Ҳ. Мансуров
Р. Ғуломов
Р. Ғанихўжаев

МАТЕМАТИКА

/Олий ўқув юртига кирувчилар учун қўлланма/

Ҳ. МАНСУРОВ, Р. ҒУЛОМОВ, Р. ҒАНИХЎЖАЕВ

МАТЕМАТИКА

(Олий ўқув юртига кирувчилар учун қўлланма)

Тошкент
Ўзбекистон Республикаси
Фанлар академиясининг «Фан» нашриёти
1993

Мазкур қўлланмада [illegible] факультетлар ва олийгоҳларнинг кабул имтихонларидаги математикадан [illegible] мисол ва масалалар келтирилиб, уларни ечиш усуллари содда, равон [illegible] кириш имтихонлари тест усулида ўтказилаётганини назарда тутган [illegible] мисолларига кенг ўрин берилган.

[illegible] киравчилар, юқори синфлар ўкувчилари, ўкитувчилар ҳамда қуйи [illegible] фикрдамиз.

Муҳаррир Юсуф МУЗАФФАР

M $\frac{1602010000-з-668}{M\ 355(04)-93}$ рез. 93

ISBN 5-648-01971-8

МУҚАДДИМА

Ушбу китобчада дорилфунун ва олийгоҳларнинг қабул имтиҳонларидаги математикадан бўладиган ёзма ишларда учрайдиган аксарият мисол ва масалалар турларга ажратилиб, уларни ечиш усуллари кўрсатилган. Биз бунда аввал содда мисоллардан бошлаб, кўникма ҳосил қилгач, мураккаброқ мисолларга ўтишга ҳаракат қилдик.

Муаллифлар кўзлаган асосий мақсадлардан бири ўрта мактабни тугатган ёки тугатиш арафасидаги ўқувчиларни **қисқа муддатда** математикадан ёзма имтиҳонларни муваффақиятли топшира олиш даражасигача тайёрланишига кўмак беришдан иборат. Бу қисқалик математик жиддийликни камайтириш ёки зарурий бўлган программани қисқартириш ҳисобига бўлмаслигига алоҳида эътибор беришга интилдик.

Мазкур китобча муаллифларнинг қабул имтиҳонларида орттирган кўп йиллик тажрибалари асосида ёзилди.

Муаллифлар

АСОСИЙ МАЪЛУМОТЛАР
МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1-§. АРИФМЕТИКА

1°. БУТУН СОНЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР.

Математикада 1, 2, 3, 4, 5, ... сонлар натурал сонлар дейилади ва уларнинг барчаси $N=\{1, 2, 3, ...\}$ кўринишда белгиланиб, натурал сонлар тўплами деб аталади. -3, -19, 0, 8, 13 каби сонлар бутун сонларга мисол бўлади. Бундай сонларнинг барчаси $Z=\{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ кўринишда белгиланиб, бутун сонлар тўплами дейилади. Натурал ва бутун сонлар позицион системада ёзилиб, чапдан ўнгга қараб ўқилади. Масалан, 12.347 — ўн икки минг уч юз қирқ етти. Бундай ёзувда охирги рақам бирликлар, ундан аввалгиси ўнликлар, сўнгра юзликлар ва ҳоказо дейилади. Иккита ёки ундан кўп бўлган кўпхонали натурал сонларни қўшиш учун уларни устун шаклида барчасининг бирликлар рақамини мос қилиб жойлаштирилади. Масалан,

$$\begin{array}{r}12\,345\\4\,079\\134\,500\end{array}\ \text{тўгри жойлаштирилган,}\qquad \begin{array}{l}12\,345\\4\,079\\134\,500\end{array}\ \text{нотўгри жойлаштирилган.}$$

Сўнгра ўнгдан чапга қараб, мос равишда бирликдаги рақамлар қўшилиб йигиндининг бирликлар рақамини, ўнликдаги рақамлар қўшилиб йиғиндининг ўнликлар рақамини ва ҳоказо усулда йиғиндининг барча рақамларини ҳосил қилинади. Агар бирор қадамда рақамлар йигиндиси 10 ёки ундан катта бўлса, бу йиғиндининг фақат бирликлар рақами ёзилиб, қолган рақамлар ташкил қилган сон дилда сақланиб, кейинги қадамдаги рақамлар йиғиндисига қўшилиб ёзилади. Бу қоида қўшиш алгоритми дейилади.

Мисол:
$$\begin{array}{r} 13\,579\\ +\ 20\,486\\ 5\,898\\ 787\\ \hline 40\,750\end{array}$$

Изоҳ:

1) $9+6+8+7=30$ демак 0 ёзилиб, 3 дилда
2) $7+8+9+8=32$ ва 3 дилда, демак 35 нинг 5и ёзилади ва яна 3 дилда.
3) $5+4+8+7=24$ ва 3 дилда, демак 27 нинг 7си ёзилади ва 2 дилда
4) $3+0+5=8$ ва 2 дилда, демак 10 нинг 0и ёзилади ва 1 дилда
5) $1+2=3$ ва 1 дилда, демак 4 ёзилади.

Айириш амалини фақат иккита кўпхонали сонга нисбатан қўллаш қулай. Агар кўпхонали сондан бир нечта кўпхонали сонни айириш лозим бўлса, бундай айиришни кетма-кет бажариш мумкин.

Айириш амалини бажаришда ҳам сонлар қўшишдаги каби жойлаштирилади, фақат юқорида айирилувчи сон, иккинчи қаторда эса айирувчи сон ёзилади. Сўнгра яна ўнгдан чапга қараб мос ўриндаги рақамлар айирилиб, шу рақамлар остидаги ўринга ёзиб борилади. Агар бирор қадамда юқоридаги рақам қуйидаги рақамдан кичик бўлса, юқоридаги рақамга аввал 10 қўшилиб сўнгра қуйидаги рақам айирилади (буни «қарз» олиш дейилади). Келгуси қадамда эса навбатдаги юқорида турган рақам 1 га камайтирилади.

Мисол:

$$\begin{array}{r} 1003 \\ -\ \ 257 \\ \hline 746 \end{array}$$

Изоҳ: 1) $13-7=6$
2) $9-5=4$
3) $9-2=7$

3 марта «қарз» олинди.

Иккита кўпхонали сонни ўзаро кўпайтириш учун уларни ҳам қўшишдаги каби жойлаштирилади. Юқоридаги сон **кўпайтирилувчи**, қуйидаги сон эса **кўпайтувчи** дейилади. Сўнгра кўпайтувчининг рақамлари ўнгдан бошлаб кўпайтирилувчининг рақамларига ўнгдан чапга қараб кўпайтирилиб, натижа ёзиб борилади. Бунда икки рақам кўпайтмаси 10 ёки ундан ортиқ бўлса, бирликлар рақами ёзилиб, қолган рақамлар ташкил қилган сон дилда сақланиб, навбатдаги рақамлар кўпайтмасига қўшиб борилади. Кўпайтувчининг кейинги рақамига ўтиш янги қатордан ёзилиб, юқоридаги қаторга нисбатан ўрни чапга бир хона силжитиб ёзилади. Ниҳоят, барча ёзилган сонлар қўшилиб, **кўпайтма** ёзилади.

Мисол:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times\ \ 47 \\ \hline 861 \\ +\ 492 \\ \hline 5781 \end{array}$$

Изоҳ: 1) $123\times7=861$
2) $123\times4=492$ бу сон чапга бир хона силжитиб ёзилади.
3) $\begin{array}{r} 861 \\ +\ 492 \\ \hline 5781 \end{array}$

Жавоб: 5781.

Бўлиш амали аввалги амаллардан фарқли равишда чапдан ўнгга қараб бажарилади.

Мисол:

$$\begin{array}{r|l} 12\,345 & 67 \\ \cline{2-2} -\ 67 & 184 \\ \cline{1-1} 564 & \\ -\ 536 & \\ \cline{1-1} 285 & \\ -\ 268 & \\ \cline{1-1} 17 & \end{array}$$

Ушбу мисолда 12 345 бўлинувчи, 67 бўлувчи, 184 бўлинма ва 17 қолдиқ дейилади.

Бутун сонлар устидаги арифметик амаллар (қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш) натурал сонлар устидаги амалларга ўхшаш бўлиб, фақат ишорани ҳисобга олган ҳолда бажарилади.

Эслатма. Ҳеч қандай сонни 0 га бўлиш мумкин эмас.

2°. ОДДИЙ КАСРЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

$\frac{p}{q}$ кўринишдаги ифода оддий каср дейилади, бу ерда q натурал сон, p эса бутун сон. Масалан, $\frac{-41}{12}$, $\frac{18}{13}$, ... Агар $-q < p < q$ бўлса, $\frac{p}{q}$ тўғри каср, акс ҳолда нотўғри каср дейилади. Нотўғри касрни бирор бутун сон билан тўғри каср йиғиндиси кўринишида тасвирлаш мумкин. Масалан, $\frac{7}{3}$ ни $2+\frac{1}{3}$ кўринишда ёки $2\frac{1}{3}$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу амал нотўғри касрнинг бутун қисмини ажратиш дейилади. Икки каср йиғиндиси ушбу кўринишда ҳисобланади:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Бу ерда $b\cdot d$ ёки b ва d ларнинг иккисига ҳам бўлинувчи сон $\frac{a}{b}$ ва $\frac{c}{d}$ касрлар учун умумий махраж дейилади. Масалан, $\frac{3}{4}$ ва $\frac{7}{18}$ касрлар учун умумий махраж сифатида 36 ни ёки 36 га бўлинувчи исталган сонни олиш мумкин. Икки каср айирмаси қуйидаги кўринишда бажарилади:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Масалан,

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5-4\cdot 2}{20}=\frac{15-8}{20}=\frac{7}{20}.$$

Икки каср кўпайтмаси

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

кўринишда ҳисобланади.

Ниҳоят, икки каср бўлинмаси

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

кўринишда ҳисобланади.

Махражи 10, 100, 1000, ... ва ҳоказо бўлган каср ўнли каср дейилади. Масалан, $\frac{21}{100}$, ёзилиши 0,21. Ўнли касрлар устидаги амаллар бутун сонлар устидаги амаллар каби бажарилади. Фақат кўпайтириш амалида кўпайтувчи ва кўпайтирилувчиларнинг вергулдан кейинги рақамлар сони қўшилиб неча бўлса, кўпайтмада вергулдан кейин шунча рақам бўладиган қилиб ёзилади.

3°. АМАЛЛАРНИНГ БАЖАРИЛИШ ТАРТИБИ. ҚАВСЛАР

а. Бир неча амаллар қатнашган сонли ифодаларда аввал бўлиш, кўпайтириш сўнгра қўшиш, айириш амаллари бажарилади. Масалан,

$$5+8:2-4\times3=5+4-12=9-12=-3$$

б. Бир неча айириш амали қатнашган ҳолда улар чапдан ўнгга қараб кетма-кет бажарилади. Масалан,

$$10-1-2-3-4=9-2-3-4=7-3-4=4-4=0$$

в. Қавс қатнашган сонли ифодаларда аввал қавс ичидаги амаллар бажарилади.

Энди мураккаброқ мисолларни кўрайлик.

1- *мисол.* Ушбу

$$\left[\left(6\frac{3}{4}+5\frac{1}{2}\right):26\times3\frac{5}{7}-0,05\right]:0,2$$

ифоданинг қиймати топилсин. (Бу мисол 1988 йилда Тошкент автомобиль — йўли институтига кирувчиларга математикадан ёзма имтиҳонда таклиф қилинган.)

1) $6\frac{3}{4}+5\frac{1}{2}=\frac{27}{4}+\frac{11}{2}=\frac{27+22}{4}=\frac{49}{4}$,

2) $\frac{49}{4}:26=\frac{49}{4}\times\frac{1}{26}=\frac{49}{104}$,

3) $\frac{49}{104}\times3\frac{5}{7}=\frac{49}{104}\times\frac{26}{7}=\frac{7\times1}{4\times1}=\frac{7}{4}$,

4) $\frac{7}{4}-0,05=\frac{7}{4}-\frac{5}{100}=\frac{7}{4}-\frac{1}{20}=\frac{7\times5-1}{20}=\frac{34}{20}=\frac{17}{10}$,

5) $\frac{17}{10}:0,2=\frac{17}{10}:\frac{2}{10}=\frac{17}{10}\times\frac{10}{2}=\frac{17}{2}=8,5$.

2- *мисол.* Қуйидаги

$$\frac{\left(0,5:1,25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\times3}{\left(1,5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$$

ифоданинг қиймати ҳисоблансин. (Бу мисол олий ўқув юртларида математикадан ўтказиладиган конкурс имтиҳонлар учун мўлжалланган).

1) $0,5:1,25=\frac{5}{10}:\frac{125}{100}=\frac{1}{2}:\frac{5}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$,

2) $\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}=\frac{7}{5}:\frac{11}{7}=\frac{7}{5}\times\frac{7}{11}=\frac{49}{55}$,

3) $\frac{2}{5}+\frac{49}{55}=\frac{2\times 11+49}{55}=\frac{22+49}{55}=\frac{71}{55}$,

4) $\frac{71}{55}-\frac{3}{11}=\frac{71-3\times 5}{55}=\frac{71-15}{55}=\frac{56}{55}$,

5) $\frac{56}{55}\times 3=\frac{56\times 3}{55}=\frac{168}{55}$,

6) $1,5+\frac{1}{4}=1\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3\times 2+1}{4}=\frac{7}{4}$,

7) $\frac{7}{4}:18\frac{1}{3}=\frac{7}{4}:\frac{55}{3}=\frac{7\times 3}{4\times 55}=\frac{21}{220}$,

8) $\frac{168}{55}:\frac{21}{220}=\frac{168}{55}\times\frac{220}{21}=\frac{8\times 4}{1}=32$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

Қуйидаги ифодаларнинг қийматлари ҳисоблансин.

1. $\frac{1,11+0,19-1,3\times 2}{2,06+0,54}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):2$

2. $\frac{\left[\left(9\frac{3}{4}:5,2\right)+3,4\times 2\frac{7}{34}\right]:1\frac{9}{16}}{0,31\times 8\frac{2}{5}+5,61:2\text{[illegible]}}$,

3. $2,8:2\frac{4}{5}\times\left(8,75-2\frac{1}{2}\right)-3\frac{3}{4}:\left(1,2+5\frac{1}{20}\right)\times 3,75$

4. $\left(17,81:1,37-23\frac{2}{3}:1\frac{5}{6}\right)\times 2,4:0,88$

4°. ПРОПОРЦИЯЛАР

3-*масала.* (ТошДУ, 1989, ҳуқуқшунослик факультети). 15 кг бўлган бир кути конфет 48 сўм туради. Шу конфетнинг 40 килограмми қанча туради?

Ечими: 15 кг ——————— 48 с.
40 кг ——————— x с.

Ёзилган ифода пропорция тузиш дейилиб, у қуйидагича ечилади. «Қайчима-қайчи» кўпайтириб, уларни тенглаштирамиз

$$15x=40\times 48$$

$$x=\frac{40\times 48}{15}=128\ \text{сўм}$$

Жавоб: 128 сўм.

4-масала. (ТошДД, 1989, Ф.И.Ф., социология). Ёнилғи жамғармаси 100 та мотоцикл учун 25 кунга етади. Шу жамғарма 125 та мотоцикл учун неча кунга етади?

Ечими: 125 та мотоцикл учун ёнилғи x кунга етсин.

Демак, 100 мотоцикл учун 1 кунда ёнилғининг $\frac{1}{25}$ қисми зарур бўлади. 125 та мотоцикл учун 1 кунда ёнилғининг $\frac{1}{x}$ қисми зарур. Пропорция тузамиз

$$100 \text{ ————— } \frac{1}{25}$$

$$125 \text{ ————— } \frac{1}{x}$$

Демак,

$$\frac{100}{x} = \frac{125}{25} \Rightarrow 5x = 100 \Rightarrow x = 20$$

Жавоб: 20 кун.

5°. ПРОЦЕНТЛАР.

Бирор миқдорнинг $\frac{1}{100}$ қисми шу миқдорнинг 1 % дейилади.

5-масала. Китобнинг нархи дастлаб 6 сўм бўлиб, сўнг у 15 % га арзонлаштирилди. Китобнинг янги нархини топинг.

Ечими. Китобнинг янги нархи аввалги нархнинг 100 %—15 %=85 % ига тенг. Пропорция тузамиз:

$$6 \text{ ————— } 100\,\%$$

$$x \text{ ————— } 85\,\%$$

Демак, $100x = 6 \times 85 \Rightarrow x = \frac{6 \times 85}{100} = 5{,}1$

Жавоб. 5 сўм 10 тийин.

6-масала. Кооператив, жамоа хўжалигидан 20 тонна олмани 1 килограммини 1 сўм 50 тийиндан сотиб олди. Сўнгра олмани саралаб 5 % ини чиқиндига чиқариб ташлади; 40 % ни биринчи навга, қолганини эса иккинчи навга ажратди. Биринчи нав олмани 1 килограммини 6 сўмдан, иккинчи навини эса 2 сўм 50 тийиндан сотди. Шу кооперативнинг фойдасини ҳисобланг.

Ечими. 1) Кооператив харажати

$$20000 \times 1{,}5 = 30000 \text{ сўм.}$$

2) Биринчи нав олма $20\,000 \times \frac{40}{100} = 8\,000$ кг бўлиб, у $8\,000 \times \times 6 = 48\,000$ сўмга сотилган.

3) Иккинчи нав олма 55 %, яъни $20\,000 \times \frac{55}{100} = 11\,000$ кг бўлиб, у $11\,000 \times 2{,}5 = 27\,500$ сўмга сотилган.

[illegible] | [illegible] фойдаси)
[illegible] 000) = 45 500 сўм.

[illegible] м.

[illegible] ТАКРОРЛАШ УЧУН МАСАЛАЛАР

5. [illegible] Ф.И.Ф [illegible] социология) Ўзбекистонда 20 млн. аҳоли [illegible] и шаҳарларда, қолганлари эса қишлоқларда [illegible] аҳоли яшайди?

6. [illegible] психология). Хизматчининг ойлик маоши [illegible] Икки марта кўтарилгач маош бир хил сондаги процентга [illegible] сўм 60 тийин бўлди. Маош ҳар [illegible]

7. [illegible] грамм [illegible] %ли [illegible] зарур. Бунинг [illegible] 40 % [illegible] эритмасидан қанча олиб [illegible]

8. [illegible] кукшунослик факультети). Ноҳия ички ишлар бўлимининг [illegible] 70 %и олий юридик маълумотга, $\frac{2}{11}$ қисми ўрта махсус маълумотга эга ва қолган 13 та ходим ҳуқуқшунослик факультетида ўқийди. Ноҳия ички ишлар бўлимида нечта ходим бор?

2-§. АЛГЕБРАИК ИФОДАЛАРНИ СОДДАЛАШТИРИШ

Сон ва ҳарфлар кўпайтмасидан тузилган ифода **бир ҳад** дейилади. Масалан $2x^2y$, -3, $2ab^2d^3$. Бундай кўпайтмадаги сон **коэффициент** дейилади (одатда коэффициент 1 ёки −1 бўлса у ёзилмайди). Фақат коэффициентлари билан фаркланувчи бир ҳадлар **ўхшаш бир ҳадлар** дейилади. Масалан, x^2y ва $3x^2y$ бир ҳадлар ўхшаш, x^2y ва xy^2 бир ҳадлар ўхшаш эмас.

Бир неча бир ҳадлар йиғиндиси **кўпҳад** дейилади.

Кўпҳадларни қўшиш, айириш ва кўпайтириш мумкин.

Ўхшаш ҳадларни келтириш деганда бир неча ўхшаш ҳадларнинг ўрнига уларнинг коэффициентларининг йиғиндисини олиб, шу коэффициентли ўхшаш ҳадни ёзишни тушунамиз. Масалан,

$$a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

Ўхшаш ҳадларни келтириш кўпҳадни **соддалаштириш** дейилади. Соддалаштириш жараёнида қуйидаги қисқа кўпайтириш формулалари қўл келади:

1°. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

2°. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

3°. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

4°. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Бу формулалар исботи бевосита текширилади. Агар 1^0, 2^0 ва 4^0 формулаларда b нинг ўрнига $-b$ қўйсак, яна учта формула келиб чиқади:

5^0. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

6^0. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

7^0. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Мисоллар.

1. $(a+b)^2-(a-b)^2=a^2+2ab+b^3-a^2+2ab-b^2=4ab.$

2. $\frac{x^2-y^2}{x-y}-x+y=\frac{(x-y)(x+y)}{x-y}-x+y=x+y-x+y=2y.$

Мураккаброқ мисолларни соддалаштиришда амалларни қадамма-қадам бажариш ҳам мумкин. Масалан,

3. $\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\left(\frac{ab}{a+b}-a\right):\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$

1) $a+\frac{ab}{a-b}=\frac{a(a-b)+ab}{a-b}=\frac{a^2-ab+ab}{a-b}=\frac{a^2}{a-b};$

2) $\frac{ab}{a+b}-a=\frac{ab-a(a+b)}{a+b}=\frac{ab-a^2-ab}{a+b}=-\frac{a^2}{a+b};$

3) $\frac{a^2}{a-b}\left(-\frac{a^2}{a+b}\right)=-\frac{a^4}{(a-b)(a+b)}=-\frac{a^4}{a^2-b^2};$

4) $-\frac{a^4}{a^2-b^2}:\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=-\frac{a^4}{a^2-b^2}\times\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=-\frac{a^4}{a^2+b^2}.$

4. $\left(\frac{4(a+b)^2}{ab}-16\right)\left(\frac{(a+b)^2-ab}{ab}\right):\frac{a^3-b^3}{ab};$

1) $\frac{4(a+b)^2}{ab}-16=\frac{4(a+b)^2-16ab}{ab}=\frac{4((a+b)^2-4ab)}{ab}=$

$$=\frac{4(a^2+2ab+b^2-4ab)}{ab}=\frac{4(a^2-2ab+b^2)}{ab}=\frac{4(a-b)^2}{ab};$$

2) $\frac{(a+b)^2-ab}{ab}=\frac{a^2+2ab+b^2-ab}{ab}=\frac{a^2+ab+b^2}{ab};$

3) $\frac{4(a-b)^2}{ab}\times\frac{a^2+ab+b^2}{ab}=\frac{4(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}{(ab)^2}=$

$$=\frac{4(a-b)(a^3-b^3)}{(ab)^2}$$

4) $\dfrac{4(a-b)(a^3-b^3)}{(ab)^2}:\dfrac{a^3-b^3}{ab}=\dfrac{4(a-b)(a^3-b^3)ab}{(ab)^2(a^3-b^3)}=$
$=\dfrac{4(a-b)}{ab}$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

1. $\dfrac{a-b}{a^2-b^2}+\dfrac{2a+3b}{(a+b)^2}$.

2. $\left(\dfrac{3}{2x-y}-\dfrac{2}{2x+y}-\dfrac{1}{2x-5y}\right):\dfrac{y^2}{4x^2-y^2}$.

3. $\left(\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{2x}{x^2+4x+3}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}\right)\times\dfrac{(x-3)^2+12x}{2}$.

4. $a-\left[\dfrac{(16-a)a}{a^2-4}+\dfrac{3+2a}{2-a}+\dfrac{3a-2}{a+2}\right]:\dfrac{a-1}{a(a^2+4a+4)}$.

3- §. ЧИЗИҚЛИ ВА КВАДРАТ ТЕНГЛАМАЛАР

1°. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР.

$$ax+b=0$$

кўринишдаги ёки алмаштиришлар ёрдамида шундай кўринишга келтириш мумкин бўлган тенгламалар **чизиқли тенгламалар** дейилади. Бунда a ва b сонлар берилган (маълум) ҳисобланади, x эса топилиши зарур бўлган ноъмалум сон ҳисобланади. Масалан,

$$2x-3=0$$
$$x=0$$
$$0x+2=0$$

Чизиқли тенгламани ечиш усули:

$$ax+b=0$$
$$ax=-b,$$

агар $a\neq 0$ бўлса, охирги тенгликдан

$$x=-\frac{b}{a},$$

агар $a=0$, $b\neq 0$ бўлса, тенгламанинг ечими йўқ.
Ниҳоят, $a=0$, $b=0$ бўлса, ихтиёрий сон тенгламанинг ечими бўлади. Бир неча мисол кўрайлик.

1. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{2x-1}{6}=1-\dfrac{x}{3}$

Умумий махражга келтирсак,

$$2x+2x-1=6-2x,$$
$$4x+2x=6+1,$$
$$6x=7,$$
$$x=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}.$$

Ж а в о б. $x=1\frac{1}{6}$.

2. (ТошДД, 1989, Ф. И. Ф., сиёсий иқтисод) Тенглама ечилсин:

$$\frac{6,2}{x+1}=\frac{7,2}{x+2}.$$

Е ч и м и. Умумий махражга келтирсак,

$$6,2\,x+12,4=7,2\,x+7,2,$$
$$6,2\,x-7,2\,x=7,2-12,4,$$
$$-x=-5,2,$$
$$x=5,2.$$

Ниҳоят $x+1\neq0$ ва $x+2\neq0$, яъни $x\neq-1$, $x\neq-2$ бўлишини ҳисобга олсак, тенглама ечими $x=5,2$.

Ж а в о б: $x=5,2$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

1. $(3\,x-2)-4\,(2\,x-1)=2$.

2. $\frac{3}{4\,x-2}=\frac{15}{5\,(3\,x-1)}$.

3. $\frac{7\,x-4}{8}-\frac{5\,x-6}{3}+\frac{4\,x-3}{18}=-2$.

4. $6\,x-(x-2)^2=5\,x+1-(x+3)^2$.

2°. КВАДРАТ ТЕНГЛАМАЛАР

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (a\neq0)$$

кўринишга келтириш мумкин бўлган тенгламалар к в а д р а т т е н г л а м а л а р дейилади.

Квадрат тенгламаларга мисоллар:

1) $x^2+5\,x-7=0$;

2) $-\frac{x^2}{5}+7\,x-2=0$;

3) $3\,x^2+\sqrt{7}=0$.

Квадрат тенгламаларни ечиш алгоритми (қоидаси).

1) Тенгламанинг д и с к р и м и н а н т и деб аталувчи

$$D=b^2-4\,ac$$

сон ҳисобланади;

2) агар $D<0$ бўлса, тенгламанинг ечими йўқ;
3) агар $D\geqslant 0$ бўлса, тенгламанинг ечимлари

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

формуладан топилади.

Мисоллар.

3. $2x^2-3x+1=0$.

1) $a=2$; $b=-3$; $c=1$, демак, $D=b^2-4ac=9-8=1$;
2) $D>0$ бўлгани учун:

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{4}=\frac{3\pm 1}{4};\ x_1=\frac{1}{2},\ x_2=1.$$

Ж а в о б. $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=1$.

4. $x^2-8=0$.

1) $a=1$; $b=0$; $c=-8$, демак, $D=b^2-4ac=32>0$;

2) $x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{32}}{2}=\frac{\pm 4\sqrt{2}}{2}$; $x_1=-2\sqrt{2}$, $x_2=2\sqrt{2}$.

Ж а в о б. $x_1=-2\sqrt{2}$, $x_2=2\sqrt{2}$.

5. (ТошДД, 1989, химия факультети). Тенгламани ечинг:

$$\frac{5x^2}{1+x}=\frac{1}{6}.$$

Е ч и м и: Умумий махражга келтириб,

$$30x^2=1+x$$

ёки

$$30x^2-x-1=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

$$D=b^2-4ac=1+120=121.$$

Демак,

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{121}}{60}=\frac{1\pm 11}{60};\ x_1=-\frac{1}{6},\ x_2=\frac{1}{5}.$$

Ж а в о б. $x_1=-\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{1}{5}$.

6. Тенгламани ечинг: $x^2+x+1=0$.
Е ч и м и: $D=b^2-4ac=1-4=-3<0$.

Демак, тенгламанинг ечими мавжуд эмас.

Квадрат тенгламаларга доир маълумотлар

1. Виет теоремаси. Агар $D\geqslant 0$ бўлиб, x_1 ва x_2 сонлар ax^2+bx+ $+c=0$ тенгламанинг ечимлари бўлса,

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

тенглик ўринли.

7. $2x^2-3x-7=0$ тенгламани ечмасдан $x_1^2+x_2^2$ ни ҳисобланг.

Е ч и м и. $D=b^2-4ac=9+56=65>0$ бўлгани учун

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{3}{2}; \\ x_1\cdot x_2=-\frac{7}{2}. \end{cases}$$

Демак,

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{9}{4}+2\cdot\frac{7}{2}=\frac{37}{4}=9\frac{1}{4}$$

8. Тенгламани ечинг: $x^4-5x^2+4=0$.

Е ч и м и: $x^2=y$ белгилаш киритсак,

$$y^2-5y+4=0$$

тенглама ҳосил бўлади.

Уни ечиб, $y_1=4$, $y_2=1$ ечимларни топамиз.
Энди $x^2=y$ белгилашда y ўрнига $y_1=4$ ва $y_2=1$ сонларни қўйсак,

$$x^2=4\Leftrightarrow x_{1,2}=\pm2;\ x_1=-2,\ x_2=2;$$
$$x^2=1\Leftrightarrow x_{3,4}=\pm1;\ x_3=-1,\ x_4=1.$$

Жавоб. $x_1=-2,\ x_2=2,\ x_3=-1,\ x_4=1$.

Умуман, $ax^4+bx^2+c=0$ кўринишдаги тенглама **б и к в а д р а т т е н г л а м а** дейилади.

9. $5x^3-7x^2+2x=0$ тенглама ечилсин.

Е ч и м и:

$$5x^3-7x^2+2x=0$$
$$x(5x^2-7x+2)=0$$

кўпайтма 0 га тенг бўлиши учун кўпайтувчиларнинг камида бири 0 га тенг бўлиши керак. Демак, биз

$$x=0$$

ва

$$5x^2-7x+2=0$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Демак, $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=\frac{2}{5}$.

Ж а в о б. $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=\frac{2}{5}$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

5. $x^2-\frac{3}{2}x=0$.

6. $(x+1)^3-(x-2)^3=9$.

7. $\frac{1}{2x}-\frac{2x-1}{5x-6}=1$.

8. $x^2+x+1=0$ тенгламани ечмасдан $x_1^3+x_2^3$ ни ҳисобланг.

Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратиш.

Агар $D\geqslant 0$ бўлиб, x_1 ва x_2 сонлар ax^2+bx+c тенгламанинг ечимлари бўлса,

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

тенглик ўринли.

10. x^2-5x+6 квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечими: $D=25-24=1$, $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}$; $x_1=2$; $x_2=3$; $a=$ $=1$ Демак,

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

11. $-3x^2+5x-2$ квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечими. $D=25-24=1$; $x_{1,2}=\frac{-5\pm 1}{-6}$; $x_1=1$, $x_2=\frac{2}{3}$ ва $a=$ $=-3$. Демак,

$$-3x^2+5x-2=-3(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)=(x-1)(2-3x).$$

4-§. ТЕНГСИЗЛИКЛАР. ТЕНГСИЗЛИКЛАР СИСТЕМАСИ

Ушбу

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+kx+l$$

кўринишдаги ифода бир ўзгарувчи (яъни x) нинг кўпҳади дейилади. Бу ерда a, b, c, ..., k, l сонлар берилган бўлиб, улар коэффициентлар дейилади.

n натурал сон ёки 0 бўлиб ($a\neq 0$), кўпҳаднинг даражаси дейилади. Икки кўпҳаднинг нисбати (бўлинмаси) алгебраик каср дейилади.

Масалан,

$$\frac{x-1}{x^2+3x-5};\ \frac{1}{x};\ \frac{2x-3}{5};\ x^2+7x-15$$

Ушбу параграфда биз фақатгина чап томони алгебраик каср бўлган ёки шундай кўринишга келтириш мумкин бўлган тенгсизликларни ечиш билан шуғулланамиз. Логарифмик, кўрсаткичли, тригонометрик, иррационал деб аталувчи бошқа тенгсизликларни кейинги параграфларда ўрганамиз.

Аввал иккита хусусий, аммо муҳим бўлган ҳолни кўрайлик.

1°. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГСИЗЛИКЛАР.

$$ax+b\leqslant 0 \quad (\text{ёки } ax+b\geqslant 0)$$

кўринишдаги тенгсизлик **чизиқли тенгсизлик** дейилади.

Масалан,

1) $3x+2>0$;
2) $\frac{x-3}{-5}<0$;
3) $-0{,}23x+7\geqslant 0$;
4) $4x-5\leqslant 0$.

Чизиқли тенгсизликни ечиш усули:

$$ax+b\leqslant 0,$$
$$ax\leqslant -b.$$

а) Агар $a>0$ бўлса, охирги тенгсизликнинг икки томонини a га бўлсак, тенгсизлик ўзгармайди. Демак, бу ҳолда

$$x\leqslant -\frac{b}{a}$$

тенгсизликнинг ечими бўлади.

б) Агар $a<0$ бўлса, тенгсизликнинг икки томонини a га, яъни манфий сонга бўлсак, тенгсизлик тескарисига ўзгаради. Демак, бу ҳолда тенгсизликнинг ечими

$$x\geqslant -\frac{b}{a}$$

бўлади.

в) Ниҳоят $a=0$ бўлса, биз $b\leqslant 0$ тенгсизликни ҳосил қиламиз, у бажарилган, ёки бажарилмаган бўлиши мумкин. Биринчи ҳолда **ихтиёрий** x берилган тенгсизликнинг ечими бўлади. Иккинчи ҳолда эса, **ҳеч қандай** x ечим эмас.

Мисоллар.

1. (ТошДД, 1989, ҳуқуқшунослик факультети) $6x-2{,}5>1{,}5+2x$ тенгсизликни ечинг.

Ечими: Номаълумли ҳадларни чапга, маълумларни ўнгга ўтказсак,

$$6x-2x>1{,}5+2{,}5,$$
$$4x>4.$$

Бу тенгсизликнинг икки томонини 4 га (мусбат сонга) бўлсак,

$$x>1$$

ечим келиб чиқади.

Жавоб. $x>1$.

2. (ТошДД, 1989, ҳуқуқшунослик факультети, кечки бўлим) $\frac{1}{4}-5x>8{,}25-\frac{x}{3}$ тенгсизликни ечинг.

Ечими: Берилган тенгсизликка тенг кучли

$$-5x+\frac{x}{3}>8{,}25-\frac{1}{4}$$

тенгсизликка ўтамиз ва уни соддалаштирамиз:

$$-\frac{14}{3}x>8,$$

2—7505

Бу тенгсизликнинг икки томонини $-\frac{14}{3}$ га (манфий сонга!) бўлсак, тенгсизлик тескарисига алмашади:

$$x < -\frac{24}{14}$$

Демак, берилган тенгсизликнинг ечими $x < -\frac{12}{7}$.

Ж а в о б: $x < -\frac{12}{7}$.

3. Тенгсизликни ечинг: $3(x-1) > 3x+7$.

Е ч и м и:

$$3(x-1) > 3x+7,$$
$$3x-3 > 3x+7,$$
$$3x-3x > 7+3, \qquad 0 > 10.$$

Хосил бўлган тенгсизлик нотўғри бўлиб берилган тенгсизликка тенг кучли. Демак, берилган тенгсизлик хам x нинг хеч қандай қийматида бажарилмайди.

Ж а в о б: ечими йўқ.

4. Тенгсизликни ечинг: $3(x-1) \leqslant 3x+7$.

Е ч и м и:

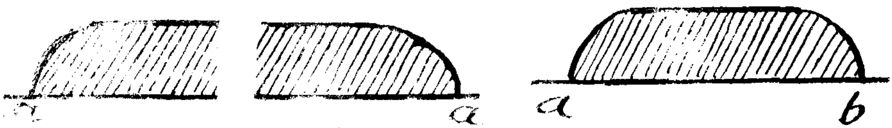
$$3x-3 \leqslant 3x+7,$$
$$3x-3x \leqslant 7+3, \qquad 0 \leqslant 10.$$

Хосил бўлган тенгсизлик тўғри бўлиб, берилган тенгсизликка тенг кучли ва x нинг барча қийматларида тўғри.

Ж а в о б: Барча сонлар ечим бўлади.

Ўқувчидан тенгсизлик ечимини яна икки кўринишда тасвирлай олиш (оралиқ ва тўғри чизиқда) талаб қилинади.

Масалан (1-чизма),



а б с

1-чизма

а) $x \geqslant a$ бўлса, $x \in [a, +\infty)$;
б) $x \leqslant a$ бўлса, $x \in (-\infty, a]$;
с) $a \leqslant x \leqslant b$ бўлса, $x \in [a, b]$.

«$\leqslant$» ва «$\geqslant$» тенгсизликлар қ а т ъ и й м а с, «$<$» ва «$>$» эса қ а т ъ и й тенгсизликлар дейилади.

Юқоридаги белгилашларда катъиймас тенгсизликлар ўрнига мос қатъий тенгсизлик бўлса, [ёки [қавс ўрнида) ёки (қавс ишлатилади.

2°. ИККИНЧИ ДАРАЖАЛИ (КВАДРАТ) ТЕНГСИЗЛИКЛАР.

$ax^2+bx+c \leqslant 0$ (ёки <0, >0, $\geqslant 0$), $a \neq 0$ кўринишдаги тенгсизликлар и к к и н ч и д а р а ж а л и т е н г с и з л и к л а р дейилади.

Маълумки, тенгсизликнинг икки томонини -1 га (манфий сонга!) кўпайтириш натижасида тенгсизлик тескарисига ўзгаради. Шунинг учун биз a ни мусбат сон деб ҳисоблашимиз мумкин, акс ҳолда тенгсизликни -1 га кўпайтирамиз. Иккинчи даражали тенгсизликни ечиш усули $(a>0)$:

а) Аввал $ax^2+bx+c=0$ тенгламани ечамиз. Агар $D>0$ бўлса,

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};$$

аниқлик учун

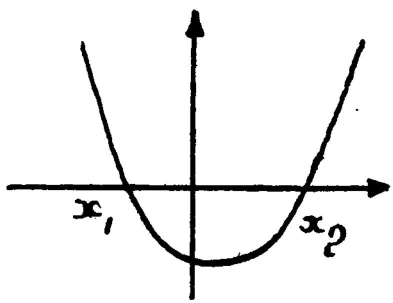
$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ бўлсин.

У ҳолда:

$ax^2+bx+c<0$ тенгсизлик ечими $x\in(x_1, x_2)$;
$ax^2+bx+c>0$ тенгсизлик ечими $x\in(-\infty, x_1)\cup(x_2, +\infty)$;
$ax^2+bx+c\leqslant 0$ тенгсизлик ечими $x\in[x_1, x_2]$;
$ax^2+bx+c\geqslant 0$ тенгсизлик ечими $x\in(-\infty, x_1]\cup[x_2, +\infty)$.

Исботи. $y=ax^2+bx+c$ функция графиги абсцисса ўқини x_1 ва x_2 нуқталарда кесиб ўтувчи (чунки $D>0$) ва шохчалари юқорига йўналган (чунки $a>0$) парабола (2-чизма).

Демак, $ax^2+bx+c<0$ тенгсизлик ечими $x\in(x_1, x_2)$; $ax^2+bx+c>0$ тенгсизлик ечими эса $x\in(-\infty, x_1)\cup(x_2, +\infty)$.



2- чизма

5. $-3x^2+5x-2\leqslant 0$ тенгсизликни ечинг.

Е ч и м и: Тенгсизликда $a=-3$ (манфий бўлгани учун икки томонни -1 га кўпайтириб,

$$3x^2-5x+2\geqslant 0$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Энди $3x^2-5x+2=0$ тенгламадан

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}=\frac{5\pm1}{6}.$$

Демак, $x_1=\frac{2}{3}$; $x_2=1$.

Ечилаётган тенгсизлик $3x^2-5x+2\geqslant 0$ бўлгани учун, ечим x_1 ва x_2 илдизлар «ташқарисида», яъни

$x\in\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]\cup[1, +\infty)$.

Ж а в о б: $x\in\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]\cup[1, +\infty)$.

6. (ТошДД, 1989, Ф.И.Ф., сиёсий иктисод).

Тенгсизликни ечинг: $13x^2<7x$.

Ечими: Берилган тенгсизликни

$$13x^2-7x<0$$

кўринишда ёзиб, сўнг $13x^2-7x=0$ тенгламани ечамиз:

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-0}}{26}=\frac{7\pm 7}{26}$$

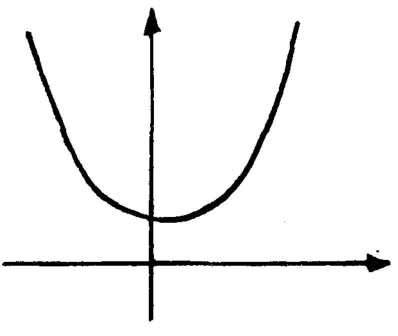
Демак, $x_1=0$, $x_2=\frac{7}{13}$.

Тенгсизлик $13x^2-7x<0$ кўринишда бўлгани учун ечим x_1 ва x_2 илдизлар «ичида», яъни

$$x\in\left(0,\ \frac{7}{13}\right).$$

Жавоб: $x\in\left(0,\ \frac{7}{13}\right)$.

б) Энди $D<0$ бўлган ҳолда иккинчи даражали тенгсизликни ечишга ўтамиз (эслатамиз: $a>0$).
Бу ҳолда $y=ax^2+bx+c$ функция графиги юқорига йўналган, аммо абсцисса ўқи билан кесишмайди (3-чизма).



3- чизма

Демак, $ax^2+bx+c<0$ ва $ax^2+bx+c\leqslant 0$ тенгсизликлар ечими йўқ: $x\in\varnothing$, $ax^2+bx+c\geqslant\geqslant 0$ ва $ax^2+bx+c>0$ тенгсизликлар эса x нинг барча қийматларида бажарилади: $x\in(-\infty,+\infty)$. Ниҳоят, $D=0$ $(a>0)$ бўлган ҳолни ўқувчига ҳавола қиламиз.

3°. ТЕНГСИЗЛИКЛАР СИСТЕМАСИ.

Ўқувчи икки хил тенгсизликлар системасини бир-биридан фарқ қилиши лозим:

а) $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \end{cases}$ бу ерда $f(x)$, $g(x)$ — биринчи ёки иккинчи даражали кўпҳад ва «$>$» белги ўрнида «$\geqslant$», «$<$», «$\leqslant$» белгилардан ихтиёрийси ишлатилиши мумкин (тенгсизликларнинг иккиси ҳам бир хил бўлиши шарт эмас). Бундай системада $f(x)>0$ ва $g(x)>0$ тенгсизликларнинг иккиси ҳам бажарилиши талаб қилинади. Демак, бундай системани ечиш учун системадаги тенгсизликларнинг ҳар бирини алоҳида ечилиб, ҳосил бўлган ечимларнинг умумий қисми олиниши зарур.

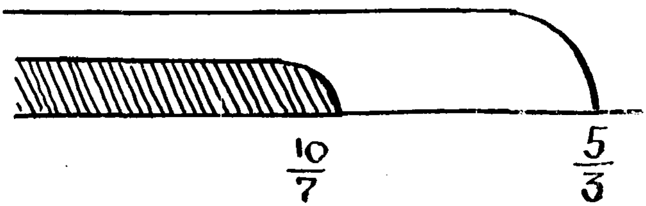
Мисол.

7. $\begin{cases} 3x-5\leqslant 0, \\ 10-7x>0. \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг.

Ечими:

$$\begin{cases} 3x-5\leqslant 0, \\ 10-7x>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x\leqslant 5 \\ -7x>-10. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant \frac{5}{3}, \\ x< \frac{10}{7}. \end{cases}$$

Бу ечимларни сонлар ўқида тасвирлаймиз (4-чизма):



4-чизма

Ечимларнинг умумий қисми (иккисига ҳам тегишли қисми) $\left(-\infty, \frac{10}{7}\right)$.

Жавоб: $x \in \left(-\infty, \frac{10}{7}\right)$.

Изоҳ: Системадаги тенгсизликлар алоҳида-алоҳида ечилса ҳам, уларни биргаликда ёзиб бориш тавсия қилинади.

б) $\left[\begin{array}{l} f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{array}\right.$ бу ерда ҳам $f(x)$, $g(x)$ биринчи ёки иккинчи даражали кўпҳадлар. Бундай системада $f(x)>0$ ва $g(x)>$ >0 тенгсизликлардан камида бири бажарилиши талаб қилинади. Демак, бундай системани ечиш учун системадаги тенгсизликларнинг ҳар бирини алоҳида ечиб, ҳосил бўлган ечимларнинг иккисини ҳам (бирлашмасини) олиш зарур.

Мисол.

8. $\left[\begin{array}{l} 3x-5\leqslant 0, \\ 10-7x>0 \end{array}\right.$ тенгсизликлар системасини ечинг.

Ечими:

$$\left[\begin{array}{l} 3x-5\leqslant 0, \\ 10-7x>0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x\leqslant 5 \\ -7x>-10. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant \frac{5}{3}, \\ x< \frac{10}{7}. \end{array}\right.$$

Бу ечимларни сонлар ўқида тасвирлаймиз (4-чизма).

Ечимларнинг бирлашмаси $\left(-\infty, \frac{10}{7}\right) \cup \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$ яъни,

$\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$ бўлади.

Ж а в о б: $x \in \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$.

Э с л а т м а. Системадаги тенгсизликлар сони 2 тадан кўп бўлиши мумкин. У холда ҳам ечиш усули ўзгармайди.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

а) чизиқли тенгсизликлар:

1. $2x-5<2(x+3)$.
2. $\frac{x+1}{2}-\frac{x-3}{4}\geqslant\frac{x+5}{6}-\frac{x-7}{8}$.
3. $(x+1)^2\leqslant(x+3)^2$.
4. $\frac{0{,}2x+3}{-0{,}4}>\frac{x-0{,}2}{3}$.

б) иккинчи даражали тенгсизликлар:

5. $x^2+x+1\leqslant 0$.
6. $\frac{x^2-1}{2}\geqslant\frac{x-1}{3}$.
7. $(x+2)^3\leqslant(x-3)^3$.
8. $1-2(x+1)+3(x+2)^2>0$.

в) тенгсизликлар системасини ечинг:

9. $\begin{cases}2x-3>0,\\3x+1\leqslant 0.\end{cases}$

10. $\begin{cases}x^2+x+6>0,\\-x^2+5x-6\geqslant 0.\end{cases}$

11. $\begin{cases}2x+3<5x-7,\\5<-3.\end{cases}$

12. $\begin{cases}x^2-3x+2<0,\\3x^2+7x-10\leqslant 0.\end{cases}$

4°. АЛГЕБРАИК ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Мисол.

9. $x<\frac{1}{x}$ тенгсизликни ечинг.

Е ч и м и: x номаълум бўлгани учун унинг ишораси ҳам номаълум. Шунинг учун умумий маҳраж бериб тенгсизликни $x^2<1$ кўринишда ёзиш нотўғри.

Берилган тенгсизлик қуйидагича ечилади:

$$x-\frac{1}{x}<0;$$

$$\frac{x^2-1}{x}<0.$$

$\frac{x^2-1}{x}$ каср фақат сурат ва махражларнинг ишоралари қарама-қарши бўлсагина манфий бўлади (яъни $\frac{+}{-}$ ёки $\frac{-}{+}$ кўринишда). Демак,

$$\frac{x^2-1}{x}<0$$

тенгсизлик ушбу тенгсизликлар системаси

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2-1>0, \\ x<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-1<0, \\ x>0. \end{cases}\end{array}\right.$$

га тенг кучли.

а) $\begin{cases} x^2-1>0, \\ x<0 \end{cases}$ системани ечамиз.

$$\begin{cases} x^2-1>0, \\ x<0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1;\ x_2=1, \\ x<0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty), \\ x\in(-\infty,0). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,\ -1).$$

б) $\begin{cases} x^2-1<0, \\ x>0 \end{cases}$ системани ечамиз.

$$\begin{cases} x^2-1<0, \\ x>0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1;\ x_2=1, \\ x>0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-1,1), \\ x\in(0,+\infty). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in(0,1).$$

Демак,

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2-1>0, \\ x<0. \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-1<0, \\ x>0. \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in(-\infty,-1), \\ x\in(0,1), \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty,\ -1)\cup(0,1).$$

Жавоб: $x\in(-\infty,\ -1)\cup(0,1)$.

Интервал усули

$\frac{f(x)}{g(x)}>0$ тенгсизликни ечишнинг умумий усулларидан бири — интервал усулидир. Бунинг учун $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар бирор усулда чизикли ва квадрат ($D<0$ бўлган) кўпайтувчиларга ажратилади. Масалан,

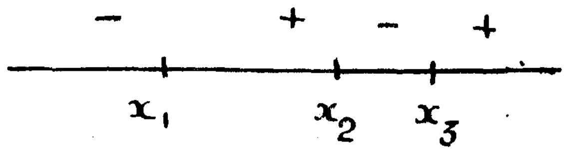
1) $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$;
2) $x^3+x^2+x=x(x^2+x+1)$;
3) $x^2-4=(x-2)(x+2)$;
4) $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$.

а) Чизиқли кўпайтувчиларнинг илдизлари ўсиб бориш тартибида номерланиб чиқилади: $x_1<x_2<x_3<\ldots$ ва ҳоказо.

б) Сонлар ўқи илдизлар ёрдамида интервалларга ажратилади. $(-\infty,\ x_1)$; $(x_1,\ x_2)$; $(x_2;\ x_3)$ ва ҳоказо.

в) Интерваллардан нуқталар олиб (ихтиёрий равишда), $\frac{f(x)}{g(x)}$ ифоданинг шу нуқтадаги қийматининг ишораси олиниб, интервал шу ишора билан белгиланади.

Масалан (5-чизма),



5- чизма

г) «+» ишора билан белгиланган интервалларнинг бирлашмаси $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ тенгсизликнинг ечими; «—» ишора билан белгиланган интерваллар бирлашмаси эса $\frac{f(x)}{g(x)}<0$ тенгсизликнинг ечими бўлади.

Изоҳ. 1) Дискриминанти манфий бўлган квадрат кўпайтувчилар тенгсизлик ечимига таъсир этмайди. 2) «Кўп ҳоллар»да битта интервалдаги ишорани аниқлаш кифоя: қолган интервалларга ишорани кетма-кет алмаштириб давом эттириш мумкин.

Мисол тариқасида 9-мисолни интервал усули билан ечайлик:

$$x<\frac{1}{x},$$

$$x-\frac{1}{x}<0,$$

$$\frac{x^2-1}{x}<0,$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x}<0.$$

Демак, илдизлар $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$ бўлади.

а) $(-\infty,\ -1)$; $(-1,\ 0)$; $(0,\ 1)$; $(1,\ +\infty)$ интерваллар.

б) $(-\infty,\ -1)$ дан масалан, -2 олиб, $\frac{(x-1)(x+1)}{x}$ нинг қиймати $\frac{(-3)(-1)}{-2}<0$ бўлишини топамиз.

Демак, $(-\infty, -1)$ интервални «$-$» ишора билан белгилаймиз. Худди шундай усулда $(-1, 0)$ дан, масалан, $-\frac{1}{2}$ олиб, $(-1, 0)$ интервал «$+$» ишора билан белгиланишини топамиз.

Демак, $\frac{(x-1)(x+1)}{x}<0$ тенгсизликнинг ечими: $x\in(-\infty, -1)\cup$ $\cup(0, 1)$.

МУСТАКИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

Тенгсизликларни ечинг:

13. $\frac{x^2-5x}{x+3}<0.$

14. (ТошДД, 1989, география факультети) $\frac{-5}{4x+7}>0.$

15. $x(x+1)(x^2+x+1)<0.$

16. $2x<\frac{1-x}{1+x}\leqslant 3x+1$.

5-§. ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

1°. Номаълум сон илдиз остида қатнашған тенгламаларни шартли равишда[1] иррационал тенгламалар дейилади. Масалан,

1) $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}=1;$

2) $\sqrt{1+\sqrt{x-3}}+\sqrt[3]{x+\sqrt{1-x}}=0;$

3) $\sqrt{x^2}=5x-3;$

4) $x+5=\sqrt{3-\sqrt{2}}.$

Тенгламаларнинг 1)—3) иррационал тенглама, аммо 4) тенглама иррационал эмас.

Чизиқли ва квадрат тенгламалардан фарқли ўлароқ иррационал тенгламани умумий ечиш усули йўқ. Иррационал тенгламаларнинг биз кўрадиган содда ҳолларида алмаштириш ёрдамида ёки тенгламанинг икки томонини бирор даражага ошириб илдизларни йўқотиш ёрдамида бизга маълум бўлган тенглама кўринишига келтириш мумкин.

Масалан,

$$\sqrt{x+3}=1+\sqrt{x}$$

[1] Масалан, $lg\,(1+sin\,\sqrt{x-2})=-1$ тенгламани, вазиятга қараб, логарифмик, тригонометрик, иррационал тенглама деб қарашимиз мумкин (*муаллифлар*).

тенгламанинг икки томонини квадратга оширайлик:

$$x+3=1+2\sqrt{x}+x,$$

у ҳолда

$$-2\sqrt{x}=-2$$

ёки

$$\sqrt{x}=1$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Яна квадратга оширсак,

$$x=1$$

ечимни ҳосил қиламиз.

Яна бир мисол. $\sqrt[3]{x+5}-3\sqrt[6]{x+5}=4$ тенгламани ечинг.

Е ч и м и: $y=\sqrt[6]{x+5}$ белгилаш киритамиз.

У ҳолда

$$y^2-3y=4$$

квадрат тенглама ҳосил бўлиб, унинг ечимлари $y_1=-1$ ва $y_2=4$ бўлади. Демак,

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[6]{x+5}=-1,\\ \sqrt[6]{x+5}=4.\end{array}\right.$$

$\sqrt[6]{x+5}=-1$ тенглама ечимга эга эмас, чунки

$\sqrt[6]{x+5}\geqslant 0$ (арифметик илдиз).

$\sqrt[6]{x+5}=4 \Leftrightarrow x+5=4^6 \Rightarrow x=4091.$

Ж а в о б: $x=4091$.

Иррационал тенгламаларни ечишда қуйидагиларга эътибор беринг:

1) Тенгламанинг икки томонини квадратга ёки ихтиёрий жуфт даражага оширганда, ч е т и л д и з л а р ҳосил бўлиши мумкин.

Масалан,

$$x=1\Rightarrow x^2=1;\ x_1=1;\ x_2=-1.$$

Равшанки, $x_2=-1$ берилган $x=1$ тенглама учун чет илдиз.

б) $\sqrt{x}=x-2 \Rightarrow x=x^2-4x+4;\ x_1=1;\ x_2=4.$

Равшанки, $x=1$ берилган $\sqrt{x}=x-2$ тенглама учун чет илдиз.

2) $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt[4]{f(x)}$, $\sqrt[6]{f(x)}$, ...— ифодалар фақат $f(x)\geqslant 0$ бўлган ҳолдагина маънога эга. Демак, топилган «ечим»ларнинг т е н г л а м а н и н г а н и қ л а н и ш с о ҳ а с и (ТАС) га (тенгламада қатнашувчи барча ифодалар мавжуд бўладиган қийматлар тўпламига) тегишли бўлганларини ажратиб олиш зарур.

Тегишли бўлмаганлари эса чет илдиз бўлади.

Масалан,

$$\sqrt{x} = \sqrt{2+3x}$$

тенгламанинг икки томонини квадратга оширсак,

$$x=2+3x,$$
$$-2x=2,$$
$$x=-1$$

«ечим» ҳосил бўлади.

Бу «ечим» тенгламанинг аниқланиш соҳасига тегишли эмас. ($\sqrt{-1}$ мавжуд эмас).

Ж а в о б: Берилган тенгламанинг ечими йўқ.

3) Жуфт даражали илдизлар фақат арифметик маънода тушунилади, яъни $\sqrt{f(x)}, \sqrt[4]{f(x)}$, ... ифодалар манфий сонга тенг бўлиши мумкин эмас.

Масалан, $\sqrt{x}=-3$ тенглама ечимга эга эмас.

Иррационал тенгламаларга мисоллар кўрайлик.

1. $\sqrt{4-x}+\sqrt[8]{x-5}=\sqrt[3]{6-x}$ тенгламани ечинг.

Е ч и м и: Аввал тенгламанинг аниқланиш соҳасини топайлик,

$$\begin{cases} 4-x\geqslant 0, \\ x-5\geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant 4, \\ x\geqslant 5. \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Ж а в о б: Берилган тенгламанинг ечими йўқ, чунки аниқланиш соҳаси бўш тўплам.

2. (ТошДД, 1989, геология факультети)

$\sqrt{x+14}=x-6$ тенгламани ечинг.

Е ч и м и: Аниқланиш соҳаси

$$x+14\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant -14.$$

Икки томонини квадратга оширсак,

$$x-14=x^2-12x+36,$$
$$x^2-13x+22=0,$$
$$x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{169-88}}{2}=\frac{13\pm 9}{2},$$
$$x_1=2,\ x_2=11.$$

Топилган иккала ечим ҳам тенгламанинг аниқланиш соҳасига тегишли.

Энди ечимларни текширамиз.

$$x_1=2\Rightarrow \sqrt{2+14}=2-6\Rightarrow 4=-4.$$

Демак, $x_1=2$ чет илдиз.

Ж а в о б: $x=11$.

3. $(x^2-4)\cdot\sqrt{x+1}=0$ тенгламани ечинг.

[illegible] ...ма 0 бўлиши учун кўпайтувчиларнинг камида [illegible] ...шарт. Демак,

$$[illegible] \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0, \\ \sqrt{x+1}=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-2;\ x_2=2; \\ x+1=0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=-2;\ x_2=2;\ x_3=-1.$$

$x_1=-2$ «ечим» тенгламанинг аниқланиш соҳаси: $x+1\geqslant 0$, яъни $x\geqslant -1$ тўпламга тегишли эмас.

Ж а в о б. $x_2=2$; $x_3=-1$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

1. $\sqrt{5x+10}+x+2=0$.
2. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-12}=5$.
3. $\sqrt{x+5}=x-7$.
4. $\sqrt[3]{-12+6\sqrt{4+(2x+1)^3}}+2x=-1$.

2°. И р р а ц и о н а л т е н г с и з л и к л а р.

Биз иррационал тенгсизликка доир иккита мисолни таҳлил қилиш билан чекланамиз.

4. $\sqrt{2x-1}\leqslant\sqrt{5-x}$ тенгсизликни ечинг.

Е ч и м и: Аввал аниқланиш соҳасини топайлик:

$$\begin{cases} 2x-1\geqslant 0, \\ 5-x\geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant \frac{1}{2}, \\ -x\geqslant -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant \frac{1}{2}, \\ x\leqslant 5. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 5.$$

Аниқланиш соҳасида $\sqrt{2x-1}\geqslant 0$ ва $\sqrt{5-x}\geqslant 0$ (арифметик илдиз!). Демак, икки томонни квадратга ошириш мумкин:

$$2x-1\leqslant 5-x,$$
$$3x\leqslant 6,$$
$$x\leqslant 2.$$

Ниҳоят аниқланиш соҳасини ҳисобга олсак,

$$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$$

ечимни ҳосил қиламиз.

Ж а в о б: $x\in\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$.

Изоҳ. Одатда тенгсизлик билан унинг аниқланиш соҳасини биргаликда ечиб бориш қулай бўлади. Масалан, 4-тенгсизликни ушбу кўринишда ечиш мумкин:

$$\begin{cases} 2x-1\geqslant 0, \\ 5-x\geqslant 0, \\ \sqrt{2x-1}\leqslant\sqrt{5-x}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant\frac{1}{2}, \\ -x\geqslant -5, \\ 2x-1\leqslant 5-x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant\frac{1}{2}, \\ x\leqslant 5, \\ x\leqslant 2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2.$$

5. $(10x+3)\sqrt{-x^2+3x+1}\geqslant 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечими: 1) Аниқланиш соҳаси: $-x^2+3x+1\geqslant 0.$

2) Арифметик илдиз бўлгани учун $\sqrt{-x^2+3x+1}\geqslant 0$

Демак,

$$(10x-3)\sqrt{-x^2+3x+1}\geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x+1\geqslant 0; \\ 10x-3\geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

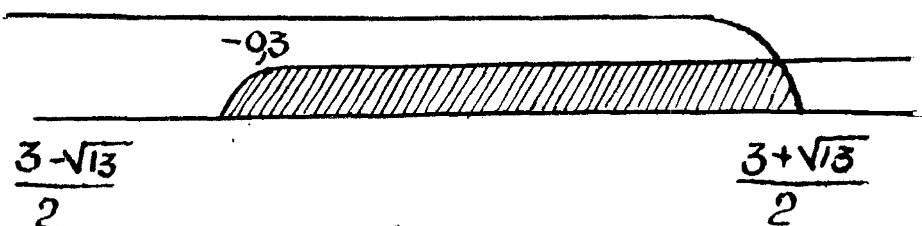
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-1\leqslant 0; \\ 10x\geqslant -3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+4}}{2}; \\ x\geqslant -0{,}3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{3-\sqrt{13}}{2};\ x_2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \\ x\geqslant -0{,}3. \end{cases}$$

Демак,

$$\begin{cases} x^2-3x-1\leqslant 0; \\ x\geqslant -0{,}3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3-\sqrt{13}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \\ x\geqslant -0{,}3 \end{cases}$$

Энди сонлар ўқида $x_1=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$, $x_2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $x_3=-0{,}3$ сонларни топамиз (6-чизма).



6- чизма

Демак, тенгсизликнинг ечими

$$\left[-0{,}3;\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$$

оралиқни ўз ичига олади.

Бундан ташқари $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ сон ҳам тенгсизликнинг ечими, чунки $\sqrt{-x^2+3x+1}=0$ бўлгани ҳолда $10x+3$ нинг ишораси қандай бўлишидан қатъи назар,

$$(10x+3)\sqrt{x^2+3x+1}\geqslant 0$$

тенгсизлик бажарилади.

Жавоб:

$$x\in\left[-0{,}3,\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left\{\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right\}.$$

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР.

Ушбу тенгсизликларни ечинг:

5. $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{5+x}\leqslant 0.$
6. $\frac{\sqrt{x}}{x-4}>0.$
7. $\sqrt{x^2+x+1}\geqslant\sqrt{7-2x}.$
8. $3x+7\sqrt{x}-10\leqslant 0.$

6-§. КЎРСАТКИЧЛИ ФУНКЦИЯ. КЎРСАТКИЧЛИ ТЕНГЛАМА ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Агар n — натурал сон бўлса, $a^n=\underbrace{a.a.\ldots.a}_{n\ \text{та}}$ эканлигини биламиз (бу ерда a — ихтиёрий сон). Бундан ташқари $a^0=1$ ва $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ деб ҳисоблаш келишилган. Аммо бу ҳолларда биз $a\neq 0$ қўшимча шарт киритишимиз зарур. Демак, нолдан фарқли соннинг ихтиёрий бутун даражаларини топиш мумкин.

Маълумки каср даража

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

тенглик орқали аниқланади.

Бу ҳолда биз яна бир қўшимча шарт: $a>0$ киритишимиз зарур. Акс ҳолда ($a\leqslant 0$), масалан,

$$a^{\frac{1}{2}},\ a^{-\frac{1}{4}},\ a^{\frac{3}{8}}$$

каби ифодалар маънога эга бўлмайди.

Демак, a^x ифода x нинг барча қийматларида аниқланган бўлиши учун биз $a>0$ деб олишимиз зарур.

Ниҳоят

$$1^x\equiv 1 \qquad (\text{айнан тенг})$$

бўлгани учун биз қулайлик мақсадида $a\neq 1$ деб оламиз.

1°. Ушбу

$$y=a^x \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

функция **кўрсаткичли функция** дейилади (a эса асос дейилади).

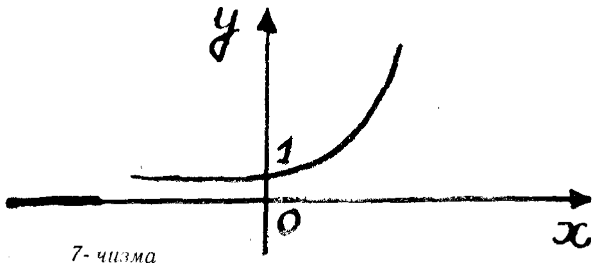
а) Кўрсаткичли функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty, +\infty)$.

б) Кўрсаткичли функциянинг ўзгариш соҳаси $(0, +\infty)$, яъни у манфий ва 0 қийматларни қабул қилмайди.

в) $a>1$ бўлганда функция графигининг кўриниши (7-чизма).

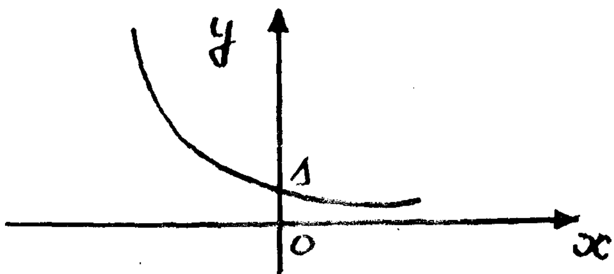
Бу ҳолда функция **ўсувчи**, яъни абсцисса ўқи бўйлаб чапдан ўнгга «ҳаракат»ланганда график юқорига кўтарилади (абсцисса катталашганда функция ҳам катталашади).

г) $0<a<1$ бўлганда функция графигининг кўриниши (8-чизма):



7- чизма

Бу ҳолда функция **камаювчи**, яъни чапдан ўнгга «ҳаракат»ланганда график пастга тушиб боради (абсцисса катталашганда функция кичиклашади).



8- чизма

МУСТАҚИЛ ИШЛАШ УЧУН МИСОЛЛАР

1. $y=2^x$ функциянинг графигини чизинг.
2. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ функциянинг графигини чизинг.
3. Ҳисобланг: $8^{\frac{2}{3}}+16^{-\frac{3}{4}}+(2\sqrt{2})^{\frac{3}{4}}\cdot 4^{-0,25}$.
4. Соддалаштиринг: $[(a^2\cdot a^7):a^5]^{\frac{1}{4}}$.

2°. КЎРСАТКИЧЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Номаълум даража кўрсаткичида қатнашган тенглама **к ў р с а т к и ч л и т е н г л а м а** дейилади.

Масалан,

1) $4^x-2^{x+1}-8=0$; 2) $2^{\sqrt{x}}+x^{\sqrt{2}}=1$;

3) $(x+2)^{3-x}=1$; 4) $\sqrt{3^x}\cdot 5^2=225$.

Ушбу

$$a^x=b$$

кўринишдаги **т е н г л а м а с о д д а к ў р с а т к и ч л и т е н г л а м а** дейилади. Агар бу тенгламани

$$a^x=a^c$$

кўринишга келтира олсак (демак, $a^c=b$), у ҳолда $x=c$ ягона ечим бўлади. Чунки тенгликнинг иккала томонидаги асослар бир хил эканлигидан (эслатма: $a>0$ ва $a\neq 1$) даража кўрсаткичлар ҳам тенг бўлиши келиб чиқади.

1. $2^x=8$ тенгламани ечинг.

Е ч и м и: $2^x=2^3$, демак, $x=3$.

Ж а в о б: $x=3$.

2. $4^8=8^{x+5}$ тенгламани ечинг.

Е ч и м и: биз учун 4 ни 8 нинг даражаси сифатида эмас, балки 4 ни ҳам, 8 ни ҳам 2 нинг даражаси сифатида тасвирлаш осон: $4=2^2$, $8=2^3$. Демак,

$$(2^2)^8=(2^3)^{x+5},$$
$$2^{16}=2^{3x+15},$$
$$16=3x+15,$$
$$3x=1,\ x=\frac{1}{3}.$$

Ж а в о б: $x=\frac{1}{3}$.

3. (ТошДД, 1990, шарқшунослик факультети)

$(3\sqrt{3})^{x+3}=(9\sqrt[4]{3})^{x-5}$ тенгламани ечинг.

Е ч и м и: $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$; $9=3^2$; $\sqrt[4]{3}=3^{\frac{1}{4}}$ тенгликлардан фойдалансак,

$$\left(3\times 3^{\frac{1}{2}}\right)^{x+3}=\left(3^2\times 3^{\frac{1}{4}}\right)^{x-5};$$
$$3^{\frac{3}{2}(x+3)}=3^{\frac{9}{4}(x-5)}.$$

Демак,
$$\frac{3}{2}(x+3)=\frac{9}{4}(x-5).$$
$$12(x+3)=18(x-5),$$
$$2(x+3)=3(x-5),$$
$$2x+6=3x-15,$$
$$-x=-21,\ x=21.$$

Ж а в о б: $x=21$.

Бу мисолларнинг таҳлилидан равшанки, ўқувчи ушбу хоссалардан фойдалана олиши зарур:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; 4) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;

2) $a^n : a^m = a^{n-m}$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

3) $(a^n)^m = a^{nm}$;

Бу ерда m ва n сонлар ихтиёрийдир, фақат $a > 0$, $a \neq 1$ ва $b > 0$, $b \neq 1$ бўлиши зарур.

Кўрсаткичли тенгламани ечиш учун уни ёки содда кўрсаткичли тенгламага келтириш, ёки баъзи сунъий усуллардан фойдаланиш тавсия этилади. Мисоллар кўрайлик.

4. (ТошДД, 1989, биология факультети) $5^{x-2} - \frac{24}{25} = 5^{-x}$ тенгламани ечинг.

Ечими: $5^{x-2} - \frac{24}{25} = 5^{-x}$;

$$\frac{5^x}{5^2} - \frac{24}{25} = \frac{1}{5^x};$$

$$\frac{5^x}{5^2} - \frac{24}{25} = \frac{1}{5^x}.$$

Агар $5^x = y$ белгилаш киритсак,

$$\frac{y}{25} - \frac{24}{25} = \frac{1}{y}.$$

Умумий махраждан сўнг:

$$y^2 - 24\,y = 25,$$
$$y^2 - 24\,y - 25 = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 + 100}}{2} = \frac{24 \pm 26}{2},$$

$$y_1 = -1;\ y_2 = 25.$$

Демак, $5^x = -1$ ва $5^x = 25$ содда кўрсаткичли тенгламаларни ҳосил қиламиз. $5^x = -1$ ечими йўқ, чунки $5^x > 0$.

$5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow x = 2.$

Жавоб: $x = 2$.

5. $4^x + 3^{x+1} \cdot 2^x = 4 \cdot 9^x$ тенгламани ечинг.

Ечими:

$$4^x + 3 \cdot 3^x \cdot 2^x = 4 \cdot 9^x,$$
$$4^x + 3 \cdot 6^x = 4 \cdot 9^x$$

тенгламани 6^x га бўламиз ($6^x>0$):

$$\frac{4^x}{6^x}+3=4\,\frac{9^x}{6^x},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x+3=4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x.$$

Энди $\left(\frac{2}{3}\right)^x=y$ белгилаш киритсак, $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}=\frac{1}{y}$

Демак, тенглама

$$y+3=\frac{4}{y}$$

кўринишга келади. Бундан

$$y^2+3\,y-4=0,$$

$$y_{1,2}=\frac{-3\pm5}{2},\quad y_1=-4;\ y_2=1.$$

У ҳолда, $\left(\frac{2}{3}\right)^x=-4$ ва $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1$ тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу тенгламаларнинг биринчиси ечимга эга эмас, иккинчисидан эса $x=$ $=0$ келиб чиқади.

Жавоб: $x=0$.

6. $9^x-12\cdot3^x+27=0$ тенгламани ечинг.

Ечими: $3^x=y$ белгилашдан сўнг

$$y^2-12\,y+27=0$$

тенглама ҳосил бўлади. Уни ечиб, $y_1=3$, $y_2=9$ бўлишини топамиз. Демак, берилган кўрсаткичли тенглама иккита содда кўрсаткичли тенгламага ажралади:

$$3^x=3\Rightarrow x_1=1;$$
$$3^x=9\Rightarrow x_2=2.$$

Жавоб: $x_1=1$; $x_2=2$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

Ушбу кўрсаткичли тенгламаларни ечинг:

5. $\frac{1}{8}\,6^{3x}=2^{2x}\cdot3^{3x}$

6. $2\cdot4^{\frac{x}{2}}+2^{x+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. $9^{x^2+4x-4,5}=3$.

8. $(0,4)^{x-1}=(6,25)^{6x-5}$.

3°. КЎРСАТКИЧЛИ ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Аввал

$$a^x\geqslant a^c\quad(\leqslant a^c\ \text{ёки}>a^c\ \text{ёки}\ <a^c)$$

кўринишдаги содда кўрсаткичли тенгсизликни ечиш билан шуғулланамиз. Агар $a>1$ бўлса, $y=a^x$ ўсувчи функция, демак, $a^x\geqslant a^c$ тенгсизликдан, $x\geqslant c$ келиб чиқади.

$0<a<1$ бўлганда $y=a^x$ камаювчи функция, шунинг учун $a^x\geqslant a^c$ тенгсизликдан тескари тенгсизлик $x\leqslant c$ келиб чиқади.

Изоҳ. $a^x \leqslant a^c$, $a^x > a^c$, $a^x < a^c$ тенгсизликлар ҳам худди шундай усулда асоснинг 1 дан катта ёки кичиклигига қараб ечилади. Умуман

$$a^{f(x)} \leqslant a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant g(x), & \text{агар } a > 1 \text{ бўлса,} \\ f(x) \geqslant g(x), & \text{агар } 0 < a < 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

7. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} \leqslant (0{,}25)^{\frac{2}{x-3}}$ тенгсизликни ечинг.

Ечими: $0 < \frac{1}{2} < 1$; $0 < 0{,}25 < 1$ бўлгани учун:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{x-3}}$$

асос 1 дан кичик, демак, бу тенгсизлик $x+3 \geqslant \frac{4}{x-3}$ тенгсизликка тенг кучли. Ҳосил бўлган тенгсизликни интервал усули билан ечамиз:

$$x+3-\frac{4}{x-3} \geqslant 0,$$

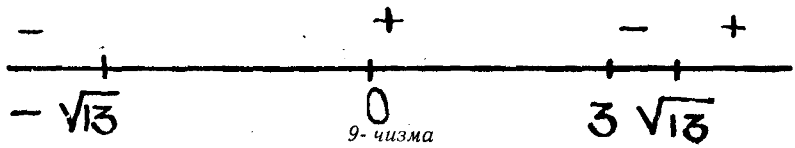
$$\frac{x^2-9-4}{x-3} \geqslant 0,$$

$$\frac{x^2-13}{x-3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-\sqrt{13})(x+\sqrt{13})}{x-3} \geqslant 0.$$

Демак, $x_1 = -\sqrt{13}$; $x_2 = 3$; $x_3 = \sqrt{13}$.

Масалан, $x=0$ бўлганда $\frac{x^2-13}{x-3} = \frac{13}{3} > 0$.

Демак, $(-\sqrt{13},\ 3)$ интвервалда $\frac{x^2-13}{x-3}$ мусбат. Қолган интерваллардаги ишоралар қуйидагича (9-чизма):



9- чизма

Тенгсизлик қатъиймаслигини ҳисобга олсак,

$x \in [-\sqrt{13},\ 3) \cup [\sqrt{13},\ +\infty)$ ечим бўлади.

Жавоб: $x \in [-\sqrt{13},\ 3) \cup [\sqrt{13},\ +\infty)$.

Умумий ҳолдаги кўрсаткичли тенгсизликни ечиш учун уни бирор усулда содда кўрсаткичли тенгсизликка келтириш зарур.

8. (ТошДД, 1989, амалий математика ва механика факультети).

$3 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \leqslant 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} - 2 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$ тенгсизликни ечинг.

Ечими: Тенгсизликнинг икки томонини $6^{\frac{1}{x}}$ га бўламиз ($6^{\frac{1}{x}} > 0$ бўлгани учун тенгсизлик сақланади):

$$3\left(\frac{4}{6}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant 5-2\left(\frac{9}{6}\right)^{\frac{1}{x}};$$

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^{x^{-1}}\leqslant 5-2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Агар $\left(\frac{3}{2}\right)=y$ белгилаш киритсак: $3y\leqslant 5-\frac{2}{y}$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Уни интервал усули билан ечамиз:

$$3y-5+\frac{2}{y}\leqslant 0;$$

$$\frac{3y^2-5y+2}{y}\leqslant 0.$$

$3y^2-5y+2$ квадрат учҳад $3(y-1)\left(y-\frac{2}{3}\right)$ қуйпайтувчиларга ажралади. Демак,

$$\frac{3(y-1)\left(y-\frac{2}{3}\right)}{y}\leqslant 0$$

бўлиб, $y_1=0$, $y_2=\frac{2}{3}$, $y_3=1$. У ҳолда биз $(-\infty,\ 0)$; $\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$; $\left(\frac{2}{3},\ 1\right)$; $(1;\ +\infty)$ интервалларни ҳосил киламиз. Ишораларни текшириб, $(-\infty,\ 0)$ ва $\left(\frac{2}{3},\ 1\right)$ интервалларда ишора манфий эканлигини осонликча ҳисоблаш мумкин. Ниҳоят

$$\frac{3(y-1)\left(y-\frac{2}{3}\right)}{y}\leqslant 0$$

тенгсизлик қатъиймаслигини ҳисобга олсак,

$$y\in(-\infty,\ 0)\cup\left[\frac{2}{3},\ 1\right],$$

яъни $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\in(-\infty,\ 0)\cup\left[\frac{2}{3},\ 1\right]$. Аммо $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}>0$, демак $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\in\left[\frac{2}{3},\ 1\right]$ ёки $\left(\frac{2}{3}\right)\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant 1$. Бу икки томонли тенгсизлик ушбу

$$\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}},\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant 1.\end{cases}$$

тенгсизликлар системасига тенг кучли.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant 1\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\Leftrightarrow\frac{1}{x}\geqslant 0\ \left(\text{асос }\frac{2}{3}<1\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{1}\Leftrightarrow\frac{1}{x}\leqslant 1\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}\geqslant 0.$$

Шундай қилиб,

$$\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}},\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant 1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty,\ 0)\cup[1,\ +\infty),\\ x\in(0,\ +\infty).\end{cases}$$

Жавоб: $x\in[1,\ +\infty)$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

Ушбу тенгсизликларни ечинг:

9. $\frac{1}{4^{-x}+2}-\frac{1}{4^{-x}+1}<-\frac{1}{6}$.

10. $(0,5)^{x^2-3x-6}<4$.

11. $\frac{2^{1-x}}{2^x-1}\leqslant 1$.

12. (ТошДД, 1989, амалий математика ва механика факультети).

$6\cdot 9^{\frac{1}{x}}+6\cdot 4^{\frac{1}{x}}\leqslant 13\cdot 6^{\frac{1}{x}}$.

7-§. ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯ. ЛОГАРИФМИК ТЕНГЛАМА ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР.

a ва b сонлар берилган бўлсин. b ни ҳосил қилиш учун a сонни кўтариш зарур бўлган c даража кўрсаткич b нинг a асос бўйича логарифми дейилади.

Масалан,

1) $a=2$; $b=8$ бўлса, $c=3$, чунки $2^3=8$.
2) $a=5$; $b=25$ бўлса, $c=2$, чунки $5^2=25$.

Белгиланиши: $\log_a b=c$ ёки $a=10$ ҳолда $\lg b$.

Мисоллар.

1) $\log_3 81=4$, чунки $3^4=81$.
2) $\log_4 2=\frac{1}{2}$, чунки $4^{\frac{1}{2}}=2$.
3) $\log_{0,5}8=-3$, чунки $(0,5)^{-3}=8$.

a ва b сонларга бирор шарт қўймасак $\log_a b$ логарифм мавжуд бўлмаслиги мумкин. Масалан, $\log_2(-4)$ маънога эга эмас, чунки 2 нинг ҳеч қандай даражаси -4 га тенг эмас. Худди шундай сабабга кўра $\log_{-3}3$, $\log_1 5$ логарифмлар мавжуд эмас. Хуллас, $\log_a b$ ушбу шартларда аниқланган: $b>0$, $a>0$ ва $a\neq 1$.

Логарифмларнинг асосий хоссалари:

1) $\log_a a=1$; $\log_a 1=0$ $\quad(a>0,\ a\neq 1)$.
2) $\log_a(b\cdot d)=\log_a b+\log_a d$, $\quad(b>0,\ d>0,\ a>0,\ a\neq 1)$.
3) $\log_a\frac{b}{d}=\log_a b-\log_a d$, $\quad(b>0,\ d>0,\ a>0,\ a\neq 1)$.

4) $\log_a b^n = n\cdot\log_a b$, $(b>0,\ a>0,\ a\neq 1)$.

5) $a^{\log_a b} = b$, $(b>0,\ a>0,\ a\neq 1)$.

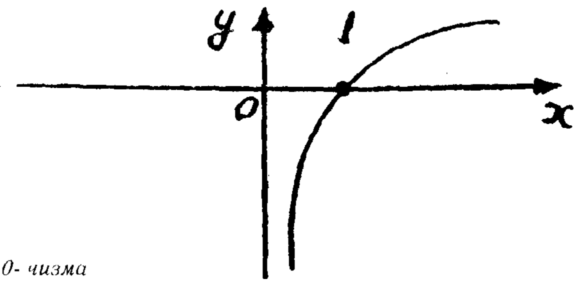
6) $\log_a b = \dfrac{\log_d b}{\log_d a}$, $(b>0,\ a>0,\ a\neq 1,\ d>0,\ d\neq 1)$.

1'. ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯ.

$y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ функция **логарифмик функция** дейилади.

Логарифмик фукнциянинг аникланиш соҳаси $(0,\ +\infty)$ га, ўзгариш соҳаси эса $(-\infty,\ +\infty)$ га тенг.

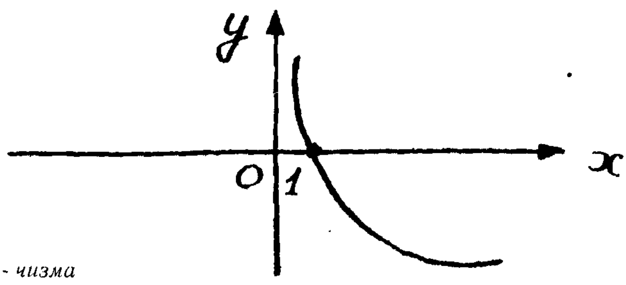
а. Агар $a>1$ бўлса, логарифмик функциянинг графиги ушбу кўринишда бўлади (10-чизма):



10- чизма

Графикдан равшанки, $a>1$ ҳолда $y=\log_a x$ функция ўсувчи.

б) $0<a<1$ ҳолда график қуйидагича бўлади (11-чизма):



11- чизма

Демак, $0<a<1$ ҳолда $y=\log_a x$ функция камаювчи.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

1. Ҳисобланг: $\log_{\frac{1}{7}} 49 + \log_4 8 - 3\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{4}$.
2. Ҳисобланг: $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$.
3. $y=\log_{0,5} x$ функция графигини чизинг.
4. Соддалаштиринг: $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{a} - \log_{a^2} a^3$.

2°. ЛОГАРИФМИК ТЕНГЛАМАЛАР

Номаълум сон логарифм остида ёки асосида катнашган тенгламалар **логарифмик тенгламалар** дейилади.

Масалан,

1) $\log_2 x+\log_4(x+2)=2.$
2) $\log_x 2+\log_x 8=3.$
3) $\log_x(x+6)=2.$

Бевосита логарифм таърифига кўра

$$\log_a x=b, \qquad (a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$$

тенгламанинг ечими

$$x=a^b$$

бўлади.

Энди $\log_a x=b$ кўринишга келтириб ечиладиган логарифмик тенгламаларга мисоллар кўрайлик.

1. $\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)=3$ тенгламани ечинг.

Ечими:

$$\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)=3\Leftrightarrow 1+\frac{1}{x}=2^3\Leftrightarrow 1+\frac{1}{x}=8\Leftrightarrow x=\frac{1}{7}$$

Жавоб: $x=\frac{1}{7}$.

2. (ТошДД, 1989, химия факультети).

$\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$ тенгламани ечинг.

Ечими: $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$ хоссадан фойдалансак,

$\log_3[(x+1)(x+3)=1 \Leftrightarrow (x+1)(x+3)=3^1 \Leftrightarrow x^2+3x+x+$ $+3=3 \Leftrightarrow x^2+4x=0 \Leftrightarrow x_1=0;\ x_2=-4.$

Топилган «ечим»ларни текшириб кўрайлик:

а) $x_1=0\Rightarrow\log_3 1+\log_3 3=0+1=1$

демак, $x_1=0$ ҳақиқатда ечим бўлади.

б) $x_2=-4\Rightarrow\log_3(-4+1)+\log_3(-4+3)=\log_3(-3)+\log_3(-1)$

қўшилувчиларнинг иккиси ҳам маънога эга эмас. Демак, $x_2=-4$ чет илдиз.

Жавоб: $x=0$.

Шундай қилиб логарифмик тенгламани ечишда аниқланиш соҳасини топиш лозим. Акс ҳолда чет илдизлар ҳосил бўлиши мумкин. Буни ҳисобга олганда аввалги мисол қуйидагича ечилиши лозим:

$$\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1\Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0,\\ x+3>0,\\ \log_3[(x+1)(x+3)]=1.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x > -3, \\ (x+1)(x+3) = 3. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x^2 + 4x = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x_1 = 0; \ x_2 = -4. \end{cases} \quad \Leftrightarrow x_1 = 0$$

Ж а в о б : $x = 0$.

3. (ТошДД, 1989, биология факультети.) $\log_{x+2} 3 = 2$ тенгламани ечинг.

Е ч и м и:

$$\log_{x+2} 3 = 2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1, \\ 3 = (x+2)^2. \end{cases} \quad \begin{cases} x > -2, \\ x \neq -1, \\ x+2 = \pm\sqrt{3}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x \neq -1, \\ x_1 = -2 - \sqrt{3}, \ x_2 = -2 + \sqrt{3}. \end{cases} \quad \Leftrightarrow x_2 = -2 + \sqrt{3}.$$

Ж а в о б: $x = -2 + \sqrt{3}$.

Баъзан тенгламани ечиш учун бир асосли логарифмдан бошқа асосли логарифмга ўтиш (6-хосса) зарур бўлади.

4) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$ тенгламани ечинг.

Е ч и м и: Учала логарифмда 2 асосга ўтсак,

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{\log_2 4x}.$$

Бундан эса

$$\log_2 4x = \log_2 x \cdot \log_2 2x,$$

яъни,

$$2 + \log_2 x = \log_2 x \cdot (1 + \log_2 x)$$

тенглама ҳосил бўлади. $y = \log_2 x$ белгилаш киритамиз. У ҳолда

$$2 + y = y(1 + y),$$

$$y^2 = 2.$$

$$y_1 = \sqrt{2}; \ y_2 = -\sqrt{2}.$$

Демак, $\log_2 x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2^{\sqrt{2}}$ ва $\log_2 x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2^{-\sqrt{2}}$.

Ж а в о б: $x_1 = 2^{\sqrt{2}}$; $x_2 = 2^{-\sqrt{2}}$.

Ушбу тенгламаларни ечинг:

5. $\lg^2 x^3 - 10\lg x + 1 = 0$.
6. (ТошДД, 1989, Ф. И. Ф. психология) $\log_2 (2^x + 8) = x + 1$.
7. $\log_{3-x} (x^2 - 2x + 65) = 2$.
8. $x^{\log_3 x} = 9$.

3°. ЛОГАРИФМИК ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Аввал муҳим бир содда ҳолдан бошлайлик. Ушбу $\log_a f(x) \leqslant g(x)$ ($f(x)$ ва $g(x)$ қандайдир ифодалар, $a > 0$, $a \neq 1$) тенгсизликдан $0 < f(x) \leqslant a^{g(x)}$ бўлади, деган хулоса чиқариш мумкинми?

Кўрсаткичли тенгсизликни ечишдаги каби бу ерда ҳам асосий эътиборни логарифмнинг асосига, яъни a га қаратишимиз зарур. Чунки $a > 1$ бўлган ҳолда логарифмик функция ўсувчи, демак

$$\log_a f(x) \leqslant g(x) \text{ ва } a > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \leqslant a^{g(x)}. \end{cases}$$

агар $0 < a < 1$ бўлса, логарифмик функция камаювчи, демак,

$$\log_a f(x) \leqslant g(x) \text{ ва } 0 < a < 1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \geqslant a^{g(x)}. \end{cases}$$

Шундай қилиб, $0 < a < 1$ ҳолда асосий тенгсизлик тескарисига алмашади.

Эслатма, $f(x) > 0$ тенгсизлик логарифмнинг аниқланиш соҳаси!

5. (ТошДД, 1989, география факультети) $\log_4 (13x - 14) < 1$ тенгсизликни ечинг.

Ечими: Берилган тенгсизликдаги логарифм асоси $a = 4 > 1$. Демак,

$$\log_4 (13x - 14) < 1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 13x - 14 > 0, \\ 13x - 14 < 4^1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{14}{13}, \\ x < \frac{18}{13}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{13} < x < \frac{18}{13}.$$

Жавоб: $x \in \left(\frac{14}{13}, \frac{18}{13}\right)$.

6. (ТошДД, 1989, математика факультети)

$\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} (x^2 - 3x + 2) \geqslant 2$ тенгсизликни ечинг.

Ечими: Логарифм асоси $a = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$.

Демак,

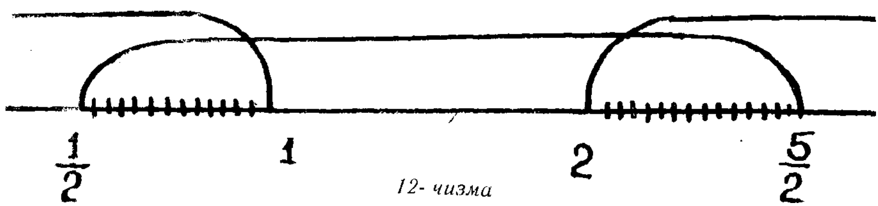
$$\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}(x^2-3x+2)\geqslant 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2>0, \\ x^2-3x+2\leqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2. \end{cases}$$

x^2-3x+2 учҳаднинг илдизлари $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}$, $x_1=1$, $x_2=2$;

$x^2-3x+2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=x^2-3x+\frac{5}{4}$ учҳаднинг илдизлари

$x_1=\frac{1}{2}; x_2=\frac{5}{2}$. Энди тенгсизликни ечишни давом эттирамиз:

$$\begin{cases} x^2-3x+2>0, \\ x^2-3x+\frac{5}{4}\leqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,\ 1)\cup(2,\ +\infty), \\ x\in\left[\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right]. \end{cases}$$



12- чизма

Сонлар ўқида тасвирлаб (12-чизма), тенгсизликнинг ечими $\left[\frac{1}{2},\ 1\right)\cup\left(2,\ \frac{5}{2}\right]$ бўлишини топамиз.

Жавоб: $x\in\left[\frac{1}{2},\ 1\right)\cup\left(2,\ \frac{5}{2}\right]$.

Бошка кўринишдаги логарифмик тенгсизликлар бирор усулда биз кўрган содда ҳолга келтириш орқали ечилиши мумкин.

7. $\log^2_{0,5}(x+3)\geqslant 3\log_{0,25}(x+3)$ тенгсизликни ечинг.

Ечими: аввал бир хил асосга, масалан, 0,5 асосга келтирайлик:

$$\log^2_{0,5}(x+3)\geqslant\frac{3\log_{0,5}(x+3)}{\log_{0,5}0,25}.$$

$\log_{0,5}0,25=2$ бўлишини ҳисобга олиб,

$$\log^2_{0,5}(x+3)\geqslant\frac{3}{2}\log_{0,5}(x+3).$$

Агар $z=\log_{0,5}(x+3)$ белгилаш киритсак, $z^2\geqslant\frac{3}{2}z$ ёки $z\left(z-\frac{3}{2}\right)\geqslant 0$ тенгсизликка келамиз. Бу тенгсизликнинг ечими:

$$z\in(-\infty,\ 0]\cup\left[\frac{3}{2},\ +\infty\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z\leqslant 0, \\ z\geqslant\frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Шундай қилиб,

$$\left[\begin{array}{l}\log_{0,5}(x+3)\leqslant 0,\\ \log_{0,5}(x+3)\geqslant \frac{3}{2}.\end{array}\right.$$

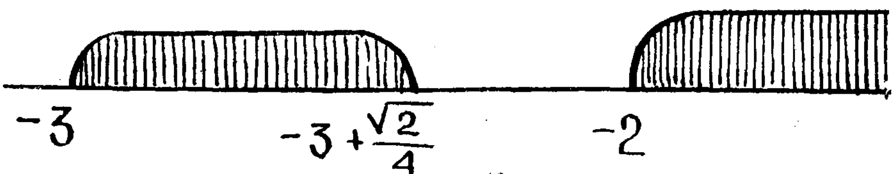
содда логарифмик тенгсизликлар системасига келамиз. Иккала ҳолда ҳам асос $a=0,5<1$. Демак,

а) $\log_{0,5}(x+3)\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow \begin{cases}x+3>0,\\ x+3\geqslant 1.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-3,\\ x\geqslant -2.\end{cases} \quad \Leftrightarrow x\geqslant -2.$

б) $\log_{0,5}(x+3)\geqslant\frac{3}{2} \quad\Leftrightarrow \begin{cases}x+3>0,\\ x+3\leqslant (0,5)^{\frac{3}{2}}\end{cases} \quad\Leftrightarrow \begin{cases}x>-3\\ x\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}-3.\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ -3<x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}-3.$$

Сонлар ўқида тасвирлаб (13-чизма), тенгсизликнинг ечими.



13- чизма

$\left(-3,\ -3+\frac{\sqrt{2}}{4}\right]\cup[-2,\ +\infty)$ эканлигини топамиз.

Жавоб: $x\in\left(-3,-3+\frac{\sqrt{2}}{4}\right]\cup(-2,\ +\infty).$

Баъзан номаълум логарифм асосида қатнашган тенгсизликлар ҳам имтиҳонларда таклиф қилиниши мумкин.

8. $\log_x\left(-1+\frac{5}{2}x\right)>2$ тенгсизликни ечинг.

Ечими: Бу тенгсизликни икки ҳолга ($0<x<1$ ва $x>1$) ажратиб, ҳосил бўлган тенгсизликларнинг ҳар бирини ечиб, сўнг ечимларнинг бирлашмаси, яъни берилган тенгсизлик ечимини топиш мумкин. Айтилган гаплар математик белгилашлар орқали қуйидагича ёзилади:

$$\log_x\left(-1+\frac{5}{2}x\right)>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ -1+\frac{5}{2}x<x^2.\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ -1+\frac{5}{2}x>x^2.\end{cases}\end{array}\right.$$

а) Аввал $\begin{cases} 0<x<1, \\ -1+\frac{5}{2}x<x^2. \end{cases}$ системани ечайлик.

$$\begin{cases} 0<x<1, \\ x^2-\frac{5}{2}x+1>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ \begin{cases} x<\frac{1}{2}, \\ x>2. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{2}$. $-1+\frac{5}{2}x>0 \langle=\rangle x>\frac{2}{5}$. Демак, $\frac{2}{5}<x<1$.

б) Энди $\begin{cases} x>1, \\ -1+\frac{5}{2}x>x^2 \end{cases}$ системани ечамиз.

$$\begin{cases} x>1, \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2.$$

Топилган ечимлар бирлашмаси $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$ бўлади.

Ж а в о б: $x \in \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$.

8-§. АБСОЛЮТ ҚИЙМАТ. АБСОЛЮТ ҚИЙМАТ ҚАТНАШГАН ТЕНГЛАМА ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Ушбу

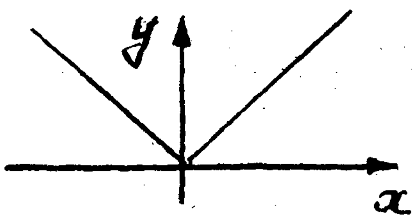
$$|x| = \begin{cases} x, \text{ агар } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ агар } x<0. \end{cases}$$

тенглик орқали аниқланган сон x нинг абсолют қиймати (модули) дейилади. Масалан,

$$|-3|=3; \ |2|=2; \ |\pi-5|=5-\pi.$$

Таърифга кўра $|x| \geqslant 0$, яъни ихтиёрий соннинг абсолют қиймати манфий эмас.

$y=|x|$ функциянинг графиги қуйидагича (14- чизма)



14- чизма

Демак, $(-\infty, 0]$ оралиқда функция камаювчи; $[0, +\infty)$ да ўсувчи.

Абсолют қийматнинг асосий хоссалари:

1) $|x| \geqslant 0$;
2) $|-x| = |x|$;
3) $|xy| = |x|\,|y|$;
4) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;
5) $\sqrt{x^2} = |x|$;
6) $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

1°. АБСОЛЮТ ҚИЙМАТ ҚАТНАШГАН ТЕНГЛАМАЛАР

а) Масалан, $|x| = 5$ тенгламани ечайлик. Равшанки, $x=5$ ва $x=-5$ сонлар тенгламани қаноатлантиради:

$$|5| = 5 \text{ ва } |-5| = 5.$$

Бундан ташқари бошқа ҳеч қандай соннинг абсолют қиймати 5 га тенг эмас.

Шундай қилиб, $|x| = 5$ тенглама $x_1 = 5$ ва $x_2 = -5$ ечимларга эга.

Энди $|x| = 0$ ва $|x| = -2$ тенгламаларни таҳлил қилсак: $|x| = 0$ фақат битта, яъни $x=0$ ечимга эга, $|x| = -2$ эса бирорта ҳам ечимга эга эмас (чунки $|x| \geqslant 0$). Демак, $|x| = a$ тенглама: $a > 0$ бўлса, $x_1 = a$, $x_2 = -a$ иккита ечимга эга, $a=0$ бўлса, $x=0$ битта ечимга эга, ниҳоят $a < 0$ бўлса, ечимга эга эмас.

б) $|x| = x$ тенгламанинг ечимлари $[0, +\infty)$ тўпламдан ва $|x| = -x$ тенгламанинг ечимлари $(-\infty, 0]$ тўпламдан иборат.

а) ва б) даги ғоялардан бошқа тенгламаларни ечиш учун фойдаланиб кўрайлик.

1. $|3\sqrt{x} - 1| = 3$ тенгламани ечинг.

Ечими: а) га кўра берилган тенглама иккита

$$3\sqrt{x} - 1 = 3,$$

$$3\sqrt{x} - 1 = -3$$

тенгламаларга ажралади.

$$3\sqrt{x} - 1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{16}{9};$$

$$3\sqrt{x} - 1 = -3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -\frac{2}{3} \text{ ечими йўқ.}$$

Жавоб: $x = \frac{16}{9}$.

2. $|x+3| = |3x-7|$ тенгламани ечинг.

Ечими: Агар $|a| = |b|$ бўлса, $a = \pm b$. Демак,

$$|x+3| = |3x-7| \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 3x-7, \\ x+3 = -(3x-7). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = -10, \\ 4x = 4. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 5;\ x_2 = 1.$$

3. (ТошДД, 1989, математика факультети)
$|2x-3|=3-2x$ тенгламани ечинг.

Ечими: б) га кўра $|x|=-x \Leftrightarrow x\leqslant 0$. Демак, $|2x-3|=-(2x-3) \Leftrightarrow 2x-3\leqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant \frac{3}{2}$.

Жавоб: $x\in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

4. $x^2-5|x|+6=0$ тенгламани ечинг.

Ечими: Агар $x\geqslant 0$ бўлса, $|x|=x$; агар $x<0$ бўлса, $|x|=-x$. Шунинг учун

$$x^2-5|x|+6=0\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\geqslant 0, \\ x^2-5x+6=0. \end{cases} \quad \begin{cases} x\leqslant 0, \\ x^2+5x+6=0. \end{cases}$$

Аввал $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ x^2-5x+6=0. \end{cases}$ системани ечамиз:

$$\begin{cases} x\geqslant 0, \\ x_1=2;\ x_2=3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1=2;\ x_2=3.$$

Энди $\begin{cases} x<0, \\ x^2+5x+6=0. \end{cases}$ системани ечамиз:

$$\begin{cases} x<0, \\ x^2+5x+6=0. \end{cases} \Leftrightarrow x_3=-3;\ x_4=-2.$$

Жавоб: $x_1=2$; $x_2=3$; $x_3=-3$; $x_4=-2$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

Ушбу тенгламаларни ечинг.

1. (ТошДД, 1989, математика факультети) $|3x-5|=5-3x$.
2. $|x^2+x-2|=x+2$.
3. $|x+1|+1=\frac{x+1}{|x|}$.
4. $|x+7|=|x-2|+|x-3|$.

2°. АБСОЛЮТ ҚИЙМАТ ҚАТНАШГАН ТЕНГСИЗЛИКЛАР.

Ушбу $|x|<5$ ва $|x|>3$ тенгсизликларни ечишдан бошлайлик.

Равшанки, $|x|<5$ тенгсизликнинг ечими $x\in(-5, 5)$ бўлади (текшириб кўринг).

$|x|>3$ тенгсизликнинг ечими эса бошқача бўлиб, у иккита қисмдан иборат: $(-\infty, -3)$ ва $(3, +\infty)$ (текширинг).

Демак, $a>0$ бўлса, $|x|<a$ тенгсизликнинг ечими $(-a, a)$ бўлади, $|x|>a$ тенгсизликнинг ечими эса $(-\infty, -a)\cup(a, +\infty)$ тўпламдан иборат.

5. (ТошДД, 1989, география факультети) $|3x-2|\leqslant 1$ тенгсизликни ечинг

Ечими:

$$|3x-2|\leqslant 1 \Leftrightarrow -1\leqslant 3x-2\leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2\geqslant -1, \\ 3x-2\leqslant 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x\geqslant 1, \\ 3x\leqslant 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant \frac{1}{3}, \\ x\leqslant 1. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1.$$

Жавоб: $x\in \left[\frac{1}{3},\ 1\right]$.

6. $4\,|x+2|<2x+10$ тенгсизликни ечинг.

Ечими:

$$4\,|x+2|<2x+10 \Leftrightarrow |x+2|<\frac{x}{2}+\frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\right)<x+2<\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$$

Демак, ушбу тенгсизликлар системасига келамиз:

$$\begin{cases} x+2>-\frac{x}{2}-\frac{5}{2}, \\ x+2<\frac{x}{2}+\frac{5}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2}>-\frac{9}{2}, \\ \frac{x}{2}<\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ x<1. \end{cases} \Leftrightarrow -3<x<1.$$

Жавоб: $x\in(-3,\ 1)$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

Ушбу тенгсизликларни ечинг:

5. $|1+2x|\leqslant|3x-7|$.
6. $|x^2-5x+4|\leqslant 2$.
7. $\frac{1+2\,|x|}{3-|x|}\leqslant -2$.
8. $|x^2-5|>2x$.

9-§. ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ. ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ТЕНГЛАМАЛАР

Аввалги параграфларда кўрилган тенгламаларнинг барчасини умумий ҳолда $f(x)=0$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда $f(x)$ номаълум x га боғлиқ ифода бўлиб, агар у квадрат учҳад бўлса ($f(x)=ax^2+bx+c$), биз тенгламани квадрат тенглама деб атадик: агар, масалан, $f(x)$ илдиз остида x қатнашган ифода бўлса, тенгламани иррационал тенглама деб атадик ва ҳоказо. Муҳими барча ҳолларда биз фақат битта номаълум, яъни x ни топиш масаласи билан танишдик.

[illegible] номаълумлар сони икки ва ундан кўп ҳам бўлиши [illegible]

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases}$$

икки номаълумли (номаълумлар x ва y) иккита тенгламалар системаси дейилади. Бу ерда $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ лар номаълум x ва y қатнашган ифодалар. Масала тенгламаларнинг иккисини ҳам бир вақтда қаноатлантирувчи x ва y сонларни топишдан иборат. Бундай x ва y лар системанинг ечими дейилади ва (x, y) кўринишида ёзилади.

Тенгламалар системасига мисоллар:

1) $\begin{cases} x+y-2=0, \\ x-y-5=0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2-5=0, \\ 3xy-2=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2^{x-y}-4=0, \\ x+y+7=0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y}-\log_2(x+3)=0, \\ 5x^2+7xy-3y^2=0. \end{cases}$

Изоҳ. Тенгликларнинг ўнг томонларида албатта 0 сони туриши шарт эмас, чунки баъзи ҳоллар тенгликнинг ўнг томонига ўтказилган ҳолда ёзилиши мумкин.

Энди тенгламалар системасининг муҳим хусусий ҳоллари ва уларни ечиш усуллари билан танишамиз.

1°. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ.

Ушбу

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

кўринишдаги (ёки шундай кўринишга келтириш мумкин бўлган) тенгламалар системаси икки номаълумли чизиқли тенгламалар системаси дейилади.

Масалан,

1) $\begin{cases} 2x-3y=5, \\ -x+7y=-2{,}3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+5}{7}, \\ \dfrac{2x+3y}{2}=0{,}5x-4y+3. \end{cases}$

Чизиқли тенгламалар системасини ечиш усуллари.

а) **Тенглаштириш усули.** Бу усулда номаълумлардан бирини, масалан, x ни иккала тенгламадан ҳисоблаб (яккалаб), ҳосил бўлган ифодаларни тенглаштирамиз ва y га нисбатан тенгламани ечиб, аввал y ни сўнг x ни топамиз.

1. Ушбу $\begin{cases} 3x+2y=-7, \\ 5x+3y=2. \end{cases}$ системани ечинг.

Ечими.

$$\begin{cases} 3x+2y=-7, \\ 5x+3y=2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=-7-2y, \\ 5x=2-3y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-7-2y}{3}, \\ x=\frac{2-3y}{5}. \end{cases}$$

Демак,

$$\frac{-7-2y}{3}=\frac{2-3y}{5},$$
$$-35-10y=6-9y,$$
$$-y=41;\ y=-41.$$

Номаълум $x=\frac{2-3y}{5}$ бўлгани учун,

$$x=\frac{2+123}{5}=25.$$

Жавоб: $x=25;\ y=-41.$

2. Системани ечинг.

$$\begin{cases} x+2y=4, \\ y-3x=7. \end{cases}$$

Ечими:

$$\begin{cases} x+2y=4, \\ y-3x=7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=4-x, \\ y=7+3x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{4-x}{2}, \\ y=7+3x \end{cases}$$

Демак,

$$\frac{4-x}{2}=7+3x \Leftrightarrow 4-x=14+6x \Leftrightarrow -7x=10 \Leftrightarrow x=-\frac{10}{7}.$$

$$y=7+3x \Leftrightarrow y=7-\frac{30}{7}=\frac{49-30}{7}=\frac{19}{7}.$$

Жавоб: $x=-\frac{10}{7};\ y=\frac{19}{7}.$

Изоҳ. Системанинг ечимини (x, y) жуфтлик кўринишида ёзиш қабул қилинган. Масалан, 1- мисолда жавоб $(25;\ -41)$ кўринишда, 2- мисолда эса $\left(-\frac{10}{7};\ \frac{19}{7}\right)$ кўринишда ёзилади (*диққат*: аввал x нинг, сўнг y нинг қиймати ёзилади!).

б) **Ўрнига қўйиш усули.** Бу усулда тенгламаларнинг биридан бирор номаълум, масалан x ни иккинчи номаълум орқали ифодалаб, бу ифодани иккинчи тенгламадаги номаълум x нинг ўрнига қўйсак бир номаълумли тенглама ҳосил бўлади. Уни ечиб номаълумлар топилади.

3. Системани ечинг:

$$\begin{cases} 3x+4y=7, \\ 5x-6y=-1. \end{cases}$$

Ечими:

$$\begin{cases} 3x+4y=7, \\ 5x-6y=-1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7-4y}{3}, \\ 5x-6y=-1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7-4y}{3}, \\ 5*\frac{7-4y}{3}-6y=-1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7-4y}{3}, \\ 35-20y-18y=-3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7-4y}{3}, \\ -38y=-38. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7-4y}{3}, \\ y=1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7-4}{3}, \\ y=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$$

Жавоб: (1, 1).

в) **Номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули.** Тенгликнинг икки томонини бирор сонга кўпайтириш ва иккита тенгликни қўшиш (чап томони чап томонига, ўнг томони эса ўнг томонига) натижасида яна тенглик ҳосил бўлади.

Номаълумларни кетма-кет йўқотиш усулида тенгламалар шундай сонларга кўпайтирилиб, сўнг иккала тенглама қўшиладики, натижада номаълумлардан бири қатнашмайдиган тенглама ҳосил бўлсин. Демак, бир номаълумли битта тенглама ҳосил бўлади. Уни ечиб, номаълумлардан бири, сўнг иккинчиси топилади.

4. Системани ечинг.

$$\begin{cases} 0{,}3x+0{,}6y=0{,}5, \\ 0{,}9y-0{,}1y=0{,}2. \end{cases}$$

Ечими: Биринчи тенгламани -3 га кўпайтириб, сўнг тенгламаларни ҳадлаб қўшамиз:

$$\begin{cases} 0{,}3x+0{,}6y=0{,}5, \\ 0{,}9x-0{,}1y=0{,}2. \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ +\begin{cases} -0{,}9x-1{,}8y=-1{,}5 \\ \underline{0{,}9x-0{,}1y=0{,}2} \end{cases} \atop \quad 0-1{,}9y=-1{,}3. \right.$$

Демак, $-1{,}9y=-1{,}3 \Leftrightarrow y=\frac{13}{19}$.

Энди x ни топиш учун иккинчи тенгламани 6 га кўпайтириб, сўнг тенгламаларни ҳадлаб қўшамиз:

$$\begin{cases} 0{,}3x+0{,}6y=0{,}5, \\ 0{,}9x-0{,}1y=0{,}2. \end{cases} \left\{ +\begin{cases} -0{,}3x+0{,}6y=0{,}5 \\ \underline{5{,}4x-0{,}6y=1{,}2} \end{cases} \atop \quad 5{,}7x+0=1{,}7. \right.$$

Демак, $5{,}7x=1{,}7 \Leftrightarrow x=\frac{1{,}7}{5{,}7}$.

Жавоб: $\left(\frac{17}{57}; \frac{13}{19}\right)$

Изох. Икки номаълумли чизиқли тенгламалар системаси учун фақат қуйидаги ҳоллар ўринли бўлиши мумкин:

а) ягона ечимга эга (масалан, 1—4- мисоллар),

б) чексиз кўп ечимга эга (масалан, $\begin{cases} x+y=10, \\ x+y=10. \end{cases}$

в) бирорта ҳам ечим йўқ. (масалан, $\begin{cases} x+y=5, \\ x+y=15. \end{cases}$

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

Ушбу чизиқли тенгламалар системасини ечинг.

1. $\begin{cases} \frac{x-y}{2}=\frac{x+y}{3}, \\ 2x+3y=7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} -2x+7y=0, \\ x+3y=13. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y=3, \\ 5y+7x=2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x-y=1, \\ x+2y-6=0. \end{cases}$

2°. ЧИЗИҚЛИ БЎЛМАГАН СИСТЕМАЛАР

Олий ўқув юртларига кирувчилар учун таклиф этиладиган вариантларда чизиқли бўлмаган тенгламалар системаси ҳам учрайди. Агар икки тенгламанинг бири чизиқли бўлса, бундай системани ўрнига қўйиш усули билан бир номаълумли тенглама келтириб ечиш мумкин.

5. Системани ечинг.

$$\begin{cases} x-2y=2, \\ xy=12. \end{cases}$$

Ечими: Биринчи тенгламадан $x=2+2y$. Бу ифодани иккинчи тенгламадаги x нинг ўрнига қўйсак:

$$(2+2y)y=12,$$
$$2y^2+2y-12=0,$$
$$y^2+y-6=0.$$
$$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm5}{2};\ y_1=-3,\ y_2=2.$$

Энди $x=2+2y$ тенгликка қайтиб, $x_1=-4$, $x_2=6$ эканлигини топамиз.

Жавоб: $(-4;\ -3)$ ва $(6;\ 2)$.

6. Системани ечинг.

$$\begin{cases} x+y=5, \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$$

…енгламадан $x=5-y$ ифодани иккинчи

$$(5-y)^3+y^3=35,$$
$$125-75y+15y^2-y^3+y^3=35,$$
$$15y^2-75y+90=0,$$
$$y^2-5y+6=0,\ y_{1,2}=\frac{5\pm1}{2},\ y_1=2;\ y_2=3.$$

Яна $x=5-y$ тенгликка қайтиб, $x_1=3$ ва $x_2=2$ бўлишини топамиз.

Жавоб: (3; 2) ва (2; 3).

7. Системани ечинг.

$$\begin{cases} 4^{(x-y)^2-1}=1, \\ 5^{x+y}=125. \end{cases}$$

Ечими:

$$\begin{cases} 4^{(x-y)^2-1}=1, \\ 5^{x+y}=125. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=1, \\ x+y=3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=\pm1, \\ x+y=3. \end{cases}$$

Чизиқли тенгламалар системаси ҳосил бўлди. Уни ечамиз:

$$\left\{ \begin{array}{l} +\begin{cases} x-y\pm1 \\ x+y=3 \end{cases} \\ \overline{\ 2x=3\pm1.} \end{array} \right. \Leftrightarrow x=\frac{3\pm1}{2};\ x_1=1;\ x_2=2.$$

Энди $x+y=3$, яъни $y=3-x$ тенгликдан $y_1=2$, $y_2=1$ бўлишини топамиз.

Жавоб: (1; 2) ва (2; 1)

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

5. (ТошДД, 1989, география факультети)

$$\begin{cases} x^2-y^2=55, \\ x+y=11. \end{cases}$$

6. (Тошкент халқ хўжалиги университети, 1989.)

$$\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{13}{6}. \\ x+y=5. \end{cases}$$

7. $\begin{cases} \log_4 x-\log_4 y=0, \\ x^2-5y^2+4=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0, \\ x+y=-8. \end{cases}$

3°. ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ТЕНГЛАМАЛАР

8. «a» параметрнинг қандай қийматларида $x^2-2ax+4=0$ тенгламанинг ечимлари мавжуд эмас? Шу қийматлар ичида энг кичик бутун сонни кўрсатинг.

Ечими: квадрат тенглама фақат $D=b^2-4ac<0$ бўлганда ечимга эга эмас. Демак,

$$(-2a)^2-4\times1\times4<0,$$

яъни

$$4a^2<16\ a^2<4 \Leftrightarrow a^2-4<0 \Leftrightarrow a\in(-2,\ 2).$$

Равшанки, $(-2, 2)$ интервалдаги энги кичик бутун сон -1 бўлади.

Жавоб: $(-2,\ 2)$ ва -1.

9. «a» ва «b» параметрларнинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} x+(1-a)y=b, \\ (2-b)x+3y=-3. \end{cases}$$

чизиқли тенгламалар системаси чексиз кўп ечимга эга?

Ечими: Биринчи тенгламадан $x=b-(1-a)y$.
Бу ифодани иккинчи тенгламага қўямиз:

$$(2-b)[b-(1-a)y]+3y=-3.$$

Демак, номаълум y га нисбатан тенглама ҳосил бўлади. Уни соддалаштириб:

$$[3-(2-b)(1-a)]y=-3-b(2-b)$$

чизиқли тенгламага келамиз.

Маълумки, (3-§) $mx=n$ чизиқли тенглама фақат $m=0$ ва $n=0$ ҳолдагина чексиз кўп ечимга эга.

Демак,

$$\begin{cases} 3-(2-b)(1-a)=0, \\ -3-b(2-b)=0. \end{cases}$$

Энди бу тенгламалар системасини ечамиз:

$$\begin{cases} (2-b)(1-a)=3, \\ b^2-2b-3=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a=\frac{3}{2-b}, \\ b_1=-1;\ b_2=3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-\frac{3}{2-b}, \\ b_1=-1;\ b_2=3. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1=0;\ a_2=4; \\ b_1=-1;\ b_2=3. \end{cases}$$

Жавоб: $(0;\ -1)$ ва $(4;\ 3)$.

10. "a" параметрнинг қандай қийматларида
$x^2+(2a-1)x+a^2+2=0$ тенгламанинг илдизларидан бири иккинчисидан 2 марта катта бўлади?

[illegible] илдизлар мавжуд бўлиши учун албатта $D\geqslant 0$ бўлиши [illegible]:

$$(2a-1)^2-4(a^2+2)\geqslant 0,$$
$$4a^2-4a+1-4a^2-8\geqslant 0,$$
$$4a\leqslant -7,\ a\leqslant -\frac{7}{4}.$$

Энди илдизлардан бири x_1 бўлсин, у ҳолда $x_2=2x_1$ бўлиб, Виет теоремасига кўра:

$$\begin{cases} x_1+x_2=3x_1=-(2a-1), \\ x_1x_2=2x_1^2=a^2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1-2a}{3}, \\ x_1^2=\dfrac{a^2+2}{2}. \end{cases}$$

Демак,

$$\left(\frac{1-2a}{3}\right)^2=\frac{a^2+2}{2},$$
$$2(1-2a)^2=9(a^2+2),$$
$$2-8a+8a^2=9a^2+18,$$
$$a^2+8a+16=0,\ a_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64-64}}{2}=-4.$$

Шундай қилиб, $a=-4$ бўлиб, у $a\leqslant -\frac{7}{4}$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Ж а в о б : $a=-4$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

9. "a" нинг қандай қийматларида

$$a(x^2+x+1)=x^2-4x-7$$

тенглама фақат битта ечимга эга?

10. $2x^2+ax-6=0$ тенгламанинг ечимларидан бири 3. Иккинчи ечим ва a ни ҳисобланг.

11. "p" параметрнинг қандай қийматларида

$$x^2-(p+1)px+p^3=0$$

квадрат тенгламанинг катта илдизи 0,5 дан катта бўлади?

12. "a" қандай бўлганда $x^2+ax+1=0$ ва $x^2+x+a=0$ квадрат тенгламалар умумий илдизга эга?

10-§. ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

1°. Ушбу 0°, 30°, 45°, 60°, 90° бурчаклар а с о с и й б у р ч а к л а р дейилади. Улар радиан ўлчовида мос равишда 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ га тенг.

Қуйидаги жадвалда асосий бурчакларнинг тригонометрик функциялари қийматлари келтирилган:

бурч / ф-я	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Изоҳ. 1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ ва $\operatorname{ctg} 0$ аниқланмайди. 2) Агар 0 ни $\frac{\sqrt{0}}{2}$ деб, $\frac{1}{2}$ ни $\frac{\sqrt{1}}{2}$ деб ва 1 ни $\frac{\sqrt{4}}{2}$ деб ёзсак, биринчи сатр $\frac{\sqrt{0}}{2}$, $\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{1}}{2}$ бўлиб, эсда сақлаш учун қулай кўринишга келади.

Жадвал билан ишлаш усулини мисолларда кўрайлик.

1. Ҳисобланг:

$$\sin^2\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+2\cos\frac{\pi}{3}$$

Ечими: Жадвалдан $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ ва $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ эканлигини топамиз. Демак,

$$\sin^2\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+2\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

Жавоб: $\frac{3}{4}$.

2. Ҳисобланг:

$$2\arcsin\frac{1}{2}-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}.$$

Ечими: Жадвалдан $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ (биринчи сатрдаги $\frac{1}{2}$ нинг юқорисидаги бурчак $\frac{\pi}{6}$), $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$ (2- сатрдаги $\frac{\sqrt{2}}{2}$ нинг юқорисидаги бурчак $\frac{\pi}{4}$ ва $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$ (3- сатрдаги $\sqrt{3}$ нинг юқорисидаги бурчак $\frac{\pi}{3}$) қийматларни топсак:

$$2\arcsin\frac{1}{2}-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}=$$
$$=2\times\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}.$$

Жавоб: $\frac{5\pi}{12}$.

Баъзан ушбу формулалардан фойдаланишга тўғри келади:

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad\arcsin(-\alpha)=-\arcsin\alpha;$
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\quad\arccos(-\alpha)=\pi-\arccos\alpha;$
$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$ $\quad\operatorname{arctg}(-\alpha)=-\operatorname{arctg}\alpha;$
$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$ $\quad\operatorname{arcctg}(-\alpha)=\pi-\operatorname{arcctg}\alpha;$

Масалан,

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3},$$
$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}.$$

Изох: 1) Жадвалда кўрсатилмаган қийматлар учраса, уларни ҳисобламай қолдириш мумкин ёки махсус жадваллардан фойдаланиш зарур. Масалан, $\sin 70°$, $\arccos 0{,}8$. 2) $|\sin x|\leqslant 1$ ва $|\cos x|\leqslant 1$ бўлгани учун, $|a|>1$ ҳолда $\arcsin\alpha$ ва $\arccos\alpha$ ифодалар маънога эга эмас. Масалан, $\arcsin\sqrt{3}$, $\arccos(-2{,}3)$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

Ҳисобланг:

1. $\sin^2\frac{\pi}{2}+\sin^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^2 0.$
2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos 0+2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$
3. $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$
4. $\arccos(-1)+\operatorname{arcctg}(-1)+\arcsin(-1)+\operatorname{arctg}(-1).$

2°. ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАР

Тригонометрик функция остида номаълум қатнашган тенгламалар **тригонометрик тенгламалар** дейилади. Масалан,

1) $\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x\times\cos 3x}=1,$

2) $2(x-3)\times\sin x=|x-3|,$

3) $\cos kx=1+2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$

Ушбу $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg}x=a$, $\operatorname{ctg}x=a$ тенгламалар содда тригонометрик тенгламалар дейилади.

а) $\sin x = a$ тенгламани ечиш.

Берилган тенглама фақат $|a| \leqslant 1$ шарт бажарилгандагина ечимга эга (чунки, $|\sin x| \leqslant 1$). Равшанки $\arcsin a$ бурчак $\sin x = a$ тенгламанинг ечимидир. Бу ечим б о ш е ч и м дейилади.

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Бундан ташқари $\sin x$ функция 2π даврли функция бўлгани учун $\arcsin a + 2\pi$, $\arcsin a - 2\pi$, $\arcsin a + 4\pi$, $\arcsin a - 4\pi$ ва ҳоказо бурчакларнинг барчаси ҳам

$$\sin x = a$$

тенгламанинг ечими бўлади. Уларнинг барчасини

$$\arcsin a + 2k\pi, \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Шунингдек

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

келтириш формуласидан $\pi - \arcsin a$ бурчак ва демак

$$\pi - \arcsin a + 2k\pi, \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots)$$

бурчакларнинг барчаси ҳам берилган тенгламанинг ечими бўлади.

Шундай қилиб,

$$\sin x = a$$

тенгламанинг барча ечимлари

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots)$$

формуладан топилади.

3. $2\sin x - 1 = 0$ тенгламани ечинг.

Е ч и м и: $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$.

Энди формуладан фойдаланамиз $\left(a = \frac{1}{2}\right)$

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + k\pi \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

Жадвалдан $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ эканлигини топамиз. Демак,

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

Ж а в о б: $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots)$.

$$\frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{2 - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)} = 1 \text{ тенгламани ечинг.}$$

Ечими: Умумий махражга келтириб:

$$1+\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=2-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

ёки

$$2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=2-1$$

бўлишини топамиз. Шундай қилиб,

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{2}$$

формуладан фойдаланиб $\left(a=\frac{1}{2}\right)$:

$$\frac{\pi}{3}-x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{2}+k\pi\ \ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),$$

$$\frac{\pi}{3}-x=(-1)^k\ \frac{\pi}{6}+k\pi,$$

$$-x=(-1)^k\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ \ x=-(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-k\pi.$$

Демак, $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-k\pi.$

Жавоб: $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-k\pi,\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

4. (ТошДД, 1989, ҳуқуқшунослик факультети)

$\frac{1}{\sin x}\left(3-\frac{1}{\sin x}\right)=2$ тенгламани ечинг.

Ечими: $\frac{1}{\sin x}=t$ белгилаш киритайлик. У ҳолда

$$t(3-t)=2$$

ёки

$$t^2-3t+2=0$$

квадрат тенглама ҳосил қиламиз. Уни ечиб

$$t_1=1,\ t_2=2$$

бўлишини топамиз. Бу қийматларни $\frac{1}{\sin x}=t$ белгилашга келтириб қўйсак, аввал

$$\frac{1}{\sin x}=1\Leftrightarrow\sin x=1\Leftrightarrow x=(-1)^k\arcsin 1+k\pi,$$

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

сўнг

$$\frac{1}{\sin x}=2 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

ечимларни топамиз.

Жавоб: $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$, $\quad k=0, \quad \pm1, \pm2, \ldots)$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

Ушбу тенгламаларни ечинг:

5. $2\sin x+\sqrt{3}=0$.

6. $\sin x=2\sqrt{2}$.

7. $5\sin^2x-2\sin x-3=0$.

8. $\frac{1-2\sin x}{\sin x-2}=\frac{1+3\sin x}{5\sin x-1}$.

б) $\cos x=a$ тенгламани ечиш.

Бу тенглама ҳам фақат $|a|\leqslant 1$ шарт бажарилгандагина ечимга эга.

Равшанки, $\arccos \alpha$ бурчак $\cos x=a$ тенгламанинг ечими бўлиб, $0\leqslant \arccos\alpha\leqslant\pi$ шартни қаноатлантиради.

$\cos(-x)=\cos x$ бўлгани учун $-\arccos a$ ҳам берилган тенгламанинг ечими. Ниҳоят, $\cos x$ функция 2π даврли функция бўлгани учун

$$\cos x=a$$

тенгламанинг барча ечимлари

$$x=\pm\arccos a+2k\pi, \ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

формуладан топилади.

1. $2\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}$ тенгламани ечинг.

Ечими:

$$2\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Энди формуладан фойдаланамиз $\left(a=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$x+\frac{\pi}{5}=\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2k\pi, (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

$$x=-\frac{\pi}{5}\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2k\pi=-\frac{\pi}{5}\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi.$$

Жавоб: $x=-\frac{\pi}{5}\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

2. $2\cos^2 x-5\cos x+2=0$ тенгламани ечинг.

белгилаш киритсак,

$$2t^2-5t+2=0$$

тенгламани ҳосил киламиз. Уни ечиб:

$$t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm3}{4};\quad t_1=\frac{1}{2},\quad t_2=2$$

t нинг топилган қийматларини $\cos x=t$ белгилашга келтириб қўйсак,

$$\cos x=\frac{1}{2},\quad \cos x=2$$

тригонометрик тенгламалар ҳосил бўлади.

$\cos x=2$ тенглама ечимга эга эмас, чунки $2>1$, $\cos x=\frac{1}{2}$ тенгламанинг ечими эса

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Жавоб: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

Ушбу тенгламаларни ечинг.

9. $2\cos 3x+1=0$.

10. $\frac{1}{\cos x}\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)=2$.

11. $\frac{2+3\cos x}{3+2\cos x}=1$.

12. (ТошДД, 1989, ҳуқуқшунослик факультети) $4\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=3$.

в) $\operatorname{tg} x=a$ ва $\operatorname{ctg} x=a$ тенгламаларни ечиш.

$\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ функцияларни даври π бўлгани учун:

$$x=\operatorname{arctg} a+k\pi\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

формуладан $\operatorname{tg} x=a$ тенгламанинг барча ечимлари,

$$x=\operatorname{arcctg} a+k\pi\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

формуладан эса $\operatorname{ctg} x=a$ тенгламанинг барча ечимлари топилади.

Изоҳ. Мазкур ҳолларда a ихтиёрий сон: $-\infty<a<+\infty$.

3. $\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-1=0$ тенгламани ечинг.

Ечими. Берилган тенгламадан

$$\operatorname{tg}\frac{3x}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

эканлигини топамиз. У ҳолда tg $x=a$ тенгламани ечиш формуласидан $\left(a=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$\frac{3x}{2}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}+k\pi \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

яъни $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$

Ж а в о б: $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$

4. $\operatorname{ctg}^2 x-3\operatorname{ctg} x-4=0$ тенгламани ечинг.

Е ч и м и: $\operatorname{ctg} x=t$ белгилаш киритсак,

$$t^2-3t-4=0$$

квадрат тенглама ҳосил бўлади. Демак, $t_1=-1$, $t_2=4$ бўлиб, берилган тенглама

$$\operatorname{ctg} x=-1 \text{ ва } \operatorname{ctg} x=4$$

содда тригонометрик тенгламаларга ажралади.

$\operatorname{arcctg}(-1)=\pi-\operatorname{arcctg} 1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$, arcctg 4 эса жадвалда йўқ.

Демак,

$$\operatorname{ctg} x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k\pi \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

$$\operatorname{ctg} x=4 \Leftrightarrow x=\operatorname{arcctg} 4+k\pi \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

Ж а в о б : $x_1=\frac{3\pi}{4}+k\pi$; $x_2=\operatorname{arcctg} 4+k\pi$ $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

Ушбу тенгламаларни ечинг:

13. $3\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

14. $\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x+2=0$.

15. $\frac{3\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=2$.

16. $\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x-2)=0$.

Мураккаброқ тригонометрик тенгламаларни ечиш учун тригонометрик формулаларни билиш ва улардан фойдалана олиш зарур.

А с о с и й т р и г о н о м е т р и к ф о р м у л а л а р

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

2) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

3) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$.

4) Келтириш формулалари:

бурч. / ф-я	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$
ctg	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$

5) Қўшиш формулалари:

1) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$

2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$

3) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$

4) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$

5) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta};$

6) $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}.$

6) Иккиланган бурчак формулалари:

1) 1) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$

2) $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$

3) $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha};$

4) $\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\alpha}.$

7) **Йиғиндини кўпайтмага айлантириш формулалари:**

1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$

3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

4) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

8) Кўпайтмани йиғиндига айлантириш формулалари:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

5. (ТошДД, 1989, география факультети) $\sin 3x+\sin x=0$ тенгламани ечинг.

Ечими. Йиғиндини кўпайтмага айлантириш формулаларидан

$$\sin 3x+\sin x=2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}=2\sin 2x\cos x.$$

Шунинг учун берилган тенглама ушбу

$$2\sin 2x\cos x=0$$

тенгламага тенг кучли. Ўз навбатида охирги тенглама иккита содда тригонометрик тенгламага ажралади:

$$\sin 2x=0 \text{ ва } \cos x=0.$$

Уларни ечиб, $x_1=\frac{k\pi}{2}$ ва $x_2=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, ...)$ бўлишини топамиз.

Жавоб: $x_1=\frac{k\pi}{2}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

6. (ТошДД, 1989, химия факультети) $2\sin x+3\sin 2x=0$ тенгламани ечинг.

Ечими. Иккиланган бурчак формулаларига кўра:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x.$$

Буни берилган тенгламага қўйсак:

$$2\sin x+6\sin x\cos x=0$$

ёки

$$2\sin x(1+3\cos x)=0$$

тенглама ҳосил бўлади.

Демак, $\sin x=0$ ва $1+3\cos x=0$ тенгламаларни ечиш кифоя.

Жавоб: $x=k\pi$ $x=\pm(\pi-\arccos\frac{1}{3})+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, ...)$

$\cos 9x-\cos 7x-\cos(\pi+3x)-\sin(\frac{\pi}{2}+x)=0$ тенгламани ечинг.

Ечими. Келтириш формулаларига кўра:

$$\cos(\pi+3x)=-\cos 3x; \ \sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x.$$

У ҳолда берилган тенглама ушбу кўринишга келади:

$$\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0.$$

Йиғиндини кўпайтмага айлантириш формуласига асосан:

$$\cos 9x-\cos 7x=-2\sin\frac{9x+7x}{2}\sin\frac{9x-7x}{2}=-2\sin 8x\sin x;$$

$$\cos 3x-\cos x=-2\sin\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}=-2\sin 2x\sin x.$$

Бу ифодаларни тенгламага қўйсак,

$$-2\sin 8x\sin x-2\sin 2x\sin x=0$$

$$\sin x(\sin 8x+\sin 2x)=0.$$

Йиғиндини кўпайтмага айлантириш формуласига кўра:

$$\sin 8x+\sin 2x=2\sin\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}=-2\sin 5x\cos 3x.$$

Шундай қилиб, берилган тенглама

$$2\sin x\cos 3x\sin 5x=0$$

кўринишга келиб, учта содда тригонометрик тенгламаларга ажралади:

$$\sin x=0;\ \sin 5x=0;\ \cos 3x=0.$$

Уларни ечсак:

$$x_1=k\pi;\ x_2=\frac{k\pi}{5}\ \text{ва}\ x_3=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots)$$

келиб чиқади.

Аслида $x_2=\frac{k\pi}{5}$ ечим $x_1=k\pi$ ечимни ўз ичига олади.

Ж а в о б: $x=\frac{k\pi}{5}$ ва $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$, $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots)$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

Ушбу тенгламаларни ечинг:

17. $\sin 2x\sin 6x=\cos x\cos 3x$;
18. $(1-\operatorname{tg}x)(1+\sin 2x)=1+\operatorname{tg}x$;
19. $\operatorname{ctg}\frac{x}{4}+\operatorname{ctg}\frac{3x}{4}=2\sin x$;
20. $1+\operatorname{tg}2x=\frac{1-\sin 2x}{\cos^2 2x}$.

3°. ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Номаълум тригонометрик функция остида қатнашган тенгсизликлар **тригонометрик тенгсизликлар** дейилади. Бундай тенгсизликлар асосан **содда тригонометрик тенгсизлик** деб аталувчи ушбу

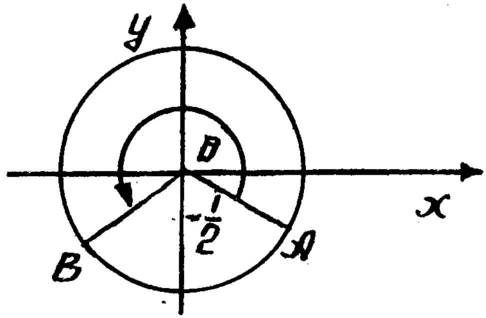
$$\sin x\leqslant a,\ \sin x>a,\ \cos x\geqslant a,\ \operatorname{tg}x<a,\ \dots$$

тенгсизликларга келтириш усули билан ечилади.

7. $\sin x\geqslant -\frac{1}{2}$ тенгсизликни ечинг.

Ечими. Бирлик доирада ординатаси $-\frac{1}{2}$ бўлган нуқталарни белгилаб оламиз (15- чизма):

У ҳолда OA радиус абсцисса ўқи билан $-\frac{\pi}{6}$ OB, радиус эса $\frac{7\pi}{6}$ бурчак ташкил этиб, берилган тенгсизликнинг ечими OA дан OB гача мусбат йўналишдаги барча бурчаклардан иборат, яъни



15- чизма

$$-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}.$$

Ниҳоят, $\sin x$ даври 2π га тенг бўлгани учун

$$2k\pi - \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

— берилган тенгсизликнинг барча ечимлари бўлади.

Жавоб: $2k\pi - \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$.

8. $\operatorname{tg} x \leqslant 1$ тенгсизликни ечинг.

Ечими: Берилган тенгсизликнинг $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқдаги ечими $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ бўлади; $\operatorname{tg} x$ даври π га тенг функция.

Шунинг учун $k\pi - \frac{\pi}{2} < x \leqslant k\pi + \frac{\pi}{4}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ берилган тенгсизликнинг ечими бўлади.

Жавоб: $k\pi - \frac{\pi}{2} < x \leqslant k\pi + \frac{\pi}{4}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

Ушбу тенгсизликларни ечинг:

21. $2\sin x < 1$.

22. $\operatorname{tg} 5x > 1$.

23. $\operatorname{ctg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$.

24. $\sin^2 x < \frac{1}{2}$.

11- §. АРИФМЕТИК ВА ГЕОМЕТРИК ПРОГРЕССИЯЛАР

1°. АРИФМЕТИК ПРОГРЕССИЯЛАР.

Маълумки, ушбу

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

сонлар кетма-кетлигининг иккинчи ҳадидан бошлаб кейинги ҳар бир ҳади ўзидан олдинги ҳадига ўзгармас d сонни қўшиш натижасида ҳосил бўлса, кетма-кетлик арифметик прогрессия ташкил этади дейилади. Демак,

$$a_1,\ a_2=a_1+d,\ a_3=a_2+d,\ \ldots,\ a_n=a_{n-1}+d,\ \ldots$$

бўлади. Одатда a_1 — прогрессиянинг биринчи ҳади, a_n эса прогрессиянинг n — ҳади (ёки умумий ҳади), d эса прогрессиянинг айирмаси дейилади.

Равшанки, арифметик прогрессия ҳосил қилиш учун унинг биринчи ҳади ва айирмасини билиш кифоядир. Масалан,

1) биринчи ҳади $a_1=1$, айирмаси $d=1$ бўлган арифметик прогрессия қуйидагича

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

бўлади.

2) биринчи ҳади $a_1=1$, айирмаси $d=2$ бўлган арифметик прогрессия қуйидагича

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2n-1,\ \ldots$$

бўлади.

Арифметик прогрессиянинг хоссалари

1^0. Ихтиёрий натурал n сони $(n>1)$ учун

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

бўлади.

2^0. Арифметик прогрессиянинг n — ҳади

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

бўлади.

3^0. Арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси $S_n=a_1+a_2+\ \ldots\ +a_n$ учун ушбу

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\,n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\,n$$

формула ўринли.

2^0. ГЕОМЕТРИК ПРОГРЕССИЯЛАР.

Маълумки, ушбу

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots \qquad (b_1\neq 0)$$

сонлар кетма-кетлигининг иккинчи ҳадидан бошлаб кейинги ҳар бир ҳади ўзидан олдинги ҳадига ўзгармас q сонни $(q\neq 1)$ кўпайтиришдан ҳосил бўлса, кетма-кетлик геометрик прогрессия ташкил этади деб айтилади. Демак, b_1, $b_2=b_1q$, $b_3=b_2q$, ..., $b_n=b_{n-1}q$, ... бўлади. Одатда b_1 — прогрессиянинг биринчи ҳади, b_n — прогрессиянинг n-ҳади (ёки умумий ҳади), q эса прогрессиянинг махражи дейилади.

Равшанки, геометрик прогрессия ҳосил қилиш учун унинг биринчи ҳади ва махражини билиш кифоядир. Масалан,

1) биринчи ҳади $b_1=2$, махражи $q=2$ бўлган геометрик прогрессия қуйидагича

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots$$

бўлади.

2) биринчи ҳади $b_1=3$, махражи $q=-2$ бўлган геометрик прогрессия қуйидагича

$$3,\ -6,\ 12,\ -24,\ \ldots$$

бўлади.

Геометрик прогрессиянинг хоссалари.

1^0. Ихтиёрий натурал n сони $(n>1)$ учун

$$b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$$

бўлади.

2^0. Геометрик прогрессиянинг n-ҳади

$$b_n=b_1q^{n-1}, \quad (n\geqslant 1)$$

бўлади

3^0. Геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси $S_n=b_1+b_2+\ \ldots\ +b_n$ учун ушбу

$$S_n\frac{b_nq-b_1}{q-1}=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}, \quad (q\neq 1)$$

формула ўринли.

Энди арифметик ва геометрик прогрессияга оид масалалар ечишга ўтамиз.

1. Арифметик прогрессиянинг учинчи ва тўққизинчи ҳадларининг йиғиндиси 8 бўлса, прогрессиянинг дастлабки ўн битта ҳади йиғиндиси топилсин.

Масаланинг шартига кўра

$$a_3+a_9=8.$$

Агар (арифметик прогрессиянинг 2^0-хоссасига кўра)

$$a_3=a_1+(3-1)d=a_1+2d,$$
$$a_9=a_1+(9-1)d=a_1+8d$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$a_3+a_9=a_1+2d+a_1+8d=2a_1+10d$$

бўлади. Демак,

$$2a_1+10d=8.$$

Арифметик прогрессиянинг 3^0-хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$S_{11}=\frac{2a_1+(11-1)d}{2}\cdot 11=\frac{2a_1+10d}{2}\cdot 11=\frac{8}{2}11=44.$$

Демак,

$$S_{11}=44.$$

2. Арифметик прогрессиянинг иккинчи ва бешинчи ҳадларининг йиғиндиси 8, учинчи ва еттинчи ҳадларининг йиғиндиси эса 14 га тенг. Шу прогрессия топилсин.

Масаланинг шартига кўра

$$\begin{cases} a_2+a_5=8, \\ a_3+a_7=14 \end{cases}$$

бўлади. Агар

$$a_2=a_1+d,\ a_3=a_1+2d,\ a_5=a_1+4d,\ a_7=a_1+6d$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$a_2+a_5=8 \Rightarrow a_1+d+a_1+4d=8 \Rightarrow 2a_1+5d=8;$$

$$a_3+a_7=14 \Rightarrow a_1+d+a_1+6d=14 \Rightarrow 2a_1+8d=14$$

бўлиб, ушбу

$$\begin{cases} 2a_1+5d=8, \\ 2a_1+8d=14 \end{cases}$$

системага келамиз. Бу системани ечамиз:

$$\begin{cases} 2a_1+5d=8, \\ 2a_1+8d=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1+5d=8, \\ a_1+4d=7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1+5d=8, \\ a_1=7-4d. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(7-4d)+5d=8, \\ a_1=7-4d. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14-8d+5d=8, \\ a_1=7-4d. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3d=8-14, \\ a_1=7-4d. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d=2, \\ a_1=7-4d. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=2, \\ a_1=7-4\cdot 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=2, \\ a_1=-1. \end{cases}$$

Демак, изланаётган арифметик прогрессиянинг биринчи ҳади $a_1 = -1$, айирмаси $d=2$ га тенг экан. Прогрессиянинг ўзи эса қуйидагича

$$-1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \dots,\ (2n-3),\ \dots$$

бўлади.

3. Геометрик прогрессиянинг тўртинчи ҳади иккинчи ҳадидан 24 га ортиқ. Иккинчи ва учинчи ҳадлари йиғиндиси 6 га тенг. Шу геометрик прогрессия топилсин

Масаладаги геометрик прогрессияни тузиш учун прогрессиянинг биринчи ҳади b_1 ни ҳамда махражи q ларни топишимиз керак.

Шартга кўра

$$\begin{cases} b_4=b_2+24, \\ b_2+b_3=6 \end{cases}$$

бўлади.

Геометрик прогрессиянинг 2^0 хоссасига биноан

$$b_2=b_1\cdot q,\ b_3=b_1\cdot q^2,\ b_4=b_1q^3$$

бўлади. Натижада юқоридаги система қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{cases} b_4=b_2+24, \\ b_2+b_3=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1q^3=b_1q+24, \\ b_1q+b_1q^2=6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1q^3=b_1q+24, \\ b_1(q+q^2)=6. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1q^3=b_1q+24, \\ b_1=\frac{6}{q+q^2}, \ (q\neq -1). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1(q^3-q)=24, \\ b_1=\frac{6}{q+q^2}, \ (q\neq -1). \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6}{q+q^2}(q^3-q)=24 \Rightarrow \frac{6}{q+q^2}(q^3-q)(q+q^2)=(q+q^2)24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(q^3-q)=24(q+q^2) \Rightarrow q^2-1=4(1+q) \Rightarrow q^2-1-4-4q=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q^2-4q-5=0.$$

Шундай қилиб, q ни топиш учун ушбу

$$q^2-4q-5=0$$

квадрат тенгламага келамиз. Шу тенгламани ечамиз:

$$q_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+4\cdot5\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm6}{2};$$

$$q_1=\frac{4+6}{2}=5, \ q_2=\frac{4-6}{2}=-1,$$

Юқоридаги

$$b_1=\frac{6}{q+q^2}$$

тенгликка q нинг қийматларини қўйиб, прогрессиянинг биринчи ҳадини топамиз:

$b_1=\frac{6}{5+5^2}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$ **($q\neq-1$ бўлганлигини эътиборга олиб, унинг бу қийматини қарамаймиз).**

Шундай қилиб, геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади $b_1=\frac{1}{5}$, махражи эса $q=5$ бўлиши топилади. Прогрессиянинг ўзи қуйидагича

$$\frac{1}{5}, \ 1, \ 5, \ 25, \ \dots$$

бўлади.

4. Геометрик прогрессия ташкил этувчи шундай тўртта сон топилсинки, четки ҳадлар йиғиндиси 112, ўрта ҳадлар йиғиндиси эса 48 бўлсин.

Айтайлик қидирилаётган сонлар

$$b_1, \ b_2, \ b_3, \ b_4$$

бўлсин. У ҳолда масала шартига биноан

$$\begin{cases} b_1+b_4=112, \\ b_2+b_3=48. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1+b_1q^3=112, \\ b_1q+b_1q^2=48. \end{cases}$$

бўлади. (Бу ерда $q=-1$ бўла олмайди, чунки $b_1q+b_1q^2=48$ тенглик

$q=-1$ бўлганда маънога эга бўлмаган $0=48$ тенгликка айланади.) Демак, $q\neq -1$. Шуни эътиборга олиб юқоридаги системадан топамиз:

$$\frac{b_1(1+q^3)}{b_1(q+q^2)}=\frac{112}{48}\Rightarrow\frac{(1+q)(q^2-q+1)}{q(1+q)}=\frac{7}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(q^2-q+1)=7q\Rightarrow 3q^2-3q+3-7q=0\Rightarrow 3q^2-10q+3=0.$$

Бу $3q^2-10q+3=0$ тенгламани ечамиз:

$$q_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-4\cdot3\cdot3}}{3\cdot2}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{10\pm8}{6}.$$

$$q_1=\frac{10+8}{6}=3,\quad q_2=\frac{10-8}{6}=\frac{1}{3}.$$

Юқоридаги

$$b_1q+b_1q^2=48\Rightarrow b_1(q+q^2)=48\Rightarrow b_1=\frac{48}{q+q^2}$$

тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$b_1=\frac{48}{3+3^2}=\frac{48}{12}=4,$$

$$b_2=\frac{48}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}}=\frac{48}{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}=\frac{48}{\frac{4}{9}}=\frac{48\cdot9}{4}=108\,.$$

Демак, изланаётган сонлар

1) 4, 12, 36, 108 $\quad(q=3,\ b_1=4)$;

2) 108, 36, 12, 4 $\quad(q=\frac{1}{3},\ b_1=108)$;

бўлади.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Арифметик прогрессиянинг саккизинчи ҳади 40, йигирманчи ҳади эса — 20. Прогрессиянинг ўн олтинчи ҳади топилсин.

2. Агар арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳади йиғиндиси

$$S_n=an^2+bn \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

формула билан ифодаланса, шу прогрессияни топинг.

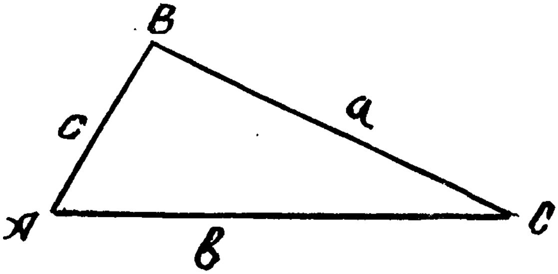
3. Агар a, $a+1$, $a+7$ сонлар геометрик прогрессияни ташкил қилса, a ни топинг.

4. Агар 1, a, b сонлар арифметик прогрессияни, a, 1, b сонлар эса геометрик прогрессияни ташкил этса, a ва b сонларни ҳисобланг.

12-§. УЧБУРЧАКЛАР

1°. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

Текисликда учта нуқта берилган бўлиб, учаласи бир тўғри чизиқда ётмасин. Шу нуқталарнинг ихтиёрий иккитасини кесмалар билан туташтирамиз. Шу кесмалар билан чегараланган шакл у ч б у р ч а к дейилади. Нуқталар учбурчакнинг у ч л а р и, кесмалар эса т о м о н л а р и дейилади. Белгиланиши: A, B, C — учлар, a, b, c — томонлар (16- чизма)



16- чизма

Учбурчак учта бурчакка: $\angle BAC$, $\angle ACB$, $\angle CBA$ эга. Белгиланиши α, β, γ.

М е д и а н а — учи билан қарши томон ўртасини туташтирувчи кесма. Учбурчакда 3 та медиана бўлиб, улар m_a, m_b, m_c каби белгиланади.

Б и с с е к т р и с а — бурчакни тенг иккига бўлувчи тўғри чизиқнинг учбурчак ичидаги кесмаси.

Б а л а н д л и к — учдан қарши томон аниқлаган тўғри чизиққа ўтказилган перпендикуляр.

Учбурчакда учта баландлик бўлиб, улар h_a, h_b, h_c каби белгиланади.

Ў р т а ч и з и қ — икки томон ўрталарини туташтирувчи кесма.

Ўрта чизиқлар сони ҳам 3 та.

Икки учбурчакдан бирини иккинчисига ўхшашлик алмаштириши ёрдамида ўтказиш мумкин бўлса, бундай учбурчаклар ў х ш а ш дейилади.

П е р и м е т р — учала томон узунликлари йиғиндиси. Белгиланиши P.

Учбурчаклар томонларига қараб уч турга бўлинади:

а) т е н г т о м о н л и ($a=b=c$),

б) т е н г ё н л и (a, b, c ларнинг қандайдир иккиси тенг).

в) т у р л и т о м о н л и (a, b, c ларнинг ҳеч қандай иккиси тенг эмас).

И з о ҳ. Аниқлик киритилмаган ҳолларда «учбурчак» атамаси «турли томонли учбурчак» маъносида ишлатилади.

Учбурчаклар бурчакларига қараб уч турга ажратилади:

а) ў т к и р б у р ч а к л и ($\alpha<\frac{\pi}{2}, \beta<\frac{\pi}{2}, \gamma<\frac{\pi}{2}$,

б) т ў ғ р и б у р ч а к л и (бир бурчаги $\frac{\pi}{2}$ га тенг),

в) ў т м а с б у р ч а к л и (бурчаклардан бири $\frac{\pi}{2}$ дан катта).

Учбурчакнинг учала томонига уриниб ўтувчи айлана **ички чизилган айлана** дейилади (бундай айлана мавжуд, ягона ва учбурчак ичида жойлашган). Ички чизилган айлана радиуси r орқали белгиланади.

Учбурчакнинг учала учидан ўтувчи айлана **ташқи чизилган айлана** дейилади ва унинг радиуси R орқали белгиланади.

2°. АСОСИЙ МУНОСАБАТЛАР

1) $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ учбурчак бурчаклари йиғиндиси 180°, яъни π га тенг).

2) Учала медиана бир нуқтада кесишади. Бу нуқта медианани 2:1 нисбатда бўлади. Медиана учбурчакни иккита юзалари тенг учбурчакларга ажратади. Медианалар узунликлари:

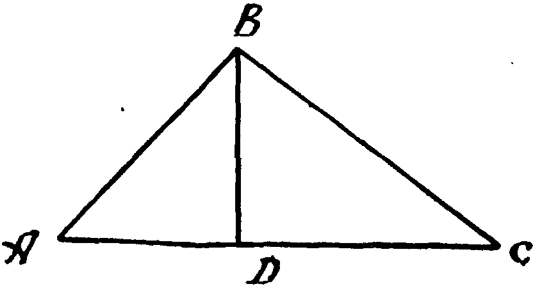
$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2};$$

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2};$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$$

формулалардан топилади.

3) Учала биссектриса бир нуқтада кесишади. Бу нуқта ички чизилган айлана маркази бўлади. Биссектриса қарши томонни (ўзи ўтказилган томонни) ён томонларга пропорционал бўлакларга ажратади (17- чизма).



17- чизма

BD биссектриса бўлса, $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DC}$.

Биссектриса узунликлари:

$$l_a=\frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c};\quad l_b=\frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c};\quad l_c=\frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$$

формулалардан топилади.

4) Учала баландлик **давом эттирилганда** бир нуқтада кесишади.

Баландлик узунликлари:

$$h_a=\frac{2S}{a};\quad h_b=\frac{2S}{b};\quad h_c=\frac{2S}{c}$$

формулалардан топилади. Бу ерда S учбурчак юзаси бўлиб, уни, масалан, Г е р о н   ф о р м у л а с и дан топиш мумкин:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ;\ p=\frac{a+b+c}{2}$$ — яримпериметр.

5) Учбурчак томонларининг ўрталаридан шу томонларга чиқарилган учта перпендикуляр бир нуқтада кесишади. Бу нуқта ташқи чизилган айлана маркази бўлади.

6) Учбурчакнинг ўрта чизиғи учинчи томонга (асосга) параллел ва унинг ярмига тенг.

7) Синуслар теоремаси:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

8) Қосинуслар теоремаси:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

9. Учбурчак юзаси:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c;$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta\ ;$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ,\ p=\frac{a+b+c}{c};$$

$$S=\frac{abc}{4R},\ S=pr.$$

3°. МУҲИМ ХУСУСИЙ ҲОЛЛАР.

а) Т ў ғ р и   б у р ч а к л и   у ч б у р ч а к (18- чизма).

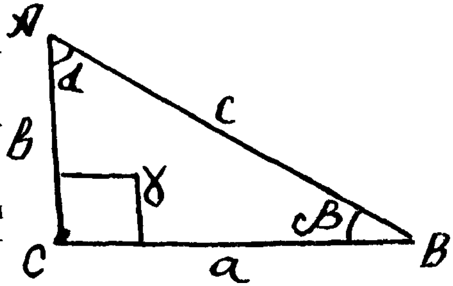
$\angle\gamma=90°,\ \alpha+\beta=90°,$

AC ва BC — катетлар, AB — гипотенуза.

$a^2+b^2=c^2$ (Пифагор теоремаси).

$S=\frac{1}{2}ab;\ R=\frac{c}{2};\ r=\frac{a+b-c}{2};$

ташқи чизилган айлана маркази гипотенузанинг ўртасида жойлашган.



18- чизма

$$\frac{a}{c}=\sin\alpha;\ \frac{a}{c}=\cos\beta;$$
$$\frac{b}{c}=\sin\beta;\ \frac{b}{c}=\cos\alpha.$$

$$\frac{a}{b}=\mathrm{tg}\alpha;\ \frac{a}{b}=\mathrm{ctg}\beta;\ \frac{b}{a}=\mathrm{ctg}\alpha;\ \frac{b}{a}=\mathrm{tg}\beta.$$

б) Тенг томонли учбурчак

$$\alpha=\beta=\gamma=60^\circ,\ S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ r=\frac{a\sqrt{3}}{6},\ R=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

4°. Учбурчакнинг берилган элементлари орқали талаб қилинган элементларини топиш масаласи учбурчакни ечиш масаласи дейилади. Масалан:

1. Учбурчак томонлари 5, 6 ва 7 см. Унинг юзасини, баландликларини ва бурчакларини топинг.

Ечими: $a=5$, $b=6$ ва $c=7$ бўлсин.

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5+6+7}{2}=9.$$

Герон формуласидан

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{9\cdot4\cdot3\cdot2}=6\sqrt{6}.$$

Баландликлари:

$$S=\frac{1}{2}ah_a\Rightarrow h_a=\frac{2S}{a}=\frac{12\sqrt{6}}{5};\ h_b=\frac{2S}{b}=2\sqrt{6},\ h_c\frac{2S}{c}=\frac{12\sqrt{6}}{7}.$$

Косинуслар теоремасидан бурчакларни топамиз:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{36+49-25}{84}=\frac{5}{7};\ \alpha=\arccos\frac{5}{7};$$

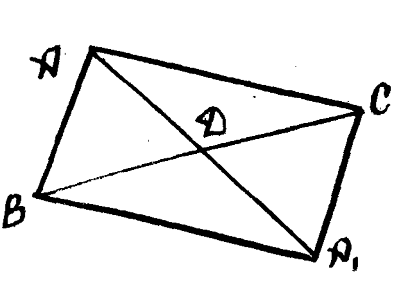
$$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{25+49-36}{70}=\frac{19}{35};\ \beta=\arccos\frac{19}{35};$$

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{25+36-49}{60}=\frac{1}{5};\ \gamma=\arccos\frac{1}{5}.$$

Жавоб: $S=6\sqrt{6}$, $h_a=\frac{12\sqrt{6}}{5}$, $h_c=\frac{12\sqrt{6}}{7}$, $h_b=2\sqrt{6}$,

$\alpha=\arccos\frac{5}{7}$, $\beta=\arccos\frac{19}{35}$, $\gamma=\arccos\frac{1}{5}$.

2. ABC учбурчакда AD медиана бўлиб, $AD=26$, $AB=27$ ва $AC=29$. Учбурчак юзасини ҳисобланг.



19- чизма

Ечими: A нуқтани D нуқтага нисбатан симметрик акслантирамиз (19- чизма). У ҳолда ADC ва BDA' учбурчаклар ўзаро тенг, чунки $BD=DC$, $AD=DA'$ ва $\angle ADC=\angle BDA'$.

Шунинг учун ABC учбурчак юзаси ABA' учбурчак юзасига тенг. ABA' учбурчакда $AB=27$, $BA'=29$, $AA'=26+26=52$. Герон формуласига кўра

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{27+29+52}{2}=54;$$

$$S=\sqrt{54\cdot 27\cdot 25\cdot 2}=27\cdot 2\cdot 5=270.$$

Жавоб: $S=270$ кв. бирл.

3. Катетлари 3 ва 4 бўлган тўғри бурчакли учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланаларнинг марказлари орасидаги масофани ҳисобланг (20- чизма).

Ечими: Масалан, $BA=3$ ва $AC=$ $=4$ бўлсин. У ҳолда $AB^2=BC^2+AC^2$, яъни $AB=5$.

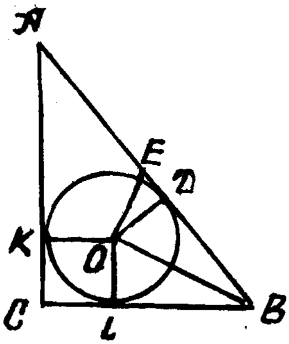
1) Тўғри бурчакли учбурчакка ташқи чизилган айлана маркази (E нуқта) гипотенузанинг ўртасида жойлашган.

$$AE=EB=R=5/2.$$

2) Ички чизилган айлана радиуси

$$r=\frac{S}{p}=\frac{ab}{2p}=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{3\cdot 4}{3\cdot 4+5}=1.$$

3) $OK\perp AC$, $OL\perp BC$ ва $AC\perp BC$ эканлигидан $OK=CL=1$ келиб чиқади. Демак, $BL=BC-CL=2$.



20- чизма

4) OB биссектриса, $OL=OD=R$ бўлгани учун OLB ва OBD учбурчаклар тенг. Шунинг учун,

$BD=BL=2$. У ҳолда $DE=BE-BD=\frac{5}{2}-2=0{,}5$.

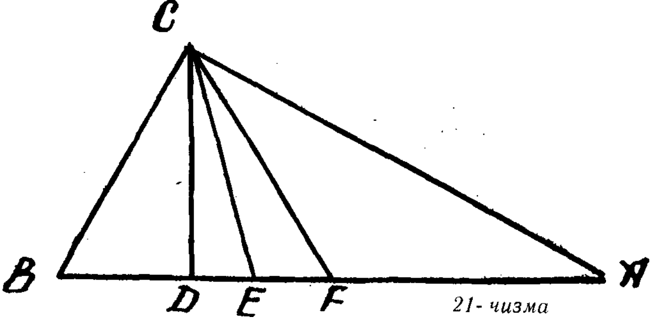
5) Ниҳоят, ODE тўғри бурчакли учбурчакдан

$$OE^2=OD^2+DE^2=1+0{,}25=1{,}25;$$

$$OE=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Жавоб: Ички ва ташқи чизилган айланалар марказлари орасидаги масофа $\frac{\sqrt{5}}{2}$ га тенг.

4. Учбурчакнинг бир учидан туширилган баландлик, биссектриса медианалар шу учдаги бурчакни тенг тўртта бўлакка бўлади. Шу учбурчакнинг бурчакларини ҳисобланг (21- чизма).



21- чизма

Ечими. Берилганлар:
ΔABC;
CD — баландлик;
CE — биссектриса;
CF — медиана;

$\angle BCD = \angle DCE = \angle ECF = \angle CFA = \frac{\gamma}{4}$.

Топиш керак: $\alpha = ?$, $\beta = ?$, $\gamma = ?$

1) CF медиана бўлгани учун $BF = FA$. Агар $BF = BD + DF$ ва $FA = AD - DF$ эканлигини эътиборга олсак:

$$BD + DF = AD - DF,$$

яъни

$$AD - BD = 2DF \qquad (*)$$

тенглик келиб чиқади.

2) CD баландлик бўлгани учун BCD дан $BD = CD \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}$;

CDF дан $\angle DCF = \frac{\gamma}{2}$, демак, $DF = CD \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$; DCA дан $\angle DCA = \frac{3\gamma}{4}$.

3) BD, DF ва AD кесмаларнинг топилган қийматларини (*) тенгликка қўйсак,

$$CD \cdot \operatorname{tg}\frac{3\gamma}{4} - CD \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{4} = 2CD \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$

яъни

$$\operatorname{tg}\frac{3\gamma}{4} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{4} = 2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

тригонометрик тенгламани ҳосил қиламиз.

4) Бу тенгламани ечиш учун $\frac{\gamma}{4} = x$ белгилаш киритайлик:

$$\operatorname{tg}3x - \operatorname{tg}x = 2\operatorname{tg}2x;$$

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\sin 2x}{\cos 2x};$$

$$\frac{\sin 3x\cos x - \cos 3x\sin x}{\cos 3x\cos x} = \frac{2\sin 2x}{\cos 2x};$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x\cos x} = \frac{2\sin 2x}{\cos 2x};$$

$$\cos 2x\left[\frac{1}{\cos 3x\cos x} - \frac{2}{\cos 2x}\right] = 0;$$

$$\sin 2x \cdot \frac{(\cos 2x - 2\cos 3x\cos x)}{\cos x\cos 2x\cos 3x} = 0;$$

a) $\sin 2x=0 \Leftrightarrow 2x=n\pi \Leftrightarrow x=\frac{n\pi}{2} \Rightarrow \gamma=2n\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

бу ечим геометрик маънога эга эмас.

б) $\cos 2x-2\cos 3x \cos x=0;$

$\cos 2x-(\cos 4x+\cos 2x)=0;$

$\cos 4x=0 \Rightarrow 4x=\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$

Демак, $\gamma=4x=\frac{\pi}{2}$. У ҳолда BCD дан

$$\angle B=\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}.$$

Ниҳоят $\alpha=\pi-\beta-\gamma=\pi-\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}$.

Жавоб. Учбурчак бурчаклари:

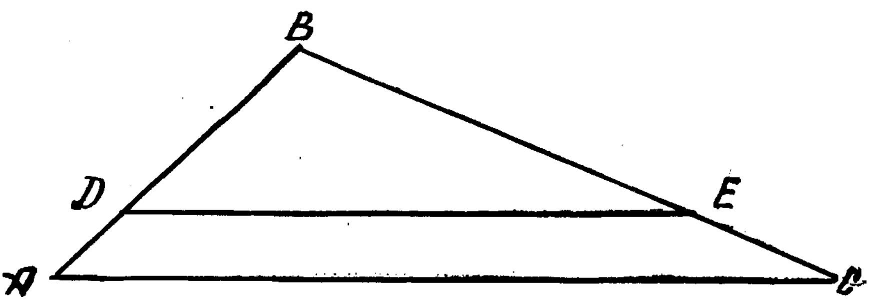
$$\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2} \quad (22{,}5^\circ, 67{,}5^\circ, 90^\circ).$$

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 3:4 нисбатда, юзаси эса 6 га тенг бўлса, учбурчак томонларини ҳисобланг.

2. Тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлана радиуси 2, ташқи чизилган айлана радиуси эса 5 бўлса, катетларни топинг.

3. Учбурчакнинг асоси $AC=20$ см. Шу асосга параллел бўлган ва ён томонларни туташтирувчи кесма узунлиги $DE=17$ см (22- чизма).



22- чизма

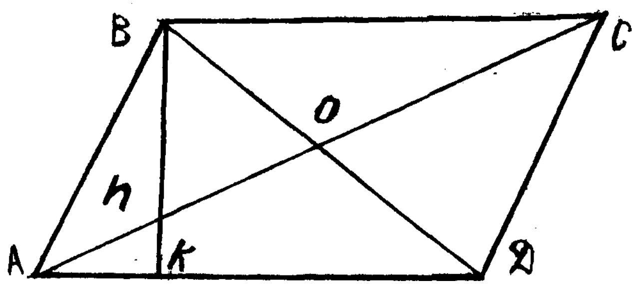
ABC ва DBE учбурчакларнинг юзаларининг нисбатини ҳисобланг.

4. Тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлана гипотенузага уриниш нуқтасида гипотенузани узунликлари 5 см ва 12 см бўлган кесмаларга ажратади. Катетлар узунликларини ҳисобланг.

13- §. ТЎРТБУРЧАКЛАР

1°. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Қарама-қарши томонлари параллел бўлган тўртбурчак **параллелограмм** дейилади (23- чизма).



23- чизма

Қўшни бўлмаган учларни туташтирувчи кесма диагональ дейилади.

AB ва CD параллел томонлар;

AD ва BC ҳам параллел томонлар;

BD ва AC диагоналлар.

Асосий хоссалар ва муносабатлар

1) Диагоналлар кесишиш нуқтаси параллелограммнинг симметрия маркази бўлади.

2. Қарама-қарши томонларнинг узунликлари ўзаро тенг:

$$AB = CD \text{ ва } AD = BC.$$

3) Параллелограммнинг қарама-қарши бурчаклари ўзаро тенг:

$$\angle BAD = \angle BCD \text{ ва } \angle ABC = \angle ADC.$$

4) Қўшни бурчаклар йиғиндиси π га (180° га) тенг.

5) Диагоналлар кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади:

$$BO = OD \text{ ва } AO = OC,$$

6) Барча томонлар квадратларининг йиғиндиси диагоналлар квадратларининг йиғиндисига тенг:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$$

ёки

$$2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2.$$

7) Параллелограмм юзаси: а) $S = ah_a$, бу ерда $a = AD$ асос, $h_a = BK$ — баландлик; б) $S = ab\sin\alpha$ бу ерда $b = AB$ — томон, $\alpha = \angle BAD$ — томон ва асос орасидаги бурчак.

2°. РОМБ.

Барча томонлари ўзаро тенг бўлган параллелограмм ромб дейилади.

Ромбнинг қўшимча хоссалари.

1) Ромб диагоналлари ўзаро перпендикуляр.

2) Ромб диагоналлари ички бурчакларнинг биссектрисалари бўлади.

3) Ромб юзаси $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$, бу ерда d_1, d_2 — ромб диагоналлари.

3°. ТЎҒРИ ТЎРТБУРЧАК

Барча бурчаклари $\frac{\pi}{2}$ га тенг бўлган параллелограмм **тўғри тўртбурчак** дейилади.

1) Тўғри тўртбурчак диагоналлари ўзаро тенг.

2) Тўғри тўртбурчак юзаси $S=ab$, бу ерда a ва b тўғри тўртбурчакнинг қўшни томонлари.

4°. КВАДРАТ

Барча томонлари ўзаро тенг бўлган тўғри тўртбурчак **квадрат** дейилади.

Агар a — квадрат томони, d эса диагонали бўлса:

$$S=a^2;\ S=\frac{d^2}{2};\ d=a\sqrt{2}.$$

5°. ТРАПЕЦИЯ

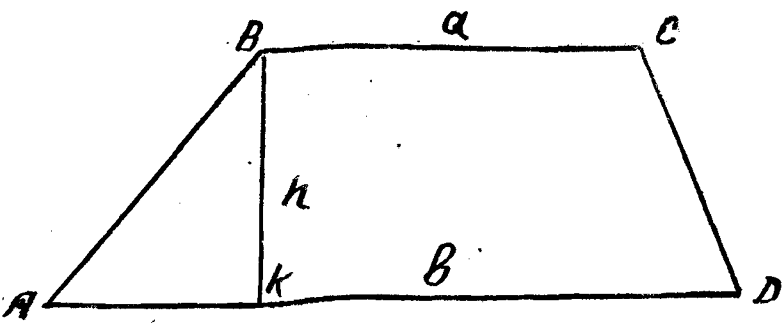
Асослар деб аталувчи икки томони ўзаро параллел ва ён томонлар деб аталувчи колган икки томони эса параллел бўлмаган тўртбурчак **трапеция** дейилади.

Ён томонлар ўрталарини туташтирувчи кесма трапециянинг **ўрта чизиғи** дейилади.

Асосий хоссалар.

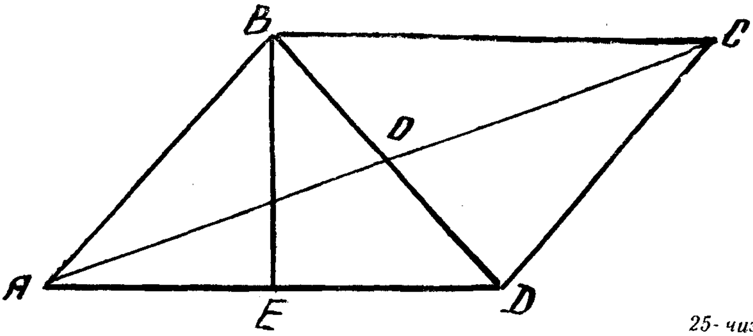
1) Трапециянинг ўрта чизиғи асосларга параллел бўлади ва асослар йиғиндисининг ярмига тенг.

2) Трапеция юзаси: $S=\frac{a+b}{2}h$, бу ерда a ва b — асослар, h эса баландлик (24- чизма).



24- чизма

1. Ромбнинг ўтмас бурчакли учидан ўтказилган баландлик қаршисидаги томонни узунликлари m ва n бўлган кесмаларга ажратади. Ромб диагоналларини ҳисобланг (25- чизма).



25- чизма

Е ч и м и . Берилган
$ABCD$ — ромб
BE — баландлик,
$AE = m$,
$ED = n$.

BD ва AC диагоналларни топиш керак.

1) $AD = AE + ED = m + n$, $ABCD$ ромб бўлгани учун $AB = AD = m + n$.

2) ABE ва BED тўғри бурчакли учбурчаклардан Пифагор теоремасига асосан BE ни топиб:

$$BE^2 = AB^2 - AE^2 = (m+n)^2 - m^2,$$
$$BE^2 = BD^2 - ED^2 = BD^2 - n^2.$$

иккала ифодани тенглаштирамиз:

$$(m+n)^2 - m^2 = BD^2 - n^2.$$

Демак,

$$BD^2 = (m+n)^2 - m^2 + n^2.$$
$$BD^2 = 2mn + 2n^2 = 2n(m+n),$$
$$BD = \sqrt{2n(m+n)}.$$

3) AC диагонални топиш учун AOD тўғри бурчакли учбурчакдан фойдаланамиз:

$$AO^2 + OD^2 = AD^2,$$
$$AO^2 = AD^2 - OD^2 = (m+n)^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2$$

$$AO^2 = (m+n)^2 - \frac{n(m+n)}{2} = (m+n)\left(m+n-\frac{n}{2}\right),$$

$$AO^2 = (m+n)\frac{(2m+n)}{2}.$$

Шундай қилиб, $AO = \sqrt{\frac{(m+n)(2m+n)}{2}}$,

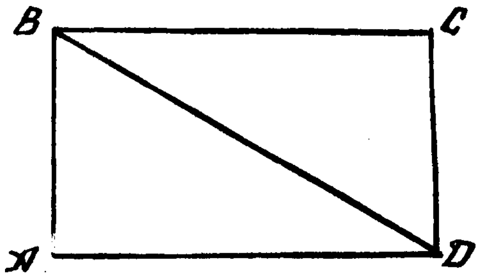
$$AC = 2AO = \sqrt{2(m+n)(2m+n)}.$$

Ж а в о б: $BD=\sqrt{2n(m+n)}$, $AC=\sqrt{2(m+n)(2m+n)}$

2) Тўғри тўртбурчакнинг диагонали 12 см бўлиб, у тўртбурчак бурчагини 2:1 нисбатда бўлади. Тўғри тўртбурчакнинг периметри топилсин (26- чизма).

Е ч и м и. Берилган:
$ABCD$ — тўғри тўртбурчак,
$BD=12$ см,
$\angle ABD:\angle CBD=2:1$.

Периметри топилсин.



26- чизма

1) Агар $\angle CBD=x$ деб олсак, $\angle ABD=2x$ бўлади.

$$\angle ABD+\angle CBD=$$
$$=x+2x=\frac{\pi}{2}.$$

Яъни $3x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}$. Шундай қилиб, $\angle CBD=\frac{\pi}{6}$.

2) Тўғри бурчакли BCD учбурчакда $BD=12$ см, $\angle CBD=\frac{\pi}{6}$.

Демак, $\frac{CD}{BD}=\sin\frac{\pi}{6}$; $\frac{BC}{BD}=\cos\frac{\pi}{6}$. Бу тенгликлардан

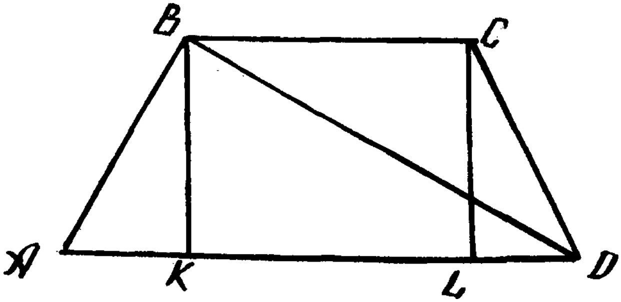
$$CD=12\sin\frac{\pi}{6}=12\cdot\frac{1}{2}=6,$$
$$BC=12\cos\frac{\pi}{6}=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}.$$

3) Тўғри тўртбурчак периметри:

$$2(6+6\sqrt{3})=12(1+\sqrt{3}).$$

Ж а в о б: Периметр $12(1+\sqrt{3})$ см га тенг.

3). Тенг ёнли трапециянинг асослари a ва b бўлиб, ён томони c га тенг. Трапециянинг диагоналини ҳисобланг (27- чизма).



27- чизма

Е ч и м и. Берилган:
$ABCD$ — тенг ёнли трапеция,
$BC=b$,
$AD=a$,
$AB=CD=c$.

[illegible]

1) Трапециянинг B ва D учларидан баландликлар туширамиз. [illegible]

$$KL=BC=b.$$

$$AK=LD=\frac{AD-BC}{2}=\frac{a-b}{2}.$$

2) ABK тўғри бурчакли учбурчакдан

$$BK^2=AB^2-AK^2=c^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

3) BKD тўғри бурчакли учбурчакдан эса BD ни топамиз:

$$BD^2=BK^2+KD^2;\ KD=KL+LD=b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},$$

$$BD^2=c^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$BD^2=c^2-\frac{a^2-2ab+b^2}{4}+\frac{a^2+2ab+b^2}{2},$$

$$BD^2=\frac{4c^2-a^2+2ab-b^2+a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{4c^2+4ab}{4}=ab+c^2.$$

Шундай қилиб, $BD=\sqrt{ab+c^2}$.

Жавоб: $BD=\sqrt{ab+c^2}$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Тенг ёнли трапециянинг ўрта чизиғи 5 см бўлиб, диагоналлари ўзаро перпендикуляр. Трапеция юзасини ҳисобланг.

2. Тўғри тўртбурчакнинг эни 30 % га камайтирилса ва бўйи 40 % га оширилса тўғри тўртбурчакнинг юзаси неча % га ўзгаради?

3. Параллелограммнинг томонлари a ва b бўлиб, улар орасидаги бурчак α га тенг. Шу параллелограммнинг барча бурчакларининг биссектрисалари ташкил қилган тўртбурчакнинг юзасини ҳисобланг.

4. Ромбнинг ўткир бурчаги α га, катта диагонали 16 га тенг. Агар $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5}$ бўлса, ромб юзасини ҳисобланг.

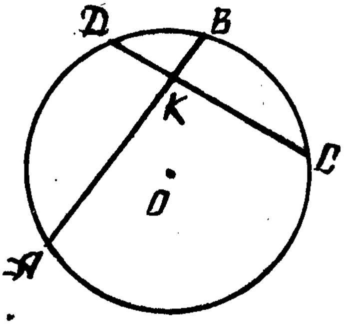
14-§. АЙЛАНА, ДОИРА.

1^0. Мусбат сон R ва текисликда O нуқта берилган бўлсин. O нуқтадан R масофада жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрни айлана дейилади. O нуқта айлана маркази, марказ билан айланадаги нуқтани туташтирувчи кесма радиус, R сон эса радиус узунлиги (қисқача у ҳам радиус) дейилади. Айланадаги икки нуқтани туташтирувчи кесма ватар, марказдан ўтувчи ватар эса диаметр дейилади.

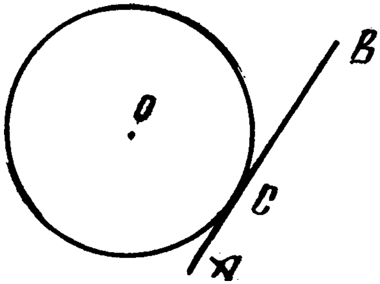
Текисликнинг айлана билан чегараланган қисми — доира деб аталади.

Асосий муносабатлар.

1) $D = 2R$, бу ерда D — диаметр узунлиги.
2) $L = 2\pi R$ — айлана узунлиги.
3) $S = \pi R^2$ — доира юзаси.
4) AB ва CD ватарлар K нуқтада кесишса (28- чизма), $AK \cdot KB = CK \cdot KD$ муносабат бажарилади.



28- чизма



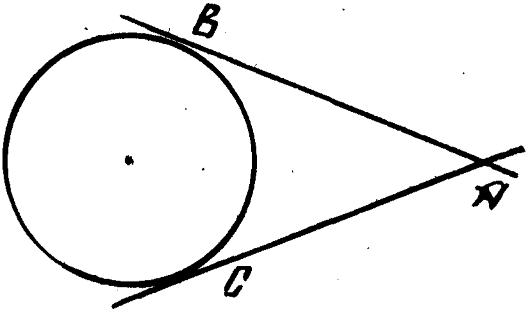
29- чизма

5) Ватарни тенг иккига бўлувчи диаметр шу ватарга перпендикулярдир.

6) Тенг ватарлар марказдан тенг масофаларда жойлашган ва, аксинча, марказдан тенг масофада жойлашган ватарлар ўзаро тенг.

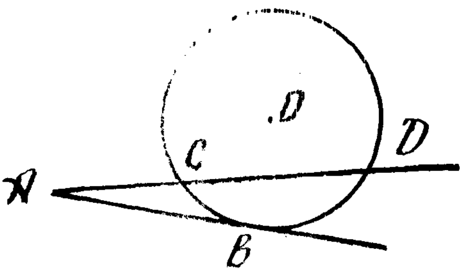
2^0. УРИНМА.

Айлана (ёки доира) билан ягона умумий нуқтага эга бўлган тўғри чизиқ у р и н м а дейилади. Нуқта эса у р и н и ш н у қ т а с и дейилади (29- чизма).

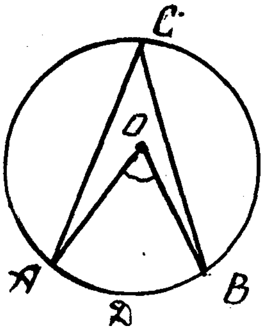


30- чизма

Айлана билан 2 та умумий нуқтага эга бўлган тўғри чизиқ к е с у в ч и деб аталади.



31- чизма



32- чизма

Уринманинг хоссалари.

1) Уриниш нуқтасига ўтказилган радиус уринмага перпендикулярдир.

2) Доира ташқарисидаги нуқтадан шу доирага иккита уринма ўтказиш мумкин. Бу уринмаларнинг кесмалари ўзаро тенг (30- чизма): $AB=AC$.

3) Агар AC кесувчи бўлиб, айланани C ва D нуқталарда кесиб ўтса, AB эса уринма бўлса, $AB^2=AD\times AC$ тенглик ўринли (31- чизма).

3°. МАРКАЗИЙ ВА ИЧКИ ЧИЗИЛГАН БУРЧАКЛАР.

Айланадаги икки нуқта ёрдамида айлана икки бўлакка ажралади. Бу бўлаклар ёйлар деб аталади (32- чизма).

Белгиланиши: ADB; ACB.

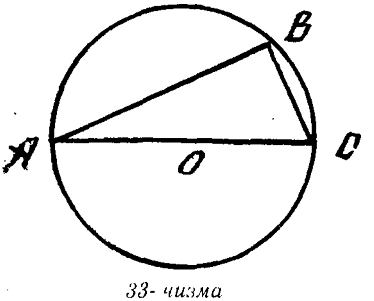
AOB бурчак ADB ёйга тиралган марказий бурчак;

$\angle ACB$ бурчак эса ADB ёйга тиралган ва айланага ички чизилган бурчак дейилади. Бу бурчаклар орасида

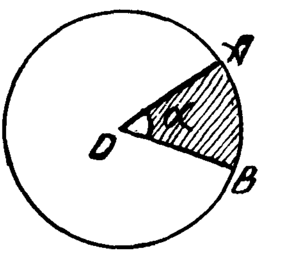
$$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$$

муносабат ўринли.

Хусусан, ярим айланага (диаметрга) тиралган ички бурчак тўғри бурчак бўлади (33- чизма).



33- чизма



34- чизма

4^0. СЕКТОР ВА СЕГМЕНТ.

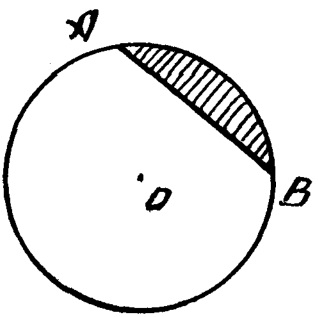
Доиранинг икки радиус билан чегараланган бўлаги сектор дейилади (34- чизма). Секторнинг ёй узунлиги: $l = \pi R\alpha$, бу ерда α радианларда ўлчанган секторнинг марказий бурчаги ёки $l = \frac{\pi R\alpha}{180}$, бу ерда марказий бурчак градусларда ўлчанган.

Сектор юзаси: $S = \frac{\pi R^2\alpha}{2}$ (α — радианларда ўлчанган) ёки $S = \frac{\pi R^2\alpha}{360}$ (α — градусларда).

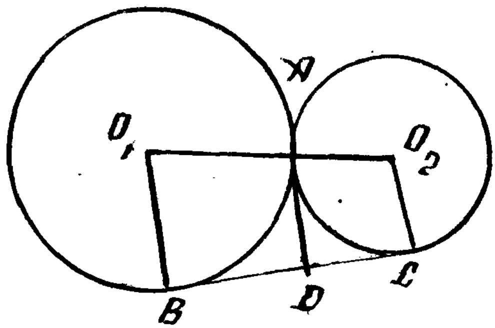
Сегмент — доиранинг ватар ва шу ватар тиралган ёй билан чегараланган бўлади (35- чизма).

Айлана ва доира ҳақидаги масалаларни ечишда юқорида келтирилган асосий тушунча, хосса ва муносабатлардан фойдалана олиш лозим.

1. Радиуслари $R = 3$ см ва $r = 1$ см бўлган доиралар ташқаридан ўзаро уринади. Уриниш нуқтасидан доираларнинг умумий уринмасигача бўлган масофани ҳисобланг (36- чизма).



35- чизма



36- чизма

Ечими.
Берилганлар:
$R = O_1A = 3$ см,
$r = O_2A = 1$ см,
BC умумий уринма,
$AD \perp BC$

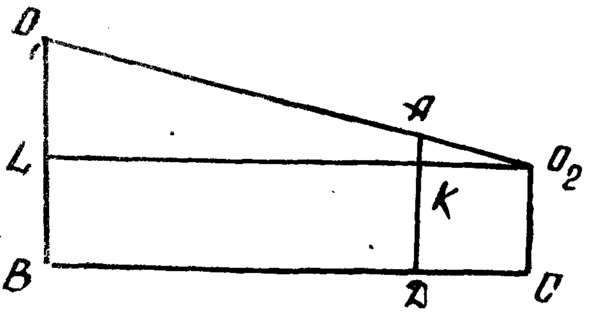
Топиш керак: AD нинг узунлигини.

1) BC уринма бўлгани учун:

$$O_1B \perp BC \text{ ва } O_2C \perp BC.$$

2) Марказларни туташтирувчи кесма O_1O_2 уриниш нуқтаси A дан ўтади.

3) Шундай қилиб O_1O_2CB тўртбурчак трапеция бўлади ($O_1B \| O_2C$) (37- чизма).



37- чизма

O_2 нуқтадан BC га параллел бўлган O_2L кесма ўтказайлик. У ҳолда $O_2C = KD = LB = 1$ см.

4) O_1LO_2 ва AKO_2 учбурчаклар ўхшаш. Демак,

$$\frac{O_1L}{AK} = \frac{O_1O_2}{AO_2}$$

бўлиб, бизга маълум сон қийматларни қўйсак:

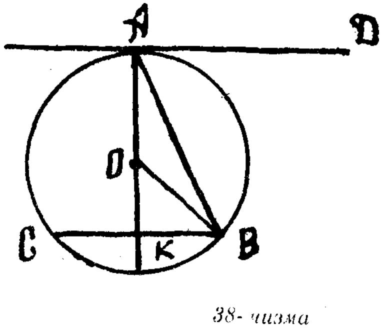
$$\frac{3-1}{AK} = \frac{3+1}{1} \Rightarrow 4AK = 2 \Rightarrow AK = \frac{1}{2}.$$

5) Шундай қилиб

$$AD = KD + AK = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5 \text{ см}.$$

Жавоб: $AD = 1{,}5$ см.

2. Айлана ватари 10 см. Ватарнинг бир учидан айланага уринма, иккинчи учидан эса шу уринмага параллел бўлган яна бир ватар чизилган. Иккинчи ватар узунлиги 12 см бўлса, айлана радиусини ҳисобланг (38- чизма).



38- чизма

Ечими. Берилганлар:
$AB = 10$ см,
AD — айланага уринма,
$BC \| AD$,
$BC = 12$ см.

Айлана радиусини топинг.

1) AD уринма бўлгани учун $AO \perp AD$. Шартга кўра $BC \| AD$. Демак, $AK \perp BC$.

2) Ватарга перпендикуляр диаметр шу ватарни тенг иккига бўлади, яъни $CK=KB=6$ см.

3) AKB тўғри бурчакли учбурчакда $AB=10$ см, $BK=6$ см. Пифагор теоремасига кўра.

$$AK=\sqrt{AB^2-BK^2}=\sqrt{100-36}=8\text{см}.$$

4) OBK тўғри бурчакли учбурчакдан Пифагор теоремасига биноан:

$$OK=\sqrt{R^2-36}.$$

5) $AK=AO+OK$. Демак, $8=R+\sqrt{R^2-36}$, яъни $(8-R)^2=$ $=R^2-36\Leftrightarrow 64-16R+R^2=R^2-36\Rightarrow 16R=100\Leftrightarrow R=6{,}25$

Жавоб: $R=6{,}25$ см.

3. Учбурчакка ички чизилган айлана учбурчакнинг икки томонини уриниш нукталари билан 2:3 ва 4:5 нисбатлар каби бўлади. Учинчи томон уриниш нуктаси билан қандай нисбатда бўлинади (39- чизма)?

Ечими. Берилганлар:

D, E, F — уриниш нукталари,

$AD: DB=2:3$,

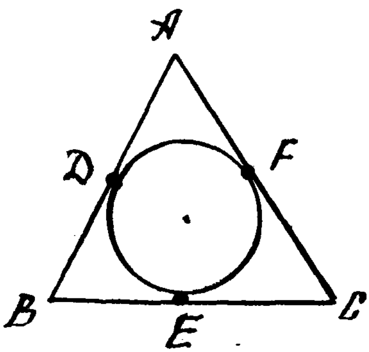
$BE: EC=4:5$.

$CF: FA$ нисбатни топиш керак.

1) $AD=x$ деб олайлик. У ҳолда $\frac{AD}{DB}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow DB=\frac{3}{2}x$.

2) Доира ташқарисидаги нуктадан ўтказилган иккала уринманинг кесмалари ўзаро тенг. Демак,

$AD=AF$; $BD=BE$ ва $CE=CF$.



39- чизма

3) $DB=\frac{3}{2}x$ бўлгани учун $BE=\frac{3}{2}x$.

4) $\frac{BE}{EC}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow EC=\frac{5BE}{4}=\frac{15x}{8}=CF$.

5) Шундай қилиб, $CF=\frac{15x}{8}$, $AF=AD=x$. У ҳолда

$$\frac{CF}{FA}=\frac{\frac{15x}{8}}{x}=\frac{15}{8}.$$

Жавоб: $CF:FA=15:8$.

МУСТАКИЛ ЕЧИШ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Радиуси R бўлган айлана ичига квадрат чизилган. Квадратнинг юзасини ҳисобланг.

2. Тенг ёнли трапециянинг асослари $a=21$ см, $b=9$ см, баландлиги эса $h=8$ см. Шу трапецияга ташқи чизилган айлана радиусини ҳисобланг.

3. Секторнинг марказий бурчаги 30°, ёй узунлиги эса 20 см. Шу сектор юзасини ҳисобланг.

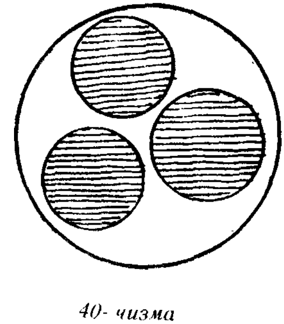
4. Айлана ичига учта радиуслари тенг бўлган ва ихтиёрийси қолган иккиси ва катта айлана билан уринувчи доиралар чизилган. Агар катта айлана радиуси R бўлса, учала доираларнинг юзалари йиғиндисини ҳисобланг (40- чизма).

15- §. КЎПЁҚЛИКЛАР.

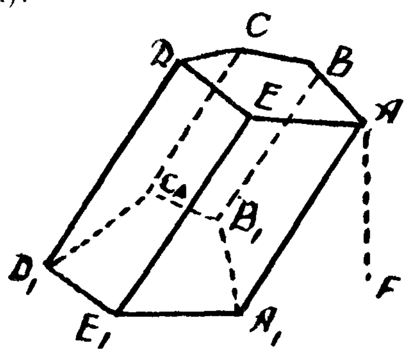
1°. **Призма** — асослар деб аталувчи икки ёғи параллел текисликларда жойлашган ўзаро тенг n-бурчаклар ($n \geqslant 3$) бўлиб, қолган n та ёғи (ён ёқлари) параллелограммлардан иборат бўлган кўпёқлик. Параллел текисликларда жойлашган қирралар асос томонлари, қолган n та қирра эса ён қирралар дейилади.

Ён қирралари асосга перпендикуляр бўлган призма тўғри призма деб аталади.

Асослари мунтазам n- бурчаклар бўлган тўғри призма мунтазам дейилади. Параллел текисликлардаги учларнинг биридан иккинчи текисликка туширилган перпендикуляр призманинг баландлиги дейилади (41- чизма).



40- чизма



41- чизма

$ABCDE$ ва $A_1B_1C_1D_1E_1$ — асослар,
AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 — ён қирралар,
AF — баландлик.

Асосий муносабатлар

1) Призма ҳажми $V=S_{ac}\times H$, бу ерда S_{ac}— асос юзаси, H — призма баландлиги. Хусусан, тўғри призманинг ҳажми. $V=$ $=S_{ён}\times l$ бу ерда $l=AA_1$ ён қирра узунлиги.

2) Призма ён сирти $S_{ён}=P_1 \cdot l$, бу ерда P_1—перпендикуляр кесим периметри (ён қиррага перпендикуляр текислик билан призманинг кесишмаси), l эса ён қирра.

Хусусан, тўғри призманинг ён сирти $S_{ён}=P_{ac}\cdot l$, бу ерда

$P_{ас}$ — асос периметри.

3) Призманинг тўла сирти $S_{тўла}=S_{ён}+2S_{ас}$, бу ерда $S_{ас}$ — асос юзаси.

Муҳим хусусий ҳоллар

1^0. **Параллелепипед** — асослари параллелограмм бўлган призма. Ён қирралари асосга перпендикуляр бўлган параллелепипед т ў ғ р и дейилади.

Асоси тўғри тўртбурчак бўлган тўғри параллелепипед т ў ғ р и б у р ч а к л и дейилади.

Масала шартига қараб ўқувчи тўғри параллелепипед билан тўғри бурчакли параллелепипедни фарқлай олиши лозим.

Куб — барча қирралари тенг бўлган тўғри бурчакли параллелепипед.

2^0. **Пирамида** — асос деб аталувчи ёқларидан бири n-бурчак ($n \geqslant 3$) бўлиб, қолган n та ёқлари умумий учга эга бўлган учбурчаклардан иборат кўпёқлик (42- чизма).

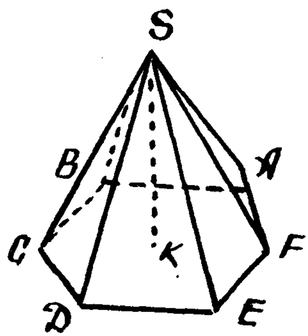
$ABCDEF$ — асос,

SAB, SBC, ...— ён ёқлар,

S — умумий уч,

SA, SB, ...— ён қирралар,

SK — баландлик (асосга туширилган перпендикуляр).



42- чизма

Асосий муносабатлар.

1) Пирамида ҳажми $V=\frac{1}{3}S_{ас}\cdot H$, бу ерда $S_{ас}$ — асос юзаси, H — баландик.

2) М у н т а з а м п и р а м и д а (асоси мунтазам кўпбурчак, баландлик асос марказидан ўтади) ён сирти $S_{ён}=\frac{1}{2}ph$, бу ерда p — асос периметри, h — апофема (ён ёқнинг S учидан туширилган баландлик).

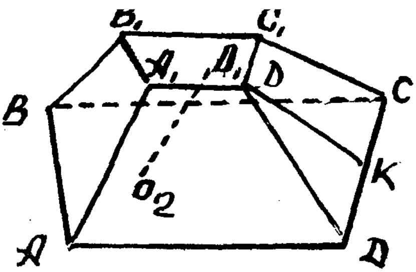
3^0. КЕСИК ПИРАМИДА

Асосга параллел текислик пирамиданинг икки қисмга ажратсин. У ҳолда қисмлардан бири яна пирамида бўлади. Иккинчи қисм эса к е с и к п и р а м и д а дейилади (43- чизма).

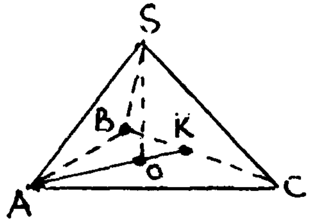
$ABCD$ ва $A_1B_1C_1D$ — асослар, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — ён қирралар, O_1O_2 — баландлик, $D_1K \perp DC$; D_1K — апофема.

Асосий муносабатлар

1) Кесик пирамида ҳажми $V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$, бу ерда H — баландлик, S_1 ва S_2 асосларнинг юзалари.



43- *чизма*



44- *чизма*

2) Мунтазам кесик пирамида ён сирти

$$S_{\text{ён}} = \frac{1}{2} h (p_1 + p_2),$$

бу ерда h — апофема, p_1 ва p_1 асосларнинг периметрлари.

МАСАЛАЛАР ЕЧИШ УЧУН ТАВСИЯЛАР

1) Масала шартини аниқ тушуниб олиш лозим. Масаладаги тушунчаларни бошқа тушунчалар билан алмаштирилиб ечилган масала нотўғри ечилган ҳисобланади.

2) Масалани ечишда чизмани тўғри тасвирлай олиш керак. Зарур бўлса, ечимнинг турли ҳолатларини акслантирувчи бир неча чизмалар келтириш керак.

3) Кесимлар ҳақидаги масалаларда кесимда қандай шакл ҳосил бўлишини аниқ тасаввур қилиш ва кесимни чизмада акс эттира олиш зарур.

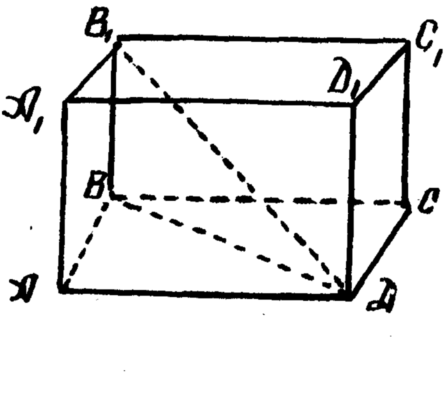
4) Икки тўғри чизиқ, тўғри чизиқ билан икки текислик орасидаги бурчакларни чалкаштирмаслик зарур. Масалан, 44- чизмада учбурчакли пирамида бўлиб, SO баландлик, $SK \perp BC$ ва $DK \perp BC$ бўлсин. У ҳолда (44- чизма):

$\angle ASC$ — пирамида учидаги ясси (текис) бурчак,

$\angle SAO$ — ён қирра (AS) билан асос текислиги орасидаги бурчак,

$\angle SKO$ — ён ёқ (BSC) билан асос орасидаги бурчак.

1. (Тошкент халқ хўжалиги университети, 1988) Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали асос текислиги билан 45^0 бурчак ташкил этади. Асос томонлари 120 см ва 209 см. Параллелепипед баландлигини ҳисобланг (45- чизма).



45- *чизма*

Ечими. Берилган:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — Тўғри бурчакли параллелепипед.
$AD=209$ см,
$AB=120$ см,
$\angle B_1DB=45^0$

B_1B — баландликни ҳисобланг.

1) $ABCD$ тўғри тўртбурчак. Демак, $BD^2=AB^2+AD^2=120^2+209^2=58081 \Leftrightarrow BD=241$ см.

2) B_1BD тўғри бурчакли учбурчакдан:

$$\frac{B_1B}{BD}=\text{tg}45^0 \Leftrightarrow \frac{B_1B}{BD}=1 \Leftrightarrow B_1B=241 \text{ см}.$$

Жавоб: Параллелепипеднинг баландлиги 241 см.

2. (Тошкент халқ хўжалиги университети, 1988) Учбурчакли мунтазам призманинг баландлиги H. Ён ёқнинг диагонали асос билан α бурчак ташкил этади. Призманинг ҳажмини ҳисобланг.

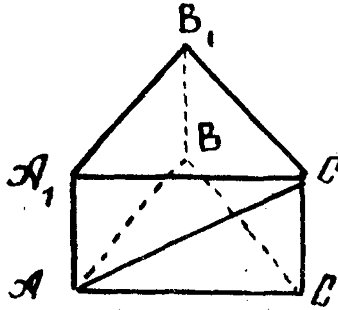
Ечими. Берилган:

$ABCA_1B_1C_1$ — мунтазам призма,
$AA_1=BB_1=CC_1=H$,
$\angle C_1AC=\alpha$

Пирамида ҳажми V ни ҳисобланг (46- чизма).

1) AC_1C тўғри бурчакли учбурчакдан

$$\frac{CC_1}{AC}=\text{tg}\alpha \Leftrightarrow AC=\frac{H}{tg\alpha}=H\cdot\text{ctg}\alpha.$$



46- чизма

2) Призма асоси — томони $AC=H\cdot\text{ctg}\alpha$ бўлган тенг томонли учбурчак. Бу тенг томонли учбурчак юзаси:

$$S_{ac}=\frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin60^0=\frac{1}{2}H\cdot\text{ctg}\alpha\times$$
$$\times H\cdot\text{ctg}\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

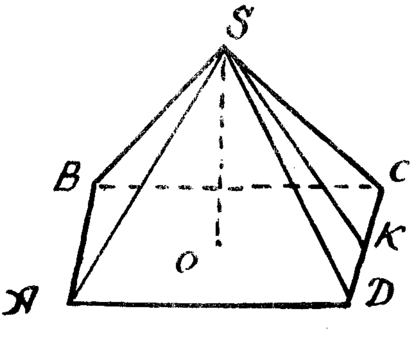
$$S_{ac}=\frac{\sqrt{3}}{4}H^2\text{ctg}^2\alpha.$$

3) Призма ҳажми:

$$V=S_{ac}\cdot H=\frac{\sqrt{3}}{4}H^3\text{ctg}^2\alpha.$$

Жавоб: $V=\frac{\sqrt{3}}{4}H^3\text{ctg}^2\alpha.$

3. (Тошкент халқ хўжалиги университети, 1988). Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ён қирраси 5см, тўла сирти эса 84 см^2. Асос томонини ҳисобланг (47- чизма).



47- чизма

Ечими. Берилган:
$SABCD$ — мунтазам пирамида,
$SA=SB=SC=$
$=SD=5$ см,
$S_{тўла}=84 см^2$.

Асос томони AD ни ҳисобланг.

1) Пирамида мунтазам бўлгани учун асоси квадрат бўлади. Асос томонини x деб белгилайлик. У ҳолда $S_{ас}=x^2$.

2) SK апофема ўтказайлик. У ҳолда $SK \perp CD$ ва $SD=SC$ бўлгани учун

$$DK=\frac{CD}{2}=\frac{x}{2}.$$

3) SKD тўғри бурчакли учбурчакдан Пифагор теоремасига кўра:

$$SK^2=SD^2-DK^2=25-\frac{x^2}{4},$$

яъни

$$SK=\sqrt{25-\frac{x^2}{4}}=\frac{\sqrt{100-x^2}}{2}.$$

4) У ҳолда пирамиданинг ён сирти

$$S_{ён}=\frac{1}{2}ph=4x\cdot SK=2x\cdot\frac{\sqrt{100-x^2}}{2}=x\cdot\sqrt{100-x^2},$$

тўла сирти эса

$$S_{тўла}=S_{ён}+S_{ас}=x\sqrt{100-x^2}+x^2.$$

5) Масала шартига кўра $S_{тўла}=84$. Демак,

$$x\sqrt{100-x^2}+x^2=84,$$

$$x\sqrt{100-x^2}=84-x^2.$$

Икки томонни квадратга оширсак,

$$x^2(100-x^2)=7056-168x^2+x^4,$$

$$2x^4-268x^2+7056=0,$$

$$x^4-134x^2+3528=0.$$

$x^2=t$ белгилаш киритиб биквадрат тенгламани ечамиз:

$t^2-134t+3528=0,\ t_{1,2}=67\pm\sqrt{4489-3528}=67\pm\sqrt{961}=67\pm31;$

$t_1=98,\ t_2=36 \Rightarrow x_1=\sqrt{98};\ x=6.$

(манфий қийматлар масала шартини қаноатлантирмайди).

6) Демак, $x_1=\sqrt{98}$ ва $x_2=6$. Аммо, $x_1=\sqrt{98}$ ечим

$$x\sqrt{100-x^2}+x^2=84$$

тенгламани қаноатлантирмайди. Шундай қилиб, $x=6$ см.

Ж а в о б: Асос томони 6 см.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси l га тенг бўлиб, у асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Пирамида ҳажмини топинг.

2. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали 13 см. Ён ёқларининг диагоналлари эса $4\sqrt{10}$ ва $3\sqrt{17}$ см. Параллелепипед ҳажмини ҳисобланг.

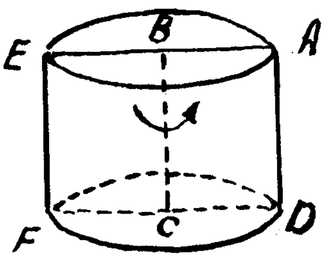
3. Мунтазам олтибурчакли призманинг ён сирти 10 см^2, тўла сирти 20 см^2. Призманинг ҳажмини ҳисобланг.

4. Мунтазам учбурчакли кесик пирамиданинг асосларининг томонлари 3 см ва 5 см. Ён қирраси 4 см. Пирамиданинг ҳажмини ҳисобланг.

16-§. АЙЛАНМА ЖИСМЛАР

1^0. **Цилиндр** (тўғри доиравий цилиндр) — тўғри тўртбурчакнинг томонларининг бири атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм (48- чизма).

AD — ясовчи.
BC — цилиндр ўқи,
$AB=CD$ — асос радиуси.



48- чизма

Асосий муносабатлар

H — баландлик (ясовчи); R — асос радиуси.

1) Цилиндр ҳажми $V=S_{\text{ас}}\cdot H=\pi R^2 H$.

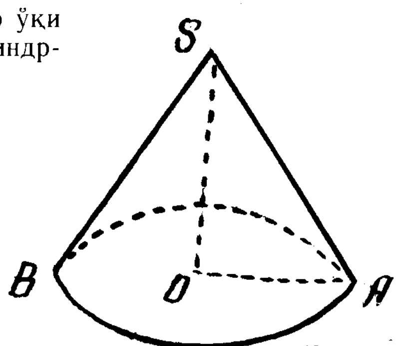
2) Цилиндр ён сирти $S_{\text{ён}}=2\pi RH$.

3) Цилиндр тўла сирти $S_{\text{тўла}}=$ $=2\pi R(R+H)$.

4) Цилиндр ўқ кесими — цилиндр ўқи орқали ўтувчи текислик билан цилиндрнинг кесишмаси. У томонлари $2R$ ва H бўлган тўғри тўртбурчакдан иборат.

2^0. **Конус** (доиравий конус) — тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлардан бири атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм (49- чизма).

S — конус учи.
OA — асос радиуси.
SO — баландлик.
$SA=SB$ — ясовчи.



49- чизма

Асосий муносабатлар.

H — баландлик, l — ясовчи, R — асос радиуси.

1) Конус ҳажми $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

2) Конус ён сирти $S_{\text{ён}}=\pi Rl$.

3) Конус тўла сирти $S_{\text{тўла}}=\pi R(l+R)$.

3^0. **Кесик конус** — конуснинг асосга параллел текислик ва асос орасида жойлашган қисми (50- чизма).

Асосий муносабатлар

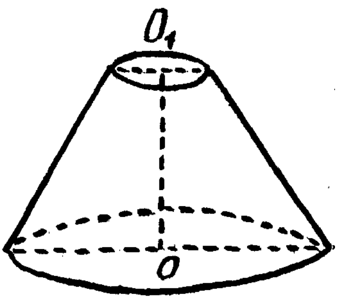
H — баландлик, r — юқори асос радиуси, R — қуйи асос радиуси, l — ясовчи.

1) Кесик конус ҳажми $V=\frac{1}{3}\pi H(r^2+rR+R^2)$.

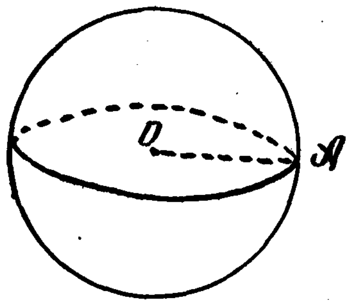
2) Кесик конус ён сирти $S_{\text{ён}}=\pi(r+R)l$.

3) Кесик конус тўла сирти $S_{\text{тўла}}=\pi r^2+\pi R^2+\pi(r+R)l$.

4^0. **Шар** — ярим доиранинг диаметр атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм (51- чизма).



50- чизма



51- чизма

Асосий муносабатлар

R — шар радиуси.

1) Шар ҳажми $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

2) Шар сирти $S=4\pi R^2$.

1. Баландлиги 4 см, асос радиуси 3 см бўлган конуснинг ён сирти ва тўла сиртини ҳисобланг (52- чизма).

Е ч и м и. Берилган:
$H=4$ см,
$R=3$ см.

$S_{\text{ён}}$ ва $S_{\text{тўла}}$ ҳисоблансин.

1) Қонус ён сирти $S_{ён}=\pi Rl$ формуладан топилади. SOA тўғри бурчакли учбурчакдан Пифагор теоремасига кўра конус ясовчиси l ни ҳисоблаймиз:

$$l^2=SO^2+OA^2=H^2+R^2=4^2+3^2=25 \Rightarrow l=5 \text{ см}.$$

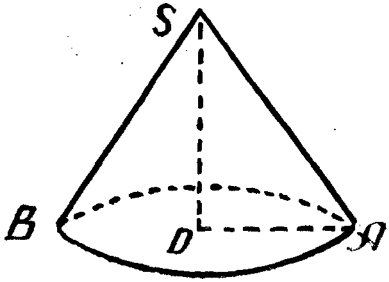
2) Демак,

$$S_{ён}=\pi Rl=\pi\cdot 3\cdot 5=15\pi \text{ см}^2;$$

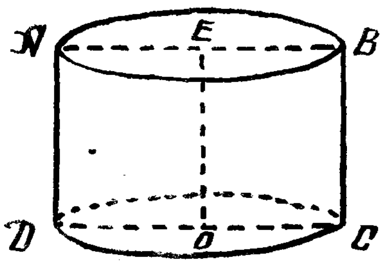
$$S_{тўла}=\pi R(R+l)=\pi\cdot 3(3+5)=24\pi \text{ см}^2.$$

Ж а в о б: $S_{ён}=15\pi$ см^2, $S_{тўла}=24\pi$ см^2.

2) Цилиндрнинг ўқ кесим юзаси Q га, тўла сирти эса T га тенг. Цилиндр ҳажмини ҳисобланг (53- чизма).



52- чизма



53- чизма

Е ч и м и. Берилган:

$S_{ABCD}=Q$,

$S_{тўла}=T$,

$V=?$

1) $S_{ABCD}=AB\cdot AD=2RH$; $S_{тўла}=2\pi R(R+H)$.

2) Демак, $\begin{cases} 2RH=Q, \\ 2\pi R(R+H)=T \end{cases}$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу системадан

$$RH=\frac{Q}{2},$$

$$RH+R^2=\frac{T}{2\pi},$$

яъни $R^2=\frac{T}{2\pi}-RH=\frac{T}{2\pi}-\frac{Q}{2}$.

Бундан

$$R=\sqrt{\frac{T-\pi\cdot Q}{2\pi}};\quad H=\frac{Q}{2R}=\frac{Q}{2\sqrt{\frac{T-\pi Q}{2\pi}}}=\frac{Q\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(T-\pi\cdot Q)}}$$

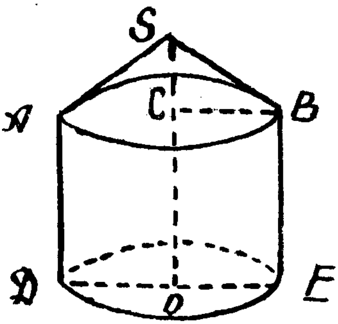
3) Цилиндр ҳажми

$$V=\pi R^2 H=\pi\frac{T-\pi\cdot Q}{2\pi}=\frac{Q\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(T-\pi\cdot Q)}}$$

$$V=\frac{Q\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{T-\pi Q}\,.$$

Ж а в о б: $V=\frac{Q}{2}\sqrt{\frac{\pi(t-\pi\times Q)}{2}}$.

3. (Тошкент ҳалқ ҳўжалиги университети, 1988). Цилиндрсимон павильоннинг томи конус шаклида. Қонус ясовчиси билан павильон баландлиги орасидаги бурчак 60°. Агар павильон баландлиги (цилиндр баландлиги +конус баландлиги) 8 м, асос радиуси 5 м бўлса, павильоннинг ён сиртини ҳисобланг (54- чизма).



54- чизма

Е ч и м и. Берилган:
$SO=8$ м,
$OD=5$ м,
$\angle ASC=60°$.

$S_{\text{ён}}$ топилсин.

1) Павильон ён сирти цилиндр ён сирти билан конус ён сиртлари йиғиндисига тенг:

$$S_{\text{ён}}=S_{\text{ён. цил.}}+S_{\text{ён. кон.}}.$$

Уларнинг ҳар бирини алоҳида ҳисоблаймиз.

2) SAC тўғри бурчакли учбурчакдан:

$$\frac{AC}{SC}=tg60°.$$

$$SC=\frac{AC}{tg60°}=\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

У ҳолда

$$OC=OS-CS=8-\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

3) Цилиндр ён сирти

$$S_{\text{ён. цил.}}=2R\pi H_{\text{цил}}=2\pi 5\left(8-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)=10\pi\left(8-\frac{5}{\sqrt{3}}\right).$$

Қонус ясовчиси SA ни ҳисоблаймиз:

$$\frac{AC}{SA}=sin60°\Rightarrow SA=\frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{10}{\sqrt{3}}.$$

5) Конус ён сирти

$$S_{\text{ён. кон}}=\pi Rl=\pi\cdot 5\cdot\frac{10}{\sqrt{3}}=\frac{50\pi}{\sqrt{3}}.$$

6) Павильон ён сирти

$$S_{\text{ён}}=S_{\text{ён. цил}}=10\pi\left(8-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)+\frac{50\pi}{\sqrt{3}}=80\pi-\frac{50\pi}{\sqrt{3}}+\frac{50\pi}{\sqrt{3}}=80\pi.$$

Ж а в о б: $S_{\text{ён}}=80\pi$.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

1. Конуснинг ўқ кесими ён томони a га, асоси эса b га тенг бўлган учбурчак. Шу конуснинг ҳажмини ҳисобланг.

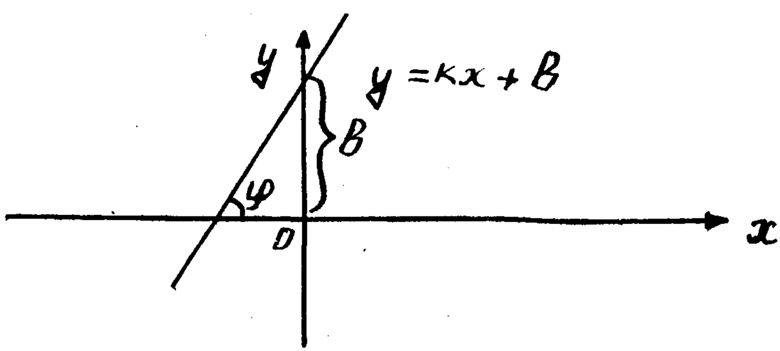
2. Конуснинг асос радиуси 5 см. Шу конус ҳажмини тенг иккига бўлувчи ва асосга параллел кесим юзасини ҳисобланг.

3. Шарнинг сирти 20π см^2. Шар ҳажмини топинг.

4. Қатетлари 7 см ва 5 см бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенуза атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

17-§. ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР. АНИҚЛАНИШ СОҲАСИ. ГРАФИКЛАР

1^0. **Чизиқли функция:** $y=kx+b$. Аниқланиш соҳаси $(-\infty, +\infty)$. Графиги тўғри чизиқдан иборат (55- чизма).



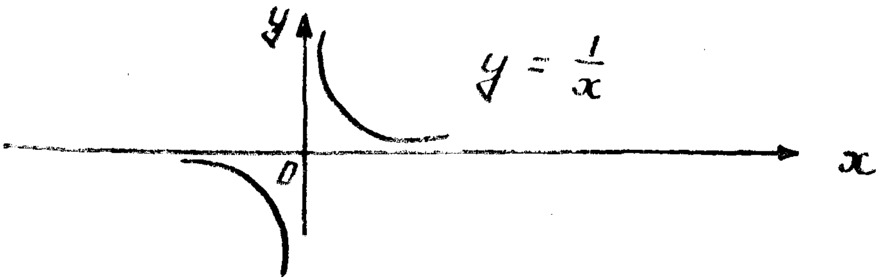
55- чизма

1) Агар $k>0$ бўлса, $\varphi<\frac{\pi}{2}\cdot k<0$ бўлса, $\varphi>\frac{\pi}{2}$ бу ерда φ — тўғри чизиқнинг абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан билан ҳосил қилган бурчаги.

2) Агар $b=0$ бўлса, тўғри чизиқ координата бошидан ўтади.

2^0. Тескари пропорционаллик функцияси: $y=\frac{k}{x}$.

Аниқланиш соҳаси $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Графиги **г и п е р б о л а** деб аталувчи эгри чизиқ (56- чизма).

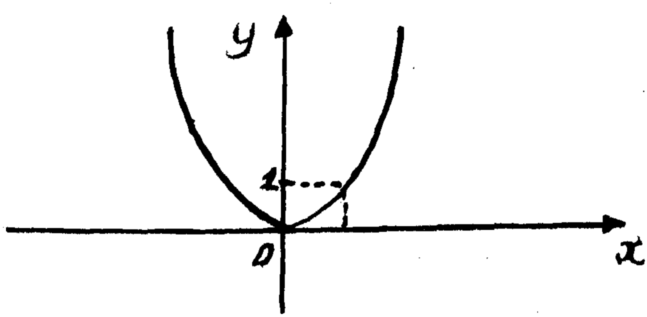


56- чизма

1) Агар $k>0$ бўлса, график I ва III чоракларда, $k<0$ бўлса, график II ва IV чоракларда жойлашган.

3^0. **Квадрат учҳад функцияси.** $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$.

Аниқланиш соҳаси $(-\infty, +\infty)$. Графиги **п а р а б о л а д а н** иборат (57- чизма).



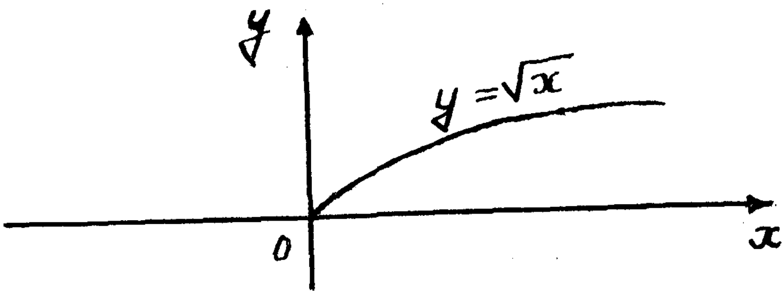
57- чизма

1) $a>0$ бўлса, парабола юқорига, $a<0$ ҳолда пастга йўналган.

2) $D=b^2-4ac>0$ бўлса, парабола абсцисса ўқини иккита нуқтада кесиб ўтади. $D=0$ бўлса, парабола абсцисса ўқига уринади. $D<0$ ҳолда абсцисса ўқи билан кесишмайди.

4^0. $y=|x|$. Аниқланиш соҳаси $(-\infty, +\infty)$. Графиги: (қаралсин, 14- чизма).

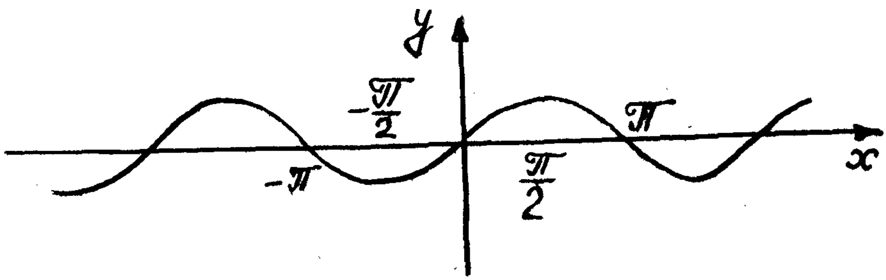
5^0. **Арифметик илдиз** $y=\sqrt{x}$. Аниқланиш соҳаси $[0, +\infty)$. Графиги (58- чизма).



58- чизма

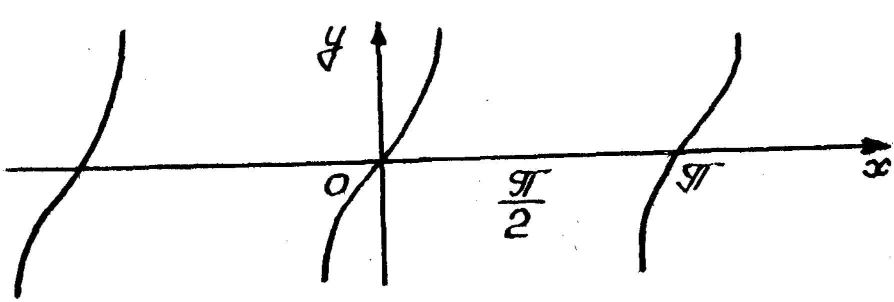
6^0. **Тригонометрик функциялар.**

а) $y=\sin x$. Аниқланиш соҳаси $(-\infty, +\infty)$. Графиги синусоида деб аталувчи эгри чизиқ (59- чизма).



59- чизма

б) $y=\mathrm{tg}\,x$. Аниқланиш соҳаси $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in z$. Графиги тангенсоида деб аталувчи эгри чизиқ (60- чизма):



60- чизма

Изох. $y=\cos x$ ва $y=\mathrm{ctg}x$ функцияларнинг графиклари $y=\sin x$ ва $y=\mathrm{tg}x$ функциялар графикларини абсцисса ўқи бўйлаб чапга $\frac{\pi}{2}$ га суриш натижасида хосил бўлади.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

Ушбу функцияларнинг аникланиш соҳасини топинг ва графигини чизинг.

1. $y=x^2+5x+6$.
2. $y=|3x-2|$.
3. $y=\sqrt{x+5}$.
4. $y=\sin 3x$.

18-§. ҲОСИЛА ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

1^0. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, x_0 шу интервалда ётсин. Агар ушбу

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

мавжуд бўлса, у $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи дейилади. Белгиланиши:

$$f'(x_0)$$

Ҳосила ва унинг татбиқларига оид қуйидаги масалалар қаралади:

I. Берилган функциянинг ҳосиласини топиш.

II. Функция ҳосиласига кўра функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш.

III. Функция ҳосиласидан фойдаланиб унинг ўсувчи ёки камаювчи бўлишини (монотон бўлишини) топиш.

IV. Функция ҳосиласини топиш учун ҳосилалар жадвалини хамда асосий қоидаларни билиш керак.

Ҳосилалар жадвали

1) Агар $y=c$ — ўзгармас бўлса, $y'=0$ бўлади.
2) Агар $y=x^\alpha$ бўлса, $y'=\alpha x^{\alpha-1}$ бўлади.
3) Агар $y=\sqrt{x}$ бўлса, $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ бўлади.
4) Агар $y=\frac{1}{x}$ бўлса, $y'=-\frac{1}{x^2}$ бўлади.
5) Агар $y=e^x$ бўлса, $y'=e^x$ бўлади.

6) Агар $y=\ln x$ бўлса, $y'=\frac{1}{x}$ бўлади.

7) Агар $y=\sin x$ бўлса, $y'=\cos x$ бўлади.

8) Агар $y=\cos x$ бўлса, $y'=-\sin x$ бўлади.

9) Агар $y=\mathrm{tg}\,x$ бўлса, $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$ бўлади.

10) Агар $y=\mathrm{ctg}\,x$ бўлса, $y'=\frac{-1}{\sin^2 x}$ бўлади.

Ҳосила ҳисоблашдаги асосий қоидалар

Иккита $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар берилган бўлиб, уларнинг ҳар бири $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

1) $[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$;

2) $[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$;

3) $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

4) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, $(g(x)\neq 0)$;

5) $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$, ($c$ — ўзгармас);

6) $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ бўлиб, $y=f(\varphi(x))$ мураккаб функция

бўлсин. У ҳолда $y'=f'(u)\cdot\varphi'(x)$ бўлади.

Мисоллар. Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари ҳисоблансин.

1. $y=x^7$ бўлсин. У ҳолда $y'=(x^7)'=7x^{7-1}=7x^6$ бўлади.

2. $y=\sqrt[5]{x^3}$ бўлсин.

$$y'=\left(\sqrt[5]{x^3}\right)'=\left(x^{\frac{3}{5}}\right)'=\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}.$$

Демак, $y'=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$.

3. $y=\frac{1}{x^3}$ бўлсин.

$$y'=\left(\frac{1}{x^3}\right)'=(x^{-3})'=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4}.$$

Демак, $y'=-\frac{3}{x^4}$.

4. $y=-3x^2+4x+5$ бўлсин.

$$y' = (-3x^2+4x+5)' = -3(x^2)'+4(x)'+$$
$$+(5)' = -3\cdot 2x+4\cdot 1+0 = -6x+4.$$

II. $y=f(x)$ функциянинг ҳосилаларидан фойдаланиб унинг бирор $[a, b]$ оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматлари қуйидагича топилади:

а) $y=f(x)$ функциянинг ҳосиласи топилади.

б) Топилган ҳосила нолга тенгланиб,

$$f'(x)=0$$

тенглама ечилади.

в) Бу тенглама ечимларидан $[a, b]$ сегментга тегишли бўлганини олиб, сўнг шу нуқтадаги (ечимлардаги) функциянинг қийматлари ҳисобланади.

г) Функциянинг бу қийматлари ҳамда $f(a)$, $f(b)$ қийматлар биргаликда қаралади. Улар орасидаги энг катта қиймат функциянинг $[a, b]$ даги энг катта қиймати бўлади, энг кичик қиймат эса функциянинг шу оралиқдаги энг кичик қиймати бўлади.

5. Ушбу

$$y=f(x)=\frac{1}{15}x^3+\frac{9}{20}x^2-\frac{1}{2}x$$

функциянинг $[-2,1]$ оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматлари топилсин.

Ечиш. Аввало берилган функциянинг ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$y'=f'(x)=\left(\frac{1}{15}x^3+\frac{9}{20}x^2-\frac{1}{2}x\right)'=\left(\frac{1}{15}x^3\right)'+\left(\frac{9}{20}x^2\right)'-$$
$$-\left(-\frac{1}{2}x\right)'=\frac{1}{15}\cdot 3x^2+\frac{9}{20}\cdot 2x-\frac{1}{2}=\frac{1}{5}x^2+\frac{9}{10}x-\frac{1}{2}.$$

Демак, $f'(x)=\frac{1}{5}x^2+\frac{9}{10}x-\frac{1}{2}$.

Бу ҳосилани нолга тенглаб ушбу

$$\frac{1}{5}x^2+\frac{9}{10}x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow 2x^2+9x-5=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз ва уни ечамиз:

$$x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{81+40}}{4}=\frac{-9\pm\sqrt{121}}{4}=\frac{-9\pm 11}{4};$$
$$x_1=\frac{-9+11}{4}=\frac{1}{2};\quad x_2=\frac{-9-11}{4}=-5.$$

Равшанки,

$$x_1=\frac{1}{2}\in[-2,1],\quad x_2=-5\notin[-2,1].$$

Бу $x_1=\frac{1}{2}$ нуктада берилган функциянинг киймати

$$f(x_1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{9}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{15\cdot 8}+\frac{9}{20}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=$$
$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{15}+\frac{9}{10}-2\right)=-\frac{31}{240}$$

бўлади. Демак $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{31}{240}$.

Энди берилган функциянинг $x=-2$, $x=1$ нукталардаги кийматларини хисоблаймиз:

$$f(+1)=\frac{1}{15}+\frac{9}{20}-\frac{1}{2}=\frac{1}{15}-\frac{1}{20}=\frac{4-3}{60}=\frac{1}{60};$$

$$f(-2)=\frac{1}{15}(-2)^3+\frac{9}{20}(-2)^2-\frac{1}{2}(-2)=\frac{34}{15}.$$

Демак, $f(1)=\frac{1}{60}$, $f(-2)=\frac{34}{15}$.

Функциянинг $f(-2)$, $f(1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ кийматларини ўзаро солиштириб, $\frac{34}{15}$ функциянинг энг катта киймати, $-\frac{31}{240}$ эса функциянинг энг кичик киймати эканлигини аниклаймиз.

Демак,

$$\max_{[-2,\ 1]} f(x)=f(-2)=\frac{34}{15}.$$

$$\min_{[-2,\ 1]} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{31}{240}.$$

III. $y=f(x)$ функциянинг бирор ораликда ўсувчи ёки камаювчи бўлишини куйидагича аникланади:

а) берилган функциянинг хосиласи топилади;

б) топилган хосилани мусбат (нолдан катта), манфий (нолдан кичик) бўладиган ораликларда аникланади. Бунинг учун

$$f'(x)>0,\ f'(x)<0$$

тенгсизликлар ечилади.

Бирор ораликда $f'(x)>0$ бўлса, функция шу ораликда ўсувчи, $f'(x)<0$ бўлса, функция камаювчи бўлади.

6. $y=f(x)=\frac{1}{3}(x^3-5x^2-8x)$ функция учун монотонлик оралиғи топилсин.

Е ч и ш. Аввало берилган функциянинг ҳосиласини ҳисоблаймиз.

$$f'(x)=\left[\frac{1}{3}(x^3-5x-8x)\right]'=\frac{1}{3}[(x^3)'-5(x^2)'-8(x)']=$$
$$=\frac{1}{3}(3x^2-10x-8).$$

Демак,

$$f'(x)=\frac{3x^2-10x-8}{3}.$$

Сўнг $f'(x)>0$ ва $f'(x)<0$, яъни

$$3x^2-10x-8>0 \text{ ёки } 3x^2-10x-8<0$$

бўладиган ораликларни топамиз. Энди

$$3x^2-10x-8>0$$

тенгсизликни ечамиз:

Равшанки, $3x^2-10x-8=0$ тенгламанинг ечимлари

$$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100+3\cdot4\cdot8}}{6}=\frac{10\pm\sqrt{196}}{6}=\frac{10\pm14}{6}.$$

Демак,

$$x_1=\frac{10+14}{6}=4, \qquad x_2=\frac{10-14}{6}=-\frac{2}{3},$$

$$3x^2-10x-8=3(x-4)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

бўлади.

1) $3(x-4)\left(x+\frac{2}{3}\right)>0$ тенгсизликнинг ечими $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ ва $(4, +\infty)$ бўлади. Демак, $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ ва $(4, +\infty)$ ораликда

$$f'(x)=3(x-4)\left(x+\frac{2}{3}\right)>0$$

бўлади. Бу ораликларда берилган функция ўсувчи.

2) $3(x-4)\left(x+\frac{2}{3}\right)<0$ тенгсизликнинг ечими эса $\left(-\frac{2}{3}; 4\right)$ бўлади.

Демак, $(-\frac{2}{3}; 4)$ ораликда $f'(x)=3(x-4)(x+\frac{2}{3})<0$ бўлиб, берилган функция камаювчи бўлади.

МУСТАКИЛ ЕЧИШ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Ушбу

а) $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x-2\pi$ функциянинг $[-1,2]$ да,

б) $y=\frac{1}{4}(x^4-2x^2)$ функциянинг $[0,2]$ да,

в) $y=x-\frac{12}{5}x^2-\frac{1}{3}x^3$ функциянинг $[-1,1]$ да энг катта ва энг кичик қийматлари топилсин.

2. Ушбу

а) $y=x^4-10x^2+9$,

б) $y=x^3-9x+1$,

в) $y=x^3-4x^2-3x+12$

функцияларнинг монотонлик ораликлари топилсин.

СИНОВ ТЕСТЛАРИДАН НАМУНАЛАР

Кейинги пайтларда олий ўкув юртларига кириш имтиҳонлари тест усулида ўтказилмокда. Тест усулида математика фанидан ўтказиладиган имтиҳонларда таклиф этилган ҳар бир мисол ва масаланинг бешта вариантда ечими берилган бўлиб, улардан биттасигина тўғри. Ўкувчи шу тўғрисини топиши лозим. Бу ҳақда ўкувчида тўларок тасаввур ҳосил бўлиши учун куйида қийинчилик даражаси турлича бўлган иккита вариант келтирилган.

19-§. ВАРИАНТЛАР

1- ВАРИАНТ

1. Ушбу $24+8:4\times2-1$ ифодани ҳисобланг:

(*A*) 51; (*B*) 27; (*C*) 24; (*D*) 15; (*E*) 3.

2. 25 нинг 5 % ини топинг:

(*A*) 125; (*B*) 5; (*C*) 7,5; (*D*) 1,25; (*E*) 2,5.

3. $\left(3\frac{1}{3}\right)^2$ ни топинг:

(*A*) $11\frac{1}{9}$; (*B*) $9\frac{1}{9}$; (*C*) $6\frac{2}{3}$; (*D*) $\frac{100}{3}$; (*E*) $\frac{101}{9}$.

4. Агар $3x+2=y$ бўлса, x ни y оркали ифодаланг:

(*A*) $y-2$; (*B*) $y-5$; (*C*) $\frac{y+2}{3}$; (*D*) $\frac{-y-2}{3}$; (*E*) $\frac{y-2}{3}$.

5. Ушбу $(a-3)^3-(a+3)^3$ ифодани соддалаштиринг:

(*A*) (a^2-3); (*B*) -216; (*C*) a^3-27; (*D*) -54; (*E*) $-18\,(a^2+3)$.

6. Агар $ab(x^2-y^2)\neq 0$ бўлса,

$$\frac{x^2-y^2}{ab}\cdot\frac{b}{x-y}:\frac{a}{x+y}$$ ифодани ҳисобланг:

(A) 1; (B) $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}$; (C) $\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}$; (D) $\frac{x^2-y^2}{2y}$; (E) $\frac{a+b}{ab}$.

7. Ушбу тенгламани ечинг:

$$(x+2)^2=x+2$$

(A) 0; (B) $-\frac{1}{2}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) -1; (E) -2; -1.

8. Ушбу тенгламанинг катта илдизини топинг:

$$x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0.$$

(A) $\sqrt{2}$; (B) 1; (C) $-\sqrt{2}$; (D) -1; (E) $\varnothing$.

9. Ушбу тенгламанинг илдизлари йиғиндисини топинг:

$$x^2-4x=-9.$$

(A) $\sqrt{5}+2$; (B) $\sqrt{5}-2$; (C) $-\sqrt{5}+2$; (D) $\varnothing$; (E) -3.

10. Ушбу тенгсизликни ечинг:

$$-8x+3(x-2)>-x+2.$$

(A) $(-\infty,\ 2)$; (B) $(-\infty,\ -2)$; (C) $(2,\ +\infty)$;
(D) $(-2,\ +\infty)$; (E) $(-2,\ 2)$.

11. Ушбу тенгсизликни ечинг: $x^2-x-6<0$.

(A) $(-2,\ 3)$; (B) $(-3,\ +2)$; (C) $(2,\ 3)$; (D) $(-2,\ -3)$; (E) $\varnothing$

12. Ушбу тенгсизликни ечинг:

$$\frac{x}{x-5}>\frac{1}{2}.$$

(A) $(5,\ +\infty)$; (B) $(-\infty,\ -5)$; (C) $(-\infty,\ -5)\cup(5,\ +\infty)$;
(D) $(-5,\ +\infty)$; (E) $\varnothing$.

13. Ушбу тенгламани ечинг:

$$x+5\sqrt{x}-6=0.$$

(A) 1; (B) 36; (C) -36; (D) -1; (E) $\sqrt{6}$.

14. Ушбу тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}=2.$$

(A) 3; (B) $\varnothing$; (C) 1; (D) 0; (E) -1.

15. Ушбу тенгсизликни ечинг:

$$\sqrt{x-5}<1.$$

(A) $(-\infty, 6)$; (B) $[5, 6)$; (C) $(5, 6]$; (D) $(-\infty, -4)$; (E) $\varnothing$.

16. Ушбу тенгламани ечинг:

$$3^{\frac{x-3}{2}}=9^{\frac{2x-3}{4}}.$$

(A) $\varnothing$; (B) 1; (C) -1; (D) 0; (E) $\frac{3}{4}$.

17. Ушбу тенгламани ечинг:

$$4^x-2^{x+1}-8=0.$$

(A) 2; (B) -1; (C) $\varnothing$; (D) 3; (E) -2.

18. Ушбу тенгсизликни ечинг:

$$(0{,}5)^x>(0{,}25)^{x+2}.$$

(A) $(-4, +\infty)$; (B) $(-\infty, -4)$; (C) $\varnothing$; (D) $(-\infty, +\infty)$; (E) $(0, +\infty)$.

19. Ушбу тенгламани ечинг:

$$\log_x (x+6)=2 .$$

(A) -2; (B) -2; 3; (C) 3; (D) -4; (E) 6.

20. Ушбу тенгламани ечинг:

$$\log_2 \left((1+\frac{1}{x}\right)=3.$$

(A) $\frac{1}{8}$; (B) $\frac{1}{7}$; (C) 7; (D) 8; (E) $\varnothing$.

21. Ушбу тенгсизликни ечинг:

$$\log_4 (x+7)>\log_2 (x+1).$$

(A) $(-\infty, +\infty)$; (B) $(-1, 2)$; (C) $(-1, +\infty)$; (D) $(-\infty, 2)$; (E) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

22. Ушбу тенгламани ечинг:

$$|x+1|=|x-2|.$$

(A) $\frac{1}{2}$; (B) $\varnothing$; (C) $-\frac{1}{2}$; (D) 0; (E) -1.

23. Ушбу тенгсизликни ечинг: $|x|>x+2$.

(A) $(-\infty, -2)$; (B) $(-\infty, 0)$; (C) $(-\infty, -1)$; (D) $\varnothing$; (E) $(-\infty, +\infty)$.

24. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 2x-3y=2, \\ -5x+2y=3. \end{cases}$$

(A) $\left(-\frac{13}{11}; \frac{-16}{11}\right)$; (B) $\left(\frac{-16}{11}; \frac{-13}{11}\right)$; (C) $\left(\frac{-3}{5}; -6\right)$; (D) $(-1; -1)$; (E) $(1; 0)$.

25. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^2-y^2=24, \\ xy=35. \end{cases}$$

(A) $(5;\ 7)$; (B) $(-5;\ -7)$; (C) $(7;\ 5)$; $(-7;\ -5)$;
(D) $(5;\ 5)$; $(-7;\ -7)$; (E) $(7;\ 5)$.

26. Ушбу тенгламани $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ ораликдаги ечимини топинг:

$$\sqrt{2}\cdot\sin x-1=0.$$

(A) $-\frac{\pi}{4}$; (B) $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$; (C) $\frac{\pi}{4}$; (D) $\varnothing$; (E) $\frac{3\pi}{4}$.

27. Ушбу тенгламани ечинг:

$$2\sin^2 x+5\sin x-3=0.$$

(A) $(-1)^k\arcsin(-3)+k\pi$; (B) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$;

(C) $\frac{\pi}{6}+k\pi$; (D) $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$; (E) $(-1)^k\frac{\pi}{3}+k\pi$.

28. Ушбу тенгсизликни ечинг:

$$\sin x>\frac{1}{2}.$$

(A) $\left(-\infty,\ \frac{\pi}{6}\right)$; (B) $\left(-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right)$ (C) $\left(-\frac{\pi}{6},\ +\infty\right)$;

(D) $\left(2k\pi+\frac{\pi}{6},\ 2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right)$; (E) $\left(k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\pi+\frac{5\pi}{6}\right)$.

29. Бирдан юзгача бўлган натурал сонларнинг йиғиндисини топинг:

(A) 5050; (B) 10100; (C) 4950; (D) 101, (E) 10.000

30. Агар арифметик прогрессияда $a_8=40$, $a_{20}=-20$ бўлса, $a_{16}=$ ни топинг:

(A) 20; (B) -60; (C) 0; (D) 10; (E) 150.

31. Агар геометрик прогрессияда $a_6=162$, $a_8=4374$ бўлса, a_3 ни топинг:

(A) 9; (B) 18; (C) 54; (D) -6; (E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

32. Учбурчакнинг томонлари 6, 10 ва 11 бўлса, периметри шу учбурчакнинг периметрига тенг булган тенг томонли учбурчакнинг томонини топинг:

(A) 6; (B) 9; (C) 10; (D) 11; (E) 29.

33. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 10, асоси 12 бўлса, асосидаги бурчак косинусини топинг:

(A) $\frac{5}{6}$; (B) $\frac{3}{5}$; (C) $\frac{5}{4}$; (D) $\frac{3}{2}$; (E) $\frac{5}{12}$.

34. Учларининг координаталари (0, 0), (4, 0), (0, 3) бўлган учбурчакнинг юзини топинг:

(A) 6; (B) 12; (C) 7; (D) 5; (E) 4.

35. Томони 3 ва 5 бўлган тўғри туртбурчакнинг диагоналини топинг:

(A) 4; (B) 34; (C) $\sqrt{34}$; (D) $\sqrt{8}$; (E) 8.

36. Томонлари 7 ва 12 ҳамда ўткир бурчаги 30° бўлган параллелограммнинг юзини ҳисобланг:

(A) 42; (B) 84; (C) $42\sqrt{3}$; (D) 193; (E) $\sqrt{193}$.

37. Тўғри бурчакли трапециянинг асослари a ва b, баландлиги h бўлса, диагоналларини топинг:

(A) $\sqrt{a^2+b^2}$; (B) $h+a$; $h+b$; (C) $\sqrt{a^2+h^2}$; $\sqrt{b^2+h^2}$;
(D) $\sqrt{a^2-h^2}$; $\sqrt{b^2-h^2}$; (E) $\sqrt{a+h}$; $\sqrt{a+h}$.

38. Ярим доиранинг юзаси 5 га тенг. Доира радиусини ҳисобланг:

(A) $\pm\sqrt{\frac{10}{\pi}}$; (B) $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$; (C) $\sqrt{\frac{5}{\pi}}$; (D) $\sqrt{\frac{\pi}{5}}$; (E) $\frac{\pi}{5}$.

39. Марказлари орасидаги масофа 10 бўлган ва радиуслари 2 ҳамда 7 га тенг айланалар нечта нуқтада кесишади?

(A) 2; (B) 1; (C) 0; (D) чексиз кўп; (E) 4.

40. Кубнинг икки қўшни ёқларининг диагоналлари орасидаги бурчакни ҳисобланг:

(A) 60°; (B) 90°; (C) 30°; (D) 45°; (E) 75°.

41. Мунтазам учбурчакли пирамиданинг асос томони a бўлиб, баландлиги асос томонидан икки марта катта бўлса, шу пирамиданинг ҳажмини топинг:

(A) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; (B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$; (C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$; (E) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

42. Цилиндрнинг ёйилмаси асоси b ва баландлиги h бўлган тўғри тўртбурчакдан иборат. Шу цилиндрнинг ҳажмини топинг:

(A) $\frac{b^2}{4\pi}$; (B) $\frac{hb}{4\pi}$; (C) hb^2; (D) $\frac{hb^2}{4\pi}$; (E) $\frac{\pi hb^2}{4}$.

43. Конус ўқ кесимининг юзи 10 бўлиб, асос диаметри 4 бўлса, конус ҳажмини ҳисобланг:

(A) $\frac{20}{3}\pi$; (B) $\frac{80\pi}{3}$; (C) 80π; (D) 20π; (E) $\frac{20}{3}$.

44. Ушбу $y=\sqrt{4-x^2}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

(A) $(-\infty, 2)$; (B) $[-2, 2]$; (C) $(-2, 2)$;
(D) $(-\infty, -2)\cup(2, +\infty)$; ($E$) $]2, +\infty)$.

45. $y=10(x+1)(x-3)$ функция графиги абсцисса ўкини P ва Q нукталарда кесиб ўтса, PQ кесманинг узунлигини топинг:

(A) 20; (B) 2; (C) 40; (D) 4; (E) $\frac{2}{5}$.

46. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ функциянинг кийматлар тўпламини топинг:

(A) $(-\infty, +\infty)$; (B) $(0, +\infty)$; (C) $(-1, 1)$; (D) $\varnothing$; (E) $[0, +\infty)$

47. Агар $f(x)=e^x-e^{-x}$ бўлса, $f'(0)$ ни ҳисобланг:

(A) 0; (B) $e^x+e^{-x}{}_0$ (C) 2; (D) 1; (E) -2.

48. $f(x)=x^2-7x$ функциянинг камайиш оралиғини топинг:

(A) $\left(-\infty, 3\frac{1}{2}\right]$; (B) $(-\infty, +\infty)$; (C) $[0,7]$;
(D) $(-\infty, 0]$; (E) $[7, +\infty)$.

49. $y=1-x^2$ функциянинг кайси нукталарига ўтказилган уринма *OX ўкига параллел бўлади?*

(A) $(1, 0)$; (B) $(-1, 0)$; (C) $(0, 1)$; (D) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$; (E) $(0, 0)$.

50. $f(x)=x^3-2x^2+x-3$ функциянинг $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ораликдаги энг катта ва энг кичик кийматлари топилсин.

(A) $-2\frac{7}{8}$; $-4\frac{1}{8}$; (B) -3; $-\frac{8}{9}$; (C) $4\frac{1}{8}$; $\frac{8}{9}$; (D) $-4\frac{1}{8}$; $-\frac{8}{9}$; (E) $\frac{8}{9}$; 3.

2- ВАРИАНТ

1. Ушбу 0,41144114... даврий ўнли касрни оддий касрга айлантиринг:

(A) $\frac{41}{99}$; (B) $\frac{411}{999}$; (C) $\frac{4114}{9999}$; (D) $\frac{41144}{99999}$; (E) $\frac{411441}{999999}$.

2. Ушбу ифодани ҳисобланг:

$$1-2+3-4+5-6+\ldots-100.$$

(A) -50; (B) -49; (C) 0; (D) -160; (E) -150.

3. Савдогар иккита бир хил автомобил сотиб, биринчисидан 40 % иккинчисидан 60 % фойда килган. Унинг умумий фойдасини топинг:

(A) 100 %; (B) 50 %; (C) 54 %; (D) 40 %; (E) 60 %.

4. Ушбу ифодани соддалаштиринг:

$$(1+x+x^2)(1-x)(1+x)(1-x+x^2).$$

(A) $1+x^6$; (B) $1-x^6$; (C) x^6-1; (D) x^6+x+1; (E) $(1-x)^6$.

5. Ҳисобланг:

$$\frac{71^3+49^3}{120}-71\cdot 49.$$

(*A*) 14400; (*B*) 484; (*C*) 22, (*D*) 7442, (*E*) 4800.

6. Ушбу ифодани соддалаштиринг:

$$(x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{0,5})^2+(\sqrt[4]{x}\cdot y^{\frac{1}{4}})^4+(\sqrt{x}\cdot\sqrt{y})^2;$$

(*A*) xy; (*B*) $xy+2\sqrt{xy}$; (*C*) $3xy$; (*D*) $3\sqrt{xy}$; (*E*) $xy(2+y)$.

7. a параметрнинг қандай қийматларида $ax+2a-3=0$ тенгламанинг ечими мусбат бўлади?

(*A*) $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$; (*B*) $(-\infty,\ 0)$; (*C*) $\left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$; (*D*) 5;

(*E*) $(-\infty,\ 0)\cup\left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$

8. Ушбу тенгламанинг барча бутун ечимларини топинг:

$$2x^3-3x^2+1=0$$

(*A*) -1; (*B*) 1; (*C*) 0; (*D*) 2; (*E*) -2.

9. Ушбу тенгсизликлар системасининг барча бутун ечимларини топинг:

$$\begin{cases}\frac{x+1}{2}<3x-1\\ x<\pi\end{cases}$$

(*A*) -1, 0, 1, 2; (*B*) 0, 1, 3; (*C*) 1, 2, 3; (*D*) 0, 1, 2, 3; (*E*) $\varnothing$.

10. Ушбу тенгсизликларнинг қандай иккиси ўзаро эквивалент?

а) $x^2<9$, *б*) $x<-3$, *в*) $x>3$, *г*) $-3<x<3$, *д*) $x<3$,

(*A*) *а*) ва *б*); (*B*) *б*) ва *г*); (*C*) *г*) ва *д*),

(*D*) *а*) ва *г*); (*E*) эквивалентлари йўқ.

11. Ушбу тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}=1.$$

(*A*) 2; (*B*) 0; (*C*) -2; (*D*) $\varnothing$; (*E*) 1.

12. Ушбу системани ечинг:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\\ x-2y+1=0\end{cases}$$

(*A*) (4; 0); (*B*) (0; 4); (*C*) (1; 1); (*D*) (0; 0); (*E*) (-1; 0).

13. Ушбу тенгламанинг барча манфий ечимларини топинг:

$$\sqrt[3]{15+2x}+\sqrt[3]{13-2x}=4.$$

$(A)\ -6;\ -7;\ (B)\ -6;\ (C)\ 0;\ (D)\ -7;\ (E)\ -42.$

14. Ушбу тенгламани ечинг:

$$x^{\log_x (x-2)^2}=9.$$

$(A)\ -1;\ (B)\ -1;\ 5;\ (C)\ 5;\ (D)\ 9;\ (E)\ \varnothing.$

15. Ушбу тенгламани ечинг:

$$\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1.$$

$(A)\ -3;\ (B)\ 4;\ (C)\ -3;\ 4;\ (D)\ 6;\ (E)\ -6.$

16. Ушбу тенгламани ечинг:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4.$$

$(A)\ 2;\ (B)\ -2;\ (C)\ \varnothing;\ (D)\ -2;\ 2;\ (E)\ 0.$

17. Агар $\log_x 2=a$ ва $\log_x 3=b$ бўлса, $\log_x\left(\frac{9x^2}{2}\right)$ ни ҳисобланг:

$(A)\, b^2-a+2;\ (B)\, 2b+a+2;\ (C)\, 2b-a+2;\ (D)\, a-2b-2;\ (E)\, \frac{2b^2}{a}.$

18. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases}\log_x y+\log_y x=\frac{5}{2},\\ xy=27.\end{cases}$$

$(A)\ (3;\ 9),\ (9;\ 3);\ (B)\ (3;\ 9);\ (C)\ (9;\ 3);\ (D)\ (1;\ 27);$
$(E)\ (2;\ 4),\ (4;\ 2).$

19. Ушбу тенгламаларнинг қайси бир иккиси ўзаро эквивалент?

а) $|x-1|=2$, *б)* $x-1=2$, *в)* $x-1=-2$, *г)* $(x-1)^2=4$.

(A) *а)* ва *б)*; (B) *б)* ва *г)*; (C) *г)* ва *в)*; (D) *а)* ва *г)*; (E) эквивалентлари йўқ.

20. Ушбу тенгсизликни ечинг:

$$|x-1|+|x+3|>2.$$

$(A)\ (-3,\ 1);\ (B)\ [1,\ +\infty);\ (C)\ (-\infty,\ -2);\ (D)\ (-3,\ -2);$
$(E)\ (-\infty,\ +\infty).$

21. Ушбу ифодани ҳисобланг:

$$\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{2\pi}{2}+\ldots+\sin\frac{51\pi}{2}.$$

$(A)\ -1;\ (B)\ 1;\ (C)\ 0;\ (D)\ 51;\ (E)\ 26.$

22. Ушбу ифодани ҳисобланг:

$$\operatorname{tg}\left(5\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$(A)\ -1;\ (B)\ 1;\ (C)\ \frac{3\pi}{4};\ (D)\ 0;\ (E)\ \frac{11\pi}{12}.$

23. Ушбу тенгламанинг $[0, \pi]$ оралиғидаги ечимини топинг

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=\frac{1}{2}.$$

$(A)\ \frac{\pi}{8};\ (B)\ \frac{\pi}{8};\ \frac{3\pi}{8};\ (C)\ \frac{3\pi}{8};\ \frac{5\pi}{8};\ (D)\ \frac{7\pi}{8};\ (E)\ \varnothing.$

24. Ушбу тенгсизликнинг $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқдаги ечимини топинг:

$$\sin^2 x+\frac{1}{4}<-\frac{3}{4}$$

$(A)\ \left(-\frac{3\pi}{10}, -\frac{\pi}{10}\right);\ (B)\ \left(\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}\right);$

$(C)\ \left(-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right);\ (D)\ \left(-\frac{3\pi}{10}, -\frac{\pi}{10}\right)\cup\left(\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}\right);\ (E)\ \varnothing.$

25. Арифметик прогрессияда ўнта ҳад бўлиб, жуфт ўринда турган ҳадларининг йиғиндиси 50 га, тоқ ўринда турган ҳадларининг йиғиндиси эса 35 га тенг бўлса, бу сонлар топилсин:

(A) 1, 3, 5, 7, —1; (B) —5, —2, 1, 4, 7;

(C) —2, 1, 4, 7, ...; (D) 1, 4, 7, ...; (E) 4, 7, 10, 13, ...

26. Арифметик прогрессияда ихтиёрий натурал n учун $S_n=4n^2-3n$ бўлса, a_3 ни ҳисобланг:

(A) 1; (B) 9; (C) 17; (D) 25; (E) —7.

27. Ушбу чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндисини ҳисобланг:

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{3-\sqrt{3}}+\frac{1}{6}+\dots$$

$(A)\ 3+\sqrt{3};\ (B)\ 3-\sqrt{3};\ (C)\ 3;\ (D)\ \sqrt{3}+1;\ (E)\ \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$

28. Томонлари 3, 4, 5 бўлган учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусини топинг:

(A) 2; (B) 2,5; (C) 1,5; (D) 4; (E) 5.

29. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари a ва b. Тўғри бурчак биссектрисасини ҳисобланг:

$(A)\ \frac{ab\sqrt{2}}{a+b};\ (B)\ \frac{\sqrt{2}}{a+b};\ (C)\ \frac{ab}{a+b};\ (D)\ \frac{a+b}{2};\ (E)\ \sqrt{ab}.$

30. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси $4\sqrt{2}$ га, ён томонининг медианаси эса 5 га тенг. Ён томонларининг узунлигини топинг:

$(A)\ 2;\ (B)\ 3;\ (C)\ 6;\ (D)\ 2\sqrt{5};\ (E)\ 5\sqrt{2}.$

31. [illegible] тоапециятга радиуси 1 бўлган айлана [illegible] юзини топинг:

(A) [illegible]; (B) 5; (C) 4,5; (D) $\sqrt{5}$; (E) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

32. Асоси 15 см бўлган учбурчак юзасини тенг иккига бўлувчи ва асосга параллел бўлган кесманинг узунлигини топинг:

(A) 7,5; (B) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$; (C) $\frac{\sqrt{2}}{5}$; (D) $15\sqrt{2}$; (E) 13.

33. Ромбнинг диагоналлари a ва b бўлса, ромбнинг юзасини ҳисобланг:

(A) ab; (B) $2ab$; (C) $\frac{ab}{2}$; (D) a^2+b^2; (E) $\sqrt{ab}$.

34. Ўзининг диагонали билан иккита тенг томонли учбурчакка бўлинадиган ромбга радиуси 2 бирликка тенг бўлган айлана ички чизилган. Ромбнинг томонини топинг:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; (B) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; (C) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$; (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; (E) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$.

35. ABC учбурчакка квадрат шундай ички чизилганки, унинг бир томони AB кесмада ётади. Агар $AB=AC=8$ ва $BC=8\sqrt{\frac{2}{5}}$ бўлса квадратнинг юзаси топилсин:

(A) 3; (B) $\sqrt{3}$; (C) 6; (D) 9; (E) $3\sqrt{3}$.

36. Бир кубнинг ҳажми иккинчисиникидан уч баробар катта. Уларнинг тўла сиртларининг нисбатини топинг:

(A) $\sqrt[3]{3}:\sqrt{3}$; (B) 3:1; (C) $\sqrt[3]{9}:1$; (D) 1:1; (E) $\sqrt{3}:1$

37. Мунтазам учбурчакли пирамиданинг барча қирралари a га тенг. Ён ёқ билан асос текислиги орасидаги бурчак топилсин.

(A) $\arcsin\frac{2}{\sqrt{3}}$; (B) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$; (C) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; (D) $\frac{\pi}{4}$; (E) $\frac{\pi}{2}$.

38. Конус ясовчиси l га, асос радиуси эса R га тенг. Ўқ кесим юзасини топинг:

(A) $\frac{R\sqrt{l^2-R^2}}{2}$; (B) $2R\sqrt{l^2-R^2}$; (C) $R\sqrt{l^2-R^2}$; (D) $\frac{R\cdot l}{2}$; (E) $R\cdot l$.

39. Катетлари 3 ва 4 бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси атрофида айланишдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми ҳисоблансин:

(A) $\frac{12\pi}{15}$; (B) $\frac{144\pi}{15}$; (C) $\frac{144\pi}{5}$; (D) $\frac{144}{5}$; (E) $\frac{\pi}{5}$.

40. Радиуслари 9 бўлган шар ва цилиндрнинг ҳажмлари тенг. Цилиндр баландлигини топинг.

(A) 9; (B) 3; (C) 3π; (D) 12; (E) $\frac{9}{\pi}$.

41. Агарда, $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ бўлса, $f(a-3)$ ни ҳисобланг:

(A) $\frac{a+1}{a-2}$; (B) $\frac{x+1}{x-2}$; (C) $\frac{a-2}{a-5}$;

(D) $\frac{a-2}{a+2}$; (E) $\frac{a+3}{a-5}$.

42. Ушбу $f(x)=\log_2\frac{x}{x-3}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

(A) $(0{,}3)$; B $(-\infty,\ 0)$; (C) $(3,\ +\infty)$;
(D) $(-\infty,\ 0)\cup(3,\ +\infty)$; (E) $(-\infty,\ +\infty)$.

43. Ушбу функцияларнинг қайси бири тоқ функция бўлади?

а) $\sin x^3$, *б)* $\sin^2 x$; *в)* $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$; *г)* $\sin\sqrt{x}$; *д)* $\sqrt{\sin x}$.

(A) *а)*; (B) *б)*; (C) *в)*; D *г)*; (E) *д)*.

44. $y=5$ функцияга ўтказилган уринманинг тенгламаси тузилсин.

(A) $x=0$; (B) $y=5$; (C) $x=5$;
(D) $x+y=5$; (E) $x+y=0$.

45. Агар $f(x)=x^2-3x+2$ бўлса, $x\cdot f'(x)>0$ тенгсизликни ечинг:

(A) $(-\infty,\ 0)\cup\left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$; (B) $(-\infty,0)$;

(C) $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$; (D) $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$; (E) $\left[0,\ \frac{3}{2}\right]$.

46. $f(x)=x^3-5x^2+7x$ функциянинг камайиш оралиғини топинг.

(A) $(-\infty,\ 1)$; (B) $\left(2\frac{1}{3},\ +\infty\right)$; (C) $\left(1,\ 2\frac{1}{3}\right)$; (D) $\varnothing$;
(E) $(-\infty,\ +\infty)$.

47. $f(x)=x^2$ ва $g(x)=2x-7$ чизиқлар нечта умумий нуқтага эга?

(A) 0 та; (B) 1 та; (C) 2 та; (D) чексиз кўп; (E) 3 та.

48. Ушбу $y=\ln(4x-x^2)$ функциянинг критик нуқталарини топинг:

(A) 1; (B) 0; 4; (C) 0; (D) 2; (E) йўқ.

49. Қирраси $\sqrt{3}$ га тенг бўлган тўртбурчакли мунтазам пирами-

данинг асоси томони қандай бўлганда унинг ҳажми энг катта бўлади?

$$(A)\ \frac{2}{3};\ (B)\ \frac{2}{\sqrt{3}};\ (C)\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ (D)\ 2;\ (E)\ \sqrt{3}.$$

50. $y=2x^3+9x^2+12x$ функциянинг $\left[-\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2}\right]$ даги энг катта ва энг кичик қийматини топинг:

(A) -4; 5; (B) -6; -4; (C) -4; -5; (D) -4; 0;
(E) $-\frac{5}{2}$; $-\frac{3}{2}$.

ЖАВОБЛАР

1- §.

1. $-\frac{11}{12}$. 2. 2,5 3. 4 4. $\frac{30}{121}$ 5. 11 800 000 6. 10 % 7. $87\frac{1}{7}$ гр. сув ва $12\frac{6}{7}$ гр. эссенция. 8. 110.

2- §.

1. $\frac{3a+4b}{(a+b)^2}$ 2. $24:(5y-2x)$ 3. $x+3$ 4. $\frac{3a}{1-a}$.

3- §.

1. 0 2. 1 3. $\frac{240}{41}$ 4. $-\frac{4}{11}$ 5. 0; $\frac{3}{2}$ 6. 0; 1. 7. $\frac{1}{2}$; $\frac{6}{7}$ 8. $\varnothing$ 9. -2; 5 10. -1; 1.

4- §.

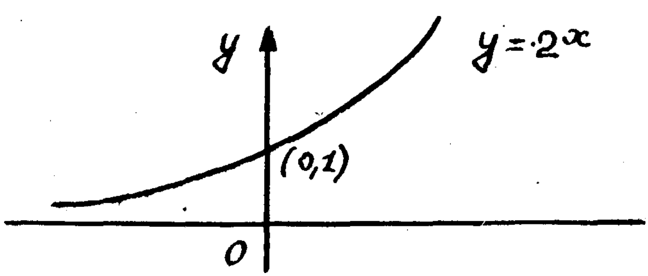
1. $x\in(-\infty, +\infty)$. 2. $x\in\left[\frac{11}{5}, +\infty\right)$. 3. $x\in[-2, +\infty)$. 5. $x\in\varnothing$. 6. $x\in\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)\cup(1, +\infty)$. 7. $x\in\varnothing$. 8. $x\in(-\infty, +\infty)$. 9. $x\in\varnothing$. 10. $x\in[2, 3]$. 11. $x\in\left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$. 12. $x\in\left[-\frac{10}{3}, 2\right)$. 13. $x\in(-\infty, -3)\cup(0, 5)$. 14. $x\in\left(-\infty, \frac{-7}{4}\right)$. 15. $x\in(-1, 0)$. 16. $x\in\varnothing$.

5- §.

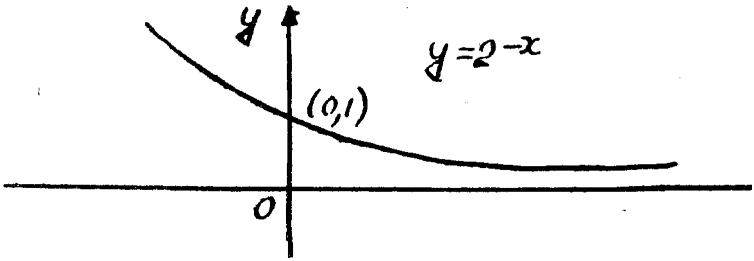
1. -2 2. 16; 21 3. 11 4. $-0{,}5$ 5. 3; -5 6. $x\in(4, +\infty)$ 7 $x\in[0, 1]$ 8. $x\in[0, 1]$.

6- §.

1.



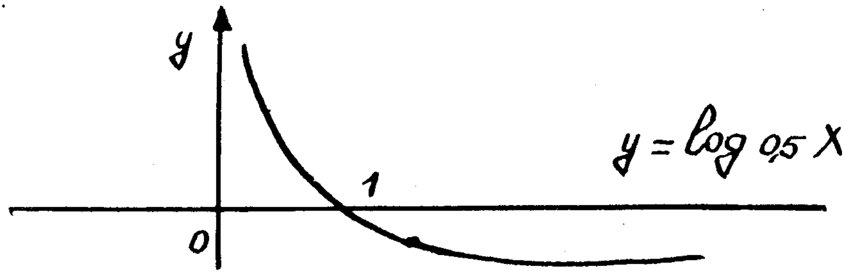
2.



3. $20\frac{1}{8}$. **4.** a. **5.** 3. **6.** -2; 5. **7.** 1; -5. **8.** $\frac{11}{13}$. **9.** $x\in(0, +\infty)$. **10.** $x\in(-\infty, -1)\cup(4, +\infty)$. **11.** $x\in(-\infty, 0)\cup[1, +\infty)$. **12.** $x\in(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$.

7- §.

1. $-4{,}5$. **2.** 1.
3.



4. $-\frac{5}{6}$. **5.** 10; $\sqrt[9]{10}$. **6.** 3. **7.** -14. **8.** $3^{\sqrt{2}}$; $3^{-\sqrt{2}}$.

8- §.

1. $x\in\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$ **2.** 0; -2; 2. **3.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$. **4.** 12; $-\frac{2}{3}$. **5.** $x\in(-\infty, \frac{6}{5}]\cup[8,+\infty)$. **6.** $x\in\left[\frac{5-\sqrt{17}}{2}, 2\right]\cup\left[3, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right]$. **7.** $x\in(-\infty, -3)\cup(3, +\infty)$ **8.** $x\in(-\infty, \sqrt{6}-1)\cup(\sqrt{6}+1, +\infty)$.

9- §.

1. $x=\frac{35}{13}$; $y=\frac{7}{13}$. **2.** $x=7$; $y=2$. **3.** $x=-\frac{11}{9}$; $y=\frac{19}{9}$. **4.** $x=\frac{8}{5}$; $y=\frac{11}{5}$. **5.** $x=8$; $y=3$. **6.** $x_1=2$; $y_1=3$; $x_2=3$; $y_2=2$. **7.** $x=y=1$. **8.** $x_1=y_1=-4$; $x_2=-6$; $y_2=-2$. **9.** $a_1=1$; $a_2=2$; $a_3=-\frac{22}{3}$. **10.** $a=-4$ $x_2=-1$. **11.** $p\in\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. **12.** $a=-2$.

10- §.

1. 2,5. **2.** $-\frac{\pi}{12}$. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **4.** π **5.** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+k\pi$ **6.** $\varnothing$. **7.** $\frac{\pi}{2}+2k\pi$. $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{3}{5}+k\pi$. **8.** $\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{13}+k\pi$. **9.** $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi$.

10. $2k\pi$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$. **11.** $2k\pi$. **12.** $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$. **13.** $k\pi$. **14.** $-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $-\operatorname{arctg}2+k\pi$. **15.** $\varnothing$; **16.** $k\pi$; $\operatorname{arctg}2+k\pi$. **17.** $\frac{\pi}{10}$; $\frac{k\pi}{5}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$. **18.** $k\pi$; $-\frac{\pi}{4}$; $k\pi$. **19.** $k\pi$; $\pm\frac{2\pi}{3}+4k\pi$. **20.** $\frac{k\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}+k\pi$. **21.** $2k\pi-\frac{7\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi$. **22.** $\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{20}<x<\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$. **23.** $\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{24}<x<\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{4}$. **24.** $k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi$.

11- §.

1. 0. **2.** $\div\, a+b,\ 3a+b,\ \ldots\ (2n-1)\,a+b,\ \ldots$ **3.** $a=0{,}2$. **4.** $a_1=-0{,}5$; $b_1=-2$; $a_2=b_2=1$.

12- §.

1. 3; 4; 5. **2.** 6; 8. **3.** 289:400. **4.** 8; 15.

13- §.

1. 25 см^2. **2.** 2 %. **3.** $\frac{(a-b)^2\sin\alpha}{2}$. **4.** 48.

14- §.

1. $2R^2$. **2.** 10,5 см. **3.** $\frac{1}{\pi^2}\cdot 1200$ см^2. **4.** $9(7-4\sqrt{3})\pi R^2$.

15- §.

1. $\frac{1}{3}l^3\sin 2\alpha\cos\alpha$. **2.** 144см^3. **3.** $\frac{5\sqrt{30\sqrt{3}}}{6}$ см^3. **4.** $\frac{49\sqrt{14}}{3}$.

16- §.

1. $\frac{\pi}{24}b^2\sqrt{4a^2-b^2}$. **2.** $\frac{25\pi^3\sqrt{2}}{3}$ см^3. **3.** $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$ см^3. **4.** $\frac{49\pi}{3}(\sqrt{74}-1)$.

17- §.

1. $x\in(-\infty,+\infty)$. **2.** $x\in(-\infty,+\infty)$. **3.** $x\in[-5,+\infty)$.

18- §.

1. *а*) $\max\limits_{[-1,2]} y(x)=y(1)=\frac{4-6\pi}{3}$; $\min\limits_{[-1,2]} y(x)=y(-1)=-\frac{16+6\pi}{3}$; *б*) $\max\limits_{[0,2]} y(x)=y(2)=2$; $\min\limits_{[0,2]} y(x)=y(1)=-0{,}25$; *в*) $\max\limits_{[-1,1]} y(x)=y(0{,}2)=\frac{38}{375}$; $\min\limits_{[-1,1]} y(x)=y(-1)=-\frac{46}{15}$.

2. *а*) $(-\sqrt{5},0)\cup(\sqrt{5},+\infty)$ да монотон ўсиб, $(-\infty,-\sqrt{5})\cup(0,\sqrt{5})$ да эса монотон камаяди. *б*) $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$ да монотон ўсиб, $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ да эса монотон камаяди. *в*) $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(3,+\infty)$ да монотон ўсиб, $\left(-\frac{1}{3},3\right)$ да монотон камаяди.

19- §.

1 - вариант

1. (B) 27. **2.** (D) 1,25. **3.** (A) $11\frac{1}{9}$. **4.** (E) $\frac{y-2}{3}$. **5.** (E) $-18\,(a^3+3)$. **6.** (A) 1. **7.** (D) -1. **8.** (A) $\sqrt{2}$. **9.** (D) $\varnothing$. **10.** (B) $(-\infty,\ -2)$. **11.** (B) $(-3,\ 2)$. **12.** (C) $(-\infty,\ -5)\cup(5,\ +\infty)$. **13.** (A) 1. **14.** (A) 3. **15.** (A) $(-\infty,\ 6)$. **16.** (D) 0. **17.** (A) 2. **18.** (A) $(-4,\ +\infty)$. **19.** (C) 3. **20.** $(B)\frac{1}{7}$. **21.** (B) $(-1,\ 2)$. **22.** (A) $\frac{1}{2}$. **23.** (C) $(-\infty,\ -1)$. **24.** (A) $\left(-\frac{13}{11},\ -\frac{16}{11}\right)$. **25.** (C) $(7;\ 5)$; $(-7;\ -5)$. **26.** $(C)\frac{\pi}{4}$. **27.** (B) $(-1)^n\ \frac{\pi}{6}+n\pi$. **28.** (D) $\left(2n\pi+\frac{\pi}{6},\ 2n\pi+\frac{5\pi}{6}\right)$. **29.** (A) 5050. **30.** (C) 0. **31.** (B) 18. **32.** (E) 29. **33.** $(B)\frac{3}{5}$. **34.** (A) 6. **35.** (C) $\sqrt{34}$. **36.** (A) 42. **37.** (C) $\sqrt{a^2+h^2}$; $\sqrt{b^2+h^2}$. **38.** (B) $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$. **39.** (C) 0. **40.** (A) 60°. **41.** (B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **42.** (D) $\frac{ab^2}{4\pi}$. **43.** $(A)\frac{20}{3}\pi$. **44.** (B) $[-2,\ 2]$. **45.** (D) 4. **46.** (B) $(0,\ +\infty)$. **47.** (C) 2. **48.** $(A)\left(-\infty,\ \frac{7}{2}\right)$. **49.** $(0,1)$. **50.** $(D)\,-4\frac{1}{8};-\frac{8}{9}$.

2- вариант

1. $(C)\frac{4114}{9999}$. **2.** (A) -50. **3.** (B) 50 %. **4.** (B) $1-x^6$. **5.** (B) 484. **6.** (C) $3xy$. **7.** (A) $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$. **8.** (B) 1. **9.** (D) 0, 1, 2, 3. **10,** (D) $a)$ ва $г$. **11.** (D) $\varnothing$. **12.** (C) $(1,\ 1)$ **13.** (D) -7. **14.** (C) 5. **15.** (B) 4. **16.** (D) -2; 2. **17.** $2b-a+2$. **18.** (A) $(3;\ 9)$ ва $(9;\ 3)$. **19.** (D) $a)$ ва $г)$. **20.** (E) $(-\infty,\ +\infty)$. **21.** (C) 0. **22.** (A) -1. **23.** (B) $\frac{\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{8}$. **24.** (D) $\left(-\frac{3\pi}{10},\ -\frac{3\pi}{10}\right)\cup\left(\frac{\pi}{10},\ \frac{3\pi}{10}\right)$. **25.** (B) $-5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7\ \ldots$ **26.** (C) 17. **27.** (A) $3+\sqrt{3}$. **28.** (B) 2,5. **29.** (A) $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. **30.** (C) 6. **31.** (B) 5. **32.** (B) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **33.** (C) $\frac{ab}{2}$. **34.** (C) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. **35.** (D) 9. **36.** (C) $\sqrt[3]{9}:1$. **37.** (B) $\arcsin\ \frac{1}{\sqrt{3}}$. **38.** (C) $R\sqrt{l^2-R^2}$. **39.** (B) $\frac{144\pi}{15}$. **40.** (D) 12. **41.** (C) $\frac{a-2}{a-5}$. **42** (D) $(-\infty,\ 0)\cup(3,\ +\infty)$. **43.** (A) $a)$. **44.** (B) $y=5$. **45.** (A) $(-\infty,\ 0)\cup\left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$. **46.** (C) $\left(1{,}2\frac{1}{3}\right)$ **47.** (A) 0. **48.** (D) 2. **49.** (D) 2. **50** (C) -4; -5.

АСОСИЙ ФОРМУЛАЛАР
(тригонометрия)

Ўрта мактаб математикасининг мисол ва масалаларини ҳал қилишда, жумладан тригонометрик айниятларни исботлашда, тригонометрик тенгламаларни ечишда тригонометриянинг турли формулаларини қўллашга тўғри келади. Керакли формулаларни тезда топиб, ундан амалий фойдаланиш ўқувчига мисол ва масалаларни самарали ечишда ёрдам беради. Шуни эътиборга олиб, мазкур китобда келтирилган тригонометрик формулаларни жамлаб, уларнинг ёнига янгиларини қўшиб, қуйидаги формулаларни келтиришни лозим топдик.

I. БУРЧАКЛАРНИНГ РАДИАН ВА ГРАДУС ЎЛЧОВЛАРИ ОРАСИДАГИ БОҒЛАНИШ

1. 1 радиан $=\frac{180°}{\pi}\approx 57°17'44''8.$

2. $1°=\frac{\pi}{180}$ радиан $\approx 0{,}01745$ радиан.

3. $\alpha°=\frac{\alpha°\pi}{180°}$ радиан, α радиан $=\left(\frac{180\cdot\alpha}{\pi}\right)°.$

4. Баъзи-бир бурчакларнинг градус ва радиан ўлчовлари

Градуслар	0	30	45	60	90	180	270	360
Радианлар	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

II. БИР БУРЧАКНИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРИ ОРАСИДАГИ БОҒЛАНИШЛАР

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$
2. $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$
3. $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$
4. $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}.$
5. $\mathrm{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$
6. $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}.$
7. $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha.$
8. $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\mathrm{cosec}^2\alpha.$

III. БАЪЗИ-БИР БУРЧАКЛАР ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРИНИНГ ҚИЙМАТЛАРИ

α бурчаклар / функция	0 $(0°)$	$\frac{\pi}{6}$ $(30°)$	$\frac{\pi}{4}$ $(45°)$	$\frac{\pi}{3}$ $(60°)$	$\frac{\pi}{2}$ $(90°)$	α $(180°)$	$\frac{3}{2}\pi$ $(270°)$	2π $(360°)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	мавжуд эмас	0	мавжуд эмас	0
$\mathrm{ctg}\alpha$	мавжуд эмас	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	мавжуд эмас	0	мавжуд эмас

IV. КЕЛТИРИШ ФОРМУЛАЛАРИ

аргументлар / функция	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
sec	$\sec\alpha$	$\mathrm{cosec}\,\alpha$	$-\mathrm{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\mathrm{cosec}\alpha$	$\mathrm{cosec}\alpha$
cosec	$-\mathrm{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$	$\sec\alpha$	$\mathrm{cosec}\alpha$	$-\mathrm{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$

V. ҚЎШИШ ФОРМУЛАЛАРИ

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$
2. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$
3. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$
4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$
5. $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}.$
6. $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}.$
7. $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}.$
8. $\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta}.$

9. $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+$ $+\cos\alpha\cos\alpha\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

10. $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-$ $-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

VI. КАРРАЛИ БУРЧАКНИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРИ

1. $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.
2. $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-\sin^2\alpha$.
3. $\sin3\alpha=\sin\alpha(4\cos^2\alpha-1)=\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)$.
4. $\cos3\alpha=\cos\alpha(4\cos^2\alpha-3)=\cos\alpha(1-4\sin^2\alpha)$.
5. $\sin4\alpha=4\sin\alpha\ \cos\alpha(1-2\sin^2\alpha)$.
6. $\cos4\alpha=8\sin^4\alpha-8\sin^2\alpha+1=\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$.
7. $\mathrm{tg}2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$.
8. $\mathrm{tg}3\alpha=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha(3-\mathrm{tg}^2\alpha)}{1-2\mathrm{tg}^2\alpha}$.
9. $\mathrm{tg}4\alpha=\dfrac{4\mathrm{tg}\alpha(1-\mathrm{tg}^2\alpha)}{1-6\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha}$.
10. $\mathrm{ctg}2\alpha=\dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$.
11. $\mathrm{ctg}3\alpha=\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha(\mathrm{ctg}^2\alpha-3)}{3\mathrm{ctg}^2\alpha-1}$.
12. $\mathrm{ctg}4\alpha=\dfrac{\mathrm{ctg}^4\alpha-6\mathrm{ctg}^2\alpha+1}{4\mathrm{ctg}\alpha(\mathrm{ctg}^2\alpha-1)}$.

VII. ЯРИМБУРЧАКНИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРИ

1. $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$.
2. $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$.
3. $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\sin\alpha}}$.
4. $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.
5. $\cos\alpha=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.
6. $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

VIII. ЙИҒИНДИНИ КЎПАЙТМАГА АЙЛАНТИРИШ ФОРМУЛАЛАРИ

1. $\sin\alpha+\cos\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.
3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
5. $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.
6. $\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.
7. $\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.
8. $\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta=-\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

IX. КЎПАЙТМАНИ ЙИҒИНДИГА АЙЛАНТИРИШ ФОРМУЛАЛАРИ

1. $\sin\alpha\,\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$.
2. $\sin\alpha\,\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$.
3. $\cos\alpha\,\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$.

X. ДАРАЖАЛАРНИ ПАСАЙТИРИШ ФОРМУЛАЛАРИ

1. $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$.
2. $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$.
3. $\sin^3\alpha=\frac{1}{2^2}(3\sin\alpha-\sin3\alpha)$.
4. $\cos^3\alpha=\frac{1}{2^2}(3\cos\alpha+\cos3\alpha)$.
5. $\sin^4\alpha=\frac{1}{2^3}(3-4\cos2\alpha+\cos4\alpha)$.
6. $\cos^4\alpha=\frac{1}{2^3}(3+4\cos2\alpha+\cos4\alpha)$.
7. $\sin^5\alpha=\frac{1}{2^4}(10\sin\alpha-5\sin3\alpha+\sin5\alpha)$.
8. $\cos^5\alpha=\frac{1}{2^4}(10\cos\alpha+5\cos3\alpha+\cos5\alpha)$.

XI. ТЕСКАРИ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАР

1. $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.
2. $0\leqslant\arccos\alpha\leqslant\pi$.
3. $-\frac{\pi}{2}<\mathrm{arctg}\,\alpha<\frac{\pi}{2}$.
4. $0<\mathrm{arcctg}\,\alpha<\pi$.
5. $\arcsin(-\alpha)=-\arcsin\alpha$.
6. $\arccos(-\alpha)=\pi-\arccos\alpha$.
7. $\mathrm{arctg}(-\alpha)=-\mathrm{arctg}\,\alpha$.
8. $\mathrm{arcctg}(-\alpha)=\pi-\mathrm{arcctg}\,\alpha$.
9. $\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\frac{\pi}{2}$.
10. $\mathrm{arctg}\,\alpha+\mathrm{arcctg}\,\alpha=\frac{\pi}{2}$.
11. $\sin(\arcsin\alpha)=\alpha\quad(-1\leqslant\alpha\leqslant1)$.
12. $\cos(\arcsin\alpha)=\sqrt{1-\alpha^2}\quad(-1\leqslant\alpha\leqslant1)$.
13. $\mathrm{tg}(\arcsin\alpha)=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\quad(-1<\alpha<1)$.
14. $\mathrm{ctg}(\arcsin\alpha)=\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\quad(-1\leqslant\alpha\leqslant1;\ \alpha\neq0)$.
15. $\sin(\arccos\alpha)=\sqrt{1-\alpha^2}\quad(-1\leqslant\alpha\leqslant1)$.
16. $\cos(\arccos\alpha)=\alpha\quad(-1\leqslant\alpha\leqslant1)$.
17. $\mathrm{tg}(\arccos\alpha)=\frac{\sqrt{1-2^{\alpha}}}{\alpha}\quad(-1\leqslant\alpha\leqslant1;\ \alpha\neq0)$.

18. $\operatorname{ctg}(\arccos\alpha)=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ $(-1<\alpha<1)$.

19. $\sin(\operatorname{arctg}\alpha)=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ $(-\infty<\alpha<+\infty)$.

20. $\cos(\operatorname{arctg}\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ $(-\infty<\alpha<+\infty)$.

21. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\alpha)=\alpha$ $(-\infty<\alpha<\infty)$.

22. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}\alpha)=\frac{1}{\alpha}$ $(-\infty<\alpha<\infty,\ \alpha\neq 0)$.

23. $\sin(\operatorname{arcctg}\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ $(-\infty<\alpha<\infty)$.

24. $\cos(\operatorname{arcctg}\alpha)=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ $(-\infty<\alpha<\infty)$.

25. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}\alpha)=\frac{1}{\alpha}$ $(-\infty<\alpha<\infty,\ \alpha\neq 0)$.

26. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}\alpha)=\alpha$ $(-\infty<\alpha<\infty)$.

27. $\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

28. $\arccos(\cos\alpha)=\alpha$ $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$.

29. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha)=\alpha$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

30. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha)=\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$.

КИРИШ ИМТИҲОНЛАРИ ДАСТУРИ

АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ

1. Натурал сонлар (N). Туб ва мураккаб сонлар. Бўлувчи, бўлинувчи ва бўлинма. Сонларнинг 2, 3, 5, 9, 10 ларга бўлиниш аломатлари. Сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиш. Энг катта умумий бўлувчи ва энг кичик умумий бўлинувчи.
2. Манфий ва мусбат сонлар. Бутун сонлар (Z). Оддий ва ўнли касрлар. Рационал сонлар (Q). Рационал сонлар устида амаллар. Рационал сонларни солиштириш.
3. Ҳақиқий сонлар (R) ва уларни ўнли касрлар орқали ифодалаш.
4. Ҳақиқий сонларни сонлар ўқида тасвирлаш. Ҳақиқий соннинг модули ва унинг геометрик маъноси.
5. Сонли ва ўзгарувчи ҳарфли ифодалар. Бутун ва рационал кўрсаткичли даражалар, улар устида амаллар. Арифметик илдиз.
6. Бирҳадлар ва кўпҳадлар, улар устидаги амаллар. Қисқа кўпайтириш формулалари.
7. Бир ўзгарувчили кўпҳадлар. Кўпҳаднинг илдизи. Безу теоремаси.
8. Кўпҳадни биринчи даражали иккиҳадга бўлиш. Кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратиш. Алгебраик касрлар ва улар устида бажариладиган амаллар.
9. Процентлар ва пропорциялар. Уларнинг хоссалари.
10. Чизиқли ва квадрат тенгламаларни ечиш. Квадрат тенглама илдизларининг хоссалари.
11. Квадрат учҳадни чизиқли купайтувчиларга ажратиш.
12. Сонли тенгсизликлар ва уларнинг хоссалари.
13. Чизиқли ва квадрат тенгсизликларни ечиш.
14. Чизиқли тенгламалар системаси ва уларни ечиш усуллари.
15. Чизиқли тенгсизликлар системаси ва улрни ечиш.
16. Логарифм ва унинг хоссалари. Кўпайтма, бўлинма ва даражанинг логарифмлари.
17. Ўнли логарифмлар. Ўнли логарифмларнинг хоссалари.
18. Арифметик ва геометрик пргрессиялар. Прогрессиянинг n- ҳади ва биринчи n та ҳадининг йиғиндиси учун формулалар.
19. Функция тушунчаси. Функциянинг берилиш усуллари. Аниқланиш ва ўзгариш соҳалари.
20. Функциянинг графиги. Ўсувчи ва камаювчи функциялар. Даврий функциялар. Тоқ ва жуфт функциялар.
21. Берилган функцияга тескари функция ва унинг хоссалари.
22. $y=ax+b$ чизиқли функциянинг хоссалари ва унинг графиги.
23. $y=\frac{k}{x}$ функциянинг графиги ва унинг хоссалари.
24. $y=ax^2+bx+c$ функциянинг графиги ва унинг хоссалари.
25. $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$, $y=a\cdot x^n$ $(n\in N)$, $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$ функцияларнинг графиклари ва уларнинг хоссалари.
26. $y=\sqrt[n]{x}$ функциянинг хоссалари ва унинг графиги.
27. Бурчак тушунчаси. Бурчакнинг градус ва радианларда ўлчаниши. Радиан ва градус ўлчовлари орасидаги боғланиш.
28. Ўткир бурчакнинг тригонометрик функциялари.
29. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ функцияларнинг хоссалари ва графиклари.
30. Бир хил аргументли тригонометрик функциялар орасидаги боғланишлар.
31. Йиғинди ва айирманинг тригонометрик функциялари.
32. Иккиланган ва ярим бурчакнинг тригонометрик функциялари.
33. Келтириш формулалари.
34. $\sin\alpha\pm\sin\beta$, $\cos\alpha\pm\cos\beta$ алгебраик йиғиндиларни кўпайтмага келтириш.
35. $\sin\alpha\sin\beta$, $\cos\alpha\cos\beta$ кўпайтмаларни йиғинди ҳолига (кўринишига) келтириш.
36. Тескари тригонометрик функциялар ва уларнинг хоссалари.
37. Айниятлар ва тенгламалар. Тенгламаларни ечиш. Тенг кучли тенгламалар.
38. $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$, $\operatorname{ctg} x=a$ кўринишдаги тенгламаларни ечиш.
39. Тенгсизликлар ва уларни ечиш. Тенг кучли тенгсизликлар.
40. Тенгсизликлар системаси ва уларни ечиш.

41. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$, $y=x^n$, $y=a^x$ функцияларнинг хосилалари.

43. Йиғинди, кўпайтма ва бўлинмаларнинг ҳосилаларини ҳисоблаш усуллари (формулалари).

44. Функция графигига ўтказилган уринма тенгламаси.

45. Функцияларнинг монотон ўсиши ва камайишининг етарли шартлари. Экстремум тушунчаси. Экстремумнинг зарурий шарти. Ферма теоремаси. Экстремумнинг етарли шарти. Энг катта ва энг кичик қийматлар.

ГЕОМЕТРИЯ

1. Тўғри чизик, нур, кесма, кесма узунлиги. Бурчак, бурчак катталиги. Бурчак турлари (тўғри, ўткир, ўтмас, қўшни қийшиқ ва ҳ.к.).

2. Қўпбурчак (учи, томонлари, диагонали). Қаварик ва қаварик бўлмаган кўпбурчаклар. Қаварик кўпбурчаклар бурчакларининг йиғиндиси учун формула.

3. Учбурчаклар (медианаси, биссектрисаси, баландлиги). Учбурчак турлари. Учбурчак ички бурчаклари йиғиндиси. Учбурчакнинг ташқи бурчаги ва уни ҳисоблаш. Тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари ва бурчаклари орасидаги метрик муносабатлар.

4. Учбурчак биссектрисаси ва медианаларининг хоссалари. Биссектриса, медиана ва баландликларни учбурчакнинг томонлари оркали ифодаловчи формулалар. Тенг ёнли ва тенг томонли учбурчакларнинг хоссалари.

5. Учбурчакнинг тенглик ва ўхшашлик аломатлари.

6. Пифагор теоремаси.

7. Қосинуслар теоремаси.

8. Синуслар теоремаси.

9. Учбурчак юзасини ҳисоблаш формулалари.

10. Параллел тўғри чизиклар. Икки параллел тўғри чизик учинчи бир тўғри чизиқ билан кесишганда ҳосил бўлган бурчаклар. Уларнинг хоссалари.

11. Тўртбурчак. Параллелограмм, тўғри тўртбурчак, ромб, трапеция, квадрат. Параллелограммнинг томонлари ва диагоналлари орасидаги муносабат. Параллелограмм хоссалари. Тўртбурчакларнинг юзаларини ҳисоблаш формулалари. Учбурчак ва трапециянинг ўрта чизиғи ҳақидаги теоремалар.

12. Доира ва айланалар. Марказ, ватар, диаметр, радиус тушунчалари.

13. Доирага ўтказилган уринманинг хоссалари. Доира ёйи. Сегмент, сектор.

14. Марказий бурчак. Айланага ички ва ташқи чизилган бурчакларни ўлчаш.

15. Учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланалар.

16. Айлана ва айлана ёйи узунлиги. Сектор ва доира юзи.

17. Ўхшаш фигуралар юзларининг нисбатлари.

18. Вектор тушунчаси. Векторлар устида арифметик амаллар. Коллинеар векторлар. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторлар оркали ихтиёрий векторни ёйиш.

19. Тўғри бурчакли координаталар системаси. Бу системада икки нукта орасидаги масофани ҳисоблаш формуласи. Айлана тенгламаси.

20. Текислик. Параллел ва параллел бўлмаган текисликлар.

21. Текисликларнинг параллеллик аломатлари.

22. Тўғри чизиқ ва текисликнинг параллеллик аломати.

23. Тўғри чизиқ ва текисликнинг перпендикулярлиги. Тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак.

24. Уч перпендикуляр ҳақидаги теорема

25. Икки ёқли бурчаклар. Икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги. Икки текисликнинг ўзаро перпендикулярлиги.

26. Икки текисликнинг перпендикулярлиги ва параллеллиги ҳақидаги теоремалар.

27. Кўп ёқли бурчаклар. Кўпёқликлар (учи, ёқлари, қирралари, диагоналлари). Тўғри ва оғма призмалар. Пирамида. Тўғри призма. Тўғри пирамида. Параллелепипед. Параллелепипед турлари.

28. Айланма сиртлар. Цилиндр, конус, сфера, шар. Шарнинг маркази, радиуси, диаметри. Сферага ўтказилган уринма текислик.

29. Призманинг сирти ва ҳажми.

30. Пирамиданинг сирти ва ҳажми.

31. Параллелепипеднинг сирти ва ҳажми.

32. Цилиндрнинг сирти ва ҳажми.

33. Қонуснинг сирти ва ҳажми.

34. Шарнинг ҳажми.

35. Сферанинг сирти.

МУНДАРИЖА

Ҳ. Мансуров, Р. Ғуломов, Р. Ғанихўжаев

МАТЕМАТИКА

(Олий ўқув юртига кирувчилар учун қўлланма)

Кичик муҳаррир **М. Назирова**
Рассом **Микоил ибн Исмоил**
Техн. муҳаррир **Р. Алибоева**
Мусаҳҳиҳ **Ш. Аминова**

ИБ № 6280

Теришга 11.03.93 да берилди. Босишга 28.04.93 да рухсат этилди. Босма тобоғи 8,0. Нашр тобоғи 8,58. Жами 17 000 нусха. № 7505 буюртма.

«НУР»—1993, 700097, Тошкент, Халклар дўстлиги, 28.

Ўзбекистон Давлат матбуот қўмитасининг Ташполиграфкомбинати. Тошкент кўчаси, 30. 1993 й.