ӨЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҒАРЫ ЖӘНЕ ОРТА АРНАУЛЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

НИЗАМИ АТЫНДАҒЫ ТАШКЕНТ МЕМЛЕКЕТТІК ПЕДАГОГИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ТУРГУНБАЕВ РИСКЕЛЬДИ МУСАМАТОВИЧ

МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ
I ТОМ

5110100-математика оқыту методикасы

ТАШКЕНТ
«ABU MATBUOT-KONSALT»
2014

УЎК:51(072)
КБК:22.161(5Каз)
Т88

Пікір жазғандар:
О.Қулматов – Низами атындағы ТМПУ доценті
С. Танирбергенов – Әжинияз атындағы НМПИ доценті

Тургунбаев Р.М.
Математикалық анализ. Т. 1 /ўқув қўлланма / Р.Тургунбаев. – Тошкент: «ABU MATBUOT- KONSALT», 2014. – 344 б.

КБК:22.161(5Каз)

Математикалық анализ. I том.

Оқу құрал педагогикалық жоғары оқу орындары «Математика оқыту методикасы» бакалавриат бағытының «Математикалық анализ» пәні бағдарламасына сай жазылған. Онда анализге кіріспе, бір айнымалы функцияның дифференциалдық және интегралдық есептеулер бөлімдерінің теориясы толық берілген. Теорияны толықтырушы мысал және мәселелер келтірілген.

Mathematical Analysis. Part I.

The textbook is written according to the program by the course “Mathematical Analysis” for higher pedagogical institutions on the direction of the bachelor degree “Mathematics methodic of teaching”. The sections “Introduction to Analysis”, “Differential Calculus of the function of one variable”, “Integral Calculus of the function of one variable” are entered in the textbook. Examples and problems illustrating the theory are given.

Оқу құралы ӨзР ЖОАБМ-нің 2014-жыл 9-июньдегі №220-санды бұйрығымен пайдалануға ұсынылған.

ISBN 978-9943-4152-3-2

КІРІСПЕ

Оқу құралы педагогикалық жоғары оқу орындарының математика оқыту методикасы бакалавриат бағытында қазақ тілінде оқитын студенттерге арналған болып, сол бағыттың математикалық анализ пәнінің оқу бағдарламасына сай жазылған. Оқу құралында математикалық анализдің анализге кіріспе, бір айнымалылы функцияның дифференциалдық есептеу мен бір айнымалылы функцияның интегралдық есептеу бөлімдеріне қатысты болған теориялық материалдар толық берілген. Теориялық қағидаларды айқындайтын мысалдар мен есептер шешіп көрсетілген, суреттер берілген. Сондай-ақ, әр тараудың соңында өз бетінше шешу үшін есептер берілген.

Математикалық анализден жазылған оқу әдебиеттері, әдетте жиындар теориясы элементтерінен басталады. Бірақ студенттердің жиындар теориясы элементтерімен академиялық лицей немесе колледж математика курстарынан таныс екендігі, бұл теория алгебра және сандар теориясы курсында толық өтілетінін ескеріп, оқу құралында жиындар жайында мәліметтер келтірілмеді.

Оқу құралы тарауларға, тараулар параграфтарға, параграфтар пункттерге бөлінген. Әрбір параграфта формулалар нөмірі өзінше белгіленген. Сілтеме қажет болғанда тарау, параграф, формула нөмірі, бір тараудың ішінде параграф, формула нөмірі көрсетіледі. Бір параграфтың ішінде параграф көрсетілмейді. Суреттер барлық тарауларда ретімен нөмірленген.

Оқу құралын дайындауда Низами атындағы Ташкент мемлекеттік педагогикалық университетінде математикалық анализден оқылған лекциялар, практикалық сабақтарда жинақталған тәжірибе нәтижелерінен, өзбек, орыс тілінде жазылған оқулық пен оқу құралдарынан шығармашылық тұрғыдан пайдаланылды.

Оқу құралының сапасын арттыруға үлес қосқан доценттер О.Тошметов, К.С.Сагидуллаевтарға шын көңілден ризашылығымды білдіремін.

Автор

I ТАРАУ. НАҚТЫ САНДАР ЖИЫНЫ

1-§. Рационал сандар жиыны және оның қасиеттері

1. Рационал сандар жиыны. Алдымен барлық натурал сандар жиыны $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$, барлық бүтін сандар жиыны $\mathbb{Z} = \{..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ арқылы белгіленуін ескеріп өтеміз.

1-анықтама. $\frac{p}{q}$ көріністе жазуға болатын сан *рационал сан* деп аталады, бұл жерде p бүтін, q натурал сан.

Барлық рационал сандар жиынын $\mathbb{Q}$ - мен белгілейміз:

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \}.$$

$\mathbb{Q}$ жиынында арифметикалық амалдар төмендегідей анықталады:

Айталық, $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ және $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ рационал сандар берілген болсын. r_1 және r_2 рационал сандардың қосындысы деп, $r_1 + r_2 = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$ санға, азайтындысы деп, $r_1 - r_2 = \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{q_1 q_2}$ санға, көбейтіндісі деп, $r_1 r_2 = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$ санға, бөліндісі деп, $r_1 : r_2 = \frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2}{q_1 p_2}$ санға айтылады.

2-анықтама. Егер $r_1 - r_2 = 0$ болса, $r_1 = r_2$, егер $r_1 - r_2 > 0$ болса, $r_1 > r_2$, егер $r_1 - r_2 < 0$ болса, $r_1 < r_2$ деп аталады.

2. Рационал сандардың реттік қасиеті. Рационал сандар жиынындағы арифметикалық амалдардың қасиеттерінен пайдаланып төмендегі қасиеттерді дәлелдеуге болады.

1. Кез келген екі r_1 және r_2 рационал сандар үшін $r_1 = r_2$, $r_1 < r_2$, $r_1 > r_2$ қатынастардан тек бірі орынды болады.

2. Кез келген үш r_1, r_2 және r_3 рационал сандар үшін $r_1<r_2$ және $r_2<r_3$ қатынастардан $r_1<r_3$ қатынас келіп шығады.

3. Рационал сандардың тығыздық қасиеті.

Тең болмаған кез келген екі r_1 және r_2 рационал сандар арасында олардан өзгеше болған кемінде бір рационал сан бар.

Айталық, $r_1<r_2$ болсын. Онда $r=\frac{r_1+r_2}{2}$ үшін $r_1<r<r_2$ болатындығы айқын. Рационал сандарды қосу және бөлу ережелерінен $\frac{r_1+r_2}{2}\in\mathbb{Q}$ келіп шығады.

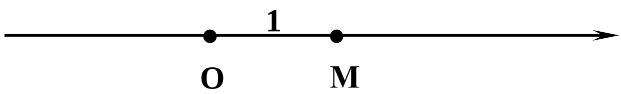
2-§. Рационал сандарды сандар осінде бейнелеу

Түзуде кез келген бір нүктені “бастапқы нүкте” деп алып, O әрпімен белгілейміз. Бұл O нүктені “0” (нөл) санының геометриялық бейнесі деп қараймыз.

Енді, сол түзуде нөлден оң жаққа қарай жүруді оң бағыт, сол жаққа қарай жүруді теріс бағыт деп атаймыз. Бір кесінді таңдап алып, оны өлшеу бірлігі (бірлік кесінді) деп қабылдаймыз. Мұндай түзу *сандар осі* деп аталады (1-сурет).

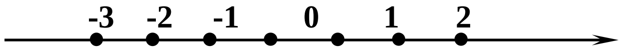
Суретте OM – бірлік кесінді. M нүкте “1” бір санына сәйкес келеді деп атаймыз.

Өлшеу бірлігін, яғни OM кесіндіні O нүктеден оңға, түзу



1-сурет

бойлап ретімен қойғанымызда 1, 2, ..., n, ... сандарға сәйкес нүктелер, ал сол жағында -1, -2, ..., $-n$, . . . сандарға сәйкес нүктелер алынады. Бұл нүктелерді “бүтін нүктелер” деп атаймыз (2-сурет).

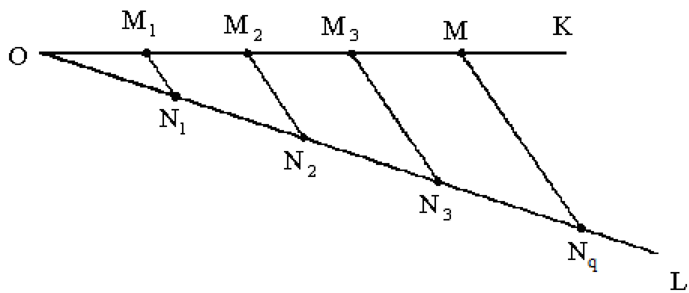


2- сурет

Енді, $\frac{p}{q}$ көріністегі оң немесе $-\frac{p}{q}$ көріністегі теріс рационал санға сәйкес келетін нүктені табу мәселесін қарастырамыз.

Ұшы O нүктеде болған KOL бұрыш сызамыз. Қандай да бір кесіндіні (мысалы, бірлік кесіндіні) алып, оны O нүктеден бастап OL сәулеге ретімен q рет қойып, N_1, N_2, ..., N_q нүктелерді белгілейміз. OK сәуледе O нүктеден сандар осінің OM бірлік кесіндісін қоямыз. M және N_q нүктелерді бірлестіріп, OMN_q үшбұрышты аламыз.

Енді N_1, N_2, …, N_{q-1} нүктелерден MN_q - ге параллель түзулер өткізіп, олардың OK түзумен қиылысу нүктелерін M_1, M_2, …, M_{q-1} - мен белгілейміз. Салуға орай ON_1, N_1N_2, …, $N_{q-1}N_q$ кесінділер өзара тең болғандықтан OM_1, M_1M_2, …, $M_{q-1}M$ кесінділер де өзара тең және әрбірінің ұзындығы $\frac{1}{q}$ болады (3-сурет).



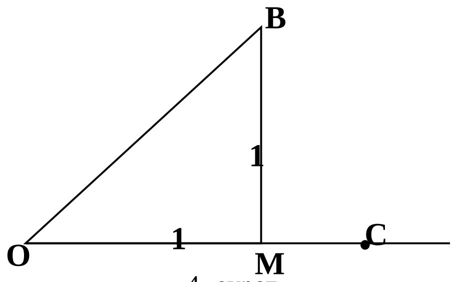
3-сурет

Солардың бірі, мысалы OM_1 кесіндіні O нүктеден сандар осі бойлап оң жаққа p рет қойып $\frac{p}{q}$ санға сәйкес нүктені, сол жаққа p рет қойып, $-\frac{p}{q}$ санға сәйкес нүктені табамыз. Осылай сандар осінде барлық рационал сандарға сәйкес келетін нүктелерді белгілеп шығуға болады. Бұл нүктелерді “рационал нүктелер” деп атаймыз.

Демек, сандар осінде әрбір рационал санға анық бір нүкте сәйкес келеді.

Бұл пікірдің керісі орынды емес, яғни сандар осінде рационал сан сәйкес келмейтін нүкте бар. Осы пікірді дәлелдейміз.

Катеттері бірлік OM кесіндіге тең болған OMB тік бұрышты үшбұрыштың OB гипотенузасын циркуль жәрдемінде O нүктеден оңға жайластырсақ, сандар осінде C нүктені аламыз (4-сурет).



4- сурет

$|OC|^2=|OB|^2=2$ екендігі айқын. Осы C нүктеге сәйкес рационал сан жоқ.

Шынында да, кері жоримыз, яғни $\frac{p}{q}$ рационал сан - қысқармайтын бөлшек табылып, $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$ болсын. Онда $p^2=2q^2$, бұдан p санның жұп екендігі келіп шығады. Сондықтан, $p=2m$ белгілеу енгізіп (мұнда m натурал сан), оны жоғарыдағы теңдікке қойсақ, $q^2=2m^2$ теңдікті аламыз. Бұл q санның да жұп екенін көрсетеді. Демек, $\frac{p}{q}$ санның қысқармайтын бөлшек деп алғанымызға қарама-қайшы нәтижеге келдік. Бұдан C нүктеге сәйкес келетін рационал сан жоқ екендігі келіп шығады.

Сандар осінде C нүктеге ұқсас, рационал сандар сәйкес келмейтін нүктелерді көрсетуге болады. Бұндай нәтиже рационал сандар жиынын кеңейту қажеттігін тудырады.

3-§. Рационал сандар жиынының қимасы. Иррационал сан ұғымы

1-анықтама. Рационал сандар жиыны $\mathbb{Q}$ қандай да бір тәсілде A және B жиындарға ажыратылып, төмендегі шарттар орындалса, бұл ажырату $\mathbb{Q}$ рационал сандар жиынының *қимасы* деп аталады:

1) $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$;

2) $A \cup B = \mathbb{Q}$;

3) кез келген $a \in A$, кез келген $b \in B$ үшін $a < b$.

Әдетте қима (A,B) көріністе белгіленеді. Мұнда A жиын қиманың *төменгі сыныпы*, ал B жиын қиманың *жоғары сыныпы* деп аталады.

$\mathbb{Q}$ *р*ационал сандар жиынының (A,B) қимасы тек үш текті болады.

a) A төменгі сыныпта ең үлкен сан (элемент) бар, B жоғары сыныпта ең кіші элемент жоқ. Мұндай қима *бірінші текті қима* деп аталады.

b) A төменгі сыныпта ең үлкен элемент жоқ, B жоғары сыныпта ең кіші элемент бар. Мұндай қима *екінші текті қима* деп аталады.

c) A төменгі сыныпта ең үлкен элемент жоқ, B жоғары сыныпта ең кіші элемент жоқ. Мұндай қима *үшінші текті қима* деп аталады.

Қималарға мысалдар келтіреміз.

1-*мысал.* 3 санын және одан кіші болған барлық рационал сандарды A сыныпқа, 3 тен үлкен болған барлық рационал сандарды B сыныпқа енгіземіз: $A=\{x\in \mathbb{Q} : x\leq 3\}$, $B=\{x\in \mathbb{Q} : x>3\}$.

Бұндай ажырату қиманың үш шартын да қанағаттандырады. Сондай-ақ, 3 саны төменгі сыныптың ең үлкен элементі болады, бірақ жоғары сынып B жиында ең кіші элемент жоқ.

Жалпы жағдайда, кез келген r рационал сан үшін $A=\{x\in \mathbb{Q} : x\leq r\}$, $B=\{x\in \mathbb{Q} : x>r\}$ жиындарын қарастырып (A,B) қиманы алсақ, r саны A төменгі сыныптың ең үлкен элементі болады. B жоғары сыныпта ең кіші элемент жоқ. Бұл жағдайда қима r рационал санын анықтайды, деп атаймыз.

2-*мысал.* Кез келген r рационал саны үшін r ден кіші болған барлық рационал сандарды A сыныпқа, r және одан үлкен болған барлық рационал сандарды B сыныпқа енгізу нәтижесінде алынған (A,B) қиманың A төменгі сыныпында ең үлкен элемент жоқ. B жоғары сыныпында r ең кіші элемент бар болады. Бұл қима r рационал санын анықтайды.

3-*мысал*. Квадраты 2 ден үлкен болған барлық оң рационал сандарды B сыныпқа, қалған барлық рационал сандарды A сыныпқа енгізсек, (A,B) қиманы аламыз.

Бұл қимада, A төменгі сыныпта ең үлкен элементі жоқ, яғни A сыныптан кез келген r рационал сан алсақ та одан үлкен, A сыныпқа тиісті рационал сан әрқашан табылады.

Осыны дәлелдейміз.

Айталық, $r \in A$ қандай да бір оң рационал сан және $r^2<2$ болсын. Кез келген n натурал сан үшін $r < r+\frac{1}{n}$ қатынас орынды және $r+\frac{1}{n}$ рационал сан екендігі айқын. Енді $\left(r+\frac{1}{n}\right)^2 < 2$ шарт орындалатын n бар екендігін көрсету жеткілікті.

Мына $n>\frac{2r+1}{2-r^2}$ теңсіздікті қанағаттандыратын n натурал сан үшін $\left(r+\frac{1}{n}\right)^2<2$ болады.

Шынында да,

$$n > \frac{2r+1}{2-r^2} \Rightarrow 2n\text{-}nr^2 > 2r+1 \Rightarrow r^2+\frac{2r}{n}+\frac{1}{n}<2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2+\frac{2r}{n}+\frac{1}{n^2} < 2 \Rightarrow \left(r+\frac{1}{n}\right)^2 < 2.$$

Демек, A төменгі сыныптың ең үлкен элементі жоқ.

Дәл солай, B жоғары сыныпта ең кіші элементі жоқ екендігін көрсетуге болады.

Бұндай тұжырымдар $\mathbb{Q}$ рационал сандар жиынының (A,B) қимасы тек үш текті болатындығын көрсетеді.

Ескерту. Рационал сандар жиынының A төменгі сыныпында ең үлкен элемент, B жоғары сыныпында ең кіші элемент бар болған (A,B) қиманы құрастырып болмайды.

$\mathbb{Q}$ да сондай (A,B) қима бар деп ұйғарсақ, a_0 сан A сыныптың ең үлкен элементі, b_0 сан B сыныптың ең кіші элементі болады. Қиманың анықтамасынан $a_0<b_0$. Рационал сандар жиынының тығыздық қасиеті бойынша $a_0<r<b_0$ теңсіздікті қанағаттандыратын

r рационал сан бар. Бірақ a_0 сан A жиынның ең үлкен элементі болғандықтан $r\notin A$, b_0 сан B жиынның ең кіші элементі болғандықтан $r\notin B$ болады. Бұл қима анықтамасының 2-шартына қайшы, яғни A жиынға да, B жиынға да кірмейтін рационал сан бар. Демек, (A,B) қима емес.

Рационал сандар жиынын өзара қиылыспайтын A және B жиындарға ажырату әрқашан да қима бола бермейді.

Мысалы, егер $A=\mathbb{N}$ және $B=\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ деп алсақ, Онда $\mathbb{Q}=A\cup B$ болады, бірақ $2\in A$ және $0\in B$ сандары үшін $2>0$, Сондай-ақ, $3\in A$ және $3{,}5\in B$ сандары үшін $3<3{,}5$ болып қиманың 3-шарты орындалмайды.

2-анықтама. Рационал сандар жиынының үшінші текті қимасымен анықталған сан *иррационал сан* деп аталады.

Жоғарыда қаралған 3-мысалдағы қима $\sqrt{2}$ иррационал санды анықтайды.

4-§. Нақты сандар жиынының негізгі қасиеттері

1. Нақты сандар жиыны. Алдынғы параграфта рационал және иррационал сандардың қалай анықталуы және олардың анықтамаларымен таныстық.

1-анықтама. Рационал сандар мен иррационал сандар жалпы атаумен *нақты сандар* деп аталады.

Нақты сандар жиыны $\mathbb{R}$ арқылы белгіленеді.

Әрбір нақты санды шектеусіз ондық бөлшек көріністе бейнелеуге болады. Периодты болған шектеусіз ондық бөлшек рационал санды, периодты болмаған шектеусіз ондық бөлшек иррационал санды өрнектейді.

Мысалы, $\frac{1}{5}=0{,}200...$, $\frac{1}{3}=0{,}333...=0{,}(3)$, $0{,}121212...=0{,}(12)=\frac{4}{33}$ рационал сандар, $0{,}10100100010...$, $1{,}21211211121...$ иррационал сандар болады.

2. Нақты сандар жиынының реттелгендігі. Алдымен, нақты сандар жиынында тең, үлкен және кіші ұғымдарын енгіземіз.

Айталық, x және y нақты сандары берілген болсын.

а) Егер x және y сандарының екеуі де рационал сан болса, онда олар арасында $x=y$, $x<y$, $x>y$ қатынастардан тек бірі орынды екендігі рационал сандар жиынының реттік қасиетінен келіп шығады.

b) Айталық, x рационал, y иррационал сан болсын. Онда y санын анықтайтын 3-текті (A,B) қима бар болады. Егер $x\in A$ болса, $x<y$, егер $x\in B$ болса, $x>y$ деп аламыз.

c) Айталық, x және y сандардың екеуі де иррационал сан болсын. Онда x санын анықтайтын (A,B), y санын анықтайтын (C,D) 3-текті қималар бар болады. Егер $A=C$ болса, $x=y$, егер $A\subset C$ және $A\neq C$ болса, $x<y$, егер $A\supset C$ және $A\neq C$ болса, $x>y$ деп аламыз.

Сонымен, кез келген x және y нақты сандар үшін $x=y$, $x<y$, $x>y$ қатынастардан тек біреуі орынды болады. Сондай-ақ, $x<y$ және $x<z$ қатынастардан $x<z$ келіп шығады. Демек, нақты сандар жиыны реттелген.

3. Нақты сандар жиынының тығыздығы. Нақты сандар жиынында рационал сандар жиынындағы сияқты мына қасиет орынды:

Бір-бірінен өзгеше кез келген екі x және y нақты сандар арасында, кемінде бір рационал, демек нақты сан бар.

Осы қасиетті дәлелдейміз.

Айталық, $x<y$ болсын. Егер x және y сандардың екеуі де рационал сан болса, онда рационал сандар жиынының тығыздық қасиеті бойынша олардың арасында кемінде бір рационал сан бар.

Егер x рационал сан, y иррационал сан болса, онда y санын анықтайтын (A,B) 3-текті қима табылып, $x<y$ екендігінен $x\in A$ болады. Төменгі A сыныпта ең үлкен элемент жоқ болғандықтан x санынан үлкен $r\in A$ рационал сан бар. $x<r<y$ теңсіздік орынды екендігі айқын.

x иррационал сан және y рационал сан болған жағдай жоғарыдағыға ұқсас дәлелденеді.

Егер x және y сандардың екеуі де иррационал сан болса, онда x санын анықтайтын (A,B), y санын анықтайтын (C,D) үшінші текті қималар табылып, $x<y$ екендігінен $A\subset C$ және $A\neq C$ болады. Бұдан C жиынында A жиынға тиісті болмаған r рационал сан бар екендігі келіп шығады. Бұл рационал сан үшін $x<r<y$ теңсіздік орынды.

4. Нақты сандар жиынының үзіліссіздігі. $\mathbb{Q}$ рационал сандар жиынында анықталған қима ұғымын $\mathbb{R}$ нақты сандар жиынында қараймыз.

1-анықтама. $\mathbb{R}$ нақты сандар жиынын қандай да бір тәсілде X және Y жиындарға ажыратылып, төмендегі шарттар орындалса, бұл ажырату $\mathbb{R}$ нақты сандар жиынының *қимасы* деп аталады:

1. $X \neq \varnothing, Y \neq \varnothing$;
2. $X \cup Y = \mathbb{R}$;
3. кез келген $x \in X,$ кез келген $y \in Y$ үшін $x < y$.

Рационал сандар жиынындағы сияқты қима (X,Y) көріністе белгіленеді және X жиын қиманың *төменгі сыныпы*, ал Y жиын қиманың *жоғары сыныпы* деп аталады.

Рационал сандар жиынында қима тек үш текті болатындығын білеміз. Енді нақты сандар жиынында қима неше текті болуы мүмкін деген сұраққа жауап іздейміз.

Төмендегі теорема сол сұраққа жауап береді.

4.1-теорема (Дедекинд теоремасы). Нақты сандар жиынындағы (X,Y) қима үшін төмендегі екі жағдайдың біреуі орынды болады:

1) төменгі X сыныпта ең үлкен элемент бар, жоғары Y сыныпта ең кіші элемент жоқ;

2) төменгі X сыныпта ең үлкен элемент жоқ, жоғары Y сыныпта ең кіші элемент бар.

Дәлелдеу. Айталық $\mathbb{R}$ жиынында қандай да бір (X,Y) қима берілген болсын. Төменгі X сыныптағы барлық рационал сандар жиынын A, жоғары Y сыныптағы барлық рационал сандар жиынын B арқылы белгілейік. Онда бұл A және B жиындар $\mathbb{Q}$ рационал сандар жиынында қима болатынын білеміз.

Бұл (A,B) қима қандай да бір a санды анықтайды. Бұл сан X немесе Y сыныптардың біріне тиісті болады.

Егер $a \in X$ болса, онда a сан X жиынның ең үлкен элементі екенін көрсетеміз.

a сан X жиынның ең үлкен элементі болмасын деп жориық. Онда X жиынында a санынан үлкен болған қандай да бір a_0 санды аламыз. Нақты сандар жиынының тығыздық қасиеті бойынша $a<r<a_0$ шартты қанағаттандыратын r рационал сан бар. Енді $r<a_0$, $a_0 \in X$ шарттан $r \in X$, сондай-ақ $a<r$ болғандықтан (A,B) қима қасиеті бойынша $r \in B$, яғни $r \in Y$ келіп шығады. Бұл қарама-қайшылық жорамалымыздың дұрыс еместігін көрсетеді. Демек, a сан X жиынының ең үлкен элементі болады.

Егер $a \in Y$ болса, онда a сан Y жиынның ең кіші элементі екендігі жоғарыдағыдай көрсетіледі. Теорема дәлелденді.

Бұл теоремадан, нақты сандар жиынында 3-текті қима жоқ екендігі келіп шығады. Осы қасиет нақты сандар жиынының *үзіліссіздік қасиеті* деп аталады.

Демек, нақты сандар жиынында анықталған әрбір қима тек бір нақты санды анықтайды.

5-§. Нақты сандарды сандар осінде бейнелеу

Рационал сандарды сандар осіндегі нүктелер арқылы бейнелеумен 2–параграфта танысқан едік. Бұл пунктте иррационал сандарды сандар осінде бейнелеу мүмкін екендігін көрсетеміз. Оның үшін төмендегі пікірлер орынды деп аламыз:

1) Түзудегі нүктелер жиыны реттелген, яғни түзудегі кез келген екі C және D нүктелерден бірі екіншісінен сол жақта жатады. Сондай-ақ, егер C нүкте D нүктеден, D нүкте E нүктеден сол жақта жатса, онда C нүкте E нүктеден сол жақта жатады.

2) Бір-бірінен өзгеше кез келген екі C және D нүктелер арасында кемінде бір “рационал” нүкте бар.

3) Түзудің барлық нүктелері жиынында құрылған кез келген (X', Y') қима үшін X' сыныптың ең оң нүктесі немесе Y' сыныптың ең сол нүктесі бар (Бұл пікір түзудің *үзіліссіздік аксиомасы* деп аталады).

4) Түзуде ең сол және ең оң нүкте жоқ.

Айталық, x иррационал сан және (A,B) оны анықтайтын қима болсын. Егер A төменгі сыныптағы рационал сандарға сәйкес келетін “рационал” нүктелерді A' сыныпқа, B жоғары сыныптағы рационал сандарға сәйкес келетін “рационал” нүктелерді B' сыныпқа енгізсек, онда (A', B') түзудің рационал нүктелері жиынында қима болады.

Енді түзудегі барлық нүктелерді X' және Y' сыныптарға төмендегідей ажыратамыз:

A' сыныптың кемінде бір нүктесінен сол жақта жайласқан нүктелерді X' сыныпқа, қалған нүктелерді Y' сыныпқа енгізіледі. Нәтижеде түзу нүктелері жиынында (X', Y') қима пайда болады.

Түзудің үзіліссіздік аксиомасынан (X', Y') қима қандай да бір $M(x)$ нүктені анықтайтындығы келіп шығады. Бұл нүкте X'

сыныпта ең оң нүкте немесе Y' сыныпта ең сол нүкте болады. Бұл нүкте "рационал" нүкте бола алмайды. Сол $M(x)$ нүктені x иррационал санға сәйкес қоямыз. Сол сияқты, түзудегі әрбір "рационал" болмаған нүктеге бір иррационал сан сәйкес келуін жоғарыдағыға ұқсас тұжырымдар көмегімен көрсетіледі.

Сонымен, әрбір нақты санға түзудегі бір нүкте және түзудегі әрбір нүктеге бір нақты сан сәйкес келеді. Сол себепті, нақты сан дегенде сан осіндегі нүктені, сандар осіндегі нүкте дегенде нақты санды түсінуге болады.

6-§. Нақты санның абсолюттік шамасы және оның қасиеттері

Нақты санның абсолюттік шамасы (модулі) ұғымы, маңызды ұғымдардан бірі болып табылады.

Айталық, a қандай да бір нақты сан болсын.

1-анықтама. Егер $a \geq 0$ болса, оның *абсолюттік шамасы* деп, a санның өзіне, егер $a<0$ болса, $-a$ санға айтылады.

Әдетте a санның абсолюттік шамасы $|a|$ деп белгіленеді. Демек,

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ егер } a \geq 0 \text{ болса,} \\ -a, \text{ егер } a < 0 \text{ болса.} \end{cases}$$

Мысалы, $|3|=3$, $|-2{,}5|=2{,}5$, $|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$, $|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$.

Нақты санның абсолюттік шамасының төмендегідей қасиеттері бар:

1°. Кез келген $x \in \mathbb{R}$ үшін $|x|=|-x|$ және $-|x| \leq x \leq |x|$ болады.

Бұл қасиеттің орынды екендігі абсолюттік шаманың анықтамасынан келіп шығады.

2°. Кез келген $a>0$ үшін $|x|<a$ және $-a<x<a$ теңсіздіктер өзара тең күшті болады.

Дәлелдеу. Айталық, $|x|<a$ теңсіздік орынды болсын. Оның екі жағын да -1 ге көбейтіп, $-a<-|x|$ теңсіздікті аламыз. Бірінші қасиеттен $-|x| \leq x \leq |x|$. Бұл соңғы екі теңсіздіктен $-a<-|x| \leq x \leq |x|<a$, бұдан $-a<x<a$ келіп шығады.

Енді, айталық, $-a<x<a$ теңсіздік орынды болсын.

Егер $x \geq 0$ болса, $|x|=x$ болып, $|x|<a$ келіп шығады.

Егер $x<0$ болса, $|x|=-x$ болып, $-a<x$, яғни $-x<a$ теңсіздік, $|x|<a$ келіп шығады.

Дәлелденген 2^o қасиеттен $|x|\leq a$ және $-a\leq x\leq a$ теңсіздіктердің өзара тең күшті екендігі келіп шығады.

3^o. Екі сан қосындысының абсолюттік шамасы және сол сандар абсолюттік шамалары қосындысы үшін $|x+y|\leq|x|+|y|$ теңсіздік орынды.

Дәлелдеу. 1^o ден $-|x|\leq x\leq|x|$, $-|y|\leq y\leq|y|$ теңсіздіктерді жазып аламыз. Бұл теңсіздіктерді қосып, $-(|x|+|y|)\leq x+y\leq|x|+|y|$ теңсіздікті аламыз. Ал 2^o ден пайдалансақ, соңғы қос теңсіздік $|x+y|\leq|x|+|y|$ түрінде жазылады.

Дәлелденген қасиет қосылушылардың саны екіден артық болған жағдайда да орынды:

$|x_1+x_2+ \ldots +x_n|\leq |x_1|+|x_2|+ \ldots +|x_n|$.

4^o. Екі сан азайтындысының абсолюттік шамасы және сол сандар абсолюттік шамалары азайтындысы үшін $|x|-|y|\leq|x-y|$ теңсіздік орынды.

Дәлелдеу. $|x|=|(x-y)+y|$ теңдік және 3^o қасиеттен $|x|\leq|x-y|+|y|$ болады. Бұдан $|x|-|y|\leq|x-y|$ теңсіздікті аламыз.

Төмендегі қасиеттер абсолюттік шаманың анықтамасынан келіп шығады.

5^o. Кез келген $x, y\in \mathbb{R}$ үшін $|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$ болады.

6^o. Кез келген $x, y\in \mathbb{R}$ және $y\neq 0$ үшін $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ болады.

2-анықтама. Айталық x, $y\in \mathbb{R}$ нүктелер берілген болсын. Мына $|x-y|$ сан сол нүктелер арасындағы *арақашықтық* деп аталады.

Егер $|x|=|x-0|$ екенін ескерсек, онда санның абсолюттік шамасы осы саннан координата басына дейінгі арақашықтыққа тең болады. Бұл абсолюттік шаманың геометриялық мағынасын береді.

7-§. Жоғарыдан және төменнен шенелген жиындар, олардың шекаралары. Аралықтар

1. Сандар осіндегі қарапайым жиындар. Элементтері сандардан тұратын жиындар *сандық жиындар* деп аталады. Біз, негізінен сандық жиындарды қараймыз. Сол себепті, келешекте, жиын дегенде сандық жиынды түсінеміз. Математикада жиі кездесетін қарапайым жиындарды қараймыз.

Айталық $a, b\in \mathbb{R}$ және $a<b$ болсын.

1-анықтама. *a*) $a\leq x\leq b$ қос теңсіздікті қанағаттандыратын барлық сандар жиыны *сегмент* немесе *кесінді* деп аталады және $[a;b]$ арқылы белгіленеді: $[a;b]=\{x\in \mathbb{R} : a\leq x\leq b\}$.

b) $a<x<b$ қос теңсіздікті қанағаттандыратын барлық сандар жиыны *интервал* немесе *ашық аралық* деп аталады және $(a;b)$ арқылы белгіленеді: $(a;b)=\{x\in \mathbb{R} : a<x<b\}$.

c) $a\leq x<b$ немесе $a<x\leq b$ қос теңсіздіктерді қанағаттандыратын барлық сандар жиыны *жартылай сегмент* деп аталады және сәйкес түрде $[a;b)$ немесе $(a;b]$ арқылы белгіленеді:

$[a;b)=\{x\in \mathbb{R} : a\leq x<b\}$, $(a;b]=\{ x\in \mathbb{R} : a<x\leq b \}$.

Бұл төрт түрлі жиындар бір сөзбен *аралықтар* деп аталады. Демек, аралық дегенде сегмент, интервал, жартылай сегменттердің бірі түсініледі. Әдетте a және b сандар сол аралықтардың шекара нүктелері деп аталады.

2-анықтама. x_0 нүкте тиісті болған кез келген $(a;b)$ интервал x_0 нүктенің *маңайы* деп аталады.

ε оң сан үшін $(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$ интервал x_0 нүктенің *ε-маңайы* деп аталады және $O(x_0;\varepsilon)$ арқылы белгіленеді:

$O(x_0;\varepsilon) = \{x\in \mathbb{R} : |x-x_0|<\varepsilon \}$.

Интервалдар және жартылай сегменттер арасында шекара нүктелері шектеусіз болғандары да бар.

Мысалы, $(-\infty;+\infty)=\mathbb{R}$, $[a;+\infty)=\{x\in \mathbb{R} : x\geq a\}$, $(a;+\infty)=\{x\in \mathbb{R} : x>a\}$, $(-\infty; b]=\{x\in \mathbb{R} : x\leq b\}$, $(-\infty; b)=\{x\in \mathbb{R} : x<b\}$.

2. Жоғарыдан шенелген жиын. Айталық, $E\subset \mathbb{R}$ құр болмаған жиын берілген болсын.

1-анықтама. Егер b сан табылып, кез келген $x\in E$ үшін $x\leq b$ теңсіздік орындалса, онда E жиын *жоғарыдан шенелген*, b оның *жоғары шекарасы* деп аталады.

1-*мысал.* $E_1=(-\infty;0)$, барлық теріс сандар жиыны жоғарыдан шенелген. 0 және кез келген оң сан бұл жиын үшін жоғары шекара болады.

2-*мысал.* $E_2=\{\dots, -3,-2,-1, 0, 1, 2 \}$ жиын да жоғарыдан шенелген. Бұл жиынның жоғары шекарасы деп 2 және одан үлкен болған кез келген санды алуға болады.

Келтірілген мысалдардан мынаны байқауға болады: жоғарыдан шенелген жиынның жоғары шекаралары шектеусіз көп болады.

Егер 1-анықтама шартын қанағаттандыратын b саны табылмаса, онда E жиын *жоғарыдан шенелмеген* деп аталады.

Мысалы, $E_3=\mathbb{N}=\{ 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ жиын жоғарыдан шенелмеген. Қандай b санын алсақ та, одан үлкен n_0 натурал сан бар: $b<n_0$. (n_0 деп b санының бүтін бөлігінен кейінгі санды алу жеткілікті).

Жоғарыдан шенелген жиынның жоғары шекаралары арасында ең кішісі бар ма деген сұраққа төмендегі теорема жауап береді.

7.1-теорема. Жоғарыдан шенелген жиынның жоғары шекаралары арасында ең кішісі бар.

Дәлелдеу. Айталық E жоғарыдан шенелген жиын болсын. Екі жағдайды қарастырамыз.

a) E жиын элементтері арасында ең үлкені бар, яғни $x_0\in E$ сан табылып, кез келген $x\in E$ үшін $x\leq x_0$ болады. Демек, x_0 сан E жиынның жоғары шекарасы болып, E жиынның басқа кез келген b шекарасынан үлкен болмайды: $x_0\leq b$. Сондықтан x_0 сан E жиынның ең кіші жоғары шекарасы болады.

b) E жиын элементтері арасында ең үлкені жоқ. Онда нақты сандар жиынын төмендегідей X және Y жиындарға ажыратамыз: E жиынның барлық жоғары шекаралары жиынын Y арқылы, $\mathbb{R}$ дегі қалған барлық сандар жиынын X арқылы белгілейміз. Бұндай ажырату $\mathbb{R}$ жиында қима болады. Осыны тексерейік:

1) $E\neq\varnothing$ және $E\subset X$ қатынастан $X\neq\varnothing$ келіп шығады. Сондай-ақ, E жоғарыдан шенелген. Сондықтан оның жоғары шекарасы бар. Демек, $Y\neq\varnothing$ болады.

2) Әрбір $x\in\mathbb{R}$ сан E үшін жоғары шекара болады, немесе E үшін жоғары шекара болмайды. Демек, $x\in X$, немесе $x\in Y$, яғни $X\cup Y=\mathbb{R}$.

3) Айталық $x\in X$ және $y\in Y$ болсын. Онда x сан E жиынның жоғары шекарасы болмайды, яғни E жиында x саннан үлкен болған қандай да бір $x_0\in E$ сан бар. $y\in Y$ сан E жиынның жоғары шекарасы

болғандықтан $x<x_0<y$ болады. Сондықтан кез келген $x\in X$ және кез келген $y\in Y$ үшін $x<y$ орынды.

(X,Y) қима анық бір a санды анықтайды. $E\subset X$ болғандықтан a сан E жиынның жоғары шекарасы болады, яғни $a\in Y$. Сондай-ақ, a сан Y жиынының ең кіші элементі болғандықтан a сан E жиынның жоғары шекаралары арасында ең кішісі болады. Теорема дәлелденді.

2-анықтама. Жоғарыдан шенелген жиын жоғары шекаралары арасында ең кішісі, оның *анық жоғары шекарасы* деп аталады.

Анық жоғары шекара $supE$ символымен белгіленеді.

Жоғарыдағы тұжырымдардан, егер E жиынның ең үлкен элементі бар болса, онда сол сан E жиынның анық жоғары шекарасы болатындығы келіп шығады. Жалпы алғанда, шенелген жиынның анық жоғары шекарасы оның өзіне тиісті болмауы да мүмкін.

Мысалы, $E_4=[0;10]$ жиында 10 саны оның ең үлкен элементі және 10 саны бұл жиынның анық жоғары шекарасы болады.

$E_5=(-8;1)$ жиын үшін $supE_5=1$ болып, 1 саны оған тиісті емес.

Жоғарыда келтірілген мысалдар үшін $supE_1=0$, $supE_2=2$ екенін тексеру қиын емес.

Егер E жиын жоғарыдан шенелмеген болса, онда $supE=+\infty$ деп алынады.

3. Төменнен шенелген жиын. Айталық E құр болмаған жиын берілген болсын.

3-анықтама. Егер a сан табылып, кез келген $x\in E$ үшін $x\geq a$ теңсіздік орындалса, онда E жиын *төменнен шенелген, а* оның *төменгі шекарасы* деп аталады.

3-*мысал.* $E_6=[2;+\infty)$ жиын төменнен шенелген. 2 және одан кіші болған кез келген сан осы жиынның төменгі шекарасы болады.

4-*мысал.* $E_7=\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\}$ жиын төменнен шенелген. Бұл жиын үшін 0 және кез келген теріс сан төменгі шекара болады.

Демек, төменнен шенелген жиынның төменгі шекарасы шектеусіз көп болады. Төменнен шенелген жиындар үшін мына теорема орынды:

7.2-теорема. Төменнен шенелген жиынның төменгі шекаралары арасында ең үлкені бар.

Бұл теорема 7.1- теорема сияқты дәлелденеді.

4-анықтама. Төменнен шенелген жиын төменгі шекаралары арасында ең үлкені, оның *анық төменгі шекарасы* деп аталады.

Анық төменгі шекара $infE$ символымен белгіленеді.

Егер 3-анықтама шартын қанағаттандыратын a саны табылмаса, онда E жиын *төменнен шенелмеген* деп аталады.

Мысалы, E_1 және E_2 жиындар төменнен шенелмеген.

Егер E жиын төменнен шенелмеген болса, онда $infE=-\infty$ деп алынады.

5-анықтама. Төменнен және жоғарыдан шенелген жиын *шенелген* жиын деп аталады.

Мысалы, E_8 барлық дұрыс бөлшектер жиыны, шенелген жиын. Бұл жиын үшін $infE_8=0$, $supE_8=1$ болады.

Айталық, E шенелген жиын болсын. Егер $infE=c$, $supE=d$ белгілеу енгізсек, Онда $[c;d]$ сегмент, E жиынын өзінде сақтайтын ең кіші сегмент болады.

5. Бернулли теңсіздігі. Кейбір сандық жиындардың анық жоғары шекарасын және анық төменгі шекарасын табуда пайдаланылатын маңызды теңсіздікті келтіреміз.

7.3-теорема. Барлық $n\in\mathbb{N}$ және кез келген $a>-1$ үшін

$$(1+a)^n\geq 1+na \qquad (1)$$

теңсіздік орынды болады.

Дәлелдеу. Математикалық индукция методын қолдаймыз.

$n=1$ болғанда (1) теңсіздік $1+a \geq 1+a$ дұрыс.

$n=k$ үшін $(1+a)^k\geq 1+ka$ орынды деп аламыз.

Соңғы теңсіздіктің екі жағын $1+a\geq 0$ санға көбейтеміз, онда

$$(1+a)^{k+1}\geq(1+ka)(1+a)=1+(k+1)a+ka^2\geq 1+(k+1)a$$

болады. Бұл (1) теңсіздіктің $n=k+1$ үшін орынды екенін білдіреді. Демек математикалық индукция принципі бойынша (1) теңсіздік кез келген натурал сан үшін орынды болады. Теорема дәлелденді.

ЖАТТЫҒУЛАР

1. $\lg 2, \log_3 2$ сандарының иррационал екендігін дәлелдеңдер.

2. B - квадраты 2 ден үлкен болған барлық оң рационал сандар жиыны болса, онда ең кіші сан жоқ екендігін дәлелдеңдер.

3. Дедекинд теоремасы дәлелдемесінде егер $a \in Y$ болса, онда a сан Y жиынның ең кіші элементі екендігін көрсетіңдер.

4. $\sqrt{3}$ санын анықтайтын рацонал сандар қимасын құрастырыңдар.

5. Абсолюттік шаманың 1-, 5-, 6-қасиеттерін дәлелдеңдер.

6. Төмендегі жиындардың анық жоғары, анық төменгі шекараларын табыңдар. Бұл жиындардың ең үлкен, ең кіші элементтері бар ма? Бар болса, оларды көрсетіңдер ($n \in N$).

а) $\{n\}$; б) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$; в) $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$; г) $\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right\}$.

7. Айталық, $X \subset R, -X = \{x : -x \in R\}$ болсын. Онда $\sup(-X) = -\inf X$, $\inf(-X) = -\sup X$ екендігін дәлелдеңдер.

8. $E = \left\{\frac{m}{n} : 0 < m < n, m \in N, n \in N\right\}$ барлық дұрыс бөлшектер жиынының ең үлкен, ең кіші элементтері жоқ екендігін дәлелдеңдер. Оның анық жоғары, анық төменгі шекараларын табыңдар.

II ТАРАУ. САН ТІЗБЕГІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ШЕГІ

1-§. Сан тізбегі жайында ұғым

1.Тізбектің анықтамасы. Тізбектердің берілу тәсілдері

Анықтама. Әрбір n $(n \in N)$ натурал санға қандай да бір ереже бойынша x_n нақты сан сәйкес қойылған болсын. Онда

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1)$$

сан тізбегі берілген деп аталады және ол $\{x_n\}$ көріністе белгіленеді.

Әдетте "сан тізбегі" сөз тіркесі орнына тізбек сөзін қолданамыз

x_1, x_2, x_n сандар, сәйкесінше, (1) тізбектің бірінші мүшесі, екінші мүшесі және n-мүшесі деп аталады. Егер x_n тізбектің барлық мүшелерін анықтайтын ережені өрнектесе, онда ол *тізбектің жалпы мүшесі* деп аталады.

Тізбекті натурал сандар жиынында берілген $y = f(x)$ функция деп қарастыруға болатындығы оның анықтамасынан келіп шығады. Сондықтан тізбек *натурал аргументті функция* деп те айтылады.

1-мысал. Жалпы мүшесі $x_n = \frac{1}{n^2}$ формуламен берілген тізбектің бірнеше мүшесін жазу үшін бұл формулаға кезекпен n=1; 2; 3; . . . қоямыз. Нәтижеде төмендегі тізбекті аламыз:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2}, \ldots$$

2-мысал. Әрбір тақ натурал санға 3 ті, әрбір жұп натурал санға 5 ті сәйкес қоямыз. Нәтижеде 3; 5; 3; 5; 3; 5; 3; 5; . . . шексіз санды тізбекті аламыз. Оның жалпы мүшесін түрлі формулалармен, мысалы $x_n = 4 + (-1)^n$ немесе $x_n = 4 + \sin\frac{2n+1}{2}\pi$ беруге болады.

Санды тізбектерді түрлі тәсілдерде беруге болады. Сол тәсілдердің кейбіреулерін қарастырамыз.

1. Тізбектің *жалпы мүшесі формуламен* берілуі. Бұл тәсілде n-мүшенің мәнін сол мүшенің реттік нөмірімен байланыстыратын формула беріледі (1-мысал). Жалпы мүше формуламен берілсе,

тізбектің кез келген мүшесін табуға болады, яғни бұл формула тізбекті толық анықтайды.

2. Тізбек өз *мүшесінің реттік нөмірімен* сол мүшенің мәні арасындағы сәйкестік сөздер арқылы берілуі мүмкін (2-мысал).

3. Тізбектің *рекуррент* тәсілде берілуі. Егер тізбектің алғашқы бір немесе бірнеше мүшелері берілген болып, кейінгі мүшелерін сол берілген мүшелер жәрдемінде табуға болатын формула (рекуррент формула) көрсетілген болса, тізбек рекуррент тәсілде берілген деп аталады (Рекуррент сөзі латын тілінде қайту деген мағынаны береді).

3-мысал. $a_1=3$, $a_n=2^n\cdot a_{n-1}-4$ $(n\geq 2)$ болса, $\{a_n\}$ тізбектің a_2, a_3, a_4 мүшелерін табыңдар.

Шешу. Бұл жерде $\{a_n\}$ тізбек рекуррент тәсілде берілген. $a_1=3$, сондықтан рекуррент формула $a_n=2^n\cdot a_{n-1}-4$ бойынша

$a_2=2^2\cdot a_1-4=4\cdot 3-4=8$,

$a_3=2^3\cdot a_2-4=8\cdot 8-4=60$,

$a_4=2^4\cdot a_3-4=16\cdot 60-4=956$

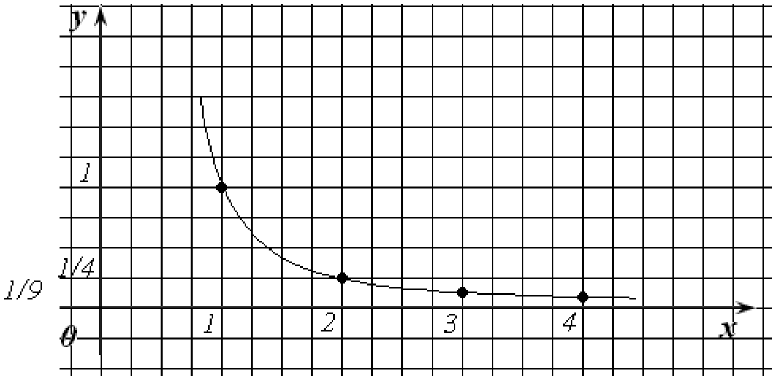
болады.

Ескерту. Егер тізбектің алғашқы бірнеше мүшелері берілген болып, кейінгі мүшелерді берілген мүшелер арқылы өрнектеу тәсілі айтылмаған болса, онда, бұл мүшелердің берілуі тізбектің толық анықталуы үшін жеткілікті болмайды. Мысалы, 3; 5; 7; . . . тізбекті 2 ден үлкен тақ сандар немесе 2 ден үлкен жай сандар тізбегі деп, сондай-ақ, $x_n = 2n+1+\sin\pi n$ формуламен берілген тізбек деп қарастыруға болады.

Тізбек кесте немесе график көріністе берілуі де мүмкін. Тізбектің графигі дискрет нүктелер жиынынан тұрады (латынша – *discretus* – үзілісті, жеке-жеке бөліктерден тұратын).

Төменде бірінші мысалдағы тізбектің кесте және график тәсілінде (5-сурет) берілуін келтіреміз.

n	1	2	3	4	…	n	…
x_n	1	1/4	1/9	1/16	…	$1/n^2$	…



5-сурет

2. Шенелген тізбектер. $\{x_n\}$ шексіз тізбек берілген болсын.

1-анықтама. Егер $\{x_n\}$ тізбек үшін қандай да бір a нақты сан табылып, барлық n натурал сандар үшін $x_n \geq a$, ($x_n \leq a$) теңсіздік орындалса, $\{x_n\}$ тізбек *төменнен (жоғарыдан) шенелген* деп аталады.

2-анықтама. Егер $\{x_n\}$ тізбек үшін екі a және b нақты сандар табылып, барлық n натурал сандарда $a \leq x_n \leq b$ теңсіздік орындалса, $\{x_n\}$ тізбек *шенелген* тізбек деп аталады.

1-мысал. Жалпы мүшесі $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ болған тізбектің шенелген екенін дәлелдеңдер.

Шешу. Барлық n натурал сандар үшін төмендегі теңсіздіктер орынды:

$$x_n = \frac{n-1}{n+1} \geq \frac{n-n}{n+1} = 0\,;$$

$$x_n = \frac{n-1}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+1} = 1\,.$$

Яғни, $0 \leq x_n \leq 1$ теңсіздік барлық n натурал сандарда орынды. Демек, $\{x_n\}$ тізбек шенелген.

Егер 2-анықтамада $M = \max(|a|, |b|)$ деп алсақ, онда кез келген $n \in N$ үшін $-M \leq x_n \leq M$ немесе $|x_n| \leq M$ теңсіздік орындалады (өз бетіңше дәлелдеңдер).

Керісінше, егер $\{x_n\}$ тізбек үшін M оң сан табылып, барлық n натурал сандар үшін $\left|x_n\right| \le M$ теңсіздік орындалса, онда $\{x_n\}$ шенелген тізбек болады. Бұны дәлелдеу үшін шенелген тізбек анықтамасында $a = -M,\ b = M$ деп алу жеткілікті. Сонымен, шенелген тізбекке мынадай анықтама беруге болады:

Егер $\{x_n\}$ тізбек үшін M оң сан табылып, барлық n натурал сандарда $\left|x_n\right| \le M$ теңсіздік орындалса, $\{x_n\}$ *шенелген* тізбек деп аталады.

2-мысал. Жалпы мүшесі $x_n = (-1)^n + \dfrac{n^2}{n^2+1}$ болған тізбектің шенелген екенін дәлелдеңдер.

Шешу. $|\,x_n\,| = |\,(-1)^n + \dfrac{n^2}{n^2+1}\,| \le 1 + \dfrac{n^2}{n^2+1} \le 1 + \dfrac{n^2+1}{n^2+1} = 2$

болғандықтан барлық n натурал сандарда $\left|x_n\right| \le 2$ теңсіздік орынды. Демек, $\{x_n\}$ шенелген тізбек.

$a \le x_n \le b$ теңсіздіктің геометриялық мағынасынан, шенелген $\{x_n\}$ тізбек мүшелері $[a,b]$ сегментке тиісті екендігі келіп шығады. Керісінше, тізбектің барлық мүшелері қандай да бір сегментке тиісті болса, ол шенелген болады.

Шынында да, $\{x_n\}$ тізбектің барлық мүшелері қандай да бір $[c,d]$ сегментке тиісті болса, онда кез келген $n \in N$ үшін $x_n \in [c, d]$ болады. Бұдан $c \le x_n \le d$ теңсіздікті аламыз. Бұл $\{x_n\}$ тізбектің шенелгендігін білдіреді.

Жоғарыда қаралған 4-мысалдағы тізбектің барлық мүшелері [0;1] сегментке, 5-мысалдағы тізбектің барлық мүшелері [-2;2] сегментке тиісті болады.

3-мысал. Жалпы мүшесі $x_n = 3n + 2$ болған тізбектің шенелмегендігін дәлелдеңдер.

Шешу. Тізбек шенелмегендігінің геометриялық мағынасы төмендегіден тұрады:

Кез келген [-M;M] (M>0) сегмент алсақ та, бұл сегментке тиісті болмаған тізбектің қандай да бір мүшесі табылады. Сонымен, тізбектің шенелмегендігін көрсету үшін кез келген M>0 сан алғанымызда $|x_n|>M$ теңсіздікті қанағаттандыратын кемінде бір x_n бар екендігін көрсету жеткілікті.

Егер $n=[M]+1$ деп алсақ, $|x_n|>M$ теңсіздік орындалуы айқын. Демек, берілген тізбек шенелмеген.

3. Бірсарынды тізбектер. $\{x_n\}$ тізбек берілген болсын.

1-анықтама. Егер тізбектің екінші мүшесінен бастап, әрбір мүшесі өзінен алдынғы мүшеден үлкен (кіші) болса, яғни $x_{n+1}>x_n$ ($x_{n+1}<x_n$) шарт барлық n натурал сандар үшін орындалса, $\{x_n\}$ тізбек *өспелі* (*кемімелі*) тізбек деп аталады.

1-мысал. Жалпы мүшесі $x_n=3n^3$ болған тізбектің өспелі екенін көрсетіңдер.

Шешу. $x_{n+1}-x_n$ айырымды қараймыз:

$$x_{n+1}-x_n=3(n+1)^3-3n^3=3(n^3+3n^2+3n+1)-3n^3=3(3n^2+3n+1)$$

Бұл азайтынды n нің кез келген натурал мәнінде оң болады. Сол себепті, барлық n натурал сандарда $x_{n+1}>x_n$, яғни $\{x_n\}$ тізбек өспелі.

2-мысал. Жалпы мүшесі $x_n=\dfrac{1}{n^2}$ болған тізбектің кемімелі екенін көрсетіңдер.

Шешу. Бұл тізбектің барлық мүшелері оң болғандықтан $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ қатынасты бағалаймыз: $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{n^2}{(n+1)^2}<1$.

Бұдан барлық натурал n үшін $x_{n+1}<x_n$ теңсіздік орынды. Демек, $\{x_n\}$ кемімелі тізбек.

2-анықтама. Егер $\{x_n\}$ тізбектің екінші мүшесінен бастап, әрбір мүшесі өзінен алдынғы мүшеден кіші (үлкен) болмаса, яғни $x_{n+1}\geq x_n$ ($x_{n+1}\leq x_n$) теңсіздік барлық n натурал сандарда орындалса, $\{x_n\}$ тізбек *кемімейтін* (*өспейтін*) тізбек деп аталады.

Мысалы, 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; ... тізбек кемімейтін, $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}$; ... тізбек өспейтін тізбек.

Әр қандай өспелі тізбек кемімейтін тізбек, әр қандай кемімелі тізбек өспейтін тізбек болатындығы өз-өзінен айқын.

Өспейтін тізбектер және кемімейтін тізбектер (жалпы атау-мен) *бірсарынды (монотон) тізбектер* деп аталады.

3-мысал. Жалпы мүшесі $x_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$ болған тізбекті бірсарындылыққа зерттеңдер.

Шешу. $x_{n+1} - x_n = \dfrac{n+2}{2n+1} - \dfrac{n+1}{2n-1} = -\dfrac{3}{4n^2-1} < 0$ теңсіздік барлық n натурал сандар үшін орынды. Демек, кез келген n натурал сан үшін $x_{n+1}<x_n$ болады Бұдан, $\{x_n\}$ тізбек кемімелі.

2-§. Тізбек шегінің анықтамасы

$\{x_n\}$ тізбек және a саны берілген болсын.

1-анықтама. Егер кез келген кіші ε оң сан алғанда да $n_0\in \mathbb{N}$ табылып, $n>n_0$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n үшін $|x_n-a|<\varepsilon$ теңсіздік орынды болса, онда a саны $\{x_n\}$ тізбектің *шегі* деп аталады.

Айтылғандар қысқаша, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ немесе $x_n\to a$ көріністе белгіленеді.

Осы жағдайда $\{x_n\}$ тізбегін “*a* санына жинақталатын тізбек”, “*a* санына ұмтылатын тізбек” деп те атайды.

1-анықтамадағы $|x_n-a|<\varepsilon$ теңсіздік $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ қос теңсіздікке эквивалент. Бұдан тізбектің x_n мүшесі $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ интервалға тиісті екендігі келіп шығады. $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ интервал a нүктенің ε-маңайы деп аталатын. Осыларды ескеріп, тізбек шегінің басқаша анықтамасын келтіреміз.

2-анықтама. Егер a нүктенің кез келген ε-маңайында $\{x_n\}$ тізбектің қандай да бір мүшесінен кейінгі барлық мүшелері жатса, онда a саны $\{x_n\}$ тізбектің *шегі* деп аталады.

Шегі бар болған тізбек *жинақты тізбек* деп аталады.

Шегі жоқ тізбек *жинақсыз тізбек* деп аталады.

1-*мысал.* Жалпы мүшесі $x_n=\dfrac{n}{n+1}$ болған тізбектің шегі 1 екендігін көрсетеміз:

$$|x_n-1|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1.$$

Егер $n_0>\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]-1$ деп алсақ, кез келген ε оң сан және барлық $n>n_0$ үшін $|x_n-1|<\varepsilon$ теңсіздік орынды болады. Демек, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

2-*мысал*. Жалпы мүшесі $x_n=2n$ болған тізбек жинақсыз болады.

Кері жоримыз, яғни бұл тізбек жинақты, оның шегі a болсын. Анықтама бойынша қандай кіші ε оң сан алсақ та, n_0 сан табылып, $n>n_0$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n үшін $|2n-a|<\varepsilon$ болуы керек.

$$|2n-a|<\varepsilon \Rightarrow 2n-a<\varepsilon \Rightarrow n<\frac{a+\varepsilon}{2}.$$

Демек, бұл теңсіздік $\left[\frac{a+\varepsilon}{2}\right]$ саннан үлкен болған n натурал сандар үшін орынды емес. Сондықтан, $\{2n\}$ тізбек жинақсыз тізбек.

3-§. Жинақталатын тізбектердің қасиеттері

1°. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ және $a>p$ (сәйкесінше $a<q$) болса, онда қандай да бір нөмірден бастап, барлық n үшін $x_n>p$ (сәйкесінше $x_n<q$) болады.

Дәлелдеу. Айталық $a>p$ болсын. $0<\varepsilon<a-p$ теңсіздікті қанағаттандыратындай қандай да бір ε сан аламыз (Нақты сандардың тығыздық қасиетінен пайдаланамыз).

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ болғандықтан, таңдалған ε сан үшін $n_0\in\mathbb{N}$ сан табылып, барлық $n>n_0$ үшін $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ болады. Енді, $a-\varepsilon<x_n$ және $\varepsilon<a-p$ екендігін ескерсек, $x_n>p$ болады.

Сол сияқты, $a<q$ жағдай дәлелденеді.

Салдар. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ және $a>0$ (сәйкесінше $a<0$) болса, онда қандай да бір нөмірден бастап, барлық n үшін $x_n>0$ (сәйкесінше $x_n<0$) болады.

2^0. Жинақталатын тізбек шенелген болады, яғни c оң сан табылып, барлық n үшін $|x_n|\le c$ болады.

Дәлелдеу. Айталық $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ болсын. Кез келген ε оң сан алсақ та, қандай да бір $n_0\in\mathbb{N}$ сан табылып, барлық $n>n_0$ үшін $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ теңсіздік орынды болады. Енді, $|x_1|$, $|x_2|$, . . ., $|x_{n_0}|$, $|a-\varepsilon|$, $|a+\varepsilon|$ сандардың ең үлкенін c деп алсақ, кез келген $n\in\mathbb{N}$ үшін $|x_n|\le c$ орынды болады. Демек, $\{x_n\}$ тізбек шенелген.

3^0. Жинақты тізбектің шегі жалғыз болады.

Дәлелдеу. Кері жоримыз: $\{x_n\}$ тізбектің екі a және b шектері бар және $a<b$ болсын. Нақты сандар жиынының тығыздық қасиетінен $a<r<b$ теңсіздікті қанағаттандыратын r сан табылады.

Енді, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ және $a<r$ болғандықтан 1^0 қасиетке орай қандай да бір $n_1\in\mathbb{N}$ сан табылып, $n>n_1$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $x_n<r$ теңсіздік орынды болады.

Сондай-ақ, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$ және $b>r$ болғандықтан қандай да бір $n_2\in\mathbb{N}$ табылып, $n>n_2$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n үшін $x_n>r$ болады.

Егер $n_0=\max\{n_1, n_2\}$ деп алсақ, онда $n>n_0$ болған барлық n үшін бір уақытта $x_n<r$ және $x_n>r$ теңсіздіктер орынды болады. Бұл қарама-қайшылық жорамалымыздың қате екендігін көрсетеді. Демек, шек жалғыз болады.

4^o. Егер барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $x_n=y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ және $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$ болса, онда $a=b$ болады.

Бұл қасиеттің тура екендігі шектің жалғыздығынан келіп шығады.

5^o. Егер барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $x_n\le y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ және $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$ болса, онда $a\le b$ болады.

Дәлелдеу. Кері жоримыз: $a>b$ болсын. a және b сандар арасында қандай да бір r сан аламыз: $a>r>b$. Енді $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ және $a>r$ болғандықтан $n_1\in\mathbb{N}$ табылып, $n>n_1$ болған барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $x_n>r$ болады.

Дәл сондай, $\lim_{n\to\infty} y_n=b$ және $b<r$ болғандықтан $n_2\in\mathbb{N}$ табылып, $n>n_2$ болған барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $y_n<r$ болады.

Егер $n_0=\max\{n_1, n_2\}$ деп алсақ, онда $n>n_0$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін, бір уақытта $y_n<r$ және $x_n>r$ теңсіздіктер орынды болады. Бұл қарама-қайшылық жорамалымыздың қате екендігін көрсетеді. Демек, $a\le b$.

6^o. (**Аралық тізбектің шегі жайындағы теорема**) Егер барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $x_n\le y_n\le z_n$, $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ және $\lim_{n\to\infty} z_n=a$ болса, онда $\lim_{n\to\infty} y_n=a$ болады.

Дәлелдеу. Айталық $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ болсын. Шек анықтамасы бойынша кез келген ε оң сан алғанымызда да $n_1\in\mathbb{N}$ табылып, $n>n_1$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ болады.

Сол сияқты, $\lim_{n\to\infty} z_n=a$ екендігінен $n_2\in\mathbb{N}$ табылып, $n>n_2$ болған барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon$ теңсіздіктер орынды болады. Егер $n_0=\max\{n_1, n_2\}$ деп алсақ, онда $n>n_0$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін жоғарыдағы теңсіздіктерден $a-\varepsilon<x_n\le y_n\le z_n<a+\varepsilon$, яғни $a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon$ келіп шығады. Бұл $\{y_n\}$ тізбектің жинақты және $\lim_{n\to\infty} y_n=a$ екенін білдіреді.

4-§. Шектеусіз кіші тізбектер және олардың қасиеттері

1. Шектеусіз кіші шамалар. Айталық, $\{\alpha_n\}$ жинақталатын тізбек берілген болсын.

1-анықтама. Егер $\lim_{n\to\infty} \alpha_n=0$ болса, α_n *шектеусіз кіші шама* немесе қысқаша, *шектеусіз кіші* деп аталады. $\{\alpha_n\}$ тізбек *шектеусіз кіші тізбек* деп аталады.

Шектеусіз кіші шама, шегі 0 болған жинақты тізбектің үлкен нөмірлі мүшелері деп қарастыруға болады.

Оны төмендегідей анықтауға болады:

Кез келген ε оң сан алғанымызда да $n_0 \in \mathbb{N}$ сан табылып, барлық $n>n_0$ үшін $|\alpha_n|<\varepsilon$ теңсіздік орынды болса, α_n *шектеусіз кіші шама* деп аталады.

Мысалы, $\alpha_n = \dfrac{1}{n^2}$ шектеусіз кіші шама болады.

Шынында да, кез келген ε оң сан үшін $|\alpha_n| = \left|\dfrac{1}{n^2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow$ $n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ орынды. Енді $n_0 = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$ деп алсақ, онда $n>n_0$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n үшін $\left|\dfrac{1}{n^2}\right| < \varepsilon$ теңсіздік орынды болады.

Мысалы, $\varepsilon=0{,}01$ деп алсақ, $n_0 = \left[\dfrac{1}{\sqrt{0{,}01}}\right]=10$ болады; ал егер $\varepsilon=0{,}0001$ деп алсақ, онда $n_0 = \left[\dfrac{1}{\sqrt{0{,}0001}}\right]=100$ нөмірден бастап $\left|\dfrac{1}{n^2}\right| < \varepsilon$ теңсіздік орынды болады.

2. Тізбек, оның шегі және шектеусіз кіші шама арасындағы байланыс. Айталық, $\{x_n\}$ жинақты тізбек және $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ болсын. Шек анықтамасынан, кез келген ε оң сан алғанда да $n_0 \in \mathbb{N}$ сан табылып, $n>n_0$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $n \in \mathbb{N}$ үшін $|x_n - a| < \varepsilon$ болады. Бұл жерде $x_n - a = \alpha_n$ белгілеу енгізсек, $|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$ болып, α_n шектеусіз кіші шама болады.

Егер x_n және a сан арасындағы $\alpha_n = x_n - a$ азайтынды шектеусіз кіші шама болса, онда $|x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon$ болып, a сан $\{x_n\}$ тізбектің шегі болады: $\alpha_n = x_n - a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$.

Сонымен мына теорема дәлелденді.

4.1-теорема. Қандай да бір a сан $\{x_n\}$ тізбектің шегі болуы үшін x_n - a шектеусіз кіші шама болуы қажетті және жеткілікті.

Мысалы, $x_n=\frac{2n^2+1}{n^2}$ болса, оны $x_n=2+\frac{1}{n^2}$ деп жазуға болады. Бұл жерде $\alpha_n=\frac{1}{n^2}$ шектеусіз кіші, сондықтан $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$ болады.

3. Шектеусіз кіші шамалар жайындағы леммалар. Келешекте, төмендегі леммалардан пайдаланамыз.

4.1-лемма. Шекті сандағы шектеусіз кіші шамалардың қосындысы шектеусіз кіші шама болады.

Дәлелдеу. Дәлелдеуді екі шектеусіз кіші шамалар үшін келтіреміз. Айталық α_n және β_n шектеусіз кіші шамалар болсын. Онда $\gamma_n=\alpha_n+\beta_n$ шектеусіз кіші шама екендігін көрсетеміз.

Шектеусіз кіші шамалар анықтамасы бойынша $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n=0$, яғни кез келген ε оң сан үшін қандай да бір $n_1\in\mathbb{N}$ сан табылып, барлық $n>n_1$ үшін $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ болады.

Сол сияқты, қандай да бір $n_2\in\mathbb{N}$ сан табылып, барлық $n>n_2$ үшін $|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ болады.

Егер $n_0=\max\{n_1, n_2\}$ деп алсақ, онда барлық $n>n_0$ үшін бір уақытта $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ және $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ теңсіздіктер орынды болады.

Бұдан $n>n_0$ болғанда $|\gamma_n|=|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ келіп шығады. Бұл, γ_n шаманың шектеусіз кіші екендігін көрсетеді. Лемма дәлелденді.

Сол сияқты, шекті сандағы шектеусіз кіші шамалардың қосындысы шектеусіз кіші шама екендігін көрсетуге болады.

4.2-лемма. Шенелген шама мен шектеусіз кіші шаманың көбейтіндісі шектеусіз кіші шама болады.

Дәлелдеу. Айталық, x_n шенелген шама, α_n шектеусіз кіші шама болсын. Онда $\gamma_n=x_n\alpha_n$ шектеусіз кіші шама болатындығын көрсетеміз.

Берілуіне орай x_n шенелген шама болғандықтан $c>0$ сан табылып, барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $|x_n|<c$ теңсіздік орынды болады.

Сондай-ақ, α_n шектеусіз кіші болғандықтан, кез келген $\varepsilon>0$ санға сәйкес $n_0\in\mathbb{N}$ сан табылып, барлық $n>n_0$ үшін $|\alpha_n|<\dfrac{\varepsilon}{c}$ теңдік орынды болады. Осыларды ескерсек, барлық $n>n_0$ үшін $|\gamma_n|=|x_n\alpha_n|=|x_n||\alpha_n|<c\cdot\dfrac{\varepsilon}{c}=\varepsilon$ теңсіздік орынды болады. Бұл γ_n шаманың шектеусіз кіші екендігін көрсетеді. Лемма дәлелденді.

5-§. Жинақталатын тізбектерде орындалатын арифметикалық амалдар

Айталық, $\{x_n\}$: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ және $\{y_n\}$: $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ тізбектер берілген болсын.

Мына

$x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \ldots,\ x_n+y_n,\ \ldots,$

$x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ \ldots,\ x_n-y_n,\ \ldots$

$x_1\cdot y_1,\ x_2\cdot y_2,\ \ldots,\ x_n\cdot y_n,\ \ldots$

$\dfrac{x_1}{y_1},\ \dfrac{x_2}{y_2},\ \ldots,\ \dfrac{x_n}{y_n},\ \ldots\ (y_n\neq 0,\ n=1, 2, \ldots)$

тізбектер сәйкесінше $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектердің қосындысы, азайтындысы, көбейтіндісі және бөліндісі деп аталады және $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n-y_n\}$, $\{x_n\cdot y_n\}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ деп белгіленеді.

5.1-теорема. Егер $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектер жинақты болса, онда $\{x_n\pm y_n\}$ тізбек те жинақты және

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n$$

теңдік орынды болады.

Дәлелдеу. Айталық, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ болсын. 4.1-теоремаға орай $x_n=a+\alpha_n$, $y_n=b+\beta_n$ болады, бұл жерде α_n және β_n шектеусіз кіші шамалар. Бұлардан

$$x_n+y_n=a+\alpha_n+(b+\beta_n)=a+b+(\alpha_n+\beta_n)$$

болады. Егер $\gamma_n=\alpha_n+\beta_n$ деп алсақ, 4.1-леммаға орай γ_n шектеусіз кіші шама болады. Онда $x_n+y_n=a+b+\gamma_n$ деп жазуға болады. 4.1-теоремаға орай $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ теңдікке келеміз.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n-\lim_{n\to\infty}y_n$$

теңдік те сол сияқты дәлелденеді. Теорема дәлелденді.

5.2-теорема. Егер $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектер жинақты болса, онда $\{x_ny_n\}$ тізбек те жинақты және $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ теңдік орынды болады.

Дәлелдеу. Алдынғы теорема дәлелдеуіндегі белгілеулерге орай,

$$x_ny_n=(a+\alpha_n)(b+\beta_n)=ab+(a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n)$$

болады. Енді, 4.1- және 4.2- леммаларға орай $\gamma_n=a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n$ шектеусіз кіші шама. Бұдан $x_ny_n=ab+\gamma_n$ болып,

$$\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=ab=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n$$

екендігі келіп шығады. Теорема дәлелденді.

Салдар. Егер $\{x_n\}$ тізбек жинақты болса, онда $\{c\cdot x_n\}=c\cdot\{x_n\}$ тізбек те жинақты және $\lim\limits_{n\to\infty}\{c\cdot x_n\}=c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}$ теңдік орынды болады.

Шынында да, 5.2-теоремада $y_n=c$ деп алсақ, соңғы теңдік келіп шығады.

5.3-теорема. Егер $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектер жинақты және $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0$ болса, онда $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ тізбек те жинақты болып, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$ теңдік орынды болады.

Дәлелдеу. Айталық, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, $b\neq0$ болсын. Онда, $x_n=a+\alpha_n$, $y_n=b+\beta_n$ (α_n, β_n шектеусіз кіші шамалар) деп жазып алуға болады. Онда

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n}-\frac{a}{b}=\frac{1}{b(b+\beta_n)}\left(b\alpha_n-a\beta_n\right)$$

болады. Егер $\gamma_n=\frac{1}{b(b+\beta_n)}\left(b\alpha_n - a\beta_n\right)$ белгілеу енгізсек, 4.1- және 4.2-леммаларға орай γ_n шектеусіз кіші шама болады, себебі, $\frac{1}{b(b+\beta_n)}$ шенелген шама, $\left(b\alpha_n - a\beta_n\right)$ шектеусіз кіші шама. Бұдан $\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\gamma_n$, яғни $\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}+\gamma_n$ теңдік орынды. Демек, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$ болады.Теорема дәлелденді.

6-§. Шектеусіз үлкен шамалар. Шектеусіз кіші және шектеусіз үлкен шамалар арасындағы байланыс

Жоғарыда шектеусіз кіші шамалар және олардың қасиеттерін үйрендік. Енді шектеусіз үлкен шамалармен танысамыз.

Айталық, $\{x_n\}$ қандай да бір тізбек болсын.

1-анықтама. Егер кез келген үлкен Δ оң сан алғанымызда да $n_0\in\mathbb{N}$ сан табылып, $n>n_0$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $|x_n|>\Delta$ теңсіздік орынды болса, онда x_n *шектеусіз үлкен шама*, $\{x_n\}$ *шектеусіз үлкен тізбек* деп аталады.

Бұндай жағдай $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ көріністе жазылады.

Егер қандай да бір нөмірден бастап x_n шектеусіз үлкен шаманың барлық мүшелері оң (теріс) болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ (сәйкесінше $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$) көрінісінде жазылады.

1-*мысал.* $x_n=n^2$, $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=+\infty$.

2-*мысал.* $x_n=-2n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-2n)=-\infty$.

3-*мысал.* $x_n=(-n)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-n)^n=\infty$.

4-*мысал.* Жалпы мүшесі $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot n$ болған тізбек a) шенелген; b) шектеусіз үлкен тізбек бола ма?

Шешу. a) бұл тізбек шенелмеген. Шынында да, кез-келген Δ >0 сан үшін n=2[Δ]+1 деп алсақ, $x_n > \Delta$ болады.

b) Бірақ бұл тізбек шектеусіз үлкен тізбек болмайды. Себебі Δ >0 сан және кез келген n_0 үшін n=2n_0+1 сан табылып, $x_n < \Delta$ болады.

Бұл мысалдан әр қандай шенелмеген тізбек әрқашан да шектеусіз үлкен тізбек болмайтындығы келіп шығады.

6.1-теорема. Егер x_n шектеусіз үлкен шама болса, онда $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$ шектеусіз кіші шама болады.

Дәлелдеу. Айталық, ε>0 болсын. Теорема шарты бойынша $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$. Демек, қандай да бір $n_0 \in \mathbb{N}$ сан табылып, барлық $n>n_0$ үшін $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ болады. Бұдан $|\alpha_n| = \frac{1}{|x_n|} < \varepsilon$ теңсіздік орынды. Демек, α_n шектеусіз кіші шама. Теорема дәлелденді.

6.2-теорема. Егер α_n шектеусіз кіші шама болса, онда $x_n = \frac{1}{\alpha_n}$ шектеусіз үлкен шама болады.

Дәлелдеуді оқырмандарға қалдырамыз.

7-§. Анықталмағандықтар

Егер $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ жинақты тізбектер болса, онда

$$\{x_n \pm y_n\},\ \{x_n \cdot y_n\},\ \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\},\ (\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0)$$

тізбектердің әрбіреуі жинақты болатындығын көрсеттік.

Енді, жоғарыдағы шарттардың кейбіреулері орынды болмаған жағдайларды қарастырамыз.

1. «$\frac{0}{0}$» **көріністегі анықталмағандық.** Кейде, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$ болған жағдайда $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектердің характеріне қарап, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ шекті табуға болады.

Мысалдар. a) $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n^2}$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ және

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty} n=+\infty$$ болады.

b) $x_n=\frac{1}{n^3}$, $y_n=\frac{1}{n^2}$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ және $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ болады.

c) $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n+1}$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ және $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1$ болады.

Жоғарыдағы мысалдардан $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$ болған жағдайда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ туралы бір мәнді пікір айтуға болмайтындығы келіп шығады. Сол себепті бұл жағдайда $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ тізбек «$\frac{0}{0}$» көріністегі *анықталмағандық* деп аталады. Анықталмағандықтың шегін табу *анықталмағандықты ашу* деп те айтылады.

2. «$\frac{\infty}{\infty}$» **көріністегі анықталмағандық.** Кейде $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$ болған жағдайда да $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектердің харак-теріне қарап $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ шекті есептеуге болады. Бұл жағдайда, жо-ғарыдағы

сияқты, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ тізбек «$\frac{\infty}{\infty}$» көріністегі анықталмағандық деп аталады.

Мысалдар.

a) $x_n=n^2+1$, $y_n=2n^2$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+1)=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^2)=+\infty$, бірақ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

b) $x_n=n$, $y_n=2n^2+1$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^2+1)=+\infty$, бірақ

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ болады.

3. **«0·∞» көріністегі анықталмағандық.** Егер $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$ болса, онда, $x_ny_n=\frac{x_n}{\frac{1}{y_n}}$ немесе $x_ny_n=\frac{y_n}{\frac{1}{x_n}}$ алмастырулар көмегімен, «0·∞» көріністегі анықталмағандық «$\frac{0}{0}$» немесе «$\frac{\infty}{\infty}$» көріністегі анықталмағандықтарға келтіріледі.

Мысалдар.

a) $x_n=\frac{1}{n^3}$, $y_n=n$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$ және

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ болады.

b) $x_n=\frac{1}{n^2}$, $y_n=n^2$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=+\infty$ және

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$ болады.

Бұлардан басқа, «∞-∞», «0^0», «1^∞», «∞^0» көріністегі анықталмағандықтар да бар. Бұндай анықталмағандықтар да «$\frac{0}{0}$» немесе «$\frac{\infty}{\infty}$» көріністегі анықталмағандықтарға келтіріледі.

8-§. Бірсарынды тізбектің шегі

8.1-теорема. Егер $\{x_n\}$ тізбек өспелі және жоғарыдан шенелген болса, онда $\{x_n\}$ шегі бар, егер жоғарыдан шенелмеген болса, онда $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ болады.

Дәлелдеу. Айталық $\{x_n\}$ тізбек өспелі және жоғарыдан шенелген болсын. Онда $\{x_n,\ n=1, 2, \ldots\}$ жиын да жоғарыдан шенелген болады. Сондықтан, оның анық жоғары шекарасы бар. Оны a арқылы белгілейміз: $a=\sup\{x_n\}$. Енді a саны $\{x_n\}$ тізбектің шегі екенін көрсетеміз.

Жоғарыда анықталған a сан $\{x_n,\ n=1, 2, \ldots\}$ жиынның анық жоғары шекарасы болғандықтан, барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $x_n\le a$ болады. Сондай-ақ, әрбір ε оң санға сәйкес n' сан табылып, $x_{n'}>a-\varepsilon$ болады. $\{x_n\}$ өспелі тізбек болғандықтан және жоғарыдағылардан, барлық $n>n'$ үшін $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ теңсіздік орынды болуы келіп шығады. Демек, анықтама бойынша $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ болады.

Енді теореманың екінші бөлімін дәлелдейміз.

Айталық, $\{x_n\}$ өспелі болып, жоғарыдан шенелмеген болсын. Онда әрбір $\Delta>0$ сан үшін $n'\in\mathbb{N}$ сан табылып, $x_{n'}>\Delta$ болады. Тізбек өспелі, сондықтан барлық $n>n'$ үшін $x_n>x_{n'}>\Delta$ болады. Демек, анықтама бойынша $\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty$ болады. Теорема дәлелденді.

Сонымен, бірсарынды өспелі тізбек үшін $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$.

Жоғарыдағыға ұқсас тәсілмен мына теореманы да дәлелдеуге болады.

8.2-теорема. Егер $\{x_n\}$ тізбек кемімелі және төменнен шенелген болса, онда $\{x_n\}$ шегі бар, егер төменнен шенелмеген болса, онда $\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty$ болады.

1-*мысал.* $\{x_n\}=\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ тізбектің шегін табыңдар.

Шешу. $x_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{2^n}{n!}\cdot\dfrac{2}{n+1}=\dfrac{2}{n+1}\cdot x_n$

қатынастан, барлық $n>1$ үшін $x_{n+1}<x_n$, яғни $\{x_n\}$ тізбектің кемімелі екендігі келіп шығады. Сондай-ақ, барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $x_n=\frac{2^n}{n!}>0$. Сол себепті, $\{x_n\}$ тізбектің шегі бар, оны a деп белгілейміз: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Мына $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ қатынастан $a=0\cdot a$, яғни $a=0$ келіп шығады. Демек, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

Сол тәсілде, кез келген a үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ екендігін көрсетуге болады.

2-*мысал.* Кез келген $c>0$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}}=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ екендігін көрсетіңдер.

Шешу. $x_n=\left.\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}}\right\}n$ белгілеу енгіземіз. Онда $x_1=\sqrt{c}$, $x_2=\sqrt{c+\sqrt{c}}$, . . . болып, әр кез $\sqrt{c}$ саны соңғы ішкі түбір астына қосылады. Демек, барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $x_n<x_{n+1}$, яғни $\{x_n\}$ тізбек өспелі.

Енді математикалық индукция методы көмегімен $\{x_n\}$ тізбектің жоғарыдан шенелгендігін көрсетеміз.

$x_1=\sqrt{c}<\sqrt{c}+1$ екендігі өз-өзінен айқын.

$n=k$ үшін $x_k<\sqrt{c}+1$, деп жоримыз, $x_{k+1}<\sqrt{c}+1$ екендігін көрсетеміз.

Шынында да,

$x_{k+1}=\sqrt{c+x_k}<\sqrt{c+\sqrt{c}+1}<\sqrt{c+2\sqrt{c}+1}=\sqrt{c}+1$ болады.

Демек, барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $x_n<\sqrt{c}+1$. 8.1-теоремаға орай $\{x_n\}$ тізбектің шегі бар. Оны a деп белгілейміз: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

Онда $x_{n+1}^2 = c + x_n$ теңдіктен $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = c + \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, бұдан $a^2 = c + a$ келіп шығады. Енді a>0 екендігін ескере отырып, бұл теңдеуді шешеміз: $a=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

Сонымен, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ болады.

9-§. *e* саны

Жалпы мүшесі $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ көріністе болған тізбектің шегі бар екенін дәлелдейміз.

Оның үшін жалпы мүшесі $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ болған $\{x_n\}$ тізбекті зерттейміз. Мына

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)<$$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n^4}\right)^n<1$$

қатынастардан $x_n<x_{n-1}$ келіп шығады. Бұл жерде Бернулли теңсіздігіне орай орынды болған $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n>1+\dfrac{n}{n^2}=1+\dfrac{1}{n}$ теңсіздіктен пайдаландық.

Демек, $\{x_n\}$ тізбек кемімелі және x_n>0 болғандықтан оның шегі бар. Бұл шекті *e* арқылы белгілейміз.

Сонымен бірге,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

болып, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ тізбектің де шегі e екендігі келіп шығады. Бұл e саны иррационал сан болып, оның ондық бөлшек арқылы өрнектелуінің алғашқы 18 таңбасы мынадай болады:

$e\approx 2{,}71828182845904590...$.

10-§. Іштей жайласқан сегменттер принципі

10.1-теорема. Егер $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектер берілген болып,

1. $\{x_n\}$ өспелі, $\{y_n\}$ кемімелі,
2. Барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $x_n<y_n$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ болса, онда $\{x_n\}$ және $\{y_n\}$ тізбектер жинақты

және $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ теңдік орынды болады.

Дәлелдеу. Шартқа орай барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $x_n<y_n\le y_1$ болады. Демек, $\{x_n\}$ тізбек өспелі және жоғарыдан шенелген. Сол себепті, $\{x_n\}$ шегі бар: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$. Сол сияқты, $\{y_n\}$ тізбек кемімелі, төменнен шенелген болғандықтан, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=c'$ шек бар. Онда $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n-\lim\limits_{n\to\infty}y_n=c-c'$, теорема шартынан $c-c'=0$.

Бұдан $c=c'$ екендігі келіп шығады. Теорема дәлелденді.

Егер $[a_1;b_1]$, $[a_2;b_2]$,. . ., $[a_n;b_n]$,. . . сегменттердің әрбірі алдынғысының бөлігі (жиыншасы), яғни

$[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset...\supset[a_n;b_n]\supset...$

болса, онда олар *іштей жайласқан сегменттер* тізбегі деп аталады.

Төмендегі тұжырым, *іштей жайласқан сегменттер принципі* деп айтылады.

Салдар. Егер іштей жайласқан $[a_1;b_1]$, $[a_2;b_2]$, ..., $[a_n;b_n]$, ... сегменттер тізбегі үшін $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ болса, онда сегменттердің сол ұштарынан түзілген $\{a_n\}$ және оң ұштарынан түзілген $\{b_n\}$ тізбектердің жалғыз шегі бар және бұл шек барлық сегменттерге тиісті жалғыз нүкте болады.

Дәлелдеу. 1) $\{a_n\}$ өспелі, $\{b_n\}$ кемімелі, 2) барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $a_n<b_n$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ болғандықтан 10.1-теоремаға орай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ болады. Бұл шекті c деп алсақ, барлық $n\in\mathbb{N}$ үшін $a_n\le c\le b_n$ келіп шығады.

11-§. Тізбекше. Больцано-Вейерштрасс теоремасы

1. Тізбекше. Айталық, $\{x_n\}$ қандай да бір тізбек болсын. Натурал сандардан $n_1<n_2<\ldots<n_k\ldots$ шарттарды қанағаттандыратын $n_1, n_2, ..., n_k, ...$ тізбекті ажыратамыз. $\{x_n\}$ тізбектің сол натурал сандар тізбегіне сәйкес мүшелерінен құралған $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...$ тізбекті, $\{x_n\}$ тізбектің *тізбекшесі* деп аталады және $\{x_{n_k}\}$ деп белгіленеді.

Мысалы, 1, 4, 9, 16, 25, …, яғни, $x_n=n^2$ формула мен берілген тізбек үшін төмендегі тізбектердің әрбіреуі тізбекше болады.

a) $1, 9, 25, \ldots, (2k-1)^2, \ldots$,

b) $4, 16, 36, \ldots, (2k)^2, \ldots$,

c) $4, 16, 64, 256, \ldots, (2^k)^2, \ldots$.

Тізбекше үшін төмендегі қасиет орынды:

11.1-теорема. Егер $\{x_n\}$ тізбектің шегі бар және a санына тең болса, онда $\{x_{n_k}\}$ тізбекшенің шегі бар және a санына тең болады.

Жалпы алғанда, $\{x_n\}$ тізбектің шегі жоқ екендігінен оның тізбекшелерінің де шегі жоқ, деген пікір келіп шықпайды, яғни тізбектің шегі жоқ болса да, оның кейбір тізбекшелерінің шегі бар болуы мүмкін.

Мысалы, -1, 1, -1, … , яғни, $x_n=(-1)^n$ формуламен берілген тізбектің шегі жоқ. Оның

a) $x_1=-1, x_3=-1, \ldots, x_{2n-1}=-1, \ldots, \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=-1$,

b) $x_2=1, x_4=1, ..., x_{2n}=1, ... , \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=1$

тізбекшелерінің шегі бар.

Жалпы алғанда, қандай тізбектен жинақты тізбекше ажыратып алуға болады деген сұраққа төмендегі лемма жауап береді.

2. Больцано-Вейерштрасс леммасы. Кез келген шенелген тізбектен әрқашан жинақты тізбекше ажыратып алуға болады.

Дәлелдеу. Айталық $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ шенелген тізбек болсын. Демек, оның барлық мүшелері тиісті болған $[a_1;b_1]$ сегмент бар болады. Бұл сегментті тең екіге бөлеміз: $[a_1;\frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2};b_1]$. Осы сегменттердің бірінде (немесе екеуінде де) тізбектің шектеусіз көп мүшелері бар болады. Сегменттерден, $\{x_n\}$ тізбектің шектеусіз көп мүшелері бар болғанын (екеуінде де болғанда, мысалы, сол жақтағысын) $[a_2;b_2]$ арқылы белгілейміз. Дәл солай $[a_2;b_2]$ сегментті тең екіге бөлеміз. $\{x_n\}$ тізбектің шектеусіз көп мүшелері бар болғанын $[a_3;b_3]$ арқылы белгілейміз, сол процессті жалғастырып, іштей жайласқан сегменттер тізбегін аламыз:

$$[a_1;b_1], [a_2;b_2], \ldots, [a_n;b_n], \ldots.$$

$[a_k;b_k]$ сегменттің ұзындығы $b_k-a_k=\frac{b-a}{2^{k-1}}$ болып, $k\to\infty$ болғанда нөлге ұмтылады.

Іштей жайласқан сегменттер принципіне орай $\{a_k\}$ және $\{b_k\}$ тізбектердің ортақ c шегі бар болады, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} b_k = c$.

Енді, $\{x_n\}$ тізбектің $[a_1;b_1]$ сегменттегі кез-келген бір мүшесін алып, оны x_{n_1} арқылы, $[a_2;b_2]$ сегменттегі, x_{n_1} мүшесінен кейін келген қандай да бір мүшесін алып, x_{n_2} арқылы, $[a_3;b_3]$ сегменттегі x_{n_1}, x_{n_2} мүшелерінен кейін келген қандай да бір мүшесін алып, x_{n_3} арқылы белгілейміз. Сол процесті жалғастырып, $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ тізбекшені аламыз.

Таңдауымызға орай, x_{n_k} үшін $a_k \le x_{n_k} \le b_k$, $k=1, 2, \ldots$ теңсіздіктер орынды болып, $k\to\infty$ да $\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n_k} = c$ келіп шығады. Лемма дәлелденді.

3. Тізбектің төменгі және жоғары шектері. Айталық, $\{x_n\}$ тізбек берілген болсын.

1-анықтама. Егер $\{x_n\}$ тізбектен шегі a болған тізбекше ажыратып алу мүмкін болса, онда a сан $\{x_n\}$ тізбектің *дербес шегі* деп аталады.

2-анықтама. $\{x_n\}$ тізбектің дербес шектері ішінде ең үлкені оның *жоғары шегі* деп аталады және $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ арқылы белгіленеді.

$\{x_n\}$ тізбектің дербес шектері ішінде ең кішісі оның *төменгі шегі* деп аталады және $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ арқылы белгіленеді.

1-*мысал.* $x_n=(-1)^n$: -1, 1, -1,. . . тізбектің дербес шектер жиыны {-1,1}. Демек, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=-1$ болады.

2-*мысал.* x_n : 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1,. . ., 1, n,. . . тізбек берілген болсын. Оның 1, 1, 1,. . . тізбекшесінің шегі 1, және 1, 2, 3, 4,. . ., n,. . . тізбекшесінің шегі $+\infty$ болады. Демек, бұл мысалда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=+\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=1$.

Мына теорема орынды:

11.2-теорема. Кез келген тізбектің жоғары және төменгі шектері бар.

12-§. Тізбек жинақтылығының Коши критериясы

8-параграфта бірсарынды тізбектер үшін қандай шарт орындалғанда, шегі бар болуымен таныстық. Енді, кез келген тізбек қандай шарт орындалғанда жинақталатын болады деген мәселені көріп шығамыз.

Айталық, $\{x_n\}$ тізбек берілген болсын.

3-анықтама. Егер кез келген ε оң сан алғанымызда да $n_0\in\mathbb{N}$ сан табылып, барлық n, $m>n_0$ үшін $|x_n-x_m|<\varepsilon$ теңсіздік орындалса, онда $\{x_n\}$ *фундаменталь тізбек* деп аталады.

12.1-теорема (Коши теоремасы). $\{x_n\}$ тізбек жинақты болуы үшін оның фундаменталь тізбек болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. *Қажеттілігі.* Айталық, $\{x_n\}$ жинақты тізбек және оның шегі a болсын, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Шек анықтамасы бойынша, кез келген ε оң сан алғанымызда да $n_0\in\mathbb{N}$ табылып, барлық $n>n_0$

үшін $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ теңсіздік орынды болады. Бұдан, барлық n, $m>n_0$ үшін

$$|x_n-x_m|=|(x_n-a)-(x_m-a)|\leq|x_n-a|+|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

орынды. Демек, $\{x_n\}$ фундаментал тізбек болады.

Жеткіліктілігі. Айталық $\{x_n\}$ фундаментал тізбек болсын. Онда кез келген ε оң сан алғанымызда да $n_0\in\mathbb{N}$ сан табылып, барлық n, $m>n_0$ үшін $|x_n-x_m|<\varepsilon$ теңсіздік орынды болады. Бұдан $x_m-\varepsilon<x_n<x_m+\varepsilon$ теңсіздікті аламыз. Егер m нің бір тұрақты мәнін бекітсек, онда $\{x_n\}$ тізбектің шенелген екендігі келіп шығады. Больцано-Вейерштрасс леммасына орай $\{x_n\}$ тізбектен жинақталатын $\{x_{n_k}\}$ тізбекше ажыратып алуға болады: $\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n_k}=c$. Енді, c саны $\{x_n\}$ тізбектің де шегі болатындығын көрсетеміз. k санын $|x_{n_k}-c|<\varepsilon$ және $n_k>n_0$ теңсіздіктер бір уақытта орындалатындай етіп таңдаймыз. Егер $m=n_k$ деп алсақ, онда барлық $n>n_0$ үшін $|x_n-x_{n_k}|<\varepsilon$ теңсіздік орынды болады. Бұлардан

$$|x_n-c|=|x_n-x_{n_k}+x_{n_k}-c|\leq|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-c|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

келіп шығады. Бұл $\{x_n\}$ тізбектің жинақты екендігін көрсетеді. Теорема дәлелденді.

Дәлелденген теорема тізбек жинақтылығының *Коши критериясы* (белгісі) деп айтылады.

ЖАТТЫҒУЛАР

1. Жалпы мүшесі а) $x_n = \dfrac{(-1)^n + 10}{\sqrt{n^2+1}}$; б) $x_n = \dfrac{n}{a^n}$, $(a > 1)$ болған тізбектің шенелген екенін дәлелдеңдер.

2. Жалпы мүшесі а) $x_n = 5^n - 3^n$ б) $x_n = \dfrac{3^n}{n^2}$ болған тізбектің шенелмеген екенін дәлелдеңдер.

3. Қандай да бір нөмірден бастап $\left\{\dfrac{3n+4}{n+2}\right\}$ тізбектің бірсарынды екендігін дәлелдеңдер.

4. Егер $\{x_n\}$ тізбек бірсарынды болса, онда $\left\{\dfrac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)\right\}$ тізбектің бірсарынды болатындығын дәлелдеңдер.

5. Жинақталатын тізбектердің теңдік және теңсіздіктерге байланысты қасиеттерінде «барлық $n \in \mathbb{N}$ үшін» сөз тіркесі орнына «қандай да бір нөмірден бастап» деп айтуға болатындығын дәлелдеңдер.

6. 6.2-теореманы дәлелдеңдер

7. Егер $\{x_n\}$ тізбектің шегі бар және a санына тең болса, онда $\{x_{n_k}\}$ тізбекшенің шегі бар және a санына тең болады. Дәлелдеңдер.

8. 11.1- теореманы дәлелдеңдер.

9. 11.2- теореманы дәлелдеңдер.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n!} = 0$ екендігін дәлелдеңдер.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$ екендігін дәлелдеңдер.

12. Егер $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ болса, онда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$ дерді табыңдар.

III ТАРАУ. БІР АЙНЫМАЛЫЛЫ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ОНЫҢ ШЕГІ

1-§. Функцияның анықтамасы, функцияның берілу тәсілдері. Функцияның графигі

1. Функция ұғымы. Функция ұғымы математикалық анализдің негізгі ұғымдарынан бірі болып, оның көмегімен түрлі шамалар арасындағы байланыстар үйреніледі.

Айталық, кез келген X және Y жиындар берілген болсын.

1-анықтама. Егер X жиыннан алынған әрбір x элементке қандай да бір заң немесе ережемен Y жиындағы анық бір y элемент сәйкес қойылған болса, онда X жиыны Y жиынға *бейнеленген* деп аталады.

Бұл жердегі заң немесе ереже f арқылы белгіленеді және *бейнелеу* деп аталады.

Егер X және Y жиындар арасында f бейнелеу берілген болса, ол $f: X \to Y$ деп белгіленеді.

Бейнелеу нәтижесінде x элементке сәйкес келген y элемент x элементтің *образы* деп аталады және $y=f(x)$ көріністе жазылады. Ал, x элементтің өзі y элементтің *прообразы* деп аталады.

Әдетте, X жиынын $\mathbb{R}$ нақты сандар жиынына бейнелеу X жиында берілген *функция* деп аталады.

Жоғарыда айтылғандар функцияның жалпы анықтамасы болып, біз негізінен X және Y жиындар нақты сандар жиынының жиыншалары болған жағдайды қараймыз.

2-анықтама. Егер X және Y санды жиындар берілген болып, X жиыннан алынған әрбір x санға қандай да бір заң немесе ережемен Y жиындағы анық бір y сан сәйкес қойылған болса, онда X жиында анықталған *функция берілген* деп аталады. Функция $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=\varphi(x)$, ... көріністе жазылады.

Егер функция берілген болса, онда X жиын функцияның *анықталу облысы*, Y функцияның *өзгеру облысы* деп аталады.

Сондай-ақ, x *тәуелсіз айнымалы* немесе *аргумент*, y *тәуелді айнымалы* деп аталады.

Әдетте $\{f(x)\colon x\in X\}$ жиын функцияның *мәндер жиыны* деп аталады және $E(f)$ арқылы белгіленеді. Функцияның анықталу облысы $D(f)$ арқылы белгіленеді.

1-*мысал*. Егер $X=Y=\mathbb{R}$ жиында $y=x^2$ функция берілген болса, онда $D(f)=(-\infty;+\infty)$ және $E(f)=[0;+\infty)$ болады.

2-*мысал*. Егер $X=(0;+\infty)$, $Y=R$ жиында $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ функция берілген болса, онда $D(f)=(0;+\infty)$, $E(f)=(0;1)$ болады.

Демек, функция берілген болуы үшін:

a) функцияның анықталу облысы,

b) x аргументке сәйкес келген y элементті табу ережесі немесе заң берілген болуы керек.

Мысалы, $y=\sqrt{x+1}$ түбір шығару ережесі болып, $x\in[-1;+\infty)$ болғанда ғана орынды. Сондықтан, $X=[-1;+\infty)$ және $Y=[0;+\infty)$ болады.

2. Функцияның берілу тәсілдері. Функция негізінен үш тәсілде беріледі: аналитикалық тәсіл, кесте тәсілі, график тәсілі.

2.1. Аналитикалық тәсіл. Егер y айнымалыны табу үшін x айнымалымен орындалуы керек болған амалдар тобы формула көрінісінде берілген болса, онда функция *аналитикалық тәсіл*де берілген деп аталады.

Бұл жерде амалдар дегенде қосу, азайту, көбейту, бөлу, дәрежеге көтеру, түбір шығару, логарифмдеу және басқалар түсініледі.

Қысқаша айтқанда, $y=f(x)$ функция формула көмегімен берілген болса, онда функция аналитикалық тәсілде берілген деп аталады. Бұл жердегі $f(x)$ формула функцияның *аналитикалық өрнегі* деп аталады.

Функция аналитикалық тәсілде берілгенде оның анықталу облысы берілмеуі мүмкін. Бұл жағдайда анықталу облысы дегенде, x айнымалының аналитикалық өрнек мағынаға ие болатын барлық мәндері жиыны түсініледі. Бұл жиын функцияның *табиғи анықталу облысы* деп аталады және $D(f)$ немесе $D(y)$ арқылы белгіленеді.

1-*мысал*. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ болса, $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$ болады.

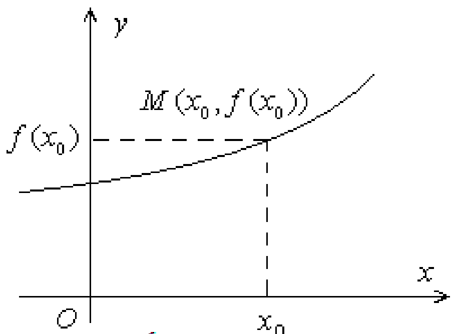
2-*мысал.* $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ болса, $D(f)=(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$ болады.

2.2. Кесте тәсілі. Кейбір жағдайларда, x аргументтің кейбір мәндеріне сәйкес келетін функция мәндері кестесі беріледі. Мұнда, функция *кесте тәсілінде* берілген деп аталады.

Функцияның кесте тәсілде берілуі екі x және y шамалар арасында байланысты тәжірибе жолымен анықтауда көмек береді. Мұнда x аргументтің бірнеше x_1, x_2, ... , x_n мәндері алынады, тәжрибеде y айнымалының x аргументке сәйкес y_1, y_2, ... , y_n мәндері анықталады және кесте түзіледі.

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

2.3. График тәсіл. Егер $y=f(x)$ функция X жиында берілген болса, онда жазықтықта Декарт координаталар системасы қаралады. Жазықтықтың барлық $(x,f(x))$ нүктелерінен тұратын $\{M(x,f(x)): \ x\in X\}$ жиын $y=f(x)$ функция-ның *графигі* деп аталады.



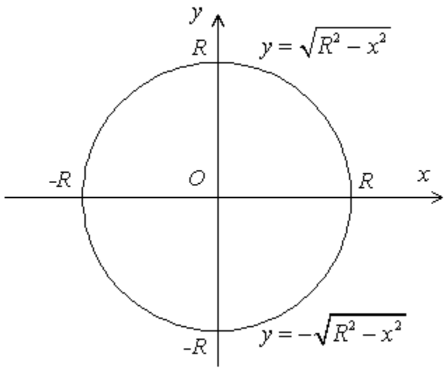
6-сурет

Егер жазықтықта функцияның графигі берілген болса, онда функция *график тәсілде* берілген деп аталады. Егер функция график тәсілде берілген болса, онда функцияның x_0 нүктедегі мәнін табу үшін, сол нүктеден ордината осіне параллель түзу өткізіп, оның графикпен қиылысқан нүктесінің y_0 ординатасын аламыз, бұл сан $f(x_0)$ болады (6-сурет).

Функцияның графигі жазықтықтағы қандай да бір қисықтан немесе бірнеше нүктелер жиынынан тұратын болуы мүмкін. Бірақ жазықтықтағы кез келген қисық немесе нүктелер жиыны функцияның графигі бола алмайды.

Координаталар жазықтығында қандай да бір ℓ қисық берілген болсын. Абсцисса осінің әрбір нүктесінен, ордината осіне параллель жүргізілген түзу ℓ қисықты артығымен бір нүктеде қиып өтсе, онда ℓ қисық қандай да бір функцияның графигі болады.

Мысалы, $x^2+y^2=R^2$ шеңберді алсақ, бұл шеңбер ешбір функцияның графигі бола алмайды. Бірақ шеңбердің жоғары бөлігі $y=\sqrt{R^2-x^2}$ функцияның, төменгі бөлігі $y=-\sqrt{R^2-x^2}$ функцияның графигі болады (7-сурет). Енді математикалық анализде кездесетін кейбір тамаша функциялардың берілуімен танысамыз.



7-сурет

3-*мысал*. Төмендегідей анықталған функция *Дирихле функциясы* деп аталады.

$$D(x)=\begin{cases} 1, & \text{егер } x \text{ рационал сан болса}, \\ 0, & \text{егер } x \text{ иррационал сан болса}. \end{cases}$$

Бұл функция үшін $D(0)=1$, $D(1{,}2)=1$, $D(\sqrt{3})=0$, $D(\pi)=0$ болады.

4-*мысал*. Тағы бір тамаша функция төмендегідей анықталады:

$$signx=\begin{cases} -1, & \text{егер } x<0 \text{ болса}, \\ 0, & \text{егер } x=0 \text{ болса}, \\ 1, & \text{егер } x>0 \text{ болса}. \end{cases}$$

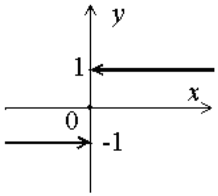
Бұл функция графигі 8-суретте бейнеленген. Бұл функция үшін $sign2=1$, $sign\sqrt{3}=1$, $sign0=0$, $sign(-6)=-1$ болуы айқын.

5-*мысал*. $y=[x]$ функция графигі 9-суретте бейнеленген. Бұл жердегі $[x]$ белгі, x санының бүтін бөлігін білдіреді.

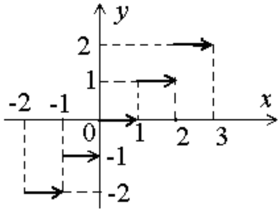
Мысалы, $[2{,}5]=2$, $[5]=5$, $[\pi]=3$, $[-1{,}5]=-2$, $[-3{,}7]=-4$.

6-*мысал*. $y=\{x\}$ функция графигі 10-суретте бейнеленген. Бұл жердегі $\{x\}$ белгі, x санының бөлшек бөлігін білдіреді. Анықтама бойынша $x=[x]+\{x\}$ болады. $\{x\}=x-[x]$ жазу есептеуді жеңілдетеді.

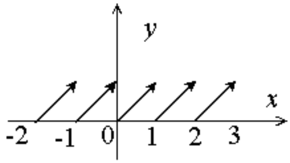
Мысалы, $\{2{,}5\}=0{,}5$. $\{5\}=0$, $\{\pi\}=\pi-3$, $\{-1{,}2\}=0{,}8$.



8-сурет



9-сурет



10-сурет

3. Функцияларда орындалатын амалдар. Айталық, X жиында анықталған екі $f(x)$ және $g(x)$ функциялар берілген болсын.

Егер кез келген $x \in X$ үшін $f(x)=g(x)$ болса, онда бұл функциялар X жиында *өзара тең функциялар* деп аталады.

X жиында берілген $f(x)$ және $g(x)$ функциялардың қосындысы $F_1(x)=f(x)+g(x)$, азайтындысы $F_2(x)=f(x)-g(x)$, көбейтіндісі $F_3(x)=f(x)g(x)$ және бөліндісі $F_4(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x)\neq 0$) тағы да функция болады.

Мысалы, $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2+1$ функциялар $X=\mathbb{R}$ жиында берілген болса, онда $F_1(x)=2x^2+1$, $F_2(x)=-1$, $F_3(x)=x^4+x^2$, $F_4(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ X жиында анықталған функциялар болады.

2-§. Функциялардың негізгі сыныптары. Күрделі функция, кері функция ұғымдары

1. Шенелген және шенелмеген функциялар.

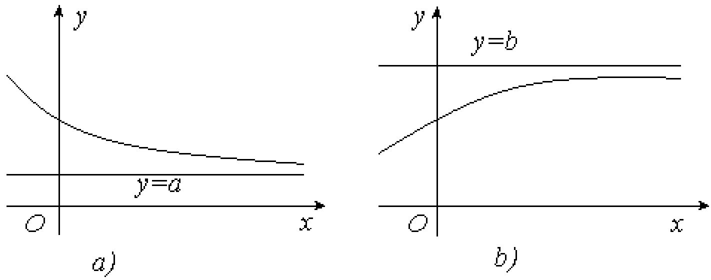
1-анықтама. a) Егер $f(x)$ функция X жиында анықталған, оның мәндер жиыны $E(f)=\{f(x)\colon x\in X\}$ жоғарыдан шенелген болса, онда $f(x)$ функция X жиында *жоғарыдан шенелген* деп аталады. Басқаша айтқанда, егер қандай да бір b сан табылып, кез келген $x\in X$ үшін $f(x)\leq b$ теңсіздік орындалса, $f(x)$ функция жоғарыдан шенелген деп аталады.

b) Егер $f(x)$ функция X жиында анықталған, оның мәндер жиыны $E(f)=\{f(x)\colon x\in X\}$ төменнен шенелген болса, онда $f(x)$ функция X жиында *төменнен шенелген* деп аталады. Басқаша айтқанда, егер қандай да бір b сан табылып, кез келген $x\in X$ үшін

$f(x) \geq b$ теңсіздік орындалса, $f(x)$ функция төменнен шенелген деп аталады.

2-анықтама. Егер $f(x)$ функция X жиында төменнен де, жоғарыдан да шенелген болса, ол сол жиында *шенелген* функция деп аталады.

Жоғарыдан шенелген функцияның графигі, қандай да бір түзуден төменде (11-*a*) сурет), төменнен шенелген функцияның графигі қандай да бір түзуден жоғарыда жайласқан болады. (11-*b*) сурет).



11-сурет

3-анықтама. Егер $y=f(x)$ функцияның мәндер жиыны $E(f)$ жоғарыдан (төменнен) шенелмеген болса, онда $f(x)$ функция жоғарыдан (төменнен) *шенелмеген* деп аталады.

1-*мысал.* $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ функция $X=(-\infty;+\infty)$ жиында шенелген, себебі $E(f)=(0;1]$ шенелген жиын.

2-*мысал.* $f(x)=sinx$ шенелген функция, себебі $E(f)=[-1;1]$.

3-*мысал.* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ функция $X=(0;5)$ жиында шенелмеген, себебі $E(f)=(0,2;+\infty)$ шенелмеген жиын.

4-*мысал.* $f(x)=lgx$ функция $X=(0;+\infty)$ жиында шенелмеген, себебі $E(f)=(\infty;+\infty)$ шенелмеген жиын.

2. Жұп және тақ функциялар.

4-анықтама. Егер кез келген $x \in X$ үшін $-x \in X$ болса, онда X жиын *симметриялық жиын* (O нүктеге қатысты) деп аталады.

5-*мысал.* $X_1=(-a;a)$, $X_2=(-\infty;+\infty)$, $X_3=[-a;a]$ жиындар симметриялық жиын болады.

6-*мысал.* $X_4=[-2;3]$, $X_5=(0;+\infty)$ жиындар симметриялық жиын емес.

Айталық $f(x)$ функция X симметриялық жиында берілген болсын.

5-анықтама. Егер кез келген $x\in X$ үшін $f(-x)=f(x)$ болса, онда $f(x)$ *жұп функция* деп аталады.

6-анықтама. Егер кез келген $x\in X$ үшін $f(-x)=-f(x)$ болса, онда $f(x)$ *тақ функция* деп аталады.

Мысалы, $f(x)=x^2$, $f(x)=x^6+1$, $f(x)=x^{2n}$ функциялар жұп, $f(x)=x^3$, $f(x)=sinx$, $f(x)=lg(x+\sqrt{x^2+1})$ функциялар тақ.

Солардың бірі, $f(x)=lg(x+\sqrt{x^2+1})$ функцияның тақ екендігін көрсетейік:

$$f(-x)=lg(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=lg\frac{(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})}{(x+\sqrt{x^2+1})}=$$

$$=lg\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})}=lg(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}=-lg(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

Демек, $f(x)=lg(x+\sqrt{x^2+1})$ тақ функция.

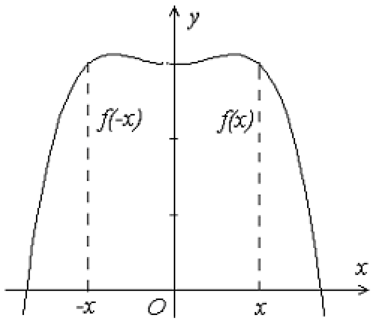
Жұп функция үшін $f(-x)=f(x)$ болғандықтан, оның графигі ордината осіне қатысты симметриялық болады (12-сурет).

Тақ функция үшін $f(-x)=-f(x)$ болғандықтан, тақ функцияның графигі координата басына қатысты симметриялық болады (13-сурет).

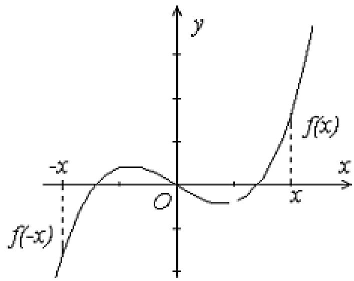
Сондықтан, жұп функциялар графигін сызуда, графиктің $x\geq 0$ ге сәйкес келген бөлігін сызу жеткілікті. Графиктің екінші бөлігі сол сызылған графикті ордината осіне қатысты симметриялық алмастыру көмегімен сызылады.

Тақ функцияда да сондай болады, тек симметриялық алмастыру, координаталар басына қатысты алынады.

Тақ та, жұп та болмайтын функциялар бар. Мысалы, $f(x)=x^2+x^3$, $g(x)=2+x^5$, $h(x)=tgx+x^2$.



12-сурет



13-сурет

3. Бірсарынды функциялар. Айталық, $y=f(x)$ функция X жиында берілген болсын.

7-анықтама. Егер X жиыннан алынған кез келген x_1 және x_2 үшін $x_1<x_2$ теңсіздіктен $f(x_1)<f(x_2)$ теңсіздік келіп шықса, онда функция X жиында *өспелі* деп аталады.

8-анықтама. Егер X жиында алынған кез келген x_1 және x_2 үшін $x_1<x_2$ теңсіздіктен $f(x_1)>f(x_2)$ теңсіздік келіп шықса, онда $f(x)$ функция X жиында *кемімелі* деп аталады.

9-анықтама. Егер X жиында алынған кез келген x_1 және x_2 үшін $x_1<x_2$ теңсіздіктен $f(x_1)\leq f(x_2)$ (немесе $f(x_1)\geq f(x_2)$) теңсіздік келіп шықса, онда $f(x)$ функция X жиында *кемімейтін* (немесе *өспейтін*) деп аталады.

Өспелі, кемімелі, кемімейтін, өспейтін функциялар жалпы атаумен *бірсарынды функциялар* деп аталады.

7-*мысал*. $y=2x+1$ функция $(-\infty;+\infty)$ жиынында өспелі, себебі $x_1<x_2$ болса, онда $f(x_2)-f(x_1)=2x_2+1-(2x_1+1)=2(x_2-x_1)>0$ болады, бұдан $f(x_1)<f(x_2)$ келіп шығады.

8-*мысал*. $y=-x^3$ функция $(-\infty;+\infty)$ жиынында кемімелі.

Шынында да, егер $x_1<x_2$ болса, онда

$$f(x_2)-f(x_1)=-(x_2)^3+(x_1)^3=(x_1)^3-(x_2)^3=(x_1-x_2)((x_1+\frac{x_2}{2})^2+\frac{3}{4}(x_2)^2)<0$$

болады, бұдан $f(x_1)>f(x_2)$ келіп шығады.

4. Периодты функциялар. Айталық, $Y\subset\mathbb{R}$ жиын берілген болсын.

10-анықтама. Егер $l\neq 0$ және кез келген $x\in X$ үшін $x-l\in X$ және $x+l\in X$ болса, онда X *периодты жиын* және l оның *периоды* деп аталады.

Периодты жиынның ең кіші оң периоды оның *негізгі периоды* деп аталады.

9-*мысал*. $X=(-\infty;+\infty)$ периодты жиын, кез келген l саны оның периоды болады.

Шынында да, кез келген $x-l$, $x+l\in(-\infty;+\infty)$ болуы айқын. Бұл жиынның негізгі периоды жоқ.

10-*мысал*. Барлық бүтін сандар жиыны $\mathbb{Z}$ периодты, кез келген n бүтін сан оның периоды болады. Бұл жиынның негізгі периоды $l=1$.

11-*мысал*. Барлық рационал сандар жиыны $\mathbb{Q}$ периодты жиын болады. Кез келген $l\neq 0$ рационал сан оның периоды болуы айқын. Ешқандай иррационал сан $\mathbb{Q}$ үшін период бола алмайды. Шынында да, егер l иррационал сан және x рационал сан болса, Онда $x-l$ және $x+l$ сандардың әрбірі иррационал сан болады, яғни $x\pm l\notin\mathbb{Q}$.

Периодты жиын анықтамасынан, егер l саны X жиынның периоды болса, онда $\pm l, \pm 2l, \ldots, \pm nl, \ldots$ сандардың әрбірі X жиынның периоды болатындығы келіп шығады. Яғни, кез келген $x_0\in X$ және әрбір n натурал сан үшін $x_0-nl\in X$, $x_0+nl\in X$ болады.

Бұдан периодты жиындардың төмендегі қасиеті келіп шығады.

1°. Периодты жиындарда қалағанша үлкен оң сандар және қалағанша кіші теріс сандар бар.

Демек, жоғарыдан немесе төменнен шенелген жиындар периодты жиын бола алмайды.

Мысалы, $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, $X_1=(a;+\infty)$, $X_2=(-\infty;b)$, $X_3=[a;b]$ жиындардың біреуі де периодты жиын емес.

Егер X жиын l периодты жиын болып, $x_0\notin X$ болса, онда кез келген n натурал сан үшін $x_0\pm nl\notin X$ болады.

Бұдан төмендегі қасиет келіп шығады.

2°. Егер X периодты жиынға қандай да бір x_0 сан тиісті болмаса, онда бұл жиынға тиісті болмаған сандар шектеусіз көп болады.

Айталық $y=f(x)$ функция берілген және оның анықталу облысы X болсын.

11- анықтама. Егер қандай да бір l ($l\neq 0$) сан және кез келген $x\in X$ үшін $x-l\in X$, $x+l\in X$, және $f(x+l)=f(x)$ теңдік орынды болса, онда $y=f(x)$ функция *периодты функция*, l оның *периоды* деп аталады.

Анықтамадан $y=f(x)$ функция l периодты функция болуы үшін

a) оның анықталу облысы болған X жиын l периодты жиын,

b) кез келген $x\in X$ үшін $f(x+l)=f(x)$ теңдік орынды болуы керек.

Егер сол шарттардан кемінде бірі орындалмаса, онда $f(x)$ функция периодты функция болмайды.

12-*мысал.* $y=\cos\left(\sqrt{x}\right)^2$ функция периодты емес, себебі оның анықталу облысы $D(y)=[0;+\infty)$ периодты жиын емес.

13-*мысал.* $y=\sin\dfrac{1}{x}$ функция периодты емес, себебі оның анықталу облысы $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ жиын (2^o қасиет) периодты емес.

11-анықтамадан егер l саны $y=f(x)$ функцияның периоды болса, онда $2l$ сан да оның периоды болатындығы келіп шығады.

Шынында да, $f(x+2l)=f((x+l)+l)=f(x+l)=f(x)$ болып, $f(x+2l)=f(x)$ теңдік орынды. Сол сияқты, $-l$ саны да $y=f(x)$ функцияның периоды екендігін көрсетуге болады: $f(x)=f((x-l)+l)=f(x-l)$.

Бұлардан кез келген $n\in\mathbb{Z}$ үшін $\pm nl$ $y=f(x)$ функцияның периоды болатындығы келіп шығады.

Периодты функцияның ең кіші оң периоды (егер ол бар болса), оның *негізгі периоды* деп аталады.

14-*мысал.* $f(x)=\sin ax$ және $f(x)=\cos(ax+b)$ ($a\neq 0$) функциялардың периодты екенін көрсетіңдер және олардың негізгі периодын табыңдар.

Шешу. Функцияның анықталу облысы $D(y)=(-\infty;+\infty)$ периодты жиын және кез келген l саны бұл жиынның периоды болады.

Енді, $f(x+l)=f(x)$ теңдікті қанағаттандыратын l санды табамыз. Шартқа орай, кез келген x үшін $\sin a(x+l)=\sin ax$ болуы қажет. Бұдан, $\sin(ax+al)-\sin ax=0$, $2\cos(ax+\dfrac{al}{2})\sin\dfrac{al}{2}=0$ болады. Соңғы теңдік x айнымалыға байланысты болмаған жағдайда орындалуы үшін sin

$\frac{al}{2}=0$ болуы шарт. Бұдан $l=\frac{2n\pi}{a}$, $n\in\mathbb{Z}$ сандарының әрбіреуі берілген функцияның периоды болады. Бұларды тексеріп, $l=\frac{2\pi}{|a|}$ сан $f(x)=\sin ax$ функцияның негізгі периоды болатындығын анықтаймыз.

Дәл солай, $f(x)=\cos(ax+b)$ функцияның да негізгі периоды $l=\frac{2\pi}{|a|}$ болатындығын көрсетуге болады.

5. Күрделі функция. Айталық, $u=\varphi(x)$ функция X облысында анықталған және мәндер жиыны $E(\varphi)$ болсын. Егер $y=f(u)$ функция $E(\varphi)$ жиында анықталған болса, онда $y=f(\varphi(x))$ функция X жиында анықталған *күрделі функция* немесе φ және f *функциялардың композициясы* деп аталады және $f\circ\varphi$ арқылы белгіленеді:

$f\circ\varphi(x)=f(\varphi(x))$.

15-*мысал*. Егер $y=\sqrt{u}$, $u=1-x^2$ болса, онда $y=\sqrt{1-x^2}$ функция [-1;1] жиында анықталған күрделі функция болады.

16-*мысал*. Егер $y=\sqrt{1+u^2}$ және $u=lgx$ болса, онда $y=\sqrt{1+\lg^2 x}$ функция $(0;+\infty)$ жиында анықталған күрделі функция болады.

17-*мысал*. $y=e^{x^2}$ функцияны $u=x^2$ және $y=e^u$ функциялардан құралған күрделі функция деп қарастыруға болады.

6. Кері функция. Айталық, $y=f(x)$ функция X жиында берілген, $Y=E(f)=\{f(x): x\in X\}$ оның мәндер жиыны болсын. Енді Y жиынын X жиынға бейнелейтін функция, яғни кері функция бар немесе жоқ екендігін зерттейміз. Y жиыннан алынған кез келген y_0 үшін, X жиында $y_0=f(x_0)$ теңдікті қанағаттандыратын x_0 саны бар. Бұндай сан бір, немесе бірнеше болуы мүмкін.

Егер Y жиыннан алынған әрбір y үшін X жиында $y=f(x)$ теңдікті қанағаттандыратын x тек біреу болса, онда $x=\varphi(y)$ функция бар болады. Бұл функция $y=f(x)$ функцияға *кері функция* деп аталады.

Мысалы, $X=Y=(-\infty;+\infty)$ жиынында берілген $y=\sqrt[3]{x}$ функциясы $x=y^3$ функцияға кері функция болады. $y=f(x)$ функцияға кері функция $x=f^{-1}(y)$ деп белгіленеді.

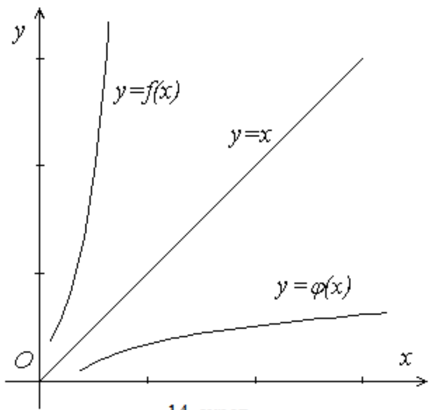
Егер $x=\varphi(y)$ функция $y=f(x)$ функцияға кері функция болса, онда $y=f(x)$ функция $x=\varphi(y)$ функцияға кері функция болады. Сол себепті, бұл екі функцияны *өзара кері функциялар* деп аталады.

$y=f(x)$ функцияда x аргумент, y функция деп аталуы мәлім. Оған кері болған $x=\varphi(y)$ функцияда x және y орнын алмастырып $y=\varphi(x)$ функцияны аламыз. Сонымен, бір түрлі белгілеу болғанда да, $y=\varphi(x)$ функция $y=f(x)$ функцияға кері функция деп қаралады.

Айталық, $y=f(x)$ және $y=\varphi(x)$ функциялар берілген болсын. Егер $f(\varphi(x))=x$ және $\varphi(f(x))=x$ теңдіктер орынды болса, онда $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялар өзара кері функциялар болады.

Мысалы, $y=3x-1$ және $y=\frac{1}{3}(x+1)$ берілген болсын. Онда $(3\cdot\frac{1}{3}(x+1)-1)=x$ және $\frac{1}{3}((3x-1)+1)=x$ қатынастар-дан бұл екі функция өзара кері функциялар екендігі келіп шығады.

Өзара кері $y=f(x)$ және $y=\varphi(x)$ функциялардың графиктері $y=x$ түзуге қатысты симметриялы болады (14-сурет).



14-сурет

3-§. Функцияның нүктедегі шегінің анықтамалары

1. Функцияның нүктедегі шегі. Айталық, қандай да бір X санды жиын берілген болсын.

1-анықтама. Егер a нүктенің кез келген маңайында X жиынның a санынан өзгеше кемінде бір нүктесі бар болса, онда a нүкте X жиынның *шектік нүктесі* деп аталады.

1-*мысал.* $X_1=[2;5]$ сегменттің әрбір нүктесі оның шектік нүктесі болады. Бұл жиынның басқа шектік нүктелері жоқ.

2-*мысал.* X_2=[0;3) жиынның шектік нүктелері [0;3] сегмент нүктелерінен тұрады, яғни бұл жиынның әрбір нүктесі және 3 нүкте оның шектік нүктелері болады. Бірақ 3 нүкте берілген жиынға тиісті емес.

Соңғы мысалдан жиынның шектік нүктелері оған тиісті болуы да, тиісті болмауы да мүмкіндігі көрінеді.

Шектік нүктенің жоғарыдағы анықтамасына тең күшті болған тағы бір анықтамасын келтіреміз.

2-анықтама. Егер a нүктенің кез келген маңайында X жиынның шектеусіз көп нүктелері бар болса, онда a нүкте X жиынның *шектік нүктесі* деп аталады.

Мына теорема орынды:

3.1-теорема. a нүкте X жиынның *шектік нүктесі* болуы үшін a нүктенің кез келген маңайында X жиынның шектеусіз көп нүктелері болуы қажетті және жеткілікті.

Бұл теорема жоғарыдағы екі анықтаманың тең күшті екендігін тұжырымдайды.

Дәлелдеу. Егер a нүкте, 2-анықтама бойынша X жиынның шектік нүктесі болса, онда ол 1-анықтама бойынша да шектік нүкте болуы анық.

Айталық a нүкте, 1-анықтама бойынша X жиынның шектік нүктесі болсын. Енді, a нүктенің кез келген (a-ε; a+ε) маңайын қараймыз. Анықтама бойынша, бұл маңайда X жиынның a дан өзгеше кемінде бір нүктесі бар, оны x_1 деп алайық. Енді, $\varepsilon_1=|a-x_1|$ белгілеу енгізіп, a нүктенің ($a-\varepsilon_1$; $a+\varepsilon_1$) маңайын алсақ, бұл маңайда да X жиынның a дан өзгеше кемінде бір нүктесі бар, оны x_2 деп алайық. Егер $\varepsilon_2=|a-x_2|$ белгілеу енгізсек, онда a нүктенің ($a-\varepsilon_2$; $a+\varepsilon_2$) маңайында да X жиынның a дан өзгеше кемінде бір x_3 нүктесі бар. Бұл процесті жалғастырып $x_1,\ x_2,\ x_3, ..., x_n, ...\in X$ нүктелер жиынын аламыз. Бұл нүктелердің әрбірі a нүктенің (a–ε; a+ε) маңайына тиісті болады.

Демек, a нүкте 2-анықтама бойынша X жиынның шектік нүктесі болады. Теорема дәлелденді.

Айталық, a нүкте X жиынның шектік нүктесі болсын. Онда a нүктенің әрбір ($a-\frac{1}{n}$; $a+\frac{1}{n}$) маңайында X жиынның, a дан өзгеше кемінде бір x_n нүктесі бар, яғни $a-\frac{1}{n}<x_n<a+\frac{1}{n}$ болады. Бұдан $n\to\infty$ болғанда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ және $x_n\neq a$ екендігі келіп шығады.

Демек, a нүкте X жиынның шектік нүктесі болса, онда X жиын нүктелерінен құралған және a ға жинақталатын $\{x_n\}$, $x_n\neq a$ тізбекті ажыратып алуға болады.

Сондай-ақ, a нүктенің кез келген маңайында X жиынның a-дан өзгеше шектеусіз көп нүктелері бар болғандықтан, a-ға жинақталатын $\{x_n\}$ тізбектерді шектеусіз көп тәсілде таңдап алуға болады.

Кез келген Δ оң сан үшін $(\Delta;+\infty)$ интервал $+\infty$ «нүкте»нің, $(-\infty;\Delta)$ интервал $-\infty$ «нүкте»нің, $(-\infty;\Delta)\cup(\Delta;+\infty)$ жиын есе ∞ «нүкте»нің *маңайы* деп аталады. Бұл жағдайда да, сәйкесінше $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$ болатын $\{x_n\}$ тізбектерді шектеу-сіз көп тәсілдерде таңдап алуға болатындығын ескертіп кетеміз.

Айталық, $y=f(x)$ функция X жиында анықталған және a нүкте X жиынның шектік нүктесі болсын.

3-анықтама (Гейне). Егер X жиыннан алынған және a ға жинақталатын кез келген $\{x_n\}$, $x_n\neq a$ тізбек үшін, функция мәндерінен түзілген $\{f(x_n)\}$ тізбектің әрқашан жалғыз b шегі бар болса, онда b саны $f(x)$ функцияның *а нүктедегі шегі* деп аталады.

Функция шегі $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ деп белгіленеді, кейде "$x\to a$ да $f(x)\to b$" көрінісінде де жазылады.

Әдетте бұл анықтама функция шегінің тізбектер тіліндегі анықтамасы деп аталады.

3-*мысал*. $f(x)=3-x^2$ функцияның $x=1$ нүктедегі шегі 2 екендігін көрсетіңдер.

Шешу. $x_n\neq 1$ және $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$ болатын $\{x_n\}$ тізбек аламыз. Онда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(3-x_n^2)=3-\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2=3-1=2.$

Демек, анықтама бойынша $\lim\limits_{x\to 1}(3-x^2)=2$ болады.

4-*мысал*. $f(x)=\sin x$ функцияның $x\to+\infty$ да шегі жоқ екендігін көрсетіңдер.

Шешу. Шегі $+\infty$ болған $x_n=n\pi$ және $x'_n=(2n+\frac{1}{2})\pi$ тізбектерді аламыз. Онда сәйкесінше $f(x_n)=\sin n\pi=0$, $f(x'_n)=\sin(2n+\frac{1}{2})\pi=1$ болғандықтан, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)=1$ болады. Бұл $x\to+\infty$ да $f(x)=\sin x$ функцияның шегі жоқ екендігін көрсетеді, себебі анықтама бойынша функция мәндерінен түзілген тізбектердің шегі жалғыз болуы керек.

Функция шегін «ε-δ» тілінде де анықтама беруге болады.

4-анықтама. (Коши). Егер кез келген ε оң сан алғанда да қандай да бір δ оң сан табылып, x айнымалының $0<|x-a|<\delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық мәндерінде $|f(x)-b|<\varepsilon$ теңсіздік орынды болса, онда b сан $f(x)$ функцияның a нүктедегі шегі деп аталады.

5-*мысал.* $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5$ екенін дәлелдеңдер.

Шешу. $f(x)=3x-1$ функцияны қараймыз және кез келген $\varepsilon>0$ сан аламыз. Онда

$$|f(x)-5|<\varepsilon \Leftrightarrow |3x-1-5|<\varepsilon \Leftrightarrow |3(x-2)|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$$

болады. Егер $\varepsilon>0$ сан үшін $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ деп алсақ, онда $|x-2|<\delta$ болғанда, $|f(x)-5|<\varepsilon$ теңсіздік орындалады. Демек, $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5$.

6-*мысал.* $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-3)=6$ екенін дәлелдеңдер.

Шешу. $f(x)=x^2-3$ болсын. Кез келген $\varepsilon>0$ сан аламыз. Онда

$$|f(x)-6|<\varepsilon \Leftrightarrow |x^2-3-6|<\varepsilon \Leftrightarrow |x^2-9|<\varepsilon \Leftrightarrow |x+3||x-3|<\varepsilon$$

қатынастар орынды. Егер δ ны 1 ден кіші деп алсақ, онда

$$|x-3|<\delta \Leftrightarrow 3-\delta<x<3+\delta \Leftrightarrow 2<x<4$$

болады. Бұдан, $|x+3|<7$ келіп шығады. Онда $7|x-3|<\varepsilon$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық x терде $|x+3|\cdot|x-3|<\varepsilon$ болады. Демек, кез келген ε оң сан үшін $\delta=min\{1,\frac{\varepsilon}{7}\}$ деп алсақ, онда

$$|f(x)-6|=|x+3|\cdot|x-3|<7\cdot\frac{\varepsilon}{7}<\varepsilon$$

болады. Бұл анықтама бойынша $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-3)=6$ екенін білдіреді.

5-анықтама. Егер кез келген Δ оң сан алғанда да қандай да бір δ оң сан табылып, x айнымалының $0<|x-a|<\delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық мәндерінде $|f(x)|\geq\Delta$ теңсіздік орынды болса, онда $f(x)$ функцияның a нүктедегі шегі ∞ деп аталады. Бұл жағдай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ арқылы белгіленеді.

Егер x тің a ға жақын мәндерінде $f(x)>0$ болса, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, егер $f(x)<0$ болса, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ деп жазылады.

Функцияның шексіздегі шегі ұғымын да қарастыруға болады.

Кез келген ε оң сан алғанда да қандай да бір Δ оң сан табылып, $|x|>\Delta$ (сәйкесінше $x>\Delta$, $x<-\Delta$) болған барлық $x\in X$ терде $|f(x)-b|<\varepsilon$ теңсіздік орынды болса, онда b сан $f(x)$ функцияның $x\to\infty$ (сәйкесінше $x\to-\infty$, $x\to+\infty$) дегі шегі деп аталады. Бұл жағдай $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ (сәйкесінше $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$) көріністе жазылады.

4-§. Шегі бар болған функциялардың қасиеттері

Айталық $y=f(x)$ функция X жиында анықталған және a сан X жиынның шектік нүктесі болсын.

1°. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $b>p$ ($b<q$) болса, онда a нүктенің белгілі бір маңайында ($x\neq a$) $f(x)>p$ ($f(x)<q$) болады.

Дәлелдеу. Айталық $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $b>p$ болсын. Онда ε оң санды $0<\varepsilon<b-p$ теңсіздікті қанағаттандыратындай таңдап аламыз. Шек анықтамасы бойынша ε үшін қандай да бір δ оң сан табылып, $0<|x-a|<\delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын $x\in X$ терде $|f(x)-b|<\varepsilon$ болады. Бұдан $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$ келіп шығады. Егер $b-\varepsilon>p$ теңсіздікті еске алсақ, онда $f(x)>p$ болады.

2°. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ және $b>0$ ($b<0$) болса, онда a нүктенің белгілі бір маңайында ($x\neq a$) $f(x)>0$ ($f(x)<0$) болады.

3°. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ болса, онда x тің a ға жақын ($x\neq a$) мәндерінде $f(x)$ функция шенелген болады.

Дәлелдеу. Шек анықтамасы бойынша ε оң санға сәйкес $\delta>0$ сан табылып, x тің $a-\delta<x<a+\delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын, a дан өзгеше барлық мәндерінде $|f(x)-b|<\varepsilon$ немесе $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$ болады. Демек, $f(x)$ функция $(a-\delta;a+\delta)\setminus\{a\}$ жиында шенелген.

4°. Егер a нүктенің маңайынан алынған, a дан өзгеше барлық x терде $f(x)\le g(x)\le \varphi(x)$ және $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$ болса, онда $g(x)$ функцияның a нүктедегі шегі бар және $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ теңдік орынды болады.

Дәлелдеу. Шартқа орай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. Онда ε оң санға сәйкес δ_1 оң сан табылып, $0<|x-a|<\delta_1$ теңсіздік орынды болатын барлық x терде $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$ болады. Сондай-ақ, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$ болғандықтан, сол ε оң сан үшін δ_2 оң сан табылып, $0<|x-a|<\delta_2$ теңсіздік орынды болатын барлық x терде $b-\varepsilon<\varphi(x)<b+\varepsilon$ болады. Егер $\delta=min\{\delta_1,\delta_2\}$ деп алсақ, онда $0<|x-a|<\delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық x терде $b-\varepsilon<f(x)\le\varphi(x)<b+\varepsilon$ теңсіздіктер орынды болады. Енді, $f(x)\le g(x)\le\varphi(x)$ екендігінен және соңғы теңсіздіктерден $b-\varepsilon<g(x)<b+\varepsilon$ келіп шығады. Демек, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$.

5°. Егер $f(x)$ функцияның x айнымалы a ға ұмтылғандағы шегі бар болса, онда бұл шек жалғыз болады.

Бұл қасиеттің дәлелдеуі тізбектер үшін айтылған, дәл осыған ұқсас қасиеттің дәлелдеуіне ұқсас. Оны оқырманға қалдырамыз.

5-§. Бір жақты шектер. Бір жақты шектер және функцияның шенеулі шегі бар болу шарты

1. Функцияның бір жақты шектері.

1-анықтама. Егер кез келген δ оң сан үшін $(a-\delta;a)$ интервалда X жиынның кемінде бір нүктесі бар болса, онда a нүкте X жиынның *сол шектік нүкте*сі деп аталады.

2-анықтама. Егер кез келген δ оң сан үшін $(a;a+\delta)$ интервалда X жиынның кемінде бір нүктесі бар болса, онда a нүкте X жиынның *оң шектік нүкте*сі деп аталады.

Айталық, $y=f(x)$ функция X жиында анықталған, ал a нүкте X жиынның сол (немесе оң) шектік нүктесі болсын.

3-анықтама (Гейне). Егер X жиынның нүктелерінен түзілген және әрбір мүшесі a дан үлкен (сәйкесінше, кіші) болып, a ға жинақталатын кез келген $\{x_n\}$ тізбек алғанымызда да, функция мәндерінен түзілген $\{f(x_n)\}$ тізбек әрқашан жалғыз b ға ұмтылса, b сан $f(x)$ функцияның a нүктедегі *оң* (сәйкесінше, *сол*) *шегі* деп аталады.

Функцияның оң шегін $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$ немесе $f(a+0)=b$, сол шегін $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$ немесе $f(a\text{-}0)=b$ арқылы белгіленеді. Егер $a=0$ болса, $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=f(+0)$, $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=f(\text{-}0)$ деп белгіленеді.

Мысалы, $f(x)=[x]$ функция үшін $a=1$ болсын. Егер $0<x_n<1$ болатын $\{x_n\}$ тізбек алсақ, онда $f(x_n)=[x_n]=0$ болады. Егер $1<x_n<2$ болатын $\{x_n\}$ тізбек алсақ, онда $f(x_n)=[x_n]=1$ болады.

Демек, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=0$. Бұл мысалда сол және оң шектер бар, бірақ бір-біріне тең емес.

Функцияның бір жақты шектеріне мынадай да анықтама беруге болады.

4-анықтама (Коши). Егер кез келген ε оң сан алғанда да қандай да бір δ оң сан табылып, x тің $a<x<a+\delta$ ($a\text{-}\delta<x<a$) теңсіздікті қанағаттандыратын барлық мәндерінде $|f(x)\text{-}b|<\varepsilon$ теңсіздік орындалса, b сан $f(x)$ функцияның a нүктедегі *оң (сол)* шегі деп аталады.

Функцияның сол және оң шектері оның *бір жақты шектері* деп аталады. Егер a нүкте, бір уақытта X жиынның сол және оң шектік нүктесі болса, онда мына теорема орынды.

2-теорема. $f(x)$ функция, a нүктеде шегі бар болуы үшін, сол нүктеде оның сол және оң шектері бар және $f(a\text{-}0)=f(a+0)$ теңдік орынды болуы қажетті және жеткілікті.

Бұл теореманы дәлелдеуді оқырманға қалдырамыз.

6-§. Шегі бар болған функцияларға қолданылатын арифметикалық амалдар

Айталық, $f(x)$ және $g(x)$ функциялар X жиында анықталған, a нүкте X жиынның шектік нүктесі болсын.

6.1-теорема. Егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялардың a нүктеде шегі бар болса, онда сол нүктеде

a) $f(x) \pm g(x)$, b) $f(x) \cdot g(x)$, c) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0)$

функциялардың шегі бар және

a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

b) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

формулалар орынды.

Дәлелдеу. Айталық, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ және $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{g}(x) = c$ болсын. Онда X жиындағы a жинақталатын кез келген $\{x_n\}$, $x_n \neq a$ тізбек үшін $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{g}(x_n) = c$ болады. Жинақты тізбектің қасиеттерінен $\lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n) \pm \mathrm{g}(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \pm \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{g}(x_n) = b \pm c$ теңдік келіп шығады. Демек, $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm \mathrm{g}(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} \mathrm{g}(x)$ болады.

Сол сияқты қалған формулаларды да дәлелдеуге болады. Теорема дәлелденді.

Салдар. Егер $f(x)$ функция a нүктеде шегі бар болса, онда $kf(x)$ функцияның да шегі бар және $\lim\limits_{x\to a}(kf(x)) = k \lim\limits_{x\to a} f(x)$ болады, мұнда k қандай да бір тұрақты сан.

Дәлелдеу. 1-теореманың b) жағдайда $\mathrm{g}(x) = k$ деп алсақ,

$\lim\limits_{x\to a}(k \cdot f(x)) = \lim\limits_{x\to a} k \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x)$ болады.

Ескерту. 1-теоремадағы a) және b) теңдіктер қосылушылар, көбейткіштер саны бірнеше болған жағдайда да орынды. Яғни, егер $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, . . . , $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ бар болса, онда

a) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) + \lim\limits_{x\to a} f_2(x) + \ldots + \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x) \cdot \ldots \cdot \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$

формулалар орынды.

7-§. Күрделі функцияның шегі

Айталық, $y=f(u)$ функция U жиында берілген және c сан сол жиынның шектік нүктесі, $u=g(x)$ функция X жиында беріліп, a сан X жиынның шектік нүктесі және $E(g)\subset U$ болсын. Сонымен бірге, a нүктенің қандай да бір $(a-\delta;a+\delta)$ маңайындағы барлық нүктелерде $g(x)\neq c$ болсын.

Енді, $f(g(x))$ күрделі функцияның шегі қандай табылады деген сұраққа жауап береміз.

7.1-теорема. Егер $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$ және $\lim\limits_{u\to c} f(u)=b$ болса, онда $x\to a$ да $f(g(x))$ күрделі функцияның шегі бар және $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=b$ болады.

Дәлелдеу. Егер $\lim\limits_{u\to c} f(u)=b$ болса, онда анықтама бойынша кез келген ε оң сан үшін қандай да бір σ оң сан табылып, $0<|u-c|<\sigma$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық u ларда $|f(u)-b|<\varepsilon$ болады. $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$ теңдіктен жоғарыдағы σ оң сан үшін қандай да бір δ оң сан табылып, $0<|x-a|<\delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық x терде $|g(x)-c|<\sigma$ болады. Демек, $\varepsilon>0$ сан үшін қандай да бір $\delta>0$ сан табылып, $0<|x-a|<\delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық x терде $|f(g(x))-b|<\varepsilon$ болады. Бұл $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=b$ екендігін білдіреді. Теорема дәлелденді.

8-§. Анықталмаған өрнектер. Тамаша шектер

1. Анықталмаған өрнектер. Дәл тізбектердегі сияқты, кейде шегі бар болған функцияларда орындалатын арифметикалық амалдар кейбір анықталмағандықтарға алып келеді. Төменде сондай жағдайларды көріп өтеміз.

Айталық $f(x)$ және $g(x)$ функциялар X жиында анықталған және a нүкте X жиынның шектік нүктесі болсын.

а) Егер $x\to a$ да $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$ болса, онда $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ өрнек «$\dfrac{0}{0}$» көріністегі анықталмағандық деп аталады.

b) Егер $x\to a$ да $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ болса, онда $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ өрнек «$\dfrac{\infty}{\infty}$» көріністегі анықталмағандық деп аталады.

c) $x\to a$ да $f(x)\to 0$, $g(x)\to\infty$ болса, онда $f(x)\cdot g(x)$ көбейтінді «$0\cdot\infty$» көріністегі анықталмағандық деп аталады.

d) $x\to a$ да $f(x)\to+\infty$ $(-\infty)$, $g(x)\to-\infty$ $(+\infty)$ болса, онда $f(x)+g(x)$ қосынды «$\infty-\infty$» көріністегі анықталмағандық деп аталады.

Сондай-ақ, «0^0», «1^∞», «∞^0» көріністегі анықталмағандықтар да кездеседі. Бұндай анықталмағандықтарды ашу кезінде, мысалдар характеріне қарап, түрлі тәсілдер қолданылады.

1-*мысал.* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ шекті есептеңдер.

Шешу. Бұл өрнек «$\dfrac{0}{0}$» көріністегі анықталмағандық.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=4.$$

2-*мысал.* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-1}{2x^3+1}$ шекті есептеңдер.

Шешу. Бұл өрнек «$\dfrac{\infty}{\infty}$» көріністегі анықталмағандық.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-1}{2x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{1}{2}.$$

2. Кейбір тамаша шектер. Шектерді есептеуде кейбір өрнектердің шегі көп рет қайталанады. Сондықтан оларды арнаулы қарастырамыз.

8.1-теорема. Мына $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ теңдік орынды.

Дәлелдеу. $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық x үшін $\sin x<x<\operatorname{tg}x$ қос теңсіздік орынды. $\sin x>0$ болғандықтан бұл теңсіздікті sin$x$ өрнегіне бөлсек, $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$ болады. Бұдан $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ теңсіздік келіп шығады. Оны (-1) ге көбейтіп, 1 ді қоссақ, $0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x$ теңсіздікті аламыз. Енді, sinx/x, cos$x$ жұп функциялар болғандықтан, бұл теңсіздік x айнымалыны $-x$-пен алмастырғанда да өзгермейді. Сол себепті, соңғы теңсіздік нөлден өзгеше барлық $x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ үшін орынды. Сонымен, $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ шартты қанағаттандыратын x үшін

$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2|\sin\frac{x}{2}|<2|\frac{x}{2}|=|x|$ болады.

Бұлардан $|1-\frac{\sin x}{x}|<|x|$ теңсіздік, одан $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ екендігі келіп шығады. Теорема дәлелденді.

Әдетте бұл дәлелденген теңдік *бірінші тамаша шек* деп аталады.

1-салдар. Төмендегі теңдіктер орынды:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$.

Дәлелдеу.

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

$$\text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1.$$

8.2-теорема. Мына $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ теңдік орынды.

Дәлелдеу. Алдымен $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ екендігін көрсетеміз.

Айталық, $\{x_k\}$ тізбек $+\infty$ ге ұмтылатын кез келген тізбек болсын: $\lim_{k\to\infty}\{x_k\}=+\infty$. Онда, барлық k үшін $x_k>1$ деп қарастыруға болады. Енді, x_k тің бүтін бөлігін n_k арқылы белгілейік, яғни $n_k=[x_k]$. Онда $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$ тізбек $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ тізбектің тізбекшесі болады.

Енді, $n_k\leq x_{n_k}\leq n_k+1$ теңсіздіктен $\frac{1}{n_k+1}<\frac{1}{x_k}\leq\frac{1}{n_k}$, бұдан $\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}\leq\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$ теңсіздіктер келіп шығады. Сол себепті,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}:\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)\right)=e,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\cdot\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\right)=e$$

болады және аралық тізбектің шегі жайындағы теоремаға орай $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e$ келіп шығады. Демек, $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Егер соңғы теңдікте $x=-y$ деп алмастырсақ, онда $x\to-\infty$ де $y\to+\infty$ болады және $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$ қатынастардан $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\right)=e \text{ келіп шығады.}$$

Демек, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Дәлелденген бұл екі теңдікті бірлестірсек, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ болады. Теорема дәлелденді.

Соңғы теңдіктен $\lim\limits_{y\to0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}=e$ екендігін келтіріп шығаруға болады.

Шынында да, $x=\frac{1}{y}$ алмастыру енгізсек, $y\to0$ де $x\to\infty$ болып,

$$\lim_{y\to0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \text{ келіп шығады.}$$

Күрделі функцияның шегі жайындағы теорема көмегімен төмендегі теңдіктерді келтіріп шығаруға болады:

2-салдар. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$, сондай-ақ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ теңдік орынды.

Дәлелдеу. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$.

3-салдар. $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, сондай-ақ $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ теңдік орынды.

Дәлелдеу. Егер $y=a^x-1$ деп алсақ, Онда $a^x=1+y$ немесе $x=\log_a(1+y)$ болып, $x\to 0$ да $y\to 0$ болады. Демек, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\ln a$.

4-салдар. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$ теңдік орынды.

Дәлелдеу. Егер $y=(1+x)^\mu-1$ деп алсақ, онда $(1+x)^\mu=1+y$ немесе $\mu\ln(1+x)=\ln(1+y)$ болып, $x\to 0$ да $y\to 0$ болады. Демек,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y\cdot\mu\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+y)}=$$

$$=\mu\lim_{x\to 0}\left(\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\mu \text{ болады.}$$

1-*мысал.* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 2x}$ шекті есептеңдер.

Шешу. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x\sin 2x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=4$.

2-*мысал.* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{3x}$ шекті есептеңдер.

Шешу. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{3x}=$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right)^3\cdot\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{-3}=e^3\cdot 1=e^3.$$

3-*мысал.* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1-2x}-1}{3x}$ шекті есептеңдер.

Шешу. 4-салдардан

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1-2x}-1}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(1-2x)^{\frac{1}{n}}-1}{-2x}\cdot(-2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}\cdot(-2)=-\frac{2}{3n}.$$

9-§. Функция шегінің бар болу шарттары

1. Бірсарынды функцияның шегі. Айталық, $y=f(x)$ функция X жиында берілген және a нүкте сол жиынның шектік нүктесі, барлық $x\in X$ үшін $x\leq a$ болсын.

9.1-теорема. Егер $y=f(x)$ функция X жиында өспелі және жоғарыдан шенелген болса, онда оның a нүктеде шегі бар, егер жоғарыдан шенелмеген болса, оның шегі $+\infty$ болады.

Дәлелдеу. Айталық, $y=f(x)$ функция X жиында жоғарыдан шенелген болсын, яғни $\{f(x)\text{: } x\in X\}$ жиын жоғарыдан шенелген. Сондықтан оның анық жоғары шекарасы бар. Оны b арқылы белгілейік: $b=\sup\{f(x)\text{: } x\in X\}$. Енді, b сан $f(x)$ функцияның $x\to a$ дағы шегі екенін көрсетеміз.

Анық жоғары шекара анықтамасы бойынша, барлық $x\in X$ үшін $f(x)\leq b$ және кез келген ε оң сан үшін қандай да бір $x'\in X$ табылып, $f(x')>b-\varepsilon$ болады. Шартқа орай $f(x)$ функция өспелі. Яғни, барлық $x'<x$ үшін $f(x')<f(x)$ болады. Бұдан $b-\varepsilon<f(x)<b<b+\varepsilon$ теңсіздікті аламыз. Егер $\delta=a-x'$ деп алсақ, онда $0<|x-a|<\delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық x үшін $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$ теңсіздік орынды болады. Демек, анықтама бойынша, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ болады.

Енді, айталық $f(x)$ функция жоғарыдан шенелмеген болсын. Онда кез келген Δ оң үлкен сан алсақ та, қандай да бір $x'\in X$ табылып, $f(x')>\Delta$ болады. $f(x)$ функция өспелі болғандықтан $x>x'$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x\in X$ үшін $f(x)>\Delta$ теңсіздік орынды болады. Демек, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ болады. Теорема дәлелденді.

Айталық, $y=f(x)$ функция X жиында кемімелі және a нүкте X жиынның шектік нүктесі, барлық $x\in X$ үшін $x\leq a$ болсын.

9.2-теорема. Егер $y=f(x)$ функция X жиында кемімелі және төменнен шенелген болса, онда оның a нүктеде шегі бар, егер төменнен шенелмеген болса, оның шегі $-\infty$ болады.

Бұл теорема 9.1-теорема сияқты дәлелденеді.

2. Функция шегінің бар болуы қажетті және жеткілікті шарты. Айталық, $y=f(x)$ функция X жиында берілген және a нүкте X жиынның шектік нүктесі болсын.

9.3-теорема (Коши белгісі). $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ бар болуы үшін кез келген ε оң санға сәйкес δ оң сан табылып, $0<|x'-a|<\delta$, $0<|x''-a|<\delta$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын барлық x', $x''\in X$ нүктелерде $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ теңсіздіктің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Бұл теореманы дәлелдеуді оқырманға қалдырамыз (қараңыз [1]).

10-§. Шектеусіз кіші функциялар және оларды салыстыру

1. Шектеусіз кіші функциялардың қасиеттері. Айталық, $y=f(x)$ функция X жиында берілген және a нүкте X жиынның шектік нүктесі болсын.

1-анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ болса, онда $\alpha(x)$ функция $x\to a$ да (x айнымалы a ға ұмтылғанда) *шектеусіз кіші функция* деп аталады.

Шектеусіз кіші функциялар, қысқаша, *шектеусіз кіші* деп те аталады.

1-*мысал.* $\alpha(x)=x^2+x^3$ функция $x\to 0$ да шектеусіз кіші, себебі $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x^3)=0$.

2-*мысал.* $\alpha(x)=x^2-4$ функция $x\to 2$ да шектеусіз кіші, себебі $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$.

Шектеусіз кіші функциялардың шектеусіз кіші тізбектерге ұқсас мынадай қасиеттері бар.

1^0. Шекті сандағы шектеусіз кіші функциялардың қосындысы шектеусіз кіші функция болады.

2^0. Шектеусіз кіші функция және шенелген функция көбейтіндісі шектеусіз кіші функция болады.

Мысалы, $\alpha(x)=x^2$ функция $x\to 0$ да шектеусіз кіші, $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ ($x\neq 0$) функция шенелген: $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq 1$. Онда $\alpha(x)f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ функция $x\to 0$ да шектеусіз кіші болады.

2. Шектеусіз кішілерді салыстыру. Айталық $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ функциялар $x\to a$ да шектеусіз кіші болсын.

2-анықтама. Егер, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$ шек бар және $c\neq0$ болса, онда $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ функциялар $x\to a$ да *бірдей ретті шектеусіз кішілер* деп аталады.

5-*мысал.* $\alpha(x)=\sqrt{1+x}-1$ және $\beta(x)=x$ тер $x\to0$ да бірдей ретті шектеусіз кішілер болады. Шынында да,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

3-анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ болса, онда $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ функциялар $x\to a$ да *эквивалент шектеусіз кішілер* деп аталады. Бұл жағдай $\alpha\sim\beta$ көрінісінде жазылады.

4-*мысал.* $\alpha(x)=\sin x$, $\beta(x)=x$ функциялар $x\to0$ да эквивалент шектеусіз кішілер болады.

Шынына да, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Демек, $\sin x\sim x$.

4-анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ болса, онда $\alpha(x)$ функция, $x\to a$ да $\beta(x)$ функцияға қатысты *жоғары ретті шектеусіз кіші* деп аталады.

5-*мысал.* $\alpha(x)=1-\cos2x$ және $\beta(x)=x$ функциялар $x\to0$ ұмтылғанда шектеусіз кішілер болып, $1-\cos2x$ функция x-ке қатысты жоғары ретті шектеусіз кіші болады. Шынында да,

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\sin x=0.$$

3. Эквивалент шектеусіз кішілер көмегімен шектерді табу.

10.1-теорема. Егер $x\to a$ да $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ және $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ бар болса, онда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ теңдік орынды болады.

Дәлелдеу. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)\cdot\alpha_1(x)\cdot\beta_1(x)}{\beta(x)\cdot\alpha_1(x)\cdot\beta_1(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot$

$\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

6-*мысал.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$ шегін табыңдар.

*Шешу***.** 1-cos3x=2sin$^2\dfrac{3x}{2}$~$2\left(\dfrac{3x}{2}\right)^2=\dfrac{9x^2}{2}$. Сондай-ақ, x~sin$x$ қатынастан $x$sin$x$~x^2 келіп шығады. Демек,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9x^2}{2}}{x^2}=\frac{9}{2}.$$

7-*мысал.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(3x^2+4x^5+x^6\right)^3}{\sqrt{x^8+4x^{10}}}$ шекті табыңдар.

Шешу. $(3x^2+4x^5+x^6)^3\sim(3x^2)^3=27x^6$, $\sqrt{x^8+4x^{10}}\sim\sqrt{x^8}=x^4$ қатынастарға орай

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(3x^2+4x^5+x^6\right)^3}{\sqrt{x^8+4x^{10}}}=\lim_{x\to 0}\frac{27x^6}{x^4}=\lim_{x\to 0}27x^2=0.$$

ЖАТТЫҒУЛАР

1. Жұп функцияның графигі ордината осіне қатысты, тақ функцияның графигі координата басына қатысты симметриялы болатындығын дәлелдеңдер.

2. Симметриялық жиында анықталған кез келген $f(x)$ функцияны тақ және жұп функциялардың қосындысы көрінісінде жазуға болатындығын дәлелдеңдер.

3. Өзара кері функциялардың графиктері $y=x$ түзуге қатысты симметриялы болатындығын дәлелдеңдер.

4. Функция шегінің Гейне және Коши анықтамаларының эквивалент екендігін дәлелдеңдер.

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ теңдіктерге анықтамалар (Гейне және Коши) беріңдер.

6. 9.2- теореманы дәлелдеңдер.

7. 9.3- теореманы дәлелдеңдер.

8. Егер $f(x)=\begin{cases} x, x\in[0;+\infty), \\ 0,\ x\in(-\infty;0) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 0,\ x\in[0;+\infty), \\ x^2,\ x\in(-\infty;0) \end{cases}$ болса, онда $f(g(x)),\ g(f(x))$ функцияларды анықтаңдар, олардың анықталу облыстарын көрсетіңдер.

9. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^4+1}$ функцияның анықталу облысында шенелген функция екенін көрсетіңдер.

10. $f(x)=\log_x 10$ функцияға кері болған функцияны, оның анықталу облысын табыңдар және графигін салыңдар.

11. Егер $y=f(x)$ функцияның графигі $x=a,\ x=b\ (a\neq b)$ түзулердің әрбіріне қатысты симметриялы болса, онда бұл функцияның периодты екендігін көрсетіңдер, периодын табыңдар.

12. Функцияның шегін табыңдар.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{2x-x^2}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2-1}-\sqrt{x^4-2x^2-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^x$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$; 8) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{x-10}$;

9) $\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{1}{x-[x]}$; 10) $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{1}{x-[x]}$

IV ТАРАУ. БІР АЙНЫМАЛЫЛЫ ҮЗІЛІССІЗ ФУНКЦИЯЛАР

1-§. Функцияның нүктедегі және жиындағы үзіліссіздігі

Функцияның үзіліссіздігі ұғымы математикалық анализдің негізгі ұғымдарынан бірі болып, ол функция шегі ұғымымен тікелей байланысты.

Айталық, $y=f(x)$ функция X аралықта берілген және $x_0\in X$ болсын.

1-анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ теңдік орынды болса, онда $f(x)$ функция x_0 *нүктеде үзіліссіз* деп аталады. x_0 нүкте $f(x)$ функцияның *үзіліссіздік нүктесі* деп аталады.

Демек, $f(x)$ функция нүктеде үзіліссіз болуы үшін $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ шектің бар және бұл шек функцияның x_0 нүктедегі $f(x_0)$ мәніне тең болуы кажет.

2-анықтама. Егер $f(x)$ функция X жиынның әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, ол X *жиында үзіліссіз* деп аталады.

1-*мысал.* $f(x)=2x^3+3x+1$ функцияның анықталу облысында үзіліссіз екенін көрсетіңдер.

Шешу. Функцияның анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны. Осы жиыннан алынған кез келген x_0 нүктеде үзіліссіз екенін көрсету жеткілікті.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(2x^3+3x+1)=2x_0^3+3x_0+1=f(x_0)$ болады.

Демек, бұл функция кез келген нүктеде үзіліссіз.

Функция шегі анықтамаларынан пайдаланып, үзіліссіздіктің басқа анықтамаларын келтіреміз.

3-анықтама (Гейне). Егер X жиыннан алынған және x_0 ге ұмтылатын кез келген $\{x_n\}$ тізбек үшін, функция мәндерінен тұратын $\{f(x_n)\}$ санды тізбек $f(x_0)$ ге ұмтылса, онда $f(x)$ функция x_0 *нүктеде үзіліссіз* деп аталады.

4-анықтама (Коши). Егер кез келген ε оң сан сан үшін қандай да бір δ оң сан табылып, x айнымалының $|x-x_0|<\delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық мәндерінде $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ теңсіздік орынды болса, онда $f(x)$ функция x_0 *нүктеде үзіліссіз* деп аталады.

Әдетте x-x_0 айырма *аргумент өсімшесі* деп аталады және Δx арқылы белгіленеді. Сондай-ақ, $f(x)$-$f(x_0)$ айырма функцияның x_0 нүктедегі *өсімшесі* деп аталады және Δy арқылы белгіленеді.

Егер функция x_0 нүктеде үзіліссіз болса, онда

$$\lim_{x\to x_0}\Delta y=\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=f(x_0)-f(x_0)=0$$

болады және керісінше, егер $\lim\limits_{x\to x_0}\Delta y=0$ болса, онда $y=f(x)$ функция x_0 нүктеде үзіліссіз болады. Сондықтан мынадай анықтама беруге болады:

5-анықтама. Егер $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ болса, онда $f(x)$ функция x_0 *нүктеде үзіліссіз* деп аталады.

2-*мысал.* $f(x)=\cos x$ функцияның анықталу облысында үзіліссіз екендігін көрсетіңдер.

Шешу. $f(x)=\cos x$ функцияның анықталу облысына тиісті болған кез келген x_0 нүктені аламыз. Бұл нүкте үшін

$$|\Delta y|=|f(x)-f(x_0)|=|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|=|\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0|=\quad=|2\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\cdot\sin(x_0+\frac{\Delta x}{2})|\le 2|\sin\frac{\Delta x}{2}|<2|\frac{\Delta x}{2}|=|\Delta x|$$ болады.

Сондықтан $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. Демек, $f(x)=\cos x$ әрбір x_0 нүктеде үзіліссіз, сонымен анықталу облысында да үзіліссіз. Сол сияқты, $f(x)=\sin x$ функцияның әрбір $x_0\in(-\infty;+\infty)$ нүктеде үзіліссіз екендігін көрсетуге болады.

6-анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$ болса, онда x_0 нүкте $f(x)$ функцияның *үзіліс нүктесі* деп аталады.

3-*мысал.* Сандар осінде берілген $y=D(x)$ Дирихле функциясы үшін $x_0=2$ оның үзіліс нүктесі екендігін көрсетіңдер.

Шешу. Иррационал сандардың 2 ге ұмтылатын $\{x_n\}$ тізбегін алсақ, $D(x_n)=0$, бұдан $D(x_n)\to 0$ болады. Егер рационал сандардың 2 ге ұмтылатын $\{x'_n\}$ тізбегін алсақ, $D(x'_n)=1$ болып, $D(x'_n)\to 1$ келіп шығады. Демек, $D(x)$ функцияның $x_0=2$ нүктеде шегі жоқ. Бұдан $x_0=2$ нүкте $D(x)$ функцияның үзіліс нүктесі екен.

Осы тәсілмен $D(x)$ функцияның кез келген $x_0\in(-\infty;+\infty)$ нүктеде үзілісі бар екендігін көрсетуге болады.

2-§. Үзіліссіз функцияның локальдік қасиеттері

Нүктеде үзіліссіз болған функциялардың кейбір қасиеттерін үйренеміз. Бұл қасиеттер шегі бар болған функциялардың қасиеттеріне ұқсас.

1^o. Егер $f(x)$ функция x_0 нүктеде үзіліссіз болса, онда ол x_0 нүктенің қандай да бір маңайында шенелген болады.

2^o. Егер $f(x)$ функция x_0 нүктеде үзіліссіз және $f(x_0)>p$ (сәйкесінше $f(x_0)<q$) болса, онда x_0 нүктенің қандай да бір маңайындағы барлық нүктелерде $f(x)>p$ (сәйкесінше $f(x)<q$) болады.

Салдар. Егер $f(x)$ функция x_0 нүктеде үзіліссіз және $f(x_0)>0$ (сәйкесінше $f(x_0)<0$) болса, онда x_0 нүктенің қандай да бір маңайындағы барлық нүктелерде $f(x)>0$ (сәйкесінше $f(x)<0$) болады.

3-§. Үзіліссіз функцияларда орындалатын арифметикалық амалдар

Айталық, $f(x)$ және $g(x)$ функциялар X жиында анықталған және $x_0 \in X$ болсын.

3.1-теорема. Егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялардың әрбірі x_0 нүктеде үзіліссіз болса, онда

$$f(x) \pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x_0)\neq 0)$$

функциялар x_0 нүктеде үзіліссіз болады.

Дәлелдеу. $f(x)$ және $g(x)$ функциялар x_0 нүктеде үзіліссіз болғандықтан, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$ болады. Шегі бар болған функциялар қасиетінен

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x))= \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0) \pm g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))= \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

теңдіктер орынды. Теорема дәлелденді.

1-*мысал.* $f(x)=\cos^3 x$ функция $(-\infty;+\infty)$да үзіліссіз екенін көрсетіңдер.

Шешу. 1-§ тағы 3-мысалда $f(x)=\cos x$ функцияның әрбір x_0 нүктеде үзіліссіз екенін көрсеткен едік. 3.1-теоремадан, $\cos^3 x=\cos x\cdot\cos x\cdot\cos x$ функция әрбір $x_0\in(-\infty;+\infty)$ нүктеде үзіліссіз болады.

2-*мысал.* $y=\text{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ функция $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$, $n=1, 2, \ldots$ нүктелерден басқа барлық нүктелерде үзіліссіз.

Сол сияқты, $y=\text{ctg}x$ функция $x=n\pi$, $n=1, 2, \ldots$ нүктелерден басқа барлық нүктелерде үзіліссіз екенін көрсетуге болады.

3-*мысал.* $y=ax^n$, $n\in\mathbb{N}$ функцияны үзіліссіздікке зерттеңдер.

Шешу. Берілген функцияны былайша жазып алуға болады: $y=ax^n=a\cdot x\cdot x\cdot\ldots\cdot x$, ($n$+1 көбейтуші). $y=x$ функцияның үзіліссіздігін тексеру қиын емес. 3.1-теоремадан, $y=ax^n$ функцияның анықталу облысында үзіліссіздігі келіп шығады.

4-*мысал.* $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ *бүтін рационал функция* анықталу облысында үзіліссіз болады, себебі алдыңғы мысалға орай әрбір қосылушы үзіліссіз.

5-*мысал.* $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_ox^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_ox^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$ *бөлшек рационал функция* бөлімі нөлден өзгеше нүктелерде үзіліссіз болады.

4-§. Күрделі функцияның үзіліссіздігі

Айталық $u=\varphi(x)$ және $y=f(u)$ функциялардан құралған $y=f(\varphi(x))$ күрделі функция берілген болсын.

4.1-теорема. Егер $u=\varphi(x)$ функция x_0 нүктеде, $y=f(u)$ функция $u_0=\varphi(x_0)$ нүктеде үзіліссіз болса, онда $y=f(\varphi(x))$ күрделі функция x_0 нүктеде үзіліссіз болады.

Дәлелдеу. $\varphi(x)$ функция x_0 нүктеде үзіліссіз, $f(u)$ функция u_0 нүктеде үзіліссіз болғандықтан $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$ теңдіктер орынды. Онда күрделі функцияның шегі жайындағы теоремаға орай $f(\varphi(x))$ функцияның $x \to x_0$ дегі шегі бар және $f(\varphi(x_0))$ болады. Демек, $f(\varphi(x))$ функция x_0 нүктеде үзіліссіз.

6-*мысал.* $y=\sin(x^3+4x+1)$ функция әрбір $x \in (-\infty;+\infty)$ нүктеде үзіліссіз екендігін дәлелдеңдер.

Шешу. $u=x^3+4x+1$ функция барлық $x \in (-\infty;+\infty)$ нүктеде, $y=\sin u$ функция да әрбір $u \in (-\infty;+\infty)$ нүктеде үзіліссіз болғандықтан, 4.1-теоремаға орай, $y=\sin(x^3+4x+1)$ күрделі функция барлық x -терде үзіліссіз болады.

5-§. Бір жақты үзіліссіздік және үзіліс нүктелері

1. Бір жақты үзіліссіздік.

1-анықтама. Егер $f(x_0-0)=f(x_0)$ болса, онда $f(x)$ функция x_0 нүктеде *солдан үзіліссіз* деп аталады. Бұл теңдік орынды болмаса, $f(x)$ функция x_0 нүктеде солдан үзілісті деп аталады.

2-анықтама. Егер $f(x_0+0)=f(x_0)$ болса, онда $f(x)$ функция x_0 нүктеде *оңнан үзіліссіз* деп аталады.

Бұл анықтамалардан, $f(x)$ функция x_0 нүктеде үзіліссіз болуы үшін сол нүктеде солдан да, оңнан да үзіліссіз болуы қажетті және жеткілікті екендігі айқын.

2. Функцияның үзіліс нүктелері және олардың түрлері. Айталық, $y=f(x)$ функция X жиында берілген және $x_0 \in X$ оның үзіліс нүктесі болсын.

1-анықтама. Егер $f(x_0-0)$ және $f(x_0+0)$ бір жақты шектер шекті болса, онда x_0 нүкте функцияның *бірінші түрдегі үзіліс нүктесі* деп аталады.

Мұнда екі жағдай болуы мүмкін:

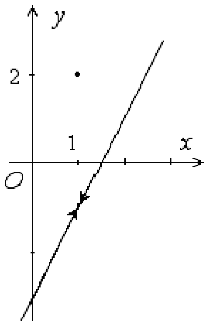
а) $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, яғни бір жақты шектер тең. Бұл жағдайда $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде *жөнделетін үзілісі* бар деп аталады. Осы нүктеде функцияның мәнін $f(x_0)=\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ деп алсақ, функция үзіліссіз болады.

Мысалы, $f(x)=\begin{cases} 2x-3, & x \neq 1 \text{ болса}, \\ 2, & x=1 \text{ болса} \end{cases}$ функция үшін $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} f(x)=$ $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0}(2x-3)=-1$ болады. Демек, $f(1-0)=f(1+0)$, бірақ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)=-$

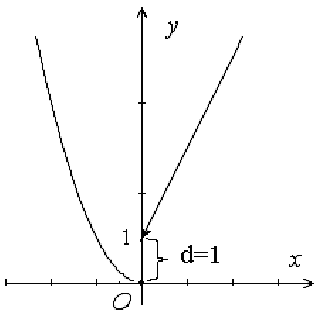
$1 \neq 2 = f(1)$ болғандықтан, $x=1$ нүкте функцияның үзіліс нүктесі. Егер $f(1)=1$ деп алсақ, функция $x=1$ нүктеде үзіліссіз болады (15-сурет).

b) $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, яғни бір жақты шектер тең болмаса, онда $f(x)$ функция x_0 нүктеде *секірмесі* бар, $d=|f(x_o+0)-f(x_o-0)|$ сан *функцияның секірмесі* деп аталады.

Мысалы, $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{егер } x \le 0 \text{ болса}, \\ 2x+1, & \text{егер } x > 0 \text{ болса} \end{cases}$ функцияны қарастырайық. $f(-0)=\lim\limits_{x\to -0} x^2=0$, $f(+0)=\lim\limits_{x\to +0}(3x+1)=1$ болғандықтан $x=0$ нүктеде бірінші түрдегі үзіліс бар ($f(-0)\neq f(+0)$). Бұл функцияның секірмесі $d=|1-0|=1$ болады (16-сурет).



15-сурет

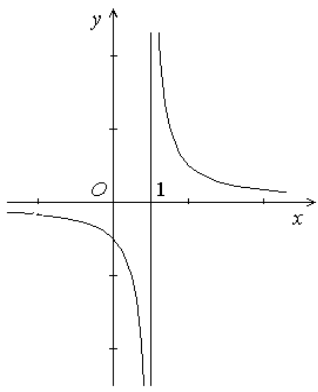


16-сурет

2-анықтама. Егер $f(x_0-0)$ және $f(x_0+0)$ бір жақты шектердің біреуі немесе екеуі де шекті болмаса немесе шегі жоқ болса, онда x_0 нүкте функцияның *екінші түр үзіліс нүктесі* деп аталады.

1-*мысал.* $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ функция $x=1$ нүктеде анықталмаған. Бұл функция үшін $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$,

$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$.



17-сурет

Демек, $x=1$ нүкте берілген функцияның екінші түр үзіліс нүктесі болады (17-сурет).

2-*мысал*.

$D(x)$ Дирихле функциясын қарастырайық. Әрбір $x_0\in(-\infty;+\infty)$ үшін $D(x_0-0)$, $D(x_0+0)$ шектердің жоқ екендігін көру қиын емес (1-§.3-мысал). Демек, кез келген нүкте Дирихле функциясының екінші түр үзіліс нүктесі болады.

3-*мысал*. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ функцияның $x=0$ нүктедегі үзілісі жөнделетін үзіліс болады. Шынында, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ болғандықтан, $f(0)=1$ деп алсақ, функция $x=0$ нүктеде үзіліссіз болады.

4-*мысал*. $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, \text{ егер } x\neq 0 \text{ болса,}\\ 3, \text{ егер } x\neq 0 \text{ болса}\end{cases}$ функция үшін $x=0$ нүкте екінші түр үзіліс нүктесі болады. Өз бетіңше дәлелдеңдер.

6-§. Кесіндіде үзіліссіз болған функциялардың қасиеттері

Үзіліссіз функциялар тақырыбын үйренгенде X жиынын аралық болған жағдаймен шектелетіндігімізді айтқан едік. Біз төменде, негізінен $[a;b]$ *сегментте үзіліссіз болған функцияларды*, яғни $(a;b)$ интервалда үзіліссіз, a нүктеде оңнан және b нүктеде солдан үзіліссіз функцияларды қараймыз.

6.1-теорема (Вейерштрасстың бірінші теоремасы). Егер $y=f(x)$ функция $[a;b]$ сегментте үзіліссіз болса, онда функция сол сегментте шенелген болады.

Дәлелдеу. Дәлелдеуді кері жору тәсілімен алып барамыз.

Айталық, $f(x)$ функция шенелмеген болсын. Онда кез келген n натурал сан алсақ та, қандай да бір $x_n\in[a;b]$ нүкте табылып, $|f(x_n)|>n$ болады. Мүшелері сол шартты қанағаттандыратын x_1, x_2, x_3,..., x_n,... тізбекті қарастырайық. Бұл тізбек шенелген, Больцано-Вейерштрасс леммасына орай одан жинақталатын $\{x_{n_k}\}$ тізбекше ажыратып алуға болады: $x_{n_k}\to x_0\in[a;b]$. Теорема шарты бойынша

$f(x)$ функция x_0 нүктеде үзіліссіз. Сондықтан $f(x_{n_k})\to f(x_0)$ болады. Екіншіден, бұл тізбектің құрылуы бойынша $|f(x_{n_k})|>n_k$, сондықтан $f(x_{n_k})\to\infty$. Бұл қарама-қайшылық жорамалымыздың қате екендігін көрсетеді. Теорема дәлелденді.

6.2-теорема (Вейерштрасстың екінші теоремасы). Егер $f(x)$ функция $[a;b]$ сегментте анықталған және үзіліссіз болса, онда функцияның сол сегментте ең үлкен және ең кіші мәндері бар болады.

Дәлелдеу. Теореманың нәтижесін төмендегідей айтуға болады: $[a;b]$ сегментте қандай да x_1 және x_2 нүктелер табылып, $f(x_1)=\max\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}$, $f(x_2)=\min\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}$ болады.

Берілген $f(x)$ функция $[a;b]$ сегментте үзіліссіз болғандықтан, 6.1-теорема бойынша шенелген болады. Демек, $E(f)$ жиынның анық жоғары және анық төменгі шекаралары бар. $\sup\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}=c$, $\inf\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}=d$ белгілеулер енгіземіз. Енді, $[a;b]$ сегментте қандай да бір x_1 нүкте табылып, $f(x_1)=c$ екенін көрсетеміз.

Кері жоримыз, барлық $x\in[a;b]$ үшін $f(x)<c$ болсын. Онда $\varphi(x)=\frac{1}{c-f(x)}$ функция $[a;b]$ сегментте үзіліссіз және 6.1-теорема бойынша шенелген. Яғни $\mu>0$ сан табылып, әрбір $x\in[a;b]$ үшін $\varphi(x)\le\mu$ болады. Бұдан $f(x)\le c-\frac{1}{\mu}$, демек, $c-\frac{1}{\mu}$ сан $f(x)$ функцияның жоғары шекарасы екендігі келіп шығады. Бұл, c сан $f(x)$ функцияның анық жоғары шекарасы деген пікірге қайшы. Бұл қарама-қайшылық жорамалымыздың қате екендігін көрсетеді. Теорема дәлелденді.

6.3-теорема (Больцано-Кошидің бірінші теоремасы). Егер $f(x)$ функция $[a;b]$ сегментте үзіліссіз болып, кесіндінің шекара нүктелерінде түрлі таңбалы мәндер қабылдаса, онда $(a;b)$ интервалында c нүкте табылып, $f(c)=0$ болады.

Дәлелдеу. Айталық, $f(a)<0$, $f(b)>0$ болсын. $[a;b]$ кесіндіні тең екі $[a;\frac{a+b}{2}]$ және $[\frac{a+b}{2};b]$ бөлікке бөлеміз. Егер $f(\frac{a+b}{2})=0$ болса, онда теорема дәлелденген болады.

Егер $f(\frac{a+b}{2})\neq 0$ болса, онда жаңа сегменттерден бірінің шекара нүктелерінде функция түрлі таңбалы мәндер қабылдайды. Сол кесіндіні $[a_1;b_1]$ деп белгілейміз: $f(a_1)<0$ және $f(b_1)>0$ болсын. Енді, $[a_1;b_1]$ сегментті тең екіге бөлеміз және жоғарыдағы тұжырымды $[a_1;b_1]$ сегментке қатысты қайталаймыз. Дәл осылай жалғастыра берсек, төмендегі екі жағдайдан біреуі орындалады:

1-жағдай. Қандай да бір $\frac{a_n+b_n}{2}$ нүктеде $f(x)$ функцияның мәні нөлге тең болады;

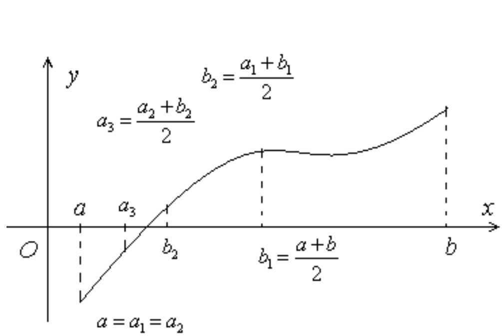
2-жағдай. Барлық n дер үшін $f(\frac{a_n+b_n}{2})\neq 0$ болып, бұл процесс шектеусіз жалғасады.

Егер 1-жағдайда $\frac{a_n+b_n}{2}=c$ деп алсақ, онда $f(c)=0$ болып, теорема дәлелденген болады.

2-жағдайда іштей жайласқан

$$[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset\ldots\supset[a_n;b_n]\supset\ldots$$

сегменттер тізбегі алынады. Сондай-ақ барлық $n=1, 2, 3, \ldots$ үшін $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$ болады (18-сурет). Мұнда $[a_n;b_n]$ сегменттің ұзындығы $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$ болады. Іштей жайласқан сегменттер тізбегі принципі бойынша барлық сегменттерге ортақ болған $c\in(a;b)$ нүкте табылып, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=c$ орынды болады. Енді $f(x)$ функ-ция c нүктеде үзіліссіз



18-сурет

болғандықтан, $f(c)=\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)\leq 0$ және $f(c)=\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)\geq 0$ болады. Бұлардан $f(c)=0$ келіп шығады. Теорема дәлелденді.

Бұл теоремадан теңдеулердің түбірі бар екендігін көрсетуде пайдалануға болады.

Мысал. $x^7+x^3+1=0$ теңдеудің $[-1;0]$ сегментте түбірі бар екендігін көрсетіңдер.

Шешу. $f(x)= x^7+x^3+1$ функция $[-1;0]$ сегментте үзіліссіз, шекара нүктелерде $f(-1)=-1<0$, $f(0)=1>0$ мәндерді қабылдайды. 6.3-теоремаға орай $c\in(-1;0)$ сан табылып, $f(c)=0$ болады.

Демек, c берілген теңдеудің түбірі болады.

6.4-теорема (Больцано-Кошидің екінші теоремасы). Егер $f(x)$ функция $[a;b]$ сегментте үзіліссіз және кесіндінің ұштарында бір-бірінен өзгеше, $f(a)=p$ және $f(b)=q$ мәндер қабылдаса, онда p және q сандар арасындағы кез келген d сан үшін қандай да бір c нүкте ($a<c<b$) табылып, $f(c)=d$ болады.

Дәлелдеу. Айталық, $p<d<q$ болсын. Көмекші $\varphi(x)=f(x)-d$ функцияны аламыз. $\varphi(x)$ функция Больцано-Кошидің бірінші теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады:

$f(x)$ функция $[a;b]$ сегментте үзіліссіз болады, себебі, $y=f(x)$ және $y=d$ функциялар $[a;b]$ да үзіліссіз.

$\varphi(a)=f(a)-d=p-d<0$, $\varphi(b)=f(b)-d=q-d>0$.

Сондықтан $(a;b)$ интервалда $\varphi(c)=0$ болатын c нүкте табылады, бұдан $f(c)-d=0$, яғни $f(c)=d$ болады. Теорема дәлелденді.

Сонымен, $[a;b]$ да үзіліссіз болған функция өзінің, кез келген екі мәні арасындағы барлық мәндерді қабылдайды.

Салдар. Егер $f(x)$ функция X аралықта үзіліссіз болса, онда оның $E(f)$ мәндері жиыны да аралық болады.

7-§. Бірсарынды функцияның үзіліссіздігі

7.1-теорема. Егер $f(x)$ функция X аралықта бірсарынды функция болса, онда ол сол аралықтың кез келген нүктесінде үзіліссіз болады немесе тек бірінші түр үзіліске ие болады.

Дәлелдеу. Айталық, $f(x)$ функция өспелі, x_0 нүкте X аралықтың ішкі нүктесі болсын. Онда x_0 нүктенің $(x_0-\delta;x_0+\delta)\subset X$ маңайы табылып, $x\leq x_0$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x\in X$

үшін $f(x) \le f(x_0)$ болады. Демек, $f(x)$ функция жоғарыдан шенелген. Бірсарынды функцияның шегі жайындағы теоремаға орай, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \le f(x_0)$ болады. Сол сияқты, x_0 нүктеде оң шек бар: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \ge f(x_0)$. Бұлардан $f(x_0-0) \le f(x_0) \le f(x_0+0)$ қос теңсіздікті аламыз. Егер $f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0)$ болса, онда функция x_0 нүктеде үзіліссіз болады. Егер, $f(x_0-0) < f(x_0+0)$ болса, онда x_0 нүкте $f(x)$ функцияның бірінші түр үзіліс нүктесі болады.

Егер x_0 нүкте X аралықтың шекара нүктесі болса, бір жақты шектің бар екендігін көрсету жеткілікті. Кемімелі функция үшін де жоғарыдағыға ұқсас тұжырым орынды. Теорема дәлелденді.

7.2-теорема. Егер $f(x)$ функция X аралықта бірсарынды, оның мәндер жиыны қандай да бір Y аралықтан тұратын болса, онда $f(x)$ функция X аралықта үзіліссіз болады.

Дәлелдеу. Кері жоримыз. Айталық, $f(x)$ функция X аралықта өспелі және $x_0 \in X$ нүкте $f(x)$ функцияның үзіліс нүктесі болсын. Онда 7.1-теоремаға орай, $f(x_0-0) < f(x_0+0)$ болады.

Сонымен, $(f(x_0-0); f(x_0+0)) \setminus \{f(x_0)\}$ жиындағы сандардың ешбірі функцияның мәні болмайды, яғни функцияның мәндер жиыны Y аралық болмайды. Бұл қарама-қайшылық пікіріміздің қате екендігін, теореманың дұрыс екендігін көрсетеді. Теорема дәлелденді.

8-§. Кері функцияның бар болуы және үзіліссіздігі

8.1-теорема. Егер $y = f(x)$ функция X аралықта үзіліссіз және өспелі (кемімелі) болса, онда функцияның $Y = \{f(x): x \in X\}$ мәндер жиынында оған кері функция бар және ол үзіліссіз, өспелі (кемімелі) функция болады.

Дәлелдеу. $f(x)$ функция үзіліссіз болғандықтан Больцано-Кошидің екінші теоремасына орай, оның мәндер жиыны Y аралық болады. Демек, әрбір $y_0 \in Y$ үшін $f(x_0) = y_0$ теңдікті қанағаттандыратын $x_0 \in X$ сан бар және жалғыз болады. Шынында, x_0 ден өзгеше x_1 нүкте алсақ, $f(x)$ функция бірсарынды болып, $x_0 \ne x_1$ болғандықтан $f(x_0) \ne f(x_1)$ болады. Сонымен, Y аралықтан алынған әрбір y санға X аралықта $f(x) = y$ теңдікті қанағаттандыратын жалғыз

x сәйкес келеді. Демек, Y аралықта $y=f(x)$ функцияға кері болған $x=\varphi(y)$ функция бар.

Енді, $y=f(x)$ функция өспелі болса, $x=\varphi(y)$ функцияның да өспелі екенін, яғни $y_1<y_2$ ($y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$) болғанда, $x_1<x_2$ теңсіздік орынды болатындығын көрсетеміз. Кері жориық, яғни $y_1<y_2$ болғанда, $x_1>x_2$ болсын. Онда $y=f(x)$ функция өспелі болғандықтан $f(x_1)>f(x_2)$, яғни $y_1>y_2$ болады. Бұл $y_1<y_2$ деп алуымызға қайшы. Демек, $x=\varphi(y)$ функция Y аралықта өспелі.

Бірсарынды функцияның үзіліссіздігі жайындағы 7.2-теоремаға орай, $x=\varphi(y)$ функция Y аралықта үзіліссіз болады. Функция кемімелі болған жағдай да жоғарыдағыдай дәлелденеді. Теорема дәлелденді.

9-§. Бір қалыпты үзіліссіз функциялар. Кантор теоремасы

Айталық, $y=f(x)$ функция X аралықта берілген болсын.

1-анықтама. Егер кез келген ε оң сан алғанда да қандай да бір δ оң сан табылып, $|x'-x''|<\delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x',x''\in X$ терде $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ теңсіздік орындалса, онда $f(x)$ функция X аралықта *бірқалыпты үзіліссіз* деп аталады.

Егер $x_0\in X$ нүкте алып, анықтамадағы x'-ті x, x''-ті x_0-мен алмастырсақ, $|x-x_0|<\delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x\in X$ үшін $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ теңсіздік орынды екендігі келіп шығады. Бұл $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде үзіліссіздігін білдіреді. Демек, $f(x)$ функцияның X жиында бір қалыпты үзіліссіздігінен оның сол жиында үзіліссіздігі келіп шығады.

Бұл пікірге кері пікір әрқашан дұрыс емес.

1-*мысал.* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ функция (0;1] аралықта үзіліссіз, бірақ бір қалыпты үзіліссіз еместігін көрсетіңдер.

Шешу. Егер $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ деп алсақ, онда анықтамада айтылғандай оған сәйкес келетін δ оң сан жоқ, яғни кез келген δ оң сан алсақ та, $|x'-x''|<\delta$ болған x', x'' нүктелер табылып, $|f(x')-f(x'')|>\dfrac{1}{2}$ болады.

Расында, $x'=\frac{1}{n}$, $x''=\frac{1}{n+1}$ үшін $|x'-x''|=|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}|=\frac{1}{n(n+1)}$ болады. Демек, n санды $\frac{1}{n(n+1)}<\delta$ болатындай етіп таңдауға болады. Бірақ, $|f(x')-f(x'')|=|f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})|=|n-(n+1)|=1>\frac{1}{2}$.

2-*мысал*. $f(x)=x^2$ функция $(-\infty;+\infty)$ жиында үзіліссіз, бірақ бір қалыпты үзіліссіз еместігін көрсетіңдер.

Шешу. Егер $x'=n$, $x''=n+\frac{1}{n}$ сандарды алсақ, онда $|x'-x''|=|n-(n+\frac{1}{n})|=\frac{1}{n}$ болып, кез келген $\delta>0$ сан үшін, n санын $\frac{1}{n}<\delta$ болатындай таңдауға болады. Бұдан

$$|f(x')-f(x'')|=|n^2-(n+\frac{1}{n})^2|=|-2-(\frac{1}{n})^2|>2$$

келіп шығады. Демек, $f(x)=x^2$ функция $(-\infty;+\infty)$ аралықта бір қалыпты үзіліссіз емес.

Үзіліссіз функциялар қашан бір қалыпты үзіліссіз болады деген сұрақ туады. Бұл сұраққа мына теорема жауап береді.

9.1-теорема (Кантор теоремасы**).** Егер $f(x)$ функция $[a;b]$ сегментте үзіліссіз болса, онда $f(x)$ функция сол сегментте бір қалыпты үзіліссіз болады.

Дәлелдеу. Теореманы кері жору тәсілімен дәлелдейміз. Айталық, $f(x)$ функция $[a;b]$ сегментте үзіліссіз, бірақ бір қалыпты үзіліссіз болмасын. Демек, қандай да бір ε оң сан үшін, δ оң сан қаншама кіші болмасын, $[a;b]$ сегментте x' және x'' нүктелер табылып, $|x'-x''|<\delta$ болса да, $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$ болады.

Енді δ үшін, нөлге ұмтылатын $\delta_1=1$, $\delta_2=\frac{1}{2}$, ..., $\delta_n=\frac{1}{n}$, ... мәндерді аламыз. Жоғарыда айтқанымыздай, δ_n санның әрбір мәніне екі x_n', $x_n''\in[a;b]$ нүкте табылып, олар үшін $|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}$ және $|f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon$ болады. $x_n\in[a;b]$ болғандықтан $\{x_n'\}$ тізбек шенелген, Больцано-Вейерштрасс леммасына орай одан жинақталатын $\{x'_{n_k}\}$ тізбекті ажыратып алуға болады: $x'_{n_k}\to x_0$. Функция үзіліссіз, сондықтан $f(x'_{n_k})\to f(x_0)$ болады. Сонымен бірге, $\left|x'_{n_k}-x''_{n_k}\right|<\frac{1}{n_k}$ теңсіздіктен $x''_{n_k}\to x_0$, функцияның үзіліссіздігінен $f(x''_{n_k})\to f(x_0)$ орынды. Демек, $|f(x'_{n_k})$ - $f(x''_{n_k})|<\varepsilon$ келіп шығады. Екіншіден, жорамалымыз бойынша, $|f(x'_{n_k})$- $f(x''_{n_k})|\geq\varepsilon$. Бұл қарама-қайшылық жорамалымыздың қате екендігін көрсетеді. Теорема дәлелденді.

2-анықтама. $\sup\limits_{x\in X}\{f(x)\}-\inf\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ айырма $f(x)$ функцияның X жиындағы *тербелуі* деп аталады және ω арқылы белгіленеді.

Салдар. Егер $f(x)$ функция $[a;b]$ сегментте үзіліссіз болса, онда кез келген ε оң сан үшін қандай да бір δ оң сан табылып, $[a;b]$ сегмент ұзындықтары δ дан кіші болған бөліктерге бөлінгенде функцияның әрбір бөліктегі *тербелуі* ε саннан кіші болады.

ЖАТТЫҒУЛАР

1. $y = 3x - 2$ функция өз анықталу облысының әрбір нүктесінде үзіліссіз екендігін дәлелдеңдер.

2. $y = \begin{cases} 1/(x-1), & x<0, \\ (x+1)^2, & 0 \le x \le 2, \\ 1-x, & 2 < x \end{cases}$ функцияның үзіліс нүктелерін табыңдар, олардың түрін анықтаңдар, графигін сызыңдар.

3. $y = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ болса, функция 0 нүктеде үзіліссіз болатын a сан бар ма?

4. $y = \begin{cases} (x-1)^2, & x \le 0, \\ ax+b, & 0 < x < 1, \\ \sqrt{x}, & x \ge 1 \end{cases}$ функция анықталу облысында үзіліссіз болатын a және b сандар бар ма?

5. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{егер } x - \text{рационал сан болса}, \\ 0, & \text{егер } x - \text{иррационал сан болса} \end{cases}$ функция x=0 нүктеде үзіліссіз, қалған нүктелерде үзілісті екендігін дәлелдеңдер.

6. Егер $f(x) = signx,\ g(x) = 1 + x^2$ болса, $f(g(x))$ және $g(f(x))$ функцияларды анықталу облысында үзіліссіздікке тексеріңдер.

7. Егер $y = f(x)$ функция үзіліссіз болса, онда $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$ функциялардың үзіліссіз екендігін дәлелдеңдер.

V ТАРАУ. НЕГІЗГІ ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР

1-§. Нақты көрсеткішті дәреже

1. Иррационал санның жуық мәндері. Айталық, бізге α иррационал сан берілген болсын. Онда c_0 бүтін сан табылып, α сан c_0 және $c_0+1=d_0$ сандар арасында жатады, яғни $\alpha\in[c_0;d_0]$ болады. Енді, $[c_0;d_0]$ кесіндіні тең 10 бөлікке бөлеміз. α сол бөліктерден бірінің ішкі нүктесі болады. Мысалы, $c_1=c_0+\frac{\alpha_1}{10}$, $d_1=c_0+\frac{\alpha_1+1}{10}$ (α_1-0, 1, 2, ..., 9 сандардан бірі) деп алсақ, $\alpha\in[c_1;d_1]$ болады. Енді, $[c_1;d_1]$ кесіндіні тең 10 бөлікке бөлеміз. α сол бөліктерден бірінің ішкі нүктесі болады. Мысалы, $c_2=c_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}$, $d_2=c_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2+1}{10^2}$, ($\alpha_2$-0,1,2,...,9 сандардан бірі) деп алсақ, $\alpha\in[c_2;d_2]$ болады.

Бұл процесті жалғастырып, $\{c_n\}$ және $\{d_n\}$ тізбектерді құрастырамыз:

$$c_n=c_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+...+\frac{\alpha_n}{10^n},\ d_n=c_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+...+\frac{\alpha_n+1}{10^n}.$$

Онда $c_n<\alpha<d_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(d_n-c_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}=0$ және $[c_0;d_0]\supset[c_1;d_1]\supset ...\supset[c_n;d_n]\supset...$ болатындығы айқын. Іштей жайласқан сегменттер принципіне орай $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}d_n=\alpha$ болады. Бұл жердегі c_n сан α санның кемімен, d_n сан есе α санның артығымен алынған жуық мәндері және қателік $\frac{1}{10^n}$ санынан кіші болады.

2. Бүтін көрсеткішті дәреже. Санның арифметикалық түбірі. Егер n оң бүтін сан болса, $a>0$ нақты санның n-дәрежесі деп $\underbrace{a\cdot a\cdot...\cdot a}_{n}$ көбейтіндіге айтылады және ол a^n арқылы белгіленеді.

Сонымен бірге, a^{-n} сан $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ теңдікпен анықталады және $a^0=1$ деп қабылданады.

Кез келген бүтін сандар үшін төмендегі қатынастар орынды:

1^o. Айталық, $n<m$ болсын. Егер $a>1$ болса, онда $a^n<a^m$, егер $a<1$ болса, онда $a^n>a^m$ болады.

2^o. $a^n \cdot a^m=a^{n+m}$, $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

3^o. $(a^n)^m=a^{nm}$.

4^o. $(ab)^n=a^nb^n$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$.

Кез келген $n>0$ үшін $y=x^n$ функция $[0;+\infty)$ аралықта өспелі және үзіліссіз, $x=0$ де $y=0$, $x\to+\infty$ да $y\to+\infty$ болады.

Демек, әрбір оң a сан үшін IV тараудағы 8.1-теоремаға орай $x^n=a$ теңдеудің жалғыз оң түбірі бар. Осы түбір $a>0$ санның n-дәрежелі *арифметикалық түбірі* деп аталады және $\sqrt[n]{a}$ немесе $a^{\frac{1}{n}}$ түрінде белгіленеді.

3. Рационал көрсеткішті дәреже. Айталық, $\dfrac{p}{q}$ рационал сан, a оң сан болсын. Егер p және q оң бүтін сан болса, $a^{\frac{p}{q}}=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$; $a^{-\frac{p}{q}}=\dfrac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$ деп қабылданады.

4. Иррационал көрсеткішті дәреже. Кез келген α иррационал сан үшін a^α дәрежені анықтаймыз.

Айталық, $a>1$ және α кез келген оң иррационал сан болсын. Енді α санның артығымен және кемімен алынған жуық мәндерінен түзілген $\{c_n\}$ және $\{d_n\}$ тізбектерді аламыз.

$a^\alpha=\sup\{a^{c_n}\}$ деп қабылдаймыз. Онда $a^\alpha=\inf\{a^{d_n}\}$ екендігі келіп шығады.

Шынында да, кез келген m және n үшін $c_m<d_n$ болғандықтан $a^{c_m}\le\sup\{a^{c_n}\}\le\inf\{a^{d_n}\}\le a^{d_n}$ орынды. Егер $(1+x)^{10^m}=a$ теңдеудің түбірін β деп алсақ, онда $\beta=a^{\frac{1}{10^m}}-1$ болады. Бернулли теңсіздігінен $a=(1+\beta)^{10^m}\ge1+\beta\cdot10^m$, бұдан $\beta\le\dfrac{a-1}{10^m}$. Сондықтан,

$$a^{d_m} - a^{c_m} = a^{c_m + \frac{1}{10^m}} - a^{c_m} = a^{c_m}\left(a^{\frac{1}{10^m}} - 1\right) = a^{c_m}\beta < a^{c_m}\frac{a-1}{10^m}$$ болады.

Сондай-ақ, $\{a^{c_m}\}$ жиын шенелген, $\{\frac{a-1}{10^m}\}$ шектеусіз кіші тізбек болғандықтан $\lim\limits_{m\to\infty}(a^{d_m} - a^{c_m})=0$ болады. Бұдан $\sup\{a^{c_n}\}=\inf\{a^{d_n}\}$ келіп шығады.

Егер $a<1$, $\alpha>0$ болса, онда $a^{\alpha}=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha}}$ деп аламыз және бүтін сандардағыдай $a>0$ және $\alpha<0$ болғанда, $a^{\alpha}=\dfrac{1}{a^{-\alpha}}$ деп қабылдаймыз.

Сонымен, кез келген x нақты сан үшін a^x -ті анықтадық.

a^x үшін жоғарыдағы, бүтін көрсеткішті дәреженің барлық қасиеттері орынды болады.

2-§. Көрсеткіштік функция

1-анықтама. $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$) көріністегі функция *көрсеткіштік функция* деп аталады.

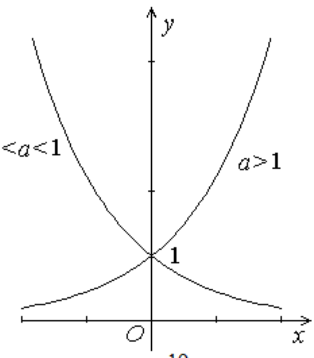
Көрсеткіштік функцияның қасиеттері.

1°. Функцияның анықталу облысы $(-\infty;+\infty)$.

2°. $a>1$ болса, $y=a^x$ функция өспелі, $a<1$ болса, кемімелі болады.

Мысалы, $a>1$ болса, онда $x_1<x_2 \Rightarrow$ $\dfrac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2-x_1} > a^0=1 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ болады.

Сол сияқты, $a<1$ болғанда a^x функция кемімелі екендігін көрсетуге болады (19-сурет).



19-сурет

3°. Кез келген x нақты сан үшін $a^x>0$ болады.

4°. Егер $a>1$ болса, онда $x\in(0;+\infty)$ үшін $a^x>1$, $x\in(-\infty;0)$ үшін $a^x<1$;

Егер $0<a<1$ болса, онда $x\in(0;+\infty)$ үшін $a^x<1$, $x\in(-\infty;0)$ үшін $a^x>1$;

$a^0=1$, яғни көрсеткіштік функцияның графигі ордината осін (0;1) нүктеде қиып өтеді.

5^o. Көрсеткіштік функция анықталу облысында үзіліссіз.

Дәлелдеу. Алдымен, $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$ екендігін көрсетеміз. Айталық, $a>1$ болсын. Онда $a^{\frac{1}{n}}>1$ болады. Егер $a^{\frac{1}{n}}=1+\alpha_n$ деп алсақ, онда $a=(1+\alpha_n)^n\geq 1+n\alpha_n$, бұдан $\alpha_n\leq\dfrac{a-1}{n}$. Енді $\alpha_n>0$ екендігін ескерсек, онда $0<\alpha_n\leq\dfrac{a-1}{n}$ болады. Бұл теңсіздікте шекке өтсек, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a-1}{n}=0$ болады. Мына $a^{\frac{1}{n}}=1+\alpha_n$ теңдікте шекке өтсек, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1+\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$ болады.

Енді, $-\dfrac{1}{n}<x<\dfrac{1}{n}$ теңсіздікті қанағаттандыратын x үшін $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}}=a^{-\frac{1}{n}}<a^x<a^{\frac{1}{n}}$ теңсіздік орынды. Бұл теңсіздік және $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$ теңдіктен $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$ екендігі келіп шығады.

Кез келген x_0 үшін

$$\lim_{x\to x_0} a^x=\lim_{x\to x_0}\left(a^{x_0}\cdot a^{x-x_0}\right)=\left|\begin{matrix} x-x_0=t \\ x\to x_0\Rightarrow t\to 0\end{matrix}\right|=a^{x_0}\lim_{t\to 0}a^t=a^{x_0}$$

болады.

Егер $a<1$ болса, онда

$$\lim_{x\to x_0} a^x=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{x_0}}=a^{x_0}$$

болады. Сонымен, көрсеткіштік функция барлық $x\in(-\infty;+\infty)$ нүктелерде үзіліссіз.

6^o. a^x функцияның мәндер жиыны $(0;+\infty)$.

Дәлелдеу. Айталық, $a>1$ болсын. Онда $a=1+\lambda$ деп алсақ, $\lambda>0$ болады. $a^n=(1+\lambda)^n\geq 1+n\lambda$ теңсіздіктен $n\to+\infty$ болғанда $a^n\to+\infty$ келіп шығады. Демек, a^x кез келген үлкен мәндерді қабылдайды.

$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ теңдіктен $n\to+\infty$ болғанда $a^{-n}\to 0$ келіп шығады.

Сол сияқты, $a<1$ жағдайды да тексеруге болады.

2. Гиперболалық функциялар. Мынадай көріністегі функциялар, сәйкесінше:

$y=\text{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ -гиперболалық косинус,

$y=\text{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ -гиперболалық синус,

$y=\text{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ -гиперболалық тангенс,

$y=\text{cth}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ -гиперболалық котангенс деп аталады.

$y=\text{sh}x$ функцияның анықталу облысы $(-\infty;+\infty)$, мәндер жиыны $(-\infty;+\infty)$. Ол тақ функция және анықталу облысында үзіліссіз.

$y=\text{ch}x$ функцияның анықталу облысы $(-\infty;+\infty)$, мәндер жиыны $(1;+\infty)$. Ол жұп функция және анықталу облысында үзіліссіз.

$y=\text{th}x$ функцияның анықталу облысы $(-\infty;+\infty)$, мәндер жиыны $(-1;1)$ интервалдан тұрады.

$y=\text{cth}x$ функцияның анықталу облысы $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ мәндері жиыны $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ болады.

th$x$, cth$x$ функциялардың әрбіреуі тақ және анықталу облыстарында үзіліссіз.

Гиперболалық функциялар арасында төмендегі қатынастар орынды:

$\text{th}x=\dfrac{shx}{chx}$, $\quad$ $\text{cth}x=\dfrac{chx}{shx}$, $\quad$ $\text{th}x\cdot\text{cth}x=1$, $\quad$ $\text{ch}^2x-\text{sh}^2x=1$,

$\text{sh}(x\pm y)=\text{sh}x\cdot\text{ch}y\pm\text{ch}x\cdot\text{sh}y$, $\quad$ $\text{ch}(x\pm y)=\text{ch}x\cdot\text{ch}y\pm\text{sh}x\cdot\text{sh}y$,

$\text{th}(x\pm y)=\dfrac{thx\pm thy}{1\pm thx\cdot thy}$, $\quad$ $\text{cth}(x\pm y)=\dfrac{1\pm thx\cdot thy}{thx\pm thy}$,

$\text{sh}2x=2\text{sh}x\cdot\text{ch}x$, $\quad$ $\text{ch}2x=\text{ch}^2x+\text{sh}^2x$.

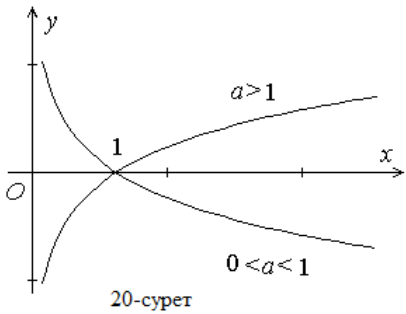
3-§. Логарифмдік функция

1-анықтама. b оң санның a ($a>0$) негізді логарифмі деп, b саны шығу үшін a санды шығару керек болған α дәрежеге айтылады: $a^{\alpha}=b$. Әдетте, b санның a негіз бойынша логарифмі $\alpha=\log_a b$ арқылы белгіленеді.

Басқаша айтқанда, b санның a негіз бойынша логарифмі $a^x=b$ теңдеудің түбірінен тұрады. $y=a^x$ функция $a>1$ болғанда өспелі, $a<1$ болғанда кемімелі және мәндер жиыны $(0;+\infty)$ аралықтан тұратын болғандықтан $a^x=b$ теңдеудің жалғыз түбірі бар. Демек, әр қандай оң b санның жалғыз логарифмі бар.

2-анықтама. $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$) көріністегі функция *логарифмдік функция* деп аталады.

Логарифмнің анықтамасы бойынша, логарифмдік функция көрсеткіштік функцияға кері функция болады. Логарифмдік функцияның қасиеттерін қарастырамыз:



20-сурет

1°. $y=\log_a x$ функцияның анықталу облысы $(0;+\infty)$.

2°. $y=\log_a x$ функция $a>1$ болғанда өспелі, $a<1$ болғанда кемімелі және кез келген оң $a\neq 1$ үшін $\log_a 1=0$ болады.

Демек, логарифмдік функция абсцисса осін $(1;0)$ нүктеде қиып өтеді.

3°. $y=\log_a x$ функция анықталу облысында үзіліссіз функция болады (20-сурет).

4-§. Дәрежелік функция

1-анықтама. $y=x^{\mu}$ көріністегі функция *дәрежелік функция* деп аталады. Бұл жерде μ тұрақты нақты сан.

Дәрежелік функцияның анықталу облысы μ санына байланысты. Мысалы, $f(x)=x^{\frac{1}{2m}}$, $m\in\mathbb{N}$ болса, $D(f)=[0;+\infty)$, $f(x)=x$

$\frac{1}{2m-1}$, $m\in\mathbb{N}$ болса, $D(f)=R$ болады. $f(x)=x^n$ функцияның анықталу облысы $D(f)=R$, $f(x)=\frac{1}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}$ функцияның анық-талу облысы $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, болады.

Егер μ иррационал сан болса, $y=x^{\mu}$ үшін $D(f)=(0;+\infty)$ болады.

Дәрежелік функцияның кейбір қасиеттерін қараймыз:

1°. $\mu>0$ болғанда дәрежелі функция өспелі, $\mu<0$ болғанда кемімелі болады.

Шынында да, $x^{\mu}=e^{\mu lnx}$ алмастыру орындаймыз. $y=lnx$ және $y=e^u$ функциялардың әрбірі өспелі болғандықтан $\mu>0$ болса, $y=x^{\mu}$ өспелі, $\mu<0$ болса, $y=x^{\mu}$ кемімелі болады.

2°. $y=x^{\mu}$ функция $(0;+\infty)$-анықталу облысында үзіліссіз.

Бұл $\ln x$ және e^x функциялардың әрбірі өзінің анықталу облысында үзіліссіздігінен келіп шығады.

5-§. Тригонометриялық функциялар. Кері тригонометриялық функциялар және олардың қасиеттері

1.Тригонометриялық функциялар. Тригонометриялық функциялар мектепте, академиялық лицей және колледждерде үйренілген. Сол себепті, бұл жерде тригонометриялық функциялардың қасиеттерін санап өтумен шектелеміз.

1°. $y=\cos x$, $y=\sin x$ функциялардың анықталу облысы нақты сандар жиынынан, мәндер жиыны [-1;1] сегменттен тұрады.

$y=\mathrm{tg}x$ функцияның анықталу облысы $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=\pm1$, ±2, ... нүктелерден басқа барлық нақты сандар жиыны, мәндер жиыны - барлық нақты сандар жиыны.

$y=\mathrm{ctg}x$ функцияның анықталу облысы $k\pi$, $k=\pm1$, ±2, ... сандардан басқа нақты сандар жиынынан, мәндер жиыны барлық нақты сандар жиынынан тұрады.

2°. $y=\cos x$ жұп функция, $y=\sin x$, $y=\mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$ функциялар тақ функциялар.

3°. $y=\cos x$, $y=\sin x$, $y=\mathrm{tg}x$ және $y=\mathrm{ctg}x$ функциялардың әрбірі өзінің анықталу облысында үзіліссіз функциялар.

4^o. y=cos$x$, y=sin$x$ функциялар периодты, олардың негізгі периоды 2π ге тең. y=tg$x$, y=ctg$x$ функциялар да периодты, олардың негізгі периоды π .

2. Кері тригонометриялық функциялар.

2.1. ***y*=arcsin*x* арксинус функция**. y=sin$x$ функция $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ сегментте өспелі және үзіліссіз, мәндер жиыны [-1;1] сегменттен тұрады (21, a) -сурет). Кері функцияның бар екендігі жайындағы теоремаға орай, [-1;1] сегментте y=sin$x$ функцияға кері функция бар. Бұл функция y=arcsin$x$ арқылы белгіленеді.

Бұл функцияның қасиеттерін санап өтеміз.

1^o. Анықталу облысы $D(f)$=[-1;1].

2^o. Мәндер жиыны $E(f)=[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

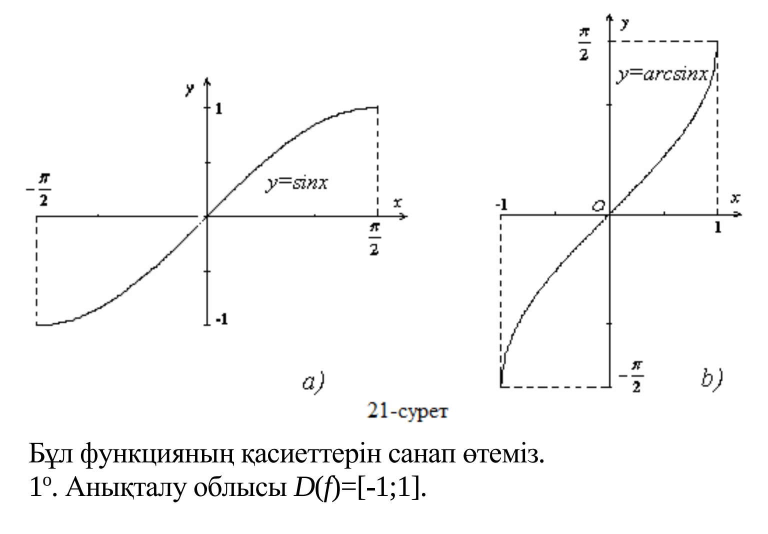
3^o. y=arcsin$x$ функция [-1;1] сегментте өспелі.

4^o. y=arcsin$x$ функция [-1;1] сегментте үзіліссіз.

Арксинус функцияның графигі 21, b) -суретте берілген.

2.2. ***y*=arccos*x*, арккосинус функция**.

y=cos$x$ функция $[0;\pi]$ сегментте кемімелі және үзіліссіз, мәндер жиыны [-1;1] сегменттен тұрады (22, a)-сурет). Сондықтан, [-1;1] сегментте y=cos$x$ функцияға кері функция бар. Бұл функция y=arccos$x$ арқылы белгіленеді.



21-сурет

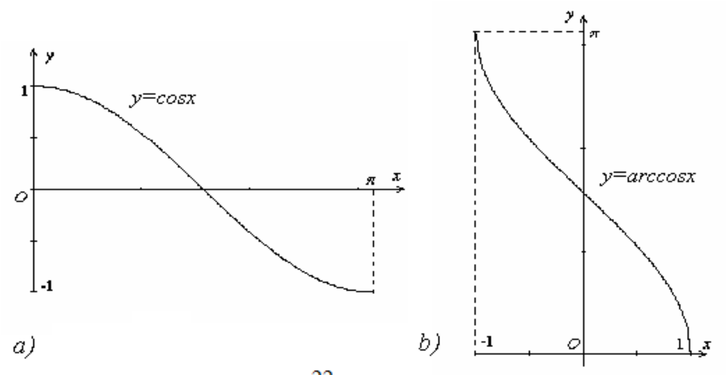
Бұл функцияның қасиеттерін санап өтеміз.

1^o. Анықталу облысы $D(f)$=[-1;1].

2^o. Мәндері жиыны $E(f)=[0;\pi]$.

3^o. y=arccos$x$ функция [-1;1] сегментте кемімелі.

4^o. y=arccos$x$ функция [-1;1] сегментте үзіліссіз (22, b)-сурет).



22-сурет

Дәл осыған ұқсас, y=arctg$x$ және y=arcctg$x$ функцияларды анықтауға болады.

Осы төрт функция *кері тригонометриялық функциялар* деп аталады.

Дәрежелік, көрсеткіштік, логарифмдік, тригонометриялық және кері тригонометриялық функциялар *негізгі элементар функциялар* деп аталады.

Негізгі элементар функцияларда төрт арифметикалық амалдарды (қосу, азайту, көбейту, бөлу) және күрделі функция түзу амалын шекті рет орындау нәтижесінде алынған функциялар *элементар функциялар* деп аталады.

1. Төмендегі функциялардың әрбірі элементар функцияға мысал болады:

a) $y=x^2+\sin 2x$,

b) $y=\sqrt{\lg^2 x+\frac{1}{x}}+\arccos x$,

c) $y=\sin^2(x^3+3x+1)+\ln x$.

2. Элементар болмаған функцияларға мыналар мысал болады:

a) $y=[x]$ функция, “x тің бүтін бөлігі”.

b) $y=\{x\}=x-[x]$ функция, “x тің бөлшек бөлігі”.

c) Дирихле функциясы.

ЖАТТЫҒУЛАР

1. Гиперболалық функциялардың өз анықталу облысында үзіліссіз екендігін дәлелдеңдер.

2. $y= \log_a x$ функция $(0;+\infty)$–анықталу облысында үзіліссіз функция екендігін дәлелдеңдер.

3. $y=\cos x$, $y=\sin x$, $y=\mathrm{tg} x$ және $y=\mathrm{ctg} x$ функциялардың әрбірі өзінің анықталу облысында үзіліссіз екендігін дәлелдеңдер.

4. $y=\arcsin x$ функцияның өспелі екендігін дәлелдеңдер.

5. $y=\arcsin x$ функцияның үзіліссіз екендігін дәлелдеңдер.

6. $y=\arccos x$ функцияның кемімелі екендігін дәлелдеңдер.

7. $y=\arccos x$ функцияның үзіліссіз екендігін дәлелдеңдер.

8. $y=\mathrm{arctg} x$ және $y=\mathrm{arcctg} x$ функцияларды анықтаңдар, қасиеттерін тұжырымдап, оларды дәлелдеңдер.

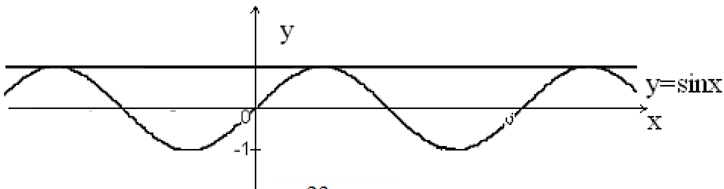
9. Кері гиперболалық функцияларды анықтаңдар, өрнегін жазыңдар, қасиеттерін зерттеңдер.

VI ТАРАУ. ТУЫНДЫ

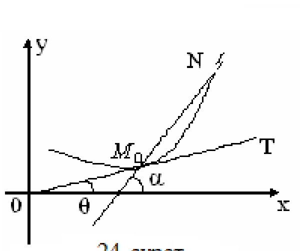
1-§. Туынды ұғымына алып келетін есептер

1.1. Қисықтың жанамасы. Біз шеңбердің жанамасы ұғымымен таныспыз. Шеңберге жүргізілген жанаманың сол шеңбермен жалғыз ортақ нүктесі бар және шеңбер түзудің бір жағында орналасқан болатын. Енді жазықтықта кез келген қисық берілген болса, оған жүргізілген жанаманы қандай анықтау мүмкін деген мәселені қарайық.

Жанаманы қисықпен жалғыз ортақ нүктесі бар болған түзу деп анықтауға болмайды, себебі, мысалы, $y=ax^2$ парабола және оның симметрия осі тек бір ортақ нүктесі бар, бірақ параболаның симметрия осі жанама болмайды. Қисық жанама түзудің бір жағында орналасуы да маңызды емес, себебі $y=ax^3$ қисыққа абсцисса осі (0;0) нүктеде жанасады, бірақ қисық бұл осьті сол нүктеде қиып өтеді. Жанаманың қисықпен жалғыз ортақ нүктесі бар болуы да оның маңызды қасиеті бола алмайды. Мысалы: $x=1$ түзу $y=\sin x$



23-сурет

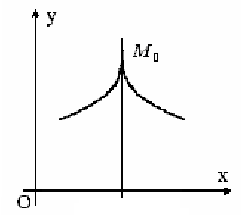


24-сурет

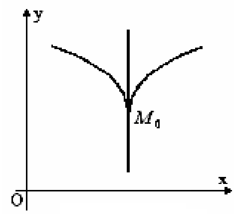
синусоидамен шексіз көп ортақ нүктелері бар, бірақ ол синусоида жанамасы болады (23-сурет).

Жанамаға анықтама беру үшін шек ұғымынан пайдалануға тура келеді. Айталық, Γ қандай да бір қисық доғасы, M_0 сол қисықтың нүктесі болсын. Қисыққа тиісті N нүктені таңдап, M_0N түзуді өткіземіз. Бұл түзу осы қисыққа жүргізілген *қиюшы* деп аталады (24-сурет). Егер N нүкте қисық бойымен M_0 нүктеге ұмтылса, M_0N түзу M_0 нүкте маңайында бұрылады. N нүкте M_0 нүктеге жақындаған сайын M_0N қиюшы қандай да бір M_0T шектік түзуге ұмтылуы мүмкін. Бұл жағдайда M_0T түзу $Г$ қисықтың M_0 нүктесіндегі *жанамасы* деп аталады (24-сурет). Қисықтың жанамасы 25- және 26-суреттердегідей жағдайда болуы да мүмкін.

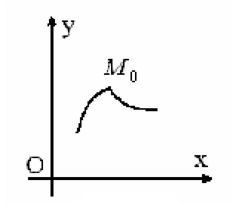
Егер қиюшының шектік түзуі жоқ болса, онда M_0 нүктеде жанама жүргізу мүмкін емес деп аталады. Мұндай жағдай M_0 нүкте қисықтың сыну нүктесі (27-сурет) болғанда орынды болады.



25-сурет

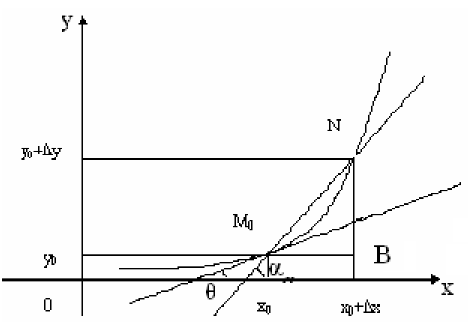


26-сурет



27-сурет

1.2. Қисық жанамасының бұрыштық коэффициентін табу жөніндегі есеп. Енді $Г$ қисық қандай да бір аралықта анықталған үзіліссіз $y=f(x)$ функцияның графигі болған жағдайда жанаманың бұрыштық коэффициентін табайық. $f(x)$ функцияның графигі болған $Г$ қисыққа тиісті M_0 нүктенің абсциссасы x_0, ординатасы $f(x_0)$ және сол нүктеде жанама бар деп қарастырайық.



28-сурет

$Г$ қисықта M_0 нүктеден өзгеше $N(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x))$ нүктені алып, M_0N қиюшы өткіземіз. Оның Ox осінің оң бағытымен жасаған бұрышын α әрпімен белгілейміз (28-сурет). α бұрыш Δx -ке тәуелді болады: $\alpha=\alpha(\Delta x)$ және $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{BN}{M_0B}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ орынды.

Жанаманың абсцисса осінің оң бағытымен жасаған бұрышын θ әрпімен белгілейміз. Егер $\theta\neq\pi/2$ болса, онда $\mathrm{tg}\alpha$ функцияның үзіліссіздігі бойынша $k_{жанама}=tg\theta=\lim\limits_{N\to M_0} tg\alpha$, және N нүктенің M_0

нүктеге ұмтылуы Δx-тің 0-ге ұмтылуына тең екендігін еске алсақ, $k_{жанама} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ теңдікті аламыз.

Сонымен, $y=f(x)$ функцияның абсциссасы x_0 болған нүктесінде вертикаль болмаған жанама өткізу үшін сол нүктеде $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ шектің бар болуы қажетті және жеткілікті.

1.3. Қозғалыстағы нүкте жылдамдығын табу жөніндегі есеп. Айталық, материалдық нүкте $s=s(t)$ заңмен түзу бойлап қозғалыста болсын. Физикада нүктенің t_0 және $t_0+\Delta t$ уақыт аралығында өткен $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$ жолдың сол уақыт аралығына қатынасы нүктенің *орташа жылдамдығы* деп аталады: $v_{орташа}= \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$. Δt қаншалық кіші болса, $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ орташа жылдамдық нүктенің t_0 уақыттағы жылдамдығына соншалықты жақын болады. Сол себепті нүктенің t_0 уақыттағы *лездік жылдамдығы* деп $[t_0;t_0+\Delta t]$ уақыт аралығындағы орташа жылдамдықтың Δt нөлге ұмтылғандағы шегіне айтылады.

Сонымен, $v_{лездік} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Жоғарыдағы екі түрлі есепті шешу бір нәтижеге - функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі нөлге ұмтылғандағы шегін есептеуге келтірілді.

Табиғаттану, қоғам және техникалардағы көптеген мәселелер жоғарыдағыға ұқсас шектерді есептеуді талап етеді. Сол себепті оны жеке зерттеу пайдалы болады.

2-§. Туынды

2.1. Функция туындысының анықтамасы. Айталық, $f(x)$ функция (a,b) интервалда анықталған болсын. Бұл интервалға тиісті x_0 нүкте алып, оған $x_0+\Delta x\in(a,b)$ болатындай Δx өсімше берейік. Нәтижеде $f(x)$ функция да x_0 нүктеде $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ өсімше алады.

Анықтама. Егер Δx нөлге ұмтылғанда $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынастың шегі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ бар және шекті болса, бұл шек *f(x) функцияның x_0 нүктедегі туындысы* деп аталады және $f'(x_0)$, немесе $y'(x_0)$, немесе $\frac{dy(x_0)}{dx}$, кейде $y'|_{x=x_0}$ немесе $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ арқылы белгіленеді.

Демек,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Мұнда $x_0+\Delta x=x$ деп алайық. Онда $\Delta x=x-x_0$ және Δx нөлге ұмтылғанда x айнымалы x_0-ге ұмтылады, нәтижеде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

болады. Демек, $f(x)$ функцияның x_0 нүктедегі туындысын x айнымалының x_0 -ге ұмтылғандағы $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ қатынастың шегі деп те анықтауға болады:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

x_0 нүктеде туындысы бар болған функция сол нүктеде *дифференциалданатын* функция деп аталады. Егер $f(x)$ функция (a,b) интервалдың әрбір нүктесінде дифференциалданатын болса, ол (a,b) *интервалда дифференциалданатын функция* деп аталады. Туынды табу амалы *дифференциалдау амалы* деп аталады.

Жоғарыдағы шек бар болған әрбір x_0 нүктеге анық бір сан сәйкес келеді, демек $f'(x)$- бұл жаңа функция болып, ол жоғарыдағы шек бар болған барлық x нүктелерде анықталған. Бұл функция $f(x)$ функцияның *туынды функциясы*, әдетте, *туындысы* деп аталады.

Енді туынды анықтамасынан пайдаланып, $y=f(x)$ функция туындысын табудың төмендегі алгоритмін беруге болады:

1) бекітілген x аргументтің мәніне сәйкес функцияның $f(x)$ мәнін табу;

2) x аргументке $f(x)$ функцияның анықталу облысынан шығып кетпейтіндей Δx өсімше беріп, $f(x+\Delta x)$-ті табу;

3) функцияның $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ өсімшесін есептеу;

4) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ қатынасты құрастыру;

5) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ қатынастың Δx нөлге ұмтылғанда шегін есептеу.

1-*мысал*. $f(x)=kx+b$ функцияның туындысын табыңдар.

Шешу. Туынды табу алгоритмінен пайдаланамыз.

1) x аргументті бекітіп, функцияның мәнін есептейміз: $f(x)=kx+b$;

2) аргументке Δx өсімше береміз, онда

$f(x+\Delta x)=k(x+\Delta x)+b=kx+k\Delta x+b$.

3) функцияның өсімшесі $\Delta f(x)=(kx+k\Delta x+b)-(kx+b)=k\Delta x$.

4) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{k\Delta x}{\Delta x}=k$;

5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} k=k$.

Демек, $(kx+b)'=k$.

Дербес жағдайда, $f(x)=b$ тұрақты функция (бұл жағдайда k=0) үшін $(b)'=0$; $f(x)=x$ (k=1) функция үшін $x'=1$ болады.

2-*мысал*. $f(x)=x^2$ функцияның туындысын табыңдар.

Шешу. Жоғарыдағы алгоритмнен пайдаланамыз.

1) x аргументті бекітіп, функция мәнін есептейміз: $f(x)=x^2$;

2) аргументке Δx өсімше береміз, онда

$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2$;

3) функцияның өсімшесі $\Delta f(x)=(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)-x^2=$ $=\Delta x(2x+\Delta x)$;

4) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}=2x+\Delta x$;

5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

Демек, $(x^2)'=2x$ екен.

3-*мысал*. $f(x)=\frac{1}{x}$ функцияның туындысын табыңдар.

Шешу. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$;

2) $f(x+\Delta x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}$. Бұл жерде жалпы алғанда $x>0$ және $|\Delta x|<x$ деп есептейміз;

3) $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$;

4) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=-\dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x}=-\dfrac{1}{x^2+x\Delta x}$;

5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2+x\Delta x}\right)=-\dfrac{1}{x^2}$.

Демек, $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$.

2.2. Туындысы бар болған функцияның үзіліссіздігі. $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде туындысы бар болуы және оның сол нүктеде үзіліссіз болуы арасында төмендегідей байланыс бар:

2.1-Теорема. Егер $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде туындысы бар болса, онда функция сол нүктеде үзіліссіз болады.

Дәлелдеу. 1-тәсіл. Айталық, $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде туындысы бар болсын: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$. Барлық $x\neq x_0$ нүктелерде мына теңдік орынды:

$f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$. Онда көбейтіндінің шегі жайындағы теорема бойынша

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

болады. Бұл $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде үзіліссіздігін білдіреді.

2-тәсіл. Функцияның x_0 нүктедегі туындысының анықтамасы бойынша $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Бұл теңдіктің оң жағындағы шекті

Δx айнымалының Δx нөлге ұмтылғандағы шегі деп қарастырсақ, онда $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$ айырым Δx нөлге ұмтылғанда шектеусіз кіші шама болады, оны $\alpha(\Delta x)$ арқылы белгілейміз. Сонымен $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ $- f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$ болып, төмендегі теңдік орынды болады:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x \text{, бұл жерде } \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0.$$

Бұл формула функция өсімшесінің формуласы деп аталады. Бұдан $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x) = 0$ екендігі келіп шығады. Демек, *f(x)* функцияның x_0 нүктеде үзіліссіз. Теорема дәлелденді.

Бұл теореманың керісі орынды емес, яғни функцияның нүктеде үзіліссіздігінен оның сол нүктеде туындысы бар болуы келіп шыға бермейді. Мысалы, $y=|x|$ функция x-тің барлық мәндерінде, сондай-ақ, $x=0$ нүктеде үзіліссіз. Бұл функцияның $x=0$ нүктедегі өсімшесі $\Delta y=|\Delta x|$, сондықтан

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \qquad \lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1,$$

бұдан $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынастың Δx нөлге ұмтылғанда шегі жоқ. Демек $f(x)=|x|$ функцияның $x=0$ нүктеде туындысы жоқ.

2.3. Бір жақты туындылар

Анықтама. Егер Δx нөлге оңнан (солдан) ұмтылғанда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынастың шегі бар және шекті болса, бұл шек $f(x)$ функцияның x_0 нүктедегі оң (сол) туындысы деп аталады және $f'_+(x_0)$ ($f'_-(x_0)$) арқылы белгіленеді.

Сонымен,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Әдетте функцияның оң және сол туындылары *бір жақты туындылар* деп аталады.

Мысалы, $f(x)=|x|$ функция үшін $f'_{+}(0)=1,\ f'_{-}(0)=-1$ екендігін тексеру қиын емес.

Функция туындысы, бір жақты туынды анықтамаларынан және функция шегі бар болуының қажетті және жеткілікті шартынан мына теореманың орынды екендігі келіп шығады:

2.2-теорема. Айталық, $f(x)$ функция x_0 нүктенің қандай да бір маңайында үзіліссіз болсын. Онда $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде $f'(x_0)$ туындысы бар болуы үшін $f'_{+}(x_0)$, $f'_{-}(x_0)$ бір жақты туындылар бар және $f'_{+}(x_0)=f'_{-}(x_0)$ теңдіктің орынды болуы қажетті және жеткілікті.

Бұл теореманы дәлелдеуді оқырманға жаттығу есебінде қалдырамыз.

4. Шексіз туындылар.

Кейбір нүктелерде $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ шек $+\infty$ ($-\infty$)-ге тең болуы мүмкін. Онда сол нүктелерде функцияның *шексіз туындысы* бар немесе функцияның *туындысы шексізге тең* деп аталады.

Мына $y=\sqrt[3]{x}$ функция үшін $\Delta y/\Delta x$ қатынастың Δx нөлге ұмтылғандағы шегін қарайық. Функцияның 0 нүктеде өсімшесін есептейміз: $\Delta y=\Delta f(0)=f(0+\Delta x)-f(0)=f(0+\Delta x)=f(\Delta x)=\sqrt[3]{\Delta x}$.

Функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасы $\dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$ және бұл қатынастың Δx нөлге ұмтылғандағы шегі $+\infty$ -ге тең.

Демек, $y=\sqrt[3]{x}$ функцияның $x=0$ нүктеде шексіз туындысы бар.

Шексіз туынды үшін де бір жақты шексіз туынды ұғымын қарауға болады.

Егер $y=f(x)$ функция $x=x_0$ нүктеде $+\infty$ ($-\infty$) туындысы бар болса, онда

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=+\infty\ (-\infty)$$

қатынастың орынды екендігін дәлелдеу мүмкін. Бұл тұжырымның керісі де орынды екендігі айқын.

Берілген x_0 нүктеде $f'_+(x_0)=+\infty$, $f'_-(x_0)=-\infty$, $f'_+(x_0)=-\infty$, $f'_-(x_0)=+\infty$) болуы да мүмкін. Мұндай жағдайда $f(x)$ функция $x=x_0$ нүктеде туындысы (шексіз туындысы да) жоқ деп есептеледі.

Мысал ретінде $y=\sqrt[3]{x^2}$ функцияның $x=0$ нүктедегі бір жақты туындыларды анықтайық. Бұл функцияның $x=0$ нүктедегі өсімшесі $\Delta y(0)=\sqrt[3]{(\Delta x)^2}$ және $\frac{\Delta y(0)}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$ екендігін көру қиын емес. Сол себепті $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$ және $\lim\limits_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$ болады. Демек, $y'_-(0)=-\infty$, $y'_+(0)=+\infty$ болып, функция $x=0$ нүктеде шексіз туындысы жоқ.

3-§. Туындының геометриялық және физикалық мағыналары. Жанама және нормаль теңдеулері

3.1. Туындының геометриялық мағынасы. Жоғарыда біз, егер $y=f(x)$ функция графигінің $M_0(x_0;f(x_0))$ нүктесінде жанамасы бар болса, онда жанаманың бұрыштық коэффициенті $k_{жанама}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ екендігін көрсеткен едік. Бұдан туындының геометриялық мағынасы келіп шығады:

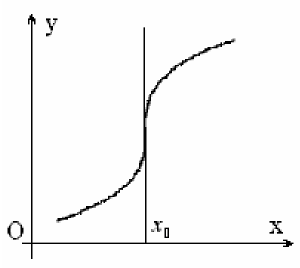
$y=f(x)$ функция графигіне абсциссасы $x=x_0$ болған нүктесіндегі жанаманың бұрыштық коэффициенті туындының сол нүктедегі мәніне тең: $k_{жанама}=f'(x_0)$.

Айталық, $y=f(x)$ функция $x=x_0$ нүктеде үзіліссіз және $f'(x_0)=+\infty$ болсын. Онда функция графигінің абсциссасы $x=x_0$ нүктесінде вертикаль жанамасы бар болады, оған қатысты функцияның графигі 29–суретте көрсетілгендей орналасады.

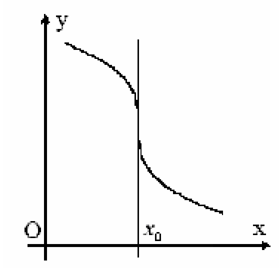
Дәл сол сияқты $f'(x_0)=-\infty$ болғанда да $x=x_0$ нүктеде функция графигінің вертикаль жанамасы бар болады, функцияның графигі жанамаға қатысты 30–суретте көрсетілгендей орналасады.

Егер $f'_+(x_0)=+\infty$ және $f'_-(x_0)=-\infty$ болса, онда функция графигінің $x=x_0$ нүкте маңайында 26-суреттегідей болады. Дәл сол сияқты, $f'_+(x_0)=-\infty$ және $f'_-(x_0)=+\infty$ болғанда, функцияның графигі

x=x_0 нүкте маңайында 25–суреттегідей түрде болады. Мұндай жағдайларда (x_0,$f(x_0)$) нүктеде жанама бар, бірақ туынды жоқ.



29-сурет



30-сурет

Егер x=x_0 нүктеде шекті бір жақты туындылар бар, бірақ f'_+ (x_0)≠ f'_- (x_0) болса, онда функцияның графигі 27–суреттегіге ұқсас түрде болады. (x_0,$f(x_0)$) нүкте графиктің *сыну нүктесі* болады.

3.2. Туындының физикалық мағынасы. Туынды ұғымына алып келетін екінші есепте қозғалыс заңы $s=s(t)$ функциямен анықталған түзу бойынша қозғалыстағы материалық нүктенің t уақыттағы лездік жылдамдығы $v_{лездік} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ екендігін көрген едік. Бұдан туындының физикалық (механикалық) мағынасы келіп шығады.

$s=s(t)$ функциямен анықталған түзу бойынша қозғалыстың t уақыт моментіндегі қозғалыс жылдамдығының сан мәні туындыға тең: $v_{лездік} = s'(t)$.

Туындының механикалық мағынасын қысқаша былай айтуға болады: жолдан уақыт бойынша алынған туынды жылдамдыққа тең.

Туынды ұғымы көптеген процестердің лездік жылдамдығын анықтауға көмек береді. Мысалы, $y=Q(T)$ денені T температураға дейін қыздыру үшін берілетін жылулық мөлшерінің өзгеруін бейнелейтін функция болсын. Онда дененің жылу сыйымдылығы жылулық мөлшерінен температура бойынша алынған туындыға тең болады:

$$C=\frac{dQ}{dT}=\lim_{\Delta T\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Жалпы алғанда, туындыны $f(x)$ функциямен өрнектелетін процестің лездік жылдамдығының *математикалық моделі* деп айтуға болады.

3.3. Жанама және нормальдің теңдеулері. Айталық, $y=f(x)$ функцияның x_0 нүктеде туындысы бар, $M(x_0;f(x_0))$ функцияның графигіне тиісті нүкте болсын. Функция графигіне сол нүктеде жүргізілген жанама теңдеуін табайық.

Бұл теңдеуді $y=kx+b$ түрінде іздейміз. Табылған түзудің $M(x_0;f(x_0))$ нүктеден өтуі анық, сол себепті $f(x_0)=kx_0+b$ теңдік орынды. Бұдан $b=f(x_0)-kx_0$ екендігін табамыз. Демек, жанама теңдеуі $y=kx+ f(x_0)- kx_0$ немесе $y= f(x_0)+k(x-x_0)$ түрінде болады. Егер жанаманың k бұрыштық коэффициенті туындының x_0 нүктедегі мәніне тең екендігін ескерсек, $y=f(x)$ функция графигінің $M(x_0;f(x_0))$ нүктесінде жүргізілген жанама теңдеуі төмендегідей болады:

$$y= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \qquad (1)$$

$y=f(x)$ функция графигінің $M(x_0;f(x_0))$ нүктесінен өтетін және сол нүктедегі жанамаға перпендикуляр болған түзу функция графигінің *нормалі* (нормаль түзуі) деп аталады. Егер $k_{жанама}\neq 0$ болса, жанама және нормальдің бұрыштық коэффициенттері $k_{нормал}\cdot k_{жанама}=-1$ шартпен байланысты болатыны белгілі. Бұдан $y=f(x)$ функцияның графигіне $M(x_0;f(x_0))$ нүктесінде жүргізілген нормаль теңдеуін

$$y= f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (2)$$

келтіріп шығаруға болады.

Ескерту. Егер $k_{жанама}=0$ болса, онда жанаманың теңдеуі

$y= f(x_0)$, нормальдің теңдеуі $x=x_0$ болады.

1-*мысал.* Абсциссасы $x=1$ болған нүктеде $y=1/x$ гиперболаға жүргізілген жанама және нормаль теңдеулерін жазыңдар.

Шешу. Бұл мысалда $x_0=1$, $f(x_0)=1$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f'(1)=-1$. Бұл мәндерді (1) формулаға қойып, жанама теңдеуін аламыз:

$y=1-(x-1)$, яғни $y=2-x$;

(2) формуладан пайдаланып, нормаль теңдеуін жазамыз: $y=1+(x-1)$, яғни $y=x$.

2-*мысал.* $y=x^2$ параболаның A(0;-4) нүктеден өтетін жанама теңдеуін жазыңдар.

Шешу. Берілген нүкте $y=x^2$ параболаға тиісті еместігі көрініп тұр. Айталық, $x=x_0$ нүкте жанасу нүктесінің абсциссасы болсын. Онда $f(x_0)=x_0^2$, $f'(x)=2x$, $f'(x_0)=2x_0$. (1) формуладан пайдалансақ

$$y= x_0^2+2x_0(x-x_0),$$

яғни

$$y= 2x_0x- x_0^2 \qquad (3)$$

теңдеуді аламыз.

Шартқа орай жанама (0;-4) нүктеден өтуі керек. (3) теңдеуде x және y орнына 0 және -4 мәндерін қойып x_0 -ге қатысты $-4=- x_0^2$ теңдеуге келеміз. Бұдан $x_0=2$, $x_0=-2$ болатындығын табамыз.

Егер $x_0=2$ болса, онда жанама теңдеуі $y=4x-4$; егер $x_0=-2$ болса, $y=-4x-4$ болады.

Сонымен, көрсетілген шартты қанағаттандыратын екі $y=4x-4$, $y=-4x-4$ жанама теңдеуін алдық.

3.4. Екі қисық арасындағы бұрыш. Жанамалар көмегімен *екі қисық арасындағы бұрыш* ұғымы анықталады.

Екі қисық арасындағы бұрыш деп олардың қиылысу нүктесінде сол қисықтарға жүргізілген жанамалардың арасындағы бұрышқа айтылады.

Бұл анықтамадан пайдаланып екі қисық арасындағы бұрыш тангенсін табуға болады. Айталық, $y=f_1(x)$ және $y=f_2(x)$ қисықтарының қиылысу нүктесі $M_0(x_0;y_0)$ болсын, сондай-ақ $y=f_1(x)$ қисыққа M_0 нүктеде жүргізілген жанама абсцисса осімен α бұрыш, $y=f_2(x)$ қисыққа M_0 нүктеде жүргізілген жанама β бұрыш жасасын.

Егер γ жанамалар арасындағы бұрыш болса, онда $\gamma=\beta-\alpha$ болады. Бұдан

$$\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}(\beta-\alpha)=\frac{tg\beta-tg\alpha}{1+tg\beta\cdot tg\alpha}$$

теңдікті аламыз.

Бірақ туындының геометриялық мағынасы бойынша $tg\alpha=f_1'(x_0)$ және $tg\beta=f_2'(x_0)$, демек, екі қисық арасындағы бұрыш үшін

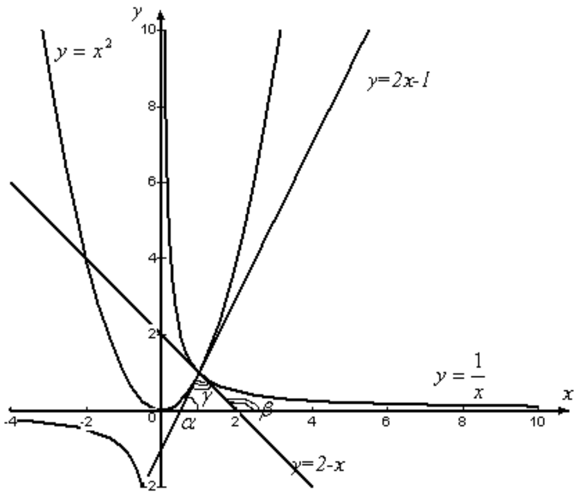
$$\mathrm{tg}\gamma=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_2'(x_0)\cdot f_1'(x_0)} \qquad (4)$$

формула орынды болады.

3-*мысал.* $y=x^2$ парабола мен $y=\dfrac{1}{x}$ гиперболалар арасындағы бұрышты табыңдар.

Шешу. Алдымен парабола мен гиперболаның қиылысу нүктесін табамыз. Оның үшін мына $\begin{cases} y=x^2, \\ y=\dfrac{1}{x} \end{cases}$ системаны шешеміз.

Бұдан $x^2=\dfrac{1}{x}$, $x^3=1$, $x=1$ болуы келіп шығады. Демек, системаның жалғыз (1,1) шешімі бар. $(x^2)'=2x$ болғандықтан $f_1'(1)=2$, сондай-ақ, $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$ болғандықтан $f_2'(1)=-1$ болады. Демек, (4) формула бойынша $tg\gamma=\dfrac{-1-2}{1+2\cdot(-1)}=3$ болып, бұдан бұрыш мәні $\gamma=arctg3$ екендігі келіп шығады (31-сурет).



31-сурет

4-§. Туындыны табу ережелері

Бұл параграфта $u(x)$ және $v(x)$ функциялардың туындыларын білген жағдайда олардың қосындысы, көбейтіндісі мен бөліндінің туындыларын табуды үйренеміз.

Төменде келтірілген теоремаларды дәлелдеуде туынды табу алгоритмінен, шегі бар функцияларда арифметикалық амалдар орындау жайындағы теоремалардан пайдаланамыз, сондай-ақ $\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x)$ және $\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x)$ екендігін ескеріп, $u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta u$, $v(x+\Delta x)=v(x)+\Delta v$ теңдіктерден пайдаланамыз.

Айталық, $u(x)$ және $v(x)$ функциялары (a,b) интервалда анықталған болсын.

4.1. Қосындының туындысы

4.1-теорема. Егер $u(x)$ және $v(x)$ функциялардың $x\in(a,b)$ нүктеде туындылары бар болса, онда $f(x)=u(x)+v(x)$ функцияның x нүктеде туындысы бар және

$$f'(x)=u'(x)+v'(x) \qquad (1)$$

теңдік орынды болады.

Дәлелдеу. 1) $f(x)=u(x)+v(x)$;

2) $f(x+\Delta x)= u(x+\Delta x)+ v(x+\Delta x)= u(x)+\Delta u+ v(x)+\Delta v;$

3) $\Delta y= f(x+\Delta x)- f(x)= \Delta u+\Delta v;$

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$;

5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=u'(x)+v'(x)$.

Сонымен, (1) теңдік орынды. Теорема дәлелденді.

Мысал. $(x^2+1/x)'=(x^2)'+(1/x)'=2x-1/x^2$.

Математикалық индукция методын пайдалана отырып, төмендегі салдарды дәлелдеуге болады:

Салдар. Егер $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ функциялардың x нүктеде туындылары бар болса, онда $f(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)$ функцияның да x нүктеде туындысы бар және төмендегі формула орынды:

$f'(x)=(u_1(x)+ u_2(x)+ ...+u_n(x))'= u'_1(x)+ u'_2(x)+ ...+u'_n(x)$.

4.2. Көбейтіндінің туындысы

4.2-теорема. Егер $u(x)$ және $v(x)$ функциялардың $x\in(a,b)$ нүктеде туындысы бар болса, онда олардың $f(x)=u(x)\cdot v(x)$ көбейтіндісінің де x нүктеде туындысы бар және

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x) \qquad (2)$$

теңдік орынды болады.

Дәлелдеу. 1) $f(x)=u(x)\cdot v(x)$;

2) $f(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)=(u(x)+\Delta u)\cdot(v(x)+\Delta v)=$
$=u(x)v(x)+\Delta uv(x)+\Delta vu(x)+\Delta u\Delta v;$

3) $\Delta y= f(x+\Delta x)- f(x)= \Delta uv(x)+\Delta vu(x)+\Delta u\Delta v;$

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta uv(x)+\Delta vu(x)+\Delta u\Delta v}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v(x)+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}u(x)+\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$;

5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x})\cdot v(x)+(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x})\cdot u(x)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=$
$=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)+u'(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v.$

Бұл жерде $v(x)$ функцияның үзіліссіздігін ескерсек, ($\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$), (2) формуланы аламыз. Теорема дәлелденді.

1-салдар. $(Cu(x))'=C\cdot u'(x)$ формула орынды.

Дәлелдеу. Екінші теорема бойынша $(Cu(x))'=$ $=C'\cdot u(x)+C\cdot u'(x)$. Бірақ $C'=0$, демек $(Cu(x))'=C\cdot u'(x)$.

Мысалдар. 1. $(6x^2)'=6(x^2)'=6\cdot 2x=12x$.

2. $(x^4)'=((x^2)(x^2))'=(x^2)'(x^2)+(x^2)(x^2)'=2x(x^2)+(x^2)\cdot 2x=4x^3$.

3. $(0{,}25x^4-3x^2)'=(0{,}25x^4)'+(3x^2)'=0{,}25\cdot 4x^3+3\cdot 2x= x^3+6x$.

2-салдар. Егер $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ функциялардың x нүктеде туындысы бар болса, онда олардың $f(x)=u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ ...\cdot u_n(x)$ көбейтіндісінің x нүктеде туындысы бар және төмендегі формула орынды болады:

$f'(x)= (u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot ...\cdot u_n(x))'= u'_1(x)\cdot u_2(x)\cdot ...\cdot u_n(x)+ u_1(x)\cdot u'_2(x)\cdot ...\cdot u_n(x)+...+ u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot ...\cdot u'_n(x)$.

4.3. Бөліндінің туындысы

4.3-теорема. Егер $u(x)$ және $v(x)$ функциялардың $x\in(a,b)$ нүктеде туындысы бар $v(x)\neq 0$ болса, онда $f(x)=u(x)/v(x)$ функцияның x нүктеде туындысы бар және

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \qquad (3)$$

формула орынды болады.

Дәлелдеу. 1) $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$;

2) $f(x+\Delta x)=\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}=\dfrac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}$;

3) $\Delta y= f(x+\Delta x)- f(x)=\dfrac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}-\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\Delta u\cdot v(x)-\Delta v\cdot u(x)}{(v(x)+\Delta v)v(x)}$;

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u\cdot v(x)-\Delta v\cdot u(x)}{(v(x)+\Delta v)v(x)\Delta x}=\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v(x)-u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\dfrac{1}{v^2(x)+v(x)\Delta v}$;

5) Δx нөлге ұмтылғанда шекке өтеміз, шегі бар функциялардың қасиеттері және $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$ теңдіктен пайдалансақ,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)-u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{v^2(x)+v(x)\Delta v}=$$

$=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ нәтижені аламыз, яғни (3) формула орынды екен. Теорема дәлелденді.

Мысал. $f(x)=\dfrac{3x+7}{5x-4}$ функцияның туындысын табыңдар.

Шешу. $\left(\dfrac{3x+7}{5x-4}\right)'=\dfrac{(3x+7)'\cdot(5x-4)-(3x+7)\cdot(5x-4)'}{(5x-4)^2}=$

$=\dfrac{3(5x-4)-5(3x+7)}{(5x-4)^2}=-\dfrac{47}{(5x-4)^2}$.

Сонымен біз бұл параграфта туындыны есептеудің мынадай ережелерін келтіріп шығардық:

1. Екі, жалпы алғанда шекті сандағы функциялар қосындысының туындысы туындылар қосындысына тең.

2. Тұрақты көбейткішті туынды белгісінің алдына шығаруға болады.

3. Екі *u(x)* және *v(x)* функциялар көбейтіндісінің туындысы *u'v+uv'* болады.

4. Екі *u(x)* және *v(x)* функциялар бөліндісінің туындысы $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ болады.

4.1 және 4.2-теорема салдарларынан пайдаланып мына ереженің де орынды екендігін көру қиын емес:

5. Шекті сандағы дифференциалданатын функциялардың сызықты комбинациясының туындысы туындылардың дәл сондай сызықты комбинациясына тең, яғни егер $f(x)=c_1u_1(x)+$ $+c_2u_2(x)+...+c_nu_n(x)$ болса, онда $f'(x)=c_1u'_1(x)+c_2u'_2(x)+...+$ $+c_nu'_n(x)$ болады. Бұл ережені дәлелдеуді оқырмандарға ұсынамыз.

Ескерту. Жоғарыдағы теоремалар функциялардың қосындысының, көбейтіндісінің және бөліндісінің туындысы бар болуының жеткілікті шарттары болады. Демек, екі функцияның қосындысы, айырымы, көбейтіндісі және қатынасынан тұратын функцияның туындысы бар болуынан бұл функциялардың әрбірінің туындысы бар болуы әрқашан да орынды бола бермейді. Мысалы, $u(x)=|x|$, $v(x)=|x|$ десек, олардың көбейтіндісі $y=x^2$ функция болады. Бұл функцияның кез келген нүктеде, дербес жағдайда, $x=0$ нүктеде туындысы бар. Бірақ, $y=|x|$ функцияның $x=0$ нүктеде туындысы жоқ екендігі белгілі.

5-§. Күрделі функцияның туындысы. Кері функцияның туындысы

5.1. Күрделі функцияның туындысы. Айталық, $u=\varphi(x)$ функция (a,b) интервалда анықталған, мәндер жиыны $(c;d)$ интервал, $y=f(u)$ функция $(c;d)$ интервалда анықталған болып, бұл функциялар көмегімен $y=f(\varphi(x))$ күрделі функция құрастырылған болсын.

5.1-теорема. Егер $u=\varphi(x)$ функцияның $x\in(a,b)$ нүктеде туындысы, $y=f(u)$ функцияның $u=\varphi(x)$ нүктеде туындысы бар болса, онда $y=f(\varphi(x))$ күрделі функцияның x нүктеде туындысы бар және

$$(f(\varphi(x)))'=f'(u)\cdot\varphi'(x) \qquad (1)$$

формула орынды болады.

Дәлелдеу. $u=\varphi(x)$ функция x нүктеде туындысы бар болғандықтан оның x нүктедегі өсімшесін

$$\Delta u=\varphi'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (2)$$

түрінде жазуға болады, бұл жерде $\Delta x\to0$ да $\alpha(\Delta x)\to0$.

Дәл солай, $y=f(u)$ функцияның u нүктедегі өсімшесін

$$\Delta y=f'(u)\Delta u+\beta(\Delta u)\Delta u \qquad (3)$$

түрінде жазуға болады, мұнда $\Delta u\to 0$ де $\beta(\Delta u)\to 0$.

Соңғы (3) теңдіктегі Δu орнына оның (2) теңдікпен анықталған өрнегін қоямыз. Нәтижеде

$$\Delta y=f'(u)(\varphi'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x)+\beta(\Delta u)(\varphi'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x)=$$
$$=f'(u)\varphi'(x)\Delta x+(f'(u)\alpha(\Delta x)+\varphi'(x)\beta(\Delta u)+\alpha(\Delta x)\beta(\Delta u))\Delta x$$

теңдік келіп шығады.

Егер $\Delta x\to 0$ болса, (2) теңдіктен $\alpha\to 0$ және $\Delta u\to 0$, егер $\Delta u\to 0$ болса, онда (3) теңдіктен $\beta\to 0$ болады. Бұлардан $\Delta x\to 0$ де $f'(u)\alpha+\varphi'(x)\beta+\alpha\beta$ шектеусіз кіші функция екендігі келіп шығады, оны γ-мен белгілейміз. Сонымен, $\Delta y=f'(u)\varphi'(x)\Delta x+\gamma\Delta x$. Бұдан $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}= f'(u)\varphi'(x)+\gamma$, шекке өтсек $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\varphi'(x)$. Бұл $y'= f'(u)\varphi'(x)$ екендігін дәлелдейді. Теорема дәлелденді.

Мысал. $y=\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^4$ функцияның туындысын табыңдар.

Шешу. Бұл жерде $y=u^4$, $u=\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)$. Демек, $y'=(u^4)'\cdot$

$$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)'=4u^3\left(2x+\frac{2}{x^2}\right)=8\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^3\left(x+\frac{1}{x^2}\right).$$

Әдетте (1) теңдікті

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\quad \text{немесе}\quad y_x'=y_u'u_x'$$

көріністе жазып, мынадай ереже түрінде айтылады: күрделі функцияның тәуелсіз айнымалы бойынша, туындысы аралық айнымалы бойынша алынған туынды және аралық айнымалыдан тәуелсіз айнымалы бойынша алынған туындылар көбейтіндісіне тең.

Бұл ережені төмендегідей талқылауға болады: егер берілген нүктеде y айнымалы u-ге қатысты y_u' есе жылдам, ал u болса x-ке қатысты u_x' есе жылдам өзгерсе, онда y айнымалы x-ке қатысты $y_u'u_x'$ есе жылдам өзгереді, яғни $y_x'=y_u'u_x'$.

Жоғарыдағы ереже үш, жалпы алғанда шекті сандағы туындысы бар болған функциялар композициясы үшін де орынды.

Мысалы, егер $y=f(u)$, $u=\varphi(t)$, $t=h(x)$ болса, онда $y_x'=y_u'u_t't_x'$ теңдік орынды болады.

5.2. Кері функцияның туындысы. Айталық, $y=f(x)$ функция $[a;b]$ кесіндіде өспелі, $(a;b)$ интервалда $y'=f'(x)$ туындысы бар және кез келген x үшін $f'(x)\neq 0$ болсын. $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$ деп белгілейміз. Онда $y=f(x)$ функция үшін кері функцияның бар болуы және үзіліссіздігі жайындағы теорема шарттары орындалады, себебі $y=f(x)$ функцияның үзіліссіздігі оның туындысы бар екендігінен келіп шығады. Сонымен, $[\alpha;\beta]$ кесіндіде $y=f(x)$ функцияға қатысты кері болған $x=\varphi(y)$ функция бар болады.

Кері функцияның y аргументіне $\Delta y\neq 0$ өсімше береміз. Онда $x=\varphi(y)$ функция қандай да бір $\Delta x=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)$ өсімше алады және кері функцияның бірсарындылығынан $\Delta x\neq 0$, үзіліссіздігінен Δy нөлге ұмтылғанда Δx нөлге ұмтылатындығы келіп шығады.

Енді $x=\varphi(y)$ функцияның туындысын табамыз. Жоғарыда айтылғандарды ескерсек, туындының анықтамасы бойынша

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}$$ болады. Демек, $x_y'=\varphi'(y)=1/f'(x)$ формула орынды.

Сонымен, төмендегі теорема дәлелденді:

5.2-теорема. Егер $y=f(x)$ функция $[a;b]$ кесіндіде өспелі, $(a;b)$ интервалдың әрбір нүктесінде нөлден өзгеше $y'=f'(x)$ туындысы бар болса, онда бұл функцияға кері болған $x=\varphi(y)$ функция $(f(a);f(b))$ интервалда туындысы бар және кез келген $y\in(f(a);f(b))$ үшін оның туындысы $1/f'(x)$ -қа тең болады.

Бұл теореманың $f(x)$ функциясы кемімелі болғанда да орынды екендігін дәлелдеуді оқырмандарға қалдырамыз.

Демек, кері функция туындысын есептеу ережесі

$$x'_y=\frac{1}{y'_x} \tag{4}$$

формуламен анықталады.

6-§. Негізгі элементар функциялардың туындылары

6.1. ***$y=x^{\mu}$ (x>0)*** **дәрежелік функцияның туындысы.** Бұл функцияның x нүктедегі өсімшесі $\Delta y=(x+\Delta x)^{\mu}-x^{\mu}=x^{\mu}((1+\frac{\Delta x}{x})^{\mu}-1)$ және $\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{\mu-1}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^{\mu}-1}{\frac{\Delta x}{x}}$ болады. Бізге $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$ формула белгілі. Сол себепті

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}x^{\mu-1}\cdot\left(\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^{\mu}-1}{\frac{\Delta x}{x}}\right)=\mu x^{\mu-1}.$$

Демек, $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$ формула орынды.

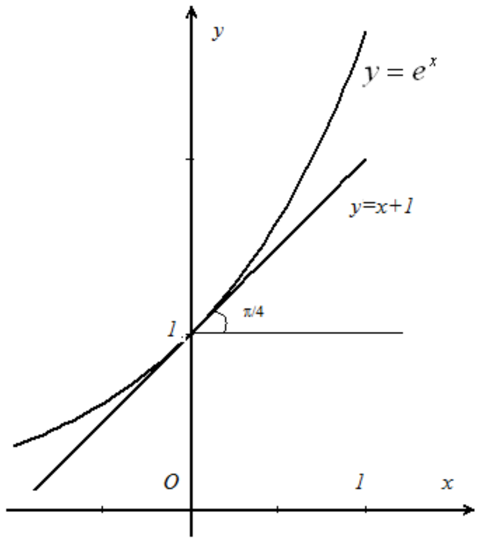
Күрделі функция үшін $((u(x))^{\mu})'=\mu(u(x))^{\mu-1}\cdot u'(x)$ формуланы жазуға болады.

Мысалы, $y=(x^2+1)^3$ функцияның туындысын табу қажет болсын. Бұл мысалда $u(x)=(x^2+1)$, $\mu=3$. Демек, жоғарыдағы формула бойынша $y'=3(x^2+1)^2\cdot((x^2+1)'=3((x^2+1)^2\cdot 2x=6x(x^2+1)^2$ болады.

6.2. Көрсеткіштік функцияның туындысы. $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ көрсеткіштік функция үшін $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$ және $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$. Бізге $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\ln a$ формула белгілі. Сол себепті $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a$ болады. Демек, $(a^x)'=a^x\ln a$, дербес жағдайда $(e^x)'=e^x$ формула орынды.

$y=e^x$ функцияның тамаша қасиеті бар: оның туындысы өзіне тең.

Мысал. $y=e^x$ функцияның графигі Oy осімен қандай бұрыш жасайды?



32-сурет

Шешу. Функцияның графигі *Oy* осін (0;1) нүктеде қиып өтеді. Функцияның графигіне сол нүктеде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін табамыз: $y'=e^x$ және $y'(0)=e^0=1$, ал бұдан жанаманың О*x* осімен π/4-ке тең болған бұрыш жасайтындығы келіп шығады. Онда жанаманың О*y* осімен жасаған бұрышы π/4 болады.

32-суретте $y=e^x$ функцияның графигі берілген, мұнда функцияның графигі x=0 нүкте маңайында y=x-1 түзуге жанасады.

Жоғарыдағы мысалда алынған нәтиже *e* санына мынадай анықтама беруге мүмкіндік береді: *e* саны деп ордината осімен π/4 бұрыш жасайтын көрсеткіштік функцияның негізіне айтылады.

$a^{u(x)}$ (a>0, $a\neq$1) функция үшін мына формулалардың орынды болатындығын көру қиын емес: $(a^{u(x)})' = a^{u(x)}\cdot u'(x)\cdot \ln a$.

Мысалы, $(3^{5x-3})'=3^{5x-3}\cdot(5x-3)'\cdot \ln 3=5\cdot 3^{5x-3}\cdot \ln 3$.

6.3. *y*=log*ₐx* (*a*>0, *a*≠1, *x*>0) логарифмдік функцияның туындысы. Бұл функция $x=a^y$ функцияға қатысты кері функция болғандықтан кері функцияның туындысын табу ережесі бойынша

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$ яғни, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$. Дербес жағдайда, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ формула орынды.

Бұл формулалардан мынадай маңызды қорытындыны алуға болады: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\log_a x)' = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\ln a}$ =0, бірақ $(\log_a x)'$ геометриялық мағынасы $y=\log_a x$ функция графигіне абсциссасы x-ке тең болған нүктеде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентіне тең. Сонымен, $\lim\limits_{x\to+\infty} tg\alpha$ =0, яғни $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha$ =0, ал бұл жеткілікті үлкен x үшін жанама абсциссалар осіне «дерлік параллель» болатындығын білдіреді. Бұл жағдайды функцияның графигін салуда есепке алу керек.

$log_a u(x)$ функция үшін мынадай формула орынды:

$$(\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)\cdot \ln a}.$$

6.4. Тригонометриялық функциялардың туындылары

1) ***y=sinx* функцияның туындысы**. Функцияның x нүктедегі өсімшесін синустар айырымы формуласынан пайдаланып табамыз:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) .$$

Функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасы

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$. Бұл теңдікте бірінші тамаша шек

және $cosx$ функцияның үзіліссіздігін ескеріп, шекке өтсек,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = \cos x$$ болады.

Демек, $(sinx)'=cosx$ формула орынды.

2) ***y=cosx* функцияның туындысы**. Бұл функцияның туындысын табу үшін $cosx=sin(x+\pi/2)$ тепе-теңдік және күрделі функцияның туындысын табу ережесінен пайдаланамыз. Онда

$(cosx)'=(sin(x+\pi/2))'=cos(x+\pi/2)\cdot(x+\pi/2)'=cos(x+\pi/2)\cdot 1=$
$=cos(x+\pi/2).$

$cos(x+\pi/2)=-sinx$ тепе-теңдікті ескерсек $(cosx)'=-sinx$ болады.

3) ***y=tgx* және *y=ctgx* функцияларының туындылары**. Бұл функциялардың туындыларын табу үшін бөліндінің туындысын табу ережесінен пайдаланамыз:

$$(tgx)'=(\frac{\sin x}{\cos x})'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Дәл сол сияқты $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ формуланы келтіріп шығаруға болады. Мұны оқырмандарға қалдырамыз.

Тригонометриялық функциялардың аргументтері *x* тәуелсіз айнымалының *u(x)* функциясы болса, онда күрделі функцияның туындысы туралы теорема бойынша мына формулалар орынды болады:

(sinu)'=u'·cosu, (cosu)'= -u'sinu,

$$(tgu)'=\frac{u'}{\cos^2 u},\quad (ctgu)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

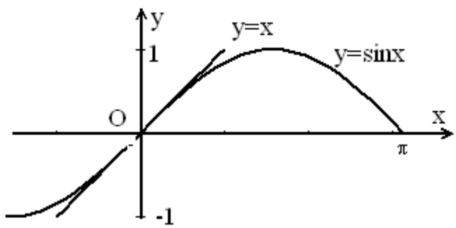
Мысал. *y=sinx* функцияның графигі координаталар басында *Ox* осімен қандай бұрыш жасайды?

Шешу. Бұл үшін *y=sinx* функцияның графигіне абсциссасы *x*=0 болған нүктеде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін табамыз: *y'=cosx*, демек *f'(0)=cos0*=1, бұрыштық коэффициенті $tg\alpha$=1, бұдан ізделген бұрыш π/4-ке тең.

Мысал. *y=tgx* функцияның графигі координаталар басында *Ox* осімен қандай бұрыш жасайды?

Шешу. *y=tgx* функцияның графигіне абсциссасы *x*=0 болған нүктеде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін табамыз: $y'=(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, демек $f'(0)=\frac{1}{\cos^2 0}$=1, бұрыштық коэффициенті $tg\alpha$=1, бұдан ізделінген бұрыш π/4-ке тең.

Бұл мысалдарда алынған нәтижелерді *y=sinx* және *y=tgx* функцияның графиктерін салуда ескеру қажет.



33-сурет

33-суретте *y=sinx* функцияның графигі келтірілген. Бұл функцияның графигі координаталар басында *y=x* түзуге жанасады.

6.5. Кері тригонометриялық функциялардың туындылары

1) ***y=arcsinx*** **функцияның туындысы**. Кері функцияның туындысы жайындағы теоремадан пайдаланып, *y=arcsinx* функцияның туындысын табайық.

Бұл функцияға кері болған *x=siny* функция $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ кесіндіде өспелі және $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ интервалда туындысы бар, әрі бұл интервалдың әрбір нүктесінде туынды нөлден өзгеше: $x'_y=\cos y\neq 0$. Сондықтан $y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}$ болады. Енді $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ интервалда *cosy*>0 және *cosy*=$\sqrt{1-\sin^2 y}$ формула орынды болғандықтан, $y'_x=$ $\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ болады.

Демек, $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1<x<1)$ формула орынды.

2) ***y=arccosx*** **функция туындысы.** Бұл функцияға кері болған *x=cosy* функция $[0,\pi]$ кесіндіде кемімелі, $(0;\pi)$ интервалдың әрбір нүктесінде нөлден өзгеше $x'_y=-\sin y$ туындысы бар. Демек, кері функцияның туындысы туралы теорема шарттары орынды. Сол себепті 5-§-тегі (4) бойынша

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ болады.

Сонымен, $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$ формула орынды.

3) ***y=arctgx*** **функцияның туындысы.** *y=arctgx* функцияның мәндер жиыны $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ интервалдан тұрады. Осы интервалда оған кері болған *x=tgy* функция бар және бұл функцияның туындысы $x'_y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$ нөлден өзгеше. Кері функцияның туындысы туралы теоремадан пайдалансақ,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(tgy)'} = \cos y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

болады.

Демек, $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ формула орынды.

Сол сияқты $y=arcctgx$ функция үшін

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

формуланың орынды екендігін көрсетуге болады.

Кері тригонометриялық функциялардың аргументтері x тәуелсіз айнымалының $u(x)$ функциясы болса, онда күрделі функцияның туындысы жайындағы теоремадан мына формулалар келіп шығады:

$$(arcsinu(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}; \quad (arccosu(x))' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}};$$

$$(arctgu(x))' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}; \qquad (arcctgu(x))' = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}.$$

7-§. Логарифмдік туынды. Дәрежелік-көрсеткіштік функцияның туындысы

7.1. Логарифмдік туынды. Айталық, $y=f(x)$ функция $(a;b)$ интервалда дифференциалданатын және $f(x)>0$ болсын. Онда сол интервалда $lny=lnf(x)$ функция анықталған болады. Күрделі функцияның туындысын табу ережесінен пайдаланып, $lny=lnf(x)$ функцияның туындысын табамыз: $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y} = (lnf(x))'$, бұдан

$$y' = y(lnf(x))' \qquad (1)$$

формуланы аламыз.

Функцияның логарифмінен алынған туынды *логарифмдік туынды* деп аталады.

Бірнеше функциялар көбейтіндісінің туындысын табуда (1) формуладан пайдалану есептеулерді ықшамдауға көмек береді. Шынында, $y=u_1\cdot u_2\cdot\ldots\cdot u_n$ функция (бұл жерде әрбір u_i, $i=\overline{1,n}$ функция туындысы бар және y функцияның анықталу облысынан алынған кез келген x үшін $u_i>0$) берілген болсын. Бұл функцияны логарифмдейміз: $\ln y=\ln u_1+\ln u_2+\ldots+\ln u_n$. Бұдан

$\frac{y'}{y}=\frac{u'_1}{u_1}+\frac{u'_2}{u_2}+\cdots+\frac{u'_n}{u_n}$ теңдікті аламыз. Соңғы теңдіктің екі жағын $y=u_1\cdot u_2\cdot\ldots\cdot u_n$ өрнекке көбейтіп, төмендегіні аламыз:

$$y'=u_1\cdot u_2\cdot\ldots\cdot u_n\cdot\left(\frac{u'_1}{u_1}+\frac{u'_2}{u_2}+\cdots+\frac{u'_n}{u_n}\right).$$

Мысал. $y=\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$ функцияның туындысын табыңдар.

Шешу. Берілген функцияны логарифмдейміз:

$\ln y=2\ln(x+1)-3\ln(x+2)-4\ln(x+3)$. Бұл теңдіктен туынды аламыз:

$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x+3}$. Бұдан

$$y'=\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}\left(\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x+3}\right)=-\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}.$$

7.2. Дәрежелік-көрсеткіштік функцияның туындысы. Айталық, $y=(u(x))^{v(x)}$ ($u(x)>0$) дәрежелік-көрсеткіштік функция берілген және $u(x)$, $v(x)$ функциялар x-тің берілген мәндерінде дифференциалданатын болсын. Бұл функцияның туындысын есептеу үшін (1) формуланы қолданамыз. Онда (1) формула бойынша $y'=(u(x))^{v(x)}\cdot(\ln((u(x))^{v(x)})'=(u(x))^{v(x)}(v(x)\cdot\ln u(x))'=$ $=(u(x))^{v(x)}(v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)})$ болады. Бұдан

$$((u(x))^{v(x)})'=(u(x))^{v(x)}\ln u(x)\cdot v'(x)+v(x)\cdot(u(x))^{v(x)-1}\cdot u'(x)$$

формула келіп шығады.

Сонымен, дәрежелік-көрсеткіштік функцияның туындысы екі қосылушыдан тұрады: егер $(u(x))^{v(x)}$ көрсеткіштік функция деп қаралса, бірінші қосылушыны, егер $(u(x))^{v(x)}$ дәрежелік функция деп қаралса, екінші қосылушыны аламыз.

Мысал. $y=x^{x-1}$ функцияның туындысын табыңдар.

Шешу. (1) формуладан пайдаланамыз.

$$y'=y\cdot(\ln x^{x-1})'=x^{x-1}\cdot((x-1)\ln x)'=x^{x-1}\cdot(\ln x+1-\frac{1}{x}).$$

8-§. Жоғары ретті туындылар

8.1. Жоғары ретті туынды ұғымы. Айталық, қандай да бір (a,b) интервалда дифференциалданатын $f(x)$ функция анықталған болсын. Онда $f'(x)$ туынды (a,b) да анықталған функция болады. Демек, $f'(x)$ функцияның туындысы, яғни туындының туындысын қарастыруға болады. Егер $f'(x)$ функцияның туындысы бар болса, оны $f(x)$ функцияның екінші ретті туындысы деп аталады және y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ символдардың бірімен белгіленеді. Сонымен, анықтама бойынша $y''(x)=(y')'$ болады.

Дәл солай, егер екінші ретті туындының туындысы бар болса, ол үшінші ретті туынды деп аталады және y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ арқылы белгіленеді. Демек, анықтама бойынша $y'''=(y'')'$ болады.

Берілген функцияның төртінші және басқа ретті туындылары сол сияқты анықталады. Жалпы айтқанда, $f(x)$ функцияның $(n\text{-}1)$-ретті $f^{(n-1)}(x)$ туындысының туындысына оның n-ретті туындысы деп аталады және $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$, $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$ символдардың бірімен белгіленеді. Демек, анықтама бойынша n-ретті туынды $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ рекуррент формула бойынша есептеледі.

Мысал. $y=x^4$ функция берілген. $y'''(2)$ нешеге тең?

Шешу. $y'=4x^3$, $y''=12x^2$, $y'''=24x$, демек $y'''(2)=24\cdot 2=48$.

Жоғарыда айтылғандардан функцияның жоғары ретті, мысалы, n-ретті туындыларды табу үшін оның барлық алдыңғы ретті туындыларды табу қажеттілігі келіп шығады. Бірақ кейбір функциялардың жоғары ретті туындылары үшін жалпы заңдылықты табу және одан пайдаланып формула келтіріп шығаруға болады.

Мысал ретінде кейбір элементар функциялардың *n*-ретті туындыларын табамыз.

1) $y=x^{\mu}$ $(x>0,\ \mu\in R)$ функция үшін $y^{(n)}$ -ді табамыз. Ол үшін функцияның туындыларын есептейміз: $y'=\mu x^{\mu-1}$, $y''=\mu(\mu-1)x^{\mu-2}$, ... Бұдан

$$(x^{\mu})^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)...(\mu-n+1)x^{\mu-n} \qquad (1)$$

деп тұжырымдауға болады.

Бұл формуланың дұрыс екендігін математикалық индукция методымен дәлелдейміз. Бұл формуланың $n=1$ үшін орынды екендігі жоғарыда көрсетілген. Енді (1) формула $n=k$ болғанда орынды, яғни $y^{(k)}=\mu(\mu-1)...(\mu-k+1)x^{\mu-k}$ болсын деп, оның $n=k+1$ болғанда орынды болатындығын көрсетеміз.

Анықтама бойынша $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'$. Сол себепті

$$y^{(k+1)}=(y^{(k)})=(\mu(\mu-1)...(\mu-k+1)x^{\mu-k})'=\mu(\mu-1)...(\mu-k+1)(\mu-k)x^{\mu-k-1}$$

болуы келіп шығады. Ал бұл (1) формуланың $n=k+1$-де орынды болатындығын білдіреді. Демек, математикалық индукция методы бойынша (1) формула әрбір $n\in N$ үшін орынды.

(1) де $\mu=-1$ болсын. Онда $y=\dfrac{1}{x}$ функцияның *n*-ретті туындысы

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)...(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}$$ (2) формуладан табылады.

2) $y=\ln x$ $(x>0)$ функцияның *n*-ретті туындысын табамыз. Бұл функцияның бірінші ретті туындысы $y'=\dfrac{1}{x}$, сондықтан (2) формуладан пайдалансақ,

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \qquad (3)$$

формула келіп шығады.

3) $y=\sin x$ болсын. Бұл функция үшін $y'=\cos x$ екендігі белгілі. Біз оны

$$y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$$

көріністе жазып аламыз. Соң *y=sinx* функцияның кейінгі ретті туындыларын есептейміз:

$$y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(IV)}) = (-\cos x)' = \sin x = \sin(x + 4\cdot\frac{\pi}{2})$$

Бұл өрнектерден *y=sinx* функцияның *n*-ретті туындысы үшін

$$y^{(n)} = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2}) \qquad (4)$$

формула шығады. Оның дұрыс екендігі математикалық индукция методымен дәлелденеді.

Дәл сол сияқты

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) \qquad (5)$$

екендігін көрсетуге болады.

Мысалы,

$$(\cos x)^{(115)} = \cos(x + 115\cdot\frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{3\pi}{2}) = \sin x\,.$$

8.2. Екінші ретті туындының механикалық мағынасы. Екінші ретті туындының қарапайым механикалық мағынасы бар. Айталық, материалық нүктенің қозғалыс заңы *s=s(t)* функциямен анықталған болсын. Онда оның бірінші ретті туындысы *v(t)=s'(t)* қозғалыс жылдамдығын анықтайтынын білеміз. Ал екінші ретті *a=v'(t)=s''(t)* туынды қозғалыс жылдамдығының жылдамдығын, яғни қозғалыс үдеуін көрсетеді.

Мысал. Материалық нүкте $s=5t^2+3t+12$ (*s* метрлерде, *t* секундтарда берілген) заңмен түзу бойынша қозғалыста болсын. Оның тұрақты күш ықпалында қозғалыста болатындығын көрсетіңдер.

Шешу. $s'=(5t^2+3t+12)'=10t+3;$ $s''=(10t+3)'=10$, бұдан $a=10м/с^2$ болып, қозғалыс үдеуі тұрақты. Ньютон заңы бойынша күш үдеуге пропорционал. Демек, күш те тұрақты екен.

8.3. Жоғарғы ретті туындының қасиеттері. Лейбниц формуласы.

1-қасиет. Егер $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының n-ретті туындылары бар болса, онда бұл екі функция қосындысының n -ретті туындысы бар және

$$(u(x)+v(x))^{(n)}=u^{(n)}(x)+v^{(n)}(x)$$

формула орынды.

Дәлелдеу. $y=u+v$ болсын. Бұл функцияның туындыларын біртіндеп есептеу нәтижесінде мынадай формулаларды аламыз: $y'=u'+v';\ y''=u''+v'', \dots, y^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$.

Жоғарыдағы формуланы математикалық индукция методын пайдаланып дәлелдейміз. $n=k$ ретті туынды үшін $y^{(k)}=u^{(k)}+v^{(k)}$ теңдік орынды болсын деп ұйғарамыз және $n=k+1$ үшін $y^{(k+1)}=u^{(k+1)}+v^{(k+1)}$ екенін көрсетеміз.

Шынында, жоғары ретті туындының анықтамасы, туындысы бар болған функциялардың қасиеттерінен пайдаланып, $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'=(u^{(k)}+v^{(k)})'=(u^{(k)})'+(v^{(k)})'=u^{(k+1)}+v^{(k+1)}$ екендігін табамыз.

Демек, $y^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$ теңдік кез келген натурал n үшін орынды.

2-қасиет. Тұрақты көбейткішті n-ретті туынды белгісі алдына шығаруға болады: $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$.

Бұл қасиет те математикалық индукция методынан пайдаланып дәлелденеді. Дәлелдеуді оқырмандарға қалдырамыз.

Мысал. $y=\dfrac{2x+3}{x^2-5x+6}$ функцияның n-ретті туындысы үшін формула келтіріп шығарыңдар.

Шешу. Берілген бөлшек рационал функцияның бөлімін көбейткіштерге жіктейміз: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Соң

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} \qquad (6)$$

теңдік орынды болатын A және B коэффициенттерді іздейміз. Бұл коэффициенттерді табу үшін теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз және екі бөлшектің теңдік шартынан пайдаланамыз. Онда

$$2x+3=A(x-3)+B(x-2), \text{ немесе } \quad 2x+3=(A+B)x+(-3A-2B)$$

теңдікке келеміз. Екі көпмүшеліктің теңдік шартынан (екі көпмүшелік тең болуы үшін айнымалының сәйкес дәрежелері алдындағы коэффициенттері тең болуы қажетті және жеткілікті) төмендегі теңдеулер системасын аламыз:

$$\begin{cases} A+B=2, \\ -3A-2B=3 \end{cases}$$

Бұл системаның шешімі A=-7, B=9 екендігін көру қиын емес. Табылған нәтижелерді (1) теңдікке қоямыз және жоғарыда дәлелденген қасиеттерден пайдаланып, берілген функцияның n-ретті туындысын былай жазып аламыз:

$$y^{(n)}=-7\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}+9\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} \qquad (7)$$

Енді $\frac{1}{x-2}$ және $\frac{1}{x-3}$ функциялардың n-ретті туындыларын табуымыз қажет. Бұл үшін $u=\frac{1}{x+a}$ функцияның n-ретті туындысын білу жеткілікті. Бұл функцияны $u=(x+a)^{-1}$ түрінде жазып, біртіндеп туындыларды есептейміз. Онда

$u'=-(x+a)^{-2}$, $u''=2(x+a)^{-3}$, $u'''=-2\cdot 3(x+a)^{-3}=-6(x+a)^{-4}$.

Математикалық индукция методы бойынша

$$u^{(n)}=(-1)^n\cdot n!(x+a)^{-n-1} \qquad (8)$$

Сонымен, (7) және (8) теңдіктерден пайдаланып төмендегі

$y^{(n)}=-7\cdot(-1)^n\cdot n!(x-2)^{-n-1}+9\cdot(-1)^n\cdot n!(x-3)^{-n-1}=$

$=(-1)^n\cdot n!\left(\frac{9}{(x-3)^n}-\frac{7}{(x-2)^n}\right)$ нәтижені аламыз.

3-қасиет. Егер $u(x)$ және $v(x)$ функциялардың n-ретті туындылары бар болса, онда бұл екі функция көбейтіндісінің n-ретті туындысы бар және

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n{}'u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\ldots+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+$$
$$+C_n{}^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)} \qquad (9)$$

формула орынды болады. Мұнда $C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Дәлелдеу. Математикалық индукция методын қолданамыз. n=1 болғанда $(uv)'=u'v+uv'$. Бұл (9) формуланың дұрыстығын көрсетеді. Сол себепті (9) формуланы кез келген n үшін орынды деп, оның *n+1* үшін де дұрыстығын көрсетеміз. (9) ды дифференциялдаймыз:

$$(uv)^{n+1}=u^{(n+1)}v+u^{(n)}v'+C'_n u^{(n)}v'+C_n{}'u^{(n-1)}v''+C_n^2u^{(n-1)}v''+C_n^2u^{(n-2)}v'''+$$
$$+...+C_n^k u^{(n-k+1)}v^{(k)}+C_n^k u^{(n-k)}v^{(k+1)}+...+C_n^{n-1}u''v^{(n-1)}+C_n^{n-1}u'v^{(n)}+$$
$$+u'v^{(n)}+uv^{(n+1)} \qquad (10)$$

Мына

$$1+C_n^1=1+n=C_{n+1}^1 \quad C_n^1+C_n^2=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n+1)n}{2}=C_{n+1}^2, \quad =$$
$$C_n^{k-1}+C_n^k=\frac{n(n-1)...(n+2-k)}{(k-1)!}+\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}=$$
$$=\frac{(n+1)n...(n+1-(k-1))}{k!}=C_{n+1}^k$$

теңдіктерден пайдаланып, (10) формуланы төмендегідей жазамыз:

$$(uv)^{n+1}=u^{(n+1)}v+C_{n+1}^1u^{(n)}v'+C_{n+1}^2u^{(n-1)}v''+...+C_{n+1}^k u^{(n+1-k)}v^{(k)}+...+uv^{(n+1)}.$$

Демек, (9) формула *n+1* үшін де орынды екен. Дәлелденген (9) формула *Лейбниц формуласы* деп аталады.

Мысал. $y=x^3e^x$ функцияның 20-ретті туындысын табыңдар.

Шешу. $u=e^x$ және $v=x^3$ деп алсақ, Лейбниц формуласы бойынша

$$y^{(20)}=x^3(e^x)^{(20)}+C_{20}^1(x^3)'(e^x)^{(19)}+C_{20}^2(x^3)''(e^x)^{(18)}+C_{20}^3(x^3)'''(e^x)^{(17)}+$$

$+C_{20}^4(x^3)^{(4)}(e^x)^{16}+...+(x^3)^{(20)}e^x$ болады. $(x^3)'=3x^2$, $(x^3)''=6x$, $(x^3)'''=6$, $(x^3)^{(4)}=0$ теңдіктерді және $y=x^3$ функцияның барлық кейінгі туындыларының 0-ге теңдігін, сондай-ақ кез келген *n* үшін $(e^x)^{(n)}=e^x$ екендігін ескерсек,

$y^{(20)}=e^x(x^3+3C_{20}^1x^2+6C_{20}^2x+6C_{20}^3)$ теңдікті аламыз.

Енді коэффициенттерді есептейміз:

$$C_{20}^1=20, \quad C_{20}^2=\frac{20\cdot19}{2}=190, \quad C_{20}^3=\frac{20\cdot19\cdot18}{3!}=\frac{20\cdot19\cdot18}{6}=1140.$$

Демек, $y^{(20)}=e^x(x^3+60x^2+1140x+6840)$.

ЖАТТЫҒУЛАР

1. 2.2-теореманы дәлелдеңдер.

2. Функциялардың туындыларын табыңдар:

a) $y=4x^3-5x^2-2x+7$; b) $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{x^8}{4}-3{,}5x^2+0{,}5x+9$;

c) $y=-5x^{-2}+x^{-3}+5$; d) $y=x^{1/4}+4x^{3/8}$;

e) $y=4\sqrt{x}-\frac{2}{x}$; f) $y=-\frac{3}{x^2}-x\sqrt{x}+2x\sqrt[3]{x}$.

3. Функциялардың туындыларын табыңдар:

a) $y=(2-5x)(x^3+2x-1)$; b) $y=(2\sqrt{x}-1)(\frac{2}{x}+3)$;

c) $y=\frac{x^3-3x+1}{x^2+2}$; d) $y=\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt[4]{x}-2}+\frac{2-3x}{5}$;

4. Егер V тік дөңгелек цилиндрдің көлемі, h оның биіктігі, r табанының радиусы болса, онда r тұрақты болғанда $\frac{dV}{dh}$ цилиндр табанының ауданына, h тұрақты болғанда $\frac{dV}{dr}$ цилиндр бүйір бетіне тең екендігін көрсетіңдер.

5. Мына $f(x)=3x^2-4\sqrt{x}+7$ функция үшін 1) $f'(1)$; 2) $f'(9)$; 3) $f'(\frac{1}{4})$; 4) $2f'(4)-f'(16)$ -терді есептеңдер.

6. Күрделі функциялардың туындыларын табыңдар:

a) $y=(3x^3-4x^2+7)^6$; b) $y=\sqrt[3]{x^3+6x-5}$;

c) $y=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$; d) $y=\sqrt{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[4]{x}}}$.

7. 5.2-теореманы $f(x)$ функция кемімелі болғанда да орынды екендігін дәлелдеңдер

8. Мына $f(x)=x^3$ функцияға кері болған функцияның $x=5$ нүктедегі туындысын табыңдар.

9. Гиперболалық (*shx*, *chx*, *thx* және *cthx*) функциялардың туындылары үшін формулаларды келтіріп шығарыңдар.

10. Кері гиперболалық функциялардың туындылары үшін формулаларды келтіріп шығарыңдар.

11. Функциялардың туындыларын табыңдар:

a) $y=3^x \cdot tgx$; b) $y=ln^3 4x$;

c) $y=sin3x+2^{1-2x}$; d) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

12. Логарифмдік туындыдан пайдаланып, берілген функциялардың туындыларын табыңдар:

a) $y=(ctgx)^x$; b) $y=(cosx)^{arctgx}$;

c) $y=(x-1)(x+2)^4(x+3)^{0,5}$;

d) $y=(x+1)^2\sqrt[5]{(x-4)^4\cdot(9-x)^{1/3}}$; e) $y=x^{\frac{x}{\ln^2 x}}$.

13. Функциялардың көрсетілген ретті туындыларын табыңдар:

a) $y=x\sqrt{4+x^2}$, y''; b) $y=arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, y'';

c) $y=x^7-e^{-2x}$, $y^{(4)}$; d) $y=x^2 lnx$, $y^{(6)}$;

e) $y=\dfrac{x^2}{1-x}$, $y^{(7)}$; f) $y=x^2 sin3x$, $y^{(50)}$.

14. Берілген функциялардың *n*-ретті туындыларын табыңдар:

a) $y=ln\dfrac{x^2-1}{x^2-6x+9}$; b) $y=\dfrac{x+1}{x(x-1)}$.

VII ТАРАУ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1-§. Функцияның дифференциалы

1.1. Дифференциалданатын функция ұғымы. Айталық, $y=f(x)$ функция (a,b) интервалда анықталған және $x_0 \in (a,b)$ болсын.

1-анықтама. Егер $f(x)$ функцияның x_0 нүктедегі Δy өсімшесін

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (1)$$

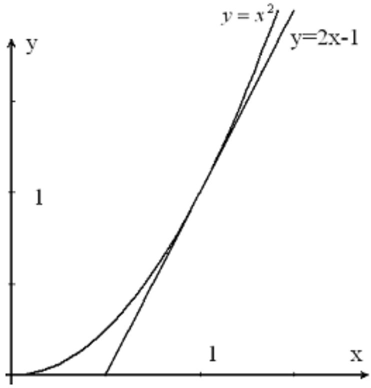
түрінде жазу мүмкін болса, онда бұл функция $x=x_0$ нүктеде *дифференциалданатын функция* деп аталады. Мұнда A - Δx-ке тәуелді болмаған қандай да бір тұрақты сан, $\alpha(\Delta x)$ шектеусіз кіші шама, яғни $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$.

$y=kx+b$ сызықты функцияны қарастырайық. Оның үшін $\Delta y=k\Delta x$ теңдік орынды, яғни функция өсімшесі аргумент өсімшесіне тура пропорционал. Анықтамадағы $\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$ теңдік функция өсімшесі аргумент өсімшесіне «дерлік тура пропорционал» екенін білдіреді, яғни $\Delta y\approx A\Delta x$. Бұл теңдік $|\Delta x|$ қаншалықты кіші болса, соншалықты анық болады. Геометриялық тұрғыдан x нүктеде дифференциалданатын функцияның графигі x нүктенің жеткілікті кіші маңайында қандай да бір вертикаль болмаған түзу, яғни қандай да бір сызықты функцияның графигімен «беттесіп» кетуін білдіреді. Сонымен, геометриялық тұрғыдан функцияның x нүктеде дифференциалданатындығы функция графигін x нүктенің жеткілікті кіші маңайында түзумен алмастыруға болатындығын білдіреді.

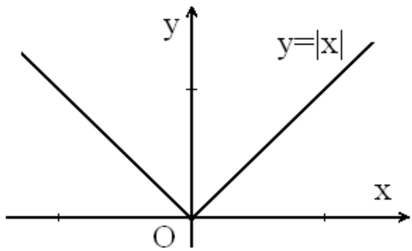
Мысалы, 34-суретте $y=x^2$ функция графигін $x_0=1$ нүкте маңайында $y=2x-1$ түзу графигімен «беттесіп» кетуі көрсетілген.

35-суреттен $y=|x|$ функцияны $x=0$ нүктеде дифференциалданбайтындығы келіп шығады, бұл функцияның графигін $x=0$ нүктенің ешбір маңайында «түзумен алмастыруға» болмайды.

1.2. Функцияның дифференциалы. $f(x)$ функция $(a;b)$ интервалда анықталған, $x\in(a;b)$ нүктеде дифференциалданатын болсын.



34-сурет



35-сурет

2-анықтама. *x* нүктеде дифференциалданатын *f(x)* функция өсімшесінің бас бөлігі $A\cdot\Delta x$ берілген *f(x)* функцияның сол нүктедегі *дифференциалы* деп аталады және *dy* немесе *df(x)* арқылы белгіленеді, яғни $dy= A\cdot\Delta x$.

1.3. Дифференциалданудың қажетті және жеткілікті шарты

1.1-теорема. *f(x)* функция $x=x_0$ нүктеде дифференциалданатын болуы үшін оның сол нүктеде шекті $f'(x_0)$ туындысы бар болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. *Қажеттілігі*. Функция $x=x_0$ нүктеде дифференциалданатын болсын. Онда функцияның өсімшесін (1) түрінде жазуға болады. Одан $\Delta x\neq 0$ болғанда $\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\alpha(\Delta x)$ теңдікті жазуға болады. Бұдан Δx нөлге ұмтылғанда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A$, демек $x=x_0$ нүктеде туынды бар және $f'(x_0)=A$ болады.

Жеткіліктілігі. Шекті $f'(x_0)$ туынды бар болсын, яғни $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$. Онда $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x)$, бұл жерде $\alpha(\Delta x)$ Δx нөлге ұмтылғанда шектеусіз кіші функция. Демек,

$$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (2)$$

немесе $\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, бұл жерде $A = f'(x_0)$ болады. Сонымен $x = x_0$ нүктеде $f(x)$ функция дифференциалданады және $A = f'(x_0)$. Теорема дәлелденді.

Бұл теорема бір айнымалы функцияның дифференциалданушы болуы туындының бар болуына тең күшті екендігін білдіреді. Сол себепті туындыны табу амалы функцияны *дифференциалдау*, математикалық анализдің туынды және оның қолдануын зерттейтін бөлімі *дифференциалдық есептеу* деп аталады.

Сонымен, 1-анықтамаға эквивалент болған мына анықтаманы беруге болады:

3-анықтама. Егер $f(x)$ функцияның $x = x_0$ нүктеде шекті $f'(x_0)$ туындысы бар болса, онда $f(x)$ функция $x = x_0$ нүктеде *дифференциалданатын* функция деп аталады.

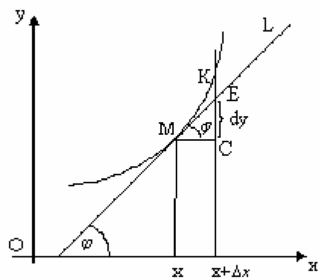
Мысалы, $y = x^2$ функция үшін $dy = 2x\Delta x$-ке тең.

Егер $f(x) = x$ болса, онда $f'(x) = 1$ және $df(x) = 1\cdot\Delta x$, яғни $dx = \Delta x$ болады. Осыны ескеріп, аргумент өсімшесін, әдетте, dx пен белгілейді. Осыны ескерсек, $f(x)$ функция дифференциалының формуласы былайша жазылады:

$$dy = f'(x)dx \quad \text{немесе} \quad dy = y'dx. \qquad (3)$$

2-§. Функция дифференциалының геометриялық және физикалық мағыналары

2.1. Дифференциалдың геометриялық мағынасы. Енді $x \in (a;b)$ интервалда дифференцалданатын $f(x)$ функцияның графигі 36-суретте көрсетілген қисықты бейнелесін.



36-сурет

Бұл қисықтың $(x, f(x))$ және $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ нүктелерін сәйкес түрде M және K әріптерімен белгілейміз. Онда $MC = \Delta x$, $KC = \Delta y$ болады. $f(x)$ функция x нүктеде шекті $f'(x)$

туындысы бар болғандықтан $f(x)$ функцияның графигіне оның $M(x,f(x))$ нүктесінде жүргізілген ML жанамасы бар және бұл жанаманың бұрыштық коэффициенті $tg\varphi=f'(x)$ болады. Сол ML жанаманың KC түзумен қиылысу нүктесін E әрпімен белгілейміз. ΔMEC -дан $\frac{EC}{MC}=tg\varphi$. Бұдан $EC=MC\cdot tg\varphi=f'(x)\Delta x$ екендігі келіп шығады. Демек, $f(x)$ функцияның x нүктедегі дифференциалы $dy=f'(x)\Delta x$ функцияның графигіне $M(x,f(x))$ нүктеде жүргізілген жанама өсімшесі EC кесіндіні көрсетеді. Дифференциалдың геометриялық мағынасы осыдан тұрады.

2.3. Дифференциалдың физикалық мағынасы. Материалық нүкте $s=f(t)$, бұл жерде s–жол, t-уақыт, $f(t)$-дифференциалданатын функция, заңдылықпен түзу бойынша қозғалыста болсын.

Δt уақыт аралығында нүкте $\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)$ жол жүреді. Жолдың бұл өсімшесін $\Delta s=f'(t)\Delta t+\alpha(\Delta t)\Delta t$ түрінде жазуға болады. Бұл жолды нүкте қандай да бір айнымалы жылдамдықпен жүрген. Егер Δt уақыт аралығында нүкте тұрақты $f'(t)$ жылдамдық, яғни t уақыттағы жылдамдығына тең жылдамдықпен қозғалыста болса, бұл жағдайда басып өтілген жол $f'(t)\Delta t$ болады. Бұл жолдың дифференциалына тең:

$$ds=f'(t)\Delta t.$$

3-§. Элементар функциялардың дифференциалдары. Дифференциалды табу ережелері. Дифференциал формасының инварианттылығы

3.1. Элементар функциялардың дифференциалдары

Элементар функциялардың туындыларын білеміз. Олардың дифференциалдары үшін төмендегі формулаларды жазуға болады:

1. $d(x^{\mu})=\mu\cdot x^{\mu-1}dx\ (x>0);$
2. $d(a^x)=a^x\cdot \ln a\, dx\ (a>0, a\neq 1);$
3. $d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx\ (x>0, a>0, a\neq 1)$; $d(\ln x)=\frac{dx}{x}\quad (x>0)$.
4. $d(\sin x)=\cos x dx;$
5. $d(\cos x)=-\sin x dx;$

6. $d(tgx)=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx \quad (x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z)$;

7. $d(ctgx)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}dx \quad (x \neq k\pi; k \in Z)$;

8. $d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (-1<x<1)$;

9. $d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (-1<x<1)$;

10. $d(arctgx)=\dfrac{1}{1+x^2}\,dx\,\dfrac{1}{1+x^2}$;

11. $d(arcctgx)=-dx$.

3.2. Дифференциалды табу ережелері. Функция дифференциалы анықтамасы және туынды табу ережелерінен мына тұжырымдардың орынды екендігі келіп шығады:

а) Шекті сандағы дифференциалданатын функциялар қосындысының дифференциалы олардың дифференциалдарының қосындысына тең.

Мысалы, екі функция қосындысы үшін бұл тұжырымды төмендегідей дәлелдеуге болады:

$d(u(x)+v(x))=(u(x)+v(x))'dx=(u'(x)+v'(x))dx=u'(x)dx+v'(x)dx=$
$=du+dv.$

b) Төмендегі $d(u(x)\cdot v(x))= v(x)\cdot du+u(x)\cdot dv$ формула орынды.

Дәлелдеу. Көбейтіндінің туындысы және функцияның дифференциалы формулаларынан пайдаланамыз:

$$d(u(x)\cdot v(x))=(u(x)\cdot v(x))'dx=(u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x))dx=$$
$$=(u'(x)dx)\cdot v(x)+u(x)\cdot(v'(x)dx)= v(x)\cdot du+u(x)\cdot dv.$$

с) $d(Cu(x))=Cu'(x)dx$ формуласы орынды.

d) Бөліндінің дифференциалы үшін мына формула орынды:

$$d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{du\cdot v(x)-u(x)\cdot dv}{v^2(x)}.$$

3.3. Дифференциал формасының инварианттылығы. $y=f(x)$ функция x нүктеде дифференциалданатын болсын. Дифференциалдың анықтамасы бойынша $dy=y_x'\Delta x$, немесе тәуелсіз айнымалының өсімшесін dx деп жазуға келіскенімізді ескерсек, $dy=y_x'dx$ болатын.

Енді x тәуелсіз айнымалы емес, t тәуелсіз айнымалының дифференциалданатын функциясы болсын: $x=\varphi(t)$. Онда $y=f(\varphi(t))=g(t)$ функция t айнымалының күрделі функциясы және $dy=y_t'dt$ теңдік орынды болады. Бірақ $y_t'=y_x'x_t'dt$ және $dx=x_t'dt$ екендігін ескерсек, $dy=y_x'dx$ формуланы аламыз, яғни дифференциалдың алдынғы көрінісіне қайтамыз.

Сонымен, дифференциалдың формасы өзгермеді, яғни функция дифференциалының формасы x тәуелсіз айнымалы болғанда да, тәуелді (аралық) айнымалы болғанда да бір түрлі көріністе болады: дифференциал туынды және туынды қайсы айнымалы бойынша есептелген болса, сол айнымалы дифференциалының көбейтіндісіне тең болады. Бұл қасиет *дифференциал формасының инварианттылығы* деп аталады. Бұл қасиетте тек дифференциал формасының сақталуы туралы айтылады. Егер x тәуелсіз айнымалы болса, онда $dx=\Delta x$; ал x тәуелді болса, онда, жалпы алғанда, $dx\neq\Delta x$ болады.

Мысал. $y=\sqrt[3]{x}$ берілген. 1) x тәуелсіз айнымалы болғанда және 2) $x=t^5+t^2-3$ болғанда dy-ті есептеңдер.

Шешу. 1) (2) формула бойынша $dy=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$ болады.

2) Дифференциал формасының инварианттылық қасиетінен пайдалансақ, $dy=\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$ болып,

$$dy=\frac{1}{3\sqrt[3]{(t^5+t^2-3)^2}}d(t^5+t^2-3)=\frac{(5t^4+2t)dt}{3\sqrt[3]{(t^5+t^2-3)^2}}$$

нәтижені аламыз.

4-§. Жуықтап есептеулерде дифференциалды қолдану

Жоғарыда айтқанымыздай, x_0 нүктеде дифференциалданатын $y=f(x)$ функция үшін $\Delta y\approx f'(x_0)dx$, яғни $\Delta y\approx dy$ жуық теңдік орынды.

Сол жуық теңдік математикалық анализдің теориялық және қолданбалы мәселелерінде өте маңызды. Жоғарыдағы теңдікте $\Delta y=f(x)-f(x_0)$, $\Delta x=x-x_0$ деп алсақ, $f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)(x-x_0)$ немесе

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \qquad (1)$$

теңдікті аламыз

(1) формула функцияның мәндерін жуықтап есептеуде кең қолданылады.

Мысалы, $f(x)=\sqrt{x}$ функция үшін төмендегі

$$\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} \qquad (2)$$

формуласы орынды. Егер $f(x)=\sqrt{x}$ функцияның x=0,98-де мәнін есептеу қажет болса, (2) формулада x=1, Δx=-0,02 деп алу жеткілікті. Онда $\sqrt{0,98}\approx\sqrt{1}+\frac{-0,02}{2\sqrt{1}}=1-0,01=0,99$ болады. Егер $\sqrt{0,98}$ калькуляторда есептесек, оны 10^{-6} анықтықта 0,989949 тең екендігін көруге болады. Демек, дифференциалдың көмегімен есептегенде қателік 0,001-ден үлкен емес.

5-§. Функцияның жоғары ретті дифференциалдары

5.1. Жоғары ретті дифференциалдар. Айталық, $y=f(x)$ функция (a,b) интервалда берілген болсын. Бұл функцияның $dy=f'(x)dx$ дифференциалы x аргументке тәуелді болып, $dx=\Delta x$ және Δx өсімше x-ке тәуелді емес, себебі x нүктедегі өсімшені x аргументке тәуелді болмайтындай етіп таңдауға болады. Бұл жағдайда дифференциал формуласындағы dx көбейткіш тұрақты болады және $f'(x)dx$ өрнек тек x аргументке тәуелді болып, оны x бойынша дифференциалдауға болады.

Демек, бұл функцияның дифференциалы бар болуы мүмкін және ол егер бар болса, функцияның *екінші ретті дифференциалы* деп аталады.

Екінші ретті дифференциал d^2y немесе $d^2f(x)$ арқылы белгіленеді. Сонымен, екінші ретті дифференциал төмендегідей анықталады: $d^2y=d(dy)$.

Берілген $y=f(x)$ функцияның екінші ретті дифференциалы формуласын табу үшін $dy=f'(x)dx$ формулада dx көбейткіш тұрақты деп қараймыз. Онда

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx=(f''(x)dx)dx=f''(x)(dx)^2$$

болады. Біз келешекте dx-тің дәрежелерін жақшасыз $(dx)^2=dx^2$ деп жазуға келісеміз. Бұл келісуді ескерсек, екінші ретті дифференциал үшін төмендегі формуланы аламыз:

$$d^2y=f''(x)dx^2 \qquad (1)$$

Дәл солай, үшінші ретті дифференциалды анықтауға және ол үшін төмендегі формуланы келтіріп шығаруға болады: $d^3y=d(d^2y)=d(f''(x)dx^2)=f'''(x)dx^3$.

Жалпы жағдайда, функцияның $(n\text{-}1)$-ретті $d^{n-1}y$ дифференциалынан алынған дифференциал функцияның n-ретті дифференциалы деп аталады және d^ny арқылы белгіленеді, яғни $d^ny=d(d^{n-1}y)$. Бұл жағдайда да функцияның n-ретті дифференциалы оның n-ретті туындысы арқылы өрнектеледі:

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n. \qquad (2)$$

Жоғарыдағы формуладан функцияның n-ретті туындысы оның n-ретті дифференциалы және тәуелді айнымалы дифференциалының n-дәрежесі қатынасына тең екендігі келіп шығады: $f^{(n)}(x)= d^ny/ dx^n$.

5.2. Күрделі функцияның жоғары ретті дифференциалдары. Енді x аргумент қандай да бір t айнымалының $x=\varphi(t)$ функциясы болған жағдай үшін жоғары ретті дифференциалдарды есептеу формулаларын келтіріп шығарамыз.

Бұл жағдайда $dx=\varphi'(t)dt$ болғандықтан, dx-ті x-ке тәуелсіз деп болмайды. Сол себепті анықтама бойынша $(d^2y=d(f'(x)dx))$ есептегенде, d^2y -ті екі $f'(x)$ және dx функциялар көбейтіндісінің дифференциалы деп қарастырамыз.

Нәтижеде

$$d^2y=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx+f'(x)d^2x=(f''(x)dx)dx+f'(x)d^2x=$$
$$=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x,$$

яғни

$$d^2y= f''(x)dx^2+f'(x)d^2x \qquad (3)$$

формуланы аламыз.

Енді екінші ретті дифференциал үшін алынған (1) формула (3) формуланың дербес жағдайы екендігін көрсету қиын емес.

Шынында, егер x тәуелсіз айнымалы болса, онда $d^2x=x''dx^2=0\cdot dx^2=0$ болып, (3) формуладағы екінші қосынды қатыспайды.

Үшінші ретті дифференциал үшін төмендегі

$$d^3y=f'''(x)dx^3+3f''(x)dxd^2x+f'(x)d^3x \qquad (4)$$

формула орынды екендігін дәлелдеуді оқырмандарға ұсынамыз.

(3) және (4) формулалардан күрделі функцияның жоғары ретті дифференциалдарын есептеуде дифференциал формасының инварианттылық қасиеті орындалмайтындығы шығады. Демек, жоғары ретті дифференциал формулаларының көрінісі x аргумент тәуелсіз айнымалы немесе басқа айнымалының дифференциалданатын функциясы болуына байланысты болады.

ЖАТТЫҒУЛАР

1. Анықтамадан пайдаланып төмендегі функциялардың x нүктеде дифференциалданатындығын көрсетіңдер және дифференциалын табыңдар:

a) $y=x^3-2$, b) $y=x-3x^2$, c) $y=5+6x-x^2$, d) $y=3x^3$.

2. Егер a) $y=x^7$, $x=1$, $\Delta x=0{,}1$; b) $y=2/x$, $x=2$, $\Delta x=-0{,}1$ болса, (1) формуладағы A және $\alpha(\Delta x)$ неге тең?

3. Мына

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & \text{егер} \quad x<0, \\ 0, & \text{егер} \quad 0\le x\le 2, \\ x-2, & \text{егер} \quad x>2 \end{cases}$$

функцияның сандар осінде үзіліссіз екендігін, бірақ 0 және 2 нүктелерінде дифференциалданбайтынын дәлелдеңдер.

4. Сандар осінде үзіліссіз, бірақ көрсетілген нүктелерде дифференциалданбайтын функцияларға мысалдар келтіріңдер:

a) $x=3$; b) $x=-1$, $x=5$; c) $x=-2$, $x=0$, $x=2$.

5. Берілген функциялардың бірінші және екінші ретті дифференциалдарын табыңдар:

a) $y=4x^3-3x^2+7$; b) $y=(2-\sqrt[3]{x^2})^2$;

c) $y=x^3\sqrt{x}-\dfrac{2}{x}$; d) $y=e^{-x}+\ln x$;

6. Мына $f(x)=2x^2+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}-5$ функцияның $x=8$ нүктеде $dx=0{,}1$ болғандағы дифференциалын есептеңдер.

7. Дифференциал көмегімен төмендегі функциялардың берілген нүктелердегі мәнін жуықтап есептеңдер:

1) $y=\sqrt[3]{x}$, a) $x=65$; b) $x=125{,}1324$;

2) $y=\sin x$, a) $x=29^0$, b) $x=359^0$.

8. Радиусы $R=8$ см болған шардың радиусы 0,2 см-ге ұзайтырылса, шардың көлемі шамамен нешеге өзгереді?

VIII ТАРАУ. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУДІҢ НЕГІЗГІ ТЕОРЕМАЛАРЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

1-§. Орта мән жайындағы теоремалар

Математикалық анализ курсында үйренілетін негізгі және қолданбалы мәселелерді шешуде үлкен маңызы бар болған функциялар жиындарынан бірі – бұл үзіліссіз функциялар жиыны. Алдыңғы тарауда біз дифференциалданатын функциялар жиыны үзіліссіз функциялар жиынының жиыншасы болатындығын көрсеттік. Дифференциалданатын функциялардың ерекше маңызы бар, себебі көптеген қолданбалы мәселелерді шешу туындысы бар функцияларды зерттеуге келтіріледі. Мұндай функциялардың кейбір ортақ қасиеттері бар. Бұл қасиеттер ішінде орта мән жайындағы теоремалар атымен біріккен теоремалар аса маңызды. Бұл теоремалар $[a;b]$ кесіндіде зерттелетін функция үшін ол немесе бұл қасиеті бар болған $[a;b]$ кесіндіге тиісті c нүктенің бар екендігін тұжырымдайды.

1.1. Ферма теоремасы

1.1-теорема. Егер $f(x)$ функция (a,b) аралықта анықталған, қандай да бір c нүктеде ең үлкен (ең кіші) мәнді қабылдаса және сол нүктеде шекті $f'(c)$ туынды бар болса, онда $f'(c)=0$ болады.

Дәлелдеу. *f(c) функцияның* ең үлкен мәні, яғни әрбір $x\in(a;b)$ үшін $f(x)\le f(c)$ теңсіздік орынды болсын.

Шартқа орай бұл c нүктеде шекті $f'(c)$ туынды бар. Демек,

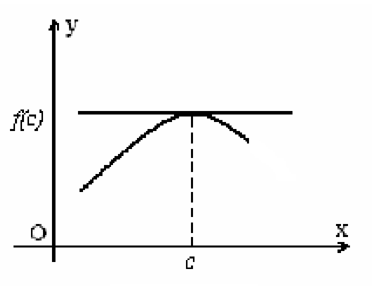
$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

орынды.

Бірақ $x<c$ болғанда $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0\Rightarrow f'(c)\ge 0$ және $x>c$ болғанда $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0\Rightarrow f'(c)\le 0$ болуынан $f'(c)=0$ екендігі келіп шығады.

Ең кіші мән болған жағдайда дәл солай дәлелденеді. Теорема дәлелденді.

Ферма теоремасының қарапайым геометриялық мағынасы бар. Ол $f(x)$ функцияның графигіне $(c;f(c))$ нүктеде жүргізілген жанаманың Ox осіне паралелль болатындығын көрсетеді (37-сурет).



37-сурет

1-ескерту. c нүктеде $f'(c)=0$ болса да, бұл нүктеде $f(x)$ функция ең үлкен (ең кіші) мәнді қабылдамауы мүмкін. Мысалы, $f(x)=2x^3-1$ функция (-1;1) интервалда берілген болсын. Бұл функция үшін $f'(0)=0$ болады, бірақ $f(0)=-1$ функцияның (-1;1) де ең үлкен немесе ең кіші мәні болмайды.

1.2. Ролль теоремасы

1.2-теорема (Ролль теоремасы). Егер $[a;b]$ кесіндіде анықталған $f(x)$ функция

1) $[a;b]$ кесіндіде үзіліссіз;

2) $(a;b)$ интервалда дифференциалданатын;

3) $f(a)=f(b)$ шарттарды қанағаттандырса, онда $f'(c)=0$ болатын кемінде бір c $(a<c<b)$ нүкте бар болады.

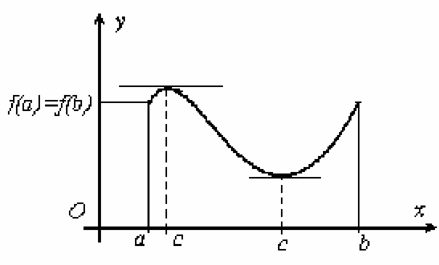
Дәлелдеу. Егер $f(x)$ функция $[a;b]$ кесіндіде үзіліссіз болса, онда Вейерштрасстың екінші теоремасына орай функция сол кесіндіде өзінің ең үлкен M және ең кіші m мәндерін қабылдайды. $f(x)$ функция үшін екі жағдай болуы мүмкін.

1. $M=m$, бұл жағдайда $[a,b]$ кесіндіде $f(x)=const$ және $f'(x)=0$ болады. $f'(c)=0$ теңдеуді қанағаттандыратын c нүкте ретінде $(a;b)$ интервалынан алынған кез келген нүктені алуға болады.

2. $M>m$, бұл жағдайда теореманың $f(a)=f(b)$ шартынан функция M немесе m мәндерінен кемінде біреуін (a,b) интервалға тиісті нүктеде қабылдайтындығы келіп шығады. Айталық, $f(c)=m$ болсын. Ең кіші мәннің анықтамасы бойынша кез келген $x\in[a,b]$ үшін $f(x)\geq f(c)$ теңсіздік орынды болады.

Енді $f'(c)=0$ екендігін көрсетеміз. Теореманың екінші шарты бойынша $f(x)$ функцияның $(a;b)$ интервалдың әрбір x нүктесінде шекті туындысы бар. Бұл шарт c нүкте үшін де орынды. Демек, Ферма теоремасы шарттары орынды. Бұдан $f'(c)=0$ екендігі келіп шығады.

$f(c)=M$ болған жағдайда теорема жоғарыдағыдай дәлелденеді. Теорема дәлелденді.



38-сурет

Ролль теоремасына төмендегідей геометриялық мағына беруге болады (38-сурет). Егер [*a*,*b*] кесіндіде үзіліссіз, (*a*,*b*) интервалда дифференциалданатын *f(x)* функция кесінді ұштарында тең мәндер қабылдаса, онда *f(x)* функцияның графигінде абсциссасы $x=c$ болған *C* нүкте табылып, сол нүктеде функцияның графигіне жүргізілген жанама абсциссалар осіне параллель болады.

2-ескерту. Ролль теоремасының шарттары жеткілікті болып, қажетті емес. Мысалы,

1) $f(x)=x^3$, $x\in[-1:1]$ функция үшін теореманың 3-шарты орындалмайды, ($f(-1)=-1\neq 1=f(1)$), бірақ $f'(0)=0$ болады.

2) $$f(x)=\begin{cases} x, & \text{егер} \quad 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{егер} \quad 1<x<2, \\ 2, & \text{егер} \quad x\ge 2 \end{cases}$$ функция үшін Ролль теоремасының барлық шарттары орындалмайды, бірақ (1;2) интервалдың кез келген нүктесінде $f'(x)=0$ болады.

1.3. Лагранж теоремасы

1.3-теорема (Лагранж теоремасы). Егер *f(x)* функция [*a*,*b*] кесіндіде үзіліссіз және (*a*,*b*) интервалда шекті $f'(x)$ туынды бар болса, онда (*a*,*b*) интервалда

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (1)$$

теңдік орынды болатын кемінде бір *c* нүкте бар.

Дәлелдеу. Мына

$$\Phi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

көмекші функцияны қарастырамыз. Бұл $\Phi(x)$ функцияны [a,b] кесіндіде үзіліссіз және (a,b) интервалда туындысы бар болған $f(x)$ және x функциялардың сызықты комбинациясы ретінде қарауға болады. Бұдан $\Phi(x)$ функцияның [a,b] кесіндіде үзіліссіз және (a,b) интервалда туындысы бар екендігі келіп шығады. Сондай-ақ

$$\Phi(a) = \Phi(b) = 0 .$$

Демек, $\Phi(x)$ функция Ролль теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады.

Сондықтан Ролль теоремасы бойынша (a,b) интервалда $\Phi'(c)$ =0 болатын кемінде бір c нүкте бар.

Сонымен,

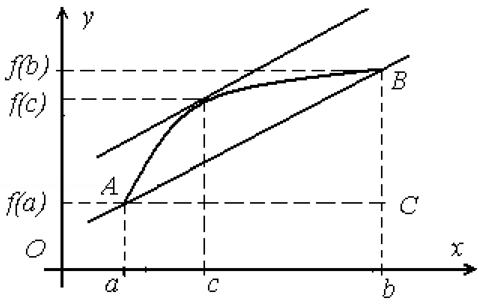
$$\Phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

бұдан дәлелдеу керек болған (1) формула келіп шығады. Теорема дәлелденді.

(1) формуланы кейде *Лагранж формуласы* деп те атайды.

Бұл формула

$f(b)$-$f(a)$=$f'(c)(b$-$a)$ (2) түрінде де жазылады.



39-сурет

Енді Лагранж теоремасының геометриялық мағынасына өтеміз. $f(x)$ функция Лагранж теоремасының шарттарын қанағаттандырсын. (39-сурет). Функция графигінің $A(a;f(a))$, $B(b;f(b))$ нүктелері арқылы қиюшы өткіземіз, оның бұрыштық коэффициенті

$$tg\beta = \frac{BC}{AC} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

болады.

Туындының геометриялық мағынасы бойынша $f'(c)$ - бұл $f(x)$ функцияның графигіне оның $(c;f(c))$ нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті: $tg\beta=f'(c)$. Демек, (1) формула $f(x)$ функцияның графигіне AB қиюшыға параллель болатын жанама бар екендігін білдіреді.

Дәлелденген (1) формуланы басқа көріністе де жазуға болады. Ол үшін $a<c<b$ теңсіздіктерді ескеріп, $\frac{c-a}{b-a}=\theta$ белгілеу енгіземіз, онда $c=a+(b-a)\theta$, $0<\theta<1$ болуы анық. Нәтижеде (1) формула мына $f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$ көрініске келеді.

Егер (1) формулада $a=x_0$; $b=x_0+\Delta x$ алмастыруларды орындасақ, ол

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\Delta x \qquad (3)$$

бұл жерде $x_0<c<x_0+\Delta x$, көрініске келеді. Бұл формула аргумент өсімшесімен функция өсімшесін байланыстырады, сол себепті (3) формула *шекті өсімшелер формуласы* деп аталады.

Егер (1) Лагранж формуласында $f(a)=f(b)$ деп алсақ, Ролль теоремасы келіп шығады, яғни Ролль теоремасы Лагранж теоремасының дербес жағдайы екен.

Мысал. Мына [0,2] кесіндіде $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ функция үшін Лагранж формуласындағы с аргументтің мәнін табыңдар.

Шешу. Функцияның кесінді ұштарындағы мәндерін және туындысын есептейміз: $f(0)=-2$; $f(2)=12$; $f'(x)=12x^2-10x+1$. Алынған нәтижелерді Лагранж формуласына қоямыз, Нәтижеде

$12-(-2)=(12c^2-10c+1)(2-0)$ немесе $6c^2-5c-3=0$ квадрат теңдеуді аламыз. Бұл теңдеуді шешеміз: $c_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{97}}{12}$. Табылған түбірлерден тек $\frac{5+\sqrt{97}}{12}$ берілген кесіндіге тиісті. Демек, $c=\frac{5+\sqrt{97}}{12}$ болады.

Лагранж теоремасы өз кезеңінде мына теореманың дербес жағдайы болады.

1.4. Коши теоремасы

1.4-теорема (Коши теоремасы). Егер $[a,b]$ кесіндіде анықталған $f(x)$ және $g(x)$ функциялар

1) $[a,b]$ да үзіліссіз;

2) (a,b) интервалда $f'(x)$, $g'(x)$ бар және $g'(x)\neq0$ болса, онда

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (4)$$

теңдік орынды болатын кемінде бір c ($a<c<b$) нүкте бар.

Дәлелдеу. Шынында, (4) теңдіктің мағынасы болуы үшін $g(b)\neq g(a)$ болуы керек. Бұл теоремадағы $g'(x)\neq 0$, $x\in(a;b)$ шарттан келіп шығады. Шынында да, егер $g(a)=g(b)$ болса, онда $g(x)$ функция Ролль теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырып, қандай да бір $c\in(a;b)$ нүктеде $g'(c)=0$ болатын еді. Бұл $(a;b)$ интервалда $g'(x)\neq 0$ шартқа қарама-қайшы. Демек, $g(b)\neq g(a)$ болады.

Енді көмекші

$$\Phi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)$$

функцияны қарастырамыз.

Шартқа орай $f(x)$ және $g(x)$ функциялар $[a,b]$ да үзіліссіз, (a,b) интервалда дифференциалданушы болғандықтан, $\Phi(x)$ функция, біріншіден $[a,b]$ кесіндіде үзіліссіз функциялардың сызықты комбинациясы ретінде үзіліссіз, екіншіден (a,b) интервалда

$$\Phi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

туынды бар.

Енді $\Phi(x)$ функцияның $x=a$ және $x=b$ нүктелердегі мәндерін есептейміз: $\Phi(a)=\Phi(b)=0$. Демек, $\Phi(x)$ функция $[a,b]$ кесіндіде Ролль теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады. Сол себепті кемінде бір c ($a<c<b$) нүкте табылып, $\Phi'(c)=0$ болады. Сонымен,

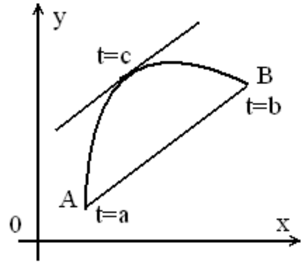
$$0=\Phi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)$$

және бұдан (4) теңдіктің орынды екендігі келіп шығады. Теорема дәлелденді.

Дәлелденген (4) теңдік *Коши формуласы* деп те аталады.

Енді Коши теоремасының геометриялық мағынасын анықтаймыз. $x=\varphi(t)$, $y=f(t)$, $a\leq t\leq b$ жазықтықтағы қисықтың параметрлік теңдеуі болсын. Сондай-ақ қисықта $t=a$ параметрге сәйкес келетін нүктені $A(\varphi(a),f(a))$, $t=b$ параметрге сәйкес келетін нүктені $B(\varphi(b),f(b))$ деп белгілеп алайық (40-сурет).

Онда (4) формуланың сол жағы АВ хорданың бұрыштық коэффициентін, оң жағы қисыққа параметрдің $t=c$ мәніне сәйкес келетін нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін білдіреді. Демек, Коши формуласы *AB* доғаның АВ хордаға параллель болған жанамасы бар екенін білдіреді.



40-сурет

Мысал. $f(x)=x^2$ және $\varphi(x)=\sqrt{x}$ функциялар үшін [0,4] кесіндіде Коши формуласын жазыңдар және *c* нүктені табыңдар.

Шешу. Берілген функциялардың кесінді ұштарындағы мәндері және туындыларын табамыз: $f(0)=0$, $f(4)=16$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(4)=2$; $f'(x)=2x$, $\varphi'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Бұлардан пайдаланып Коши формуласын жазамыз: $\dfrac{16-0}{2-0}=\dfrac{2c}{\dfrac{1}{2\sqrt{c}}}$, бұдан $4c\sqrt{c}=8$, немесе $c\sqrt{c}=2$ екендігі келіп шығады. Демек $c=\sqrt[3]{4}$.

1.5. Дарбу теоремасы

1.5-теорема. Егер $f(x)$ функцияның қандай да бір аралықта $f'(x)$ туындысы бар болып, сол аралыққа тиісті болған $x=a$, $x=b$ нүктелерде $f'(a)=A\neq B=f'(b)$ болса, онда бұл аралықта $f'(x)$ функция *A* және *B* сандар арасындағы барлық мәндерді қабылдайды, яғни *A* және *B* сандар арасынан алынған әр қандай *C* саны үшін (a,b) интервалға тиісті болған кемінде бір *c* нүкте табылып, $f'(c)=C$ болады.

Дәлелдеу. Алдымен теореманы дербес жағдайда – *A* және *B* әр түрлі таңбалы болған – жағдайда дәлелдейміз. Айталық, $A>0$, $B<0$ болсын. Онда (a,b) интервалға тиісті болған кемінде бір *c* нүкте табылып, $f'(c)=0$ болатындығын дәлелдеуіміз қажет.

Теорема шарты бойынша $f(x)$ функция $[a;b]$ кесіндіде дифференциалданады, демек бұл кесіндіде үзіліссіз. Онда Вейерштрасс теоремасы бойынша $f(x)$ функция $[a;b]$ кесіндінің кемінде бір c нүктесінде ең үлкен мәнін қабылдайды. Бұл нүкте a нүктеден де, b нүктеден де өзгеше. Шынында,

$$A = f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} > 0$$

болғандықтан, аргумент өсімшесінің абсолют мәні жеткілікті, кіші болғанда $\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} > 0$ теңсіздік орынды болады. Бұдан $\Delta x > 0$ болғанда $f(a+\Delta x)-f(a)>0$ немесе $f(a+\Delta x)>f(a)$ қатынас орынды.

Демек, $f(a)$ мән $f(x)$ функцияның $[a;b]$ кесіндідегі ең үлкен мәні бола алмайды. Сонымен, $a \neq c$.

Дәл солай,

$$B = f'(b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(b+\Delta x) - f(b)}{\Delta x} < 0$$

қатынастан пайдаланып, $c \neq b$ екендігі дәлелденеді.

Демек, $a<c<b$. Онда Ферма теоремасы бойынша $f'(c) = 0$ болады.

Енді теореманы жалпы жағдайда дәлелдейміз. A және B бірі екіншісіне тең болмаған сандар, Айталық, $A>B$ болсын. $A>C>B$ шартты қанағаттандыратын кез келген C санды бекітіп аламыз және $F(x) = f(x) - Cx$ көмекші функцияны қарастырамыз. $F(x)$ функцияның $f(x)$ функция сияқты $[a;b]$ кесіндіде туындысы бар: $F'(x) = f'(x) - C$. Сол туындының $[a;b]$ кесінді ұштарындағы мәндерін есептейміз:

$$F'(a) = f'(a) - C = A - C > 0\,;\ F'(b) = f'(b) - C = B - C < 0\,.$$

Демек, $F'(x)$ туынды $[a;b]$ кесінді ұштарында түрлі таңбалы мәндер қабылдайды. Онда жоғарыда дәлелдегеніміз бойынша кемінде бір c ($a<c<b$) нүкте табылып, $F'(c) = 0$, яғни $f'(c) - C = 0$ болады. Бұдан $f'(c) = C$ келіп шығады. Теорема дәлелденді.

2-§. Анықталмағандықтарды ашу. Лопиталь ережелері

Тиісті функциялардың туындылары бар болғанда $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} түріндегі анықталмағандықтарды ашу мәселесі біршама оңай болады. Әдетте туындылардан пайдаланып, анықталмағандықтарды ашу *Лопиталь ережелері* деп аталады. Біз төменде Лопиталь ережелерін баяндаймыз.

2.1. $\frac{0}{0}$ **түріндегі анықталмағандық.** $x \to a$ болғанда $f(x) \to 0$ және $g(x) \to 0$ болса, $\frac{f(x)}{g(x)}$ қатынас $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық болатындығы белгілі. Көп жағдайларда $x \to a$ болғанда $\frac{f(x)}{g(x)}$ қатынастың шегін табуға қарағанда $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ қатынастың шегін табу оңай болады. Бұл қатынастар шектерінің тең болу шарты төмендегі теоремада көрсетілген.

2.1-теорема. Егер

1) $f(x)$ және $g(x)$ функциялар $(a-\delta;a) \cup (a;a+\delta)$, бұл жерде $\delta>0$, жиында үзіліссіз, дифференциалданатын және сол жиыннан алынған кез келген x үшін $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$;

2) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$;

3) туындылар қатынасының шегі (шекті немесе шексіз)

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

бар болса, онда функциялар қатынасының шегі $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ бар және

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (1)$$

теңдік орынды болады.

Дәлелдеу. Берілген екі функцияны $x=a$ нүктеде $f(a)=0$, $g(a)=0$ деп анықтаймыз, нәтижеде екінші шартқа орай $\lim_{x \to a} f(x)=0=f(a)$, $\lim_{x \to a} g(x)=0=g(a)$ теңдіктер орынды болып, $f(x)$ және $g(x)$ функциялар $x=a$ нүктеде үзіліссіз болады.

Алдымен $x>a$ жағдайды қарастырамыз. Берілген $f(x)$ және $g(x)$ функциялар $[a;x]$, бұл жерде $x<a+\delta$, кесіндіде Коши теоремасының шарттарын қанағаттандырады. Сол себепті a мен x арасында

$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ теңдік орынды болатын c нүкте табылады. Егер $f(a)=g(a)=0$ екендігін ескерсек, соңғы теңдіктен

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (2)$$

келіп шығады. Шынында, $a<c<x$ болғандықтан, $x \to a$ болғанда $c \to a$ болады. Теореманың 3-шарты мен (2) теңдіктен $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ келіп шығады.

Дәл солай, $x<a$ жағдай да қарастырылады. Теорема дәлелденді.

Мысал. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$ шекті есептеңдер.

Шешу. Бұл жағдайда $f(x)=\ln(x^2-3)$, $g(x)=x^2+3x-10$, олар үшін 1- теореманың барлық шарттары орынды. Шынында,

1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\ln(x^2-3)=\ln 1=0$,

$\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-10)=0$;

2) $f'(x)=\frac{2x}{x^2-3}$, $\quad g'(x)=2x+3$, $\quad x\neq\pm\sqrt{3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x}{(x^2-3)(2x+3)}=0$ болады.

Демек, 1-теорема бойынша $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^2+3x-10}=0$.

1-ескерту. Берілген функциялар қатынасының шегі 3-шарт орындалмаса да бар болуы мүмкін, яғни 3-шарт жеткілікті болып, қажетті емес.

Мысалы, $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$, $\quad g(x)=x$ функциялар $(0;1]$ аралықта 1), 2) шарттарды қанағаттандырады және $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})=0$, бірақ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}(2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})$

шектің жоқ екендігін Гейне анықтамасы бойынша көрсетуге болады. Оның үшін 0 ге жинақты болған $x_n = \frac{1}{\pi n}$, $x_n = \frac{1}{\pi(2n+\frac{1}{2})}$ тізбектерге сәйкес функция мәндерінен түзілген тізбектерді қарастыру жеткілікті.

2.2-теорема. Егер [*c*;+∞) сәуледе анықталған *f(x)* пен *g(x)* функциялар берілген болып,

1) (*c*;+∞) да шекті *f'(x)* және *g'(x)* туындылар бар және *g'(x)*≠0,

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$;

3) туындылар қатынасының шегі $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (шекті немесе шексіз) бар болса, онда функциялар қатынасының шегі $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ бар және

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{3}$$

теңдік орынды болады.

Дәлелдеу. Жалпы алғанда, теоремадағы c санды оң деп алуға болады. $x = \frac{1}{t}$ формула көмегімен *x* айнымалыны *t* айнымалыға алмастырамыз. Онда *x*→+∞ болғанда *t*→0 болады. Нәтижеде *f(x)* және *g(x)* функциялар *t* айнымалының $f\left(\frac{1}{t}\right)$ және $g\left(\frac{1}{t}\right)$ функциялары болып, олар $(0, \frac{1}{c}]$ аралықта анықталған. Теоремадағы 2-шарт бойынша $\lim\limits_{t\to+0} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0, \quad \lim\limits_{t\to+0} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0$ болады.

Мына $\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'_t = \left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'_x \cdot x'_t = -f'_x\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}$,

$$\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'_t=\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'_x\cdot x'_t=-g'_x\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2}$$

формулалардан $\left(0;\frac{1}{c}\right)$ интервалда $f_t'\left(\frac{1}{t}\right)$, $g_t'\left(\frac{1}{t}\right)$ туындылардың бар екендігі келіп шығады. Теореманың 3-шарты бойынша

$$\lim_{t\to+0}\frac{f_t'\left(\frac{1}{t}\right)}{g_t'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{-f_x{}'\cdot\left(\frac{1}{t^2}\right)}{-g_t{}'\cdot\left(\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Демек, $f\left(\frac{1}{t}\right)$ және $g\left(\frac{1}{t}\right)$ функцияларға 1-теореманы қолдануға болады. Мұнда $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{t\to+0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}$ екенін ескерсек, 3-теңдіктің дұрыс екендігі келіп шығады. Теорема дәлелденді.

2.2. $\frac{\infty}{\infty}$ **түріндегі анықталмағандық**. Егер $x\to a$ болғанда $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ болса, онда $\frac{f(x)}{g(x)}$ қатынас $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық болуы айқын. Енді бұндай анықталмағандықты ашуда $f(x)$ және $g(x)$ функциялардың туындыларынан пайдалануға болатындығын көрсететін теореманы келтіреміз.

2.3-теорема. Егер

1) $f(x)$ және $g(x)$ функциялар $(a;\infty)$ жиында дифференциалданатын және $g'(x)\neq0$,

2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ бар болса, онда $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ бар және

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\text{ болады.}$$

Дәлелдеу. Теореманың шарты бойынша $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ бар. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\mu$ болсын. Онда кез келген ε оң санды алсақ та N>0 сан табылып, $x\geq N$ болғанда

$$\mu-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<\mu+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

теңсіздіктер орынды болады. Жалпы алғанда, $N>a$ деп алуға болады. Онда $x\geq N$ теңсіздіктен $x\in(a;\infty)$ келіп шығады.

$x>N$ болсын. Онда $[N;x]$ кесіндіде $f(x)$ және $g(x)$ функцияларына Коши теоремасын қолданып, төмендегіні аламыз:

$$\frac{f(x)-f(N)}{g(x)-g(N)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$, бұл жерде $N<c<x$.

Енді $c>N$ болғандықтан, $x=c$ болғанда (3) теңсіздіктер орынды:

$$\mu-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(c)}{g'(c)}<\mu+\frac{\varepsilon}{2},$$

бұдан

$$\mu-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(N)}{g(x)-g(N)}<\mu+\frac{\varepsilon}{2}$$

теңсіздіктерге келеміз.

Теореманың шарты бойынша $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$, $f(N)$ және $g(N)$ шекті сандар. Сол себепті x аргументтің жеткілікті үлкен мәндерінде $\frac{f(x)-f(N)}{g(x)-g(N)}$ бөлшектің $\frac{f(x)}{g(x)}$ бөлшектен айырмашылығы айтарлықтай аз болады. Онда M саны табылып, $x\geq M$ болғанда

$$\mu-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<\mu+\varepsilon \qquad (4)$$

теңсіздік орынды болады.

Сонымен, кез келген ε оң саны үшін M саны бар болып, $x\geq M$ болғанда (4) теңсіздік орынды болады, бұл $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\mu$ екенін білдіреді. Теорема дәлелденді.

Жоғарыда дәлелденген теорема $x \to b$ (b-сан) жағдайда да орынды. Мұны дәлелдеу үшін $t = \dfrac{1}{x-b}$ алмастыруды орындау жеткілікті.

Мысал. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ шекті есептеңдер.

Шешу. $f(x)=\ln x$, $g(x)=x$ функциялары үшін 2.3-теорема шарттарын тексереміз: 1) бұл функциялар $(0,+\infty)$ аралықта дифференциалданады; 2) $f'(x)=1/x$, $g'(x)=1$; 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1/x}{1}=0$. Демек, ізделген шек те бар, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}=0$ теңдік орынды.

3. Басқа көріністегі анықталмағандықтар. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, болғанда $f(x) \cdot g(x)$ өрнек $0 \cdot \infty$ түріндегі анықталмағандықтың болуы айқын, оны төмендегідей

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

жазып, $\dfrac{0}{0}$ немесе $\dfrac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандыққа келтіруге болады. Сондай-ақ, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, болғанда $f(x)-g(x)$ өрнек $\infty - \infty$ түріндегі анықталмағандық болып, оны да мына

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}}$$

алмастыру арқылы $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандыққа келтіруге болады.

Егер $x \to a$ да $f(x)$ функцияның шегі 1, 0 және ∞, ал $g(x)$ функцияның шегі сәйкес түрде ∞, 0 және 0 болса, $(f(x))^{g(x)}$ дәрежелік-көрсеткіштік өрнек 1^{∞}, 0^0, ∞^0 түріндегі анықталмағандықтар болар еді. Бұндай анықталмағандықтарды ашу үшін алдымен $y=(f(x))^{g(x)}$ өрнекті логарифмдейміз: $\ln y= g(x)\cdot \ln(f(x))$. Онда $x\to a$ болғанда $g(x)\ln(f(x))$ өрнек $0\cdot\infty$ түріндегі анықталмағандық болады.

Сонымен, функция туындыларының көмегімен $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0 түріндегі анықталмағандықтарды ашуда, оларды $\frac{0}{0}$ немесе $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандыққа келтіріп, соң жоғарыдағы теоремалар қолданылады.

2-ескерту. Егер $f(x)$ пен $g(x)$ функцияларының $f'(x)$ пен $g'(x)$ туындылары да $f(x)$ және $g(x)$ функциялары сияқты жоғарыдағы теоремалардың барлық шарттарын қанағаттандырса, онда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

теңдіктер орынды болады, яғни бұл жағдайда Лопиталь ережесін қайталап қолдануға болады.

Мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ шекті есептеңдер.

Шешу. x нөлге ұмтылғанда $\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ өрнек 1^{∞} түріндегі анықталмағандық болады. Оны логарифмдеп, $\frac{0}{0}$ анықталмағандықты ашуга келтіреміз:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{tgx}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\frac{tgx}{x})'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{tgx}\cdot\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-tgx}{x^2}}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x\cos x)'}{(x^3)'}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}.$$

Демек, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$.

3-§. Тейлор формуласы

Тейлор формуласы математикалық анализдің ең маңызды формулаларының бірі болып, көптеген теориялық қолданулары бар. Ол жуықтап есептеудің негізін құрайды.

3.1. Тейлор көпмүшелігі. Пеано түріндегі қалдық мүшелі Тейлор формуласы. Функцияның мәндерін есептеу мағынасында көпмүшеліктер ең қарапайым функция екендігі белгілі. Сол себепті функцияның x_0 нүктедегі мәнін есептеу үшін оны сол нүкте маңайында көпмүшелікпен алмастыру мәселесі пайда болады.

Нүктеде дифференциалданатын функция анықтамасы бойынша, егер $y=f(x)$ функция x_0 нүктеде дифференциалданатын болса, онда оның сол нүктедегі өсімшесін $\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\,\Delta x$ деп жазуға болады, бұл жерде $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$

Егер $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$ екенін ескерсек [1, 197-б.], функцияның өсімшесін былай жазуға болады:

$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$.

$\Delta f(x_0)= f(x)-f(x_0)$, $\Delta x = x-x_0$ екендігін ескеріп, $f(x)$ функцияны

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$

түрінде жазуға болады.

Басқаша айтқанда x_0 нүктеде дифференциалданатын $y=f(x)$ функция үшін бірінші дәрежелі

$$P_1(x)=f(x_0)+b_1(x-x_0) \qquad (1)$$

көпмүшелік бар болып, $x\to x_0$ болғанда $f(x)=P_1(x)+o(x-x_0)$ болады. Сондай-ақ, бұл көпмүшелік $P_1(x_0)=f(x_0)$, $P_1'(x_0)=b=f'(x_0)$ шарттарды қанағаттандырады.

Енді жалпы жағдайда қарайық. Егер $x=x_0$ нүктенің қандай да бір маңайында анықталған $y=f(x)$ функцияның сол нүктеде $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ туындылары бар болса, онда

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n) \qquad (2)$$

шартты қанағаттандыратын дәрежесі n санынан үлкен болмаған $P_n(x)$ көпмүшелік бар ма?

Мұндай көпмүшелікті

$$P_n(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\ ...\ +b_n(x-x_0)^n, \qquad (3)$$

түрінде іздейміз. Белгісіз болған $b_0, b_1, b_2, ..., b_n$ коэффициенттерді табуда

$$P_n(x_0)=f(x_0),\ P_n'(x_0)=f'(x_0),\ P_n''(x_0)=f''(x_0),\ ...,\ P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0) \quad (4)$$

шарттардан пайдаланамыз. Алдымен $P_n(x)$ көпмүшеліктің туындыларын табамыз:

$$P_n'(x)=b_1+2b_2(x-x_0)+3b_3(x-x_0)^2+\ ...\ +nb_n(x-x_0)^{n-1},$$
$$P_n''(x)=2\cdot 1b_2+3\cdot 2b_3(x-x_0)+\ ...\ +n\cdot(n-1)b_n(x-x_0)^{n-2},$$
$$P_n'''(x)=3\cdot 2\cdot 1b_3+\ ...\ +n\cdot(n-1)\cdot(n-2)b_n(x-x_0)^{n-3},$$
$$.\ .,$$
$$P_n^{(n)}(x)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 2\cdot 1b_n.$$

Жоғарыда алынған теңдіктер мен (3) теңдіктің екі жағына да x-тің орнына x_0-ді қойып, барлық $b_0, b_1, b_2, ..., b_n$ коэффициенттерді табамыз:

$$P_n(x_0)=f(x_0)=b_0,$$
$$P_n'(x_0)=f'(x_0)=b_1,$$
$$P_n''(x_0)=f''(x_0)=2\cdot 1b_2=2!b_2,$$
$$.\ .$$
$$P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)=n\cdot(n-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1b_n=n!b_n$$

Бұлардан $b_0=f(x_0),\ b_1=f'(x_0),\ b_2=\frac{1}{2!}f''(x_0),\ .\ .\ .,\ b_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$ келіп шығады. Табылған нәтижелерді (3) теңдікке қоямыз және

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+...+$$
$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, \qquad (5)$$

түрінде көпмүшелікті аламыз. Бұл көпмүшелік *Тейлор көпмүшелігі* деп аталады.

Тейлор көпмүшелігі (2) шартты қанағаттандыратынын дәлелдейміз. Функция және Тейлор көпмүшелігінің айырымын $R_n(x)$ арқылы белгілейміз: $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$. (4) шарттардан $R_n(x_0)=R_n'(x_0)=...=R_n^{(n)}(x_0)=0$ болуы келіп шығады.

Енді $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$, яғни $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$ екендігін көрсетеміз.

Егер $x \to x_0$ болса, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$ өрнектің 0/0 түріндегі анықталмағандық екендігін көру қиын емес. Оған Лопиталь ережесін n рет қолданамыз. Онда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} =$$

$= \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = \dfrac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$ болады, демек, $x \to x_0$ болғанда $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ орынды екен.

Сонымен, мына теорема дәлелденді:

3.1-теорема. Егер $y=f(x)$ функция x_0 нүктенің қандай да бір маңайында n рет дифференциалданатын болса, онда $x \to x_0$ болғанда

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \qquad (6)$$

формула орынды болады.

Бұл жерде $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ *Пеано түріндегі қалдық мүше* деп аталады.

Егер (6) формулада $x_0=0$ деп алсақ, Тейлор формуласының ерекше түрі келіп шығады:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + o(x^n) \qquad (7)$$

Бұл формула *Маклорен формуласы* деп аталады.

3.2. Тейлор формуласының Лагранж түріндегі қалдық мүшесі. Тейлор формуласының $R_n(x)$ қалдық мүшесінің түрлі көріністері бар. Біз оның Лагранж көрінісімен танысамыз.

$f(x)$ функцияның x_0 нүкте маңайында $n+1$ –ретті туындысы бар болсын деп талап қыламыз және жаңа $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$ функцияны қарастырамыз.

$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ және $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$ функцияларға Коши теоремасын қолданамыз. Мұнда $R_n(x_0)= R_n'(x_0)=\ldots= R_n^{(n)}(x_0)=0$, $g(x_0)=g'(x_0)=\ldots=g^{(n)}(x_0)=0$ екендігін ескеріп, төмендегіні табамыз:

$$\frac{R_n(x)}{g(x)}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)}=\frac{R_n'(c_1)-R_n'(x_0)}{g'(c_1)-g'(x_0)}=\frac{R_n''(c_2)}{g''(c_2)}=\ldots=$$

$$=\frac{R_n^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)}=\frac{R_n^{(n)}(x)-R_n^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x)-g^{(n)}(x_0)}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)},$$

бұл жерде $c_1\in(x_0;x)$; $c_2\in(x_0;c_1)$; ... ; $c_n\in(x_0;c_{n-1})$; $\xi\in(x_0;c_n)\subset(x_0;x)$.

Сонымен, біз $\dfrac{R_n(x)}{g(x)}=\dfrac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}$ екендігін көрсеттік, бұл жерде $\xi\in(x_0;x)$. Енді $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$, $g^{(n+1)}(\xi)=(n+1)!$, $R_n^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$ екендігін ескерсек, төмендегі формуланы аламыз:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \xi\in(x_0;x). \qquad (8)$$

(8) формула Тейлор формуласының *Лагранж түріндегі қалдық мүшесі* деп аталады.

Лагранж түріндегі қалдық мүшені

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (9)$$

түрінде де жазуға болады, бұл жерде θ бірден кіші болған оң сан, яғни $0<\theta<1$.

Сонымен, $f(x)$ функцияның Лагранж түріндегі қалдық мүшелі Тейлор формуласы төмендегідей жазылады:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\text{ бұл жерде } \xi\in(x_0;x).$$

Егер $x_0=0$ болса, онда $\xi=x_0+\theta(x-x_0)=\theta x$, бұл жерде $0<\theta<1$, болуы анық, сол себепті Лагранж түріндегі қалдық мүшелі Маклорен формуласы

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (10)$$

түрінде жазылады.

3.3. Тейлор формуласының Коши түріндегі қалдық мүшесі. Тейлор формуласы қалдық мүшесінің басқа түрлеріне мысал ретінде Коши түріндегі қалдық мүшені келтіруге болады. Оның үшін

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - ... - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

көмекші функцияны қарастырамыз және $[x_0;x]$ сегментте үзіліссіз, $(x_0;x)$ интервалда нөлден өзгеше шекті туындысы бар болған қандай да бір $\psi(t)$ функцияны алып, бұл функцияларға Коши теоремасын қолдасақ,

$$R_n(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad c \in (x_0;x) \qquad (11)$$

түріндегі қалдық мүшені алуға болады.

Егер (11) формулада $\psi(t)$ функция ретінде $\psi(t)=x\text{-}t$ функция алынса, нәтижеде *Коши түріндегі қалдық мүшені аламыз*:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}, \quad c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1$$

4-§. Кейбір элементар функциялардың Маклорен формулалары

4.1. e^x функцияның Маклорен формуласы. $f(x)=e^x$ функцияның $(-\infty;+\infty)$ аралығында барлық ретті туындылары бар: $f^{(k)}(x)=e^x$, $k=1, 2, ..., n+1$. Бұдан $x=0$ де $f^{(k)}(0)=1$, $k=1, 2, ..., n$; $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$ және $f(0)=1$ болады. Алынған нәтижелерді 3-параграфтағы (10) формулаға қойып

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \qquad (1)$$

бұл жерде $0<\theta<1$, формуланы аламыз.

41-суретте $f(x) = e^x$ функция мен $P_3(x)$ көпмүшелік функцияның графиктері келтірілген.

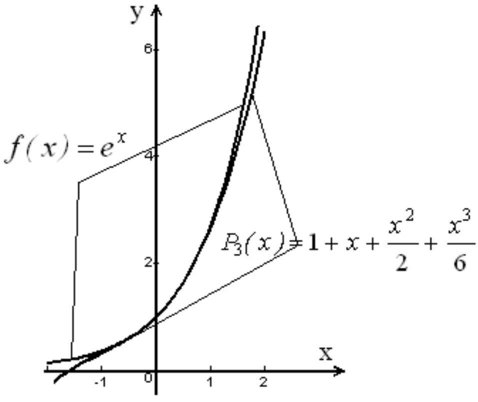
Егер $x=1$ болса,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \qquad (2)$$

формуланы аламыз. Бұл формула көмегімен *e* санының иррационалдығын дәлелдеуге болады.

Шынында, айталық, $e = \dfrac{p}{q}$ - рационал сан болсын. Мұнда $e>1$ болғандықтан $p>q$ болады. (2) да $e = \dfrac{p}{q}$ десек,

$$\frac{p}{q} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{p}{q}\right)^{\theta}$$



41-сурет

Бұл теңдіктің екі жағын $n!$-ге көбейтсек, төмендегі теңдікті аламыз:

$$\frac{p}{q}n! - (2 \cdot n! + \frac{1}{2!} \cdot n! + \frac{1}{3!} \cdot n! + ... + 1) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{p}{q}\right)^{\theta} \qquad (3)$$

Бұл жерде n санын p-дан үлкен деп алуға болады. Онда $\theta<1$, $p>q$ болғандықтан

$$0 < \frac{1}{n+1}\left(\frac{p}{q}\right)^{\theta} < \frac{1}{n+1}\frac{p}{q} \le \frac{p}{n+1} < 1 \qquad (4)$$

болады. Сондай-ақ, $n>p>q$ болғандықтан $\dfrac{p}{q}n!$ -бүтін сан, себебі $n!$ көбейтіндіде q санына тең болған көбейткіш бар.

$$2n! + \frac{1}{2!} \cdot n! + \frac{1}{3!} \cdot n! + ... + 1$$

түріндегі қосынды да бүтін сан болуы айқын. Демек, $n>p$ үшін (3) теңдіктің сол жағы оң бүтін сан, оң жағы (4) бойынша бірден кіші оң сан болады. Бұл қайшылық e санының рационал сан деп ұйғаруымыздың қате екендігін көрсетеді. Сол себепті e – иррационал сан болады.

4.2. Синус функцияның Маклорен формуласы. $f(x)=\sin x$ функцияның кез келген ретті туындысы бар және n-ретті туынды үшін төмендегі формула орынды (VI. 8-§): $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$.

$x=0$ де $f(0)=0$ және

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & \text{егер} \quad n=2k,\\ (-1)^k, & \text{егер} \quad n=2k+1\end{cases}$$

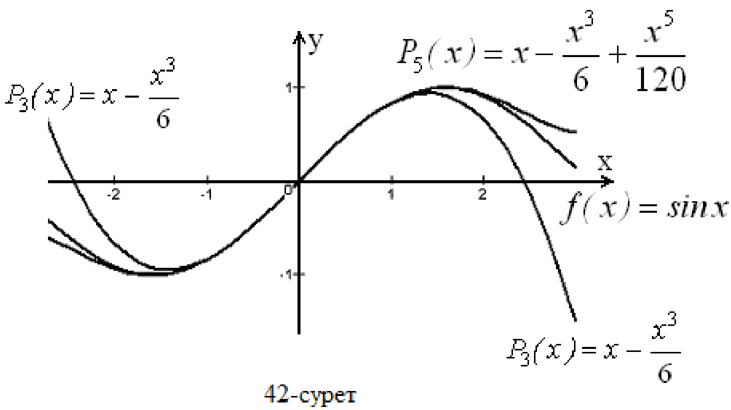
Сол себепті 3-параграфтағы (10) формула бойынша

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+$$

$$+\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\sin(\theta x+\frac{2k+3}{2}\pi), \qquad 0<\theta<1 \qquad (5)$$

түріндегі формула орынды.

42-суретте $f(x)=\sin x$, $P_3(x)$, $P_5(x)$ функцияларының графиктері келтірілген.



42-сурет

4.3. Косинус функцияның Маклорен формуласы $f(x)=cosx$ функцияның n-ретті туындысы үшін $f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$ формула орынды (VI. 8-§).

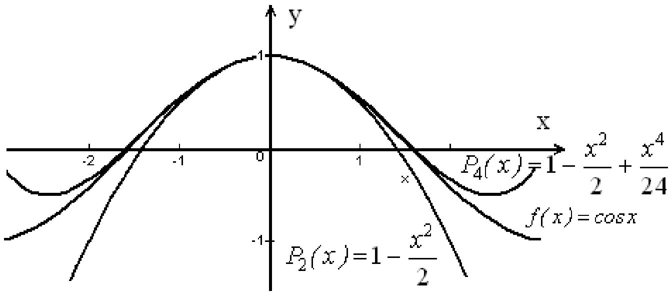
x=0 де $f(0)=1$ және $f^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & \text{егер} \quad n=2k+1, \\ (-1)^k, & \text{егер} \quad n=2k\end{cases}$.

Демек, $cosx$ функция үшін төмендегі формула орынды:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k!}+$$

$$+\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos(\theta x+k\pi), \quad 0<\theta<1 \qquad (6)$$

43-суретте $f(x)=cosx$, $P_2(x)$, $P_4(x)$ функцияларының графиктері келтірілген.



43-сурет

4.4. $f(x)=(1+x)^{\mu}$ ($\mu\in R$) функцияның Маклорен формуласы. Бұл функция (-1;1) интервалда анықталған және кез келген ретті туындысы бар болатын. Оны Маклорен формуласына жіктеу үшін $f(x)=(1+x)^{\mu}$ функциядан туындылар аламыз:

$$f'(x)=\mu(1+x)^{\mu-1}, \qquad f''(x)=\mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2},$$

$$f'''(x)=\mu(\mu-1)(\mu-2)(1+x)^{\mu-3},\dots,$$

$$f^{(n)}(x)=\mu(\mu-1)...(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}. \qquad (7)$$

Бұлардан $f(0)=1$, $f^{(n)}(0)=\mu(\mu-1)...(\mu-n+1)$ $(n=1,2,\dots)$. Сол себепті $f(x)=(1+x)^{\mu}$ функцияның Маклорен формуласы төмендегідей жазылады:

$$(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+...+\frac{\mu(\mu-1)...(\mu-n+1)}{n!}x^n+$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)...(\mu-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\mu-n-1}x^{n+1} \quad (0<\theta<1). \qquad (8)$$

4.5. *f(x)=ln(1+x)* функцияның Маклорен формуласы. Бұл функцияның (-1;∞) интервалда анықталған және кез келген ретті туындысы бар. Шынында, $f'(x)=(\ln(1+x))'=(1+x)^{-1}$ функцияға (7) формуланы қолдап, бұл жерде μ=-1 деп n-ді n-1-мен алмастырып, $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ формуланы аламыз.

Бұдан $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ $(n=1,2,...)$. Осыны ескеріп, берілген функцияның Маклорен формуласын жазамыз:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+$$

$$+\frac{(-1)^n}{(n+1)}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0<\theta<1 \qquad (9)$$

Жоғарыда келтірілген негізгі элементар функциялардың Маклорен формулалары басқа функциялардың Тейлор формуласын жазуда пайдаланылады. Осыған қатысты мысалдарды қарастырамыз.

1-мысал. $f(x)=e^{-3x}$ функция үшін Маклорен формуласын жазыңдар.

Шешу. Бұл функцияның Маклорен формуласын жазу үшін $f(0)$, $f'(0)$,..., $f^{(n)}(0)$ мәндерді есептеп, 3-параграфтағы (10) формуладан пайдалануға болады. Бірақ $f(x)=e^x$ функцияның Маклорен формуласынан да пайдалануға болады. Мұның үшін 1-формуладағы x- ті -3x-ке алмастырамыз, нәтижеде

$$e^{-3x}=1-\frac{3x}{1!}+\frac{9x^2}{2!}-...+(-1)^n\frac{3^n x^n}{n!}+\frac{(-3x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-3\theta x}, \quad 0<\theta<1,$$

формуланы аламыз.

2-мысал. Мына $f(x)=\ln x$ функцияның x_0=1 нүкте маңайында Тейлор формуласын жазыңдар.

Шешу. Берілген функцияны Тейлор формуласын жазуда $f(x)=\ln(1+x)$ функция үшін алынған (9) формулалардан пайдаланамыз. Бұл формулада x-ті x-1-ге алмастырамыз, нәтижеде $lnx=ln((x-1)+1)$ және

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)}\cdot\frac{(x-1)^{n+1}}{(1+\theta(x-1))^{n+1}},$$

$0<\theta<1$ формуланы аламыз. Бұл формула x-1>-1 болғанда, яғни $x>0$ болғанда орынды.

4.6. Тейлор формуласы көмегімен жуықтап есептеу

Маклорен формуласы Лагранж түріндегі қалдық мүшесін бағалау мәселесін қарастырайық.

Айталық, x аргументтің $x_0=0$ нүкте маңайындағы барлық мәндерінде және n-нің барлық мәндерінде $|f^{(n)}(x)|\le M$ теңсіздік орынды болатын тұрақты M сан бар болсын. Онда

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le M\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

теңсіздік орынды болады. x аргументтің бекітілген мәнінде $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ теңдік орынды, демек n-нің жеткілікті үлкен мәндерінде $R_n(x)$ жеткілікті кіші болады.

Сонымен, $x_0=0$ нүкте маңайында $f(x)$ функцияны

$$f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

көпмүшелікпен алмастыруға болады. Нәтижеде функцияның x нүктедегі мәні үшін

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

жуық формула келіп шығады. Бұл формула көмегімен орындалған жуықтап есептеудегі қателік $|R_n(x)|$ болады.

1-мысал. $e^{0,1}$ -ді 0,001 анықтықта есептеңдер.

Шешу. e^x функцияның Маклорен формуласынан пайдаланамыз. (1) формулада $x=0,1$ деп алсақ, онда

$$e^{0,1}\approx 1+\frac{0,1}{1!}+\frac{0,01}{2!}+\ldots+\frac{(0,1)^n}{n!},$$

есептің шарты бойынша қателік 0,001-ден үлкен болмауы керек, демек, $R_n(x)=\dfrac{0,1^{n+1}}{(n+1)!}e^{0,1\theta}<0,001$ теңсіздік орынды болатын бірінші n-ді табу жеткілікті. $e^{0,1\theta}<2$ екендігін ескерсек, соңғы теңсіздікті төмендегідей жазып алуға болады:

$$\frac{2}{10^{n+1}(n+1)!}<0,001\cdot$$

Енді n=1, 2, 3, ... мәндерін соңғы теңсіздікке қойып тексереміз. Бұл теңсіздік n=3-тен бастап орындалуын табамыз. Сонымен, 0,001 анықтықта

$$e^{0,1}\approx 1+\frac{0,1}{1!}+\frac{0,01}{2!}+\frac{0,001}{3!}=1,055\,.$$

Дербес жағдайда, n=1 болғанда $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ жуықтап есептеу формуласы $R_2(x)=\dfrac{f''(\xi)}{2!}\cdot(x-x_0)^2$, $x_0<\xi<x$ анықтықта орынды болады.

2-мысал. Дифференциал көмегімен радиусы r=1,01 болған дөңгелектің ауданын табыңдар. Есептеу қателігін бағалаңдар.

Шешу. Дөңгелектің ауданы $S=\pi r^2$. Мұнда r_0=1, Δr=0,01 деп аламыз және $S=S(r)$ функция өсімшесін оның дифференциалымен алмастырамыз:

$S(r)\approx S(r_0)+dS(r_0)=S(r_0)+S'(r_0)\Delta r$.

Нәтижеде

$S(1,01)\approx S(1)+dS(1)= S(1)+ S'(1)0,01=\pi\cdot 1^2+2\pi\cdot 0,01=1,02\pi$ болады.

Мұнда есептеу қателігі

$R_2(r)=\dfrac{S''(\xi)}{2!}\cdot(r-r_0)^2$, $(r_0<\xi<r)$ санынан үлкен емес. $S''(r)=2\pi$ мен r-ге тәуелді емес, сол себепті $R_2(r)=\dfrac{2\pi}{2!}\cdot 0,01^2=0,0001\pi$. Демек, есептеу қателігі 0,000314 санынан үлкен емес.

3-мысал. Мына $f(x)=e^{x^2-x}$ функцияның x=0,03 нүктедегі мәнін дифференциал көмегімен есептеңдер. Қателікті бағалаңдар.

Шешу. Жуықтап есептеу формуласы $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$-де x_0=0, x=0,03 мәндерді қойсақ, $f(0,03)\approx f(0)+f'(0)0,03$ болып, қателік

$R_2 = \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot x^2 = \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot 0{,}03^2$, $0<\xi<0{,}03$ болады.

Берілген функцияның туындыларын және нүктедегі мәндерін есептейміз: $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$, бұдан $f'(0) = -1$, $f''(x) = e^{x^2-x}(4x^2-4x+3)$, бұдан $f''(\xi) < 3$. Алынған нәтижелерден пайдаланып, $f(0{,}03) \approx 1+(-1) \cdot 0{,}03 = 0{,}97$ және $R_2 < \frac{3}{2!} \cdot 0{,}03^2 = 0{,}0017$ екендігін табамыз.

Тейлор формуласы функцияларды экстремумге зерттеуде, қатарлар теориясы мен интегралдарды есептеулерде кеңінен қолданылады.

ЖАТТЫҒУЛАР

1. $f(x)=x^3+5x^2-6x$ функция [0;1] кесіндіде берілген. Бұл функцияға сол кесіндіде Ролль теоремасын қолдануға бола ма? Егер қолдануға болса, теоремадағы c –ның мәнін табыңдар.

2. $f(x)=x^2-4x-5$ функция түбірлері арасында оның туындысының түбірі бар болуын дәлелдеңдер, оны табыңдар. Бұның геометриялық мағынасын түсіндіріңдер.

3. $x^3+3x+5=0$ теңдеудің нақты түбірі жалғыз екендігін дәлелдеңдер.

4. $f(x)=\ln x$ функция $[1;e]$ кесіндіде берілген. Бұл функцияға сол кесіндіде Лагранж теоремасын қолдануға бола ма? Егер қолдануға болса, Лагранж формуласындағы c нүктені табыңдар.

5. Берілген $y=4-x^2$ қисықтың қайсы нүктесінде жүргізілген жанамасы $A(-2;0)$ және $B(1;3)$ нүктелерден өтетін хордаға параллель болады?

6. Не үшін $y=x+|\sin x|$ функцияға [-1;1] кесіндіде Лагранж теоремасын қолдануға болмайды? Суретін сызыңдар.

7. Лагранж формуласынан пайдаланып $x_2>x_1$ болғанда $arctgx_2-arctgx_1\le x_2-x_1$ екендігін дәлелдеңдер.

8. Егер $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2+1$ болса, онда бұл функциялар үшін [1;2] кесіндіде Коши формуласын жазуға бола ма? Жазуға болатын болса, c -ны табыңдар.

9. Шектерді есептеңдер:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+3x+4}{4x^3+7}$; b) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\ln(\sin x)}{\pi-2x}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)tg\dfrac{\pi x}{4}$; e) $\lim\limits_{x\to 0+}x^x$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

10. $(1+x)^{1/3}$ функциясы үшін Пеано қалдық мүшелі Маклорен формуласын жазыңдар.

11. $\sin(2x-1)$ функция үшін Лагранж қалдық мүшелі Маклорен формуласын жазыңдар.

12. $y=e^x$ функцияның $x_0=1$ нүкте маңайындағы Тейлор формуласын жазыңдар.

13. $e^{1,01}$ -ді 10^{-3} анықтықта есептеңдер.

14. $\sqrt{10}$ -ды 10^{-3} анықтықта есептеңдер.

IX ТАРАУ. ТУЫНДЫНЫҢ КӨМЕГІМЕН ФУНКЦИЯНЫ ЗЕРТТЕУ

1-§. Туындының көмегімен функцияны бірсарындылыққа зерттеу

1.1. Функцияның тұрақтылық шарты

1.1-теорема. $f(x)$ функция (a,b) интервалда дифференциалданатын болсын. Сол интервалда $f(x)$ функция тұрақты болуы үшін $f'(x)=0$ болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. *Қажеттілігі* айқын. Себебі функция тұрақты болса, $f'(x)=0$ болады.

Жеткіліктілігі. Шартқа орай $f(x)$ функция (a,b) интервалда дифференциалданушы, яғни кез келген $x\in(a;b)$ үшін шекті $f'(x)$ туынды бар және $f'(x)=0$. Енді $x_1<x_2$ болатын кез келген $x_1,x_2\in(a;b)$ нүктелерді қарастырайық. $f(x)$ функция $[x_1;x_2]$ кесіндіде Лагранж теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады. Демек,

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1) \qquad (1)$$

теңдік орынды болатын $(x_1;x_2)$ интервалға тиісті c нүкте бар. Теорема шарты бойынша кез келген $x\in(a;b)$ үшін $f'(x)=0$, бұдан $f'(c)=0$, (1) теңдіктен $f(x_2)-f(x_1)=0$ екендігі келіп шығады.

Сонымен, $f(x)$ функцияның $(a;b)$ интервалға тиісті кез келген екі нүктедегі мәндері тең. Демек, функция тұрақты болады. Теорема дәлелденді.

Бұдан интегралды есептеуде маңызды болған төмендегі салдар шығады.

Салдар. Егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялардың (a,b) интервалда шекті $f'(x)$ және $g'(x)$ туындылары бар, сол интервалда $f'(x)=g'(x)$ болса, онда $f(x)=g(x)+C$ болады, бұл жерде C тұрақты сан.

Шынында, шартқа сәйкес $(f(x)-g(x))'=C'=0$. Бұдан 1-теорема бойынша $f(x)-g(x)=C$, яғни $f(x)=g(x)+C$ орынды.

Мысал. Функцияның тұрақтылық шартынан пайдаланып, $sin^2x=\frac{1}{2}(1-cos2x)$ формуланың орынды екендігін дәлелдеңдер.

Шешу. $f(x)=sin^2x+\frac{1}{2}cos2x$ функцияны қарастырамыз, бұл функция $(-\infty;+\infty)$ жиынында анықталған дифференциалданушы және туындысы нөлге тең: $f'(x)=2sinxcosx\text{-}sin2x=0$. Функцияның тұрақтылық шарты бойынша

$$sin^2x+\frac{1}{2}cos2x=C$$

орынды. C-ны анықтау үшін x аргументке мән береміз, мысалы, $x=0$ болсын. Онда $C=\frac{1}{2}$, демек,

$sin^2x+\frac{1}{2}cos2x=\frac{1}{2}$ немесе $sin^2x=\frac{1}{2}(1-cos2x)$ болады.

1.2. Функцияның өсу және кему шарттары.

1.2-теорема. Айталық, $f(x)$ функция $(a;b)$ интервалда анықталған және дифференциалданушы болсын. Бұл функция $(a;b)$ интервалда кемімеуі (өспеуі) үшін $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) теңсіздіктің орынды болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. Кемімейтін функция жағдайын қарастырамыз.

Қажеттілігі. $f(x)$ функция $(a;b)$ интервалда кемімейтін болсын. Онда осы интервалдан алынған кез келген x және $\Delta x>0$ үшін $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\geq 0$ теңсіздік, $\Delta x<0$ үшін $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\leq 0$ теңсіздік орынды болады. Бұдан $\frac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$ болуы айқын. Теорема шарты бойынша $f(x)$ дифференциалданушы, демек, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынастың Δx нөлге ұмтылғанда шегі бар болады, теңсіздікте шекке өту жайындағы теорема бойынша, бұл шек теріс емес, яғни $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\geq 0$.

Жеткіліктілігі. Кез келген $x\in(a;b)$ үшін $f'(x)\geq 0$ болсын. Енді $x_1<x_2$ болған кез келген $x_1, x_2\in(a;b)$ нүктелерін алайық. Қарастырылып жатқан $f(x)$ функция $[x_1;x_2]$ кесіндіде Лагранж теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады. Демек, $(x_1;x_2)$ интервалға тиісті c нүкте табылып,

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1) \qquad (2)$$

теңдік орынды болады. Теорема шарты бойынша $f'(x)\geq 0$, бұдан $f'(c)\geq 0$, (2) теңдіктен $f(x_2)-f(x_1)\geq 0$, яғни $f(x_2)\geq f(x_1)$. Бұл функцияның $(a;b)$ интервалда кемімейтін функция екендігін көрсетеді. Өспейтін функция жағдайы да жоғарыдағыдай дәлелденеді. Теорема дәлелденді.

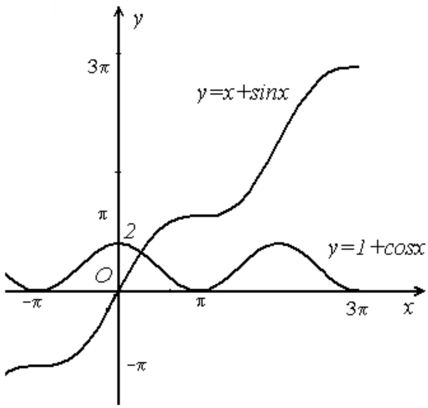
Енді функцияның қатаң бірсарынды болуының жеткілікті шартын дәлелдейміз.

1.3-теорема. Егер $f(x)$ функция (a,b) интервалда дифференциалданушы және кез келген $x\in(a;b)$ үшін $f'(x)>0$ ($f(x)<0$) болса, онда $f(x)$ функция (a,b) интервалда қатаң өспелі (кемімелі) болады.

Дәлелдеу. $x_1,x_2\in(a;b)$ және $x_1<x_2$ болсын. $[x_1;x_2]$ кесіндіде $f(x)$ функция Лагранж теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады. Бұл теорема бойынша $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$ теңдік орынды болатын $c\in(x_1;x_2)$ бар. Бұл теңдікте $f'(c)>0$ ($f'(c)<0$) екендігінен $f(x_2)>f(x_1)$ ($f(x_2)<f(x_1)$) келіп шығады.

Бұл $f(x)$ функцияның қатаң өспелі (кемімелі) болатындығын білдіреді. Теорема дәлелденді.

Мына $y=x^3$ функция (-1;1) интервалда қатаң өспелі, бірақ оның туындысы $x=0$ нүктеде нөлге тең болады. Дәл солай $f(x)=x+sinx$ функция да анықталу облысында қатаң өспелі, бірақ оның туындысы $f'(x)=1-cosx$ шексіз көп нүктелерде ($x=\frac{\pi}{2}+2n\pi, \quad n\in Z,$) нөлге тең болады (44-сурет).



44-сурет

Бұл мысалдар жоғарыдағы 1.3-теорема шарттары функцияның қатаң өспелі (кемімелі) болуы үшін тек жеткілікті шарт екендігін көрсетеді.

1-мысал. Мына $f(x)=2x^2-lnx$ функцияның бірсарындылық интервалдарын табыңдар.

Шешу. Функция $(0;+\infty)$ интервалда анықталған. Оның туындысы $f'(x)=4x-1/x$. Жоғарыдағы жеткілікті шартқа орай, егер $4x-1/x>0$, яғни $x>1/2$ болса өспелі; егер $4x-1/x<0$, яғни $x<1/2$ болса функция кемімелі болады. Сонымен, функция $(0;1/2)$ интервалда кемімелі, $(1/2;+\infty)$ интервалда өспелі болады.

2-мысал. $f(x)=\dfrac{2x^3-5x^2+14x-6}{2x^2}$ функцияның бірсарындылық аралықтарын табыңдар.

Шешу. Бұл функцияның анықталу облысы $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ жиынынан тұрады. Функцияның туындысын табамыз:

$$f'(x)=\frac{x^3-7x+6}{x^3}=\frac{(x+3)(x-1)(x-2)}{x^3},$$ бұдан

$(-\infty;-3]\cup(0;1]\cup[2;\infty)$ жиында $f'(x)\geq 0$, ал $[-3;0)\cup[1;2]$ жиынында $f'(x)\leq 0$ болатындығын анықтау қиын емес.

Демек, берілген $f(x)$ функция $[-\infty;-3]$, $(0;1]$ және $[2;\infty)$ аралықтардың әрбірінде өспелі; $[-3;0)$ және $(1;2]$ аралықтардың әрбірінде кемімелі болады.

3-мысал. Егер $0<x\leq 1$ болса, $x-x^3/3<arctgx<x-x^3/6$ қос теңсіздік орынды болатындығын дәлелдеңдер.

Шешу. Берілген теңсіздіктің оң жағындағы $arctgx<x-x^3/6$ теңсіздікті дәлелдейміз. Сол бөлігі де дәл солай дәлелденеді.

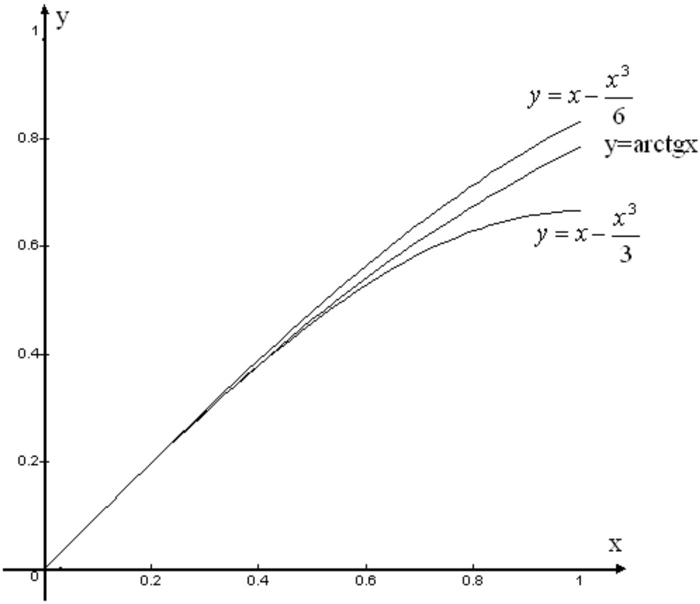
$f(x)=arctgx-x+x^3/6$ функцияны қарастырамыз, ол сандар осінде анықталған және үзіліссіз, демек, ол $[0;1]$ кесіндіде де үзіліссіз. Оның туындысы $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-1+\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)}$, $(0;1)$ интервалда $f'(x)<0$. Бұдан $f(x)$ функция $[0;1]$ кесіндіде кемімелі, сондықтан $0<x\leq 1$ шартты қанағаттандыратын кез келген x үшін $f(x)<f(0)$ теңсіздік орынды болады. Соңғы теңсіздікте $f(0)=0$ екенін ескерсек, $arctgx-x+x^3/6<0$, бұдан $arctgx<x-x^3/6$.

Бұл қостеңсіздікте қатысқан функцияның графиктері 45-суретте келтірілген.

1.3. Функцияның нүктеде бірсарындылық шарты. Біз функцияның өсуі мен кемуі ұғымдарын қандай да бір аралыққа қатысты зерттедік. Кейбір жағдайларда бұл ұғымдарды нүктеге қатысты қарауға болады.

Айталық, $f(x)$ функция (a,b) интервалда анықталған және $x_0\in(a;b)$ болсын.

Анықтама. Егер x_0 нүктенің қандай да бір $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ маңайы табылып, $x<x_0$ болғанда $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$), $x>x_0$ болғанда $f(x)>f(x_0)$ ($f(x)<f(x_0)$) болса, онда $f(x)$ функция x_0 *нүктеде өспелі* (кемімелі) деп аталады.



45-сурет

Енді x_0 нүктеде бірсарындылықтың жеткілікті шартын келтіреміз.

1.4-теорема. $f(x)$ функция $x_0 \in (a;b)$ нүктеде дифференциалданатын болсын. Егер $f'(x_0)>0$ $(f'(x_0)<0)$ болса, онда $f(x)$ функция сол нүктеде өспелі (кемімелі) болады.

Дәлелдеу. Шартқа орай шекті $f'(x_0)$ туынды бар және ол нөлден үлкен (кіші) болғандықтан

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad (<0)$$

теңсіздік орынды. Шегі бар функцияның қасиеттерінен x_0 нүктенің $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ маңайы табылып, бұл маңайда

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad (<0)$$

болады. Демек, $x<x_0$ болғанда $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$ теңсіздік, $x>x_0$ болғанда $f(x)>f(x_0)$ $(f(x)<f(x_0))$ теңсіздік орынды. Бұл $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде өспелі (кемімелі) болатындығын білдіреді. Теорема дәлелденді.

Функция туындысы нөлге тең болатын нүктелерде функция өсуі де, кемуі де мүмкін. Мысалы, $y=x^5$ функцияның туындысы $x=0$ нүктеде нөлге тең, бірақ функция сол нүктеде өспелі; $y=-x^5$ функция туындысы да $x=0$ нүктеде нөлге тең, бірақ бұл функция $x=0$ нүктеде кемімелі екендігін көру қиын емес.

Енді қандай да бір x_0 нүктеде өспелі болған функцияның сол нүктенің маңайында өспелі болуы шарт еместігін көрсететін мысал келтіреміз.

Мына $f(x)=\begin{cases} x+x^2\sin\dfrac{2}{x}, & \text{егер} \quad x\neq 0, \\ 0, & \text{егер} \quad x=0 \end{cases}$ функция берілген болсын. Бұл функцияның барлық нүктелерде туындысы бар. Шынында, $x\neq 0$ болғанда

$$f'(x)=1+2x\sin\frac{2}{x}-2\cos\frac{2}{x},$$

$x=0$ үшін $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2\sin\frac{2}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x\sin\dfrac{2}{x})=1>0$ болады.

Демек, 1.4-теорема бойынша берілген функция $x=0$ нүктеде өспелі болады.

Енді төмендегі $x_n=\dfrac{1}{\pi n}$, $x_n'=\dfrac{2}{\pi+2\pi n}$, $n=\pm 1, \pm 2, \pm 3,$ нүктелерде туындының мәндерін есептейміз:

$$f'\left(\frac{1}{\pi n}\right)=1+\frac{2\sin\pi n}{\pi n}-2\cos 2\pi n=-1,$$

$$f'\left(\frac{2}{\pi+2\pi n}\right)=1+\frac{4}{\pi+2\pi n}\sin(\pi+2\pi n)-2\cos(\pi+2\pi n)=1+2=3.$$

Демек, δ оң саны қандай болмасын n-нің жеткілікті үлкен мәндерінде берілген функцияның туындысы (-δ; δ) маңайда оң да, теріс те мәндерді қабылдайды. Бұдан $f(x)$ функцияның өзі $x=0$ нүктеде өспелі болғанымен бұл нүктенің (-δ; δ) маңайында туындысы бар, бірақ сол маңайда бірсарынды еместігі келіп шығады.

Жоғарыда біз $f(x)$ функцияның туындысы

$$f'(x)=\begin{cases} 1+2x\sin\frac{2}{x}-2\cos\frac{2}{x}, & \text{егер} \quad x\neq 0, \\ 1, \quad \text{егер} \quad x=0 \end{cases}$$ екендігін көрдік.

Осы туындыны үзіліссіздікте тексереміз. Егер $x\neq 0$ болса, $f'(x)$ функцияның үзіліссіздігі айқын. Егер $x=0$ болса, онда $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ жоқ, демек, туынды $x=0$ нүктеде үзілісті.

Оқырмандарға төмендегі теореманы дәлелдеуді ұсынамыз:

1.5-теорема. Егер x_0 нүктеде $f(x)$ функцияның туындысы бар, үзіліссіз және $f'(x_0)>0$ болса, онда $f(x)$ функция өспелі болатын x_0 нүктенің $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ маңайы табылады.

2-§. Параметрлі берілген функцияның туындысы

2.1. Функцияның параметрлі берілуі. Айталық, t айнымалының T мәндер жиынында

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (1)$$

функциялар системасы берілген және $x=\varphi(t)$ функцияның мәндер жиыны D болсын. Мына сұраққа жауап іздейміз: (1) система D жиында y айнымалыны x айнымалының функциясы ретінде анықтайды ма? Әрбір x-ке оған сәйкес t бойынша $y=\psi(t)$ санын сәйкес қойсақ, бұл бейнелеу функция бола алады ма?

D жиыннан кез келген x_0 -ді бекітіп,

$$x_0=\varphi(t) \qquad (2)$$

теңдеуді қарастырамыз.

Бұл теңдеудің T жиында шешімі бар. Бірақ 2-теңдеудің шешімі жалғыз болмауы да мүмкін. Бұл теңдеу T жиында бірнеше t_{01}, t_{02}, ... шешімдері бар болсын. Онда $y_{01}=\psi(t_{01}),\ y_{02}=\psi(t_{02}), \ldots$ сандар ішінде бір-біріне тең болмағандары да болуы мүмкін, мысалы $y_{01}\neq y_{02}$ болсын. Онда жоғарыдағы бейнелеу бойынша $x=x_0$ айнымалыға y_0 ретінде y_{01} немесе y_{02} санды сәйкес қоюға болады. Сол себепті (1) функциялар системасы көмегімен D жиында x айнымалының функциясын анықтап болмайды.

Екіншіден, (2) теңдеу шешімдері жиынында $y=\psi(t)$ функцияның тұрақты санға тең болуы мүмкін: $\psi(t_{01})=\psi(t_{02})=y_0$. Онда x_0 санға y айнымалының t параметрге сәйкес келетін жалғыз y_0 мәнін сәйкес қоюға болады.

Егер D жиыннан алынған әрбір x үшін соңғы қасиет орынды болса, онда D облыста жоғарыдағы ереже көмегімен $y=f(x)$ функция анықталады. Бұл функция (1) система көмегімен анықталған деп аталады. (1) формулада t айнымалы параметр, $y=f(x)$ функция *параметрлі берілген* деп аталады.

(1) системадан $y=f(x)$ функцияның аналитикалық өрнегін табу *параметрді жоғалту* деп аталады.

(1) система y айнымалыны x айнымалының функциясы ретінде анықтауы үшін $y=\psi(t)$ функцияның (T жиыннан алынған t үшін) кері функциясы бар болуы жеткілікті. Шынында, бұл жағдайда (2) теңдеудің T жиында жалғыз шешімі бар болады. Демек, D жиыннан алынған әрбір x_0 үшін $x_0=\varphi(t_0)$ болатын жалғыз t_0 бар, бұл t_0 санға жалғыз $y_0=\psi(t_0)$ сәйкес келеді. Сонымен, (1) система y айнымалыны x айнымалының $y=f(x)$ функциясы ретінде анықтайды. Бұл функцияны x -тің күрделі функциясы ретінде анықтауға болады:

$$y=f(x)=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

бұл жерде $\varphi^{-1}(x)$ функция $x=\varphi(t)$ функцияға кері функция.

1-*мысал*. $T=(-\infty;+\infty)$ жиынында $\begin{cases} x=t^3, \\ y=t^4 \end{cases}$ берілген. Бұл система $y=f(x)$ функцияны анықтайды ма?

Шешу. $x=t^3$ функция T жиында қатаң бірсарынды және $D=(-\infty;+\infty)$ жиында кері функция $t=\sqrt[3]{x}$ бар. Бұдан $\begin{cases} x=t^3, \\ y=t^4 \end{cases}$ система y-ті x-тің функциясы ретінде анықтайды.

Бұл жағдайда y функцияны t параметрді жоғалту арқылы x-пен өрнектеуге болады: $y=x\sqrt[3]{x}$, бұл жерде $x\in(-\infty;+\infty)$.

2-*мысал*. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \cos t,\ t \in (-\infty; +\infty) \end{cases}$ система берілген. Бұл система $y=f(x)$ функцияны анықтайды ма?

Шешу. $x=t^2$ функцияның мәндер жиыны $D=[0,+\infty)$. D жиыннан алынған әрбір x $(x \neq 0)$ айнымалыға $T=(-\infty;+\infty)$ жиыннан екі: $t_1 = \sqrt{x}$ және $t_2 = -\sqrt{x}$ сандар сәйкес келеді. Бұл сандарға $y = \cos t$ функцияның тек бір мәні сәйкес келеді:

$$y = \psi(t_1) = \psi(t_2) = \cos\sqrt{x},\ (0 \le x < +\infty).$$

Сонымен, берілген система $[0;\infty)$ аралықта $y = \cos\sqrt{x}$ функцияны анықтайды.

3-*мысал*. Мына $\begin{cases} x = t + \cos t \\ y = \sin t + \ln t,\ 0 < t < +\infty \end{cases}$ система қандай да бір жиында y -ті x-тің функциясы ретінде анықтайды ма?

Шешу. $(0;+\infty)$ аралықта $x=t+\cos t$ функция өспелі, демек, x-тің $(0;\infty)$ мәндер жиынында $t = \varphi^{-1}(x)$ кері функция бар. Сол себепті бұл система $(0;+\infty)$ жиында y-ті x-тің функциясы ретінде анықтайды. Бірақ бұл функцияны шекті сандағы элементар функциялар көмегімен өрнектеп болмайды.

Кез келген $y=f(x)$ функцияны параметрлі тәрізде жазуға болады. Мұның үшін мәндер жиыны берілген $y=f(x)$ функцияның анықталу облысына тең болған кез келген $x=\varphi(t)$ функцияны алу жеткілікті. Бұл жағдайда $x=\varphi(t)$ функцияның T анықталу облысында $y = f(\varphi(t)) = \psi(t)$ функция бар болады және

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (3)$$

система $f(x)$ функцияны параметрлі анықтайды.

Шынында, егер D жиыннан алынған кез келген x_0 үшін T жиыннан $x_0 = \varphi(t_0)$ болатын қандай да бір $t = t_0$ параметрді табамыз. Онда $y_0 = \psi(t_1) = f(\varphi(t_0)) = f(x_0)$ болады. Бұдан жоғарыдағы тәсіл бойынша табылған y_0 сан $x_0 = \varphi(t)$ теңдеу түбірлерінен қайсысының алынғанына тәуелді емес, сондай-ақ D

жиыннан алынған әрбір x_0 (3) система көмегімен сәйкес қойылған y_0 сан $y=f(x)$ заңға бағынады.

Жоғарыда айтылғандардан, $y=f(x)$ функцияны параметрлі берілуінің шексіз көп тәсілдері бар екендігі келіп шығады. Бұлардың ең қарапайымы $x=\varphi(t)=t$ функция көмегімен параметризациялау:

$$\begin{cases} x=t, \\ y=f(t) \end{cases} \quad t\in D(f)$$

4-*мысал.* $y=\sqrt{a^2-x^2} \qquad (-a\le x\le a) \qquad (4)$

функция берілген болсын. Бұл функцияны параметрлі тәсілде беріңдер.

Шешу. Мұнда тригонометриялық функциялардан пайдаланған жөн. $x=a\cos t$ функцияны $[0,\pi]$-де қарастырамыз, онда $x\in[-a,a]$ болады. $y=\sqrt{a^2-(a\cos t)^2}=a\sqrt{\sin^2 t}=a|\sin t|$ $[0,\pi]$ жиында $\sin t\ge 0$, сол себепті $y=a\sin t$.

Демек, берілген функцияны

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t \end{cases} \quad t\in[0,\pi]$$ система көмегімен беруге болады.

Бұл берілген функцияны

$$\begin{cases} x=\dfrac{2at}{t^2+1}, \\ y=a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \end{cases} \qquad t\in[-1;1]$$

система көмегімен де анықтауға болады.

Геометрияда $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ система қандай да бір $[t_0,t_1]$ аралықта қарастырылады. Көп жағдайларда берілген система y-ті x-тің функциясы ретінде анықтау мәселесі геометриялық тұрғыдан шетте қалады. Берілген аралықтан алынған әрбір t параметрге сәйкес келетін x және y-тер табылып, $M(x,y)$ нүктелерді xOy координата жазықтығында қарастырады. Бұндай нүктелер жиыны геометрияда қисық, ал система оның параметрлі теңдеуі деп аталады.

Әдетте $\varphi(t)$ және $\psi(t)$ функциялар $[t_0, t_1]$ аралықта немесе $(-\infty;+\infty)$ аралықта үзіліссіз деп қарастырылады. Бұл жағдайда мұндай системамен анықталған нүктелердің геометриялық орны *Жордан қисығы* немесе *үзіліссіз қисық* деп аталады. Дербес жағдайда, қандай да бір аралықта үзіліссіз $y=f(x)$ функцияның графигі Жордан қисығы болады.

Егер үзіліссіз қисықты параметрлі беру мүмкін болып, t параметрдің $[t_0, t_1]$ аралықтан алынған түрлі мәндеріне жазықтықтың түрлі нүктелері сәйкес келсе (мұнда $t=t_0$ және $t=t_1$ есептелмейді), бұл қисық *жай қисық* деп аталады. Мысалы, берілген аралықта үзіліссіз болған $y=f(x)$ функцияның графигі жай қисыққа мысал болады.

Егер жай қисықта ((3) теңдеумен берілген) параметрдің $t=t_0$ және $t=t_1$ мәндеріне жазықтықта бір нүкте сәйкес келсе, онда бұл қисық *жай тұйық қисық* деп аталады. Бұған мысал ретінде

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \qquad t \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

системамен берілген эллипсті қарастыруға болады.

2.2. Параметрлі берілген функцияның туындысы. Айталық, x аргументтің y функциясы

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta \end{cases} \tag{5}$$

параметрлі теңдеулермен берілген болсын.

Егер $x=\varphi(t)$ функцияның кері функциясы, яғни $t = \varphi^{-1}(x)$ бар болса, онда $y=\psi(t)$ теңдеуді $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$ түрінде жазуға және $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$ функцияның туындысын табу мәселесін қарауға болады. Әдетте бұл мәселе параметрлі теңдеулермен берілген функцияның туындысын табу мәселесі деп те айтылады.

2.1-теорема. $\varphi(t)$ және $\psi(t)$ функциялары $[\alpha;\beta]$ кесіндіде үзіліссіз және $(\alpha;\beta)$ интервалда дифференциалданатын, $\varphi'(t)$ сол интервалда таңбасын сақтасын. Егер $x=\varphi(t)$ функцияның мәндер жиыны $[a,b]$ кесінді болса, онда $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ теңдеулер $[a,b]$

кесіндіде үзіліссіз, (a,b) интервалда дифференциалданатын $y=f(x)$ функцияны анықтайды және

$$y'_x = f'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} \qquad (6)$$

формула орынды болады.

Дәлелдеу. Теорема шарты бойынша $\varphi'(t)$ функция [α;β] кесіндіде таңбасын сақтайды, Айталық, $\varphi'(t)>0$ болсын. Онда $x=\varphi(t)$ функция [α;β] кесіндіде үзіліссіз және қатаң өспелі болады. Сол себепті [a,b] кесіндіде оған кері болған үзіліссіз, қатаң өспелі $t=\varphi^{-1}(x)$ функция бар және бұл функция (a,b) аралықта дифференциалданушы, туындысы $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ формуламен есептеледі. Бұл жағдайда $y=\psi(t)=\psi(\varphi^{-1}(x))$ функциясы да [a,b] кесіндіде үзіліссіз болады. Осы функцияның туындысын табамыз. Күрделі функцияның туындысын есептеу ережесі бойынша $y'_x= y'_t\, t'_x$, ал бұдан $y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}$ $(x'_t \neq 0)$ келіп шығады. Теорема дәлелденді.

(α;β) интервалда $\varphi'(t)<0$ болған жағдайда теорема дәл осылай дәлелденеді.

5-*мысал.* Мына $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \qquad 0 \le t \le \pi/2 \end{cases}$ параметрлі теңдеулермен берілген функцияның туындысын табыңдар.

Шешу. (0,π/2) интервалда $x'_t = -12\cos^2 t \sin t < 0$ және [0,π/2] кесіндіде жоғарыдағы теореманың барлық шарттары орынды. Сол себепті (6) формула бойынша $y'_x = \frac{12\sin^2 t\cos t}{-12\cos^2 t\sin t} = -tgt$ болады.

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\phi'(t)}, \quad \alpha \le t \le \beta \end{cases} \qquad (7)$$

теңдеулер y'_x функцияны x-тің функциясы ретінде анықтайды.

Айталық, (6) теңдеулер системасы жоғарыдағы теорема шарттарын қанағаттандырсын. Онда y'_x функцияның x бойынша туындысы, яғни y-тің x бойынша екінші ретті туындысын есептеуге болады:

$$y''_{x^2} = (y'_x)_x' = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{(x'_t)'_t} = \frac{\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{(\phi'(t))^3}.$$

Сонымен, төмендегі ереже орынды: y-тің x бойынша екінші ретті туындысын табу үшін параметрлі берілген функцияның бірінші ретті y'_x туындысын t параметр бойынша дифференциалдап, соң алынған нәтижені x'_t -ке бөлу керек.

Мысал ретінде жоғарыда берілген функцияның екінші ретті туындысын табамыз: $y'_x = tgt$, $(y'_x)'_t = (tgt)'_t = 1/cos^2 t$ және $x'_t = -12cos^2 t \cdot sint$ екендігін ескерсек, ереже бойынша $y''_{x^2} = -\dfrac{1}{12\cos^4 t \cdot \sin t}$ болады.

Осы тәсілде үшінші және басқа жоғары ретті туындылар есептеледі.

2.3. Параметрлі берілген қисыққа жүргізілген жанама және нормаль теңдеулері. Егер қандай да бір қисық $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ системамен параметрлі берілген болса, бұл қисықтың t параметрдің t_0 мәніне сәйкес (x_0,y_0) нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін анықтауға болады:

$$k = f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} \qquad (8\ )$$

Онда (1) қисықтың (x_0,y_0) нүктедегі жанамасының теңдеуі мына түрде болады:

$$y - y_0 = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x - x_0), \text{ бұл жерде } x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi'(t_0) \qquad (9)$$

Кейбір жағдайларда $(\psi'(t_0) \neq 0)$ жоғарыдағы теңдеу

$\dfrac{y - \psi(t_0)}{\psi'(t_0)} = \dfrac{x - \varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}$ сияқты жазылады.

(1) қисықтың (x_0,y_0) нүктесіндегі нормаль теңдеуі мына түрде болады:

$$y - \psi(t_0) = -\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}(x - \varphi(t_0)) \qquad (10)$$

6-*мысал.* $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$ $t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ қисықтың $t = \dfrac{\pi}{4}$-ке сәйкес келетін нүктесінде жүргізілген жанама және нормаль теңдеулерін жазыңдар.

Шешу: Туындыларды табамыз: $\varphi'(t) = -12\cos^2 t \sin t,$ $\psi'(t) = 12\sin^2 t \cos t.$ $(0; \dfrac{\pi}{2})$ да $\varphi'(t) < 0$, демек, берілген система сол аралықта y-ті x-тің дифференциалданатын функциясы ретінде анықтайды. Функциялар және туындылардың берілген нүктедегі мәндерін есептейміз:

$$\varphi(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}, \ \psi(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}, \ \varphi'(t_0) = \varphi'(\frac{\pi}{4}) = -12 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2})^3 =$$

$$= -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{8} = -3\sqrt{2}; \quad \psi'(t_0) = \psi'(\frac{\pi}{4}) = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = 3\sqrt{2}.$$

Алынған нәтижелерді (9) жанама және (10) нормаль теңдеулеріне қоямыз:

$$y - \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}}(x - \sqrt{2}), \quad y - \sqrt{2} = -x + \sqrt{2}.$$ Бұдан жанама теңдеуі $y + x - 2\sqrt{2} = 0$.

Нормаль теңдеуі: $y - \sqrt{2} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}(x - \sqrt{2}),\ y - \sqrt{2} = x - \sqrt{2}$ немесе $y = x$.

7-*мысал.* $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ лемнискатаның $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ мәндеріне сәйкес келетін нүктесіне жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін табыңдар.

Шешу. Полярлық координаталар системасында берілген қисықты параметр арқылы жазып аламыз. Мұның үшін полярлық координаталар мен декарт координаталарын байланыстыратын $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$ формуладан пайдаланамыз. Онда лемнискатаның параметрлі теңдеуі

$$\begin{cases} x = a\sqrt{\cos\theta}\cos\theta, \\ y = a\sqrt{\cos\theta}\sin\theta \end{cases}$$ бұл жерде $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$ болады.

$$\varphi'(\theta) = -a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta - \frac{a\cos\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

$$\psi'(\theta) = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta - \frac{a\sin\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

$$\psi'(\theta) = \psi'(\frac{\pi}{6}) = a\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 0; \quad \varphi'(\theta_0) = \varphi'(\frac{\pi}{6}) \neq 0$$

Демек, $k = \dfrac{\psi'(\theta_0)}{\varphi'(\theta_0)} = 0$ және жанама Оx осіне параллель болады.

3-§. Бірінші ретті туындының көмегімен функцияны экстремумге зерттеу

3.1. Функцияның экстремумдері. $f(x)$ функция (a,b) интервалда анықталған және $x_0 \in (a;b)$ болсын.

1-анықтама. Егер x_0 нүктенің мейлінше кіші $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ маңайы бар болып, сол маңайдан алынған кез келген x үшін $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$) теңсіздік орынды болса, онда x_0 нүкте $f(x)$ функцияның *максимум* (*минимум*) *нүктесі*, $f(x_0)$ *функцияның максимумы* (*минимумы*) деп аталады.

2-анықтама. Егер x_0 нүктенің мейлінше кіші $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ маңайы бар болып, сол маңайдан алынған кез келген $x \neq x_0$ үшін $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) теңсіздік орынды болса, онда $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде *қатаң максимумы* (*минимумы*) бар деп аталады.

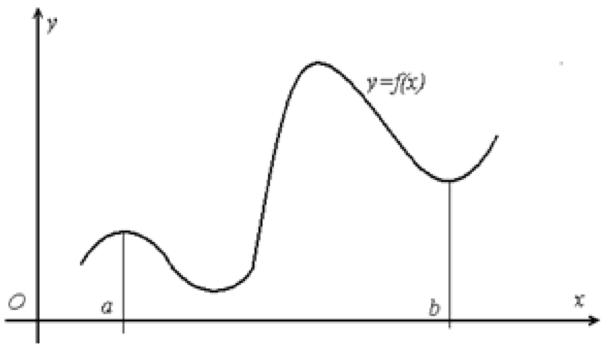
Функцияның максимум және минимум нүктелері функцияның *экстремум нүктелері*, ал максимум және минимум мәндері *функцияның экстремумдері* деп аталады.

Сонымен, егер $f(x_0)$ максимум (минимум) болса, онда $f(x_0)$ функцияның x_0 нүктенің мейлінше кіші маңайында қабылдайтын мәндерінің ең үлкені (ең кішісі) болады, яғни функция экстремумы локальді характерде болады. Бұдан функция экстремумы ол анықталған облыста функцияның ең үлкен немесе ең кіші мәні болуы қажет еместігі келіп шығады.

Сондай-ақ, $f(x)$ функцияның (a,b) интервалда бірнеше максимум және минимумдары бар болуы, максимум мәні оның кейбір минимум мәнінен кіші болуы да мүмкін. Мысалы, графигі 46–суретте көрсетілген $y=f(x)$ функция үшін $x=a$ нүктеде локальді максимум, $x=b$ нүктеде локальді минимум бар болып, $f(a)<f(b)$ теңсіздік орынды.

3.2. Экстремумнің қажетті шарты. Функция туындыларының көмегімен оның экстремум нүктелерін табу қиындық тудырмайды.

Алдымен экстремумның қажетті шартын беретін теореманы келтіреміз.



46-сурет

3.1-теорема. Егер $f(x)$ функция x_0 нүктеде үзіліссіз, сол нүктеде экстремумы бар болса, онда бұл нүктеде $f(x)$ функцияның туындысы нөлге тең немесе жоқ болады.

Дәлелдеу. Айталық, $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде максимумы бар болсын. Онда x_0 нүктенің мейлінше кіші $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ маңайы бар болып, бұл маңайдан алынған кез келген x үшін $f(x_0)>f(x)$ болады.

Егер $x>x_0$ болса, онда $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$ теңсіздік, егер $x<x_0$ болса, онда $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$ теңсіздік орынды болуы айқын. Бұл теңсіздіктер сол жағындағы өрнектердің $x \to x_0$ болғанда шегі бар болса, онда

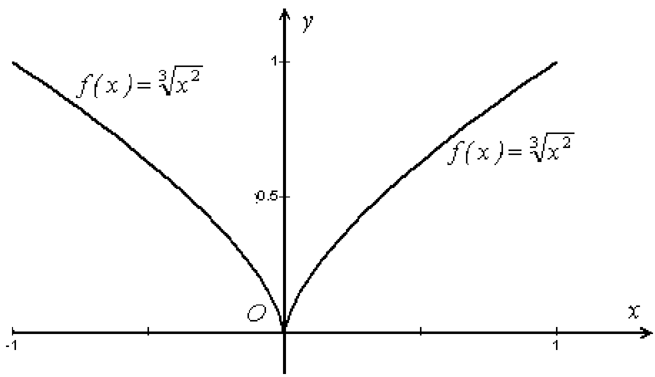
$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0+0) \le 0, \qquad \lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0-0) \ge 0$$

болады.

Егер функцияның сол $f'(x_0-0)$ және оң $f'(x_0+0)$ туындылары нөлге тең болса, онда функция туындысы $f'(x_0)$ бар және нөлге тең болады.

Егер $f'(x_0-0)$ және $f'(x_0+0)$ нөлден өзгеше болса, мысалы, $f'(x_0+0)<f'(x_0-0)$ болса, онда $f'(x_0)$ жоқ болады.

Функцияның x_0 нүктеде минимумы бар болған жағдайда жоғарыдағыдай дәлелденеді. Теорема дәлелденді.



47-сурет

1-*мысал*. $f(x)=|x|$ функцияның $x=0$-де туындысы жоқ екендігін білеміз. Бұл функцияның $x=0$ нүктеде минимумы бар (I тарау, 2-§. 2-суретке қараңыз).

2-*мысал*. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ болсын. $f'_-(0)=\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=$

$$=\lim_{x \to -0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = -\infty, \qquad f'_+(0)=\lim_{x \to -0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$ болғандықтан $x=0$

нүктеде функцияның туындысы жоқ. Бірақ бұл функцияның $x=0$ нүктеде минимумы бар болуы айқын (47-сурет).

3-анықтама. Функция туындысын нөлге айналдыратын нүктелер немесе туынды жоқ болған нүктелер функцияның *кризистік нүктелері* деп аталады. Функция туындысы нөлге тең болған нүктелер *стационар нүктелер* деп аталады.

Әр қандай кризистік нүкте функцияның экстремум нүктесі бола бермейді.

Мысалы, $f(x)=(x-1)^3$, $f'(x)=3(x-1)^2$, $f'(1)=0$ болып, $x_0=1$ кризистік нүкте. Бірақ $x_0=1$ нүктенің кез келген маңайында $f(1)=0$ ең кіші, немесе ең үлкен мән бола алмайды. Себебі әрбір маңайда нөлден кіші және нөлден үлкен мәндер табылады.

Демек, $x=1$ нүктеде экстремум жоқ.

3-мысал. Егер $f(x)$ функция x_0 нүктеде шексіз туындысы бар болса, онда бұл нүкте функцияның экстремум нүктесі бола алмайтындығын көрсетіңдер.

Шешу. Айталық, $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ болсын.

Онда кез келген $\varepsilon>0$ алынғанда да δ оң сан табылып, $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ маңайдан алынған кез келген $x\neq x_0$-тер үшін $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>\dfrac{1}{\varepsilon}$ теңсіздік орынды болады. Бұдан $x>x_0$ болғанда $f(x)>f(x_0)$, $x<x_0$ болғанда $f(x)<f(x_0)$ екендігі келіп шығады. Демек, $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде экстремумы жоқ. $f'(x_0)=-\infty$ болған жағдайда жоғарыдағы сияқты дәлелденеді.

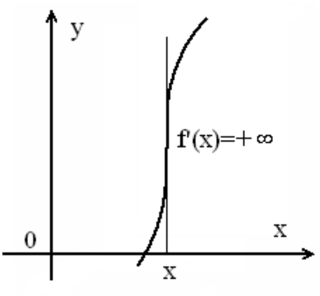
Функция графигінің кризистік нүкте маңайындағы мүмкін болған жағдайлары 48-суретте көрсетілген.

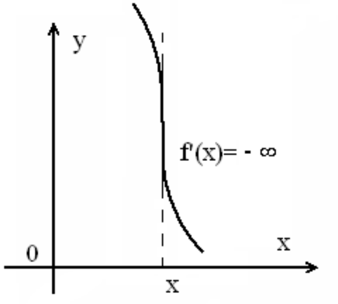
3.3. Экстремум бар болуының жеткілікті шарттары

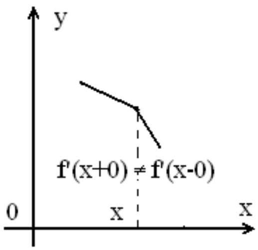
3.2-теорема. Айталық, $f(x)$ функция x_0 нүктеде үзіліссіз және x_0 нүкте функцияның кризистік нүктесі болсын.

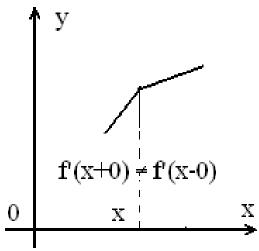
а) Егер кез келген $x\in(x_0-\delta;x_0)$ үшін $f'(x)>0$, кез келген $x\in(x_0;x_0+\delta)$ үшін $f'(x)<0$ теңсіздіктер орынды болса, яғни $f'(x)$ туынды x_0 нүктеден өтуде өз таңбасын «+»-тен «-»-ке өзгертсе, онда $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде максимумы бар болады.

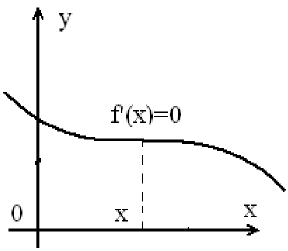
b) Егер кез келген $x\in(x_0-\delta;x_0)$ үшін $f'(x)<0$, кез келген $x\in(x_0;x_0+\delta)$ үшін $f'(x)>0$ теңсіздіктер орынды болса, яғни $f'(x)$ туынды x_0 нүктеден өткенде өз таңбасын «-»-тен «+»-ке өзгертсе, онда $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде минимумы бар болады.

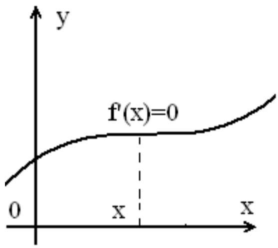

y
f'(x)=+∞
0
x
x

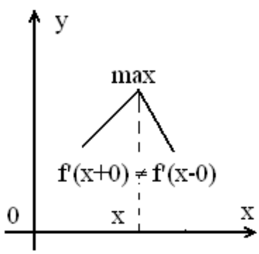

y
f'(x)= - ∞
0
x
x

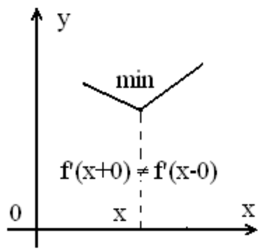

y
f'(x+0) ≠ f'(x-0)
0
x
x

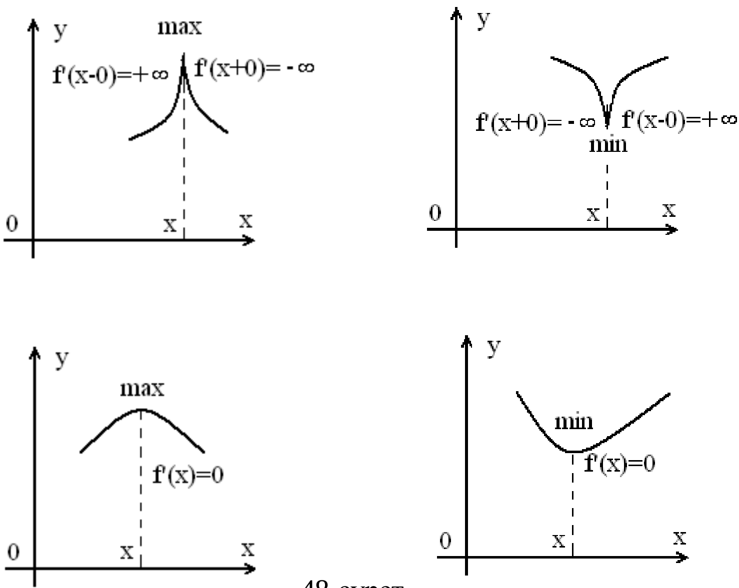

y
f'(x+0) ≠ f'(x-0)
0
x
x


y
f'(x)=0
0
x
x


y
f'(x)=0
0
x
x


y
max
f'(x+0) ≠ f'(x-0)
0
x
x


y
min
f'(x+0) ≠ f'(x-0)
0
x
x



48-сурет

c) Егер $f'(x)$ туынды x_0 нүктеден өткенде өз таңбасын өзгертпесе, онда $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде экстремумы болмайды.

Дәлелдеу. a) жағдайды қарастырамыз. Бұл жағдайда кез келген $x\in(x_0-\delta;x_0)$ үшін $f'(x)>0$ болғандықтан $f(x)$ функция $(x_0-\delta; x_0)$ интервалда қатаң өспелі. Шартқа орай $f(x)$ функция x_0 нүктеде үзіліссіз, сондықтан

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

теңдік орынды. Демек, кез келген $x\in(x_0-\delta; x_0)$ үшін

$$f(x)<f(x_0) \qquad (2)$$

болады. Кез келген $x\in(x_0; x_0+\delta)$ үшін $f'(x)<0$ болғандықтан $f(x)$ функция $(x_0; x_0+\delta)$-де қатаң кемиді. Демек, (1) теңдікті ескерсек, кез келген $x\in(x_0;x_0+\delta)$ үшін (2) теңсіздік орынды. Бұдан кез келген $x\neq x_0$ және кез келген $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$ үшін $f(x)<f(x_0)$ болады, яғни $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде максимумы бар.

b) Бұл жағдайда $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде минимумы бар болуы (a) жағдайға ұқсас дәлелденеді.

f'(x) туынды x_0 нүктеден өткенде өз таңбасын өзгертпейтін (с) жағдайда *f(x)* функция x_0 нүктенің ($x_0 - \delta$; $x_0 + \delta$) маңайында қатаң өспелі немесе қатаң кемімелі болады. Демек, x_0 нүктеде экстремум жоқ. Теорема дәлелденді.

Сонымен экстремумге сыналатын нүктеден өткенде функцияның туынды таңбасының өзгеруі экстремум бар болуының тек жеткілікті шарты болып, қажетті шарты бола алмайды.

3.2-теоремадан функцияның экстремумге зерттеу үшін 1-ережені келтіріп шығарамыз.

1-*ереже*. *f(x)* функцияның экстремумдерін табу үшін

1) *f(x)* функцияның *f'(x)* туындысын тауып, кризистік нүктелер жиынын анықтау керек.

2) әрбір кризистік нүктенің сол маңайында және оң маңайында туындының таңбасын анықтау қажет.

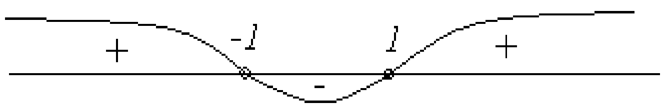
3) егер кризистік нүкте арқылы солдан оңға өткенде туынды таңбасын «+»-тен «-»-ке («-»-тен «+»-ке) өзгертсе, онда бұл кризистік нүктеде *f(x)* функцияның максимумы (минимумы) бар болады. Егер туынды таңбасы өзгермесе, онда экстремум болмайды.

Мысал. $f(x) = (x+4)\sqrt[3]{(x-1)^2}$ функцияның экстремумын табыңдар.

Шешу. Бұл функция (-∞;+∞) аралықта анықталған және үзіліссіз. Оның туындысын табамыз: $f'(x) = \dfrac{5(x+1)}{3\sqrt[3]{x-1}}$.

Туынды x=-1 нүктеде нөлге тең, ал x=1 нүктеде шекті туынды жоқ.

Енді туындының таңбасын анықтаймыз. Ол үшін (-∞;+∞) аралықты 49-суретте көрсетілгендей аралықтарға ажыратамыз және әрбір аралықта туындының таңбасын анықтаймыз.



49-сурет

Бұл суреттен ереже бойынша берілген функцияның x=-1 нүктеде максимум мәні $f(-1)=3\sqrt[3]{4}$ -ке және x=1 нүктеде минимум мәні $f(x)$=0-ге тең болатындығын көруге болады.

4-§. Жоғары ретті туындылардың көмегімен функцияны экстремумге зерттеу

4.1. Екінші ретті туынды көмегімен экстремумге зерттеу

4.1-теорема. Айталық, $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде бірінші және екінші ретті туындылары бар және $f'(x_0)$=0 болсын. Онда егер $f''(x_0)$<0 болса, x_0 нүкте $f(x)$ функцияның максимум нүктесі, егер $f''(x_0)$>0 болса, минимум нүктесі болады.

Дәлелдеу. $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде бірінші және екінші ретті туындылары бар және $f'(x_0)$=0, $f''(x_0)$<0 болсын. Демек, x_0 кризистік нүктеде $f'(x)$ кемімелі, яғни $(x_0-\delta;x_0)$ интервалынан алынған кез келген x үшін $f'(x)>f'(x_0)$=0 және $(x_0;\ x_0+\delta)$ интервалынан алынған кез келген x үшін $0=f'(x_0)>f'(x)$ болады. Ал бұл x_0 нүктеден өткенде туынды өз таңбасын «+»-тен «-»-ке өзгертуін, демек, x_0 максимум нүкте екендігін білдіреді.

$f''(x_0)$>0 болған жағдайда x_0-дің минимум нүкте болуы дәл солай дәлелденеді. Теорема дәлелденді.

Дәлелденген теоремаға негізделіп, екінші ретті туынды көмегімен функцияны экстремумге зерттеудің мынадай ережесін келтіреміз.

2-*ереже*. $f(x)$ функцияның экстремумге зерттеу үшін

1) $f'(x)$=0 теңдеудің барлық түбірлерін табамыз;

2) әрбір стационар нүктеде $f''(x_0)$-ді есептейміз. Егер $f''(x_0)$<0 болса, x_0 максимум нүктесі, $f''(x_0)$>0 болса, x_0 минимум нүктесі болады.

3) экстремум нүктелер мәнін $y=f(x)$ қойып, $f(x)$ функцияның экстремум мәндерін табамыз.

Жалпы айтқанда, бұл ереженің қолдану шекарасы тар, себебі бұл ережені бірінші ретті шекті туынды жоқ болған нүктелерде қолдануға болмайды. Екінші ретті туынды нөлге тең немесе жоқ болған нүктеде де ереже анық нәтиже бермейді

1-мысал. Екінші ретті туынды көмегімен $y=2sinx+cos2x$ функция экстремумдерін анықтаңдар.

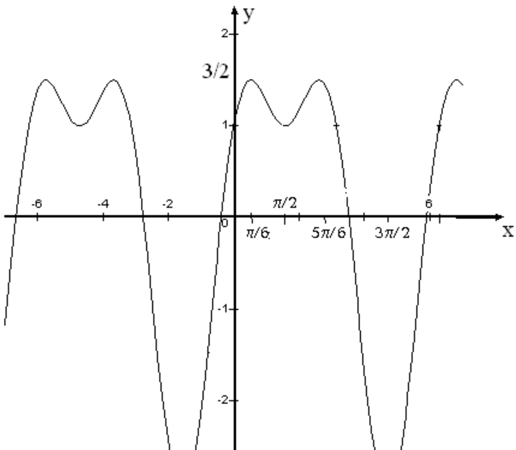
Шешу. Функция периодты болғандықтан $[0;2\pi]$ кесіндіні қарастыру жеткілікті. Функцияның бірінші және екінші ретті туындыларын табамыз: $y'=2cosx-2sin2x=2cosx(1-2sinx)$;

$y''=-2sinx-4cos2x$.

$2cosx(1-2sinx)=0$ теңдеуден функцияның $[0;2\pi]$ кесіндіге тиісті болған кризистік нүктелерін табамыз: $x_1=\pi/6$; $x_2=\pi/2$; $x_3=5\pi/6$; $x_4=3\pi/2$. Енді әрбір кризистік нүктеде екінші ретті туынды таңбасын анықтаймыз және тұжырымдаймыз:

$y''(\pi/6)=-3<0$, демек $x_1=\pi/6$ нүктеде $y(\pi/6)=3/2$ максимум бар.
$y''(\pi/2)=2>0$, демек $x_2=\pi/2$ нүктеде $y(\pi/2)=1$ минимум бар.
$y''(5\pi/6)=-3<0$, демек $x_3=5\pi/6$ нүктеде $y(5\pi/6)=3/2$ максимум бар.
$y''(3\pi/2)=6>0$, демек $x_4=3\pi/2$ нүктеде $y(3\pi/2)=-3$ минимум бар.

Бұл функцияның $(-2\pi;2\pi)$ интервалдағы графигі 50-суретте келтірілген.



50-сурет

4.2. Параметрлі берілген функциялардың экстремумдері. Айталық, $y=f(x)$ функция $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ система көмегімен параметрлі берілген болып, t параметрдің өзгеру аралығында $\varphi(t)$ және $\psi(t)$

функциялардың бірінші және екінші ретті туындылары бар болсын. Сондай-ақ бұл аралықта $\varphi'(t) \neq 0$ болсын. Онда функцияның бірінші және екінші ретті туындылары $y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$; $y'_{x^2} = \dfrac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}$ болатын. Бұл жағдайда экстремумге зерттеу керек болған нүктелерге сәйкес болған t параметрдің мәндері $\psi'(t) = 0$ теңдеуден анықталады (себебі қарастырылып жатқан аралықта $\varphi'(t),\ \psi'(t)$ бар және $\varphi'(t) \neq 0$). t=t_0 осындай мәндердің бірі болсын. Онда параметрдің бұл мәнінде $y''_{x^2} = \dfrac{\psi''(t)}{(\varphi'(t_0))^2}$ болады. Бұдан егер $\psi''(t_0) < 0$ болса, x-тің $\varphi(t_0)$ мәнінде максимум; егер $\psi''(t) > 0$ болса, x-тің $\varphi(t_0)$ мәнінде минимум бар болады. Егер $\psi''(t_0) = 0$ болса, онда $f(x)$ функцияның жоғары ретті туындыларын зерттеу қажет.

$\varphi'(t)$ нөлге тең болатын нүктелерді ерекше зерттеу керек болады.

2-мысал. $\begin{cases} x = \varphi(t) = t^5 - 5t^2 - 20t + 7, \\ y = \psi(t) = 4t^3 - 3t^2 - 18t + 3, \quad -2 < t < 2 \end{cases}$

системамен берілген функцияны экстремумге зерттеңдер.

Шешу. $\varphi(t)$ және $\psi(t)$ функцияларының кез келген ретті туындылары бар.

$\varphi'(t) = 5t^4 - 10t - 20,\ \psi'(t) = 12t^2 - 12t - 18,\ \psi''(t) = 24t - 12.$ (-2,2) интервалда $\varphi'(t) \neq 0$; демек, берілген система (-2,2) интервалда y=$f(x)$ функцияны анықтайды.

$\psi'(t) = 0$ теңдеудің $t_1 = -1,\ t_2 = \dfrac{3}{2}$ түбірлері бар, олар (-2; 2) интервалға тиісті. $\psi''(-1) < 0,\ \psi''(\dfrac{3}{2}) > 0$ болғандықтан, y=$f(x)$ функцияның t=-1 мәнінде (яғни x=31-де) максимумы, $t = \dfrac{3}{2}$ мәнінде (яғни $x = -\dfrac{1033}{32}$) минимумы бар.

4.3. Тейлор формуласы көмегімен экстремумге зерттеу

4.2-теорема. Айталық, $f(x)$ функцияның x_0 нүктенің қандай да бір $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ маңайында $f'(x), f''(x), ..., f^{(n)}(x)$ $(n\geq 2)$ үзіліссіз туындылары бар және $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0$ болсын. Онда

1) Егер n жұп және $f^{(n)}(x_0)<0$ болса, функцияның x_0 нүктеде локальді максимумы болады;

2) Егер n жұп және $f^{(n)}(x_0)>0$ болса, функцияның x_0 нүктеде локальді минимумы болады;

3) Егер n тақ болса, функцияның x_0 нүктеде экстремумы болмайды.

Дәлелдеу. $f(x)$ функция үшін Лагранж түріндегі қалдық мүшелі Тейлор формуласын жазамыз:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+...$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,$$ бұл жерде $\xi\in(x_0,x)$.

Теорема шарты бойынша $(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0,$ сол себепті

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,$$ немесе

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (1)$$

теңдік орынды болады. Теореманың шарты бойынша $f^{(n)}(x)$ функция x_0 нүктеде үзіліссіз. Үзіліссіз функцияның локальді қасиеттері бойынша x_0 нүктенің мейлінше кіші $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ маңайы табылып, мұнда $f^{(n)}(x)$ функцияның таңбасы $f^{(n)}(x_0)$-дің таңбасымен бірдей болады. $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ болсын. Онда $\xi\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ болуы айқын. Енді төмендегі екі жағдайды қарастырамыз.

1-жағдай. Айталық, n тақ сан болсын. Онда $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ маңайда (1) теңдіктің оң жағындағы $f^{(n)}(\xi)$ көбейткіштің таңбасы $f^{(n)}(x_0)$-дің таңбасымен бірдей болады, ал екінші көбейткіш $x>x_0$ болғанда оң, $x<x_0$ болғанда теріс болады, яғни $(x-x_0)^n$ өрнек x_0 нүкте маңайында таңбасын өзгертеді. Бұдан (1) теңдіктің сол жағы, яғни $f(x)-f(x_0)$ айырым да x_0 нүкте маңайында таңбасының өзгеруі келіп шығады.

Сонымен, n тақ сан болғанда $f(x)$ функцияның x_0 нүктеде экстремумы болмайды.

2-жағдай. Енді n жұп сан болсын. Онда (1) теңдіктің оң жағы таңбасын өзгертпейді, оның таңбасы $f^{(n)}(x_0)$-тің таңбасымен бірдей болады. Бұдан, егер $f^{(n)}(x_0)<0$ болса, онда $f(x)-f(x_0)<0$, яғни $f(x)<f(x_0)$, демек, функцияның x_0 нүктеде максимумы бар болады. Егерде $f^{(n)}(x_0)>0$ болса, онда $f(x)-f(x_0)>0$, яғни $f(x)>f(x_0)$, демек, функцияның x_0 нүктеде минимумы болады. Теорема дәлелденді.

3-*мысал.* $y=x^5-5x^4-5$ функцияның экстремумдерін табыңдар.

Шешу. Функцияның кризистік нүктелерін табамыз. Ол үшін функцияның туындысын табамыз: $y'=5x^4-20x^3$. Бұл функцияның кризистік нүктелері тек стационар нүктелерден тұрады, сол себепті $5x^4-20x^3=0$ теңдеуді шешеміз. Оның түбірлері $x_1=0$, $x_2=4$ болады.

Екінші ретті туындыны табамыз: $f''(x)=20x^3-60x^2$.

$f''(4)>0$ болғандықтан, $x=4$ нүктеде функция минимум мән қабылдайды: $f(4)=-261$. $f''(0)=0$ болғандықтан үшінші ретті туындыны есептейміз: $f'''(x)=60x^2-120x$, $f'''(0)=0$, төртінші ретті туындыны есептейміз: $f^{(4)}(x)=120x-120$, $f^{(4)}(0)=-120<0$ және $n=4$ жұп болғандықтан 3-теорема бойынша $x=0$ нүктеде функцияның максимумы бар: $f(0)=-5$.

5-§. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері

Айталық, $f(x)$ функция X жиында анықталған болсын. Бұл функцияның мәндер жиыны $E(f)=\{f(x): x\in X\}$ болсын.

Егер $E(f)$ жиын шенелген болса, онда оның анық жоғары шекарасы бар, оны $M=\sup\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ деп белгілейміз. Егер $M\in E(f)$ болса, онда M саны $f(x)$ функцияның ең үлкен мәні деп аталады және $M=\max\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ арқылы белгіленеді. Дәл сол сияқты $E(f)$ жиынының анық төменгі шекарасы бар, оны $m=\inf\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ деп белгілейміз. Егер $m\in E(f)$ болса, онда m саны $f(x)$ функцияның ең кіші мәні деп аталады және $m=\min\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ арқылы белгіленеді.

Енді $[a,b]$ кесіндіде анықталған және үзіліссіз болған $f(x)$ функцияны қарастырамыз. Бұл жағдайда Вейерштрасстың екінші теоремасы бойынша функцияның [*a;b*] кесіндіде ең үлкен және ең кіші мәндері бар болады. Бұл жағдайда төмендегі ереже орынды.

Ереже. [*a,b*] кесіндіде функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу үшін бұл кесіндіге тиісті барлық кризистік нүктелер табылады, соң функцияның сол нүктелердегі мәндері есептеледі. Табылған мәндермен *f(a)* мен *f(b)* салыстырылады. Бұл мәндердің ең үлкені *f(x)* функцияның [*a,b*] кесіндідегі ең үлкен мәні, ең кішісі *f(x)* функцияның ең кіші мәні болады.

1-*мысал*. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ функцияның $[0,01;100]$ кесіндіде ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

Шешу. Функция туындысын табамыз: $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$. Оны нөлге тең деп, яғни $\frac{x^2-1}{x^2}=0$ теңдеуді шешіп, $x=-1$ және $x=1$ екендігін табамыз. Бұлардан $x=-1$ нүкте $[0,01;100]$ кесіндіге тиісті емес. $x=1$ стационар нүкте $[0,01;100]$ кесіндіге тиісті. Берілген функцияның $x=\frac{1}{100}$; $x=1$; $x=100$ нүктелеріндегі мәндерін есептейміз. $f(1/100)=100{,}01$; $f(1)=2$; $f(100)=100{,}01$. Бұл мәндердің ең үлкені 100, 01; ең кішісі 2.

Демек, $\max\limits_{[0,01;100]}\{f(x)\}=100{,}01$; $\min\limits_{[0,01;100]}\{f(x)\}=2$ болады.

Егер $f(x)$ функция интервалда, түзуде, $[a;b)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty;b]$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$, $(a;b]$ аралықтарда зерттелсе, онда бұндай аралықтарда функцияның ең үлкен (ең кіші) мәндері бар болмауы да мүмкін.

Мысалы, $y=x$ функцияның (1;2] аралықта ең кіші мәні, ал [1;2) аралықта ең үлкен мәні жоқ. Сандар осінде $y=x^2$ функцияның ең үлкен мәні, $y=\mathrm{arctg}x$ функцияның ең үлкен, ең кіші мәндері жоқ.

Егер үзіліссіз $f(x)$ функция $[a;b)$ ($[a;+\infty)$) аралықта өспелі болса, онда бұл аралықта функцияның ең кіші мәні бар және ол $x=a$ нүктеде болады.

Дәл солай тұжырым $(a;b]$ ($(-\infty;b]$) аралықта үзіліссіз функция үшін де орынды.

Егер үзіліссіз $f(x)$ функция $(a;b)$ интервалда үзіліссіз, $x_0 \in (a;b)$ кризистік нүкте, $(a;x_0)$ интервалда өспелі (кемімелі), $(x_0;b)$ интервалда кемімелі (өспелі) болса, онда $(a;b)$ интервалда $f(x)$ функция x_0 нүктеде ең үлкен (ең кіші) мәнін қабылдайды.

Егер үзіліссіз $f(x)$ функция $(a;b)$ интервалда үзіліссіз, шекті сандағы кризистік нүктелері бар және $a<x_0<x_1<...<x_n<b$, $(a;x_0)$ интервалда өспелі (кемімелі), $(x_n;b)$ интервалда кемімелі (өспелі) болса, онда $(a;b)$ интервалда $f(x)$ функция ең үлкен (ең кіші) мәнін қабылдайды. Бұл мәнді функция кризистік нүктелердің бірінде қабылдайды.

Егер $f(x)$ функция $(-\infty;+\infty)$ $([a;b))$-да үзіліссіз және $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ $(x \to b-0)$)-да шекті немесе шексіз шегі бар болса, онда бұл функцияның кризистік нүктелердегі мәні және шексіздегі шектерін салыстырып, оның ең үлкен, ең кіші мәндерінің бар немесе жоқ екендігі жайында тұжырымдауға болады.

2-*мысал*. $f(x)=\ln x - x$ функцияның $(0;+\infty)$ аралықтағы ең үлкен мәнін табыңдар.

Шешу. Функцияның туындысын, кризистік нүктелерін табамыз: $f'(x)=\dfrac{1-x}{x}$, $x=1$. Егер $0<x<1$ болса, онда $f'(x)>0$, бұдан $f(x)$ өспелі. Егер $1<x<+\infty$ болса, онда $f'(x)<0$, бұдан $f(x)$ кемімелі. Демек, $f(x)=\ln x - x$ функция $x=1$ нүктеде ең үлкен мәнін қабылдайды: $f(1)=-1$.

3-*мысал*. Мына $f(x)=\dfrac{9}{x}+\dfrac{25}{1-x}$ функцияның $(0;1)$ интервалдағы ең кіші мәнін табыңдар.

Шешу. Бұл функция үшін $f'(x)=\dfrac{(8x-3)(2x+3)}{x^2(1-x)^2}$ және бұдан функцияның $(0;1)$ интервалға тиісті болған кризистік нүктесі $x=\dfrac{3}{8}$ екендігін табамыз. Егер $0<x<\dfrac{3}{8}$ болса, онда $f'(x)<0$, бұдан $f(x)$ кемімелі. Егер $\dfrac{3}{8}<x<1$ болса, онда $f'(x)>0$, бұдан $f(x)$

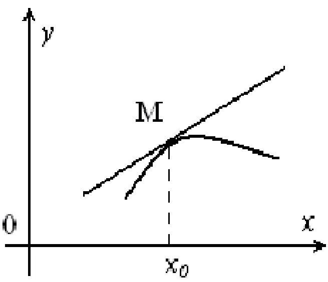
өспелі. Демек, (0;1) интервалда берілген $f(x)=\frac{9}{x}+\frac{25}{1-x}$ функция $x=\frac{3}{8}$ нүктеде ең кіші мәнін қабылдайды: $f\left(\frac{3}{8}\right)=64$.

6-§. Функция графигінің дөңестігі және ойыстығы. Функция графигінің иілу нүктесі

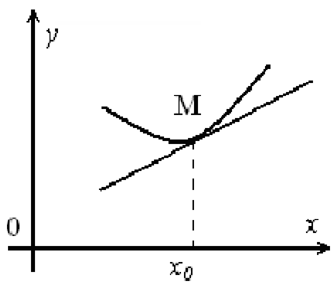
6.1. Функция графигінің дөңестігі және ойыстығы. Айталық, $f(x)$ функцияның $x=x_0$ нүктеде $f'(x_0)$ туындысы бар, яғни функция графигінің $M(x_0,f(x_0))$ нүктесінен вертикаль болмаған жанама өткізу мүмкін болсын.

1-анықтама. Егер $x=x_0$ нүктенің мейлінше кіші маңайы бар болып, $y=f(x)$ функция графигінің бұл маңайдағы нүктелерге сәйкес болған бөлегі сол графикке $M(x_0,f(x_0))$ нүктеден жүргізілген жанамадан төменде (жоғарыда) орналасса, онда $f(x)$ функция графигі $x=x_0$ *нүктеде дөңес* (*ойыс*) деп аталады.

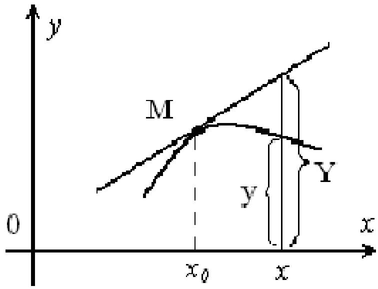
Егер график қандай да бір интервалдың барлық нүктелерінде дөңес (ойыс) болса, онда бұл график сол интервалда *дөңес* (*ойыс*) деп аталады. 51-суретте дөңес және 52-суретте ойыс графиктер сызылған.



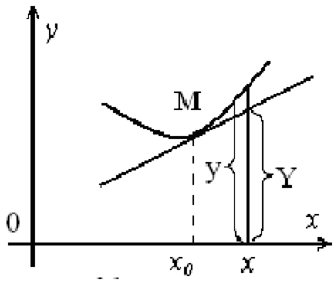
51-сурет



52-сурет



53-сурет



54-сурет

Функция графигі нүктесінің ординатасын y-пен, сол графикке $M(x_0,f(x_0))$ нүктесінде жүргізілген жанаманың x аргументке сәйкес ординатасын Y-пен белгілейік. Онда, егер x_0 нүктенің қандай да бір маңайынан алынған барлық x-тер үшін $y\text{-}Y \le 0$ ($y\text{-}Y \ge 0$) теңсіздік орынды болса, онда қисық $x=x_0$ нүктеде дөңес (ойыс) болады (53-, 54-суреттер).

6.1-теорема. Айталық, $f(x)$ функция X аралықта анықталған және $x_0 \in X$ нүктеде екінші ретті туындысы бар болсын. Егер $f''(x_0)>0$ болса, онда функцияның графигі x_0 нүктеде ойыс; егер $f''(x_0)<0$ болса, онда функцияның графигі x_0 нүктеде дөңес болады.

Дәлелдеу. Айталық, $f''(x_0)>0$ болсын. Көмекші функцияны қарастырамыз: $F(x)=y\text{-}Y$, яғни $F(x)=f(x)\text{-}f(x_0)\text{-}f'(x_0)(x\text{-}x_0)$. Онда $F(x_0)=0$, $F'(x)=f'(x)\text{-}f'(x_0)$, $F''(x)=f''(x)$ болады. Бұдан $F'(x_0)=f'(x_0)\text{-}f'(x_0)=0$ және $F''(x_0)=f''(x_0)>0$ екендігі келіп шығады. Демек, (экстремумның жеткілікті шарты бойынша) x_0 нүкте $F(x)$ функцияның минимум нүктесі болады, яғни x_0 нүктенің қандай да бір маңайында $F(x) \ge F(x_0)=0$ болады. $F(x)=y\text{-}Y$ болғандықтан $y \ge Y$ теңсіздік орынды болады. Ал бұл x_0 нүктенің айтылған маңайында функция графигінің жанамадан жоғарыда орналасуын көрсетеді, яғни функцияның графигі x_0 нүктеде ойыс болады. Теореманың екінші бөлігі дәл солай дәлелденеді.

Егер қандай да бір интервалда $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$) болса, онда $y=f(x)$ график сол интервалда ойыс (дөңес) болады.

Мысал. $y=x^5$ функция графигінің ойыс, дөңес аралықтарын анықтаңдар.

Шешу. Функцияның екінші ретті туындысын табамыз: $y''=20x^3$. Бұдан, егер $x>0$ болса, $y''>0$ болады, ал егер $x<0$ болса

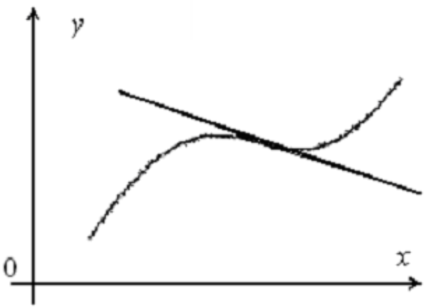
$y''<0$ болады. Демек, $(-\infty;0)$ аралықта график дөңес, ал $(0;+\infty)$ аралықта ойыс болады.

6.2. Функция графигінің иілу нүктесі Енді функция графигінің иілу нүктесі ұғымын енгіземіз.

2-анықтама. Егер x_0 нүктенің $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ маңайы табылып, $f(x)$ функция графигі $(x_0-\delta;x_0)$ аралықта ойыс (дөңес), ал $(x_0;x_0+\delta)$ аралықта дөңес (ойыс) болса, онда x_0 нүкте $y=f(x)$ функция графигінің *иілу нүктесі* деп аталады.

Егер иілу нүктесінде жанама бар болса, ол графикті қиып өтеді (55-сурет).

6.2-теорема. $y=f(x)$ функция $x=x_0$ нүктеде дифференциалданатын болсын. Егер $x=x_0$ нүкте функция графигінің иілу нүктесі болса, онда сол нүктеде функцияның екінші ретті туындысы бар және нөлге тең немесе екінші ретті туындысы болмайды.



55-сурет

Дәлелдеу. Айталық, x_0 нүкте $f(x)$ функция графигінің иілу нүктесі болсын. Кері тұжырымдаймыз: $f''(x_0)$ бар және $f''(x_0)\neq 0$. Онда $f''(x_0)<0$ немесе $f''(x_0)>0$ болады.

$f''(x_0)<0$ $(f''(x_0)>0)$ болған жағдайда 1-теорема бойынша x_0 нүктенің қандай да бір $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ маңайы табылып, мұнда $f(x)$ функция графигі дөңес (ойыс) болады. Бұл x_0 -тің иілу нүкте болуына қайшы. Демек, иілу нүктеде $f''(x_0)$ нөлге тең немесе $f''(x_0)$ жоқ болады. Теорема дәлелденді.

$f''(x_0)=0$ немесе $f''(x)$-тің жоқ болуы иілу нүктесі бар болуының тек қажетті шарты болып, жеткілікті шарт бола алмайды. Мысалы, $y=x^4$ функция үшін $y'=4x^3$, $y''=12x^2$ және $y''(0)=0$ болады. Бірақ, $x=0$ иілу нүктесі емес.

Енді иілу нүктесі бар болуының жеткілікті шартын көрсететін теореманы келтіреміз.

6.3-теорема. *f(x)* функция $x=x_0$ нүктеде дифференциалданатын және x_0 нүктенің $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ маңайы табылып, $(x_0-\delta;x_0)$ және $(x_0;\ x_0+\delta)$ интервалдарда $f''(x)$ бар, әрбір интервалда $f''(x)$ таңбасы тұрақты болсын. Егер x_0 нүктенің сол және оң жақтарында $f''(x)$ әр түрлі таңбалы болса, x_0 нүкте *f(x)* функция графигінің иілу нүктесі болады; егер $f''(x)$ бір таңбалы болса, онда x_0 иілу нүктесі болмайды.

Дәлелдеу. Шынында, $x_0-\delta<x<x_0$ болғанда $f''(x)<0$ $(f''(x)>0)$ болса, егер $x_0<x<x_0+\delta$ болғанда $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$ болса, 1-теорема бойынша x_0 -ден сол жақта *f(x)* функция дөңес (ойыс), x_0-ден оң жақта ойыс (дөңес) болады. Демек, x_0 нүкте *f(x)* функция графигінің иілу нүктесі болады.

Егер $(x_0-\delta;x_0)$ және $(x_0;\ x_0+\delta)$ интервалдарда $f''(x)$ бір таңбалы, мысалы, $f''(x)<0$ болса, онда бұл интервалдарда *f(x)* функция графигі дөңес болып, иілу болмайды. Теорема дәлелденді.

Сонымен, *f*(*x*) функция графигінің иілу нүктесін анықтау үшін $f''(x)=0$ теңдеуді шешеміз және $f''(x)$ жоқ болған нүктелерді табамыз. Табылған әрбір x_0 нүктеден сол жақта және оң жақта $f''(x)$-тің таңбасын тексереміз.

1-*мысал.* Мына $f(x)=\sqrt[3]{x^5}$ функцияның иілу нүктесін табыңдар.

Шешу. Функцияның анықталу облысы - $(-\infty;+\infty)$. Бірінші және екінші ретті туындыларды табамыз: $f'(x)=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$, $f''(x)=\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Екінші ретті туынды $x=0$ нүктеден басқа барлық нүктелерде бар және нөлден өзгеше. Бұл нүкте маңайында 6.3-теорема шарттарын тексереміз. Егер $x<0$ болса $f''(x)<0;$ $x>0$ болса $f''(x)>0$ болады. Демек, $(0;f(0))$ нүкте графиктің иілу нүктесі болады.

2-*мысал.* $y=\frac{a}{x}\ln\frac{x}{a}$ $(a>0),\ 0<x<\infty,$ функция графигінің иілу нүктесін табыңдар.

Шешу. Бұл функцияның екінші ретті туындысы $y''=\frac{2a}{x^3}(\ln\frac{x}{a}-\frac{3}{2})$. Егер $\ln\frac{x}{a}-\frac{3}{2}=0$ болса, онда $f''(x)=0$ болады. Демек, $x=ae^{\frac{3}{2}}$ болғанда $y''=0$. Бұл нүктенің сол жағында және оң жағында y'' -тің таңбасын тексереміз: $0<x< ae^{\frac{3}{2}}$ болғанда $y''<0$, ал $x> ae^{\frac{3}{2}}$ болғанда $y''>0$ болады.

Демек, $(ae^{\frac{3}{2}};\frac{3}{2}\cdot e^{-\frac{3}{2}})$ нүкте графиктің иілу нүктесі болады.

3-*мысал*. Төмендегі функциялардың дөңес, ойыс болатын интервалдарын және иілу нүктелерін табыңдар:

a) $y=x^4+x^3-18x^2+24x-15;$ *b)* $y=x+x^{5/3}$

Шешу. а) функцияның бірінші және екінші ретті туындыларын табамыз:

$y'=4x^3+3x^2-36x+24,\ y''=12x^2+6x-36=12(x^2+x/2-3).$

Мына $y''=0$ теңдеуді шешіп, $x_1=-2$, $x_2=1{,}5$ екендігін табамыз.

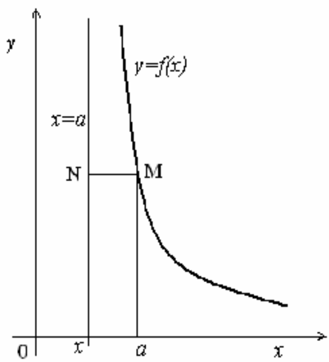
Бұдан $(-\infty;-2)$ және $(1{,}5;\ \infty)$ аралықтарда $y''>0$, демек, бұл аралықтарда график ойыс болады; $(-2;1{,}5)$ аралықта $y''<0$, демек, бұл аралықта график дөңес болады. $x_1=-2$ және $x_2=1{,}5$ нүктелерден өткенде екінші ретті туынды таңбасын өзгертеді. Сол себепті $(-2;-127)$ және $(1{,}5;\ -11{,}0625)$ нүктелер графиктің иілу нүктелері болады.

b) функцияның туындыларын табамыз: $y'=1+\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$,

$y''=\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$ $(x\neq 0)$. $x=0$ болғанда екінші ретті туынды жоқ. $x<0$ болғанда $y''<0$, демек, функцияның графигі дөңес, ал $x>0$ болғанда $y''>0$, демек, график ойыс болады. Екінші ретті туынды $x=0$ нүктеден өткенде таңбасын өзгертеді, сол себепті $(0;0)$ нүкте графиктің иілу нүктесі болады.

7-§. Асимптоталар

Функцияны шексізде, яғни $x\to+\infty$ және $x\to-\infty$ болғанда, немесе оның екінші түр үзіліс нүктесі маңайында үйрену көп жағдайларда функция графигінің нүктелерімен қандай да бір түзудің нүктелері арасындағы арақашықтықтың



56-сурет

жеткілікті кіші болуын көрсетеді. Бұндай қасиеті бар болған түзулерді табу функцияны зерттеуде көмек береді.

Анықтама. Егер $y=f(x)$ қисықта алынған айнымалы нүкте координаталар басынан шексіз ұзақтасқанда сол нүктеден қандай да бір түзуге дейін болған арақашықтық нөлге ұмтылса, онда бұл түзу қисықтың *асимптотасы* деп аталады.

Асимптоталар *вертикаль* (ординаталар осіне параллель) және *көлбеу* (ординаталар осіне параллель емес) болып екіге бөлінеді. Егер көлбеу асимптота абсциссалар осіне параллель болса, онда ол *горизонталь* асимптота деп аталады.

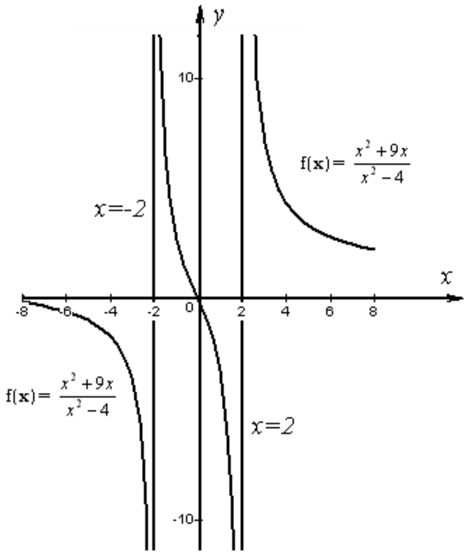
7.1. Вертикаль асимптоталар. Айталық, a нүктедегі бір жақты шектердің кемінде бірі шексіз болсын. Онда $y=f(x)$ қисықтағы $M(x,y)$ нүкте $x \to a$ болғанда координаталар басынан шексіз ұзақтасады, сол нүктеден $x=a$ түзуге дейін болған арақашықтық $MN=|x-a|$ нөлге ұмтылады. Демек, анықтама бойынша $x=a$ түзу $y=f(x)$ қисықтың (функция графигінің) вертикаль асимп-тотасы болады (56-сурет).

Нақты сандар жиынында үзіліссіз болған функциялар үшін вертикаль асимптота жоқ. Вертикаль асимптота тек екінші түр үзіліс нүктелерінде болуы мүмкін.

1-мысал. $f(x)=\dfrac{x^2+9x}{x^2-4}$ функцияның вертикаль асимптоталарын табыңдар.

Шешу. Функцияның анықталу облысы, $x^2-4=0$ теңдеу түбірлерінен басқа барлық нақты сандар жиынынан тұрады. Бұл нүктелер функцияның екінші түр үзіліс нүктелері болады. $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^2+9x}{x^2-4}=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2+9x}{x^2-4}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to -2-0}$



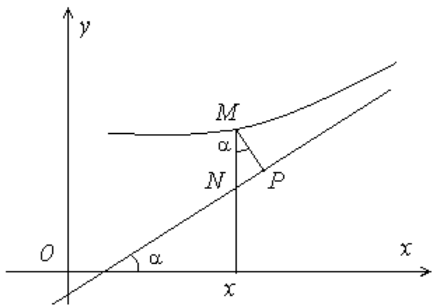
57-сурет

$\frac{x^2+9x}{x^2-4}$=-∞; $\lim\limits_{x\to-2+0}\frac{x^2+9x}{x^2-4}$=+∞, демек, $x=-2$ және $x=2$ түзулер вертикаль асимптота болады (57-сурет).

7.2. Көлбеу асимптота. Көлбеу асимптота теңдеуін $y=kx+b$ түрінде іздейміз. Абсциссалары тең болған қисық ординатасы және асимптота ординатасы арасындағы арақашықтық $x\to+\infty$ немесе $x\to-\infty$-де нөлге ұмтылатынын көрсетеміз. Айталық, M және N абсциссасы x-ке тең болған қисықтағы және асимптотадағы нүктелер, (58-сурет) ал MP болса M нүктеден асимптотаға дейінгі арақа-шықтық, α ($\alpha\neq\pi/2$) асимптотаның Ox осінің оң бағытымен жасайтын бұрышы болсын. Онда ΔMNP үшбұрыштан $MP=MN\cos\alpha$, бұдан $MN=MP/\cos\alpha$ теңдікті аламыз. Бұл теңдіктен, егер MP нөлге ұмтылса, онда MN де нөлге ұмтылуы және керісінше, егер MN нөлге ұмтылса, онда MP нөлге ұмтылуы келіп шығады.

Сонымен, егер $x\to+\infty$ немесе $x\to-\infty$-де $f(x)-kx-b$ айырым нөлге ұмтылса, онда $y=kx+b$ түзу $y=f(x)$ функция графигінің асимптотасы болады.

Бұдан $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$ шарт $y=kx+b$ түзудің $y=f(x)$ функция графигінің көлбеу асимптотасы болуы үшін қажетті және жеткілікті шарт екендігі келіп шығады.



58-сурет

Дербес жағдайда, $y=b$ горизонталь асимптота болуы үшін $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-b)=0$, яғни $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$ шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті.

Амалда көлбеу асимптоталарды табу үшін төмендегі теоремадан пайдаланылады.

7.1-теорема. $y=f(x)$ функция графигінің $y=kx+b$ көлбеу асимптотасы бар болуы үшін

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{және} \quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)$$

шектердің бар болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. *Қажеттілігі.* $y=kx+b$ түзу $y=f(x)$ функция графигінің $x\to\infty$ ұмтылғандағы асимптотасы болсын, яғни $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$. Онда $f(x)-kx-b=\alpha(x)$ теңдік орынды, бұл жерде $\alpha(x)$ $x\to\infty$ ұмтылғанда шектеусіз кіші шама. Соңғы теңдікті төмендегідей жазып алуға болады: $f(x)=kx+b+\alpha(x)$. Демек,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right)=k, \qquad \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(b+\alpha(x))=b$$

теңдіктер орынды болады.

Жеткіліктілігі. $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ және $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$ шектер бар болсын. Соңғы $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b$ теңдікті төмендегідей жазып алуға болады: $f(x)-kx=b+\beta(x)$, бұл жерде $\beta(x)$ $x\to\infty$-де шектеусіз кіші шама. Демек, $f(x)-kx-b=\beta(x)$, яғни $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$. Бұл $y=kx+b$ түзу $y=f(x)$ функция графигінің $x\to\infty$ ұмтылғандағы асимптотасы екендігін білдіреді. Теорема дәлелденді.

2-мысал. $f(x)=x\ln(e+\frac{1}{x})$ функция графигінің асимптоталарын табыңдар.

Шешу. Алдымен бұл функцияның анықталу облысын табамыз. Ол үшін $e+\frac{1}{x}>0$ теңсіздікті шешеміз, одан $D(y)=(-\infty;-\frac{1}{e})\cup(0;\infty)$. Енді шекара нүктелеріндегі функцияның өзгеруін анықтаймыз. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{e}-0}x\ln(e+\frac{1}{x})=-\infty$, Демек, функция графигінің $x=-1/e$ вертикаль асимптотасы бар.

$x\to+0$ ұмтылғандағы шекті есептеуде Лопиталь ережесінен пайдаланамыз:

$$\lim_{x\to+0} x\ln(e+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to+0}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Демек, $x=0$ нүктеде вертикаль асимптота жоқ.

Енді көлбеу асимптоталар бар немесе жоқ екендігін тексереміз.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln(e+\frac{1}{x})=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=$$

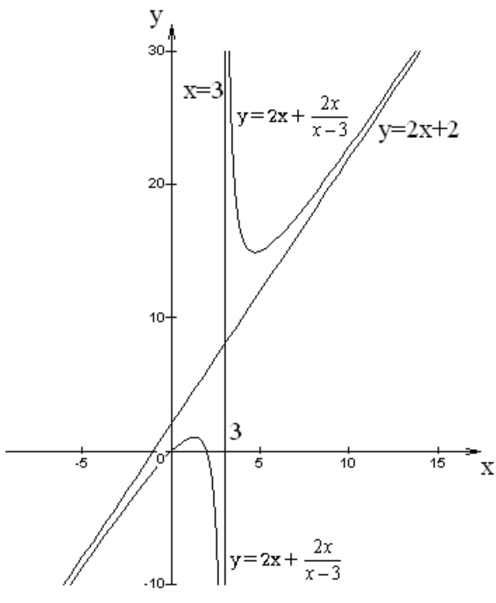
$$=\lim_{x\to\infty}x(\ln(e+\frac{1}{x})-1) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{e}$$

Демек, графиктің $y=x+1/e$ көлбеу асимптотасы бар.

3-мысал. Берілген функция графиктерінің асимптоталарын табыңдар.

a) $y=2x+\dfrac{2x}{x-3}$; *b)* $y=xe^{1/x}$

Шешу. а) $x=3$ нүкте $f(x)=2x+\dfrac{2x}{x-3}$ функцияның екінші түр үзіліс нүктесі және $\lim\limits_{x\to3\pm0}(2x+\dfrac{2x}{x-3})=\pm\infty$ болғандықтан, $x=3$ вертикаль асимптота болады.



59-сурет

Көлбеу асимптоталарды іздейміз: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}==\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2+\frac{2}{x-3}$ $)=2$; $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-kx)==\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2x+\frac{2x}{x-3}-2x)=2$.

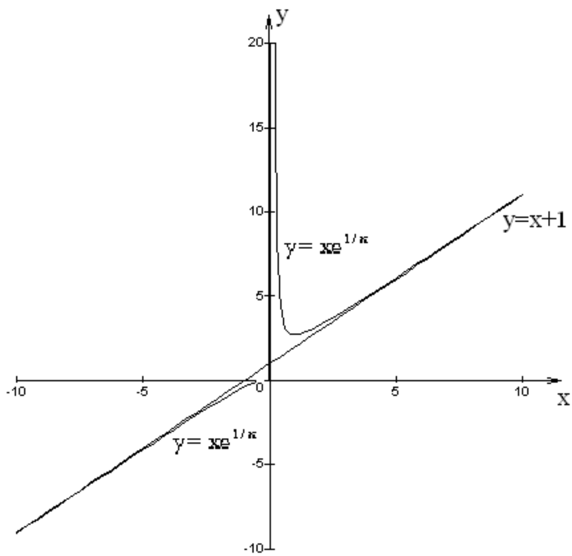
Демек, $y=2x+2$ көлбеу асимптота болады (59–сурет).

b) $y=xe^{1/x}$ функцияның анықталу облысы $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ жиыннан тұрады. $x=0$ нүктеде функцияның сол жақты және оң жақты шектерін есептейміз. $\lim\limits_{x\to-0}xe^{1/x}=0;$ $\lim\limits_{x\to+0}xe^{1/x}=(1/x=t$ белгілеу енгіземіз, онда $x\to+0$ болғанда $t\to+\infty$ болады) $=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$. Демек, $x=0$ түзу вертикаль асимптота болады.

Енді көлбеу асимптоталарды іздейміз:

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{1/x}=e^0=1$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(xe^{1/x}-x)=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}=$ $|1/x=z,\ x\to\pm\infty,\ z\to0|=\lim\limits_{z\to0}\frac{e^z-1}{z}=1$, сонымен, $y=x+1$ көлбеу асимптота (60-сурет).



60-сурет

8-§. Функцияны толық зерттеу және графигін салу

Функцияның қасиеттерін зерттеу және оның графигін салуда төмендегілерді орындау жөн болады:

1) функцияның анықталу облысы мен үзіліс нүктелері табылады; функцияның шекара нүктелеріндегі мәндері (немесе оған сәйкес шектері) есептеледі;

2) функцияның тақ-жұп екендігі, периодтылығы тексеріледі;

3) функцияның нөлдері мен таңбасы тұрақты болатын аралықтары анықталады;

4) асимптоталар табылады;

5) функция экстремумге зерттеледі, оның бірсарындылық интервалдары анықталады;

6) функция графигінің иілу нүктелері, дөңес және ойыс болатын интервалдары табылады.

1-*мысал.* $y=x(x^2-1)$ функцияны тексеріңдер және графигін салыңдар.

Шешу. 1) анықталу облысы - нақты сандар жиыны. Үзіліс нүктелері жоқ. Функцияның шекара мәндері: $\lim\limits_{x\to+\infty} x(x^2-1)=+\infty;$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x(x^2-1)=-\infty;$

2) функция периодты емес, тақ функция;

3) функцияның үш нөлі бар: x=0; x=-1; x=1. $x(x^2-1)>0$ теңсіздікті шешеміз, оның шешімі $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ жиыннан тұрады. Демек, функция $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ жиында оң және $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ жиында теріс мәндер қабылдайды;

4) көлбеу асимптотаны табамыз: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-1)=\infty$. Демек, көлбеу асимптота жоқ. Вертикаль асимтоталар да жоқ (себебі, үзіліс нүктелері жоқ);

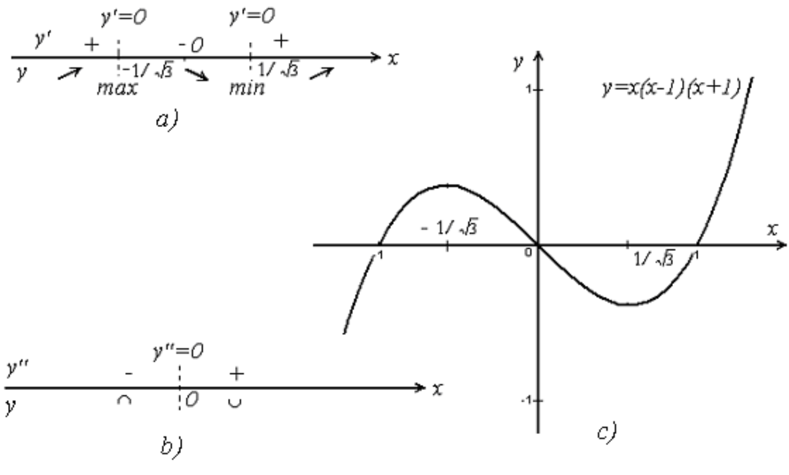
5) функция туындысын табамыз: $y'=3x^2-1$. Туындыны нөлге теңестіріп, стационар нүктелерін табамыз: $3x^2-1=0$, бұдан $x=-1/\sqrt{3}$, $x=1/\sqrt{3}$. Мына (61-а-сурет) схеманы сызамыз және интервалдар әдісінен пайдаланып функция туындысының таңбаларын анықтаймыз. Бұдан функция $(-\infty,-1/\sqrt{3})$ және $(1/\sqrt{3},+\infty)$ интервалдарында өспелі, $(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ интервалда кемімелі; x=-1/

$\sqrt{3}$ нүктеде максимум, x=1/$\sqrt{3}$ нүктеде минимум бар екендігі келіп шығады. Экстремум нүктелерінде функция мәндерін есептейміз: егер x_{max}=-1/$\sqrt{3}$ болса, онда y_{max}=2/(3$\sqrt{3}$); егер x_{min}=1/$\sqrt{3}$ болса, онда y_{min}=-2/(3$\sqrt{3}$) болады.

6) екінші ретті туындыны табамыз: $y''=6x$. Екінші ретті туындыны нөлге теңестіріп, $y''=6x=0$, $x=0$ екендігін табамыз. Схеманы (61-b-сурет) сызамыз және анықталған интервалдарда екінші ретті туынды таңбаларын анықтаймыз. Бұдан x=0 нүктеде иілу бар, (-∞;0)-де функцияның графигі дөңес, (0;+∞)-де ойыс екендігін табамыз. Иілу нүктесі ординатасын табамыз: y(0)=0. Функцияның графигі 61-(c) суретте келтірілген.

2-*мысал*. $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$ функцияны зерттеңдер, графигін салыңдар.

Шешу. 1) Анықталу облысы – [0,4] кесінді. Функцияның шекара мәндерін табамыз: егер x=0 болса, онда y=2; егер x=4 болса, y=2 болады. Функцияның үзіліс нүктелері жоқ.



61-сурет

2) функция тақ та, жұп та емес, периодты да емес;

3) функцияның нөлдері жоқ;

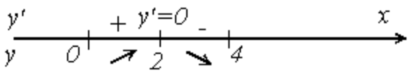
4) көлбеу асимптоталары жоқ, себебі анықталу облысы кесіндіден тұрады;

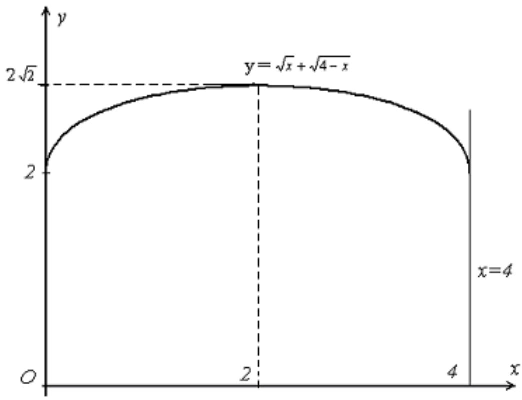
5) туындысын табамыз: $y' = \dfrac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{4-x}}$.

Туындыны нөлге теңестіріп, кризистік (стационар) нүктені табамыз: x=2. 62-суреттегі схеманы сызамыз. Бұдан функция (0,2) интервалда өспелі, (2,4) интервалда кемімелі, x=2 нүктеде функцияның максимумы бар. Максимум нүктесінің ординатасы $y_{max}=2\sqrt{2}$.

6) екінші ретті туындыны табамыз: $y'' = -\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{(4-x)^{3/2} + x^{3/2}}{x^{3/2}(4-x)^{3/2}}$.

(0,4) интервалда екінші ретті туынды теріс, демек бұл интервалда функцияның графигі дөңес болады. Функцияның графигі 62–суретте сызылған. $\lim\limits_{x \to +0} y' = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 4-0} y' = -\infty$ болғандықтан, функцияның графигі (0,2) нүктеде ординаталар осіне, (4,2) нүктеде x=4 түзуге жанасады.





62-сурет

3-*мысал.* $y=x^x$. функцияны тексеріңдер және графигін салыңдар.

Шешу. Алдымен функцияны төмендегідей жазып аламыз: $y=x^x=e^{xlnx}$.

1) функцияның анықталу облысы барлық оң сандар жиыны. Шекара мәндері: $\lim\limits_{x\to 0+} e^{xlnx}=1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{xlnx}=+\infty$. Үзіліс нүктелері жоқ;

2) функция жұп та, тақ та, периодты да емес;

3) функцияның нөлдері жоқ;

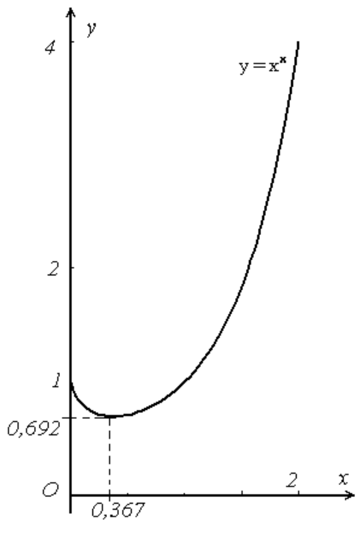
4) көлбеу асимптотасын іздейміз: $k=\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{x\ln x}}{x}=+\infty$, демек көлбеу асимптота жоқ;

5) туындысын табамыз: $y'=x^x(lnx+1)$. $y'=0$ теңдеуден $x=e^{-1}$. функция $(0,1/e)$ интервалда кемімелі, $(1/e,+\infty)$ интервалда өспелі болады. $x=e^{-1}$ нүкте функцияның минимум нүктесі, оның ординатасы $y_{min}=0,692$;

6) екінші ретті туындыны табамыз: $y''=x^x((lnx+1)^2+1/x)$. Екінші ретті туынды $(0,+\infty)$ интервалда оң, демек, функция бұл интервалда ойыс;

Функцияның $x=0$ нүкте маңайында тексереміз. $\lim\limits_{x\to 0+} y'=\lim\limits_{x\to 0+} x^x(lnx+1)=-\infty$, бұдан функцияның графигі $(0,1)$ нүктеде ординаталар осіне жанасатындығы келіп шығады.

Функцияның графигі 63-суретте берілген.



63-сурет

4-*мысал*. $f(x)=x+ln(x^2-1)$ функцияны толық зерттеңдер, графигін салыңдар.

Шешу. 1) Функция $x^2-1>0$, яғни $(-\infty;-1)$ және $(1;+\infty)$ аралықтарда анықталған және үзіліссіз. Функцияның шекара мәндерін іздейміз:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}(x+ln(x^2-1))=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(x+ln(x^2-1))=-\infty.$$

Демек, функцияның графигі екі x=-1 және x=1 вертикаль асимптоталары бар;

2) функция тақ та, жұп та, периодты да емес;

3) функция (-∞,-1) интервалда теріс, (1,+∞) интервалда жалғыз нөлі бар, оны табу үшін жуықтап есептеу әдістерінен пайдаланылады, нәтижеде x_0≈1,15 екендігін анықтауға болады. Демек, функция (1;1,15) интервалда теріс, (1,15, +∞) аралықта оң.

4) көлбеу асимптоталарды іздейміз:

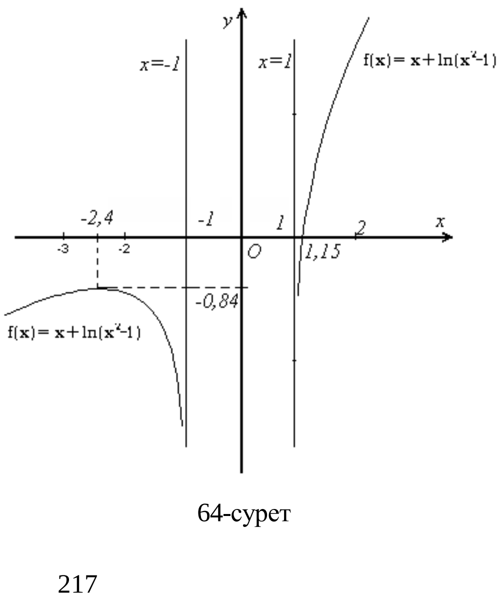
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{\ln(x^2-1)}{x})=1,\ b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}ln(x^2-1)=+\infty,$$

демек көлбеу асимптота жоқ;

5) функцияның туындысы $y'=1+2x/(x^2-1)$. Функцияның анықталу облысында туынды анықталған, сол себепті оның кризистік нүктелері тек стационар нүктелерден тұрады. Мұнда y'=0 теңдеу түбірлері $x_1=-1-\sqrt{2}$ және $x_2=-1+\sqrt{2}$ болып, $x_2=-1+\sqrt{2}$ функцияның анықталу облысына тиісті емес. Сонымен, жалғыз кризистік нүкте бар және ол (-∞;-1) аралыққа тиісті. (1;+∞) аралықта $y'>0$, функция өспелі болады. $x_1=-1-\sqrt{2}$ нүктеде максимум бар. Оның ордина-тасы $f(-1-\sqrt{2})=-1-\sqrt{2}+ln(2+2\sqrt{2})\approx -0{,}84$.

6) екінші ретті туындыны табамыз: $y''=-\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$. Бұдан $y''<0$, демек, график дөңес.

Функцияның графигі 64-суретте берілген.



64-сурет

ЖАТТЫҒУЛАР

1. Тепе-теңдікті дәлелдеңдер:

$$\arccos\sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \arcsin x, & 0 \le x \le 1, \\ -\arcsin x, & -1 \le x < 0. \end{cases}$$

2. Мына a) $y=x+\cos x$; b) $y=x^3+4x-7$ функцияларының анықталу облысында өспелі екендігін дәлелдеңдер.

3. Төмендегі функциялардың бірсарындылық аралықтарын табыңдар:

a) $y=2x^3-15x^2+36x-7$; b) $y=x^2-\ln x$; c) $y=x^4-2x^2+5$.

4. 1.5-теореманы дәлелдеңдер.

5. Параметрлі берілген функциялардың бірінші және екінші ретті туындыларын табыңдар:

a) $\begin{cases} x = arctgt, \\ y = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t\sin t \end{cases}$; d) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t-1} \end{cases}$.

6. Қисыққа M нүктеде жүргізілген жанама және нормаль теңдеулерін жазыңдар:

a) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3}, \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t} \end{cases}$, $M(2;2)$; b) $\begin{cases} x = \dfrac{2t-1}{t^2}, \\ y = \dfrac{3t^2-1}{t^3} \end{cases}$, $M(1;2)$.

7. Төмендегі функцияларды экстремумге тексеріңдер.

a) $y=x^3-6x$; *b)* $y=(x-2)^2(x-3)^3$; *c)* $y=x/(x^2+1)$;

d) $y=\sin 2x-x$; *e)* $y=x^2e^{-x}$; *f)* $y=\sin x+\cos x$;

g) $y=\ln(x^2+2x-3)$; *h)* $y=\cos^4 x+\sin^4 x$.

8. Берілген функцияның көрсетілген кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар.

a) $y=x^3/(x^2-2x-1)$, $[4;6]$; *b)* $y=\ln x/x$, $[1;4]$; *c)* $y=e^{-x}\cdot x^3$, $[-1;4]$.

9. $f(x) = x\ln x - x\ln 5$ функцияның (1;5] аралықтағы ең кіші мәнін табыңдар.

10. $f(x) = 3x + 2ctgx$ функцияның $(0;\pi/2)$ аралықтағы ең кіші мәнін табыңдар.

11. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+3}$ функцияның (-∞;+∞) аралықтағы ең үлкен мәнін табыңдар.

12. $f(x)=\dfrac{-x}{x^2+1}$ функцияның [-5;0) аралықтағы ең үлкен мәнін табыңдар.

13. Берілген шеңберге ішкі сызылған тең бүйірлі үшбұрыштар ішінде тең қабырғалы үшбұрыштың периметрі ең үлкен екендігін көрсетіңдер.

14. *M(1,2)* нүкте берілген. Бұл нүктеден өтіп, бірінші ширекте a) ең кіші ауданды үшбұрыш; b) ұзындығы ең кіші кесінді ажырататын түзудің теңдеуін табыңдар.

15. Параметрлі берілген функцияларды экстремумге тексеріңдер:

a) $\begin{cases} x=t^7+t^5+2t-3, \\ y=2t^3-3t^2-12t+5 \end{cases} \quad (-\infty<t<+\infty)$;

b) $\begin{cases} x=t+e^{-t}, \\ y=2t+e^{-2t} \quad (-\infty<t\le 0) \end{cases}$

16. Берілген функциялар графиктерінің дөңес, ойыс болатын интервалдарын, иілу нүктелерін табыңдар.

a) $y=x^4-x^2$; *b)* $y=\ln(x^2-1)$; *c)* $y=2+(x-4)^{1/3}$; *d)* $y=x\cdot e^{-x}$.

17. Параметр *а*-ның қандай мәндерінде $y=x^4+ax^3+1{,}5x^2+3$ функцияның графигі барлық нақты сандар осінде ойыс болады?

18. Дәрежесі 1-ден үлкен болған кез келген тақ дәрежелі көпмүшеліктің графигінде кемінде бір иілу нүктесі бар екендігін дәлелдеңдер.

19. Егер берілген нүкте маңайында функция үзіліссіз, бірінші ретті үзіліссіз туындысы бар болса, сол нүкте маңайында оның графигін салыңдар:

a) $x=3,\ y=2,\ y'=-2,\ y''<0$; *b)* $x=-1;\ y=1,\ y'=1,\ y''<0$;

c) $x=1,\ y=0,\ y'=0,\ y''>0$; *d)* $x=2,\ y=2,\ y'=2,\ y''>0$.

20. Төмендегі функциялардың барлық асимптоталарын табыңдар:

1) $y=x^2/(x+4)$; 2) $y=2x+\operatorname{arctg}x$; 3) $y=\ln\sin x$;

4) $y=\cos x/x$; 5) $y=x^3/(x+1)^2$; 6) $y=3^x/(x^2+1)$.

21. Функцияларды зерттеп, графигін салыңдар.

a) $y=(x-2)^2(x+3)$; *b)* $y=x/(x^2-1)$;

c) $y=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}$; *d)* $y=(x-4)\sqrt{x}$;

e) $y=\sin x+\sin 2x$; *f)* $y=xe^{-x}$;

X ТАРАУ. АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ

1-§. Алғашқы функция және анықталмаған интеграл ұғымдары

Дифференциалдық есептеудің негізгі мәселелерінен бірі берілген $f(x)$ функция бойынша оның $f'(x)$ туындысын табу еді. Бұл мәселенің керісі, яғни туындысы бойынша функцияның өзін табу мәселесінің үлкен маңызы бар болып, интегралдық есептеудің негізгі мәселелерінен бірі есептеледі.

$f(x)$ функция қандай да бір (a,b) (шекті немесе шектеусіз) интервалда анықталған болсын.

1-анықтама. Егер (a,b) интервалда $f(x)$ функция қандай да бір $F(x)$ функцияның туындысына тең, яғни (a,b) интервалдан алынған кез келген x үшін $F'(x)= f(x)$ болса, онда $F(x)$ функция (a,b) интервалда $f(x)$ функцияның *алғашқы функциясы* деп аталады.

Мысалы, 1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ болсын. Бұл функцияның $(0;+\infty)$ интервалда алғашқы функциясы $F(x)=2\sqrt{x}$ болады, себебі $(0;+\infty)$ интервалда $F'(x)=(2\sqrt{x})'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=f(x)$ болады;

2) $f(x)=x^2$ функцияның $(-\infty;+\infty)$ аралықта алғашқы функциясы $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ болуы айқын.

Егер қандай да бір аралықта $F(x)$ функция $f(x)$ функцияның алғашқы функциясы болса, онда кез келген тұрақты C сан үшін

$$F(x)+C \qquad (1)$$

функция да $f(x)$ функцияның алғашқы функциясы болатындығы айқын, себебі

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x).$$

Бұдан мынадай нәтиже келіп шығады: егер $f(x)$ функцияның алғашқы функциясы бар болса, онда оның алғашқы функциялары шектеусіз көп болады.

Төмендегі сұрақ туылуы табиғи: қандай да бір аралықта берілген $f(x)$ функцияның барлық алғашқы функциялары (1) формуламен өрнектеледі ме, басқаша айтқанда $f(x)$ функцияның (1) формуламен өрнектелмейтін алғашқы функциялары бар ма?

Бұл сұраққа төмендегі теорема жауап береді.

1.1-теорема. Егер қандай да бір аралықта *F(x)* функция *f(x)* функцияның алғашқы функциясы болса, онда *f(x)* функцияның кез келген алғашқы функциясы *C* тұрақтының қандай да бір мәнінде (1) формула көмегімен өрнектеледі.

Дәлелдеу. Айталық *G(x)* функция берілген аралықта *f(x)* функцияның алғашқы функциясы болсын. Мына $\varphi(x)=G(x)-F(x)$ көмекші функцияны қараймыз. Бұл функция үшін $\varphi'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$ болады, яғни, берілген аралықта $\varphi(x)$ функция үшін функцияның тұрақтылық шарты орындалады. Басқаша айтқанда $G(x)-F(x)=C$. Демек, *C* параметрдің қандай да бір мәнінде $G(x)=F(x)+C$ болады. Теорема дәлелденді.

Сонымен, егер аралықта берілген *f(x)* функцияның *F(x)* алғашқы функциясы мәлім болса, онда оның барлық алғашқы функциялары $F(x)+C$ көріністе өрнектеледі, бұл жерде *C* кез келген тұрақты сан.

2-анықтама. (a,b) интервалда берілген *f(x)* функция алғашқы функциялардың жалпы өрнегі $F(x)+C$, бұл жерде $C=\mathrm{const}$, сол *f(x)* функцияның *анықталмаған интегралы* деп аталады және ол былайша $\int f(x)dx$ белгіленеді. Мұнда $\int$ - *интеграл таңбасы*, *f(x)* *интеграл астындағы функция*, *f(x)dx* - *интеграл астындағы өрнек*, *x – интегралдау айнымалысы* деп аталады.

Демек, анықтама бойынша

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \qquad (2)$$

бұл жерде *F(x)* функция *f(x)* функцияның қандай да бір алғашқы функциясы.

Мысалы, $(-\infty;+\infty)$ интервалда $f(x)=\cos x$ болсын. Бұл жағдайда $(\sin x)'=\cos x$ болғандықтан, $\int \cos x dx = \sin x + C$ болады.

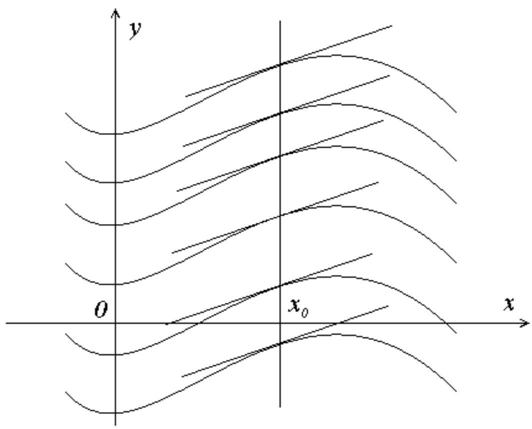
(2) формуладан берілген *f(x)* функцияның қандай да бір алғашқы функциясын және оның анықталмаған интегралын табу мәселелері бір түрлі мәселе екендігін көруге болады. Сол себепті *f(x)* функцияның алғашқы функциясын табуды да, анықталмаған интегралын табуды да *f(x)* функцияны *интегралдау* деп атаймыз. Интегралдау дифференциалдауға кері амал.

Интегралдау амалының дұрыс орындалғанын тексеру үшін алынған нәтижені дифференциалдау жеткілікті: дифференциалдау нәтижесі интеграл астындағы функцияға тең болуы қажет.

Мысалы, $\int 3x^2dx = x^3 + C$ екендігін тексеру үшін теңдіктің оң жағындағы функциядан туынды аламыз: $(x^3+C)'=3x^2$, демек, интегралдау дұрыс орындалған.

Геометриялық тұрғыдан бұл теорема $f(x)$ функцияның анықталмаған интегралы $y=F(x)+C$ бір параметрлік *қисықтар тобын* өрнектейді (C-параметр). Бұл қисықтар тобының мынадай қасиеті бар: қисықтардың абсциссасы $x=x_0$ болған нүктесіндегі жанамалары бір-біріне параллель болады (65-сурет).

$F(x)+C$ қисықтар тобы *интеграл қисықтар* деп аталады. Олар бір-бірімен қиылыспайды, бір-біріне жанаспайды. Жазықтықтың әрбір нүктесінен тек бір интеграл қисық өтеді. Барлық интеграл қисықтарды бір интеграл қисықты Oy осіне параллель көшіру арқылы алуға болады (65-сурет).



65-сурет

Мысал. Абсциссасы x болған нүктесіндегі жанамасының бұрыштық коэффициенті $k=x^3$ формуламен өрнектелетін және (2;5) нүктеден өтетін қисықты табыңдар.

Шешу. $y'=k=x^3$ екендігі мәлім. Бұл шартты қанағаттандыратын y функцияның жалпы өрнегі $y = \int x^3dx$ болады.

$y=\dfrac{x^4}{4}+C$ екендігі айқын. Ізделіп отырған қисық (2;5) нүктеден өтеді. Сол себепті функция өрнегіне берілген нүкте координаталарын қоямыз және C параметрдің керекті мәнін табамыз. Нәтижеде, $5=\dfrac{2^4}{4}+C,\ C=1$ болады. Демек, ізделінген қисық теңдеуі $y=\dfrac{x^4}{4}+1$.

Енді төмендегі сұраққа жауап іздейміз: қандай да бір аралықта берілген кез келген *f(x)* функцияның алғашқы функциясы бар ма?

Бұл сұрақтың жауабы Дарбу теоремасынан келіп шығады (VII тарау, 1-§, 5-теорема). Осы теоремаға орай $f(x)=\begin{cases}0, & \text{егер } -2\le x<0,\\ 1, & \text{егер } 0\le x\le 2\end{cases}$ функцияның [-2;2] кесіндіде алғашқы функциясы жоқ, себебі бұл функция 0 және 1 мәндерді қабылдайды, олар арасындағы мәндерін қабылдамайды.

Кез келген функцияның алғашқы функциясы бар бола бермейді, бірақ мына теорема орынды.

1.2-теорема. Егер *f(x)* функция қандай да бір аралықта үзіліссіз болса, онда оның алғашқы функциясы бар болады.

Бұл теорема келешекте дәлелденеді, сол себепті бұл тарауда үзіліссіз функцияларды интегралдау қаралады. Үзілісті болған функциялар үшін интегралдау мәселесі оның бірер үзіліссіздік аралықтары үшін қаралады.

Мысалы, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ функция x=0 нүктеде үзілісті. Бұл функция (0;+∞) және (-∞;0) аралықтарда үзіліссіз. Бірінші аралықта

$\int\dfrac{dx}{x}=\ln x+C$ формула орынды. Бірақ, екінші аралық үшін бұл формуланың мағынасы жоқ. Бұл аралықта төмендегі формула орынды: $\int\dfrac{dx}{x}=\ln(-x)+C$. Бұл екі формуланы бірлестіріп жазуға болады: $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

2-§. Анықталмаған интегралдың қарапайым қасиеттері

1^0. Анықталмаған интегралдың дифференциалы (туындысы) интеграл астындағы өрнекке (функцияға) тең:

$d\int f(x)dx = f(x)dx$ ($(\int f(x)dx)' = f(x)$).

Дәлелдеу. Анықтама бойынша $d\int f(x)dx = d(F(x)+C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

2^0. Қандай да бір функция дифференциалының анықталмаған интегралы сол функциямен тұрақты сан қосындысына тең:

$\int dF(x) = F(x)+C$.

Дәлелдеу. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x)+C$.

3^0. Егер $f(x)$ функцияның алғашқы функциясы бар болса, онда кез келген k ($k\neq 0$) сан үшін

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad (1)$$

болады, яғни тұрақты көбейткішті интеграл таңбасы алдына шығаруға болады.

Дәлелдеу. $\int f(x)dx = F(x)+C$ болсын. Онда

$$k\int f(x)dx = k(F(x)+C) = kF(x)+kC \qquad (2)$$

болады. $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$ және kC кез келген тұрақты сан болғандықтан $kF(x)+kC$ өрнек $kf(x)$ функцияның барлық алғашқы функцияларын береді, яғни

$$\int kf(x)dx = kF(x)+kC \qquad (3)$$

болады. (2) және (3) формуладан (1) келіп шығады.

1-ескерту. $k=0$ болғанда (1) теңдік орынды емес. Шынында, бұл теңдіктің сол жағы $\int 0f(x)dx = \int 0dx = C$, C –кез келген тұрақты сан, оң жағы $0\int f(x)dx = 0\cdot(F(x)+C) = 0$.

2-ескерту. Интегралдарды табуда kC жазылмайды. Оның орнына C жазылады, себебі кез келген тұрақты санды жазу тәсілі маңызды емес. Мұнда тұрақты қосылушының кез келген мән қабылдай алуы маңызды.

Егер C-кез келген тұрақты сан болса, онда C^3, $4C$ - кез келген тұрақты сан болады. Бірақ C^2, $\sin C$ - кез келген тұрақты сан емес, себебі $C^2 \geq 0$, $|\sin C| \leq 1$.

4^0. Егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялардың алғашқы функциялары бар болса, онда

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

болады, яғни екі функция алгебралық қосындысының интегралы анықталмаған интегралдардың алгебралық қосындысына тең.

Дәлелдеу. Айталық $F(x)$ және $G(x)$ функциялар сәйкесінше $f(x)$ және $g(x)$ функциялардың алғашқы функциялары болсын. Онда

$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx=(F(x)+C_1) \pm (G(x)+C_2) =(F(x) \pm G(x))+(C_1 \pm C_2)$

болады. Бірақ, $F(x) \pm G(x)$ функция $f(x) \pm g(x)$ функцияның алғашқы функциясы, себебі $(F(x) \pm G(x))'=F'(x) \pm G'(x)=f(x) \pm g(x)$, $C_1 \pm C_2$ -кез келген екі тұрақты сандардың алгебралық қосындысы- және кез келген тұрақты сан болады.

Сол себепті $(F(x) \pm G(x))+(C_1 \pm C_2)$ өрнек $f(x) \pm g(x)$ функцияның барлық алғашқы функцияларын береді, яғни $\int(f(x) \pm g(x))dx$ интегралға тең болады.

Бұл қасиетті шекті сандағы функциялар үшін де дәлелдеуге болады. Ол үшін математикалық индукция методынан пайдалану жеткілікті.

3-ескерту. Интегралдарды табуда $C_1 \pm C_2$ орнына C жазылады.

Мысалы, $\int(\cos x+3x^2)dx=\int\cos x dx+\int 3x^2 dx=\sin x+x^3+C$.

5^0. Егер $F(x)$ функция $f(x)$ функцияның алғашқы функциясы болса, онда

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (a \neq 0)$$

теңдік орынды болады.

Дәлелдеу. Теңдіктің оң жағының туындысы интеграл астындағы функцияға тең екендігін көрсету жеткілікті. Шынында,

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)'=\frac{1}{a}(F(ax+b))'=f(ax+b).$$

6^0. (Интегралдау формуласының инварианттылығы). Егер интегралдау формуласында интегралдау айнымалысын сол айнымалының кез келген дифференциалданушы функциясымен алмастырсақ, интегралдау формуласының формасы өзгермейді, яғни егер $\int f(x)dx=F(x)+C$ және u функция x айнымалының дифференциалданушы функциясы болса, онда $\int f(u)du=F(u)+C$ болады.

Дәлелдеу. Бірінші ретті дифференциалдың инварианттық формасынан пайдаланамыз. Соған орай, егер *dF(x)=F'(x)dx* және *u=u(x)* дифференциалданушы функция болса, онда *dF(u)=F'(u)du* болады. $\int f(u)du = F(u) + C$ екендігін дәлелдейміз. Ол үшін соңғы теңдіктің екі жағын дифференциалдаймыз:

$$d(\int f(u)du) = f(u)du, \quad d(F(u)+C) = F'(u)du = f(u)du.$$

Бұл дифференциалдардың тең екендігінен 6^0 қасиеттің орынды екендігі келіп шығады.

3-§. Интегралдау ережелері және негізгі интегралдар кестесі

Жоғарыда дәлелденген анықталмаған интегралдың қарапайым қасиеттері интегралдау ережелерін анықтайды. Интегралдау амалы дифференциалдау амалына кері амал болғандықтан, төменде келтірілген формулалардың көпшілігін туындылар кестесінен шығарып алуға болады.

Төменде негізгі анықталмаған интегралдар кестесін келтіреміз. Мұнда әрбір формула интеграл астындағы функциялардың анықталу облысында қаралады.

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$; 2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$;

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$; $\int e^x dx = e^x + C$;

4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$; $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$;

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$; $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \ (|x|<|a|)$;

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$; 7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$; 9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

10. $\int chxdx = shx + C$; 11. $\int shxdx = chx + C$;

12. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$; 13. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$;

14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$, $a \neq 0$;

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, \ (|x| > |a|)$.

4-§. Интегралдау тәсілдері

4.1. Тікелей интегралдау тәсілі. Бұл тәсіл интеграл астындағы өрнекті жай тепе-тең түрлендіру арқылы кестедегі қандай да бір интеграл астындағы өрнек көрінісіне келтіру және анықталмаған интеграл қасиеттерінен пайдалануға негізделген.

Мысалдар.

1) $\int 2^{2x} \cdot 3^x dx = \int (2^2 \cdot 3)^x dx = \int 12^x dx = \frac{12^x}{\ln 12} + C$;

2) $\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx =$
$= tgx - x + C$;

3) $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} \right) dx =$
$= \int (1 - \sin x) dx = x + \cos x + C$;

4) $\int \cos 2x dx = \int \cos 2x \cdot \frac{1}{2} d(2x) = \frac{1}{2} \int \cos(2x) d(2x) =$

$= \frac{1}{2} \sin 2x + C$, мұнда интегралдау формуласының инвариант-тылығынан пайдаланылды.

4.2. Айнымалыны алмастыру тәсілі. $\int f(x)dx$ интегралды есептегенде f(x) функциясының алғашқы функциясы бар болғанмен, оны тікелей табу қиын болуы мүмкін. Сондықтан интеграл астындағы өрнекте x интегралдау айнымалысын қандай да бір $x = \varphi(t)$ формула көмегімен t айнымалымен алмастырылады. Мұнда $\varphi'(t)$ үзіліссіз және $x = \varphi(t)$ функцияға $t = \varphi^{-1}(x)$ кері функция бар деп жоримыз. Енді $\int f(x)dx$ интегралға $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$ өрнектерді қоямыз:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

Бұл жерде $\varphi(t)$ функцияны таңдағанда (3) теңдіктің оң жағындағы интеграл қарапайым болуы қажет. Егер $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ функцияның алғашқы функцияларынан бірі $F(t)$ болса,

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(t)+C=F(\varphi^{-1}(x))+C$$

келіп шығады.

(3) формула анықталмаған интегралда *айнымалыны алмастыру формуласы* деп аталады.

Кейбір жағдайларда жаңа айнымалыны $t=\varphi(x)$ формула арқылы енгізу қолайлы болады.

1-*мысал*. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ интегралды есептеңдер.

Шешу. $e^x-1=t^2$ алмастыру енгіземіз. Онда $e^x=t^2+1$, $x=\ln(t^2+1)$,

$$dx=\frac{2t}{t^2+1}dt,\ \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int \frac{2dt}{t^2+1}=\ 2arctgt+C=2arctg\sqrt{e^x-1}+C$$

болады.

2-*мысал*. $\int \sin^3 x\cos xdx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. $t=sinx$, $dt=cosxdx$ алмастыру енгіземіз. Бұл жағдайда

$$\int \sin^3 x\cdot\cos xdx=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}\sin^4 x+C$$ болады.

Айнымалыны алмастыру тәсілінен пайдаланып анықталмаған интегралды есептеуде алмастыруды қолайлы таңдап алу маңызды. Кез келген интегралды есептеуде айнымалыны алмастырудың жалпы ережесі жоқ. Мұндай ережелерді кейбір функциялар (тригонометриялық, иррационалдық және басқа) сыныптары үшін келтіруге болады.

Көп жағдайларда интегралдарды есептеуде интеграл астындағы функцияны дифференциал белгісі астына "енгізу" тәсілінен пайдаланылады. Функция дифференциалының анықтамасы бойынша $\varphi'(x)dx=d(\varphi(x))$. Бұл теңдіктің сол жағынан оң жағына өту $\varphi'(x)$ көбейткішті дифференциал белгісі астына "енгізу" деп айтылады.

Айталық, мына $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ интегралды есептеу қажет болсын. Бұл интегралда *φ'(x)* көбейткішті дифференциал белгісі астына енгіземіз және $\varphi(x)=u$ алмастыру орындаймыз. Онда

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = \int f(u)du \text{ болады.}$$

3-*мысал*. $I=\int \sqrt[3]{1+x^2}\,xdx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. $xdx=\frac{1}{2}d(1+x^2)$ екендігінен пайдаланамыз, онда

$$I=\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{1}{3}}d(1+x^2)=|1+x^2=u|=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}du=\frac{3}{8}u^{\frac{4}{3}}+C=$$

$=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(1+x^2)^4}+C$ болады.

4-*мысал*. $I=\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{4+3\cos x}}$ интегралды есептеңдер.

Шешу. $\sin xdx=-\frac{1}{3}d(4+3\cos x)$ екендігін көрсету қиын емес. $4+3\cos x=u$ деп белгілейміз. Нәтижеде

$$I=-\frac{1}{3}\int (4+3\cos x)^{-\frac{1}{2}}d(4+3\cos x)=-\frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}du=-\frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{4+3\cos x}+C.$$

Егер интеграл астындағы функция *φ'(x)/φ(x)* көріністе болса, онда *φ'(x)* көбейткішті дифференциал белгісі астына енгізу арқылы оны кестедегі интегралға келтіруге болады:

$$\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)}=\int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)}=\ln|\varphi(x)|+C\cdot$$

Мысалы, $\int tgxdx=\int \frac{\sin xdx}{\cos x}=-\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}=|u=\cos x|=$

$$=-\int \frac{du}{u}=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

4.3. Бөліктеп интегралдау тәсілі. Егер *u(x)* және *v(x)* функциялар дифференциалданушы функциялар болса, онда

$d(uv)=udv+vdu$ немесе $udv=d(uv)-vdu$ болатыны айқын. Бұл теңдікті екі жағын интегралдасақ, $\int udv=\int d(uv)-\int vdu$, немесе

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (4)$$

формуланы аламыз. (4) формула бөліктеп интегралдау формуласы деп аталады. Бұл формула көмегімен $\int udv$ интегралды есептеу $\int vdu$ интегралды, есептеуге келтіріледі. Бұл формуладан $\int udv$ интегралға қарағанда $\int vdu$ интегралды есептеу оңай болғанда пайдаланылады.

1-*мысал*. $\int x\cos xdx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. $u=x$, $du=dx$, $v=\sin x$, $dv=\cos xdx$ деп аламыз. Онда

$$\int x\cdot\cos xdx=\int udv=u\cdot v-\int vdu=x\cdot\sin x-\int\sin xdx=$$

$=x\sin x+\cos x+C$ болады.

2-*мысал*. $\int \ln xdx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. $u=\ln x$, $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$, $dv=dx$ деп аламыз. Онда,

$$\int\ln xdx=\int udv=x\cdot\ln x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=x\cdot\ln x-x+C \quad \text{болады.}$$

Енді практикада жиі кездесетін және бөліктеп интегралдау тәсілімен есептелінетін интегралдар түрлерін келтіреміз.

1. $\int P_n(x)e^{kx}dx,\ \int P_n(x)\sin kxdx,\ \int P_n(x)\cos kxdx$ көріністегі интегралдар, бұл жерде $P_n(x)$ - n – дәрежелі көпмүшелік, k – қандай да бір сан. Бұл интегралдарды есептеу үшін $u=P_n(x)$ деп алу және (4) формуланы n рет қолдану жеткілікті.

2. $\int P_n(x)\ln xdx,\ \int P_n(x)\arcsin xdx,\ \int P_n(x)\arccos xdx,$ $\int P_n(x)arctgxdx,\ \int P_n(x)arcctgxdx$ көріністегі интегралдар, бұл жерде $P_n(x)$ - n – дәрежелі көпмүшелік. Бұл интегралдарды бөліктеп интегралдау үшін $P_n(x)$ алдындағы көбейтуші функцияны u деп алу қажет.

3. $\int e^{ax}\cos bxdx,\ \int e^{ax}\cos bxdx$, бұл жерде a және b нақты сандар. Бұл интегралдар екі рет бөліктеп интегралдау тәсілімен есептеледі.

3-*мысал*. $\int\arcsin xdx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Бұл интегралда $P_0(x)$=1 және u=$arcsinx$ деп аламыз. Онда

$$\int \arcsin x dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x, & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = x \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$ болады.

4-*мысал*. $\int e^{-x} \cos \frac{x}{2} dx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Бұл интегралда u деп dx алдындағы көбейтушілерден кез келген бірін аламыз және екі рет бөліктеп интегралдаймыз. Екінші рет интегралдағанымызда алдын берілген интегралды өзінде сақтайтын теңдікті аламыз. Бұл теңдіктен берілген интегралды табамыз:

$$\int e^{-x} \cos \frac{x}{2} dx = \left| \begin{matrix} u = e^{-x}, & du = -e^{-x} dx \\ dv = \cos \dfrac{x}{2} dx, & v = 2 \sin \dfrac{x}{2} \end{matrix} \right| = 2e^{-x} \sin \frac{x}{2} +$$

$$+ 2 \int e^{-x} \sin \frac{x}{2} dx = \left| \begin{matrix} u = e^{-x}, & du = -e^{-x} dx \\ dv = \sin \dfrac{x}{2} dx, & v = -2 \cos \dfrac{x}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2e^{-x} \sin \frac{x}{2} - 4e^{-x} \cos \frac{x}{2} - 4 \int e^{-x} \cos \frac{x}{2} dx,$$ яғни $\int e^{-x} \cos \frac{x}{2} dx =$ $2e^{-x} \sin \frac{x}{2} - 4e^{-x} \cos \frac{x}{2}$ -4 $\int e^{-x} \cos \frac{x}{2} dx$, Бұдан $5 \int e^{-x} \cos \frac{x}{2} dx =$ $2e^{-x} \sin \frac{x}{2} - 4e^{-x} \cos \frac{x}{2}$ +C, немесе

$$\int e^{-x} \cos \frac{x}{2} dx = \frac{2}{5} (e^{-x} \sin \frac{x}{2} - 2e^{-x} \cos \frac{x}{2}) + C.$$

5-§. Рационал функцияларды интегралдау

5.1. Қарапайым рационал бөлшектер және оларды интегралдау. Қарапайым рационал бөлшектер деп аталатын бөлшектер негізінен төрт түрлі болады. Рационал функцияларды интегралдау сол төрт түрлі қарапайым бөлшектерді интегралдауға келтіріледі. Сол себепті бұл төрт түрлі бөлшекті интегралдау мәселесі өте маңызды. Олардың жалпы көрінісі төмендегідей:

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{\left(x-a\right)^k},\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ \text{және}\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k},$$

мұндағы A, M, N, a, p және q нақты сандар, $k>1$ натурал сан және p^2-$4q<0$ деп қаралады.

Енді жоғарыдағы бөлшектерді интегралдау мәселесін қараймыз.

a) $\frac{A}{x-a}$ бөлшекті интегралдау:

$$\int\frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C.$$

b) $\frac{A}{\left(x-a\right)^k}$ бөлшекті интегралдаймыз ($k>1$):

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int(x-a)^{-k}d(x-a) = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C\cdot$$

c) $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ интегралды интегралдау (p^2-$4q<0$) алымында бөлімінің дифференциалын ажыратып алу және бөлімін квадраттар қосындысына келтіру арқылы кестедегі интегралдарға келтіріледі:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx =$$

$$\left|\begin{array}{l} d(x^2+px+q)=(2x+p)dx \\ Mx+N=\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}\end{array}\right| = \frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d(x+p/2)}{(x+p/2)^2+q-p^2/4}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

d) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ (k>1) қарапайым бөлшекті интегралдау үшін $x+p/2=z$ алмастыру орындаймыз, онда $dx=dz$, $x^2+px+q=(x+p/2)^2+q-p^2/4=z^2+a^2$, бұл жерде $a^2=q-p^2/4$. Сонымен

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx=M\int\frac{zdz}{(z^2+a^2)^k}+\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k}=$$

$=MI_0+\dfrac{2N-Mp}{2}I_k$ болады.

$I_0=\displaystyle\int\frac{zdz}{\left(z^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{2\left(1-k\right)\left(z^2+a^2\right)^{k-1}}+C$ екендігі мәлім.

Демек, $I_k=\displaystyle\int\frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k}$ интегралды есептеу жеткілікті болады. $I_k=\displaystyle\int\frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2}\cdot\int\frac{z^2+a^2-z^2}{\left(z^2+a^2\right)^k}dz=$

$=\dfrac{1}{a^2}\cdot\displaystyle\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{a^2}\cdot\int\frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}$. Бұл жерде $\displaystyle\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}}=I_{k-1}$ екендігін еске алсақ,

$$I_k=\int\frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2}\left(I_{k-1}-\int\frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}\right) \qquad (5)$$

болады.

Енді $\displaystyle\int\frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}$ интегралды бөліктеп интегралдаймыз.

$$\int\frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}=\left|\begin{matrix} u=z, & du=dz \\ dv=\dfrac{zdz}{(z^2+a^2)^k}, & v=\dfrac{1}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}}\end{matrix}\right|= \quad =$$

$$\frac{z}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}}=$$

$$\frac{z}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}I_{k-1}.$$

Соңғы табылған өрнекті (5) формулаға қоямыз, нәтижеде

$$I_k=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}-\frac{z}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}}\right) \qquad (6)$$

(6) рекуррент формула деп аталады. $z=\dfrac{2x+p}{2}$ және $a=\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ алмастыруларға қайтып, ізделіп отырған интегралды табамыз.

$I_1=\int\dfrac{dz}{z^2+a^2}=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{z}{a}+C$ екендігін білсек, (6) формула көмегімен $I_2=\int\dfrac{dz}{(z^2+a^2)^2}$ интегралды есептеу мүмкін. Шынында,

$$\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+a^2}+\frac{z}{2(z^2+a^2)}\right)=$$

$$=\frac{z}{2a^2(z^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}arctg\frac{z}{a}+C.$$

Сонымен, біз барлық қарапайым бөлшектерді интегралдау формулаларын келтіріп шығардық.

5.2. Рационал функцияларды интегралдау. Интегралды есептеу үшін жалпы тәсілдер болмағандықтан кейбір функциялар сыныптарын интегралдау тәсілдері зерттелген. Енді біз сондай функциялар сыныптарының бірімен танысамыз.

$R_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ көпмүшелік - бүтін рационал функция,

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m} \quad (a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0)$$

бөлшек рационал функциялар деп аталатын. Бүтін және бөлшек рационал функциялар жалпы атаумен рационал функциялар деп айтылады. Бүтін рационал функцияны интегралдау төмендегідей орындалады:

$$\int R_n(x)dx = \int a_0x^n dx + \int a_1x^{n-1}dx + ... + \int a_{n-1}xdx + \int a_n dx =$$

$$= \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + ... + a_{n-1}\cdot\frac{x^2}{2} + a_n x + C\ .$$

Енді бөлшек рационал функцияларды интегралдау мәселесіне өтеміз.

Мына $f(x)= \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ бөлшек рационал функция берілген болсын.

Егер $n<m$ болса, онда $f(x)$ - дұрыс, $n\geq m$ болса, $f(x)$ - бұрыс бөлшек рационал функция деп аталады.

Мысалдар. $\dfrac{3x}{x^2+1}$, $\dfrac{1}{x}$ - дұрыс бөлшек рационал функциялар; $\dfrac{x^2+3}{x^2+5}$, $\dfrac{x^3+x+5}{x^2+4}$ - бұрыс бөлшек рационал функциялар болады.

Дұрыс рационал бөлшекті интегралдауды үйренеміз.

$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n<m)$ дұрыс рационал бөлшек берілген болсын. Оны шекті сандағы қарапайым рационал бөлшектердің қосындысы көріністе өрнектеуге болады. Сол мақсатта $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ бөлшектің бөлімін сызықты және квадрат көбейткіштерге ажырату, ол үшін $Q_m(x)=0$, яғни

$$b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m = 0 \qquad (7)$$

теңдеуді шешу керек. Алгебраның негізгі теоремасына орай $Q_m(x)=0$ теңдеудің еселі түбірлерін есепке алғанда m түбірі болады. Бұл түбірлер нақты (қарапайым немесе еселі) немесе комплекс (қарапайым немесе еселі) болуы мүмкін.

Егер $x=\alpha$ сан $Q_m(x)$ көпмүшеліктің қарапайым (k еселі) түбірі болса, онда $Q_m(x)$ көпмүшелік $x-\alpha$ $((x-\alpha)^k)$ көпмүшелікке қалдықсыз бөлінуі және

$$Q_m(x)=(x-\alpha)Q_{m-1}(x)\ (Q_m(x)=(x-\alpha)^kQ_{m-k}(x))$$

теңдік орынды болатындығы мәлім.

Егер $z=u+iv$ комплекс сан $Q_m(x)$ көпмүшеліктің қарапайым түбірі болса, онда оған сыбайлас болған $\bar{z}=u-iv$ комплекс сан да $Q_m(x)$ көпмүшеліктің түбірі болады. Сондықтан ол $(x-z)(x-\bar{z})=x^2+px+q$ үшмүшеге қалдықсыз бөлінеді, бұл жерде $p=-(z+\bar{z})=-2u$, $q=z\bar{z}=u^2+v^2$, $p^2/4-q<0$. $Q_m(x)$ көпмүшелікті $Q_m(x)=(x^2+px+q)Q_{m-2}(x)$ көріністе өрнектеуге болады. Осыған ұқсас, егер z комплекс сан s еселі түбірі болса, онда $Q_m(x)=(x^2+px+q)^sQ_{m-2s}(x)$ теңдік орынды болады.

Айталық, (7) теңдеудің барлық нақты және комплекс түбірлері табылған болсын. Онда $Q_m(x)$ көпмүшелікті сызықты және квадрат көбейткіштерге жіктеуге болады:

$$Q_m(x)=b_0(x-\alpha)^{k_1}(x-\beta)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-\gamma)^{k_t}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot$$

$$\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_rx+q_r)^{s_r},$$ бұл жерде $k_1+k_2+\ldots+k_t+2s_1+2s_2+\ldots 2s_r=m$.

Алгебра курсында $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ дұрыс рационал бөлшек элементар (қарапайым) бөлшектер қосындысы түрінде жазылуы көрсетіледі:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-\alpha)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{B_{k_2}}{(x-\beta)^{k_2}}+\ldots+\frac{L_1}{x-\gamma}+\frac{L_2}{(x-\gamma)^2}+\ldots+\frac{L_{k_t}}{(x-\gamma)^{k_t}}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+$$

$$+\ldots+\frac{M_{s_1}x+N_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+\ldots+\frac{U_1x+V_1}{x^2+p_rx+q_r}+\ldots+\frac{U_{s_r}x+V_{s_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{s_r}} \quad (8)$$

мұндағы $A_1, A_2, \ldots, A_{k_1}$, $B_1, \ldots, B_{k_2}$, $L_1,\ldots, L_{k_t}$, $M_1, \ldots M_{s_1}$, $N_1,\ldots, N_{s_1}$, $U_1,\ldots,U_{s_r}$, $V_1,\ldots,V_{s_r}$ - белгісіз коэффициенттер.

Жоғарыдағы формуланы бірнеше нақты мысалдарда көреміз:

$$1)\ \frac{x^2+2}{(x^3-1)(x^2+1)}=\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)}=$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+1};$$

$$2)\ \frac{3x-2}{(x+4)(x-2)^3}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{D}{(x-2)^3};$$

$$3)\ \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^3(x^2+2)^2(x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+$$

$$+\frac{Dx+E}{x^2+2}+\frac{Fx+G}{(x^2+2)^2}+\frac{H}{x+5}.$$

(8) жіктеудегі коэффициенттерді табу үшін белгісіз *коэффициенттер методы* немесе *дербес мәндер методынан* пайдаланылады.

Белгісіз коэффициенттер методының маңызы төмендегіден тұрады. Айталық $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ дұрыс рационал бөлшек (8) көріністегі белгісіз коэффициентті қарапайым бөлшектер қосындысы көрінісінде берілген болсын. Қарапайым бөлшектерді $Q_m(x)$ ортақ бөлімге келтіреміз және алымын $P_n(x)$ көпмүшелікке теңестіреміз.

Екі көпмүшелік тепе-тең болуы үшін бұл көпмүшеліктердегі x айнымалының тең дәрежелері алдындағы коэффициенттердің тең болуы қажетті және жеткілікті. Осыны есепке алып, алынған тепе-теңдіктің оң және сол жағындағы x айнымалының бір түрлі дәрежелері алдындағы коэффициенттерді теңестіреміз және жоғарыдағы белгісіз коэффициенттерге қатысты m сызықты теңдеулер системасын аламыз. Сол системаны шешіп, белгісіз коэффициенттерді табамыз.

1-*мысал.* Мына $\frac{x^2}{x^3-8}$ рационал бөлшекті қарапайым бөлшектерге жіктеңдер.

Шешу. x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4) болғандықтан (8) формула бойынша

$$\frac{x^2}{x^3-8}=\frac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4},$$

Бұл жерде *A, B* және *C* белгісіз коэффициенттер. Бұл теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз, онда

$$\frac{x^2}{x^3-8}=\frac{A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$ болады. Бұдан

$x^2=(A+B)x^2+(2A+C-2B)x+4A-2C.$

Енді x айнымалының тең дәрежелері алдындағы коэффициенттерді теңестіріп, *A, B, C* сандарды табу үшін мына теңдеулер системасын аламыз:

$$\begin{array}{l|c} x^2 & 1=A+B, \\ x^1 & 0=2A+C-2B, \\ x^0 & 0=4A-2C \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} x^2\\x^1\\x^0\end{array}}\right\}\Rightarrow A=\frac{1}{3},\ B=\frac{2}{3},\ C=\frac{2}{3}.$$

Сонымен, $\dfrac{x^2}{x^3-8}=\dfrac{1}{3(x-2)}+\dfrac{2(x+1)}{3(x^2+2x+4)}$ болады.

2-*мысал*. Мына $\dfrac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}$ рационал бөлшекті қарапайым бөлшектерге жіктеңдер.

Шешу. Бөлшектің бөлімін көбейткіштерге жіктейміз:

$x^4+4x^3+4x^2-9=(x^2+2x)^2-9=(x^2+2x-3)(x^2+2x+3)=(x-1)(x+3)(x^2+2x+3).$

(8) формуладан пайдаланып төмендегіні жазамыз:

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}.$$

Теңдеудің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз. Онда

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}=$$

$$=\frac{A(x+3)(x^2+2x+3)+B(x-1)(x^2+2x+3)+(Cx+D)(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}$$

болады. Бұл бөлшектердің алымдарын, сонан соң x алдындағы коэффициенттерді теңестіріп төмендегіні аламыз:

$$\left.\begin{array}{l|c} x^3 & 0 = A + B + C, \\ x^2 & 7 = 5A + B + 2C + D, \\ x^1 & 26 = 9A + B - 3C + 2D, \\ x^0 & -9 = 9A - 3B - 3D, \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1,\ B = 1,\ C = -2,\ D = 5.$$

Демек,

$$\frac{7x^2 + 26x - 9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} + \frac{-2x+5}{x^2+2x+3} \text{ болады.}$$

Белгісіз коэффициенттерді табуда x айнымалының тең дәрежелері алдындағы коэффициенттерді салыстыру орнына x айнымалыға бірнеше (белгісіз коэффициенттер санына тең) мәндер беріп, белгісіз коэффициенттерге қатысты теңдеулер системасын алуға болады. Бұл метод *дербес мәндер методы* деп айтылады. Дербес мәндер методы $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ рационал бөлшек бөлімінің түбірлері қарапайым және нақты сан болғанда қолайлы болады. Мұнда x айнымалыға сол түбірлерге тең мәндер беру қажет.

3-*мысал.* $\dfrac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}$ бөлшекті қарапайым бөлшектерге жіктеңдер.

Шешу. (8) формула бойынша

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}.$$

Теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз және бөлімдерін теңестіреміз:

$4x^2+16x-8=A(x+2)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+2)$.

x айнымалыға x=0, x=-2 және x=2 мәндер беріп төмендегіні аламыз:

$$\left.\begin{array}{r|c} x = 0 & -8 = -4A \\ x = -2 & -24 = 8B \\ x = 2 & 40 = 8C \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = -3, \\ C = 5. \end{cases}$$

Сонымен, $\dfrac{4x^2 + 16x - 8}{x(x+2)(x-2)} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{5}{x-2}$ болады.

Кейбір жағдайларда жоғарыда көрген екі методды бірлестіріп пайдалануға болады, яғни белгісіз коэффициенттер үшін теңдеулер системасын алуда *x* айнымалыға бірнеше дербес мәндер беру және *x* айнымалының алдындағы коэффициенттерді теңдестіруге болады.

Енді рационал бөлшек функцияларды интегралдау ережесін келтіреміз. Рационал бөлшекті интегралдау үшін төмендегі іс-әрекеттерді орындау қажет:

1) егер $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ рационал бөлшек бұрыс ($n \geq m$) болса, онда оны көпмүшелік және дұрыс рационал бөлшек қосындысы көріністе өрнектеп аламыз:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R(x) + \frac{P_k(x)}{Q_m(x)},\ k<m;$$

2) егер $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ рационал бөлшек дұрыс ($n < m$) болса, онда оны (8) формула көмегімен қарапайым бөлшектерге жіктейміз;

3) рационал бөлшек интегралын оның бүтін бөлігі және қарапайым рационал бөлшектер интегралдары қосындысы көрінісінде жазып аламыз және әрбір интегралды есептейміз.

4-мысал. $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Интеграл астындағы функция дұрыс бөлшектен тұрады. Оны төмендегі көріністе жазып аламыз:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}.$$

Бұдан $x^3+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$ келіп шығады. Енді *x* айнымалыға 0, 1, 2 және -1 мәндер беріп, төмендегі теңдеулер системасын аламыз:

$$\begin{cases} -A = 1, \\ D = 2, \\ A + 2B + 2C + 2D = 9, \\ -8A - 4B + 2C - D = 0. \end{cases}$$

Системаны шешіп, A=-1, B=2, C=1, D=2 екендігін табамыз.

Демек,

$$\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx=-\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+2\int\frac{dx}{(x-1)^3}=$$

$$=-\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C\cdot$$

5-*мысал*. $I=\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Интеграл астындағы бөлшек-бұрыс бөлшек. Оның бүтін және дұрыс бөліктерін ажыратып аламыз:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}.$$

$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ бөлшекті қарапайым бөлшектерге жіктейміз (қараңыздар 3-мысал), нәтижеде $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}$ теңдікті аламыз.

Бұдан $I=\int\left(x^2+x+4+\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}\right)dx=$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\int\frac{dx}{x}-3\int\frac{dx}{x+2}+5\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|-3\ln|x+2|+5\ln|x-2|+\ln C=$$

$\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{Cx^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|$ келіп шығады.

6-*мысал*. $\int\frac{x^2}{x^3-8}dx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Интеграл астындағы функция дұрыс бөлшектен тұрады. Оны қарапайым бөлшектерге жіктеуді 1-мысалда көрген едік. Сол жіктеуден пайдаланып интегралды есептейміз:

$$\int \frac{x^2}{x^3-8}dx = \int \frac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}dx = \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} \right) dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} A = \frac{1}{3}, \\ B = C = \frac{2}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx = \frac{1}{3}\ln|x-2| +$$

$$+\frac{1}{3}\int \frac{d(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4} = \frac{1}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x^2+2x+4| + \frac{1}{3}\ln C =$$

$$\ln|(C(x-2)(x^2+2x+4))^{\frac{1}{3}}| = \ln\sqrt[3]{C(x^3-8)}\ .$$

Ескерту. Интегралдарды есептеуде әрқашан да дайын схемалардан пайдалануға әрекет жасамау керек. Дербес жағдайда, жоғарыдағы мысалда $x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3-8)$ екендігінен пайдалануға болады. Онда

$$\int \frac{x^2}{x^3-2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3-8)}{x^3-8}dx = \frac{1}{3}\ln|x^3-8| + \frac{1}{3}\ln C = \ln\sqrt[3]{C(x^3-8)}$$

болады.

6-§. Тригонометриялық өрнектерді интегралдау

Келешекте *R(u,v,…,w)* сияқты белгілеулерден пайдаланамыз. Ол *u,v,…,w* символдарға қатысты рационал функцияны, яғни *u,v,…,w* және нақты сандармен шекті сандағы төрт арифметикалық амалды орындау нәтижесінде алынған өрнекті білдіреді. Бұл жерде *u, v,…,w* символдар әріп, өрнек болуы мүмкін.

Мысалы, $R(u,v) = \frac{\sqrt{2}u^2 - v}{3u+4v^3-1}$ u және v айнымалыларға қатысты рационал функция;

$R(x,\sqrt{x},\sqrt[3]{x})=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{x+3\sqrt[3]{x}}$ $x,\ \sqrt{x},\ \sqrt[3]{x}$ өрнектерге қатысты рационал функция; $R(\sin x,\cos x)=\dfrac{3\sin x+\cos^3 x}{3-\sin^2 x+2\cos x}$ функция *sinx* және *cosx* өрнектерге қатысты рационал функция болады.

$x+4\sqrt{x}-3$ өрнек x айнымалыға қатысты рационал функция емес, себебі өрнекте x айнымалыдан түбір шығару амалы да қатысқан. Бірақ $x,\ \sqrt{x}$ өрнектерге қатысты рационал функция болады.

$I=\int R(\sin x,\cos x)dx$ интегралды қарастырайық. Бұл интегралды есептеудің жалпы тәсілі бар. Шынында да, $t=tg\dfrac{x}{2}$ алмастыруды орындасақ, $x=2arctgt,\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2},$

$\cos x=\dfrac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x=\dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{2t}{1+t^2}$ болады. Бұл өрнекті интегралға қойсақ,

$$I=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt$$

келіп шығады. Мұнда R өз аргументтерінің рационал функциясы болғандықтан R_1 де рационал функция болады. Демек, берілген интеграл рационал функцияны интегралдауға келтіріледі.

1-*мысал.* $\int\dfrac{dx}{1+\sin x}$ интегралды есептеңдер.

Шешу. $tg\dfrac{x}{2}=t$ алмастыруды орындаймыз. Онда

$$\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2dt}{1+2t+t^2}=2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2}=$$

$$=-\frac{2}{1+t}+C=-\frac{2}{1+tg\frac{x}{2}}+C$$ болады.

Әдетте, $t=tg\frac{x}{2}$ алмастыру *универсал алмастыру* деп аталады.

$\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}$ көріністегі интегралдарды универсал алмастыру көмегімен интегралдау қолайлы.

2-*мысал*. $\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Универсал алмастырудан пайдаланамыз. Онда

$$\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}=$$

$$\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)}=\int\frac{2dt}{t^2+2t+17}=$$

$$=2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+16}=\frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{4}+C$$ болады.

Көп жағдайларда универсал алмастыру күрделі рационал функцияларды интегралдауға алып келеді. Сондықтан, кейбір жағдайларда басқа алмастырулардан пайдалану қолайлы болады.

Мынадай дербес жағдайларды қарастырамыз:

а) *R(sinx, -cosx)=-R(sinx, cosx)* болса, онда *sinx=t* алмастыру орындалады.

Егер *R(-sinx, cosx)=-R(sinx, cosx)* болса, онда *cosx=t* алмастыру орындалады.

R(-sinx, -cosx)=R(sinx, cosx) болса, онда *tgx=t* алмастырудан пайдаланылады.

3-*мысал*. $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Бұл жағдайда интеграл астындағы функция үшін

$$R(-\sin x, -\cos x)=R(\sin x, \cos x)$$

шарт орындалады, $tgx=t$ алмастырудан пайдаланамыз. Нәтижеде

$$\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int(1+tg^2x)d(tgx)=\int(1+t^2)dt=t+\frac{t^3}{3}+C=tgx+\frac{tg^3x}{3}+C$$

болады.

b) $I=\int\sin^n x\cdot\cos^m xdx$ интегралды қарастырайық. Мұнда m, n- бүтін сандар. Төмендегі үш жағдайды қараймыз:

1) m және n сандардан кемінде бірі тақ сан болсын. Мысалы, m- тақ сан, яғни $m=2k+1$, k-бүтін сан. Онда $t=\sin x$, $dt=\cos xdx$, $\cos^{2k}x=(1-\sin^2x)^k=(1-t^2)^k$ алмастырулар нәтижесінде

$$I=\int\sin^n x\cdot\cos^m xdx=\int\sin^n x\cos^{2k}x\cos xdx=\int t^n\cdot(1-t^2)^k dt$$

болады. Демек, $t=\sin x$ *алмастыру* t айнымалыға қатысты рационал функцияны интегралдауға мүмкіндік береді.

4-*мысал.* $\int\sin^4 2x\cdot\cos^3 2xdx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. $\int\sin^4 2x\cdot\cos^3 2xdx=\int\sin^4 2x(1-\sin^2 2x)\cos 2xdx=$

$$=\frac{1}{2}\int t^4(1-t^2)dt=\frac{1}{10}t^5-\frac{1}{14}t^7+C=\frac{1}{10}\sin^5 2x-\frac{1}{14}\sin^7 2x+C\,.$$

2) m және n оң жұп сандар болсын, яғни $m=2s$, $n=2k$, s, k- натурал сандар. Бұл жағдайда мына

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \sin 2x=2\sin x\cos x$$

формулалардан пайдаланып, $\sin x$ және $\cos x$ дәрежелерін төмендетуге болады.

5-*мысал.* $\int\sin^4 x\cdot\cos^2 xdx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. $\int\sin^4 x\cdot\cos^2 xdx=\int\sin^2 x(\sin x\cos x)^2dx=$

$$=\int\frac{1}{2}(1-\cos 2x)(\frac{1}{2}\sin 2x)^2dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2xdx-\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cdot\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)dx-\frac{1}{16}\int\sin^2 2xd(\sin 2x)=$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C\,.$$

3) Егер m және n жұп сандар болып, олардың кемінде бірі теріс болса, жоғарыда айтылған тәсіл мақсатқа алып келмейді. Мұнда $tgx=t$ алмастыруды орындау қажет болады.

c) $\int tg^n xdx,\ \int ctg^n xdx,\ n-$ натурал сан, $n>1$ көріністегі интегралдар сәйкесінше $tgx=t$ және $ctgx=t$ алмастырулар көмегімен есептеледі.

Мысалы, $tgx=t,\ x=arctgt,\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ алмастыруларды орындасақ, $\int tg^n xdx=\int \dfrac{t^n}{1+t^2}dt$ болады. Демек, берілген интеграл рационал функцияны интегралдауға келтіріледі.

6-*мысал*. $\int tg^5 xdx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Жоғарыдағы алмастыруларды орындасақ,

$$\int tg^5 xdx=\int \frac{t^5}{1+t^2}dt=\int (t^3-t+\frac{t}{t^2+1})dt=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1}=$$

$$=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+C=\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}+\frac{1}{2}\ln(tg^2x+1)+C$$

болады.

d) $\int \sin nx\cdot\cos mxdx,\ \int \cos nx\cdot\cos mxdx,\ \int \sin nx\cdot\sin mxdx$ көріністегі интегралдарды есептеу үшін мынадай

$$\sin nx\cdot\cos mx=\frac{1}{2}(\sin(n-m)x+\sin(n+m)x),$$

$$\cos nx\cdot\cos mx=\frac{1}{2}(\cos(n-m)x+\cos(n+m)x),$$

$$\sin nx\cdot\sin mx=\frac{1}{2}(\cos(n-m)x-\cos(n+m)x),$$

формулалардан пайдаланып, берілген интегралдарды қосындының интегралына келтіруге болады.

7-*мысал*. $\int \sin 5x\cdot\cos 3xdx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. $\int \sin 5x\cdot\cos 3xdx=\dfrac{1}{2}\int (\sin(5x-3x)+\sin(5x+3x))dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\sin 2x+\frac{1}{2}\int\sin 8xdx=-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C\ .$$

7-§. Қарапайым иррационал функцияларды интегралдау

Кез келген рационал функцияның алғашқы функциялары элементар функция екендігін және оларды есептеу тәсілдерін қарастырдық. Бірақ кез келген иррационал функцияның алғашқы функциялары элементар функция бола бермейді. Біз енді алғашқы функциялары элементар болатын кейбір қарапайым иррационал функцияларды интегралдаумен шұғылданамыз.

7.1. $\int R(x,\sqrt[n_1]{x^{m_1}},\ \sqrt[n_2]{x^{m_2}},...,\sqrt[n_k]{x^{m_k}})dx$ $(m_1,n_1,m_2,n_2,...,m_k,n_k$ - **натурал сандар) көріністегі интегралдар.**

Бұл интеграл $x=t^s$ алмастыру нәтижесінде рационал функцияның интегралына келтіріледі, бұл жерде s саны $\frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2},...,\frac{m_k}{n_k}$ бөлшектердің ең кіші ортақ бөлімі:

$$\int R(x,\sqrt[n_1]{x^{m_1}},\sqrt[n_2]{x^{m_2}},...,\sqrt[n_k]{x^{m_k}})dx=\int R(t^s,t^{r_1},t^{r_2},...,t^{r_k})st^{s-1}dt\ .$$

1-*мысал*. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ интегралды есептеңдер.

Шешу: 1/2 және 1/3 бөлшектердің ең кіші ортақ бөлімі 6 болғандықтан, $x=t^6$ алмастыруды орындаймыз. Онда $dx=6t^5dt$ болады.

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=6\int\frac{t^6}{t-1}dt=6\int(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1})dt=$$

$$=t^6+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4+2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+$$

$$+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$$

7.2. $\mathbf{I}=\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_1},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_n}\right)dx$ **көріністегі интеграл**.

Бұл интегралда R- өз аргументтерінің рационал функциясы, a, b, c, d нақты сандар және $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - рационал сандар болып, олардың ең кіші ортақ бөлімі m және $ad - bc \neq 0$ болсын. (Егер ad-bc=0 болса, онда $\frac{ax+b}{cx+d}$=$const$ және $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_n}\right)$ өрнек x айнымалыға қатысты рационал функция болады). Мына

t= $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ немесе $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$ алмастыруды орындаймыз. Онда

x= $\frac{t^m d - b}{a - ct^m}$ және dx= $\frac{m(ad-bc)t^{m-1}dt}{(a-ct^m)^2}$ болады. Нәтижеде, берілген интеграл t айнымалыға қатысты рационал функцияны интегралдауға келтіріледі, яғни

$$I = \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{\alpha_1 \cdot m}, ..., t^{\alpha_n m}\right) \frac{m(ad-bc)t^{m-1}}{(a-ct^m)^2}\, dt.$$

Қысқаша жазсақ, $I= \int R_1(t)dt$, мұнда $R_1(t)$ - рационал функция. Алдын алынған нәтижелерге орай мұндай интеграл элементар функциялар арқылы өрнектеледі.

2-*мысал*. $I= \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Интеграл астындағы функция $R(x, \sqrt{x+1}, \sqrt[3]{x+1})$ көріністегі функция болып, бұл жерде $\alpha_1 = \frac{1}{2},\ \alpha_2 = \frac{1}{3}$. Бөлшектердің ең кіші ортақ бөлімі m=6. Онда $t^6=x+1$, $x=t^6-1$, $dx=6t^5dt$, $\sqrt{x+1}=t^3$, $\sqrt[3]{x+1}=t^2$ алмастыруларды орындап, төмендегі

$I= \int \frac{6t^5dt}{t^3 - t^2} = 6\int \frac{t^3dt}{t-1}$ интегралға келеміз. Нәтижеде

$$I = 6\int (t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1})dt = 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6\ln|t-1| + C =$$

$= 2\sqrt{x+1} + 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} + 6\ln|\sqrt[6]{x+1} - 1| + C$ болады.

7.3. $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ **интегралды Эйлер алмастырулары көмегімен есептеу.** Егер түбір астындағы квадрат үшмүшеліктің нақты түбірлері болмаса және $a<0$ болса, ол теріс болып, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ өрнек нақты сандар жиынында анықталмаған болады, сондықтан оны интегралдау мәселесі қаралмайды. Сондықтан төмендегі екі жағдайдың бірі орынды болады:

1) $a<0$ және ax^2+bx+c үшмүшеліктің нақты түбірлері бар болсын. Бұл жағдайда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)\cdot t \qquad (1)$$

алмастыруды орындаймыз. Мұнда α, β квадрат үшмүшеліктің нақты түбірлері ($\alpha<\beta$). Демек,

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2t^2,\quad a(x-\beta)=(x-\alpha)\cdot t^2,\quad x=\frac{\alpha t^2-\beta a}{t^2-a},$$

$$dx=\frac{2a(\beta-\alpha)t}{(t^2-a)^2}dt,\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t=\frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}.$$

Енді табылған өрнектерді берілген интегралға қойып, t айнымалыға қатысты рационал функцияның интегралын аламыз.

3-*мысал*. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Мұнда $a=-1<0$, $1-x^2=(1-x)(1+x)$, сондықтан (1) ден пайдалансақ,

$$\sqrt{1-x^2}=(1+x)t,\quad 1-x=(1+x)t^2,\quad x=\frac{1-t^2}{t^2+1},\quad dx=\frac{-4tdt}{(t^2+1)^2},$$

$$\sqrt{1-x^2}=\left(1+\frac{1-t^2}{t^2+1}\right)t=\frac{2t}{t^2+1},\quad t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$ болады. Табылған өрнектерді берілген интегралға қойсақ,

$$I=\int\frac{-4tdt}{2t(1-t^2)}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+C$$ келіп шығады.

2) $a>0$ болсын. Бұл жағдайда $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$ (немесе $t+x\sqrt{a}$)(2) алмастыруды орындаймыз:

$$x=\frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}},\qquad dx=\frac{2t^2\sqrt{a}+2bt+2c\sqrt{a}}{(b+2t\sqrt{a})^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}=\frac{bt+c\sqrt{a}+t^2\sqrt{a}}{b+2t\sqrt{a}}$$

келіп шығады. Табылғандарды берілген интегралға қойып, t айнымалыға қатысты рационал функцияның интегралын аламыз.

4-*мысал*. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$ интегралды есептеңдер.

Шешу. (2) алмастырудан пайдалансақ, $\sqrt{x^2+5}=t-x,\ x^2+5=t^2-2tx+x^2,\ x=\frac{t^2-5}{2t},\qquad dx=\frac{t^2+5}{2t^2}dt$,

$\sqrt{x^2+5}=t-\frac{t^2-5}{2t}=\frac{t^2+5}{2t}$ болады. Сондықтан

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}=\int\frac{t^2+5}{2t^2\cdot\frac{t^2+5}{2t}}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+C$$

болады.

Жоғарыда келтірілген (1) және (2) алмастырулар *Эйлер алмастырулары* деп аталады.

7.4. Биномиалдық дифференциалды интегралдау. Мына $I=\int x^m\cdot(a+bx^n)^p dx$ интеграл берілген болсын, мұнда m, n, p – рационал сандар, a және b – нақты сандар.

$a+bx^n$ бином (екі мүше) болғандықтан интеграл астындағы өрнек *биномиалдық дифференциал* деп айтылады. Биномиалдық дифференциалға қатысты төмендегі теорема орынды.

7.1-теорема (П.Л.Чебышев теоремасы). Мынадай үш жағдайда биномиалдық дифференциалдың интегралы элементар функция болады:

1-жағдай. p – бүтін сан;

2-жағдай. $p=\frac{r}{s}$ бөлшек сан, бірақ $\frac{m+1}{n}$ - бүтін сан;

3-жағдай. $p=\frac{r}{s}$ және $\frac{m+1}{n}$ - бөлшек сандар, бірақ $\frac{m+1}{n}+p$ - бүтін сан.

Осы үш жағдайда биномиалдық дифференциалдың интегралы элементар функция екендігін көрсетумен шекараланамыз, теореманың толық дәлелдеуін келтірмейміз.

1-жағдайда p бүтін сан болса, m және n бөлшектердің ортақ бөлімі k болсын, онда $x=t^k$, $dx=kt^{k-1}dt$ алмастырулардан пайдалансақ,

$$x^m\cdot(a+bx^n)^p\,dx=t^{mk}(a+bt^{nk})^p\cdot kt^{k-1}dt$$

болады (mk және nk бүтін сандар).

Бұл теңдіктің оң жағындағы өрнек t айнымалыға қатысты рационал функция болып, берілген мәселе рационал функцияны интегралдауға келтіріледі.

5-*мысал.* $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\cdot(1+\sqrt[3]{x^2})}$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Бұл жерде $I=\int x^{-2/3}(1+x^{2/3})^{-1}dx$ және $m=-\frac{2}{3}$, . $n=\frac{2}{3}$, $p=-1$. Төмендегі алмастыруларды орындаймыз:

$$x=t^3,\quad dx=3t^2dt,\ t=\sqrt[3]{x},\ \ x^{-2/3}=t^{-2},\quad (1+x^{2/3})^{-1}=(1+t^2)^{-1}.$$

Онда

$$I=\int t^{-2}\cdot(1+t^2)^{-1}\cdot 3t^2dt=3\int\frac{dt}{t^2+1}=3\cdot arctgt+C=3\cdot arctg\sqrt[3]{x}+C.$$

2-жағдайда $p=\frac{r}{s}$ болса, $a+bx^n=t^s$, $x=b^{-1/n}(t^s-a)^{1/n}$, $dx=b^{-1/n}\frac{1}{n}(t^s-a)^{\frac{1}{n}-1}st^{s-1}dt$ алмастыруларды орындаймыз, онда

$$x^m(a-bx^n)^{\frac{r}{s}}dx=\frac{s}{n}\cdot b^{-\frac{m+1}{n}}\cdot(t^s-a)^{\frac{m+1}{n}-1}\cdot t^{r+s-1}dt$$

болады. Шарт бойынша $\dfrac{m+1}{n}$- бүтін сан, сондықтан соңғы теңдіктің оң жағындағы өрнек t айнымалыға қатысты рационал функция болып, бұл мәселе рационал функцияны интегралдауға келтіріледі.

6-*мысал.* $I=\int\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Мұнда $I=\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}dx$ болып, $m=-\dfrac{1}{2},\ n=\dfrac{1}{4},$ $p=\dfrac{1}{3}\ (r=1,\ s=3)$ және $\dfrac{m+1}{n}=2$ бүтін сан. Сондықтан $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3,\ x=(t^3-1)^4,\ x^{-\frac{1}{2}}=(t^3-1)^{-2},\ dx=12t^2(t^3-1)^3dt,$ $\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}=t$ алмастыруларды орындаймыз. Бұл жағдайда

$$I=\int(t^3-1)^{-2}\cdot t\cdot 12t^2(t^3-1)^3dt=12\int(t^6-t^3)dt=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C=$$

$$=\frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7}-3\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}+C.$$

3-жағдайда $p=\dfrac{r}{s}$ және $\dfrac{m+1}{n}+\dfrac{r}{s}$ бүтін сан болғанда $a+bx^n=t^sx^n$ алмастырудан пайдаланамыз. Онда төмендегі теңдіктер орынды болады:

$$x^n=a(t^s-b)^{-1},\ x=a^{\frac{1}{n}}(t^s-b)^{-\frac{1}{n}},\ dx=-\frac{s}{n}a^{\frac{1}{n}}(t^s-b)^{-\frac{n+1}{n}}\cdot t^{s-1}dt,$$

$$x^m=a^{\frac{m}{n}}(t^s-b)^{-\frac{m}{n}},\ \ a+bx^n=t^s\cdot a(t^s-b)^{-1},\quad x^m\cdot(a+bx^n)^p dx=$$

$$=a^{\frac{m}{n}}(t^s-b)^{-\frac{m}{n}}\cdot a^p(t^s-b)^{-p}\cdot t^{sp}\cdot\left(-\frac{s}{n}\right)a^{\frac{1}{n}}(t^s-b)^{-\frac{n+1}{n}}\cdot t^{s-1}dt=$$

$$=-a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}+\frac{1}{n}}\cdot\frac{s}{n}\cdot(t^s-b)^{-\frac{m}{n}-\frac{r}{s}-1-\frac{1}{n}}\cdot t^{r+s-1}dt=$$

$$=-a^{\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}}\cdot\frac{s}{n}\cdot t^{r+s-1}\cdot(t^s-b)^{-1-\left(\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}\right)}dt.$$

Теореманың шарты бойынша, $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}$ - бүтін сан. Сондықтан мәселе t айнымалыға қатысты рационал функцияны интегралдауға келтіріледі.

7-*мысал.* $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Бұл жерде $I=\int x^{-2}(1+x^3)^{-\frac{5}{3}}dx$ болып, m=*-2*, n=*3*, $p=-\frac{5}{3}$, $\frac{m+1}{n}+p=-2$ бүтін сан.

Мына $1+x^3=t^3x^3$ алмастыруды орындаймыз. Онда

$$t=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x},\quad x=(t^3-1)^{-\frac{1}{3}},\quad dx=-(t^3-1)^{-\frac{4}{3}}\cdot t^2dt,\ 1+x^3=t^3\cdot(t^3-1)^{-1}$$

болады. Демек, $I=-\int(t^3-1)^{\frac{2}{3}}\cdot t^{-5}\cdot(t^3-1)^{\frac{5}{3}}\cdot(t^3-1)^{-\frac{4}{3}}\cdot t^2dt=$

$$=-\int\frac{t^3-1}{t^3}dt=-t-\frac{1}{2t^2}+C=-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}-\frac{x^2}{2\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}=C\,.$$

8-*мысал.* $I=\int(1+x^2)^{\frac{1}{4}}dx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Бұл жағдайда m=0, n=2, $p=\frac{1}{4}$ - бүтін сан емес, $\frac{m+1}{n}=\frac{1}{2}$ - бүтін сан емес және $p+\frac{m+1}{n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ - бүтін сан емес. Демек, Чебышев теоремасына орай берілген интеграл элементар функциялармен өрнектелмейді.

ЖАТТЫҒУЛАР

1. Интегралдарды табыңдар.

a) $\int(x^4-4x^3+2x)dx$; b) $\int(\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2})dx$; c) $\int(\sqrt{x\sqrt{x}}+x\sqrt{x})dx$;

d) $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx$; e) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot \sin^2 x}dx$; f) $\int \frac{(1+x)^2 dx}{x(1+x^2)}$;

g) $\int (x+1)^{14} dx$; h) $\int \sqrt{8-2x}\,dx$; i) $\int \sqrt[5]{(3x+1)^2}\,dx$;

j) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$; k) $\int \sin^3 x\cos x\,dx$; l) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$;

m) $\int e^{-x^3}x^2dx$; n) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; o) $\int \frac{xdx}{1+x^4}$;

2. Айнымалыны алмастыру тәсілінен пайдаланып, интегралдарды табыңдар.

a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; b) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{2x+1}}$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$; d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

3. Бөліктеп интегралдау тәсілінен пайдаланып, интегралдарды табыңдар.

a) $\int x\sin 2xdx$; b) $\int xarctgxdx$; c) $\int \arccos xdx$;

d) $\int x^2e^{-x}dx$; e) $\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$; f) $\int x^2\ln(1+x)dx$.

4. Қарапайым бөлшектерді интегралдаңдар.

a) $\int \frac{dx}{2x+1}$; b) $\int \frac{dx}{1-3x}$; c) $\int \frac{dx}{x^2+10x+3}$; d) $\int \frac{dx}{2x^2+2x+5}$;

e) $\int \frac{dx}{(x-2)^3}$; f) $\int \frac{dx}{(3x-1)^2}$; g) $\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$; h) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$.

5. Бөлшек-рационал функцияларды интегралдаңдар.

a) $\int \frac{3x+8}{(x-2)(x+5)}dx$; b) $\int \frac{3x+1}{(x+3)^2(x-5)}dx$;

c) $\int \frac{x^2+5x+9}{(x-2)^3}dx$; d) $\int \frac{4x^2-5x+9}{(x^2-4x+13)(x+1)}dx$;

e) $\int \frac{x^2-7x-6}{(x^2+9)(x-3)}dx$; f) $\int \frac{x^3-7x^2-3}{x^2(x^2+4)}dx$.

6. Тригонометриялық өрнектерді интегралдаңдар.

a) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; b) $\int \frac{\sin^3 x}{4+\cos x}dx$; c) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$;

d) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$; f) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$; g) $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$;

h) $\int \cos 3x \cos 5x dx$; i) $\int \sin 2x \sin 3x \cos 5x\, dx$.

7. Интегралдарды табыңдар.

a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$; b) $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}$; d) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$; e) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$; f) $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx$.

XI ТАРАУ. АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ

1-§. Анықталған интеграл ұғымына алып келетін есептер

1.1. Аудан жайындағы есеп. $[a;b]$ кесіндіде үзіліссіз және теріс болмаған $f(x)$ функция берілген болсын. $y=f(x)$ функцияның графигі, Ox осі, $x=a$ және $x=b$ түзулермен шенелген жазық фигура *aABb қисық сызықты трапеция* деп аталады.

Дербес жағдайда A мен a нүкте немесе B және b нүктелер бетпе-бет түсуі мүмкін немесе әр екі жағдайда бір уақытта орындалуы мүмкін. Бұл жағдайларда да фигура *қисық сызықты трапеция* деп аталады.

$aABb$ қисық сызықты трапецияның ауданын табу мәселесін қарастырайық. Ол үшін $[a;b]$ кесіндіні

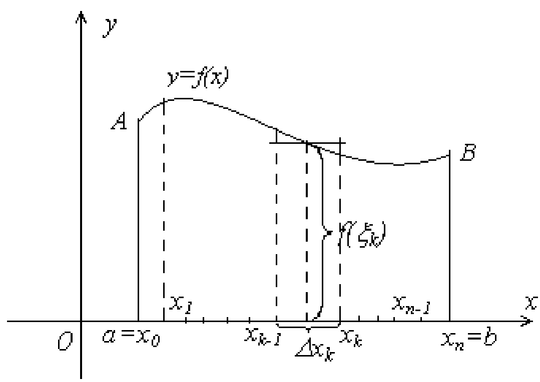
$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$$

нүктелермен n бөлікке бөліп және бұл нүктелерден Oy оське параллель түзулер өткізіп, $aABb$ қисық сызықты трапецияны n кіші қисық сызықты трапецияларға бөлеміз. Енді әрбір $[x_{k-1},x_k]$ кесіндіден кез келген ξ_k нүкте аламыз. Әрбір трапецияда табаны $[x_{k-1},x_k]$ және биіктігі $f(\xi_k)$ болған тік төртбұрыш сызамыз (66-сурет). Бұл тік төртбұрыштардың аудандары

$f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=f(\xi_k)\Delta x_k$, $k=1,2,...,n$ болады. Тік төртбұрыштар аудандарының қосындысын

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

арқылы белгілейміз. Егер $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$ деп белгілесек және $\lambda\to 0$ болса, (бұл жағдайда $[a;b]$ кесіндіні кіші бөліктерге бөлулер саны n шектеусіз өседі) S_n өрнек



66-сурет

қисық сызықты трапеция ауданына ұмтылады. Сондықтан қисық сызықты трапецияның ауданы деп

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

шекті қабылдау табиғи.

1.2.Айнымалы күш орындаған жұмыс жайындағы есеп. Айталық, дене *Ox* ось бағытында *Ox* осьтегі проекциясы *x* айнымалының функциясы болған $F=f(x)$ күш әсерінде қозғалыста болсын. Дене сол күш әсерінде *a* нүктеден *b* нүктеге көшкенде орындалған жұмысты табу жайындағы есепті қарайық.

Ол үшін $[a;b]$ кесіндіні *n* бөлікке бөлеміз:

$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. $[x_{k-1},x_k]$ бөлікден кез келген ξ_k нүктені таңдап аламыз және сол бөлікде денеге әсер етуші күш $f(\xi_k)$, оның орындаған жұмысы

$$f(\xi_k)\cdot(x_k-x_{k-1})=f(\xi_k)\Delta x_k$$

болсын деп қараймыз. Онда $F=f(x)$ күштің $[a;b]$ кесіндіде орындаған жұмысы жуығымен $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ болады. $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$ нөлге ұмтылғанда, $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ орындалған жұмысты анық өрнектеуі айқын. Сол себепті оны $A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ деп алуға болады.

Сонымен, жоғарыдағы екі есепті шешу мына $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ көріністегі қосындының шегін есептеу мәселесіне алып келді. Осыған ұқсас көптеген геометриялық, механикалық және басқа мәселелер сондай қосындылардың шегін табуға келтіріледі.

2-§. Интеграл қосынды, анықталған интегралдың анықтамасы

Айталық, $f(x)$ функция $[a;b]$ кесіндіде анықталған болсын. $[a;b]$ кесіндіні

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$$

нүктелермен n бөлікке бөлеміз. $[a;b]$ кесіндіні бөлуші бұл сандар жиынын $[a;b]$ кесіндінің *бөлінуі* деп атаймыз және τ_n деп белгілейміз:

$$\tau_n=\{x_0, x_1, \ldots, x_n |\, a=x_0< x_1< x_2< \ldots <x_n=b\}.$$

Әрбір элементар $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\ldots,n)$ кесіндіден кез келген ξ_k нүктені таңдап, сол нүктелерде функцияның $f(\xi_k)$ мәндерін есептейміз және төмендегі қосындыны түземіз:

$$S(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\ , \qquad (1)$$

бұл жерде $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\ldots,n)$ кесіндінің ұзындығы.

Бұл (1) қосынды $f(x)$ функцияның $[a;b]$ кесіндідегі *интеграл қосындысы* деп аталады.

$[a;b]$ кесіндінің τ_n бөлінулері және әрбір $[x_{k-1},x_k]$ кесіндіден ξ_k нүктелерді таңдау тәсілдері шектеусіз көп болғандықтан $f(x)$ функцияның $[a;b]$ кесіндідегі (1) интеграл қосындылары жиыны шектеусіз жиын болады. $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$ деп белгілейміз.

1-**анықтама**. Егер λ нөлге ұмтылғанда $f(x)$ функцияның $[a;b]$ кесіндідегі (1) интеграл қосындының I шегі бар болып, ол $[a;b]$ кесіндінің τ_n бөлінулеріне және ξ_k нүктелерді таңдау тәсіліне тәуелді болмаса, осы I шек *$f(x)$ функцияның* $[a;b]$ кесіндідегі *анықталған интегралы* деп аталады және ол

$$\int_a^b f(x)dx$$

арқылы белгіленеді.

Сонымен, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=\int\limits_a^b f(x)dx$ болады.

Мұндай жағдайда $f(x)$ функция $[a;b]$ кесіндіде *интегралда-натын* (немесе Риман мағынасында интегралданатын, интегралданушы) *функция* деп аталады.

Бұл жерде де анықталмаған интегралдағы сияқты $f(x)dx$ *интеграл астындағы өрнек,* $f(x)$- *интеграл астындағы функция,* x - *интегралдау айнымалысы,* a және b сәйкесінше *интегралдаудың төменгі* және *жоғары шекаралары* деп аталады.

Анықталған интегралдың $\int_a^b f(x)dx$ белгіленуі сол функцияның анықталмаған интегралы белгіленуіне ұқсас. Бұл кездейсоқ емес. Анықталған интегралды есептеу сол интеграл астындағы функцияның анықталмаған интегралын есептеуге келтіріледі, олардың белгілеулерінің ұқсастығы интегралдау формулаларын естеп қалуды ыңғайластырады. Бірақ анықталған интегралмен анықталмаған интеграл арасында маңызды ерекшелік бар: $f(x)$ функцияның $[a;b]$ кесіндідегі анықталған интегралы қандай да бір саннан тұрады, сол функцияның анықталмаған интегралы болса, оның барлық алғашқы функцияларын өрнектейді. Сол себепті олар түрлі ұғымдар.

Анықталған интеграл ұғымына алып келген бірінші есептен анықталған интегралдың геометриялық мағынасы келіп шығады: геометриялық тұрғыдан теріс болмаған функцияның анықталған интегралының сан мөлшері сол функцияға сәйкес қисық сызықты трапецияның ауданына тең болады.

3-§. Анықталған интеграл бар екендігінің қажетті шарты

3.1-теорема. Егер $f(x)$ функция $[a;b]$ кесіндіде интегралданатын болса, онда бұл функция $[a;b]$ кесіндіде шенелген болады.

Дәлелдеу. Кері жорияқ. Онда $f(x)$ функция $[a;b]$ кесіндінің τ_n бөлінуіне сәйкес $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\ldots,n)$ кесінділердің кемінде бірінде шенелмеген болады. Мысалы, функция $[x_{j-1},x_j]$ кесіндіде шенелмеген болсын. Интеграл қосындыны төмендегідей жазуға болады:

$$S(\tau_n)=A+f(\xi_j)\Delta x_j,$$

мұнда $A=\sum_{k=1}^{j-1} f(\xi_k)\Delta x_k+\sum_{k=j+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$

$[x_{j-1},x_j]$ кесіндіде $f(x)$ шенелмегендіктен $\xi_j\in[x_{j-1},x_j]$ нүкте табылып, $|f(\xi_j)\Delta x_j|>|A|+\dfrac{1}{\lambda}$ теңсіздік орынды болады. Онда

$$|S(\tau_n)|=|A+f(\xi_j)\Delta x_j|\geq|f(\xi_j)\Delta x_j|-|A| > |A|+\frac{1}{\lambda}-|A|=\frac{1}{\lambda}$$ болады.

Демек, λ нөлге ұмтылғанда $S(\tau_n)\to\infty$ болады. Бұдан интеграл қосындының шекті шегі жоқ екендігі келіп шығады. Бұл $f(x)$ функцияның интегралданатындығына қарама-қайшы. Бұл қарама-қайшылық теореманы дәлелдейді.

Функцияның шенелгендігі оның интегралданатын болуы үшін тек қажетті шарт болып, жеткілікті шарт бола алмайды. Мысалы,

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{егер } x \text{ иррационал болса,}\\ 1, & \text{егер } x \text{ рационал болса}\end{cases}$$

Дирихле функциясы [-1;1] кесіндіде шенелген. Сол функцияның интеграл қосындыларын қарайық. Егер әрбір $[x_{k-1}, x_k]$ кесіндіде ξ_k деп тек рационал нүктелер таңдап алынса,

$$S(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}1\cdot\Delta x_k=2$$

болады.

Егер әрбір $[x_{k-1}, x_k]$ кесіндіде ξ_k деп тек иррационал нүктелер таңдап алынса,

$$S(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}0\cdot\Delta x_k=0$$ болады.

Демек, $S(\tau_n)$ интеграл қосындының шегі ξ_k нүктелерді таңдап алу тәсіліне тәуелді. Бұл Дирихле функциясының интегралданбайтындығын көрсетеді.

4-§. Дарбу қосындылары және олардың қасиеттері

$f(x)$ функция $[a;b]$ кесіндіде анықталған және шенелген болсын. $[a;b]$ кесіндінің қандай да бір τ_n бөлінуін алып, төмендегі белгілеулерді енгіземіз:

$$m_k=\inf_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} f(x),\qquad M_k=\sup_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} f(x) \tag{1}$$

$$\underline{S}(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k,\quad \overline{S}(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k \tag{2}$$

Мұнда (2) қосындылар сәйкесінше *Дарбудың төменгі және жоғары қосындылары* деп аталады. Функцияның шенелгендігінен m_k және M_k мәндердің сәйкес кесіндіде бар екендігі айқын. Жалпы айтқанда, (2) қосындылар интеграл қосынды болмайды, себебі m_k және M_k функцияның мәндері болмауы да мүмкін (егер $f(x)$ үзіліссіз функция болса, (2) қосындылар $f(x)$ функцияның интеграл қосындылары болады).

Дарбу қосындыларының үш негізгі қасиеті бар.

1-қасиет. Кез келген τ_n бөліну үшін

$$\underline{S}(\tau_n) \le S(\tau_n) \le \overline{S}(\tau_n)$$

теңсіздіктер орынды болады.

Дәлелдеу. Кез келген $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ үшін $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$, сондықтан

$$\underline{S}=\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \overline{S}\ .$$

Берілген τ_n бөліну үшін Дарбудың төменгі және жоғары қосындылары тек біреу болады, бірақ интеграл қосынды, әрбір бөлік кесіндіден ξ_k нүктелерді таңдау есесіне шектеусіз көп болады.

2-қасиет. $[a;b]$ кесіндінің бөліну нүктелері санын арттыру нәтижесінде төменгі қосындылар кемімейді, жоғары қосындылар өспейді.

Дәлелдеу. $[a;b]$ кесіндінің τ_n бөлінуі үшін төменгі қосынды $\underline{S}_1$ болсын. Енді бөліну нүктелерді арттырамыз. Мысалы, $[x_{k-1},x_k]$ кесіндіні $\overline{x}$ нүкте көмегімен екіге бөлеміз. Пайда болған жаңа төменгі қосындыны $\underline{S}_2$ деп белгілейміз.

$$\underline{S}_1=\sum_{j=1}^{k-1} m_j \Delta x_j + m_k\Delta x_k + \sum_{j=k+1}^{n} m_j \Delta x_j\ , \qquad (3)$$

$$\underline{S}_2=\sum_{j=1}^{k-1} m_j \Delta x_j + m_k'(\overline{x}-x_{k-1}) + m_k''(x_k-\overline{x}) + \sum_{j=k+1}^{n} m_j \Delta x_j \qquad (4)$$

мұнда $m_k'=\inf\limits_{[x_{k-1};\overline{x}]} f(x)$, $m_k''=\inf\limits_{[\overline{x};x_k]} f(x)$.

Жиынның анық төменгі шекарасы жиыншасының анық төменгі шекарасынан үлкен емес, сондықтан $m_k' \ge m_k$, $m_k'' \ge m_k$ және

$$m_k'(\overline{x}-x_{k-1})+m_k''(x_k-\overline{x}) \ge m_k(\overline{x}-x_{k-1})+m_k(x_k-\overline{x})=m_k(x_k-x_{k-1})=m_k\Delta x_k \quad (5)$$

қатынас орынды.

Демек, (3), (4) және (5) ті ескерсек, $\underline{S}_2 \geq \underline{S}_1$ болады.

Жоғары қосынды үшін айтылған тұжырым осыған ұқсас дәлелденеді.

3-қасиет. $[a;b]$ кесіндінің кез келген бөлінуіндегі төменгі қосынды кез келген басқа бөлінудегі жоғары қосындыдан үлкен емес.

Дәлелдеу. τ_{n_1} бөлінудегі қосындылар $\underline{S}_1$ және $\overline{S_1}$ болсын, τ_{n_2} бөлінудегі қосындыларды $\underline{S}_2$ және $\overline{S_2}$ деп белгілейміз. Енді, τ_{n_1} және τ_{n_2} бөлінулердегі бөліну нүктелерін бірлестіре қарап, жаңа τ_{n_3} бөлінуді және оған сәйкес $\underline{S}_3$ және $\overline{S_3}$ қосындыларды аламыз.

2-қасиетке орай $\underline{S}_1 \leq \underline{S}_3$ және $\overline{S_2} \geq \overline{S_3}$, 1-қасиетке орай $\underline{S}_3 \leq \overline{S_3}$. Сондықтан $\underline{S}_1 \leq \underline{S}_3 \leq \overline{S_3} \leq \overline{S_2}$ немесе $\underline{S}_1 \leq \overline{S_2}$.

Демек, төменгі қосындылар жиыны жоғарыдан, жоғары қосындылар жиыны төменнен шенелген болады.

5-§. Анықталған интегралдың бар болу шарты

5.1-теорема. $[a;b]$ кесіндіде анықталған және шенелген $f(x)$ функцияның сол кесіндіде интегралданатын болуы үшін

$$\lim_{\lambda \to 0} (\overline{S}(\tau_n) - \underline{S}(\tau_n)) = 0 \qquad (1)$$

шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. *Жеткіліктілігі.* (1) шарт орындалған болсын. λ нөлге ұмтылғанда төменгі қосындылар $\{\underline{S}_n\}$ тізбегінің шегі бар болады, себебі λ нөлге ұмтылғанда бөліну нүктелерінің саны өседі, нәтижеде $\{\underline{S}_n\}$ үшін Дарбу қосындыларының 2-қасиетіне орай

$$\underline{S}_1 \leq \underline{S}_2 \leq \ldots \leq \underline{S}_n \leq \ldots ,$$

яғни $\{\underline{S}_n\}$ кемімейтін болады. Сонымен бірге 3-қасиетке орай $\underline{S}_n \leq \overline{S}_1$, яғни $\{\underline{S}_n\}$ жоғарыдан шенелген тізбек. Демек, оның шегі бар болады.

Осыған ұқсас, λ нөлге ұмтылғанда $\{\overline{S}_n\}$ жоғары қосындылар тізбегінің де шегі бар болады. *f(x)* функцияның шенелгендігі және (1) шарттан

$$0=\lim_{\lambda\to 0}(\overline{S}(\tau_n)-\underline{S}(\tau_n))=\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}(\tau_n)-\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(\tau_n),\quad \lim_{\lambda\to 0}\overline{S}(\tau_n)=\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(\tau_n)=I$$

келіп шығады, мұнда *I*-шекті сан. Онда $\underline{S}(\tau_n)\le S(\tau_n)\le \overline{S}(\tau_n)$ теңсіздікке орай аралықтағы $S(\tau_n)$ айнымалы да сол шекке ұмтылады. Демек, $\lim_{\lambda\to 0}S(\tau_n)=I$ шек бар, яғни *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде интегралданады.

Қажеттілігі. *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде интегралданушы, яғни $\lim_{\lambda\to 0}S(\tau_n)=I$ болсын. Бұл жағдайда кез келген ε оң сан алынғанда да $\delta>0$ сан табылып, $\lambda<\delta$ болғанда $\left|S(\tau_n)-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ болады. Жоғарыдағы *I* шек $S(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ интеграл қосындыда қатысқан ξ_k нүктелерді таңдау тәсіліне тәуелді болмағандығы, m_k және M_k сандар *f(x)* функция мәндері жиынының анық төменгі және анық жоғары шекаралары болғандықтан

$$\left|\underline{S}(\tau_n)-I\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\qquad \left|\overline{S}(\tau_n)-I\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

теңсіздіктер орынды болады. Бұдан $I-\varepsilon<\underline{S}(\tau_n)\le\overline{S}(\tau_n)<I+\varepsilon$ немесе $\lambda<\delta$ болғанда $\left|\overline{S}(\tau_n)-\underline{S}(\tau_n)\right|<2\varepsilon$ келіп шығады. Соңғы теңсіздік (1) шарттың орынды болуын көрсетеді. Теорема дәлелденді.

6-§. Интегралданатын функциялар сыныптары

6.1-теорема. Егер *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде үзіліссіз болса, онда функция сол кесіндіде интегралданатын болады.

Дәлелдеу. Кантор теоремасына орай *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде бір қалыпты үзіліссіз болады, яғни кез келген ε оң санды алғанымызда да δ оң сан табылып, |*x'*-*x''*|<δ теңсіздікті қанағаттандыратын және [$a;b$] кесіндіге тиісті болған барлық x', x'' үшін $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ теңсіздік орынды болады.

$f(x)$ функция әрбір [x_{k-1},x_k] кесіндіде үзіліссіз болғандықтан Вейерштрасстың 2-теоремасына орай $f(\xi_k')=m_k=\inf\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$, $f(\xi_k'')=M_k=\sup\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$, болатын $\xi_k'\in[x_{k-1},x_k]$ және $\xi_k''\in[x_{k-1},x_k]$ нүктелер табылады. Бұл нүктелер үшін $\left|\xi_k'-\xi_k''\right|\le x_k-x_{k-1}\le\lambda$ теңсіздік орынды. Егер $\lambda<\delta$ деп алсақ, бір қалыпты үзіліссіздікке орай $\left|f(\xi_k')-f(\xi_k'')\right|<\varepsilon$ болады. Бұл жағдайда

$$0<\overline{S}-\underline{S}=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\left|f(\xi_k')-f(\xi_k'')\right|\Delta x_k<$$

$$\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\varepsilon(b-a) \text{ болады.}$$

Сонымен, $\lambda<\delta$ болғанда $0<\overline{S}-\underline{S}<\varepsilon(b-a)$, ε кез келген оң сан болғандықтан $\lim\limits_{\lambda\to 0}(\overline{S}-\underline{S})=0$ теңдік, яғни функция интегралдануының қажетті және жеткілікті шарты орындалады. Демек, $f(x)$ функция [$a;b$] кесіндіде интегралданады. Теорема дәлелденді.

Мына $y=x^2-1$, $y=\dfrac{1+x}{x}$ функциялар [1;2] кесіндіде интегралданатын болады, себебі олар бұл кесіндіде үзіліссіз.

Керісінше, $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\in(0;1],\\ 0, & x=0\end{cases}$ функция [0;1] кесіндіде шенелмеген және үзілісті. Функция шенелмегендігінен оның [0;1] кесіндідегі интегралы жоқ екендігі келіп шығады.

Жоғарыдағы теоремаға орай кесіндіде анықталған үзіліссіз функциялар сыныпы интегралданатын болады. Бұл сыныпты белгілі бір мағынада кеңейтуге болады. Ол үшін [$a;b$] кесіндіде шекті сандағы үзіліс нүктелері бар болған шенелген функциялар сыныпын қараймыз.

f(x) функция $[a;b]$ кесіндіде шенелген болсын.

$M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ деп белгілеп, $\omega_{[a;b]} = M - m$

санды *f(x) функцияның* $[a;b]$ *кесіндідегі секірмесі* деп атаймыз. Онда $[x_{k-1};x_k]$ (k=1,2,…,n) кесінділердегі функциялардың секірмесін ω_k арқылы белгілесек, $\omega_k=M_k-m_k$ және

$$\overline{S}(\lambda) - \underline{S}(\lambda) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\omega_k \cdot \Delta x_k$$

болғандықтан интеграл бар екендігінің қажетті және жеткілікті шартын төмендегідей жазуға болады:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k \cdot \Delta x_k = 0 \qquad (1)$$

6.2-теорема. Егер $[a;b]$ кесіндіде шенелген *f(x)* функцияның сол кесіндіде шекті сандағы үзіліс нүктелері бар болса, онда *f(x)* функция интегралданатын болады.

Дәлелдеу. *f(x)* функцияның үзіліс нүктелері $c_1,\ c_2,\ \ldots\ ,\ c_k$ болсын. Кез келген кіші ε оң сан үшін $\delta_1 = \dfrac{\varepsilon}{8\omega_{[a,b]}\cdot k}$ санын және әрбір үзіліс нүктесінің δ_1 маңайларын ажыратып аламыз.

$[a;b]$ кесіндіден бұл аралықтарды алып тастасақ, k+1 кесінді қалады. Олардың әрбірінде *f(x)* функция үзіліссіз, Кантор теоремасына орай бір қалыпты үзіліссіз функция болады. Сондықтан үзіліс нүктелері маңайларының сыртындағы аралықтарда ε оң санға сәйкес $\delta_2 > 0$ табылып, олардан алынған және $|x' - x''| < \delta_2$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын x' және x'' үшін $\omega_j < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ теңсіздік орындалады. Енді $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ деп аламыз, $[a;b]$ кесіндіні ұзындығы δ санынан кіші болған Δx_j, j=1, 2, … , n кесінділерге бөлеміз. Бұл кесінділерді екі түрге ажыратуға болады:

1) үзіліс нүктелері маңайларынан сыртта жататын кесінділер – оларда функцияның секірмесі $\omega_j < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ болады.

2) ажыратылған маңайлармен ортақ нүктелері бар болған кесінділер – бұл кесінділерде функцияның секірмесі $\omega_{[a;b]}$ санынан үлкен бола алмайды.

Сонымен, $\sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j \Delta x_j$ қосындыны жоғарыдағы екі түрлі кесінділерге сәйкес екі қосындыға жіктейміз:

$$\sum_{j'} \omega_{j'} \Delta x_{j'} + \sum_{j''} \omega_{j''} \Delta x_{j''} .$$

Мұнда $\sum\limits_{j'} \omega_{j'} \Delta x_{j'}$ - үзіліс нүктелері маңайларынан сыртта жататын кесінділер қатысқан қосынды. Ол үшін $\sum\limits_{j'} \omega_{j'} \Delta x_{j'} < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum\limits_{j'} \Delta x_{j'} \le \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ ·

$\sum\limits_{j''} \omega_{j''} \Delta x_{j''}$ - үзіліс нүктелері маңайларымен ортақ нүктелері бар болған кесінділер қатысқан қосынды. Мұндай кесінділер үзіліс нүктесі маңайында толық жайласуы немесе сол маңаймен кемінде бір ортақ нүктесі бар болуы мүмкін. Сондықтан бұл кесінділердің ұзындықтарының қосындысы $(\delta + 2\delta_1 + \delta)k < 4 \cdot \dfrac{\varepsilon}{8\omega_{[a,b]} \cdot k} \cdot k = \dfrac{\varepsilon}{2\omega_{[a,b]}}$ саннан кіші болады. Сондықтан

$$\sum_{j''} \omega_{j''} \Delta x_{j''} < \omega_{[a,b]} \sum_{j''} \Delta x_{j''} < \omega_{[a,b]} \cdot \frac{\varepsilon}{2\omega_{[a,b]}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

болады.

Сонымен, $\lambda = \max\limits_{1 \le j \le n} \Delta x_j < \delta$ болғанда $\sum\limits_{j} \omega_j \Delta x_j < \varepsilon,$ яғни $\lambda \to 0$ болғанда $\sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j \Delta x_j \to 0$ және (1) шартқа орай *f(x)* функция берілген кесіндіде интегралданатын болады. Теорема дәлелденді.

6.3-теорема. Егер *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде бір сарынды болса, ол сол кесіндіде интегралданатын болады.

Дәлелдеу. Анықтық үшін *f(x)* өспелі функция болсын. Кез келген ε оң сан алып, оған сәйкес δ оң санды таңдап аламыз: $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Сонан соң $[a,b]$ кесіндіні $\lambda = \max\limits_{1\le j\le n} \Delta x_j < \delta$ болатын τ_n бөлінуіне сәйкес Дарбудың төменгі $\underline{S}(\tau_n)$ және $\overline{S}(\tau_n)$ жоғары қосындыларын құрастырамыз. Онда

$$\underline{S}(\tau_n) - \overline{S}(\tau_n) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\Delta x_k \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} (f(x_1) - f(x_0) +$$

$$+ \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} (f(x_n) - f(x_0)) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon$$ болады. Демек, функция интегралданатындығының $\underline{S}(\tau_n) - \overline{S}(\tau_n) < \varepsilon$ қажетті және жеткілікті шарты орындалады. Бұл қаралып отырған функцияның интегралданатындығын білдіреді. Шенелген және кемімелі функцияның интегралданатындығы жоғарыдағыдай дәлелденеді. Теорема дәлелденді.

Мысал. $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in (1;2], \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ функцияның [1,2] кесіндіде интегралданатындығын дәлеледеңдер.

Шешу. Бұл функцияның интегралданатындығын жоғарыдағы теоремалардан пайдаланып дәлелдеуге болады.

Функция [1,2] кесіндіде шенелген, x=1 нүктеде үзілісті, қалған нүктелерде үзіліссіз. 6.2-теоремаға орай бұл функция [1;2] кесіндіде интегралданатын болады.

Сондай-ақ, берілген функция [*a;b*] кесіндіде кемімелі. Сондықтан ол 6.3-теореманың барлық шарттарын қанағаттандырады, демек интегралданатын болады.

Бір сарынды функцияның кесіндіде үзіліс нүктелері саны шектеусіз көп (санаулы) болуы мүмкін. Мысалы [0,1] кесіндіде анықталған

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2^n}, \text{ егер } 1-\dfrac{1}{2^n}\le x<1-\dfrac{1}{2^{n+1}},\\ 1, \text{ егер } \quad x=1\end{cases}$$ функция кемімейтін

функция болып, әрбір $\dfrac{1}{2^n}, n\in N$ нүкте оның үзіліс нүктесі болады.

1-ескерту. Интегралданатын функциялар сыныптарының саны тек шенелген үзіліссіз, шенелген және шекті сандағы үзіліс нүктелері бар болған, сондай-ақ шенелген және бірсарынды болған функциялар сыныптарымен шекараланып қалмайды. Үзіліс нүктелері санаулы жиын құрайтын шенелген функциялар сыныпы да кесіндіде интегралданушы екендігін көрсетуге болады. Бұл мәселені математикалық анализдің функциялар теориясы бөлімінде үйренеміз.

2-ескерту. Егер *a*=*b* болса, анықтама бойынша кез келген функция үшін мына

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

теңдік орынды деп келісеміз.

7-§. Анықталған интегралдың қасиеттері

Алдымен анықталған интегралдың теңдікпен өрнектелетін қасиеттерін қараймыз.

1^0. $\int_a^b 1\cdot dx=b-a$.

Дәлелдеу. Шынында да, мұнда *f(x)*=1 және анықтама бойынша $\int_a^b 1\cdot dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}1\cdot\Delta x_k=b-a$ болады.

2^0. Егер *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде интегралданатын болса, онда *kf(x)* (*k*=const) функция да интегралданатын және

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx \text{ болады.}$$

Дәлелдеу. Шынында, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} kf(\xi_k)\Delta x_k = k\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k =$ $= k\int\limits_a^b f(x)dx$. Демек, $\int\limits_a^b kf(x)dx$ бар және оның мәні $k\int\limits_a^b f(x)dx$ болады.

3^0. Егер $f_1(x)$ және $f_2(x)$ функциялар $[a;b]$ кесіндіде интегралданатын болса, онда $f_1(x)\pm f_2(x)$ функциялар $[a;b]$ кесіндіде интегралданатын және

$$\int\limits_a^b (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$$

теңдік орынды болады.

Дәлелдеу. Бұл қасиет алдынғы қасиет сияқты дәлелденеді. Қасиет қосылушылар саны шекті (екіден көп) болғанда да орынды болады.

4^0. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$, яғни интегралдау шекараларының орын ауыстырсақ, анықталған интеграл таңбасы қарама-қарсыға өзгереді.

Бұл қасиетті дәлелдеу үшін интеграл қосындыда Δx_k ның - Δx_k ға алмасатынын ескеру жеткілікті.

5^0. (Анықталған интегралдың аддитивтік қасиеті) Егер $f(x)$ функция үшін $\int\limits_a^c f(x)dx, \int\limits_a^b f(x)dx, \int\limits_c^b f(x)dx$ бар болса, онда төмендегі теңдік орынды болады:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \qquad (1)$$

Дәлелдеу. $a<c<b$ болсын. $[a;b]$ кесіндіні c бөліну нүктелерінен бірі болатындай етіп n бөлікке бөлеміз. $c=x_m$ болсын. Онда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

және $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)dx$, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_a^c f(x)dx$,

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_c^b f(x)dx$ болғандықтан (1) келіп шығады.

Егер $a < b < c$ болса, онда $\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$,

бұдан $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Сонымен, c нүкте $[a;b]$ кесіндінің ішкі немесе сыртқы нүктесі болса да (1) теңдік орынды болады.

Енді анықталған интегралдың теңсіздікпен өрнектелетін қасиеттерін үйренеміз.

6^0. Егер $[a;b]$ кесіндіде $f(x)$ интегралданатын және $f(x)\geq 0$ болса, онда $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$ болады.

Дәлелдеу. $f(\xi_k)\geq 0$, $k=1,2,...,n$ және $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ болғандықтан

$\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \geq 0$ болады. Бұл теңсіздікте шекке өтсек,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \geq 0 \text{ болады.}$$

7^0. (Анықталған интегралдың бір сарындылық қасиеті) Егер $[a;b]$ кесіндіде $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялар интегралданатын және $\varphi(x)\leq f(x)$ болса, онда

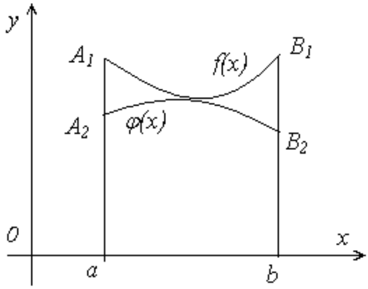
$$\int\limits_a^b \varphi(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

болады.

Дәлелдеу: $[a;b]$ кесіндісінің кез келген бөлінуі үшін $\varphi(\xi_k)\leq f(\xi_k)$, $k=1, 2, ..., n$. Демек, $\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\Delta x_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

болады. Бұдан $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\Delta x_k \le \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, немесе (2) келіп шығады.

67-суретте 7^0 қасиетке геометриялық мағына берілген. $\varphi(x)\le f(x)$ болғандықтан aA_2B_2b қисық сызықты трапецияның ауданы aA_1B_1b қисық сызықты трапецияның ауданынан үлкен емес.



67-сурет

8^0. Егер $[a;b]$ кесіндіде $f(x)$ үзіліссіз болып, $f(x)\ge 0$ және $f(x)$ нөл функция болмаса, онда $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$ болады.

Дәлелдеу. $f(x)$ нөл функция болмағандықтан $[a;b]$ кесіндіде $f(\xi)>0$ болатын ξ нүкте табылады. $f(x)$ функцияның үзіліссіздігінен ξ нүктенің $(\alpha;\beta)$ маңайы табылып, $(\alpha;\beta)\subset[a;b]$ және бұл аралықтың барлық нүктелері үшін $f(x)>0$ орынды болады. Онда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^\alpha f(x)dx + \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx + \int\limits_\beta^b f(x)dx$ және 6^0-қасиетінен $\int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx$ келіп шығады. $f(x)$ үзіліссіз болғандықтан $[\alpha;\beta]$ кесіндіде ол ең кіші мәнді қабылдайды. Бұл ең кіші мәнді m мен белгілейміз. $[\alpha;\beta]$ кесіндіде $f(x)>0$ болғандықтан $m>0$ болады. Сондықтан

$\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx \ge \int\limits_\alpha^\beta m dx = m(\beta-\alpha) > 0$, және $\int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ келіп шығады.

1-ескерту. Жалпы жағдайда 6^0-қасиеттегі теңсіздік қатаң болмайды. Шынында да,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1;0)\cup(0;1],\\ 1, & x=0\end{cases}$$

функция 6^0 қасиеттегі шарттарын қанағаттандырады. Сонымен бірге

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx=0+0=0,$$

яғни $\int_{-1}^{1} f(x)dx\geq 0$ (қатаң теңсіздік орындалмайды).

$\int_{a}^{b} f(x)dx>0$ болуы үшін *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде 8^0 қасиет шарттарын қанағаттандыруы жеткілікті.

9^0. Егер *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде интегралданатын болса, онда $|f(x)|$ функция да сол кесіндіде интегралданатын болады және

$$\left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right|\leq\int_{a}^{b}|f(x)|dx \qquad (3)$$

теңсіздік орынды.

Дәлелдеу. *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде интегралданатын болсын. Онда кез келген ε оң сан алынғанда да δ оң сан табылып, $\lambda<\delta$ болған кез келген τ_n бөліну үшін

$$\overline{S}(\tau_n)-\underline{S}(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$$

болады. $x', x''\in[a;b]$ үшін $\left||f(x'')|-|f(x')|\right|\leq|f(x'')-f(x')|$ теңсіздік орынды болып, одан

$$\sup\left||f(x'')|-|f(x')|\right|\leq\sup|f(x'')-f(x')|$$

теңсіздік келіп шығады. Демек, $\bar{\omega}_k\leq\omega_k$ теңсіздік орынды, мұнда $\bar{\omega}_k$ - $|f(x)|$ функцияның [$x_{k-1};x_k$] кесіндідегі секірмесі. Нәтижеде $\sum_{k=1}^{n}\bar{\omega}_k\Delta x_k\leq\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$ болады. Бұдан $|f(x)|$ функцияның [*a;b*] кесіндіде интегралданатындығы келіп шығады.

Енді, $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} \left|f(\xi_k)\right| \Delta x_k$ теңсіздікте $\lambda \to 0$ ұмтылғанда шекке өтсек, (3) теңсіздік келіп шығады.

2-ескерту. *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде интегралданатын болса, онда $|f(x)|$ функция да интегралданатындығын көрдік. Бұған кері болған нәтиже, жалпы айтқанда, дұрыс емес. Мысалы,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x \text{ иррационал болса,} \\ -1, & \text{егер } x \text{ рационал болса} \end{cases}$$

функция үшін $\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b 1 dx = b - a$ болады.

Демек, [*a;b*] кесіндіде $|f(x)|$ функция интегралданатын болады, бірақ *f(x)* функцияның Дирихле функциясы сияқты интегралданбайды.

10^0. (Анықталған интегралды бағалау) Егер *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде интегралданатын және $m \le f(x) \le M$ болса, онда

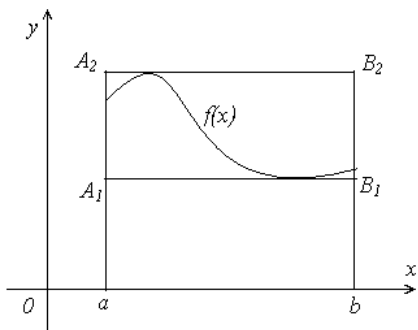
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (4)$$

теңсіздік орынды болады.

Дәлелдеу. Шартқа орай кез келген $x \in [a;b]$ үшін $m \le f(x) \le M$. Бұл теңсіздікке 7^0 қасиетті, сонан соң 2^0 және 1^0 қасиеттерді қолданамыз: $\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$, $m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx$,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

68-суретте [*a,b*] кесіндіде $f(x) \ge 0$ болған жағдай үшін 10^0 қасиеттің геометриялық мағынасы берілген. aA_1B_1b тік төртбұрыштың ауданы *m(b-a)* ga, aA_2B_2b тік төртбұрыш-тың ауданы *M(b-a)* санға тең. (4)



68-сурет

теңсіздіктен қисық сызықты трапецияның ауданы бірінші тік төртбұрыш ауданынан кіші емес, екінші тік төртбұрыш ауданынан үлкен еместігі келіп шығады.

1-*мысал*. $\int_0^1 \sqrt{9+x^2}\,dx$ интегралды бағалаңдар.

Шешу. [0;1] кесіндіде $9 \le 9+x^2 \le 10$ теңсіздік орынды. Бұдан $3 \le \sqrt{9+x^2} \le \sqrt{10}$. (2) формула бойынша $3(1-0) \le \int_0^1 \sqrt{9+x^2}\,dx \le \sqrt{10}(1-0)$ немесе $3 \le \int_0^1 \sqrt{9+x^2}\,dx \le \sqrt{10}$.

2-*мысал*. $\int_0^1 x dx$ және $\int_0^1 x^3 dx$ интегралдарды салыстырыңдар.

Шешу. [0;1] кесіндіде $x \ge x^3$ болғандықтан, $\int_0^1 x dx \ge \int_0^1 x^3 dx$ болады.

8-§. Орта мән жайындағы теоремалар

8.1-теорема. Егер *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде үзіліссіз болса, онда бұл кесіндіде *c* нүкте табылып,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \qquad (1)$$

теңдік орынды болады.

Дәлелдеу. *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде интегралданады. Демек 10^0-қасиетке орай $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. Бұдан

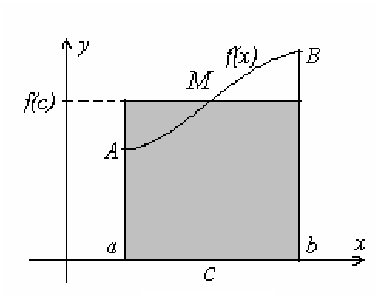
$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

теңсіздік келіп шығады. Енді Больцано-Кошидің 2-теоремасынан [*a;b*] кесіндіде *c* нүкте табылып,

$f(c)=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$, немесе $\int_a^b f(x)dx$ =*f(c)(b-a)* болады. Теорема дәлелденді.

Бұл теңдіктің маңызы төмендегідей: $f(x)\geq 0$ болғанда теңдіктің сол жағы қисық сызықты трапецияның ауданын, оң жағындағы *f(c)(b-a)* өрнек тік төртбұрыш ауданын өрнектейді.

Демек, *y=f(x)* функцияның графигінде *M(c;f(c))* нүкте табылып, қабырғаларының ұзындықтары *f(c)* және *b-a* болған тік төртбұрыштың ауданы жоғарыдан *y=f(x)*≥0, төменнен *Ox* осімен және *x=a, x=b* вертикаль түзулермен шенелген қисық сызықты трапецияның ауданына тең болады (69-сурет). Басқаша айтқанда, *f(x)* функцияның [*a;b*] кесіндіде қабылдайтын барлық мәндерінің орта арифметигі *f(c)* болады, яғни



69- сурет

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

Мұнда *f(c)*-берілген *f(x)* функцияның [*a;b*] кесіндідегі *орта мәні* деп аталады.

Мысал. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ функцияның [1;2] кесіндідегі орта мәнін табыңдар.

Шешу. (2) формула бойынша

$f(c)=\dfrac{1}{2-1}\int_1^2 \dfrac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$, демек, функцияның орта мәні ln2.

8.2-теорема. Егер [*a;b*] кесіндіде *f(x)* және *φ(x)* функциялар үзіліссіз, *φ(x)*≥ 0 (немесе ≤0) болса, онда [*a;b*] кесіндіде *c* нүкте табылып,

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)dx \qquad (3)$$

орынды болады.

Дәлелдеу. $f(x)$ және $\varphi(x)$ үзіліссіздігінен $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx,\ \int_a^b \varphi(x)dx$ интегралдар бар болады. Вейерштрасс теоремасына орай, $\sup\limits_{[a;b]} f(x)=M,\ \inf\limits_{[a;b]} f(x)=m$ бар және $m\leq f(x)\leq M$. $\varphi(x)\geq 0$ болғандықтан $m\varphi(x)\leq f(x)\varphi(x)\leq M\varphi(x)$ келіп шығады. Онда

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx \leq M\int_a^b \varphi(x)dx$$

болады. Бұл жерде екі жағдай болуы мүмкін.

1-жағдай: $\int_a^b \varphi(x)dx=0$ болсын. Бұл жағдайда соңғы теңсіздіктен $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx=0$ келіп шығады және (3) теңдік орынды болады.

2-жағдай: $\int_a^b \varphi(x)dx>0$ болсын.

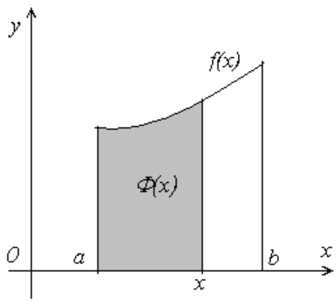
Онда $m\leq \dfrac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx}\leq M$ теңсіздік орынды. $[a;b]$ кесіндіде $f(x)$ функция үзіліссіз болғандықтан c нүкте табылып, $\dfrac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx}=f(c)$ болады. Соңғы теңдіктен (3) теңдік келіп шығады. Теорема дәлелденді.

9-§. Жоғары шекарасы айнымалы болған анықталған интеграл

f(x) функция $[a;b]$ кесіндіде үзіліссіз болсын. Онда бұл функция әр қандай $[a;x]\subset[a;b]$ кесіндіде интегралданатын болады және $\int_a^x f(t)dt$ интеграл *x* айнымалының $[a;b]$ кесіндідегі әрбір мәніне анық бір санды сәйкес қояды. Демек, бұл жағдайда интеграл өзінің жоғары шекарасының функциясы болады:

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt, \quad a\le x\le b.$$

Геометриялық тұрғыдан $f(t)\ge 0$ болғанда $\Phi(x)$ функция 70-суреттегі қисық сызықты трапецияның боялған бөлігінің ауданына тең болады.



70-сурет

$\Phi(x)$ функцияның *x* бойынша, яғни анықталған интегралдың жоғары шекарасы бойынша туындысын табамыз.

9.1-теорема. Үзіліссіз функция анықталған интегралының жоғары шекарасы бойынша туындысы бар және ол интеграл астындағы функцияның жоғары шекарасындағы мәніне тең:

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x)\ .$$

Дәлелдеу. $x,\ x+\Delta x\in[a;b]$ үшін $\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

болады. Орта мән жайындағы теоремаға орай $\xi\in[x;x+\Delta x]$ табылып, бұл нүктеде $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x$, яғни $\Delta\Phi(x)=f(\xi)\Delta x$

орынды болады. Бұдан $\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=f(\xi)$ келіп шығады. $\Delta x\to 0$ ұмтылғанда $\xi\to x$ және $f(x)$ функцияның үзіліссіздігін еске алсақ,

$\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\xi\to x} f(\xi)=f(x)$ болады.

Сонымен, $\Phi'(x)=\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'_x=f(x)$. Теорема дәлелденді.

Бұл теңдік $[a;b]$ кесіндіде үзіліссіз болған $f(x)$ функцияның алғашқы функциясы $\Phi(x)$ бар екендігін көрсетеді.

1-*мысал.* $\Phi(x)=\int\limits_3^x \sin t dt$ функция туындысын табыңдар.

Шешу. Жоғарыдағы теоремаға орай $\Phi'(x)=\sin x$ болады.

2-*мысал.* $\Phi(x)=\int\limits_1^{x^2} e^t dt$ функция туындысын табыңдар.

Шешу. Бұл жағдайда функция x жоғары шекараның функциясы, сол себепті күрделі функцияны дифференциалдау ережесінен пайдаланамыз:

$$\Phi'(x)=e^{x^2}\cdot(x^2)'=2xe^{x^2}.$$

Енді төменгі шекарасы айнымалы болған анықталған интегралды қарастырайық. Берілген $f(x)$ функция $[a;b]$ кесіндіде үзіліссіз болсын. Онда бұл функция кез келген $[x;b]\subset[a;b]$, $a\le x\le b$ кесіндіде интегралданатын және оның интегралы x айнымалыға тәуелді болады. Оны

$$F(x)=\int\limits_x^b f(t)dt$$

деп белгілейміз. Анықталған интеграл қасиетіне орай

$\int\limits_a^b f(t)dt=\int\limits_a^x f(t)dt+\int\limits_x^b f(t)dt=\Phi(x)+F(x)$ болады.

Бұдан $F(x)=\int\limits_a^b f(t)dt-\Phi(x)$ келіп шығады. $F(x)$ функцияның $\Phi(x)$ функция сияқты $[a;b]$ кесіндіде туындысы бар және

$$F'(x)=\left(\int_a^b f(t)dt-\Phi(x)\right)'=0-f(x)=-f(x) \quad \text{болады.}$$

10-§. Ньютон - Лейбниц формуласы, анықталған интегралды есептеу

10.1. Ньютон-Лейбниц формуласы. Анықталған интегралмен алғашқы функция арасында қандай байланыс бар екендігін қарастырамыз.

Айталық, *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде үзіліссіз және *F(x)* оның алғашқы функцияларынан бірі болсын: *F'(x)=f(x)*. Жоғарыда айтып өткеніміздей $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ *f(x)* функцияның алғашқы функциясы болады. Онда *Ф(x)=F(x)+C, C*=const болатындығы белгілі.

Демек, $\int_a^x f(t)dt$ =*F(x)+C* болады. Мұнда *x=a* деп алсақ, 0=*F(a)+C,* немесе *C=-F(a)* келіп шығады. Демек, $\int_a^x f(t)dt$ =*F(x)*-*F(a)* болады. Енді *x=b* деп алсақ,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \qquad (1)$$

болады, яғни [*a;b*] кесіндіде үзіліссіз болған функцияның анықталған интегралы бұл функцияның алғашқы функция-ларынан бірінің сол кесіндідегі өсімшесіне тең болады.

(1) формула интегралдық есептеудің негізгі формуласы болып, ол *Ньютон- Лейбниц формуласы* деп аталады.

(1) теңдіктің оң жағындағы *F(b)-F(a)* азайтынды, әдетте $F(x)\Big|_a^b$ көріністе жазылады. Бұл жағдайда Ньютон-Лейбниц формуласы төмендегідей жазылады:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ньютон-Лейбниц формуласы анықталған интегралды есептеу мәселесін анықталмаған интегралды есептеу мәселесіне алып келеді.

Мысалдар:

a) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = ln|x|\Big|_1^2 = ln2 - ln1 = ln2;$

b) $\int_0^\pi (1+sinx)dx = (x-cosx)\Big|_0^\pi = (\pi - cos\pi) - (0 - cos0) = \pi + 2;$

c) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{4+x}} = 2\sqrt{4+x}\Big|_0^5 = 2(\sqrt{9} - \sqrt{4}) = 2;$

d) $\int_{-1}^0 e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{2}(e^0 - e^2) = \frac{e^2 - 1}{2}.$

10.2. Анықталған интегралды бөліктеп интегралдау. Анықталмаған интегралдарды есептеуде бөліктеп интегралдау тәсілі негізгі тәсілдердің бірі еді. Жоғарыда көргеніміздей Ньютон-Лейбниц формуласы анықталған интеграл мен анықталмаған интеграл арасындағы байланысты өрнектейді. Сол себепті бөліктеп интегралдау тәсілін анықталған интегралдарды есептеуде қолдауға болады.

Айталық, $u(x)$ және $v(x)$ функциялар $[a;b]$ кесіндіде үзіліссіз туындылары бар болсын. Онда $(u\cdot v)'=u'v+uv'$ болып, $u(x)v(x)$ функция $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ үзіліссіз функцияның алғашқы функциясы болады. Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша

$$\int_a^b (u'v + uv')dx = (uv)\Big|_a^b. \text{ Бұдан } \int_a^b uv'dx = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b u'vdx$$

келіп шығады. $uv'dx=udv$ және $u'vdx=vdu$ екендігін еске алсақ,

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (2)$$

анықталған интегралды бөліктеп интегралдау формуласы келіп шығады.

Мысал. $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Мұнда *u=x, dv=cosxdx* деп алсақ, *du=dx, v=sinx* келіп шығады.

Демек, (2) формулаға орай

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = \left(x\sin x\right)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi - 2}{2}.$$

10.3. Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру. Анықталмаған интегралдарды есептеуде жаңа айнымалыны енгізу тәсілімен қарапайым интегралға өтіп, мына

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

қатынастан пайдаланған едік. Осыған ұқсас мәселені анықталған интеграл үшін де қарастырайық.

Айталық, *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде анықталған және үзіліссіз болсын.

10.1-теорема. Егер *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде үзіліссіз, $x=\varphi(t)$ функция $[\alpha;\beta]$ кесіндіде үзіліссіз дифференциалданушы, $x=\varphi(t)$ функцияның мәндері жиыны [*a;b*] кесінді, және $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

теңдік орынды болады.

Дәлелдеу. *f(x)* функция [*a;b*] кесіндіде үзіліссіз болғандықтан сол кесіндіде оның алғашқы *F(x)* функциясы бар. Шарт бойынша $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ болғандықтан Ньютон-Лейбниц формуласынан

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta dF(\varphi(t)) =$$

$$= \int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$ келіп шығады. Теорема дәлеледенді.

Анықталған интегралды айнымалыларды алмастыру тәсілімен есептегенде интеграл астындағы өрнекпен бірге интегралдау шекаралары да өзгеретінін ескертіп өтеміз.

1-*мысал.* $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Бұл интегралда $x=sint$ алмастыруды орындаймыз. Онда $x=sint$ функция жоғарыдағы теореманың барлық шарттарын $[0;\frac{\pi}{2}]$ кесіндіде қанағаттандырады және $dx=costdt$, a=0 болғанда α=0, b=1 болғанда β=π/2. Демек, (3) формула бойынша

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt =$$

$$=(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$ болады.

2-*мысал.* $\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ интегралды есептеңдер.

Шешу. $x=t^2$ деп айнымалыны алмастырамыз, онда $dx=2tdt$ және a=0 болғанда $t_1=\sqrt{a}=0$, b=9 болғанда $t_2=\sqrt{b}=3$ болады. (3) формула бойынша

$$\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^3 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^3 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2(t-\ln|1+t|)\Big|_0^3 = 6-2\ln 4.$$

3-*мысал.* $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$ интегралды есептеңдер.

Шешу. $sinx=t$ деп алмастыру орындаймыз. Онда $cosxdx=dt$, $t_1=sin(\pi/6)=1/2$, $t_2=sin(\pi/3)=\sqrt{3}/2$ болады. (3) формулаға орай

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} t^{-5}dt = -\frac{1}{4t^4}\Big|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{4}\left(16-\frac{16}{9}\right) = \frac{32}{9}.$$

ЖАТТЫҒУЛАР

1. Анықталған интеграл анықтамасынан пайдаланып, төмендегі интегралдарды есептеңдер.

a) $\int_0^1 (x+1)dx$ ([0; 1] кесіндіні *n* тең бөлікке бөліңдер және $\xi_k = \frac{1}{k}$ деп алыңдар).

b) $\int_0^1 x^2 dx$ ([0;1] кесіндіні *n* тең бөлікке бөліңдер және $\xi_k = \frac{1}{k}$ деп алыңдар).

c) $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$ (кесіндіні *n* тең бөлікке бөліңдер және $\xi_k = \sqrt{x_{k-1}\ x_k}$ деп алыңдар).

d) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ ([1;2] кесіндіні геометриялық прогрессия құрайтын нүктелер көмегімен *n* бөлікке бөліп, $\xi_k = q^k$ деп алыңдар).

2. [-*a;a*] кесіндіде анықталған *f(x)* функция үзіліссіз және

a) жұп болса,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx;$$

b) тақ болса,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

болатындығын көрсетіңдер.

3. Егер *f(x)* функция периодты, периоды T≠0 болса және [0;T] кесіндіде үзіліссіз болса, онда $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ болатындығын дәлелдеңдер.

4. *f(x)*=3*x*^{2}+1 функцияның [0,1] кесіндідегі орта мәнін табыңдар.

5. $y=\int\limits_{2}^{x}\cos t dt$ функцияның туындысын табыңдар.

6. $y=\int\limits_{2}^{\sqrt{x}}(t^3+1)dt$ функцияның туындысын табыңдар.

7. $\int\limits_{0}^{1}e^x dx$ және $\int\limits_{0}^{1}3^x dx$ интегралдарды салыстырыңдар.

8. Анықталған интеграл қасиеттерінен пайдаланып, $2<\int\limits_{-2}^{4}x^2dx<25$ теңсіздікті дәлелдеңдер.

9. Анықталған интегралдарды есептеңдер.

a) $\int\limits_{1}^{8}(4x-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})dx$; b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin 3x dx$; c) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{x}{2}dx$;

d) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\sin 7x dx$; e) $\int\limits_{1}^{3}\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$; f) $\int\limits_{4}^{25}\frac{dx}{\sqrt{x}-1}$;

g) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\cos x dx$; h) $\int\limits_{0}^{e-1}\ln(1+x)dx$.

XII ТАРАУ. МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАР

Біз алдынғы тарауда [$a;b$] аралықта берілген $f(x)$ функцияның анықталған интегралы ұғымын үйрендік. Мұнда интегралдау облысының кесінді екендігі, функцияның шенелгендігі маңызды еді.

Енді интеграл ұғымын жалпылауға бола ма деген сұраққа жауап іздейміз. Әрине, интеграл ұғымын жалпылағанымызда Риман интегралының негізгі қасиеттері сақталуы қажет.

1-§. Интегралдау облысы шенелмеген меншіксіз интеграл

$f(x)$ функция [$a;+\infty$) шектеусіз аралықта анықталған болып, оның кез келген [$a;\ t$] шекті бөлігінде интегралданатын болсын, яғни кез келген t ($t>a$) үшін мына

$$\int_a^t f(x)dx$$

интеграл бар болсын. Бұл интеграл берілген $f(x)$ функция үшін тек t айнымалының функциясы болады:

$$\int_a^t f(x)dx = F(t), \qquad t \in [a;+\infty).$$

1-анықтама. $t \to +\infty$ ұмтылғанда $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ функцияның шегі $f(x)$ функцияның [$a;+\infty$) аралықтағы *меншіксіз интегралы* деп аталады және ол $\int_a^\infty f(x)dx$ деп белгіленеді. Демек,

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx \qquad (1)$$

2-анықтама. Егер $t \to +\infty$ ұмтылғанда $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ функцияның шекті шегі бар болса, (1) меншіксіз интеграл *жинақты* деп аталады, *f(x)* функция шектеусіз $[a;+\infty)$ *аралықта интегралданатын функция* деп аталады.

Егер $t\to+\infty$ ұмтылғанда *F(t)* функцияның шегі шектеусіз болса немесе жоқ болса, (1) *меншіксіз интеграл жинақсыз* деп аталады.

1-*мысал.* $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, интегралды жинақтылыққа зерттеңдер.

Шешу. Егер $\alpha\neq1$ болса, онда

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^t=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}(t^{1-\alpha}-1),$$

Демек,

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\dfrac{-1}{1-\alpha}, & \text{егер } \alpha>1,\\ \infty, & \text{егер } \alpha<1.\end{cases}$$

Егер $\alpha=1$ болса, онда

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{x}=\lim_{t\to+\infty}\ln|x|\,\Big\|_1^t=\lim_{t\to+\infty}\ln t=\infty\,.$$

Демек, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ интеграл $\alpha>1$ болғанда жинақты, $\alpha\le1$ болғанда жинақсыз болады.

2-*мысал.* $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$, $a>0$ меншіксіз интегралды есептеңдер.

Шешу.

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-ax}dx=\lim_{t\to+\infty}\frac{-e^{-ax}}{a}\bigg|_0^t=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-e^{-at}}{a}+\frac{e^0}{a}\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{ae^{at}}\right)=\frac{1}{a}.$$

3-*мысал.* $\int_0^{+\infty}\cos x dx$ интегралды жинақтылыққа зерттеңдер.

Шешу. Бұл меншіксіз интеграл жинақсыз болады, себебі $t \to +\infty$ ұмтылғанда

$$F(t) = \int_0^t \cos x dx = \sin t$$

функцияның шегі жоқ.

Функцияның $(-\infty; b]$ аралық бойынша меншіксіз интегралы жоғарыдағыдай анықталады.

f(x) функция $(-\infty; b]$ аралықта берілген болып, бұл аралықтың кез келген $[r; b]$ бөлігінде интегралданатын, яғни

$$\int_r^b f(x)dx = \Phi(r)$$

интеграл бар болсын.

3-анықтама. $r \to -\infty$ ұмтылғанда $\Phi(r) = \int_r^b f(x)dx$ функцияның шегі *f(x)* функцияның $(-\infty; b]$ аралықтағы *меншіксіз интегралы* деп аталады және ол $\int_r^b f(x)dx$ деп белгіленеді. Демек,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{r \to -\infty} \Phi(r) = \lim_{r \to -\infty} \int_r^b f(x)dx \qquad (2)$$

4-анықтама. Егер $r \to -\infty$ ұмтылғанда $\Phi(r) = \int_r^b f(x)dx$ функцияның шекті шегі бар болса, (2) меншіксіз интеграл *жинақты* деп аталады, *f(x)* шектеусіз $(-\infty; b]$ аралықта интегралданатын функция деп аталады.

Егер $r \to -\infty$ ұмтылғанда *Ф(r)* функцияның шегі шектеусіз болса немесе жоқ болса, (2) интеграл *жинақсыз* деп аталады.

4-*мысал*. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$ интегралды жинақтылыққа зерттеңдер.

Шешу. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{r\to-\infty}\int\limits_{r}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{r\to-\infty}arctgx\Big|_r^0=$

$$=\lim_{r\to-\infty}(arctg0-arctgr)=\frac{\pi}{2}\ .$$

Демек, интеграл жинақты және $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$.

Айталық, *f(x)* функция (-∞;+∞) интервалда үзіліссіз болсын. Онда қандай да бір $c\in(-\infty;+\infty)$ үшін $\int\limits_{c}^{+\infty}f(x)dx$ және $\int\limits_{-\infty}^{c}f(x)dx$ интегралдар қосындысы бұл функцияның екі интегралдау шекаралары да шектеусіз болған меншіксіз интегралы деп аталады және төмендегідей жазылады: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$. Демек,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{+\infty}f(x)dx\,,$$

анықтама бойынша

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{r\to-\infty}\int_{r}^{c}f(x)dx+\lim_{t\to\infty}\int_{c}^{t}f(x)dx \qquad (3)$$

деп қабылдаймыз.

Егер (3) интервалдағы екі шек те бар және шекті болса, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ интеграл жинақты, керісінше болса, жинақсыз деп аталады.

Ескерту. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ интегралдың жинақтылығы с ны таңдауға тәуелді емес. Бұл тұжырымды дәлелдеуді оқырмандарға ұсынамыз.

5-*мысал.* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ интегралды жинақтылыққа зерттеңдер.

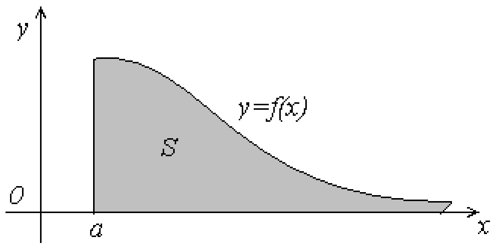
Шешу. (3) формулада $c=0$ деп аламыз. Онда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{r\to-\infty}\int_{r}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\lim_{r\to-\infty} arctgx\Big|_r^0+\lim_{t\to+\infty} arctgx\Big|_0^t=\lim_{r\to-\infty}(arctg0-arctgr)+$$

$$+\lim_{t\to+\infty}(arctgt-arctg0)=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi=\pi.$$

Геометриялық тұрғыдан $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ жинақты меншіксіз интеграл $y=f(x)\geq 0$ қисық, $x=a$, $y=0$ түзулермен шенелген және Ox осі бағытында шектеусіз созылған фигураның шекті S ауданы бар екендігін білдіреді (71-сурет). Осыған ұқсас, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ және $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ жинақты меншіксіз интегралдарға да геометриялық мағына беруге болады.



71-сурет

2-§. Меншіксіз интегралдың қасиеттері

Жоғарыда енгізілген меншіксіз интегралдардың анықталған интегралдарға ұқсас қасиеттері бар:

1^0. Егер $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интеграл жинақты және k-тұрақты сан болса, $\int_{a}^{+\infty} kf(x)dx$ да жинақты және

$$\int_a^{+\infty} kf(x)dx = k\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

теңдік орынды болады.

2^0. Егер $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ және $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ жинақты болса, онда $\int_a^{+\infty}(f(x)\pm\varphi(x))dx$ жинақты және

$$\int_a^{+\infty}(f(x)\pm\varphi(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

теңдік орынды болады.

Ескерту. Берілген интегралдардың жинақтылығы жеткілікті шарт болып, қажетті шарт емес. Мысалы,

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad \varphi(x)=-\frac{1}{x+1},\quad x\in[1;+\infty)$$

болсын. Онда

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{t\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^t=\lim_{t\to+\infty}\ln t=+\infty,$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{-1}{x+1}dx=-\lim_{t\to+\infty}\ln|x+1|\Big|_1^t=-\lim_{t\to+\infty}[\ln(t+1)-\ln 2]=-\infty$$ болады.

Демек, бұл меншіксіз интегралдар жинақсыз. Функциялар қосындысы үшін

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\lim_{t\to+\infty}(\ln|x|-\ln|x+1|)\Big|_1^t=\lim_{t\to+\infty}(\ln t-\ln(t+1)+\ln 2)=$$

$\lim\limits_{t\to+\infty}\ln\frac{t}{t+1}+\ln 2=\ln 1+\ln 2=\ln 2$ жинақты меншіксіз интеграл болады.

3^0. Егер *f(x) функцияның* $[a;+\infty)$ аралық бойынша $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы жинақты болса, бұл функцияның $[b;+\infty)$ $(a<b)$ аралық бойынша $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ интегралы да жинақты және

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$$

орынды болады.

4^0. Егер $x\in[a;+\infty)$ үшін $f(x)\geq 0$ және бұл функцияның меншіксіз интегралы жинақты болса, онда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 0$$

болады.

5^0. Егер $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялар $[a;+\infty)$ аралықта анықталған, үзіліссіз және $0\leq f(x)\leq\varphi(x)$ шартты қанағаттандырса, онда

a) $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ жинақты болғанда, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ да жинақты болады;

b) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ жинақсыз болғанда, $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ да жинақсыз болады.

Мысал ретінде 5^0 қасиеттің дәлелдеуін келтіреміз. Қалған қасиеттер тікелей меншіксіз интеграл және оның анықтамаларынан келіп шығады.

5^0 қасиеттің дәлелдеуі. Анықталған интеграл қасиеттеріне орай кез келген $t > a$ үшін $\int_a^{t} f(x)dx \leq \int_a^{t} \varphi(x)dx$.

Егер $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ жинақты болса, онда

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx \le \int_a^t \varphi(x)dx \le \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx < +\infty$$

қатынастар орынды болады. Демек, $F(t)$ функция жоғарыдан шекті санмен шенелген. $f(x) \ge 0$ болғандықтан, $F(t)$ функция өспелі болады. Бұлардан $\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$ шектің бар екендігі, яғни $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ жинақтылығы келіп шығады.

Керісінше, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ жинақсыз болса, $\int_a^t f(x)dx \le \int_a^t \varphi(x)dx$ теңсіздіктен $t\to+\infty$ ұмтылғанда сол жағы шенелмеген. Бұдан оң жағының шегі шекті еместігі, яғни $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ жинақсыздығы келіп шығады.

6-*мысал*. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ интегралды жинақтылыққа зерттеңдер.

Шешу. 5^0 қасиеттен пайдаланамыз. Берілген интегралды $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ интегралмен салыстырамыз, бұл интеграл $\alpha>1$ болғанда жинақты (1-мысал). $(1;+\infty)$ интервалда $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}$ болғандықтан, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ интегралдың жинақтылығынан берілген $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ интегралдың жинақтылығы келіп шығады.

3-§. Абсолют жинақты интегралдар

Төменде меншіксіз интеграл жинақты екендігінің қажетті және жеткілікті шартын дәлелдеусіз келтіреміз [2, 210-б.].

3.1-теорема (Коши теоремасы). Төмендегі

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интеграл жинақты болуы үшін кез келген

ε оң сан алынғанда да, t_0 $(t_0>a)$ саны табылып, $t' > t_0$, $t''> t_0$ шарттарды қанағаттандыратын кез келген t', t'' үшін

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

теңсіздіктің орынды болуы қажетті және жеткілікті.

Бұл теоремадан меншіксіз интегралдардың жинақтылығын анықтауда пайдалану қиын, бірақ теореманың теориялық маңызы бар және одан төмендегі теореманы дәлелдеуде пайдаланамыз.

3.2-теорема. Егер $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ меншіксіз интеграл жинақты болса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интеграл да жинақты болады.

Дәлелдеу. Шартқа орай $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ жинақты интеграл. 3.1-теоремаға орай, кез келген ε оң сан алынғанда да t_0 $(t_0>a)$ саны табылып, $t' > t_0$, $t''> t_0$ $(t''>t')$ болғанда $\int_{t'}^{t''} |f(x)|dx < \varepsilon$ теңсіздік орындалады. Бірақ

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| \le \int_{t'}^{t''} |f(x)|dx .$$

Демек, кез келген ε оң сан алынғанда да t_0 $(t_0>a)$ саны табылып, $t' > t_0$, $t''> t_0$ болғанда $\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right|$ <ε болады. 3.1-

теоремаға орай $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралдың жинақтылығы келіп шығады. Теорема дәлелденді.

1-анықтама. Егер $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ меншіксіз интеграл жинақты болса, онда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *абсолют жинақты меншіксіз интеграл* деп аталады, *f(x)* функция $[a;+\infty)$ аралықта *абсолют интегралданатын функция* деп аталады.

2-анықтама. Егер $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ жинақты болып, $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ жинақсыз болса, онда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интеграл *шартты жинақты* деп аталады.

Мысал. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ интегралды жинақтылыққа зерттеңдер.

Шешу. Алдымен $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}dx$ интегралды тексереміз. $(1;+\infty)$ интервалда $\frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ және $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ жинақты болғандықтан, 5^0 қасиетге орай $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}dx$ интеграл жинақты болады. Демек, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ интеграл абсолют жинақты болады.

Жоғарыдағы қасиеттерді $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ интеграл үшін де баяндауға болады.

4-§. Меншіксіз интегралдарды есептеу

Енді меншіксіз интегралдарды есептеумен шұғылданамыз.

а) Ньютон-Лейбниц формуласы. Айталық, *f(x)* функция $[a;+\infty)$ интервалда үзіліссіз болсын. Меншіксіз интеграл анықтамасынан және Ньютон - Лейбниц формуласынан

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}(F(t)-F(a))$$

келіп шығады, мұнда *F(x)* функция *f(x)* функцияның алғашқы функциясы. Егер $t\to+\infty$ ұмтылғанда *F(t)* функцияның шегі бар болса, бұл шекті *F(t)* функцияның $+\infty$ дегі мәні деп қабылдауға болады, яғни

$$\lim_{t\to+\infty} F(t)=F(+\infty).$$

Бұдан, *f(x)* функцияның меншіксіз интегралы үшін Ньютон-Лейбниц формуласы орынды болуы келіп шығады:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

b) Бөліктеп интегралдау. Айталық, *u(x)* және *v(x)* әрбірі $[a;+\infty)$ аралықта үзіліссіз, *u'(x)* және *v'(x)* туындылары бар болсын. Егер $\int_a^{+\infty} v(x)du(x)$ меншіксіз интеграл жинақты және

$$\lim_{t\to+\infty} u(t)=u(+\infty),\ \lim_{t\to+\infty} v(t)=v(+\infty)$$

шектер шекті болса, онда $\int_a^{+\infty} u(x)dv(x)$ жинақты және

$$\int_a^{+\infty} u(x)dv(x) = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^{+\infty} v(x)du(x)$$

болады.

Мысал. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ меншіксіз интегралды есептеңдер.

Шешу. Бөліктеп интегралдау тәсілінен пайдаланамыз. Онда $u(x)=x$, $dv(x)=e^{-x}dx$, $du(x)=dx$, $v(x)=-e^{-x}$, $(u(x)v(x))\Big|_0^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-x})=-$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$, $\int\limits_0^{+\infty} v(x)du(x) = \int\limits_0^{+\infty}(-e^{-x})dx = = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-x}\Big|_0^t = 0$-1=-1 болады.

Демек, $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ =0-(-1)=1.

с) Айнымалыны алмастыру. Айталық, $f(x)$ функция $[a;+\infty)$ аралықта берілген болсын. Төмендегі $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралда $x=\varphi(t)$ алмастыру енгіземіз. Мұнда

1) $\varphi(t)$ функция $[\alpha;+\infty)$ аралықта берілген және үзіліссіз $\varphi'(t)$ туындысы бар;

2) $\varphi(t)$ функция $[\alpha;+\infty)$ аралықта қатаң өспелі;

3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(+\infty)=\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$ болсын.

Онда $\int\limits_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ жинақты екендігінен $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ жинақтылығы және $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ теңдік орынды болуы келіп шығады.

5-§. Шенелмеген функцияның меншіксіз интегралы

Кез келген ε оң сан, ($\varepsilon<b-a$) үшін $f(x)$ функция $[a;b-\varepsilon]$ кесіндіде шенелген және интегралданатын болып, b нүктенің маңайында шенелмеген болсын. Бұл жағдайда b нүкте $f(x)$ функцияның *дербес нүктесі* деп аталады.

Демек, кез келген t $(a<t<b)$ үшін $\int\limits_a^t f(x)dx$ интеграл бар және t айнымалының функциясы болады:

$$\int_a^t f\ (x)dx = F(t),\ a<t<b.$$

1-анықтама. $t \to b\text{-}0$ ұмтылғанда $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ функцияның шегі шенелмеген *f(x)* функцияның [*a;b*) аралықтағы *меншіксіз интегралы* деп аталады және ол $\int_a^b f\ (x)dx$ деп белгіленеді.

Демек,

$$\int_a^b f\ (x)dx = \lim_{t \to b-0} F(t) = \lim_{t \to b-0} \int_a^t f(x)dx$$

Егер $t \to b$-0 ұмтылғанда *F(t)* функцияның шекті шегі бар болса, меншіксіз интеграл *жинақты* деп аталады, *f(x)* функция [*a;b*) аралықта *интегралданатын функция* деп аталады.

Егер $t \to b$-0 ұмтылғанда *F(t)* функцияның шегі шектеусіз, немесе жоқ болса, $\int_a^b f\ (x)dx$ меншіксіз интеграл *жинақсыз* деп аталады.

Дәл жоғарыдағыдай, *a* нүкте *f(x)* функцияның дербес нүктесі болғанда (*a;b*] аралық бойынша меншіксіз интеграл анықталады.

f(x) функция (*a;b*] аралықта берілген болып, *a* нүкте сол функцияның дербес нүктесі болсын. Бұл функция (*a;b*] аралықтың кез келген [*t;b*] ($a<t<b$) бөлігінде интегралданатын, яғни $\int_t^b f(x)dx$ $=F(t)$ интеграл бар болсын.

2-анықтама. $t \to a$+0 ұмтылғанда $F(t) = \int_t^b f(x)dx$ функцияның $\lim_{t \to a+0} F(t)$ шегі шенелмеген *f(x)* функцияның (*a;b*] аралықтағы *меншіксіз интегралы* деп аталады және ол $\int_a^b f\ (x)dx$ деп белгіленеді. Демек,

$$\int_a^b f\ (x)dx = \lim_{t\to a+0} F(t) = \lim_{t\to a+0} \int_t^b f(x)dx .$$

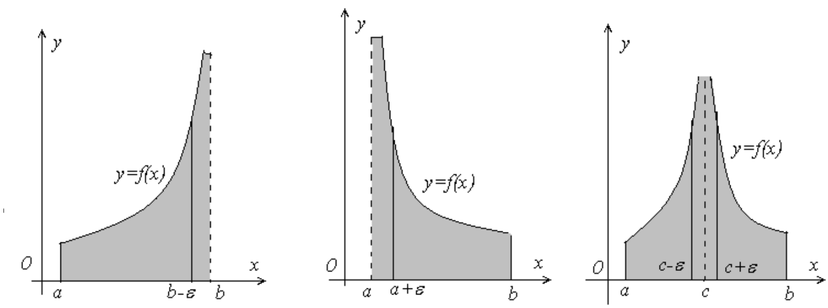
Егер $t \to a+0$ ұмтылғанда $F(t)$ функцияның шегі шекті болса, $\int_a^b f(x)dx$ меншіксіз интеграл *жинақты,* *f(x)* функция ($a;b$] аралықта *интегралданатын* функция деп аталады. Егер $t\to a+0$ ұмтылғанда *F(t)* функцияның шегі шектеусіз, немесе жоқ болса, онда $\int_a^b f(x)dx$ меншіксіз интеграл жинақсыз деп аталады.

Егер *f(x)* функция [$a;b$] кесіндінің қандай да бір ішкі c нүктесінде $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ болса, онда интегралды екі интегралдың қосындысы көріністе өрнектейміз:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{t\to c-0}\int_a^t f(x)dx + \lim_{\tau\to c+0}\int_\tau^b f(x)dx .$$

Егер теңдіктің оң жағындағы шектер бар болса, онда меншіксіз интеграл жинақты деп аталады, керісінше болса, жинақсыз деп аталады.

Геометриялық тұрғыдан шенелмеген функцияның меншіксіз интегралы *y=f(x)* қисық, $x=a$, $x=b$ түзулермен шенелген, $x\to b-0$ ұмтылғанда ($x\to a+0$, $x\to c\pm 0$) *Oy* осі бағытында шектеусіз созылған фигураның шекті ауданы бар екендігін білдіреді (72-сурет).



72-сурет

2-*мысал.* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ интегралды жинақтылыққа зерттеңдер.

Шешу. Мұнда x=1 нүкте интеграл астындағы функцияның дербес нүктесі. Бұл жағдайда

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1-0}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1-0}(-2\sqrt{1-x}\Big|_0^t = \lim_{t\to 1-0}(-2\sqrt{1-t}+2) = 2.$$

Демек, берілген интеграл жинақты және оның мәні 2 ге тең.

3-*мысал.* $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ интегралды жинақтылыққа зерттеңдер.

Шешу. Анықтама бойынша

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0+0}\int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0+0} \ln|x|\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0+0}(\ln 1 - \ln t) = +\infty,$$

яғни бұл меншіксіз интеграл жинақсыз.

4-*мысал.* $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}, a<b$ интегралды жинақтылыққа зерттеңдер.

Шешу. Екі жағдайды қараймыз. 1-жағдай. $\alpha\neq 1$ болсын. Онда

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{t\to b-0}\int_a^t \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\lim_{t\to b-0}\int_a^t (b-x)^{-\alpha}d(b-x) = -\lim_{t\to b-0}\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^t =$$

$$= -\frac{1}{1-\alpha}\lim_{t\to b-0}((b-t)^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}) = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha<1, \\ \infty, & \alpha>1. \end{cases}$$

2-жағдай. α=1 болсын. Онда $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)} = \lim_{t\to b-0}\int_a^t \frac{dx}{(b-x)} =$

$$= -\lim_{t\to b-0}\ln|b-x|\,\Big|_a^t = -\lim_{t\to b-0}(\ln|b-t|-\ln|b-a|) = +\infty.$$

Демек, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ интеграл $\alpha<1$ болғанда жинақты, $\alpha\geq 1$ болғанда жинақсыз болады.

6-§. Шенелмеген функцияның меншіксіз интегралының қасиеттері

Бұл параграфда дербес нүктесі b болған $f(x)$ функцияның $[a;b)$ аралық бойынша алынған $\int_a^b f(x)dx$ меншіксіз интегралының қасиеттерін келтіреміз. Бұл қасиеттерді дербес нүктесі a болған функцияның $(a;b]$ аралық бойынша алынған меншіксіз интегралдары үшін де айтуға болады.

1^0. Егер $f(x)$ функцияның $[a;b)$ аралықтағы меншіксіз интегралы жинақты болса, бұл функцияның $[c;b)$, $(a<c<b)$ аралық бойынша интегралы да жинақты және

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ теңдік орынды болады.

2^0. Егер $\int_a^b f(x)dx$ және $\int_a^b \varphi(x)dx$ интегралдар жинақты болса, онда кез келген α, β сандар үшін $\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta\varphi(x))dx$ интеграл да жинақты, $\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta\varphi(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \pm \beta\int_a^b \varphi(x)dx$ теңдік орынды болады.

3^0. Егер $\int_a^b f(x)dx$ интеграл жинақты болып, $[a;b)$ аралықта $f(x)\geq 0$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ болады.

4^0. Егер $\int_a^b f(x)dx$ және $\int_a^b \varphi(x)dx$ интегралдар жинақты, $[a;b)$ аралықта $f(x) \leq \varphi(x)$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$ болады.

5^0. *f(x)* және $\varphi(x)$ функциялар [$a;b$) аралықта үзіліссіз, b нүкте олардың дербес нүктесі және $0\le f(x)\le\varphi(x)$, $x\in[a;b)$ болсын. Онда

a) $\int_a^b \varphi(x)dx$ жинақты болса, $\int_a^b f(x)dx$ жинақты болады;

b) $\int_a^b f(x)dx$ жинақсыз болса, $\int_a^b \varphi(x)dx$ жинақсыз болады.

Мысал ретінде 3^0 қасиетті дәлелдейміз. Қалған қасиеттер тікелей меншіксіз интеграл және оның жинақтылығы анықтамаларынан келіп шығады.

3^0 қасиеттің дәлелдеуі. Анықталған интегралдың қасиеттеріне орай $f(x)\ge 0$ болса, онда кез келген $t\in[a;b)$ үшін $\int_a^t f(x)dx\ge 0$ болады. Бұдан $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to b-0}\int_a^t f(x)dx\ge 0$ екендігі келіп шығады.

7-§. Шенелмеген функцияның меншіксіз интегралын есептеу

Енді шенелмеген функцияның меншіксіз интегралын есептеумен шұғылданамыз.

а) Ньютон-Лейбниц формуласы.

Айталық, *f(x)* функция [$a;b$) аралықта үзіліссіз болсын. Бұл жағдайда сол аралықта оның алғашқы функциясы *F(x)* бар болады.

Егер $x\to b-0$ ұмтылғанда *F(x)* функцияның шекті шегі бар болса, бұл шекті *F(x)* функцияның b нүктедегі мәні деп қабылдаймыз, яғни $\lim\limits_{x\to b-0} F(x)=F(b)$.

Меншіксіз интеграл анықтамасынан және анықталған интегралдар үшін Ньютон-Лейбниц формуласынан пайдаланып,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)dx=\lim_{t\to b-0}(F(t)-F(a))=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

екендігін табамыз. Бұл, жоғарыдағы келісу негізінде, *f(x)* функцияның меншіксіз интегралы үшін Ньютон - Лейбниц формуласы орынды екендігін көрсетеді: $\int_a^b f(x)dx$ *=F(b)-F(a).*

b) Бөліктеп интегралдау.

u(x) және *v(x)* функциялардың әрбірі [*a;b*) интервалда үзіліссіз *u'(x)* және *v'(x)* туындылары бар, ал *b* нүкте *v(x)u'(x)* және *u(x)v'(x)* функциялардың дербес нүктесі болсын.

Егер $\int_a^b v(x)du(x)$ меншіксіз интеграл жинақты және $\lim\limits_{t\to b-0} u(t)v(t)$ шек бар болса, онда $\int_a^b u(x)dv(x)$ меншіксіз интеграл жинақты болып, $\int_a^b u(x)dv(x) = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$ теңдік орынды болады. Мұнда *u(b)v(b)*= $\lim\limits_{t\to b-0} u(t)v(t)$.

c) Айнымалыны алмастыру.

f(x) функция [*a;b*) интервалда анықталған, *b* оның дербес нүктесі болсын. $\int_a^b f$ *(x)dx* меншіксіз интегралды қарастырайық. Сол интегралда *x=*φ*(t)* алмастыру орындаймыз, мұнда $\varphi(t)$ функция [$\alpha;\beta$) аралықта үзіліссіз $\varphi'(t) > 0$ туындысы бар және $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Бұл жағдайда егер $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ меншіксіз интеграл жинақты болса, $\int_a^b f$ *(x)dx* меншіксіз интеграл жинақты және $\int_a^b f$ *(x)dx* = $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ теңдік орынды болады.

Жоғарыда біз дербес нүктесі *b* болған *f(x)* функцияның [*a;b*) аралық бойынша алынған меншіксіз интегралын есептеу тәсілдерін көрдік. Бұл тәсілдерді дербес нүктесі *a* болған функцияның (*a;b*] аралық бойынша алынған меншіксіз интегралын есептеуде де қолдауға болады.

1-*мысал*: $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ интегралды есептеңдер.

Шешу. Берілген интегралда $x = \varphi(t) = t^2$ алмастыруды орындаймыз. $\varphi(t)$ функция (0;1] аралықта $\varphi'(t)=2t>0$ үзіліссіз туындысы бар және $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$. Демек,

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{2tdt}{(1+t^2)t} = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2\,arctgt\Big|_0^1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$ болады.

Шекарасы шектеусіз болған меншіксіз интегралдағыдай шенелмеген функцияның меншіксіз интегралы үшін абсолют жинақтылық ұғымын енгізуге болады.

($a;b$] кесіндіде анықталған және a нүкте дербес нүктесі болған $f(x)$ функция үшін $\int_a^b |f(x)|dx$ жинақты болса, $\int_a^b f(x)dx$ *абсолют жинақты меншіксіз интеграл* деп аталады, $f(x)$ функция ($a;b$] аралықта *абсолют интегралданатын функция* деп аталады.

ЖАТТЫҒУЛАР

1. Меншіксіз интегралдарды есептеңдер.

a) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; b) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}$; c) $\int\limits_{0}^{+\infty}x^2e^{-x}dx$

d) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; e) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; f) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

2. Меншіксіз интегралдарды жинақтылыққа зерттеңдер.

a) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$; b) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{x+x^3}}dx$; c) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$;

d) $\int\limits_{0}^{+\infty}\sin x dx$; e) $\int\limits_{0}^{1}x\ln x dx$; f) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

3. Егер $f(x)$ функция кез келген кесіндіде интегралданатын және $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ меншіксіз интеграл бар болса, онда кез келген $a,b\in\mathbb{R}$ сандар үшін

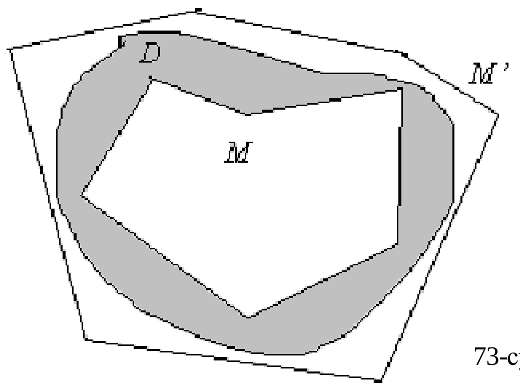
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{a}f(x)dx+\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{b}f(x)dx+\int\limits_{b}^{+\infty}f(x)dx$$

орынды болатынын дәлелдеңдер.

XIII ТАРАУ. АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДАРДЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

1-§. Аудан ұғымының анықтамасы. Квадратталушы облыс. Ауданның аддитивтігі

Жазықтықта тұйық қисықпен шенелген D жазық фигура (облыс) берілген болсын (73-сурет). M бұл фигураға ішкі сызылған, ал M' сырттай сызылған көпбұрыш болсын. Олардың аудандарын сәйкесінше σ және σ' деп белгілейміз. Мұндай көпбұрыштар шектеусіз көп болатындығы айқын. Кез келген M көпбұрыш M' жиынның жиыншасы болып, σ≤σ' болады. Егер қандай да бір M' көпбұрышты бекітіп, оның σ' ауданын қарайтын болсақ, барлық $M\subset D$ көпбұрыштар үшін олардың аудандары {σ} сандар жиыны жоғарыдан сол тұрақты σ' санмен шенелген болады. Демек, {σ} сандар жиынының анық жоғары шекарасы бар және $\sup\limits_{M\subset D}\sigma \le \sigma'$ болады, осыған ұқсас қандай да бір M көпбұрышты бекітіп, оның ауданын σ десек, онда {σ'} сандар жиыны төменнен шенелген болып, $\inf\limits_{M'\supset D}\sigma' \ge \sigma$ теңсіздік орынды болады.



73-сурет

Егер $\overline{S}=\sup\sigma$ және $\underline{S}=\inf\sigma'$ белгілеулерді енгізсек, кез келген M, σ және M', σ' үшін

$$\sigma \le \overline{S} \le \underline{S} \le \sigma' \qquad (1)$$

қатынастар орынды болады.

1-анықтама. Егер берілген *D* фигура үшін $\overline{S}=\underline{S}$ болса, *D* *ауданы бар немесе квадратталушы фигура* деп аталады және оның ауданы сол

$$S=\overline{S}=\underline{S}$$

санға тең деп қабылданады.

Мысал: *D* фигураның өзі көпбұрыш болса, онда $\overline{S}=\underline{S}$ болуы айқын.

1.1-теорема. *D* жазық фигура квадратталушы болуы үшін кез келген $\varepsilon>0$ алынғанда да $M\ (M\subset D)$ және $M'\ (M'\supset D)$ көпбұрыштар табылып, олардың аудандары үшін

$$\sigma'-\sigma<\varepsilon$$

болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. *Қажеттілігі*. $S=\overline{S}=\underline{S}$ болсын. Жоғары және төменгі шекаралар анықтамаларынан пайдалансақ, $\frac{\varepsilon}{2}$ үшін *M*, σ, және *M'*, σ' табылып, олар үшін $\sigma>S-\frac{\varepsilon}{2}$, $\sigma'<S+\frac{\varepsilon}{2}$ теңсіздіктер орынды болады. Бұдан $\sigma'-\sigma<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ келіп шығады.

Жеткіліктілігі. Енді ε>0 үшін M,σ және M',σ' табылып, $\sigma'-\sigma<\varepsilon$ орынды болсын. Онда (1) қатынасқа орай

$$\underline{S}-\overline{S}\le\sigma'-\sigma<\varepsilon$$

болады, мұнда $\underline{S}$ және $\overline{S}$ тұрақты сандар. ε >0 кез келген сан екендігін еске алсақ, $\overline{S}=\underline{S}$ теңдік орынды екендігі келіп шығады. Теорема дәлелденді.

1.2-теорема. Егер *D* тұйық және шенелген облыс болып, тұйық және квадратталушы ортақ ішкі нүктелері болмаған D_1 және D_2 облыстарға ажыратылған болса, онда *D* облыс квадрат-талушы болып, оның *S* ауданы D_1 және D_2 облыстардың S_1 және S_2 аудандары қосындысына тең болады.

Дәлелдеу. $M_1 \subset D_1,\, M_2 \subset D_2$ және бұл көпбұрыштардың аудандары сәйкесінше σ_1 және σ_2 болсын. Сондай-ақ, $M_1' \supset D_1,\; M_2' \supset D_2$ және олардың аудандары сәйкесінше σ_1' және σ_2' болсын (74-сурет).

$M = M_1 \cup M_2$, $M' = M_1' \cup M_2'$ жаңа екі көпбұрыштарды қараймыз, олардың аудандарын σ және σ' деп белгілейміз. Онда

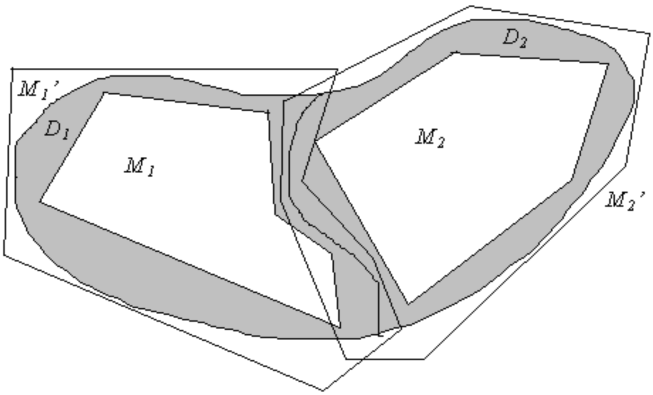
$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma \le \sigma' = \sigma_1' + \sigma_2'$$

болуы айқын.

1.1-теоремаға орай кез келген $\varepsilon > 0$ алғанымызда да M_1, M_1' және M_2, M_2' көпбұрыштар табылып, олардың аудандары үшін

$$\sigma_1' - \sigma_1 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sigma_2' - \sigma_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

теңсіздіктер орынды болады. Бұдан $(\sigma_1' + \sigma_2')$-$(\sigma_1 + \sigma_2)$<ε, яғни σ' - σ <ε келіп шығады.



74-сурет

Демек, $M \subset D$ және $M' \supset D$ көпбұрыштар табылып, олардың аудандары үшін σ' - σ <ε болады. Онда 1.1-теоремаға орай D квадратталушы облыс.

Енді D фигураның ауданын табамыз. $\sigma_1 \le S_1 \le \sigma_1'$, $\sigma_2 \le S_2 \le \sigma_2'$ қатынастардан $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \le S_1 + S_2 \le \sigma_1' + \sigma_2' = \sigma'$ келіп шығады. Бұдан $\sigma \le S \le \sigma'$, σ'-$\sigma<\varepsilon$ екендігін назарға алсақ,

$$|(S_1 + S_2) - S| < \sigma' - \sigma < \varepsilon$$

теңсіздікті аламыз. ε кез келген оң сан болғандықтан $S=S_1+S_2$ теңдік орынды болады. Теорема дәлелденді.

Жоғарыда дәлелденген теорема *ауданның аддитивтік қасиетін* білдіреді және оны ауданның аддитивтігі жайындағы теорема деп аталады.

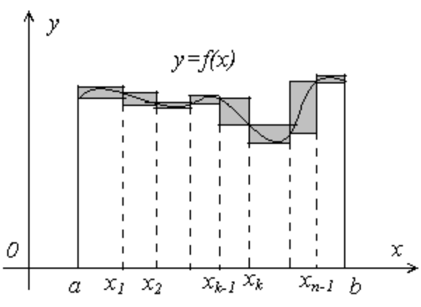
2-§. Ауданды есептеу формулалары

Айталық, $x=a$, $x=b$, $y=0$ түзулер және $y=f(x)$ теріс болмаған үзіліссіз функция графигімен шенелген D жазық фигура берілген болсын. Біз сол фигураның ауданын есептейміз. Ол үшін $[a;b]$ кесіндінің қандай да бір бөлінуін аламыз:

$$a=x_0<x_1<...<x_n=b.$$

$f(x)$ функцияның $[x_{k-1},x_k]$ кесіндідегі ең кіші және ең үлкен мәндері сәйкесінше m_k және M_k болсын. Әрбір $[x_{k-1},x_k]$ кесінділерге сәйкес, табаны сол кесіндіден тұратын, биіктіктері $y=m_k$ және $y=M_k$ болған екі тік төртбұрыштар жасаймыз (75-сурет).

Барлық төртбұрыштардың биіктіктері m_k болған көпбұрыш D фигураға ішкі сызылған көпбұрыш болып, үлкен төртбұрыштардан тұратын көпбұрыш сырттай сызылған болады. Олардың аудандары сәйкесінше



75-сурет

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \underline{S}(\lambda),$$

$$\sigma' = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \overline{S}(\lambda)$$

$(\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k)$ болады. Шартқа орай $f(x)$ функция үзіліссіз, демек, интегралданатын функция. Сондықтан,

$$\sup\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0}\overline{S}(\lambda) = \inf\sigma',$$

яғни *D* фигура (қисық сызықты трапеция) квадратталушы және оның ауданы

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

болады.

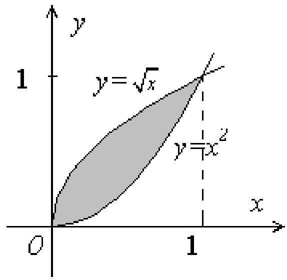
Егер жоғарыдағы *D* фигура төменнен *y=0* түзу орнына $y=\varphi(x)$ $(\varphi(x)\le f(x),\quad x\in[a;b])$ қисықпен шенелген болып, $\varphi(x)$ функция үзіліссіз болса, онда

$$S=\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx$$

болады.

Мысал. $y=x^2$ және $x=y^2$ қисықтармен шекараланған фигураның ауданын табыңдар.

Шешу. Берілген фигура жоғарыдан $y=\sqrt{x},\quad 0\le x\le 1$ қисықпен, төменнен $y=x^2,\quad 0\le x\le 1$ қисықпен шенелген (76-сурет). Сондықтан



76-сурет

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1-\frac{1}{3}x^3\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$ болады.

Қисық сызықты трапециядағы қисық параметрлі $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t)\end{cases}$ ($\alpha\le t\le\beta$) берілген болсын, мұнда $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$, [$\alpha;\beta$] кесіндіде $\psi(t)$ үзіліссіз, $\varphi(t)$ функция бірсарынды және үзіліссіз $\varphi'(t)$ туындысы бар деп жоримыз. Айнымалыны алмастыру ережесіне орай

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

болады.

1-*мысал.* $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t \end{cases}$ (0≤*t*≤2π) эллипстің ауданын есептеңдер.

Шешу. Алдымен эллипстің ширек бөлігінің ауданын табамыз:

$$\frac{S}{4}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi ab}{4}.$$ Демек, *S*=π*ab.*

2-*мысал.* *Ox* осі және $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ циклоиданың бір аркасымен шенелген фигура ауданын есептеңдер.

Шешу. (1) формула бойынша

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt=$$

$$=a^2\left(\int_0^{2\pi} dt-2\int_0^{2\pi}\cos tdt+\int_0^{2\pi}\cos^2 tdt\right)=a^2\left((t-2\sin t)\Big|_0^{2\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt\right)=a^2\left(2\pi+\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi}\right)=3\pi a^2.$$

3-§. Полярлық координаталар системасында фигураның ауданын есептеу

Полярлық координаталар системасында теңдеуі $r=r(\varphi)$ болған *l* қисық, $\varphi=\alpha$ және $\varphi=\beta$ сәулелермен шенелген фигура ауданын есептеу талап етілсін.

Бұл фигураны дұрыс фигура, яғни басы O нүктеде болған $\varphi = \varphi*$ сәуле $(\alpha \le \varphi^* \le \beta)$ $r = r(\varphi)$ қисықты артығымен бір нүктеде қиып өтеді деп жоримыз. Сондай-ақ, $r = r(\varphi)$ функцияны $[\alpha, \beta]$ кесіндіде үзіліссіз деп қараймыз.

Қисық сызықты OAB сектордың ауданын есептеу үшін интеграл қосынды түзу, кейін шекке өтуден тұратын алгоритм-нен пайдаланамыз.

1. $[\alpha, \beta]$ кесіндіні $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < ... < \varphi_n = \beta$ нүктелермен n кесінділерге бөлеміз және $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1},\ k = \overline{1, n}$ белгілеу енгіземіз. Онда OAB қисық сызықты сектор n қисық сызықты кіші секторларға ажралады.

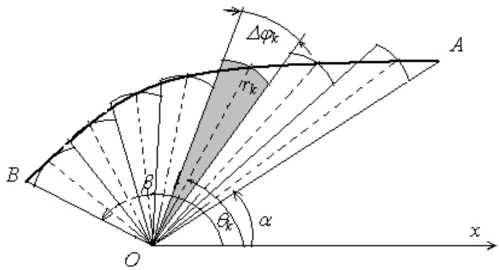
2. Әрбір $[\varphi_{k-1}, \varphi_k],\ k = \overline{1, n}$ кесіндіден кез келген θ_k нүктені таңдап аламыз және $r(\varphi)$ функцияның сол нүктелердегі мәндерін есептейміз: $r_k = r(\theta_k),\ k = \overline{1, n}$.

3. Әрбір $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ кесіндіде $r = r(\varphi)$ функцияны тұрақты және мәні $r_k = r(\theta_k)$-ге тең болсын деп қараймыз. Бұл жағдайда қисық сызықты кіші секторды радиусы $r_k = r(\theta_k)$, центрлік бұрышы $\Delta\varphi_k$ болған дөңгелек сектормен алмастырамыз (77-сурет). Бұндай дөңгелек сектордың ауданы $\Delta S_k = \frac{1}{2} r^2(\theta_k) \Delta\varphi_k$ формуламен есептеледі.

Қисық сызықты OAB сектордың S ауданын жуығымен n дөңгелек кіші секторлардан құралған фигура ауданына тең деп қарауға болады:

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\theta_k) \Delta\varphi_k \qquad (1)$$

жуық теңдік $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ кесінділер қаншама кіші болса, соншалық анық болады. (1) формуланың оң жағы $\frac{1}{2} r^2(\varphi)$ үзіліссіз функция үшін интеграл қосынды болады.



77-сурет

4. *OAB* қисық сызықты сектордың ауданын *S* деп интеграл қосындының $\lambda = \max\limits_{[\alpha,\beta]} \Delta\varphi_k$ нөлге ұмтылғандағы шек мәнін қабылдаймыз:

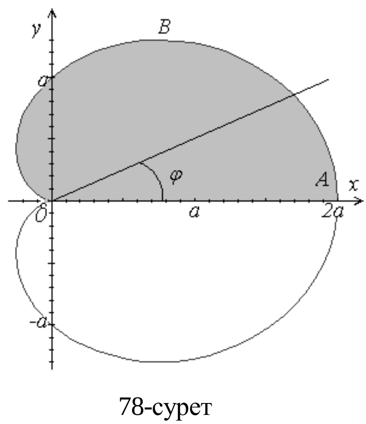
$$S = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$

Сонымен, қисық сызықты сектордың ауданы төмендегі формуламен есептеледі:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi \qquad (2)$$

1-*мысал.* $r = a(1+\cos\varphi)$ кардиоидамен шенелген фигураның ауданын есепте (78-сурет).

Шешу. Кардиоида полярлық оське қатысты симметриялы, демек, оның ауданы *ABO* қисық сызықты сектор ауданының екі еселенгеніне тең болады. *ABO* қисық сызықты сектор $r = a(1+\cos\varphi)$ қисық, $\varphi = 0,\ \varphi = \pi$ сәулелермен шенелген.



78-сурет

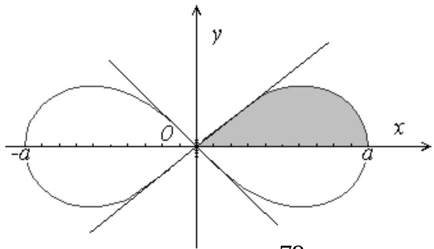
(2) формула бойынша

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2})d\varphi =$$

$$= a^2(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2 .$$

2-мысал. $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ лемнискатамен шенелген фигураның ауданын табыңдар.

Шешу. $\sqrt{\cos 2\varphi}$ функция $[0;2\pi]$ кесіндінің $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ және $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ бөліктерінде анықталған (79-сурет). Бұл фигура полярлық координаталар басы және полярлық оське қатысты симметриялы. Сондықтан



79-сурет

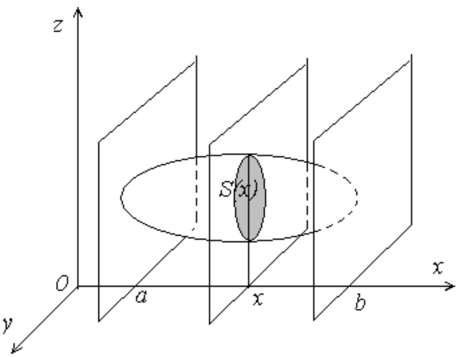
$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2\,\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

.

4-§. Кеңістіктегі дене көлемін есептеу

4.1. Көлденең қимасы берілген дене көлемін есептеу. Айталық, тұйық сыртпен шенелген Т дене берілген болып, оның қандай да бір түзуге, мысалы, *Ox* абсциссалар осіне перпендикуляр жазықтықпен кез келген қимасының ауданы берілген болсын. Мұндай қима *көлденең қима* деп аталады. Көлденең қима оның *Ox* осімен қиылысу нүктесінің *x* абсциссасымен анықталады.

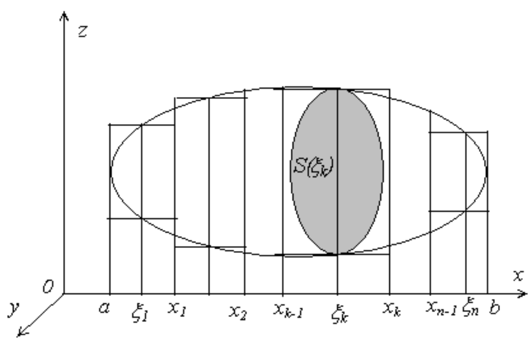
Жалпы алғанда, *x* өзгеруімен көлденең қима ауданы *S* өзгереді, яғни *x* айнымалының функциясы болады. Оны *S(x)* деп белгілейміз. *S(x)* функцияны [*a*,*b*] кесіндіде үзіліссіз деп қараймыз, бұл жерде *a* және *b* берілген Т дененің шеткі (шекара) қималарының абсциссалары (80-сурет).



80-сурет

Т дененің V көлемін есептеу үшін интеграл қосындыны түзу және шекке өтуден тұратын алгоритмнен пайдаланамыз.

1. $[a,b]$ кесіндіні $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ нүктелер көмегімен n бөлік кесінділерге жіктейміз. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\lambda = \max\limits_{[a,b]} \Delta x_k$, $k = \overline{1,n}$ белгілеулер енгіземіз. x_k бөлу нүктелері арқылы Ox оське перпендикуляр жазықтықтар өткіземіз. $x = x_k$ $k = \overline{1,n}$ жазықтықтар тобы Т денені әрбірінің қалыңдығы Δx_k, $k = \overline{1,n}$ болған қабаттарға ажыратады (81-сурет).



81-сурет

2. Әрбір $[x_{k-1}, x_k]$, $k=\overline{1,n}$ бөлік кесіндіден кез келген ξ_k нүкте таңдап аламыз және *S(x)* функцияның сол нүктедегі $S(\xi_k)$ мәнін есептейміз.

3. Әрбір $[x_{k-1}, x_k]$ кесіндіде *S*=*S(x)* функция тұрақты және мәні $S(\xi_k)$ деп жоримыз. Онда Т дененің әрбір қабатында табаны $S(\xi_k)$ және жасаушысы *Ox* оське параллель тік цилиндрді қарастыруға болады. Бұл бөлік тік цилиндрдің биіктігі Δx_k, көлемі $\Delta V_k = S(\xi_k)\Delta x_k$ формуламен есептеледі.

Т дененің көлемі *V* жуығымен *n* сатылы бөлік цилиндрлерден тұратын фигура көлеміне тең болады:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k \ .$$

$\lambda = \max\limits_{[a,b]} \Delta x_k$ қаншама кіші болса, жуық теңдік соншалық анық болатындығы айқын.

Ізделіп отырған көлемнің мәні деп $V = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k$ шекті қабылдаймыз.

Шек астындағы өрнек [*a*,*b*] кесіндіде үзіліссіз болған *S(x)* функцияның интеграл қосындысы болғандықтан

$$V = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b S(x)dx$$

болады.

Сонымен, *x*=*a* және *x*=*b* жазықтықтар арасында жайласқан дене көлемі, егер *Ox* оське перпендикуляр қима ауданы $[a,b]$ кесіндіде анықталған $S = S(x)$ функциямен өрнектелсе,

$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad (1)$$

формуламен анықталады.

Мысал. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоидпен шенелген дене көлемін есептеңдер.

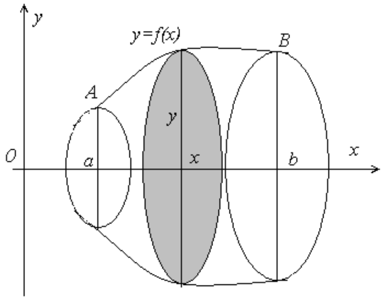
Шешу. Егер эллипсоидты *x*=*h* жазықтықпен қиып өтсек, қима

$$\frac{y^2}{b^2(1-\frac{h^2}{a^2})}+\frac{z^2}{c^2(1-\frac{h^2}{a^2})}=1$$ эллипстен тұрады. Бұл эллипстің ауданы $S=S(h)=\pi bc\ (1-\frac{h^2}{a^2})$ болады. (1) формула бойынша дененің көлемі

$$V=\int_{-a}^{a}S(h)dh=\int_{-a}^{a}\pi bc(1-\frac{h^2}{a^2})dh=\pi bc(h-\frac{h^3}{3a^2})\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc\,.$$

Егер $a=b=c=r$ болса, онда эллипсоид радиусы r болған шарға айналады, оның көлемі $\frac{4}{3}\pi r^3$ болады.

4.2. Айналу денесінің көлемін есептеу. *Ox* осі айналасында *aABb* қисық сызықты трапецияны айналдырудан алынған денені қараймыз. Мұнда *aABb* трапецияны *y=f(x)* қисық сызық, *Ox* осі, *x=a* және *x=b* түзулермен шенелген деп қараймыз (82-сурет). Егер бұл денені *Ox* оське перпендикуляр жазықтықтармен қиып өтсек, қима радиусы *y=f(x)* функцияның модуліне тең болған дөңгелектерден тұрады. Демек, бұл жағдайда көлденең қима ауданы $S(x)=\pi y^2=\pi(f(x))^2$ болады.

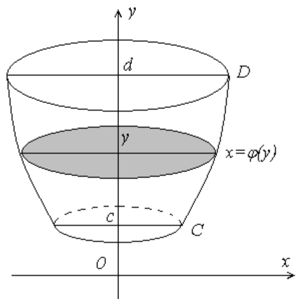


82-сурет

Айналу дене көлемін есептеу үшін (1) формуладан пайдаланамыз:

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b(f(x))^2dx \qquad (2)$$

Егер дене *cCDd* трапецияны *Oy* осі айналасында айналтырудан алынған болса (83-сурет), онда оның көлемі



83-сурет

$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy$ формуламен есептеледі, бұл жерде $x = \varphi(y),\ y \in [c, d]$ CD қисық теңдеуі.

1-*мысал.* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсті Ox осі айналасында айналдырудан алынған дене көлемін есептеңдер.

Шешу. (2) формула бойынша

$$V = \int_{-a}^{a} \pi y^2 dx = \int_{-a}^{a} \frac{\pi b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = \frac{\pi b^2}{a^2}(a^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-a}^{a} =$$

$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2}(a^3 - \frac{a^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

2-*мысал.* $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t),\ \ 0 \le t \le 2\pi$ циклоида аркасын Ox осі айналасында айналдырудан алынған фигура көлемін табыңдар.

Шешу: (2) формуладан пайдаланамыз. Мұнда $0 \le x \le 2\pi a$ болады. Демек, $V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx$. Бұл интегралда айнымалыларды алмастырамыз. $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$ деп аламыз, онда $dx = a(1 - \cos t)dt$ болады. Егер $x_1 = 0$ болса, $t_1 = 0,\ \ x_2 = 2\pi a$ болса, $t_2 = 2\pi$ болады. Бұларды ескеріп, төмендегіні аламыз:

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t)dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt =$$

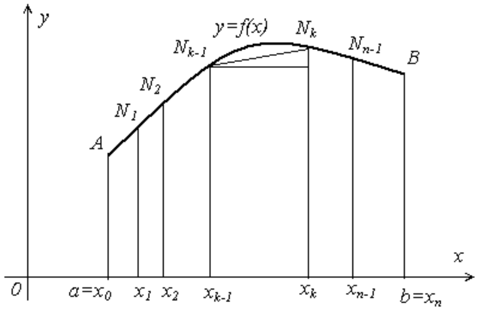
$$= \pi a^3 ((t - 3\sin t)\Big|_0^{2\pi} + 3\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt - \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)d(\sin t)) =$$

$$= \pi a^3 (2\pi + \left(\frac{3}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2}) - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} \right)\Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

5-§. Қисық доғасының ұзындығын есептеу

5.1. Тік бұрышты координаталар системасында жазық доға ұзындығын есептеу. Айталық, $y=f(x)$ функция $[a,b]$ кесіндіде анықталған, үзіліссіз және l сол функция графигі болсын. (84-сурет). Жазық l қисықтың ұзындығын табу талап етілсін.

Алдымен AB доғасының ұзындығы дегенде нені түсіну керектігін анықтап аламыз. Ол үшін $[a,b]$ кесіндіні кез келген тәсілде $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ нүктелер көмегімен n бөлікке бөлеміз. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k=\overline{1,n}$



84-сурет

деп белгілейміз. Әрбір $x_i, i=\overline{1,n}$ нүктеден Oy оське l қисықпен қиылысқанға дейін параллель түзулер өткіземіз. Бұл жағдайда AB доға n бөлікке бөлінеді. l қисықтың көрші бөліну нүктелерін кесінді (хорда)мен бірлес-тіреміз және $AN_1N_2\ldots N_{n-1}B$ сынық сызықты қарастырамыз. Сол сынық сызықтың ұзындығын l_n деп белгілейміз. Демек,

$$l_n = \left|\overline{AN_1}\right| + \left|\overline{N_1N_2}\right| + \ldots + \left|\overline{N_{n-1}B}\right| = \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k \ ,$$

бұл жерде $\Delta l_k - N_{k-1}N_k$ доғаға тірелген хорда ұзындығы.

Сынық сызықтың ұзындығы AB доға ұзындығының жуық мәні болады $(l \approx l_n)$. Егер $[a,b]$ кесіндінің n бөліну нүктелері санын (кесінді ұзындықтары ең үлкенінің ұзындығын нолге ұмтылатындай) арттырсақ, онда сынық сызықтың ұзындығы AB доға ұзындығына ұмтылады деп қабылдау табиғи.

Егер $\lambda = \max\limits_{[\alpha;b]} \Delta x_k \to 0$ ұмтылғанда l_n шекті шегі бар болса, онда бұл шек l *доғаның ұзындығы* деп аталады, қисық бұл жағдайда *тізуленетін қисық* деп аталады:

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k \qquad (1)$$

Егер шекті шек жоқ болса, доға ұзындығы жоқ, ал қисық түзуленбейтін деп аталады.

Енді, егер *f(x)* функция [*a*,*b*] кесіндіде үзіліссіз туындысы бар болса, онда *l* – түзуленуші екендігін көреміз және оның ұзындығын есептеу формуласын келтіріп шығарамыз.

$\overline{N_{k-1}N_k}$ хорда ұзындығын есептейміз. $N_{k-1}(x_{k-1},y_{k-1})$, $N_k(x_k,y_k)$ болғандықтан $\Delta l_k = \left|\overline{N_{k-1}N_k}\right| = \sqrt{\Delta x_k{}^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{1 + (\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k})^2}\,\Delta x_k$ болады. Лагранж теоремасына орай

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k), \quad \xi_k \in (x_{k-1}, x_k)\,.$$

Демек, $\Delta l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k$.

Алынған нәтижені (1) формулаға қоямыз:

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot \Delta x_k \qquad (2)$$

(2) формуланың оң жағында $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ функцияның [*a*,*b*] кесіндідегі интеграл қосындысы жазылған. Бұл функция үзіліссіз болғандықтан интеграл қосындының шегі бар және сол шек $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ функцияның [*a*,*b*] кесіндідегі анықталған интегралына тең болады.

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx\,.$$

Сонымен, егер *f(x)* функцияның [*a*,*b*] кесіндіде үзіліссіз туындысы бар болса, онда *AB* доға түзуленетін қисық болады және оның ұзындығы *l* төмендегі формуламен есептеледі:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \qquad (3)$$

Мысал. $x^2 + y^2 = R^2$ шеңбер ұзындығын есептеңдер.

Шешу. Алдымен шеңбердің бірінші ширектегі бөлігінің ұзындығын табамыз. Шеңбердің бұл доғасының теңдеуі $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $0\le x\le R$ болады.

Бұдан $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Демек (3) формула бойынша

$$\frac{1}{4}l=\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=R\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Сонымен, шеңбер ұзындығы $l=2\pi R$ ге тең.

5.2. Параметрлі берілген доға ұзындығын есептеу.

Қисық теңдеуі параметрлі берілген болсын: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_1,t_2]$, бұл жерде *x(t), y(t)* функциялардың үзіліссіз туындылары бар және $[t_1,t_2]$ кесіндіде $x'(t)\ne 0$ деп қараймыз.

(3) формуладан пайдалану үшін алдымен айнымалыны алмастырамыз. $x=x(t),\quad dx=x'(t)dt,\quad y'_x=y'_t\,/\,x'_t$. Онда

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)^2}\,x'(t)dt$$ немесе

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt\,. \qquad (4)$$

болады.

Мысал. $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ циклоида аркасының ұзындығын есептеңдер.

Шешу. $$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

5.3. Полярлық координаталар системасында доға ұзындығы. Қисық полярлық координаталар системасында $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$ теңдеумен берілген болсын. $r(\varphi)$ және $r'(\varphi)$

функциялар $[\alpha,\beta]$ кесіндіде үзіліссіз деп жоримыз. Бұл қисықты параметрлік көріністе жазамыз: $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$ x және y функциялардан φ бойынша туындыларды есептейміз:

$$\left.\begin{aligned} x'_\varphi &= r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ y'_\varphi &= r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = r^2 + (r')^2.$$

Демек,

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi\,. \qquad (5)$$

Мысал. $r = a(1+\cos\varphi)$ кардиоида ұзындығын есептеңдер.

Шешу. Бұрыш 0 мен π арасында өзгергенде ізделіп отырған доғаның жартысын аламыз. (5) формуладан пайдаланамыз: $r' = -a\sin\varphi,$

$$r^2 + (r')^2 = a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi = 2a^2(1+\cos\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\,.$$

Онда

$$l = 2\int_0^\pi \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 8a\,.$$

5.4. Доға дифференциалы. Доға ұзындығы $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$ формуламен анықталатын еді, бұл жерде $y=f(x)$ функция $[a;b]$ кесіндіде анықталған және сол кесіндіде оның үзіліссіз туындысы бар. Жоғарыдағы формулада интегралдың төменгі шекарасы тұрақты, ал жоғары шекарасын айнымалы деп алайық. Жоғары шекараны x, интегралдау айнымалысын t деп белгілейміз. Бұл жағдайда доға ұзындығы жоғары шекараның функциясы болады: $l(x) = \int_a^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\, dt$

Жоғары шекарасы айнымалы болған анықталған интегралдың туындысы жайындағы теоремаға орай $l(x)$ функция дифференциалданушы, оның туындысы $l'(x)=\sqrt{1+(f'(x))^2}$ формуламен анықталады.

Бұдан доға дифференциалы үшін төмендегі формуланы аламыз:

$$dl=l'(x)dx=\sqrt{1+(f'(x))^2}dx\ .$$

Демек, доға дифференциалы көмегімен доға ұзындығын есептеу үшін $l=\int_a^b dl$ формуланы алуымызға болады.

Егер $y'=\dfrac{dy}{dx}$ екенін еске алсақ, $dl=\sqrt{1+(\dfrac{dy}{dx})^2}dx=\sqrt{dx^2+dy^2}$, яғни $dl^2=dx^2+dy^2$ Пифагор теоремасының аналогы келіп шығады.

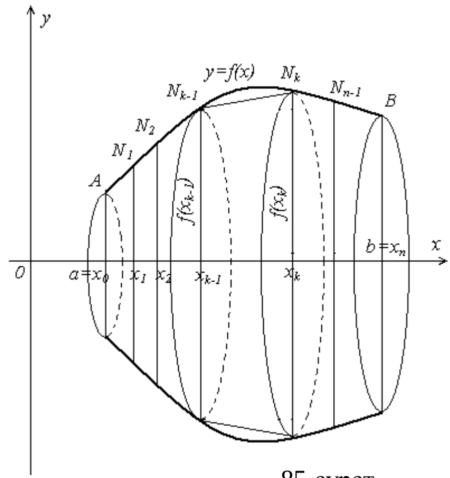
6-§. Айналу бетінің ауданын есептеу

Айталық, $f(x)$ функция $[a;b]$ кесіндіде анықталған, сол кесіндіде оның теріс болмаған, үзіліссіз туындысы бар болсын. Оның графигі болған *AB* қисықты *Ox* осі айналасында айналдыру нәтижесінде айналу беті келіп шығады (85-сурет). Сол беттің ауданын анықталған интеграл көмегімен есептейміз. Ол үшін $[a;b]$ кесіндінің қандай да бір бөлінуін аламыз:

$$a=x_0<x_1<...<x_{k-1}<x_k<...<x_n=b\ .$$

Бөліну нүктелерінен *Oy* оське параллель түзулерді өткізіп, оларды *AB* доғаға дейін жалғастырамыз. Осының нәтижесінде *AB* доға $N_k(x_k;f(x_k))$ нүктелер көмегімен n бөлікке бөлінеді. Енді $A=N_0$, N_1, ..., $N_n=B$ нүктелерді тізбектеп қосамыз, нәтижеде сынық сызықты аламыз.

AB доғаны *Ox* осі айналасында айналдыру нәтижесінде келіп шығатын айналу бетінің ауданы деп сынық сызықты *Ox* осі айналасында айналдырудан келіп шығатын бет ауданының $N_{k-1}N_k$ хордалар ең үлкенінің ұзындығы нөлге ұмтылғандағы шегін қабылдаймыз.



85-сурет

Хорда ұзындығы $\left|N_{k-1}N_k\right| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$ нөлге ұмтылғанда $\Delta x_k \to 0$ және керісінше, $\Delta x_k \to 0$ болғанда хорда ұзындығы нөлге ұмтылуы ақиқат. Сондықтан келешекте шекті $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0$ үшін көреміз. $N_{k-1}N_k$ хорданы Ox осі айналасында айналдырғанда қиық конус беті келіп шығады және оның ауданы

$$S_k = \frac{2\pi f(x_{k-1}) + 2\pi f(x_k)}{2}\left|N_{k-1}N_k\right|$$

болады. Осылай алынған аудандарды қосып шықсақ, сынық сызықты Ox осі айналасында айналдырғанда алынған бет ауданы P_n келіп шығады:

$$P_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \Delta l_k, \quad \Delta l_k = \left|N_{k-1}N_k\right|.$$

Оны басқаша көріністе жазуға болады:

$$P_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \Delta S_k - 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (\Delta S_k - \Delta l_k),$$

мұнда ΔS_k сәйкесінше N_{k-1} және N_k нүктелер арасындағы доға ұзындығы.

Δx_k нөлге ұмтылғанда $\Delta S_k \to 0$ болатындығы айқын. Сондай-ақ, $\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$ бөлінді $f(x_{k-1})$ және $f(x_k)$ арасындағы сан, *f(x)* функция үзіліссіз болғандықтан,

$$\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}=f(\xi_k)$$

болатын $\xi_k \in (x_{k-1};x_k)$ табылады. $M=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$ деп белгілейміз. $\lambda \to 0$ болғанда P_n қосындының құрамындағы екінші қосылушы

$$0\le 2\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(\Delta S_k-\Delta l_k)=2\pi\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(\Delta S_k-\Delta l_k)\le$$

$$\le 2\pi M\sum_{k=1}^{n}(\Delta S_k-\Delta l_k)=2\pi M\left(\sum_{k=1}^{n}\Delta S_k-\sum_{k=1}^{n}\Delta l_k\right)\to 0,$$

себебі $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta l_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta S_k=L$ (жоғарыдағы шарттарда *AB* доғаның ұзындығы бар екендігі назарда тұтылған).

Демек, $\lim\limits_{\lambda\to 0}P_n=2\pi\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta S_k=2\pi\int\limits_a^b f(x)ds$ болады, яғни айналу бетінің ауданы

$$S=2\pi\int_a^b f(x)dS=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

формуламен өрнектеледі.

Егер түзуленетін доға теңдеуі $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$ параметрлі көріністе берілген, $\varphi(t)$ және $\psi(t)$ функциялардың үзіліссіз туындылары бар болса, онда айналу бетінің ауданы

$$S=2\pi\int_a^{\beta}\psi(t)\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt$$

болады. Осыған ұқсас, егер қисық

$$r=f(\theta),\ \ \alpha\le\theta\le\beta$$

теңдеумен берілген болып, $f'(\theta)$ үзіліссіз функция болса,

$$S = 2\pi\int_{a}^{\beta} f(\theta)\sin\theta\sqrt{f^2(\theta) + f'(\theta)^2}\,d\theta$$

формуланы келтіріп шығаруға болады.

Мысал. Радиусы *R* болған сфера бетінің ауданын табыңдар.

Шешу. I тәсіл. Параметрлі көріністе шеңбер теңдеуі $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$ болады. Ширек шеңберді *Ox* осі айналасында айландыру нәтижесінде жарты сфера алынады. Бұл жағдайда $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ болады, сондықтан

$$\frac{S}{2} = 2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} R\sin t\sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\,dt =$$

$$= 2\pi R^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = -2\pi R^2 \cos t \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R^2 .$$

Демек, $S = 4\pi R^2$.

II тәсіл. Полярлық координаталар системасында шеңбер теңдеуі $r = R, \ \ 0 \le \theta \le 2\pi$. Сондықтан

$$\frac{S}{2} = 2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} R\sin\theta\sqrt{R^2 + 0^2}\,d\theta = 2\pi R^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = 2\pi R^2, \quad S = 4\pi R^2.$$

7-§. Анықталған интегралдың физикалық есептерді шешуде қолданылуы

7.1. Айнымалы күш жұмысын есептеу. Айталық материялық нүкте қандайда бір айнымалы $\vec{F}$ күш әсерінде түзу бойлап қозғалсын. Бұл нүктенің көшуін $\vec{s}$ вектор арқылы белгілейміз және күштің бағыты көшу бағытымен бірдей болсын деп жоримыз. $|\vec{F}|$ және $|\vec{s}|$ арқылы $\vec{F}$ және $\vec{s}$ векторлардың ұзындығын белгілейміз.

Егер $\vec{F}$ тұрақты болса, онда орындалған жұмыс $A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right|$ болаттындығы мәлім.

Енді $\vec{F}$ бағытын сақтайтын, бірақ модул бойынша айнымалы болған жағдайды қараймыз. Сол күш орындаған жұмысты есептейміз. *Ox* осі деп материялық нүкте қозғалыстағы түзуді қабылдаймыз. Айталық қозғалыс бағытының алғашқы және соңғы нүктелері абсциссалары сәйкесінше *a* және *b* (*a*<*b*) болсын. [*a,b*] кесіндінің әрбір нүктесінде күш модулі белгілі бір мән қабылдайды және *x* айнымалының функциясы, яғни $\vec{F} = F(x)$ болады.

F(x) функцияны үзіліссіз деп есептейміз. Айнымалы күш орындаған жұмысын есептеу үшін интеграл қосындыны түзу және шекке өтуге негізделген алгоритмнен пайдаланамыз.

1. [*a,b*] кесіндіні x_k, $k = \overline{1,n}$ нүктелер көмегімен *n* бөлікке бөлеміз: $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1,n}$ белгілеу кірітеміз. [*a,b*] кесіндіде орындалған жұмысты *A*, $[x_{k-1}, x_k]$ кесіндіде орындалған жұмысты A_k деп белгілеп, мынаны аламыз: $A = \sum_{k=1}^{n} A_k$.

Егер $[x_{k-1}, x_k]$ кесінді айтарлықтай кіші деп алсақ, онда әрбір мұндай кесіндіде $|\vec{F}| = const$ деп карауға болады.

2. Әрбір $[x_{k-1}, x_k]$ бөлік кесіндіден кез келген ξ_k нүктені таңдап аламыз және *F(x)* функцияның сол нүктедегі мәнін есептейміз.

3. Әрбір бөлік кесіндіде күштің модулі тұрақты және *F(x)* функцияның ξ_k нүктедегі мәніне тең деп жоримыз: $\left|\vec{F}\right| = F(\xi_k)$.

Бұл жағдайда күштің $[x_{k-1}, x_k]$ кесіндідегі орындаған жұмысы $\Delta A_k = \left|\vec{F}\right| \Delta x_k = F(\xi_k) \Delta x_k$ болады.

Айнымалы күштің бүтін жолдағы ([*a,b*] кесіндіде) жұмысы үшін

$$A \approx A_n = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k$$

қатынас орынды болады.

4. $\lambda = \max\limits_{[a,b]} \Delta x_k$ нөлге ұмтылғандағы A_n қосындының шегі бар болады (себебі $F(x)$ үзіліссіз) және айнымалы күштің a нүктеден b нүктеге дейін көшкендегі жұмысын өрнектейді:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b F(x)dx \qquad (1)$$

Мысал. Егер пружинаны 0,05 м ге созу үшін 2 Н күш жұмсаса, онда бұл пружинаны 0,1 м ге созу үшін орындалатын жұмысты есептеңдер.

Шешу: Гук заңы бойынша пружинаны созатын (сығатын) күш модулі $\left|\vec{F}\right|$ сол созуға (сығуға) пропорционал болады, яғни $\left|\vec{F}\right| = kx,$ Бұл жерде x-созылу (сығылу) шамасы. Шартға орай $2 = k \cdot 0,05$, Бұдан $k = 40$. (1) формула бойынша

$$A = \int_0^{0,1} 40x dx = 20x^2 \Big|_0^{0,1} = 0,2 \text{ Дж.}.$$

7.2. Айнымалы қуатты электродвигатель жұмысын есептеу. Енді жұмысты табуға басқа мысал қараймыз. Двигательдің $\Delta t = [a,b]$ уақыт аралығында орындаған жұмысын есептейміз, мұнда оның t уақытдағы қуаты белгілі және $N(t)$ деп қараймыз.

Жоғарыдағы алгоритмнен пайдаланамыз:

1. $[a,b]$ кесіндіні n бөлікке жіктейміз: $[t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1,n}$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

2. Әрбір $[t_{k-1}, t_k]$ бөлік кесіндіден кез келген τ_k нүктені таңдаймыз.

3. Әрбір бөлік кесіндіде қуатты тұрақты және $N(\tau_k)$ деп қараймыз. Онда

$$A \approx A_n = \sum_{k=1}^{n} N(\tau_k)\Delta t_k .$$

N(t) функцияны үзіліссіз деп қараймыз және $\lambda = \max\limits_{[a,b]} \Delta t_k$ нөлге ұмтылғанда шекке өтеміз. Нәтижеде

$$A = \int_a^b N(t)dt \qquad (2)$$

формуланы аламыз.

Мысал. $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ уақыт аралығында айнымалы ток күші орындаған жұмыс және орташа қуатты есептеңдер. Мұнда ток күші $I = I_0 \sin \omega t$ формуламен анықталады (I_0- токтің максимал мәні, ω -дөңгелек жиілігі, *t*-уақыт, *R*-тізбектің кедергісі)

Шешу. Тұрақты ток күшінің қуаты $N=I^2R$ формуламен анықталады. (2) формула бойынша

$$A = I_0{}^2 R \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = I_0{}^2 R \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1-\cos 2\omega t}{2} dt = \frac{I_0{}^2 R\pi}{\omega}.$$

Айнымалы ток күшінің орташа қуаты $N_{орта} = \frac{A}{2\pi/\omega} = \frac{I_0{}^2 R}{2}$ болады.

7.3. Статикалық моменттерді, инерция моменттерін және ауырлық центрі координаталарын есептеу

7.3.1. Жалпы мәліметтер. Жазықтықта тік бұрышты координаталар системасы берілген болсын.

1-анықтама. *m* массалы *A(x,y)* материялық нүктенің *Ox* (*Oy*) оське қатысты *статикалық моменті* деп, сандық мәні материалық нүкте массасын, нүктеден *Ox* осіне дейінгі болған арақашықтық көбейтіндісіне тең болған шамаға айтылады:

$$M_x = my \quad (M_y = mx)$$

2-анықтама. *m* массалы *A(x,y)* материялық нүктенің *Ox* (*Oy* осіне, *O* нүктеге) осіне қатысты *инерция моменті* деп сол нүкте массасы және *Ox* (*Oy*, *O* нүктеге) оське дейінгі болған арақашықтық квадраты көбейтіндісіне тең болған шамаға айтылады:

$$I_x = my^2, \; I_y = mx^2, \; I_0 = m(x^2 + y^2)$$

Егер $m_1, m_2, ..., m_n$ массалы $A_1(x_1, y_1),\ A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$ материялық нүктелер системасы берілген болса, онда статикалық моменттер

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k,\ \ M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k \qquad (1)$$

инерция моменттері

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^{\ 2},\ \ I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^{\ 2},\ \ I_0 = I_x + I_y = \sum_{k=1}^{n} (x_k^{\ 2} + y_k^{\ 2}) m_k$$

формулалармен есептеледі.

3-анықтама. Материялық нүктелер системасының *ауырлық центрі* деп мынадай қасиеті бар болған нүктеге айтылады: егер бұл нүктеге система массасы $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ қойылса, онда оның кез келген оське қатысты статикалық моменті системаның сол оське қатысты статикалық моментіне тең болады.

Ауырлық центрі координаталарын $S(\bar{x}, \bar{y})$ деп белгілесек, онда анықтама бойынша

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k = M\bar{y},\quad M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k = M\bar{x}$$

аламыз. Сонымен, материялық нүктелер системасының ауырлық центрі координаталары

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = (\sum_{k=1}^{n} m_k x_k) / \sum_{k=1}^{n} m_k, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = (\sum_{k=1}^{n} m_k y_k) / \sum_{k=1}^{n} m_k$$

формулалармен есептеледі.

7.3.2. Жазық доғаның ауырлық центрі. Түзуленетін *AB* доға бойымен тығыздығы $\rho = 1$ болған қандай да бір материя жайласқан болып, бұл доғаның параметрлі теңдеуі

$$\begin{cases} x = x(l), \\ y = y(l),\ 0 \le l \le L \end{cases}$$

болсын (параметр ретінде l –доға ұзындығы алынған), мұнда L - доға ұзындығы $x(l)$, $y(l)$ функциялар [$0;L$] кесіндіде үзіліссіз.

[$0;L$] кесіндінің қандай да бір бөлінуін аламыз:

$$0=l_0<l_1< \ldots <l_n=L.$$

Нәтижеде *AB* доға $P_{k-1}P_k$ бөліктерге бөлінеді, мұнда

$$P_k=P_k(x_k,y_k),\ x_k=x(l_k),\ y_k=y(l_k)$$

$P_{k-1}P_k$ доғада жайласқан масса $\Delta m_k = 1\Delta l_k$. Сол массаны P_k нүктеде шоғырланған деп қараймыз. Онда система ауырлық центрінің координаталары жуығымен

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} x(l_k)\Delta l_k}{\sum_{k=1}^{n} \Delta l_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x(l_k)\Delta l_k}{L}, \qquad \bar{y} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} y(l_k)\Delta l_k}{L}$$

болады. *x(l)* және *y(l)* функциялар үзіліссіз болғандықтан жоғарыдағы интеграл қосындылардың $\lambda(l) = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta l_k$ нөлге ұмтылғандағы шегі бар болады және анықтама бойынша ауырлық центрінің координаталары сол шектерге тең деп қабылданады:

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_0^L x(l)dl, \quad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_0^L y(l)dl\ .$$

AB доға теңдеуі $y = f(x), a \le x \le b$ болсын. Онда

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

болады.

7.1-теорема (Гульдиннің бірінші теоремасы). *AB* жазық доғаны сол жазықтықта жатқан доғамен қиылыспайтын қандай да бір ось айналасында айналдырудан алынатын беттің ауданы сол доғаның ұзындығымен оның ауырлық центрі сызған шеңбер ұзындығының көбейтіндісіне тең.

Дәлелдеу. *AB* доға теңдеуі $y = f(x), \quad a \le x \le b$ көріністе болса, онда $\bar{x} = \frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$.

Бұл теңдіктердің екіншісін $2\pi L$ ге көбейтсек,

$$2\pi\bar{y}L = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

келіп шығады. Сол теңдіктің оң жағы *AB* доғаны *Ox* осі айналасында айналдырудан алынған беттің ауданы болып, сол жағы доға ұзындығымен оның ауырлық центрі сызған шеңбер ұзындығының көбейтіндісінен тұрады. Теорема дәлелденді.

Мысал. $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $-R\le x\le R$ жарты шеңбердің ауырлық центрінің координаталарын табыңдар.

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},\ \sqrt{1+y'^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

$$\overline{y}=\frac{1}{\pi R}\int_{-R}^{R} y\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{1}{\pi R}\int_{-R}^{R} Rdx=\frac{2R}{\pi},$$

$\overline{x}=\dfrac{1}{\pi R}\displaystyle\int_{-R}^{R} x\sqrt{1+y'^2}dx=\dfrac{1}{\pi R}\displaystyle\int_{-R}^{R}\dfrac{Rx}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=0$, себебі интеграл астындағы функция тақ. Демек, жарты шеңбердің ауырлық центрі $\left(0;\dfrac{2R}{\pi}\right)$ нүктеде жайласқан.

7.3.3. Жазық фигураның ауырлық центрі. $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $f(x)\le\varphi(x)$ үзіліссіз қисықтар және $x=a$, $x=b$, $a<b$ түзулермен шенелген G жазық фигура бойлап тығыздығы тұрақты $\rho=1$ болған қандай да бір материя жайласқан болсын. $[a;b]$ кесіндіні $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ нүктелер көмегімен n бөлікке бөліп, G фигураға n тік төртбұрыш сызамыз. Бұл төртбұрыштың биіктігі $\varphi(x_k)-f(x_k)$, табаны $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ болады ($k=1,2\ldots,n$). Бұл жағдайда әрбір төртбұрышқа жайласқан материя массасы $m_k=\rho(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k$ болады (мұнда $\rho=1$-дененің тығыздығы). Төртбұрыш диагоналдары қиылысқан нүктенің, яғни ауырлық центрінің координаталары төмендегідей жазылады: $\overline{x}_k=\dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}$, $\overline{y}_k=\dfrac{\varphi(x_k)+f(x_k)}{2}$. Онда n төртбұрыштан тұратын фигураның ауырлық центрінің координаталары төмендегідей жазылады:

$$\overline{\xi}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\overline{x}_k\cdot m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\frac{\Delta x_k}{2}\right)(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k}{\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k},$$

$$\overline{\eta}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\overline{y}_k\cdot m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k}=\frac{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)+f(x_k))(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k}{\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k}.$$

Бұлардан $\lambda=\max_{1\le k\le n}\Delta x_k$ нөлге ұмтылғанда $\lim_{\lambda\to 0}\overline{\xi}=\xi$, $\lim_{\lambda\to 0}\overline{\eta}=\eta$ болып, $M(\xi,\eta)$ нүкте G фигураның ауырлық центрі болады. Сондай-ақ,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k=\int_a^b(\varphi(x)-f(x))dx=S,$$

мұнда S берілген G фигураның ауданы. Енді

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\frac{\Delta x_k}{2}\right)(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}x_k(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k^{\,2}$$ екендігін еске алсақ,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}x_k(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k=\int_a^b x(\varphi(x)-f(x))dx$$ болады және

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k^{\,2}=0,$$ себебі λ нөлге ұмтылғанда

$$\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k^{\,2}\le\sum_{k=1}^{n}(|\varphi(x_k)|+|f(x_k)|)\Delta x_k^{\,2}\le N\lambda\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=$$

$=N\lambda(b-a)\to 0$ (мұнда $N=\sup(|\varphi(x_k)|+|f(x_k)|)$). Демек, λ нөлге ұмтылғанда

$$\xi=\frac{\int_a^b x(\varphi(x)-f(x))dx}{\int_a^b(\varphi(x)-f(x))dx},\quad \eta=\frac{\int_a^b(\varphi^2(x)-f^2(x))dx}{2\int_a^b(\varphi(x)-f(x))dx}.$$

Егер G фигура қисық сызықты трапеция болса $(y=\varphi(x),\ f(x)=0)$, онда

$$\xi = \frac{1}{S}\int_a^b xydx, \qquad \eta = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2dx$$

болады. Мұнда $S = \int_a^b \varphi(x)dx$ -қисық сызықты трапецияның ауданы.

Бұл жағдайда $\eta = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2dx$ теңдіктен $2\eta S = \int_a^b \varphi^2(x)dx$ немесе $2\pi\eta S = \pi\int_a^b \varphi^2(x)dx$ болып, төмендегі теорема орынды болады:

7.2-теорема (Гульдиннің екінші теоремасы). Жазық фигураны өзімен қиылыспайтын ось айналасында айналдыру нәтижесінде пайда болатын фигураның көлемі $(\pi\int_a^b \varphi^2(x)dx)$ сол фигураның ауданы S және оның ауырлық центрі сызған шеңбердің ұзындығы көбейтіндісіне тең.

ЖАТТЫҒУЛАР

1. $y=6x-x^2$ парабола, $x=-1$, $x=3$ түзулер және абсцисса осімен шенелген фигураның ауданын табыңдар.

2. $y=x^2-4x+3$ парабола, координата остері және $x=4$ түзумен шенелген фигураның ауданын табыңдар.

3. $y^2=2x+1$ парабола және $x-y-1=0$ түзумен шенелген фигураның ауданын табыңдар.

4. $x=y^2(y-1)$ қисық және ордината осімен шенелген фигураның ауданын табыңдар.

5. $x=2a\cos t-a\sin 2t$, $y=2a\sin t-a\sin 2t$ кардиоидамен шенелген фигураның ауданын табыңдар.

6. $\rho = a\sin 2\varphi$ қисықпен шенелген фигура ауданын табыңдар.

7. Параметрлі тәсілде берілген $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ қисықты Оx осі айналасында айналдыру нәтижесінде пайда болған дененің көлемі үшін формула келтіріп шығарыңдар.

8. Полярлық координаталар системасында берілген $\rho = \rho(\theta)$ қисық $\rho = \alpha$, $\rho = \beta$ радиус векторлармен шенелген жазық фигураны поляр осі айналасында айналдыру нәтижесінде пайда болған дененің көлемі үшін формула келтіріп шығарыңдар.

9. $y = \dfrac{x^2}{4}$ парабола $y=1$, $y=5$ түзулермен шенелген фигураны ордината осі айналасында айналдыру нәтижесінде пайда болған дененің көлемін табыңдар.

10. $y^2=4x$ парабола және $x=4$ түзулермен шенелген фигураны ордината осі айналасында айналдыру нәтижесінде пайда болған дененің көлемін табыңдар.

11. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ астроидамен шенелген фигураны абсцисса осі айналасында айналдыру нәтижесінде пайда болған дененің көлемін табыңдар.

12. $y^2=x^3$ қисықтың $A(0:0)$ және $B(5,\ 5\sqrt{5})$ нүктелері арасындағы доғасының ұзындығын табыңдар.

13. $y=ln\cos x$ қисықтың $x = \dfrac{\pi}{3}$ нүктеден $x = \dfrac{\pi}{2}$ нүктеге дейінгі доғасының ұзындығын табыңдар.

14. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ астроиданың ұзындығын табыңдар.

15. $\rho\varphi = 1$ гиперболалық спиралдің $\varphi = \dfrac{3}{4}$ ден $\varphi = \dfrac{4}{3}$ ке дейінгі болған доғасының ұзындығын табыңдар.

16. y=3x түзудің x=1 ден x=3 ке дейін болған бөлігін абсцисса осі айналасында айналдырудан пайда болған беттің ауданын табыңдар.

17. y^2=2x параболаның x=0 ден x=2 ге дейін болған доғасын абсцисса осі айналасында айналдырудан пайда болған беттің ауданын табыңдар.

18. x=a(t-sin$t$), y=a(1-cos$t$) циклоиданың бір аркасын абсцисса осі айналасында айналдырудан пайда болған беттің ауданын табыңдар.

19. $\rho = 2\sin\varphi$ шеңберді поляр осі айналасында айналдырудан пайда болған сырттың ауданын табыңдар.

20. Айналу беті ауданын есептеу формуласы жәрдемінде табанының радиусы R, биіктігі H болған конус бүйір беті ауданының формуласын келтіріп шығарыңдар.

21. Айналу беті ауданын есептеу формуласы жәрдемінде табандарының радиустары R және r, биіктігі H болған қиық конус бүйір беті ауданының формуласын келтіріп шығарыңдар.

22. Айналу беті ауданын есептеу формуласы жәрдемінде радиусы R болған сфера ауданын табу формуласын келтіріп шығарыңдар.

23. y=cos$x$ косинусоиданың $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ Ox осіне қатысты статикалық моментін табыңдар.

24. x=a(t-sin$t$), y=a(1-cos$t$) циклоида (t=0 ден t=2π) доғасының ауырлық центрі координаталарын табыңдар.

25. $y = \cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ косинусоида және абсцисса осімен шенелген фигураның ауырлық центрі координаталарын табыңдар.

26. $x^2 + y^2 = r^2 \quad (y \ge 0)$ жарты дөңгелектің ауырлық центрінің координаталарын табыңдар.

27. Қабырғасы a болған дұрыс алтыбұрышты бір қабырғасы айналасында айналдырған. Гульдин теоремасынан пайдаланып a) пайда болған дененің көлемін табыңдар; b) дене бетінің ауданын табыңдар.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Азларов Т., Мансуров Х., Математик анализ. 1-қисм.-Т.: “Ўқитувчи”, 1994.-416 б.
2. Азларов Т., Мансуров Х., Математик анализ. 2-қисм.-Т.: “Ўқитувчи”, 1995.-436 б.
3. Саъдуллаев А. ва бошқалар. Математик анализ курси мисол ва масалалар тўплами. 1-қисм. Т.: “Ўзбекистон”,-1993.-317 б.
4. Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan ma’ruzalar. I T.: «Voris-nashriyot». 2010 y. – 374 b.
5. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков Д.И. Лекции по математическому анализу. М.: “Высшая школа”, 1999,-695 ст.
6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: «Издательство АСТ», 2003,-558 ст.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. I. М.: Интеграл-Пресс, 2002,-416 ст.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. II. М.: Интеграл-Пресс, 2002,-544 ст.
9. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Алматы: Мектеп. 1987. -288 б.

МАЗМҰНЫ

ТУРГУНБАЕВ РИСКЕЛЬДИ МУСАМАТОВИЧ

МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ
I ТОМ
5110100-математика оқыту методикасы

(қозоқ тилида)

Муҳаррир А. *Бектаев*
Техник муҳаррир *У. Хамутов*
Мусаҳҳиҳ *И. Исломов*
Дизайнер-саҳифаловчи *Т.Ирисбаев*

«ABU MATBUOT-KONSALT» нашриёти.
100070, Тошкент ш., Юсуф Хос Ҳожиб кўчаси, 64-уй.
Телефон: (+99871) 215-54-97
Факс: (+99871) 215-54-98

e-mail: abu.matbuot-consult@yandex.ru

Нашриёт лицензияси AI №220, 16.11.2012.
Босишга 05.11.2014 йилда рухсат этилди.
Бичими 60х84 $^{1}/_{16}$. Шартли босма тобоғи 21,5. Нашр тобоғи 20,0.
Адади 50. Буюртма №14-010. Баҳоси шартнома асосида.

«ABU MATBUOT-KONSALT» МЧЖ матбаа бўлимида босилди.