22.1
И81

91

УМИД ИСМОИЛОВ

МАТЕМАТИКАДАН
ОЛИМПИАДА МАСАЛАЛАРИ

CH0300020299

УМИД ИСМОИЛОВ

МАТЕМАТИКАДАН ОЛИМПИАДА МАСАЛАЛАРИ

Умумий ўрта таълим мактаблари ўқувчилари, академик лицей, касб-ҳунар коллежлари талабалари ва ўқитувчилари учун қўлланма

Nizomiy nomli
TDPU
kutubxonasi

921519

Тошкент
"Янги аср авлоди"
2007

Ушбу қўлланмада узоқ йиллар давомида 9-11-синфлар бўйича математикадан вилоят ва республика фанлар олимпиадаларида берилган масалалар тўпланган бўлиб, барча масалалар ечилиш усуллари ёки ечиш учун кўрсатмалар билан берилган. Қўлланмада олимпиадаларда берилган тестлардан ҳам намуналар келтирилган бўлиб, уларнинг 20 таси ечилиш усуллари ва 50 таси жавоблар калити берилган ҳолда мустақил ечиш учун тавсия этилмоқда.

Қўлланма умумий ўрта таълим мактаблари, академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари ўқувчилари ҳамда ўқитувчиларига мўлжалланган.

Тақризчилар:

Мадраҳимов Рузимбой,
Урганч Давлат университети «Функциялар назарияси» кафедраси мудири, физика-математика фанлари номзоди, доцент.

Бобожонов Ҳамид,
Урганч шаҳридаги 2-сон академик лицейининг математика фани бўйича олий тоифали ўқитувчиси

ISBN 978-9943-08-108-6

© У. ИСМОИЛОВ. Математикадан олимпиада масалалари.
«Янги аср авлоди», 2007 йил.

СЎЗ БОШИ

Иқтидорли ўқувчиларнинг фанлардан эгаллаган билимлари қанчалик чуқур ва мустаҳкамлиги, уларнинг тафаккур доираси кенглиги, қуввайи ҳофизасининг кучлилиги ва мантиқий фикрлашларининг кенг қамровли эканлигини аниқловчи мезонлардан бири фан олимпиадаларидир.

Фан олимпиадаларида қатнашишни орзу қилган ҳар бир ўқувчи ёки талаба чуқур масъулиятни ҳис этган ҳолда, мактаб, лицей ва коллежларда берилаётган билим билан чегараланиб қолмайдилар. Чунки олимпиадаларга тайёргарлик кўриш ўқитувчидан ҳам, ўқувчидан ҳам кўпроқ изланишни, қўшимча адабиётларни кўпроқ ўқишни ва ўрганишни талаб қилади.

Математикадан олимпиадаларга тайёрланувчилар учун мўлжалланган ушбу методик қўлланма ўзбек тилида ёзилган худди шундай қўлланмаларнинг камлигини эътиборга олиб ҳамда вилоят ва республика олимпиадаларида берилган тест намуналари билан тўлдирилган ҳолда нашр қилинмоқда.

Қўлланмадаги барча масалалар ечилишлари билан, айрим ҳолларда ечиш учун кўрсатмалар билан баён қилинган. Масалаларнинг биринчи 56 таси 9-синфларга, 57–109 гача 10-синфларга ва 110–161 гача 11-синфларга мўлжаллангандир. Геометрияга доир масалалар эса алоҳида баён қилинди.

Олимпиадаларда берилган тест намуналаридан 20 таси ечилишлари билан берилган бўлиб, 50 таси мустақил ечиш учун тавсия қилинмоқда. Мустақил ечишга мўлжалланган тест намуналарининг жавоблар калити берилган.

Мустақил ечиш учун берилган тест намуналари Урганч шаҳридаги 2-сон академик лицейнинг математика фани бўйича олий тоифали ўқитувчиси Ҳ.Ҳ. Бобожонов томонидан тавсия қилинган.

Қўлланманинг қўлёзма нусхаси билан танишиб, ўзларининг қимматли маслаҳатларини берган доцент Р.Мадраҳимовга, Ҳ.Бобожоновга ўз миннатдорчилигимизни билдирамиз.

Мамлакатимизда иқтидорли ўқувчиларни тарбиялашга, уларнинг билим ва кўникмаларини янада мустаҳкамлашга жуда катта эътибор берилаётганини назарда тутган ҳолда, ушбу қўлланма математика ўқитувчиларига иқтидорли ўқувчиларни тарбиялашда, уларга математиканинг ажойиб сир-асрорларини ўргатишда, шунингдек, математикадан олимпиадаларга тайёрланувчи ўқувчиларга ёрдамчи қўлланмалардан бири бўлади, деган умиддамиз.

Муаллиф

АЛГЕБРАИК МАСАЛАЛАР

1. Бешта номанфий соннинг йиғиндиси бирга тенг. Бу сонларнинг жуфт-жуфт айирмалари абсолют қийматларининг йиғиндиси қандай энг катта қийматга эга бўлиши мумкин?

2. Бешта қопдан биринчиси ва иккинчиси биргаликда 12 фунт, иккинчиси ва учинчиси биргаликда 13,5 фунт, учинчи ва тўртинчиси биргаликда 11,5 фунт, тўртинчи ва бешинчиси биргаликда 8 фунт, биринчи, учинчи ва бешинчи биргаликда 16 фунтдан келади. Ҳар бир қоп қанчадан келади?

3. Учта бутун мусбат сон берилган. Уларнинг энг катта умумий бўлувчиси 1 га тенг, ихтиёрий иккитасининг йиғиндиси эса учинчига бўлинади. Шу сонларни топинг.

4. n–1 нинг 15 га ва 1001 нинг n+1 га бўлиниши маълум бўлса, (n)ни топинг.

5.*Натурал сонлардан тузилган арифметик прогрессияда охирги рақами 3 билан тугаган ҳади бор бўлиб, аммо охирги рақами 5 билан тугаган ҳади йўқ. Бу арифметик прогрессияда охирги рақами 7 билан тугаган ҳад борми?

6. Аниқ квадрат бўладиган ва ўнг томонига 1 рақами ёзилганда яна квадрат (аниқ) бўладиган бутун сонларнинг чексиз кўп эканлигини исботланг.

7. Каримнинг ёши 1959 йилда туғилган йили рақамларининг йиғиндисига тенг бўлди. Агар унинг XX асрда туғилганлиги маълум бўлса, туғилган йилини топинг.

8. Ёзилиш тартибида арифметик прогрессияни ташкил қилувчи ва $xy = \sqrt{ztuv}$ шартни қаноатлантирувчи $\overline{xy} \cdot \overline{zt} \cdot \overline{uv}$ икки хонали сонларни топинг.

9. Квадратларининг йиғиндиси 16000 га тенг бўлган барча натурал сонлар жуфтликларини топинг.

10. Биринчи рақами 2 бўлган уч хонали сон 1992 марта кетма-кет ёзилди, натижада 91 га бўлинувчи сон ҳосил бўлди. Шу сонни топинг.

11. Ушбу $2xy+x+y=83$ тенгламани қаноатлантирувчи x ва y нинг барча бутун қийматларини топинг.

12. $x^y+1=z$ тенгламани туб сонларда ечинг.

13. x ва y бутун сонлар бўлиб, $6x+11y$ сони 31 га бўлинса, $x+7y$ сонининг ҳам 31 га бўлинишини исботланг.

14. $x^2+ax+1=b$ тенгламанинг илдизлари натурал сонлардан иборат бўлса, a^2+b^2 нинг мураккаб сон бўлишини исботланг.

15. Агар $x^5+y^5=2x^2y^2$ тенгламани x ва y рационал сонлар қаноатлантирса, $1-xy$ ифоданинг рационал соннинг квадрати бўлишини исботланг.

16. Агар x, y, z лар ҳар хил натурал сонлар бўлиб, улардан исталган иккитасининг кўпайтмаси учинчсига бўлинса, $x-y+z=1$ тенгламанинг чексиз кўп илдизга эга бўлишини исботланг.

17. Тенгламалар системасини бутун сонларда ечинг:

$$\begin{cases} xz-2yt=3 \\ xt+yz=1 \end{cases}$$

18. Агар $\sqrt{\overline{xyz}} = (x+y)\sqrt{z}$ бўлса, x, y, z ларни топинг.

19 Агар $\sqrt{\overline{xyz}} = z\sqrt{x+y}$ бўлса, x, y, z ларни топинг.

20. Кўп ҳаднинг энг кичик қийматини топинг:

$x^6+2x^4+2x^3+x^2+2x-1$

21. Тенгламани натурал сонлар тўпламида чексиз кўп ечимга эга эканлини исботланг:

$x^2+y^3+z^5=t^7$

22. p ва q нинг қандай қийматларида $x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизлари p ва q сонлар бўлади?

23. Соддалаштиринг:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

24. Агар $x + y + z = 1$ ва $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ бўлса, $x^2 + y^2 + z^2$ ни топинг.

25. p ва q туб сонлар экани маълум бўлиб, $x^4-px^3+q=0$ тенглама бутун илдизларга эга бўлса, p ва q ни топинг.

26. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x_1 + x_1 \cdot x_2 = 1 \\ x_2 + x_2 \cdot x_3 = 1 \\ x_3 + x_3 \cdot x_4 = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{99} + x_{99} \cdot x_{100} = 1 \\ x_{100} + x_{100} \cdot x_1 = 1 \end{cases}$$

27. $x^3 - 9x^2 + 27x = 19$ тенгламани ечинг.

28. Ифоданинг энг кичик қийматини топинг:

$2x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x + 2y$

29. Тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^2 + xz + z^2 + 21 \\ y^2 + yz + z^2 = 28 \end{cases}$$

30. N натурал сон 12 та бўлинувчига эга (1 ва N ни ҳам ҳисобга олганда). Уларни ўсиб бориш тартибида номерлаймиз: $d_1<d_2<d_3<\ldots<d_{12}$ d_4-1 бўлувчининг $(d_1+d_2+d_3)d_8$ кўпайтмага тенглиги маълум бўлса, N ни топинг.

31. Тенгламани ечинг:

$$\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} + x^2 - 4 = 0.$$

32. Агар a ва b лар натурал сонлар бўлса, учта турли усуллар билан $13a+73b$ кўринишда ёзиш мумкин бўлган энг кичик сонни топинг.

33. $x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизи x_1 ва $x^2-px-q=0$ тенгламанинг илдизи x_2 бўлса, $x^2+2px+2q=0$ тенгламанинг илдизи x_1 ва x_2 лар орасида ётишини исботланг.

34. n нинг ҳар қандай натурал қийматларида ҳам ушбу $n^4+3n^3+2n^2+2n$ ифода бирорта соннинг квадрати бўла олмаслигини исботланг.

35. n нинг қандай натурал қийматларида n^2+3 сони $n+3$ га бўлинади?

36. Тенгламалар системасининг мусбат ечимларини топинг:

$$\begin{cases} xy(x+y)=6 \\ yz(y+z)=12 \\ zx(z+x)=30 \end{cases}$$

37. Агар $abc=1$ ва $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ экани маълум бўлса, a,b,c лардан камида биттасининг 1 га тенг бўлишини исботланг.

38. Қайси катта :

а) 2^{300} ёки 3^{200} б) 2^{91} ёки 5^{35}

39. Тенгламани ечинг:

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2-\frac{5}{2}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$$

40. Агар $xyz=1$ бўлса,

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1$$

тенгламанинг тўғрилигини исботланг.

41. Ушбу $1989\cdot1990\cdot1991\cdot1992+1$ соннинг тўла квадрат эканини исботланг.

42. Йиғиндини топинг:

$1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+...+999\cdot1001$

43. Агар x ва y мусбат сонлари $x+y>2,6$ ва $x^2+y^2<4$ тенгсизликларни қаноатлантирса, $xy>1$ тенгсизликнинг тўғри эканини исботланг.

44. Исталган t учун тенгсизликнинг тўғрилигини исботланг:

$$t^4-t+\frac{1}{2}>0$$

45. Агар $a>0$, $b>0$, $c>0$ бўлса,

$abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ тенгсизликнинг тўғрилиги исботланг.

46. Тенгламани ечинг:

$$x^3+x^2+x=-\frac{1}{3};$$

47. 2^p+p^2 соннинг туб сон бўладиган P нинг барча туб қийматларини топинг.

48. а) шундай иккита x ва y натурал сонларни топингки, натижада $xy+x$ ва $xy+y$ лар турли натурал сонларнинг квадратлари бўлсин;

б) 988 дан 1991 сонлари орасида юқоридаги шартни қаноатлантирувчи x ва y ни топиш мумкинми?

49. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ тенглама (бу ерда n натурал сон) натурал сонлар тўпламида ягона x ва y ечимга эга бўлиши учун n нинг туб сон бўлиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

50. Ўтган куни мен 14 ёшга тўлган эдим, келгуси йили эса 17 ёшга қараб кетаман, деди Шерзод.

Шерзоднинг айтгани тўғрими?

51. Берилган $(1-x)(1+x+x^2+...+x^{1993})$ ифодада қавсларни очинг ва соддалаштиринг.

52. Тирга кираётиб, ўйинчи кассага 100 сўм ташлайди. Ҳар битта нишонга тўғри урганда унинг пули 10% га ортади ва ҳар битта нишонга теккиза олмагани учун 10% га камаяди. Нишонга бир неча марта отгандан кейин унинг пули 80 сўм 19 тийин бўлиб қолиши мумкинми?

53. А сони рақамлари йиғиндисининг квадрати A^2 нинг рақамлари йиғиндисига тенг бўлган барча икки хонали сонларни топинг.

54. *а, в, с* лар учбурчакнинг томонлари бўлса, $a^3+в^3+3авс>c^3$ тенгсизликнинг тўғрилигини исботланг.

55. Ушбу $x^4-2y^2=1$ тенгламани қаноатлантирувчи x ва y нинг барча бутун қийматларини топинг.

56. Бешта соннинг кўпайтмаси нолга тенг эмас. Ҳар битта сонни биттага камайтириб, кўпайтирганда ҳам кўпайтма ўзгармайди. Шундай сонларга мисоллар келтиринг.

57. Тенгламалар системасини бутун сонларда ечинг:

$$\begin{cases} ab+cd=-1 \\ ac+bd=-1 \\ ad+bc=-2 \end{cases}$$

58. Тенгламалар системасини бутун сонларда ечинг:
$x^2+y^2+z^2=x+y+z=2$

59. Тенгламани ечинг:

$$\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}$$

60. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}=1 \\ y-\sqrt{z}=1 \\ z-\sqrt{x}=1 \end{cases}$$

61. $x^{1991}+y^{1991}=x^{1992}+y^{1992}$ тенгламанинг рационал сонларда чексиз кўп ечимга эга эканлигини исботланг.

62. Тенгламалар системсини ечинг.

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=\sqrt{2}\sin a \\ \cos x+\cos y=\sqrt{2}\cos a \end{cases}$$

63. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+...+9x_9+10x_{10}=55 \\ x_2+2x_3+...+9x_{10}+x_1=55 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{10}+2x_1+...+9x_8 10x_9=55 \end{cases}$$

64. Тенгламани ечинг:

$$4x^2-4x-3=4\left[\frac{2x-1}{2}\right]$$

65. Агар *x, y, z* сонлари $x+y+z=a$ ва $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ шартларни қаноатлантирса, *x,y, z* сонларидан камида биттаси *a* га тенг бўлишини исботланг.

66. Тенгламни бутун сонларда ечинг:

$$(1+\frac{1}{m})^{m+1}=(1+\frac{1}{1992})^{1992}$$

67. $x^3+11^3=y^3$ тенгламанинг натурал сонларда ечими йўқлигини исботланг.

68. Тенгламани ечинг: $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$

69. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^2-yz=y-x \\ y^2-xz=z-y \\ z^2-xy=x-z \end{cases}$$

70. Агар $x_1+\frac{1}{x_2}=x_2+\frac{1}{x_3}=x_3+\frac{1}{x_4}=...=x_4+\frac{1}{x_1}$ шарт бажарилса, ёки $x_1=x_2=...x_4$, ёки $|x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n|\leq 1$ бўлишини исботланг.

71. Тенгламани ечинг:

$$(16x^{200}+1)(y^{200}+1)=16(xy)^{100}$$

72. Агар $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ (бу ерда $b>0$ ва $d>0$) бўлса, $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ тенгсизликнинг тўғри бўлишини исботланг.

73. Агар $xyz>0$ бўлса, ушбу $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}\geq x+y+z$ тенгсизликни исботланг.

74. a,b,c номанфий сонлари учун ушбу тенгсизликнинг тўғрилигини исботланг:

$$\frac{(a+b+c)^2}{3}\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$$

75. Агар $x^5+y^5=x-y$ ва $x\geq y\geq 0$ бўлса, $x^4+y^4<1$ тенгсизликнинг тўғрилигини исботланг.

76. Тенгсизликни исботланг:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc};\quad (a,b,c>0)$$

77. a,b,c номанфий сонлар учун

а) $a^4+b^4+c^4\leq 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$ тенгсизликдан $a^2+b^2+c^2\leq 2(ab+ac+bc)$ тенгсизликнинг келиб чиқишини исботланг;

б) иккинчи тенгсизликдан биринчи тенгсизлик келиб чиқадими?

78. α, β ва γ сонлари $0<\alpha<\frac{\pi}{2}, 0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$ ва $tg\alpha\cdot tg\beta+tg\gamma\cdot tg\beta+tg\alpha\cdot tg\gamma<1$ шартларни қаноатлантирса, $\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$ бўлишини исботланг.

79. Ихтиёрий натурал сон учун қуйидаги тенгсизликнинг тўғрилигини исботланг:

$$|\sin 1|+|\sin 2|+\ldots+|\sin(3n-1)|+|\sin 3n|>\frac{8}{5}n$$

80. Саккизинчи синф ўқувчиси Карим қатнашадиган математика тўгарагига қатнашувчиларнинг 93% дан кўпроғи тўққизинчи синф ўқувчиларидир. Бу тўгарак аъзоларининг мумкин бўлган энг кам сони нечта бўлиши мумкин?

81. Ҳадлари мусбат сонлардан иборат ва махражи q га тенг бўлган чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади, ўзидан олдинги ҳадларининг йиғиндисидан катта экани маълум бўлса, q қандай қийматларни қабул қилиши мумкин?

82. f(x) функция учун $f(x)=(x^2+5x-8)^{100}\cdot x^5$ (1) формула билан берилган. Агар (1) формуланинг ўнг томонида кўрсатилаган амалларни бажариб, сўнгра ўхшаш ҳадларни ихчамласак, f(x) функция қуйидаги кўринишдаги кўпҳад ҳолига келади:

$$f(x)=a_0x^{205}+a_1x^{204}+\ldots+a_{204}x+a_{205} \quad (2)$$

бу ерда a_0, a_1, a_2, …, a_{205} кўп ҳаднинг коэффициентлари.

а) кўп ҳаднинг барча коэффициентларининг йиғиндиси:

$S=a_1+a_2+\ldots+a_{205}$ ни топинг;

б) кўп ҳаднинг тоқ даражали x ўзгарувчилари олдидаги коэффицентларининг йиғиндиси:

$S_t=a_0+a_2+a_4+\ldots+a_{204}$ ни топинг;

с) $S_m=a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{205}$ йиғиндини топинг (бу ерда a_1, a_3, …, a_{205} лар жуфт даража кўрсаткичли ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлардир).

83. Сонлар ўқида аниқланган ҳар қандай функциянинг жуфт ва тоқ функцияларнинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкинлигини исботланг.

84. Икки натурал сон ўрта арифметигининг уларнинг ўрта геометригига нисбати натурал сон эканлиги маълум бўлса, бу сонларнинг тенглигини исботланг.

85. n нинг қандай натурал қийматларида $\frac{n^3-1}{5}$ туб сон бўлади?

86. Бешинчи даражаси олти хонали сон бўлган ва 4 рақами билан тугалланган барча натурал сонларни топинг.

87. k^5+3 нинг k^2+1 га бўлинадиган k нинг барча бутан қийматларини топинг.

88. Қандайдир соннинг куби 77*******7 га тенг экани маълум. Шу сонни топинг.

89. $989 \cdot 1001 \cdot 1007+320$ сонни туб кўпайтувчиларга ажратинг.

90. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ кетма-кетликнинг ҳадлари $x_{n+1}=x_n^3-3x_n^2+3x_n$ шартни қаноатлантиради. Кетма-кетликнинг x_{100} ва x_{1000} ҳадлари тенг бўлиши учун x_1 қандай бўлиши керак?

91. Агар $a+4b=2$ бўлса, ab кўпайтманинг энг катта қийматини топинг.

92. $1^{1993}+2^{1993}+3^{1993}+\ldots+n^{1993}$ йиғиндининг – n нинг ҳар қандай натурал қийматида ҳам n+2 га бўлинмаслигини исботланг.

93. Умумий ҳади $a_n=1+2^2+3^3+\ldots+n^n$ га тенг бўлган кетма-кетликда тоқ мураккаб сонларнинг чексиз кўп эканлигини исботланг.

94. a ва d лар номанфий сонлар ҳамда b ва c лар мусбат сонлар бўлиб, $b+c \geq a+d$ шартни қанотлантирса, ушбу $\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{a+b}$ ифоданинг энг кичик қиймати нимага тенг бўлиши мумкин?

95. Қуйидаги шартларни қанотлантирувчи a ва b сонлари мавжудми?

а) $a+b$ рационал сон, a^n+b^n эса $n \geq 2$ бўлган барча натурал n ларда иррационал сон;

б) $a+b$ иррационал сон, a^n+b^n эса, $n \geq 2$ бўлган барча натурал n ларда рационал сон.

96. 2^n+4^n $(n \in N)$ сонлар таркибида нечта соннинг квадрати бор?

97. 2^n+4^k $(n \in N, k \in N)$ сонлар таркибида нечта соннинг квадрати бор?

98. a, b, c, d натурал сонлар $a+b=c+d=1000$ тенгликни қаноатлантиради $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{d}$ йиғиндининг энг катта қийматини топинг.

99. Қайси бири катта: $7^{\sqrt{5}}$ ми ёки $5^{\sqrt{7}}$ ми?

100. $\sqrt[1992]{1992!} > \sqrt[1993]{1993!}$ тенгсизлик тўғрими?

101. Сонларнинг бутун қисмини топинг:

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}}}$$

102. Қайси катта: $\lg^2 11$ ёки $\lg 12$?

103. Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

а) $y=\left|1-\left|1-\left|1-\left|1-\left|1-x\right|\right|\right|\right|\right|$

б) $y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)$

104. Йиғиндини топинг:

а) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n\cdot(n+1)$

в) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$

с) $1\cdot3\cdot5+2\cdot4\cdot6+3\cdot5\cdot7+\ldots+n\cdot(n+2)\cdot(n+4)$

105. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3 \\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$$

106. Стол устида шиллиқ қурт ўзгармас тезлик билан ҳаракат қилмоқда. У ҳар 15 минутда 90 градусга бурилади ва бурилишлар ораси тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилади. Унинг чиққан жойига қайтиб келиши учун бутун соатлар сарф бўлишини исботланг.

107. $(1-x)^2\,(1+2x+2x^2+\ldots+1994x^{1993})$ ифодани соддалаштиринг.

108. Ҳар биттаси илдизга эга бўлган, исталган иккитасининг йиғиндиси илдизга эга бўлмайдиган учта квадрат учҳад мавжудми?

109. a, $в$, c мусбат сонлар учун $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge a+b+c$ тенгсизлик ўринли экани маълум бўлса, $a+b+c \ge 3abc$ тенгсизликнинг ўринли бўлишини исботланг.

110. Агар учбурчак бурчакларининг тангенслари нотўғри сонлардан иборат бўлса, уларнинг нимага тенг бўлишини топинг.

111. $y=x^2+ax+b$ кўринишдаги ва координата ўқларини учта ҳар хил нуқталарда кесиб ўтувчи параболаларнинг мумкин бўлган барча ҳолларини қараймиз. Ҳар бир ана шундай парабола учун бу учта нуқта орқали ўтувчи айлана чизинг ва бу айланаларнинг барчаси умумий нуқтага эга бўлишини исботланг.

112. Агар $a<b<c$ эканлиги маълум бўлса, $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$ тенглама $a<x_1<b<x_2<c$ шартни қаноатлантирувчи иккита x_1 ва x_2 илдизларга эга бўлишини исботланг.

113. $y=x^2$ парабола Oxy текисликнинг қайси нуқталаридан тўғри бурчак остида кўринади?

114. a нинг исталган қийматида $10ax^4-4ax^3+a^2x^2+6x-2=0$ тенглама $[0;1]$ кесмада камида битта илдизга эга бўлишини исботланг.

115. Тенгламани ечинг:

a) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=2$

b) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=2^x$

116. $x^y=48261724457$ тенгламани бутун сонларда ечинг.

117. $(x-y)^2=x+y$ тенгламанинг $|x|<100$, $|y|<100$ шартларни қаноатлантирувчи бутун ечимларини топинг.

118. x, y ва a ҳақиқий сонлари $x+y=a-1$ ва $xy=a^2-7a+14$ шартларини қаноатлантирса, a нинг қандай қийматида x^2+y^2 йиғинди энг катта қийматга эга бўлади?

119. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^3 = 7x + 2y \\ y^3 = 2x + 7y \end{cases}$$

120. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x = y^2 + ay + b \\ y = x^2 + ax + b \end{cases}$$

121. Бир нечта сонлар берилган бўлиб, уларнинг йиғиндиси 3 га ва квадратлари йиғиндиси 1 га тенг. Бу сонлар ичида йиғиндиси 1 дан кичик бўлмаган учта сон топилишини исботланг.

122. Шундай барча натурал сонларни топингки, уларнинг бўлувчилари сонининг квадрати натурал сонниң ўзига тенг бўлсин.

123. Тенгламани ечинг:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$$

124. a ва b ларнинг қандай қийматларида

$$\sqrt[3]{(ax+b)^2} + \sqrt[3]{(ax-b)^2} + \sqrt[3]{a^2x^2 - b^2} = \sqrt[3]{b}$$

тенглама ягона ечимга эга бўлади.

125. Тенгламани ечинг:

$$x^2 + 2x\sin xy + 1 = 0$$

126. $x = a + 2\cos\frac{x+a}{2}$ тенглама нечта илдизга эга?

127. Қуйидаги тенглама илдизларининг тақрибий қийматларини 0,1 гача аниқлик билан топинг:

$0{,}001x^3 + x^2 - 1 = 0$

128. $x^8 + 4x^2 + 4$ кўпҳадни тўртинчи даражали иккита кўпҳаднинг кўпайтмаси кўринишида тасвирланг.

Nizomiy nomli
TDPU
kutubxonasi.

A91629

129. $x_1, x_2, x_3, \ldots$ кетма-кетлик $x_1=1/2$, $x_{n+1}=x^2_n+x_n$ ($n=1,2,3,\ldots$) шарт билан берилган бўлса, $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\ldots+\frac{1}{x_{100}+1}$ соннинг бутун қисмини топинг.

130. Агар $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ лар йиғиндиси 1 га тенг бўлган номанфий сонлар бўлса, $x_1 \cdot x_2+x_2 \cdot x_3+\ldots+x_{n-1} \cdot x_n$ ифоданинг энг катта қийматини топинг.

131. Агар x, y, z лар мусбат сонлар бўлиб, $xyz(x+y+z)=1$ тенглик бажарилса, $(x+y)(y+z)$ ифоданинг энг кичик қийматини топинг.

132. $x>0$, $y>0$, $z>0$ бўлиб, улар учун $x^2+y^2+z^2=1$ тенглик бажарилса, $S=\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}$ йиғиндининг энг кичик қийматини топинг.

133. a ва b мусбат сонлар квадратларининг йиғиндиси бирга тенг бўлса, $a^{10}+b^{10}<1$ тенгсизликнинг бажарилишини исботланг.

134. Агар $a+b+c=1$ шарт бажарилса, $a^2+b^2+c^2\geq 1/3$ тенгсизликнинг ўринли бўлишини исботланг.

135. $|x|+|y|+|z|\leq 1$ тенгсизлик фазода қандай фигурадан иборат бўлади?

136. a ва b лар ўзаро туб сонлар бўлсин, у ҳолда $n\geq b$ шартни қаноатлантирувчи n нинг барча натурал қийматларида a^n-1 ифода b га бўлинишини исботланг.

137. Тенгликни исботланг:

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$$

138. Ихтиёрий мусбат $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сонлари учун

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\frac{3}{a_1+a_2+a_3}+\ldots+\frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$$

тенгсизликнинг бажарилишини исботланг.

139. Тенгламани ечинг:

$$4\sin^{12}x+4(\sin^6 x+1)\cos^6 x+3\sin^2 2x=4$$

140. $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ сони илдиз бўла оладиган, бутун коэффициентли кўпҳадни топинг (иккинчи даражали бўлиши шарт эмас).

•141. Исталган мусбат a ва b сонлари учун $2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\geq 5\sqrt[5]{ab}$ тенгсизликнинг тўғрилигини исботланг.

142. Агар x, y, z>0 ва arctgx+arctgy+arctgz< π шартлари ўринли бўлса, xyz<x+y+z тенгсизликнинг бажарилишини исботланг.

143. Исталган n натурал сон учун

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$$

тенгсизликнинг тўғрилигини исботланг.

144. x ва y мусбат сонлар учун $x^y+y^x=x^x+y^y$ тенглик ўринли бўлганда x=y бўлишини исботланг.

145. Агар $a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-d+\frac{2}{5}=0$

экани маълум бўлса, a, b, c, d сонларни топинг.

146. Йиғиндини топинг: $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+ \quad +\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}$

147. Тенгликни исботланг: (n≥2)

$$tgx\cdot tg2x+tg2x\cdot tg3x+...+tg(n-1)x\cdot tgnx=\frac{tgnx}{tgx}-n$$

148. Агар α ва β иррационал сонлар бўлса, α^{β} рационал сон бўлишини исботланг.

149. n нинг қандай натурал қийматларида $3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n$ ифоданинг қиймати мураккаб сон бўла олади?

150. Ифодаларни соддалаштиринг:

а) $\log_a tg1^0+\log_a tg2^0+...+\log_a tg88^0+\log_a tg89^0$

б) $\log_a \sin60^0\cdot\log_a \sin61^0\cdot...\cdot\log_a \sin119^0\cdot\log_a \sin120^0$

в) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot...\cdot\log_{n-2}(n-1)\cdot\log_{n-1} n$

151. Исботланг:

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$$

152. Исботланг:

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

153. Тенгламани ечинг:

$$tgx - 2[tgx] - 3 = 0$$

(квадрат қавсдаги ифода соннинг бутун қисмини билдиради).

154. 19 дан 80 гача бўлган икки хонали сонларни кетма-кет ёзишдан ҳосил бўлган 19202122...787980 сони 1980 га бўлинадими?

155. Шахматчилар турнирида жами 55 партия ўйналди. Мусобақадан икки ўйинчи чиқиб кетди. Улдан бири 10 партия, иккинчиси эса бир партия ўйнаган эди. Бу шахматчилар ўзаро учрашганмиди?

156. Қуйидаги учта тасдиқдан иккитаси тўғри, биттаси нотўғри эканлиги маълум бўлса, тасдиқдан m натурал сонни топинг.

а) m+37 аниқ квадрат бўлса;

б) m сонининг охирги рақами 5 бўлса;

в) m–52 сони аниқ квадрат бўлса.

157. Ҳар биттаси иккита турли ҳақиқий илдизга эга бўлган, аммо исталган иккитасининг йиғиндиси ҳақиқий илдизга эга бўлмаган учта учҳад мавжудми?

158. Геометрик прогрессиянинг биринчи, ўнинчи ва ўттизинчи ҳадлари натурал сонлар бўлса, прогрессиянинг йигирманчи ҳади ҳам натурал сон бўладими?

159. Агар x, y, z мусбат сонлар учун $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}=\frac{x^2}{z}+\frac{z^2}{y}+\frac{y^2}{x}$ тенглик бажарилса, x, y, z сонлардан камида иккитасининг тенглигини исботланг.

160. Ушбу сонлардан қайси катта: $\frac{10000001}{10000002}$ ёки $\frac{20000001}{20000002}$

ГЕОМЕТРИК МАСАЛАЛАР

1. ABCD тўғри тўртбурчакнинг AB, BC, CD, DA томонларида учларидан фарқли қилиб, K, L, M, N нуқталар олинган. $KL \parallel MN$ ва $KM \perp NL$ экани маълум. KM, LM кесмаларнинг кесишиш нуқталари тўғри тўртбурчакнинг BD диагоналида ётишини исботланг.

2. ABC учбурчакнинг AB ва BC томонларида мос равишда M ва N нуқталар AM:MB=BN:NC муносабат ўринли бўладиган қилиб олинган. AN ва CM тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси Q бўлсин. MBNQ тўғри туртбурчак юзи ACQ учбурчакнинг юзига тенглигини исботланг.

3. A, B, C, D нуқталар ABCD қавариқ тўртбурчакнинг кетма-кет келган учлари бўлсин. Агар AB+BD≤AC+CD шарт ўринли бўлганда, AB≤AC бўлишини исботланг.

4. Ўткир бурчакли учбурчакнинг турли учларидан медиана биссектриса ва баландлик ўтказилди. Уларнинг кесишиш нуқталари тенг томонли учбурчакнинг учлари бўлиши мумкинми?

5. ABC мунтазам учбурчакка ташқи чизилган айланадан бирорта M нуқта олинган. Агар учбурчакнинг томони a га тенг бўлса, шу M нуқтадан учбурчак учларигача бўлган масофалар квадратларининг йиғиндисини топинг.

6. D, E ва F нуқталар ABC учбурчакнинг мос равишда BC, AC ва AB томонларида ётади. AD, BE ва CF кесмалар O нуқтада кесишади. Агар $\frac{EO}{EB}=\alpha$ ва $\frac{FO}{FC}=\beta$ бўлса, $\frac{DO}{DA}$ ни топинг.

7. Трапеция асосларининг ўрталари, диагоналларининг кесишиш нуқтаси, ён томонларининг давомини кесишиш нуқтаси бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.

8. Мунтазам учбурчакнинг исталган ички ёки чегаравий нуқтасидан томонларигача бўлган масофаларнинг йиғиндиси шу учбурчак баландлигининг узунлигига тенг эканини исботланг.

9. ABC учбурчакка O марказли ички айлана чизилган. T нуқтада у BC томонига уринади. Бунда $\angle BOT : \angle COT = 3:4$. Агар ички чизилган айлана радиуси 3 ва $\angle A = 30^0$ бўлса, BC томонни топинг.

10. ABCD квадратнинг BC ва CD томонларида мос равишда E ва F нуқталар EC=2EB ва FC=FD тенгликлар бажариладиган қилиб олинган. AEB бурчак AEF бурчакка тенглигини исботланг.

11. Исталган учбурчак учун $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ тенгликнинг бажарилишини исботланг. Бу ерда r – учбурчакка ички чизилган айлана радиуси, h_a, h_b, h_c лар учбурчакнинг баландликларидир.

12. ABC тўғри бурчакли учбурчакда ($\angle C = 90^0$) CD баландлик ўтказилган.

а) агар ACD ва BCD учбурчакларга ички чизилган айланаларнинг радиуси мос равишда r_1 ва r_2 бўлса, ABC учбурчакка ички чизилган айлананинг радиусини топинг;

б) агар ACD ва BCD учбурчакларнинг периметрлари мос равишда P_1 ва P_2 бўлса, ABC учбурчакнинг периметрини топинг.

13. Берилган учбурчакнинг томонини кесувчи ва асосига параллел қилиб шундай тўғри чизиқ ўтказингки, бунда учбурчак ён томонларига ўтказилган тўғри чизиқ билан асос оралиғидаги кесмаларнинг узунликлари йиғиндиси асос узунлигига тенг бўлсин.

14. Қавариқ тўртбурчакнинг томонларини диаметр қилиб чизилган доиралар тўртбурчакни қоплашини исботланг.

15. Тўғри бурчакли учбурчакка айлана ички чизилган. Гепотенузанинг шу айланага уриниш нуқтасидан ажратилган кесмаларининг кўпайтмаси учбурчакнинг юзига тенг бўлишини исботланг.

16. а) Қавариқ тўртбурчакнинг диагоналлари уни тўртта учбурчакка ажратади. Агар AOB, BOC, COD, AOD учбурчакларнинг юзлари мос равишда S_1, S_2, S_3, S_4 бўлса, $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$ эканини исботланг;

б) ABCD трапецияда диагоналлар ўтказилган бўлиб, $S_{BOC}=S_1$ $S_{AOD}=S_2$, экани маълум бўлса, ABO (бу ерда O диагоналлар кесишиш нуқтаси) учбурчакнинг юзини топинг.

17. Ихтиёрий учбурчакнинг α, β, γ бурчаклари учун ушбу тенгсизликнинг тўғрилигини исботланг:

$$2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{\sin\gamma}{\gamma}\right) \le \left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\sin\alpha+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right)\sin\beta+\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)\sin\gamma$$

18. Ўткир бурчакли ABC учбурчакка ташқи айлана чизилган. Айланага A ва C нуқталардан ўтказилган уринмалар B нуқтадан ўтказилган уринмани мос равишда M ва N нуқталарда кесади. ABC учбурчакда BP (P нуқта AC томонда ётади) баландлик ўтказилган. BP тўғри чизиқнинг MPN бурчакнинг биссектрисаси бўлишини исботланг.

19. Агар a, b, c лар учбурчак томонларининг узунликлари бўлиб, $a+b+c=1$ бўлса, $a^2+b^2+c^2+4abc<1/2$ тенгсизликни исботланг.

20. ABCD қавариқ учбурчакнинг AB ва CD томонларида мос равишда K ва M нуқталар олинган. AM ва KД кесмаларнинг кесишиш нуқтаси L, KC ва BM кесмаларнинг кесишиш куқтаси N бўлсин:

а) агар K ва M нуқталар AB ва CD томонларнинг ўрталари бўлса, $S_{KLMN} < \frac{1}{3} S_{ABCD}$ эканини исботланг;

б) агар AK:KB=CM:MD=m:n бўлса, $S_{KLMN} < \frac{mn}{m^2+mn+n^2} S_{ABCD}$ эканини исботланг.

21. ABC ўткир бурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази D бўлсин. A, B ва D нуқталар орқали ўтувчи айлана AC ва BC томонларни мос равишда M ва N нуқталарда кесади. ABD ва MNC учбурчакларга ташқи чизилган айланаларнинг тенглигини исботланг.

22. Трапеция асосларидаги бурчакларнинг йиғиндиси 90^0 га тенг. Асосларининг ўрталарини туташтирувчи кесманинг узунлиги диагоналларнинг ўрталарини туташтирувчи кесманинг узунлигига тенглигини исботланг.

23. ABC учбурчакнинг A, B, C бурчаклари мос равишда α, β, γ га тенг. Мос бурчаклар қаршисида ётган томонлар a, b, c га тенг бўлса,

а) $a\cos\alpha + b\cos\beta \leq c$ эканини исботланг;

б) $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$ кўпайтманинг энг катта қийматини топинг. Учбурчак қандай бўлганда бу ифода ўзининг энг катта қийматига эришади?

24. A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётиб, B нуқта A ва C нуқталар орасида жойлашган. Шундай M нуқта олинганки, бунда AMB ва BMC учбурчакларга ташқи чизилган айланалар тенг бўлса, M нуқтанинг геометрик ўрнини топинг.

25. Агар ABC учбурчакнинг A учидан ўтказилган биссектрисаси AD бўлса, $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$ тенгликнинг бажарилишинии исботланг.

26. Агар қавариқ тўртбурчакнинг иккита қарама-қарши томонларининг ўрталарини туташтирувчи кесманинг узунлиги қолган икки томон узунликлари йиғиндисининг ярмига тенг бўлса, у ҳолда бу тўртбурчакнинг трапеция бўлишини исботланг.

27. а нинг исталган қиймати учун томонлари $\sqrt{a^2-a+1}$, $\sqrt{a^2+a+1}$, $\sqrt{4a^2+3}$ лардан иборат бўлган учбурчакнинг мавжудлигини ва унинг юзи a га боғлиқ бўлмаслигини исботланг.

28. Томонлари a, b, c ва a_1, b_1, c_1 бўлган иккита учбурчак учун $\sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1}=\sqrt{(a_1+b_1+c_1)(a+b+c)}$ тенглик бажарилса, уларнинг ўхшаш бўлишини исботланг.

29. Айланага ички чизилган учбурчакнинг бир учидан айланага ўтказилган уринма қарши томога перпендикуляр бўлса, у ҳолда учбурчакнинг томонлари орасидаги боғланишни топинг.

30. Қавариқ тўртбурчакда иккита қарама-қарши томон ўртасидан ўтган тўғри чизиқ, тўртбурчакнинг диагонали билан тенг бурчаклар ҳосил қилади. Диагоналларнинг тенглигини исботланг.

31. ABCD квадратнинг AB ва AD томонларида мос равишда K ва N нуқталар AK·AN=2BK·DN шартни қаноатлантирадиган қилиб олинган. CK ва CN кесмалар BD диагонални L ва M нуқталарда кесиб ўтади, K, L, M, N ва A нуқталарнинг битта айланада ётишини исботланг.

32. ABC учбурчакда BP ва CT биссектрисалар O нуқтада кесишади. Агар A, P, O ва T нуқталарнинг битта айланада ётиши маълум бўлса, A бурчакнинг катталигини топинг.

33. Фазода учта мунтазам ABCDE, ALNMB ва AEKPL бешбурчаклар жойлашган. AC, AN ва AK тўғри чизиқларнинг ўзаро перпендикулярликларини исботланг.

34. Тетраэдрнинг асоси тенг томонли учбурчак,ён ёқларининг юзлари ўзаро тенг. Агар асосининг томони a, ён қирралардан бирининг узунлиги h га тенг бўлса, қолган иккита ён қирраларининг узунлигини топинг.

35. ABC учбурчакнинг BC томонида шундай D нуқтани топингки, бунда ABD ва ACD учбурчакларга ички чизилган айланалар бир-бирига уринсин.

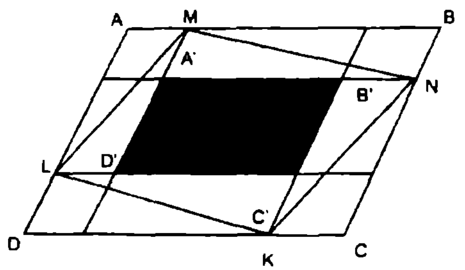
36. ABCD параллелограммнинг AB ва CD томонларида P ва Q нуқталар олинган бўлиб, бунда AP=CQ. N эса AD томоннинг исталган нуқтаси бўлсин. PQ, BN ва CN тўғри чизиқлар параллелограммни учта учбурчакга ва учта тўртбурчакга ажратади. Бир учбурчак юзининг қолган иккита учбурчак юзларининг йиғиндисига ва бир тўртбурчак юзининг қолган иккита тўртбурчаклар юзларининг йиғиндисига тенг эканлигини исботланг.

37. Трапециянинг диагоналлари уни тўртта учбурчакка ажратади, S трапециянинг юзи, S_1 ва S_2 лар трапеция асосларига ёпишган учбурчакларнинг юзлари бўлса, $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$ бўлишини исботланг.

38. Доирага ички чизилган бешбурчакда бир томонига ёпишмаган исталган иккита бурчагининг йиғиндиси 180^0 дан катта бўлишини исботланг.

39. Асоси тўғри бурчакли учбурчак ва учидаги текис бурчаклари тўғри бўлган учбурчакли пирамида мавжудми?

40. ABCD параллелограмм томонларига параллел икки жуфт тўғри чизиқлар билан тўққизта параллелограммга ажратилган. Агар S берилган параллелограммнинг юзи ва Q марказий фигура (штрихланган A‘B‘C‘D‘) нинг юзи бўлса, MNKL тўртбурчакнинг юзини топинг (шаклга қаранг).



41. Исталган тетраэдр учун ушбу $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$ тенгликнинг бажарилишини исботланг.

42. Кубнинг иккита қўшни ён ёқлари кесишмайдиган диагоналлари орасидаги масофа P га тенг. Кубнинг ҳажмини топинг.

43. M нуқта ABCD тўғри тўртбурчак ичида жойлашган бўлиб, S унинг юзи бўлсин. Ушбу $S \le AM \cdot CM + BM \cdot DM$ тенгсизликни исботланг.

44. Айлана ичида иккита айлана берилган бўлиб, улар ташқи айланага A ва B нуқталарда уринади ва ўзаро кесишади. Агар айланаларнинг кесишиш нуқталаридан бирортаси AB кес-

мада ётса, у ҳолда кичик айланалар радиусларининг йиғиндиси катта айлана радиусига тенг бўлишини исботланг. Тескариси ҳам ўринлими?

45. ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчакларидан биттаси 30^0 га тенг. M нуқта AB гипотенузанинг ўртаси, O ички чизилган айлананинг маркази бўлса, OMC бурчак нимага тенг?

46. AB диаметрли айлана берилган. Маркази A нуқтада бўлган иккинчи айлана AB кесмани C нуқтада келиб ўтади, бунда $AC < \frac{1}{2} AB$. Иккита айлананинг умумий уринмаси биринчи айланага D нуқтада уринади. CD тўғри чизиқнинг AB га перпендикулярлигини исботланг.

47. ABC учбурчакда AD ва DE медианалар M нуқтада кесишади. Агар AMB бурчак:

а) тўғри бурчак бўлса;

б) ўткир бурчак бўлса,

$AC + BC > 3AB$ тенгсизликнинг бажарилишини исботланг.

48. ABC учбурчакда AK биссектриса, BN медиана ва CM баландлик ўтказилган. KNM учбурчак эса тенг томонли. ABC учбурчакнинг тенг томонли эканини исботланг.

49. Айланага ABC тўғри бурчакли учбурчак ички чизилган. AB – гипотенуза. K нуқта BC ёйнинг ўртаси бўлсин ва A нуқта BC ёйда ётмасин. N нуқта AC кесманинг ўртаси ва M нуқта эса KN нурнинг айлана билан кесишган нуқтаси бўлсин. A ва C нуқталар орқали айланага ўтказилган уринмалар E нуқтада кесишса, $\angle EMK = 90^0$ бўлишини исботланг.

50. ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг AB гипотенузасида M ва N нуқталар олиниб, AC=AM ва BC=BN шартлари бажарилса, $\angle MCN = 45°$ бўлишини исботланг.

51. ABCD қавариқ кўпбурчакда E ва F нуқталар мос равишида BC ва CD томонларнинг ўрталарди. AE, AF, BF кесмалар тўртбурчакни шундай тўртта учбурчакка ажратадики, бу учбурчакларнинг излари кетма-кет келган натурал сонларга тенг бўлади. ABD учбурчакнинг юзи қандай энг катта қийматни қабул қилиши мумкин?

ЖАВОБ ВА КЎРСАТМАЛАР

1. Фараз қиламиз: x_1; x_2; x_3; x_4; x_5 лар талаб қилинган сонлар бўлиб, аниқлик учун $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ бўлсин. У ҳолда x_2-x_1; x_3-x_1; .... x_5-x_4; кўринишдаги 10 та айирма ҳосил бўлиб, уларнинг йиғиндиси:

$4x_5+2x_4-2x_2-4x_1$

ифодага тенг бўлади.

$4x_5+2x_4-2x_2-4x_1 \leq 4(x_5+x_4+x_3+x_2+x_1)=4$

Агар $x_5=1$ ва $x_4=x_3=x_2=x_1=0$ бўлса, натижа 4 га тенг бўлади.

2. Қопларнинг массаларини мос равишда x_1; x_2; x_3; x_4; x_5 деб белгилаб олайлик. Масаланинг шартига кўра, ушбу системани тузамиз:

$x_1+x_2=12$; $x_2+x_3=13{,}5$; $x_3+x_4=11{,}5$; $x_4+x_5=8$;
$x_1+x_3+x_5=16$

Тенгламаларни ҳадлаб қўшиб, ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$2x_5+2x_4+3x_3+2x_2+2x_1=61$

Бундан $x_3 = \dfrac{61-(12+8)}{3} = 7$ ни ҳосил қиламиз. Энди қолган номаълумларни топиш осон.

Жавоб: $x_1=5{,}5$; $x_2=6{,}5$; $x_3=7$; $x_4=4{,}5$; $x_5=3{,}5$

3. x_1; x_2; x_3 – берилган сонлар бўлиб, $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ бўлсин дейлик. У ҳолда $x_1+x_2 \leq 2x_3$ бундан ёки $x_1+x_2=x_3$, ёки $x_1+x_2=2x_3$. Охирги ифода фақат $x_1=x_2=x_3$ бўлгандагина ўринлидир, у ҳолда уларни ўзаро тублигидан $x_1=x_2=x_3=1$. Энди $x_1+x_2=x_3$ бўлсин. Бу ҳолда $x_1+x_3=2x_1+x_2$ ифода x_2 га бўлиниши керак, демак, 2x бўлиниши керак, x_2 га аммо $2x_1 \leq 2x_2$, бундан ёки $x_1=x_3$, ёки $2x_1=x_2$ экани келиб чиқади. Биринчи ҳолда $x_3=2x_1$ ва уларнинг ўзаро тублигидан $\{x_1; x_2; x_3\}=\{1; 1; 3\}$

Иккинчи ҳолда $x_3=3x_1$ ва $\{x_1; x_2; x_3\}=\{1; 2; 3\}$

Жавоб: $\{1; 1; 1\}$; $\{1; 1; 3\}$; $\{1; 2; 3\}$

4. Кўрсатма: $1001=7\cdot11\cdot13$ Шунинг учун 1001 нинг барча бўлувчилари 1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001 сонларидан иборат-дир.

Жавоб: 76

5. Фараз қиламиз: a_1, a_2, a_3,... берилган арифметик прогрессия бўлиб, a_n ҳади 3 рақами билан тугасин. a_m ҳад эса 7 рақами билан тугасин дейлик. Агар $m>n$ бўлиб, дейлик $m=n+k$, $k>0$ бўлса, a_{n+2k} ҳад эса 1 рақами билан тугайди. a_{n+3k} ҳад эса 5 рақами билан тугайди.Бу эса шартга зиддир. Агар $m<n$ бўлиб, $n<m+e$, $e>0$ бўлса, у ҳолда a_{m+2e} ҳад 9 билан тугайди, A_{m+3e} ҳад 5 рақами билан тугайди. Бу ҳам шартга зиддир. Демак, бу арифметик прогрессияда 7 рақами билан тугаган ҳад йўқ экан.

6. Биз $10m^2+1=k^2$ шартни қаноатлантирувчи (m, k) натурал сонлар жуфтлигининг чексиз кўп эканини кўрсатишимиз керак. Биринчи ана шундай жуфтликка $m=6$, $k=19$ сонлар киради (Танлаб топдик ҳақиқатан ҳам, $6^2=36$, $19^2=361$). Бундан ташқари, агар $10m^2+1=k^2$ бўлса, у ҳолда:

$$10(2mk)^2+1=40(mk)^2+1=40m^2(10m^2+1)+1=400m^4+40m^2+1=(20m^2+1)^2$$

Шунинг учун юқоридаги шартни қаноатлантирувчи (m, k) жуфтлик ёрдамида $(2mk,\ 2m+1)$ жуфтликни ҳам ҳосил қилишимиз мумкин. Бу эса талаб қилинган жуфтликдан чексиз кўп эканлигини кўрсатади.

7. Кўрсатма: Карим $1900+10x+y$ йилда туғилган бўлсин. У ҳолда масаланинг шартига кўра, у XX асрда туғилгани учун:

$$59-(10x+y)=1+9+x+y$$
$$59-10x-y=10+x+y$$
$$11x+2y=49$$

тенгламани ечиш керак.

Жавоб: 1938

8. $\overline{xy}=a,\ \overline{zt}=b,\ \overline{uv}$ дейлик.

У ҳолда $a=\sqrt{\overline{\overline{zt}+\overline{uv}}}$ $\quad a^2=100b+c,\ \ 2b=a+c$ бўлади. Бунда $a^2=50a+51c$ бўлгани учун $a\,(a-50)$ сони мусбат ва 51 га бўлинади, бўлинмада эса икки хонали сон ҳосил бўлади. Демак, *a* сони 68 ёки 84, с нинг унга мос қийматлари 24 ва 56, бундан b нинг қиймати 46 ва 70 бўлиши мумкинлиги келиб чиқади.

Жавоб: (68;46;24) (84;70;56)

9. Маълумки, ҳар қандай жуфт соннинг квадрати 4 га бўлинади ва тоқ соннинг квадратини 4 га бўлганда 1 қолдиқ қолади. Шунинг учун, агар $x^2+y^2=16000$ бўлса, у ҳолда $x=2m$, $y=2n$ бўлиши керак.

Фикримизга кўра:

$$(2m)^2+(2n)^2=16000$$

$$m^2+n^2=4000$$

ҳосил бўлади ва худди юқоридагидай $m=2m_1$, $n=2n_1$ десак $m_1^2+n_1^2=1000$ бўлади. Бу жараённи яна бир марта $m_1=2m_2$, $n_1=2n_2$ деб давом қилсак, $m_2^2+n_2^2=250=4\cdot62+2$ келиб чиқади. Демак, m_2 ҳам, n_2 ҳам тоқ сон экан. Агар $m_2\geq n_2$ деб олсак, $125\geq m_2^2<250$ бўлиши керак. Аммо бу ораликда m_2 нинг фақат иккита қиймати бор, яъни $m_2=13$ ва $m_2=15$ бўлиши мумкин. Бундан эса орқага қайтиб $x=104$, $y=72$ ва $x=120$, $y=40$ бўлиши мумкинлигини кўрамиз.

Жавоб: $104^2+72^2=120^2+40^2=1600$

10. Агар сўралган сон $\overline{abcabc}$ кўринишга эга бўлса, у 1001 га бўлинади, демак у 91 га ҳам бўлинади. Шунинг учун ҳосил бўлган соннинг 91 га бўлиниши учун уч хонали сон 91 га бўлиниши керак. 91 га бўлинадиган уч хонали сонлар орасида фақат 273 гина масала шартини қаноатлантиради. Бундан изланган сон $\underbrace{273273\ldots273}_{1992\ марта}$ экани келиб чиқади.

11. Тенгламанинг иккала томонига 2 ни кўпайтириб ва 1 ни қўшиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$4xy+2x+2y+1=167$$

$$2x(2y+1)+(2y+1)=167$$

$$(2x+1)(2y+1)=167$$

Бу тенгламанинг қуйидагича тўртта ечими мавжуд:

(0;83), (83;0), (–1;–84), (–84;–1)

12. Агар x жуфт сон бўлса z тоқ сон ва аксинча x тоқ сон бўлса z жуфт сон бўлади. $x<z$ экани аниқ. $x=2$ бўлсин, агар y тоқ сон бўлса, 2^y+1 сони 3 га бўлинади (ўзингиз исботлашга ҳаракат қилинг) ва $y=3$ да $2^3+1=9>3$, аммо z туб сон бўлиши керак, демак, y-жуфт сон экан, яъни $y=2$, у ҳолда $z=5$ бўлади.

Жавоб: (2;2;5)

13. $6(x+7y)=(6x+11y)+31y$

Шартга кўра, ифода 31 га бўлинади. Йиғинди 31 га бўлингани учун $6(x+7y)$ ҳам 31 га бўлинади.

14. x_1 ва x_2 берилган тengламанинг илдизи бўлсин.

Виет теоремасига кўра системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a \\ x_1\cdot x_2=1-b \end{cases}$$

бундан ушбу:

$$\begin{cases} (x_1+x_2)^2=a^2 \\ (1-x_1\cdot x_2)^2=b^2 \end{cases}$$

Системадаги тенгламаларни қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(1-x_1\cdot x_2)^2=x_1+2x_1x_2+x_2^2+1-2x_1x_2+(x_1x_2)^2=$$
$$=x_1^2+x_2^2+1+x_1^2x_1^2=(x_2^2+1)+x_1^2(x_2^2+1)=(x_1^2+1)(x_2^2+1).$$

x_1^2+1 ва x_2^2+1 йиғиндилар бирдан катта сонлардир.

15. $x^5+y^5=2x^2y^2$ тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтарамиз, тенгликнинг иккала томонига - $4x^5y^5$ ни қўшамиз:

$x^{10}+2x^5y^5+y^{10}=4x^4y^4$

$x^{10}-2x^5y^5+y^{10}=4x^4y^4-4x^5y^5$

$(x^5-y^5)^2=4x^4y^4(1-xy)$ $\qquad (xy\neq 0)$

$$1-xy=\left(\frac{x^5-y^5}{2x^2y^2}\right)^2$$

Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

16. $x=mn$, $y=nk$, $z=mk$ бўлсин, бу ерда m, n, k лар натурал сонлар. x, y, z ларнинг қийматларини берилган тенгламага

қўйиб $n(k-m)=mk-1$ тенгламани ҳосил қиламиз. $k-m=1$ деб, тенгламани қуйидаги кўринишдаги чексиз кўп илдизларини топамиз:

$$x=m(m^2+m-1); \quad y=(m+1)(m^2+m-1); \quad z=m(m+1)$$

17. Кўрсатма: Берилган системадан қуйидагини ҳосил қиламиз

$$(xz-2yt)^2+2(xt+yz)^2=(x^2+2y^2)(z^2+2t^2)=11$$

Бундан, ёки

$x^2+2y^2=1, \qquad (x^2=1; \; y=0)$

ёки

$z^2+2t^2=1$

Жавоб: $(1;0;3;1)$, $(-1;0;-3;1)$, $(-1;0-3;-1)$, $(3;1;1;0)$

18. Берилган тенгликдан $(x+y)^2z=\overline{xyz}$, $\quad (x+y)^2z=10\overline{xy}+z$,

ёки $\quad ((x+y)^2-1)z=10\overline{xy}$.

Агар $\overline{xy}$ учга бўлинмаса, у ҳолда $x+y$ ҳам учга бўлинмайди Демак, $(x+y)^2$ ни учга бўлганда 1 қолдиқ қолади. Аммо бу ҳолда тенгликнинг чап томони эса учга бўлинади. Демак, биз зиддиятга учрадик. $\overline{xy}$ ҳам, $x+y$ ҳам, z ҳам учга бўлинар экан. Агар $x+y$ ифода 12, 15, 18 қийматларни қабул қилса, $10\overline{xy}$ сони мос равишда 143 га, 224 га, 323 га бўлинади, у ҳолда $\overline{xy}$ ҳам 143 га, 224 га, 323 га бўлиниши керак. Бу ҳолнинг эса бўлиши мумкин эмас. Чунки, $\overline{xy}$ икки хонали сон. $x+y=3$ бўлса, $8z=10\overline{xy}$ тенглик ҳосил бўлади. Бу ҳолнинг ҳам бўлиши мумкин эмас, чунки, z бирлар хонасидаги рақам бўлиб, $\overline{xy}$ эса икки хонали сондир. $x+y=6$ бўлса, $7z=2\overline{xy}=20x+2y=18x+12$ бўлиб, бу ерда z нинг 6 га бўлиниши кўриниб турибди, яъни $z=6$, $30=18x$ бу ҳолнинг ҳам бўлиши мумкин эмас. $x+y=9$ бўлса, $8x=\overline{xy}=9x+9$. Бундан $z=9$, $x=7$ ва $y=2$ бўлади. Шундай қилиб, масала шартини қаноатлантирувчи рақамларнинг ягона учлиги $x=7$, $y=2$, $z=9$ лардан иборат.

Жавоб: $x=7$, $y=2$, $z=9$

19. Берилган тенглама ушбу $z^2(x+y)=10\overline{xy}+z$ ёки $z^2(x+y)-10\overline{xy}=z$ тенгламага тенг кучлидир. Агар z учга бўлин-

маса, z^2 ни учга бўлганда 1 қолдиқ қолади. У ҳолда тенгликнинг чап томони (x+y ва $10\overline{xy}$ ларни учга бўлганда бир хил қолдиқлар қолгани учун) учга бўлинади. Бу қарама-қаршиликдан – z нинг учга бўлинишидан $\overline{xy}$ ва x+y ларни ҳам учга бўлиниши келиб чиқади. Демак, $\overline{xyz} = z^2(x+y)$ сон 27 га бўлинади. Бунда бўлинманинг мумкин бўлган қийматлари 17, 18, 19, 27, 28, 29 бўлиши мумкин. Чунки фақат мана шу ҳоллардагина кўпайтманинг охирги рақами 3 га бўлинади. Бу сонларни текшириб кўриб, фақат қуйидаги x=7, y=2, z=9 сонларнигина масала шартини қаноатлантиришини кўрамиз.

Жавоб: x=7, y=2, z=9

20. $x^6+2x^4+2x^3+x^2+2x-1=(x^3+x+1)^2-2$

Бу ерда берилган кўпҳадда $x^3+x+1=0$ бўлганда унинг қиймати энг кичик (–2) бўлиши кўриниб турибди.

21. Танлаш усули билан тенгламанинг битта ечимини топамиз:

x=10, y=3, z=1, t=2

Сўнгра *x, y, z, t* ларнинг топилган қийматларини мос равишда n^{105}, n^{70}, n^{42} ва n^{30} (n°N) ларга кўпайтирамиз. Ушбу сонлар тўртлиги:

$\{10n^{105},\ 3n^{70},\ n^{42},\ 2n^{30}\}$ n°N

исталган n да жавоб бўлади.

22. *p* ва *q* илдиз бўлгани учун $\begin{cases} p^2+p^2+q=0 \\ q^2+pq+q=0 \end{cases}$ системани ҳосил қиламиз. Системани ечиб, жавобни оламиз.

23. $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ ва $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

Буларни берилган ифодага қўйиб, маълум шакл алмаштиришлардан кейин натижага эришамиз.

Жавоб: $\sqrt{2}$

24. Масала шартига кўра $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ дан xy+yz+xz=0 экани келиб чиқади.

$x+y+z=1$ дан $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)=1$ бўлади.

Демак, $x^2+y^2+z^2=1$ экан.

25. a берилган тенгламани бутун илдизи бўлсин дейлик. У ҳолда $a^4-pa^3+q=0$ дан $q=a^3(p-a)$. q туб сон бўлгани учун $a^3=1$, яъни $a=1$, демак, $q=p-1$. p ва q нинг туб сонлар эканини эътиборга олсак, $p=3$ ва $q=2$ экани келиб чиқади.

Жавоб: $p=3$, $q=2$

26. Агар $x_1=x_2=\ldots=x_{100}$ бўлса, системадаги тенгламалар $x_1^2+x_1-1=0$ кўринишига келади. Бу тенгламани ечиб, $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ни ҳосил қиламиз. Энди системанинг бошқа ечимлари йўқлигини кўрсатамиз. Тенгламаларни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$x_1=\frac{1}{1+x_2},\quad x_2=\frac{1}{1+x_3},\qquad x_{100}=\frac{1}{1+x_1},$$

x_1, x_2,… x_{99} ҳадларнинг қийматларини охирги тенгламага қўйиб:

$$x_1=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots\cfrac{}{1+\cfrac{1}{1+x_1}}}}}$$

узлуксиз касрни ҳосил қиламиз. Тенгликнинг ўнг томонида шакл ўзгартиришлар қилиб, уни $x_1=\dfrac{ax_1+b}{cx_1+d}$ кўринишга келтириб оламиз.

Бу эса квадрат тенгламага тенг кучлидир. Демак, x_1 учун иккитадан кўп қиймат мавжуд бўлиши мумкин эмас. Биз бундай иккита қийматни биламиз:

$$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Демак, x_1 улардан биттасига тенг. Бундан фойдаланиб, x_{100}, x_{99}, … x_2 ларни топамиз, натижада $x_1=x_2=\ldots=x_{99}=x_{100}$ келиб чиқади

Жавоб: $x_1 = x_2 = ... = x_{99} = x_{100} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

27. Кўрсатма $x=1$ тенгликни қаноатлантиргани учун $x^3-9x^2+27x-19$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

$x^3-9x^2+27x-19 = (x-1)(x^2-8x+19)$

Жавоб: $x=1$

28. Кўрсатма. Ифодани қуйидаги кўринишга келтиринг:

$$\frac{1}{2}(2x-y+1)^2+\frac{1}{2}(3y+1)^2-1$$

ифоданинг энг кичик қиймати (-1) бўлиб, у бунга $x=-\frac{2}{3}$ ва $y=-\frac{1}{3}$ бўлганда эришади.

Жавоб: -1

29. Кўрсатма. Биринчи тенгламани $(x-y)$ га, иккинчисини $(z-x)$ га, учинчисини $(y-z)$ га кўпайтириб қўшамиз. Ушбу тенглама:

$$7(x-y)+21(z-x)+28(y-z)=0$$

ҳосил бўлади. Бундан $z=3y-2x$ ни иккинчи ва учинчи тенгламаларга қўйиб, $y=0$ ёки $y=2x$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб: $(\sqrt{7};\ 0;\ -2\sqrt{7})$, $(-\sqrt{7};0;\ 2\sqrt{7})$, $(1;\ 2\ 4)$, $(-1;-2;-4)$

30. Жавоб: 1989

32. $N=13a_1+73b_1=13a_2+73b_2=13a_3+73b_3$ ва $a_1< a_2 <a_3$ бўлсин. У ҳолда $13(a_2-a_1)=73(b_2-b_1)$ бўлиб a_2-a_1 сон 73 га бўлинади.

$13(a_3-a_1)=73(b_3-b_1)$ дан эса a_3-a_1 нинг 73 га бўлиниши келиб чиқади. Демак, $a_3\geq a_2+73\geq(a_1+73)+73\geq 1+73+73=147$ бўлганидан:

$$N=13a_3+73b_3\geq 13\cdot 147+73=1984$$

Бундан 1984 ни талаб қилинганидай, учта турли кўринишда тасвирлаш мумкин, деган хулоса келиб чиқади. Бу ерда:

$$a_1=1,\quad a_2=74,\quad a_3=147,$$

$$b_1=27,\quad b_2=14,\quad b_3=1,$$

33. Масаланинг шартига кўра, $x_2^2 = px_2 + q, x_1^2 = -px_1 - q$

Шунинг учун $\begin{cases} x_2^2 + 2px_2 + 2q = 3x_2^2 \\ x_1^2 + 2px_1 + 2q = -x_1^2 \end{cases}$

Бундан кўринадики, x_1 ва x_2 лардан биттаси (ёки иккаласи ҳам) тенгламанинг илдизи бўлади. Ёки тенгламанинг чап томони x_1 ва x_2 қийматларни қабул қилганда турли ишораларга эга бўлади. У ҳолда булар орасида $x^2+2px+2q=0$ тенгламанинг илдизи ётади.

34. $(n^2+n)^2=n^4+2n^3+n^2< n^4+2n^3+2n^2+2n+1< n^4+2n^3+3n^2+2n+1= = (n^2+n+1)^2$

35. $n^3+3=(n^3+27)-24=(n+3)(n^2-3n+9)-24$.

Демак, $n+3$ сони 24 нинг бўлувчиси бўлиши керак. У ҳолда n ушбу 1, 3, 5, 9, 21 қийматларни қабул қилиши мумкин.

Жавоб: $\{1, 3, 5, 9, 21\}$

36. Системадаги барча тенгламаларни қўшиб,

$$x^2y+ y^2x+ y^2z+ z^2y+ z^2x+ x^2z=48$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Уларни кўпайтириб, қавсларни очиб, юқоридаги ҳосил бўлган тенгламани ҳисобга олган ҳолда ушбу:

$$(xyz)^2(48+2xyz)=2160$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Агар $xyz=t$ деб олсак, $2t^3+48t^2-2160=0$, $t^3+24t^2-1080=0$ кубик тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама $t_1=6$ ва $t_2=-15\pm3\sqrt{3}$ илдизларга эга. Кўриниб турибдики, масаланинг шартини фақат биринчи илдиз қаноатлантиради.

Демак, $xyz=6$ дан $xy=\frac{6}{z}$, $xz=\frac{6}{y}$, $yz=\frac{6}{x}$ бўлганда, ушбу:

$$\begin{cases} x+y=z \\ y+z=2x \\ x+z=5y \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Буни ечиб жавоб $x=2$, $y=1$, $z=3$ эканини топамиз.

37. $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ тенгликнинг ўнг томонини abc га кўпайтирамиз, сўнгра тенгликнинг иккала томонига 1 ни қўшамиз.

$a+b+c=ab+ac+bc$

$abc+a+b+c=ab+ac+bc+1$

$abc-ab-ac-bc+a+b+c-1=0$

$ab(c-1)-a(c-1)-b(c-1)+(c-1)=0$

$(c-1)(ab-a-b+1)=0$

$(c-1)[a(b-1)-(b-1)]=0$

$(c-1)(a-1)(b-1)=0$

Демак, a, b, c лардан камида биттаси 1 га тенг экан.

38. а) $2^{300}=(2^3)^{100}=8^{100}$, $3^{300}=(3^2)^{100}=9^{100}$

Бундан $9^{100}>8^{100}$, демак, $3^{200}>2^{300}$

б) $2^{91}=(2^{13})^7$

$5^{35}=(5^5)^7$

$2^5>5^2$ ёки $2^{10}>5^4$, демак, $2^{13}=2^3\cdot 2^{10}>5\cdot 5^4=5^5$

39. Кўрсатма:

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{x+2}{x+1}\right)=0$$

$$\frac{x+2}{x+1}=u, \qquad \frac{x-2}{x-1}=v$$

деб ечиш керак.

Жавоб: $\dfrac{\pm 3\pm\sqrt{7}}{2}$

40.

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=$$

$$=\frac{z}{z(1+x+xy)}+\frac{xz}{xz(1+y+yz)}+\frac{1}{1+z+zx}=$$

$$=\frac{z}{z+zx+xyz}+\frac{xz}{xz+xyz+z\cdot xyz}+\frac{1}{1+z+zx}=$$

$$=\frac{1+z+zx}{1+z+zx}=1$$

41. 1989=n бўлсин. У ҳолда:

$1989\cdot1990\cdot1991\cdot1992+1=n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$

$n^2+3n+1=m$ деб белгилаб олсак:

$(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=(m-1)(m+1)+1=m^2-1+1=m^2$

42. $k(k+2)=\dfrac{(k+2)^3-k^3-8}{6}$ тенгликдан фойдаланиб, йиғиндини қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+\ldots+999\cdot1001=$$

$$=\frac{3^3-1^3-8}{6}+\frac{5^3-3^3-8}{6}+\frac{7^3-5^3-8}{6}+\ldots+\frac{1001^3-999^3-8}{6}=$$

$$=\frac{1001^3-1-500\cdot8}{6}=167166500.$$

43. $(x+y)^2>(2,6)^2,$

$$x^2+2xy+y^2>6,76$$

дан $x^2+y^2<4$ ни айирсак, $2xy>2,76$; $xy>1,38$ бундан $xy>1$ экани келиб чиқади. Шуни исботлаш сўралганди.

44. $t^4-t+\dfrac{1}{2}=(t^2-\dfrac{1}{2})^2+(t-\dfrac{1}{2})^2>0.$

45. $(b-c)^2\geq0$ дан $a^2+(b-c)^2\geq a^2$, $a^2\geq a^2-(b-c)^2$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Худди шундай, $b^2\geq b^2-(a-c)^2$ ва $c^2\geq c^2-(a-b)^2$ тенгсизликларни ҳам келтириб чиқариш мумкин. Учала тенгсизликни кўпайтириб, зарур амалларни бажариб:

$(abc)^2\geq(a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2,$

$(abc)\geq(a+b-c)\ (a+c-b)\ (b+c-a)$

тенгсизликни келтириб чиқарамиз. Исботи тугади.

46. Тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$3x^3+3x^2+3x+1=0$

$(x+1)^3+2x^3=0$ тенгламадан

$x+1=-x\sqrt[3]{2},$

$x=-\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$ экани келиб чиқади.

47. Агар p=2 бўлса, $2^2+2^2=8$ мураккаб сон ҳосил бўлади. Агар p=3 бўлса, 17 ҳосил бўлади. Энди p>3 дейлик, у ҳолда p=3k+1 бўлса (бу ерда k қандайдир натурал сон):

$$2^p+p^2=(3-1)^{3k\pm 1}+(3k\pm 1)^2=(3M-1)+(3N+1)=3(M+N)$$

ҳосил бўлади. Демак, масаланинг шартини қаноатлантирувчи p нинг ягона қиймати 3 экан.

48. а) x=1, y=8

б) Мумкин эмас. Фараз қиламиз: xy+x ва xy+y лар турли натурал сонларнинг квадратлари бўлиб, бунда y>x бўлсин. У ҳолда:

$x^2<xy+x<xy+y$

$(xy+y)-(xy+x)=y-x>(x+1)^2-x^2=2x+1$

бу ерда y>3x+1

49. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ тенгламадан $\frac{1}{x}>\frac{1}{n}$, яъни x<n бўлиши келиб чиқади. Шунинг учун агар n=1 бўлса, тенглама натурал сонларда ечимга эга бўла олмайди. $n\neq 1$ дейлик, у ҳолда x=n–k, 0<k<n ва $\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{y}$ бундан $y=\frac{n(n-k)}{k}$ Демак, натурал сонлар тўпламида тенгламанинг битта ечими доимо мавжуд, бу k=1 бўлганда $x=n-1$, $y=n(n-1)$ кўринишда бўлади. Энди n – туб сон ва k>1 бўлсин, деб фараз қилайлик. У ҳолда n ва k лар ўзаро туб, шунингдек, k ва n–k ҳам ўзаро туб сон бўлади. Бундай бўлса, n(n–k) ва k ҳам ўзаро туб сон бўлади.

Шунинг учун, агар n туб сон ва k>1 бўлса, $y=\frac{n(n-1)}{k}\notin N$ бўлади. Демак, n туб сон бўлса, k=1 бўлиши зарур экан ва тенглама ягона ечимга эга бўлади. Агар n мураккаб сон бўлса, $n=n_1 n_2$ бўлиб, $k=n_1$ дейлик, у ҳолда x=n–1, y=n(n–1) ечимдан бошқа яна битта $x=n-n_1$, $y=n_2(n-n_1)$ ечим борлиги келиб чиқади. Бу эса масала шартини тўла тасдиқлайди.

50. Суҳбат 1989 йил 1 январда бўлиб ўтган. Шерзод 14 ёшга 1988 йил 30 декабрда тўлган. Шунинг учун ҳам 1990 йил 31 декабрда ўн еттига қараб кетади.

51
$$(1-x)(1+x+x^2+K+x^{1993})=$$
$$=(1-x)(1+x)+x^2(1-x)+x^3\cdot$$
$$\cdot(1-x)+K+x^{1993}(1-x)=1-x^{1994}$$

52. Масалани ечишда 8019 ни кўпайтувчиларга ажратиб, мулоҳаза юритган маъқул. Бунда, агар ўйинчи нишонга урганда унинг пулини 1,1 га кўпайтириш ва нишонга теккизолмаса, 0,9 га кўпайтиришни эътиборга олиш зарур:

$8019=9^3\ 11$, яъни $8019=100\ 1{,}1\ 0{,}9^3$.

Бундан, агар у бир марта нишонга уриб, уч марта нишонга уролмаса, шу ҳол юз бериши мумкин эканлиги келиб чиқади.

53. А икки хонали сон учун $A^2...99^2=9801<9999$ тенгсизлик ўринли. Шунинг учун A^2 нинг рақамлари йиғиндиси $9\cdot 4=36$ дан кичик. У ҳолда А нинг рақамлари йиғиндиси эса $\sqrt{36}=6$ дан кичик бўлиши аниқ, яъни, ёки 5 га тенг, ёки 5 дан кичик. Демак, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 40, 41, 50 дан иборат 15 та ҳолни қараш талаб қилинади. Булардан 9 таси – 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31 ларгина масала шартини қаноатлантиришини текшириб кўриш мумкин.

54. Берилган тенгсизликни исботлаш учун $a+b>c$ ва $a^2-ab+b^2\geq 0$ лардан фойдаланамиз:

$$a^3+b^3+abc=(a+b)(a^2-ab+b^2)+3abc>$$
$$>c(a^2-ab+b^2)+3abc=a^2c-abc+b^2c+3abc=$$
$$=c(a^2+2ab+b^2)=c(a+b)^2>c\cdot c^2=c^3$$

55. x ва y ларнинг ишораларини ихтиёрий танлаш мумкин, шунинг учун номанфий ечимларни қидирамиз. Тенгламанинг берилишидан маълумки, x тоқ сон, $x=2t+1$. Бундан фойдаланиб, тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$x^4-1=2y^2, x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)=$$

$= 2t \cdot (2t+2)(4t^2+4t+2) = 2y^2$, кўриниб турибдики, y – жуфт сон экан, яъни y =24.

У ҳолда $t(t+1)(2t(t+1)+1)=u^2$

сонлари жуфт-жуфт ўзаро туб сонлардир, уларнинг кўпайтмаси эса тўла квадратдир. Бундан келиб чиқадики, уларнинг ҳар бири тўла квадратдан иборат экан. Бу ҳол фақат $t = 0$ бўлганда мумкин. У ҳолда u= 0 бўлиб, $x=\pm 1$, $y = 0$ бўлади.

56. Жавоб: 5,6,7,8, –1

Бошқа мисол ҳам топиш мумкин. Биринчи тўртта рақам 2 лардан иборат бўлсин. Бешинчи сонни x деб тенглама тузамиз.

$16x = x$-1 Бундан $x = -\dfrac{1}{15}$

57. Биринчи тенгламадан иккинчисини айирамиз:

$(b-c)(a-d)=0$

Демак, a=d ёки b=c худди шундай a=c ёки b=d ни келтириб чиқарамиз. Кўриниб турибдики, тўртта сондан учтаси тенг. Фараз қиламиз: b=c=d бўлсин. У ҳолда тенгламалар системаси

$$\begin{cases} ab+b^2=-1 \\ ab+b^2=-1 \\ ab+b^2=-1 \end{cases}$$

кўринишга келади.

$b(a+b)=-1$ ёки b=–1 ва a+b=1 ёки a+b=–1 ва b=1 бундан a, b, c, d лардан биттаси ± 2. га, қолганлари µ 1 га тенг экани келиб чиқади.

58. $x=1+\alpha$, $y=1+\beta$ деб олсак $z=-(\alpha+\beta)$ бўлади ва биринчи тенглама $(\alpha+1)^3+(\beta+1)^3-(\alpha+\beta)^3=2$ кўринишга келади. Соддалаштиришдан кейин:

$$\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta=\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

ёки

$$\alpha+\beta=(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta-\alpha\beta)$$

бўлиб, $\alpha+\beta$ йиғинди $\alpha+\beta+2$ га бўлиниши керак. Бундан кўринадики, $\alpha+\beta$ йиғинди 0, -1, -3, -4 қийматларни қабул қилиши мумкин: $\alpha+\beta=0$ бўлсин. У ҳолда кейинги тенгликдан $0=2\cdot(-\alpha\beta)$, $\alpha\beta=0$, $\alpha=0$ ёки $\beta=0$ $\alpha+\beta=-1$ бўлса, $-1=-1-\alpha\beta$, $\alpha\beta=0$, $\alpha=0$ ёки $\beta=0$. Агар $\alpha+\beta=-3$ бўлса, $-3=-1(-3-\alpha\beta)$, $3=-3-\alpha\beta$, $\alpha\beta=-6$, $\alpha=-6/\beta$. Агар $\alpha+\beta=-4$ бўлса $-4=-2(-4-\alpha\beta)$, $2=-4-\alpha\beta$, $\alpha\beta=-6$, $\alpha=-6/\beta$. Агар $\alpha=0$, $\beta=0$ бўлса, $x=1$, $y=1$, $z=0$ бўлади. Худди шундай $x=0$, $y=1$, $z=1$ ва $y=0$, $z=1$, $x=1$ ҳоллари бўлиши мумкин. Булардан x, y, z ўзгарувчилардан биттаси нолга тенг, қолганлари эса 1 га тенг экан, деган хулоса келиб чиқади.

59. Кўрсатма: $y=\sqrt{2x-5}$ деб белгилаб олинг. У ҳолда $y\geq 0$ ва $(y+3)+|y-1|=4$. Бундан $0\leq y\leq 1$

Жавоб: $\frac{5}{2}\leq y\leq 3$

60. $x\geq 1$, $y\geq 1$, $z\geq 1$ экани аниқ. Фараз қилайлик: x уларнинг энг каттаси бўлсин: $x\geq y$, $x\geq z$. $y=(x-1)^2$, $x=(z-1^3)^2$ ва $x=(z-1)^2$ бўлгани учун $x\geq y$ дан $(z-1)^2\geq(x-1)^2$ экани келиб чиқади. Бундан $z\geq x$, аммо шартга кўра $x\geq z$ эди, демак, $x=z$ экан. Худди шундай $x=y$ бўлишини ҳам кўрсатиш мумкин. Демак, $x=y=z$ экан. Бундан фойдаланиб тенгламалар системасини ечсак, жавоб:

$$x=y=z=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\ \text{бўлади.}$$

61. $\frac{x}{y}=\alpha$ бу ерда α – исталган рационал сон. У ҳолда $y^{1991}\alpha^{1991}+y^{1991}=y^{1992}\alpha^{1992}+y^{1992}$

$$y=\frac{1+\alpha^{1991}}{1+\alpha^{1992}},\quad x=\alpha\cdot\frac{1+\alpha^{1991}}{1+\alpha^{1992}}$$

Булардан фойдаланиб, берилган тенгламанинг хоҳлаганча рационал ечимларини топиш мумкин.

• 62. Тенгламаларни квадратга кўтариб қўшамиз, натижада $\cos(x-y)=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан,

$$x-y=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in Z, \qquad x=y+\frac{\pi}{2}+k\pi, \text{ k°z ни}$$

юқоридаги тенгламалардан биттасига қўйиб, y ни топамиз.

Жавоб: $\{\pm a+\frac{\pi}{4}+2m\pi, \ \pm 2\ a+\frac{\pi}{4}+2n\pi\}, \quad m,n\in Z$

63. Тенгламалар системаларини қўшиб $55x_1+55x_2+\ldots+55x_{10}=550$ (1) тенгламани ҳосил қиламиз. Системадаги иккинчи тенгламадан биринчисини оламиз:

$9x_1-x_2-\ldots-x_{10}=0$ (2)

(2) ни (1) га қўшсак, $10x_1=10$, $x_1=1$ келиб чиқади. Худди шу усулдан фойдаланиб, $x_2, x_3, \ldots x_{10}$ номаълумларни топамиз.

Жавоб: $x_1=x_2=\ldots=x_{10}=18$

64. Кўрсатма: $t=\frac{2x-1}{2}$ деб белгилаш киритиб, тенгламани

$t^2-1=[t]$ кўринишга келтирамиз. Бунда $t<1$ ва $t\geq 2$ бўлганда тенглик ўринли бўлмайди. У ҳолда $1\leq t\leq 2$ бўлиши керак. Бунда $[t]=1$ бўлиб, $t^2=2$ тенглама ҳосил бўлади.

Жавоб: $\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$

65. $\begin{cases} x+y+z=a \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a} \end{cases}$

$$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=1$$

$$(x+y+z)(xy+yz+xz)=xyz$$

$$(x+y+z)(xy+yz+xz)-xyz=0$$

$$(x+y+z)(xy+yz+xz)-xyz=(x+y)(x+z)(y+z)=0$$

Бундан ёки $x+y=0$, ёки $x+z=0$, ёки $y+z=0$ бўлиши керак, $x+y+z=a$ бўлиши учун эса x, y, z лардан камида биттаси a га тенг бўлиши керак.

66. $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\frac{1}{1992}\right)^{1992}$ дан

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}=\left(\frac{1993}{1992}\right)^{1992}$$

$\frac{1993^{1992}}{1992^{1992}}=\frac{(m+1)^{m+1}}{m^{m+1}}$ ни ҳосил қиламиз.

Бу ердаги касрлар қисқармас касрлар бўлгани учун:

$$1992^{1992}=m^{m+1}$$

Агар $m\geq1992$ бўлса, у ҳолда $m^{m+1}>1992^{1992}$ бўлади. Агар $0<m<1992$ бўлса, у ҳолда $m^{m+1}<1992^{1992}$ бўлади. Агар $m<-1$ бўлса, у ҳолда $n=-(m+1)$ бўлганда $1992^{1992}=n^{n}$ бундан $n=1992$ экани келиб чиқади.

Жавоб: $m=-1993$

67. Кўрсатма: берилган тенгламани:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=11^3$$

кўринишга келтириб ечинг.

68. Тенгламани ечиш учун янги ўзгарувчи киритамиз:

$$y=\sqrt[3]{2-x},\quad z=\sqrt{x-1},$$

$$y^3+x=2,\quad z^2+1=x,\quad y+z=1$$

булардан $y^3+z^2=1$, $y+z=1$, $z=1-y$ ни биринчи тенгламага қўйиб, $y^3+y^2-2y=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу ердан $y^{\circ}\{0;\ 1;\ -2\}$

Демак, берилган тенгламанинг илдизлари 1; 2; 10 сонлари бўлар экан.

69. Системадаги тенгламаларни ҳадлаб қўшамиз:

$x^2+y^2+z^2-yz-xz-xy=y-x+z-y+x-z$

$x^2+y^2+z^2-yz-xz-xy=0$

$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz=0$

$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0$

бундан x=y=z экани келиб чиқади.

70. Масаланинг шартидан

$$x_1 - x_2 = \frac{x_2 - x_3}{x_2 \cdot x_3}, \qquad x_2 - x_3 = \frac{x_3 - x_4}{x_3 \cdot x_4}, \ldots, \qquad x_n - x_1 = \frac{x_1 - x_2}{x_1 \cdot x_2}.$$

Агар $x^1=x^2$ бўлса, $x^2=x^3=\ldots=x^n$ **бўлади. Агар** $x^2 \neq x^2$ бўлса, $x^2 \neq x^3 \neq \ldots \neq x^n \neq x^1$ бўлиб, бу ҳолда берилган барча тенгликни кўпайтириб, сўнгра $(x^1-x^2)(x^2-x^3)\ldots(x^n-x^1)$ га қисқартириб, $(x^1 \cdot x^2 \cdot x^3 \ldots x^n)\,2=1$ ни ҳосил қиламиз.

71. Кўрсатма: тенгламанинг иккала томонини $4(xy)^{100}$ га бўламиз:

$$(4x^{100} + \frac{1}{4x^{100}})(y^{100} + \frac{1}{y^{100}}) = 4$$

ҳар бир қавс ичида ифода 2 дан кичик бўлмагани учун $4x^{100}=1$, $y^{100}=1$

Жавоб: $x = \pm\frac{1}{\sqrt[100]{2}}$, $\qquad y = \pm 1$

72. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ дан $ad<bc$ экани келиб чиқади. $ad+ab<bc+ab$ (иккала томонига ab ни қўшдик). $a(b+d)<b(a+c)$

Иккала томонини $b(b+d)$ га бўлсак, $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ бўлади.

Иккинчидан $ad<bc$ га dc ни қўшсак
$ad+dc<bc+dc$ $\qquad d(a+c)<c(b+d)$

иккала томонини $d(b+d)$ га бўлсак, $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ бўлади.

Демак, $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ экан. Шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.

73. Тенгсизликнинг иккала томонини xyz га бўламиз:

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\frac{1}{zy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy},$$

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{zy}-\frac{1}{xz}-\frac{1}{xy}\geq 0,$$

$$\frac{1}{2}\left[(\frac{1}{z}-\frac{1}{x})^2+(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})^2+(\frac{1}{y}-\frac{1}{z})^2\right]\geq 0$$

тенгсизлик исботланди.

74. Тенгсизликни исботлаш учун иккита номанфий соннинг ўрта арифметиги ва ўрта геометриги ҳақидаги тенгсизликдан фойдаланамиз:

$$a^2+bc\geq 2a\sqrt{bc},\qquad b^2+ac\geq 2b\sqrt{ac},\qquad c^2+ab\geq 2c\sqrt{ab},$$

$$\frac{ab+ac}{2}\geq a\sqrt{bc},\qquad \frac{ab+bc}{2}\geq b\sqrt{ac},\qquad \frac{ac+bc}{2}\geq c\sqrt{ab}.$$

Бу олтита тенгсизликни қўшиб, берилган тенгсизликнинг тўғрилигига ишонч ҳосил қиламиз.

75. $\dfrac{x^5-y^5}{x-y}<\dfrac{x^5+y^5}{x+y}=1$

$$\frac{x^5-y^5}{x-y}=x^4+y^4+x^3y+xy^3+x^2y^2<1$$

бўлгани учун бундан $x^4+y^4<1$ экани келиб чиқади.

76. $a>0$, $b>0$, $a^3+b^3\geq ab(a+b)$ тенгсизлик ўринли бўлгани учун:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}\leq\frac{1}{ab(a+b)+abc}=\frac{1}{ab(a+b+c)};$$

$$\frac{1}{b^3+c^3+abc}\leq\frac{1}{bc(c+b)+abc}=\frac{1}{bc(a+b+c)};$$

$$\frac{1}{a^3+c^3+abc}\leq\frac{1}{ac(a+c)+abc}=\frac{1}{ac(a+b+c)};$$

Бу учала тенгсизликни қўшиб, исбот қилиш керак бўлган тенгсизликни оламиз:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{c^3+b^3+abc}+\frac{1}{a^3+c^3+abc}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}+$$

$$+\frac{1}{cb(a+b+c)}+\frac{1}{ac(a+b+c)}=\frac{1}{abc}$$

77.а) Биринчи тенгсизликнинг ўнг ва чап томонлари айирмасини топиб, шакл алмаштириш бажарамиз:

$D=2(a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2)-(a^4+b^4+c^4)=$

$=4a^2b^2-(a^2+b^2)^2+2c^2(a^2+b^2)-c^4=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2$

Агар $D\geq0$ бўлса, у ҳолда $2ab\geq|a^2+b^2-c^2|$, a, b, c лар берилган муносабатда симметриклик шартини қаноатлантиргани учун $a\geq b\geq c$ деб олсак бўлади. У ҳолда $a^2+b^2+c^2=|a^2+b^2-c^2|+2c^2\leq 2ab+2c^2\leq 2(ab+bc+ac)$

б) жавоб йўқ (масалан, $a=4$, $b=c=1$ бўлса, иккинчи шарт бузилади).

78. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma<1$

шартдан фойдаланамиз:

$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma\cdot(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)<1$

$\operatorname{tg}\gamma\cdot(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)<1-\operatorname{tg}\cdot\operatorname{tg}\beta$

$$tg\gamma\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}<1$$ ҳосил бўлади.

Шартга кўра $1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta>0$, демак,

$\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}(\alpha+\beta)<1$

$\operatorname{tg}\gamma<\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$

$\operatorname{tg}\gamma<\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta)$

$\gamma<\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta$,

$\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$

79. Берилган тенгсизликнинг тўғрилигини исботлаш учун исталган ҳақиқий сон учун:

$$|\sin x|+|\sin(x+1)|+|\sin(x+2)|>\frac{8}{5}$$

Тенгсизликнинг тўғрилигини исботлаш етарли.

$f(x)= |\sin x|+|\sin(x+1)|+|\sin(x+2)|$

Фукнция даври π бўлган даврий функция бўлгани учун тенгсизликнинг барча $x°[0;\ \pi]$ лар учун исбот қилиш етарли. Олдин $x°[0;\ p]$ да $f(x)>2\sin 1$ эканини кўрсатайлик. $0\le x\le \pi-2$ бўлсин. У ҳолда $f(x)=\sin x+\sin(x+1)+\sin(x+2)=2\cos 1\sin(x+1)+\sin(x+1)$

$1\le x+1\le \pi-1$ бўлганида $\sin(x+1)\ge\sin 1$, $\sin 2>\sin 1$ шунинг учун $f(x)\ge\sin 2+\sin 1>2\sin 1$

Ушбу $\pi-2\le x<\pi-1$ ва $\pi-1\le x\le\pi$ бўлган ҳоллар ҳам худди шундай қаралади.

Энди $2\sin 1>\frac{8}{5}$ эканини кўрсатиш керак:

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 1\right|=2\left|\sin\frac{\frac{\pi}{3}-1}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{\frac{\pi}{3}+1}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{\frac{\pi}{3}-1}{2}\right|\le\frac{\pi}{3}-1<0{,}05.$$

Бундан $2\sin 1\ge 2(\frac{\sqrt{3}}{2}-0{,}05)=\sqrt{3}-0{,}1>\frac{8}{5}$

80. Тўгаракка х ўқувчи аъзо бўлсин дейлик; масаланинг шартига кўра, тўгарак аъзоларининг 7% дан камроғи саккизинчи синф ўқувчиларидир. Иккинчи томондан, камида бир саккизинчи синф ўқувчиси (Карим) тўгаракда шуғулланмоқда. Шунинг учун $1<0{,}07x$, $x>14{,}2$. Демак, тўгаракда камида 15 та аъзо бор экан.

81. Шартга кўра $a_2>a_1$, $a_3>a_2+a_1$, $\quad$, $a_n>a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_1$

$a_2=a_1\cdot q$, $a_3=a_1\cdot q^2$, $\quad a_n=a_1\cdot q^{n-1}$

бўлгани учун $q>1$, $q^2>q+1$, $\quad$, $q^n>q^{n-1}+\ldots+q+1$ экани келиб чиқади.

Бундан $q^4 > \frac{q^4-1}{q-1}, q>1$ экани аниқ, $q^{n+1}-2q^n+1>0$,
$q^n(q-2)+1>0$

Агар $q>2$ бўлса, охирги тенгсизлик ихтиёрий n учун тўғри бўлади, агар $1<q<2$ бўлса, шундай n топиладики,

$q^n \geq \frac{1}{2-q}$ тенгсизлик бажарилмайди.

82. а) (2) формулада S=f(1) ни ҳилоблаш керак.

(1) формуладан эса $f(1)=2^{100}$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $S=2^{100}$.

б) (2) формуладан $f(-1)=-a_0+a_1-a_2+\ldots+a_{204}-a_{205}$ эканидан юқоридаги (а) шартга асосан:

$$S_T=\frac{1}{2}(f(1)-f(-1))=\frac{1}{2}(2^{100}+12^{100})=2^{99}(1+6^{100})$$

в) $S-S_T=S_ж$, $S_ж=2^{100}-2^{99}(1+6^{100})=2^{99}(1-6^{100})$

83. y=f(x) функция сонлар ўқида аниқланган бўлса, y=f(-x) функция ҳам сонлар ўқида аниқлангандир. u (x) ва υ(x) функциялари шундай танлаб олайликки, сонлар ўқида биттаси жуфт, иккинчиси тоқ бўлсин:

$U(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ жуфт функция ва

$k<25k^2+15k+3$

$V(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$ тоқ функциядир.

У ҳолда x нинг исталган қийматида $f(x)=u(x)+v(x)$ ўринли бўлади.

84. $a=\frac{x_1+x_2}{2}$; $b=\sqrt{x_1\cdot x_2}$ бўлсин. Шартга кўра $\frac{a}{b}=n$

дан $a=nb$, демак, b – рационал сон ва, демак, натурал ҳам.

x_1 ва x_2 сонлари $x^2-2ax+b=0$ тенгламани қаноатлантиради.

Шунинг учун улар $a\pm\sqrt{D}$ га тенг.

$D=4a^2-4b^2=4b^2(n^2-1)$

Агар n=1 бўлгандагина D квадрат бўла олади. Демак, D=0 ва $x_1=x_2$ экан.

85. Фараз қиламиз *n* масала шартини қаноатлантирсин. n^3-1 нинг 5 га бўлинишидан *n* сони ёки 1 рақами билан ёки 6 рақами билан тугаши керак, яъни 5k+1 кўринишда бўлиши керак.

$$\text{У ҳолда: } \frac{n^3-1}{5}=\frac{(5k+1)^3-1}{5}=25k^3+15k^2+3k=k(25k^2+15k+3)$$

$k<25k^2+15k+3$ бўлгани учун, ҳосил бўлган кўпайтма фақат k=1, яъни n=6 бўлгандагина туб сон бўлади.

86. Ҳар қандай натурал соннинг бешинчи даражаси шу соннинг ўзи қандай рақам билан тугалланган бўлса, шу рақам билан тугалланади. Демак, ахтарилаётган сон 4 рақами билан тугашидан унинг 14 экани келиб чиқади. Чунки 20^5 етти хонали сондир. 10^5 эса олти хонали сон, демак, сўралган сон фақат 14, бўлиши мумкин. Бевосита текшириш билан 14 ҳақиқатдан ҳам масаланинг шартини қаноатлантиришини кўрамиз.

87. $k^5+3=(k^3-k)(k^2+1)+k+3$

Кўриниб турибдики, k^5+3 нинг k^2+1 га бўлиниши учун k+3=0, яъни k=–3 бўлиши керак экан. Худди шундай k=-1, 0, 1, 2 қийматларда ҳам k^5+3 нинг k^2+1 га бўлиниши кўрсатиш мумкин.

Жавоб: {–3; –1; 0; 1; 2}

88. Берилган сон $8000000000=8\cdot10^9$ га яқин бўлиши учун ва $(2000)^3=8\cdot10^9$ бўлганидан сўралган соннинг 2000 дан кичик экани келиб чиқади. Аммо берилган соннинг 7 билан тугаши эса сўралган сонинг 3 рақами билан тугашидан далолат беради. Демак, биз сўралган сонни 1993, 1983, 1973 сонлари ичидан ахтаришимиз керак.

$1993^3>1990^3=10^3(200-1)^3=10^3(8\cdot10^6-3\cdot4\cdot10^4+6\cdot10^2-1)>$
$>10^7(800-12)=788\cdot10^7$

Бу ерда иккинчи рақам 8 бўлгани учун $1993^3>x^3$,

$1973^3=(2\cdot10^3-27)^3=8\cdot10^9-81\cdot4\cdot10^6+6\cdot27^2\cdot10^3-27^3<$
$<10^6(8000-324)+5\cdot10^6=10^6\quad 7681$

Бундан $1973^3<x^3$ булардан сўралган сон 1983 экан деган хулоса келиб чиқади.

Жавоб: 1983

89. Агар $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ бўлса, у ҳолда:

$f(x)+f(-x)=-2(a+b+c)x^2+2f(0)$ яъни, агар $a+b+c=0$ бўлса, $f(x)+f(-x)=2f(0)=abc$ ўзгармас бўлади. Берилган мисолда $f(x)=(x-10)(x+2)(x+8)$ деб олиш мумкин, у ҳолда берилган сон:

$f(999)-2f(0)=-f(-999)=1009\cdot 997\cdot 991$

Булар эса туб сонлардир.

Жавоб: $1009\cdot 997\cdot 991$

90. $x_{n+1}=(x_n-1)^3+1$ бундан $x_{n+1}-1=(x_n-1)^3$. Шунинг учун

$x_{m-1}=(x_{m-1}-1)^{3}=(x_{m-2}-1)^{3^2}=...=(x_1-1)^{3^{m-1}}$ тенглик ва $m\neq n$ шартдан

$(x_1-1)^{3^{m-1}}=(x_1-1)^{3^{n-1}}$ экани келиб чиқади, бу эса $x_1-1=0$, $x_m=x_n$ ёки $x_1-1=\pm 1$ бўлганда ўринли бўлади.

Жавоб: 0; 1; 2

91. Биринчи усул: a ва b лар ёки ҳар хил ишорали ёки иккаласи ҳам мусбат бўлиши мумкин. Биринчи ҳол бўлиши мумкин эмас, чунки кўпайтма манфий ишорали бўлади. Демак, a ва b ларнинг иккаласи ҳам мусбат ишора бўлиши керак. Мусбат сонларнинг ўрта арифметиги ва ўрта геометриги ҳақидаги тенгсизликка асосан $2=a+4b\geq 2\cdot\sqrt{a\cdot 4b}=4\sqrt{ab}$

$\sqrt{ab}\leq\frac{1}{2}$ бундан $ab\leq\frac{1}{4}$

Бу ерда агар $a=4b$ бўлганда, яъни $b=\frac{1}{4}$ ва $a=1$ бўлганда тенглик ўринли бўлади. Демак, ab кўпайтманинг энг катта қиймати $\frac{1}{4}$ бўлиши мумкин экан.

Иккинчи усул: $a+4b=2,$

$$a=2-4b,$$

$$ab=b(2-4b)=2b(1-2b)$$

квадрат функция ҳосил бўлади. Бу функциянинг энг катта қиймати масаланинг жавоби бўла олади.

Жавоб: $\frac{1}{4}$

92. $a_n = {}^{1993}+2^{1993}+\ldots+n^{1993}$ дейлик. У ҳолда

$2a_n = 2\ 1^{1993}+2\cdot 2^{1993}+\ldots+2\cdot n^{1993}$

$=2+2+2^{1993}+3^{1993}+3^{1993}+\ldots+n^{1993}+n^{1993}=$

$$2+\underbrace{(2^{1993}+n^{1993})+\ldots+(n^{1993}+2^{1993})}_{b_n}=2+b_n$$

Бу ерда b_n йиғинди n+2 га бўлинади, b_n+2 эса n+2 га бўлинмайди. Демак, берилган йиғинди ҳам n+2 га бўлинмас экан.

93. Кўрсатма: n=4k+1 бўлса, a_n тоқ сон бўлади. a_n ни 6 га бўлгандаги қолдиқни текшириб, a_n ҳад n=36p+ 17 бўлганда 3 га бўлинишига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

94. Кўрсатма: $a+b \geq c+d$ деб олиш мумкин. У ҳолда $b+c \geq \frac{1}{2}$ (a+b+c+d) ва $\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}=\frac{b+c}{c+d}$-c$\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+d}\right) \geq \frac{1}{2}$

$$\cdot\frac{a+b+c+d}{c+d}-(c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{c+d}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}\geq\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

Агар $a=\sqrt{2}+1$, $b=\sqrt{2}-1$, $c=2$. $d=0$ бўлса, берилган ифода $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ қийматни қабул қилади.

Жавоб: $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

95. а) Жавоб: мавжуд. $a=2+\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$

б) Мавжуд эмас.

a ва b сонлари масаланинг шартини қаноатлантирсин дейлик.

У ҳолда $a \neq 0$, $b \neq 0$ $a^2b^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)^2-\frac{1}{2}(a^4-b^4)$ айниятдан a^2b^2 нинг рационал экани ва $a^5+b^5=(a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)$ айниятдан эса $a+b$ нинг ҳам рационал экани келиб чиқади. Бу эса масала шартига зид.

96. $2^n+4^n=2^n(2^n+1)$. Агар бу сон бирор соннинг квадрати бўлса, у ҳолда унинг жуфт кўпайтувчиси 2^n ҳам бирорта соннинг квадрати бўлиши керак. Бу эса n жуфт бўлса ўринлидир. Шунинг билан бирга 2^n+1 тоқ кўпайтувчи ҳам бирорта соннинг квадратига тенг бўлиши керак. Аммо n жуфт бўлганда 2^n+1 ни 3 га бўлганда 2 қолдиқ қолади ва у бирорта соннинг квадрати бўла олмайди. Демак, қаралаётган сонлар тўпламида бирорта соннинг ҳам квадрати йўқ.

97. $n=2k+3$ деб олсак, $2^n+4^k=2^{2k+3}+4^k=2^{2k}\cdot 9=(2^k\cdot 3)^2$ Демак, берилган тўпламда чексиз кўп сонларнинг квадрати бор.

98. Фараз қилайлик: $\frac{a}{c}\geq\frac{b}{d}$ бўлсин деб. У ҳолда $\frac{a}{c}\geq\frac{a+b}{c+d}\geq\frac{b}{d}$, яъни $\frac{b}{d}\leq 1$ $a\leq 998$ бўлсин, унда $\frac{a}{c}\leq 998$, $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}\leq 998$ бўлади. Агар $\frac{a}{c}=999$ $(a=999,\ c=1)$ бўлса.

$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}>999$. Шундай қилиб, $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$ йиғинди қўшилувчилардан бирортаси 999 га тенг бўлса, энг катта бўларкан.

99. $(7^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}=7^5=16807>15625=5^6>(5^{\sqrt{7}})^{\sqrt{5}}$

демак $7^{\sqrt{5}}>5^{\sqrt{7}}$

100.

$$\sqrt[n]{n!}>\sqrt[n+1]{(n+1)!}$$

$$(n!)^{n+1}>((n+1)!)^n,$$

$$(n!)^{n+1}>(n!)^n(n+1)^n$$

$$n!>(n+1)^n$$

Нотўғри хулосага келдик. Демак, берилган тенгсизлик ўринли эмас.

101. Биринчи қўшилувчининг охирги рақамини 9 билан ва иккинчи қўшилувчининг охирги рақамини 8 билан алмаштирайлик:

$$\sqrt{6+\sqrt{6+....+\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[6]{6}}}<\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{9}}}+$$
$$+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+....+\sqrt[3]{8}}}=3+2=5$$

Демак, берилган йиғинди 5 дан кичик экан. Иккинчидан:

$$\sqrt{6}<\sqrt{6+\sqrt{6+....+\sqrt{6}}}, \qquad \sqrt[3]{6}<\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[6]{6}}}$$

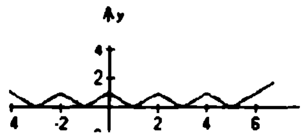
Аммо $\sqrt{6}>2{,}4$; $\sqrt[3]{6}>1{,}6$ демак $2{,}4<\sqrt{6+\sqrt{6+....+\sqrt{6}}}$

ва $1{,}6<\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[6]{6}}}$ Булардан кўринадики,

$$4<\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}+\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}<5$$

Шундай қилиб,берилган сонинг бутун қисми 4 га тенг экан.

102. $\lg^2 11=(1+\lg 1{,}1)^2>1+2\lg 1{,}1=1+\lg 1{,}21=\lg 12.1>\lg 12$

103. а) 

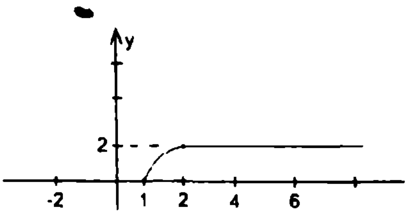
б) функциянинг аниқланиш соҳаси $[1;\infty)$,

$$y^2=\left[\frac{1}{2}(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}})-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right]^2=\frac{1}{4}(2x-2\sqrt{x^2-4x+4})=$$

$$=\frac{1}{2}(x-|x-2|)=\begin{cases}x-1, & \textit{агар } x\le 2 \textit{ бўлса,}\\ 1, & \textit{агар } x>2 \textit{ бўлса.}\end{cases}$$

Энди ушбу $y=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & \textit{агар } 1\le x\le 2 \textit{ бўлса}\\ 1, & \textit{агар } x>2 \textit{ бўлса}\end{cases}$

Функциянинг графигини ясаймиз:



104. Кўрсатма: а) a_k=k(k+1) дейлик, у ҳолда:
$k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=3k(k+1)=3a_k$
Қуйидаги n та тенгликни ёзамиз:

$$a_1=\frac{1\cdot2\cdot3}{3}-0,\quad a_2=\frac{2\cdot3\cdot4}{3}-\frac{1\cdot2\cdot3}{3},$$

$$a_k=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}-\frac{(k-1)k(k+1)}{3},$$

$$a_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

Бу тенгликларни қўшиб $a_1+a_2+.....+a_n=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ни ҳосил қиламиз.

б) худди юқоридагига ўхшаш:

$$k(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}=\frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4}$$

тенгликдан фойдаланиб топилади.

в) бунда n(n+2)(n+4)=n(n+1)(n+2)+3n(n+1)+3n ва юқоридаги (а) ва (б) мисолларнинг натижасидан фойдаланилади.

Жавоб: а) $S_n=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

б) $S_n=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

в) $S_n=\dfrac{n(n+1)(n+4)(n+5)}{4}$

105. Системадаги биринчи тенгламани y га, иккинчи тенгламани x га кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгламани қўшиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$2xy+\frac{(3x-y)y-(x+3y)x}{x^2+y^2}=3y$$

ёки $2xy-1=3y$ бу ерда $y\neq 0$ бўлганидан $x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2y}$

Бу муносабатни берилган системадаги иккинчи тенгламага қўйиб:

$$y\left[(\frac{3}{2}+\frac{1}{2y})^2+y^2\right]-(\frac{3}{2}+\frac{1}{2y})-3y=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан:

$$4y^4-3y^2-1=0$$

тенглама келиб чиқади.

Бу тенгламани ечиб, $x_1=1$, $x_2=2$, $y_1=-1$, $y_2=1$ эканини топамиз.

Жавоб: (1;–1), (2;1)

106. Шиллиқ қурт ҳар 15 минутда юрган йўлининг узунлигини бир бўғин дейлик. Шиллиқ қуртнинг бошланғич пунктдан узоқлашидиган горизонтал бўғинлари сони уни бошланғич пунктга яқинлашувчи бўғинлари сонига тенг. Демак, барча бўғинлар сони жуфтдир. Худди шунга ўхшаш мулоҳаза билан вертикал бўғинларнинг ҳам жуфтлигини кўрамиз. Бундан барча бўғинлар сони 4 га каррали экани келиб чиқади.

У ҳолда: $(2n+2n)\cdot 15\cdot\frac{1}{60}=n$ *соат*

Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

107. Жавоб: $1-99x^{100}+100x^{101}$

Изоҳ: Иккинчи қавс ичидаги кўпҳадни (1 – x)га икки марта кўпайтиринг.

108. Мисол учун, (x^2, $(x-1)^2$ ва $(x-2)^2$ кўпҳадларнинг ҳар биттаси илдизга эга, аммо исталган иккитасининг йиғиндиси x нинг ҳар қандай қийматида нолдан каттадир. Демак, мавжуд экан.

109. Берилган $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq a+b+c$ тенгсизликни умумий махражга келтириб, унга тенг кучли бўлган ушбу $bc+ac+ab\geq(a+b+c)abc$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Энди ушбу $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ac)$ ёрдамчи тенгсизликни исботлаймиз:

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \ge 0$, қавсларни очиб,

$2(a^2+b^2+c^2) \ge 2(ab+bc+ac)$ ни ёки

$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ac$ эга бўламиз. Тенгсизликнинг иккала томонига $2(ab+bc+ac)$ ни қўшамиз.

$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \ge 3(ab+bc+ac)$. Бундан:

$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ac)$ бўлиб,

$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ac) \ge (a+b+c)abc$, яъни:

$(a+b+c)^2 \ge 3(a+b+c)abc$ $\quad a+b+c \ge 3abc$ исботланиши зарур бўлган тенгсизлик келиб чиқади.

110. Учбурчакнинг бурчакларини α, β, γ деб белгилаб олайлик ва $\alpha \le \beta \le \gamma$ бўлсин. У ҳолда $0<\alpha \le \frac{\pi}{3}$, бунга кўра $0<tg\alpha \le \sqrt{3}$.

$tg\alpha$ натурал сон бўлгани учун, $tg\alpha = 1$, яъни $\alpha = \frac{\pi}{4}$ бўлади.

У ҳолда $\beta+\gamma = \frac{3\pi}{4}$ бўлиб, бу ердан,

$-1 = tg(\beta+\gamma) = \frac{tg\beta + tg\gamma}{1 - tg\beta \cdot tg\gamma}$, $tg\beta + tg\gamma = tg\beta \cdot tg\gamma - 1$, $(tg\beta - 1)(tg\gamma - 1) = 2$.

Тенгликнинг ўнг томонида 2–туб сон тургани учун $tg\beta - 1 = 1$ ва $tg\gamma - 1 = 2$ (ёки аксинча) бўлиши керак. Бу ердан $tg\beta = 2$, $tg\gamma = 3$ экани келиб чиқади.

111. $x^2+ax+b=0$ квадрат тенглама x_1, x_2 илдизларга эга бўлсин. $y=x^2+ax+b$ парабола Ox ўқини $A(x_1;\ 0)$ ва $B(x_2;\ 0)$ нуқталарда кесиб ўтади. Oy ўқини $C\ (0;\ b)$ нуқтада кесиб ўтади: $OA \cdot OB = OC \cdot OD$

O нуқта координата боши бўлгани учун A, B, C нуқталардан ўтувчи айлана $D(0,\ 1)$ нуқтадан ҳам ўтади.

112. Тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$f(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0$$

Шартга кўра

$$f(a)=(a-b)(a-c)>0$$
$$f(b)=(b-a)(b-c)<0$$
$$f(c)=(c-a)(c-b)>0$$

Булардан кўринадики, тенглама [a; b] ва [b; c] кесмаларда биттадан илдизга эга. f(x) –квадрат учҳад бўлгани учун унинг иккитадан кўп илдизи бўлиши мумкин эмас.

113. $y=x^2$ функция графигининг (c, c^2) нуқтасидан ўтувчи уринма $y=2c(x-c)+c^2=2cx-c^2$ кўринишида бўлади. Текисликнинг қандайдир нуқтаси орқали иккита $y=2cx-c^2$ ва $y=2bx-b^2$ уринма етказилган бўлсин; аниқлик учун $(x_0;\ y_0)$ нуқтани олсак: $y_0=2cx_0-c^2$ ва $y_0=2bx_0-b^2$ бўлади. Бу уринмалар ўзаро перпендикуляр бўлса, $2c\cdot 2b=-1$ бўлади. Бундан $bc=-\frac{1}{4}$ экани маълум бўлади:

$$2cx_0-c^2=2bx_0-b^2$$
$$2cx_0-2bx_0=c^2-b^2$$
$$2x_0(c-b)=(c-b)(c+b),\ (c \neq b)$$

$x_0=\frac{b+c}{2}$ буни $y_0=2cx_0-c^2$ га қўямиз.

$$y_0=2c\cdot\frac{b+c}{2}-c^2=bc=-\frac{1}{4}$$

$(x_0;\ y_0)$ нуқтадан $y=x^2$ парабола ўтказилган уринмаларнинг перпендикулярлигидан $y_0=-\frac{1}{4}$ экани келиб чиқади. Демак, $y_0=-\frac{1}{4}$ тўғри чизиқ нуқталаридан $y=x^2$ парабола тўғри бурчак остида кўринар экан.

114. Биринчи усул:

$P(x)=10ax^4-4ax^3+a^2x^2+6x-2$ деб олайлик

$P(0)=-2<0,$

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}a+\frac{1}{4}a^2+1>0.$$

Демак, $[0;\ \frac{1}{2}]$ кесмада тенгламанинг a нинг ҳар қандай қийматида битта илдизи мавжуд.

Иккинчи усул:

$$\int_0^1 P(x)dx=\frac{10a}{5}-\frac{4a}{4}+\frac{a^2}{3}+\frac{6}{2}-2=\frac{a^2}{3}+a+1>0$$

Демак, P(x) функция [0; 1] кесмада ҳамиша манфий қийматга эга бўла олмайди. Аммо P(0)<0, демак, функция [0; 1] да ишорасини ўзгартиради. Бундан берилган тенгламанинг [0; 1] да илдизи мавжудлиги келиб чиқади.

115. Кўрсатма: а) $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$ бўлганини эътиборга олиб, $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=t$ деб белгилаб, ушбу тенгламани ҳосил қиламиз: $t+\frac{1}{t}=2$

б) берилган тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x=1$$

Тengликнинг чап томонида иккита монотон камаювчи кўрсаткичли функциялар турибди. Шунинг учун чап томонининг ўзи камаювчи функциядир. Аммо монотон функциялар ҳар бир қийматни бир марта қабул қилади. Демак, берилган тенглама биттадан ортиқ илдизга эга эмас.

116. Берилган тенгламанинг ўнг томонини N билан белгилаймиз. Бевосита текшириш шуни кўрсатадики, N 2 га ҳам, 3 га ҳам, 5 га ҳам, 7 га ҳам бўлинмайди. Демак, 10 дан

кичик сонларнинг ҳеч қайсисига бўлинмайди, аммо 9 га бўлганда эса (рақамлар йиғиндиси 50 га тенг) 5 қолдиқ қолади. Агар y маълум бўлса, x^y нинг 9 га бўлгандаги қолдиқ x ни 9 га бўлгандаги қолдиққа боғлиқ. x^y нинг 9 га бўлганда қолдиқлар жадвалини тузамиз. (x_9 – x ни 9 га бўлгандаги қолдиқ бўлсин).

$y \backslash x_9$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	1	4	0	7	7	0	4	1
3	0	1	8	0	1	8	0	1	8
4	0	1	7	0	4	4	0	7	1
5	0	1	5	0	7	2	0	4	8
6	0	1	1	0	1	1	0	1	1

Жадвални давом эттирсак, 0-нчи, 3-нчи, 6-нчи устунлар ноллардан иборат бўлиб, қолганлари даврий равишда такрорланади. Агар x ни 9 га бўлганда 2 қолдиқ қолса ва $y=5, 11 \ldots 6k+5 \ldots$ бўлса, ёки x ни 9 га бўлганда 5 қолдиқ қолса ва $y=1, 7, 13 \ldots 6k+1$ бўлса, x^y ни 9 га бўлганда қолдиқ 5 бўлади. Энди берилган тенгламага қайтамиз. Унинг битта ечими $x=N$, $y=1$ экани аниқ. Энди фараз қиламиз: $y>1$ бўлсин. У ҳолда $y=5, 7, 11, 13, \ldots$ Аммо $N<10^{11}$, шунинг учун агар $y>11$ бўлса, у ҳолда $x<10$ бўлади. Бу эса N сонида 10 дан кичик бўлувчилар йўқ деган фикрга зиддир. Демак $y=5$ ва $y=7$ ҳолларгина қолади. $y=7$ бўлсин, у ҳолда:

$$40^7=4^7 \cdot 10^7=16384 \cdot 10^7>N$$

$$30^7=3^7 \cdot 10^7=2187 \cdot 10^7>N$$

яъни $30<x<40$ экан. Аммо x тоқ сон бўлиши керак ва 9 га бўлганда 5 қолдиқ қолиши керак. Бундай сон эса қаралаётган (30; 40) оралиқда йўқ. Энди $y=5$ деб олсак:

$$160^5=16^5 \cdot 10^5=2^{20} \cdot 10^5=1024^2 \cdot 10^5>10^{11}>N$$

$$100^5=10^{10}<N, \quad 100<x<160$$

N сони тоқ ва 9 га бўлганда қолдиқда 2 бўлиши керак. Бундай сонлардан (100; 160) оралиқда тўртта – 101, 119, 137, 155. Аммо 119 сони 7 га, 155 сони 5 га бўлиниши учун улар биз учун яроқсиз. 101 сонини қараймиз. Агар x сони 1 рақами билан тугаса, x^y сони ҳам 1 рақами билан тугаши керак. Демак, ягона ҳол x=137 экан.

$137^5=43261724457$

Жавоб: (137; 5)

117. $(x-y)=n$ бўлсин, у ҳолда $x+y=n^2$

бундан $x=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $y=\dfrac{n(n-1)}{2}$

Булар n нинг ҳар қандай қийматида бутун сондир. Демак, тенгламанинг бутун ечимлари $\left(\frac{n(n+1)}{2};\frac{n(n-1)}{2}\right)$ кўринишда бўлар экан. $|x|<100$ ва $|y|<100$ ни қаноатлантирувчи ечимлари эса $|n|\le 13$ бўлганда бажарилади.

118. $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(a-1)^2-2(a^2-7a+14)=$

$$=a^2-2a+1-2a^2+14a-28=-a^2+12a-27$$

Охирги ифода a нинг функцияси бўлган квадрат учҳаддир. Бу учҳад учун масаланинг шартини қаноатлантирувчи x ва y лар мавжуд. x ва y нинг қийматлари ушбу системадан топилади:

$$\begin{cases} x+y=a-1 \\ xy=a^2-7a+14 \end{cases}$$

Демак, x ва y лар қуйидаги квадрат тенгламани қаноатлантиради:

$$t^2-(a-1)t+a^2-7a+14=0$$

$$D=-3a^2+26a-55$$

Дискриминант a нинг $\frac{\pi}{3}\le a\le 5$ бўлган қийматларида манфий эмас. Бундан ташқари a нинг $\left[\frac{\pi}{3};5\right]$ кесмадаги қийматлари учунгина x ва y нинг ҳақиқий қийматлари мавжуд.

Масаланинг шарти шундан иборатки, $\left[\frac{\pi}{3};5\right]$ кесмада шундай a ни топиш керакки, $-a^2+12a-27$ учҳад энг катта қийматга эга бўлсин. $b=-a^2+12a-27$ парабола учининг абсциссаси $a=6$, бу эса $\left[\frac{\pi}{3};5\right]$ кесмага тегишли эмас. Демак, $-a^2+12a-27$ учҳад ўзининг кесмадаги энг катта қийматига $a=5$ бўлгандагина эришар экан.

119. Кўрсатма: системадаги тенгламаларни ҳадлаб қўшиб,сўнгра айириб, ҳосил бўлган янги тенгламалар системасидан фойдаланинг:

Жавоб: $\{(0;\ 0),\ (3;\ 3),\ (-3;\ -3), \left(\sqrt{5};-\sqrt{5}\right), \left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right),$
$\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right), \left(\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2};\frac{-\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}\right),$
$\left(\frac{-\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2};\frac{-\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}\right).$

120. Кўрсатма: системадаги биринчи тенгламадан иккинчисини олиб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$x-y=(y^2-x^2)+a(y-x)$$
$$(y^2-x^2)+a(y-x)+(y-x)=0$$
$$(y-x)(y+x+a+1)=0$$

Бундан ёки у–х=0 ёки у+х+а+1=0

121. Фараз қиламиз: $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x_n$ берилган сонлар бўлсин. У ҳолда:

$$x_1+x_2+x_3 \geq x_1+x_2+x_3-(x_1-x_3)(1-x_1)-(x_2-x_3)(1-x_2)=$$
$$=x_1^2+x_2^2+x_3(3-x_1-x_2)=x_1^2+x_2^2+x_3(x_3+x_4+\ldots+x_n)\geq$$
$$\geq x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$$

122. Жавоб: 1 ва 9

123. Кўрсатма:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

эканидан фойдаланинг.

Жавоб: $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$

124. Тенгламанинг чап қисми жуфт функция бўлгани учун тенгламанинг ягона ечими О бўлади. x=0 бўлса:

$$\sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{-b^2} = \sqrt[3]{b}$$

$\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{b^2}$ ҳосил бўлиб, бунда ёки b=0, ёки b=1 бўлиши мумкин. Фараз қилайлик: b=0 бўлсин. У ҳолда берилган тенглама

$$\sqrt[3]{(ax)^2} + \sqrt[3]{(ax)^2} + \sqrt[3]{a^2x^2} = 0$$

кўринишга келади ва $a \neq 0$ бўлганда ягона x=0 ечимга эга бўлади. Энди b=1 бўлсин, у ҳолда берилган тенглама:

$$\sqrt[3]{(ax+1)^2} + \sqrt[3]{(ax-1)^2} + \sqrt[3]{a^2x^2 - 1} = 1$$

кўринишга келади. $\sqrt[3]{ax+1} = u$ деб ва $\sqrt[3]{ax-} = v$ деб олсак,

ушбу $\begin{cases} u^2 + v^2 + uv = 1 \\ u^3 - v^3 = 2 \end{cases}$

яъни

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + uv = 1 \\ (u - v)(u^2 + v^2 + uv) = 2 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бу системани ечиб, $V=1$ ва u=1 эканини топамиз. ax+1=1 ва ax−1=1 тенгликлардан эса $a \neq 0$ бўлганда, x=0 ягона ечимлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, берилган тенглама $a \neq 0$, b=0 ва $a \neq 0$, b=1 бўлганда ягона ечимга эга бўлар экан.

125. $D=4\sin^2 xy-4=4(\sin^2 xy-1)$
бўлгани учун тенглама фақат $\sin^2xy=1$, яъни $\sin xy=\pm1$ бўлгандагина ечимга эга. Бундан эса $x=\pm 1$, $y=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad k\in Z$ экани келиб чиқади.

126. $f(x)=x-a\ +\ 2\cos\frac{x+a}{2}$ деб белгилаб, f(x) функцияни қарайлик. У ҳолда исталган x°R учун $f'(x)=1-\sin\frac{x+a}{2}\geq 0$ бўлади. Шунинг учун f(x) функция $\sin\frac{x+a}{2}=1$ тенгламанинг илдизлари орасидаги исталган оралиқда ўсади. f(x) функциянинг узлуксизлигидан эса у ҳақиқий сонлар тўпламида ўсувчидир. Демак, берилган тенглама биттадан ортиқ илдизга эга бўлиши мумкин эмас, иккинчидан $f(a-3)<0$, f $(a+3)>0$ бўлгани учун, ўрта қиймат ҳақидаги теоремага асосан $[a-3;\ a+3]$ кесманинг камида битта нуқтасида функция 0 га айланади.

127. $f(x)=0{,}001x^3+x^2-1$ дейлик ва $f_1(x)=0{,}001x^3$, $f_2(x)=x^2-1$ деб белгилаб олсак, $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ бўлади.

$f_2(x)=0$ десак, бу тенгламанинг илдизлари -1 ва 1 бўлади ва $|x|<2$ бўлса, $|f_1(x)|<0{,}001$ бўлгани учун f(x) нинг иккита илдизи $x_1=+1$, $x_2=-1$ бўлиб, $f(1)=0{,}001>0$, $f(0{,}9)<0$ бундан $0{,}9<x_1<1$ экани келиб чиқади. Худди шундай: $-1{,}1<x_2<1$ эканини топамиз. Энди $0{,}001x^3+x^2=0$ тенгламанинг илдизи м–1000 бўлади ва $f(-1000)=-1<0$ ва $f(-999{,}9)>0$.

Демак, $-1000<x_3<-999{,}9$

Жавоб: $0{,}9<x_1<1,\quad -1{,}1<x_2<1,\quad -1000<x_3<$м999,9

128. $x^8+4x^2+4=(\ x^8+4x^2+4)+(4x^6+8x^4+4x^2)$м$(4x^6+8x^4+4x^2)=$
$=(x^8+4x^4+4+4x^6+4x^4+8x^2)$м$4x^2(x^4+2x^2+1)=$
$=(x^4+2x^2+2)^2-(2x(x^2+1))^2=$
$=(x^4+2x^2+2+2x^3+2x)(x^4+2x^2+2-2x^3-2x)$

129.

$$\frac{1}{x_n+1}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n(x_n+1)}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}$$

бўлгани учун қаралаётган йиғинди $\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{100}}=2-\frac{1}{x_{100}}$ га тенг

бўлади. x_n кетма-кетлик ўсувчи $x_2=\frac{3}{4}, x_3=\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{4}>1$ демак,

$x_{100}>1$ у ҳолда $1<2-\frac{1}{x_{100}}<2$ экани келиб чиқади.

Жавоб: 1

130. $x_1+x_3+x_5+\ldots=a$ ва $=x_2+x_4+\ldots=b$. У ҳолда шартга кўра $a+b=1$ ва $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n\le(x_1+x_3+x_5+\ldots)(x_2+x_4+x_6+\ldots)=$

$=ab=a(1-a)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-a\right)^2\le\frac{1}{4}$

Агар $x_1=x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=x_4=\ldots=x_n=0$ десак, у ҳолда

$x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_4+\mathrm{K}+x_{n-1}x_n=-\frac{1}{4}$

Жавоб: $\frac{1}{4}$

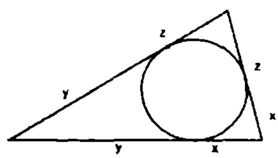
131. $a=y+z$, $b=x+z$, $c=x+y$ деб томонлари a, b, c бўлган учбурчакни қарайлик. Бундай учбурчак мавжуд. Бу учбурчакнинг периметри $2P=a+b+c=2(x+y+z)$

$x=P-a$

$y=P-b$

$z=P-c$

$x+y+z=P$



унинг юзи эса Герон формуласидан

$$S=\sqrt{P\cdot(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{(x+y+z)xyz}=1$$

Иккинчи томондан $2S=bc\sin\alpha$ (бу ерда α бурчак b ва c томонлар орасидаги бурчакдир), шунинг учун:

$$(x+z)(x+y)=bc\ge2S=2$$

Бу ерда тенглик учбурчак тўғри бурчакли бўлганда бажарилади, яъни:

$a^2=b^2+c^2$ шартда. Бу шарт эса $x(x+y+z)=yz$ га тенг кучлидир (хусусий ҳолда, яъни $x+y=x+z=\sqrt{2}$, $y+z=2$, яъни $y=z=1$ бўлганда $(x+y)(x+z)=2$ бўлади).

Тенгликнинг қачон ўринли эканлигини билган ҳолда $p+q\geq 2\sqrt{pq}$ тенгсизликдан фойдаланиб, қисқа алгебраик усулда қуйидагича исбот қилиш мумкин:

$$(x+y)(x+z)=x(x+y+z)+yz\geq 2\sqrt{xyz(x+y+z)}\geq 2$$

Жавоб: 2

132. Кўрсатма: S^2 ифодани қаранг ва икки соннинг ўрта арифметиги ҳақидаги тенгсизликни уч марта қўлланг.

Жавоб: $\sqrt{3}$

133. Шартга кўра $a^2+b^2=1$ дан кўринадики:

$0<a<1$ ва $0<b<1$ •

У ҳолда $a^{10}<a^2$, $b^{10}<b^2$ муносабатлардан $a^{10}+b^{10}<a^2+b^2$ экани келиб чиқади.

134. Кўрсатма: $3^{\lg 3+\log_3 10}=10\cdot 3^{\lg 3}<10\sqrt{3}<27=3^3$

($\lg 3<\frac{1}{2}$ дан фойдаланилди).

135. Кўрсатма:сўралган фигуранинг $z=0$ (xOy) текислик билан кесишиши $|x|+|y|\leq 1$ тенгсизлик билан берилган фигурадир. Худди шундай, бу фигурани бошқа координата текисликлари ҳам кесиб ўтишидан фойдаланиш керак.

Жавоб: учлари$(1;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 1;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 1)$, $(-1;\ 0;\ 0)$, $(0;\ -1;\ 0)$, $(0;\ 0;\ -1)$ нуқтадан иборат октаэдр.

136. Кўрсатма: a, a^2, a^b сонлардан бирортаси ҳам b га бўлинмайди. Аммо қандайдир a^k ва a^L кўринишдаги иккита сон топиладики, уларни b га бўлганда бир хил қолдиқ қолади. У ҳолда a^k-a^L айирма албатта b га бўлинади.

137. Тенгликнинг чап қисмини x билан белгилаб, иккала томонини кубга кўтарамиз. Сўнгра $(a+b)^3=a^3+b^3+3a(a+b)$ формуладан фойдаланиб, ушбуни ҳосил қиламиз.

•

$$x^3 = 20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}+3x\sqrt[3]{20^2-2\cdot 14^2} = 6x+40$$

$x^3=6x+40$ тенгламанинг ягона илдизи $x=4$ дир.

138. $a_1, a_2, a_3, \ldots\ a_n$ сонларни ўсиш тартибида $b_1, b_2, b_3,$ b_n деб ёзиб олайлик. 1 дан n гача бўлган исталган n

учун $\dfrac{i}{a_1+a_2+\ldots+a_i} \le \dfrac{i}{b_1+b_2+\ldots+b_i}$

ва $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\ldots+\dfrac{1}{b_n}$

бўлгани учун ушбу $\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{2}{b_1+b_2}+\ldots+\dfrac{n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \le 4\left(\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\ldots+\dfrac{1}{b_n}\right)$

тенсизликни b_i сонлари учун исботлаш етарли. Чап томондаги қўшилувчиларни баҳолаймиз:

$$\frac{2}{b_1+b_2} \le \frac{2}{b_1+b_1} = \frac{1}{b_1} \quad \text{ва} \quad 2 \le k \le \frac{n+1}{2}$$

шартни қаноатлантирувчи исталган k учун:

$$\frac{2k-1}{b_1+b_2+\ldots+b_{2k-1}} \le \frac{2k-1}{b_k+\ldots+b_{2k-1}} \le \frac{2k-1}{kb_{k-1}} < \frac{2}{b_{k-1}},$$

$$\frac{2k}{b_1+b_2+\ldots+b_{2k}} \le \frac{2k}{b_{k+1}+\mathrm{K}+b_{2k}} \le \frac{2k}{kb_k} < \frac{2}{b_k}.$$

булардан фойдаланиб, зарур тенгсизликни ҳосил қиламиз.

$$\frac{1}{b_1}+\frac{2}{b_1+b_2}+\frac{3}{b_1+b_2+b_3}+\frac{4}{b_1+b_2+b_3+b_4}+\ldots <$$

$$< \frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_1}+\frac{2}{b_2}+\frac{2}{b_2}+\frac{2}{b_3}+\frac{2}{b_3}+\ldots = 4\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\ldots\right)$$

Шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.

139. $\cos^6 x$ ва $\sin^2 2x$ ни $\sin x$ орқали ифодалаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$4\sin^{12}x+4(\sin^6 x+1)(1-\sin^2 x)^3+3\cdot 4\sin^2 x(1-\sin^2 x)=4$$

Соддалаштиришдан кейин $\sin^{10}x-\sin^8 x=0$ ёки

$\sin^8 x \cdot \cos^2 x = 0$ тенглама келиб чиқади. Бу тенгламанинг илдизлари $x = \frac{\pi}{2}n, \quad n \in Z$ бўлади.

Жавоб: $x = \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \pi$

140. Кўрсатма: $\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2 - 10\right)^2$ нинг бутун эканлигини кўрсатиш етарли.

Жавоб: $(x^2-10)^2=84$

141. Илдиздан қутилиш учун $x = b^{\frac{1}{15}}, y = a^{\frac{1}{10}}$ деб олайлик, у ҳолда берилган тенгсизлик қуйидаги кўринишга келади:

$$3x^5+2y^5-5x^3y^2 \geq 0$$

Тенгсизликнинг иккала томони y^5 га бўлиб ва $\frac{x}{y} = t$ деб белгилаб, $3t^5-5t^3+2 \geq 0$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизликни кўпайтувчиларга ажратамиз.

$$(t-1)^2(3t^3+6t^2+4t+2) \geq 0$$

$t>0$ бўлганда иккала кўпайтувчи ҳам манфий эмас, демак, тенгсизлик тўғри экан. Агар $t=1$, яъни $a^2=b^2$ бўлганда тенгсизлик бажарилади. Берилган тенгсизликга ўрта арифметик ва геометрик ҳақидаги тенгсизликни қўллаб ҳам исботлаш мумкин. Масалан:

$$3\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}; \qquad 2\sqrt{a} = \sqrt{a} + \sqrt{a}$$

Бу бешта сон учун:

$$\frac{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt{a}+\sqrt{a}}{5} \geq \sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{b}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{a}\right)^2} = 5\sqrt[5]{ab}$$

Демак, $3\sqrt[3]{b} + 2\sqrt{a} \geq 5\sqrt[5]{ab}$ тенгсизлик исботланди.

142. $\operatorname{arctg}x = \alpha$, $\operatorname{arctg}y = \beta$, $\operatorname{arctg}z = \gamma$ деб белгилаб олсак, $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, $z = \operatorname{tg}\gamma$ бўлади. У ҳолда:

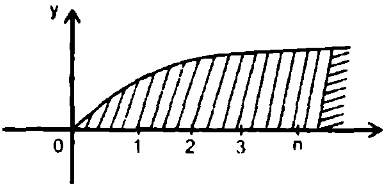
$$x + y + z - xyz = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma =$$

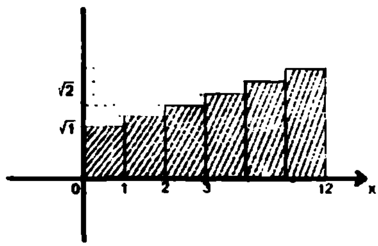
$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + tg\gamma\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma + \sin\gamma\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} > 0$$

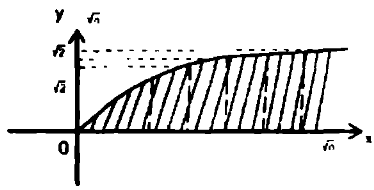
0< $\alpha+\beta+\gamma<\pi$ ва махраждаги барча кўпайтувчилар мусбат бўлгани учун $cos(arctgt)>0$, чунки $-\frac{\pi}{2}<arctgt<\frac{\pi}{2}$ исталган t учун ўринли.

143. [0; π] кесмада $y=\sqrt{x}$ функциянинг графигини қарайлик. $y=\sqrt{x}$ эгри чизиқ, Ох ўқи ва x=n тўғри





чизиқлари ҳосил қилган эди. Чизиқли учбурчакнинг юзини S дейлик.



У холда $S=\int_0^n \sqrt{x}dx=\frac{2}{3}n\sqrt{n}$ бўлади.

$S_n=\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}$ бўлсин. Бунда S_n шаклда тасвирланган зинапоясимон фигуранинг юзи бўлади. Кўриниб турибдики:

$$S_n>S$$

Иккинчи томондан ушбу шаклдаги фигуранинг юзи,

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n-1}+\frac{\sqrt{n}}{2}=$$
$$=\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}\right)-\frac{\sqrt{n}}{2}=S_n-\frac{\sqrt{n}}{2}$$

бўлади. Бу эса S дан кичик.

Шундай қилиб $S_n>S>S_n-\frac{\sqrt{n}}{2}$

Шуни исботлаш сўралган эди.

144. Фараз қилайлик: x>y деб, у ҳолда

$$x^x - x^y = y^x - y^y \Rightarrow x^y(x^{x-y} - 1) = y^y(y^{x-y} - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 < \left(\frac{x}{y}\right)^y = \frac{y^{x-y} - 1}{x^{x-y} - 1} < 1$$

Бу эса зидликдир. Худди шундай x<y деб олганда ҳам зиддият келиб чиқади. Демак, x=y экан.

145. Тенгламада шакл алмаштиришларни бажариб, қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(b - \frac{2}{3}c\right)^2 + \frac{2}{3}\left(c - \frac{3}{4}d\right)^2 + \frac{5}{2}\left(d - \frac{4}{5}\right)^2 = 0$$

Жавоб: $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{2}{5}$, $c = \frac{3}{5}$, $d = \frac{4}{5}$

146. $$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} + \frac{D}{k+3}$$

деб A, B, C, D ларни топамиз. Натижада ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{3}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)$$

Шундай қилиб изланган йиғинди:

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n+1} + \frac{3}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

га тенг.

147. Кўрсатма:

$$tg\alpha \cdot tg\beta = \frac{tg\alpha - tg\beta}{tg(\alpha - \beta)} - 1$$

айниятдан фойдаланинг.

148. $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \log_{\sqrt{2}} 3$ бўлсин. Бу ерда β сони иррационал сондир. Ҳақиқатдан ҳам, агар $\log_{\sqrt{2}} 3 = \frac{p}{q}$ бўлсин десак, (бу ерда p ва q натурал сонлар)

$3=(\sqrt{2})^{\frac{p}{q}}$, $3^q=(\sqrt{2})^p$, $9^q=2^p$ тенглик ўринли бўлиши керак. Бу эса мумкин эмас, чунки 9^q тоқ ва 2^p жуфт сондир. Иккинчидан эса:

$$\alpha^{\beta}=(\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}}3}=3$$

Демак, α ва β иррационал бўлса, α^{β} иррационал сон бўлолмас экан.

149. $3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n=(3^n-2^n)(3^{n+1}+2^{n+1})$

Демак, берилган кўринишдаги сон n>1 бўлганда мураккаб сон бўлади. n=1 да эса 13-туб сон ҳосил бўлади.

150. а) $\log_a tg1^0+\log_a tg2^0+\log_a tg3^0+...+\log_a tg87^0+$

$+\log_a tg88^0+\log_a tg89^0=$

$=\log_a(tg1^0\cdot tg2^0\cdot tg3^0\cdot...\cdot tg89^0)=$

$=\log_a[(tg1^0 tg89^0)(tg2^0 tg88^0)...(tg44^0 tg46^0)tg45^0]=$

$=\log_a[(tg1^0 ctg1^0)(tg2^0 ctg2^0)....(tg44^0 ctg44^0)tg45^0]=0$

б) $\log_a\sin60^0\log_a\sin61^0\log_a\sin62^0....\log_a\sin120^0=0$

чунки $\log_a\sin90^0=\log_a1=0$

в) $\log_2 3\log_3 4\log_4 5...\log_{n-2}(n-1)\log_{n-1}n=\dfrac{\log_2 n}{\log_2 2}=\log_2 n$

151. $$\frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}+2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{2}$$

152. $\cos\frac{3\pi}{5}=\cos(\pi-\frac{2\pi}{5})=-\cos\frac{2\pi}{5}$ бўлгани учун олдинги мисолдан фойдаланиб:

$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$ дан $cos\frac{\pi}{5}-cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$ ҳосил қиламиз.

$$\cos 36^0-\cos 72^0=\frac{1}{2}$$

$$\cos 36°-\sin 18°=\frac{1}{2}$$

$$1-2\sin^2 18^0-\sin 18^0=\frac{1}{2}$$

$$4\sin^2 18^0 2\sin 18^0-1=0$$ дан

$\sin 18^0=x$ деб $4x^2+2x-1=0$ квадрат тенгламани ҳосил қиламиз. $x=\sin 18^0>0$ эканини эътиборга олиб ва тенгламани ечиб ни $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ҳосил қиламиз.

153. $tgx=2[tgx]+3$, tgx - бутун сон.

Бундан [tgx]=tgx, tgx=2tgx+3, tgx=-3

Жавоб: $x=-arctg3+k\pi$, k°Z -

154. 1980=99·20 бўлгани учун (99 ва 20 умумий бўлувчиларга эга эмас). A=192021...7980 сони 20 га ва 99 га бўлинишини кўрсатиш етарли. Берилган соннинг 20 га бўлиниши аниқ. Энди унинг 99 га бўлинишини кўрсатиш қолди. 100 нинг ҳар қандай даражасини 99 га бўлганда 1 қолдиқ қолади. Шунинг учун $A=19\cdot100^{61}+20\cdot100^{60}+\ldots+79\cdot100+80$ ни 99 га бўлганда қанча қолдиқ қолса, B=19+20+...+79+80 ни ҳам 99 га бўлганда шунча қолдиқ қолади.

Аммо:

$B=19+20+\ldots+79+80=\frac{19+80}{2}\cdot62=99\cdot31$ бўлиб, B сони 99 га бўлинар экан. Демак, A сони ҳам 99 га бўлинади, бундан берилган соннинг 1980 га бўлинар экан, деган хулоса келиб чиқади.

155. Агар турнир иштирокчилари x бўлса, турнир тугагунча ўйнаган шахматчиларнинг сони x–2 та бўлади. Шахматчилар

ўзаро $\frac{(x-2)(x-3)}{2}$ та партия ўйнашган бўлади. Мусобақадан чиқиб кетган иккита ўйинчи 10 та ёки 11 та учрашувда қатнашган бўлиб, бу уларнинг ўзаро учрашувига боғлиқ. Юқоридагиларга асосланиб:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{2}+10=55 \quad \text{ва} \quad \frac{(x-2)(x-3)}{2}+11=55$$

тенгламаларни тузамиз. Бу тенгламалардан қайсиси бутун мусбат ечимга эга бўлса, фақат шугина масала шартини қаноатлантиради. Биринчи тенгламанинг ечими $x=12$ бўлади. Демак, шахматчилар ўзаро ўйнашган экан.

156. m натурал сон 52 дан катта бўлиб, $m+37$ ва $m-52$ лардан бири тоқ, иккинчиси жуфт сондир. Айтайлик а ва б тасдиқлар тўғри бўлсин, у ҳолда қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} m+37=x^2 \\ m-52=y^2 \end{cases}$$

Бу системанинг натурал сонлардаги ечимлари $x=45$, $y=44$ бўлади. Бундан, $m=1988$ экани келиб чиқади. Демак, б тасдиқ хато экан. Худди шундай а ва б ҳамда б ва г тасдиқлар биргаликда ўринли бўла олмаслигини исботлаймиз а ва б учун:

$$\begin{cases} m+37=x^2 \\ m=10k+15 \end{cases}, \text{бундан } x^2=10(k+4)+2$$

Бу ҳолнинг бўлиши мумкин эмас, чунки натурал сонниг квадрати 2 билан тугамайди; б ва г учун

$$\begin{cases} m=10k+5 \\ m-52=y^2 \end{cases}, \text{бундан } y^2=10(k-3)+3$$

Бунда ҳам натурал сонниг квадрати 3 билан тугамайди.

Жавоб: 1988

157. Ҳар биттаси турли 2 та ҳақиқий илдизларга эга бўлган кўпҳадларга $(x-10)^2-1$, x^2-1 ва $(x+10)^2-1$ лар мисол бўла олади. Аммо уларнинг исталган иккитасининг йиғиндиси ҳақиқий

илдизга эга эмас. Демак, масала шартини қаноатлантирувчи учҳадлар мавжуд экан.

158. $a_1, a_2, \dots a_n$ – берилган геометрик прогрессия, q – махражи бўлсин. Шартга кура, a_1, $a_{10} = a_1 \cdot q^9$ ва $a_{30} = a_1 \cdot q^{29}$ натурал сонлардир. Шунинг учун q^9 ва q^{29} лар мусбат рационал сонлардир. Бундан келиб чиқадики, $q^2 = \frac{q^{29}}{(q^9)^3}$ мусбат рационал сон ва $q = \frac{q^9}{(q^2)^4}$ ҳам мусбат рационал сондир.

Фараз қиламиз: $q = \frac{m}{n}$ бўлиб, бу ерда m ва n – ўзаро туб натурал сонлар бўлсин. У ҳолда $a_{30} = a_1 \cdot q^{29} = a_1 \cdot \frac{m^{29}}{n^{29}}$ – натурал сон бўлиб, m^{29} ва n^{29} лар ўзаро туб, бундан келиб чиқадики, a_1 ҳад n^{29} га бўлинади. Бундан $a_{20} = a_1 \cdot q^{19} = a_1 \cdot \frac{m^{19}}{n^{19}}$ ҳам натурал сон экани келиб чиқади.

159. Берилган тенгликда махраждан қутулиб, қуйидаги кўринишга келамиз:

$x^3z - x^3y + z^3y - z^3x + y^3x - y^3z = 0$

Чап томонни кўпайтувчиларга ажратамиз:

$(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) = 0$

x, y, z ларнинг шартга кўра мусбатлигидан охирги қавс мусбатдир. Кўриниб турибдики, агар x, y, z лар ҳар хил сонлар бўлса, тенглик бажарилмайди. Бу эса зиддиятдир.

160. $10000002 = x$, $20000002 = y$ деб белгилаб, берилган сонларни $\frac{1-x}{x}$ ва $\frac{1-y}{y}$ кўринишда ёзиб оламиз. $y > x$ бўлгани учун $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ ва $\frac{1-x}{x} = 1 - \frac{1}{x} < 1 - \frac{1}{y} = \frac{1-y}{y}$.

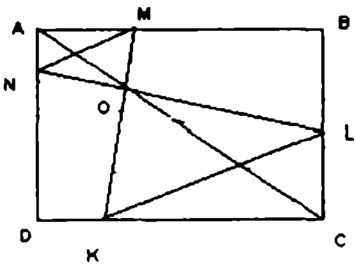
Демак, $\frac{20000001}{20000002} > \frac{10000001}{10000002}$.

ГЕОМЕТРИК МАСАЛАЛАР: ЖАВОБ ВА КЎРСАТМАЛАР

1. Биринчи усул:

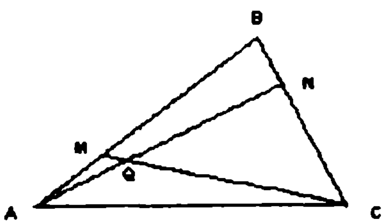
О нуқта КМ ва LN кесмаларнинг кесишиш нуқталари бўлсин. $\angle NDM + \angle MON = 180^0$ бўлгани учун MDNO тўртбурчакка ташқи чизилган айлана чизиш мумкин. Шунинг учун $\angle NOD = \angle NMD$

Худди шундай $\angle LOB = \angle LKB$, $LK \parallel MN$, $KB \parallel MD$ бўлгани учун $\angle NMD = \angle LKB$ ва $\angle NOD = \angle LOB$ бўлиб, D, O, B нуқталар бир тўғри чизиқда ётади:

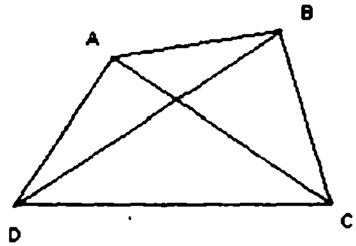


2. Кўрсатма: $S_{ABN}=S_{AMC}$ муносабатдан фойдаланинг:

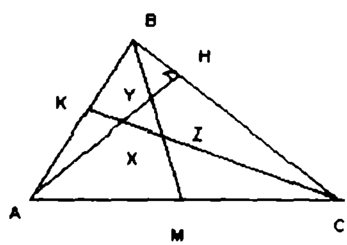
$$S_{ABN} = S_{AMC} = \frac{1}{k+1} S_{ABC} \quad \text{бу ерда} \quad k = \frac{AB}{MB}$$



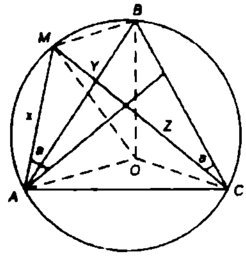
3. Фараз қилайлик: AB>BC бўлсин. У ҳолда $\angle BCA > \angle CBA$ ва, демак, $\angle BCD > \angle CBD$. Бундан BD>CD ва AB+BD>AC+CD бу эса масала шартига зиддир:



4. ABC учбурчакнинг AH – баландлигини, BM – медианасини ва CK – биссектрисасини ўтказайлик. Уларнинг кесишишидан ҳосил бўлган XYZ учбурчак тенг томонли бўлсин дейлик. У ҳолда XHC учбурчакдан $\angle XCH = 30^0$ экани келиб чиқади. CK биссектриса бўлгани учун $\angle ACB = 2 \cdot \angle XCH = 60^0$ BYH учбурчакдан эса $\angle XBH = \angle CBM = 30^0$ Демак, $\angle BMC = 90^0$ бўлиб, BM – медиана ҳам баландлик бўлиб қолади (ABC учбурчак учун). Бундан AB=BC, яъни ABC учбурчак тенг ёнли бўлади. Асосидаги бурчаги 60^0 бўлгани учун ABC учбурчак тенг томонли ҳамдир. У ҳолда X, Y, Z нуқталар устма-уст тушиши керак. Бу эса зидликдир:



5. MA=x, MB=y, MC=z дейлик $\angle MAB = \angle MCB = \alpha$, у ҳолда $\angle MOB = 2\alpha$ бўлади. Энди косинуслар теоремасини MAO, MOB, MOC учбурчаклар учун қўллаймиз:



$$x^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(\angle MOA),$$
$$y^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(\angle MOB),$$
$$z^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(\angle MOC),$$

$\angle MOA = 120^0 - 2\alpha$, $\angle MOB = 2\alpha$, ва $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$,

$\angle MOC = 120^0 + 2\alpha$

эканини эътиборга олиб, юқоридаги учта тенгликни қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз: $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$

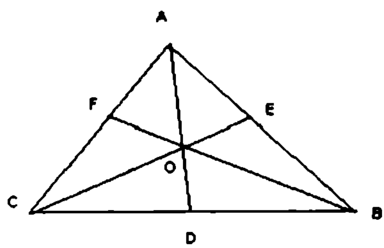
Жавоб: $2a^2$

6. Кўрсатма:

$$\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} = \frac{OD}{AD}, \quad \frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} = \frac{OE}{BE}, \quad \frac{S_{AOB}}{S_{ABC}} = \frac{OF}{FC}$$

тенгликлардан:

$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{FC} = 1$$

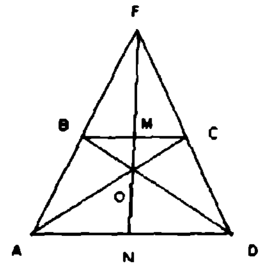


экани келиб чиқади.

Жавоб: $1 - \alpha - \beta$

7. BC ва AD трапециянинг асослари бўлиб, M ва N уларнинг ўрталари, диагоналларнинг кесишган нуқтаси O ва ён томонлари давомининг кесишиш нуқтаси F бўлсин. Бунда FBC учбурчакни

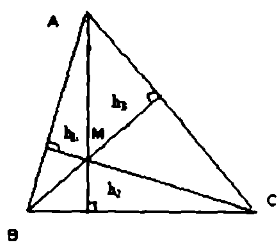
FAB учбурчакка ўтказувчи ўхшаш алмаштиришни қарасак, M нуқта N нуқтага ўтади. Шунинг учун F, M, N нуқталар бир тўғи чизиқда ётади:



8. Учбурчакнинг ихтиёрий бирорта ички нуқтасини олайлик ва уни M дейлик. h_1, h_2, h_3 лар M нуқтадан учбурчак томонларигача бўлган масофалар бўлсин. a ва h мунтазам учбурчакнинг мос равишда томони ва баландлиги бўлсин. У ҳолда:

$$S_{MAB} = \frac{ah_1}{2},\ S_{MAC} = \frac{ah_2}{2},\ S_{MAC} = \frac{ah_3}{2} \text{ ва } S = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MAC}$$

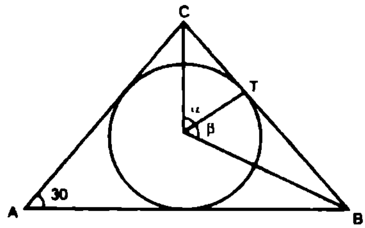
эканидан $\frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} + \frac{ah_3}{2} = \frac{ah}{2}$, бундан $h=h_1+h_2+h_3$ экани келиб чиқади. Агар M нуқта учбурчак томонларида ётиб қолса, у ҳолда ҳам шунга ўхшаш исботланади:



9. Масаланинг шартидан $OT \perp BC$ ҳамда BO ва CO лар биссектрисалардир. $\angle BOT = \alpha$, $\angle COT = \beta$ дейлик. Шартга кўра:

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3}{4}$. $\angle ACB = x$, $\angle ABC = y$, деб олсак

$$\begin{cases} x+y+30^\circ = 180^\circ, \\ \frac{x}{2}+\beta = 90^\circ, \\ \frac{y}{2}+a = 90^\circ, \end{cases}$$

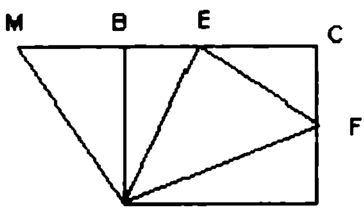


Системани ечиб, $\angle OBT = 45^0$ ва $\angle OCT = 30^0$ эканини топамиз. Булардан фойдаланиб, BC = 3+ $\sqrt{3}$ эканини топиш жуда осон.

Жавоб: $BC = 3+3\sqrt{3}$

10. Квадратнинг томонини бир бирликка тенг деб олиб, CB кесма давомида $BM=\frac{1}{2}$ қилиб M нуқтани оламиз.

$EC=\frac{2}{3}$, $CF=\frac{1}{2}$ бўлгани учун $EF=\frac{5}{6}$, $ME=\frac{5}{6}$, $AM = AF$ бўлади. Шундай қилиб MEFA тўртбурчакда ME=EF, MA=AF. Демак, $\vee$AME= $\vee$AEF бундан $\angle AEB = \angle AEF$ экани келиб чиқади:

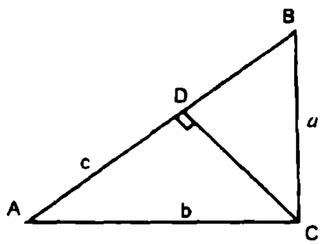


11. $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$ тенгликнинг иккала томонини учбурчакнинг юзи – S га кўпайтирамиз.

$$\frac{S}{r}=\frac{S}{h_a}+\frac{S}{h_b}+\frac{S}{h_c}, \quad \frac{S}{r}=p, \quad \frac{S}{h_a}=\frac{1}{2}a, \quad \frac{S}{h_b}=\frac{1}{2}b, \quad \frac{S}{h_c}=\frac{1}{2}c$$

лардан $p=\frac{a+b+c}{2}$

12. AB=c, BC=a, AC=b дейлик $\nabla ABC \sim \nabla ACD$ ва $\nabla ABC \sim \nabla BCD$ (учбурчакларнинг иккита бурчаги бўйича ўхшашлик аломатидан). Булардан ўхшашлик коэффициенти мос равишда $\frac{b}{c}$ ва $\frac{a}{c}$ эканини топамиз.



а) агар ABC учбурчакка ички чизилган айлананинг радиусини r десак, r_1 ва r_2 лар мос равишда ACD ва BCD учбурчакларга ички чизилган айланаларнинг радиуслари бўлса,

$r_1=\frac{br}{c}$ ва $r_2=\frac{ar}{c}$ бўлади. Шунинг учун

$$r_1^2+r_2^2=\left(\frac{br}{c}\right)^2+\left(\frac{ar}{c}\right)^2=\frac{b^2+a^2}{c^2}r^2=r^2$$ демак,

$r=\sqrt{r_1^2+r_2^2}$ экан;

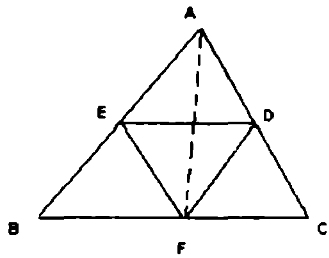
б) ABC учбурчакнинг периметри P бўлсин. P_1 ва P_2 лар ACD ва BCD учбурчакларнинг (мос равишда) периметрлари бўлса,

$P_1 = \frac{bP}{c}$ ва $P_2 = \frac{aP}{c}$ бўлади.

$$P_1^2 + P_2^2 = \left(\frac{bP}{c}\right)^2 + \left(\frac{aP}{c}\right)^2 = \frac{b^2 + a^2}{c^2} P^2 = P^2$$

демак $P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$ бўлар экан.

Жавоб: а) $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ б) $P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$



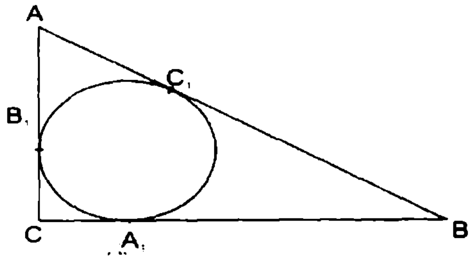
13. Фараз қилайлик: DE сўралган кесма бўлсин. BC томонидан CD га тенг CF кесмани ажратамиз. BC=BE+CD бўлиши учун CF=CD деб олганимиздан BE=BF бўлиши керак. Демак BEF ва CDF учбурчаклар тенг ёнли экани ва ED||BC бўлганидан EF ва DF лар мос равишда BEF ва CDE бурчакларнинг биссектрисалари бўлиши келиб чиқади. Шунинг учун F нуқта AB, AC ва ED кесмалардан бир хил узоқликда ётади. Бундан эса F нуқтанинг ABC учбурчакнинг A бурчагидан чиққан биссектрисада ётиши келиб чиқади. F нуқтани топгандан кейин эса тўғри чизиқни қаердан ўтказишни билиш қийин эмас.

14. M нуқта ABCD тўртбурчакнинг ичида жойлашган бўлиб, у доиралар билан қопланмасин. У ҳолда AMB, BMC, CMD ва DMA бурчаклар 90^0 бўлиши керак. Бу ҳолнинг бўлиши мумкин эмас.

15. a ва b берилган учбурчакнинг катетлари, c эса гипотенузаси бўлсин. A_1, B_1 ва C_1 ички чизилган айлананинг учбурчак томонларига уриниш нуқталари бўлсин. Айланага битта нуқтадан ўтказилган уринмаларнинг тенглиги ҳақидаги теоремаларга асосан:

$$AC_1 = AB_1 \quad BC_1 = BA_1 \quad CB_1 = CA_1$$

Бундан: $AC_1 = \frac{c+b-a}{2}$., $BC_1 = \frac{c+a-b}{2}$.



Шунинг учун:

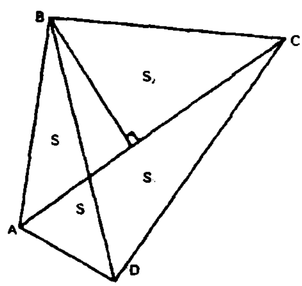
$$AC_1 \cdot BC = \frac{1}{4}(c+b-a)(c-(b-a)) = \frac{1}{4}(c^2-(b-a)^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(c^2 - a^2 - b^2 + 2ab) = \frac{ab}{2} = S_{AB}$$

(бу ерда Пифагор теоремасидан фойдаланилди). Исталган ABC учбурчак учун эса $S_{ABC} = AC_1 \cdot BC_1 \cdot ctg\left(\frac{c}{2}\right)$ формуланинг тўғрилигини исботлаш мумкин.

16.а) AOB ва BOC учбурчакларнинг B учидан ўтказилган баландликлари умумий. Шунинг учун улар юзларининг нисбати асослари узунликларининг нисбати кабидир.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AO}{CO}.$$



Худди шундай: $\frac{S_4}{S_3} = \frac{AO}{CO}$

бўлади.

Бундан $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$, демак

$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ экан.

б) $S_{ABD}=S_{ACD}$ (Асослар ва баландликлар бир хил). Шунинг учун $S_{CDO}=S_{ADO}=S$ юқоридаги масалага асосан:

$$S \cdot S^1 = S \cdot S_2, \qquad S^2 = S_1 \cdot S_2, \qquad S = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$$

Бу масалани BOC ва AOD учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб ҳам исботлаш мумкин.

17. Исбот қилишда учбурчакда бурчак ортганда шу бурчак мос синуснинг қиймати ҳам ортишидан ва

$\alpha > \beta$ бўлса, $(\alpha - \beta)(\sin\alpha - \sin\beta) \geq 0$ ёки $\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)(\sin\alpha - \sin\beta) \geq 0$.

тенгсизликдан фойдаланамиз. Аниқлик учун $\alpha > \beta > \gamma$ деб олайлик. Берилган тенгсизликда ўнг томонидаги ифодани тенгсизликнинг чап томонига ўтказиб, баъзи шакл алмаштиришлардан кейин ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\left[\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)\sin\alpha - \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)\sin\beta\right] + \left[\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right)\sin\alpha - \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right)\sin\gamma\right] +$$

$$+\left[\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)\sin\beta - \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)\sin\gamma\right] \leq 0$$

$$\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)(\sin\alpha - \sin\beta) + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right)(\sin\alpha - \sin\gamma) + \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)(\sin\beta - \sin\gamma) \leq 0$$

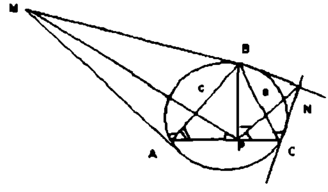
Бундан

$$\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)(\sin\alpha - \sin\beta) + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha}\right)(\sin\alpha - \sin\gamma) + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}\right)(\sin\beta - \sin\gamma) \geq 0$$

эқани келиб чиқади.

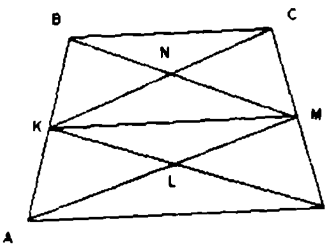
18. AB=c, BC=a, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$ бўлсин. AMB тенг ёнли учбурчакда AM уринма билан AB ватар орасидаги MAB бурчак AB ёйнинг ярмига тенг. ACB бурчак ҳам ички чизилган бурчак бўлгани учун AB ёйнинг ярмига тенг. Демак:

$$\angle MAB = \gamma, \quad \angle MAP = \gamma + \alpha, \quad AM = \frac{c}{2\cos\gamma}$$



(AMB учбурчакда). Худди шунга ўхшаш $\angle NCB = \alpha$, $\angle NCP = \gamma + \alpha$, $CN = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$ эканини кўрсатиш мумкин. Булардан ташқари, AP=ccos α, PC=acos γ. Шундай қилиб, APM ва CPN учбурчакларда $\angle MAP = \angle NCP$ ва $\dfrac{AP}{AM} = \dfrac{CP}{CN} = 2\cos\alpha\cos\gamma$ Демак, $\vee APM \propto \vee CPN$. Бундан келиб чиқадики, $\angle MPB = \angle NPB$

Шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.



19. Кўрсатма: томонлари a, b, c бўлган учбурчакнинг юзини S деб, Герон формуласидан фойдаланинг.

20. б) ABCD тўртбурчакнинг юзини S билан, ABC, BCD, CDA, DAB учбурчакларнинг юзларини мос равишда b, c, d, a билан белгилайлик. AMB ва DKC учбурчакларнинг юзларини мос равишда S_1 ва S_2 деб, AKMD тўртбурчакларнинг юзларини эса мос равишда S_3 ва S_4 деб олайлик. $\alpha = \dfrac{m}{m+n}$ бўлсин.

У ҳолда $S_1 = \alpha a + (1-\alpha)b$, $S_2 = \alpha c + (1-\alpha)d$,
$S_3 = \alpha S_1 + (1-\alpha)d$, $S_4 = \alpha S_2 + (1-\alpha)b$

ларни ҳосил қиламиз $S_{KLM} = \alpha(1-\alpha)\dfrac{S_1S_2}{S_3}$ ва $S_{KMN} = \alpha(1-\alpha)\dfrac{S_1S_2}{S_3}$

лардан фойдаланиб, $S_{KLMN} = \alpha(1-\alpha)\dfrac{S_1S_2}{S_3S_4}S$

ни топамиз: $S_{KLMN} < \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{1-\alpha+\alpha^2}S$

$S_{KLMN} < \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{1-\alpha+\alpha^2}S$ тенгсизлик $(1-\alpha+\alpha^2)S_1S_2 < S_3S_4$ тенгсизликка тенг кучлидир. S_1, S_2, S_3, S_4 лар ўрнига уларнинг

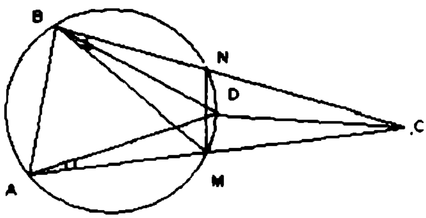
a, b, c, d орқали ифодаланган қийматларни қўйиб, $\alpha(ab+cd-ac)+(1-\alpha)(b^2+d^2+bd-ad-bc)>0$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

$ab+cd>S\min(a,c)$, $ad+bc\le S\max(b,d)=\max(b,d)b^2+d^2<b^2+d^2+bd$ эканлигини эътиборга олган ҳолда, ab+cd-ac>0 ва $b^2+d^2+bd>ad+bc$ ларнинг тўғрилигини кўрсатиш етарли.

Агар б ҳолда m=n=1 бўлса, а шартнинг тўғрилиги келиб чиқади.

21. Синуслар теоремасига кўра: $R=\dfrac{a}{2\sin\alpha}$

ABD ва MNB учбурчаклар битта айланага ички чизилган, MNB ва MNC учбураклар эса умумий MN томонга эга бўлгани учун $\angle MCN=\angle MBN$ эканини DB=DC=DA бўлганидан $\angle MAD=\angle MCD$ ва $\angle DBN=\angle DCN$, шунингдек, $\angle MAD=\angle MBD$, булардан эса $\angle MCN=\angle MBN$:

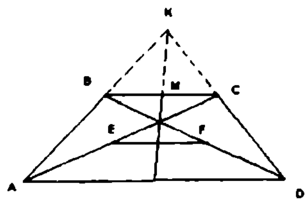


экани келиб чиқади.

22. Трапецияни ён томонлари кесишгунча давом қилдирамиз. Ҳосил бўлган ADK тўғри бурчакли учбурчакнинг медианасини ўтказамиз. Трапециянинг асослари a ва b бўлиб, a>b бўлсин. ADK тўғри бурчакли учбурчакда KN медианаси бўлгани учун

$MN=\dfrac{a-b}{2}$ бўлади. Худди шундай, EF кесманинг узунлигини

ҳам $\dfrac{a-b}{2}$ га тенг эканини кўрсатиш мумкин.



23.а) кўрсатма: $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$ ва $\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma$ формуладан фойдаланинг. Бу ерда R ташқи чизилган айлананинг радиуси;

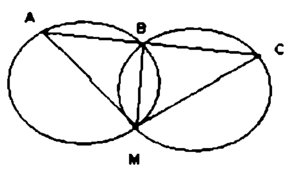
б)

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{a^2(b-c)^2}{4cb}}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

Худди шундай: $\sin\frac{\beta}{2}\le\frac{b}{2\sqrt{ac}}$ ва $\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{c}{2\sqrt{ab}}$

Шундай қилиб: $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}$

Демак, берилган ифоданинг энг катта қиймати $\frac{1}{8}$ га тенг бўлиб,бунга у фақат учбурчак тенг томонли бўлганда эришади.

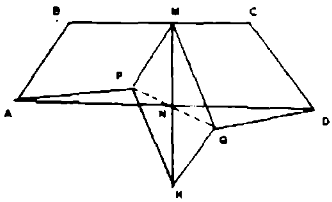


24. $\angle MCB=\angle MAB$, чунки бу бурчаклар ички чизилган ва тенг ёйларга мос бурчаклардир. Шунинг учун MAC учбурчак тенг ёнли Демак, M нуқта AC кесманинг ўртасидан ўтказилган перпендикулярда ётар экан.

25. Кўрсатма: косинуслар теоремасидан ва учбурчак бурчакларининг биссектрисаси хоссасидан фойдаланинг.

26. M ва N нуқталар BC ва AD томонларнинг ўртаси бўлсин, MP кесма AB га параллел ва MP=AB. Худди шундай MQ кесма CD га парраллел ва MQ=CD. ANP ва DNQ

учбурчакларни қараймиз. Бу учбурчакларда AN=ND, AP ва QD кесмалар тенг ва параллел бўлгани учун PN=NQ. Демак, MN кесма MPQ учбурчакнинг медианасидир.



PK кесма MQ кесмага параллел бўлгани учун PK=MQ, яъни MPKQ параллелограмм экан. Масаланинг шартига кўра, $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$, шунинг учун

MK=2MN=AB+CD=MP+MQ=MP+PK.

Бундан P, M ва K нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётиши келиб чиқади. Бу эса AB ва CD кесмалар ўзаро параллел демакдир.

27. Учбурчакнинг мавжудлигини исботлаш учун юқоридаги катталиклардан энг каттасини қолган иккитасининг йиғиндисидан кичик эканини кўрсатиш етарли:

$$\sqrt{4a^2+3} < \sqrt{a^2-a+1} + \sqrt{a^2+a+1}$$

Иккала томонни квадратга кўтариб, қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$2a^2+3 < 2\sqrt{a^4+a^2+1}$$

Бунинг ҳам иккала томонини квадратга кўтарамиз

$$4a^4+4a^2+1 < 4a^4+4a^2+4$$

3>0 тўғрилиги исботланди. Энди косинуслар теоремасидан энг катта бурчакнинг косинусини топамиз:

$$\cos\varphi = \frac{2a^2+1}{2\sqrt{a^2-a+1}\sqrt{a^2+a+1}} = -\frac{2a^2+1}{2\sqrt{a^4+a^2+1}}$$

Сўнгра шу бурчакнинг синусини топамиз:

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a^4+a^2+1}}$$

Шундай килиб, учбурчакнинг юзи:

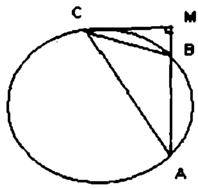
$$S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+a+1}\sqrt{a^2-a+1}\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

28. Берилган тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтариб, соддалаштиришдан кейин ушбу:

$$\left(\sqrt{ab_1}-\sqrt{a_1b}\right)^2+\left(\sqrt{ac_1}-\sqrt{a_1c}\right)^2+\left(\sqrt{bc_1}-\sqrt{b_1c}\right)^2=0$$

тенглик ҳосил бўлиб, бундан $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$ экани келиб чиқади.

Демак, ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар ўхшаш экан.



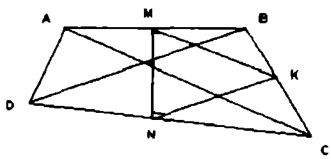
29. ABC учбурчакда AB=c, BC=a бўлсин. ABC учбурчакнинг C учидан ташқи чизилган айланага ўткзилган уринма AB томонига перпендикуляр бўлсин. Сўнгра, BM=x, CM=y, дейлик, ACM ва BCM учбурчаклар ўхшаш (чунки улар тўғри бурчакли ҳамда $\angle CAM=\angle BCM$) бўлгани учун қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b} \quad \text{ва} \quad \frac{y}{a}=\frac{x+c}{b} \quad \text{булардан} \quad x=\frac{a^2c}{b^2-c^2}, \quad y=\frac{abc}{b^2-a^2}$$

BMC тўғри бурчакли учбурчакдан $x^2+y^2=a^2$ бунга x ва y ларнинг юқоридаги қийматларини қўйсак:

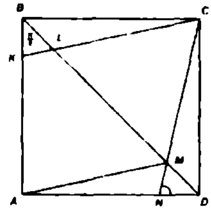
$$\left(\frac{a^2c}{b^2-c^2}\right)^2+\left(\frac{abc}{b^2-c^2}\right)^2=a^2$$ ҳосил бўлади ва ушбу ифода

$(a^2+b^2)c^2=(b^2-c^2)^2$ келиб чиқади. Бу эса талаб қилинган боғланишдир.



30. M, N, ва K нуқталар ABCD тўртбурчакнинг AB, CD ва BC томонларининг ўрталари бўлсин. Масала шартига кўра, MN тўғри чизиқ диагоналлари билан тенг бурчаклар ҳосил қилади. MK ва KN лар ABC ва BCD учбурчакларнинг ўрта чизиқлари бўлгани учун юқоридаги шартдан $\angle KMN=\angle KNM$ ва KM=KN, демак, AC=BD ўринли экан.

31. Олдин $\angle BKC + \angle DNC = \frac{3\pi}{4}$ эканини кўрсатайлик. Агар квадратнинг томонини бир бирликка тенг деб олиб:



$$ctg(\angle BKC) = BK = \alpha,$$
$$ctg(\angle DNC) = DN = \beta$$

деб белгиласак, ушбуни ҳосил қиламиз:

$\alpha \cdot \beta = BK \cdot DN,$

$2\alpha \cdot \beta = 2BK \cdot DN = AK \cdot AN = (1 - BK)(1 - DN) = (1-\alpha)(1-\beta),$

$(1-\alpha)(1-\beta) = 2\alpha \cdot \beta$

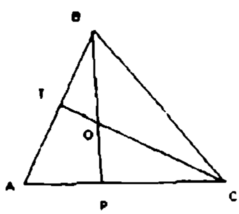
Бундан: $tg(\angle BKC + \angle DNC) = \frac{\alpha+\beta}{-1+\alpha\beta} = -1 = tg\frac{3\pi}{4}$

Демак:

$\angle BLK = \frac{3\pi}{4} - \angle BKL = \angle DNC = \angle BCM = \angle BAM$ Шунинг учун $\angle KLM + \angle KAM = \pi$ Демак, A, K, L, M нуқталар битта айланада ётар экан.

Худди шундай: H, A, M, L нуқталар ҳам битта шу айланада ётишини кўрсатиш мумкин.

32. Кўрсатма: исталган учбурчакда $\angle TOP = 90^0 + \frac{\angle TAP}{2}$ бўлади. A, P, O ва T нуқталарнинг битта айланада ётиш шартидан: $\angle TAP + \angle TOP = 180^0$



Бундан $\angle A = 60^0$ экани келиб чиқади.

Жавоб: 60^0

33. AE томонга перпендикуляр ва унинг ўртасидан ўтувчи текисликка нисбатан ABCDE ва AEKPL бешбурчаклар ўзаро симметрик бўлади. Бундан DK=BL. Аммо BL=AD. Шундай қилиб, D нуқта A ва K нуқталардан баравар узоқликда ётади. Аммо AE=EK бўлгани учун $LE \perp AK$ бўлиб ва AK нинг ўртасидан ўтувчи ва унга перпендикуляр бўлган текисликда ётади. $DE \| AC$ бўлганидан эса $AC \perp AK$ бўлади. Худди шундай бошқа томонлар жуфтликларининг ҳам перпендикулярлигини исбот қилиш мумкин.

34. Кўрсатма: масаланинг шартидан ён ёқларининг баландликлари тенг. Демак, баландликларнинг асос текислигидаги проекциялари ҳам тенг бўлади. Тетраэдр учининг асос текислигига проекцияси эса асосга ички ёки ташқи чизилган айлананинг маркази билан усма-уст тушади.

Агар $b\sqrt{3} > a$ бўлса, жавоб: $\{b, b\}$;

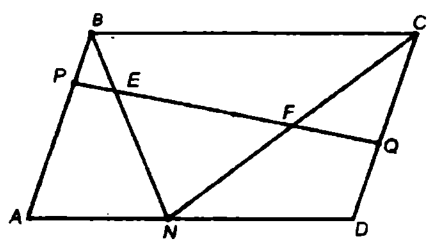
Агар $b>0$ бўлса, жавоб: $\{b, \sqrt{2a^2 + b^2}\}$;

Агар $b > a\sqrt{3}$ бўлса, жавоб: $\{\sqrt{b^2 - 2a^2}, \sqrt{b^2 - 2a^2}\}$ бўлади.

35. Кўрсатма: айланага битта нуқтадан ўтказилган уринмаларнинг шу нуқтадан уриниш нуқтасигача бўлган кесмаларнинг тенглигидан фойдаланинг.

D Нуқтани ABC учбурчакка ички чизилган айлананинг BC томонига уриниш нуқтаси бўлишини исботлаш мумкин.

Жавоб: $BD = \dfrac{BC + AB - AC}{2}$



36. EHF учбурчак юзининг BPE ва CFQ учбурчаклар юзларининг йиғиндисига тенг эканини исботлайлик.

BNC учбурчакнинг юзи параллелограмм юзининг ярмига тенг ва PBCQ трапециянинг юзи ҳам параллелограмм юзининг ярмига тенг бўлгани учун:

$$S_{ENF}+S_{BEFC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=S_{PBE}+S_{BEFC}+S_{CFQ}$$

Демак: $S_{ENF}=S_{PBE}+S_{CFQ}$

Шуни исботлаш талаб қилинган эди. Энди BEFC тўртбурчакнинг юзи APEN ва FNDQ тўртбурчаклар юзларининг йиғиндисига тенг эканини исботлаш керак:

$$S_{BEFC}+S_{BPE}+S_{CFQ}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=S_{APEN}+S_{ENF}+S_{NFQD}.$$

$$S_{BEFC}=S_{APEN}+S_{NFQZ}$$

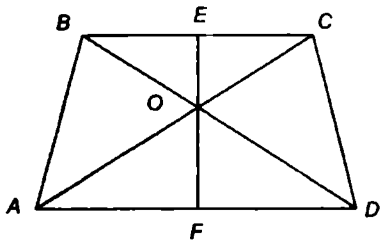
Бу шарт ҳам исботланди.

37. Трапеция асослари a ва b бўлиб, уларга ёпишган учбурчакларнинг баландликлари мос равишда h_a ва h_b бўлсин.

У ҳолда $S=\frac{a+b}{2}\cdot(ha+hb), S_1=\frac{aha}{2}, S_2=\frac{bh_2}{2}$ бўлади.

Δ AOD ∞ BOC бўлгани учун $\frac{a}{b}=\frac{h_a}{h_b}$, $\frac{a}{b}=t$ десак, $h_a=th_b$

ни юқоридаги формулаларга қўямиз.



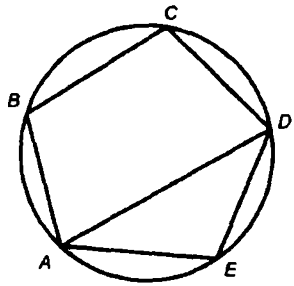
$$S=\frac{bt+b}{2}(th_b+h_b)=(t+1)^2\frac{bh_b}{2}$$

$$S_1=\frac{bt+th_b}{2}=t^2\frac{bh_b}{2}$$

$$S_2=\frac{bh_b}{2};\ \sqrt{S}=(t+1)\sqrt{\frac{bh_b}{2}}\ \ \sqrt{S_1}=t\sqrt{\frac{bh_b}{2}}$$

$$\sqrt{S_2}=\sqrt{\frac{bh_b}{2}};\ \ \sqrt{S}+\sqrt{S}=(t+1)\sqrt{\frac{bh_b}{2}}=\sqrt{S}$$

Масала исботланди.



38. A B C D E бешбурчакда $\angle A+\angle C>180^0$ эканини исботлайлик. Бунинг учун AD диагоналини ўтказамиз, у ҳолда ABCD тўртбурчак айланага ички чизилган бўлгани учун $\angle BAD+\angle C=180^0$ бўлади. Аммо $\angle BAE>\angle BAD$ шунинг учун $\angle A+\angle C>180°$.

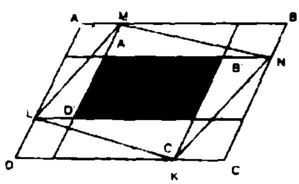
39. Шундай пирамида мавжуд бўлсин деб фараз қилайлик. Агар пирамида ён қирраларининг узунликлари x, y, z ва асос томонларини a, b, c деб олсак, қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ x^2+z^2=b^2 \\ y^2+z^2=c^2 \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases}$$

Биринчи ва иккинчи тенгламани қўшиб, $2x^2+y^2+z^2=a^2+b^2$ тенгламани, иккинчи ва тўртинчи тенгламалардан $2x^2+c^2=c^2$ тенгламани ҳосил қиламиз. Охирги тенгликдан x=0 экани келиб чиқади. Аммо масала шартига кўра x мусбат сон бўлиши керак. Бу эса масала шартига зид. Демак, юқоридаги масалани қаноатлантирувчи пирамида мавжуд эмас экан.

40. MNKL тўртбурчак AMDL, AMBN, BNCK, CKDL параллелограммларнинг яримлари ва ABCD параллелограмм юзларининг йиғиндисига тенг. Шунинг учун:

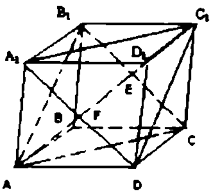
$$S_{MNKL}=Q+\frac{S-Q}{2}=\frac{S+Q}{2}$$



Жавоб: $\frac{S+Q}{2}$

41. Тенгликнинг иккала томонини 3V (V тетраэдр ҳажми)га кўпайтириб, $\frac{3V}{r}=\frac{3V}{h_1}+\frac{3V}{h_2}+\frac{3V}{h_3}+\frac{3V}{h_4}$ ни ҳосил қиламиз.

$V = \frac{1}{3}Sr = \frac{1}{3}S_1 r$ формулага асосан юқоридаги тенгликнинг иккала қисми ҳам тетраэдрнинг тўла сиртини беради. (S – тетраэдрнинг тўла сирти, S_1 – ён ёғининг юзи).

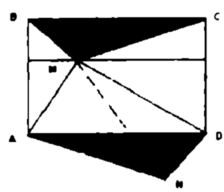


42. Кубнинг қиррасини x деб олиб, C_1D ва B_1C диагоналларини қарайлик.

$B_1C \| A_1D$ ва $C_1D \| B_1A$ бўлгани учун A_1C_1D ва AB_1C текисликлар ҳам ўзаро параллел бўлади. B_1C ва C_1D тўғри чизиқлар айқаш тўғри чизиқлар бўлиб, улар орасидаги масофа A_1C_1D ва AB_1C текислик орасидаги масофага тенг бўлиб, шартга кўра, EF=P бўлади. A_1C_1D ва AB_1C текисликлар BD диагоналга перпендикуляр бўлгани учун P масофа диагонал узунлиги билан $D_1A_1C_1D$ пирамида баландлигининг узунлиги иккиланганининг айирмасига тенг бўлади. Пирамида ҳажми $\frac{1}{6}x^3$, A_1C_1D асосининг юзи $\frac{x^2\sqrt{3}}{2}$, у ҳолда пирамида баландлиги $ED_1 = \frac{x}{\sqrt{3}}$ бўлади. Демак,

$BD_1 = x\sqrt{3}$. $P = \frac{x}{\sqrt{3}}$ яъни $x = p\sqrt{3}$, $V = x^3 = 3p^3\sqrt{3}$

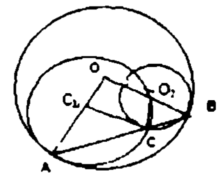
43. Тўғри туртбурчакнинг юзи AMD ва BMC учбурчакларнинг юзидан 2 марта катта экани аниқ. AD томонда BMC учбурчакка тенг учбурчак ясаймиз. Бунда AN=CM, DN=BM у ҳолда:



$S = 2(S_{AMD} + S_{BMC}) = 2S_{AMDN} = 2S_{AMN} + 2S_{DMN} \le AM \cdot AN + DN \cdot DM =$
$= AM \cdot CM + BM \cdot DM$

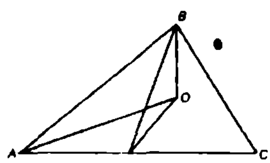
Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

44. O, O_1, O_2 берилган айланалар марказлари r, r_1, r_2 мос равишда радиуслари бўлсин. O_1 ва O_2 лар мос равишда OA ва OB да ётади. У ҳолда OAB, O_1AC, O_2BC учбурчаклар тенг ёнли ва улар ўхшаш учбурчаклар бўлади. Бундан OO_1CO_2 нинг параллелограмм экани келиб чиқади. Демак, $r=OA=OO_1+O_1A=O_2C+O_1A=r_2+r_1$



Масаланинг тескариси ҳам ўринлидир. Агар $r=r_1+r_2$ бўлса, AB кесма, албатта, ички айланаларнинг кесишиш нуқтасидан ўтади. Исбот қилиш учун OO_1CO_2 параллелограмм ясаймиз. Унинг C ва O_2 учлари AB ва OB кесмаларда ётади. O_1AC ва O_2BC учбурчаклар тенг ёнли учбурчакка ўхшаш шунинг учун $O_1C'=O_1A=r_1$ демак, C нуқта марказли айланага тегишли ва $O_2'B=O_2'C'=OO_1=OA-O_1A=r_2$ бундан $O_2'=O_2$ ва C' нуқта O_2 марказли айланага ҳам тегишли экан.

45. $\angle A=30^0$ бўлсин (шартга кўра) у ҳолда:



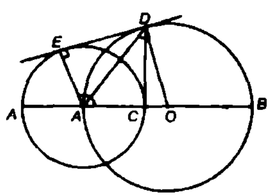
$\angle OCM=\angle OCA-\angle MCA=15^0=\angle OAM$

(ёки $\angle AOC=\angle AMC=120^0$)

Демак, A, M, O нуқталар битта айланага тегишли.

Бундан $\angle OMC=\angle OAC=15^0$ экани келиб чиқади.

46. Исботни қуйидагича баён қиламиз:

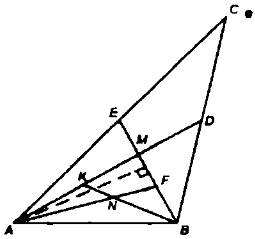


Уринманинг иккинчи айлана билан уриниш нуқтаси E ва биринчи айлананинг марказини O дейлик. AOD учбурчак тенг ёнли, шунинг учун $\angle ODA=\angle OAD$. OD Р EA бўлгани учун $\angle DAE=\angle ODA$. Булардан $\nabla DEA=\nabla DCA$ (икки томони ва улар орасидаги бурчак бўйича).

Бундан $\angle DCA=\angle DEA=90^0$ экани келиб чиқади, яъни $DC \perp AB$ экан.

47. ABC учбурчакнинг AD ва BE медианаларининг кесишиш нуқталари M бўлиб, AMB учбурчакнинг ҳам AF ва BK медианаларини ўтказамиз. AF ва BK ларнинг кесишиш нуқтаси

N бўлсин. BE ва AD медианалар кесишган M нуқта BE томонни 2:1 нисбатда бўлгани учун $MF = \frac{1}{2}BM = MF$ ўринли бўлади. $\angle AMF \leq 90°$ бўлган учун A учдан BE кесмага туширилган перпендикулярнинг асоси MB нурда ётади.

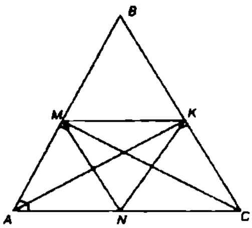


Шунинг учун $AF \leq AE$ (бу ерда тенглик $\angle AMB = 90°$ бўлганда ўринли бўлади) бўлганидан $AN = \frac{2}{3}AF \leq \frac{2}{3}AE = \frac{1}{3}AC$.

Худди шундай: $BN \leq \frac{1}{3}BC$ бўлишини ҳам кўрсатиш мумкин.

Энди учбурчак тенгсизлигини қўллаб, $AC + BC \geq 3(AN + NB) > 3AB$ ҳосил қиламиз.

48. Берилишига кўра, AMC учбурчак тўғри бурчакли ва MN унинг медианаси бўлгани учун $MN = AN = NC$.

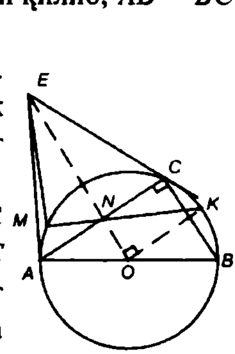


Шартга кўра, $MK = KN = MN$ бўлгани учун $KN = MN = AN = NC$. AKC учбурчакда ҳам KN медиана бўлиб, $KN = AN = NC$ бўлгани учун AKC бурчак тўғри бурчакдир.

Демак, ABC учбурчакда AK биссектриса баландлик ҳамдир. Бундан келиб чиқадики, ABC учбурчак тенг ёнли ва AK эса медианадир, яъни $BK = KC$.

Демак, MK кесма BMC учбурчакнинг медианаси бўлади. Шунинг учун $BC = 2MK = 2KN = AC$. Шундай қилиб, $AB = BC = AC$. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

49. O нуқта айлананинг маркази бўлсин. ABC учбурчак тўғри бурчакли учбурчак бўлгани учун O нуқта AB гипотенузанинг ўртаси билан устма-уст тушади.



NOK бурчак тўғри бурчак, чунки ABC учбурчакнинг ўрта чизиғи NO қаршисида BC томонга параллел. OK тўғри чизиқ BOC тенг томонли учбурчакнинг баландлигини ўз ичига олади (*OK* тўғри чизиқ *BOC* бурчакнинг биссектрисасидир). *E, N* ва *O* нуқталар унчалик қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, *ECO* ва *EAO* учбурчаклар битта катети ва гипотенузаси бўйича ўзаро тенг, шунга кўра *EO* *AEC* бурчакнинг биссектрисасидир. Иккинчи томондан, AEC учбурчак тенг ёнли. *EN* кесма *AEC* учбурчакнинг медианаси ва бир вақтда биссектриса ҳамдир. Шунинг учун *EN* ва *EO* нурлар *AEC* бурчакнинг биссектрисаси сифатида устма-уст тушади. $\angle ECO = \angle EAO = 90°$ бўлганидан *A, E, C* ва *O* нуқталар битта айланада ётади. Айланадаги ўзаро кесишувчи ватарлар ҳақидаги теоремага асосан: $AN \cdot NC = EN \cdot ND$ (1)

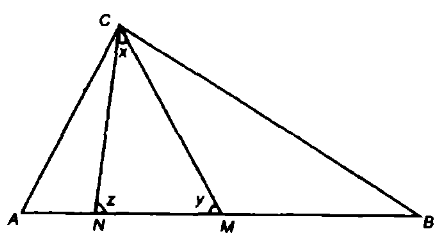
Шу теоремани *AC* ва *MK* ватарларга ҳам қўлласак $AN \cdot NC = MN \cdot NK$ (2) ҳамда (1) ва (2) муносабатлардан $MN \cdot NK = EN \cdot ND$ экани келиб чиқади.

Ўзаро кесишувчи ватарлар ҳақидаги теоремага – тескари теоремага асосан *M, K, E* ва *O* нуқталар ҳам битта айланада ётади.

EMK ва *EOK* бурчаклар битта ёйни тортиб турган бурчаклар (*M, K, E, O* нуқталардан ўтувчи айланада) бўлгани учун ўзаро тенг. Аммо $\angle EOK = 90°$, демак, $\angle EMK = 90°$

50. *MCN* учбурчакнинг бурчакларини $\angle MCN = x, \angle CMN = y, \angle CNM = z$ деб белгилаб олайлик. У ҳолда $x + y + z = 180°$. *ACM* ва *BCN* учбурчаклар тенг ёнли, $\angle ACM = y$, $\angle MCB = z\text{-}x$ ва, демак, $y + z - x = 90^0$

$$\begin{cases} x + y + z = 180° \\ y + z - x = 90 \end{cases}$$

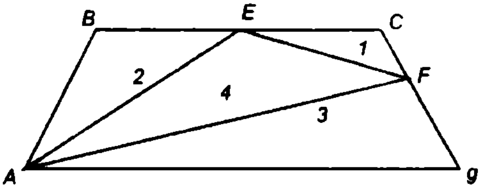


Биринчи тенгламадан иккинчисини ҳадлаб айириб, натижага эришамиз, яъни:

$2x = 90^0$, $x = 45^0$

51. Фараз қиламиз учбурчакларнинг юзлари *n*, *n*+1, *n*+2, *n*+3 ларга тенг бўлсин. У ҳолда *ABCD* тўртбурчакнинг юзи 4*n*+6 га тенг бўлади. *BCD* учбурчакнинг юзи *ECF* учбурчак юзининг тўрт бараварига тенг. Бундан:

$$S_{ABD} = S_{ABCD} - S_{BCD} \leq (4n+6) - 4n = 6$$



Агар ECF учбурчакнинг юзи кўрсатилган тўртта учбурчаклар юзларининг энг кичиги бўлса, тенглик ўринли бўлади. Энди 6 қийматнинг қабул қилиниши мумкинлигини кўрсатайлик. Бунга мисол қилиб, асослари AD=6, BC=4 ва баландлиги 2 га тенг бўлган тенг ёнли трапецияни олиш мумкин (шаклдаги рақамлар мос учбурчакларнинг юзларини билдиради).

ТЕСТЛАРДАН НАМУНАЛАР

(ечилишлари билан)

1. Йиғинди 255 га тенг бўлиши учун 3 дан бошлаб нечта кетма-кет тоқ сонни қўшиш керак?

A) 14 B) 13 C) 15 D) 16 E) 17

Ечилиши. Бу масала арифметик прогрессияга тушади.
$S_n=255,\quad a_1=3,\quad d=2$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n \qquad \text{формуладан:}$$

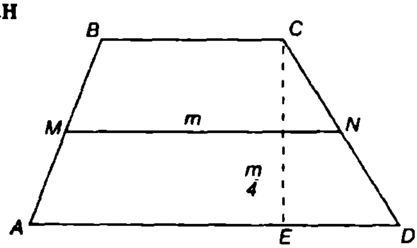
$n^2=2n-255=0$

$$D=4+1020=1024,\quad n_1=\frac{-2+32}{2}=15$$

3 дан бошлаб, 15 та тоқ натурал сонни қўшиш керак.
Жавоб: C

2. Трапециянинг изи a^2 дан ортиқ. Унинг ўрта чизиғи m баландлигидан 4 марта катта. Трапециянинг ўрта чизиғини баҳоланг.

A) $m=2\,|a|$ B) $m<2\,|a|$ C) $m>2\,|a|$ D) баҳолаб бўлмайди.
E) Тўғри жавоб берилмаган



Ечилиши:
$MN=m$

$$CE=\frac{m}{4},$$

$S_m>a^2.$

$$S_{mp}=m\cdot\frac{m}{4}=\frac{m^2}{4};\quad \frac{m^2}{4}>a^2;\quad \frac{m}{2}>|a|;\quad m>2|a|.$$

Жавоб: С

3. $7 + 77 + \quad + 777 + \quad + 77777777$ йиғиндини ҳисобланг.

A) 86491746 B) 864119746 C) 86791446 D) 8641947
E) Тўғри жавоб йўқ.

Ечилиши

$$\begin{array}{r} 77777777 \\ 7777777 \\ 777777 \\ 77777 \\ 7777 \\ 777 \\ \underline{77} \end{array}$$

Жавоб: В

4. Трапециянинг асослари a ва $в$ ($в > a$). Бу трапеция ўрта чизиғининг диагоналлари орасида жойлашган қисмини топинг.

A) $\dfrac{(b-a)}{2}$, B) $\dfrac{(b-a)}{3}$, C) $\dfrac{(b^2-a^2)}{3}$, D) $\dfrac{(b+a)}{4}$,

E) Тўғри жавоб йўқ

Ечилиши. Бу ерда $BC = a$, $AD=в$, $в>0$, $KF = x$ деб белгилаймиз. $ABCD$ трапецияда CD ён томонга параллел BE тўғри чизиқ чизамиз.

У ҳолда $ED=a$, C ва F нуқталарни туташтирамиз. ACE тўғри чизиқ ўтказамиз. Трапеция ўрта чизиғининг хоссасига кўра KF кесма ACE учбурчакнинг ўрта чизиғидир. $AE = в-a$,

$$KF = \frac{AE}{2}; x = \frac{b-a}{2};$$

Жавоб: А.

5. a нинг нечта қийматида $\begin{cases}|x|+|y|=a,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ тенгламалар системаси 4 та ечимга эга?

A) 2 B) 1 E) 0 D) чексиз кўп E) тўғри жавоб йўқ

Ечилиши:

$$\begin{cases}|x|+|y|=a,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2+2|xy|=a^2\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

ёки $2|xy|=a^2-1,$

$2|xy|=(a-1)(a+1).$ $\begin{cases}2=a-1.\\ |xy|=a+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ |xy|=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ x_1=y_1=2,\end{cases}$

$x_2=1$; $y_2=4$, $x_3=4$; $y_3=1$

$$\begin{cases}2=a+1,\\ |xy|=a-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1.\\ |xy|=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ x=y=0.\end{cases}$$

Демак, a нинг 2 та қийматида система 4 та ечимга эга.

Жавоб: A

6. $12^x+5^x=13^x$ тенгламанинг нечта ечими бор?

A) 4 B) 2 C) ечими йўқ: D) 3 E) 1.

Жавоб: Битта ечими бор $x=2$

Жавоб: E

7. $a+в+c<0$ ва $ax^2+вx+c=0$ тенглама ҳақиқий ечимга эга эмас. a ва c ларнинг ишорасини топинг.

A) $a<0, c<0$ B) $a>0, c<0$ C) $a<0, c>0$ D) $a>0, c>0$

Ечилиши: $a+в+c<0$, $ax^2+вx+c=0$, $D=в^2-4ac$, $D<0$ бўлиши керак. $в^2<4ac$, $в^2>0$, $4>0\Rightarrow a<0$, $c<0$. Жавоб: A

8. a нинг қандай қийматларида тенгламалар системаси ечимга эга бўлади?

$x^2+ax+1=0$

$x^2+x+a=0$

A) $a=-1$ B) $a=1$ C) $a=2$ D) $a=-2$

Ечилиши. Берилган тенгламалар системаси ечимга эга бўлиши учун $D=0$ бўлиши керак. Демак:

$$\begin{cases} D=a^2-4, \\ D=1-4a. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-4=0, \\ 1-4a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\pm 2, \\ a=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$ *a* нинг бу

қийматларини тенгламалар системасига қўйиб текшириб кўрамиз:

1) *a=2 да* $\begin{cases} x^2+2x+1=0, \\ x^2+x+2=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \phi \end{cases}$

2) *a= –2 да* $\begin{cases} x^2-2x+1=0, \\ x^2+x-2=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1, x=2. \end{cases}$

3) $a=\dfrac{1}{4}$ *да* $\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{4}x+2=0, \\ x^2+x+\dfrac{1}{4}=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi \\ x=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Булардан кўриниб турибдики, фақат a = –2 бўлганда тенгламалар системаси ечимга эга бўлди.

Жавоб: D

9. $x^2+px+q=0$ тенгламанинг ечимларидан бири $1+\sqrt{3}$ ва p, q лар рационал сонлар бўлса, p ва q ни топинг.

A) $p=-2$ $q=-2$. B) $p=-2$ $q=2$. C) $p=2$ $q=-2$. D) $p=2$, $q=2$

Ечилиши: $x^2+px+q=0$ тенгламада $x_1=1+\sqrt{3}$ бўлса, $x_2=1-\sqrt{3}$ бўлади. У ҳолда Виет теоремасига кўра: $\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$ эканидан:

$$\begin{cases} 1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=-p, \\ \left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)=q. \end{cases} \qquad \begin{cases} p=-2 \\ q=-2. \end{cases}$$

Жавоб: A

10. Параллелограммнинг томонлари 46 см ва 22 см, диагоналларининг нисбати эса 2:3 каби. Диагоналлар узунликларининг йиғиндисини топинг.

A) 90 см B) 100 см C) 110 см D) 120 см

Ечилиши:

$4x^2 + 9x^2 = 2\ 46^2 + 2\ 22^2$

$13\ x^2 = 5200,\ x^2 = 400,\ x = 20$

$5\ x = 5\ 20 = 100$ см

Жавоб: B

11. Учбурчакнинг иккита баландлиги бу баландлик туширилган томондан кичик эмас. Учбурчак баландликларини топинг.

A) $45^0, 45^0, 90^0$ B) $30^0, 60^0, 90^0$ C) $30^0, 30^0, 120^0$ D) $60^0, 60^0, 60^0$

Ечилиши. Фараз қилайлик, учбурчак ихтиёрий бўлсин:

$\alpha = \beta + \gamma,\ \beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma), \gamma = \alpha + \beta$

$\gamma = \alpha - 180^\circ + \alpha + \gamma,\ 2\alpha = 180^\circ;\ \alpha = 90^\circ$

Бундан учбурчакнинг тўғри бурчакли экани келиб чиқади. Шартга кўра, иккита баландлик ҳам шу баландлик туширилган томондан кичик эмаслигидан, учбурчакнинг тенг ёнли экани келиб чиқади. Демак, учбурчакнинг бурчаклари $45^0, 45^0, 90$ дан иборат экан.

Жавоб: A

12. Текисликда ихтиёрий учтаси бир тўғри чизиқда ётмайдиган 101 та нуқтанинг ҳар бошқа нуқталар билан бири бирлаштирилган. Бу тўғри чизиқлар сонини аниқланг.

A) 5050 B) 5151 C) 5150 D) 5000

Ечилиши. Масалани ечиш учун $\frac{n(n-3)}{2}$ формуладан фойдаланамиз.

$$\frac{101\ (101-3)}{2} + 101 = \frac{101 \cdot 98}{2} + 101 = 101\ (49+1) = 5050.$$

Жавоб: А

13. Рақамлари йиғиндиси 25 га тенг бўлган ва 11 га бўлинадиган нечта уч хонали сон бор?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Ечилиши: Рақамлари йиғиндиси 25 га тенг бўлган уч хонали сондан олтитаси мавжуд бўлиб, 988, 898, 889, 799, 979, 997 булардан фақат 979 сони 11 га бўлинади.

Жавоб: А.

14. Координаталари $x^2+(|y|-1)^2\le 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $(x;\ y)$ нуқталардан тузилган фигура юзини топинг.

A) 2π B) π C) 1 D) $\pi\sqrt{2}$ E) 4π

Ечилиши: $x^2+(y\pm 1)^2\le 1$. Бу радиуси $R=1$, бўлган айлана билан чегараланган доира бўлиб, унинг юзи $S=2\Pi R^2$ формуладан $S=2\Pi$ экани келиб чиқади.

Жавоб: А.

15. n нинг нечта натурал қийматида $\frac{n^3-1}{7}$ ифоданинг қиймати туб сон бўлади?

A) 1. B) 2. C) 3 D) 4 E) чексиз кўп

Ечилиши: $\frac{n^3-1}{7}=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{7}$ ифода туб сон бўлиши учун натурал сон бўлиши керак ва $n-1=7$ бўлиши керак. Агар $n-1\ne 7$ бўлса, $n-1=7\kappa$ (κ°N) бўлади ва суратдаги ифода мураккаб сон бўлади. Шунга кўра $n=8$ бўлсагина масала шарти бажарилади.

Жавоб: А.

16. Агар $\sin 1°\cdot\sin 2°\cdot\sin 3°\cdot K\cdot\sin 179°=a$ бўлса, $\cos 1°\cdot\cos 2°\cdot\cos 3°\cdot K\cdot\cos 89°$ ни a орқали ифодаланг.

A) $\sqrt{1-a}$ B) a C) $\sqrt{1-a^2}$ D) $\sqrt{a}$ E) a^2

Ечилиши:

$\sin 1° = \sin\ (90° - 89°) = \cos 89°$

$\sin 2° = \sin\ (90° - 88°) = \cos 88°$

$\sin 89° = \sin\ (90° - 89°) = \cos 1°.$

$\sin 90° = 1$

$\sin 91° = \cos 1°$

$\sin 179° = \sin\ (90° + 89°) = \cos 89°$

Ҳосил бўлган ифодада тенгликнинг ўнг ва чап томонларини ҳадма-ҳад кўпайтириб $\sin\ 1° \cdot \sin\ 2° \cdot \sin\ 3° \cdot K\ \cdot \sin 179° =$ $(\cos\ 1° \cdot \cos\ 2° \cdot \cos\ 3° \cdot K\ \cdot \cos 89°)^2 a$; $\cos\ 1° \cdot \cos\ 2° \cdot \cos\ 3° \cdot K\ \cdot \cos 89° = \sqrt{a}$ бўлишини топамиз.

Жавоб: D.

17. $x^2 + 4x + a = 0$ тенгламанинг илдизлари x_1 ва x_2, $y^2 + 8y + в = 0$ тенгламанинг илдизлари y_1 ва y_2. Агар y_1, x_1, y_2, x_2 арифметик прогрессия бўлса, у ҳолда $в - a$ ни топинг.

A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20

Ечилиши: y_1, x_1, y_2, x_2 арифметик прогрессияни ташкил қилгани учун $x_2 - x_1 + 2d$, $x_1 = y_1 + d$, $y_2 = x_1 + d$, $y_2 = y_1 + 2d$.

Энди биринчи тенгламадан Виет теоремасига кўра:

$x_1 + x_2 =$ м4, $x_1 + x_1 + 2d = -4$, $x_1 + d = -2$, $y_2 = -2$

Иккинчи тенгламадан Виет теоремасига кўра

$y_1 + y_2 = -8$, $y_1 + y_1 + 2d = -8$, $y_1 + d = -4$, $x_1 = -4$

$x_1 = -4$ ва $y_2 = -2$ эканидан $y_1 = 6$ ва $x_2 = 0$ экани келиб чиқади (арифметик прогрессия бўлгани учун). У ҳолда $x_1\ x_2 = a$ дан $a = 0$, $y_1\ y_2 = в$ дан $в = 12$ бўлади ва ушбу $в - a = 12 - 0 = 12$ жавобни оламиз.

Жавоб: C.

18. $5^{|1-4x^2|} = \sin \pi x$ тенгламани ечинг.

A) ±5 B) 0,5 C) –0,5 D) 0 E) Ечимга эга эмас.

Ечилиши. Берилган тенглама ушбу:

$$\begin{cases} 5^{|1-4x^2|}=1 \\ \sin\pi x=1 \\ 1-4x^2\geq 0 \end{cases}$$ тенгламалар системасига тенг кучли. У ҳолда:

$$\begin{cases} 5^{1-4x^2}=1 \\ \sin\pi x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4x^2=0 \\ x=2k+\frac{1}{2}, k\epsilon z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=2k+\frac{1}{2}; k\epsilon z. \end{cases}$$

Охирги система $к = 0$ да ечимга эга.

Жавоб: В.

19. Ўрта чизиғи 5 га тенг бўлган тенг ёнли трапециянинг диагоналлари асос билан 45^0 ли бурчак ташкил қилади. Трапециянинг юзини топинг.

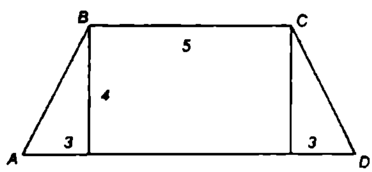
A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

Ечилиши. Тенг ёнли трапециянинг кичик асоси учидан катта асосига туширилган баландлик катта асосни икки қисмга бўлади. Улардан каттаси трапециянинг ўрта чизиғига тенг бўлади. Агар трапеция диагоналлари асос билан 45^0 ли бурчак ҳосил қилса (бу ҳолда диагоналлар ўзаро перпендикуляр бўлади), ўрта чизиқ трапециянинг баландлигига тенг бўлади. Шундай экан, берилган тенг ёнли трапециянинг юзи:

$S = MN\cdot h = MN\cdot MN = 5\cdot 5 = 25.$

Жавоб: Е.

20. Тенг ёнли трапециянинг ён томони ва кичик асоси 5 га, баландлиги эса 4 га тенг.



Трапециянинг юзи 20 дан қанча кўп?

A) 19 B) 22 C) 18 D 24 E) 12

Ечилиши: Шаклдан мулоҳаза юритиб, $S=\frac{5+11}{2}\cdot 4=16\cdot 2=32$

12 та кўп эканини топамиз.

Жавоб: Е

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН ТЕСТЛАРДАН НАМУНАЛАР

1. Тенгсизликни ечинг: $(x^2 + x + 1) < 1$.

A)$(-\infty; 1)$ B)$(-\infty; -1)$ C)$(1; \infty)$ D)$\varnothing$

2. Агар $\log_{ab} a = n$ бўлса, $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$ ни ҳисобланг.

A)$\frac{1}{a}$ B)$2a$ C)$\frac{5n-3}{6}$ D)$\frac{6a-5}{3}$

3. Тенгламани ечинг:

$$\frac{\lg x^2}{(\lg x)^2} + \frac{\lg x^3}{(\lg x)^3} + \frac{\lg x^4}{(\lg x)^4} + \ldots = 8$$

A)$10\sqrt{10}$ B)$2\sqrt{10}$ C)$10\sqrt{2}$ D)3

4. a параметрнинг қандай қийматларида тенглама ягона мусбат ечимга эга бўлади?

A)1 B)2 C)3 D)4

5. Ҳисобланг:

$$\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{1}{3\sqrt{11}} + \arcsin\frac{3}{\sqrt{11}}$$

A)$\frac{\pi}{3}$ B)$\frac{\pi}{4}$ C)$\frac{\pi}{2}$ D)$\frac{\pi}{8}$

6. Тоқ сонлардан (1), (3,5), (7,9,11)... каби гуруҳлар тузилган. 100-гуруҳдаги сонлар йиғиндисини топинг.

A)9702998 B)922368 C)1000000 D)10000000

7. Ҳисобланг:

$$\sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \sin^4\frac{7\pi}{8}$$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) 6,5

8. $x^2 + mx + n = 0$ тенгламани ечмасдан илдизлари кубларининг йиғиндисини топинг.

A) $m(3n - m^2)$ B) $m(2m+n)$ C) m^3+n^3 D) $m(m^2 - 3n)$

9. $\frac{1}{tg^2\alpha} + \frac{1}{ctg^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 7$ бўлса, $\sin^2 2\alpha$ ни топинг.

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{8}{9}$

10. Тенг ёнли трапециянинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр ва ўрта чизиғи k га тенг. Трапециянинг юзини топинг.

A) $2k$ B) $3k^2$ C) k^2 D) $3k$

11. a нинг қандай қийматида $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq a$ тенгсизлик ўринли бўлади?

A) 3 B) 2 C) 9 D) 7

12. $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = m$ айният бўлса, m ни топинг.

A) 1 B) 2 C) -2 D) 4

13. $\frac{1}{(5 - \sqrt{3})^5}$ махражни иррационалликдан қутқаринг.

A) $\frac{5 + \sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{5 - \sqrt{3}}{5^{22}}$ C) $\frac{5 + \sqrt{3}}{22^5}$ D) $\frac{5 + \sqrt{3}}{5^{20}}$

14. Касрнинг махражини иррационалликдан қутқаринг:

$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}$

A) $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ B) $\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{9}$ C) $\sqrt[3]{3} - 1$ D) $1 - \sqrt[3]{3}$

15. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=1$ тенглама нечта бутун мусбат ечимга эга?

A) 4 B) чексиз кўп C) $\varnothing$ D) 1

16. a нинг қандай қийматларида $x^2-4x-\log_2 a=0$ тенгламанинг илдизлари ҳақиқий бўлади?

A) $[2^4;\ \infty)$ B) $[2^{-4};\ \infty)$ C) $(0;\infty)$ D) $\varnothing$

17. Агар $a>b>0$ ва $a^2+b^2=6ab$ бўлса, $\lg(a+b)-\lg(a-b)$ нимага тенг?

A)lg3 B)0,5Mlg2 C)lg4 D)0,5Mln2

18. $|x|+|y|<100$ тенгсизлик бутун сонларда нечта ечимга эга?

A)19601 B)19701 C)19801 D)10

19. $3^{333}+1$ сонини 5 га бўлгандаги қолдиқни топинг.

A)4 B)2 C)1 D)3

20. $16x-34y=7$ тенглама бутун сонларда нечта ечимга эга?

A)2 B)3 C)4 D)5

21. $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12$ кўпҳаддан квадрат илдиз чиқаринг.

A) $x^2+\frac{1}{x^2}-4$ B) $x^2+\frac{1}{x^2}$ C) $x+\frac{1}{x}-4$ D) -2

22. $y=tgx\cdot ctgx+2\cos^2\frac{x}{2}$ функциянинг қийматлар соҳасини топинг.

A)$(1;2)\cup(2;3)$ B)$(2;3)$ C)$(1;2)\cup(2;4]$ D)$(1;3)$

23. Агар $x^2+mx+m^2+a=0$ тенгламанинг илдизлари α ва β бўлса, $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+\alpha$ нинг қийматини топинг.

A)1 B)0 C)2 D)4

24. $30x^4-17x^3-228x^2+17x+30=0$ тенгламанинг илдизлари кўпайтмасини топинг.

A)2 B)–2 C)1 D)–1

25. $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^0-\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}+\sqrt{16}$ тенглама ҳақиқий сонлар тўпламида нечта илдизга тенг?

A)1 B)2 C)4 D)5

26. Агар иккита соннинг айирмаси, квадратларининг айирмаси, кубларининг айирмаси 1:3:7 каби нисбатда эканлиги маълум бўлса, шу сонларнинг ўрта арифметигини топинг.

A) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ B)3 C) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ D) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$

27. Уч хонали сонни хоналари тескари тартибда ёзилса, 99 га камаяди. Рақамлари йиғиндиси 14 га тенг ва ўртада турган рақам қолган рақамлари йиғиндисига тенг. Шу соннинг рақамлари кўпайтмасини топинг.

A)48 B)84 C)120 D)68

28. Соддалаштиринг:

$$\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_2^2 3}+\frac{1}{\log_2^3 3}+\frac{1}{\log_2^4 3}$$

A)$10\log_2 3$ B)$9\log_2 3$ C)$10\log_3 2$ D)$9\log_3 2$

29. Тенгламани ечинг: $m^1\cdot m^3\cdot m^5\cdot\ldots\cdot m^{2x-1}=n$, бунда $m>1$.

A) $\sqrt{\frac{\lg m}{\lg n}}$ B) $\sqrt{\lg m}$ C) $\sqrt{\lg m\cdot\lg n}$ D) $\sqrt{\frac{\lg n}{\lg m}}$

30. n нинг қандай ҳақиқий қийматларида $\left|\frac{x^2-nx+1}{x^2+x+1}\right|<3$

тенгсизлик x нинг барча қийматларида ўринли бўлади?

A) $-5<n<1$ B) $n>5$

C) $-5n<1$ D) $-5<n<-1$

31. Ҳисобланг: $S=(m^2-n^2)+(m+n)+\frac{m+n}{m-n}+\ldots$ Бунда: $m-n>1$.

A) $\frac{(m-n)^2(m+n)}{m-n-1}$ B) $\frac{(m-n)(m+n)^2}{m-n-1}$

C) $\frac{(m-n)(m+n)^2}{m-n+1}$ D) $\frac{(m-n)(m+n)}{m+n+1}$.

32. «Математика» сўзидан нечта анаграмма тузиш мумкин?

A)152200 B)151200 C)152300 D)150300

33. Тенгламалар системасининг ечими $(x;\ y)$ бўлса, $x:y$ ни топинг.

$$\begin{cases} x^{\log_y x} \quad y=x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y\cdot\log_y(y-3x)=1 \end{cases}$$

A)2 B)3 C)4 D)5

34. $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}>\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}$ тенгсизлик нечта бутун ечимга эга?

A)2 B)4 C)3 D)6

35. Агар $x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}$ бўлса, x^3+3^x-14 нимага тенг?

A)0 B)1 C)2 D)3

36. Тенгламанинг илдизи 10 дан қанча кам?

$$x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x...}}}}=4$$

A)4 B)8 C)6 D)10

37. Тенгламанинг илдизлари йиғиндисини топинг:

$$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{x+z+1}=\frac{z}{x+y-1}=x+y+z$$

A)1,5 B)2,5 C)0,5 D)0,8

38. $(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)+10$ ифоданинг энг кичик қийматини топинг.

A)5 B)4 C)0,5 D)9

39. Қавсларни очгандан сўнг ҳосил бўлган кўпҳаднинг коэффициентлари йиғиндисини топинг.

$$(7x^7-6x^6+5x^5-4x^4+x^3-2)^{2007}$$

A)1 B)2 C)2007 D)2006

40. $arctg\frac{x}{2}+arctg\frac{x}{3}=arctgx$ тенглама нечта ечимга эга?

A)2 B)3 C)4 D)5

41. Йиғиндини ҳисобланг:

$$\lg(2tg1^0)+\lg(2^3tg3^0)+...+\lg(2^{89}tg89^0)$$

A) 2^{3025} B) 2^{1025} C) 2^{4025} D) 2^{2025}

42. k нинг қандай қийматларида $x|x-2k|-1-k=0$ тенглама ягона ечимга эга бўлади?

A) $\left(-1;\ \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ B) $\left(-1;\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ C) $\varnothing$ D) $\left(-1;\ \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$

43. $\sin x = 0{,}001$ тенглама $[-\pi;\ 5\pi]$ кесмада нечта ечимга эга?

A)4 B)3 C)6 D)2

44. Соат 17^{00}. Неча минутдан кейин соат кўрсаткичи минут кўрсаткичи билан устма-уст тушади?

A)27 B)28 C)27,5 D)27,6

45. Агар $2^P \cdot 5^K = 20$ ва $2^K \cdot 5^P = 5000$ бўлса, $P+K$ ни топинг.

A)6 B)4 C)5 D)8

46. $(0{,}027)^{0,(3)} = x - 2{,}7$ тенгламани ечинг.

A)4 B)3 C)5 D)8

47. $m^3 - m - 1 = 0$ бўлса, m^7 ни топинг.

A) $2m^2 + 2m + 1$ B) $m + 1$ C) $m^2 + 2m + 3$ D) $(m-1)^2$

48. $tg258^0 = m$ бўлса, $ctg24^0$ ни топинг.

A) $\dfrac{m^2-1}{4}$ B) $\dfrac{m^2-1}{m}$ C) $2m$ D) $5m+1$

49. $4^{1000} + 4^{27} + 4^m$ сони тўла квадрат бўладиган m нинг энг катта бутун қийматини топинг.

A)1972 B)1980 C)2006 D)2008

50. $\begin{cases} 2^x \ge 4^{\frac{x}{x-1}} \\ -5 \ge x \ge 10 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи бутун сонлар нечта?

A)10 B)7 C)9 D)6

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН БЕРИЛГАН ТЕСТ НАМУНАСИНИНГ ЖАВОБЛАР КАЛИТИ

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		B	C	A	D	C	C	A	A	D
1	C	B	A	C	A	C	B	B	C	A
2	D	D	A	B	C	A	A	B	C	D
3	D	A	B	C	A	A	B	C	D	A
4	B	D	B	C	B	C	B	A	D	A
5	C									

МУНДАРИЖА

Умид ИСМОИЛОВ

МАТЕМАТИКАДАН
ОЛИМПИАДА МАСАЛАЛАРИ

Муҳаррир
Гавҳар Мирзаева

Бадиий муҳаррир
Баҳриддин Бозоров

Техник муҳаррир
Елена Демченко

Мусаҳҳиҳ
Илҳом Қосимов

Саҳифаловчи
Андрей Маточенко

Оригинал макет "El-Press" МЧЖда тайёрланди

Босишга 21.05.2007 й.да рухсат этилди.
Гарнитура Times Uzb 95. Бичими 84x108 1/32.
Босма табоғи 3,625. Шартли босма табоғи 6,09.
Адади 2000 нусха. Буюртма № 141
Баҳоси келишилган нархда.

«Янги аср авлоди» нашриёт-матбаа марказида тайёрланди.
«Ёшлар матбуоти» босмахонасида босилди.
700113. Тошкент, Чилонзор–8, Қатортол кўчаси, 60.

Мурожаат учун телефонлар:
Нашр бўлими: 278-36-89; маркетинг бўлими: 128-78-43
Факс: 173-00-14; e-mail: yangiasravlodi@mail.ru

2000.=

УМИД КАРИМОВИЧ ИСМОИЛОВ

Математикадан «Ностандарт масалаларни ечиш» ва «Олий ўкув юртларига кирувчилар учун математикадан кулланма» методик кулланмалари муаллифи, Ўзбекистон Республикаси халк таълими аълочиси.

1

Халк таълимини ривожлантириш ва математика фанини укитиш методикаси буйича матбуотда кўплаб илмий-методик маколалари чоп килинган, 2006 йилда лотин алифбосида «Эртакларда математика», «Математик жумбоклар», «Ўйнаб топ ва уйлаб топ» китоблари нашр этилди.

ISBN 978-9943-08-108-6

9 789943 081086