ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ
ВАЗИРЛИГИ

ЎРТА МАХСУС, КАСБ-ҲУНАР ТАЪЛИМИ
МАРКАЗИ

ТОШКЕНТ МОЛИЯ ИНСТИТУТИ
ҚОШИДАГИ
«СОЛИҚ ВА МОЛИЯ ЛИЦЕЙИ»

Б.И.Исломов, П.И.Шарипова

М А Т Е М А Т И К А

А Л Г Е Б Р А

1-қ и с м

Тошкент–2005

Муаллифлар: Исломов Бозор Исломович,
Низомий номидаги Тошкент Давлат
Педагогика Университети « Математик
таҳлил» кафедраси мудири, физика-
математика фанлари доктори.
Шарипова Парида Иминжоновна,
Юнусобод тумани 258-мактаб
математика ўқитувчиси.

Тақризчилар: Рихсиев Вадир Бердибоевич,
ЎзРФА В.И.Романовский номли
Математика Институти директор
ўринбосари,физика-математика
фанлари доктори,профессор.
Мамадалиев Назиржон,
Ўрта-махсус касб-ҳунар таълимини
ривожлантириш институти малака
ошириш ва қайта тайёрлаш факултети
кафедра мудири, физика-математика
фанлари номзоди.
Назиров Ҳусниддин,
«Молия академик лицейи» олий
тоифали математика ўқитувчиси.

Масъул муҳаррир: Маъмуров Эгамназар.
Молия институти «Олий математика»
кафедрасининг доценти, физика-
математика фанлари номзоди.

Ушбу китоб Тошкент Молия Институти қошидаги «Солиқ лицейи» илмий-педагогик кенгашининг 2003 йил 16 декабрдаги (Баённома № 4) йиғилишида муҳокама қилиниб, чоп этишга тавсия этилган.

Ушбу китобни падари бузрукво
римиз ва волидаи муҳтарамамизнинг порлоқ хотираларига бағишлаймиз.

Сўз боши

Сўнгги йилларда мамлакатимизда таълим соҳасида катта ўзгаришлар амалга оширилди. Жумладан, «Таълим тўғрисида»ги қонун, «Кадрлар тайёрлаш Миллий дастури» ва уларнинг ижросини таъминловчи ҳукумат қарорлари. Айниқса, кейинги уч-беш йил ичида республикамизнинг барча шаҳар, туманларида янги турдаги зиё масканлари – академик лицейлар, касб-ҳунар коллежлари қурилиши, қайтадан тўлиқ таъмирланиши таълим соҳасида бўлаётган ислоҳотларнинг амалий ифодасидир.

2001 йилдан бошлаб ушбу кенг қамровли улуғвор ишларнинг иккинчи босқичи бошланиб, асосий эътибор таълим жараёнини ташкил этиш, унинг моҳияти ва мазмунини яхшилашга қаратилмоқда. Мазкур вазифанинг бажарилишини таъминлаш учун фаннинг ҳар бир йўналиши бўйича янги ўқув режа дастурларига мос дарсликлар ва қўлланмалар ёзиш зарурдир, Ушбу «Математика», «Алгебра» деб аталувчи китоб янги дастур асосида ёзилган бўлиб, бундан академик лицей, касб-ҳунар коллежлари, тайёрлов бўлимлари, ўрта мактаб ўқитувчи ва ўқувчилари ҳамда олий ўқув юртларига кирувчилар (мустақил тайёрланиш учун) кенг фойдаланишлари мумкин.

1993 йилдан мамлакатимиздаги барча олий ўқув юртларида, кейинчалик ўрта махсус ўқув юртларида кириш имтихонлари тест усулида ўтказилмоқда. Ушбу усулнинг ўзига хос камчиликлари ва ижобий томонлари бор. Унинг камчиликлари (айниқса математикадан) шундан иборатки, тест усули бўйича имтихон олишда ўқувчининг билим даражасини қанчалик чуқур эканлигини ва мантиқий фикрлаш қобилиятини аниқлаш қийин бўлади.

Тест системасининг ижобий томони эса, биринчидан ўқувчи учун бир вақтнинг ўзида барча кириш имтихонларидан ўтиш имкони яратилади, иккинчидан фан ҳақида етарли маълумотларга эга бўлган ҳолда ўқувчининг масалага ижобий ёндашиш ва хотирлаш қобилиятини умумий баҳолашга имкон яратилади.

Мазкур китоб юқорида келтирилган камчилик ва ютуқларни ҳисобга олиб, ўқувчининг математика фанидан тўлиқ билим олишга, мантиқий фикрлаш қобилиятини оширишга ва тест ёрдамида кириш имтихонларини топширишга муҳим материал ролини бажаради.

Китобни ёзишда ўзбек, рус ва чет эл олимлари томонидан яратилган дарслик ва қўлланмалардан фойдаланилди. Шунингдек, муаллифлар китобни ёзишда кўп йиллик олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги қошидаги лицей, тайёрлов бўлимлари ва мактаб факултатив дарсларда ўқиган маърузаларидан ҳамда ҳамкасбларнинг маслаҳатларидан фойдаландилар.

Ушбу китоб тўрт бобдан иборат бўлиб, қуйидаги йўналишларни ўз ичига олган: «Ҳақиқий сонлар», «Алгебраик ифодалар», «Тенглама ва тенгламалар системаси», «Тенгсизлик ва тенгсизликлар системаси», «Тенглик ва тенгсизликларни исботлаш», «Комплекс сонлар», «Математик индукция усули».

Ҳар бир параграфда ўрганилаётган мавзунинг тўла назарияси ёритилган ва систематик равишда берилган. Улар мисол ва масалалар ёрдамида мустаҳкамланган. Мисол ва масалаларнинг энг қулай, қисқа ва айримларини эса турли хил ечнш усуллари мос изоҳлар билан берилган. Қолаверса, тест саволларида учрайдиган ностандарт ва мантиқий ечиладиган мисол ва масалаларнинг ечиш усуллари келтирилган.

Ҳар бир бобнинг охирида ўтилган мавзуларни мустаҳкамлаш учун тестлар ва машқлар берилган.

Қўлёзмани кўриб чиқиб, ўз фикр ва мулоҳазаларини билдирган физика-математика фанлари доктори, профессор Б.Б.Рихсиев, физика-математика фанлари номзодлари, доцентлар Н.К.Мамадалиев, Э.Маъмуров, олий тоифали ўқитувчи Ҳ.Назировга ҳамда қўлёзмани нашрга тайёрлашда катта ёрдам берган О.Абдуллаев, Э.Каримовларга, шунингдек китобни чоп этишга амалий ёрдам кўрсатган Молия институти қошидаги «Солиқ лицейи» ва «Молия академик лицейи» маъмуриятига муаллифлар самимий миннатдорчилик билдирадилар.

Китоб ҳақидаги фикр-мулоҳазаларингизни қуйидаги манзилга юборишингизни сўраймиз:

Тошкент шаҳри,
С.Рахимов тумани
Саидов 3-тупик кўчаси, 6-уй.
«Солиқ лицейи»

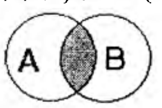
Муаллифлар.

I БОБ. ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР

1−§ .Тўплам тушунчаси. Тўпламлар устида амаллар.

Тўплам тушунчаси математикада асосий тушунчалардан бўлиб, унга таъриф бериб бўлмайди. Уни ҳар-хил мисоллар орқали тушунтириш мумкин. Масалан,: Ўзбекистондаги вилоятлар, натурал сонлар тўплами, мактабдаги ўқувчилар тўплами ва ҳаказо. Бу мисоллардаги вилоятлар, натурал сонлар, ўқувчилар тўпламнинг элементлари ҳисобланади. Ҳеч қандай элементга эга бўлмаган тўплам бўш тўплам дейилади ва $\varnothing$ кўринишида белгиланади.Тўпламлар лотин алфавитининг бош ҳарфлари билан белгиланади, яъни A, B, C, ... Масалан: $A=\{1,2,3,4\}$,B=$\{a,b,c,d\}$. Агар элемент тўпламга тегишли бўлса $\in$ белги, тегишли бўлмаса, $\notin\left(\bar{\in}\right)$ белги қўйилади. Юқоридаги мисолларда $3\in A$, $6\notin A$, $a\in B$, $e\notin B$.

1−Таъриф. Икки тўпламнинг кесишмаси деб шу тўпламларнинг умумий элементларидан тузилган тўпламга айтилади ва $\cap$ кўринишда белгиланади. Масалан: $A=\{1,2,4,6,8\}$, $B=\{2,4,8,9,11\}$. $A\cap B=\{2,4,8\}$.



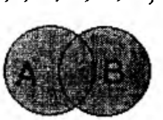
(1-чизма)

A ва *B* тўпламларнинг кесишмасининг геометрик ифодасини 1-чизмада кўрсатилгандек икки айлана кесишувидан ҳосил бўлган бўялган юза орқали кўрсатиш мумкин.

2−Таъриф. Икки тўпламнинг бирлашмаси деб камида шу тўпламлардан бирига тегишли элементлардан тузилган тўпламга айтилади.

Масалан: $A=\{2,4,6,8,10,12\}, B=\{8,10,12,14,16\}$,

$A\cup B=\{2,4,6,8,10,12,14,16\}$ каби ёзилади.



(2-чизма)

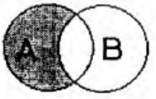
A ва *B* тўпламлар бирлашмасининг геометрик ифодасини 2-чизмада кўрсатилгандек бўялган юза орқали кўрсатиш мумкин.

3−Таъриф. Агар бир тўпламнинг ҳар бир элементи иккинчи тўпламга тегишли бўлса, биринчи тўплам иккинчи тўпламнинг қисм-тўплами дейилади ва $\subset$ белги кўринишида белгиланади.

Масалан: $A=\{a,b,c,d\}$ $B=\{b,c,d\}$ бўлса, $B\subset A$ бўлади.

4–Таъриф. A тўпламнинг B тўпламда бўлмаган ҳамма элементларига A ва B тўпламларнинг айирмаси дейилади ва $A \setminus B$ каби белгиланади.

Масалан: $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{1,2\}$ бўлса, у ҳолда $A \setminus B=\{3,4\}$ бўлади.



(3-чизма)

A ва B тўпламлар айирмасини 3-чизмада кўрсатилганидек бўялган юза орқали кўрсатиш мумкин.

Тўпламлар қуйидаги хоссаларга эга:

1. $A \cup B = B \cup A$.
2. $A \cap B = B \cap A$.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
6. $(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.
7. $A \cup A = A$.
8. $A \cap A = A$.

2-§ . Натурал сонлар ва улар устида амаллар.

1–Таъриф. Санаш натижасида ҳосил бўладиган 1,2,3,4,5,6,... сонлар натурал сонлар дейилади.

Ихтиёрий натурал сонни

$$n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_2 a_1 a_0}$$

кўринишида ёзиш мумкин, бу ерда $a_{k-1},\ldots,a_2,a_1,a_0$ лар $0,1,2,\ldots,9$; a_k эса $1,2,3,\ldots,9$ рақамларини қабул қилади, ёки $n=10k+l$, $l=0,1,\ldots,9$, $k=0,1,2,\ldots$

2–Таъриф. Ортиб бориш тартибида жойлашган 1,2,3,4,5,6,... сонлар кетма-кетлиги натурал сонлар тўплами дейилади ва қуйидаги кўринишда белгиланади:

$$N=\{n : n=1,2,3,4,5,\ldots\}.$$

N да энг кичик сон 1 га тенг; энг катта сон мавжуд бўлмаганлиги учун у чексиздир. Натурал сонлар тўплами жуфт ва тоқ сонлардан ташкил топган

3–Таъриф. 2 га қолдиқсиз бўлинадиган сонлар жуфт сонлар дейилади ва $2n$ $(n \in N)$ формула билан ёзилади. Масалан: 6,18,22,34,80 ва ҳоказо сонлар жуфт сонлардир.

4–Таъриф. Жуфт бўлмаган сонлар тоқ сонлар дейилади ва $2n-1$ ёки $2n+1$ $(n \in N)$ формула билан ёзилади. Масалан: 21,25,49,57 сонлар тоқ сонлардир.

5–Таъриф. Агар $a \in N$ бўлса, $1a, 2a, 3a, 4a, \ldots$ сонларга (яъни a нинг ихтиёрий натурал сон билан кўпайтмасига) a нинг карралиси дейилади. Масалан: 3 га каррали сонларни $3n$ $(n \in N)$, 4 га каррали сонларни $4n$ $(n \in N)$, 11 га каррали сонларни $11n$ $(n \in N)$ ва ҳаказо кўринишида ифодалаш мумкин.

Натурал сонлар учун қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш ва илдиздан чиқариш амаллари аниқланган.

2.1. Қўшиш ва қўшиш қоидалари. Айириш.

1. Икки ёки бир нечта сонларни қўшиш натижаси йиғинди деб аталади, сонларнинг ўзлари эса қўшилувчилар дейилади.
2. Агар $a \in N$ ва $b \in N$ бўлса, $a+b \in N$ бўлади, яъни иккита натурал сонлар йиғиндиси яна натурал сон бўлади. Йиғинди қуйидаги хоссаларга эга:
   а) $a+b=b+a$ − ўрин алмаштириш қонуни;
   б) $(a+b)+c=a+(b+c)$ − гуруҳлаш қонуни;
   в) $a+0=a$.
3. a сондан b сонни айириш шундай x сонни топишдан иборатки, бунда x нинг b билан йиғиндиси a га тенг, яъни $x+b=a$. x сон a ва b сонларининг айирмаси деб аталади ва $a-b$ кўринишида бўлади, $a-$ камаювчи, $b-$ айрилувувчи сон деб аталади.
4. Агар $a \in N$, $b \in N$ бўлиб, $a>b$ бўлса, $a-b \in N$ бўлади; $a<b$ бўлса, $a-b$ натурал сон мавжуд бўлмайди.

2.2. Кўпайтириш ва кўпайтириш қоидалари. Бўлиш.

1. Бир хил қўшилувчилар йиғиндиси кўпайтма, берилган кўпайтувчилар ёрдамида кўпайтмани топиш амали кўпайтириш деб юритилади.
2. Агар $a \in N$ ва $b \in N$ бўлса, $a \cdot b \in N$ бўлади, яъни иккита натурал соннинг кўпайтмаси яна натурал сон бўлади.

Кўпайтма қуйидаги хоссаларга эга:

Агар $a \in N$, $b \in N$, $c \in N$ бўлса,

1) $a \cdot b = b \cdot a$ − ўрин алмаштириш қонуни;
2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ − гуруҳлаш қонуни;
3) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ − тақсимлаш қонуни.

3. a сонини b сонга бўлиш шундай x сонни топишдан иборатки, уни b сонга кўпайтирганда a сон ҳосил бўлади, яъни $a:b=x$, агар $x \cdot b = a$, $a-$ бўлинувчи, $b-$ бўлувчи, x эса a ва b ларнинг бўлинмаси дейилади.
4. Агар a сони b сонига каррали бўлса, у ҳолда a сони b га бўлинади. Хусусан ҳар қандай натурал сон 1 га ва ўзига ҳам бўлинади, яъни

$$a:1=a \ , \ a:a=1.$$

Масалан: 12 сони 1,2,3,4,6,12 ларга каррали бўлгани учун 1,2,3,4,6,12 га бўлинади.

5. Икки натурал сон бўлинмаси ҳар доим натурал сон бўлавермайди.

Натурал сонлар учун даражага кўтариш ва илдиз чиқариш амаллари ушбу китобнинг II-бобида тўлиқ берилган.

3-§. Сонларнинг бўлиниш аломатлари. Қолдиқли бўлиш.

Кўпчилик ҳолларда бўлиш амалини бажармай, берилган натурал сонни иккинчи натурал сонга қолдиқсиз бўлиниши ёки бўлинмаслигини билиш лозим бўлади. Бунинг учун сонларнинг бўлиниш аломатларидан фойдаланилади.

1) 2 га бўлиниш аломати. Охирги рақами 0 ёки жуфт сон билан тугаган барча сонлар 2 га бўлинади.

Масалан: 120,182,516,4928 сонларининг ҳар бири 2 га бўлинади.

2) 5 га бўлиниш аломати. Охирги рақами 0 ёки 5 сони билан тугаган сонлар 5 га бўлинади.

Масалан: 195,1910,21190,12925.

3) 10 га бўлиниш аломати. Охирги рақами ноль билан тугаган барча сонлар 10 га бўлинади.

Масалан: 210,290,520,860,1140,92150.

4) 4(25) га бўлиниш аломати. Охирги икки рақами 0 билан тугаган ёки охирги иккита рақами 4(25) га бўлинадиган сонларгина 4(25) га бўлинади.

Масалан: 400,1900,1216,19556 бу сонларнинг ҳар бири 4 га бўлинади. 500,22500,92425,156975 бу сонларнинг ҳар бири 25 га бўлинади.

5) 8 га бўлиниш аломати. Охирги учта рақами 0 билан тугаган ёки охирги учта рақами 8 га бўлинадиган сонларгина 8 га бўлинади.

Масалан: 19000,73816,216832 бу сонларнинг ҳар бири 8 га бўлинади.

6) 3(9) га бўлиниш аломати. Рақамлар йиғиндиси 3(9) га бўлинадиган сонларгина 3(9) га бўлинади.

Масалан: 1293,702,92514 сонлар 3 га бўлинади, чунки рақамлар йиғиндиси 15,9,21 сонлардан иборат бўлиб, 3 га қолдиқсиз бўлинади. 720,5292,19872 сонлар 9 га бўлинади. Чунки берилган сонларнинг рақамлари йиғиндиси 9,18,27 сонлар 9 га қолдиқсиз бўлинади.

7) 6 га бўлиииш аломати.2 га ҳам 3 га ҳам бўлинадиган сонлар ва фақат шундай сонлар 6 га бўлинади.

Масалан: 1800,5298,3416562 сонларининг ҳар бири жуфт сонлар, демак улар 2 га қолдиқсиз бўлинади. Шу билан бирга рақамлари йиғиндиси 9,24,27 сонлар 3 га қолдиқсиз бўлинади.

8) 11 га бўлиниш аломати. Жуфт ўринда турган рақамлар йиғиндиси билан тоқ ўринда турган рақамлар йиғиндиси тенг ёки улар айирмаси 11 га бўлинадиган сонлар ва фақат шундай сонлар 11 га бўлинади.

Масалан: 2137245,876634 сонлар 11 га бўлинади, чунки тоқ ўриндаги рақамлар йиғиндиси жуфт ўриндаги рақамлар йиғиндисига тенг. 8493419, 719262918 сонлар 11 га бўлинади, чунки тоқ ва жуфт ўриндаги рақамлари йиғиндиларининг айирмаси 30-8=22 ва 39-6=33 сонлари ҳар бири 11 га бўлинади.

Берилган сонларнинг бўлиниш аломатидан фойдаланиб, бошқа сонлар учун ҳам бу қоидаларни қўллашимиз мумкин.
Масалан: 12 га бўлиниши учун 3 га ҳам, 4 га ҳам бўлинадиган сонларни оламиз ва ҳақазо.

1–Мисол. Қуйидаги кўринишдаги $\overline{123x43y}$ 3 га қолдиқсиз бўлинадиган энг кичик натурал сонни топинг.
Ечиш: 3 га бўлиниш аломатига кўра $1+2+3+x+4+3+y=13+x+y$. Бу йиғиндининг 3 га бўлинадиган энг кичик қиймати 15 га тенг. Бундан $x+y=2$. Демак $x+y=2$ шартни қаноатлантирувчи ва 3 га бўлинадиган учта натурал сон мавжуд. Яъни 1230432,1232430,1231431. Бу сонлар ичидаги энг кичик натурал сон 1230432.

2–Мисол. Ушбу $\overline{34x5y}$ кўринишдаги 36 га қолдиқсиз бўлинадиган беш хонали натурал сонларни топинг.
Ечиш: 36 сонини 4 ва 9 сонларининг кўпайтмаси кўринишида ёзиш мумкин, яъни $36=9\cdot4$. Демак, изланаётган беш хонали натурал сонлар 9 га ва 4 га қолдиқсиз бўлиниши керак. 4 га бўлиниш аломатига кўра $\overline{5y}$ сон 4 га бўлиниши учун $y=2;6$ сонлардан иборат бўлиши керак. 9 га бўлиниш аломатига кўра эса $12+x+y$ сони 9 га бўлиниши керак. Агар $y=2$ бўлса, $x=4$ бўлади. Агар $y=6$ бўлса, $x=0;9$ бўлади. Демак, изланаётган сонлар 34452, 34056 ва 34956 дан иборатдир.

3–Мисол. Ушбу $12+\overline{2x3}$ йиғинди 3 га қолдиқсиз бўлинадиган x рақамининг энг каттасини топинг.
Ечиш: 12 сони 3 га бўлинади. Демак, йиғинди 3 га бўлиниши учун $\overline{2x3}$ сон ҳам 3 га бўлиниши керак, яъни $x+5$ сони 3 га бўлинадиган энг катта рақами $x=7$ га тенгдир.

Таъриф (қолдиқли бўлиш ҳақида). $a(a\in N)$ сонини $b(b\in N)$ сонига бўлиш деб
$a=bq+r$
кўринишда ёзишга айтилади, бунда $0\le r<b$, $q-$ бўлинма, $r-$ қолдиқ, $q,r\in N$.

а) Агар $r=0$ бўлса, $a=bq$ бўлиб, a сони b сонига қолдиқсиз бўлинади.
б) Агар $r\neq0$ бўлса, у ҳолда a сони b сонига қолдиқли бўлинади.

Масалан: 25 ни 7 га бўлсак, бўлнма 3, қолдиқ 4 га тенг бўлиб, $25=3\cdot7+4$ кўринишда ёзилади.

Иккига бўлганда қолдиқ қоладиган сонларни $2k+1$ $(k\in N)$ формула кўринишида, 7 га бўлганда 4 қолдиқ қоладиган сонларни $7m+4$ $(m\in N)$ формула кўринишида ифодалаш мумкин ва ҳоказо.

Шундай қилиб a сонини $n\,(n\in N)$ га бўлганда қуйидагиларга эга бўламиз:

а) a сони n га қолдиқсиз бўлинади ва қуйидагича ёзилади: $a=mn,(m\in N)$.

б) a сонини n га бўлганда қолдиқ 1,2,3,..., n-1 сонларга тенг бўлади ва қуйидагича ёзилади:
$a=kn+l$, $k\in N, l=1,2,...n-1$.

Масалан: a ни 3 га бўлсак, қуйидагиларга эга бўлишимиз мумкин: ёки $a=3m$ $(m\in N)$ ёки $a=3k+1$ $(k\in N)$, ёки $a=3l+2$ $(l\in N)$. Демак қолдиқлар 0,1,2 бўлади.

4–Мисол. 17 га бўлганда 2 қолдиқ, 5 га бўлганда 3 қолдиқ қоладиган барча a сонларни топинг.

Ечиш: a сонини 17 га бўлганда 2 қолдиқ қолса, қуйидагича ёзилади:

$$a_k=17k+2,\ k\in N.$$

a ни 5 га бўлганда қолдиқ 3 қолса, қуйидагича ёзилади:

$$a_n=5n+3,\ n\in N.$$

Агар бу сонлар тенг бўлса, яъни $a_k=a_n$, у ҳолда $17k+2=5n+3$ бўлади. Бундан $5n=17k-1=15k+(2k-1)$ ҳосил қиламиз. Бу айниятдан кўринадики, $2k-1$ сони 5 га бўлинади, яъни $2k-1=5m(m\in N)$ ва $2k=4m+m+1$ бундан $m+1$ сони 2 га бўлинади, яъни

$$m+1=2l \text{ ёки } m=2l-1, k=2m+l \quad (l\in N).$$

Энди k ва n ни l орқали ифодалаймиз:

$$k=2(2l-1)+l=5l-2$$
$$5n=15k+5m\Rightarrow n=3k+m$$
$$n=3(5l-2)+2l-1=17l-7.$$

Шундай қилиб,

$$a_k=17k+2=17(5l-2)+2=85l-32$$
$$a_n=5n+3=5(17l-7)+3=85l-32.$$

Бундан

$$85l-32=85(l-1)+85-32=85(l-1)+53 \qquad (l\in N).$$

Демак, $a=85q+53$ $(q\in N)$ кўринишидаги сонларни 17 га бўлсак, қолдиқ 2; 5 га бўлсак, қолдиқ 3 қолади.

4–§ Сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиш. Энг катта умумий бўлувчи. Энг кичик умумий бўлинувчи (карралиси).

1–Таъриф. Фақат бирга ва ўзига бўлинадиган сонлар туб сонлар дейилади.

$$N_m=\{2,3,5,7,11,13,...\}.$$

2–Таъриф. Учта ва ундан ортиқ бўлинувчига эга бўлган сонлар мураккаб сонлар дейилади.

$N_m = \{4,6,8,10,12,14,...\}$.

1 сони туб ҳам эмас, мураккаб ҳам эмас.

Тоқ рақам билан тугаган ҳар қандай сон туб сон бўлади дейиш нотўғри. Масалан: $49 = 7 \cdot 7$; $51 = 3 \cdot 17$.

Туб сонлар ичида фақат битта жуфт сон – 2 бўлиб, қолган барчаси тоқ сонлардир.

3–Таъриф. Берилган натурал сонни фақат туб сонларнинг кўпайтмаси кўринишида тасвирлаш, сонни туб кўпайтувчиларга ажратиш дейилади: Масалан:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 2^2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$.

Демак, ҳар қандай мураккаб сонни ягона усул билан туб сонлар кўпайтмаси шаклида тасвирлаш мумкин.

4–Таъриф. Соннинг бўлувчиси деб, шу сон қолдиқсиз (яхлит) бўлинадиган натурал сонга айтилади.

Масалан: 12 бўлувчилари: 1;2;3;4;6;12;

15 бўлувчилари: 1;3;5;15.

5–Таъриф. Бир неча соннинг умумий бўлувчиси деб, у сонларнинг ҳар бири қолдиқсиз (яхлит) бўлинадиган сонга айтилади.

Масалан: 12 ва 15 сонларининг умумий бўлувчилари 1ва 3 сонлардан иборат.

6–Таъриф. Берилган сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси деб ,шу сонларнинг умумий бўлувчилари ичида энг каттасига айтилади ва қисқача ЭКУБ деб белгиланади.

Масалан: ЭКУБ (18,24)=2·3=6. ЭКУБ(12,15)=3.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 24 = 2^3 \cdot 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 15 = 3 \cdot 5 \end{array}$$

7–Таъриф. Энг катта умумий бўлувчиси 1 га тенг бўлган сонлар ўзаро туб сонлар дейилади.

Масалан: ЭКУБ(10,21)=1, ЭКУБ(56,25)=1.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 10 = 2 \cdot 5 \\ 21 = 3 \cdot 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 56 = 2^3 \cdot 7 \\ 25 = 5^2 \end{array}$$

Шундай қилиб, сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топиш учун:
1. Берилган сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиш.
2. Энг кичик даража кўрсаткичли умумий туб кўпайтувчилардан кўпайтма тузиш.
3. Топилган кўпайтманинг қийматини топиш керак.

8–Таъриф. Бир неча соннинг умумий бўлинувчиси (карралиси) деб шу сонларнинг ҳар бирига бўлинадиган сонга айтилади.
Масалан: 6 ва 8 сонларининг умумий бўлинувчилари 24;48;96 ва ҳаказо сонлардан иборат.

9–Таъриф. Бир неча сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси (карралиси) деб шу сонларнинг бўлинувчилари (карралилари) ичида энг кичигига айтилади ва қисқача ЭКУК деб белгиланади.
Масалан: ЭКУК $(16,4)=2^4=16$. ЭКУК$(12,18)=2^2\cdot 3^2=36$.

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 16=2^4 \\ 4=2^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 12=2^2\cdot 3 \\ 18=2\cdot 3^2 \end{array}$$

Умуман, бир нечта соннинг умумий бўлинувчисини (карралисини) топиш учун:
1. Берилган сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиш.
2. Ҳосил бўлган ҳамма туб кўпайтувчиларнинг ҳар бирини энг катта даража кўрсаткичларини олиб кўпайтма тузиш.
3. Ҳосил бўлган кўпайтманинг қийматини топиш керак.

5-§. Оддий касрлар.

1–Таъриф. Бирликнинг бир ёки бир нечта тенг улушига оддий каср деб аталади.

Масалан: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5},\frac{7}{12},\frac{120}{147}$ ва ҳакозо.Оддий каср $\frac{a}{b}$ кўринишда ёзилади: $a-$ касрнинг сурати, $b-$ касрнинг махражи, «–» чизиғи эса каср чизиғи дейилади.

2–Таъриф. Махражи суратидан катта бўлган каср тўғри каср деб, сурати махражига тенг ва ундан ортиқ бўлган каср нотўғри каср деб аталади.

Масалан: $\frac{3}{7}$– тўғри каср; $\frac{13}{13}$; $\frac{21}{13}$ – нотўғри каср.

3–Таъриф. Бутун ва касрдан тузилган сон аралаш каср (сон) деб аталади.яъни $c\frac{a}{b}$, бу ерда c-бутун, $\frac{a}{b}$- тўғри каср.

Масалан: $3\frac{2}{9}$; $5\frac{3}{4}$; $16\frac{1}{7}$.

Ихтиёрий аралаш касрни бутун ва касрнинг йиғиндиси кўринишда ёзиш мумкин. Масалан: $2\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}$, $5\frac{3}{4}=5+\frac{3}{4}$.

Касрлар устида амаллар бажаришда баъзан аралаш сонни нотўғри касрга ёки нотўғри касрни аралаш сонга айлантириш керак бўлади.

1–қоида. Нотўғри касрни аралаш сонга айлантириш учун унинг суратини махражига бўлиб, бўлинмани бутун қилиб ёзиш, қолдиқни сурат қилиб, махражни эса аввалигича қолдириш керак.

Масалан: $\frac{35}{8}$ нотўғри касрни аралаш касрга айлантириш учун 35 ни 8 га бўламиз, бўлинма 4, қолдиқ эса 3 бўлади. Демак, $\frac{35}{8}=4\frac{3}{8}$ бўлади.

2–қоида. Аралаш сонни нотўғри касрга айлантириш учун махражни бутун сонга кўпайтириб, бу кўпайтмага суратни қўшиб, йиғиндини сурат қилиб ёзиш, махражни эса ўзгаришсиз қолдириш керак.

Масалан: $3\frac{4}{5}=\frac{3\cdot5+4}{5}=\frac{19}{5}$.

5.1 .Оддий касрнинг асосий хоссаси.

а) Агар $a\cdot d=b\cdot c$ тенглик ўринли бўлса, $\frac{a}{b}$ ва $\frac{c}{d}$ касрлар тенг бўлади. Яъни шундай хулоса қилишимиз мумкин: Касрнинг сурат ва махражини (0 дан фарқли) сонга кўпайтириш ва бўлиш мумкин.

Масалан: $\frac{3}{11}=\frac{3\cdot5}{11\cdot5}=\frac{15}{55}$; $\frac{75}{100}=\frac{75:25}{100:25}=\frac{3}{4}$.

б) Касрни қисқартириш деб унинг сурат ва махражини нолдан фарқли сонга бўлиб, берилган касрга тенг, аммо ҳадлари кичик бўлган бошқа каср билан алмаштиришга айтилади.

Масалан: $\frac{24}{36}$ касрнинг сурат ва махражини 12 га бўлиб, $\frac{2}{3}$ касрни ҳосил қиламиз.

Оддий касрни қисқартириш учун касрнинг сурат ва махражини уларнинг энг катта умумий бўлувчисига бўлиш керак.

Масалан: $\frac{14}{21}$, ЭКУБ(14;21)=7, демак $\frac{14}{21}=\frac{2\cdot7}{3\cdot7}=\frac{2}{3}$.

5.2. Оддий касрларни таққослаш.

а) Махражлари бир хил бўлган икки оддий касрнинг сурати каттаси катта бўлади.

Масалан: $\frac{7}{19}<\frac{9}{19}$; $\frac{17}{21}>\frac{11}{21}$.

б) Суратлари бир хил икки оддий касрнинг махражи каттаси кичик бўлади.

Масалан: $\frac{11}{13}<\frac{11}{7}$; $\frac{43}{31}>\frac{43}{39}$.

в) Сурат ва махражлари ҳар-хил бўлган икки оддий касрни солиштириш учун уларни ёки умумий суратга ёки умумий махражга келтириш керак.

Масалан: 1) $\frac{5}{8}$ ва $\frac{3}{7}$; 2) $\frac{3}{4}$ ва $\frac{7}{11}$.

Бу мисолларни ечиш учун 1) берилган касрларни умумий махражга, 2) умумий суратга келтирамиз ва а) ва б) қоидалар асосида taққослаймиз:

$\frac{5\cdot 7}{8\cdot 7}$ ва $\frac{3\cdot 8}{7\cdot 8}$ ёки $\frac{35}{56}$ ва $\frac{24}{56}$. Демак $\frac{5}{8}>\frac{3}{7}$.

$\frac{3\cdot 7}{4\cdot 7}$ ва $\frac{7\cdot 3}{11\cdot 3}$ ёки $\frac{21}{28}$ ва $\frac{21}{33}$. Демак $\frac{3}{4}>\frac{7}{11}$.

6-§ . Ўнли касрлар. Даврий касрлар.

1–Таъриф. Махражида битта бир ва битта ёки бир нечта ноллардан иборат бўлган касрга ўнли каср деб аталади,яъни $\frac{1}{10^k}$, $k\in N$.

Масалан: $\frac{7}{10}$, $\frac{41}{100}$, $\frac{111}{1000}$ – ўнли касрлар.

Одатда ўнли касрлар махражсиз ёзилади.

Масалан: $\frac{7}{10}=0{,}7$; $3\frac{9}{100}=3{,}09$; $5\frac{141}{10000}=5{,}0141$.

1. Ўнли касрни оддий каср кўринишида ёзиш учун суратга ўнли касрдаги вергул ва уидан кейинги нолларни ташлаб, қолгаи рақамларни бутун сон кўринишида ёзиш, махражга эса, бир ва кетидаи вергулдан кейии нечта рақам бўлса, шуича ноллар ёзиш, сўнгра ҳосил бўлган касрни имкоии бўлса, қисқартириш керак.

Масалан: $0{,}42=\frac{42}{100}=\frac{21}{50}$, $1{,}75=\frac{175}{100}=\frac{7}{4}$, $0{,}13=\frac{13}{100}$.

2. **Оддий касрни ўили каср шаклида ёзиш учуи оддий каср суратиии махражига бўлиб, бўлинмаии ёзиш керак.**

Масалан: $\frac{3}{4}=0{,}75$, яъни касрнинг сурати (3) ни махражи (4) га бўлсак, 0,75 ҳосил бўлади.

Кўп ҳолларда шундай мисоллар учрайдики, оддий касрни ўнли касрга айлантиришда бўлиш жараёни чексиз давом этаверади. Бундай касрга чексиз ўнли каср дейилади.

Масалан: $\frac{2}{3}=0{,}666...$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 3 \\ \hline 20 & 0{,}66... \\ \underline{18} & \\ 20 & \\ \underline{18} & \\ 20 & \end{array}$$

Худди шундай $\frac{3}{7}=0{,}428571...$

2–Таъриф. Бир ёки бир неча рақамли бир хил тартибда такрорланаверадиган чексиз ўнли каср даврий ўнли каср дейилади.
Масалан: 3,222...=3,(2); 2=2,(0); 0,2=0,2(0); 12,4242...=12,(42).

Ўнли даврий касрлар икки хил турда бўлади:

а) соф даврий каср – даврий касрнинг даври вергулдан кейин дарҳол бошланади. Масалан: 3,(2); 0,(7); 5,(42).

б) аралаш даврий каср – даврий касрда вергул билан давр орасида битта ёки бир нечта рақам бўлади. Масалан: 11,1(13); 5,21(3).

Демак, ҳар қандай оддий касрни чекли ёки чексиз даврий ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин.

3.**Чексиз даврий ўнли касрни оддий касрга айлантириш қуйидагича:**

Чексиз даврий касрни оддий касрга айлантириш учун иккинчи давригача турган сондан биринчи даврга турган сонии айириш ва айирмани суратга ёзиш, махражга эса даврда нечта рақам бўлса, шунча тўққиз ва вергул билан биринчи давр орасида нечта рақам бўлса, шунча ноллар қўйиш керак.

Масалан: оддий касрга айлантиринг.

1) 0,(37); 2) 0,(11); 3) 5,(07); 4) 2,7(81); 5) 2,91(8); 6) 8,2(8);
7) 0,18(0); 8) 0,14(9).

Ечиш:

1) $0,(37)=\frac{37}{99}$; 2) $0,(11)=\frac{11}{99}=\frac{1}{9}$; 3) $5,(07)=\frac{507-5}{99}=\frac{502}{99}$;

4) $2,7(81)=\frac{2781-27}{990}=\frac{2754}{990}=\frac{306}{110}$; 5) $2,91(8)=\frac{2918-291}{900}=\frac{2627}{900}$;

6) $8,2(8)=\frac{828-82}{90}=\frac{746}{90}=\frac{373}{45}$;

7) $0,18(0)=\frac{180-18}{900}=\frac{162}{900}=\frac{9}{50}=0,18$; 8) $0,14(9)=\frac{149-14}{900}=\frac{135}{900}=0,15$.

7-§. Каср устида арифметик амаллар.

7.1. Оддий касрлар.

1. Касрларнинг махражи бир хил бўлса, уларни қўшиш учун суратлари қўшилиб, махражи эса ўзгаришсиз қолади. Айириш учун эса камаювчининг суратидан айрилувчининг сурати айрилади, махражи эса ўзгаришсиз қолади, яъни $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$. Ҳосил бўлган каср имкони бўлса, қисқартирилади.
Масалан:
1) $\frac{5}{11} + \frac{2}{11} = \frac{7}{11}$; 2) $\frac{13}{19} - \frac{6}{19} = \frac{7}{19}$; 3) $\frac{7}{15} - \frac{2}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$;

2. Икки ва ундан ортиқ махражи ҳар-хил бўлган касрларни қўшганда (айирганда) умумий махраж сифатида барча махражларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси олинади, яъни $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ ёки

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a\frac{m}{b} \pm c\frac{m}{d}}{m}$, бу ерда m=ЭКУК(b,d).

Масалан:а) $\frac{7}{12} + \frac{5}{18}$, ЭКУК(12,18)=36 .

Демак $\frac{7}{12} + \frac{5}{18} = \frac{7 \cdot \frac{36}{12} + 5 \cdot \frac{36}{18}}{36} = \frac{7 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{36} = \frac{31}{36}$;

б) $\frac{3}{7} - \frac{1}{8} = \frac{3 \cdot 8 - 7 \cdot 1}{7 \cdot 8} = \frac{24 - 7}{56} = \frac{17}{56}$.

3. а) Аралаш сонларни қўшишда олдин бутун қисмлари, сўнгра каср қисмлари қўшилади:

$$3\frac{1}{4} + 5\frac{1}{6} = (3 + 5) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = 8 + \frac{5}{12} = 8\frac{5}{12};$$

б) Аралаш сонларни айиришда бутун қисмидан бутун қисми ва каср қисмидан каср қисми айрилади:

$$9\frac{1}{3} - 4\frac{1}{5} = (9 - 4) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 5 + \frac{2}{15} = 5\frac{2}{15};$$

в) Агар камаювчининг каср қисми айрилувчининг каср қисмидан кичик бўлса, бундай ҳолда камаювчининг бутун қисмидан 1 «қарз» олиниб, махражига тенг катталик камаювчининг суратига қўшилади.
Масалан:

$$6\frac{1}{4} - 3\frac{2}{3} = 3\frac{1}{4} - \frac{2}{3} = 2 + 1 + \frac{3 - 8}{12} = 2 + \frac{12}{12} + \frac{3 - 8}{12} = 2 + \frac{15 - 8}{12} = 2\frac{7}{12}.$$

4.Касрларни кўпайтиришда суратлари кўпайтирилиб, сурат қилиб ёзилади, махражлари кўпайтирилиб эса махраж қилиб ёзилади, яъни $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

Касрларни кўпайтиришда сурат ва махражларинг умумий кўпайтувчиси бўлса, касрни шу сонга қисқартириш мумкин. Кўпайтиришда аралаш сонлар учраса, улар нотўғри каср кўринишида ёзиб олинади, сўнгра амал бажарилади.

Масалан:

$$1)\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{9}=\frac{2\cdot5}{7\cdot9}=\frac{10}{63};\quad 2)\frac{4}{15}\cdot\frac{9}{7}=\frac{4\cdot3}{5\cdot7}=\frac{12}{35};\quad 3)5\frac{1}{4}\cdot4\frac{1}{2}=\frac{16}{9}\cdot\frac{9}{2}=\frac{8\cdot3}{1\cdot1}=24.$$

5. Касрни касрга бўлиш учун биринчи касрнинг суратини иккинчи касрнинг махражига кўпайтириб, натижани сурат қилиб ёзиш, биринчи касрнинг махражини иккинчи касрнинг суратига кўпайтириб, натижани махраж қилиб ёзиш керак, яъни $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

Масалан:

$$\frac{2}{7}:\frac{3}{5}=\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{3}=\frac{10}{21};\quad 2\frac{1}{2}:\frac{5}{6}=\frac{5}{2}:\frac{5}{6}=\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3}{1}=3.$$

Таъриф. Кўпайтмаси 1 га тенг бўлган иккита сон ўзаро тескари сонлар дейилади, яъни $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$.

Масалан:

а) 8 ва $\frac{1}{8}$ ўзаро тескари сонлар, чунки $8\cdot\frac{1}{8}=1$;

б) $\frac{2}{3}$ ва $\frac{3}{2}$ ўзаро тескари сонлар, чунки $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$;

в) $2\frac{2}{3}$ ва $\frac{3}{8}$ ўзаро тескари сонлар, чунки $2\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{8}=1$;

г) 0,35 га тескари сонни топиш учун бу сонни оддий касрга айлантирилиб олинади, сўнг унга тескари сон топилади, яъни $0{,}35=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$, $\frac{7}{20}$ сонига тескари сон $\frac{20}{7}$ бўлади.

7.2. Ўнли касрлар

1) Икки ўнли касрни қўшиш (айириш) учун уларнинг бутун қисми бутун остига, вергул вергул остига, каср қисми каср қисми остига ёзилиб, бутун сонларни қўшиш (айириш) каби қўшилади (айрилади) ва натижада вергул вергуллар остига қўйилади.

Масалан:

$$1)\ \begin{array}{r} 19{,}271 \\ +\ \ \ \\ \underline{1{,}162} \\ 20{,}433 \end{array}\qquad 2)\ \begin{array}{r} 112 \\ +\ \ \ \\ \underline{3{,}2} \\ 115{,}2 \end{array}\qquad 3)\ \begin{array}{r} 9{,}216 \\ -\ \ \ \\ \underline{2{,}125} \\ 7{,}091 \end{array}\qquad 4)\ \begin{array}{r} 5 \\ -\ \ \ \\ \underline{3{,}89} \\ 1{,}11 \end{array}$$

926543

2) Ўнли касрни ўнли касрга кўпайтириш учун вергулларига эътибор қилмасдан, бутун сонлар каби кўпайтириш ва кўпаювчи билан кўпайтувчининг ҳар иккаласида нечта каср хонаси бўлса, кўпайтмада ўнгдан шунча каср хонани вергул билан ажратиш керак.

Масалан: 1) 2,41 2) 9,103 3) 3,16

$$\begin{array}{r} 2{,}41 \\ \times\ \underline{3{,}2} \\ 482 \\ +\ \underline{723} \\ 7{,}712 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9{,}103 \\ \times\ \underline{12} \\ 18206 \\ +\ \underline{9103} \\ 109{,}236 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}16 \\ \times\ \underline{7{,}02} \\ 632 \\ +\ \underline{2212} \\ 22{,}1832 \end{array}$$

3) Ўнли касрларни бўлишда бўлувчининг ҳар доим 10,100 ва ҳаказо марта орттириб, бутунга келтириб оламиз, сўнгра бўлишни бажарамиз.

Масалан:1) 8,928:1,44=892,8:144=8928:1440=6,2; 2) 0,7:0,3=7:3=2,(3).

4) Ўнли касрни ўнли касрга бўлганда қолдиқсиз бўлинмаса, у ҳолда бундай касрлар оддий касрга айлантириб бўлинади.

7.3. Амаллар бажариш тартиби.

Қўшиш ва айириш биринчи босқич амаллари, кўпайтириш ва бўлиш иккинчи босқич амаллари дейилади.

1) Агар ифода бир хил босқич амалларидан иборат бўлиб, қавслар иштирок этмаса, улар ёзилиш тартибида – чапдан ўнгга кетма-кет бажарилади.

Масалан:

1) $$\frac{2}{9}\overset{(1)}{+}\frac{3}{5}\overset{(2)}{-}\frac{1}{2}=\frac{37}{45}-\frac{1}{2}=\frac{29}{90};$$

2) $$\frac{2}{5}\overset{(1)}{\cdot}\frac{4}{9}\overset{(2)}{:}\frac{2}{15}\overset{(3)}{:}\frac{5}{7}\overset{(4)}{\cdot}\frac{3}{7}=\frac{1}{5}.$$

2) Агар ифодада ҳам биринчи, ҳам иккинчи босқич амаллари иштирок этиб, қавслар бўлмаса, у ҳолда иккинчи босқич амаллари биринчи навбатда бажарилади.

Масалан:

а) $$15\frac{2}{5}\overset{(2)}{-}3\overset{(1)}{\cdot}4=15\frac{2}{5}-12=3\frac{2}{5};$$

б) $$3\frac{1}{4}\overset{(1)}{\cdot}4\overset{(3)}{+}5\overset{(2)}{:}\frac{1}{5}=\frac{13}{4}\overset{(1)}{\cdot}4\overset{(3)}{+}5\overset{(2)}{\cdot}\frac{5}{1}=13+25=38.$$

3) Агар ифодада қавс мавжуд бўлса, аввал қавслар ичидаги амаллар биринчи ва иккинчи қоидаларга асосан бажарилади. Сўнгра шу қоидаларга кўра бошқа амаллар бажарилади.

Масалан:

$$\overset{(1)}{\left(2\frac{1}{2}-1\frac{3}{8}\right)}\overset{(3)}{\cdot}\overset{(2)}{\left(3\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right)}=3.$$

8–§. Нисбат. Пропорция.

1–Таъриф. a сонининг b сонига нисбати деб, a ни b га бўлишдан ҳосил бўлган бўлинма (каср)га айтилади, яъни $a:b$ ёки $\frac{a}{b}$.

Икки соннинг нисбатини топиш биринчи сон иккинчисидан неча марта катта ёки биринчи сон иккинчисининг қандай қисмини ташкил этишини аниқлаш демакдир.

$a:b=\frac{a}{b}=q$. a – нисбатнинг олдинги ҳади,

b – нисбатнинг кейинги ҳади,

q – нисбат.

Нисбатларнинг хоссалари: 1.Олдинги ҳад кейинги ҳад билан нисбатининг кўпайтмасига тенг:

$$a=b\cdot q.$$

2. Кейинги ҳад олдинги ҳадни нисбатга бўлишдан чиққан бўлинмага тенг:

$$b=a:q.$$

2–Таъриф. Икки нисбатнинг тенглиги пропорция дейилади:

$$a:b=c:d \text{ ёки } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

a,d–пропорциянинг четки ҳадлари, b,c–прспорциянинг ўрта ҳадлари.

Пропорциянинг асосий хоссалари: 1. Пропорциянинг четки ҳадлари кўпайтмаси унинг ўрта ҳадлари кўпайтмасига тенг, яъни $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ бўлса, у ҳолда $a\cdot d=b\cdot c$.

Бу хосса пропорциянинг номаълум ҳадини топишда қўлланилади.

Масалан: $\frac{13}{15}=\frac{x}{10}$ $x=\frac{13\cdot 10}{15}=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}$.

2. Пропорциянинг исталган четки ҳади билан исталган ўрта ҳадини бир вақтда бир хил сон марта орттирилса, ёки камайтирилса, пропорция ўзгармайди.

Масалан: $72:18=36:9$ пропорциянинг биринчи четки ҳади (72) ва иккинчи ўрта ҳади (36) ни 3 марта камайтирсак, пропорция ўзгармайди: $24:18=12:9$.

3. $a:b=c:d$ пропорциядан қуйидаги ҳосилавий пропорцияни ёзиш мумкин: $a:c=b:d$; $d:b=c:a$; $d:c=b:a$, яъни пропорцияда четки ва ўрта ҳадларни ёки иккала ҳадни бир йўла ўрнини алмаштириш мумкин.

Масалан: $7:5=77:55$ ни $7:77=5:55$, $55:5=77:7$ кўринишларида ёзиш мумкин.

4. Агар $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ бўлса, у ҳолда $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$; $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ бўлади.

5. Агар $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{x}{y}=...$ бўлса, у ҳолда $\frac{a+c+x+...}{b+d+y+...}=\frac{a}{b}$ бўлади.

9-§. Тўғри пропорционал миқдор. Ўрта арифметик ва вазн қиймат.

1–Таъриф. Агар бир миқдор k марта ортганда (камайганда) иккинчи миқдор ҳам k марта ортса (камайса), бундай миқдорлар тўғри пропорционал миқдорлар дейилади.

Агар a ва b тўғри пропорционал миқдорлар бўлса, у ҳолда улар орасида боғланиш қуйидаги $\frac{a}{b}=k$ формула ёрдамида берилади, бу ерда $k-$ тўғри пропорционаллик коэффициенти дейилади.

a сонини k ва l сонларга тўғри пропорционал қилиб бўлакларга ажратиш (a сонини берилган $k:l$ нисбатда бўлиш) қоидаси қуйидагича:

1) k ва l сонларини қўшамиз: $k+l$;

2) a ни $(k+l)$ га бўламиз: $\frac{a}{k+l}$;

3) бўлинмани аввал k га, сўнгра l га кўпайтирамиз: $\frac{a}{k+l}\cdot k$; $\frac{a}{k+l}\cdot l$

Шунда ҳосил қилинган $\frac{ak}{k+l}$; $\frac{al}{k+l}$ сонлар нисбати $k:l$ нисбатга тенг бўлади: $\frac{ak}{k+l}:\frac{al}{k+l}=k:l$.

a ни 3 та, 4 та, ... сонларга тўғри пропорционал қилиб 3 та, 4 та,... бўлакларга ажратиш қоидаси ҳам шу кабидир.

Масалан: 24 ни 3,8, 1 сонларга тўғри пропорционал қилиб учта бўлакка ажратинг (24 ни 3:8:1 нисбатда бўлинг):

1) 3+8+1=12; 2) 24:12=2; 3) 2·3=6; 2·8=16; 2·1=2; 24=6+16+2; 24 ни 6,16,2 қилиб 3 та бўлакка ажратсак, уларнинг нисбати 6:16:2=3:8:1 бўлади.

2–Таъриф. Бир нечта сонлар йиғиндисини қўшилувчилар сонига бўлиш натижаси шу сонларнинг ўрта арифметик қиймати дейилади.

Масалан. 1) a,b,c сонларининг ўрта арифметик қиймати $\frac{a+b+c}{3}$ га тенг.

2) 0,85; 0,25; 0,3; 2 сонларининг ўрта арифметик қиймати $\frac{0{,}85+0{,}25+0{,}3+2}{4}=0{,}85$.

Шундай қилиб, берилган сонларнинг ўрта арифметик қийматини топиш учун уларнинг йиғиндисини қўшилувчилар сонига бўлиш керак.

3–Таъриф. a,b,c сонларининг ўрта вазнли қиймати деб $\frac{a\cdot k+b\cdot m+c\cdot n}{k+m+n}$ сонга айтилади. Бу ерда k,m,n – мусбат сонлар.

Масалан: 1) Баҳоси a сўмлик k кг, b сўмлик m кг, c сўмлик n кг маҳсулот бўлса, бу маҳсулотлар аралашмасининг 1 кг-ми $\frac{a\cdot k+b\cdot m+c\cdot n}{k+m+n}$ сўм туради.

2) Температураси 20° бўлган 6 литр сувга температураси 60° бўлган 14 литр сув қўшилди. Идишдаги сув температураси неча градус бўлади:

$t=\frac{6\cdot 20+14\cdot 60}{6+14}=\frac{120+840}{20}=\frac{960}{20}=48$. Демак, идишдаги сув температураси 48° га тенг.

4–Таъриф. a ва b мусбат сонларнинг ўрта гармоник қиймати деб $\frac{2ab}{a+b}$ сонга айтилади.

Масалан: Поезд А шаҳардан В шаҳарга 60км/соат тезлик билан юрган. В шаҳардан А шаҳарга эса 40 км/соат тезлик билан юрди. Поезд бориш ва келишдаги жами йўлни ўртача қандай тезликда ўтган:

$v=\frac{2\cdot 60\cdot 40}{60+40}=48$ км/соат.

10–§ . Процент (Фоиз).

1–Таъриф. Соннинг юздан бири $\left(\frac{1}{100}\right)$ улушига процент (фоиз) дейилади ва % белги билан белгиланади.

Масалан: а) 5%; 2,1%;125%.

$$\text{б)}\ 0{,}01=\frac{1}{100}=1\%;\ 0{,}25=\frac{25}{100}=25\%;\ 0{,}023=\frac{23}{1000}=2{,}3\%.$$

Процентга доир асосий масалалар: 1. Берилган соннинг берилган процентини топиш.

2. Процентга кўра сонни топиш.

3. Сонларнинг процент нисбатини топиш.

1-қоида (соннинг процентини топиш). Берилган соннинг бир неча процентини топиш учун берилган сонни 100 га бўлиб, натижасини процентлар сонига кўпайтириш керак.

a сонининг $p\%$ ини b деб белгиласак, у ҳолда

$$\begin{array}{l} a - 100\% \\ b - p\% \end{array} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{ap}{100} \text{ бўлади.}$$

Масалан: 200 сонининг 12% ти $b = \dfrac{200 \cdot 12}{100} = 24$ га тенг.

2-қоида (процентга кўра сонни топиш). Берилган процентига кўра сонни топиш учун, берилган процентни 100 га кўпайтириб, процент сонига бўлиш керак.

a сонининг $p\%$ и b га тенг бўлса, у ҳолда

$$\begin{array}{l} a - 100\% \\ b - p\% \end{array} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b \cdot 100}{p} \text{ га тенг бўлади.}$$

Масалан: a сонининг 23% ти 69 га тенг бўлса, у ҳолда a сони

$a = \dfrac{69 \cdot 100}{23} = 300$ га тенг бўлади.

3-қоида (икки соннинг процент нисбати). Бир соннинг иккинчи сонга процент нисбатини топиш учун биринчи сонни иккинчи сонга бўлиб, бўлинмани 100 га кўпайтириш керак.

a ва b сонларининг процент нисбатини топиш формуласи

$$p = \frac{a}{b} \cdot 100\% \text{ га тенг.}$$

Масалан 8 ва 160 сонларининг процент нисбати $p = \dfrac{8 \cdot 100\%}{160} = 5\%$ га тенг.

a ва b сонларининг процент нисбати a сони b сонининг неча процентини ташкил этишини кўрсатади.

11-§. Қарама-қарши сонлар. Координата тўғри чизиғи. Соннинг модули ва унинг хоссалари.

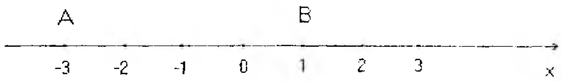
1-Таъриф. Фақат ишораси билангина фарқ қиладиган икки сонга қарама-қарши сонлар деб аталади.

Масалан: 6 ва -6; 3.5 ва $-3{,}5$ қарама-қарши сонлардир.

- a га қарама-қарши сон $-a$ дир.
- Қарама-қарши сонлар йиғиндиси 0 га тенг, яъни $a + (-a) = 0$.

2-Таъриф. Саноқ боши, бирлик кесма танланган ва йўналишга эга тўғри чизиқ координата тўғри чизиғи (ўқи) дейилади.

Ҳар бир натурал ёки унга қарама-қарши сонлар ва нол сонига координата тўғри чизиғида ягона нуқтани мос қўйиш мумкин.
Масалан:



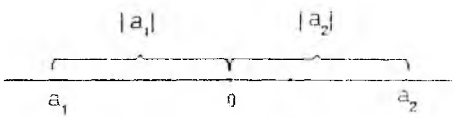
A(−3); B(1) − яъни нуқтанинг координатаси нуқтани белгиловчи ҳарфдан кейин қавс ичида ёзилади. Ўқилиши: A нуқта −3 координатага эга. B нуқта 1 координатага эга.

3−Таъриф. a сонининг модули (абсолют қиймати) деб, агар $a \geq 0$ бўлса, шу соннинг ўзига, агар $a < 0$ бўлса, қарама-қаршисига айтилади. a сонининг модули $|a|$ кўринишида ёзилади. Таърифга асосан сонларнинг модулини умумий кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ агар } a \geq 0 \\ -a, \text{ агар } a < 0. \end{cases}$$

Масалан: $|-11| = -(-11) = 11,\quad |2{,}5| = 2{,}5,\quad |0| = 0.$

a сон модулининг геометрик маъноси: $|a|$ координата тўғри чизиғидаги a сонини ифодаловчи нуқтадан саноқ бошигача бўлган масофага тенг.



Агар $a \neq 0$ бўлса, координата тўғри чизиғида модуллари тенг бўлган иккита a ва $-a$ сонлари мавжуд, яъни $|a| = |-a|$.
Модулнинг хоссалари:

1. $|a| \geq 0$; 2. $|a| \geq a$; 3. $|a| \geq -a$; 4. $|-a| = |a|$; 5. $|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$;

6. $|a|^2 = a^2$; 7. $|ab| = |a||b|$; 8. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$; 9 $|a + b| \leq |a| + |b|$;

10. $|a - b| \geq |a| - |b|$; 11. $|a - b| \leq |a| + |b|$; 12. $|a| > c\ \ (c > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > c, \\ a < -c; \end{array}\right.$

13. $|a| < c\ \ (c > 0) \Leftrightarrow -c < a < c.$

Мисоллар: 1) $4 \cdot |a| + 8 - a$ ни $a = -2$ да ҳисобланг.

<u>Ечиш</u>: $4 \cdot |-2| + 8 - (-2) = 4 \cdot 2 + 8 + 2 = 8 + 10 = 18.$

2) $|3 - |2 - 5| - 5 + 2|5 - 2||$ ни ҳисобланг.

<u>Ечиш</u>:
$|3 - |2 - 5| - 5 + 2|5 - 2|| = |3 - |-3| - 5 + 2 \cdot |3|| = |3 - 3 - 5 + 2 \cdot 3| = |-5 + 6| = |-1| = 1.$

3) $|x|-2x+3|-x|$ ни соддалаштиринг.

Ечиш: $|x|-2x+3|-x|=|x|-2x+3|x|=4|x|-2x=\begin{cases}2x, & \text{агар } x\geq 0,\\ -6x, & \text{агар } x<0.\end{cases}$

4) $|6|>3 \Leftrightarrow 6>3$; $|-15|>5 \Leftrightarrow -15<-5$; $|a|>3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>3, \\ a<-3; \end{array}\right.$

5) $|7|<9 \Leftrightarrow -9<7<9$; $|-8|<14 \Leftrightarrow -14<-8<14$; $|a|\leq 4 \Leftrightarrow -4\leq a\leq 4$.

6) $|5-3|\geq|5|-|3| \Leftrightarrow |2|\geq 5-3 \Leftrightarrow 2=2$; $|6-13|\geq|6|-|13| \Leftrightarrow |-7|\geq 6-13 \Leftrightarrow 7>-7$.

7) $|8+2|\leq|8|+|2| \Leftrightarrow |10|\leq 8+2 \Leftrightarrow 10=10$; $|-7+14|\leq|-7|+|14| \Leftrightarrow |7|\leq 7+14 \Leftrightarrow 7<21$.

12-§. Бутун ва рационал сонлар тўплами. Иррационал, ҳақиқий сонлар ҳақида тушунча.

1–Таъриф. Натурал сонлар, уларга қарама-қарши сонлар ва нол сони бутун сонлар тўпламини ташкил қилади, уни Z билан белгилаймиз, яъни $Z=\{-N,0,N\}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,...\}$.

2–Таъриф. Нол билан тўлдирилган натурал сонлар тўплами манфий бўлмаган сонлар тўплами дейилади ва Z_0 билан белгиланади, яъни $Z=\{0,N\}=\{0,1,2,3,...\}$.

3–Таъриф. Бутун ва каср сонлар рационал сонлар дейилади ва Q билан белгиланади.

1) Ихтиёрий рационал сонни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$Q=\left\{\frac{p}{q}: p\in Z, q\in N\right\}.$$

2) Агар $\frac{p}{q}$ касрнинг махражи $q=0$ бўлса, у ҳолда каср маънога эга эмас.

3) Ҳар бир рационал сонга координата тўғри чизиғида ягона нуқтани мос қўйиш мумкин.

Масалан: $3\to A(3)$; $\frac{1}{2}\to B\left(\frac{1}{2}\right)$; $-\frac{3}{4}\to C\left(-\frac{3}{4}\right)$; умуман $x\to A(x), x\in Q$.

12.1 . Рационал сонларни таққослаш

Берилган икки сонлардан координата тўғри чизиғида ўнгда жойлашгани каттадир.

Демак, хулосалар:

а) ҳар қандай манфий сон нолдан кичик: $-5<0$; $-3{,}8<0$; $-1500<0$;

б) ҳар қандай мусбат сон нолдан ва ҳар қандай манфий сондан каттадир: $4>-5{,}1$; $5{,}8>0$; $135>-135$;

в) икки манфий сондан қайси бирининг модули кичик бўлса, ўшаниси катта бўлади:

$-5>-21$, чунки $|-21|>|-5|\Rightarrow 21>5$;

$-2{,}5>-350$, чунки $|-350|>|-2{,}5|\Rightarrow 350>2{,}5$.

12.2 . Рационал сонлар устида арифметик амаллар

1.Рационал сонларни қўшиш: а) Бир хил ишорали иккита сонни қўшиш учун уларнинг абсолют қийматларини (модулларини) қўшиб, йиғиндининг олдига уларнинг ишорасини қўйиш керак.
Масалан:

$$(+4)+(+5)=+(4+5)=9;$$
$$(-9)+(-2)=-(9+2)=-11;$$
$$(-2{,}3)+(-3{,}8)=-(2{,}3+3{,}8)=-6{,}1;$$
$$\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{7}{8}\right)=-\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{8}\right)=-\frac{29}{24}=-1\frac{5}{24}.$$

б) Қарама-қарши ишорали иккита сонни қўшиш учун, абсолют қиймати (модули) каттасидан кичигини айириш ва айирманинг олдига абсолют қиймати катта бўлган соннинг ишорасини қўйиш керак.
Масалан:

$$4+(-10)=-(10-4)=-6;$$
$$3{,}2+(-1{,}2)=+(3{,}2-1{,}2)=2;$$
$$\left(-\frac{6}{7}\right)+\frac{1}{5}=-\left(\frac{6}{7}-\frac{1}{5}\right)=-\frac{23}{35}.$$

в) Қарама-қарши сонлар йиғиндиси нолга тенг ва аксинча йиғиндиси нолга тенг бўлган икки сон ўзаро қарама-қарши сонлардир.
Масалан:

$$7+(-7)=7-7=0; \quad 3{,}8-3{,}8=0; \quad -\frac{13}{15}+\frac{13}{15}=0.$$

г) Қўшилувчилардан бири нолга тенг бўлса, у ҳолда йиғинди иккинчи қўшилувчига тенг бўлади.
Масалан:

$$20+0=20; \quad 0+(-11)=-11; \quad -\frac{37}{18}+0=-\frac{37}{18}.$$

2.Рационал сонларни айириш: a сонидан b сонни айириш учун a сонига bга қарама-қарши бўлган $-b$ сонини қўшиш керак, яъни $a-b=a+(-b)$.
Масалан:

$$(-25)-(+5)=(-25)+(-5)=-(25+5)=-30;$$
$$(-4{,}2)-(-2)=(-4{,}2)+(+2)=-(4{,}2-2)=-2{,}2;$$
$$\left(+\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}.$$

3.Рационал сонларни кўпайтириш ва бўлиш:

а) Бир хил ишорали икки соннинг кўпайтмаси (бўлинмаси) мусбат сон бўлади, яъни

$$+\cdot+=+; \quad +:+=+;$$
$$-\cdot-=+; \quad -:-=+.$$

Масалан: $(-5)\cdot(-3)=15;$ $(-15):(-5)=3;$ $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{4}{21};$ $\frac{2}{3}:\frac{4}{3}=\frac{1}{2}.$

б) Ҳар-хил ишорали икки сон кўпайтмаси (бўлинмаси) манфий сон бўлади, яъни

$-\cdot+=-;$ $-:+=-;$

$+\cdot-=-;$ $+:-=-.$

Масалан: $(-5)\cdot(+2)=-10;$ $(-20):(+10)=2;$ $5\cdot(-3)=-15;$ $\frac{2}{3}:\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{2}{5}.$

в) Бир нечта сонларни кўпайтирганда ёки бўлганда манфий ишоралар сони жуфт (тоқ) бўлса, у ҳолда натижа мусбат (манфий) бўлади.

Масалан: а) $(-3)\cdot(+4)\cdot(-3):(-2)=-18;$

б) $27:(-3):(-9)\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)(-0,5)=\frac{2}{15};$

в) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right):(+5)=-\frac{1}{16}.$

г) Кўпайтувчилардан камида биттаси нолга тенг бўлса, кўпайтма нолга тенг бўлади.

Масалан: $0\cdot(-15)=0;$ $20\cdot0=0;$ $2,5\cdot0\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=0.$

д) Нолнинг ҳар қандай нолдан фарқли сонга нисбати нолга тенг, яъни $\frac{0}{a}=0$, агар $a\neq0$ бўлса.

е) Ҳар қандай соннинг нолга нисбати мавжуд эмас, яъни $\frac{a}{0}$ – мавжуд эмас, бу ерда $a(a\neq0)$ – рационал сон.

ж) Нолнинг нолга нисбати аниқмасдир, яъни $\frac{0}{0}$ – аниқмасдир.

4–Таъриф. $\frac{p}{q}$ кўринишида ёзиб бўлмайдиган (ихтиёрий чексиз ўнли даврий бўлмаган) сонларга иррационал сонлар дейилади.

Масалан: 0,83873362...; 1,1011011111011110...; –1,4142135...;

$\pi=3,1415926535...,$ $e=2,718281828459....$

5–Таъриф. Рационал ва иррационал сонларга ҳақиқий сонлар дейилади ва $R=(-\infty;+\infty)$ кўринишида белгиланади.

6–Таъриф. Агар $a\in[0;+\infty)$ бўлса, у ҳолда a сонига номанфий сон дейилади.

12.3. Соннинг бутун ва каср қисмлари.

7–Таъриф. a сонининг бутун қисми деб , a сонидан ошмайдиган энг катта бутун сонга айтилади.
Масалан: 3.5 сонининг бутун қисми 3 га тенг ;4 сонининг бутун қисми 4 га тенг; - 4,3 сонининг бутун қисми - 5 га тенг; - 6 сонининг бутун қисми -6 га тенг.

a сонининг бутун қисмини [*] белги билан белгиланади,яъни [a].

Масалан : $[8,3]=8$; $[-2.7]=-3$; $[2\frac{1}{3}]=2$.

8 –Таъриф a сонининг каср қисми деб, $a-[a]$ айирмага айтилади ва $\{a\}$, белги билан белгиланади.
Масалан : $\{3,1\}=3,1-3=0,1$; $\{-3,2\}=-3,2-(-4)=0,8$;
$\{10,1\}=0,1$; $\{-4,7\}=0,3$; $\{-4\}=0$; $\{3\frac{2}{5}\}=\frac{2}{5}$.

Мисоллар: 1) $[-3,2]+\{-1,4\}-\{4,9\}+[5,2]$ ни ҳисобланг.
Ечиш: 7 ва 8 таърифларга кўра $[-3,2]=-4$, $\{-1,4\}=0,6$, $\{4,9\}=0,9$, $[5,2]=5$ га тенг. Демак, $[-3,2]+\{-1,4\}-\{4,9\}+[5,2]=-4+0,6-0,9+5=0,7$.
Жавоб: 0,7.

2) Агар $a>\frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{a}$ нинг бутун қисмини топинг.

Ечиш: Агар $a>1$ бўлса, у ҳолда $0<\frac{1}{a}<1$ бўлади ва $\left[\frac{1}{a}\right]=0$ тенг. Агар $a=1$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{a}=1$ бўлиб, унинг бутун қисми 1 га тенг. Агар $\frac{1}{2}<\frac{1}{a}<1$ бўлса, у ҳолда $1<\frac{1}{a}<2$ бўлиб, унинг бутун қисми 1 га тенг, яъни $\left[\frac{1}{a}\right]=1$.

Жавоб: $\left[\frac{1}{a}\right]=\begin{cases}1, \text{ агар } & \frac{1}{2}<a\le 1,\\ 0, \text{ агар } & a>1\end{cases}$

13–§. Қавсларни очиш қоидалари

1. Қўшиш ва айириш ишоралари билан бирлаштирилган бир нечта ифодаларга алгебраик йиғинди дейилади, яъни $a+(-b)+c=a-b+c$.
2. Агар қавс олдига "плюс" ишораси қўйилса, қавс ичидаги ҳадлар ўзинининг ишораси билан ёзилади, яъни
   1) $a+(b+c)=a+b+c$;
   2) $a+(b-c)=a+b-c$;
   3) $15+(7-13+5)=15+7-13+5=14$.
3. Агар қавс олдига "минус" ишораси қўйилса, қавс ичидаги ҳадлар қарама-қарши ишора билан ёзилади, яъни
   1) $a-(b+c)=a-b-c$;

2) $a-(b-c)=a-b+c$;

3) $13-(2-4-8)=13-2+4+8=23$.

ЎТИЛГАН МАВЗУЛАР БЎЙИЧА ТЕСТ–1

1. Қуйидаги сонлардан қайсилари 5 ва 9 га бўлинади:
A) 125. B) 171. C) 465. Д) 280. E) 490.

2. $x=32112$, $y=3{,}2\cdot10^3$, $z=102588$ сонлардан қайсилари 12 га қолдиқсиз бўлинади.
A) фақат x. B) фақат y. C) x ва y. Д) x ва z. E) фақат z.

3. Беш хонали $24x5y$ сонни 5 ва11 га бўлганда қолдиқ 1 бўлса, x нинг олиши мумкин бўлган қийматлар йиғиндисини топинг.
A) 5. B) 6. C) 7. Д) 8. E) 9.

4. Ушбу $\overline{12x347x}$ кўринишдаги 8 га қолдиқсиз бўлинадиган сонни топинг.
A) 1223472. B) 1233473. C) 1243474. Д) 1283478. E) 1203470.

5. $(21738+819253)\cdot713781$ сонини 9 га бўлгандаги қолдиқ нимага тенг.
A) 7. B) 1. C) 6. Д) 0. E) 5.

6. Сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топинг: 108,162 ва 243.
A) 54. B) 36. C) 28. Д) 27. E) 48.

7. $X=\{m;n;k;l\}$, $Y=\{m;n;l\}$, $P=\{m;p\}$ тўпламлар учун қайси ёзув тўғри.
A) $X\subset Y$. B) $P\subset Y$. C) $P\subset X$. Д) $Y\subset P$. E) $Y\subset X$.

8. Икки соннинг йиғиндиси 459. Улардан бири иккинчисидан 8 марта кичик. Шу соннинг кичигини топинг.
A) 49. B) 51. C) 52. Д) 48. E) 36.

9. $\left(5\frac{3}{4}-4\frac{8}{9}\right)\cdot2+67\frac{1}{2}:2\frac{1}{7}$ ни ҳисобланг.
A) $24\frac{1}{3}$. B) $33\frac{2}{9}$. C) $36\frac{1}{9}$. Д) $31\frac{1}{3}$. E) $28\frac{2}{3}$.

10. Баҳоси 15% арзонлаштирилгандан сўнг коптокнинг нархи 1445 сўм бўлди. Арзонлашмасдан олдин копток неча сўм турган.
A) 1650. B) 1880. C) 1700. Д) 1750. E) 2000.

11. $-36:25-(-2{,}4+2{,}7\cdot0{,}3)$ ни ҳисобланг.
A) 0,15. B) –4,65. C) –3,03. Д) –7,14. E) –1,44.

12. $0{,}41(6)+0{,}333...$ ни ҳисобланг.
A) 0,25. B) 0,75... C) 0,75. Д) 4,5. E) $\frac{25}{66}$.

13. $x=\frac{23}{27}$, $y=\frac{33}{37}$, $z=\frac{73}{77}$ сонлари учун қуйидагилардан қайси бири тўғри?
A) $x<z<y$ B) $y<x<z$ C) $z<x<y$ Д) $z<y<x$ E) $x<y<z$.

14. $x:1\frac{1}{2}=1{,}5:1$ дан x ни топинг.

A) 1. B) $\frac{18}{8}$. C) 1,5. Д) $\frac{4}{9}$. E) $\frac{8}{18}$.

15. $\frac{1}{2}<\frac{n}{24}<\frac{3}{4}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нечта турли n бутун сон бор?

A) 5. B) 6. C) 7. Д) 8. E) 9.

16. $8{,}25,\ y,\ 6{,}45$ сонларининг ўрта арифметиги 5 га тенг бўлса, y сонини топинг.

A) 29,7 B) 0,3 C) −0,7 Д) 0,7 E) −0,3.

17. Температураси 50° бўлган 9 литр сувга температураси 70° бўлган 5 литр суюқлик қуйилди. Аралашманинг температурасини топинг.

A) 0° B) 18° C) 24° Д) 32° E) −5°.

18. $a=0{,}38(37)$, $b=0{,}2788127881...$, $c=0{,}8387232322...$, $d=\frac{1}{\pi}-1$ сонлардан қайсилари иррационал сонлар ҳисобланади.

A) a,b B) a,b,c C) b,c,d Д) c,d E) c.

19. $\frac{0{,}48\cdot0{,}75+0{,}52:1\frac{1}{3}}{(0,(3)+0,(6)):0{,}012}+0{,}001$ ни ҳисобланг.

A) 0,009 B) 0,01 C) 0,91 Д) 0,019 E) 1.

20. −1,5 сонга тескари сон билан 0,(3) сонларининг йиғиндисини топинг.

A) 0,(3) B) −0,3 C) −0,(3) Д) −1 E) $-\frac{7}{6}$.

I БОБНИ МУСТАҲКАМЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

1. Қуйидаги берилган сонлардан қайсилари 2 га, 3 га, 4 га, 8 га, 5 га, 9 га, 10 га қолдиқсиз бўлинади:
48,96,125,190,480,2025,5184,230050,1080,11223344.
2. Ушбу $71x1y$ кўринишдаги 45 га қолдиқсиз бўлинадиган сонларни топинг.
3. Ушбу $517xy$ кўринишидаги 6 ва9 га қолдиқсиз бўлинадиган сонларни топинг.
4. Ушбу $18+4x5$ йиғинди 9 га қолдиқсиз бўлинадиган x рақамининг энг кичигини топинг.
5. Агар $A=\{3,4,5,8,9\}$, $B=\{1,2,3,5,10,12\}$, $C=\{2,4,10,12,13\}$ бўлса, $A\cap B, A\cup B, A\setminus B, B\setminus A, A\cup B\cup C, A\cup B\cap C, A\cap B\cap C, A\cap B\cup C$ тўпламларни аниқланг.
6. Агар $A=\{10,15,20,25\}$, $D=\{2,6,8,10,12\}$, $C=\{1,2,3,4,5,6\}$ бўлса, $A\cup A, B\cap B, (A\cup B)\cup C, (A\cap B)\cap C, (A\setminus B)\setminus C$ ни топинг.
7. Агар $A=\{1,2,3,5,6,9,10\}$ бўлса, қисм тўпламлар тузинг.
8. $X=\{m,n,k^2,l\}$, $Y=\{k^2,l,p\}$, $P=\{m.n,l\}$ тўпламлар учун 1) $X\subset Y$, 2) $P\subset Y$, 3) $P\subset X$, 4) $P\subset X$, 5) $Y\subset P$ ёзувларнинг қайси бири тўғри?
9. Қуйидаги сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси (ЭКУБ) ни топинг.
а) 30 ва 36 в) 144 ва 72 д) 1360 ва 2700
б) 225 ва 75 г) 16,24 ва 48 е) 216 ва 864.
10. Қуйидаги сонларнинг энг катта умумий карралиси (ЭКУК) ни топинг.
а) 108,216 ва 135 в) 45 ва 270 д) 70,80 ва 90
б) 27 ва 63 г) 25 ва 38 е) 13,31 ва 26.
11. Қуйидаги сонларнинг ЭКУБ ни ЭКУК га нисбатини топинг.
а) 70,35 ва 280 в) 24,54 ва 108 д) 35 ва 17
б) 10,25 ва 40 г) 45 ва 105 е) 25 ва 125.
12. Амалларни бажаринг.

а) $\dfrac{(0,8-0,47)(0,8+0,47)}{0,4191}+\dfrac{(1+0,6)(1-0,6)}{1,6}$;

б) $\left[\left(95\dfrac{7}{30}-93\dfrac{5}{18}\right)\cdot\dfrac{9}{4}+0,373\right]:0,2$;

в) $\left(1\dfrac{1}{12}+2\dfrac{5}{32}+\dfrac{1}{24}\right)\cdot 9\dfrac{3}{5}+2,13:0,4$;

г) $\left(6\dfrac{3}{5}-3\dfrac{3}{14}\right)\cdot 5\dfrac{5}{6}:(21-1,25)\cdot 2,5$;

д) $\dfrac{12,8:0,64+3,05:0,05}{8\dfrac{2}{3}:1\dfrac{4}{9}-1}$; е) $\dfrac{203,4:9-(5,39-7,39)}{\dfrac{3}{14}\cdot\dfrac{7}{9}-\dfrac{1}{3}}$.

13.Ҳисобланг.

а) $\dfrac{\left(2\dfrac{3}{20}+1\dfrac{5}{16}\right):27{,}7}{\left(1{,}75\cdot\dfrac{2}{3}-1{,}75\cdot1\dfrac{1}{8}\right):\dfrac{7}{12}}+\dfrac{2}{11}$;

б) $\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}}{\dfrac{1}{9}}\right):\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{\dfrac{7}{15}}{\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{6}}\right)$;

в) $3\dfrac{1}{5}:\left[\left(1\dfrac{1}{4}+2{,}5\right)\cdot3{,}2\right]+\left[4{,}25:\left(4\dfrac{1}{4}\cdot\left(5{,}25-1\dfrac{1}{2}\right)\right)\right]\cdot2$;

г) $\dfrac{-4{,}89-4{,}65\cdot\dfrac{4}{5}+3\dfrac{3}{5}:14{,}4+4{,}25:\left(-\dfrac{4}{5}\right)\cdot(-3{,}2)}{\left(-\dfrac{11}{40}-7{,}725\right)\cdot\dfrac{3}{5}:(-0{,}6)}$;

д) $\dfrac{\left[-2{,}4\cdot3\dfrac{3}{4}+4\dfrac{2}{11}\cdot4{,}125\right]\cdot2}{-5\dfrac{5}{6}\cdot2\dfrac{4}{7}}+(-3{,}6):\left(68{,}1:7{,}5-8\dfrac{17}{20}+2\dfrac{1}{50}\right)+4\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{33}{58}$;

14.Чексиз ўнли касрни оддий касрга айлантиринг.

а) 0,(31); б) −2,(412); в) 3,1(45); г) 0,412(5);
д) 12,4(13); е) 2,3222...; ж) −0,888...

15.Оддий касрни ўнли даврий касрга айлантиринг.

а) $1\dfrac{7}{9}$; б) $\dfrac{3}{41}$; в) $\dfrac{11}{31}$; г) $1\dfrac{3}{13}$; д) $-1\dfrac{19}{132}$; е) $5\dfrac{101}{120}$; ж) $\dfrac{4}{7}$.

16.Қуйидаги сонларни таққосланг.

а) 0,22(23) ва 0,2223; б) $\dfrac{1}{7}$ ва 0,1428(57);

в) $-2\dfrac{2}{3}$ ва −2,67; г) $-\dfrac{7}{6}$ ва −1,16667.

17.Амалларни бажаринг.

а) $4\dfrac{1}{3}+0,(7)+2{,}1(3)-2{,}25$;

б) $[0,(5)\cdot0,(2)]:\left(3\dfrac{1}{3}:\dfrac{33}{25}\right)-\left(\dfrac{2}{5}\cdot1\dfrac{1}{3}\right):\dfrac{4}{3}$;

в) $\left(0{,}7555...-\dfrac{7}{15}\right):0{,}1555...$;

г) $3\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{49}-\left(2,(4)\cdot2\dfrac{5}{11}\right):\left(-\dfrac{42}{5}\right)$.

18.Ҳисобланг.

а) $\dfrac{\left(2\frac{3}{20}+1\frac{5}{16}\right):27,7}{\left(1,75\cdot\frac{2}{3}-1,75\cdot1\frac{1}{8}\right):\frac{7}{12}}+\dfrac{2}{11};$

б) $\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}}\right):\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{\frac{7}{15}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{6}}\right);$

в) $3\frac{1}{5}:\left[\left(1\frac{1}{4}+2,5\right)\cdot3,2\right]+\left[4,25:\left(4\frac{1}{4}\cdot\left(5,25-1\frac{1}{2}\right)\right)\right]\cdot2;$

г) $\dfrac{-4,89-4,65\cdot\frac{4}{5}+3\frac{3}{5}:14,4+4,25:\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot(-3,2)}{\left(-\frac{11}{40}-7,725\right)\cdot\frac{3}{5}:(-0,6)};$

д) $\dfrac{\left[-2,4\cdot3\frac{3}{4}+4\frac{2}{11}\cdot4,125\right]\cdot2}{-5\frac{5}{6}\cdot2\frac{4}{7}}+(-3,6):\left(68,1:7,5-8\frac{17}{20}+2\frac{1}{50}\right)+4\frac{5}{6}\cdot\frac{33}{58};$

19.Чексиз ўнли касрни оддий касрга айлантиринг.

а) 0,(31); б) −2,(412); в) 3,1(45); г) 0,412(5);
д) 12,4(13); е) 2,3222...; ж) −0,888...

20.Оддий касрни ўнли даврий касрга айлантиринг.

а) $1\frac{7}{9}$; б) $\frac{3}{41}$; в) $\frac{11}{31}$; г) $-1\frac{3}{13}$; д) $-1\frac{19}{132}$; е) $5\frac{101}{120}$; ж) $\frac{4}{7}$.

21.Қуйидаги сонларни таққосланг.

а) 0,22(23) ва 0,2223; б) $\frac{1}{7}$ ва 0,1428(57);

в) $-2\frac{2}{3}$ ва −2,67; г) $-\frac{7}{6}$ ва −1,16667.

22.Амалларни бажаринг.

а) $4\frac{1}{3}+0,(7)+2,1(3)-2,25;$ б) $[0,(5)\cdot0,(2)]:\left(3\frac{1}{3}:\frac{33}{25}\right)-\left(\frac{2}{5}\cdot1\frac{1}{3}\right):\frac{4}{3};$

в) $\left(0,7555...-\frac{7}{15}\right):0,1555...;$ г) $3\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{49}-\left(2,(4)\cdot2\frac{5}{11}\right):\left(-\frac{42}{5}\right);$

д) $\left[\left(0,666...+\dfrac{1}{3}\right):0,25\right]:(0,12333...:0,0925)+(12,5\cdot 0,64+0,1(6)+0,(3))$.

23.Қуйидаги сонларга тескари сонларни топинг.

а) 3, 8, 13, −25, −101, 225;

б) $\dfrac{1}{7}, \dfrac{3}{4}, -\dfrac{8}{13}, \dfrac{9}{37}, \dfrac{33}{12}, -\dfrac{57}{47}$;

в) $5\dfrac{3}{4}, -12\dfrac{1}{4}, -1\dfrac{1}{99}, 2\dfrac{24}{25}, 10\dfrac{1}{10}$;

г) 0,5; −2,31; −3,75; 11,3; 105,5.

24.Нисбатнинг номаълум ҳадини топинг.

а) $\dfrac{3}{14}:x=3\dfrac{1}{2}$; б) $x:5\dfrac{5}{7}=\dfrac{20}{21}$; в) $5\dfrac{5}{6}:2\dfrac{1}{3}x=2\dfrac{1}{4}$; г) $3x:\dfrac{12}{13}=5\dfrac{1}{4}$;

д) $2,5:3,75x=1\dfrac{1}{2}$; е) $0,125x:\dfrac{8}{7}=5$; ж) $\left(x+2\dfrac{1}{3}\right):\dfrac{2}{5}=15$.

25.Пропорциянинг номаълум ҳадини топинг.

а) $0,3x:3\dfrac{1}{3}=6:1,5$; б) $x:\left(-1\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{3}{4}:2\dfrac{1}{3}$; в) $\left(1\dfrac{3}{7}-2\dfrac{1}{4}\right):3\dfrac{1}{3}x=\dfrac{2}{3}:\dfrac{28}{9}$;

г) $5,4:2,4=x:1,6$; д) $\dfrac{-3\frac{1}{2}}{x}=\dfrac{5\frac{1}{5}}{-2\frac{1}{4}}$; е) $\dfrac{x}{0,25}=\dfrac{3\frac{1}{2}}{-0,35}$.

26.Қуйидаги сонлар неча процентга тенг.

а) 0,37; б) 0,125; в) 2,7; г) 1,75; д) 2,003.

27.Қуйидаги процентларни каср кўринишида ифодаланг.

а) 75%; б) 100%; в) 7,5%; г) 0,053%; д) 5%.

28.Топинг:

а) 100 нинг 1% ини; б) 45 нинг 20% ини;

в) 500 нинг 6% ини; г) 1,5 нинг 10% ини;

д) 450 нинг 120% ини; е) $\dfrac{5}{8}$ нинг 20% ини.

29.Сонларни топинг:

а) 4% и 75 га тенг; б) 10%и 60 га тенг;

в) $18\dfrac{1}{3}$% и 3 га тенг; г) 125% и 25 га тенг;

д) 1,25% и 55 га тенг; е) $16\dfrac{2}{3}$% и 2,5 га тенг.

30.Сонларнинг процент нисбатини топинг:

а) 32 нинг 64 га; б) 4,23 нинг 85 га;

в) 12,63 нинг 2,01 га; г) 5,4 нинг 0,86 га;

д) 3 нинг 0,006 га; е) 0,25 нинг 0,1 га.

31.Синф ўқувчиларининг 30% и ва яна 5 нафари музейга, $\dfrac{3}{8}$ қисми ва қолган 8 киши театрга боришди. Синфда неча нафар ўқувчи бор?

32.Ишчининг ойлик маоши 15% ортгандан кейин 16100 сўм бўлди. Дастлаб ишчининг ойлик маоши неча сўм бўлган?

33. Жамғарма банкига 3000 сўм пул йилига 120% фойда билан омонатга қўйилди. Бир йилдан сўнг пул олинмади ва иккинчи йилга қолдирилди. Икки йилдан кейин бу пул неча сўм бўлди?

34.120 сонининг $66\frac{2}{3}\%$ и унинг $\frac{1}{3}$ қисмидан неча марта катта бўлади?

35.Уч синфдош копток сотиб олишмоқчи бўлишди. Улардан бири копток нархининг 25% ини, иккинчиси 40% ини ва учинчиси 42 сўм тўлади. Копток неча сўм туради?

36.Ўрик қуритилганда унинг 18% оғирлиги қолади. 54 кг туршак олиш учун неча кг ўрик керак бўлади?

37.Учта соннинг ўрта арифметиги 32,5 га тенг. Биринчи сон иккинчисидан 50% ортиқ, иккинчиси учинчисининг 64% ини ташкил этади. Шу сонларни топинг.

38.Музқаймоқнинг 70% и сув бўлиб, қолган қисмининг ярми сариёғ. 6 кг сариёғдан қанча музқаймоқ тайёрлаш мумкин?

39.Завод планда белгиланган 840 трактор ўрнига 903 трактор ишлаб чиқарди. Завод планни неча процент ошириб бажарган?

40.Рақамларининг ўринларини алмаштирилганда қиймати 75% га ортадиган икки хонали натурал сонлар нечта?

41.Ходимнинг ойлик маоши кетма-кет икки марта бир хил процентга оширилгандан сўнг дастлабки маошдан 69%га ошган бўлса, маош ҳар гал неча процентга оширилган?

42.Дўконга 96 т картошка келтирилди. Агар картошканинг 70% и сотилган бўлса, дўконда қанча картошка қолган?

43. Сутнинг ёғлилиги 4,2%. Шунда 450 кг сутда қанча ёғ бор?

44.Ифодалар қийматларини таққосланг:

а) $|8,63|-|3|$ ва $|8,63|-|-3|$; б) $\left|6\frac{4}{7}+3,2\right|$ ва $|3.2|+\left|-6\frac{4}{7}\right|$;

в) $\left|4,34-3\frac{1}{5}\right|$ ва $|-4,34|-\left|3\frac{1}{5}\right|$; г) $\left|-2\frac{2}{3}\right|\cdot|-15|$ ва $\left|-2\frac{2}{3}\right|:|-15|$;

д) $|-8,1|-|3,7|$ ва $|-8,1+3,7|$; е) $|+9,3|-|-7,4|$ ва $|9,3+7,4|$.

40. 48 ни 4:8:12; 1:2:3; 6:12:18; 9:18:27 каби нисбатда бўлинг.

41.Жамила буви 32 та конфетни набираларига $1:1:1:\frac{2}{3}:\frac{3}{2}:2$ нисбатда бўлиб берди. Ҳар бир набира неча донадан конфет олган?

42.24 ни 3,8,1 сонларига тўғри пропорционал қилиб учта бўлакка ажратинг.

43. 12 сонини шундай икки бўлакка ажратингки, уларнинг нисбати 1:2 каби бўлсин.

44. Қуйидаги сонларнинг бутун ва каср қисмларини аниқланг.

а) $-8,1$; б) 13,7 в) $\frac{7}{3}+0,(21)$; г) $\frac{3\pi}{2}$; д) $\pi+e$; е) $[8,7]-\{6,8\}$, ж) $-\frac{21}{6}+4,(2)$.

II БОБ. АЛГЕБРАИК ИФОДАЛАР

1–§. Натурал кўрсаткичли даража ва унинг хоссалари

1–Таъриф. a сонининг n кўрсаткичли даражаси деб, ҳар бири a га тенг бўлган кўпайтувчининг кўпайтмасига айтилади:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{марта}},$$

бу ерда a – даражанинг асоси, n – даража кўрсаткичи.

Масалан:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9 = 81,$$

бу ерда 3 – даражанинг асоси, 4 – даража кўрсаткичи, 81 эса 3^4 даражанинг қиймати.

1. Натурал кўрсаткичли даражанинг асоси исталган сон, даражаси эса фақат натурал сон бўлиши керак.

Масалан: $5^1 = 5,\ \left(\frac{1}{7}\right)^1 = \frac{1}{7},\ \left(-\frac{2}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3},\ \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125};$

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32;$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81};$$

$0{,}2^3 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008;\quad (-1)^6 = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = 1;$

$0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0;\quad 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000.$

2. 10 дан катта бўлган ҳар бир сонни $a \cdot 10^n$ шаклида ёзиш мумкин. Бунда $1 \le a < 10$ ва $n \in N$. Бундай ёзув сонннинг стандарт шакли дейилади.

Масалан: $4578 = 4{,}578 \cdot 10^3;\quad 45{,}78 = 4{,}578 \cdot 10;\quad 103000 = 1{,}03 \cdot 10^5.$

3. Натурал кўрсаткичли даражанинг хоссалари.

1-хосса. Бир хил асосли даражаларни кўпайтиришда асос ўзгармасдан қолади, даража кўрсаткичлари эса қўшилади:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Масалан: $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32;\ (-3)^2 \cdot (-3)^4 = (-3)^{2+4} = (-3)^6 = 3^6 = 729.$

2-хосса. Бир хил асосли даражаларни бўлишда асос ўзгармасдан қолади, даража кўрсаткичлар эса айрилади:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Масалан:

$$(0{,}5)^5 : (0{,}5)^2 = (0{,}5)^{5-2} = 0{,}5^3 = 0{,}125;\ \left(\frac{1}{3}\right)^6 : \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{6-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

3-хосса. Даражани даражага кўтаришда асос ўзгармасдан қолади, даража кўрсаткичлар эса ўзаро кўпайтирилади:

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}.$$

Масалан: $\left(2^3\right)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3} = 2^6$; $\left(\left(1\frac{1}{3}\right)^5\right)^2 = \left(1\frac{1}{3}\right)^{10}$; $\left((0,3)^3\right)^2 = (0,3)^6$.

4-хосса. Кўпайтмани даражага кўтаришда ҳар бир кўпайтувчи шу даражага кўтарилади:

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Масалан:

$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$; $(3 \cdot 5)^3 = 3^3 \cdot 5^3$; $(-2 \cdot 7)^2 = (-2)^2 \cdot 7^2 = 2^2 \cdot 7^2$.

5-хосса. Касрни даражага кўтаришда унинг сурат ва махражи худди шу даражага кўтарилади:

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $(b \neq 0)$.

Масалан: $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{7^3}$; $\left(-\frac{3}{8}\right)^5 = \frac{(-3)^5}{8^5} = -\frac{3^5}{8^5}$.

Ҳисобланг:

1) $\frac{\left(2^3\right)^2 \cdot 4 \cdot 3^5 \cdot 6^2}{12^2 \cdot 18^2} = \frac{2^6 \cdot 2^2 \cdot 3^5 \cdot (2 \cdot 3)^2}{\left(2^2 \cdot 3\right)^2\left(2 \cdot 3^2\right)^2} = \frac{2^6 \cdot 2^2 \cdot 3^5 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 3^4} = \frac{2^{10} \cdot 3^7}{2^6 \cdot 3^6} =$

$= 2^4 \cdot 3 = 16 \cdot 3 = 48.$

2) $\frac{\left(c^2\right)^3 \cdot c^8 \cdot a^3 \cdot (ac)^4}{\left(a^2\right)^3\left(c^3\right)^2 c} = \frac{c^6 \cdot c^8 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot c^4}{a^6 \cdot c^6 \cdot c} = \frac{c^{6+8+4} \cdot a^{3+4}}{a^6 \cdot c^{6+1}} = \frac{a^7 \cdot c^{18}}{a^6 \cdot c^7} =$

$= a^1 \cdot c^{11} = a \cdot c^{11}.$

2–§. Бирҳад ва кўпҳад.

1–Таъриф. Сонлар ва улар устидаги амаллардан тузилган ифода сонли ифода дейилади.

Масалан: $48:12$; $2 \cdot 3 + 7$; $10:2-3$; $3\left(10^2-1\right)$ – сонли ифодалардир.

2–Таъриф. Сонлар ва ўзгарувчилар амал белгилари ёрдамида бирлаштириладиган ёзув (хусусий ҳолда фақат биргина ўзгарувчи ёки сон) алгебраик ифода дейилади.

Масалан: 7; b; $a+3$; $2m(a-3)$; $(3a-2):4$ – алгебраик ифодалардир.

3–Таъриф. Қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш амаллари ёрдамида сонлар ва ўзгарувчилардан тузилган алгебраик ифодалар рационал ифодалар дейилади. Масалан:

$\frac{5,3}{3}$; $\frac{a}{8}$; $\frac{b^2+c}{a}$; $m+\frac{1}{m}$; $\frac{x^2+y^2}{x-y}$; $\frac{5}{a^2+3}$ – рационал ифодалардир.

4–Таъриф. Рационал ифодада бўлувчи таркибида ўзгарувчи бўлмаса, унга бутун ифода, ўзгарувчи бўлса, каср ифода дейилади.

Масалан: 5; $a+b$; $b^2 \cdot d$ – бутун ифодалар,

$\frac{5}{a+3}$; $\frac{x^2+y^2}{x-y}$; $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ – каср ифодалардир.

5–Таъриф. Фақат кўпайтириш ва даражага кўтариш амалларини ўз ичига олган бутун ифода бирҳад деб аталади.

Масалан: 2; 2,1; a; $\frac{3}{4}$; $5b$; $\frac{1}{4}\cdot a^2b$; $-18x^3y^3z$ – бирҳадлардир;

$(a+7)^2b$ – бирҳад эмас, чунки даражанинг асосида йиғинди қатнашган, $\frac{7a^2}{5}$ ҳам бирҳад эмас, чунки у бўлинмадан иборат. Аммо бу ифодани $\frac{7}{5}\cdot a^2$ бирҳад кўринишида ёзиш мумкин.

$2aabbcx$; $2a^2bbacxy$; $0{,}2a^2b^2y^2x^2$ ва $\frac{1}{3}a^2\left(-\frac{3}{2}\right)ycx^2$ лар бирҳадлар бўлиб, улар турли хил шаклда ёзилган.

6-Таъриф. Нолга тенг бўлмаган бирҳадда биргина сонли кўпайтувчи биринчи ўринда, бирҳаддаги ҳарфий ифодалар алфавит тартибида даража кўрсаткичи орқали бир марта ёзилган бўлса, бирҳад стандарт кўринишда ёзилган дейилади.

Масалан: юқорида берилган мисолларни стандарт шаклга олиб келамиз:

$2aabbcx = 2a^2b^2cx$; $2a^2bbacxy = 2a^3b^2cxy$; $0{,}2a^2b^2y^2x^2 = 0{,}2a^2b^2x^2y^2$;

$\frac{1}{3}a^2\left(-\frac{3}{2}\right)ycx^2 = -\frac{1}{2}\cdot a^2cx^2y$.

7–Таъриф. Стандарт шаклдаги бирҳаднинг сонли кўпайтувчиси бирҳаднинг коэффициенти дейилади.

Масалан: b; $175x^3y^3z$; $-15abc$; $1\frac{3}{5}bc^4$; $0.5\alpha\beta^2$ – бирҳадлар стандарт кўринишда бўлиб, 1; 175; -15; $1\frac{3}{5}$; 0,5 сонлари коэффициентлардир.

8–Таъриф. Стандарт шаклдаги бирҳадлар ўзаро тенг ёки фақат коэффициентлари билан фарқ қилса, бундай бирҳадлар ўхшаш дейилади.

Масалан: $3a^2b$ ва $3a^2b$; $5ab$ ва $8ab$; $-\frac{1}{3}a^2b^2$ ва $\frac{5}{8}a^2b^2$ ўхшаш бирҳадлардир.

9–Таъриф. Ўхшаш бўлмаган бир нечта бирҳадларнинг алгебраик йиғиндиси кўпҳад дейилади.

Масалан: $a-b$; $a+b$; $3x-\frac{1}{2}y$ – иккиҳад, ax^2+bx+c, ay^3-by-c; $\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}y+z$ – учҳад ва ҳаказо.

$\frac{5x^2-4xy+1}{3x}$ ифода эса кўпҳад бўла олмайди.

10–Таъриф. Кўпҳадни ташкил қилувчи бирҳадларга шу кўпҳаднинг ҳадлари дейилади.

Масалан: $5m^2n-3ab+4mn$ кўпҳаднинг ҳадлари $5m^2n$; $-3ab$; $4mn$ бўлади.

3–§. Бирҳад ва кўпҳаднинг хоссалари

3.1. Бирҳаднинг хоссалари

1. Бирҳадда унинг кўпайтувчилари ўринларини алмаштириш мумкин.

Масалан: $a5xyz=5axyz$; $b^2\left(-\frac{3}{4}\right)cb=-\frac{3}{4}b^2cd$.

2. Бирҳадда бир хил ҳарфий кўпайтувчиларни мос даражали кўпайтмага алмаштириш мумкин.

Масалан: $10x^2y^3x^3y^2=10x^5y^5$; $-\frac{1}{3}a^2b\left(-\frac{9}{4}\right)b^2a=\frac{3}{4}a^3b^3$.

3. Бирҳаддаги бир нечта сонли кўпайтувчини уларнинг кўпайтмаси билан алмаштириш мумкин.

Масалан: $4a\cdot5\cdot6xy=4a\cdot30xy$; $x(-2)y^3\cdot4\cdot5z=-40xy^3z$.

4. Бирҳаднинг кўпайтувчиларидан бири нолга тенг бўлса, бундай кўпайтма нолга тенг бўлади.

Масалан: $xy(-5)\cdot0=0$; $0\cdot5xy^5=0$.

5. Бирҳадда 1 кўпайтувчини ташлаб юбориш мумкин.

Масалан: $1\cdot x^3a^2b=a^2bx^3$; $ac\cdot1\cdot d^2=ad^2c$.

6. Фақат ишораси билангина фарқ қиладиган бирҳадлар қарама-қарши бирҳадлар дейилади.

Масалан: $3xy$ ва $-3xy$, $\frac{1}{3}ab$ ва $-\frac{1}{3}ab$.

7. Бирҳаднинг даражаси деб бирҳад таркибидаги барча ўзгарувчилар даража кўрсаткичларининг йиғиндисига айтилади.

Масалан: а) $6a^2b^3c$ – бирҳаднинг даражаси 6 га тенг;

б) $-9b^4c^3$ – бирҳаднинг даражаси 7 га тенг;

в) $-\frac{8}{9}d^2$ – бирҳаднинг даражаси 2 га тенг.

8. Агар бирҳадда ўзгарувчи бўлмаса, у ҳолда унинг даражаси нолга тенг.

Масалан: а) $\frac{3}{4}$ – даражаси нолга тенг;

б) $-2{,}85a^0$ – даражаси нолга тенг.

3.2. Кўпҳаднинг хоссалари

1. Кўпҳаднинг ҳадлари ўринларини алмаштириш мумкин.

Масалан: $9x^3y^2+8xy^2=8xy^2+9x^3y^2$; $x^2-y^2=-y^2+x^2$.

2. Кўпҳадга нолдан иборат бирҳад қўшилса, кўпҳад ўзгармайди.
Масалан: $x^2+y^2+0=x^2+y^2$; $5x-6y+0-z=5x-6y-z$.

3. Кўпҳадда ўхшаш ҳадларни ихчамлаш мумкин.
Масалан: $x^2+xy+xy+y^2=x^2+2xy+y^2$; $x^2-xy+xy-y=x^2-y$;
$x^3-2x^2y+2xy^2-x^2y+xy^2+y^3=x^3-3x^2y+3xy^2+y^3$.

4. Кўпҳаднинг ўхшаш ҳадлари ихчамлашда 0 сони ҳосил бўлса, бундай кўпҳад нолга тенг кўпҳад дейилади.
Масалан: $3xy^2-4xy^2+xy^2=4xy^2-4xy^2=0$;
$$5a-4a-2a+a=5a-5a=0.$$

5. Нолга тенг бўлмаган кўпҳаднинг даражаси кўпҳадни ташкил этувчи бирҳадларнинг энг катта даража кўрсаткичига қараб аниқланади.
Масалан: $0{,}35x^2-4y+5$ кўпҳаднинг даражаси 2 га тенг, $3x+4y+5$ кўпҳад x ва y ларга нисбатан биринчи даражалидир.

4–§. Бирҳад ва кўпҳадлар устида амаллар

1. Бирҳадларни кўпайтириш учун уларнинг сонли кўпайтувчиларини ва бир хил асосли даражаларини кўпайтириш керак.

Масалан:

а) $5xy\cdot(-2x^2yb)=5\cdot(-2)x^{1+2}y^{1+1}b=-10bx^3y^2$;

б) $\left(-\frac{4}{5}ab^2c\right)\cdot(-20a^4bx)=-\frac{4}{5}\cdot(-20)a^{1+4}b^{2+1}c\cdot x=16a^5b^3cx$;

в) $2ab\left(\frac{4}{3}a^2b^4\right)(7abc)=2\cdot\frac{4}{3}\cdot7a^4b^6c=\frac{56}{3}a^4b^6c$.

2. Бирҳадни натурал даражага кўтариш учун ҳар бир кўпайтувчини шу даражага кўтариб, натижаларни бир-бирига кўпайтириш керак.

Масалан:

а) $(5a^2b^3)^4=5^4\cdot(a^2)^4(b^3)^4=625a^8b^{12}$;

б) $(-2a^2b)^3=(-2)^3(a^2)^3b^3=-8a^6b^3$;

в) $\left(\frac{1}{2}cb^2a^5\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3c^3(b^2)^3(a^5)^3=\frac{1}{8}a^{15}b^6c^3$.

3. Бирҳадни бирҳадга қолдиқсиз бўлиш учун сонли кўпайтувчиларни сонли кўпайтувчиларга ва бир хил асосли даражаларни бир хил асосли даражаларга (бўлинувчининг даража кўрсатгичи бўлувчидаги даража кўрсатгичидан катта бўлиши шарт) бўлиш керак.

Масалан:

а) $32a^3b^2:4a^2=(32:4)\cdot(a^3b^2:a^2)=8ab^2$;

б) $7a^3b^2c:8ab^2=\frac{7}{8}\frac{a^3}{a}\frac{b^2}{b^2}\cdot c=\frac{7}{8}a^2c$;

в) $1{,}2xy^3z^n : \left(-0{,}2xy^3z^2\right) = -\dfrac{1{,}2}{0{,}2} \cdot \dfrac{x}{x}\dfrac{y^3}{y^3} \cdot \dfrac{z^n}{z^2} = -6z^{n-2}$.

Агар бўлинувчининг даража кўрсаткичи бўлувчининг даража кўрсаткичидан кичик бўлса ёки бўлувчида бўлган ўзгарувчи бўлинувчида бўлмаса, у ҳолда бирҳадни бирҳадга қолдиқсиз бўлиш мумкин эмас.

Масалан: $15a^3b^2$ ни $5ab^3$ ёки $8x^2y$ ни $4xyz$ га бўлиш мумкин эмас.

4. Ўхшаш бирҳадлар йиғиндиси бирҳаддир.

Масалан:

а) $0{,}5x^2y + 2{,}5x^2y = 3x^2y$;

б) $-\dfrac{1}{3}ab^2 + \dfrac{2}{3}ab^2 = \dfrac{1}{3}ab^2$;

в) $-4xy - \dfrac{1}{2}xy = -4\dfrac{1}{2}xy$;

г) $-0{,}9a + 0{,}9a = 0$.

5. Бир нечта кўпҳадларнинг алгебраик йиғиндиси стандарт шаклдаги кўпҳад кўринишида ёзиш учун қавсларни очиш ва ўхшаш ҳадларни ихчамлаш керак.

Масалан:

а) $(2x + 3y) + (-5x + 3y - 4) = 2x + 3y - 5x + 3y - 4 = -3x + 6y - 4$;

б) $(9a) - (-8b) - (3a + 6b) = 9a + 8b - 3a - 6b = 6a + 2b$;

в) $(4x - 5y) - (-x - 4y) + x = 4x - 5y + x + 4y + x = 6x - y$.

6. Кўпҳадни бирҳадга кўпайтириш учун кўпҳаднинг ҳар бир ҳадини бирҳадга кўпайтириб, натижаларни қўшиш керак.

Масалан:

а) $a(d + b + c) = ad + ab + ac$;

б) $4(a - 2b) = 4a - 8b$;

в) $(-5a)(2 - b - a^2) = -10a + 5ab + 5a^3$;

г) $\left(-3ab + 2a^2 - 4b^2\right)\left(-\dfrac{1}{2}ab\right) = \dfrac{3}{2}a^2b^2 - a^3b + 2ab^3$.

7. Кўпҳадни кўпҳадга кўпайтириш учун биринчи кўпҳаднинг ҳар бир ҳадини иккинчи кўпҳаднинг ҳар бир ҳадига кўпайтириш ва натижаларни қўшиш керак.

Масалан:

а) $(x + y)(x - a - b) = x \cdot x + x(-a) + x(-b) + yx + y(-a) + y(-b) =$
$= x^2 - ax - bx + xy - ay - by$;

б) $(1 + b)(2 - a) = 2 - a + 2b - ab$;

в) $(2a - 4b + 3c)(5b - c) = 10ab - 2ac - 20b^2 + 4bc + 15bc - 3c^2 =$
$= 10ab - 2ac - 20b^2 + 19bc - 3c^2$;

г) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)=(a^2+ab-ab-b^2)(a^2+b^2)=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=$
$=a^4+a^2b^2-a^2b^2-b^4=a^4-b^4$.

1. Кўпҳадни бирҳадга бўлиш учун кўпҳаднинг ҳар бир ҳадини шу бирҳадга бўлиш ва натижаларни қўшиш керак.

Масалан:

а) $(12a+6):3=12a:3+6:3=4a+2$;

б) $(9a^3b^3-3a^2b^3+a^2b^2):(3a^2b^2)=(9a^3b^3):(3a^2b^2)-(3a^2b^3):(3a^2b^2)+$
$+(a^2b^2):(3a^2b^2)=3ab-b+\frac{1}{3}$;

в) $(3x^3-2x^2y):(2x^2)-(4x^2-3x):x=\frac{3}{2}x-y-4x+3=-\frac{5}{2}x-y+3=$
$=-2{,}5x-y+3$.

Кўпҳадни бирҳадга бўлганда ҳарфли бўлувчилар нолга тенг бўлмайдиган қийматларни қабул қилади. Яъни юқоридаги мисолларда:

б) да $a\neq 0, b\neq 0$; в) да $x\neq 0$ бўлиши керак.

Кўпҳадни бирҳадга бўлганда ҳамма вақт қолдиқсиз бўлинмайди.

Масалан: $(ab+cd):ab=1+\frac{cd}{ab}$, $a\neq 0, b\neq 0$

2. Кўпҳадни кўпҳадга бўлиш қоидаси (бурчак усулида):

а) бўлинувчи ва бўлувчи кўпҳадларни даражалари камайиб бориш тартибида ёзилади;

б) бўлинувчининг биринчи ҳадини бўлувчининг биринчи ҳадига бўлиш керак. Натижа бўлинма кўпҳаднинг биринчи ҳади бўлади;

в) бўлинма кўпҳадни бўлувчига кўпайтириб, бўлинувчидан айрилади.

Агар қолдиқ нолга тенг ёки қолдиқнинг биринчи ҳадининг даражаси бўлувчининг биринчи даражасидан кичик бўлса, у ҳолда бўлиш жараёни тўхтатилади. Аксинча, қолдиқ нолдан фарқли бўлиб, унинг даражаси бўлувчининг даражасига тенг ёки катта бўлса, у ҳолда бўлиш жараёни а), б), в) қоида ёрдамида давом эттирилади ва ҳаказо.

Масалан:

1) $(-9c^6+16a^4b^2):(4a^2b-3c^3)$.

Ечиш:

$$\begin{array}{r|l}
16a^4b^2-9c^6 & 4a^2b-3c^3 \\
\underline{16a^4b^2-12a^2bc^3} & 4a^2b+3c^3 \\
12a^2bc^3-9c^6 & \\
\underline{12a^2bc^3-9c^6} & \\
0 &
\end{array}$$

Демак,

$(-9c^6+16a^4b^2):(4a^2b-3c^3)=4a^2b+3c^3$

2) $\quad \left(5x^4 - 3x^5 + 3x - 1\right) : \left(1 + x - x^2\right).$

Ечиш:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} -3x^5 + 5x^4 + 3x - 1 \\ -3x^5 + 3x^4 + 3x^2 \end{array} & -x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
\hline
-\begin{array}{r} 2x^4 - 3x^3 + 3x - 1 \\ 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 \end{array} & 3x^3 - 2x^2 + x - 1 \\
\hline
-\begin{array}{r} -x^3 + 2x^2 + 3x - 1 \\ -x^3 + x^2 + x \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{r} x^2 + 2x - 1 \\ x^2 - x - 1 \end{array} & \\
\hline
3x &
\end{array}
$$

Демак,

$$\left(5x^4 - 3x^5 + 3x - 1\right) : \left(1 + x - x^2\right) = \left(3x^3 - 2x^2 + x - 1\right)\left(1 + x - x^2\right) + 3x,$$

ёки $\quad \dfrac{5x^4 - 3x^5 + 3x - 1}{1 + x - x^2} = 3x^3 - 2x^2 + x - 1 + \dfrac{3x}{1 + x - x^2}.$

5–§. Қисқа кўпайтириш формулалари

1. $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

Икки сон йиғиндисининг квадрати биринчи сон квадрати плюс биринчи сон билан иккинчи сон кўпайтмасининг иккилангани плюс иккинчи сон квадратига тенг.

Исботи: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ тенгликка ва кўпҳадни кўпҳадга кўпайтириш қоидасига кўра

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

Яъни $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

Икки сон айирмасининг квадрати биринчи сон квадрати минус биринчи сон билан иккинчи сон кўпайтмасининг иккилангани плюс иккинчи сон квадратига тенг.

Исботи: $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$ тенгликка ва кўпҳадни кўпҳадга кўпайтириш қоидасига кўра

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2,$

яъни $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

3. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$

Икки сон квадратларининг айирмаси бу сонлар айирмаси билан улар йиғиндисининг кўпайтмасига тенг.

Исботи: Икки сон йиғиндисини уларнинг айирмасига кўпайтирамиз:
$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$,

яъни $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Икки сон йиғиндисининг куби биринчи сон куби плюс биринчи сон квадрати билан иккинчи сон кўпайтмасининг учлангани плюс биринчи сон билан иккинчи сон квадрати кўпайтмасининг учлангани плюс иккинчи сон кубига тенг.

Исботи: $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$ ва 1 формулага кўра
$(a+b)^3=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3=$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

5. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Икки сон айирмасининг куби биринчи сон куби минус биринчи сон квадрати билан иккинчи сон кўпайтмасининг учлангани плюс биринчи сон билан иккинчи сон квадрати кўпайтмасининг учлангани минус иккинчи сон кубига тенг.

Исботи: $(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2$ ва 2 формулага кўра
$(a-b)^3=(a-b)(a^2-2ab+b^2)=a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+ab^2-b^3=$
$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

6. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Икки сон кубларининг айирмаси бу сонларнинг айирмаси билан улар йиғиндисининг тўлиқ бўлмаган квадратининг кўпайтмасига тенг.

Исботи: (6) тенгликни исботлаш учун $a-b$ иккиҳад билан a ва b сонлари йиғиндисининг тўлиқ бўлмаган квадрати деб аталувчи a^2+ab+b^2 учҳадга кўпайтириш керак, яъни
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3$.

Демак, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

7. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Икки сон кубларининг йиғиндиси бу сонларнинг йиғиндиси билан улар айирмасининг тўлиқ бўлмаган квадратининг кўпайтмасига тенг.

Исботи: $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$.

8. Айрим қисқа кўпайтириш формулалари:

1) $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$;

2) $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$;

3) $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$;

4) $a^6-b^6=(a^3-b^3)(a^3+b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)\times$
$\times(a^2-ab+b^2)=(a^2-b^2)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=$
$=(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+a^5)$;

5) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;

6) $(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$;

7) $(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+$
$+2bd+2cd$;

8) $(a+b-c-d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac-2ad-2bc-$
$-2bd+2cd$;

9. Қисқа кўпайтириш формулаларига оид мисоллар:

1) $(2a+3b)^2=(2a)^2+2(2a)(3b)+(3b)^2=4a^2+12ab+9b^2$;

2) $(0{,}2x-0{,}3y)^2=(0{,}2x)^2-2(0{,}2x)(0{,}3y)+(0{,}3y)^2=0{,}04x^2-$
$-0{,}12xy+0{,}09y^2$,

3) $(a-b)^2=(b-a)^2=a^2-2ab+b^2$;

4) $(-a-b)^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

5) $(-a-b)(a+b)=-(a+b)^2=-a^2-2ab-b^2$;

6) $m^2n^2-9k^2=(mn)^2-(3k)^2=(mn-3k)(mn+3k)$;

7) $(2a+3b)^2-25=(2a+3b)^2-5^2=(2a+3b-5)(2a+3b+5)$;

8) $(2b-3)^3=(2b)^3-3(2b)^2 3+3(2b)3^2-3^3=8b^3-36b^2+54b-27$;

9) $(2m^2+3n)^3=(2m^2)^3+3(2m^2)^2(3n)+3(2m^2)(3n)^2+(3n)^3=$
$=8m^6+36m^4n+54m^2n^2+27n^3$;

10) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)=(2x)^3+(3y)^3=8x^3+27y^3$;

11) $(p^2-q^2)(p^4+p^2q^2+q^4)=(p^2)^3-(q^2)^3=p^6-q^6$;

12) $(a-b)(a^2+b^2)(a+b)=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=a^4-b^4$;

13) $41\cdot 39=(40+1)(40-1)=40^2-1^2=1600-1=1599$;

14) $\dfrac{43^2-11^2}{(36{,}5)^2-(27{,}5)^2}=\dfrac{(43-11)(43+11)}{(36{,}5-27{,}5)(36{,}5+27{,}5)}=\dfrac{32\cdot 54}{9\cdot 64}=3$;

15) $\dfrac{97^3+83^3}{180}-97\cdot 83=\dfrac{(97+83)(97^2-97\cdot 83+83^2)}{180}-97\cdot 83=$
$=\dfrac{180(97^2-97\cdot 83+83^2)}{180}-97\cdot 83=97^2-97\cdot 83+83^2-97\cdot 83=$
$=97^2-2\cdot 97\cdot 83+83^2=(97-83)^2=14^2=196$.

16) $1002\cdot 998-1003\cdot 997=(1000+2)(1000-2)-(1000+3)(1000-3)=$
$=1000^2-4-1000^2+9=5$.

6–§. Бир ўзгарувчили кўпҳадлар. Безу теоремаси.

1-Таъриф. $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ кўринишдаги кўпҳадга x ўзгарувчига нисбатан n- даражали стандарт кўринишдаги бир ўзгарувчили кўпҳад дейилади, бу ерда $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \ldots, a_n -$ ҳақиқий сонлар кўпҳаднинг коэффициентлари дейилади.
Масалан:

а) $3x^5 + 2x^4 + x^3 + 0{,}5x^2 + \frac{3}{4}x + 1$ – 5-даражали бир ўзгарувчили кўпҳад;

б) $2x^3 + 3x - 5$ – учинчи даражали кўпҳад.

2-Таъриф. $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ ва $Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$ кўпҳадлар ўзаро тенг дейилади, агар $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ бўлса.
Масалан:

а) $x^3 + 2x^2 + 1$ ва $ax^3 + bx^2 + 1$ кўпҳадлар ўзаро тенг бўлади, агар $a = 1, b = 2$ бўлса;

б) $3x^4 + 2x + 3$ ва $ax^4 + bx^2 + cx + d$ кўпҳадлар ўзаро тенг бўлади, агар $a = 3, b = 0, c = 2, d = 3$ бўлса.

1-Мисол. α, β ва γ нинг қандай қийматларида $x^3 + 6x^2 + \alpha x + \beta = (x + \gamma)^3$ тенглик ўринли бўлади?

Ечиш: $x^3 + bx^2 + \alpha x + \beta = x^3 + 3x^2\gamma + 3x\gamma^2 + \gamma^3$.
2-Таърифга кўра

$$\begin{cases} 3\gamma = 6 \\ \alpha = 3\gamma^2 \\ \beta = \gamma^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = 2 \\ \alpha = 3 \cdot 2^2 = 12 \\ \beta = 2^3 = 8. \end{cases}$$

Демак, $\alpha = 12, \beta = 8, \gamma = 2$ да берилган кўпҳадлар ўзаро тенг бўлади.

2-Мисол. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1$ кўпҳадни $x^2 - x + 1$ кўпҳадга бўлгандаги бўлинмани топинг.

Ечиш: Кўпҳадни кўпҳадга бўлиш қоидасига кўра

$$\frac{2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - x + 1} = ax^2 + bx + c,$$

ёки $2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1 = (ax^2 + bx + c)(x^2 - x + 1)$ тенглик ўринли бўлиш керак.

Бундан $2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1 = ax^4 + (b - a)x^3 + (a + c - b)x^2 + (b - c)x + c$.
2-Таърифга асосан

$$\begin{cases} a=2, \\ b-a=-1, \\ a+c-b=2, \\ b-c=0, \\ c=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} a=2, \\ b=1, \\ c=1. \end{cases}$$

Демак $\left(2x^4-x^3+2x^2+1\right):\left(x^2-x+1\right)=2x^2+x+1$.

Жавоб: $2x^2+x+1$.

3-Таъриф. $P_n(x)$ кўпҳадни $T_m(x)$ $(m \le n)$ кўпҳадга бўлиш деб

$$P_n(x)=T_m(x)q_e(x)+r_k(x),$$

кўринишидаги тенгликка айтилади. Бу ерда $0 \le k < m$, $q_e(x)$ – бўлинма, $r_k(x)$ – қолдиқ, $e=n-m$.

3-Мисол. x^3-x+2 кўпҳадни x^2+1 кўпҳадга бўлгандаги бўлинмани ва қолдиқни топинг.

Ечиш: 3-Таърифга кўра $n=3, m=2, e=1, k=1$ бўлиб, қуйидаги тенглик ўринли:

$x^3-x+2=(ax+b)\left(x^2+1\right)+cx+d$

ёки

$x^3-x+2=ax^3+bx^2+(a+c)x+b+d$.

2-Таърифга кўра эса

$$\begin{cases} a=1, \\ b=0, \\ a+c=-1, \\ b+d=2, \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1, \\ b=0, \\ c=-2, \\ d=2. \end{cases}$$

Демак $x^3-x+2=\left(x^2+1\right)x+(-2x+2)$. Бу ерда $q_1(x)=x-$ бўлинма, $r_1(x)=-2x+2$ – қолдиқ.

Безу теоремаси. $P_n(x)$ кўпҳадни $(x-a)$ га бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқ кўпҳаднинг $x=a$ да эришадиган қийматига тенг, яъни

$$P_n(x)=(x-a)Q_{n-1}(x)+P_n(a).$$

4-Мисол. $P_4(x)=x^4+x^3+3x^2+2x+2$ кўпҳадни $(x-1)$ га бўлгандаги қолдиқни топинг.

Ечиш: Безу теоремасига кўра $(x=1)$ $P_4(1)=1+1+3+2+2=9$. Демак, $P_4(x)=(x-1)Q_3(x)+9$ бўлиб, қолдиқ 9 га тенг.

4-Таъриф. Агар $x=a$ да $P_n(a)=0$ бўлса, a сонига $P_n(x)$ кўпҳаднинг илдизи дейилади.

5-Мисол. $P_4(x)=x^4+4x^3+5x+8$ кўпҳадни $(x+1)$ га бўлгандаги қолдиқни топинг.

Ечиш: Безу теоремасига кўра $P_4(-1)=1-4-5+8=0$, бундан ва 4-Таърифдан $x=-1$ кўпҳаднинг илдизи бўлиб, қолдиқ 0 бўлади.

Безу теоремасининг натижалари:

1) Агар a сони $P_n(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, у ҳолда $P_n(x)$ кўпҳад $(x-a)$ га қолдиқсиз бўлинади.

2) x^n-a^n кўринишидаги кўпҳад ихтиёрий натурал n учун $(x-a)$ га қолдиқсиз бўлинади, яъни

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}\cdot a+x^{n-3}\cdot a^2+...+xa^{n-2}+a^{n-1}.$$

3) $x^{2n}-a^{2n}$ ва $x^{2n+1}+a^{2n+1}$ кўринишидаги кўпҳадлар ихтиёрий натурал n учун $(x+a)$ га қолдиқсиз бўлинади, яъни

$$\frac{x^{2n}-a^{2n}}{x+a}=x^{2n-1}+x^{2n-2}\cdot a+x^{2n-3}\cdot a^2+...-x^2a^{2n-3}+xa^{2n-2}-a^{2n-1}.$$

$$\frac{x^{2n+1}+a^{2n+1}}{x+a}=x^{2n}-x^{2n-1}\cdot a+x^{2n-2}\cdot a^2-...+x^2a^{2n-2}-xa^{2n-1}+a^{2n}.$$

6-Мисол. $P_{17}(x)=x^{17}-15x^{14}+37x^{10}-16x^8-7$ кўпҳадни $(x-1)$га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

Ечиш: Безу теоремасига кўра $P_{17}(1)=1-15+37-16-7=0$, у ҳолда 1) натижага кўра $P_{17}(x)$ кўпҳад $(x-1)$га қолдиқсиз бўлинади.

7-Мисол. $P_5(x)=x^5-32$ кўпҳадни $(x-2)$ га бўлинг.

Ечиш: 2) натижага ва $x^5-32=x^5-2^5$ га кўра

$$\frac{x^5-2^5}{x-2}=\frac{(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)}{x-2}=x^4+2x^3+4x^2+8x+16.$$

8-Мисол. $4^{2n}-3^{2n}+2^{3n}-1$ сон n нинг ихтиёрий натурал қийматида 7 га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

Ечиш: $4^{2n}=16^n$, $3^{2n}=9^n$, $2^{3n}=8^n$,

у ҳолда $4^{2n}-3^{2n}+2^{3n}-1=(16^n-9^n)+(8^n-1)$ бўлади. 2) натижага кўра n нинг ихтиёрий натурал қийматида 16^n-9^n сони 16−9=7 га ва 8^n-1 сони эса $8-1=7$ га қолдиқсиз бўлинади. Шундай қилиб берилган сон ҳам 7 га қолдиқсиз бўлинади, чунки 16^n-9^n ва 8^n-1 сонлар 7 га қолдиқсиз бўлинади.

7−§. Кўпҳадларни кўпайтувчига ажратиш усуллари

Таъриф. Кўпҳадни икки ёки бир нечта кўпҳадлар кўпайтмаси билан алмаштириш кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратиш деб аталади.

Кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратиш усуллари:

1. **Умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқариш усули.**

Мисоллар.

а) $6a^2b+9b^2=(3b)(2a^2)+(3b)(3b)=3b(2a^2+3b)$;

б) $2a^2(x-2y)-5(x-2y)=(x-2y)(2a^2-5)$;

в) $x(y-5)-y(5-y)=x(y-5)+y(y-5)=(y-5)(x+y)$;

г) $5x^{n+3}-3x^{n+1}=x^{n+1}(5x^2-3)$;

д) $3x^5-6x^3+6x^2-18x=3x(x^4-2x^2+2x-6)$;

е) $(x+c)^3-c(x+c)^2=(x+c)^2(x+c-c)=x(x+c)^2$.

2. Гуруҳлаш усули.

Агар кўпҳаднинг ҳадлари умумий кўпайтувчиларга эгалиги яққол кўринмаса, у ҳолда ҳадларни гуруҳларга ажратиб, кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратиш мумкин.

Мисоллар.

а) $ab-2b+3a-6=(ab-2b)+(3a-6)=b(a-2)+3(a-2)=(a-2)(b+3)$;

б) $5a(x-2y)-3x+6y=5a(x-2y)-3(x-2y)=(x-2y)(5a-3)$;

в) $b^6-3b^4-2b^2+6=(b^6-3b^4)+(-2b^2+6)=b^4(b^2-3)-2(b^2-3)=(b^2-3)(b^4-2)$;

г) $7(a-b)^2-2a+2b=7(a-b)^2-2(a-b)=(a-b)[7(a-b)-2]=(a-b)(7a-7b-2)$;

д) $5cy-10cx-5ay+10ax=(5cy-5ay)+(-10cx+10ax)=5y(c-a)-10x(c-a)=$
$(c-a)(5y-10x)=5(c-a)(y-2x)$.

3. Қисқа кўпайтириш формулаларидан фойдаланиб, кўпайтувчиларга ажратиш усули.

Мисоллар.

а) $9y^2-(1+2y)^2=(3y)^2-(1+2y)^2=(3y-1-2y)(3y+1+2y)=(y-1)(5y+1)$;

б) $(3x+y)^2-(x-2y)^2=(3x+y-x+2y)(3x+y+x-2y)=(2x+3y)(4x-y)$;

в) $x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1-x)(x^2+1+x)=$
$=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$;

г) $x^3-3x^2-3x+1=(x^3+1)-3x(x+1)=(x+1)(x^2-x+1)-3x(x+1)=$
$=(x+1)(x^2-4x+1)$;

д) $x^3-3x-2=x^3-2x-x-2=(x^3-x)-2(x+1)=x(x^2-1)-2(x+1)=$
$=x(x-1)(x+1)-2(x+1)=(x+1)[x(x-1)-2]=(x+1)(x^2-x-2)=$
$=(x+1)(x^2-x-1-1)=(x+1)[x(x^2-1)-(x+1)]=(x+1)[(x-1)(x+1)-(x+1)]=$
$=(x+1)^2[x-1-1]=(x+1)^2(x-2)$;

е) $x^4+x^3y-xy^3-y^4=(x^4-y^4)+x^3y-xy^3=(x^2-y^2)(x^2+y^2)+xy(x^2-y^2)=$
$=(x^2-y^2)(x^2+y^2+xy)=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)=(x+y)(x^3-y^3)$

8–§. Алгебраик касрлар ва улар устида амаллар

1-Таъриф. Сурат ва махражи алгебраик ифодалар бўлган каср алгебраик каср дейилади.

Масалан: $\frac{2c}{b}, \frac{5}{a+b}, \frac{x(a+b)}{y}, \frac{a-b}{a+b}, \frac{5x^2-x+y}{(a-b)^2}$.

Агар алгебраик касрга кирувчн ўзгарувчилар ўрнига бирор сонлар қўйилса, у ҳолда алгебраик касрнинг сон қиймати ҳосил бўлади.

Масалан: $\frac{a+b}{2b}$ алгебраик касрда $a=12$, $b=5$ бўлса, $\frac{a+b}{2b}=\frac{12+5}{2\cdot 5}=\frac{17}{10}=1\frac{7}{10}=1{,}7$ бўлади.

Бу $\frac{a+b}{2b}$ алгебраик касрда b ни ўрнига $b\neq 0$ бўлмаган истаган сонларни қўйиш мумкин, чунки $b=0$ бўлганда касрнинг махражи нолга айланади, бу бўлиши мумкин эмас. Шунинг учун алгебраик касрда аниқланиш соҳаси тушунчасини киритамиз.

2-Таъриф. Алгебраик касрнинг аниқланиш соҳаси деб алгебраик касрнинг махражида қатнашган ўзгарувчиларнинг қабул қиладиган (яъни касрнинг махражи нолдан фарқли) қийматлари тўпламига айтилади.
Масалан:

1) $\frac{5}{a}$ алгебраик касрнинг аниқланиш соҳаси $a\neq 0$ ёки $a\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

2) $\frac{x+5}{x+4}$ алгебраик касрнинг аниқланиш соҳаси $x\neq -4$ ёки $x\in(-\infty;-4)\cup(-4;+\infty)$;

3) $\frac{5c}{5a\cdot b}$ алгебраик касрнинг аниқланиш соҳаси $a\neq 0, b\neq 0$ ёки $\{(a,b): a\neq 0, b\neq 0\}$.

8.1. Алгебраик касрларнинг хоссалари.

A, B, C, D – кўпҳадлар бўлсин.

1) $\frac{A}{B}$ ва $\frac{C}{D}$ алгебраик касрлар тенг дейилади, агар $AD=CB$ бўлса.

Масалан: $\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x-y}$ бўлиши учун $x(x-y)=y(x+y)$ бўлиши керак, бу ерда $x\neq y, y\neq 0$.

2) Алгебраик касрнинг сурат ва махражини нолдан фарқли кўпҳадга кўпайтирилса (бўлинса) берилган каср аниқланиш соҳасида ўзгармайди, яъни

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C}=\frac{A:C}{B:C}.$$

Масалан: $\frac{x^4-1}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{x^2+1}{x+2}$, бу ерда $x\neq\pm1, x\neq-2$.

2-хоссадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. Касрнинг сурат ва махражини -1 га кўпайтирилса (бўлинса) берилган каср аниқланиш соҳасида ўзгармайди, яъни

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}=-\frac{A}{-B}=-\frac{-A}{B}.$$

8.2. Алгебраик касрлар устида амаллар

1) Махражи бир хил касрларни қўшиш (айириш) учун уларнинг суратларини қўшиб (айириб), йиғинди (айирма)ни уларнинг умумий махражига бўлиш керак, яъни

$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{B}=\frac{A\pm C}{B}.$$

Мисоллар: а) $\frac{2y}{a-b}+\frac{x-y}{a-b}=\frac{2y+x-y}{a-b}=\frac{y+x}{a-b}$, бу ерда $a-b\neq0$;

б) $\frac{3y}{x+y}-\frac{x-y}{x+y}=\frac{3y-x+y}{x+y}=\frac{4y-x}{x+y}$, бу ерда $x+y\neq0$;

в) $\frac{x+y}{2a}-\frac{x-y}{2a}+\frac{x}{2a}=\frac{x+y-x+y+x}{2a}=\frac{2y+x}{2a}$, бу ерда $a\neq0$.

2) Агар берилган касрларнинг махражлари ҳар-хил бўлса, аввал уларни умумий махражга келтириш керак, яъни

а) берилган касрларнинг умумий махражини топиш;

б) ҳар бир каср учун қўшимча кўпайтувчини топиш;

в) ҳар бир касрнинг суратини унинг қўшимча кўпайтувчисига кўпайтириш;

г) ҳар бир касрни топилган сурат ва умумий махраж билан ёзиш керак, яъни

$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot D}\pm\frac{C\cdot B}{D\cdot B}=\frac{A\cdot D\pm C\cdot B}{BD}.$$

Мисоллар:

а) $\frac{3a}{5x^2y}+\frac{5b}{4xy^2}=\frac{3a\cdot4y}{5x^2y\cdot4y}+\frac{5b\cdot5x}{4xy^2\cdot5x}=\frac{12ay}{20x^2y^2}+\frac{25bx}{20x^2y^2}=\frac{12ay+25bx}{20x^2y^2}$, бу ерда $xy\neq0$;

б) $\frac{3}{3x-9}+\frac{x}{x^2-9}=\frac{3}{3(x-3)}+\frac{x}{(x-3)(x+3)}=\frac{3(x+3)+3x}{3(x-3)(x+3)}=\frac{3x+9+3x}{3(x-3)(x+3)}=$

$=\frac{6x+9}{3(x-3)(x+3)}=\frac{3(2x+3)}{3(x-3)(x+3)}=\frac{2x+3}{x^2-9}$, бу ерда $x^2-9\neq 0$;

в) $\frac{3-x}{x-y}+\frac{5-x}{x^2-y^2}-\frac{2-x}{x+y}=\frac{(3-x)(x+y)+(5-x)-(2-x)(x-y)}{(x-y)(x+y)}=$

$=\frac{3x+3y-x^2-xy+5-x-2x+2y+x^2-xy}{(x-y)(x+y)}=\frac{5y-2xy+5}{x^2-y^2}$, бу ерда $x^2-y^2\neq 0$.

3) Касрларни кўпайтириш учун уларнинг суратларининг кўпайтмасини махражларининг кўпайтмасига бўлиш керак, яъни

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}.$$

Мисоллар: а) $\frac{2a}{b}\cdot\frac{5c}{7d}=\frac{2a\cdot 5c}{b\cdot 7d}=\frac{10ac}{7bd}$, бу ерда $bd\neq 0$;

б) $\frac{x^2-y^2}{ab}\cdot\frac{b}{x-y}=\frac{(x-y)(x+y)\cdot b}{ab(x-y)}=\frac{x+y}{a}$, бу ерда $a\neq 0, b\neq 0$, $x-y\neq 0$;

в) $\frac{x^2+yx}{5x^2-5y^2}\cdot\frac{3x^3-3y^3}{x^2-xy}=\frac{x(x+y)\cdot 3(x-y)(x^2+xy+y^2)}{5(x-y)(x+y)\cdot x(x-y)}=\frac{3(x^2+xy+y^2)}{5(x-y)}$, бу ерда $x(x^2-y^2)\neq 0$.

3-Таъриф. Кўпайтмаси 1 га тенг бўлган икки алгебраик ифода ўзаро тескари ифода дейилади. Яъни $A\cdot\frac{1}{A}=1,\quad A\neq 0$.

Масалан: $3x^2$ ва $\frac{1}{3x^2}$, $x\neq 0$; $(a+b)^2$ ва $\frac{1}{(a+b)^2}$, $a+b\neq 0$; $\frac{a-b}{a+b}$ ва $\frac{a+b}{a-b}$ $a+b\neq 0, a-b\neq 0$; ўзаро тескари ифодалардир.

4) Алгебраик касрни алгебраик касрга бўлиш учун бўлинувчини бўлувчига тескари бўлган касрга кўпайтириш керак, яъни

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}.$$

Мисоллар: а) $\frac{a+b}{a^2bc}:\frac{2(a-b)}{abc}=\frac{a+b}{a^2bc}\cdot\frac{abc}{2(a-b)}=\frac{a+b}{2a(a-b)}$, бу ерда $abc\neq 0,\quad a\neq b$;

б) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}:(x+y)=\frac{(x-y)(x+y)}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x+y}=\frac{x-y}{x^2+y^2}$, бу ерда $x+y\neq 0$;

в) $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}:\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}=1$,

бу ерда $a-b\neq 0, a+b\neq 0, a^2+ab+b^2\neq 0$.

5) Алгебраик касрни бирон (натурал) даражага кўтариш учун унинг суратини ҳам, махражини ҳам шу даражага кўтариб уларнинг нисбати ёзилади, яъни $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$.

Мисоллар: а) $\left(\frac{a^3}{a+b}\right)^2 = \frac{a^6}{(a+b)^2}$, бу ерда $a+b \neq 0$;

б) $\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 = \frac{a^6}{b^6} \cdot \frac{a^4}{b^6} = \frac{a^{10}}{b^{12}}$, бу ерда $b \neq 0$;

в) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 : \frac{a^2-b^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4} \cdot \frac{4}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a-b}$, бу ерда $a+b \neq 0$, $a-b \neq 0$.

8.3. Барча амалларга доир мисоллар

1-Мисол. Соддалаштиринг: $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right)$.

Ечиш. Бу мисолни ечишда амалларни бажариш тартибини эътиборга олиш керак.

1) $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} = \frac{x(x+y) - y(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2+xy-yx+y^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2+y^2}{(x-y)(x+y)}$;

2) $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{x(x+y)}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x}{x-y}$.

Жавоб: $\frac{x}{x-y}$.

2-Мисол. Соддалаштиринг: $\frac{a^2-b^2}{a^2-ax} \cdot \frac{a^2-x^2}{a-b} \cdot \left(x - \frac{ax}{a+x}\right)$.

1) $x - \frac{ax}{a+x} = \frac{ax+x^2-ax}{a+x} = \frac{x^2}{a+x}$;

2) $\frac{a^2-b^2}{a^2-ax} \cdot \frac{a^2-x^2}{a+x} = \frac{(a-b)(a+b)}{a(a-x)} \cdot \frac{(a-x)(a+x)}{a-b} = \frac{(a+b)(a+x)}{a}$;

3) $\frac{(a+b)(a+x)}{a} \cdot \frac{x^2}{a+x} = \frac{x^2(a+b)}{a}$.

Жавоб: $\frac{x^2(a+b)}{a}$.

3-Мисол. Амалларни бажаринг: $\left(m + \frac{mn}{m-n}\right) : \left(m - \frac{mn}{m+n}\right) - \frac{m-n}{m+n}$.

1) $m+\dfrac{mn}{m-n}=\dfrac{m(m-n)+mn}{m-n}=\dfrac{m^2-mn+mn}{m-n}=\dfrac{m^2}{m-n}$;

2) $m-\dfrac{mn}{m+n}=\dfrac{m(m+n)-mn}{m+n}=\dfrac{m^2+mn-mn}{m+n}=\dfrac{m^2}{m+n}$;

3) $\dfrac{m^2}{m-n}:\dfrac{m^2}{m+n}=\dfrac{m^2}{m-n}\cdot\dfrac{m+n}{m^2}=\dfrac{m+n}{m-n}$;

4) $\dfrac{m+n}{m-n}-\dfrac{m-n}{m+n}=\dfrac{(m+n)(m+n)-(m-n)(m-n)}{(m-n)(m+n)}=\dfrac{m^2+mn+mn+n^2-m^2+mn+mn-n^2}{m^2-n^2}=$

$=\dfrac{4mn}{m^2-n^2}$.

Жавоб: $\dfrac{4mn}{m^2-n^2}$.

1-3 мисоллардаги соддалаштиришлар ифодаларда қатнашган ўзгарувчиларнинг қабул қиладиган қийматлар тўпламида бажарилади. Кейинчалик ифодаларни соддалаштиришлар ҳар доим аниқланиш соҳасида бажарилади, агар бирор изоҳ талаб қилинмаса.

4-Мисол. Аниқланиш соҳасида ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{y^2-x^2}{m^2-n^2}\cdot\frac{m+n}{x-y}-\frac{x}{n-m}\right)\cdot\frac{m-n}{2y}.$$

Ечиш: Аниқланиш соҳаси: $m^2-n^2\neq 0, x-y\neq 0, y\neq 0$.

Яъни $m\neq n, m\neq -n, x\neq y, y\neq 0$. Ёки $A=\{(m,n,x,y): m\neq n, m\neq -n, x\neq y, y\neq 0\}$

A тўпламда берилган ифодани соддалаштирамиз:

1) $\dfrac{y^2-x^2}{m^2-n^2}\cdot\dfrac{m+n}{x-y}=\dfrac{-(x-y)(x+y)\cdot(m+n)}{(m-n)(m+n)(x-y)}=-\dfrac{x+y}{m-n}=\dfrac{x+y}{n-m}$;

2) $\dfrac{x+y}{n-m}-\dfrac{x}{n-m}=\dfrac{x+y-x}{n-m}=\dfrac{y}{n-m}$;

3) $\dfrac{y}{n-m}\cdot\dfrac{m-n}{2y}=-\dfrac{y(n-m)}{2y(n-m)}=-\dfrac{1}{2}$.

Жавоб: $A=\{(m,n,x,y): m\neq n, m\neq -n, x\neq y, y\neq 0\}$ да $-\dfrac{1}{2}$.

9–§. Бутун кўрсаткичли даража ва унинг хоссалари.

1-Таъриф. Агар $a\neq 0$ ва n–натурал сон бўлса, у ҳолда $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ бўлади.

Мисоллар: а) $5^{-2}=\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{1}{25}$;

б) $(-2)^{-4}=\dfrac{1}{(-2)^4}=\dfrac{1}{16}$;

в) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}=\frac{4}{9}$.

2-Таъриф. Агар $a\neq 0$ бўлса, у ҳолда $a^0=1$ бўлади.

Мисоллар: а) $9^0=1$; б) $\left(\frac{5}{7}\right)^{0}=1$; в) $\left(\frac{5}{7}+\frac{1}{2}\right)^{0}=1$;

г) $(0{,}57)^0=1$.

Натурал кўрсаткичли даражаларнинг барча хоссалари исталган бутун кўрсаткичли даражалар учун ҳам тўғри бўлади.

Агар $a\neq 0, b\neq 0, m,n\in Z$ бўлса, у ҳолда:

1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$; 2) $a^m:a^n=a^{m-n}$; 3) $(a^m)^n=a^{mn}$; 4) $(ab)^m=a^m b^m$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{m}=\frac{a^m}{b^m}$;

6) агар $a>0$ бўлса, у ҳолда $a^n>0$;

7) агар $a>1$ бўлса, у ҳолда $n>m\Leftrightarrow a^n>a^m$;

8) агар $0<a<1$ бўлса, у ҳолда $n>m\Leftrightarrow a^n<a^m$;

9) агар $a>0$ ва $a\neq 1$ бўлса, у ҳолда $a^n=a^m\Leftrightarrow n=m$.

3-хоссанинг исботи: Уч ҳолни қараймиз.

а) агар $n=0$ бўлса, у ҳолда $(a^m)^n=(a^m)^0=1=a^0=a^{m\cdot 0}=a^{m\cdot n}$;

б) агар $n>0$ бўлса, у ҳолда $(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\ldots\cdot a^m}_{n\text{ марта}}=a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n\text{ марта}}}=a^{m\cdot n}$;

в) агар $n<0$ бўлса, у ҳолда $-n>0$ бўлиб, $(a^m)^n=(a^m)^{-(-n)}=\frac{1}{(a^m)^{-n}}=$

$$=\frac{1}{\underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\ldots\cdot a^m}_{(-n)\text{ марта}}}=\frac{1}{a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{(-n)\text{ марта}}}}=\frac{1}{a^{-mn}}=\frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}}=a^{mn}.$$

Мисоллар: а) $(a^{-1}\cdot a^{-2})^{-3}=(a^{-3})^{-3}=a^9$;

б) $(3^{-2})^{-2}\cdot 3^{-5}\cdot 27=3^4\cdot 3^{-5}\cdot 3^3=3^2=9$;

в) $\frac{(2y^2)^{-2}\cdot y^5}{y^3\cdot y^{-2}}=\frac{2^{-2}y^{-4}y^{5}}{y^{3-2}}=\frac{\frac{1}{2^2}\cdot y^{5-4}}{y}=\frac{\frac{1}{4}y}{y}=\frac{1}{4}$;

г) 2^{30} ва 4^{14} ларни таққосланг. $4^{14}=(2^2)^{14}=2^{28}$, демак $30>28$ бўлганлиги учун $2^{30}>2^{28}$ бўлади.

10–§. n – даражали илдиз

10.1. n - даражали илдизнинг таърифи ва хоссалари

1-Таъриф. a сонининг $n \geq 2$ натурал кўрсаткичли илдизи деб, n-чи даражаси a га тенг бўлган b сонга айтилади. Яъни $b^n = a$ ёки $b = \sqrt[n]{a}$, бу ерда a- илдиз остидаги ифода, n – илдизнинг даражаси.
Ўқилиши: "a нинг n - даражали илдизи."

Мисоллар: а) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$, чунки $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$;

б) $\sqrt[5]{-32} = -2$, чунки $(-2)^5 = -32$;

в) $\sqrt{64} = 8$, чунки $8^2 = 64$.

Хоссалари:

1) $\sqrt[n]{a} = 0$, агар $a = 0$ бўлса;
2) $\sqrt[n]{a} = 1$, агар $a = 1$ бўлса;
3) агар $n = 2k + 1, k \in N$ бўлса, у ҳолда $\sqrt[n]{a}$ ифода $a \in R$ да маънога эга;
4) агар $n = 2k, k \in N$ бўлса, у ҳолда $\sqrt[n]{a}$ ифода $a \in [0;\infty)$ да маънога эга;
5) a нинг $\sqrt[n]{a}$ ифода маънога эга бўладиган хамма қийматларида $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$ тенглик ўринлидир;
6) агар $a \in [0;\infty)$, $n = 2k + 1, k \in N$ бўлса, у ҳолда $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ бўлади.

Мисоллар: а) $\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$; $\sqrt[3]{1} = 1; \sqrt[5]{-1} = -1$; $\sqrt[6]{0} = 0$;

б) $\left(\sqrt[5]{-2}\right)^5 = -2$, чунки $\left(\sqrt[5]{-2}\right)^5 = \left(-\sqrt[5]{2}\right)^5 = -\left(\sqrt[5]{2}\right)^5 = -2$;

$\left(\sqrt[4]{7}\right)^4 = 7; \left(\sqrt[4]{-3}\right)^4 = \sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{3^4} = 3$.

10.2. n - даражали арифметик илдиз ва унинг хоссалари.

2-Таъриф. Номанфий a сонининг $n \geq 2$ натурал кўрсаткичли арифметик илдизи деб, n- даражаси a га тенг бўлган номанфий b сонига тенг. Яъни $b^n = a$ ёки $b = \sqrt[n]{a}$, $(b \geq 0, a \geq 0)$.

Агар $n = 2$ бўлса, у ҳолда иккинчи даражали арифметик илдиз квадрат илдиз дейилади ва $\sqrt{a}$ кўринишида ёзилади.

Агар $n = 3$ бўлса, у ҳолда учинчи даражали арифметик илдиз куб илдиз дейилади ва $\sqrt[3]{a}$ кўринишида ёзилади.

Арифметик илдизнинг хоссалари:

1) Агар $a\ge 0, b\ge 0, n\ge 2 (n\in N)$ бўлса, у ҳолда $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ бўлади;

2) Агар $a\ge 0, b>0, n\ge 2 (n\in N)$ бўлса, у ҳолда $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ бўлади;

3) Агар $a\ge 0, n\ge 2, k\ge 2 (n,k\in N)$ бўлса, у ҳолда $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[k]{a}=\sqrt[nk]{a^{n+k}}$ бўлади;

4) Агар $a>0, n\ge 2, k\ge 2 (n,k\in N)$ бўлса, у ҳолда $\sqrt[n]{a}:\sqrt[k]{a}=\sqrt[nk]{a^{k-n}}$ бўлади;

5) Агар $a\ge 0, n\ge 2, k\ge 2 (n,k\in N)$ бўлса, у ҳолда $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ бўлади;

6) Агар $a\ge 0, n\ge 2, k\ge 2 (n,k\in N)$ бўлса, у ҳолда $\sqrt[nk]{a^k}=\sqrt[n]{a}$ бўлади;

7) Агар $n=2, a\in R$ бўлса, у ҳолда $\sqrt{a^2}=|a|$ бўлади;

8) Агар $a\ge 0, n\ge 2, k\ge 2 (n,k\in N)$ бўлса, у ҳолда $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$ бўлади.

1-хоссанинг исботи: n- даражали арифметик илдизнинг таърифи ва берилган шартга кўра $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\ge 0$ бўлиб, $\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$ ўринли, чунки $\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$, бундан $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ бўлади.

Қолган хоссалар ҳам шунга ўхшаш исбот қилинади.

Арифметик илдизнинг хоссаларига оид мисоллар:

1) $\sqrt[4]{625\cdot 16}=\sqrt[4]{625}\cdot\sqrt[4]{16}=5\cdot 2=10$, $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\cdot 4}=\sqrt[3]{8}=2$;

2) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}=\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$, $\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{96}}=\sqrt[5]{\frac{3}{96}}=\sqrt[5]{\frac{1}{32}}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5}=\frac{1}{2}$;

3) $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt{7}=\sqrt[6]{7^5}$;

4) $\sqrt[3]{4}:\sqrt[5]{4}=\sqrt[15]{4^2}=\sqrt[15]{16}$;

5) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}}=\sqrt[12]{4096}=\sqrt[12]{2^{12}}=2$;

6) $\sqrt[6]{7^4}=\sqrt[3\cdot 2]{7^{2\cdot 2}}=\sqrt[3]{7^2}=\sqrt[3]{49}$; $\sqrt[4]{2^8}=\left(\sqrt[4]{2^4}\right)^2=2^2=4$;

7) $\sqrt{5^2}=5$, $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{3^2}=3$;

8) $\left(\sqrt[4]{9}\right)^{-2}=\sqrt[4]{9^{-2}}=\sqrt[4]{\frac{1}{9^2}}=\sqrt[4]{\frac{1}{3^4}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^4}=\frac{1}{3}$.

10.3. n - даражали арифметик илдизга оид турли хил мисоллар.

1-Мисол. $A=\left(2\sqrt{6}\right)^2+3\sqrt{0{,}16}-2\sqrt{6}\cdot\left(-\sqrt{6}\right)-0{,}3\sqrt{1{,}21}\cdot\sqrt{400}+\sqrt{(-0{,}4)^2}$ ни ҳисобланг.

Ечиш: $A=2^2\cdot\left(\sqrt{6}\right)^2+3\cdot0{,}4+2\sqrt{6^2}-0{,}3\sqrt{1{,}21\cdot400}+\sqrt{(0{,}4)^2}=4\cdot6+3\cdot0{,}4+$
$+2\cdot6-0{,}3\sqrt{121\cdot4}+0{,}4=24+1{,}2+12-0{,}3\cdot11\cdot2+0{,}4=36+1{,}6-0{,}3\cdot22=37{,}6-6{,}6=31.$

Жавоб: 31.

2-Мисол. $B=\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{27}\right)$ ни ҳисобланг.

Ечиш: $\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot4}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{27}=\sqrt{3\cdot9}=3\sqrt{3}$ ни ҳисобга олиб,
$B=\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)=4\sqrt{2^2}-6\sqrt{3\cdot2}+6\sqrt{3\cdot2}-9\sqrt{3^2}=4\cdot2-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-9\cdot3=$
$=8-27=-19$.

Жавоб: -19.

3-Мисол. $C\equiv\sqrt[3]{2\sqrt[5]{8}}:\sqrt[3]{2}-\sqrt[6]{2^{11}}$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $\sqrt[3]{2\sqrt[5]{8}}:\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^5\cdot\sqrt{8}:2}=\sqrt[3]{2^4\cdot\sqrt{8}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^8\cdot2^3}}=\sqrt[6]{2^{11}}$ ни ҳисобга олиб,
$C\equiv\sqrt[6]{2^{11}}-\sqrt[6]{2^{11}}=0$.

Жавоб: 0.

4-Мисол. $D\equiv\left(7\sqrt{48}+3\sqrt{27}-2\sqrt{12}\right):\sqrt{3}$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot3}=4\sqrt{3}$, $\sqrt{27}=\sqrt{9\cdot3}=3\sqrt{3}$ ва $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot3}=2\sqrt{3}$ ни ҳисобга олиб, $D\equiv\left(28\sqrt{3}+9\sqrt{3}-4\sqrt{3}\right):\sqrt{3}=33\sqrt{3}:\sqrt{3}=33$.

Жавоб: 33.

5-Мисол. $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}(a>0,b>0)$ ни соддалаштиринг.

Ечиш. $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}=\dfrac{a^3b^2}{\sqrt[6]{a^{12}b^6}}=\dfrac{a^3b^2}{a^2b}=ab.$

Жавоб: ab.

6-Мисол. $A=\left[\left(\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3+2\left(\sqrt[4]{\sqrt{x}}\right)^8\right]:\sqrt{(2x)^2}$ $(x>0)$ ни соддалаштиринг.

Ечиш. $\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{\sqrt{x}}=\sqrt[8]{x}$, $\sqrt{(2x)^2}=2x$ га кўра
$A=\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^3+2\left(\sqrt[8]{x}\right)^8\right]:(2x)=(x+2x):(2x)=(3x):(2x)=\dfrac{3x}{2x}=1{,}5.$

Жавоб: 1,5.

10.4. Рационал кўрсаткичли даража ва унинг хоссалари

3-Таъриф. a сонининг α рационал кўрсаткичли даражаси деб қуйидагича аниқланган сонга айтилади:

1) агар $a \neq 0, \alpha \in Z$ бўлса, у ҳолда a^{α} даража § 9 нинг 1 ва 2-таърифига кўра аниқланади;

2) агар $a > 0, \alpha \in Q$ ва $\alpha = \frac{m}{n}$ $(m \in Z, n \in N(n \geq 2))$ бўлса, у ҳолда $a^{\alpha} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ бўлади;

3) агар $a < 0, \alpha \in Q$ ва $\alpha = \frac{m}{n}$ $(m \in Z \setminus \{0\},\ n \in N(n \geq 2))$ бўлса, у ҳолда рационал кўрсаткичли даража аниқланмаган (маънога эга эмас);

4) агар $a = 0, \alpha > 0-$ рационал сонлар бўлса, у ҳолда $a^{\alpha}=0$ бўлади;

5) агар $a = 0, \alpha < 0-$ рационал сонлар бўлса, у ҳолда рационал кўрсаткичли даража маънога эга эмас;

Мисоллар. а) $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8$;

б) $8^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{8^5} = \sqrt[4]{8^4 \cdot 8} = 8\sqrt[4]{8}$;

в) $16^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2^{12}}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$;

г) $0^{\frac{5}{3}} = 0, \qquad 0{,}5^0 = 1$;

д) $(-2)^{\frac{3}{2}}, 0^{-\frac{1}{2}}, (-8)^{-\frac{1}{2}}$ – ифодалар маънога эга эмас.

Бутун кўрсаткичли даражанинг хоссалари исталган рационал кўрсаткичли даража учун ҳам ўринлидир.

Агар $a > 0, b > 0$ ва $p, q \in Q$ бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринлидир:

а) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; б) $a^p : a^q = a^{p-q}$; в) $(a^p)^q = a^{pq}$;

г) $(ab)^q = a^q \cdot b^q$; д) $\left(\frac{a}{b}\right)^q = \frac{a^q}{b^q}$; е) $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

(а) хоссанинг исботи: $p, q \in Q$ ва $p = \frac{k}{n}, q = \frac{m}{l}$, бунда $k, m-$бутун сонлар, $l, n-$натурал сонлар бўлсин.

$a^{\frac{k}{n}} \cdot a^{\frac{m}{l}} = a^{\frac{k}{n}+\frac{m}{l}}$ эканлигини исботлаймиз:

$a^{\frac{k}{n}} \cdot a^{\frac{m}{l}} = a^{\frac{kl}{nl}} \cdot a^{\frac{mn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{kl}} \cdot \sqrt[nl]{a^{mn}} = \sqrt[nl]{a^{kl} \cdot a^{mn}} = \sqrt[nl]{a^{kl+mn}} = a^{\frac{kl+mn}{nl}} = a^{\frac{k}{n}+\frac{m}{l}}$. Демак, $a^p \cdot a^q = a^{\frac{k}{n}} \cdot a^{\frac{m}{l}} = a^{\frac{k}{n}+\frac{m}{l}} = a^{p+q}$.

Рационал кўрсаткичли даражанинг қолган хоссалари ҳам шунга ўхшаш исбот қилинади.

Даражанинг хоссаларини қўллашга оид мисоллар:

1) $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 5^{\frac{3}{3}} = 5$; $6^{\frac{2}{5}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{2}{5}+\frac{1}{3}} = 6^{\frac{6+5}{15}} = 6^{\frac{11}{15}} = \sqrt[15]{6^{11}}$;

2) $11^{\frac{2}{3}} : 11^{\frac{1}{6}} = 11^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 11^{\frac{4-1}{6}} = 11^{\frac{3}{6}} = 11^{\frac{1}{2}} = \sqrt{11}$;

3) $\left(8^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{15}{4}} = 8^{\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{4}} = 8^{\frac{3}{2}} = \left(2^3\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{9}{2}} = \sqrt{2^9} = 2^4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$;

4) $(48)^{\frac{3}{4}} = (16 \cdot 3)^{\frac{3}{4}} = \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} = 2^3 \cdot \sqrt[4]{3^3} = 8\sqrt[4]{27}$;

5) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}$;

6) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Қисқа кўпайтириш формулаларни илдизли ифодаларга қўлланиш формулалари:

1) $a - b = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$, $a \geq 0, b \geq 0$;

2) $a - b = \left(\sqrt{-a} - \sqrt{-b}\right)\left(\sqrt{-a} + \sqrt{-b}\right)$, $a \leq 0, b \leq 0$;

3) $a - b = \sqrt{(a-b)^2}$, $a - b \geq 0$;

4) $a + b = \sqrt{(a+b)^2}$, $a + b \geq 0$;

5) $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \left(\sqrt[2n]{a} - \sqrt[2n]{b}\right)\left(\sqrt[2n]{a} + \sqrt[2n]{b}\right)$, $a \geq 0, b \geq 0$;

6) $a - b = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$;

7) $a + b = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$.

Мисоллар: а) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) = 2 - 3 = -1$;

б) $\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}\right) = \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 5 - 2 = 3$;

в) $\left(\sqrt[3]{a} + 2\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{a} + 4\right) = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 + 2^3 = a + 8$;

г) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{7 + 2 \cdot 2\sqrt{3}} = \sqrt{4 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2} =$
$= \sqrt{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2} = 2 + \sqrt{3}$;

д) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{1^2 - 2\sqrt{2} \cdot 1 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\left(1 - \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2} - 1$.

10.5. Касрнинг махраждаги иррационалликдан (илдиздан) қутқариш.

1-Мисол. $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}$ касрни махраждаги илдиздан қутқаринг.

Касрнинг сурат ва махражини $\sqrt{2}$ га кўпайтирамиз:

$$\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{5\cdot 2}}{5\cdot 2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

2-Мисол. $\frac{5}{\sqrt[3]{a}}$ $(a\neq 0)$ касрни махраждаги илдиздан қутқаринг.

Касрнинг сурат ва махражини $\sqrt[3]{a^2}$ га кўпайтирамиз:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{a}}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}=\frac{5\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}}=\frac{5\sqrt[3]{a^2}}{a}.$$

3-Мисол. $\frac{1-a^2}{1-\sqrt{a}}$ $(a\geq 0, a\neq 1)$ касрни махраждаги илдиздан қутқаринг.

Касрнинг сурат ва махражини $(1+\sqrt{a})$ га кўпайтирамиз:

$$\frac{1-a^2}{1-\sqrt{a}}=\frac{(1-a^2)\cdot(1+\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}=\frac{(1-a)(1+a)(1+\sqrt{a})}{1-a}=(1+a)(1+\sqrt{a})$$

4-Мисол. $\frac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ $(x\geq 0, y\geq 0, x\neq y)$ касрни махраждаги илдиздан қутқаринг. Касрнинг сурат ва махражини $(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ га кўпайтирамиз:

$$\frac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(x-\sqrt{xy}+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3}{x-y}=\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}{x-y}=\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x-y}.$$

5-Мисол. $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ касрни махраждаги илдиздан қутқаринг.

Касрнинг сурат ва махражини $[(1+\sqrt{2})-\sqrt{5}]$ га кўпайтирамиз:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{2})^2-5}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{1+2\sqrt{2}+2-5}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-2}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2(\sqrt{2}-1)}.$$

Энди касрнинг сурат ва махражини $(\sqrt{2}+1)$ га кўпайтирамиз:

$$\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2(\sqrt{2}-1)}=\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{10}+1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2(2-1)}=\frac{3+2\sqrt{2}-\sqrt{10}-\sqrt{5}}{2}.$$

10.6. Каср кўрсаткичли даража қатнашган ифодаларни айнан тенг ифодаларга алмаштириш

4-Таъриф. Агар икки ифода бирор тўпламда маънога эга бўлиб, шу тўпламда уларнинг барча мос қийматлари ўзаро тенг бўлса, бу икки ифода шу тўпламда айнан тенг дейилади.

Мисоллар: а) $3a^2 - a$ ва $2a$ ифодалар $[0;1]$ тўпламда; б) $\dfrac{a^2}{\sqrt{a-1}}$ ва $\dfrac{|a|}{\sqrt{a-1}}$ ифодалар $(1;+\infty)$ тўпламда; в) $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{2}}$ ва c ифодалар $[0;+\infty)$ тўпламда айнан тенг ифодалардир.

Натижалар:

1) агар икки ифода бирор тўпламда айнан тенг бўлса, унинг ихтиёрий қисм-тўпламида ҳам айнан тенг бўлади.

Масалан, $\sqrt{a^2}$ ва a ифодалар $[0;+\infty)$ тўпламда айнан тенг бўлганидан бу тўпламнинг ихтиёрий қисм тўпламлари: $[0;1],[5;7]$, $[1000;+\infty)$ да ҳам айнан тенгдир.

2) агар бирор тўпламда бир ифода иккинчисига, иккинчиси учинчисига айнан тенг бўлса, шу тўпламда биринчи ифода учинчи ифодага айнан тенг бўлади.

Масалан, $[0;+\infty)$ тўпламда $(\sqrt{a})^2$ ифода $\sqrt{a^2}$ га, $\sqrt{a^2}$ эса a га айнан тенг. Шунинг учун $[0;+\infty)$ тўпламда $(\sqrt{a})^2$ ифода a га айнан тенг.

Каср кўрсаткичли даражалар қатнашган ифодаларни айнан тенг бўлган ифодаларга алмаштиришга доир мисоллар:

1-Мисол. $b^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$ ифодани соддалаштиринг. Бу ифода $[0;+\infty)$ тўпламда маънога эга бўлганидан, уни шу тўпламда айнан тенг ифодага алмаштирамиз: $b^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = b^2$.

2-Мисол. $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{a-1}$ касрни қисқартиринг. Бу ифода $[0;1]\cup(1;+\infty)$ тўпламда маънога эга бўлгандан шу тўпламда $a - 1 = \left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)$ тенгликни ёзиш мумкин. У ҳолда $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{a-1} = \dfrac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}} + 1}$.

3-Мисол. $\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x-4}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-2}$ ифоданинг $x=9$ бўлгандаги қийматини топинг. Бу ифода $[0;4]\cup(4;+\infty)$ тўпламда маънога эга бўлгандан шу тўпламда $x-4=\left(x^{\frac{1}{2}}-2\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+2\right)$ тенгликни ёзиш мумкин. У ҳолда

$$\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x-4}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-2}=\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}-2\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+2\right)}-\frac{x^{\frac{1}{2}}+2}{\left(x^{\frac{1}{2}}-2\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+2\right)}=\frac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}-2}{\left(x^{\frac{1}{2}}-2\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+2\right)}=$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}}-2}{\left(x^{\frac{1}{2}}-2\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+2\right)}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+2}.$$

$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+2}$ ифодага $x=9$ қийматни қўямиз:

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+2}=\frac{1}{9^{\frac{1}{2}}+2}=\frac{1}{3+2}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

4-Мисол. $\frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}+\frac{\sqrt{y}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$ ифодани соддалаштиринг. Бу ифода $x\geq 0, y\geq 0; x^{\frac{1}{2}}\neq y^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{2}}\neq -y^{\frac{1}{2}}$ да маънога эга. Шунинг учун

$$\frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}+\frac{\sqrt{y}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)+y^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)}=\frac{x-x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}+y}{x-y}=\frac{x+y}{x-y}.$$

ЎТИЛГАН МАВЗУЛАР БЎЙИЧА ТЕСТ–2

1. $\frac{2^2\cdot 4\cdot\left(2^2\right)^4}{2^2\cdot 32}:2^5$ ни ҳисобланг.

A) 1024 B) 64 C) 1 Д) 2 E) 4.

2. $\frac{\left(a^2\right)^3\cdot a^3\cdot(ab)^3}{a^5\left(a^2b\right)^2\cdot b}:\left(\frac{ab^2}{b}\right)^2\cdot b$ ни соддалаштиринг.

A) $\frac{a^2}{b}$ B) $\frac{a}{b}$ C) $\frac{a^2}{b^2}$ Д) $\frac{a^3}{b^3}$ Е) ab^2.

3. $(3x^2+5xy+7x^2y)-(5xy+3x^2)-(7x^2y-3x^2)$ ни соддалаштиринг.

A) $3x^2$ B) $6x^2+10xy$ C) $10xy$ Д) $9x^2$ Е) 0.

4. $5a\cdot\frac{1}{2}\cdot b+\frac{2}{3}a\left(\frac{1}{4}b^2\right)-5b(0{,}5a)-\frac{1}{3}a^2\left(\frac{1}{15}ab\right)$ кўпҳадни стандарт шаклга келтиринг.

A) $\frac{1}{6}ab^2$ B) $-\frac{1}{45}a^3b$ C) $5ab$ Д) $-\frac{1}{45}a^3b+\frac{1}{6}ab^2$ Е) 0.

5. $1\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}a-6b\right)-\frac{7}{8}\left(1\frac{1}{7}a+8b\right)$ ифодани соддалаштиринг.

A) $2a$ B) $2a-15b$ C) $-b$ Д) $a-15b$ Е) $-15b$.

6. $P_4(x)\equiv x^4+7x^3+18x^2+20x+8$ кўпҳадни $Q_2(x)\equiv x^2+x+1$ кўпҳадга бўлгандаги қолдиқни топинг.

A) 0 B) x C) x^2+5x+7 Д) $3x-3$ Е) 1.

7. $\frac{77^3-69^3}{70^2-62^2}-\frac{77^3+41^3}{125^2-49}-\frac{1}{2}$ ни ҳисобланг.

A) 87 B) 57 C) 0,5 Д) $86\frac{1}{2}$ Е) $87\frac{1}{2}$.

8. $P_3(x)\equiv x^3-3x^2+5x+7$ кўпҳадни $Q_1(x)\equiv 2x+1$ кўпҳадга бўлгандаги қолдиқни топинг (Безу теоремасига кўра).

A) 0 B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{29}{8}$ Д) 29 Е) $\frac{17}{2}$.

9. $P_4(x)\equiv x^4-3x^2+2$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

A) $(x^2-1)(x^2-4)$ B) $(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ C) $(x^2+2)(x^2-3)$ Д) $3(x^2-1)(x^2-2)$ Е) $(x^2+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

10. $b^2c^2-4bc-b^2-c^2+1$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

A) $(bc-1)(b+1)$ B) $(bc+b-c-1)(bc-b+c+1)$

C) $(bc-b-c-1)(bc+b+c-1)$ Д) $(b-1)(c-1)(b-c)$ Е) $(b-c-1)(c-b+1)$.

11. $\frac{a^2b-ab}{b(a+1)}:\left(\frac{a+1}{a-1}\right)$ алгебраик ифоданинг аниқланиш соҳасини топинг.

A) $a\neq 0, b\neq 0, a\neq -1$ B) $a\neq -1, b\neq 0$ C) $a\neq 1, b\neq 0, a\neq 0$

Д) $a\neq -1, a\neq 1, b\neq 0$ Е) $a\neq 0, b\neq 0, a\neq \pm 1$.

12. $\left(\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{4x}+\dfrac{x}{4}-x\right)$ ни соддалаштиринг.

A) -3 B) 3 C) 2 Д) -2 E) 6.

13. $(1{,}5)^3(2{,}25)^{-1{,}5}(0{,}75)^{-1}\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}-\left(2\dfrac{3}{7}\right)^{0}\right]-8$ ни ҳисобланг.

A) 0 B) 8 C) -8 Д) -2 E) -16.

14. $\left(0{,}2x^{-3}y^{-2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{x^{-2}}{2y^3}\right)^{-2}$ ни соддалаштиринг.

A) $-0{,}16x^{-2}y^{-2}$ B) $0{,}16x^{-2}y^{-2}$ C) $0{,}16x^{-2}y^{2}$

Д) $\dfrac{16}{100}x^2y^2$ E) $\dfrac{1}{16}\dfrac{y^2}{x^2}$.

15. Қуйидагиларнинг қайси бири ҳамма бутун сонлар учун тўғри?

A) $\sqrt{a^2}=a$ B) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}=a$ C) $\left(4a^6\right)^{\frac{3}{2}}=8a^9$ Д) $\sqrt{a}\cdot 4\sqrt{a}=2a$

E) $\dfrac{\sqrt{9a}}{\sqrt{a}}=3$.

16. $\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}$ ни ҳисобланг.

17.A) 2 B) $\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{2}$ Д) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{10}$. $b+c=8$ ва $bc=16$ бўлса $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)$ ни топинг.

A) $a-16$ B) $a+2$ C) $a-4$ Д) $a+6$ E) $a-6$.

18. $\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}\,\sqrt[3]{5+\sqrt{24}}\,\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ни ҳисобланг.

A) 1 B) 2 C) 0 Д) -1 E) -2.

19. $\left(\dfrac{x^{1,5}+y^{-1,5}}{x^{0,5}+y^{-0,5}}-x^{0,5}y^{-0,5}\right)\cdot\left[\left(x-y^{-1}\right)+\dfrac{2y^{-0,5}}{x^{0,5}+y^{-0,5}}\right]^{-1}$ ни соддалаштиринг.

A) $\sqrt{xy}$ B) $\sqrt{x}$ C) $\sqrt{y}$ Д) $\dfrac{1}{xy}$ E) 1.

20. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ ни ҳисобланг.

A) 2 B) $2-\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$ Д) $-\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}-1$.

II БОБНИ МУСТАҲКАМЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

1. Кўпайтмани даража шаклида ёзинг:

а) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$; б) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$; в) $x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$;

г) $(-3b)(-3b)(-3b)(-3b)(-3b)$; д) $\underbrace{3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3}_{21\ \text{марта}}\cdot\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{10\ \text{марта}}$;

е) $\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot(x-y)(x-y)(x-y)$.

2. Ҳисобланг:

а) $2^3;3^3;0^3;\left(\frac{5}{2}\right)^3;1^7$; б) $(-2)^5;(-4)^3;(-5)^4;\left(-\frac{1}{2}\right)^5;\left(-\frac{3}{2}\right)^4$;

в) $(-5)^2\left(-\frac{3}{5}\right)$; $(-3)^3\left(-\frac{2}{3}\right)$; $-(-3)^2 2^3$; $-(-3)^2(-2)^3$.

3. Ҳисобланг:

а) $\frac{7^5\cdot(7^4)^3}{7^{14}}$; б) $\frac{3^6\cdot 3^3}{3^5\cdot 3\cdot 3}$; в) $\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot\frac{5^3}{3^2}$; г) $\left(\frac{35}{48}\right)^2\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^3\cdot\left(1\frac{3}{5}\right)^2$;

д) $\frac{5\cdot 2^{32}-4\cdot 2^{30}}{4^{16}}$; е) $\frac{5(3\cdot 7^{15}-19\cdot 7^{14})}{7^{16}+3\cdot 7^{15}}$; ж) $\left(\frac{7^4}{15^2}\right)^3\left(\frac{5}{7}\right)^6\left(\frac{3}{7}\right)^5$

4. Амалларни бажаринг:

а) $a^2b^3\left(-\frac{21b}{4}\right)\cdot\frac{8m^2ab}{7}\cdot\left(-1\frac{1}{3}mb^2\right)$; б) $0{,}2xy^2\left(2\frac{1}{2}yax^2\right)\left(-\frac{3y^2ax^3}{4}\right)$;

в) $\left(-4\frac{3}{4}mn^2\right)\left(-\frac{17}{38}amn\right)\left(-\frac{a^2n}{34}\right)\left(-\frac{16m}{5}\right)$.

5. Соддалаштиринг:

а) $(a-2b)^3-(a+2b)^3$; б) $\left(\frac{4}{5}x-\frac{3}{7}y\right)(x+2y)-(x-2y)\left(\frac{3y}{7}-\frac{4x}{5}\right)$;

в) $(a+1)(a+2)(a^2+4)(a-1)(a^2+1)(a-2)$;

г) $(a-3b)^3-(2a-3b)\left[3ab+(a-3b)^2\right]$;

д) $(m-n)(m^2+mn+n^2)-(m+n)(m^2-mn+n^2)$;

е) $(a-b)(a+b)-2a(a-b)-(a-b)^2$;

6. Ҳисобланг:

а) $62\cdot 58$; б) $47^2+2\cdot 47\cdot 13+13^2$; в) $\frac{59^3-41^3}{18}+59\cdot 41$;

г) $\frac{38^2-17^2}{49^2-19^2}$;

д) $507\cdot493-505\cdot495$; е) $202^2-54^2+256\cdot352$

7. P(x) кўпҳадни Q(x) кўпҳадга бўлинг:

а) $P_3(x)=2x^3+7x^2+7x+2$ $\quad Q_1(x)=x+2$;

б) $P_4(x)=3x^4-8x^3+2x^2+5x-2$ $\quad Q_1(x)=x-2$;

в) $P_5(x)=3x^5-28x^4+65x^3+16x^2-80x$ $\quad Q_2(x)=3x^2-x-4$;

г) $P_7(x)=2x^7+3x^6-3x-2$ $\quad Q_1(x)=x-1$;

8. P(x) кўпҳадни Q(x) кўпҳадга бўлгандаги қолдиқни топинг:

а) $P_4(x)=x^4-x^3-10x^2+4x+24$ $\quad Q_1(x)=x-1$;

б) $P_5(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+1$ $\quad Q_2(x)=x^2-x-2$;

в) $P_6(x)=x^6-3x^5-4x^3+x-1$ $\quad Q_2(x)=x^2+x+1$;

г) $P_7(x)=x^7-x^6-3x^3+x+1$ $\quad Q_2(x)=x^2-x+1$;

9. P(x) кўпҳадни Q(x) кўпҳадга бўлгандаги қолдиқни Безу теоремаси ёрдамида топинг:

а) $P_3(x)=6x^3-41x^2-76x+160$ $\quad Q_1(x)=2x+5$;

б) $P_4(x)=x^4-8x^3+15x^2+4x-20$ $\quad Q_2(x)=(x-2)(x+1)$;

в) $P_4(x)=x^4-10x^2+9$ $\quad Q_1(x)=x+2$;

г) $P_6(x)=x^5+3x^4-20x^3-48x^2+64x$ $\quad Q_1(x)=x+5$;

10. Кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) Умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чақириш ёки группалаш усули ёрдамида:

а) $5x^3-5x$; б) x^2-x^3+4-4x; в) $x^5+5x^3-6x^2$; г) $3x^6+12x^4-96x^2$;

д) $5a^2-5ax-7a+7x$; е) $xy^2-by^2-ax+ab+y^2-a$;

ж) $ax-2x+2y-ay+2-a$; з) $ax^2-ay-bx^2+cy+by-cx^2$.

2) Қисқа кўпайтириш формулалари ёрдамида:

а) $\frac{1}{9}x^2-\frac{16}{25}y^2$; б) $16-8a^2b^2+a^4b^4$; в) $-64a^3-8a^2b-\frac{1}{4}ab^2$

г) $16y^2-(3-4y)^2$; д) $(4c-x)^2-(2c+3x)^2$; е) $49-2ax-a^2-x^2$;

ж) $a^3-b^3+5a^2b-5ab^2$; з) $a^4-ab^3-a^3b-b^4$.

3) Бир неча усуллардан фойдаланиб:

а) $4a^2b+32a^5b$; б) $81a^2+6bc-9b^2-c^2$; в) p^3-2p^2+2p-1;

г) x^3-3x^2-3x+1; д) x^6+27; е) x^4-2x^3+2x-1; ж) x^4+3x^2+2;

з) x^8+x^4+1 .

11. Ҳисобланг:

а) $\dfrac{85^2-17^2}{85^2+2\cdot85\cdot17+17^2}$; б) $\dfrac{17{,}98^2-17{,}98\cdot32{,}02+32{,}02^2}{17{,}98^3+32{,}02^3}$;

в) $125\cdot48-31\cdot82-31\cdot43+125\cdot83$; г) $3\frac{1}{3}\cdot4\frac{1}{5}+4{,}2\frac{2}{3}+3\frac{1}{3}\cdot2\frac{4}{5}+2{,}8\frac{2}{3}$;

д) $73{,}4^2+73{,}4\cdot 17{,}2-90{,}6\cdot 63{,}4$;

е) $1{,}25\cdot 14{,}9+0{,}75\cdot 1{,}1+14{,}9\cdot 0{,}75+1{,}1\cdot 1{,}25$.

12. Алгебраик касрларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $\frac{a^3-1}{a^2-1}\cdot\frac{b}{a}$; б) $\frac{ab}{c-d}:\frac{c+d}{a}$; в) $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+c}$; г) $\frac{x+2}{x^3+x^2+x+1}-\frac{1}{x+1}$.

13. Алгебраик касрнинг сон қийматини топинг:

а) $\frac{a-b}{a+2b}$, бунда $a=16$, $b=-3$; б) $\frac{2a-3x}{a^2}$, бунда $a=0{,}5$, $x=-0{,}2$

в) $\frac{y+3}{y}-\frac{y}{y-3}$, бунда $y=1{,}5$; г) $\frac{(a+b)^2-1}{a^2+1}$, бунда $a=-3$, $b=-1$.

14. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{x^2-y^2}{2xy}\cdot\frac{2x}{x+y}$; б) $\frac{y^2-16}{10xy}\cdot\frac{5y}{3y+12}$; в) $\frac{a^2-3a}{a^2-25}:\frac{a^2-9}{a^2+5a}$;

г) $\frac{a^2+ax+x^2}{x-1}:\frac{a^2-x^2}{x^2-1}$; д) $\frac{4c^3d^2}{9a^3x^3}\cdot\frac{3a^2x}{2cd^2}:\frac{2cd}{3a^2x^2}$;

е) $\frac{x^2+ax-3x-3a}{x^2-ax-3x+3a}\cdot\frac{x^2+4x-ax-4a}{x^2+4x+ax+4a}$; ж) $\frac{m^2+m-mn-n}{m^2+m+mn+n}:\frac{m^2-m-mn+n}{m^2-m+mn-n}$;

з) $\frac{x^2-bx+ax-ab}{x^2+bx-ax-ab}:\frac{x^2+bx+ax+ab}{x^2-bx-ax+ab}$.

15. Амалларни бажаринг:

а) $\frac{5}{y-3}+\frac{1}{y+3}-\frac{4y-18}{y^2-9}$; б) $\frac{2b^2+10b}{3by+15y}+\frac{b^2-3b}{by-3y}-\frac{2b}{3y}$;

в) $\frac{2y-1}{y^2-2y+4}+\frac{7}{y+2}-\frac{9y^2-11y+26}{y^3+8}$;

г) $\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{2}{x^2-y^2}+\frac{1}{(x-y)^2}-\frac{4x^2}{(x^2-y^2)^2}$.

16. Ифодани соддалаштиринг қийматини топинг:

а) $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$, бунда $x=2$, $y=1$;

б) $\left(\frac{x+y}{x}-\frac{2x}{x-y}\right)\cdot\frac{x-y}{x^2+y^2}$, бунда $x=0{,}25$, $y=-32$;

в) $\left(\frac{m-n}{m+n}-\frac{m^3-n^3}{m^3+n^3}\right)\left(\frac{m-n}{m+n}+\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right)$, бунда $m=0{,}1; n=0{,}9$;

г) $\left(\dfrac{1+n}{n^2-mn}-\dfrac{1-m}{m^2-mn}\right):\dfrac{m+n}{m^2n-n^2m}+\dfrac{m}{m-n}$, бу ерда $m=1{,}1; n=0{,}1$.

17. Ифодани аниқланиш соҳасида соддалаштиринг:

а) $\left(\dfrac{a}{b^2-ab}+\dfrac{b}{a^2-ab}\right)\cdot\dfrac{ab}{a-b}$; б) $\left(\dfrac{x}{xy-y^2}-\dfrac{y}{x^2-xy}\right):\dfrac{x^2-y^2}{8xy}$;

в) $\dfrac{a^2-25}{a+3}\cdot\dfrac{1}{a^2+5a}-\dfrac{a+5}{a^2-3a}$; г) $\dfrac{1-2x}{2x+1}+\dfrac{x^2+3x}{4x^2-1}:\dfrac{x+3}{4x+2}$.

18. Соддалаштиринг:

1) $\left(\dfrac{3a^2}{2b}\right)^2\cdot\dfrac{16b^3}{21a^4}$; 2) $\dfrac{3a^3}{7b}:\dfrac{9a^4}{21b}$; 3) $\dfrac{9cx^3}{16ab}\cdot\dfrac{2ab^2}{cxy}\cdot\dfrac{4by^2}{3ax^2}$;

4) $\dfrac{14a^4b^2}{5xy}\cdot\dfrac{10x^2y^2}{21a^2b^3}\cdot\dfrac{3b}{4a^2xy^2}$; 5) $\dfrac{5x^2-5y^2}{x^2+y^2}:\dfrac{10y-10x}{3x^2+3y^2}\cdot\dfrac{2}{x+y}$;

6) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\dfrac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}:(a+b)$;

7) $\dfrac{m^2+m(a+b)+ab}{m^2-(a-c)m-ac}:\dfrac{m^2-a^2}{m^2-c^2}\cdot\dfrac{m-a}{m+a}$;

8) $\dfrac{m+a}{m-b}\cdot\dfrac{ac+m^2-am-mc}{mb+mc+bc+m^2}:\dfrac{a^2-m^2}{b^2-m^2}$;

9) $\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}-2\right):\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right):\left(1-\dfrac{b}{a}\right)$;

10) $\left(1+\dfrac{a+b}{a-b}\right)\cdot\left(2-\dfrac{2a}{a+b}\right):\dfrac{ab}{a-b}$;

11) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right):\dfrac{xy}{x^2-y^2}$;

12) $\left(\dfrac{2-m}{m+2}-\dfrac{m+2}{m-2}\right):\left(\dfrac{m+2}{2-m}+\dfrac{m-2}{m+2}\right)$;

13) $\left[\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2\right)\right]:\left[\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\cdot\dfrac{x}{x-y}\right]$;

14) $\left(\dfrac{1}{c+b}+\dfrac{1}{a}\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right)\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$;

15) $\left(\dfrac{a+1}{2(a-1)}+\dfrac{6}{2a^2-2}-\dfrac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\dfrac{4a^2-4}{3}$;

16) $\left(\dfrac{b}{a^2+ab}+\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{a}{b^2+ab}\right):\dfrac{a^2-b^2}{4ab}$;

17) $\dfrac{4c^2}{(c-2)^4}\cdot\left(\dfrac{1}{(c+2)^2}+\dfrac{1}{(c-2)^2}+\dfrac{2}{c^2-4}\right)$;

18) $\dfrac{2x}{b+x}+\left(\dfrac{2y}{(x-b)^2}-\dfrac{2y}{x^2-b^2}\right):\dfrac{y}{(x-b)^2}$;

19) $\left(\dfrac{a}{\dfrac{a}{2}+1}+\dfrac{\dfrac{2}{3}a}{2-a}+\dfrac{2b}{\dfrac{1}{4}a^2-1}\right):\dfrac{\dfrac{1}{2}a-2}{\dfrac{1}{2}a-1}$;

20) $\left(\dfrac{1}{\dfrac{x}{2}+y}-\dfrac{2y}{\dfrac{1}{4}x^2+xy+y^2}\right):\left(\dfrac{0{,}5x}{0{,}25x^2-y^2}+\dfrac{1}{2y-x}\right)+2.$

19. Касрни қисқартиринг.

а) $\dfrac{x^3-1}{x^4+x^2+1}$; б) $\dfrac{x^6+x^4+x^2+1}{x^3+x^2+x+1}$; в) $\dfrac{(x+2)^7-x^7-128}{(x+2)^5-x^5-32}$; г) $\dfrac{x^8+x^4+1}{x^2+x+1}$;

д) $\dfrac{ax-2x-4a+8}{3a-6-ax+2x}$; е) $\dfrac{ax+bx-ay-by}{bx-by}$.

20. Ҳисобланг:

а) $125^{-1}\cdot 25^2$; б) $(6^2)^2\cdot 6^{-14}$; в) $\dfrac{2^{-21}}{4^{-5}\cdot 4^{-6}}$; г) $\dfrac{5^{-5}\cdot 25^{10}}{125^3}$;

д) $(2^3)^5\cdot(2^{-5})^3\cdot 4^{-2}$, е) $(3^{-3})^2\cdot 9^4\cdot(3^{-3})^2$,

ж) $25\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-2}\cdot\left((-2)^3\right)^{-1}$; з) $(5^{-5})^{-1}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\cdot 10^{-5}\cdot 20^0$.

21. a $(a\neq 0)$ нинг даражаси кўринишида ифодаланг :

а) $(a^3)^{-2}$, $(a^{-1}\cdot a^{-2})^{-3}$, $\left((a^2)^{-3}\right)^2$;

б) $(a^{-1}\cdot a^{-2})^{-1}$, $\left((a^2)^{-1}\right)^{-2}$, $\left((a^{-2})^{-1}\right)^{-1}:(a:a^{-1})^2$;

в) $\left(a\cdot(a^3\cdot a^{-2})^0\cdot a^{-4}\right)^2$, $(a^2:a^3)^2\cdot(a^3\cdot a^4)^{-2}$

г) $((a^2\cdot a^3)^3\cdot a):a^{12}\cdot a^4)$, $(a^2\cdot a^4):a^{-3}\cdot(a:(a^2\cdot a^3)^4)^{-1}$.

22. Ҳисобланг.

а) $2^{-2}+((-20)^7)^{-7}:((-20)^{-6})^8-20^0$;

б) $-17^{-2}+(-17^{-4})^{-6}:((-17)^{-13})^{-2}+15^0\cdot 17$;

в) $\left(-\dfrac{27}{10}\right)^{-1}+(0{,}3)^{-3}+\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-1}+(-0{,}5)^{-2}\cdot\dfrac{3}{4}+(-1)^{-8}\cdot 6$;

г) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}-\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-1}+\left(\dfrac{6}{7}\right)^0\cdot\dfrac{1}{8}-0{,}25^{-2}\cdot 16-\left(\dfrac{8}{3}\right)^{-1}$;

д) $\left(-2\dfrac{1}{2}\right)^3\cdot(0{,}25)^2\left((-5)^{-3}\right)^2\cdot\left(10^{-2}\right)^{-2}$;

е) $\left((3^3\cdot 729^{-1})^3\cdot 2187^5\cdot 243^{-10}\right)^2:6561^{-6}-81^4\cdot 9^{-7}$.

23. Ифодаларни соддалаштиринг:

а) $\left(0{,}2x^{-3}y^{-2}\right)^{3}\cdot\left(\dfrac{x^{-2}}{2y^{3}}\right)^{-2}$; б) $\dfrac{\left(x^{2}y^{3}\right)^{-8}}{\left(x^{4}y^{6}\right)^{2}}\cdot\dfrac{\left(x^{-4}y^{-6}\right)^{-6}}{\left(x^{-1}y^{-2}\right)^{3}}:\dfrac{x^{3}}{y^{-6}}$;

в) $\left(\dfrac{c^{4}}{6x^{2}y^{-5}}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}c^{2}x^{3}y^{-2}\right)^{4}$; г) $\left(\dfrac{1}{6}x^{-1}y^{2}\right)^{-2}\left(\dfrac{x^{2}}{y^{2}}\right)^{-2}\left(\dfrac{-2x^{2}}{y^{3}}\right)^{-4}$;

д) $\left(a^{-3}+b^{-3}\right)\left(a^{-2}-b^{-2}\right)^{-1}\cdot\left(a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2}\right)^{-1}\cdot\left(b^{-1}-a^{-1}\right)$;

е) $\left(a^{-2}b-ab^{-2}\right)\left(a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2}\right)^{-1}+\left(a^{-1}\right)^{-1}$.

24. Ҳисобланг:

а) $0{,}5\sqrt{121}+3\sqrt{0{,}81}+2\sqrt{6}\left(-\sqrt{6}\right)+\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{20}\right)^{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{(-10)^{2}}$;

б) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}-\dfrac{1}{2}\sqrt{75\cdot48}+\sqrt{313^{2}-312^{2}}-\left(4\sqrt{0{,}5}\right)^{2}+\sqrt{(-9)^{2}}-\left(-\sqrt{2}\right)^{2}$;

в) $\left[5-\left(3\sqrt{\dfrac{4}{9}}+\sqrt{0{,}25}\right)\right]:\left(\sqrt{0{,}5}\right)^{2}-\left(0{,}03\cdot\sqrt{10000}+\dfrac{\sqrt{0{,}16}}{2\sqrt{0{,}04}}\right)\cdot\sqrt{\dfrac{1}{4}}$;

г) $\left(\sqrt{225}+3\sqrt{121}\right):\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{0{,}09}+0{,}78\sqrt{100}\right)-\sqrt{(-3)^{2}}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$;

д) $\left(-6\sqrt{\dfrac{1}{4}}+\dfrac{\sqrt{324}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{0{,}16}}{0{,}2}\right):\sqrt{25}+\sqrt{\dfrac{64}{81}}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}\cdot\sqrt{\dfrac{9}{16}}$;

е) $\left[5:\sqrt{0{,}25}\cdot\sqrt{0{,}81}+\left(\sqrt{11}\right)^{2}\right]:\left(-\left(\sqrt{5}\right)^{-1}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{4}}\right)^{-2}-0{,}1\left(\sqrt{120}\right)^{2}$.

25. Амалларни бажаринг

а) $\sqrt{144}\cdot\sqrt{\dfrac{49}{64}}\cdot\sqrt{0{,}01}$, $\dfrac{\sqrt{180}:\sqrt{5}}{\sqrt{200}:\sqrt{8}}$;

б) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{12}:\dfrac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$, $\sqrt[5]{108}\cdot\sqrt[5]{30}\cdot\sqrt[5]{24}$;

в) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$, $\left(\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[6]{6}\right)^{2}$;

г) $\sqrt{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}}}}$, $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}$;

д) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$, $\sqrt[5]{4\sqrt[4]{4\sqrt[3]{1024}}}$, $\sqrt[3]{7\sqrt[4]{7\sqrt{7}}}$;

е) $\left(\sqrt[5]{7}\right)^{10}\cdot\left(\sqrt[5]{3}\right)^{7}\cdot\sqrt[5]{27}$, $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{3}:\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{5}\right)^{8}$;

ж) $\sqrt{2^{6}\cdot3^{2}}$, $\sqrt{7^{2}\cdot2^{8}}$, $\sqrt[3]{3^{6}\cdot2^{12}}$, $\sqrt[3]{3^{4}\cdot5^{8}}$;

з) $\dfrac{1}{3}\sqrt{18}$, $0{,}7\sqrt{300}$, $0{,}125\sqrt{192}$, $-\dfrac{1}{5}\sqrt{275}$.

26. Соддалаштиринг:

а) $4\sqrt{2}-4\sqrt{8}+8\sqrt{32}+\sqrt{128}$; б) $3\sqrt{3}+11\sqrt{27}+8\sqrt{243}-2\sqrt{2187}$; в) $(\sqrt{12}+\sqrt{75}+\sqrt{27}):\sqrt{15}$; г) $(3\sqrt{8}+\frac{1}{3}\sqrt{18}-\frac{1}{8}\sqrt{32})-4\sqrt{8}$;

д) $(\sqrt{12}-2\sqrt{75})\sqrt{3}+(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})\sqrt{5}+\sqrt{60}$;

е) $(\sqrt{28}-2\sqrt{3}+\sqrt{7})\sqrt{7}+\sqrt{84}-(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)$;

ж) $(2\sqrt{5}+\sqrt{12})(\sqrt{12}-\sqrt{5})-\sqrt{135}+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{45}$;

з) $(2\sqrt{2}-\sqrt{5}+3\sqrt{2})(\sqrt{18}-\sqrt{20}+2\sqrt{2}):(\sqrt{5})^2+90$.

27. Қисқа кўпайтириш формулаларидан фойдаланиб амалларни бажаринг.

а) $(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})$, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, $(\sqrt{13}-\sqrt{7})(\sqrt{13}+\sqrt{7})$;

б) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, $(\sqrt{2}+3)^2$, $(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})^2$, $(\sqrt[3]{5}+\sqrt{2})^2$;

в) $(3\sqrt{5}+\sqrt{15})^2-10\sqrt{27}$, $(\sqrt{14}-3\sqrt{2})^2+6\sqrt{28}$;

г) $\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}$; $\sqrt[3]{8-\sqrt{37}}\cdot\sqrt[3]{8+\sqrt{37}}$; $\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$;
$\sqrt[6]{17+12\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}-3}$; $\sqrt[6]{10+6\sqrt{3}}\sqrt{\sqrt{3}-1}$;

д) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$, $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2$

е) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$, $\sqrt{8\sqrt{3}+19}$, $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$, $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$

ж) $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$, $\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})$, $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$, $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$

28. Касрнинг махражидаги иррационалликдан қутқаринг.

а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$, $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a}}$, $\frac{a}{\sqrt{a+b}}$, $\frac{1}{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}$;

б) $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$, $\frac{4}{3-\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{12}}$, $\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}$, $\frac{x}{x+\sqrt{y}}$, $\frac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

в) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, $\frac{3+\sqrt{6}+2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $\frac{7-\sqrt{14}+2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$;

г) $\frac{4}{2-3\sqrt[3]{2}}$, $\frac{3}{\sqrt[3]{2}+3}$, $\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt[4]{3}}$, $\frac{7}{3\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}}$.

29. Касрни қисқартиринг:

а) $\frac{b^2-5}{b-\sqrt{5}}$, $\frac{m+\sqrt{6}}{6-m^2}$, $\frac{2-\sqrt{x}}{x-4}$, $\frac{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{4x-9y}$;

б) $\frac{\sqrt{7}-7}{\sqrt{7}-1}$, $\frac{3+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+x}$, $\frac{\sqrt{70}-\sqrt{30}}{\sqrt{35}-\sqrt{15}}$, $\frac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$;

в) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}$, $\frac{(\sqrt{10}-1)^2-3}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-1}$, $\frac{5\sqrt{7}-7\sqrt{5}+\sqrt{35}}{5-\sqrt{35}+\sqrt{5}}$, $\frac{(\sqrt{5}+1)^2-2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}$;

г) $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, $\frac{a\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}+1}$, $\frac{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{5+\sqrt{6}}$, $\frac{8-\sqrt{15}}{5\sqrt{5}+3\sqrt{3}}$;

30. Соддалаштиринг:

1) $2\sqrt{5\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{99}-2\sqrt{2\frac{3}{4}}$, $\quad 4\sqrt{3\frac{1}{2}}-0,5\sqrt{56}-3\sqrt{1\frac{5}{9}}$;

2) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}+\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{4\frac{1}{2}}-\sqrt{\sqrt{256}}$, $\quad \frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[6]{27^2}-\sqrt{\sqrt[3]{64}}$;

3) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}}+\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}\right)^3+\sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}}-\left(\sqrt[5]{xy^2}\right)^5$;

4) $\left(\left(\sqrt[5]{a\sqrt[5]{a}}\right)^5-\sqrt[5]{a}\right):\sqrt[10]{a^2}-\sqrt{(a-1)^2}$;

5) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$;

6) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$;

7) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)$;

8) $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$;

9) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}\left(b^{\frac{4}{5}}-\sqrt[5]{b^{-1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{b}-b^{-\frac{2}{3}}\right)}$;

10) $\dfrac{a^{-\frac{4}{3}}b^{-2}-a^{-2}b^{-\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}$;

11) $\left(\dfrac{1}{x+x\sqrt{y}}+\dfrac{1}{x-x\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{y-1}{2}$;

12) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\dfrac{2\sqrt{ab}}{(a-b)^2}$;

13) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}-\sqrt{a}$;

14) $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{a}}-\dfrac{xa^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-\sqrt{x}}+\dfrac{2x^2-4ax}{x-a}$;

15) $\left[\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right]\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$;

16) $\dfrac{1}{x}\cdot\left\{\dfrac{x^{1,5}+y^{-1,5}}{x^{0,5}+y^{-0,5}}-x^{0,5}y^{-\frac{1}{2}}\right\}\left\{x-y^{-1}+\dfrac{2y^{-0,5}}{x^{0,5}+y^{-\frac{1}{2}}}\right\}^{-1}$;

17) $\dfrac{ab^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$;

18) $\dfrac{y-1}{y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}\cdot\left\{\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{y-1}+\dfrac{1}{y^{\frac{1}{3}}-1}\right\}$;

19) $\left[\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}\right]:\left\{1+\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}\right\}$;

20) $1-\dfrac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:\dfrac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}$;

21) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;

22) $\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; 23) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$;

24) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{15}{3-\sqrt{3}}\right):(\sqrt{3}+5)$; 25) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$.

31. Сонларни таққосланг,

а) $2\sqrt{5}$ ва $\sqrt{19}$, $3\sqrt[3]{3}$ ва $\sqrt[3]{81}$, б) $\sqrt[8]{10}$ ва $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{24}$ ва $\sqrt[3]{5}$;

в) $\sqrt[4]{6+\sqrt{20}}$ ва $\sqrt{1+\sqrt{5}}$, $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$ ва $\sqrt{2}+1$;

г) $\dfrac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}+\dfrac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$ ва $\sqrt{10}$; д) $\sqrt{11}-\sqrt{13}$ ва $\sqrt{12}-\sqrt{14}$;

е) $5\sqrt{\dfrac{7}{2}}$, $\sqrt{17}$ ва $\dfrac{1}{2}\sqrt{62}$, $12\sqrt{0{,}5}$, $\sqrt{89}$ ва $\dfrac{3}{4}\sqrt{160}$.

32. Соддалаштиринг ва қийматини топинг:

а) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}$, бунда $x=0{,}75$, $y=0{,}5$;

б) $\left(\dfrac{1+b\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)\cdot\dfrac{1+\sqrt{b}}{1-b}$, бунда $b=0{,}81$;

в) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$, бунда $a=4$;

г) $\dfrac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\dfrac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right)$, бунда $a=2$, $x=8$.

III БОБ. ТЕНГЛАМАЛАР.

1-§. Тенглик, айният ва тенглама.

1–*Таъриф*. Тенглик (=)белгиси билан бирлаштирилган иккита алгебраик ифода тенглик деб аталади, яъни A=B , бу ерда A,B алгебраик ифодалар.

Масалан: $2\cdot5=7+3$. $35+21=21+35$, $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ сонли тенгламалар; $a+b=b+a$, $abc=a(bc)$, $2(c+1)=5\cdot2{,}5c$, $\frac{x+1}{x-1}=5+\frac{1}{x-1}$ ўзгарувчилар қатнашган тенгликлардир.

Тенгликнинг хоссалари:

1) Агар A=B бўлиб, C ихтиёрий сон бўлса, у ҳолда A+C=B+C, A-C=B-C бўлади; масалан, $5=5 \Rightarrow 5+2=5+2$, $5-2=5-2$;
2) Агар A=B бўлиб, $C\neq0$ бўлса, у ҳолда $A\cdot C=B\cdot C$ ва A:C=A:C бўлади.Масалан $27=27\Rightarrow 27\cdot3=27\cdot3$, $27:3=27:3$.

2–*Таъриф*. Ўзгарувчиларнинг исталган қийматида икки ифода мос қийматлари бир-бирига тенг бўлса, бундай икки ифода айнан тенг ифодалар дейилади , яъни $A(x,y, z,...,t)\equiv B(x,y, z,...,t)$, бу ерда $(\equiv)$айнан тенглик белгиси .

Масалан, 1)2(x+ y)ва 2x+2y ифодалар айнан тенг ифодалардир, чунки тақсимот хоссасига кўра, ўзгарувчиларнинг исталган қийматларида бу ифодаларнинг мос қийматлари ўзаро тенгдир, яъни

а) x=1, y=2 да $2(x+y)=2(1+2)=2\cdot3=6$, $2x+2y=2\cdot1+2\cdot2=2+4=6$;

б) x=5, y=4 да $2(x+y)=2(5+4)=2\cdot9=18$, $2x+2y=2\cdot5+2\cdot4=10+8=18$; ва ҳаказо.

3) 2x+y ва 2xy ифодалар айнан тенг эмас , чунки x ва y нинг шундай қийматларини кўрсатиш мумкинки, бу ифодаларнинг мос қийматлари тенг бўлмайди, яъни

а) x=1, y=2 да $2x+y=2\cdot1+2=4$, $2xy=2\cdot1\cdot2=4$;

б) x=3, y=5 да $2x+y=2\cdot3+5=11$, $2xy=2\cdot3\cdot5=30$; ва ҳаказо.

3–Таъриф. Тенгликка кирган ўзгарувчиларнинг исталган қийматларида (аниқланиш соҳасида) ҳам тўғри бўлган тенглик айният дейилади.

Масалан ,

1) $2(x+1)=2x+2$ тенглик айниятдир , чунки у x нинг барча қийматларида ($x\in R$) тўғридир .

2) $\frac{3a}{a^2}=\frac{3}{a}$ ёки $\frac{3a}{a^2}-\frac{3}{a}=0$ тенгламалар ҳам айниятдир, чунки $a\in(-\infty;0)\cup(0,+\infty)$ да тенглик ўринли бўлади.

3) $\frac{(b-1)}{b-1}-b+1=0$ ифода $b\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ да айниятдир.

4–*Таъриф*. Тенгликка кирган ўзгарувчиларнинг айрим қийматларида тўғри бўлган тенглик тенглама дейилади , яъни $A(x,y,z, \ldots,t)=B(x,y,z, \ldots,t)$.

Шуни айтиб ўтиш керакки, тенгламада қатнашган ўзгарувчилар масала шартига кўра тенг хуқуқли бўлмаслиги мумкин. Уларнинг баъзилари ўзлари қабул қилиши мумкин бўлган қийматларни қабул қилади. Вуларни тенгламанинг маълум қийматлари ёки коэффициентлари дейилади ва лотин алфавитининг бошидаги кичик ҳарфлари : a,b,c, ... билан белгиланади. Қийматлари изланаётган бошқа ўзгарувчилар номаълумлар дейилади ва лотин алфавитининг охиридаги кичик ҳарфлари : x,y,z,... лар билан белгиланилади.

Тенглама таркибида қатнашган номаълумларнинг сонига қараб тенглама бир номаълумли , икки номаълумли ва ҳоказолар бўлиши мумкин.

Масалан, 1) $4x-15= x+15$ тенглик бир номаълумли (ўзгарувчили) тенгламадир, чунки у фақат $x=10$ да тўғри ва x нинг бошқа қийматларида тўғри эмас.

2) $5ax+5=4ax-3$, бу ерда a тенгламанинг коэффициенти бўлиб, $a\in(-\infty;0)\cup(0,+\infty)$ қабул қилади; x-номаълумдир. Бу тенглик ҳам бир номаълумли тенглама бўлиб, $x=-\frac{8}{a}$ да тўғридир.

3) $x+2y=3$ -- икки номаълумли тенглама.

Бу тенглик а)$x=0$, $y=\frac{3}{2}$; б) $x=3$, $y=0$; в) $x=1$, $y=1$ жуфтликларда тўғридир.

4) $x^2+y^2=z^2$ -- уч номаълумли тенгламадир.

Бу тенглик а) $x=0$, $y=1$, $z=1$;
б) $x=0$, $y=1$, $z=-1$; в) $x=3$. $y=4$, $z=5$; ва бошқа қийматларда тўғридир.

5–*Таъриф* . Тенгламада қатнашган ўзгарувчиларнинг энг юқори даражаси берилган тенгламанинг даражаси дейилади

Масалан, а) $5x-3=7x$; $5x+7y=3$; $3x-7y-8z=6t$ - биринчи даражали тенгламалардир;

б) $x^2+5x+3=0$; $x^2+y^2=25$; $x^2+y^2=z^2$ – иккинчи даражали тенгламалардир;

в) $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots +a_0=0$ – n-чи даражали тенгламадир, бу ерда $a_n \neq 0$, a_0, a_1 , ... , a_{n-1} хақиқий сонлар.

2–§. Биринчи даражали бир номаълумли тенгламалар.

Ушбу $A(x)=B(x)$ кўринишдаги тенглама биринчи даражали бир номаълумли тенглама дейилади.

Масалан: $3x-9=0$; $2-10y = 22$; $3(x-1)=5x-7$ тенгламалар биринчи даражали бир номаълумли тенгламалардир .

1-Таъриф . Тенгламанинг илдизи деб ,номаълумнинг шу тенгламани тўғри тенгликка айлантирувчи қийматига айтилади.

Тенгламанинг илдизи (ечими) битта , чексиз кўп ёки умуман илдизга эга эмас бўлиши мумкин .

Масалан: а) $5x-7 = 6x-9$ тенглама $x=2$ илдизга эга , чунки $5\cdot2-7=6\cdot2-9 \Rightarrow 3=3$ тўғри тенглик ҳосил бўлади,

б) $6x-12 = 6(x-2)$ тенглама чексиз кўп илдизга эга , чунки х нинг ихтиёрий қийматида тўғри тенглик ҳосил бўлади.

в) $7x-4=7(x-3)$ тенглама ечимга эга эмас , чунки тенглама х нинг ихтиёрий қийматида тўғри тенгликка айланмайди.

Шундай қилиб ,тенгламани ечиш унинг барча илдизларини топиш ёки илдиз йўқлигини исботлаш демакдир .

2-Таъриф. х нинг бир вақтда $A(x)$ ва $B(x)$ лар маънога эга бўладиган қийматлар тўплами берилган $A(x)=B(x)$. тенгламанинг аниқланиш соҳаси дейилади .

Масалан, а) $4x-3=2x-4$, бу ерда $A(x)= 4x-3$ $B(x)= 2x-4$ бўлиб , $A(x)$ нинг аниқланиш соҳаси : $D(A)=\{x:x\in R\}$; $B(x)$ нинг аниқланиш соҳаси : $D(B)=\{x:x\in R\}$ бўлади .Демак берилган тенгламанинг аниқланиш соҳаси : $D(A)\cap D(B)=\{x:x\in R\}$.

б) $\frac{10}{2x-8}=\frac{x-1}{2x+6}$, бу ерда , $A(x)=\frac{10}{2x-8}$, $B(x)=\frac{x-1}{2x+6}$,бўлиб $A(x)$ нинг аниқланиш соҳаси $D(A)=\{x:x\neq 4\}$; $B(x)$ нинг аниқланиш соҳаси: $D(B)=\{x:x\neq -3\}$ бўлади. Демак берилган тенгламанинг аниқланиш соҳаси: $D(A)\cap D(B)=\{x:x\in(-\infty;-3)\cup(-3;4)\cup(4;+\infty)\}$.

Тенгламани ечишда қуйидаги хоссалардан фойдаланамиз :

1-хосса. Тенгламанинг исталган ҳадининг ишорасини қарама - қаршисига ўзгартириб , тенгликни бир томонидан иккинчи томонига ўтқазиш мумкин , яъни
$A(x)+C(x)=B(x)-D(x) \Rightarrow A(x)+D(x)= B(x)- C(x)$.

2-хосса. Тенгламанинг иккала томонини нолга тенг бўлмаган бир хил сонга кўпайтириш ёки бўлиш мумкин , яъни $A(x)=B(x) \Rightarrow$ $a\cdot A(x)= a\cdot B(x)$, $A(x): a =B(x): a$, $a \neq 0$.

Хоссаларга оид мисоллар :

1) $3x=5$, $x=\frac{5}{3}$;

2) $\frac{3}{5}x=-6$, $x=-\frac{6\cdot5}{3}=-2\cdot5=-10$, $x=-10$;

3) $5x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{3\cdot5}=\frac{1}{15}$, $x=\frac{1}{15}$;

4) $-\frac{3}{7}x=\frac{5}{2}$, $x=-\frac{7\cdot5}{2\cdot3}=-\frac{35}{6}=-5\frac{5}{6}$, $x=-5\frac{5}{6}$;

5) $5x+17=2x+5$. $5x-2x=5-17$, $3x=-12$, $x=-4$;

б) $\frac{4x-3}{2}=\frac{5-2x}{3}+\frac{3x-4}{3}$, 3(4x-3)=2(5-2x)+2(3x-4) ,

12x-9=10-4x+6x-8 ,

12x+4x-6x=10-8+9 , 10x=11, x=1,1

3-Таъриф. Агар $A_1(x)=B_1(x)$ ва $A_2(x)=B_2(x)$ тенгламаларнинг ечимлари (илдизлари) тўплами устма-уст тушса ёки иккала тенглама ечимга эга бўлмаса ,у ҳолда берилган тенгламалар тенг кучли тенгламалар дейилади ва қуйидагича ёзилади :

$$A_1(x)=B_1(x) \Leftrightarrow A_2(x)=B_2(x) ,$$

бу ерда $\Leftrightarrow$ тенг кучлилик белгиси .

Масалан, а) x+1=0 ва (x+1)'=0 тенгламалар тенг кучли , чунки x=−1 ҳар иккала тенгламанинг ечимидир ;

б) 3x+7=3(x-1) $\Leftrightarrow$ 7x-7=7x+5; чунки бу тенгламалар илдизларга эга эмас ;

в) x(x+1)=0 ва x(x-1)=0 тенгламалар тенг кучли эмас , чунки бирининг ечими {-1;0} , иккинчи тенгламанинг ечими {0;1} га айнан тенг эмас .

г) $x(x-3)(x+5)(2x-\sqrt{5})=0$ тенглама ва жами ($x=0, x-3=0, x+5=0, 2x-\sqrt{5}=0$) тенгламалар тенг кучлидир , чунки биринчи тенглама ечими $\{-5;0;\frac{\sqrt{5}}{2};3\}$ иккинчи жами тенгламалар ечими $\{-5;0;\frac{\sqrt{5}}{2};3\}$ га айнан тенгдир .

Тенг кучли тенгламалар ҳақида хулосалар :

1) $A(x)=B(x) \Leftrightarrow A(x)-B(x)=0$;
2) $A(x)=B(x) \Leftrightarrow A(x)\pm\alpha= B(x)\pm\alpha$; бу ерда α-ихтиёрий сон ;
3) $A(x)=B(x) \Leftrightarrow \alpha\cdot A(x)= \alpha\cdot B(x)$ $\left(\frac{A(x)}{\alpha}=\frac{B(x)}{\alpha}\right)$, $\alpha\neq 0$ ихтиёрий сон ;
4) $A(x)\cdot B(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x)=0 \\ B(x)=0 \end{array}\right.$, (ёки A(x)=0 ёки B(x)=0);
5) $A^{2n+1}(x)=B^{2n+1}(x)$ $(n\in N)$ $\Leftrightarrow$ $A(x)=B(x)$;
6) $A^{2n}(x)=B^{2n}(x)$ $(n\in N)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x)=B(x) \\ A(x)=-B(x) \end{array}\right.$;
7) $A^n(x)= 0$ $(n\in N)$ $\Leftrightarrow$ $A(x)= 0$, бу ерда [- бирлашма белгиси.

Тенгламаларни турли алмаштиришлар ёрдамида ечилаётганда тенгламаниг илдизи йўқолиши ёки чет илдиз пайдо бўлиши мумкин .

Масалан: а) x(2x-3)=x тенгламадан 2x-3=1 тенгламага ўтганда x номаълумга қисқартирилиши туфайли x=0 илдиз йўқотилди; шунинг учун янги тенгламага ўтаётганда бундай йўқолиш рўй бермаслиги керак.

б) $\sqrt{3x-2}=\sqrt{2x-2}$ тенгламадан 3x-2=2x-2 тенгламага ўтилганда (тенгламанинг аниқланиш соҳаси $x\in(1,+\infty)$) берилган тенгламанинг x=0 чет илдизини ҳосил қиламиз. Бу илдизни тенгламага қўйиб текшириб кўриш мумкин, яъни $\sqrt{-2}=\sqrt{-2}$ маънога эга эмас. Демак, x=0 чет илдиз.

3–§. Чизиқли ва параметрга боғлиқ бир номаълумли тенгламалар.

1-Таъриф. Ушбу ax+b=0 кўринишдаги тенгламага бир номаълумли чизиқли тенглама дейилади, бу ерда $a\neq 0$, b- ихтиёрий сонар бўлиб, a- номаълум олдидаги коэффициент, b- озод ҳад дейилади.

Масалан. $3x+1=0$, $\frac{1}{3}x-5=0$, $\frac{6x}{7}-\frac{9}{8}=0$.

1) Агар $a\neq 0$ бўлса, у ҳолда $ax+b=0$ тенглама ягона $x=-\frac{b}{a}$ ечимга эга;

2) Агар $a=0$, $b\neq 0$ бўлса, у ҳолда $ax+b=0$ тенглама ечимга эга эмас, яъни ечимлар тўплами $\varnothing$(бўш) бўлади.

3) Агар $a=0$, $b=0$ бўлса, у ҳолда $ax+b=0$ тенглама чексиз кўп ечимга эга, яъни $x\in R$ бўлади.

Мисоллар: а) 3x=0, x=0. Демак жавоб: x=0.

б) $2(x-1)+1=3-(1-2x)$, $2x-2+1=3-1+2x$,

$2x-2x=2+1$ ёки $0\cdot x-3=0$, $0\cdot x=3$.

Бу тенглама ечимга эга эмас ($\varnothing$), чунки унинг чап томони x нинг ихтиёрий қийматида нолга тенг, демак у 3 га тенг эмас. Жавоб: $\varnothing$.

в) $2x+3-6(x-1)=4(1-x)+5$, $2x+3-6x+6=4-4x+5$, $2x-6x+4x=4+5-3-6$, $6x-6x=9-9$, $0=0$. Жавоб: $x\in R$.

2-Таъриф Ушбу $A(a,b,c,\dots,k;x)=B(a,b,c,\dots,k;x)$ кўринишдаги тенгламага параметрга боғлиқ бўлган бир номаълумли тенглама дейилади, бу ерда $a,b,c,\dots,k$- ўзгармас сонлар бўлиб тенгламанинг параметрлари дейилади, x- номаълум.

Масалан; $ax=a$; $ax=x-1$; $ax+bx=b+c+1$; $(a^2-1)x=a^2-3$.

Параметрга боғлиқ тенгламани ечиш учун параметрнинг қандай қийматларида тенгламани қаноатлантирувчи номаълумлар мавжудлигини кўрсатиш лозим

1-Мисол. $ax=a$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Агар $a\neq 0$ бўлса, у ҳолда $ax=a \Leftrightarrow x=1$.

Агар $a=0$ бўлса, у ҳолда $0\cdot x=0 \Leftrightarrow 0=0$, яъни $x\in R$.

2-Мисол. $(a+1)(a-1)x=(2a+3)(a-1)$ тенгламани ечинг.

Ечиш: $(a+1)(a-1)=0 \Leftrightarrow a=1$, $a=-1$;

Демак 1)Агар $a=1$ бўлса, у ҳолда 0=0 бўлиб, $x\in R$ бўлади.

2) Агар $a=-1$ бўлса, у ҳолда 0=-2 бўлиб. $x\in\varnothing$ бўлади.

3) Агар $a \neq \pm 1$ бўлса, у ҳолда берилган тенглама ягона $x = \frac{2a+3}{a+1}$ ечимга эга.

Жавоб: $x = \frac{2a+3}{a+1}$, $a \neq \pm 1$,

$x \in R$, $a=1$;

$x \in \varnothing$, $a=-1$.

3-Мисол. a нинг қандай қийматида $4+ax=x+3+a$ тенглама чексиз кўп ечимга эга бўлади.

<u>Ечиш</u>: $ax-x=3+a-4$, $(a-1)x=a-1$, $a-1=0$, $a=1$.

Демак 1) $a=1$ да $0 \cdot x=0 \Leftrightarrow 0=0$ бўлиб, $x \in R$ бўлади;

2) Агар $a \neq 1$ бўлса, у ҳолда $x=1$.

Жавоб: $a=1$.

4-Мисол. a нинг қандай қийматида $ax-4=3x$ тенгламанинг ечими 8 га тенг бўлади.

<u>Ечиш:</u> $ax-4=3x$, $ax-3x=4$, $(a-3)x=4$, $x=8$ ни ҳисобга олиб, $(a-3)\cdot 8=4$, $a-3=\frac{1}{2}$, $a=3+\frac{1}{2}$, $a=3\frac{1}{2}$.

Жавоб: 3,5.

4–§. Квадрат учҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш.

Ушбу $ax^2+bx+c (a \neq 0)$ кўринишдаги ифодага квадрат учҳад дейилади, бу ерда a, b, c ҳақиқий сонлар.

Квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратиш мумкин:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] =$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Ушбу b^2-4ac ифодага квадрат учҳаднинг дискриминанти дейилади ва D ҳарф билан белгиланади, яъни $D=b^2-4ac$.

1. Агар $D>0$ бўлса, у ҳолда квадрат учҳадни қуйидагича кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right] =$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = a\left(x-\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right) = a(x-x_1)(x-x_2),$$

бу ерда $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

2. Агар D=0 бўлса, у ҳолда квадрат учҳад қуйидагича кўпайтувчига ажралади:

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = a(x-x_1)^2,$$

бу ерда $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

3. Агар D<0 бўлса, у ҳолда квадрат учҳад чизиқли кўпайтувчиларга ажралмайди.

Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратишга оид мисоллар:

а) $2x^2-12x+18$, бу ерда $a=2$, $b=-12$, $c=18$ бўлиб,
$D=12^2-8\cdot 18=144-144=0$ тенг. У ҳолда $x_1=x_2=3$.
Демак, $2x^2-12x+18=2(x-3)^2$;
б) $3x^2-3x-6$, бу ерда $a=3$, $b=-3$, $c=-6$ бўлиб,
$D=(-3)^2-4\cdot 3(-6)=9+72=81>0$. У ҳолда
$x_1=\frac{3+\sqrt{81}}{2\cdot 3}=\frac{3+9}{6}=2$, $x_2=\frac{3-\sqrt{81}}{2\cdot 3}=\frac{3-9}{6}=-1$.
Демак, $3x^2-3x-6=3(x-2)(x+1)$;
в) x^2-x+1, бу ерда $a=1$, $b=-1$, $c=1$ бўлиб,
$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=1-4=-3<0$. У ҳолда x^2-x+1 квадрат учхад чизиқли кўпайтувчиларга ажралмайди.

5–§. Квадрат тенглама ва уининг илдизлари. Виет теоремаси.

1-Таъриф. Ушбу $ax^2+bx+c=0$ тенгламага квадрат тенглама дейилади, бу ерда *a*, *b*, *c* берилган сонлар, $a\neq 0$, x – номаълум.

a, *b*, *c* – сонлар квадрат тенгламанинг коэффициентлари: *a*- бош коэффициент, *b*-иккинчи коэффициент, с- озод ҳад.

Масалан, а) $2x^2-x-1=0$, бу ерда $a=2$, $b=-1$, $c=-1$;
б) $\frac{1}{3}x^2+5x-2=0$, бу ерда $a=\frac{1}{3}$ $b=5$ $c=-2$. в) $0{,}5x^2-2{,}3x+1$, бу ерда $a=0{,}5$, $b=-2{,}3$, $c=1$.

3-§ га кўра $ax^2+bx+c=0$ квадрат тенглама илдизлари қуйидаги формулалар билан ҳисобланади.

1. Агар $D=b^2-4a>0$ бўлса, у ҳолда квадрат тенглама иккита ҳар-хил ҳақиқий илдизларига эга бўлади, яъни

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

2. Агар D=0 бўлса, у ҳолда квадрат тенглама ягона ҳақиқий илдизга эса бўлади, яъни $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

3. Агар D<0 бўлса, у ҳолда квадрат тенглама ҳақиқий илдизларга эга бўлмайди, яъни $\varnothing$.

Мисоллар: а) $12x^2 + 7x + 1 = 0$, бундан $D = 7^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 1 > 0$, демак

$x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{24}$, $\quad x_1 = \frac{-7+1}{24} = -\frac{1}{4}$, $\quad x_2 = \frac{-7-1}{24} = -\frac{1}{3}$,

Жавоб: $x_1 = -\frac{1}{4}$, $\quad x_2 = -\frac{1}{3}$;

б) $x^2 - 12x + 36 = 0$, бундан $D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0$, демак $x_1 = x_2 = \frac{12}{2} = 6$.

Жавоб: $x_1 = x_2 = 6$;

в) $8x^2 - 25x + 23 = 0$, бундан $D = (-25)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 23 = 625 - 644 = -19 < 0$, Жавоб: $\varnothing$.

2-Таъриф . Агар $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тенгламада b ёки с коэффциентлардан камида биттаси нолга тенг бўлса, у ҳолда бундай тенглама чала квадрат тенглама дейилади, яҳни

а) $ax^2 = 0 \quad a \neq 0$; б) $ax^2 + c = 0$; $a \neq 0$, $c \neq 0$; в) $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ тенгламаларга чала квадрат тенгламалар дейилади.

Уларнинг илдизлари қуйидагича топилади:

а) $ax^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$;

б) $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}; \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}, \ \textit{агар} \quad ac < 0. \quad \text{бўлса} \\ x \in \varnothing, \ \textit{агар} \quad ac > 0; \quad \text{бўлса} \end{array}\right.$

в) $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax+b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ ax + b = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -\frac{b}{a}. \end{array}\right.$

Мисоллар: а) $5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$;

б) $2x^2 - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\frac{1}{4}$.

в) $3x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -15 \Leftrightarrow x^2 = -5 \Leftrightarrow x \in \varnothing$; чунки $x^2 > 0$

г) $x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(x-7) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 7$.

3−Таъриф Ушбу $x^2 + px + q = 0$ кўринишдаги квадрат тенглама келтирилган квадрат тенглама дейилади. Бу тенгламанинг бош коэффициенти бирга тенг.

Масалан, $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$ тенгламалар келтирилган квадрат тенгламалардир.

Ҳар қандай $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тенгламани унинг иккала қисмини $a \neq 0$ га бўлиб, $x^2 + px + q = 0$ тенгламага келтириш мумкин, бу ерда $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$.

Келтирилган квадрат тенгламани илдизини қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$x_{1/2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{D_1}}{2}, \qquad D_1 = p^2 - 4q.$$

а) Агар $D_1 = p^2 - 4q > 0$ бўлса, келтирилган тенглама иккита ҳар хил ҳақиқий илдизга эга;

б) Агар $D_1 = 0$ бўлса, келтирилган тенглама ягона ҳақиқий ечимга эга;

в) Агар $D_1 < 0$ бўлса, келтирилган тенглама ҳақиқий илдизларга эга эмас.

Мисоллар: а) $3x^2 - 7x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{4}{3} = 0$, бу ерда $p = -\frac{7}{3}$, $q = \frac{4}{3}$,

$$D_1 = \left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{49}{9} - \frac{16}{3} = \frac{1}{9} > 0 \qquad x_{1/2} = \frac{\frac{7}{3} \pm \frac{1}{3}}{2}, \quad x_1 = \frac{4}{3} \; x_2 = 1.$$

Жавоб: $x_1 = \frac{4}{3}$, $\quad x_2 = 1$;

б) $x^2 + 4x - 5 = 0$, бундан $D_1 = 4^2 - 4(-5) = 36$,

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 6}{2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -5.$$

Жавоб: $x_1 = 1$; $x_2 = -5$.

Агар $x^2 + px + q = 0$ тенгламада $p = 2k$ (k-ихтиёрий сон) бўлса, у ҳолда $x^2 + 2kx + q = 0$ тенгламанинг илдизи қуйидаги формула билан ҳисобланади. $\qquad x_{1/2} = -k \pm \sqrt{k^2 - q}$

Масалан, $x^2 - 8x - 9 = 0$ тенгламани ечинг:

$x^2 - 2 \cdot 4x - 9 = 0$, бундан $x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 + 9} = 4 \pm \sqrt{25}$,

$x_1 = 4 + 5 = 9 \qquad x_2 = 4 - 5 = -1$

Жавоб: $x_1 = 9$, $x_2 = -1$ *ёки* $\{-1; 9\}$.

Шундай қилиб, агар x_1 ва x_2 сонлар $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳаднинг илдизлари бўлса, у ҳолда

$$ax^2 + bx + c = \begin{cases} a(x - x_1)(x - x_2), & D > 0, \\ a(x - x_1)^2 & , \; D = 0. \end{cases}$$

1-Мисол . $8 - 2x - x^2$ квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. $8 - 2x - x^2 = 0$, бундан $D = (-2)^2 - 4(-1) \cdot 8 = 36 > 0$,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + 6}{-2} = -4, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 - 6}{-2} = 2.$$

Демак, $8 - 2x - x^2 = -(x + 4)(x - 2)$.

Жавоб: $-(x + 4)(x - 2)$.

2-Мисол. $\frac{2x^2 - 5x + 2}{4 - x^2}$ касрни қисқартиринг.

Ечиш. $2x^2 - 5x + 2 = 0$, бундан $D = 25 - 16 = 9 > 0$,

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_1 = 2, \; x_2 = \frac{1}{2}.$$

Демак $2x^2-5x+2=2(x-2)(x-\frac{1}{2})=(x-2)(2x-1)$ га тенг.

Шундай қилиб $\frac{2x^2-5x+2}{4-x^2}=\frac{(x-2)(2x-1)}{(2-x)(2+x)}=-\frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x+2)}=-\frac{2x-1}{x+2}=\frac{1-2x}{x+2}$.

Жавоб: $\frac{1-2x}{x+2}$.

Виет теоремаси. Агар x_1 ва x_2 лар $x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, у ҳолда

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q \end{cases}$$ бўлади,

яъни келтирилган квадрат тенглама илдизларининг йиғиндиси қарама-қарши ишора билан олинган иккинчи коэффициентга, илдизларининг кўпайтмаси эса озод ҳадга тенг.

Мисоллар: а) $x^2-5x-6=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=5, \\ x_1\cdot x_2=-6; \end{cases}$ б) $x^2-15x=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=15, \\ x_1\cdot x_2=0; \end{cases}$

в) $x^2-10=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_1\cdot x_2=-10. \end{cases}$

Ушбу $ax^2+bx+c=0$ квадрат тенглама учун Виет теоремаси қуйидагича ёзилади:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Масалан, $5x^2+12x+7=0 \Rightarrow x^2+\frac{12}{5}x+\frac{7}{5}=0$.

Виет теоремасига кўра $x_1+x_2=-\frac{12}{5}$, $\quad x_1x_2=\frac{7}{5}$ бўлади.

Виет теоремасига тескари теорема. Агар p, q, x_1 *ва* x_2 сонлар учун $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$ муносабатлар бажарилса, у ҳолда x_1 *ва* x_2 $x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизлари бўлади.

Мисоллар: а) $x^2-15x-16=0$ тенгламанинг илдизларини топинг ва Виет теоремасига тескари теорема бўйича текширинг.

Ечиш: $x^2-15x-16=0$, бундан $D=(-15)^2-4(-16)=225+64=289$

Демак, $x_{1/2}=\frac{15\pm\sqrt{289}}{2}=\frac{15\pm 17}{2}$, $\qquad x_1=16, \qquad x_2=-1$.

Тенгламада $p=-15$, $\quad q=-16$ бўлганлиги учун, топилган илдизларга кўра $x_1+x_2=16-1=15$, $x_1\cdot x_2=16\cdot(-1)=-16$ бўлади.

Демак, Виет теоремасига тескари теорема бўйича бу сонлар $x^2-15x-16=0$ тенгламанинг илдизлари бўлади.

б) $x^2-9x+20=0$ тенгламанинг илдизларини танлаш йўли билан топинг.

Ечиш. Фараз қилайлик x_1 *ва* x_2 тенгламанинг илдизлари бўлсин, у ҳолда $x_1+x_2=9$, $\quad x_1x_2=20$ бўлади.

Агар x_1 ва x_2 сонлар бутун бўлса, улар 20 сонининг бўлувчилари бўлади. Бу сонларнинг йиғиндиси 9 га тенг бўлганлигини ҳисобга олиб, $x_1=4$ ва $x_2=5$ эканини топамиз.

Виет теоремасини қўллаш ёрдамида ечиладиган мисоллар:

1-Мисол. $3x^2-2x-6=0$ тенгламанинг x_1 ва x_2 илдизларини ҳисобламасдан қуйидагиларни топинг:

а) $x_1^2+x_2^2$, б) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, в) $x_1^3+x_2^3$

Ечиш. $3x^2-2x-6=0$ тенгламадан $D=(-2)^2-4\cdot3(-6)=4+72=76>0$, у ҳолда Виет теоремасига кўра $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-2}{3}=\frac{2}{3}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-6}{3}=-2$

а) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot(-2)=\frac{4}{9}+4=\frac{40}{9}=4\frac{4}{9}$;

б) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{\frac{2}{3}}{-2}=-\frac{1}{3}$;

в) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]=\frac{2}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2-3(-2)\right]=$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{58}{9}=\frac{116}{27}=4\frac{8}{27}$

Жавоб: а) $4\frac{4}{9}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $4\frac{8}{27}$.

2-Мисол . $x^2-13x+q$ тенгламанинг илдизларидан бири 12,5 га тенг. Иккинчи илдиз ва q озод ҳадни топинг.

Ечиш. Виет теоремасига кўра

$x_1+x_2=13$, $x_1\cdot x_2=q$.

Берилганга кўра эса $x_1=12{,}5$. Демак $12{,}5+x_2=13$, $x_2=0{,}5$, $12{,}5\cdot0{,}5=q$, $q=6{,}25$.

Жавоб: $x_2=0{,}5$; $q=6{,}25$.

3-Мисол. $3x^2+bx+10$ тенглама илдизларининг айирмаси $4\frac{1}{3}$ га тенг. b ни топинг.

Ечиш. Виет теоремасига ва берилганга кўра

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{3}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{10}{3}, \\ x_1 - x_2 = 4\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{3}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{10}{3}, \\ x_1 = \dfrac{13}{3} + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{13}{3} + x_2 + x_2 = -\dfrac{b}{3}, \\ \left(\dfrac{13}{3} + x_2\right)x_2 = \dfrac{10}{3}, \Leftrightarrow \\ x_1 = \dfrac{13}{3} + x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = -\dfrac{b+13}{3}, \\ x_2^2 + \dfrac{13}{3}x_2 - \dfrac{10}{3} = 0, \\ x_1 = \dfrac{13}{3} + x_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = -\dfrac{b+13}{3}, \\ (x_2)_1 = \dfrac{2}{3}; (x_2)_2 = -5, \\ x_1 = \dfrac{13}{3} + x_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{3} = -\dfrac{b+13}{3}; -10 = -\dfrac{b+13}{3}, \\ (x_2)_1 = \dfrac{2}{3}; (x_2)_2 = -5, \\ (x_1)_1 = 5 \quad (x_1)_2 = -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Демак, $b_1 = -17$, $b_2 = 17$.

Жавоб: $b_1 = -17$, $b_2 = 17$.

4-Мисол. x_1 ва x_2 сонлари $x^2-8x+к=0$ тенгламанинг илдизлари бўлиб, унда $3x_1+4x_2=29$ экани маълум, к ни топинг.

Ечиш. Виет теоремасига ва берилганга кўра

$x_1+x_2=8$, $x_1 \cdot x_2 = к$, $3x_1+4x_2 = 29$

бундан $\begin{cases} x_1 = 8 - x_2, \\ 3(8 - x_2) + 4x_2 = 29 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 8 - x_2, \\ 24 - 3x_2 + 4x_2 = 29 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 8 - x_2, \\ x_2 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 5. \end{cases}$

Демак, $x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 5 = к$, $к = 15$.

Жавоб: $к = 15$.

5-Мисол . $4x^2-14x+q$ квадрат учҳаднинг илдизи 2 га тенг бўлсин. q ни топинг ва учҳадни купайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. $x_1=2$ учҳаднинг илдизи бўлгани учун $4 \cdot 2^2 - 14 \cdot 2 + q = 0$,

бундан $q = 12$. Виет теоремасига кўра $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{q}{4} = 3$, сўнгра $x_1=2$

бўлганлиги учун $x_2 = \dfrac{3}{2}$. Шунинг учун

$$4x^2 - 14x + 12 = 4(x-2)(x-\frac{3}{2}) = (x-2)(4x-6).$$

Жавоб; $q=12$; $(x-2)(4x-6)$.

1-Натижа . Агар x_1ва x_2 сонлари $x^2+ьx+q=0$ тенгламанинг илдизи бўлиб,
$S_n = x_1^n + x_2^n (n \ge 2, n \in N)$ бўлса, у ҳолда қуйидаги рекуррент формула ўринлидир.

$$S_{n+1} = -pS_n - qS_{n-1}, \quad S_1 = -p, \quad S_2 = p^2 - 2q .$$

2-Натижа. Дискриминанти манфий бўлмаган иккита $x^2+ь_1x+q_1=0$ ва $x^2+ь_2x+q_2=0$ тенгламалар хеч бўлмаганда битта умумий ечимга эга бўлиши учун

$$(q_2-q_1)^2=(p_2-p_1)(p_1q_2-q_1p_2)$$

тенгликни бажарилиши зарур ва етарлидир.

6-Мисол. $(1-2a)x^2-6ax-1=0$ ва $ax^2-x+1=0$ $(a\neq 0; a\neq\frac{1}{2})$ квадрат тенгламалар хеч бўлмаганда битта умумий ечимга эга бўладиган a-нинг қийматларини топинг.

Ечиш. 2-Натижага кўра қуйидаги тенглик бажарилиши керак

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{1-2a}\right)^2=\left(-\frac{1}{a}+\frac{6a}{1-2a}\right)\left(-\frac{6a}{1-2a}\frac{1}{a}-\frac{1}{1-2a}\frac{1}{a}\right)$$

ёки $$(1-a)^2=-(6a^2+2a-1)(6a+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(36a^2+19a-6)=0\Leftrightarrow 36a^2+19a-6=0,$$

бундан $a_1=\frac{2}{9}$, $a_2=\frac{3}{4}$

а) Агар $a=\frac{3}{4}$ бўлса, у холда $\frac{3}{4}x^2-x+1=0$ тенгламанинг дискриминанти манфий бўлади, яҳни $D=(-1)^2-4\frac{3}{4}1=1-3=-2<0$

б) Агар $a=\frac{2}{9}$ бўлса, у холда берилган тенгламаларнинг дискриминанти мусбат ва битта умумий ечимга эга бўлади. Яъни x=3.

Жавоб: $a=\frac{2}{9}$. Умумий ечим: x=3.

6-§. Квадрат тенгламага келтириладиган тенгламалар.

n- даражали алгебраик тенгламалар.

1-Таъриф. Ушбу $ax^{2n}+bx^n+c=0$ кўринишдаги тенгламалар учхадли тенгламалар дейилади, бунда $a\neq 0$, $n\in N$, $n\geq 2$.

Агар n=2 бўлса, у холда учхадли тенглама биквадрат тенглама дейилади.

$ax^{2n}+bx^n+c=0$ тенглама $x^n=y$ алмаштириш ёрдамида $ay^2+by+c=0$ квадрат тенгламага келтирилади: а) Агар $D=b^2-4ac>0$

бўлса, у холда $ax^{2n}+bx^n+c=0$ тенгламанинг илдизлари $x^n=y_1$ ва $x^n=y_2$ тенгликлардан топилади, бу ерда $y_{1/2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$;

б) Агар $D=0$ бўлса, у холда $ax^{2n}+bx^n+c=0$ тенгламанинг илдизлари $x^n=y_1=y_2=-\dfrac{b}{2a}$ тенгликдан топилади;

в) Агар D < 0 бўлса, у холда учхадли тенглама ечимга эга эмас, яъни $x\in\varnothing$.

1-Мисол . $x^8-17x^4+16=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $x^4=y$ деб белгилаймиз. У холда $y^2-17y+16=0$, бундан $y_1=1$ ва $y_2=16$.

Демак, $\left[\begin{array}{l} x^4=1, \\ x^4=16, \end{array}\right.$ *ёки* $\left[\begin{array}{l} x_{1/2}=\pm1, \\ x_{3/4}=\pm4, \end{array}\right.$

Жавоб; $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=4$, $x_4=-4$ ёки $\{-4;-1;1;4\}$.

2-Мисол. $9x^4+5x^2-4=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $x^2=y$ алмаштириш қилиб $9y^2+5y-4=0$ тенгламани хосил қиламиз. Бундан $y_1=\dfrac{4}{9}$, $y_2=-1$.

Демак, $\left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{4}{9}, \\ x^2=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1/2}=\pm\dfrac{2}{3}, \\ x\in\varnothing. \end{array}\right.$

Жавоб: $x_1=\dfrac{2}{3}$, $x_2=-\dfrac{2}{3}$ *ёки* $\left\{-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right\}$.

2-Таъриф. Ушбу $ax^3+bx^2+bx+a=0$ $(a\neq0)$ кўринишдаги тенгламалар учинчи даражали симметрик тенглама дейилади.

Ечилиши:
$$ax^3+bx^2+bx+a=a(x^3+1)+bx(x+1)=a(x+1)(x^2-x+1)+$$
$$+bx(x+1)=(x+1)\left[ax^2+(b-a)x+a\right]=0,$$

Демак, учинчи даражали симметрик тенглама қуйидаги чизиқли ва квадрат тенгламаларга тенг кучли:

$$ax^3+bx^2+bx+a=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ ax^2+(b-a)x+a=0. \end{array}\right.$$

3-Мисол . $3x^3+2x^2+2x+3=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. 2-Таърифга кўра.

$$3x^3+2x^2+2x+3=0\Leftrightarrow(x+1)(3x^2-x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ 3x^2-x+3=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ D=1-36=-35<0, \quad x\in\varnothing, \end{array}\right.$$

Жавоб: x=-1 ёки $\{-1\}$.

3-Таъриф. Ушбу $ax^4+bx^3+cx^2\pm bx+a=0$ кўринишдаги тенгламалар тўртинчи даражали симметрик тенглама дейилади.

Ечилиши. x=0 берилган тўртинчи даражали тенгламанинг ечими бўлмагани учун тенгликни иккала томонини x^2 га бўлиб юборамиз:

$$ax^4+bx^3+cx^2\pm bx+a=0 \Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x\pm\frac{1}{x}\right)+c=0 \qquad (*)$$

Ушбу $y=x\pm\frac{1}{x}$ алмаштириш ва қуйидаги $\left(x\pm\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}\pm 2$ хисобга олиб (*) тенгламани $\left[\begin{array}{l} a(y^2-2)+by+c=0 \\ a(y^2+2)+by+c=0 \end{array}\right.$ квадрат тенгламаларга келтирилади ва ечилади.

4-Мисол . x^4-$2x^3$-x^2-2x+1=0 тенгламани ечинг.

Ечиш. 3-Таърифга кўра

$$x^4-2x^3-x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=y, \\ y^2-2y-3=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=y \\ y_1=3, y_2=-1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=3, \\ x+\frac{1}{x}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+1=0, \\ x^2+x+1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, & x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \\ D=(-1)^2-4=-3<0, & x\in\varnothing. \end{array}\right.$$

Жавоб: $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ *ёки* $\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Ушбу $(ax^2+bx+c)(ax^2+bx+c_1)=d$ кўринишдаги тенгламаларни $ax^2+bx=y$ алмаштириш ёрдамида $y^2+\left(c_1+c\right)y+cc_1-d=0$ квадрат тенгламага келтирилади ва ечилади.

5-Мисол. $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=19$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Берилган тенгламани қуйидагича алмаштирамиз:

$$(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=19 \Leftrightarrow (x+1)(x+4)(x-2)(x+7)=19 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+5x+4)(x^2+5x-14)=19 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x=y, \\ (y+4)(y-14)=19 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x=y, \\ y^2-10y-75=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x=y, \\ y_1=15, y_2=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x=15, \\ x^2+5x=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x-15=0, \\ x^2+5x+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1/2}=\frac{-5\pm\sqrt{85}}{2}, \\ x_{1/2}=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Жавоб: $\left\{\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}; \ \frac{-5\pm\sqrt{85}}{2}\right\}$.

Ушбу $(x-a)^4+(x-b)^4=c$ тенгламани $y=x-\frac{a+b}{2}$ алмаштириш ёрдамида биквадрат тенгламага келтирилади ва ечилади.

6-Мисол . $(6-x)^4+(8-x)^4=16$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Ушбу $y=\frac{6-x+8-x}{2}=7-x$ алмаштириш бажариб берилган тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз.

$$(y+1)^4+(y-1)^4=16 \Leftrightarrow y^4+6y^2-7=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} y^2=z, \\ z^2+6z-7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} y^2=z \\ z_1=1, z_2=-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} y^2=1, \\ y^2=-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} y_1=1, y_2=-1, \\ y\in\varnothing. \end{array}\right.$$

Демак, y=7-x дан $x_1=6$, $x_2=8$.
Жавоб: $\{6;8\}$.

4-Таъриф. Ушбу $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0=0, \quad (a_n\neq 0, n\in N)$ кўринишдаги тенглама n-даражали алгебраик тенглама дейилади, бу ерда $a_0, a_1, ... a_n$- бутун коэффициентлар.

n-даражали алгебраик тенгламаларининг асосий хоссалари:

1. n-даражали алгебраик тенглама энг камида n та хақиқий (карралигини хисобга олганда) илдизга эга.

2. Тоқ даражали алгебраик тенглама хеч бўлмаганда битта хақиқий илдизга эга.

3, (Виет теоремаси) Агар $x_1, x_2, ..., x_n$ $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0=0$ тенгламанинг хақиқий илдизлари бўлса, у холда қуйидаги тенгликлар ўринлидир:

$$x_1+x_2+...+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1x_2+x_1x_3+...+x_{n-1}x_n=\frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$x_1x_2x_3+...+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\frac{a_{n-3}}{a_n},$$

....

$$x_1x_2...x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

Теорема. Қисқармайдиган $\frac{p}{q}(q\neq 0)$ каср $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0=0$ тенгламанинг ечими бўлиши учун, p сони a_0 озод хаднинг, q сони эса a_n бош коэффициентнинг бўлувчиси бўлиши зарурдир.

7-Мисол. Ушбу $2x^4-7x^3-12x^2-38x+21=0$ тенгламанинг озод хадининг бўлувчилари: ±1, ±3, ±7, ±2, бош коэффициентнинг бўлувчилари эса:

±1, ±2 тенг. У холда $\frac{p}{q}$ касрнинг кўриниши қуйидагича бўлади:
$1,3,7,21,-1,-3,-7,-21,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{21}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{7}{2},-\frac{21}{2}$

Натижа. Агар $a_n=1$ бўлса, у холда n даражали алгебраик тенгламанинг рационал ечими фақат бутун сон бўлиб, у озод хаднинг бўлувчиларига тенг бўлади.

8-Мисол. $P_4(x)=x^4+2x^3-2x^2-6x+5=0$ тенгламанинг хеч бўлмаганда битта бутун ечимини топинг.

Ечиш. Тенгламанинг озод хадининг бўлувчилари 1; -1; 5; -5 сонлардир. Безу теоремасига кўра

$$P_4(1)=1+2-2-6+5=0;$$
$$P_4(-1)=1-2-2+6+5=8\neq 0;$$
$$P_4(5)=625+250-50-30+5=800\neq 0;$$
$$P_4(-5)=625-250-50+30+5=360\neq 0.$$

Демак, $P_4(x)=0$ тенглама x=1 бутун ечимга эга. 5, -5, -1 сонлари $P_4(x)=0$ тенгламанинг ечимлари эмас. кўпхадни кўпхадга бўлиш қоидасига кўра, берилган тенглама ушбу

$$P_4(x)=(x-1)(x^3+3x^2+x-5)=0 \Leftrightarrow (x-1)P_3(x)=0$$

кўринишда ёзилади, бу ерда $P_3(x)=x^3+3x^2+x-5$. $P_3(x)$ кўпхаднинг озод хадининг бўлувчилари 1, -1, 5, -5 сонларидир. Безу теоремасига кўра $P_3(1)=0,$, $P_3(-1)\neq 0,$ $P_3(5)\neq 0,$ $P_3(-5)\neq 0.$ Демак 1 сони $P_3(x)=0$ тенгламанинг илдизидир. Шундай қилиб, берилган тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$P_4(x)=(x-1)P_3(x)=(x-1)^2(x^2+4x+5)=0 \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l}(x-1)^2=0,\\ x^2+4x+5=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} & x_1=x_2=1,\\ D=16-20=-4<0 & x\in\varnothing,\end{array}\right.$$

Жавоб: $x_1=x_2=1$

7-§. Комплекс сонлар. Комплекс номаълумли квадрат тенгламалар.

1-Таъриф. Комплекс сон деб $a+bi$ кўринишидаги ифодага айтилади, бунда a ва b лар ҳақиқий сонлар, i-шундай сонки, $i^2=-1$.

a сони $a+bi$ комплекс соннинг ҳақиқий қисми, b сони эса униг мавхум қисми дейилади.

Масалан, $3+2i$ комплекс соннинг ҳақиқий қисми 3 га тенг, мавхум қисми эса 2 га тенг; -7-5i комплекс сон учун ҳақиқий қисм −7 га тенг, мавхум қисм −5 га тенгдир.

Ҳақиқий сонлар комплекс сонларнинг хусусий холларидир.

Масалан, $2+0\cdot i=2,\quad -3+0\cdot i=-3,\quad -\frac{1}{2}-0i=-\frac{1}{2}.$

Агар $z_1=a+bi$ ва $z_2=c+di$ бўлса ,

У холда:

1) агар a = c ва b=d бўлса $z_1=z_2$ бўлади;
2) $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i;$
3) $z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i;$
4) $z_1\times z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i;$
5) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$

$z=a+bi$ комплекс сонга қўшма бўлган комплекс сон $\bar{z}=a-bi$ га тенг бўлиб, қуйидаги хоссаларга эга: а) $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$; б) $z+\bar{z}=2a$.

Комплекс соннинг модули $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ га тенг .

Комплекс сонларга оид мисоллар:

1) $i^3=i^2\cdot i=-i;\quad i^4=i^2\cdot i^2=1;\quad i^{4k+m}=i^m, m\in\{0,1,2,3\}\quad i^{218}=i^{4\cdot 54+2}=i^2=-1$

2) $(4-3i)+(-2+7i)=4-2+(7-3)i=2+4i;$

3) $(8-5i)-(9-4i)=8-5i-9+4i=-1-i;$

4) $(2+3i)(3-2i)=6-4i+9i-6i^2=6-4i+9i+6=12+5i;$

5) $\frac{3-5i}{2-i}=\frac{(3-5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{6+3i-10i+5}{4-i^2}=\frac{11-7i}{4+1}=\frac{11-7i}{5}=\frac{11}{5}-\frac{7}{5}i;$

6) $(7-6i)(7+6i)=7^2-(6i)^2=49+36=85;$

7) $\left(\frac{4+i^7}{3-i^4}\right)^2=\left(\frac{4+i^4\cdot i^3}{3-i^4}\right)^2=\left(\frac{4-i}{3-1}\right)^2=\frac{(4-i)^2}{4}=\frac{16-8i-1}{4}=\frac{15}{4}-2i.$

8) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\Rightarrow|z|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1.$

2-Таъриф. Ушбу $z^2=a$ ($a<0$) кўринишдаги тенглама комплекс номаълумли чала квадрат тенглама дейилади.

Комплекс номаълумли чала квадрат тенглама иккита комплекс ечимга эга: $z_{1/2}=\pm\sqrt{a}i$, $i^2=-1$ тенгликдан фойдаланиб, манфий соннинг квадрат илдизини қуйидагича ёзамиз:

$\sqrt{-1}=i$, $\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=2i$, $\sqrt{-7}=\sqrt{7}i$

Мисоллар: a) $z^2=81 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{-81}=\pm 9i$; b) $z^2+12=0 \Leftrightarrow z^2=-12 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{12}i$.

3-Таъриф. Ушбу $az^2+bz+c=0$ кўринишдаги тенглама комплекс номаълумли квадрат тенглама дейилади, бу ерда a,b,c- ихтиёрий ҳақиқий сонлар бўлиб, $a\neq 0$, $D<0$.

Бу тенгламанинг илдизлари қуйидаги формуладан топилади: $z_{1/2}=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $b^2-4ac<0$.

Масалан: $z^2-4z+13=0$, бундан $z_{1/2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\dfrac{4\pm 6i}{2}=2\pm 3i$,

$z_1=2+3i$, $z_2=2-3i$. Демак тенгламанинг илдизлари қўшмадир.

Агар z_1 ва z_2 $az^2+bz+c=0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, у холда бу тенглама учун Виет теоремаси ўринлидир:

$$\begin{cases} z_1+z_2=-\dfrac{b}{a} \\ z_1z_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

1-Мисол. Агар z_1 ва z_2 $z^2-4z+5=0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, $z_1^2+z_2^2$ ни хисобланг.

Ечиш. Виет теоремасига кўра $z_1+z_2=4$, $z_1\cdot z_2=5$.

У холда $z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=4^2-2\cdot 5=16-10=5$

Жавоб: 5.

2-Мисол. $z_1=-1-2i$ илдизга эга бўлган ҳақиқий коэффициентли квадрат тенглама тузинг.

Ечиш: Тенгламанинг иккинчи z_2 илдизи берилган z_1 илдиз билан қўшма бўлган сондир, яъни $z_2=-1+2i$.

Виет теоремасига кўра $p=-(z_1+z_2)=-(-1-2i-1+2i)=2$, $q=z_1z_2=(-1-2i)(-1+2i)=(-1)^2-(2i)^2=1+4=5$ эканини топамиз.

Демак, изланаётган квадрат тенгламанинг кўриниши қуйидагича: $z^2+2z+5=0$.

Жавоб: $z^2+2z+5=0$.

Комплекс соннинг тригонометрик формаси ҳақидаги тушунчаларга ушбу китобнинг кейинги қисмларида тўхталамиз.

8-§. Рационал тенгламалар ва уларни ечиш усуллари.

Таъриф. Ушбу $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ кўринишдаги тенгламаларга рационал тенглама дейилади, бунда P(x) ва Q(x) – кўпхадлар, $Q(x)\neq 0$.

Рационал тенгламалар қуйидагича ечилади:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

1-Мисол. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}=1$ тенгламани ечинг.

Ечиш: $$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}-1=0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)+2(x+1)-(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x-2}{(x+1)(x-2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-2=0 \\ (x+1)(x-2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2+\sqrt{6}, x_2=2-\sqrt{6} \\ x\neq -1, x\neq 2 \end{cases}$$

Жавоб: $\{2-\sqrt{6};2+\sqrt{6}\}$.

Ушбу $\frac{Ax}{ax^2+b_1x+c}+\frac{Bx}{ax^2+b_2x+c}=C$, бунда ABC≠0, ac≠0 кўринишдаги рационал тенглама $y=ax+\frac{c}{x}$ алмаштириш ёрдамида $\frac{A}{y+b_1}+\frac{B}{y+b_2}-C=0$ тенгламани ечишга келтирилади.

2-Мисол . $\frac{4x}{x^2+x+4}+\frac{5x}{x^2-5x+4}=-\frac{3}{2}$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Шуни айтиш керакки x=0 берилган рационал тенгламанинг ечими эмас. Шунинг учун чап томонда турган касрнинг сурат ва махражини x га бўламиз

$$\frac{4}{x+\frac{4}{x}+1}+\frac{5}{x+\frac{4}{x}-5}=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{4}{x}=y, \\ \frac{4}{y+1}+\frac{5}{y-5}=-\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{4}{x}=y, \\ \frac{y^2+2y-15}{(y+1)(y-5)}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{4}{x}=y, \\ \begin{cases} y^2-2y-15=0, \\ (y+1)(y-5)\neq 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{4}{x}=y, \\ \begin{cases} y_1=-5, y_2=3, \\ y\neq -1, y\neq 5 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{4}{x}=-5, \\ x+\dfrac{4}{x}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2+5x+4=0, \\ x^2-3x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=-4, x_2=-1, \\ D=(-3)^2-4\cdot 4<0, \quad x\in\varnothing \end{array}\right.$$

Жавоб: {-4;-1}.

3-Мисол. $\dfrac{x+4}{x-1}+\dfrac{x-4}{x+1}=\dfrac{x+8}{x-2}+\dfrac{x-8}{x+2}-\dfrac{8}{3}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу тенгламани содда касрларга ажратиш усулида ечамиз:

$$\frac{x+4}{x-1}=1+\frac{5}{x-1}; \quad \frac{x-4}{x+1}=1-\frac{5}{x+1};$$

$$\frac{x+8}{x-2}=1+\frac{10}{x-2}; \quad \frac{x-8}{x+2}=1-\frac{10}{x+2}.$$

Бу алмаштиришдан сўнг берилган тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{5}{x-1}-\frac{5}{x+1}=\frac{10}{x-2}-\frac{10}{x+2}-\frac{8}{3}\Leftrightarrow\frac{10}{x^2-1}-\frac{40}{x^2-4}=-\frac{8}{3}$$

Бундан

$$\frac{10(x^2-4)-40(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-4)}=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow\frac{-30x^2}{(x^2-1)(x^2-4)}=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 90x^2=8(x^2-1)(x^2-4) \\ (x^2-1)(x^2-4)\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 45x^2=4x^4-20x^2+16 \\ x^2-1\neq 0, x^2-4\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 4x^4-65x^2+16=0 \\ x^2-1\neq 0 \quad x^2-4\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2=16, x^2=\dfrac{1}{4}, \\ x^2\neq 1, x^2\neq 4 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=4, \quad x_2=-4, \quad x_3=\dfrac{1}{2}, \quad x_4=-\dfrac{1}{2} \\ x\neq\pm 1, \quad x\neq\pm 2 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=4, x_2=-4, \\ x_3=\dfrac{1}{2}, x_4=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Жавоб: $\left\{-4;-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};4\right\}$.

4-Мисол. $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Бу тенгламани тўла квадратга ажратиш усулида ечамиз:

$$x^2+2x\cdot\frac{x}{x\cdot 1}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-2x\cdot\frac{x}{x-1}=8\Leftrightarrow\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x-1}-8=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-2\cdot\frac{x^2}{x-1}-8=0$$

Ушбу $\frac{x^2}{x-1}=y$ алмаштиришдан сўнг, берилган тенглама қуйидаги квадрат тенгламага келади $y^2-2y-8=0$, бундан $y_1=4$ ва $y_2=-2$.

Шундай қилиб

$$x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x^2}{x-1}=4\\ \frac{x^2}{x-1}=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4x+4=0\\ x\neq 1\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+2x-2=0\\ x\neq 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=x_2=2,\\ x_3=-1+\sqrt{3},x_4=-1-\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

Жавоб: $\{-1-\sqrt{3};\quad -1+\sqrt{3};\quad 2\}$.

5-Мисол. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-2{,}5$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Ушбу $\frac{x^2+1}{x}=y$ алмаштириш ёрдамида берилган тенгламани қуйидагича ёзамиз.

$$y+\frac{1}{y}+2{,}5=0\Leftrightarrow\begin{cases}y^2+2{,}5y+1=0\\ y\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=-\frac{1}{2},y_2=-2,\\ y\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y_1=-\frac{1}{2},\\ y_2=-2.\end{array}\right.$$

Демак, а) $\frac{x^2+1}{x}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+x+2=0\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}D=1-16=-15<0,x\in\varnothing\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$

б) $\frac{x^2+1}{x}=-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+1=0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2=-1, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$

Жавоб: $\{-1\}$.

9–§. Биринчи даражали икки номаълумли иккита тенгламалар системаси.

1-Таъриф.. Ушбу $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ кўринишдаги системага биринчи даражали икки номаълумли иккита тенгламалар системаси дейилади, бу ерда a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2-берилган сонлар бўлиб, $a_1^2+b_1^2 \neq 0$ $a_2^2+b_2^2 \neq 0$ x ва y- номаълум сонлар .

Масалан, $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ x+y=3, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{2}x=5, \\ x-3y=7, \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=3, \\ x+y=5. \end{cases}$ - тенгламалар системасидир.

2-Таъриф.. Биринчи даражали икки номаълумли иккита тенгламалар системасининг ечими деб, шундай x ва y сонлар жуфтлигига айтиладики, уларни шу системага қўйганда унинг хар бир тенгламаси тўғри тенгликка айланади.

Масалан а) $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases}$ тенгламалар системасининг ечими x=7, y=3,

чунки $\begin{cases} 7+3=10, \\ 7-3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10=10, \\ 4=4. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x+4y=10 \\ 6x+8y=20 \end{cases}$ тенгламалар системасининг ечими чексиз куп, чунки x=1, y=7/4; x=2, y=1 ва ҳоказолар ҳар бир тенгламани тўғри тенгликка айлантиради.

в) $\begin{cases} 5x+4y=8 \\ 10x+6y=4 \end{cases}$ тенгламалар системаси ечимга эга эмас, чунки ҳеч кандай (x,y) жуфтлик ҳар бир тенгламани тўғри тенгликка айлантирмайди.

Шундай қилиб, $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ система учун қуйидаги хоссалар ўринлидир:

а) Агар $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ бўлса, у ҳолда система ягона ечимга эга;

б) Агар $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ бўлса, у ҳолда система чексиз кўп ечимга эга;

в) Агар $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ бўлса, у ҳолда система ечимга эга эмас.

Биринчи даржали икки номаълумли иккита тенгламалар системасини ўрнига қўйиш, алгебраик қўшиш ва график усулларда ечиш мумкин.

9.1. Ўрнига қўйиш усули.

Бу усул қуйидагидан иборат:

1) Системанинг бир тенгламасидан бир номаълумни иккинчиси орқали ифодалаш; масалан, у ни х орқали ифодалаш;

2) Ҳосил қилинган ифодани системанинг иккинчи тенгламасига қўйиш.

3) х га нисбатан ҳосил бўлган бир номаълум тенгламани ечиш.

4) х нинг топилган қийматини у учун ифодага қўйиб, у нинг қийматини топиш керак.

1-Мисол . $\begin{cases} 2x+3y=3, \\ 7x+5y=16 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. Биринчи тенгламадан х ни у орқали ифодалаймиз: $x=-\frac{3y}{2}+\frac{3}{2}$ ва бу ифодани иккинчи тенгламага қўйиб, берилган системага тенг кучли система ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} 7\left(-\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}\right)+5y=16, \\ x=-\frac{3}{2}y+\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1, \\ x=-\frac{3}{2}y+\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1, \\ x=3. \end{cases}$$

Жавоб: $x=3, \quad y=-1 \quad$ *ёки* $\quad (3;-1)$.

2-Мисол . $\begin{cases} 4x+2y=3, \\ 2x+y=4 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш: Иккинчи тенгламадан у ни х орқали ифодалаймиз $y=4-2x$ ва бу ифодани биринчи тенгламага қўйиб, берилган тенгламага тенг кучли система ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} 4x+2(4-2x)=3 \\ y=4-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8=3 \\ y=4-2x \end{cases}$$

Бунда $8\neq 3$ бўлганлиги учун берилган система ечимга эга эмас.

3-Мисол. $\begin{cases} 2x-7y=1 \\ 21y-6x=-3 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш: $\begin{cases} 2x-7y=1, \\ 21y-6x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+7y}{2}, \\ 21y-6\left(\dfrac{1+7y}{2}\right)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+7y}{2} \\ -3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+7y}{2}$

Демак, берилган системанинг ечими $x=\dfrac{1+7y}{2}, y\in R$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий (х, у) жуфтликдир.

9.2. Алгебраик қўшиш усули.

Тенгламалар системасини алгебраик қўшиш усули билан ечиш учун:

1) номаълумлардан бирининг олдида турган коэффициентлар модулларини тенглаштириш;

2) ҳосил қилинган тенгламаларни ҳадлаб қўшиб ёки айириб, битта номаълумни топиш;

3) топилган қийматни берилган системанинг тенгламаларидан бирига қўйиб, иккинчи номаълумни топиш керак.

4-Мисол . $\begin{cases} 4x-3y=14 \\ x+2y=-2 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш: Биринчи тенгламани ўзгаришсиз қолдириб, иккинчи тенгламани 4 га кўпайтирамиз:

$$-\begin{cases} 4x-3y=14 \\ 4x+8y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow 11y=-22, y=-2$$

Бундан y=-2 ни системанинг иккинчи тенгламасига қўйиб, топамиз $x+2(-2)=-2 \Leftrightarrow x=2$. Демак $x=2, y=-2$ берилган системанинг ечими.
Жавоб: (2;-2).

5-Мисол. $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ -5x+2y=3 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш: Ечиш қоидасига кўра

$$\begin{cases} 2x-3y=2, \\ -5x+2y=3 \end{cases}\begin{vmatrix} 5 \\ 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x-15y=10, \\ -10x+4y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x-15y=10, \\ -11y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=2, \\ y=-\dfrac{16}{11} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\cdot 3\left(-\dfrac{16}{11}\right)=2, \\ y=-\dfrac{16}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{13}{11}, \\ y=-\dfrac{16}{11}. \end{cases}$$

Жавоб: $\left(-\dfrac{13}{11};-\dfrac{16}{11}\right)$.

Системани график усулда ечиш усулини «Функция ҳақида тушунча» мавзусидан сўнг берилади.

9.3. Параметрга боғлиқ бўлган системаларни ечиш.

6-Мисол . a нинг қандай қийматларида $\begin{cases} 2x+ay=a+2 \\ (a+1)x+2ay=2a+4 \end{cases}$ система

чексиз кўп ечимга эга бўлади.

Ечиш: Биринчи тенгламадан x ни y орқали ифодалаймиз: $x=-\dfrac{a}{2}y+\dfrac{a}{2}+1$.

Бу ифодани иккинчи тенгламага қўямиз:

$$(a+1)\left(-\frac{a}{2}y+\frac{a}{2}+1\right)+2ay=2a+4 \Leftrightarrow (a+1)(2+a-ay)+4ay=4a+8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4ay-a(a+1)y=4(a+2)-(a+1)(a+2) \Leftrightarrow a(4-a-1)y=(a+2)(4-a-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(3-a)y=(a+2)(3-a) \qquad (*)$$

бундан, $a(3-a)=0 \Leftrightarrow a=0, a=3$.

Шундай қилиб, а) Агар $a=0$ бўлса, у ҳолда (*) тенгламадан $0\cdot y=(0+2)(3-0)\Leftrightarrow 0=6$ ҳосил қиламиз. Демак, $0\neq 6$ бўлганлиги учун берилган система $a=0$ да ечимга эга эмас;

б) Агар $a=3$ бўлса, у ҳолда (*) тенгламадан $3\cdot 0\cdot y=(3+2)(0-0)\Leftrightarrow 0=0$ ҳосил қиламиз. Демак, (*) тенглама $a=3$ да чексиз кўп ечимга эга, яъни $y\in R$. У ҳолда берилган системанинг ечими $x=-\frac{3}{2}y+\frac{5}{2}, y\in R$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий (x,y) жуфтликдир.

в) Агар $a\neq 0, a\neq 3$ бўлса, у ҳолда (*) тенгламадан $y=\frac{(a+2)(3-a)}{a(3-a)}=\frac{a+2}{a}$ ҳосил қиламиз.

$x=-\frac{a}{2}y+\frac{a}{2}+1$ тенгламада у ўрнига $\frac{a+2}{a}$ ни қўямиз:

$$x=-\frac{a}{2}\cdot\frac{a+2}{a}+\frac{a+2}{2}=-\frac{a+2}{2}+\frac{a+2}{2}=0$$

Демак, берилган система $a\neq 0$, $a\neq 3$ да ягона $\left(0;\frac{a+2}{a}\right)$ ечимга эга.

Жавоб: $a=3$

7-Мисол. a нинг қандай қийматида $\begin{cases} ax+a^2y=1 \\ x+(a-1)y=a \end{cases}$ система ечимга эга бўлмайди.

Ечиш. Иккинчи тенгламадан х ни у орқали ифодалаймиз: $x=a-(a-1)y$. Бу ифодани биринчи тенгламага қўямиз.

$$a(a-(a-1)y)+a^2y=1\Leftrightarrow a^2-a(a-1)y+a^2y=1\Leftrightarrow a^2y-a(a-1)y=1-a^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(a^2-a^2+a)y=1-a^2\Leftrightarrow ay=1-a^2.$$

Бундан, а) агар $a=0$ бўлса, у ҳолда $0\cdot y=1-0\Leftrightarrow 0=1$ ҳосил қиламиз. Демак, $0\neq 1$ бўлганлиги учун $ay=1-a^2$ тенглама ечимга эга эмас. Бундан берилган система ҳам ечимга эга эмаслиги келиб чиқади.

б) Агар $a\neq 0$ бўлса, у ҳолда берилган система ягона ечимга эга; яъни

$$\begin{cases} x=a-(a-1)y, \\ y=\frac{1-a^2}{a} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{1-a+a^3}{a}, \\ y=\frac{1-a^2}{a} \end{cases}$$

Жавоб: $a=0$.

8-Мисол. Агар $\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x+y=a \end{cases}$ бўлса, у ҳолда а нинг қандай қийматида $x+y=2$ тенглик ўринли бўлади.

Ечиш. Система ечишнинг қўшиш усулидан фойдаланамиз:

$$+\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x+y=a \end{cases}\Leftrightarrow 3x+3y=a+2\Leftrightarrow x+y=\frac{a+2}{3}.$$

Бундан ва берилган шартга кўра

$$\frac{a+2}{3}=2 \Leftrightarrow a+2=6, \qquad a=4.$$

Жавоб: $a=4$.

10-§. Биринчи даражали уч номаълумли учта тенгламалар системаси.

Таъриф. Ушбу

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

кўринишдаги системага биринчи даражали уч номаълумли учта тенглама системаси дейилади, бу ерда $a_i, b_i, c_i, d_i (i=1,3)$ берилган сонлар бўлиб, $a_1^2+b_1^2+c_1^2 \neq 0$, $a_2^2+b_2^2+c_2^2 \neq 0$, $a_3^2+b_3^2+c_3^2 \neq 0$; x, y ва z номаълумлар.

Масалан, $\begin{cases} 3x+2y+z=2, \\ 4x-2y-z=3, \\ 6x+3y-2z=1; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+z=3, \\ 8x+2y=2, \\ 2y-z=1. \end{cases}$

Уч номаълумли учта системани ўрнига қўйиш, алгебраик қўшиш ва Гаусс усулида ечиш мумкин.

Биз система ечишнинг ўрнига қўйиш ва алгебраик қўшиш усулларини 8-§ да кўрсатдик. Бу парагрфда асосан Гаусс усули, яъни системани учбурчак кўринишга келтириш ёрдамида ечамиз.

1-Мисол . $\begin{cases} x+2y+3z=8, \\ 3x+y+z=6, \\ 2x+y+2z=6 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш: Биринчи тенгламани иккала томонини 3 га кўпайтириб, иккинчи тенгламадан айирамиз, сўнг биринчи тенгламани иккала томонини 2 га кўпайтириб, учинчи тенгламадан айирамиз ва қуйидагини хосил қиламиз:

$$\begin{cases} x+2y+3z=8, \\ \quad 5y+8z=18, \\ \quad 3y+4z=10. \end{cases}$$

Иккинчи тенгламани (-3) га, учинчи тенгламани 5 га кўпайтирамиз ва бу тенгламаларни қўшиб, қуйидаги системани хосил қиламиз.

$$\begin{cases} x+2y+3z=8, \\ \quad 5y+8z=18, \\ \quad z=1. \end{cases}$$

Шундай қилиб берилган системани учбурчак кўринишга келтирдик. $z=1$ ни иккинчи тенгламага қўйиб $y=2$ ни хосил қиламиз. $z=1$ ва $y=2$ ни биринчи тенгламага қўйиб $x=1$ оламиз.

Демак, $x=1, y=2, z=1$ берилган тенгламани ечими.

Жавоб: (1;2;1).

2-Мисол. $\begin{cases} 10x-9z=19, \\ 8x-y=10, \\ y-12z=10 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш: Гаусс усули ёрдамида ечамиз:

$$\begin{cases} 10x-9z=19, \\ 8x-y=10, \\ y-12z=10 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l|l} 10x-9z=19, & 8 \\ 8x-y=10, & \\ 8x-12z=20 & (-10) \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 10x-9z=19, \\ 8x-y=10, \\ z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+9=19, \\ 8x-y=10, \\ z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ 8\cdot 1-y=10, \\ z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-2, \\ z=-1. \end{cases}$$

Жавоб: (1;-2;-1).

11–§. Иккинчи даражали икки номаълумли тенгламалар системаси.

1-Таъриф . Ушбу

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0 \end{cases}$$

кўринишдаги системага иккинчи даражали икки номаълумли тенгламалар системаси дейилади. Бу ерда $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ – $(i=1,2)$ берилган сонлар бўлиб, $a_i^2+b_i^2+c_i^2+d_i^2+l_i^2 \neq 0$; x ва y номаълум сонлар. Иккинчи даражали икки номаълумли тенгламалар системасини ўрнига қўйиш, алгебраик қўшиш ва сунъий усулларда ечиш мумкин.

1-Мисол . $\begin{cases} 2x^2-xy+3y^2-7x-12y+1=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш; Ушбу системани ўрнига қўйиш усулида ечамиз:

$$\begin{cases} x=y+1, \\ 2(y+1)^2-y(y-1)+3y^2-7(y-1)-12y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1, \\ 2y^2-11y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1, \\ y_1=5, y_2=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4, y_1=5, \\ x_2=-\frac{1}{2}, y_2=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Жавоб: (4;5) ва $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

2-Мисол . $\begin{cases} xy - x + y = 7 \\ xy + x - y = 13 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш: Системани алгебраик қўшиш усулида ечамиз. Биринчи тенгламадан иккинчи тенгламани айириб, берилган системага тенг кучли системани хосил қиламиз.

$$\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - x + y = 7, \\ x = 3 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3 + y)y - 3 - y + y = 7, \\ x = 3 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 3y - 10 = 0, \\ x = 3 + y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2, \quad y_2 = -5, \\ x = 3 + y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1 = 5, & y_1 = 2, \\ x_2 = -2 & y_2 = -5. \end{array} \right.$$

Жавоб: (5;2) ва (-2;-5)

3-Мисол . $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -10 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш: Виет теоремасига тескари теоремага кўра x ва y сонлари $z^2 - 3z - 10 = 0$ квадрат тенгламанинг илдизлари бўлади. Бу тенгламани ечиб, қуйидагини хосил қиламиз: $z_1 = 5$, $z_2 = -2$. Демак, системанинг ечимлари қуйидаги сонлар жуфтлари бўлади:

$x_1 = 5$, $y_1 = -2$ *ва* $x_2 = 2$, $y_2 = 5$.

Жавоб: (5;-2) ва (-2;5).

4-Мисол. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. Системанинг биринчи тенгламасини қуйидагича ёзамиз:

(x-y)(x+y) =16.

Бунга x-y=2 ни қўйиб, x+y=8 ни хосил қиламиз. Шундай қилиб

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Бу системани қўшиш усулида ечиб, x =5, y =3 эканини топамиз.

Жавоб: (5;3).

5-Мисол. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \frac{1}{2}xy = 3 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. Системанинг иккинчи тенгламасини 4 га кўпайтириб, биринчи тенгламага қўшиб, қуйидагини хосил қиламиз:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 25 \Leftrightarrow (x + y)^2 = 25 \Leftrightarrow x + y = \pm 5.$$

Демак, берилган система қуйидаги системаларга тенг кучлидир:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x + y = -5, \\ xy = 6; \end{cases} \quad \text{бундан}$$

$$\begin{cases} x = 5 - x, \\ x(5 - x) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y, \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 5 - x, \\ x_1 = 2, x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1 = 2, & y_1 = 3, \\ x_2 = 3, & y_2 = 2 \end{array} \right.$$

ва $\begin{cases} y=-5-x, \\ (-5-x)x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x, \\ x^2+5x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-5-x, \\ x_1=-2, x_2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1=-2, & y_1=-3, \\ x_2=-3, & y_2=-2. \end{array}\right.$

Жавоб : (2;3), (3;2), (-2,-3), (-3,-2)

2-Таъриф. x+y ва xy кўпхадлар икки ўзгарувчили симметрик кўпхадлар дейилади.

3-Таъриф. x+y+z ; xy+yz+zx ва xyz кўпхадлар уч ўзгарувчили симмтерик кўпхадлар дейилади.

Ихтиёрий x,y,z ўзгарувчиларга нисбатан симметрик бўлган кўпхадларни x+y; yx; x+y+z ; xy+yz+zx ва xyz симметрик кўпхадлар орқали ифодалаш мумкин .

Масалан,

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy;$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y);$$

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx).$$

4-Таъриф. x-y, x^3-y^3 кўпҳадлар x ва – y га нисбатан симметрик бўлган кўпҳадлар дейилади ва қуйидаги формулалар ўринлидир:

$$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy;$$

$$x^3+y^3=(x-y)^3+3xy(x-y).$$

5-Таъриф. Агар иккинчи даражали икки номаълумли тенгламалар системасида қатнашган кўпҳадлар x ва y ўзгарувчиларга нисбатан симметрик кўпҳадлар бўлса, у ҳолда бундай системалар симметрик системалар дейилади.

Масалан,

$$\begin{cases} x^2+y^2=20. \\ xy=8; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

6-Мисол . $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=61, \\ xy=12 \end{cases}$ системани ечинг

Ечиш. $x^2+3xy+y^2$ ва xy кўпҳадлар x ва y ўзгарувчиларга нисбатан симметрик кўпҳадлардир. Шунинг учун қуйидагича алмаштиришлар қиламиз:

$$x^2+3xy+y^2=(x+y)^2+xy=u^2+v, \qquad xy=v$$

У ҳолда u ва v ўзгарувчиларга нисбатан қуйидаги системани оламиз

$$\begin{cases} u^2 + \upsilon = 61, \\ \upsilon = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 12 = 61, \\ \upsilon = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 49, \\ \upsilon = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7, u_2 = -7, \\ \upsilon = 12. \end{cases}$$

Демак, берилган система қуйидаги иккита системага тенг кучлидир:

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

Бу системаларни ўрниги қўйиш усулида ечиб, берилган системани ечимларини оламиз: (4;3), (3;4), (-4;-3), (-3;-4).

Жавоб: (4;3), (3;4), (-4;-3), (-3;-4).

7-Мисол . $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш: $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ -2xy ни ҳисобга олиб, берилган системани қуйдагича ёзамиз.

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 1 - 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1, \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 1, \\ y = 0, x = 1. \end{cases}$$

Жавоб: (0;1), (1,0).

12-§. Турли хил тенгламалар системасини ечиш.

1-Мисол. $\begin{cases} y^2 - xy = 12, \\ x^2 - xy = -3 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш.

$$\begin{cases} y^2 - xy = 12 \\ x^2 - xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y(x - y) = 12, \\ x(x - y) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -\dfrac{12}{y}, (y \neq 0), \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y(x - y) = -12, \\ y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x(x - 4x) = -12, \\ y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12x^2 = -12, \\ y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, x_2 = -1, \\ y_1 = 4, y_2 = -4. \end{cases}$$

Жавоб: (1;4) , (-1;-4).

2-Мисол . $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. Иккинчи тенгламани иккала томонини квадратга кўтариб қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x^2y^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1, \\ y^2=9 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x^2=9, \\ y^2=1. \end{cases}$$

Бундан $x_{1/2}=\pm 1,\quad y_{1/2}=\pm 3,\quad x_{3/4}=\pm 3,\quad y_{3/4}=\pm 1.$

Жавоб: (-1;-3),(-3;-1),(1;3),(3,1).

3-Мисол. $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0, \\ x^2-xy-2x-3y=6 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш: y=0 биринчи тенгламани ечими бўлмагани сабабли, тенгликни икки томонини y га бўламиз:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-2\left(\frac{x}{y}\right)-3=0,$$

$t=\frac{x}{y}$ алмаштириш ёрдамида тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$t^2-2t-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1=3,\quad t_2=-1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y}=3, \\ \frac{x}{y}=-1. \end{cases}$$

Демак, берилган система қуйидаги системаларга тенг кучлидир :

$$\begin{cases} x=3y, \\ x^2-xy-2x-2y=6 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x=-y, \\ x^2-xy-2x-3y=6. \end{cases}$$

Бу системаларни ўрнига қўйиш усулида ечиб, берилган системани ечимларини оламиз: (-2;2), $\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right),(6,2),\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Жавоб: $(-2;2);\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right);(6,2),\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

4-Мисол. $\begin{cases} x^2+y=6, \\ y^2+x=6 \end{cases}$ системани ечинг ва x+y нинг энг катта қийматини топинг.

Ечиш. Биринчи тенгламадан иккинчи тенгламани айириб, беринчи системага тенг кучли бўлган системаларни оламиз:

$$\begin{cases} x^2+y=6, \\ y=x \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x=1-y, \\ y^2+x=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y=6, \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6=0, \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-3, x_2=2, \\ y_1=-3, y_2=2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1-y, \\ y^2+x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y, \\ y^2-y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}, \quad x_2=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, \\ y_1=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, \quad y_2=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}. \end{cases}$$

Бундан x+y=-6 ; x+y=4; x+y=1.
Демак x+y ни энг катта қиймати 4.
Жавоб:

$$(-3;3);(2;2);\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2};\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right),\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2};\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right), \text{ва } 4.$$

5-Мисол . $\dfrac{3xy}{x+y}=5, \quad \dfrac{2xz}{x+z}=3, \quad \dfrac{yz}{y+z}=4$ системани ечинг.

Ечиш. Сунъий усулда ечамиз . Берилган система қуйидаги системага тенг кучлидир :

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{3}, \qquad \frac{x+z}{xz}=\frac{3}{2}, \qquad \frac{y+z}{yz}=\frac{1}{4}.$$

ёки

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{5}{3}, \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}, \qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}.$$

Бундан $\dfrac{1}{x}=\upsilon, \quad \dfrac{1}{y}=u, \quad \dfrac{1}{z}=\varpi$ алмаштириш қилиб, қуйдагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} u+\upsilon=\dfrac{5}{3}, \\ \upsilon+\omega=\dfrac{2}{3}, \\ u+\omega=\dfrac{1}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \upsilon=\dfrac{61}{120} \\ u=\dfrac{11}{120} \\ \omega=\dfrac{19}{120}. \end{cases}$$

Демак, берилган системани ечими

$$x=\frac{120}{61}, \; y=\frac{120}{11}, \; z=\frac{120}{19}.$$

Жавоб: $\left(\dfrac{120}{61};\dfrac{120}{11};\dfrac{120}{19}\right)$.

13-§. Масала ечиш усуллари.

Масалалар ечишнинг иккита усули мавжуд:

1. Арифметик усул.
2. Алгебраик усул.

Масалалар ечишнинг арифметик усулида ҳар бир масалага ўзига хос ёндашилиб, масалада берилган катталиклар орасидаги боғланиш мулоҳазалар ёрдамида, йўналтирувчи саволлар бериш йўли билан ечилади.

1-Масала. Фермада қўй ва товуқлар бор. Уларнинг бошларининг сони 172 та, оёқларининг сони эса 434 та. Фермада нечта қўй ва нечта товуқ бор?

Ечиш: Агар оёқлар сони 2 тадан бўлса жами бошлар сонини 2 га кўпайтирсак, яъни 172 ·2 = 344 та оёқ ҳосил бўлади. Жами оёқлар сонидан ҳосил бўлган оёқлар сонини айирсак, яъни 434-344 = 90 та оёқ қолади. қўйларнинг оёқлар сони тўртта бўлганлиги учун қолган оёқлар сонини 2 га бўламиз 90:2 =45. Демак фермада 45 та қўй бор экан. Шундай қилиб жами бошлар сонидан қўйлар сонини айирсак, яъни 172-45 =127 та товуқ борлиги маълум бўлади.

Жавоб: 45 та қўй; 127 та товуқ.

2-Масала. Агар сотувчи битта кўйлакни 800 сўмдан сотса 2000 сўм зарар кўради. Агар битта кўйлакни 1200 сўмдан сотса 6000 сўм фойда кўради. Сотувчида нечта кўйлак бор?

1-Савол. Қимматга сотилган 1 та кўйлак билан арзонга сотилган 1 та кўйлакнинг нархида қанча фарқ бор?

Ечиш: 1200сўм-800сўм = 400 сўм.

2-Савол. Олинадиган фойда ва кўриладиган зарар орасидаги фарқ неча сўм? 6000-(-2000) = 6000 +2000 = 8000 (сўм)

3-Савол. Фойда-зарар орасидаги бу фарқлар сотувчида нечта кўйлак бўлганда ҳосил бўлади? 8000:400 = 20 та.

Жавоб: Сотувчида 20 та кўйлак бўлган.

Берилган масалаларни арифметик усулда ечишда бир масалада қўлланиладиган мулоҳаза ёки ёндошув иккинчи масала учун тўғри келмаслиги мумкин. Бу эса берилган масалаларни ечишда ўқувчи учун ноқулайдир. Шунинг учун масалаларни ечишда алгебраик усулдан фойдаланиш қулайдир.

Масалалар ечишнинг алгебраик усули деб, масалада топилиши талаб этилган номаълум миқдор (катталик) бирор ҳарф билан белгиланади (масалан, x, y, z, t, ... ёки a, b, c...). Ҳамда, масала мазмунига қараб, бу номаълум ва масалада берилган миқдорлар орасида боғланиш ўрганилади.Сўнг бу масала мазмунига мос келадиган тенглама тузилади ва ечилади.

Алгебраик усулнинг афзалиги шундаки, бунда мазмун жиҳатдан турлича бўлган масалалар битта тенгламага келтирилиб ечилади.

3-Масала. Саватдаги ноклар яшикдагига қараганда 4 марта кам. Саватдан яшикка 10 та нок солганда сўнг, яшикдаги ноклар саватдаги ноклардан 6 марта ортиқ бўлиб қолди. Саватда қанча нок ва яшикда қанча нок бўлган?

Ечиш: Саватда x та нок бўлсин, у ҳолда яшикда 4 x та нок бўлган. Саватдан яшикка 10 та нок солгандан сўнг саватда (x -10) та, яшикда эса (4 x + 10)та нок бўлади. Масала шартига кўра, яшикдаги ноклар саватдаги ноклардан 6 марта кўп бўлиб қолган. Демак,

$$6(x - 10) = 4x + 10$$

чизиқли тенглама ҳосил бўлади. Тенгламани ечамиз:

$$6x - 60 = 4x + 10$$

$$6x - 4x = 10 + 60$$

$$2x = 70$$

$$x = 35.$$

Демак, саватда 35 та нок бўлган. 4 x = 4 ·35 = 140 бўлгани учун, яшикда 140 та нок бўлган.

Жавоб: 35 та нок ва 140 та нок.

4-Масала. Доскада бир сон ёзилган. Бир ўқувчи бу сонни 23 та орттирди, иккинчи ўқувчи 1 тага камайтирди. Биринчи ўқувчи олган натижа иккинчисиникидан 7 марта катта бўлади. Доскага қандай сон ёзилган?

Ечиш: Доскада ёзилган сонни x деб белгилайлик, у ҳолда биринчи ўқувчи $x + 23$ ни, иккинчи ўқувчи эса x -1 сонларни ҳосил қилишди. Масала шартига кўра биринчи ўқувчи хосил қилган сон иккинчисидан 7 марта катта бўлади. Демак

$$x + 23 = 7(x - 1)$$

тенглама ҳосил қиламиз ва ечамиз:

$$x + 23 = 7x - 7$$

$$x - 7x = -7 - 23$$

$$-6x = -30$$

$$x = 5.$$

Демак доскада 5 сони ёзилган.

Жавоб: 5.

Шундай қилиб, масалалар ечишнинг алгебраик усули масаланинг математик моделини тузиш учун асосий рол ўйнайди.

Масаланинг математик модели* масалада баён этилган муаммоли ҳолатни (вазиятни) «математика тили» га кўчириш, бу ҳолатни формулалар, тенглама ва тенгсизликлар орқали ифодалаш.

Масаланинг математик моделини тузиш қоидаси:

1. Масалада топилиш керак бқлган номаълумларни белгилаш.
2. Номаълум катталик билан берилган катталиклар орасидаги боғланишини топиш, ҳамда уни тенглама ёки тенгсизликлар ёрдамида ифодалаш.

---

* Модел сўзи лотинча «modulus» сўзидан олинган бўлиб, «ўлчов, меъёр» деган маънони англатади.

3. Масаладаги катталиклар изланаётган номаълум қандай шартларни қаноатлантириши зарурлигини аниқлаш.
4. 2-қоидадаги тузилган тенглама ёки тенгсизликни ечиб, ечим берилган масала мазмунини тўла акс эттириш ёки эттирмаслигини аниқлаш.

Шуни таъкидлаш лозимки, ўқувчи учун 2-қоида масаланинг математик моделини тузишдаги мураккаб босқичлардан биридир. Берилган масала мазмунига кўра чизиқли, квадрат ва рационал тенгламаларга, ҳамда тенгламалар системасига келтирилади ва ечилади.

5-Масала. Фабриканинг учта цехида 2600 киши ишлайди. Иккинчи цехда биринчисидагидан 100 киши ортиқ, учинчи цехда эса иккинчидагидан 120 киши ортиқ ишлайди. Ҳар қайси цехда қанча киши ишлайди?

Ечиш: Биринчи цехда x та киши ишлайди. Иккинчи цехда $x+100$ киши, учинчида эса $(x + 100) + 120$ киши ишлайди. Масала шартига кўра қуйидаги

$$x + x + 100 + (x+100)+120 = 2600.$$

чизиқли тенгламани тузамиз ва ечамиз:

$$x + x + 100 + x + 100 + 120 = 2600$$
$$3x = 2600 - 100 - 100 - 120$$
$$3x = 2280$$
$$x = 760.$$

Демак, биринчи цехда 760 киши ишлайди; $x + 100 = 860$ киши иккинчи цехда ишлайди: $x + 100 + 120 = 860+ 120 = 980$ киши учинчи цехда ишлайди.

Жавоб: 760; 860 ва 980 киши.

6-Масала Қудуққа тош ташланди ва унинг қудуқ тубига теккан овози 9 секунддан кейин эшитилди. Товуш тезлигини 320 м/сек, оғирлик кучининг тезланишини эса $g = 10$ м/с^2 деб ҳисоблаб, қудуқнинг чуқурлигини аниқланг.

Ечиш: Қудуқнинг чуқурлигини топиш учун тошнинг қудуқ тубига тушиш вақти t ни аниқлаш етарли, чунки қудуқнинг чуқурлиги эркин тушиш қонунига кўра $\frac{gt^2}{2}$ метрга тенг.

Масала шартига кўра $g = 10$ м/с^2.Шунинг учун қудуқнинг чуқурлиги $5t^2$ метрга тенг.

Иккинчи томондан, қудуқнинг чуқурлигини товуш тезлиги 320 м/с ни тошнинг қудуқ тубига бориб теккан ондан то зарба овози эшитилгунча ўтган вақтга, яъни (9-t) секундга кўпайтириб топиш мумкин. Демак, қудуқнинг чуқурлиги 320 (9-t) метрга тенг.

Қудуқнинг чуқурлиги учун топилган икки ифодани тенглаштириб, $5t^2 = 320\ (9\text{-}t)$ квадрат тенгламани ҳосил қиламиз ва ечамиз:

$$t^2 = 64\ (9\text{-}t),$$
$$t^2 + 64t - 9 \cdot 64 = 0.$$

$t^2=-32\pm\sqrt{32^2+64\cdot 9}=-32\pm\sqrt{32(32+18)}=-32\pm\sqrt{32\cdot 50}=-32\pm 40,\quad t_1=8, t_2=-72.$ Тош нинг тушиш вақти мусбат бўлгани учун t = 8 с бўлади.

Демак, қудуқнинг чуқурлиги қуйидагига тенг: $5t^2 = 5\cdot 8^2 = 320$ м.

Жавоб: 320 м.

7-Масала. Моторли қайиқ дарё оқими бқйича 30 км, оқимга қарши 4 км ўтди ва бутун йўлга 2 соат сарфлади. Агар дарё оқимининг тезлиги 3 км/соат бўлса, қайиқнинг турғун сувдаги тезлиги қанча?

Ечиш: x км/соат - қайиқнинг турғун сувдаги тезлиги бўлсин. У ҳолда қайиқнинг оқим бўйича тезлиги $(x+3)$ км/соат, оқимга қарши тезлиги эса $(x-3)$ км/соат бўлади.

Қайиқ дарё оқими бўйича 30 км ни $\frac{30}{x+3}$ соатда ўтган, дарё оқимига қарши эса 4 км ни $\frac{4}{x-3}$ соатда ўтган. Демак, бутун йўлга сарфланган вақт $\left(\frac{30}{x+3}+\frac{4}{x-3}\right)$ соатга тенг. Масаланинг шартига кўра қайиқ бутун йўлга 2 соат сарфлаган. Демак қуйидаги

$$\frac{30}{x+3}+\frac{4}{x-3}=2$$

рационал тенгламани тузамиз ва ечамиз:

$$\frac{30(x-3)+4(x+3)-2(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}30x-90+4x+12-2x^2+18=0\\ x+3\neq 0,\quad x-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x^2+34x-60=0\\ x\neq -3,\ x\neq 3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-17x+30=0\\ x\neq -3, x\neq 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2, x_2=15;\\ x\neq -3, x\neq 3.\end{cases}\Leftrightarrow x=2\,ва\,x=15.$$

Масаланинг мазмунига кўра қайиқнинг турғун сувдаги тезлиги оқим тезлигидан катта бўлиши керак. Бу шартни иккинчи илдиз, яъни 15 сони қаноатлантиради, биринчи илдиз қаноатлантирмайди.

Жавоб: 15 км/соат.

8-Масала. Академик лицей учун 30 та теннис ракеткаси ва 10 та футбол тўпи сотиб олинди, улар учун 6400 сўм тўланди. Агар 8 та ракетка 4 та тўпдан 300 сўм қиймат турса, ракетка қанча ва тўп қанча туради?

Ечиш: Ракетка x сўм, тўп эса y сўм турсин. 30 та ракетка ва 10 та тўп $30x + 10y$ сўм туради. Ҳаммаларига 6400 сўм тўлангани учун

$$30x + 10y = 6400$$

бўлади.

Масала шартига кўра 8 та ракетка 4 та тўпдан 300 сўм қиммат. Бундан иккинчи тенгламани ҳосил қиламиз:

$$8x - 4y = 300.$$

Масала саволига жавоб бериш учун x ва y нинг шундай қийматларини топиш керакки, улар биринчи ва иккинчи тенгламаларни қаноатлантирсин, яъни

$$\begin{cases} 30x+10y=6400 \\ 8x-4y=300 \end{cases}$$

Тенгламалар системасини қаноатлантирсин:

$$\begin{cases} 30x+10y=6400 \\ 8x-4y=300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=640 \\ 2x-y=75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=640 \\ 5x=715 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=640 \\ x=143 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\cdot 143+y=640 \\ x=143 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=143, \\ y=211. \end{cases}$$

Демак, ракетка 143 сўм, тўп эса 211 сўм.

Жавоб: ракетка 143 сўм; тўп 211 сўм.

Баъзи масалаларни ечишда (хусусан, аралашмалар, қотишмаларга оид) ўрта вазнли қиймат формуласидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади (ўқувчи бу формула билан I боб 9-§ да танишган).

9-Масала. Таркибида 15% олтин бўлган 20 грамм модда, таркибида 30% олтин бўлган 40 грамм модда билан аралаштирилди. Аралашма таркибида неча процент (фоиз) олтин бор?

Ечиш: Ўрта вазнли қиймат формуласи ушбу масала учун қуйидагича $\frac{a\cdot p+b\cdot q}{a+b}$ бўлади, бу ерда a = 20 грамм, b = 40 грамм, p = 15%, q = 30%. Демак, $\frac{20\cdot 15+40\cdot 30}{20+40}\% = \frac{300+1200}{60}\% = \frac{1500}{60}\% = 25\%$.

Жавоб: Аралашма таркибида 25% олтин бор.

ТЕСТ СИСТЕМАСИДА УЧРАЙДИГАН МАСАЛАЛАР

10-Масала. Поезд симёғоч ёнидан t_1=8 секундда ўтиб кетди. Худди ўша тезлик билан узунлиги $\ell=420$ метр бқлган кўприкдан t_2=32 секундда ўтди. Поезднинг узунлиги ва тезлигини топинг.

Ечиш: Агар поезд v ўзгармас тезлик билан юрса t вақт ичида босиб ўтилган йўл $S=vt$ формула билан ҳисобланади. Поезд симёғоч ёнидан t_1 секундда ўтди, деганда, равшанки поезд ўз узунлигига тенг масофани t_1 секундда ўтгани тушунилади.

Поезднинг узунлиги x деб белгилаймиз, у ҳолда поезднинг тезлиги $\frac{x}{t_1}$ бўлади. Поезднинг боши (тепловоз) кўприкка «кириб», охирги вагони кўприкдан чиқиб кетгунча поезд кўприкнинг узунлигини ва ўз узунлигига тенг йўлни, яъни $(\ell+x)$ м йўлни ўтади. Бу масофани у t_2 секундда босиб ўтади. Масала шартига кўра поезд бу масофани «ўша тезлик билан» ўтади. Демак,

$$\frac{x}{t_1}=\frac{\ell+x}{t_2} \Leftrightarrow x=\frac{\ell t_1}{t_2-t_1} \text{ (м)}$$

ёки

$$\frac{x}{8}=\frac{420+x}{32}\Leftrightarrow 32x=420\cdot 8+8x\Leftrightarrow 24x=420\cdot 8\Leftrightarrow x=140\text{м}.$$

Шунга кўра, поезднинг тезлиги

$$v=\frac{x}{t_1}=\frac{\ell}{t_2-t_1}(\text{м}/\text{с})$$

ёки

$$v=\frac{420}{24}\text{м}/\text{с}=17{,}5\ \text{м}/\text{с}.$$

17,5 м/с ни км/соат да ифодалаймиз

$$17{,}5\frac{м}{с}=17{,}5\frac{\frac{1км}{1000}}{\frac{1соат}{3600}}=17{,}5\cdot 3{,}6км/соат=63км/соат.$$

Жавоб: 140 м ва 63 км/соат.

11-Масала. Ораларидаги масофа S=280 км бўлган икки шаҳардан бир-бирига қараб бир вақтда икки автомобил йўлга чиқди. Улардан бирининг тезлиги v_1=60 км/соат, иккинчисининг тезлиги эса v_2=80 км/соат. Автомобиллар неча соатдан сўнг учрашади?

Ечиш: Масала ечишнинг формуласини тузамиз. Босиб ўтилган йўл $S=vt$ формуласига кўра, биринчи автомобилнинг босиб ўтган йўли $S=v_1t$, иккинчисиники эса, $S=v_2t$. Демак, $t=\frac{S}{v_1+v_2}$ учрашиш вақти.

Масала шартига кўра, v_1=60 км/соат, v_2=80 км/соат, S =280 км,

$t=\frac{280}{60+80}=\frac{280}{140}=2$ соат. Жавоб: 2 соатдан сўнг учрашади.

12-Масала. Мотоциклчи велосипедчини қувуб боряпди. Агар ҳозир улар орасидаги мисофа S =20 км, велосипедчининг тезлиги v_1=15 км/соат, мотоциклчининг тезлиги v_2=20 км/соат бўлса, мотоциклчи велосипедчига қанча вақтдан сўнг етиб олади?

Ечиш: Математик моделини тузамиз. x – велосипедчи босиб ўтган йўл, у бу йўлни $\frac{x}{v_1}$ соатда босиб ўтади. Мотоциклчи велосипедчини қувиб етиш учун (S+x) км масофани босиб ўтиш керак, у бу йўлни $\frac{S+x}{v_2}$ соатда босиб ўтади. Масала шартига кўра,

$t=\frac{S+x}{v_2}=\frac{x}{v_1}$ ҳосил қиламиз. Бундан,

$$t=\frac{20+x}{20}=\frac{x}{15}\Rightarrow\frac{20+x}{20}=\frac{x}{15}\Leftrightarrow 300+15x=20x\Leftrightarrow 5x=300\Leftrightarrow x=60\ \text{км}/\text{соат}.$$

Демак $t=\frac{x}{15}=\frac{60}{15}=4$ соат.

Шундай қилиб, мотоциклчи велосипедчига 4 соатдан сўнг етиб олади.

Жавоб: 4 соат.

ЎТИЛГАН МАВЗУЛАР БЎЙИЧА ТЕСТ –3

1. Айнан тенг ифодаларни топинг.

1) $2a+2b$ ва $2(a+b)$; 2) $|a|$ ва a; 3) $|-a^2|$ ва a^2.

A) 1 B) 1,2 C) 2;3 D) 1;3 E) 1;2;3

2. Қайси тенгликлар айният:

1) $(x-y)^2 = (y-x)^2$

2) $b - |-b| = 0$; 3) $2b = 2+b$.

A) 1;2 B) 2;3 C) 2 D) 3 E) 1;2;3.

3. $\frac{x}{3} + \frac{2x-1}{6} = 1 - \frac{x}{3}$ тенгламани ечинг

A) 0 B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $-\frac{5}{6}$ E) $\frac{7}{6}$

4. a нинг қандай қийматларида $(a-1)x+2=a+1$ тенгламанинг ечими ягона бўлади.

A) $a \neq 0$ B) $a \neq 1$ C) $a \neq -1$ D) $\varnothing$ E) $a \neq \pm 1$.

5. $4\frac{1}{11} : 10 = 4{,}5 : (3x-1)$ тенгламанинг аниқланиш соҳасини топинг.

A) $x \in R$ B) $x \in \left\{\frac{1}{3}\right\}$ C) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

D) $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ E) аниқлаб бўлмайди .

6. $2(x+3)(x-4) = (2x-1)(x+2) - 27$ тенглама илдизининг 10% ни топинг.

A) 0,02 B) 0,2 C) 0,3 D) 0,01 E) 0,1

7. Тенг кучли тенгламаларни топинг.

1) $2x-3 = 5-2x$ ва $\frac{2x-3}{x-1} = \frac{5-2x}{x-1}$;

2) $\frac{1}{2}x + 6 = 3x - 4$ ва $(x-4)^2 = 0$;

3) $(5x-1)^2 = (3x+5)^2$ ва $5x-1 = 3x+5$

A) 1; 2; 3 B) 1; C) 2; D) 1;2 E) 3.

8. $9x^2 + 6x + 1 = 0$ квадрат тенгламанинг илдизини топинг.

A) 0 B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ Д) 6 E) -6

9. a нинг қандай қийматларда $(a+1)x^2 + 2(a+1)x + a - 2 = 0$ тенглама ечимга эга эмас.

A) $a > -1$ B) $a < -1$ C) $a \neq 0$ D) $a < 1$, $a \neq 0$ E) $a = \pm 1$.

10. Агар x_1 ва x_2 $2x^2 - 5x + 1 = 0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, у ҳолда $x_1^3 + x_2^3$ ни топинг.

A) $5\frac{1}{4}$ B) $5\frac{3}{8}$ C) $11\frac{14}{16}$ D) топиб бўлмайди E) $11\frac{3}{8}$.

11. Агар $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ бўлса, квадрат тенгламани тузинг.

A) $x^2 - 2x + \sqrt{2} = 0$ B) $x^2 - (1 - \sqrt{2})x + 1 = 0$ C) $x^2 + 2x - 1 = 0$

Д) $2x^2 - 4x - 2 = 0$ E) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

12. $x^2 + ax + 8 = 0$ ва $x^2 + x + a = 0$ квадрат тенгламалар ҳеч бўлмаганда, битта умумий ечимга эга бўладиган а ни қийматларини топинг.

A) $a = 0$ B) $a = 6$ C) $a = 5$ D) $a = -5$ E) $a = -6$

13. $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$ тенгламанинг илдизлари кўпайтмасини топинг.

A) 12 B) 6 C) 24 D) -24 E) -12

14. $2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21 = 0$ тенгламанинг илдизларини топинг.

A) $-3; \frac{1}{2}$ B) $-3; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$ C) $-3; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{7}{2}$ D) $\varnothing$ E) $\frac{3}{2}; \frac{7}{2}$

15. $z^2 - (2 + 3i)z + 4i - 2 = 0$ тенгламанинг илдизлари кўпайтмасини топинг.

A) $2+i$ B) $2i\,(2+i)$ C) $2-4i$ D) -2 E) $4i$

16. $\frac{x-1}{x} - \frac{3x}{2(x-1)} = -\frac{5}{2}$ рационал тенгламани ечинг.

A) $-1; \frac{1}{4}$ B) $1; -\frac{1}{4}$ C) $2; \frac{1}{4}$ D) $-2; -\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{4}$.

17. a нинг қандай қийматларида $\begin{cases} ax - 8y = 12, \\ 2x - 6y = 15 \end{cases}$ система ечимга эга эмас.

A) $a = 0$ B) $a = \frac{8}{5}$ C) $a = \frac{1}{3}$ D) $a = \frac{16}{6}$ E) $a = \frac{16}{10}$

18. $2x + y + z = 7, x + 2y + z = 8, x + y + 2z = 9$ тенгламани ечинг ва $x + y + z$ ни топинг.

A) 3 B) 5 C) 0 D) 6 E) 8.

19. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases}$ системани ечинг ва x-y ни топинг

A) ± 2 B) ± 3 C) 2 D) 3 E) 0.

20. xy=3, xz=5, yz=15 системани ечинг ва xyz ни топинг.

A) ±10 B) ±12 C) ±15 D) ±18 E) ±8.

III–БОБНИ МУСТАҲКАМЛАШ УЧУН МАШҚЛАР.

1. Қуйидаги тенгламалар тенг кучлими?

1) $x = 4$ ва $(x-4)(x^2+4) = 0$ 2) $2x - 3$ ва $(2x-3)^2 = 0$;

3) $(7-x)\cdot 2 = 8$ ва $(x-3)(2x-1) = 0$; 4) $x = x+1$ ва $\frac{2x-5}{4-x} + \frac{3}{x-4} = 1$;

5) $\frac{(x+3)}{x+1} = \frac{2x-1}{x+1}$ ва $x + 3 = 2x - 1$; 6) $(x-2)^2 = 3(x-2)$ ва $x - 2 = 3$;

7) $7 - 2x + \frac{5}{x-2} - \frac{5}{x-2} = 11 - 4x$ ва $7 - 2x = 11 - 4x$;

8) $5 + 2x + \frac{5}{x-2} - \frac{5}{x-2} = 26 - x$ ва $5 + 2x = 26 - x$.

2. Қуйидаги тенгламалардан аниқланиш соҳасини топинг.

1) $\frac{x-4}{5} = 9 - \frac{8x-41}{9}$; 2) $3{,}5:x = 0{,}8:2{,}4$;

3) $\frac{x}{x+3} = \frac{5}{x+3}$; 4) $4{,}2:(2x-7) = 10:7\frac{1}{7}$;

5) $\frac{x}{x+3} + \frac{4}{x+1} = 2$; 6) $7(x + \frac{1}{x}) - 2(x^2 + \frac{1}{x^2}) = 9$

3. Тенгламани ечинг

1) $2x + 9 = 13 - x$; 2) $0{,}8x + 14 = 2 - 1{,}6x$

3) $1{,}7 - 0{,}3x = 2 + 1{,}7x$ 4) $\frac{1}{6}x - \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2}x$;

5) $1\frac{1}{3}x + 4 = \frac{1}{3}x + 1$ 6) $x - \frac{3}{4}x = 0$

7) $5x = 8x$ 8) $x - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}x$.

4. Тенгламани ечинг.

1) $0{,}2(x-1) + 0{,}5(3x-9) = \frac{1}{3}x - 2$;

2) $2x + (2x+3) = 4x - 1 + 2x - 3 + (7 - 2x)$;

3) $(0{,}7x - 2{,}1) - (0{,}5 - 2x) = 0{,}9(3x-1) + 0{,}1$;

4) $-3(2 - 0{,}4x) + 5{,}6 = 0{,}4(3x+1)$

5) $10(3x-2) - 3(5x+2) + 5(11-4x) = 25$;

6) $2x + 5 = 2(x+1) + 11(x+1) - 0{,}5(22x-2)$;

7) $5(2x-4) - 8{,}5 + x = 2(5x-10) - (8{,}5 - x)$;

8) $0{,}8(x-3) + 6(1+5x) = 5(1+6x) + 0{,}8x$.

5. Тенгламани ечинг.

1) $\frac{4x+7}{5} + \frac{3x-2}{2} - \frac{5x-2}{2} = 32$;

2) $\frac{3x-7}{4} - \frac{9x+11}{8} = -\frac{x-3}{2}$;

3) $x-\frac{x-1}{3}-\frac{2x-5}{5}+\frac{x+8}{6}=7;$

4) $7-2x-\frac{1-3x}{7}=2-\frac{2x-1}{3};$

5) $\frac{8}{9}x+\frac{34}{72}-\frac{9}{8}x=0;$

6) $\frac{x-3}{6}+x=\frac{2x-1}{3}-\frac{4-x}{2};$

7) $\frac{5x}{6}-\frac{1-3x}{5}=x-\frac{x-7}{15}-1;$

8) $\frac{37-3x}{2}-15=\frac{2x+7}{4}-2x+\frac{7}{4}.$

9) 6. *а* нинг қандай қийматларида қуйидаги тенгламалар чексиз кўп ечимга эга.

1) $6(ax-1)-a=2(a+x)-7;$

2) $0{,}5(5x-1)=4{,}5-2a(x-2);$

3) $(a-1)x+3=a+2;$

4) $(a+1)(a+2-ax)+4ax=4a+8;$

5) $5+ax-x=3x+1+a;$

6) $9x=3-a+3ax;$

7) $3x+9=a(a-x),$

8) $a(1-ax)-3ax=2a+3.$

7. *а* нинг қандай қийматларида қуйидаги тенгламалар ечимга эга бўлмайди.

1) $2a+3(x+1)=0{,}6(ax+15);$

2) $a^2x-15=5a-3ax;$

3) $a^2x=a(x+2)-2;$

4) $8+5x=2a(2-x);$

5) $3(x+1)=2+ax;$

6) $a(x+1)+3=8(x+1);$

7) $3x+9=a(a-x)+2;$

8) $2(a-2x)=ax+3.$

8. *а* нинг қандай қийматида қуйидаги тенгламаларнинг илдизи х га тенг бўлади.

1) $8+5x=2a(2-x),$ $x=4;$

2) $(2a-ax)a+x=1,$ $x=1;$

3) $(a^2-4)x-3x=5,$ $x=-1;$

4) $ax+(a+3)x=3a-1$ $x=0{,}5.$

9. Чизиқли кўпайтувчиларга ажратинг.

1) $3x^2-2x-7;$ 2) $-4x^2+5x-1;$

3) $2x^2+6x+1;$ 4) $3x^2-x+2;$

5) $4x^2-4x+1;$ 6) $-\frac{1}{2}x^2+4x-2;$

7) $16x^2-24x+9$; 8) $3x^2-13x-10$.

10. Тенгламаларни ечинг.

1) $x^2+6x-19=0$; 2) $5x^2=9x+2$;

3) $3x^2+32x+80=0$; 4) $15x^2-30=22x+7$;

5) $(x+4)^2=3x+40$; 6) $\frac{x^2-1}{2}-11x=11$;

7) $(2x-3)(5x+1)=2x+\frac{2}{5}$; 8) $-x(x+7)=(x-2)(x+2)$;

9) $0{,}7x^2=1{,}3x+2$; 10) $x^2-1{,}6x-0{,}36=0$.

11. Тенгламанинг илдизларини танлаш йўли билан топинг:

1) $x^2-11x-12=0$; 2) $x^2+x-56=0$;

3) $x^2-19x+88=0$; 4) $x^2-10x-24=0$;

5) $3x^2-7x+4=0$; 6) $5x^2-6x+1=0$.

12. x_1ва x_2 сонлари квадрат тенгламанинг илдизи бўлса, шу квадрат тенгламани тузинг.

1) $x_1=2, x_2=4$; 2) $x_1=-3, x_2=2$;

3) $x_1=3-\sqrt{7}$ $x_2=3+\sqrt{7}$; 4) $x_2=x_2=\frac{5}{6}$;

5) $x_1=\frac{-2-\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{-2+\sqrt{5}}{2}$; 6) $x_1=-\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2}$.

13. x_1 ва x_2 сонлари $2x^2-11x+13=0$ квадрат тенгламанинг илдизлари бўлса, қуйидагиларни ҳисобланг.

1) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; 2) $x_1^2+x_2^2$;

3) $x_1^3+x_2^3$; 4) $x_1^4+x_2^4$;

5) $\frac{x_1}{x_2}(1-x_2^2)+\frac{x_2}{x_1}(1-x_1^2)$; 6) $x_1^4-x_2^4$.

14. $5x^2-12x+c=0$ тенгламанинг илдизларидан бири иккинчисидан 3 марта катта, с ни топинг.

15. $4x^2+bx-27=0$ тенглама илдизларининг бўлинмаси -3 га тенг. b ни топинг.

16. $2x^2-5x+c=0$ тенгламанинг илдизлари квадратларининг айирмаси 0,25 га тенг. С ни топинг.

17. $4x^2+вx+c=0$ тенгламанинг илдизларидан бири 0,5 га тенг. Иккинчиси озод ҳадга тенг, в ва с ни топинг.

18. x_1ва x_2 сонлари $3x^2-2x+к=0$ тенгламанинг илдизлари бўлиб, бунда $2x_1=-3x_2$ экани маълум. к ни топинг.

19. x_1 ва x_2 сонлари $x^2-8x+к=0$ тенгламанинг илдизлари бўлиб, унда $3x_1+4x_2=29$ экани маълум. к ни топинг.

20. $x^2-6x+q=0$ тенглама илдизларидан бири 2 га тенг. Бу тенгламанинг барча коэффициентлари йиғиндисини топинг.

21. $x^2+px-12=0$ тенгламанинг илдизларидан бири 2 га тенг.

P: (-12) нимага тенг.

22. $x^2-9x+(m^2-4)(m^2-9)=0$ тенгламанинг илдизи нолга тенг бўладиган m нинг барча қийматлари кўпайтмасини топинг.

23. x_1 ва x_2 сонлари $x^2+ax+6=0$ тенгламанинг илдизлари бўлиб, бунда $x_1^2+x_2^2=13$ бўлса, x_1+x_2 ни топинг.

24. x_1 ва x_2 сонлари $x^2+x+a=0$ тенгламанинг илдизлари бўлиб, бунда $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}$ экани маълум, a ни топинг.

25. a нинг қандай қийматларида $x^2-(a-2)x-a-3=0$ тенгламанинг илдизлари квадратларининг йиғиндиси 9 га тенг бўлади.

26. a нинг қандай қийматларида қуйидаги квадрат тенгламалар ечимга эга бўлади.

1) $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$;

2) $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$;

3) $x^2-ax+24+4=0$;

4) $(a+1)x^2-x+(1-a)=0$;

5) $ax^2+2(a+1)k+a+3=0$;

6) $(a-2)x^2+ax+1=0$;

7) $ax^2=1$;

8) $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$.

27. a нинг қандай қийматларида қуйидаги квадрат тенгламалар ягона ечимга эга бўлади.

1) $10x^2-10x+a=0$;

2) $3x^2+ax-5=0$;

3) $ax^2-6x+9=0$;

4) $ax^2+4x-2=0$;

5) $4x^2-ax+a-3=0$;

6) $4x^2-15x+4a^2=0$.

28. a нинг барча қийматларида қуйидаги квадрат тенгламаларни текширинг.

1) $ax^2+8x-15=0$;

2) $6x^2-3x+a=0$;

3) $5x^2+ax+1=0$;

4) $7x^2-ax-1=0$;

5) $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$;

6) $x^2+2x-8-a(a-4)=0$;

7) $(a+1)x^2-(a-1)x-2a=0$;

8) $x^2-(a-2)x-(a+3)=0$.

29. Тенгламаларни ечинг.

1) $x^8-17x^4+16=0$;

2) $x^6+7x^3-8=0$;

3) $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)-24=0$;

4) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$;

5) $2x^3+3x^2+3x+2=0$;

6) $x^3-5x^2-5x+1=0$;

7) $2x^4+x^3-11x^2+x+2=0$;

8) $x^4+x^3-10x^2+x+1=0$;

9) $x(x+1)(x-1)(x+2)=24$;

10) $x(x-1)(x+2)(x+1)=3$;

11) $(x+3)^4+(x+5)^4=16$;

12) $(x-2)^6+(x-4)^6=64$;

13) $7(x+\frac{1}{x})-2(x^2+\frac{1}{x^2})=9$;

14) $x^4+x^3+x+1=4x^2$.

30. Тенгламаларнинг рационал ечимларини топинг.

1) $x^3-2x^2-x-2=0;$ 2) $x^3-6x^2+15x-14=0;$

3) $6x^4-x^3-7x^2+x+1=0;$ 4) $x^4-4x^3+7x^2-16x+12=0;$

5) $x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1=0;$ 6) $x^5-3x^4-2x^3-4x^2-24x+32=0$

31. Амалларни бажаринг.

1) $(2+3i)(3-2i)+(2-3i)(3+2i);$

2) $(3+4i)(4-3i)+(3-4i)(4+3i);$

3) $(1+i)^3-(1-i)^3;$

4) $(1-i)^4+(1+i)^4;$

5) $\dfrac{3+i}{3-i}+\dfrac{3-i}{3+i};$

6) $\dfrac{2-i}{2+i}+\dfrac{2+i}{2-i};$

7) $\dfrac{(1+i)(2+i)}{2-i}-\dfrac{(1-i)(2-i)}{2+i};$

8) $\dfrac{(2+i)^3-(2-i)^3}{(2+i)^2-(2-i)^2}.$

32. Берилган комплекс сонларга қўшма комплекс сонларни топинг.

1) $3+2i$; 2) $(1+i)(2+3i);$ 3) $(1+i)^2;$

4) $i(1+i);$ 5) $\dfrac{1}{i^3};$ 6) $-2i.$

33. Комплекс номаълумли квадрат тенгламаларни ечинг.

1) $z^2-4z+5=0;$ 2) $z^2+4z+13=0;$

3) $4z^2+4z+5=0;$ 4) $16z^2-32z+17=0;$

5) $z^4-8z^2-9=0;$ 6) $z^4+2z^2-15=0;$

7) $z^2-3z+3+i=0;$ 8) $iz^2-2iz-i^3=0.$

34. Илдизлари

1) $z_1+2+2i,\quad z_2=2-2i;$ 2) $z_1=2+3i,\quad z_2=2-3i;$

3) $z_1=-4+i,\quad z_2=-4-i;$ 4) $z_1=-7-4i,\quad z_2=-7+4i$ бўлган квадрат тенглама тузинг.

35. Рационал тенгламаларни ечинг.

1) $\dfrac{2x-3}{x-1}+1=\dfrac{6x-x^2-6}{x-1};$ 2) $\dfrac{x^2}{x^2-6x}=\dfrac{4(3-2x)}{x(6-x)};$

3) $\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{3x-1}{x+2}=\dfrac{x-7}{x-1}+4;$ 4) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{25}{6};$

5) $\dfrac{x-4}{x-5}+\dfrac{x-6}{x+5}=2;$ 6) $\dfrac{2x-2}{x+3}+\dfrac{x+3}{x-3}=5;$

7) $\dfrac{2}{x^2+3}+\dfrac{4}{x^2+7}=1;$ 8) $\dfrac{1}{x^2+4}+\dfrac{1}{x^2+5}=\dfrac{11}{30};$

9) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=-2{,}5;$ 10) $\dfrac{x^2-3x}{x-2}+\dfrac{x-2}{x^2-3x}=2{,}5;$

11) $\dfrac{2x}{3x^2-x+2}-\dfrac{7x}{3x^2+5x+2}=1;$ 12) $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1;$

13) $\frac{x-3}{x-1}+\frac{x+3}{x+1}=\frac{x+6}{x+2}+\frac{x-6}{x-2}$; 14) $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-4}{x-3}+\frac{x+4}{x+3}-\frac{28}{15}$;

15) $x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11$; 16) $x^2+\frac{81x^2}{(9+x)^2}=40$;

17) $\frac{1}{x^2+2x+4}-\frac{1}{x^2+2x+5}=\frac{1}{12}$; 18) $\frac{x^2+x+2}{x^2+x+1}+\frac{x^2+x+6}{x^2+x+3}=4$;

36. Системаларни ечинг.

1) $\begin{cases}2x+3y=1,\\3x-2y=9;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=3,\\2x+2y=8;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+2y=4,\\y-3x=7;\end{cases}$

4) $\begin{cases}3x-y=1,\\12x-4y=4;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\frac{1}{4}x-y=5,\\\frac{1}{2}x-\frac{1}{7}y=3;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}2x-3y=-1\\\frac{y}{x}=0{,}75;\end{cases}$

7) $\begin{cases}\frac{x+y+4}{5}+\frac{x-y-4}{7}=9,\\\frac{x+y+4}{5}-\frac{x-y-4}{7}=1;\end{cases}$ 8) $\begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y=\frac{34}{15},\\\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}y=\frac{16}{15};\end{cases}$

9) $\begin{cases}5y+8(x-3y)=7x-12;\\9x+3(x-9y)=11y+46;\end{cases}$ 10) $\begin{cases}-2(x-y)+16=3(y+7),\\6x-(x-5)=-8-(y+1).\end{cases}$

37. a нинг қандай қийматларида система ягона ечимга эга?

1) $\begin{cases}3x-2y=6,\\ax+y=-3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}ax+ay=a^2,\\x+ay=2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x-(a+1)y=a+2,\\ax+y=a-3;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2x-3=0\\ax+y(a-1)=\frac{3}{2};\end{cases}$

38. a нинг қандай қийматларида система чексиз кўп ечимларга эга.

1) $\begin{cases}(a+1)x+8y=4a,\\ax+(a+3)y=3a-1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+ay=1,\\ax-3ay=2a+3;\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x+ay=3,\\ax+3y=3;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}(a+1)x-y=a+2,\\x+(a-1)y=2;\end{cases}$

5) $\begin{cases}ax-(a+1)y=6,\\7ax-28y=6(a+4);\end{cases}$ 6) $\begin{cases}2x+ay=a+2,\\(a+1)x+2ay=2a+4.\end{cases}$

39. a нинг қандай қийматларида система ечими эга эмас.

1) $\begin{cases}x+ay=1,\\x-3ay=2a+3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}-4x+ay=1+a,\\(a+6)x+2y=a+3;\end{cases}$

3) $\begin{cases}16x+ay=4,\\ax+9y-3=0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+ay=1,\\ax+y=2a;\end{cases}$

5) $\begin{cases}(a+1)x-3y=4,\\2x-ay=3;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}a^2x+(2-a)y=a^2+4\\ax+(2a-1)y=a^5-2.\end{cases}$

40. Системани ечинг.

1) $\begin{cases} 6x+2y-z=2, \\ 4x-y+3z=-3, \\ 3x+2y-2z=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+z=8, \\ x+y+2z=9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x-4y+5z=18, \\ 2x+4y-3z=26, \\ x-6y+8z=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+2y+z+7=0, \\ 2x+y-z-1=0, \\ 3x-y+2z-2=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x+y+3z=13, \\ x+y+z=6, \\ 3x+y+z=8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+2y+3z=3, \\ 3x+y+2z=7, \\ 2x+3y+z=2. \end{cases}$

41. Системани ечинг.

1) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x+y=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13, \\ x+y=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=7, \\ xy=12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^3y^3=-8; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-y^2=15, \\ x+y=3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2-y^2=8, \\ x-y=2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2=29, \\ xy=10 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2+y^2=26 \\ xy=5 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x-xy-y=-7, \\ x+xy-y=1; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=11, \\ xy=5; \end{cases}$

42. Системани ечинг.

1) $\begin{cases} x+y=xy, \\ x+y=x^2-y^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x^2y+xy^2=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x^2-xy-12y^2=0, \\ x^2+2y^2=\frac{17}{16}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y^2-xy=-12, \\ x^2-xy=28; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=45 \\ x+y=5. \end{cases}$

43. Системани ечинг ва $x+y$ нинг энг катта қийматини аниқланг.

1) $\begin{cases} 2(x+y)-xy=4, \\ 3xy+x+y=23; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+3xy=18, \\ 3y^2+xy=6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ (x-3)(y-5)=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x^2y+xy^2=20; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y^2-xy=3, \\ x^2-xy=-2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^3y^3=-8, \\ x^3+y^3=-7. \end{cases}$

44. Қуйидаги тенглик ўринли бўладиган a, b ва c сонларни топинг.

1) $x^3+3x^2-x-3=(x-2)(x^2+bx+c)+a$;

2) $4x^3+7x^2+7x-6=(ax+b)(x^2+x+1)+c$;

3) $\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}$;

4) $\dfrac{x+5}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+2}+\dfrac{c}{x+3}$;

5) $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$;

6) $\dfrac{x^2+1}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$;

7) $\dfrac{2x^2-x+1}{(x+1)(x-2)^2}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{(x-2)^2}$;

8) $\dfrac{x^2+3x}{(x-1)(4x^2+8x+1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{4x^2+8x+1}$.

45. Корхона кассасида 10 сўмлик ва 25 сўмликларнинг умумий сони 600 та ва улар 6600 сўмни ташкил қилади. Кассада нечта 10 сўмлик ва нечта 25 сўмлик бор?

46. 5 тонна ва 10 тонна юк кўтарадиган 58 та машина билан 445 тонна юкни ташишди. Юк ташишда қанча 5 тонналик ва қанча 10 тонналик машиналар банд бўлган?

47. Бир идишда ҳарорати 85° ва иккинчи идишда ҳарорати 45° бўлган сув бор. Уларни аралаштириб, ҳарорати 60° бўлган 2 л сув ҳосил қилиш учун ҳар бир идишда қанчадан сув олиш керак?

48. Агар савдогар молнинг 1 кг ини 15,5 сўмдан сотса, 26,5 сўм зарар кўради. Агар 1 кг ини 18,5 сўмдан сотса, 27,5 сўм фойда кўради. Савдогарда неча кг мол бор?

49. Поезд симёғоч ёнидан 10 секундда ўтиб кетди. Худди ўша тезлик билан узунлиги 540 метр бўлган кўприкни 40 секундда ўтди. Поезднинг тезлиги ва узунлигини топинг.

50. Пичан ғарами битта от учун 8 кунга, сигир учун 12 кунга, қўй учун эса 24 кунга етади. Пичан ғарамини, от, сигир, қўй биргаликда қанча вақтда еб тугатади?

51. Свитер, шапка ва шарф тўқиш учун 830 г жун ишлатилди. Бунда шапка учун свитерга қараганда 4 марта кам, шарфга қараганда эса 10 г ортиқ жун кетган. Ҳар бир буюмга қанчадан жун кетган?

52. Теплоход дарё оқими буйлаб 10 соат оқимга қарши 12 соат ўтганча йўл юради. Агар дарё оқимининг тезлиги 3км/соат бўлса, теплоходнинг тезлигини топинг.

53. Ораларидаги масофа 360 км бўлган икки шаҳардан бир-бирига қараб бир вақтда иккита поезд йўлга чиқди. Улардан бирининг тезлиги 50 км/соат, иккинчисининг тезлиги эса 70 км/соат. Поездлар неча соатдан сўнг учрашади?

54. Теплоход оқим буйинча 3 соат ва оқимга қарши 2 соат сузиб, 240 км масофани ўтди. Шу теплоход оқимга қарши 3 соатда оқим буйинча 2 соатда сузганига қараганда 35 км ортиқ масофани ўтади.

Теплоходнинг оқимга қарши тезлигини ва оқим буйинча тезлигини топинг.

55. Ораларидаги масофа 280 км бўлган A ва B шаҳарлардан бир вақтда икки автомобил йўлга чиқди. Агар автомобиллар бир-бирига қараб юрса, улар 2 соатдан кейин учрашади. Агар улар бир йўналишда юрса, A пунктдан чиққан автомобил B пунктдан чиққан автомобилни 14 соатда қувиб етади. Ҳар қайси автомобилнинг тезлиги қанча?

56. Бир соннинг ярми билан иккинчи соннинг $\frac{2}{3}$ қисмининг айирмаси 2 га тенг. Агар биринчи сон ўзининг $\frac{1}{6}$ қисмича камайтирилса, иккинчи сон ўзининг $\frac{1}{6}$ қисмича орттирилса, уларнинг йиғидиси 59 га тенг бўлади. Бу сонларни топинг.

57. Жамоа хўжаликда кузги экинлар баҳорги экинларга қараганда 480 га ортиқ ерни эгилайди. 80% кузги ва 25% баҳорги экинлар йиғиб олингандан кейин кузги экинлар экилган майдон баҳорги экинлар экилган майдондан 300 га кам колди. Жамоа хўжалик қанча ерга кузги ва қанча ерга баҳорги экин эккан?

58. Икки сон ёзилди. Агар биринчи сон 30% орттирилса, иккинчи сон эса 10% камайтирилса, уларнинг йиғиндиси 6 та ортади. Агар биринчи сон 10%, иккинчи сон эса 20% камайтирилса, уларнинг йиғиндиси 16 та камаяди. Қандай сонлар ёзилган?

59. Оддий касрнинг махражи суратидан 3 та ортиқ. Агар бу касрнинг суратига 7, махражига эса 5 қўшилса, каср $\frac{1}{2}$ га ортади. Шу касрни топинг.

60. Чанғичилардан бири 20 км масофани иккинчисидан 20 минут тезроқ ўтди. Чанғичилардан бири иккинчисидан 2 км/соат ортиқ тезлик билан юрганини билган ҳолда ҳар бир чанғичининг тезлигини топинг.

61. Бир сувоқчи топшириқни иккинчисига қараганда 5 соат олдин тугатиши мумкин. Улар иккиласи биргаликда бу топшириқни 6 соатда бажаришади. Топшириқни ҳар бир сувоқчи неча соатда бажаради?

62. Ораларидаги масофа 225 км бўлган A пристандан B пристанга теплоход жўнади. Жўнаганидан 1,5 соат ўтгач, у $\frac{1}{2}$ соат тўхтаб қолди ва B га вақтида етиб бориш учун тезлигини 10 км/соат орттирди. Теплоходнинг дастлабки тезлигини топинг.

63. Ота билан ўғил 240 метр йўл ўтишди, бунда отаси 100 та кам қадам ташлади. Агар отасининг қадами ўғлиникидан 20 см узун бўлса, ота ва ўғил қадамининг узунлигини топинг.

IV БОБ. ТЕИГСИЗЛИКЛАР

1–§ Сонли тенгсизликлар.

1.1. Сонли тенгсизликларнинг таърифи

1–Таъриф . Иккита сон ёки ифода $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ ишоралар билан боғланган ифодалар тенгсизликлар дейлади

Масалан: $5 < 8$; $7 \leq 7$; $a + 5 > 0$; $9-x \leq 0$; $x+5 \geq 9$, $5 < 9 \leq a$.

2–Таъриф . Агар тенгсизликларда $>$ (катта) ёки $<$ (кичик) ишоралар қатнашса, бундай тенгсизликлар қатъий тенгсизликлар дейилади.

Масалан, $\frac{5}{6} > \frac{1}{2}$; $0{,}85 < 0{,}87$, $a > b$, $c < d$ – қатъий тенгсизликлардир.

3–Таъриф . Агар тенгсизликларда $\geq$ (катта ёки тенг) ёки $\leq$ (кичик ёки тенг) ишоралар қатнашса, бундай тенгсизликлар ноқатъий тенгсизликлар дейилади.

Масалан, $11 \leq 12$; $7 \geq 7$; $4 \leq 4$; $a \geq b$; $c \leq d$ – ноқатъий тенгсизликлардир.

Шундай қилиб:

1) Ушбу $a > b$ тенгсизлик a сони b дан катта эканлигини билдиради ва a катта b деб ўқилади;
2) Ушбу $a < b$ тенгсизлик a сони b дан кичик эканлигиии билдиради ва а кичик b деб ўқилади;
3) Ушбу $a \leq b$ тенгсизлик a сони b дан катта эмаслигини билдиради, яъни $a < b$ ёки $a = b$ ва а кичик ёки тенг b деб ўқилади;
4) Ушбу $a \geq b$ тенгсизлик a сони b дан кичик эмаслигини билдиради, яъни $a > b$ ёки $a = b$ ва a катта ёки тенг b деб ўқилади.

Масалан, агар автобусдаги жойлар сони 40 та бўлса у ҳолда а йўловчилар сони 40 тадан кам ёки тенг бўлиши мумкин. Бу ҳолда бундай ёзиш мумкин : $a \leq 40$.

4–**Таъриф .** Икки $a > b$ ва $c > d$ ($a \geq b$ ва $c \geq d$) ёки $x < y$ ва $z < t$ ($x \leq y$ ва $z \leq t$) тенгсизликлар бир хил ишорали тенгсизликлар дейилади.

5–**Таъриф.** Икки $a > b$ ва $c < d$ ($a \leq y$ ва $z \geq t$) тенгсизликлар ҳар–хил (ёки қарама–қарши) ишорали теигсизликлар дейилади.

6 − **Таъриф.** Тенгсизликнинг ҳар икки қисми фақат сонлардангина иборат бўлса, бундай тенгсизликлар сонли тенгсизликлар дейилади.

Масалан, $6 > 5$, $82 < 100$, $15 \le 15$, $-20 > -31$ сонли тенгсизликлардир.

Агар сонли тенгсизликлар чап қисми ўнг қисмидан ҳар доим $>$ ёки $<$ ($\ge$ ёки $\le$) бўлса, у ҳолда бундай тенгсизликка тўғри тенгсизлик дейлади.

Масалан: 1) $5 > 3$; $4\cdot 5 > 15$; $-25 < -5$; $-\frac{1}{3} < 0$ − тўғри теигсизликлардир. Аммо $3 > 5$; $12 < 7$; $5 < -25$ тенгсизликлар иотўғри теигсизликлардир.

2) $x^2 > -1$ тенгсизлик $x \in R$ да тўғри тенгсизликдир, лекин $\sqrt{x^2+1} < -1$ тенгсизлик $x \in R$ да нотуғри тенгсизликдир.

1.2. Сонли теигсизликларииг хоссалари.

a, b, c берилган сонлар бўлсин. У ҳолда:

1) агар $a > b$ бўлса, $b < a$ бўлади ва аксинча, агар $b < a$ бўлса, $a > b$ бўлади.
2) агар $a > b$ бўлса, $a - b > 0$ бўлади ва аксинча, агар $a - b > 0$ бўлса, $a > b$ бўлади.
3) агар $a < b$ бўлса, $a - b < 0$ бўлади ва аксинча, агар $a - b < 0$ бўлса, $a < b$ бўлади.
4) агар $a > b$ ва $b > c$ бўлса, у ҳолда $a > c$ бўлади;
5) агар $a > b$ ва $c > 0$ бўлса, у ҳолда $a \cdot c > b \cdot c$ ёки $a : c > b : c$ бўлади;
6) агар $a > b$ ва $c < 0$ бўлса, у ҳолда $a \cdot c < b \cdot c$ ёки $a : c < b : c$ бўлади;
7) агар $a > b$ бўлса, у ҳолда $a \pm c > b \pm c$ бўлади;

Хоссаларга оид мисоллар:

1−Мисол. 0,35 ва $\frac{1}{3}$ соиларини таққосланг.

Ечиш. Уларни айирмасини топамиз:

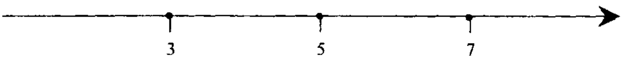
$$0{,}35 - \frac{1}{3} = \frac{35}{100} - \frac{1}{3} = \frac{105-100}{300} = \frac{5}{300} = \frac{1}{60}.$$

Бундан $0{,}35 - \frac{1}{3} > 0$ бўлгани учун $0{,}35 > \frac{1}{3}$ бўлади.

Жавоб: $0{,}35 > \frac{1}{3}$.

2−Мисол . $7 > 5$ ва $5 > 3$ бўлса, $7 > 3$ бўлишини исботланг.

Исбот. Геометрик нуқтаи назарда 7 сони 5 сонидан ўнгда ётади ва 5 сони 3 сонидан ўнгда ётади, у ҳолда 7 сони 3 сонидан ўнгда ётади:



исботланди.

3−Мисол . Тенгсизликни иккала қисмини кўрсатилган сонга кўпайтиринг.

а) $3{,}8 > 2{,}4$ ни 5 га б) $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$ ни -12 га.

Ечиш. а) $3{,}8 > 2{,}4$ тенгсизликнинг иккала қисмини 5 га кўпайтириб, $19 > 12$ ни ҳосил қиламиз;

б) $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$ тенгсизликнинг иккала қисмини -12 га кўпайтириб, $-10 < -8$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб: а) $19 > 12$; б) $-10 < -8$.

4−Мисол . $-2 < 4$ тенгсизликнинг иккала қисмига а) 5; б) -8 сонини қўшиш натижасида ҳосил бўладиган тенгсизликни ёзинг.

Ечиш а) $-2 < 4 \Leftrightarrow -2 + 5 < 4 + 5 \Leftrightarrow 3 < 9$;

б) $-2 < 4 \Leftrightarrow -2 - 8 < 4 - 8 \Leftrightarrow -10 < -4$;

Жавоб: а) $3 < 9$; б) $-10 < -4$.

5−Мисол . Агар $5a-2b>2a+b$ бўлса, у ҳолда $a > b$ бўлишини исботланг.

Исбот.

$$5a - 2b > 2a + b \Leftrightarrow 5a - 2a - \underline{2b} + \underline{2b} > \underline{\underline{2a}} - \underline{\underline{2a}} + b + 2b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3a > 3b \Leftrightarrow a > b.$$

1.3. Сонли тенгсизликлар устида амаллар.

1) Агар $a > b$ ва $c > d$ бўлса, у ҳолда $a + c > b + d$ бўлади, яъни бир хил ишорали тенгсизликларнинг чап қисмини чап қисмига, ўнг қисмини ўнг қисмига қўшиш керак.

Мисоллар:

а) $\begin{array}{r} _{+}8>2{,}5 \\ 3>1 \\ \hline 11>3{,}5 \end{array}$ *б*) $\begin{array}{r} _{+}0{,}35<1{,}4 \\ 0{,}25<1{,}8 \\ \hline 0{,}6<3{,}2 \end{array}$ *в*) $\begin{array}{r} _{+}1{,}7<1{,}8 \\ -3<-2 \\ \hline -1{,}3<-0{,}2 \end{array}$

г) $2{,}3>1{,}3$ ни $-1{,}2<2{,}1$ тенгсизликка қўшиш учун биринчисини $1{,}3<2{,}3$ кўринишида ёзиб олиб, сўнгра қўшиш ёки иккинчисини $2{,}1>-1{,}2$ кўринишда ёзиб олиб, сўнгра қўшиш керак, яъни

$$\begin{array}{r} _{+}1{,}3<2{,}3 \\ -1{,}2<2{,}1 \\ \hline 0{,}1<4{,}4 \end{array} \quad \textit{ёки} \quad \begin{array}{r} _{+}2{,}3>1{,}3 \\ 2{,}1>-1{,}2 \\ \hline 4{,}4>0{,}1 \end{array}.$$

2) Агар $a>b$ ва $c<d$ бўлса, у ҳолда $a-c>b-d$ бўлади, яъни қарама–қарши ишорали тенгсизликларниig чап қисмидан чап қисмини, ўнг қисмидан ўнг қисмини айириб, биринчи тенгсизликнинг ишорасини қўйиш керак.

Мисоллар:

а) $\begin{array}{r} _{-}3>2 \\ 2<5 \\ \hline 1>-3 \end{array}$ *б*) $\begin{array}{r} _{-}0{,}85<1{,}5 \\ 0{,}15>0{,}05 \\ \hline 0{,}7<1{,}45 \end{array}$. *в*) $\begin{array}{r} _{-}2{,}5<\dfrac{10}{3} \\ -0{,}5>-\dfrac{10}{3} \\ \hline 3<\dfrac{20}{3} \end{array}$ *а*) $\begin{array}{r} _{-}81{,}9>-2{,}7 \\ 3{,}4<10{,}8 \\ \hline 78{,}5>-13{,}5 \end{array}$

3) Агар $a>b>0$ ва $c>d>0$ бўлса, у ҳолда $ac>bd$ бўлади, яъни қисмлари мусбат бўлган бир ҳил ишорали тенгсизликларнинг мос қисмларини кўпайтириш мумкин.

Мисоллар:

а) $\begin{array}{r} _{\times}3{,}2<3{,}1 \\ 3<2 \\ \hline 9{,}6<6{,}2 \end{array}$ *б*) $\begin{array}{r} _{\times}2\dfrac{2}{3}>1\dfrac{1}{3} \\ 12>6 \\ \hline 32>8 \end{array}$

в) $4<2x+1$ ни $3<2x-1$ га кўпайтиринг. Шартга кўра $2x+1>0$, $2x-1>0$ бўлиш керак, бундан $x>\frac{1}{2}$ келиб чиқади. Шундай қилиб, берилган тенгсизликларнинг қисмлари мусбат бўлиши учун $x>\frac{1}{2}$ бўлиши керак ва қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\times\begin{array}{r} 4<2x+1 \\ 3<2x-1 \\ \hline 12<4x^2-1 \end{array}$$

4) Агар a ва b мусбат сонлар бўлиб, $a > b$ бўлса, у ҳолда исталган натурал n сони учун $a^n > b^n$ бўлади.

Мисоллар:

$a)$ $3>2 \Rightarrow 3^2>2^2 \Rightarrow 9>4$

$б)$ $1{,}2<2{,}2 \Rightarrow 1{,}2^3<2{,}2^3 \Rightarrow 1{,}728<10{,}644$;

$в)$ $3>2 \Rightarrow 3^2>2^2,\ \ 3^3>2^3,\ \ 3^{10}>2^{10}$

ва ҳоказо.

5) Агар a *ва* b мусбат сонлар бўлиб, $a<b$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ бўлади.

Мисоллар:

$а)$ $\frac{1}{2}<\frac{2}{3} \Rightarrow 2>\frac{3}{2}$; $б)$ $0{,}8>0{,}3 \Rightarrow \frac{1}{0{,}3}>\frac{1}{0{,}8} \Rightarrow \frac{10}{3}>\frac{10}{8}$; $в)$ $7<8 \Rightarrow \frac{1}{7}>\frac{1}{8}$.

6) Агар $a>b>0$ ва $c>d>0$ бўлса, у ҳолда $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$ бўлади.

Мисоллар:

$а)$ $4>3,\ ва\ 6>4 \Rightarrow \frac{4}{4}>\frac{3}{6} \Rightarrow 1>\frac{1}{2}$;

$б)$ $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}\ ва\ 2>1 \Rightarrow \frac{1}{3}:1>\frac{1}{4}:2 \Rightarrow \frac{1}{3}>\frac{1}{8}$;

$в)$ $0{,}5<0{,}8\ ва\ 0{,}1<0{,}2 \Rightarrow 0{,}8:0{,}1>0{,}5:0{,}2 \Rightarrow 8>2{,}5$.

1.4. Қўш тенгсизликларининг ҳоссалари ва улар устида амаллар.

7–Таъриф. Қўш тенгсизлик деб $a<b<c$ ёки $a>b>c$ кўринишдаги тенгсизликларга айтилади.

Таърифдаги $>$ ва $<$ ишоралар ўрнида $\geq$ ва $\leq$ ишоралар ҳам туриши мумкин.

Масалан, $-1<10<11$; $0{,}8>0{,}6>\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{7}\leq x\leq 4$; $-5\leq b<2$.

Қўш тенгсизликларнинг асосий хоссалари:

1) Агар $b>a$ ва $b<c$ бўлса, у ҳолда $a<b<c$ бўлади, яъни $a<b<c \Leftrightarrow (a<b)\bigcap(b<c)$.

2) Агар $b\geq a$ ва $b<c$ бўлса, у ҳолда $a\leq b<c$ бўлади, яъни $a\leq b<c \Leftrightarrow (a<b)\bigcap(a=b)\bigcap(b<c)$.

3) Агар $a<b<c$ бўлса, у ҳолда $c>b>a$ бўлади, яъни $a<b<c \Leftrightarrow c>b>a$.

4) Агар $a<b<c$ бўлиб, d — ихтиёрий сон бўлса, у ҳолда $a+d<b+d<c+d$ бўлади.

5) Агар $a<b<c$ бўлиб, $n>0$ бўлса, у ҳолда $an<bn<cn$ ёки $a:n<b:n<c:n$ бўлади.

6) Агар $a<b<c$ бўлиб, $n<0$ бўлса, у ҳолда $an>bn>cn$ ёки $a:n>b:n>c:n$ бўлади.

7) Агар $a<b<c$ ва $m<n<k$ бўлса, у ҳолда $a+m<b+n<c+k$ бўлади.

8) Агар $a<b<c$ ва $m>n>k$ бўлса, у ҳолда $a-m<в-n<c-k$ бўлади.

9) Агар $a>b>c$ ва $m<n<k$ бўлса, у ҳолда $a-m>b-n>c-k$ бўлади.

10) Агар $0<a<b<c$ ва $0<m<n<k$ бўлса, у ҳолда $am<nb<ck$ бўлади.

11) Агар $0<a<b<c$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$ бўлади.

12) Агар $0<a<b<c$ ва $n\in N$ бўлса, у ҳолда $a^n<b^n<c^n$ бўлади.

Мисоллар:

1) $12>5$ *ва* $12<15 \Leftrightarrow 5<12<15$;

2) $x\geq 0{,}8$ *ва* $x<2{,}5 \Leftrightarrow 0{,}8\leq x<2{,}5$;

3) $-\frac{1}{2}<0<\frac{4}{7} \Leftrightarrow \frac{4}{7}>0>-\frac{1}{2}$;

4) $-0{,}8<1<1{,}7 \Leftrightarrow -0{,}8+0{,}2<1+0{,}2<1{,}7+0{,}2 \Leftrightarrow -0{,}6<1{,}2<1{,}9$;

5) $\frac{5}{7}<\frac{3}{2}<3{,}5 \Leftrightarrow \frac{5}{7}\cdot 2<\frac{3}{2}\cdot 2<3{,}5\cdot 2 \Leftrightarrow \frac{10}{7}<3<7$;

5^1) $0{,}8<1{,}2<1{,}6 \Leftrightarrow 0{,}8:4<1{,}2:4<1{,}6:4 \Leftrightarrow 0{,}2<0{,}3<0{,}4$;

6) $1<2<3 \Leftrightarrow 1\cdot(-2)>2\cdot(-2)>3\cdot(-2)$ ёки

$1:(-2)>2:(-2)>3\cdot(-2) \Leftrightarrow -2>-4>-6$ ёки $-\frac{1}{2}>-1>-\frac{3}{2}$;

7)

$$a)\ +\begin{array}{c} 3<5<7 \\ -2<0<3 \\ \hline 1<5<10 \end{array} \qquad b)\ +\begin{array}{c} -0{,}8<-0{,}2<0 \\ 7<8<10 \\ \hline 6{,}2<7{,}8<10 \end{array}$$

$$c)\ +\begin{array}{c} 3<6<13 \\ \\ \hline 7>-1>-12 \end{array} \Rightarrow +\begin{array}{c} 3<6<13 \\ -7<1<12 \\ \hline -4<7<25 \end{array}\ \text{ёки}\ +\begin{array}{c} -3>-6>-13 \\ 7>-1>-12 \\ \hline 4>-7>-25 \end{array};$$

8)

$$a)\ -\begin{array}{c} -2<12<13 \\ -8>-9>-14 \\ \hline 6<21<27 \end{array} \qquad b)\ -\begin{array}{c} 5<8<17 \\ 0{,}8<0{,}9<1{,}3 \end{array} \Rightarrow -\begin{array}{c} 5<8<17 \\ -0{,}8>-0{,}9>-1{,}3 \\ \hline 5{,}8<8{,}9<18{,}3 \end{array};$$

9)

$$a)\ -\begin{array}{c} 35>25>15 \\ -10<-5<2 \\ \hline 45>30>17 \end{array} \qquad б)\ -\begin{array}{c} 0{,}5>0{,}3>0 \\ 2{,}5>1{,}5>0{,}5 \end{array} \Leftrightarrow -\begin{array}{c} 0{,}5>0{,}3>0 \\ -2{,}5<-1{,}5<-0{,}5 \\ \hline 3>1{,}8>0{,}5 \end{array};$$

10) $10{,}1<12{,}9<13{,}2$ *ва* $10<20<30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10{,}1\cdot 10<12{,}9\cdot 20<13{,}2\cdot 30 \Leftrightarrow 101<258<396;$

11) $5<6<\frac{13}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{5}>\frac{1}{6}>\frac{2}{13};$

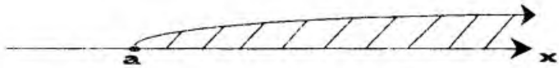
$0{,}3<0{,}7<0{,}9 \Leftrightarrow \frac{1}{0{,}3}>\frac{1}{0{,}7}>\frac{1}{0{,}9} \Leftrightarrow \frac{10}{3}>\frac{10}{7}>\frac{10}{9};$

12) $\frac{1}{3}<\frac{1}{4}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2<\left(\frac{1}{4}\right)^2<\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{9}<\frac{1}{16}<\frac{1}{4}.$

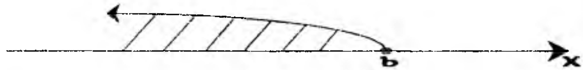
1.5. Сонли оралиқлар

8–Таъриф. $x>a$ ёки $x<b$ $\{x\geq a$ ёки $x\leq b\}$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи х сонлар тўплами нур (ярим тўғри чизиқ) дейилади ва мос равишда $(a;+\infty)$ ёки $(-\infty;b)$ $\{[a;+\infty)$ ёки $(-\infty;b]\}$ каби белгиланади.

$(a;+\infty)$ нурнинг геометрик тасвири қуйидагича: Сон ўқида x нинг $x>a$ бўладигани сон қийматлари тўплами нур билан тасвирланади. $x=a$ нуқта бу нурга тегишли эмас ва чизмада у оқ доирача билан, нур эса қия чизиқчалар билан белгиланади, яъни

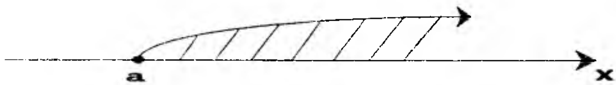


Худди шундай $(-\infty;b)$ нурнинг геометрик тасвири қуйидагича:

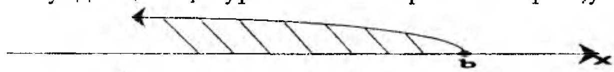


$[a,+\infty)$ нурнинг геометрик тасвири қуйидагича:

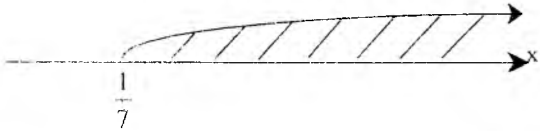
Сон ўқида х нинг $x \geq a$ бўладиган сон қийматлари тўплами нур билан тасвирланади. $x = a$ нуқта бу нурга тегишли ва чизмада у қора доирача билан тасвирланади, яъни



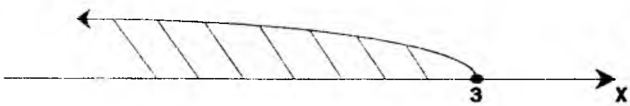
Худди шундай $(-\infty;b]$ нурнинг геометрик тасвири қуйидагича:



Масалан, $x > \frac{1}{7}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x сонлари тўплами нур билан тасвирланади ва $x = \frac{1}{7}$ нуқта нурга тегишли эмас:

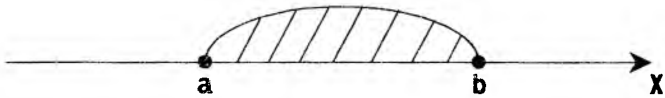


$x \leq -3$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x сонлари тўплами ҳам нур билан тасвирланади ва $x = 3$ нуқта нурга тегишли:

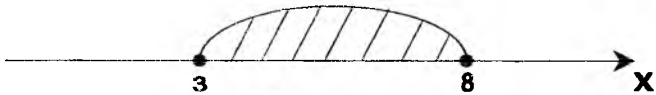


9–Таъриф . Агар $a<b$ бўлса, у ҳолда $a \leq x \leq b$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x сонлари тўплами кесма дейилади ва $[a,b]$ каби белгиланади.

$[a,b]$ кесманинг геометрик тасвири қуйидагича: Сон ўқида x нинг $a \leq x \leq b$ бўладиган сон қийматлари тўплами охирлари a ва b нуқталарда бўлган кесма билан тасвирланади, яъни



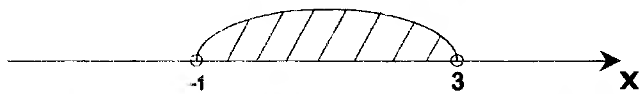
Масалан, [3;8] кесма ушбу $3 \le x \le 8$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x сонлари тўплами ва қуйидагича тасвирланади:



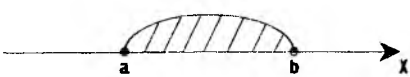
10–Таъриф. Агар $a<b$ бўлса, у ҳолда $a<x<b$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x сонлари тўплами интервал дейилади ва $(a;b)$ каби белгиланади.

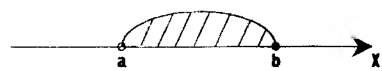
$(a;b)$ интервалнинг геометрик тасвири қуйидагича:

Масалан, $(-1;3)$ интервал ушбу $-1<x<3$ тенгсизликни қаноатлантирувчи X сонлари тўплами ва қуйидагича тасвирланади:

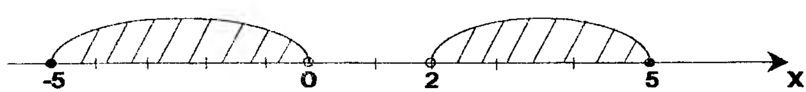


11–Таъриф. Агар $a<b$ бўлса, у ҳолда $a \le x<b$ ёки $a<x \le b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи x сонлар тўплами ярим интерваллар дейилади ва мос равишда $[a,b)$ ва $(a,b]$ каби белгиланади $[a,b)$ ва $(a,b]$ ярим интервалларнинг геометрик тасвирлари мос равишда қуйидагича:



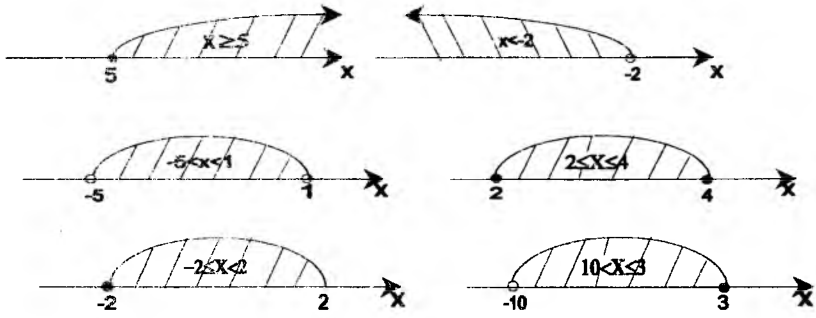
ва


Масалан, $[-5;0)$ ярим интервал – ушбу $-5 \le x<0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x сонлари тўплами; $(2;5]$ ярим интервал ушбу $2<x \le 5$ тенгсизликни қаноатлантирувчи х сонлари тўплами ва қуйидагича тасвирланади:



12–Таъриф. Кесмалар, интерваллар, ярим интерваллар ва нурлар сонли оралиқлар дейилади.

Шундай қилиб, сонли оралиқларни тенгсизликлар кўринишда бериш мумкин.



2–§. Бир номаълумли тенгсизликлар. Тенг кучли тенгсизликлар.

2.1. Бир номаълумли тенгсизликлар ва уларни ечиш хоссалари.

1–Таъриф. Ушбу $f(x)<g(x)$, $f(x)>g(x)$, $f(x)\le g(x)$ ва $f(x)\ge g(x)$ кўринишдаги тенгсизликларга бир номаълумли (ўзгарувчили) тенгсизликлар дейилади.

Масалан; а) $5x<7$; б) $3x-7\ge 2x+1$; в) $x^2+x\ge 0$;

г) $\sqrt{x^2+1}>3$; д) $\dfrac{3}{x-2}\le\dfrac{2}{x+2}$;

2–Таъриф. Тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси деб ўзгарувчининг (номаълумнинг) шу тенгсизликни ташкил этувчи ифодалар маънога эга бўладиган қийматлар тўпламига айтилади.

Мисоллар: 1) $x^2>0$ тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси нолдан бошқа барча ҳақиқий сонлар тўплами, яъни $x\in(-\infty;0)\bigcup(0,+\infty)$;

2) $(x-y)^2\ge 0$ тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси x ва y нинг ихтиёрий қийматларида ўринлидир; чунки ихтиёрий соннинг квадрати манфий бўлмаган сон; яъни $\{(x,y):\ x\in R, y\in R\}$;

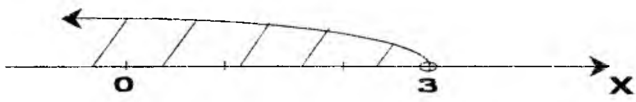
3) $\dfrac{x+1}{x}<\dfrac{3}{x-1}$ тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси $\dfrac{x+1}{x}$ ва $\dfrac{3}{x-1}$ ифодаларнинг аниқланиш соҳаларнинг бирлашмасидан иборат, яъни $x\in(-\infty;0)\bigcup(0,1)\bigcup(1,+\infty)$.

3–Таъриф. Айний тенгсизлик деб ўзгарувчининг (номаълумнинг) шу тенгсизлик аниқланиш соҳасидаги ҳар бир қийматида ўринли бўлган (тўғри тенгсизликка айланадиган) тенгсизликка айтилади.

Масалан, $x-1<x$ ва $x^2>-2$ айний тенгсизликлардир, чунки бу тенгсизликларнинг аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат бўлиб x нинг ихтиерий қийматида бу тенгсизликлар тўғри тенгсизликка айланади.

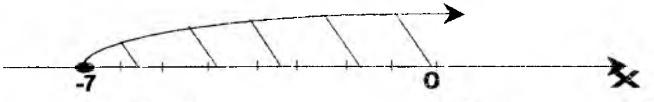
4–Таъриф. Бир номаълумли тенгсизликнинг ечими деб номаълумнинг шу тенгсизликни тўғри сонли тенгсизликка айлантирувчи қийматга айтилади.

Мисоллар: 1) x<3 тенгсизликнинг ечими 3 дан кичик барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат бўлиб, $x \in (-\infty;3)$ кўринишида ёзилади ва сон ўқида қуйидагича тасвирланади:



Чунки ихтиёрий 3 дан кичик қиймат берилган x<3 тенгсизликни тўғри сонли тенгсизликка айлантиради. Масалан, 0<3; $-1<3$; $-20<3$; $-100{,}85<3$ ва ҳоказо;

2) $3x+5 \geq 2x-2$ тенгсизликнинг ечими -7 дан кичик эмасдир, яъни $x \geq -7$ ёки $x \in [-7,+\infty)$ ва сон ўқида қуйидагича тасвирланади:



Чунки ихтиёрий -7 дан катта ёки тенг қийматларда $3x+5 \geq 2x-2$ тенгсизлик тўғри сонли тенгсизликка айланади.

Масалан, $x=0$ да $5 \geq -2$; $x=2$ да $3 \cdot 2+5 \geq 2 \cdot 2-2 \Leftrightarrow 11 \geq 2$; $x=-7$ да $3 \cdot (-7)+5 \geq 2 \cdot (-7)-2 \Leftrightarrow -16=-16$;

3) $3x-3<3\left(x-\frac{1}{3}\right)$ тенгсизликнинг ечими чексиз кўпдир, яъни $x \in R$, чунки x нинг ихтиёрий қийматларида тенгсизлик тўғри сонли тенгсизликка айланади.

4) $y+2<2y-1-y$ тенгсизликнинг ечими мавжуд эмас, яъни $y \in \varnothing$, чунки y нинг ихтиёрий қийматларида тенгсизлик тўғри сонли тенгсизликка айланмайди.

Шундай қилиб, тенгсизликни ечими– унинг ҳамма ечимларини топиш ёки уларнинг йўқлигини аниқлашдир.

Бир номаълумли тенгсизликларни ечишнинг асосий хоссалари:

1–хосса .Тенгсизликнинг исталган ҳадини унинг бир қисмидан иккинчи қисмига, шу ҳадининг ишорасини қарама–қаршисига ўзгартирган ҳолда ўтказиш мумкин; бунда тенгсизлик ишораси ўзгармайди.

Масалан, $5x-7<3x+2$ тенгсизликни 1–хоссага кўра $5x-3x<2+7$ кўринишда ёзиш мумкин.

2–хосса .Тенгсизликнинг иккала қисмини нолга тенг бўлмаган айни бир сонга кўпайтириш ёки бўлиш мумкин; агар бу сон мусбат бўлса, у ҳолда тенгсизлик ишораси ўзгармайди, агар бу сон манфий бўлса, у ҳолда тенгсизлик ишораси қарама–қаршисига ўзгаради.

Масалан, $-15x<3$ тенгсизликни иккала қисмини -15 га бўлсак, 2– хоссага кўра $x>-\frac{1}{5}$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, бир номаълумли тенгсизликларни ечиш учун:

1) Номаълум қатнашган ҳадларни чап томонга, номаълум қатнашмаган ҳадларни эса ўнг томонга ўтказиш (1–хосса);

2) ўхшаш ҳадларни ихчамлаб, тенгсизликни иккала қисмини номаълум олдидаги коэффициентга (агар у нолга тенг бўлмаса) бўлиш (2–хосса) керак.

1–Мисол. $3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-6$ тенгсизликни ечинг.

<u>Ечиш:</u> Тенгсизликни чап ва ўнг қисмларини соддалаштирамиз:

$$3x-6-4x-4<2x-6-6$$

Номаълум қатнашган ҳадларни тенгликнинг чап томонига , номаълум қатнашмаган ҳадларни тенгликнинг ўнг томонига ўтказамиз (1–хосса):

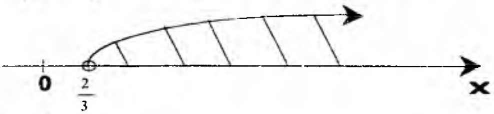
$$3x-4x-2x<-6-6+4+6.$$

Ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз:

$$-3x<2$$

ва тенгсизликни иккала қисмини -3 га бўламиз (2–хосса):

$x>\frac{2}{3}$. Демак, $x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ ва сон ўқида қуйидагича тасвирланади.



Жавоб: $x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$

2–Мисол . $\frac{x-5}{6}+1\geq\frac{5x}{2}-\frac{x-3}{3}$ тенгсизликни ечинг.

<u>Ечиш:</u> Тенгсизликнинг иккала қисмини 6 га кўпайтирамиз;

$$6\cdot\frac{x-5}{6}+6\cdot1\geq6\ \frac{5x}{2}-6\cdot\frac{x-3}{3},$$

$$(x-5)+6\geq15x-2(x-3).$$

Қавсларни очамиз ва ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз:

$$x+1\geq13x+6$$

бундан $-12x\geq5$, $x\leq-\frac{5}{12}$.

Демак, $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{12}\right]$ ва сон ўқида қуйидагича тасвирланади:

Жавоб: $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{12}\right]$.

2.2. Тенг кучли тенгсизликлар ва униг хоссалари

5–Таъриф. Агар $f_1(x) < g_1(x)$ ва $f_2(x) < g_2(x)$ тенгсизлик–ларнинг ечимлар тўплами айнан бир хил бўлса, у ҳолда улар тенг кучли (эквивалент) тенгсизликлар дейилади.
Бундай тенг кучли тенгсизликлар

$$f_1(x) < g_1(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_2(x) < g_2(x)$$

кўринишида ёзилади.

6–Таъриф. Агар $f_1(x) < g_1(x)$ ва $f_2(x) < g_2(x)$ тенгсизликлар ечимга эга бўлмаса ҳам, бундай тенгсизликлар тенг кучли тенгсизликлар деб аталади.

Мисоллар: 1) $x+1>5$ ва $2x>8$ тенгсизликлар тенг кучли тенгсизликлардир, чунки уларни х нинг 4 дан катта барча қийматлари қаноатлантиради. Демак, $x \in (4;+\infty)$ да

$$x+1>5 \Leftrightarrow 2x>8;$$

2) $x^2+4<0$ ва $x^2<0$ тенг кучли тенгсизликлардир, чунки бу тенгсизликлар ечимга эга эмас.

Шуни айтиб ўтамизки, тенг кучли тенгсизликлар турли хил аниқланиш соҳаларга эга бўлиши мумкин.

Масалан: $x>1$ ва $\sqrt{x}>1$ тенгсизликлар тенг кучли тенгсизликлар бўлиб, турли хил аниқланиш соҳаларга эга, чунки биринчи тенгсизликни аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлардан иборат, яъни $x \in R$, иккинчи тенгсиз***ликнинг*** аниқланиш соҳаси эса манфий бўлмаган ***сонлардир*** , яъни $x \in [0,+\infty)$.

Иккита тенгсизлик бирор тўпламда тенг кучли бўлиши ҳам мумкин, тенг кучли бўлмаслиги ҳам мумкин.

Масалан: $x^2>1$ ва $x>1$ тенгсизликлар мусбат сонлар тўпламида тенг кучлидир, лекин барча ҳақиқий сонлар тўпламида тенг кучли эмас.

Тенг кучли тенгсизликларнинг асосий хоссалари:

1) $f(x)<g(x) \Leftrightarrow g(x)>f(x)$

2) $f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)<0$;

3) Агар $\varphi(x)$ функиция $f(x)<g(x)$ тенгсизликнинг аниқланиш соҳасидаги х нинг барча қийматларида аниқланган бўлса, у ҳолда

$f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)+\varphi(x)<g(x)+\varphi(x)$;

4) Агар α ихтиёрий сон бўлса, у ҳолда

$f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)+\alpha<g(x)+\alpha$;

5) Агар $\vartheta(x)$ функция $f(x)<g(x)$ тенгсизликнинг аниқланиш соҳасидаги х нинг барча қийматларида аниқланган ва мусбат бўлса, у ҳолда

а) $f(x)<g(x) \Leftrightarrow \vartheta(x)\cdot f(x)<\vartheta(x)\cdot g(x)$;

б) $f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x):\vartheta(x)<g(x):\vartheta(x)$;

6) Агар $\vartheta(x)$ функция $f(x)<g(x)$ тенгсизликнинг аниқланиш соҳасидаги х нинг барча қийматларида аниқланган ва манфий бўлса, у ҳолда

а) $f(x)<g(x) \Leftrightarrow \vartheta(x)\cdot f(x)>\vartheta(x)\cdot g(x)$;

б) $f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x):\vartheta(x)>g(x):\vartheta(x)$.

Хусусий ҳолларда: Агар $\alpha>0$ бўлса, у ҳолда

а) $f(x)<g(x) \Leftrightarrow \alpha f(x)<\alpha g(x)$;

б) $f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x):\alpha<g(x):\alpha$;

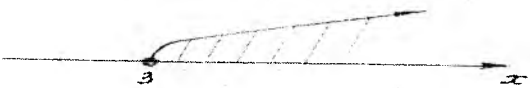
Агар $\alpha<0$ бўлса, у ҳолда

а) $f(x)<g(x) \Leftrightarrow \alpha f(x)>\alpha g(x)$;

б) $f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x):\alpha>g(x):\alpha$.

Тенг кучли тенгсизликларнинг хоссаларига оид мисоллар:

1–Мисол $2-x<-4+x \Leftrightarrow 2+4<x+x \Leftrightarrow 6<2x$. Биринчи хоссага кўра $2x>6 \Leftrightarrow x>3$. Демак, $x\in(3;+\infty)$ ва



Жавоб: $x\in(3;+\infty)$.

2–Мисол. x<3 тенгсизликнинг иккала томонига $\vartheta(x)=\frac{1}{x}$ ни қўшамиз ва қуйидагини ҳосил қиламиз. $x+\frac{1}{x}<3+\frac{1}{x}$. Бу тенгсизлик x<3 тенгсиликка тенг кучли бўла олмайди, чунки $\frac{1}{x}$ ифода $x=0$ бўлганда маънога эга эмас. Ҳақиқтдан ҳам $x=0$ берилган тенгсизликни қаноатлантиради, аммо ҳосил бўлган тенгсизлик $x=0$ бўлганда маънога эга эмас.

3–Мисол. $3x+5<4x-7 \Leftrightarrow 3x+5+x<4x-7+x$, чунки $3x+5<4x-7$ тенгсизликнинг аниқланиш соҳасида $\varphi(x)=x$, x нинг барча қийматларида аниқланган.

4–Мисол. а) $3x>6-x \Leftrightarrow 30x>10(6-x)$,

б) $(x-1)<5 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4)<5(x^2+4)$ бунда $\alpha=10$ ва $\varphi(x)=x^2+4$ берилган тенгсизликларнинг аниқланиш соҳасидаги x нинг барча қийматларида аниқланган ва мусбатдир.

5 – **Мисол.** $x>2$ тенгсизликни $\varphi(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган $\frac{x}{(x-3)^2}>\frac{2}{(x-3)^2}$ тенгсизлик $x>2$ тенгсизликка тенг кучли бўла олмайди, чунки $\frac{1}{(x-3)^2}$ ифода $x=3$ бўлганда маънога эга эмас. Демак $x=3$берилган тенгсизликни қаноатлантиради, лекин ҳосил бўлган тенгсизлик $x=3$ бўлганда маънога эга бўлмайди.

6 – **Мисол**. $x+3-\frac{1}{x-1}>-x+2-\frac{1}{x-1}$ *ва* $x+3>-x+2$ тенгсизликлар тенг кучлими?

Ечиш: Иккинчи тенгсизлик, биринчи тенгсизликка $\frac{1}{x-1}$ ни қўшиш натижасида олинган, лекин $\frac{1}{x-1}$ ифода $x=1$ да маънога эга эмас.

Демак, $x=1$ биринчи тенгсизликнинг ечими бўла олмайди, лекин $x=1$ иккинчи тенгсизликнинг ечимидир. Шундай қилиб иккинчи тенгсизликнинг $x=1$ ечими биринчи тенгсизликнинг ечими бўла олмайди.

Демак, берилган тенгсизликлар тенг кучли эмас.

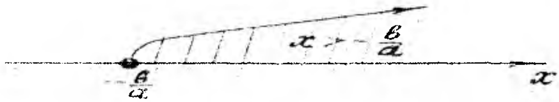
3–§. Бир номаълумли чизиқли тенгсизликлар.

Таъриф. Ушбу $ax+b>0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b<0$ *ва* $ax+b\leq 0$ кўринишдаги тенгсизликларга бир номаълумли чизиқли тенгсизликлар дейилади, бу ерда $a\neq 0$; b – берилган сонлар, x – номаълум.

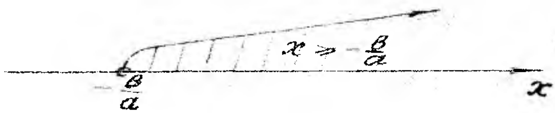
Масалан $3x-0{,}5<0$; $6x\geq\frac{1}{7}$; $\frac{x}{2}-0{,}85\leq 0$; $3x\geq 0$; $8\frac{1}{3}-3{,}2x<0$ бир номаълумли чизиқли тенгсизликлардир.

Бир номаълумли чизиқли тенгсизликларнинг ечимлар тўплами aва b сонларига боғлиқдир:

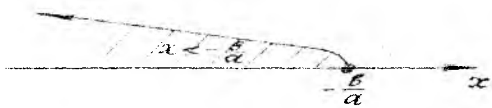
1. Агар $a>0, b\in R$ бўлса, у ҳолда $ax+b>0 \Leftrightarrow ax>-b$ тенгсизликнинг ечими $\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$ тўпламдан иборат бўлиб, у сон ўқида қуйидагича тасвирланади:



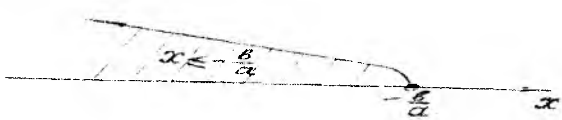
2. Агар $a>0, b\in R$ бўлса, у ҳолда $ax+b\geq 0 \Leftrightarrow ax\geq -b$ тенгсизликнинг ечими $\left[-\frac{b}{a};+\infty\right)$ тўпламидан иборат бўлиб, у сон ўқида қуйидагича тасвирланади:



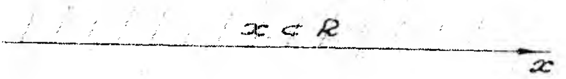
3. Агар $a<0, b\in R$ бўлса, у ҳолда $ax+b>0 \Leftrightarrow ax>-b$ тенгсизликнинг ечими $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$ тўпламдан иборат бўлиб, у сон ўқида қуйидагича тасвирланади:



4. Агар $a<0, b\in R$ бўлса у ҳолда $ax+b\geq 0 \Leftrightarrow ax\geq -b$ тенгсизликнинг ечими $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right]$ тўпламдан иборат бўлиб, у сон ўқида қуйидагича тасвирланади:



5. Агар $a=0, b>0$ бўлса, у ҳолда $ax+b>0 \Leftrightarrow 0\cdot x>-b$ тенгсизликнинг ечими $(-\infty;\infty)$ тўпламдан иборат бўлиб, у сон ўқида қуйидагича тасвирланади:



6. Агар $a=0$ $b\le 0$ бўлса, у ҳолда $ax+b>0 \Leftrightarrow 0\cdot x<-b$ тенгсизлик ечимга эга эмас, яъни $x\in\varnothing$

$ax+b<0$ ва $ax+b\le 0$ чизиқли тенгсизликларни ечимлар тўпламини тенг кучли тенгсизликларнинг асосий хоссаларига кўра худди 1 – 6 кўринишдагидек аниқланади, яъни.

1. $a>0, b\in k, ax+b<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right);$

2. $a<0, b\in k, ax+b<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right);$

3. $a=0, b<0, ax+b<0 \Leftrightarrow x\in R;$

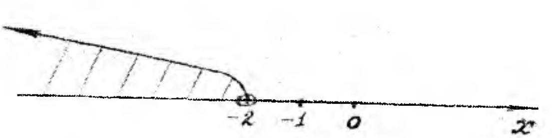
4. $a=0, b\ge 0, ax+b<0 \Leftrightarrow x\in 0.$

1 – **Мисол.** $-8x+3(x-2)>-x+2$ тенгсизликнинг ечинг.

Ечиш: $-8x+3(x-2)>-x+2 \Leftrightarrow -8x+3x-6>-x+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8x+3x+x>2+6 \Leftrightarrow -4x>8 \Leftrightarrow x<-2.$

Шундай қилиб, берилган тенгсизликнинг ечими $(-\infty;-2)$ *тўпламдан* иборат бўлиб, у сон ўқида қуйидагича тасвирланади:

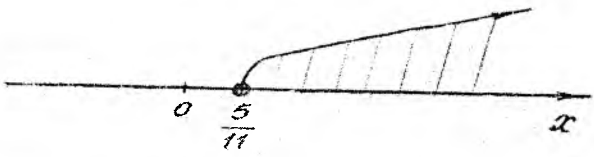


Жавоб: $x\in(-\infty;-2)$.

2 – **Мисол .** $\dfrac{3x+1}{4}-\dfrac{x}{2}<\dfrac{5x-2}{3}+\dfrac{3x}{5}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: Тенгсизликнинг барча ҳадларини 60 га кўпайтириб ечамиз:

$$15(3x+1)-30x<20(5x-2)+36x \Leftrightarrow 45x+15-30x<100x-40+36x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 45x-30x-100x-36x<-40-15 \Leftrightarrow -121x<-55 \Leftrightarrow x>\frac{5}{11};$$



Жавоб: $x \in \left(\frac{5}{11};+\infty\right)$.

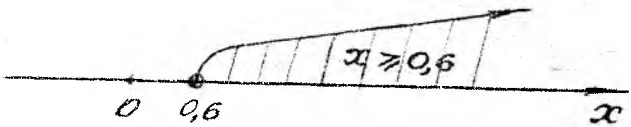
3 — Мисол. $(x-3)(2x-3)+6x^2 \geq 2(2x-3)^2$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: Қавсларни очамиз.

$$2x^2-3x-6x+9+6x^2 \geq 2(4x^2-12x+9) \Leftrightarrow 8x^2-9x+9 \geq 8x^2-24x+18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x^2-9x-8x^2+24x \geq 18-9 \Leftrightarrow 15x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow x \geq 0,6.$$

Демак, берилган тенгсизликнинг ечими $[0,6;+\infty)$ тўпламдан иборат бўлиб, у сон ўқида қуйидагича тасвирланади:



Жавоб: $x \in [0,6;+\infty)$.

4 — Мисол . $2(x+8)-5x < 4-3x$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: Қавсларни очиб қуйидагига эга бўламиз:

$$2x+16-5x < 4-3x \Leftrightarrow 2x-5x+3x < 4-16 \Leftrightarrow 0 \cdot x < -12$$

Ҳосил қилинган тенгсизлик ечимга эга эмас, чунки x нинг исталган қийматида у тўғри бўлмаган $0 < -12$ сонли тенгсизликка айланади.

Демак, $0 < -12$га тенг кучли бўлган берилган тенгсизлик ҳам ечимга эга бўлмайди, яъни $x \in \varnothing$.

Жавоб: $x \in \varnothing$.

4—§. Бир номаълумли чизиқли тенгсизликлар системаси.

1—Таъриф . Ушбу

$$\begin{cases} ax+b*0, \\ cx+d*0, \end{cases} \quad \begin{cases} ax+b*0, \\ cx+d*0, \\ px+q*0, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x+b_1*0, \\ a_2x+b_2*0, \\ \dots\dots\dots \\ a_nx+b_n*0 \end{cases}$$

кўринишдаги тенгсизликларга бир номаълумли чизиқли тенгсизликлар системаси дейилади.

Бунда $a;b;c;d;p;q;a_1,a_2,...a_n;b_1,b_2,...b_n$ — берилган сонлар бўлиб, $a \neq 0$, $c \neq 0$, $p \neq 0$, $a_i \neq 0, (i=\overline{1,n})$ * белги $>,<,\geq,\leq$ белгилардан бирини билдиради, x — номаълум.

Масалан, $\begin{cases} 3x-5>0, \\ 6x-\frac{1}{3}<0; \end{cases}$ $\begin{cases} 6-3x \leq 0, \\ x+1 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x-1 \geq 0, \\ 6x-8>0, \\ 2x-17 \leq 0. \end{cases}$ бир номаълумли чизиқли тенгсизликлар системасидир.

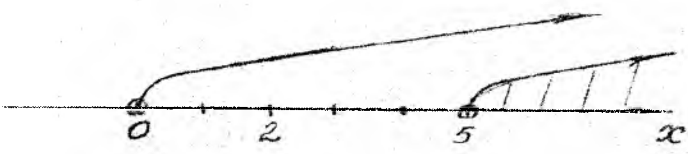
2–Таъриф. Бир номаълумли чизиқли тенгсизликлар системасининг ечими деб номаълумнинг системадаги ҳар бир тенгсизликни тўғри сонли тенгсизликка айлантирадиган қийматларга айтилади.

Системани ечиш — унинг ҳамма ечимларини топиш ёки унинг йўқлигини исботлаш демакдир.

Энг содда бир номаълумли чизиқли тенгсизликларни ечимларини сон ўқида тасвирланиши.

1 – **Мисол** . $\begin{cases} x>2 \\ x>5 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг.

Ечиш: Сон ўқида берилган системанинг биринчи ва иккинчи тенгсизликларининг ечимлар тўпламларини тасвирлаймиз. Биринчи тенгсизликнинг ечимлари $x>2$ нурнинг барча нуқталари, иккинчи тенгсизликнинг ечимлари $x>5$ нурнинг барча нуқталари бўлади, яъни

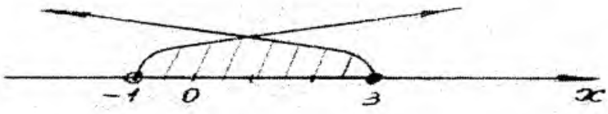


Берилган системанинг ечимлари x нинг иккала нурга бир вақтда тегишли бўлган қийматлари бўлади. Расмдан кўриниб турибдики, бу нурларнинг барча умумий нуқталари тўплами $x>5$ ёки $x \in (5;+\infty)$ нур бўлади.

Жавоб: $x \in (5;+\infty)$ ёки $x>5$.

2 – **Мисол** . $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 3 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг.

Ечиш: Сон ўқида берилган системанинг биринчи ва иккинчи тенгсизликларининг ечимлари тўпламларини тасвирлаймиз. Биринчи тенгсизликнинг ечимлари $x \geq -1$ нур, иккинчи тенгсизликнинг ечимлари $x \leq 3$ нур бўлиб, бунда $x=-1$ ва $x=3$ нуқталар нурларга тегишлидир, яъни

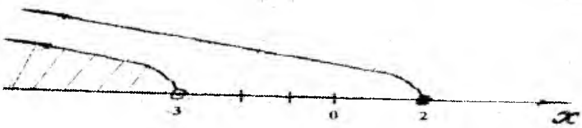


Расмдан кўриниб турибдики, бу нурларнинг умумий нуқталари тўплами $-1 \le x \le 3$ ёки $x \in [-1;3]$ кесма бўлади.

Жавоб: $x \in [-1;3]$ ва $-1 \le x \le 3$.

3−Мисол . $\begin{cases} x \le 2 \\ x < -3 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг.

<u>**Ечиш:**</u> Сон ўқида $x \le 2$ ва $x < -3$ нурларни тасвирлаймиз:

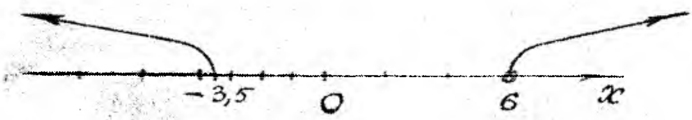


Расмдан кўриниб турибдики, бу нурлариинг умумий нуқталар тўплами $x < -3$ ёки $(-\infty;-3)$ нурдан иборат бўлади.

Жавоб: $x \in (-\infty;-3)$.

4 − **Мисол** . $\begin{cases} x \ge 6 \\ x \le -3{,}5 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг.

<u>**Ечиш:**</u> Сон ўқида $x \ge 6$ ва $x \le -3{,}5$ нурларни тасвирлаймиз:



Расмдан кўриниб турибдики, бу нурлар умумий нуқталарга эга эмас. Демак берилган система ечимга эга эмас, яъни $\varnothing$.

Жавоб: $\varnothing$ ёки ечими йўқ.

5 – **Мисол** . $\begin{cases} x \le 1 \\ x \ge 1 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг.

Ечиш: Сон ўқида $x \le 1$ ва $x \ge 1$ тенгсизликларнинг ечимлар тўпламларини тасвирлаймиз.

Расмдан кўриниб турибдики, бу нурларнинг умумий нуқтаси $x = 1$ дан иборат. Демак берилган системанинг ечими $x = 1$.

Жавоб: $x = 1$.

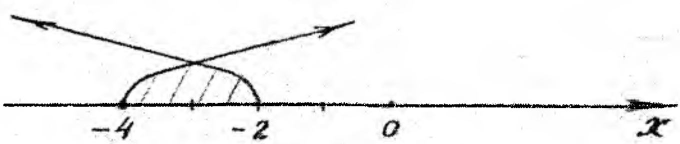
5–§. Турли хил тенгсизликлар системасини ечиш.

1 – **Мисол** . $\begin{cases} 3x + 3 \le 2x + 1 \\ 3x - 2 \le 4x + 2 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг:

Ечиш: Тенгсизликлар системасининг тенг кучлилигига асосан қуйидагига эга бўламиз.

$$\begin{cases} 3x - 2x \le 1 - 3 \\ 3x - 4x \le 2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \\ -x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \\ x \ge -4 \end{cases}$$

Системанинг ечими ҳар икки тенгсизлик ечимлари тўпламларининг кесишмасидан иборат бўлгани учун сон ўқида қуйидагини ҳосил қиламиз.



Демак, берилган системанинг ечими $x \in [-4;-2]$

Жавоб: $x \in [-4;-2]$

2 – **Мисол** . Тенгсизликлар системасини ечинг.

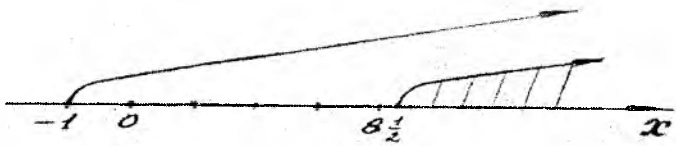
$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{2} < \dfrac{4x-1}{3} - 2 \\ \dfrac{x-5}{6} \le \dfrac{3x-1}{4} \end{cases}$$

Ечиш: Ушбуга эга бўламиз.

$$\begin{cases} 3(2x+1) < 2(4x-1)-12 \\ 2(x-5) \le 3(3x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+3 < 8x-2-12 \\ 2x-10 \le 9x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-8x < -2-12-3 \\ 2x-9x \le -3+10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x < -17 \\ -7x \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{17}{2} \\ x \ge -1 \end{cases}$$

Системанинг ечими ҳар икки теигсизлик ечимлари тўпламларининг кесишмасидан иборат, яъни $[-1;+\infty) \cap \left(\dfrac{17}{2};+\infty\right) = \left(\dfrac{17}{2};+\infty\right)$. Ечимлар тўпламининг сон ўқидаги тасвирланиши:



Жавоб: $x \in \left(\dfrac{17}{2};+\infty\right)$.

3 − **Мисол**. $\begin{cases} \dfrac{6x-1}{2} < \dfrac{9x+1}{3} + 2 \\ 5x-7 \ge 2x+5 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг.

Ечиш: Қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 3(6x-1) < 2(9x+1)+12 \\ 5x-7 \ge 2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x-3 < 18x+2+12 \\ 5x-2x \ge 7+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x-18x < 3+2+12 \\ 2x \ge 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot 0 < 17 \\ x \ge 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 17 \\ x \ge 6 \end{cases}.$$

Биринчи тенгсизликнинг ечимлар тўплами барча ҳақиқий сонлар, тўплами яъни $x \in R$. Иккинчи тенгсизликнинг ечимлар тўплами $[6;+\infty)$ нур бўлади. Системанинг ечими эса ҳар иккала ечимлар тўпламининг кесишмасидан иборат бўлади, яъни $x \in [6;+\infty)$.

Жавоб: $x \in [6;+\infty)$.

4 − Мисол. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} > \dfrac{4x+7}{5} - 0{,}3x \\ \dfrac{2x-3}{7} > \dfrac{x-2}{3} + \dfrac{5}{21} \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг.

Ечиш: Берилган тенгсизликлар системасини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{cases}5(x+2)>2(4x+7)-3x\\3(2x-3)>7(x-2)+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+10>8x+14-3x\\6x-9>7x-14+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+3x-8x>14-10\\6x-7x>5-14+9\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\cdot 0>4\\-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0>4\\x<0\end{cases}$$

Биринчи тенгсизлик ечимларга эга эмас, яъни $x\in\varnothing$, чунки тенгсизликнинг чап қисми x нинг исталган қийматида нолга тенг, ҳамда $0>4$ тенгсизлик нотўғри. Иккинчи тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(-\infty;0)$ нур бўлади.

Бундан системанинг ечимлар тўпламларининг кесишмаси бўш тўпламдан иборатдир. Демак система ечимга эга эмас.

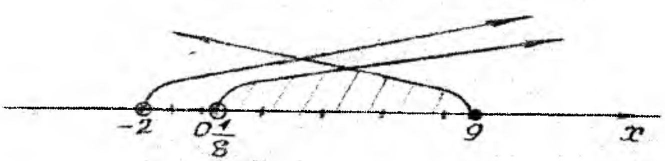
Жавоб: $\varnothing$.

5 – **Мисол**. $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-3}{3}<2\\0{,}3x-1<x+0{,}4\\2-3x<5x+1\end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг.

Ечиш: Берилган тенгсизликлар системасига тенг кучли системани ёзиб оламиз:

$$\begin{cases}3(x-1)-2(x-3)\le 12,\\0{,}3x-x<0{,}4+1,\\-3x-5x<1-2.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2x\le 12-6+3,\\-0{,}7x<1{,}4,\\-8x<-1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 9,\\x>-2,\\x>\dfrac{1}{8}.\end{cases}$$

Бундан



Демак, берилган системанинг ечимлар тўплами $x\in\left(\dfrac{1}{8};9\right]$.

Жавоб: $x\in\left(\dfrac{1}{8};9\right]$.

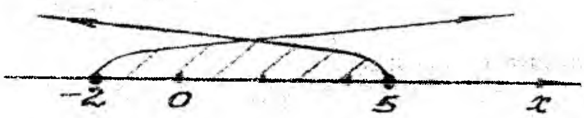
6 – **Мисол** . $x-1\le\dfrac{x+3}{2}\le x+2{,}5$ қўш тенгсизликни ечинг.

Ечиш: 1 – усул. Берилган қўш тенгсизлик қуйидаги тенгсизликлар системасига тенг кучлидир:

$$\begin{cases}\dfrac{x+3}{2}\le x+2{,}5\\ \dfrac{x+3}{2}\ge x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3\le 2x+5\\ x+3\ge 2x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2x\le 5-3\\ x-2x\ge -2-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x\le 2\\ -x\ge -5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x\le 5\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\le x\le 5.$$

Бундан



Жавоб: $x\in[-2;5]$.

2 – усул. Қўш тенгсизликларнинг хоссаларига кўра

$$2x-2\le x+3\le 2x+5\Leftrightarrow 2x-2-2x-3\le x+3-2x-3\le 2x+5-2x-3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5\le -x\le 2\Leftrightarrow 5\ge x\ge -2\Leftrightarrow -2\le x\le 5.$$

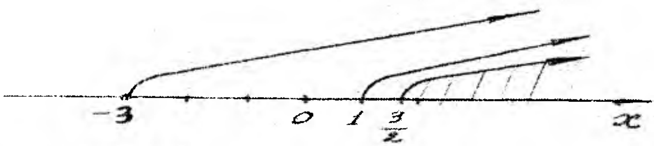
Жавоб: $x\in[-2;5]$.

7 – Мисол. $\begin{cases}\dfrac{2x}{3}-3\le 2x+1\le 3x-\dfrac{1}{2}\\ 0{,}8x+0{,}2\le x\end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг.

<u>Ечиш:</u> Берилган тенгсизликлар системаси қуйидаги системага тенг кучлидир:

$$\begin{cases}2x+1\le 3x-\dfrac{1}{2}\\ 2x+1\ge \dfrac{2x}{3}-3\\ 0{,}8x-x\le -0{,}2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3x\le -\dfrac{1}{2}-1\\ 6x-2x\ge -9-3\\ -0{,}2x\le -0{,}2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x\le -\dfrac{3}{2}\\ 4x\ge -12\\ -0{,}2x\le -0{,}2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge \dfrac{3}{2}\\ x\ge -3\\ x\ge 1.\end{cases}$$

Бундан



Жавоб: $x\in\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

6 – §. Квадрат тенгсизлик ва унинг ечими.

1– Таъриф. Ушбу

$$ax^2+bx+c>0, \qquad ax^2+bx+c<0,$$
$$ax^2+bx+c\ge 0, \qquad ax^2+bx+c\le 0$$

кўринишдаги тенгсизликлар квадрат тенгсизликлар дейилади, бунда x-ўзгарувчи (номаълум), $a\ne 0$, b, c-ҳақиқий сонлар.

Масалан,

$$3x^2+5x-2>0, \qquad -\frac{1}{2}x^2-3x+4{,}5<0,$$
$$25x^2-0{,}09\ge 0, \qquad 0{,}85x^2-\frac{1}{2}x\le 0$$

тенгсизликлар квадрат тенгсизликлардир.

Бизга маълумки ax^2+bx+c квадрат учхаднинг дискриминанти $D=b^2-4ac$ га тенг бўлиб, $ax^2+bx+c=0$ тенгламанинг илдизлари қуйидаги формула $x_{1/2}=\dfrac{-b\mp\sqrt{D}}{2a}$ орқали топилади.

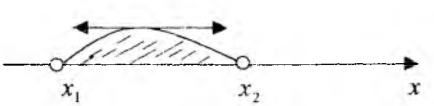
2–Таъриф. Квадрат тенгсизликнинг ечими деб номаълумнинг шу тенгсизликни тўғри сонли тенгсизликка айлантирувчи қийматлар тўпламига айтилади.

Квадрат тенгсизликнинг ечими мавжуд ёки мавжуд эмаслиги квадрат учхаднинг a-коэффициенти ва D-дискриминанти ишорасига боғлиқдир.

I. Ушбу $ax^2+bx+c>0$, $(a\ne 0)$ квадрат тенгсизликнинг ечими қуйидагича топилади.

1) Агар $a>0$, $D>0$, $x_1<x_2$ бўлса, у ҳолда тенгсизликнинг ечимлари $(-\infty;x_1)\bigcup(x_2;+\infty)$ оралиқда бўлади ва сон ўқида қуйидагича тасвирланади:

2) Агар $a<0$, $D>0$, $x_1<x_2$ бўлса, у ҳолда тенгсизликнинг ечимлари $(x_1;\, x_2)$ оралиқда бўлади ва сон ўқида қуйидагича тасвирланади:



3) Агар $a>0;\ D<0$ бўлса, у холда тенгсизликнинг ечимлари $(-\infty;\ +\infty)$ оралиқда бўлади, яъни $x\in R$ (R-ҳақиқий сонлар тўплами).

4) Агар $a<0,\ D<0$ бўлса, у ҳолда тенгсизлик ечимга эга эмас, яъни $x\in\varnothing$.

II. Худди шундай $ax^2+bx+c<0$ квадрат тенгсизликнинг ечими қуйидагича топилади:

1) Агар $a>0,\ D>0,\ x_1<x_2$ бўлса, у ҳолда $x\in(x_1;\ x_2)$ бўлади.
2) Агар $a<0,\ D>0,\ x_1<x_2$ бўлса, у ҳолда $x\in(-\infty;x_1)\bigcup(x_2;+\infty)$ бўлади.
3) Агар $a>0;\ D<0$ бўлса, у холда $x\in\varnothing$.
4) Агар $a<0,\ D<0$ бўлса, у ҳолда $x\in R$.

1–Мисол. $x^2-2x-15>0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: Аввало квадрат учхадни дискриминантини ҳисоблаймиз: $D=(-2)^2-4\cdot(-15)=4+60=64>0$. Энди $x^2-2x-15=0$ тенгламни ечамиз. Бундан $x_1=-3,\ x_2=5$.

Демак, $a=1>0,\ D>0$ ва $x^2-2x-15$ квадрат учхаднинг мусбатлигини ҳисобга олиб, берилган квадрат тенгсизликнинг ечимларини $(-\infty;-3)\bigcup(5;\ +\infty)$ оралиқда аниқлаймиз.

Жавоб: $x\in(-\infty;-3)\bigcup(5;\ +\infty)$.

2–Мисол. $x^2-3x-4\le 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: $D=(-3)^2-4(-4)=9+16=25>0$. Демак, $x^2-3x-4=0$ тенгламанинг илдизлари $x_1=-1;\ x_2=4$ га тенг. Шундай қилиб, $a=1>0,\ D>0$ ва $x^2-3x-4\le 0$ ни эътиборга олсак, берилган тенгсизликнинг ечимлари $[-1;\ 3]$ кесмада бўлади.

Жавоб: $x\in[-1;\ 3]$.

3–Мисол. $3x^2-4x+5>0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: $D=(-4)^2-4\cdot 3\cdot 5=16-60=-44<0$. Бундан $3x^2-4x+5=0$ тенгламанинг ечимга эга эмаслиги келиб чиқади. Демак, $a=3>0,\ D<0$ ни эътиборга олсак, у ҳолда $3x^2-4x+5>0$ тенгсизлик x нинг исталган қийматида ўринли бўлади, яъни $x\in R$.

Жавоб: $x\in R$.

4–Мисол. $0{,}5x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}<0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: Аввал учхадни дискриминантини топамиз: $D=(\frac{1}{2})^2-4\cdot\frac{3}{4}\cdot 0{,}5=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{5}{4}<0$. Берилган тенгсизликнинг чап томонидан тўла квадрат ажратамиз:

$$0{,}5x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\left[x^2+x+\frac{3}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\right]=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{8}.$$

Демак, квадрат тенгсизликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{8}<0$$

Бу тенгсизликнинг чап томони x нинг барча қийматларида манфий бўла олмайди. Демак, $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{8}<0$ тенгсизлик ечимга эга эмас. бундан берилган тенгсизлик ҳам ечимга эга эмаслиги келиб чиқади, яъни $x\in\varnothing$.

Жавоб: $x\in\varnothing$.

III. Квадрат тенгсизликни ечимини махсус ҳоллари.

1) Агар $a>0$, $D=0$ бўлса, у ҳолда $ax^2+bx+c>0$, $a(x-x_1)^2>0$ бўлиб, $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ ечимга эга бўлади.

2) Агар $a>0$, $D=0$ бўлса, у ҳолда $ax^2+bx+c\geq 0$, $a(x-x_1)^2\geq 0$ бўлиб, $x\in R$ ечимга эга бўлади.

3) Агар $a<0$, $D=0$ бўлса, у ҳолда $ax^2+bx+c>0$, $a(x-x_1)^2>0$ бўлиб, ечимга эга бўлмайди, яъни $x\in\varnothing$.

4) Агар $a<0$, $D=0$ бўлса, у ҳолда $ax^2+bx+c\geq 0$, $a(x-x_1)^2\geq 0$ бўлиб, $x=x_1$ ечимга эга бўлади.

5–Мисол. $9x^2+6x+1>0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: Учхаднинг дискриминантини топамиз:

$D=6^2-4\cdot 9=36-36=0$. Демак, $9x^2+6x+1=0$ тенглама $x_1=x_2=-\frac{1}{3}$ ягона ечимга эга бўлади. Бундан, берилган тенгсизликни қуйидагича $9x^2+6x+1=9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2>0$ ёзиб олиш мумкин. Ушбу тенгсизлик $x=\frac{1}{3}$ дан бошқа ҳар қандай x да мусбат қийматлар қабул қилади. Демак, берилган тенгсизликнинг ечимлари $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$ оралиқда бўлади.

Жавоб: $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

6–Мисол. $-2x^2+6x-4,5\le 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш:

$$-2x^2+6x-4,5\le 0 \Leftrightarrow 2x^2-6x+4,5\ge 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\ge 0 \Leftrightarrow x\in R.$$

Жавоб: $x\in R$.

7–Мисол. $0,04x^2+2x+25<0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш:

$$0,04x^2+2x+25<0 \Leftrightarrow (0,2x)^2+2x+25<0 \Leftrightarrow (0,2x+5)^2<0.$$

Ушбу тенгсизликнинг чап томони x нинг барча қийматларида мусбат бўлади. Бу тасдиқ берилган тенгсизликка зиддир. Демак, берилган тенгсизлик ечимга эга эмас, яъни $x\in\varnothing$.

Жавоб: $x\in\varnothing$.

8–Мисол. $4x^2-4x+1\le 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: Қисқа кўпайтириш формуласидан фойдаланиб берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизликни ёзамиз:

$$4x^2-4x+1=4(x-\frac{1}{2})^2\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 4(x-\frac{1}{2})^2<0, & x\in\varnothing \\ 4(x-\frac{1}{2})^2=0, & x=\frac{1}{2} \end{array}\right] \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Жавоб: $x=\frac{1}{2}$.

7 – § . Интерваллар усули.

Тенгсизликларни ечишда кўпинча интерваллар усули қўлланилади. Бу усулнинг моҳияти қуйидагича.

Бизга ушбу

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

кўринишдаги n- даражали кўпхад берилган бўлсин, бу ерда a_i $(i=0,1,2,\ldots,n)$ -ҳақиқий сонлар, $a_0\ne 0$.

Агар $x_1,x_2,\ldots,x_r$ $P(x)$ кўпхаднинг ҳамма $k_1,k_2,\ldots,k_r$ каррали илдизлари (ёки ноллари) бўлиб, $x_1>x_2>\ldots>x_r$ бўлса, у ҳолда $P(x)$ кўпхадни

$$P(x)=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}Q(x) \qquad (1)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $Q(x)$ ҳақиқий илдизларга эга бўлмаган кўпхад бўлиб, x нинг барча қийматларида фақат мусбат ёки манфий қийматларни қабул қилсин.

Айтайлик, $Q(x)>0$ бўлсин. У ҳолда $x>x_1$ да (1) ифода ҳамма кўпайтувчилар мусбат бўлиб, $P(x)>0$ бўлади.

Агар x_1 тоқ каррали илдиз бўлса (k_1-тоқ сон), у ҳолда $x_2<x<x_1$ бўлганда (1) ифоданинг биринчи кўпайтувчиси манфий бўлиб, қолган ҳамма кўпайтувчилар мусбат бўлади. Демак, $P(x)<0$ бўлади. Бундай ҳолда $P(x)$ кўпхад x_1 илдиздан ўтганда ишорасини ўзгартиради.

Агар x_1 жуфт каррали илдиз бўлса (k_1-жуфт сон), у ҳолда $x_2<x<x_1$ бўлганда (1) ифоданинг ҳамма кўпайтувчилари мусбат бўлиб, $P(x)>0$ бўлади. Бундай ҳолда $P(x)$ кўпхад x_1 илдиздан ўтганда ишорасини ўзгартирмайди дейилади.

Ҳудди шундай $P(x)$ кўпхад x_2 илдиздан ўтганда ишорасини ўзгартиради, агар k_2 - тоқ бўлса, ўзгартирмайди, агар k_2-жуфт сон бўлса, ва ҳокозо.

Энди $P(x)>0$ тенгсизликни қарайлик. Бунинг учун $P(x)=0$ тенгламанинг барча ҳақиқий ечимлари топилади ва бу ечимларни сон ўқида жойлаштирилади. Сўнгра ҳар бир оралиқда $P(x)$ кўпхаднинг ишораси аниқланади. Кўпхаднинг ишорасини аниқлаш учун шу оралиқдаги бирор нуқтанинг ишорасини аниқлаш кифоя.

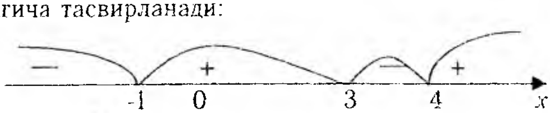
Юқорида баён этилган усул интерваллар усули дейилади.

Бу усул ёрдамида квадрат ва баъзи юқори даражали тенгсизликларни ечиш.

1–Мисол. $(x+1)(x-3)(x-4)>0$ тенгсизликни ечинг.

<u>**Ечиш:**</u> $P(x)\equiv(x+1)(x-3)(x-4)=0$ тенгламанинг нолларини топамиз; яъни $x=-1,\ x=3,\ x=4$. Бу қийматларни сон ўқида жойлаштирамиз:

Натижада $(-\infty;-1);(-1;3);(3;4)$ ва $(4;\infty)$ оралиқлар ҳосил бўлади. Агар $x>4$ бўлса, у ҳолда тенгсизликдаги барча кўпайтувчилар мусбат бўлади, яъни $P(x)>0$. Интерваллар усулининг қоидасига кўра $P(x)$ кўпхадни кўпайтувчиларнинг даражалари тоқ бўлганлиги сабабли, кўпхаднинг ноллари орқали ўтишда унинг ишоралари ўзгаради ва сон ўқида қуйидагича тасвирланади:



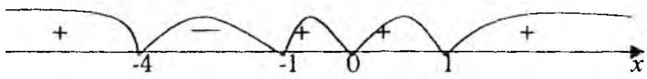
Чизмадан фойдаланиб, тенгсизликнинг ечимлар тўплами қуйидагича ёзилади:

$$x\in(-1;3)\cup(4;+\infty)$$

Жавоб: $x\in(-1;3)\cup(4;+\infty)$.

2–Мисол. $x^2(x+1)^3(x-1)^4(x+4)<0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: Сон ўқида $P(x)\equiv x^2(x+1)^3(x-1)^4(x+4)=0$ кўпхаднинг нолларини белгилаймиз, яъни -4, -1, 0 ва 1 нуқталарни жойлаштирамиз:



$x>1$ оралиқдан бирор $x=2$ қийматни олиб, $P(x)>0$ эканлигини аниқлаймиз. Сўнг $x=1$ илдизнинг каррали жуфт бўлганлиги сабабли, $x=1$ дан ўтишда $P(x)$ кўпхад ишорасини ўзгартирмайди, яъни $0<x<1$ да $P(x)>0$. Ҳудди шундай интерваллар усулининг қоидасига кўра $P(x)$ кўпхаднинг ишораси $-1<x<0$ мусбат, $-4<x<-1$- манфий ва $-\infty<x<-4$ мусбат бўлади.

Чизмага кўра тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(-4;-1)$ иборат бўлади.

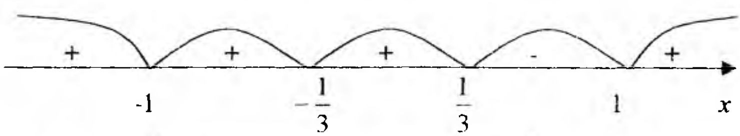
Жавоб: $x\in(-4;-1)$.

3–Мисол. $(3x-1)(3x+1)^2(1-x)^5(x+1)^2\geq 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: Берилган тенгсизликни (1) кўринишда ёзиб оламиз.

$$-27(x+1)^2(x+\frac{1}{3})^2(x-\frac{1}{3})(x-1)^5\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x+\frac{1}{3})^2(x-\frac{1}{3})(x-1)^5\leq 0.$$

Сон ўқида $-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3}$ ва 1 нуқталарни белгилаб, ҳосил бўлган ҳар бир оралиқда берилган тенгсизликни ишораларини аниқлаймиз:



$x=-1$ ва $x=-\frac{1}{3}$ қийматлар $(x+1)^2(x+\frac{1}{3})^2(x-\frac{1}{3})(x-1)^5\leq 0$ тенгсизликнинг ечими бўлади, чунки $x=-1$ ва $x=-\frac{1}{3}$ бўлганда тенгсизликнинг чап қисми 0 га тенг бўлиб 0=0 тенглик бажарилади.

Шундай қилиб, чизмадан ва юқоридаги хулосага асосан тенгсизликнинг ечимлар тўплами $[\frac{1}{3};1]\cup\{-1;-\frac{1}{3}\}$ иборат бўлади.

Жавоб: $x\in[\frac{1}{3};1]\cup\{-1;-\frac{1}{3}\}$.

4–Мисол. $(x^2-4x)(x^2-4)(x^2-10x+25)>0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: Кўпхадни кўпайтувчиларга ажратиш усулидан фойдаланиб, берилган тенгсизликни тенг кучли тенгсизликни ёзиб оламиз:

$x(x-4)(x-2)(x+2)(x-5)^2>0 \Leftrightarrow (x+2)x(x-2)(x-4)(x-5)^2>0$.

Демак, тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(-\infty;-2)\cup(0;2)\cup(4;5)\cup(5;+\infty)$ оралиқлардан иборатдир.

Жавоб: $x\in(-\infty;-2)\cup(0;2)\cup(4;5)\cup(5;+\infty)$.

Изоҳ. Тенгсизликнинг ечимлар тўпламини ёзаётган пайтда тенгсизлик белгисига эътибор бериш зарур. Масалан, 4-мисолдаги тенгсизлик белгисини ўзгартирсак, ечимлар тўплами ҳам ўзгаради, яъни $(x^2-4x)(x^2-4)(x^2-10x+25)\geq 0$ бўлса, у ҳолда тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(-\infty;-2]\cup[0;2]\cup[4;+\infty)$ иборат бўлади.

5–Мисол. $2(1-2x-x^2)>x(x+1)$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: Тенгсизликка тенг кучли тенгсизлик ёзиб оламиз:

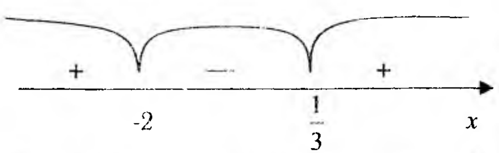
$2-4x-2x^2>x^2+x \Leftrightarrow 3x^2+5x-2<0$.

Энди $3x^2+5x-2$ учхадни кўпайтувчиларга ажратамиз. Бу учхаднинг илдизлари $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-2$ га тенг, демак,

$$3x^2+5x-2=3(x-\frac{1}{3})(x+2).$$

Иккинчи томондан $3(x-\frac{1}{3})(x+2)<0$.

Интерваллар усулига кўра, сон ўқида -2 ва $\frac{1}{3}$ нуқталарни белгилаб, ҳосил бўлган ҳар бир оралиқда берилган тенгсизликнинг ишораларини аниқлаймиз:



Демак, тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(-2;\frac{1}{3})$ оралиқдан иборат.

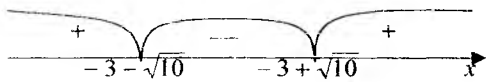
Жавоб: $x\in(-2;\frac{1}{3})$.

6–Мисол. $x^2+6x-1\geq 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: $x^2+6x-1=0$ тенгламанинг ечимлари $x_1=-3-\sqrt{10}$, $x_2=-3+\sqrt{10}$ дан иборат. Демак, кўпайтувчиларга ажратиш қоидасидан фойдаланиб:

$$x^2+6x-1=(x+3+\sqrt{10})(x+3-\sqrt{10})\geq 0$$

га эга бўламиз. Бундан интерваллар усули ёрдамида қуйидагини ҳосил қиламиз:



Демак, тенгсизликнинг ечимлар тўплами

$$(-\infty;\ -3-\sqrt{10}]\cup[-3+\sqrt{10};+\infty)$$

дан иборат.

Жавоб: $x\in(-\infty;\ -3-\sqrt{10}]\cup[-3+\sqrt{10};+\infty)$.

7–Мисол. $(x^2+3x+6)(-x^2-x-1)(x^2+x)(x-3)^2\geq 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: Берилган тенгсизликни тенг кучли тенгсизлик ёзиб оламиз.

$$-(x^2+3x+6)(x^2+x+1)x(x+1)(x-3)^2\geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

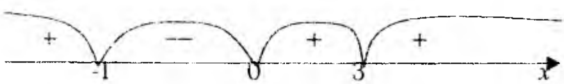
$$\Leftrightarrow (x^2+3x+6)(x^2+x+1)x(x+1)(x-3)^2\leq 0.$$

Бундаги x^2+3x+6 ва x^2+x+1 учхадларнинг дискриминанти манфий, яъни $D_1=3^2-4\cdot 6=-15<0$, $D_2=1^2-4\cdot 1=-3<0$. У ҳолда $x^2+3x+6=0$ ва $x^2+x+1=0$ тенгламалар ечимга эга эмас. Демак, x^2+3x+6 ва x^2+x+1 учхадлар кўпайтувчиларга ажралмайди ва бутун сон ўқида мусбат ишорага эга бўлади, яъни $x\in R$ да $x^2+3x+6>0$ ва $x^2+x+1>0$ бўлади.

Шундай қилиб, берилган тенгсизликни мусбат x^2+3x+6 ва x^2+x+1 ифодаларга бўлиб, бу тенгсизликка тенг кучли тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$x(x+1)(x-3)^2\leq 0.$$

Интерваллар усулига кўра:



Демак, берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами $[-1;\ 0]\cup\{3\}$ дан иборатдир.

Жавоб: $x\in[-1;\ 0]\cup\{3\}$.

8–Мисол. $x^4-3x^2-4>0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: Қуйидаги $x^4-3x^2-4=0$ биквадратик ттенгламанинг ечимлари $x^2=4$ ва $x^2=-1$ га тенг. Демак, x^4-3x^2-4 учхад қуйидагича кўпайтувчиларга ажралади:

$$x^4-3x^2-4=(x^2-4)(x^2+1)=(x-2)(x+2)(x^2+1).$$

Шунинг учун берилган тенгсизликни бундай ёзиш мумкин:

$$(x-2)(x+2)(x^2+1)>0$$

x^2+1 ифода x нинг исталган қийматида мусбат бўлганлиги учун, охирги тенгсизлик қуйидагича тенгсизликка тенг кучли:

$$(x-2)(x+2)>0\ .$$

Интерваллар усулига кўра эса:

Демак, берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(-\infty;-2)\bigcup(2;+\infty)$ оралиқларда аниқланган.

Жавоб: $x\in(-\infty;-2)\bigcup(2;+\infty)$.

9–Мисол. $x^3-3x^2-3x+1\le 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: Кўпайтувчиларга ажратиш қоидаси ва қисқа кўпайтириш формулаларига кўра

$x^3-3x^2-3x+1=(x^3+1)-3x(x+1)=(x+1)(x^2-x+1)-3x(x+1)=$

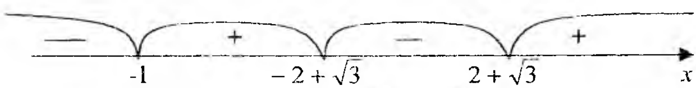
$=(x+1)(x^2-4x+1)=(x+1)(x^2-4x+4-3)=(x+1)((x-2)^2-(\sqrt{3})^2)=$ га эга

$=(x+1)(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$

бўламиз. Шунинг учун берилган тенгсизликни бундай ёзиб оламиз:

$$(x+1)(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})\le 0\ .$$

Интерваллар усулига кўра эса:



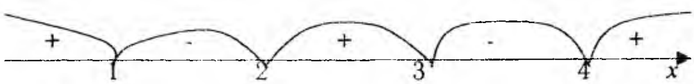
Жавоб: $x\in(-\infty;-1]\bigcup[-2+\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}]$.

10–Мисол. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24>0$ тенгсизликни ечинг ва энг кичик мусбат ечимини топинг.

Ечиш: 3 боб 6-§ га кўра, ушбу $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ тенглама $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=4$ ечимларга эга бўлади. демак, берилган тенгсизлик қуйидаги тенгсизликка тенг кучли:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0\ .$$

Интерваллар усулига кўра эса:



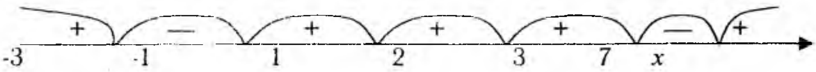
Демак, берилган тенгсизликнинг ечими $(-\infty;1)\bigcup(2;3)\bigcup(4;+\infty)$ аниқланган энг кичик мусбат бутун ечим 5 сони.

Жавоб: $x\in(-\infty;1)\bigcup(2;3)\bigcup(4;+\infty)$.

Энг кичик мусбат бутун ечим 5.

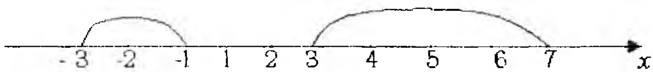
11–Мисол. $(x+3)^3(x+1)(x-1)^2(x-2)^2(3-x)(7-x)\le 0$ тенгсизликни ечинг ва бутун ечимлар йиғиндисини топинг.

Ечиш: Сон ўқида берилган тенгсизликнинг нолларини (яъни -3, -1, 1, 2, 3 ва 7 нуқталарни) белгилаб, ҳосил бўлган ҳар бир оралиқда тенгсизликнинг ишорасини аниқлаймиз:



Демак, берилган тенгсизликни ечими $x\in[-3;-1]\bigcup[3;7]\bigcup\{1;2\}$ иборат.

Энди бутун ечимларни аниқлаймиз:



Шундай қилиб, тенгсизликнинг бутун ечимлари -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 дан иборат бўлади ва уларнинг йиғиндиси
-3-2-1+1+2+3+4+5+6+7=22 га тенг.

Жавоб: $x\in[-3;-1]\bigcup[3;7]\bigcup\{1;2\}$; 22.

8 – §. Параметрларга боғлиқ бир номаълумли тенгсизликлар.

1–Таъриф. Ушбу $F(a;x)*G(x)$ кўринишдаги тенгсизликларга параметрга боғлиқ бир номаълумли тенгсизликлар дейилади, бу ерда a-параметр, x-номаълум * белги $>,<,\ge,\le$ белгилардан бирини билдиради.

Масалан: $ax>5;\ ax>\frac{1}{x};\ ax^2+5x-3>0;\ x^2+(a-2)x+2\le 0$

тенгсизликлар параметрга боғлиқ бир номаълумли тенгсизликлардир.

2–Таъриф. Ушбу $\begin{cases}F_1(a,x)*G_1(x)\\ F_2(a,x)*G_2(x)\end{cases}$ кўринишдаги тенгсизликларга параметрга боғлиқ бир номаълумли тенгсизликлар системаси дейилади.

Масалан: $\begin{cases}ax\ge 7a-3,\\ ax\le 4a+3,\end{cases}$ $\begin{cases}a(1-x)\ge 0,\\ (ax-1)(a-1)\le 0,\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+4x+3+a<0,\\ 2x+a+6>0,\end{cases}$

$6a-2<ax<4a+1$ тенгсизликлар параметрга боғлиқ бир номаълумли тенгсизликлар системасидир.

8.1. Параметрларга боғлиқ бир номаълумли тенгсизликларни ечиш.

1–Мисол. a нинг қандай қийматларида $a(x-4)>x-5$ тенгсизлик х нинг барча қийматларида ўринли бўлади?

Ечиш: $a(x-4) > x-5 \Leftrightarrow ax-4a > x-5 \Leftrightarrow ax-x > 4a-5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a-1)x > 4a-5.$

1) Агар $a-1>0 \Leftrightarrow a>1$ бўлса, у ҳолда $x > \dfrac{4a-5}{a-1}$ бўлади.

2) Агар $a-1<0 \Leftrightarrow a<1$ бўлса, у ҳолда $x < \dfrac{4a-5}{a-1}$ бўлади.

3) Агар $a-1=0 \Leftrightarrow a=1$ бўлса, у ҳолда $0x>-5$ бўлиб, тенгсизлик x нинг барча қийматларида ўринли бўлади.

Демак, берилган тенгсизлик
$x \in R$ да ўринли бўлиши учун а=1 тенг бўлиш керак.

Жавоб: $a=1$

2–Мисол. a нинг қандай қийматида $(x-a)(x-1)<0$ тенгсизлик ечимга эга бўлмайди?

Ечиш: Тенгсизликни интерваллар усулида ечамиз. $P(x)=(x-a)(x-1)=0$ тенглама $x=a,\ x=1$ ечимларга эга бўлади. Бу қийматларни сон ўқида жойлаштириш a параметрга боғлиқдир:

1) Агар $a<1$ бўлса, уҳолда

бўлиб,тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(a;\ 1)$ оралиқдан иборат бўлади.

2) Агар $a>1$ бўлса, у ҳолда

бўлиб тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(1;\ a)$ аниқланади.

3) Агар $a=1$ бўлса, у ҳолда берилган тенгсизлик қуйидаги тенгсизликка тенг кучли:

$$(x-1)(x-1)<0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2<0$$

Ушбу тенгсизликнинг чап томони x нинг барча қийматларида мусбат бўлади. Бу тасдиқ берилган тенгсизликка зиддир. Демак, $(x-1)^2<0$ тенгсизлик ечимга эга эмас, я'ни $x \in \varnothing$.

Жавоб: $a=1$.

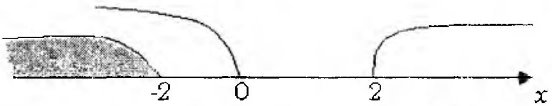
3–Мисол. a нинг қандай қийматларида $ax^2+4x+a<0$ тенгсизлик x нинг барча қийматларида ўринли бўлади?

Ечиш: Квадрат тенгсизликларни ечиш қоидасига кўра, берилган тенгсизлик x нинг барча қийматларида ўринли бўлиши учун a параметр

$$\begin{cases} a<0, \\ D<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ D=16-4a^2<0 \end{cases}$$ тенгсизликлар системасини

қаноатлантириши керак. Бу тенгсизлик қуйидаги тенгсизликка тенг кучли:

$$\begin{cases} a<0, \\ 4-a^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ (2-a)(2+a)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ a>2,\ a<-2 \end{cases} \Leftrightarrow a<-2$$



Демак, берилган тенгсизликни ечимлар тўплами $(-\infty;+\infty)$ оралиқда аниқланиши учун a параметр $(-\infty;-2)$ оралиқда аниқланган бўлиши керак.

Жавоб: $a\in(-\infty;-2)$.

Айрим тенгсизликларни ва тенгсизликлар системасини ечимлар тўпламини топишда тенгламалар ечимларини жойланиши муҳим роль ўйнайди.

Бу хулосани квадрат тенглама ечимларининг жойланишига нисбатан кўрсатамиз.

Ушбу $x^2+px+q=0$ тенглама иккита ечимга эга бўлиши учун

$$\begin{cases} p^2-4q\ge 0, \\ p<0, \\ q>0 \end{cases}$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

4–Мисол. $x^2-2(a-1)x+(2a+1)=0$ квадрат тенглама иккита ечимга эга бўладиган a нинг барча қийматларини топинг.

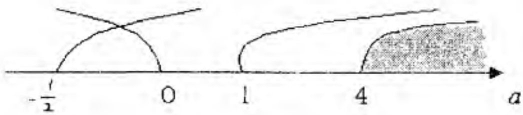
Ечиш: Берилган квадрат тенгламанинг ечимлари $x_1>0$ ва $x_2>0$ бўлиши учун

$$\begin{cases} [-2(a-1)]^2-4(2a+1)\ge 0, \\ 2(a-1)>0, \\ 2a+1>0 \end{cases}$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Юқоридаги тенгсизликлар системаси қуйидаги тенгсизликлар системасига тенг кучли:

$$\begin{cases} a(a-4)\ge 0, \\ a-1>0, \\ 2a+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le 0,\ a\ge 4, \\ a>1, \\ a>-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a\ge 4.$$



Демак, берилган квадрар тенглама иккита мусбат ечимга эга бўлиши учун a параметр $[4, \infty)$ оралиқда ўзгариши керак.

Жавоб: $x \in [4, \infty)$.

2. Ушбу $x^2 + px + q = 0$ квадрат тенглама иккита ечимга эга бўлиб, ҳар бири бирор ўзгармас С сонидан катта ($x_1 > C$ ва $x_2 > C$) бўлиши учун

$$\begin{cases} p^2 - 4q \geq 0, \\ -\dfrac{p}{2} > C, \\ C^2 + pC + q > 0. \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси бажарилиши зарур ва етарлидир.

5−Мисол. $4x^2 - 2x + a = 0$ квадрат тенглама x_1 ва x_2 ечимларга эга бўлса, $x_1 > -2$ ва $x_2 > -2$ шартни қаноатлантирувчи a нинг барча қийматларини топинг.

<u>Ечиш:</u> Берилган тенгламанинг ечимлари $x_1 > -2$ ва $x_2 > -2$ шартни қаноатлантириши учун

$$\begin{cases} (-\dfrac{1}{2})^2 - 4 \cdot \dfrac{a}{4} \geq 0, \\ -\dfrac{(-\frac{1}{2})}{2} < -2, \\ (-2)^2 + (-\dfrac{1}{2})(-2) + \dfrac{a}{4} > 0. \end{cases}$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Ҳосил бўлган тенгсизликлар системасини ечамиз:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4} - a \geq 0, \\ \dfrac{1}{4} < -2, \\ 4 + 1 + \dfrac{a}{4} > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{4} < -2, \\ a > -20. \end{cases} \Leftrightarrow -20 < a \leq \dfrac{1}{4}$$

Демак, берилган квадрат тенглама ечимлари $x_1 > -2$ ва $x_2 > -2$ тенгсизликни бажариши учун a параметр $a \in (-20;\ \frac{1}{4}]$ оралиқда бўлиши керак.

Жавоб: $a \in (-20;\ \frac{1}{4}]$

3. Ушбу $x^2 + px + q = 0$ квадрат тенглама иккита ечимга эга бўлиб, ҳар бири бирор ўзгармас С сонидан кичик ($x_1 < C$ ва $x_2 < C$) бўлиши учун

$$\begin{cases} p^2 - 4q \ge 0, \\ -\dfrac{p}{2} < C, \\ C^2 + pC + q > 0. \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси бажарилиши зарур ва етарлидир.

4. Ушбу $x^2 + px + q = 0$ квадрат тенглама иккита ечимга эга бўлиб, бири бирор С сонидан катта, иккинчиси С сонидан кичик ($x_1 > C$ ва $x_2 < C$) бўлиши учун $C^2 + pC + q < 0$ бўлиши зарур ва етарлидир.

6-Мисол. $2x^2 - 2(a+1)x + a(a-1) = 0$ квадрат тенглама x_1 ва x_2 ечимларга эга бўлса, у ҳолда $x_1 < a < x_2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи a параметрнинг барча қийматларини топинг.

Ечиш. Қуйидаги масалани ечиш дегани, шундай a нинг қийматларини топиш керакки, берилган тенглама иккита ечимга эга бўлсин ва $x_1 < a < x_2$ шартни қаноатлантирсин. Бунинг учун 4-натижага кўра a параметр қуйидаги тенгсизликни $2a^2 - 2(a+1)a + a(a-1) < 0$ қаноатлантириши керак. Бундан $-a^2 - 3a < 0 \Leftrightarrow a(a+3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 0, \\ a < -3. \end{array}\right.$

Демак, қўйилган масалани ечими $a \in (-\infty;\ -3) \cup (0;\ +\infty)$ оралиқдадир.

Жавоб: $a \in (-\infty;\ -3) \cup (0;\ +\infty)$

8.2. Параметрга боғлиқ бўлган тенгсизликлар системасини ечиш.

1-Мисол. a нинг барча қийматларида

$$\begin{cases} a(x-2) \ge x - 3 \\ 8(a+1)x > 8ax + 9 \end{cases}$$

тенгсизликлар системасини ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизликлар системасига тенг кучли системани ёзамиз.

$$\begin{cases} ax-2a\ge x-3 \\ 8ax+8x>8ax+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax-x\ge 2a-3 \\ 8ax-8ax+8x>9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)x\ge 2a-3 \\ 8x>9 \end{cases}$$

I. $a-1>0 \Leftrightarrow a>1$ бўлсин. У ҳолда охирги тенгсизликлар системаси қуйидаги тенгсизликлар системасига тенг кучлидир:

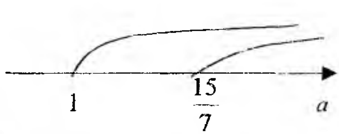
$$\begin{cases} x\ge \dfrac{2a-3}{a-1} \\ x>\dfrac{9}{8}. \end{cases} \qquad (*)$$

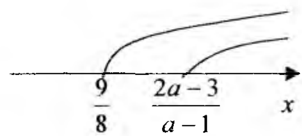
Бунда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

Агар $\dfrac{2a-3}{a-1}>\dfrac{9}{8} \Leftrightarrow \dfrac{2a-3}{a-1}-\dfrac{9}{8}>0 \Leftrightarrow \dfrac{16a-24-9a+9}{8(a-1)}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{7a-15}{8(a-1)}>0 \Leftrightarrow 8(7a-15)(a-1)>0 \overset{(a>1)}{\Leftrightarrow} 7a-15>0 \Leftrightarrow a>\dfrac{15}{7}$,

бўлса, у ҳолда (*) га кўра

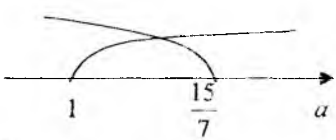


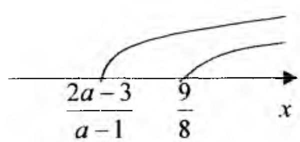


бўлади.

Демак, $a>\dfrac{15}{7}$ бўлганида, берилган тенгсизликлар системасининг ечимлар тўплами $x\in\left[\dfrac{2a-3}{a-1};\ +\infty\right]$ оралиқда аниқланади.

2) Агар $\dfrac{2a-3}{a-1}<\dfrac{9}{8} \Leftrightarrow a<\dfrac{15}{7}$ бўлса, у ҳолда (*) га кўра





бўлади.

Демак, $1<a<\dfrac{15}{7}$ бўлганда, берилган тенгсизликлар системасининг ечимлар тўплами $x\in(\dfrac{9}{8};+\infty)$ оралиқда аниқланади.

II. $a-1<0 \Leftrightarrow a<1$ бўлсин. У ҳолда

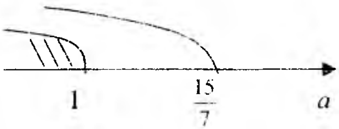
$$\begin{cases} (a-1)x\ge 2a-3 \\ 8x>9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{2a-3}{a-1} \\ x>\dfrac{9}{8} \end{cases} \qquad (**)$$

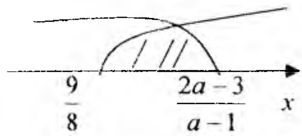
бўлади.

Бунда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $\dfrac{2a-3}{a-1} > \dfrac{9}{8} \Leftrightarrow \dfrac{7a-15}{8(a-1)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 7a-15<0 \\ a-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<\dfrac{15}{7} \\ a<1 \end{cases} \Leftrightarrow a<1$

Бундан ва (**) дан $x \in (\dfrac{9}{8}; \dfrac{2a-3}{a-1}]$, яъни

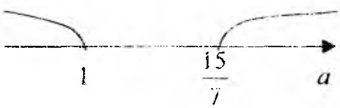


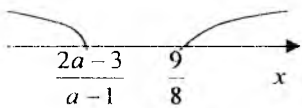


Демак, $a<1$ бўлса, у ҳолда берилган тенгсизликлар системасининг ечимлар тўплами $(\dfrac{9}{8}; \dfrac{2a-3}{a-1}]$ оралиқда аниқланади.

2) $\dfrac{2a-3}{a-1} < \dfrac{9}{8} \Leftrightarrow \dfrac{7a-15}{8(a-1)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 7a-15>0 \\ a-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>\dfrac{15}{7} \\ a>1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \varnothing$

Бундан ва (**) дан





$x \in \varnothing$.

Бу ҳолда тенгсизликлар системаси ечимга эга эмас, я'ни $x \in \varnothing$.

III. 1) a=1 бўлсин. У ҳолда берилган тенгсизликлар системаси қуйидаги тенгсизликлар системасига тенг кучли:

$$\begin{cases} 0 \ge -1 \\ x > \dfrac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ x > \dfrac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{9}{8}$$

Демак, a=1 бўлганда, берилган тенгсизликлар системасининг ечимлар тўплами $(\dfrac{9}{8}; +\infty)$ оралиқда аниқланади.

2) $a=\frac{15}{7}$ бўлсин, у ҳолда берилган тенгсизликлар системаси қуйидаги тенгсизликлар системасига тенг кучли:

$$\begin{cases}(\frac{15}{7}-1)x\geq 2\cdot\frac{15}{7}-3\\ 8x>9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x\geq 9\\ 8x>9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\frac{9}{8}\\ x>\frac{9}{8}\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{9}{8}$$

Демак, $a=\frac{15}{7}$ бўлганда, $x\in(\frac{9}{8};+\infty)$ бўлади.

Жавоб: $x\in(\frac{9}{8};\frac{2a-3}{a-1}]$, агар $a<1$;

$x\in(\frac{9}{8};+\infty)$, агар $1\leq a\leq\frac{15}{7}$;

$x\in[\frac{2a-3}{a-1};+\infty)$, агар $a>\frac{15}{7}$

2-Мисол. a нинг қандай қийматларида $\begin{cases}ax\geq 4a-3\\ ax\leq 5a+4\end{cases}$ тенгсизликлар системаси ечимга эга бўлмайди.

Ечиш. I. $a=0$ бўлсин. У ҳолда берилган тенгсизликлар системаси қуйидаги системага тенг кучли:

$$\begin{cases}0\geq -3\\ 0\leq 4\end{cases}\Leftrightarrow x\in R$$

Демак, $a=0$ да берилган тенгнсизликлар системасининг ечимлар тўплами $(-\infty;+\infty)$ оралиқда аниқланган, я'ни бу ҳолда ечим бор.

II. $a\neq 0$ бўлсин, у ҳолда берилган тенгсизликлар системаси қуйидаги қўш тенгсизликка тенг кучли:

$$4a-3\leq ax\leq 5a+4$$

Ма'лумки, $a<y<b$ оралиқ бўш тўплам бўлиши учун $b\leq a$ бўлиши керак. Қўш тенгсизлик ечимга эга бўлмаслиги учун эса $4a-3\geq 5a+4$ бўлиши керак. Бу ердан $4a-5a\geq 3+4\Leftrightarrow -a\geq 7\Leftrightarrow a\leq 7$ эканлиги келиб чиқади.

Демак, $a\in(-\infty;7]$ бўлганда, берилган тенгсизликлар системаси ечимга эга бўлмайди.

Жавоб: $a\in(-\infty;7]$.

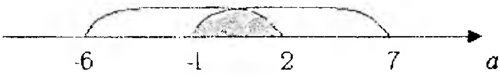
3-Мисол. a нинг қандай қийматларида $\begin{cases}x^2-(a+2)x+4>0\\ 4x^2+(a-3)x+1>0\end{cases}$ тенгсизликлар системаси x нинг барча қийматларида ўринли бўлади.

Ечиш. Берилган тенгсизликлар системасида қатнашган тенгсизликларнинг юқори даражали ҳадининг коэффицентлари $(a_1=1>0,\ a_2=4>0)$ мусбат бўлганлиги учун тенгсизликлар системаси x нинг барча қийматларида ўринли бўлиши учун, унда қатнашган уч ҳадларнинг дискирминанти манфий бўлиши керак, я'ни

$$\begin{cases}(a+2)^2-16<0\\(a-3)^2-16<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+2)^2<16\\(a-3)^2<16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a+2|<4\\|a-3|<4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-4<a+2<4\\-4<a-3<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6<a<2\\-1<a<7\end{cases}$$

Бундан,



$a\in(-1;\ 2)$

Демак, берилган тенгсизликлар системаси $a\in(-1;\ 2)$ бўлганда x нинг барча қийматларида ечимга эга бўлади.

Жавоб: $a\in(-1;\ 2)$.

9 - §. Рационал тенгсизликлар

1-Таъриф. Ушбу

$$\frac{P(x)}{Q(x)}>0,\ \frac{P(x)}{Q(x)}<0,\ \frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0,\ \frac{P(x)}{Q(x)}\leq 0 \quad (1)$$

кўринишдаги тенгсизликларга рационал тенгсизликлар дейилади, бу ерда $P(x)$ ва $Q(x)$ кўпҳадлар бўлиб, $Q(x)\neq 0$.

Масалан, $\frac{x}{x+1}\geq 0$, $\frac{3x^3}{x^2+5x-3}<0$, $\frac{1-x^2}{x}\leq 0$, $\frac{1}{x}-2\geq 0$ рационал тенгсизликлардир.

2-Таъриф. Ушбу

$$\frac{ax+b}{cx+d}>0,\ \frac{ax+b}{cx+d}<0,\ \frac{ax+b}{cx+d}\geq 0,\ \frac{ax+b}{cx+d}\leq 0$$

кўринишдаги тенгсизликларга каср-чизиқли тенгсизликлар дейилади, бунда $a,\ b,\ c,\ d\in R$ $c\neq 0$.

Масалан, $\frac{3x-1}{4x+1}\geq 0$; $\frac{x}{7x-1}\leq 0$; $\frac{2}{x-3}>0$; $\frac{x-7}{x}<0$ каср чизиқли рационал тенгсизликлардир.

9. 1. Рационал тенгсизликларни ечиш

Рационал тенгсизликлар қуйидагича ечилади:

1. $\frac{P(x)}{Q(x)}>0 \quad\Leftrightarrow\quad P(x)Q(x)>0 \qquad (2)$

2. $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x)Q(x) < 0 \qquad (3)$

3. $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(x)Q(x) \geq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases} \qquad (4)$

4. $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(x)Q(x) \leq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases} \qquad (5)$

Шундай қилиб, рационал тенгсизликларни ечиш 6§, 7§ ва 8§ ларда ўрганилган тенгсизликларни ечишга келтирилади.

Рационал тенгсизликларни ечишга оид мисоллар.

1-Мисол. $\dfrac{x-1}{x+4} > 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. 1-усул. Каср мусбат бўлиши учун сурат ва махражи бир хил ишорали бўлиши керак, я'ни

а) $\begin{cases} x-1>0 \\ x+4>0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-1<0 \\ x+4<0 \end{cases}$

а) системани ечсак $x \in (1;\ +\infty)$ бўлади;

б) системани ечсак $x \in (-\infty;\ -4)$ бўлади.

Демак, берилган рационал тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(-\infty;\ -4) \bigcup (1;\ +\infty)$ оралиқларда аниқланган.

2-усул. (2) формулага кўра, берилган тенгсизлик қуйидаги тенгсизликка тенг кучлидир:

$$(x-1)(x+4) > 0$$

Интерваллар усулига кўра $x=1$ ва $x=-4$ қийматларни сон ўқида белгилаб, ҳар бир оралиқда берилган тенгсизликни ишораларини алмаштирамиз:

Демак, берилган рационал тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(-\infty;\ -4) \bigcup (1;\ +\infty)$ оралиқлардан иборат.

Жавоб: $x \in (-\infty;\ -4) \bigcup (1;\ +\infty)$.

Изоҳ. Рационал тенгсизликларни кўпинча 2-усулда ечиш қулайдир.

2-мисол. $\dfrac{x+14}{x-3} < 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. (3) формулага кўра, берилган тенгсизлик қуйидаги тенгсизликка тенг кучли $(x-3)(x+14) < 0$

Интерваллар усулига кўра

Демак, берилган рационал тенгсизликнинг ечимлар тўплами (-14;3) оралиқдан иборат.

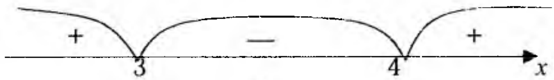
Жавоб. $x \in (-14;\ 3)$.

3-мисол. $\dfrac{5x-15}{3x-12} \ge 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. (4) формулага кўра:

$$\frac{5(x-3)}{3(x-4)} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 15(x-3)(x-4) \ge 0 \\ 3(x-4) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-4) \ge 0 \\ x \ne 4 \end{cases}$$

Интерваллар усулига кўра эса:



яъни $\begin{cases} (x-3)(x-4) \ge 0 \\ x \ne 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4, \quad x \le 3 \\ x \ne 4 \end{cases} \Leftrightarrow\ x > 4, \quad x \le 3.$

Демак, берилган рационал тенгсизлик $x \in (-\infty;\ 3] \cup (4;\ +\infty)$ тўпламда бажарилади.

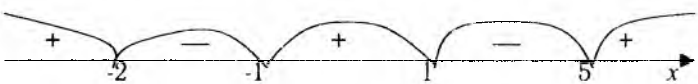
Жавоб. $x \in (-\infty;\ 3] \cup (4;\ +\infty)$.

4-Мисол. $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+x-2} \le 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Касрнинг сурат ва махражини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$\frac{(x+1)(x-5)}{(x-1)(x+2)} \le 0 \quad \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (x+1)(x+2)(x-1)(x-5) \le \\ (x+2)(x-1) \ne 0 \end{cases}$$

Интерваллар усулига кўра:



Демак, берилган рационал тенгсизлик $x \in (-2; -1] \cup (1;\ 5]$ тўпламда бажарилади.

Жавоб. $x \in (-2; -1] \cup (1;\ 5]$.

5-Мисол. $\dfrac{x}{x-4} > \dfrac{1}{3}$ тенгсизликни ечинг.

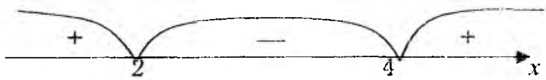
Ечиш. Берилган тенгсизликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{x}{x-4} - \frac{1}{3} > 0 \Leftrightarrow \frac{3x-(x-4)}{3(x-4)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{3(x-4)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2(x+2)}{3(x-4)} > 0.$$

Бундан (2) формулага кўра:

$6(x+2)(x-4) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x-4) > 0.$

Интерваллар усулига кўра



охирги тенгсизликни ечими $x \in (-\infty;\ 2) \bigcup (4;\ +\infty)$ оралиқдан иборат.

Демак, берилган рационал тенгсизлик охирги тенгсизликка тенг кучли бўлгани учун унинг ечимлар тўплами ҳам $x \in (-\infty;\ 2) \bigcup (4;\ +\infty)$ дан иборатдир.

Жавоб. $x \in (-\infty;\ 2) \bigcup (4;\ +\infty)$.

6-Мисол. $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+1} \le \dfrac{1}{x}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Ушбу тенгсизликка тенг кучли тенгсизликни ёзамиз:

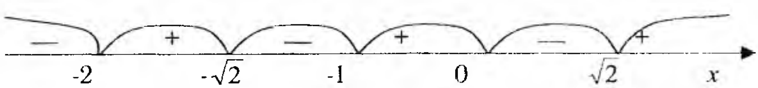
$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1) + x(x+2) - (x+2)(x+1)}{x(x+2)(x+1)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x + x^2 + 2x - x^2 - 2x - x - 2}{x(x+1)(x+2)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2}{x(x+1)(x+2)} \le 0.$$

Бундан (5) формулага кўра:

$$\begin{cases} (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})x(x+1)(x+2) \le 0, \\ x(x+1)(x+2) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})x(x+1)(x+2) \le 0, \\ x \ne 0,\ \ x \ne -1,\ \ x \ne -2 \end{cases}$$

ҳосил қиламиз. Интерваллар усулини қўллаб, берилган рационал тенгсизликнинг ечимлар тўпламини $x \in (-\infty;\ -2) \bigcup [-\sqrt{2};\ -1) \bigcup (0;\ \sqrt{2}]$ оралиқларда аниқлаймиз:



Жавоб. $x \in (-\infty;\ -2) \bigcup [-\sqrt{2};\ -1) \bigcup (0;\ \sqrt{2}]$.

7-мисол. $\dfrac{x-2}{x} - \dfrac{x+2}{x-2} < 2$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Қуйидагича алмаштириш қиламиз:

$$\frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x} \qquad \frac{x+2}{x-2} = \frac{x-2+4}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}.$$

У ҳолда тенгсизлигимиз қуйидаги тенгсизликка тенг кучлидир:

$$1 - \frac{1}{x} - 1 + \frac{4}{x-2} < 2 \Leftrightarrow \frac{4}{x-2} - \frac{2}{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{4x - 2(x-2) - 2(x-2)x}{x(x-2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x - 2x + 4 - 2x^2 + 4x}{x(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 6x + 4}{x(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 3x - 2)}{x(x-2)} > 0$$

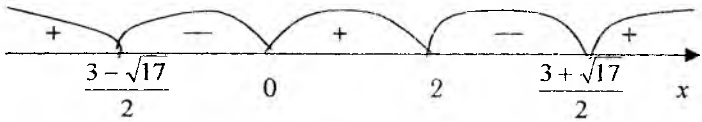
Касрни суратини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$\frac{2(x-\frac{3-\sqrt{17}}{2})(x-\frac{3+\sqrt{17}}{2})}{x(x-2)}>0 \Leftrightarrow \frac{(x-\frac{3-\sqrt{17}}{2})(x-\frac{3+\sqrt{17}}{2})}{x(x-2)}>0.$$

Бундан (2) формулага кўра:

$x(x-2)(x-\frac{3-\sqrt{17}}{2})(x-\frac{3+\sqrt{17}}{2})>0$ ни ҳосил қиламиз.

Интерваллар усулини қўллаб, охирги тенгсизликни ечимини топамиз:



$x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{17}}{2}) \cup (0;\ 2) \cup (\frac{3+\sqrt{17}}{2};\ +\infty)$

Демак, берилган рационал тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(-\infty; \frac{3-\sqrt{17}}{2}) \cup (0;\ 2) \cup (\frac{3+\sqrt{17}}{2};\ +\infty)$ оралиқлардан иборат бўлади.

Жавоб. $x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{17}}{2}) \cup (0;\ 2) \cup (\frac{3+\sqrt{17}}{2};\ +\infty)$.

8-Мисол. $2x^2+2x+1-\frac{15}{x^2+x+1}<0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Қуйидагича алмаштириш қиламиз:

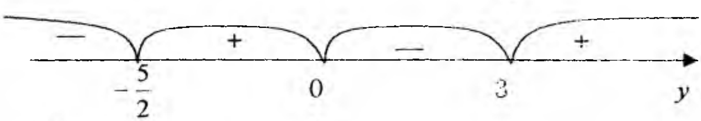
$$2(x^2+x+1)-1-\frac{15}{x^2+x+1}<0.$$

Бундан ушбу $x^2+x+1=y$ белгилаш киритиб, берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизликни ёзамиз.

$$2y-1-\frac{15}{y}<0 \Leftrightarrow \frac{2y^2-y-15}{y}<0.$$

Бундан (3) формула ва интерваллар усулига кўра

$$y(2y^2-y-15)<0 \Leftrightarrow 2y(y+\frac{5}{2})(y-3)<0$$



$2y(y+\frac{5}{2})(y-3)<0 \Leftrightarrow y<-\frac{5}{2},\ 0<y<3$ ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, белгилашларга кўра берилган рационал тенгсизлик қуйидаги тенгсизликлар системасига тенг кучли

$$\begin{cases} x^2+x+1<-\frac{5}{2} \\ x^2+x+1>0 \\ x^2+x+1<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+\frac{7}{2}<0 \\ x^2+x+1>0 \\ x^2+x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ x\in R \\ -2<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow -2<x<1.$$

Демак, берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами (-2;1) оралиқдан иборат.

Жавоб. $x\in(-2;\,1)$.

9-Мисол. $\dfrac{-7x^2(-3-2x)^3(x-2)}{(2x+14)^3(-10+2x)^2(x-7)^5}\le 0$ тенгсизликнинг бутун ечимлар йиғиндисини топинг.

Ечиш. берилган тенгсизлик қуйидаги тенгсизликка тенг кучли

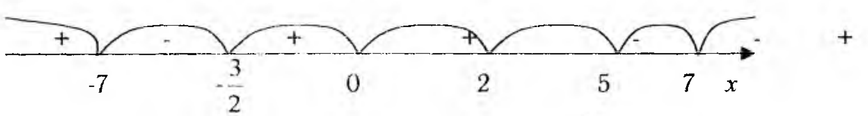
$$\frac{56x^2(x^3+\frac{3}{2})^3(x-2)}{32(x+7)^3(x-5)^2(x-7)^5}\le 0 \Leftrightarrow \frac{7x^2(x+\frac{3}{2})^3(x-2)}{4(x+7)^3(x-5)^2(x-7)^5}\le 0 \text{ бўлади.}$$

Бундан (5) формулага кўра

$$\begin{cases} 28x^2(x+\frac{3}{2})^3(x-2)(x-5)^2(x-7)^5(x+7)^5\le 0, \\ (x+7)^3(x-5)^2(x-7)^5\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)^3(x+\frac{3}{2})^3x^2(x-2)(x-5)^2(x-7)^5\le 0, \\ x\ne -7,\ x\ne 5,\ x\ne 7 \end{cases}$$

Интерваллар усулига кўра:



Берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(-7;\,-\frac{3}{2}]\cup\{0\}\cup[2;\,5)\cup(5;\,7)$ оралиқлардан иборат бўлади.

Ушбу ечитмлар тўпламида қуйидаги бутун сонлар ётади:

-6; -5; -4; -3; -2; 0; 2; 3; 4; 5; 6.

Уларнинг йиғиндиси эса -5 га тенг.

Жавоб. -5.

9.2. Рационал тенгсизликлар қатнашган тенгсизликлар системасини ечиш.

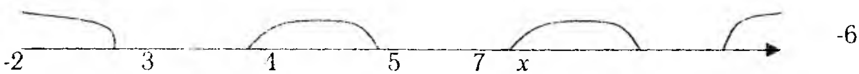
1-Мисол. $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x-3)}{x-7} \geq 0 \\ \dfrac{x+6}{(5-x)(x-4)} \geq 0 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизликлар системаси (4) формулага кўра қуйидаги системага тенг кучлидир:

$$\begin{cases} \begin{cases} (x+2)(x-3)(x-7) \geq 0 \\ x-7 \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+6)(5-x)(x-4) \geq 0 \\ (5-x)(x-4) \neq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x+2)(x-3)(x-7) \geq 0 \\ x \neq 7 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+6)(5-x)(x-4) \geq 0 \\ x \neq 4, \quad x \neq 5 \end{cases} \end{cases}$$

Интерваллар усулини ҳар бир тенгсизликларга қўллаб $\begin{cases} -2 \leq x \leq 3, \\ x > 7, \\ x \leq -6, \\ 4 < x < 5. \end{cases}$

ҳосил қиламиз. Бундан қуйидагини ҳосил қиламиз:



Демак, тенгсизликлар системасида қатнашган тенгсизликлар биргаликда эмас, яъни берилган тенгсизликлар системасини ечимга эга эмас.

Жавоб. $\varnothing$.

2-Мисол. $\begin{cases} \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} > 1 \\ \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} \leq 2 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизликлар системаси қуйидаги системага тенг кучли

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} - 1 > 0 \\ \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2-7x+8-x^2-1}{x^2+1} > 0 \\ \dfrac{3x^2-7x+8-2x^2-2}{x^2+1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2-7x+7}{x^2+1} > 0 \\ \dfrac{x^2-7x+6}{x^2+1} \leq 0 \end{cases} \qquad x^2+1 > 0, \ \ x \in R$$

бўлгани учун охирги тенгсизликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x + 7 > 0 \\ x^2 - 7x + 6 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ 1 \le x \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le 6.$$

Демак, берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами [1;6] оралиқда аниқланган.

Жавоб. $x \in [1;6]$.

3-мисол.

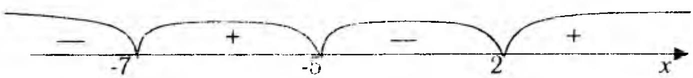
$$\begin{cases} \dfrac{3(-7-x)^3(x+5)}{4(2x-4)^5} \ge 0 \\ \dfrac{7(3-4x)}{12(x-5)^2} \ge 0 \end{cases}$$

тенгсизликлар системасини ечинг.

Ечиш. Берилган тенгсизликлар системасини (4) формулага кўра қуйидаги тенгсизликлар системасига тенг кучли:

$$\begin{cases} \begin{cases} 12(7+x)^3(x+5)(2x-4)^5 \le 0, \\ 2x-4 \ne 0. \end{cases} \\ \begin{cases} 84(3-4x)(x-5)^2 \ge 0, \\ x-5 \ne 0. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (7+x)^3(x+5)(2x-4)^5 \le 0, \\ x \ne 2. \end{cases} \\ \begin{cases} (\frac{3}{4}-x)(x-5)^2 \ge 0, \\ x \ne 5. \end{cases} \end{cases}$$

Интерваллар усулига кўра, биринчи система



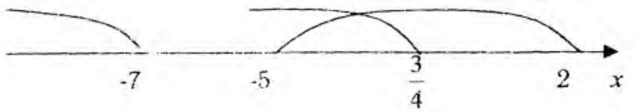
$x \in (-\infty;-7] \cup [-5;2)$

ечимга эга, иккинчи система эса

$x \in (-\infty; \frac{3}{4}]$ ечимга эга.

Бундан ва охирги системадан

$$\begin{cases} x \in (-\infty;-7] \cup [-5;2) \\ x \in (-\infty; \frac{3}{4}] \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -7] \cup [-5; \frac{3}{4}].$$



Демак, берилган тенгсизликлар системасининг ечимлар тўплами $x \in (-\infty;\ -7] \cup [-5;\ \frac{3}{4}]$ оралиқлардан иборатдир.

Жавоб. $x \in (-\infty;\ -7] \cup [-5;\ \frac{3}{4}]$

10 - §. Тенглик ва тенгсизликларни исботлаш.

Тенгсизликларни исбот қилиш учун ўзгарувчининг тенгсизлик аниқланган соҳасидаги барча қийматларида шу тенгсизликнинг тўғри тенгсизликка айланишини кўрсатиш керак.

Тенгсизликларни исбот қилиш учун турли хил усуллардан фойдаланиш мумкин:

1. Тенгсизлик ишорасининг хоссаларидан фойдаланиб исботлаш.
2. Маълум тенгсизликлардан фойдаланиб исботлаш.
3. Алгебраик ифодалар устида қўшиш, айириш ва кўпайтириш амалларини қўллаб исботлаш.
4. Тескарисини фараз қилиб исботлаш.
5. Математик индукция усулидан фойдаланиб исботлаш.

10.1 Тенгсизлик ишораларининг хоссаларидан фойдаланиб исботлаш.

1-Мисол. Агар $x>0,\ y>0$ булса $x^3+y^3 \geq x^2y+xy^2$ булишини исботланг.

Исбот. Тенгсизликнинг ўнг томонидаги хадларнинг қарама - қарши ишора билан чап томонга ўтказамиз $x^3+y^3-x^2y-xy^2 \geq 0$

Бундан $x^2(x-y)-y^2(x-y) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2-y^2) \geq 0$ ёки $(x-y)^2(x+y) \geq 0$. Бундай тенгсизлик шартига кура $x>0,\ y>0$ бўлганда ўринлидир. Агар $x=y$ бўлса тенглик шарти-бажарилади

2-Мисол. Агар $a \geq 0,\ b \geq 0$ бўлса,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad (1)$$

бўлишини исботланг

Исбот. Қуйидаги айирмани қараймиз:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Бундай шартга кўра $a \geq 0,\ b \geq 0$ $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$ бўлади.

Демак,

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

тенгсизликни исботлайди. Агар $a=b$ бўлса $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$. Шундай қилиб иккита манфий бўлмаган соннинг ўрта арифметиги уларнинг ўрта геометригидан кичик эмас.

10.2. Маълум тенгсизликлардан фойдаланиб исботлаш.

3-Мисол. Агар $a>0,\ b>0$ бўлса,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2 \qquad (2)$$

бўлишини исботланг

Исбот. $\frac{a}{b}>0$ ва $\frac{b}{a}>0$ бўлганлиги учун (1) кўра $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}$ ўринли бўлади. Бундан $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ келиб чиқади

Демак, иккита мусбат ўзаро тескари сонлар йиғиндиси иккидан кичик эмас яъни $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ исботланди

4-Мисол. Агар $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0,\ d \geq 0$ бўлса,

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} \qquad (3)$$

бўлишини исботланг.

Исбот. (1) тенгсизликка кўра $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ва $\frac{d+c}{2} \geq \sqrt{cd}$ бўлади. Бундан

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right) \geq \frac{\sqrt{ab}}{2}+\frac{\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \geq \sqrt[4]{abcd}$$ ҳосил киламиз.

Демак, $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ исботланди.

Тенгсизликдаги тенглик белгиси $a=b=c=d$ бўлганда бажарилади.

5-Мисол. Агар $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$ бўлса, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (4) бўлишини исботланг

Исбот. Берилган тенгсизликнинг чап томонига қуйидагича алмаштириш қиламиз

$$d=\frac{a+b+c}{3}=\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}=\frac{a+b+c+d}{4}$$

(3) га кўра эса $\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$ ёки $d\geq\sqrt[4]{abcd}\Leftrightarrow d^4\geq abcd$ бўлади.

а) Агар d=0 бўлса у ҳолда $a=b=c=0$ бўлиб исботланаётган тенгсизлигимиз бажарилади

б) Агар $d\neq 0$ бўлса у ҳолда $d^4\geq abcd$ тенгсизликдан $d^3\geq abc$ ёки $d\geq\sqrt[3]{abc}$ хосил қиламиз

Бундан $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ тенгсизликнинг туғрилиги исботланади. Агар $a=b=c$ бўлса, тенглик шарти бажарилади

10.3. Алгебраик ифодалар устида қўшиш айириш ва кўпайтириш амалларини қўллаб исботлаш

6–Мисол. Агар $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0,$ бўлса у ҳолда $a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$ (5)
бўлишини исботланг.

Исбот. $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0$ тенгсизликлар учун $a+b\geq 2\sqrt{ba},\ \ b+c\geq 2\sqrt{bc},\ \ a+c\geq 2\sqrt{ac}$ ўринлидир.

Буларни хадма-хад қўшиб $(a+b)+(a+c)+(b+c)\geq 2\sqrt{ba}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}$ ҳосил қиламиз.
Бундан

$$2(a+b+c)\geq 2(\sqrt{ba}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac})$$

ёки

$$a+b+c\geq\sqrt{ba}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$$

исботланди. Агар $a=b=c$ бўлса тенглик шарти бажарилади.

7-Мисол. Агар $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0,$ бўлса у ҳолда

$$(a+b)(b+c)(a+c)\geq 8abc \qquad (6)$$

бўлишини исботланг.

Исбот. Мусбат $a,\ b,\ c$ сонлар учун, ушбу тенгсизликлар $a+b\geq 2\sqrt{ba},\ \ b+c\geq 2\sqrt{bc},\ \ a+c\geq 2\sqrt{ac}$ ўринлидир. Бу тенгсизликларни хадма хад кўпайтириб $(a+b)(a+c)(b+c)\geq 8\sqrt{ba}\sqrt{bc}\sqrt{ac}$ ҳосил қиламиз. Бундан $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0$ шартга кўра $(a+b)(a+c)(b+c)\geq 8abc$ ҳосил бўлади.

10.4. Турли хил тенгсизликларни исботлаш.

8-Мисол. Ихтиёрий $n \in N$ сон учун

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2 \qquad (7)$$

бўлишини исботланг.

Исбот. Ихтиёрий натурал k $2 \leq k \leq n$ сони учун $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}$ ўринлидир. Бундан фойдаланиб, берилган тенгсизликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n-1)}=$$

$$=1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{n}<2$$

Демак (7) тенгсизлик исботланди.

9-Мисол. Агар $n \in N$ бўлса, у ҳолда

$$\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}<\frac{n+1}{2} \qquad (8)$$

бўлишини исботланг.

Исбот. Ўрта арифметик ва ўрта геометрикларни боғловчи тенгсизликка кўра $\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}<\frac{1+2+...+n}{n}=\frac{(n+1)n}{2n}=\frac{n+1}{2}$ бўлади. бу ерда 1, 2, ... , n турли хил сонлар бўлгани учун қатъий тенгсизлик олинган, ҳамда $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ теннгликдан фойдаланилган. Демак, $\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}<\frac{n+1}{2}$ ўринли экан. Берилган тенгсизлик исбот бўлди.

10-Мисол. Агар $n \in N$ бўлса, у ҳолда

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}<3 \qquad (9)$$

бўлишини исботланг.

Исбот. Агар $k \geq 3$ бўлса, ушбу тенгсизлик ўринлидир:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}<\frac{1}{2^{k-1}}$$

Бундан берилган тенгсизликнинг $n \geq 3$ учун исботлаймиз $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}<1+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}=1+1+(1-\frac{1}{2})+...+(\frac{1}{2^{2n-2}}-\frac{1}{2^{2n-1}})=$
$=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$

Демак, берилган тенгсизлик $n \geq 3$ учуи исботланди. Агар $n=1$ ва $n=2$ бўлган ҳолларда бу қийматларни тўғридан тўғри тенгсизликка қўйиб текшириб кўриш мумкин, я'ни

$$a)\quad n=1 \;\Rightarrow\; 2<3;$$

$$b)\quad n=2 \;\Rightarrow\; 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}=2{,}5<3$$

Шундай қилиб берилган тенгсизликни тўғрилигини тўлалигича исботланди.

11-Мисол. Ихтиёрий r>1 рационал сон учун

$$(1+\alpha)^r > 1+r\alpha \quad (\alpha>0) \qquad (10)$$

тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

Исбот. Агар $r=\dfrac{p}{q}>1$ қисқармайдиган каср сон бўлса, у ҳолда $\underbrace{(1+r\alpha),(1+r\alpha),....,(1+r\alpha)}_{q}$ ва $\underbrace{1,1,...,1}_{(p-q)\ \text{та}}$ сонлар учун ўрта арифметик ва ўрта геометрикларни қўллаб $\sqrt[p]{(1+r\alpha)^q}<1+\dfrac{qr\alpha}{p}=1+\alpha$ ҳосил қиламиз.

Бундан $1+r\alpha<(1+\alpha)^{\frac{p}{q}}=(1+\alpha)^r$ ёки $(1+\alpha)^r>1+r\alpha$ исботланди.

Ушбу $(1+\alpha)^r>1+r\alpha$ тенгсизликка Бернулли тенгсизлиги дейилади.

12-Мисол. Агар $a\geq 0, b\geq 0$ бўлса, у ҳолда $4(a^3+b^3)\geq(a+b)^3$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

Исбот. Қуйидаги айирмани қараймиз.

$$4(a^3+b^3)-(a+b)^3=4a^3-4b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3=$$

$$=3a^3+3b^3-3a^2b-3ab^2=3[(a^3-a^2b)+(b^3-b^2a)]= \qquad (a-b)^2\geq 0 \text{ ва}$$

$$=3[a^2(a-b)-b^2(a-b)]=3(a-b)(a^2-b^2)=3(a-b)^2(a+b)$$

$a+b>0$ бўлганлиги учун $4(a^3+b^3)-(a+b)^3\geq 0$ бўлади.

Бундан, берилган тенгсизликни тўғрилиги келиб чиқади, яъни (11) тенгсизлик исботланди.

13-Мисол. x ва у нинг барча қийматларида $5x^2+4xy+y^2+2x>-5$ ўринли бўлишини исботланг.

Исбот. Берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизликни ёзамиз.

$$5x^2+4xy+y^2+2x+5>0 \Leftrightarrow (4x^2+4xy+y^2)+(x^2+2x+1)+4>0$$

$$\Leftrightarrow (4x+y)^2+(x+1)^2+4>0.$$

Бундан $(4x+y)^2\geq 0, (x+1)^2\geq 0, 4>0$ эътиборга олиб, берилган тенгсизликнинг x ва у нинг барча қийматларида бажарилиши келиб чиқади. Тенгсизлик исботланди.

14-Мисол. a ва b нинг барча қийматларида $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

Исбот. Тенгсизликнинг иккала томонини 2 га кўпайтириб унга тенг кучли тенгсизликни ёзамиз:

$$2a^2+2b^2+2\ge 2ab+2a+2b \iff 2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b\ge 0$$

$$\iff (a^2+2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1) \iff (a-b)^2+(a-1)^2+$$

$$+(b-1)^2\ge 0.$$

Бундан $(a-b)^2\ge 0$, $(a-1)^2\ge 0$, $(b-1)^2\ge 0$ тенгсизликлар a ва b нинг барча қийматларида бажарилишини эътиборга олиб, берилган тенгсизликни тўғрилиги келиб чиқади. тенгсизлик исботланди.

10.5. Математик индукция усули ва унинг ёрдамида тенглик ва тенгсизликларни исботлаш.

Математик индукция усули математика физика химия ва бошқа табиий фанларда кенг қўлланиладиган усулдир. Аввало бу усул ўзининг содда бўлган ғояси билан эътиборга сазовор. Иккинчидан бу усул исботланаётган тасдиқ (гипотеза)нинг аниқ баёнини келтиришда ҳам характерлидир.

Одатда бирор жараён ёки воқеа тўғрисида фикр юритишнинг икки формаси фарқ қилинади. Булар дедуктив ва индуктив фикрлашлардир.

1–Таъриф. Фикрлашнинг умумий тасдиқларидан хусусий тасдиқлашга ўтиш формаси дедукция дейилади. дедукция сўзи мантиқий хулосани билдиради.

15–Мисол. А. Бир ва ўзидан бошқа бўлувчиларга эга бўлган сонлар мураккаб сонлар тўпламини ташкил этади.

В. 12 сони 1 ва 12 дан бошқа 2, 3, 4 га бўлинади.

С. 12 мураккаб сон.

Бу ерда А умумий тасдиқдан В тасдиқ ёрдамида С хусусий тасдиқ хосил қилинди.

2–Таъриф. Фикрлашнинг хусусий тасдиқларидан умумий тасдиқларга ўтиш формаси индукция дейилади.

16–Мисол. А. 120 сони 5 га бўлинади.

В. нол билан тугайдиган барча сонлар 5 га бўлинади. Бу ерда (А) хусусий тасдиқдан (В) умумий тасдиқ ҳосил қилинади. В тасдиқ тўғридир.

17–Мисол. А. 130 сони 5 га бўлинади.

В. Барча уч хонали сонлар 5 га бўлинади.

Бу ерда (А) хусусий тасдиқдан (В) умумий тасдиққа ўтилди. В тасдиқ нотўғридир.

Ушбу мисоллардан кўринадики индукция тўғри ҳамда нотўғри хулосаларга олиб келиши мумикн.

Дедукция ва индукция бир бирини тўлдирувчи фикрлаш формаларидир. Ҳақиқатан хам исботлаш керак бўлган тасдиқлар индуктив йўл билан хосил қилинса бу тасдиқнинг тўғрилигини исботлаш дедуктив усул ёрдамида кўрсатилади.

18-Мисол. 2 сонининг кетма-кет келган 3 та даражасини йиғиндисини қараймиз:

$$2^1+2^2+2^3=14$$

ҳосил бўлган сон 7 га бўлинади. Энди

$$2^2+2^3+2^4=28$$

ҳосил бўлган сон, яна 7 га каррали. Навбатдаги даражаларни қўшайлик

$$2^3+2^4+2^5=56$$

ҳосил бўлган сон яна 7 га каррали.

Бажарилганларга асосланиб ушбу гипотезани айтиш мумкин.

2 сонининг ихтиёрий учта кетма-кет келган даражасининг йиғиндиси 7 га карралидир, яъни $\forall n\in N$ учун $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}$ йиғинди 7 га қолдиқсиз бўлинади.

19-Мисол. Ушбу кўпхадни қарайлик:

$$P_3(x)=x^2+x+41.$$

Бу кўпҳадга x ўрнига кетма-кет $0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5$ сонларни қўйайлик, натижада ушбу

$P_3(0)=41;\ P_3(1)=43;\ P_3(2)=47;\ P_3(3)=53;\ P_3(4)=61;\ P_3(5)=71;$

$P_3(-1)=41;\ P_3(-2)=43;\ P_3(-3)=47;\ P_3(-4)=53;\ P_3(-5)=61$

туб сонлар хосил бўлади. шунингдек x ўрнига $\pm6, \pm7, \pm8$ ларни қўйсак:

$P_3(-6)=71;\ P_3(6)=83;\ P_3(-7)=83;\ P_3(7)=97;\ P_3(-8)=97;$

$P_3(8)=113$

туб сонлар хосил бўлади.

Олинган натижаларга асосланиб ушбу тасдиқларни айтиш мумкин: $P_3(x)$ уч хадга x ўрнига ихтиёрий бутун сонни қўйиш натижасида туб сон ҳосил бўлади.

18 ва 19 мисолларда тасдиқ (гипотезалар) индукция ёрдамида ҳосил қилинади, аммо юритилган мулоҳазалар келтирилган гипотезаларнинг исботи бўлиб хизмат қила олмайди.

Аввал такидлаганимиздагидек индукция ёрдамида очилган қонуниятлар тўғри бўлиши ҳам, нотўғри бўлиши ҳам мумкин. Шу сабабли ҳосил қилинган тасдиқлар бирор дедуктив усул ёрдамида қатъий исботланиши лозим. 18 мисолда ҳосил қилинган гипотеза тўғри чунки $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}=2^n\cdot7$.

19-мисолда ҳосил қилинган гипотеза тўғри эмас, чунки шундай мусбат бутун x_0 сонни топиш мумкинки, $P_3(x_0)$ туб сон бўлмайди. Бундан x_0

сифатида $x_0 = 40$ ни олиш мумкин. У ҳолда $P_3(40) = 1681 = 41^2$ мураккаб сон. Шунингдек, $x_0 = -41$ бўлса $P_3(-41) = 1681 = 41^2$.

Шуни таъкидлаш лозимки, айрим хусусий ҳолларда тўғри бўлган тасдиқлар исталган n натурал сон учун тўғри бўлмаслиги мумкин.

3-Таъриф. Тасдиқ жараёнида бир нечта хусусий ҳолларнинг тўғрилигига асосланиб хулоса чиқариш тўламас индукция дейилади.

20-Мисол. $2^{2^n} + 1$ кўринишдаги сонлар n нинг барча қийматларида туб сон бўлади" деган П. Ферми гипотезаси нотўғри. Ҳақиқатан ҳам, $2^{2^n} + 1$ сони $n = 0, 1, 2, 3, 4$ бўлганда туб сонлар бўлади, яъни

$$2^{2^0} + 1 = 3; \quad 2^{2^1} + 1 = 5; \quad 2^{2^2} + 1 = 17; \quad 2^{2^3} + 1 = 257; \quad 2^{2^4} + 1 = 65537.$$

Лекин $n = 5$ учун $2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417$ мураккаб сон бўлади. Бу эса П.Ферма гипотезасининг нотўғрилигини кўрсатади.

21-Мисол. "Ҳар қандай тоқ k ва ихтиёрий n натурал сон учун $n^k - n$ сони k га бўлинади" деган тасдиқ нотўғри. Ҳақиқатан ҳам, $n^3 - n$ сони 3 га; $n^5 - n$ сони 5 га, $n^7 - n$ сони 7 га бўлинади. Лекин $n = 2$, $k = 9$ учун $2^9 - 2 = 510$ сони 9 га бўлинмайди.

Тасдиқни барча n лар учун тўғрилигини исботлашда тўла математик индукция усулидан фойдаланамиз. $A(n)$ тасдиқ берилган бўлсин.

4-Таъриф. Барча хусусий ҳолларни таҳлил қилиш орқали мулоҳаза юритиш тўла математик индуция дейилади.

Тасдиқларни тўла математик индукция усули ёрдамида исботлаш қоидаси:

1) берилган $A(n)$ тасдиқ (гипотеза)ни $n = 1$ учун тўғрилиги исботланади.
2) берилган $A(n)$ тасдиқни $n = k$, $\forall k \in N$ учун тўғри бўлсин деб фараз қилиб, унинг тўғрилигини $n = k + 1$ учун исботланади.

1) ва 2) бандларга ва тўла математик индукция принципига кўра $A(n)$ мулоҳаза ихтиёрий натурал n сонлар учун тўғри деб хулоса қилинади.

22-Мисол. Ихтиёрий n натурал сон учун $a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ сон 3 га бўлинишини исботланг.

Исбот. 1) Агар $n = 1$ бўлса, у ҳолда $a_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9$, демак a_1 3 га бўлинади. яъни тасдиқ $n = 1$ учун тўғри.

2) Ихтиёрий k натурал сон учун $a_k = k^3 + 3k^2 + 5k$ сон 3 га бўлинсин деб фараз қилиб, унинг $n = k + 1$ учун $a_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1)$ сонини 3 га бўлинишини исботлаймиз.

Ҳақиқатан

$$a_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 +$$
$$+ 5k + 5 = (k^3 + 3k^2 + 5k) + 3(k^2 + 3k + 3) = a_k + 3(k^2 + 3k + 3).$$

Бундан

$a_{k+1} = a_k + 3(k^2 + 3k + 3)$ сонининг ҳар бир қўшилувчиси 3 га бўлинади, чунки a_k фаразга кўра 3 га бўлинади, $3(k^2 + 3k + 3)$ ҳад натурал сон бўлиб 3 га кўпайтирилган. Демак йиғинди ҳам 3 га бўлинади.

Бундан тўла индукция принципига ва 1), 2) пунктларига кўра a_n сони ихтиёрий n натурал сон учун 3 га бўлинади. Тасдиқ исботланди.

23-Мисол. Ихтиёрий n натурал ва $a \geq -1$ сонлар учун

$$(1+a)^n \geq 1 + na \qquad (12)$$

тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

Исбот. 1) Агар $n = 1$ бўлса, у ҳолда $1 + a \geq 1 + a$, демак тенгсизлик $n = 1$ учун тўғри.

2) Ихтиёрий $n = k$ натурал сон учун

$$(1+a)^k \geq 1 + ka \qquad (13)$$

тўғри бўлсин. Бу тенгсизлик ёрдамида

$$(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a \qquad (14)$$

тўғрилигини исботлаймиз. Ушбу тенгсизлик $a = -1$ да бажарилади, яъни $0 \geq -k$, $\forall k \in N$. Энди $a > -1$ ҳолини кўрамиз. У ҳолда (13) тенгсизликни иккала томонини $a + 1 > 0$ га кўпайтириб $(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(a+1) = 1 + (k+1)a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a$ ёки $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Демак (14) тенгсизлик тўғри.

Шундай қилиб тўла математик индукция принципига ва 1), 2) дан (12) тенгсизликнинг ўринлилиги келиб чиқади. (12) тенгсизлик исботланди.

Индуктив мулоҳазалар ёрдамида баён этилган тасдиқ, кўпинча барча натурал n сонлар учун ўринли бўлмасдан, бирор p ($p > 1$) натурал сондан бошлаб ўринли бўлиши мумкин.

5-Таъриф. $B(n)$ тасдиқни $n \geq p > 1$ натурал сонлар учун тўғирлигини исботлаш умумлашган математик индукция усули дейилади.

Тасдиқларни умумлашган математик индукция усули ёрдамида исботлаш қоидаси:

1) Берилган $B(n)$ тасдиқни $n = p$ учун тўғрилиги исботланади.

2) Берилган $B(n)$ тасдиқ $n = k$ ($k \geq p$) учун тўғри бўлсин деб фараз қилиб, унинг тўғрилигини $n = k + 1$ учун исботлаймиз.

1) ва 2) бандларга ва умумлашган математик индукция принципига кўра $B(n)$ мулоҳаза ихтиёрий натурал n ($n \geq p$) сонлар учун тўғри деб хулоса қилинади.

24-Мисол. n натурал сонни барча қийматларида

$$2^n > n^2 \qquad (15)$$

тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

Исбот. Тенгсизлик $B(2)$, $B(3)$, $B(4)$лар учун ўринли эмаслиги (15) дан кўриниб турибди. Яъни $2^2=2^2$, $2^3<3^2$, $2^4=4^2$. Лекин $n=1$ учун (15) тенгсизлик ўринлидир. Умумлашган математик индукция қоидасига кўра:

1) $n=5$ бўлсин. У ҳолда $2^5>5^2$ яъни $B(5)$ ўринли.

2) $n=k$ $(k\geq 5)$ да $2^k>k^2$ (16)

ўринли бўлсин, яъни $B(k)$ бажарилсин. $n=k+1$ да

$$2^{k+1}>(k+1)^2 \quad (17)$$

тенгсизлик бажарилишини исботлаймиз. Шу мақсадда (16) нинг иккала томонини иккига кўпайтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2k^2 \quad (18)$$

$$k\geq 5 \text{ да } 2k^2>(k+1)^2 \quad (19)$$

тенгсизлик ўринли. Ҳақиқатан ҳам

$2k^2-(k+1)^2>0 \Leftrightarrow k^2-2k-1>0 \Leftrightarrow (k-1)^2-2>0$ тенгсизлик $k\geq 5$ да бажарилади. Шундай қилиб, (18) ва (19) дан қуйидаги келиб чиқади $2^{k+1}>(k+1)^2$. Демак, (17) тенгсизлик тўғри

Бундан эса 1) ва 2) бандларга ва умумлашган математик индукция принципига кўра (15) тенгсизликнинг $n=1$ ва $n\geq 5$ натурал сонлар учун тўғрилиги келиб чиқади.

10.6. Тенгсизликларни исботлашда қўлланиладиган тенгсизликлар:

1) Ихтиёрий ҳақиқий $a_1, a_2, a_3,...,a_n$ сонлар учун

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\leq |a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n| \quad (12)$$

ўринли;

2) Ихтиёрий ҳақиқий $a_1, a_2, a_3,...,a_n$ ва $b_1, b_2, b_3,...,b_n$ сонлар учун

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}\leq |a_1-b_1|+ +|a_2-b_2|+...+|a_n-b_n| \quad (13)$$

ўринли;

3) Ихтиёрий ҳақиқий $a_1, a_2, a_3,...,a_n$ ва $b_1, b_2, b_3,...,b_n$ сонлар учун

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+...+(a_n-b_n)^2}\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}+ +\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2} \quad (14)$$

ўринли;

4) Ихтиёрий манфий бўлмаган $a_1, a_2, a_3,...,a_n$ сонлар учун $\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3...a_n}\leq\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}$ ўринли;

5) Агар $a_1, a_2, a_3,...,a_n$ мусбат сонлар бўлиб, $a_1, a_2, a_3,...,a_n$ сонларнинг

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$$ - ўрта арифметиги

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ... a_n}$$ - ўрта геометриги

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$ - ўрта гармоники ва

$$S_n(m) = \sqrt[m]{\frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + ... + a_n^m}{n}}$$ - ўрта даражаси бўлса, у ҳолда A_n, G_n, H_n ва $S_n(2)$ сонлари орасида ушбу тенгсизлик $S_n(2) \geq A_n \geq G_n \geq H_n$ ўринли бўлади;

6) Агар $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ва $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ камаймайдиган (ўсмайдиган) сонлар кетма - кетлиги бўлса, у ҳолда ушбу

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + ... + a_n b_n}{n}$$

Чебишев тенгсизлиги ўринлидир.

7) Агар $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 1$ ва $b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2 = 1$ бўлса, у ҳолда ушбу $|a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n| \leq 1$ тенгсизлик ўринлидир.

8) Ихтиёрий $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ва $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ ҳақиқий сонлар учун ушбу Коши-Буняковский тенгсизлиги ўринлидир:

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n| \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

10.7. Тенгсизликларни энг катта ва энг кичик қийматларини топишда қўлланилиши.

Сонларнинг ўрта арифметигини ва ўрта геометригини боғловчи тенгсизликдан қуйидаги хулосалар келиб чиқади:

1) Агар мусбат $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ сонларнинг йиғиндиси a га тенг бўлса, у ҳолда бу сонларнинг кўпайтмаси $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = \frac{a}{n}$ бўлганда энг катта $(\frac{a}{n})^n$ қийматга эришади.

2) Агар мусбат $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ сонларнинг кўпайтмаси b га тенг бўлса, у ҳолда бу сонларнинг йиғиндиси $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = \sqrt[n]{b}$ бўлганда энг кичик $n \cdot \sqrt[n]{b}$ қийматга эришади.

25-Мисол. $f(n) = n + \frac{a}{n}$, $n \in (0; +\infty)$, $a > 0$ ифодани энг кичик қийматини топинг.

Ечиш. Сонларнинг ўрта арифметик ва ўрта геометриги орасидаги тенгсизликдан, яъни $a_1 \geq 0$, $b_1 \geq 0$, $a_1 + b_1 \geq 2\sqrt{a_1 b_1}$ дан $n + \frac{a}{n} \geq 2\sqrt{n \cdot \frac{a}{n}} = 2\sqrt{a} \Leftrightarrow n + \frac{a}{n} \geq 2\sqrt{a}$ ҳосил қиламиз. Демак, берилган ифода $n = \frac{a}{n}$ ёки $n = \sqrt{a}$ да энг кичик $2\sqrt{a}$ қийматга эришади.

Жавоб. $2\sqrt{a}$.

26-Мисол. $f(n) = \frac{n^3 + n + 2}{n}$, $n \in (0; +\infty)$ ифодани энг кичик қийматини топинг.

Ечиш. Берилган ифодани қуйидагича ёзиб оламиз: $f(n) = n^2 + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$,

у холда $n > 0$ ни ҳисобга олиб, (3) формулага кўра $f(n) = n^2 + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \geq 4\sqrt[4]{n^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} = 4 \cdot 1 = 4$ ёки $f(n) \geq 4$ ҳосил қиламиз.

Демак, берилган ифода $n^2 = 1 = \frac{1}{n}$ ёки $n = 1$ да $f(n)$ ўзининг энг кичик қийматига эришади. Бу энг кичик қиймат 4 га тенг.

Жавоб: 4.

27 - Мисол. $f(n) = n^2\sqrt{4 - n^2}$, $-2 \leq n \leq 2$ ифоданинг энг катта қийматини топинг.

Ечиш. $f(n) \geq 0$ бўлгани учун $f(n)$ ва $\frac{1}{4}f^2(n)$ ифодалар n нинг бир хил қийматида энг катта қийматга эришади. Шунинг учун $f(n) = n^2\sqrt{4 - n^2}$ ифодани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{1}{4}f^2(n) = \frac{n^4}{4}(4 - n^2) = \frac{1}{2}n^2\,\frac{1}{2}n^2(4 - n^2)$$

бу тенгликнинг ўнг томони ва (4) формуладан

$$\frac{1}{4}f^2(n) = \frac{n^4}{4}(4 - n^2) = \frac{1}{2}n^2\,\frac{1}{2}n^2(4 - n^2) \leq \frac{(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n^2 + 4 - n^2)^3}{27} = \frac{4^3}{27} = \frac{64}{27}$$

ёки $\frac{1}{4}f^2(n) \leq \frac{64}{27} \Leftrightarrow \frac{1}{2}f(n) \leq \frac{8}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow f(n) \leq \frac{16}{3\sqrt{3}}$

ҳосил қиламиз. Демак берилган $f(n)$ ифода $\frac{1}{2}n^2 = 4 - n^2$ ёки $n = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$ тенг бўлганда энг катта қийматга эришади. Яъни $f(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}) = \frac{16\sqrt{3}}{9}$.

Жавоб. $\frac{16\sqrt{3}}{9}$.

28-Мисол. Агар $a_1^2 + a_2^2 \le 2$ ва $b_1^2 + b_2^2 \le 4$ бўлса, $A = a_1b_1 + a_2b_2$ ифоданинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Ечиш. Коши-Буняковский тенгсизлигига кўра $A^2 = (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$ тенгсизлик ўринли. У ҳолда масаланинг шартига кўра эса $A^2 \le 8$ ёки $|A| \le 2\sqrt{2}$.

Демак, агар $a_1 = a_2 = 1$ ва $b_1 = b_2 = \sqrt{2}$ бўлса у ҳолда $a_1b_1 + a_2b_2$ ифоданинг энг катта қиймати $2\sqrt{2}$ га тенг;

Агар $a_1 = a_2 = -1$ ва $b_1 = b_2 = \sqrt{2}$ бўлса, у ҳолда $a_1b_1 + a_2b_2$ ифоданинг энг кичик қиймати $-2\sqrt{2}$ га тенг бўлади.

Жавоб: энг катта қиймати $2\sqrt{2}$;

энг кичик қиймати $-2\sqrt{2}$.

ЎТИЛГАН МАВЗУЛАР БЎЙИЧА ТЕСТ–4 .

1. Тенгсизликнинг бутун ечимлар йиғиндисини топинг.

$3x^2-8x\le -4$.

A) 0 B) 6 C) 2 D) 3 E) 20

2. Тенгсизликни ечинг.

$(x-2)(x+2)-x(x+3)<x^2-8.$

A) $(-\infty;1)\cup(4;\infty)$ B) $(1;4)$ C) $(-\infty;-4)\cup(1;\infty)$ D) $(-4;1)$ E) $\varnothing$

3. Тенгсизликнинг бутун ечимларини ўрта арифметигини топинг.

$x(x+1)(x+3)(x-1)\le 0.$

A) -1 B) $-1{,}25$ C) аниқлаб бўлмайди D) 0 E) -2

4. Тенгсизлик нечта бутун ечимга эга

$(x^2+x)^2(x-1)(2-x)^3(x+2)^4\ge 0.$

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) чексиз кўп

5. Тенгсизликни ечинг.

$(x^2-9)^2(x+1)(x^2-2x-3)(x-1)\le 0.$

A) $[1{,}3]$ B) $[1;3]\cup\{-1\}$ C) $\varnothing$ D) $\{-3;-1\}$ E) $\{-3;-1\}\cup[1;3]$.

6. Тенгсизликнинг энг катта бутун ечими энг кичик бутун ечимидан қанчага катта?

$(x^2-5)(10x-x^2-25)(10x+x^2+25)>0.$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 1 E) аниқлаб бўлмайди.

7. a нинг қандай қийматларида $ax-8a<-2(x-\frac{3}{2})$ тенгсизлик x нинг барча қийматларида ечимга эга бўлмайди.

A) 0 B) -1 C) 2 Д) -2 E) $-\frac{3}{8}$.

8. a нинг қандай қийматида $(2x-a)(2x-1)>0$ тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(-\infty;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};\infty)$ оралиқдан иборат бўлади.

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $-\frac{1}{2}$ Д) $\frac{1}{4}$ E) $1\frac{1}{2}$

9. a нинг $ax^2+3x+a+2<0$ тенгсизлик ечимга эга бўлмайдиган бутун қийматлари орасидан энг кичигини топинг.

A) 1 B) 2 C) -3 D) -2 E) энг кичиги йўқ

10. $x^2-ax-3(a+3)=0$ квадрат тенглама иккита мусбат ечимга эга бўладиган a нинг барча қийматларини топинг.

A) $(-\infty;0)$ B) $(-\infty;\infty)$ C) $(-3;\infty)$ Д) $(0;3)$ E) $(-\infty;-3)\cup(0;\infty)$

11. $x^2-4x+a+1=0$ квадрат тенглама x_1 ва x_2 ечимларга эга бўлса, $x_1>1$ ва $x_2>1$ шартларни қаноатлантирувчи a нинг барча қийматларини топинг

A) $(-\infty;3]$ B) $(2;\infty)$ C) $(2;3]$ D) $\varnothing$

12. a нинг қандай қийматларида

$\begin{cases} 2ax \geq 6a-4 \\ ax \leq 4a+3 \end{cases}$ тенгсизликлар системаси ечимга эга бўлмайди

A) $\{-5\}$ B) $(-\infty,5)\cup(0,+\infty)$ C) $[-5,0]$ D) $(-\infty,-5)$ E) $(0,\infty)$

13. a нинг қандай қийматларида

$\begin{cases} x^2-(a+1)x+4>0, \\ x^2+(a-2)x+1>0, \end{cases}$ тенгсизликлар системаси x нинг барча қийматларида ўринли бўлади.

A) $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ B) $(0;3)$ C) $(-3;0)$ D) $(-5;3)\cup(3;4)$ E) $(0;4)$

14. Тенгсизликнинг энг кичик натурал ва энг кичик бутун ечимлар айирмасини топинг.

$$\frac{(x-2)(x-8)}{x+3} \geq 0.$$

A) 3 B) 4 C) 1 D) -1 E) 7

15. Ушбу $\frac{x-1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$ тенгсизликнинг туб ечимлари кўпайтмасини топинг.

A) 3 B) 2 C) 0 D) 6 E) 5

16. $\frac{x^2(x-1)^4}{(x+7)^3(10-x)^5} \leq 0$ тенгсизликнинг энг кичик натурал ечимни топинг.

A) 9 B) 2 C) 3 D) 10 E) 1

17. Тенгсизликлар системасини ечинг.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+10x+25}{4x-5} \geq 0, \\ (x-5)(x^2-6x+9) \leq 0. \end{cases}$$

18. $f(x)=x+\frac{8}{x}$, $x\in(0;+\infty)$ функциянинг энг кичик қийматини топинг.

A) 8 B) $4\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) 4

19. Агар $x_1^2+x_2^2 \leq 4$ ва $y_1^2+y_2^2 \leq 16$ бўлса $x_1y_1+x_2y_2$ ифоданинг энг катта қийматини топинг.

A) 8 B) 64 C) $2\sqrt{2}$ D) аниқлаб бўлмайди E) $4\sqrt{2}$

20. $a=1\cdot2\ldots28$ ва $b=28^{14}$ сонларни таққосланг.

A) a = b B) a < b C) a = b + 14 D) a > b E) a = b - 14

IV–БОБни мустаҳкамлаш учун машқлар.

1. x нинг исталган қийматида тенгликнинг тўғрилигини исботланг.

1) $x+1>3(x-1)-2x$;
2) $2(x-1)<x-(1-x)+1$;
3) $x^2>(x+1)(x-1)$;
4) $x^3<(x+1)(x^2-x+1)$;
5) $(x+2)(x+4)>(x+1)(x+5)$;
6) $(x+5)(x+3)>(x-2)(x+10)$;
7) $-(x-2)^2<(2-x)(2+x)+4x$;
8) $(3x-2)(x+2)<(1+2x)^2$.

2. Исботланг :

1) агар $x(x+2)<(x-2)(x+3)$ бўлса, у ҳолда $x<-6$;
2) агар $(x-4)^2<x(x-6)$ бўлса, у ҳолда $x>8$;
3) агар $x^2-(x-1)(x+1)<x+7$ бўлса, у ҳолда $x>-6$;
4) агар $x^3-1>(x+1)(x^2-x+1)+x$ бўлса, у ҳолда $x<-2$.

3. Исботланг:

1) агар $8a-4b>7(a-b)+2b$ бўлса, у ҳолда $a>b$;
2) агар $2a+2b<6a-2b$ бўлса, у ҳолда $a>b$;
3) агар $2b-3a<3b-4a$ бўлса, у ҳолда $a<b$;
4) агар $a^2-3(a-b)-1<2(2a+b)+(a-1)(a+1)$ бўлса, у ҳолда $b>a$.

4. Исботланг:

1) агар $a<b$ бўлса, у ҳолда $\frac{a}{b}<1$;
2) агар $\frac{a}{b}>1$ бўлса, у ҳолда $a>b$;
3) агар $\frac{a}{b}<1$ бўлса, у ҳолда $\frac{a}{b}>1$;
4) агар $a^2<1$ бўлса, у ҳолда $a<1$.

5. Исботланг:

1) агар $a<0<b$ ва $|a|>|b|$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{a^4+b^3}>\frac{1}{a^3}>\frac{1}{a^3+b^3}$;
2) агар $a>b>c>0$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{a+b}<\frac{1}{a+c}<\frac{1}{a}$;
3) агар $a>3$ ва $b<-3$ бўлса, у ҳолда $ab<-9$
4) агар $xy>0$ бўлса, у ҳолда $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

6. Сонли тенгсизлик таърифидан фойдаланиб, қуйидаги сонларни таққосланг.

1) 2,8 ва 1,82;
2) $\frac{1}{3}$ ва 0,3 ;
3) $\frac{13}{20}$ ва 0,45;
4) 1,(3) ва 1,(33);
5) $-\frac{5}{8}$ ва $-0,7$;
6) $-1,1(6)$ ва $-\frac{1}{6}$;
7) $-\frac{23}{50}$ ва $-\frac{125}{1000}$;
8) $-\frac{7}{9}$ ва $-\frac{14}{15}$.

7. Берилган тенгсизликнинг иккала қисмини кўрсатилган сонга кўпайтиринг.

1) $3,35<4,5$ ни 4 га ;
2) $\frac{7}{6}<\frac{4}{3}$ ни -12 га ;
3) $3,8>2,4$ ни -5 га ;
4) $-\frac{11}{3}<-\frac{13}{4}$ ни $-\frac{1}{2}$ га;
5) $3a>1$ ни $\frac{1}{3}$ га;
6) $-4a<-3$ ни 0,25 га;
7) $-8a>-16$ ни $-0,125$ га;
8) $-9a<1$ ни $0,(1)$ га.

8. Берилган тенгсизликнинг иккала қисмини кўрсатилган сонга бўлинг.

1) $-4<5$ ни 5 га;
2) $0,25>0,15$ ни $-\frac{1}{4}$ га;
3) $4\frac{1}{2}>-10$ ни $2\frac{1}{3}$ га;
4) $-5\frac{1}{3}<2\frac{5}{6}$ ни 0,8 га;
5) $1,2x<-4,8$ ни 1,2 га;
6) $-\frac{2}{3}x>-\frac{1}{4}$ ни $-\frac{2}{3}$ га;
7) $-\frac{3}{4}x>\frac{1}{3}$ ин $-\frac{3}{4}$ га;
9) $0,(3)x>-0,(6)$ ни $0,1(6)$ га.

9. Тенгсизликларни қўшинг:

1) $4>-6$ ва $8>5$;
2) $-10<2$ ва $7<9$;
3) $0,38>-0,2$ ва $1,3>0,9$;
4) $1\frac{1}{8}<2,82$ ва $-\frac{1}{7}<\frac{1}{10}$;
5) $3x+y<2a+1$ ва $2y-x<1-2a$;
6) $3x^2+2y<4a-2$ ва $3y-3x^2<3-4a$;
7) $\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y>0,2a-\frac{3}{4}$ ва $-0,(3)+\frac{1}{2}y>0,8a+\frac{1}{4}$;
8) $\frac{7}{8}x+\frac{5}{7}y<0,3a-1$ ва $-1\frac{1}{8}x+1\frac{2}{7}y<1$.

10. Тенгсизликларни айиринг:

1) $7>-2$ ва $3<4$;
2) $0,65<6,25$ ва $0,8>-2,45$;
3) $1\frac{2}{3}>-\frac{3}{4}$ ва $-1\frac{1}{2}<\frac{3}{8}$;
4) $-1\frac{1}{8}<3\frac{1}{7}$ ва $3\frac{1}{2}>-1\frac{1}{14}$;
5) $0,2x-0,5y<0,4a+0,7$ ва $0,1x-0,7y>0,8a+0,2$;
6) $2x+3y>2a-1$ ва $-x-2y<2+2$;
7) $1\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}<2\frac{1}{8}y-\frac{2}{7}$ ва $-3\frac{1}{2}x+\frac{4}{7}>1\frac{1}{16}y+\frac{5}{7}$;
8) $14,1a-\frac{1}{3}b>\frac{8}{9}$ ва $13\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b<\frac{1}{18}$.

11. Тенгсизликларни кўпайтиринг.

1) $2,8<3,2$ ва $3>4$;
2) $1.85>0.5$ ва $1.5>0.8$;
3) $3\frac{1}{3}<4\frac{1}{8}$ ва $\frac{9}{20}<\frac{16}{15}$;
4) $6\frac{2}{3}>2\frac{4}{15}$ ва $1\frac{1}{20}>\frac{5}{17}$;
5) $x-1>1$ ва $x+2>3$;
6) $2x+1<0,8$ ва $3x-1<2,3$;
7) $x-2>\frac{1}{2}$ ва $x+2>1\frac{1}{3}$;
8) $1\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}>2$ ва $\frac{4}{5}x+1>\frac{1}{8}$.

12. Қўш тенгсизликларни қўшинг.

1) $1{,}8<4{,}3<5{,}7$ ва $-0{,}8<0<0{,}8$;

2) $-2{,}3<1{,}6<8{,}3$ ва $0<2{,}3<4{,}4$;

3) $\frac{1}{3}<\frac{2}{3}<\frac{7}{5}$ ва $-\frac{2}{3}<\frac{1}{6}<\frac{3}{5}$;

4) $-1\frac{1}{2}<2\frac{1}{3}<4$ ва $-3\frac{1}{3}<-1\frac{1}{6}<0$.

13. Қўш тенгсизликларни айиринг.

1) $0{,}8<1{,}25<12{,}5$ ва $1{,}8>-0{,}3>-2{,}5$;

2) $-\frac{3}{4}<-\frac{1}{2}<1\frac{1}{3}$ ва $1\frac{1}{4}>\frac{4}{5}>-\frac{1}{2}$;

3) $1{,}09>0{,}7>0$ ва $-\frac{3}{4}<0<1\frac{1}{4}$;

4) $1{,}11>\frac{1}{9}>-1$ ва $-0{,}64<3\frac{4}{5}<5$.

14. Қўш тенгсизликларни кўпайтиринг.

1) $1{,}125<2{,}5<3{,}5$ ва $10<20<30$;

2) $0{,}37<2{,}1<3\frac{1}{4}$ ва $0{,}2<2{,}34<5{,}21$;

3) $\frac{1}{4}<2\frac{1}{3}<3$ ва $\frac{3}{4}<1\frac{3}{4}<2\frac{1}{3}$;

4) $0{,}29<1\frac{5}{8}<\frac{23}{7}$ ва $\frac{3}{5}<0{,}75<7$.

15. Сонларни таққосланг.

1) $m=(0{,}8)^{\frac{1}{4}}$ ва $n=(0{,}88)^{\frac{1}{4}}$;

2) $m=(4\frac{1}{2})^{\frac{3}{4}}$ ва $n=(5\frac{1}{4})^{\frac{3}{4}}$;

3) $m=5^{\frac{2}{7}}$ ва $n=3^{\frac{2}{7}}$;

4) $m=5^{\sqrt{3}}$ ва $n=7^{\sqrt{3}}$;

5) $m=5^{-\frac{4}{5}}$ ва $n=3^{-\frac{4}{5}}$;

6) $m=13^{-\sqrt{3}}$ ва $23^{-\sqrt{3}}$;

7) $m=(4{,}09)^{\sqrt[4]{2}}$ ва $n=(4\frac{3}{25})^{\sqrt[4]{2}}$;

8) $m=(\frac{3}{8})^{-\frac{1}{4}}$ ва $n=(0{,}41)^{-\frac{1}{4}}$;

9) $m=(\frac{4}{7})^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$ ва $n=(\frac{3}{8})^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$;

10) $m=(2\frac{1}{3})^{\frac{5}{4}}$ ва $n=(3\frac{1}{4})^{\frac{5}{4}}$.

16. x нинг қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирувчи бутун сондан иборат энг катта қийматини топинг.

1) $x\le -3$;

2) $x<-7$;

3) $x\le 4$;

4) $x\le \frac{3}{7}$;

5) $x<2{,}8$;

6) $x<-0{,}3$;

7) $x\le -1\frac{1}{9}$;

8) $x<4\frac{3}{8}$;

9) $x<6$.

17. x нинг қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирувчи бутун сондан иборат энг кичик қийматини топинг.

1) $x \ge 3$;　　4) $x \ge -2$;　　7) $x > 8$;

2) $x < 5{,}8$;　　5) $x > -8{,}3$;　　8) $x \ge 3{,}24$;

3) $x \ge 3\frac{1}{81}$;　　6) $x \ge -2\frac{2}{3}$;　　9) $x > \frac{1}{3}$.

18. x нинг қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирувчи бутун сонлардан иборат энг кичик ва энг катта қийматларининг:

а) йиғиндисини топинг:

1) $0 \le x < 8$;　　3) $1\frac{1}{8} < x \le 5$;　　5) $15{,}8 \le x \le 20$;

2) $-3{,}8 \le x < 2{,}8$;　　4) $-5\frac{1}{6} \le x < 0$;　　6) $-8{,}3 \le x < -3$;

б) кўпайтмасини топинг:

1) $3 \le x \le 4$;　　2) $-8 \le x < -1{,}2$;　　3) $2\frac{1}{8} \le x \le 4\frac{2}{3}$;

4) $\frac{19}{4} \le x < \frac{37}{5}$;　　5) $-\frac{1}{4} \le x \le 0$;　　6) $-3\frac{1}{8} < x \le 2\frac{3}{8}$.

в) ўрта арифметигини топинг:

1) $-6 \le x \le 12$;　　2) $-2{,}8 \le x < 4{,}4$;　　3) $\frac{17}{3} \le x \le 17{,}9$;

4) $-\frac{38}{7} \le x \le \frac{55}{6}$;　　5) $-8{,}3 \le x \le 10$;　　6) $0 \le x \le 13{,}5$.

19. x нинг қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирувчи бутун сонлари нечта:

1) $-5 \le x \le 15$;　　2) $-2{,}85 < x < 4{,}5$;　　3) $2\frac{2}{3} < x \le 3{,}7$;

4) $-3\frac{1}{4} \le x < \frac{38}{5}$;　　5) $3{,}85 \le x < 3\frac{3}{4}$;　　6) $-0{,}85 \le x < 0$.

20. Берилган қўш тенгсизликларни қаноатлантирувчи x сонлари тўпламини сонли оралиқнинг белгилашлари ёрдамида ёзинг ва уни сон ўқида тасвирланг:

1) $2 \le x \le 7$;　　2) $1 < x \le 2$;　　3) $-1 \le x < 4$;

4) $2{,}3 < x \le 3{,}7$;　　5) $-5{,}8 \le x < 0$;　　6) $-5 \le x \le -1$.

7) $1\frac{5}{8} \le x \le 3\frac{1}{8}$;　　8) $-2\frac{1}{4} < x < 3\frac{1}{5}$;　　9) $-7\frac{1}{2} \le x \le -3{,}25$.

21. Берилган сонли оралиқга тегишли х сонлари тўпламини тенгсизлик кўринишда ёзинг ва уни сон ўқида тасвирланг:

1) $[2\ ;\ 7]$; 2) $(-3\ ;\ 8]$; 3) $(2\ ;\ +\infty)$; 4) $(-\infty\ ;\ 5{,}3]$; 5) $(-\infty\ ;\ +\infty)$;

6) $[-8\ ;-3)$; 7) $[1\frac{3}{8}\ ;\ +\infty)$; 8) $(-3\ ;\ 3]$; 9) $(-\infty\ ;\ -10{,}5]$.

22. Тенгсизликларни аниқланиш соҳасини топинг.

1) $x^4>0$; 3) $\frac{x-1}{x+1}>\frac{4}{x-2}$; 5) $x^8+2>0$;

2) $(x-y)^2>0$; 4) $\frac{2}{(x-2)(x+3)}<\frac{x}{x+3}$; 6) $(x-y)^2\le 0$.

23. Қуйидаги тенгсизликлар тенг кучлими?

1) $x+3-\frac{1}{x+7}<2-\frac{1}{x+7}$ ва $x+3<2$;

2) $\frac{-1}{4}(1-x)<\frac{-1}{4}(4x-3)$ ва $1-x<4x-3$;

3) $\frac{3}{5}(2x-1)<\frac{3}{5}(x+2)$ ва $2x-1<x+2$;

4) $2x-3-\frac{1}{x-5}<x-4-\frac{1}{x-5}$ ва $2x-3<x-4$;

5) $x^2>x$ ва $x\ge 1$;

6) $x^4\le x^2$ ва $x^2\le 1$.

24.Бир номаълумли чизиқли тенгсизликларни ечинг.

1) $3x-3<5(x+1)-2$;

2) $8-x\le 2(x+\frac{1}{2})+7$;

3) $7x-1>16(x-1)-2$;

4) $8-x\ge -7(x+\frac{1}{7})-2x$;

5) $\frac{5x+2}{5}-\frac{x-1}{2}<2$;

6) $\frac{9x+2}{10}-\frac{10x-2}{9}>2$;

7) $x-\frac{x+1}{2}\ge\frac{x-3}{4}-\frac{x-2}{3}$;

8) $x^2+x<x(x+5)+5$;

9) $\frac{x+4}{7}-\frac{x+7}{4}>-3$;

10) $-8x+3(x-2)>-x+2$;

11) $\frac{7-x}{2}-3\le\frac{3+4x}{5}-4$;

12) $0{,}4x+\frac{7}{3}<\frac{2}{3}x-1{,}2$;

13) $\frac{x-2}{5}-\frac{2x+3}{3}>1$;

14) $1-\frac{17-3x}{2}>1{,}5x$;

15) $\frac{1-x}{2}+3<3x-\frac{2x+1}{4}$;

16) $8+\frac{6x-8}{10}>\frac{x-2}{6}+\frac{1-5x}{8}+\frac{1}{4}$;

17) $-3(2x-1)+4(2-3x)\ge -16-3x$;

18) $(x-3)(2x-3)+6x^2\ge 2(2x-3)^2$;

19) $(5-6x)(1+3x)+(1+3x)^2\le(1+3x)(1-3x)$;

20) $(2x+1)(4x^2-2x+1)-8x^3\ge -2(x+3)$;

21) $(x-2)(x^2+2x+4)\le x(x^2+2)+1$;

22) $2(3x-1)(2x+5)-6(2x-1)(x+2)\le 48$.

25. Қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирувчи энг катта бутун сонни топинг.

1) $5(x+2) \le 8-(2-3x)$;
2) $2(0{,}4+x)-2{,}8 \ge 2{,}3+3x$;
3) $\dfrac{3-x}{2}+\dfrac{x}{4}<2-\dfrac{4x-1}{8}$;
4) $\dfrac{x}{6}-\dfrac{2-x}{3} \le 5+\dfrac{3x-2}{6}$;
5) $(x-2)(x+4)+x^2<2(x-1)(x+1)$;
6) $\dfrac{1}{3}(x-3)^2+\dfrac{2}{3}x^2<(x-4)(x+4)-2x$.

26. Қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирувчи энг кичик бутун сонни топинг

1) $7(x+1)+2x \ge 9-4x$; 3) $\dfrac{4x-5}{7}<\dfrac{3x-8}{4}+1$;
2) $3(5-2x)-1 \le 4-5x$; 4) $\dfrac{6-x}{5}-1 \le \dfrac{2x-3}{2}-2\dfrac{1}{5}$
5) $(x-0{,}2)(x+0{,}2)+0{,}2(5x^2-1)<2(x-1)(x-3)+8x$
6) $5(x-3)(x-2)<5(x^2-5x)+5$.

27. Бир иомаълумли чизиқли теигсизлнкларни ечинг.

1) $\begin{cases} 2(4-3x)>5x+6, \\ 5x+8>3x+4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2(x-7)>6x-4, \\ 5x+8>2x-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 11(x-1)>13x-6, \\ 3x+1>x-7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(3x-1)<3(4x+1)+16, \\ 4(x+2)<3(x+\dfrac{8}{3}); \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{5x+7}{6}-\dfrac{11x-7}{12}<\dfrac{3x}{4}, \\ \dfrac{1-3x}{2}-\dfrac{1-4x}{3} \le \dfrac{x}{6}-1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{6x-5}{3}-\dfrac{11}{5}<\dfrac{4x+3}{5}-\dfrac{13}{15}, \\ \dfrac{8x+1}{2}-\dfrac{9x}{5} \le \dfrac{6x-1}{5}+0{,}1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x(x+1)+10>(x+1)^2+3, \\ 3x-4(x-7) \ge 16-3x; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4(x-3)-3>8x+1, \\ 2+(x+3)x \le (x+2)^2+5; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 0{,}6(2x-3)+x>\dfrac{3-x}{5}+0{,}2, \\ 0{,}3(3x-4)+3 \ge \dfrac{4x}{3}-0{,}5(x-1); \end{cases}$

10) $\begin{cases} 0{,}8(5x-1)-0{,}7x \le \dfrac{27x-2}{10}-\dfrac{2}{5}x, \\ \dfrac{-5x-7}{8}-\dfrac{3x}{4} \ge -0{,}4(5x-2)-1. \end{cases}$

28.Тенгсизликлар системасининг энг катта ва энг кичик бутун ечимлари йиғиндисини топинг.

1) $\begin{cases} 5(1-\frac{x-1}{3})-7(2x-3)>0, \\ 0{,}7(x+8)>\frac{3x-14}{5}-\frac{3x-10}{20}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x<2(15-2x)+\frac{3(x-15)}{4}, \\ 0{,}6(1-2x)<1{,}2x-\frac{2x-4}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x+5}{3}+3(\frac{1}{5}-\frac{x-2}{3})>\frac{x+3}{5}+\frac{16}{15}, \\ \frac{3(x-1)}{2}-1{,}3\ge\frac{x}{5}-1{,}5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}-\frac{x}{3}<\frac{x+1}{4}-\frac{x}{5}; \\ -\frac{x+5}{6}+\frac{x}{3}<\frac{x-1}{4}+\frac{x+4}{7}. \end{cases}$

29. Тенгсизликлар системасининг бутун ечимларининг ўрта арифметигини топинг.

1) $\begin{cases} 3x-4<8x+6, \\ 5x-4<2x-1, \\ 15x+3\ge 11x-9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x+11\le x+23, \\ x+15>6-2x, \\ x-2<3x+2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0{,}4(2x-3)>x-2, \\ 3x-7\ge x-6, \\ \frac{3x-2}{4}>\frac{1-5x}{6}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 0{,}6+5(\frac{7x}{5}-1)<x+4, \\ 3(x-1)-3<5(2x-1)-7x, \\ x-\frac{2x-5}{5}\ge 1-2x. \end{cases}$

30. Қўш тенгсизликни ечинг.

1) $-3<2x-9\le 1$;

2) $-3\le 2+1{,}5x\le -2{,}5$;

3) $-4\le 1-0{,}2x\le 1{,}2$;

4) $3\le 3x+1<5$;

5) $5x-1<6x-7\le 4x$;

6) $6x+4\le 7x+4<12x-3$;

7) $-1+\frac{x+1}{2}<\frac{x+3}{4}<\frac{x-2}{3}+1$;

8) $\frac{x-1}{4}+2\le\frac{x}{5}\le\frac{x+4}{10}-1$;

9) $450:15<10x-35<3600:144$;

10) $6798:103<54+6x<9156:109$;

11) $\frac{x}{2}+\frac{x+4}{4}\le 5\le 2x-\frac{x-1}{2}$;

12) $\frac{x+4}{3}-x\le 2\le x-\frac{x+7}{2}$.

31. Квадрат тенгсизликни ечинг.

1) $x^2-x-6\ge 0$;

2) $x^2-3x+2\le 0$;

3) $-x^2+6x+16<0$;

4) $-x^2+3x+4>0$;

5) $x^2-10x+9>0$;

6) $-x^2+5x-4\le 0$;

7) $-x^2-x+20\ge 0$;

8) $x^2-50x+49<0$.

32. Квадрат тенгсизликни ечинг.

1) $-x^2-2x+5\geq 0$;
2) $x^2-5x-1\leq 0$;
3) $x^2+2x-\frac{4}{3}>0$;
4) $-x^2+2x+\frac{5}{2}<0$;
5) $x^2+3x-2\geq 0$;
6) $x^2-0{,}4x-0{,}5<0$.

33. Квадрат тенгсизликни ечинг.

1) $2x^2-7x-4\geq 0$;
2) $3x^2+2x-1<0$;
3) $-3x^2-x+4>0$;
4) $3x^2+12x+10\leq 0$;
5) $2x^2-3x+1\geq 0$;
6) $4x^2-11x+6>0$;
7) $5x^2-4x-3\leq 0$;
8) $-3x^2-11x-3\leq 0$.

34. Квадрат тенгсизликни ечинг.

1) $x^2-4x+4\geq 0$;
2) $4x^2+4x+1\leq 0$;
3) $x^2-16x+64>0$;
4) $-2x^2+6x-4{,}5<0$;
5) $-9x^2-6x-1\leq 0$;
6) $4x^2-20x+25<0$;
7) $-x^2+2\sqrt{2}x-2\geq 0$;
8) $0{,}09x^2-0{,}36x+0{,}36\geq 0$.

35. Квадрат тенгсизликни ечинг.

1) $x^2+x+2>0$;
2) $3x^2+2x+4<0$;
3) $x^2+20>0$;
4) $4x^2-3x+5>0$;
5) $-x^2-28<0$;
6) $(x+5)^2+7<0$;
7) $\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+37\geq 0$;
8) $-4x^2+2x-8<0$.

36. Квадрат тенгсизликни ечинг.

1) $7-x^2\geq 0$;
2) $-3{,}6x^2-7{,}2x\leq 0$;
3) $16x^2+1>8x$;
4) $-(x-2)^2+4>0$;
5) $-1+x(x+1)-2x^2<3x+x(x-1)$;
6) $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{5}x\leq x-1$;
7) $3x(x-2)\leq 1+x-0{,}5(8+x^2)$;
8) $(x-3)(x-2)>7x-1$;
9) $(x-3)^2+(x+4)^2\leq(x-5)^2+17x+24$;
10) $\frac{x(x-3)}{7}-11>-x$;
11) $x(x-2)+2(x-2)(x+2)<2x^2-2x$;

12) $3x^2+(5+x)^2>3(x-5)(x+5)$.

37. Тенгсизликни интерваллар усули билан ечинг

1) $(x+1)(x-3)\geq 0$;

2) $(x-2)(x+\frac{3}{2})<0$;

3) $(x+1\frac{1}{2})(x-0{,}8)\leq 0$;

4) $(x-4)(x-2{,}8)>0$;

5) $(x+3)(x+2)(x-1)\geq 0$;

6) $(x+5)(x-2)(x-2{,}8)\leq 0$;

7) $-(x-3)(x-4)(x-5\frac{1}{2})>0$;

8) $-x(x-6)(x-7)<0$;

9) $(5+x)(3-x)(x-1\frac{1}{7})\geq 0$;

10) $(2x+1)(1-3x)(4x-1)\leq 0$.

38. Тенгсизликни интерваллар усули билан ечинг

1) $x^2+3x\geq 0$;

2) $x^2+16x\leq 0$;

3) $x^2-9\geq 0$;

4) $x^2-25\leq 0$;

5) $-9x^2+1\leq 0$;

6) $-4x^2+1\geq 0$;

7) $-5x^2-x\geq 0$;

8) $-3x^2+x\leq 0$;

9) $\frac{1}{16}>x^2$;

10) $x^2\leq\frac{9}{25}$;

11) $-2x^2+4x+30<0$;

12) $-2x^2+9x-4>0$;

13) $4x^2+3x-1<0$;

14) $2x^2+3x-2<0$;

15) $-4x^2-12x-9<0$;

16) $-x^2+x-\frac{1}{4}<0$;

17) $2x^2-3x+5\geq 0$;

18) $3x^2-4x+5<0$;

19) $-x^2+4x-4\leq 0$;

20) $-9x^2+6x-1\leq 0$.

39. Тенгсизликни интерваллар усулида ечинг.

1) $(x-3)(x^2-9)\geq 0$;

2) $(x-4)(16-x^2)\leq 0$;

3) $(x-7)^2(x^2-49)>0$;

4) $(x+6)^2(x^2-36)<0$;

5) $(x-7)(x+1)(x^2-1)<0$;

6) $(x-8)(x+3)(x^2-9)>0$;

7) $(x+3)^2(x-2)(x+5)^3<0$;

8) $(x+0{,}5)^2(x-\frac{1}{3})(x-3\frac{1}{2})^3\leq 0$;

9) $(x^2-25)(x^2-8)>0$;

10) $(x^2-49)(x^2-5)(x+7)\leq 0$;

11) $(3+x)(x^2-x)^2(x-4)\geq 0$;

12) $(3{,}2+x)(2x^2-x)^2(x-3\frac{1}{4})\le 0$;

13) $(8-x^3)(x^2-4)(x^2-4x+4)\ge 0$;

14) $(27-x^3)(x^2-9)(x^2-6x+9)\ge 0$;

15) $(x^2+5)(x-5)(x^2+25+10x)\le 0$;

16) $(x^2+8)(x+7)(x^2+14x+49)\ge 0$;

17) $(7-x^2)(3+x^2)(16-x^4)(x^2-5)\ge 0$;

18) $(10-x^2)(x^2+7)(25-x^4)^2(x^2-3)>0$;

19) $(x^2-x-2)(2x+3+4x^2)(x^2+6x-7)<0$;

20) $(-x^2+5x-6)(x^2+x-12)(x^2-4x+7)>0$.

40. Тенгсизликни интерваллар усули билан ечинг ва энг катта бутун ечимини топинг.

1) $x^8-17x^4+16\le 0$;

2) $9x^4+5x^2-4<0$;

3) $(x^3+x^2+x+1)(x-2)<0$;

4) $x^4-2x^3+2x-1\le 0$;

5) $x^2-3x-4>5(x-4)(x+2)-4x+16$;

6) $x^3+3x+4\le(x+1)(2x+3)-\frac{5}{4}x-\frac{5}{4}$;

7) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)<12$;

8) $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2\le 81$;

9) $(x-2)(x+4)(3-x)(x+3)>7$;

10) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15\le 0$;

11) $(x^2-x-1)(x^2-x-7)\le -5$;

12) $(x^2-5x)^2-30(x^2-5x)-216<0$.

41. Безу теоремасига кўра тенгсизликларни интерваллар усулида ечинг

1) $x^4+2x^3-2x^2-6x+5>0$;

2) $2x^3-5x^2-8x+20\le 0$;

3) $3x^3-x^2-27x+9>0$;

4) $2x^4-3x^3-x^2+3x-1\le 0$;

5) $x^4+14x^3+71x^2+154x+120<0$;

6) $2x^5-9x^4+8x^3+15x^2-28x+12\ge 0$.

42. Тенгсизликнинг бутун сонлардаги ечими нечта?

1) $-x^2-6x+7>0$;

2) $x^2-6x-7<0$;

3) $(x^2+x-2)(x^2-2x-3)\le 0$;

4) $(x^2-10x)(x^2-49)<0$;

5) $x^2(x+1)(x-3)^2(x-4)\le 0$;

6) $(x+8)^4(1-x)^3(x+5)(x-2)^2\ge 0$;

7) $(-x^2+x-1)(x^2+x-2)(x^2-7x+12)>0$;

8) $(2x^2+x+5)(x^2+2x-3)(x^2+3x+2)<0$;

9) $(x^3-4x)(x^2+2x-8)(x^2+7x+10)\le 0$;

10) $(x-5)(3x^2-x+2)(x^2-25)\le 0$.

43.Тенгсизликлар системасининг энг катта ва энг кичик бутун ечимлари айирмасини топинг.

1) $\begin{cases} x^2>16, \\ x^2-16x\le 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2\le 25, \\ 2x^2-5x-7\ge 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-2\sqrt{5}x+1\le 0, \\ x^2-8x+16\ge 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+2x-15>0, \\ x^2+2x-24\le 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x(x-1)(x-2)\ge 0, \\ x^2-4\le 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (x+1)^2(x-3)(x-4)^3\le 0, \\ x^2-4x\le 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x^2-5x-1>x^2-4, \\ 2x(4-x)\ge(3-x)(x+3)+8x-13; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 12x^2-(2x-3)(6x+1)>x, \\ (5x-1)(5x+1)-24x^2>2(x-1)(x+1)+x-5. \end{cases}$

***44.* Қўш** тенгсизликларни ечинг ва энг катта бутун ечимини топинг.

1) $6<x^2+x<2$; 5) $-x^2\le 5x+6<x^2$;

2) $-1\le x^2+x<12$; 6) $9x-13\le 2x^2\le 8$;

3) $12<3x^2<5x+2$; 7) $x\le x^2+20\le 9x$;

4) $6-x<x^2\le 4x+5$; 8) $0\le x^2+6x<7$.

45. Тенгсизликлар системасини интерваллар усулида ечинг.

1) $\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{3}\le 5, \\ 3x^2+6x\ge 8x^2-15x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{9-x^2}{5}>1, \\ 10x+7x^2<2x^2+8x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x^2+10x+25)(4x-5)\ge 0, \\ (x-2)(x^2-6x+9)\le 0, \\ x>-6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x-1)^2(x^2-4)(x-3)^2\ge 0 \\ (0{,}5x-1)^2(\frac{1}{3}x+1)(\frac{1}{8}x-1)\le 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^3-5x^2+10x-12\le 0 \\ x^2-4x+3\ge 0 \\ x^2-6x+8\le 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^4-3x^3-x^2-x-2\le 0 \\ x^4-2x^3+x^2-8x-12\ge 0 \\ x^6+2x^3+1\le 0 \end{cases}$

46. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг..

1) $y=\sqrt{(x+7)(x-8)}\cdot\sqrt[3]{(x+8)(x-11)}$;

2) $y=\sqrt{2x^2-5x-7}+\sqrt{-x}$;

3) $y=\sqrt[4]{x^5-16x}-\sqrt{4-x}$;

4) $y=\sqrt{x^3(x-2)^2}+\frac{x}{4}\sqrt{7-4x}$;

5) $y=\sqrt{(1-7x)^3}+\sqrt{(1-8x)(x+2)}$;

6) $y=(\sqrt{(x+3)^2(x-1)^4(x-2)^5}\cdot\sqrt{(2-x)(x-2{,}5)(x-7\frac{1}{3})^2}$;

7) $y=\sqrt{(x-1)\sqrt{(x-2)(x+2)}}+\sqrt{5\sqrt{5-x}}$;

8) $y=\sqrt{(x+2)(x-3)\sqrt{(x+1)(4-x)}}\cdot\sqrt{10-x}$.

47. a нинг қандай қийматида берилган тенгсизлик x нинг барча қийматларида ўринли бўлади?

1) $a(x-7)>x-8$;

2) $a^2x-4(a+x)<5a-1$;

3) $ax-3<2x+1$;

4) $x+4>ax-7$;

5) $a(x-a)+a^2(x+2)>a-4$;

6) $(a+1)x+a+1<5$;

7) $a(x-1)>x-2$;

8) $(a-4)x-(5-a)a>(3a-a^2-1)x$;

9) $(\frac{1}{2}a-3)x+(0{,}2-a)a<0{,}3x+2\frac{1}{2}$;

10) $(0{,}3-a)a+(\frac{1}{2}-a)x<0{,}5+a+x$.

48. a нинг барча қийматларида берилган тенгсизликни ечинг.

1) $a(x-5)>x-7$;

2) $(a+1)x+5>2a-x$;

3) $(0{,}8-a)x-1{,}8a>a(a+x)$;

4) $a^2x-5(a-1)<x-a$;

5) $(3\frac{1}{2}a-x)a-\frac{1}{2}a+x<1$;

6) $a^2(x-1)+ax>a+5$.

49 . a нинг қандай қийматларида берилган тенгсизлик ечимга эга бўлмайди.

1) $(a-2)x+4<a$;

2) $(1-a)(1+a)x>3(a-x)-1$;

3) $(x-a)(x-2)<0$;

5) $3x^2+ax-a<0$;

6) $ax^2-2ax+3<0$;

7) $-x^2-ax+\frac{3}{4}-a>0$;

4) $(4a-x)(3-x)<0$; 8) $ax^2-5x-\frac{5}{4}>0$.

50. a нинг қандай қийматларида берилган тенгсизлик x нинг барча қийматларида ўринли бўлади.

1) $ax^2+(a+3)x+4a>0$; 3) $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2>0$;

2) $(a-1)x^2+(a+1)x+a+1>0$; 4) $(a^2-4)x^2+2(a+2)x+4>0$.

51. $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$ квадрат тенглама иккита мусбат ечимга эга бўладиган a нинг барча қийматларини топинг.

52. $3ax^2+(4-6a)x+3(a-1)=0$ квадрат тенглама иккита мусбат ечимга эга бўладиган a нинг барча қийматларини топинг.

53. $(a-3)x^2-2(3a-4)x+7a-6=0$ квадрат тенглама турли ишорали ечимга эга бўладиган а нинг барча қийматларини топинг.

54. $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$ квадрат тенглама ечимга эга бўлмайдиган a нинг барча қийматларини топинг.

55. $(a+1)x^2-3ax+4a=0$ квадрат тенглама ечимлари 1 дан катта бўладиган a нинг барча қийматларини топинг.

56. $x^2+4ax+4a-8=0$ квадрат тенглама ечимлари 1 дан кичик бўладиган a нинг барча қийматларини топинг.

57. $x^2+(2a+1)x+a=0$ квадрат тенглама ечимларининг бири 2 дан катта, иккинчиси 2 дан кичик бўладиган a нинг барча қийматларини топинг.

58. a нинг қандай қийматларида берилган тенгсизликлар системаси ечимга эга бўлмайди.

1) $\begin{cases} ax \geq 5a-2, \\ ax \leq 7a+3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} ax \leq 2x+4a+2, \\ (a-2)x \geq 0.5a-\frac{8}{9}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1+3ax \geq 4a-4, \\ 5+3ax \leq 6a+9; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5-7x<4x+4, \\ 1+4x<a+3x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1}{3}ax \leq \frac{1}{2}(4a+0{,}5), \\ \frac{1}{3}ax+\frac{1}{2}(a+2) \geq a; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} a(x-1)>x+3, \\ 4(a+1)x>4ax+8. \end{cases}$

59. a нинг қандай қийматларида берилган тенгсизликлар системаси ечимга эга бўлмайди.

1) $\begin{cases} x^2+4x+3+a<0, \\ 2x+a+6>0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+2x+a \leq 0, \\ x^2-4x-6a \leq 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7-(\frac{15a}{4}-30)x>10, \\ x-1-(a-1)<-a-x(a-1); \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2+ax+4<4(x^2-x+1), \\ 2x^2+ax-6>-6(x^2-x+1). \end{cases}$

60. Рационал тенгсизликларни интерваллар усулида ечинг

1) $\dfrac{-6\sqrt{2}}{x+3}>0$;

2) $\dfrac{7\sqrt{13}}{x-2}\le 0$;

3) $\dfrac{-17\sqrt{2}}{(x+5)^2}>0$;

4) $\dfrac{(x-4)(x+4)}{x-2}>0$;

5) $\dfrac{(x+2)(4-x)}{x+3}<0$;

6) $\dfrac{(x+1)^3}{(x-3)(x-5)}\ge 0$;

7) $\dfrac{(x+6)^3(x-4)}{(7-x)^5}>0$;

8) $\dfrac{(x+2)^2(x-3)}{x-1}\ge 0$;

9) $\dfrac{(x+8)^2(x-1)^3}{(x+2)(x-2)^2}\le 0$;

10) $-\dfrac{(x+4)^4}{x^2(x-4)^6}\ge 0$;

11) $\dfrac{(x+3)^4(x+2)^2}{(x-5)^6}\le 0$;

12) $\dfrac{x^2(x-1)^4}{(x+7)^3(10-x)^5}\le 0$;

13) $\dfrac{(x+8)^3(x+4)(8-x)^5}{(x-4)^7(x+5)^2}\le 0$;

14) $\dfrac{(x+12)(x+1)^4(x+4)^3}{(x-1)^2(x-5)^6(x-3)^4}\le 0$.

61 . Рационал тенгсизликларни бутун ечимлар сонини нечта.

1) $\dfrac{x(x-1)^2}{(x+1)}\le 0$;

2) $\dfrac{(x+2)^2(2-x)}{(x+5)}\ge 0$;

3) $\dfrac{10(10-5x)^2}{(-1-3x)^4(2x-12)^2}\le 0$;

4) $\dfrac{(-x-1)^2(x-1)^3(2x-8)^5}{(-x-8)(2x+6)^3(4-2x)^2}\ge 0$.

62. Рационал тенгсизликларни энг кичик бутун ечимини топинг.

1) $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2}>0$;

2) $\dfrac{x^2-6x}{x^2+6x+9}\le 0$;

3) $\dfrac{x^2+6x}{4-3x-x^2}\ge 0$;

4) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x+2)^2x^2}{(x-1)(x+1)(x-3)^4}\geq 0$.

63. Рационал тенгсизликни ечинг.

1) $\dfrac{2}{x}<1$;

2) $\dfrac{1}{x-1}\geq 1$;

3) $\dfrac{1}{x}\geq\dfrac{1}{3}$;

4) $\dfrac{4}{x+2}\leq-\dfrac{5}{2}$;

5) $\dfrac{x-10}{2-x}>1$;

6) $\dfrac{x+2}{3-x}\leq 2$;

7) $\dfrac{2x^2+2x-11}{x^2+x+1}<1$;

8) $\dfrac{3-2x}{x^2+3}\geq 1$;

9) $\dfrac{2x^2+16x-3}{x^2+8x}>2$;

10) $\dfrac{x^2-5x+12}{x^2-4x+5}>3$;

11) $\dfrac{15}{x+2}<x$;

12) $-\dfrac{3}{x+2}>(x-1)$;

13) $\dfrac{x^2-2x-1}{x+1}\leq x$;

14) $\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}\geq x-2$;

15) $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}$;

16) $\dfrac{x+7}{x-5}\geq-\dfrac{3x+1}{2}$;

17) $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{x+1}{x-1}<2$;

18) $\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x-1}>1$;

19) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}\geq\dfrac{1}{x}$;

20) $\dfrac{6}{x^2-1}+\dfrac{3}{x+1}<\dfrac{2}{x-1}+1$.

64. Тенгсизлик бутун ечимларининг ўрта арифметигини топинг.

1) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-4x}\leq 0$;

2) $\dfrac{(x^3-64)(-x^2-1)}{x^3+1}\geq 0$;

3) $\dfrac{x-1}{x+3}\geq 3$;

4) $\dfrac{x^2+5x+8}{x^2+1}>2$;

5) $\dfrac{x^2}{x-4}\leq x$;

6) $\dfrac{x^2+1}{x-3}\leq x-2$;

7) $\dfrac{5x+4}{x+3}\leq-\dfrac{x+2}{x-1}$;

8) $\dfrac{1}{x-\sqrt{2}}\leq\dfrac{1}{x+\sqrt{2}}$.

65*. Тенгсизликларни ечинг.

1) $\frac{1}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+2}\geq 2$;

2) $\frac{2}{x^2+3}+\frac{4}{x^2+7}\leq 1$;

3) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}\geq -2{,}5$;

4) $\frac{x-3}{x^2+4x+9}+\frac{x^2+4x+9}{x-3}\geq -2$;

5) $(x^2-2x)(2x-2)-\frac{9(2x-2)}{x^2-2x}\leq 0$;

6) $(x^2+3x)(2x+3)-\frac{16(2x+3)}{x^2+3x}\geq 0$;

7) $2x^2+2x+1-\frac{15}{x^2+x+1}<0$;

8) $(x+2)^2-\frac{24}{x^2+4x}<2$;

9) $x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}<5$;

10) $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}\geq \frac{5}{4}$.

66. Тенгсизликлар системасини ечинг.

1) $\begin{cases}\frac{(x-1)(x+1)}{x-3}\geq 0,\\ \frac{x+3}{(x-4)(x+5)}\leq 0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{(x+1)(x-2)}{x-6}\geq 0,\\ \frac{x+5}{(4-x)(x-3)}\geq 0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{(x^2-6x+8)(x^2-4)}{x-2}\geq 0,\\ \frac{(x^2-x)(x+3)}{x+2}\geq 0;\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{(4x^2+4x+1)(x-3)}{x+1}\leq 0,\\ \frac{(x^2+2x-8)(x^2+7x+10)}{x^2+4x}\leq 0;\end{cases}$

5) $\begin{cases}\frac{3x-1}{2x+5}>0,\\ \frac{3x-1}{2x+5}<1;\end{cases}$

6) $1\leq \frac{3x-1}{2x+1}<2$;

7) $\begin{cases}\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\geq 1,\\ \frac{3}{x^2-x+1}\geq 1;\end{cases}$

8) $\begin{cases}\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3,\\ \frac{2-x^2}{1-x}\leq x.\end{cases}$

67*. a нинг қандай қийматларида берилган тенгсизликлар системаси ечимга эга бўлмайди.

1) $\begin{cases} \dfrac{2x^2+ax+4}{x^2-x+1}<4, \\ \dfrac{2x^2+ax-6}{x^2-x+1}>-6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{(1-a)x-a}{x-2(1-a)}\geq 0, \\ x-8\geq ax; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{a-1}+x<\dfrac{1}{1-a}, \\ \dfrac{(a-1)x+a+1}{x-1}>0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7-(\dfrac{15a}{4}-30)x>10, \\ \dfrac{x-1}{a-1}-1<\dfrac{a}{1-a}-x. \end{cases}$

68. Агар $a+b\geq 1$ бўлса, $a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$ бўлишини исботланг.

69. Агар $x\geq 0$, $y\geq 0$ бўлса, $x^4+y^4\geq x^3y+xy^3$ бўлишини исботланг.

70. Агар $x, y\in R$ бўлса, $x^2+2y^2+2xy+6y+10>0$ бўлишини исботланг.

71. Агар $x, y\in R$ бўлса, $x^2+5y^2+2xy+4y+3>0$ бўлишини исботланг.

72. Агар $a,b,c\in N$ бўлса, $ab+bc+ac\leq 3abc$ исботланг.

73. $x^2+4y^2+3z^2+14>2x+12y+6z$ исботланг.

74. $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$ исботланг.

75. Агар $n\in N$ бўлса, $\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+....+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}$ исботланг.

76. Агар $n\in N$ бўлса, $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}<2$ исботланг.

77. Тенгсизликларни исботланг

1) $(x+y)^2\geq 4xy$;
2) $a^2+\dfrac{1}{a^2+1}\geq 1$;
3) $2a^2+b^2+c^2\geq 2a(b+c)$;
4) $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$;
5) $(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)$;
6) $(a+b+c+d)^2\geq 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$;
7) $a^2+b^2+1\geq ab+b+a$;
8) $a^2+b^2+c^2\geq 2(a+b+c)-3$;
9) $a^2+\dfrac{1}{a^2}\geq 2;$;
10) $3a^2+12b^2\geq 12ab$;
11) $\dfrac{2a}{a^2+1}\leq 1$;
12) $8(a^4+b^4)\geq(a+b)^4$.

78. Ихтиёрий a,b,c мусбат сонлар учун қуйидаги тенгсизликларни исботланг.

1) $ca+\dfrac{b}{c}\geq 2\sqrt{ab}$;

2) $a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$;

3) $(a+b+c)^3\leq 9(a^3+b^3+c^3)$;

4) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3$;

5) $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}\geq 6$;

6) $\frac{a^3+b^3}{2}\geq (\frac{a+b}{2})^3$.

79. Исботланг.

1) Агар $ab>0$ бўлса, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ бўлади;

2) Агар $ab<0$ бўлса, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq -2$ бўлади;

3) Агар $a^2+b^2=1$ бўлса, $|a+b|\leq\sqrt{2}$ бўлади;

4) Агар $a+b+c\geq 3$ булса, $a^2+b^2+c^2\geq 3$ бўлади;

5) Агар $a>0$, b>0 бўлса, $\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$ бўлади;

6) Агар $a>0$, b>0 бўлса, $a^3+b^3\geq a^2b+ab^2$ бўлади.

80. Математик индукция усули ёрдамида қуйидаги тенгликларни исботланг.($n\in N$)

1) $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

2) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $1^2+3^2+...+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

4) $1+2+2^2+...+2^{n-1}=2^n-1$;

5) $1-2^2+3^2-4^2+...+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$;

6) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$;

7) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$;

8) $1\cdot 2+2\cdot 3+...+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

81. Ихтиёрий n натурал сон учун a_n сони b сонига бўлинишини исботланг.

1) $a_n=n^3+5n$; b=6 ;

2) $a_n = n^3 + 11n$; b=6 ;

3) $a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7$; b=6 ;

4) $a_n = n^7 - n$; b=42 ;

5) $a_n = n^3 + 20n$; b=48 ;

6) $a_n = 2^{2n} - 1$; b=3 ;

7) $a_n = 7^n - 1$; b=6 ;

8) $a_n = 4^n + 15n - 1$; b=9 ;

9) $a_n = 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$; b=11 ;

10) $a_n = 5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$; b=19 ;

11) $a_n = 10^n - 4^n + 3n$; b=9 ;

12) $a_n = n^2(n^4 - 1)$; b=60.

82. Учта кетма–кет натурал сонлар кубларининг йиғиндиси 9 га бўлинишини исботланг.

83. Ихтиёрий n натурал сон учун $a_n = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ бутун сон эканлигини исботланг.

84. Ихтиёрий n натурал сон учун $a_n = \frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{4} + \frac{11n^2}{24} + \frac{n}{4}$ натурал сон бўлишини исботланг.

85. Математик индукция усули ёрдамида қуйидаги тенгсизликларни исботланг.

1) Агар $n \geq 5$ бўлса, $2^n > n^2$;

2) Агар $n \in N$ бўлса, $2^n > 2n + 1$;

3) Агар $n \geq 4$ бўлса, $3^n > 2(n+1)^2$;

4) Агар $n \geq 4$ бўлса, $5^n \geq 5n^3 + 2$;

5) Агар $n \in N$ бўлса, $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n$;

6) Агар $n \in N$ бўлса, $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} < 2$;

7) Агар $n \in N$ бўлса, $2 \leq (1 + \frac{1}{n})^n < 3$;

8) Агар $n \geq 6$ бўлса, $(\frac{n}{2})^n > 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n > (\frac{n}{3})^n$.

ЖАВОБЛАР.

I-БОБ

2. 71010; 71415. **3**. x=1,3,5,6,8; y=0,2,4,6,8. **4**. 0. **9**. а)6; б)75; в)72; г) 8; д) 20; е)216. **10**. б)189; г)950; е) 806. **11**. б) $\frac{1}{40}$; г) $\frac{1}{21}$; е) $\frac{1}{15}$. **12**. а)1,4; б)23,865; в)36,825; г)2,5; д)16,2; е)-147,6. **13**. а) $\frac{1}{11}$; б) $-\frac{9}{8}$; в) $\frac{4}{5}$; г)0,498125; д)0,05. **14**. а) $\frac{31}{99}$; б) $-\frac{2410}{999}$; в) $\frac{173}{55}$; г) $\frac{3713}{9000}$; д) $\frac{12289}{990}$; е) $\frac{209}{90}$; ж) $-\frac{8}{9}$. **15**. а) 1,(7);
б) 0,(073117); в) 0,(354838709677419); г) –1,(230769); д) –1,14(39);
е) 5,841(6); ж)0,(571428). **16**. а) 0,22(23)>0,2223; в) $-2\frac{2}{3}>-2{,}67$.

17. а) $4\frac{179}{180}$; б) $-\frac{79}{225}$; в) $1\frac{6}{7}$; г) 1; д) 11,5. **18**. б) 7; $1\frac{1}{3}$; -1,625; 4,(1); $\frac{4}{11}$; $-\frac{47}{57}$ г) 2; $-\frac{100}{231}$; $-\frac{4}{15}$; $\frac{10}{113}$; $\frac{2}{211}$. **19**. а) $\frac{3}{43}$; в) $1\frac{1}{9}$; д) $\frac{4}{9}$; и) $3\frac{2}{3}$. **20**. б) $-\frac{3}{7}$; г) 3,6; е) –2,5. **21**. б)12,5% ; г) 175%. **22**.б) 1; г) $\frac{53}{10000}$. **23**.б) 9; г)0,15; е)0,125. **24**.б) 600; г) 200; е) 15. **26**. 40 та. **27**. 14000 сум. **28**. 14520 сум. **29**. 2 марта. **30**. 120 сум. **31**. 300 кг. **32**. 36; 24; 37,5. **33**. 40 кг. **34**. 7,5 %. **35**. 4 та. **36**. 30 %. **37**. 28,8 m. **38**. 18,9 кг. **39**. б) $9\frac{27}{35}=9\frac{27}{35}$; г) $40>\frac{8}{45}$; е) 1,9<16,7. **41**. 4; 4; 4; 6; 6; 8. **42**. 6; 16; 2. **43**. 4; 8. **44**. а) 9; 0,9; б) 13; 0,7; в) 2; $\frac{6}{11}$; г) 4; $\frac{3\pi-8}{2}$; д) 5; $\pi+e-5$; е) 7; 0,2; ж) 0; $\frac{13}{18}$.

II-БОБ

1. б) $(-\frac{3}{4})^4$; г) $(-3b)^5$; е) $\frac{x^3(x-y)^3}{y^3}$.

2. b) –15; 18; -72; 72.

3. а) 343; б) 9; в) $1\frac{4}{5}$; г) $\frac{6}{7}$ д) 4; е) $\frac{1}{7}$; и) $\frac{7}{3}$.

4. а) $8a^3b^7m^3$; б) $-\frac{3}{8}a^2x^6y^5$; в) $\frac{1}{5}a^3m^3n^4$.

5. а) $-12a^2b-16b^3$; б) $\frac{8x^2}{5}-\frac{6xy}{7}$; в) a^8-17a^4+16; г) $-a^3$; д) $-2n^3$;
е) $4ab-2a^2-2b^2$.

6. б) 3600; г) $\frac{77}{136}$; е) 128000.

7. а) $2x^2+3x+1$; б) $3x^3-2x^2-2x+1$; в) x^3-9x^2+20x;
г) $2x^6+5x^5+5x^4+5x^3+5x^2+5x+2$.

8. а) 18; б) 20x+21; в) 4x-1; г) 2x+3.

9. а) 0; б) 0; в) –15; г) –270.

10. 1). в) $x^2(x-1)(x^2+x+6)$; г) $3x^2(x-2)(x+2)(x^2+8)$; ж) $(x-y-1)(a-2)$;
з) $(b+c-a)(y-x^2)$.

2). б) $(4-a^2b^2)^2$; г) $3(8y-3)$; е) $(7+a+x)(7-a-x)$ з) $(a^2+b^2)(a^2-ab-b^2)$.

3). г) $(x+1)(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$; д) $(x^2+3)(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)$;
е) $(x-1)^3(x+1)$; ж) $(x^2+2)(x^2+1)$;
з) $(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$.

11. а) $\frac{2}{3}$; б) 0,02; в) 12500; г) 28; д) 906; е) 32.

12. а) $\{(a,b):a\neq 0, a\neq 1, a\neq -1\}$; б) $\{(a,b;c,d):a\neq 0, c\neq d, c\neq -d\}$;
в) $\{(a,c):a\neq 0, c\neq 0, a\neq -c\}$; г) $\{x:x\neq 1, x\neq -1\}$.

13. а) 1,9; б) 6,4; в) 4; г) 1,5.

14. б) $\frac{y-4}{6x}$; г) $\frac{x+1}{a-x}$; е) 1; з) $(\frac{x-b}{x+b})^2$.

15. а) $\frac{2y+30}{y-9}$; б) $\frac{b}{y}$; в) 0; г) $\frac{4}{y^2-x^2}$.

16. а) 2; б) 4; в) –0,36; г) 0,1.

17. а) $\frac{a+b}{a-b}$, *агар* $a\neq 0,\ b\neq 0,\ a\neq b$ б) $\frac{8}{x-y}$, *агар* $x\neq 0,\ y\neq 0,\ x\neq y$;
в) $\frac{16}{9-a^2}$, *агар* $a\neq 0,\ a\neq 3,\ a\neq -3,\ a\neq -5$ г) $\frac{6x-1}{4x^2-1}$, *агар* $x\neq -\frac{1}{2},\ x\neq \frac{1}{2},\ x\neq -3$.

18. 1) $\frac{18a^2}{7}$; 2) $\frac{1}{a}$; 3) $\frac{3b^2y}{2a}$; 4) 1; 5) –3; 6) a+b; 7) $\frac{m-c}{m-a}$; 8) $\frac{m-c}{m+c}$;
9) a; 10) $\frac{4}{a+b}$; 11) 4; 12) $\frac{m^2+4}{4m}$; 13) 1; 14) $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$; 15) $\frac{20}{3}$; 16) $\frac{4}{a-b}$; 17) $(\frac{c+2}{c-2})^2$; 18) 4; 19) $\frac{4a}{3a-12}$; 20) $\frac{2x}{x+2y}$.

19. а) $\frac{x-1}{x^2-x+1}$; б) $\frac{x^2+1}{x+1}$; в) $\frac{7(x^2+2x+4)}{5}$; г) $(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$;
д) $\frac{x-4}{3-x}$; е) $\frac{a+b}{b}$.

20. б) $\frac{1}{36}$; г) 5^6; е) $\frac{1}{81}$; з) $\frac{1}{8}$.

21. а) $a^{-6};a^9;a^{-12}$. б) $a^3;a^4;a^{-6}$ c) $a^{-6};a^{-16}$. d) $a^0;a^{28}$.

22. а) –0,8; б) 17; c) 48; d) –263; д) $-\frac{5}{2}$ е) –8.

23. а) $0{,}16x^{-2}y^2$; б) 1; в) $\frac{4}{9}x^{16}y^{-18}$; г) $\frac{4}{3}x^{-10}y^{10}$; д) 1; е) b.

24. а) –3,8; б) 2; в) 3; г) 5; д) $-2\frac{1}{9}$; е) –9.

25. б) 12; $-6\sqrt[5]{10}$; г) $\sqrt[4]{3}$; $3^{-\frac{7}{8}}$; $3^{\frac{13}{27}}$; е) 441; 100 з) $\sqrt{2}$; $7\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{11}$.
26. а) $36\sqrt{2}$; б) $54\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{5}$; г) 104; д) –9; е) 19 ж) $2+5\sqrt{15}$; з) 12.
27. в) 60; 32. г) 3; 3; 1; -1; 2. д) 14; 8.
е) $2+\sqrt{2}$; $4+\sqrt{3}$; $\sqrt{6}-1$; $3+\sqrt{2}$; $\sqrt{2}-1$. ж) 2; 8; $\sqrt{3}-1$; $\sqrt{5}-2$.
29. а) $b+\sqrt{5}$; $\sqrt{6}-m$; $-\frac{1}{\sqrt{x}+2}$; $\frac{1}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}$. б) $\sqrt{7}$; $\frac{1}{\sqrt{x}}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2,5}$.
в) $\sqrt{3}$; $\sqrt{10}-\sqrt{3}-1$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{5}-\sqrt{2}+1$. г) $x+\sqrt{xy}+y$; $\sqrt{a}-1$; $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.
30. 1) $\sqrt{22}$; 0. 2) $\frac{1}{2}$; 3. 3) $2a^2$; 4) 0; 5) x^2-y^2; 6) $4\sqrt{xy}$; 7) $x\sqrt{x}-y\sqrt{y}$;
8) x+y; 9) 1; 10) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$; 11) $-\frac{1}{x}$; 12) a-b; 13) –1; 14) 3x; 15) 4a; 16) $\frac{1}{x}$
17) $2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; 18) $\frac{\sqrt[3]{y}+1}{\sqrt[3]{y}}$; 19) $\sqrt{a-1}$; 20) $\sqrt{a^2-1}$; 21) 8; 22) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$; 23) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$; 24) $\frac{1}{2}$; 25) 3.
31. а) $\sqrt[8]{10}>\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[6]{24}<\sqrt[3]{5}$ г) $3<\sqrt{10}$;
е) $5\sqrt{\frac{7}{2}}>\sqrt{17}>\frac{1}{2}\sqrt{62}$; $12\sqrt{0,5}<\sqrt{89}<\frac{3}{4}\sqrt{160}$.
32. а) 16; б) 0,1; в) –4; г) 4.

III – БОБ

1. 1) , 2), 5), 8) тенгламалар тенг кучли; 3), 4), 6), 7) – тенгламалар тенг кучли эмас
2. 1) $x\in R$; 2) $x\neq 0$; 3) $x\neq -3$; 4) $x\neq 3{,}5$; 5) $x\neq -3$.
3. 1) $\left\{1\frac{1}{3}\right\}$; 2) {-5}; 3) {-0,15}; 4) $\left\{5\frac{1}{4}\right\}$; 5) {-3}; 6) {0}; 7) {0}; 8) $\left\{1\frac{1}{4}\right\}$.
4. 1) $\left\{\frac{81}{41}\right\}$; 2) $(-\infty;+\infty)$; 3) {-89}; 4) {0,5}; 5) {0,8}; 6) ∅; 7) $(-\infty;+\infty)$; 8) ∅.
5. 1) {-1,53}; 2) {37}; 3) {10}; 4) {5}; 5) {2}; 6) ∅; 7) $\{-\frac{2}{3}\}$; 8) ∅.
6. 1) a=$\frac{1}{2}$; 2) a=-1,25; 3) a=1; 4) a=3; 5) a=4; 6) a=3; 7) a= –3; 8) a= –3.
7. 1) a=5; 2) a=-3; 3) a=0; 4) a=-2,5; 5) a=3; 6) a=8; 7) a=3; 8) a=4.
8. 1) a=-7,5; 2) a=0; 3) a=$\pm\sqrt{2}$ 4) $a=1\frac{1}{4}$.
9. 2) $4(x-1)(x-\frac{1}{4})$; 4) ажратиб булмайди; 6) $-\frac{1}{2}(x-4+2\sqrt{3})(x-4-2\sqrt{3})$
8) $3(x-5)(x+\frac{2}{3})$.

10. 1) $\{-3-2\sqrt{7};\ -3+2\sqrt{7}\}$ 2) {-0,2; 2}; 3) $\left\{-6\frac{2}{3};\ -4\right\}$; 4) $\left\{-1;\ 2\frac{7}{15}\right\}$;

5) {-8; 3}; 6) {-1; 23}; 7) {-0,2; 1,7}; 8) {-4; 0,5}; 9) $\left\{-1;\ 2\frac{6}{7}\right\}$;

10) {-0,2; 1,8}.

11. 2) {-8; 7}; 4) {-2; 12}; 6) $\left\{\frac{1}{5};\ 1\right\}$.

12. 2) $x^2+x-6=0$; 4) $36x^2-60x+25=0$; 6) $x^2-2=0$.

13. 1) $\frac{69}{26}$; 2) $\frac{69}{4}$; 3) $\frac{473}{8}$; 4) $\frac{3409}{16}$; 5) $-\frac{269}{26}$; 6) $\pm\frac{759\sqrt{17}}{16}$.

14. $c=5\frac{2}{5}$. **15.** $b=\pm 3$. **16.** $c=3{,}12$. **17.** b= –2; c=0. **18.** k= –8. **19.** k=15.

20. 3. **21.** $-\frac{1}{3}$. **22.** 36. **23.** ± 5. **24.** a=2. **25.** a=1.

26. 1) $a\in(-\infty;0]\cup[4,+\infty)$; 2) $a\in[1;6]$; 3) $a\in(-\infty;4-4\sqrt{2}]\cup[4+4\sqrt{2};+\infty)$;

4) $a\in(-\infty;-1)\cup(-1;-\frac{\sqrt{3}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty)$; 5) $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)$;

6) $a\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$; 7) $a\in(0;+\infty)$; 8) $a\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$

27. 1) a=2,5 2) $a\in\varnothing$; 3) a=1; 4) a=-2; 5) a=4, a=8; 6) $a=\pm 1\frac{7}{8}$.

28. 2) агар $a<\frac{3}{8}$ бўлса, $x_{1/2}=\frac{3+\sqrt{9-24a}}{12}$; агар $a>\frac{3}{8}$ бўлса, ечимга эга эмас; агар $a=\frac{3}{8}$ бўлса, $x_1=x_2=\frac{1}{4}$; 4) агар $a\in R$ бўлса, $x_{1/2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+28}}{14}$; 6) агар $a\in R$ бўлса, $x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{a^2-4a+9}}{2}$; 8) агар a<4-2$\sqrt{6}$ ва a>4+2$\sqrt{6}$ бўлса, $x_{1/2}=\frac{(a-2)\pm\sqrt{a^2-8a-8}}{2}$; агар $a=4\pm2\sqrt{6}$ бўлса, $x_1=x_2=\frac{a-2}{2}$; агар 4-2$\sqrt{6}$<a<4+2$\sqrt{6}$ бўлса, ечимга эга эмас.

29. 1) {-2; -1; 1; 2}; 2) {-2;1}; 3) {-6; -4; -1; 1}; 4) {-2; 1}; 5) {-1};

6) {-1; 3-2$\sqrt{2}$; 3+2$\sqrt{2}$}; 7) $\left\{-\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2};\ \frac{1}{2};\ 2\right\}$;

8) $\left\{-2-\sqrt{3};\ \sqrt{3}-2;\ \frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ 9) {-3; 2}; 10) $\left\{-\frac{1+\sqrt{13}}{2};\ \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right\}$;

11) {-5; -3}; 12) {2; 4}; 13) {2; $\frac{1}{2}$}; 14) $\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2};\ 1;\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

30. 1) {-2; -1; 1}; 2) {2}; 3) $\{-1;\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ 1\}$; 4) {1;3}; 5) {-1};

6) {-2; 1; 4}.

31. 1) 24; 2) 48; 3) $4i$; 4) –8; 5) $\frac{8}{5}$; 6) $1\frac{1}{5}$ 7) $2\frac{4}{5}i$; 8) $2\frac{3}{4}$.

32. 2) $5i+1$; 4) $i+1$; 6) $-2i$.

33. 1) $\{2-i;\ 2+i\}$; 2) $\{-2-3i;\ -2+3i\}$; 3) $\{0,5-i;\ 0,5+i\}$;

4) $\left\{1-\frac{1}{4}i;\ 1+\frac{1}{4}i\right\}$; 5) $\{-3;\ -i;\ i;\ 3\}$; 6) $\{-\sqrt{5}i;\ -\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ \sqrt{5}i\}$;

7) $\{2-i;\ 1+i\}$; 8) $\{1\}$.

34. 2) $z^2-4z+13=0$; 4) $z^2+14z+65=0$.

35. 1) $\{2\}$; 2) $\{2\}$; 3) $\left\{-\frac{5}{4};\ 5\right\}$; 4) $\left\{-\frac{2+2\sqrt{7}}{7};\ \frac{2\sqrt{7}-2}{7};\ 1\right\}$; 5) $\{6\}$;

6) $\{-6;\ 5\}$; 7) $\{-1;\ 1\}$; 8) $\{-1;\ 1\}$; 9) $\{-1\}$; 10) $\left\{\frac{7-\sqrt{33}}{2};1;4;\frac{7+\sqrt{33}}{2}\right\}$;

11) $\left\{-\frac{11+\sqrt{97}}{6};\frac{\sqrt{97}-11}{6}\right\}$; 12) $\left\{\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$; 13) $\{0\}$; 14) $\left\{-2;-\frac{3\sqrt{27}}{7};\frac{3\sqrt{27}}{7};2\right\}$;

15) $\left\{\frac{1-\sqrt{21}}{2};\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right\}$; 16) $\{1-\sqrt{19};1+\sqrt{19}\}$; 17) $\{-1\}$; 18) $\{-1;0\}$.

36. 1) $(\frac{29}{13};\ -\frac{15}{13})$; 2) $\varnothing$; 3) $\left(-\frac{10}{7};\ \frac{19}{7}\right)$; 4) $(x;\ 3x-1),\ x\in R$ 5) (8; 6);

6) (4; 3); 7) (26,5; -5,5); 8) (5; 3); 9) (7; 1); 10) (-3; 1).

37. 1) $a\neq-\frac{3}{2}$ 2) $a\neq 0;\ a\neq 1$ 3) $a\in R$ 4) $a\neq 1$.

38. 1) $a=1$; 2) $a=-3$; 3) $a=3$; 4) $a=0$; 5) $a=3$; 6) $a=-2$

39. 1) $a=0$; 2) $a=-4$; 3) $a=-12$ 4) $a=\pm1$ 5) $a=2$; $a=-3$; 6) $a=\pm1$.

40. 1) (-1; 6; 2); 2) (1; 2; 3); 3) (8; 4; 2); 4) (1; -3; -2); 5) (1; 2; 3); 6) (2; -1; 1).

41. 1) (2; 3); (3;2); 2) (3;1); (1;3); 3) (1;6); (6; 1); 4) (-1; 2); (2; -1); 5) (4,1); 6) (3; 1); 7) (2; 5); (5; 2); (-2; -5); (-5; -2); 8) (-1; -5); (-5; -1); (5;1) (1;5); 9) (1; 4); (-4; -1); 10) (-1; -5); (-5; -1); (1;5); (1;5).

42. 1) (0;0); $(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2};\frac{1\pm\sqrt{5}}{2})$ 2) $(\frac{\sqrt[3]{4}}{2};\ \frac{\sqrt[3]{4}}{2})$ 3) (3;1); (1;3);

4) $(-\frac{3}{4};-\frac{1}{2})$; $(\frac{3}{4};-\frac{1}{2})$; 5) (7; 3); (-7; -3); 6) (4;1); (1;4).

43. 1) 5; 2) 4; 3) 7; 4) 5; 5) 5; 6) -1.

44. 1) $a=15$, в=5, с=9; 2) $a=4$, в=3, с=-9; 3) $a=\frac{1}{4}$; $b=-\frac{1}{4}$;

4) $a=\frac{1}{2}$; $b=-1$; $c=-\frac{1}{3}$; 5) $a=\frac{1}{3}$ $b=-\frac{1}{3}$ $c=\frac{2}{3}$; 6) $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$ $c=-\frac{1}{3}$;

7) $a=-\frac{1}{3}$ $b=\frac{7}{3}$ $c=7$; 8) $a=\frac{4}{13}$ $b=-\frac{3}{13}$ $c=\frac{4}{13}$.

45.560 та, 40 та. **46.**27 та, 31 та. **47.**0,75 л, 1,25 л. **48.**18 кг. **49.**64,8 км/соат, 180м. **50.**4 кунда. **51.**560 г, 140 г, 130 г. **52.**33 км/соат. **53.**3 соат. **54.**45 км/соат; 50 км/соат. **55.**80 км/соат; 60 км/соат. **56.**60 ва 42.

57.720 га, 1200 га. **58**.40 ва 60. **59**. $\frac{2}{5}$. **60**.10 км/соат, 12 км/соат. **61**.60 ва 42.

61.10 соат ва 15 соат. **62**.50 км/соат. **63**.60 см ва 80 см.

IV – БОБ

6. 2) $\frac{1}{3} > 0{,}3$; 4) 1,(3)=1,(33); 6) $-1{,}1(6) < -\frac{1}{6}$; 8) $-\frac{7}{9} > -\frac{14}{15}$.

7. 2) –14>-16; 4) 1,8(3)>1,625; 6) $a > \frac{3}{4}$; 8) $a > -\frac{1}{9}$.

8. 2) 1>0,6; 4) $-6{,}(6) < \frac{85}{24}$; 6) $x > \frac{3}{8}$; 8) x>-2.

9. 2) –3<11; 4) $\frac{55}{56} < 2{,}92$; 6) 5y<1; 8) $2y - \frac{1}{4}x < 0{,}3a$.

10. 2) 0,15>-8,7; 4) $-4\frac{5}{8} < 4\frac{3}{14}$; 6) 0,1x+0,2y<-0,4a+0,5;

8) $\frac{3}{5}a - b > \frac{15}{18}$.

11. 2) 2,775>0,4; 4) $7 > \frac{2}{3}$; 6) $x > \frac{1}{3}$ да $6x^2 + x - 1 < 1{,}84$ 8) $x > \frac{1}{5}$ да $x^2 + 1\frac{1}{20}x - \frac{1}{4} > \frac{1}{4}$.

12. 2) –2,3<3,9<12,7; 4) $-4\frac{5}{6} < 1\frac{1}{6} < 4$.

13. 2) $-2 < -1{,}3 < 1\frac{5}{6}$; 4) $1{,}75 > -3\frac{41}{45} > -6$.

14. 2) 0,074<4,914<16,9325; 4) $0{,}174 < \frac{39}{16} < 23$.

15. 2) n>m; 4) n>m; 6) m>n; 8) m>n; 10) m<n.

16. 2) –8; 4) 0; 6) –1; 8) 4.

17. 2) 6; 4) –2; 6) –2; 8) 4.

18. а). 2) -1; 4) –6; 6) –10. б). 2) 16; 4) 35; 6) –6. в). 2) 1; 4) 2; 6) 6,5.

19. 2) 7 та 4) 11 та 6) бутун сонлар йўқ.

20. 2) (1; 2]; 4) (2,3; 3,7]; 6) [-5; -1]; 8) $\left(-2\frac{1}{4}; 9\frac{1}{5}\right)$.

21. 2) $-3 < x \le 8$; 4) $x \le 5{,}3$; 6) $-8 \le x < -3$; 8) $-3 < x \le 3$.

22. 2) $\{(x,y) : x,y \in R,\ x \neq y\}$ 4) $\{x : x \neq 2,\ x \neq -3\}$; 6) $\{(x,y) : x,y \in R,\ x = y\}$.

23. 1), 2), 5) тенгсизликлар тенг кучли эмас; 3), 4), 6) тенгсизликлар тенг кучли.

24. 2) $[0;+\infty)$; 4) $[-1\frac{1}{8};8)$; 6) $(-\infty;-7\frac{9}{19})$; 8) $(-1\frac{1}{4};+\infty)$; 10) $(-\infty;-2)$;

12) $(13\frac{1}{4};+\infty)$; 14) $\varnothing$; 15) $(1\frac{1}{4};\infty)$; 16) $(-6\frac{97}{127};+\infty)$; 17) $(-\infty;1,8]$;

18) $[0,6;+\infty)$; 19) $(-\infty;-\frac{1}{3}]$; 20) $[-3,5;+\infty)$; 21) $[-4,5;+\infty)$; 22) $(-\infty;5\frac{3}{4})$.

25. 1) –2; 2) –5; 3) 2; 4) аниқлаб бўлмайди 5) 2; 6) йўқ.

26. 1) 1; 2) 10; 3) 2; 4) 4; 5) аниқлаб бўлмайди 6) йўқ.

27. 1) $(-2;\frac{2}{11})$; 2) $(-4;-\frac{5}{2})$; 3) $(-3;-\frac{5}{2})$; 4) $(-\frac{7}{2};0)$; 5) $[3,5;+\infty)$;

6) $(-\infty;-0,6]$; 7) $[-6;6]$; 8) [-7; -4); 9) $\left(\frac{13}{12};+\infty\right)$; 10) $\varnothing$.

28. 1) –29; 2) 2; 3) 3; 4) 1.

29. 1) –0,5; 2) 1; 3) 2; 4) 0,5.

30. 2) $\left[-3\frac{1}{3};-3\right]$; 4) $[\frac{2}{3};1\frac{1}{3})$; 6) $(1\frac{2}{5};+\infty)$; 8) $(-\infty;-35]$; 10) (2;5);

12) $[11;+\infty)$.

31. 2) [1; 2]; 4) (-1; 4); 6) $(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$; 8) (1; 49).

32. 2) $\left[\frac{5-\sqrt{29}}{2};\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right]$; 4) $\left(-\infty;\ 1-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)\cup\left(1+\sqrt{\frac{7}{2}};\ +\infty\right)$;

6) $(0,2-\sqrt{0,54};\ 0,2+\sqrt{0,54})$.

33. 2) $(-1;\ \frac{1}{3})$; 4) $\left[-\frac{6+2\sqrt{6}}{3};\ \frac{2\sqrt{6}-6}{3}\right]$; 6) $(-\infty;\frac{3}{4})\cup(2;\ +\infty)$;

8) $(-\infty;\ -\frac{11+\sqrt{85}}{6}]\cup[\frac{\sqrt{85}-11}{6};\ +\infty)$.

34. 2) $x=-\frac{1}{2}$ 4) $(-\infty;\ \frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2};\ +\infty)$ 6) $\varnothing$; 8) $(-\infty;\ +\infty)$.

35. 2) $\varnothing$; 4) $(-\infty;\ +\infty)$; 6) $\varnothing$; 8) $(-\infty;\ +\infty)$.

36. 2) $(-\infty;\ -2]\cup[0;\ +\infty)$; 4) (0; 4); 6) $\left[\frac{9-\sqrt{6}}{5};\ \frac{9+\sqrt{6}}{5}\right]$;

8) $(-\infty;\ 6-\sqrt{29})\cup(6+\sqrt{29};\ +\infty)$; 10) $(-\infty;\ -11)\cup(7;\ +\infty)$; 12) $(-\infty;\ +\infty)$.

37. 2) $(-\frac{3}{2};\ 2)$; 4) $(-\infty;\ 2,8)\cup(4;\ +\infty)$; 6) $(-\infty;\ -5]\cup[2;\ 2,8]$;

8) $(0;\ 6)\cup(7;\ +\infty)$; 10) $[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}]\cup[\frac{1}{3};\ +\infty)$.

38. 2) [-16;0]; 4) [-5;5]; 6) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$; 8) $(-\infty;0]\cup[\frac{1}{3};+\infty)$; 10) $\left[-\frac{3}{5};\frac{3}{5}\right]$;

12) $\left(\frac{1}{2};4\right)$; 14) $\left(-2;\frac{1}{2}\right)$; 16) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; 18) $\varnothing$; 20) $(-\infty;+\infty)$.

39. 2) $[-4;+\infty)$; 4) (-6;6); 6) $(-\infty;-3)\cup(-3;3)\cup(8;+\infty)$; 8) $\left[\frac{1}{3};3\frac{1}{2}\right]\cup\{-0,5\}$;

10) $(-\infty;-\sqrt{5}]\cup[\sqrt{5};7]$; 12) $\left[-3,2;3\frac{1}{4}\right]$; 14) $(-\infty;-3]\cup\{3\}$; 16) $[-7;+\infty)$;

18) $(-\sqrt{10};-\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5};-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};\sqrt{10})$; 20) (-4;2).

40. 1) 2; 2) 0; 3) 1; 4) 1; 5) 3; 6) –1; 7) 0; 8) 7; 9) –4; 10) –2; 11) 3; 12) 8.

41. 1) $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; 2) $(-\infty;-2]\cup[2;\frac{5}{2}]$; 3) $\left(-3;\frac{1}{3}\right)\cup(3;+\infty)$; 4) $[-1;\frac{1}{2}]\cup\{1\}$;

5) $(-5;-4)\cup(-3;-2)$; 6) $[-\frac{3}{2};+\infty)$.

42. 1) 7 та; 2) 7 та; 3) 5та; 4) 8та; 5) 6та; 6) 7та; 7) 2та; 8) 1та; 9) чексиз кўп; 10) чексиз кўп.

43. 1) 11; 2) 10; 3) 3; 4) 10; 5) 2; 6) 1; 7) 4; 8) 1.

44. 2) (–4;3),2; 4) (2;5],5; 6) [–2;2],2; 8) $(-7;-6]\cup[0;1)$,0.

45. 1) [0;4]; 2) $\left(-\frac{2}{5};0\right]$; 3) $\{-5;3\}\cup\left[\frac{5}{4};2\right]$; 4) $[2;8]\cup\{1\}$; 5) {3}; 6) {–1}.

46. 1) $(-\infty;-7]\cup[8;+\infty)$; 2) $(-\infty;-1]$; 3) $[-2;0]\cup[2;4]$; 4) $\left[0;\frac{7}{4}\right]$; 5) $\left[-2;\frac{1}{8}\right]$;

6) $[2;2{,}5]\cup\left\{7\frac{1}{3}\right\}$; 7) [2;5]; 8) [3;4].

47. 1) a=1; 2) a=2; 3) a=2; 4) a=1; 5) a=0; a= –1; 6) a= –1; 7) a=1; 8) a= –1; 9) a=6,6; 10) a= –0,5.

48. 2) агар $a=-2$ бўлса, $(-\infty;+\infty)$; агар $a>-2$ бўлса, $\left(\frac{2a-5}{a+2};+\infty\right)$; агар $a<-2$ бўлса, $\left(-\infty;\frac{2a-5}{a+2}\right)$. 4) агар $a=1$ бўлса, $(-\infty;+\infty)$; агар $a=-1$ бўлса,ечим йўқ; агар $-1<a<1$ бўлса, $\left(\frac{4a-5}{a^2-1};+\infty\right)$; 6) агар $a=0$ ва $a=-1$ бўлса ечим йўқ; агар $a>0$ ва $a<-1$ бўлса, $[\frac{a^2+a+5}{a(a+1)};+\infty)$; агар $-1<a<0$ бўлса, $(-\infty;\frac{a^2+a+5}{a(a+1)})$.

49. 1) a=2; 2) a=2; 3) a=2; 4) $a=\frac{3}{4}$; 5) (–12;0); 6) (0;3); 7) (1;3) 8) (–5;0).

50. 1) $a\in(1;+\infty)$; 2) $a\in\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$; 3) $a\in(-\infty;-3)\cup[1;+\infty)$; 4) $a\in(-\infty;-2]\cup\left(\frac{10}{3};+\infty\right)$.

51. $[4;+\infty)$. **52.** $(-\infty;0)\cup(1;4{,}3]$. **53.** $\left(\frac{6}{7};3\right)$. **54.** $(-\infty;1)\cup(6;+\infty)$. **55.** $[-2;-1)$.

56. $\left(\frac{7}{8};+\infty\right)$. **57.** $(-\infty;-2)$. **58.** 2) $a\in(-\infty;4{,}5]$; 5) $(-\infty;1\frac{1}{11}]$; 6) $(-\infty;1]\cup(5;+\infty)$.

59. 1) $a\in[1;+\infty)$; 2) $a\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; 3) $a\in(-\infty;0]\cup[1;8]$; 4) $a\in[-4;2]$.

60. 1) $(-\infty;-3)$; 2) $(-\infty;2)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-4;2)\cup(4;+\infty)$; 5) $(-3;-2)\cup(4;+\infty)$;
6) $[-1;3)\cup(5;+\infty)$; 7) $(-\infty;-6)\cup(4;7)$; 8) $(-\infty;1)\cup[3;+\infty)$; 9) $\{-8\}\cup(-2;1]$; 10) {–4};
11) {–3;–2}; 12) $(-\infty;-7)\cup\{0;1\}\cup(10;+\infty)$; 13) $(-\infty;-8]\cup[-4;4)\cup[8;+\infty)$;
14) $[-12;-4]\cup\{-1\}$.

61. 1) 2 та; 2) 5 та; 3) 1 та; 4) 8 та. **62.** 1) 0; 2) 0; 3) –6; 4) –2.

63. 1) $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; 2) $(1;2]$; 3) $(0;3]$; 4) $[-\frac{18}{5};-2)$; 5) $(2;6)$; 6) $(-\infty;\frac{4}{3}]\cup(3;+\infty)$;

7) (–4;3); 8) [–2;0]; 9) (–8;0); 10) $(\frac{1}{2};3)$; 11) $(-5;-2)\cup(3;+\infty)$; 12) $(-\infty;-2)$;

13) $(-\infty;-1)\cup[-\frac{1}{3};+\infty)$; 14) $(-\infty;2]\cup(3;+\infty)$; 15) $\left(-\frac{9}{2};-2\right)\cup(3;+\infty)$; 16) $[1;3]\cup(5;+\infty)$;

17) $(-\infty;-1)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$; 18) $(0;1)$; 19) $[-\sqrt{2};0)\cup(1;\sqrt{2}]\cup(2;+\infty)$;

20) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(2;+\infty)$.

64. 1) 0; 2) 2; 3) –4,5; 4) 2,5; 5) 1,5; 6) $\frac{3}{2}$; 7) –1; 8) 0.

65*. 1) {0}; 2) $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; 3) $\{-1\}\cup)(0;+\infty)$; 4) $\{-3;-2\}\cup(3;+\infty)$;

5) $(-\infty;-1]\cup(0;1]\cup(2;3]$; 6) $[-4;-3)\cup\left(-\frac{3}{2};0\right)\cup[1;+\infty)$; 7) $(-2;1)$; 8) $(0;2+\sqrt{6})$;

9) (–1;2); 10) $(-\infty;-1)\cup(-1;-\frac{1}{2}]\cup[1;+\infty)$.

66. 1) [–1;1]∪(3;4); 2) ∅; 3) (–2;0]∪[1;2)∪[4;+ ∞); 4) (0;2]; 5) $\left(\frac{1}{3};6\right)$;

6) (–∞;–3)∪[2;+∞); 7) (–1;0]; 8) $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

67*. 1) $a\in[-4;2]$; 2) $a\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; 3) $a\in(-1;0]\cup\{1\}$; 4) $a\in(-\infty;0]\cup[1;8]$.

ТЕСТ ЖАВОБЛАРИ

ТЕСТ 1		ТЕСТ 2		ТЕСТ 3		ТЕСТ 4	
1 С	11 А	1 С	11 Д	1 Д	11 Д	1 Д	11 С
2 Д	12 С	2 В	12 В	2 А	12 Е	2 С	12 Д
3 Е	13 Е	3 А	13 А	3 Е	13 С	3 А	13 В
4 А	14 В	4 Д	14 С	4 В	14 А	4 С	14 А
5 Д	15 А	5 Е	15 В	5 С	15 В	5 Е	15 Д
6 Д	16 В	6 Д	16 В	6 Е	16 С	6 В	16 Е
7 Е	17 Д	7 А	17 А	7 Д	17 Д	7 Д	17 С
8 В	18 Д	8 С	18 Д	8 В	18 Д	8 В	18 В
9 В	19 В	9 В	19 Е	9 В	19 А	9 А	19 А
10 С	20 С	10 С	20 С	10 С	20 С	10 Е	20 Д

МУНДАРИЖА

III боб. Тенгламалар

IV боб. Тенгсизликлар.

Исломов Бозор Исломович
Шариипова Парида Имиижоновна

МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА
1-қисм

Босишга рухсат этилди	06.06.05
Қоғоз бичими	30х42
Ҳисоб-нашр табоғи	13,7 б.т.
Адади	200
Буюртма	№ 126

Тошкент Молия институти босмахонасида ризография усулида чоп этилди.

700084, Тошкент, Ҳ. Асомов кўчаси, 7-уй