13, ... и 3, 9, 15, ..., ес-

ли известно, что каждая из этих прогрессий содержит по 200 членов.

4. Найти числа, одновременно являющиеся членами арифметической прогрессии 12, 15, 18, ... и геометрической прогрессии 1, 3, 9, ..., если известно, что каждая из этих прогрессий содержит по 100 членов.

5. Найти x и y, если известно, что $x^2 - 1$, y, $\frac{4}{x^2 - 1}$ являются последовательными членами геометрической, а $\log_{x+3} y$, $\log_{x+3}(x^4 - 5x^2 + 8)$, $\log_{x+3} y^3$ — арифметической прогрессий.

6. Найти все положительные числа a, для каждого из которых все различные неотрицательные значения x, удовлетворяющие уравнению $\cos[(8a - 3)x] = \cos[(14a + 5)x]$ и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

7. Найти все положительные числа a, для каждого из которых все различные неотрицательные значения x, удовлетворяющие уравнению $\cos[(7a - 5)x] = \cos[(13a + 9)x]$ и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

8. Даны две арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3, причем $b_1 \neq b_2$ и $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$. Известно, что числа a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 также образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что $a_1 = b_2$.

9. Даны две геометрические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2,b_3. Известно, что числа a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 образуют геометрическую прогрессию и $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$. Доказать, что $a_1 + b_1 = a_3 + b_3$.

10. Найти все значения числа a, при которых уравнение $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ имеет ровно четыре различных корня и эти корни образуют в порядке возрастания арифметическую прогрессию.

11. Найти все значения a, при которых уравнение $x(x^{12} - ax^6 + a^4) = 0$ имеет ровно пять различных корней и эти корни образуют в порядке возрастания арифметическую прогрессию.

12. Положительные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов этих чисел по основанию 3 равна 2. Определить эти числа, если $\log_3 \frac{a_5}{a_3} = -2$.

13. Положительные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 составляют геометрическую прогрессию. Сумма десятичных логарифмов чисел a_2, a_3, a_4 равна 0. Определить эти числа, если $\lg a_1$ больше $\lg a_5$ на 4.

14. Вычислить сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся на 13.

15. Найти все числа x такие, что числа 0, $\log_2(-\cos 2x)$, $\log_2(\cos^2 x)$ в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию.

16. Найти все числа x такие, что числа 0, $\log_{1/2}(-2\cos x)$, $\log_{1/2}\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)$ в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию.

17. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Известно, что пятый, восьмой и одиннадцатый члены этой прогрессии являются соответственно первым, вторым и десятым членами арифметической прогрессии. Найти первый член геометрической прогрессии.

18. Три различных числа a, b, c, сумма которых равна 124, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Одновременно эти три числа a, b, c являются соответственно третьим, тринадцатым и пятнадцатым членами арифметической прогрессии. Найти числа a, b, c.

19. Сумма первых тринадцати членов арифметической прогрессии равна 130. Известно, что четвертый, десятый и седьмой члены этой прогрессии, взятые в указанном порядке, представляют собой три последовательных члена геометрической прогрессии. Найти первый член арифметической прогрессии.

20. Найти сумму корней уравнения

$$2\cos^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x},$$

принадлежащих промежутку $2 < x < 40$.

Д. *Уравнения и системы уравнений*

Уравнения и системы уравнений — один из самых распространенных типов экзаменационных задач. Эти задачи связаны, как правило, с трудностями двоякого рода — во-первых, надо найти путь решения, способ преобразования данного уравнения или системы, позволяющий добиться достаточного упрощения, и, во-вторых, надо осуществить эти преобразования так, чтобы не допустить ни потери корней, ни приобретения лишних корней.

Опыт экзаменов показывает, что подавляющее большинство поступающих более или менее успешно преодолевает трудности «поискового» характера, но очень и очень многие не в силах справиться с трудностями второго рода. Поэтому мы посвящаем исследованию возможностей потери или приобретения корней при решении уравнений специальный параграф (см. § 5 раздела I).

Что касается трудностей «поискового» характера, то они весьма многообразны и описать их не представляется возможным. Мы разберем только два примера, для решения которых нужно применить специальные замены переменных. Эти замены не сразу очевидны и бывают полезны при решении задач, в том числе и не только уравнений.

1 *Найти все значения величины h, при которых уравнение*

$$x(x+1)(x+h)(x+1+h) = h^2 \tag{16}$$

имеет четыре различных корня.

Ясно, что «лобовое» раскрытие скобок приведет здесь к уравнению четвертой степени; поэтому мы поступим иначе. Перемножив первый сомножитель с четвертым, а второй с третьим, перепишем уравнение (16) в форме

$$[x^2 + (1+h)x][x^2 + (1+h)x + h] = h^2.$$

Теперь видно, что замена переменной $y = x^2 + (1 + h)x$ приводит к квадратному уравнению

$$y^2 + hy - h^2 = 0, \tag{17}$$

корни которого имеют вид $y_{1,2} = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})h$.

Следовательно, число h удовлетворяет условию задачи, если каждое из квадратных уравнений

$$x^2 + (1 + h)x + \frac{(1 + \sqrt{5})h}{2} = 0,$$

$$x^2 + (1 + h)x + \frac{(1 - \sqrt{5})h}{2} = 0 \qquad (18)$$

имеет различные корни и, кроме того, корни первого уравнения оба отличны от корней второго уравнения. Уравнения (18) имеют различные корни, если дискриминанты уравнений положительны, т. е. значение h должно удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} (1 + h)^2 - 2(1 + \sqrt{5})h > 0, \\ (1 + h)^2 - 2(1 - \sqrt{5})h > 0. \end{cases}$$

Решения этой системы неравенств таковы:

$$h < -2 - \sqrt{5}, \quad 2 - \sqrt{5} < h < \sqrt{5} - 2, \quad h > 2 + \sqrt{5}. \qquad (19)$$

Из найденных значений h следует еще исключить те, при которых уравнения (18) имеют хотя бы один общий корень. Если x_0 — общий корень этих уравнений, то

$$x_0^2 + (1 + h)x_0 + \frac{(1 + \sqrt{5})h}{2} = 0,$$

$$x_0^2 + (1 + h)x_0 + \frac{(1 - \sqrt{5})h}{2} = 0,$$

откуда, вычитая одно равенство из другого, получаем $h = 0$. Таким образом, уравнения (18) имеют общий корень только при $h = 0$.

Окончательно, условию задачи удовлетворяют значения (19), кроме $h = 0$.

(2) *Найти все значения величины h, при которых уравнение*

$$x^4 + (h - 1)x^3 + x^2 + (h - 1)x + 1 = 0 \qquad (20)$$

имеет не менее двух различных отрицательных корней.

Данное уравнение имеет специальный вид — это так называемое *возвратное уравнение* четвертой степени: его коэффициенты, равноудаленные от концов, равны. Общий вид возвратного уравнения четвертой степени таков:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0;$$

оно может быть решено с помощью специального приема. Покажем, как проводится этот прием в нашем конкретном случае, но его общность будет сразу же очевидна.

Ясно, что $x = 0$ не является корнем уравнения (20). Поэтому обе части этого уравнения можно разделить на x^2 и затем преобразовать левую часть следующим образом:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + (h-1)\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 =$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + (h-1)\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1.$$

Тогда, сделав замену переменной $y = x + \frac{1}{x}$, мы придем к квадратному уравнению

$$y^2 + (h-1)y - 1 = 0. \qquad (21)$$

Корни этого уравнения определяются без труда:

$$y_{1,2} = \frac{1 - h \pm \sqrt{(1-h)^2 + 4}}{2}.$$

Следовательно, число h удовлетворяет условию задачи, если среди корней уравнений

$$x + \frac{1}{x} = y_1, \quad x + \frac{1}{x} = y_2 \qquad (22)$$

имеется не менее двух различных отрицательных чисел. Заметим теперь, что $y_1 > 0$, а потому первое уравнение (22) заведомо не имеет отрицательных корней. Далее, $y_2 < 0$, так что второе уравнение (22) может иметь только отрицательные корни.

Таким образом, остается выяснить, при каких значениях h второе уравнение (22) имеет различные корни. Это уравнение можно переписать в виде

$$x^2 - y_2 x + 1 = 0,$$

и для определения h мы получаем неравенство $y_2^2 > 4$, откуда $y_2 < -2$ (поскольку $y_2 < 0$), т. е.

$$\frac{1 - h - \sqrt{h^2 - 2h + 5}}{2} < -2.$$

Решения этого неравенства $h > \frac{5}{2}$ и являются решениями задачи.

Сделаем несколько замечаний о способах решения *систем уравнений.* При решении систем, как и при решении «одиночных» уравнений, существенное значение имеют понятие равносильности и примыкающие к нему понятия, подробно обсуждаемые в § 5 раздела I. Этот параграф посвящен, однако, вопросам, связанным только с «одиночными» уравнениями. Дело в том, что, несмотря на полное логическое сходство теоретических рассуждений, относящихся к равносильности уравнений и равносильности систем, использование понятия равносильности при решении систем на практике связано с гораздо большими трудностями, чем при решении уравнений, и поэтому им, как правило, не пользуются.

Трудности особого рода, возникающие при решении систем, связаны, конечно, только с теми преобразованиями системы, которые задевают несколько уравнений системы (во всем, что касается какого-то одного уравнения, можно в полной мере пользоваться понятиями и рекомендациями из § 5 раздела I). Но таких преобразований достаточно много — каждый знает, какие изощренные приемы применяются порой для решения систем.

Поэтому при решении систем обычно применяется только один из двух путей, указанных в § 5 раздела I для решения уравнений, — *выведение следствий, не обязательно равносильных данной системе, и после-*

дующее отбрасывание посторонних корней. При этом мы переходим даже не к системам, являющимся следствиями исходной, а к отдельным уравнениям, каждое из которых является следствием исходной системы, т. е. удовлетворяется любым решением системы. Комбинируя эти уравнения, мы получаем из них системы, являющиеся следствиями исходной системы, и в конце концов получаем некоторые наборы неизвестных. Наконец, проверкой (как правило, непосредственной подстановкой) мы отбрасываем посторонние решения.

Для того чтобы идти таким путем, разумеется, надо не допускать преобразований, приводящих к потере решений, каким, например, является деление обеих частей одного уравнения на обе части другого уравнения, — ясно, что при этом будут потеряны те решения системы, при которых обе части второго уравнения обращаются в нуль. С другой стороны, большинство наиболее часто применяющихся преобразований — сложение, вычитание, умножение уравнений, подстановка неизвестного из одного уравнения в другое и т. п. — не могут привести к потере решений и потому допустимы. Обдумывать вопрос, может ли привести к потере решений конкретное более или менее сложное преобразование, обычно приходится в каждом конкретном случае.

Безусловно, непосредственная проверка получающихся решений может иногда представить определенные затруднения, и для того, чтобы ее избежать, можно пользоваться, как правило, теми рекомендациями, которые даны для решения уравнений.

Поясним все сказанное на одном примере.

3 *Найти решения системы*

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = y, \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2} = x. \end{cases} \tag{23}$$

Можно заметить, что, «перевернув» дроби в левой части обоих уравнений и заменив соответственно правые части на $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{x}$, мы получим простую систему относительно $u = \frac{1}{x}$ и $v = \frac{1}{y}$:

$$\begin{cases} \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2} = v, \\ \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} = u. \end{cases} \qquad (24)$$

Но можно ли «переворачивать» уравнение? Что происходит при этом с решениями? Нетрудно сообразить, что это преобразование не приведет к появлению посторонних решений, но может привести к потере решений — будут потеряны решения, при которых обе части уравнения равны нулю. Поэтому до перехода к системе (24) следует во избежание потери рассмотреть указанную возможность.

Левая часть первого уравнения системы (23) обращается в нуль при $x = 0$, а правая — при $y = 0$. Следовательно, может быть потеряно (и действительно теряется) лишь решение $x = 0$, $y = 0$. Проверив, что $x = 0$, $y = 0$ является решением, можно найти остальные решения из системы (24).

Вычитая второе уравнение системы (24) из первого, получаем уравнение $u^2 - v^2 = 2(v - u)$, откуда либо $u - v = 0$, либо $u + v = -2$.

В первом случае, подставляя $v = u$ в первое уравнение системы (24), имеем $u = 1$. Подстановкой убеждаемся, что пара $u_1 = 1$, $v_1 = 1$ удовлетворяет и второму уравнению, а следовательно, и системе (24). Во втором случае после подстановки $v = -u - 2$ мы приходим к уравнению $u^2 + 2u + 5 = 0$, которое не имеет корней.

Итак, система (24) имеет решение $u = 1$, $v = 1$. Вспоминая, что $x = \frac{1}{u}$, $y = \frac{1}{v}$, получаем решение системы (23): $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, кроме того, надо не забыть найденное выше решение $x_2 = 0$, $y_2 = 0$.

Остановимся еще на *системах двух линейных уравнений с двумя неизвестными*. Исследование такой системы в самом общем виде, т. е. без всяких ограничений на коэффициенты, вызывает у поступающих серьезные трудности. Поэтому мы сформулируем теорему, которая исчерпывает исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Прежде чем формулировать упомянутую теорему, обратим особое внимание на *сознательное* применение определения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными: очень многие поступающие дают определение совершенно правильное, но при его использовании допускают грубые ошибки.

Так, многие считают, что

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 1, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 0 \cdot y = 1, \\ x + 0 \cdot y = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$

не являются системами двух линейных уравнений с двумя неизвестными, поскольку «первая система — это не система, а одно уравнение; вторая система просто бессмысленна, потому что «такого не может быть»; третья система не с двумя, а с одним неизвестным; в четвертой системе вообще нет неизвестных». Но вся эта аргументация неосновательна, поскольку в определении системы *нет никаких ограничений на коэффициенты*, и поэтому написанные выше системы вполне подходят под общее определение, хотя и имеют несколько «странный» вид.

На деле же «странный» вид объясняется тем, что эти системы, если можно так выразиться, слишком простые: сразу ясно, что первая система равносильна одному уравнению $x + y = 1$, вторая система несовместна, третья система имеет решение $x = 1$, y — любое число, а решением четвертой системы является любая пара чисел x, y.

Дадим также определения терминов «определенная система» и «неопределенная система», полезных при исследовании систем: система называется ***определенной***, если она имеет ровно одно решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

Теперь сформулируем теорему. Формулировка будет несколько необычной, в виде схемы.

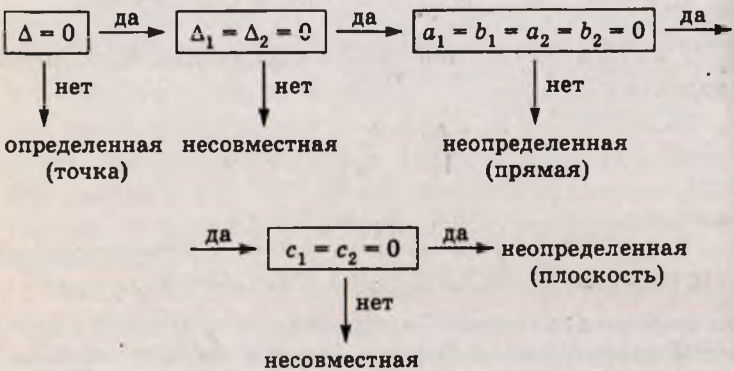
Теорема. *Пусть дана система*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_1x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1, \quad \Delta_1 = c_1b_2 - c_2b_1, \quad \Delta_2 = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Тогда:



Эту схему надлежит понимать следующим образом. Прежде всего задается вопрос, выполняется ли условие $\Delta = 0$. Если нет, то соответствующая стрелка показывает, что система определенная. Если да, то соответствующая стрелка предписывает задать вопрос, выполняется ли условие $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Если нет, то соответствующая стрелка показывает, что система несовместная. Если да, то соответствующая стрелка предписывает задать следующий вопрос, и т. д. Слова «точка», «прямая», «плоскость», стоящие в скобках, относятся к геометрической интерпретации соответствующего случая.

Разумеется, можно дать и обычную формулировку этой теоремы, однако на схеме получается гораздо нагляднее. Вот обычная формулировка:

Если $\Delta \neq 0$, то система определенная; в этом случае ее решение:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Если $\Delta = 0$, но хотя бы одно из чисел Δ_1, Δ_2 отлично от нуля, то система несовместная. Если $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, но хотя бы одно из чисел a_1, b_1, a_2, b_2 отлично от нуля, то система неопределенная. Если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ и все числа a_1, b_1, a_2, b_2 равны нулю[1]*, но хотя бы одно из чисел c_1, c_2 отлично от нуля, то система несовместная. Наконец, если все коэффициенты системы равны нулю, то система неопределенная.*

Сравнение явно не в пользу этой формулировки.

(4) *При каких значениях параметра A система уравнений*

$$\begin{cases} 2x + Ay = A + 2, \\ (A + 1)x + 2Ay = 2A + 4 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

Согласно общей теореме — и это хорошо видно на приведенной схеме — система имеет бесконечно много решений в двух случаях: когда $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, но не все коэффициенты при неизвестных равны нулю, и когда все шесть коэффициентов системы равны нулю. Второй случай в нашей задаче, очевидно, места не имеет, и поэтому остается рассмотреть только первый случай.

Итак, условию задачи удовлетворяют значения параметра A, для которых одновременно выполнено три равенства:

$$\Delta = 3A - A^2 = 0, \quad \Delta_1 = (A + 2)2A - (2A + 4)A = 0,$$
$$\Delta_2 = 2(2A + 4) - (A + 1)(A + 2) = 0.$$

Из равенства $\Delta = 0$ сразу получаем $A_1 = 0$, $A_2 = 3$; однако если $A = 0$, то $\Delta_2 \neq 0$, а если $A = 3$, то $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Поэтому данная система имеет бесконечно много решений только при $A = 3$.

Заметим, впрочем, что не следует впадать в крайность, стремясь решить любую задачу, связанную с сис-

---

[1] Легко видеть, что условие $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ влечет за собой равенства $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

15. $\begin{cases} \log_2 x + \log_3 y^2 = 0, \\ \log_2 x^2 - \log_{1/3} y = 5. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4, \\ \log_4 (x + y) = \frac{3}{2}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \lg 3 \cdot \lg (3x) = \lg 2 \cdot \lg (2y), \\ \lg x \cdot \lg 2 = \lg y \cdot \lg 3. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \lg 5 \cdot \lg \frac{5}{x} = \lg 7 \cdot \lg \frac{7}{y}, \\ \lg x \cdot \lg 7 = \lg y \cdot \lg 5. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 25\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2y-2} = \frac{1}{5^{2x}}, \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{2x+y+14} = \sqrt{x+y+12}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \log_2 (10 - 3x) + \log_{1/2} (2x - 5y) = 0, \\ \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{11-3x} = \sqrt{4x+2y-12}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \sqrt{3 + \log_x (1-y)} = \log_x x(1-y), \\ xy = -6. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \log_x (\sqrt{xy} + 2) = \log_x y + 1, \\ x + y = 5. \end{cases}$

Исследовать и решить системы уравнений:

23. $\begin{cases} x^5 y^8 = a, \\ x^7 y^{11} = b. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x^{11} y^9 = a, \\ x^6 y^5 = b. \end{cases}$

25. При каких значениях α всякая пара чисел x, y, являющаяся решением системы уравнений

$$\begin{cases} x \sin 2\alpha + y(1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha, \\ x(1 + \cos 2\alpha) - y \sin 2\alpha = 0, \end{cases}$$

является одновременно и решением системы уравнений

$$\begin{cases} x \sin \alpha + y \cos \alpha = \sin \alpha, \\ x \cos \alpha - y \sin \alpha = 0? \end{cases}$$

26. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

27. При каких значениях параметра α система уравнений

$$\begin{cases} \alpha x - 4y = \alpha + 1, \\ 2x + (\alpha + 6)y = \alpha + 3 \end{cases}$$

не имеет решений?

28. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} a^2x + (2 - a)y = 4 + a^3, \\ ax + (2a - 1)y = a^5 - 2 \end{cases}$$

не имеет решений?

29. Числа a и b таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} a^2x - ay = 1 - a, \\ bx + (3 - 2b)y = 3 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$. Найти числа a и b.

30. При каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} a^2x - by = a^2 - b, \\ bx - b^2y = 2 + 4b \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

Е. *Метод математической индукции*

Метод математической индукции находит широкие приложения в рамках школьного курса: он часто применяется для решения алгебраических, арифметических и геометрических задач, именно он позволяет коротко и *строго* доказать многие теоремы.

Внимательно проанализируем, например, следующее рассуждение, которое поступающие иногда предлагают как вывод формулы общего члена геометрической прогрессии: «Пусть знаменатель геометрической прогрессии a_1, a_2, a_3, ... равен q. Тогда по определению $a_2 = a_1q$; $a_3 = a_2q = a_1q^2$; $a_4 = a_3q = a_1q^3$ и т. д. Очевидно, что при любом $n > 1$ имеем $a_n = a_1q^{n-1}$». *Логическая неполноценность* этого доказательства сразу бросается в глаза: мы установили формулу только *для нескольких* значений n, а затем сразу сделали вывод, что она верна для любого натурального n.

Такой способ рассуждений может привести к ошибочным результатам. В самом деле, при $n = 1, 2, 3, 4$ число $n^2 + n + 17$ равно соответственно простым числам 19, 23, 29, 37. Проверим еще несколько следующих значений (скажем, $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$) — число $n^2 + n + 17$ тоже оказывается простым. Но можно ли отсюда заключить, что при *любом* натуральном n число $n^2 + n + 17$ простое? Очевидно, нельзя: такое заключение было бы необоснованным. Более того, оно и неверно: легко убедиться, что, например, при $n = 16$ это число равно 17^2, т. е. не является простым.

Этот пример может навести на мысль, что надо брать для проверки не только первые четыре-пять значений n, а больше или гораздо больше. Однако допустим, что формулу для общего члена геометрической прогрессии мы проверили для миллиона членов. Следует ли отсюда, что эта формула справедлива для всех n? Конечно, нет: ведь сделав миллион шагов и не заглянув вперед, мы ничего не знаем о том, что случится на миллион первом шаге. Где гарантия, что формула не нарушится на миллион первом шаге[1]?

Поэтому недостаток всех доказательств подобного рода состоит не в том, что мы рассмотрели «мало» частных случаев, а в отсутствии «взгляда в будущее», в неизвестности, что произойдет на следующем шаге. Этот «взгляд в будущее» и предусматривается методом математической индукции.

Суть этого метода заключается в следующем.

Пусть доказываемое утверждение *проверено в одном частном случае*, скажем, при $n = 1$. Пусть доказано так-

---

[1] В примере с числом $n^2 + n + 17$ мы довольно быстро, уже на 16 шаге, убеждаемся, что это число не обязано быть всегда простым. Но вот другой пример. Легко проверить, что при $n = 1, 2, 3, 4$ число $991n^2 + 1$ не является квадратом целого числа. Такую проверку можно провести даже для миллиарда первых значений n. Однако утверждение, что при *любом* натуральном n это число не является квадратом целого числа, неверно: с помощью вычислительной машины удалось найти такое 29-значное число n, для которого $991n^2 + 1$ есть точный квадрат.

же, что *из справедливости этого утверждения при $n = k$ всегда следует его справедливость и для следующего значения n, т. е. при $n = k + 1$*. Тогда можно рассуждать так: наше утверждение проверено при $n = 1$, но, по доказанному, оно будет верно и при $n = 1 + 1 = 2$, а будучи справедливым для $n = 2$, оно выполняется и для $n = 2 + 1 = 3$ и так далее, т. е. *справедливо при всех значениях n.*

Однако не является ли последнее «и так далее» столь же незаконным, как и в предыдущих примерах? Разумеется, нет; здесь мы вполне уверены в том, что каждый раз сможем сделать следующий шаг, и поэтому *очевидно*, что утверждение справедливо для любого n: ведь *до любого целого числа можно добраться конечным числом шагов, начав с $n = 1$.*

Таким образом, чтобы доказать справедливость некоторого утверждения при любом натуральном n, надо доказать *два* факта: во-первых, что оно справедливо при $n = 1$ и, во-вторых, что из его справедливости при $n = k$ следует его справедливость при $n = k + 1$. В этом и состоит ***метод математической индукции:*** мы доказываем, что утверждение справедливо при $n = 1$ (*базис индукции*), затем предполагаем его справедливость для некоторого $n = k$ (*предположение индукции*) и доказываем его справедливость при $n = k + 1$ (*индукционный шаг*).

1 *Доказать, что если n — натуральное число, то $4^n + 15n - 1$ делится на 9.*

При $n = 1$ число $4^n + 15n - 1$ равно 18, т. е. делится на 9.

Предположим, что $4^k + 15k - 1$ делится на 9, и возьмем $n = k + 1$. Тогда

$$4^{k+1} + 15(k + 1) - 1 = 4(4^k + 15k - 1) - 9(5k + 2).$$

Но по предположению индукции $4^k + 15k - 1$ делится на 9, и поэтому правая, а вместе с ней и левая часть этого равенства делятся на 9. Следовательно, доказываемое утверждение справедливо.

(2) *Доказать, что при любом натуральном n справедливо равенство*

$$\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \ldots + \sin\frac{n\pi}{3} = 2\sin\frac{n\pi}{6}\sin\frac{n+1}{6}\pi. \quad (26)$$

При $n = 1$ мы получаем верное равенство

$$\sin\frac{\pi}{3} = 2\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}.$$

Сделав предположение индукции, рассмотрим сумму, стоящую в левой части равенства (26), при $n = k + 1$:

$$\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \ldots + \sin\frac{k\pi}{3} + \sin\frac{(k+1)\pi}{3} =$$

$$= 2\sin\frac{k\pi}{6}\sin\frac{(k+1)\pi}{6} + \sin\frac{(k+1)\pi}{3} =$$

$$= 2\sin\frac{k\pi}{6}\sin\frac{(k+1)\pi}{6} + 2\sin\frac{(k+1)\pi}{6}\cos\frac{(k+1)\pi}{6} =$$

$$= 2\sin\frac{(k+1)\pi}{6}\left[\sin\frac{k\pi}{6} + \cos\frac{(k+1)\pi}{6}\right] =$$

$$= 2\sin\frac{(k+1)\pi}{6} \cdot 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{(k-1)\pi}{6} =$$

$$= 2\sin\frac{(k+1)\pi}{6}\cos\frac{(k-1)\pi}{6}.$$

Для завершения доказательства заметим, что

$$\cos\frac{(k-1)\pi}{6} = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \frac{(k-1)\pi}{6}\right] = \sin\frac{(4-k)\pi}{6} =$$

$$= \sin\left(\pi - \frac{(4-k)\pi}{6}\right) = \sin\frac{(k+2)\pi}{6}.$$

Следовательно, равенство (26) справедливо.

(3) *В плоскости проведено n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Определить, на сколько частей разбивают плоскость эти прямые.*

Нарисовав необходимые чертежи, мы можем записать следующее соответствие между числом n прямых, удовлетворяющих условию задачи, и числом a_n частей, на которые разбивают плоскость эти прямые:

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, ..., \tag{27}$$
$$a_n = 2, 4, 7, 11, 16, ...$$

Судя по первым членам, последовательность a_n такова, что разности $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$, ... составляют арифметическую прогрессию. Если воспользоваться уже разобранным примером 5 (§ 1, Г раздела I), то можно высказать *гипотезу*, что n прямых, удовлетворяющих условию задачи, разбивают плоскость на

$$a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \tag{28}$$

частей. Формула (28) легко проверяется для нескольких первых значений n, однако, конечно, из этого не следует еще, что она дает ответ на предложенную задачу. Это утверждение требует дополнительного доказательства методом математической индукции.

Отвлекаясь от проведенного только что «подбора», докажем, что n прямых (из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку) разбивают плоскость на a_n частей, где a_n вычисляется по формуле (28).

Очевидно, при $n = 1$ формула (28) справедлива. Сделав предположение индукции, рассмотрим $k + 1$ прямых, удовлетворяющих условию задачи. Выделив из них произвольным образом k прямых, мы можем сказать, что они делят плоскость на

$$1 + \frac{k(k+1)}{2}$$

частей. Присоединим теперь $(k + 1)$ — прямую. Так как она не параллельна ни одной из предыдущих прямых, то она пересечет все k прямых. Так как она не проходит ни через одну из точек пересечения предыдущих прямых, то она пройдет по $k + 1$ куску, на которые плоскость уже была разбита, и каждый из этих кусков разделит на две части, т. е. добавится еще $k + 1$ кусков. Следовательно, общее число кусков, на которые плоскость разбивается $k + 1$ прямыми, есть

$$1 + \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = 1 + \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = a_{k+1}.$$

Доказательство этим завершается.

Подчеркнем, что метод математической индукции есть метод доказательства уже *заданных* утверждений, а не выведения этих утверждений. Например, этим методом никак нельзя *получить* формулу (28), но, найдя ее каким-нибудь путем, скажем, подбором, можно *доказать* ее методом математической индукции.

Именно так мы и поступили: рассмотрев несколько частных случаев (27), мы догадались, какой могла бы быть формула (28), а затем ее строго доказали. При этом изложение способа получения той или иной формулы, того или иного утверждения не является обязательным элементом доказательства. После того как у нас возникла из каких-то соображений догадка, мы можем про все забыть, взять это утверждение «с потолка» и попытаться доказать его по индукции.

Заметим теперь, что в методе математической индукции не обязательно начинать с $n = 1$. Можно, разумеется, доказать утверждение для некоторого $n = n_0$, сделать индукционный шаг и в результате получить, что это утверждение справедливо для всех целых n, *больших или равных исходному числу* n_0. Естественно, что в таком случае предположение индукции имеет соответственно измененный вид: именно, мы предполагаем, что доказываемое утверждение справедливо при $n = k \geqslant n_0$. Наконец, следует понимать, что при значениях $n < n_0$ утверждение может быть как верным, так и неверным; во всяком случае, каких-либо заключений о его справедливости при $1 \leqslant n < n_0$ из проведенного доказательства методом математической индукции сделать нельзя.

Выясним, например, *справедливо ли неравенство*

$$2^n > n^2,$$

где n — целое положительное число. Ясно, что при $n = 1$ оно справедливо. Проверим возможность сделать индукционный шаг. Предположим, что при $n = k$ имеет место неравенство $2^k > k^2$. Тогда очевидно, что $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2$, и для обоснования возможности проведения индукционного шага достаточно установить неравенство $2k^2 \geqslant (k+1)^2$, или $k^2 - 2k - 1 \geqslant 0$. Однако это последнее неравенство верно, лишь если $k \geqslant 1 + \sqrt{2}$, т. е. если $k \geqslant 3$. Таким образом, за базис индукции нельзя брать $n_0 = 1$ — мы не сможем сделать первого же индукционного шага.

Естественно, далее, попытаться за базис взять $n_0 = 3$. В этом случае индукционный шаг делать можно, но непосредственно проверяется, что при $n = 3$ неравенство $2^n > n^2$ неверно, так что начинать индукцию нельзя. Лишь при $n = 5$ это неравенство справедливо, так что за базис индукции можно взять $n_0 = 5$; при $n \geqslant 5$ индукционный шаг тоже проходит. Следовательно, *неравенство* $2^n > n^2$ *верно при всех целых* $n \geqslant 5$. Для одних значений n, меньших 5, это неравенство также верно ($n = 1$), для других — нет ($n = 2, 3, 4$).

Как видно из всего изложенного, метод математической индукции применяется для доказательства утверждений, зависящих от натурального числа n. Однако многие утверждения, в формулировке которых n вовсе не участвует, можно заменить такими равносильными утверждениями, которые явно зависят от n.

4 *Найти все целые решения неравенства*

$$x - 1 < \log_6 (x + 3).$$

Данное неравенство имеет смысл лишь при $x > -3$, и поэтому, в соответствии с условием задачи, нас интересуют лишь числа -2, -1, 0 и все натуральные числа x. Для решения удобно переписать неравенство в виде

$$6^{x-1} < x + 3. \tag{29}$$

Теперь не представляет труда заметить, что уже при $x = 2$ левая часть неравенства (29) больше правой, а при увеличении x левая часть растет «гораздо быстрее» правой, так что при бо́льших x это неравенство уже тем более неверно. Особенно наглядно в этом можно убедиться по графикам функций, стоящих в левой и правой частях неравенства (29).

Казалось бы, остается рассмотреть лишь несколько «начальных» значений x, и задача будет решена. Между тем дело обстоит не совсем так, поскольку проведенное выше рассуждение о росте левой и правой частей неравенства (29) при всей его наглядной убедительности не является в действительности достаточно строгим доказательством — ведь слова «гораздо быстрее» не имеют точного математического смысла (по крайней мере в школьном курсе математики). В то же время это рассуждение не оказывается и совершенно бесполезным — благодаря ему мы обнаруживаем, что полное решение задачи разбивается, по существу, на две части: 1) надо проверить, удовлетворяют ли неравенству (29) целые значения от -2 до 1, и 2) доказать, что при целых $x \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$6^{x-1} > x + 3. \tag{30}$$

Первая часть решения проводится совершенно очевидным образом, и мы убеждаемся, что числа -2, -1, 0 и 1 являются решениями неравенства (29). Вторая же часть решения проще всего проводится по индукции. При $x = 2$ неравенство (30) справедливо. Предположим, что оно верно при $x = k \geqslant 2$, т. е. $6^{k-1} > k + 3$. Но тогда при $x = k + 1$ имеем

$$6^{(k+1)-1} = 6 \cdot 6^{k-1} > 6(k + 3) = 6k + 18 > (k + 1) + 3,$$

и, следовательно, неравенство (30) выполнено и при $x = k + 1$.

Таким образом, неравенство (30) справедливо при любом целом $x \geqslant 2$. Окончательно получаем, что исходное неравенство имеет четыре целых решения: -2, -1, 0, 1.

5 *В любой момент времени число людей на Земле, сделавших нечетное число рукопожатий, четно.*

Для доказательства дадим каждому рукопожатию номер в хронологическом порядке. Ясно, что тогда наше утверждение равносильно следующему: каково бы ни было число n, после рукопожатия с номером n число людей, сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

Это утверждение зависит от n, и мы докажем его по индукции. Для краткости будем называть людей, сделавших нечетное число рукопожатий, «плохими», а остальных «хорошими».

После рукопожатия с номером 1 стало два «плохих» человека, т. е. четное число. Пусть после рукопожатия с номером k число «плохих» людей четно, и пусть происходит рукопожатие номер $k + 1$. При том может быть три случая: пожимают руки а) двое «хороших», б) двое «плохих», в) «хороший» и «плохой».

В первом случае двое «хороших» прибавляют к своему четному числу рукопожатий еще одно, т. е. становятся «плохими»; во втором — двое «плохих» становятся «хорошими» и в третьем — «хороший» становится «плохим», а «плохой» — «хорошим». Таким образом, число «плохих» людей либо увеличивается на два, либо уменьшается на два, либо не меняется, т. е. в любом случае остается четным. Утверждение доказано.

Задачи

Доказать методом математической индукции следующие формулы (№ 1—3):

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

3. $\sin x + \sin(x+h) + \ldots + \sin(x+nh) = \dfrac{\sin\left(x + \frac{nh}{2}\right)\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$,

где $h \neq 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

4. Доказать, что при любом натуральном n число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

5. Доказать, что $11n^2 - 14n + 3 \geqslant 0$ при всех целых n.

6. Доказать, что $5n^2 - 6n + 1 \geqslant 0$ при всех целых n.

Найти все целые решения неравенств (№ 7—8):

7. $2x + 1 < 2\log_2(x+3)$.

8. $2x - 3 < 2\log_3(x+2)$.

9. Доказать, что для любого натурального числа $n > 1$ справедливо неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

10. Доказать, что любое целое число рублей, большее 7, можно уплатить без сдачи, имея только купюры в 3 и 5 *р*.

§ 2. Некоторые сведения о действительных числах

Здесь мы остановимся на двух вопросах: абсолютная величина действительного числа и арифметический корень.

В большинстве случаев поступающие правильно отвечают, чему равна абсолютная величина данного конкретного действительного числа. Но когда дело доходит до *определения* абсолютной величины, довольно часто встречаются бессмысленные ответы типа: абсолютная величина есть «число без знака», «число со знаком плюс», «положительное значение числа». Между тем от поступающих требуется совершенно четкое определение.

Абсолютная величина числа a (обозначается символом $|a|$) определяется так:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0, \\ 0, \text{ если } a = 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Абсолютную величину числа называют также его ***модулем.***

Это определение позволяет вычислить абсолютную величину любого действительного числа. При этом надо пользоваться или первой, или второй, или третьей строкой определения в зависимости от того, является ли данное конкретное число положительным, нулем или отрицательным.

Например, на вопрос: *чему равна абсолютная величина числа* -3, полный ответ дается так: $-3 < 0$; поэтому согласно третьей строке определения абсолютная величина числа -3 равна $-(-3) = 3$, т. е. $|-3| = 3$.

Заметив, что при $a = 0$ справедливо равенство $|a| = a$, мы можем записать определение абсолютной величины короче:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Из определения модуля сразу следует, что

$$|a| \geqslant 0 \textit{ при любом } a.$$

Это — теорема, хотя и очень простая. Для доказательства рассмотрим два случая:

а) $a \geqslant 0$. Тогда $|a| = a \geqslant 0$, что и требовалось доказать;

б) $a < 0$. Тогда $|a| = -a$. Но $-a > 0$, так как $a < 0$, т. е. $|a| > 0$, что и требовалось доказать.

Следует хорошо понять: то, что выражение $|a|$ всегда положительно или нуль, является *не определением абсолютной величины, а следствием его*; в определении о знаке выражения $|a|$ ничего не сказано.

Легко видеть, что геометрически $|a|$ означает расстояние, т. е. длину отрезка числовой оси (положительное число или 0) от точки a до нуля. Кроме того, можно доказать разбором отдельных случаев, что $|b - a|$ есть расстояние между точками a и b. Эти геометрические представления очень полезны при решении задач, а в простейших случаях позволяют дать ответ сразу, не прибегая к стандартному методу, который мы рассматриваем ниже.

Например, уравнение $|x - 1| = 2$ геометрически решается так: его решения — это точки, находящиеся на расстоянии 2 от точки 1, т. е. $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Аналогично, решения неравенства $|x + 2| \leqslant 5$ — это точки, находящиеся от точки -2 на расстоянии не больше 5, т. е. точки интервала[1] $-7 \leqslant x \leqslant 3$.

Отметим также, что

$$a \leqslant |a| \textit{ при любом } a.$$

---

[1] Здесь и ниже мы не употребляем терминов «открытый интервал» (для множества чисел x таких, что $a < x < b$), «замкнутый интервал» (для $a \leqslant x \leqslant b$) и «полуоткрытый интервал» (для $a \leqslant x < b$ и $a < x \leqslant b$), называя каждое из таких множеств «интервал» (а иногда «отрезок» или «промежуток»). Соответственный смысл имеет термин «бесконечный интервал».

Очень полезны для решения задач следующие свойства модуля: *для любых действительных чисел a и b*

$$\text{I. } |a+b| \leqslant |a| + |b|;$$
$$\text{II. } |a-b| \leqslant ||a| - |b||;$$
$$\text{III. } |ab| = |a|\,|b|;$$
$$\text{IV. } \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

Проще всего доказываются свойства III и IV. Это делается, например, простым перебором всех возможных комбинаций знаков a и b. Упомянем еще важное следствие свойства III:

$$|a|^2 = a^2 \textit{ при любом } a.$$

Действительно, если в III положить $a = b$, то получим $|a|^2 = |a^2|$, что равно a^2, так как $a^2 \geqslant 0$.

Для доказательства свойства I заметим, что

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2;$$

но $ab \leqslant |a| \cdot |b|$, так что $|a+b|^2 \leqslant (|a| + |b|)^2$.

Но из двух неотрицательных чисел $|a+b|$ и $|a| + |b|$ меньше то, квадрат которого меньше; это и доказывает свойство I. Иное доказательство основано на переборе возможных случаев.

Свойство II может быть доказано аналогично или выведено из свойства I. Именно, по свойству I

$$|a| = |(a-b) + b| \leqslant |a-b| + |b|,$$

откуда $|a| - |b| \leqslant |a-b|$. Точно так же доказывается, что $|b| - |a| \leqslant |a-b|$. Но одно из двух выражений — либо $|a| - |b|$, либо $|b| - |a|$ — неотрицательно и, следовательно, совпадает со своей абсолютной величиной, так что $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$.

Задачи, связанные с абсолютной величиной, решаются, как правило, стандартным приемом — «освобождением от модуля»: в соответствии с определением рассматриваются случаи распределения знаков выражений, стоящих под знаком модуля, и в каждом из этих случаев каждый модуль «раскрывается», т. е. заменяется либо самим выражением, либо противоположным ему по знаку, после чего получается задача, в которой знака модуля нет[1]. С этим приемом знакомы почти все поступающие. Однако при его применении допускаются следующие две грубые ошибки.

Первая ошибка связана с неправильным пониманием (или, быть может, с неправильным применением) определения модуля: в тех случаях, когда под знаком модуля стоит не x, а какое-нибудь выражение $f(x)$, — а, как правило, встречаются именно такие случаи, — вместо правильного равенства

$$f(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0, \end{cases} \tag{2}$$

пишут равенство

$$f(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \geqslant 0, \\ -f(x), \text{ если } x < 0, \end{cases}$$

что, разумеется, неверно.

Вторая ошибка проистекает от недостаточного понимания логической сущности самого приема. В самом деле, рассмотрение отдельных случаев, скажем, при решении уравнения, означает, что в каждом из них мы ищем решение только в какой-то узкой области, а именно в области, определенной условиями конкретного рассматриваемого случая. Это заставляет нас каждый раз после нахождения решений в конкретном случае отобрать из них лишь те, которые входят в нужную область, т. е. удовлетворяют условиям, определяющим этот конкретный случай. В то же время очень часто приходится видеть, как поступающие правильно выделяют отдельные случаи, решают уравнение в каждом случае, а условия случаев повисают в воздухе и выглядят как формальная отписка.

Перейдем к рассмотрению примеров.

---

[1] Следует понимать, однако, что этот прием сам по себе не является решением задачи — после его применения в каждом из рассматриваемых случаев могут встретиться серьезные трудности. Цель этого приема — снять трудности, связанные с модулем.

(1) *Решить уравнение* $|x^2 - x - 6| = x + 2$.

Рассмотрим последовательно два случая:

а) $x^2 - x - 6 < 0$. В этом случае имеем уравнение $-x^2 + x + 6 = x + 2$, корни которого $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Теперь нужно еще проверить, удовлетворяют ли x_1 и x_2 условию а). Для этого достаточно подставить эти значения в левую часть неравенства $x^2 - x - 6 < 0$. После подстановки получаем числовые неравенства $-4 < 0$ и $0 < 0$. Первое из них справедливо, а второе — нет; поэтому лишь 2 является корнем исходного уравнения.

б) $x^2 - x - 6 \geqslant 0$. В этом случае имеем уравнение $x^2 - x - 6 = x + 2$, корни которого $x_1 = 4$, $x_2 = -2$. Так как оба эти значения x удовлетворяют условию б), то и 4, и -2 являются корнями исходного уравнения.

Итак, исходное уравнение имеет три корня: -2, 2 и 4.

При внимательном разборе этого решения возникает иногда следующий вопрос: мы сначала отбросили значение $x = -2$, а потом снова его нашли, так что в конце концов это значение оказалось корнем исходного уравнения; как это понять? Дело заключается в следующем: в первом случае, отбрасывая значение $x = -2$, мы вовсе не утверждали, что оно не является корнем исходного уравнения. Мы утверждали только, что это значение не подходит под ограничения, наложенные на x в условии случая а). Естественно, ничто не мешает этому же значению удовлетворять условию иного случая и оказаться корнем исходного уравнения.

В следующей задаче многие поступающие допустили первую из указанных грубых ошибок.

(2) *Решить неравенство* $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geqslant 0$.

Согласно определению модуля мы должны рассмотреть два случая:

$$\text{а) } x^2 + 3x \geqslant 0; \quad \text{б) } x^2 + 3x < 0.$$

Между тем многие поступающие рассматривали случаи $x \geqslant 0$ и $x < 0$. В первом из них знак модуля действительно можно снять: при $x \geqslant 0$ верно и неравенство

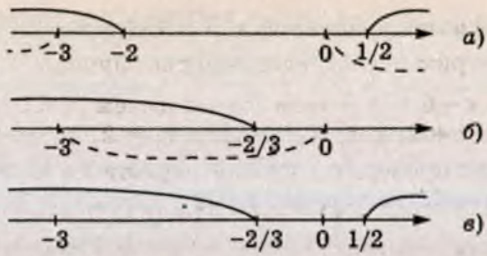


Рис. 2

$x^2 + 3x \geqslant 0$, но при $x < 0$ о знаке $x^2 + 3x$ сказать ничего нельзя, что, впрочем, не помешало авторам подобного решения при $x < 0$ написать равенство $|x^2 + 3x| = -x^2 - 3x$ или даже $|x^2 + 3x| = x^2 - 3x$.

При правильном решении в случае а) получаем неравенство $2x^2 - 3x - 2 \geqslant 0$, решения которого: $x \leqslant -2$ и $x \geqslant \frac{1}{2}$. Условие а) удовлетворяется при $x \leqslant -3$ и при $x \geqslant 0$. Из указанных выше решений надо отобрать те, которые удовлетворяют условию а). Это проще всего сделать на чертеже (рис. 2, *а*). В результате получим, что в случае а) исходное неравенство выполняется при $x \leqslant -3$ и при $x \geqslant \frac{1}{2}$.

В случае б) исходное неравенство принимает вид $-3x - 2 \geqslant 0$. Условие б) удовлетворяется при $-3 < x < 0$, так что из всех $x \leqslant -\frac{2}{3}$ остаются лишь значения x из интервала $-3 < x \leqslant -\frac{2}{3}$ (рис. 2, *б*).

Объединяя решения, найденные в случаях а) и б) (рис. 2, *в*), получаем ответ: $x \leqslant -\frac{2}{3}$ и $x \geqslant \frac{1}{2}$.

3 *Решить неравенство* $2 \cdot |3 + 5x - 2x^2| < 1 - x$.

Рассмотрим два случая:

а) $3 + 5x - 2x^2 \geqslant 0$. В этом случае данное неравенство переписывается так: $2(3 + 5x - 2x^2) < 1 - x$, или, после упрощений, $4x^2 - 11x - 5 > 0$. Последнее неравенство справедливо для $x > \frac{11+\sqrt{201}}{8}$ и для $x < \frac{11-\sqrt{201}}{8}$. Но из этих значений x удовлетворять исходному неравенству будут лишь те значения, которые удовлетворяют еще и условию рассматриваемого случая, т. е. неравенству $3 + 5x - 2x^2 \geqslant 0$. Решая это неравенство, получим $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3$.

Теперь надо отобрать из найденных промежутков $x > \frac{11+\sqrt{201}}{8}$ и $x < \frac{11-\sqrt{201}}{8}$ те значения x, которые одновременно входят в интервал $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3$. Удобнее это сделать на числовой оси. Отметим на ней точки

$$\frac{11-\sqrt{201}}{8}, \quad \frac{11+\sqrt{201}}{8}, \quad -\frac{1}{2}, \quad 3$$

(рис. 3). Из рисунка ясно, что ни одно значение $x > \frac{11+\sqrt{201}}{8}$ не входит в интервал $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3$, т. е. среди этих значений x нет ни одного решения исходного неравенства. Среди $x < \frac{11-\sqrt{201}}{8}$ найдутся значения, входящие в этот интервал, — это будут все x из интервала

$$-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{11-\sqrt{201}}{8}.$$

Они и являются решениями исходного неравенства в рассматриваемом случае.

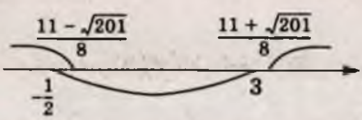


Рис. 3

б) $3 + 5x - 2x^2 < 0$. Аналогичные рассуждения показывают, что решением исходного неравенства в этом случае будет интервал

$$\frac{9 - \sqrt{193}}{8} < x < -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, решение исходного неравенства состоит из двух интервалов:

$$\frac{9 - \sqrt{193}}{8} < x < -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{11 - \sqrt{201}}{8}.$$

Легко видеть, что эти интервалы объединяются в один, так что, окончательно, решением данного неравенства является интервал

$$\frac{9 - \sqrt{193}}{8} < x < \frac{11 - \sqrt{201}}{8}.$$

Сделаем несколько замечаний о том, как выполнять чертежи, подобные рисунку 3. Самое важное состоит в том, что при расстановке на оси точек, соответствующих данным числам, нужно очень внимательно проследить, чтобы не был нарушен порядок следования этих чисел друг за другом. Поэтому, в частности, если рассматриваемые числа мало отличаются друг от друга, то не нужно «лепить» их очень близко, а лучше расположить их так, чтобы чертеж был возможно яснее, пусть даже при этом будет несколько нарушен масштаб. Для расстановки данных чисел часто приходится прибегать к приближенным вычислениям, а иногда даже специально доказывать числовые неравенства.

Например, на рисунке 3 число $\frac{11 - \sqrt{201}}{8}$ стоит правее, чем $-\frac{1}{2}$. Это сразу следует из легко доказываемого неравенства $-\frac{1}{2} < \frac{11 - \sqrt{201}}{8}$. Точно так же число $\frac{11 + \sqrt{201}}{8}$ находится правее числа 3, поскольку $3 < \frac{11 + \sqrt{201}}{8}$ (так как $\sqrt{201} > 14$ и, следовательно, числитель в правой части неравенства больше 25).

Освобождаясь от модулей в примерах, где имеются абсолютные величины нескольких выражений, в принципе приходится рассматривать все возможные комбинации знаков этих выражений.

(4) *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| + y = 1, \\ x^2 + |y| = 1. \end{cases}$$

Возможны следующие четыре различные комбинации знаков выражений, стоящих под знаком модуля:

$$\text{а) } x^2 - 2x \geqslant 0,\ y \geqslant 0; \quad \text{б) } x^2 - 2x \geqslant 0,\ y < 0;$$

$$\text{в) } x^2 - 2x < 0,\ y \geqslant 0; \quad \text{г) } x^2 - 2x < 0,\ y < 0.$$

В случае а) имеем систему

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y = 1, \\ x^2 + y = 1, \end{cases}$$

откуда легко получается $x = 0$, $y = 1$. Эта пара удовлетворяет условию а) и, следовательно, является решением исходной системы.

В случае б) система имеет вид

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y = 1, \\ x^2 - y = 1, \end{cases}$$

откуда нетрудно получить

$$x_1 = y_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad x_2 = y_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Проверяем условие б). Поскольку $y_1 > 0$, то пара x_1, y_1 не удовлетворяет ему и должна быть отброшена. Далее, поскольку y_2 условию б) удовлетворяет, а для x_2 неравенство $x^2 - 2x \geqslant 0$ верно, то пара x_2, y_2 является решением.

Аналогично рассуждая, убеждаемся, что в случае в) имеется одно решение $x = 1$, $y = 0$, а в случае г) решений нет.

Итак, система имеет следующие три решения:

$$x_1 = 0, y_1 = 1; \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, y_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \quad x_3 = 1, y_3 = 0.$$

5 *Решить неравенство*

$$|x-1| - |x| + |2x+3| > 2x+4.$$

В этой задаче при полном переборе всех комбинаций знаков пришлось бы рассматривать 8 логически возможных случаев. Однако такого обилия случаев можно избежать и ограничиться всего четырьмя. Это достигается специальным приемом — *методом интервалов.*

Отметим на числовой оси те значения x, при которых выражения, стоящие под знаком абсолютной величины, обращаются в нуль: это точки 1, 0 и $-\frac{3}{2}$. Таким образом, вся числовая ось разбивается на четыре интервала[1]:

а) $x < -\frac{3}{2}$; б) $-\frac{3}{2} \leqslant x < 0$; в) $0 \leqslant x < 1$; г) $1 \leqslant x$.

Рассмотрим по очереди каждую из этих областей.

а) $x < -\frac{3}{2}$. В этом случае $2x+3<0$, $x<0$ и $x-1<0$, т. е. исходное неравенство принимает вид

$$-x+1+x-2x-3 > 2x+4.$$

Оно удовлетворяется при $x < -\frac{3}{2}$; в сочетании с условием а) получаем, что $x < -\frac{3}{2}$ есть решение исходного неравенства.

б) $-\frac{3}{2} \leqslant x < 0$. В этом случае $2x+3 \geqslant 0$, $x<0$ и $x-1<0$; поэтому исходное неравенство принимает вид

$$-x+1+x+2x+3 > 2x+4,$$

---

[1] Отметим, что интервалы можно записать и иначе, например $x \leqslant -\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2} < x < 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $1 < x$; в решении от этого ничего не изменится. Наш выбор сделан в согласии с определением абсолютной величины в форме (1).

т. е. $0 > 0$. Это неравенство у поступающих вызывает недоумение — как же его решать? На самом деле, разумеется, ничего решать уже не надо: просто при любом x из интервала $-\frac{3}{2} \leqslant x < 0$ исходное неравенство превращается в неверное неравенство $0 > 0$ и потому в случае б) не имеет решений.

в) $0 \leqslant x < 1$. В этом случае $2x + 3 \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ и $x - 1 < 0$; следовательно, исходное неравенство сводится к неравенству

$$-x + 1 - x + 2x + 3 > 2x + 4.$$

Оно удовлетворяется при $x < 0$, однако это соотношение несовместимо с условием в): среди значений x из промежутка $0 \leqslant x < 1$ нет решений исходного неравенства.

г) $1 \leqslant x$. В этом случае неравенство принимает вид

$$x - 1 - x + 2x + 3 > 2x + 4,$$

т. е. $2 > 4$; иначе говоря, среди $x \geqslant 1$ нет значений, удовлетворяющих исходному неравенству.

Следовательно, предложенное неравенство справедливо для $x < -\frac{3}{2}$.

В следующем примере, помимо наличия двух модулей, при решении возникают небольшие, но необычного характера трудности, которые многими поступающими не были преодолены. Впрочем, подобные трудности нам встретились уже в примере 5 (случай б)).

(6) *Решить уравнение*

$$|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5.$$

Следуя методу примера 5, рассмотрим три случая[1]:

а) $x^2 < 4$; б) $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$; в) $9 < x^2$.

В случае а) имеем $|x^2 - 9| = 9 - x^2$, $|x^2 - 4| = 4 - x^2$, т. е. $9 - x^2 + 4 - x^2 = 5$, $x^2 = 4$, $x_{1,2} = \pm 2$.

---

[1] Здесь также можно иначе записать условия случаев, например: $x^2 < 4$, $4 \leqslant x^2 < 9$, $9 \leqslant x^2$; окончательный ответ, разумеется, будет тот же самый.

Но по условию а) величина x^2 должна быть меньше 4; следовательно, значения $x_{1,2} = \pm 2$ не подходят, так что в этом случае заданное уравнение не имеет корней.

В случае б) имеем $|x^2 - 9| = 9 - x^2$, $|x^2 - 4| = x^2 - 4$, т. е. $9 - x^2 + x^2 - 4 = 5$, или $5 = 5$.

Именно это место многих поступающих поставило в тупик — уравнение «пропало»! На самом же деле ничего страшного не произошло: просто при условии $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$ исходное уравнение равносильно тождеству $5 = 5$, т. е. удовлетворяется любым значением x. Таким образом, любое x, удовлетворяющее условию $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$, является решением уравнения. Теперь остается решить это двойное неравенство. В результате получится $-3 \leqslant x \leqslant -2$, $2 \leqslant x \leqslant 3$.

К сожалению, очень многие «вышли из положения» иначе, написав, что «уравнение превратилось в тождество и поэтому при $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$ решений не имеет». Здесь сказался недостаток в подготовке школьников: тождество часто воспринимается ими не как частный случай уравнения, а как нечто, в корне противоположное уравнению.

Случай в) рассматривается аналогично случаю а): новых решений в нем не появляется.

Окончательно, корни исходного уравнения заполняют два интервала числовой оси — для уравнений (в отличие от неравенств) такая ситуация представляется необычной.

Не менее интересен в этом отношении и следующий пример, где решения составляют бесконечный интервал и еще одну точку.

7 *Найти решения уравнения*

$$2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1.$$

Рассмотрим два случая.

а) $x + 2 \geqslant 0$. В этом случае, поскольку $2^{|x+2|} = 2^{x+2}$ и $2^{x+2} - 2^{x+1} = 2^{x+1}$, получаем уравнение

$$2^{x+1} - 1 = |2^{x+1} - 1|.$$

Последнее уравнение, очевидно, удовлетворяется при $2^{x+1} - 1 \geqslant 0$, откуда $x + 1 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant -1$. Эти значения x удовлетворяют условию а) и являются, следовательно, корнями нашего уравнения.

б) $x + 2 < 0$. В этом случае после несложных преобразований и замены 2^{x+1} на y получаем уравнение

$$2y^2 + 2y + 2y|y - 1| = 1.$$

Его можно решить, рассматривая, как и в предыдущих примерах, два случая для освобождения от модуля. Но можно и сразу сообразить, что при $y \geqslant 1$ левая часть больше 1, и поэтому надо искать лишь корни $y < 1$. Но при $y < 1$ получаем уравнение $4y = 1$, откуда $y = \frac{1}{4}$, так что $x = -3$.

Объединяя решения, полученные в случаях а) и б), приходим к ответу: $x = -3$ и $x \geqslant -1$.

Разобранные примеры достаточно ясно показывают, что понятие абсолютной величины не доставляет при решении задач принципиальных трудностей, поскольку от знака абсолютной величины всегда можно избавиться стандартным приемом — рассмотрением отдельных случаев.

Само собой разумеется, что перебор отдельных случаев не является единственным способом решения примеров с модулями. Очень часто особенности конкретной задачи позволяют находить иные, более короткие и изящные пути решения. Поэтому, увидев в условии задачи знак абсолютной величины, не следует «с ходу» рассматривать отдельные случаи; эта возможность решения есть всегда, но полезно сначала обдумать поставленную задачу, попытаться подобрать иные пути.

В следующем примере стандартный путь требует неприятных вычислений с иррациональными числами, а несложный прием позволяет быстро получить ответ.

8 *Решить неравенство*

$$|x^2 - 3x - 3| > |x^2 + 7x - 13|.$$

Как известно, неравенство с неотрицательными частями при возведении в квадрат заменяется на равносильное (см. § 6 раздела I). Таким образом, исходное неравенство равносильно следующему:

$$|x^2 - 3x - 3|^2 > |x^2 + 7x - 13|^2.$$

Но $|a|^2 = a^2$, так что это неравенство принимает вид

$$(x^2 - 3x - 3)^2 > (x^2 + 7x - 13)^2.$$

Теперь, перенося все в правую часть и пользуясь формулой разности квадратов, приходим к неравенству

$$2(x^2 + 2x - 8) \cdot 10(x - 1) < 0$$

или, что то же самое,

$$(x + 4)(x - 2)(x - 1) < 0.$$

Получившееся неравенство легко решается методом интервалов (см. § 6 раздела I); его решения, а следовательно, и решения исходного неравенства: $x < -4$ и $1 < x < 2$.

Заканчивая разбор понятия абсолютной величины, рассмотрим один пример с *параметром*. Как мы сейчас увидим, уже одно наличие параметра делает задачу довольно сложной, требующей и знания метода, и хорошей техники решения, и большой аккуратности.

9 *Для каждого числа a решить уравнение*

$$x|x + 1| + a = 0.$$

Рассмотрим два случая: $x < -1$ и $x \geqslant -1$.

В первом случае уравнение принимает вид

$$x(-x - 1) + a = 0, \text{ или } x^2 + x - a = 0.$$

Здесь получилось квадратное уравнение с параметром a. Нас интересуют только те корни этого уравнения, которые удовлетворяют условию $x < -1$. Разумеется, корни этого уравнения зависят от параметра a; более того, при одних значениях a корни могут существовать, а при других — нет. Поэтому прежде всего необходимо указать те значения a, для каждого из которых уравнение $x^2 + x - a = 0$ имеет корни. Условием существования корней является неотрицательность дискриминанта:

$D = 1 + 4a \geqslant 0$. Иначе говоря, при $a \geqslant -\frac{1}{4}$ корни уравнения следующие:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4a}}{2},$$

а при остальных значениях a, т. е. при $a < -\frac{1}{4}$, корней нет.

Следовательно, при $a < -\frac{1}{4}$ (в рассматриваемом сейчас первом случае!) исходное уравнение решений не имеет.

Таким образом, решения исходного уравнения в рассматриваемом случае остается искать при $a \geqslant -\frac{1}{4}$. При этом из найденных чисел x_1 и x_2 мы должны будем взять те, которые удовлетворяют условию $x < -1$. Для этого надо решить неравенства

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} < -1 \text{ и } \frac{-1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} < -1.$$

Первое из этих неравенств легко приводится к виду $1 + \sqrt{1 + 4a} < 0$, т. е. не выполняется ни при каких значениях a. Второе неравенство приводится к виду $1 < \sqrt{1 + 4a}$ и выполняется при $a > 0$.

Следовательно, при $a > 0$ исходное уравнение имеет один корень $x = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$, удовлетворяющий условию рассматриваемого случая $x < -1$, а при $a \leqslant 0$ ни одного такого корня нет.

Во втором случае, т. е. при $x \geqslant -1$, имеем уравнение

$$x^2 + x + a = 0.$$

Условие существования корней $D = 1 - 4a \geqslant 0$ показывает, что это уравнение имеет корни лишь при $a \leqslant \frac{1}{4}$, а при $a > \frac{1}{4}$ (в рассматриваемом сейчас втором случае) исходное уравнение решений не имеет. Остается среди $a \leqslant \frac{1}{4}$

найти такие значения a, для которых корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ удовлетворяют условию случая $x \geqslant -1$, т. е. решить неравенства

$$\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2} \geqslant -1 \text{ и } \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2} \geqslant -1.$$

Первое неравенство приводится к виду $1 + \sqrt{1-4a} \geqslant 0$ и, следовательно, выполняется при всех *допустимых* значениях a, т. е. при $a \leqslant \frac{1}{4}$. Второе неравенство приводится к виду $\sqrt{1-4a} \leqslant 1$ и выполняется, как легко видеть, при всех допустимых неотрицательных значениях a, т. е. при $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}$.

Таким образом, при $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}$ исходное уравнение имеет в области $x \geqslant -1$ два корня

$$x' = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2},\quad x'' = \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$$

(при $a = \frac{1}{4}$ эти корни совпадают), а при $a < 0$ — лишь один корень $x = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$; при $a > \frac{1}{4}$ в области $x \geqslant -1$ у исходного уравнения корней нет.

Подведем итоги, формулируя результаты двух случаев вместе:

при $a < 0$: $\quad x = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$;

при $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}$: $\quad x_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$,

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2},\ x_3 = \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$$

(при $a = 0$ имеем $x_1 = x_3$; при $a = \frac{1}{4}$ имеем $x_2 = x_3$);

при $a > \frac{1}{4}$: $\quad x = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$.

Вместо того чтобы делать замечание о совпадении корней, можно было бы случаи $a = 0$ и $a = \frac{1}{4}$ вынести в отдельные строки:

при $a = 0$: $x_1 = -1,\ x_2 = 0;$

при $a = \frac{1}{4}$: $x_1 = \frac{-1-\sqrt{2}}{2},\ x_2 = -\frac{1}{2}.$

С абсолютной величиной действительного числа тесно связано понятие арифметического корня. Поставим следующий вопрос: *чему равен* $\sqrt{x^2}$? Иными словами, как можно записать это выражение без знака радикала? Самый распространенный ответ следующий: $\sqrt{x^2} = x$ при любом x. Нетрудно убедиться, что ответ неверен; в самом деле, например, при $x = -2$ имеем $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \ne -2$. Часто отвечают, что $\sqrt{x^2} = \pm x$. Это также неверно, ибо $\sqrt{x^2}$, в соответствии с его определением, представляет собой (при данном x) вполне определенное число, а не два числа: $+x$ и $-x$.

Чтобы разобраться в этом, вспомним основные определения и факты, относящиеся к понятию корня.

Определение 1. *Число b называется* ***квадратным корнем*** *из числа a, если $b^2 = a$.*

Согласно этому определению два утверждения — «b есть корень квадратный из a» и «$b^2 = a$» — означают одно и то же.

Чтобы подчеркнуть одну существенную особенность этого определения, сравним его, например, с определением квадрата числа: квадратом числа b называется произведение этого числа на самого себя. Это определение хорошо тем, что оно дает правило, как найти число b^2. В противоположность этому, определение квадратного корня не столь хорошо, ибо оно не только не дает правила для вычисления квадратного корня, но из него даже не ясно, всегда ли из данного числа a можно извлечь квадратный корень и сколько корней можно извлечь,

т. е. сколько найдется различных чисел b, удовлетворяющих равенству $b^2 = a$. Итак, необходимо прежде всего исследовать вопрос о существовании и количестве квадратных корней из данного числа a.

Ответ на этот вопрос дается тремя утверждениями:

1) *Если a положительно, то существует ровно два корня квадратных из a; при этом один из них положителен, а другой — отрицателен, но оба они имеют одинаковый модуль.*

2) *Если $a = 0$, то существует единственный корень квадратный из a; он равен нулю.*

3) *Если a отрицательно, то не существует вообще ни одного квадратного корня из a.*

В школе без доказательства принимается существование положительного корня из положительного числа. Остальные утверждения, содержащиеся в 1)—3), могут быть легко доказаны.

Рассмотрим теперь положительное число a. Из этого числа можно извлечь два квадратных корня. Для того чтобы отличать их друг от друга, вводится понятие арифметического корня.

Определение 2. *Положительный квадратный корень из положительного числа называется* ***арифметическим квадратным корнем*** *из этого числа.*

Арифметический квадратный корень из a обозначается символом $\sqrt{a}$. Под выражением $\sqrt{0}$ всегда понимается единственный корень из нуля, т. е. 0.

Таким образом, утверждение «b есть арифметический квадратный корень из a» равносильно совокупности двух утверждений: «$b^2 = a$» и «$b \geqslant 0$»; при этом предполагается, что a — положительное число или нуль. Если b есть арифметический квадратный корень из положительного числа a, то второй квадратный корень из a равен $-b$.

Итак, $\sqrt{x^2}$, о котором мы говорили вначале, — это не просто какое-то число, дающее в квадрате x^2, а непременно *положительное число или нуль.*

Так чему же равен $\sqrt{x^2}$?

Для удобства рассмотрения будем предполагать, что $x \neq 0$, так как в случае $x = 0$ все ясно: $\sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$. По определению 2 мы знаем, что $\sqrt{x^2}$ представляет собой положительное число, которое в квадрате дает x^2. Легко видеть, что числа x и $-x$ (и только они) обладают последним свойством. Но положительное из них, разумеется, только одно, и именно это положительное число равно $\sqrt{x^2}$.

Таким образом, *если x положительно, то* $\sqrt{x^2} = x$, *если $-x$ положительно (т. е. если x отрицательно), то* $\sqrt{x^2} = -x$. Значит,

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Если применить обозначение абсолютной величины, то можно коротко записать:

$$\sqrt{x^2} = |x| \text{ при любом действительном } x. \qquad (3)$$

Сказанное только что имеет большое значение при проведении алгебраических и тригонометрических преобразований. Забвение указанного свойства приводит подчас к грубым ошибкам (см. пример 1 из § 2 раздела II).

Если в алгебраических выражениях, содержащих радикалы, не все буквы означают неотрицательные числа, то при выполнении тождественных преобразований необходимо всегда пользоваться формулой (3).

(10) *Упростить выражение* $(a > 0,\ a \neq 1)$

$$\frac{a^{-x}}{\sqrt{5}}\left[2a^{2x} - a^x(2a^x - 1)\right]\left[1 - \left(\frac{\sqrt{5}a^x}{2a^x - 1}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sqrt{(a^x + 2)^2 - 5} - (a^{2x} + 4)\left[a^{2x} + 4(1 - a^x)\right]^{-\frac{1}{2}} + 4a^x \times$$

$$\times \left[1 + (a^{2x} + 2)(a^{2x} - 4a^x + 4)^{-\frac{1}{2}}\right]\left[a^{2x} + 2 + (a^{2x} - 4a^x + 4)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$$

и определить, при каких значениях x это выражение равно единице.

Прежде всего с помощью тождественных алгебраических преобразований приведем это выражение к наиболее простому виду. Воспользовавшись определениями дробных и отрицательных степеней, можно после очевидных выкладок привести первое слагаемое к виду a^x, а третье — к виду

$$\frac{4a^x}{\sqrt{a^{2x} - 4a^x + 4}}.$$

Следовательно, исходное выражение можно переписать так:

$$a^x - \frac{a^{2x} - 4a^x + 4}{\sqrt{a^{2x} - 4a^x + 4}} = a^x - \sqrt{(a^x - 2)^2}.$$

Мы уже знаем, что последнее выражение нельзя записывать как $a^x - (a^x - 2) = 2$: поскольку разность $a^x - 2$ не обязана быть положительной, то ответ «предложенное выражение при всех значениях x равно 2» является ошибочным. Истинный ответ выглядит так: «исходное выражение преобразуется к виду $a^x - |a^x - 2|$».

Остается еще найти те значения x, при которых

$$a^x - |a^x - 2| = 1.$$

Если $a^x \geqslant 2$, то это уравнение, очевидно, не имеет решений. Если же $a^x < 2$, то для определения x имеем уравнение $a^x - (2 - a^x) = 1$, т. е. $a^x = \frac{3}{2}$. Заметив, что при этом значении x выполняется и условие $a^x < 2$, находим искомое значение $x = \log_a \frac{3}{2}$.

Задачи

1. Справедливы ли следующие равенства:

а) $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0, \\ -a, & \text{если } a \leqslant 0; \end{cases}$ б) $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0? \end{cases}$

2. Доказать, что: а) $|x| = |-x|$; б) $x \leqslant |x|$.

3. Доказать, что если $|a| = 0$, то $a = 0$.

4. Что можно сказать о числах $a_1, \ldots, a_n$, если известно, что $|a_1| + \ldots + |a_n| = 0$?

5. Доказать, что расстояние между точками a и b числовой оси равно $|b - a|$.

6. Решить неравенства: а) $|x - a| < b$; б) $|x - a| \geqslant b$, где a и b — данные числа, $b > 0$; дать геометрическую интерпретацию решений.

7. Построить график функции $y = x^2 - 4\left|x + \frac{1}{8}\right| + \frac{7}{2}$.

Решить уравнения, неравенства и системы:

8. $||x - 1| + 2| = 1$.

9. $|x - 3| > -1$.

10. $|x| + x^3 = 0$.

11. $(1 + x)^2 \geqslant |1 - x^2|$.

12. $|x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| = 0$.

13. $9^{-|x|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1| + |x-1|}$.

14. $(x + 4) \cdot 3^{1 - |x-1|} - x = (x + 1)|3^x - 1| + 3^{x+1} + 1$.

15. $\log_{\sqrt{x}} (x + |x - 2|) = \log_x (5x - 6 + 5|x - 2|)$.

16. $|1 - \log_{1/6} x| + 2 = |3 - \log_{1/6} x|$.

17. $\left|\frac{3}{2} + \log_{1/4} x\right| = 1 + \left|\frac{1}{2} + \log_{1/4} x\right|$.

18. $\log_{3\sqrt{3}} \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{4}x\right) = 5|\log_{9\sqrt{3}} \sqrt[3]{x - 2}\,|$.

19. $(x - 1)^2 + |x - 1| - 2 = 0$.

20. $|4x - 1| = \frac{1}{3x - 1}$.

21. $x + 27^{\frac{5}{2}|\log_{9\sqrt{3}} \sqrt[3]{x}|} = \frac{10}{3}$.

22. $(x + 2)^2 = 2|x + 2| + 3$.

23. $x^2 + 2|x + 3| - 10 \leqslant 0$.

24. $|x^2 - 1| - 2x < 0$.

25. $x^2 + x - 10 < 2|x - 2|$.

26. $|x| - 2 > (x - 2)^2$.

27. $(|x| - 1)^2 > 2$.

28. $\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0, \\ |y| + x - 3 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} y^2 - |xy| + 2 = 0, \\ 8 - x^2 = (x + 2y)^2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} |xy - 4| = 8 - y^2, \\ xy = 2 + x^2. \end{cases}$

31. $\begin{cases} |x + 3| + |x - 2| = 5, \\ 818 - 135x \leqslant 137x^2. \end{cases}$

32. Для каждого числа a решить уравнение $x^2 + |x| + a = 0$.

33. Упростить выражения: $\sqrt[4]{x^2}$; $\sqrt{x^4}$; $\sqrt[6]{x^6}$; $\sqrt[5]{x^5}$; $\sqrt{x^6 y}$.

34. Всегда ли верно равенство $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$?

35. Упростить при $1 < x < 2$ выражение

$$\frac{1}{\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}}} + \frac{1}{\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}}.$$

36. Упростить выражение $\sqrt{(1 - \cos\alpha \cos\beta)^2 - \sin^2\alpha \sin^2\beta}$.

Решить уравнения:

37. $\operatorname{tg} x \sqrt{1 + \cos 2x} = \sin 2x$.

38. $\frac{\sin 2x}{2} - \sin^2 x = \sqrt{1 - \cos 2x}$.

39. $\sqrt{2 \sin 2x} + 2 \sin x = 0$.

40. $\sqrt{1 + \cos x} = \sin x$.

§ 3. Графики функций

Умение изображать геометрически функциональные зависимости, заданные формулами, особенно важно для успешного усвоения курса высшей математики. Поэтому задачи о построении графиков функций предлагаются на вступительных экзаменах достаточно часто.

Опыт экзаменов показывает, что у многих поступающих построение графиков функций вызывает большие или меньшие затруднения. Эти затруднения в значительной степени объясняются тем, что вопросы графического изображения функций в школьном курсе разбросаны по разным разделам, изучаются «кусками», а общие приемы построения графиков практически не рассматриваются.

При подготовке к вступительному экзамену полезно дополнительно проработать соответствующие параграфы учебников, запомнить вид основных кривых, поупражняться в построении конкретных графиков.

Как известно, ***функциональной зависимостью** называют закон, по которому каждому значению величины x (независимой переменной или аргумента) из некоторого множества чисел, называемого областью определения функции, ставится в соответствие одно вполне определенное значение величины y (зависимой* *переменной или функции); совокупность значений, которые принимает зависимая переменная y, называется областью изменения функции.*

Если функциональная зависимость (функция) задана формулой $y = f(x)$, то отыскание ее области определения сводится к нахождению всех тех значений аргумента, при которых выражение $f(x)$, определяющее функцию, имеет смысл.

Необходимо твердо знать определения и уметь выяснять такие общие свойства функций, как ограниченность, монотонность (участки возрастания и убывания функции), четность и нечетность, периодичность, уметь находить область изменения функции, ее нули, экстремальные значения и т. п.

Отметим, что определение периодической функции часто дается поступающими в такой форме: «функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что $f(x + T) = f(x)$ для всех x из области определения этой функции». Однако при таком определении оказывается неверна известная теорема о том, что если число $T > 0$ является периодом функции $f(x)$, то и число $-T$ является ее периодом. Действительно, с точки зрения этого определения, например, функция $y = \sin(\sqrt{x})^2$ должна быть названа периодической с периодом 2π, поскольку $\sin(\sqrt{x + 2\pi})^2 = \sin(\sqrt{x})^2$ для всех x из области определения этой функции, т. е. для всех $x \geqslant 0$. Однако легко убедиться, что число -2π не является периодом этой функции, ибо равенство $\sin(\sqrt{x - 2\pi})^2 = \sin(\sqrt{x})^2$ неверно, скажем, при $x = 0$ (при этом значении левая часть равенства теряет смысл).

Поэтому, желая, чтобы упомянутая теорема была справедлива, определение периодической функции следует формулировать так:

функция $f(x)$ называется ***периодической****, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения этой функции числа $x + T$ и $x - T$ также входят в ее область определения и для всех x из области определения $f(x - T) = f(x)$.*

Именно такое определение периодической функции и принято в математике.

Поступающий должен иметь ясное представление о системе координат на плоскости, уметь бегло, на память, рисовать графики простейших функций: $y = kx + b$ (прямая); $y = ax^2 + bx + c$ (парабола); $y = \frac{k}{x}$ (гипербола); $y = |x - a|$; $y = x^3$; $y = \sqrt{x}$; $y = \frac{1}{x^2}$; $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$; $y = \sin x$ (синусоида); $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$. Графики этих функций в каждом конкретном случае нужно изображать приближенно, передавая общий вид и характерные особенности поведения кривой, а не восстанавливать ее каждый раз, вычисляя таблицу значений и строя кривую по точкам.

Необходимо уметь на графике геометрически иллюстрировать свойства функций. При этом иногда происходит такая ошибка. Рассказывая о каком-нибудь свойстве (например, о нечетности синуса), поступающий рисует соответствующий график (синусоиду) и говорит: «Это свойство очевидно из чертежа». Такое рассуждение несостоятельно, ибо, именно используя свойства функции, можно более или менее точно начертить ее график. Поэтому все свойства функций должны быть строго доказаны.

На экзаменах часто предлагают строить графики функций, представляющих собой комбинации простейших функций. При этом также требуется изобразить лишь *примерное* поведение кривой; как вспомогательное средство можно использовать и построение по точкам. Более детальное исследование графиков в случае необходимости может быть проведено с использованием производной.

Разберем несколько задач, где построение графиков осуществляется путем переноса или определенной деформации графиков простейших функций.

1 *Построить график функции* $y = 2 - \frac{1}{x}$.

Областью определения данной функции являются все действительные значения x, кроме $x = 0$. Если рассмотреть функцию $y_1 = -\frac{1}{x}$ (это — гипербола, ветви которой расположены во второй и четвертой четвертях), то очевидно, что при каждом значении $x = x_0$ величина функции y на 2 больше, чем величина функции y_1 при том же значении x_0 аргумента. Поэтому достаточно передвинуть график функции y_1 как твердое тело на 2 единицы вверх вдоль оси ординат, и мы получим искомый график функции y (рис. 4).

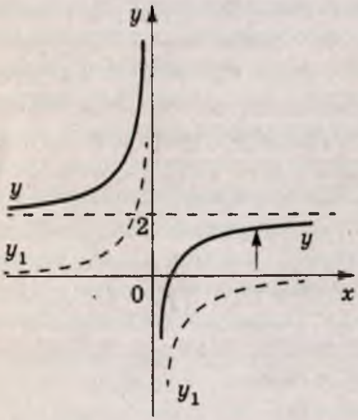


Рис. 4

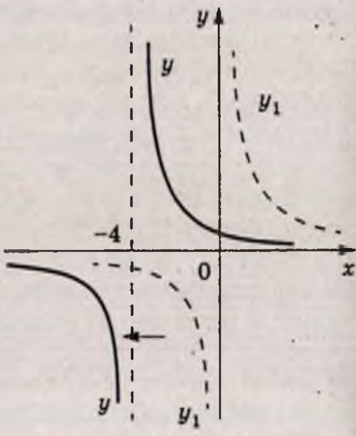


Рис. 5

Легко видеть, что указанный прием позволяет немедленно *построить график функции $y = a + f(x)$, где a — некоторое заданное число, если уже построен график функции $y_1 = f(x)$*: достаточно передвинуть график функции y_1 как твердое тело на a единиц вверх, если $a > 0$, или на $|a|$ единиц вниз, если $a < 0$.

(2) *Построить график функции $y = \frac{3}{x+4}$.*

Очевидно, что x может принимать любые значения, кроме −4. Сравним эту функцию с функцией $y_1 = \frac{3}{x}$.

Ясно, что величина функции y, отвечающая какому-нибудь значению $x = x_0$, совпадает с тем значением функции y_1, которое соответствует значению ее аргумента, равному $x_0 + 4$. Например, функция $y = \frac{3}{x+4}$ при $x_0 = 1$ принимает значение $y = \frac{3}{5}$, а функция $y_1 = \frac{3}{x}$ это же значение принимает при значении ее аргумента, равном $5 = x_0 + 4$. Поэтому, передвинув график функции y_1 на 4 единицы влево вдоль оси абсцисс, получим график интересующей нас функции y (рис. 5).

Нетрудно сообразить, что тем же методом можно *построить график функции $y = f(x + b)$, где b — некоторое заданное число, если уже построен график функции $y_1 = f(x)$*: достаточно передвинуть график функции y_1 как твердое тело на b единиц влево, если $b > 0$, или на $|b|$ единиц вправо, если $b < 0$.

(3) *Построить график функции* $y = \frac{-x+5}{3x-2}$.

Для построения этого графика сперва преобразуем дробь и представим функцию в виде

$$y = -\frac{1}{3} + \frac{\frac{13}{9}}{x - \frac{2}{3}}.$$

Рассуждая так же, как в примерах 1 и 2, можно убедиться, что графиком предложенной функции является «обычная» гипербола $y = \frac{\frac{13}{9}}{x}$, сдвинутая как одно целое на $\frac{2}{3}$ вправо вдоль оси абсцисс и на $\frac{1}{3}$ вниз вдоль оси ординат.

Аналогичный прием позволяет строить график любой функции вида

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

(так называемая *дробно-линейная функция*[1]); действительно, простое преобразование позволяет записать эту функцию в виде

$$y = \frac{a}{c} - \frac{\frac{ad - bc}{c^2}}{x + \frac{d}{c}},$$

после чего остается привлечь соображения, высказанные выше при решении примеров 1 и 2.

Отметим, что точно так же, комбинируя соображения, высказанные после решений примеров 1 и 2, мы без всяких затруднений можем *изобразить график функции $y = a + f(x + b)$, где a и b — некоторые заданные числа, если график функции $y_1 = f(x)$ уже построен.*

(4) *Построить график функции $y = \log_4(-x)$.*

Иногда приходится слышать такой ответ: «Графика этой функции не существует, поскольку отрицательные числа логарифмов не имеют». Этот ответ свидетельствует о непонимании того факта, что выражение $-x$ отнюдь не всегда принимает отрицательные значения.

Областью определения рассматриваемой функции y является множество $x < 0$. Непосредственно ясно, что величина этой функции при $x = -x_0$, $x_0 > 0$, совпадает с величиной функции $y_1 = \log_4 x$ при значении x_0 ее аргумента. Следовательно, для получения графика функции y достаточно зеркально отразить график функции y_1 относительно оси ординат (рис. 6).

---

[1] При этом предполагается, что $c \neq 0$ (в противном случае рассматриваемая функция просто линейная) и что $ad - bc \neq 0$. Если последнее условие не выполняется, то исходная функция при всех допустимых x имеет вид $y = k$, где k — константа. Например, функция $y = \frac{2x + 2}{x + 1}$ в области ее определения, т. е. при $x \neq -1$, может быть записана в виде $y = 2$. Следовательно, графиком этой функции служит прямая $y = 2$ с выколотой из нее точкой $(-1, 2)$ (но отнюдь не вся прямая $y = 2$, как часто считают поступающие; ср. с примером 8).

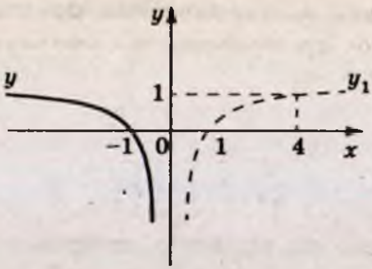


Рис. 6

Заметим, что этот же прием дает возможность *построить график функции $y = f(-x)$, имея график функции* $y_1 = f(x)$: достаточно зеркально отразить график функции y_1 относительно оси ординат.

(5) *Построить на одном чертеже графики функций* $y_1 = \sin x$, $y_2 = \sin 2x$, $y_3 = -2 \sin x$.

Далеко не всегда поступающие могут правильно изобразить все три кривые на одном чертеже, верно передавая их взаимное расположение (рис. 7), указать характерные особенности каждой из синусоид, объяснить, каким образом они получаются друг из друга.

В частности, полезно помнить, что наименьший положительный период функции $y = A \sin \omega x$, где $\omega \neq 0$ и $A \neq 0$ — некоторые заданные числа[1], равен $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

Важно хорошо себе уяснить, как *построить график функции* $y = Af(\omega x)$, где $\omega \neq 0$ и $A \neq 0$ — *некоторые заданные числа, если известен график функции* $y_1 = f(x)$. Сначала нужно произвести «сжатие» графика функции y_1 вдоль оси абсцисс в ω раз, если $\omega > 0$; если же $\omega < 0$, то необходимо произвести «сжатие» графика функции y_1 вдоль оси абсцисс в $|\omega|$ раз и зеркальное отражение относительно оси ординат (см. решение примера 4). Затем получившуюся кривую следует «растянуть» вдоль оси

[1] Очевидно, что в случае $\omega < 0$ эту функцию можно представить в виде $y = -A \sin |\omega| x$. Именно по этой причине обычно рассматривается лишь случай, когда $\omega > 0$.

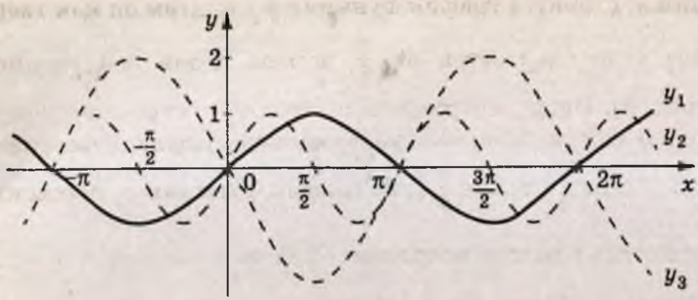


Рис. 7

ординат в A раз, если $A > 0$; если же $A < 0$, то делается «растяжение» вдоль оси ординат в $|A|$ раз и зеркальное отражение относительно оси абсцисс. Конечно, если $|\omega| < 1$, то «сжатие» вдоль оси абсцисс фактически является растяжением; точно так же «растяжение» вдоль оси ординат в $|A|$ раз при $|A| < 1$ является на самом деле сжатием.

Особо отметим один частный случай: если график функции $y_1 = f(x)$ нарисован, то график функции $y = -f(x)$ получается из него зеркальным отражением относительно оси абсцисс.

(6) *Построить график функции* $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Представив заданную функцию в виде $y = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, мы легко можем заметить, что при каждом значении $x = x_0$ величина функции y совпадает с величиной функции $y_1 = \sin 2x$, соответствующей значению $x_0 - \frac{\pi}{6}$ ее аргумента. Поэтому для построения графика функции y надо построить график функции y_1, а затем передвинуть его как твердое тело на $\frac{\pi}{6}$ вправо вдоль оси абсцисс (рис. 8).

Весьма распространенной ошибкой является следующий способ построения графика рассматриваемой функции y: строится график функции y_1, а затем он как твердое тело сдвигается на $\frac{\pi}{3}$ вправо вдоль оси абсцисс (рис. 9). Нетрудно убедиться, что это построение неверно. В самом деле, так построенный график пересекает ось абсцисс в точке $\frac{\pi}{3}$ (ибо график функции y_1 пересекает эту ось в начале координат, а затем он сдвигается на $\frac{\pi}{3}$ вправо!). Между тем величина рассматриваемой функции y при значении аргумента $x = \frac{\pi}{3}$, очевидно, отлична от нуля.

Указанный для данного конкретного примера прием дает возможность строить график и любой функции вида $y = A \sin(\omega x + \varphi)$, $y = A \cos(\omega x + \varphi)$, $y = A \operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$ и т. д., а также $y = a \sin \omega x + b \cos \omega x$. Этот прием носит общий характер, позволяя *получить график функции* $y = f(\omega x + \varphi)$, *где* $\omega \neq 0$ *и* φ — *некоторые заданные числа, если график функции* $y_1 = f(x)$ *уже нарисован*: достаточно изобразить график функции $y_2 = f(\omega x)$ (его можно получить методом, указанным при решении примера 5), а затем передвинуть его как твердое тело вдоль оси абсцисс на $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ вправо, если $\frac{\varphi}{\omega} < 0$, или на $\frac{\varphi}{\omega}$ влево, если $\frac{\varphi}{\omega} > 0$ (см. пример 2).

Иногда полезно сперва преобразовать формулу, определяющую функциональную зависимость, к иному виду, после чего график удается легко нарисовать. В част-

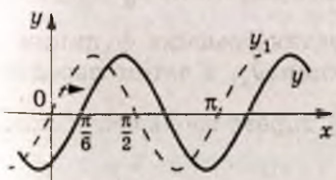


Рис. 8

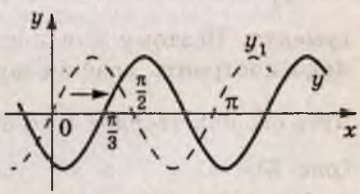


Рис. 9

ности, всегда желательно рассматриваемую сложную функциональную зависимость представить в виде легко обозримой комбинации простейших функций, график которых получается известными приемами (именно так строился график в примере 3).

7 *Построить график функции* $y = \sin^2 x$.

Поскольку эту функцию можно записать в виде $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, то получение графика функции y осуществляется уже известными приемами: косинусоиду $y_1 = -\frac{1}{2}\cos 2x$ (она строится способом, изложенным в примере 5) необходимо сдвинуть на $\frac{1}{2}$ вверх (рис. 10).

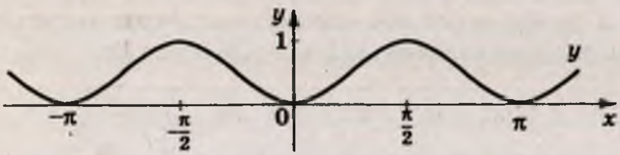


Рис. 10

8 *Построить график функции*

$$y = x^{\frac{1}{\lg x}}. \tag{1}$$

Использование известных формул для логарифмов показывает, что $x^{1/\lg x} = x^{\log_x 10} = 10$. Отсюда многие немедленно делают вывод, что графиком функции (1) является прямая $y = 10$.

Однако такой вывод неверен: необходимо принять во внимание область определения рассматриваемой функции и условия, при которых проводимые преобразования законны.

Область определения функции (1) состоит из тех действительных чисел, которые удовлетворяют условиям: $x > 0$, $x \neq 1$. При этих условиях законно и проведенное выше преобразование. Поэтому графиком функции (1)

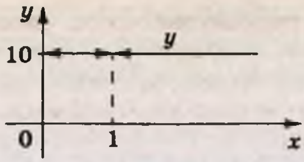


Рис. 11

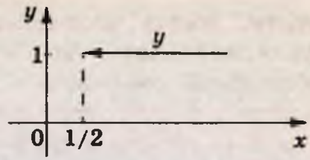


Рис. 12

является полупрямая $y = 10$, $x > 0$, из которой, кроме того, «выколота» точка (1, 10) (рис. 11; стрелка, примыкающая к некоторой точке, означает, что эта точка графику не принадлежит).

(9) *Построить график функции*

$$y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \log_2 \sqrt{4x^2 - 4x + 1}\ . \qquad (2)$$

Прежде всего проведем тождественное преобразование второго слагаемого (см. § 2 раздела I):

$$\log_2 \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \log_2 \sqrt{(2x-1)^2} =$$
$$= \log_2 |2x - 1| = 1 + \log_2 \left|x - \frac{1}{2}\right|.$$

Теперь ясно, что областью определения функции y является множество $x > \frac{1}{2}$ $\Big($ибо второе слагаемое в формуле (2) имеет смысл при всех $x \neq \frac{1}{2}$, а первое — лишь при $x > \frac{1}{2}\Big)$. Однако при $x > \frac{1}{2}$ справедливо равенство $\log_{1/2}\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\log_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, и, следовательно, в своей области определения $\left(\text{т. е. при } x > \frac{1}{2}\right)$ функция (2) может быть записана в виде $y = 1$.

Таким образом, графиком функции (2) является луч $y = 1$, $x > \frac{1}{2}$ (рис. 12).

Определенные трудности у поступающих вызывает построение графиков тех функциональных зависимостей, аналитическое выражение которых содержит знак абсолютной величины.

Общий прием построения графиков таких функций состоит в том, чтобы переписать выражение для функциональной зависимости, избавляясь от знака модуля (см. § 2 раздела I). При этом, как правило, рассматриваемая функциональная зависимость на разных участках изменения аргумента описывается различными формулами. Естественно, что на каждом из таких участков построение графика нужно проводить по соответствующей формуле.

(10) *Построить график функции* $y = |2 - 2^x|$.

Предложенную функцию, очевидно, можно записать в форме $y = |2^x - 2|$. Рассмотрим вспомогательную функцию $y_1 = 2^x - 2$; ее график строится без труда (способом, изложенным при решении примера 1). Чем же отличается от него график функции y?

Для того чтобы выяснить это, вспомним определение абсолютной величины; из этого определения (см. формулу (2) из § 2 раздела I) следует, что

$$y = \begin{cases} 2^x - 2, & \text{для тех } x, \text{ для которых } 2^x - 2 \geqslant 0, \\ & \text{т. е. при } x \geqslant 1; \\ -(2^x - 2) & \text{для тех } x, \text{ для которых } 2^x - 2 < 0, \\ & \text{т. е. при } x < 1. \end{cases}$$

Отсюда ясно, что график функции y при $x \geqslant 1$ совпадает с графиком функции y_1, а при $x < 1$ он представляет собой кривую, симметричную графику функции y_1 относительно оси абсцисс (рис. 13).

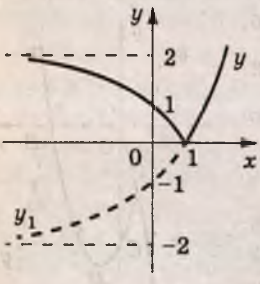


Рис. 13

Совершенно так же можно *получить график функции* $y = |f(x)|$, *если график функции* $y_1 = f(x)$ *нарисован*: достаточно заменить все участки графика функции y_1, находящиеся ниже оси абсцисс, на симметричные им относительно этой оси, а остальные участки графика оставить без изменения.

11 *Построить график функции*

$$y = (|x + 1| + 1)(x - 3). \qquad (3)$$

Согласно определению абсолютной величины, мы можем эту функцию представить в виде

$$y = \begin{cases} [(x + 1) + 1](x - 3) = (x + 2)(x - 3), & \text{если } x \geqslant -1; \\ [-(x + 1) + 1](x - 3) = -x(x - 3), & \text{если } x < -1. \end{cases}$$

Теперь остается только для каждого из указанных участков ($x \geqslant -1$ и $x < -1$) по соответствующей формуле построить свою кривую; совокупность этих кривых и будет графиком функции (3).

Сначала рассмотрим функцию $y_1 = (x + 2)(x - 3)$. Обычно поступающие раскрывают скобки и проводят довольно длинное выделение полного квадрата. Между тем для построения графика функции y_1 лучше скобок не раскрывать: сразу ясно, что это — парабола, график квадратного трехчлена; она пересекает ось абсцисс в точках $A = (-2, 0)$ и $B = (3, 0)$ (ибо -2 и 3 — корни этого трехчлена), а ее ветви направлены вверх (ибо старший коэффициент положителен). Подставляя в формулу для функции y_1 значение $x = 0$, находим координаты точки C пересечения этой параболы с осью ординат: $C = (0, -6)$. Нетрудно найти и координаты вершины D этой параболы. Так как парабола симметрична относительно вертикальной прямой, проходящей через ее вершину, то ее ось симметрии делит пополам отрезок AB. Поэтому ясно, что абсцисса вершины равна $\frac{1}{2}$; ордината вычисляется непосредственно: $D = \left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$.

Построив параболу — график функции y_1, мы должны выделить тот ее кусок, который соответствует значениям аргумента $x \geqslant -1$ (рис. 14).

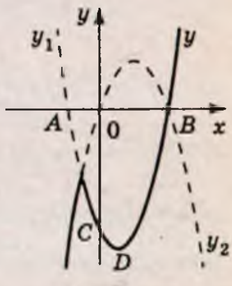


Рис. 14

Аналогично строим график функции $y_2 = -x(x - 3)$; необходимо взять только ту часть этой параболы, которая соответствует значениям аргумента $x < -1$. График функции (3) на рисунке 14 нарисован сплошной линией.

(12) *Построить график функции*

$$y = \frac{|x - 3| + |x + 1|}{|x + 3| + |x - 1|}. \qquad (4)$$

Найдем сначала те значения x, при которых каждое из выражений, стоящих под знаком модуля, обращается в нуль: это -3, -1, 1, 3. Рассматривая функцию (4) на каждом из пяти интервалов, на которые эти значения разбивают числовую ось, можно получить следующую форму записи:

$$y = \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{x+1}, & \text{если } x < -3, \\ -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}, & \text{если } -3 \leqslant x < -1, \\ 1, & \text{если } -1 \leqslant x < 1, \\ \dfrac{2}{x+1}, & \text{если } 1 \leqslant x < 3, \\ 1 - \dfrac{2}{x+1}, & \text{если } 3 \leqslant x. \end{cases}$$

Дальнейшие построения проводятся уже известными приемами (рис. 15).

Отметим, что если x неограниченно возрастает, то график функции (4) неограниченно приближается к

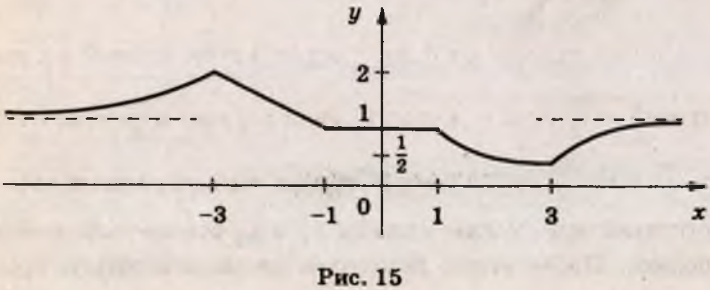


Рис. 15

прямой $y = 1$, оставаясь ниже нее; если же x неограниченно убывает, то график неограниченно приближается к той же прямой, но остается все время выше нее.

(13) *Построить график функции* $y = |\sin x| + |\cos x|$.

При построении графика периодической функции часто бывает полезно следующее соображение: все значения такой функции повторяются через период. Поэтому если задана периодическая функция с периодом T, то достаточно построить ее график на каком-нибудь отрезке длины T, например на отрезке $0 \leqslant x \leqslant T$; на отрезках $T \leqslant x \leqslant 2T$, $2T \leqslant x \leqslant 3T$, $-T \leqslant x \leqslant 0$ и т. д. график имеет точно такую же форму.

Ясно, что число 2π является периодом рассматриваемой функции y, так что можно ограничиться рассмотрением отрезка $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Разбивая этот отрезок на четыре части, в каждой из которых и $\sin x$, и $\cos x$ сохраняют знак, получим

$$y = \begin{cases} \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), & \text{если } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, \\ -\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), & \text{если } \pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}, \\ -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), & \text{если } \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Теперь строим графики функций

$$y_1 = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ и } y_2 = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

а затем на отрезке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ берем кусок кривой y_1, на отрезке от $\frac{\pi}{2}$ до π — кусок кривой y_2, а на отрезках от π до $\frac{3\pi}{2}$ и от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π берем кривые, симметричные соответствующим кускам кривых y_1 и y_2 относительно оси абсцисс. После этого, пользуясь периодичностью, про-

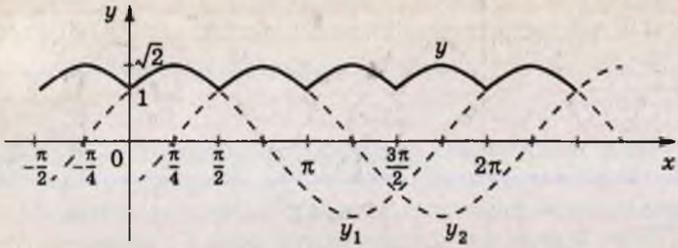


Рис. 16

должаем получившуюся кривую вне отрезка $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ (сплошная линия на рис. 16).

Из построенного графика видно, что $\frac{\pi}{2}$ также является периодом данной функции, так что мы были слишком осторожны, рассматривая отрезок от 0 до 2π. Если бы мы сразу догадались, что $\frac{\pi}{2}$ является периодом этой функции, — а это доказать совсем нетрудно:

$$\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |\cos x| + |\sin x|,$$

— то график был бы построен значительно быстрее. Этот пример показывает, что тщательный предварительный анализ свойств заданной функции зачастую существенно упрощает построение ее графика.

(14) *Построить график функции*

$$y = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} + \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}. \qquad (5)$$

На первый взгляд эта функция может показаться очень сложной. Однако, проведя преобразование формулы, задающей рассматриваемую функцию, мы придем к иной, более простой форме записи функции (5), которая позволит без особого труда нарисовать нужный график.

Прежде всего заметим, что областью определения функции (5) является вся числовая ось, за исключением точек $x = \frac{n\pi}{2}$, где n — целое число.

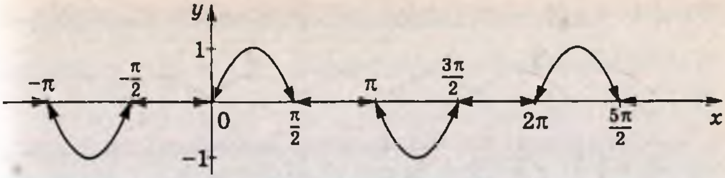


Рис. 17

Так как при $x \neq \frac{n\pi}{2}$ справедливы равенства

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{|\cos x|}, \quad \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{|\sin x|}$$

(см. § 2 раздела II), то функция (5) в своей области определения может быть записана в виде

$$y = \sin x \cdot |\cos x| + \cos x \cdot |\sin x|.$$

Эта функция — периодическая с периодом 2π. Построение требуемого графика можно провести так же, как и при решении примера 13. Он изображен на рисунке 17. Отметим только еще раз, что в точках $x = \frac{n\pi}{2}$, n — целое число, функция (5) не определена; на чертеже это показано стрелками в концах кусков кривой, примыкающих к этим точкам.

Рассмотрим теперь несколько примеров построения сложных графиков, в которых нельзя ограничиться рассмотренными выше элементарными приемами. Каждый из этих примеров имеет свои особенности, которые следует учитывать при построении графика. Для решения примеров, подобных приводимым ниже, приходится применять, как правило, совершенно непохожие, нестандартные рассуждения; в каждой задаче нужно научиться находить, так сказать, слабые места, «уцепившись» за которые удается провести построение.

(15) *Построить график функции* $y = \frac{x^2 + 1}{x}$.

Представив заданную функцию в виде $y = x + \frac{1}{x}$, мы применим прием, называемый *сложением графиков.*

Именно, требуемый график будет построен «сложением» двух вспомогательных графиков $y_1 = x$ и $y_2 = \frac{1}{x}$. Иными словами, при каждом допустимом значении аргумента (т. е. при каждом $x \neq 0$) соответствующая ему ордината y строится как сумма величин ординат y_1 и y_2, соответствующих тому же значению аргумента (рис. 18).

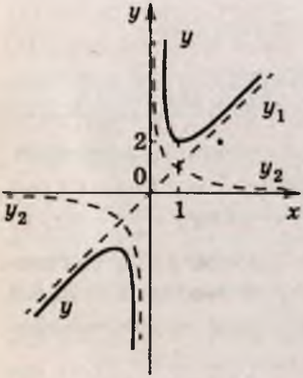


Рис. 18

Легко сообразить, как будет выглядеть график функции на положительной полуоси абсцисс: при каждом значении x соответствующую ординату прямой $y_1 = x$ необходимо увеличить на величину соответствующей тому же значению x ординаты гиперболы $y_2 = \frac{1}{x}$. Очевидно, что при положительном x, стремящемся к нулю, выражение $x + x^{-1}$ стремится к $+\infty$ (неограниченно возрастает), а при x, стремящемся к $+\infty$, искомый график неограниченно приближается к биссектрисе $y_1 = x$, так как «добавка» $\frac{1}{x}$ будет все меньше и меньше. Легко в данном случае определить наименьшее значение функции y (напомним, что пока мы рассматриваем только положительные значения x): в самом деле, при $x > 0$ справедливо неравенство (см. § 7 раздела I) $x + x^{-1} \geqslant 2$, т. е. наименьшее значение равно 2, и достигается оно при $x = 1$.[1]

Аналогично строится график и на отрицательной части оси абсцисс. Впрочем, можно воспользоваться тем, что функция y — нечетная и, следовательно, ее график симметричен относительно начала координат.

---

[1] Несколько труднее, хотя и вполне доступно для поступающих, доказать, что $x + x^{-1}$ убывает при $0 < x \leqslant 1$ и возрастает при $x \geqslant 1$ (см. пример 25 § 7 раздела I). Впрочем, все эти факты легко доказываются с помощью производной.

(16) *Построить график функции $y = x \sin x$.*

Воспользуемся тем, что задающая эту функцию формула представляет собой произведение, и применим прием, называемый *умножением графиков.* Именно, требуемый график будет построен «умножением» двух вспомогательных графиков $y_1 = x$ и $y_2 = \sin x$. Иными словами, при каждом значении аргумента соответствующая ему ордината y строится как произведение величин ординат y_1 и y_2, соответствующих тому же значению аргумента (рис. 19).

Сначала построим график функции y для неотрицательных значений аргумента. Перемножая при каждом значении x величину соответствующей ординаты прямой $y_1 = x$ и величину ординаты синусоиды $y_2 = \sin x$, можно построить плавную кривую, примерно передающую поведение графика функции y на неотрицательной полуоси абсцисс. С помощью некоторых характеристических точек несколько уточним вид этой кривой.

Прежде всего ясно, что $y = 0$ при тех x, когда $\sin x = 0$; поэтому график функции y пересекает неотрицательную полуось абсцисс в точках $x = k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Далее, при $x > 0$ справедливо очевидное неравенство

$$-x \leqslant x \sin x \leqslant x,$$

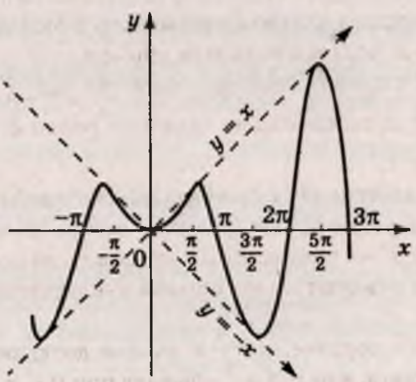


Рис. 19

которое означает, что при положительных значениях аргумента график функции y лежит не выше прямой $y = x$ и не ниже прямой $y = -x$. При этом точки графика функции y, соответствующие тем значениям $x > 0$, при которых $\sin x = 1$, т. е. значениям

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

лежат на прямой $y = x$, а точки, соответствующие тем значениям $x > 0$, при которых $\sin x = -1$, т. е. значениям

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

лежат на прямой $y = -x$.

Построить график функции y на отрицательной полуоси абсцисс легко: функция y — четная и ее график симметричен относительно оси ординат.

17 *Построить график функции* $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

Здесь требуется построить график «функции от функции»; такие *сложные функции* на экзаменах встречаются довольно часто. Для построения графиков нужно хорошо знать свойства основных элементарных функций и ясно представлять себе вытекающие из них свойства комбинаций этих функций.

Областью определения рассматриваемой функции y являются все действительные числа, кроме $x = 0$. Так как при $x > 0$ показатель степени $\frac{1}{x} > 0$, то, по свойству показательной функции, $y > 1$ для всех положительных значений аргумента. Заметим, что $y = 2$ при $x = 1$. Если x неограниченно возрастает, то выражение $\frac{1}{x}$ убывает к нулю, оставаясь положительным (см. свойства гиперболы), а потому $2^{\frac{1}{x}}$ убывает к единице, оставаясь, однако, больше единицы (по свойству показательной функции). При положительном x, стремящемся к нулю, показатель $\frac{1}{x}$ неограниченно возрастает, и, следовательно, $2^{\frac{1}{x}}$

также неограниченно возрастает. Это позволяет нарисовать примерный вид графика функции y при $x > 0$.

Можно легко доказать, что на отрицательной полуоси абсцисс справедливо неравенство $0 < y < 1$. При помощи аналогичных рассуждений строится график функции y и при $x < 0$ (рис. 20).

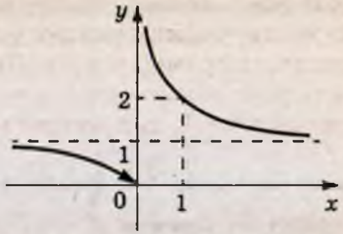


Рис. 20

18 *Построить график функции* $y = 1 - 2^{1 + \sin(x+1)}$.

Представим эту функцию в виде

$$y = 1 + (-2) \cdot 2^{\sin(x+1)}; \qquad (6)$$

теперь, имея график функции $y_1 = 2^{\sin x}$, можно получить график функции y с помощью приемов, рассмотренных в примерах 1, 2, 5. Поэтому займемся сначала графиком функции y_1. Эта функция — периодическая с периодом 2π, следовательно, достаточно нарисовать ее график на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ (см. пример 13).

При $x = 0$ функция y_1 принимает значение 1. Если x увеличивается от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $\sin x$ возрастает от 0 до 1, а $2^{\sin x}$ возрастает от 1 до 2. Если, далее, x увеличивается от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, то $\sin x$ убывает от 1 до -1, а $2^{\sin x}$ убывает от 2 до $\frac{1}{2}$; в частности, при $x = \pi$ функция y_1 принимает значение 1. Наконец, если x увеличивается от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π, то $\sin x$ возрастает от -1 до 0, а $2^{\sin x}$ возрастает от $\frac{1}{2}$ до 1; при $x = 2\pi$ значение функции y_1 равно 1. Все эти утверждения относительно поведения функции y_1 следуют из свойств синуса и показательной функции. Они позволя-

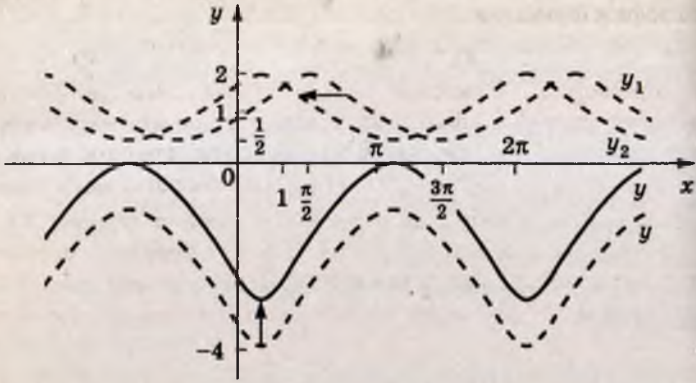


Рис. 21

ют выяснить примерное поведение графика функции y_1 при $0 < x < 2\pi$; получившуюся кривую остается продолжить периодически с этого отрезка на всю ось абсцисс (рис. 21).

Теперь все готово для построения по формуле (6) графика функции y. Прежде всего сдвинем график функции y_1 как твердое тело на единицу влево вдоль оси абсцисс; в результате получится кривая, являющаяся графиком функции

$$y_2 = 2^{\sin(x+1)}$$

(см. пример 2). Это — также периодическая функция (с периодом 2π); свое наибольшее (максимальное) значение, равное 2, она принимает в точках

$$x^* = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi,$$

а наименьшее (минимальное) значение, равное $\frac{1}{2}$, — в точках

$$x^{**} = -\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi,$$

где k — целое число (см. рис. 21). Осуществляя «растяжение» кривой y_2 вдоль оси ординат в 2 раза и ее зеркальное отражение относительно оси абсцисс, мы построим график функции

$$y_3 = (-2) \cdot 2^{\sin(x+1)}$$

(см. пример 5). Отметим, что максимальное значение этой периодической функции равно -1, а ее минимальное значение равно -4 (см. рис. 21). Наконец, график функции y получится, если кривую y_3 как твердое тело поднять на единицу вверх вдоль оси ординат (см. пример 1).

График (сплошная линия на рис. 21) передает основные черты поведения функции y. Это — периодическая (с периодом 2π) функция, обращающаяся в нуль в точках

$$x^{**} = -\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi$$

(0 является ее наибольшим значением) и принимающая наименьшее значение -3 в точках

$$x^* = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi.$$

В промежутках между экстремальными значениями функция y изменяется монотонно. При $x = 0$ значение функции y равно $1 - 2^{1 + \sin 1}$ (напомним, что $\sin 1$ есть синус угла в 1 радиан!).

Разумеется, рисунок 21 дает лишь грубое, примерное представление о графике функции y, однако именно такая степень детализации и требуется от поступающих.

19 *Построить график функции* $y = \log_2(1 - x^2)$.

Сначала построим график вспомогательной функции $y_1 = 1 - x^2$; эта парабола на рисунке 22 изображена пунктиром. Затем надо построить график логарифма от этой функции.

При $x = 0$ имеем $y = \log_2 1 = 0$. Если x увеличивается от 0 до 1, то, как видно из графика вспомогательной функции, $1 - x^2$ уменьшается от 1 до 0, а потому $\log_2(1 - x^2)$ уменьшается от 0 до $-\infty$. Аналогично, если x уменьшается от 0 до -1, то $1 - x^2$ уменьшается от 1 до 0

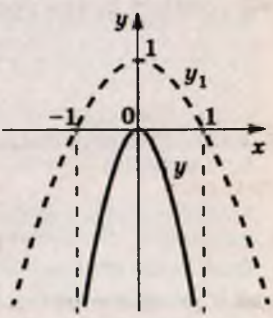


Рис. 22

и $\log_2(1 - x^2)$ уменьшается от 0 до $-\infty$. Для остальных значений x, т. е. для $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 1$, мы имеем $1 - x^2 \leqslant 0$, так что $\log_2(1 - x^2)$ не имеет смысла. График функции y изображен на рисунке 22 сплошной линией.

Заметим, что для построения этого графика мы не стали с самого начала находить область определения рассматриваемой функции — она получилась у нас автоматически. Тем не менее предварительное отыскание области определения часто бывает очень полезным.

(20) *Построить график функции* $y = \log_{\sin x} \dfrac{1}{2}$.

Очевидно, что функция y — периодическая с периодом 2π. Поэтому при построении ее графика достаточно ограничиться отрезком длины 2π, например отрезком $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Но не весь этот отрезок входит в область ее определения: функция имеет смысл (на этом отрезке) лишь для $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Именно на этих интервалах мы и должны построить ее график, а затем распространить его по соображениям периодичности.

Заметим, что функцию y в ее области определения можно переписать в форме

$$y = \frac{1}{\log_{1/2} \sin x}. \tag{7}$$

Построим график вспомогательной функции $y_1 = \log_{1/2} \sin x$; он будет интересовать нас при $0 < x < < \pi$. Взяв часть синусоиды $y_2 = \sin x$, соответствующую отрезку изменения аргумента x от 0 до π, можно тем же методом, что и в предыдущем примере, получить график сложной функции y_1 (рис 23; вспомогательные графики y_1 и y_2 изображены пунктиром).

Рассмотрим промежуток $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Так как при любом значении x из этого промежутка соответствующая ему величина функции y является *обратной* по отношению к величине функции y_1, соответствующей тому же

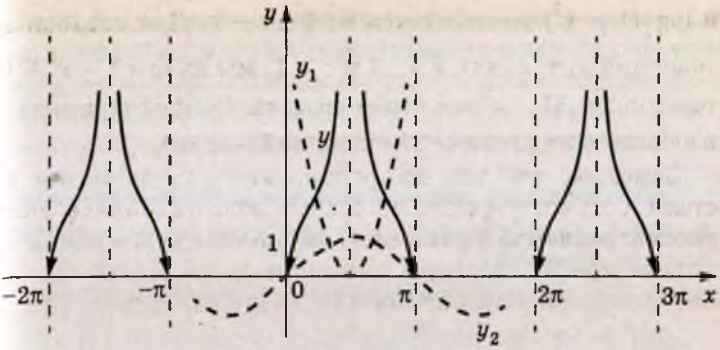


Рис. 23

значению аргумента (см. формулу (7)), то легко представить себе примерный вид графика функции y при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (сплошная линия на рис. 23).

Аналогично строится график рассматриваемой функции при $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Полезно обратить внимание на то, что примерно такие же рассуждения, как при построении графика функции y по уже полученному графику вспомогательной функции y_1 (использующие формулу (7)), позволяют *построить график функции $y = \frac{1}{f(x)}$, если график функции $y_1 = f(x)$ уже нарисован.*

Рассматривая более подробно рисунок 23, можно отметить, что полного описания поведения графика заданной функции в ходе изложенного выше решения мы не получили (например, тот факт, что этот график изогнут именно так, как это изображено на чертеже, даже не обсуждался). Однако *примерное* поведение графика нарисовать несложно.

Вид кривой, впрочем, можно было бы еще несколько уточнить, дополнительно вычислив таблицу значений функции для «удобных» значений аргумента и учитывая получающиеся точки при проведении графика. На экзамене такое уточнение, как правило, не требуется:

важно рисовать именно «примерную» кривую, передающую общий вид и характерные особенности графика.

В заключение рассмотрим примеры несколько иного рода, но также связанные с графическими построениями на плоскости с заданной системой координат.

21 ***Найти на координатной плоскости множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют системе неравенств***

$$\begin{cases} 5x + 3y \geqslant 0, \\ y - 2x < 2. \end{cases} \quad (8)$$

Из первого неравенства имеем $y \geqslant -\frac{5x}{3}$.

Построим прежде всего график функции $y = -\frac{5x}{3}$ (рис. 24). Тогда точки, координаты которых удовлетворяют *равенству* $y = -\frac{5x}{3}$, лежат на построенной прямой, а точки, у которых координата y *больше* $-\frac{5x}{3}$, должны лежать выше этой прямой. Таким образом, множеством точек, координаты которых удовлетворяют первому неравенству (8), будет полуплоскость, лежащая *выше* прямой

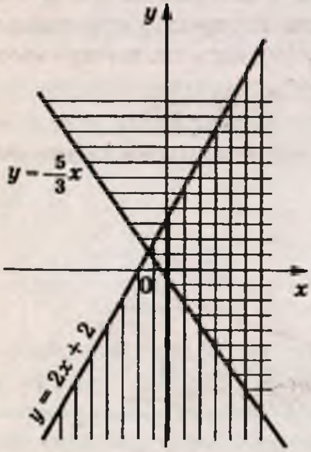


Рис. 24

$y = -\frac{5x}{3}$ (включая и эту прямую; на рис. 24 эта область отмечена горизонтальной штриховкой).

Аналогично, из второго неравенства (8) имеем:

$$y < 2x + 2,$$

так что множеством точек, координаты которых удовлетворяют второму неравенству (8), будет полуплоскость, лежащая ниже прямой $y = 2x + 2$ (сама прямая не включается; на рис. 24 эта область отмечена вертикальной штриховкой).

Следовательно, точки плоскости, координаты x и y которых удовлетворяют системе неравенств (8), лежат в общей части двух полученных полуплоскостей, представляющей собой угловую область (на рис. 24 она отмечена двойной штриховкой); при этом один из ограничивающих эту область лучей — часть прямой $y = -\frac{5x}{3}$ — включается в искомое множество, а другой — часть прямой $y = 2x + 2$ — не включается (точка пересечения прямых $y = -\frac{5x}{3}$ и $y = 2x + 2$ также не принадлежит искомому множеству).

(22) *Найти и изобразить на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} (3x+1)(x-3y-1)=0, \\ (3x+1)(6y-2x+1)(x+y)=0. \end{cases} \qquad (9)$$

Первое уравнение системы (9) выполняется, если $3x + 1 = 0$ или $x - 3y - 1 = 0$. Следовательно, точки, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, заполняют на координатной плоскости пару прямых

$$x = -\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{3}(x-1);$$

на рисунке 25 они изображены сплошными линиями. Аналогично, точки, координаты которых удовлетворяют второму уравнению системы (9), заполняют прямые

$$x = -\frac{1}{3}, \quad y = \frac{1}{6}(2x-1), \quad y = -x;$$

на рисунке 25 они изображены пунктирными линиями.

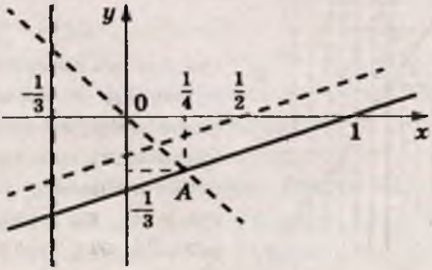


Рис. 25

Пара чисел (x, y), являющаяся решением системы (9), удовлетворяет одновременно обоим уравнениям системы, а потому соответствующая точка лежит и на некоторой сплошной прямой, и на некоторой пунктирной прямой. На рисунке 25 видно, что таким свойством обладают точки прямой $x = -\frac{1}{3}$ и точка A пересечения прямых

$$y = \frac{1}{3}(x-1), \quad y = -x, \tag{10}$$

поскольку прямые

$$y = \frac{1}{3}(x-1), \quad y = \frac{1}{6}(2x-1) \tag{11}$$

не пересекаются. Последнее утверждение, очевидное из аккуратно выполненного чертежа, требует, разумеется, строгого доказательства: надо либо указать, что эти прямые имеют одинаковый угловой коэффициент, т. е. параллельны, либо показать, что система уравнений (11) несовместна. Координаты точки A легко находятся из системы уравнений (10), так что $A = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют все точки, лежащие на прямой $x = -\frac{1}{3}$, и точка $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

(23) *На плоскости с заданной системой координат изобразить область, заполненную всеми точками, координаты которых удовлетворяют неравенству*

$$\log_x \log_y x > 0. \tag{12}$$

Заметим сразу: x и y, удовлетворяющие условию (12), таковы, что $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$. Так как свойства логарифмов различны при основаниях, больших или меньших единицы, то естественно рассмотреть два случая.

а) Пусть $x > 1$. Тогда на основании свойств логарифмов неравенство (12) будет справедливо, если $\log_y x > 1$. Так как логарифмы чисел, бóльших единицы, по основанию, меньшему единицы, отрицательны, то неравенство $\log_y x > 1$ не может выполняться для y из промежутка $0 < y < 1$.

Значит, неравенство $\log_y x > 1$ может быть справедливо лишь в том случае, когда $y > 1$. Но если $y > 1$, то решением неравенства $\log_y x > 1$ будут все $x > y$.

Итак, если $x > 1$, то для выполнения неравенства (12) y обязательно должен быть больше единицы: $y > 1$, а исходному неравенству будут удовлетворять те точки, для координат которых выполнено еще условие $x > y$.

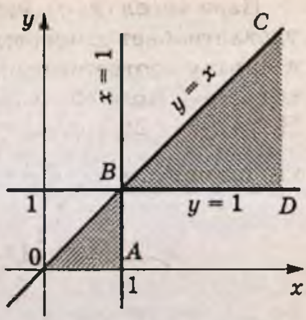


Рис. 26

Множество этих точек есть внутренняя часть угловой области CBD (рис. 26).

б) Пусть теперь $0 < x < 1$. Рассуждая аналогичным образом, найдем, что условию задачи удовлетворяют те точки, для координат которых выполнены неравенства $0 < y < 1$ и $y < x$. Множество этих точек есть внутренняя часть треугольника AOB (см. рис. 26).

Следовательно, точки, координаты которых удовлетворяют неравенству (12), образуют область, заштрихованную на рисунке 26 (координаты граничных точек этой области соотношению (12) не удовлетворяют).

Задачи

Найти область определения функции (№ 1—6):

1. $y = 5\sqrt{1 - 4x^2}$.

2. $y = \log_{x-1}(2 - x - x^2)$.

3. $y = \dfrac{x^2 + x}{x^3 + x^2 - 2x}$.

4. $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$.

5. $y = \sqrt[4]{x^{-2}(x-2)(x-3)}$.

6. $y = \sqrt{\lg\cos(2\pi x)}$.

Построить графики функций (№ 7—38):

7. $y = 2^{-\sqrt{2}}$.

8. $y = \pi(x + 1)$.

9. $y = x(1 - x)$.

10. $y = |-3x + 2| - |2x - 3|$.

11. $y = x^2 - |x - 2| - 4$.

12. $y = x^2 - 3\left|x - \frac{2}{3}\right| - 2$.

13. $y = (x + 1)(|x| - 2)$.

14. $y = |x + 1| \cdot (|x| - 2)$.

59. В правильной треугольной пирамиде высота равна 1, а отношение квадрата длины бокового ребра к квадрату длины стороны основания равно x. Найти зависимость объема пирамиды от x и изобразить ее графически.

60. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 1, а отношение квадрата длины апофемы боковой грани к квадрату длины стороны основания равно x. Найти зависимость объема пирамиды от x и изобразить ее графически.

§ 4. Текстовые задачи

Мы называем «текстовыми» задачи, традиционно называющиеся задачами на составление уравнений. Дело в том, что на вступительных экзаменах часто предлагаются задачи, в которых для решения, для нахождения требуемых неизвестных величин приходится пользоваться не только уравнениями, но и неравенствами[1], а иногда и другими условиями, которые не записываются в форме уравнений и неравенств. Поэтому главным, что объединяет задачи такого типа, является лишь то, что условие задано в форме некоторого текста, без формул, даже без буквенных обозначений неизвестных. Кроме того, привычка большинства поступающих рассматривать всякую текстовую задачу как задачу на составление уравнений оказывает иногда плохую услугу: они психологически не подготовлены к тому, что одних уравнений для решения задачи недостаточно.

Задачи обычного типа, в которых все условия записываются в виде уравнений, как правило, не вызывают особенных трудностей у поступающих, хотя и в этих задачах отдельные моменты доставляют порой затруднения. Что же касается задач более сложных, то их трудность объясняется, как правило, именно их непривычностью, необходимостью рассуждать, а не просто решать некоторые системы уравнений или неравенств.

---

[1] Заметим, что неравенства содержатся практически во всех задачах такого рода: если, например, s — расстояние, то $s > 0$ и т. п. Однако обычно их явно не выписывают, но используют при решении уравнений и при отбрасывании лишних решений.

Начнем с задач, наиболее часто предлагаемых на вступительных экзаменах, — с задач на движение и на совместную работу.

При решении задач на движение обычно вводятся в рассмотрение скорости (v_1, v_2, ...), путь и его части (s, s_1, s_2, ...) и время (t, t_1, t_2, ...), необходимое для прохождения пути и его частей.

(1) *Дорога из пункта A в пункт B сначала идет под уклон с горы на протяжении* 24 *км, затем идет по ровному месту на протяжении* 20 *км, после поднимается под первоначальным уклоном в гору на протяжении* 16 *км. Велосипедист, проехав* $\frac{2}{3}$ *пути из A в B, обнаружил, что забыл необходимый пакет. Он сразу же повернул назад и через* 8 ч 12 *мин после своего выезда из пункта A вернулся в пункт A. На следующий день, выехав из A в B той же дорогой, велосипедист проехал весь путь за* 6 *ч. На третий день велосипедист проехал обратный путь из B в A за* 6 ч 20 *мин. С какой скоростью велосипедист ехал под гору, по ровному месту и в гору, если считать эти скорости постоянными?*

Пусть велосипедист ехал под гору со скоростью v_1 *км/ч*, по ровному месту — v_2 *км/ч*, в гору — v_3 *км/ч*. Дорога от A до B разбивается на три участка:

под гору:	$s_1 = AC = 24$ *км*;
по ровному месту:	$s_2 = CD = 20$ *км*;
в гору:	$s_3 = DB = 16$ *км*.
Вся дорога:	$s = AB = 60$ *км*.

В первый день велосипедист проехал сначала расстояние $AK = \frac{2s}{3} = 40$ *км*, а затем вернулся обратно. Значит, он проехал расстояние s_1 со скоростью v_1 и затратил время $t_1 = \frac{s_1}{v_2}$, дважды расстояние $s_4 = CK = AK - AC =$ $= 16$ *км* со скоростью v_2 и затратил время $t_2 = \frac{2s_4}{v_2}$ и, наконец, расстояние s_1 со скоростью v_3 и затратил время

$t_3 = \dfrac{s_1}{v_3}$. Известно, что в первый раз он затратил на весь путь время $t_4 = 8\frac{1}{5}$ *ч*. Поскольку $t_4 = t_1 + t_2 + t_3$, то получаем уравнение

$$\frac{24}{v_1} + \frac{32}{v_2} + \frac{24}{v_3} = \frac{41}{5}.$$

Во второй день на путь AB велосипедист затратил время $t_5 = 6$ *ч*, при этом он проехал путь s_1 со скоростью v_1 и затратил на этот путь время $t_6 = \dfrac{s_1}{v_1}$, путь s_2 со скоростью v_2 и затратил на этот путь время $t_7 = \dfrac{s_2}{v_2}$ и, наконец, путь s_3 со скоростью v_3 и затратил время $t_8 = \dfrac{s_3}{v_3}$. Поскольку $t_5 = t_6 + t_7 + t_8$, то получаем уравнение

$$\frac{24}{v_1} + \frac{20}{v_2} + \frac{16}{v_3} = 6.$$

Аналогично, используя условия движения велосипедиста в третий день, приходим к уравнению

$$\frac{16}{v_1} + \frac{20}{v_2} + \frac{24}{v_3} = \frac{19}{3}.$$

Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными: v_1, v_2, v_3. Легко заметить, что все уравнения этой системы являются линейными относительно величин, обратных к v_1, v_2, v_3; обозначая их

$$x = \frac{1}{v_1}, \quad y = \frac{1}{v_2}, \quad z = \frac{1}{v_3},$$

получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 120x + 160y + 120z = 41, \\ 24x + 20y + 16z = 6, \\ 48x + 60y + 72z = 19. \end{cases} \tag{1}$$

Умножая сначала второе уравнение на 5 и вычитая его из первого, и затем умножая второе уравнение на 2 и вычитая его из третьего, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 60y + 40z = 11, \\ 20y + 40z = 7. \end{cases} \tag{2}$$

Из системы (2) находим $y = \dfrac{1}{10}$, $z = \dfrac{1}{8}$, а затем из системы (1) получаем $x = \dfrac{1}{12}$.

Теперь легко находим ответ: велосипедист ехал под гору со скоростью $v_1 = 12$ *км/ч*, по ровному шоссе — со скоростью $v_2 = 10$ *км/ч* и в гору со скоростью $v_3 = 8$ *км/ч*.

Большие трудности у поступающих возникают при составлении систем уравнений в тех случаях, когда происходит движение по замкнутой траектории, например по окружности. Часто при решении таких задач поступающие с трудом представляют себе картину движения и потому не видят условий, из которых вытекают те или иные уравнения.

(2) *Три гонщика A, B и C, стартовав одновременно, движутся с постоянными скоростями в одном направлении по кольцевому шоссе. В момент старта гонщик B находится перед гонщиком A на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины шоссе, а гонщик C перед гонщиком B на таком же расстоянии. Гонщик A впервые догнал гонщика B в тот момент, когда B закончил свой первый круг, а еще через 10 мин гонщик A впервые догнал гонщика C. Гонщик B тратит на круг на 2,5 мин меньше, чем гонщик C. Сколько времени тратит на круг гонщик A?*

Пусть длина кольцевого шоссе равна s *м*; время (в минутах), которое тратят на полный круг гонщики A, B и C, обозначим соответственно через x, y и z; скорости гонщиков (в *м/мин*) будем обозначать соответственно через u, v и w. Тогда справедливы соотношения

$$ux = vy = wz = s. \tag{3}$$

Из условия задачи видно, что в момент одновременного старта гонщик B находится впереди (по направле-

5 – 4142

нию движения) гонщика A на расстоянии $\frac{s}{3}$, а гонщик C — впереди гонщика A на расстоянии $\frac{2s}{3}$.

Гонщик A впервые догнал гонщика B в тот момент, когда последний закончил свой первый круг, т. е. через y минут после старта, и за это время гонщик A прошел путь на $\frac{s}{3}$ больший, чем за это же время прошел гонщик B. Таким образом, получаем

$$uy = \frac{4s}{3}. \tag{4}$$

Гонщик A впервые догнал гонщика C еще через 10 *мин* после того, как он догнал гонщика B, т. е. через $(y + 10)$ *мин* после старта. За это время гонщик A прошел путь на $\frac{2s}{3}$ больший, чем за это же время прошел гонщик C. Таким образом, получаем соотношение

$$u(y + 10) = w(y + 10) + \frac{2s}{3}. \tag{5}$$

Наконец, условие, что B тратит на круг на 2,5 *мин* меньше, чем C, дает соотношение $z = y + \frac{5}{2}$.

Из полученной системы нужно определить только значение x. Подставляя выражения для u, v, w из (3) в (4) и (5) и сокращая получающиеся равенства на s (что возможно, ибо $s \neq 0$ по смыслу задачи), приходим к системе трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x, \\ \frac{y + 10}{x} = \frac{y + 10}{z} + \frac{2}{3}, \\ z = y + \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y и z, приходим к квадратному уравнению

$$4x^2 - 45x - 225 = 0,$$

которое имеет корни $x_1 = 15$ и $x_2 = -\frac{15}{4}$. Отрицательный корень не имеет смысла в рассматриваемой задаче и поэтому должен быть отброшен.

Таким образом, получаем ответ: гонщик A тратит на круг 15 *мин.*

При решении задач на работу обычно приходится рассматривать части всей работы, выполняемые в тот или иной срок. Рассмотрение частей всей работы позволяет просто составить систему уравнений.

3 *Три бригады, работая вместе, должны выполнить некоторую работу. Известно, что первая и вторая бригады вместе могут выполнить ее на 36 мин быстрее, чем одна третья бригада. За то время, в течение которого могут выполнить всю работу первая и третья бригады вместе, вторая бригада может выполнить лишь половину всей работы. За то время, в течение которого всю работу могут выполнить вторая и третья бригады вместе, первая может выполнить* $\frac{2}{7}$ *всей работы. За какое время выполнят работу все три бригады вместе?*

Пусть первая бригада выполняет всю работу за x *мин*, вторая — за y *мин*, третья — за z *мин.* Тогда за одну минуту первая бригада выполняет $\frac{1}{x}$ часть всей работы, вторая $\frac{1}{y}$, третья $\frac{1}{z}$. Первая и вторая бригады, работая вместе, выполняют за минуту $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ часть всей работы; значит, всю работу они выполняют за $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ *мин.* По условию задачи это время равно $(z - 36)$ *мин*, поэтому

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = z - 36. \qquad (6)$$

Первая и третья бригады, работая вместе, выполняют всю работу за $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}$ *мин.* По условию задачи это время равно $\frac{y}{2}$ *мин.* Значит,

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}=\frac{y}{2}. \qquad (7)$$

Аналогично составляется третье уравнение:

$$\frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{2x}{7}. \qquad (8)$$

В задаче требуется определить время t, за которое выполняют всю работу три бригады, работая вместе, т. е. надо найти

$$t=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}.$$

Итак, для нахождения ответа в задаче достаточно из системы уравнений (6), (7) и (8) найти x, y и z.

Перепишем полученную систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z-36}, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{2x}. \end{cases}$$

Складывая второе уравнение этой системы с удвоенным третьим уравнением, находим $x = 2z$. Подставляя это значение x в третье уравнение, получаем $y=\frac{4}{3}z$. Наконец, подставляя эти значения x и y в первое уравнение, приходим к уравнению

$$\frac{1}{2z}+\frac{3}{4z}=\frac{1}{z-36},$$

откуда находим $z = 180$, но тогда $x = 360$ и $y = 240$. Теперь легко найти, что $t = 80$.

Итак, всю работу три бригады, работая вместе, выполнят за 80 *мин*.

Многие поступающие очень боятся задач, в формулировках которых участвуют слова «сплавы», «отношения», «смеси». Увидев такую задачу, они сразу решают, что это очень трудная задача. На самом деле эти задачи обычно довольно просты.

(4) *Имеются два слитка сплавов золота и меди. В первом слитке отношение золота к меди равно* 1:2, *а во втором* 2:3. *Если сплавить* $\frac{1}{3}$ *первого слитка с* $\frac{5}{6}$ *второго, то в получившемся слитке окажется столько золота, сколько было в первом меди, а если* $\frac{2}{3}$ *первого слитка сплавить с половиной второго, то в получившемся слитке окажется меди на* 1 *кг больше, чем было золота во втором слитке. Сколько золота в каждом слитке?*

Пусть в первом слитке x *кг* золота, тогда в нем меди $2x$ *кг*. Пусть во втором слитке y *кг* золота, тогда в нем меди $\frac{3}{2}y$ *кг*. Если сплавить $\frac{1}{3}$ первого слитка с $\frac{5}{6}$ второго, то в получившемся слитке золота будет $\frac{x}{3} + \frac{5y}{6}$ *кг*, а по условию задачи золота будет столько же, сколько меди в первом слитке, т. е. $2x$ *кг*. Значит, получаем первое уравнение

$$\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y = 2x.$$

Совершенно аналогично составляется второе уравнение

$$\frac{4}{3}x + \frac{3}{4}x = y + 1.$$

Решая эту систему, получаем ответ: $x = 1{,}2$ *кг*, $y = 2{,}4$ *кг*.

(5) *Имеются три смеси, составленные из трех элементов А, В и С. В первую смесь входят только элемен-*

ты A и B в весовом отношении 3:5, *во вторую смесь входят только элементы B и C в весовом отношении* 1:2, *в третью смесь входят только элементы A и C в весовом отношении* 2:3. *В каком отношении нужно взять эти смеси, чтобы во вновь полученной смеси элементы A, B и C содержались в весовом отношении* 3:5:2?

Элементы A и B входят в первую смесь в весовом отношении 3:5, и поэтому в каждом грамме первой смеси содержится $\frac{3}{8}$ *г* элемента A и $\frac{5}{8}$ *г* элемента B. Аналогично, 1 *г* второй смеси содержит $\frac{1}{3}$ *г* элемента B и $\frac{2}{3}$ *г* элемента C, а 1 *г* третьей смеси содержит $\frac{2}{5}$ *г* элемента A и $\frac{3}{5}$ *г* элемента C.

Если мы возьмем x *г* первой смеси, y *г* второй и z *г* третьей и смешаем их, то получим $(x + y + z)$ *г* новой смеси, причем в ней будет $\left(\frac{3x}{8} + \frac{2z}{5}\right)$ *г* элемента A, $\left(\frac{5x}{8} + \frac{y}{3}\right)$ *г* элемента B и $\left(\frac{2y}{3} + \frac{3z}{5}\right)$ *г* элемента C. Нам нужно взять первую, вторую и третью смеси в таких количествах, чтобы в новой смеси элементы A, B и C содержались бы в весовом отношении 3:5:2, т. е. в 1 *г* новой смеси должно быть $\frac{3}{10}$ *г* элемента A, $\frac{5}{10}$ *г* элемента B, $\frac{2}{10}$ *г* элемента C. Но тогда в $(x + y + z)$ *г* новой смеси будет $\frac{3}{10}(x + y + z)$ *г* элемента A, $\frac{5}{10}(x + y + z)$ *г* элемента B, $\frac{2}{10}(x + y + z)$ *г* элемента C. Приравнивая разные выражения для одного и того же количества граммов элементов A, B и C, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{3}{8}x + \frac{2}{5}z = \frac{3}{10}(x + y + z), \\ \frac{5}{8}x + \frac{1}{3}y = \frac{5}{10}(x + y + z), \\ \frac{2}{3}y + \frac{3}{5}z = \frac{2}{10}(x + y + z). \end{cases} \tag{9}$$

Заметим, что хотя у нас получилось три уравнения с тремя неизвестными, независимых уравнений в этой системе только два. Это легко показать, например, так: вычитая из равенства $x + y + z = x + y + z$ сумму первых двух уравнений, получим третье уравнение. Поэтому из системы (9) мы найдем лишь отношение $x:y:z$, а не сами x, y, z. Исключая x, например, из первых двух уравнений системы (9), находим $y = 2z$. Подставляя это значение y в любое уравнение системы, получаем $x = \frac{20z}{3}$.

Следовательно, $x:y:z = 20:6:3$, т. е. смеси надо взять в весовом отношении 20:6:3.

Не меньшие трудности у поступающих вызывают *задачи на проценты*. Между тем ничего трудного в понятии процента нет: мы можем избавиться от процентов, рассматривая соответствующее количество сотых долей числа.

(6) *Проценты содержания (по весу) спирта в трех растворах образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом отношении* 2:3:4, *то получится раствор, содержащий* 32% *спирта. Если же смешать их в весовом отношении* 3:2:1, *то получится раствор, содержащий* 22% *спирта. Сколько процентов спирта содержит первый раствор?*

Пусть в первом растворе $x\%$ спирта, во втором $y\%$ и в третьем $z\%$ спирта. Это означает, что в 1 *г* первого раствора содержится $\frac{x}{100}$ *г* спирта, в 1 *г* второго раствора содержится $\frac{y}{100}$ *г* спирта и в 1 *г* третьего раствора содержится $\frac{z}{100}$ *г* спирта. Если возьмем 2 *г* первого раствора, 3 *г* второго и 4 *г* третьего, то получим 9 *г* смеси, содержащей $\left(\frac{2x}{100} + \frac{3y}{100} + \frac{4z}{100}\right)$ *г* спирта. По условию задачи полученная смесь содержит 32% спирта, т. е. в 9 *г* смеси содержится $9 \cdot \frac{32}{100}$ г спирта. Из этого условия получаем уравнение

$$\frac{2x + 3y + 4z}{100} = \frac{9 \cdot 32}{100}.$$

Совершенно аналогично получаем еще одно уравнение:

$$\frac{3x + 2y + z}{100} = \frac{6 \cdot 22}{100}.$$

Наконец, по условию задачи, числа x, y и z образуют геометрическую прогрессию, и поэтому $y^2 = xz$.

Теперь остается найти x из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 288, \\ 3x + 2y + z = 132, \\ y^2 = xz. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим

$$y = 48 - 2x, \quad z = 36 + x.$$

Подставляя эти выражения в третье уравнение системы, приходим к уравнению $x^2 - 76x + 768 = 0$, корни которого $x_1 = 64$ и $x_2 = 12$.

Поскольку x_1 и x_2 оба положительны, то многие поступающие считали, что оба эти корня удовлетворяют условию задачи, т. е. задача имеет два решения. Однако значение $x_1 = 64$ не удовлетворяет условиям задачи, так как соответствующее значение $y_1 = 48 - 2x_1$ отрицательно. Значит, остается лишь $x = 12$.

Таким образом, первый раствор содержит 12% спирта.

7 *Заработная плата некоторой категории служащих повышалась два раза, причем процент повышения во второй раз был в два раза больше, чем в первый раз. Определить, на сколько процентов повышалась зарплата каждый раз, если до первого повышения она была равна 70 р., а после второго повышения составила 92 р. 40 к.*

Пусть в первый раз зарплата повысилась на $x\%$, тогда во второй раз она повысилась на $2x\%$. Поскольку до первого повышения зарплата была 70 *р.*, то она увеличилась после первого повышения на $\frac{70x}{100}$ *р.* и стала равной $\left(70 + \frac{70x}{100}\right)$ *р.*

После второго повышения заработная плата (уже равная $70\left[1 + \frac{x}{100}\right]$ *р.*) увеличилась на $70\left[1 + \frac{x}{100}\right] \cdot \frac{2x}{100}$ *р.* и стала равной

$$\left[70\left(1 + \frac{x}{100}\right) + 70\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \frac{2x}{100}\right] \text{р.}$$

Но после второго повышения она стала равной 92 *р.* 40 *к.*, поэтому получаем уравнение

$$70\left(1 + \frac{x}{100}\right) + 70\left(1 + \frac{x}{100}\right) \frac{2x}{100} = 92{,}4.$$

После простых преобразований это уравнение можно переписать в виде $x^2 + 150x - 1600 = 0$. Корни последнего уравнения: $x_1 = 10$ и $x_2 = -160$. Поскольку проценты не могут быть отрицательными числами, то условию задачи удовлетворяет лишь $x_1 = 10$.

Итак, в первый раз заработная плата повысилась на 10%, а во второй раз — на 20%.

Во многих случаях трудности возникают при решении получающихся систем, особенно в тех случаях, когда для отыскания необходимого неизвестного требуется некоторая догадка или искусственный прием. Такой прием часто облегчает выкладки или вообще указывает единственно возможный путь к решению задачи.

8 *В реку впадает приток. На притоке на некотором расстоянии от его устья расположен пункт А. На реке на таком же расстоянии от устья притока расположен пункт В. Время, которое требуется моторной лодке, чтобы доплыть от пункта А до устья притока и обратно, относится ко времени, которое требуется ей, чтобы доплыть от пункта В до устья притока и обратно, как 32:35. Если бы скорость моторной лодки была на 2 км/ч больше, то это отноше-*

ние было бы равно 15:16, *а если бы скорость моторной лодки была на* 2 *км/ч меньше, то это отношение было бы равно* 7:8. *Найти скорость течения реки.* (*Расстояния измеряются вдоль притока и реки соответственно*).

Пусть скорость течения реки u *км/ч*, скорость лодки в стоячей воде v *км/ч* и скорость течения притока w *км/ч*. Пусть, далее, расстояние от пункта A до устья притока равно s *км*. Тогда на путь от пункта A до устья притока и обратно лодка тратит время

$$t_1 = \frac{s}{v+w} + \frac{s}{v-w} = \frac{2sv}{v^2 - w^2}.$$

Так как расстояние от пункта B до устья притока также равно s *км*, то на путь от B до устья притока и обратно лодка тратит время

$$t_2 = \frac{s}{v+u} + \frac{s}{v-u} = \frac{2sv}{v^2 - u^2}.$$

Из условия, что $t_1 : t_2 = 32:35$, получаем уравнение

$$\frac{v^2 - u^2}{v^2 - w^2} = \frac{32}{35}.$$

Аналогично составляются и два других уравнения:

$$\frac{(v+2)^2 - u^2}{(v+2)^2 - w^2} = \frac{15}{16}, \quad \frac{(v-2)^2 - u^2}{(v-2)^2 - w^2} = \frac{7}{8}.$$

После упрощений эту систему можно записать так

$$\begin{cases} 3v^2 = 35u^2 - 32w^2, \\ (v+2)^2 = 16u^2 - 15w^2, \\ (v-2)^2 = 8u^2 - 7w^2. \end{cases}$$

Из этой системы нам надо найти u. Наиболее просто эта система решается, если из нее исключить сначала u, т. е. как раз ту неизвестную, которую нужно найти. Исключая u, получим систему

$$\begin{cases} 2(v-2)^2 - (v+2)^2 = w^2, \\ 35(v-2)^2 - 24v^2 = 11w^2. \end{cases}$$

Исключая теперь из этой системы w, получаем уравнение

$$13(v-2)^2 + 11(v+2)^2 - 24v^2 = 0,$$

откуда $v = 12$. Теперь легко находится $w = 2$ и, наконец, $u = 4$. Ответ: скорость течения реки равна 4 км/ч.

В следующей задаче получается система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Казалось бы, решить ее просто. Однако многие поступающие не справились с ее решением, запутавшись в выкладках из-за *буквенных коэффициентов*. Следует подчеркнуть, что задачи с буквенными (а не с числовыми) данными бывают на экзаменах достаточно часто.

9 *В озеро впадают две реки. Пароход выходит из порта M на первой реке, плывет вниз по течению до озера, затем через озеро (где нет течения) и по второй реке вверх (против течения) до порта N. Затем пароход возвращается обратно. Скорость парохода при отсутствии течения равна v, скорость течения первой реки v_1, второй реки v_2, время движения парохода от M до N равно t, а длина пути от M до N равна S. Время обратного движения от N до M по тому же пути также равно t. Какое расстояние пароход идет по озеру в одном направлении?*

Обозначим через s_1 и s_2 расстояния от портов M и N до озера, а через s — длину пути, пролегающего по озеру. По условию задачи имеем $s_1 + s + s_2 = S$. Далее, легко видеть, что время, затраченное пароходом на путь от M до N, равно

$$\frac{s_1}{v+v_1} + \frac{s}{v} + \frac{s_2}{v-v_2} = t;$$

аналогично подсчитывается время на обратный путь. Таким образом, мы получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными s_1, s_2, s:

$$\begin{cases} s_1 + s + s_2 = S, \\ \dfrac{s_1}{v+v_1} + \dfrac{s}{v} + \dfrac{s_2}{v-v_2} = t, \\ \dfrac{s_1}{v-v_1} + \dfrac{s}{v} + \dfrac{s_2}{v+v_2} = t; \end{cases} \tag{10}$$

из этой системы надо найти лишь величину s.

Выглядит эта система довольно сложно, хотя ничего принципиально сложного в ней нет: в самом деле, если вспомнить, что v, v_1, v_2, S, t — заданные постоянные, то совершенно ясно, что система (10) есть система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. А такая система всегда может быть решена, например, последовательным исключением неизвестных.

Однако часто бывает так, что простое в теории оказывается весьма сложным на практике. В нашей задаче указанный путь решения очень трудоемок, он сопряжен с громоздкими выкладками, так как коэффициенты системы (10) довольно сложны.

Поэтому мы решим систему (10) несколько более искусственным, но зато более коротким способом. Второе уравнение этой системы можно переписать в виде

$$v^2s_1 - vv_2s_1 + v^2s + (v_1 - v_2)vs - v_1v_2s + v^2s_2 + vv_1s_2 =$$
$$= tv(v^2 + vv_1 - vv_2 - v_1v_2).$$

Заменяя в левой части сумму $v^2s_1 + v^2s + v^2s_2$ через v^2S на основании первого уравнения и группируя члены, получаем уравнение

$$v^2S + v[v_1s_1 - v_2s_1 + (v_1 - v_2)s] - v_1v_2s =$$
$$= tv(v^2 + vv_1 - vv_2 - v_1v_2). \qquad (11)$$

Точно так же можно преобразовать и третье уравнение нашей системы. Но можно «сэкономить» выкладки, если заметить, что третье уравнение очень «похоже» на второе: если заменить в нем s_1 и v_1 соответственно на s_2 и v_2 и наоборот, то получится как раз второе уравнение. Поэтому, заменив в преобразованном втором уравнении (11) s_1 и v_1 на s_2 и v_2 и наоборот, мы получим преобразованное третье уравнение

$$v^2S + v[v_2s_1 - v_1s_2 + (v_2 - v_1)s] - v_2v_1s =$$
$$= tv(v^2 + vv_2 - vv_1 - v_2v_1). \qquad (12)$$

Складывая теперь полученные равенства (11) и (12), будем иметь

$$2v^2S - 2v_1v_2s = tv(2v^2 - 2v_1v_2),$$

откуда находим искомый путь по озеру:

$$s = v\frac{vS - v^2t + v_1v_2t}{v_1v_2} = vt + v^2\frac{S - vt}{v_1v_2}. \qquad (13)$$

Задача полностью решена. Однако некоторые поступающие, получив ответ в задаче с буквенными данными (например, формулу (13)), считают нужным выяснить, при каких соотношениях между данными этот ответ имеет «реальный смысл» (накладываются требования положительности скоростей, путей и т. д., вводятся условия, гарантирующие отличие знаменателей от нуля и т. п.). Конечно, правильно проведенное исследование не ухудшает решения задачи, но это исследование не является логически необходимым элементом решения, поскольку в условии задачи обычно подразумевается, что все описываемые реальные процессы действительно происходили и, следовательно, буквенные данные уже удовлетворяют необходимым соотношениям. Разумеется, такое исследование проводить надо, если это явно требуется в условии задачи.

Довольно часто при решении текстовых задач в получающейся системе бывают *однородные* уравнения второй степени с двумя неизвестными[1]. Наличие однородных уравнений помогает решить систему уравнений. Действительно, из однородного уравнения второй степени с двумя неизвестными немедленно определяется отношение этих неизвестных, что, естественно, упрощает дальнейшие вычисления.

10 *Из пункта A в пункт B выходит автомобиль, и одновременно из B в A с меньшей скоростью выходит мотоцикл. Через некоторое время они встречаются, и в этот момент из B в A выходит второй мотоцикл, который встречается с автомобилем в точке, отстоящей от точки встречи автомобиля с первым мотоциклом на расстоянии, равном $\frac{2}{9}$ пути от A до B.*

---

[1] *Однородным уравнением второй степени с двумя неизвестными* называется уравнение вида $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$.

Если бы скорость автомобиля была на 20 км/ч меньше, то расстояние между точками встречи равнялось бы 72 км, и первая встреча произошла бы через 3 ч после выезда автомобиля из пункта А. Найти длину пути между А и В. (Скорости мотоциклов одинаковы.)

Пусть скорость автомобиля равна u *км/ч*, скорость мотоцикла v *км/ч*, расстояние AB равно s км, и пусть через t часов автомобиль и первый мотоцикл встречаются.

Легко составляется система уравнений:

$$\begin{cases} tu + tv = s, \\ 3(u - 20) + 3v = s, \\ \dfrac{\frac{2}{9}s}{u} = \dfrac{vt - \frac{2}{9}s}{v}, \\ \dfrac{72}{u - 20} = \dfrac{3v - 72}{v}. \end{cases}$$

Исключая из этой системы вспомогательное неизвестное t, получаем после упрощений следующую систему:

$$\begin{cases} s = 3(u + v - 20), \\ 9uv = 2(u + v)^2, \\ v(u - 20) = 24(u + v - 20). \end{cases}$$

Для отыскания s попытаемся из двух последних уравнений найти u и v.

Замечая, что второе уравнение есть однородное уравнение второй степени с двумя неизвестными, мы легко найдем отношение $u{:}v$. Так как нас интересуют u и v, отличные от нуля, то, разделив второе уравнение на v^2, получим квадратное уравнение относительно нового неизвестного $z = \dfrac{u}{v}$:

$$2x^2 - 5z + 2 = 0.$$

Корни этого уравнения $z_1 = 2$ и $z_2 = \dfrac{1}{2}$, т. е. либо $u = 2v$, либо $u = \dfrac{v}{2}$. Но по условию задачи $u > v$, так что нас устраивает лишь $u = 2v$.

Подставляя это значение u в третье уравнение, находим, что либо $v = 40$, либо $v = 6$. Но если $v = 6$, то $u = 12$, а по условию задачи $u > 20$. Поэтому $v = 40$. Но тогда $u = 80$ и $s = 300$.

Итак, расстояние AB найдено — оно равно 300 *км*.

Для получения ответа в текстовых задачах очень часто надо уметь использовать «скрытое» условие задачи. Для получения ответа в таких задачах надо внимательно проанализировать текст задачи и найти это «скрытое» условие.

(11) *Человек в лодке начал грести против течения быстрой реки. Однако через 4 мин лодка оказалась на 80 м ниже по течению. Развернув ее, он перестал грести, и, пока он отдыхал, лодку снесло на 40 м. Затем он принялся грести по течению, причем лодка двигалась относительно воды с той же скоростью, как и в первые 4 мин, и прошла относительно берега еще 40 м. В целом после разворота лодки прошло 100 с. Какова скорость течения?*

Пусть u *м/мин* — скорость течения реки; v *м/мин* — скорость движения лодки в стоячей воде, когда человек гребет. Раз лодку сносит, когда человек гребет против течения, то $u > v$. Значит, на самом деле, когда человек гребет против течения, лодка движется вниз по течению со скоростью $(u - v)$ *м/мин* и за 4 *мин* проходит путь, равный $4(u - v)$ *м*. Но за 4 *мин* лодка продвинулась вниз по течению на 80 *м*, поэтому $4(u - v) = 80$.

После разворота, когда человек отдыхал, лодка прошла путь 40 *м* за $\frac{40}{u}$ *мин*. Когда человек греб по течению, то он прошел путь 40 *м* за время $\frac{40}{u+v}$ *мин*, а всего на путь после разворота он затратил 100 *с*. Следовательно,

$$\frac{40}{u} + \frac{40}{u+v} = \frac{100}{60}.$$

Из полученной системы двух уравнений с двумя неизвестными надо найти u. Из первого уравнения находим, что $v = u - 20$. Подставляя это значение v во второе уравнение, приходим к квадратному уравнению $u^2 - 46u + 240 = 0$, которое имеет корни $u_1 = 40$ и $u_2 = 6$.

Как будто можно уже написать ответ: скорость течения реки равна либо 40 *м/мин*, либо 6 *м/мин*. Однако, прежде чем писать ответ, надо проверить, могут ли оба значения u удовлетворить всем условиям задачи, и тогда станет очевидно, что им не удовлетворяет значение $u_2 = 6$, ибо из первого уравнения системы следует, что $u > 20$. Вот только теперь мы обнаружили «скрытое» условие задачи и только теперь можем утверждать, что всем условиям задачи удовлетворяет лишь $u_1 = 40$.

Таким образом, задача имеет однозначный ответ, скорость течения реки равна 40 *м/мин*.

Совершенно непреодолимые трудности у поступающих вызывают задачи, где после правильной записи условий в виде системы уравнений получается, что число неизвестных больше числа уравнений.

12 *Из пункта A в пункт B выехал автобус, а одновременно из пункта B навстречу автобусу выехало такси. Через некоторое время автобус встретился с такси в пункте C, а еще через такое же время автобус встретился в пункте D с велосипедистом, выехавшим из пункта B в момент встречи автобуса с такси. Известно, что после встречи с автобусом велосипедист затратил на поездку до пункта C времени в 4 раза больше, чем автобус до конца своего пути. Во сколько раз скорость такси превосходит скорость велосипедиста?*

Пусть скорость автобуса v_1 *км/ч*, скорость такси v_2 *км/ч*, скорость велосипедиста v_3 *км/ч*. Пусть расстояние AC равно s_1 *км*, расстояние CB равно s_2 *км*. Время, затраченное автобусом на путь AC, равно $\frac{s_1}{v_1}$ *ч*. Время, затраченное такси на путь BC, равно $\frac{s_2}{v_2}$ *ч*. Условия одновременного выезда автобуса из пункта A и такси из пункта B и их встречи в пункте C дают уравнение

$$\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2}.$$

На путь $CD = AC = s_1$ *км* автобус затратил $\frac{s_1}{v_1}$ *ч*, на путь $BD = BC - CD = (s_2 - s_1)$ *км* велосипедист затратил $(s_2 - s_1)v_3$ *ч*. Условия одновременного выезда автобуса из пункта C и велосипедиста из пункта B и их встречи в пункте D дают уравнение

$$\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2 - s_1}{v_3}.$$

Автобус на путь DB затратил $\frac{s_2 - s_1}{v_1}$ *ч*, велосипедист на путь DC затратил $\frac{s_1}{v_3}$ *ч*. По условию задачи велосипедист затратил на этот путь времени в 4 раза больше, чем автобус на путь DB, поэтому получаем уравнение

$$4\frac{s_2 - s_1}{v_1} = \frac{s_1}{v_3}.$$

Составлена система трех уравнений с пятью неизвестными. Определить все неизвестные из этой системы невозможно; система в этом смысле остается неопределенной. Но означает ли это, что мы не можем решить нашу задачу? Разумеется, нет. Дело в том, что нам надо найти лишь отношение двух неизвестных величин $v_2 : v_3$, а его найти из этой системы можно однозначно.

Исключим сначала из этой системы v_1. Из первого уравнения находим $v_1 = \frac{s_1 v_2}{s_2}$. Подставляя это значение v_1 во второе и третье уравнения, получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{s_2}{v_2} = \dfrac{s_2 - s_1}{v_3}, \\[2ex] \dfrac{4s_2(s_2 - s_1)}{v_2} = \dfrac{s_1^2}{v_3}. \end{cases}$$

Из первого уравнения последней системы находим

$$s_1 = \frac{s_2}{v_2}(v_2 - v_3);$$

подставляя это значение s_1 во второе уравнение, получим

$$\frac{4s_2\left[s_2 - \frac{s_2}{v_2}(v_2 - v_3)\right]}{v_2} = \frac{s_2^2(v_2 - v_3)^2}{v_2^2 v_3}.$$

После преобразований (учитывая, что $s_2 \neq 0$ и $v_2 \neq 0$), это уравнение можно записать в виде $4v_3^2 = (v_2 - v_3)^2$. Поскольку $v_2 > v_3$, то, извлекая квадратный корень из обеих частей этого уравнения, получаем, что оно равносильно уравнению $2v_3 = v_2 - v_3$, откуда $v_2 = 3v_3$.

Значит, скорость такси в 3 раза больше скорости велосипедиста.

13 *Школьник затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка — в 2 раза дешевле, а книга — в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 8 р. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка — в 4 раза дешевле, а книга — в 3 раза дешевле, то школьник уплатил бы 12 р. Сколько стоит покупка и за что было уплачено больше: за портфель или за авторучку?*

Пусть портфель стоит x р., авторучка y р., а книга z р. Из условий задачи сразу получаем два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{x}{2,5} = 8, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 12. \end{cases}$$

Из полученной системы двух уравнений с тремя неизвестными, конечно, нельзя определить все неизвестные, но сумму $x + y + z$, которая и ищется в задаче, найти можно. Для этого перепишем систему так:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 80, \\ 6x + 3y + 4z = 144. \end{cases} \qquad (14)$$

Сложив эти два уравнения, найдем $x + y + z = 28$. Таким образом, получен ответ на первый вопрос задачи: вся покупка стоит 28 *р.*

Теперь попробуем узнать, что дороже — портфель или авторучка; иными словами, надо выяснить, какое из неравенств $x > y$ или $y > x$ имеет место. Если из второго уравнения системы (14) вычесть первое, то получим $2x - y = 32$. Перепишем это уравнение так: $x + (x - y) = 32$. Так как вся покупка стоит 28 *р.*, то заведомо $x < 28$, и из последнего уравнения вытекает, что $x - y > 0$, т. е. портфель стоит дороже авторучки.

Почти во всех разобранных выше задачах неявно участвовали неравенства; например, в задаче 10 было использовано два неравенства: $u > v$ и $u > 20$. Участие неравенств в таких задачах практически не вызывает затруднений у поступающих. Гораздо хуже обстоит дело с решением тех задач, в которых часть условий задачи приходится явно записать в виде неравенств. Многие из поступающих, правильно записав систему уравнений и неравенств, даже не приступают к ее решению. Объясняется это, по-видимому, тем, что они психологически не готовы к решению таких систем.

14 *Из пункта A в пункт C в 9 ч утра отправляется скорый поезд. В то же время из пункта B, расположенного между пунктами A и C, выходят два пассажирских поезда, первый из которых следует в пункт A, а второй — в пункт C, причем скорости пассажирских поездов равны. Скорый поезд встречает первый пассажирский поезд не позже, чем через 3 ч после его отправления, потом приходит в пункт B не ранее 14 ч того же дня и, наконец, прибывает в пункт C одновременно со вторым пассажирским поездом через 12 ч после встречи с первым пассажирским поездом. Найти время прибытия в пункт A первого пассажирского поезда.*

Пусть скорость скорого поезда равна v_1 *км/ч*, скорость пассажирского v_2 *км/ч*, расстояние AB равно s *км*. Из условия, что скорый поезд встречает первый пассажирский поезд *не позже*, чем через 3 часа после его отправления, получаем

$$\frac{s}{v_1 + v_2} \leqslant 3.$$

Из условия, что скорый поезд пришел в пункт B *не раньше*, чем через 5 *ч* после его отправления, имеем

$$\frac{s}{v_1} \geqslant 5.$$

Так как до первой встречи прошло $\frac{s}{v_1 + v_2}$ *ч*, то за время $\left(12 + \frac{s}{v_1 + v_2}\right)$ *ч* скорый поезд догонит второй пассажирский поезд; поэтому

$$\left(12 + \frac{s}{v_1 + v_2}\right)(v_1 - v_2) = s.$$

Нам надо найти $x = \frac{s}{v_2}$. Отсюда $s = xv_2$; подставляя это выражение для s в предшествующие равенства и неравенства и обозначая $\frac{v_1}{v_2}$ через α, приходим к системе

$$\begin{cases} x \leqslant 3(\alpha + 1), \\ x \geqslant 5\alpha, \\ x = 6(\alpha^2 - 1). \end{cases}$$

Именно с решением этой системы и не справились многие из поступающих.

На самом же деле оно не так сложно: надо из этой системы исключить либо x, либо α и перейти к системе двух неравенств с одним неизвестным. Поскольку на первый взгляд исключить x легче, то мы и пойдем по этому пути. Подставляя $x = 6(\alpha^2 - 1)$ в два первых неравенства, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 2\alpha^2 - \alpha - 3 \leqslant 0, \\ 6\alpha^2 - 5\alpha - 6 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решения первого неравенства: $-1 \leqslant \alpha \leqslant \frac{3}{2}$; решения второго: $\alpha \geqslant \frac{3}{2}$ и $\alpha \leqslant -\frac{2}{3}$. Значит, решением системы будет $\alpha = \frac{3}{2}$, а также все α из промежутка $-1 \leqslant \alpha \leqslant -\frac{2}{3}$. Поскольку нас интересуют только положительные α, то условию задачи удовлетворяет единственное $\alpha = \frac{3}{2}$. Тогда $x = \frac{15}{2}$ и, следовательно, первый пассажирский поезд приходит в пункт A в 16 ч 30 мин.

(15) *На дороге, ведущей из пункта A в пункт B, находится пункт C. Из пункта A в пункт B по этой дороге с постоянными скоростями вышли два пешехода. Второй пешеход вышел из пункта A на 12 мин позже первого, но прибыл в пункт B на 18 мин раньше него. При этом через пункт C пешеходы прошли с интервалом не более 6 мин.*

Если бы второй пешеход вышел из пункта A через 15 мин позже первого, увеличив свою скорость на 20%, а скорость первого пешехода не изменилась, то второй пешеход прибыл бы в пункт B на 35 мин раньше первого, а через пункт C пешеходы прошли бы с интервалом не менее 5 мин.

Если бы первый пешеход уменьшил свою скорость на 1 км/ч, а скорость второго пешехода осталась первоначальной, то первый пешеход потратил бы на путь от A до C в 3 раза меньше времени, чем второй пешеход на весь путь от A до B. Найти длину пути от A до C.

Пусть скорость первого пешехода v_1 *км/ч*, скорость второго пешехода v_2 *км/ч*, расстояние AB равно s *км*, расстояние AC равно x *км*. Расстояние AB первый пешеход прошел за $\frac{s}{v_1}$ *мин*, а второй пешеход — за $\frac{s}{v_2}$ *мин*, при этом второй пешеход затратил на путь AB на 30 *мин* меньше. Поэтому

$$\frac{s}{v_1} = \frac{s}{v_2} + 30. \qquad (15)$$

Пункт C первый пешеход прошел через $\frac{x}{v_1}$ *мин* после своего выхода из пункта A, а второй пешеход прошел пункт C через $\frac{x}{v_2}$ *мин* после своего выхода из пункта A или через $\left(\frac{x}{v_2} + 12\right)$ *мин* после выхода из пункта A первого пешехода. Значит, через пункт C они проходят с интервалом времени

$$\left|\frac{x}{v_1} - \left(\frac{x}{v_2} + 12\right)\right|.$$

Отметим, что мы вынуждены поставить в этом выражении знак абсолютной величины, так как неизвестно, кто раньше прошел пункт C — первый пешеход или второй. Так как через пункт C пешеходы прошли с интервалом времени не более 6 *мин*, то справедливо соотношение

$$\left|\frac{x}{v_1} - \left(\frac{x}{v_2} + 12\right)\right| \leqslant 6. \qquad (16)$$

Аналогично из условий движения пешеходов при предположении, что второй из них увеличил скорость на 20%, получаем соотношения

$$\frac{s}{v_1} = \frac{s}{1,2v_2} + 50, \qquad (17)$$

$$\left|\frac{x}{v_1} - \left(\frac{x}{1,2v_2} + 15\right)\right| \geqslant 5. \qquad (18)$$

Если первый пешеход уменьшит свою скорость на 1 *км/ч*, то на путь AC он затратит $\dfrac{x}{v_1 - \frac{1}{60}}$ *мин*. Второй пешеход на путь AB затратит $\frac{s}{v_2}$ *мин*; при этом он затратит в три раза больше времени, чем первый, на путь AC при уменьшенной на 1 *км/ч* скорости. Другими словами, справедливо соотношение

$$3\frac{x}{v_1 - \frac{1}{60}} = \frac{s}{v_2}. \qquad (19)$$

Мы получили систему трех уравнений (15), (17), (19) и двух неравенств (16) и (18) с четырьмя неизвестными x, s, v_1 и v_2, из которых надо найти лишь x.

Из уравнений системы выразим s, v_1 и v_2 через x и подставим эти значения в неравенства системы. Из уравнений (15) и (17) находим: $v_1 = \frac{s}{150}$, $v_2 = \frac{s}{120}$. Подставляя эти значения v_1 и v_2 в уравнение (19), получаем

$$s = \frac{15x + 10}{4}.$$

Но тогда

$$v_1 = \frac{3x + 2}{120}, \quad v_2 = \frac{3x + 2}{96}.$$

Подставляя эти значения v_1 и v_2 в неравенства (16) и (18), имеем

$$\left|\frac{120x}{3x + 2} - \frac{96x}{3x + 2} - 12\right| \leqslant 6,$$

$$\left|\frac{120x}{3x + 2} - \frac{96x}{\frac{6}{5}(3x + 2)} - 15\right| \geqslant 5$$

или, после преобразований,

$$\left|-\frac{12x + 24}{3x + 2}\right| \leqslant 6, \quad \left|-\frac{5x + 30}{3x + 2}\right| \geqslant 5.$$

По условию задачи $x > 0$, так что эти неравенства можно переписать в виде

$$\frac{12x + 24}{3x + 2} \leqslant 6, \quad \frac{5x + 30}{3x + 2} \geqslant 5.$$

Из последних неравенств вытекает, что $x \leqslant 2$ и $x \geqslant 2$. Значит, $x = 2$, так что длина пути от A до C равна 2 *км*.

16 *Из города А в 9 часов утра выехал велосипедист и двигался с постоянной скоростью 12 км/ч. Спустя два часа вслед за ним из А выехал мотоциклист, который при начальной скорости 22 км/ч двигался равнозамедленно, так что за час его скорость уменьшалась на 2 км/ч. Автомобилист, едущий им навстречу в город А с постоянной скоростью 50 км/ч, сначала встретил мотоциклиста, а потом велосипедиста. Успеет ли автомобилист к 19 часам этого дня прибыть в город А?*

Эта задача также может быть решена составлением системы уравнений и неравенств. Однако составление системы потребовало бы длинных рассуждений. Поэтому мы будем решать задачу не формальным составлением системы уравнений и неравенств, а простым рассуждением.

Из условия задачи вытекает, что сначала мотоциклист догонит велосипедиста, а затем велосипедист догонит мотоциклиста. Пусть на путь до встречи (неважно, первой или второй) велосипедист затратит t часов, тогда мотоциклист затратит на тот же путь $(t - 2)$ часов. Так как до встречи они проедут одинаковый путь, то, приравнивая их пути до встречи, получаем

$$12t = 22(t-2) - 2\frac{(t-2)^2}{2}.$$

Решив это уравнение, получаем, что до первой встречи велосипедист ехал 6 часов, а значит, проехал 72 *км*, а до второй встречи ехал 8 часов, а значит, проехал 96 *км*.

По условию задачи автомобилист встретил велосипедиста раньше, чем тот проехал 96 *км*. Значит, автомобилисту надо проехать до пункта *А* меньше, чем 96 *км*. На этот путь он затратит меньше, чем $\frac{96}{50}$ часа. Так как на путь до встречи с автомобилистом велосипедист затратит менее 8 часов, то встреча произойдет ранее 17 часов. Значит, после встречи с велосипедистом остается более двух часов для того, чтобы автомобилист успел к 19 часам прибыть в пункт *А*. Но на этот путь ему надо меньше двух часов. Значит, автомобилист успеет приехать в пункт *А* до 19 часов.

17 *Сумма, равная 53 к., составлена из трехкопеечных и пятикопеечных монет, общее число которых меньше 15. Если в этом наборе монет трехкопеечные монеты заменить пятикопеечными, а пятикопеечные — трехкопеечными, то полученная в результате сумма уменьшится по сравнению с первоначальной, но не более, чем в 1,5 раза. Сколько трехкопеечных монет было в наборе?*

В этой задаче также можно составить систему уравнений и неравенств, однако ее решение не дает ответа, ибо не все условия задачи можно записать в виде уравнений и неравенств. Поэтому в процессе решения задачи нужны некоторые рассуждения.

Пусть в наборе было n трехкопеечных монет и m пятикопеечных, тогда справедливо соотношение

$$3n + 5m = 53. \tag{20}$$

Очевидно, что равенству (20) удовлетворяют лишь те значения m, для каждого из которых число $53 - 5m$ делится на три (именно это условие и нельзя записать в виде уравнения или неравенства). Так как m и n — целые неотрицательные числа, то таких m лишь четыре: $m_1 = 1$, $m_2 = 4$, $m_3 = 7$, $m_4 = 10$. Из равенства (20) находим соответствующие n:

$$n_1 = 16, \quad n_2 = 11, \quad n_3 = 6, \quad n_4 = 1.$$

Отметим еще, что для n и m, удовлетворяющих условиям задачи, должны быть справедливы неравенства

$$n + m < 15 \quad \text{и} \quad 1{,}5(3m + 5n) \geqslant 53.$$

Легко видеть, что этим неравенствам удовлетворяет лишь одна пара чисел: $m = 7$ и $n = 6$. Итак, мы получили: в наборе было 6 трехкопеечных монет.

18 *Колхоз арендовал два экскаватора. Аренда первого экскаватора стоит 60 р. в день, производительность его в мягком грунте 250 м^3 в день, в твердом грунте — 150 м^3 в день. Аренда второго экскаватора стоит 50 р. в день, производительность его в мягком грунте 180 м^3 в день, а в твердом — 100 м^3 в день. Первый* *работал несколько полных дней и вырыл* $720\ м^3$. *Второй за несколько полных дней вырыл* $330\ м^3$. *Сколько дней работал каждый экскаватор, если колхоз заплатил за аренду не более* 300 *р.?*

В этой задаче попытка записать условие в виде системы уравнений и неравенств сталкивается со значительными трудностями, поскольку неизвестно, сколько времени в течение каждого дня экскаваторы работали в твердом и мягком грунтах. Между тем составление такой системы и не нужно — задачу можно решить несложными рассуждениями, даже без введения неизвестных.

В самом деле, первый экскаватор работал не менее трех дней — за два дня, даже в мягком грунте, он вырыл бы всего $500\ м^3$. Точно так же заключаем, что второй экскаватор работал не менее двух дней. Следовательно, за аренду первого экскаватора колхоз заплатил по крайней мере 180 *р.*, а за аренду второго — по крайней мере 100 *р.*

Отсюда видно, что ни одного дня больше ни один из экскаваторов проработать не мог — иначе колхозу пришлось бы заплатить за их аренду больше 300 *р.* Таким образом, первый экскаватор работал три дня, а второй — два дня.

На вступительных экзаменах в вузы нередко предлагаются задачи, в которых требуется найти оптимальное решение — скажем, на данную сумму денег купить наибольшее количество деталей или из нескольких возможных вариантов перевозок груза выбрать тот, который будет стоить дешевле остальных, и т. п.

19 *В продажу поступили туристические путевки трех типов. Одна путевка первого типа стоит* 4 *р., одна путевка второго типа —* 6 *р., одна путевка третьего типа —* 9 *р. По путевке первого типа можно отдыхать* 8 *дней, по путевке второго типа —* 14 *дней, по путевке третьего типа —* 20 *дней. Сколько путевок каждого типа надо купить, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим, а сумма, израсходованная на приобретение всех путевок, составляла* 100 *р.?*

Пусть x, y, z — количества путевок соответственно первого, второго и третьего типа, которые нужно купить для того, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим. (Такое решение задачи обычно называют оптимальным.) Тогда

$$4x + 6y + 9z = 100. \tag{21}$$

Это — единственное уравнение, которое мы можем составить по условию задачи. Однако нам известно, кроме того, что x, y, z — неотрицательные целые числа и что число дней отдыха при покупке такого количества путевок больше, чем при покупке любого другого количества путевок. Этих условий, оказывается, вполне достаточно для однозначного определения всех неизвестных.

Первая идея, которая может прийти в голову, — решить имеющееся уравнение в «лоб», прямым перебором всех возможных значений неизвестных, — является бесперспективной из-за большого количества случаев. Однако этот перебор можно значительно сократить с помощью «экономических» соображений.

В самом деле, на 12 *р.* можно купить 3 путевки первого типа или 2 путевки второго типа; в первом случае мы обеспечиваем 24 дня отдыха, а во втором — 28. Поэтому совершенно ясно, что в оптимальном решении число путевок первого вида не должно превышать 2. Аналогично, сравнивая путевки второго и третьего типа, получаем, что число путевок третьего типа в оптимальном решении должно быть не больше 1. Поэтому $x \leqslant 2$, $z \leqslant 1$.

Теперь не представляет труда перебор. При $x = 0$ мы получаем для определения y и z уравнение

$$6y + 9z = 100,$$

которое, очевидно, не имеет решений, поскольку его левая часть делится на три, а правая не делится. Далее, при $x = 1$ получаем уравнение

$$2y + 3z = 32,$$

которое (с учетом неравенства $z \leqslant 1$) имеет единственное решение $y = 16$, $z = 0$. Наконец, при $x = 2$, так же как и при $x = 0$, уравнение не имеет решений.

Таким образом, для обеспечения наибольшего количества дней отдыха надо купить одну путевку за 4 *р.* и 16 путевок за 6 *р.*

В этом решении можно было бы совершенно избежать всякого перебора, если более обстоятельно использовать соображения делимости. В самом деле, из уравнения (21) следует, что число x дает при делении на 3 остаток 1, а число z — четное. Поэтому из неравенств $x \leqslant 2$ и $z \leqslant 1$ сразу следует, что $x = 1$, $z = 0$ и из уравнения получаем $y = 16$.

(20) *Из лесного хозяйства в город нужно вывезти 1590 деревьев. Для перевозки деревьев имеются машины грузоподъемностью 1,5 т, 3 т и 5 т. На полуторатонке можно перевезти за один раз 26 деревьев, на трехтонке — 45 деревьев, на пятитонке — 75 деревьев. Стоимость одного пробега для полуторатонки равна 9 р., для трехтонки 15 р., для пятитонки 24 р. Как лесное хозяйство должно распределить перевозки, чтобы общая их стоимость была наименьшей? Недогрузка машин не допускается.*

Пусть x, y, z — число соответственно полуторатонок, трехтонок и пятитонок при оптимальном распределении. Поскольку недогрузка машин не допускается, то число перевезенных при этом распределении деревьев равно $26x + 45y + 75z$, и, таким образом, мы получаем уравнение

$$26x + 45y + 75z = 1590.$$

Мы пришли точно к такому же положению, как и в предыдущей задаче. Однако попытка сократить перебор, удавшаяся ранее, здесь не дает существенных упрощений. В самом деле, из имеющегося уравнения можно заключить, что x делится на 15, и практически больше ничего. Можно также сообразить, что пробег 45 полуторатонок обойдется в 405 *р.*, а пробег 26 трехтонок, перевозящих то же количество деревьев, обойдется всего в 390 *р.*, так что число используемых полуторатонок в оптимальном решении не больше 44. Следовательно, для x мы получаем три возможности:

$$x = 0, \quad x = 15, \quad x = 30.$$

При каждом из этих значений придется решать уравнение для y и z, которые также будут иметь много решений. Таким образом, указанный путь решения представляется весьма и весьма длинным, хотя — при необходимости, при отсутствии других идей — вполне приемлемым.

Отметим здесь одну привлекательную идею, которая на деле, однако, не претворяется в жизнь. Из условия задачи легко подсчитать, что за 45 *р.* на 5 полуторатонках можно перевезти 130 деревьев, а на 3 трехтонках 135 деревьев. Поэтому, казалось бы, число полуторатонок не должно быть больше 4 — иначе те же деревья можно перевезти дешевле. Отсюда и из приведенных выше рассуждений следует, что $x = 0$ и дальнейший перебор значительно сокращается.

Но на самом деле из этого «экономического» соображения следует лишь, что таким перераспределением на данную сумму денег мы можем перевезти большее количество деревьев, а нам нужно при данном количестве деревьев обеспечить минимальную стоимость. Тем не менее перебора в этой задаче избежать можно, если применить ... обычные, «житейские» соображения.

В самом деле, составляя наиболее экономный план, всякий разумный человек сначала бы оценил, какой из имеющихся типов машин самый выгодный. Ясно, что выгодность определяется здесь стоимостью перевозки одного дерева, которая составляет для полуторатонки, трехтонки и пятитонки соответственно $\frac{9}{26}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{8}{25}$ рубля. Поскольку

$$\frac{9}{26} > \frac{1}{3} > \frac{8}{25},$$

то ясно, что выгоднее всего использовать пятитонки, затем при необходимости трехтонки и в последнюю очередь полуторатонки.

Легко видеть, что наибольшее число деревьев, которое можно перевезти на пятитонках, равно 1575. Однако учитывая, что недогрузка машин не допускается, получаем, что на пятитонках можно перевезти лишь 1500 деревьев, тогда 90 деревьев можно перевезти на трехтонках, и поэтому естественно предположить, что так и получается оптимальное распределение: 20 пятитонок и 2 трехтонки.

Нетрудно доказать, что этот план действительно является оптимальным: если мы уменьшим количество используемых пятитонок, то «недоперевезенные» ими деревья надо будет перевозить на полуторатонках или трехтонках, но поскольку стоимость каждого дерева при перевозке на полуторатонке или трехтонке выше, чем на пятитонке, то общая стоимость перевозки возрастает.

Итак, оптимальное распределение — 20 пятитонок и 2 трехтонки — нами найдено, а все неизвестные и единственное составленное уравнение остались неиспользованными! Таким образом, мы вначале пошли по обычному пути, но затем отыскали способ решения, для которого все начальные рассуждения совершенно не нужны.

Задачи

1. Города A и B расположены на берегу реки, причем город B расположен ниже по течению. В 9 ч утра из города A в город B отправляется плот, плывущий относительно берегов со скоростью течения реки. В этот же момент из города B в город A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 ч. Доплыв до города A, лодка мгновенно повернула обратно и приплыла в город B одновременно с плотом. Успели ли лодка и плот прибыть в город к 9 ч вечера (того же дня)?

2. Товарный поезд, шедший из пункта A в B, прибыл на станцию C одновременно с пассажирским, шедшим из B в A со скоростью в m раз большей, чем товарный. Оба поезда, простояв на станции C по t часов, продолжили свой путь, причем каждый из них увеличил скорость на 25% по сравнению со своей первоначальной скоростью (скоростью до прибытия в C). При этом товарный прибыл в B на t_1 часов позже, а пассажирский прибыл в A на t_2 часов позже, чем если бы они двигались без остановки со своими первоначальными скоростями. На сколько раньше товарный поезд вышел из A, чем пассажирский из B?

3. Три пункта A, B и C соединены прямолинейными дорогами. К отрезку дороги AB примыкает квадратное поле со стороной, равной $\frac{1}{2}AB$; к отрезку дороги BC примыкает квадратное поле со стороной, равной BC, а к отрезку дороги CA примыкает

прямоугольный участок леса с длиной, равной AC, и шириной 4 *км*. Площадь леса на 20 $км^2$ больше суммы площадей квадратных полей. Найти площадь леса.

4. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4, 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем троек было больше, чем пятерок, и меньше, чем четверок. Кроме того, число четверок делилось на 10, а число пятерок было четным. Определить, сколько каких оценок получила группа.

5. Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 100 *км* от пункта A, в один и тот же момент времени выехал велосипедист и вышел пешеход. Одновременно с ними им навстречу из пункта B выехал автомобилист. Через час после начала движения автомобилист встретил велосипедиста и затем, проехав еще $14\frac{2}{17}$ *км*, встретил пешехода, посадил его в машину, после чего они отправились вдогонку за велосипедистом и настигли его. Вычислить скорости, с которыми двигались велосипедист и автомобилист, если известно, что скорость пешехода равна 5 *км/ч*. Время, необходимое на посадку пешехода и на разворот автомобиля, считается равным нулю.

6. Прямоугольный участок площадью 900 $м^2$ необходимо огородить забором, две смежные стороны которого каменные, а две другие — деревянные. Один метр деревянного забора стоит 10 *р.*, а каменного — 15 *р.* На строительство выделено 2000 *р.* Хватит ли этой суммы?

7. Три конькобежца, скорости которых в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию, одновременно стартуют в одном направлении по кругу. Через некоторое время второй конькобежец обгоняет первого, пробежав на 400 *м* больше него. Третий конькобежец пробегает то расстояние, которое пробежал первый к моменту его обгона вторым, за время, на $\frac{2}{3}$ *мин* большее, чем первым. Найти скорость первого конькобежца.

8. Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики. Имеются ящики трех типов. Один ящик первого типа вмещает 70 деталей, один ящик второго типа вмещает 40 деталей, один ящик третьего типа вмещает 15 деталей. Стоимость пересылки одного ящика первого типа 20 *р.*, стоимость пересылки одного ящика второго типа 10 *р.*, стоимость пересылки одного ящика третьего типа 7 *р.* Какие ящики должен использовать завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается.

9. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если школьнику подарить такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

10. Из пункта A в пункт B выходит в 8 *ч* утра скорый поезд. В этот же момент из B в A выходят пассажирский и курьерский поезда, причем скорость пассажирского поезда в два раза меньше скорости курьерского. Скорый поезд встречает курьерский поезд не ранее 10 *ч* 30 *мин* утра, а прибывает в пункт B в 13 *ч* 50 *мин* того же дня. Найти время прибытия пассажирского поезда в пункт A, если известно, что между моментами встреч скорого поезда с курьерским и скорого поезда с пассажирским проходит не менее часа.

11. В букинистическом магазине антикварное собрание сочинений стоимостью 350 *р.* уценивали дважды на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что после двойного снижения цен собрание сочинений стоит 283 *р.* 50 *к.*

12. Имеются два слитка сплавов меди и олова. Первый весит 3 *кг* и содержит 40% меди, второй весит 7 *кг* и содержит 30% меди. Какого веса нужно взять куски этих слитков, чтобы после их совместной переплавки получить 8 *кг* сплава, содержащего $r\%$ меди? Найти все значения r, при которых задача имеет решение.

13. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 120 *км*, одновременно навстречу друг другу выезжают два велосипедиста и встречаются позже, чем через пять часов после выезда. На следующий день они выезжают одновременно в одну и ту же сторону из пунктов C и D, расстояние между которыми равно 36 *км*, причем велосипедист, едущий впереди, движется со скоростью, на 6 *км/ч* большей, чем накануне, а велосипедист, едущий сзади, движется с той же скоростью, что и накануне. Хватит ли второму велосипедисту двух часов, чтобы догнать первого?

14. Деревня расположена на берегу реки, а школа — на шоссе, пересекающем реку под прямым углом. Зимой школьник ходит из деревни в школу напрямик на лыжах и тратит на дорогу 40 *мин*. Весной, в распутицу, он идет берегом реки до шоссе, а дальше — по шоссе до школы и тратит на дорогу 1 *ч* 10 *мин*. Наконец, осенью он проходит вдоль реки половину расстояния, отделяющего деревню от шоссе, а дальше идет напрямик. При этом он доходит до школы быстрее, чем за 57 *мин*.

Установить, что дальше: деревня от шоссе или школа от реки, если известно, что пешком школьник ходит всегда с одной и той же скоростью, а на лыжах — со скоростью, на 25% большей (реку и шоссе считать прямыми линиями).

15. Периметр пола прямоугольной комнаты равен 18 *м*. Объем равен 60 *м*^{3}. Площадь стен в 5 раз больше площади потолка. Найти площадь большей стены.

16. В железнодорожной будке, на расстоянии 1 *м* от окна, ширина которого 1 *м*, сидит обходчик. На расстоянии 299 *м* от окна и параллельно плоскости окна проходит горизонтальный железнодорожный путь. Обходчик видит целиком поезд длиной 100 *м*, идущий по этому пути с постоянной скоростью, в течение 10 *с*. Определить скорость поезда. (Шириной поезда и расстоянием между глазами обходчика пренебречь.)

17. Две трубы, работая вместе, подают в бак 100 *л* жидкости в минуту. Имеются два раствора кислоты — сильный и слабый. Если смешать по 10 *л* каждого раствора и 10 *л* воды, то получится 40 *л* 20%-ного раствора. Известно также, что если в течение часа подавать в первоначально пустой бак по первой трубе слабый раствор, а по второй — сильный, то получится 30%-ный раствор кислоты. Какой концентрации (в процентах) получится кислота, если в течение часа подавать в первоначально пустой бак по первой трубе сильный раствор, а по второй — слабый? (Считается, что при смешивании воды и кислоты объем не меняется.)

18. Два одинаковых парохода отправляются от двух пристаней: первый пароход от пристани A вниз по течению, второй — от пристани B вверх по течению. Каждый пароход, дойдя до конечного пункта, стоит там один час и возвращается обратно. Если пароходы отправляются из начальных пунктов одновременно, то на обратном пути они встречаются в точке K, которая в два раза ближе к A, чем к B. Если первый пароход отходит от A на полтора часа позже, чем второй отходит от B, то на обратном пути они встречаются в 8 *км* ниже K. Если первый пароход отходит от A на 15 *мин* раньше, чем второй отходит от B, то на обратном пути пароходы встречаются в 8 *км* от A. Найти расстояние от A до K и время, за которое первый пароход доходит от A до B.

19. Имеются два картофельных поля. Сначала первое поле было убрано бригадой A, а затем второе поле было убрано вместе бригадами A и B. После того как была убрана $\frac{1}{3}$ всей площади, оказалось, что время, необходимое на окончание уборки,

в $\frac{21}{13}$ раз меньше времени, за которое могла бы убрать оба поля бригада A. Известно, кроме того, что если бы второе поле убирала только бригада B, то ей для этого потребовалось бы время, вдвое большее времени, за которое могла бы убрать оба поля бригада A. Во сколько раз производительность бригады A больше производительности бригады B?

20. От пристани A вниз по реке, скорость течения которой равна v *км/ч*, отходит плот. Через 1 *ч* вслед за ним выходит катер, скорость которого в стоячей воде равна 10 *км/ч*. Догнав плот, катер возвращается обратно. Определить все те значения v, при которых к моменту возвращения катера в A плот проходит более 15 *км*.

21. Два бегуна стартуют из одной точки кольцевой дорожки стадиона, а третий бегун стартует одновременно с ними в том же направлении с диаметрально противоположной точки. Пробежав 3 круга, третий бегун впервые после старта догнал второго. Через 2,5 *мин* после этого первый бегун впервые догнал третьего. Сколько кругов в минуту пробегает второй бегун, если первый обгоняет его один раз через каждые 6 *мин*? (Скорости бегунов считаются постоянными.)

22. На автобазе имелись трехтонные и пятитонные автомобили общей грузоподъемностью 68 *т*. Все трехтонные машины были отправлены с грузом по одному маршруту, а все пятитонные повезли груз по другому маршруту. Оба маршрута проходили частью по шоссе, частью по проселочной дороге. При этом потери груза для всех малых грузовиков составили 115 *кг*, а для всех больших 155 *кг*. Если бы весь первый маршрут проходил целиком по шоссе, то для одного трехтонного грузовика потери равнялись бы 10 *кг* за весь путь, а если бы целиком по проселочной дороге, то 20 *кг* за весь путь. Если бы весь второй маршрут проходил целиком по шоссе, то для одного пятитонного грузовика потери равнялись бы 20 *кг* за весь путь, а если бы целиком по проселочной дороге, то 40 *кг* за весь путь. Сколько грузовиков той и другой грузоподъемности?

23. В соревнованиях по бегу на дистанции 120 *м* участвуют три бегуна. Скорость первого из них больше скорости второго на 1 *м/с*, а скорость второго равна полусумме скоростей первого и третьего. Определить скорость третьего бегуна, если известно, что первый бегун пробежал дистанцию на 3 *с* быстрее третьего.

24. Имеется три слитка различных сплавов золота с серебром. Известно, что количество золота в 2 *г* сплава из третьего слитка — то же, что и во взятых вместе 1 *г* из первого и 1 *г* из второго слитков. Вес третьего слитка равен суммарному весу части первого слитка, содержащей 10 *г* золота, и части второго слитка, содержащей 80 *г* золота. Третий слиток в 4 раза тяжелее первого и содержит 75 *г* золота. Сколько граммов золота содержится в первом слитке?

25. В магазине спортивных товаров туристы покупали снаряжение. Первый купил топорик и спальный мешок, заплатив 18 *р*. Второй купил два спальных мешка и рюкзак, заплатив 35 *р*. Третий купил топорик, спальный мешок и палатку, заплатив 68 *р*. Четвертый купил рюкзак, два спальных мешка и две палатки. Сколько заплатил четвертый турист?

26. Квартал застроен пятиэтажными и девятиэтажными домами, причем девятиэтажных домов меньше, чем пятиэтажных. Если число девятиэтажных домов увеличить вдвое, то общее число домов станет более 24, а если увеличить вдвое число пятиэтажных домов, то общее число домов станет менее 27. Сколько построено пятиэтажных домов и сколько девятиэтажных?

27. В бассейн проведены три трубы. Первая труба наливает 30 $м^3$ воды в час. Вторая труба наливает в час на $2d$ $м^3$ меньше, чем первая ($0 < d < 15$), а третья труба наливает в час на $11d$ $м^3$ больше, чем первая. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают $\frac{2}{11}$ бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшиеся $\frac{9}{11}$ бассейна. При каком значении d бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?

28. В киоске были проданы одинаковые комплекты, состоящие только из синих и красных карандашей, причем в каждом комплекте число синих карандашей более чем на три превосходило число красных. Если бы в каждом комплекте число синих карандашей увеличили в 3 раза, а красных — в 2 раза, то число синих карандашей в одном комплекте превосходило бы число красных в нем не более чем на 16, а общее число всех проданных карандашей равнялось бы 81. Определить, сколько было продано комплектов и сколько в каждом комплекте было синих и красных карандашей.

29. Для конструкторского бюро строится комната в форме прямоугольного параллелепипеда, одна из стен которого должна быть сделана из стекла, а остальные — из обычного материала. Высота комнаты должна равняться 4 *м*, а площадь 80 $м^2$. Квадратный метр стеклянной стены стоит 75 *р.*, а обычной 50 *р.* Какими должны быть длина и ширина комнаты, чтобы общая стоимость всех стен была наименьшей? Какова эта наименьшая стоимость?

30. Два стрелка сделали по 30 выстрелов каждый; при этом было 44 попадания, остальные — промахи. Сколько раз попал каждый, если известно, что у первого стрелка на каждый промах приходилось в два раза больше попаданий, чем у второго?

31. Поезд метро состоит из нескольких вагонов, причем в каждом вагоне находится одинаковое число пассажиров. Количество пассажиров в одном вагоне превосходит число вагонов на 9. Когда на станции во второй вагон вошло 10 человек, а из остальных вышло по 10 человек, то число пассажиров во втором вагоне оказалось равным числу пассажиров, оставшихся во всех остальных вагонах. Сколько пассажиров было первоначально в каждом вагоне?

32. Три поезда выехали одновременно: пассажирский из города A в город B, а скорый и товарный из города B в город A. Пассажирский и скорый поезда встретились через 4 *ч*. Скорый поезд пришел в город A на 7 *ч* раньше товарного. Скорость пассажирского поезда в полтора раза больше скорости товарного. За какое время товарный поезд прошел путь от города B до города A?

33. Из двух расположенных на реке пунктов A и B (B по течению ниже A), расстояние между которыми равно 36 *км*, одновременно выходят навстречу друг другу две лодки (первая лодка выходит из пункта A) и встречаются через 3 *ч* после выхода. Скорость второй лодки в стоячей воде в 4 раза больше скорости течения реки. Расстояние от пункта A до пункта B и обратно первая лодка проходит за 24 *ч*. Найти скорость течения реки.

34. Гвоздь, 3 винта и 2 шурупа весят вместе 24 *г*, а 2 гвоздя, 5 винтов и 4 шурупа весят 44 *г*. Сколько весят вместе гвоздь, 4 винта и 2 шурупа?

35. Три трактора, работая одновременно, вспахивают поле за 6 *ч*. Первый трактор работает в 1,25 раза быстрее второго. Сколько времени потребовалось бы третьему трактору, чтобы одному вспахать все поле, если одному второму трактору потребовалось бы на вспашку всего поля на $\frac{9}{4}$ *ч* больше, чем третьему?

36. В двух сосудах имеется вода разной температуры. Из этой воды составляют смеси. Если отношение объемов воды, взятой из первого и второго сосудов, равно 1:3, то температура смеси будет 49°, а если 2:5, то температура смеси будет 48°. Найти температуру воды в каждом сосуде. (Считать, что плотность и удельная теплоемкость воды не зависят от температуры.)

37. Из пункта A кольцевого шоссе одновременно в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл, каждый с постоянной скоростью. Автомобиль без остановок дважды проехал по всему шоссе в одном направлении. В момент, когда автомобиль догнал мотоциклиста, мотоциклист повернул обратно, увеличил скорость на 16 *км/ч* и через 22,5 *мин* после разворота одновременно с автомобилем прибыл в пункт A. Найти длину всего пути мотоцикла, если этот путь на 5,25 *км* короче длины всего шоссе.

38. Три работницы делают игрушки. Первая работница изготовляет 5 игрушек в час, вторая 8 игрушек в час. Первые две работницы начали работу одновременно, а третья — на полчаса позже. Через некоторое время третья работница догнала по количеству изготовленных игрушек первую работницу, а через полтора часа после этого догнала и вторую работницу. Определить производительность труда третьей работницы.

39. Профсоюзный комитет выделил на покупку 7 путевок в дом отдыха и 20 путевок на турбазу 812 *р.* Однако оказалось, что путевки в дом отдыха стоят на 1 *р.* дешевле, а на турбазу — на 4 *р.* дешевле, чем предполагалось. Поэтому удалось купить дополнительно еще 1 путевку в дом отдыха и 2 — на турбазу, причем из выделенных денег осталось еще 4 *р.* Сколько стоят путевка в дом отдыха и путевка на турбазу?

40. В классе, в котором учится менее 27 человек, писали контрольную работу. Среди выставленных за нее оценок встречаются только оценки «3», «4», «5». Оценки «3» и «5» получило одинаковое количество учеников, а оценок выше «3» поставлено больше 23. Оценку «4» получило нечетное число учеников. Сколько оценок «3» и «4» было поставлено?

41. Две установки по обогащению руды должны были обработать 54 *т* руды. Первая установка за 2 *ч* обработала часть этой руды, затем ее сменила вторая установка, которая за 3 *ч* обработала всю оставшуюся часть руды. Сколько тонн руды обрабатывает за час первая установка, если 36 *т* руды обрабатывается ею за время, на один час большее, чем требуется на 36 *т* второй установке?

42. Из пункта A одновременно стартуют три бегуна и одновременно финишируют в том же пункте, пробежав по маршруту, состоящему из прямолинейных отрезков AB, BC, CA, образующих треугольник ABC. На каждом из указанных отрезков скорости всех бегунов постоянны и равны у первого 10, 16 и 14 *км/ч* соответственно, у второго 12, 10 и 16 *км/ч* соответственно. Третий бегун в пунктах B и C оказывается не один и меняет скорость на маршруте один раз. Установить, является треугольник ABC остроугольным или тупоугольным.

43. Из города A в город B вышел пассажирский поезд. В то же время из B в A вышел товарный поезд. Скорость каждого из поездов на всем участке движения постоянна. Через 2 *ч* после того, как поезда встретились, расстояние между ними составило 280 *км*. Пассажирский поезд прибыл к месту назначения через 9 *ч*, а товарный — через 16 *ч* после встречи. Определить, какое время в пути находился каждый поезд.

44. Две автоколонны перевозят груз. Машины имеют одинаковую грузоподъемность и в каждый рейс загружаются полностью. Первая автоколонна за один рейс перевозит на 5 *т* груза больше, чем вторая автоколонна. Известно, что, если число машин в первой автоколонне удвоить, то для перевозки 120 *т* груза ей потребуется сделать на 5 рейсов меньше, чем второй автоколонне. Сколько тонн груза перевозит за один рейс вторая автоколонна?

45. Пристани A и B находятся на противоположных берегах озера. Пароход плывет из A в B и после десятиминутной стоянки в B возвращается в A, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью 18 *км/ч*. В момент выхода парохода из A навстречу ему из B в A отправляется движущаяся с постоянной скоростью лодка, которая встречается с пароходом в 11 *ч* 10 *мин*. В 11 *ч* 25 *мин* лодка находится на расстоянии 3 *км* от A. Направляясь из B в A после стоянки, пароход догоняет лодку в 11 *ч* 40 *мин*. Определить время прибытия лодки в A.

46. Три трубы, работая одновременно, наполняют бассейн водой за 13 *ч* 20 *мин*. Если одновременно работают только первая и вторая трубы, то они вместе наполняют тот же бассейн на 6 *ч* дольше, чем его наполняет одна третья труба. За один час через вторую трубу протекает воды столько же, сколько через первую трубу. Через третью трубу за один час протекает воды на 3 $м^3$ больше, чем через первую трубу. Какова емкость бассейна?

47. Школьник купил в магазине несколько тетрадей и карандашей, причем все тетради стоили столько же, сколько все карандаши, а тетрадей было на три штуки больше, чем карандашей. Если бы при этом один карандаш стоил на 10 *к.* дороже, а одна тетрадь тоже стоила на 10 *к.* дороже, то, истратив те же деньги, что и раньше, как на тетради, так и на карандаши, можно было бы купить тетрадей на одну больше, чем карандашей. Если бы школьник купил по первоначальной стоимости тетрадей столько, сколько было куплено карандашей, а карандашей столько, сколько было куплено тетрадей, то за карандаши пришлось бы уплатить на 90 *к.* больше, чем за тетради. Сколько стоит один карандаш и одна тетрадь?

48. Два трактора при совместной работе обрабатывают поле за 45 *мин.* Сколько времени потребовалось бы одному первому трактору на обработку поля, если известно, что один второй трактор обрабатывает все поле на 2 *ч* дольше, чем первый?

49. Группа туристов составила четырехдневный план прохождения маршрута протяженностью 90 *км.* По этому плану она должна была пройти в последний день вдвое больше, чем в первый. Однако фактически поход протекал иначе, хотя, как и предполагалось, занял 4 дня. В первый день туристам удалось пройти только $\frac{2}{3}$ намеченного на этот день пути. Зато во второй день они прошли оставшуюся $\frac{1}{3}$ пути от плана первого дня, затем прошли путь, намеченный по плану на второй день, и, кроме того, $\frac{1}{5}$ пути, намеченного на третий день. В третий день туристы прошли путь больше намеченного по плану на $\frac{1}{10}$ пути, фактически пройденного в первый день. Определить первоначальный план, если известно, что во второй и третий дни, вместе взятые, группа прошла на 10 *км* больше, чем предполагалось, а в третий день на 11 *км* больше, чем в первый день пути.

50. Три самосвала, грузоподъемность первого из которых 12 *т*, второго — не меньше 2 *т*, а третьего — не меньше, чем второго, должны быть загружены полностью песком с помощью двух транспортеров. Первый транспортер загружает $\frac{1}{2}$ *т* песка в минуту, второй $\frac{2}{3}$ *т* в минуту. Самосвалы могут подъезжать к транспортерам в любом порядке, причем загрузка одного самосвала может производиться только одним транспортером. Кроме того, начав загрузку при помощи одного из транспортеров, самосвал не может уже переехать на догрузку к другому. Время погрузки считается от начала загрузки головного самосвала до окончания загрузки последнего. При соблюдении этих условий минимальное время загрузки составляет 22,5 *мин*. Предполагается, что на смену у транспортера загруженного самосвала другим порожним самосвалом время не теряется. Если же все самосвалы загружаются с помощью лишь одного второго транспортера, то погрузка занимает 36 *мин*. Определить грузоподъемности второго и третьего самосвалов.

51. В колхозе два поля, одно из которых в два раза больше другого, и три бригады трактористов. Вторая и третья бригады вместе могут убрать большое поле на 9 дней быстрее, чем одна первая бригада малое поле. За то время, за которое первая и вторая бригады вместе могут убрать малое поле, одна третья бригада может убрать $\frac{2}{5}$ большого поля, а за время, необходимое первой и третьей бригадам на уборку большого поля при совместной работе, вторая бригада может убрать малое поле. За какое время уберут оба поля все три бригады, работая вместе?

52. Ученики второго, третьего и четвертого классов собирали макулатуру. Второклассники работали каждый по 3 дня, третьеклассники — по 12 дней, четвероклассники — по 16 дней. При этом каждый второклассник собрал по 30 *кг*, каждый третьеклассник — по 130 *кг*, каждый четвероклассник — по 170 *кг*. Все дети отработали вместе 95 дней. Сколько учеников каждого класса участвовало в работе, если общее количество собранной макулатуры оказалось максимальным?

53. Бассейн может наполняться водой с помощью двух насосов разной производительности. Если половину бассейна наполнить, включив лишь первый насос, а затем, выключив его, продолжать наполнение с помощью второго насоса, то весь бассейн наполнится за 2 *ч* 30 *мин*. При одновременной работе обоих насосов бассейн наполняется за 1 *ч* 12 *мин*. Какую часть бассейна наполняет за 20 *мин* работы насос меньшей производительности?

54. Экскаватор роет котлован. После того как было вынуто 20 $м^3$ грунта, производительность экскаватора снизилась на 5 $м^3/ч$. Найти первоначальную производительность экскаватора, если через 8 *ч* после начала работы было вынуто 50 $м^3$ грунта.

55. Две автоколонны, состоящие из одинакового числа машин, перевозят груз. В каждой из автоколонн машины имеют одинаковую грузоподъемность и во время рейса загружаются полностью. Грузоподъемность машин в разных колоннах различна, и за один рейс первая автоколонна перевозит на 40 *т* груза больше, чем вторая автоколонна. Если уменьшить число машин в первой автоколонне на 2, а во второй автоколонне на 10, то первая автоколонна перевезет 90 *т* груза за один рейс, а вторая автоколонна перевезет 90 *т* груза за три рейса. Какова грузоподъемность одной машины второй автоколонны?

56. Теплоход от A до B по течению реки идет 3 дня, а потом возвращается из B в A. Путешественник из A в B спустился на плоту, а обратно добирался на теплоходе. Плот движется со скоростью течения реки, причем известно, что эта скорость строго меньше половины скорости теплохода в стоячей воде. Вся дорога заняла у путешественника 18 дней. Сколько времени занял бы тот же путь, если бы скорость течения была в полтора раза больше?

57. Две шахты соревновались в течение первого квартала. Мартовская добыча второй шахты была на 400 *т* меньше февральской добычи первой шахты. Январская добыча первой шахты равнялась ее же мартовской добыче и равнялась февральской добыче второй шахты. По итогам первых двух месяцев добыча первой шахты оказалась меньше добычи второй шахты на 1000 *т*. Что больше и на сколько: январская добыча первой шахты или январская добыча второй шахты? Известно, что если бы январская добыча второй шахты равнялась ее же мартовской добыче, то добыча второй шахты за январь, февраль и март месяцы оказалась бы больше добычи первой шахты за эти же месяцы на 1300 *т*.

58. Из пункта A в пункт B вышел автобус и одновременно из пункта B навстречу автобусу выехал грузовик. В момент их встречи в пункте C грузовик развернулся и поехал обратно, а из B по направлению к A вышел второй автобус. Первый автобус встретился со вторым, пройдя после пункта C расстояние, равное AC. Известно, что время, которое второй автобус находился в пути до встречи с грузовиком, составляет $\frac{3}{5}$ от времени, которое прошло с момента его отправления из пункта B до встречи с первым автобусом. Во сколько раз скорость первого автобуса меньше скорости грузовика?

59. Дорога из пункта A в пункт B сначала идет в гору на протяжении 5 *км*, потом по ровному месту на протяжении 2 *км*, после спускается с горы с первоначальным наклоном на протяжении 10 *км*. Пешеход, выйдя из A в B этой дорогой, прошел без остановки весь путь за 4 ч 30 *мин*. На следующий день, отправившись в 6 ч утра в обратный путь из B в A, пешеход, преодолев подъем, сделал получасовой привал, а потом без отдыха дошел в полдень того же дня до пункта A, где обнаружил, что на месте привала он забыл нож. На третий день пешеход из пункта A пошел на место привала, забрал лежащий там нож, сразу же повернул назад и вернулся в пункт A, затратив при этом на весь путь 4 ч. С какой скоростью пешеход идет в гору, по ровному месту и под гору, если считать эти скорости постоянными?

60. Два самолета, следующие по одной трассе из города A в город C с постоянными скоростями, пролетают над некоторым пунктом B. Известно, что второй самолет вылетел из города A на 14 *мин* позже первого, а в город C прилетел на 16 *мин* раньше него. При этом над пунктом B самолеты пролетали с интервалом не более 4 *мин*. Если бы второй самолет вылетел из города A через 10 *мин* после вылета первого, уменьшив свою скорость на 10%, а скорость первого самолета не изменилась, то над пунктом B самолеты пролетели бы с интервалом не менее 2 *мин*, а в город C второй самолет прилетел бы на 10 *мин* раньше первого. Если бы скорость второго самолета увеличилась на 40 *км/ч*, а скорость первого самолета не изменилась, то второй самолет потратил бы на путь от A до B в $\frac{7}{3}$ раза меньше времени, чем первый самолет на весь путь от A до C. Определить скорость первого самолета.

§ 5. Решение уравнений

Окончившие среднюю школу обычно хорошо владеют техническими, вычислительными навыками, необходимыми для решения уравнений. Однако далеко не все понимают те теоретические, логические основы, без которых правильно решить уравнение невозможно (разве что случайно, на что рассчитывать, конечно, бессмысленно).

Это и проявляется на экзамене: упростить уравнение с помощью безошибочно проведенных выкладок умеет большинство, но заметить, как и почему эти выкладки приводят к потере или приобретению решений, может не каждый, а очень многие об этом даже и не задумываются. Другие же, хотя и знают некоторые относящиеся сюда теоретические положения, но знают их формально, как некоторую инструкцию, и беспомощны в чуть-чуть измененной ситуации.

Скажем, школьникам хорошо известно, что при возведении обеих частей иррационального уравнения в квадрат могут появиться посторонние корни. Но сколько раз приходилось видеть, как возведение в квадрат применяется к тригонометрическому уравнению без последующего отбрасывания лишних корней! А ведь этой ошибки легко избежать, зная, *почему* возведение в квадрат приводит к появлению лишних корней.

Или взять вопрос о проверке. Среди поступающих по этому вопросу бытуют два совершенно противоположных мнения. Одни считают, что проверка — это прихоть экзаменаторов и учителей, которой волей-неволей приходится подчиняться, другие считают, что проверка всегда и всюду обязательна и проверяют все, вплоть до корней квадратного уравнения. Оба эти мнения основаны на непонимании того, что такое проверка, какое место она должна занимать в решении.

Короче говоря, каждый должен владеть тем минимумом теоретических знаний, который необходим для решения уравнений.

Прежде всего приведем определения.

1. ***Областью допустимых значений*** (ОДЗ) *уравнения называется множество значений неизвестного, при которых имеют смысл (определены) его левая и правая части.* Всякое число x из ОДЗ уравнения называется, естественно, *допустимым* для данного уравнения.

2. *Число a из* ОДЗ *уравнения называется* ***решением (корнем) уравнения****, если при подстановке его вместо неизвестного уравнение превращается в верное числовое равенство.*

3. ***Решить уравнение*** *— значит найти все его корни или доказать, что корней нет.*

4. *Если все корни одного уравнения являются корнями второго уравнения, то* ***второе уравнение называется следствием первого.***

5. *Два уравнения являются равносильными (эквивалентными), если они имеют одни и те же решения.* Из этого определения следует, что каждое из двух равносильных уравнений является следствием другого.

6. *Два уравнения равносильны на некотором множестве значений неизвестного, если они имеют одни и те же решения, принадлежащие этому множеству.*

Для иллюстрации этих понятий приведем два примера.

Область допустимых значений уравнения $x - 3 = \sqrt{x}$ состоит, по определению, из тех x, для которых имеют смысл его левая часть $x - 3$ и правая часть $\sqrt{x}$. Левая часть уравнения, очевидно, определена при любом x, а правая — при $x \geqslant 0$. Поэтому ОДЗ уравнения состоит из $x \geqslant 0$.

Между тем многие ошибочно утверждают, что ОДЗ состоит из $x \geqslant 3$, поскольку «при $x < 3$ левая часть отрицательна, а правая часть отрицательной быть не может». Утверждение, поставленное в кавычки, верно, и в ходе решения оно используется: оно показывает, что *корни* уравнения не меньше 3. Но отсюда не следует, что все *допустимые значения* меньше 3 — ведь не все же допустимые значения являются корнями!

Рассмотрим два уравнения

$$\log_6 (x - 2) + \log_6 (x + 3) = 2 \text{ и } \log_6 (x - 2)(x + 3) = 2.$$

Очевидно, всякий корень первого уравнения является корнем второго, так что второе уравнение является следствием первого. Второе уравнение легко решается; его корни $x_1 = 6$ и $x_2 = -7$. Корень x_2 первому уравнению не удовлетворяет — он даже не входит в его ОДЗ. Таким образом, данные уравнения *неравносильны*, но *равносильны в* ОДЗ *первого уравнения* (в этой ОДЗ они имеют один корень $x = 6$).

Легко понять, почему дело обстоит так. ОДЗ первого уравнения состоит из $x > 2$, а ОДЗ второго уравнения шире — в нее входят, кроме этих x, еще и $x < -3$. Поэтому естественно, что при переходе от первого уравнения ко второму появился посторонний корень $x = -7$, не входящий в ОДЗ первого уравнения.

Каким же образом работают введенные понятия при решении уравнений? Дело в том, что в подавляющем большинстве случаев решение получается лишь после длинной цепи преобразований, переходов от одного уравнения к другому. В процессе решения, таким образом, каждое уравнение заменяется на какое-то новое, а у нового уравнения, естественно, могут быть новые корни. Проследить за этим изменением корней, не допустить потери и суметь отбросить лишние корни — это и есть задача правильного решения уравнений.

Ясно, что самый лучший способ — каждый раз заменять очередное уравнение на равносильное; тогда корни последнего уравнения и будут корнями исходного. Но этот идеальный путь на практике обычно неосуществим. Как правило, уравнение заменяют его следствием, вообще говоря, ему не равносильным; при этом, по определению следствия, все корни первого уравнения являются корнями второго, т. е. *потеря корней не происходит*, но *посторонние корни могут появиться* (а могут и не появиться). И в случае, когда хотя бы один раз в процессе преобразований уравнение заменялось на неравносильное ему следствие, обязательно исследование полученных корней — проверка. Заметим сразу же, что, как мы увидим ниже, это исследование вовсе не обязательно требует непосредственной подстановки полученных корней в исходное уравнение.

Таким образом, если решение проводилось без анализа равносильности и источников появления посторонних корней, то проверка является неотъемлемой частью решения, без которой оно не может быть признано полноценным, даже если посторонние корни на самом деле не появились. Если же они появились и не отброшены, то решение просто неверно. С другой стороны, если каждый раз уравнение заменялось на равносильное (что, впрочем, как мы уже сказали, бывает редко), причем этот факт специально оговаривался в процессе решения, то проверка не нужна. Таким образом, понятие проверки при решении уравнений играет вполне определенную и весьма существенную роль и отнюдь не сводится к простому контролю вычислений.

Что же касается контроля вычислений, то это личное дело каждого решающего; его можно проводить или не проводить в зависимости от своей техники вычислений, от уверенности в себе. На экзамене лучше контролировать себя всегда. Но делать это надо на черновике, и включать такой контроль в решение незачем.

Подчеркнем, что заменять уравнение на другое, не являющееся его следствием, нельзя, ибо в этом случае *имеется корень первого уравнения, не являющийся корнем второго*, а тогда, решив это второе уравнение, мы все равно не найдем всех корней первого. В результате произойдет *потеря корня*, что уже непоправимо. В этом существенная разница между потерей корней и приобретением лишних корней.

На практике нужно хорошо знать именно конкретные источники приобретения и потери корней. Эти источники бывают, в основном, двух типов: так называемые «тождественные преобразования» и взятие от обеих частей уравнения некоторых функций (возведение в степень, логарифмирование, потенцирование и т. д.).

«Тождественные преобразования», на первый взгляд совершенно безобидные, в действительности часто приводят к неравносильным уравнениям, поскольку они изменяют ОДЗ. В самом деле, заменив, например, при решении иррационального уравнения $(\sqrt{2x+1})^2$ на $2x+1$, мы сразу же расширяем ОДЗ, ибо $2x+1$ имеет смысл при всех x, а $(\sqrt{2x+1})^2$ лишь при $x \geqslant -\frac{1}{2}$. Точно так же в примере, разобранном нами выше, применение формулы логарифма произведения привело к расширению ОДЗ и в результате — к появлению постороннего корня.

Ничего особо странного в этом нет: просто большинство формул, используемых для преобразований, таковы, что их левая и правая части имеют смысл при разных значениях входящих в них букв. Таковы, например, формулы

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad (\sqrt{x})^2 = x,$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^n = n \log_a x, \quad a^{\log_a b} = b,$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Поэтому замена одной части формулы на другую приводит к расширению или сужению ОДЗ. Ясно, что из-за расширения ОДЗ возможно приобретение лишних корней, а из-за сужения ОДЗ — потеря корней, так что сужение ОДЗ недопустимо.

Что же касается лишних корней, то в случае, когда они приобретены за счет расширения ОДЗ, для их отделения от корней исходного уравнения нет необходимости подставлять их непосредственно в это исходное уравнение — достаточно лишь проверить, входят ли они в его ОДЗ, и если не входят, то отбросить, а если входят, то оставить. Этот факт имеет исключительное значение для практики решения уравнений, и поэтому мы его выделим.

А. *Если в процессе преобразований уравнения посторонние корни могли появиться только за счет расширения ОДЗ, то корнями исходного уравнения будут те и только те из них, которые входят в ОДЗ.*

Использование этого утверждения избавляет нас от непосредственной подстановки полученных корней в уравнение и технической проверки соответствующих числовых равенств, которая нередко бывает весьма затруднительной, а иногда и просто невозможной из-за того, что проверяемых чисел бесконечно много.

Итак, вместо *непосредственной подстановки* можно применять *проверку на вхождение в* ОДЗ, но только в том случае, когда источник появления посторонних корней один — расширение ОДЗ. Следовательно, для использования проверки на вхождение в ОДЗ совершенно обязательно явно указывать в процессе решения, где и за счет чего могут появиться посторонние корни.

Что касается взятия функции от обеих частей уравнения, то рассмотрим лишь два наиболее важных примера: *возведение в квадрат* и *потенцирование.*

Часто (особенно при решении иррациональных уравнений) приходится от некоторого уравнения $f(x) = g(x)$ переходить к уравнению $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$. Что происходит с корнями при этом переходе? Очевидно, прежде всего, что второе уравнение является следствием первого: если число a — корень первого уравнения, т. е. $f(a) = g(a)$, то $[f(a)]^2 = [g(a)]^2$, т. е. a — корень второго уравнения. Но обратное, вообще говоря, неверно: второму уравнению удовлетворяют и корни «постороннего» уравнения $f(x) = -g(x)$. Таким образом, при возведении в квадрат корни не теряются, но посторонние корни появиться могут.

Очень полезным на практике является вытекающее отсюда утверждение:

Б. *Если обе части уравнения неотрицательны на некотором множестве значений аргумента, то при возведении в квадрат получается уравнение, равносильное исходному на этом множестве.*

В самом деле, в этом случае «постороннее» уравнение, очевидно, не имеет корней, разве лишь те, при которых обе части обращаются в нуль, — но они и не являются лишними для нашего уравнения. Как это утверждение применяется на практике, мы покажем ниже на конкретных примерах.

Аналогично рассматривается потенцирование уравнений, т. е. переход от уравнения $\log_c f(x) = \log_c g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$. Пусть a — корень исходного уравнения, т. е. $\log_c f(a) = \log_c g(a)$. Тогда

$$c^{\log_c f(a)} = c^{\log_c g(a)}, \text{ т. е. } f(a) = g(a).$$

Следовательно, всякий корень исходного уравнения является корнем второго. С другой стороны, ОДЗ второго уравнения шире, чем первого, и поэтому естественно ожидать появления посторонних корней, но именно за счет расширения ОДЗ. Значит, для решения достаточно найти корни второго уравнения и проверить их на вхождение в ОДЗ первого уравнения.

Таков тот теоретический «багаж», который должен быть у каждого поступающего. Следует подчеркнуть в то же время, что использование всей этой теории не всегда целесообразно, и при решении примеров нужно соблюдать какую-то меру, стремясь всегда к самому простому решению. Если, скажем, при решении на черновике выяснилось, что простая проверка полученных корней не представляет труда, то незачем ни выяснять источники приобретения корней, ни интересоваться изменением ОДЗ в процессе решения, ни даже вообще находить ОДЗ; если же эта проверка затруднительна, то выручают именно теоретические рассуждения — в соответствующем месте (и обязательно в чистовике) нужно исследовать преобразование, которое могло привести к появлению лишних корней.

В то же время в любом решении должна быть уверенность, что не происходит потери корней. Это также полезно явно оговаривать, особенно если применяемое преобразование достаточно сложно.

Ниже на конкретных примерах мы показываем сначала некоторые наиболее типичные случаи, а также наиболее коварные источники (разумеется, не все) приобретения посторонних корней, среди них — формулы преобразования радикалов, основное логарифмическое тождество и формулы логарифмирования произведения и степени, отбрасывание знаменателя, взаимное уничтожение подобных членов, замена уравнения некоторой совокупностью более простых уравнений, некоторые «словесные» рассуждения. Затем мы рассматриваем источники потери корней. Наконец, в последних двух примерах мы показываем, как надо логически полно проводить так называемое «решение подбором».

1 *Решить уравнение* $\sqrt{10+x} - \sqrt{19-3x} = 3$.

Возводя обе части уравнения в квадрат и пользуясь формулами преобразования радикалов, получим уравнение

$$10 + x - 2\sqrt{(10+x)(19-3x)} + 19 - 3x = 9,$$

или

$$\sqrt{-3x^2 - 11x + 190} = 10 - x. \qquad (1)$$

Снова возводя обе части уравнения в квадрат и освобождаясь от радикала, приходим к уравнению $4x^2 - 9x - 90 = 0$, корни которого $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{15}{4}$. Непосредственная подстановка этих значений в исходное уравнение показывает, что x_1 является его корнем, а x_2 не является.

Приведенное решение — это почти в точности то, что каждый написал бы в черновике. Для этого уравнения нет надобности углубляться в какую-то теорию, скажем, исследовать, откуда появился посторонний корень; просто при переписывании на чистовик надо указать, что в процессе преобразований корни не могли потеряться, и в конце сделать проверку непосредственной подстановкой. Это и будет исчерпывающее решение.

Отметим все же, что посторонний корень появился при возведении в квадрат уравнения (1), как корень «постороннего уравнения».

Следующий пример столь же прост, но при проверке одного «хорошего» корня неожиданно возникают трудности принципиального характера.

(2) *Решить уравнение*

$$\sqrt{5x+7} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+4}.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат, после преобразований получаем уравнение

$$\sqrt{(5x+7)(2x+3)} = 2x+3.$$

Отсюда, снова возводя в квадрат, приходим к квадратному уравнению $6x^2 + 17x + 12 = 0$, корни которого $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{4}{3}$. Непосредственная проверка показывает, что $x = -\frac{4}{3}$ является корнем исходного уравнения.

Проверяя значение $x = -\frac{3}{2}$, поступающие пришли к равенству $\sqrt{-\frac{1}{2}} - \sqrt{-\frac{1}{2}} = 0$. Многие считали это равенство верным, основываясь на том, что в его левой части «из равного вычитается равное». Таким образом, значение $x = -\frac{3}{2}$ также оказалось у них корнем исходного уравнения. Но приведенная аргументация несостоятельна, поскольку выражение $\sqrt{-\frac{1}{2}}$ не имеет смысла: не существует числа, квадрат которого равен $-\frac{1}{2}$. Поэтому значение $x = -\frac{3}{2}$ не входит в ОДЗ и, следовательно, не является корнем исходного уравнения.

Совершенно иная ситуация в следующем примере, где проверка получающихся «плохих» корней является трудной задачей, и самый простой путь решения связан именно с применением рассмотренной теории, когда в самом решении сразу учитываются источники появлений посторонних корней.

(3) *Решить уравнение* $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 4$.

Обе части данного уравнения неотрицательны в ОДЗ, поэтому после возведения в квадрат получим уравнение, которое согласно утверждению Б равносильно исходному в его ОДЗ:

$$(\sqrt{x+3})^2 + 2\sqrt{x+3}\sqrt{2x-1} + (\sqrt{2x-1})^2 = 16.$$

Пользуясь формулами преобразования радикалов, которые, очевидно, расширяют ОДЗ, придем к уравнению

$$2\sqrt{2x^2+5x-3} = 14 - 3x. \qquad (2)$$

После этих преобразований посторонние корни могли появиться только за счет расширения ОДЗ.

Далее рассуждаем следующим образом. Левая часть в (2) неотрицательна при любом (допустимом) значении x, правая же часть при $x > \frac{14}{3}$ отрицательна. Ясно, что такое значение x не может быть решением уравнения. Поэтому дальше будем рассматривать уравнение (2) только в области $x \leqslant \frac{14}{3}$. Но в этой области обе части уравнения (2) неотрицательны (разумеется, при допустимых для (2) значениях x), и согласно утверждению Б после возведения в квадрат придем к уравнению

$$(2\sqrt{2x^2+5x-3})^2 = (14-3x)^2,$$

равносильному (2) на множестве $x \leqslant \frac{14}{3}$.

Отсюда, еще раз расширив ОДЗ, приходим к квадратному уравнению $x^2 - 104x + 208 = 0$, корни которого $x_{1,2} = 52 \pm 8\sqrt{39}$. Оба этих корня, как легко видеть, входят в ОДЗ исходного уравнения, и потому надо проверить лишь, удовлетворяют ли они неравенству $x \leqslant \frac{14}{3}$.

Легко подсчитать, что $x_1 > \frac{14}{3}$, а $x_2 < \frac{14}{3}$, так что x_2 — единственный корень уравнения (2), а следовательно, и исходного уравнения.

Подчеркнем еще раз, что прибегать к такому обстоятельному, «теоретическому» решению надо только в случае необходимости, только убедившись предварительно на черновике, что корни «плохие»: непосредственная их подстановка в уравнение приводит к довольно сложной задаче — доказательству или опровержению равенств

$$\sqrt{55 + 8\sqrt{39}} + \sqrt{103 + 16\sqrt{39}} = 4,$$

$$\sqrt{55 - 8\sqrt{39}} + \sqrt{103 - 16\sqrt{39}} = 4.$$

Впрочем, первое из этих равенств явно неверно. Что касается второго равенства, то его можно доказать возведением в квадрат, но этот путь связан со значительными вычислительными трудностями и явно сложнее, чем приведенный нами, где потребовалось лишь проверить корни x_1 и x_2 на выполнение условия $x \leqslant \frac{14}{3}$.

Тем не менее в этом примере все-таки можно преодолеть трудности непосредственной проверки и избежать применения теории. Однако во многих уравнениях, и, в частности, в уравнениях, содержащих *параметр*, непосредственная проверка значительно труднее, и использование приведенной теории является практически единственным путем решения.

4 *Решить уравнение* $x - 1 = \sqrt{a - x^2}$.

Правая часть уравнения неотрицательна при любом значении x из ОДЗ, т. е. при $a - x^2 \geqslant 0$. Левая часть уравнения неотрицательна при $x \geqslant 1$. Отсюда ясно, что данное уравнение не имеет корней, меньших 1. Поэтому далее можно ограничиться допустимыми значениями x, удовлетворяющими неравенству $x \geqslant 1$.

Для таких x исходное уравнение равносильно уравнению $(x-1)^2 = (\sqrt{a-x^2})^2$. Освобождаясь от радикала, получаем уравнение

$$2x^2 - 2x + 1 - a = 0; \qquad (3)$$

при этом ОДЗ расширилась, и в конце придется делать проверку полученных корней на вхождение в ОДЗ. Таким образом, нужно решить уравнение (3) и из его корней отобрать те, для которых $x \geqslant 1$ и $a - x^2 \geqslant 0$. Дискриминант уравнения (3) равен $2a - 1$, так что при $a < \frac{1}{2}$ оно не имеет корней, и тем более при этих a не имеет корней исходное уравнение.

Далее будем считать, что $a \geqslant \frac{1}{2}$. Корни уравнения (3) таковы: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2a-1}}{2}$. Корень x_2, очевидно, не удовлетворяет условию $x \geqslant 1$ и поэтому не является корнем исходного уравнения. Для того чтобы выяснить положение с x_1, нужно прежде всего решить неравенство $\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2} \geqslant 1$; оно, очевидно, справедливо при $a \geqslant 1$. Поэтому при $a < 1$ исходное уравнение не имеет корней, а при $a \geqslant 1$ надо еще проверить выполнение неравенства $a - x_1^2 \geqslant 0$, которое приводится к виду $a \geqslant \sqrt{2a-1}$. Обе части этого неравенства неотрицательны (мы рассматриваем $a \geqslant 1$), и его можно возвести в квадрат (см. § 6 раздела I); при этом получим $a^2 - 2a + 1 \geqslant 0$, что верно при любом a.

Итак, при $a < 1$ исходное уравнение корней не имеет, а при $a \geqslant 1$ имеет корень $x = \frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}$.

Подчеркнем еще раз, что проверка корней непосредственной подстановкой свелась бы к равенствам относительно a:

$$\frac{1 \pm \sqrt{2a-1}}{2} - \sqrt{\frac{a \mp \sqrt{2a-1}}{2}} = 1,$$

установление которых весьма затруднительно. Таким образом, без сознательного овладения разбираемым здесь подходом к решению уравнений подобные задачи всегда будут вызывать большие трудности.

Обратим внимание на одну деталь в решении примера 4. Проверка корня x_1 на выполнение условия $a - x^2 \geqslant 0$, логически совершенно обязательная, могла быть проведена без всяких выкладок. В самом деле, x_1 получен как корень уравнения $(x-1)^2 = a - x^2$, и следовательно, $a - x_1^2 = (x_1 - 1)^2 \geqslant 0$.

Эта, казалось бы, мелкая деталь имеет на самом деле большое значение при решении иррациональных уравнений. Она позволяет полностью снять трудности, связанные с расширением ОДЗ при возведении в квадрат уравнений вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x).$$

Именно, положение здесь таково, что хотя при возведении уравнения в квадрат ОДЗ расширяется, но это расширение не приводит к появлению посторонних корней: всякий корень x_0 уравнения

$$f(x) = [g(x)]^2$$

удовлетворяет условию $f(x_0) = [g(x_0)]^2 \geqslant 0$, т. е. входит в ОДЗ исходного уравнения. Пользуясь этими соображениями, не следует, конечно, забывать, что лишние корни здесь все же могут появиться за счет «постороннего» уравнения, так что перед возведением в квадрат следует позаботиться о выполнении условия $g(x) \geqslant 0$.

Таким образом, схема решения уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ такова: решить уравнение $f(x) = [g(x)]^2$ и отобрать те его решения, которые удовлетворяют неравенству $g(x) \geqslant 0$.

Подчеркнем еще раз, что предложенная схема решения позволяет не решать неравенство $f(x) \geqslant 0$. Это особенно важно потому, что решение неравенства $f(x) \geqslant 0$ может оказаться весьма сложным.

5 *Решить уравнение*

$$\sqrt{\cos 3x + \sin 3x - \cos^2 x + \cos x + \frac{5}{4}} = \sin x + \frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Область допустимых значений данного уравнения определяется неравенством

$$\cos 3x + \sin 3x - \cos^2 x + \cos x + \frac{5}{4} \geqslant 0,$$

и многие поступающие начали решение именно с этого неравенства. Трудно сказать, можно ли вообще решить это неравенство элементарными методами, но, как мы только что говорили, его решение вовсе и не нужно для решения уравнения.

Левая часть этого уравнения неотрицательна при любом (допустимом) значении x, а правая часть неотрицательна при

$$\sin x + \frac{1}{2} \geqslant 0. \qquad (5)$$

Поэтому согласно утверждению Б на множестве значений x, удовлетворяющих неравенству (5), уравнение (4) равносильно уравнению

$$\left(\sqrt{\cos 3x + \sin 3x - \cos^2 x + \cos x + \frac{5}{4}}\right)^2 = \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Отсюда, расширяя ОДЗ, получаем уравнение

$$\cos 3x + \sin 3x - \cos^2 x + \cos x + \frac{5}{4} = $$
$$= \sin^2 x + \sin x + \frac{1}{4}. \qquad (6)$$

Однако это расширение ОДЗ не приводит к появлению посторонних корней, и поэтому остается решить уравнение (6) и из его корней отобрать те, которые удовлетворяют неравенству (5).

Решение уравнения (6) не представляет трудностей (см. § 3 раздела II), и его корни даются серией

$$x = (2n+1)\frac{\pi}{4}, \quad n \text{ – целое число.}$$

Неравенству (5) удовлетворяют лишь значения x, соответствующие $n = 4k$ и $n = 4k + 1$. Таким образом, корни уравнения (4) даются сериями

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \text{ — целое число.}$$

Одним из наиболее распространенных источников появления посторонних корней является использование различных логарифмических формул, в частности, *формулы логарифма произведения.* В самом деле, заменяя $\log_a f(x) + \log_a g(x)$ на $\log_a f(x)g(x)$, мы расширяем ОДЗ уравнения, допуская такие значения неизвестного x, при которых одновременно $f(x) < 0$ и $g(x) < 0$. Поэтому посторонние корни могут появиться, но *лишь за счет расширения* ОДЗ, так что для их отбрасывания, на основании утверждения А, достаточно проверить только факт их вхождения в ОДЗ. Заметим еще, что обратная замена — логарифма произведения на сумму логарифмов — может привести к сужению ОДЗ и поэтому недопустима.

6 *Решить уравнение* $\log_2(x+2) + \log_2(3x-4) = 4$.

Переходя к логарифму произведения, получим

$$\log_2(x+2)(3x-4) = 4,$$

откуда $(x+2)(3x-4) = 16$. Корни этого квадратного уравнения $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{73}}{3}$. Но из них только x_1 входит в ОДЗ исходного уравнения и на основании утверждения А является его корнем.

Непосредственная подстановка «плохого» корня x_1 потребовала бы не очень сложных, но достаточно неприятных «иррационально-логарифмических» выкладок, а применение утверждения А дало ответ сразу.

Появление посторонних корней в результате применения основного логарифмического тождества обычно

вызывает удивление у поступающих, хотя на самом деле ничего странного в этом нет: это происходит за счет расширения ОДЗ при замене выражения $a^{\log_a b}$ на b, если a или b содержат неизвестное.

7 *Решить уравнение* $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4$.

Заменяя $\log_{\sqrt{x}} 2x$ на $\log_x (2x)^2$ (см. § 1, В раздела I), получим уравнение

$$x^{\log_x (2x)^2} = 4.$$

Применив теперь основное логарифмическое тождество, получим $(2x)^2 = 4$, т. е. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Однако ни x_1, ни x_2 не входят в ОДЗ исходного уравнения. Следовательно, данное уравнение корней не имеет.

Появление посторонних корней может происходить и менее заметно, чем в только что рассмотренных примерах. Как правило, это связано с тем, что используемые при решении рассуждения и выкладки приводят к расширению ОДЗ. В следующем примере *посторонние корни появляются при взаимном уничтожении подобных членов,* так как при этом мы снимаем ограничение, что уничтоженные слагаемые должны иметь смысл, и тем самым расширяем ОДЗ.

8 *Решить уравнение*

$$\lg\sqrt{1+x} + 3\lg\sqrt{1-x} - 2 = \lg\sqrt{1-x^2}.$$

Преобразуем правую часть:

$$\lg\sqrt{1-x^2} = \lg\left[\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}\right] = \lg\sqrt{1-x} + \lg\sqrt{1+x}.$$

Легко видеть, что при этом преобразовании ОДЗ данного уравнения не изменилась, и полученное уравнение

$$\lg\sqrt{1+x} + 3\lg\sqrt{1-x} - 2 = \lg\sqrt{1-x} + \lg\sqrt{1+x}$$

равносильно данному. Уничтожая $\lg\sqrt{1+x}$ в обеих частях, получим уравнение $\lg\sqrt{1-x} = 1$, ОДЗ которого $x < 1$, т. е., как легко видеть, шире, чем у исходного уравнения. Значит, надо ожидать появления посторонних корней. Решая последнее уравнение, получаем корень $x = -99$, который не входит в ОДЗ исходного уравнения и не является поэтому его корнем. Таким образом, данное уравнение корней не имеет.

Не менее неожиданным для поступающих является появление посторонних корней при применении определения логарифма. Однако в этом опять-таки нет ничего удивительного: ведь равенства $\log_a N = \alpha$ и $N = a^\alpha$ имеют смысл при разных значениях входящих в них букв, и при переходе от первого из них ко второму ОДЗ уравнения может расшириться, так что вполне естественно ожидать появления посторонних корней за счет этого расширения.

9 *Решить уравнение* $\log_x \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1$.

Пользуясь определением логарифма, приходим к уравнению

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = x,$$

имеющему более широкую ОДЗ, чем исходное уравнение. Следовательно, при этом переходе мы могли получить посторонние корни — но только за счет расширения ОДЗ.

Полученное уравнение легко решается: его корни $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Из этих корней x_2 входит в ОДЗ исходного уравнения, а x_1 не входит, и, таким образом, исходное уравнение имеет единственный корень $x = 2$.

Одним из источников ошибок является отбрасывание — явное или неявное — знаменателя. Но *при отбрасывании знаменателя происходит расширение* ОДЗ — добавляются те значения x, при которых знаменатель равен нулю.

10 *Решить уравнение*

$$\frac{1}{\log_6(3 + x)} + \frac{2\log_{0,25}(4 - x)}{\log_2(3 + x)} = 1.$$

Переходя во всех логарифмах к основанию 2, придем к уравнению, равносильному данному:

$$\frac{\log_2 6 - \log_2(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1. \qquad (7)$$

Отсюда $\log_2 6 - \log_2 (4-x) = \log_2 (3+x)$ и далее

$$\frac{6}{4-x} = 3 + x. \qquad (8)$$

Последнее уравнение приводится к квадратному; его корни $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.

В процессе решения посторонние корни могли появиться только из-за расширения ОДЗ вследствие отбрасывания знаменателя в уравнениях (7) и (8). Поэтому достаточно проверить получающиеся корни на вхождение в ОДЗ исходного уравнения. В результате получаем, что x_2 не входит в ОДЗ, а x_1 входит и, следовательно, является корнем исходного уравнения.

Невниманием к ОДЗ объясняются ошибки при решении уравнений, у которых в левой части стоит некоторая дробь, а в правой части — нуль. Часто для решения такого рода уравнений просто отбрасывают знаменатель и приравнивают числитель к нулю. Для правильного же решения следует приравнять числитель нулю, найти корни получившегося уравнения и отбросить те из них, которые обращают в нуль знаменатель.

11 *Решить уравнение* $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x$.

Перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\sin 5x}{\cos 5x} = 0,$$

откуда после элементарных преобразований имеем

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos 5x} = 0.$$

Теперь, решая уравнение $\sin 2x = 0$, получаем $x = \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Остается выбросить из этой серии решений лишние, те, для которых знаменатель $\cos 3x \cos 5x$

обращается в нуль, что происходит, очевидно, при нечетных значениях k. Следовательно, решениями исходного уравнения будут $x = \frac{k\pi}{2}$, где k — четное число: $k = 2n$, т. е. $x = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Подобным же невниманием к ОДЗ объясняются ошибки при решении уравнений, у которых левая часть разложена на множители, а в правой части — нуль. Для решения такого уравнения обычно приравнивают нулю поочередно все сомножители и полученные решения объединяют. Однако при этом решении совершенно не учитывается, что для некоторых значений x, обращающих в нуль один сомножитель, может не иметь смысла другой сомножитель, а в таком случае эти значения x не будут корнями рассматриваемого уравнения. Поэтому для правильного решения необходимо дополнительно проверить, все ли полученные значения x входят в ОДЗ. Это иногда может представить значительные трудности.

12 *Решить уравнение*

$$\sin 2x \cos^2 2x \sin^2 6x \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 3x = 0.$$

Поочередно приравниваем все сомножители к нулю и получаем в результате пять серий корней:

$$x = \frac{k\pi}{2}, \ x = (2k+1)\frac{\pi}{4}, \ x = \frac{k\pi}{6}, \ x = k\pi, \ x = (2k+1)\frac{\pi}{6},$$

где во всех формулах k — целое число.

Но это еще не ответ, ведь $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} 3x$ определены не при всех значениях x, и поэтому многие значения x из этих серий могут оказаться лишними. Рассмотрим каждую из серий.

1) $x = \frac{k\pi}{2}$. Если k четно, $k = 2l$, то $x = l\pi$ и $\operatorname{ctg} 3x$ не имеет смысла; если k нечетно, $k = 2l + 1$, то $x = l\pi + \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} x$ не имеет смысла. Таким образом, ни один угол x из первой серии не является на самом деле решением уравнения.

2) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$. Тогда $\operatorname{tg} x$, как легко видеть, имеет смысл. Кроме того, $3x = (6k + 3)\frac{\pi}{4}$, так что и $\operatorname{ctg} 3x$ также имеет смысл. Таким образом, все углы из второй серии являются решениями уравнения.

3) $x = \frac{k\pi}{6}$. По тригонометрическому кругу легко убедиться, что угол x попадает на вертикальный диаметр при $k = 6l + 3$, и, следовательно, $\operatorname{tg} x$ имеет смысл при $k \neq 6l + 3$. Далее, $3x = \frac{k\pi}{2}$ и $\operatorname{ctg} 3x$ имеет смысл только при нечетных значениях k. Следовательно, годятся только нечетные значения k, не равные $6l + 3$, т. е. числа k вида $k = 6l + 1$ и $k = 6l + 5$. Таким образом, из углов третьей серии решениями являются только углы $x = l\pi + \frac{\pi}{6}$ и $x = l\pi + \frac{5\pi}{6}$, где l — целое число.

4) $x = k\pi$. В этом случае $\operatorname{ctg} 3x$ не имеет смысла, так что в данной серии нет решений.

5) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{6}$. Угол x попадает на вертикальный диаметр при $k = 3l + 1$, и, следовательно, $\operatorname{tg} x$ будет иметь смысл при $k = 3l$ и $k = 3l + 2$. Таким образом, из пятой серии углов остаются лишь $x = l\pi + \frac{\pi}{6}$ и $x = l\pi + \frac{5\pi}{6}$, где l — целое число, т. е. те же углы, что и в третьей серии.

Окончательный ответ можно записать в виде

$$x = (2n + 1)\frac{\pi}{4}, \quad x = (6n + 1)\frac{\pi}{6}, \quad x = (6n + 5)\frac{\pi}{6},$$

где n — целое число.

Приобретение посторонних корней не всегда происходит так явно, как в двух последних примерах. Иногда причиной этого являются совершенно безобидные на первый взгляд рассуждения.

Например, рассмотренное в примере 11 уравнение $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x$ часто решают следующим образом: «Тангенсы двух углов равны в том и только в том случае, когда разность этих углов равна целому кратному π; следовательно, $2x = k\pi$, $x = \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$». Однако, как мы уже знаем, этот ответ неверен. В чем же ошибка?

Дело объясняется просто: утверждение, на котором основано это решение, неверно, хотя оно и очень распространено среди поступающих. Действительно, если $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$, то $\alpha - \beta = k\pi$, где k — целое число, но обратное утверждение неверно: если $\alpha - \beta = k\pi$, то равенство $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ может просто не иметь смысла $\left(\text{например, при } \alpha = \frac{\pi}{2},\ \beta = -\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому при замене уравнения $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x$ на $2x = k\pi$ потери корней не произошло, но посторонние корни появились.

Рассмотрим теперь некоторые источники *потери корней*. Чаще всего поступающие теряют корни, заменяя данное уравнение новым, имеющим более узкую ОДЗ. К такому сужению ОДЗ приводят, как мы ниже увидим, и логарифмические, и тригонометрические формулы, а также некоторые популярные «словесные» рассуждения.

Как мы уже отмечали, замена логарифма произведения на сумму логарифмов (правило I из § 1, В раздела I) приводит к сужению ОДЗ, так же как и логарифмирование степени (правило III). Чтобы не допускать сужения, пользуются не правилами I и III, а правилами I* и III*, применение которых может разве лишь расширить ОДЗ, т. е. привести к появлению посторонних корней. Но как исключать посторонние корни, мы уже видели выше.

(13) *Решить уравнение*

$$\frac{3}{2}\log_{1/4}(x+2)^2 - 3 = \log_{1/4}(4-x)^3 + \log_{1/4}(x+6)^3.$$

При решении этого уравнения многие поступающие допустили только что указанную ошибку. Вот их неправильное рассуждение: «Пользуясь формулой логарифмирования степени, приведем данное уравнение к виду

$$\log_{1/4}(x+2) - 1 = \log_{1/4}(4-x) + \log_{1/4}(x+6)$$

или

$$\log_{1/4} 4(x+2) = \log_{1/4}(4-x)(x+6).$$

Потенцируя, получаем уравнение

$$4x + 8 = (4 - x)(x + 6),$$

корни которого $x_1 = -8$, $x_2 = 2$. Число -8 не входит в ОДЗ данного уравнения, а число 2 является его корнем».

Если внимательно проанализировать первый шаг этого решения, то становится ясно, что его авторы пользовались правилом III, но не учитывали, что оно справедливо лишь при определенных ограничениях. Поэтому при замене $\log_{1/4}(x+2)^2$ на $2\log_{1/4}(x+2)$ они предполагали фактически, что $x + 2 > 0$, сужая тем самым ОДЗ данного уравнения. Это могло привести к потере корней, и действительно, в приведенном «решении» потерян корень $x = 1 - \sqrt{33}$.

Правильное решение должно было бы сразу использовать правило III*; тогда бы получилось уравнение

$$4|x + 2| = (4 - x)(x + 6),$$

которое легко решается (см. § 2 раздела I); его корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 1 - \sqrt{33}$. Оба эти числа, как можно проверить подстановкой или проверкой на вхождение в ОДЗ, являются корнями исходного уравнения.

Сужение ОДЗ, а следовательно, и *потеря корней может произойти и при переходе к новому основанию логарифмов.*

(14) *Решить уравнение*

$$\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0.$$

Приведем решение, данное многими поступающими. Воспользуемся правилом перехода, взяв x в качестве нового основания логарифмов:

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x 0,5x} - \frac{14\log_x x^3}{\log_x 16x} + \frac{40\log_x\sqrt{x}}{\log_x 4x} = 0.$$

Однако полученное уравнение не имеет смысла при $x = 1$, в то время как исходное не только имеет смысл при $x = 1$, но и имеет единицу своим корнем. Именно на этом шагу большинством был потерян корень $x = 1$.

Следовательно, рассуждать надо так: мы хотим перейти к основанию x: чтобы это сделать, надо быть уверенным, что $x > 0$ и $x \neq 1$. Так как все x из ОДЗ нашего уравнения положительны, то условие $x > 0$ выполнено; с другой стороны, единица входит в ОДЗ, и подстановка показывает, что $x = 1$ является корнем. Итак, один корень исходного уравнения найден: $x = 1$. Будем искать корни, отличные от единицы. Тогда мы можем перейти к основанию x, уже не теряя корней.

Дальнейшее решение не представляет труда: пользуясь свойствами логарифмов и обозначая $\log_x 2$ через y, приходим к квадратному уравнению $2y^2 + 3y - 2 = 0$, корни которого $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -2$. Отсюда $x_1 = 4$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; оба эти значения являются корнями исходного уравнения. Следовательно, исходное уравнение имеет три корня.

Довольно распространенной и очень грубой ошибкой, приводящей к потере корней, является *сокращение обеих частей уравнения на общий множитель.* Ясно, что при этом могут быть потеряны корни, которые обращают в нуль этот общий множитель.

В этих случаях лучше всего перенести все в левую часть, вынести общий множитель за скобки и рассмотреть два случая: 1) общий множитель равен нулю; 2) общий множитель не равен нулю — тогда обязательно равно нулю выражение в скобках. Можно также рассмотреть сначала случай, когда общий множитель равен нулю, а затем на него сократить.

15 *Найти все решения уравнения*

$$x^2 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}.$$

Рассмотрим два случая.

а) Пусть $x \geqslant 3$. В этом случае имеем уравнение

$$x^2 2^{x+1} + 2^{x-1} = x^2 2^{x+1} + 2^{x-1},$$

которое удовлетворяется, очевидно, при любом x. Поэтому в рассматриваемом случае решениями данного уравнения будут $x \geqslant 3$.

б) Пусть $x < 3$. Тогда уравнение приводится к виду

$$2^{x-1}(4x^2-1)=2^{5-x}(4x^2-1).$$

Именно в этом месте многие поступающие, увлекшись, видимо, показательными, «главными» выражениями, пренебрегли «незначительными» степенными и просто-напросто на них сократили, получив уравнение $2^{x-1} = 2^{5-x}$. После этого они получили корень $x = 3$ и пришли к выводу, что в случае б) исходное уравнение не имеет решений.

Между тем, перед сокращением на $4x^2 - 1$ следовало рассмотреть случай $4x^2 - 1 = 0$. Тогда были бы найдены корни $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$, удовлетворяющие условию б). Таким образом, решения данного уравнения: любое $x \geqslant 3$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Очень часто при решении уравнений поступающие неправильно пользуются следующим утверждением: «Если две степени равны и их основания равны и *отличны от* 0 *и* 1, то и показатели степеней равны». Как правило, они забывают о выделенном курсивом ограничении. В результате теряются корни — именно те, при которых основание равно 0 или 1.

16 *Решить уравнение* $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

Перепишем уравнение в виде $x^{\sqrt{x}} = x^{\frac{x}{2}}$ Итак, степени равны. Чтобы не потерять корней, посмотрим, может ли основание быть равным 0 или 1. Так как выражение 0^0 не имеет смысла, то число 0 не входит в ОДЗ, а потому $x = 0$ не является корнем уравнения. Напротив, $x = 1$, очевидно, является корнем. Будем теперь искать корни, отличные от 0 и 1. Тогда, применяя указанное правило, получим $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$, откуда находим второй корень уравнения $x = 4$.

7 – 4142

17 *Найти все действительные x, удовлетворяющие уравнению*

$$(4-x^2)^{-\frac{\cos^2 x}{\cos x+1}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Переписав данное уравнение в виде

$$(4-x^2)^{-\frac{\cos^2 x}{\cos x+1}} = (4-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

рассмотрим два случая:

$$1)\ 4-x^2=1; \qquad 2)\ -\frac{\cos^2 x}{\cos x+1} = -\frac{1}{2}.$$

Третий случай — когда $4-x^2=0$ — здесь невозможен, так как выражение $0^{-\frac{1}{2}}$ не имеет смысла.

В первом случае $x^2=3$, т. е. $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$. Однако эти корни получены нами совершенно изолированно от исходного уравнения, и поэтому есть опасность, что исходному уравнению они не удовлетворяют — из-за того, что не входят в его ОДЗ. Убедимся, что они входят в ОДЗ исходного уравнения.

Для этого достаточно показать, что $\cos(\pm\sqrt{3})+1\neq 0$, или $\cos\sqrt{3}\neq -1$. Но уравнение $\cos x=-1$ имеет серию корней $x=(2k+1)\pi$, где k — целое число. Ясно, что число $\sqrt{3}$ не входит в эту серию, так как $\frac{\pi}{2}<\sqrt{3}<\pi$.

Во втором случае мы приходим к уравнению $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$, распадающемуся на два:

$$\cos x = 1, \quad \cos x = -\frac{1}{2}. \tag{9}$$

Отсюда имеем три серии корней:

$$x=2k\pi, \quad x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \quad x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,$$

где k — целое число. Разумеется, следует еще из получившихся серий исключить те корни, которые не входят в ОДЗ исходного уравнения, т. е. не удовлетворяют неравенству $4 - x^2 > 0$ (условию $\cos x + 1 \neq 0$ все корни этих серий удовлетворяют автоматически, поскольку они получены как решения уравнений (9)).

Нетрудно проверить, что из первой серии остается только $x_3 = 0$, а во второй и третьей сериях таких корней нет. Таким образом, исходное уравнение имеет три корня: $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = 0$.

Иногда приходится слышать и такое ошибочное утверждение: «Если степень положительного числа равна 1, то показатель степени равен нулю». Это верно лишь при условии, что *основание отлично от* 1. А если основание равно 1, то при любом показателе степень будет равна 1.

(18) *Решить уравнение* $|\cos x|^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1$.

Будем рассуждать так: если $|\cos x| = 1$, то степень равна 1, каков бы ни был показатель. Если же $|\cos x| \neq 1$, то показатель непременно должен быть равен нулю, что в данном уравнении имеет место при $\sin x = \frac{1}{2}$ и при $\sin x = 1$. Таким образом, наше уравнение распадается на три:

$$|\cos x| = 1, \quad \sin x = \frac{1}{2}, \quad \sin x = 1.$$

Решения этих уравнений таковы:

$$x_1 = k\pi, \quad x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

где k — целое число.

Проверка показывает, что углы третьей серии не входят в ОДЗ (в левой части исходного уравнения получается 0^0, что не имеет смысла), а остальные корни удовлетворяют уравнению.

Таким образом, при пользовании правилом перехода от равенства степеней одного и того же неотрицательного основания к равенству показателей нужно рассматривать три случая: *основание степени равно* 0, *основание степени равно* 1, *показатели степеней равны*. Это рассмотрение позволяет избежать потери корней.

Однако посторонние корни при таком решении могут появиться. В самом деле, в каждом из этих случаев приходится, вообще говоря, решать уравнение, и поскольку все эти три уравнения решаются уже совершенно изолированно друг от друга, может оказаться, что некоторые их решения не будут входить в ОДЗ исходного уравнения. Так и случилось в последних двух примерах.

Следовательно, после применения правила перехода от равенства степеней к равенству показателей и после решения соответствующих уравнений обязательно надо делать проверку. При этом достаточно установить лишь, что проверяемый корень входит в ОДЗ исходного уравнения; тогда корень автоматически будет ему удовлетворять.

Часто причиной потери корней является применение тригонометрических формул. Как известно (см. § 1 раздела II), левая и правая части тригонометрической формулы могут иметь различную область допустимых значений. Таковы, например, формулы так называемой «универсальной подстановки», выражающие синус и косинус через тангенс половинного угла. В этих формулах левая часть имеет более широкую область допустимых значений, и поэтому, заменяя в уравнении левую часть формулы правой, мы сужаем его ОДЗ, т. е. рискуем потерять корни.

(19) *Решить уравнение* $\sin x - 2\cos x = 2$.

Переходя к тангенсу половинного угла, получим

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \frac{2\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 2,$$

откуда $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2$ и $x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Однако эта формула не содержит всех решений: как легко проверить, все углы $x = (2n+1)\pi$, где n — целое число, также являются решениями уравнения. Эти углы были потеряны именно при введении тангенса половинного угла. Исходное уравнение имело смысл при любом x, а второе — лишь тогда, когда $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ имеет смысл, т. е. при $x \neq (2n+1)\pi$.

Более подробные замечания в связи с тригонометрическими формулами сделаны в § 1, Б раздела II.

С вопросом о потере корней тесно связано так называемое *«решение подбором»*. Проиллюстрируем этот метод на нескольких примерах.

(20) *Решить уравнение* $3^x + 4^x = 5^x$.

Очевидно, что $x = 2$ — корень уравнения. Решено ли уже уравнение? Разумеется, нет: вдруг мы не заметили еще один корень? Поэтому остановиться в решении на этом шаге — значит сделать грубую ошибку.

Далее, разделим обе части на 5^x и представим уравнение в виде

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

Отсюда видно: если $x < 2$, то по свойству показательной функции с основанием, ме́ньшим единицы, $\left(\frac{3}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2$, $\left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{4}{5}\right)^2$, так что

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1;$$

следовательно, никакое значение $x < 2$ не может быть корнем уравнения. Аналогично, при $x > 2$ будем всегда иметь неравенство

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < 1.$$

Таким образом, подобранный корень $x = 2$ — единственный. Вот теперь уравнение решено — мы нашли (неважно даже, каким способом) корень и доказали, что других корней нет!

Из этого примера видно, что *«решение подбором»* — *вполне законный прием, если после угадывания каких-*

то корней мы совершенно строго докажем, что других корней нет. Таким образом, кстати, очень просто решить разобранный выше пример 1:

$$\sqrt{10 + x} - \sqrt{19 - 3x} = 3.$$

Легко подобрать корень $x = 6$. Если считать, что $x > 6$, то получим

$$\sqrt{10 + x} > \sqrt{10 + 6} = 4, \quad \sqrt{19 - 3x} < \sqrt{19 - 18} = 1,$$

т. е. при $x > 6$ левая часть уравнения больше 3. Аналогично, при $x < 6$ левая часть уравнения меньше 3. Следовательно, $x = 6$ — единственный корень уравнения.

Если же ограничиться только угадыванием корней и не доказывать, что других корней нет, то такое «решение» очень часто может привести к потере корней. Именно такая опасность кроется в следующем примере.

(21) *Решить уравнение* $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6.$

Некоторые поступающие решали это уравнение так. Переписав его в виде

$$3^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+2}} = 3^1 \cdot 2^1,$$

они подобрали корень x таким образом, чтобы показатели степеней при соответствующих основаниях оказались одинаковыми:

$$x = 1, \quad \frac{3x}{x + 2} = 1,$$

откуда и получали «ответ» $x = 1$.

Однако этот «ответ» неверен; говоря точнее, при этом рассуждении найден один корень уравнения и ничего не сказано о том, имеются ли другие корни. В самом деле, если показатели степени при соответствующих основаниях равны, то и произведения этих степеней равны, однако обратное ниоткуда не следует и просто неверно. Например, равенство

$$3^1 \cdot 2^1 = 3^2 \cdot 2^{\log_2 (2/3)}$$

справедливо, но $1 \neq 2$ и $1 \neq \log_2 \frac{2}{3}$. Поэтому рассуждение, приведенное выше, может привести к потере корней, что и произошло в рассматриваемом уравнении.

Логарифмируя обе части исходного уравнения по основанию 10, получим

$$x \lg 3 + \frac{3x}{x+2} \log 2 = \lg 6,$$

или

$$x^2 \lg 3 + x(3 \lg 2 + 2 \lg 3 - \lg 6) - 2 \lg 6 = 0.$$

Остается решить квадратное уравнение. Это можно сделать по известной формуле, но для упрощения решения мы чуть-чуть схитрим: ведь мы уже убедились подбором, что $x_1 = 1$ является корнем исходного уравнения и, следовательно, удовлетворяет равносильному ему квадратному уравнению. По теореме Виета второй корень квадратного уравнения

$$x_2 = -\frac{2\lg 6}{\lg 3} = -2 \log_3 6.$$

Итак, исходное уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = -2 \log_3 6$.

Задачи

Решить уравнения:

1. $\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \sin 2x \cos 2x \operatorname{ctg} 3x = 0.$

2. $\log_{x+1} (x^2 + x - 6)^2 = 4.$

3. $2 \log_8 (2x) + \log_8 (x^2 + 1 - 2x) = \frac{4}{3}.$

4. $\log_2 \sin x - \log_2 \cos x - \log_2 (1 - \operatorname{tg} x) - \log_2 (1 + \operatorname{tg} x) = 1.$

5. $\log_{\frac{4 - x^2 - 3x}{8}} (\cos x - \cos 3x) = \log_{\frac{4 - x^2 - 3x}{8}} \sin 2x.$

6. $\log_3 (\sqrt{x} + |\sqrt{x} - 1|) = \log_9 (4\sqrt{x} - 3 + 4|\sqrt{x} - 1|).$

7. $\sqrt{x} + \sqrt{x(x+2)} - \sqrt{(x+1)^3} = 0.$

8. $\sqrt{\sin 3x + \cos x - \sin x} = \sqrt{\cos x - \sin 2x}$.

9. $\sqrt{\cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x - 3\cos^2 x + \cos x + \frac{13}{4}} = \sqrt{3}\sin x + \frac{1}{2}$.

10. $\log_{\sin x}\left(\sin x - \frac{1}{4}\cos x\right) = 3$.

11. $(1 + \cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - 2 + \sin x = 2\cos x$.

12. $\log_3 \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} = \log_9\left(\log_9 \frac{x}{3}\right)$.

13. $\log_8 (4^{x^2 - 1} - 1) + \frac{2}{3} = \log_8 (2^{x^2 + 2} - 7)$.

14. $6 \cdot (0{,}75)^{2 - 2x - x^2} - (0{,}75)^{x^2 + 2x - 2} = 25^{\log_{125} 8} - 3$.

15. $3^{2x^2 + 6x - 9} + 4 \cdot 15^{x^2 + 3x - 5} = 3 \cdot 5^{2x^2 + 6x - 9}$.

16. $|2 + \log_{1/5} x| + 3 = |1 - \log_{1/5} x|$.

17. $\frac{\sqrt{2}\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1 + \cos 2x}} = \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{\sin x}$.

18. $\log_{1/9}\left(\frac{x}{27}\right)\log_{1/9}\left[x \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}\right] = 5\cos^2 \frac{4\pi}{3}$.

19. $\log_x \sqrt{\frac{x}{\sin^2(\pi/4)}} + \log_x \cos\frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{x+3} - 8}{2(x+1)}$.

20. $(x + 4)\log_4 (x + 1) - (x - 4)\log_2 (x - 1) = \frac{8}{3}\log_2 (x^2 - 1)$.

21. $x^2 \cdot 3^{x - 2} + 3^{\sqrt{x} + 2} = 3^x + x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}}$.

22. $5^{\sqrt{(\log_3 x + \log_5 9)\log_5 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 1{,}8}}$.

23. $7^{\log_{25}^2(5x) - 1} - x^{\log_5 7} = 0$.

24. $\log_{x^2 - 6x + 8}[\log_{2x^2 - 2x + 3}(x^2 + 2x)] = 0$.

25. $\log_{x^2 - 2x + 2}[\log_{2x^2 - 12x + 16}(x^2 + 5x)] = 0$.

26. $\log_x \sqrt[3]{4} + 3\log_x (x\sqrt[3]{2}) + \log_x^2 \sqrt[3]{4} = 12$.

27. $16^{\frac{x+5}{x-7}} = 512 \cdot 64^{\frac{x+17}{x-3}}$.

28. $9^{1 - (x - 1)^2} - 12 \cdot 3^{-(x - 1)^2} + 1 = 0$.

29. $4^{1-(x-2)^2} - 2^{3-(x-2)^2} + 1 = 0.$

30. $\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x.$ 31. $1 - \sqrt{13 + 3x^2} = 2x.$

32. $3\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2 + \operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}} = 16\sin x - \frac{10}{\sin x}.$

33. $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7\cdot 2^{-x} - 4 = 0.$

34. $4^{3x^2+x} - 8 = 2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$

35. $\log_2(x^2+7) = 5 + \log_2 x - \dfrac{6}{\log_2\left(x + \frac{7}{x}\right)}.$

36. $\log_{\sin 2x}(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 1 - \log^2_{\sin 2x} 2.$

37. $2\cdot 3^{\operatorname{tg}^2 x} + 1 = 3^{\frac{3-\cos 2x}{1+\cos 2x}}.$

38. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{\sin^2 x}{\sin x + 1}}.$

39. $\log_{5-x^2}\left(\dfrac{3\sin 2x - 2\sin x}{\sin 2x\cos x}\right) = \log_{5-x^2} 2.$

40. $\log_{x-1}\sqrt[4]{2x^2 - 8x + 9} = \frac{1}{2}.$

41. $3^{\sqrt{x^2-6}} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-\sqrt{\frac{x}{4}}} = 0.$

42. $\log_3(2\sin^2 x) - 1 = 2\log_3\cos x + \log_3 2.$

43. $3^{1/2+\log_3\cos x} - 2^{\log_2\sin x} = \sqrt{2}.$

44. $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} - 128 = 0.$

45. $64^{\frac{1}{x}} - 2^{3+\frac{3}{x}} + 12 = 0.$

46. $\frac{4}{3}\cos^2\frac{x}{2}(1 - \sqrt{\sin x}) = \sqrt{2\cos x} - \sqrt{\sin 2x}.$

47. $2(\cos x)^{5/2} - \cos 2x = 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{3}}(1 - \sqrt{\cos x}).$

48. $\log_{\sqrt{x^2-1}}(2x^2 - 4x + 2) = 2.$

49. $\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$.

50. $\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{2x+6}-\frac{9}{4}}=x+1$.

51. $\log_{\cos 2x-\sin 2x}(1-\cos x-\sin x)=1$.

52. $\log_{-2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}(\sin 2x-\sin x-1)=1$.

53. $\sqrt{x+9}+x+8=0$.

54. $\log_{1/9}(x^2-x-6)^2-\log_{1/3}(4-3x-x^2)=\log_3\frac{1}{2}$.

55. $\left[\log_2^2 x+2\log_{1/2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right](3\log_8 x-1)=$

$=2\log_2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\log_2 x^2$.

56. $5\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{\sin^2 x}+4\cdot 5^{\cos 2x}=25^{\frac{1}{2}\sin 2x}$.

57. $\sqrt{1+\sqrt{\sin 2x}}+\sqrt{1-\sqrt{\sin 2x}}=$

$=\sqrt{1+\sqrt{\cos x}}+\sqrt{1-\sqrt{\cos x}}$.

58. $\sqrt{1+\sqrt{\operatorname{ctg}2x}}+\sqrt{1-\sqrt{-\operatorname{ctg}x}}=$

$=\sqrt{1-\sqrt{\operatorname{ctg}2x}}+\sqrt{1+\sqrt{-\operatorname{ctg}x}}$.

59. $\sqrt{15+5x}-\sqrt{19-5x}=2$.

60. $\sqrt{7+5x}-\sqrt{5+4x}=\sqrt{x+2}$.

61. $2\sqrt[3]{\log_{16}^2 x}-\sqrt[3]{\log_2 x}-6=0$.

62. $\frac{3}{4}\log_{\sqrt{3}}^3 x-30\sqrt{\log_3^3 x}+36=0$.

63. $\sqrt{\cos x}+\sqrt[4]{2}\sin x=0$.

64. $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\cos x}+\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\cos x}=\frac{5}{2}$.

65. $\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}+\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\frac{17}{4}$.

66. $49^{2\log_4(x-2)}\cdot 7^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{12-x}}=49^{\log_2\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)^3}}\cdot 7^{4\log_2 x}$.

67. $5^{\log_{\sqrt{3}}(x-1)} = 25^{\log_3 \sqrt{x^2-1}} \cdot 25^{\log_9\left(\frac{x^2-1}{4x^2-7}\right)}$.

68. $9\left|\log_{2\sqrt{2}} \sqrt[3]{x-1}\right| = 4\log_4\left(\frac{7}{2} - x\right)$.

69. $\sqrt{3 + 5\,\mathrm{tg}^2 x} = 5\cos x - \sin x\,\mathrm{tg}\,x$.

70. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9(x^2+2x+4)} = 6^{\log_{1/6}(x+2)}$.

§ 6. Решение неравенств

Опыт приемных экзаменов показывает, что с решением неравенств связана бóльшая часть ошибок поступающих. В подавляющем большинстве случаев решение неравенств, предлагающихся на экзаменах, не требует какой-либо изобретательности, искусственных приемов, и поэтому поступающие, как правило, сразу видят, какие выкладки надо сделать для решения. Однако многие, проводя эти выкладки, совершают грубые ошибки, связанные с незнанием основных теоретических положений.

Между тем решение неравенства не требует практически ничего, кроме умения свести его к решению простейших неравенств, не допустив при этом ни потери, ни приобретения решений. Для этого надо знать свойства функций, изучаемых в школе, и владеть основными понятиями, связанными с равносильностью неравенств.

Основные определения, необходимые для решения неравенств, почти слово в слово повторяют соответствующие определения для уравнений (§ 5 раздела I). Отметим только два отличия в терминологии: термин «корень» для неравенств не употребляется — всегда говорят «решение»; кроме того, иногда для краткости говорят, что решением является некоторое множество значений x (например, интервал $a < x < b$) — при этом имеется в виду, что решением является всякое значение x из этого множества.

Необходимо иметь в виду, что решение неравенств по сравнению с решением уравнений имеет свои особенности: одни и те же преобразования в применении к уравнениям и к неравенствам приводят к разным результатам. Например, при умножении обеих частей уравнения на некоторый отличный от нуля множитель, имеющий смысл в ОДЗ, уравнение заменяется равносильным, а для неравенства указанных требований на множитель недостаточно — надо еще требовать, чтобы он был положителен в ОДЗ. Точно так же возведение обеих частей уравнения в квадрат не приводит к потере корней, а то же самое преобразование неравенства может привести и к приобретению, и к потере решений. К сожалению, поступающие забывают об этих особенностях.

Как ни удивительно, но большое количество ошибок допускается поступающими при решении простейших неравенств. Это происходит, по-видимому, именно из-за формально понимаемой аналогии между уравнениями и неравенствами. Рассуждение здесь примерно такое: «Поскольку решение уравнения $\log_{1/2} x = 1$ есть $x = \frac{1}{2}$, то решение неравенства $\log_{1/2} x > 1$ — значения $x > \frac{1}{2}$». Аналогично, решения неравенства $\left(\frac{1}{5}\right)^x < 2$ записываются в виде $x < \log_{1/5} 2$ и т. п. Между тем решения двух только что приведенных неравенств иные — у первого $0 < x < \frac{1}{2}$, у второго $x > \log_{1/5} 2$, так что «аналогия» с уравнениями привела к неверным ответам.

Решение *алгебраических неравенств* первой и второй степени обычно не вызывает затруднений у поступающих. Вопрос о решении неравенств, содержащих абсолютную величину, разобран в § 2 раздела I. Поэтому здесь мы остановимся лишь на простейших показательных и логарифмических неравенствах.

При решении простейших *показательных неравенств* надо помнить о том, что свойства показательной функции различны при основаниях, бóльших или меньших единицы.

1 *Решить неравенство* $-1 \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^x < 2$.

Решить данное двойное неравенство — значит найти все значения x, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant -1 \text{ и } \left(\frac{1}{3}\right)^x < 2.$$

Первое из этих неравенств выполняется при любом x, поскольку показательная функция всегда положительна.

Второе неравенство перепишем в виде

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{1/3} 2}.$$

Пользуясь свойством показательной функции (при основании, меньшем единицы, меньшее значение функции соответствует большему значению аргумента), заключаем, что это неравенство равносильно неравенству $x > \log_{1/3} 2$.

Решение исходного неравенства хорошо иллюстрируется графиком (рис. 27). Именно, решениями являются те значения x, при которых график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ лежит ниже горизонтальной прямой $y = 2$, т. е. все x правее абсциссы точки пересечения построенных графиков $\left(\text{эта абсцисса является решением уравнения } \left(\frac{1}{3}\right)^x = 2\right)$. Таким образом, решение нашего неравенства — интервал $x > \log_{1/3} 2$.

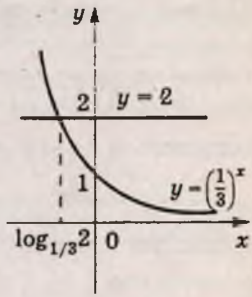


Рис. 27

При решении простейших *логарифмических неравенств* также надо помнить о том, что свойства логарифмической функции различны при основаниях, меньших или бо́льших единицы. Однако для решения этих неравенств существенно еще и то, что логарифмическая функция определена не для всех x.

Забывая об этом, многие поступающие так решают неравенство $\log_2 x < 1$: «Перепишем наше неравенство в виде $\log_2 x < \log_2 2$. При основании, бо́льшем 1, большее число имеет больший логарифм; поэтому неравенство будет выполнено для $x < 2$». Как будто в этом рассуждении все верно — и все же дан неправильный ответ.

Действительно, любое отрицательное число меньше 2, однако при отрицательных x исходное неравенство не имеет смысла (так как отрицательные числа не имеют логарифмов). Почему же появились лишние решения? Дело в том, что последнее неравенство имеет смысл для всех x, а исходное неравенство — лишь для тех x, для которых имеет смысл $\log_2 x$, т. е. для $x > 0$. А это обстоятельство при решении учтено не было. Таким образом, правильным ответом является интервал $0 < x < 2$.

На этом простом примере видно, что при таком способе решения логарифмических неравенств надо постоянно помнить об области определения логарифмической функции. Однако проще поступать иначе, непосредственно пользуясь свойствами VII и VIII логарифмов (§ 1, В раздела I).

Так, применение свойства VII сразу позволяет заменить неравенство $\log_2 x < \log_2 2$ на равносильное ему неравенство $0 < x < 2$, которое и дает ответ в этом примере.

2 *Решить неравенство* $\log_{1/2} x > \log_{1/3} x$.

Переходя в правой части к логарифму по основанию $\frac{1}{2}$ (свойство V из § 1, В раздела I), получаем равносильное неравенство

$$\log_{1/2} x\left(1 - \log_{1/3} \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Поскольку $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, то

$$\log_{1/3} \frac{1}{2} < \log_{1/3} \frac{1}{3}, \text{ т. е. } 1 - \log_{1/3} \frac{1}{2} > 0.$$

Учитывая, что $0 = \log_{1/2} 1$, получаем неравенство $\log_{1/2} x > \log_{1/2} 1$, равносильное исходному. Применяя свойство VIII логарифмов, находим решения исходного неравенства $0 < x < 1$.

3 *Решить неравенство* $\log_{1/4}(2x+3) > \log_9 27$.

Используя свойства логарифмов, можем написать

$$\log_9 27 = \log_{3^2} 3^3 = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\log_{1/4}\frac{1}{4} = \log_{1/4}\frac{1}{8}.$$

Поэтому исходное неравенство переписывается в виде

$$\log_{1/4}(2x+3) > \log_{1/4}\frac{1}{8}.$$

Согласно свойству VIII логарифмов это неравенство равносильно двойному неравенству $0 < 2x + 3 < \frac{1}{8}$, откуда получаем $-\frac{3}{2} < x < \frac{23}{16}$.

К простейшим неравенствам можно отнести и *алгебраические неравенства высоких степеней*. Некоторые поступающие решают их перебором различных случаев, т. е. переходом к решению нескольких систем неравенств. При этом многие запутываются, не зная, когда надо взять общую часть решения, а когда просто объединить решения. В то же время решать такие неравенства можно стандартным методом, так называемым *методом интервалов*.

Пусть надо решить неравенство

$$(x - x_1)(x - x_2)\ \dots\ (x - x_{n-1})(x - x_n) < 0,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — *различные действительные* числа. Будем считать, что $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$, и рассмотрим многочлен

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ \dots\ (x - x_{n-1})(x - x_n). \qquad (1)$$

При $x > x_n$ все сомножители в правой части равенства (1) положительны, а значит, при $x > x_n$ имеем $P(x) > 0$. Так как при $x_{n-1} < x < x_n$ последний сомножитель отрицателен, а все остальные — положительны, то при $x_{n-1} < x < x_n$ имеем $P(x) < 0$. Аналогично, $P(x) > 0$ при $x_{n-2} < x < x_{n-1}$ и т. д.

На этом рассуждении и основан метод интервалов. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ надо отметить на числовой прямой (рис. 28), в интервале справа от наибольшего из них поставить знак плюс, в следующем за ним справа нале-

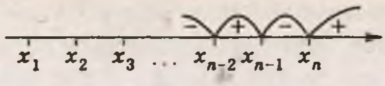


Рис. 28

во интервале поставить знак минус, затем знак плюс, затем знак минус и т. д., как это показано на рисунке 28. Тогда решением неравенства $P(x) < 0$ будет совокупность интервалов, в которых мы поставили знак минус.

(4) *Решить неравенство*

$$(x + 2)(x^2 - x)(3x + 1)(7 - 4x) < 0.$$

Совершенно очевидно, что если мы будем сводить данное неравенство к системам неравенств, то нам придется рассмотреть большое число случаев. Решим это неравенство методом интервалов.

Прежде всего надо привести неравенство к надлежащему виду. Разлагая $x^2 - x$ на множители и представляя каждый сомножитель нашего неравенства в виде $x - a$, где a — некоторое число, получим

$$[x - (-2)](x - 0)(x - 1)\left[x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right]\left(x - \frac{7}{4}\right) > 0$$

(знак неравенства изменился на противоположный, так как мы изменили знак пятого сомножителя). Отметим числа -2, 0, 1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{7}{4}$ на числовой оси (рис. 29). Тогда, применяя метод интервалов, находим решение исходного неравенства:

$$-2 < x < -\frac{1}{3}, \quad 0 < x < 1, \quad x > \frac{7}{4}.$$

Заметим, что и нестрогое неравенство

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \leqslant 0$$

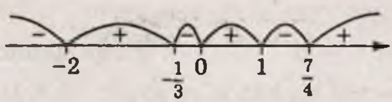


Рис. 29

также решается методом интервалов, только ответ записывается в виде промежутков $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ с включенными концами.

На вступительных экзаменах достаточно часто предлагаются неравенства, которые с помощью простых алгебраических преобразований или введением нового неизвестного сводятся к простейшим неравенствам.

(5) *Решить неравенство* $2^{2x-1} > 2^{x-1} + 1$.

Обозначая 2^x через y, перепишем неравенство так:

$$y^2 - y - 2 > 0.$$

Это квадратное неравенство справедливо для $y > 2$ и $y < -1$. Подставляя 2^x вместо y, получаем, что исходное неравенство будет справедливо для всех x, удовлетворяющих неравенству $2^x > 2$, и для всех x, удовлетворяющих неравенству $2^x < -1$. Второе из них никогда не удовлетворяется, а решая первое, получаем ответ: $x > 1$.

(6) *Решить неравенство* $\log_{100} x^2 + \log_{10}^2 x < 2$.

Так как $x > 0$, то $\log_{100} x^2 = \log_{10} x$. Обозначив $\log_{10} x$ через y, можем переписать данное неравенство в виде $y^2 + y - 2 < 0$. Решениями этого квадратного неравенства служат все значения y из промежутка $-2 < y < 1$. Остается решить двойное неравенство

$$-2 < \log_{10} x < 1,$$

откуда легко находим $\frac{1}{100} < x < 10$.

(7) *Решить неравенство*

$$\frac{75 - 25^{x^2+6x-15}}{2} \geqslant 5^{x^2+6x-14}.$$

Положим $y = 5^{x^2+6x-15}$; тогда данное неравенство переписывается в виде $y^2 + 10y - 75 \leqslant 0$, откуда $-15 \leqslant$ $\leqslant y \leqslant 5$. Таким образом, исходное неравенство справедливо для тех x, которые удовлетворяют двойному неравенству

$$-15 \leqslant 5^{x^2+6x-15} \leqslant 5.$$

Но левое неравенство выполнено для всех x, а правое приводит к равносильному неравенству $x^2 + 6x - 16 \leqslant 0$, которое легко решается: $-8 \leqslant x \leqslant 2$.

(8) *Решить неравенство*

$$\log_4 (5 - 3^x) \cdot \log_2 \frac{5 - 3^x}{8} \geqslant -1.$$

Переходя в первом логарифме к основанию 2 и обозначая $\log_2 (5 - 3^x)$ через y, получаем неравенство

$$y^2 - 3y + 2 \geqslant 0,$$

откуда $y \leqslant 1$ или $y \geqslant 2$. Поэтому решение исходного неравенства сводится к решению двух неравенств:

$$\log_2 (5 - 3^x) \leqslant 1, \quad \log_2 (5 - 3^x) \geqslant 2. \qquad (2)$$

Первое из них равносильно двойному неравенству

$$0 < 5 - 3^x \leqslant 2, \quad \text{или} \quad 3 \leqslant 3^x < 5;$$

его решение: $1 \leqslant x < \log_3 5$. Второе из неравенств (2) равносильно неравенству

$$5 - 3^x \geqslant 4, \text{ или } 3^x \leqslant 1,$$

откуда $x \leqslant 0$. Итак, решениями исходного неравенства являются $x \leqslant 0$ и $1 \leqslant x < \log_3 5$.

Наряду с неравенствами, являющимися комбинациями простейших, на вступительных экзаменах часто предлагаются неравенства, при решении которых приходится использовать различные преобразования неравенств и все связанные с ними понятия.

Покажем сначала на нескольких примерах, как используется понятие ОДЗ.

(9) *Решить неравенство* $\sqrt{x} > -1$.

Поскольку в левой части стоит неотрицательное выражение, то неравенство справедливо при всех x, для которых оно имеет смысл, т. е. при всех x из ОДЗ. Но ОДЗ этого неравенства — множество $x \geqslant 0$; это и есть решение неравенства.

(10) *Решить неравенство* $\log_{2-x}(x-3) \geqslant 5$.

ОДЗ данного неравенства определяется условиями $x - 3 > 0$, $2 - x > 0$, $2 - x \neq 1$. Однако неравенства $x - 3 > 0$ и $2 - x > 0$ не имеют общих решений. Значит, ОДЗ нашего неравенства не содержит ни одного числа, а потому неравенство не имеет решений.

(11) *Решить неравенство* $\sqrt{2 + x - x^2} > x - 4$.

ОДЗ этого неравенства есть интервал $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Таким образом, левая часть исходного неравенства принимает действительные, и притом неотрицательные значения при $-1 \leqslant x \leqslant 2$; при остальных значениях x она не имеет смысла. Однако очевидно, что правая часть неравенства отрицательна для всех $x < 4$ и, в частности, для всех x из интервала $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Следовательно, решением неравенства служит интервал $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

(12) *Решить неравенство* $\sqrt{\sin x + 2\operatorname{ctg} x} < -1$.

Левая часть этого неравенства неотрицательна при любом допустимом x, и, следовательно, это неравенство не выполнено ни при одном значении x.

Из приведенных примеров видно, что дать общий рецепт, как использовать понятие ОДЗ в каждом конкретном случае, невозможно. Действительно, в примере 9 без ее вычисления мы просто не смогли бы найти решения, в примерах 10 и 11 предварительное нахождение ОДЗ позволило сразу найти ответ. Наоборот, в примере 12 отыскание ОДЗ было бы сложным и, что особенно существенно, бессмысленным делом, поскольку решений все равно нет.

Поэтому при решении более сложных примеров также иногда полезно сперва вычислить ОДЗ, а иногда это не имеет смысла делать, так как в дальнейшем оказывается, что в данном примере это будет лишним. Можно все же дать такой совет: если отыскание ОДЗ несложно, то лучше это сделать (все равно не помешает), а если сложно, то лучше отложить вычисление ОДЗ до того момента, когда она понадобится.

При решении неравенств часто приходится делать преобразования, которые могут привести к потере или к приобретению решений. Поэтому при решении неравенств, так же как и при решении уравнений, основную роль играет понятие *равносильности*. В § 5 раздела I уже разобрано понятие равносильности уравнений и показано, почему надо внимательно следить за равносильностью вновь получаемых и исходного уравнений. Для неравенств эти указания еще более существенны, чем для уравнений.

В самом деле, для уравнений часто достаточно указать, что при некотором преобразовании могут появиться посторонние корни, а затем сделать проверку. Для неравенств же проверять решения подстановкой невозможно, так как их обычно бесконечное множество. Поэтому при решении неравенств надо тщательно следить за равносильностью получаемых и исходного неравенств.

Отметим, что те преобразования, которые приводили к неравносильным уравнениям (§ 5 раздела I), приводят, естественно, и к неравносильным неравенствам.

При этом некоторые преобразования лишь расширяют или сужают ОДЗ неравенств. Для таких преобразований можно указать общий рецепт: преобразований, сужающих ОДЗ, делать нельзя, ибо при этом может произойти потеря решений; при применении преобразований, расширяющих ОДЗ, надо сначала сделать эти преобразования, а затем из решений заключительного неравенства отобрать те значения, которые входят в ОДЗ исходного неравенства; они и будут давать ответ.

Наиболее распространенные преобразования, изменяющие ОДЗ, — это «тождественные преобразования», уже отмеченные в § 5 раздела I. Кроме того, при решении неравенств часто приходится проводить и другие преобразования: освобождение от знаменателя и взятие от обеих частей неравенств некоторых функций — возведение в степень, логарифмирование, потенцирование и т. п. Ниже мы остановимся на этих преобразованиях.

Начнем с такого «безобидного» преобразования, как *освобождение от знаменателя*. Как известно, при решении уравнений освобождение от знаменателя не приводит к потере корней, а лишние корни могут появиться лишь за счет расширения ОДЗ, т. е. за счет добавления в ОДЗ тех значений неизвестного, которые обращают знаменатель в нуль.

Многие считают, что так же обстоит дело и с неравенствами. Поэтому, например, неравенство $\frac{1}{x} < 1$ часто «решают» так: «Освобождаясь от знаменателя, приходим к неравенству $1 < x$; все эти x и дают решения исходного неравенства, так как ни при одном из них знаменатель исходного неравенства не обращается в нуль».

Однако легко видеть, что исходное неравенство справедливо и при всех отрицательных x. И все эти решения терялись поступающими из-за того, что при освобождении от знаменателя в неравенствах все происходит совсем не так, как при освобождении от знаменателя в уравнениях.

На самом деле освобождение уравнения (или неравенства) от знаменателя есть умножение обеих частей уравнения (или неравенства) на выражение, стоящее в знаменателе. При этом уравнения остаются равносильными, если их умножить на выражение, не равное нулю, а для неравенств аналогичное свойство формулируется сложнее: при умножении обеих частей неравенства на положительное выражение знак неравенства не меняется, а при умножении на отрицательное выражение знак неравенства меняется на противоположный.

Поэтому, умножая в только что рассмотренном примере обе части неравенства на x, надо было подумать о том, что x может принимать не только положительные, но и отрицательные значения, и во втором случае изменить знак неравенства на противоположный.

Таким образом, если мы хотим обе части неравенства умножить на выражение, зависящее от x и принимающее как положительные, так и отрицательные значения, то следует рассмотреть два соответствующих случая.

(13) *Решить неравенство* $\frac{x-2}{x+2} \geqslant \frac{2x-3}{4x-1}$.

При решении этого неравенства многие поступающие, освобождаясь от знаменателя, писали, что его можно заменить следующим:

$$(x-2)(4x-1) \geqslant (2x-3)(x+2). \qquad (3)$$

Ясно, что это — неверное утверждение, так как такое преобразование есть, по существу, умножение обеих частей исходного неравенства на выражение $(x+2)(4x-1)$, которое может быть и отрицательным. Исходное неравенство можно заменить на неравенство (3) только тогда, когда выражение $(x+2)(4x-1)$ положительно, и поэтому надо еще рассмотреть случай, когда оно отрицательно. Таким образом, решение исходного неравенства сводится к решению систем неравенств.

Однако проще решить исходное неравенство методом интервалов. Перенесем все члены исходного неравенства в левую часть и приведем ее к общему знаменателю:

$$\frac{2(x^2-5x+4)}{(x+2)(4x-1)} \geqslant 0.$$

Корни трехчлена x^2-5x+4, т. е. $x_1=1$ и $x_2=4$, являются решениями нашего неравенства. Поэтому остается решить неравенство

$$\frac{(x-1)(x-4)}{(x+2)\left(x-\frac{1}{4}\right)} > 0. \qquad (4)$$

Умножим обе части неравенства (4) на положительное для x из ОДЗ выражение $(x+2)^2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$. Тогда получим равносильное неравенство

$$(x+2)\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)(x-4) > 0. \qquad (5)$$

К этому неравенству применим метод интервалов. Рисунок 30 показывает, что решениями неравенства (5) будут все x из промежутков $x < -2$, $\frac{1}{4} < x < 1$, $4 < x$.

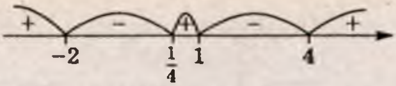


Рис. 30

Так как выше мы уже нашли решения $x = 1$ и $x = 4$ исходного неравенства, то получаем ответ:

$$x < -2, \quad \frac{1}{4} < x \leqslant 1, \quad x \geqslant 4.$$

В только что приведенном решении мы заменили неравенство (4) неравенством (5), умножая первое из них на квадрат знаменателя. Аналогично можно убедиться, что вообще неравенства

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \text{и} \quad P(x)Q(x) > 0$$

равносильны. Поэтому для решения неравенства

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, применяют метод интервалов к неравенству $P(x)Q(x) > 0$, которое явно даже не выписывают; достаточно корни многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ отметить на числовой оси и установить знак дроби на каждом из получившихся интервалов.

(14) *Решить неравенство* $\frac{4x^2 + 8x - 5}{x + 1} < 0.$

Разложив квадратный трехчлен $4x^2 + 8x - 5$ на множители, перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x + 1} < 0.$$

Применив теперь метод интервалов, сразу получаем ответ:

$$x < -\frac{5}{2}, \quad -1 < x < \frac{1}{2}.$$

(15) *Решить неравенство*

$$2\log_7 x - \log_x 49 < 3.$$

Поскольку $\log_x 49 = \dfrac{2}{\log_7 x}$, то после замены $y = \log_7 x$ данное неравенство примет вид

$$2y - \frac{2}{y} < 3.$$

Перенося все члены в левую часть и приводя к общему знаменателю, получим

$$\frac{2y^2 - 3y - 2}{y} < 0 \quad \text{или} \quad \frac{\left(y + \frac{1}{2}\right)(y - 2)}{y} < 0.$$

Методом интервалов находим решение последнего неравенства: $y < -\dfrac{1}{2}$, $0 < y < 2$. Поэтому остается решить два неравенства

$$\log_7 x < -\frac{1}{2}, \quad 0 < \log_7 x < 2.$$

Следовательно, решениями исходного неравенства будут интервалы

$$0 < x < \frac{1}{\sqrt{7}}, \quad 1 < x < 49.$$

(16) *Решить неравенство* $\log_x 4 \cdot \log_2 \dfrac{5 - 12x}{12x - 8} \geqslant 2.$

Используя свойства логарифмов, перепишем неравенство в равносильном виде

$$\frac{\log_2 \dfrac{5 - 12x}{12x - 8}}{\log_2 x} \geqslant 1. \tag{6}$$

Это неравенство можно решить обычным способом: перенести все члены в левую часть, привести к общему знаменателю и рассмотреть две соответствующие системы. Однако в данном случае выкладки можно значительно сократить, если привлечь соображения, связанные с ОДЗ неравенства (6).

Именно, ОДЗ неравенства (6) определяется условиями

$$x > 0, \quad x \neq 1, \quad \frac{5-12x}{12x-8} > 0,$$

откуда $\frac{5}{12} < x < \frac{3}{4}$. Но тогда в ОДЗ справедливо неравенство $\log_2 x < 0$ и, следовательно, неравенство (6) в ОДЗ равносильно неравенству

$$\log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \leqslant \log_2 x, \quad \text{или} \quad \frac{5-12x}{12x-8} \leqslant x.$$

Последнее неравенство можно решить методом интервалов; однако знание ОДЗ и здесь позволяет поступить проще. В самом деле, в ОДЗ имеем $12x - 8 < 0$, а потому мы получаем неравенство

$$5 - 12x \geqslant x(12x - 8),$$

откуда $-\frac{5}{6} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Из этих значений x решениями исходного неравенства являются лишь те, которые входят в ОДЗ исходного неравенства, или, что то же самое, в ОДЗ неравенства (6). Таким образом, исходное неравенство имеет решения $\frac{5}{12} < x \leqslant \frac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь *возведение в степень*. В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующим утверждением.

Теорема. *Если $f(x) \geqslant 0$ и $\varphi(x) \geqslant 0$ на некотором множестве значений x, то неравенства*

$$f(x) > \varphi(x) \quad \text{и} \quad [f(x)]^2 > [\varphi(x)]^2$$

равносильны на этом множестве.

Доказательство. Пусть x_0 — произвольное решение первого неравенства из рассматриваемого множества значений x. Если $\varphi(x_0) > 0$, то из неравенства $f(x_0) > \varphi(x_0)$ на основании теоремы о возведении в степень числовых неравенств следует неравенство $[f(x_0)]^2 > [\varphi(x_0)]^2$. Если же $\varphi(x_0) = 0$, то очевидно, что из неравенства $f(x_0) > 0$

вытекает, что $[f(x_0)]^2 > 0$. Тем самым доказано, что всякое решение неравенства $f(x) > \varphi(x)$, удовлетворяющее условиям $f(x) \geqslant 0$, $\varphi(x) \geqslant 0$, является решением неравенства $[f(x)]^2 > [\varphi(x)]^2$.

Совершенно аналогично доказывается и обратное, что всякое решение неравенства $[f(x)]^2 > [\varphi(x)]^2$, удовлетворяющее условиям $f(x) \geqslant 0$, $\varphi(x) \geqslant 0$, является решением неравенства $f(x) > \varphi(x)$.

Заметим, что в формулировке теоремы строгие неравенства $f(x) > \varphi(x)$ и $[f(x)]^2 > [\varphi(x)]^2$ можно заменить на нестрогие: $f(x) \geqslant \varphi(x)$ и $[f(x)]^2 \geqslant [\varphi(x)]^2$. Доказательство этого факта проводится аналогично.

При возведении в степень уравнения, как показано в § 5 раздела I, можно лишь приобрести посторонние решения, причем приобретаются они как за счет расширения ОДЗ, так и тогда, когда не учитываются знаки обеих частей уравнения. Аналогично, и при решении неравенств можно приобрести лишние решения, причем они также приобретаются как за счет расширения ОДЗ, так и в случае, когда не учтены знаки обеих частей неравенства.

Однако, в отличие от уравнений, при возведении в степень неравенства можно и *потерять* решения. Поступающие же, основываясь на неправильно понимаемой аналогии с уравнениями, часто считают, что этого не может быть.

Покажем на примерах, как можно приобрести или потерять решения при возведении неравенств в степень. Начнем с примера, в котором можно получить лишние решения за счет расширения ОДЗ.

(17) *Решить неравенство*

$$\sqrt{(x-3)(2-x)} < \sqrt{4x^2 + 12x + 11}.$$

Некоторые поступающие дали такое «решение»: «Поскольку правая и левая части этого неравенства неотрицательны, то неравенство можно возвести в квадрат и получить равносильное ему неравенство $5x^2 + 7x + 17 > 0$. Квадратный трехчлен в левой части этого неравенства не имеет действительных корней, а потому это неравенство справедливо для всех действительных x. Следовательно, и исходное неравенство справедливо для всех x». Это рассуждение кажется грамотным, однако оно имеет существенный дефект. Оно будет верным лишь в ОДЗ исходного неравенства.

Правильное решение должно быть таким: в ОДЗ обе части исходного неравенства неотрицательны; поэтому в ОДЗ оно равносильно неравенству $5x^2 + 7x + 17 > 0$, а значит, справедливо для всех x из ОДЗ. Теперь надо найти ОДЗ исходного неравенства и тем самым получить ответ: $2 \leqslant x \leqslant 3$.

В следующем примере лишние решения получаются не за счет расширения ОДЗ, а вследствие возведения в степень без исследования знаков обеих частей неравенства.

(18) *Решить неравенство* $x + 1 > \sqrt{x + 3}$.

Вот пример рассуждения, при котором получаются лишние решения: «ОДЗ нашего неравенства: $x \geqslant -3$. Для любого x из ОДЗ справа стоит неотрицательное число, значит, слева стоит положительное число. Поэтому после возведения в квадрат получим равносильное неравенство $x^2 + x - 2 > 0$, решения которого $x > 1$, а также $x < -2$. Учитывая ОДЗ исходного неравенства, получаем ответ: $x > 1$, $-3 \leqslant x < -2$».

На самом деле все x из промежутка $-3 \leqslant x < -2$ не являются решениями исходного неравенства. Дело в том, что для x из ОДЗ правая часть действительно неотрицательна, зато левая часть при некоторых значениях x из ОДЗ — отрицательна. Ясно, что для этих x неравенство не выполняется, т. е. среди них нет решений нашего неравенства. И искать решения исходного неравенства надо среди тех x из ОДЗ, для которых левая часть неравенства неотрицательна, т. е. среди $x \geqslant -1$.

Вот для этих значений x обе части неравенства действительно неотрицательны, его можно возвести в квадрат, получить неравенство $x^2 + x - 2 > 0$, которое равносильно исходному на множестве $x \geqslant -1$. Теперь надо из решений неравенства $x^2 + x - 2 > 0$ выбрать те, которые удовлетворяют условию $x \geqslant -1$; они и будут решениями исходного неравенства: $x > 1$.

Ошибка в приведенном выше рассуждении состоит в том, что произошла незаметная для поступающего подмена понятий. Действительно, для любого x, являющегося *решением* исходного неравенства, справа стоит неотрицательное число, а слева — положительное число. Однако не все x из ОДЗ будут решениями исходного неравенства, а потому не для всех x из ОДЗ слева будет положительное число. Слова «для любого x, являющегося решением», оказались замененными словами «для любого x из ОДЗ», и это привело к ошибке.

19 *Решить неравенство*

$$4^{\frac{3}{2}x} + 2^{x-\sqrt{x}} < 3\cdot 2^{1-x-2\sqrt{x}}.$$

Умножив обе части неравенства на выражение $2^{x+2\sqrt{x}}$, положительное в ОДЗ, получим равносильное неравенство

$$2^{4x+2\sqrt{x}} + 2^{2x+\sqrt{x}} < 6.$$

Обозначив 2^{2x+2} через y, придем к квадратному неравенству $y^2 + y - 6 < 0$, решения которого $-3 < y < 2$. Теперь следует решить двойное неравенство

$$-3 < 2^{2x+\sqrt{x}} < 2,$$

равносильное, как легко видеть, неравенству

$$2x + \sqrt{x} < 1.$$

Последнее неравенство перепишем в виде

$$\sqrt{x} < 1 - 2x; \qquad (7)$$

его ОДЗ состоит из всех $x \geqslant 0$. Ясно, что среди таких значений x, для которых $1 - 2x < 0$, т. е. $x > \frac{1}{2}$, решений неравенства нет. Поэтому будем искать решения неравенства (7) в промежутке $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Но для этих

значений x, согласно доказанной выше теореме, неравенство (7) равносильно квадратному неравенству $4x^2 - 5x + 1 > 0$, которое справедливо при $x < \frac{1}{4}$ и при $x > 1$. Однако в промежуток $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ входят лишь значения $0 \leqslant x < \frac{1}{4}$; это и есть все решения исходного неравенства.

20 *Решить неравенство*

$$\sqrt{4 - \sqrt{1-x}} > \sqrt{2-x}.$$

Трудности в этом примере начинаются с вычисления области допустимых значений. Она определяется из условий: $2 - x \geqslant 0$, $1 - x \geqslant 0$, $4 \geqslant \sqrt{1-x}$. Первые два из этих неравенств справедливы при $x \leqslant 1$. Но для этих x обе части третьего неравенства неотрицательны, поэтому его можно возвести в квадрат и получить равносильное неравенство $x \geqslant -15$. Итак, ОДЗ исходного неравенства: $-15 \leqslant x \leqslant 1$.

В ОДЗ обе части исходного неравенства (8) неотрицательны, поэтому после возведения в квадрат получим равносильное в ОДЗ неравенство

$$2 + x > \sqrt{1-x}. \qquad (9)$$

Для всех x, удовлетворяющих условию $x < -2$ и входящих в ОДЗ, левая часть неравенства (9) отрицательна, а правая — неотрицательна. Значит, среди этих x нет решений неравенства (8).

Остается рассмотреть значения x из промежутка $-2 \leqslant x \leqslant 1$. Для этих x обе части неравенства (9) неотрицательны, а потому после возведения в квадрат получим неравенство $x^2 + 5x + 3 > 0$, равносильное исходному на множестве $-2 \leqslant x \leqslant 1$. Это неравенство имеет своими решениями

$$x > \frac{-5+\sqrt{13}}{2} \text{ и } x < \frac{-5-\sqrt{13}}{2}.$$

Теперь для получения ответа надо из этих решений отобрать те, которые попадают в промежуток $-2 \leqslant x \leqslant 1$. Это будут все x из промежутка

$$\frac{-5 + \sqrt{13}}{2} < x \leqslant 1;$$

они-то и являются решениями исходного неравенства.

Заметим, что если бы мы не учли ОДЗ, то приобрели бы лишние решения, например, все $x > 1$, а если бы не учли, что неравенство (9) имеет решения лишь для $-2 \leqslant x \leqslant 1$, то также прибрели бы лишние решения, например, все $x < \dfrac{-5 - \sqrt{13}}{2}$.

Теперь приведем примеры, показывающие, что при возведении неравенства в степень можно потерять решения.

21 *Решить неравенство* $\sqrt{x^2 + x} > 2x - 1$.

Если сразу возвести это неравенство в квадрат, то, даже учитывая ОДЗ, мы все равно потеряем решения. Действительно, ОДЗ этого неравенства состоит из двух промежутков $x \geqslant 0$ и $x \leqslant -1$. После возведения в квадрат получим неравенство $x^2 + x > 4x^2 - 4x + 1$, решениями которого будут все x из промежутка

$$\frac{5 - \sqrt{13}}{6} < x < \frac{5 + \sqrt{13}}{6}.$$

Некоторые поступающие, убедившись, что все полученные x входят в ОДЗ, написали, что это и есть ответ. На самом деле здесь потеряны решения

$$x \leqslant -1 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{5 - \sqrt{13}}{6}.$$

Легко убедиться, что для любого числа из этих промежутков левая часть исходного неравенства неотрицательна, а правая — отрицательна.

Правильное решение таково. ОДЗ данного неравенства состоит из всех $x \leqslant -1$, а также из всех $x \geqslant 0$. Левая его часть в ОДЗ неотрицательна, а правая может быть и положительной, и отрицательной. Очевидно, что для тех x из ОДЗ, для которых правая часть отрицательна, исходное неравенство будет справедливо. Значит, все $x \leqslant -1$, а также все x из промежутка $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ являются решениями исходного неравенства.

Рассмотрим теперь значения $x \geqslant \frac{1}{2}$. Для всех этих x обе части исходного неравенства неотрицательны, поэтому неравенство можно возвести в квадрат и получить равносильное для всех $x \geqslant \frac{1}{2}$ неравенство

$$x^2 + x > 4x^2 - 4x + 1.$$

Решениями последнего неравенства будут все x из промежутка $\frac{5-\sqrt{13}}{6} < x < \frac{5+\sqrt{13}}{6}$. Решениями же исходного неравенства в этом случае будут все x из промежутка

$$\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{5+\sqrt{13}}{6}.$$

Объединяя эти два случая, получаем, что решениями исходного неравенства будут все $x \leqslant -1$, а также все x из промежутка $0 \leqslant x < \frac{5+\sqrt{13}}{6}$.

22 *Решить неравенство*

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

ОДЗ данного неравенства состоит из двух промежутков: $x \leqslant -2$ и $x \geqslant -1$. В ОДЗ обе части нашего неравенства неотрицательны, поэтому после возведения в квадрат получим равносильное в ОДЗ неравенство

$$2x < \sqrt{x^2 - x + 1}. \qquad (10)$$

а) Для $x \leqslant -2$ и $-1 \leqslant x < 0$ неравенство (10) справедливо, так как для каждого из этих x слева стоит отрицательное число, а справа положительное. Значит, все эти x являются решениями исходного неравенства.

б) Для $x \geqslant 0$ обе части неравенства (10) неотрицательны, а потому после возведения в квадрат получаем равносильное для этих x неравенство $3x^2 + x - 1 < 0$. Решениями последнего неравенства будут все x из промежутка $\frac{-1-\sqrt{13}}{6} < x < \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$. Учитывая условие б), получаем, что во втором случае решениями исходного неравенства будут все x из промежутка

$$0 \leqslant x < \frac{-1+\sqrt{13}}{6}.$$

Объединяя оба случая, получаем ответ:

$$x \leqslant -2, \quad -1 \leqslant x < \frac{-1+\sqrt{13}}{6}.$$

Заметим, что те поступающие, которые не рассматривали случаи а) и б), а сразу возводили неравенство (10) в квадрат, естественно, потеряли часть решений. Дело, видимо, в том, что в начале решения неравенства уже один раз исследовались знаки левой и правой частей, и поэтому при втором возведении в квадрат притупляется «бдительность».

Рассмотрим два примера на *потенцирование* неравенств.

(23) *Решить неравенство* $\log_{x-1} \frac{2(x-2)(x-4)}{x+5} \geqslant 1$.

Так как основание логарифма содержит x и так как свойства логарифмической функции различны при основании, большем или меньшем единицы, то придется рассмотреть два случая.

а) Пусть $x - 1 > 1$, т. е. $x > 2$. В этом случае исходное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{2(x-2)(x-4)}{x+5} \geqslant x - 1. \qquad (11)$$

Так как из условия а) следует, что $x + 5 > 0$, то для рассматриваемых значений x неравенство (11) равносильно неравенству

$$2(x-2)(x-4) \geqslant (x-1)(x+5)$$

или $x^2 - 16x + 21 \geqslant 0$. Решая последнее неравенство с учетом условия а), получаем $x \geqslant 8 + \sqrt{43}$.

б) Пусть $0 < x - 1 < 1$, т. е. $1 < x < 2$. В этом случае исходное неравенство равносильно двойному неравенству

$$0 < \frac{2(x-2)(x-4)}{x+5} \leqslant x - 1. \qquad (12)$$

Из условия б) так же, как и выше, следует, что $x + 5 > 0$, а потому для рассматриваемых значений x неравенство (12) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x-2)(x-4) > 0, \\ 2(x-2)(x-4) \leqslant (x-1)(x+5). \end{cases}$$

Решая эту систему с учетом условия б), находим $8 - \sqrt{43} \leqslant$ $\leqslant x < 2$.

Объединяя случаи а) и б), получаем, что исходное неравенство выполняется при

$$8 - \sqrt{43} \leqslant x < 2, \quad x \geqslant 8 + \sqrt{43}.$$

(24) *Решить неравенство*

$$\log_{\frac{x^2 - 18x + 91}{90}} \left(5x - \frac{3}{10}\right) \leqslant 0. \qquad (13)$$

При решении этого неравенства, как и в предыдущей задаче, необходимо рассмотреть два случая. Однако оформить решение можно несколько иначе.

Как известно, $\log_a b$ меньше или равен нулю в двух случаях: если $0 < a < 1$ и $b \geqslant 1$ или если $a > 1$ и $0 < b \leqslant 1$. Поэтому число x является решением неравенства (13), если это число удовлетворяет одной из следующих двух систем:

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{x^2 - 18x + 91}{90} < 1, \\ 5x - \dfrac{3}{10} \geqslant 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2 - 18x + 91}{90} > 1, \\ 0 < 5x - \dfrac{3}{10} \leqslant 1. \end{cases} \qquad (14)$$

Первая система (14) переписывается в виде

$$\begin{cases} x^2 - 18x + 91 > 0, \\ x^2 - 18x + 1 < 0, \\ 50x \geqslant 13 \end{cases}$$

и легко решается; ее решения $\frac{13}{50} \leqslant x < 9 + 4\sqrt{5}$. Вторая система (14) переписывается в виде

$$\begin{cases} x^2 - 18x + 1 > 0, \\ 50x - 3 > 0, \\ 50x - 13 \leqslant 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства этой системы получаем

$$x < 9 - 4\sqrt{5} \quad \text{или} \quad x > 9 + 4\sqrt{5}, \qquad (15)$$

а из последних двух неравенств —

$$\frac{3}{50} < x \leqslant \frac{13}{50}. \qquad (16)$$

Остается найти те значения x, которые удовлетворяют одновременно условиям (15) и (16), а для этого надо прежде всего выяснить, какое из чисел $9 - 4\sqrt{5}$ или $\frac{3}{50}$ больше.

Проверим, верно ли, что $9 - 4\sqrt{5} > \frac{3}{50}$. Это неравенство равносильно неравенству $4\sqrt{5} > \frac{447}{50}$, или $200\sqrt{5} < 447$. После возведения в квадрат получаем неравенство $200\,000 < 199\,809$, которое, очевидно, неверно. Но тогда из верного неравенства $199\,809 < 200\,000$, проводя преобразования в обратном порядке, заключаем, что $9 - 4\sqrt{5} < \frac{3}{50}$. Это неравенство показывает, что одновременно условиям (15) и (16) не удовлетворяет ни одно число.

Таким образом, решениями исходного неравенства являются только полученные выше решения первой системы (14).

Что касается *логарифмирования* неравенств, то легко сообразить, в каких случаях это действие приводит к равносильному неравенству. Однако следует помнить, что при непродуманном логарифмировании неравенств ОДЗ может сузиться и можно потерять решения. Поэтому перед логарифмированием всегда надо проверять, положительны ли обе части неравенства; лишь в этом случае (естественно, с учетом основания логарифма) мы будем получать равносильное неравенство.

(25) *Решить неравенство* $x^4 \cdot 7^{\log_{7^{1/3}} 5} \leqslant 5^{-\log_{1/x} 5}$.

ОДЗ этого неравенства — все $x > 0$, кроме $x = 1$. Поскольку $7^{\log_{7^{1/3}} 5} = 5^3$, а $\log_{1/x} 5 = -\log_x 5$, то наше неравенство можно переписать так:

$$x^4 \cdot 5^3 \leqslant 5^{\log_x 5}.$$

В ОДЗ обе части последнего неравенства положительны, поэтому его можно прологарифмировать по основанию 5 (большему единицы) и получить равносильное в ОДЗ неравенство

$$4 \log_5 x + 3 \leqslant \log_x 5.$$

Обозначая $\log_5 x$ через y и перенося все в левую часть, приведем это неравенство к виду

$$\frac{(y+1)(y-1/4)}{y} \leqslant 0.$$

Применяя метод интервалов, находим решение: $y \leqslant -1$, $0 < y \leqslant \frac{1}{4}$. Возвращаясь к x, получаем неравенства

$$\log_5 x \leqslant -1, \ 0 < \log_5 x \leqslant \frac{1}{4}.$$

Решая их, находим ответ: $0 < x \leqslant \frac{1}{5}$, $1 < x \leqslant \sqrt[4]{5}$.

(26) *Решить неравенство* $(x^2 + x + 1)^x < 1$.

Для любых действительных x квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ положителен, поэтому ОДЗ этого неравенства состоит из всех действительных x.

Так как обе части исходного неравенства положительны для всех x, то, прологарифмировав это неравенство по основанию 10, получим равносильное ему неравенство

$$x \lg (x^2 + x + 1) < 0.$$

Оно справедливо в двух случаях: когда x удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ \lg(x^2 + x + 1) < 0 \end{cases}$$

и когда x удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} x < 0, \\ \lg(x^2 + x + 1) > 0. \end{cases}$$

Решим первую систему неравенств. Она равносильна системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x + 1 < 1. \end{cases}$$

Поскольку решение второго неравенства системы есть $-1 < x < 0$, а решение первого $x > 0$, то эта система несовместна. Значит, в этом случае исходное неравенство не имеет решений.

Вторая система решается аналогично, ее решение $x < -1$. Отсюда получаем решение исходного неравенства: $x < -1$.

В заключение приведем задачу, в которой возникает трудность совершенно необычного характера. Естественный ход рассуждений приводит, казалось бы, к необходимости решать неравенство, которое в действительности решить школьными методами невозможно. К цели ведет обходной путь: мы докажем, что это неравенство выполняется для всех допустимых значений x.

27 *Решить неравенство*

$$4x + 8\sqrt{2 - x^2} > 4 + (x^2 - x) \cdot 2^x + 2^{x+1} x \sqrt{2 - x^2}.$$

Неравенство выглядит довольно сложным. Естественно перенести все члены в одну часть и попытаться разложить ее на множители. Испробовав несколько способов группировки, можно привести данное неравенство к виду

$$(x - 1 + 2\sqrt{2 - x^2})(2^x \cdot x - 4) < 0.$$

Это неравенство, как обычно, сводится к двум системам неравенств

$$\begin{cases} x - 1 + 2\sqrt{2 - x^2} > 0, \\ 2^x \cdot x - 4 < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 1 + 2\sqrt{2 - x^2} < 0, \\ 2^x \cdot x - 4 > 0. \end{cases} \qquad (17)$$

Многие поступающие пытались решать системы (17) стандартным путем: решить по отдельности каждое из неравенств системы, а затем взять общую часть полученных решений. Однако решение неравенств $2^x \cdot x - 4 < 0$ и $2^x \cdot x - 4 > 0$ вызывало непреодолимые трудности. И действительно, эти неравенства привычными школьными методами «не решаются». Поэтому приходится рассуждать несколько иначе: решить первое неравенство системы и исследовать знак выражения $2^x \cdot x - 4$ на найденном множестве решений.

Неравенство $x - 1 + 2\sqrt{2 - x^2} > 0$ решается стандартным способом; оно выполняется при $-1 < x \leqslant \sqrt{2}$.

Теперь на этом промежутке рассмотрим функцию $y = 2^x \cdot x - 4$; нас интересует ее знак. Ясно, что если $x \leqslant 0$, то $y < 0$; другими словами, на промежутке $-1 < x \leqslant 0$ функция y отрицательна. Пусть теперь $0 < x \leqslant \sqrt{2}$. При этих значениях x

$$2^x \cdot x - 4 \leqslant 2^x \cdot \sqrt{2} - 4 \leqslant 2^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} - 4 =$$

$$= 2^{\sqrt{2} + \frac{1}{2}} - 4 < 0,$$

поскольку $\sqrt{2} + \frac{1}{2} < 2$. Мы доказали, таким образом, что неравенство $2^x \cdot x - 4 < 0$ справедливо на всем промежутке $-1 < x \leqslant \sqrt{2}$, так что этот промежуток является решением первой системы (17).

Вторую систему (17) можно было бы решить совершенно аналогично. Но проще поступить по-другому. Как мы только что показали, функция $y = 2^x \cdot x - 4$ отрицательна при всех $x \leqslant \sqrt{2}$. В частности, она отрицательна в промежутке $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$, являющемся ОДЗ первого неравенства. Следовательно, вторая система (17) не имеет решений.

В результате получаем, что исходное неравенство справедливо при $-1 < x \leqslant \sqrt{2}$.

Задачи

Решить неравенства:

1. $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)^{x} - \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)^{-x} < 3.$

2. $(1{,}25)^{1-(\log_2 x)^2} < (0{,}64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}.$

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 \log_{1/5}(x^2 - 4/5)} < 1.$

4. $4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x\cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6.$

5. $|x|^{x^2-x-2} < 1.$

6. $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3.$

7. $\dfrac{1}{\log_2 x} \leqslant \dfrac{1}{\log_2 \sqrt{x+2}}.$

8. $\log_x \dfrac{4x+5}{6-5x} < -1.$

9. $(\log_{|x+6|} 2)\cdot \log_2(x^2-x-2) \geqslant 1.$

10. $\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} \geqslant 1.$

11. $\log_{x+5/2}\left(\dfrac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 0.$

12. $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}} \dfrac{x}{3} > 0.$

13. $\log_4(2x^2+x+1) - \log_2(2x-1) \leqslant -\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4}.$

14. $\log_{\frac{2x+1}{x^2-4}} 2 \leqslant \dfrac{1}{2}\log_{\sin(\pi/3)} \dfrac{4}{3}.$

15. $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1.$

16. $x^2 - |3x+2| + x \geqslant 0.$

17. $\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}.$

18. $\log_{x/2} 8 + \log_{x/4} 8 < \dfrac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}.$

19. $\log_{x+4}(5x+20) \leqslant \log_{x+4}(x+4)^2$.

20. $\log_{1/2}\left[5^{1+\lg x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\lg x}\right] \geqslant -1 + \lg x$.

21. $\dfrac{1-\sqrt{1-8(\log_2 x)^2}}{2\log_2 x} < 1$.

22. $\log_{x/6}(\log_x \sqrt{6-x}) > 0$.

23. $\log_2 x \cdot \sqrt{\log_x(\sqrt{x}/2)} \leqslant 1$.

24. $\log_2(5-4x) + \log_{1/2}(2x-x^2) \geqslant 2$.

25. $\log_{\cos x^2}\left(\dfrac{5}{2x} - 2x\right) > \log_{\cos x^2}(2x-1)$.

26. $\log_x\left(2x - \dfrac{3}{4}\right) > 2$.

27. $4 - x > \dfrac{1}{x-1}$.

28. $\log_{\sqrt{3x+1}} 4 > 2 - \log_{3x+1}\left(\dfrac{1}{25}\right)$.

29. $\log_{1/3}(x^2-6x+18) - 2\log_{1/3}(x-4) < 0$.

30. $4^{x+1} - 16^x < 2\log_4 8$.

31. $\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+2}} \leqslant 0$.

32. $\log_2 \sqrt{x} - 2\log_{1/4}^2 x + 1 > 0$.

33. $1 + \log_{1/2}(3x^2+2) > \log_2 \dfrac{2}{2x^2+5}$.

34. $\dfrac{2x^2+x-15}{x+2} > 0$.

35. $2\log_5 x - \log_x 125 < 1$.

36. $\dfrac{17}{x+4} < 3 - x$.

37. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} > \dfrac{1}{2-x}$.

38. $\log_3(3^{4x} - 3^{2x+1} + 3) < 2\log_9 7$.

39. $\log_{10} 10x \cdot \log_2 x < 2\log_2 10$.

40. $\dfrac{\log_8 x}{\log_2(1+2x)} \leqslant \dfrac{\log_2 \sqrt[3]{1+2x}}{\log_2 x}$.

41. $\log_9^2 x \geqslant \log_3^2 \sqrt{1-\dfrac{x}{4}}$.

42. $\log_{\frac{2x-1}{x}} 5 - \log_x 5 > 0$.

43. $25^{-x} + 5^{1-x} \geqslant 50$.

44. $\log_{-4x^2+12x-8}|4x-5| > 0$.

45. $\log_3\left(\dfrac{2^x-5}{27}\right)\log_{1/3}(2^x-5) < 2$.

46. $\log_{2x-\frac{4}{25}}\left(\frac{x^2-14x+51}{50}\right) \leqslant 0.$

47. $\log_{\frac{x^2-10x+31}{30}}\left(5x-\frac{11}{20}\right) \leqslant 0.$

48. $\sqrt{2-5x-3x^2}+2x > 2x\cdot 3^x\cdot\sqrt{2-5x-3x^2}+4x^2\cdot 3^x.$

49. $5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x > (x^2-x)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}.$

50. $\dfrac{4x^2+12x+5}{\log_6\left(x^2+2x+\frac{7}{16}\right)} > 0.$

51. $\dfrac{\log_{\sqrt{5}}\left(x-\frac{4}{7}\right)+2}{\log_8\left|x-\frac{3}{5}\right|+\frac{1}{3}} > 0.$

52. $(2x^2-3x-8)(2x^2-3x-6) < 3.$

53. $\dfrac{\log_{1/3}\sqrt{x+3}}{\log_{1/3}(x+1)} < 1.$

54. $3|x-1| > (x-1)^2+1.$

55. $\sqrt{1+\log_2(7x^2+14x+8)} \leqslant 1+\log_8(7x^2+14x+8).$

56. $\sqrt{\log_{1/3}(4x-3-x^2)} > \log_9(4x-3-x^2).$

57. $\sqrt{x-1}+x-3 \geqslant \sqrt{2(x-3)^2+2x-2}.$

58. $\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\frac{x+1}{4} < \sqrt{2x-1+\frac{(x+1)^2}{8}}.$

59. $2\log_{(2x-1)^2}10+\log_{10}|2x-1|^3 < \log_2 8.$

60. $\sqrt{x+7}-1 < \sqrt{-x-5}+\sqrt{(x+7)(-x-5)}.$

61. $\log_{\frac{1}{9x^2+6x+1}}(9x^2-6x) < -1.$

62. $5^{2x-10-3\sqrt{x-2}}-4\cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}.$

63. $9^{\frac{3}{2}x+\sqrt{x}} < 8\cdot 3^{2x+3\sqrt{x}}+3^{x+4\sqrt{x}+2}.$

64. $\log_{\frac{x-1}{x-2}}3 \geqslant \log_{\frac{1}{x}}3.$

65. $\log_{1/x}\dfrac{2(x-2)}{(x+1)(x-5)} \geqslant 1.$

66. $(5x^2 - 12x + 4)(6^x - 2) < 0$.   67. $\dfrac{2^x - 3}{3x^2 - 8x + 5} > 0$.

68. $\sqrt{-x^2 + x + 2} + 2x - 1 > 0$.

69. $\sqrt{-x^2 - 4x} + x + 1 > 0$.

70. $\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 8) + 2\sqrt{\log_2(x^2 - 2x + 8)} \geqslant 12$.

71. Определить, сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$(n^2 - 1)(n^2 - 11)(n^2 - 101)(n^2 - 1001) < 0.$$

72. Найти все целые числа x, удовлетворяющие неравенству

$$3^{\frac{5}{2}\log_3(12 - 3x)} - 3^{\log_2 x} > 83.$$

73. Верно ли утверждение, что всякое решение неравенства $\log_3(5x^2 - 21x + 7) > 1$ будет являться решением неравенства $\log_3(x^2 - 4x + 2) > 0$?

74. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$V^3(x) - 8V^2(x) + 12V(x) \leqslant 0, \text{ где } V(x) = \log_2\left(\frac{3x - 1}{2x + 1}\right).$$

75. Найти все целые числа n, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} - n + 13}\left(\frac{\sqrt{16 - n}}{\sqrt{n + 11} + 1}\right) \leqslant 0.$$

§ 7. Доказательство неравенств

Этот параграф посвящен разбору доказательств буквенных и числовых неравенств. Конечно, было бы хорошо указать некий единый метод доказательства всех неравенств. К сожалению, такого метода нет. Однако ниже указано несколько приемов, при помощи которых удается доказать большое число неравенств.

Прежде всего отметим несколько неравенств, которые часто используются при решении задач. К таким неравенствам можно отнести неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, его следствие о сумме взаимно обратных величин, а также тригонометрическое неравенство

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a\sin x + b\cos x \leqslant \sqrt{a^2+b^2}. \qquad (1)$$

Напомним неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел:

Для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}, \qquad (2)$$

причем знак равенства имеет место только в случае $a = b$.

Частным случаем неравенства (2) является неравенство

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2,$$

справедливое при всех $x > 0$; знак равенства достигается в этом неравенстве лишь для $x = 1$. Полезно запомнить словесную формулировку этого неравенства:

Сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше двух, причем она равна двум только в случае, когда оба числа равны единице.

Заметим еще, что для любого $x \neq 0$ справедливы неравенства

$$\left|x + \frac{1}{x}\right| \geqslant 2, \quad \left|\frac{1+x^2}{2x}\right| \geqslant 1. \qquad (3)$$

(1) *Доказать неравенство* $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_\pi 2} > 2.$

На основании свойств логарифмов

$$\frac{1}{\log_\pi 2} = \log_2 \pi > 0,$$

т. е. в левой части доказываемого неравенства стоит сумма двух взаимно обратных положительных чисел, отличных от единицы ($\log_2 \pi \neq 1$). А такая сумма больше двух. Значит, исходное неравенство справедливо.

(2) *Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то*

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geqslant a + b + c.$$

Воспользуемся следующими неравенствами:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b}\right) \geqslant c, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) \geqslant a, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c}\right) \geqslant b.$$

Эти неравенства справедливы, так как в каждом из них слева стоят средние арифметические, а справа — средние геометрические положительных чисел. Сложив эти неравенства почленно, получим требуемое неравенство.

(3) *Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то*

$$(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 8abc.$$

Взяв следующие неравенства (см. формулу (2)):

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}, \quad b + c \geqslant 2\sqrt{bc}, \quad a + c \geqslant 2\sqrt{ac}$$

и перемножив их почленно, получим искомое неравенство.

Прежде чем перейти к следующим примерам, сделаем одно общее замечание. Типичная ошибка, которую делают довольно часто при доказательстве неравенств, состоит в следующем. Поступающий пишет неравенство, подлежащее доказательству, затем проводит некоторые преобразования и приходит в конце концов к очевидно справедливому неравенству (например, $1 < 2$ или $(a - b)^2 \geqslant 0$), после чего делает вывод: «следовательно, неравенство доказано».

Это — грубая логическая ошибка: из того, что получено верное неравенство, совсем не следует, что исходное неравенство верно! Точнее, мы доказали следующее: если допустить, что предложенное для доказательства неравенство верно, то и неравенство, полученное в результате преобразований, также верно. Но ведь справедливость этого неравенства очевидна и без проведенных преобразований, а про неравенство, которое следовало доказать, мы так ничего и не узнали.

Логически правильно проводить рассуждения в обратном порядке. Необходимо взять некоторое очевидно справедливое неравенство и провести над ним такие преобразования, которые приведут к тому неравенству, которое следовало доказать. Это рассуждение уже полноценно: мы исходили из справедливого неравенства и рядом законных преобразований пришли к новому неравенству, которое поэтому также справедливо.

Конечно, остался самый главный вопрос: из какого же неравенства надо исходить и как его преобразовывать, чтобы прийти к требуемому неравенству? Для ответа на него можно провести то преобразование предложенного неравенства, которое приводит нас к очевидно справедливому неравенству. Только этот этап решения задачи надо рассматривать не как доказательство, а как *поиск* доказательства, как попытку нащупать правильный путь. Если в результате этого поиска, т. е. таких преобразований, нам удалось прийти к очевидно справедливому неравенству, то можно начинать настоящее доказательство: взять это очевидно справедливое неравенство и провести над ним все те же преобразования, что и во время поиска, но только в обратном порядке, так сказать, «обратить» ход выкладок. Если этот обратный ход выкладок будет все время законен, то доказываемое неравенство действительно справедливо.

Часто, впрочем, поступают несколько иначе. Если в процессе поиска доказательства, в процессе приведения данного неравенства к очевидному мы каждый раз заменяли неравенство на равносильное, то последнее неравенство равносильно исходному, а поэтому из его справедливости сразу следует справедливость исходного неравенства. Следовательно, если на каждом этапе преобразования мы специально проверяли и подчеркивали равносильность соответствующих неравенств, то «обратный ход» выкладок совершенно не нужен.

Именно такими рассуждениями мы будем пользоваться при доказательстве следующих неравенств.

(4) *Доказать неравенство*

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3, \quad \text{где } a > 0,\ b > 0.$$

Заменим это неравенство на равносильное:

$$\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \geqslant 0.$$

Раскрыв скобки и перегруппировав, его можно записать в равносильной форме: $(a+b)(a-b)^2 \geqslant 0$. Так как $a > 0$ и $b > 0$, то это неравенство очевидно, и тем самым справедливость равносильного ему исходного неравенства доказана.

(5) *Доказать, что для любых x верно неравенство*

$$-1 \leqslant \frac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x} \leqslant 1.$$

Это неравенство равносильно (§ 2 раздела I) неравенству

$$\left|\frac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x}\right| \leqslant 1.$$

Поскольку обе части последнего неравенства неотрицательны, то после возведения в квадрат и умножения на положительное выражение $(2+\cos x)^2$ получим равносильное неравенство $3\sin^2 x \leqslant (2+\cos x)^2$, которое приводится к виду $(2\cos x+1)^2 \geqslant 0$. Это неравенство справедливо для всех x; поскольку оно равносильно исходному, то исходное неравенство также справедливо.

Исходное неравенство можно доказать и иначе, используя неравенство (1). Действительно, так как $2+\cos x > 0$ для всех x, то после умножения исходного неравенства на $2+\cos x$ получим следующее двойное неравенство, равносильное исходному:

$$-2-\cos x \leqslant \sqrt{3}\sin x \leqslant 2+\cos x.$$

Левое из этих неравенств можно записать в виде

$$-2 \leqslant \sqrt{3}\sin x+\cos x.$$

Теперь видно, что это есть частный случай неравенства (1), т. е. верное неравенство. Аналогично доказывается справедливость правого неравенства.

(6) *Доказать, что при любом α справедливо неравенство*

$$4 \sin 3\alpha + 5 \geqslant 4 \cos 2\alpha + 5 \sin \alpha.$$

Одной из наиболее грубых ошибок при решении этой задачи являлось «доказательство» подстановкой отдельных значений α. Некоторые поступающие рассуждали примерно так: «Для $\alpha = 0$ это неравенство справедливо, ибо $5 > 4$, для $\alpha = 30°$ это неравенство справедливо, ибо $4 + 5 > 4 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2}$, для $\alpha = 45°$, $60°$, $90°$ оно также справедливо. Значит, это неравенство верно и для любых α».

На самом деле поступающий доказал неравенство лишь для нескольких частных значений α и ничего не доказал для остальных α. Верное же доказательство можно провести, например, так.

Пользуясь формулами

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \quad \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$$

исходное неравенство можно привести к равносильному:

$$16 \sin^3 \alpha - 8 \sin^2 \alpha - 7 \sin \alpha - 1 \leqslant 0.$$

Последнее неравенство должно быть выполнено при любом α. Обозначив $\sin \alpha$ через x, перепишем его в виде

$$16x^3 - 8x^2 - 7x - 1 \leqslant 0.$$

Нам надо доказать, что это неравенство справедливо при любом x из промежутка $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Группируя левую часть, приходим к неравенству $8x^2(x - 1) + 7x(x^2 - 1) + (x^3 - 1) \leqslant 0$, или $(x - 1)(4x + 1)^2 \leqslant 0$.

Для рассматриваемых значений $x \leqslant 1$ последнее неравенство, очевидно, справедливо, и тем самым исходное неравенство доказано.

Неравенства, рассмотренные в предыдущих примерах, были доказаны нами только благодаря удачной группировке. Но, как известно, группировка является самым загадочным моментом при преобразованиях, так как нужный способ группировки часто можно найти лишь случайно, ощупью, после многих неудачных попыток. Единственное, что может здесь помочь, — это опыт в решении такого рода задач.

(7) *Доказать, что*

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6xy - 8xz - 8yz > 0,$$

если $x^2 + y^2 + z^2 > 0$.

С первого взгляда кажется естественным сгруппировать первые три слагаемых, однако тут же обнаруживается, что дальнейшие преобразования неясны. Достаточно очевидно, что случайные, безыдейные попытки не принесут успеха, и многие поступающие убедились в этом на практике.

Здесь нужна идея, и эта идея исключительно проста: левую часть доказываемого неравенства можно рассматривать как квадратный трехчлен относительно x с коэффициентами, зависящими от y и z. В этом квадратном трехчлене можно выделить полный квадрат, и, более того, можно сразу предвидеть, что получившийся в результате «свободный член» будет квадратным трехчленом относительно y с коэффициентами, зависящими от z, так что с ним можно будет поступить аналогично.

Остается только провести выкладки, разделив предварительно обе части доказываемого неравенства на 5:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{6}{5}xy - \frac{8}{5}xz - \frac{8}{5}yz =$$

$$= x^2 + 2\left(\frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z\right)x + \left(y^2 - \frac{8}{5}yz + z^2\right) =$$

$$= \left[x + \left(\frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z\right)\right]^2 - \left(\frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z\right)^2 + \left(y^2 - \frac{8}{5}yz + z^2\right) =$$

$$= \left(x + \frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z\right)^2 + \frac{16}{25}y^2 - \frac{16}{25}yz + \frac{9}{25}z^2 =$$

$$= \left(x + \frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z\right)^2 + \frac{16}{25}\left(y - \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{4}{25}z^2 + \frac{9}{25}z^2 =$$

$$= \left(x + \frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z\right)^2 + \frac{16}{25}\left(y - \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{5}z^2.$$

Докажем, что полученное выражение больше нуля. Надо отметить, что в этом месте многие поступающие решили, что все уже доказано, «поскольку сумма квадратов всегда больше нуля», забыв, что она все-таки может равняться нулю. Для окончания решения надо выяснить, при каких x, y, z полученное выражение равно нулю. Другими словами, надо узнать, когда одновременно выполняются равенства

$$x + \frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z = 0, \quad y - \frac{z}{2} = 0, \quad z = 0.$$

Но эта система, как легко видеть, имеет единственное решение $x = y = z = 0$, а в этом случае нарушается указанное в задаче условие $x^2 + y^2 + z^2 > 0$.

Таким образом, если $x^2 + y^2 + z^2 > 0$, то и левая часть исходного неравенства строго больше нуля, что и требовалось доказать.

В следующей задаче к цели приводит удачное комбинирование сомножителей.

(8) *Доказать, что* $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, *где* n *— целое число, большее единицы.*

Справедливость этого неравенства будет вытекать из равносильного неравенства

$$(n!)^2 < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}. \tag{4}$$

Умножим число $n! = 1 \cdot 2 \ldots k\,(n-1)n$ на это же число $n! = n(n-1)\ldots(n-k+1)\ldots 2 \cdot 1$, расположив их одно под другим следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots(n-1) & n \\ n & (n-1) & \ldots(n-k+1) & \ldots & 2 & 1. \end{array}$$

Перемножив числа в каждом столбце, найдем

$$(n!)^2 = (1 \cdot n)\,[2 \cdot (n-1)] \times \ldots$$
$$\ldots \times k \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot [(n-1) \cdot 2](n \cdot 1). \tag{5}$$

Применяя к каждому члену произведения (5) неравенство (2), получим

$$\sqrt{k(n-k+1)} \leqslant \frac{k+n-k+1}{2} = \frac{n+1}{2}, \quad k = 1, \dots n,$$

причем знак равенства здесь может достигаться лишь тогда, когда $k = n - k + 1$, т. е. для $k = \frac{n+1}{2}$. Другими словами, лишь для нечетных n, и то лишь для одного сомножителя, в этом неравенстве возможен знак равенства. Значит, для всех скобок, кроме, быть может, одной, справедливы неравенства

$$[k(n-k+1)] < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Поскольку в произведении (5) содержится n сомножителей, то и неравенство (4) верно.

При доказательстве некоторых неравенств нужно умело использовать свойства функций, входящих в состав неравенств.

9 *Доказать, что для всех x справедливо неравенство* $\cos(\cos x) > 0$.

Для всех x имеем $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Обозначим $\alpha = \cos x$; тогда $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Так как $-\frac{\pi}{2} < -1$, а $1 < \frac{\pi}{2}$, то тем более α удовлетворяет условию $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Из свойств функции $y = \cos x$ вытекает, что $\cos \alpha$ положителен для всех этих α, что, собственно, и требовалось доказать.

10 *Доказать неравенство* $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

Доказываемое неравенство можно переписать так:

$$\cos(\sin x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) > 0,$$

или

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin x - \cos x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin x + \cos x}{2}\right) > 0.$$

Покажем, что сомножители в левой части положительны. Действительно, согласно неравенству (1),

$$-\frac{\pi}{4} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{\sin x - \cos x}{2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi}{4},$$

а потому $0 < \frac{\pi}{4} + \frac{\sin x - \cos x}{2} < \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin x - \cos x}{2}\right) > 0$$

при всех x. Совершенно аналогично доказывается, что положителен и второй сомножитель.

В следующих примерах решающим является применение свойств степенной и показательной функций.

(11) *Доказать неравенство* $0 < \sin^8 x + \cos^{14} x \leqslant 1$.

Совершенно очевидно, что $\sin^8 x + \cos^{14} x \geqslant 0$. Однако равенство $\sin^8 x + \cos^{14} x = 0$ может выполняться, только если одновременно $\sin^8 x = 0$ и $\cos^{14} x = 0$, что, конечно, невозможно. Поэтому справедливо строгое неравенство $\sin^8 x + \cos^{14} x > 0$.

Из свойств тригонометрических функций вытекает, что $\sin^2 x \leqslant 1$ и $\cos^2 x \leqslant 1$ для любых x. Но так как $8 > 2$ и $14 > 2$, то

$$\sin^8 x \leqslant \sin^2 x \text{ и } \cos^{14} x \leqslant \cos^2 x.$$

Сложив почленно последние два неравенства, получим

$$\sin^8 x + \cos^{14} x \leqslant 1.$$

Очевидно, кроме того, что, например, при $x = \frac{\pi}{2}$ в этом неравенстве достигается равенство, т. е. нестрогое неравенство нельзя заменить строгим.

(12) *Доказать, что для положительных чисел c и d и любого $\alpha > 0$ неравенства $c < d$ и $c^\alpha < d^\alpha$ равносильны.*

Пусть c и d — положительные числа и $\alpha > 0$. Рассмотрим показательную функцию $y = \left(\frac{c}{d}\right)^x$.

Если $c < d$, то $0 < \frac{c}{d} < 1$. По свойству показательной функции с основанием, меньшим единицы,

$$\left(\frac{c}{d}\right)^{\alpha} < \left(\frac{c}{d}\right)^{0},$$

т. е. $\frac{c^{\alpha}}{d^{\alpha}} < 1$, или $c^{\alpha} < d^{\alpha}$. Обратно, если $c^{\alpha} < d^{\alpha}$, то $\frac{c^{\alpha}}{d^{\alpha}} < 1$, или

$$\left(\frac{c}{d}\right)^{\alpha} < \left(\frac{c}{d}\right)^{0}.$$

Это означает, что большему значению аргумента ($\alpha > 0$) показательной функции соответствует меньшее значение функции. Но это верно только в случае, когда основание показательной функции меньше единицы, т. е. $\frac{c}{d} < 1$, откуда $c < d$.

Доказанное утверждение обычно формулируют следующим образом: *обе части неравенства между положительными числами можно возвести в любую положительную степень*, в частности, *из обеих частей можно извлечь корень любой степени.*

13 *Доказать неравенство*

$$(a^{\alpha} + b^{\alpha})^{1/\alpha} \leqslant (a^{\beta} + b^{\beta})^{1/\beta}$$

при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\alpha > \beta > 0$.

Если $a = 0$ или $b = 0$, то доказываемое неравенство очевидно. Пусть теперь $a > 0$ и $b > 0$. Ясно, что одно из этих чисел не превосходит другого. Пусть, например, $0 < a < b$, обозначим $\frac{a}{b}$ через t.

Тогда $0 < t \leqslant 1$, и так как $\alpha > \beta$, то

$$0 < t^{\alpha} \leqslant t^{\beta} \text{ и } 1 + t^{\alpha} \leqslant 1 + t^{\beta}.$$

Из последнего неравенства получаем (см. пример 12)

$$(1 + t^{\alpha})^{1/\beta} \leqslant (1 + t^{\beta})^{1/\beta}.$$

Далее, так как $1 + t^\alpha \geqslant 1$ и $0 < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$, то

$$(1 + t^\alpha)^{1/\alpha} \leqslant (1 + t^\alpha)^{1/\beta}.$$

Теперь можем написать

$$(1 + t^\alpha)^{1/\alpha} \leqslant (1 + t^\alpha)^{1/\beta} \leqslant (1 + t^\beta)^{1/\beta},$$

откуда, вспоминая, что $t = \frac{a}{b}$, имеем

$$\left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{b^\alpha}\right)^{1/\alpha} \leqslant \left(\frac{a^\beta + b^\beta}{b^\beta}\right)^{1/\beta}.$$

Поскольку $b > 0$, то из последнего неравенства вытекает доказываемое неравенство.

Один из приемов доказательства неравенств состоит в следующем. Пусть, например, необходимо доказать неравенство $A < B$, где A и B — некоторые выражения. Если удается подобрать такое выражение M, что $A < M$ и одновременно $M < B$, то требуемое неравенство $A < B$ будет тем самым доказано.

14 *Доказать без помощи таблиц, что*

$$4\sin^2 63° + \frac{15 - \cos 89°}{4\sin^2 63°} < 8.$$

Поскольку $\cos 89° > 0$ и $4\sin^2 63° > 0$, то

$$4\sin^2 63° + \frac{15 - \cos 89°}{4\sin^2 63°} < 4\sin^2 63° + \frac{15}{4\sin^2 63°}.$$

Следовательно, достаточно доказать неравенство

$$4\sin^2 63° + \frac{15}{4\sin^2 63°} < 8.$$

Другими словами, нужно убедиться, что неравенство

$$z + \frac{15}{z} < 8 \qquad (6)$$

выполняется при $z = 4\sin^2 63°$.

Но неравенство (6) при $z > 0$ эквивалентно квадратному неравенству $z^2 - 8z + 15 < 0$, которое справедливо для $3 < z < 5$. Остается проверить двойное неравенство

$$3 < 4 \sin^2 63° < 5.$$

Правое неравенство очевидно, так как $\sin^2 63° < 1$. Далее, функция синус в первой четверти возрастает и положительна, а поэтому $\sin^2 63° > \sin^2 60° = \frac{3}{4}$, так что справедливо и левое неравенство.

15 *Доказать, не пользуясь таблицами, что*

$$\log_3 7 > \log_7 27.$$

Прежде всего преобразуем данное неравенство. Используя свойства логарифмов, перепишем его в виде

$$(\log_3 7)^2 > 3, \quad \text{или} \quad \log_3 7 > \sqrt{3}, \quad \text{или} \quad 3^{\sqrt{3}} < 7.$$

Докажем последнее неравенство, подобрав число M так, чтобы $3^{\sqrt{3}} < M < 7$. Для этого естественно пытаться искать число M в виде 3^r, где r — приближенное значение $\sqrt{3}$ *с избытком*.

Как известно, для числа $\sqrt{3}$ справедлива оценка $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$. Попробуем взять $r = 1{,}8 = \frac{9}{5}$. Однако $3^{9/5} > 7$; в этом легко убедиться, возводя обе части неравенства в пятую степень: $3^9 = 19\,683$, а $7^5 = 16\,807$.

Следовательно, нужно попытаться выбрать в качестве r некоторое число, меньшее 1,8 (но большее $\sqrt{3}$). Оказывается, можно взять $r = 1{,}75 = \frac{7}{4}$. Действительно, $\sqrt{3} < \frac{7}{4}$ (что легко проверяется возведением в квадрат), а поэтому $3^{\sqrt{3}} < 3^{7/4}$. Далее, $3^{7/4} < 7$, в чем убеждаемся возведением в четвертую степень:

$$3^7 = 2187 < 2401 = 7^4.$$

В следующих задачах приходится искать два числа M и N такие, что $A < M < N < B$.

(16) *Не пользуясь таблицами, доказать, что*

$$\cos 136° < \operatorname{tg} 153°.$$

На основании формул приведения перепишем исходное неравенство так: $\operatorname{tg} 27° < \sin 46°$.

Поскольку в первой четверти тангенс и синус — монотонно возрастающие функции, то попробуем так изменить их аргументы, чтобы левая часть неравенства несколько увеличилась, а правая — уменьшилась, и при этом получилось бы очевидное неравенство. Именно, заметим, что

$$\operatorname{tg} 27° < \operatorname{tg} 30°, \quad \sin 45° < \sin 46°.$$

Но $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$; так что

$$\operatorname{tg} 27° < \operatorname{tg} 30° < \sin 45° < \sin 46°.$$

(17) *Не пользуясь таблицами, расположить в порядке возрастания числа* $\sin 4$, $\cos 2$, $\operatorname{tg} 3$, $\operatorname{ctg} 6$.

Эта задача отличается от предыдущих дополнительной трудностью: здесь предстоит, очевидно, не только доказать несколько неравенств, но выяснить еще предварительно, какие именно неравенства надо доказывать. Другими словами, нужно прежде всего «для себя» понять, каков порядок расположения данных чисел, а уж потом строго доказать соответствующие неравенства.

Поисковую часть решения проще всего провести, пользуясь тригонометрическим кругом (рис. 31). Из этого рисунка сразу видно, что все данные числа отрицательны. Кроме того, из определений тригонометрических функций следует, что

$$|\sin 4| = AA_1, \quad |\cos 2| = OB_1, \quad |\operatorname{tg} 3| = CC_1, \quad |\operatorname{ctg} 6| = DD_1.$$

Чисто зрительное сравнение этих отрезков (рисунок, разумеется, следует выполнить возможно более аккуратно) показывает, что самый большой из них — это DD_1, самый маленький — это CC_1. Что касается двух промежуточных отрезков AA_1 и OB_1, то они не так сильно отличаются друг от друга. Однако можно заметить, что

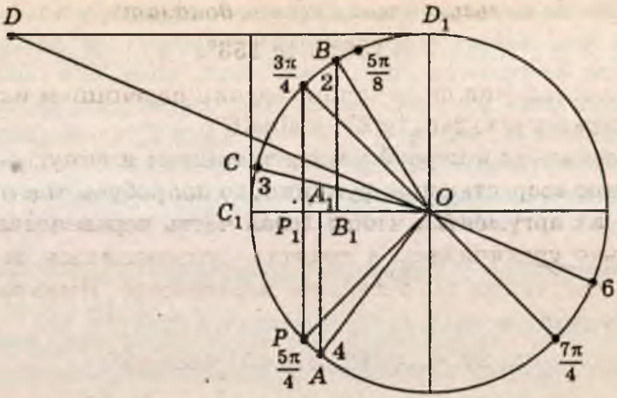


Рис. 31

$AA_1 > PP_1$, а $OB_1 < OP_1$ и поэтому $AA_1 > OB_1$. Таким образом, геометрически мы обнаружили, что

$$DD_1 > AA_1 > OB_1 > CC_1,$$

или

$$|\mathrm{ctg}\, 6| > |\sin 4| > |\cos 2| > |\mathrm{tg}\, 3|. \qquad (7)$$

Остается теперь строго, без всяких ссылок на рисунок, доказать неравенства (7).

Ясно прежде всего, что $|\mathrm{ctg}\, 6| > |\sin 4|$: котангенс в четвертой четверти убывает, и поэтому из очевидного неравенства $\frac{7\pi}{4} < 6$ следует, что $\mathrm{ctg}\, 6 < -1$, откуда

$$|\mathrm{ctg}\, 6| > 1 > |\sin 4|.$$

Далее, поскольку косинус во второй четверти убывает и отрицателен, а $2 < \frac{3\pi}{4}$, то $\cos 2 > -\frac{1}{\sqrt{2}}$, и $|\cos 2| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, с другой стороны, синус в третьей четверти убывает, а $\frac{5\pi}{4} < 4$, и поэтому $\sin 4 < -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$|\sin 4| > \frac{1}{\sqrt{2}} > |\cos 2|.$$

Как ни странно, но последнее из неравенств (7), при всей его геометрической очевидности, доказывается совсем не просто. Дело в том, что, оперируя лишь с «хорошими» углами, нам не удается подыскать такие числа M и N, что $|\text{tg}\, 3| < M < N < |\cos 2|$; в этом можно убедиться после нескольких безуспешных попыток. Поэтому придется привлечь к рассмотрению углы «похуже».

Оценим $|\cos 2|$ снизу, пользуясь тем, что $2 > \frac{5\pi}{8}$; из этого неравенства и свойств косинуса следует, что

$$\cos 2 < \cos\frac{5\pi}{8}, \quad \text{т. е. } |\cos 2| > \sin\frac{\pi}{8}.$$

С другой стороны, справедливо неравенство $3 > \frac{11\pi}{12}$, из которого по свойству тангенса получаем

$$\text{tg}\, 3 > \text{tg}\,\frac{11\pi}{12}, \quad \text{т. е. } |\text{tg}\, 3| < \text{tg}\,\frac{\pi}{12}.$$

Теперь достаточно доказать, что

$$\text{tg}\,\frac{\pi}{12} < \sin\frac{\pi}{8}. \qquad (8)$$

По формулам половинного аргумента имеем

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$\text{tg}\,\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2-\sqrt{3},$$

так что неравенство (8) принимает вид

$$4-2\sqrt{3} < \sqrt{2-\sqrt{2}}. \qquad (9)$$

После возведения в квадрат и очевидных преобразований это неравенство приводится к неравенству

$$26+\sqrt{2} < 16\sqrt{3}.$$

Еще раз возводя в квадрат, получаем неравенство $26\sqrt{2} < 45$, легко проверяемое третьим возведением в квадрат.

Впрочем, справедливость неравенства (9) легко установить, оценивая $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. В самом деле, $\sqrt{2} < 1,5$, $\sqrt{3} > 1,7$, а потому

$$4 - 2\sqrt{3} < 4 - 2 \cdot 1,7 = 0,6,$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} > \sqrt{2-1,5} = \sqrt{0,5} > \sqrt{0,49} = 0,7.$$

Таким образом, неравенство (8) доказано, а следовательно, $|\cos 2| > |\operatorname{tg} 3|$.

Итак, все неравенства (7) справедливы. Поскольку все данные в условии задачи числа отрицательны, то

$$\operatorname{ctg} 6 < \sin 4 < \cos 2 < \operatorname{tg} 3.$$

(18) *Доказать, что для любого натурального числа n справедливо неравенство*

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}. \tag{10}$$

Заметив, что

$$\frac{2}{(2k+1)^2} < \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2},$$

заменим сумму, стоящую в левой части неравенства (10), на *большее* выражение:

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} <$$

$$< \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right)\right].$$

Однако это последнее выражение равно

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n+4},$$

и, очевидно, меньше $\frac{1}{4}$. Следовательно, левая часть доказываемого неравенства тем более меньше $\frac{1}{4}$.

(19) *Доказать, что при всех a и b имеет место неравенство*

$$\frac{5^{a+1}}{5^{2a}+25} \leqslant 13-5b+\frac{1}{2}b^2, \qquad (11)$$

и определить, при каких a и b достигается равенство.

Поскольку левая часть неравенства (11) является функцией только от a, а правая часть — функцией только от b, то неравенство (11) может выполняться при всех a и b только в том случае, когда *наибольшее* значение левой части не превосходит *наименьшего* значения правой части; кроме того, ясно, что равенство в (11) достигается, если эти значения совпадают.

Для отыскания наименьшего значения правой части неравенства (11) выделим полный квадрат:

$$13-5b+\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}(b-5)^2+\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2};$$

ясно, что равенство достигается для $b = 5$. Для отыскания наибольшего значения левой части неравенства (11) преобразуем ее следующим образом:

$$\frac{5^{a+1}}{5^{2a}+25}=\frac{5}{5^a+25\cdot 5^{-a}} \leqslant \frac{5}{2\sqrt{5^a\cdot 25\cdot 5^{-a}}}=\frac{1}{2}$$

(здесь мы воспользовались неравенством (2)); при этом равенство достигается, если $5^a = 25 \cdot 5^{-a}$, т. е. для $a = 1$.

Таким образом, при всех a и b справедливы неравенства

$$\frac{5^{a+1}}{5^{2a}+25} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 13-5b+\frac{1}{2}b^2,$$

а равенства достигаются при $a = 1$, $b = 5$.

Достаточно большое количество неравенств может быть доказано методом математической индукции.

(20) *Доказать, что для любого числа $\alpha \geqslant -1$ и любого натурального n верно неравенство*

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha.$$

При $n = 1$ неравенство справедливо. Предположим, что справедливо неравенство $(1+\alpha)^k \geqslant 1+k\alpha$, и докажем, что тогда справедливо неравенство

$$(1+\alpha)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)\alpha.$$

Так как $1+\alpha \geqslant 0$, то

$$(1+\alpha)^k(1+\alpha) \geqslant (1+k\alpha)(1+\alpha);$$

поэтому

$$(1+\alpha)^{k+1} \geqslant (1+k\alpha)(1+\alpha) = 1+(k+1)\alpha+k\alpha^2 \geqslant 1+(k+1)\alpha.$$

Значит, исходное неравенство справедливо.

(21) *Доказать, что при любом натуральном n имеет место неравенство $|\sin nx| \leqslant n|\sin x|$.*

При $n = 1$ неравенство справедливо. Предположив, что $|\sin kx| \leqslant k|\sin x|$, докажем, что

$$|\sin (k+1)x| \leqslant (k+1)|\sin x|.$$

В самом деле, воспользовавшись неравенством $|\cos kx| \leqslant 1$, имеем

$$|\sin (k+1)x| = |\sin kx \cos x + \sin x \cos kx| \leqslant$$
$$\leqslant |\sin kx|\cdot|\cos x| + |\sin x|\cdot|\cos kx| \leqslant$$
$$\leqslant |\sin kx| + |\sin x| \leqslant k|\sin x| + |\sin x| = (k+1)|\sin x|.$$

Следовательно, требуемое неравенство справедливо.

(22) *Доказать теорему: если произведение $n \geqslant 2$ положительных чисел равно 1, то их сумма больше или равна n, т. е. если*

$$x_1x_2\ldots x_n = 1,\quad x_1>0,\quad x_2>0,\quad \ldots,\quad x_n>0,$$

то

$$x_1+x_2+\ldots+x_n \geqslant n.$$

При $n = 2$ доказываемое утверждение есть, по существу, не что иное, как неравенство (2).

Сделаем предположение индукции и возьмем любые положительные числа $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$, удовлетворяющие условию $x_1\ldots x_{k-1}x_kx_{k+1} = 1$. Если каждое из этих чисел равно 1, то сумма $x_1 + \ldots + x_k + x_{k+1} = k + 1$, так что доказываемое неравенство в этом случае верно.

Если же это не так, то среди них найдется число, меньшее 1, и число, большее 1. Допустим, что $x_k > 1$, $x_{k+1} < 1$. Имеем равенство

$$x_1 \ldots x_{k-1}(x_k x_{k+1}) = 1.$$

Это — произведение k чисел, поэтому применимо предположение индукции, и мы можем утверждать, что

$$x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} \geqslant k.$$

Но тогда

$$x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geqslant k - x_k x_{k+1} + x_k + x_{k+1} =$$
$$= k + 1 + (x_k - 1)(1 - x_{k+1}) > k + 1,$$

так как $x_k - 1 > 0$ и $1 - x_{k+1} > 0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что мы установили также тот факт, что знак равенства в доказываемом соотношении имеет место в том и только в том случае, когда все $x_i = 1$.

Из этой теоремы получается *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для $n \geqslant 2$ положительных чисел:*

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}, \qquad (12)$$

$$\textit{если } x_1 > 0, \ldots, x_n > 0.$$

Действительно, обозначим $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ через c, а $\frac{x_i}{c}$ через y_i. Тогда

$$y_1 y_2 \ldots y_n = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{c^n} = 1.$$

По доказанному, $y_1 + \ldots + y_n \geqslant n$, откуда

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant c,$$

что и требовалось доказать.

Неравенство (12) широко используется при доказательстве некоторых неравенств. Например, если применить его к числам 1, 2, ..., n, то сразу получим неравенство

$$\sqrt[n]{1 \cdot 2 \ldots n} < \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n},$$

или $\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$, откуда

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Рассмотренные примеры показывают, что метод математической индукции с успехом применяется для доказательства различных неравенств. В то же время силу метода идукции не следует преувеличивать: есть очень много задач, для решения которых просто напрашивается метод индукции, однако попытки применить этот метод наталкиваются на непреодолимые трудности.

Попробуем, например, доказать по индукции, что

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}.$$

При $n = 1$ это неравенство имеет вид $\frac{1}{9} < \frac{1}{4}$, т. е. справедливо. Предположим, что доказываемое неравенство справедливо при $n = k$:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{4}.$$

При $n = k + 1$ левая часть равна

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2k+3)^2} =$$

$$= \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2k+1)^2}\right] + \frac{1}{(2k+3)^2}.$$

По предположению индукции сумма в квадратных скобках меньше $\frac{1}{4}$, и поэтому

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2k+3)^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{(2k+3)^2}.$$

Из полученного неравенства никак нельзя вывести, что его левая часть меньше $\frac{1}{4}$. Таким образом, доказательство по индукции зашло в тупик. Между тем это неравенство просто доказывается совсем другим способом (см. пример 18).

В заключение рассмотрим несколько задач, в формулировках которых непосредственно о доказательстве каких-либо неравенств речь не идет. Однако, как мы увидим, центр тяжести решений этих задач лежит именно в необходимости установить неравенства, возникающие в ходе рассуждений.

23 *Решить неравенство* $\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x} > 1$.

Легко убедиться, что решениями этого неравенства могут быть лишь такие значения x, при которых одновременно $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$.

В самом деле, если $\sin x < 0$ и $\cos x \leqslant 0$, то левая часть исходного неравенства отрицательна; аналогично обстоит дело и в случае, когда $\cos x < 0$ и $\sin x \leqslant 0$. Если же $\sin x > 0$, а $\cos x < 0$, то из неравенств $\sin x \leqslant 1$, $|\cos x| > 0$ следует

$$\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x} = \sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{|\cos x|} < 1;$$

точно так же рассматривается случай $\cos x > 0$ и $\sin x < 0$. Наконец, если $\sin x = 0$ и $\cos x = 1$ или если $\cos x = 0$ и $\sin x = 1$, то очевидно, что исходное неравенство не удовлетворяется.

Итак, будем искать решения среди тех значений x, для которых одновременно $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$. Поскольку при этом $\sin x < 1$ (равенство $\sin x = 1$ невозможно, ибо оно влекло бы равенство $\cos x = 0$), то, используя свойство показательной функции с основанием, меньшим единицы, легко доказать неравенство

$$\sqrt[3]{\sin x} > \sin^2 x.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\sqrt[3]{\cos x} > \cos^2 x.$$

Складывая эти два неравенства, получаем:

$$\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x} > 1.$$

Следовательно, исходное неравенство выполняется для всех x таких, что $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$, т. е. для x из промежутков

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

24 *Решить уравнение*

$$\sin x + 2 \sin 2x = 3 + \sin 3x. \qquad (13)$$

Это уравнение выглядит вполне стандартно, и поэтому естественным представляется решать его сведением к одной функции, скажем, к $\sin x$. Однако, как легко убедиться, мы придем к уравнению шестой степени относительно $\sin x$, корни которого отыскать не удается.

В то же время применение неравенств дает возможность решить уравнение (13) довольно просто. Перепишем его в виде

$$\sin x - \sin 3x + 2 \sin 2x = 3,$$

или, что то же самое,

$$-2 \sin x \cos 2x + 2 \sin 2x = 3. \qquad (14)$$

Оценим модуль левой части, используя свойства I и III из § 2 раздела I и очевидное неравенство $|\sin x| \leqslant 1$:

$$|-2 \sin x \cos 2x + 2 \sin 2x| \leqslant$$

$$\leqslant |-2 \sin x \cos 2x| + |2 \sin 2x| =$$

$$= 2|\sin x||\cos 2x| + 2|\sin 2x| \leqslant 2(|\cos 2x| + |\sin 2x|).$$

Заметим теперь, что при любом x

$$|\cos 2x| + |\sin 2x| \leqslant \sqrt{2};$$

это неравенство получается непосредственно из неравенства (1), если раскрыть модули. Следовательно, левая часть уравнения (14) по модулю не превосходит $2\sqrt{2}$ и поэтому не может ни при каком значении x равняться 3. Другими словами, уравнение (13) корней не имеет.

Для решения уравнения (13) можно привлечь и иные соображения, но также связанные с неравенствами. Легко видеть, что если $\sin x < 0$, то

$$\sin x + 2\sin 2x < 0 + 2 \cdot 1 = 2,$$

$$3 + \sin 3x \geqslant 3 + (-1) = 2,$$

так что левая часть уравнения (13) *строго меньше* 2 при всех значениях x, для которых $\sin x < 0$, а правая часть уравнения (13) *больше или равна* 2 для всех таких значений x. Таким образом, уравнение (13) не может иметь корней, для которых $\sin x < 0$.

Далее, пользуясь формулой разности синусов и формулами двойного аргумента, перепишем уравнение (13) в виде

$$\sin x\,(-4\cos^2 x + 4\cos x + 2) = 3.$$

Отсюда ясно, что корнями этого уравнения не могут быть те значения x, для которых $\sin x = 0$. Следовательно, уравнение (13) равносильно уравнению

$$-4\cos^2 x + 4\cos x + 2 = \frac{3}{\sin x}, \qquad (15)$$

и необходимо выяснить, имеет ли оно решения, для которых $\sin x > 0$.

Рассмотрим квадратный трехчлен $-4t^2 + 4t + 2$, получающийся из левой части уравнения (15) при $t = \cos x$. Нетрудно проверить, что наибольшее значение этого трехчлена равно 3 и достигается при $t = \frac{1}{2}$. Другими словами, левая часть уравнения (15) всегда *меньше или равна* 3, причем она равна 3 при $\cos x = \frac{1}{2}$. В то же время из неравенства $0 < \sin x \leqslant 1$ вытекает, что правая часть уравнения (15) *больше или равна* 3, причем она равна 3 при $\sin x = 1$.

Следовательно, уравнение (15) может удовлетворяться лишь тогда, когда одновременно $\cos x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = 1$. Поскольку это невозможно, уравнение (13) корней не имеет.

25 ***Без помощи таблиц найти все значения x в промежутке $-\frac{7}{4} < x < -\frac{1}{2}$, удовлетворяющие уравнению***

$$\log_{1/2}\left(\cos x + \sin 6x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= \log_{1/2}\left(\cos 3x + \sin 8x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right). \qquad (16)$$

Естественно перейти от этого уравнения к уравнению

$$\cos x + \sin 6x = \cos 3x + \sin 8x. \qquad (17)$$

Однако при этом за счет расширения ОДЗ могут появиться посторонние корни, и поэтому из корней уравнения (17) нужно будет отобрать лишь те, которые входят в ОДЗ уравнения (16) $\left(\text{и, естественно, лежат в промежутке } -\frac{7}{4} < x < -\frac{1}{2}\right)$.

Уравнение (17) легко решается; оно имеет три серии решений:

$$x = k\pi, \quad x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{9}m\pi, \quad x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}n\pi,$$

где k, m, n — целые числа. Нетрудно убедиться, что из этих значений x в промежуток $-\frac{7}{4} < x < -\frac{1}{2}$ попадают только следующие три числа:

$$x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{6}, \quad x_3 = -\frac{7\pi}{18}.$$

Остается выяснить, какие из найденных чисел входят в ОДЗ уравнения (16), т. е. удовлетворяют двум неравенствам

$$\cos x + \sin 6x + \frac{\sqrt{3}}{3} > 0,$$

$$\cos 3x + \sin 8x + \frac{\sqrt{3}}{3} > 0.$$

Поскольку x_1, x_2, x_3 — корни уравнения (17), то эти неравенства выполняются или не выполняются одновременно. Поэтому достаточно проверить, например, первое неравенство

$$\cos x + \sin 6x + \frac{\sqrt{3}}{3} > 0. \tag{18}$$

Проверка неравенства (18) для $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = -\frac{\pi}{6}$ не представляет труда. Подстановка же $x = -\frac{7\pi}{18}$ в неравенство (18) приводит к неравенству

$$\cos\frac{7\pi}{18} - \sin\frac{7\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} > 0,$$

или

$$\sin\frac{\pi}{9} > \frac{\sqrt{3}}{6}, \tag{19}$$

которое нужно доказать или опровергнуть.

Для оценки $\sin\frac{\pi}{9}$ попробуем использовать подходящий «хороший» угол; именно, довольно естественно рассмотреть тройной угол $\frac{\pi}{3}$. Поскольку

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

то при $\alpha = \frac{\pi}{9}$ будем иметь

$$3\sin\frac{\pi}{9} - 4\sin^3\frac{\pi}{9} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $\sin\frac{\pi}{9} > 0$, то из полученного равенства следует, что

$$\sin\frac{\pi}{9} = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{4}{3}\sin^3\frac{\pi}{9} > \frac{\sqrt{3}}{6},$$

т. е. неравенство (19) справедливо. Таким образом, все три числа x_1, x_2, x_3 удовлетворяют условию задачи.

26 *При каких положительных x выражение*

$$2x + \frac{3\frac{1}{8}}{x+1} \qquad (20)$$

принимает минимальное значение?

Сделав замену $y = x + 1$, перепишем данное выражение в виде

$$2y + \frac{25}{8y} - 2; \qquad (21)$$

нас интересует его наименьшее значение при $y > 1$. Оценим это выражение снизу, используя неравенство (2):

$$2y + \frac{25}{8y} - 2 \geqslant 2\sqrt{2y \cdot \frac{25}{8y}} - 2 = 3. \qquad (22)$$

Однако было бы ошибкой сразу утверждать, что искомое наименьшее значение выражения (21) равно 3 — надо еще убедиться, что это выражение действительно принимает значение 3, и притом при значении $y > 1$. Из неравенства (2) мы знаем, что в (22) равенство достигается в случае, когда $2y = \frac{25}{8y}$, т. е. при $y = \frac{5}{4}$, поскольку $y > 0$. Так как это значение больше 1, то мы можем утверждать, что минимальное значение выражения (20), равное 3, достигается при $x = \frac{1}{4}$.

27 *При каком значении x выражение*

$$\lg^2 x + \frac{1}{\lg^2 x + 2}$$

принимает наименьшее значение?

Обозначив $\lg^2 x + 2$ через y, будем искать наименьшее значение выражения

$$y + \frac{1}{y} - 2 \qquad (23)$$

для тех значений y, которые принимает функция $y = \lg^2 x + 2$, т. е. для $y \geqslant 2$. К выражению (23) применим неравенство (2):

$$y + \frac{1}{y} - 2 \geqslant 2\sqrt{y \cdot \frac{1}{y}} - 2 = 0,$$

причем равенство здесь достигается в случае, когда $y = \frac{1}{y}$.

Однако это равенство выполняется только для двух значений $y = -1$ и $y = 1$, которые оба не входят в интересующий нас промежуток $y \geqslant 2$. Таким образом, применение неравенства (2) к цели не привело, и придется искать другой путь. Идею решения может подсказать график.

Нарисуем график функции $z = y + \frac{1}{y}$ (см. рис. 18); нас интересует ее поведение при $y \geqslant 2$. По графику достаточно очевидно, что функция z при $y \geqslant 2$ монотонно возрастает, и потому свое наименьшее значение она принимает при $y = 2$. Однако графические соображения не считаются доказательством, и нам следует строго доказать, что функция z действительно монотонно возрастает при $y \geqslant 2$.

Именно, надо доказать, что если $2 \leqslant a < b$, то

$$a + \frac{1}{a} < b + \frac{1}{b}.$$

Перенеся все члены этого неравенства в правую часть и проведя очевидные преобразования, придем к равносильному неравенству

$$(b - a)\left(1 - \frac{1}{ab}\right) > 0,$$

которое справедливо, поскольку $b > a$ и $ab > 1$.

Итак, выражение (23) при $y = 2$ принимает свое наименьшее значение, равное $\frac{1}{2}$. Поэтому исходное выражение принимает наименьшее значение $\frac{1}{2}$ для тех x, для которых $\lg^2 x + 2 = 2$, т. е. при $x = 1$.

Задачи

1. Доказать, что для любых чисел a, b и c:

а) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$;

б) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geqslant 2(a + b + c)$.

2. Доказать, что если a, b, c — положительные и не равные между собой числа, то:

а) $(a + b + c)(a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}) > 9$;

б) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) > 9abc$.

3. Доказать, что $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_{4,5} \pi} < 2$.

4. Доказать, что для всех x из промежутка $0 < x < \frac{\pi}{2}$ справедливо неравенство $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant 2$.

5. Доказать, что при любых действительных x и y выполняется неравенство $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \geqslant 0$.

6. Доказать, что $\sin^4 x - 6 \sin^2 x + 5 \geqslant 0$ при всех x.

7. Доказать, что многочлен $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ положителен при всех действительных значениях x.

8. Доказать, что для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

9. Доказать, что $(n!)^2 > n^n$, где $n > 2$ — натуральное число.

10. Доказать, что для всех x из промежутка $0 < x < \frac{\pi}{2}$ справедливо неравенство $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} > 1 + \operatorname{ctg} x$.

11. Доказать, что $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geqslant 2^{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$ при всех x. При каких значениях x достигается равенство?

12. Доказать, что сумма катетов прямоугольного треугольника не больше, чем диагональ квадрата, построенного на гипотенузе.

13. Доказать, что сумма кубов катетов прямоугольного треугольника меньше куба гипотенузы.

14. Доказать, что из всех прямоугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

15. Доказать, что площадь произвольного треугольника строго меньше четверти квадрата его полупериметра.

Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

16. $y = 5 \cos 2x - 4 \sin 2x$.

17. $y = 3^{x-1} + 3^{x-1}$.

18. $y = \frac{x^2}{x^4 + 1}$.

19. $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

20. Доказать, что если $a > 0$ и $b > 0$, то для любых x и y справедливо неравенство

$$a \cdot 2^x + b \cdot 3^y + 1 \leqslant \sqrt{4^x + 9^y + 1} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + 1}.$$

21. Доказать, что если $x^2 + y^2 = 1$, то справедливо неравенство

$$-\sqrt{2} \leqslant x + y \leqslant \sqrt{2}.$$

22. Доказать, что если $a+b=c$, $a>0$ и $b>0$, то

$$a^{2/3}+b^{2/3}>c^{2/3}.$$

23. Пусть n — целое положительное число. Доказать неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}.$$

24. Пусть a и b — произвольные числа, причем $a+b=2$. Доказать, что $a^4+b^4\geqslant 2$.

25. Доказать, что при любых положительных a и b и любом натуральном n справедливо неравенство

$$(a+b)^n<2^n(a^n+b^n).$$

26. Решить неравенство $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}>1$.

27. Решить уравнение

$$\log_{\frac{9x-x^2-14}{7}}(\sin 3x-\sin x)=\log_{\frac{9x-x^2-14}{7}}\cos 2x.$$

28. Доказать, что если $x^2+y^2+z^2>0$, то

$$x^2+19y^2+6z^2-8xy-4xz+12yz>0.$$

29. Доказать, что если $x^2+y^2+z^2>0$, то

$$8x^2+y^2+11z^2+4xy-12xz-5yz>0.$$

Не пользуясь таблицами, определить, что больше:

30. $\log_{15}60$ или $\log_{60}480$.

31. $3\log_{16}1862+\log_{16}1866$ или $\log_2 1863$.

32. $3\log_{1759}1751+1$ или $4\log_{1759}1753$.

Доказать, не пользуясь таблицами, что:

33. $\log_5 14>\log_7 18$.

34. $\log_3 16>\log_{16}729$.

35. $\log_2 5>\log_5 32$.

36. $\operatorname{tg}208°<\sin 492°$.

37. $\operatorname{ctg}244°<\cos 319°$.

38. $\sin 31°<\operatorname{tg}30°$.

39. $\log_2 7+\left(3+\cos\frac{15}{7}\right)\log_7 2<4$.

40. $\operatorname{tg}50°+2\operatorname{ctg}50°+\frac{\cos 3,4}{\operatorname{tg}50°}<4$.

41. Не пользуясь таблицами, расположить в порядке возрастания числа $\sin 8$, $\cos 5$, $\operatorname{tg}4$, $\operatorname{ctg}1$.

42. Не пользуясь таблицами, расположить в порядке возрастания числа $\sin 3$, $\cos 1$, $\operatorname{tg}7$, $\operatorname{ctg}5$.

43. Доказать, что $20n^2-16n+1\geqslant 0$ при всех целых n.

44. Найти максимальный член последовательности

$$a_n = -n^2 + 14n - 45 + \frac{4}{(2n-17)^2 + 2},\ n = 1, 2, 3, \dots .$$

45. Найти минимальный член последовательности

$$a_n = n^2 - 8n + 15 - \frac{9}{(3n-16)^2 + 6},\ n = 1, 2, 3, \dots .$$

46. Каково наименьшее значение дроби $\frac{2x+3}{x^2+x+1}$, где x — любое число?

47. Найти все целые решения неравенства

$$x - \frac{1}{2} < 2\log_5(x+2).$$

48. Есть ли в треугольнике со сторонами 4, 5 и 6 угол, меньший 22,5°?

49. Из всех треугольников ABC, имеющих площадь 4 и угол A, равный 30°, рассматривается треугольник с наименьшей стороной BC. Чему равен его периметр?

50. Найти все целые числа x, удовлетворяющие неравенству

$$2^{3/2\log_2(4x)} > 40 + 2^{\log_3(9-2x)}.$$

51. Найти все целые числа x, удовлетворяющие неравенству

$$3^{5/2\log_2(13-4x)} - 3^{\log_2(3x-2)} < 47.$$

52. Доказать, что при всех a и b имеет место неравенство

$$\frac{6^a}{36^{a+1}+1} \leqslant \frac{5}{6} - b - \frac{b^2}{3},$$

и определить, при каких a и b достигается равенство.

53. Доказать, что при всех a и b имеет место неравенство

$$\frac{7^{a+1}}{7^{2a}+49} \leqslant 5 - 2b + \frac{2}{9}b^2,$$

и определить, при каких a и b достигается равенство.

54. При каком значении x выражение $x^2 + 3 + \frac{1}{x^2+4}$ принимает наименьшее значение?

55. Без помощи таблиц найти все значения x в промежутке $-3 < x < 1{,}5$, удовлетворяющие равенству

$$\log_5\left(\sin 2x + \cos 3x - \frac{5\sqrt{3}}{6}\right) = \log_5\left(\sin 6x + \cos 7x - \frac{5\sqrt{3}}{6}\right).$$

Мы видим, таким образом, что в окончательном определении тригонометрических функций никакие углы не участвуют — устанавливается соответствие между числами. Привлечение углов является лишь *вспомогательным*, промежуточным этапом, необходимость введения которого диктуется лишь методическими соображениями.

Обычно у учащихся возникает следующий вопрос: почему для определения тригонометрических функций числового аргумента нужно использовать именно *радианное* измерение углов? Почему, например, нельзя определить синус числа a как синус угла величиной в a градусов? Конечно, в принципе такое определение возможно, но по ряду причин оно является неудобным, нецелесообразным. К сожалению, мотивы, из-за которых такое определение нецелесообразно, невозможно объяснить, оставаясь в пределах школьного курса математики. Однако именно из-за этих причин в математике принимается как раз то определение тригонометрических функций числового аргумента, которое дается в школьных учебниках.

Поступающие иногда используют символ ∞ (бесконечность). В частности, очень популярна бессмысленная формула $\operatorname{tg} 90° = \infty$ или ее словесное выражение: «Тангенс прямого угла равен бесконечности». Иногда даже приходится слышать ее «обоснование»:

$$\operatorname{tg} 90° = \frac{\sin 90°}{\cos 90°} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Между тем эти выкладки лишены смысла.

Задачи

1. Что такое: а) отрицательный угол; б) радианная мера угла; в) тангенс данного угла; г) $\cos 1$; д) $\arcsin p$?

2. Является ли определением или теоремой каждое из следующих утверждений: а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ для любого α; б) синус угла α равен ординате вектора единичной длины, исходящего из начала координат и образующего с осью абсцисс угол φ; в) график функции $y = \sin x$ проходит через начало координат; г) $\operatorname{ctg} 90° = 0$?

3. Рассмотрим теорему: «Если угол φ оканчивается во второй четверти, то $\cos\varphi < 0$». Сформулировать теоремы обратную, противоположную и противоположную обратной. Какие из этих теорем верны?

4. Доказать, что если действительные числа x и y удовлетворяют условию $x^2 + y^2 = 1$, то найдется такой угол φ, что $x = \sin\varphi$ и $y = \cos\varphi$.

5. Что больше: а) $\sin 1°$ или $\sin 1$; б) $\operatorname{tg} 1$ или $\operatorname{tg} 2$?

Б. *Тригонометрические формулы*

Обилие формул очень затрудняет поступающим изучение тригонометрии. Необходимо прежде всего выучить основные тригонометрические соотношения, разобрать и осмыслить их доказательства. Следует иметь в виду, что умение *вывести* нужную формулу — бóльшее достоинство, чем простое знание формул наизусть.

Любую из тригонометрических формул можно довольно быстро получить, если твердо знать определения и свойства функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$[1], соотношение $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и формулы сложения. На этой базе легко вывести формулы приведения, формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и обратно и т. д.

В самом деле, пусть нам нужна, например, *формула синуса половинного угла*. По формуле сложения и соотношению $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ можем сразу написать

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

---

[1] Иногда также встречаются обозначения $\frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$ (косеканс), $\frac{1}{\cos x} = \sec x$ (секанс).

откуда

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}, \text{ т. е. } \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

С другой стороны, не следует переоценивать возможность вывода любой формулы и совершенно не стараться их запомнить: если на письменном экзамене, прежде чем преобразовать, скажем, тригонометрическое уравнение, каждый раз выводить нужную формулу, то все время уйдет именно на это. Поэтому круг формул, находящихся, как говорят, в активной памяти, должен быть достаточно широк.

Выводы многих формул могут быть проведены несколькими различными способами. Поступающий волен выбирать тот способ, который ему нравится больше, лишь бы, естественно, он был *верен*. В частности, на приводимые в учебниках доказательства формул следует смотреть как на один из возможных вариантов их вывода; очень хорошо, если поступающий сможет предложить другое верное обоснование той или иной формулы. При этом желательно всегда выбирать наиболее простые способы рассуждений.

Необходимо только следить за тем, чтобы при выводе некоторой формулы мы не опирались на другую, получающуюся в свою очередь с использованием доказываемой. Например, иногда четность функции $\cos x$ поступающие доказывают так:

$$\cos(-x)=\cos(0-x)=\cos 0\cos x+\sin 0\sin x=\cos x.$$

В этой цепочке равенств использована формула сложения $\cos(\alpha-\beta)$ для случая, когда $\alpha<\beta$. Поэтому приведенное доказательство четности функции $\cos x$ может быть признано корректным при условии, что поступающий умеет обосновать формулу сложения $\cos(\alpha-\beta)$, $\alpha<\beta$, не используя этого свойства косинуса.

Обратим внимание на довольно распространенную путаницу в понимании знака $\pm$ в формулах типа (1). Одни понимают этот знак в том смысле, что «синус половинного угла может принимать два значения», другие считают, что надо выбирать лишь одно из этих значений (т. е. соответствующее либо знаку плюс, либо знаку минус), но не могут точно объяснить, когда какое значение следует брать.

На самом же деле при любом *фиксированном* α мы должны в формуле (1) выбрать *либо* значение, соответствующее знаку плюс, *либо* значение, соответствующее знаку минус (но отнюдь не оба значения одновременно!). Какое именно из этих значений брать — зависит от того, *в какой четверти лежит угол* $\frac{\alpha}{2}$: если он оканчивается в первой или второй четвертях, то следует брать значение со знаком плюс, если в третьей или четвертой — со знаком минус.

Таким образом, знак $\pm$ в формуле (1) не означает никакой «двузначности» синуса половинного угла; мы вынуждены поставить этот знак потому, что $\sin\frac{\alpha}{2}$ может (при разных α) принимать как положительные, так и отрицательные значения, тогда как выражение $\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}$ неотрицательно при всех α.

По существу формула (1) означает, что знание величины $\cos\alpha$ не определяет *однозначно* величину $\sin\frac{\alpha}{2}$, а определяет лишь *абсолютную величину* $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$; для определения же величины $\sin\frac{\alpha}{2}$ нужно, помимо $\cos\alpha$, иметь дополнительную информацию о том, в какой четверти оканчивается угол $\frac{\alpha}{2}$.

Именно поэтому следует избегать записи типа (1), употребляя более точную:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

С аналогичной ситуацией мы сталкиваемся и в некоторых задачах, где требуется вычислить значение одного тригонометрического выражения, зная величину другого выражения. Следует помнить, что по значению одной тригонометрической функции некоторого угла однозначно определяются, вообще говоря, только абсолютные величины других функций этого угла. Для определения же самих величин этих функций нужно знать, например, в какой четверти расположен этот угол.

1 *Найти без таблиц* $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, *если*

$$\sin\alpha = -\frac{1}{3} \text{ и } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

Для решения этой задачи используем известную формулу

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

так что требуется предварительно найти $\cos\alpha$. Имеем

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos\alpha < 0,$$

поскольку угол α расположен в третьей четверти. Из этих условий следует, что $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, а потому

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{2} - 3.$$

Можно было бы исходить и из другой известной формулы:

$$\left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right| = \frac{1}{\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

Задача сводится к вычислению $\cos\alpha$ и определению знака $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$, то угол $\frac{\alpha}{2}$ расположен во второй четверти, а потому $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} < 0$.

Некоторые поступающие для решения задачи привлекали формулу, выражающую $\sin\alpha$ через тангенс половинного угла:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{2}$$

Однако на этом пути возникает совершенно неожиданная трудность. Именно, из соотношения (2) с учетом того, что $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, получается квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 6\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 1 = 0,$$

которое дает два значения: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{2} - 3$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -(2\sqrt{2} + 3)$. Ясно, однако, что условием задачи угол α определяется однозначно, а потому $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ имеет вполне определенное значение. Следовательно, мы должны еще выяснить, чему же на самом деле равен $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Для этого недостаточно знать, в какой четверти расположен угол $\frac{\alpha}{2}$, ибо оба найденные выше значения $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ отрицательны, — необходимо провести более детальный анализ. Заметим, что, согласно условию задачи, $\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{3\pi}{4}$, а потому $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < -1$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -(2\sqrt{2}+3), \text{ т. е. } \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{2} - 3.$$

(2) *Найти* $\operatorname{tg} x$, *если*

$$\begin{cases} y\sin x + \cos x = y, \\ 7\sin x - 2y\cos x = 2. \end{cases} \tag{3}$$

Исключив из данной системы неизвестное y, мы придем к уравнению относительно x, с помощью которого и попытаемся вычислить $\operatorname{tg} x$. Заметим, что $\sin x \neq 1$; в противном случае $\cos x = 0$ и второе уравнение системы, очевидно, не выполняется. Поэтому из первого уравнения системы (3) найдем

$$y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

и, подставив это выражение во второе уравнение системы, получим после преобразований

$$5 \sin^2 x - 9 \sin x + 4 = 0,$$

откуда $\sin x = 1$ или $\sin x = \frac{4}{5}$. Но, как мы уже отметили, $\sin x \neq 1$; следовательно, $\sin x = \frac{4}{5}$. Далее имеем

$$|\operatorname{tg} x| = \frac{|\sin x|}{|\cos x|} = \frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{4}{3}.$$

Мы видим, таким образом, что $\operatorname{tg} x$ равен либо $\frac{4}{3}$, либо $-\frac{4}{3}$. Поскольку у нас нет никакой информации о том, в какой четверти расположен угол x, не представляется возможным выбрать для $\operatorname{tg} x$ какое-то одно из этих значений.

С другой стороны, равенство $|\operatorname{tg} x| = \frac{4}{3}$ получено нами только как *следствие* системы (3) и потому, быть может, не всякое x, удовлетворяющее этому уравнению, удовлетворяет и системе. Другими словами, необходимо провести проверку полученных значений x. При $\sin x = \frac{4}{5}$ исходная система (3) принимает вид

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{y}{5}, \\ y \cos x = \dfrac{9}{5}, \end{cases}$$

откуда $\cos x = \pm\frac{3}{5}$ и $y = \pm 3$. Ясно, что при $\cos x = \frac{3}{5}$ имеем $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$, а при $\cos x = -\frac{3}{5}$ имеем $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$. Таким образом, оба найденных значения $\operatorname{tg} x$ согласуются с исходными равенствами (3), т. е. при выполнении этих равенств $\operatorname{tg} x$ может принимать два значения: $\frac{4}{3}$ или $-\frac{4}{3}$.

Не все поступающие умеют находить те значения аргумента, при которых та или иная формула верна. Часто они говорят: «Все выводимые в учебнике тригонометрические формулы представляют собой тождества, т. е. справедливы при всех значениях аргументов». Это, однако, совсем не так. Тригонометрические формулы справедливы лишь для *допустимых* значений аргументов.

В частности, формула $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ действительно верна для произвольного значения α, тогда как формула $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$ имеет смысл лишь для значений α, отличных от $\frac{k\pi}{2}$, где k — целое число.

Таким образом, выписывая какую-либо тригонометрическую формулу, всегда следует помнить, при каких значениях входящих в нее букв она справедлива. Для отыскания этих значений следует найти значения аргументов, при которых имеет смысл *каждая* функция, входящая в формулу. Если при некотором значении аргумента *хотя бы одна* из функций теряет смысл — это значение аргумента должно быть отброшено.

Рассмотрим, например, формулу

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}. \qquad (4)$$

Ее левая часть определена при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ и $\beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, где k и n — целые числа, так как при каждом из этих значений либо $\operatorname{tg} \alpha$, либо $\operatorname{tg} \beta$ теряет смысл. Правая часть равенства (4) имеет смысл при тех значениях α и β, для которых $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$; легко проверить, что мы приходим к тем же ограничениям на α и β. Таким образом, левая и правая части формулы (4) существуют при одних и тех же условиях:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ k, n \text{ — целые числа;}$$

эти два неравенства и составляют условия, при которых справедлива формула разности тангенсов.

Несколько более сложный анализ надо провести для формулы

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (5)$$

Левая ее часть определена при $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Для того чтобы имела смысл правая часть, нужно, во-первых, чтобы были определены $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, т. е. чтобы $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, где n и m — целые числа, и, во-вторых, чтобы знаменатель $1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$ был отличен от нуля.

Так как $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ определены (мы это уже предположили), то условие $1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \neq 0$ можно переписать в виде $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$. Следовательно, знаменатель в правой части формулы (5) отличен от нуля при $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, где k — целое число. Таким образом, формула тангенса разности справедлива при

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad (6)$$

где n, m, k — целые числа.

Подчеркнем, что пара значений α, β исключается из области допустимых значений формулы (5), если выполнено *хотя бы одно* из следующих равенств:

$\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi$ при некотором целом n (β — любое);

$\beta = \frac{\pi}{2} + m\pi$ при некотором целом m (α — любое);

$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ при некотором целом k.

Иногда условия (6) записывают еще и так:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

подразумевая, что в каждом из этих неравенств k пробегает *независимо* от двух других неравенств все целые значения.

Отметим существенное различие между формулами (4) и (5). В то время как левая и правая части формулы разности тангенсов существуют или не существуют *при одних и тех же* значениях аргументов, области существования левой и правой частей формулы тангенса разности *различны*. Например, левая часть формулы (5) имеет смысл при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, тогда как правая ее часть при этих значениях α и β не определена.

Можно привести и другие примеры тригонометрических формул, *левая и правая части которых имеют различные области допустимых значений*. Таковы, например, формулы, выражающие синус и косинус через тангенс половинного угла, формула тангенса суммы, формула тангенса двойного угла. Подчеркнем, что этот факт имеет большое значение в вопросах, связанных с потерей и приобретением решений уравнений (см. § 5 раздела I).

Задачи

1. Как связаны между собой углы α и β, если известно, что:
   а) $\sin\alpha = \sin\beta$; б) $\cos\alpha = \cos\beta$;
   в) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$; г) $\sin\alpha = \cos\beta$?
2. Выразить $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$ через $\sin\alpha$, если $270° < \alpha < 450°$.
3. Дано: $\sin x = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$. Вычислить $\sin 5x$.
4. Найти без таблиц $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
5. Найти без таблиц $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

Найти tg x, если:

6. $\begin{cases} 2\sin x + 2y\cos x = y, \\ y\sin x - 2\cos x = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2y\sin x + 5\cos x = 2y, \\ -5\sin x + y\cos x = 1. \end{cases}$

8. Вычислить без помощи таблиц $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$.

9. Проверить справедливость равенства

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2 15^\circ}{1+\mathrm{tg}^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

10. Доказать, что $\mathrm{tg}\,142^\circ 30' - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ есть целое число.

В. *Решение простейших тригонометрических уравнений*

Поступающие должны без затруднений решать простейшие тригонометрические уравнения вида

$$\sin x = p, \quad \cos x = p, \quad \mathrm{tg}\, x = p, \quad \mathrm{ctg}\, x = p.$$

При отдельных «хороших» значениях p запись решений этих уравнений не представляет труда. Однако уже запись решений таких, например, простейших уравнений, как $\sin x = \frac{1}{3}$, $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}\, x = 2$ и т. п., вызывает у поступающих определенные затруднения, связанные с необходимостью использования символов $\arcsin p$, $\arccos p$, $\mathrm{arctg}\, p$, $\mathrm{arcctg}\, p$. Поэтому поступающие должны знать и понимать определения этих символов.

Прежде всего укажем формальную запись определения, например, *арккосинуса*:

$$\alpha = \arccos p, \ \textit{если:} \ \ 1)\ \cos\alpha = p \quad \textit{и} \quad 2)\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi.$$

Такого рода записи обычно более удобны при решении задач, чем словесные формулировки. Сведем эти формальные определения символов $\arcsin p$, $\arccos p$, $\mathrm{arctg}\, p$, $\mathrm{arcctg}\, p$ в таблицу:

$\alpha = \arcsin p$	$\alpha = \arccos p$	$\alpha = \operatorname{arctg} p$	$\alpha = \operatorname{arcctg} p$
1) $\sin \alpha = p$ 2) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$	1) $\cos \alpha = p$ 2) $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$	1) $\operatorname{tg} \alpha = p$ 2) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$	1) $\operatorname{ctg} \alpha = p$ 2) $0 < \alpha < \pi$

С определениями арксинуса, арккосинуса и др. связаны довольно многочисленные ошибки. Наиболее типичная из них происходит от непонимания важности второго условия в определениях. Об этом условии часто просто забывают и, увидев, например, равенство $t = \cos \varphi$, сразу пишут $\varphi = \arccos t$. Это, разумеется, неверно, так как из равенства $t = \cos \varphi$ не следует, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$: хотя первое условие определения выполнено, но мы не знаем, выполнено ли второе.

Очень распространены неправильные формулировки второго условия определений. Так, при определении арктангенса часто вместо неравенства $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ употребляют выражение «угол α лежит в первой или четвертой четвертях». Но эта фраза, точный смысл которой состоит в том, что конечная сторона угла лежит в первой или четвертой четвертях, выражает гораздо более слабое ограничение, чем второе условие определения. Например, конечная сторона угла $\frac{9\pi}{4}$ лежит в первой четверти, но неравенство $-\pi < \frac{9\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ не имеет места.

Многие поступающие упускают из виду, что *символы* $\arcsin p$ *и* $\arccos p$ *имеют смысл лишь для тех чисел* p, *которые по модулю не превосходят единицы, т. е. для* $|p| \leqslant 1$ (тогда как *символы* $\operatorname{arctg} p$ *и* $\operatorname{arcctg} p$ *определены для любых* p). Подчеркнем, что условие $|p| \leqslant 1$ не входит в сами определения арксинуса и арккосинуса, но непосредственно вытекает из первого условия этих определений. Между тем поступающие часто употребляют, например, выражения $\arcsin \pi$, $\arccos 2$ и другие, не имеющие смысла.

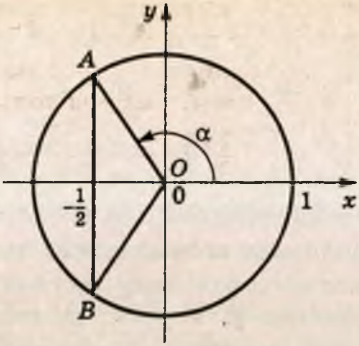


Рис. 32

Наконец, полезно осмыслить и запомнить вытекающие из самих определений формулы:

$$\sin(\arcsin p) = p, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} p) = p,$$
$$\cos(\arccos p) = p, \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} p) = p;$$

первые две из них справедливы при любом p, по модулю не превосходящем единицу, т. е. при $|p| \leqslant 1$, а две другие — при любом p.

Для того чтобы решать различные задачи на вычисления, связанные с арксинусом, арккосинусом и др., вполне достаточно хорошо знать приведенные определения и известные тригонометрические формулы. Остановимся на нескольких наиболее типичных примерах такого рода.

1 *Вычислить* $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Согласно определению, угол $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ лежит между 0 и π и его косинус равен $-\frac{1}{2}$, т. е. $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. Рассмотрим тригонометрический круг и отметим на нем положения OA и OB конечной стороны углов, косинус которых равен $-\frac{1}{2}$ (рис. 32). Стрелкой изобразим тот из них, который заключен между 0 и π; это и есть искомый угол α. Очевидно, что $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, а потому $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Отметим, что при вычислении выражений вида $\arccos(-p)$ поступающие часто считают это выражение равным $\arccos p$, необоснованно ссылаясь на четность функции $\cos x$. Между тем, как мы только что убедились, угол $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ не равен $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

② *Вычислить* $\operatorname{ctg}\left[\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$.

Подобных выражений, при всей их громоздкости, не надо пугаться. Если определения твердо усвоены, такие задачи решаются без всякого труда.

В самом деле, что же здесь надо сделать? Нужно найти котангенс угла $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. По определению арккосинуса запишем: $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Но поскольку косинус угла α отрицателен, то можно судить о величине угла α более определенно — он удовлетворяет неравенству $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Задача, таким образом, свелась к следующей: *известно, что* $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ *и* $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$; *найти* $\operatorname{ctg}\alpha$.

Эта задача решается с помощью основных соотношений между тригонометрическими функциями. Действительно,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$$

(синус во второй четверти положителен), откуда

$$\operatorname{ctg}\left[\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

③ *Чему равен* $\cos(\arcsin p)$, $|p| \leqslant 1$?

Пусть $\alpha = \arcsin p$, тогда

$$1)\ \sin\alpha = p \quad \text{и} \quad 2)\ -\pi \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Нам известен, следовательно, синус угла α, а требуется найти его косинус. Но $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - p^2$. Как теперь найти $\cos\alpha$? Очевидно, для этого достаточно узнать *знак* $\cos\alpha$. Так как угол α лежит между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, а в этом промежутке косинус неотрицателен, $\cos\alpha \geqslant 0$, то $\cos\alpha = \sqrt{1-p^2}$. Таким образом,

$$\cos(\arcsin p) = \sqrt{1-p^2} \text{ при любом } |p| \leqslant 1.$$

Совершенно аналогично можно показать, что

$$\sin(\arccos p) = \sqrt{1-p^2} \text{ при любом } |p| \leqslant 1.$$

Отдельную группу составляют задачи, в которых речь идет о разных формах записи одного и того же угла, т. е. о записи некоторого угла с использованием различных символов — арксинуса, арккосинуса и др. В самом деле, каждому углу соответствует определенное значение синуса, косинуса и т. д. Поэтому один и тот же угол может быть записан одновременно в нескольких формах, например:

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arcctg}\sqrt{3}.$$

Другой пример того же рода дает рассмотренная выше задача 2. Из ответа к ней видно, что угол $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ может быть записан и в форме $\alpha = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, поскольку $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ и $0 < \alpha < \pi$. По существу, в этой задаче показано, что обе записи означают один и тот же угол.

Умение установить тот факт, что различные формы записи выражают на самом деле один и тот же угол, имеет особое значение при решении геометрических задач. Пусть, решая какую-нибудь задачу, в которой требуется определить неизвестный угол, мы пришли к ответу

$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. Однако, решая ту же задачу другим путем, можно получить иной ответ, например, $\alpha = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. Сказанное выше означает, что это различие форм ответа не должно служить поводом для беспокойства.

(4) *Доказать, что*

$$\arccos\frac{3}{5} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{4}{5}.$$

Прежде всего отметим, что все эти три угла заключены между 0 и $\frac{\pi}{2}$. В самом деле, для первого угла это очевидно, ибо если $\alpha = \arccos\frac{3}{5}$, то $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ и $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ положителен, откуда и следует требуемое. Для угла $\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{4}{5}$ это показывается аналогично. Наконец, если $\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}$; следовательно, угол β заключен между 0 и $\frac{\pi}{4}$, а потому угол $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ лежит между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Поскольку все три рассматриваемых угла лежат в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то для доказательства их равенства достаточно показать, что какая-нибудь тригонометрическая функция (например, косинус) каждого из этих углов имеет одно и то же значение. В самом деле,

$$\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5};$$

$$\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{5};$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{4}{5}\right) = \sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right) =$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\frac{4}{5}\right)} = \frac{3}{5}$$

(напомним, что arccos — угол первой четверти, поэтому перед радикалом выбран знак плюс!), что завершает доказательство.

При решении такого рода задач допускается много ошибок. Наиболее грубая и типичная из них состоит в следующем. Для установления равенства углов проверяют, что какая-либо тригонометрическая функция каждого из углов имеет одно и то же значение, и уже на основании только этого делают заключение о равенстве углов. Разумеется, такой вывод совершено не обоснован. Например, углы $\arcsin\frac{1}{2}$ и $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ явно не равны, однако их косинусы равны.

Все дело в том, что *из равенства косинусов (синусов и т. д.) двух углов не следует равенство самих углов.* Но если нам удалось, кроме того, показать, что углы лежат, например, в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (как было в примере 4), то равенство тригонометрических функций влечет равенство углов.

Приведем еще один пример, решение которого вызывает у большинства поступающих значительные трудности. Между тем его решение требует лишь уверенного знания определений.

(5) *Чему равен угол* arcsin (sin 10)?

По определению $\alpha = \arcsin(\sin 10)$ есть угол, удовлетворяющий двум условиям:

$$\sin\alpha = \sin 10 \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Проще всего определить этот угол с помощью графика функции $y = \sin x$ (рис. 33). Надо отложить на оси абсцисс число 10, найти геометрически величину sin 10 — это будет ордината y точки графика, соответствующей

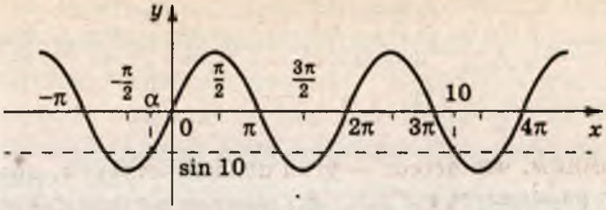


Рис. 33

$x = 10$, — и провести горизонтальную прямую $y = \sin 10$. Абсцисса одной из точек пересечения этой прямой с синусоидой лежит на отрезке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$; эта абсцисса и соответствует искомому углу α: по построению она лежит между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ и ее синус равен $\sin 10$.

Вычислить $\arcsin(\sin 10)$ теперь легко из простых геометрических соображений: точки α и 10 симметричны относительно точки $\frac{3\pi}{2}$, так что

$$10 - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - \alpha, \text{ откуда } \alpha = 3\pi - 10.$$

Задачи

Вычислить (№ 1—5):

1. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\arcsin 1$; $\arcsin(-1)$.
2. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\arccos(-1)$; $\arccos 0$.
3. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\operatorname{arctg}(-1)$; $\operatorname{arctg} 1$.
4. $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\operatorname{arcctg}(-1)$; $\operatorname{arcctg} 0$.
5. $\arcsin(\sin 5)$; $\arccos(\cos 10)$; $\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(-6)]$; $\operatorname{arcctg}[\operatorname{ctg}(-10)]$.
6. Что больше:

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \log_{81}\left(\frac{1}{27}\right)$ или $\sin\frac{43\pi}{6}\ \operatorname{tg}^3\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$?

7. Что больше:

$$\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot \log^2_{5\sqrt{5}}\left(\frac{1}{125}\right) \text{ или } \cos^2\frac{31\pi}{6}\ \operatorname{tg}\frac{29\pi}{6}\ \operatorname{tg}\frac{11\pi}{3}\ ?$$

Вычислить (№ 8, 9):

8. $\sin\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$; $\cos(\operatorname{arcctg} 2)$; $\operatorname{tg}[\operatorname{arcctg}(-3)]$.

9. $\operatorname{tg}(\arcsin p)$, $-1 < p < 1$; $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} p)$, $p \neq 0$; $\sin(\operatorname{arcctg} p)$.

10. Доказать, что:

а) $\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{3}{4} = \arccos\frac{2\sqrt{14}-3}{12}$;

б) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + \operatorname{arcctg}\frac{1}{2} = \pi - \arccos\frac{2\sqrt{5}+10}{15}$;

в) $\operatorname{arcctg}(-2) + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} = \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$.

§ 2. Тригонометрические преобразования

Хотя предлагаемые на приемных экзаменах задачи на преобразование тригонометрических выражений могут быть иногда довольно «страшны» на вид, их преобразование обычно не вызывает принципиальных затруднений. Однако для этого нужно хорошо знать соответствующие формулы, уметь «читать» их не только «слева направо», но и «справа налево», «видеть» эти формулы в самых разнообразных записях. Например, в записи $\sin x \sin 30° - \cos 30° \cos x$ надо «узнавать» $-\cos(x + 30°)$, а не $\sin(x - 30°)$, как иногда пишут поступающие, в записи $2\sin^2 x - 1$ нужно сразу видеть $-\cos 2x$ и т. д.

Такое умение можно выработать, только получив прочные навыки работы с основными тригонометрическими формулами, поупражнявшись в решении достаточного числа примеров.

Естественно, что при тригонометрических преобразованиях необходимо *строго соблюдать все правила алгебраических действий*. В ходе преобразований иногда приходится пользоваться различными алгебраическими тождествами, которые надо уметь применять к тригонометрическим выражениям.

В частности, большое количество ошибок в тригонометрических преобразованиях происходит из-за неправильного понимания символа $\sqrt{\ }$. В тригонометрии, как и в алгебре, этот знак всегда означает *арифметический* квадратный корень (см. § 2 раздела I). Поэтому, например,

$$\sqrt{1-\sin 2x} = \sqrt{(\sin x-\cos x)^2} = |\sin x-\cos x|,$$

а отнюдь не $\sin x - \cos x$; вместо $\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)}$ надо писать $|\sin\alpha|$, а не $\sin\alpha$ и т. д.

1 *Упростить выражение*

$$\frac{1}{\sqrt{b-a}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{b-a}{a}}\sin x}{\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{b-a}{a}}\sin x\right)^2}}\sqrt{a+b\,\mathrm{tg}^2 x},$$

где $b > a > 0$.

Сделав несложные преобразования, данное выражение — обозначим его для краткости через P — можно переписать в виде

$$P=\frac{\sin x\sqrt{a+b\,\mathrm{tg}^2 x}}{\sqrt{a+(b-a)\sin^2 x}}=\frac{\sin x\sqrt{a+b\,\mathrm{tg}^2 x}}{\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}}.$$

Дальнейшее преобразование некоторые из поступающих провели неверно, считая, что

$$\sqrt{a+b\,\mathrm{tg}^2 x}=\sqrt{a+b\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}}{\cos x},$$

и получив ответ $P = \mathrm{tg}\, x$. Ошибка состоит в следующем: фактически при этом преобразовании мы должны упростить выражение $\sqrt{\cos^2 x}$, которое на самом деле равно $|\cos x|$. Поэтому окончательный результат такой:

$$P=\frac{\sin x}{|\cos x|}.$$

В рассматриваемой ниже задаче главная трудность состоит именно в алгебраической стороне дела — в необходимости точно указывать, при каких значениях параметров законно то или иное преобразование.

(2) *Пусть справедливы равенства*

$$\begin{cases} m^2\operatorname{tg}^2\theta + n^2\operatorname{tg}^2\varphi = 1, \\ m^2\cos^2\theta + n^2\sin^2\theta = 1, \\ m\sin\theta = n\cos\varphi. \end{cases}$$

Исключив из них θ и φ, *найти зависимость между* m *и* n.

Перепишем второе соотношение так, чтобы в него входили произведения $m\sin\theta$ и $n\cos\varphi$:

$$m^2\sin^2\theta + n^2\cos^2\varphi = m^2 + n^2 - 1.$$

Тогда, учитывая третье соотношение, получим

$$2n^2\cos^2\varphi = m^2 + n^2 - 1.$$

Предполагая, что $n \neq 0$ (возможность $n = 0$ будет рассмотрена особо), имеем

$$\cos^2\varphi = \frac{m^2 + n^2 - 1}{2n^2}.$$

Далее, из третьего соотношения *при дополнительном предположении, что* $m \neq 0$, имеем

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{n^2}{m^2}\cos^2\varphi = \frac{m^2 + n^2 + 1}{2m^2}.$$

Следовательно, мы можем уже сделать первые заключения об m и n: если $m \neq 0$ и $n \neq 0$, то

$$\theta < \frac{m^2 + n^2 - 1}{2n^2} \leqslant 1, \quad 0 < \frac{m^2 - n^2 + 1}{2m^2} \leqslant 1$$

($\cos^2\varphi$ и $\cos^2\theta$ не могут равняться 0, так как иначе $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{tg}\theta$ не имели бы смысла). Теперь перепишем первое из данных в условии соотношений:

$$m^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) + n^2\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1\right) = 1$$

и подставим сюда найденные выражения для $\cos^2\theta$ и $\cos^2\varphi$; получаем соотношение между m и n:

$$\frac{2m^4}{m^2-n^2+1}+\frac{2n^4}{m^2+n^2-1}=m^2+n^2+1.$$

Посмотрим теперь, что будет при $n=0$. В этом случае данные в условии соотношения принимают вид

$$m^2\mathrm{tg}^2\,\theta=1,\quad m^2\cos^2\theta=1,\quad m\sin\theta=0.$$

Первое из полученных равенств показывает, что $m\neq 0$; тогда третье дает $\sin\theta=0$, что противоречит первому равенству. Следовательно, из данных в условии соотношений вытекает, что $n\neq 0$. Аналогично показывается, что и $m\neq 0$.

Таким образом, из исходных равенств после исключения θ и φ получились следующие утверждения об m и n:

$$m\neq 0,\ \ n\neq 0,\ \ 0<\frac{m^2+n^2-1}{2n^2}\leqslant 1,\ \ 0<\frac{m^2-n^2+1}{2m^2}\leqslant 1,$$

$$\frac{2m^4}{m^2-n^2+1}+\frac{2n^4}{m^2+n^2-1}=m^2+n^2+1,$$

которые и дают ответ на поставленную задачу.

Остановимся более подробно на преобразовании выражения $a\sin x+b\cos x$ путем введения *вспомогательного угла*. Определяя угол φ из условий[1] (предполагается, что a и b не равны нулю одновременно)

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\tag{1}$$

можно привести выражение $a\sin x+b\cos x$ к виду

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

---

[1] Эти условия определяют *единственный* угол φ в пределах $0\leqslant\varphi<2\pi$. Однако в качестве вспомогательного угла можно выбрать и любой угол $\varphi+2k\pi$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$.

При этом именно *знаки* чисел a и b определяют ту четверть, в которой оканчивается угол φ.

Этот общий метод введения вспомогательного угла всегда приводит к цели. Но на практике при решении конкретных задач бывает выгоднее вводить вспомогательный угол несколько иным способом.

Часто бывает удобно определить вспомогательный угол так, чтобы он лежал *в пределах от* 0 *до* $\frac{\pi}{2}$. Если вместо формул (1) использовать для определения вспомогательного угла α равенства

$$\sin\alpha = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad (2)$$

то угол α можно выбрать в первой четверти. Более того, для определения α достаточно воспользоваться *только какой-нибудь одной* из формул (2), ибо угол в первой четверти однозначно определяется значением синуса (или косинуса)[1].

При этом, разумеется, выражение $a\sin x + b\cos x$ приводится не обязательно к виду $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$, а, быть может, к одному из выражений

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x-\alpha), \quad \sqrt{a^2+b^2}\sin(-x+\alpha),$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(-x-\alpha)$$

— в зависимости от *знаков* чисел a и b. Однако для преобразования конкретного выражения $a\sin x + b\cos x$ нет нужды помнить формулы (2) — гораздо проще непосредственно провести необходимые вычисления.

---

[1] При желании для определения α $\left(\text{в пределах от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$ можно использовать и соотношение $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|b|}{|a|}$ (если $a \neq 0$), вытекающее из (2). Легко убедиться, что все эти соотношения определяют *один и тот же* угол α в первой четверти.

Рассмотрим, например, выражение

$$Q = -2\sin x + \sqrt{3}\cos x.$$

Перепишем его в виде

$$Q = \sqrt{7}\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\cos x\right).$$

Если теперь $\frac{2}{\sqrt{7}}$ принять за косинус вспомогательного угла α, а $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ — за синус этого же угла, то

$$Q = \sqrt{7}(-\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x) = \sqrt{7}\sin(\alpha - x).$$

Сам угол α $\left(\text{в пределах от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$ можно определить из равенства

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \quad \text{т. е.} \quad \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{21}}{7};$$

поэтому окончательно

$$Q = -\sqrt{7}\sin\left(x - \arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}\right).$$

Если для определения вспомогательного угла α, лежащего между 0 и $\frac{\pi}{2}$, использовать условие

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad \text{т. е.} \quad \alpha = \arccos\frac{2\sqrt{7}}{7},$$

то выражение Q примет несколько иной вид:

$$Q = -\sqrt{7}\sin\left(x - \arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}\right).$$

Иногда оказывается выгоднее привести выражение $a\sin x + b\cos x$ к *косинусу* суммы (или разности) угла x и вспомогательного угла, лежащего в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Это преобразование также удобно проводить без привлечения общих формул.

10 – 4142

Так, выражение

$$R = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x$$

может быть представлено в виде

$$R = 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right).$$

Оно приведется к косинусу некоторой комбинации углов, если выражение в скобках представить как развернутый косинус суммы угла $2x$ и некоторого угла β $\left(\text{в пределах от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$. Но для этого достаточно $\frac{1}{2}$ принять за синус вспомогательного угла β, а $\frac{\sqrt{3}}{2}$ — за его косинус. Поскольку в данном случае $\beta = \frac{\pi}{6}$, то

$$R = 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x - \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x\right) = -2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Как известно, тригонометрическое выражение имеет смысл, вообще говоря, *не при всех* значениях своих аргументов. Поэтому в задаче, где речь идет о преобразовании того или иного тригонометрического выражения, всегда *предполагается* (хотя часто и не оговаривается явно в условии задачи), что преобразование предложенного выражения нужно провести *в его области определения*, т. е. только при тех значениях аргументов, для которых предложенное выражение имеет смысл.

3 *Углы* α, β, γ *связаны соотношением*

$$2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{tg}^2\gamma\operatorname{tg}^2\alpha = 1. \quad (3)$$

Найти $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$.

Согласно сказанному выше необходимо найти сумму $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ — обозначим ее через N — лишь для таких углов α, β, γ, при которых все входящие в (3) тригонометрические функции существуют. Иными словами, мы должны считать, что в рассматриваемой задаче углы α, β, γ таковы, что $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ имеют смысл[1]. Именно при этом дополнительном неявно сформулированном условии мы и будем искать N.

Поскольку величину N предлагается вычислить, исходя из величины некоторого тригонометрического выражения, содержащего тангенсы, естественно и искомую величину N записать в иной форме, через тангенсы:

$$N = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta} + \frac{\operatorname{tg}^2\gamma}{1+\operatorname{tg}^2\gamma}.$$

Здесь мы используем предположение о том, что $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ существуют: только в этом случае можно воспользоваться формулой, связывающей синус и тангенс одного и того же угла.

Дальнейшие преобразования затруднений не вызывают: приводя полученное выражение для N к общему знаменателю и используя (3), находим $N = 1$.

В рассмотренной задаче нам не потребовалось фактически находить допустимые значения аргументов — важно было только, что проводимые преобразования справедливы при всех этих допустимых значениях, что они не изменяют области определения.

Однако если приходится применять преобразования, изменяющие область определения, то надо действовать очень внимательно. Это особенно существенно, когда необходимо не только преобразовать заданное выражение, но и выяснить те значения переменной, которые обращают его, скажем, в нуль (т. е., по существу, решить некоторое *уравнение*). В этом случае нужно следить за теми изменениями, которые претерпевает область определения, не допускать ее сужения и делать проверку, если область определения расширилась.

---

[1] Отметим, что искомая сумма $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ имеет вполне определенный смысл и вполне определенное значение при *всех* углах α, β, γ. Однако при тех углах α, β, γ, для которых хотя бы одно из чисел $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ не существует, условие (3) теряет смысл, и потому такие углы нельзя рассматривать как «связанные соотношением (3)».

④ *Упростить выражение*

$$\frac{1}{3\sin x}[(2\cos x - \sin x)\operatorname{ctg} x + 2\sin x + \cos x] \times$$

$$\times\left[1 + \left(\frac{\sqrt{3}\sin x}{2\cos x - \sin x}\right)^{-2}\right]^{-1} -$$

$$-\frac{\cos 2x[2(1 - \sin x\cos x) + (\sin x + \cos x)^2]}{6(\sin x + \cos x)^2(1 - \sin x\cos x)}.$$

Найти все значения x, при которых это выражение обращается в нуль.

Не будем сначала выяснять допустимые значения x, а проведем лишь формальные преобразования. Обозначив данное выражение через A, уменьшаемое через B и вычитаемое через C (так что $A = B - C$), преобразуем B и C к более простому виду:

$$B = \frac{1}{3\sin x}\cdot\frac{2}{\sin x}\cdot\frac{3\sin^2 x}{4(1 - \sin x\cos x)} = \frac{1}{2(1 - \sin x\cos x)};$$

$$C = \frac{3(\cos^2 x - \sin^2 x)}{6(\sin x + \cos x)^2(1 - \sin x\cos x)} =$$

$$= \frac{\cos x - \sin x}{2(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x)}.$$

Следовательно,

$$A = \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x)}.$$

Замечая, что $1 - \sin x\cos x = \sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x$, и используя формулу суммы кубов, окончательно получим:

$$A = \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}.$$

Обратимся ко второму вопросу задачи. Из окончательной формы заданного выражения видно, что оно может обращаться в нуль только для тех значений x, для которых $\sin x = 0$. Однако исходное выражение при этих значениях x *теряет смысл*: наличие $\sin x$ в знаменателе и наличие $\operatorname{ctg} x$ предполагает, что исходное выражение рассматривается для $x \neq k\pi$, k — целое число. Поэтому *заданное выражение не может обращаться в нуль ни при каких значениях* x.

Чем же объяснить тот факт, что окончательное выражение обращается в нуль при некоторых значениях x, а исходное выражение при этих значениях x не имеет смысла? Дело в том, что в процессе преобразований исходного выражения мы *расширили* его область определения. Это произошло в тот момент, когда мы сократили числитель и знаменатель уменьшаемого на $\sin^2 x$; как раз после этого значения $x = k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, попали в область допустимых значений.

Отметим, что в область определения исходного выражения не входят не только $x = k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, но и значения x, при которых обращаются в нуль выражения $\sin x + \cos x$ и $2 \cos x - \sin x$ (выражение $1 - \sin x \cos x$ в нуль никогда не обращается). Что же касается окончательного выражения, то оно не имеет смысла при тех x, для которых $\sin x + \cos x = 0$, но имеет смысл при тех x, для которых $2 \cos x - \sin x = 0$.

Мы уже подробно обсуждали вопрос о том, что тригонометрические формулы справедливы лишь при *допустимых* значениях аргументов. Это же в полной мере относится и к тригонометрическим тождествам.

В задачах, где требуется обосновать некоторое тригонометрическое соотношение, нужно иметь в виду, что каждое соотношение мы должны рассматривать *вместе* с описанием совокупности значений аргументов, для которых оно справедливо. Если множество, на котором подлежащее доказательству тождество справедливо, не указывается в условии задачи, то это значит, что тождество необходимо рассматривать *в его области определения.* В таком случае следует найти эту область определения и обеспечить справедливость проводимого доказательства для *всех* допустимых значений аргументов.

(5) *Доказать тождество*

$$1 = -\cos 2\alpha \left[1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi - 2\pi)\right].$$

Совершенно ясно, что если это тождество и справедливо, то не для всех значений α. В самом деле, левая его часть имеет смысл при любых α (она просто не зависит от α), а правая часть не определена для

$$\alpha = n\pi, \ \ \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2},$$

где n и m — целые числа. Все значения α, кроме указанных, являются допустимыми.

Именно при этих допустимых α мы и должны доказать предложенное тождество. Сделать это весьма просто, если использовать основные формулы тригонометрии. При этом необходимо только следить за тем, чтобы проводимые преобразования были законны при всех допустимых α.

Для доказательства тригонометрических соотношений обычно берут одну из его частей и с помощью различных тригонометрических и алгебраических операций (и данных задачи) преобразуют ее так, чтобы получить выражение, стоящее в другой части доказываемого соотношения. Убедиться в совпадении левой и правой частей доказываемого равенства можно также, преобразуя их по отдельности.

Однако в более сложных случаях, особенно если требуется из одного (данного) равенства получить другое (искомое), довольно трудно бывает сразу увидеть те преобразования, которые ведут к цели. Обычно в таких задачах сначала *предполагают доказываемое соотношение справедливым* и приводят его различными преобразованиями к очевидному (или данному) равенству, «нащупывая» тем самым путь решения.

(6) *Доказать, что если* $\cos x = \cos a \cos b$ *и если* $x \pm a \neq (2k+1)\pi$, $b \neq (2n+1)\pi$, $k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *то*

$$1 + \operatorname{tg}\frac{x+a}{2}\operatorname{tg}\frac{x-a}{2} = \sec^2\frac{b}{2}. \qquad (4)$$

В этой задаче вряд ли возможно сразу догадаться, как именно надо преобразовывать данное равенство $\cos x = \cos a \cos b$, чтобы прийти (с учетом ограничений) к искомому равенству (4)[1].

Поэтому *предположим, что равенство* (4) *верно*, и преобразуем его:

$$\frac{\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{b}{2}} - 1;$$

$$\frac{\cos a - \cos x}{\cos a + \cos x} = \frac{1 - \cos b}{1 + \cos b}; \qquad (5)$$

$$\cos x = \cos a \cos b.$$

В результате проведенных вычислений мы пришли к равенству, которое *по условию задачи верно.*

Здесь многие поступающие допускают грубую логическую ошибку, делая немедленное заключение: «Следовательно, верно и подлежащее доказательству равенство (4)». На самом деле, конечно, для такого заключения нет пока оснований: проведенные выкладки *не доказывают* справедливости требуемого равенства. Строго говоря, мы доказали, что если равенство (4) справедливо, то $\cos x = \cos a \cos b$, т. е. доказали утверждение, *обратное* тому, которое требуется в задаче.

Для решения поставленной задачи можно рассуждать далее так. Проделанные выкладки (5) мы будем рассматривать просто как *поиск* путей решения, как «черновик». А в качестве «чистового» решения проведем, исходя из данного нам равенства $\cos x = \cos a \cos b$, все эти преобразования *в обратном порядке.*

---

[1] Обратим внимание на существенность наложенных в условии ограничений на x, a, b — без них утверждение задачи было бы неверно, ибо интересующее нас равенство (4) имеет более узкую область определения, чем данное соотношение $\cos x = \cos a \cos b$. Например, при $x = a + \pi$, $b = \pi$ соотношение $\cos x = \cos a \cos b$ справедливо, тогда как равенство (4) теряет смысл.

Возьмем *верное* (по условию) равенство $\cos x = \cos a \times \times \cos b$, умножим обе его части на 2 и запишем результат в виде

$$-\cos x + \cos a \cos b = \cos x - \cos a \cos b.$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства выражение $\cos a - \cos b \cos x$, получим

$$(\cos a - \cos x)(1 + \cos b) = (\cos a + \cos x)(1 - \cos b).$$

Так как $x \pm a \neq (2k + 1)\pi$, то $\cos a + \cos x \neq 0$; поскольку $b \neq (2n + 1)\pi$, то $1 + \cos b \neq 0$. Поэтому обе части последнего равенства можно разделить на произведение $(\cos a + \cos x)(1 + \cos b)$, получится *верное* равенство[1]

$$\frac{\cos a - \cos x}{\cos a + \cos x} = \frac{1 - \cos b}{1 + \cos b}.$$

В его левой части сумму и разность косинусов преобразуем в произведения, а в правой части применим формулы половинного угла:

$$\frac{2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{2\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}} = \frac{\sin^2\frac{b}{2}}{\cos^2\frac{b}{2}}.$$

Теперь осталось слева перейти к тангенсам, а справа выразить синус угла $\frac{b}{2}$ через его косинус, чтобы получить требуемое равенство (4).

Но можно обойтись без фактического проведения выкладок в обратном порядке. Надо только доказать, что все преобразования, проделанные в (5), в области определения равенства (4) *обратимы* (т. е. не только из каждого равенства, получающегося в процессе преобразований, вытекает последующее, но и оно само вытекает из последующего). Этот метод рассуждений уже обсуждался в § 7 раздела I применительно к доказательству

[1] Таким образом, указанные в условии задачи ограничения существенно используются: только при этих ограничениях можно проделанные в «черновике» преобразования провести в обратном порядке.

неравенств; он полностью применим и для обоснования равенств (в том числе и тригонометрических).

Итак, проанализируем преобразования (5). Легко убедиться, что все они обратимы (в частности, переход от второго равенства (5) к третьему обратим именно благодаря наложенным в условии задачи ограничениям на x, a, b). Вместе с доказательством обратимости каждого преобразования выкладки (5) уже можно рассматривать как полное решение: в этом случае они позволяют сделать заключение о справедливости исходного равенства (4) (в его области определения).

Задачи

1. Доказать, что если α и β — углы первой четверти, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, то $\alpha + 2\beta = 45°$.

2. Доказать, что если $\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)} = \frac{a}{b}$, $\frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)} = \frac{A}{B}$ и $aB + bA \neq 0$, то $\cos(\alpha - \beta) = \frac{aA + bB}{aB + bA}$.

3. При каких значениях α и β из равенства $\cos(2\alpha + \beta) = 1$ вытекает равенство $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$?

4. Доказать, что $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

5. Упростить выражение

$$\frac{2\sin 2x\left(\sin x\cos x + \dfrac{\cos^3 x\sin x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\right)}{\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}} + \frac{\cos^2 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

6. Упростить выражение

$$\sin(a-b) + \sin(b-c) + \sin(c-a) +$$
$$+ 4\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{c-a}{2}.$$

7. Выражение $-\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \cos x + \sin x$ представить в виде произведения.

8. Преобразовать выражение $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ в сумму синусов при условии, что $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

9. Дано: $\operatorname{tg} x=\frac{2b}{a-c}$. Вычислить выражения:

$$y=a\cos^2 x+2b\sin x\cos x+c\sin^2 x;$$

$$z=a\sin^2 x-2b\sin x\cos x+c\cos^2 x.$$

10. Доказать, что если α, β, γ — углы треугольника, то

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

11. Доказать, что если $0<x<\frac{\pi}{2}$, то

$$\sqrt{\operatorname{tg}x+\sin x}+\sqrt{\operatorname{tg}x-\sin x}=2\sqrt{\operatorname{tg}x}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

12. Упростить выражение

$$\frac{(\operatorname{tg}x)^{-\frac{1}{2}}}{\cos^2 x}-$$

$$-\frac{\left[1+(2\operatorname{tg}x)^{-\frac{1}{2}}\right]\left[\operatorname{tg}x-(2\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{2}}+1\right]-\left[1-(2\operatorname{tg}x)^{-\frac{1}{2}}\right]\left[\operatorname{tg}x+(2\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{2}}+1\right]}{2\sqrt{2}\cos^2 x\left[\operatorname{tg}x+(2\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{2}}+1\right]\left[\operatorname{tg}x-(2\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{2}}+1\right]}+$$

$$+\frac{(\operatorname{tg}x-1)(2\operatorname{tg}x)^{-\frac{1}{2}}-(2\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\cos^2 x(\operatorname{tg}x-1)^2}\left[1+2\operatorname{tg}x\,(\operatorname{tg}x-1)^{-2}\right]^{-1}.$$

Найти все значения x, при которых это выражение равно $3^{\frac{3}{4}}$.

13. Упростить выражение

$$\frac{2\sin a\cos x(1-\cos a\cos x)-\sin 2a\sin^2 x}{2(1-\cos a\cos x)^2}\left[1-\frac{\sin^2 a\sin^2 x}{(1-\cos a\cos x)^2}\right]^{-1/2},$$

если $0<a<\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$.

14. Исключив θ и φ из соотношений

$$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=1,\quad a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi=1,\quad a\operatorname{tg}\theta=b\operatorname{tg}\varphi,$$

найти зависимость между a и b, если $0<b<1$, $a>1$.

15. Исключив θ и φ из соотношений

$$p \operatorname{ctg}^2 \theta + q \operatorname{ctg}^2 \varphi = 1,$$

$$p \cos^2 \theta + q \cos^2 \varphi = 1,$$

$$p \sin \theta = q \sin \varphi,$$

найти зависимость между p и q.

16. Зная, что $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ — корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, вычислить выражение

$$\sin^2 (\alpha + \beta) + p \sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha + \beta) + q \cos^2 (\alpha + \beta).$$

17. Сумма трех положительных чисел α, β, γ равна $\frac{\pi}{2}$. Вычислить произведение $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma$, если известно, что $\operatorname{ctg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \beta$, $\operatorname{ctg} \gamma$ образуют арифметическую прогрессию.

18. Доказать тождество

$$\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}.$$

19. Вычислить выражение

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha} + \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha},$$

зная, что $\cos 4\alpha = \frac{1}{2}$.

20. Упростить выражение

$$\operatorname{tg} 4x \operatorname{tg} (40^\circ - 2x) + \operatorname{tg} 4x \operatorname{tg} (50^\circ - 2x) + \operatorname{tg} (50^\circ - 2x) \operatorname{tg} (40^\circ - 2x).$$

21. Упростить выражение

$$\frac{\sin(2x - 540^\circ) \sin(4x - 180^\circ) - \sin(2x - 270^\circ) \sin(450^\circ - 4x) - 1}{\left[4 + 16\left(\operatorname{tg}\frac{3x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{3x}{2}\right)^{-2}\right]^{-1}}.$$

Найти минимальное значение выражения (№ 22, 23):

22. $\cos 2x - 8 \cos x$.

23. $\cos^{-4} x - \operatorname{tg}^2 x$.

24. Найти все значения переменной x, при которых выражение $3 + \sin^2 2x - 2 \sin^2 x$ достигает своего максимального значения.

25. Найти все значения переменной x, при которых выражение $4 \cos^4 x - 3 \cos 2x + 1$ достигает своего минимального значения.

§ 3. Тригонометрические уравнения и системы

Тригонометрические уравнения, содержащие более или менее сложные тригонометрические выражения, являются традиционной составной частью многих вариантов письменных вступительных экзаменов. Как известно, не существует единого метода, следуя которому удалось бы решить любое такое уравнение. Но общая цель состоит в преобразовании входящих в уравнение тригонометрических выражений таким образом, чтобы рассматриваемое уравнение привелось к простейшему либо «распалось» на несколько простейших.

В каждом конкретном примере необходимо найти свой способ преобразования рассматриваемого уравнения. Иногда приходится перебирать разные преобразования, испробовать различные идеи, прежде чем удастся найти тот путь, который приводит к цели. Успех здесь может обеспечить лишь хорошее знание тригонометрических формул и умение грамотно проводить тригонометрические преобразования, что вырабатывается только достаточной практикой.

Конечно, многие тригонометрические уравнения допускают несколько способов решения, в зависимости от того, на какой идее строится решение, как преобразуются входящие в уравнение тригонометрические выражения. Подчеркнем, что при этом форма записи корней часто зависит от избранного пути решения, и если мы захотим доказать эквивалентность двух разных форм записи ответа, то придется прибегнуть к дополнительным преобразованиям. Это важно напомнить потому, что иногда поступающие, решив тригонометрическое уравнение, начинают решать его «для контроля» другим способом и приходят к иной форме ответа. Приняв иную форму ответа за свидетельство неправильности первого решения, они пытаются найти несуществующие ошибки и тратят на это много времени.

Впрочем, на экзамене решить заданное уравнение надо каким-либо одним (желательно — наиболее простым и коротким!) способом, и никакие преобразования ответа в иные формы проводить не требуется.

В процессе преобразований уравнения надо следить за эквивалентностью, чтобы не пропустить потери корней (например, при сокращении левой и правой частей уравнения на общий множитель) или приобретения лишних корней (например, при возведении обеих частей уравнения в квадрат). Кроме того, необходимо отдельно контролировать, принадлежат ли получающиеся корни ОДЗ рассматриваемого уравнения. Во всех необходимых случаях (т. е. когда допускались эквивалентные преобразования) нужно делать проверку. Все подобные вопросы, связанные с *решением уравнений* (в том числе и тригонометрических), а также некоторые примеры подробно разобраны в § 5 раздела I. Здесь мы на них специально останавливаться не будем.

Рассматриваемые ниже примеры иллюстрируют несколько довольно общих рекомендаций, которые полезно учитывать при решении *тригонометрических* уравнений. Однако не надо думать, что эти рекомендации носят всеобщий характер и во всех примерах приводят к цели.

Непосредственно к простейшим тригонометрическим уравнениям примыкает уравнение вида

$$a \sin x + b \cos x = c; \qquad (1)$$

к нему приводятся многие другие уравнения. Уравнения типа (1) лучше всего решать *методом введения вспомогательного угла* (см. § 2 раздела II).

(1) *Решить уравнение*

$$\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 2 \sqrt{2 + 2\cos 2x}\ .$$

Воспользовавшись формулой косинуса половинного аргумента и синуса двойного аргумента, мы можем переписать данное уравнение в виде

$$2 \sqrt{3} \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 4|\cos x|. \qquad (2)$$

Для того чтобы избавиться здесь от знака модуля, рассмотрим отдельно два случая.

Если $\cos x \geqslant 0$, то получаем уравнение

$$2 \sqrt{3} \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 4 \cos x,$$

которое, очевидно, распадается на два уравнения:

$$\cos x = 0 \text{ и } \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = 1. \qquad (3)$$

Первое из них имеет корни

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad (4)$$

и, так как при этих значениях x условие $\cos x \geqslant 0$ выполняется, они являются корнями исходного уравнения.

Второе из уравнений (3) принадлежит типу (1); его левую часть можно преобразовать к синусу разности, определяя вспомогательный угол в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

Отсюда находим серию решений:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Легко видеть, что указанные углы при любом целом n расположены во второй четверти. Поскольку косинус во второй четверти отрицателен, то условие $\cos x \geqslant 0$ не выполняется, и, следовательно, эти значения не являются корнями исходного уравнения.

Если $\cos x < 0$, то уравнение (2) переписывается в виде

$$2\sqrt{3}\sin x \cos x - 2\cos^2 x = -4\cos x,$$

откуда, после сокращения на $\cos x \neq 0$, получаем

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = -1, \quad \text{или } \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1.$$

Корни этого уравнения

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} + 2m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

расположены в четвертой четверти, а потому условие случая $\cos x < 0$ для них не выполняется и они должны быть отброшены.

Итак, исходное уравнение имеет одну серию корней (4).

Часто поступающие при решении тригонометрических уравнений используют градусы — так, вместо (4) ответ пишут в форме

$$x = 90° + 180° \cdot k, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Это, разумеется, допустимо, хотя предпочтительнее давать ответ в радианах, считая неизвестное x *числом*, а не углом. Однако совсем не следует употреблять такую запись, в которой одновременно участвуют и градусы, и радианы, например, $x = 90° + k\pi$.

В случае, когда вспомогательный угол оказывается «хорошим» $\left(\text{например, } \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4} \text{ и т. д.}\right)$, уравнения типа (1) поступающие всегда решают изложенным методом. Если же вспомогательный угол не равен ни одному из хорошо известных значений, то мало кто проводит решение таким способом — обычно применяется универсальная подстановка или возведение в квадрат.

Это, видимо, объясняется нелюбовью к символам $\arcsin a$ и др. — в этом «плохом» случае вспомогательный угол можно записать только как арксинус (или арккосинус, или арктангенс, или арккотангенс) некоторого числа (выражения), который нельзя «вычислить». Однако это неудобство совершенно незначительно по сравнению с трудностями, которые возникают при применении иных методов.

В самом деле, универсальная подстановка, т. е. замена синуса и косинуса через тангенс половинного аргумента, вообще говоря, сужает ОДЗ и потому может привести к *потере* корней (см. задачу 19 из § 5 раздела I). Операция возведения в квадрат обеих частей уравнения может привести к *приобретению* корней. Следовательно, оба эти метода требуют дополнительных исследований, тогда как метод введения вспомогательного угла сразу приводит к равносильному простейшему уравнению. Именно поэтому им и рекомендуется пользоваться при решении уравнений типа (1).

2 *Решить уравнение*

$$2 \sin 4x + 16 \sin^3 x \cos x + 3 \cos 2x = 5.$$

Напрашивается довольно естественный путь — выразить $\sin 4x$ через тригонометрические функции угла x:

$$2 \sin 4x = 8 \sin x \cos x - 16 \sin^3 x \cos x.$$

Теперь уже ясно, что предложенное уравнение приводится к виду (1):

$$4 \sin 2x + 3 \cos 2x = 5. \qquad (5)$$

Пусть α — угол $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющий соотношениям $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, т. е. $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$. Легко проверить, что уравнение (5) равносильно уравнению $\sin (2x + \alpha) = 1$, откуда

$$x = -\frac{1}{2}\arcsin \frac{3}{5} + \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Соотношения, определяющие вспомогательный угол α, позволяют также выбрать $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$; тогда

$$x = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Наконец, можно было бы ввести вспомогательный угол β, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, так, чтобы уравнение (5) приводилось к виду $\cos (2x - \beta) = 1$. Для этого достаточно выбрать, например, $\beta = \arccos \frac{3}{5}$; тогда

$$x = \frac{1}{2}\arccos \frac{3}{5} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Подчеркнем, что получившиеся формулы — лишь *разные формы* записи корней уравнения (5) (см. § 1, В раздела II).

При решении тригонометрических уравнений, содержащих тригонометрические функции кратных аргументов, поступающие стремятся перейти обязательно к функциям самого аргумента; при этом получается алгебраическое уравнение высокой степени относительно $\sin x$ (или $\cos x$).

Между тем во многих случаях удобнее, наоборот, понижать степени, переходя *от квадратов тригонометрических функций к функциям двойного аргумента* по формулам

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \qquad (6)$$

Отметим, в частности, что использование формул (6) всегда позволяет вместо *биквадратного* уравнения относительно $\cos x$ (или $\sin x$) решать *квадратное* уравнение относительно $\cos 2x$.

(3) *Решить уравнение*

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$$

Пользуясь первой из формул (6), приходим к уравнению

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$

Преобразуя сумму первых двух и сумму последних двух слагаемых левой части в произведение, получим

$$\cos 3x \cos x + \cos 7x \cos x = 0,$$

откуда далее

$$\cos 5x \cos 2x \cos x = 0.$$

Это уравнение имеет три серии решений:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{\pi}{10} + \frac{m\pi}{5}, \qquad (7)$$

k, n, m — любые целые числа.

Отметим, что тригонометрическое уравнение, как правило, имеет несколько серий решений. Важно понимать, что входящие в запись разных серий целые числа *никак не связаны между собой*. Найденные выше три серии решений можно записать и в виде

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \; x_3 = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

подразумевая, что число k в каждом из этих равенств *независимо* от двух других пробегает все целые значения.

Сделаем еще одно замечание. Нетрудно убедиться, что первая серия (7) входит в третью. Это особенно наглядно видно, если изобразить соответствующие решения точками на тригонометрическом круге. Можно доказать это и формально: первая серия решений получается из третьей при $m = 5k + 2$. Следовательно, решения исходного уравнения записываются в более компактной форме:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{m\pi}{5}, \quad n, m \text{ — целые числа.}$$

Во многих случаях при решении тригонометрических уравнений с успехом используется специальный прием — *обозначение некоторой комбинации тригонометрических функций через новое неизвестное.* Разумеется, надо иметь некоторый опыт, чтобы увидеть подходящую комбинацию.

(4) *Решить уравнение*

$$3 \operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x + 3 \operatorname{ctg}^2 x + 2 = 0.$$

Заметив, что $2 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 2$, перепишем это уравнение:

$$3(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 + 4(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) - 4 = 0.$$

Обозначив сумму $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ через y, приходим к квадратному уравнению $3y^2 + 4y - 4 = 0$, имеющему корни $y_1 = -2$, $y_2 = \frac{2}{3}$. Остается рассмотреть два уравнения:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2 \text{ и } \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{3}.$$

Преобразуя сумму тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x},$$

приходим к уравнениям $\sin 2x = -1$ и $\sin 2x = 3$; второе из них не имеет корней, а первое имеет серию решений

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Все значения x из этой серии входят в ОДЗ исходного уравнения и являются его корнями, поскольку посторонние корни при данном решении могли появиться только за счет расширения ОДЗ.

(5) *Найти все решения уравнения*

$$1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2}\sin 2x.$$

Используя тождество $a^3 + b^3 = (a + b)(a^3 - ab + b^2)$, перепишем это уравнение в виде

$$1 + (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = 3 \sin x \cos x.$$

Воспользуемся теперь тем, что произведение $\sin x \cos x$ выражается через сумму $\sin x + \cos x$ по формуле

$$2 \sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2 - 1.$$ [1]

Обозначив сумму $\sin x + \cos x$ через y, запишем исходное уравнение в виде

$$1 + y - y\frac{y^2 - 1}{2} = 3\frac{y^2 - 1}{2}.$$

Таким образом, мы пришли к алгебраическому уравнению с одним неизвестным y. Собирая все его члены в левой части и вынося $y + 1$ за скобки, получим уравнение $(y + 1)(y^2 + 2y - 5) = 0$. Оно имеет три корня:

$$y_1 = -1, \quad y_2 = -1 + \sqrt{6}, \quad y_3 = -1 - \sqrt{6}.$$

Первый корень приводит к уравнению

$$\sin x + \cos x = -1, \quad \text{или} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда получаем серию решений

$$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Что касается второго и третьего корней, то они оба по абсолютной величине превосходят $\sqrt{2}$, в то время как

$$|\sin x + \cos x| = \left|\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \sqrt{2},$$

и, следовательно, эти корни не дают решений исходного уравнения.

---

[1] В ряде случаев полезной оказывается аналогичная формула $2 \sin x \cos x = 1 - (\sin x - \cos x)^2$.

Часто при решении тригонометрических уравнений к цели приводит удачная *группировка* членов. Однако найти ее бывает иногда непросто — для этого приходится перебирать различные возможности.

6 *Решить уравнение*

$$4 \sin x + 2 \cos x = 2 + 3 \operatorname{tg} x.$$

Хотя это уравнение на вид довольно простое, с ним придется повозиться. Отметим, что кажущийся естественным путь решения с помощью универсальной подстановки на самом деле приводит к уравнению четвертой степени относительно $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Попытаемся так сгруппировать члены рассматриваемого уравнения, чтобы прийти к «распадающемуся» уравнению. Умножая все члены исходного уравнения на $\cos x$ (при этом, разумеется, мы расширяем ОДЗ, так что в конце решения нужно будет проверить, не получились ли посторонние корни) и перенося их в левую часть, получим

$$4 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 2 \cos x - 3 \sin x = 0.$$

Можно ли левую часть этого уравнения разложить на множители? Во всяком случае, не очевидно, как это сделать, и мы должны пробовать разные варианты.

Довольно легко убедиться, что группировка первого члена со вторым, а третьего с четвертым и группировка первого члена с четвертым, а второго с третьим ничего хорошего не дают. Попробуем сгруппировать первый член с третьим, а второй — с четвертым:

$$2 \cos x (2 \sin x - 1) + (2 \cos^2 x - 3 \sin x) = 0. \qquad (8)$$

Далее, второе слагаемое в (8) можно записать в виде квадратного трехчлена (относительно $\sin x$):

$$2 \cos^2 x - 3 \sin x = 2 - 3 \sin x - 2 \sin^2 x.$$

Но трехчлен $2y^2 + 3y - 2$ легко разлагается на множители: $2y^2 + 3y - 2 = (2y - 1)(y + 2)$. Поэтому второе слагаемое в (8) представляется в виде произведения:

$$2 \cos^2 x - 3 \sin x = -(2 \sin x - 1)(\sin x + 2),$$

и, следовательно, само уравнение (8) можно записать так:

$$(2\sin x - 1)(2\cos x - \sin x - 2) = 0.$$

Это уравнение распадается на два: одно из них — простейшее: $\sin x = \frac{1}{2}$, а второе $\sin x - 2\cos x = -2$ принадлежит типу (1). Таким образом, корнями уравнения (8) будут

$$x_1 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad x_2 = 2n\pi, \quad x_3 = -2\arccos\frac{2}{\sqrt{5}} + 2m\pi;$$

$$k, n, m = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

Все корни полученных трех серий входят в ОДЗ исходного уравнения, т. е. являются его решениями.

На вступительных экзаменах часто предлагаются задачи, в которых требуется найти не все множество корней тригонометрического уравнения, а лишь те корни, которые удовлетворяют дополнительным условиям (например, лежат в определенных пределах). Такие задачи можно решать следующим образом: выписать все корни рассматриваемого уравнения, а затем из них отобрать те, для которых выполняются дополнительные условия.

7 *Найти все решения уравнения*

$$\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{2}\cos 3x = 0, \tag{9}$$

заключенные между π *и* $\frac{3\pi}{2}$.

Это уравнение можно решать возведением в квадрат, но при этом мы должны будем в конце решения отбросить все посторонние корни, а затем отобрать из оставшихся корней те, которые удовлетворяют неравенству $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Мы изберем иной путь решения.

Поскольку $\sqrt{1 + \sin 2x} = |\sin x + \cos x|$, то уравнение (9) можно переписать так:

$$|\sin x + \cos x| - \sqrt{2}\cos 3x = 0.$$

Для решения этого уравнения избавимся от знака модуля. Однако все возможные случаи рассматривать нет необходимости. В самом деле, нам надо найти лишь те корни этого уравнения, которые удовлетворяют неравенству $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Но в третьей четверти и синус и косинус отрицательны, а потому (на интересующем нас промежутке!) исходное уравнение приводится к виду

$$(\sin x + \cos x) + \sqrt{2}\cos 3x = 0,$$

или, после очевидных преобразований,

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 0.$$

Получившееся уравнение имеет две серии решений:

$$x_1 = \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{8} + n\pi,$$

где k и n — целые числа. Остается отобрать из этих серий те корни, которые лежат между π и $\frac{3\pi}{2}$.

Найдем сначала такие *целые* k, при которых

$$\pi < \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} < \frac{3\pi}{2}.$$

Это неравенство (относительно k) приводится к виду $\frac{11}{8} < k < \frac{19}{8}$, откуда ясно, что $k = 2$. Аналогично выясняем, что из корней второй серии дополнительному условию удовлетворяет только тот, который соответствует $n = 1$.

Таким образом, удовлетворяющими условию задачи корнями уравнения (9) являются $x = \frac{21\pi}{16}$ и $x = \frac{11\pi}{8}$.

Особенно часто приходится прибегать к отбору решений тригонометрического уравнения, когда оно получается из некоторого исходного уравнения «комбинированного» типа (например, из уравнения, в которое входят логарифмические и тригонометрические функции). В таких случаях роль «дополнительных условий» обычно играют неравенства, определяющие ОДЗ исходного уравнения.

8 *Решить уравнение*

$$\log_{\frac{-x^2-6x}{10}}(\sin 3x + \sin x) = \log_{\frac{-x^2-6x}{10}} \sin 2x. \qquad (10)$$

Грубейшей ошибкой было бы утверждать, что это уравнение равносильно уравнению

$$\sin 3x + \sin x = \sin 2x \qquad (11)$$

— ведь переход от (10) к (11) *расширяет* ОДЗ, и потому среди решений уравнения (11) могут быть посторонние.

Следовательно, согласно утверждению А из § 5 раздела I, для решения уравнения (10) достаточно решить уравнение (11) и взять лишь те из его корней, которые входят в ОДЗ уравнения (10). Легко убедиться, что ОДЗ определяется неравенствами

$$\sin 3x + \sin x > 0, \quad \sin 2x > 0, \quad -6 < x < 0. \qquad (12)$$

Уравнение (11) сразу переписывается в виде $2 \sin 2x \cos x = \sin 2x$. Поскольку в ОДЗ исходного уравнения $\sin 2x \neq 0$ (см. (12)), то после сокращения на $\sin 2x$ мы приходим к уравнению $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Из полученных корней следует отобрать те, которые удовлетворяют условиям (12). Для этого удобнее вместо выписанной одной формулы для корней рассмотреть две серии решений уравнения (11):

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2m\pi; \quad n, m, = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

и для каждой из них отдельно найти те (целые) значения n и m, при которых соответствующие корни удовлетворяют всем трем неравенствам (12).

Рассмотрим сначала первую серию. Наиболее «сильным» из ограничений (12) является, очевидно, третье из них; поэтому начнем с него — это даст возможность провести среди корней самую большую «чистку».

Для первой серии решений уравнения (11) третье из неравенств (12) имеет вид

$$-6 < \frac{\pi}{3} + 2n\pi < 0; \tag{13}$$

при этом не будем забывать, что нас интересуют лишь *целочисленные* решения неравенства (13). Найти такие решения проще всего прямым перебором. При любом целом $n \geqslant 0$ средняя часть неравенства (13) положительна, и потому ни одно неотрицательное целое значение n этому неравенству не удовлетворяет. Далее, при любом целом $n \leqslant -2$ имеем (используя тот факт, что $\pi > 3$):

$$\frac{\pi}{3} + 2n\pi \leqslant \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3} < -\frac{11 \cdot 3}{3} = -11 < -6,$$

т. е. неравенству (13) не удовлетворяет ни одно целое значение $n \leqslant -2$. Следовательно, остается проверить, удовлетворяет ли неравенству (13) значение $n = -1$. Поскольку при этом значении n средняя часть неравенства (13), очевидно, отрицательна и поскольку (в силу того, что $\pi < 3{,}2$)

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3} > -\frac{5 \cdot 3{,}2}{3} = -5\frac{1}{3} > -6,$$

то $n = -1$ неравенству (13) удовлетворяет.

Таким образом, из всей первой серии решений уравнения (11) третьему неравенству (12) удовлетворяет лишь одно значение $x^* = -\frac{5\pi}{3}$. Непосредственная проверка показывает, что это значение удовлетворяет и двум другим неравенствам (12), т. е. $x^* = -\frac{5\pi}{3}$ является корнем исходного уравнения (10). Впрочем, эту проверку достаточно провести лишь для установления неравенства $\sin 2x^* > 0$. В самом деле, если вспомнить, что x^* — корень уравнения (11), т. е. $\sin 3x^* + \sin x^* = \sin 2x^*$, то ясно, что неравенство $\sin 3x^* + \sin x^* > 0$ следует из неравенства $\sin 2x^* > 0$.

Вторую серию решений уравнения (11) можно было бы исследовать совершенно аналогично, но мы быстрее придем к цели, если догадаемся сначала проверить второе из неравенств (12). Эта проверка показывает, что ни один из корней второй серии условию $\sin 2x > 0$ не удовлетворяет и, следовательно, не является корнем уравнения (10).

9 *Найти все решения уравнения*

$$\log_{-2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}(1 - \sin x - \sin 2x) = 1. \qquad (14)$$

ОДЗ данного уравнения определяется неравенствами

$$1 - \sin x - \sin 2x > 0, \quad -2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} > 0,$$

$$-2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} \neq 1, \qquad (15)$$

и в этой области уравнение (14) равносильно уравнению

$$1 - \sin x - \sin 2x = -2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}, \qquad (16)$$

или

$$1 + \cos 2x - \sin 2x + \cos x - \sin x = 0.$$

Воспользовавшись формулами двойного аргумента и разложив левую часть на множители, приходим к двум уравнениям

$$\cos x = \sin x \quad \text{и} \quad \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Корнями первого уравнения являются

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \text{ — целое число;}$$

из них надо отобрать лишь те, которые входят в ОДЗ уравнения (14), т. е. удовлетворяют всем неравенствам (15). При $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ первое из неравенств (15) принимает вид

$$1 - \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) > 0, \quad \text{или} \quad (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2} < 0,$$

и выполняется, очевидно, при нечетных k, т. е. при $k = 2n + 1$. Таким образом, из первой серии дальнейшей проверке подлежат только

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, \ n \text{ — целое число.} \qquad (17)$$

Ясно, однако, что эти значения x удовлетворяют и остальным неравенствам (15) — именно потому, что они являются корнями уравнения (16).

Проверку корней уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ на вхождение в ОДЗ уравнения (14) можно было бы провести совершенно аналогично, но мы поступим иначе. Если $\cos x = -\frac{1}{2}$, то (см. последнее из условий (15))

$$-2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = -2\cos^2 x + 1 - \cos x = 1.$$

Следовательно, корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ не удовлетворяют третьему неравенству (15).

Таким образом, все решения исходного уравнения даются формулой (17).

(10) *Найти все решения уравнения*

$$\sqrt{\cos(x+1)} = \sqrt{\cos x}\,, \qquad (18)$$

удовлетворяющие условию $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Возводя обе части уравнения (18) в квадрат, мы получаем

$$\cos(x+1) = \cos x. \qquad (19)$$

При этом, согласно утверждению Б из § 5 раздела I, мы можем получить посторонние корни только за счет расширения ОДЗ. Следовательно, согласно утверждению А из § 5 раздела I, достаточно отобрать те корни уравнения (19), которые входят в ОДЗ уравнения (18), т. е. удовлетворяют неравенствам

$$\cos x \geqslant 0, \ \cos(x+1) \leqslant 0$$

(и, разумеется, дополнительному условию $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$).

Для решения уравнения (19) перенесем $\cos x$ в левую часть и преобразуем разность косинусов в произведение синусов[1]

$$2 \sin \frac{1}{2} \cdot \sin \left(x + \frac{1}{2} \right) = 0. \qquad (20)$$

Из условия $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ следует $\frac{1}{2} \leqslant x + \frac{1}{2} \leqslant 2\pi + \frac{1}{2}$, а тогда из уравнения (20) находим

$$x + \frac{1}{2} = \pi \text{ или } x + \frac{1}{2} = 2\pi,$$

т. е. $x_1 = \pi - \frac{1}{2}$, $x_2 = 2\pi - \frac{1}{2}$. Ясно, что $\cos x_1 < 0$, а $\cos x_2 > 0$; поэтому корнем исходного уравнения является только значение $x = 2\pi - \frac{1}{2}$.

Встречаются задачи, в которых также приходится проводить отбор корней тригонометрических уравнений, но по иной причине — нужно найти лишь те корни, которые являются *общими*, например, для *двух* тригонометрических уравнений.

11 *Решить уравнение* $\sin 7x + \cos 2x = -2$.

С первого взгляда может показаться, что в этой задаче нет ничего особенного. Однако по мере проведения преобразований становится ясно, что это уравнение несколько необычно: оно не «распадается» на несколько простейших, а приводится к *системе двух* (простейших) *тригонометрических уравнений с одним неизвестным.*

---

[1] Довольно часто уравнения вида $\cos(ax + \varphi) = \cos(bx + \psi)$, $\cos(ax + \varphi) = \sin(bx + \psi)$ и т. п. поступающие решают иначе, используя вытекающие из равенств $\cos \alpha = \cos \beta$ или $\cos \alpha = \sin \beta$ соотношения между α и β. Опыт приемных экзаменов, однако, показывает, что при этом допускается большое количество ошибок, связанных с неправильным пониманием упомянутых соотношений. Такие соотношения не следует заучивать, тем более что их применение существенного сокращения выкладок не дает.

Переписывая исходное уравнение в виде

$$\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-7x\right)\right]+[1+\cos 2x]=0$$

и преобразуя каждое из выражений в квадратных скобках, придем к соотношению

$$\cos^2\left(\frac{7x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2 x=0. \qquad (21)$$

Как известно, сумма квадратов двух величин равна нулю в том и только в том случае, когда обе эти величины равны нулю. Следовательно, исходное уравнение *эквивалентно системе* двух уравнений с одним неизвестным:

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{7x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0,\\ \cos x=0.\end{cases} \qquad (22)$$

Нам нужно, таким образом, получить все решения системы (22), т. е. все такие x, которые удовлетворяют обоим уравнениям этой системы.

Первое и второе уравнения системы (22) имеют соответственно следующие серии корней:

$$x=\frac{3\pi}{14}+\frac{2k\pi}{7},\quad k=0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

$$x=\frac{\pi}{2}+n\pi,\quad n=0, \pm1, \pm2, \ldots;$$

теперь необходимо отобрать все значения x, входящие *одновременно в обе* эти серии (т. е. найти все такие значения x, которые получаются при некотором целом k из первой серии и при некотором целом n из второй).

Для этого воспользуемся тригонометрическим кругом[1]. Отметим на нем точками значения x, входящие в первую серию для $k = 0, 1, 2, \ldots, 6$ (рис. 34). Мы замечаем, что точки, изображающие остальные значения x, входящие в эту серию (для остальных значений k), по-

[1] Отбор значений x, принадлежащих обеим указанным сериям, можно провести и методом, использованным в примере 4 из § 1, Б раздела I.

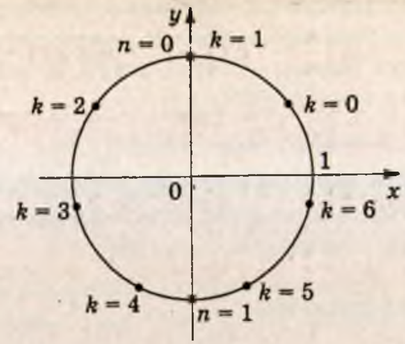


Рис. 34

вторяются через 7 единиц (например, точка, соответствующая значению x при $k = 9$, совпадает с точкой, соответствующей значению x при $k = 2$, и т. д.). Значения x из второй серии отмечены крестиками для $n = 0, 1$; точки, соответствующие остальным значениям n, повторяются через две единицы.

Из рисунка 34 ясно, что рассматриваемые серии имеют общими те значения x, которым соответствует верхний конец вертикального диаметра; эти значения получаются из второй серии при $n = 2p$, $p = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, а из первой серии — при $k = 7q + 1$, $q = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Таким образом, решение системы (22), а следовательно, и исходного уравнения таково:

$$x=\frac{\pi}{2}+2p\pi,\quad p=0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

В проведенном решении мы использовали преобразование исходного уравнения к виду (21). Однако при некоторой сообразительности легко догадаться, как обойтись без такого преобразования.

В самом деле, рассмотрим внимательнее исходное уравнение. Его левая часть — сумма синуса и косинуса, а правая — число −2. Но, по свойству синуса и косинуса, при любом x справедливы неравенства

$$\sin 7x \geqslant -1,\quad \cos 2x \geqslant -1,$$

откуда сложением этих неравенств получаем

$$\sin 7x + \cos 2x \geqslant -2.$$

Следовательно, исходное уравнение удовлетворяется в том и только в том случае, когда каждое из слагаемых его левой части равно -1, т. е. когда x *одновременно* удовлетворяет двум уравнениям:

$$\sin 7x = -1, \quad \cos 2x = -1.$$

Мы снова приходим к системе двух уравнений с одним неизвестным; ее решение можно провести аналогично тому, как мы решали систему (22).

12 *Решить уравнение*

$$\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x.$$

Это уравнение выглядит внешне совершенно обычно, и естественно попытаться решать его стандартным методом сведения к одной функции, например, к $\sin x$. Однако нетрудно убедиться, что на таком пути мы придем к уравнению седьмой степени относительно $\sin x$, разобраться с которым практически невозможно. В то же время к цели легко приводит идея, аналогичная той, которая была использована в предыдущей задаче.

Обозначив для краткости $\sin x$ через t, а $\sin^2 3x$ через a, перепишем данное уравнение в виде

$$t^2 - ta + \frac{a}{4} = 0.$$

Левую часть этого уравнения можно рассматривать как квадратный трехчлен относительно t; выделим в нем полный квадрат:

$$t^2 - ta + \frac{a}{4} = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(a - a^2).$$

Следовательно, исходное уравнение записывается в виде

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2 3x\,(1 - \sin^2 3x) = 0,$$

или, что то же самое,

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2 + \frac{1}{16}\sin^2 6x = 0.$$

Ясно, что это уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}\sin^2 3x, \\ \sin 6x = 0. \end{cases}$$

Решением второго уравнения системы является серия значений $x = \frac{k\pi}{6}$, где k — целое число. Из этой серии надо отобрать значения, удовлетворяющие первому уравнению системы. Для отыскания соответствующих значений k подставим $x = \frac{k\pi}{6}$ в первое уравнение; тогда получим

$$\sin \frac{k\pi}{6} = \frac{1}{2}\sin^2 \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ четно,} \\ \frac{1}{2}, & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда k четно и когда k нечетно. Если k четно, то должно выполняться равенство

$$\sin \frac{k\pi}{6} = 0,$$

что верно при $\frac{k\pi}{6} = m\pi$, где m — целое число. Таким образом, среди *четных* k нам подходят только числа вида $k = 6m$, где m — целое число. Если k нечетно, то должно выполняться равенство

$$\sin \frac{k\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

что верно при

$$\frac{k\pi}{6} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n \text{ — целое число.}$$

Таким образом, среди *нечетных* k нам подходят только числа вида $k = (-1)^n + 6n$, где n — целое число.

Окончательно, решениями исходного уравнения служат значения из следующих двух серий:

$$x = m\pi, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad m \text{ и } n \text{ — целые числа.}$$

Впрочем, полученная выше система решается еще проще, если заметить, что ее второе уравнение распадается на два:

$$\sin 3x = 0 \text{ и } \cos 3x = 0.$$

Если $\sin 3x = 0$, то из первого уравнения системы получаем $\sin x = 0$, т. е. $x = m\pi$; эти значения x являются решениями системы. Если же $\cos 3x = 0$, то тогда $\sin^2 3x = 1$ и из первого уравнения системы получаем

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad \text{т. е.} \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi;$$

эти значения x также являются, очевидно, решениями системы. Мы видим, таким образом, что несколько неестественное разбиение простейшего уравнения $\sin 6x = 0$ на два оказалось эффективнее, чем естественный путь, связанный с решением этого уравнения и последующим отбором корней.

Особую группу составляют тригонометрические уравнения, в которые, помимо неизвестных, входят *параметры.* При решении таких задач прежде всего возникает вопрос о выяснении тех значений параметров, при которых решения *существуют.* Разумеется, необходимо также найти сами решения (в зависимости от параметров).

Хотя решение задач с параметрами не предполагает никаких дополнительных знаний, требующееся при этом исследование представляет подчас определенные логические и технические трудности.

13 *При каких значениях а уравнение*

$$\sin^2 3x - \left(a + \frac{1}{2}\right)\sin 3x + \frac{a}{2} = 0 \qquad (23)$$

имеет ровно три корня, расположенных на отрезке

$$\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi? \qquad (24)$$

Обозначив $\sin 3x$ через z, получим уравнение

$$z^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)z + \frac{a}{2} = 0,$$

корни которого $z_1 = a$, $z_2 = \frac{1}{2}$. Поэтому уравнение (23) распадается на два простейших:

$$\sin 3x = a \text{ и } \sin 3x = \frac{1}{2}.$$

Поскольку на отрезке (24) выполняется неравенство $2\pi \leqslant 3x \leqslant 3\pi$, то уравнение $\sin 3x = \frac{1}{2}$ удовлетворяется

$$\text{при } 3x = 2\pi + \frac{\pi}{6} \text{ и при } 3x = 2\pi + \frac{5\pi}{6}.$$

Итак, уравнение (23) на отрезке (24) при любом значении a имеет по крайней мере два корня $x_1 = \frac{13\pi}{18}$, $x_2 = \frac{17\pi}{18}$.

Таким образом, число a удовлетворяет условию задачи, если уравнение $\sin 3x = a$ имеет на отрезке (24) только один корень. Обозначим $3x$ через y; тогда интересующий нас вопрос можно сформулировать так: *при каких значениях a уравнение* $\sin y = a$ *на отрезке* $2\pi \leqslant y \leqslant 3\pi$ *имеет только один корень*? Однако функция синус на этом отрезке принимает все значения от 0 до 1, причем каждое из этих значений, кроме 1, — дважды. Следовательно, условию задачи удовлетворяет только значение $a = 1$.

Иногда на вступительных экзаменах предлагаются системы тригонометрических уравнений. Решить такую задачу — значит *найти все наборы значений неизвестных, которые обращают в верные числовые равенства все уравнения системы.*

Обычно при решении систем либо сразу исключают одно из неизвестных, выражая его через другие из какого-либо уравнения системы, либо пытаются свести тригонометрическую систему к системе алгебраических уравнений удачным введением новых неизвестных или преобразованием уравнений системы.

Решение тригонометрических систем не требует никаких специальных приемов или знаний. Тем не менее эти задачи связаны с некоторыми специфическими трудностями. Одна из них такова: тригонометрические системы имеют, как правило, *бесконечно много решений*. Поэтому правильная запись ответа, отбор нужных решений и т. д. бывают затруднены необходимостью рассматривать разные случаи или решать вспомогательные неравенства.

(14) *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y, \\ x - y = \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Второе уравнение рассматриваемой системы позволяет легко выразить одно неизвестное через другое. Это и подсказывает, что систему лучше всего решать исключением одного неизвестного, после чего она сведется к «привычному» тригонометрическому уравнению.

Какое именно неизвестное исключить — безразлично; исключим y. Так как $y = x - \dfrac{\pi}{6}$, то подстановка этого выражения в первое уравнение системы приводит к уравнению относительно x:

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right). \qquad (25)$$

Левая часть этого уравнения легко преобразуется к виду $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$. Как было отмечено в § 1 раздела II, этот переход ведет к расширению ОДЗ; поэтому в конце решения уравнения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

надо обязательно сделать проверку на вхождение его корнем в ОДЗ уравнения (25).

Последнее уравнение имеет корни

$$x = \frac{5\pi}{24} - \frac{k\pi}{2}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

которые, очевидно, входят в ОДЗ уравнения (25) и являются, следовательно, его решениями. В результате получаем решения исходной системы:

$$x = \frac{5\pi}{24} - \frac{k\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi}{24} - \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Подчеркнем, что каждому целому числу k соответствует вычисляемая по этим формулам *пара* значений x, y — *решение* исходной системы; исходная система имеет бесконечно много решений.

(15) *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} - \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = 0, \\ \cos(x - y - z) = \frac{1}{2}, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

Последнее уравнение позволяет исключить из данной системы z. В самом деле, подставляя $z = \pi - (x + y)$ в первые два уравнения, приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \operatorname{tg} \frac{x + y}{2}, \\ \cos 2x = -\frac{1}{2}. \end{cases} \tag{26}$$

Второе уравнение этой системы дает

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{27}$$

Естественно, далее, подставить это выражение для x в первое уравнение (26) и свести, таким образом, систему (26) к одному уравнению. Однако этот способ приводит к довольно неприятному тригонометрическому уравнению относительно y.

Поэтому мы изберем иной путь — преобразуем первое уравнение системы (26). Выражая тангенсы через синусы и косинусы и освобождаясь от знаменателей, приходим к соотношению

$$\sin \frac{x + y}{2}\left(\cos \frac{x + y}{2} - \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2}\right) = 0. \tag{28}$$

Приравнивая к нулю первый сомножитель, получим

$$x + y = 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{29}$$

Если теперь вспомнить выражения для x и z, то легко получить первую серию значений неизвестных:

$$x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$y_1 = \mp\frac{\pi}{3} + (2n - k)\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{30}$$

$$z_1 = \pi - 2n\pi.$$

Приравняем к нулю второй сомножитель левой части (28). Используя формулу косинуса суммы, получим соотношение $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} = 0$. Но так как в силу (27) имеем $\sin\frac{x}{2} \neq 0$, то $\sin\frac{y}{2} = 0$, откуда $y = 2m\pi$, m — целое число. Вспоминая выражения для x и y, находим вторую серию значений неизвестных:

$$x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$y_2 = 2m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$z_2 = \pi \mp \frac{\pi}{3} - (2m + k)\pi.$$

Заметим, что при переходе к уравнению (28) мы расширили ОДЗ; поэтому необходимо сделать проверку. Она подтверждает, что обе найденные серии действительно являются решениями исходной системы.

Сделаем несколько замечаний относительно формы записи решений тригонометрических систем.

При решении рассматриваемой задачи многие поступающие рассуждали примерно так: «Поскольку из формулы (29) следует $y = 2n\pi - x$, то, учитывая выражение (27) для x, находим

$$y = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} - k\pi = \pm\frac{\pi}{3} + (2n - k)\pi». \tag{31}$$

Некоторые даже пытались обосновать «законность» этой формулы: «Поскольку в (27) можно брать оба знака (плюс и минус), то и в выражении для y надо брать оба знака, но ведь это и отмечено в (31) тем, что там написан знак $\pm$».

На самом деле выражение (31) для y неверно: если взять некоторое значение x, соответствующее выбору знака плюс в формуле (27), то соответствующее значение y отвечает выбору знака минус во второй формуле (30). Таким образом, знаки в формулах (30) означают не произвольный выбор знаков плюс и минус в каждой из формул, а вполне определенный: во всех этих формулах берутся *либо одновременно оба верхних знака, либо одновременно оба нижних.*

Следует правильно понимать этот точный смысл условной записи (30). В частности, эта запись означает, что каждому выбору значений k и n соответствуют два решения — две тройки чисел x, y, z — исходной системы.

Другая типичная ошибка поступающих заключается в том, что они везде обозначают произвольные целые числа одной и той же буквой. Например, вместо (29) многие писали $x + y = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и, учитывая (27) и выражение для z, получали вместо (30) серию

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad y = \mp\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad z = \pi - 2k\pi.$$

Хотя эти тройки чисел действительно удовлетворяют исходной системе, многие ее решения утеряны. Причина состоит в том, что при переходе от уравнений системы (26) к равенствам для x и $x + y$ мы должны сохранять «независимость» этих равенств введением *различных* целочисленных параметров k и n (как это сделано в (27) и (29)), а не «связывать» их введением одного и того же целого k.

16 *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{y}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1. \end{cases}$$

В этой системе мы не располагаем уравнением, которое позволило бы *непосредственно* выразить одно из неизвестных через другое и тем самым провести исключение одного из неизвестных. Поэтому попытаемся так преобразовать уравнения данной системы, чтобы получить алгебраическую систему уравнений относительно некоторых тригонометрических функций от неизвестных x и y.

Как известно, косинус любого угла выражается через косинус половинного угла. Это наводит на мысль обозначить $\cos\frac{x}{2}$ через u, $\cos\frac{y}{2}$ — через v и записать первое уравнение системы с помощью u и v. Тогда исходная система легко переписывается в виде «привычной» алгебраической системы:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = \dfrac{3}{2}, \\ u + v = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1. \end{cases}$$

Решения этой системы легко находятся:

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ v_1 = -1;\quad u_2 = -1;\ v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, для определения неизвестных x и y остается решить две системы уравнений:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\dfrac{y}{2} = -1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} = -1, \\ \cos\dfrac{y}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Отсюда находим две серии решений исходной системы:

$$x_1 = \pm\frac{\pi}{2} + 4k\pi,\quad y_1 = 2\pi + 4n\pi,\quad k, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots;$$

$$x_2 = 2\pi + 4p\pi,\quad y_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 4q\pi,\quad p, q = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

В ряде случаев решение тригонометрической системы сводится к решению алгебраической системы с целочисленным параметром, или, другими словами, к решению бесконечного множества алгебраических систем.

(17) *Найти все решения системы*

$$\begin{cases} 2+\sin[\pi(x-y)]+\sqrt{3}\cos[\pi(x-y)]=0, \\ x^2+y^2=\dfrac{25}{72}. \end{cases} \qquad (32)$$

Введением вспомогательного угла первое уравнение этой системы можно преобразовать к виду

$$\sin\left[\pi(x-y)+\frac{\pi}{3}\right]=-1,$$

откуда легко находим

$$x-y=-\frac{5}{6}+2k, \quad k=0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

Следовательно, вместо системы (32) мы приходим к алгебраической системе с параметром:

$$\begin{cases} x-y=-\dfrac{5}{6}+2k, \\ x^2+y^2=\dfrac{25}{72}; \end{cases} \qquad (33)$$

параметр k принимает целочисленные значения.

Обозначив для краткости $2k-\frac{5}{6}$ через a, из первого уравнения системы (33) получим $x=y+a$. Тогда второе уравнение системы (33) приводится к виду

$$2y^2+2ay+\left(a^2-\frac{25}{72}\right)=0.$$

Дискриминант этого уравнения равен $D=-a^2+\left(\frac{25}{36}\right)$, и, следовательно, уравнение имеет корни при $-\frac{5}{6}\leqslant a\leqslant\frac{5}{6}$. Это означает, что система (33) имеет решения при значениях k, удовлетворяющих неравенству

$$-\frac{5}{6}\leqslant 2k-\frac{5}{6}\leqslant\frac{5}{6}, \quad \text{или} \quad 0\leqslant k\leqslant\frac{5}{6}.$$

Отсюда, учитывая, что k — целое число, находим $k=0$.

Таким образом, при $k \neq 0$ система (33) не имеет решений, а при $k = 0$ ее решение $x = -\frac{5}{12}$, $y = \frac{5}{12}$. Эта пара чисел и является решением исходной системы.

Задачи

Решить уравнения (№ 1—61):

1. $\sin 3t \cos t = \frac{3}{2} \operatorname{tg} t$.

2. $\sin y + \cos 3y = 1 - 2 \sin^2 y + \sin 2y$.

3. $\sin 3x + \sin x + 2 \cos x = \sin 2x + 2 \cos^2 x$.

4. $\frac{2}{\sqrt{3}} (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 2$.

5. $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} + 2 \operatorname{tg} x = 0$.

6. $\sqrt{\frac{1}{16} + \cos^4 x - \frac{1}{2}\cos^2 x} + \sqrt{\frac{9}{16} + \cos^4 x - \frac{3}{2}\cos^2 x} = \frac{1}{2}$.

7. $6 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

8. $5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}\,(2 + \sin 2x)$.

9. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16} \cos^2 2x$.

10. $\left(2 \sin^4 \frac{x}{2} - 1\right) \frac{1}{\cos^4 \frac{x}{2}} = 2$.

11. $2 \cos 2x + \sin 3x - 2 = 0$.

12. $\log_{\frac{6x - x^2}{11}} (-\cos x - \cos 3x) = \log_{\frac{6x - x^2}{11}} (-\cos 2x)$.

13. $2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) [\sin (\pi - 3x) + 1] = \frac{5}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{19\pi}{6} \sin (3x - 7\pi)$.

14. $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}$.

15. $\cos^2 x + \cos \frac{x}{2} \cos^2 x - \cos \frac{x}{2} - 1 = 2\left(\sin \frac{x}{4} - \cos x\right)^2$.

16. $2 \sin^2 x + \sin (x^2) = 1$.

17. $3 + 2 \sin 3x \sin x = 3 \cos 2x$.

18. $\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} - 1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \cos x$.

19. $\cos 5x \cos 4x + \cos 4x \cos 3x - \cos^2 2x \cos x = 0$.

20. $2 \sin 3x + \cos x \cos 2x = (\cos x + \cos 3x)(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} 2x)$.

21. $\cos (2^x) - 2 \operatorname{tg}^2 (2^{x-1}) + 2 = 0$.

22. $6 \sin x + 6 \cos 2x = \sin 2x \cos x + 6 \cos^2 x$.

23. $\frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} = \sqrt{2}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$.

24. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right)$.

25. $16 \sin x - \sin 2x = 1 - \cos 2x$.

26. $\sin x \cos x \sin 3x - \cos 3x \sin^2 x = 6 \operatorname{ctg} x$.

27. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 2 \sin \frac{\pi}{4}$.

28. $3 \operatorname{tg}^2 x + 7 = \frac{2}{\sin^2 x}$.

29. $\sin (\log_{\sqrt{x}} x^{\pi x}) + \sin \pi x + \cos \pi x + \cos (\log_x x^{2\pi x}) = 0$.

30. $(1 + \sqrt{3}) \cos (\log_{\sqrt{x}} x^x) + (\sqrt{3} - 1)(\sin 2x - 1) = 0$.

31. $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 4 \sin x$.

32. $\cos 3x \sin x + 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$.

33. $\frac{\cos 2x - \cos 4x - 4 \sin 3x - 2 \sin x + 4}{2 \sin x - 1} = 0$.

34. $\sin^3 x + \cos^3 x = \sqrt{14} \cos 2x \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

35. $2 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{ctg} x = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}}$.

36. $\cos x (\sqrt{3} + \cos x) - 1 = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} - \sin x (\sqrt{3} + \sin x)$.

37. $\operatorname{tg} x + \sin 2x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 1 + 2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

38. $\frac{\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}}{1 - \sin x} - \operatorname{tg}^2 x \sin x = \frac{1 + \sin x}{2} + \operatorname{tg}^2 x$.

39. $\log_{\sin x} (1 - \cos 2x) = \log^2_{\sin x} 2$.

40. $\log_{3 - x^2} \left(\frac{3 \sin 2x - 2 \cos x}{\sin 2x \sin x}\right) = \log_{3 - x^2} 2$.

41. $8 \sin^2 x \cos^3 x - 6 \cos^2 2x \cos x + 12 \cos^2 2x = 3$.

42. $2 \log_2 \sin x + \log_2 (4 \operatorname{ctg}^2 x) = \log_2 3$.

43. $\cos 2x + \log_4\left(\frac{\sin x}{2}\right) + 2\cos x \log_{1/2}\sin x =$

$= 2\cos x + \sin^2 x \log_2 \sin^2 x.$

44. $1 + \cos 2x + \cos^2 x \log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^2 x + 3\sin x = 2\sin x \log_{1/3} \operatorname{tg}^3 x.$

45. $\log_{\left[-\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right]}(1 - \sin x - \cos x) = 1.$

46. $\sin x + \cos\left(5x - \frac{9\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\sin(3x + \pi).$

47. $\frac{1 - \sin x + \sqrt{3}\sin 2x}{2\sqrt{3}\cos x - 3} = \frac{1}{3} + \sin x.$

48. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x.$

49. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x.$

50. $\sqrt{3} - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{3} - x\right).$

51. $\frac{\operatorname{ctg} x}{\cos 2x} = 2 + \operatorname{tg} 2x.$

52. $\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0.$

53. $(2\cos x - \sin x - 2)(\sin x - 1) = \cos^2 x.$

54. $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2} = \frac{1}{4} - \cos^2\frac{x}{2}.$

55. $4\cos 4x + 6\sin^2 2x + 5\cos 2x = 0.$

56. $\cos x - 2\sin 2x - \cos 3x = |1 - 2\sin x - \cos 2x|.$

57. $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{5\pi}{3}\right) = 2\operatorname{ctg} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{6}.$

58. $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6} = \frac{2\operatorname{ctg} x + 3}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}.$

59. $\sqrt{12 - 5\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} + 2\sin x = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\cos x.$

60. $1 - \sqrt{\frac{3 + 10\sin^2 x}{\sin^2 x}} = 2\operatorname{ctg} x.$

61. $\cos(3x + 5) - \cos(x + 1) = 2\sin(x + 2).$

62. При каких значениях a уравнение

$$4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = a^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$$

имеет решения? Найти эти решения.

63. Доказать, что уравнение

$$\sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = n - 1$$

при любом целом $n > 2$ не имеет решений.

64. При каких значениях b уравнение

$$\frac{b\cos x}{2\cos 2x - 1} = \frac{b + \sin x}{(\cos^2 x - 3\sin^2 x)\operatorname{tg} x}$$

имеет решения? Найти эти решения.

Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям (№ 65, 66):

65. $\cos 13x = \cos x$, $\cos 2x + \sin 5x = 1$, $|x| < 3$.

66. $2\cos^2 9x = 1 + \cos 10x$, $\cos 9x + \sin 5x = 1$, $|x| < 5$.

67. Найти все x, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{2} < \left|3x - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \pi$ и являющиеся решениями уравнения

$$1 + \cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x.$$

68. Найти все x, удовлетворяющие условию $\pi < \left|2x - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{7\pi}{3}$ и являющиеся решениями уравнения

$$(1 + 2\cos 2x)\sin x + (1 - 2\cos 2x)\cos x = 0.$$

69. Определить все значения a, при каждом из которых уравнение $\cos^4 x - (a + 2)\cos^2 x - (a + 3) = 0$ имеет решения, и найти все эти решения.

70. Определить все значения a, при каждом из которых уравнение $\sin^4 x + (a - 6)\sin^2 x - 4(a - 2) = 0$ имеет решения, и найти все эти решения.

71. Найти все корни уравнения $\cos x - 3\sin x = 2$, расположенные на отрезке $2\pi \leqslant x \leqslant 4\pi$.

72. При каких значениях a уравнение

$$\sin^2 4x + (a^2 - 3)\sin 4x + a^2 - 4 = 0$$

имеет ровно четыре корня на отрезке $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$?

73. Найти все решения уравнения

$$\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - \cos^2 x = -2,$$

удовлетворяющие условию $0 < x < 4$.

74. Найти все решения уравнения

$$\log_3\left(\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\right) + \log_{1/3}\sin 2x - \log_{\sqrt{3}}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 1,$$

удовлетворяющие условию $0 \leqslant x < 2\pi$.

75. Найти все значения x, при которых величина

$$y = \frac{4\pi}{3} \sin x \cos x$$

удовлетворяет уравнению

$$\log_4 (\operatorname{ctg} 2y + \operatorname{tg} y) = 1 + \frac{1}{2} \log_{1/2} (9\operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} y).$$

76. Найти все решения уравнения $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos(2 + x)}$, удовлетворяющие условию $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

77. Найти сумму корней уравнения

$$\cos 2x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x},$$

принадлежащих промежутку $1 \leqslant x \leqslant 70$.

Решить системы уравнений (№ 78—86):

78. $\begin{cases} 3 \operatorname{tg} 3y + 2 \cos x = 2 \operatorname{tg} 60°, \\ 2 \operatorname{tg} 3y - 3 \cos x = -\frac{5}{3} \cos 30°. \end{cases}$

79. $\begin{cases} x + \sin (x + y) = \frac{3}{2}, \\ 3x - \sin (x + y) = \frac{5}{2}. \end{cases}$

80. $\begin{cases} 2 \sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y \cos x = 2 \cos^2 y \sin x. \end{cases}$

81. $\begin{cases} \sin y \cos x + \sin x = 0, \\ 2 \cos^2 y + \sin y \sin x = \cos 2y \cos x. \end{cases}$

82. $\begin{cases} \sin [\pi(x + y)] + \cos [\pi(x + y)] + \sqrt{2} = 0, \\ x^2 + y^2 = \frac{9}{16}. \end{cases}$

83. $\begin{cases} \operatorname{tg} (\pi y) = \dfrac{3 + \sqrt{3}\operatorname{tg}(\pi x)}{\sqrt{3} - 3\operatorname{tg}(\pi x)}, \\ x^2 - x + y^2 + \dfrac{17}{72} = 0. \end{cases}$

84. $\begin{cases} \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} \dfrac{y - 5}{2}, \\ 2x + 3 \log_{4x/\pi} \sqrt[3]{\dfrac{\pi^2 x}{16}} = \dfrac{3}{4} \log_{\sqrt[4]{4x/\pi}} \left(\dfrac{4x^2}{\pi}\right) - 4^{3 \log_8 \sqrt{y}}. \end{cases}$

85. $\begin{cases} \operatorname{ctg} (2y - \cos^2 x) = 1, \\ 6y - 15 \cos^2 x = \frac{3\pi}{4} - 1. \end{cases}$

86. $\begin{cases} \cos(2x + 6\sin^2 y) = 1, \\ 3x - 3\sin^2 y = -10. \end{cases}$

87. Найти все пары значений (x, y), являющиеся решениями системы

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\cos y} = 2\sqrt[3]{34}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \dfrac{1}{\cos y} = \sqrt[3]{34^2} - 5 \end{cases}$$

и удовлетворяющие условиям $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

88. Найти все решения системы

$$\begin{cases} 5^{\sin x + \operatorname{tg} y} = 1, \\ 7^{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 y} = 7, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$.

89. Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие условию $x < 0$ и системе уравнений

$$\begin{cases} \sin[(x + \sqrt{2\pi})^2 + y^2] = 0, \\ \sqrt{2\log_{\sqrt{\pi}}(x^2 + y^2)} + 2\log_\pi \sqrt{x^2 + y^2} = 3. \end{cases}$$

90. Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие условию $y \leqslant 0$ и системе уравнений

$$\begin{cases} 9^{x^2 + (y-1)^2} - 27 = 26 \cdot 3^{x^2 + (y-1)^2}, \\ \cos[2\pi(x^2 + y^2)] = 1. \end{cases}$$

Раздел III

ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Общие замечания

Опыт приемных экзаменов в вузы показывает, что некоторые разделы теоретического курса геометрии и многие существенные моменты решения геометрических задач вызывают у поступающих серьезные трудности. Это происходит прежде всего из-за того, что в геометрии особенно требуется четкость в рассуждениях, понимание логических аспектов различных вопросов.

Ниже мы остановимся подробно на таких, в определенном смысле центральных, вопросах курса элементарной геометрии. При этом предполагается, что материал уже известен в объеме школьных учебников.

Методы решения геометрических задач можно чисто условно разбить на две группы: геометрические и аналитические. *Геометрические методы* обычно связаны с использованием некоторого специфического свойства рассматриваемой конфигурации, с умением «увидеть» удачное дополнительное построение. *Аналитические методы*, как правило, состоят в составлении определенных соотношений и их дальнейшем исследовании методами алгебры и тригонометрии. Примеры решения геометрических задач разобраны в § 2, 3.

Первый раздел стереометрии, посвященный *прямым и плоскостям в пространстве*, хотя и не сложен, но очень насыщен определениями. Теоремы, доказываемые здесь, просты, но требуют умения логически строго выводить утверждения из аксиом и определений. Необходимые замечания, касающиеся основных понятий стереометрии, приводятся в § 4.

Традиционными на вступительных экзаменах являются задачи, в которых рассматриваются вписанные в многогранники и описанные около них шары или иные *комбинации тел* в пространстве. Такие задачи и связанные с ними теоретические вопросы рассмотрены в § 5.

Наконец, в § 6 разбираются общие методы построения *сечений многогранников плоскостями*, позволяющие определять форму сечения и решать различные задачи, в которых речь идет о таких сечениях.

В настоящем параграфе мы сделаем отдельные замечания общего характера по ряду разделов геометрии, а также разберем некоторые задачи.

А. *Определения и теоремы*

Поступающие недолюбливают геометрию из-за того, что она представляется им необъятным набором определений и теорем, которые надо заучивать. Поэтому многие из них пытаются одолеть геометрию только памятью, зазубривая все, вплоть до обозначений. Между тем геометрические понятия и факты, если в них по-настоящему вникнуть, являются наглядными и естественными.

Некоторые думают, что формулировки геометрических утверждений требуется знать обязательно «слово в слово по книжке». Это не так. Поступающий должен давать на экзамене *точную, четкую и правильную формулировку* — пусть даже и иную, чем в учебнике.

Хорошо известно, что многие теоремы курса допускают несколько разных доказательств. Доказательства теорем на экзамене можно приводить любые, лишь бы они *были правильными.* Поэтому необходимо заранее выбрать и тщательно разобрать то доказательство каждой теоремы, которое кажется наиболее понятным.

Необходимо только следить за тем, чтобы при доказательстве некоторой теоремы мы не опирались на другую, получающуюся, в свою очередь, с использованием доказываемой. Ясно, что такой «логический круг» в рассуждениях недопустим.

Следует особо подчеркнуть, что все доказательства должны быть исчерпывающими. В частности, все вспомогательные теоремы или леммы, на которые в процессе доказательства даются ссылки, должны быть четко сформулированы и при необходимости доказаны.

Иногда поступающие пытаются пропустить тот или иной этап доказательства, оперируя такими выражениями, как «очевидно», «совершенно ясно» и т. д. Но надо быть готовым к тому, что экзаменатор после такой ссылки на «очевидность» может задать вопрос «Почему?». Следовательно, при разборе доказательств необходимо стремиться к *полному* уяснению *каждого* утверждения, *каждого* шага в рассуждении. Очень хорошо, если поступающий сам для себя в период подготовки к экзаменам будет доказывать теоремы, почаще задавая вопрос «Почему? Откуда это следует?», не оставляя неясным ни одного этапа доказательства, не принимая на веру ни одного утверждения.

Изучая геометрию, не нужно забывать, что все, даже самые простые понятия (кроме, разумеется, таких, как точка, прямая, плоскость) имеют *определения.* Иначе на экзамене будут доставлять неприятности такие «коварные» вопросы, как: «Что такое прямой угол?», «Почему через две параллельные прямые в пространстве можно провести плоскость?» и т. п. Вообще на определения следует обратить особое внимание, так как практика приемных экзаменов показывает, что в ряде случаев поступающие просто подменяют определения соответствующими геометрическими образами. Например, все прекрасно представляют себе зрительно, что такое окружность, круг, пирамида, конус, шар, коническая поверхность, сфера и т. д., но далеко не каждый может дать правильные определения этих понятий.

Остановимся для примера на *призме.* Несомненно, что каждый имеет достаточное для решения задач геометрическое представление об этом объекте. Однако определение призмы, которое иногда дают поступающие, не соответствует геометрическому образу.

Согласно этому определению, «призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы». Во-первых, многие, повторяя указанное определение, забывают, что имеется в виду *выпуклый* многогранник. Во-вторых, выпуклый многогранник, изображенный на рисунке 35, тоже подходит под это определение (он называется *ромби-*

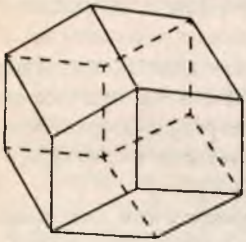


Рис. 35

ческим додекаэдром, все его грани — равные ромбы, плоскости противоположных граней параллельны, ребра противоположных граней соответственно параллельны). Но этот многогранник не соответствует геометрическому представлению о призме, не говоря уже о том, что формулы для поверхности и объема, которые доказываются для призмы, для него неверны.

Дело в том, что при доказательстве этих формул подразумевается, что призма имеет именно такой вид, как мы себе представляем его геометрически. Поэтому и определение нужно давать соответствующее.

Это можно сделать разными способами. Например: *призмой называется выпуклый многогранник, у которого две грани — равные выпуклые многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а ребра, соединяющие соответствующие вершины этих многоугольников, равны и параллельны.* Другое определение призмы можно дать, используя понятие цилиндрической поверхности: *призмой называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью, направляющей которой является выпуклый многоугольник, и двумя параллельными между собой секущими плоскостями, не параллельными образующей.*

Отметим, что фигурирующий в приведенных определениях многоугольник можно считать и невыпуклым, но без самопересечений. Тогда, разумеется, получится невыпуклый многогранник. Однако и этот многогранник вполне соответствует геометрическому представлению о призме и для него также справедливы все те формулы, которые выводятся для призмы.

Между прочим, определение пирамиды тоже можно дать, используя понятие конической поверхности.

Наконец, сделаем два замечания о терминологии. Хорошо известны определения *шара* и *шаровой* (или *сферической*) *поверхности*. Эту последнюю называют *сферой*. Таким образом, *сфера — это геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной и той же фиксированной точки.*

Иногда возникает разночтение термина *тетраэдр*. Обычно *тетраэдром называется произвольная треугольная пирамида*. Однако иногда этот же термин употребляется и для правильного четырехгранника, поверхность которого составлена из четырех *правильных* треугольников. Для того чтобы избежать недоразумений, *четырехгранник, поверхность которого составлена из четырех правильных треугольников, называют правильным тетраэдром.*

Многие поступающие неправильно понимают *аксиому о параллельных прямых.* Например, часто приходится слышать ее в такой формулировке: «Через точку, лежащую вне прямой, можно провести прямую, параллельную данной прямой, и притом только одну». В такой формулировке аксиома содержит *два* утверждения: первое — о существовании параллельной прямой, и второе — о ее единственности.

Однако всем хорошо известна задача на построение на плоскости: «Через точку, лежащую вне прямой, провести прямую, параллельную данной прямой». В этой задаче дается метод построения такой прямой, откуда, конечно, следует ее *существование.* При этом доказательство правильности построения, т. е. того факта, что построенная прямая действительно параллельна данной, не опирается на аксиому о параллельности прямых — используемые утверждения доказываются *до* формулировки аксиомы о параллельных.

Но раз прямую, параллельную данной и проходящую через точку, лежащую вне данной прямой, провести можно (и даже с помощью только циркуля и линейки), то зачем же требовать ее существования в аксиоме?

На самом деле аксиома о параллельности прямых содержит только *одно* утверждение: *через точку вне прямой нельзя провести двух прямых, параллельных данной прямой.*

Иногда эту аксиому формулируют так: «через точку, взятую вне данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой». Эта формулировка несколько расплывчата, ее можно понять двояким образом: и неправильно — как два утверждения (во-первых, что *можно* провести такую прямую, во-вторых, что такая прямая *только одна*), и правильно — как одно утверждение (что нельзя провести двух прямых, параллельных данной). В математике такие формулировки иногда действительно встречаются, но, как правило, понимаются только в *последнем* смысле. Однако лучше все же этой расплывчатости избегать и давать формулировки, не допускающие различных толкований.

Прежде чем приступить к изучению вопросов, связанных с длиной окружности, площадью круга, поверхностями и объемами круглых тел, необходимо разобрать понятие *предела последовательности*.

Многие поступающие не понимают разницы между вопросами: «Что такое площадь круга?» и «Чему равна площадь круга?», «Что такое объем конуса?» и «Чему равен объем конуса?» и т. д. Например, на вопрос «Что такое длина окружности?» часто дается такой ответ: «Длина окружности — это число $2\pi R$, где $\pi = 3{,}14...$, а R — радиус окружности». На самом деле *длина окружности определяется как предел последовательности периметров правильных вписанных в окружность многоугольников при неограниченном удвоении числа сторон*, а формула $C = 2\pi R$, дающая численную величину длины окружности, представляет собой *теорему*[1]. Все сказанное справедливо и для площади круга, поверхности конуса и т. д.

При доказательстве различных геометрических теорем и формул полезно широко использовать тригонометрию и алгебраические методы. Именно тригонометрическая форма многих геометрических утверждений (теорема синусов, теорема косинусов, формула для площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab\sin C$) делает их доказательство проще и оказывается более удобной при решении задач: именно тригонометрические функции позволяют записать многие геометрические факты просто и с достаточной общностью, что подчас невозможно сделать на «чисто геометрическом языке».

Например, с помощью тригонометрических функций легко выразить *сторону правильного n-угольника* через радиус r вписанной или радиус R описанной окружности. Так как центральный угол, соответствующий сторо-

---

[1] Логическая ситуация здесь аналогична той, с которой мы сталкиваемся при определении и вычислении суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии (см. § 1, Г раздела I).

не a_n правильного n-угольника, равен $\frac{2\pi}{n}$ радиан, то очевидно, что

$$a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = 2R \sin \frac{\pi}{n}. \tag{1}$$

При $n = 3, 4, 6$ отсюда получаются известные формулы для стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника.

Очень полезно соотношение

$$R = \frac{a}{2\sin A}, \tag{2}$$

выражающее радиус R описанной около треугольника окружности через сторону и противолежащий угол (с помощью этого соотношения доказывается теорема синусов). Любопытно вытекающее из него следствие: для вычисления радиуса описанной окружности достаточно знать лишь одну из сторон треугольника и противолежащий ей угол, а ведь эти данные не определяют треугольник полностью!

Часто при решении задач используется соотношение

$$S = pr, \tag{3}$$

связывающее площадь S треугольника с его полупериметром p и радиусом r вписанной окружности. Это соотношение получается из очевидного (рис. 36) равенства

$$\frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = S.$$

Нетрудно убедиться, что эта формула справедлива и для любого многоугольника, в который вписана окружность; при этом S и p — соответственно площадь и полупериметр многоугольника.

Интересно, что аналогичную формулу можно написать и в стереометрии. Именно, если, например, в пира-

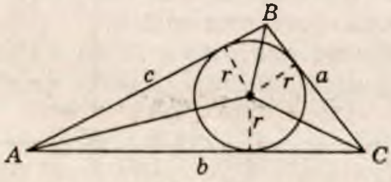


Рис. 36

миду вписан шар радиуса r, то ее объем V можно вычислить по формуле

$$V = \frac{1}{3} Sr, \tag{4}$$

где S — полная поверхность пирамиды. Доказательство этой формулы проводится так же, как в плоском случае. Центр шара соединяется со всеми вершинами, после чего пирамиду можно представить себе разбитой на несколько маленьких пирамид. Заметив далее, что радиус вписанного шара является высотой каждой маленькой пирамиды, вычисляем объем данной пирамиды как сумму объемов этих маленьких пирамид.

Поступающие иногда пытаются обосновывать стереометрические факты ссылками на аналогичные утверждения из планиметрии. Например, теорему: *если из некоторой точки вне шара провести касательные к нему, то отрезки каждой из касательных от этой точки до точки касания равны между собой* — часто считают справедливой просто потому, что «на плоскости аналогичное свойство касательных имеет место».

Однако аналогия между «плоскостным» и «пространственным» утверждениями не может рассматриваться как доказательство; каждое «пространственное» утверждение должно строго обосновываться. В частности, и сформулированное выше свойство касательных к шару требует специального доказательства.

Следует помнить, что аналогия между планиметрическими и стереометрическими утверждениями может приводить и к ошибочным выводам. Как известно, в плоскости два острых угла с соответственно перпендикулярными сторонами равны между собой. Но *будут ли равны между собой два расположенных в пространстве плоских острых угла с соответственно перпендикулярными сторонами*? Легко построить пример, показывающий, что такие углы не обязаны быть равными (на рис. 37 изображен куб; хотя $B_1C_1 \perp C_1E$ и $A_1C_1 \perp C_1C$, но углы $B_1C_1A_1$ и CC_1E не равны между собой).

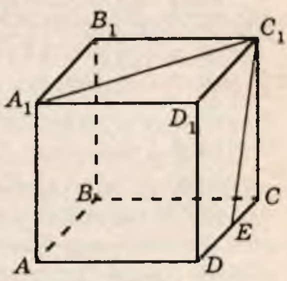


Рис. 37

При решении различных задач часто оказывается полезным использование того или иного геометрического места точек. Как известно, *геометрическим местом точек* называют совокупность всех тех точек (плоскости или пространства), которые обладают некоторым заданным свойством. Поступающие должны твердо знать основные геометрические места точек: геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, от концов данного отрезка, от сторон данного угла и т. д.

Упомянем еще одно *геометрическое место точек* на плоскости — совокупность точек, *из которых данный отрезок виден под данным углом*. Используя свойство вписанных углов, нетрудно убедиться, что это геометрическое место состоит из дуг двух окружностей (исключая концы дуг), проходящих через концы данного отрезка, центры которых лежат по разные стороны от отрезка на его медиатрисе, а радиус одинаков:

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha},$$

где a — длина данного отрезка, α — данный угол. При этом, если $0 < \alpha < 90°$, то на каждой из окружностей надо брать большую по длине дугу, стягиваемую отрезком как хордой, а если $90° < \alpha < 180°$, то меньшую (если $\alpha = 90°$, то геометрическим местом точек служит окружность, построенная на данном отрезке как на диаметре, из которой выброшены концы этого диаметра).

В дальнейшем нам потребуются (см. § 5 раздела III) два важных геометрических места точек в пространстве.

Геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух данных точек, есть плоскость, перпендикулярная к отрезку, соединяющему данные точки, и проходящая через его середину. Доказательство этого утверждения достаточно очевидно.

Геометрическое место точек пространства, равноудаленных от граней двугранного угла, есть плоскость, делящая этот двугранный угол на два равных между собой двугранных угла. Такая плоскость, по аналогии с биссектрисой плоского угла, называется *биссектральной плоскостью* двугранного угла.

Задачи

1. Что такое: а) выпуклый многоугольник; б) внутренние накрест лежащие углы; в) вписанная в треугольник окружность; г) скрещивающиеся прямые; д) угол между двумя пересекающимися плоскостями; е) шаровой сектор?

2. Является ли определением, аксиомой или теоремой каждое из следующих утверждений: а) две пересекающиеся прямые могут иметь лишь одну общую точку; б) правильный многоугольник — это многоугольник, у которого все углы равны между собой и все стороны равны между собой; в) любые три точки пространства всегда лежат в одной плоскости; г) прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости?

3. Пусть прямая l лежит в плоскости π и пусть L — произвольная прямая, не лежащая в этой плоскости. Рассмотрим теорему: *«Если прямая L параллельна прямой l, то прямая L параллельна плоскости π»*. Сформулировать теоремы: обратную, противоположную и противоположную обратной. Какие из этих теорем верны?

4. Доказать, что треугольник со сторонами 5, 13, 12 является прямоугольным. В каком отношении находится это утверждение с теоремой Пифагора?

5. Можно ли определить длину окружности как предел последовательности периметров вписанных многоугольников, когда: а) число сторон многоугольника неограниченно возрастает; б) последовательность длин наибольших сторон многоугольников стремится к нулю?

6. Доказать, что $3 < \pi < 4$.

7. Рассмотрим утверждение: «Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеем $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$». Верно ли такое доказательство: «Приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к треугольнику ABC так, чтобы сторона A_1C_1 совместилась со стороной AC, а вершина B_1 попала в некоторую точку B_2, расположенную по другую сторону от прямой AC, чем вершина B. Соединим точки B и B_2. Треугольник BAB_2 равнобедренный (ибо $AB_2 = A_1B_1 = AB$), а потому $\angle ABB_2 = \angle AB_2B$. Так как $\angle ABC = AB_2C$ (ибо $\angle AB_2C = \angle A_1B_1C_1$), то и $\angle CBB_2 = \angle CB_2B$, т. е. треугольник BCB_2 — равнобедренный и $BC = B_2C$. Следовательно, треугольники ABC и AB_2C имеют соответственно равные стороны, т. е. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$»? Справедливо ли исходное утверждение?

8. В пространстве даны два треугольника с соответственно параллельными сторонами. Что можно сказать о прямых, соединяющих соответственные вершины первого и второго треугольников?

9. Доказать, что все три биссектральные плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

10. На плоскости даны три попарно пересекающиеся прямые, не проходящие через одну точку. Найти геометрическое место центров окружностей, описанных около всевозможных треугольников, с вершинами на этих прямых.

11. Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от трех заданных точек A, B, C: а) не лежащих на одном прямой; б) лежащих на одной прямой.

12. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки A на всевозможные прямые, проведенные в пространстве через фиксированную точку B.

13. Найти геометрическое место проекций заданной точки A на всевозможные плоскости, проходящие через данную прямую l, не содержащую точку A.

14. Найти геометрическое место середин отрезков AB, где точки A и B лежат на разных гранях данного острого двугранного угла.

15. Найти геометрическое место точек пространства, через которые нельзя провести прямую, пересекающую данные скрещивающиеся прямые L и l.

16. Дан куб с ребром a. Найти геометрическое место середин отрезков данной длины l, один из концов которых лежит на диагонали верхнего основания куба, а другой — на параллельной ей диагонали нижнего основания куба или на продолжениях этих диагоналей.

17. Найти геометрическое место середин хорд данной окружности, проходящих через данную точку A внутри окружности.

18. Найти геометрическое место середин отрезков, соединяющих данную точку A, лежащую вне данной окружности, с точками этой окружности.

19. На плоскости дан прямоугольник $ABCD$, у которого $AB = CD = 1$, $BC = AD = 5$. Найти минимальное расстояние между такими точками P и Q, лежащими в данной плоскости, что $\angle CQD = 60°$ и $AP = PC$.

20. На плоскости дан равносторонний треугольник ABC со стороной 1. Найти максимальное расстояние между такими точками P и Q, лежащими в данной плоскости вне треугольника ABC, что $\angle APB = 60°$ и $BQ^2 + CQ^2 = 1$.

Б. *Чертеж в геометрическом задаче*

На чертеж и его роль в решении геометрической задачи поступающие смотрят по-разному. Одни думают, что чертеж вообще не нужен, и потому выполняют его подчеркнуто небрежно, а рассуждения пытаются проводить без всяких ссылок на него. Другие, наоборот, считают чертеж главным элементом решения и даже не находят нужным как-либо обосновывать то, что «очевидно из чертежа».

Обе эти крайние точки зрения нелепы. Разумеется, никакой чертеж, даже самый аккуратный, выполненный с помощью циркуля и линейки, не может заменить собой доказательства геометрического факта, ибо в окончательном решении чертеж является лишь *иллюстрацией* к рассуждениям. Аргументы типа «из чертежа видно, что...», которые, к сожалению, часто встречаются в работах поступающих, считаются в математике логически неполноценными. Любой геометрический факт, который мы «увидели» из чертежа, необходимо строго обосновать — только тогда мы можем быть уверены, что этот факт действительно имеет место, а не является результатом верного (или, еще хуже, неверного) выполнения рисунка.

Однако наглядный чертеж — хороший помощник при решении задачи: именно он может подсказать идею необходимых рассуждений и вычислений, натолкнуть на мысль использовать ту или иную теорему курса, сделать удачное дополнительное построение. Поэтому всегда следует стараться рисовать чертежи тщательно и аккуратно, делать их достаточно просторными и понятными.

Особенно это относится к стереометрическим задачам. Как известно, плоское изображение пространственных конфигураций всегда возможно лишь с искажениями, и потому чертеж такой конфигурации необходимо еще правильно понимать. Надо помнить, что равные отрезки часто выглядят как неравные, прямые углы превращаются в острые или тупые, скрещивающиеся прямые изображаются как пересекающиеся и т. п. В то же время на плоском чертеже сохраняются такие детали пространственной конфигурации, как параллельность прямых или факт их пересечения, отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, касание прямой и окружности (которая, впрочем, превращается в эллипс) и др.

Например, при изображении куба его основания выглядят не как квадраты, а как параллелограммы с разными сторонами, однако центру квадрата соответствует точка пересечения диагоналей параллелограмма; при изображении высоты правильной треугольной пирамиды соответствующий отрезок пересекает одну из нарисованных сторон основания пирамиды, но его нужно проводить через точку пересечения медиан основания и т. д.

Наконец, напомним, что все обозначения чертежа должны быть объяснены в тексте решения и, естественно, должны совпадать с теми обозначениями, которые используются затем в рассуждениях.

При построении чертежа бывает полезно рисовать не примерный эскиз, дающий общее представление о данной геометрической конфигурации, а стремиться именно *конструировать* чертеж, опираясь на известные геометрические факты. При таком подходе к построению чертежа легче увидеть те идеи, на которых можно «сыграть» в решении.

(1) *В треугольнике ABC угол C равен* 90°, *a* $CA = 4$. *На стороне CB взята точка D так, что* $CD = 1$. *Окружность радиуса* $\frac{\sqrt{5}}{2}$ *проходит через точки C и D и касается в точке C окружности, описанной около треугольника ABC. Найти площадь треугольника ABC.*

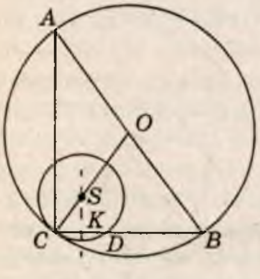


Рис. 38

Прежде всего построим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 38). Для построения окружности, описанной около этого треугольника, естественно сначала выяснить, где находится ее центр и чему равен ее радиус. Как известно, центр O окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит в середине гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы.

Займемся теперь построением второй окружности. Отметив на стороне CB точку D, можем утверждать, что центр этой окружности лежит на перпендикуляре, проведенном через середину K отрезка CD. С другой стороны, из условия касания окружностей заключаем, что центр второй окружности лежит на радиусе описанной окружности, проведенном в точку касания, т. е. в точку C. Иначе говоря, центр S второй окружности есть точка пересечения прямой SK и медианы CO.

Построение чертежа закончено. В ходе этого построения мы фактически установили два факта, на которых и основывается решение задачи: во-первых, что центр S лежит на стороне CO равнобедренного треугольника COB и, во-вторых, что перпендикуляр, опущенный из центра S на катет CB, проходит через середину отрезка CD.

Проведем необходимые вычисления. Из прямоугольного треугольника CSK по теореме Пифагора находим $SK = 1$, а тогда $\operatorname{ctg}(\angle SCK) = \frac{1}{2}$. Но $\angle ABC = \angle OCB = \angle SCK$, и поэтому $BC = AC \operatorname{ctg}(\angle ABC) = 2$. Следовательно, площадь треугольника ABC равна 4.

Итак, задача полностью решена, и идею решения мы получили благодаря аккуратному конструированию чертежа. Однако, как это ни удивительно, чертеж, изображенный на рисунке 38, полностью условию задачи не соответствует. В самом деле, проведенные вычисления показывают, что катет $BC = 2$, а потому гипотенуза $AB = 2\sqrt{5}$. Следовательно, $OC = \sqrt{5} = 2SC$, т. е. OC — диаметр второй окружности, которая, таким образом, проходит через точку O. Другими словами, чертеж, полностью соответствующий данным задачи, в действительности имеет вид, представленный на рисунке 39.

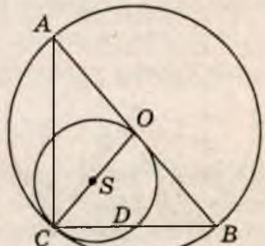


Рис. 39

В чем же причина неполного соответствия рисунка 38 условию задачи? Дело в том, что проведенное выше конструирование чертежа (см. рис. 38) касалось только его геометрической стороны, но не учитывало конкретных числовых данных. Более того, мы и не могли их учесть, поскольку все числовые размеры конфигурации, а следовательно, и ее геометрически точный вид удалось установить только после соответствующих вычислений.

Тем не менее изложенное нами решение является исчерпывающим, хотя, как мы теперь убедились, основывалось на неточном чертеже. Это объясняется просто: в наших рассуждениях нигде не использовалось взаимное расположение точки O и второй окружности, а выяснение их взаимного расположения при решении задачи не обязательно.

Подобная ситуация с чертежом является в геометрических задачах типичной. Практически никогда, приступая к решению, мы не в состоянии построить чертеж, абсолютно точно отображающий всю специфику конфигурации, о которой идет речь в условии, — многие ее особенности бывают завуалированы и вскрываются только в ходе рассуждений. Поэтому важно уметь прежде всего выявлять геометрические свойства, существенные в рассматриваемой задаче. Это требует особого внимания и осторожности, поскольку с первого взгляда далеко не всегда очевидно, какие именно особенности конфигурации окажутся существенными и в какой мере допустимо несоответствие между данной конфигурацией и чертежом.

Разумеется, если в процессе решения выясняется, что чертеж явно не соответствует данным задачи, его следует заменить на правильный. Например, в следующей задаче даже развитое воображение не может помочь сразу выполнить чертеж, точно отражающий существенные особенности конфигурации.

2 *В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом $60°$. Известно, что вершины A, B, C и середины боковых ребер пирамиды расположены на сфере радиуса 1. Доказать, что центр указанной сферы лежит на ребре AB, и найти высоту пирамиды.*

Для решения задачи сделаем традиционный чертеж пирамиды $SABC$ (рис. 40). Построим ее высоту SH и точки H и C соединим отрезком. Тогда по условию задачи $\angle SCH = 60°$. Если длину ребра SC обозначить через a, то из прямоугольного треугольника SHC найдем

$$SH = a\frac{\sqrt{3}}{2}, \ HC = \frac{a}{2}.$$

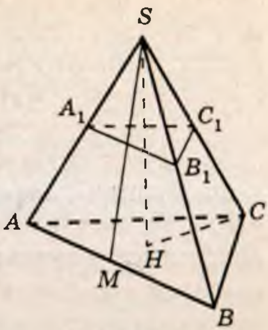


Рис. 40

Середины боковых ребер SA, SB и SC обозначим соответственно через A_1, B_1 и C_1. По условию точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 лежат на одной сфере. Отсюда, в частности, следует, что через точки A, A_1, B, B_1 проходит одна окружность, являющаяся сечением этой сферы плоскостью SAB. Таким образом, четырехугольник AA_1B_1B можно вписать в окружность. Так как $A_1B_1 \parallel AB$ (по свойству средней линии треугольника ASB), то AA_1B_1B — трапеция, которую можно вписать в окружность. Это в свою очередь означает, что AA_1B_1B — равнобочная трапеция, т. е.

$$AA_1 = BB_1 = \frac{1}{2}AS = \frac{1}{2}BS.$$

Проведя аналогичные рассуждения для четырехугольника BB_1C_1C, заключаем, что

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = \frac{1}{2}AS = \frac{1}{2}BS = \frac{1}{2}CS.$$

Следовательно, пирамида $SABC$ имеет равные боковые ребра: $SA = SB = SC = AB = a$. Отсюда видно, что треугольник ASB — равносторонний, а потому апофема SM этой боковой грани пирамиды равна $SM = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Сравнивая полученную длину апофемы SM с найденной выше длиной высоты SH пирамиды, мы заключаем, что $SM = SH$, т. е. высота пирамиды совпадает с апофемой боковой грани ASB. Но тогда точка H совпадает с точкой M, а грани ASB и ABC взаимно перпендикулярны.

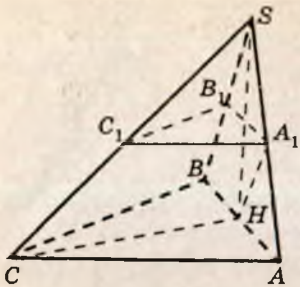


Рис. 41

Таким образом, оказалось, что изображенная на рисунке 40 картина на самом деле не соответствует условию задачи. В действительности имеет место конфигурация, представленная на рисунке 41.

Дальнейшее решение, использующее рисунок 41, уже не представляет труда. Так как проекции на плоскость ABC равных наклонных AS, BS и CS равны, то

$$HA = HB = HC = \frac{a}{2}.$$

Следовательно, точка H есть центр окружности, описанной около треугольника ABC, а потому центр сферы лежит на перпендикуляре к плоскости основания, восставленном из точки H, т. е. на высоте SH пирамиды (или на ее продолжении). Центр этой сферы равноудален, например, от точек A и A_1. Поскольку $HA_1 = \frac{a}{2}$ как средняя линия треугольника ASB, то $HA_1 = HA$, так что точка H, лежащая на ребре AB, как раз и является центром сферы. Но радиус сферы $HA = \frac{a}{2}$ по условию равен 1; следовательно, $a = 2$ и высота пирамиды

$$SH = a\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Иногда само условие задачи умышленно бывает сформулировано несколько неопределенно — так, что оно допускает геометрически существенно различные чертежи и непосредственно по исходным данным не ясно, какая именно из конфигураций имеется в виду. В таком случае необходимо изобразить все возможности, формально отвечающие описанной в условии ситуации, а затем, проводя рассуждения параллельно по этим чертежам, «расшифровать» истинную геометрическую конфигурацию.

③ *В равнобочной трапеции лежат две окружности. Одна из них, радиуса 1, вписана в трапецию, а вторая касается двух сторон трапеции и первой окружности. Расстояние от вершины угла, образованного двумя сторонами трапеции, касающимися второй окружности, до точки касания окружностей вдвое больше диаметра второй окружности. Найти площадь трапеции.*

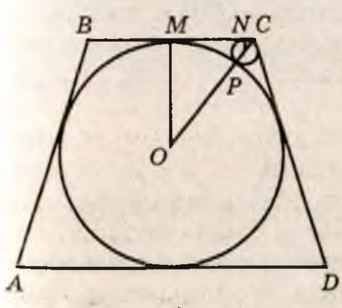
Непосредственно из условия задачи не ясно, в какой из углов трапеции — в тупой или в острый — вписана вторая окружность. Поэтому мы должны изобразить обе возможности (рис. 42) и, проводя рассуждения сразу по двум чертежам, попытаемся выяснить, какой из них согласуется с конкретными числовыми соотношениями, указанными в условии. Пусть O — центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, а O_1 — центр второй окружности, касающейся в точке P первой окружности и касающейся двух сторон трапеции; радиус этой окружности обозначим через r.

Соединив центры окружностей с точками касания M и N соответствующего основания трапеции BC или AD, мы получим два подобных прямоугольных треугольника OMC и O_1NC или OMD и O_1ND. Так как

$$OC = OP + PC = 1 + 4r, \quad OD = OP + PD = 1 + 4r,$$

то из пропорций

$$\frac{OM}{O_1N} = \frac{OC}{O_1C}, \quad \frac{OM}{O_1N} = \frac{OD}{O_1D}$$



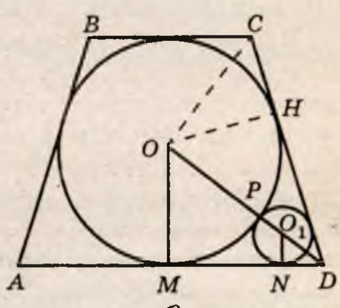


Рис. 42

легко находим $r = \frac{1}{2}$. Но тогда по теореме Пифагора из треугольников OMC и OMD следует:

$$MC = 2\sqrt{2}\,, \quad MD = 2\sqrt{2}\,.$$

Итак, в случае, изображенном на рисунке 42, *а*, когда вторая окружность касается *меньшего* основания трапеции, меньшее основание должно равняться $4\sqrt{2}$, а в случае, изображенном на рисунке 42, *б*, когда вторая окружность касается *большего* основания трапеции, большее основание должно равняться $4\sqrt{2}$. Однако ясно, что если в равнобочную трапецию вписана окружность, то *меньшее* основание трапеции *меньше* диаметра окружности, а *большее* основание трапеции *больше* диаметра окружности. Следовательно, вытекающую из условия задачи длину $4\sqrt{2}$ может иметь только *большее* основание трапеции. Другими словами, изображенная на рисунке 42, *а* конфигурация противоречит условию задачи и необходимо рассматривать лишь чертеж, показанный на рисунке 42, *б*.

Теперь уже нетрудно найти площадь трапеции. Соединим центр O вписанной окружности с вершиной C (см. рис. 42, *б*); треугольник COD — прямоугольный. В самом деле,

$$\angle OCD + \angle ODC = \frac{1}{2}\angle BCD + \frac{1}{2}\angle ADC = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ,$$

т. е. $\angle COD = 90^\circ$. Поскольку радиус, проведенный в точку касания H вписанной окружности с боковой стороной CD, является высотой треугольника COD и поскольку, по свойству касательных, $CH = \frac{1}{2}BC$ и $DH = \frac{1}{2}AD$, то

$$OH^2 = CH \cdot DH = \frac{1}{4}BC \cdot AD.$$

Но $OH = 1$, $AD = 4\sqrt{2}$; следовательно, $BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Остается заметить, что высота трапеции равна диаметру вписанной окружности; окончательно, площадь трапеции равна $\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

В разобранной только что задаче обе возможности, изображенные на рисунке 42, были совершенно очевидны. Однако в некоторых задачах дело обстоит не столь просто — нужно проявить достаточную осмотрительность при выполнении чертежа и обладать определенным геометрическим воображением, чтобы «увидеть» все конфигурации, которые следует рассмотреть. Именно с такой ситуацией мы сталкиваемся в следующей задаче.

4 *Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = 1$, $BC = 2$ и угол ABC — тупой. Через каждую из точек B и D проведено по две прямых, одна из которых перпендикулярна к стороне AB, а другая — к стороне BC. В пересечении этих четырех прямых получился параллелограмм, подобный параллелограмму $ABCD$. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.*

Приступая к решению этой задачи, поступающие выполнили рисунок 43; на нем $BE \perp BC$, $DF \perp BC$, $BG \perp AB$, $DH \perp AB$. По условию получающийся в пересечении прямых BE, DF, BG и DH параллелограмм $BNDM$ подобен $ABCD$. Для вычисления площади параллелограмма $ABCD$ надо найти угол BAD (стороны параллелограмма даны). В силу условия этот угол острый; обозначим его величину через α.

Прежде всего найдем отношение $BM : MD$ сторон параллелограмма $BNDM$. Для этого надо установить, какие пары сторон подобных параллелограммов $ABCD$ и $BNDM$ являются сходственными. Проведем диагональ BD и рассмотрим треугольники BAD и BMD. Так как $\angle ABD > \angle ADB$ (ибо в треугольнике BAD по условию $AD > AB$), а $\angle ABE = \angle ADH$ (как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами), то $\angle MBD >$

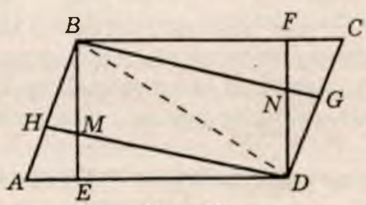


Рис. 43

$> \angle MDB$, а потому $MD > BM$. Таким образом, в параллелограмме $BNDM$ сторона MD *больше* стороны BM, т. е. $MD : BM > 1$. Поскольку в параллелограмме $ABCD$ по условию $BC : AB = 2 > 1$, то сходственными являются пары сторон AB и BM, BC и MD, а потому $MD : BM = 2$.

Перейдем теперь к вычислению угла α. Из подобия прямоугольных треугольников MED и MHB заключаем, что $ED : HB = MD : BM$, т. е. $ED = 2HB$. Но

$$ED = AD - AE = 2 - \cos\alpha$$

(из прямоугольного треугольника ABE следует, что $AE - AB \cos\alpha = \cos\alpha$) и

$$HB = AB - AH = 1 - 2\cos\alpha$$

(из прямоугольного треугольника AHD находим, что $AH = AD \cos\alpha = 2\cos\alpha$). Значит,

$$2 - \cos\alpha = 2(1 - 2\cos\alpha), \text{ т. е. } \alpha = 90°.$$

Получив это значение угла α (который по условию должен быть *острым*), многие поступающие не смогли найти правильного выхода из возникшего противоречия. Одни пытались отыскать ошибку в предыдущих вычислениях (но безуспешно, ибо для конфигурации, изображенной на рисунке 43, все вычисления проведены совершенно верно), другие писали, что задача не имеет решения.

Однако мало кто сделал правильный вывод: получившийся результат свидетельствует о том, что рисунок 43 не удовлетворяет условиям задачи. Именно, при вычерчивании рисунка 43 неявно предполагалось, что основания перпендикуляров, опущенных из точек B и D, лежат на сторонах CD и AB, а не на их продолжениях. Между тем из полученного выше противоречия следует, что это невозможно.

Поэтому необходимо рассмотреть случай, когда основания этих перпендикуляров лежат соответственно на продолжениях сторон CD за точку D и AB за точку B, т. е. рассмотреть конфигурацию, изображенную на рисунке 44.

Заметим, что угол MBN — тупой (ибо $\angle MBN >$ $> \angle MBC = 90°$), а потому угол BMD — острый. Проведя

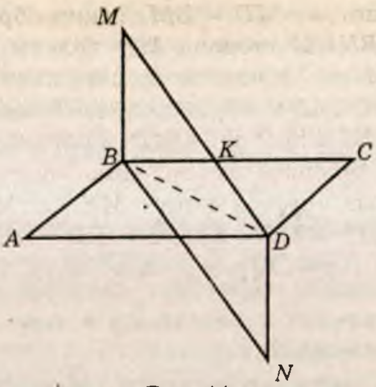


Рис. 44

диагональ BD, убеждаемся, что $MD > BM$. Из подобия параллелограммов заключаем, что

$$BM : AB = MD : AD \text{ и } \angle BMD = \angle BAD.$$

Но это означает, что $\Delta ABD \sim \Delta BMD$. Так как эти треугольники имеют общую сторону BD, то они равны, т. е. $BM = 1$.

Пусть K — точка пересечения прямой MD со стороной BC. Очевидно, что прямоугольные треугольники MBK и KDC равны, а тогда $MK = KC$. Из прямоугольного треугольника MBK получаем

$$MK^2 = 1 + (2 - MK)^2, \text{ т. е. } MK = \frac{5}{4}.$$

Наконец, заметив, что $\angle BMK = \alpha$, из того же прямоугольного треугольника MBK находим

$$\sin\alpha = \frac{BK}{MK} = \frac{2 - KC}{MK} = \frac{2 - MK}{MK} = \frac{3}{5}.$$

Следовательно, площадь параллелограмма $ABCD$ равна $S = AB \cdot BC \cdot \sin\alpha = \frac{6}{5}$.

Отметим, что некоторые поступающие с самого начала сделали рисунок 44 и нашли площадь параллелограмма $ABCD$, но не исследовали, возможно ли в условиях задачи такое расположение, как на рисунке 43. Естественно, полным решением может считаться лишь такое, в котором рассмотрены *оба* случая.

Вот еще одна задача, которая показывает, как важно внимательно и осторожно подходить к выполнению чертежа. Необходимо педантично соблюдать все условия задачи и не вносить дополнительных предположений при построении чертежа, какими бы естественными и привычными они ни казались.

(5) *Высота прямой призмы* 1, *ее основанием служит ромб со стороной* 2 *и острым углом* 30°. *Через сторону основания проведена секущая призму плоскость, наклоненная к плоскости основания под углом в* 60°. *Найти площадь сечения.*

Некоторые поступающие дали такое «решение» этой задачи: «Пусть секущая плоскость проходит через ребро AB призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$; тогда она пересекает плоскость грани DCC_1D_1 по прямой MN (рис. 45). Опуская из точки M перпендикуляр на AB, получаем прямоугольные треугольники AKD и MDK, ибо по теореме о трех перпендикулярах $DK \perp AB$. Из треугольника AKD находим $DK = 1$. Поскольку $AB \perp KD$ и $AB \perp KM$, то угол MKD — линейный угол двугранного угла между плоскостью основания и секущей плоскостью так что $\angle MKD = 60°$. Из треугольника MDK находим $MK = 2$. Поскольку MK — высота параллелограмма $AMNB$, то его площадь равна 4. Значит, площадь сечения равна 4».

В этом решении есть, однако, существенный пробел: чертеж, на котором оно основано, выполнен при неявном предположении, что секущая плоскость пересекает

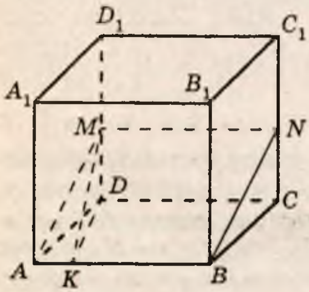


Рис. 45

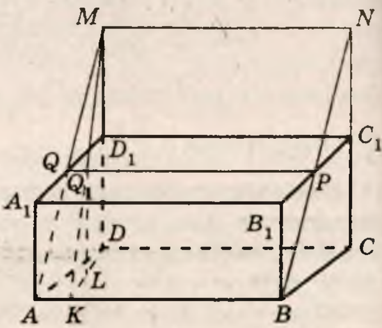


Рис. 46

прямоугольник DCC_1D_1. Между тем более подробный анализ показывает, что в действительности секущая плоскость, о которой идет речь в условии, пересекает не прямоугольник DCC_1D_1, а ромб $A_1B_1C_1D_1$.

В самом деле, найдя, как и выше, что $MK = 2$, из треугольника MDK мы получим $MD = \sqrt{3}$. Поэтому MD *больше* D_1D, т. е. наш рисунок 45 неверен и надо сделать другой чертеж, на котором точка M лежит выше точки D_1 (рис. 46)[1].

Соединяя точки A и M, B и N, получим, что секущая плоскость пересекает грань $A_1B_1C_1D_1$ по прямой $QP \parallel AB$. Значит, сечение есть параллелограмм $ABPQ$. Найдем его высоту. Для этого проведем $MK \perp AB$ и из точки Q_1 — точки пересечения прямых MK и QP — опустим перпендикуляр на KD. Из прямоугольного треугольника Q_1LK, в котором $LQ_1 = 1$ и $\angle Q_1KL = 60°$, имеем $KQ_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Теперь искомая площадь сечения легко подсчитывается: она равна $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

6 *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. В каком отношении делит ребро B_1C_1 точка E, которая принадлежит плоскости, проходящей через вершину A и центры граней $A_1B_1C_1D_1$* и *B_1C_1CB?*

И эту задачу многие поступающие решали, основываясь на чисто геометрической интуиции. Помещая точку E, о которой идет речь в задаче, наугад ближе к вершине C_1 или к вершине B_1, они получали либо рисунок 47, либо рисунок 48 (точно на середине отрезка B_1C_1 точка E лежать не может, так как в этом случае плоскость, проходя-

[1] Поскольку для определения длины отрезка MD мы не учитывали, выше или ниже точки D_1 лежит точка M, то длину отрезка MD можно вычислять, используя любой из рисунков 45 и 46.

щая через точки E, S и R, была бы параллельна плоскости грани ABB_1A_1 и не проходила бы через точку A).

Интуитивно ясно, что изображенный на рисунке 48 четырехугольник $AKEL$ не плоский, но доказать, что этот чертеж невозможен, не так просто. Между прочим, некоторые из поступающих смогли увидеть только рисунок 48 и именно поэтому не решили задачу.

Будем проводить рассуждения, глядя одновременно на оба чертежа; это даст нам строгое решение задачи и одновременно позволит убедиться в верности рисунка 47.

Секущая плоскость, о которой идет речь в задаче, — обозначим эту плоскость через β — проходит через вершину A и центры R и S граней $A_1B_1C_1D_1$ и B_1C_1CB и, следовательно, определяется однозначно. Прямая l, по которой плоскость β пересекается с гранью $A_1B_1C_1D_1$, не может быть параллельна ребру A_1D_1, ибо в противном случае плоскость β не пересекалась бы с гранью B_1C_1CB и не могла бы потому проходить через точку S. Следовательно, прямая l пересекается с прямой A_1D_1, т. е. плоскость β пересекается с этой прямой, а потому также и с параллельными ей прямыми B_1C_1 и BC. Таким образом, плоскость β пересекает ребра A_1D_1, B_1C_1, BC куба (или их продолжения); соответствующие точки пересечения обозначим буквами L, E, K.

Четырехугольник $ALEK$ плоский (все четыре его вершины лежат в плоскости β); $AL \parallel KE$ и $AK \parallel LE$ как линии пересечения пары параллельных плоскостей третьей.

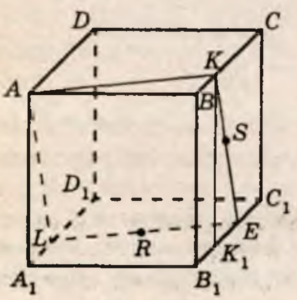


Рис. 47

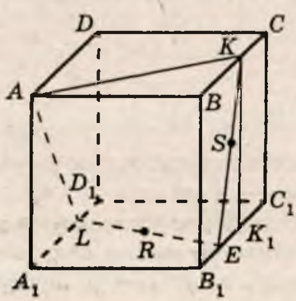


Рис. 48

Следовательно, $ALEK$ — параллелограмм. Мы установили, таким образом, форму сечения.

В плоскости грани B_1C_1CB проведем $KK_1 \perp B_1C_1$. Так как $\Delta K_1KE = \Delta A_1AL$, то $K_1E = A_1L$. Так как R и S — центры граней, то $EC_1 = BK$ и $EC_1 = A_1L$; кроме того, $BK = B_1K_1$. Отсюда получаем: $B_1K_1 = K_1E = EC_1$.

Теперь ясно, что точки B_1, K_1, E, C расположены именно так, как на рисунке 47, а рисунок 48 невозможен, ибо на нем $B_1K_1 > K_1E$. Автоматически мы нашли и ответ: отношение $B_1E : EC_1 = 2$.

Широко распространенным недостатком подготовки поступающих является отсутствие привычки активно работать с чертежом. Построив чертеж, многие не пытаются выявить специфические особенности геометрической конфигурации, найти дополнительные построения, ведущие к цели. Между тем довольно часто удачное дополнительное построение позволяет свести решение задачи буквально к нескольким строчкам, в то время как непосредственный вычислительный путь решения подчас связан со значительными техническими трудностями.

Конечно, любое правильное, математически грамотно изложенное решение совершенно законно, независимо от того, длинное оно или короткое. Более того, в условиях экзамена, когда время, предоставленное на решение, ограничено, не следует очень долго искать «изящное» решение, которого, возможно, вообще нет, — лучше осуществить ту идею, которая возникла, не задумываясь об иных возможностях, и довести до конца пусть длинное, но надежное решение. Надо признать, однако, что изящное решение, занимающее лишь несколько строк, показывает не только знания, но и высокое геометрическое «чутье» поступающего, его наблюдательность.

Дать общие рекомендации, когда и какие дополнительные построения следует делать, разумеется, нельзя — их можно научиться «видеть», только получив достаточную практику в решении задач. Именно поэтому при подготовке к экзаменам на отыскание геометрических подходов к решению задач необходимо обратить особое внимание.

(7) В треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC, а угол при вершине A равен α. На стороне AB взята точка D так, что BD = AC. Пусть E — середина отрезка AD, а F — середина отрезка BC. Найти угол BEF.

Обозначим стороны треугольника ABC, лежащие против вершин A, B и C, соответственно через a, b и c и пусть φ — искомый угол (рис. 49). Приведем предложенное некоторыми поступающими решение, основанное на поверхностных геометрических рассмотрениях.

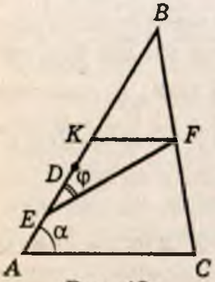


Рис. 49

По условию $BF = \frac{a}{2}$, кроме того,

$$BE = BD + DE = b + \frac{c-b}{2} = \frac{b+c}{2}.$$

Тогда из треугольника BEF по теореме синусов имеем

$$\frac{\sin(B+\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{b+c}{a},$$

откуда, пользуясь формулой (2), получаем

$$\frac{\sin(B+\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A}. \tag{5}$$

Правую часть этого равенства преобразуем, принимая во внимание, что $C = \pi - A - B$:

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{2\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Поэтому равенство (5) принимает вид

$$\frac{\sin(B+\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}. \tag{6}$$

Но

$$\frac{\sin(B+\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sin B\cos\varphi + \sin\varphi\cos B}{\sin\varphi} = \sin B \operatorname{ctg}\varphi + \cos B;$$

точно так же преобразуется и правая часть равенства (6). В результате мы приходим к соотношению

$$\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}, \quad \text{откуда } \varphi = \frac{A}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Приведенное решение, разумеется, вполне допустимо и даже свидетельствует о несомненном умении его автора проходить довольно сложные тригонометрические преобразования. Между тем эта задача имеет очень простое и короткое геометрическое решение, додуматься до которого не так уж и трудно.

Именно, проведем среднюю линию KF треугольника ABC (см. рис. 49). Тогда

$$KF = \frac{b}{2}, \quad KE = AK - AE = \frac{c}{2} - \frac{c-b}{2} = \frac{b}{2},$$

т. е. треугольник EKF — равнобедренный, и поэтому $\angle KFE = \varphi$. Так как $\angle EKF = \pi - \alpha$, то $(\pi - \alpha) + \varphi + \varphi = \pi$, откуда $\varphi = \dfrac{\alpha}{2}$.

8 *В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке M. Площадь треугольника ABM равна $\sqrt{6}$. Расстояния от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до сторон AC и BC равны $\sqrt{2}$ и 1 соответственно. Определить угол ABC.*

Пусть AR и BS — высоты треугольника ABC, O — центр описанной окружности, OK и OL — перпендикуляры, опущенные из точки O на стороны AC и BC соответственно (рис. 50). Проведем через точку C диаметр CN и точку N соединим с вершинами B и A.

Докажем, что получившийся четырехугольник $AMBN$ — параллелограмм. Действительно, угол NBC — прямой (как опирающийся на диаметр), а поэтому $NB \parallel AR$. Аналогично получаем, что $NA \parallel BS$. Стороны этого параллелограмма легко находятся: поскольку OL и OK — средние линии треугольников BCN и ACN, то

$$BN = 2 \cdot LO = 2, \quad AN = 2 \cdot OK = 2\sqrt{2}.$$

Кроме того, площадь S параллелограмма $AMBN$ равна удвоенной площади треугольника AMB, т. е. $S = 2\sqrt{6}$.

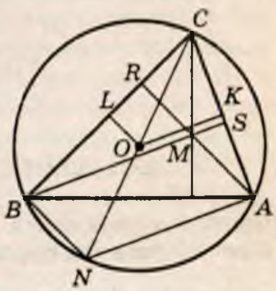


Рис. 50

С другой стороны, по известной формуле

$$S = NB \cdot NA \cdot \sin(\angle ANB),$$

откуда $\sin(\angle ANB) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Но углы ACB и ANB в сумме составляют 180° (как противоположные углы вписанного четырехугольника $ACBN$) и потому

$$\sin(\angle ACB) = \sin(\angle ANB) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Учитывая, что угол ACB по условию острый, находим: $\angle ACB = 60°$.

Задачи

1. В треугольной пирамиде две грани — равносторонние треугольники со стороной a, а две другие грани — равнобедренные прямоугольные треугольники. Определить радиус шара, вписанного в пирамиду.

2. В окружность вписан прямоугольник $ABCD$, сторона AB которого равна a. Из конца K диаметра KP, параллельного стороне AE, сторона BC видна под углом 2β. Найти радиус окружности.

3. Ребра треугольной пирамиды, выходящие из вершины O, попарно перпендикулярны и их длины равны a, b, c. Найти объем куба, вписанного в эту пирамиду так, что одна его вершина совпадает с вершиной O.

4. В равнобедренном треугольнике дана боковая сторона b и угол α при основании. Вычислить расстояние от центра вписанной в этот треугольник окружности до центра окружности, описанной около этого треугольника.

5. В треугольнике ABC известно: $\angle A = \angle B = \alpha$, $AB = a$; AH — высота, BE — биссектриса. Точки H и E соединены отрезком. Найти площадь треугольника CHE.

6. Найти косинус угла α при основании равнобедренного треугольника, зная, что точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке M, а перпендикуляр, опущенный из вершины A на сторону BC, пересекает BC в точке N так, что $BN = NC$ и $AM = 2MD$. Найти стороны и площадь S четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен $5 + \sqrt{3}$, $\angle BAD = 90°$, $\angle ABC = 60°$.

8. В четырехугольной пирамиде $OABCD$ основанием является трапеция $ABCD$, а боковые грани OAD и OBC перпендикулярны к плоскости основания. Зная, что $AB = 3$, $CD = 5$, площадь грани OAB равна 9 и площадь грани OCD равна 20, найти объем пирамиды.

9. В равнобочной трапеции $ABCD$ основания $AD = 12$, $BC = 6$, высота равна 4. Диагональ AC делит угол BAD трапеции на два угла BAC и CAD. Какой из этих углов больше?

10. В треугольнике ABC дано: $AC = 2\sqrt{3}$, $AB = \sqrt{7}$, $BC = 1$. Вне треугольника взята точка K так, что отрезок KC пересекает отрезок AB в точке, отличной от B, и треугольник с вершинами K, A и C подобен исходному. Найти угол AKC, если известно, что угол KAC — тупой.

11. Дана трапеция $ABCD$, боковая сторона AB которой перпендикулярна к основаниям AD и BC ($AD > BC$). В трапецию вписана окружность с центром в точке O. Через вершины A, B, D проведена другая окружность радиуса 10 с центром в точке O_1. Найти основание AD, если $OO_1 = 2$.

12. Шар радиуса r касается плоскости P в точке A. Прямая l образует с плоскостью P угол φ, пересекает эту плоскость в точке C и касается шара в точке B. Найти длину отрезка AB, если $AC = 2r$.

13. Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, где $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$. В угол A куба вписан шар радиуса $R = 0{,}5$. Найти радиус шара, вписанного в угол C куба и касающегося данного шара, при условии, что ребро куба $a = 1{,}5$.

14. На плоскости лежит шар радиуса R. Эту же плоскость пересекает прямой круговой цилиндр радиуса r, причем образующие цилиндра перпендикулярны к плоскости. Центр шара удален от оси цилиндра на расстояние ρ ($\rho > R + r$). Найти минимально возможный радиус шара, который касался бы одновременно цилиндра, плоскости и заданного шара.

15. В остроугольном треугольнике ABC известно, что $\angle C = 30°$; высоты пересекаются в точке M. Определить площадь треугольника AMB, если расстояния от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до сторон BC и CA соответственно равны $\sqrt{2}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

16. В окружности радиуса R проведены две хорды AB и AC. На хорде AB или на ее продолжении за точку B взята точка M, расстояние от которой до прямой AC равно длине хорды AC. Аналогично на хорде AC или на ее продолжении за точку C

взята точка N, расстояние от которой до прямой AB равно длине хорды AB. Найти длину отрезка MN.

17. Окружность радиуса R проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найти площадь треугольника ABC, зная, что $\angle ABC = \beta$, $\angle CAB = \alpha$.

18. В остроугольном треугольнике ABC угол C равен $\frac{\pi}{3}$. На медианах BM и CN как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает сторону BC в точке D такой, что $BD : DC = \sqrt{3}$. Найти угол B.

19. В треугольной пирамиде $SABC$ известны плоские углы при вершине S: $\angle BSC = 90°$, $\angle ASC = \angle ASB = 60°$. Вершины A, S и середины ребер SB, SC, AB и AC лежат на поверхности шара радиуса 3. Доказать, что ребро SA является диаметром этого шара, и найти объем пирамиды.

20. В окружность вписан равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α. Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся первой окружности и основания треугольника, причем точка касания является серединой основания. Найти радиус второй окружности. Если решение не единственно, рассмотреть все возможности.

21. В пространстве расположены семь точек A, B, C, D, B_1, C_1, D_1 так, что $ABCD$ — параллелограмм и $AB_1C_1D_1$ — параллелограмм. Найти длину отрезка CC_1, если отрезки BB_1 и DD_1 параллельны и длины их известны: $BB_1 = b$, $DD_1 = d$.

22. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды S_{ABCD} (S — ее вершина) равна a, высота пирамиды равна $\frac{3}{2}a\sqrt{3}$. Пусть E — середина бокового ребра SB. Найти расстояние от центра шара, описанного около пирамиды $SABCD$, до плоскости, проведенной через точки A, D, E, F (B и D — противоположные вершины основания пирамиды, F — середина ребра SC).

23. В треугольнике ABC известно: $\angle A = 120°$, $AC = 1$, $BC = \sqrt{7}$. На продолжении стороны CA взята точка M так, что BM является высотой треугольника ABC. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и M и касающейся в точке M окружности, проходящей через точки M, B и C.

24. Дан треугольник ABC, причем $AB = AC$ и $\angle A = 110°$. Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что $\angle MBC = 30°$, а $\angle MCB = 25°$. Найти угол AMC.

25. На отрезке AB длины R как на диаметре построена окружность. Вторая окружность такого же радиуса, что и первая, имеет центр в точке A. Третья окружность касается первой окружности внутренним образом, второй окружности — внешним образом, а также касается отрезка AB. Найти радиус третьей окружности.

26. В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга и трех сторон параллелограмма каждая. Радиус одной из окружностей равен 1. Известно также, что один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания равен $\sqrt{3}$. Найти площадь параллелограмма.

27. В прямоугольной трапеции лежат две окружности. Одна из них, радиуса 4, вписана в трапецию, а вторая, радиуса 1, касается двух сторон трапеции и первой окружности. Найти площадь трапеции.

28. Треугольник ABC — равнобедренный: $AB = BC$. Пусть D — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на сторону AC, E — точка пересечения биссектрисы угла BAC со стороной BC. Через точку E проведен перпендикуляр к прямой AE до пересечения с продолжением стороны AC в точке F (C между D и F). Известно, что $AD = m$, $FC = \frac{m}{4}$. Найти площадь треугольника ABC.

29. В прямоугольнике $ABCD$ ($BC > CD$) диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Биссектриса угла CAD пересекает BD в точке E. Пусть F — основание перпендикуляра, опущенного из точки E на сторону AD, точка K — середина AD. Через точку E проведен также перпендикуляр к AE до пересечения с диагональю AC в точке H. Известно, что $OH = b$, $KF = \frac{4b}{3}$. Найти площадь прямоугольника $ABCD$.

30. Два равных ромба $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$) и $APQR$ ($AP \parallel QR$, $AR \parallel PQ$) имеют общую вершину A и лежат в одной плоскости. Известно, что $\angle BAD = \angle PAR = \alpha$, причем $\alpha < \frac{\pi}{2}$, и $\angle QAC = \beta$. Продолжения сторон BC и QR пересекаются в точке K. Ромбы расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AK и в одной полуплоскости относительно прямой AD. Найти величину угла KAD.

В. *Доказательства в геометрии*

Опыт вступительных экзаменов показывает, что геометрические доказательства вызывают наибольшие трудности у поступающих. Задачи на доказательство считаются обычно весьма сложными, более трудными, чем задачи на вычисление.

Геометрические доказательства трудны прежде всего потому, что требуют умения логически рассуждать и точно выражать свои мысли, требуют ясного понимания, что дано и что требуется доказать. Именно отсутствие навыка в проведении логических умозаключений и объясняет многочисленные ошибки в решении задач на доказательство. Читая «доказательства» в работах поступающих, убеждаешься, что у многих имеется весьма смутное представление о том, что значит *доказать* тот или иной факт.

Умение мыслить логично, строго обосновывать геометрические факты можно выработать в себе только практикой, упражняясь в решении достаточного числа задач. Невозможно дать общий рецепт, как найти доказательство того или иного утверждения, как решать конкретную задачу на доказательство. Не ставя перед собой цели продемонстрировать все возможные методы доказательств и перечислить все встречающиеся ошибки, мы приведем лишь некоторые примеры рассуждений и остановимся на нескольких наиболее типичных недостатках, характерных для поступающих.

Приступая к доказательству некоторого геометрического факта, к решению задачи на доказательство, нужно прежде всего найти ту идею, на использовании которой удается построить строгое обоснование интересующего нас утверждения. Для этого необходимо проявить определенную изобретательность: подметить некоторые специфические свойства рассматриваемой геометрической конфигурации[1], отыскать различные дополнитель-

---

[1] Здесь можно провести некоторую аналогию с методом группировки, широко используемым в алгебре. Трудно в общем виде сказать что-либо определенное, как найти ведущую к цели группировку. Однако при достаточном навыке необходимая группировка отыскивается более или менее быстро.

ные построения, «увидеть» применимость каких-либо известных теорем, провести нужные вычисления.

Разумеется, не следует переоценивать изобретательность, необходимую для проведения геометрических доказательств в экзаменационных задачах, — она посильна каждому, кто твердо усвоил школьную программу.

Поиск решения, конечно, не надо излагать в чистовом решении. Последнее должно представлять собой только строгое доказательство, в котором совсем не важно, каким образом мы догадались проводить рассуждения именно так, а не иначе. Но зато в чистовом решении требуется исчерпывающе, логически правильно обосновать все рассуждения.

1 *В выпуклом четырехугольнике ABCD противоположные углы A и C — прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF. Доказать, что CE = FA.*

Из условия задачи сразу же следует, что вокруг четырехугольника $ABCD$ (рис. 51) можно описать окружность — поскольку сумма двух его противоположных углов равна 180°. Эта окружность позволяет нам обнаружить еще и другие свойства четырехугольника $ABCD$:

$$\angle ACD = \angle ABD, \quad \angle BAC = \angle BDC$$

(как вписанные углы, опирающиеся соответственно на дуги AD и BC), ясно, кроме того, что диагональ BD является диаметром окружности.

Доказываемое утверждение $CE = FA$ равносильно, очевидно, тому, что $AE = FC$. Мы установим это равенство прямым вычислением, выразив отрезки AE и FC через радиус R описанной окружности и углы $\angle ABD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$.

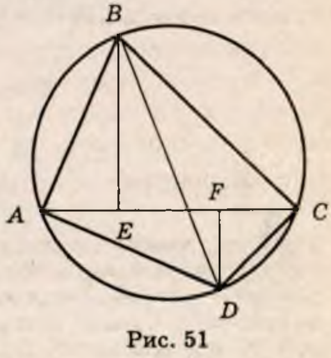


Рис. 51

Из прямоугольных треугольников ABD и ABE имеем

$$AE = AB\cos(\angle BAC) =$$
$$= 2R\cos\alpha\cos(\angle BDC) =$$
$$= 2R\cos\alpha\sin\beta,$$

поскольку $\angle BDC = 90° - \beta$; аналогично из треугольников BCD и FCD имеем

$$FC = CD \cos(\angle ACD) = 2R \sin\beta \cos\alpha.$$

Таким образом, $AE = FC$, чем и завершается доказательство.

Если в предыдущей задаче идея доказательства — построение описанной окружности — возникает довольно естественно, то в следующей задаче с ее весьма громоздким условием необходимое дополнительное построение вовсе не очевидно. Между тем идея ее решения по существу та же.

(2) *Углы C, A, B треугольника ABC образуют (в указанном порядке) геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, K — центр окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон BC и BA за точки C и A, L — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон треугольника AC и AB за точки C и B. Доказать, что треугольники ABC и OKL подобны.*

Из условия задачи вытекает, что в треугольнике ABC (рис. 52) имеют место соотношения:

$$\angle CAB = 2\angle BCA, \quad \angle CBA = 2\angle CAB.$$

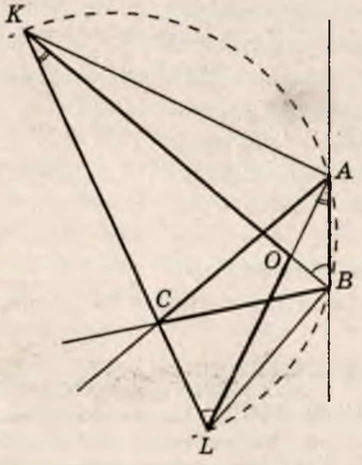


Рис. 52

Очевидно, что точка K равноудалена от прямых AC, AB и CB и является поэтому точкой пересечения биссектрис BK и AK. Аналогично AL и BL, а также AO и BO являются биссектрисами соответствующих углов. Тогда углы LAK и LBK — прямые (как углы между биссектрисами смежных углов).

Поэтому, если построить на KL как на диаметре окружность, то точки A и B будут на ней лежать. Но углы KLA и KBA будут тогда опираться на дугу AK; следовательно, они равны между собой. Аналогично, $\angle LKB = \angle LAB$. Но

$$\angle KBA = \frac{1}{2}\angle CBA = \angle CAB, \quad \angle LAB = \frac{1}{2}\angle CAB = \angle BCA,$$

так что $\angle KLA = \angle CAB$, $\angle LKB = \angle BCA$.

Следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta OKL$ (как имеющие по два соответственно равных угла).

Стереометрические задачи на доказательство вызывают у поступающих особые трудности, объясняющиеся прежде всего необходимостью хорошо представлять себе пространственные конфигурации, которые часто довольно сложно изобразить на плоском чертеже. В этих задачах особенно трудно «увидеть» полезное дополнительное построение, приводящее к решению.

3 *В треугольной пирамиде все плоские углы при вершине прямые. Доказать, что вершина пирамиды, точка пересечения медиан основания и центр описанного вокруг пирамиды шара лежат на одной прямой.*

Обозначим вершину рассматриваемой пирамиды через A, а ее основание через BCD (рис. 53).

Для решения задачи удобно изобразить пирамиду $ABCD$ не так, как это делается обычно, а лежащей на одной из боковых граней, например на грани CAB. По условию задачи

$\angle BAD = \angle DAC = \angle CAB = 90°$.

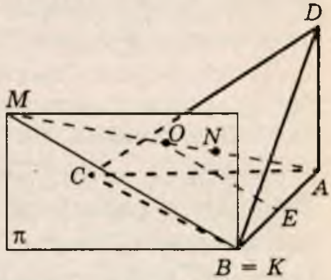


Рис. 53

Как известно, центр шара, описанного около пирамиды, есть точка пересечения всех плоскостей, проведенных через середины ребер пирамиды перпендикулярно к этим ребрам (см. § 5 раздела III). Отсюда следует, что *прямые, соединяющие центр O шара, описанного около пирамиды ABCD, с серединами ребер AB, AC и AD, соответственно перпендикулярны к этим ребрам.*

Соединим центр O с вершиной A. Нам надо доказать, что точка N пересечения прямой OA с плоскостью основания BCD является точкой пересечения медиан треугольника BCD. Для этого придется сделать дополнительные построения вне данной пирамиды.

На прямой AO за точкой O построим точку M такую, что $AM = 2AO$. Через эту точку проведем плоскость π, перпендикулярную к ребру AB. Пусть K — точка пересечения плоскости π и ребра AB; тогда $MK \perp AB$. Пусть, далее, точка E — середина отрезка AB, как было отмечено выше, $OE \perp AB$. Прямоугольные треугольники AEO и AKM, лежащие в одной и той же плоскости (проведенной через пересекающиеся прямые AB и AM), имеют общий угол при вершине A, а потому они подобны. Из их подобия следует, что $AK = 2AE$, т. е. $AK = AB$, а потому точки K и B совпадают.

Итак, *плоскость π, проходящая через точку M перпендикулярно к ребру AB, пересекает это ребро в точке B.* Аналогично показывается, что плоскости, проходящие через точку M и перпендикулярные к ребрам AC и AD, пересекают эти ребра соответственно в точках C и D. Но тогда при пересечении этих трех плоскостей с плоскостями ABC, ABD и ACD боковых граней пирамиды образуется *прямоугольный параллелепипед $ABA_1CDB_1MC_1$* с диагональю AM (рис. 54).

Теперь остается выяснить, в какой точке диагональ AM параллелепипеда пересекает плоскость треугольника BCD. Диагональ AM лежит в плоскости $ADMA_1$. Эта плоскость пересекает отрезок BC в его середине S (ибо диагонали параллелограмма ABA_1C, пересекаясь, делятся пополам). Поэтому плоскость $ADMA_1$ пересекает плоскость BCD по медиане SD треугольника BCD. Значит, точка пересечения N диагонали AM с плоскостью

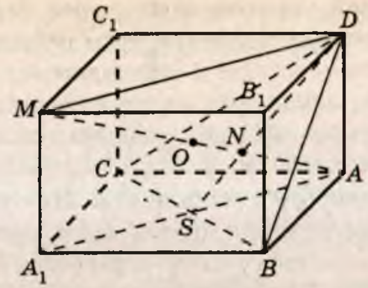


Рис. 54

основания BCD пирамиды лежит на медиане треугольника BCD, проведенной из вершины D.

Аналогично доказывается (рассмотрением плоскости BMC_1A, не изображенной на рис. 54), что точка N лежит на медиане треугольника BCD, проведенной из вершины B.

Итак, точка пересечения прямой OA с плоскостью основания BCD пирамиды $ABCD$ действительно есть точка пересечения медиан треугольника BCD[1].

Наиболее типичная ошибка поступающих — *неполнота и недостаточная логическая обоснованность доказательств.* Они часто доказывают меньше, чем требуется, делают выводы без достаточных на то оснований. Именно этим недостатком отличались многие решения следующей задачи.

(4) *Боковая поверхность треугольной пирамиды равна s, а периметр основания равен 3a. Сфера касается всех трех сторон основания в их серединах и пересекает боковые ребра в их серединах. Доказать, что пирамида правильная. Найти радиус сферы.*

[1] Заметим, что при проведении построений на рисунках 53 и 54 мы предполагали, что центр O описанного шара лежит вне пирамиды, т. е. расположен на прямой AM дальше от точки A, чем точка N. Этот факт можно было бы строго доказать (*если в треугольной пирамиде углы при вершине прямые, то центр описанного шара лежит вне пирамиды, по другую сторону плоскости основания*), однако это не является необходимым для решения задачи, ибо мы нигде в доказательстве не использовали порядок расположения точек A, N, O и M на диагонали AM.

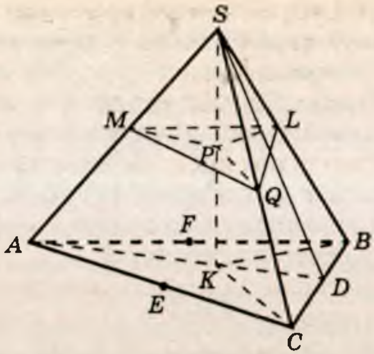


Рис. 55

Прежде всего отметим, что сфера, о которой идет речь, «протыкается» боковыми ребрами пирамиды в их серединах. Попытка изобразить эту сферу в комбинации с пирамидой вызывала у многих поступающих значительные затруднения. Между тем рассматриваемую конфигурацию достаточно лишь представлять себе, а на чертеже сферу можно и не рисовать: при решении задачи ее изображение фактически не нужно.

Сделав эти предварительные замечания, приступим к доказательству того, что пирамида, о которой идет речь в условии, — обозначим ее $SABC$ (рис. 55) — правильная. Сфера касается сторон основания AB, BC и CA в их серединах — точках F, D и E. По свойству касательных к шару, проведенных из одной точки, $AF = AE$, $BF = BD$, $CE = CD$. Но по условию $AE = EC$, $CD = DB$, $AF = FB$, а потому основанием пирамиды является правильный треугольник.

Плоскость основания ABC высекает из сферы окружность, которая является вписанной в этот правильный треугольник. Ясно, что центр окружности — точка K — совпадает с центром правильного треугольника ABC.

Пусть M, L, Q — середины боковых ребер AS, BS и CS пирамиды. Многие поступающие сразу писали, что плоскость, проведенная через эти точки, параллельна основанию ABC, не считая нужным обосновать это утверждение. Однако почему эти плоскости в самом деле параллельны? Так как MQ — средняя линия треугольника ASC, то $MQ \parallel AC$; по тем же причинам $QL \parallel CB$. Отсюда, по признаку параллельности двух плоскостей, и вытекает наше утверждение.

По свойству параллельных сечений в пирамиде треугольник MLQ, как подобный правильному треугольнику ABC, сам является правильным. Плоскость треугольника MLQ высекает из сферы окружность, описанную около этого треугольника, а ее центр совпадает с центром правильного треугольника MLQ.

Многие поступающие, обозначив этот центр буквой P, проводили прямую через точки S, P и K и заявляли, что она и есть высота пирамиды. Однако для такого заключения у нас пока нет оснований — мы еще не доказали ни то, что три точки S, P, K лежат на одной прямой, ни то, что эта прямая перпендикулярна к плоскости основания.

Для строгого доказательства проведем прямую SK через вершину пирамиды и центр основания; пусть эта прямая пересекает плоскость MLQ в некоторой точке P. Соединим эту точку с вершинами треугольника MLQ, а точку K — с вершинами треугольника ABC. Прямые PL и KB параллельны (как линии пересечения двух параллельных плоскостей MLQ и ABC с плоскостью KSB), а потому можно заключить, что $\Delta KSB \sim \Delta PSL$ и, следовательно, $PL = \frac{1}{2}KB$.

Совершенно аналогично показывается, что $PQ = \frac{1}{2}KC$, $PM = \frac{1}{2}KA$. Так как $KB = KC = KA$, то точка P — точка пересечения прямой KS с плоскостью MLQ — равноудалена от всех трех вершин треугольника MLQ и является потому центром описанной окружности. Итак, доказано, что вершина S и центры P и K треугольников MLQ и ABC лежат на одной прямой.

Эта прямая соединяет центры двух окружностей, высекаемых из сферы двумя параллельными плоскостями. Такая прямая, как известно, перпендикулярна к секущим плоскостям и проходит через центр сферы. Следовательно, прямая SK перпендикулярна к плоскости ABC, т. е. является высотой пирамиды. Одновременно показано, что центр сферы лежит на высоте пирамиды.

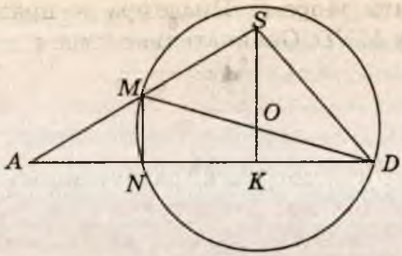


Рис. 56

Таким образом, основание пирамиды $SABC$ — правильный треугольник, а высота пирамиды SK проходит через центр K основания. В соответствии с определением это и означает, что пирамида $SABC$ — правильная.

Для вычисления искомого радиуса сферы удобно сделать отдельно чертеж в плоскости треугольника ASD (рис. 56). Пусть точка O, лежащая на высоте SK, — центр сферы. Ясно, что отрезки OM и OD равны радиусу r сферы.

В работах многих поступающих можно было встретить утверждение, что MOD — диаметр сферы; на нем основывалось дальнейшее решение. Это утверждение, однако, еще не обосновано — оно не следует прямо из проведенных ранее рассуждений и нуждается в специальном доказательстве.

Обозначим через N точку пересечения окружности, высекаемой из сферы плоскостью ASD, с прямой AD. Так как $KD = \frac{1}{3}AD$ (ведь точка K — центр правильного треугольника ABC), а $NK = KD$ (ибо точка K — основание перпендикуляра, опущенного из центра O на хорду ND), то $AN = NK = KD$. Но тогда MN — средняя линия треугольника ASK. Следовательно, $MN \parallel SK$, т. е. $\angle MND = 90°$. Отсюда вытекает, что MD — хорда, на которую опирается вписанный прямой угол, — диаметр окружности.

Дальнейшие вычисления уже не составляют труда. Получив с помощью формулы для боковой поверхности пирамиды длину ее апофемы SD, нужно из прямоугольного треугольника SKD найти высоту пирамиды, а затем применить теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику MND. Окончательно имеем

$$r = \frac{\sqrt{16s^2 + 45a^4}}{24a}.$$

На примере рассмотренной задачи видно, что каждый из интересующих нас геометрических фактов нужно тщательно доказывать, проводя необходимые дополнительные построения и используя теоремы из курса геометрии. Без такого доказательства ни один из этих фактов не может считаться установленным логически строго, и потому решение задачи, не содержащее этих обоснований, нельзя признать исчерпывающим.

Многих интересует вопрос: нужно ли приводить полностью формулировки используемых при доказательстве теорем и аксиом? Дело поступающего — писать всю формулировку необходимой для рассуждений теоремы или давать лишь краткую ссылку на нее. Важно только, чтобы геометрические факты, утверждения и построения были ясно описаны и убедительно обоснованы.

Говоря о необходимости давать логически строгие доказательства геометрических утверждений, нельзя не отметить, что поступающие часто вместо строгого обоснования того или иного факта употребляют выражения «совершенно очевидно из чертежа», «непосредственно из чертежа ясно» и т. п. Следует помнить, что геометрическое доказательство должно выводить требуемый факт не из «наглядности», которая к тому же часто бывает иллюзорной, а из аксиом геометрии, определений и известных теорем школьного курса.

Вот пример задачи, в которой правильный ответ получили почти все, — и тем не менее из-за логических изъянов большинство решений было неполноценно.

5 *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. Найти площадь шестиугольника, который получается в сечении этого куба плоскостью, проходящей через центр куба и середины ребер AB и BC. Ребро куба равно* 1.

Поскольку в условии задачи прямо указана форма сечения, представить себе этот шестиугольник уже нетрудно. Многие поступающие сразу же догадались, что этот шестиугольник правильный, и предложили решения вроде следующего:

«Пусть K и L — середины ребер AB и BC. Вследствие симметрии сечение проходит через точки P и N — середины ребер A_1D_1 и D_1C_1. Совершенно очевидно, что сечение проходит также через точки M и Q — середины ребер CC_1 и AA_1. Из треугольников KBL, LCM и т. д. по теореме Пифагора легко определяются стороны шестиугольника:

$$KL = LM = MN = NP = PQ = QK = \sqrt{1/2}.$$

Так как все стороны шестиугольника равны, то шестиугольник правильный, и по известной длине стороны определяется его площадь — она равна $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ ».

Ответ получен правильный, но считать это рассуждение *полным решением* нельзя, ибо в нем есть много необоснованных геометрических утверждений, и даже есть одно просто неверное — шестиугольник, у которого все стороны равны, не обязан быть правильным. Ведь в определении правильного многоугольника, помимо требования равенства сторон, имеется еще одно требование равенства углов, которое не вытекает из равенства сторон. Однако равенство углов шестиугольника, являющегося сечением, в приведенном «решении» никак не обосновано, и потому заключение, что этот шестиугольник — правильный, логически не состоятельно.

Приведем одно из возможных полных решений задачи (используя общий метод, подробно развитый в § 6 раздела III).

Пусть точка O — центр данного куба (рис. 57). Точка O лежит на пересечении диагоналей BD_1 и A_1C куба (они на чертеже не проведены); плоскость, проходящая через диагонали BD_1 и A_1C, высекает из куба прямоугольник BA_1D_1C. Эта плоскость имеет с плоскостью интересующего нас сечения две общие точки: O и середину L ребра BC; поэтому их линия пересечения — прямая OL. Но в

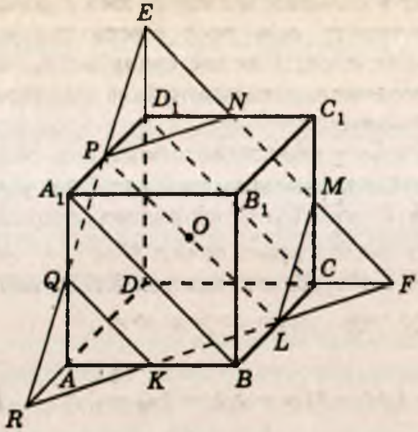


Рис. 57

прямоугольнике BA_1D_1C точка O есть центр симметрии, а потому LO пересекает сторону A_1D_1 в ее середине. Следовательно, доказано, что точка P — середина ребра A_1D_1 — принадлежит рассматриваемому сечению.

Буквально такие же рассуждения показывают, что и середина N ребра D_1C_1 принадлежит сечению.

Прямая KL, лежащая в плоскости грани $ABCD$ (и принадлежащая сечению), пересекает продолжения ребер AD и CD соответственно в точках R и F. Соединим прямой точки N и F, лежащие в плоскости грани CC_1D_1D по разные стороны от отрезка CC_1; эта прямая пересечет отрезок CC_1 в некоторой точке M, также принадлежащей сечению. Аналогично убеждаемся, что сечение проходит через некоторую точку Q на ребре AA_1. Наконец, ясно, что прямые NF и RP, принадлежащие плоскости сечения и представляющие собой линии пересечения этой плоскости соответственно с плоскостями граней CC_1D_1D и AA_1D_1D, пересекаются в некоторой точке E, лежащей на линии пересечения плоскостей указанных граней, т. е. на прямой DD_1.

Построены точки пересечения искомого сечения со всеми ребрами куба. Докажем еще, что точки Q и M — середины соответствующих ребер. Сравнивая прямоугольные треугольники RAK, KBL и LCF, убеждаемся, что они равны, а потому $RA = FC = \frac{1}{2}AB$. Сравнивая прямоугольные треугольники RAQ, QA_1P, PD_1E, видим, что и они равны (например, $\Delta RAQ = \Delta QA_1P$, поскольку $\angle RQA = \angle A_1QP$ как вертикальные, а $RA = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}A_1D_1 = A_1P$, ибо P — середина ребра); но тогда Q — середина ребра AA_1, а $D_1E = \frac{1}{2}AA_1$. Точно так же доказывается, что точка M — середина ребра CC_1.

Итак, доказано, что сечение $KLMNPQ$, о котором идет речь в задаче, проходит через середины ребер AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1, A_1A куба. Поэтому каждая сторона шестиугольника равна половине диагонали грани куба, т. е. все стороны шестиугольника равны между собой.

Остается установить равенство всех углов нашего шестиугольника — тогда будет доказано, что получающийся в сечении шестиугольник правильный. Из равенства прямоугольных треугольников RAK, RAQ и QAK следует, что треугольник RKQ равносторонний; следовательно, $\angle RKQ = 60°$, а потому $\angle QKL = 120°$. Аналогично убеждаемся, что и все остальные углы шестиугольника равны 120°.

Теперь для завершения решения с полным основанием можно воспользоваться выражением площади правильного шестиугольника через длину его стороны.

При проведении геометрических доказательств поступающие часто подменяют прямое утверждение обратным к нему. Пусть, например, в ходе рассуждений необходимо обосновать некоторый факт, т. е. *доказать теорему* (или *сослаться* на соответствующую теорему школьного курса), *утверждающую справедливость интересующего нас факта*, исходя из того, что нам дано или уже известно. Однако часто вместо этой прямой теоремы дается ссылка на *обратное* утверждение, т. е. на утверждение, *справедливое в предположении, что интересующий нас факт имеет место.*

Ясно, что это — грубая логическая ошибка; при таком способе рассуждений интересующий нас факт не может считаться доказанным. Корни этой ошибки, по-видимому, лежат в нечетком понимании того, что на каждом этапе проводимого доказательства *дано*, а что *требуется обосновать*. Поэтому если в ходе доказательства возникает необходимость сослаться на то или иное утверждение, рекомендуется вспомнить *точную* его формулировку и убедиться, что предположения, при которых это утверждение доказано, действительно выполнены.

Именно указанная логическая ошибка не позволила многим поступающим справиться со следующей задачей.

(6) *В трапеции ABCD точки K и M являются соответственно серединами оснований AB и CD. Известно, что* $AM \perp DK$, $CK \perp BM$, *а* $\angle CKD = 60°$. *Найти площадь трапеции, если ее высота равна* 1.

Обозначим через P точку пересечения отрезков AM и DK, а через Q — точку пересечения отрезков CK и BM (рис. 58). Так как $\Delta APK \sim \Delta MPD$, то

$$\frac{MP}{AP} = \frac{DM}{AK},$$

аналогично, из подобия треугольников BQK и MQC следует равенство

$$\frac{MQ}{BQ} = \frac{CM}{BK}.$$

По условию $DM = CM$ и $AK = BK$. Поэтому правые части двух написанных пропорций равны, а тогда

$$\frac{MP}{PA} = \frac{MQ}{QB}. \qquad (7)$$

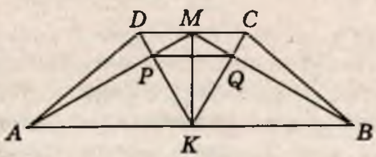


Рис. 58

В этом месте многие поступающие рассуждали примерно следующим образом: «Из равенства (7) с помощью производной пропорции получаем

$$\frac{MP}{MA} = \frac{MQ}{MB}.$$

Следовательно, треугольники PMQ и AMB подобны — они имеют общий угол M и соответственно пропорциональные стороны. Следовательно, $PQ \parallel AB$, поскольку прямая, параллельная основанию треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному».

Между тем применение этой теоремы здесь недопустимо: ведь в ней *предполагается*, что прямая параллельна основанию треугольника, и *доказывается*, что тогда отсекаемый треугольник подобен данному. А в приведенном рассуждении положение как раз обратное: мы знаем, что $\Delta PMQ \sim \Delta AMB$, и должны доказать, что $PQ \parallel AB$. Логическая ошибочность сделанного выше вывода очевидна.

Для того чтобы этот вывод был логически обоснован, мы должны были бы ссылаться на утверждение, *обратное* к указанной теореме: «Если прямая, пересекающая боковые стороны треугольника, отсекает треугольник, подобный данному, то она параллельна основанию». Однако это утверждение *неверно* (см., например, рис. 59: $\Delta ABC \sim \Delta DBE$, так как $\angle BED = \angle BAC$, $\angle BDE = \angle BCA$, но DE не параллельна AC). Таким образом, факт параллельности прямых PQ и AB нуждается в строгом обосновании.

Это обоснование можно провести так. В подобных треугольниках соответственные углы равны; поэтому, исходя из пропорции (7), мы можем заключить, что $\angle MPQ = \angle MAB$. Но эти углы являются соответственными при пересечении прямых PQ и AB секущей MA; отсюда и вытекает, что $PQ \parallel AB$.

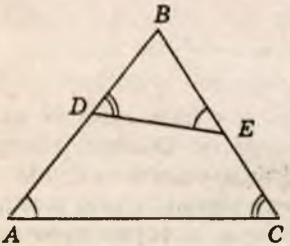


Рис. 59

Укажем еще одну логическую ошибку, которая также встречалась в работах поступающих: параллельность прямых PQ и AB выводилась из равенства

(7) со ссылкой на теорему о том, что параллельные прямые делят стороны угла на пропорциональные части. Очевидно, что и здесь необходимо ссылаться не на указанную теорему, а на обратную к ней. Хотя эта обратная теорема действительно верна (в чем легко убедиться), такое рассуждение логически ошибочно.

После того как параллельность прямых PQ и AB доказана, дальнейшее решение не представляет особого труда. Заметим, что прямоугольные треугольники APK и BQK имеют равные гипотенузы и равные высоты. Однако по гипотенузе c и высоте h, опущенной на гипотенузу, катеты a и b прямоугольного треугольника вычисляются однозначно из системы уравнений

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch.$$

Отсюда вытекает, что треугольники APK и BQK имеют соответственно равные катеты и соответственно равные углы.

При этом имеются две возможности: либо $\angle PKA = \angle QBK$, либо $\angle PKA = \angle QKB$. Но в первом случае развернутый угол AKB равен

$$\angle AKP + \angle PKQ + \angle QKB = \angle PKA + 60^\circ + 90^\circ - \angle QBK = 150^\circ,$$

что, разумеется, неверно. Следовательно, $\angle PKA = \angle QKB$, а тогда каждый из этих углов равен 60°. Отсюда ясно, что в треугольнике AMB углы при основании AB равны 30°, так что треугольник AMB равнобедренный, а его медиана MK является и высотой. Далее, имеем $AK = MK \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$, а из прямоугольного треугольника DMK находим $DM = MK \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Окончательно получаем

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot MK = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Особо следует остановиться на так называемых вычислительных геометрических задачах. Обычно поступающие считают, что в таких задачах «самое главное — получить правильный ответ». И, как правило, они успешно справляются с той частью решения, которая касается вычисления (даже довольно кропотливого) искомой величины. Однако многие оставляют без внимания другую, пожалуй, более ответственную и важную часть решения — не считают нужным (или просто не понимают, что это нужно) обосновать законность выкладок, т. е. доказать те геометрические факты, на которых основаны вычисления. Более того, нередко случается, что поступающий, свободно оперирующий разными формулами, оказывается совершенно беспомощным, когда речь заходит о строгом обосновании какого-либо используемого при вычислениях утверждения геометрического характера.

Между тем доказательство геометрических фактов, которые используются при вычислениях, является неотъемлемой и принципиально важной частью решения вычислительной задачи. Почему в данной конкретной пирамиде, о которой идет речь в задаче, центр вписанного шара лежит на высоте? Почему данная прямая перпендикулярна к построенной плоскости? Почему рассматриваемая сфера касается данной плоскости именно в указанной точке? Все подобные утверждения, используемые при решении вычислительной задачи, должны быть не только сформулированы, но и доказаны.

Вообще, само разделение геометрических задач на «задачи на вычисление» и «задачи на доказательство» чисто условно. Из приведенных выше примеров (см. задачи 1, 6) видно, что доказать необходимое удается подчас, лишь проведя некоторые вычисления. С другой стороны, существует много вычислительных задач, при решении которых центральное место занимают, однако, не выкладки, а доказательство некоторого факта. Именно с таким положением мы столкнулись при решении задачи 5. Точно так же в следующей задаче без полного обоснования нужного утверждения мы не смогли бы провести вычисления, ибо только в ходе доказательства удается нащупать путь, позволяющий подсчитать ответ.

7 *На диагонали AC выпуклого четырехугольника ABCD находится центр окружности радиуса r, касающейся сторон AB, AD и BC. На диагонали BD находится центр окружности такого же радиуса r, касающейся сторон BC, CD и AD. Найти площадь четырехугольника ABCD, зная, что указанные окружности касаются друг друга внешним образом.*

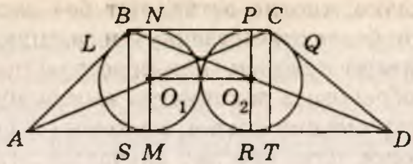


Рис. 60

Пусть точки O_1 и O_2, лежащие соответственно на диагоналях AC и BD, — центры данных окружностей (рис. 60). Точки касания окружности с центром O_1 со сторонами AB, AD и BC четырехугольника обозначим соответственно L, M и N; точки касания окружности с центром O_2 со сторонами BC, CD и AD четырехугольника обозначим соответственно P, Q и R.

Так как эти окружности касаются друг друга внешним образом и имеют одинаковые радиусы r, то сторона BC, являющаяся общей касательной этих окружностей, параллельна линии центров O_1O_2. Точно так же заключаем, что $AD \parallel O_1O_2$. Следовательно, стороны BC и AD четырехугольника $ABCD$ параллельны между собой.

Как известно, если у выпуклого четырехугольника две противоположные стороны параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм или трапеция. Поэтому рассматриваемый четырехугольник $ABCD$ является либо параллелограммом, если параллельные стороны BC и AD еще и равны, или трапецией с основаниями AD и BC, если эти стороны не равны между собой. Выясним, равны или нет стороны AB и BC.

Поскольку окружность с центром O_1 касается сторон угла BAD, то ее центр O_1 лежит на биссектрисе этого угла: $\angle BAC = \angle CAD$. С другой стороны, $\angle CAD = \angle BCA$ как накрест лежащие углы, образованные пересечением параллельных BC и AD прямой AC. Поэтому $\angle BAC = \angle BCA$, т. е. треугольник ABC — равнобедренный: $AB = BC$. Аналогично доказывается, что $BC = CD$.

Радиусы O_1N и O_1M, проведенные в точки касания окружности с параллельными прямыми BC и AD, составляют диаметр $MN = 2r$, причем $NM \perp BC$ и $NM \perp AD$.

Точки P, O_2 и R также лежат на одном диаметре $PR = 2r$, причем $PR \parallel NM$. Таким образом, расстояние между параллельными сторонами BC и AD равно $2r$, а $NP = MR = O_1O_2 = 2r$ (по свойству параллельных отрезков, заключенных между параллельными прямыми NM и PR).

В силу свойства касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем

$$AM = AL, \quad BL = BN, \quad DR = DQ, \quad CQ = CP.$$

Используя эти равенства и доказанные выше равенства

$$AB = BC = CD, \quad MR = NP = 2r,$$

последовательно получаем

$$\begin{aligned} AD &= AM + MR + RD = AL + 2r + QD = \\ &= (AB - BL) + 2r + (CD - CQ) = \\ &= (BC - BN) + 2r + (BC - PC) = \\ &= (NP + PC) + 2r + (BC - PC) = \\ &= 2r + 2r + BC = BC + 4r. \end{aligned}$$

Таким образом, параллельные стороны AD и BC не равны между собой, а потому четырехугольник $ABCD$ является трапецией. Так как расстояние между основаниями AD и BC трапеции (т. е. ее высота) равно $2r$, то площадь четырехугольника $ABCD$ равна

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot 2r = (BC + 2r)2r. \tag{8}$$

Следовательно, остается лишь определить длину основания BC.

Опустим из точек B и C перпендикуляры BS и CT на сторону AD; очевидно, что $BS = CT = 2r$. Так как $AS = TD$ (как проекции на AD равных наклонных AB и CD), а $ST = BC$, то

$$AD = AS + ST + TD = AS + BC + AS = BC + 2AS.$$

С другой стороны, $AD = BC + 4r$. Приравнивая между собой эти два выражения для AD, находим $AS = 2r$. Далее, в прямоугольном треугольнике ASB имеем $AS = 2r$, $BS = 2r$, а потому $AB = 2r\sqrt{2}$. Это значение $AB = BC$ нужно подставить в формулу (8), после чего получаем, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна $4r^2(1 + \sqrt{2})$.

Обоснование геометрических фактов, на которых базируются вычисления, особенно важно в стереометрических задачах. Очень часто центр тяжести решения таких задач лежит как раз в доказательстве, а не в вычислениях, сводящихся к использованию известных формул.

(8) *Высота правильной треугольной пирамиды равна h. Точки пересечения высот каждой из боковых граней и вершина пирамиды лежат на поверхности шара радиуса r. Найти объем пирамиды.*

Многим поступающим показалось очевидным, что центр шара лежит на высоте пирамиды (это используется при вычислениях), и они, констатировав этот факт без обоснований, сразу перешли к вычислениям. Некоторые потом даже возражали против указанного им недостатка решения — отсутствия доказательства, — ссылаясь на то, что «никто никогда не требовал от них давать подробное описание и объяснение чертежа». Но ведь речь идет вовсе не об объяснении чертежа, а о пропуске существенной части решения!

Плоскость π, проведенная через точки O_1, O_2 и O_3 — точки пересечения высот боковых граней пирамиды $SABC$ (рис. 61), — высекает из поверхности шара окружность, проходящую через эти три точки. Центр шара лежит на перпендикуляре к плоскости π, восставленном из центра окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$. Докажем, что этот перпендикуляр совпадает с высотой пирамиды.

Поскольку пирамида правильная, то все ее боковые грани — равные треугольники, а потому точки пересечения их высот — точки O_1, O_2 и O_3 — лежат на одинаковом расстоянии от вершины S. Таким образом, $SO_1 = SO_2 = SO_3$.[1]

---

[1] Подчеркнем, что этот факт — свойство равных треугольников; он имеет место безотносительно к шару, о котором идет речь в задаче. Некоторые поступающие пытались получить эти равенства, используя свойство касательных к шару; однако прямые SE, SD и SF «протыкают» сферу и не являются касательными.

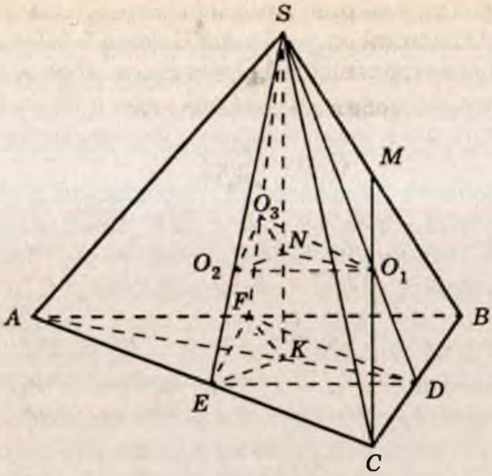


Рис. 61

Проведем высоту SK пирамиды и обозначим через N точку пересечения SK с плоскостью π. Из равенства треугольников SKD, SKF и SKE вытекает, что $\angle DSK = \angle FSK = \angle ESK$, а из равенства этих углов и равенства отрезков SO_1, SO_2 и SO_3 следует, что $\Delta SNO_1 = \Delta SNO_2 = \Delta SNO_3$. Поэтому $NO_1 = NO_2 = NO_3$, т. е. точка N — центр окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$.

Таким образом, высота пирамиды действительно проходит через центр окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$. Однако еще не доказано, что эта высота перпендикулярна к плоскости π.

Из подобия равнобедренных треугольников ESD и O_2SO_1 (у них стороны, заключающие общий угол при вершине, пропорциональны) вытекает, что $O_1O_2 \parallel DE$ (см. задачу 6). Аналогично показывается, что $O_1O_3 \parallel DF$. Следовательно, плоскость π параллельна плоскости основания пирамиды, а потому высота SK перпендикулярна к плоскости π. Таким образом, доказано, что центр шара лежит на высоте пирамиды.

Перейдем к вычислениям. Для определения объема пирамиды надо найти сторону ее основания. Рассмотрим грань BSC. Так как прямоугольные треугольники SDB и BMC имеют общий острый угол B, то $\angle DSB = \angle MCB$, а потому прямоугольные треугольники SDB и O_1DC подобны. Из их подобия заключаем, что

$$O_1D = \frac{x^2}{4SD}, \tag{9}$$

где x — длина ребра основания пирамиды.

Рассмотрим теперь плоскость ADS, сделав отдельный чертеж (рис. 62). Пусть точка O, лежащая на высоте SK треугольника ADS, — центр шара, т. е. центр окружности, проходящей через точки S и O_1; тогда $OS = OO_1 = r$. Проводя высоту OL равнобедренного треугольника SOO_1 и заметив, что $\Delta\, SLO \sim \Delta\, SKD$, находим

$$SL = \frac{rh}{SD}. \tag{10}$$

Но $SD = 2SL + O_1D$, т. е., с учетом (10) и (9),

$$SD^2 = 2rh + \frac{x^2}{4}.$$

С другой стороны, из прямоугольного треугольника SKD имеем

$$SD^2 = h^2 + KD^2,$$

где $KD = \frac{1}{3}AD$ (ибо K — центр правильного треугольника ABC; см. рис. 61). Два полученных равенства для SD^2 дают уравнение для определения x, после чего находим объем

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,h^2(h - 2r).$$

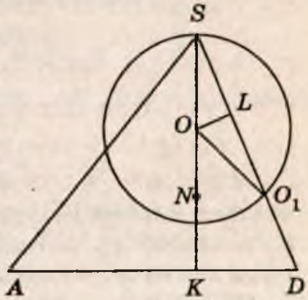


Рис. 62

В заключение отметим, что в процессе решения мы доказывали далеко не все геометрические факты, которые были в той или иной степени использованы. Некоторые из них мы считали столь очевидными, что даже не формулировали их явно. Например, мы без всяких комментариев утверждали, что высота SK (см. рис. 61) *пересекает* плоскость π треугольника $O_1O_2O_3$, а не параллельна ей. При вычислениях в этой же задаче мы исходили из рисунка 62, на котором точка O лежит на высоте SK *выше* точки N, и т. д.

Разумеется, доказывать подобные утверждения логически необходимо. Но в действительности нет никакой чисто физической возможности обосновать абсолютно все утверждения. Кроме того, многие из геометрических утверждений, по существу, и не могут быть строго доказаны без предварительного построения полной системы аксиом геометрии (что в школе не делается).

Поэтому от поступающего требуется умение выделять в каждой задаче основные, узловые утверждения и аккуратно их доказывать.

(9) *Боковые грани четырехугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а в основании пирамиды лежит ромб, одна диагональ которого в два раза длиннее другой. Найти объем пирамиды, если известно, что площадь ее боковой поверхности равна 6, а среди боковых ребер есть два ребра, составляющие тупой угол.*

Пусть $SABCD$ — данная пирамида (рис. 63) и $BD = 2AC$, отсюда вытекает, что угол ABC острый. Докажем прежде всего, что в равнобедренном треугольнике ABS равны стороны AB и BS.

Предположим противное: $AB \neq BS$. Тогда либо а) $AS = BS$, либо б) $AS = AB$.

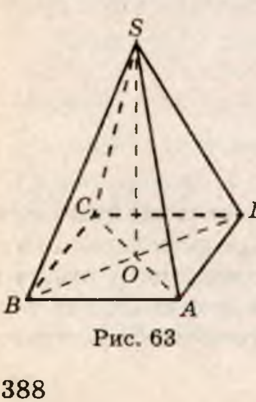


Рис. 63

а) Пусть $AS = BS$. Тогда из равенства треугольников ASB и BSC следует, что $CS = BS$. Аналогично, $DS = CS$. Следовательно, все боковые ребра пирамиды $SABCD$ равны. Но тогда ее высота должна проходить через центр окружности, описанной вокруг ромба $ABCD$. Однако этот ромб не является квадратом, так что вокруг него описать окружность нельзя, и мы пришли к противоречию.

б) Пусть $AS = AB$. Тогда из равенства граней ABS и CBS следует, что $CS = AS = AB = BC$, а из равенства граней ADS и ABS получаем $BS = DS$.

Так как плоские углы при вершине S являются углами при основании равнобедренных треугольников, то они острые. Далее, $\Delta ASC = \Delta ABC$ (по трем сторонам), и поэтому $\angle ASC = \angle ABC$, и они острые. Кроме того, в этих треугольниках равны медианы SO и BO. Но медиана SO равнобедренного треугольника BSD перпендикулярна к BO и, следовательно, $\angle SBO = 45°$, а тогда $\angle SDB = \angle SBO = 45°$, откуда $\angle BSD = 90°$.

Таким образом, в рассматриваемом случае не нашлось ни одной пары боковых ребер, составляющих тупой угол, т. е. случай б) также противоречит условию задачи.

Итак, $AB = BS$. Из равенства боковых граней убеждаемся, что $DS = BS$ и $CS = AS$. (Заметим, что треугольники BSD и BAD равны и, следовательно, угол BSD действительно тупой.) Так как OS — высота треугольников ASC и DSB, то $OS \perp BD$ и $OS \perp AC$, т. е. SO — высота пирамиды. Обозначая AB через a, находим

$$OB = \frac{2a}{\sqrt{5}}, \quad AO = \frac{a}{\sqrt{5}},$$

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \frac{a}{\sqrt{5}}, \quad SC = \sqrt{OS^2 + OC^2} = a\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Теперь в треугольнике ABS все стороны выражены через a. Так как согласно условию задачи $S_{\Delta ABC} = \frac{3}{2}$, то легко получаем $a = \sqrt{5}$. Таким образом, $SO = 1$, $AC = 2$, $BD = 4$; далее легко подсчитать, что объем пирамиды $SABCD$ равен $\frac{4}{3}$.

В заключение приведем решение задачи, в которой вычислительная часть весьма проста, а главная трудность для поступающих оказалась, видимо, в том, что доказываемое утверждение... слишком очевидно из чертежа и поэтому не очень ясно, как его обосновать строго.

(10) *Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с площадью основания S и высотой h. Через вершину A_1 верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ проведена секущая плоскость, пересекающая боковое ребро BB_1 в точке B_2, боковое ребро CC_1 в точке C_2 и боковое ребро DD_1* в точке *D_2. Найти объем той части параллелепипеда, которая расположена под секущей плоскостью, если известно, что $CC_2 = c$.*

Проведем через точку C_2 плоскость π, параллельную нижнему основанию $ABCD$ параллелепипеда (рис. 64). Тогда геометрически совершенно очевидно, что объем тела, расположенного под секущей плоскостью α, равен сумме объема параллелепипеда, расположенного под плоскостью π, и половины объема параллелепипеда, расположенного над плоскостью π. Другими словами,

$$V = S \cdot c + \frac{1}{2} S \cdot (h - c) = \frac{h + c}{2} S. \qquad (11)$$

Полученный ответ действительно верен. К сожалению, многие поступающие этим и ограничились, не посчитав нужным провести строгое обоснование использованных геометрических фактов. Между тем при всей своей очевидности эти факты доказываются не так уж просто.

Для обоснования проведенных рассуждений следует прежде всего показать, что сечение $A_1B_2C_2D_2$ находится целиком над плоскостью π, т. е. что точка C_2 лежит «ниже»

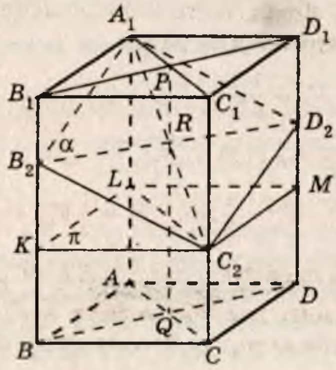


Рис. 64

точек B_2 и D_2, — только в этом случае искомый объем можно представить как сумму объемов двух рассмотренных вспомогательных тел. Проведем диагональные плоскости AA_1C_1C и BB_1D_1D; они пересекаются по оси PQ параллелепипеда. Так как точка R пересечения диагоналей четырехугольника $A_1B_2C_2D_2$ лежит в обеих диагональных плоскостях, то она принадлежит прямой PQ.

Отрезок QR является средней линией двух трапеций AA_1C_2C и BB_2D_2D, а потому

$$2RQ = AA_1 + CC_2 = BB_2 + DD_2. \qquad (12)$$

Но $AA_1 > BB_2$, так что $CC_2 < DD_2$; точно так же $AA_1 > DD_2$ и поэтому $CC_2 < BB_2$. Значит, точка C_2 лежит «ниже» точек B_2 и D_2.

Теперь докажем, что плоскость α разбивает параллелепипед, расположенный над плоскостью π, на две равновеликие части. Та его часть, которая находится под плоскостью α, состоит из двух пирамид с общей вершиной C_2 и основаниями A_1LKB_2 и A_1LMD_2. Обозначая отрезки BB_2 и DD_2 через b и d, а стороны основания BC и CD через m и n, легко находим

$$V_{A_1LKB_2} = \frac{1}{3}m\frac{(h-c)+(b-c)}{2}n = \frac{1}{6}S(b+h-2c),$$

$$V_{A_1LMD_2} = \frac{1}{3}n\frac{(h-c)+(d-c)}{2}m = \frac{1}{6}S(d+h-2c).$$

Следовательно, объем части параллелепипеда, лежащей между плоскостями π и α, равен

$$V_1 = \frac{1}{6}S(b+d+2h-4c).$$

Но в силу равенства (12) имеем $b+d = h+c$, откуда

$$V_1 = \frac{1}{2}S(h-c) = \frac{1}{2}V_2,$$

где V_2 — объем параллелепипеда $KLMC_2A_1D_1C_1B_1$.

Таким образом, мы обосновали все геометрические факты, на основе которых производились вычисления в формуле (11).

Задачи

1. Доказать, что прямые, соединяющие последовательно центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма и примыкающих к нему извне, образуют квадрат.

2. Через центр правильного треугольника проведена в плоскости этого треугольника произвольная прямая. Доказать, что сумма квадратов расстояний от вершин треугольника до этой прямой не зависит от выбора прямой.

3. В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания BC и точка F — середина основания AD. Обозначим через P точку пересечения отрезков BF и AE и через Q — точку пересечения отрезков ED и CF. Доказать, что отрезок PQ параллелен основаниям трапеции.

4. Доказать, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон постоянна.

5. В треугольнике ABC даны углы $A = \frac{\pi}{7}$, $B = \frac{2\pi}{7}$, $C = \frac{4\pi}{7}$. Доказать, что длины a, b, c сторон BC, CA и AB связаны соотношением $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

6. Дан тетраэдр $ABCD$. Доказать, что его ребра AD и BC взаимно перпендикулярны в том и только в том случае, когда выполняется равенство $AB^2 + DC^2 = AC^2 + DB^2$.

7. В плоскости P задан равносторонний треугольник ABC со стороной a. На перпендикулярах в точках B и C к плоскости P по одну сторону от этой плоскости откладываются отрезки $BD = \frac{a}{\sqrt{2}}$ и $CE = a\sqrt{2}$. Доказать, что треугольник DAE прямоугольный. Вычислить его площадь и найти косинус двугранного угла, который образует плоскость DAE с плоскостью P.

8. В пространстве даны два луча Ax и By, не лежащие в одной плоскости и образующие между собой угол 90°; AB — их общий перпендикуляр. На лучах Ax и By рассматриваются точки: M на Ax и P на By такие, что $2AM \cdot BP = AB^2$. Доказать, что расстояние от середины O отрезка AB до прямой MP равно $\frac{AB}{2}$.

9. Доказать, что сумма квадратов длин проекций ребер единичного куба на плоскость не зависит от взаимного расположения куба и плоскости и равна 8.

10. Доказать, что если длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то центр окружности, вписанной в этот треугольник, и точка пересечения его медиан лежат на прямой, параллельной средней по длине стороне треугольника.

11. Шар касается всех боковых граней треугольной пирамиды в центрах описанных около них окружностей. Каждый из трех плоских углов при вершине пирамиды равен α. Сумма длин боковых ребер равна 36. Доказать, что пирамида правильная. Найти радиус шара.

12. Шар касается всех трех боковых граней треугольной пирамиды $SABC$ в точках пересечения их биссектрис. Из вершины S проведены биссектрисы SD и SE боковых граней SAB и SAC. Угол DSE равен α, объем пирамиды равен V. Доказать, что пирамида правильная. Найти периметр основания.

13. Зная, что стороны треугольника ABC удовлетворяют соотношению $AC \cdot AB = BC^2 - AC^2$, доказать, что угол A вдвое больше угла B.

14. Найти на плоскости геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки A на прямые, проходящие через другую данную точку B.

15. Найти геометрическое место таких точек плоскости, что касательные, проведенные из этих точек к данной окружности, образуют между собой угол α.

16. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 2$ и $AD = 10$ такова, что в нее можно вписать окружность и вокруг нее можно описать окружность. Определить, где находится центр описанной (вокруг трапеции $ABCD$) окружности, т. е. расположен ли он внутри трапеции $ABCD$, вне ее или же на одной из ее сторон. Найти также отношение радиуса описанной окружности к радиусу вписанной окружности.

17. В равнобочной трапеции $ABCD$ дано: $AB = CD = 3$, основание $AD = 7$, $\angle BAD = 60°$. На диагонали BD расположена точка M так, что $BM : MD = 3 : 5$. Какую из сторон трапеции, BC или CD, пересечет продолжение отрезка AM?

18. Есть ли тупой угол у треугольника, стороны которого равны 10, 14, 17?

19. Точка E стороны BC и точка F стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ расположены так, что $BE = 2EC$ и $AF = 2FD$. На отрезке AE находится центр окружности радиуса r, касающейся сторон AB, BC и CD. На отрезке BF находится центр окружности такого же радиуса r, касающейся сторон AB,

AD и CD. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, зная, что указанные окружности внешним образом касаются друг друга.

20. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ заключены две окружности одинакового радиуса r, касающиеся друг друга внешним образом. Центр первой окружности находится на отрезке, соединяющем вершину O с серединой E стороны AB, а центр второй окружности — на отрезке CE. Первая окружность касается сторон AB, AD и CD четырехугольника, а вторая — сторон AB, BC и CD. Найти синус угла между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

21. На плоскости лежит шар радиуса r. Эту же плоскость пересекает прямой круговой цилиндр радиуса R, причем образующие цилиндра перпендикулярны к плоскости. Центр шара удален от оси цилиндра на расстояние ρ ($r + \rho < R$). Найти минимально возможный радиус шара, который бы касался одновременно цилиндра, плоскости и заданного шара.

22. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник, угол между диагоналями которого равен $\alpha < \frac{\pi}{3}$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна h. Дана вторая четырехугольная пирамида, имеющая ту же вершину S. Основанием ее является четырехугольник, две вершины которого лежат на диагоналях прямоугольника $ABCD$, а две другие — на одной из его больших сторон, причем проекция вершины S на плоскость основания лежит внутри этого четырехугольника. Найти объем второй пирамиды, если известно, что ее боковые грани равновелики, а боковые ребра равны.

23. В треугольной пирамиде каждое боковое ребро равно единице, а боковые грани равновелики. Найти объем пирамиды, если известно, что один из двугранных углов при основании прямой.

24. Даны две окружности одинакового радиуса. Они пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена их общая секущая, пересекающая окружности еще в точках C и D. Через точку B проведена прямая, перпендикулярная к этой секущей. Она пересекает окружности еще в точках E и F. Доказать, что точки C, E, D и F являются вершинами ромба.

25. В треугольной пирамиде $SABC$ известно, что $AC = AB$, а ребро SA наклонено к плоскостям граней ABC и SBC под углом $45°$. Известно, что вершина A и середины всех ребер пирамиды, кроме SA, лежат на сфере радиуса 1. Доказать, что центр указанной сферы расположен на ребре SA, и найти площадь грани ASC.

26. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на боковом ребре AA_1 взята точка A_2, а на боковом ребре CC_1 взята точка C_2. Проведена плоскость через точки A_2, C_2, B и проведена плоскость через точки A_2, C_2, D. Найти объем той части параллелепипеда, которая ограничена нижним основанием $ABCD$ и треугольниками A_2C_2B, A_2C_2D, если известно, что $AA_2 = a$, $CC_2 = c$ и площадь прямоугольника $ABCD$ равна s.

27. Точки E и F лежат по одну сторону от плоскости треугольника ABC, причем отрезок EA перпендикулярен к этой плоскости, а основание H перпендикуляра FH, опущенного из точки F на эту плоскость, лежит на отрезке BC. Найти объем многогранника, ограниченного треугольниками ABC, AEC, EFC, FCB, BFE и AEB, если известно, что $EA = a$, $FH = b$ и площадь треугольника ABC равна s.

28. Четырехугольник $ABCD$ обладает тем свойством, что около него можно описать и в него можно вписать окружности. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны, $AB = CD$ и радиус вписанной окружности равен 1. Чему равна площадь четырехугольника $ABCD$?

29. Можно ли вокруг четырехугольника $ABCD$ описать окружность, если $\angle ADC = 30°$, $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 6$?

30. Вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$, $AD = 2$. Чему равна длина диагонали AC?

31. В трапеции $ABCD$ точки K и M являются соответственно серединами оснований $AB = 5$ и $CD = 3$. Найти площадь трапеции, если треугольник AMB — прямоугольный, а DK — высота трапеции.

32. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM, а $\angle ABC = 120°$. Найти отношение площади треугольника ABC к площади описанного около этого треугольника круга.

33. Дан правильный тетраэдр $PABC$, длина ребра которого равна a. Через точки C, E, M и P, где E — середина ребра AB, а M — середина ребра AC, проведена сфера. Найти радиус сферы.

34. Два равных равнобедренных треугольника ABC и DBF ($AC = BC = BD = DF$) имеют общую вершину B и лежат в плоскости так, что точки C и D находятся по разные стороны от прямой AB; отрезки AC и DF пересекаются в точке K. В каком отношении прямая BK делит угол ABC, если $\angle DBF = \alpha$, $\angle CBF = \beta$, причем $\beta < \alpha$?

35. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с вершиной S и основанием ABC вписан шар радиуса 2; высота пирамиды SK равна 6. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и BC в некоторых точках M и N таких, что $MN = 7$, касающаяся шара в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N, и пересекающая продолжение высоты пирамиды SK за точку K в некоторой точке D. Найти длину отрезка SD.

Г. *Геометрическое воображение*

Особые затруднения вызывают у поступающих геометрические задачи, в которых требуется не просто использовать какую-либо формулу или обосновать некоторый факт, а хорошо представлять себе нужные геометрические конфигурации.

Наглядное геометрическое представление развивается постепенно, в результате постоянной тренировки. Необходимо всегда хорошо, с разных точек зрения представлять себе тела и фигуры, о которых идет речь в задаче, правильно и аккуратно выполнять чертеж.

Именно слабое умение представлять себе конфигурацию в пространстве, непонимание истинного взаиморасположения изображенных на чертеже тел было причиной того, что многие поступающие дали различные ошибочные решения в следующей задаче.

1 *Нижним основанием $ABCD$ прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (где A_1A, B_1B, C_1C, D_1D — боковые ребра) служит ромб с острым углом φ. Известно, что в эту призму можно вписать шар диаметра d, касающийся изнутри всех ее граней. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через ребра BC и A_1D_1.*

Определим площадь S четырехугольника A_1D_1CB (рис. 65). Если в прямую призму вписан шар, то радиус этого шара равен радиусу окружности, вписанной в ромб $ABCD$. В самом деле, центр шара равноудален от всех боковых граней прямой призмы, а потому ортогональная проекция центра на плоскость $ABCD$ равноудалена от всех сторон ромба. Таким образом, высота DK ромба равна

диаметру шара, т. е. сторона ромба $DC = \dfrac{d}{\sin\varphi}$. Легко сообразить, что высота призмы равна диаметру вписанного в нее шара, т. е. $DD_1 = d$.

Некоторые поступающие, исходя из чертежа, приняли A_1D_1CB за прямоугольник, а потому искали площадь сечения по формуле $S = BC \cdot D_1C$.

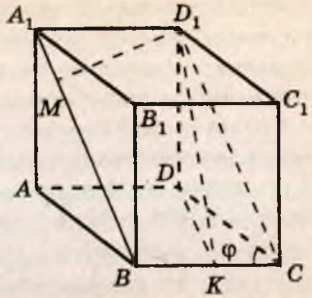


Рис. 65

На самом же деле $S = BC \cdot D_1K$, где D_1K — высота *параллелограмма* A_1D_1CB, т. е. $D_1K \perp BC$. По теореме Пифагора из треугольника D_1DK находим $D_1K = d\sqrt{2}$, следовательно,

$$S = \frac{d^2\sqrt{2}}{\sin\varphi}.$$

Другое неверное решение состояло в следующем. Из точки D_1 на сторону A_1B параллелограмма A_1D_1CB опускают высоту D_1M этого параллелограмма. Сторону A_1B находят из треугольника A_1AB по теореме Пифагора:

$$A_1B = \frac{d\sqrt{1 + \sin^2\varphi}}{\sin\varphi}.$$

Далее, поскольку шар касается граней AA_1B_1B и DD_1C_1C, то делается вывод, будто $D_1M = d$, а потому $S = A_1B \cdot d$. Однако и здесь подвело пространственное воображение: на самом деле $D_1M \neq d$; иначе говоря, высота D_1M рассматриваемого сечения не равна расстоянию между параллельными плоскостями AA_1B_1B и DD_1C_1C, т. е. попросту прямая D_1M не перпендикулярна к плоскости AA_1B_1B. Заметим также, что A_1B и D_1C не являются касательными к вписанному в призму шару.

Конечно, в приведенных неверных решениях ошибки произошли из-за неправильного понимания чертежа, из-за недостаточного геометрического воображения. Однако этих ошибок удалось бы избежать, если бы поступающие не просто использовали факт, «видный» им из чертежа (но в действительности неверный), а пытались бы его и строго обосновать. Тогда сразу можно было бы убедиться в том, что этот факт места не имеет.

Следует подчеркнуть, что хорошее пространственное воображение неотделимо от полного логического доказательства всех геометрических фактов, на которые мы опираемся в ходе решения. Как бы ясно мы ни видели пространственную конфигурацию, как бы аккуратно и наглядно ни был выполнен чертеж, следует строго доказывать все утверждения, даже кажущиеся очевидными из чертежа.

Образно говоря, геометрическое воображение подсказывает нам путь решения, позволяет набросать черновик решения, где мы следуем лишь нашей интуиции, пытаясь только проверить, придем ли мы к желаемому результату. Но затем необходимо дать чистовое решение, в котором интуитивные, нестрогие соображения и догадки заменяются строгими доказательствами.

Приведем еще две задачи, где геометрическое воображение очень важно: без геометрической фантазии здесь довольно трудно наметить путь решения. Отметим кстати, что даже и при хорошем чертеже не всегда легко подметить тот факт, на основе которого удается провести решение.

2 *Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через точки A и B и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?*

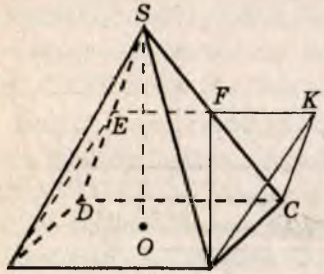


Рис. 66

Первое решение. Прежде всего отметим, что прямая AB параллельна плоскости боковой грани DSC (рис. 66), ибо ребро AB параллельно ребру DC. Поэтому секущая плоскость, проходящая через ребро AB и точку F — середину ребра SC, — пересекается с плоскостью грани DSC по прямой EF, параллельной AB, а следовательно, и DC. Отсюда ясно, что EF — средняя линия треугольника DSC.

Нам необходимо сравнить объемы двух тел — одно находится под секущей плоскостью, другое — над ней, причем расположенное под секущей плоскостью тело неправильной формы. Для того чтобы это сделать, выполним сначала дополнительное построение, стремясь прийти к более привычному телу: на продолжении отрезка FE за точку F отложим отрезок $FK = EF$, а затем соединим точку K с вершинами B и C основания пирамиды.

Рассмотрим четырехугольник $DCKE$; это — параллелограмм (так как его противоположные стороны DC и EK равны и параллельны), а потому стороны DE и CK равны и параллельны. Четырехугольник $ABKE$ — также параллелограмм, и потому его стороны AE и BK равны и параллельны. Кроме того, стороны AD и BC квадрата $ABCD$ также равны и параллельны.

Из сказанного следует, что у треугольников ADE и BCK соответствующие стороны равны и параллельны; значит, эти треугольники равны, а их плоскости параллельны. Так как, кроме того, $DC = EK = AB$ и прямые DC, EK и AB параллельны, то тело $CBKDAE$ есть треугольная (наклонная) призма с основаниями BCK и ADE.

Эту призму можно также рассматривать как половину параллелепипеда $ABCDA_1B_1KE$, у которого в основании лежит квадрат $ABCD$, а одной из боковых граней является параллелограмм $DCKE$ (рис. 67). Поэтому объем призмы $CBKDAE$ равен половине объема этого параллелепипеда, т. е. равен половине произведения площади квадрата $ABCD$ на высоту параллелепипеда, т. е., например, на длину перпендикуляра FM, опущенного из точки F на плоскость $ABCD$.

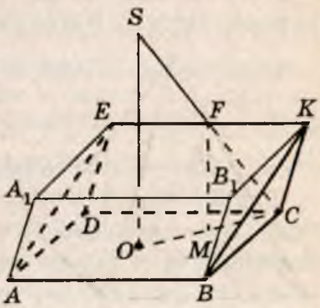


Рис. 67

Если SO — высота пирамиды $SABCD$, то из подобия треугольников OSC и MFC вытекает, что высота FM нашего параллелепипеда равна половине высоты пирамиды.

Пусть V — объем пирамиды, V_1 — объем призмы $CBKDAE$, Q — площадь квадрата $ABCD$, H — высота пирамиды; тогда $V = \frac{1}{3}QH$, $V_1 = \frac{1}{4}QH$. Таким образом, $V_1 = \frac{3}{4}V$, т. е. объем призмы $CBKDAE$ составляет $\frac{3}{4}$ объема пирамиды $SABCD$.

Нас интересует объем многогранника $CFBDEA$ (см. рис. 66), равный разности объемов призмы $CBKDAE$ и пирамиды $BCKF$. Найдем поэтому объем V_2 пирамиды $BCKF$.

Пусть Q_1 — площадь треугольника CKF, h — длина высоты, опущенной из вершины B на плоскость треугольника CKF, V_2 — объем пирамиды $BCKF$. Тогда $V_2 = \frac{1}{3}Q_1h$. Но призму $CBKDAE$ можно рассматривать как половину параллелепипеда $DCKEABB_1A_1$, основание которого — параллелограмм $DCKE$, а квадрат $ABCD$ есть одна из боковых граней (рис. 67). Тогда высота этого параллелепипеда равна h, а площадь основания $DCKE$ есть учетверенная площадь треугольника CKF. Таким образом, объем призмы $CBKDAE$ можно записать и так: $V_1 = 2Q_1h$. Отсюда, учитывая выражение для V_2, получаем $V_2 = \frac{1}{6}V_1$, а потому объем V_3 многогранника $SFBDEA$ равен $V_3 = V_1 - V_2 = \frac{5}{6}V_1$. Но так как $V_1 = \frac{3}{4}V$, то окончательно находим $V_3 = \frac{5}{8}V$.

Следовательно, объем многогранника $CFBDEA$ составляет $\frac{5}{8}$ объема пирамиды $SABCD$, т. е. секущая плоскость делит объем этой пирамиды в отношении $3 : 5$.

Второе решение. Доказав, что секущая плоскость проходит через среднюю линию EF треугольника DSC, рассмотрим тело, расположенное под секущей плоскостью. В отличие от первого решения, попытаемся вычислить объем этого тела как сумму объемов специально построенных пирамид.

Проведя плоскость через точки B, E и C (рис. 68), разобьем интересующий нас многогранник $CFBDEA$ на две пирамиды: четырехугольную $EABCD$ с вершиной E и основанием $ABCD$ и треугольную $FBCE$ с вершиной F и основанием BCE.

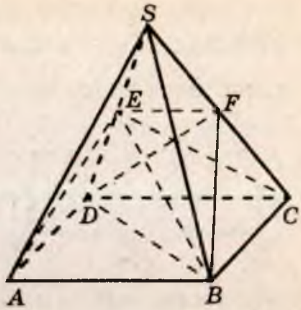


Рис. 68

Так как высота пирамиды $EABCD$ вдвое меньше высоты пирамиды $SABCD$, то объем пирамиды $EABCD$ равен половине объема пирамиды $SABCD$.

Объем пирамиды $FBCE$ легко подсчитать, если рассмотреть в качестве ее вершины точку E, а за основание принять треугольник BCF: оказывается, что объем этой пирамиды равен половине объема треугольной пирамиды $DBCF$ (для доказательства достаточно опустить перпендикуляры из точек D и E на плоскость BSC и, рассмотрев соответствующие подобные треугольники, убедиться в том, что высота пирамиды $DBCF$ вдвое длиннее высоты пирамиды $EBCF$). Теперь примем в пирамиде $DBCF$ точку F за вершину, а треугольник DBC за основание. Сравнивая пирамиды $FDBC$ и $SABCD$, мы видим, что объем первой в 4 раза меньше объема второй.

Следовательно, объем пирамиды $FBCE$ равен $\frac{1}{8}$ объема пирамиды $SABCD$, а потому объем многогранника $CFBDEA$ составляет $\frac{5}{8}$ объема этой пирамиды.

3 *Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b. Первая сфера с центром в точке O_1 касается плоскостей SAB и SAC в точках B и C, а вторая сфера с центром в точке O_2 касается плоскостей SAC и SBC в точках A и B. Найти объем пирамиды SBO_1O_2.*

Для нахождения объема треугольной пирамиды прежде всего надо решить, какую грань принять за основание пирамиды, с тем чтобы как можно проще вычислить площадь основания и высоту пирамиды, опущенную на плоскость этого основания.

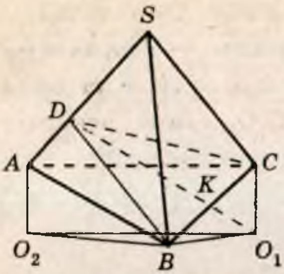


Рис. 69

Те поступающие, которые обладали геометрическим воображением, сразу заметили в этой задаче, что ребро SB (рис. 69) перпендикулярно к плоскости O_1BO_2 и, кроме того, $O_1O_2 = AC$. Таким образом, геометрическое ви́дение сразу подсказало им простой путь решения задачи: доказательство только что отмеченных фактов и вычисление радиусов O_1B и O_2B.

Приведем это решение. Поскольку BO_1 — перпендикуляр к плоскости ABS, то $BO_1 \perp SB$; поскольку BO_2 — перпендикуляр к плоскости BCS, то $BO_2 \perp SB$. Значит (см. § 4 раздела III), SB — перпендикуляр к плоскости O_1BO_2, т. е. SB — высота нашей пирамиды.

Для вычисления площади треугольника O_1BO_2 надо найти радиусы O_1B и O_2B. Найдем сначала радиус O_1B. Для этого проведем плоскость через три точки B, C и O_1, она пересечет ребро AS в точке D. Так как BO_1 — перпендикуляр к плоскости ABS, то, в частности, $BO_1 \perp AS$; аналогично, $CO_1 \perp AS$; значит, AS — перпендикуляр к плоскости BCO_1. Но тогда BD и CD — высоты боковых граней ABS и ACS и легко вычисляются:

$$BD = CD = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \frac{a^4}{4}}.$$

Доказав подобие треугольников BDK и BDO_1, находим

$$BO_1 = a\sqrt{\frac{b^2 - \frac{a^2}{4}}{3b^2 - a^2}}.$$

Аналогично находим BO_2, оказывается, что $BO_2 = BO_1$.

Остается найти O_1O_2, т. е. доказать, что $O_1O_2 = AC$. Замечая, что AO_2 — перпендикуляр к плоскости ACS, а CO_1 — перпендикуляр к той же плоскости ACS, получаем $AO_2 \parallel CO_1$; значит, точки A, C, O_1 и O_2 лежат в одной плоскости. Итак, четырехугольник ACO_1O_2 плоский, и $AO_2 \parallel CO_1$, $AO_2 = CO_1$, так что ACO_1O_2 — параллелограмм, и потому $O_1O_2 = AC = a$. Теперь по трем сторонам находим площадь треугольника BO_1O_2 и затем искомый объем

$$V = \frac{a^2 b^2}{12\sqrt{3b^2 - a^2}}.$$

Не следует, однако, думать, что геометрическое воображение нужно только в стереометрии. В следующей планиметрической задаче самое главное — правильно представить себе чертеж, рассмотреть и объяснить все возможные случаи.

(4) *На плоскости даны четыре различные точки A, B, C и D, причем $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$. Доказать, что $AD \perp BC$.*

В самом деле, положение точек A и B можно выбрать на плоскости произвольно (рис. 70). Пусть, далее, точка C расположена так, что основание перпендикуляра, опущенного из нее на прямую l, на которой лежит отрезок AB, находится *внутри* этого отрезка.

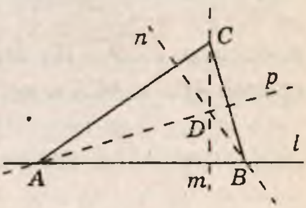


Рис. 70

Ясно, что точка D должна лежать на прямой m, перпендикулярной к AB и проходящей через точку C. Поскольку по условию $AC \perp BD$, то точка D должна лежать на прямой n, проходящей через точку B перпендикулярно к AC. Так как AC и AB пересекаются, то и перпендикулярные к ним прямые m и n пересекаются; точкой пересечения и является точка D. Рассмотрим теперь треугольник ABC; предположим, что точка D лежит *внутри* него, и проведем прямую p через точки A и D. Очевидно, что m и n — высоты треугольника ABC; поэтому прямая p также является его высотой. В самом деле, если мы опустим из вершины A высоту на BC, то она (по известной теореме о свойстве высот треугольника) должна пройти и через точку D, а потому совпадает с прямой p (у них две общие точки). Отсюда уже ясно, что $AD \perp BC$.

Случаи, когда точка D лежит *вне* треугольника ABC или когда прямая m пересекается с прямой l *вне* отрезка AB, рассматриваются аналогично; на самой прямой l точка C лежать не может. Отметим, что без рассмотрения всех возможных случаев решение, естественно, не может быть признано исчерпывающим.

В геометрических задачах иногда бывает полезно попытаться деформировать заданную конфигурацию так, чтобы она стала более простой, но чтобы искомый элемент при этом не изменялся. Именно такой подход, требующий хорошего геометрического воображения, позволяет нащупать ход решения в следующей задаче.

5 *В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и ABD имеют площади p и q и образуют между собой угол α. Найти площадь сечения пирамиды, проходящего через ребро AB и центр вписанного в пирамиду шара.*

Изобразим пирамиду $ABCD$ (рис. 71); пусть AKB — сечение, проходящее через ребро AB и центр вписанного в пирамиду шара. Основная трудность состоит в построении «удобного» линейного угла для двугранного угла с ребром AB. Если попробовать, как обычно, опустить на AB перпендикуляры из вершин C и D, то их основания, вообще говоря, не совпадают и «хорошего» линейного угла не получается. Поэтому построим линейный угол, естественно связанный с сечением AKB.

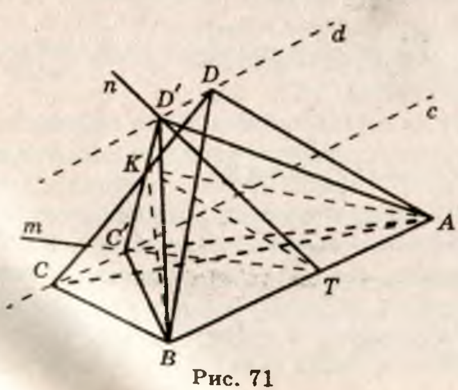


Рис. 71

Проведем через точку K плоскость π, перпендикулярную к прямой AB; плоскость π пересекается с гранями ACB и ADB по прямым m и n. Эти прямые и образуют линейный угол с вершиной T для двугранного угла с ребром AB. Однако они вовсе не обязаны проходить через вершины C и D.

Будем теперь перемещать точки C и D по прямым c и d, параллельным ребру AB, причем так, чтобы точка K всегда оставалась на «переменном» ребре. При такой деформации сохраняются и данные в условии задачи площади, и двугранный угол с ребром AB, и сечение AKB. Наиболее простая конфигурация получится в случае, когда перемещаемые вершины займут положения C' и D' — точки пересечения прямых c и m и прямых d и n соответственно. В этом случае прямые $C'T$ и $D'T$ являются высотами граней $AC'B$ и $AD'B$ и наиболее просто связаны с их площадями.

Конечно, необходимо еще доказать, что точка K лежит на отрезке $C'D'$. Это, однако, сразу следует из того, что плоскость π пересекается с плоскостью, в которой лежат параллельные прямые c и d, как раз по прямой $C'D'$, а точка K лежит в обеих этих плоскостях.

Рассмотрим пирамиду $ABC'D'$. Из треугольников $AC'B$ и $AD'B$ имеем

$$C'T \cdot AB = 2p, \quad D'T \cdot AB = 2q. \tag{13}$$

Далее, плоскость AKB делит двугранный угол с ребром AB пополам, поскольку она проходит через центр вписанного шара; поэтому KT — биссектриса угла $C'TD'$. Напишем два выражения для площади треугольника $C'TD'$:

$$\frac{1}{2}KT \cdot C'T \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}KT \cdot D'T \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}C'T \cdot D'T \cdot \sin\alpha;$$

отсюда, учитывая (13), получаем

$$KT\left(\frac{2p}{AB} + \frac{2q}{AB}\right) = 2 \cdot \frac{2p}{AB} \cdot \frac{2q}{AB}\cos\frac{\alpha}{2},$$

или

$$AB \cdot KT = \frac{4pq}{p+q}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Но KT — высота треугольника AKB, так что

$$S_{AKB} = \frac{1}{2} AB \cdot KT = \frac{2pq}{p+q} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Геометрическое воображение часто позволяет выполнить наиболее удобный чертеж, на котором конфигурация, рассматриваемая в задаче, хорошо обозрима.

(6) *Прямоугольные проекции треугольника ABC на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными треугольниками со сторонами, равными 1. Найти периметр треугольника ABC, если известно, что $AB = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.*

Самую большую трудность при решении этой задачи доставила поступающим попытка представить себе данную геометрическую конфигурацию и особенно — сделать хороший чертеж. Очень многие запутались в хитросплетении многочисленных прямых на чертеже, не смогли увидеть на нем (из-за искажений пространственной конфигурации при плоском изображении) те факты, которые позволяют прийти к ответу.

Между тем некоторые простые соображения помогают устранить практически все эти сложности.

Заметим прежде всего, что если плоскости α и β, на которые проектируется данный треугольник ABC, перемещать параллельно самим себе, то проекции этого треугольника не изменяются. Выберем одну из этих плоскостей, которую можно представлять себе как «горизонтальную». Очевидно, что сторона AB треугольника ABC не параллельна этой плоскости: в противном случае проекция отрезка AB должна была бы иметь длину $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, а не 1.

Проведем «горизонтальные» плоскости через вершины A и B треугольника ABC. Легко сообразить, что по крайней мере одна из построенных двух плоскостей обладает следующим свойством: треугольник ABC лежит по одну сторону от этой плоскости, имея с ней лишь единственную общую точку (свою вершину). Допустим для определенности, что таким свойством обладает

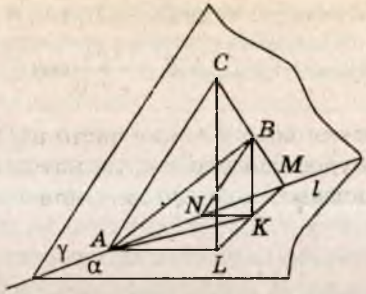


Рис. 72

«горизонтальная» плоскость, проходящая через вершину A, обозначим эту плоскость α. Через эту же вершину проведем и плоскость β — вторую плоскость («вертикальную»), на которую проектируется треугольник ABC (рис. 72, плоскость β на рисунке не изображена).

Из условия задачи следует, что проекции отрезка AB на плоскости α и β имеют равные длины, а тогда точка B равноудалена от плоскостей α и β и, следовательно, лежит в биссектральной плоскости двугранного угла, образуемого этими плоскостями. То же самое верно и для точки C. Таким образом, в этой плоскости лежит и весь треугольник ABC, а потому плоскость γ треугольника ABC образует с плоскостями α и β равные двугранные углы, именно, углы по $45°$.

Поэтому очевидно, что достаточно рассматривать лишь одну из плоскостей α и β: ведь если некоторая плоская фигура (в данном случае — треугольник ABC) лежит в биссектральной плоскости двугранного угла, то проекции этой фигуры на его грани одинаковы. Иначе говоря, конфигурация, о которой идет речь в задаче, полностью определяется заданием проекции треугольника ABC на одну плоскость, скажем, на плоскость α. Это соображение позволяет нам не загромождать чертеж рисованием проекций на обе плоскости.

Таким образом, мы приходим к следующей картине: плоскость γ, в которой расположен треугольник ABC, составляет $45°$ с плоскостью α, и проекция этого треугольника на плоскость α представляет собой правильный треугольник; в силу сказанного выше о выборе плоскости α вершина A треугольника ABC лежит на ребре l двугранного угла, образованного плоскостями α и γ, а сам треугольник ABC расположен в плоскости γ по одну сторону от прямой l.

Построив проекцию AK стороны AB на плоскость α, мы сталкиваемся еще с одной трудностью: мы не знаем наперед, где лежит проекция L точки C на эту плоскость — внутри какого из двух углов, образованных прямой AK с ребром l. Как увидим ниже, положение точки L определяется числовыми данными задачи, и сразу, без вычислений, определить ее положение в плоскости α нельзя. Поэтому пока будем проводить рассуждения, не обращая внимание на то, что на рисунке 7·2 точка L уже отмечена.

Прежде всего заметим, что сторона AB не перпендикулярна к ребру l. В самом деле, в противном случае отрезок AB составлял бы со своей проекцией AK угол, равный линейному углу двугранного угла между плоскостями γ и α (что следует из теоремы о трех перпендикулярах), т. е. угол 45°, а потому длина отрезка AK была бы равна $\frac{1}{4}\sqrt{10}$, а не 1, как это дано по условию.

Проведя $BN \perp l$ и соединив точки K и N отрезком, получим, что BNK — линейный угол двугранного угла, т. е. $\angle BNK = 45°$. Отсюда, в частности, следует, что $KN = BK$. Но из прямоугольного треугольника AKB находим $BK = \frac{1}{2}$; поэтому и $KN = \frac{1}{2}$. Теперь из прямоугольного треугольника ANK заключаем, что $\angle NAK = 30°$.

Поскольку в плоскости γ треугольник ABC расположен по одну сторону от прямой l, то и проекция AKL этого треугольника расположена в плоскости α по одну сторону от прямой l. Так как $\angle NAK = 30°$, а $\angle LAK = 60°$ (ибо треугольник AKL — правильный), то ясно, что точка L лежит вне угла NAK, и $LA \perp l$. Это в свою очередь означает, что $CA \perp l$, т. е. $\angle CAL = 45°$. Рассматривая прямоугольный треугольник CLA, находим $AC = \sqrt{2}$.

Остается вычислить длину стороны BC. Убедимся, что прямая BC не параллельна ребру l. Действительно, если бы эта прямая была параллельна ребру l, то ее проекция

KL также была бы параллельна l, что неверно. Поэтому прямая BC пересекает ребро l в некоторой точке M; через ту же точку проходит и прямая LK (поскольку M — точка пересечения прямой l с плоскостью, проходящей через параллельные прямые CL и BK).

Заметим, наконец, что отрезки KN и BK — средние линии треугольников AML и LMC соответственно (эти отрезки параллельны основаниям соответствующих треугольников и равны половинам длины этих оснований). Отсюда следует, что $MK = KL = 1$, а тогда

$$BC = BM = \sqrt{BK^2 + MK^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Окончательно периметр треугольника ABC равен $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

Задачи

1. Даны три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости. Доказать, что существует параллелепипед, скрещивающиеся диагонали трех граней которого лежат на данных прямых.

2. Как известно, в любом треугольнике основание хотя бы одной высоты лежит на самой стороне, а не на ее продолжении. Верно ли, что в любой треугольной пирамиде основание хотя бы одной высоты лежит на самой грани, а не на ее продолжении?

3. Можно ли произвольный четырехгранный угол пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм?

4. Можно ли построить в треугольной пирамиде секущую плоскость, пересекающую пять ребер пирамиды?

5. Определить форму проекции правильного тетраэдра на плоскость, параллельную двум его несмежным ребрам.

6. Найти тень куба на плоскость, перпендикулярную к его диагонали, от пучка лучей, параллельных этой диагонали.

7. Дан треугольник ABC; найти (в плоскости этого треугольника) геометрическое место точек M таких, что площади треугольников ABM и BMC равны.

8. На плоскости стоят прямой круговой конус и вертикальный штатив (отрезок). Радиус основания конуса равен 1 *м*; высота конуса 2 *м*. Основание штатива отстоит от центра основания конуса на 2 *м*; высота штатива 4 *м*. На вершине штатива помещен точечный источник света. Найти площадь тени,

отбрасываемой на плоскость конусом (не считая площади его основания).

9. Ребро куба равно a. Сфера с центром O пересекает три ребра, сходящиеся в вершине A, в их серединах. Из точки B пересечения сферы с одним из ребер куба опущен перпендикуляр на диагональ куба, проходящую через вершину A, причем угол между этим перпендикуляром и радиусом OB делится ребром куба пополам. Найти радиус сферы.

10. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC = b$, $\angle BAC = \alpha$. Этот треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину A так, что угол между этой осью и плоскостью треугольника равен β, а основание треугольника перпендикулярно к оси. Вычислить объем тела, полученного при вращении треугольника ABC.

11. Два равных конуса имеют общую вершину и касаются по общей образующей. Угол осевого сечения конуса равен 2α. Найти двугранный угол между двумя плоскостями, каждая из которых касается обоих конусов, но не проходит через их общую образующую.

12. Через середину диагонали куба перпендикулярно к ней проведена плоскость. Определить площадь фигуры, получившейся в сечении куба этой плоскостью, если ребро куба равно a.

13. Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB' и CC'. На продолжении ребра BA взята точка M так, что $MA = AB$ ($MB = 2AB$). Через точки M, B' и середину ребра AC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

14. Доказать, что проекция правильного тетраэдра на плоскость будет иметь наибольшую площадь, когда эта плоскость параллельна двум скрещивающимся ребрам тетраэдра.

15. Двугранный угол между плоскостями P и Q равен α. В плоскости P лежит правильный треугольник со стороной 1. Доказать, что сумма квадратов длин проекций сторон этого треугольника на плоскость Q не зависит от его расположения в плоскости P.

16. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна a, а высота равна h. Вычислить площадь сечения, проходящего через середину двух не смежных и не параллельных сторон основания и через середину высоты пирамиды.

17. Правильный тетраэдр помещен внутрь шара радиуса r так, что три его вершины лежат на поверхности шара, а центр шара находится внутри тетраэдра на расстоянии d от его четвертой вершины. Найти сторону тетраэдра.

18. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром a. Сфера с центром в точке O проходит через точку A и касается ребер SB и SO в их серединах. Найти объем пирамиды $OSCD$.

19. Прямоугольные проекции треугольника ABC на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными треугольниками со сторонами, равными 1. Медиана AD треугольника ABC равна $\sqrt{9/8}$. Найти BC.

20. Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами, равными 1. Найти периметр четырехугольника, зная, что одна из его сторон имеет длину $\sqrt{3/2}$.

21. В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы при вершине S являются острыми и равны: $\angle BSC = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$. Известны боковые ребра: $SA = a$, $SB = b$. Вычислить площадь проекции грани ASB на плоскость грани ASC.

22. Длина каждого ребра треугольной пирамиды $SABC$ равна 1; BD — высота треугольника ABC. Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC, причем точки S и E лежат по одну сторону от плоскости ABC. Найти расстояние между точками S и E.

23. Цилиндр, радиус основания которого равен 1, и усеченная правильная четырехугольная пирамида расположены так, что верхнее основание пирамиды вписано в верхнее основание цилиндра, а нижнее основание пирамиды описано около нижнего основания цилиндра. Если продолжить боковые грани усеченной пирамиды до пересечения, то высота полученной полной пирамиды будет равна $4 + \sqrt{2}$. Найти объем усеченной пирамиды.

24. Прямой круговой цилиндр описан около шара радиуса R. Точка C расположена внутри цилиндра на его оси и удалена на $\frac{3}{4}R$ от нижнего основания. Через эту точку проведена плоскость P, имеющая с окружностью нижнего основания только одну общую точку. В шар вписан прямой круговой конус, основание которого лежит в плоскости P, а вершина расположена выше этой плоскости. Найти объем конуса.

25. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. На продолжении ребер AB и BB_1 соответственно отложены отрезки AM и B_1N длины $AM = \frac{1}{2}AB$ и $B_1N = 2B_1B$

$\left(BM = \frac{3}{2}AB,\ BN = 3BB_1\right)$. Где на ребре CC_1 должна находиться точка P для того, чтобы в сечении куба плоскостью, проведенной через точки M, N и P, получился четырехугольник?

26. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. На боковом ребре SB взята точка M так, что $SM = MB$. На продолжении ребра основания AB взята точка N так, что $AN = AB$ ($NB = 2AB$). Где на боковом ребре SC должна находиться точка P для того, чтобы в сечении пирамиды плоскостью, проведенной через точки M, N и P, получался четырехугольник?

27. В правильную треугольную пирамиду $SABC$, все ребра которой равны a, вписана сфера. На ребре SA взята точка M так, что $AM = MS$, а на ребре BC взята точка N так, что $2CN = NB$. Прямая MN пересекает сферу в двух точках P и Q. Найти длину отрезка PQ.

28. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник, угол между диагоналями которого равен α, причем $\alpha < \frac{\pi}{3}$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна h. Дана треугольная пирамида, имеющая ту же вершину S. Основанием ее является треугольник, одна вершина которого лежит на середине большой стороны прямоугольника $ABCD$, а две другие — на его диагоналях, причем проекция вершины S на плоскость основания лежит внутри этого треугольника. Найти объем треугольной пирамиды, если известно, что ее боковые грани равновелики, а боковые ребра равны.

29. В треугольнике ABC сторона $AB = 2$, сторона $BC = 4$ и $\angle B = 60°$. Три шара касаются плоскости треугольника ABC в точках A, B и C соответственно и попарно касаются между собой. Определить радиусы этих шаров.

30. На сфере, радиус которой равен 2, расположены три окружности радиуса 1, каждая из которых касается двух других. Найти радиус окружности, меньшей, чем данные, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.

31. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро $CD = a$, а перпендикуляр, опущенный из середины ребра AB на прямую CD, равен b и образует равные углы α с гранями ACD и BCD. Найти объем пирамиды.

32. В треугольной пирамиде $ABCD$ через ребро $AD = a$ и точку E — середину ребра BC — проведено сечение, образующее с гранями ACD и ADB углы α и β соответственно. Найти объем пирамиды, если площадь сечения ADE равна S.

33. На плоскости даны три точки A, B и C, лежащие на одной прямой (точка B лежит между точками A и C), $AB = 1$, $BC = 10$. Найти минимальное расстояние между такими точками P и Q, лежащими в данной плоскости по разные стороны от прямой AC, что $\angle APB = 45°$ и $\angle BCQ = 60°$.

34. Дана пирамида $SABC$, все ребра которой равны a; SO — ее высота. Точка T — середина ребра BC. На перпендикуляре к плоскости ABC в точке T отложен отрезок TM, равный SO. Через точки S и M проведена плоскость параллельно плоскости ABC и в этой плоскости построен правильный треугольник PQR с центром в точке M и стороной a так, что точка S — середина отрезка QM. Найти объем общей части пирамид $SABC$ и $TPQR$.

35. В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине B и C равны 180°, а $SA = BC$. Найти объем пирамиды, если площадь грани SBC равна 100, а расстояние от центра описанного шара до плоскости основания ABC равно 3.

36. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 15$ и $BC = 20$. Боковое ребро DC перпендикулярно к плоскости основания. Сфера касается основания ABC, ребра CD и боковой грани ABD в точке P, которая лежит на высоте треугольника ABD, опущенной из точки D. Известно, что $DP = 6$. Найти объем пирамиды.

37. Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$ со стороной основания, равной a. Высота пирамиды, опущенная из вершины P, также равна a. Найти радиус сферы, проходящей через точки B, E, K и P, где E — середина ребра AD, а K — середина ребра BC.

38. В пространство, заключенное между сферической поверхностью и плоскостью, проходящей через ее центр, вложено три одинаковых шара радиуса r так, что каждый шар касается двух других, сферической поверхности и указанной плоскости. Найти радиус сферической поверхности.

39. В треугольнике ABC угол ACB — прямой, $AC = a$, $BC = 3a$. Через точку B проведена в пространстве прямая, перпендикулярная к отрезку BC, и на этой прямой взята точка D так, что $BD = a$. Двугранный угол между полуплоскостями, которым принадлежат треугольники BCD и ABC, равен $\frac{\pi}{3}$. Шар касается отрезка AB в такой точке P, что $AB = 3AP$, и касается отрезка CD в такой точке Q, что $CD = 3QD$. Найти радиус шара.

40. В треугольнике ABC угол BCA — прямой, $AC = b$, $BC = 2b$. На прямой, проходящей в пространстве через точку B перпендикулярно к отрезку BC, взята точка D так, что $BD = b$. Двугранный угол между полуплоскостями, которым принадлежат треугольники ABC и BCD, равен $\frac{2\pi}{3}$. Шар касается отрезка AB в такой точке M, что $BM = \frac{3}{4}AB$, и касается отрезка CD в такой точке N, что $CN = \frac{3}{4}CD$. Найти радиус шара.

§ 2. Геометрические решения задач

Программа школьного курса геометрии построена, как известно, таким образом, что учащиеся старших классов решают, в основном, задачи по стереометрии, а планиметрические задачи встречаются лишь в связи с применением тригонометрии. На вступительных экзаменах такое положение вещей сказывается далеко не лучшим образом: поступающие, неплохо справляясь с задачами, требующими тригонометрических вычислений (даже весьма громоздких), часто становятся в тупик перед сравнительно простыми задачами, для решения которых необходимо применить, в общем, хорошо им известные геометрические факты из планиметрии. Поэтому при подготовке к приемным экзаменам особое внимание надо уделять активизации материала по планиметрии, решать больше задач, требующих «чисто геометрических» идей и рассуждений.

Подчеркнем сразу же, что здесь речь не идет о каком-то противопоставлении геометрических и аналитических методов решения задач. Напротив, наиболее успешным может быть именно их разумное сочетание. Тогда на экзаменах не будет случаев, когда с помощью головоломных вычислений решается простая геометрическая задача или, наоборот, когда придумываются хитроумнейшие дополнительные построения в задаче, где введение тригонометрических функций является естественным путем решения. Да и само деление на геометрические и аналитические решения весьма условно — как правило, почти в любой задаче геометрические соображения неизбежно комбинируются с вычислениями.

Напомним несколько «чисто геометрических» теорем, которые очень важны для решения задач, но которые часто забывают или не умеют использовать поступающие.

Теорема о сторонах и диагоналях параллелограмма: *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.*

Теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника: *биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.*

Теорема об угле между касательной и хордой: *угол между касательной и хордой измеряется половиной дуги, стягиваемой хордой и заключенной внутри угла.*

Теорема об отрезках пересекающихся хорд: *произведение отрезков хорд, проходящих через данную точку внутри круга, постоянно.*

Теорема о касательной и секущей: *если из точки вне круга проведены касательная и секущая, то квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.*

Подчеркнем, что две последние из приведенных теорем верны и в стереометрии — если вместо круга рассматривается шар. Для доказательства достаточно через две хорды шара или через касательную и секущую шара провести плоскость, после чего остается применить планиметрическую теорему.

Эти теоремы доказываются «в две строчки» и потому представляют собой, по существу, всего лишь простые задачи. Однако их полезно знать, чтобы каждый раз не «изобретать велосипед».

Во многих задачах приходится отыскивать те или иные элементы треугольников. Поступающим хорошо известны основные метрические соотношения, позволяющие вычислять стороны треугольника, его углы, площадь, высоты. Несколько сложнее обстоит дело, когда требуется найти длину медианы или биссектрисы треугольника. С этим справляются далеко не все, хотя необходимые вычисления довольно очевидны и используют лишь две из приведенных выше теорем. Мы сформулируем здесь соответствующие результаты.

Теорема. *Если стороны треугольника ABC известны: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, то медиана m_a, проведенная через вершину A, имеет длину*

$$m_a = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}. \quad (1)$$

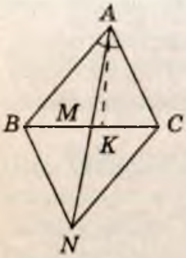


Рис. 73

В самом деле, продолжим медиану $AM = m_a$ треугольника ABC (рис. 73) за точку M на отрезок $MN = AM$ и соединим точку N с вершинами B и C. Как легко убедиться, четырехугольник $BACN$ — параллелограмм. Применим к нему теорему о сторонах и диагоналях параллелограмма:

$$(2m_a)^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2.$$

Отсюда немедленно получается формула (1).

Теорема. *Если стороны треугольника ABC известны: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, то биссектриса l_a, проведенная через вершину A, имеет длину*

$$l_a = \sqrt{\frac{(b + c)^2 - a^2}{(b + c)^2} bc}. \quad (2)$$

Обозначим угол A треугольника ABC (см. рис. 73) через α; так как AK — биссектриса, то $\angle BAK = \angle CAK = \frac{\alpha}{2}$.

По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника имеем

$$\frac{BK}{CK} = \frac{c}{b}.$$

Составляя производные пропорции и учитывая равенство $BK + CK = a$, легко подсчитать, что

$$BK = \frac{ac}{b + c}, \quad CK = \frac{ab}{b + c}.$$

Применим теперь теорему косинусов к треугольникам BAK и CAK:

$$l_a^2 + c^2 - 2cl_a \cos\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{ac}{b + c}\right)^2, \quad l_a^2 + b^2 - 2bl_a \cos\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{ac}{b + c}\right)^2.$$

Умножив первое из этих равенств на b, а второе — на c и вычтя второе из первого, получим

$$l_a^2(b-c)+bc(c-b)=\frac{a^2bc}{(b+c)^2}(c-b).$$

Если $b = c$, то треугольник ABC является равнобедренным и биссектриса l_a, которая служит одновременно и высотой, находится по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника AKB. Поэтому можно считать, что $b \neq c$. Но тогда после сокращения на $b - c \neq 0$ и очевидных преобразований, приходим к формуле (2). Заметим, что эта формула верна и в случае $b = c$.

Доказанные формулы (1) и (2) довольно громоздки. Однако заучивать их совсем не обязательно. Важно понять и запомнить лишь приведенные выше пути рассуждений, поскольку их при необходимости всегда можно просто восстановить в конкретной задаче. Кстати, отметим, что использованный выше прием достраивания треугольника до параллелограмма сам по себе часто бывает полезен.

Рассмотрим несколько примеров применения указанных теорем (и теорем, близких к ним) для решения задач.

(1) *В круге проведены два диаметра AB и CD. Пусть M — такая точка в плоскости круга, что $AM = 15$, $BM = 20$, $CM = 24$. Чему равна длина отрезка DM?*

Соединим точку M с центром O окружности (рис. 74). Тогда отрезок MO является медианой одновременно двух треугольников: AMB и CMD. Пользуясь формулой (1) (или снова воспроизводя ее вывод применительно к треугольникам AMB и CMD), получаем

$$4\cdot OM^2 =$$

$$= 2\cdot AM^2 + 2\cdot BM^2 - AB^2 =$$

$$= 2\cdot CM^2 + 2\cdot DM^2 - CD^2,$$

откуда $DM^2 = AM^2 + BM^2 - CM^2$, т. е. $DM = 7$.

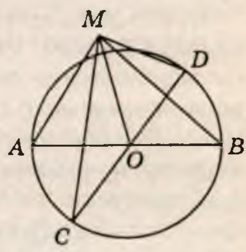


Рис. 74

(2) *Дан треугольник ABC. Известно, что $AB = 4$, $AC = 2$, $BC = 3$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K. Прямая, проходящая через точку B параллельно прямой AC, пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M. Найти длину отрезка KM.*

Пользуясь теоремой о биссектрисе внутреннего угла треугольника, мы можем записать равенство

$$BK : CK = AB : AC = 2$$

(рис. 75). Так как $BM \parallel AC$, то нетрудно заметить, что $\Delta KBM \sim \Delta KCA$. Отсюда следует, что

$$\frac{KM}{AK} = \frac{BK}{CK} = 2, \text{ т. е. } KM = 2AK.$$

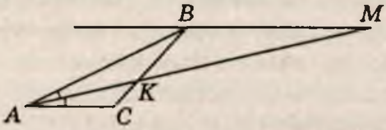


Рис. 75

Таким образом, задача свелась к вычислению длины биссектрисы AK треугольника ABC по трем его сторонам. По формуле (2) (или снова воспроизводя ее вывод применительно к рассматриваемому треугольнику ABC) получаем $AK = \sqrt{6}$, откуда $KM = 2\sqrt{6}$.

(3) *Сторона AB квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем все остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Длина касательной CK, проведенной из вершины C к той же окружности, равна 2. Чему равен диаметр окружности?*

Продолжив сторону квадрата CB до пересечения с окружностью (рис. 76), мы видим, что диаметр окружности можно найти по теореме Пифагора, если вычислить длину отрезка BL (AL — диаметр, так как $\angle ABL = 90°$). Но длина этого отрезка легко определяется, если воспользоваться теоремой о касательной и секущей. Таким образом, имеем

$$CB(CB + BL) = CK^2, \quad BL = 3;$$
$$AL^2 = AB^2 + BL^2, \quad AL = \sqrt{10}.$$

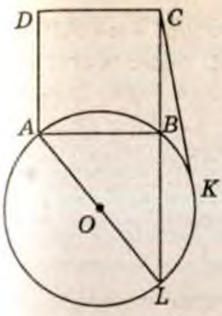


Рис. 76

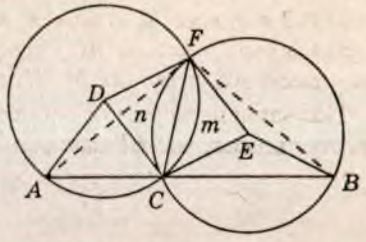


Рис. 77

В условии следующей задачи никакие окружности и вписанные углы не фигурируют, однако именно соответствующие теоремы после простого дополнительного построения сразу приводят к решению.

(4) *Внутри отрезка AD взята точка C. По одну сторону от прямой AB построены равнобедренные треугольники ADC и CEB, причем $AD = DC = CE = EB$. Точка F находится на расстоянии, равном AD, от вершин D и E и не совпадает с точкой C. Доказать, что $AF = FB$.*

Соединим точку F с точками A и B и рассмотрим треугольник AFB (рис. 77). Для доказательства требуемого равенства достаточно показать, что $\angle FAC = \angle FBC$. Проведем окружности радиуса AD с центрами в точках D и E; тогда точки A, C, F лежат на одной из этих окружностей, а точки B, C, F — на другой. Поскольку в равных окружностях равные хорды стягивают равные дуги, то углы FAC и FBC равны как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги FmC и FnC. Следовательно, треугольник AFB — равнобедренный и $AF = FB$.

(5) *В треугольнике KLM угол L тупой, а длина стороны KM равна 6. Найти радиус описанной около треугольника KLM окружности, если известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины K, M и точку пересечения высот треугольника KLM.*

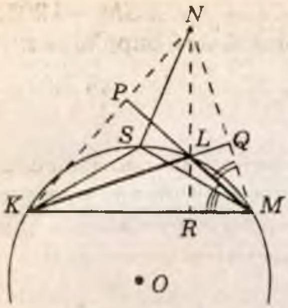


Рис. 78

Эта задача многих смутила своим условием — поступающие обычно не любят задачи с необычными окружностями. Между тем геометрическое решение задачи довольно очевидно и найти его совсем нетрудно.

Условие, что угол L тупой, означает, что центр O описанной около треугольника KLM окружности и точка N пересечения его высот MQ, KP и LR лежат вне треугольника (рис. 78). Пусть S — центр окружности, проходящей через точки K, M и N; по условию точка S лежит на окружности, описанной около треугольника KLM.

Для нахождения радиуса описанной окружности достаточно знать сторону KM и противолежащий угол KLM (см. § 1, А раздела III). Но $\angle KLM = \angle KSM$, так что мы будем искать угол KSM. Для упрощения выкладок введем обозначения

$$\angle KMS = \alpha, \ \ \angle SML = \beta, \ \ \angle LMN = \gamma.$$

Учитывая, что треугольники KQN и MPN — прямоугольные, имеем

$$\angle LKN = \angle QKN = 90° - \angle KNQ =$$
$$= 90° - \angle PNM = \angle NMP = \gamma.$$

Так как $\angle LKS = \angle LMS$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу) и так как треугольники KSN и NSM — равнобедренные, то

$$\angle KNM = \angle KNS + \angle SNM = \angle SKN + \angle SMN =$$
$$= \angle LKN - \angle LKS + \angle SML + \angle LMN =$$
$$= \gamma - \beta + \beta + \gamma = 2\gamma.$$

Поэтому из прямоугольного треугольника MPN заключаем, что $\gamma + 2\gamma = 90°$, т. е. $\gamma = 30°$.

Далее, $\angle SKM = \angle SMK$ (треугольник KSM — равнобедренный), а потому $\angle QKM = \angle SKM - \angle SKL = \alpha - \beta$. Но тогда из прямоугольного треугольника KQM заключаем, что

$$(\alpha - \beta) + (\alpha + \beta + \gamma) = 90°, \ \ \text{т. е.} \ \ 2\alpha + \gamma = 90°,$$

так что $\alpha = 30°$. Следовательно, $\angle KLM = \angle KSM = 120°$, и окончательно находим радиус R описанной окружности:

$$R = \frac{KM}{2\sin 120°} = 2\sqrt{3}.$$

Решение следующей задачи опирается фактически только на теорему о вписанных углах, однако, прежде чем ее применить, надо еще увидеть те окружности, для которых рассматриваемые углы являются вписанными.

6 *Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от вершины E до прямых AB, BC и CD соответственно равны a, b и c. Найти расстояние от вершины E до диагонали AD.*

Пусть P, Q, R, S — основания перпендикуляров, опущенных из точки E на прямые AB, BC, CD и AD соответственно (рис. 79). Тогда в треугольнике PEQ нам известны две стороны, а в треугольнике SER одна сторона известна и сторона ES является искомой. Мы смогли бы найти эту сторону, если бы треугольники PEQ и SER оказались подобными, что при аккуратном выполнении чертежа нетрудно заподозрить.

Докажем, что треугольники PEQ и SER действительно подобны. Для этого заметим прежде всего, что точки E, S, R и D лежат на одной окружности с диаметром

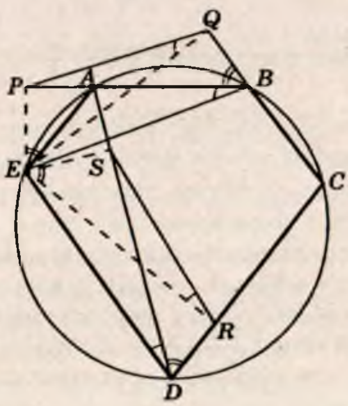


Рис. 79

ED — это вытекает из равенства прямых углов ESD и ERD. Поэтому $\angle ERS = \angle EDS$ (как вписанные углы, опирающиеся на дугу ES этой окружности). Аналогично, точки E, P, Q и B лежат на одной окружности с диаметром EB, откуда следует равенство $\angle PQE = \angle PBE$. Но $\angle EDS = \angle EDA$ и $\angle PBE = \angle ABE$ являются вписанными в окружность, описанную около пятиугольника $ABCDE$, и притом опираются на одну и ту же дугу EA. Таким образом, $\angle EDS = \angle PBE$ и, следовательно, $\angle ERS = \angle PQE$.

Так как точки E, S, R и D лежат на одной окружности, то $\angle SER = \angle SDR$, а поскольку $\angle ADC$ и $\angle ABC$ — противоположные углы вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$, то

$$\angle SER = 180° - \angle ABC. \qquad (3)$$

Далее, точки E, P, Q и B лежат на одной окружности и поэтому

$$\angle PEQ = \angle PBQ = 180° - \angle ABC. \qquad (4)$$

Из равенств (3) и (4) заключаем, что $\angle SER = \angle PEQ$.

Мы доказали, что треугольники PEQ и SER имеют по два соответственно равных угла и, следовательно, они подобны. Составив пропорцию

$$\frac{ES}{EP} = \frac{ER}{EQ},$$

находим искомое расстояние: $ES = \dfrac{ac}{b}$.

Вот еще две задачи, на примере которых видно, насколько красивым и коротким является подчас решение, использующее удачное дополнительное построение или подходящий геометрический факт. Обе эти задачи можно решать аналитически, последовательно находя необходимые элементы — и мы действительно достигнем цели, но ценой долгих преобразований и сложных вычислений. В то же время геометрические их решения весьма просты. Правда, найти такое «простое» решение совсем не просто — надо иметь достаточно хорошую геометрическую фантазию и большой опыт.

(7) В треугольнике ABC угол B равен $\frac{\pi}{4}$, а угол C равен $\frac{\pi}{3}$. На медианах BM и CN, как на диаметрах, построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает среднюю линию MN треугольника в точке F. Найти отношение $NF : FM$.

В условии речь идет о довольно сложной конфигурации, и задача представляется трудной, тем более что расположение хорды PQ относительно треугольника ABC весьма не ясно. Однако к цели удается прийти довольно быстро, если «увидеть» следующее дополнительное построение (рис. 80): продолжим среднюю линию MN за точку M до пересечения в точке D с одной окружностью и за точку N до пересечения в точке E с другой окружностью.

Нетрудно убедиться, что $BCDE$ — прямоугольник. В самом деле, $ED \parallel BC$, а $\angle MEB = \angle NDC = 90°$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметры BM и CN окружностей. Теперь дважды применим теорему об отрезках пересекающихся хорд:

$$EF \cdot FM = PF \cdot FQ, \quad NF \cdot FD = PF \cdot FQ;$$

следовательно,

$$EF \cdot FM = NF \cdot FD. \qquad (5)$$

Обозначим сторону BE прямоугольника через a. Так как $\angle NBE = \frac{\pi}{4}$ и $\angle MCD = \frac{\pi}{6}$, то ясно, что

$$EF = EN + NF = a + NF, \quad FD = FM + MD = FM + \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

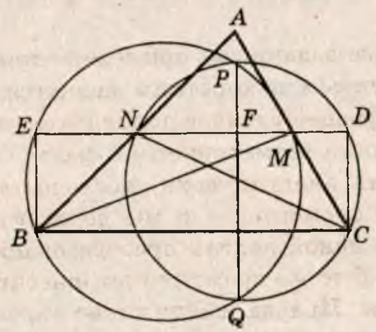


Рис. 80

Подставляя эти выражения в равенство (5), получим

$$(a + NF) \cdot FM = NF \cdot \left(FM + \frac{a\sqrt{3}}{3}\right),$$

откуда, раскрыв скобки, находим отношение $NF : FM = \sqrt{3}$.

(8) *В треугольнике ABC со сторонами $AB = \sqrt{3}$ и $BC = 4$ проведена медиана BD. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BDC, касаются отрезка BD в точках M и N соответственно. Определить длину отрезка MN.*

В этой задаче ответ удается получить буквально сразу, если использовать следующий легко доказываемый геометрический факт (рис. 81): *если в треугольник со сторонами a, b, c вписана окружность и если через x, y, z обозначить расстояния от вершин треугольника до точек касания с примыкающими к вершине сторонами, то справедливы равенства*

$$x = p - a, \quad y = p - b, \quad z = p - c, \tag{6}$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — *полупериметр треугольника.*

Воспользуемся формулами (6) применительно к нашей задаче (рис. 82):

$$DM = \frac{AD + AB + BD}{2} - AB; \quad DN = \frac{DC + BC + BD}{2} - BC.$$

Отсюда получаем

$$MN = DM - DN = \frac{BC - AB}{2} = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}.$$

Отметим, что для решения задачи не требуется знать третью сторону AC треугольника и не нужно вычислять его медиану BD.

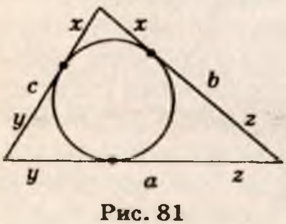


Рис. 81

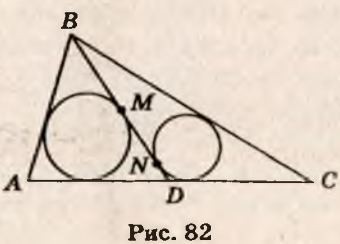


Рис. 82

Довольно часто на вступительных экзаменах предлагают задачи на трапеции, и, как показывает опыт, они вызывают затруднения у поступающих. Между тем такие задачи обычно легко решаются чисто геометрическими методами — с помощью соображений, связанных с подобием треугольников (и с использованием производных пропорций, которыми многие поступающие владеют довольно слабо), и с помощью ряда стандартных дополнительных построений.

(9) *Дана трапеция $ABCD$, причем $BC = a$, $AD = b$. Параллельно основаниям BC и AD трапеции проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке P, диагональ AC в точке L, диагональ BD в точке R и сторону CD в точке Q. Известно, что $PL = LR$. Найти длину отрезка PQ.*

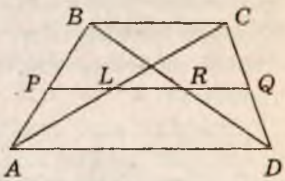


Рис. 83

На чертеже (рис. 83) видно, что в данной конфигурации имеется много пар подобных треугольников, и требуется только выбрать нужные пары. Из подобия треугольников APL и ABC имеем равенство

$$\frac{PL}{BC} = \frac{AP}{AB}, \tag{7}$$

а из $\Delta\, BPR \sim \Delta\, BAD$ и $PL = LR$ следует

$$\frac{2PL}{AD} = \frac{BP}{AB}.$$

Складывая полученные равенства, получим

$$\frac{PL}{a} + \frac{2PL}{b} = 1, \quad \text{т. е. } PL = \frac{ab}{2a + b}.$$

Остается найти длину отрезка RQ. Сейчас мы убедимся, что $RQ = PL$. Для доказательства рассмотрим треугольники DRQ и DBC; они подобны, а потому

$$\frac{RQ}{BC} = \frac{DR}{DB}. \tag{8}$$

Далее, так как стороны угла ABD пересечены параллельными прямыми PR и AD, то

$$\frac{AP}{PB} = \frac{DR}{RB},$$

откуда с помощью производной пропорции получаем

$$\frac{AP}{AB}=\frac{DR}{DB}. \qquad (9)$$

Из равенств (7)—(9) заключаем, что

$$\frac{RQ}{BC}=\frac{PL}{BC}, \text{ т. е. } RQ=PL.$$

Теперь ответ в рассматриваемой задаче очевиден:

$$PQ=3PL=\frac{3ab}{2a+b}.$$

Если еще раз внимательно просмотреть проведенное доказательство равенства $RQ = PL$, то нетрудно заметить, что условие $PL = LR$ мы не использовали. Другими словами, *равенство* $RQ = PL$ (см. рис. 83) *справедливо для любой трапеции и для любой прямой* PQ, *параллельной основаниям трапеции.* Равенство $RQ = PL$ иногда оказывается полезным при решении задач на трапеции.

Отметим еще следующий факт: *если в равнобочную трапецию можно вписать окружность, то ее радиус* r *выражается через основания* a *и* b *трапеции по формуле*

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

Эту формулу мы фактически доказали в ходе решения задачи 3 из § 1, Б раздела III.

10 *В трапеции* $ABCD$ *известны основания* $AD = 39$, $BC = 26$ *и боковые стороны* $AB = 5$, $CD = 12$. *Найти радиус окружности, которая проходит через точки* A *и* B *и касается прямой* DC.

В данной задаче уже само конструирование чертежа (рис. 84) наталкивается на определенные трудности, поскольку мы можем лишь утверждать, что центр O искомой окружности лежит на перпендикуляре к отрезку AB, проведенном через его середину K. Правда, мы знаем еще, что точка O лежит на перпендикуляре к прямой CD, проходящем через точку касания M; однако из условия задачи нам не известно даже, лежит ли точка M на стороне DC или на ее продолжении.

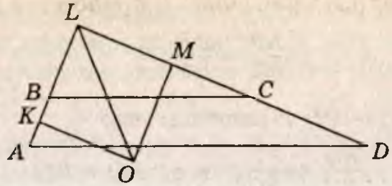


Рис. 84

Сделаем дополнительное построение, которое вообще довольно часто используется при решении задач на трапеции: достроим трапецию $ABCD$ до треугольника, продолжив ее боковые стороны до пересечения в точке L (см. рис. 84). Соединим точки L и O; ясно, что вычисление радиуса OK сводится к вычислению катета KL прямоугольного треугольника LKO и вычислению угла KLO. Но $\Delta LKO = \Delta LMO$, так что LO — биссектриса угла KLM и потому достаточно найти угол ALD. Для этого определим стороны треугольника ALD.

Поскольку $\Delta BLC \sim \Delta ALD$, то

$$\frac{BL}{AL} = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{3}.$$

Учитывая, что $BL = AL - 5$, легко находим $AL = 15$. Сторона DL вычисляется аналогично: $DL = 36$. Теперь по теореме косинусов имеем

$$\cos(\angle ALD) = \frac{AL^2 + DL^2 - AD^2}{2 \cdot AL \cdot DL} = 0,$$

т. е. $\angle ALD = 90°$. Но тогда $KO = KL = AL - \frac{1}{2}AB = 12{,}5$. Таким образом, искомый радиус равен 12,5.

11 *В равнобочной трапеции $ABCD$ известны стороны: $AD = 10$, $BC = 2$, $AB = CD = 5$. Биссектриса угла BAD пересекает продолжение основания BC в точке K. Найти длину биссектрисы угла ABK в треугольнике ABK.*

В треугольнике ABK (рис. 85) известна только одна сторона AB. Для отыскания длины биссектрисы BN этого треугольника вычислим предварительно его остальные стороны.

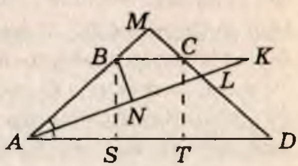


Рис. 85

Для того чтобы найти отрезок BK, достаточно узнать длину отрезка CK. Если воспользоваться подобием треугольников ALD и CLK, то можно записать

$$\frac{CK}{AD} = \frac{CL}{DL}, \quad \text{или} \quad \frac{CK}{10} = \frac{CL}{5 - CL}. \tag{10}$$

Следовательно, все сводится к нахождению отрезка CL.

Очевидно, что для вычисления отрезка CL нужно воспользоваться тем, что AL — биссектриса угла BAD. Однако у нас нет треугольника, в котором AL была бы биссектрисой. Такой треугольник можно получить, если достроить трапецию $ABCD$ до треугольника AMD (см. рис. 85), который является, как легко проверить, равнобедренным.

Из подобия треугольников BMC и AMD без труда получаем $MC = \frac{5}{4}$. Далее, по теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника, примененной к треугольнику MAD, имеем

$$\frac{ML}{LD} = \frac{AM}{AD}, \qquad \frac{\frac{5}{4} + CL}{5 - CL} = \frac{5 + \frac{5}{4}}{10},$$

откуда $CL = \frac{15}{13}$. Теперь из равенства (10) получаем $CK = 3$ и, следовательно, $BK = 5$.

Таким образом, треугольник ABK — равнобедренный, а потому $BN = AB\cos\alpha$, где α — половина угла при основании AD трапеции. Опустив перпендикуляры BS и CT на прямую AD, видим, что $AS = \frac{1}{2}(AD - BC) = 4$. Но тогда из прямоугольного треугольника ASB находим $\cos 2\alpha = \frac{4}{5}$, так что

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

поскольку угол α — острый. Окончательно: $BN = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

В двух предыдущих задачах мы достраивали трапецию до треугольника путем продолжения ее боковых сторон. Иногда более эффективны иные способы дополнения трапеции до треугольника.

(12) *В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найти площадь трапеции.*

Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 86), E и F — середины ее оснований, $AC = 5$, $BD = 3$, $EF = 2$. Через вершину C проведем прямую, параллельную диагонали BD, и обозначим через K точку пересечения этой прямой с прямой AD. Получившийся в результате треугольник ACK равновелик трапеции $ABCD$.

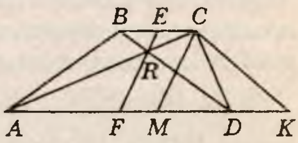


Рис. 86

В самом деле, $BC \parallel DK$ и $BD \parallel CK$, а потому $BCKD$ — параллелограмм, и мы получаем отсюда ряд следствий:

$$DK = BC, \; CK = BD,$$

$$AK = AD + BC.$$

Из последнего равенства, учитывая, что трапеция $ABCD$ и треугольник ACK имеют равные высоты, получаем, что их площади также равны. Остается вычислить площадь треугольника ACK.

Проведем теперь $CM \parallel EF$. Так как $AF = \frac{1}{2}AD$ и

$FM = EC = \frac{1}{2}BC$, то

$$AM = AF + FM = \frac{AD + BC}{2} = \frac{1}{2}AK;$$

следовательно, CM — медиана треугольника ACK. Таким образом, в треугольнике ACK нам известны две стороны $AC = 5$, $CK = 3$ и медиана $CM = EF = 2$. Применяя теорему косинусов к треугольникам ACM и MCK, можем записать:

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2 \cdot AM \cdot MC \cdot \cos(\angle AMC),$$
$$KC^2 = KM^2 + MC^2 - 2 \cdot KM \cdot MC \cdot \cos(\angle KMC).$$

Складывая эти равенства и учитывая, что $\cos(\angle AMC) = -\cos(\angle KMC)$, после очевидных преобразований имеем $AM = KM = \sqrt{13}$. Теперь для вычисления площади треугольника ACK можно воспользоваться формулой Герона; в результате получим $S_{\Delta ACK} = S_{ABCD} = 6$.

Отметим, что на рисунке 86 отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, проведен через точку R пересечения ее диагоналей. Этот факт действительно имеет место, причем даже в *произвольной* трапеции, но для решения задачи он нам не потребовался.

Наконец, упомянем еще один факт, также справедливый для любой трапеции: *если в трапеции провести диагонали, то треугольники, примыкающие к боковым сторонам, равновелики.* В самом деле, и треугольник ARB и треугольник DRC (см. рис. 86) дополняются одним и тем же треугольником ARD до треугольников ABD и ACD, которые, очевидно, равновелики.

Большую группу задач, решаемых чисто геометрическими методами, образуют задачи, связанные с делением отрезков в некотором отношении и соответствующим делением площадей фигур и объемов тел. Начнем с одной сравнительно простой задачи.

13 *Точка K делит медиану AD треугольника ABC в отношении* $3:1$, *считая от вершины. В каком отношении прямая BK делит площадь треугольника ABC?*

Довольно ясно, что прямой вычислительный путь нахождения площадей треугольников BEA и BEC, на которые прямая BK делит треугольник ABC (рис. 87), связан с введением вспомогательных элементов (длин сторон и углов) и вряд ли приведет к успеху. Между тем имеется простой геометрический подход к решению, опирающийся на известную теорему о делении сторон угла параллельными прямыми.

Легко заметить, что треугольники BEA и BEC имеют общую вершину B, а их основания лежат на одной прямой AC. Поэтому отношение площадей этих треугольников равно отношению $AE : EC$, и, таким образом, достаточно узнать, в каком отношении точка E делит сторону AC.

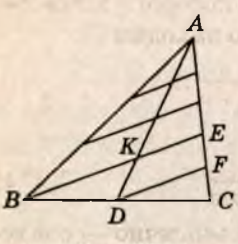


Рис. 87

Разделим медиану AD на четыре равные части и проведем через точки деления прямые, параллельные BK. Тогда на стороне AC возникают четыре равных отрезка; что касается пятого ее отрезка FC, то, очевидно, $FC = EF$ (поскольку AD — медиана, а DF — средняя линия треугольника BCE). А отсюда сразу же следует, что интересующее нас отношение равно 3 : 2.

Если обдумать проведенное рассуждение, то станет понятно, что таким же способом решается и более общая задача: во-первых, вместо отношения 3 : 1 можно рассматривать произвольное деление отрезка AD; во-вторых, не существенно, что AD — медиана, важно лишь то, что точка D делит сторону BC в известном отношении. Конечно, в этом более общем случае решение нельзя провести столь же наглядно (если, например, отрезок AD делится в иррациональном отношении или отношение задано буквой, параметром), но для подсчета всегда достаточно уметь решать задачу деления данного отрезка в заданном отношении.

(14) *На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки K и L так, что $CK : KA = a : b$, $CL : LB = c : d$. В каком отношении точка пересечения M отрезков AL и BK делит эти отрезки?*

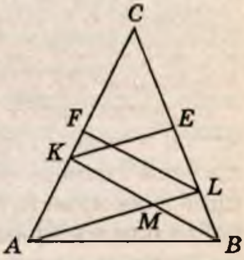


Рис. 88

Проведем $KE \parallel AL$ (рис. 88); тогда $KM : MB = EL : LB$ и для нахождения этого отношения поступим следующим образом. Обозначим через l длину стороны BC.

Поскольку

$$CL : LB = c : d, \quad CL + LB = l,$$

то, как нетрудно подсчитать,

$$CL = \frac{c}{c+d}\,l, \quad LB = \frac{d}{c+d}\,l.$$

Но точка E делит отрезок CL, длина которого вычислена, в отношении $a : b$, а поэтому легко находим

$$EL = \frac{b}{a+b}\,CL = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d}\,l.$$

Окончательно получаем

$$KM : MB = EL : LB = \frac{bc}{(a+b)d}. \qquad (11)$$

Отношение $LM : MA$ определяется аналогично — следует лишь провести $LF \parallel BK$.

Отметим, что в частном случае, когда AL и BK являются медианами треугольника ABC, т. е. когда $a = b$ и $c = d$, из формулы (11) вытекает известное утверждение о точке пересечения медиан.

Заметим также, что вычислительную часть решения можно провести несколько иначе. По условию и по построению имеем равенства

$$\frac{CE}{EL} = \frac{a}{b}, \ \frac{CL}{LB} = \frac{c}{d}. \tag{12}$$

Используя производную пропорцию, из первого равенства (12) получаем

$$\frac{CL}{EL} = \frac{a+b}{b},$$

откуда, с помощью второго равенства (12), снова приходим к формуле (11). Это решение короче предыдущего, но требует некоторой изобретательности, причем в более сложных задачах не всегда бывает ясно, из каких соотношений можно получить искомое.

15 *Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$ с вершиной P. На ребрах PA и PC взяты точки K и M соответственно, причем $AK : KP = 1 : 3$, $CM = PM$. Найти отношение, в котором делится ребро PB плоскостью, проведенной через точки D, K и M.*

Мы не будем здесь останавливаться на способе построения точки пересечения рассматриваемой в условии плоскости с ребром PB — такого рода вопросы детально обсуждаются в § 6 раздела III. Укажем только, что если E — точка пересечения прямой KM с высотой PO треугольника APC (рис. 89), то точка F пересечения прямой DE с ребром PB и есть та точка, о которой идет речь в условии задачи.

Для того чтобы найти отношение $PF : FB$, необходимо выяснить, какое положение занимает точка E на медиане PO треугольника DPB, т. е. вычислить отношение $PE : EO$. Для этого рассмотрим чертеж в плоскости APC (рис. 90), проведем через точки O, A, Q, L (где $PQ = QL = LK = KA$) прямые, параллельные KM, и обозначим через a и b длины отрезков, на которые разбилась в ре-

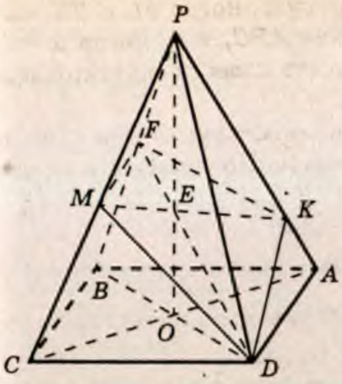


Рис. 89

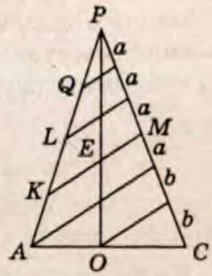


Рис. 90

зультате сторона PC. Поскольку $PM = MC$, то $3a = a + 2b$, откуда $a = b$ и, следовательно,

$$PE : EO = 3a : (a + b) = 3 : 2.$$

Теперь в треугольнике DPB (см. рис. 89) возникает задача, аналогичная рассмотренной выше задаче 13; ее решение не представляет труда и приводит к ответу:

$$PF : FB = 3 : 4.$$

Часто в задачах, предлагаемых на вступительных экзаменах, возникает необходимость вычислить площадь отсекаемой части многоугольника или объем отсекаемой части многогранника, если каким-либо образом заданы точки деления сторон или ребер. В таких задачах очень полезны следующие утверждения.

Если точки K и L лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно, причем

$$AK = \alpha \cdot AB \quad и \quad AL = \beta \cdot AC,$$

то

$$S_{AKL} = \alpha\beta \cdot S_{ABC}. \tag{13}$$

Если точки K, L и M лежат на ребрах SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ соответственно, причем

$$SK = \alpha \cdot SA, \quad SL = \beta \cdot SB, \quad SM = \gamma \cdot SC,$$

то

$$V_{SKLM} = \alpha\beta\gamma \cdot V_{SABC}. \tag{14}$$

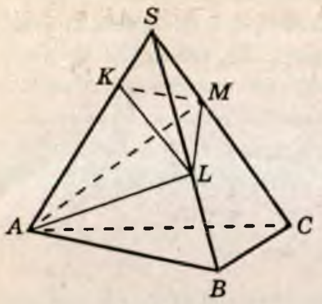


Рис. 91

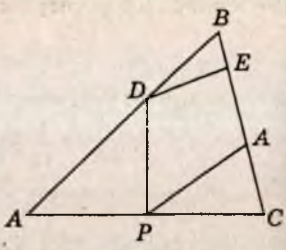


Рис. 92

Наиболее простое доказательство первого утверждения состоит в применении формулы площади треугольника:

$$S_{AKL} = \frac{1}{2} AK \cdot AL \cdot \sin(\angle BAC) =$$

$$= \frac{1}{2} \alpha\beta \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle BAC) = \alpha\beta \cdot S_{ABC}.$$

Для доказательства второго утверждения соединим вершину A пирамиды $SABC$ (рис. 91) с точками L и M и примем точку A за вершину двух пирамид: $ASLM$ и $ASBC$. Эти пирамиды имеют одинаковую высоту, а потому их объемы относятся как площади оснований SLM и SBC. Вследствие первого утверждения $S_{SLM} = \beta\gamma \cdot S_{SBC}$, так что

$$V_{ASLM} = \beta\gamma \cdot V_{ASBC}.$$

Далее, пирамиды $KSLM$ и $ASLM$ с вершинами K и S имеют общее основание SLM, а их высоты относятся как $KS : AS = a$, и поэтому

$$V_{SKLM} = \alpha \cdot V_{ASLM} = \alpha\beta\gamma \cdot V_{SABC}.$$

(16) *Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC, точки E и F — на стороне BC этого треугольника, а точка P — на стороне AC. Отрезок AD составляет $\frac{2}{3}$ стороны AB, отрезок BF составляет $\frac{3}{5}$ стороны BC, отрезок BE составляет $\frac{1}{5}$ стороны BC, а точка P делит сторону AC пополам. Найти отношение площади четырехугольника $DEFP$ к площади треугольника ABC.*

По условию задачи (рис. 92) $AD = \frac{2}{3}AB$, $AP = \frac{1}{2}AC$, и на основании формулы (13) получаем

$$S_{ADP} = \frac{1}{3}S_{ABC}.$$

Совершенно аналогично заключаем:

$$S_{BDE} = \frac{1}{15}S_{ABC}, \quad S_{CFP} = \frac{1}{5}S_{ABC}.$$

Теперь нетрудно подсчитать, что

$$\frac{S_{DEFP}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - (S_{ADP} + S_{BDE} + S_{CFP})}{S_{ABC}} = \frac{2}{5}.$$

(17) *В треугольнике ABC, площадь которого равна S, проведены биссектриса CE и медиана BD, пересекающиеся в точке O. Найти площадь четырехугольника ADOE, зная, что BC = a, AC = b.*

Искомая площадь S_1 четырехугольника $ADOE$ (рис. 93) равна разности $S_2 - S_3$ площадей треугольников ACE и DCO.

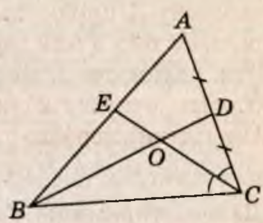


Рис. 93

Для нахождения S_2 достаточно знать, какую часть стороны AB отсекает точка E, что вычисляется по теореме о биссектрисе внутреннего угла. Для нахождения S_3 надо рассмотреть треугольник CBD площади $\frac{S}{2}$ и найти отношение $DO : DB$. Легко проверить, что

$$S_2 = \frac{b}{a+b}S, \quad S_3 = \frac{b}{b+2a} \cdot \frac{S}{2},$$

откуда окончательно

$$S_1 = \frac{(3a+b)b}{2(a+b)(2a+b)}S.$$

(18) *Плоскость проходит через вершину основания A треугольной пирамиды SABC, делит пополам медиану SK треугольника SAB, а медиану SL треугольника SAC пересекает в точке D такой, что $SD = \frac{1}{2}DL$. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды?*

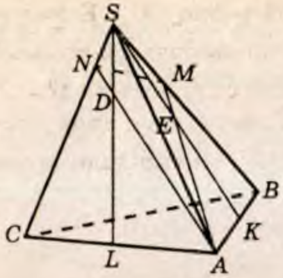


Рис. 94

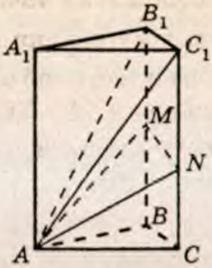


Рис. 95

Если воспользоваться формулой (14) (или повторить рассуждения, проведенные при выводе этой формулы), то будет ясно, что решение задачи сводится к выяснению того, какие части отсекают на ребрах SB и SC точки M и N (рис. 94).

Рассмотрев треугольник SAC, легко получаем $SN = \frac{1}{5}SC$. Точно так же находим $SM = \frac{1}{3}SB$. Таким образом, отношение объемов пирамид $SAMN$ и $SABC$ равно $\frac{1}{15}$, а значит, искомое отношение равно 1 : 14.

Аналогичные рассуждения позволяют решать задачи, в которых рассматриваются не треугольные пирамиды, а более сложные тела.

19 *Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (AA_1, BB_1, CC_1 — боковые ребра), у которой $AC = 6$, $AA_1 = 8$. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и N. Найти, в каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если известно, что $BM = MB_1$, а AN является биссектрисой угла CAC_1.*

Проведем плоскость AB_1C_1 (рис. 95) и заметим, что отношение объемов пирамид $ACBMN$ и $ACBB_1C_1$ равно отношению площадей их оснований $CBMN$ и CBB_1C_1. Для нахождения этого отношения выясним сначала, в каком отношении точка N делит ребро CC_1. Если рассмотреть треугольник ACC_1 и воспользоваться теоремой Пифагора и теоремой о биссектрисе внутреннего угла, то легко получим $CN : NC_1 = 3 : 5$. Теперь легко определить отношение площади трапеции $CBMN$ к площади прямоугольника CBB_1C_1:

$$\frac{S_{CBMN}}{S_{CBB_1C_1}} = \frac{\frac{CN + BM}{2} \cdot BC}{CC_1 \cdot BC} = \frac{CN + BM}{2CC_1} = \frac{7}{16},$$

а потому $V_{ACBMN} = \frac{7}{16} V_{ACBB_1C_1}$.

С другой стороны, пирамида $ACBB_1C_1$ дополняется до всей призмы пирамидой $AA_1B_1C_1$, объем которой составляет $\frac{1}{3}$ объема призмы, так что объем пирамиды $ACBB_1C_1$ равен $\frac{2}{3}$ объема призмы. Следовательно, объем пирамиды $ACBMN$ составляет $\frac{7}{24}$ объема призмы, а искомое отношение равно $7 : 17$.

В заключение приведем задачу, которая на первый взгляд кажется очень сложной и громоздкой, особенно из-за устрашающих числовых данных. Однако при ближайшем рассмотрении оказывается, что ее решение получается с помощью уже знакомых нам идей.

20 *Сфера проходит через точки A, B, C, D и пересекает отрезки SA, SB, SC и SD в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Известно, что $SD_1 = \frac{9}{4}$, $DD_1 = \frac{47}{36}$, отношение площадей треугольников SA_1B_1 и SAB равно* $15 : 32$, *отношение объемов пирамид $SB_1C_1D_1$ и $SBCD$ равно* $1701 : 4096$, *а отношение объемов пирамид $SA_1B_1C_1$ и $SABC$ равно* $105 : 256$. *Найти отрезки SA_1, SB_1, SC_1.*

Легко понять, что, по существу, здесь речь идет о четырехугольной пирамиде $SABCD$, на ребрах которой взяты точки A_1, B_1, C_1, D_1 (рис. 96). Для решения задачи сведем запутанные данные об отношениях площадей и объемов к отношениям соответствующих отрезков. Составив систему равенств:

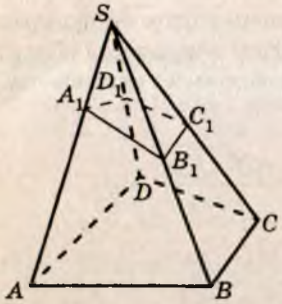


Рис. 96

$$\frac{SA_1}{SA}\cdot\frac{SB_1}{SB}=\frac{15}{32},$$

$$\frac{SB_1}{SB}\cdot\frac{SC_1}{SC}\cdot\frac{SD_1}{SD}=\frac{1701}{4096},$$

$$\frac{SA_1}{SA}\cdot\frac{SB_1}{SB}\cdot\frac{SC_1}{SC}=\frac{105}{256}$$

и учитывая, что $SD_1 : SD = 81 : 128$, находим:

$$\frac{SA_1}{SA}=\frac{5}{8},\quad \frac{SB_1}{SB}=\frac{3}{4},\quad \frac{SC_1}{SC}=\frac{7}{8}. \qquad (15)$$

Заметим теперь, что отрезки SA, SB, SC, SD являются секущими к сфере, о которой говорится в условии задачи. Используя стереометрическую теорему о касательной и секущей к сфере, мы можем записать равенства

$$SA\cdot SA_1 = SB\cdot SB_1 = SC\cdot SC_1 = SD\cdot SD_1.$$

Но из условия задачи следует, что $SD\cdot SD_1 = 8$; поэтому

$$SA\cdot SA_1 = 8,\quad SB\cdot SB_1 = 8,\quad SC\cdot SC_1 = 8.$$

Эти равенства вместе с равенствами (15) позволяют заключить, что $SA_1 = \sqrt{5}$, $SB_1 = \sqrt{6}$, $SC_1 = \sqrt{7}$.

Задачи

1. В трапеции с основаниями a и b через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции.

2. Даны углы α, β, γ треугольника ABC. Пусть A', B', C' — точки пересечения биссектрис внутренних углов треугольника ABC с окружностью, описанной около этого треугольника. Найти отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A'B'C'$.

3. На каждой медиане треугольника взята точка, делящая медиану в отношении $1 : 3$, считая от вершины. Во сколько раз площадь треугольника с вершинами в этих точках меньше площади исходного треугольника?

4. Из точки A, лежащей вне окружности радиуса r, проведена секущая, не проходящая через центр O окружности. Пусть B и C — точки, в которых эта секущая пересекает окружность. Считая, что $OA = a$, найти величину

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\angle AOB\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\angle AOC\right).$$

5. Дан угол AOB, равный α, причем $\alpha < \pi$. На стороне OA взята точка C так, что $OC = a$; на стороне OB взята точка D так, что $OD = b$. Построена окружность, касающаяся стороны OA угла в точке C и проходящая через точку D. Пусть эта окружность вторично пересекает сторону OB угла в точке E. Вычислить радиус окружности и длину хорды DE.

6. В треугольнике ABC из вершины A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D, находящейся между точками B и C, причем $CD : BC = \alpha$ (где $\alpha < \frac{1}{2}$). На стороне BC между точками B и D взята точка E и через нее проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F. Найти отношение площадей трапеции $ACEF$ и треугольника ADC, если известно, что $CD = DE$.

7. В треугольнике ABC проведены биссектриса AD угла BAC и биссектриса CF угла ACB (точка D лежит на стороне BC, точка F — на стороне AB). Найти отношение площадей треугольников ABC и AFD, если известно, что $AB = 21$, $AC = 28$, $CB = 20$.

8. В круг вписан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = \alpha$. Из вершины A проведена биссектриса угла BAC, пересекающая сторону BC в точке D, а окружность — в точке E. Вершина B соединена отрезком прямой с точкой E. Найти отношение площадей треугольников ABE и BDE.

9. Пусть A, B, C, D — последовательные вершины прямоугольника. Окружность проходит через вершины A и B и касается стороны CD в ее середине. Через вершину D проведена прямая, которая касается той же окружности в точке E, а затем пересекает продолжение стороны AB в точке K. Найти площадь трапеции $BCDK$, если известно, что $AB = 10$ и что $KE : KA = 3 : 2$.

10. В треугольнике ABC даны углы B и C. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке D и окружность, описанную около треугольника ABC, в точке E. Найти отношение $AE : DE$.

11. В треугольнике KLM проведены биссектрисы KN и LP, пересекающиеся в точке O. Отрезок PN имеет длину 1, а вершина M лежит на окружности, проходящей через точки N, P, Q. Найти стороны и углы треугольника PNQ.

12. Дана трапеция $ABCD$, боковая сторона AB которой перпендикулярна к основаниям. В трапецию вписана окружность с центром O. Через вершины A, B, C проведена окружность; O_1 — ее центр. Найти длину диагонали AC трапеции, если $OO_1 = 1$, а меньшее основание $BC = 10$.

13. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 30$, $BC = 20$ и боковые стороны $AB = 6$, $CD = 8$. Найти радиус окружности, которая проходит через точки C и D и касается прямой BA.

14. Дан треугольник ABC, площадь которого равна единице. На медианах AK, BL и CN треугольника ABC взяты соответственно точки P, Q и R так, что $AP : PK = 1$, $BQ : QL = 1 : 2$, $CR : RN = 5 : 4$. Найти площадь треугольника PQR.

15. Дана трапеция $ABCD$. Параллельно ее основаниям проведена прямая, пересекающая боковые стороны трапеции AB и CD соответственно в точках P и Q, а диагонали AC и BD соответственно в точках L и R. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Известно, что $BC = a$, $AD = b$, а площади треугольников BOC и LOR равны. Найти длину отрезка PQ.

16. Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $BC = 3$. Найти площадь параллелограмма, если известно, что диагональ AC перпендикулярна к отрезку BE, соединяющему вершину B с серединой E стороны AD.

17. Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L и M соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если известно, что $SK : KA = SL : LB = 2$, а медиана SN треугольника SBC делится этой плоскостью пополам?

18. В параллелограмме со сторонами 2 и 4 проведена диагональ длиной 3. В каждый из получившихся треугольников вписано по окружности. Найти расстояние между центрами окружностей.

19. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$ проведена биссектриса BD. В треугольники ABD и BCD вписаны окружности, которые касаются BD в точках M и N соответственно. Определить длину отрезка MN.

20. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90°$), площадь которого равна $4 + 2\sqrt{2}$, вписан в окружность. Точка D лежит на этой окружности, причем длина хорды BD равна 2. Найти длины хорд AD и CD.

21. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AB равна стороне BC, диагональ AC равна стороне CD, а $\angle ACB = \angle ACD$. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD, относятся как 3 : 4. Найти отношение площадей этих треугольников.

22. Около окружности радиуса r описана равнобочная трапеция $ABCD$; пусть E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции. Угол между основанием AB и боковой стороной AD трапеции равен 60°. Доказать, что прямая EK параллельна прямой AB, и найти площадь трапеции $ABEK$.

23. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Точки M, Q, N и P являются основаниями перпендикуляров, опущенных из вершины E соответственно на стороны AB, BC и CD (или их продолжения) и диагональ AD. Известно, что $EP = d$, а отношение площади треугольника MQE к площади треугольника PNE равно k. Найти длину отрезка EM.

24. В окружность вписана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). На дуге AD, не содержащей вершин B и C, взята точка S. Точки M, Q, N и P являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S соответственно на прямые AB, BC, CD и AD. Известно, что $SP = b$, $SQ = a$, а отношение площади треугольника PNS к площади треугольника MPS равно k. Найти длину отрезка SM.

25. В окружность вписана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). На дуге CD, не содержащей вершин A и B, взята точка S. Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S соответственно на прямые CD, AB, AD и BC. Известно, что $SM = a$, $SN = b$, $SP = c$. Найти отношение площади треугольника MQS к площади треугольника MPS.

26. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = 90°$, $\angle C \leqslant 90°$. Из вершин B и D на диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF. Известно, что $AE = CF$. Доказать, что $\angle C = 90°$.

27. Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность, которая пересекает сторону AB в точке K и сторону AC в точке E. Найти AE, зная, что $AK = KB = a$, $\angle BCK = \alpha$, $\angle CBE = \beta$.

28. Дан треугольник ABC, в котором $\angle B = 30°$, $AB = 4$, $BC = 6$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Определить площадь треугольника ABD.

29. Около трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC описана окружность радиуса 5. Центр описанной окружности лежит на основании AD. Определить длину диагонали AC, если $BC = 6$.

30. В треугольнике ABC биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найти отношение площади треугольника ABC к площади четырехугольника $ODCE$, зная, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

31. В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 90°. Точка N лежит на основании BC, причем $BN : BC = 2 : 3$. Точка M лежит на основании AD. Прямая MN параллельна боковой стороне AB и делит площадь трапеции пополам. Найти отношение $AB : BC$.

32. В треугольнике ABC угол B равен $\frac{\pi}{4}$, угол C равен $\frac{\pi}{6}$. На медианах BM и CN как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает сторону BC в точке D. Найти отношение $BD : DC$.

33. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC, $\angle A = \frac{\pi}{4}$, $\angle D = \frac{\pi}{6}$. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках M и N. Хорда MN пересекает основание BC в точке F. Найти отношение $BF : FC$.

34. В треугольнике ABC угол C — тупой; биссектриса BE угла B делит сторону AC на отрезки $AE = 3$, $EC = 2$. Известно, что точка K, лежащая на продолжении стороны BC за вершину C, является центром окружности, проходящей через точки C, E и точку пересечения биссектрисы угла B с биссектрисой угла ACK. Определить расстояние от точки E до стороны AB.

35. Точки A_1, B_1, C_1 лежат по одну сторону от плоскости треугольника ABC, причем отрезки AA_1, BB_1, CC_1 перпендикулярны к этой плоскости. Найти объем многогранника, ограниченного треугольниками ABC, $A_1B_1C_1$ и четырехугольниками AA_1BB_1, BB_1C_1C, CC_1A_1A, если известно, что $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$ и площадь треугольника ABC равна s.

36. Сторона AB треугольника ABC является хордой некоторой окружности. Стороны AC и BC лежат внутри окружности; продолжение стороны AC пересекает окружность в точке D, а продолжение стороны BC — в точке E, причем $AB = AC = CD = 2$, $CE = \sqrt{2}$. Чему равен радиус окружности?

37. Центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC лежат по разные стороны от прямой AB. Длина стороны AB равна радиусу описанной окружности. Чему равен угол AOB, где O — центр вписанной окружности?

38. Точки A, B, C, D, E, F лежат на сфере радиуса $\sqrt{2}$. Отрезки AD, BE и CF пересекаются в точке S, находящейся на расстоянии 1 от центра сферы. Объемы пирамид $SABC$ и $SDEF$ относятся как $1 : 9$, пирамид $SABF$ и $SDEC$ — как $4 : 9$, пирамид $SAEC$ и $SDBF$ — как $9 : 4$. Найти отрезки SA, SB, SC.

39. Вершина S пирамиды $SABC$ находится на расстоянии 4 от центра сферы радиуса 1, которая проходит через точки A, B, C и пересекает ребра SA, SB, SC соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Отношение длин отрезков B_1C_1 и BC равно $\frac{1}{15}\sqrt{132}$, отношение площадей треугольников SA_1B_1 и SAB равно $22 : 45$, а отношение объемов пирамид $SA_1B_1C_1$ и $SABC$ равно $88 : 225$. Найти длины отрезков SA_1, SB_1, SC_1.

40. В трапеции $ABCD$ точка K — середина основания AB, а M — середина основания CD. Найти площадь трапеции, если известно, что DK — биссектриса угла D, а BM — биссектриса угла B и что наибольший из углов при нижнем основании трапеции равен $60°$, а ее периметр равен 30.

41. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке P. Биссектрисы AM и BP пересекаются в точке O. Известно, что треугольник BOM подобен треугольнику AOP, $BO = (1 + \sqrt{3})OP$, $BC = 1$. Найти площадь треугольника ABC.

42. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На продолжении ребра CD взята точка K такая, что $KD : KC = 3 : 4$. На ребре SC взята точка L такая, что $SL : LC = 2 : 1$. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проведенная через точки K, B и L?

43. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, длина ребра которого равна 1. На ребрах AA', BB', DD' взяты соответственно точки K, P и M так, что $AK : A'K = 1 : 3$, $BP : B'P = 3 : 1$, $DM : D'M = 3 : 1$. Найти объем пирамиды, у которой основанием служит сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, P и M, а вершина расположена в точке A'.

44. В правильном треугольнике ABC со стороной a точки D и E являются серединами сторон AB и BC соответственно. Точка F лежит отрезке DB, точка K лежит на стороне AC. Отрезки

FK и DE пересекаются в точке M. Найти длину отрезка MF, если известно, что $DM : ME = \frac{2}{3}$, а площадь четырехугольника $MECK$ составляет $\frac{2}{5}$ площади треугольника ABC.

45. Дан треугольник ABC, у которого $AB = \sqrt{17}$, $BC = 5$, $AC = 4$. На стороне AC взята точка D так, что BD является высотой треугольника ABC. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и D и касающейся в точке D окружности, описанной около треугольника BCD.

46. Точки E, F, M расположены соответственно на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC. Отрезок AE составляет $\frac{1}{3}$ стороны AB, отрезок BF составляет $\frac{1}{6}$ стороны BC, отрезок AM составляет $\frac{2}{5}$ стороны AC. Найти отношение площади треугольника EFM к площади треугольника ABC.

47. Точки A, B, C, D — последовательные вершины параллелограмма, а точки E, F, P, H лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, AC. Отрезок AE составляет $\frac{1}{3}$ стороны AB, отрезок BF составляет $\frac{1}{3}$ стороны BC, а точки P и H делят пополам стороны, на которых они лежат. Найти отношение площади четырехугольника $EFPH$ к площади параллелограмма $ABCD$.

48. На биссектрисе угла с вершиной L взята точка A. Точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на стороны угла. На отрезке KM взята точка P так, что $KP < PM$, и через точку P перпендикулярно к отрезку AP проведена прямая, пересекающая прямую KL в точке Q (точка K лежит между точками Q и L), а прямую ML — в точке S. Известно, что $\angle KLM = \alpha$, $KM = a$, $QS = b$. Найти длину отрезка KQ.

49. Периметр равнобочной трапеции, описанной около круга, равен p. Найти радиус этого круга, если известно, что острый угол при основании трапеции равен α.

50. Дан треугольник ABC. На сторонах AB и BC взяты точки M и N соответственно; $AB = 5AM$, $BC = 3BN$. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O. Найти отношение площадей треугольников AOC и ABC.

51. Дан треугольник ABC, причем $AB = AC$, $\angle A = 80°$. Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что $\angle MBC = 30°$, а $\angle MCB = 10°$. Найти угол AMC.

52. В треугольнике ABC биссектриса AH пересекает высоты BP и CT в точках K и M соответственно, причем эти точки лежат внутри треугольника. Известно, что $BK : KP = 2$ и $MT : KP = \frac{3}{2}$. Найти отношение площади треугольника PBC к площади описанного около этого треугольника круга.

53. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 8$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Через точки A, D, C проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E. Найти площадь треугольника ADE.

54. В ромбе $ABCD$ со стороной $1 + \sqrt{5}$ и острым углом $60°$ расположена окружность, вписанная в треугольник ABD. Из точки C к окружности проведена касательная, пересекающая сторону AB в точке E. Найти длину отрезка AE.

55. В треугольнике ABC проведены биссектриса BD угла ABC и отрезок AM. Точки D и M лежат соответственно на сторонах AC и BC; K — точка пересечения прямых BD и AM. Площади треугольников AKD и AMC относятся как $1 : 6$. Найти сторону AB, если $AB + BC = 3$ и $AB + BM = 2$.

56. В окружность вписан выпуклый четырехугольник $ABCD$, причем AB является диаметром окружности. Диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Известно, что $BC = 3$, $CM = \frac{3}{4}$, а площадь треугольника ABC втрое больше площади треугольника ACD. Найти длину отрезка AM.

57. В трапецию $ABCD$ с основанием $AD = 40$, углами при вершинах A и D, равными $60°$, и боковыми сторонами $AB = CD = 10$ вписана окружность так, что она касается обоих оснований AD и BC и стороны AB. Через точку M основания AD, отстоящую на расстояние 10 от вершины D, проведена касательная к окружности. Эта касательная пересекает основание BC в точке K. Найти отношение площади трапеции $ABKM$ к площади трапеции $MDCK$.

58. Вокруг треугольника ABC со сторонами $AB = 5(1 + \sqrt{3})$, $BC = 5\sqrt{6}$, $AC = 10$ описана окружность. Через точку C проведена касательная к окружности, а через точку B — прямая, параллельная стороне AC. Эта касательная и эта прямая пересекаются в точке D. Определить площадь четырехугольника $ABDC$.

59. На боковых сторонах KL и MN равнобочной трапеции $KLMN$ выбраны соответственно точки P и Q так, что отрезок PQ параллелен основаниям трапеции. Известно, что в каждую из трапеций $KPQN$ и $PLMQ$ можно вписать окружность и радиусы этих окружностей равны R и r соответственно. Определить основания LM и KN.

60. Дана прямоугольная трапеция, основания которой равны a, b, $a < b$. Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Определить радиусы этих окружностей.

§ 3. Аналитические решения задач

Как уже отмечалось, иногда чисто геометрическая идея или удачное дополнительное построение позволяют найти в планиметрической или стереометрической задаче наиболее простое решение, почти не требующее вычислений. Однако это, разумеется, не означает, что геометрические задачи всегда решаются лишь геометрическими средствами. Привлечение тригонометрических и алгебраических методов и фактов часто оказывается в геометрических задачах даже неизбежным, ибо иных чисто геометрических путей решения может и не существовать. Многие задачи приемных экзаменов бывают рассчитаны как раз на комплексное использование результатов из разных разделов геометрии, тригонометрии и алгебры.

Необходимость применения тригонометрии в геометрических задачах общеизвестна: без тригонометрических соотношений между сторонами и углами различных фигур мы не смогли бы решить очень многие задачи. Это прежде всего относится к различным вычислительным задачам, в которых требуется найти величину того или иного элемента геометрической конфигурации.

1 *В трехгранный угол, все плоские углы которого равны α, помещена сфера так, что она касается всех ребер трехгранного угла. Грани трехгранного угла пересекают сферу по окружностям радиуса R. Найти радиус сферы.*

Пусть $Sxyz$ — трехгранный угол (рис. 97), все плоские углы которого равны α, а O — центр сферы, касающейся прямых Sx, Sy, Sz. Из точки O опустим перпендикуляр OO_1 на плоскость ySz, точка O_1 — центр окружности, по которой грань ySz пересекается с нашей сферой. Так как точка O равноудалена от прямых Sy и Sz, то и ее проекция O_1 будет равноудалена от тех же прямых, а потому точка O_1 лежит на биссектрисе Sl плоского угла ySz.

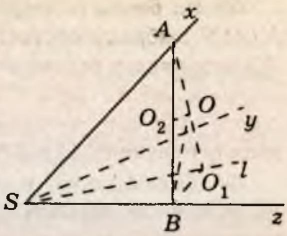


Рис. 97

С другой стороны, нетрудно доказать следующий общий факт: *если в трехгранном угле все плоские углы равны между собой, то проекцией ребра на плоскость противолежащей грани является биссектриса плоского угла этой грани*. Отсюда вытекает, что продолжение перпендикуляра OO_1 за точку O пересекает ребро Sx, эту точку пересечения обозначим A.

Если через точку A провести прямую AB перпендикулярно к ребру Sz, то, по теореме о трех перпендикулярах, ее проекция O_1B также перпендикулярна к ребру Sz. Поэтому O_1B — радиус окружности, по которой грань ySz пересекается с нашей сферой.

Опустим, далее, перпендикуляр OO_2 из точки O на плоскость xSz. Поскольку плоскость AO_1B перпендикулярна к ребру Sz, то она перпендикулярна и к плоскости xSz, а потому перпендикуляр OO_2 лежит в плоскости AO_1B и его основание O_2 находится на прямой AB. По условию $O_1B = O_2B = R$; следовательно, прямоугольные треугольники OO_1B и OO_2B равны, откуда $\angle O_1BO = \angle O_2BO$.

Теперь можно перейти к вычислениям. Из прямоугольных треугольников O_1BS и ABS соответственно получаем

$$SB = R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad AB = SB \operatorname{tg} \alpha = \frac{2R}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Обозначим угол O_1BO_2 (двугранный угол данного трехгранного угла) через φ; из прямоугольного треугольника AO_1B находим

$$\cos\varphi = \frac{O_1B}{AB} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2}.$$

Остается выразить искомый радиус OB сферы из прямоугольного треугольника OO_1B и провести очевидные тригонометрические преобразования:

$$OB = \frac{R}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{2R}{\sqrt{3-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}. \qquad (1)$$

В связи с получившимся ответом (1) целесообразно сделать следующее замечание. Иногда ответ в геометрических задачах стараются привести к так называемому «удобному для логарифмирования виду». Правую часть равенства (1) можно представить в такой форме:

$$OB = \frac{R\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\sin\left(60°-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)}}, \qquad (2)$$

но такое представление не является обязательным. Кстати, эта традиция — давать ответ «в форме, удобной для логарифмирования», — далеко не всегда приводит к наиболее простой записи ответа. Вопреки распространенному мнению, не во всех случаях эта форма наиболее удобна и при вычислении с конкретными значениями заданных в условии задачи величин. Нетрудно убедиться, что при таких вычислениях ответ быстрее и проще получить по формуле (1), чем по формуле (2).

Решая подобные задачи, некоторые поступающие не только проводят необходимые обоснования и выкладки, но и стремятся изучить подробнее получившуюся формулу. Это изучение, как правило, состоит в нахождении ее области определения.

Оно выглядит примерно так. Ясно, что формула (1) имеет смысл при условии

$$3-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} > 0. \qquad (3)$$

Так как в трехгранном угле плоский угол α из очевидных геометрических соображений всегда заключен в пределах от 0° до 180°, то $0° < \frac{\alpha}{2} < 90°$, а тогда неравенство (3) принимает вид $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < \sqrt{3}$. Отсюда следует, что формула (1) имеет смысл при $0° < \alpha < 120°$.

Подчеркнем, что такое исследование ответа не является обязательной частью решения (если, конечно, условие задачи не требует этого специально). Тем не менее некоторые вступающие это исследование проводят. При этом часто допускается логическая ошибка: считается, что конфигурация, о которой идет речь в задаче, существует в точности при всех значениях букв, при которых имеет смысл окончательная формула. Однако на самом деле исследование условий существования геометрической конфигурации отнюдь *не равносильно* простому анализу получившегося ответа.

Чтобы разъяснить это различие, рассмотрим такую задачу.

2 *В параллелограмме ABCD большая сторона AB = a, а меньшая сторона BC = b; острый угол между диагоналями равен α. Найти расстояние между параллельными сторонами AB и DC.*

Составим два различных выражения для площади S параллелограмма (рис. 98). С одной стороны,

$$S = 4S_{\Delta BOC} = 2OB\cdot OC\sin\alpha,$$

где α — острый угол между диагоналями. Для определения произведения $OB\cdot OC$ применим теорему косинусов к треугольнику BOC:

$$b^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB\cdot OC\cos\alpha$$

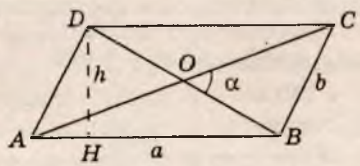


Рис. 98

15 - 4142

и известное свойство параллелограмма

$$OB^2 + OC^2 = \frac{1}{4}(DB^2 + AC^2) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Получаем окончательно $S = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\operatorname{tg}\alpha$.

С другой стороны, $S = AB \cdot DH$, где $DH = h$ — искомое расстояние (высота параллелограмма). Приравнивая два выражения для площади S, найдем

$$h = \frac{a^2 - b^2}{2a}\operatorname{tg}\alpha. \tag{4}$$

Если бы мы занялись отысканием области определения этой формулы, то увидели бы, что ее правая часть имеет смысл, например, при всех значениях $a > 0$, $0 < b < a$ и $0° < \alpha < 90°$. Однако следует ли отсюда, что при всех таких значениях букв геометрическая конфигурация, о которой идет речь в задаче, существует? Иначе говоря, при любых ли значениях $a > 0$, $0 < b < a$ и $0° < \alpha < 90°$ можно построить параллелограмм со сторонами a, b и острым углом α между диагоналями?

Подставляя в формулу (4), например, значения $a = 3$, $b = 1$, $\alpha = 45°$, найдем $h = \frac{4}{3}$. Если немного подумать над этим результатом, то он не может не показаться странным. В самом деле, если рассмотреть прямоугольный треугольник AHD (см. рис. 98), то в нем гипотенуза $AD = 1$ должна быть короче катета $DH = \frac{4}{3}$. Это может означать только одно: параллелограмма с заданными значениями a, b, α не существует.

В этом легко убедиться и непосредственно. Так как площадь параллелограмма со сторонами a и b не превосходит площади прямоугольника с такими же длинами сторон, то должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{2}(a^2 - b^2)\operatorname{tg}\alpha \leqslant ab,$$

или

$$0 < \alpha \leqslant \operatorname{arctg}\frac{2ab}{a^2 - b^2}. \tag{5}$$

Другими словами, *величины a, b, α нельзя задавать совершенно произвольно*, независимо друг от друга, — они должны удовлетворять неравенству (5).

Таким образом, возможны случаи, когда геометрическая конфигурация задачи существует не при всех тех значениях букв, которые входят в область определения ответа. Поэтому исследование геометрической задачи, т. е. выяснение условий, при которых конфигурация существует, — гораздо более сложная задача, рассмотрение которой от поступающих не требуется. Во всех геометрических задачах необходимо лишь *провести решение, предполагая, что геометрическая конфигурация, о которой идет речь в задаче, существует* (если, конечно, в условии задачи не оговорена необходимость проведения такого исследования).

При решении геометрических задач иногда приходится сталкиваться с необычными на вид соотношениями, получающимися в результате применения известных формул тригонометрии. Эти «необычности» вызывают недоумение поступающих, которые не всегда могут их осмыслить и правильно истолковать.

Между тем понимать истинный смысл этих неожиданно возникающих необычных на вид соотношений очень важно. Дело в том, что часто сами формулы «думают» за нас, оказываются более предусмотрительными, учитывая такие случаи, которые мы не отразили в чертеже, или такие условия, на которые мы не обратили должного внимания.

Вот, например, задача, где формулы автоматически учтут условие, которое мы явно использовать при решении вроде бы не будем и которое многие поступающие даже не заметили.

3 *В остроугольный треугольник ABC с углами* α и β *при вершинах A и B соответственно вписана окружность радиуса r. Параллельно BC к этой окружности проведена касательная, пересекающая стороны AB и AC треугольника соответственно в точках K и M. Найти площадь трапеции $BCMK$.*

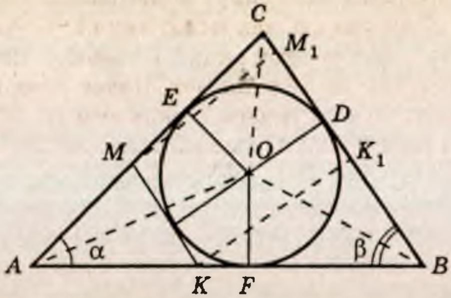


Рис. 99

Для отыскания площади надо найти основания BC и MK трапеции и ее высоту (рис. 99). Ясно, что высота трапеции равна диаметру $2r$ вписанной окружности.

Подсчитаем сначала основание BC трапеции, которое является стороной данного треугольника ABC. Если из центра O вписанной окружности — точки пересечения биссектрис CO и BO — опустить перпендикуляр OD на сторону BC, то $OD = r$. Из прямоугольных треугольников BOD и COD тогда получаем

$$BD = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2};$$

$$CD = r \operatorname{ctg} \frac{\pi - \alpha - \beta}{2} = r \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2},$$

и, следовательно,

$$BC = r\left(\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}\right). \tag{6}$$

Теперь найдем основание MK трапеции. Опустим из точек M и K перпендикуляры MM_1 и KK_1 на сторону BC: очевидно, что $MM_1 = KK_1 = 2r$. Так как

$$MK = M_1K_1 = BC - BK_1 - CM_1, \tag{7}$$

то достаточно найти отрезки BK_1 и CM_1. Это можно сделать из прямоугольных треугольников BKK_1 и CMM_1:

$$BK_1 = 2r \operatorname{ctg} \beta;$$

$$CM_1 = 2r \operatorname{ctg} (\pi - \alpha - \beta) = -2r \operatorname{ctg} (\alpha + \beta). \tag{8}$$

У поступающих этот вдруг появившийся знак минус в последней формуле вызвал недоумение. Какой геометрический смысл имеет этот знак? Конечно, никакой отрицательной длины он не означает. Более того, именно этот появившийся автоматически знак минус обеспечивает для длины отрезка CM_1 положительное значение. Ведь треугольник ABC по условию ***остроугольный***, а потому

$$\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) < 0.$$

Формула, таким образом, учитывает указанное в условии задачи предположение о треугольнике ABC, которое мы успели забыть, нигде не оговорили и не использовали явно.

За счет чего этот знак минус все же появился, как именно оказалось учтенным условие, что треугольник остроугольный? Для этого еще раз внимательно просмотрим все проведенные рассуждения и выкладки. Конечно, выполняя перед началом решения рисунок 99, мы умышленно изобразили треугольник ABC остроугольным — в соответствии с условием. Однако где в дальнейшем это использовалось? Мы неявно воспользовались этим, когда опустили перпендикуляр MM_1 и посчитали очевидным, что точка M_1 лежит на стороне BC — только в этом случае справедливо равенство (7). Если бы угол ACB был тупым, то основание перпендикуляра M_1 лежало бы на продолжении стороны BC за точку C, а формула (7) имела бы вид

$$MK = M_1K_1 = BC - BK_1 + CM_1.$$

Следовательно, в появлении знака минус в формуле для CM_1 нет ничего неожиданного: просто формула явно учла то, что мы считали на чертеже само собой разумеющимся и даже не стали оговаривать или обосновывать.

Для завершения решения задачи осталось провести лишь выкладки. Подставляя выражения (6) и (8) в (7), определяем основание MK трапеции, а затем — площадь S трапеции $BCMK$:

$$S = 2r^2\left[\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin(\alpha + \beta)}\right].$$

В следующей задаче формула «предупреждает» нас о том, что в различных пирамидах центр описанного шара может лежать как внутри, так и вне пирамиды (либо на ее грани). Этот общий факт (§ 5 раздела III) хорошо известен, однако многие, приступая к решению задач, забывают о нем и не рассматривают все возможные в общем случае конфигурации.

(4) *Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом* α *между диагоналями, а все боковые ребра образуют с плоскостью основания один и тот же угол* φ. *Определить расстояние от центра описанного шара до плоскости основания пирамиды и объем пирамиды, если радиус описанного около нее шара равен* R.

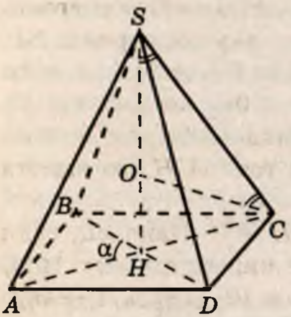


Рис. 100

Пусть дана пирамида $SABCD$ (рис. 100); ее основание — прямоугольник. Проведем ее высоту SH; тогда по условию $\angle HAS = \angle HBS = \angle HCS = \angle HDS = \varphi$, а потому все боковые ребра равны между собой, и H является точкой пересечения диагоналей прямоугольника. Поскольку центр O описанного шара должен равноотстоять от всех вершин, он лежит на перпендикуляре к плоскости $ABCD$, восставленном в центре прямоугольника, т. е. на высоте SH.

Рассмотрим треугольники CHS и COS. Так как $\angle CSH = 90° - \varphi$, а треугольник COS равнобедренный, то по свойству внешнего угла имеем $\angle COH = 180° - 2\varphi$. Решая треугольник COH, находим расстояние от центра O до плоскости основания:

$$OH = R\cos(180° - 2\varphi) = -R\cos 2\varphi. \qquad (9)$$

Появившийся здесь знак минус должен привлечь особое внимание. Что он означает? Дело в том, что, вычертив рисунок 100, мы тем самым фактически предположили, что центр O описанного шара лежит *внутри* пирамиды, и проводили решение при этом неявном предположении (в условии задачи этого предположения нет). Однако центр описанного шара не обязан всегда ле-

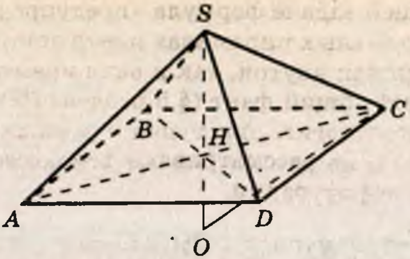


Рис. 101

жать внутри пирамиды — и формула незамедлительно напоминает нам об этом.

Именно, центр описанного шара лежит *внутри* пирамиды, если высота пирамиды больше половины диагонали прямоугольника (тогда именно внутри отрезка SH найдется точка O, равноудаленная от C и от S), т. е. если $\varphi > 45°$. Но в этом случае $\cos 2\varphi < 0$ и, следовательно (см. (9)), $OH > 0$. Если центр описанного шара лежит *на основании* пирамиды, совпадая с точкой H, то высота пирамиды равна половине диагонали прямоугольника; в этом случае $\varphi = 45°$, и потому $OH = 0$. Наконец, если центр описанного шара лежит *вне* пирамиды (рис. 101), то $\varphi < 45°$, и искать OH по формуле (9) нельзя. Очевидно, что в этом случае $\angle COH = 2\varphi$, а потому расстояние от точки O до плоскости основания $OH = R\cos 2\varphi$ (величина положительная)[1].

Перейдем к вычислению объема пирамиды. Из треугольника COH находим $HC = R\sin(180° - 2\varphi) = R\sin 2\varphi$ — равенство, справедливое как для рисунка 100, так и для рисунка 101. Поэтому площадь основания пирамиды

$$S_{ABCD} = 4S_{\Delta\, DHC} = 2R^2\sin^2 2\varphi \sin\alpha;$$

угол α может быть как острым, так и тупым.

---

[1] Нетрудно сообразить, что расстояние от центра O описанного шара до плоскости основания $ABCD$ рассматриваемой пирамиды равно $R|\cos 2\varphi|$ независимо от расположения центра O.

Для вычисления высоты пирамиды рассмотрим три случая. Если $\varphi > 45°$, т. е. если центр O лежит внутри пирамиды (см. рис. 100), то

$$SH = SO + OH = R - R\cos 2\varphi = 2R\sin^2\varphi;$$

если $\varphi < 45°$, т. е. если центр O лежит вне пирамиды (см. рис. 101), то

$$SH = SO - OH = R - R\cos 2\varphi = 2R\sin^2\varphi.$$

Если же $\varphi = 45°$, то $SH = SO = R = 2R\sin^2 45°$.

Итак, при любом значении угла φ, $0° < \varphi < 90°$, приходим к одному и тому же результату:

$$V = \frac{4}{3}R^3\sin^2 2\varphi\sin^2\varphi\sin\alpha.$$

Вот еще одна задача, в которой ответ, если прийти к нему формальными выкладками, сам напоминает о том, что необходимо провести более тщательную расшифровку описанной в условии геометрической конфигурации.

5 *Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник, стороны AB и AC которого равны и образуют между собой угол α, а высота пирамиды совпадает с ребром SA и равна h. Дана вторая треугольная пирамида, имеющая ту же вершину S. Основанием ее является треугольник, вершины которого лежат на разных сторонах треугольника ABC. Найти объем второй пирамиды, если известно, что ее боковые грани равновелики, а боковые ребра равны.*

На первый взгляд задача кажется довольно трудной. Однако записывая сформулированные в условии данные в виде соотношений, можно с помощью естественных рассуждений уточнить геометрическую конфигурацию и провести необходимые вычисления.

Пусть $SABC$ — исходная пирамида, а $SLMN$ — вторая пирамида, вершины L, M, N которой лежат на сторонах равнобедренного треугольника BAC (рис. 102). Поскольку по условию задачи

$$SL = SM = SN, \tag{10}$$

а SA — перпендикуляр к плоскости ABC, то $AL = AM = AN$, так что, в частности, $MN \parallel BC$. Далее, условие равновеликости граней NSL и MSL можно записать в виде

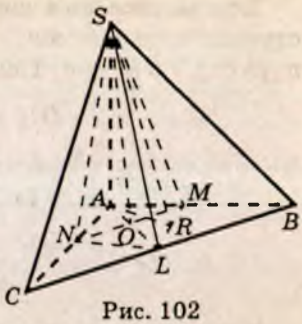


Рис. 102

$$\frac{1}{2} NS \cdot LS \sin(\angle NSL) =$$

$$= \frac{1}{2} MS \cdot LS \sin(\angle MSL),$$

откуда, учитывая (10), заключаем, что $\angle NSL = \angle MSL$ (нетрудно убедиться, что случай $\angle NSL = 180° - \angle MSL$ несовместим с условием равновеликости боковых граней пирамиды $SLMN$). Но тогда $\Delta NSL = \Delta MSL$, и, значит, $NL = ML$. Следовательно, $\Delta ANL = \Delta AML$, а потому AL — биссектриса равнобедренного треугольника BAC и L — середина стороны BC.

Проведем высоты SO треугольника MSN и SR треугольника MSL; тогда условие равновеликости граней MSN и MSL можно записать в виде

$$\frac{1}{2} MN \cdot SO = \frac{1}{2} ML \cdot SR. \qquad (11)$$

Обозначив отрезок AM для краткости через a, из прямоугольного треугольника MOA получаем

$$MN = 2 \cdot MO = 2a \sin\frac{\alpha}{2}, \ \ AO = a \cos\frac{\alpha}{2},$$

а из прямоугольного треугольника SAO находим

$$SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{h^2 + a^2 \cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Учитывая, что AR — биссектриса угла MAL, из прямоугольного треугольника ARM получаем

$$ML = 2 \cdot MR = 2a \sin\frac{\alpha}{4}, \ AR = a \cos\frac{\alpha}{4},$$

а из прямоугольного треугольника SAR находим

$$SR = \sqrt{h^2 + a^2 \cos^2\frac{\alpha}{4}}.$$

Подставляя найденные выражения в равенство (11), приходим к уравнению для определения a:

$$2a\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{h^2+a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=2a\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{h^2+a^2\cos^2\frac{\alpha}{4}},\quad(12)$$

из которого без труда находим

$$a^2=4h^2\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha}.\quad(13)$$

После этого искомый объем V пирамиды $SLMN$ уже подсчитывается очевидным образом:

$$V=\frac{1}{6}MN\cdot LO\cdot AS=\frac{8h^3}{3}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

Именно такое решение предложили многие поступающие. Найдя выражение для объема V, они начали преобразовывать его, стремясь записать в более простой форме, и ... неожиданно получили парадоксальный ответ:

$$V=-\frac{4h^3}{3}\frac{\sin^3\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{3\alpha}{4}}.$$

Конечно, парадоксальным он кажется лишь на первый взгляд; на самом деле получившийся знак минус предупреждает нас о том, что мы провели формальные выкладки, не разобравшись до конца в свойствах геометрической конфигурации. Выполняя чертеж на рисунке 102, мы считали, что рассматриваемая геометрическая конфигурация *существует*, и дальнейшее решение проводили фактически *в этом предположении*. Между тем интересующая нас конфигурация существует не для всех значений угла α (подчиненных естественным ограничениям $0° < \alpha < 180°$). Точнее, пирамида $SLMN$ с равными боковыми ребрами, расположенная указанным в условии задачи способом, существует всегда, но не при любом значении угла α можно обеспечить равновеликость ее боковых граней.

Чтобы убедиться в этом, надо заметить, что условие (11) равновеликости граней MSN и MSL *равносильно* существованию положительного корня у уравнения (12), или, что то же самое, у уравнения (13). Между тем уравнение (13) имеет положительный корень в том и только в том случае, когда

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \alpha > 0, \quad \text{или} \quad \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} < 0,$$

т. е., с учетом естественных пределов для угла α, когда $120° < \alpha < 180°$.

Большое значение при решении геометрических задач имеют алгебраические методы. Алгебра, часто в сочетании с тригонометрией, позволяет справиться со многими сложными задачами.

Суть алгебраического подхода к геометрическим задачам состоит в том, чтобы для некоторой величины составить из геометрических соображений уравнение, а затем решить его или исследовать алгебраическими средствами. Конечно, после этого еще остается вопрос о той или иной геометрической интерпретации получившегося алгебраического результата.

Широкие возможности для использования алгебры в геометрии открывают метрические соотношения в треугольнике и круге, формулы решения прямоугольных треугольников, теоремы синусов и косинусов и т. д.

Заметим, что задачи, решающиеся алгебраическими методами, требуют подчас довольно длинных вычислений. Не следует поэтому пугаться громоздких выкладок или громоздких ответов. Как правило, необходимые в таких задачах вычисления идейно просты и вполне доступны каждому, кто твердо знает основные формулы тригонометрии и алгебры, хорошо владеет техникой алгебраических и тригонометрических преобразований, приучил себя к аккуратному и внимательному проведению выкладок.

6 *В треугольнике ABC угол A равен α, а противолежащая ему сторона равна a. Найти две другие стороны, если известно, что сторона a есть среднее геометрическое радиусов вписанного и описанного кругов этого треугольника.*

Сведем решение этой задачи к алгебраической системе. Обозначим через b и c длины сторон треугольника ABC, противолежащих соответственно углам B и C. Эти величины b и c и являются интересующими нас неизвестными.

Первое уравнение дает теорема косинусов:

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2. \tag{14}$$

Для получения второго уравнения используем данное в условии задачи соотношение $a = \sqrt{Rr}$, где R и r — радиусы соответственно описанного и вписанного кругов. Вспоминая известные выражения для этих радиусов (формулы (2), (3) из § 1, А раздела III) и для площади треугольника, мы можем записать цепочку равенств

$$a^2 = rR = \frac{2S}{a+b+c} \cdot \frac{a}{2\sin A} =$$

$$= \frac{a}{(a+b+c)\sin A} \cdot \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{abc}{2(a+b+c)},$$

откуда и находим второе уравнение:

$$bc - 2a(b+c) = 2a^2. \tag{15}$$

Итак, мы получили систему двух уравнений (14), (15) с двумя неизвестными b и c. Теперь нужно заняться чисто алгебраической задачей — решением этой системы. Переписывая уравнение (14) в виде $(b+c)^2 - 2bc(1+\cos\alpha) = a^2$ и подставляя сюда выражение для bc из уравнения (15), получаем квадратное уравнение относительно $b + c$:

$$(b+c)^2 - 8a\cos^2\frac{\alpha}{2}(b+c) - \left(8a^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + a^2\right) = 0, \tag{16}$$

откуда

$$b + c = a\left[1 + 8\cos^2\frac{\alpha}{2}\right] \tag{17}$$

(второй — отрицательный — корень уравнения (16) отбрасываем, поскольку он не имеет геометрического смысла). Из уравнения (15) теперь определяем

$$bc = 4a^2\left[1 + 4\cos^2\frac{\alpha}{2}\right]. \tag{18}$$

Из соотношений (17), (18) ясно, что b и c являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - a\left(1 + 8\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)z + 4a^2\left(1 + 4\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$z_{1,2} = \frac{a}{2}[5 + 4\cos\alpha \pm \sqrt{16\cos^2\alpha + 8\cos\alpha - 23}]. \qquad (19)$$

Теперь для b можно, например, взять знак плюс, а для c — минус; другая комбинация знаков дает фактически тот же треугольник, но с иным обозначением сторон.

Решение завершено — требуемые длины b и c сторон треугольника найдены. Хотя задача никаких дополнительных исследований не требует, некоторые поступающие пытались еще ответить на вопрос, когда формулы (19) имеют геометрический смысл. Для этого выяснялось, при каких значениях α под корнем стоит неотрицательное число и, кроме того, $z_1 > 0$, $z_2 > 0$. Так как трехчлен $16x^2 + 8x - 23$ неотрицателен при всех $x \leqslant -\frac{1 + \sqrt{24}}{4}$ и при всех $x \geqslant \frac{\sqrt{24} - 1}{4}$, то стоящее под знаком радикала в (19) выражение неотрицательно, если $\cos\alpha \geqslant \frac{1}{4}(\sqrt{24} - 1)$ и, естественно, $0 < \alpha < \pi$, т. е. при

$$0 < \alpha \leqslant \arccos\frac{\sqrt{24} - 1}{4}. \qquad (20)$$

Легко, далее, проверить, что при этих значениях α оба указанных в (19) корня положительны.

Однако необходимо подчеркнуть, что проведенные рассуждения позволили выяснить лишь те условия, при которых формулы (19) *могут иметь* геометрический смысл. На вопрос о том, действительно ли при всех α, удовлетворяющих условию (20), геометрическая конфигурация *существует*, эти рассуждения ответа не дают.

7 *В четырехугольник ABCD можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагональ AC делит площадь четырехугольника пополам. Найти длину диагонали BD, если радиус вписанной окружности равен r, а периметр четырехугольника равен p.*

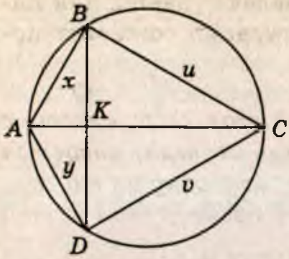


Рис. 103

Введем обозначения для длин сторон данного четырехугольника $ABCD$ (рис. 103) и запишем условия задачи в виде уравнений.

Так как в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны:

$$x + v = y + u. \qquad (21)$$

Поскольку четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность, то $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. С учетом этого соотношения условие равенства площадей треугольников ABC и ADC

$$\frac{1}{2}xu\sin(\angle ABC) = \frac{1}{2}yv\sin(\angle ADC)$$

дает

$$xu = yv. \qquad (22)$$

Выразив x из равенства (21) и подставив в уравнение (22), получаем

$$(y + u)(u - v) = 0,$$

откуда $u = v$, но тогда из (21) вытекает, что и $x = y$. Поэтому $\Delta ABC = \Delta ADC$, так что $\angle ABC = \angle ADC$ и AK — биссектриса равнобедренного треугольника BAD. Следовательно, $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, а $AC \perp BD$.

Использовав две формулы для площади четырехугольника $ABCD$, можем записать равенство $\frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}pr$, откуда

$$BD = \frac{pr}{\sqrt{x^2 + u^2}} = \frac{pr}{\sqrt{(x+u)^2 - 2xu}}.$$

Однако $x + u = \frac{p}{2}$, а по формулам для площади четырехугольника $ABCD$ имеем: $2 \cdot \frac{1}{2}xu = \frac{1}{2}pr$, или $2xu = pr$, так что окончательно $BD = \dfrac{2pr}{\sqrt{p^2 - 4pr}}$.

В следующей геометрической задаче удается для интересующего нас элемента конфигурации составить иррациональное уравнение.

(8) *На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром, расположенным вне данного угла, касается биссектрисы прямого угла, пересекает одну из его сторон в точках A и B и пересекает продолжение другой стороны в точках C и D. Длина хорды AB равна $\sqrt{7}$, длина хорды CD равна 1. Найти радиус окружности.*

Пусть MKN — прямой угол, KL — его биссектриса, а O — центр окружности (рис. 104). Соединив точку O с точками K, B, D и опустив перпендикуляр OS на сторону KN и перпендикуляр OT на продолжение стороны KM, можно записать

$$OK^2 = OS^2 + OT^2 =$$
$$= (OB^2 - SB^2) + (OD^2 - TD^2) =$$
$$= R^2 - \frac{1}{4}AB^2 + R^2 - \frac{1}{4}CD^2 =$$
$$= 2R^2 - 2;$$

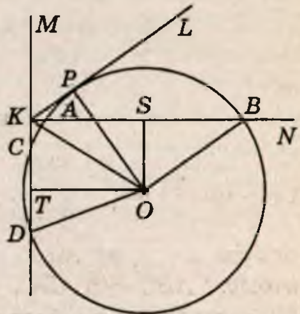


Рис. 104

здесь R — радиус окружности. Обозначим через P точку касания окружности с биссектрисой и соединим эту точку с центром O.

Очевидно, что

$$\cos(\angle PKO) = \cos(45^\circ + \angle SKO) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\angle SKO) - \sin(\angle SKO)),$$

откуда, используя треугольники KPO и KSO, получаем

$$\sqrt{2}\,\frac{KP}{KO} = \frac{KS}{KO} - \frac{OS}{KO}, \text{ или } \sqrt{2}\cdot KP = OT - OS.$$

Следовательно,

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{OK^2 - OP^2} = \sqrt{OD^2 - TD^2} - \sqrt{OB^2 - SB^2},$$

или

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{R^2 - 2} = \sqrt{R^2 - 1/4} - \sqrt{R^2 - 7/4}. \qquad (23)$$

Полученное иррациональное уравнение решается обычным приемом $\left(\text{отметим, что } R^2 - \frac{1}{4} > R^2 - \frac{7}{4}\text{, и по-}\right.$ $\left.\text{тому правая часть уравнения (23) положительна}\right)$. В результате оказывается, что уравнение (23) имеет два корня $R_1 = \frac{3}{2}$, $R_2 = -\frac{3}{2}$, из которых лишь первый имеет геометрический смысл.

Широко применяются алгебра и тригонометрия при решении *геометрических задач на максимум и минимум.* В таких задачах обычно рассматривается геометрическое тело (или фигура) и требуется выбрать его размеры так, чтобы некоторая величина, связанная с телом, принимала наибольшее (или наименьшее) значение. Для алгебраического решения задачи, как правило, выписывается *функция*, связывающая интересующую нас величину с размерами тела, а затем эта функция исследуется. Тем самым геометрическая задача сводится к алгебраической — изучению свойств функций. Конечно, решив алгебраическую задачу, мы должны дать результатам геометрическую интерпретацию.

9 *В треугольнике ABC известны стороны $AB = 4$ и $BC = 5$. Какова должна быть длина стороны AC, чтобы угол B был больше* $105°$?

Обозначим длину стороны AC через x и воспользуемся теоремой косинусов:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{41 - x^2}{40}.$$

Нас интересует, в каких пределах может меняться величина x для того, чтобы угол B треугольника ABC удовлетворял неравенству $\angle B > 105°$.

Многие поступающие предложили следующее решение этой задачи. Поскольку угол B должен быть тупым, т. е. должен лежать во второй четверти, где косинус убывает, то необходимо обеспечить выполнение неравенства

$$\cos B < \cos 105° = -\sin 15° = -\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Другими словами, задача сводится к отысканию решений неравенства

$$\frac{41 - x^2}{40} < -\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \quad \text{или} \quad x^2 > 41 + 20\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Но величина x — длина стороны AC — принимает лишь положительные значения, а потому геометрический смысл имеют лишь решения

$$x > \sqrt{41 + 20\sqrt{2 - \sqrt{3}}}.$$

Однако такой ответ неверен — длина стороны AC не может иметь любое из указанных значений. Дело в том, что в приведенных рассуждениях не учтено одно существенное обстоятельство: отрезки AB, BC и AC должны составлять *треугольник*, и это геометрическое условие, в свою очередь, накладывает ограничения на возможные значения x. Так как сторона AC, лежащая против тупого угла, должна быть наибольшей стороной треугольника ABC, то отрезки AB, BC и AC образуют треугольник тогда и только тогда, когда $AC < AB + BC$, т. е. $x < 9$. Следовательно, удовлетворяющая условию задачи допустимая длина стороны AC такова:

$$\sqrt{41 + 20\sqrt{2 - \sqrt{3}}} < x < 9.$$

(10) *Нужно сделать воздушный змей в форме прямой призмы, имеющей основанием прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной* 40 *см. Боковая поверхность призмы должна иметь площадь* 0,96 *м*^{2}. *Какое наименьшее возможное значение может принимать сумма длин всех ребер такой призмы?*

Обозначим катеты основания призмы через x и y, а ее боковое ребро — через z. По условию задачи легко составить два соотношения между размерами призмы:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0{,}16, \\ (x + y + 0{,}4)z = 0{,}96. \end{cases} \qquad (24)$$

Нас интересует наименьшее возможное значение суммы всех ребер призмы

$$l = 2(x + y + 0{,}4) + 3z.$$

Величина l является функцией *трех* переменных x, y и z, которые, однако, могут принимать лишь значения, удовлетворяющие системе уравнений (24). Подставив вместо суммы $x + y + 0{,}4$ ее выражение из второго уравнения системы (24), мы получим представление величины l как функции *одной* переменной z:

$$l = \frac{1{,}92}{z} + 3z. \tag{25}$$

Естественно прежде всего начать с отыскания наименьшего значения этой функции (нас интересуют, разумеется, лишь *положительные* значения z). Применяя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (см. § 7 раздела I), можно записать, что при любом $z > 0$

$$l = \frac{1{,}92}{z} + 3z \geqslant 2\sqrt{\frac{1{,}92}{z} \cdot 3z} = 4{,}8;$$

как известно, равенство здесь достигается при $\frac{1{,}92}{z} = 3z$, т. е. при $z = 0{,}8$.

Итак, мы доказали, что *функция* (25), как функция переменной z, принимает наименьшее значение 4,8 при $z = 0{,}8$. Однако для того, чтобы быть уверенным, что это есть наименьшее значение *геометрической величины* — суммы длин всех ребер призмы, — надо еще убедиться, что действительно *существует* призма, которая удовлетворяет условию задачи и у которой боковое ребро z равно 0,8. Другими словами, требуется теперь выяснить, имеет ли решение система (24) при $z = 0{,}8$. Если она имеет решение (причем такое, что $x > 0$ и $y > 0$), то соответствующая призма (или призмы, если система имеет несколько решений) и будет давать геометрическую реализацию решения задачи. Если же система (24) при $z = 0{,}8$ решений не имеет, то сумма боковых ребер призмы не может равняться 4,8.

Подставляя значение $z = 0{,}8$ в систему (24), получаем систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0{,}16, \\ x + y = 0{,}8, \end{cases}$$

которая, как легко убедиться, решений не имеет. Следовательно, удовлетворяющей условию задачи призмы *с боковым ребром* 0,8 не существует. Конечно, это не означает, что призмы, удовлетворяющей условию задачи и имеющей наименьшую сумму длин ребер, вообще не существует. Просто для ее отыскания нужно провести дополнительные рассуждения.

Выше мы исследовали функцию (25) при всех $z > 0$ и искали ее наименьшее значение. Однако, как выяснилось, не все значения $z > 0$ имеют геометрический смысл — необходимо рассматривать лишь те значения $z > 0$, для которых система (24) как система с неизвестными x, y и параметром z имеет решения.

Перепишем систему (24) в виде

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0{,}16, \\ x + y = \dfrac{0{,}96}{z} - 0{,}4; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{0{,}96}{z} - 0{,}4, \\ xy = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{0{,}96}{z} - 0{,}4\right)^2 - 0{,}08. \end{cases}$$

Эта система имеет решения (x, y) для тех и только тех значений параметра $z > 0$, для которых существуют корни у квадратного уравнения

$$t^2 - \left(\frac{0{,}96}{z} - 0{,}4\right) t + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{0{,}96}{z} - 0{,}4\right)^2 - 0{,}08\right] = 0,$$

т. е. для значений $z > 0$, при которых неотрицателен дискриминант:

$$\left(\frac{0{,}96}{z} - 0{,}4\right)^2 - 4\left[\frac{1}{2}\left(\frac{0{,}96}{z} - 0{,}4\right)^2 - 0{,}08\right] \geqslant 0.$$

Из последнего неравенства нетрудно получить, что

$$-0{,}4(\sqrt{2} - 1) \leqslant \frac{0{,}96}{z} \leqslant 0{,}4(\sqrt{2} + 1),$$

откуда, поскольку нас интересуют лишь положительные значения z, следует: $z \geqslant 2{,}4(\sqrt{2} - 1)$. Таким образом, именно для таких значений z и надо искать наименьшее значение функции (25).

Можно доказать (совершенно аналогично тому, как это сделано в задаче 27 из § 7 раздела I), что функция (25) при $z \geqslant 0{,}8$ возрастает. Следовательно, ее наименьшее значение на промежутке $z \geqslant 2{,}4(\sqrt{2} - 1)$ (заметим, что $2{,}4(\sqrt{2} - 1) > 0{,}8$) достигается при $z = 2{,}4(\sqrt{2} - 1)$ и равно $8(\sqrt{2} - 0{,}8)$.

Найденная величина $8(\sqrt{2} - 0{,}8)$ *м* и дает наименьшее возможное значение суммы ребер призмы, удовлетворяющей условию задачи. Если значение $z = 2{,}4(\sqrt{2} - 1)$ подставить в систему (24) и решить ее, то получим $x = y = 0{,}2\sqrt{2}$. Иначе говоря, наименьшую сумму ребер имеет призма, у которой основанием служит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом $0{,}2\sqrt{2}$ *м*, а боковое ребро равно $2{,}4(\sqrt{2} - 1)$ *м*.

Задачи

1. Даны стороны b и c треугольника и угол A между ними. Этот треугольник вращается вокруг не пересекающей его оси, которая проходит через вершину A и составляет равные углы со сторонами b и c. Найти объем тела вращения.

2. На окружности радиуса R даны точки A и B, расстояние между которыми равно l. Какое наименьшее значение может принимать сумма $AC^2 + BC^2$, если точка C также лежит на этой окружности?

3. В круге радиуса R через точку M диаметра проведена хорда AB под углом φ к диаметру; при этом $BM : AM = p : q$. Через точку B проведена хорда BC, перпендикулярная к данному диаметру, и точка C соединена с точкой A. Найти площадь треугольника ABC.

4. На плоскости фиксированы две различные точки A и B. Найти геометрическое место точек этой плоскости, для которых $AM \cdot BM \cos(\angle AMB) = \frac{3}{4}AB^2$.

5. Правильная пирамида, в основании которой лежит квадрат со стороной a, вращается вокруг прямой, проходящей через вершину пирамиды параллельно одной из сторон основания. Вычислить объем тела вращения, если плоский угол при вершине пирамиды равен α.

6. Угол при основании равнобедренного треугольника ABC равен α, $\alpha > 45°$, а площадь равна S. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат основания высот треугольника ABC.

7. Даны две концентрические окружности радиусов r и R, $R > r$. Найти сторону квадрата, две вершины которого лежат на окружности радиуса r, а две другие — на окружности радиуса R. При каком соотношении между r и R: а) решение возможно; б) имеется только одно решение?

8. Нужно изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда с площадью основания, равной 1 $см^2$. Сумма длин всех ребер параллелепипеда должна равняться 20 *см*. При каких размерах коробки ее полная поверхность будет наибольшей?

9. Достаточно ли приобрести 4000 штук кафельных плиток размером 10 *см* × 10 *см* для облицовки бортов бассейна, имеющего форму ромба площадью 450 $м^2$ и с высотой борта 0,5 *м*?

10. В прямоугольном треугольнике отношение произведения длин биссектрис внутренних острых углов к квадрату длины гипотенузы равно $\frac{1}{2}$. Найти острые углы этого треугольника.

11. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB равна c. Из вершины B на сторону AC проведена медиана BD, равная m. Угол BDA острый и равен β. Вычислить площадь треугольника ABC.

12. В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) медианы, проведенные из вершин B и C к сторонам AC и AB соответственно, обратно пропорциональны этим сторонам. Найти стороны AC и AB треугольника, если $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$.

13. Выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C, пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Отрезок BC равен 1. Найти длину отрезка EF.

14. В квадрате $ABCD$ площади 1 сторона AD продолжена за точку D и на продолжении взята точка O на расстоянии 2 от точки D. Из точки O проведены два луча. Первый луч пересекает отрезок CD в точке M и отрезок AB в точке N, причем

$\angle MNB = \alpha$. Второй луч пересекает отрезок CD в точке L и отрезок BC в точке K, причем $LO = a$. Найти площадь многоугольника $NBKLM$.

15. Около круга описана трапеция с углами при основании α и β. Найти отношение площади трапеции к площади круга.

16. Хорда AB стягивает дугу окружности, равную 120°. Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB. При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC.

17. Даны два одинаковых пересекающихся круга. Отношение расстояния между их центрами к радиусу равно $2m$. Третий круг касается внешним образом первых двух и их общей касательной. Определить отношение площади общей части первых двух кругов к площади третьего круга.

18. Основанием треугольной пирамиды служит равносторонний треугольник. Три другие грани образуют с ними двугранные углы, равные α, β и γ, каждый из которых меньше $\frac{\pi}{2}$. В пирамиду вписан шар. Определить отношение радиуса шара к высоте пирамиды.

19. В треугольнике ABC сторона BC служит основанием полукруга, площадь которого равна площади треугольника ABC. Угол A равен α. Найти углы B и C, если $B > C$. Исследовать, при каких значениях угла α задача имеет решение.

20. В прямом круговом конусе с вершиной S угол между образующими SA и SB равен α, а угол между их проекциями на плоскость основания равен β. Вычислить угол между биссектрисами углов OSA и OSB, где точка O является центром круга, служащего основанием конуса.

21. Отрезок AB длины 1, являющийся хордой сферы радиуса 1, составляет угол $\frac{\pi}{3}$ с ее диаметром CD. Расстояние от конца C этого диаметра до ближайшего к нему конца A хорды AB равно $\sqrt{2}$. Определить величину отрезка BD.

22. Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, где $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$. В угол A куба вписан шар радиуса $R = 0{,}5$. Найти радиус шара, вписанного в угол C_1 куба и касающегося данного шара, если ребро куба $a = 1{,}5$.

23. На плоскости лежат, не пересекаясь, два шара радиусов r и R. Расстояние между центрами шаров равно ρ. Найти минимально возможный радиус шара, который лежал бы на этой плоскости и касался заданных шаров.

24. Каждая из боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC разделена на три равные части и через четыре точки деления на этих сторонах проведена окружность, высекающая на основании AC хорду DE. Найти отношение площадей треугольников ABC и BDE, если $AB = BC = 3$ и $AC = 4$.

25. В равнобедренный треугольник ABC вписан ромб $DECF$ так, что вершина E лежит на отрезке BC, вершина F лежит на отрезке AC и вершина D лежит на отрезке AB. Найти длину стороны ромба, если $AB = BC = 12$, $AC = 6$.

26. Шар касается основания конуса в его центре. Поверхность шара пересекает боковую поверхность конуса по двум окружностям, одна из которых имеет радиус, равный радиусу шара, и лежит в плоскости, параллельной основанию конуса. Известно, что радиус основания конуса в $\frac{4}{3}$ раза больше радиуса шара. Найти отношение объема шара к объему конуса.

27. Из прямоугольника, большая сторона которого равна l, вырезаются два полукруга, диаметрами которых служат меньшие стороны прямоугольника. При каком значении длины меньшей стороны прямоугольника площадь оставшейся части будет максимальной?

28. В правильную четырехугольную пирамиду с вершиной S и основанием $ABCD$ вписана сфера. Сторона основания равна a, боковое ребро равно $\frac{1}{2} a\sqrt{5}$. На апофеме SE грани DSC взята точка M так, что $SM = ME$. Найти расстояние между точками, в которых прямая AM пересекает сферу, вписанную в пирамиду.

29. Центры трех окружностей различных радиусов расположены на одной прямой, а центр четвертой находится на расстоянии d от этой прямой. Найти радиус четвертой окружности, если известно, что каждая из этих окружностей касается трех других.

30. Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник, стороны AB и AC которого равны и образуют между собой угол α, а высота пирамиды совпадает с ребром SA и равна h. Дана четырехугольная пирамида, имеющая ту же вершину S. Основанием ее является четырехугольник, вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC. Найти объем четырехугольной пирамиды, если известно, что ее боковые грани равновелики, а боковые ребра равны.

31. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найти его площадь, если радиус описанной окружности равен R и $AB = 2 \cdot BC$.

32. Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. Через его вершины проведены касательные к этой окружности, образующие четырехугольник, который также можно вписать в окружность. Найти площадь четырехугольника $KLMN$, если его периметр равен p и $NM = 2ML = 8LK$.

33. Дан угол величиной 120° с вершиной C. Вне угла, на продолжении его биссектрисы, взята точка O так, что $OC = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. С центром в точке O построена окружность радиуса 1. Найти площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

34. Два шара касаются плоскости P в точках A и B и расположены по разные стороны от этой плоскости. Расстояние между центрами шаров равно 10. Третий шар касается внешним образом двух данных шаров, а его центр O лежит в плоскости P. Известно, что $AO = BO = 2\sqrt{10}$, $AB = 8$. Определить радиус третьего шара.

35. На сфере, радиус которой равен 4, расположены три окружности радиуса 2, каждая из которых касается двух других. Найти радиус окружности, большей, чем данные, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных трех окружностей.

36. В прямоугольном секторе AOB из точки B, как из центра, проведена дуга OC (C — точка пересечения этой дуги с дугой AB) радиуса OB. Окружность S_1 касается дуги AB, дуги OC и прямой OA, а окружность S_2 касается дуги AB, прямой OA и окружности S_1. Найти отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

37. В прямоугольном секторе AOB проведена хорда AB и в образовавшийся сегмент вписан квадрат. Найти отношение стороны квадрата к радиусу окружности, которая касается хорды AB, дуги AB и стороны квадрата, перпендикулярной к хорде AB.

38. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины A, C и точку пересечения высот треугольника ABC. Найти длину стороны AC.

39. На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром, расположенным вне этого угла, касается продолжения одной из его сторон, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису этого угла в точках C и D; $AB = 4\sqrt{2}$, $CD = 2$. Найти радиус окружности.

40. На плоскости дан угол величиной $\frac{\pi}{3}$. Окружность касается одной стороны этого угла, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису угла в точках C и D; $AB = CD = \sqrt{6}$. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.

41. Две окружности радиуса 32 с центрами O_1 и O_2, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части. Найти радиус окружности, которая касается изнутри обеих данных окружностей и касается отрезка O_1O_2.

42. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — ее вершина) сторона основания равна a, а высота пирамиды равна $2a$. Пусть D — середина ребра SA. Найти площадь круга, получаемого при сечении шара, вписанного в пирамиду $SABC$, плоскостью, проходящей через ребро BC и точку D.

43. В окружности с центром O проведены параллельные хорды PQ и RS, диаметр SE и хорда RE. Хорда RE пересекает хорду PQ в точке F, из точки F опущен перпендикуляр FH на диаметр SE. Известно, что радиус окружности равен r, а $EH = \frac{3}{8}r$. Найти расстояние от середины отрезка EO до середины хорды RQ.

44. Боковые грани треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S образуют одинаковые двугранные углы с плоскостью основания ABC пирамиды; SO — ее высота. Известно, что $\angle ASB = \frac{7\pi}{12}$, $\angle BSC = \frac{\pi}{2}$, $\angle SCA = \frac{\pi}{3}$. Найти отношение площади треугольника AOB к площади треугольника ABC.

45. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса CL прямого угла. Из вершины A, $\angle A > 45°$, на биссектрису опущен перпендикуляр AD. Найти площадь треугольника ABC, если $AD = a$, $CL = b$.

46. На плоскости даны три точки A, B, C, лежащие на одной прямой (точка B лежит между точками A и C); $AB = 1$, $BC = 7$. Найти максимальное расстояние между такими точками P и Q, лежащими в данной плоскости по одну сторону от прямой AC, что $\angle APB = \angle BQC = 60°$.

47. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a и построены две окружности. Первая окружность целиком расположена внутри квадрата $ABCD$, касается стороны AB в точке E, а также касается стороны BC и диагонали AC. Вторая окружность имеет своим центром точку A и проходит через точку E. Найти площадь общей части двух кругов, ограниченных этими окружностями.

48. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, длина ребра которого равна 1. На ребрах BB' и DD' взяты точки K и P соответственно, причем $BK : B'K = 1 : 3$, $DP = PD'$. Плоскость, проведенная через точки A, K и P, пересекает диагонали $A'D$ и $B'C$ в точках M и T соответственно. Найти длину отрезка MT.

49. Два одинаковых правильных треугольника ABC и CDE со стороной 1 расположены на плоскости так, что они имеют только одну общую точку C и $\angle BCD < \frac{\pi}{3}$. Точка K — середина стороны AC, точка L — середина стороны CE, точка M — середина отрезка BD. Площадь треугольника KLM равна $\frac{1}{5}\sqrt{3}$. Найти длину отрезка BD.

50. Даны две треугольные пирамиды $SABC$ и $NKLM$, все ребра которых равны a. Эти пирамиды имеют общую высоту SN (S — центр грани KLM, N — центр грани ABC). Кроме того, $KL \parallel BC$ и пирамиды расположены так, что плоскость, проходящая через ребра KL и BC, пересекает отрезок SN. Найти объем общей части пирамид $SABC$ и $NKLM$.

51. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E. Известно, что $AB + AD = DE$, $\angle BAD = 60°$, $AE = 6$. Найти площадь треугольника ABC.

52. Площадь равнобочной трапеции, описанной около круга, равна s. Найти среднюю линию трапеции, если острый угол при ее основании равен α.

53. В треугольнике ABC высота BH делит сторону AC в отношении $AH : HC = 4$, а угол HBC вдвое меньше угла BAC. Биссектриса AE угла BAC пересекается с BH в точке K. Найти отношение площади треугольника ABK к площади описанного около этого треугольника круга.

54. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC = 6$ и боковой стороной $AB = 5$. В треугольник ABD, где BD — высота треугольника ABC, вписана окружность. Прямая, проведенная через вершину C, касается окружности в точке E, причем $\angle ACE \neq 0$. Найти площадь треугольника OEC, где O — центр окружности.

55. В треугольнике ABC сторона $BC = 5$. Окружность проходит через вершины B и C и пересекает сторону AC в точке K такой, что $CK = 3$, $KA = 1$. Известно, что $\cos(\angle ACB) = \frac{4}{5}$. Найти отношение радиуса данной окружности к радиусу окружности, вписанной в треугольник ABK.

56. В треугольнике BCD известно, что $BC = 4$, $CD = 8$, $\cos(\angle BCD) = \frac{3}{4}$. Точка A выбрана на стороне CD так, что $CA = 2$. Найти отношение площади круга, описанного около треугольника BCD, к площади круга, вписанного в треугольник ABD.

57. В треугольник ABC со сторонами $AB = 10$, $BC = 20$ и углом C, равным $30°$, вписана окружность. Через точку M стороны AC, отстоящую на расстояние 10 от вершины A, проведена касательная к окружности. Пусть K — точка пересечения касательной с прямой, проходящей через вершину B параллельно стороне AC. Найти площадь четырехугольника $ABKM$.

58. В треугольнике ABC известно: $AB = AC$, угол BAC — тупой. Пусть D — точка пересечения биссектрисы угла ABC со стороной AC, M — основание перпендикуляра, опущенного из A на сторону BC, E — основание перпендикуляра, опущенного из D на сторону BC. Через точку D проведен также перпендикуляр к BD до пересечения со стороной BC в точке F. Известно, что $ME = FC = a$. Найти площадь треугольника ABC.

59. На биссектрисе острого угла AOC взята точка B. Через точку B проведена прямая, перпендикулярная к OB и пересекающая сторону AO в точке K, а сторону OC — в точке L. Через точку B проведена еще одна прямая, пересекающая сторону AO в точке M (M между O и K), а сторону OC — в точке N так, что $\angle MON = \angle MNO$. Известно, что $MK = a$, $LN = \frac{3}{2}a$. Найти площадь треугольника MON.

60. В прямоугольном треугольнике ABC угол ACB — прямой. Пусть D — точка пересечения биссектрисы угла BAC со стороной BC, точка E — середина стороны AB, O — точка пересечения отрезков AD и CE. Через точку O проведена прямая, перпендикулярная к AD, до пересечения со стороной AB в точке K, а со стороной AC — в точке M. Известно, что $MC = a$, $EK = \frac{2}{3}a$. Найти площадь треугольника ABC.

§ 4. Прямые и плоскости в пространстве

Исходные понятия стереометрии имеют решающее значение для развития пространственных представлений. Эти понятия сами по себе несложны, но требуют определенной логической культуры — умения совершенно строго, на основе данных определений, сводить доказательство любой теоремы к применению только перечисленных в начале аксиом и ранее доказанных теорем.

Это, в свою очередь, требует точного знания исходных определений и теорем. К сожалению, поступающие часто считают, что геометрическая интуиция всегда поможет им дать правильные определения и формулировки аксиом. В результате оказывается, что в лучшем случае даются эквивалентные формулировки, а это приводит к неожиданным осложнениям в доказательствах теорем.

Главное внимание должно быть обращено на *точное понимание и прочное запоминание* определений. Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между скрещивающимися прямыми и расстояние между ними, угол между прямой и плоскостью, угол между двумя плоскостями — все эти понятия должны быть хорошо усвоены.

При этом, разумеется, нельзя вдаваться в крайности. Во-первых, не следует заучивать формулировки определений, не понимая их геометрического смысла, не видя за ними соответствующей геометрической конфигурации. А во-вторых, что более типично для поступающих (и потому более опасно), нельзя ограничиваться одними геометрическими образами, забывая о точных определениях.

Например, каждый представляет себе, что такое параллельные прямые в пространстве. Тем не менее многие начинают доказывать, что через две параллельные прямые можно провести плоскость, забывая о том, что существование такой плоскости входит в само *определение* параллельных прямых.

Другой аналогичный пример касается доказательства *существования* скрещивающихся прямых. Очень многие поступающие ограничиваются при этом... указанием пальцем на пол и потолок. Конечно, хорошо знать, где «в жизни» встречаются скрещивающиеся прямые, но это не освобождает от необходимости строго доказать их существование.

Возьмем любые три точки A, B, C и вне определяемой ими плоскости — четвертую точку D. Тогда прямые AB и CD — скрещивающиеся. В самом деле, если бы они лежали в одной плоскости, то и все их точки лежали бы в этой плоскости; но это противоречило бы выбору точки D (рис. 105).

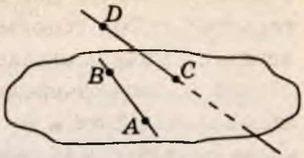


Рис. 105

Встречаются также случаи, когда поступающие, не зная правильного определения, пользуются ошибочными аналогиями и в результате приходят к совершенно фантастическим «изобретениям», вроде «прямая параллельна плоскости, если она параллельна всякой прямой, лежащей в этой плоскости»; «прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к какой-нибудь прямой в этой плоскости»; «углом между прямой и плоскостью называется угол, который эта прямая образует с прямыми данной плоскости» и т. п. Достаточно представить себе геометрический смысл этих «определений», чтобы увидеть их полную нелепость.

Вместе с тем не следует зазубривать определения слово в слово, буква в букву — можно допускать некоторые отступления от формулировки, данной в учебнике. Однако эти отступления не должны заходить слишком далеко. Например, довольно часто поступающие берут *признак* перпендикулярности прямой и плоскости в качестве *определения* перпендикулярности прямой и плоскости. Но, к сожалению, они не всегда понимают, что при этом новом определении бывшее *определение* становится *теоремой*, подлежащей доказательству. Таким образом, и в этом случае «фантазирование» с определениями может лишь привести к осложнениям.

Большое количество ошибок допускается поступающими из-за *неполной* формулировки определений и особенно теорем. Вот часто даваемая поступающими формулировка признака параллельности двух плоскостей: «Если две прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны». Выпущено одно-единственное слово — речь идет о двух *пересекаю-*

щихся прямых, — но в такой формулировке теорема уже неверна.

Одним из важнейших понятий является *угол между скрещивающимися прямыми*. Для построения угла между скрещивающимися прямыми поступают так: берут произвольную точку пространства и проводят через нее две прямые, соответственно параллельные данным прямым. Угол между построенными *пересекающимися* прямыми и есть, по определению, угол между данными скрещивающимися прямыми.

Это определение может вызвать естественный вопрос: не зависит ли угол между скрещивающимися прямыми от точки, которую мы выбрали его вершиной? Оказывается, что выбор точки действительно не влияет на величину угла: для обоснования этого утверждения надо сослаться на известный признак параллельности двух плоскостей и теорему об углах с параллельными сторонами в пространстве.

Понятие угла между скрещивающимися прямыми при его систематическом применении позволяет упростить многие определения и теоремы. Например, можно сразу определить *перпендикулярные прямые* как прямые, угол между которыми прямой, независимо от того, лежат или не лежат они в одной плоскости. А это определение, в свою очередь, упрощает решение задач.

Полезно напомнить, что *прямая, перпендикулярная к плоскости, перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости*, в том числе и к такой, которая не проходит через точку пересечения данной прямой с плоскостью.

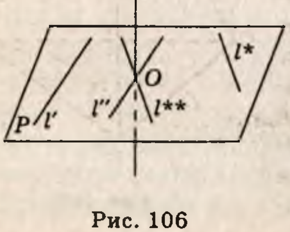


Рис. 106

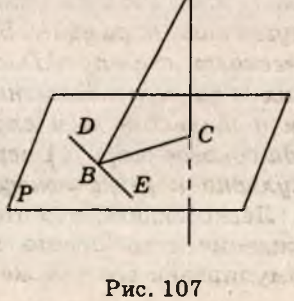


Рис. 107

Особый интерес представляет *признак перпендикулярности* прямой и плоскости: *если прямая перпендикулярна к двум произвольным непараллельным* (*пересекающимся*) *прямым, лежащим в некоторой плоскости, то она перпендикулярна к самой плоскости.* Заметим, что (рис. 106) если данная прямая l перпендикулярна к двум пересекающимся прямым l' и l^* плоскости P, то она перпендикулярна к параллельным им прямым l'' и l^{**}, проведенным через точку O ее пересечения с плоскостью P. Подчеркнем, что перпендикулярность прямой к двум *параллельным* прямым в плоскости не влечет за собой перпендикулярность этой прямой к самой плоскости.

Наконец, обратим внимание поступающих на особо важное значение *теоремы о трех перпендикулярах.* Эта теорема представляет собой совокупность прямого и обратного утверждений. *Пусть* (рис. 107) *прямая AC перпендикулярна к плоскости P, AB — наклонная и BC — проекция этой наклонной на плоскость P. Если прямая DE проведена в плоскости P перпендикулярно к наклонной AB, то DE перпендикулярна к проекции BC наклонной. Обратно, если прямая DE проведена в плоскости P перпендикулярно к проекции BC наклонной AB, то DE перпендикулярна к наклонной AB.*

Особенно существенны рассматриваемые нами понятия для правильного представления геометрических фактов при решении разнообразных задач на пирамиды. В частности, очень полезна следующая **теорема**, касающаяся произвольной треугольной пирамиды (рис. 108): *высота SH треугольной пирамиды SABC пересекает высоту AD основания (или ее продолжение) в том и только в том случае, когда боковое ребро SA перпендикулярно к ребру основания BC*. Легко видеть, что это утверждение есть просто иная формулировка все той же тео-

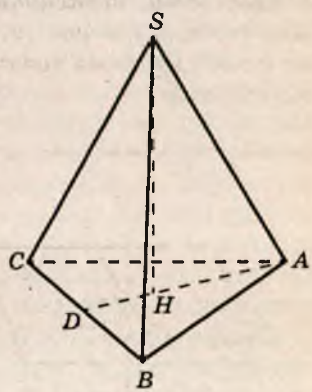


Рис. 108

ремы о трех перпендикулярах: SH и SA — перпендикуляр и наклонная к плоскости основания ABC, а BC — третья прямая, лежащая в плоскости основания. Следующая задача, которую не смогли решить большинство поступающих, с помощью этой теоремы решается сразу.

1 *В треугольной пирамиде высота, проведенная из вершины, попадает в точку пересечения высот треугольника, лежащего в основании. Доказать, что тем же свойством обладают и все высоты пирамиды, опущенные из вершин основания на боковые грани.*

В самом деле, поскольку высота пирамиды пересекается с каждой из высот основания, то, применяя сформулированную выше теорему, заключаем, что каждое боковое ребро пирамиды перпендикулярно к противолежащему ребру основания. Если теперь использовать ту же теорему еще раз, то придем к выводу, что любая высота пирамиды проходит через точку пересечения высот грани, на которую высота пирамиды опущена.

Из этой же теоремы, в частности, вытекает, что боковые ребра *правильной* треугольной пирамиды перпендикулярны к противолежащим ребрам основания. Это утверждение может понадобиться, например, при построении линейного угла двугранного угла при боковом ребре пирамиды. Часто поступающие предлагают следующее построение: «Проведем через сторону основания плоскость, перпендикулярную к боковому ребру, и тогда угол, получившийся в сечении, и будет нужным углом». В принципе такое построение правильно, но в нем не хватает весьма существенной детали — почему такую плоскость можно провести. В самом деле, в случае произвольных скрещивающихся прямых такую плоскость, вообще говоря, провести нельзя — это возможно в том и только в том случае, когда прямые перпендикулярны. В частности, в *правильной* треугольной пирамиде такое построение действительно возможно.

Отметим еще следующую типичную ошибку. Опустив перпендикуляр из вершины основания правильной треугольной пирамиды на боковую грань, многие без малейшего сомнения считают, что эта высота пересекается с высотой боковой грани. Это утверждение на самом деле, конечно, верно, но требует обоснования. Легко видеть, что оно следует из сформулированной выше теоремы, а также из результата задачи 1. Однако при решении задачи, в которой это утверждение используется, нужно не полагаться на указанную теорему (или тем более на задачу 1), а дать отдельное независимое доказательство.

Наиболее бесперспективным является следующий «лобовой» путь доказательства этого утверждения: провести высоту SD боковой грани ASB правильной пирамиды $SABC$, опустить высоту CK пирамиды из вершины C основания на грань ASB и доказать, что SD и CK пересекаются (рис. 109). К сожалению, многие поступающие пытаются рассуждать именно таким образом, в то время как гораздо проще поступить иначе.

Пусть $SABC$ — правильная пирамида и CK — перпендикуляр, опущенный из вершины C на грань ASB (см. рис. 109). Соединим точку K с точкой D — серединой ребра AB. Прямая DC перпендикулярна к прямой AB как медиана равностороннего треугольника ABC. Прямая CK перпендикулярна к плоскости ASB, а значит, и к любой прямой в этой плоскости и, в частности, к ребру AB. Значит, ребро AB перпендикулярно к плоскости DCK, так как оно перпендикулярно к двум пересекающимся прямым CD и CK, лежащим в этой плоскости.

Поэтому прямая AB перпендикулярна к любой прямой в плоскости DCK, в частности, к прямой DK.

Итак, $DK \perp AB$, а поскольку D — середина основания AB равнобедренного треугольника ASB, то точка K лежит на высоте SD этого треугольника.

Признак перпендикулярности хорошо работает во многих задачах, где для заданных двугранных углов требуется достроить линейные углы.

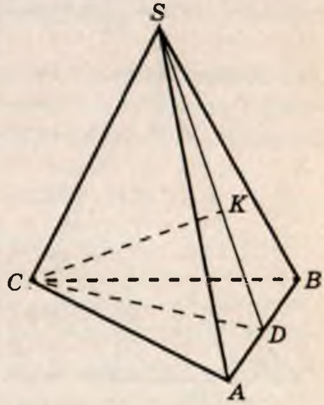


Рис. 109

(2) *Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный p. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен 2α.*

Пусть $SABC$ — данная пирамида (рис. 110), OK — рассматриваемый перпендикуляр, и двугранный угол при ребре SC равен 2α. Прежде всего построим линейный угол этого двугранного угла. За вершину линейного угла естественно взять точку K; затем из точки K в плоскостях граней ASC и BSC необходимо провести перпендикуляры KL и KM к ребру SC.

В этом месте многими поступающими были допущены ошибки. Одни считали, что эти перпендикуляры обязательно пройдут через точки A и B, другие — что точки L и M являются серединами сторон AC и BC треугольника ABC. И то, и другое неверно. На самом деле справедливо следующее.

Плоскость, в которой лежат прямые KL и KM, должна быть перпендикулярна к ребру SC (так как $SC \perp KL$ и $SC \perp KM$). Для того чтобы найти эту перпендикулярную к SC плоскость, достаточно найти какие-нибудь две непараллельные прямые, перпендикулярные к SC. Одна такая прямая известна по условию — это OK, ибо нам дано, что $OK \perp SC$. В качестве же второй такой прямой можно взять ребро AB. В самом деле, SO — перпендикуляр к плоскости ABC, SC — наклонная, CO — ее проекция; но $AB \perp CO$ и, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $AB \perp SC$.

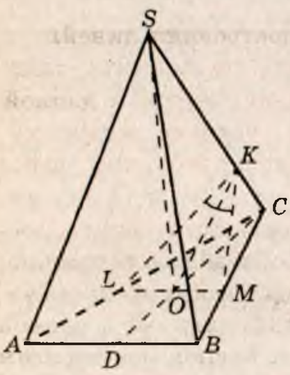


Рис. 110

Итак, найдены две прямые OK и AB, перпендикулярные к SC. Но они, к сожалению, не пересекаются, а скрещиваются. Однако из этого положения есть выход: через точку O проведем $LM \parallel AB$. Тогда LM тоже перпендикулярна к SC, а LM и OK уже пересекаются. Следовательно, SC перпендикулярна к плоскости, в которой лежат эти прямые, т. е. к плоскости треугольника KLM. А тогда $SC \perp KL$ и $SC \perp KM$, т. е. $\angle LKM$ — линейный угол двугранного угла при ребре SC. Итак, $\angle LKM = 2\alpha$, причем точки L и M перпендикуляров KL и KM к ребру SC расположены на сторонах AC и BC треугольника ABC таким образом, что LM проходит через центр треугольника ABC параллельно AB.

Далее остаются вычисления. Доказав, что $\angle OKM = \angle OKL = \alpha$, находим $OM = p \operatorname{tg} \alpha$, а потому (из прямоугольного треугольника OCM) имеем $OC = p\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$. Но OC есть радиус круга, описанного около правильного треугольника ABC; следовательно, $AB = 3p \operatorname{tg} \alpha$, и площадь $S_{\Delta ABC}$ основания пирамиды немедленно определяется. В то же время из треугольника KOC

$$\sin(\angle OCK) = \frac{OK}{OC} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha;$$

поскольку $\angle KOS = \angle OCK$ (как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами), то высота пирамиды

$$SO = \frac{p}{\cos(\angle OCK)} = \frac{p\sqrt{3}}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}}.$$

Таким образом, искомый объем

$$V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{9}{4} p^3 \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}}.$$

Часто встречающаяся задача построения линейного угла данного двугранного угла есть, по существу, задача отыскания плоскости, перпендикулярной к данной прямой; при этом, как правило, условие задачи каким-либо образом фиксирует некоторую точку, через которую проходит искомая плоскость. Так, в только что решенной задаче ясно было, что соответствующую плоскость надо провести через центр основания пирамиды, и наш метод решения состоял в том, чтобы провести через эту точку две прямые, перпендикулярные к данной прямой — ребру двугранного угла. Воспользуемся этим методом и в несколько иной ситуации.

3) *Ребро куба $ABCDA'B'C'D'$ равно a; точка E — середина ребра AA'. На продолжении ребра DA взята точка F так, что $FA = \frac{a}{2}$. Найти радиус меньшей из сфер, проходящих через точки E и F и касающихся плоскостей $BB'C'C$ и $DD'C'C$.*

Заметим прежде всего, что точка F лежит на продолжении ребра DA за точку A: если бы точка F лежала на продолжении этого ребра за точку D, то отрезок FA не мог бы равняться половине длины ребра куба. Пусть K — середина отрезка EF (рис. 111); тогда центр всякой сферы, проходящей через точки E и F, лежит в плоскости α, проходящей через точку K и перпендикулярной к отрезку EF. С другой стороны, центр всякой сферы, касающейся данных в условии задачи плоскостей, лежит в плоскости β, делящей пополам двугранный угол с ребром CC'. Итак, центр искомой сферы лежит на линии пересечения плоскостей α и β.

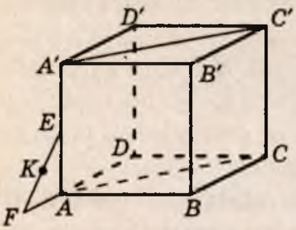


Рис. 111

Ясно, что если мы просто поставим наугад на чертеже центр O искомой сферы, то ее радиус мы вычислить не сможем, так что нам придется геометрически найти ту прямую l, по которой пересекаются плоскости α и β, а для этого сначала — построить саму плоскость α.

Из условия задачи сразу же следует, что точка A лежит на прямой l. Для дальнейшего решения нам придется делать значительные дополнительные построения — впрочем, довольно естественные.

В плоскости грани $AA'D'D$ построим квадрат $AA'L'L$ (рис. 112). Нетрудно убедиться, что прямая EF параллельна его диагонали $A'L$, а отрезок AK лежит на другой его диагонали AL', так что $AK \perp EF$. Следовательно, для построения плоскости α достаточно найти еще одну прямую, перпендикулярную к прямой EF. Здесь уже «приходится» догадаться, что $AB \perp EF$, поскольку прямая AB

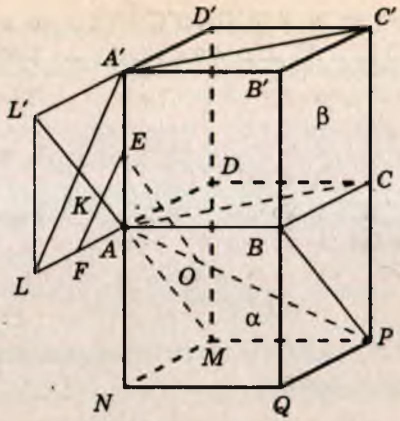


Рис. 112

перпендикулярна к плоскости $AA'D'D$, в которой лежит прямая EF. Таким образом, искомая плоскость α — это плоскость, в которой лежат пересекающиеся прямые AB и AL', и нам надо найти ее линию пересечения l с плоскостью β.

Одной из точек прямой l является A; для нахождения второй ее точки построим под данным кубом еще такой же куб (см. рис. 112). Тогда сразу же обнаруживается, что второй точкой прямой l является P, так что искомая прямая l — диагональ нижнего куба.

Итак, центр O искомой сферы лежит на прямой AP. Обозначив OP через x, подсчитаем расстояние от точки O до плоскости BCP и длину отрезка OE. Расстояние до плоскости проще всего вычислить, если мысленно построить внутри нижнего куба меньший куб с диагональю OP — тогда искомое расстояние есть ребро этого куба, т. е. равно $\frac{x}{\sqrt{3}}$. Для вычисления OE заметим, что треугольник AOE лежит в плоскости ACP, а его угол OAE равен $90° + \angle CAP$. Тогда получаем

$$OE^2 = (a\sqrt{3} - x)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2(a\sqrt{3} - x)\frac{a}{2}\cos(\angle OAE) =$$

$$= 3a^2 + x^2 - 2ax\sqrt{3} + \frac{a^2}{4} + a^2 - \frac{ax\sqrt{3}}{3},$$

поскольку

$$\cos(\angle OAE) = \cos(90^\circ + \angle CAP) = -\frac{CP}{AP} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

В результате приходим к уравнению

$$x^2 + \frac{17a^2}{4} - \frac{7\sqrt{3}}{3}ax = \frac{x^2}{3},$$

корни которого

$$x_{1,2} = \frac{7\sqrt{3} \pm 3\sqrt{5}}{8}a.$$

Следовательно, радиусы двух сфер, удовлетворяющих условию задачи, равны

$$r_{1,2} = \frac{x_{1,2}}{\sqrt{3}} = \frac{(7 \pm \sqrt{15})a}{4},$$

а радиус меньшей из этих сфер $r = \dfrac{(7 - \sqrt{15})a}{4}$.

Задача решена, однако нельзя не указать, что вся геометрическая часть приведенного решения преследовала в действительности лишь одну цель — нахождение точки P. И уж когда мы ее нашли, гораздо проще дальше поступить так (см. рис. 112): отложить на продолжении ребра $C'C$ за точку C отрезок $CP = a$, доказать, что точка P равноудалена от точек E и F, и заметить, что точка A также равноудалена от этих же точек, так что центр искомой сферы лежит на прямой AP. Затем останется провести вычисления так, как сделано выше. В этом решении главная трудность — доказательство равенства $PE = PF$ (на рис. 112 эти отрезки не показаны); однако и здесь могут помочь следующие соображения: достаточно доказать равенство углов EAP и FAP, а они дополняют до 180° соответственно углы NAP и DAP, которые, очевидно, равны.

Таким образом, если бы мы «увидели» с самого начала, что именно точка P равноудалена от точек E и F, то, разумеется, сразу дали бы второе решение. Однако догадаться об этом совсем не просто. В то же время общий метод рассуждения сам привел нас к этому факту. Тем не менее в подобной ситуации более разумно рассматривать первое решение как черновое, для себя, а в экзаменационной работе привести более простое второе решение.

④ В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной a. Одна из граней пирамиды перпендикулярна к плоскости основания. Эта грань является равнобедренным треугольником с боковой стороной $b \neq a$. Найти площадь того сечения пирамиды, которое является квадратом.

Пусть $KLMN$ — квадрат, о котором идет речь в условии задачи (рис. 113). При этом мы не делаем пока никаких предположений о том, какая именно из боковых граней — ASB, BSC или ASC — перпендикулярна к плоскости основания ABC.

Так как $KN \parallel LM$, то KN параллельна плоскости ABC, а потому плоскость ASB, проходящая через прямую KN, пересекает плоскость ABC по ребру AB, параллельному KN. Аналогично доказывается, что $SC \parallel KL$.

Отсюда вытекает, что, во-первых, плоскость сечения параллельна скрещивающимся ребрам AB и SC и, во-вторых, что эти ребра перпендикулярны между собой, поскольку (прямой) угол LKN квадрата $KLMN$ является углом между этими скрещивающимися прямыми.

Заметим теперь, что пирамида $SABC$ обладает лишь одной парой взаимно перпендикулярных скрещивающихся ребер. Докажем это на другом чертеже (рис. 114).

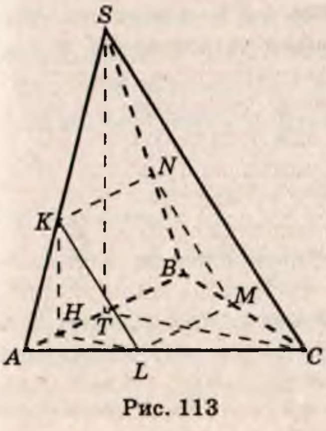


Рис. 113

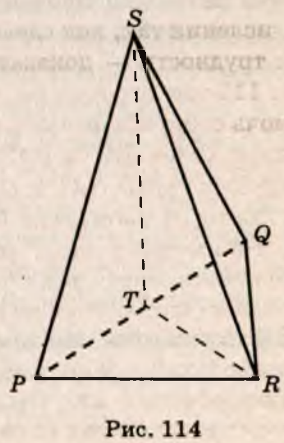


Рис. 114

Пусть $SPQR$ — данная пирамида, в которой грань PSQ перпендикулярна к основанию PQR. Проведем высоту ST пирамиды; ST лежит, очевидно, в плоскости грани PSQ и является одновременно высотой равнобедренного треугольника PSQ, а следовательно, и его медианой, так что прямая RT — высота правильного треугольника PQR. По теореме о трех перпендикулярах наклонная SR перпендикулярна к PQ — к прямой, перпендикулярной к ее проекции RT. Однако любая прямая в плоскости PQR, перпендикулярная к ребру SQ, должна быть перпендикулярна к его проекции PQ; но PR этим свойством не обладает, и поэтому ребра SQ и PR не перпендикулярны. Аналогично не являются перпендикулярными ребра SP и QR. Таким образом, взаимно перпендикулярными являются лишь ребра SR и PQ, т. е. боковое ребро, не лежащее в грани, перпендикулярной основанию, и ребро прямого двугранного угла.

Возвращаясь к рисунку 113, заключаем, что именно AB является ребром прямого двугранного угла, т. е. грань ASB перпендикулярна к плоскости основания ABC.

Перейдем к вычислениям (см. рис. 113). Проведем $KH \perp AB$ и точку H соединим с L. Прямая KH перпендикулярна к прямой HL как прямая, лежащая в одной из взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная к линии их пересечения. Кроме того, проведем высоту ST равнобедренного треугольника ASB и высоту CT основания ABC.

Обозначим сторону квадрата $KLMN$ через x. Тогда

$$ST = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad AT = \frac{a}{2}, \quad AH = \frac{a-x}{2}.$$

Так как $\Delta AKH \sim \Delta AST$ и $\Delta ALH \sim \Delta ACT$, то

$$KH = \frac{a-x}{a}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad HL = \frac{a-x}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}},$$

из треугольника KHL имеем

$$x^2 = \left(\frac{a-x}{a}\right)^2\left(\frac{a^2}{2} + b^2\right).$$

Отсюда после извлечения корня (с учетом $a > x$) и необходимых преобразований находим сторону x квадрата, а затем и площадь:

$$S = \left(\frac{a\sqrt{2a^2 + 4b^2}}{2a + \sqrt{2a^2 + 4b^2}}\right)^2.$$

В ряде задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах, требовалось найти угол и кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми. Нахождение угла обычно не представляет больших трудностей, поскольку для этого достаточно через точку, лежащую на одной из данных скрещивающихся прямых, провести прямую, параллельную другой прямой, и тогда задача сводится к определению угла между пересекающимися прямыми и решается планиметрическими методами.

Что же касается нахождения кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми, то эта задача вызывает у поступающих в большинстве случаев значительные затруднения, главным образом из-за слабого геометрического воображения.

5 *Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб ($ABCD$ — квадрат нижнего основания; AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра). Какова величина угла между прямыми: а) AA_1 и B_1D; б) AD_1 и A_1B; в) AD_1 и B_1D? Найти расстояние между прямыми: г) AA_1 и B_1D; д) AD_1 и DC_1, если ребро куба равно* 1.

Как отмечено выше, для нахождения угла между скрещивающимися прямыми надо одну из прямых перенести параллельно самой себе так, чтобы она пересеклась с другой прямой. При этом следует лишь решить, какую прямую и в какую точку удобнее переносить.

В задаче а), очевидно, нет смысла переносить диагональ куба B_1D (рис. 115); разумнее перенести прямую AA_1 в точку D. Тогда сразу же ясно, что искомый угол равен углу D_1DB_1, который легко находится из ΔD_1DB_1; он равен $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

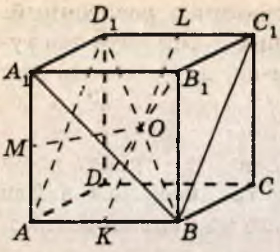


Рис. 115

Заметим еще, что при оформлении такого решения на экзамене не следует писать «перенесем прямую AA_1 и т. д.». Гораздо лучше сказать более корректно: «Так как прямая DD_1 параллельна AA_1, то искомый угол равен углу D_1DB_1 ...»

Столь же просто решается задача б): так как прямая BC_1 параллельна AD_1, то искомый угол равен углу A_1BC_1, который, как это легко получается из рассмотрения треугольника A_1BC_1, равен 60°.

В решении задачи в) мы встречаемся с более трудной ситуацией: при попытке перенести одну из данных прямых в одну из вершин куба они «выходят за пределы куба». В принципе этого вовсе не всегда следует избегать — напротив, часто именно выход за пределы данной конфигурации дает наиболее простое решение задачи, и полезно научиться пользоваться этим приемом более смело. Однако в данном случае выхода за пределы куба можно легко избежать, перенеся прямую AD_1 в центр куба O — середину диагонали B_1D.

Итак, проведем через точку O прямую KL, параллельную AD_1 (см. рис. 115); тогда угол LOB_1 — искомый. Прямая KL лежит, очевидно, в плоскости прямоугольника AD_1C_1B, проходит через его центр параллельно стороне AD_1 и, следовательно, точка L делит пополам сторону D_1C_1. Поэтому стороны треугольника LOB_1 равны соответственно

$$OL = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad OB_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad LB_1 = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

отсюда по теореме, обратной теореме Пифагора, получаем, что угол LOB_1 равен 90°.

Заметим, что искомый угол можно было найти и без вычислений, если догадаться, что четырехугольник $KDLB_1$ — ромб.

Перейдем к нахождению кратчайших расстояний. Трудность задач такого рода связана с тем, что поступающие, помня определение кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми как длины их общего перпендикуляра, пытаются прежде всего построить этот общий перпендикуляр. Однако построить его в большинстве случаев значительно труднее, чем найти его длину, как это ни парадоксально на первый взгляд. Между тем ничего странного в этом нет: для построения общего перпендикуляра обычно требуется хорошая геометрическая интуиция, догадка, тогда как вычислить его длину можно, найдя длину любого другого, *равного* ему отрезка.

В задаче г) нетрудно сообразить, что общим перпендикуляром прямых AA_1 и B_1D является отрезок OM, соединяющий середины отрезков AA_1 и B_1D (см. рис. 115). Доказательство этого несложно: треугольники AOA_1 и DMB_1 (на рис. 115 они не показаны) равнобедренные, и поэтому их общая медиана OM является высотой. Легко подсчитать, что

$$OM = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Что касается задачи д), то построить общий перпендикуляр для данных в ее условии прямых AD_1 и DC_1 совсем непросто, и мы применим обходный путь, который, как правило, используется при нахождении кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми.

Этот обходный путь состоит в следующем. Пусть l и m — скрещивающиеся прямые и AB — их общий перпендикуляр (рис. 116). Через точку B проведем прямую $n \parallel l$, и тогда прямая l будет параллельна плоскости α, в которой лежат прямые m и n. Поэтому расстояние от любой точки прямой l до плоскости α равно AB.

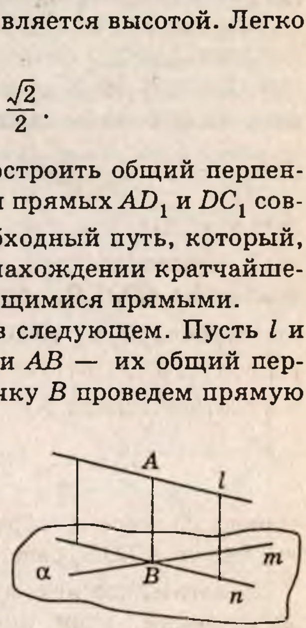


Рис. 116

Отсюда видно, что для нахождения кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми l и m нет необходимости строить общий перпендикуляр, и более просто поступать следующим образом: через точку одной прямой, скажем, m, провести прямую n, параллельную l, выбрать на прямой l какую-либо точку A и найти расстояние от точки A до плоскости, в которой лежат прямые m и n. Таким образом, задача сводится к нахождению расстояния от точки до плоскости, что делается не так сложно; как мы увидим ниже, здесь удобно применять соображения, связанные с объемом пирамид.

Для решения задачи д) заметим, что $DC_1 \parallel AB_1$ (рис. 117, на нем диагональ AB_1 грани AA_1B_1B не проведена), и, следовательно, нам требуется найти расстояние от какой-либо точки прямой AB_1 до плоскости DC_1B. Удобнее всего рассмотреть точку A. Для нахождения искомого расстояния есть, например, такой путь: доказать, что проекция K точки A на плоскость DC_1B лежит на прямой C_1E, и вычислить отрезок AK, рассматривая необходимые треугольники.

Однако можно ограничиться лишь вычислениями: для этого следует посмотреть на отрезок AK как на высоту пирамиды $ABDC_1$ (см. рис. 117) и найти его длину, исходя из объема и площади основания этой пирамиды. Площадь равностороннего треугольника BDC_1 равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а объем пирамиды $ABDC_1$ вычисляется столь же легко, если рассмотреть ее как пирамиду с вершиной C_1 и основанием ADB: тогда ее высота C_1C равна 1, а площадь основания ADB равна $\frac{1}{2}$, так что объем равен $\frac{1}{6}$. Таким образом, $\frac{1}{3}AK \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{6}$, откуда $AK = \frac{\sqrt{3}}{3}$, т. е. искомое кратчайшее расстояние равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

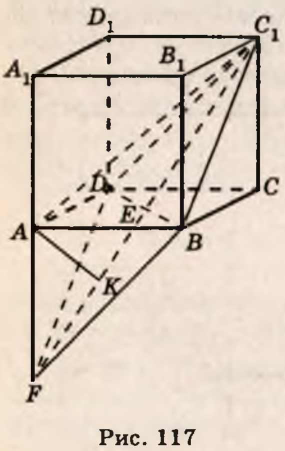


Рис. 117

Итак, задача о нахождении кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми может быть сведена к задаче о нахождении расстояния от точки до плоскости, которую, в свою очередь, часто можно свести к подсчету объемов пирамид. Так обстоит дело и в следующей задаче.

(6) *Пусть AB, AC, AD, DE, DF — ребра куба. Через вершины E, F и середины ребер AB и AC проведена плоскость P. Какую часть площади поверхности шара, описанного вокруг куба, составляет площадь поверхности меньшей из двух частей, на которые этот шар делится плоскостью P?*

Заметим прежде всего, что для нахождения площади поверхности части шара, отсеченной некоторой плоскостью, надо знать лишь радиус шара и расстояние от центра шара до секущей плоскости, и, таким образом, в данной задаче требуется найти расстояние ON от центра куба O до плоскости $EKLF$ (рис. 118).

Было бы неразумно рассматривать первую попавшуюся пирамиду $OEKLF$, поскольку подсчитать ее объем двумя способами весьма сложно. Лучше «выйти за пределы куба», продолжив EK и FL до пересечения с продолжением ребра DA. При этом следует, конечно, доказать, что прямые EK и FL пересекутся с DA в одной точке M; доказательство этого утверждения несложно.

Теперь для решения задачи используем пирамиду $OMEF$, для которой двумя способами подсчитаем объем. Высота этой пирамиды, опущенная из вершины M на основание EOF, равна, очевидно, расстоянию от точки A до плоскости $ECBF$, т. е. равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$, где a — ребро куба. Площадь треугольника OEF равна $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$, и следовательно, объем пирамиды равен $\frac{a^3}{12}$. С другой стороны, площадь треугольника EMF легко вычисляется, если заметить, что $AM = a$; она равна $\frac{3a^2}{2}$.

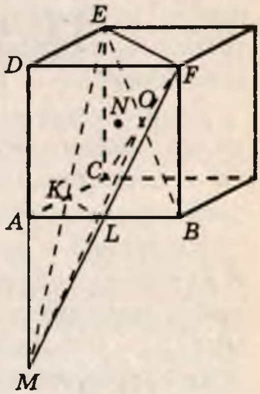


Рис. 118

Таким образом, объем пирамиды равен $\frac{1}{3}ON \cdot \frac{3a^2}{2}$.

Равенство $\frac{1}{3}ON \cdot \frac{3a^2}{2} = \frac{a^3}{12}$ позволяет определить $ON = \frac{a}{6}$. Дальнейшее решение содержит лишь очевидные вычисления, в результате которых получается, что искомое отношение равно $(9 - \sqrt{3}) : 18$.

Довольно часто встречаются задачи, в которых необходимо рассчитать многогранные углы. Обычно задачи такого типа вызывают определенные трудности, связанные с недостаточным геометрическим воображением и неумением нарисовать удобный чертеж.

7 *Плоские углы трехгранного угла равны* 45°, 45° *и* 60°. *Через его вершину проведена прямая, перпендикулярная к одной из граней, плоский угол которой равен* 45°. *Найти угол между этой прямой и ребром трехгранного угла, не лежащим в упомянутой грани.*

Часто поступающие изображают трехгранный угол «вершиной вверх»; из-за этого получается чертеж, по которому весьма трудно бывает увидеть геометрические свойства конфигурации. Между тем, например, в данной задаче, поскольку речь идет о перпендикуляре к двум прямым, т. е. к плоскости, ими определяемой, удобно изобразить трехгранный угол «лежащим на грани» — изобразить эту плоскость горизонтально, а перпендикуляр — вертикально.

Итак, пусть S — вершина трехгранного угла (рис. 119); из нее выходят ребра Sl и Sm, образующие угол в 45°; Sp — перпендикуляр к этим прямым; Sn — третье ребро трехгранного угла, причем $\angle nSm = 45°$, а $\angle nSl = 60°$.

На прямой n возьмем отрезок SA некоторой длины a и из точки A опустим перпендикуляр AK на плоскость mSl и перпендикуляры AB и AC соответственно на прямые l и m. Соединив точки B и C с точкой K, по теореме о трех перпендикулярах получим, что BK и CK перпендикулярны соответственно к прямым l и m.

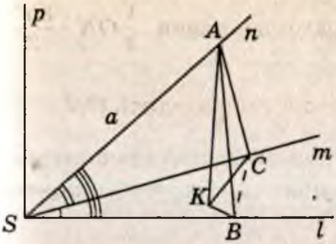


Рис. 119

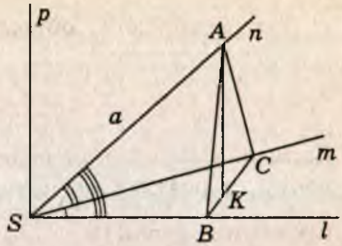


Рис. 120

Из прямоугольных треугольников ACS и ABS легко находим $SC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SB = \frac{a}{2}$. Однако если соединить точки B и C и рассмотреть треугольник CBS, то по теореме косинусов определяется $CB = \frac{a}{2}$, т. е. $CB = SB$. Поскольку $\angle CSB = 45°$, то равнобедренный треугольник CBS имеет при вершине B *прямой* угол. Но выше было отмечено, что $\angle KBS = 90°$, и мы совершенно неожиданно пришли к противоречию.

Лишь немногие смогли выбраться из этого противоречия, хотя дело обстоит не так уж сложно. Из приведенных рассуждений следует, что конфигурация, изображенная на рисунке 119, в действительности места не имеет: точка K на самом деле должна лежать на прямой CB (рис. 120).

Однако, поместив точку K на отрезок CB, мы обнаружим другое противоречие: так как $CK \perp m$ и $BK \perp l$, то в треугольнике SBC два прямых угла.

Как разрешить получившееся противоречие? Для этого из прямоугольных треугольников ACS и ABS найдем $AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Вспоминая, что $CB = \frac{a}{2}$, убеждаемся, что по теореме, обратной к теореме Пифагора, треугольник ABC — прямоугольный с прямым углом ACB.

Таким образом, и конфигурация, изображенная на рисунке 120, также не имеет места: точки K и C совпадают, т. е. перпендикуляр AC к прямой m одновременно перпендикулярен ко всей плоскости mSl.

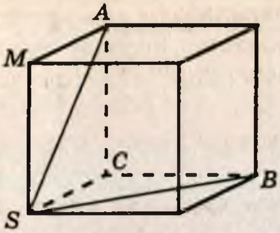


Рис. 121

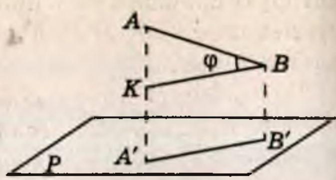


Рис. 122

Но в этом случае очевидно, что $AC \parallel p$, т. е. прямые p и AC лежат в одной плоскости. Поскольку $\angle ASC = 45°$, то искомый угол между прямыми p и n, т. е. угол nSp, равен 45°.

Отметим, что при наличии достаточно развитого геометрического воображения можно найти очень короткое чисто геометрическое решение этой задачи, не требующее никаких вычислений. Рассмотрим куб (рис. 121). Если заметить, что трехгранный угол $SABC$ является как раз тем трехгранным углом, о котором идет речь в условии, а ребро SM этого куба — перпендикуляром к грани BSC, то очевидно, что угол MSA — искомый и равен 45°.

Остановимся еще на понятии ортогональной проекции. *Если расположенный в пространстве отрезок AB ортогонально проецируется на некоторую плоскость P, то длина проекции $A'B'$ связана с длиной отрезка AB соотношением*

$$A'B' = AB\cos\varphi, \qquad (1)$$

где φ — угол между прямой AB и плоскостью P[1] (рис. 122). Если через точку B провести прямую BK, параллельную проекции $A'B'$, то формула (1) очевидным образом следует из рассмотрения прямоугольного треугольника AKB, так как угол ABK — угол между прямой AB и плоскостью P.

Формула (1) показывает, что длина проекции отрезка никогда не может превзойти длины самого отрезка и

[1] Если прямая и плоскость параллельны, то угол между ними считается (по определению) равным нулю.

равна его длине, если отрезок параллелен плоскости, на которую производится проецирование. Если же отрезок перпендикулярен к этой плоскости, то его проекцией является точка.

Часто при решении задач оказывается полезным следующее предложение: *если S — площадь плоского многоугольника, а $S_{пр}$ — площадь его проекции на некоторую плоскость P, то*

$$S_{пр} = S \cos\alpha, \tag{2}$$

где α — угол между плоскостью P и плоскостью рассматриваемого многоугольника. При этом угол между двумя (пересекающимися) плоскостями измеряется линейным углом острого двугранного угла, образованного рассматриваемыми плоскостями; если плоскости параллельны, то угол между ними считается (по определению) равным нулю.

Докажем сначала формулу (2) для треугольника (рис. 123). Пусть треугольник ABC ортогонально проецируется на плоскость P; получаем треугольник $A'B'C'$. (Если проекцией служит отрезок, то это значит, что плоскость треугольника ABC перпендикулярна к плоскости P, и доказываемая формула будет очевидна, если считать, что площадь треугольника, вырождающегося в отрезок, равна нулю.) Из трех вершин треугольника ABC пусть вершина B обладает тем свойством, что $AA' > BB' > CC'$. (Случаи $AA' = BB' \neq CC'$ и $AA' = BB' = CC'$ трудностей не представляют.)

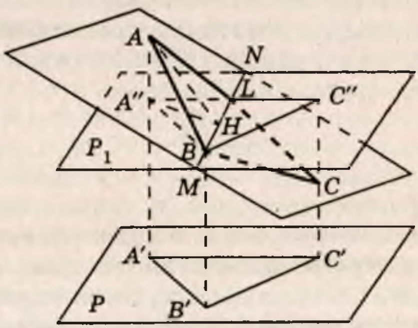


Рис. 123

Проведем через точку B плоскость P_1, параллельную плоскости P; проекция треугольника ABC на плоскость P_1 — треугольник $A''BC''$, равный треугольнику $A'B'C'$. Линия MN пересечения плоскости P_1 с плоскостью треугольника ABC разбивает этот треугольник на два: ΔABL и ΔBLC.

Опустим в плоскости треугольника ABC перпендикуляр AH из точки A на сторону BL; тогда по теореме о трех перпендикулярах $A''H \perp BL$, а потому

$$S_{\Delta ABL} = \frac{1}{2} BL \cdot AH; \quad S_{\Delta A''BL} = \frac{1}{2} BL \cdot A''H.$$

Однако угол между прямой AH и плоскостью P_1 как раз равен углу α между плоскостью треугольника ABC и плоскостью P_1 (или плоскостью P). Поэтому $A''H = AH \cos\alpha$ и, следовательно,

$$S_{\Delta A''BL} = \frac{1}{2} BL \cdot A''H = \frac{1}{2} BL \cdot AH \cos\alpha = S_{\Delta ABL} \cos\alpha.$$

Точно такое же рассуждение проходит для треугольников BCL и $BC''L$; таким образом, окончательно

$$S_{\text{пр}} = S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta A''BC''} = S_{\Delta ABC} \cos\alpha = S \cos\alpha.$$

Если проецируемая фигура — многоугольник, то, разбивая его и его проекцию на треугольники и суммируя результаты для каждой пары треугольников, мы придем к доказываемой формуле (2).

Формулу (2) удобно использовать для вычисления площадей сечения различных тел, боковых поверхностей, углов между плоскостями и т. п. Например, если известны площадь s основания *правильной* n-угольной пирамиды и угол α наклона боковой грани к плоскости основания, то боковая поверхность

$$S = \frac{s}{\cos\alpha}.$$

Если же пирамида усеченная, то в качестве s надо взять разность площадей большего и меньшего оснований.

Нетрудно сообразить, что этот факт справедлив и для любой неправильной пирамиды, лишь бы все ее боковые грани были наклонены к плоскости основания под *одним и тем же углом* α.

Задачи

1. Доказать, что если прямая образует равные углы с каждой из трех попарно не параллельных прямых, лежащих в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

2. В правильном тетраэдре определить угол между скрещивающимися ребрами и двугранный угол между гранями. Найти расстояние между скрещивающимися ребрами, если сторона тетраэдра равна a.

3. Справедливо ли утверждение, что если L и l — скрещивающиеся прямые, то через прямую L можно провести единственную плоскость, параллельную прямой l? Выяснить, является ли правильным такое его доказательство: «На прямой L возьмем точку A и проведем через эту точку прямую L^*, параллельную прямой l. Плоскость π, проходящая через пересекающиеся прямые L и L^*, очевидно, параллельна прямой l. Поскольку через точку A можно провести только одну прямую L^*, параллельную прямой l, и поскольку через две пересекающиеся прямые L и L^* можно провести только одну плоскость, то через прямую L можно провести единственную плоскость, параллельную прямой l»?

4. Если L и l — две скрещивающиеся прямые, то всегда ли можно построить плоскость, содержащую L и перпендикулярную к l?

5. Всегда ли существует прямая, перпендикулярная к трем данным попарно скрещивающимся прямым?

6. Всегда ли существует прямая, пересекающая все три данные попарно скрещивающиеся прямые?

7. Существуют ли в пространстве четыре попарно взаимно перпендикулярные скрещивающиеся прямые?

8. В кубе с ребром a проведен общий перпендикуляр двух скрещивающихся диагоналей смежных граней. Найти длины отрезков, на которые он делит указанные диагонали граней.

9. Могут ли две несмежные боковые грани многоугольной пирамиды быть перпендикулярны к плоскости основания?

10. Пусть A, B, C, D — четыре произвольные точки пространства. Доказать, что середины отрезков AB, BC, CD, DA лежат в одной плоскости. Какая фигура получится, если середины этих отрезков последовательно соединить между собой?

11. Из некоторой точки ребра двугранного угла α, $0° < \alpha < 90°$, исходят два луча, расположенных в разных гранях. Один из этих лучей перпендикулярен к ребру двугранного угла, а другой образует с ребром острый угол β. Найти угол между этими лучами.

12. В прямоугольном треугольнике через биссектрису прямого угла проведена плоскость, которая составляет с плоскостью треугольника угол α. Какие углы она составляет с катетами треугольника?

13. Высота треугольной пирамиды $ABCD$, опущенная из вершины D, проходит через точку пересечения высот треугольника ABC. Кроме того, известно, что $DB = b$, $DC = c$, $\angle BDC = 90°$. Найти отношение площадей граней ADB и ADC.

14. Внутри трехгранного угла, все плоские углы которого равны α, проходит прямая, одинаково наклоненная к его ребрам. Найти угол наклона этой прямой к каждому ребру трехгранного угла.

15. В плоскости P задан равносторонний треугольник ABC со стороной a. На перпендикуляре к плоскости P в точке A откладывается отрезок $AS = a$. Найти тангенс острого угла между прямыми AB и SC и кратчайшее расстояние между ними.

16. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на ее боковую грань опущен перпендикуляр, равный a. Найти объем пирамиды, если плоский угол при вершине этой пирамиды равен α.

17. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный p. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α.

18. У трехгранного угла $OABC$ угол между гранями OAB и OBC прямой, а величина каждого из остальных двугранных углов равна γ. Найти величину плоского угла AOC.

19. Двугранный угол между плоскостями P и Q равен α. В плоскости P лежит квадрат со стороной 1. Доказать, что периметр проекции этого квадрата на плоскость Q наибольший, когда диагональ квадрата параллельна плоскости Q.

20. Угол между двумя скрещивающимися прямыми равен 60°. Точка A лежит на одной прямой, а точка B — на другой, причем расстояния от каждой из этих точек до общего перпендикуляра скрещивающихся прямых одинаковы и равны расстоянию между прямыми. Найти угол между общим перпендикуляром и прямой AB. Обратить внимание на возможность неоднозначного решения задачи.

21. В шаре проведен диаметр AB и две равные хорды AM и AN, каждая под углом α к диаметру. Найти угол между хордами, если отрезок MN виден из центра шара под углом β.

22. Дан прямой круговой конус с вершиной S и центром основания O. Угол при вершине S осевого сечения конуса равен β.

Через вершину S конуса проходит ребро двугранного угла, равного α. Грани этого угла касаются боковой поверхности конуса по образующим SA и SB, где A и B — точки окружности основания конуса. Найти угол AOB.

23. Два равных прямых круговых конуса с общей вершиной S, высотой h и радиусом основания R, $R < h$, касаются друг друга и плоскости P. Пусть l — прямая, по которой пересекаются плоскости оснований конусов. Вычислить угол между прямой l и плоскостью P.

24. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно к плоскости грани ABC, двугранный угол с ребром SC равен $\frac{\pi}{4}$, $SA = BC = a$ и угол ABC прямой. Найти длину ребра AB.

25. Два прямых круговых конуса имеют общую вершину. Угол между осью и образующей одного конуса равен α, а его образующая является осью второго конуса, у которого угол между осью и образующей равен β, причем $\alpha < \beta$. Вычислить угол между двумя лучами, по которым пересекаются боковые поверхности этих конусов.

26. В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы при вершине S являются острыми и равны: $\angle BSC = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$. Известны боковые ребра: $SA = a$, $SB = b$. Найти площадь проекции грани ASB на плоскость грани ASC.

27. Основание AC и вершина B равнобедренного треугольника ABC находятся на различных гранях прямого двугранного угла с ребром l. Точки A и B удалены от l на расстояние a, а проекция C на ребро l равноудалена от проекций A и B на ребро l. Найти расстояние от точки C до l, если AB образует с l угол, равный $60°$.

28. В двугранный угол величиной $60°$ вписан шар радиуса R. Найти радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося данного шара, если известно, что прямая, соединяющая центры обоих шаров, образует с ребром двугранного угла угол $45°$.

29. Все грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а высота пирамиды совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найти объем пирамиды, если расстояние между наибольшими противоположными ребрами равно 1.

30. Основание четырехугольной пирамиды — квадрат, а все боковые грани — прямоугольные треугольники, у которых вершины прямых углов лежат на основании пирамиды. Найти объем пирамиды, если ее высота равна единице, а один из двугранных углов при вершине равен $120°$.

31. Пусть AB, AC и AD — ребра куба. Через вершину B и середины ребер AC и AD проведена плоскость P. Какую часть объема шара, касающегося всех ребер куба в их серединах, составляет объем меньшей из двух частей, на которые этот шар делится плоскостью P?

32. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Ребро куба равно a. Точка E — центр грани $A'D'DA$. Найти радиус меньшей из двух сфер, проходящих через точки A и E и касающихся граней двугранного угла, образованного плоскостями $BB'C'C$ и $DD'C'C$.

33. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Ребро куба равно a. Точка E — середина ребра $A'D'$, точка F — середина ребра AA'. Найти радиус меньшей из двух сфер, проходящих через точки E и F и касающихся граней двугранного угла, образованного плоскостями $BB'C'C$ и $DD'C'C$.

34. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — ее вершина). Сторона основания этой пирамиды равна a, высота пирамиды равна $a\sqrt{7/2}$. Пусть E — середина стороны основания AB, F — середина SB, G — середина SC (B и C — соседние вершины основания пирамиды). Найти расстояние от центра шара, описанного около пирамиды $SABCD$, до плоскости, проведенной через точки E, F, G и H, где H — середина CD.

35. Точки K и M являются серединами ребер AB и AC треугольной пирамиды $ABCD$ с площадью основания p. Найти площадь грани BCD, если сечение DKM имеет площадь q, а основание высоты пирамиды попадает в точку пересечения медиан основания ACB.

36. В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине A, B и C равны 180°. Найти расстояние между скрещивающимися ребрами SA и BC, если известно, что $BC = 4$, $AC = 5$, $AB = 6$.

37. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро $DC = 9$, $DB = AD$, а ребро AC перпендикулярно к грани ABD. Сфера радиуса 2 касается грани ABC, ребра DC, а также грани DAB в точке пересечения ее медиан. Найти объем пирамиды.

38. В треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, треугольник ABC — основание пирамиды) грань SAC перпендикулярна к грани ABC. Кроме того, $SA = SC = 1$, а угол при вершине B треугольника ABC — прямой. Шар касается плоскости основания пирамиды в точке B и грани SAC — в точке S. Найти радиус шара.

39. Дана пирамида $SABC$ (S — вершина, треугольник ABC — основание пирамиды), в которой ребро AC перпендикулярно к грани SAB. Шар касается грани ASC в точке S и грани ABC — в точке B. Найти радиус шара, если $AC = 1$, $\angle ACB = \angle BCS = 60°$.

40. В правильную треугольную пирамиду с ребром основания длины a и двугранным углом при основании, равным 60°, вложено три шара одинакового радиуса так, что каждый шар касается двух других, плоскости основания и двух боковых граней пирамиды Найти радиус каждого шара.

41. В треугольнике ABC угол ACB — прямой, $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$, $BC = m$. На перпендикуляре к отрезку AC, проходящем в пространстве через точку A, взята точка D так, что $AD = m$. Полуплоскости, которым принадлежат треугольники ABC и ACD, образуют двугранный угол, равный $\frac{\pi}{3}$. Шар касается отрезка AB в такой точке K, что $AK = \frac{5}{6}AB$, и касается отрезка CD в такой точке L, что $CL = \frac{5}{6}CD$. Найти радиус шара.

42. Два равных треугольника KLN и LMN имеют общую сторону LN, $\angle LNK = \angle NLM = \frac{\pi}{6}$, $LN = 2\sqrt{3}\,b$, $KN = LM = 12b$. Плоскость KLN перпендикулярна к плоскости LMN. На отрезке KN взята такая точка P, что $KP = \frac{1}{3}KN$, а на отрезке LM взята такая точка Q, что $QM = \frac{1}{3}LM$. Шар касается отрезка KN в точке P и касается отрезка LM в точке Q. Найти радиус шара.

43. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Скрещивающиеся ребра AB и CD этой пирамиды перпендикулярны, а скрещивающиеся ребра AC и BD перпендикулярны и равны между собой. Все ребра этой пирамиды касаются некоторого шара. Найти его радиус, если длина ребра BC равна a.

44. Все ребра треугольной пирамиды $ABCD$ касаются некоторого шара. Три отрезка, соединяющих середины скрещивающихся ребер AB и CD, AC и BD, AD и BC, равны; $\angle ABC = 100°$. Найти отношение высот пирамиды, опущенных из вершин A и B.

45. Сфера радиуса $\frac{3}{8}$ вписана в четырехугольную пирамиду $SABCD$, у которой основанием служит ромб $ABCD$ такой, что $\angle BAD = 120°$; высота пирамиды проходит через точку K пересечения диагоналей ромба, а ребро SB наклонено к основанию под углом $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}$. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и AD в некоторых точках M и N таких, что $MN = \frac{2}{7}\sqrt{3}$, касающаяся сферы в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N и пересекающая продолжение отрезка SK за точку K в некоторой точке E. Найти длину отрезка SE.

§ 5. Комбинации тел

Широко распространены на вступительных экзаменах задачи по стереометрии, в которых рассматриваются различные комбинации тел. При решении таких задач необходимо хорошо представлять себе взаимное расположение тел в пространстве, четко выполнять чертеж, аккуратно доказывать все утверждения. Очень полезными оказываются и вспомогательные плоские чертежи — вынос планиметрических конфигураций, изображение которых искажено пространственной перспективой.

Рассмотреть все комбинации геометрических тел практически невозможно, и потому в настоящем параграфе мы ограничимся подробным рассмотрением только случая, когда одно из тел — шар. Именно в таких задачах обычно возникают особенные затруднения с чертежом. Однако надо сразу же отметить, что изображение самого шара часто бывает излишним — достаточно лишь указать его центр и точки касания с различными плоскостями и прямыми.

Сначала остановимся на конфигурации, состоящей из пирамиды и *вписанного* в нее шара.

Определение. *Шар называется **вписанным** в (произвольную) пирамиду, если он касается всех граней пирамиды (как боковых, так и основания).*

Таким образом, центр O *вписанного* шара (рис. 124) — точка, равноудаленная от всех *граней пирамиды*. Иначе говоря, если из центра вписанного шара опустить перпендикуляры OA, OB, OC, ... на грани пирамиды, то все эти перпендикуляры будут иметь одну и ту же длину. Сами же точки A, B, C, ... — основания перпендикуляров — являются точками касания вписанного шара с гранями пирамиды.

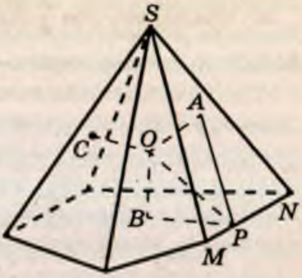


Рис. 124

Отметим дополнительно следующий факт. Если из точек A и B, лежащих на гранях, пересекающихся по ребру MN пирамиды, опустить перпендикуляры на это ребро, то их основанием будет одна и та же точка.

Действительно, отрезок OB перпендикулярен к плоскости основания, а потому $OB \perp MN$ (см. § 4 раздела III); отрезок OA перпендикулярен к плоскости MSN, а потому $OA \perp MN$. Следовательно, ребро MN перпендикулярно к плоскости, проведенной через пересекающиеся прямые OA и OB. Если P — точка пересечения этой плоскости с ребром MN (отметим, что она может лежать и на *продолжении* этого ребра), то $AP \perp MN$, $BP \perp MN$. Следовательно, P есть общее основание перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ребро MN. Конечно, все рассуждения останутся справедливыми, если вместо ребра основания взять боковое ребро пирамиды.

Теорема. *Если в пирамиду вписан шар, то его центр является точкой пересечения биссектральных плоскостей всех двугранных углов пирамиды.*

В самом деле, любая точка, равноудаленная от обеих граней двугранного угла, лежит на его биссектральной плоскости (см. § 1, А раздела III). Поэтому центр вписанного шара, будучи равноудален от всех граней пирамиды, должен находиться в каждой из биссектральных плоскостей, т. е. он является точкой пересечения биссектральных плоскостей всех двугранных углов.

Верно и обратное утверждение: *в пирамиду можно вписать шар, если биссектральные плоскости всех ее* *двугранных углов пересекаются в одной точке.* Конечно, в общем случае ниоткуда не следует, что все биссектральные плоскости пересекаются в одной точке. Нетрудно придумать пример такой четырехугольной пирамиды, у которой нет точки, *общей* всем восьми биссектральным плоскостям; в такую пирамиду шар вписать нельзя. Однако легко доказать, что: 1) *в любую треугольную пирамиду можно вписать шар*; 2) *в правильную n-угольную пирамиду можно вписать шар.*

Центр вписанного в пирамиду шара всегда лежит внутри пирамиды, так как все точки биссектральной плоскости лежат *между* гранями двугранного угла. Более точно указать местоположение центра вписанного шара в случае произвольной пирамиды нельзя. Однако, например, *в правильной пирамиде центр вписанного шара лежит на ее высоте*, убедиться в этом совсем просто. Следовательно, центр шара, вписанного в правильную пирамиду, есть точка пересечения биссектральной плоскости любого двугранного угла при основании пирамиды с ее высотой.

Подчеркнем, наконец, что если вписанный в пирамиду шар ортогонально спроецировать на плоскость основания пирамиды, то получающийся в проекции круг не будет вписан в многоугольник, лежащий в основании пирамиды.

Следующая задача дает представление о том, как нужно исчерпывающе проводить решение задач на комбинации пирамиды и шара (и других подобных задач). Она интересна еще и тем, что рассматриваемая в ней пирамида «плохая» — в ее основании лежит не правильный многоугольник, как это часто бывает, а трапеция.

1 *В четырехугольную пирамиду PABCD вписан шар, касающийся всех ее граней. Основанием пирамиды является равнобочная трапеция ABCD с боковой стороной AB = 1 и острым углом φ, а боковые грани APD и BPC — равнобедренные треугольники (AP = PD, BP = PC), образующие с основанием пирамиды один и тот же угол α. Найти радиус вписанного шара.*

Пусть *PABCD* (рис. 125) — пирамида, в основании которой лежит равнобочная трапеция *ABCD*; согласно условию $AB = CD = l$, $\angle BAD = \angle ADC = \varphi$. Боковые грани пирамиды APD и BPC — равнобедренные треугольники: $AP = PD$, $BP = PC$; их основания являются одновременно основаниями трапеции.

Проведем апофему PK грани APD и высоту PH пирамиды. Тогда ребро AD, будучи перпендикулярным двум пересекающимся прямым PH и PK, перпендикулярно к плоскости HPK; $BC \parallel AD$ и потому ребро BC перпендикулярно к плоскости HPK и, в частности, к линии PL пересечения этой плоскости с гранью BPC (т. е. PL — апофема). Поэтому $\angle PLK$ и $\angle PKL$ — линейные углы двугранных углов между основанием и боковыми гранями BPC и APD соответственно; по условию $\angle PLK = \angle PKL = \alpha$.

В данную пирамиду по условию вписан шар; требуется найти его радиус. Центр вписанного шара лежит на линии пересечения биссектральных плоскостей двугранных углов между плоскостями BPC и APD и между плоскостями APB и CPD. Докажем, что этой линией пересечения как раз и является высота PH пирамиды. Для этого достаточно показать, что высота PH лежит в *каждой* из этих биссектральных плоскостей.

Сначала докажем, что PH лежит в биссектральной плоскости двугранного угла между плоскостями BPC и APD. Так как плоскость LPK перпендикулярна к плоскости APD (плоскость APD проходит через перпендикуляр AD к плоскости LPK) и к плоскости BPC (по аналогичным причинам), то плоскость LPK перпендикулярна к линии пересечения плоскостей APD и BPC и, следовательно, угол LPK есть линейный угол двугранного угла между гранями BPC и APD. Но $\angle PLK = \angle PKL$, поэтому треугольник PKL равнобедренный и высота PH одновременно является и его биссектрисой. Как известно, биссектриса линейного угла, соответствующего двугранному углу, лежит в биссектральной плоскости двугранного угла.

Теперь докажем, что PH лежит в биссектральной плоскости двугранного угла между плоскостями APB и DPC. Убедимся, что такой биссектральной плоскостью является плоскость LPK; для этого покажем, что расстояние от произвольной точки S (точка S на рис. 125 не

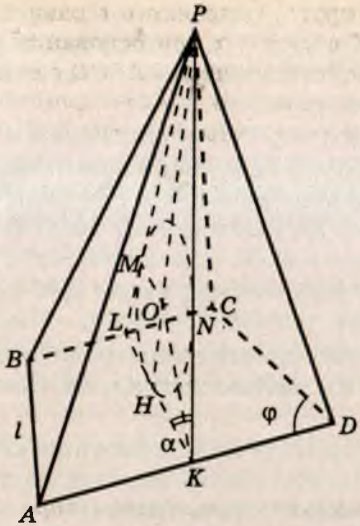


Рис. 125

изображена) плоскости LPK до граней APB и DPC одно и то же. Соединим мысленно точку S с вершинами P, A, B, C и D пирамиды. Так как $V_{PABLK} = V_{PDCLK}$ (у этих пирамид одна и та же высота PH и равные основания $ABLK$ и $DCLK$) и (по таким же причинам)

$$V_{SABLK} = V_{SDCLK}, \quad v_{SAPK} = v_{SDPK} > v_{SBPL} = v_{SCPL},$$

то $V_{SABP} = v_{SDCP}$. Однако из равенства объемов пирамид $SABP$ и $SDCP$ в силу равенства треугольников ABP и DCP (по трем сторонам) следует равенство высот, опущенных из точки S соответственно на грани ABP и DCP. Итак, LPK — биссектральная плоскость, и высота PH лежит в этой плоскости.

Таким образом, центр вписанного шара — обозначим его буквой O — действительно лежит на высоте PH.

Рассмотрим теперь равнобедренный треугольник LPK. В него вписан большой круг нашего шара, ибо эта плоскость проходит через центр шара. (Из сказанного выше следует, что шар касается пирамиды в точке H и в точках M и N, лежащих на апофемах PL и PK.) Задача сводится, таким образом, к планиметрической задаче:

найти радиус круга, вписанного в равнобедренный треугольник LPK с углом α при основании LK, где LK — высота равнобочной трапеции $ABCD$ с острым углом φ и боковой стороной l и потому имеет длину $l \sin \varphi$.

Так как центр вписанного круга лежит в точке пересечения биссектрис, то $\angle OKH = \frac{\alpha}{2}$, а потому искомый радиус

$$r = OH = KH \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1}{2} l \sin \varphi \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

В следующей задаче используется тот факт, что центр любого шара, касающегося только боковых граней правильной треугольной пирамиды, лежит на высоте этой пирамиды.

(2) *В правильной треугольной пирамиде расположены два шара Q_1 и Q_2. Шар Q_1 вписан в пирамиду; шар Q_2 касается внешним образом шара Q_1 и боковых граней пирамиды. Радиус шара Q_1 равен 3, радиус шара Q_2 равен 2. Найти объем пирамиды и величину двугранного угла, образованного боковыми гранями пирамиды.*

Прежде всего покажем, что центр любого шара, касающегося только боковых граней правильной треугольной пирамиды, лежит на высоте пирамиды, опущенной на плоскость основания.

Пусть $SABC$ (рис. 126) — правильная треугольная пирамида, т. е. $AB = BC = AC$ и $AS = BS = CS$, SK — высота этой пирамиды, опущенная на плоскость основания ABC. Тогда точка K есть точка пересечения высот треугольника ABC.

Пусть AD — одна из этих высот. Из вершин B и C опустим перпендикуляры на ребро AS. Оба эти перпендикуляра пересекут ребро AS в одной и той же точке L, поскольку $\Delta SCL = \Delta SBL$ (ибо $AC = AB$, $\angle SAB =$

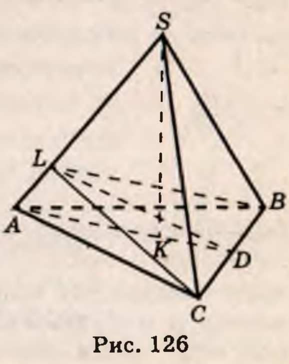


Рис. 126

$= \angle SAC$, $\angle BLS = \angle CLS = 90°$). Значит, $CL = BL$. Но тогда угол BLC есть линейный угол двугранного угла между плоскостями ASC и ASB.

Соединив точки L и D, убедимся, что $\Delta CDL = \Delta LDB$ (ибо $CD = DB$, $LC = LB$, LD — общая сторона), откуда следует, в частности, что $\angle DLC = \angle DLB$, т. е. что LD — биссектриса угла BLC. А это и означает, что плоскость ADS есть биссектральная плоскость двугранного угла между плоскостями ACS и ABS.

Аналогично показывается, что плоскость SKB есть биссектральная плоскость двугранного угла между плоскостями ABS и BCS. Поскольку центр шара, касающегося плоскостей ABS, BCS и ACS, лежит в биссектральных плоскостях двугранных углов между этими плоскостями, то он лежит и на линии их пересечения. А так как плоскости SKB и ADS пересекаются по прямой SK — высоте пирамиды $SABC$, то центр любого шара, касающегося трех плоскостей ABS, BCS и ACS, лежит на высоте SK пирамиды. Значит, и центры O_1 и O_2 шаров Q_1 и Q_2 лежат на высоте SK (на рис. 126 центры не показаны).

Если теперь из любой точки высоты SK опустить перпендикуляр на прямую SD, то он будет перпендикулярен к плоскости BCS, так как лежит в плоскости, перпендикулярной ребру BC. Поэтому перпендикуляры O_1M_1 и O_2M_2, опущенные из точек O_1 и O_2 на прямую SD, будут перпендикулярны к плоскости BCS, т. е. точки M_1 и M_2 — точки касания шаров Q_1 и Q_2 с плоскостью BCS. Поэтому $O_1M_1 = 3$, $O_2M_2 = 2$. Если из точки O_1 опустить перпендикуляр на плоскость ABC, то его основание — точка K — будет точкой касания шара Q_1 с плоскостью ABC; поэтому $O_1K = 3$.

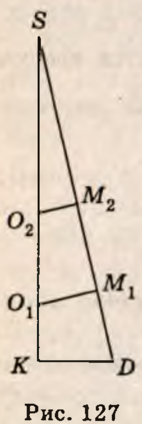


Рис. 127

Поскольку центры шаров Q_1 и Q_2 расположены на одной прямой, то точка их касания также лежит на этой прямой, а потому $Q_1Q_2 = 5$.

Вынесем на отдельный чертеж (рис. 127) плоскость KSD. Поскольку $KD \perp SK$, $O_1M_1 \perp SD$, $O_2M_2 \perp SD$, то

$$\Delta KDS \sim \Delta O_1M_1S \sim \Delta O_2M_2S.$$

Из подобия треугольников O_1M_1S и O_2M_2S вытекает

$$O_2M_2 : O_1M_1 = O_2S : O_1S,$$

откуда находим $O_2S = 10$; но тогда легко видеть, что $KS = 18$, $SM_2 = \sqrt{96}$. Из подобия треугольников O_2M_2S и KDS следует

$$O_2M_2 : SM_2 = KD : SK,$$

откуда $KD = \frac{3}{2}\sqrt{6}$. Поскольку треугольник ABC правильный, то $KD = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,AB$; поэтому $AB = 9\sqrt{2}$.

Теперь легко найти объем пирамиды:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}SK \cdot S_{\Delta ABC} = 243\sqrt{3}.$$

Определим еще величину двугранного угла, образованного гранями ACS и ABS. Ясно, что для этого надо найти величину линейного угла BLC.

В прямоугольном треугольнике AKS известны оба катета $KS = 18$ и $AK = 3\sqrt{6}$, поэтому гипотенуза $AS = 3\sqrt{42}$. Таким образом, в треугольнике ASC определены все три стороны; но тогда легко находится высота этого треугольника $CL = \frac{45}{14}\sqrt{14}$. Наконец, из треугольника CDL находим: $\sin(\angle DLC) = \frac{\sqrt{7}}{5}$, так что искомый угол равен $2 \arcsin \sqrt{\frac{7}{5}}$.

Перейдем теперь к случаю, когда шар *описан* около пирамиды.

Определение. *Шар называется* ***описанным*** *около (произвольной) пирамиды, если все вершины пирамиды лежат на его поверхности.*

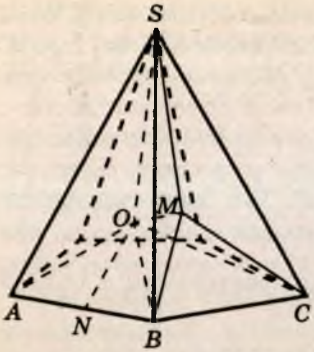


Рис. 128

Таким образом, центр O описанного шара (рис. 128) — точка, равноудаленная от всех *вершин пирамиды*. Иначе говоря, если центр описанного шара соединить с вершинами S, A, B, C, ... пирамиды, то все отрезки OS, OA, OB, OC, ... будут иметь одну и ту же длину.

Отметим дополнительно следующее. Если из центра O описанного шара опустить перпендикуляр OM на грань BSC, то основанием этого перпендикуляра будет центр окружности, описанной около грани BSC. В самом деле, $MS = MB = MC$, как проекции равных наклонных OS, OB и OC на плоскость BSC. (Повторив это рассуждение для основания пирамиды, легко убедиться, что около многоугольника основания можно описать окружность.) Таким образом, если около пирамиды описан шар, то его центр лежит на пересечении перпендикуляров, восставленных к каждой из граней пирамиды в центре круга, описанного около этой грани.

Заметим также, что если из точки O опустить перпендикуляр на какое-нибудь ребро, скажем, AB, то основание N этого перпендикуляра будет серединой ребра AB.

Теорема. *Если около пирамиды описан шар, то его центр является точкой пересечения всех плоскостей, проведенных через середины ребер пирамиды перпендикулярно к этим ребрам.*

Действительно, любая точка, равноудаленная от двух вершин пирамиды, прилежащих к одному ребру, лежит в плоскости, проведенной перпендикулярно к этому ребру пирамиды через его середину (см. § 1, А раздела III). Поэтому центр описанного шара, будучи равноудаленным от всех вершин пирамиды, должен находиться в каждой из таких плоскостей, т. е. он является точкой пересечения всех этих плоскостей.

Нетрудно придумать пример такой четырехугольной пирамиды, вокруг которой описать шар нельзя. Вообще, *вокруг пирамиды можно описать шар, если можно опи-*

сать окружность около многоугольника, лежащего в основании пирамиды. Отсюда вытекает, что: 1) *вокруг любой треугольной пирамиды можно описать шар*; 2) *вокруг правильной n-угольной пирамиды можно описать шар.* Доказываются эти утверждения достаточно легко.

При выполнении чертежа поступающие часто помещают центр описанного шара наугад, не представив себе достаточно хорошо данной пространственной конфигурации и тем более не проводя никаких рассуждений о положении этого центра. При этом, как правило, центр ставится внутри пирамиды. Между тем, центр описанного шара может лежать и внутри, и вне, и на поверхности пирамиды (в зависимости от конкретного вида пирамиды).

Однако, например, *в правильной пирамиде центр описанного шара лежит на ее высоте или на продолжении высоты за плоскость основания*; убедиться в этом совсем просто. Следовательно, центр шара, описанного около правильной пирамиды, есть точка пересечения высоты пирамиды с перпендикуляром, проведенным через середину любого бокового ребра и лежащим в плоскости, определяемой этим ребром и высотой пирамиды.

В следующей задаче главная трудность состоит именно в выяснении местоположения центра шара, описанного около пирамиды. В ходе проводимых рассуждений мы убедимся, что он лежит вне пирамиды.

3 *В треугольной пирамиде $SABC$ ребро BC равно a, $AB = AC$, ребро SA перпендикулярно к основанию ABC пирамиды, двугранный угол при ребре SA равен 2α, а при ребре BC равен β. Найти радиус описанного шара.*

Рассмотрим пирамиду $SABC$, о которой идет речь в условии задачи (рис. 129). Поскольку ребро SA перпендикулярно к плоскости основания, то $\angle BAS = \angle CAS = 90°$, а потому угол BAC как раз и является линейным углом двугранного угла при ребре SA. Таким образом, в основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом 2α при вершине, а высота пирамиды совпадает с ребром SA.

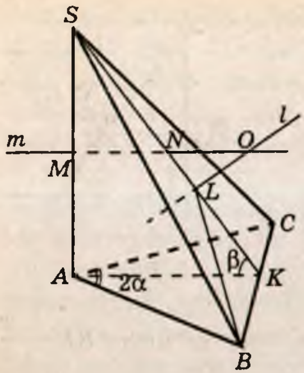


Рис. 129

Так как проекции боковых ребер SB и SC на плоскость основания равны, то и сами эти ребра равны. Поэтому грань BSC — равнобедренный треугольник, и его высота, опущенная из вершины S, попадает в середину K ребра BC. По теореме о трех перпендикулярах AK — высота треугольника BAC. Отсюда ясно, что угол SKA — линейный угол двугранного угла при ребре BC, т. е. $\angle SKA = \beta$.

Центр описанного шара лежит на пересечении прямой l, перпендикулярной к плоскости BSC и проходящей через центр окружности, описанной около треугольника BSC с плоскостью, проходящей через середину ребра AS перпендикулярно к нему. Прямая l лежит в плоскости ASK. В самом деле, плоскость BSC проходит через прямую BC, перпендикулярную к плоскости ASK, т. е. плоскости BCS и ASK перпендикулярны; в то же время прямая l перпендикулярна к плоскости BSC и проходит через линию пересечения этих плоскостей, так что она лежит в плоскости ASK.

Итак, центр шара лежит в плоскости ASK. Вынесем эту плоскость на специальный чертеж. Центр шара O будет тогда лежать на пересечении прямой l и прямой m, перпендикулярной к AS и проходящей через его середину.

Но, вообще говоря, могут представиться три возможности: прямые l и m пересекаются внутри или вне треугольника ASK или на его стороне, и нам придется рассмотреть все эти возможности (рис. 130, 131, 132). Ниже, в ходе выкладок, мы покажем, что две из них на самом деле не осуществляются.

Нас интересует радиус R описанного шара, т. е. расстояние от точки O — точки пересечения перпендикуляров m и l к сторонам угла KSA — до точки S, вершины этого угла.

Прежде всего отыщем SL — проекцию искомого расстояния на сторону SK треугольника KAS. Так как в

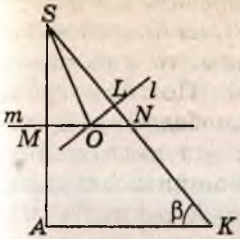


Рис. 130

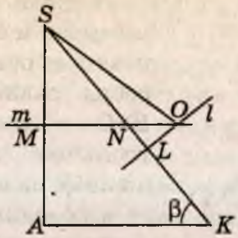


Рис. 131

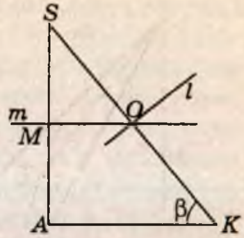


Рис. 132

треугольнике AKB (рис. 129) нам известен катет $BK = \frac{a}{2}$ и угол $KAB = \alpha$, то $AK = \frac{1}{2} a \operatorname{ctg} \alpha$. Далее из треугольника KAS имеем

$$SK = \frac{a \operatorname{ctg}\alpha}{2\cos\beta}.$$

Так как L — центр описанной около треугольника BSC окружности, то $LS = LB$, а потому из треугольника BKL находим, что $(SK - SL)^2 + KB^2 = SL^2$, откуда

$$SL = \frac{a(\operatorname{ctg}^2\alpha + \cos^2\beta)}{4\operatorname{ctg}\alpha\cos\beta}.$$

Отметив, что проведенные вычисления отрезка SL никак не зависели от местоположения центра O описанного шара, вернемся к рисункам 130, 131, 132. Обозначим через N точку пересечения прямой m со стороной SK. Ясно, что прямые l и m пересекаются в точке O, лежащей *вне* треугольника KAS, если $SN < SL$ (см. рис. 131); если же $SN > SL$, то точка O лежит *внутри* этого треугольника (см. рис. 130); наконец, если $SN = SL$, то точка O лежит *на стороне* SK этого треугольника (см. рис. 132). Выясним, какое из этих положений имеет место на самом деле.

Так как MN — средняя линия треугольника KAS, то $SN = \frac{1}{2} SK$. Сравнивая длины отрезков SN и SL, без труда докажем, что при любых a, α и β

$$\frac{a\operatorname{ctg}\alpha}{4\cos\beta} < \frac{a(\operatorname{ctg}^2\alpha + \cos^2\beta)}{4\operatorname{ctg}\alpha\cos\beta}$$

(из геометрических соображений следует, что $a > 0$, $0° < < \alpha < 90°$ и $0° < \beta < 90°$). Следовательно, каковы бы ни были размеры a, α и β пирамиды $SABC$, центр O описанного шара всегда лежит вне пирамиды. Это, в свою очередь, означает, что вынесенная нами плоская конфигурация в плоскости KAS может иметь лишь вид, указанный на рисунке 131; расположения, изображенные на рисунках 130 и 132, в действительности иметь места не могут.

Рассматривая рисунок 131, легко покажем, что $\angle ONL = \beta$, а потому $LO = NL \operatorname{tg} \beta = (SL - SN) \operatorname{tg} \beta$. Подставляя сюда полученные выше выражения для SL и SN, получаем после очевидных вычислений $LO = = \frac{1}{4} a \operatorname{tg} \alpha \sin \beta$. Наконец, из прямоугольного треугольника OLS находим

$$R = \sqrt{LO^2 + SL^2} = \frac{a}{2 \sin 2\alpha \cos\beta} \sqrt{\cos^2\beta + \sin^2\beta \cos^4\alpha}\ .$$

Если комбинации пирамиды со вписанным или описанным шаром поступающие обычно представляют себе удовлетворительно, то всевозможные иные случаи взаимного расположения пирамиды и шара вызывают у них почти непреодолимые трудности. Лишь немногие могут правильно представить себе пространственную конфигурацию, скажем, в случае шара, касающегося всех ребер треугольной пирамиды, шара, касающегося основания пирамиды и проходящего через ее вершину, шара, касающегося двух скрещивающихся ребер треугольной пирамиды, и т. п.

Нет возможности рассмотреть и исследовать все взаимные расположения шара и пирамиды, которые могут представиться в задачах. Поэтому ограничимся здесь лишь примерами.

4 *В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC, в котором $\angle BAC = 60°$, а угол ACB — прямой. Грань BDC образует угол в $60°$ с гранью ABC; $BD = 2$. Сфера касается ребер AB, AC и грани BCD. Центр сферы — точка O — лежит на основании пирамиды и отрезок OD перпендикулярен к плоскости основания пирамиды $ABCD$. Найти длину ребра AC.*

Из точки O опустим перпендикуляр OM на ребро BC (рис. 133). Соединив точки D и M, получим, что $DM \perp BC$. Действительно, так как DO — перпендикуляр к плоскости ABC, то, в частности, $OD \perp BC$; но по построению $OM \perp BC$. Значит, ребро BC перпендикулярно к двум пересекающимся прямым OD и OM в плоскости OMD, т. е. ребро BC перпендикулярно к плоскости OMD, а отсюда и вытекает, в частности, что $BC \perp DM$.

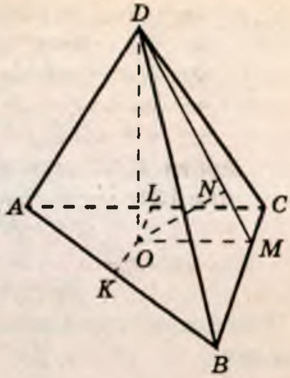


Рис. 133

Итак, угол OMD — линейный угол двугранного угла между плоскостями ABC и BCD, т. е. $\angle OMD = 60°$. Теперь из точки O опустим перпендикуляр ON на прямую DM. Поскольку ребро BC перпендикулярно к плоскости ODM, то, в частности, $BC \perp ON$. Значит, $ON \perp BC$ и $ON \perp DM$, т. е. ON есть перпендикуляр к плоскости BCD, т. е. N — точка касания сферы с гранью BCD.

Обозначим точки касания сферы с ребрами AB и AC через K и L, длину отрезка AC через x, радиус сферы через R; тогда $OK = OL = ON = R$.

Плоскость ABC высекает из сферы окружность, касающуюся ребер AB и AC в точках K и L соответственно. Поэтому $AK = AL$ как отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности. Поскольку, кроме того, $OK = ON$, $KO \perp AK$ и $OL \perp AL$, то $\Delta AKO = \Delta AOL$, откуда, в частности, вытекает, что $\angle KAO = \angle LAO$. Значит, AO — биссектриса угла CAB, а потому

$$\angle OAL = 30° \quad \text{и} \quad AL = AK = R \operatorname{tg} 30° = R\sqrt{3}.$$

Из прямоугольного треугольника ONM находим $OM = \frac{2}{3} R\sqrt{3}$, а из прямоугольного треугольника BMD

$$BM = \sqrt{4 - \frac{16}{3}R^2}.$$

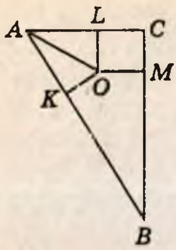


Рис. 134

Вынесем теперь на отдельный чертеж (рис. 134) прямоугольный треугольник ABC. Так как $OL \perp AC$ и $OM \perp BC$, то $CL = OM = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$, $MC = OL = R$. Поскольку $AC = AL + LC$, то $x = \frac{5}{3}R\sqrt{3}$. Но $\angle CAB = 60°$, а потому $BC = x\sqrt{3} = 5R$.

Используя равенство $BC = MB + MC$, получаем уравнение

$$5R = \sqrt{4 - \frac{16}{3}R^2} + R,$$

откуда $R = \frac{\sqrt{3}}{4}$ и, следовательно, $AC = \frac{5}{4}$.

(5) *Шар радиуса r касается всех ребер треугольной пирамиды. Центр шара лежит внутри пирамиды на ее высоте на расстоянии $r\sqrt{3}$ от вершины. Доказать, что пирамида правильная. Найти высоту пирамиды.*

Пусть M, N и L — точки касания шара с боковыми ребрами пирамиды $SABC$, а D, E и F — точки касания этого шара со сторонами основания (рис. 135). Буквой O обозначим центр шара; он лежит на высоте SK пирамиды. По определению касательных к шару:

$$ON \perp AS,\ \ OL \perp BS,\ \ OM \perp CS;$$

$$ON = OM = OL = r.$$

Отсюда следует, что прямоугольные треугольники SNO, SLO и SMO равны, а потому

$$SN = SL = SM \text{ и}$$

$$\angle NSO = \angle LSO = \angle MSO.$$

Последнее равенство позволяет нам заключить, что треугольники AKS, BKS и CKS равны между собой; следовательно, $AS = BS = CS$, т. е. у пирамиды $SABC$ все

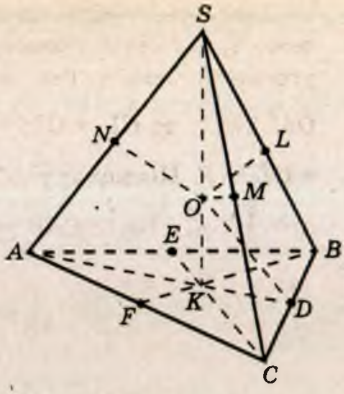


Рис. 135

боковые ребра одинаковы. Но этого, конечно, еще недостаточно, чтобы утверждать, что пирамида правильная.

Равенство боковых ребер и равенство отрезков SN, SL и SM показывают, что $AN = BL = CM$. Воспользуемся теперь тем, что касательные к шару, проведенные из одной точки, равны:

$$AN = BL = CM = AF = AE = BE = BD = CF = CD.$$

Отсюда вытекает, что точки D, E и F — середины ребер основания, а $AB = BC = CA$, т. е. треугольник ABC правильный. Равенство боковых ребер пирамиды влечет за собой равенство их проекций: $AK = BK = CK$, т. е. K — основание высоты — центр треугольника ABC.

Итак, пирамида $SABC$ — правильная. Найдем длину высоты SK.

Прямоугольные треугольники AKS и ONS, имеющие общий острый угол при вершине S, подобны, откуда

$$SK = AK \cdot \frac{NS}{NO}.$$

Обозначим длину высоты SK через h. Выше указано, что $ON = r$. Из прямоугольного треугольника SNO получаем $NS = r\sqrt{2}$, а потому $h = AK\sqrt{2}$, и нам остается найти еще одно соотношение между h и AK. Его можно получить из прямоугольного треугольника OKD. В этом треугольнике

$$KD = \frac{1}{2}AK, \quad OD = r \text{ и } OK = h - r\sqrt{3};$$

следовательно, $\frac{1}{4}AK^2 = r^2 - (h - r\sqrt{3})^2$.

Подставляя в последнее равенство $AK = \frac{h}{\sqrt{2}}$, получим квадратное уравнение относительно h, имеющее два положительных корня:

$$h_1 = \frac{4}{3}r\sqrt{3}, \quad h_2 = \frac{4}{9}r\sqrt{3}.$$

Второй корень, однако, не удовлетворяет условию задачи. В самом деле, центр шара должен лежать *внутри* пирамиды на ее высоте на расстоянии $r\sqrt{3}$ от вершины. Это означает, что высота пирамиды должна быть *больше* $r\sqrt{3}$, тогда как второй корень h_2 меньше $r\sqrt{3}$. Первый корень h_1 дает искомую высоту пирамиды $h = \frac{4}{3}r\sqrt{3}$.

Отметим, что и в этом случае мы обошлись без изображения шара на чертеже. Надо только хорошо представлять себе, что шар, о котором идет речь в задаче, «вылезает» за пределы пирамиды, пересекаясь с ее гранями (многие поступающие почему-то пытались изобразить шар, касающийся граней!).

6 *Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром $a\sqrt{2}$. Сфера проходит через точку A и касается боковых ребер SB и SC в их серединах. Найти радиус этой сферы.*

И в этой задаче попытка изобразить всю конфигурацию не облегчает решения задачи; можно использовать лишь сам факт касания.

Наиболее просто эта задача решается при помощи планиметрической теоремы *квадрат касательной к ок-*

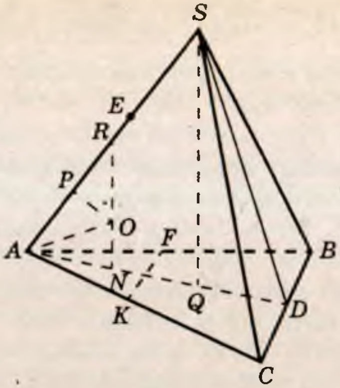


Рис. 136

ружности равен произведению секущей на ее внешнюю часть.

Зная, что сфера касается ребра SC в его середине и проходит через вершину A, находим еще две точки, в которых сфера пересекает ребра AC и AS (рис. 136). Действительно, плоскость ACS пересекает сферу по окружности, касающейся прямой CS (в середине CS) и проходящей через точку A. Применяя только что сформулированную теорему, находим, что эта окружность пересекает ребро AC в его середине — точке K, а ребро AS в точке E такой, что $SE = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$.

Аналогичные рассуждения с плоскостью ABS позволяют найти еще две точки пересечения сферы с ребрами AB и AS: точку F — середину ребра AB и ту же точку E на ребре AS.

Теперь можно найти радиус сферы, используя лишь точки A, K, F и E.

Так как сфера проходит через точки A, K и F, то центр сферы лежит на перпендикуляре к плоскости AKF, восставленном из центра треугольника AKF. Поскольку точка N (центр треугольника AKF) лежит на медиане AD треугольника ABC, причем $AN = \frac{1}{3}AD$, то центр шара лежит в плоскости ADS, так как в ней, как известно, лежит и высота SQ пирамиды. Поскольку

$AQ = \frac{2}{3}AD$, то $AN = NQ$ и, стало быть, центр шара лежит на средней линии NR треугольника ASQ.

Но центр шара лежит также в плоскости, перпендикулярной к AE и проходящей через середину AE — точку P. Значит, центр шара лежит на прямой, лежащей в плоскости ASD, перпендикулярной к ребру AS и проходящей через P. Итак, центр шара лежит в плоскости ASQ на пересечении средней линии треугольника ASQ и перпендикуляра к отрезку AE в его середине.

Перейдем к вычислениям. Ясно, что

$$R = AO = \sqrt{AP^2 + PO^2}\,.$$

Так как $AP = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AS - ES) = \frac{3}{8}a\sqrt{2}$, то остается найти PO. Из подобия треугольников RPO и RAN находим $PO = RP \cdot \frac{AN}{RN}$. Поскольку

$$RP = AR - AP = \frac{1}{8}a\sqrt{2}, \quad AN = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{6}a\sqrt{3},$$

$$RN = \frac{1}{2}SQ = \frac{1}{6}a\sqrt{15},$$

то $PO = \frac{a\sqrt{10}}{40}$. Отсюда $R = \frac{a\sqrt{115}}{20}$.

Что касается комбинаций шара с другими геометрическими телами, то мы приведем здесь лишь несколько определений. Эти определения нет нужды заучивать, надо только хорошо понять геометрическую картину и свойства каждой конфигурации, выполнив необходимые чертежи. После определений приведены основные полезные факты; их доказательства не представляют труда.

Шар вписан в призму, если он касается всех ее граней. Если призма прямая, то ортогональной проекцией шара на плоскость основания призмы будет круг, вписанный в многоугольник — основание призмы; для наклонной призмы этот факт неверен. В любом случае высота призмы равна диаметру шара.

Шар вписан в прямой круговой конус, если он касается как основания конуса, так и его боковой поверхности. Точкой касания шара с основанием является центр основания, а с боковой поверхностью касание происходит по некоторой окружности (она не является окружностью большого круга!), плоскость которой параллельна плоскости основания. Центр шара лежит на высоте конуса.

Шар вписан в прямой круговой цилиндр, если он касается как оснований цилиндра, так и его боковой поверхности. Точками касания шара с основаниями являются центры оснований, а с боковой поверхностью касание происходит по окружности большого круга шара, параллельного основаниям. Центр шара лежит на оси цилиндра; диаметр основания цилиндра равен диаметру шара и равен высоте цилиндра.

Шар вписан в усеченную пирамиду, если он касается ее оснований и боковой поверхности. Диаметр шара равен высоте усеченной пирамиды.

Шар вписан в усеченный прямой круговой конус, если он касается его оснований и боковой поверхности. Точками касания шара с основаниями являются центры оснований, а с боковой поверхностью касание происходит по окружности, лежащей в плоскости, параллельной основаниям конуса. Центр шара лежит на оси конуса, диаметр шара равен высоте конуса.

Призма вписана в шар, если ее вершины лежат на сфере. Призма является прямой, ее основание — многоугольник, который можно вписать в окружность.

Прямой круговой конус вписан в шар, если его вершина и окружность его основания лежат на сфере. Основание конуса является малым (или большим) кругом шара; центр шара лежит на высоте конуса (или на ее продолжении за плоскость основания).

Прямой круговой цилиндр вписан в шар, если окружности его оснований лежат на сфере. Основания цилиндра являются малыми кругами шара, центр шара совпадает с серединой оси цилиндра.

Приведем пример на применение одного из этих определений.

(7) *В усеченный прямой круговой конус, образующая которого наклонена под углом 45° к нижнему основанию, вписан шар. Найти отношение величины боковой поверхности усеченного конуса к величине поверхности шара.*

Обозначим радиус шара через R, радиус нижнего основания конуса через a, радиус верхнего основания конуса через b, $b < a$, длину образующей через l, поверхность шара через S_1, боковую поверхность усеченного конуса через S_2. Тогда по известным формулам имеем $S_1 = 4\pi R^2$, $S_2 = \pi(a + b)l$, а потому $\frac{S_2}{S_1} = \frac{(a+b)l}{4R^2}$. Теперь остается выразить a, b и l через R.

Из приведенного выше определения вытекает, что высота конуса равна $2R$, центр O шара лежит на оси конуса, а точками касания шара с основаниями являются точки O_1 и O_2 — центры оснований.

Проведем плоскость через высоту конуса и точку A на нижнем основании конуса (рис. 137). Эта плоскость пересечет нижнее основание по диаметру AB, верхнее основание по диаметру CD, боковую поверхность по прямым AD и CB, причем на этих прямых лежат точки E и F — точки касания сферы с боковой поверхностью конуса. При этом угол, образуемый прямыми AD и AB, равен углу наклона образующей конуса к нижнему основанию.

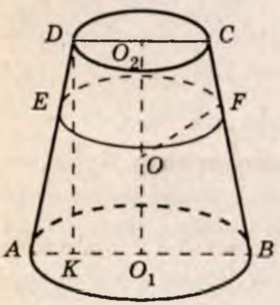


Рис. 137

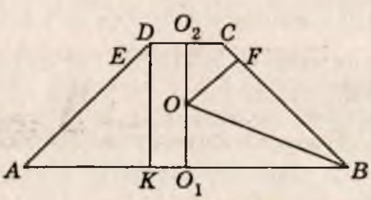


Рис. 138

Действительно, угол наклона образующей конуса к нижнему основанию равен углу между образующей и ее ортогональной проекцией на плоскость основания. Если из точки D опустить перпендикуляр DK на плоскость основания, то, поскольку $DK \parallel O_1O_2$ и $DK = O_1O_2$, четырехугольник O_1O_2DK есть параллелограмм, а потому $O_1K \parallel DO_2$, т. е. точка K лежит на прямой AO_1. Таким образом, прямая AO_1 есть ортогональная проекция образующей AD на плоскость основания, а это означает, что угол O_1AD равен углу наклона образующей конуса к нижнему основанию, т. е. $\angle O_1AD = 45°$. Аналогично оказывается, что $\angle O_1BC = 45°$.

Плоскость сечения высекает из сферы окружность, вписанную в четырехугольник. Вынесем плоскость сечения на отдельный чертеж (рис. 138). Тогда получим равнобочную трапецию $ABCD$, у которой нижнее основание $AB = 2a$, верхнее основание $DC = 2b$, $\angle ABC = \angle BAD = 45°$, высота $O_1O_2 = 2R$. В эту трапецию вписана окружность радиуса $2R$; центр O окружности — середина высоты O_1O_2; точки O_1, O_2, F и E — точки касания окружности со сторонами трапеции, поэтому $O_1B = BF$ и $FC = O_2C$ как касательные к окружности, проведенные из одной точки. Значит, $l = a + b$.

Из прямоугольного треугольника AKD, учитывая, что

$$AK - AO_1 - KO_1 = a - b,$$

$$AD = a + b, \quad DK = 2R,$$

получаем

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4R^2.$$

Из прямоугольного треугольника O_1OB находим $a = R \operatorname{ctg} 22{,}5°$. Из этих двух соотношений следует, что $b = R \operatorname{tg} 22{,}5°$, а потому $l = 2R\sqrt{2}$. Окончательно, $S_2 : S_1 = 2$.

В заключение приведем задачу на касание шара и конуса. Основная трудность этой задачи лежит в осмысливании конкретного расположения тел.

(8) *Три одинаковых прямых круговых конуса, радиусы основания которых равны r, а высоты равны $\frac{4}{3}r$, расположены по одну сторону от плоскости P, а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждых двух из этих конусов касаются. Найти радиус шара, лежащего между конусами и касающегося как плоскости P, так и всех трех конусов.*

Конфигурацию тел, о которой идет речь в задаче, довольно легко себе представить, но весьма сложно изобразить. Впрочем, для решения задачи общий вид этой конфигурации рисовать нет необходимости — достаточно его себе именно представлять. Если этот общий вид описать, то можно сказать, что шар вложен в «воронку» между тремя равными конусами (стоящими на одной и той же горизонтальной плоскости P так, что их основания попарно касаются друг друга внешним образом) и его размер таков, что он касается плоскости P.

Однако прежде чем решать задачу, надо уточнить смысл слов «шар вложен в «воронку» между конусами», придать им строгий математический смысл. Очевидно, что шар имеет с боковой поверхностью каждого из конусов только одну общую точку, или, как говорят, касается боковой поверхности конуса внешним образом.

Что же это означает? Это означает, что если провести секущую плоскость через высоту конуса и центр шара, то получившийся в сечении шара большой круг внешним образом касается боковой стороны равнобедренного треугольника, представляющего собой сечение конуса (рис. 139). Именно в этом и состоит *определение* касания шара, лежащего вне конуса, с боковой поверхностью конуса. Иначе говоря, если M — точка касания шара с конусом, то шар касается образующей SMN конуса (с вершиной S) в точке M, и радиус OM шара перпендикулярен к этой образующей.

Пусть теперь на рисунке 139 изображены сечения одного из конусов нашей конфигурации, шара с центром O и плоскости оснований конусов P плоскостью π, проходящей через высоту SH этого конуса и центр O шара (остальные два конуса при этом не изображены). Секущая

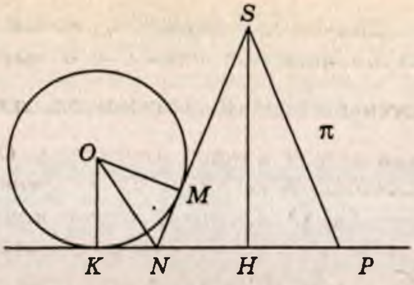


Рис. 139

плоскость π перпендикулярна к плоскости P, так как она проходит через высоту SH конуса, перпендикулярную к плоскости P его основания.

Пусть M — точка касания шара и конуса; тогда в силу сказанного выше большой круг, получающийся в сечении шара плоскостью π, касается образующей SN конуса в точке M. Однако тот факт, что этот же круг касается прямой, по которой пересекаются плоскости π и P, требует особого доказательства.

Обозначим через K точку касания шара с плоскостью P. Любая прямая в плоскости P, проходящая через точку K, и в частности прямая KH, будет касательной к шару, т. е. будет перпендикулярна к радиусу OK; поэтому $OK \perp KH$. Поскольку радиус OK шара, проведенный в точку касания, перпендикулярен к плоскости P, то $OK \parallel SH$ как два перпендикуляра к одной и той же плоскости P. Однако две параллельные прямые лежат в одной плоскости — отсюда вытекает, что радиус OK лежит в плоскости π, проведенной через SH и точку O. Иначе говоря, точка K касания шара с плоскостью P лежит в плоскости π.

Это, в свою очередь, означает, что прямая KH — линия пересечения плоскостей π и P — есть касательная к большому кругу, получающемуся в сечении шара плоскостью π. В самом деле, прямая KH проходит через конец радиуса OK этого большого круга перпендикулярно к OK.

Обозначим угол SNH через α, искомый радиус шара — через R. Соединяя точки O и N, легко найдем, что $\angle ONK = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$, и потому из треугольника ONK имеем $KN = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Поскольку $KH = KN + NH$, то

$$KH = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + r.$$

Отсюда вытекает, что расстояние от проекции K центра шара O на плоскость P до центра основания конуса не зависит от того, какой именно конус из трех данных мы рассматриваем.

Иначе говоря, точка K равноудалена от всех трех центров оснований конусов, и потому KH (рис. 140) легко находится как радиус окружности, описанной около правильного треугольника со стороной $2r$, а именно, $KH = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Теперь имеем

$$R = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right).$$

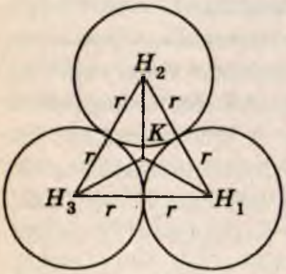


Рис. 140

Для получения ответа остается найти $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника NSH (см. рис. 139) находим $\cos \alpha = \frac{NH}{NS} = \frac{3}{5}$. Применяя формулу тангенса половинного аргумента и учитывая, что угол α — острый, находим $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 2$, а

$$R = \frac{2}{3} r(2\sqrt{3} - 3).$$

Задачи

1. Сторона правильного тетраэдра равна a. Определить радиус шара, касающегося боковых ребер тетраэдра в вершинах основания.

2. В шар радиуса a вписан правильный тетраэдр. Найти объем тетраэдра.

3. Ребро куба равно a. Сфера с центром O пересекает три ребра куба, сходящиеся в вершине A, в их серединах. Из точки B пересечения сферы с одним из этих ребер куба опущен перпендикуляр на диагональ куба, проходящую через вершину A, причем угол между перпендикуляром и радиусом OB делится ребром куба пополам. Найти радиус сферы.

4. В куб с ребром a вписан шар. Определить радиус другого шара, касающегося трех граней куба и первого шара.

5. Шар радиуса r касается всех ребер правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a. Найти объем пирамиды.

6. Ребро куба равно a. Найти объем прямого кругового цилиндра, вписанного в куб так, что осью его является диагональ l куба, а окружности оснований касаются тех диагоналей граней куба, которые не имеют общих точек с диагональю l.

7. Даны три прямых круговых конуса с углом α, $\alpha < \frac{2\pi}{3}$, в осевом сечении и радиусом основания, равным r. Основания этих конусов расположены в одной плоскости и попарно касаются друг друга внешним образом. Найти радиус сферы, касающейся всех трех конусов и плоскости, проходящей через их вершины.

8. Три шара радиуса r лежат на нижнем основании правильной треугольной призмы, причем каждый из них касается двух других шаров и двух боковых граней призмы. На этих шарах лежит четвертый шар, который касается всех боковых граней и верхнего основания призмы. Определить высоту призмы.

9. Четыре равных шара радиуса r внешним образом касаются друг друга так, что каждый касается трех остальных. Найти радиус сферы, касающейся всех четырех шаров и содержащей их внутри себя.

10. В правильной треугольной пирамиде высота равна h и сторона основания равна a. Одна из вершин основания является центром сферы, касающейся противоположной грани пира-

миды. Найти площадь тех частей боковых граней пирамиды, которые расположены внутри сферы.

11. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b, $b > a$. Сфера лежит над плоскостью основания ABC, касается этой плоскости в точке A и, кроме того, касается бокового ребра SB. Найти радиус этой сферы.

12. Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Точка E — середина ребра $C'D'$, точка F — середина ребра $B'C'$. Найти радиус сферы, проходящей через точки E, F, A, C, если ребро куба равно a.

13. В прямом круговом конусе угол при вершине осевого сечения равен $\frac{\pi}{3}$. В этом конусе расположены три одинаковых шара радиуса r, касающиеся изнутри боковой поверхности конуса, плоскости основания конуса и попарно друг друга. Найти площадь боковой поверхности другого конуса с теми же вершиной, высотой и плоскостью основания, которого данные шары касаются внешним образом.

14. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной a. Одно из боковых ребер пирамиды также равно a, а два других равны b. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

15. В правильный тетраэдр $ABCD$ вписан шар. Из точки D на грань ABC опущена высота DE. Точка P является серединой отрезка DE. Через точку P проведена плоскость M перпендикулярно к отрезку DE. Из всех точек, которые принадлежат одновременно вписанному шару и плоскости M, взята точка O, являющаяся ближайшей к точке A. Найти расстояние от точки O до грани ABD, если объем вписанного шара равен 1.

16. В правильную усеченную треугольную пирамиду помещены два шара так, что 1-й касается верхнего основания пирамиды, всех ее боковых граней и 2-го шара, а 2-й шар касается нижнего основания пирамиды, всех ее боковых граней и 1-го шара. Какую долю объема пирамиды занимают оба шара, если ее боковые грани наклонены к основанию под углом α?

17. Треугольная пирамида $ABCD$, все ребра которой равны a, вложена в прямой круговой конус так, что вершина A лежит на окружности основания конуса, ребро AD лежит в плоскости основания конуса, ребро BC параллельно основанию конуса, а вершины B и C лежат на боковой поверхности конуса. Угол между высотой конуса и его образующей равен α, $\alpha < \frac{\pi}{6}$. Определить высоту конуса.

18. В двугранный угол величиной 60° вписаны два шара радиуса R, касающиеся друг друга. Найти радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося обоих данных шаров.

19. На плоскости лежит прямой круговой цилиндр радиуса R и, не пересекаясь с ним, лежит шар радиуса r. Расстояние от оси цилиндра до центра шара равно β. Найти минимально возможный радиус шара, который бы касался одновременно цилиндра, плоскости и заданного шара.

20. Усеченный конус и правильная шестиугольная призма расположены так, что верхнее основание усеченного конуса вписано в верхнее основание призмы, а нижнее основание усеченного конуса описано около нижнего основания призмы. Известно, что высота усеченного конуса равна сумме радиусов его оснований. Найти отношение величин боковых поверхностей этих тел.

21. Правильная прямая треугольная призма $ABCA'B'C'$ описана около шара радиуса r; M — середина ребра BB', N — середина ребра CC'. В шар вписан прямой круговой цилиндр так, что его основание лежит в плоскости AMN. Найти объем этого цилиндра.

22. Правильный треугольник со стороной a лежит в плоскости P. Средними линиями он разделен на 4 треугольника, и на трех из них, примыкающих к вершинам, построены как на основаниях три правильные треугольные пирамиды высоты a (все три — по одну сторону плоскости P). Найти радиус шара, лежащего между пирамидами и касающегося как плоскости P, так и всех трех пирамид.

23. В правильной треугольной пирамиде отношение длины бокового ребра к длине ребра основания равно p. Указать все значения p, при которых центр описанного около пирамиды шара будет находиться внутри пирамиды.

24. В правильную треугольную пирамиду $SABC$, все ребра которой равны a, вписана сфера. Высота SD пирамиды опущена на основание ABC. На ребре AC взята точка M так, что $MC = 2AM$, а на высоте SD — точка N так, что $ND = 2NS$. Прямая MN пересекает сферу в двух точках P и Q. Найти длину отрезка PQ.

25. В треугольнике ABC известны стороны: $AC = 12$, $AB = BC = 3\sqrt{10}$. Два шара касаются плоскости треугольника

ABC в точках A и C и расположены по разные стороны от этой плоскости. Расстояние между центрами этих шаров равно 15. Центр третьего шара находится в точке B, и этот шар касается внешним образом двух данных шаров. Определить радиус третьего шара.

26. Пусть AB, AC, AD, DE, DF — ребра куба. Через вершины E и F и середины ребер AB и AC проведена плоскость P. Какую часть объема шара, вписанного в куб, составляет объем меньшей из двух частей, на которые этот шар делится плоскостью P?

27. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под углом 45°. Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается вписанного в пирамиду шара. Через центр первого шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

28. Шар касается плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ в точке A и, кроме того, касается ребра SC. Через центр этого шара и сторону основания BC проведена секущая плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания, если плоскость сечения перпендикулярна к грани ASD.

29. В треугольной пирамиде $SABC$ середины всех ребер лежат на поверхности шара радиуса 2; $AB = 3$, $AC = 4$. Ребро SA перпендикулярно к плоскости основания ABC. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер пирамиды, являются диаметрами указанного шара, и найти объем пирамиды.

30. В правильной четырехугольной пирамиде расположены два шара Q_1 и Q_2. Шар Q_1 вписан в пирамиду и имеет радиус 2, шар Q_2 касается внешним образом шара Q_1 и боковых граней пирамиды. Радиус шара Q_2 равен 1. Найти площадь боковой поверхности пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре пирамиды.

31. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — ее вершина) сторона основания равна a, боковое ребро пирамиды равно $\frac{5}{2}a\sqrt{2}$. Пусть A и C — две противоположные вершины основания пирамиды, E — середина ребра SC. Через точки A и E проведена плоскость P, параллельная диагонали BD основания $ABCD$. Найти расстояние от центра шара, вписанного в пирамиду $SABCD$, до плоскости P.

32. Прямой круговой конус с вершиной S вписан в треугольную пирамиду $SPQR$ так, что окружность основания конуса вписана в основание PQR пирамиды. Известно, что $\angle PSR = \frac{\pi}{2}$, $\angle SQR = \frac{\pi}{4}$, $\angle PSQ = \frac{7\pi}{12}$. Найти отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания PQR пирамиды.

33. В прямой круговой цилиндр с радиусом основания, равным 1, и высотой $12(3 + 2\sqrt{3})$ вписаны три одинаковых шара так, что шары касаются верхнего основания цилиндра, его боковой поверхности и попарно друг друга. Найти объем прямого кругового конуса, основание которого совпадает с нижним основанием цилиндра и который касается всех трех шаров.

34. В прямой круговой цилиндр с радиусом основания, равным $\frac{3}{2}$, и высотой $6(\sqrt{2} - 1)$ вписаны четыре одинаковых шара так, что они касаются верхнего основания цилиндра и его боковой поверхности, и каждый из шаров касается двух из трех других шаров. Найти площадь боковой поверхности прямого кругового конуса, основание которого совпадает с нижним основанием цилиндра и который касается всех четырех шаров.

35. Шар лежит на основании прямого кругового конуса, касаясь основания в его центре. Плоскость, образующая угол β с высотой конуса, касается шара и отсекает на окружности основания дугу с острым центральным углом α. Найти радиус шара, если радиус окружности основания равен R.

36. На основании правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и двугранным углом при основании, равным α, лежит шар, касающийся основания в его центре. Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и середины двух смежных сторон основания, касается этого шара. Найти его радиус.

37. В правильную четырехугольную пирамиду с плоским углом при вершине, равным β, вписан шар. Найти отношение объемов шара и пирамиды.

38. Дана правильная четырехугольная пирамида с плоским углом при вершине, равным α. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед так, что нижнее его основание лежит на основании пирамиды, а верхнее — совпадает с сечением пирамиды плоскостью, проходящей через верхнее основание параллелепипеда. Высота параллелепипеда вдвое больше длины стороны его основания. Найти отношение объемов параллелепипеда и пирамиды.

39. В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине S, A и B равны $180°$, $SC = 15$ и $\angle ACB = 60°$. Найти радиус описанного шара, если радиус вписанного шара равен 3.

40. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC. Грань BCD образует с плоскостью основания угол $60°$. На прямой, проходящей через точку D перпендикулярно к основанию, лежит центр сферы единичного радиуса, которая касается ребер AB, AC и грани BCD. Высота пирамиды DH в 2 раза меньше стороны основания. Найти объем пирамиды.

41. В прямой призме $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' нижнее основание ABC является равнобедренным прямоугольным треугольником с гипотенузой BC. Сфера S_1 с радиусом $\sqrt{23} - \sqrt{2} - 3$ касается боковых граней $AA'B'B$, $BB'C'C$ и нижнего основания ABC. Сфера S_2 с центром в точке C' касается сферы S_1 внешним образом. Известно, что $AB = AA'$ и что радиус сферы S_1 в 2 раза меньше радиуса сферы S_2. Найти объем призмы.

42. Шар радиуса R касается всех боковых граней треугольной пирамиды в серединах сторон ее основания. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром шара, делится пополам точкой пересечения с основанием пирамиды. Найти объем пирамиды.

43. В прямой круговой конус с углом раствора $60°$ вложено три одинаковых шара радиуса r так, что каждый шар касается двух остальных, боковой поверхности конуса и плоскости основания. Найти радиус R основания конуса.

44. Отрезок LM служит общей стороной двух равных треугольников KLM и LMN, в которых $\angle KML = \angle MLN = \frac{\pi}{4}$, $LM = 2m$, $LN = KM = 4m\sqrt{2}$. Плоскости KLM и LMN взаимно перпендикулярны. Шар касается отрезка KM в такой точке A, что $AK = m\sqrt{2}$, и касается отрезка LN в такой точке B, что $BN = m\sqrt{2}$. Найти радиус шара.

45. Все ребра треугольной пирамиды $ABCD$ касаются некоторого шара. Три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся ребер AB и CD, AC и BD, AD и BC, равны. Угол DBC равен $50°$, а угол BCD больше угла BDC. Найти отношение площадей граней ABD и ABC.

§ 6. Сечения многогранников

Довольно часто на вступительных экзаменах в вузы предлагаются геометрические задачи, в которых проводится некоторая плоскость сечения данного многогранника и требуется вычислить, например, площадь сечения или отношение, в котором секущая плоскость делит объем многогранника. Каждая из таких задач состоит из двух частей: построение сечения и вычисление того, что требуется.

Без решения первой части задачи, естественно, не может быть и речи о решении второй ее части. Обычно в задачах на сечение после геометрических рассмотрений, связанных с построением сечения, задача становится совсем простой. Таким образом, «центр тяжести» задач на сечения лежит не в тригонометрических выкладках или решении треугольников, а именно в геометрии в собственном смысле этого слова.

Экзамены показывают, что обычно поступающие правильно указывают форму сечения и правильно проводят дальнейшие вычисления. Однако достаточно убедительно обосновать геометрическую сторону решения могут далеко не все из них, а многие даже и не пытаются проводить соответствующие доказательства, считая, что все и так очевидно. Естественно, в таких случаях задача считается нерешенной. Поэтому не лишне здесь еще раз подчеркнуть, что при решении задачи все утверждения, даже кажущиеся наглядно очевидными, должны быть обязательно обоснованы.

Укажем один достаточно общий способ построения сечений многогранников. Построить сечение — значит указать точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника (эти точки, в частности, могут оказаться и вершинами многогранника) и соединить эти точки отрезками, лежащими в гранях. Для этого достаточно в плоскости грани указать две точки, принадлежащие сечению, соединить их прямой и найти точки пересечения этой прямой с ребрами многогранника.

Такое построение весьма естественно, однако применяют его далеко не все. Связано это с тем, что отыскать две точки сечения, лежащие в самой грани, обычно трудно. Тем не менее нас вполне удовлетворили бы две точки сечения, лежащие *в плоскости грани* (а не обязательно на самой грани). Найти такие точки часто удается просто, но для этого, как правило, приходится выходить за пределы рассматриваемого многогранника. Однако делать дополнительные построения вне многогранника поступающие почему-то боятся.

Между тем такие дополнительные построения в ряде задач оказываются неизбежными. Кроме того, эти построения позволяют сравнительно просто проводить необходимые доказательства и вычисления.

Покажем на конкретных задачах, как применяется этот способ построения сечений.

1 *Найти площадь сечения куба* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *(*$ABCD$ *— нижнее основание;* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *— боковые ребра) плоскостью, проходящей через вершину* A *и середины ребер* B_1C_1 *и* D_1C_1*. Ребро куба равно* a*.*

Прежде всего надо построить сечение. Пусть точки K и L — середины ребер D_1C_1 и B_1C_1 (рис. 141). Прямая

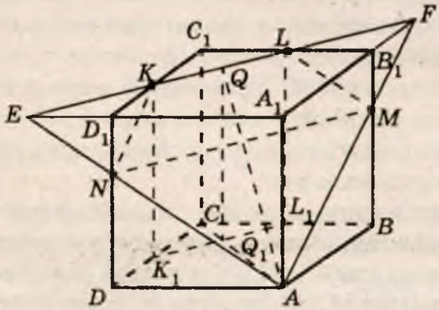


Рис. 141

KL лежит в плоскости грани $A_1B_1C_1D_1$, поэтому она пересекает продолжения ребер A_1B_1 и A_1D_1 соответственно в точках F и E, причем легко подсчитать, что

$$B_1F = \frac{1}{2}A_1B_1 = \frac{1}{3}A_1F, \quad D_1E = \frac{1}{2}A_1D_1 = \frac{1}{3}A_1E.$$

Точки A и F лежат в плоскости грани AA_1B_1B, поэтому прямая AF пересекает ребро BB_1 в некоторой точке M. Из подобия треугольников AA_1F и MB_1F находим $MB_1 = \frac{1}{3}AA_1$. Учитывая, что $AA_1 = BB_1$, получаем, что точка M делит ребро BB_1 в отношении 2 : 1.

Точки A и E лежат в плоскости грани ADD_1A_1, поэтому прямая AE пересекает ребро DD_1 в точке N. Аналогично предыдущему можно показать, что точка N делит ребро DD_1 в отношении 2 : 1.

Итак, сечение построено: оно проходит через вершину A, середины ребер B_1C_1 и C_1D_1 и через точки, делящие ребра BB_1 и DD_1 в отношении 2 : 1, и представляет собой пятиугольник $AMLKN$.

Вычислим его площадь. Пятиугольник $AMLKN$ получается из треугольника AEF отбрасыванием двух равных треугольников EKN и FLM. Из проведенного построения легко получить длины сторон этих треугольников и вычислить их площади; окончательный ответ: площадь сечения равна $\frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$.

Можно поступить и иначе, считая пятиугольник $AMLKN$ составленным из треугольника AMN и четырехугольника $KLMN$. При этом придется дополнительно доказать, что $KLMN$ — трапеция.

Оба этих способа требуют значительных вычислений, которые, однако, не представляют принципиальных трудностей. На самом деле можно обойтись без громоздких вычислений, если воспользоваться формулой для площади проекции (см. § 4 раздела III). Проекцией пятиугольника $ANMLK$ на нижнее основание куба будет, очевидно, пятиугольник ABL_1K_1D, площадь которого равна $\frac{7}{8}a^2$, а из треугольника AQQ_1 легко находим, что $\cos(\angle QAQ_1) = \frac{3}{\sqrt{17}}$. Но остается самое главное — доказать, что угол QAQ_1 как раз и является углом между плоскостью сечения и нижней гранью куба.

(2) *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через вершину A, середину ребра BC и центр грани DCC_1D_1?*

Пусть точка K — середина ребра BC (рис. 142). Так как точки A и K лежат в плоскости нижней грани, то прямая AK пересечет продолжение ребра DC в некоторой точке O. Рассматривая треугольники ABK и KCO, убеждаемся, что они равны, а потому $CO = AB = DC$ и $DO = 2DC$.

Пусть точка M — центр грани DCC_1D_1. Точки M и O лежат в плоскости грани DCC_1D_1, поэтому прямая MO пересекает ребра C_1C и D_1D соответственно в точках L и N.

Тем самым форма сечения найдена — это четырехугольник $AKLN$.

Опустим из точки M перпендикуляр на прямую DC; ясно, что его основание — точка E — есть середина ребра DC. Из подобия треугольников DNO, EMO и CLO

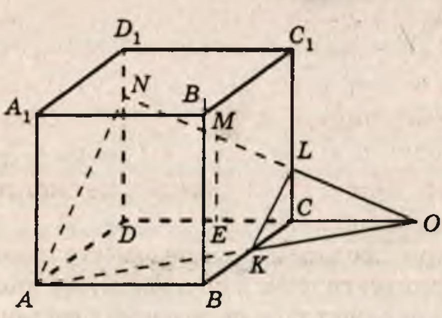


Рис. 142

находим $CL = \frac{2}{3}ME$ и $DN = \frac{4}{3}ME$. Учитывая, что $ME = \frac{1}{2}CC_1 = \frac{1}{2}DD_1$, получаем

$$DN = \frac{2}{3}DD_1 \text{ и } CL = \frac{1}{3}CC_1.$$

Итак, положения всех точек пересечения плоскости сечения с ребрами куба определены. Теперь выясним, в каком отношении плоскость сечения разделила объем куба. Обозначив длину ребра куба через a, вычислим объем многогранника — части куба под секущей плоскостью.

Этот многогранник, как можно заметить, получается из треугольной пирамиды $NADO$ (с вершиной N) отбрасыванием пирамиды $LKCO$ (с вершиной L). Объемы этих пирамид легко определяются, поскольку ND и LC — их высоты — уже вычислены. В результате получим, что объем многогранника $ADCKNL$ равен $\frac{7a^3}{36}$, а потому секущая плоскость делит объем куба в отношении 7 : 29.

Большинство поступающих строило сечение иначе, основываясь на интуитивном, чисто геометрическом представлении. При этом они наугад ставили точки N и L на соответствующих ребрах. Те из них, кто обладал хорошим геометрическим воображением и «увидел», что точка L лежит *ниже* середины ребра CC_1, смогли построить правильный чертеж и обнаружить (а затем, разумеется, доказать), что часть куба, лежащая под плоскостью сечения, есть лежащая на «боку» усеченная пирамида с основаниями AND и KLC. Остальные же, поместив точку L выше середины ребра CC_1, получили искаженный чертеж и, естественно, не смогли даже приступить к вычислениям.

Между тем предложенный выше стандартный метод позволил автоматически построить нужное сечение, указать положение точек пересечения секущей плоскости с ребрами куба и легко провести вычисления.

3 ***Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD с вершиной S. Через середины ребер AB, AD и CS проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?***

Пусть точки K и F — середины ребер AB и AD (рис. 143). Прямая KF пересечет продолжение ребер CB и CD соответственно в точках M и E. Легко показать, что треугольники BKM, AKF и DEF равны; поэтому

$$MB = \frac{1}{2}BC \text{ и } ED = \frac{1}{2}DC.$$

Пусть точка N — середина ребра CS. Точки N и M лежат в плоскости грани SBC, поэтому прямая MN пересекает ребро BS в некоторой точке L.

Выясним теперь, в каком отношении точка L делит ребро SB. Для удобства вычислений полезно построить вспомогательный планиметрический чертеж, вынося плоскость грани SBC на рисунок 144. Проведя в треугольнике CBS среднюю линию NQ, получим два равных треугольника NQL и LBM, из которых находим

$$BL = \frac{1}{2}BQ = \frac{1}{4}BS.$$

Аналогично показывается, что $DP = \frac{1}{2}SD$, где P — точка пересечения прямой EN с ребром SD (см. рис. 143).

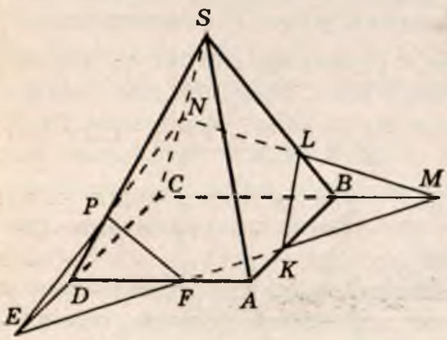


Рис. 143

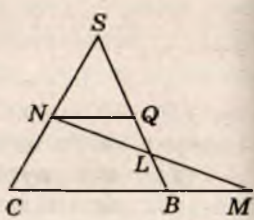


Рис. 144

Итак, сечение построено. Оказалось, что плоскость сечения пересекает пирамиду по пятиугольнику $LKFPN$. Эта плоскость делит пирамиду $SABCD$ на два многогранника, причем таких, что вычислить непосредственно их объемы не представляется возможным. Для того чтобы вычислить объем хотя бы одного из этих многогранников, нужно сделать дополнительные построения и рассмотреть несколько пирамид.

Однако из рисунка 143 можно увидеть, что объем многогранника $CDFKBLNP$, лежащего под секущей плоскостью, равен объему треугольной пирамиды $NECM$ без объема двух треугольных пирамид $LKBM$ и $PEDF$. Вычислим теперь объем этих пирамид.

Пусть высота пирамиды $SABCD$ равна H, а ребро основания равно a; тогда ее объем равен $V = \frac{1}{3}a^2H$. Так как точка N есть середина ребра CS, то перпендикуляр, опущенный из этой точки на плоскость $ABCD$, равен $\frac{1}{2}H$. Столь же легко показать, что перпендикуляры, опущенные из точек L и P на плоскость $ABCD$, равны $\frac{1}{4}H$. Площади оснований рассматриваемых пирамид легко вычисляются: они равны соответственно $\frac{9}{8}a^2$, $\frac{1}{8}a^2$ и $\frac{1}{8}a^2$. Поэтому объем многогранника $CDFKBLNP$ равен

$$V_1 = \frac{9}{48}a^2H - 2 \cdot \frac{a^2H}{96} = \frac{V}{2}.$$

Значит, секущая плоскость делит объем пирамиды в отношении 1 : 1.

В этой задаче определение формы сечения может быть сделано довольно просто и без применения рассматриваемого метода, поскольку ясно, что в сечении получается пятиугольник $NLKFP$. Однако, не выходя за пределы пирамиды, мы не нашли бы изящного способа вычисления объема многогранника, лежащего под секущей плоскостью.

Многие поступающие пытались найти объем многогранника $CDFKBLNP$, разбивая многогранник на пирамиды. Но такой способ требует прежде всего отличного геометрического воображения, значительно более развитого, чем необходимо для приведенного выше решения. Кроме того, такой способ связан с громоздкими вычислениями, тогда как в изложенном решении они незначительны.

Существуют задачи, в которых секущая плоскость задана тремя точками, лежащими на ребрах (или их продолжениях) рассматриваемого многогранника, и тем не менее формальное проведение описанного выше метода построения сечения не приводит к цели. Так обстоит дело в задачах, в которых прямая, соединяющая две данные точки сечения, оказывается параллельной ребру многогранника. В таких случаях надо воспользоваться теоремой о том, что если две плоскости параллельны прямой, то линия их пересечения также параллельна этой прямой.

4 *В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все боковые грани — равносторонние треугольники со стороной, равной 1. На продолжении ребра AS за точку A взята точка K так, что $AK = \frac{1}{2}$. Через точку K и середины ребер BC и AD проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения.*

Пусть точки E и F — соответственно середины ребер AD и BC (рис. 145). Так как точки K и E лежат в плоскости грани ADS, то прямая KE пересекает ребро DS в точке N. Проведя прямую $AP \parallel DS$ и рассмотрев подобные треугольники KAP и KSN, найдем $AP = \frac{1}{3} SN$. Учитывая же, что $AP = DN$, получаем, что точка N делит ребро SD в отношении $3 : 1$.

Найдем еще одну точку (кроме данной точки F) сечения, лежащую в какой-нибудь боковой грани. Это можно сделать с помощью сформулированной выше теоремы. Действительно, поскольку $EF \parallel CD$, то плоскость сечения параллельна ребру CD, а так как ребро CD лежит

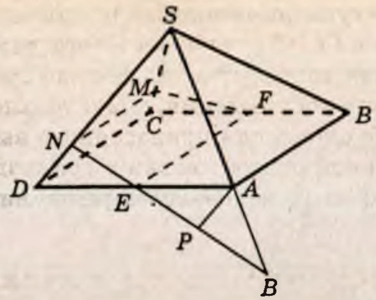


Рис. 145

в грани CDS, то плоскость сечения пересекает грань CDS по прямой MN, параллельной ребру CD.

Итак, сечение построено: это трапеция $EFMN$. Теперь найдем ее площадь.

Так как $SN = \frac{3}{4}DS$ и так как $\Delta DSC \sim \Delta MNS$, то $SN = \frac{3}{4}$. Рассматривая треугольник DNE и применяя теорему косинусов, находим $NE = \frac{1}{4}\sqrt{3}$. Аналогично находим $FM = \frac{1}{4}\sqrt{3}$. Зная все стороны трапеции $EFMN$, находим ее площадь: $\frac{7\sqrt{11}}{64}$.

(5) *В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 1. Объем пирамиды равен $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Через сторону основания CD проведено сечение, которое делит пополам двугранный угол, образованный боковой гранью SCD и основанием. Найти площадь сечения.*

Поскольку плоскость сечения содержит ребро CD (рис. 146), то она параллельна ребру AB и, следовательно, пересекает плоскость ABC по прямой $MN \parallel AB$. Значит, в сечении получается трапеция $CDMN$, площадь которой и надо найти.

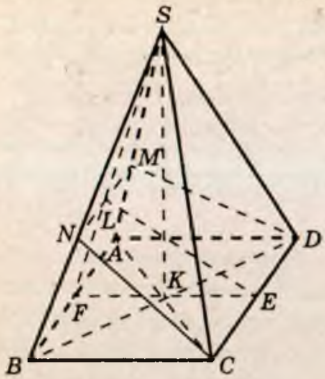


Рис. 146

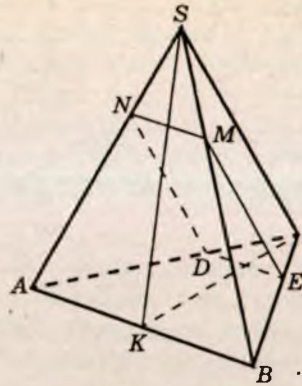


Рис. 147

Для точного построения прямой MN надо отыскать хотя бы одну принадлежащую ей точку. Проведем сначала высоты SE и SF боковых граней CDS и ABS и рассмотрим треугольник SEF. Так как $SE \perp CD$ и $FE \perp CD$, то плоскость SEF перпендикулярна к ребру CD; значит, угол SEF — линейный угол двугранного угла, образованного гранями CSD и $ABCD$. Но тогда биссектриса EL треугольника SEF лежит в плоскости сечения и пересекает сторону SF в точке L, лежащей на прямой MN.

Итак, мы нашли точку на прямой MN, чем заканчивается построение сечения, и остается только провести выкладки.

Поскольку объем пирамиды равен $\frac{\sqrt{2}}{3}$, а сторона основания равна 1, то легко видеть, что высота пирамиды $SK = \sqrt{2}$. Из треугольника KSE находим $SE = \frac{3}{2}$ и $\cos(\angle FES) = \frac{1}{3}$. Так как биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилегающим сторонам, то $\frac{SL}{LF} = \frac{3}{2}$. Но тогда $\frac{MN}{AB} = \frac{3}{5}$, т. е. $MN = \frac{3}{5}$ и $LF = \frac{2}{5} FS = \frac{3}{5}$.

Из треугольника LFE, применяя теорему косинусов, находим $LE = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Так как ребро CD перпендикулярно к плоскости сечения, то, в частности, $CD \perp LF$, а это означает, что LF есть высота трапеции $CDMN$. Теперь легко вычислить ее площадь: $S = \frac{8\sqrt{6}}{25}$.

В следующей задаче мы неоднократно будем пользоваться теоремой о линии пересечения плоскостей, параллельных одной прямой.

6 *В треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, ABC — основание пирамиды) на стороне AC взята точка D так, что $AC = 3DC$, а на стороне BC взята точка E так, что $BC = 3CE$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки D и E параллельно ребру SC, если известно,* что $SA = SB$, $SC = a$, $AC = BC = b$, $\angle ACB = \alpha$.

Поскольку площадь искомого сечения параллельна ребру CS, то она пересекает плоскость ACS, содержащую это ребро, по прямой $DN \parallel CS$ (рис. 147). Аналогично, плоскость сечения пересекает плоскость CBS по прямой $EM \parallel CS$.

Так как $\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{1}{3}$, то $DE \parallel AB$ и $DE = \frac{1}{3}AB$. Значит, плоскость сечения пересекает плоскость ABC по прямой $DE \parallel AB$, т. е. плоскость сечения параллельна ребру AB, следовательно, она пересекает плоскость ABS, содержащую ребро AB, по прямой $MN \parallel AB$.

Итак, в сечении получается четырехугольник $DEMN$ такой, что $DE \parallel MN$ и $DN \parallel EM$; это означает, что четырехугольник $DEMN$ — параллелограмм.

Покажем, что $DEMN$ — прямоугольник. Пусть точка K — середина ребра AB. Поскольку треугольник ABC равнобедренный, его медиана есть и высота, т. е. $KC \perp AB$. Аналогично показывается, что $SK \perp AB$. Но это означает, что ребро AB перпендикулярно к плоскости KSC и, в частности, к ребру SC, т. е. $AB \perp CS$. Значит, четырехугольник $DEMN$ — прямоугольник.

Найдем площадь этого прямоугольника. Рассматривая подобные треугольники DEC и ABC, BME и BCS, AND и ASC, получаем $DE = \frac{1}{3}AB$, $ME = DN = \frac{2}{3}CS = \frac{2}{3}a$. Применив к треугольнику ABC теорему косинусов, будем иметь $AB = b\sqrt{2 - 2\cos\alpha} = 2b\sin\frac{\alpha}{2}$. Теперь легко определить площадь искомого сечения: $S = \frac{4}{9}ab\sin\frac{\alpha}{2}$.

В предыдущих задачах мы всегда имели в плоскости хотя бы одной грани многогранника две точки искомого сечения. Зная их, мы находили еще одну или две точки, лежащие на ребрах, а значит, и лежащие в других гранях. Тогда в плоскости новой грани также имеем две точки сечения и т. д. Однако так бывает далеко не во всех задачах; часто одна из точек, определяющих сечение, лежит внутри многогранника, или все эти точки задаются в разных гранях.

При решении подобных задач приходится делать сначала дополнительные построения. Обычно в таких случаях проводится вспомогательная плоскость, содержащая какую-либо прямую из плоскости сечения и какую-либо прямую, лежащую в плоскости одной из граней многогранника. В построенной вспомогательной плоскости отыскивается точка пересечения этих прямых и тем самым находится еще одна точка сечения, лежащая уже в плоскости грани. Дальнейшее построение проходит по описанной выше схеме.

7 *Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Пусть точка P делит ось OO_1 призмы в отношении* 5 : 1. *Через точку P и середины ребер AB и A_1C_1 проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?*

Пусть точки E и N — середины ребер A_1C_1 и AB (рис. 148). Для построения сечения найдем еще одну его точку, лежащую в одной грани с точкой N, например, точку пересечения прямой EP с гранью ABB_1A_1. Ясно, что эта прямая лежит, в частности, в плоскости α, про-

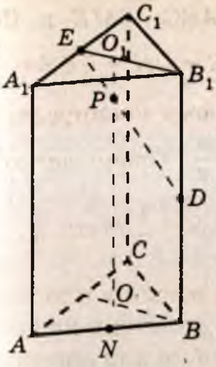


Рис. 148

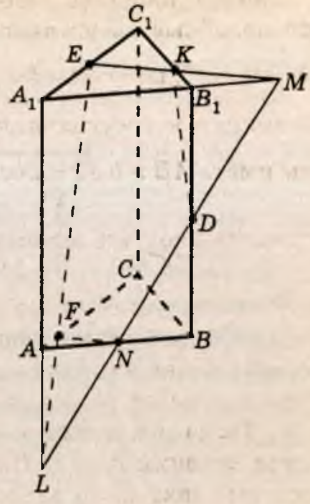


Рис. 149

ходящей через точки E, O_1 и P. В этой плоскости лежит прямая EO_1, а значит, и точка B_1.

Так как прямые PO_1 и BB_1 параллельны и так как прямая PO_1 лежит в плоскости α, то в ней лежит и прямая BB_1. Значит, прямая EP пересечет ребро BB_1 в некоторой точке D. Так как треугольники EDB_1 и PEO_1 подобны и так как $EO_1 = \frac{1}{3}B_1E$, $PO_1 = \frac{1}{6}BB_1$, то $DB_1 = \frac{1}{2}BB_1$. Итак, мы нашли еще одну точку сечения — середину ребра BB_1. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям в предыдущих задачах.

Поскольку точки N и D (рис. 149) лежат в плоскости грани ABB_1A_1, то прямая ND пересечет продолжения ребер A_1B_1 и A_1A соответственно в точках M и L, причем легко показать, что точка L отстоит от точки A на половину ребра AA_1, а точка M отстоит от точки B_1 на половину ребра A_1B_1.

Соединяя точку E с точками M и L, получаем точки K и F, окончательно определяющие искомое сечение — пятиугольник $EKDNF$.

Из подобия треугольников ALF и A_1LE получаем $AF = \frac{1}{6}AC$. Для определения B_1K можно рассуждать так же, как и в задаче 3; в результате получим $B_1K = \frac{1}{4}B_1C_1$.

Таким образом, положение точек E, K, D, N, F полностью определено.

Вычислим объем многогранника A_1EKB_1DNAF, обозначив боковое ребро призмы через h, а площадь ее основания через s. Этот многогранник получается из пирамиды LA_1EM (L — вершина) отбрасыванием пирамид $LAFN$ и DB_1KM (L и D — вершины). Несложный подсчет показывает, что объем нашего многогранника равен $\frac{49hs}{144}$, откуда следует, что секущая плоскость делит объем призмы в отношении 49 : 95.

Иногда плоскость сечения задается не тремя точками, а другими условиями, например, одной точкой и условием, что секущая плоскость параллельна некоторой плоскости, или точкой и условием, что секущая плоскость параллельна двум скрещивающимся прямым. В таких задачах надо найти какие-либо точки, лежащие в плоскостях граней, а уж затем продолжать решение описанным выше стандартным способом.

8 *В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — основания, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) даны длины ребер $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Пусть O — центр основания $ABCD$, O_1 — центр основания $A_1B_1C_1D_1$, а S — точка, делящая отрезок OO_1 в отношении 1 : 3, т. е. $O_1S : SO = 1 : 3$. Найти площадь сечения данного параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку S параллельно диагонали AC_1 параллелепипеда и диагонали BD его основания $ABCD$.*

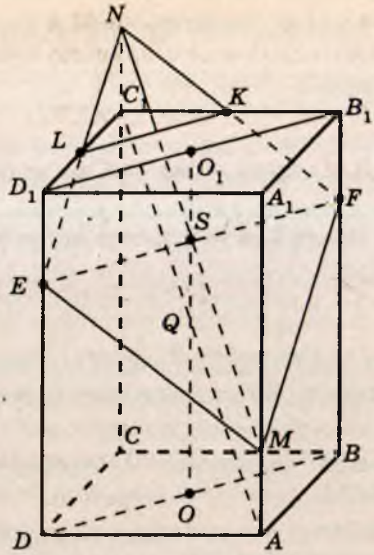


Рис. 150

Поскольку точка S лежит в диагональной плоскости BDD_1B_1, то секущая плоскость, которая параллельна диагонали BD, пересекает эту плоскость по прямой EF, параллельной BD (рис. 150). При этом ясно, что $D_1E = = \frac{1}{4}D_1D = \frac{c}{4}$, $B_1F = \frac{c}{4}$.

Итак, используя условие параллельности секущей плоскости и диагонали BD, мы нашли две точки E и F сечения, лежащие на ребрах параллелепипеда.

Используем теперь второе условие: параллельность секущей плоскости и диагонали AC_1. Точка S лежит также в диагональной плоскости ACC_1A_1 (не показанной на рис. 150); поэтому секущая плоскость пересекает эту плоскость по прямой MN, параллельной диагонали AC_1. Пусть точка Q — середина диагонали AC_1. Так как прямая OO_1 лежит в плоскости ACC_1A_1, то ясно, что $SQ = \frac{1}{4}OO_1 =$

$= \frac{1}{4}AA_1 = \frac{c}{4}$. Поскольку $MN \parallel AC_1$, $AM \parallel SQ$ и $NC_1 \parallel SQ$, то

$MA = NC_1 = SQ = \frac{c}{4}$.

Таким образом, мы нашли четыре точки M, N, E и F, принадлежащие сечению и лежащие или на ребрах параллелепипеда, или на их продолжениях.

Точки E и N лежат в плоскости грани DCC_1D_1, поэтому прямая EN пересекает ребро D_1C_1 в некоторой точке L. Так как $ED_1 = NC_1$, то ясно, что точка L есть середина ребра D_1C_1 и, кроме того, $EL = LN$. Аналогично находим, что прямая FN пересекает ребро B_1C_1 в его середине — точке K и что $KN = KF$.

Итак, сечение полностью определено — это пятиугольник $MFKLE$.

Для нахождения его площади заметим, что наш пятиугольник получается из четырехугольника $MFNE$ отбрасыванием треугольника LNK. Четырехугольник $MFNE$ есть параллелограмм, так как $ME \parallel FN$ и $MF \parallel EN$ (секущая плоскость пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым); поэтому его площадь равна удвоенной площади треугольника MFE.

Учитывая, что $LN = \frac{1}{2}EN$ и $KN = \frac{1}{2}FN$, получаем, что площадь треугольника LNK равна четверти площади треугольника ENF или четверти площади равного ему треугольника MFE. Значит, площадь сечения составляет $\frac{7}{4}$ от площади треугольника MFE.

Найдем теперь площадь треугольника MFE. Легко видеть, что

$$EF = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad MF = \sqrt{a^2 + \frac{c^2}{4}}, \quad ME = \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{4}}.$$

По формуле Герона вычисляем площадь треугольника MFE, а затем получаем площадь сечения:

$$\frac{7}{16}\sqrt{4a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

Задачи

1. В правильной четырехугольной пирамиде через вершину основания проведена плоскость, перпендикулярная к противоположному боковому ребру. Определить площадь сечения, если ребро при основании равно 1, а боковое ребро равно 2.

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра; ребро куба равно 1. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину A и середины ребер B_1C_1 и C_1D_1.

3. В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат со стороной a. Высота пирамиды равна диагонали этого квадрата. Пирамида рассечена плоскостью, параллельной ее высоте и двум противоположным сторонам основания. Найти периметр сечения, если известно, что в него можно вписать окружность.

4. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. На продолжении ребер AB, AA', AD отложены соответственно отрезки BP, $A'Q$, DR длины $\frac{3}{2}AB$ $\left(AP = AQ = AR = \frac{5}{2}AB\right)$. Через точки P, Q и R проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем куба?

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ плоскость, проведенная через сторону AD основания перпендикулярно грани BSC, делит эту грань на две части, одинаковые по площади. Найти полную поверхность пирамиды, если $AD = a$.

6. Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды равны a и $3a$. Расстояние между двумя параллельными ребрами, лежащими в плоскостях различных оснований и в противоположных боковых гранях, равно b. Вычислить площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через указанные параллельные ребра.

7. Площадь сечения, проведенного через диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды параллельно непересекающемуся с этой диагональю боковому ребру, равна S. Найти площадь сечения, проходящего через середину двух смежных сторон основания и середину высоты пирамиды.

8. Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна S. Вычислить площадь сечения, проходящего через середину высоты пирамиды параллельно боковой грани.

9. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S и объемом V проведена плоскость, которая параллельна медиане основания BN и пересекает боковое ребро SA в точке K, а боковое ребро SB в точке L, причем $SK = \frac{1}{2}SA$, $SL = \frac{1}{3}SB$. Найти объем части пирамиды, лежащей ниже этой плоскости.

10. Плоскость отсекает от боковых ребер SA, SB и SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отрезки $SK = \frac{2}{3}SA$, $SL = \frac{1}{2}SB$, $SM = \frac{1}{3}SC$ соответственно. Длина бокового ребра пирамиды равна a. Найти длину отрезка SN, отсекаемого этой плоскостью на ребре SD.

11. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S и высотой A через центр основания проведена плоскость, параллельная грани SAB. Площадь получившегося сечения равна площади основания. Найти объем части пирамиды, лежащей ниже плоскости.

12. Угол между боковым ребром и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен $60°$. Через точку A проведена плоскость, перпендикулярная к биссектрисе угла S треугольника BSC. В каком отношении линия пересечения этой плоскости с плоскостью BSC делит площадь грани BSC?

13. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S проведена секущая плоскость P, параллельная стороне AB и проходящая через точку касания вписанного шара и грани SAB и через точку этого шара, ближайшую к вершине S. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью P, если $AB = 1$, $SA = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

14. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через середины сторон основания AB и AD проведена плоскость, параллельная боковому ребру SA. Найти площадь сечения, зная сторону основания a и боковое ребро b.

15. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. На продолжении ребра D_1D за точку D взята точка P такая, что $DP = \frac{1}{2}$.

Через точку P и середины ребер AA_1 и CC_1 проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения.

16. Пусть S — вершина правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны a. Через точку A и точку E ребра SC проведена плоскость перпендикулярно к плоскости треугольника SAC, причем $SE = b$. Определить объем четырехугольной пирамиды, отсекаемой этой плоскостью от данной пирамиды.

17. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC (угол C — прямой). Ребро SA перпендикулярно к плоскости основания. В пирамиду вписан шар, радиус которого $\frac{1}{3}SA$. Через вершину S и точку касания шара с основанием пирамиды проходит плоскость, параллельная ребру BC. Эта плоскость делит поверхность шара в отношении 1 : 4. Найти угол BAC.

18. В треугольной пирамиде $SABC$ все ребра равны друг другу. На ребре SA взята точка M такая, что $SM = MA$, на ребре SB взята точка N такая, что $SN = \frac{1}{3}SB$. Через точки M и N проведена плоскость, параллельная медиане AD основания ABC. Найти отношение объема треугольной пирамиды, которую проведенная плоскость отсекает от исходной пирамиды $SABC$, к объему последней.

19. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$. На продолжении ребра AB взята точка M так, что $AM = AB$ ($MB = 2AB$). На ребре SB взята точка N так, что $SN = NB$. Где на апофеме SD грани SBC должна находиться точка P для того, чтобы в сечении пирамиды плоскостью, проведенной через точки M, N и P, был треугольник?

20. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. На продолжениях ребер AB и BB' взяты точки M и N соответственно так, что $AM = B'N = \frac{1}{2}AB$ $\left(BM = BN = \frac{3}{2}AB\right)$. Где на ребре CC' должна находиться точка P для того, чтобы в сечении куба плоскостью, проведенной через точки M, N и P, был пятиугольник?

21. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC. Середина D гипотенузы AB этого треугольника является основанием высоты SD данной пирамиды. Известно, что $SD = h$, $AC = b$, $BC = a$. Через середину высоты SD проведено сечение пирамиды плоскостью, параллельной ребрам AC и SB. Найти площадь этого сечения и угол между плоскостью сечения и основанием пирамиды.

22. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит равнобочная трапеция $ABCD$ ($AB = a$, $BC = 2a$, $CD = a$, $AD = 3a$, $BC \parallel AD$). Ребро SC перпендикулярно к плоскости основания и равно h. Через точку C проведено сечение пирамиды плоскостью, параллельной ребрам AB и SD. Найти площадь этого сечения и угол между плоскостью сечения и основанием пирамиды.

23. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B. Ребро SA перпендикулярно к плоскости треугольника ABC. Через середины D и E ребер AC и BC соответственно проведена плоскость, параллельная ребру SC и образующая в сечении четырехугольник $DEFH$ (точка F лежит на ребре SB). Найти площадь четырехугольника $DEFH$, если известно, что $BC = a$, $AC = b$, $SA = h$.

24. В прямую призму $ABCDA'B'C'D'$, нижним снованием которой является ромб $ABCD$, а AA', BB', CC', DD' — боковые ребра, вписан шар радиуса R. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A, B, C', если известно, что $\angle BAD = \alpha$.

25. Пусть AB, AC и AD — ребра куба. Через середины ребер AC и AD и вершину B проведена плоскость P. Какую часть площади поверхности шара, описанного около куба, составляет площадь поверхности меньшей из двух частей, на которые этот шар делится плоскостью P?

26. Шар касается плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ в точке A и, кроме того, касается вписанного в пирамиду шара. Через центр первого шара и сторону основания BC проведена секущая плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания, если известно, что диагонали сечения перпендикулярны ребрам SA и SD.

27. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под углом 45°. Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается продолжения ребра BS за вершину S. Через центр шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

28. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S через сторону BC основания проведено сечение перпенди-

кулярно к ребру SA. Плоский угол при вершине пирамиды равен $60°$. Высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$. Найти площадь сечения.

29. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 4. Через сторону CD основания проведено сечение, которое пересекает грань SAB по средней линии треугольника SAB. Площадь сечения равна 18. Найти объем пирамиды $SABCD$.

30. Боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — ее вершина) равны a, а стороны ее основания равны $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Найти расстояние от центра шара, вписанного в пирамиду $SABCD$, до плоскости, проходящей через диагональ BD основания $ABCD$ и середину E ребра SA.

Раздел IV

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

Практически все задачи, разобранные в предыдущих разделах, имели обычный, «школьный вид и решались стандартными школьными методами, с помощью привычных школьных рассуждений. Однако на вступительных экзаменах, и это особенно касается вузов, где математика имеет большой удельный вес, довольно часто предлагаются задачи совершенно иного рода. Мы назовем их для краткости нестандартными задачами.

Эти нестандартные задачи бывают разных видов. Некоторые из них внешне выглядят очень необычно, и поэтому сначала совершенно не ясно, как к ним подступиться. Другие замаскированы: с виду, например, это обычное уравнение, но стандартными приемами оно не решается. Для решения третьих необходимо очень тонкое и четкое логическое мышление. В четвертых, ... В общем, можно долго перечислять всевозможные особенности этих нестандартных задач и вряд ли можно перечислить все возможные особенности.

Эти своеобразные, нестандартные задачи требуют и определенной сообразительности, и свободного владения различными разделами математики, и высокой логической культуры. И помимо этого — психологической подготовленности. Сколько раз бывало, что задача, по существу совсем не сложная, но сформулированная несколько необычно, вызывала непреодолимые трудности! А ее решение и требует-то всего нескольких слов.

Конечно, невозможно указать все методы решения нестандартных задач. Здесь приходится применять и графики, и самые различные свойства функций, и неравенства, и — последнее по счету, но первое по важности — логику.

Особо подчеркнем, что нестандартность подобных задач и нестандартность методов их решения состоят, скорее всего, не в сложности, а в непривычности. Однако мы надеемся, что нестандартные методы, применяемые ниже к решению нестандартных задач, после внимательной проработки этого раздела превратятся в стандартные, приобретут равные права с уже привычными приемами решений.

Мы разбираем здесь подробно решения некоторых нестандартных задач, причем во многих случаях приводим несколько решений, использующих различные подходы к задаче. Заметим сразу же, что сами по себе эти решения несложны, их вовсе нетрудно понять, гораздо сложнее найти эти решения самостоятельно. Поэтому рекомендуем каждую из разбираемых ниже задач попытаться решить самостоятельно до ознакомления с ее решением.

В этих задачах имеет смысл особенно четко различать черновое и чистовое решения. Дело в том, что когда вы только начинаете решать задачу, то идете как бы вслепую, на ощупь, проводите какие-то вычисления и рассуждения, не зная еще, какие из них вам действительно нужны, а какие, быть может, впоследствии окажутся лишними. Таким образом, вы получаете в конце концов черновое решение. В этом решении, как правило, бывают не очень ясные логические переходы, расплывчатые формулировки, много лишних утверждений и т. д.

Однако экзаменаторов не интересует, каким образом вы дошли до окончательных утверждений. Им нужно, чтобы задача была решена и ее решение было аккуратно обосновано — им нужно чистовое решение. Это чистовое решение не должно, конечно, копировать в точности весь ход чернового решения — зачем повторять путь, по которому вы шли вслепую? Поэтому полученное вами черновое решение следует обработать надлежащим образом.

В ряде разбираемых ниже примеров мы приводим и то и другое решения, однако чаще ограничиваемся лишь черновым решением, предоставляя читателям возможность проделать чрезвычайно полезное упражнение по переработке этого решения в чистовое.

§ 1. Задачи, нестандартные по внешнему виду

Для того чтобы понять, какие именно задачи мы считаем «нестандартными по внешнему виду», достаточно просто посмотреть на условия задач, разбираемых ниже. В этих задачах с первого взгляда ясно, что обычные преобразования, какие-либо алгебраические или тригонометрические формулы не приведут к цели, если наряду с ними не применять рассуждений совершенно иного рода.

Эти рассуждения, как правило, бывают связаны с неравенствами, графиками и вообще с различными свойствами функций.

1 *Решить уравнение* $\sin x = x^2 + x + 1$.

Для того чтобы подступиться к этому уравнению, посмотрим, как ведут себя графики его левой и правой частей. Если эти графики пересекутся, то абсциссы точек пересечения и будут корнями данного уравнения, если не пересекутся, то уравнение корней не имеет. Из рисунка 151 ясно, что уравнение не имеет корней.

На этом заканчивается черновое решение. Но его нельзя считать чистовым: ведь график — еще не доказательство, остается формально убедиться, что это уравнение не имеет корней. Разумеется, наше графическое рассуждение совсем не пропадет, именно им мы и воспользуемся для нахождения строгого доказательства.

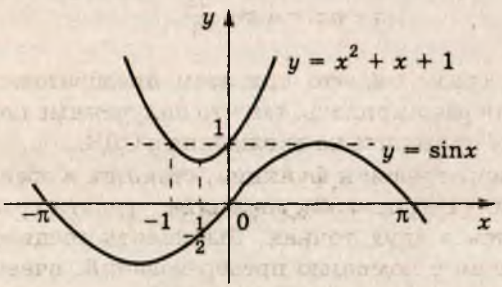


Рис. 151

Представим себе яснее, из каких именно свойств графиков очевидно, что они не пересекаются. Этот факт следует из того, что график функции $yx^2 + x + 1$ всюду лежит *выше*, чем график функции $y = \sin x$. В переводе с геометрического языка на алгебраический это означает, что при любом x выполняется неравенство

$$x^2 + x + 1 > \sin x.$$

Именно это неравенство мы и докажем совершенно строго. Из свойств квадратного трехчлена следует, что при $x > 0$ и при $x < -1$ выполняется неравенство $x^2 + x + 1 > 1$, так что при всех этих x имеет место неравенство $x^2 + x + 1 > \sin x$. А на оставшемся промежутке $-1 \leqslant x \leqslant 0$ справедливы неравенства $x^2 + x + 1 > 0$ и $\sin x \leqslant 0$, так что и на этом промежутке уравнение корней не имеет.

Подчеркнем, что, хотя при отыскании решения мы прибегли к наглядным геометрическим рассуждениям, в окончательном строгом решении они вовсе не используются.

2 *Решить уравнение*

$$|5 - 6x| - 4\sin\frac{\pi x}{3} - 4\sin\frac{2\pi x}{3} + \frac{8\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{3}} = 0.$$

Нетрудно видеть, что два последних слагаемых в левой части уравнения взаимно уничтожаются, и уравнение можно переписать в виде

$$|5 - 6x| = 4\sin\frac{\pi x}{3}. \qquad (1)$$

Заметим сразу же, что при этом преобразовании ОДЗ уравнения расширилась, так что полученные корни придется еще проверить на вхождение в ОДЗ.

Построив графики функций, стоящих в обеих частях уравнения (1) (рис. 152), мы видим, что эти графики пересекаются в двух точках. Вычислить абсциссы точек пересечения с помощью преобразований, очевидно, невозможно, и их придется угадать.

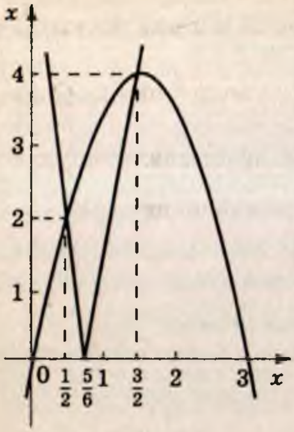


Рис. 152

Для этого особенно важно аккуратно выполнить построение графиков. Тогда можно догадаться и затем прямой проверкой убедиться, что графики рассматриваемых функций пересекаются в точках с абсциссами $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{3}{2}$. Эти числа и являются корнями уравнения (1). Однако исходному уравнению удовлетворяет только значение $x = \frac{1}{2}$, поскольку $x = \frac{3}{2}$ не входит в ОДЗ этого уравнения.

Многие поступающие на этом свои рассуждения закончили. Между тем это решение не является исчерпывающим, поскольку отсутствие других точек пересечения, хотя и очевидно из чертежа, но подлежит строгому обоснованию.

Его можно провести, например, следующим образом. При $x > \frac{3}{2}$ имеем:

$$|5 - 6x| = 6x - 5 > 4, \quad 4 \sin \frac{\pi x}{3} \leqslant 4;$$

таким образом, при $x > \frac{3}{2}$ равенство (1) невозможно. При $0 < x < \frac{5}{6}$ левая часть уравнения (1) — убывающая функция, а правая — возрастающая; отсюда вытекает, что графики этих функций при $0 < x < \frac{5}{6}$ не могут иметь более одной точки пересечения (одну точку пересечения мы угадали). При $x \leqslant 0$ справедливы неравенства

$$|5 - 6x| > 4, \quad 4 \sin \frac{\pi x}{3} \leqslant 4,$$

и значит, при $x \leqslant 0$ уравнение (1) корней не имеет.

Доказательство отсутствия корней на промежутке $\frac{5}{6} < x < \frac{3}{2}$ требует использования понятия производной. Рассмотрим при $x > \frac{5}{6}$ функцию, представляющую собой разность левой и правой частей уравнения (1):

$$y = 6x - 5 - 4 \sin \frac{\pi x}{3}.$$

Нетрудно убедиться, что для ее производной имеет место цепочка неравенств:

$$y' = 6 - 4 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi x}{3} > 6 - 4 \cdot \frac{\pi}{3} > 0,$$

т. е. $y' > 0$. Это означает, что введенная функция монотонно возрастает при $x > \frac{5}{6}$ и, следовательно, ее график может при $x > \frac{5}{6}$ не более одного раза пересекать ось абсцисс. Поскольку мы уже угадали такую точку пересечения $\left(\text{при } x = \frac{3}{2}\right)$, то на промежутке $\frac{5}{6} < x < \frac{3}{2}$ эта функция не принимает нулевого значения. Другими словами, на промежутке $\frac{5}{6} < x < \frac{3}{2}$ уравнение (1) корней не имеет. Остается заметить, что $x = \frac{5}{6}$ также не является корнем этого уравнения.

Для решения подобных уравнений иногда нет необходимости строить графики. Да и само построение этих графиков может оказаться слишком сложным. На самом деле при решении мы пользуемся не столько графиками, сколько различными неравенствами, а графики просто подсказывают нам пути доказательства. В более сложных случаях приходится искать доказательство чисто формально, не имея перед собой зрительного, геометрического образа. Это, разумеется, несколько труднее.

③ *Решить уравнение* $2\cos^2\dfrac{x^2+x}{6}=2^x+2^{-x}$.

Ясно, что лучше и не пытаться строить график левой части, и вся надежда здесь на неравенства. С одной стороны, при любом x имеет место неравенство

$$2\cos^2\frac{x^2+x}{6}\leqslant 2,$$

а с другой стороны,

$$2^x+2^{-x}\geqslant 2$$

как сумма взаимно обратных положительных величин. Поэтому левая и правая части исходного уравнения могут равняться друг другу в том и только в том случае, когда обе они равны 2.

Иными словами, должна выполняться система *двух* уравнений с *одним* неизвестным:

$$\begin{cases} 2\cos^2\dfrac{x^2+x}{6}=2, \\ 2^x+2^{-x}=2. \end{cases}$$

Второе уравнение этой системы имеет единственный корень $x=0$. Этот корень удовлетворяет и первому уравнению, т. е. является единственным решением системы, а вместе с ней и исходного уравнения.

Следующие задачи благодаря использованию свойств тригонометрических функций также сводятся к системам двух уравнений с одним неизвестным.

④ *Решить уравнение* $\cos^7 x+\sin^4 x=1$.

Поскольку $\cos^7 x\leqslant\cos^2 x$ и $\sin^4 x\leqslant\sin^2 x$, то левая часть данного уравнения не превосходит единицы и равна единице только в случае, когда в обоих написанных выше нестрогих неравенствах имеет место равенство, т. е. выполняется система уравнений

$$\begin{cases} \cos^7 x=\cos^2 x, \\ \sin^4 x=\sin^2 x. \end{cases}$$

Первое уравнение удовлетворяется при $\cos x = 0$ и при $\cos x = 1$. Но при этих значениях x второе уравнение также удовлетворяется: если $\cos x = 0$, то $\sin^2 x = 1$, а если $\cos x = 1$, то $\sin x = 0$. Поэтому решениями системы, а вместе с ней и исходного уравнения, будут

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ и } x = 2k\pi, \quad k \text{ — целое число.}$$

(5) *Решить уравнение* $\sin^4 x - \cos^7 x = 1$.

Рассуждение, примененное в предыдущей задаче, здесь непосредственно не проходит, но его можно несколько модифицировать. Из данного уравнения следует, что $\cos^7 x \leqslant 0$ (иначе $\sin^4 x > 1$), т. е. $\cos x \leqslant 0$. Но тогда $|\cos^7 x| = -\cos^7 x$, и уравнение переписывается в виде

$$\sin^4 x + |\cos x|^7 = 1.$$

А теперь мы можем рассуждать так, как раньше:

$$\sin^4 x \leqslant \sin^2 x, \qquad |\cos x|^7 \leqslant |\cos x|^2 = \cos^2 x,$$

и в результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^4 x = \sin^2 x, \\ |\cos x|^7 = |\cos x|^2. \end{cases}$$

Второе уравнение удовлетворяется при $|\cos x| = 0$ и при $|\cos x| = 1$. Из $|\cos x| = 0$ получаем решения $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, которые удовлетворяют и первому уравнению. Если же $|\cos x| = 1$, то $\cos x = -1$ (так как $\cos x \leqslant 0$) и $x = (2k + 1)\pi$; эти значения также удовлетворяют первому уравнению. Таким образом, решение исходного уравнения дается двумя сериями

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{и} \quad x = (2k+1)\pi, \quad k \text{ — целое число.}$$

Укажем еще один способ решения, сводящий исходное уравнение к уравнению, рассмотренному в предыдущей задаче. Заменив x на $\pi - y$, получим уравнение

$$\sin^4 (\pi - y) - \cos^7 (\pi - y) = 1,$$

или, пользуясь формулами приведения, уравнение

$$\sin^4 y + \cos^7 y = 1,$$

разобранное выше. Решив его, нужно еще вернуться к старой неизвестной $x = \pi - y$.

Большие трудности у поступающих вызывают задачи, в которых комбинируются уравнения и неравенства или встречаются некоторые дополнительные условия, не являющиеся ни уравнениями, ни неравенствами — такие, например, как требование целочисленности значений неизвестных.

(6) *Найти все пары чисел* (x, y), *удовлетворяющие условиям*

$$\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2}\,, \\ 4xy^3 + y^3 + \dfrac{1}{2} \geqslant 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2}\,. \end{cases} \qquad (2)$$

В этой задаче действительно трудно найти идею решения, и мы сразу укажем ее, не рассматривая никаких более или менее естественных попыток, не приводящих к цели. Как это ни странно, но для решения задачи приходится «испортить» входящее в систему уравнение, заменив его неравенством.

Именно, в правой части уравнения стоит выражение вида $\sqrt{z - z^2}$. Рассмотрение квадратного трехчлена $z - z^2$ показывает, что его наибольшее значение равно $\frac{1}{4}$, так что правая часть уравнения меньше или равна $\frac{1}{2}$. Поэтому если некоторая пара (x, y) удовлетворяет условиям (2), то она удовлетворяет и системе неравенств

$$\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 \leqslant \dfrac{1}{2}\,, \\ 4xy^3 + y^3 + \dfrac{1}{2} \geqslant 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2}\,. \end{cases} \qquad (3)$$

Вычитая теперь из первого неравенства второе, мы получим, что эта пара (x, y) удовлетворяет неравенству

$$y^6 - 4xy^3 + 4x^2 \leqslant 1 - \sqrt{1 + (2x - y)^2}\,.$$

В этом неравенстве левая часть равна $(y^3 - 2x)^2$, т. е. неотрицательна, а правая часть, как легко видеть, неположительна, и, следовательно, это неравенство удовлетворяется только в случае, когда обе его части равны нулю. Другими словами, пара (x, y) удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} y^3 - 2x = 0, \\ \sqrt{1 + (2x - y)^2} = 1, \end{cases}$$

которая легко решается:

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0;\quad x_2 = -\frac{1}{2},\ y_2 = -1;\quad x_3 = \frac{1}{2},\ y_3 = 1.$$

Однако в процессе решения мы заменили исходную систему (2) вовсе не равносильной ей системой (3), а эту систему заменили одним неравенством, также, разумеется, не равносильным ей. Поэтому, естественно, мы могли получить посторонние решения, так что необходимо сделать проверку. Эта проверка проводится непосредственной подстановкой получившихся пар в систему (2), после чего убеждаемся, что условию задачи удовлетворяет только пара $x = -\frac{1}{2}$, $y = -1$.

7 *Найти все пары чисел (x, y), для которых выполняются одновременно следующие условия:*

$$а)\ 2x^2 - xy + 10 = 0; \qquad б)\ x^2 + y^2 \leqslant 90;$$

в) x — целое число.

Нетрудно заметить, что из условия б) следует неравенство $x^2 \leqslant 90$, т. е., с учетом в), для x возможны лишь значения 0, ± 1, ± 2, ..., ± 9. Поэтому в принципе для решения задачи можно по очереди перебрать все указанные целые значения x. Однако на этом пути нам пришлось бы рассмотреть 21 значение x, так что этот путь, пожалуй, слишком долог.

Более короткий путь связан с несколько неожиданным для данной задачи применением неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

Заметив, что из условия а) вытекает $x \neq 0$, выразим y через x:

$$y = \frac{2x^2 + 10}{x}.$$

Отсюда

$$|y| = \frac{2x^2 + 10}{|x|} = 2|x| + \frac{10}{|x|},$$

и, пользуясь упомянутым неравенством между средними, получаем

$$|y| \geqslant 2\sqrt{2|x| \cdot \frac{10}{|x|}} = 2\sqrt{20}.$$

Другими словами, $y^2 \geqslant 80$.

Теперь из условия б) следует, что $x^2 \leqslant 90 - y^2 \leqslant 10$, и остается рассмотреть лишь значения $x = \pm1, \pm2, \pm3$. Перебор этих шести значений уже не составляет труда; в результате мы находим две пары, удовлетворяющие условию задачи: $x_1 = 2$, $y_1 = 9$; $x_2 = -2$, $y_2 = -9$.

В связи с этим решением отметим, что во многих задачах, в которых одно или несколько неизвестных являются, по условию, целыми числами, довольно часто приходится прибегать к перебору отдельных значений неизвестных. Поэтому в тех случаях, когда задача сводится к перебору, следует научиться чувствовать, является ли этот перебор практически целесообразным. Если, например, требуется рассмотреть 500 значений неизвестного, то вряд ли такой путь решения приведет к цели — на его осуществление на экзамене просто не хватит времени.

Нельзя, разумеется, однозначно ответить на вопрос, сколько значений стоит перебирать, а сколько не стоит — это зависит и от простоты рассмотрения отдельных случаев, и от техники решающего, и от его умения рационально организовать такой перебор. В только что разобранной задаче, к примеру, даже прямой перебор 21 значения x не отнял бы слишком много времени — может быть, даже меньше, чем поиск пути, сокращающего этот перебор. Кстати, и в приведенном выше решении вместо шести значений x достаточно было бы перебрать только три: $x = 1, 2, 3$, если заметить, что вместе с каждой парой (x, y) условию задачи удовлетворяет и пара $(-x, -y)$.

При подготовке к экзамену всегда полезно стараться находить приемы, сводящие перебор к минимуму. Что же касается тактики на экзамене, то следует соблюдать определенную меру, и ситуация здесь примерно такая же, как и в геометрических задачах, где часто приходится выбирать между проведением длинного вычислительного решения и поиском изящной геометрической идеи.

8 *Найти все значения* α, *для которых существуют четыре натуральных числа* (x, y, u, v), *удовлетворяющих равенствам*

$$\begin{cases} (x + y)(x + y + 20) = (140 - \alpha)(\alpha - 80), \\ \alpha(8u^2 + 2v^2 - \alpha) = (4u^2 - v^2)^2. \end{cases} \quad (4)$$

Пусть α — число, удовлетворяющее условию задачи, а x, y, u, v — соответствующие натуральные значения неизвестных, удовлетворяющие данным равенствам (4). Из первого равенства (4) заключаем, что $(140 - \alpha)(\alpha - 80) > 0$ и, следовательно, $80 < \alpha < 140$.

Рассмотрим второе равенство (4), которое, как легко видеть, также накладывает на α довольно сильные ограничения. Переписав это равенство в виде

$$\alpha^2 - (8u^2 + 2v^2)\alpha + (4u^2 - v^2)^2 = 0,$$

мы можем рассмотреть его как квадратное уравнение относительно α и найти два корня $\alpha_{1,2} = (2u \pm v)^2$. Теперь мы видим, что α — натуральное число; более того, α — квадрат натурального числа. А в промежутке от 80 до 140 лежат всего три квадрата натуральных чисел, и потому для α возможны лишь значения 81, 100, 121.

Остается только проверить, какие из этих трех значений α удовлетворяют условию задачи. Другими словами, для каждого из этих значений α мы должны попытаться найти натуральные числа x, y, u, v такие, что выполняются равенства (4).

При $\alpha = 81$ первое равенство в (4) принимает вид

$$(x + y)(x + y + 20) = 59.$$

Но число 59 — простое и не может быть разложено в произведение двух натуральных сомножителей, отличающихся друг от друга на 20. Поэтому $\alpha = 81$ не удовлетворяет условию задачи.

При $\alpha = 100$ первое равенство в (4) принимает вид

$$(x + y)(x + y + 20) = 800,$$

и поскольку $800 = 20 \cdot 40$, то этому равенству удовлетворяют любые натуральные числа x, y такие, что $x + y = 20$ (например, $x = y = 10$). Для отыскания значений u и v, соответствующих рассматриваемому значению α, заметим, что согласно нашему решению достаточно, чтобы удовлетворялось одно из равенств

$$100 = (2u + v)^2, \quad 100 = (2u - v)^2.$$

Ясно, что можно положить $u = 5$, $v = 0$. Таким образом, значение $\alpha = 100$ удовлетворяет условию задачи.

Оставшееся значение $\alpha = 121$ рассматривается так же, как и $\alpha = 81$, и не удовлетворяет условию задачи. Итак, решением задачи является единственное число $\alpha = 100$.

Заметим, что исследование значения $\alpha = 100$, проведенное выше, является частью чернового решения, а в решении чистовом вполне достаточно было бы написать так: «Число $\alpha = 100$ удовлетворяет условию задачи, так как при этом значении α равенствам (4), как легко проверить, удовлетворяют натуральные числа $x = 10$, $y = 10$, $u = 5$, $v = 0$».

Отметим, кроме того, что в самом начале решения мы могли бы сделать более тонкую оценку для α: поскольку x и y — натуральные числа, то

$$x + y \geqslant 2, \quad x + y + 20 \geqslant 22,$$

и поэтому

$$(140 - \alpha)(\alpha - 80) \geqslant 44.$$

Однако, как можно проверить, это уточнение привело бы к более сложным выкладкам, но не дало бы преимуществ по сравнению со сделанной более грубой оценкой.

Распространенным типом задач, необычных по внешнему виду, являются «одиночные» уравнения и неравенства с двумя или более неизвестными и системы уравнений, в которых число неизвестных не равно числу уравнений. Несколько таких задач — систем двух уравнений с одним неизвестным — мы уже решали в предыдущих примерах.

Большие психологические затруднения у поступающих обычно вызывают задачи, где неизвестных больше, чем уравнений или неравенств. Видимо, это связано с мнением, явно или неявно выражаемым, что из малого числа условий нельзя определить большое число неизвестных. Ниже разобранные задачи показывают, что это мнение не соответствует действительности.

(9) *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

Данная система имеет три неизвестных и всего два уравнения. Однако сразу же ясно, что в первом уравнении левая часть не меньше двух как сумма взаимно обратных положительных величин, а правая часть не больше двух. Поэтому первое уравнение равносильно системе двух уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2, \\ \sin^2 y = 1. \end{cases}$$

Тем самым необычность данной системы полностью снята — мы имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными, и притом чрезвычайно простую. В самом деле, из двух новых уравнений и второго данного мы сразу же получаем $\operatorname{tg}^2 x = 1$, $\cos^2 z = 0$. Поэтому решения исходной системы даются формулами

$$x = \frac{\pi}{4}(2k+1), \quad y = \frac{\pi}{2} + l\pi, \; z = \frac{\pi}{2} + m\pi,$$

где k, l, m — целые числа.

(10) *Решить неравенство*

$$-|y| + x - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \geqslant 1.$$

Отметим прежде всего, что *решить неравенство с двумя неизвестными x и y* — значит, естественно, указать все пары чисел x, y, при подстановке которых в данное неравенство получается верное числовое неравенство.

Указать все такие пары можно, очевидно, или непосредственно, так, как, например, они указываются при решении обычных систем уравнений (при этом их может быть и бесконечно много — скажем, для тригонометрических систем), или геометрически — изобразив область, составленную из соответствующих точек плоскости. Поэтому естественно привести данное неравенство к такому виду, чтобы его решения легко изображались на плоскости.

Перепишем неравенство в виде

$$x - |y| \geqslant \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + 1.$$

Теперь видно, что всякое решение должно удовлетворять условию $x - |y| \geqslant 0$, а при выполнении этого условия обе части неравенства неотрицательны (в ОДЗ), и мы можем возвести их в квадрат, получив равносильное в ОДЗ неравенство

$$-x|y| \geqslant \sqrt{x^2 + y^2 - 1}.$$

Но в рассматриваемой области $x \geqslant |y| \geqslant 0$, так что левая часть получившегося неравенства неположительна, а правая часть неотрицательна. Поэтому оно удовлетворяется в том и только в том случае, когда обе части одновременно равны нулю:

$$x|y| = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Первое из этих уравнений означает, что либо x, либо y равен 0. Если $x = 0$, то из $x \geqslant |y|$ следует $y = 0$, а пара $x = 0$, $y = 0$ не входит, очевидно, в ОДЗ исходного неравенства. Следовательно, $y = 0$, и из второго уравнения получаем (с учетом $x \geqslant 0$), что $x = 1$.

Подстановка в исходное неравенство показывает, что полученная пара $x = 1$, $y = 0$ ему удовлетворяет. Интересно отметить, что, хотя мы и настроились сразу на геометрическое изображение решения, оно для записи ответа не понадобилось.

(11) *Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению*

$$\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \frac{3}{2}.$$

Первое решение. Разумеется, вместо данной длинной формулировки можно было бы сказать просто: решить уравнение. Это уравнение допускает почти стандартное решение, сводящееся, как мы сейчас увидим, к решению тригонометрического неравенства. Первая мысль, которая может возникнуть при решении одного уравнения с двумя неизвестными, — нельзя ли выразить одно неизвестное через другое? Затем, придавая значения одному неизвестному, можно было бы получить соответствующие значения другого, и полученные таким образом пары будут решениями уравнения.

Попытаемся выразить y через x. Наше уравнение можно записать в виде

$$\cos x + 2\sin\left(\frac{x}{2} + y\right)\sin\frac{x}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ясно, что $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ $\left(\text{иначе } \cos x = \frac{3}{2}\right)$, и поэтому

$$\sin\left(\frac{x}{2} + y\right) = \frac{\frac{3}{2} - \cos x}{2\sin\frac{x}{2}}. \qquad (5)$$

Будем рассматривать это уравнение как уравнение относительно y. Оно разрешимо в том и только в том случае, когда

$$\left|\frac{\frac{3}{2} - \cos x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant 1.$$

Это неравенство можно переписать $\left(\text{в силу того, что } \frac{3}{2} - \cos x > 0\right)$ в виде

$$\frac{3}{2} - \cos x \leqslant 2\left|\sin\frac{x}{2}\right|.$$

Но $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$, и, обозначая $\left|\sin \frac{x}{2}\right|$ через t, будем иметь неравенство $4t^2 - 4t + 1 \leqslant 0$, которое удовлетворяется лишь при $t = \frac{1}{2}$. Итак, правая часть уравнения (5) относительно y не превосходит по модулю единицу только при $\sin \frac{x}{2} = \pm\frac{1}{2}$. При остальных значениях x оно решений не имеет. Рассмотрим отдельно оба возможных случая.

Если $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$, то $x = (-1)^k\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, где k — целое число. Тогда при любом k

$$\cos x = \cos\left[(-1)^k\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] = \frac{1}{2},$$

и уравнение (5) относительно y принимает вид $\sin\left[\frac{x}{2} + y\right] = 1$. Отсюда $\frac{x}{2} + y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ и, следовательно,

$$y = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - (-1)^k\frac{\pi}{6} - k\pi.$$

Таким образом, мы получили одну серию решений исходного уравнения:

$$x = (-1)^k\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad y = \frac{\pi}{2} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + (2n - k)\pi,$$

$$n, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Аналогично рассматривается случай $\sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$, который приводит ко второй серии решений:

$$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad y = -\frac{\pi}{2} + (-1)^k\frac{\pi}{6} + (2n - k)\pi,$$

$$n, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Второе решение. Исходное уравнение допускает и иное решение, основанное на удачной группировке.

Пользуясь тригонометрическими формулами, приведем уравнение к виду

$$4\cos^2\frac{x+y}{2} - 4\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} + 1 = 0.$$

Первые два слагаемые в левой части легко дополнить до квадрата разности:

$$\left(2\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{x-y}{2} = 0.$$

Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2\cos\dfrac{x+y}{2} = \cos\dfrac{x-y}{2}, \\ \sin\dfrac{x-y}{2} = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы имеем $x - y = 2k\pi$, где k — целое число. Подставляя значение $y = x - 2k\pi$ в первое уравнение, получим $2\cos(x - k\pi) = \cos k\pi$. Поскольку $\cos(x - k\pi) = (-1)^k\cos x$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, то отсюда $\cos x = \frac{1}{2}$, и легко находим x.

Таким образом, решение исходного уравнения дается следующими парами:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad y = \pm\frac{\pi}{3} + 2(n-k)\pi,$$

где k и n — целые числа (в формулах одновременно берутся либо оба верхних знака, либо оба нижних).

Отметим, что формулы, получившиеся в этом решении, мало похожи на формулы, полученные в первом решении. Тем не менее они описывают одно и то же множество пар (x, y), хотя убедиться в этом непосредственно не так просто.

Интересно сравнить приведенные решения: второе решение, весьма простое с виду, основывается на удачно найденной группировке, а в этом всегда есть некоторая искусственность и элемент догадки. В то же время первое решение следует естественной идее, но представляет технические трудности.

В следующем уравнении с двумя неизвестными идея выразить одно неизвестное через другое, очевидно, неприменима, и для решения используются соображения, связанные с неравенствами.

(12) *Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению*

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2 \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2 (x + y). \qquad (6)$$

Рассмотрим левую часть этого уравнения. Воспользовавшись неравенством $a^4 + b^4 \geqslant 2a^2b^2$, справедливым, как легко видеть, для любых a и b, будем иметь

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y \geqslant 2 \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y,$$

причем равенство достигается только при $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y$. Далее,

$$\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y \geqslant 2$$

как сумма взаимно обратных положительных величин, причем равенство достигается лишь при $\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y = 1$. Итак, левая часть уравнения (6) больше или равна 4, причем равна 4 только при одновременном выполнении равенств $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y$ и $\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y = 1$.

С другой стороны, $\sin^2 (x + y) \leqslant 1$ и, следовательно, правая часть уравнения (6) меньше или равна 4.

Таким образом, исходное уравнение (6) удовлетворяется в том и только в том случае, когда обе его части равны 4, что имеет место, если x и y — решения системы

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y, \\ \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y = 1, \\ \sin^2 (x + y) = 1. \end{cases} \qquad (7)$$

Из первых двух уравнений этой системы имеем $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y = 1$, т. е. $\operatorname{tg} x = \pm 1$, $\operatorname{tg} y = \pm 1$, причем возможны все четыре комбинации знаков. Тогда

$$x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}, \quad y = (2n + 1)\frac{\pi}{4}, \quad k, n \text{ — целые числа.}$$

Из полученных значений надо отобрать те, которые удовлетворяют третьему уравнению системы. Для этого подставим их в третье уравнение:

$$\sin^2(x+y) = \begin{cases} 1, & \text{если } k+n+1 \text{ нечетно,} \\ 0, & \text{если } k+n+1 \text{ четно.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что из решений первых двух уравнений надо взять такие пары k и n, для которых сумма $k + n$ четная: $k + n = 2m$, т. е. $n = 2m - k$, где m — целое число.

Итак, решениями уравнения (6) являются пары

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{4}, \quad y = (4m - 2k + 1)\frac{\pi}{4},$$

m, k — целые числа.

Изложенное решение лучше считать черновым и переоформить его в логически более четкое чистовое решение. Это можно сделать, например, следующим образом.

Приведем левую часть уравнения (6) к виду

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y =$$
$$= (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y)^2 + 2(\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y) =$$
$$= (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y)^2 + 2(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y)^2 + 4.$$

Тогда нужно решить уравнение

$$(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y)^2 + (2\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y)^2 + 1 = \sin^2(x+y).$$

Левая часть этого уравнения больше или равна единице, а правая — меньше или равна единице. Поэтому уравнение удовлетворяется в том и только в том случае, когда обе части равны единице, т. е. когда x и y являются решениями системы (7). Эта система решается так же, как в черновом решении.

Задачи

Решить уравнения и неравенства (№ 1—13):

1. $2\sin x = 5x^2 + 2x + 3$.

2. $2\cos\frac{x}{3} = 2^x + 2^{-x}$.

3. $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$.

4. $\dfrac{|\operatorname{ctg} xy|}{\cos^2 xy} = \log_{1/3}(9y^2 - 18y + 10) + 2.$

5. $\operatorname{tg}^2 \pi(x+y) + \operatorname{ctg}^2 \pi(x+y) = \sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1}} + 1.$

6. $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x(\sin y + \cos y) + 2 = 0.$

7. $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos y = 3 + \cos 2y.$

8. $\cos x - y^2 - \sqrt{y - x^2 - 1} \geqslant 0.$

9. $-x - y^2 - \sqrt{x - y^2 - 1} \geqslant -1.$

10. $(4x - x^2 - 3)\log_2(\cos^2 \pi x + 1) \geqslant 1.$

11. $2^{-|x-2|}\log_2(4x - x^2 - 2) \geqslant 1.$

12. $1 - \frac{2}{\pi}x - \cos x + \operatorname{tg} x + \dfrac{\cos 2x - 1}{\sin 2x} = 0.$

13. $\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2 - \sin\dfrac{x}{2} + \cos x + \dfrac{\operatorname{tg}^2(x/2) - 1}{\operatorname{tg}^2(x/2) + 1} = 0.$

Найти все такие значения x, что:

14. $\min\{2x - x^2, x - 1\} > -\frac{1}{2}.$

15. $\max\{x^2 - 2x, \frac{x}{2} - 1\} < -\frac{1}{2}.$

16. Найти минимальный член последовательности

$$a_n = 2n^2 - 24n + 69 - \frac{9}{(3n-22)^2 + 3}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

17. Найти максимальный член последовательности

$$a_n = -2n^2 + 20n - 48 + \frac{25}{(5n-31)^2 + 10}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

18. Найти все значения α, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2x + \alpha \leqslant 0, \\ x^2 - 4x - 6\alpha \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. Найти все значения α, при которых решения системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x \leqslant \alpha - 1, \\ x^2 - 4x \leqslant 1 - 4\alpha \end{cases}$$

образуют на числовой оси отрезок длины 1.

Найти все числа x и y, для которых:

20. $\begin{cases} 2^{x+1} = 4y^2 + 1, \\ 2^x \leqslant 2y. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4\log_2^2 x + 1 = 2\log_2 y, \\ \log_2 x^2 \geqslant \log_2 y. \end{cases}$

22. Найти наибольшее число y такое, что существует число x, удовлетворяющее равенству

$$2x^2 + 5y^2 + 2xy - x - 2y - 3 = 0.$$

23. Существует ли такое число c, при котором выражение $\log_{1+c} c^2$ не меньше, чем $2^c + 1$?

Найти все пары чисел (x, y), для которых выполняются одновременно следующие условия (№ 24—27):

24. а) $x^2 - 2xy + 12 = 0$; б) $x^2 + 4y^2 \leqslant 60$; в) x — целое число.

25. а) $2x^2 - xy + 9 = 0$; б) $2x^2 + y^2 \leqslant 81$; в) x — целое число.

26. $\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}(x-y)^2 - (x-y)^4} = y^2 - 2x^2, \\ y \geqslant 4x^4 + 4yx^2 + \frac{1}{2}. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4y^2 - 2x^2 = \sqrt{2(x+2y)^2 - (x+2y)^4}, \\ x^4 + 2 \leqslant 4y(x^2 - 1). \end{cases}$

28. Найти все значения x, для которых величина $y = \frac{\pi}{3}(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$ удовлетворяет уравнению

$$\log_4(\operatorname{tg} 2y - 3\operatorname{ctg} y) = 1 + \tfrac{1}{2}\log_{1/2}(\operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} y).$$

29. Верно ли, что всякое решение неравенства $\log_2(8 + 8x - 5x^2) > 2$ будет решением неравенства $\log_2(2 + 2x - x^2) > 0$?

30. Верно ли, что всякое решение неравенства

$$\log_{1/2}(x^2 - 4x + 6) < -2$$

будет решением неравенства $\log_{1/2}(3x^2 - 14x + 9) < 0$?

31. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$u^3(x) - 6u^2(x) + 8u(x) \leqslant 0, \quad \text{где} \quad u(x) = \log_2\frac{4x-1}{3x+1}.$$

19 – 4142

32. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\begin{cases} |x-2|+|x-3|=1, \\ 813x-974 \leqslant 163x^2. \end{cases}$$

33. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\begin{cases} |x+5|=|x+2|+3, \\ 1114+279x \leqslant 139x^2. \end{cases}$$

34. Найти все значения α, для каждого из которых существуют четыре целых числа (x, y, u, v), удовлетворяющих равенствам

$$\begin{cases} x^2+y^2=(111-\alpha)(\alpha-89), \\ 50(u^2-v^2)=\alpha(15u+5v-\alpha). \end{cases}$$

35. Найти все значения α, для каждого из которых существуют четыре натуральных числа (x, y, u, v), удовлетворяющих равенствам

$$\begin{cases} xy(40+xy)=(150-\alpha)(\alpha-90), \\ \alpha(8u^2+18v^2-\alpha)=(4u^2-9v^2)^2. \end{cases}$$

§ 2. Задачи с параметрами

Очень серьезные трудности логического характера вызывают обычно уравнения, неравенства или системы с параметрами, в которых требуется найти такие значения этих параметров, при которых выполняются некоторые дополнительные требования (например, уравнение имеет единственное решение или, наоборот, удовлетворяется всеми допустимыми значениями x, или всякое решение одной системы уравнений является решением другой системы, или всякое решение одного неравенства является решением другого и т. п.).

Эти задачи являются, пожалуй, наиболее трудными из предлагаемых на экзаменах именно потому, что они требуют логической культуры — того, чего не хватает большинству поступающих. Чтобы решить такую задачу, необходимо в каждый момент проведения решения достаточно отчетливо представлять себе, что́ уже сделано, что́ еще надо сделать, что́ означают уже полученные результаты.

1 *При каких a уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственное решение?*

Ясно, что $\sin^2 ax$ при произвольном a нельзя выразить через $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому рассматриваемое уравнение не может быть решено обычными методами — необходимо найти новую идею решения. Идея эта аналогична тем, которые применялись в § 1 раздела IV.

Вследствие того, что $\cos x \leqslant 1 \leqslant 1 + \sin^2 ax$, исходное уравнение выполняется в том и только в том случае, когда выполняется система уравнений

$$\begin{cases} \sin ax = 0, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

Таким образом, надо рещить последнюю систему и исследовать, при каких значениях a она имеет единственное решение. (Так как исходное уравнение равносильно полученной системе, то эти значения a и будут искомыми.)

В этом месте и начинаются самые серьезные логические трудности. Именно здесь становилось ясно, кто понимает поставленную задачу, а кто просто делает какие-то выкладки, не отдавая себе отчета, что́ он, собственно говоря, делает и зачем это ему нужно.

Вот, к примеру, одно из предложенных «решений» этой системы:

$$«ax = \pi k, \quad x = 2\pi n, \quad 2a\pi n = \pi k, \quad a = \frac{k}{2n}».$$

И все! Больше не было ни единого слова, только равенство $a = \dfrac{k}{2n}$ было подчеркнуто и считалось, видимо, ответом. Понять это решение просто невозможно!

Приведем решение, которое повторяет выкладки предыдущего «решения», но сопровождает их рассуждениями, которых там явно не хватает.

Решения первого уравнения системы таковы:

$$ax = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Решения ее второго уравнения также очевидны:

$$x = 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Нам нужны такие x, которые удовлетворяют одновременно обоим уравнениям, т. е. надо найти такие числа k и n, при которых из обеих серий получается одно и то же значение x. Таким образом, надо решить одно уравнение с двумя неизвестными n и k (и параметром a):

$$2an\pi = k\pi. \tag{1}$$

Очевидно, при *любом* a пара чисел $n = 0$, $k = 0$ является решением этого уравнения. Ей соответствует корень $x = 0$. Таким образом, при *любом* a исходное уравнение имеет решение $x = 0$.

Если $n \neq 0$, то уравнение (1) можно переписать в виде

$$a = \frac{k}{2n}. \tag{2}$$

Вспомним теперь нашу основную задачу: ведь *нам нужно не решить уравнение, а лишь определить, при каких a оно имеет единственное решение*. Но любая пара чисел k и n, удовлетворяющая условию (2), дает решение исходного уравнения $x = 2n\pi = \frac{k\pi}{a}$. Поскольку мы уже нашли при любом a один корень исходного уравнения ($x = 0$), то теперь *следует искать те значения a, для которых не существует таких целых чисел k и n, что выполняется соотношение* (2).

Ясно, что если a иррационально, то таких k и n действительно не найдется. Первый результат получен: *если a — иррациональное число, то данное уравнение имеет единственное решение.*

Решена ли уже задача? Разумеется, нет — ведь еще совершенно не исследованы рациональные значения a. Однако, если a рационально, т. е. $a = \frac{p}{q}$, то его можно записать в виде $a = \frac{2p}{2q}$ и в уравнении (2) получить решение $k = 2p$, $n = q$. Следовательно, в этом случае, кроме $x = 0$, будет по крайней мере еще одно решение (на самом деле их будет даже бесконечно много). Итак, *при рациональном a исходное уравнение имеет не одно решение*. Задача решена.

Все эти рассуждения приходится проводить для того, чтобы решить задачу для себя, получить ответ. Это, можно сказать, черновое решение. Теперь покажем, как можно было бы изложить чистовое решение.

Очевидно, $x = 0$ является корнем исходного уравнения при *любом* a. Докажем, что при a иррациональном других решений нет, а при a рациональном — есть.

В самом деле, пусть сначала a иррационально. Из неравенств $\cos x \leqslant 1 \leqslant 1 + \sin^2 ax$ следует, что x является решением в том и только в том случае, когда удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \sin ax = 0, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

Если $x \neq 0$ является решением последней системы, то, во-первых, $ax = k\pi$, k — некоторое целое число, и, во-вторых, $x = 2n\pi$, n — некоторое целое число, причем $n \neq 0$. Но тогда $2an\pi = k\pi$, откуда $a = \frac{k}{2n}$, т. е. a — рациональное число, что противоречит предположению.

Пусть теперь a рационально, $a = \frac{p}{q}$. Тогда $x = 2q\pi$ будет, очевидно, решением, и притом отличным от нуля. Таким образом, данное уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда число a иррационально.

Эту задачу можно решить и графически. Будем считать, что $a \neq 0$, так как при $a = 0$ уравнение, очевидно, имеет бесконечно много решений. Перепишем наше уравнение так: $\sin^2 ax = \cos x - 1$ и рассмотрим две функции

$$y_1 = \cos x - 1, \quad y_2 = \sin ax = \frac{1 - \cos 2ax}{2}.$$

Построим на одном чертеже оба графика (рис. 153). Ясно, что исходное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда эти графики имеют общую точку.

Из чертежа видно, что при любых a есть точка пересечения графиков: $x = 0$. Из чертежа также видно, что дальнейшее пересечение графиков возможно лишь в точках, где оба графика касаются оси Ox, т. е. там,

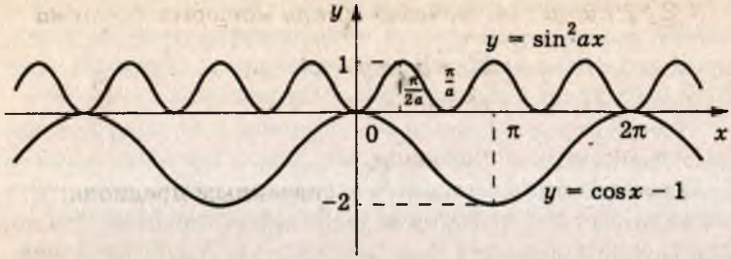


Рис. 153

где одновременно $\sin^2 ax = 0$ и $\cos x = 1$. Но $\sin^2 ax = 0$ для $ax = n\pi$, где $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, а $\cos x = 1$ для $x = 2k\pi$, где $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Поэтому точка $x = 0$ будет единственной точкой встречи графиков только в том случае, когда $2ak\pi \neq n\pi$ ни для каких целых n и k, отличных от нуля.

Другими словами, мы показали, что единственное решение будет только тогда, когда $a \neq \frac{n}{2k}$, где n и k — целые отличные от нуля числа. Затем, так же как и выше, показывается, что это будет только тогда, когда a — число иррациональное.

Для решения задач с параметрами часто рассуждают следующим образом. Пусть параметр a — некоторое фиксированное число, *удовлетворяющее условию задачи*; такие значения a будем называть *подходящими*. Далее будем выводить следствия из условия задачи и предположения относительно a. Тем самым получаются некоторые условия, которым обязаны удовлетворять подходящие значения параметра.

Таким образом, значения параметра, не удовлетворяющие этим следствиям, автоматически не являются подходящими, и остается рассмотреть лишь те значения параметра, которые удовлетворяют полученным следствиям. В частности, если этим следствиям удовлетворяют лишь некоторые конкретные значения, то задача сводится просто к проверке этих значений.

(2) *Найти все значения a, при которых система*

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет только одно решение.

В соответствии с только что сказанным предполагаем сначала, что a — некоторое подходящее число, т. е. число, удовлетворяющее условию задачи. Другими словами, при этом значении a данная система уравнений имеет ровно одно решение; обозначим его через (x_0, y_0). Но легко заметить, что оба уравнения системы не меняются при замене x на $-x$, а это значит, что пара $(-x_0, y_0)$ при рассматриваемом значении a также является решением системы. Однако, по первоначальному предположению относительно a, система имеет *единственное* решение. Выход из этого противоречия один: (x_0, y_0) и $(-x_0, y_0)$ представляют собой одну и ту же пару. Это значит просто, что $x_0 = -x_0$, т. е. $x_0 = 0$.

О числе y_0 из этих рассуждений мы никакой информации не получаем. Но, подставив решение $(0, y_0)$ в исходную систему, приходим к равенствам $1 = y_0 + a$ и $y_0^2 = 1$. Отсюда следует, что y_0 равно либо 1, либо −1, и в соответствии с этим a равно либо 0, либо 2.

Таким образом, мы доказали, что если a — подходящее число, то либо $a = 0$, либо $a = 2$. И особо подчеркнем, что предыдущими рассуждениями ни в коем случае не доказано, что числа 0 и 2 являются подходящими. Наоборот, именно это предстоит сейчас выяснить.

Рассмотрим сначала значение $a = 0$. В этом случае имеем систему

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Если мы докажем, что система (3) имеет единственное решение, то это и будет означать, что значение $a = 0$ удовлетворяет условию задачи. Заметим, что значение $a = 0$ было получено выше при подстановке в исходную систему пары (0, 1). Легко проверить, что эта пара действительно удовлетворяет системе (3) и, таким образом, при $a = 0$ исходная система уже имеет одно решение. Выясним, имеются ли у системы (3) другие решения.

Эта система не решается обычными приемами. Поэтому применим специальные рассуждения. Из второго уравнения этой системы следует, что $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, откуда $x^2 \leqslant |x|$ и $y \leqslant 1$. Кроме того, $2^{|x|} \geqslant 1$, так как $|x| \geqslant 0$. Из всех этих неравенств получаем

$$2^{|x|} + |x| \geqslant 1 + x^2 \geqslant y + x^2,$$

и, следовательно, первое уравнение удовлетворяется лишь в случае, когда в обоих нестрогих неравенствах имеет место равенство, т. е. когда $2^{|x|} = 1$, $|x| = x^2$, $y = 1$, а это верно лишь при $x = 0$, $y = 1$. Таким образом, при $a = 0$ система (3) имеет единственное решение (0, 1).

Теперь рассмотрим значение $a = 2$. В этом случае имеем систему

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + 2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Как и раньше, замечаем, что пара (0, −1) является решением, и снова нужно выяснить, есть ли другие решения. Но, подставив $x = 1$, $y = 0$, убеждаемся, что пара (1, 0) также является решением рассматриваемой системы, и следовательно, при $a = 2$ эта система имеет не одно решение.

Итак, исходная система имеет единственное решение только при $a = 0$.

Приведенное решение требует еще нескольких слов — не математического, а скорее психологического характера. Как часто бывает, это решение легко понять, но как его найти? Конечно, на этот вопрос в общем случае нельзя дать универсальный ответ.

В нашем решении есть три догадки.

Первая — мы заметили, что исходная система не меняется при замене x на $-x$, и это дало нам существенное продвижение. Невозможно сказать, как это заметить, но каждый, кто знаком с понятиями четности и нечетности функций и имеет навык в обращении с ними, сможет это сделать.

Вторая — мы стали решать систему (3) нестандартным путем, используя неравенства. Эта догадка несколько сложнее, но изложенные в предыдущем параграфе примеры показывают, что применение неравенств для решения уравнений часто бывает необходимым.

И наконец, третья — мы догадались, что при $a = 2$ исходная система имеет еще одно решение: $x = 1$, $y = 0$. Мы попытались просто подобрать решение, и это удалось. Этот путь оказался успешным только благодаря наличию «хороших» целочисленных решений. В некоторых случаях такой подбор является единственно возможным путем решения.

(3) *Найти все значения a и b, при которых система*

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

имеет только одно решение.

Пусть (a, b) — подходящая пара значений параметров и $(x_0, y_0\ z_0)$ — соответствующее единственное решение. Но легко заметить, что система не изменится, если в ней одновременно заменить x на $-x$, а y на $-y$. Отсюда следует, что тройка $(-x_0, -y_0, z_0)$ также является решением системы, и, как в предыдущей задаче, заключаем, что $x_0 = y_0 = 0$. Подставляя теперь тройку $(0, 0, z_0)$ в систему, получим $z_0 = a$, $z_0 = b$, $z_0^2 = 4$, откуда $z_0 = \pm 2$ и $a = b = \pm 2$.

Таким образом, если пара (a, b) подходящая, то либо $a = b = 2$, либо $a = b = -2$. Снова, как и в предыдущей задаче, надо установить, являются ли эти пары значений параметров подходящими.

При $a = b = 2$ имеем систему

$$\begin{cases} xyz + z = 2, \\ xyz^2 + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \end{cases}$$

одним из решений которой, как легко проверить, является $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$. Из второго и первого уравнений следует, что $xy(z^2 - z) = 0$. Если $x = 0$, то далее из второго и третьего уравнений получаем $z = 2$ и $y = 0$, — это решение нам уже известно. То же самое решение получится, если $y = 0$.

Будем теперь считать, что $z^2 - z = 0$, т. е. $z = 0$ или $z = 1$. При $z = 0$ первые два уравнения противоречивы, а при $z = 1$ получаем систему

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + y^2 = 3, \end{cases}$$

которая, как легко убедиться, имеет четыре решения. Таким образом, при $a = b = 2$ исходная система имеет пять решений, а потому пара $a = b = 2$ не является подходящей.

Теперь пусть $a = b = -2$. Имеем систему

$$\begin{cases} xyz + z = -2, \\ xyz^2 + z = -2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \end{cases}$$

одним из решений которой, как легко убедиться, является $x = 0$, $y = 0$, $z = -2$. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что других решений эта система не имеет, а потому при $a = b = -2$ исходная система имеет единственное решение, т. е. эта пара значений параметров подходящая.

Итак, условию задачи удовлетворяют лишь значения $a = b = -2$.

4 *Найти все значения a, при которых система*

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2, \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b.

Пусть a — подходящее значение параметра, т. е. такое значение, при котором данная система имеет хотя бы одно решение при *всяком* значении b.

Выберем некоторое значение b; это можно сделать совершенно произвольно, но мы выберем b так, чтобы система приняла наиболее простой вид. Ясно, что лучше всего взять $b = 0$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} (x^2+1)^a = 1, \\ a + x^2 y = 1, \end{cases}$$

причем, поскольку a — подходящее значение, эта система имеет хотя бы одно решение, которое обозначим через (x_0, y_0).

В этом решении x_0 либо равно, либо не равно нулю. Если $x_0 = 0$, то из второго уравнения получаем $a = 1$, а если $x_0 \neq 0$, то $x_0^2 + 1 \neq 0$, и из первого уравнения получаем $a = 0$.

Таким образом, если a — подходящее значение, то либо $a = 0$, либо $a = 1$. Теперь надо выяснить, являются ли эти значения на самом деле подходящими.

При $a = 0$ система имеет вид

$$\begin{cases} (b^2+1)^y = 1, \\ bxy + x^2 y = 1; \end{cases}$$

нам надо выяснить, имеет ли эта система решения при любых b. При $b \neq 0$ из первого уравнения следует, что $y = 0$, а тогда второе уравнение противоречиво. Следовательно, значение $a = 0$ не является подходящим.

Пусть $a = 1$. Тогда система имеет вид

$$\begin{cases} x^2 + (b^2+1)^y = 1, \\ bxy + x^2 y = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $x = y = 0$ при любом b является решением, и следовательно, $a = 1$ — подходящее значение.

Таким образом, условию задачи удовлетворяет единственное значение $a = 1$.

5 *Найти все те числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения*

$$\sin 3x = a \sin x + (4 - 2|a|) \sin^2 x \tag{4}$$

является корнем уравнения

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x \cos 2x \tag{5}$$

и, обратно, всякий корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Более кратко эту задачу можно, очевидно, сформулировать так: *при каких a уравнения* (4) *и* (5) *равносильны*? Для выяснения равносильности двух уравнений существуют в принципе два пути: первый — получить каждое уравнение из другого с помощью некоторых преобразований, не нарушающих равносильность, и второй — в соответствии с определением равносильности доказать, что всякий корень одного уравнения является корнем другого уравнения, и наоборот.

В нашем примере первый путь, по-видимому, неприменим, и придется воспользоваться вторым путем. Однако и здесь все не так просто: трудно вести рассуждения о совпадении корней двух уравнений, которые так непохожи одно на другое. Единственное, что здесь может спасти, — это знание всех этих корней или корней хотя бы одного из данных уравнений.

В нашем случае, оказывается, совсем просто решается уравнение (5), и поэтому задача легко сводится к следующей: *при каких значениях a уравнение* (4) *имеет в точности те же корни, что и уравнение* (5).

Для сокращения выкладок обозначим $\sin x$ через y. Тогда уравнение (5) приводится к виду

$$2y^2 - y = 0. \tag{6}$$

Последнее уравнение имеет корни $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{2}$. Аналогично, после замены $\sin 3x = 3y - 4y^3$ уравнение (4) приводится к виду

$$[4y^2 + (4 - 2|a|)y + a - 3]y = 0. \tag{7}$$

Проведенную нами замену $\sin x$ на y сделали многие поступающие, и это «помогло» им сделать две серьезные ошибки. Так, многие сразу решили, что требуемых значений a не существует, поскольку уравнение (6) квадратное, а уравнение (7) кубическое, и, следовательно, они не равносильны, так как имеют разное число корней. В этом рассуждении сразу две неточности. Во-первых, квадратное и кубическое уравнения могут быть равносильны (например, уравнения $x^2 = 0$ и $x^3 = 0$ имеют оба *единственный* корень $x = 0$), и, во-вторых, как мы убедимся ниже, уравнения (4) и (5) могут быть равносильны, даже если (6) и (7) — неравносильны.

Именно в этом и состояла вторая существенная ошибка. В самом деле, на первый взгляд представляется совершенно очевидным, что наша задача свелась к следующей: при каких a уравнение (7) имеет лишь корни 0 и $\frac{1}{2}$? Но в действительности, если не забывать, что $y = \sin x$, то можно указать еще одну возможность для того, чтобы значение a было подходящим: если уравнение (7) имеет корни 0, $\frac{1}{2}$, а третий его корень y_3 по модулю больше 1, то уравнения (4) и (5) равносильны — соответствующее значение $\sin x = y_3$ не даст уравнению (4) дополнительных решений. Разумеется, кроме того, уравнения (4) и (5) равносильны в случае, когда третий корень уравнения (7) также равен 0 или $\frac{1}{2}$.

Теперь наша задача полностью прояснилась: надо *найти такие значения a, при которых уравнение* (7) *имеет корни* 0, $\frac{1}{2}$, *а третий его корень либо равен* 0, *либо равен* $\frac{1}{2}$, *либо по модулю превосходит* 1.

Сразу видно, что 0 является корнем уравнения (7), поэтому дальше будем рассматривать уравнение

$$4y^2 + (4 - 2|a|)y + a - 3 = 0. \qquad (8)$$

Один из корней этого уравнения должен быть равен $\frac{1}{2}$. Подставляя в уравнение (8) значение $y = \frac{1}{2}$, получаем, что $\frac{1}{2}$ будет корнем при $a = |a|$, т. е. при $a \geqslant 0$. По теореме Виета второй корень равен $\frac{a-3}{2}$, и (в соответствии с тем, что сказано выше) значение a будет подходящим в следующих трех случаях:

$$1)\ \frac{a-3}{2} = 0; \quad 2)\ \frac{a-3}{2} = \frac{1}{2}; \quad 3)\ \left|\frac{a-3}{2}\right| > 1$$

(при этом надо еще учесть, что $a \geqslant 0$).

Отсюда мы и получаем ответ: $a = 3$, $a = 4$, $0 \leqslant a < 1$, $a > 5$.

(6) *Найти все числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения*

$$2\sin^7 x-(1-a)\sin^3 x+(2a^3-2a-1)\sin x=0 \qquad (9)$$

является корнем уравнения

$$2\sin^6 x+\cos 2x=1+a-2a^3+a\cos^2 x \qquad (10)$$

и, обратно, всякий корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Здесь уже оба данных уравнения сложны, и поэтому поступить так, как в предыдущей задаче, нельзя. Однако с первого же взгляда можно заметить, что уравнение (9) имеет решения вида $x = k\pi$, где k — целое число (и быть может, еще какие-то решения). Это замечание и приведет к решению задачи.

Пусть a — подходящее значение параметра. Тогда значения $x = k\pi$ — корни уравнения (9) — являются корнями уравнения (10), а это сразу дает равенство $a^3 = a$. Поэтому подходящие значения a надо выбирать всего лишь из трех чисел: 0, 1 и −1. Теперь следует проверить все эти три значения.

Пусть $a = 0$. Тогда уравнения примут вид

$$\sin x\,(\sin^2 x-1)(2\sin^4 x+2\sin^2 x+1)=0,$$
$$\sin^2 x\,(\sin^2 x-1)(\sin^2 x+1)=0.$$

Поскольку $1+\sin^2 x\neq 0$ и $2\sin^4 x+2\sin^2 x+1\neq 0$, то эти уравнения равносильны.

Пусть $a = 1$. Тогда уравнения перепишутся так:

$$\sin x\,(2\sin^6 x-1)=0 \quad \text{и} \quad \sin^2 x\,(2\sin^4 x-1)=0.$$

Поскольку первое уравнение имеет решение $\sin x=\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$, которое не удовлетворяет второму уравнению, то эти уравнения неравносильны.

Пусть $a = -1$. Тогда имеем уравнения

$$\sin x\,(2\sin^6 x-2\sin^2 x-1)=0 \ \text{ и } \ \sin^2 x\,(2\sin^4 x-3)=0.$$

Так как $2\sin^4 x-3\neq 0$ и

$$2\sin^6 x-2\sin^2 x-1=2\sin^2 x\,(\sin^4 x-1)-1\neq 0,$$

то ясно, что эти уравнения равносильны.

Итак, условию задачи удовлетворяют $a = 0$ и $a = -1$.

Заметим, что и в этой задаче многие поступающие, заменив $\sin^2 x$ на y, не смогли разобраться со значением $a = -1$, поскольку в неравенствах, которые требуется доказать в этом случае, существенно используется то, что $0 \leqslant y \leqslant 1$.

В следующих задачах трудность состоит не только в логической аккуратности, но и в нахождении способов рассуждений, в умении отыскать иногда довольно извилистый путь к решению.

(7) *Определить, для каких t неравенство*

$$\log_{\frac{t+1}{t+2}} (x^2 + 3) > 1$$

выполняется при любом значении x?

Выражение, стоящее под знаком логарифма в данном неравенстве, всегда больше единицы, и поэтому при всяком подходящем значении параметра t должно выполняться неравенство

$$\frac{t+1}{t+2} > 1$$

— иначе логарифм был бы отрицателен. Решая это неравенство, получаем $t < -2$.

При выполнении условия $t < -2$ мы можем освободиться от логарифма и прийти к неравенству

$$x^2 > -\frac{2t+5}{t+2}.$$

Полученное неравенство должно выполняться при любом x; это, очевидно, справедливо в том и только в том случае, когда правая часть неравенства отрицательна, т. е., с учетом $t + 2 < 0$, когда $2t + 5 < 0$. Отсюда $t < -\frac{5}{2}$; эти значения t и являются решениями задачи.

(8) *Найти все $x > 1$, которые при всех b, удовлетворяющих условию $0 < b \leqslant 2$, являются решениями неравенства*

$$\log_{\frac{x^2+x}{b}} (x + 2b - 1) < 1. \qquad (11)$$

Заметим прежде всего, что при любом $x > 1$ и при любом b из промежутка $0 < b \leqslant 2$ основание логарифма в неравенстве (11) больше 1, а число под знаком логарифма положительно. Это позволяет освободиться от логарифма и переписать неравенство (11) в виде

$$x^2 - (b - 1)x - (2b - 1)b > 0.$$

Трехчлен в левой части этого неравенства обычным способом раскладывается на множители:

$$[x - (2b - 1)](x + b) > 0.$$

Второй сомножитель при всех рассматриваемых значениях x и b положителен; поэтому нужно, чтобы был положителен и первый сомножитель.

Другими словами, требуется найти такие $x > 1$, чтобы при любом b из промежутка $0 < b \leqslant 2$ выполнялось неравенство $x > 2b - 1$. Но это будет верно в том и только в том случае, когда это неравенство выполняется для наибольшего из рассматриваемых значений b, т. е. для $b = 2$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют значения $x > 3$.

Приведем еще одно решение этой задачи. Исследуем левую часть неравенства (11) с целью изучить ее поведение при изменении b и фиксированном $x > 1$, надеясь, что такое исследование позволит вместо целого промежутка значений b рассмотреть лишь крайние значения — наибольшее и наименьшее.

Рассмотрим функцию

$$f(b) = \log_{\frac{x^2 + x}{b}} (x + 2b - 1)$$

аргумента b, считая $x > 1$ фиксированным числом. Исследовать поведение этой функции трудно, поскольку и основание логарифма, и выражение под знаком логарифма зависят от b. Поэтому перепишем функцию $f(b)$ в ином виде, перейдя к постоянному основанию:

$$f(b) = \frac{\log_2(x + 2b - 1)}{\log_2 \frac{x^2 + x}{b}}. \tag{12}$$

Из свойств логарифмической функции теперь видно, что числитель и знаменатель в правой части (12) — при рассматриваемых b и x — положительны и при возрастании b числитель возрастает, а знаменатель убывает. Следовательно, функция $f(b)$ является монотонно возрастающей.

Но тогда очевидно, что для выполнения неравенства $f(b) < 1$ (см. (11)) при всех $0 < b \leqslant 2$ достаточно, чтобы это неравенство было справедливо при наибольшем значении b, т. е. при $b = 2$.

Таким образом, следует решить неравенство $f(2) < 1$, или

$$\log_{\frac{x^2+x}{b}}(x+3) < 1,$$

при условии, что $x > 1$. Отсюда легко находим, что $x > 3$.

(9) *Даны три уравнения*

$$1)\ x^2 + ax + ac = 0;$$
$$2)\ x^2 - bx + c^3 = 0;$$
$$3)\ x^4 - bx^2 + c^3 = 0.$$

Каждое из них имеет по крайней мере один корень. Известно, что абсолютные величины корней первого уравнения больше единицы. Известно также, что каждый из корней первого уравнения является корнем третьего уравнения и по крайней мере один из корней первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c.

Ясно, прежде всего, что первые два уравнения имеют корни. Пусть α, β — корни первого уравнения, и пусть именно корень α является также корнем второго уравнения. По условию числа α и β являются также корнями третьего уравнения.

Сравнивая теперь второе и третье уравнения, мы замечаем, что квадрат каждого корня третьего уравнения является корнем второго. В самом деле, если γ — корень третьего уравнения, т. е. $\gamma^4 - b\gamma^2 + c^3 = 0$, то $(\gamma^2)^2 - b\gamma^2 + c^3 = 0$, а это и означает, что γ^2 — корень второго уравнения. Отсюда следует, что второе уравнение имеет еще два корня: α^2 и β^2.

Таким образом, второму уравнению удовлетворяют числа α, α^2 и β^2. Между тем квадратное уравнение не может иметь трех различных корней, и, следовательно, по крайней мере два из этих трех чисел равны между собой. Равенство $\alpha = \alpha^2$ неверно, так как по условию задачи $|\alpha| > 1$, и мы рассмотрим две оставшиеся возможности.

Пусть сначала $\alpha = \beta^2$. По теореме Виета из первых двух уравнений получаем равенства $\alpha\beta = ac$ и $\alpha^2\beta^2 = c^3$, откуда $a^2c^2 = c^3$. Поскольку $c \neq 0$ (иначе нуль был бы корнем первого уравнения, что неверно), то $c = a^2$. Но тогда $\beta^3 = \alpha\beta = ac = a^3$, т. е. $\beta = a$.

Другими словами, число a является корнем первого уравнения: $a^2 + a^2 + ac = 0$. Поскольку $c = a^2$, то $2a^2 + a^3 = 0$, откуда $a = -2$, так как $a \neq 0$. Далее, имеем $c = 4$ и, поскольку $\beta^2 = a^2 = 4$ является корнем второго уравнения, то $b = 20$. Не представляет труда непосредственно проверить, что найденная тройка чисел $a = -2$, $b = 20$, $c = 4$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $\alpha^2 = \beta^2$. Если при этом $\alpha = -\beta$, то из первого уравнения по теореме Виета $\alpha + \beta = -a = 0$, что неверно. Поэтому $\alpha = \beta$, так что дискриминант первого уравнения равен нулю: $a^2 - 4ac = 0$, т. е. $a = 4c$. С другой стороны, по теореме Виета из первых двух уравнений получаем $\alpha^2 = ac$, $\alpha \cdot \alpha^2 = c^3$, откуда легко следует, что $a = c$. Но тогда $c = 4c$, что неверно, так как $c \neq 0$. Таким образом, равенство $\alpha^2 = \beta^2$ невозможно, и выписанная выше тройка чисел a, b, c есть единственное решение задачи.

Мы видим, что решение этой задачи действительно требует довольно тонких рассуждений. Можно убедиться, что лобовое использование условий задачи не приводит к успеху. Между тем многие поступающие выписывали условия, обеспечивающие существование корней всех трех уравнений, и пытались решить получившуюся громоздкую систему неравенств, или, записав по известным формулам выражения для корней данных уравнений, старались их сравнить между собой.

В ряде задач, по внешнему виду чисто алгебраических, нащупать путь решения гораздо легче, если воспользоваться геометрическим языком. Вообще, умение решать задачи комбинированными средствами и, в частности, использовать геометрические и графические представления при решении алгебраических задач, является одним из основных требований, предъявляемых к поступающим.

(10) *Найти все значения a, при которых каждое решение неравенства*

$$(0{,}5)^{\frac{1}{2(x-1)^2}} \leqslant (0{,}25)^{\frac{1}{(3-x)^2}} \qquad (13)$$

является решением неравенства

$$16a^4x^2 - 9 \leqslant 0. \qquad (14)$$

Прежде всего обычным путем (см. § 6 раздела I) найдем решения неравенства (13):

$$-1 \leqslant x < 1, \quad 1 < x \leqslant \frac{5}{3}, \qquad (15)$$

и решения неравенства (14):

$$-\frac{3}{4a^2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4a^2} \quad \text{при } a \neq 0 \qquad (16)$$

и x — любое число при $a = 0$. Отсюда сразу видно, что значение $a = 0$ удовлетворяет условию задачи, и в дальнейшем будем считать $a \neq 0$.

Решения неравенства (14) образуют в этом случае отрезок числовой прямой, а решения неравенства (13) — отрезок с выколотой точкой. Для решения задачи следует выяснить, при каких значениях a множество (15) целиком лежит на отрезке (16).

Сделать это можно, если прибегнуть к геометрической интерпретации. Ясно, что справедливо следующее утверждение: отрезок $\alpha_1 \leqslant x \leqslant \beta_1$ лежит на отрезке $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ в том и только в том случае, когда левый конец

α_1 первого отрезка лежит правее левого конца α второго отрезка (или совпадает с ним) и одновременно правый конец β_1 первого отрезка лежит левее правого конца β второго отрезка (или совпадает с ним). Другими словами, отрезок $\alpha_1 \leqslant x \leqslant \beta_1$ лежит на отрезке $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ тогда и только тогда, когда выполняются одновременно два неравенства: $\alpha \leqslant \alpha_1$ и $\beta_1 \leqslant \beta$. Нетрудно видеть, что приведенное утверждение справедливо и в случае, если в отрезке $\alpha_1 \leqslant x \leqslant \beta_1$ выколота внутренняя точка.

Применим сформулированное утверждение к рассматриваемой задаче. Оно означает, что число a должно удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{4a^2} \leqslant -1, \\ \dfrac{5}{3} \leqslant \dfrac{3}{4a^2}, \end{cases}$$

решения которой $-\dfrac{3\sqrt{5}}{10} \leqslant a \leqslant \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. Значение $a = 0$, полученное нами ранее, входит в это множество, и поэтому указанный промежуток представляет собой решение задачи.

11 *Найти все значения a, при которых неравенство*

$$\frac{x-2a-1}{x-a} < 0 \qquad (17)$$

выполняется для всех x из промежутка $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Неравенство (17), очевидно, равносильно квадратному неравенству $[x-(2a+1)](x-a) < 0$, решения которого образуют на числовой прямой промежуток с концами a и $2a+1$ (исключая концы), если, разумеется, числа a и $2a+1$ различны. Легко видеть, кроме того, что значение a, при котором $a = 2a + 1$, условию задачи не удовлетворяет, так как в этом случае неравенство (17) вообще не имеет решений.

Заметим теперь, что и в случае, когда $a \neq 2a + 1$, мы не можем записать решения неравенства (17) в виде двойного неравенства, поскольку неизвестно, какое из чисел a и $2a + 1$ больше. Поэтому рассмотрим два возможных случая.

В случае, когда $a < 2a + 1$, т. е. $a > -1$, условию задачи удовлетворяют те значения a, при которых отрезок $1 \leqslant x \leqslant 2$ лежит внутри интервала $a < x < 2a + 1$. Геометрическое представление полученных промежутков показывает, что это будет, когда $a < 1$ и $2 < 2a + 1$ (совпадения концов промежутков здесь, очевидно, исключаются). Отсюда получаем $\frac{1}{2} < a < 1$; все эти значения a удовлетворяют условию $a > -1$ и, следовательно, являются решениями задачи.

В случае $a > 2a + 1$, т. е. $a < -1$, мы имеем дело с интервалом $2a + 1 < x < a$. Аналогично предыдущему приходим к неравенствам $2a + 1 < 1$ и $2 < a$, не имеющим общих решений.

Окончательно заключаем, что условию задачи удовлетворяют значения $\frac{1}{2} < a < 1$.

12 *Найти все значения a, при которых любое значение x, удовлетворяющее неравенству*

$$ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0,$$

по модулю не превосходит двух.

В этой задаче нам предстоит выяснить, при каких значениях a все решения данного неравенства лежат на отрезке $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Если $a \neq 0$, то данное неравенство квадратное, и мы будем сначала рассматривать этот случай. Известно, что решения квадратного неравенства, если они существуют, образуют на числовой прямой либо интервал, либо два бесконечных интервала, либо все множество действительных чисел, и это зависит от знаков дискриминанта и коэффициента при старшем члене. Поэтому сразу же подсчитаем дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части исходного неравенства:

$$D = (1 - a^2)^2 + 4a^2 = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2.$$

Таким образом, $D > 0$ при любых a, так что корни трехчлена действительны и различны; эти корни легко находятся: $x_1 = a$, $x_2 = -\frac{1}{a}$.

Теперь, в зависимости от знака числа a, решения данного неравенства образуют либо интервал между корнями (при $a < 0$), либо два бесконечных интервала (при $a > 0$).

По условию нам нужны такие значения a, при которых все решения исходного неравенства лежат на отрезке $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Поэтому значения $a > 0$ не подходят: два бесконечных интервала не могут уместиться внутри конечного отрезка.

Остается лишь рассмотреть значения $a < 0$. В этом случае $x_1 < 0 < x_2$, и решением данного неравенства является интервал $a < x < -\frac{1}{a}$. Нам нужно, чтобы весь интервал $a < x < -\frac{1}{a}$ лежал на отрезке $-2 \leqslant x \leqslant 2$, а это выполняется, очевидно, в том и только в том случае, когда концы этого интервала лежат на отрезке $-2 \leqslant x \leqslant 2$ (совпадение граничных точек при этом допускается), т. е. выполняются неравенства $-2 \leqslant a < -\frac{1}{a} \leqslant 2$. Из неравенства $-\frac{1}{a} \leqslant 2$, учитывая, что $a < 0$, получаем $a \leqslant -\frac{1}{2}$ и, следовательно, $-2 \leqslant a \leqslant -\frac{1}{2}$.

Итак, всякое решение исходного неравенства по модулю не превосходит 2 при $-2 \leqslant a \leqslant -\frac{1}{2}$, но это получено в предположении $a \neq 0$. Для завершения решения остается рассмотреть случай $a = 0$.

При $a = 0$ исходное неравенство принимает вид $x > 0$ и не все его решения по модулю не превосходят 2, так что значение $a = 0$ не является подходящим. Таким образом, полученное выше неравенство $-2 \leqslant a \leqslant -\frac{1}{2}$ является окончательным ответом.

(13) ***Найти все значения a, при которых для всех x, по модулю не превосходящих единицу, выполняется неравенство***

$$\frac{ax - a(1 - a)}{a^2 - ax - 1} > 0.$$

Прежде всего заменим данное неравенство на равносильное ему, но более привычное квадратное неравенство

$$(ax + 1 - a^2)[ax - a(1 - a)] < 0. \qquad (18)$$

Назвав это неравенство квадратным, мы несколько поспешили — еще не проверено, будет ли отличен от нуля коэффициент при x^2 после раскрытия скобок. Этот коэффициент равен a^2 и равен нулю при $a = 0$; но при $a = 0$ данное неравенство принимает вид $0 < 0$, т. е. не выполняется ни при каком значении x. Поэтому $a = 0$ не является подходящим значением, и мы его исключаем из рассмотрения, считая всюду далее $a \neq 0$.

Квадратное неравенство (18) будем решать, следуя тем же идеям, что и в предыдущей задаче. Здесь уже сразу видно, что корни квадратного трехчлена действительны, так что дискриминант считать не нужно. Кроме того, коэффициент a^2 при старшем члене положителен, и следовательно, решения квадратного неравенства образуют интервал между его корнями $x_1 = a - \frac{1}{a}$, $x_2 = 1 - a$, если эти корни различны. Но при совпадении корней квадратное неравенство (18) не удовлетворяется ни при одном значении x, и поэтому соответствующие значения нас не интересуют.

Таким образом, нам нужны значения a, при которых отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$ лежит между числами $a - \frac{1}{a}$ и $1 - a$. Но для того чтобы записать это геометрическое условие на языке неравенств, необходимо знать, какое из этих двух чисел больше. Это зависит, очевидно, от числа a, и мы рассмотрим поэтому два случая.

а) $a - \frac{1}{a} < 1 - a$. Как и в предыдущей задаче, для того чтобы отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$ целиком лежал внутри интервала $a - \frac{1}{a} < x < 1 - a$, нужно, чтобы концы его — точки -1 и 1 — лежали внутри интервала, т. е. должны выполняться неравенства

$$a - \frac{1}{a} < -1 < 1 < 1 - a.$$

(Совпадения крайних точек, т. е. равенства $a - \frac{1}{a} = -1$ и $1 - a = 1$, не допускаются, так как, например, при $a - \frac{1}{a} = -1$ число -1, лежащее на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, не лежит на интервале $-1 < x < 1 - a$.)

Из неравенства $1 < 1 - a$ следует, что $a < 0$, а тогда из неравенства $a - \frac{1}{a} < -1$ получаем $a^2 + a - 1 > 0$. Решения этого неравенства — значения

$$a < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad a > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку $a < 0$, то оставляем лишь значения

$$a < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Теперь из получившихся значений a надо отобрать те, которые удовлетворяют условию а), т. е. неравенству $a - \frac{1}{a} < 1 - a$. Но при значениях $a < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ это условие удовлетворяется автоматически: в самом деле, указанные значения получены как решения неравенств

$$a - \frac{1}{a} < -1 < 1 < 1 - a.$$

б) $a - \frac{1}{a} > 1 - a$. В этом случае надо решить неравенства

$$1 - a < -1 < 1 < a - \frac{1}{a}.$$

Из неравенства $1 - a < -1$ имеем $a > 2$. Но тогда из $a - \frac{1}{a} >$ > 1 следует $a^2 - a - 1 > 0$. Решения этого неравенства —

значения $a < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Поскольку $a > 2$, то оставляем лишь значения $a > 2$. Как и в случае а), эти значения автоматически удовлетворяют условию б).

Итак, условию задачи удовлетворяют значения

$$a < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad a > 2.$$

Задачи

1. Доказать, что если уравнения

$$a \sin x + b \cos x + c = 0 \quad \text{и} \quad 2a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x + 2c = 0$$

оба не имеют решений, то $a = b = 0$, $c \neq 0$.

2. При каких значениях параметра a уравнения

$$x^2 + x + a = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + ax + 1 = 0$$

а) имеют общий корень; б) равносильны?

3. Дано неравенство $ax + k^2 > 0$. При каких значениях a:
а) неравенство выполняется при всех значениях x и k;
б) найдутся такие значения x и k, при которых неравенство выполняется;
в) найдется такое значение x, что неравенство выполняется при любом значении k;
г) для всякого значения x найдется значение k, при котором неравенство выполняется;
д) найдется такое значение k, что неравенство выполняется при всех значениях x;
е) для всякого значения k найдется значение x, при котором неравенство выполняется?

4. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^3 - ay^3 = \frac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3 + ax^2y + xy^2 = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и всякое ее решение удовлетворяет уравнению $x + y = 0$.

5. Найти все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} \left|\frac{x^y - 1}{x^y + 1}\right| = a, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

имеет только одно решение.

6. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2, \\ (a-1)x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b.

7. Найти все те числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения $a\cos 2x + |a|\cos 4x + \cos 6x = 1$ является корнем уравнения $\sin x \cos 2x = \sin 2x \cos 3x - \frac{1}{2}\sin 5x$ и, обратно, каждый корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

8. Найти все те числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения $4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x - |a-4|(1+\cos 2x)$ является корнем уравнения $2\cos x \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$ и, обратно, каждый корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

9. Найти все $x < 1$, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{x(1+a)/3}\left(\frac{ax^2}{9} + 1\right) < 1$$

при всех a, для которых $\frac{1}{2} < a < 2$.

10. Найти все x, для которых $0{,}5 < x < 2{,}5$ и которые удовлетворяют неравенству

$$\log_{3x - x^2}(3a - ax) < 1$$

при всех a из промежутка $0 < a < 2$.

11. Для каких a неравенство $\log_{1/(a+1)}(x^2 + 2|a|) > 0$ выполняется при любом x?

12. Для каких a неравенство $\log_{a/(a+1)}(x^2 + 2) > 1$ выполняется при любом x?

13. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\operatorname{tg}^2(\sin\sqrt{9\pi^2 - x^2}) - 2a\operatorname{tg}(\sin\sqrt{9\pi^2 - x^2}) + a + 2 \leqslant 0$$

имеет и притом конечное число решений. Для каждого такого a указать все решения неравенства.

14. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\sqrt{3\pi - 2|x|}\left[\operatorname{ctg}^2(\cos x) + a\operatorname{ctg}(\cos x) + \frac{a}{2}\right] \leqslant 0$$

имеет и притом конечное число решений. Для каждого такого a указать все решения неравенства.

15. Даны три уравнения

$$1)\ x^2 - (a+b)x + 8 = 0;$$
$$2)\ x^2 - b(b+1)x + c = 0;$$
$$3)\ x^4 - b(b+1)x^2 + c = 0.$$

Каждое из них имеет по крайней мере один корень. Известно, что корни первого уравнения больше 1. Известно также, что все корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения и хотя бы один корень первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c, если $b > 3$.

16. Даны три уравнения

$$1)\ ax^2 + bx + c = 0;$$
$$2)\ cx^2 + bx + a = 0;$$
$$3)\ x^2 + a^2x + c^2 = 0.$$

Каждое из них имеет по крайней мере один корень. Известно, что любой корень третьего уравнения удовлетворяет первому уравнению и хотя бы один корень второго уравнения является корнем третьего уравнения. Найти числа a, b, c, если $a > 2|c|$.

17. При каких значениях h многочлен

$$x^4 + 2^{\cos h} \cdot x^2 + (\sin h + \operatorname{tg} h)x + 2^{\cos h} - 1$$

является квадратом квадратного трехчлена относительно x?

18. При каких значениях h многочлен

$$x^4 - 2^{\operatorname{tg} h} \cdot x^2 + (\cos h + \cos 2h)x + 2^{\operatorname{tg} h - 2}$$

является квадратом квадратного трехчлена относительно x?

19. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x - (a/4)}{x - 2a} < 0$$

выполняется при всех x таких, что $2 \leqslant x \leqslant 4$.

20. Найти все значения a, при которых каждое решение неравенства

$$\log_{1/3}(21 - x) \leqslant \log_{1/3} 2x^2$$

является решением неравенства $9a^4 - 64x^2 \geqslant 0$.

21. Найти все значения a, при которых каждое решение неравенства

$$(0{,}36)^{1/(3x+2)^2} \leqslant (0{,}6)^{2/(x+8)^2}$$

является решением неравенства $25a^4x^2 - 4 \leqslant 0$.

22. Найти все значения параметра b, при которых система

$$\begin{cases} \cos(y-b) - 2\cos x = 0, \\ \log_2(by - y^2) = 2\log_4(-x) - \log_{1/2}(3y) \end{cases}$$

имеет нечетное число решений.

23. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \sin(3a - 3y) + 3\sin x = 0, \\ 2\log_4(a-y) + 2\log_4(2\sqrt{y}) = \log_2\sqrt{y} + 3\log_8(2x) \end{cases}$$

имеет четное число решений.

Найти значения x, удовлетворяющие при любом a уравнению:

24. $2\log_{2+a^2}(4 - \sqrt{7+2x}) = \log_{2+a^2x^2}(4-3x)$.

25. $\log_2(a^2x^3 - 5a^2x^2 + \sqrt{6-x}) = \log_{2+a^2}(3 - \sqrt{x-1})$.

§ 3. Задачи о квадратном трехчлене

Квадратный трехчлен с полным правом можно назвать главной функцией всей школьной математики. Если не считать уж совсем простой линейной функции, то это, пожалуй, единственная функция, для которой в школьном курсе строго доказываются все свойства, нужные в теории и для решения задач. Безукоризненное знание необходимых свойств квадратного трехчлена требуется от каждого поступающего.

Такое особое положение квадратного трехчлена, естественно, отражается и на вступительных экзаменах, где число задач, решаемых с помощью свойств квадратного трехчлена, очень велико, а сами эти задачи чрезвычайно разнообразны. При этом наряду с задачами, решение которых получается сразу из известных теорем (решение квадратных уравнений и неравенств, нахождение условия существования корней, определение знаков корней, отыскание наибольшего или наименьшего значения квадратного трехчлена), встречаются (и не менее часто) задачи, где непосредственного применения простейших теорем оказывается недостаточно.

Не имея возможности описать полностью все встречающиеся типы задач на квадратный трехчлен, мы останавливаемся здесь только на задачах, в которых в том или ином виде идет речь о *расположении корней квадратного трехчлена*.

Среди стандартных школьных задач есть одна задача такого типа: в самом деле, определить знаки корней квадратного трехчлена — это и значит выяснить расположение его корней относительно точки 0. Как известно, эта задача решается с помощью теоремы Виета.

А как быть, если требуется выяснить расположение корней относительно какой-нибудь другой точки? Неужели точка 0 настолько «лучше» других точек, что для нее задача решается сразу, а для других точек это уже проблема? Разумеется, нет. Единственное, чем точка 0 отличается в этом смысле от других точек, это то, что для нее уже есть «готовая» теорема Виета, а для всех остальных аналогичную теорему для решения задачи надо еще придумать.

Но здесь мы попадаем в сложное положение: если придумать теоремы, с помощью которых все задачи на расположение корней решались бы так же просто, как определение знаков корней, то число этих теорем было бы столь велико, что их просто невозможно было бы запомнить.

В самом деле, вполне естественно (и это действительно встречается в задачах) интересоваться расположением корней в некотором заданном интервале $c < x < d$, или в бесконечном интервале $x < c$, или в бесконечном интервале $x > d$. Относительно каждого из этих интервалов можно поставить, например, такие вопросы: при каком условии на нем лежат оба корня, или нет ни одного корня, или есть ровно один корень, или есть по крайней мере один корень. Из названных вопросов мы уже можем составить 12 различных задач. А если наряду с указанными интервалами рассматривать еще интервалы с включенными концами типа $c \leqslant x < d$ или $x \geqslant d$? И еще учесть, что свойства квадратного трехчлена существенно зависят от знака его старшего коэффициента (коэффициента при x^2)? Совершенно ясно, что количество требуемых теорем практически необозримо.

Остается только одно — научиться придумывать теорему каждый раз, в каждой конкретной задаче, ну и, конечно, постараться запомнить наиболее важные. Для придумывания этих теорем нужно не только знание свойств квадратного трехчлена, нужно действительно свободное владение ими и прежде всего умение мыслить одновременно на двух языках — алгебраическом и геометрическом. Это означает, что для любого свойства, сформулированного словесно или на алгебраическом языке, нужно уметь давать геометрическую интерпретацию на графике. И наоборот, любое свойство графика надо уметь описать словами и формульными алгебраическими условиями.

Например, старший коэффициент меньше нуля — значит, ветви параболы направлены вниз; трехчлен не имеет действительных корней — значит, парабола не пересекает и не касается оси абсцисс; график трехчлена $ax^2 + bx + c$ находится выше оси абсцисс — значит, $a > 0$ и $b^2 - 4ac < 0$. Последнее геометрическое утверждение можно высказать, по крайней мере, еще тремя различными способами: неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ выполняется при любом x; неравенство $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ не имеет решений; трехчлен не имеет действительных корней и его старший коэффициент положителен.

Решение многих нижеследующих задач — это по существу пополнение приведенного «словаря перевода» с алгебраического языка на геометрический и обратно. Прежде чем переходить к разбору конкретных задач, покажем методику решения на нескольких примерах теоретического характера.

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. *Все рассуждения будем вести в предположении, что* $a > 0$; соответственно, решая конкретные задачи, мы всегда так их переформулируем, чтобы пользоваться свойствами трехчлена с положительным старшим коэффициентом. Обозначим корни этого трехчлена через x_1 и x_2, а дискриминант через D.

1 *При каких условиях оба корня квадратного трехчлена $f(x)$ больше некоторого заданного числа d?*

Чтобы сформулировать нужные условия, представим себе график трехчлена $f(x)$, оба корня которого больше

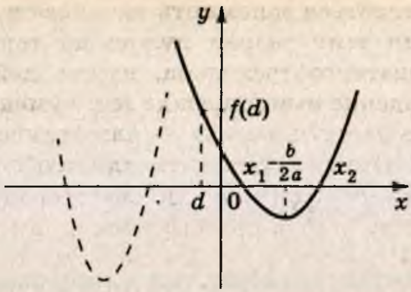


Рис. 154

числа d (рис. 154). Совершенно очевидны следующие свойства графика, изображенного на рисунке 154 сплошной линией: во-первых, он пересекает ось абсцисс или касается ее — значит, $D \geqslant 0$; во-вторых, его значение $f(d)$ в точке d положительно.

Но этих двух неравенств $D \geqslant 0$ и $f(d) > 0$ еще недостаточно: трехчлен, график которого изображен на рисунке 154 пунктиром, удовлетворяет указанным неравенствам, однако оба корня меньше числа d. Для того чтобы отделить «наши» трехчлены от посторонних такого типа, достаточно, очевидно, потребовать, чтобы абсцисса вершины параболы лежала правее точки d, т. е. $-\frac{b}{2a} > d$.

Тем самым мы нашли требуемые условия: оба корня квадратного трехчлена $f(x)$ больше d в том и только в том случае, когда одновременно

$$D \geqslant 0, \quad f(d) > 0, \; -\frac{b}{2a} > d.$$

Безусловно, все предыдущее рассуждение совершенно нестрого, и его можно рассматривать лишь как черновое решение, как поиск ответа, и нужно провести еще строгое доказательство. Оно достаточно просто.

Пусть оба корня больше d. Тогда $D \geqslant 0$, так как корни существуют, абсцисса вершины $-\frac{b}{2a}$ больше d, так как она лежит между корнями, и, наконец, $f(d) > 0$, так как d лежит вне интервала между корнями.

Обратно, пусть выполнены указанные три неравенства. Тогда в силу $D \geqslant 0$ трехчлен имеет корни; условие $f(d) > 0$ означает, что точка d лежит вне интервала между корнями, а третье неравенство обеспечивает то, что d меньше меньшего корня — в противном случае d было бы больше большего корня и, следовательно, больше полусуммы корней, которая равна $-\frac{b}{2a}$.

В дальнейших примерах мы будем ограничиваться только черновым решением, оставляя строгое доказательство читателям в качестве полезного и даже необходимого упражнения.

2 *При каких условиях корни квадратного трехчлена $f(x)$ лежат по разные стороны от числа d?*

Ответ на этот вопрос дается немедленно, если его переформулировать так: при каких условиях число d лежит между корнями данного трехчлена? А это утверждение, как известно, равносильно неравенству $f(d) < 0$. (Напомним, что старший коэффициент считается положительным!)

3 *При каких условиях ровно один корень квадратного трехчлена $f(x)$, имеющего различные корни, лежит на интервале $d < x < e$?*

Здесь ответ тоже достаточно очевиден: это верно в том и только в том случае, когда в точках d и e трехчлен имеет значения разных знаков. При этом, если $f(d) < 0$, $f(e) > 0$, то в рассматриваемом интервале лежит, очевидно, *больший* корень, а если $f(d) > 0$, $f(e) < 0$, то — *меньший* корень.

Если же для решения задачи эти два случая различать не нужно, то требуемое условие можно записать в форме $f(d)f(e) < 0$.

В решении этой задачи существенно, что квадратный трехчлен имеет *два различных корня*. Если же трехчлен имеет *только один корень*, или, как иногда говорят, *два равных корня*, то условие того, что этот корень лежит на интервале $d < x < e$, выглядит по-другому. Оказывается, что этот случай наиболее удобно рассматривать как частный случай более общей задачи.

(4) *При каких условиях два (не обязательно различных) корня квадратного трехчлена $f(x)$ лежат на интервале $d < x < e$?*

Во-первых, трехчлен, обладающий требуемыми свойствами, должен иметь действительные корни; во-вторых, должны быть положительны значения трехчлена в точках d и e; в-третьих, вершина параболы должна лежать между точками d и e. В результате получаем, что оба корня (различные или нет) лежат на интервале $d < x < e$ в том и только в том случае, когда

$$D \geqslant 0, \quad f(d) > 0, \quad f(e) > 0, \ d < -\frac{b}{2a} < e.$$

Отметим особо, что случай, когда трехчлен имеет единственный корень (два равных корня), и в самом деле является частным в этой задаче; он соответствует тому, что

$$D = 0, \quad d < -\frac{b}{2a} < e$$

$\left(\text{поскольку } x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}\right)$.

Из четырех приведенных примеров уже достаточно ясен общий подход к задачам рассматриваемого типа. В большинстве задач, однако, далеко не всегда вопрос ставится так прямо, как в разобранных теоретических примерах, и, для того чтобы прийти к нужной постановке, задачу часто приходится переформулировать. Теперь перейдем к разбору конкретных задач.

(5) *Найти все значения a, при которых неравенство*

$$(x + 3 - 2a)(a + 3a - 2) < 0 \qquad (1)$$

выполняется для всех x таких, что $2 \leqslant x \leqslant 3$.

Обозначим квадратный трехчлен в левой части неравенства (1) через $f(x)$. Корни этого трехчлена: $x_1 = 2a - 3$ и $x_2 = 2 - 3a$.

Если $x_1 = x_2$, т. е. $a = 1$, то неравенство (1) принимает вид $(x + 1)^2 < 0$ и не выполняется ни при каком x. Поэтому значение $a = 1$ не удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $a \neq 1$, т. е. $x_1 \neq x_2$. Тогда квадратный трехчлен $f(x)$ отрицателен в промежутке между корнями, поскольку его старший коэффициент положителен. Таким образом, требуется выяснить, при каких значениях a отрезок $2 \leqslant x \leqslant 3$ лежит целиком между корнями x_1 и x_2.

Но отрезок $2 \leqslant x \leqslant 3$ лежит между корнями трехчлена $f(x)$ в том и только в том случае, когда оба конца этого отрезка лежат между корнями, т. е. (см. задачу 2) когда одновременно выполняются два неравенства $f(2) < 0$ и $f(3) < 0$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют решения системы неравенств

$$\begin{cases} (5-2a)3a < 0, \\ (6-2a)(3a+1) < 0. \end{cases}$$

Из этой системы получаем $a < -\frac{1}{3}$ и $a > 3$.

Отметим, что с помощью аналогичного рассуждения можно было бы провести более короткие решения в задачах 11 и 13 из § 2 раздела IV. Так, в задаче 13 требуемые значения a получаются как решения системы неравенств $f(-1) < 0$, $f(1) < 0$, где $f(x)$ — квадратный трехчлен в левой части неравенства (18) из § 2 раздела IV.

6 *Найти, при каких значениях m квадратный трехчлен $x^2 + mx + m^2 + 6m$ отрицателен при всех x, удовлетворяющих условию $1 < x < 2$.*

Для того чтобы рассматриваемый квадратный трехчлен был отрицателен при всех значениях x из интервала $1 < x < 2$, нужно, чтобы, во-первых, он имел положительный дискриминант и, во-вторых, чтобы интервал $1 < x < 2$ лежал между его корнями, причем совпадения концов с корнями не исключаются.

Вычислив корни квадратного трехчлена, придем к системе

$$\begin{cases} m^2 - 4(m^2 + 6m) > 0, \\ \dfrac{-m - \sqrt{-3m^2 - 24m}}{2} \leqslant 1 < 2 \leqslant \dfrac{-m + \sqrt{-3m^2 - 24m}}{2}. \end{cases}$$

В решении этой системы нет ничего принципиально сложного, однако с вычислительной точки зрения она может доставить много хлопот.

Поэтому применим изложенные выше соображения: нужное требование выполняется, если числа $f(1)$ и $f(2)$ отрицательны, т. е. выполняется система неравенств

$$\begin{cases} m^2 + 7m + 1 \leqslant 0, \\ m^2 + 8m + 4 \leqslant 0, \end{cases}$$

решения которой легко находятся:

$$-\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \leqslant m \leqslant -4 + 2\sqrt{3}.$$

7) *При каких a неравенство* $\sin^6 x + \cos^6 x + a \sin x \cos x \geqslant 0$ *выполняется при всех x?*

Пользуясь очевидным тождеством

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x,$$

перепишем данное неравенство в виде

$$1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x + a \sin x \cos x \geqslant 0.$$

Левая часть этого неравенства является квадратным трехчленом относительно $z = \sin x \cos x$; старший коэффициент этого трехчлена равен -3. Но, как отмечалось ранее, в задачах рассматриваемого типа удобнее иметь дело с трехчленами с *положительным* старшим коэффициентом. Поэтому рассмотрим неравенство

$$3z^2 - az - 1 \leqslant 0. \qquad (2)$$

В этом месте многие поступающие считали, что дальнейшая цель состоит в том, чтобы найти такие значения параметра a, при которых квадратное неравенство (2) выполняется *для всех z*. Они основывались, видимо, на том, что данное в условии неравенство должно выполняться *для всех x*. Однако условие, что x принимает все значения, вовсе не означает, что и z принимает все значения — ведь $z = \frac{1}{2}\sin 2x$, а потому z может принимать значения только из отрезка $-\frac{1}{2} \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}$.

Таким образом, правильная переформулировка задачи будет следующей: при каких значениях параметра a неравенство (2) выполняется для всех z из отрезка

$$-\frac{1}{2} \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}?$$

А теперь решение проводится так же, как в задаче 6. Число a удовлетворяет требуемому условию в том и только в том случае, когда трехчлен $f(z) = 3z^2 - az - 1$ принимает отрицательные или нулевые значения в точках $z = -\frac{1}{2}$ и $z = \frac{1}{2}$. Тем самым мы приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{a}{4} - \frac{1}{4} \leqslant 0, \\ -\frac{a}{2} - \frac{1}{4} \leqslant 0; \end{cases}$$

решения этой системы, а следовательно, и исходной задачи, таковы: $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$.

8 *Найти все значения параметра* α, *при которых неравенство* $\alpha \cdot 9^x + 4(\alpha - 1)3^x + \alpha > 1$ *справедливо при всех* x.

Обозначив 3^x через y, перепишем данное неравенство в виде

$$\alpha y^2 + 4(\alpha - 1)y + (\alpha - 1) > 0. \qquad (3)$$

Требуется выяснить, при каких значениях α неравенство (3) справедливо для всех $y > 0$ (так как $y = 3^x > 0$ при всех x). Левую часть неравенства (3) обозначим через $f(y)$.

Ясно, что значения $\alpha < 0$ не удовлетворяют условию задачи. В самом деле, если квадратный трехчлен $f(y)$ с отрицательным старшим коэффициентом имеет корни, то $f(y) < 0$ при значениях y, бóльших большего корня; если же трехчлен не имеет корней, то $f(y) < 0$ при всех y. Следовательно, квадратный трехчлен $f(y)$ с отрицательным старшим коэффициентом не может быть положителен при всех $y > 0$, как утверждает неравенство (3).

Значение $\alpha = 0$ также не удовлетворяет условию задачи. Действительно, в этом случае неравенство (3) принимает вид $-4y - 1 > 0$ и при $y > 0$ не выполняется.

Будем теперь считать, что $\alpha > 0$. Квадратный трехчлен $f(y)$ с положительным старшим коэффициентом положителен при всех $y > 0$ в двух случаях: если трехчлен корней не имеет — тогда $f(y) > 0$ при всех y, и если его корни y_1 и y_2 неположительны — тогда $f(y) > 0$ при значениях y, больших большего корня.

Первый случай имеет место, когда дискриминант

$$D = 4(\alpha - 1)^2 - \alpha(\alpha - 1) < 0,$$

т. е. при $1 < \alpha < \frac{4}{3}$, а второй, по теореме Виета, — при выполнении условий

$$D \geqslant 0, \quad y_1 + y_2 = -\frac{4(\alpha - 1)}{\alpha} \leqslant 0, \quad y_1 y_2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \geqslant 0,$$

т. е. при $\alpha = 1$ и $\alpha \geqslant \frac{4}{3}$. Объединяя результаты двух случаев, окончательно получаем $\alpha \geqslant 1$.

(9) *При каких значениях p уравнение $1 + p \sin x = p^2 - \sin^2 x$ имеет решение?*

Обозначив $\sin x$ через y, перепишем уравнение в виде

$$y^2 + py + 1 - p^2 = 0. \qquad (4)$$

В этом месте поступающие сделали грубую ошибку, рассуждая примерно так: «Поскольку y есть $\sin x$, то $-1 \leqslant y \leqslant 1$ и, следовательно, нужно найти такие значения p, при которых корни квадратного уравнения (4) лежат на отрезке $-1 \leqslant y \leqslant 1$». На самом деле вовсе не нужно, чтобы оба корня лежали на этом отрезке: достаточно, чтобы хотя бы один корень лежал на нем. Ведь если при некотором p один корень y_1 по абсолютной величине не превосходит единицу, то уравнение $\sin x = y_1$ имеет решение, т. е. имеет решение и исходное уравнение; такое значение p является подходящим.

Таким образом, нужно найти такие значения p, при которых хотя бы один из корней уравнения (4) лежит на отрезке $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Эта задача может быть сведена к решению неравенств: во-первых, должен быть неотрицателен дискриминант $5p^2 - 4 \geqslant 0$, и, во-вторых, должно выполняться хотя бы одно из двойных неравенств

$$-1 \leqslant \frac{-p - \sqrt{5p^2 - 4}}{2} \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \frac{-p + \sqrt{5p^2 - 4}}{2} \leqslant 1.$$

Но с вычислительной точки зрения такое решение будет весьма сложным. Мы изберем другой путь.

Для удобства рассуждений будем сначала считать, что оба корня трехчлена $f(y) = y^2 + py + 1 - p^2$ отличны от -1 и 1. Тогда требуемое условие осуществляется в двух случаях: когда корни различны и ровно один из них лежит на интервале $-1 < y < 1$ и когда оба корня (различные или нет) лежат на этом интервале.

Первый случай, согласно задаче 3, имеет место тогда и только тогда, когда произведение значений рассматриваемого трехчлена в точках -1 и 1 отрицательно, т. е. при значениях p, удовлетворяющих неравенству $(p^2 - p - 2)(p^2 + p - 2) < 0$. Решения этого неравенства легко находятся методом интервалов: $-2 < p < -1$, $1 < p < 2$.

Второй случай, согласно задаче 4, имеет место тогда и только тогда, когда одновременно

$$5p^2 - 4 \geqslant 0, \quad 2 - p - p^2 > 0,$$

$$2 + p - p^2 > 0, \quad -1 < -\frac{p}{2} < 1.$$

Эти неравенства выполнены при

$$-1 < p \leqslant -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \leqslant p < 1.$$

Наконец, рассмотрим временно оставленный в стороне случай, когда трехчлен $f(y)$ имеет корни $y = -1$ или $y = 1$. Очевидно, что $y = -1$ является корнем при $p = 1$ и $p = -2$, а $y = 1$ — при $p = -1$ и $p = 2$, и эти значения p также являются подходящими.

Собирая все найденные значения p, получим окончательный ответ: исходное уравнение имеет решение при

$$-2 \leqslant p \leqslant -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \leqslant p \leqslant 2.$$

(10) *Для каждого числа a решить уравнение*

$$9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0.$$

Обозначив $3^{-|x-2|}$ через y и учитывая, что $0 < 3^{-|x-2|} \leqslant 1$ при любом x, получим уравнение

$$y^2 - 4y - a = 0, \qquad (5)$$

у которого надо найти корни, лежащие в промежутке $0 < y \leqslant 1$.

Абсцисса вершины графика квадратного трехчлена $f(y) = y^2 - 4y - a$ равна 2, так что если трехчлен имеет корни, то больший корень больше 2 и он нас не интересует. Поэтому остается написать условие, при котором в промежутке $0 < y \leqslant 1$ имеется ровно один корень.

Прежде всего, $y = 1$ является корнем при $a = -3$. Далее, поскольку $f(0) = -a$, $f(1) = -a - 3 < f(0)$, то, согласно задаче 3, на интервале $0 < y < 1$ ровно один корень имеется в том и только в том случае, когда $f(0) > 0$, $f(1) < 0$, что будет при $-3 < a < 0$.

Таким образом, только при значениях $-3 \leqslant a < 0$ в промежутке $0 < y \leqslant 1$ уравнение (5) имеет ровно один корень — это его меньший корень $y = 2 - \sqrt{4 + a}$.

Решая теперь уравнение

$$3^{-|x-2|} = 2 - \sqrt{4 + a},$$

которое при найденных значениях a имеет решение (поскольку найденное значение y лежит между 0 и 1), получим: исходное уравнение при $-3 \leqslant a < 0$ имеет корни

$$x_{1,2} = 2 \pm \log_3 (2 - \sqrt{4 + a}),$$

а при остальных значениях a корней не имеет.

Задачи

1. При каких a корни x_1, x_2 многочлена

$$2x^2 - 2(2a + 1)x + a(a - 1)$$

удовлетворяют неравенствам $x_1 < a < x_2$?

2. При каких значениях a уравнение

$$(1+a)\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 - 3a\frac{x^2}{x^2+1} + 4a = 0$$

имеет корни?

3. При каких значениях a один из корней квадратного трехчлена $(a^2+a+1)x^2+(a-1)x+a^2$ больше 3, а другой меньше 3?

4. Найти все m, для которых неравенство $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$ будет выполнено при всех $x > 0$.

5. Найти все a, при которых корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ больше a.

6. При каких значениях y верно следующее утверждение: «Существует хотя бы одно значение x, при котором неравенство $2\log_{0,5} y^2 - 3 + 2x\log_{0,5} y^2 - x^2 > 0$ выполняется»?

7. При каких значениях y верно следующее утверждение: «При любом x неравенство

$$x^2\left(2-\log_2\frac{y}{y+1}\right) + (2x-2)\left(1+\log_2\frac{y}{y+1}\right) > 0$$

выполняется»?

8. Найти все a, при которых из неравенства $ax^2 - x + 1 - a < 0$ следует неравенство $0 < x < 1$.

9. Найти все a, при которых из неравенства $0 \leqslant x \leqslant 1$ следует неравенство $(a^2+a-2)x^2-(a+5)x-2 \leqslant 0$.

10. Найти все значения a, для которых при всех x, не превосходящих по модулю единицы, справедливо неравенство $2x^2 - 4a^2x - a^2 + 1 > 0$.

11. Найти все те значения параметра d, при которых оба корня квадратного уравнения $x^2 - 6dx + (2 - 2d + 9d^2) = 0$ больше 3.

12. Найти все те значения параметра a, при которых оба корня квадратного уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ находятся между 0 и 3 (исключая крайние значения).

13. Решить уравнение

$$4^{\sin x} + m\cdot 2^{\sin x} + m^2 - 1 = 0,\ \text{где } -1 \leqslant m \leqslant 1.$$

Решить уравнения с параметром (№ 14—17):

14. $\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2a\frac{1+x}{\sqrt{x}} + 1 = 0.$

15. $4^x - 4m \cdot 2^x + 2m + 2 = 0$.

16. $\lg^2 \sin x - 2a \lg \sin x - a^2 + 2 = 0$.

17. $\sqrt{a(2^x - 2) + 1} = 1 - 2^x$.

18. Найти все значения параметра α, для которых неравенство $4^x - \alpha \cdot 2^x - \alpha + 3 \leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение.

19. Найти все значения параметра α, для которых неравенство $1 + \log_5 (x^2 + 1) \geqslant \log_5 (\alpha x^2 + 4x + \alpha)$ справедливо при всех x.

20. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(x - 3a)(x - a - 3) < 0$ выполняется при всех x таких, что $1 \leqslant x \leqslant 3$.

Раздел V

О ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ ПО МАТЕМАТИКЕ

§ 1. Устный экзамен

Теоретический материал, который составляет содержание устного экзамена, соответствует школьному курсу математики, т. е. включает в себя те знания, которыми должны обладать лица с законченным средним образованием.

На устном вступительном экзамене поступающий вытягивает билет, содержащий несколько теоретических вопросов; в некоторых вузах билет, помимо теоретических вопросов, содержит и примеры. Если школьный материал усвоен хорошо, то в билете никаких сюрпризов не будет.

Поступающий может подготовиться к ответу на содержащиеся в билете вопросы в течение установленного времени (в среднем — около часа). Никаких ограничений на то, какие именно доказательства рассказывать, не накладывается. Поступающий волен выбирать ту систему изложения материала, которая ему больше нравится, — для экзаменаторов безразлично, по какому учебнику излагаются ответы на поставленные в билете вопросы. Важно только, чтобы были даны точные и четкие формулировки, верные доказательства.

Устный экзамен по математике проходит в форме беседы поступающего с экзаменаторами. Обычно она начинается с ответов на теоретические вопросы билета. После того как экзаменующийся рассказал материал билета, ему задают еще несколько дополнительных вопросов (как теоретического характера, так и задач), чтобы полнее выяснить его знания, в частности, по тем разделам школьного курса, которые непосредственно в билет не вошли.

Опыт вступительных экзаменов показывает, что наибольшее число вопросов и задач относится к курсу алгебры и элементарных функций. На устном экзамене проверяются навыки в применении тех или иных теоретических положений для решения задач и примеров, владение техникой элементарных преобразований, построения графиков функций, решения уравнений и неравенств. Особое внимание уделяется выяснению того, в какой мере поступающий умеет *логически рассуждать*, ибо это имеет решающее значение для усвоения курса высшей математики.

Следует особо подчеркнуть, что уровень предъявляемых требований различен в разных институтах (и на разных факультетах): он зависит от необходимой для дальнейшего обучения математической подготовки. Уровень требований проявляется прежде всего в степени трудности вопросов и задач, которые предлагаются на экзамене. Естественно, что лица, поступающие на те специальности, где предусмотрено углубленное изучение высшей математики, должны показать более прочные и глубокие знания, свободное владение техникой решения задач, а главное — навыки логического мышления.

Дадим еще несколько тактических советов.

На экзамене необходимо проявить определенную выдержку и самообладание. Немало бывало случаев, когда молодой человек шел на экзамен неплохо подготовленным, но затем, во время экзамена, получив билет или задачу, терял присутствие духа, начинал нервничать, волноваться и не мог как следует рассказать даже то, что хорошо знал.

Во время беседы с экзаменаторами на устном экзамене не рекомендуется спешить отвечать на поставленный вопрос, даже если он кажется простым и легким. Всегда, прежде чем ответить, полезно понять и продумать вопрос, собраться с мыслями, а затем дать обстоятельный и исчерпывающий ответ, ибо, не подумав и не вспомнив всё относящееся к вопросу, легко допустить ошибки и неточности.

Если какой-либо вопрос показался неожиданным, трудным — необходимо спокойно сосредоточиться, попробовать различные подходы к решению. Не следует отчаиваться и считать, что все погибло, если вдруг окажется, что какая-нибудь формула вылетела из головы. Главное для экзаменаторов — выяснение математической подготовки поступающего, а не проверка его памяти. Поэтому ему всегда дадут время подумать и вывести нужную формулу.

В заключение хотелось бы познакомить поступающих со следующими словами академика А. Н. Колмогорова, взятыми из его брошюры «О профессии математика» (Изд-во МГУ, 1960, с. 14—15):

«На устных экзаменах задача экзаменатора в вузе, вопреки распространенному воззрению школьников, состоит не в том, чтобы поскорее «срезать» незадачливого поступающего, а в том, чтобы тщательно взвесить, учитывая все обстоятельства экзаменационной обстановки, перспективы его дальнейшей работы по избранной им специальности... Приемные и экзаменационные комиссии более всего озабочены тем, чтобы не потерять ни одного поступающего, достаточно подготовленного и способного серьезно работать на данном факультете. Между тем часто случается, что более боязливые молодые люди, подготовленные не хуже других, предпочитают подавать заявления не туда, куда им хочется поступить, а туда, где, по их сведениям, конкурс поменьше».

Образцы дополнительных вопросов

1. Какая из дробей больше: $\frac{7}{19}$ или 0,36?

2. Обратить в обыкновенную дробь 0,35(28).

3. На какое целое положительное число надо разделить 180, чтобы остаток составлял 25% частного?

4. Пусть a и b — натуральные числа, НОД(a, b) — наибольший общий делитель, а НОК(a, b) — наименьшее общее кратное этих чисел. Доказать, что НОД(a, b) $\cdot$ НОК(a, b) $= ab$.

5. Доказать, что если две положительные несократимые дроби в сумме равны 1, то их знаменатели равны.

6. Доказать, что при любом натуральном n число $n^3 + 2n$ делится на 3.

7. Найти последнюю цифру числа 3^{1976}.

8. Доказать, что удвоенная сумма квадратов двух натуральных чисел есть также сумма квадратов двух натуральных чисел.

9. Что больше: а) $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$; б) $2 + \sqrt{11}$ или $\sqrt{3} + 3$?

10. Что можно сказать о действительных числах $a_1, a_2, \dots a_n$, если:

а) $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0$; б) $a_1 a_2 \dots a_n = 0$?

11. а) Может ли сумма двух рациональных чисел быть иррациональной?

б) Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональной?

12. Изобразить на числовой прямой точки, соответствующие тем числам x, которые удовлетворяют условиям:

а) $|x + 2| \geqslant 3$; б) $|5 - x| = a$; в) $|x - x_0| > b$.

13. Однозначно ли определяются два положительных числа, если известно их среднее арифметическое a и среднее геометрическое b?

14. Доказать, что $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

15. Выполнить действия:

$$\frac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}}.$$

16. Известно, что в арифметической прогрессии $a_2 = 4$, $a_{10} = -4$. Найти число n членов этой прогрессии, сумма которых равна 12.

17. Известно, что в треугольнике стороны составляют геометрическую прогрессию. Доказать, что соответствующие высоты также составляют геометрическую прогрессию.

18. Вычислить без помощи таблиц:

а) $\log_{1/\sqrt{3}} (81\sqrt{3})$; б) $2^{\frac{1}{5\log_5 2}}$;

в) $0{,}001^{\lg 2}$; г) $3^{\log_{\sqrt[3]{9}} 41} + 2^{\frac{1}{\log_{41} 4}}$.

19. Что больше:

а) $\log_2 3$ или $\log_3 2$; б) $\log_4 7$ или $\log_{\frac{1}{3}} 2$; в) $\log_2 5$ или $\log_3 5$?

20. Что больше: 3^{400} или 4^{300}?

21. Дано, что $\log_3 18 = a$ и $\log_5 15 = b$; найти $\log_2 10$.

22. В какой четверти расположен угол величиной $\sqrt{\pi}$ радиан?

23. Вычислить $\sin(-870°)$.

24. Что больше:

а) $\cos 3$ или 0; б) $\sin 1$ или $\sin 1°$; в) $\operatorname{tg} 1$ или $\operatorname{arctg} 1$?

25. Положительно или отрицательно число $\lg \operatorname{arctg} 2$?

26. Найти без таблиц $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{4}$.

27. Доказать тождество

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(60° + \alpha) \operatorname{tg}(60° - \alpha).$$

При каких значениях α оно справедливо?

28. Упростить выражение:

$$\sqrt{\sin^2\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^2\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha)}.$$

29. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$, а угол α лежит во второй четверти.

30. Доказать, что $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

31. При каких значениях α и β справедливо равенство

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha + \beta)?$$

32. Представить выражение $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha$ в виде произведения.

33. Равносильны ли уравнения

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)(\sin x + \cos x) = 0 \quad \text{и} \quad \sin(x + 45°) = 0?$$

34. При каких a уравнение $ax^2 - 4x + a = 0$ имеет корни?

35. а) Найти все значения p и q, при которых уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

имеет корни p^2 и q.

б) Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения

$$3x^2 - 5x + 4 = 0,$$

найти величину $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$.

36. Решить уравнение: $x^2 + 4x - \frac{7}{x^2 + 4x + 5} = 1$.

37. Решить уравнение:

а) $|2x - x^2 - 8| = x^2 - 1$;

б) $\sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 2$;

в) $100^{\lg x} = 2x^2$;

г) $\log_{x+6}(2x - \sqrt{x+6}) = \frac{1}{2}$;

д) $5 \cdot 25^x + 5^{x+1} = 250$;

е) $2\cos 2x - \sin x = 1$;

ж) $\operatorname{tg} 2x \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin 5x = 0$;

з) $(\log_{\sin x} \cos x)^2 = 1$.

38. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x + y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy = 210, \\ y^2 + xy = 231; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 34, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 23 - \frac{1}{\sqrt{xy}}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1, \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

39. Исследовать систему уравнений: $\begin{cases} 2x - ay = 5, \\ 3y - 6x = -15. \end{cases}$

40. Равносильны ли неравенства $y > \sqrt{2x+1}$ и $y^2 > 2x + 1$?

41. При каких значениях a неравенство $ax^2 - |x| < 0$ справедливо для всех $x < 0$?

42. Решить неравенство:

а) $|x^2 - x - 8| \leqslant x$; б) $\log_x 2 > \log_x 3$;

в) $\frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 3} > 2$; г) $\frac{1 - \sqrt{8x - 3}}{4x} \geqslant 1$;

д) $\log_{1/3} |x^2 - 4| > 1$; е) $\log_{1/2}(x^2 + 5) < \log_{1/2}(2x - 6)$;

ж) $|\sin x| + |\cos x| \geqslant 1$; з) $\log_{\sin x} \cos x < 0$.

43. Найти область определения функции:

а) $y = 5\sqrt{1 - 4x^2}$; б) $y = \log_x (2 - x^2)$;

в) $y = \log_{1/2} |\sin x|$; г) $y = \lg(x - \sqrt{1 - x^2})$.

44. а) Доказать, что $2\sin x + 5\cos x \leqslant \sqrt{30}$.

б) Может ли при каком-нибудь значении x выполняться равенство $\sin x + \cos x = \sqrt[3]{3}$?

45. Выяснить, есть ли наибольшее и наименьшее значение у функции:

а) $y = 3 + x - x^2$; б) $y = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2$; в) $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$;

г) $y = \dfrac{2x^2}{x^4 + 1}$; д) $y = \sin(\sin x)$; е) $y = 2^{|\sin x|}$.

46. Являются ли периодическими следующие функции:

а) $y = x^2$; б) $y = x^3 + x - 4$;

в) $y = x^3 - x + 1$; г) $y = \sin x + \cos 2x$;

д) $y = \cos(x\sqrt{2})$?

47. Построить график функции:

а) $y = -4x + 0{,}5$; б) $y = \dfrac{3}{x+1}$;

в) $y = |x^2 - 3x + 2|$; г) $y = 0{,}01^{\lg x}$;

д) $y = \log_x 3$; е) $y = |\log_{1/4}(x^2 - 4)|$;

ж) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/x}$; з) $y = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x$;

и) $y = \sqrt{\sin^2 x + 1 - 2\sin x}$; к) $y = \log_{|\sin x|} \frac{1}{2}$.

48. С помощью графиков установить, сколько корней имеет уравнение $\lg x = \sin x$.

49. На плоскости с заданной системой координат изобразить множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют соотношениям:

а) $\begin{cases} 3x + 5y \geqslant 0, \\ y - 2x < 2; \end{cases}$ б) $\log_y x < 0$; в) $y > \sin|x|$.

50. Доказать, что если в треугольнике две высоты равны, то он равнобедренный.

51. Доказать, что в прямоугольнике треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

52. Доказать, что если в трапеции точка пересечения диагоналей равноудалена от боковых сторон, то трапеция равнобочная.

53. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы в трапецию можно было вписать окружность и одновременно вокруг нее можно было описать окружность.

54. Доказать, что сумма длин медиан треугольника больше $\frac{3}{4}P$, но меньше P, где P — периметр треугольника.

55. Доказать, что если между сторонами a, b и углами A, B треугольника справедлива зависимость $a : \cos A = b : \cos B$, то он равнобедренный.

56. Определить стороны прямоугольного треугольника, зная его периметр P и площадь S.

57. Даны две окружности одного и того же радиуса R, причем расстояние между их центрами равно R. В лунку, полученную при пересечении этих окружностей, вписан квадрат. Найти его сторону.

58. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра O круга на хорды, проходящие через фиксированную точку N внутри круга.

59. Доказать, что сечение треугольной пирамиды плоскостью, параллельной скрещивающимся ребрам, есть параллелограмм.

60. Прямая образует равные углы с тремя непараллельными между собой прямыми, лежащими в одной плоскости. Доказать, что она перпендикулярна к этой плоскости.

61. Найти необходимое и достаточное условие того, что в призму можно вписать шар.

62. Найти угол между скрещивающимися диагоналями прилежащих граней куба.

63. Найти длину кратчайшего пути, ведущего по поверхности куба с ребром 1 из одной его вершины в противоположную.

64. В правильной треугольной пирамиде даны высота h и боковая поверхность S. Найти сторону основания, боковое ребро, двугранные углы при ребре основания и при боковом ребре.

65. Найти радиус шара, вписанного в усеченный конус, если радиусы оснований конуса равны R и r.

66. Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от трех заданных точек.

§ 2. Письменный экзамен

В большинстве высших учебных заведений перед устным экзаменом проводится письменный экзамен по математике.

Во время этого экзамена поступающий получает вариант задания, содержащий некоторое число задач (разное в разных институтах и в различные годы). Подробное письменное изложение решений этих задач необходимо составить в отводимое время.

На письменном экзамене проверяется, умеет ли поступающий решать задачи, требующие хорошего знания основных вопросов школьного курса, прочного владения техникой алгебраических и тригонометрических преобразований, умения последовательно и логически правильно строить рассуждения. Существенное внимание уделяется тому, насколько четко поступающий может излагать свои рассуждения в письменной форме.

В подавляющем большинстве случаев для решения задач вариантов письменных экзаменов не требуется какой-либо особенной изобретательности, и в этом основное отличие этих задач от олимпиадных. Целью экзамена является проверка глубины и прочности знаний поступающих, а не выяснение их сообразительности и смекалки.

Лицам, поступающим на специальности с повышенными требованиями по математике, предлагаются, естественно, более трудные задачи, в том числе и такие, в которых нужно проявить определенную самостоятельность мысли. Но в этих задачах речь идет не о какой-то особой изобретательности, а о необходимости исследовать поставленный вопрос в самом естественном направлении хорошо известными средствами.

У поступающих часто возникают затруднения с оформлением письменных работ.

В алгебраических и тригонометрических примерах следует объяснять выкладки (что из чего получается и каким образом), провести проверку решений (если это необходимо), указать все ограничения (возникающие как из условия, так и в ходе преобразований). В текстовых задачах нужно объяснить обозначения, описать, как из условия следуют те или иные соотношения, а затем найти из этих соотношений искомые величины.

В геометрических задачах чертежи надо выполнять аккуратно (можно чернилами и от руки); все обозначения на чертеже должны быть объяснены, а обозначения в тексте решения должны с ними совпадать. Если в процессе рассуждений применяется какая-либо теорема или формула, то она должна быть названа. Следует доказывать используемые геометрические утверждения (скажем, перпендикулярность каких-то плоскостей, факт пересечения двух прямых в некоторой точке и т. д.).

Поступающие часто допускают в решении арифметические ошибки, путают знаки и т. п. Поэтому полезно тщательно контролировать себя, внимательно проверять выкладки. При наличии арифметических ошибок задача не может считаться решенной безукоризненно.

Многие поступающие выполняют письменную работу небрежно, пишут беспорядочно и настолько неаккуратно, что зачастую сами потом не могут расшифровать свои записи. Все это приводит к путанице, опискам, ошибкам и в конечном итоге — к более низкой оценке. Рекомендуется и на черновиках писать достаточно четко, не разбрасывая решение по разным листам, ибо в противном случае при переписке на чистовик легко допустить ошибку или перепутать обозначения.

Нет необходимости приносить на экзамен книги, справочники, таблицы, микрокалькуляторы и т. п., поскольку эти материалы для письменной работы не потребуются.

При выполнении экзаменационной работы полезно учесть несколько советов.

Целесообразно сначала решать ту задачу, которая кажется более простой, довести ее решение до конца, переписать его начисто, а уже после этого приниматься за решение следующей задачи. Не нужно решать одну и ту же задачу несколько часов подряд, если она не получается, — в результате может не хватить времени на остальные задачи. Лучше отложить эту задачу и заняться другими, а потом, сделав их, вернуться к ней снова. Это позволит более рационально использовать предоставляемое для экзамена время.

Многие экзаменационные задачи допускают несколько разных решений. Поступающий волен дать любое правильное решение. Хотя желание найти наиболее короткий и красивый путь решения весьма естественно, отысканием такого пути в условиях экзамена не следует заниматься — это может занять много времени. Лучше довести до конца пусть длинное, но надежное решение.

Иногда встречаются экзаменационные задачи со сложными и длинными формулировками условий. Такого рода задач не нужно бояться — обычно их решение не так уж сложно, как кажется на первый взгляд. Необходимо только спокойно разобраться в условии и правильно понять его.

Не следует отчаиваться, если письменную работу удалось выполнить не особенно хорошо. Лучше, не теряя времени, приниматься за подготовку к устному экзамену по математике и к другим вступительным экзаменам. Не нужно думать, что студентами становятся только те, кто решил все предложенные на письменном экзамене задачи, — зачисление проводится в порядке конкурса по результатам всех приемных экзаменов.

Образцы вариантов письменных работ

Вариант 1

1) На заводе работают токари первого, второго и третьего разрядов. Некоторую работу два токаря третьего разряда и один токарь первого разряда, работая вместе, могут выполнить на 15 *мин* быстрее, чем три токаря второго разряда. За то время, за какое один токарь первого разряда и один токарь второго разряда могут вдвоем выполнить эту работу, один токарь третьего разряда сделает только $\frac{5}{7}$ всей работы. Один токарь второго разряда и один токарь третьего разряда вместе могут выполнить эту работу за то же время, что и три токаря первого разряда. За какое время выполнит эту работу бригада, включающая в себя по одному токарю каждого разряда?

2) Решить уравнение

$$(\sin x + 2\cos x + 2)(1 - 2\cos x) = 4\sin^2 x - 3.$$

3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3+\log_{2x} y^2} = -\log_{2x} y, \\ x+y=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

4) Прямоугольный треугольник с острым углом α расположен внутри окружности радиуса r так, что гипотенуза является хордой окружности, а вершина прямого угла лежит на диаметре, параллельном гипотенузе. Найти площадь треугольника.

5) При каком значении x выражение $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}+3}$ принимает наименьшее значение?

Вариант 2

1) Моторная лодка, пройдя 20 *км* по спокойной воде озера, вышла в вытекающую из озера реку и, сразу выключив мотор, проплыла по течению реки еще 5 *км*. Весь описанный путь занял 2 *ч*. Затем лодка мгновенно развернулась и, двигаясь относительно воды с той же скоростью, как и в начале пути (когда она шла первые 20 *км*), вернулась к озеру через 20 *мин* после разворота. Какова скорость течения?

2) Решить уравнение $12\cos^2\frac{x}{2} = 9-4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$.

3) Решить уравнение

$$6^{\log_5\left(1-\frac{1}{2x}\right)} = 6^{\log_{\sqrt{5}}\frac{2x-1}{\sqrt{9-x^2}}}\cdot 36^{\log_{25}(3+x)}.$$

4) В треугольнике ABC биссектриса AH делит медиану BE в отношении $BK:KE=2$, $\angle ACB=30°$. Найти отношение площади треугольника BCE к площади описанного около этого треугольника круга.

5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} 4x = \operatorname{tg}\frac{y-8}{3}, \\ 4\log_{6x/\pi}\left(\frac{\pi}{6}\right)+27^{2\log_9\sqrt[3]{y}} = 2\log_{\sqrt{6x/\pi}}\left(\frac{6x^2}{\pi}\right)-3x. \end{cases}$$

Вариант 3

1) Два насоса разной производительности, работая одновременно, могут наполнить резервуар за 2 дня. Вначале два таких одинаковых резервуара были наполовину заполнены. Первым насосом перекачали содержимое одного из них в другой, после

чего с помощью второго насоса заполнили освободившийся резервуар. Вся работа заняла 6 дней. Сколько времени потребует та же работа, если насосы поменять местами, т. е. сначала использовать второй насос, а потом первый?

2) Найти все значения x, при которых выражение

$$2\sin^2 2x - 4\cos^2 x - 1$$

достигает своего максимального значения.

3) Решить уравнение $4^{\frac{1}{4}\left|\log_{4\sqrt{2}}(x+1)^5\right|} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}x.$

4) В параллелограмме лежат две окружности. Одна из них, радиуса 3, вписана в параллелограмм, а вторая касается двух сторон параллелограмма и первой окружности. Расстояние между точками касания, лежащими на одной стороне параллелограмма, равно 3. Найти площадь параллелограмма.

5) Доказать без помощи таблиц, что

$$\log_2 31 + (14 + \sin 91°)\log_{31} 2 < 8.$$

Вариант 4

1) Решить уравнение

$$1 + 2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin x + \cos 2x = 0.$$

2) В бассейн проведены две трубы: через первую вода поступает, через вторую — вытекает из бассейна. Сначала, когда бассейн был пустым, были открыты обе трубы. Когда треть бассейна была заполнена водой, вторую трубу закрыли. Через пять часов после открытия труб бассейн был наполнен.

Найти пропускную способность первой трубы, если объем бассейна равен 15 000 *м*^{3}, а пропускная способность второй трубы равна 2000 *м*^{3}/*ч*.

3) Решить неравенство $2\log_{(3x+1)^3} 10 - 3 < \log_{1/10}|3x+1|^3$.

4) В правильном треугольнике ABC проведена окружность, проходящая через центр треугольника и касающаяся стороны BC в ее середине D. Из точки A проведена прямая, касающаяся окружности в точке E так, что $\angle BAE < 30°$. Найти площадь треугольника ABE, если площадь треугольника ABC равна $\frac{10}{4-\sqrt{2}}$ *см*^{2}.

5) Решить неравенство

$$\sqrt{(x-3)(-x+5)} > -\sqrt{x-3} - 1 + \sqrt{-x+5}.$$

Вариант 5

1) Два насоса, работая одновременно, наполнили водой бассейн емкостью 80 $м^3$. Если увеличить производительность первого насоса в $\frac{4}{3}$ раза, то он один сможет наполнить бассейн, работая на 2 *ч* дольше, чем работали оба насоса вместе. Если уменьшить производительность второго насоса на 1 $м^3/ч$, то он один сможет наполнить бассейн, если будет работать в $\frac{10}{3}$ раза дольше, чем работали оба насоса вместе. Сколько кубометров воды в час перекачивает второй насос?

2) Найти все значения параметра p, при которых квадратное уравнение $(3x)^2 + (3^{3+1/p} - 15)x + 4 = 0$ имеет ровно одно решение.

3) Отрезок AB есть диаметр круга, а точка C лежит вне этого круга. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и M соответственно. Найти угол CBD, если площади треугольников DCM и ACB относятся как 1 : 4.

4) Решить уравнение

$$\sin x - 2\sin 2x + \sin 3x = |1 - 2\cos x + \cos 2x|.$$

5) Найти все целые числа n, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{\left(2\cos\frac{2\pi}{7} - n + 8\right)}\left(\frac{\sqrt{n+5}-1}{\sqrt{10-n}}\right) \geqslant 0.$$

Вариант 6

1) Решить уравнение $(x-2)^2 - 6 = |x-2|$.

2) Решить неравенство

$$\log_{4x^2-4x+1}(4x^2 - 12x + 8) > \frac{1}{2}\log_2 4.$$

3) Найти все решения системы

$$\begin{cases} 3^{\sin x + \cos y} = 1, \\ 25^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 5, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$.

4) Дан правильный треугольник ABC, сторона которого равна a *см*. Окружность проходит через центр треугольника и касается стороны BC в ее середине M. Прямая, проведенная из вершины A, касается окружности в точке E так, что $\angle BAE < 30°$. Найти площадь треугольника AEM.

5) Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. Длина ребра равна $\frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{23}-\sqrt{2}-3}$ *см*. Первая сфера касается нижнего основания $ABCD$, боковой грани $BB'C'C$ и плоскости $AA'C'C$. Вторая сфера с центром в точке A' имеет радиус, вдвое больший, чем радиус первой сферы, и касается первой сферы внешним образом. Найти радиус первой сферы.

Вариант 7

1) Решить неравенство

$$3^{3x-2\sqrt{x+1}} - 7\cdot 3^{2x} < 18\cdot\ 3^{x+2\sqrt{x+1}}.$$

2) В хоккейном матче, состоящем из трех периодов, команда A победила команду B с перевесом в две шайбы, причем ни одна из команд не забила шайб в свои ворота. В первом периоде команда A забила столько же шайб, сколько она пропустила в свои ворота во втором периоде, а в третьем периоде эта же команда забила на одну шайбу меньше, чем в первом. В первом периоде команда A пропустила вдвое больше шайб, чем в третьем. Что больше и на сколько: число шайб, забитых командой A во втором периоде, или число шайб, забитых командой B в третьем периоде? Известно, что если бы команда A забила во втором периоде столько же шайб, сколько она забила в первом, то она выиграла бы первые два периода с перевесом в пять шайб.

3) В треугольнике ABC косинус угла BAC равен $\frac{1}{2}$, $AB = 2$, $AC = 3$. Точка D лежит на продолжении стороны AC так, что C находится между A и D, $CD = 3$. Найти отношение радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, к радиусу окружности, вписанной в треугольник ABD.

4) В треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) углы SAB и SAC — прямые. Шар касается плоскости треугольника ABC в точке A и боковых ребер SB и SC в их серединах. Найти радиус шара, если $BC = a$ и $\angle BAC = \beta$.

5) Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \sin(a-y) + 2\sin x = 0, \\ 2\log_{16}(a-y) + 4\log_{1/4} y = \log_2\left(\frac{\sqrt{3}}{y^2}\right) + 3\log_{64} x \end{cases}$$

имеет четное число решений.

Вариант 8

1) Из пункта A в пункт B вышел пешеход и одновременно из пункта B в пункт A вышел второй пешеход и выехал трактор. Первый пешеход встретил сначала трактор, а затем, через такой же промежуток времени, встретился со вторым пешеходом. После встречи пешеходов второй был в пути до пункта A в девять раз дольше, чем первый в пути до пункта B. Во сколько раз скорость трактора превосходит скорость второго пешехода?

2) Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\log_{x+a^2+1}(a^2x+2) = 2\log_{7+2x}(5-\sqrt{6-2x})$$

при любом a.

3) Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+x\right) = 2\cos\frac{2\pi}{3} - 5\operatorname{ctg} x$.

4) Найти сумму корней уравнения

$$\frac{1-2\sin^4 x}{\sin^2 x} = \sin x + \operatorname{ctg}^2 x,$$

принадлежащих промежутку $4 \leqslant x \leqslant 62$.

5) В правильную треугольную пирамиду с длиной ребра основания a и двугранным углом при основании, равном $60°$, вложено три шара одинакового радиуса так, что каждый шар касается двух других, плоскости основания и только одной боковой грани пирамиды в точке, лежащей на биссектрисе этой грани, проведенной из вершины пирамиды. Найти радиус шара.

Вариант 9

1) Бригаде из трех трактористов поручено вспахать поле. Если бы работали только первый и второй трактористы, то за один день было бы вспахано 45% поля. Если бы работали только второй и третий трактористы, то за два дня было бы вспахано 75% поля. Наконец, если бы работали только первый и третий трактористы, то за три дня было бы вспахано 97,5% поля. За сколько дней данное поле вспахал бы каждый тракторист в отдельности, если считать производительность труда каждого тракториста постоянной?

2) Вокруг треугольника ABC со сторонами $AB = 10\sqrt{2}$ *см*, $AC = 20$ *см* и углом B, равным $45°$, описана окружность. Через точку C проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение стороны AB в точке D. Найти площадь треугольника BCD.

3) Решить уравнение $2 - 3\,\mathrm{tg}\,x = \sqrt{\dfrac{5 - 6\cos^2 x}{\cos^2 x}}$.

4) Решить неравенство $\log_{x-2}\dfrac{1}{5} > \log_{\frac{x-3}{x-5}}\dfrac{1}{5}$.

5) Найти все целые положительные решения уравнения

$$2x^2 + 2xy - x + y = 112.$$

Вариант 10

1) Найти все действительные решения уравнения

$$\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^{\sin x} = \frac{10}{3}.$$

2) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O, а прямые AB и CD — в точке K. Прямая KO пересекает стороны BC и AD в точках M и N соответственно; $\angle BAD = 30°$. Известно, что в трапеции $ABMN$ и $NMCD$ можно вписать окружности. Найти отношение площадей треугольника BKC и трапеции $ABCD$.

3) Решить неравенство $\sqrt{9 - \dfrac{9}{x}} < x - \sqrt{x - \dfrac{9}{x}}$.

4) Зоопарк ежедневно распределяет 111 *кг* мяса между лисами, леопардами и львами. Каждой лисе полагается 2 *кг* мяса, леопарду 14 *кг*, льву 21 *кг*. Известно, что у каждого льва бывает ежедневно 230 посетителей, у каждого леопарда 160, у каждой лисы 20. Сколько должно быть лис, леопардов и львов в зоопарке, чтобы ежедневное число посетителей зоопарка было максимальным?

Вариант 11

1) Решить уравнение

$$2\sin(x + 3)\cos(4x - 1) + \sin(3x - 4) = 0.$$

2) Решить уравнение $6^{\log_{1/6}(x+3)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_4(x^2 + 5x + 12)}$.

3) Решить неравенство $(2 - 5^x)(7x^2 - 10x + 3) < 0$.

4) В прямоугольном треугольнике ABC угол ACB — прямой. Пусть E — точка пересечения биссектрисы угла ABC со стороной AC, точка D — середина стороны AB, O — точка пересечения отрезков BE и CD. Через точку O проведен перпендикуляр к прямой BO до пересечения со стороной BC в точке F. Известно, что $FC = b$, $OC = \dfrac{3}{2}b$. Найти площадь треугольника ABC.

5) Два равных треугольника KLM и KLN имеют общую сторону KL, $\angle KLM = \angle LKN = \frac{\pi}{3}$, $KL = a$, $LM = KN = 6a$. Плоскости KLM и KLN взаимно перпендикулярны. Шар касается отрезков LM и KN в их серединах. Найти радиус шара.

Вариант 12

1) Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 2x + 3 > 0.$$

2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin(2x + \sin^2 y) = 0, \\ x - 3\sin^2 y = -2. \end{cases}$$

3) Дана прямоугольная трапеция. Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Определить основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны c и d, причем $c < d$.

4) Два грузовика доставили со склада на стройку одно и то же количество кирпича и одно и то же количество цемента, причем каждый из них сначала доставлял кирпич, а затем цемент, перевозя за каждую поездку груз одного и того же веса. Первый грузовик начал работу на 40 *мин* раньше, а закончил на 40 *мин* позже второго. При этом интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был не более 20 *мин*. Если бы первый грузовик начал работу на 1 *ч* 15 *мин* раньше второго, уменьшив свою производительность на 10%, а производительность второго грузовика не изменилась, то второй грузовик закончил бы работу на 55 *мин* раньше первого, а интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был бы не менее 25 *мин*. Если бы производительность первого грузовика уменьшилась на 2 тонны в час, а производительность второго грузовика не изменилась, то первый грузовик затратил бы на выполнение всей работы в два раза больше времени, чем второй грузовик на доставку кирпича. Сколько всего цемента было доставлено на стройку?

5) Дана треугольная пирамида $ABCD$. Скрещивающиеся ребра AC и BD этой пирамиды перпендикулярны; перпендикулярны также скрещивающиеся ребра AD и BC. Ребра AB и CD равны. Все ребра этой пирамиды касаются шара радиуса r. Найти площадь грани ABC.

Вариант 13

1) Решить неравенство $98 - 7^{x^2+5x-48} \geqslant 49^{x^2+5x-49}$.

2) Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие условию $x > 0$ и системе уравнений

$$\begin{cases} \sin\left[\left(x - \sqrt{\pi}\right)^2 + y^2\right] = 0, \\ \log_{\sqrt{2\pi}} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2 \log_{2\pi} \sqrt{x^2 + y^2}} = 2. \end{cases}$$

3) Два равных равнобедренных треугольника ABC и DBE ($AB = BC = BD = BE$) имеют общую вершину B и лежат в одной плоскости так, что точки A и C находятся по разные стороны от прямой BD, а отрезки AC и DE пересекаются в точке K. Известно, что $\angle ABC = \angle DBE = \alpha$, причем $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\angle AKD = \beta$, причем $\beta < \alpha$. В каком отношении прямая BK делит угол ABC?

4) Сфера радиуса $\frac{3}{8}$ вписана в четырехугольную пирамиду $SABCD$, у которой основанием служит ромб $ABCD$ такой, что $\angle BAD = 60°$; высота пирамиды, равная 1, проходит через точку K пересечения диагоналей ромба. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и AD в некоторых точках M, N таких, что $MN = \frac{4}{5}\sqrt{3}$, касающаяся сферы в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N, и пересекающая продолжение отрезка SK за точку K в некоторой точке E. Найти длину отрезка SE.

5) Без помощи таблиц найти все значения x в промежутке $-0{,}5 < x < 1{,}5$, удовлетворяющие равенству

$$\log_2\left(\sin 3x - \cos 2x - \frac{3}{10}\right) = \log_2\left(\sin 7x - \cos 6x - \frac{3}{10}\right).$$

Ответы и указания к задачам[1]

Раздел I

§ 1. А 1. в) Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — неизвестная величина, а a, b, c — заданные числа, причем $a \neq 0$; г) см. § 2 раздела I; д) см. § 2 раздела I; ж) см. § 1, Г раздела I. 2. а) Аксиома; б) теорема; в) определение; г) теорема. 3. При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. 4. Обратная теорема: «Если квадратное уравнение имеет два различных корня, то дискриминант положителен» — верна. Противоположная теорема: «Если дискриминант квадратного уравнения неположителен (т. е. отрицателен или равен нулю), то это уравнение не может иметь двух различных корней» — верна. Теорема, противоположная обратной: «Если квадратное уравнение не имеет двух различных корней, то дискриминант неположителен» — верна. 5. Доказать от противного. 6. $(a_1 - \alpha)\ldots(a_n - \alpha) = 0$. 7. $|ab| + |bc| + |ca| = 0$. 8. Либо $a < 0$, $b > 0$, либо a и b одного знака и $a > b$. Воспользоваться тем, что функция $y = \frac{1}{x}$ отрицательна и убывает при $x < 0$ и положительна и убывает при $x > 0$. 9. Если любые x_1 и x_2 таковы, что $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$, то $3x_1 - x_1^2 < 3x_2 - x_2^2$. 10. Необходимое условие.

Б 1. Число $\overline{a_n \ldots a_3a_2a_1a_0}$ тогда и только тогда делится на 11, когда на 11 делится число $|a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n|$. 2. Доказать от противного. Пусть $N = m^2$; рассмотреть два случая: когда m делится на 3 и когда m не делится на 3. 3. Убедиться, что последней цифрой квадрата целого числа может быть лишь одна из цифр 0, 1, 4, 5, 6, 9. 4. Доказать, что $(p - 1)(p + 1)$ делится на 3 и на 8. 5. $n \geqslant 2$. Разложить $n^4 + 4$ на

[1] В ответах к тригонометрическим задачам k, l, m, n означают, если не оговорено противное, целые числа.

множители. **6.** Показать, что среди чисел k, m, n имеется либо два четных, либо два нечетных. Далее использовать тождество $k^3 + m^3 + n^3 = (k + m + n)^3 - 3(k + m)(m + n)(n + k)$. **7.** При n, представимых в виде $5s - 3$, где s — натуральное. Если $3n + 4 = 5k$, то $3(n + 3) = 5(k + 1)$, а потому $n + 3$ должно делиться на 5. **8.** Ни при каких. Если бы имели место равенства $2n + 3 = kp$ и $5n + 7 = kq$, $k > 1$, то получилось бы $1 = (5p - 2q)k$. **9.** Например, числа $\frac{a+b}{2}$ и $a + 2^{-1/2}(b - a)$. **10.** Не могут. **11.** б) Показать, что из рациональности числа $\operatorname{tg} 15°$ следовало бы, что $\operatorname{tg} 30°$ — рациональное число. **12.** а) Рационально; б) иррационально. **13.** 494. **14.** 34 056, 34 452, 34 956. Использовать признаки делимости на 4 и на 9. **15.** $\underbrace{1 \ldots 1}_{2n \text{ раз}} - \underbrace{1 \ldots 1}_{n \text{ раз}} =$

$$= 9^{-1} \cdot \underbrace{9 \ldots 9}_{2n \text{ раз}} - 2 \cdot 9^{-1} \cdot \underbrace{9 \ldots 9}_{n \text{ раз}} = 9^{-1}(10^{2n} - 1) - 2 \cdot 9^{-1} \cdot (10^n - 1) =$$

$$= [(10^n - 1)3]^2 = \underbrace{(3 \ldots 3)^2}_{n \text{ раз}}.$$

16. $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 = -3$, $y_2 = -1$. Рассматривая уравнение как квадратное относительно x, заключить, что его дискриминант $25y^2 + 56$ должен быть квадратом целого числа, т. е. $56 = (k + 5y)(k - 5y)$. Далее перебрать возможные представления числа 56 в виде произведения двух целых чисел. **17.** $x_1 = 2$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = -2$; $x_3 = -2$, $y_3 = 2$; $x_4 = -2$, $y_4 = -2$. Выразить x^2 через y^2; y может принимать лишь такие целые значения, для которых $3 < y^2 < 12$. **18.** 17, 32, 47, 62, 77, 92, 107, 122, 137, 152. **19.** $k_1 = 16$, $k_2 = 23$. Из равенства $k_1 + 35k_1 - 25k_2 = 1$ следует, что $k_1 - 1$ делится на 5, т. е. $k_1 = 1, 6, 11, 16, \ldots$; проверяя последовательно эти значения, находим, что k_2 — целое, например, при $k_1 = 16$. **20.** Остаток равен 22. Из условия задачи следует, что $n = 6k + 4$ и $n = 15l + 7$; тогда $5n = 30k + 20$ и $2n = 30l + 14$. Отсюда $n = 5n - 2 \cdot 2n = 30(k - 2l) - 8 = 30(k - 2l - 1) + 22$. **21.** 27 способами. Задача сводится к уравнению $10x + 3y = 800$. Отсюда видно, что y должно делиться на 10, т. е. $y = 10z$, поэтому $x = 80 - 3z$. Это уравнение имеет 27 решений в целых неотрицательных числах. **22.** 17 способами. **25.** 16 решений. **26.** $x_1 = 3$, $y_1 = 22$; $x_2 = 3$, $y_2 = 23$; $x_3 = 3$, $y_3 = 24$. **27.** $k = 17$, $m = 24$, $n = 12$. **29.** $x_1 = 9$, $y_1 = 9$; $x_2 = 1$, $y_2 = 33$. **30.** $x = 2$, $y = 8$.

$\boxed{\text{В}}$ 1. $N^{-\alpha\beta\gamma/\delta}$. 2. $\log_b N$. 3. 0. 4. 0. 5. 0. В самом деле, $2^{\log_3 5} = (5^{\log_5 2})^{\log_3 5} = 5^{\log_3 2}$. 6. 0. Доказать, что $2^{\sqrt{\log_2 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 2}}$. 7. 6. 8. 25. 10. Доказать, что $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d a$. 11. 2. 12. 3. 13. $(5 - \beta)(2\alpha + 2\alpha\beta - 4\beta + 2)^{-1}$. Убедиться, что $\log_{25} 24$ выражается через $\log_5 2$ и $\log_5 3$. Из условий $\alpha = \log_6 15$ и $\beta = \log_{12} 18$ получить систему двух линейных уравнений относительно $\log_5 2$ и $\log_5 3$ и доказать, что $\alpha + \alpha\beta - 2\beta + 1 \neq 0$ (это есть условие разрешимости полученной линейной системы!). Последнее получается, если рассмотреть каждое слагаемое в выражении $(\alpha - \beta + 1) + \beta(\alpha - 1)$ и учесть, что $0 < \beta < 2$, $\alpha > 1$. 14. Числа равны. 15. Первое число больше. 16. Второе число больше. 17. Второе число больше. 18. Второе число больше. 19. Первое число больше. 20. Первое число больше.

$\boxed{\text{Г}}$ 2. Показать, что разность $d \geqslant 0$, а знаменатель $q \geqslant 1$. Для доказательства неравенства $b_{n+1} \geqslant a_{n+1}$, $n = 2, 3, \ldots$, заметить, что $a_1q^n - a_1 - nd = a_1(q - 1)\,[q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1 - n]$ и выражение в квадратных скобках неотрицательно. Равенство всех соответствующих членов прогрессий возможно лишь в случае $q = 1$ (и, следовательно, $d = 0$). 3. 27 135. 4. 27, 81, 243. 5. $x = 2$, $y = 2$. 6. $\frac{1}{30}$, $\frac{2}{19}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{11}{2}$. 7. $\frac{1}{27}$, $\frac{3}{17}$, $\frac{5}{7}$, 3, 19. 10. $a = -\frac{82}{9}$. 11. $a = \frac{8}{65}$. 12. $3^{\frac{12}{5}}$, $3^{\frac{7}{5}}$, $3^{\frac{2}{5}}$, $3^{-\frac{3}{5}}$, $3^{-\frac{8}{5}}$. 13. 100, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$. 14. 462 462. 15. $x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $x_2 = \pm\arccos\sqrt{\sqrt{2} - 1} + k\pi$. 16. $x = \operatorname{arctg} 4 + (2k + 1)\pi$. 17. 2; $\frac{62}{5}$. 18. $a = 100$, $b = 20$, $c = 4$. 19. 70; 10. 20. 117π.

$\boxed{\text{Д}}$ 1. $\alpha_1 = -\frac{3}{2}$, $\alpha_2 = 6$. 2. $p_1 = 0$, $q_1 = 0$, $p_2 = 1$, $q_2 = -2$. 3. $a_1 = -2$, $a_2 = 1$. 4. $a_1 = 0$, $a_2 = 3$. 5. $-1 < h < \frac{9}{16}$. 6. $\sqrt{20} - 4 < h < \frac{1}{2}$. Сделать замену $y = x - \frac{1}{x}$. 7. $p = -\frac{1}{2}$. 8. $p = 1$. 9. $x_1 = \sqrt{6}$, $y_1 = \frac{1}{3}\sqrt{6}$; $x_2 = -\sqrt{6}$, $y_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{6}$. 10. $x_1 = \sqrt{3}$, $y_1 = 2$; $x_2 = -\sqrt{3}$, $y_2 = -2$. 11. $x = 1$, $y = 0$. 12. $x = 1$, $y = 1$. 13. $x = 10^{-\sqrt{26}/3}$,

$y = \log_2\left[\frac{5+\sqrt{26}}{3}\right]$. **14.** $x = 10^{-\sqrt{38}/4}$, $y = \log_2\left[\frac{6+\sqrt{38}}{4}\right]$. **15.** $x = 2^{10/3}$, $y = 3^{-5/3}$. **16.** $x = 4$, $y = 4$. **17.** $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{2}$. **18.** $x = 5$, $y = 7$. **19.** $x = -2$, $y = -1$. **20.** $x = 3$, $y = 1$. **21.** $x = 3$, $y = -2$. **22.** $x = 4$, $y = 1$. **23.** Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $x = a^{-11}b^8$, $y = a^7b^{-5}$; если $a = 0$ и $b \neq 0$ или $a \neq 0$ и $b = 0$, то решений нет; если $a = 0$ и $b = 0$, то x_1 — любое число, $y_1 = 0$; $x_2 = 0$, y_2 — любое число. **24.** Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $x = a^5b^{-9}$, $y = a^{-6}b^{11}$; если $a = 0$ и $b \neq 0$ или $a \neq 0$ и $b = 0$, то решений нет, если $a = 0$ и $b = 0$, то x_1 — любое число, $y_1 = 0$; $x_2 = 0$, y_2 — любое число. **25.** $\alpha \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$. **26.** $\alpha = -\frac{2}{3}$. **27.** $\alpha = -4$. **28.** $a = 1$. **29.** $a = 1$, $b = -1$. **30.** $a_1 = 1$, $b_1 = -1$; $a_2 = 1$, $b_2 = -2$; $a_3 = -1$, $b_3 = -1$; $a_4 = -1$, $b_4 = -2$.

$\boxed{\text{Е}}$ **4.** Если $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133 \cdot M$, где M — целое число, то $11^{n+3} + 12^{2n+3} = 11 \cdot 133 \cdot M - 11 \cdot 12^{2n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n+1}$. **5.** При $n \leqslant 0$ неравенство очевидно; при $n \geqslant 1$ применить метод математической индукции. **7.** $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. **8.** $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. **9.** Свести к доказательству неравенства $(2\sqrt{n+1})^{-1} > \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$, правая часть которого равна $[\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}]^{-1}$. **10.** Если при уплате N р. была отдана купюра в 5 р., то для уплаты $N + 1$ р. следует вместо этой купюры отдать две купюры по 3 р. В ином случае три купюры по 3 р. надо заменить на две купюры по 5 р.

$\boxed{\S\ 2}$ **1.** Да. При $a = 0$ модуль a равен одновременно и a, и $-a$. **2.** а) Если $x \geqslant 0$, то $-x \leqslant 0$, и тогда $|-x| = -(-x) = x = |x|$; если $x < 0$, то $-x > 0$, и тогда $|-x| = -x = |x|$; б) если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, и следовательно, $x \leqslant |x|$; если $x < 0$, то $x < -x$, т. е. $x < |x|$. **4.** $a_1 = \ldots = a_n = 0$. **5.** Пусть для определенности $a < b$; тогда $|b - a| = b - a$. Возможны три случая: $0 \leqslant a < b$, $a < 0 \leqslant b$, $a < b < 0$. В первом случае расстояние равно $b - a = |b - a|$, во втором $b + |a| = b - a = |b - a|$, в третьем $|a| - |b| = -a - (-b) = b - a = |b - a|$. **6.** а) $a - b < x < a + b$; б) $x \leqslant a - b$, $x \geqslant a + b$. **8.** Нет решений. **9.** x — любое число. **10.** $x_1 = -1$, $x_2 = 0$. **11.** $x = -1$, $x \geqslant 0$. Переписать неравенство в виде $|1 + x|^2 \geqslant |1 + x| \cdot |1 - x|$; $x = -1$ является решением, а при $x \neq -1$ можно сократить на $|x + 1| > 0$.

12. $x = -2$. **13.** $x_{1,2} = \pm\log_3 2$. Заметить, что уравнение не меняется при замене x на $-x$, так что достаточно искать неотрицательные корни. **14.** $x = -1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. **15.** $0 < x < 1$, $1 < x \leqslant 2$, $x = \frac{5}{2}$. **16.** $x \geqslant \frac{1}{6}$. **17.** $0 < x \leqslant 2$. **18.** $x_1 = \frac{8}{3}$, $x_2 = \frac{22}{7}$. **19.** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. **20.** $x = \frac{7}{12}$. **21.** $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{5}{3}$. **22.** $x_1 = -5$, $x_2 = 1$. **23.** $1 - \sqrt{17} \leqslant x \leqslant \sqrt{5} - 1$. **24.** $-1 + \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$. **25.** $-\frac{1}{2}(3 + \sqrt{65}) < x < 3$. **26.** $2 < x < 3$. **27.** $x < -1 - \sqrt{2}$, $x > 1 + \sqrt{2}$. **28.** $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = 0$, $y_2 = -3$; $x_3 = -6$, $y_3 = 9$. **29.** $x_1 = 2\sqrt{2}$, $y_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = -2\sqrt{2}$, $y_2 = \sqrt{2}$. **30.** $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = 2\sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$, $y_2 = -2\sqrt{2}$. **31.** $x = 2$, $-3 \leqslant x \leqslant -2\frac{135}{137}$. **32.** Если $a < 0$, то $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4a})$; если $a = 0$, то $x = 0$; если $a > 0$, то решений нет. **33.** $\sqrt{|x|}$; x^2; $|x|$; x; $|x|^3\sqrt{y}$. **34.** При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. **35.** $2(2 - x)^{-1}$. Заметить, что $x \pm 2\sqrt{x - 1} = (\sqrt{x - 1} \pm 1)^2$. **36.** $|\cos\alpha - \cos\beta|$. **37.** $x_1 = k\pi$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$. **38.** $x = k\pi$. **39.** $x_1 = k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$. **40.** $x_1 = \pi + 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

§ 3 **1.** $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. **2.** Функция не определена ни при одном значении x. **3.** $x < -2$, $-2 < x < 0$, $0 < x < 1$, $x > 1$. **4.** Функция определена всюду, кроме точек $x = \frac{\pi k}{2}$. **5.** $x < 0$, $0 < x \leqslant 2$, $x \geqslant 3$. **6.** Функция определена только в точках $x = k$. **16.** Заметить, что $y = -2$ для всех $x \neq 3$. **23.** График состоит из точек оси Ox с абсциссами $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **24.** Заметить, что $y = 1$. **25.** Заметить, что $y = -\cos 2x$. **26.** Ввести вспомогательный угол. **37.** Доказать, что $\cos(\cos x) \geqslant 0$. **39.** График функции y_1 состоит из двух ветвей, а график функции y_2 — лишь из одной. **40.** График функции y_1 — биссектриса первого координатного угла (без начала координат). **41.** Функция y_1 не определена при $x = \frac{\pi k}{2}$. **42.** Куски параболы $y = (x - 2)^2$, соответствующие $x \leqslant 1$ и $x \geqslant 3$, и куски параболы $y = -x^2 + 4x - 2$, соответствующие $x \leqslant 1$ и $x \geqslant 3$. **43.** Биссектриса первого координатного угла и третий координатный угол (включая отрицательные полуоси абсцисс и ординат). **44.** Внутренность (включая и границу) квадрата с вершинами в точках (2, 0), (1, −1), (2, −2), (3, −1). **45.** Полуплоскость, лежащая ниже прямой $y = x - 2$, и полуплоскость, лежащая выше прямой $y = x + 2$ (не включая сами эти прямые). **46.** Части синусоиды $y = \sin x$, соответствующие $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k + 1)\pi$, и кривые, симметричные им относительно оси абсцисс. **47.** Полоса $0 < y < 1$ без вертикальных отрезков, проведенных в точках $x = \frac{\pi k}{2}$. **48.** Прямая $y = 0$ и точки $(0, -4)$, $\left(5, -\frac{2}{3}\right)$. **49.** Прямая $x = 1$ и точка $\left(-\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$. **50.** Прямая $y = -\frac{3}{2}$ и точка $\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$. **51.** 9. **52.** 10,5. **53.** 8. **54.** $\sqrt{|b|/2}$. Заметить, что абсциссы точек пересечения графика данной функции и прямой $y = kx + b$ являются корнями уравнения $2x^2 - x = kx + b$. Далее использовать формулы Виета. **55.** $\frac{1}{2}(1 + a)$. **56.** $\sqrt{2|\mathrm{ctg}\,\alpha|}$. **57.** $y = 1 + (x - 1)^{-1}$, $x > 0$, $y > 0$. **58.** $x = -y^2 + \frac{y}{4}$, $y > x > 0$. **59.** $V = \frac{\sqrt{3}}{12}[x - 3]^{-1}$, $x > \frac{1}{3}$. **60.** $V = \frac{1}{3}\left[x - \frac{1}{4}\right]^{-1}$, $x > \frac{1}{4}$.

§ 4 **1.** Нет. **2.** На $5m(t - t_2) - 5m^{-1}(t - t_1)$. **3.** 40 *км*^{2}. Из условия задачи получить уравнение $AC = 5 + \frac{1}{4}BC^2 + \frac{1}{16}AB^2$; кроме того, для любых трех точек A, B и C выполняется неравенство $AC \leqslant AB + BC$. Отсюда $5 + \frac{1}{4}BC^2 + \frac{1}{16}AB^2 \leqslant AB + BC$ или $\left(\frac{1}{2}BC - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{4}AB - 2\right)^2 \leqslant 0$, что возможно лишь при $AB = 8$ и $BC = 2$. **4.** Число оценок 2, 3, 4 и 5 соответственно равно 11, 7, 10 и 2. **5.** 20 *км/ч* и 80 *км/ч*. **6.** Нет. **7.** 0,6 *км/мин*. **8.** 4 ящика третьего типа и 25 ящиков второго типа. **9.** 12 листов. **10.** 16 *ч* 45 *мин*. **11.** 10%. **12.** $(0{,}8r - 24)$ *кг* первого и $(32 - 0{,}8r)$ *кг* второго; $31{,}25 \leqslant r \leqslant 33{,}75$. **13.** Нет. **14.** Деревня от шоссе дальше, чем школа от реки. 15. $\frac{1}{2}(15\sqrt{6} + 5\sqrt{54 - 16\sqrt{6}})$ *м*^{2}. 16. 20 *м/с*. 17. 50%. 18. 28 *км*, 1 *ч* 45 *мин*. 19. В 6 раз. 20. $5 < v < 10$. 21. Полкруга. 22. 11 трехтонных и 7 пятитонных грузовиков. 23. 8 *м/с*. 24. 12,5 *г*. 25. 135 *р*. 26. 9 пятиэтажных и 8 девятиэтажных домов. 27. $d = 10$. 28. Продано 3 комплекта; в комплекте 7 синих и 3 красных карандаша. 29. Основание стеклянной стены 8 *м*, перпендикулярной к ней стены 10 *м*; 8000 *р*. 30. 24 и 20. 31. 15 пассажиров. 32. 14 *ч*. 33. 2 *км/ч*. 34. 28 *г*. 35. 18 ч. 36. 28° и 56°. 37. 21 *км*. 38. 10 игрушек в час. 39. 35 *р*. и 24 *р*. 40. 1 «тройка» и 23 «четверки». 41. 9 *т*. 42. Тупоугольный. 43. 21 *ч* и 28 *ч*. 44. 15 *т*. 45. 11 *ч* 55 *мин*. 46. 120 *м*^{3}. 47. 20 *к*., 10 *к*. 48. 1 ч. 49. 15 *км*, 25 *км*, 20 *км*, 30 *км*. 50. 3 *т*, 9 *т*. 51. 14 дней. 52. 1 второклассник, 5 третьеклассников и 2 четвероклассника. 53. $\frac{1}{9}$. 54. 10 *м*^{3}/ч. 55. 3 *м*. 56. 16 дней. 57. Январская добыча второй шахты больше январской добычи первой шахты на 3100 *т*. 58. В 3 раза. 59. 2,5 *км/ч*, 4 *км/ч*; 5 *км/ч*. 60. 600 *км/ч*.

$\boxed{\S\ 5}$ 1. $x_1 = \frac{(2k+1)\pi}{4}$, $x_{2,3} = \frac{(6k \pm 1)\pi}{6}$. 2. $x = 1$. 3. $x = 2$. 4. $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 4 + 2k\pi$. 5. $x = \frac{\pi}{6}$. 6. $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x = 4$. 7. $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. 8. $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \frac{(6k+5)\pi}{3}$. 9. $x_1 = (8k + 1)$, $x_2 = \frac{(8k+3)\pi}{4}$, $x_3 = \frac{(12k+5)\pi}{6}$. 10. $x_1 = \frac{(24k+1)\pi}{12}$, $x_2 = \frac{(24k+5)\pi}{12}$. 11. $x = \frac{(4k+1)\pi}{2}$. 12. $x = 9$. 13. $x_{1,2} = \pm\sqrt{\log_2 3}$. 14. $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3 + \log_{3/4} 2}$. 15. $x_1 = 1$, $x_2 = -4$. 16. $x \geqslant 25$. 17. $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. 18. $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = 81$. 19. $x = 6$. 20. $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 3$. 21. $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. 22. $x = \frac{1}{3}$. 23. $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 125$. 24. $x = 1$. 25. $x = 16$. 26. $x_1 = 16^{-1/27}$, $x_2 = \sqrt[3]{2}$. 27. $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{93}{11}$. 28. $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \log_3(2 + \sqrt{3})}$. 29. $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1 + \log_2(2 + \sqrt{3})}$. 30. $x = -\frac{5}{8}$. 31. $x = -2$. 32. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_2 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi$. 33. $x = -2$. 34. $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

35. $x_1 = 1$, $x_2 = 7$. 36. $x = (-1)^k\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$. 37. $x = k\pi$. 38. $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = 0$. 39. $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{3}$. 40. $x = 4$. 41. $x = 3$. 42. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. 43. $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$. 44. $x = -\frac{4}{3}$. 45. $x_1 = 3$, $x_2 = \log_6 8$. 46. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. 47. $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. 48. $x = 3$. 49. $x = -\sqrt{2+\sqrt{5}}$. 50. $x = -1$. 51. $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$. 52. $x_1 = -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$. 53. $x = -\frac{1}{2}(15 + \sqrt{5})$. 54. $x_1 = -\frac{1}{6}(5 + \sqrt{193})$, $x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{57} - 7)$. 55. $x_1 = 2$, $x_2 = 8$. 56. $x_1 = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi$. 57. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. 58. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$. 59. $x = 2$. 60. $x = -\frac{5}{4}$. 61. $x_1 = 2^{-8}$, $x_2 = 2^{27}$. 62. $x_1 = 3^{\sqrt[3]{9}}$, $x_2 = 3^{\sqrt[3]{4}}$. 63. $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. 64. $x = \pm\arccos(\log_{2+\sqrt{3}} 2) + k\pi$. 65. Решений нет. 66. $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. 67. $x = 2$. 68. $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{9}{4}$. 69. $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. 70. $x = 0$.

$\boxed{\S\ 6}$ 1. $x > \log_{\operatorname{tg}(\pi/8)} \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. 2. $0 < x < \frac{1}{2}$, $x > 32$. 3. $\log_2 5 - 2 < x < \log_2 3$. 4. $0 \leqslant x \leqslant \log_3^2 2$, $x > \frac{3}{2}$. 5. $1 < x < 2$. 6. $x < 1$, $\frac{3}{2} < x < 2$, $x > 3$. 7. $0 < x < 1$, $x \geqslant 2$. 8. $\frac{1}{2} < x < 1$. 9. $x < -7$, $-5 < x \leqslant -2$, $x \geqslant 4$. 10. $\frac{1}{2}(14 + \sqrt{7}) \leqslant x \leqslant 9$. 11. $-\frac{5}{2} < x < -2$, $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2} < x < \frac{8}{3}$, $x \geqslant 4$. 12. $1 < x < \frac{3}{2}$, $2 < x < \frac{5}{2}$, $x > 3$. 13. $x \geqslant 1$. 14. $1 - \sqrt{6} < x \leqslant 2 - \sqrt{10}$, $1 + \sqrt{6} < x \leqslant 2 + \sqrt{10}$. 15. $-6 \leqslant x < 0$, $3 < x \leqslant 4$. 16. $x \leqslant -2 - \sqrt{2}$, $x \geqslant 1 + \sqrt{3}$. 17. $-\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) < x \leqslant 1$. 18. $0 < x < 2$, $x > 4$. 19. $-4 < x < -3$, $x \geqslant 1$. 20. $\frac{1}{10} < x \leqslant \frac{1}{2}$. 21. $2^{-\sqrt{1/8}} \leqslant x < 1$, $1 < x < 2^{1/3}$. 22. $2 < x < 5$. 23. $0 < x < 1$, $4 \leqslant x \leqslant 2^{1+\sqrt{3}}$. 24. $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$. 25. $\frac{1}{8}(1 + \sqrt{41}) <$

$< x < \frac{\sqrt{5}}{2}$. **26.** $\frac{3}{8} < x < \frac{1}{2}$, $1 < x < \frac{3}{2}$. **27.** $x < 1$, $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

28. $-\frac{1}{15} < x < 0$. **29.** $x > 4$. **30.** $x < 0$, $x > \log_4 3$. **31.** $-1 < x \leqslant 2$.

32. $\frac{1}{2} < x < 4$. **33.** $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. **34.** $-3 < x < -2$, $x > \frac{5}{2}$.

35. $0 < x < \frac{1}{5}$, $1 < x < 5\sqrt{5}$. **36.** $x < -4$. **37.** $-1 < x < \frac{5-\sqrt{13}}{2}$, $x > 2$. **38.** $x < \log_3 2$. **39.** $\frac{1}{100} < x < 10$. **40.** $0 < x \leqslant \frac{1}{3}$, $x > 1$.

41. $0 < x \leqslant \frac{4}{5}$, $x = 2$. **42.** $\frac{1}{2} < x < 1$, $x > 1$. **43.** $x \leqslant -1$. **44.** $1 < x < \frac{5}{4}$, $\frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}$. **45.** $\log_2 5 < x < 3$, $x > \log_2 14$. **46.** $\frac{29}{50} < x \leqslant 7 + 4\sqrt{3}$.

47. $\frac{31}{100} \leqslant x < 5 + 2\sqrt{6}$. **48.** $-1 < x \leqslant \frac{1}{3}$. **49.** $\frac{5}{2} < x \leqslant 3$. **50.** $x < -\frac{5}{2}$, $-\frac{9}{4} < x < -\frac{7}{4}$, $x > \frac{1}{4}$. **51.** $\frac{4}{7} < x < \frac{3}{5}$, $\frac{3}{5} < x < \frac{27}{35}$, $x > \frac{11}{10}$. **52.** $-\frac{3}{2} < x < -1$, $\frac{5}{2} < x < 3$. **53.** $-1 < x < 0$, $x > 1$. **54.** $-\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$. **55.** $x \leqslant -2$, $x = -1$, $x \geqslant 0$. **56.** $1 < x < 2$, $2 < x < 3$. **57.** $x = 5$. **58.** $\frac{1}{2} \leqslant x < 7 - \sqrt{40}$, $7 - \sqrt{40} < x + 7 + \sqrt{40}$, $x > 7 + \sqrt{40}$. **59.** $\frac{1}{2} < x < 1$, $\frac{1+\sqrt[3]{10}}{2} < x < \frac{1+\sqrt[3]{100}}{2}$. **60.** $-7 \leqslant x < -6 + \sqrt{4\sqrt{5} - 8}$. **61.** $x < -\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{12} < x < 0$. **62.** $2 \leqslant x < 18$.

63. $0 \leqslant x < 4$. **64.** $x > 2$. **65.** $1 < x < 2$. **66.** $x < \log_6 2$, $\frac{2}{5} < x < 2$.

67. $1 < x < \log_2 3$, $x > \frac{5}{3}$. **68.** $-\frac{3\sqrt{5}-5}{10} < x \leqslant 2$. **69.** $-\frac{3+\sqrt{7}}{2} < x \leqslant 0$.

70. $x \leqslant -2$, $x \geqslant 4$. **71.** 86. **72.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. **73.** Верно.

74. $-1 \leqslant x \leqslant -\frac{13}{25}$, $\frac{1}{3} < x \leqslant 2$. **75.** $n = -1; 0; 1; 2; \ldots; 12; 13$.

§ 7 **1.** а) Умножив неравенство на 2, перейти к очевидному неравенству $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 0$; б) переписать неравенство в виде $(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geqslant 0$. **5.** Переписать неравенство в виде $(x+y+1)^2 + 2(y+1)^2 \geqslant 0$. **6.** Переписать неравенство в виде $(1 - \sin^2 x)(5 - \sin^2 x) \geqslant 0$. **7.** При $x \leqslant 0$ все слагаемые неотрицательны; при $0 < x < 1$ имеем $x^2 > x^5$, $1 > x$; при $x \geqslant 1$ имеем $x^8 \geqslant x^5$, $x^2 \geqslant x$. **8.** Убедиться, что в левой части неравенства сумма чисел, равноудаленных от концов, не меньше $2(2n+1)^{-1}$. **9.** Представить $(n!)^2 = (1 \cdot n)[2(n-1)]...[(n-1)2](n \cdot 1)$ и доказать, что при любом k, $1 < k < n$, справедливо неравенство $k(n - k + 1) > n$. **10.** Выразить $\operatorname{ctg} x$ через $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$. **11.** Применить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, а затем использовать неравенство $\sin x + \cos x \geqslant -\sqrt{2}$. Равенство достигается при $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$. **12.** Свести задачу к следующей: если $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, то $\alpha + \beta \leqslant \sqrt{2}$. **13.** Свести задачу к следующей если: $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, то $\alpha^3 + \beta^3 < 1$. **15.** Если p — полупериметр треугольника, а S — его площадь, то из формулы Герона и неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим получаем $\sqrt{S} \leqslant \frac{p}{2}$. **16.** Ввести вспомогательный угол. **17.** Наименьшее значение $\frac{2}{3}$ достигается при $x = 0$; наибольшего значения нет. **18.** Наименьшее значение 0 достигается при $x = 0$; наибольшее значение $\frac{1}{2}$ достигается при $x = -1$ и при $x = 1$. Для определения наименьшего значения представить функцию в виде $y = (x^2 + x^{-2})^{-1}$. **19.** Наибольшее значение 1 достигается при $x = 1$; наименьшее значение -1 достигается при $x = -1$. **20.** Возвести неравенство в квадрат и записать его в виде $(a \cdot 3^y - b \cdot 2^x)^2 + (2^x - a)^2 + (3^y - b)^2 \geqslant 0$. **21.** Исходить из очевидного неравенства $x^2 + 2xy + y^2 \leqslant 2(x^2 + y^2)$. **22.** Так как $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$, то $0 < \frac{a}{c} < 1$, $0 < bc < 1$, а потому $\left(\frac{a}{c}\right)^{2/3} > \frac{a}{c}$, $\left(\frac{b}{c}\right)^{2/3} > \frac{b}{c}$. **23.** Извлечь корень степени n из обеих частей неравенства. **24.** Так как $a + b = 2$, то $a - 1 = 1 - b$. Пусть $c = a - 1 = 1 - b$; тогда $a = 1 + c$, $b = 1 - c$. Переписать доказываемое неравенство в виде $(1+c)^4 + (1-c)^4 \geqslant 2$ и в левой части раскрыть скобки. **25.** Применить метод математической индукции. **26.** $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **27.** $x_1 = \frac{5\pi}{6}$, $x_2 = \frac{13\pi}{6}$. **30.** $\log_{15} 60 > \log_{60} 480$. Перейти к логарифмам по основанию 2. 31. $3\log_{16} 1862 + \log_{16} 1866 < \log_2 1863$. Для того чтобы сравнить между собой числа $1862^3 \cdot 1866$ и 1863^4, применить к первому из них неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим для четырех чисел. 32. $3\log_{1759} 1751 < 4\log_{1759} 1753$. 33. Доказать, что $\log_7 18 < \frac{3}{2} < \log_5 14$. 34. Привести неравенство к виду $3 < 2^{\sqrt{8/3}}$; поскольку $\sqrt{\frac{8}{3}} > \frac{8}{5}$, то полученное неравенство следует из неравенства $3 < 2^{8/5}$. 41. $\cos 5 < \operatorname{ctg} 1 < \sin 8 < \operatorname{tg} 4$. 42. $\operatorname{ctg} 5 < \sin 3 < \cos 1 < \operatorname{tg} 7$. 43. Доказать, что промежуток, на котором $20x^2 - 16x + 1 < 0$, не содержит ни одного целого значения x. 44. $a_7 = 4\frac{4}{11}$. Рассмотреть квадратный трехчлен $f(x) = -x^2 + 14x - 45$ и функцию $g(x) = 4[(2x - 17)^2 + 2]^{-1}$. Трехчлен $f(x)$ при $x < 7$ возрастает, а при $x > 7$ убывает; функция $g(x)$ при $x < 8{,}5$ возрастает, а при $x > 8{,}5$ убывает. Поэтому члены $a_1, \ldots, a_6$ меньше члена a_7, а члены $a_{10}, a_{11}, \ldots$ меньше a_9. Остается сравнить между собой члены a_7, a_8, a_9. 45. $a_4 = -1\frac{9}{22}$. 46. $-\frac{\sqrt{28} - 4}{3}$. Рассмотреть выражение $(x^2 + x + 1)(2x + 3)^{-1}$ и исследовать его наибольшее значение при $x < -\frac{3}{2}$ и при $x > -\frac{3}{2}$. 47. $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. В ОДЗ данного неравенства входят лишь целые $n \geqslant -1$. Однако при $n \geqslant 3$ справедливо неравенство $n - \frac{1}{2} > 2\log_5 (n + 2)$, что доказывается методом математической индукции. Остается проверить, выполняется ли исходное неравенство для оставшихся целых значений. 48. Нет. Сравнить косинус наименьшего угла данного треугольника, вычисленный по теореме косинусов, и $\cos 22{,}5°$, найденный по формуле половинного аргумента. 49. $8 + 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Пусть $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Тогда по условию $bc = 16$. По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 16\sqrt{3}$, а из условия минимальности a следует $b = c = 4$. 50. $x = 4$. В ОДЗ неравенства входят лишь следующие целые числа: 1, 2, 3, 4. 51. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. 52. $a = -1$, $b = \frac{3}{2}$. 53. $a = 1$, $b = \frac{9}{2}$. 54. $x = 0$. 55. $x = -\frac{11\pi}{18}$.

§ 1. А 1. д) См. § 1, В раздела II. 2. а) Теорема; б) определение; в) теорема; г) теорема. 3. Обратная теорема: «Если $\cos\varphi < 0$, то угол φ оканчивается во второй четверти» — неверна. Противоположная теорема: «Если угол φ не оканчивается во второй четверти, то $\cos\varphi > 0$» — неверна. Теорема, противоположная обратной: «Если $\cos\varphi > 0$, то угол φ не оканчивается во второй четверти» — верна. 5. а) $\sin 1° < \sin 1$; б) $\operatorname{tg} 1 > \operatorname{tg} 2$.

Б 1. а) $\alpha = (-1)^k\beta + k\pi$ или, что то же самое, $\beta = (-1)^n\alpha + n\pi$. Более точно, если α и β — некоторые конкретные углы такие, что $\sin\alpha = \sin\beta$, то существует такое целое число k, что углы α и β связаны соотношением $\alpha = (-1)^k\beta + k\pi$; б) $\alpha = \pm\beta + 2k\pi$; в) $\alpha = \beta + k\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$; г) $\alpha = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$. 2. $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1-\sin\alpha}-\sqrt{1+\sin\alpha}}{2}$. 3. 1. 4. $\frac{\sqrt{15}}{7}$. 5. $\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}$. 6. $\operatorname{tg} x_1 = 0$, $\operatorname{tg} x_{2,3} = \pm 1$. 7. $\operatorname{tg} x = \pm\frac{3}{4}$. 8. $-\frac{1}{8}$. Умножить и разделить данное выражение на $\sin\frac{\pi}{7}$. 9. Использовать выражение для $\cos 2\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$. 10. Вычислить $\operatorname{tg} 142°30'$, используя равенство $142°30' = 90° + 45° + \frac{1}{2}15°$.

В 1. $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$. 2. $\frac{5\pi}{6}$; π; $\frac{\pi}{2}$. 3. $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$. 4. $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$. 5. $5 - 2\pi$; $4\pi - 10$; $2\pi - 6$; $4\pi - 10$. 6. Второе число больше. 7. Первое число больше. 8. $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $-\frac{1}{3}$. 9. $\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$; $\frac{1}{p}$; $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$. 10. а) Доказать, что $0 < \arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{3}{4} < \pi$, и вычислить $\cos\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{3}{4}\right)$; б) доказать, что $\frac{\pi}{2} \leqslant \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + \operatorname{arcctg}\frac{1}{2} \leqslant \frac{3\pi}{2}$, и сравнить синусы левой и правой частей.

§ 2 1. Установить, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{6}$, т. е. $0 < \alpha + 2\beta < \frac{\pi}{2}$, а затем вычислить $\sin(\alpha + 2\beta)$. 2. Преобразовать выражение $\dfrac{\left[\frac{a}{b}\frac{A}{B}+1\right]}{\left[\frac{a}{b}+\frac{A}{B}\right]}$; условие $aB + bA \neq 0$ означает, что $\sin[2x - (\alpha + \beta)] \neq$ $\neq 0$. **3.** $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $\beta \neq \pi + 2m\pi$. **4.** Умножить обе части доказываемого равенства на $\sin\frac{\pi}{7}$. **5.** $(1 + \cos^4 x)^{-1/2}$. **6.** 0. **7.** $\sqrt{2}\cos x \sec\frac{x}{2}\sin\left[\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right]$. **8.** $\frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{4}$. **9.** $y = a$, $z = c$. **10.** В левой части равенства выразить котангенсы через синусы и косинусы, привести дроби к общему знаменателю и преобразовать числитель в произведение, используя равенство $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. **12.** $\operatorname{tg}^{3/2} x$; $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. **13.** $\sin a(\cos a \cos x - 1)^{-1}$. **14.** $a + b = 2ab$. **15.** $(p^2 - q^2)^2 = -pq$. **16.** q. **17.** 3. **19.** 194. **20.** 1. **21.** -8. **22.** -7. Найти наименьшее значение трехчлена $2z^2 - 8z - 1$ на отрезке $-1 \leqslant z \leqslant 1$. **23.** 1. **24.** $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$. Доказать, что трехчлен $-z^2 + z + 3$ свое наибольшее значение на отрезке $-1 \leqslant z \leqslant 1$ принимает при $z = \frac{1}{2}$. **25.** $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.

§ 3 **1.** $t_1 = k\pi$, $t_2 = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi$. Перейти к функции $\cos 2t$. **2.** $y_1 = 2k\pi$, $y_2 = \frac{3\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$, $y_3 = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi$. **3.** $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m\pi$. Левую часть уравнения преобразовать к виду $2\cos x(\sin x + \cos x)^2$. **4.** $x_1 = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}$. Использовать равенство $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2\operatorname{ctg} 2x$; обозначить $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$ через y. **5.** $x_1 = k\pi$, $x_2 = \pm\operatorname{arctg}\sqrt{5/7} + n\pi$. **6.** $-\frac{\pi}{3} + k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $\frac{\pi}{6} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + k\pi$. Подкоренные выражения представить в виде полных квадратов. **7.** $x_1 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + k\pi$, $x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + n\pi$. Переписать уравнение в виде $5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 3x) = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x$ и перейти к синусам и косинусам.

8. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Переписать левую часть уравнения в виде $4(\sin x + \cos x) + (\sin x + \sin 3x) + (\cos x - \cos 3x)$. 9. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$. Левую часть уравнения преобразовать к виду $2 + 12\cos^2 2x + 2\cos^4 2x$, а затем перейти к $\cos 4x$. 10. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. Убедиться, что $\sin^4\frac{x}{2} - \cos^4\frac{x}{2} = -\cos x$. 11. $x_1 = k\pi$, $x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$. 12. $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{5\pi}{3}$. 13. $x = \frac{1}{3}(-1)^k\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{k\pi}{3}$. 14. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1\right) + k\pi$. 15. $x = 2\pi + 8k\pi$. 16. $x = \pm1 \pm \pm\sqrt{1 + (\pi/2) + 2p\pi}$, где $p = 0, 1, 2, \ldots$. Привести уравнение к виду $\sin(x^2) - \cos 2x = 0$ и преобразовать разность тригонометрических функций в произведение. 17. $x = k\pi$. 18. $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. 19. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = \pm\frac{1}{4}\arccos\left[\frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}\right] + \frac{n\pi}{2}$. 20. $x = \operatorname{arctg}\left[\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right] + k\pi$. 21. $x_1 = 1 + \log_2\frac{\pi}{4}$, $x_2 = 1 + \log_2\left[\pm\frac{\pi}{4} + p\pi\right]$, где $p = 1, 2, 3, \ldots$. Обозначить 2^{x-1} через y и выразить $\cos 2y$ через $\operatorname{tg} y$. 22. $x_1 = k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. 23. $x = -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$. 24. $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. 25. $x = k\pi$. 26. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. 27. $x = \frac{\pi}{4} - (-1)^k\arcsin\left[\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right] + k\pi$. 28. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$. 29. $x_1 = 1 + 2p$, $x_2 = -\frac{1}{6} + \frac{2q}{3}$, где $p, q = 1, 2, 3, \ldots$. 30. $x_1 = \frac{5\pi}{6} + p\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + q\pi$, где $p, q = 0, 1, 2, \ldots$. 31. $x_1 = k\pi$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$. 32. $x_1 = k\pi$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi$. 33. $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. 34. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = \operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{7} - 1}{2}\right] + n\pi$, $x_3 = -\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{7} - 1}{3}\right] + m\pi$. 35. $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + n\pi$. 36. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = (-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{\pi}{4} + n\pi$. 37. $x = \pm\frac{\pi}{3} +$

$+ 2k\pi$. **38.** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. **39.** $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$. **40.** $x = \frac{\pi}{6}$. **41.** $x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6} + n\pi$. **42.** $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$. **43.** $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2m\pi$. **44.** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. **45.** $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. **46.** $x_1 = \frac{k\pi}{3}$, $x_2 = \pm\frac{5\pi}{12} + n\pi$. **47.** $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **48.** $x = \frac{1}{2}(-1)^n\arcsin(\sqrt{3} - 1) + \frac{k\pi}{2}$. **49.** $x_1 = \frac{k\pi}{5}$, $x_2 = \frac{n\pi}{2}$. **50.** $x_1 = k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + n\pi$. **51.** $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + k\pi$. **52.** $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_2 = (2n + 1)\pi$. **53.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$. **54.** $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. **55.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. **56.** $x_1 = k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2m\pi$. **57.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{n\pi}{2}$. **58.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = -\operatorname{arctg}\left[\frac{6 + \sqrt{3}}{11}\right] + n\pi$. **59.** $x = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{5}{8} - \frac{\pi}{4} + k\pi$. **60.** $x = \operatorname{arcctg}(-2) + k\pi$. **61.** $x_1 = -2 + k\pi$, $x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} + n\pi$. **62.** При $|a| \leqslant 2$; $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left[\frac{a^2 - 2}{2}\right] + k\pi$. **63.** Показать, что равенства $\sin 2x = \sin 3x = 1$ невозможны ни при одном значении x. **64.** При $b > \frac{1}{2}$, $b \neq -1$, $b \neq 0$, $b \neq \frac{1}{3}$; $x = (-1)^k\arcsin\left[\frac{b}{b - 1}\right] + k\pi$. Привести уравнение к виду $\sin x = \frac{b}{b - 1}$ и учесть ограничения $\operatorname{tg} x \neq 0$, $\operatorname{tg}^2 x \neq \frac{1}{3}$, $\cos x \neq 0$, $\cos 2x \neq \frac{1}{2}$. **65.** $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$, $x_3 = \frac{5\pi}{6}$. **66.** $x_1 = -\frac{3\pi}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$. **67.** $x = \frac{\pi}{2}$. **68.** $x_1 = \frac{25\pi}{12}$, $x_2 = \frac{17\pi}{12}$, $x_3 = \frac{7\pi}{12}$, $x_4 = -\frac{11\pi}{12}$. **69.** $-3 \leqslant a \leqslant -2$; $x = \pm\arccos\sqrt{a + 3} + k\pi$. **70.** $1 \leqslant a \leqslant 2$; $x = \pm\arcsin\sqrt{2 - a} + k\pi$. **71.** $x_1 = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} + \arcsin\frac{2}{\sqrt{10}} + 2\pi$, $x_2 = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} - \arcsin\frac{2}{\sqrt{10}} + 3\pi$. **72.** $a_{1,2} = \pm 2$. **73.** $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{7\pi}{6}$. **74.** $x_1 = \arccos\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_{2,3} = \pi \pm \arccos\sqrt{\frac{3}{5}}$,

$x_4 = 2\pi - \arccos\sqrt{\frac{3}{5}}$. 75. $x_1 = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + n\pi$. 76. $x = \frac{5\pi}{4} - 1$. 77. 363π. 78. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $y = \frac{\pi}{18} + \frac{n\pi}{3}$. 79. $x = 1$, $y = (-1)^k\frac{\pi}{6} - 1 + k\pi$. 80. $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $y_1 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + n\pi$; $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $y_2 = (-1)^n\frac{\pi}{3} + n\pi$. 81. $x_1 = \frac{3\pi}{4}\ k\pi$, $y_1 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $y_2 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$. 82. $x_1 = 0$, $y_1 = -\frac{3}{4}$; $x_2 = -\frac{3}{4}$, $y_2 = 0$. 83. $x = \frac{7}{12}$, $y = -\frac{1}{12}$. 84. $x = \frac{3\pi}{4}$, $y_1 = 5 - \frac{3\pi}{2}$. 85. $x_1 = \pm\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{1}{12}}\right) + 2k\pi$, $y_1 = \frac{3\pi+1}{24}$; $x_2 = \pm\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{3\pi+1}{12}}\right) + 2n\pi$, $y_2 = \frac{18\pi+1}{24}$. 86. $x_1 = -\frac{5}{2}$, $y_1 = \pm\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} + k\pi$, $x_2 = -\frac{10+\pi}{4}$, $y_2 = \pm\arcsin\sqrt{\frac{10-3\pi}{12}} + n\pi$. 87. $x_1 = \mathrm{arctg}\,(\sqrt[3]{34} - \sqrt{5})$, $y_1 = \pm\arccos[(\sqrt[3]{34} + \sqrt{5})^{-1}]$; $x_2 = \mathrm{arctg}\,(\sqrt[3]{34} + \sqrt{5})$, $y_2 = \pm\arccos[(\sqrt[3]{34} - \sqrt{5})^{-1}]$. 88. $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $y_1 = \pi - \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = \frac{3\pi}{4}$, $y_2 = \pi - \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$. 89. $x_1 = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$, $y_1 = \pm\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$, $y_2 = \pm\frac{\sqrt{14\pi}}{4}$. 90. $x_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = \pm\sqrt{2}$, $y_2 = 0$.

Раздел III

§ 1. А 1. д) Если две плоскости пересекаются, то при прямой, являющейся их линией пересечения, образуются четыре двугранных угла (две пары вертикальных двугранных углов), и любой из них можно принять за угол между плоскостями; е) обратить внимание на две возможности: когда один из радиусов кругового сектора, вращением которого получается шаровой сектор, совпадает с осью вращения (в этом случае шаровой сектор — выпуклая фигура, основание шарового сектора — сегментная поверхность) и когда ось вращения не пересекает дуги этого кругового сектора (в этом случае шаровой сектор — невыпуклая фигура, его основание — шаровой пояс). 2. а) Теорема; б) определение; в) аксиома; г) теорема. 3. Обратная теорема: «Если прямая L параллельна плоскости π, то прямая L

параллельна прямой l» — неверна. Противоположная теорема: «Если прямая L не параллельна прямой l, то прямая L не параллельна плоскости π» — неверна. Теорема, противоположная обратной «Если прямая L не параллельна плоскости π, то прямая L не параллельна прямой l» — верна. **4.** Следует из теоремы, обратной теореме Пифагора. **5.** а) Нельзя; например, впишем в окружность треугольник ABC и будем рассматривать вписанные многоугольники, для которых хорды AB и BC всегда являются сторонами (т. е. все вершины, кроме B, выбираются на дуге AC); б) нельзя; например, возьмем последовательность вписанных треугольников $A_nB_nC_n$, для которых дуги A_nB_n и B_nC_n равны $\frac{2\pi}{n}$. **6.** Сравнить длину окружности с периметром вписанного в нее правильного шестиугольника и с периметром описанного около нее квадрата. **7.** Не справедливо. Доказательство неверно и проходит лишь в том случае, когда AB и AB_2 или CB и CB_2 не составляют одну прямую; тогда треугольники действительно равны. Но возможна и такая конфигурация, при которой AB и AB_2 (или CB и CB_2) лежат на одной прямой. **8.** Возможны две различные конфигурации: либо все три прямые параллельны между собой, либо все три пересекаются в одном точке. **10.** Вся плоскость. Показать, что из любой точки плоскости как из центра всегда можно провести окружность, пересекающую все три прямые. **11.** а) Прямая, перпендикулярная к плоскости треугольника ABC и проходящая через центр окружности, описанной около этого треугольника; б) таких точек нет. **12.** Сфера, построенная на отрезке AB как на диаметре. **13.** Окружность большого круга, высекаемая из сферы, построенной на отрезке AP (где P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую l) как на диаметре, плоскостью, проведенной через AP перпендикулярно прямой l. **14.** Все точки, лежащие внутри данного двугранного угла. Показать, что если через любую внутреннюю точку M провести плоскость, перпендикулярную к ребру двугранного угла, то на сторонах образовавшегося линейного угла всегда можно выбрать точки A и B так, чтобы точка M была серединой отрезка AB. **15.** Все точки плоскости П, проведенной через прямую L параллельно l, за исключением точек самой прямой L, и все точки плоскости π, проведенной через прямую l параллельно L, за исключением точек самой прямой l. **16.** Если $l > a$, то все точки окружности радиуса $\frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{2}$ с центром в центре куба, лежащей в плоскости, параллельной основаниям куба и проходящей через его центр. Если $l = a$, то единственная точка — центр куба. Если $l < a$, то таких точек нет. **17.** Окружность, построенная на отрезке OA (где O — центр данной окружности) как на диаметре. **18.** Окружность с центром в середине отрезка OA (где O — центр данной окружности) и радиусом, вдвое меньшим радиуса данной окружности. **19.** $5(15 - \sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{26}}{156} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. **20.** $\frac{3 + 2\sqrt{3} + \sqrt{21}}{6}$.

$\boxed{\text{Б}}$ **1.** $\frac{a\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})}{2}$. Доказать, что плоскости граней, являющихся прямоугольными треугольниками, взаимно перпендикулярны. **2.** $\frac{a|\sec 2\beta|}{2}$. Учесть, что угол 2β может быть как острым, так и тупым. **3.** $a^3b^3c^3(ab + bc + ca)^{-3}$. **4.** $\frac{1}{2}b\left|\cos\frac{3\alpha}{2}\right|\sec\frac{\alpha}{2}\operatorname{cosec}\alpha$. Заметить, что при $\alpha < \frac{\pi}{3}$ центр описанной окружности лежит ближе к основанию треугольника, чем центр вписанной окружности, а при $\alpha > \frac{\pi}{3}$ — дальше. **5.** $\frac{a^2 \operatorname{tg}\alpha|\cos 2\alpha|}{4(1 + 2\cos\alpha)}$. Заметить, что точка H может лежать как на стороне BC, так и на ее продолжении за точку C. **6.** $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Показать, что угол при вершине A треугольника должен быть острым, а точка H пересечения высот диаметрально противоположна точке касания вписанной окружности с основанием треугольника. Далее заметить, что $\angle HBC = 90° - \alpha$, и получить равенство $\operatorname{ctg}\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **7.** $AB = BC = 2$, $CD = 1$, $AD = \sqrt{3}$, $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **8.** $6\sqrt{7}$. **9.** $\angle BAC > \angle CAD$. Вычислить AB и рассмотреть треугольник ABC, заметив, что $\angle CAD = \angle ACB$. **10.** 30°. **11.** 16. **12.** $2r\sqrt{\sin\varphi}$. Рассмотреть случаи, когда точка касания находится от плоскости P на расстоянии большем, равном или меньшем, чем радиус шара. **13.** Имеется три таких шара; их радиусы: 1, $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **14.** $(\sqrt{R + \rho - r} - \sqrt{R})^2$. **15.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **16.** $2R$. **17.** $2R^2\sin^3\alpha\sin\beta\operatorname{cosec}(\alpha + \beta)$. **18.** $\frac{\pi}{4}$. **19.** $18\sqrt{2}$. **20.** $\frac{a\operatorname{ctg}\alpha}{4}$ и

$\frac{a \operatorname{tg} \alpha}{4}$. 21. $b + d$. 22. $\frac{7a\sqrt{3}}{72}$. 23. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. 24. 85°. 25. $R\frac{\sqrt{3}}{8}$. 26. $\frac{12 + 8\sqrt{3}}{3}$.
27. $\frac{196}{3}$. 28. $\frac{5m^2\sqrt{11}}{7}$. 29. $\frac{2704b^2}{75}$. 30. $\frac{\alpha + \beta}{2}$.

В 7. $\frac{3a^2}{4}$; $\arccos \sqrt{\frac{1}{3}}$. 11. $\frac{1}{2} b \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\left[3 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$. 12. $6\sqrt[3]{6V \sin\frac{\alpha}{2}} \times$ $\times \left[3 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}\right]^{-\frac{1}{6}}$. 14. Окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре. 15. Окружность, концентрическая с данной и имеющая радиус $r \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}$, где r — радиус данной окружности. 16. Вне трапеции; $\frac{3\sqrt{14}}{5}$. 17. Сторону CD. 18. Нет. 19. $8r^2$. 20. $\sin x = \frac{4}{5}$. 21. $(\sqrt{R + r - \rho} - \sqrt{r})^2$. 22. $\frac{2h^3}{3} \sin^3 \frac{\pi + \alpha}{3} \times$ $\times \operatorname{cosec} \frac{\pi + 4\alpha}{6} \operatorname{cosec} \frac{\pi + 2\alpha}{6}$. 23. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$. 25. $\sqrt{3}$. 26. $\frac{(a + c)s}{3}$. 27. $\frac{(a + b)s}{3}$. 28. 4. 29. Нет. 30. $\sqrt{\frac{229}{11}}$. 31. 8. 32. $3(\sqrt{13} - 1)\sqrt{3} : 32\pi$. 33. $\frac{a\sqrt{22}}{2}$. 34. $(\alpha - \beta) : (\alpha + \beta)$. 35. $6\frac{12}{13}$.

Г 1. Взять две прямые l_1 и l_2 из заданных трех, построить параллельные плоскости π_1 и π_2, содержащие l_1 и l_2 соответственно. Пусть A и B — точки пересечения третьей прямой l_3 с плоскостями π_1 и π_2. Через точку A в плоскости π_1 провести прямую k_1, параллельную l_2, а через точку B в плоскости π_2 — прямую k_2, параллельную l_1. Далее построить равные параллелограммы: в плоскости π_1 с вершиной A и диагоналями, лежащими на прямых l_1 и k_1; в плоскости π_2 с вершиной B и диагоналями, лежащими на прямых l_2 и k_2. 2. Неверно. 3. Можно. Секущую плоскость надо взять параллельной линиям пересечения противолежащих граней данного четырехгранного угла. 4. Нельзя. 5. Квадрат. 6. Правильный шестиугольник. 7. Две прямые: неограниченно продолженная в обе стороны медиана треугольника ABC, проведенная из вершины B, и прямая, проходящая через вершину B и параллельная стороне AC. 8. $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$ *м*. 9. $a\sqrt{\frac{3}{2}}$. 10. $\frac{1}{3}\pi b^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta$. 11. $\operatorname{arctg}(\sin\alpha\sqrt{\sec 2\alpha})$, если $2\alpha < \frac{\pi}{2}$. Случай $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ рассмотреть отдельно. Доказать, что при $2\alpha > \frac{\pi}{2}$ конусы не имеют общих касательных плоскостей, не проходящих через общую образующую. 12. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. Доказать, что сечение — правильный шестиугольник. 13. $\frac{13}{23}$. 14. Доказать, что проекция правильного тетраэдра на плоскость, параллельную двум скрещивающимся ребрам, — квадрат. 16. $\frac{25}{64}a\sqrt{3a^2+4h^2}$. 17. $d\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{r^2-d^2}{3}}$. 18. $\frac{5a^3\sqrt{2}}{96}$. 19. $\sqrt{\frac{3}{2}}$. 20. $2\sqrt{6}$. 21. $\frac{ab(\cos\alpha\operatorname{cosec}\beta-\operatorname{ctg}\beta\cos\gamma)}{2}$. 22. $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}\sin\varphi}}{2}$. 23. $\frac{14}{3}$. 24. $\frac{48\pi R^3}{125}$. 25. Точка P должна совпадать либо с точкой C, либо с точкой C_1. 26. На расстоянии от S, не большем $\frac{2SC}{3}$. 27. $\frac{2a\sqrt{144}}{57}$. 28. $h^3\left[\sin\alpha+2\cos\frac{\alpha}{2}\right]\times$ $\times\left[\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha\right]^{-\frac{1}{3}}$. 29. $2\sqrt{3}$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 30. $1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. 31. $\frac{ab^2\sin 2\alpha}{6}$. 32. $\frac{8}{3}a^{-1}S^2\sin\alpha\sin\beta\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)$. 33. $\frac{21\sqrt{3}+1-2\sqrt{2}}{4}$. 34. $\frac{a^3\sqrt{2}}{192}$. 35. 400. Рассмотреть развертку пирамиды. 36. 450. 37. $\frac{a\sqrt{29}}{8}$. 38. $\frac{r(3+\sqrt{21})}{3}$. 39. $a\sqrt{\frac{439}{108}}$. 40. $b\sqrt{\frac{167}{16}}$.

§ 2 1. $\frac{2ab}{a+b}$. 2. $8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. 3. $\frac{64}{25}$. 4. $\frac{a-r}{a+r}$. Провести прямую $APOQ$ через точку A и центр O окружности и заметить, что искомая величина равна отношению площадей треугольников BPC и BQC. 5. $\frac{b}{2}(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)\operatorname{cosec}\alpha$; $|a^2-b^2|b^{-1}$. 6. $2(1-\alpha)$. 7. 4. 8. $\sin^2\frac{\pi-\alpha}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi+3\alpha}{4}$. 9. 210. 10. $\cos^2\frac{B-C}{2}\sec^2\frac{B+C}{2}$. 11. $QP=QN=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $PN=1$; $\angle NPQ=$

$= \angle PNQ = 30°$, $\angle PQN = 120°$. 12. 13. 13. 20. 14. $\frac{1}{12}$.

15. $(3ab - a^2)(a + b)^{-1}$. 16. $\sqrt{36}$. 17. 8 : 37. 18. $\frac{\sqrt{51}}{3}$. 19. $\frac{1}{7}$. 20. 2 и $2(1 + \sqrt{2})$. 21. $\frac{14}{9}$. 22. $\frac{9\sqrt{3}r^2}{4}$. 23. $d\sqrt{k}$. 24. $\sqrt{abk}$. 25. abc^{-2}.

27. $a \operatorname{cosec} \alpha \frac{\sqrt{8\sin^2\alpha + \sin^2\beta} - \sin\beta}{2}$. 28. 2,4. 29. $4\sqrt{5}$. 30. $(a + c) \times$ $\times (b + c)(a + b + c) : [ab(a + b + 2c)]$. 31. $\frac{4}{3}$. 32. $1 : \sqrt{3}$.

33. $1 : \sqrt{3}$. 34. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. 35. $\frac{(a + b + c)s}{3}$. 36. $\sqrt{5}$. 37. $\frac{11\pi}{12}$. 38. $SA = 1$, $SB = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $SC = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 39. $SA_1 = \sqrt{10}$, $SB_1 = \sqrt{11}$, $SC_1 = \sqrt{12}$.

40. $15\sqrt{3}$. 41. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 42. 169 : 792. 43. $\frac{7}{32}$. 44. $\frac{a\sqrt{19}}{15}$. 45. $\frac{5}{6}$. 46. $\frac{23}{90}$.

47. 37 : 72. 48. $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2} \sec\frac{\alpha}{2}$. 49. $\frac{p\sin\alpha}{8}$. 50. 2 : 11.

51. 70°. 52. $4\sqrt{3} : 7\pi$. 53. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$. 54. 2. 55. 1. 56. $\frac{17}{4}$.

57. 10 : 11. 58. $\frac{125(3 + \sqrt{3})}{4}$. 59. $2r\sqrt{\frac{r}{R}}$, $2R\sqrt{\frac{R}{r}}$. 60. $a\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{-1}$, $b\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{-1}$.

§ 3 1. $\frac{1}{3}\pi bc(b + c) \sin a \cos\frac{\alpha}{2}$. 2. $4R^2 + 2R\sqrt{4R^2 - l^2}$.

3. $2p(p + q) \cdot R^2 \sin 2\varphi \cos^2\varphi[p^2 + q^2 + 2pq\cos 2\varphi]^{-1}$. 4. Окружность с центром в середине отрезка AB и радиусом AB.

5. $\frac{\pi a^3}{12}\left[1 + 2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right]$. 6. $-2S\cos 2\alpha\cos^2\alpha$. 7. а) $r < R \leqslant r(1 + \sqrt{2})$; б) $R = r(1 + \sqrt{2})$. 8. 2 *см*, $\frac{1}{2}$ *см*, $\frac{5}{2}$ *см*. 9. Не достаточно.

10. $\frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}\right)$. 11. $m\sin\beta(m\cos\beta + \sqrt{c^2 - m^2\sin^2\beta})$.

12. $a\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{\sec^2\alpha}{4}}}$. 13. 1. 14. $1 + \frac{5}{2}\operatorname{ctg}\alpha - (1 - \sqrt{a^2 - 4})^2 \times$ $\times (a^2 - 4)^{-1/2}$. 15. $2\pi^{-1}(\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cosec}\beta)$. 16. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 17. $32\pi^{-1}m^{-4} \times$

$\times (\arccos m - m\sqrt{1-m^2})$. **18.** $(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) : \left[\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \right.$ $\left. + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right]$. **19.** $B = \frac{\pi - \alpha}{2} + \frac{1}{2}\arccos\left[\frac{1}{2}(\pi\sin\alpha - 2\cos\alpha)\right]$, $C = \pi - B - \alpha$; $0 < \alpha \leqslant 2\arcsin\frac{2}{\sqrt{\pi^2+4}}$. **20.** $\cos x = 1 - \sin\frac{\beta}{2}\left[\sin\frac{\beta}{2} - \right.$ $\left. - \sqrt{\sin^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}\right]$. **21.** 1. **22.** $\frac{7 \pm 3\sqrt{3}}{4}$, $\frac{5+\sqrt{3}}{4}$. **23.** $\frac{1}{4}[\rho^2 - (R-r)^2] \times$ $\times [\sqrt{R} + \sqrt{r}]^{-2}$. **24.** $\sqrt{2}$. **25.** 4. **26.** 9 : 16. **27.** $2l\pi^{-1}$. **28.** $\frac{a}{2}$. **29.** $\frac{d}{2}$. **30.** $-\frac{8}{3}h^3\sin^4\frac{\alpha}{3}\operatorname{cosec}^4\frac{\alpha}{3}$; $\alpha > \frac{3\pi}{4}$. **31.** $\frac{8R^2}{5}$. **32.** $\frac{9p^2}{200}$. **33.** $\frac{\pi - \sqrt{3}}{6}$. **34.** 4. **35.** $2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$. **36.** $\frac{4(2+\sqrt{3})}{3}$. **37.** $(\sqrt{10} + 2) : (9 - 3\sqrt{5})$. **38.** $2\sqrt{39}$. **39.** 3. **40.** $\pi\sqrt{3}$. **41.** 7. **42.** $\frac{3\pi a^2}{64}$. **43.** $\frac{r\sqrt{10}}{4}$. **44.** $(3 + \sqrt{3}) : (8 + 2\sqrt{3})$. **45.** $a^2b(2a - b)^{-1}$. **46.** $\sqrt{19} + \frac{8\sqrt{3}}{3}$. **47.** $\frac{1}{8}a^2(\sqrt{2} - 1)[(2\sqrt{2} - 1)\pi - 4]$. **48.** $\sqrt{\frac{19}{18}}$. **49.** $\frac{2\sqrt{5} - \sqrt{15}}{5}$. **50.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{54}$. **51.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. **52.** $\sqrt{s\operatorname{cosec}\alpha}$. **53.** $12 : 25\pi$. **54.** 2. **55.** $\frac{25 + 10\sqrt{10}}{9}$. **56.** $128(3 + 2\sqrt{2}) : 49$. **57.** $\frac{50(6 - \sqrt{3})}{3}$. **58.** $\frac{25a^2\sqrt{7}}{12}$. **59.** $\frac{75a^2\sqrt{7}}{16}$. **60.** $\frac{25a^2\sqrt{7}}{6}$.

§ 4 **2.** 90°; $\arccos\frac{1}{3}$; $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **3.** Справедливо. Доказательство, однако, не является правильным, поскольку не показано, что построенная плоскость π не зависит от выбора точки A на прямой L. Нужно дополнительно доказать, что если взять другую точку на прямой L и провести те же построения, то получающаяся плоскость совпадет с плоскостью π. **4.** Лишь если $L \perp l$. **5.** Не всегда. Эта прямая существует лишь в том случае, если все три данные скрещивающиеся прямые параллельны одной плоскости. **6.** Всегда. Через одну из прямых l_1 и точку A на другой прямой l_2 провести плоскость π; доказать, что точку A можно выбрать так, что плоскость π и третья прямая l_3 не параллельны. Провести прямую L через точку A и точку пересечения прямой l_3 с плоскостью π; доказать, что точку A можно выбрать так, что прямые L и l_1 не параллельны. 7. Не существует. 8. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Заметить, что общий перпендикуляр равен высоте треугольной пирамиды, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через концы трех его ребер, сходящихся в одной вершине. 9. Могут. 10. Параллелограмм. 11. $\arccos(\cos\alpha\ \sin\beta)$. 12. Оба угла равны $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)$. 13. $\frac{b}{c}$. 14. $\arcsin\left[\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}\right]$. 15. $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{7}$; $d = a\sqrt{\frac{3}{7}}$. 16. $9a^3 \times$ $\times \cos^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{cosec}^3\frac{\alpha}{2}$. 17. $\frac{1}{8}p^3\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2\alpha(4+\operatorname{tg}^2\alpha)^{3/2}$. 18. $\arccos(\cos^2\gamma)$. 20. 45° или 60°. Через одну из скрещивающихся прямых провести плоскость, параллельную второй прямой, и спроектировать эту последнюю на построенную плоскость. Возможны два случая в зависимости от того, стягивает ли отрезок, соединяющий проекции точек A и B на эту плоскость, острый или тупой угол. 21. $2\arcsin\left[\frac{1}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sec\alpha\right]$. 22. $2\arcsin\left[\cos\frac{\alpha}{2}\sec\frac{\beta}{2}\right]$. 23. $\arccos\frac{R}{h}$. 24. $a\sqrt{\sqrt{2}-1}$. 25. $\cos\frac{x}{2} = (\cos\beta - \cos^2\alpha)\operatorname{cosec}\alpha$. 26. $\frac{1}{2}ab(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)\operatorname{cosec}\beta$. 27. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. 28. Имеется два таких шара с радиусами $\frac{R(9\pm\sqrt{2})}{7}$. 29. $\frac{2}{3}$. 30. $\frac{1}{3}$. 31. $\frac{8-5\sqrt{2}}{16}$. 32. $\frac{5-\sqrt{7}}{4}$. 33. $\frac{a(5-\sqrt{7})}{4}$. 34. $a\sqrt{\frac{3}{70}}$. 35. $\sqrt{4q^2+\frac{p^2}{12}}$. 36. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$. 37. 36. 38. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 39. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 40. $\frac{a}{8}$. 41. $m\sqrt{\frac{265}{108}}$. 42. $b\sqrt{277}$. 43. $\frac{a}{2\sqrt{2}}$. 44. $\sqrt{3}\operatorname{tg}50°$. 45. $10\frac{13}{41}$.

§ 5 1. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 2. $\frac{8a^3\sqrt{3}}{27}$. 3. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. 4. $\frac{a(\sqrt{3}-1)^2}{4}$. 5. Если $0 < r < \frac{a}{2}$, то конфигурация невозможна. Если $\frac{a}{2} \leqslant r < \frac{a\sqrt{2}}{2}$, то существуют два удовлетворяющих условию шара и $V = \frac{a^2 h}{2}$, где $h = (2a^2 r \pm a^2 \sqrt{4r^2 - a^2})(2a^2 - 4r^2)^{-1}$. Если $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, то $V = \frac{a^3}{8}$. Если $r > \frac{a\sqrt{2}}{2}$, то существует единственный удовлетворяющий условию шар и $V = \frac{a^2 h}{2}$, где $h = (2a^2 r - a^2 \sqrt{4r^2 - a^2})(2a^2 - 4r^2)^{-1}$.

6. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{18}$. 7. $\frac{2}{3} r\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{4}$. 8. $\frac{1}{3} r(6 + \sqrt{3} + \sqrt{27 + 12\sqrt{3}})$.

9. $\frac{r(2 + \sqrt{6})}{2}$. 10. $\frac{9a^2h^2}{a^2 + 12h^2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{4h^2}{a^2}}$. 11. $\frac{1}{2} a(2b - a)\sqrt{3} \times$ $\times (3b^2 - a^2)^{-1/2}$. 12. $\frac{a\sqrt{41}}{8}$. 13. $\frac{26\pi r^2}{27}$. 14. $\frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{4a^2b^2 - a^2 - b^4}}$.

15. $\frac{\sqrt[3]{6/\pi}}{3}$. 16. $\frac{\pi\sqrt{3}t^2}{18(1 + t^2 + t^4)}$, где $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. 17. $\frac{\operatorname{arctg} 2\alpha}{1 - \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}$.

18. Имеются два таких шара; их радиусы $\frac{R(5 \pm \sqrt{13})}{3}$. 19. $\frac{1}{4} [\rho^2 - (R - r)^2] \cdot (\sqrt{R} + \sqrt{r})^{-1}$. 20. $\frac{\pi\sqrt{14}}{12}$. 21. $\frac{9\pi r^3\sqrt{10}}{50}$. 22. $\frac{a}{6}$.

23. $p > \sqrt{\frac{2}{3}}$. 24. $\frac{2a\sqrt{11}}{33}$. 25. 6. 26. $\frac{7}{27}$. 27. $\operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}\right]$.

28. $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{5}}$. 29. $\frac{2}{\sqrt{39}}$. 30. 96; $2 \arcsin \left(\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)$. 31. $\frac{5a\sqrt{11}}{44}$.

32. $\frac{\pi(4\sqrt{3} - 3)}{13}$. 33. $\frac{4\pi}{9}$. 34. $\frac{15\pi}{4}$. 35. $R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \beta (1 + \sin \beta)^{-1}$.

36. $a \operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{\sqrt{1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha} - 1}{4}\right)$. 37. $\pi \cos \beta \sin \frac{\beta}{2} \left[\sin \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\beta}{2}\right]^{-3}$.

38. $12 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \left[4 \sin \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\cos \alpha}\right]^{-3}$. 39. $2\sqrt{21}$. 40. $\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

41. $8(10 - 7\sqrt{2})$. 42. $\frac{R^3\sqrt{6}}{4}$. 43. $\frac{5r\sqrt{3}}{3}$. 44. $m\sqrt{33}$. 45. $\sqrt{3} \operatorname{tg} 40°$.

$\boxed{\text{§ 6}}$ 1. $\frac{3}{\sqrt{14}}$. 2. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$. 3. $3a$. 4. 1 : 47. 5. $a^2(1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}})$.

6. $\frac{11ab}{4}$. 7. $\frac{5S}{4}$. 8. $\frac{25S}{16}$. 9. $\frac{23V}{24}$. 10. $\frac{2a}{5}$. 11. $\frac{12h^3}{247}$. 12. 100 : 69.

$13.\ \frac{3\sqrt{3}}{32}$. $14.\ \frac{5ab\sqrt{2}}{16}$. $15.\ \frac{3\sqrt{3}}{4}$. $16.\ \frac{\sqrt{2}a^2b^2}{3(a+b)}$. 17. $2\operatorname{arctg}\frac{4}{9}$. 18. 1 : 6. 19. На расстоянии от S, не большем $\frac{2SD}{3}$. 20. Должна совпадать с C. 21. $\frac{3b\sqrt{4h^2+a^2}}{32}$; $\operatorname{arctg}(2a^{-1}h)$. 22. $\frac{2a\sqrt{4h^2+3a^2}}{9}$; $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}h}{3a}$. 23. $\frac{\sqrt{(b^2-a^2)(a^2+h^2)}}{4}$. 24. $4\sqrt{2}R^2\operatorname{cosec}\alpha$. 25. $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

26. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{6}$. 27. $\operatorname{arctg}(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$. 28. $\sqrt{2}$. 29. $32\sqrt{3}$.

30. $\frac{a(\sqrt{21}-\sqrt{3})}{24}$.

Раздел IV

§ 1 1. Нет решений. 2. $x = 0$. 3. $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 2$. Привести уравнение к виду $(\log_2 x + 2)(\log_2 x + x - 3) = 0$. Уравнение $\log_2 x = 3 - x$ имеет единственный корень $x = 2$; при $x > 2$ левая часть уравнения больше 1, а правая — меньше 1; при (допустимых) $x < 2$ — наоборот. 4. $x = \frac{(2k+1)\pi}{4}$, $y = 1$. 5. $x = 1$, $y = \frac{2k-3}{4}$. 6. $x_1 = -\operatorname{arctg}\sqrt{2} + k\pi$, $y_1 = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$; $x_2 = \operatorname{arctg}\sqrt{2} + k\pi$, $y_2 = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$. Привести уравнение к виду $[\operatorname{tg} x + (\sin y + \cos y)]^2 + (1 - \sin 2y) = 0$. 7. $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $y_1 = (2n+1)\pi$; $x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $y_2 = 2n\pi$. Заменой $\cos y = z$ привести уравнение к следующему виду: $z^2 - 2z\sin\left[x + \frac{\pi}{4}\right] + 1 = 0$, или $\left[z - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2 + \left[1 - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = 0$. 8. $x = 0$, $y = 1$. Если неравенство верно, то $y \geqslant x^2 + 1 \geqslant 1$, но $\cos x \geqslant y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1} \geqslant y^2$, т. е. $\cos x \geqslant 1$. Следовательно, все выписанные неравенства превращаются в равенства: $y = x^2 + 1 = 1$, откуда $x = 0$, $y = 1$. Проверка показывает, что эта пара чисел действительно удовлетворяет неравенству. 9. $x = 1$, $y = 0$. 10. $x = 2$. 11. $x = 2$. 12. Нет решений. 13. $x = 0$. 14. $\frac{1}{2} < x < 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}$. 15. $1 - \sqrt{\frac{1}{2}} < x < 1$.

16. $a_6 = -3\frac{9}{19}$. Доказать, что квадратный трехчлен $2x^2 - 24x + 69$ возрастает при $x > 6$, а квадратный трехчлен $(3x - 22)^2 + 3$ — при $x > \frac{22}{3}$ и, следовательно, при $x > \frac{22}{3}$ возрастает функция $-\frac{9}{(3x-22)^2+3}$. Общий член a_n как сумма двух возрастающих выражений будет при $n > 8$ возрастать с ростом n. Наименьший член найти прямым перебором среди $a_1, a_2, \dots a_7, a_8$. **17.** $a_5 = 2\frac{25}{46}$. **18.** $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$. **19.** $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\alpha_2 = 1$. **20.** $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$. **21.** $x = \sqrt{2}$, $y = 2$. **22.** $y = \frac{1+\sqrt{26}}{6}$. Данное равенство рассмотреть как квадратное уравнение относительно x. **23.** Не существует. **24.** $\left(3, \frac{7}{2}\right)$, $\left(-3, -\frac{7}{2}\right)$. **25.** $\left(2, \frac{17}{2}\right)$, $\left(-2, -\frac{17}{2}\right)$. **26.** $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. **27.** $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$, $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. **28.** $x_1 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. **29.** Верно. **30.** Неверно. **31.** $\frac{1}{4} < x \leqslant 2$, $-\frac{5}{8} \leqslant x \leqslant -\frac{17}{44}$. **32.** $x = 2$, $2\frac{161}{163} \leqslant x \leqslant 3$. **33.** $x = -2$, $x \geqslant 4\frac{1}{139}$. **34.** $\alpha = 100$. **35.** $\alpha = 100$.

$\boxed{\S\ 2}$ 1. Если первое уравнение не имеет решений, то $c^2 > a^2 + b^2$, в частности, $c \neq 0$. Второе уравнение представим в виде $(2a \operatorname{tg}^2 x + 2c \operatorname{tg} x + b) \operatorname{ctg} x = 0$. Если $a \neq 0$, то дискриминант трехчлена $2ay^2 + 2cy + b$ равен $c^2 - 2ab > a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0$, т. е. второе уравнение имеет два различных корня; тогда по крайней мере один из них отличен от нуля и потому $\operatorname{ctg} x$ имеет смысл. Если $a = 0$, то $\operatorname{tg} x = -\frac{6}{2c}$; при $b \neq 0$ имеем $\operatorname{tg} x \neq 0$, т. е. второе уравнение имеет решение. 2. а) $a = -2$; б) $\frac{1}{4} < a < 2$. 3. а) Ни при каких a; б) при любых a; в) $a \neq 0$; г) при любых a; д) $a = 0$; е) $a \neq 0$. **4.** $a_1 = -1$, $a_2 = 1$. **5.** $a = 0$, $0 < b \leqslant 1$. **6.** $a = -1$. **7.** $a < -1$, $a = 0$. **8.** $a = 4$, $a > 5$. **9.** $0 < x < 1$. **10.** $2 \leqslant x < 2{,}5$. **11.** $-1 < a < -\frac{1}{2}$. **12.** $a < -2$. **13.** $a = -1$, $x_{1,2} = \sqrt{9\pi^2 - \left(\pi + \arcsin\frac{\pi}{4}\right)^2}$,

$x_{3,4} = \pm\sqrt{9\pi^2 - \left(\pi - \arcsin\frac{\pi}{4}\right)^2}$; $a = \frac{\operatorname{tg}^2 1 + 2}{2\operatorname{tg} 1 - 1}$, $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{11}\pi}{2}$, $x_{3,4} =$ $= \pm\frac{\sqrt{35}\pi}{2}$. **14.** $a = -\frac{2\operatorname{ctg}^2 1}{2\operatorname{ctg} 1 + 1}$, $x = 0$; $a = 2$, $x_{1,2} = \pm\arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $x_3 =$ $= 2\pi - \arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $x_4 = \arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2\pi$. **15.** $a = 2$, $b = 4$, $c = 64$. **16.** $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$. **17.** $h = 2k\pi$. **18.** $h = (2k + 1)\pi$. **19.** $2 < a < 8$. **20.** $a \leqslant -2\sqrt{\frac{7}{3}}$, $a \geqslant 2\sqrt{\frac{7}{3}}$. **21.** $-\sqrt{\frac{2}{15}} \leqslant a \leqslant \sqrt{\frac{2}{15}}$. **22.** $3(2k + 1)\pi < b \leqslant$ $\leqslant 6(k + 1)\pi - \frac{3\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. **23.** $2k\pi < a \leqslant (2k + 1)\pi$, $k = 1,$ $2, \ldots$. **24.** $x = 1$. **25.** $x = 5$.

§ 3 **1.** $a < -3$, $a > 0$. **2.** $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 0$. **3.** Ни при каких a. **4.** $m > 1$. **5.** $a < -2$. **6.** $y < -\frac{2}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} < y < 0$, $0 < y < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y > 2\sqrt{2}$. **7.** $0 < y < 1$. **8.** $a \geqslant 1$. **9.** $-3 \leqslant a \leqslant 3$. **10.** $-\frac{1}{\sqrt{2}} < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$. **11.** $d > \frac{11}{9}$. **12.** $2\sqrt{2} \leqslant a < \frac{11}{3}$. **13.** $x = (-1)^k \arcsin \log_2\left[\frac{-m + \sqrt{4 - 3m^2}}{2}\right] + k\pi$. Найти корни трехчлена $f(y) = y^2 + my + m^2 - 1$ такие, что $\frac{1}{2} \leqslant$ $\leqslant y \leqslant 2$. В силу $-1 < m < 1$ дискриминант $D = 4 - 3m^2 > 0$, а свободный член отрицателен, так что нас может интересовать лишь больший корень. Он не превосходит 2 в том и только в том случае, когда $f(2) \geqslant 0$, что выполняется при любом m. **14.** $x_{1,2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a^2 - 1} - a \pm \sqrt{2a^2 - 5 - 2a\sqrt{a^2 - 1}}\right)^2$ при $a < -\frac{5}{4}$; $x = 1$ при $a = -\frac{5}{4}$; нет решений при $a > -\frac{5}{4}$. Найти корни трехчлена $f(y) = y^2 + 2ay + 1$, удовлетворяющие условию $y \geqslant 2$. Если $D = a^2 - 1 < 0$, то корней вообще нет, поэтому должно быть $a^2 - 1 \geqslant 0$. Если $f(2) = 4a + 5 < 0$, то больше 2 будет больший корень $y = -a + \sqrt{a^2 - 1}$. Если $f(2) \geqslant 0$ и $-a \geqslant 2$, то подходят оба корня, но этот случай не имеет места ни при каком a. **15.** $x = \log_2(2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2})$ при $m < -1$; $x = 1$ при $m = 1$;

$x_{1,2} = \log_2(2m \pm \sqrt{4m^2 - 2m - 2})$ при $m > 1$; при остальных m решений нет. Найти положительные корни трехчлена $y^2 - 4my + 2m + 2$. Дискриминант $D = 4m^2 - 2m - 2$ неотрицателен при $m \leqslant -\frac{1}{2}$, $m \geqslant 1$. При $m \geqslant 1$ имеем $y_{1,2} = 2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2}$; при $-1 \leqslant m \leqslant -\frac{1}{2}$ положительных корней нет; при $m < -1$ положителен больший корень $y = 2m + \sqrt{4m^2 - 2m - 2}$. **16.** $x_1 = (-1)^k \arcsin 10^{a + \sqrt{2a^2 - 2}} + k\pi$, $x_2 = (-1)^k \arcsin 10^{a - \sqrt{2a^2 - 2}} + k\pi$ при $-\sqrt{2} \leqslant a < 1$; $x = x_2$ при $a < -\sqrt{2}$, $a = -1$, $a \geqslant \sqrt{2}$; при остальных a решений нет. **17.** $x = \log_2 a$ при $0 < a \leqslant 1$; при остальных a решений нет. **18.** $\alpha \geqslant 2$. **19.** $2 < \alpha \leqslant 3$. **20.** $0 < a < \frac{1}{3}$.

Раздел V

$\boxed{\text{§ 1}}$ **3.** 11. **5.** Если $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — две положительные несократимые дроби, в сумме равные 1, то $\frac{a}{b} = \frac{d-c}{d}$. Дробь $\frac{d-c}{d}$ несократима, ибо числа $d - c$ и d взаимно просты. Далее из определения равенства дробей следует, что $b = d$. **6.** Использовать тождество $n^3 + 2n = n(n^2 - 1) + 3n$. **7.** 1. Доказать, что число вида 3^{4n} оканчивается цифрой 1. **8.** Использовать тождество $2(n^2 + k^2) = (n + k)^2 + (n - k)^2$. **10.** а) Все числа $a_1, \ldots, a_n$ равны нулю; б) по крайней мере одно из чисел $a_1, \ldots, a_n$ равно нулю. **11.** а) Не может; б) может. **13.** Да (естественно, должно выполняться соотношение $b \leqslant a$). **14.** Воспользоваться методом математической индукции. **16.** $n = 3$. **20.** Второе число меньше. **21.** $1 + (a - 2)^{-1}(b - 1)^{-1}$. **22.** Во второй. **24.** а) $\cos 3 < 0$; б) $\sin 1 > \sin 1°$; в) $\operatorname{tg} 1 > \operatorname{arctg} 1$. **25.** Положительно. Убедиться, что $\operatorname{arctg} 2 > \frac{\pi}{3} > 1$. **26.** Отдельно рассмотреть случаи, когда a лежит в первой четверти и когда a лежит во второй четверти. **27.** $\alpha \neq 30°(2k + 1)$. **28.** $|\sin a + \cos \alpha|$, $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$. **30.** Умножив обе части на $\sin \frac{\pi}{5}$, перейти к синусу двойного угла и разности синусов. 33. Да. 34. $|a| \leq 2$. 35. а) $p_1 = 0$, $q_1 = 0$; $p_2 = -1$, $q_2 = 0$; $p_3 = 1$, $q_3 = -2$. 36. $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$. Сделать замену $x^2 + 4x + 5 = y$. 37. б) $x_{1,2} = \pm 1$; в) корней нет; ж) $x_1 = \frac{k\pi}{5}$, $x_2 = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi$. 38. а) Бесконечно много решений вида $x = a$, $y = 3 - a$, где a — любое число; в) $x_1 = \frac{1}{25}$, $y_1 = \frac{1}{9}$; $x_2 = \frac{1}{9}$, $y_2 = \frac{1}{25}$ $\left($сделать замену $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v\right)$; г) $x = y = 0$. 40. Нет. 42. б) $0 < x < 1$. 43. б) $0 < x < \sqrt{2}$, $x \neq 1$. 44. а) Доказать, что $|2\sin x + 5\cos x| \leq \sqrt{29}$; б) не может (проверить, что $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$). 45. б) Минимальное значение 2 достигается при $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ (воспользоваться неравенством $|\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x| \geq 2$); г) максимальное значение 1 достигается при $x = 1$ и $x = -1$ (воспользоваться неравенством $2x^2 \leq x^4 + 1$); д) максимальное значение $\sin 1$ достигается при $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, минимальное значение $-\sin 1$ достигается при $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. 47. г) Записать функцию в виде $y = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$; з) записать функцию в виде $y = \frac{1}{2}\sin(2x - 60°)$; и) записать функцию в виде $y = |\sin x - 1|$. 48. Три корня. 52. Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника; заметить, что треугольники, примыкающие к боковым сторонам, всегда равновелики. 53. Трапеция равнобочная и ее боковая сторона равна средней линии. 54. Достроить треугольник до параллелограмма. 56. Составить и решить систему трех уравнений. 58. Окружность, построенная на отрезке ON как на диаметре. 61. В основание призмы можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности. 62. 60°. 63. $\sqrt{5}$. 65. $\sqrt{Rr}$. 66. Рассмотреть отдельно случаи, когда три заданные точки определяют плоскость и когда они лежат на одной прямой.

$\boxed{\S\ 2}$ *Вар. 1.* 1. 3 *ч* 15 *мин*. 2. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. 3. $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$. 4. $r^2 \sin 2\alpha(1 + \sin^2 2\alpha)^{-1}$. 5. $x = 0$.

Вар. 2. **1.** 5 *км/ч*. **2.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. **3.** $x = 1$. **4.** $S_{\Delta BCE} : S_{\text{круга}} = \sqrt{3} : 14\pi$. **5.** $x = \frac{5\pi}{6}$, $y = 8 - \frac{5\pi}{2}$.

Вар. 3. **1.** 7,5 дня. **2.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. **3.** $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{7}$. **4.** $\frac{75}{2}$.

Вар. 4. **1.** $x = (-1)^{k+1}\left(\frac{\pi}{4}\right) + k\pi$. **2.** 4000 $м^3/ч$. **3.** $-\frac{1}{3} < x < 0$, $\frac{\sqrt[3]{10} - 1}{3} < x < \frac{\sqrt[3]{100} - 1}{3}$. **4.** 1 $см^2$. **5.** $4 - \sqrt{4\sqrt{5} - 8} < x \leqslant 5$.

Вар. 5. **1.** 4 $м^3/ч$. **2.** $p = -\frac{1}{2}$. **3.** $\angle CBD = 30°$. **4.** $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_4 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. **5.** $n = 6, 7, 8$.

Вар. 6. **1.** $x_1 = -1$, $x_2 = 5$. **2.** $x < 0$, $\frac{7}{2} < x < 1$. **3.** $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $y_1 = \frac{2\pi}{3}$; $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, $y_2 = \frac{2\pi}{3}$. **4.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{40}$ $см^2$. **5.** 1 *см*.

Вар. 7. **1.** $-1 \leqslant x < 8$. **2.** Команда *B* забила в третьем периоде на две шайбы больше, чем забила команда *A* во втором периоде. **3.** $(7 + 4\sqrt{7}) : 9$. **4.** $\frac{a}{2\sqrt{3}} \operatorname{cosec}\frac{\beta}{2}$. **5.** $6k\pi < a \leqslant 6k\pi + 3\pi$.

Вар. 8. **1.** В 5 раз. **2.** $x = 1$. **3.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = \operatorname{arctg}\frac{5}{3} + k\pi$. **4.** 294π. **5.** $\frac{a}{10}$.

Вар. 9. **1.** 5 дней, 4 дня, 8 дней. **2.** $150 + \frac{250}{\sqrt{3}}$ $см^2$. **3.** $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi$. **4.** $4 - \sqrt{3} \leqslant x < 3$, $x \geqslant 4 + \sqrt{3}$. **5.** $x = 1$, $y = 37$.

Вар. 10. **1.** Решений нет. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$. **3.** $3 \leqslant x < \frac{1 + \sqrt{37}}{2}$, $x > \frac{1 + \sqrt{37}}{2}$. **4.** 3 лисы, 6 леопардов, 1 лев.

Вар. 11. **1.** $x = \frac{-2 + k\pi}{5}$. **2.** $x = 3$. **3.** $\frac{3}{7} < x < \log_5 2$, $x > 1$. **4.** $\frac{8b^2\sqrt{11}}{5}$. **5.** $a\sqrt{\frac{137}{12}}$.

Вар. 12. 1. $x \leqslant -5$, $1 \leqslant x < \frac{8+\sqrt{22}}{3}$. 2. $x_1 = -\frac{2}{7}$, $y_1 = \pm\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}} + k\pi$, $x_2 = -\frac{2+3\pi}{7}$, $y_2 = \pm\arcsin\sqrt{\frac{4-\pi}{7}} + k\pi$. 3. $a = \frac{d-\sqrt{d^2-c^2}}{2}$, $b = \frac{d+\sqrt{d^2-c^2}}{2}$. 4. 42 *т*. 5. $S_{ABC} = 2\sqrt{3}\,r^2$.

Вар. 13. 1. $-10 \leqslant x \leqslant 5$. 2. $x_1 = \sqrt{\pi}$, $y_1 = \sqrt{\pi}$; $x_2 = \sqrt{\pi}$, $y_2 = -\sqrt{\pi}$; $x_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $y_3 = \frac{\sqrt{7\pi}}{2}$; $x_4 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $y_4 = -\frac{\sqrt{7\pi}}{2}$. 3. $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^{-1}$. 4. $\frac{7}{3}$. 5. $\frac{\pi}{6}$.

Учебное издание

Дорофеев Георгий Владимирович
Потапов Михаил Константинович
Розов Николай Христович

МАТЕМАТИКА
Для поступающих в вузы

Зав. редакцией *М. Г. Циновская*
Редактор *Л. О. Рослова*
Художник обложки *А. В. Кузнецов*
Технический редактор *Е. Д. Захарова*
Компьютерная верстка *Н. И. Салюк*
Корректор *Г. И. Мосякина*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.006315.08.03 от 28.08.2003.

Подписано в печать 27.07.04. Формат 84x108 1/32.
Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 35,28. Тираж 6 000 экз. Заказ № 4142.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

По вопросам приобретения продукции
издательства «Дрофа» обращаться по адресу:
127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (095) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник».
109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.
Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Магазины «Переплетные птицы»:
127018, Москва, ул. Октябрьская, д. 89, стр. 1.
Тел.: (095) 912-45-76;

140408, Московская обл., г. Коломна, Голутвин,
ул. Октябрьской революции, 366/2.
Тел.: (095) 741-59-76.

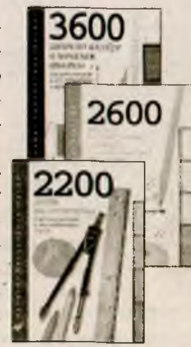
Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ОАО "Тульская типография".
300600, г. Тула, пр. Ленина, 109.

СЕРИЯ «БОЛЬШАЯ БИБЛИОТЕКА «ДРОФЫ»

П. И. Алтынов и др. «2600 тестов и проверочных заданий по математике для школьников и поступающих в вузы».

И. Ф. Шарыгин. «2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы».

Л. И. Звавич, Л. Я. Шляпочник. «3600 задач по алгебре и началам анализа для школьников и поступающих в вузы».



Пособия из серии «Большая библиотека «Дрофы» содержат разнообразный задачный материал по всем разделам школьного курса математики 5—11 классов. Задачи сгруппированы по классам.

Материалы сборника тестов можно использовать независимо от учебника, по которому ведется преподавание, для проверки знаний после прохождения какой-либо из основных тем программы, в качестве тренировочных упражнений для самоподготовки и самоконтроля.

Задачники содержат стройную систему задач, дифференцированных по уровню сложности: от самых простых (на усвоение начальных понятий) до конкурсных и олимпиадных. К задачам даны ответы.

ЗАДАЧНИКИ

Р. К. Гордин. «Геометрия. Планиметрия. Задачник». 7—9 классы.

И. Ф. Шарыгин. «Геометрия. Планиметрия. Задачник». 9—11 классы.

И. Ф. Шарыгин. «Геометрия. Стереометрия. Задачник». 10—11 классы.

В этих пособиях собрано и систематизировано огромное количество задач по планиметрии и стереометрии.

Во второй части каждого сборника помещены решения этих задач.

Считается, что если ученик освоит решение первых 150—200 задач каждого сборника, то, значит, он готов к экзамену на хорошем университетском уровне!