UMAROV A.Yu.

MATEMATIKA DARSLARIDA BILISHNING TURLARI VA XULOSA CHIQARISH METODLARIDAN FOYDALANISH METODIKASI

LLANMA

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI

NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA
UNIVERSITETI

UMAROV A.Yu.

MATEMATIKA DARSLARIDA BILISHNING TURLARI VA XULOSA CHIQARISH METODLARIDAN FOYDALANISH METODIKASI

USLUBIY QO'LLANMA

Toshkent 2021

Umarov A.Yu. Matematika darslarida bilishning turlari va xulosa chiqarish metodlaridan foydalanish metodikasi. Uslubiy qo'llanma

Taqrizchilar

F.A.Raxmatova	Jizzax davlat pedagogika instituti dotsenti, pedagogika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)
N.M.Muxitdinova	Toshkent davlat pedagogika universiteti dotsenti, pedagogika fanlari nomzodi

Ushbu metodik qo'llanma matematika fakulteti talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, unda matematika darslarida bilishning turlari va xulosa chiqarish metodlaridan foydalanish metodikasi keltirilgan.

Usuliy qo'llanma universitet o'quv-uslubiy kengashining 2021-yil 19-avgustdagi 1/ 4.1.2.g'sonli qarori bilan nashrga tavsiya etilgan.

Universitetlarning matematika fakulteti bakalavr yo'nalishidagi talabalari uchun metodik qo'llanma – T.: Zuxra Baraka, 2021 y.

KIRISH

Mamlakatimizda matematika ilm-fanni rivojlantirishning ustuvor yo'nalishlaridan biri sifatida belgilandi. O'tgan davr ichida matematika ilm-fani va ta'limini yangi sifat bosqichiga olib chiqishga qaratilgan qator tizimli ishlar amalga oshirildi:

Ilg'or ilmiy markazlarda faoliyat yuritayotgan vatandosh matematik olimlarning taklif qilinishi va xalqaro ilmiy-tadqiqotlar olib borilishi uchun zarur shart-sharoit yaratildi;

Xalqaro fan olimpiadalarida g'olib bo'lgan yoshlarimiz va ularning murabbiy ustozlari mehnatini rag'batlantirish tizimi joriy etildi;

Oliy ta'lim va ilmiy-tadqiqotlarning o'zaro integratsiyalashuvini ta'minlash maqsadida Talabalar shaharchasida Fanlar akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining (keyingi o'rinlarda — Institut) yangi va zamonaviy binosi barpo etildi. Matematika sohasidagi fundamental tadqiqotlarni moliyalashtirish hajmi bir yarim barobarga oshirildi, budjet mablag'lari hisobidan superkompyuter, zamonaviy texnika va asbob uskunalar xarid qilindi;

ilmiy darajali kadrlarni tayyorlashning birlamchi bosqichi sifatida stajor-tadqiqotlik instituti joriy etildi;

ilm-fan sohasidagi ustuvor muammolarni tezkor bartaraf etish, fan, ta'lim va ishlab chiqarish integratsiyasini kuchaytirish masalasini Hukumat darajasida belgilash maqsadida O'zbekiston Respublikasining Bosh vaziri raisiligida Fan va texnologiyalar bo'yicha respublika kengashi tashkil etildi.

Shu bilan birga, sohada yechimini topmagan qator masalalar matematika sohasidagi ta'lim sifati va ilmiy-tadqiqot samaradorligini oshirishga qaratilgan chora-tadbirlarni amalga oshirish zaruratini ko'rsatmoqda. Jumladan:

matematika ta'limotining ta'lim olish bosqichlari o'rtasidagi uzviylik to'liq ta'minlanmagan;

umumta'lim maktablarida matematika darsliklari o'quvchilarning yoshiga nisbatan fanni o'zlashtirishni qiyinlashtiruvchi murakkab masalalardan iborat va boshqa fanlarda o'tiladigan mavzular bilan uyg'unlashtirilmagan;

matematikaga qiziquvchan, xalqaro olimpiadalar g'oliblari bo'lgan aksariyat iqtidorli yoshlarimiz hududlardan bo'lishiga qaramasdan ularning kelgusi rivojlanishi uchun oliy ta'lim va ilm-fan sohasida zarur shart-sharoit yaratib berilmagan;

matematika sohasidagi ilmiy-tadqiqotning amaliyot va ishlab chiqarish bilan bog'liqligi zaifligicha saqlanib qolmoqda;

sohadagi olimlarning xorijiy ilmiy va ta'lim muassasalari bilan aloqalari milliy matematikani jahon miqyosiga olib chiqish, xalqaro hamjamiyatda nufuzini oshirish uchun yetarli emas.

Ta'limning barcha bosqichlarida matematika fanini o'qitish tizimini yanada takomillashtirish, pedagoglarning samarali mehnatini qo'llab-quvvatlash, ilmiy-tadqiqot ishlarining ko'lamini kengaytirish va amaliy ahamiyatini oshirish, xalqaro hamjamiyat bilan aloqalarni mustahkamlash,bugungi kundagi muhim vazifamiz sanaladi.

Mazkur metodik qo'llanma matematika fakulteti talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, unda matematika darslarida bilishning turlari va xulosa chiqarish metodlaridan foydalanish metodikasi keltirilgan.

Bugungi kunda ta'lim muassasalarining barcha bo'g'inlarida talabalarning mustaqil ish bilan shug'ullanishiga asosiy e'tibor qaratilgan bir davrda mazkur qo'llanma talabalarni zaruriy matematik ma'lumotlar bilan qurollantirishga ko'makchi vazifasini bajaradi.

1-§. Matematik tushuncha

Biz ta`lim deyilganda o`qituvchi bilan o`quvchilar orasidagi ongli va maqsadga tomon yo`naltirilgan bilishga doir faoliyatni tushunamiz. Har qanday ta'lim o`z oldiga ikkita maqsadni qo`yadi.

1) O`quvchilarga dastur asosida o`rganilishi lozim bo`lgan zarur bilimlar sistemasini berish.

2) Matematik bilimlarni berish orqali o`quvchilarning mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini shakllantirish.

Ta'lim jarayonidagi ana shu ikki maqsad amalga oshishi uchun o`qituvchi har bir o`rgatilayotgan tushunchani psixologik, pedagogik va didaktik qonuniyatlar asosida tushuntirishi kerak. Buning natijasida o`quvchilar ongida **bilish** deb ataluvchi psixologik jarayon hosil bo`ladi.

Bizga falsafa kursidan ma'lumki, bilish jarayoni «jonli mushohadadan abstrakt tafakkurga va undan amaliyotga demakdir». Bundan ko`rinadiki bilish jarayoni tafakkur qilishga bog`liq ekan. «Tafakkur - inson ongida ob'ektiv olamning aktiv aks etishi demakdir» (Yu.M.Kolyagin. «Matematika o`qitish metodikasi, M., 1980 y, 57-bet).

Psixologik nuqtai nazardan qaraganda bilish jarayoni ikki xil bo`ladi:

1) **Hissiy bilish** (sezgi, idrok va tasavvur).

Insonning hissiy bilishi uning sezgi va tasavvurlarida o`z ifodasini topadi. Inson sezgi a'zolari vositasida real dunyo bilan o`zaro aloqada bo`ladi. Bilish jarayonida sezgilar bilan birga idrok ham ishtirok etadi. Sezgilar natijasida ob'ektiv olamning sub'ektiv obrazi hosil bo`ladi, ana shu sub'ektiv obrazning inson ongida butunicha aks etishi idrok deb ataladi.

Tashqi olamdagi narsa va hodisalar inson miya po`stlog`ida sezish va idrok qilish orqali ma`lum bir iz qoldiradi. Oradan ma`lum bir vaqt o`tgach, ana shu izlar jadallashishi va biror narsa yoki hodisaning sub'ektiv obrazi sifatida qayta tiklanishi mumkin. Ana shu ob'ektiv olamning sub'ektiv obrazining ma'lum vaqt o`tgandan keyin qayta tiklanish jarayoni tasavvur deb ataladi.

2) **Mantiqiy bilish** (tushuncha, hukm va xulosa).

Har qanday mantiqiy bilish hissiy bilish orqali amalga oshadi, shuning uchun ham hap bir o`rganilayotgan matematik ob'ektdagi narsalar seziladi, abstrakt nuqtai nazardan idrok va tasavvur qilinadi, so`ngra ana shu o`rganilayotgan ob'ektdagi narsa to`g`risida ma'lum bir matematik tushuncha hosil bo`ladi.

T a ' r i f. *Matematik ob`ektdagi narsalarning asosiy xossalarini aks ettiruvchi tafakkur formasiga matematik tushuncha deyiladi.*

Har bir matematik tushuncha o`zining ikki tomoni, ya'ni mazmuni va hajmi bilan xarakterlanadi.

T a ' r i f. *Tushunchaning mazmuni deb, ana shu tushunchani ifodalovchi asosiy, xossalar to`plamiga aytiladi.*

Masalan, to`g`ri to`rtburchak tushunchasini olaylik. To`g`ri to`rtburchak tushunchasining mazmuni quyidagi asosiy xossalar to`plamidan iboratdir:

1) To`g`ri to`rtburchak diagonali uni ikkita uchburchakka ajratadi.

2) Ichki qarama-qarshi burchaklarining yig`indisi 180^0 ga teng.

3) Diagonallari bir nuqtada kesishadi va shu nuqtada teng ikkiga bo`linadi.

T a ' r i f. *Tushunchaning hajmi deb, ana shu tushunchaga kirgan barcha ob'ektlar to`plamiga aytiladi.*

Masalan, to`rtburchak tushunchasining hajmi shu to`rtburchak tushunchasiga kirgan barcha to`rtburchak turlaridan, ya'ni parallelogramm, kvadrat, romb va trapetsiyadan iborat bo`ladi. Bundan to`rtburchak tushunchasining hajmi tomonlari uzunliklarining kattaligi turlicha bo`lgan barcha katta-kichik to`rtburchaklar tashkil qilishi ko`rinadi.

Bizga hajm jihatidan keng va mazmun jihatidan tor bo`lgan tushunchani jins tushunchasi, aksincha esa hajmi tor va mazmuni keng bo`lgan tushunchani tur tushunchasi deb yuritilishi psixologiya fanidan ma`lum.

1 - m i s o l. Akslantirish tushunchasini olaylik. Bu tushunchadan ikkita, ya'ni qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalari kelib chiqadi. Bu yerda akslantirish tushunchasi qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalariga nisbatan jins tushunchasi, qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirishlar esa akslantirish tushunchasiga nisbatan tur tushunchalari bo`ladi. Bu mulohazalardan jins tushunchasi tur tushunchalariga nisbatan hajm jihatidan keng va mazmun jihatidan tor tushuncha ekani ko`rinadi.

2 - m i s o l. Ko`pburchak tushunchasini olaylik. Bu tushunchadan ikkita qabariq va botiq ko`pburchak tushunchalari kelib chiqadi. Ko`pburchak tushunchasi bu tushunchalariga nisbatan jins tushunchasi deb yuritiladi, chunki uning hajmi qabariq va botiq ko`pburchaklar hajmlaridan kattadir. qabariq va botiq ko`pburchaklar esa ko`pburchak tushunchasiga nisbatan tur tushunchalari deb yuritiladi, chunki ulardan hap birining hajmi ko`pburchak tushunchasining hajmidan kichik, ammo mazmunlari ko`pburchak tushunchasining mazmunidan katta.

2-§. Matematik tushunchalarni ta'riflash metodikasi.

Har bir fanda bo`lgani kabi matematika fanida ham ta`riflanadigan va ta'riflanmaydigan tushunchalar mavjud.

Maktab matematika kursida, shartli ravishda, ta'riflanmaydigan eng sodda tushunchalar qabul qilinadi. Jumladan, arifmetika kursida son tushunchasi va qo`shish amali, geometriya kursida esa tekislik, nuqta, masofa va to`g`ri chiziq tushunchalari ta'riflanmaydigan tushunchalardir. Bu tushunchalar yordamida boshqa matematik tushunchalar ta'riflanadi.

Ta'rif degan so`zning ma'nosi shundan iboratki, bunda qaralayotgan tushunchalarni boshqalaridan farqlashga, fanga kiritilgan yangi termin mazmunini oydinlashtirishga imkon beruvchi mantiqiy usul tushuniladi.

Tushunchaning ta'rifi ta'riflanuvchi tushuncha bilan ta'riflovchi tushunchalar orasidagi munosabatdan hosil bo`ladi.

Tushunchaning ta'rifi inglizcha definitsiya (definito) so`zidan olingan bo`lib, «chegara» degan yoki «biror narsaning oxiri» degan ma'noni bildiradi. Professor J.Ikromov o`zining «**Maktab matematika tili**» nomli kitobida tushunchalarning ta'rifini quyidagi turlarga ajratadi:

1) **Real ta'rif**. Bunda qaralayotgan tushunchaning shu gruppadagi tushunchalardan farqi ko`rsatib beriladi. Bunda ta'riflovchi va ta'riflanuvchi tushunchalar hajmlarining teng bo`lishi muhim rol o`ynaydi. Masalan: «Aylana deb tekislikning biror nuqtasidan masofasi berilgan masofadan katta bo`lmagan masofada yotuvchi nuqtalar to`plamiga aytiladi». Bu yerda ta'riflanuvchi tushuncha aylana tushunchasidir, ta'riflovchi tushunchalar esa tekislik, nuqta, masofa tushunchalaridir.

2) **Klassifikatsion ta'rif**. Bunda ta'riflanayotgan tushunchaning jins tushunchasi va uning tur jihatidan farqi ko`rsatilgan bo`ladi. Masalan, «kvadrat - barcha tomonlari teng bo`lgan to`g`ri to`rtburchakdir». Bu ta'rifda «to`g`ri to`rtburchak» tushunchasi «kvadrat»ning jins tushunchasi, «barcha tomonlari teng» esa tur jihatidan farqini ifoda qiladi.

3) **Genetik ta'rif** yoki **induktiv ta'rif**. Bunda asosan tushunchaning hosil bo`lish jarayoni ko`rsatiladi. Boshqacha qilib aytganda, tushunchaning hosil bo`lish jarayonini ko`rsatuvchi ta'rif genetik ta'rif deyiladi.

Bizga psixologiya kursidan ma'lumki, genetika so`zi grekcha *genesis* so`zidan olingan bo`lib «kelib chiqish» yoki «manba» degan ma'noni bildiradi.

Masalan: 1) To`g`ri burchakli uchburchakning bir kateti atrofida aylanishidan hosil bo`lgan jismni konus deyiladi.

2) To`g`ri burchakli trapetsiyaning balandligi atrofidan aylanishidan hosil bo`lgan jismni kesik konus deyiladi.

3) Doiraning diametri atrofida aylanishidan hosil bo`lgan jism shar deyiladi.

Yuqoridagilardan ko`rinadiki, tushunchalarni ta'riflashda har bir tushunchaning mazmuni beriladi, bu degan so`z tushunchaning asosiy alomatlari yoki muhim belgilarini sanab ko`rsatish demakdir. Demak, ta'rifda faqat ta'riflanadigan tushunchani boshqa turdagi tushunchalardan ajratib turadagan muhim belgilarigina ifodalanadi. Maktab matematika kursida tushunchalarning ta'rifi ikki usul bilan tuziladi:

1) Berilgan tushunchaning hajmiga kiruvchi barcha ob'ektlar to`plamiga asoslaniladi. Masalan, tekislikning (masofalarni o`zgartmagan holda) o`z-o`ziga akslanishi siljitish deyiladi. Bu yerda o`q va markaziy simmetriya, parallel ko`chirish va nuqta atrofida burish tushunchalari siljitish tushunchasining ob'ektiga kiruvchi tushunchalardir.

2) Berilgan tushunchalarning aniqlovchi alomatlar to`plamiga asoslaniladi. Bunday ta`rifni tuzishda tushunchaning barcha muhim alomatlari sanab o`tilmaydi, ammo ular tushunchaning mazmunini ochib berish uchun yetarli bo`lishi kerak. Masalan, parallelogrammning muhim alomatlari quyidagilardan iborat:

a) to`rtburchak;

b) qarama-qarshi tomonlari o`zaro teng va parallel;

v) diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo`linadi;

g) qarama-qarshi burchaklari teng;

Parallelogrammni ta'riflashda a) va b) alomatlar orqali quyidagi ta'rifni tuzish mumkin:

«Qarama-qarshi tomonlari o`zaro parallel va teng bo`lgan to`rtburchak parallelogramm deyiladi».

Endi a) va v) alomatlar orqali ta'rif tuzaylik: «diagonallari kesishib, kesishish nuqtasida teng ikkiga bo`linuvchi to`rtburchak parallelogramm deyiladi».

Aytilganlardan ma'lum bo`ladiki, tushunchani ta`riflashda tanlanadigan muhim alomatlar soni yetarlicha bo`lgandagina ta`riflanayotgan tushuncha haqidagi ta'rif to`g`ri chiqadi.

3-§. Matematik tushunchalarni kiritish metodikasi

Maktab matematika kursida matematik tushunchalar ikki xil usulda kiritiladi:

1) Aniq - induktiv metod. Bunda o`quvchilar avval o`qituvchining topshiriqlarini bajargan holda o`rganilayotgan tushunchaning umumiy xossalarini aniqlaydilar, so`ngra o`qituvchi rahbarligida ta'rifni mustaqil holda tuzishga harakat qiladilar. Yangi tushuncha kiritishning bu yo`li ayniqsa quyi sinflarda o`z samarasini beradi.

Bundan tashqari aniq induktiv yo`l orqali tushunchalarni kiritish jarayonida muammoli vaziyatlar hosil bo`ladi, buning natijasida o`quvchilarda mustaqil fikrlash qobiliyatlari shakllanadi. Fikrimizning dalili sifatida 6-sinfda o`rgatiladigan «parallel to`g`ri chiziqlar» tushunchasini aniq-induktiv metod orqali kiritish usulini ko`rib o`taylik.

O`rganish jarayonining bosqichlari	Tushuncha shakllanishining psixologik bosqichlari	O`rganilayotgan tushunchaning aniq modeli
1. Parallel to`g`ri chiziqlar tushunchasiga mos keluvchi misollarni kundalik hayotimizdan olish	Sezish va idrok qilish	ızg`ichning ikki qirg`og`idagi chiziqlar. Doskaning qarama-qarshi tomonlaridagi chiziqlar
2. Ana shu tushunchani ifodalovchi asosiy va asosiy bo`lmagan xossalarini aniqlash	Idrok qilishdan tasavvurga o`tish	1) To`g`ri chiziqlarning gorizontal joylashishi (asosiy bo`lmagan xossa)  2) Bu to`g`ri chiziqlar o`zaro bir xil uzoqlikda joylashgan (asosiy xossa) 3) To`g`ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega emas (asosiy xossa) 4) To`g`ri chiziqlarni ikki tomonga cheksiz davom ettirish mumkin (asosiy bo`lmagan xossa)
3. Agar mavjud bo`lsa, bu tushunchaning muhim holatlarni ham qaraladi.		Ustma-ust tushuvchi to`g`ri chiziqlar ham bir-biridan bir xil masofada joylashgan bo`ladi (masofa qiymati 0 ga teng)
4. Parallel so`zining mazmuni		Parallel so`zi grekcha so`z paralelos bo`lib, yonma-yon boruvchi degan ma'noni bildiradi
5. Parallel to`g`ri chiziqlar tushunchasining asosiy xossasini ajratish va uni ta'riflash	Tasavvurdan tushunchani hosil qilishga o`tish	1) Bir-biridan bir xil uzoqlikdagi masofada turuvchi to`g`ri chiziqlar jufti parallel to`g`ri chiziqlar deyiladi (aniq bo`lmagan ta'rif, chunki biror burchakning tomonlari ham shu burchak bissektrisasiga nisbatan bir xil uzoqlikda joylashgan bo`ladi) 2) Parallel to`g`ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega bo`lmaydi (to`la bo`lmagan ta'rif, chunki, kesishmaydigan to`g`ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega bo`lmaydi). 3) **T a ' r i f**. *Bir tekislikda yotib umumiy nuqtaga ega bo`lmagan yoki ustma-ust tushuvchi ikki*

		to`g`ri chiziq parallel to`g`ri chiziqlar deyiladi.
6. Parallel to`g`ri chiziqlar tushunchasini aniq misollarda ko`rsatish	Tushunchaning hosil bo`lishi	1) O`qituvchi sinf xonasining o`zaro parallel bo`lgan qirralarni ko`rsatadi.
7. Parrallel to`g`ri chiziqlarni simvolik belgilash	Tushunchani o`zlashtirish	2) Kubning modelini ko`rsatib, uning mos qirralaridan o`zaro ayqash bo`lgan to`g`ri chiziqlarni ko`rsatadi. Agar bizga a va b to`g`ri chiziqlar berilgan bo`lib, ular o`zaro parallel bo`lsa, uni biz $a \parallel b$ kabi belgilaymiz.

4-§. Matematik tushunchalarni kiritishning abstrakt-deduktiv metodi.

Bunda o`rganiladigan matematik tushuncha uchun ta'rif tayyor ko`rinishda oldindan aniq misol va masalalar yordamida tushuntirilmasdan kiritiladi. Masalan, 7-sinfda o`tiladigan to`la kvadrat tenglama tushunchasi abstrakt-deduktiv metod orqali kiritiladi.

1. Kvadrat tenglama tushuncqhasiga ta'rif beriladi.

T a ' r i f . $ax^2+bx+c=0$ ko`rinishidagi tenglamalar to`la kvadrat tenglama deyiladi. Bu yerda x - o`zgaruvchi, $a$, $b$, $s$- ixtiyoriy o`zgarmas sonlar, $a > 1$.

2) Kvadrat tenglamaning xususiy hollari ko`rib chiqiladi. Buni jadval tarzida bunday ifodalash mumkin.

To`la kvadrat tenglama

$ax^2 + bx + c = 0$

Keltirilgan kvadrat tenglama

$x^2 + px + q = 0$

Chala kvadrat tenglama

$(b=0)V(c=0)V(b=0 \wedge c=0)$

$ax^2 + c = 0$

$ax^2+bx=0$

$ax^2=0$

3. Hosil qilingan keltirilgan va chala kvadrat tenglamalarga aniq misollar keltiriladi. Masalan,

$$2x^2 - 3x - 4 = 0,\ x^2 - 5x - 6 = 0,$$
$$3x^2 + 5x = 0,\ 2x^2 + 7x = 0,\ 5x^2 = 0, \ldots$$

4. Kvadrat tenglama tadbiqiga doir hayotiy misollar keltirish kerak. Masalan, $s=\frac{gt^2}{2}$ formula fizika kursidan bizga ma'lum, bu tenglamani yechish $gt^2-2s=0$ ko`rinishidagi chala kvadrat tenglama holiga keltirib, so`ngra yechiladi.

5. Kvadrat tenglamaning ildizlarini hisoblash formulasini keltirib chiqarish.

1 - u s u l. $ax^2+bx+c=0$ tenglama ildizlari topilsin. Buning uchun quyidagi ayniy almashtirishlarni bajaramiz:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right]=$$

$$=a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=$$

$$=a\left[\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=$$

$$=a\left[\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0;\quad a\neq 0$$

$$\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2};$$

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$x_1=-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\quad x_2=-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2- u s u l.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$ax^2+bx=-c\ |\cdot 4a,$$

$$4a^2x^2+4abx=-4ac\ |+b^2,$$

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac,$$

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac;$$

$$2ax_{1,2}+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Agar $ax^2+bx+c=0$ da $a=1$ bo`lsa, $x^2+bx+c=0$ ko`rinishdagi kvadrat tenglama hosil bo`lib, uning yechimlari quyidagicha bo`ladi:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}=\frac{-b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}$$

Agar $b=p$; $c=q$ desak, $x^2+px+q=0$ bo`ladi, uning yechimlari

$$x_1 = \frac{-p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ va } x_2 = \frac{-p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

bo`ladi.

3 - u s u l . $x^2 + px + q = 0$ (1)

$$b^2 = q; \quad 2ab = p \text{ desak,}$$

$$b = \pm\sqrt{q}, \quad a = \pm\frac{p}{2\sqrt{q}}$$

bularni (1) ga qo`ysak, u quyidagi ko`rinishni oladi.

$$x^2 + 2abx + b^2 = 0 \qquad (2)$$

(2) ga a^2x^2 ni qo`shsak va ayirsak $x^2+2abx+b^2+a^2x^2-a^2x^2=0$ bo`ladi, $a^2x^2+2abx+b^2-a^2x^2+x^2=0$ yoki $(ax+b)^2-a^2x^2+x^2=0$ belgilashga ko`ra $b=\pm\sqrt{q};$ $a=\pm\frac{p}{2\sqrt{q}}$ edi, shuning uchun

$$\left(\frac{px}{2\sqrt{q}} + \sqrt{q}\right)^2 - \frac{p^2}{4q}x^2 + x^2 = 0;$$

$$(px+2q)^2 - p^2x^2 + 4qx^2 = 0;$$

$$px + 2q = \pm x\sqrt{p^2 - 4q};$$

$$2q = x(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q});$$

$$x_{1,2} = \frac{2q}{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}$$

1 - m i s o l. $x^2 - 3x - 10 = 0;$ $p = -3;$ $q = -10$

1 - u s u l. $x_{1,2} = \frac{-p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{-(-3)}{2} + \sqrt{\frac{(-3)^2}{4} - (-10)} = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$

$$x_1 = 5; \ x_2 = -2$$

2 - u s u l. $x_{1,2} = \frac{2q}{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}} = \frac{2\cdot(-10)}{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot(-10)}} = \frac{-20}{3 \pm 7}$

$$x_1 = 5; \ x_2 = -2$$

2 - m i s o l. $x^2 + 2x - 15 = 0;$

$$p = 2; \quad q = -15$$

$$x_{1,2} = \frac{2q}{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}} = \frac{2\cdot(-15)}{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot(-15)}} = \frac{-30}{-2 \pm 8}$$

$$x_1 = -5; \qquad x_2 = 3$$

3 - m i s o l. $3x^2-7=0$ bo`lsa,$(3x^2=7) \Rightarrow x^2 = \frac{7}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2\frac{1}{3}}$ bo`ladi.

4 - m i s o l. $2x^2 - 3x = 0$ bo`lsa, $[x(2x-3)=0]) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ bo`ladi.

5 - m i s o l. $2x^2 = 0$ bo`lsa, $x_{1,2} = 0$ bo`ladi.

5-§. Matematik hukm.

Matematik hukm mantiqiy bilish formalaridan biri bo`lib, unga quyidagicha ta'rif berilgan: *«Tushunchalar asosida hosil qilingan matematik fikrni tasdiqlash yoki inkor qilishga matematik hukm deyiladi».* Bu ta'rifdan ko`rinadiki, hukmning xarakterli xossasi aytilgan matematik fikrning to`g`riligini tasdiqlash yoki noto`g`riligini inkor qilishdan iborat ekan.

Matematik tushunchalarni tasdiqlash ma'nosidagi hukmga quyidagicha misollar keltirish mumkin:

1. Paralellogrammning qarama-qarshi tomonlari o`zaro parallel va teng.
2. Har qanday turdagi uchburchak uchta uchga ega.
3. Uchburchak ichki burchaklarning yig`indisi 180° ga teng.
4. Ko`pburchak ichki burchaklarining yig`indisi $2d(n-2)$ ga teng.

Matematik tushunchalarni inkor qilish ma'nosidagi hukmlarga quyidagi misollarni keltirish mumkin:

1. Har qanday uchburchakda ikki tomon uzunliklarining yig`indisi uchinchi tomon uzunligidan kichik emas.
2. Piramidadagi uch yoqli burchaklarning yig`indisi hech qachon o`zgarmas son bo`la olmaydi.
3. Har qanday to`rtburchakda ichki burchaklar yig`indisi 360° dan katta emas.

Bundan kelib chiqadiki, har qanday matematik gap ham matematik hukm bo`la olmas ekan. Masalan, «ABCD to`rtburchak paralellogramm bo`la oladimi?» «Ixtiyoriy uchburchak ichki burchaklarining yig`indisi 180° ga teng bo`la oladimi?». Keltirilgan ikkala misolda ham inkor va tasdiq ma'nosi yo`q, shuning uchun ular matematik hukmga misol bo`la olmaydi.

Matematik hukm uch xil bo`ladi:

1. Birlik hukm. 2. Xususiy hukm. 3. Umumiy hukm.

Matematikani o`qitish jarayonida yuqoridagi hukmlarning uchala turi uzviy aloqada bo`ladi. Boshqacha qilib aytganda, birlik hukmning natijasi sifatida xususiy hukm hosil qilinadi, xususiy hukmning natijasi sifatida esa umumiy hukm hosil qilinadi. Fikrlarimizning dalili sifatida quyidagi misolni ko`raylik. 1) Birlik hukmlar:

a) Aylana to`g`ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi.

b) Ellips to`g`ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi.

v) Giperbola to`g`ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi.

g) Parabola to`g`ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi.

2) Xususiy hukm: "Aylana, ellips, giperbola va parabolalar ikkinchi tartibli egri chiziqlar hosil qiladi". Yuqoridagi birlik va xususiy hukmlarga asoslanib, quyidagi umumiy hukmni hosil qilamiz.

3) Umumiy hukm: "Ikkinchi tartibli egri chiziqlar to`g`ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi".

6-§. Matematik xulosa.

Matematik xulosa ham mantiqiy tafakkur qilish shakllaridan biri. Matematik xulosaga bunday ta'rif berilgan:

«Ikkita qat'iy hukmdan hosil qilingan uchinchi natijaviy hukmga xulosa deyiladi».

M i s o l. 1-Hukm: to`rtburchakning diagonali uni ikkita uchburchakka ajratadi.

2-Hukm: Har bir uchburchak ichki burchaklarining yig`indisi 180^0 ga teng.

3-Hukm: Demak, to`rtburchak ichki burchaklarining yig`indisi 360^0 ga teng (xulosa bo`ladi).

Maktab matematika kursida xulosalarning uchta turi, ya'ni induktiv, deduktiv va analogik xulosalar o`rganiladi.

T a ' r i f. *Ayrim yoki xususuy ma'lumotlarga tayanib umumiy xulosa chiqarishni induksiya deyiladi.*

Induksiya uch xil bo`ladi: chala induksiya, to`la induksiya va matematik induksiya. Chala induksiya metodi orqali chiqarilgan xulosa ko`pgina hollarda to`g`ri, ammo ayrim hollarda noto`g`ri bo`ladi.

1 - m i s o l. Fermaning mashhur teoremasi bo`yicha $(2^{2^n}+1)$ ko`rinishdagi sonlar $n = [0,1,2,3,4, ...]$ bo`lganda 3, 5, 17, 257, 65537, ... kabi tub sonlardan iborat edi. Shuning uchun Ferma umumiy holda $(2^{2^n}+1)$ ko`rinishdagi barcha sonlar n ning ixtiyoriy qiymatlarida ham tub sonlar bo`ladi, deb umumiy xulosa chiqargan. XVIII asrda L.Eyler Ferma teoremasini tekshirib, uning qonuniyati: $n$=5 bo`lganda buzilishini, ya'ni hosil bo`lgan son murakkab son bo`lishini aniqlagan:

$(2^{2^5}+1) = 4294967297 = 641\cdot6700417.$

Bu degan so`z $(2^{2^5}+1)$ ifoda 641 ga bo`linadi, bundan $(2^{2^5}+1)$ tub son bo`lmay, balki murakkab son ekanligi kelib chiqadi. Demak, chala induksiya metodi orqali Fermaning $\forall n \in N$ bo`lganda $(2^{2^n}+1)$ ko`rinishdagi sonlar tub bo`ladi, degan xulosasi noto`g`ri ekan.

Induksiya metodi orqali xulosa chiqarish esa biror matematik qonuniyat uch hol uchun o`rinli bo`lganidan n - hol uchun o`rinli deb qabul qilinadi.

1-misol:

$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$ yig`indisini hisoblang

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2},$$
$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$
$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{6+2+1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Bu uchta xususiy yig`indiga asoslanib, umumiy xulosani yozamiz:

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

2-misol. Yig'indini hisoblang:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$

Yechish:Har bitta kasr uchun ixtiyoriy natural k uchun quyidagi tenglikni topib olamiz.

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}};$$

Bu tenglikdan qo'shiluvchilarni o'zgartirishda foydalanamiz:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = 1 - \frac{1}{10} = 0{,}9.$$

Maktab algebra kursida daraja va logarifmlar xossalari o`tilgandan so`ng ana shu xossalarga asoslanib o`quvchilar induktiv xulosa chiqarish yordamida daraja va logarifmlarning umumlashgan xossasini chiqarishlari mumkin.

3-misol.

$$a^{n_1}\cdot a^{n_2} = a^{n_1+n_2}$$
$$a^{n_1}\cdot a^{n_2}\cdot a^{n_3} = a^{n_1+n_2+n_3}$$
$$a^{n_1}\cdot a^{n_2}\cdot a^{n_3}\cdot a^{n_4} = a^{n_1+n_2+n_3+n_4}$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$a^{n_1}\cdot a^{n_2}\cdot a^{n_3}\cdot\ldots\cdot a^{n_k} = a^{n_1+n_2+n_3\ldots+n_k}$$

4-misol.

$lg(x_1\cdot x_2)=lgx_1+lgx_2$ agar $x_1>0 \wedge x_2>0$ bo`lsa,

$\lg(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) = \lg x_1 + \lg x_2 + \lg x_3$ agar $x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0$ bo`lsa,

$\lg(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) = \lg x_1 + \lg x_2 + \lg x_3 + \lg x_4$ agar $(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) > 0$ bo`lsa,

... ...

$\lg(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_n) = \lg x_1 + \lg x_2 + \lg x_3 + \ldots + \lg x_n$ agar $(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots x_n) > 0$ bo`lsa.

Matematik induksiya metodi. Bu metodda biror matematik qonuniyat $n = 1$ hol uchun o`rinli bo`lsa, uni $n = k$ hoi uchun o`rinli deb qabul qilib, so`ngra $n = k + 1$ hol uchun o`rinli ekanligini ko`rsatiladi.

1 - m i s o l. $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ yig`indining o`rinli ekanligini matematik induksiya metodi orqali ko`rsatilsin, bunda $n \in N$

1. Agar $n = 1$ bo`lsa, $S_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$.

2. Agar $n = k$ bo`lsa, $S_k = 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

3. Agar $n = k + 1$ bo`lsa,

$S_{k+1} = 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$ ekanligini isbotlaymiz.

Isboti. $S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$.

$A \neq V$ bo`lsa, $|AV| > 0$. $A = V$ bo`lsa, $|AV| = 0$.

Demak, $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ yig`indisi hisoblash formulasi to`g`ri ekan.

2-misol. $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in N$

1. Agar $n = 1$ bo`lsa, $S_1 = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1$.

2. Agar $n = k$ bo`lsa, $S_k = \frac{k \cdot (k+1)(2k+1)}{6}$.

3. Agar $n = k + 1$ bo`lsa, $S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

bo`lishligini isbotlang.

I s b o t i.

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k+1}{6}[k(2k+1) + 6(k+1)] = \frac{k+1}{6} \cdot [2k^2 + 7k + 6) =$$

$$= \frac{2(k+1)(k+2)\left(k + \frac{3}{2}\right)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

3 - m i s o l. $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $n \in N$

1. Agar $n = 1$ bo`lsa, $S_1 = \frac{1\cdot(1+1)^2}{4} = 1$.

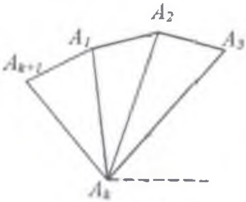
2. Agar $n = k$ bo`lsa, $S_k = \frac{k^2(k+1)}{4} = 1$.

3. Agar $n=k+1$ bo`lsa, $S_{k+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... k^3 + (k+1) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

bo`lishligini isbotlang.

Isboti. $S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)}{4} + (k+1)^2 = (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) =$

$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$



1-Chizma.

T ye o r ye m a. *Qabariq n burchak ichki burchaklarining yig`indisi 180° (n-2) ga teng.*

Bu teoremani matematik induksiya metodi bilan isbotlang. (1-chizma).

1. $n = 3$ bo`lganda $S_3 = 180°$.

2. $n = k$ bo`lganda $S_k=180°(k-2)$ bo`ladi.

Agar $n = k$ uchun $S_k=180°\ (k-2)$ bo`lca, $n = k + 1$ uchun

$S_{k+1} = 180°\ [(k+1)-2]$ bo`lishini isbotlang.

Bu holni isbot qilish uchun (k + 1) burchakli qavariq ko`pburchakni olamiz. $A_1A_k$ diagonal berilgan ko`pburchakni k burchakli qavariq $A_1A_2A_3...A_k$ ko`pburchakka va $A_1A_kA_{k+1}$ uchburchakka ajratadi, u holda $S_{k+1}=S_k+S_3$ tenglik o`rinli bo`ladi:

$S_{k+1}=180°(k-2)+180°=180°[(k-2)+1]=180°[(k+1)-2]$.

Demak, teorema har qanday qavariq n burchak uchun ham o`rinli ekan.

4 - m i s o l. Quyidagi tengsizlikni matematik induksiya metodi bilan isbotlang:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

I s b o t i. $n=1$, bo`lganda $1 = 1$ tenglik o`rinli.

$n = 2$ bo`lganda $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$ tengsizlik o`rinli.

Endi faraz qilaylik, berilgan tengsizlik $n = k$ uchun o`rinli, ya'ni $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$ bo`lsin, uning $n=k+1$ hol uchun o`rinli ekanini ko`rsatamiz:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

Bu tengsizlikni kuchaytirish uchun $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...\frac{1}{\sqrt{k}}$ o`rniga $\sqrt{k}$ ni qo`yamiz, u holda $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$ (1) bo`ladi. Bu tengsizlikni o`rinli ekanini ko`rsatsak, berilgan tengsizlik isbotlangan bo`ladi.

(1) ning har ikki tomoni kvadratga ko`taramiz, u holda

$$k+\frac{1}{k+1}+\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}>k+1,$$

$$\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}>\frac{k}{k+1}$$

tengsizlik hosil bo`ladi. Bu tengsizlikni har ikkala tomonini $\sqrt{\frac{k}{k+1}}$ ga bo`lsak, 2> $\sqrt{\frac{k}{k+1}}$ tengsizlik k ning k–1 dan boshqa qiymatlaridan o`rinli, shuning uchun

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

tengsizlik n ning hap qanday qiymatida ham o`rinli.

5 - m i s o l. (2n – 1)! > n! tengsizlikni matematik induksiya metodi bilan isbotlang.

I s b o t i. Bizga ma'lumki, (2n–1)! = 1·3·5·...·(2n–1)

1. n = 1 bo`lganda 1 = 1 tenglik o`rinli.

n = 2 bo`lganda 3 > 2 sonli tengsizlik hosil bo`ladi.

2. Endi berilgan tengsizlik $n = k$ hol uchun o`rinli, ya'ni (2k-1)! >k! deb, faraz qilaylik, buning $n = k + 1$ hol uchun o`rinli ekanini ko`rsatamiz:

{[2(k + 1) – 1]! > (k + 1)!} → (2k + 1)! > (k + 1)!

(2k–1)!>k! tengsizlikni har ikki tomonini k+1 ga ko`paytiramiz: u holda

k!(k+1)<(2k–1)!(k+1)<(2k–1)!(2k+1)=(2k+1)! ifoda hosil bo`ladi. Bundan esa (k+1)!<(2k + 1)!. Shuning uchun tengsizlik $n$ ning har qanday qiymatlarida o`rinli.

Tengsizliklarni isbotlang:

1. $\left(\frac{n}{2}\right)^n>n!$

2. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}...\frac{2n-1}{2n}\cdot\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

T a ' r i f: *Umumiy ma'lumotlarga tayanib ayrim yoki xususiy xulosa chiqarish deduksiya deyiladi.*

Misollar 1. $x^2-3x-4=0$ tenglamaning diskriminantini hisoblab, uning yechimlari borligini ko`rsating. $D=9+16=25$. $D>0$. Bizga ma'lumki, kvadrat tenglamani yechish haqidagi qoidaga ko`ra uning diskriminanti musbat bo`lsa, u ikkita haqiqiy har xil yechimga ega edi, shuning uchun $x^2-3x-4=0$ tenglama ham ikkita $x_1=4$ va $x_2=-1$ yechimlarga ega.

2. $\sqrt{81\cdot 0{,}09}$ ifodaning qiymatini hisoblang. Bu ifodaning qiymatini hisoblash uchun maktab algebra kursidan umumiy qonuniyatni o`z ichiga oluvchi quyidagi teoremadan foydalanamiz.

T ye o r ye m a. *$a\geq 0$ va $b\geq 0$ bo`lganda $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ bo`ladi.*

Shuning uchun quyidagi xulosani hosil qilamiz.

$$\sqrt{81\cdot 0{,}09}=\sqrt{81}\cdot\sqrt{0{,}09}=9\cdot 0{,}3=2{,}7$$

3. Maktab geometriya kursida kosinuslar teoremasining analitik ifodasi bunday:

$$s^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos c \qquad (1)$$

Agar (1) da s=90° bo`lsa, cos90°=0, shuning uchun $s^2=a^2+b^2$ (2) bo`ladi. Bizga ma'lumki, (2) Pifagor teoremasini ifodasidir.

Xulosa chiqarish metodlaridan yana biri bu analogiyadir.

T a ' r i f. *O`xshashlikka asoslanib xulosa chiqarish analogiya deyiladi.*

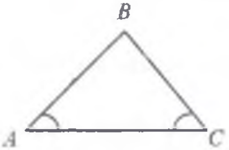
Analogiya bo`yicha xulosa chiqarishni sxematik ravishda quyidagicha tasvirlash mumkin: $F$ figura $a$, $b$, $c$, $d$, ... xossalarga ega. $F_1$ figura esa $a$, $b$, $s$, ... xossalarga ega bo`lsa, u holda F_1 figura ham d xossaga ega bo`lishi mumkin.

Fikrimizning dalili sifatida quyidagi tengsizlikni isbot qilaylik. Har qanday tetraedr uchun $\frac{1}{2}(|AB|+|BC|+|AC|)<|SA|+|SB|+|SC|$ tengsizlik o`rinli.

Bizga ma'lumki, fazodagi tetraedr figurasi tekislikda uchburchak figurasiga analogik figuradir, shuning uchun hap qanday uchburchak uchun o`rinli bo`lgan quyidagi xossadan foydalanamiz.

Har qanday uchburchakda ikki tomon uzunligining yig`indisi uchinchi tomon uzunligidan kattadir (2 chizma):

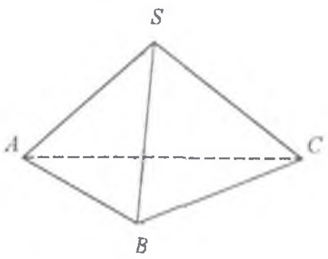
$$|AB|+|BC|>|AC|$$



Agar uchburchak uchun o`rinli bo`lgan ana shu xossani unga analogik bo`lgan figura tetraedrga tadbiq qilsak, quyidagi tengsizlik hosil bo`ladi (3 chizma):

$$\left.\begin{array}{l} |AB| < |SA| + |SB| \\ |BC| < |SB| + |SC| \\ |AC| < |SA| + |SC| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |AC|) < |SA| + |SB| + |SC|$$



7-§. Matematik hukmning turlari. Postulat.

Maktab matematika kursida matematik hukmning asosiy turlari quyidagilardan iborat: aksioma; postulat; teorema.

Aksioma grekcha axioma so`zidan olingan bo`lib, uning lug`aviy ma'nosi "obro`ga ega bo`lgan gap" demakdir. Shuning uchun ham aksiomaga maktab matematika kursida quyidagicha ta'rif berilgan:

«Isbotsiz qabul qilinadigan matematik hukm aksioma deyiladi».

Aksioma asosan eng sodda geometrik figura yoki sodda matematik qonuniyatlarning asosiy xossalarini ifodalovchi hukmdir. Masalan, maktab geometriya kursida o`rganish uchun qabul qilingan aksiomalarni qaraylik:

1. *«Tekislikda yotuvchi ixtiyoriy bir nuqtadan shu tekislikdagi to`g`ri chiziqqa parallel bo`lgan faqat bitta to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin».*

2. *«Tekislikdagi har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin».*

Bizga ma'lumki, matematika fani aksiomalar sistemasi asosida qurilgandir. Matematika fanining mantiqiy asosda qurilishini yaratish uchun aksiomalarning bo`lishligi haqida fikr Gretsiyada bundan ming yil avval paydo bo`lgan edi. XIX asrning oxiri va XX asrning boshlarida matematika fanining turli bo`limlarida aksiomalar chuqur o`rganildi va rivojlantirildi.

Matematika kursidagi aksiomalar sistemasi asosan quyidagi uchta talabga javob berishi kerak.

1. Aksioma sistemasi ziddiyatsiz bo`lishi kerak. Bu degan so`z, biror aksiomadan chiqarilgan natija shu aksioma yordamida hosil qilingan boshqa natijaga yoki boshqa aksiomadan chiqarilgan xulosaga zid kelmasligi kerak.

2. Aksiomalar sistemasi mustaqil bo`lishi kerak, ya'ni hech bir aksioma ikkinchi bir aksiomadan kelib chiqadigan bo`lmasligi kerak.

3. Aksiomalar sistemasi shu fanga oid istalgan bir yangi tushunchani isbot etish uchun yetarli bo`lishi kerak, ya'ni biror matematik jumlani isbotlashda hech qachon o`z-o`zidan tushunilishiga yoki tajribaga tayanilmaydi, bu matematik jumla boshqa teoremalar bilan, oxirida aksiomalar bilan asoslanishi kerak bo`ladi.

Maktab geometriya kursida quyidagi aksiomalar sistemasi mavjud.

1.Tegishlilik aksiomasi:

a) har qanday to`g`ri chiziq nuqtalar to`plamidan iboratdir.

b) har qanday ikki nuqtadan bitta va faqat bitta to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin.

v) har qanday to`g`ri chiziqni olmaylik, shu to`g`ri chiziqqa tegishli bo`lgan va tegishli bo`lmagan nuqtalar mavjud.

2. Masofa aksiomasi:

a) har bir kesmaning uzunligi shu kesmaning har qanday nuqtasi ajratgan masofalar uzunliklarining yig`indisiga teng: b) A nuqtadan B nuqtagacha bo`lgan masofa B nuqtadan A nuqtagacha bo`lgan masofaga teng: $|AV| = |BA|$.

v) Ixtiyoriy uchta A, V, S nuqta uchun A dan S gacha bo`lgan masofa A dan B gacha va B dan C gacha bo`lgan masofalar yig`indisidan katta emas: $|AC|\leq|AB|+|BC|$

3. Tartib aksiomasi:

a) To`g`ri chiziqdagi uchta nuqtadan bittasi va faqat bittasi qolgan ikkitasi orasida yotadi.

b) To`g`ri chiziq tekislikni ikki yarim tekislikka ajratadi.

4. Harakat aksiomasi:

a) Agar $|AV|$ masofa musbat bo`lib, u $|A_1V_1|$ masofaga teng bo`lsa, A nuqtani A_1 nuqta va B nuqtani B_1 nuqtaga akslantiruvchi faqat ikkita siljitish mumkin.

5. **Paralyellik aksiomasi**:

Berilgan nuqtadan to`g`ri chiziqqa bitta va faqat bitta parallel to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin.

"Postulat" so`zi lotincha so`z bo`lib, uning lug`aviy ma'nosi "talabni belgilovchi" demakdir. Postulat - bu ma'lum bir talab yoki shartlarni ifodalovchi matematik hukm bo`lib, bundagi talab va shartlarni ba'zi bir tushuncha yoki tushunchalar orasidagi munosabatlar orqali qanoatlantiradi.

1-misol. Yevklidning "Negizlar" kitobida paralellik aksiomasi "beshinchi postulat" deb atalgan. qadimgi matematiklar ana shu paralellik aksiomasini XIX acr boshlarigacha isbotlashga urinib keldilar. Bu urinishlar har doim muvaffaqiyatsizlik bilan tugadi. Paralellik aksiomasini to`g`riligi hech kimda shubha tug`dirmasa-da, uni mavjud aksiomalarning va ilgari isbot qilingan geometrik faktlarning asosi uchun qabul qilish mumkin emasmikan, ya'ni u o`zicha teoremadan iborat emasmikan, degan savol barcha matematiklarni qiziqtirar edi. Parallel to`g`ri chiziqlar aksiomasini teskarisidan faraz qilish usuli bilan, ya'ni nuqta orqali berilgan to`g`ri chiziqqa parallel bir nechta to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin, deb qabul qilib isbotlashga urinishlar matematik qonuniyatlarga zid bo`lgan holatlarni keltirib chiqarishi kerak edi, ammo bunday bo`lmadi. Buyuk rus matematigi N.I.Lobachevskiy va undan bexabar holda venger matematigi Ya.Boya nuqta orqali berilgan to`g`ri chiziqqa parallel bir necha to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin, degan farazni qabul qilib, boshqa "noevklid geometriya"ni qurish mumkinligini isbot qildilar. Lobachevskiy geometriyasi ana shunday dunyoga keldi.

2 - m i s o l. Munosabatlar ekvivalentligini ta'rifi ham quyidagi uchta postulat orqali ifodalanadi:

1) munosabat refleksiv bo`lishi kerak: $\forall a \in A : a \xrightarrow{f} a$

2) munosabat simmetrik bo`lishi kerak:

$$\forall a,b \in A : \left(a \xrightarrow{f} b\right) \Rightarrow \left(b \xrightarrow{f} a\right)$$

3) munosabat tranzitiv bo`lishi kerak:

$$\forall a,\, b,\, c \in A : [\ \left(a \xrightarrow{f} b\right) \wedge \left(b \xrightarrow{f} c\right) \Rightarrow \left(a \xrightarrow{f} c\right)$$

8-§. Teorema va uning turlari.

Teorema so`zi grekcha so`z bo`lib, uning lug`aviy ma'nosi "qarab chiqaman" yoki «o`ylab ko`raman» demakdir, shuning uchun ham maktab matematika kursida teoremaga quyidagicha ta'rif berilgan:

"Isbotlashni talab etadigan matematik hukm teorema deyiladi".

Maktab matematika kursida teoremalarning quyidagi turlari mavjuddir:

1. To`g`ri teorema.
2. Teskari teorema.
3. To`g`ri teoremaga qarama-qarshi teorema.
4. Teskari teoremaga qarama-qarshi teorema.

To`g`ri va unga nisbatan teskari bo`lgan teorema tushunchalarini o`quvchilar ongida shakllantirishni - VI sinf geometriya kursining birinchi darslaridan boshlab amalga oshirish kerak. Masalan, quyidagi ikkita tushunchani olib qaraylik.

1. Bu figura parallelogrammdir
2. Bu figura to`rtburchakdir.

Berilgan bu ikkala hukm o`zaro bog`liqdir. Boshqacha qilib aytganda, birinchisining haqiqatligidan ikkinchining haqiqatligi kelib chiqadi, ammo ikkinchisining mavjudligidan birinchisining haqiqatligi har doim ham kelib chiqavermaydi. Agar bu bog`lanishni simvolik ravishda yozadigan bo`lsak u quyidagicha bo`ladi:

$$\boxed{\text{paralelogramm}} \Rightarrow \boxed{\text{to`rtburchak}}$$

Bu yerda biz paralellogramlar sinfini to`rtburchaklar sinfiga kiritdik. Yuqoridagidek bog`lanishlar geometriya kursining birinchi darslaridan boshlab tekshirayotgan matematik hukmlarning ichki o`zaro bog`lanishini ochib beradi. Masalan, "Ichki almashinuvchi burchaklar o`zaro teng" degan hukmni simvolik holda quyidagicha yozish mumkin:

Ichki almashinuvchi burchaklar	$\Rightarrow$	Teng burchaklar

Bu yerga agar ichki almashinuvchi burchaklar mavjud bo`lsa, u holda ular teng bo`ladi, degan fikrni tasdiqlayapmiz. Agar yo`nalish teskari tomonga qo`yilsa, bunday mulohaza hosil bo`ladi: "Agar burchaklar teng bo`lsa, u holda ular ichki almashinuvchi burchaklardir". Agar biz teoremadagi shart va xulosaning o`zaro bog`liqligini "agar", "u holda" so`zlari bilan bog`lasak, bunda o`quvchilar teoremaning sharti, natijasi va ular orasidagi bog`lanish haqida chuqurroq tasavvurga ega bo`ladilar. Masalan, agar bir uchburchakni ikki tomoni ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga mos ravishda teng bo`lsa, bunday uchburchaklar teng bo`ladi. Bu aytilgan teoremaning shartidan uning xulosasi kelib chiqmaydi, ammo uning xulosasidan sharti har doim kelib chiqadi. Shuning uchun uni simvolik ravishda bunday yozish mumkin:

Bir uchburchakning ikki tomoni ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga mos ravishda teng bo`lsa	$\Leftarrow$	uchburchaklar teng

Maktab geometriya kursida shunday teoremalar borki, ularning shartidan xulosasining to`g`riligi va aksincha, xulosasidan shartining to`g`riligi kelib chiqadi. Masalan:

1. Agar to`g`ri chiziq burchak bissektrisasi bo`lsa, u berilgan burchakni teng ikkiga bo`ladi.

Bunga teskari bo`lgan teorema ham o`rinlidir: "Agar to`g`ri chiziq burchakni teng ikkiga bo`lsa, bu to`g`ri chiziq shu burchakning bissektrisasidir". Bu aytilganlarni simvolik ravishda bunday yozish mumkin:

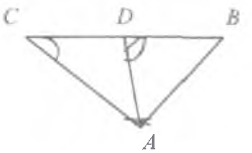
Agar to`g`ri chiziq burchak bissektrisasi bo`lsa	$\Leftarrow$ $\Rightarrow$	Burchak teng ikkiga bo`linadi

Bundan ko`rinadiki, teorema shartining mavjudligidan uning xulosasining haqiqiyligi kelib chiqsa va aksincha, uning xulosasining mavjudligidan haqiqatligi kelib chiqsa, teoremaning shart va xulosalarida qatnashayotgan "agar" va "u holda" bog`lovchilarining o`rinlari o`zgaradi.

Agar biz shartli ravishda berilgan teoremani to`g`ri teorema desak, bu teoremadagi shart va xulosalarning o`rinlarini almashtirish natijasida hosil qilingan teoremani teskari teorema deb ataymiz.

Endi to`g`ri va teskari teoremalarning berilishi hamda ularni isbotlash uslubiyatini ko`rib chiqaylik.

1. **T o` g` r i t ye o r ye m a:** "Agar uchburchakning biror tomoni katta bo`lsa, u holda ana shu katta tomon qarshisida katta burchak yotadi".



4-Chizma.

Berilgan: ΔAVS, $VS > AV$.

Icbot qilish kerak: $\angle A > \angle S$.

I s b o t i. ABC uchburchakning BC tomonida AB tomonga teng $BD=AB$ kesmani o`lchab, ana shu $D$ nuqtani $A$ nuqta bilan birlashtiramiz (4-chizma), natijada $ABD$ teng yonli uchburchak hosil bo`ladi. ABD uchburchak teng yonli bo`lgani uchun $\angle BAD=\angle BDA$. $BDA$ burchak $ADC$ burchakning tashqi burchagi bo`lgani uchun $\angle BAD=\angle S+\angle DAC$ bo`ladi, bundan $\angle BAD>\angle S$ ekani kelib chiqadi. Bu yerdagi BAD burchak A burchakning bir qismi xolos. Shuning uchun $\angle A>\angle S$.

Teskari teorema: *"Agar uchburchakning biror burchagi katta bo`lsa, u holda ana shu katta burchak qarshisida katta tomon yotadi".*

B ye r i l ga n: ΔAVS, $\angle A > \angle C$.

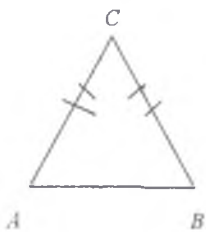
I s b o t q i l i sh k ye r a k: $VS > AB$.

I s b o t i. 1) AVC uchburchakning AB tomoni hech qachon VS tomonidan katta bo`la olmaydi, chunki to`g`ri teoremada biz katta tomon qarshisida katta burchak yotadi, deb isbot qildik, aks holda $\angle C>\angle A$ ligi kelib chiqadi, bu esa teorema shartiga ziddir.

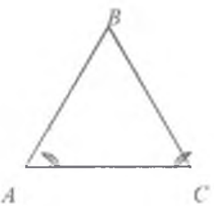
2) AB tomon VS tomonga teng ham bo`la olmaydi, chunki $\angle AVS$ teng yonli emas, agar teng yonli bo`lganda edi $\angle S>\angle A$ tenglik o`rinli bo`lib, bu ham teorema shartiga zid bo`lar edi.

3) Agar AB tomon VS tomondan katta bo`lmasa yoki unga teng bo`lmasa, u holda $VS > AB$ ligi kelib chiqadi.

2. **To`g`ri teorema.** *Agar uchburchakning tomonlari teng bo`lsa, u holda bu*



5-Chizma.



6-Chizma.

tomonlar qarshisida teng burchaklar yotadi.

Berilgan: ΔAVC. $AS = SV$.

Isbot qilish kerak: $\angle A =\angle B$.

I s b o t i. *AVS* asosi *AV* bo`lgan teng yonli uchburchak bo`lsin. $\angle A=\angle V$ ekanligini isbotlaymiz. Uchburchaklar tengligini birinchi alomatiga ko`ra *CAB* burchak *SVA* burchakka teng bo`ladi, chunki $SA=SV$ va $\angle S=\angle S$. Bu uchburchaklarning tengligidan: $\angle A=\angle B$.

Teskari teorema. *Agar uchburchakning burchaklari o`zaro teng bo`lsa, u holda bu burchaklar qarshisida teng tomonlar yotadi* (6 - chizma).

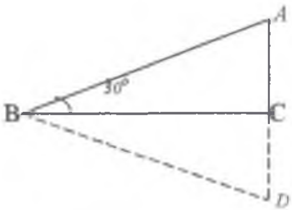
B ye r i l g a n: $\angle AVS$, $\angle A=\angle S$.

I s b o t q i l i sh k ye r a k: $VS=AV$.

I s b o t i. 1) *VS* tomon *AV* tomondan katta bo`la olmaydi, aks holda avvalgi isbot qilingan teoremaga ko`ra $\angle A>\angle S$ bo`lar edi, bu esa teorema shartiga ziddir.

2) *VS* tomon *AV* tomondan kichik ham bo`la olmaydi, aks holda avvalgi isbot qilingan teoremaga ko`ra $\angle S>\angle A$ bo`lar edi, bu esa teorema shartiga ziddir. Demak, $VS=AV$.

4. **To`g`ri teorema**. *Agar uchburchak to`g`ri burchakli bo`lib, uning bir burchagi* $30^o$ *bo`lsa, u holda* 30^o *li burchak qarshisidagi katet gipotenuzaning yarmiga teng bo`ladi.* (7-chizma)

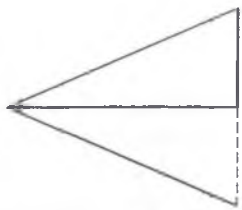


7-Chizma.

B ye r i l g a n: *AVS* burchak to`g`ri burchakli, $\angle V=30^o$.

I s b o t q i l i sh k ye r a k: $AS=\frac{AB}{2}$

Isboti. *AS* katetni davom ettirib, $CD=AC$ kesmani qo`yib, *D* nuqtani *V* nuqta bilan birlashtiramiz. U holda $\Delta BCD=\Delta BCA$ tenglik hosil bo`ladi, chunki $\angle D=\angle A$ va $\angle D=60°$ bo`lganligi uchun *ABD* uchburchakning *A* va *D* burchaklari $60°$ dan, $\angle ABD=60^o$ *AD* teng tomonli uchbur-chakdir. Chizmadan $AS=\frac{AD}{2}$; $AD=AV$, shuning uchun $AC=\frac{AB}{2}$.



Teskari teorema. *Agar to`g`ri burchakli uchburchakning kateti gipotenuzaning yarmiga teng bo`lsa, u holda shu katet qarshisidagi burchak* $30°$ *ga teng bo`ladi* (8- chizma).

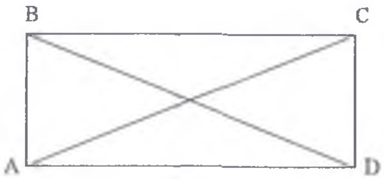
B ye r i l g a n: ΔAVS to`g`ri burchakli, $AS = \frac{1}{2} AV$

I s b o t q i l i sh k ye r a k: $\angle AVS = 30^o$.

I s b o t i. AS katetni davom ettirib $CD=AS$ ni qo`yamiz, u holda $AD = 2AC$ bo`ladi, bundan $AD=AV$, ekani kelib chiqadi. V va D nuqtalarni birlashtirsak, $\Delta BCD = \Delta BCA$ bo`ladi, chunki bularning ikkita kateti va ular orasidagi burchaklari o`zaro teng.

$\Delta BCD = \Delta BCA$ ekanidan $AD=AV$ ga, $\angle AVS = \angle DBS$ u holda $AD=AV$ va $DB = AV$ bulardan ΔABD teng tomonli ekanligini kelib chiqadi, u holda $\angle ABD = 60^o$, $\angle AVS = \angle DBC$, bu burchaklar yig`indisi $\angle ABD$ ni hosil qiladi, shuning uchun $\angle ABC = 30^o$.

4. To`g`ri teorema. *Agar to`rtburchak to`g`ri burchakli bo`lsa, u holda uning diagnallari o`zaro teng bo`ladi* (9-chizma).



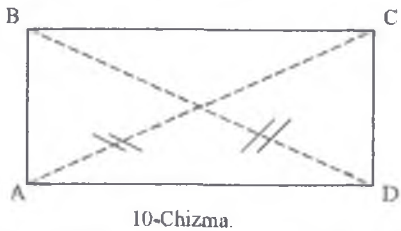
9-Chizma.

Berilgan: $ABCD$ - to`g`ri to`rtburchak.

I s b o t q i l i sh k ye r a k: $AS = VD$

I s b o t i. ABD va DCA to`g`ri burchakli uchburchaklarda AD umumiy, VA va DC tomonlari esa o`zaro teng, chunki parallellogrammning qarama-qarshi tomonlari o`zaro tengdir. Shuning uchun $\Delta ABD = \Delta DCA$ bo`ladi, bundan $AS=BD$ ekanligi kelib chiqadi.

Teskari teorema. *Agar paralelogrammning diagonallari o`zaro teng bo`lsa, u holda bu parallelogramm to`g`ri to`rtburchakdir* (10 - chizma).



10-Chizma.

Berilgan: $ABCD$ – parallelogramm, $AC = BD$.

I s b o t q i l i sh k ye r a k: $ABSD$ to`g`ri to`rtburchak.

I s b o t i. ABD va DCA uchburchaklardan quyidagi tengliklarni yoza olamiz: $AV=VS$, AD - umumiy va $AC=BD$. Shuning uchun $\Delta ABD = \Delta DCA$ bo`ladi, u holda

$\angle BAD=\angle CDA$ bo`ladi. Bundan tashqari ichki bir tomonli burchaklar bo`lganligi uchun $\angle BAD+\angle CDA=2d$. Bulardan $\angle BAD=\angle CAD=d$ ekani kelib chiqadi. Demak $ABCD$ to`g`ri to`rtburchak ekan.

5. To`g`ri teorema. *Agar to`g`ri, burchakli uchburchakning gipotenuzasi va uning katetlariga o`zaro o`xshash ko`pburchaklar yasalsa, u holda gipotenuzaga yasalgan ko`pburchakning yuzi uning katetlariga yasalgan ko`pburchaklar yuzlarining yig`indisiga teng bo`ladi.* (11 - chizma).

Berilgan: ΔAVS, $\angle S=90^0$, $AV=s$, $VS=a$, $AS=b$, $ABDEZ \infty ANMKS \infty SLHTB$, $ABDEZ_{yuzi}=S_s$, $ANMKCyuzi=S_b$, $SLHTByuzi=S_a$.

I s b o t q i l i sh k ye r a k: $S_c=S_a+S_b$

I s b o t i. 7-sinfda o`xshash ko`pburchaklar yuzlarining nisbati mavzusi o`tiladi, ana shu mavzuda quyidagi teorema bor. *"Agar ikkita ko`pburchak o`zaro o`xshash bo`lsa, ular yuzlarining nisbati mos tomonlori kvadratlarining nisbatiga teng".* Shunga asosan quyidagi nisbatni tuzishimiz mumkin:

$$(ANMKC \infty ABDE3) \Rightarrow \left(\frac{S_b}{S_c}=\frac{b^2}{c^2}\right) \Rightarrow s_b \cdot c^2 = s_c \cdot b^2. \qquad (1)$$

$$(CLHTB \infty ABDE3) \Rightarrow \left(\frac{S_a}{S_c}=\frac{a^2}{c^2}\right) \Rightarrow s_a \cdot c^2 = s_c \cdot a^2. \qquad (2)$$

(1) va (2) larni o`zaro xadlab qo`shsak:

$\left(S_a c^2 + S_b c^2 = S_c c^2 + S_c b^2\right) \Rightarrow \left|c^2 (S_a + S_b) = S_c (a^2 + b^2)\right|$ $c^2 = a^2 + b^2$ bo`lgani uchun $S_a + S_b = S_c$ bo`ladi.

Teskari teorema. *Agar uchburchak bir tomoniga yasalgan ko`pburchakning yuzi uning qolgan ikkita tomoniga yasalgan ko`pburchaklar yuzlarining yig`indisiga teng bo`lsa, u holda bu uchburchak to`g`ri burchaklidir.*

B ye r i l g a n: ΔAVC, $S_a+S_b=S_c$

I s b o t q i l i sh k ye r a k: ΔAVS to`g`ri burchakli.

I s b o t i. Teorema shartiga ko`ra $S_a+S_b=S_c$ bo`lgani uchun

$$(ANMKC \infty ABDE3) \Rightarrow \left(\frac{S_b}{S_c}=\frac{b^2}{c^2}\right) \Rightarrow s_b \cdot c^2 = s_c \cdot b^2. \qquad (1)$$

$$(CLHTB \infty ABDE3) \Rightarrow \left(\frac{S_a}{S_c}=\frac{a^2}{c^2}\right) \Rightarrow s_a \cdot c^2 = s_c \cdot a^2. \qquad (2)$$

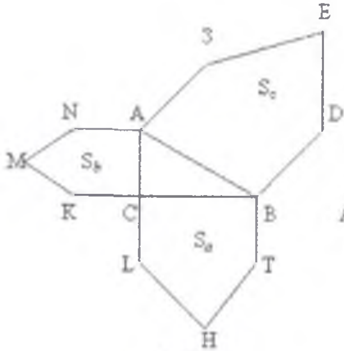
(1) va (2) larni o`zaro hadlab qo`shsak,

$$\left(S_a c^2 + S_b c^2 = S_c c^2 + S_c b^2\right) \Rightarrow \left|c^2 (S_a + S_b) = S_c (a^2 + b^2)\right|$$

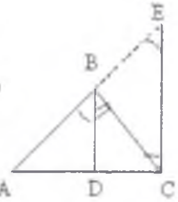
$S_a+S_b=S_c$ shuning uchun: $a^2+b^2=s^2$. Bizga ma`lumki, bu tenglik Pifagor teoremasining ifodasidir. Pifagor teoremasi to`g`ri burchakli uchburchaklar uchun o`rinli bo`lar edi.

Shuning uchun ΔAVS to`g`ri burchaklidir.

6. **To`g`ri teorema.** *Agar har qanday uchburchakda ichki burchak bissektrisasi o`tkazilsa, u holda bu bissektrisa qarshisida yotgan tomonni qolgan ikki tomonga nisbatan proporsional bo`laklarga bo`ladi* (12-chizma).



11-Chizma



12-Chizma

Berilgan: $\forall \Delta AVS$, BD - bissektrisa, $\angle ABD \cong \angle DBC$.

I s b o t q i l i sh k ye r a k:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DC|}$$

I s b o t i. Bu teoremani isbot qilish uchun uchburchakning [AV] tomonini Ye nuqtada kesguncha *[CE]//[BD]* ni o`tkazamiz, natijada $\angle AES$ va *[BD]//[EC]* larni hosil qildik. Agar burchakning tomonlari parallel to`g`ri chiziqlar bilan kesilsa, proporsional bo`laklarga bo`linadi. Shunga ko`ra:

$$\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|AD|}{|DC|} \qquad (1)$$

Endi *[BE]* ni *[VS]* ga teng ekanligini ko`rsatsak, izlanayotgan proporsiya hosil qilgan bo`lamiz. Buning uchun ΔVSE ning teng yonli ekanligini ko`rsatish kifoya. Chizmadan $\angle ABD \cong \angle AEC$ parallel to`g`ri chiziqlardagi moc burchaklar bo`lgani uchun $\angle VSE \cong \angle DBC$ bo`ladi, chunki parallel to`g`ri chiziqlardagi ichki almashinuvchi burchaklar bo`lgani uchun

$$\left.\begin{array}{r} \angle E \cong \angle B \\ \angle BCE \cong \angle DBC \end{array}\right\} \Rightarrow (\angle E \cong \angle C) \Rightarrow [BE] \cong [BC]$$

Shuning uchun (1) quyidagi ko`rinishda oladi:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DC|}$$

T ye s k a r i t ye o r ye m a. *Agar uchburchakning biror uchidan uning qarshisidagi tomonga tushirilgan kesma shu tomon kesmalarini qolgan ikki tomonga* *nisbatan proporsional bo`laklarga bo`lsa, u holda bu kesma shu burchak bissektrisasidir.*

Agar biz to`g`ri teoremaning shartini r va uning xulosasini q desak, u holda yuqoridagi teorema turlari uchun quyidagi simvolik ifodalar o`rinlidir:

1) $r \Rightarrow q$ (to`g`ri teorema); 2) $q \Rightarrow r$ (teskari teorema);

3) $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ (to`g`ri teoremaga qarama-qarshi teorema);

4) $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ (teskari teoremaga qarama-qarshi teorema).

Quyidagi teoremani to`g`ri teorema deb olib, unga nisbatan yuqoridagi teoremaning turlarini qo`llasak, bunday teoremalar hosil bo`ladi:

1) *Agar to`rtburchak paralellogramm bo`lsa, uning diagonali kesishish nuqtasida teng ikkiga bo`linadi, ya'ni $p \Rightarrow q$.*

2) *Agar to`rtburchanning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo`linsa, u holda bu to`rtburchak paralellogrammdir, ya'ni $p \Rightarrow q$*

3) *Agar to`rtburchak paralellogramm bo`lmasa, uning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo`linmaydi, ya'ni $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$.*

4) *Agar to`rtburchakning diogonali kesishib, teng ikkiga bo`linmasa, u holda bunday to`rtburchak paralelogramm emas, ya'ni $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.*

Bu misoldan ko`rinadiki, agar to`g`ri teoremani shart va xulosalarga ajratish mumkin bo`lsa, u holda ana shu to`g`ri teoremaga teskari, qarama-qarshi hamda to`g`ri teoremadan hosil qilingan teskari teoremaga qarama-qarshi teoremalarni hosil qilish mumkin.

9-§. Teoremalarni isbotlash metodlari.

T a ' r i f. *Isbotlash - deduktiv xulosa chiqarish zanjiri, demakdir.*

Har qanday isbotlash jarayoni quyidagi uch qismni o`z ichiga oladi:

1. Teoremaning bayoni - isbot talab etiladigan holat.
2. Argumentlar - teoremani isbotlash jarayonida ishlatilgan matematik hukmlar.
3. Isbotlash - deduktiv xulosa chiqarish orqali teorema xulosasida topish talab qilingan noma'lumni uning shartlari hamda avvaldan ma'lum bo`lgan argumentlardan foydalanib keltirib chiqarish.

Teoremani isbotlashga kirish va uni isbotlash jarayonida o`qituvchi yordamida o`quvchilar quyidagi mantiqiy ketma-ketlikka ega bo`lgan bosqichlarni bajarishlari kerak:

1) Teoremaning sharti va uning xulosasi nimadan iborat ekanligini to`la tushunib olishlari kerak.

2) Ana shu teoremani shart va xulosasida qatnashayotgan har bir matematik tushunchaning ma'nosini bilishlari kerak.

3) Teoremaning shart va xulosa qismlarini matematik simvollar orqali ifodalashlari kerak.

4) Teoremaning shartida qatnashayotgan ma'lum parametrlar teorema xulosasidagi noma'lumni aniqlay oladimi yoki yo`qmi ekanligini bilishlari kerak.

5) Teoremani isbotlash jarayonida teoremadagi shartlardan teorema xulosasining to`g`riligini ko`rsatuvchi natijalar keltirib chiqarishi kerak.

6) Teoremani isbotlash jarayonidagi mantiqiy mulohazalarda teoremaning shartidan to`la foydalanishlari kerak.

7) Teorema isbot qilib bo`lingach, isbotlashda qo`llanilgan metodni ko`zdan kechirish va imkoni bo`lsa, isbotlashning boshqa usullarini qidirib topish kerak.

Maktab matematika kursidagi teoremalarni isbotlash ikki usulda amalga oshiriladi.

1) Bevosita isbotlash usuli (to`g`ri isbotlash usuli);

2) Bilvosita isbotlash usuli (teskarisidan faraz qilish usuli);

Bevosita isbotlash usuli jarayonida teoremaning shartida qatnashayotgan ma'lum va parametrlardan hamda avvaldan ma'lum bo`lgan aksioma, ta'rif va teoremalardan foydalangan holda mantiqiy mulohaza yuritib, teorema xulosasida talab qilingan noma'lumlarni topiladi. Teoremalarni bunday isbotlash analiz va sintez orqali amalga oshiriladi.

T a ' r i f. *Noma'lumlardan ma'lumlarga tomonga izlash metodi analiz deyiladi.*

Psixologik olimlar analiz metodini quyidagicha ta'riflaydilar:

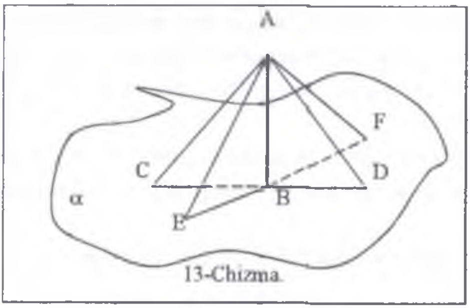
analiz - bu butunlardan bo`laklarga tomon izlash demakdir.

T a ' r i f. *Ma'lumlardan noma'lumlarga tomon izlash metodiga sintez deyiladi.*

Psixologik nuqtai-nazardan sintez metodi bo`laklardan butunlarga tomon izlash metodi demakdir.

Fikrimiz dalili sifatida quyidagi teoremalarni analiz va sintez metodlari orqali isbotlaymiz.

1 - t ye o r ye m a. V nuqtada kesishuvchi *SD* va Ye*F* to`g`ri chiziqlar α tekislikda yotadi va $SV = BD$, $YeV = BF$. a tekislikda yotmaydigan A nuqta $AE=EF$ va $AC=AD$ tengliklarni qanoatlantiradigan qilib tanlansa, AV to`g`ri chiziq a tekislikka perpendikulyar bo`ladi (13 - chizma).



13-Chizma

B ye r i l g a n: - α tekislik, $(CD)\wedge(EF)=V$, $(SV=BD)\wedge(EV=BF)$, $(AE=AF)\wedge(AC=AD)$.

I s b o t q i l i sh k ye r a k: $AV\perp a$.

I s b o t i. Bu teoremani analiz metodi bilan isbotlaymiz.

1. $AV \perp a$ ekanligini isbot qilish uchun $AV \perp CD$ va $AV \perp EF$ ekanligini isbot qilish yetarli.

2. $AV \perp CD$ ekanligini isbot qilish uchun $\angle AVS = \angle ABD$ ekanligini isbot qilish yetarli.

3. Bu *burchaklarning tengligini isbot qilish uchun $\Delta AVS = \Delta ABD$ ekanligini isbot qilish yetarli, lekin $VS=BD$, $AC=AD$, $AV = AV$* shuning uchun $\Delta AVS = \Delta ABD$.

4. $AV \perp YeF$ ekanligini isbot qilish uchun $\angle ABE = \angle ABF$ ekanligini isbot qilish yetarli.

5. Bu burchaklarning tengligini isbot qilish uchun $\Delta AVE = \Delta AVF$ ekanligini isbot qilish yetarli, lekin $BE=BF$, $AE=AF$, $AV=AV$, shuning uchun $\Delta AVE = \Delta AVF$, bundan $AV \perp a$ ekanligi kelib chiqadi.

Isbotning sintez usuli

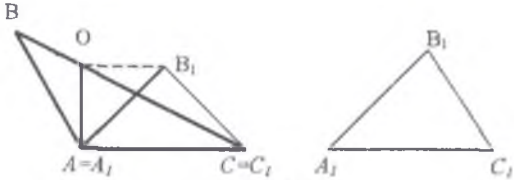
1. $\Delta ABE = \Delta ABF$. *2.* $\angle ABE = \angle ABF$.

3. $\Delta AVS = \Delta ABD$. *4.* $\angle ABC = \angle ABD$.

5. (2) va *(4)* ga ko`ra $AV \perp CD$ va $AV \perp EF$.

6. (5) ga ko`ra $AV \perp a$.

2 - t ye o r ye m a. *Agar bir uchburchakning ikki tomoni ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga o`zaro teng bo`lsa, u holda bu tomonlar orasidagi burchak qaysi uchburchakda katta bo`lsa, shu burchak qarshisida katta tomon yotadi* (14 - chizma).



14-Chizma.

Berilgan: ΔAVS va $\Delta A_1V_1C_1$, $AV=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle BAC > \angle B_1A_1C_1$.

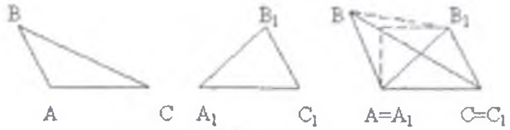
Isbot qilish kerak: $VS > V_1C_1$.

Isbotning analiz metodi, 1 - u s u l.

$A_1V_1S_1$ uchburchakni AVS uchburchak ustiga teng tomonini moslab siljitamiz, natijada $AS=A_1S_1$ bo`ladi. $\angle BAB_1$ dan $AO$ bissektrisani o`tkazamiz, u holda $\Delta OAV = \Delta OAV_1$ hosil bo`ladi, bundan $VO=V_1O$ ekani kelib chiqadi. ΔOV_1S dan quyidagi tengsizliklarni yoza olamiz:

$OS + OV_1 > V_1O$, $OS + 0V > V_1S$. $VS > V_1S_1$.

2 - u s u l. (15 - chizma)



15-Chızma

B ye r i l g a n: ΔAVC va $\Delta A_1B_1C_1$. $AV=A_1B_1$, $AS=A_1C_1$.

Isbot qilish kerak: $VS > V_1C_1$.

I s b o t i. $A_1B_1C_1$ uchburchaknıng AVS uchburchak uctiga shunday qo`yaylikki, natıjada $AS=A_1S_1$ bo`lsin.

1. $VS>V_1S_1$ ni isbot qilish uchun oldin qachon bir kesma ikkinchi kesmaga nisbatan uzun bo`ladi, degan savolga javob berishimiz kerak.

2. VS va V_1S_1 kesmalarni taqqoslash uchun $A_1V_1S_1$ uchburchakni AVS uchburchak ustiga siljitish natijasida hosil qilingan VV_1S uchburchak tomonlarini o`zaro taqqoslash yetarli.

3. Qanday shart bajarılganda uchburchakning bir tomoni uning ikkinchi tomonidan katta bo`ladi (katta burchak qarshisida katta tomon yotadi)?

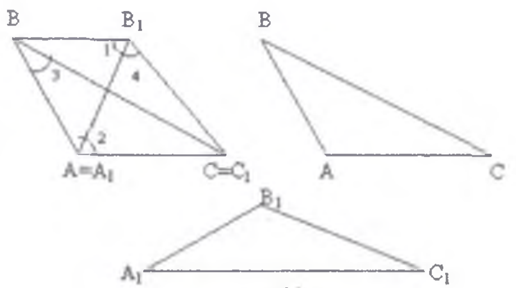
4. VSV_1 uchburchakning VS tomoni VV_1S burchak qarshisida va SV_1 tomoni esa V_1VS burchak qarshisida yotadi. $VS>V_1S_1$ bo`lishi uchun $\angle CVV_1<\angle SV_1V$ ekanligini ko`rsatish kifoya.

5. ΔVAV_1 teng yonli, chunki teorema shartiga ko`ra $AV=AV_1$ edi, shuning uchun $\angle AVV_1=\angle AV_1V=\angle 1$.

$\angle VV_1C = \angle 1 + \angle AB_1C$. $\qquad \angle SVV_1 = 1 - \angle AVC$.

$\angle 1 + \angle AB_1C > \angle 1 - \angle ABC$.

$\angle BB_1C > B_1BC$ bundan $VC > V_1C_1$ bo`ladi.



16-Chizma

Isbotning sintez usuli (16 - chızma)

1. $AV = AV_1$. 2. $\angle AVV_1=\angle AV_1V=\angle 1$.

3. $\angle AB_1B+\angle 4>\angle AB_1B - \angle 3$. 4. $\angle CB_1B > CBB_1$.

5. Katta burchak qarshisida katta tomon yotadi, shuning uchun $VS>V_1S_1$ bo`ladi.

3-teorema. Uchburchak ichki burchaklarining yig`indisi 180^o ga teng.

Berilgan: ΔAVS.

Isbot qilish kerak: $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^o$ (17- chizma).

Isbotning analiz metodi.

1. Uchburchakning V uchidan AS tomonga parallel qilib DK ni o`tkazamiz, natijada $\angle 5+\angle 2+\angle 4=180^o$ li yoyiq burchakni hosil qilamiz.

2. $\angle 5=\angle 1$, chunki $DK \parallel AC$, bu yerda AV kesuvchi.

3. $\angle 4=\angle 3$, chunki $DK \parallel AC$, bu yerda SV kesuvchi.

4. $\angle 5+\angle 4+\angle 2 = 180^o$

5. (2) va (3) larga ko`ra $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^o$.

Isbotning sintez metodi:

1. DKni AV ga parallel qo`yib o`tkazamiz, ya'ni $DK \parallel AV$.

2. $\angle 4 = \angle 3$, chunki $DK \parallel AS$, bu yerda VS kesuvchi.

3. $\angle 5 = \angle 1$, chunki $DK \parallel AS$, bu yerda AV kesuvchi.

4. $\angle 5 + \angle 2 + \angle 4 = 2d$ yoyiq burchak.

5. (2) va (3) larga ko`ra $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2d$

Endi quyidagi teoremani isbotlash bosqichlari asosida isbotlaymiz:

T ye o r ye m a. *Agar a, b, c ABC uchbukchakning tomonlari va r uning yarim perimetri bo`lsa, u holda bu uchburchakning yuzi* $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *ga teng bo`ladi.*

1. Teoremaning sharti: "agar a, b, s AVS uchburchakning tomonlari va R uning yarim perimetri bo`lsa", teoremaning xulosasi: "u holda bu uchburchakning yuzi $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ga teng bo`ladi".

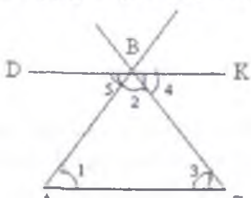
2. Teoremaning shart va xulosa qismlarida uchburchak, uchburchakning tomonlari, uning perimetri va yarim perimetri hamda uning yuzi kabi tushunchalar qatnashayapti (18-chizma).

3. B ye r i l g a n: ΔAVC, $AV = s$, $VS = a$, $AS = b$,

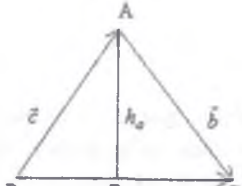
$$\frac{a+b+c}{2}=p$$

I s b o t q i l i sh k ye r a k:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



17-Chizma



18-Chizma

4. Teorema shartida berilgan uchburchak, uning tomonlari, yarim perimetri kabi tushunchalar uning xulosasida talab qilmayotgan $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ noma'lumni topish uchun yetarlidir.

5. T ye o r ye m a n i n g i s b o t i. Δ ABS da $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ deb olamiz.

Chizmadan:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ah_a \qquad (1)$$

18 - chizma.

$$\Delta ADC \Rightarrow \left(\frac{h_a}{b}=\sin\hat{c}\right) \Rightarrow h_a=b\cdot\sin\hat{c} \qquad (2)$$

(2) ni (1) ga qo'ysak:

$$S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\hat{c}=\frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2\sin^2\hat{c}}=\frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2(1-\cos^2\hat{c})}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2-(ab\cos\hat{c})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\hat{c})^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-(\vec{a}\vec{b})^2} \qquad (3)$$

$|a||b|\cos\hat{c}$ ifoda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasidir.

$\Delta ABC \Rightarrow \vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ bo'ladi, bu ifodaning har ikki tomonini kvadratga ko'tarsak,

$\vec{c}^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}^2\vec{b}^2$,

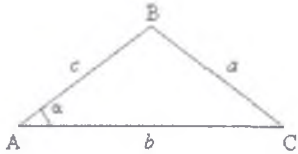
$$\vec{a}^2\vec{b}^2=\frac{\vec{a}^2+\vec{b}^2-\vec{c}^2}{2}. \qquad (4)$$

(4) ni (3) ga qo'ysak:

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2b^2}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{ab}{2}-\frac{a^2+b^2-c^2}{4}\right)\left(\frac{ab}{2}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4}\right)}=$$
$$=\sqrt{\left(\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{4}\right)\left(\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{4}\right)}=\sqrt{\left[\frac{c^2-(a-b)^2}{4}\right]\left[\frac{(a+b)^2-c^2}{4}\right]}=$$
$$=\sqrt{\left(\frac{a+b+c-2a}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-2b}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-2c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

6. Teoremani isbotlashda vektor, vektorlarni qo'shish, skalyar ko'paytma va uchburchakning yuzi kabi tushunchalar asosida mantiqiy mulohaza yuritib, teorema shartida berilgan uchburchakning tomonlari perimetri va yarim perimetri kabi tushunchalardan to'la foydalanib teoremaning isboti keltirib chiqarildi.

7. Qaralgan teoremani yuqoridagidan farqli usul bilan ham isbot qilish mumkin (19-chizma)



I s b o t n i n g   i k k i n ch i   u s u l i.

Berilgan: *ΔAVS, AV=s, VS=a, AS=b,* $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Isbot qilish kerak:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

I s b o t i. Δ ABC ning yuzi uning tomonlari va ular orasidagi burchagiga ko`ra bunday ifodalanadi:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}cb \cdot \sin a$$
$$\sin a = \frac{2S}{bc} \qquad (1)$$

Kosinuslar teoremasiga ko`ra: $a^2=b^2+c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$, bundan

$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (2); $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. (3)

(1) va (2) larni (3) ga qo`ysak:

$$\left(\frac{2S}{bc}\right)^2 + \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = 1.$$

$$\frac{4S^2}{b^2c^2} + \frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4b^2c^2} = 1.$$

$$16S^2 + \left(b^2+c^2-a^2\right)^2 = 4b^2c^2,$$

$$S^2 = \frac{4b^2c^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{16} = \frac{\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)}{16} = \frac{\left[(b+c)^2-a^2\right]\left[a^2-(b-c)^2\right]}{16} =$$

$$= \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

B i l v o s i t a   i s b o t l a sh   u s u l i (teskaridan faraz qilish orqali isbotlash usuli).

T a ‘ r i f. *Teoremaning xulosasidagi no’malumlarni topish unga zid bo`lgan jumlani inkor qilish orqali amalga oshirilgan bo`lsa, uni bilvosita isbotlash usuli deyiladi.*

Yuqoridagi ta'rifdan ko`rinadiki, isbotlashning bilvosita usulida biz oldin teorema tasdiqlagan fikrga qarama-qarshi fikrni to`g`ri deb faraz qilamiz: shundan keyin aksiomalar va oldin isbotlangan teoremalarga asoslanib mulohazalar yuritish yo`li bilan teorema shartiga zid keladigan yoki biror aksiomaga yoki ilgari isbotlangan biror teoremaga zid keladigan xulosaga kelamiz. Shunga ko`ra farazimiz noto`g`ri bo`ladi. Natijada teoremadagi yoki berilgan masaladagi da'vo to`g`ri degan xulosaga kelamiz.

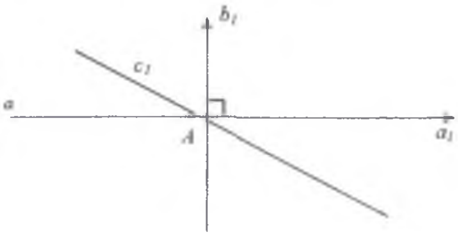
Bilvosita isbotlash ikki xil usul bilan amalga oshiriladi:

1) Apagogik usul.

2) Ajratish usul.

Apagogik usul ko`pincha teskarisidan faraz qilish metodi deb ham yuritiladi. Quyidagi teoremani apagogik - **teskarisidan faraz qilish usuli** bilan isbot qilaylik.

1 - t ye o r ye m a. To`g`ri chiziqning har bir nuqtasidan unga perpendikulyar to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin va faqat bitta.



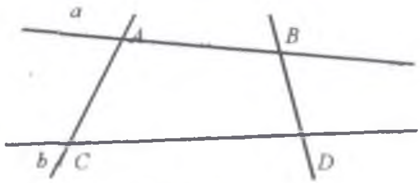
20-Chizma.

Isboti. Faraz qilaylik, a - berilgan to`g`ri chiziq, A unda berilgan nuqta bo`lsin. $a$ to`g`ri chiziqning boshlang`ich nuqtasi A bo`lgan yarim to`g`ri chiziqlaridan birini $a_1$ bilan belgilaymiz, $a_1$ yarim to`g`ri chiziqdan boshlab 90° ga teng $(a_1{}^\wedge b_1)$ burchakni qo`yamiz. U holda b_1 nurni o`z ichiga olgan to`g`ri chiziq $a$ to`g`ri chiziqqa perpendikulyar bo`ladi. Faraz qilaylik, A nuqtadan o`tib $a$ to`g`ri chiziqqa perpendikulyar bo`lgan boshqa to`g`ri chiziq mavjud bo`lsin. Bu to`g`ri chiziqning $b_1$ nur bilan bir tekislikda yotuvchi yarim to`g`ri chizig`ini s_1 bilan belgilaymiz. Har biri 90° ga teng (a_1b_1) va (a_1s_1) burchaklar a_1 yarim to`g`ri chiziqdan boshlab bitta yarim tekislikka qo`yilgan. Ammo berilgan yarim tekislikka $a_1$ yarim to`g`ri chiziqdan boshlab 90° ga teng bitta burchak qo`yish mumkin. Shu sababli A nuqta orqali o`tib $a$ to`g`ri chiziqqa perpendikulyar bo`lgan boshqa to`g`ri chiziqning mavjudligi mumkin emas. Shu bilan teorema isbotlandi. Endi quyidagi masalani ham teskarisidan faraz qilish metodi bilan isbotlaymiz.

1 - masala. α va β kesishuvchi tekisliklar berilgan. a tekislikda yotuvchi A nuqta orqali a va a_1 to`g`ri chiziqlar o`tkazilgan. β tekislikda $a$ va $a$ to`g`ri chiziqlarga moc ravishda parallel bo`lgan to`g`ri chiziqlar mavjud emasligini isbot qiling.

Isboti. β tekislikda shunday V nuqta mavjudki, bu nuqtadan o`tuvchi $b$ va $b_1$ to`g`ri chiziqlar moc ravishda $a$ va $a_1$ to`g`ri chiziqlarga parallel bo`lgan deylik. U holda tekisliklarning parallellik alomatiga ko`ra $\alpha||\beta$ bo`lishi kerak. Bu esa masala shartiga zid. Demak, β tekislikda a va a_1 to`g`ri chiziqlarga mos ravishda parallel bo`lgan tekisliklar mavjud. Ajratish metodi bilan isbotlashda tezis mazkur masala yuzasidan qilinadigan mumkin bo`lgan barcha farazlardan biri bo`ladi. Fikrimizning dalili sifatida quyidagi masalani ajratish metodi orqali yechamiz.

2 - masala. a va b uchrashmas to`g`ri chiziqlar berilgan. A va V nuqtalar a to`g`ri chiziqda, S va D nuqtalar b to`g`ri chiziqda yotadi. AS va BD to`g`ri chiziqlarning o`zaro vaziyatini aniqlang (21 - chizma).



21-Chizma.

I s b o t i. Ma'lumki, fazodagi ikki to`g`ri chiziq quyidagi uch holatdan birini egallaydi:

1. $AC||BD$. 2. $AC\cap BD$. 3. AS va BD to`g`ri chiziqlar uchrashmas.

1. Faraz qilaylik, $AC||BD$ bo`lsin, u holda bu to`g`ri chiziqlar $a$ va $b$ uchrashmas to`g`ri chiziqlar ham yetadigan birgina tekislikni aniqlaydi. Bu esa masala shartiga zid.

2. $AS\cap BD$ bo`lsin, u holda bu ikki kesishuvchi to`g`ri chiziqlar $a$ va $b$ uchrashmas to`g`ri $b$ chiziqlar ham yotadigan birgina tekislikni aniqlaydi. Bu ham masala shartiga zid. Demak $AS$ va $BD$ to`g`ri chiziqlar uchrashmas to`g`ri chiziqlardir.

2 - t ye o r ye m a. *To`g`ri chiziqdan tashqaridagi nuqtadan shu to`g`ri chiziqqa parallel to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin va faqat bitta.*

Isboti. a - berilgan to`g`ri chiziq va A bu to`g`ri chiziqda yotmagan nuqta bo`lsin. $a$ - to`g`ri chiziq va $A$ nuqta orqali $a$ tekislik o`tkazamiz. α tekislikda A nuqtadan a to`g`ri chiziqqa parallel a_1 to`g`ri chiziqni o`tkazamiz. $a$ ga parallel bo`lgan a_1 to`g`ri chiziqning yagona ekanini isbotlaymiz. Teskarisidan faraz qilaylik, A nuqtadan o`tadigan va $a$ to`g`ri chiziqqa parallel boshqa $a_2$ to`g`ri chiziq mavjud bo`lsin, a, a_1 to`g`ri chiziqlar orqali α_2 tekislikni o`tkazish mumkin. $\alpha_2$ tekislik $a$ to`g`ri chiziq va A

nuqta orqali o`tadi, u holda to`g`ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o`tkazish mumkin" degan teoremaga ko`ra u $\alpha$ tekislik bilan ustma-ust tushadi. Endi parallel to`g`ri chiziqlar aksiomasiga ko`ra a_1, a_2 to`g`ri chiziqlar ustma-ust tushadi. Shu bilan teorema isbot bo`ldi.

10-§. Teoremalarni zaruriy va yetarli shartlari

T a ' r i f. *Agar q mulohazadan r mulohazaning to`g`riligi kelib chiqsa, ya'ni q=>r bo`lsa, u holda r mulohaza q mulohaza uchun zaruriy shart bo`lib, q mulohaza esa r mulohaza uchun yetarli shart deyiladi.*

1 - m i s o l. Agar natural son juft bo`lsa, u holda u 6 soniga bo`linadi.

Bu teoremada natural son 6 ga bo`linishligi uchun uning juft bo`lishligi zaruriy shart bo`lib, yetarli shart bo`la olmaydi, chunki har qanday juft son ham 6 ga bo`linavermaydi.

2 - m i s o l. Agar natural son 6 ga bo`linsa, u holda u juft bo`ladi.

Bu teoremada natural son juft bo`lishligi uchun uning 6 ga bo`linishi yetarli shart bo`lib, zaruriy shart bo`la olmaydi, chunki 6 ga bo`linmaydigan juft sonlar ham mavjuddir.

3 - m i s o l. Agar natural son juft bo`lsa, u holda u 2 soniga bo`linadi.

Bu teoremada natural son 2 ga bo`linishi uchun uning juft bo`lishi zarur va yetarlidir, chunki hap qanday juft natural son 2 ga bo`linadi.

4 - m i s o l. Har qanday natural son 2 ga bo`linsa, u holda bunday son juft bo`ladi.

Bu teoremada natural son juft bo`lishi uchun uning 2 ga bo`linishi zarur va yetarlidir.

1 - t ye o r ye m a. [a, b] kesmada aniqlangan va uzluksiz bo`lgan *y=f(x)* funksiyaning $\int_a^b f(x)dx$ aniq integrali mavjud bo`lishi uchun $\lim_{\lambda\to 0}$(S-s)=0 bo`lishligi zarur va yetarlidir.

Isbotining zarurligi. $\int_a^b f(x)dx$ - aniq integral mavjud bo`lganda $\lim_{\lambda\to 0}$(S-s)=0 ekanligini isbotlaymiz. Aniq integral mavjud bo`lishligi uchun ta'rifga ko`ra, $\lim_{\lambda\to 0}\sigma=1$ bo`ladi. Limit ta'rifiga ko`ra:

$|\sigma - 1| < \varepsilon$ yoki $-\varepsilon < \sigma - 1 < \varepsilon$, $1 - \varepsilon < \sigma < 1 + \varepsilon$ (1)

Bizga ma'lumki, δ - integral yig`indi Darbuning quyi va yuqori yig`indilarining orasida yotar edi, shuning uchun

$$s \leq \sigma \leq S \qquad (2)$$

bo`ladi. (1) va (2) larning birlashtirib quyidagi tengsizliklarni tuzamiz:

$$1 - \varepsilon \leq s \leq \sigma \leq S \leq 1 + \varepsilon \qquad (3)$$

(3) tengsizlikda quyidagi tengsizliklarni ajratib olish mumkin:

$$\begin{pmatrix} I-\varepsilon<s \\ I+\varepsilon>S \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I-s<\varepsilon \\ I-S>-\varepsilon \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I-s<\varepsilon \\ S-I<\varepsilon \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} |s-I|<\varepsilon \\ |S-I|<\varepsilon \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{\lambda\to o} s=I \\ \lim\limits_{\lambda\to o} s=I \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lim\limits_{\lambda\to o} s-\lim\limits_{\lambda\to o} s \end{pmatrix} \Rightarrow (I-I-0) \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to o}(S-s)=0.$$

Teoremaning zaruriy qismi isbotlandi.

Isbotning yetarligi. $\lim\limits_{\lambda\to 0}$(S-s)=0 bo`lganda $\int_a^b f(x)dx$ bo`lishligini ko`rsatamiz. Buning uchun $\lambda\to 0$ da $\sigma$ integral yig`indisini chekli I limitga ega ekanligini ko`rsatish kifoya. Bizga ma'lumki, Darbuning quyi yig`indisi monoton o`suvchi bo`lib, yuqoridan chegaralangandir, bundan tashqari u o`zinmg aniq yuqori chegarasiga ham egadir, ya'ni: sup{s}=I*

Xuddi shuningdek, Darbuning yuqori yig`indisi o`zining quyi chegarasiga ega, ya'ni; inf {S} = I.

Aniq yuqori va quyi chegaralarning ta'riflariga ko`ra $s\le I^*$ va $S\ge I_*$ bo`ladi. Bu ikkala tengsizliklarni birlashtirsak, $s\le I^*\le I_*\le S$

Ammo $\lim\limits_{\lambda\to 0}$(S-s)=0 bo`lgani uchun $\lim\limits_{\lambda\to 0}(I^* - I_*)=0$

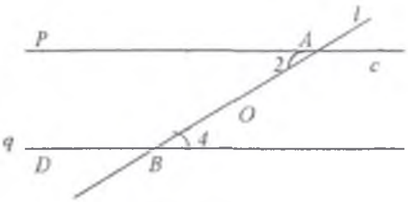
$$(\lim_{\lambda\to 0} I^* - \lim_{\lambda\to 0} I_* = 0) \Rightarrow \lim_{\lambda\to 0} I^* - \lim_{\lambda\to 0} I_* = I \qquad (2)$$

(2) ga ko`ra (1) quyidagi ko`rinishni oladi:

$$s\le I\le S \qquad (3)$$

Bizga ma'lumki, $\lim\limits_{\lambda\to 0}$(S-s)=0, bundan tashqari $s\le\sigma\le S$ (4) bo`lgani uchun, (3) va (4) larga ko`ra: I = $\int_a^b f(x)dx$. Shu bilan teoremaning yetarli qismi isbot bo`ldi.

2 - t ye o r ye m a. *Ikki to`g`ri chiziq o`zaro parallel bo`lishi uchun ularni kesib o`tuvchi uchinchi to`g`ri chiziq hosil qilgan mos burchaklari o`zaro teng bo`lishi zarur va yetarlidir* (22 - chizma).



22-Chizma.

Z a r u r l i k n i n g   i s b o t i. Faraz qilaylik r va q to`g`ri chiziqlar o`zaro parallel bo`lsin, l esa r va q larni kesuvchi to`g`ri chiziq bo`lsin, u holla biz $\angle 2=\angle 4$ ekanini isbot qilishimiz kerak. $r$ va $q$ to`g`ri chiziqlarda $C$ va $D$ nuqtalarni olamiz. O nuqta $A$ va $B$ nuqtalarga nisbatan simmetriya markazi desak, u holda quyidagi munosabatlar o`rinli bo`ladi:

1) [AO] $\rightarrow$ [VO]. 2) [AC] $\rightarrow$ [BD]. 3) $\angle 4 \rightarrow \angle l$AS.

Chizmada $\angle 2=\angle l$AC chunki ular vertikal burchaklardir. Shuning uchun $\angle 2=\angle 4$ ekani kelib chiqadi.

Ye t a r l i l i k n i n g   i s b o t i. Faraz qilaylik, l r va q to`g`ri chiziqlarni kesib o`tuvchi to`g`ri chiziq, $\angle 2=\angle 4$ bo`lsin. U holda $r \parallel q$ ekanligini isbot qilishimiz kerak. $r \cap l = A$, $q \cap l = V$. Faraz qilaylik, r va q to`g`ri chiziqlar o`zaro parallel bo`lmasin, u holda $r \cap q = S$. U holda $\angle 2$ ABC uchburchakning tashqi burchagi bo`ladi. Bundan $\angle 2>\angle B=\angle 4$ ekanligi kelib chiqadi, bu esa yuqorida qo`yilgan $\angle 2=\angle 4$ shartga ziddir, demak, $q \parallel r$ ekan.

3 - t ye o r ye m a. $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...=\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ $(i=1,\infty)$ (1)

(1) musbat hadli qator yaqinlashuvchi bo`lishi uchun xususiy yig`indilarning $\{A_n\}$ ketma-ketligi chegaralangan bo`lishi zarur va yetarlidir.

3 a r u r i y l i k n i n g   i s b o t i. (1) musbat hadli qator yaqinlashyvchi bo`lganda xususiy yig`indilarning $\{A_n\}$ ketma-ketligi chegaralangan ekanligini ko`rsatsak, teoremaning zaruriy qismini isbotlagan bo`lamiz. (1) musbat hadli qator yaqinlashuvchi bo`lganligi uchun $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A$ chekli son bo`ladi, bundan $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ (yoki $\sup\{A_n\}=A$) bo`ladi. Limitning ta'rifiga ko`ra $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ bo`lgani uchun $\forall \varepsilon>0$ olinganda ham shunday natural $N$ sonni topish mumkinki, $n>N$ bo`lganda $|A_n - A| < \varepsilon$ tengsizlik o`rinli bo`ladi, bundan:

$$\begin{aligned} -\varepsilon < A_n - A < \varepsilon \\ A-\varepsilon < A_n < A+\varepsilon \end{aligned} \qquad (2)$$

By (2) tengsizlik $\{A_n\}$ ketma-ketlikning $n > N$ nomerli hamma elementlari uchun bajariladi. (2) tengsizlikdan ko`rinadiki, $\{A_n\}$ ketma-ketlik $n>N$ dan boshlab

$(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$ oraliqqa joylashgan bo`lar ekan. Bu degan so`z $\{A_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan deganidir.

Y e t a r l i k n i n g i s b o t i. $\{A_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo`lganda (1) musbat hadli qatorning yaqinlashuvchi ekanligini isbotlaymiz. $\{A_n\}$ - o`zgaruvchi:

1) monoton o`suvchi

2) yuqoridan chegaralangan bo`lganligi uchun monoton o`zgaruvchining limiti haqidagi teoremaga ko`ra u chekli limitga ega bo`ladi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ chekli son bo`ladi, shuning uchun qator yaqinlashuvchi bo`lishining ta'rifiga ko`ra (1) musbat hadli qator yaqinlashuvchi bo`ladi.

Shunday teoremalar borki, ular uchun zaruriy shart bajariladi, lekin yetarli shart doim ham bajarilmaydi. Fikrimizning dalili sifatida quyidagi teoremani ko`rib chiqaylik.

T ye o r ye m a.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \qquad (1)$$

qator yaqinlashuvchi bo`lsa, uning umumiy hadi $a_n \to 0$, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

I s b o t i. (1) qator teorema shartiga ko`ra yaqinlashuvchi bo`lganligi uchun $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\ldots$ A chekli son bo`ladi.

$$a_n = A_n - A_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} A_{n-1} = A - A = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Bundan ko`rinadiki, qator yaqinlashuvchi bo`lsa, uning n – hadining $n\to\infty$ dagi limiti 0 ga teng bo`lar ekan, bu shart qator yaqinlashuvchi bo`lishligi zaruriy sharti bo`la olmaydi. Bu degan so`z $n \to \infty$ da n - hadining limiti 0 ga teng bo`lgan har bir qator yaqinlashuvchi bo`lavermaydi.

1 - m i s o l. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots+=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ qatorni garmonik qator deb ataladi, bu qatorning n – hadi $a_n = \frac{1}{n}$ bo`lib, $n \to \infty$ da 0 ga intiladi-yu, lekin qatorning o`zi uzoqlashuvchidir.

I s b o t i:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots+=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+$$
$$+\ldots>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\ldots=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=1+1+1+\ldots+=\infty$$

Demak, bu qator uzoqlashuvchi.

2 - m i s o l.

$$\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+$$
$$+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

qatorning n – hadi $n \to \infty$ da 0 ga intiladi, ammo qatorning o`zi uzoqlashuvchi qatordir. Bunda ham qator yaqinlashuvchi bo`lishining zaruriy sharti bajarilib, uning yetarli sharti bajarilmaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: «Ўзбекистон», 2017.

2. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi «Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi PQ-4708-sonli Qarori, QMMB, 2020 й., 07/20/4708/0553-сон

3. Mirzaahmidov M.A., Ismoilov Sh.N., Amanov A.Q., Xaydarov B.Q. Matematika (Algebra va analiz asoslari.Geometriya) I va II qism: O‘rta ta’lim muassasalarining 10-sinflari va o‘rta maxsus,kasb-hunar ta’limi muassasalari uchun darslik , T. « EXTREMUM PRESS », 2017 yil.

4. Mirzaahmidov M.A., Ismoilov Sh.N., Amanov A.Q.,Xaydarov B.Q. Matematika (Algebra va analiz asoslari.Geometriya) I va II qism: O‘rta ta'lim muassasalarining 11-sinflari va o‘rta maxsus,kasb-hunar ta’limi muassasalari uchun darslik , T. « Zamin nashr », 2018 yil.

5. Abduhamidov A. U., Nasimov H. A., Nosirov U. M., Husanov J. H. Algebra va matematik analiz asoslari I va II qism: Akademik litseylar uchun darslik, T. « O‘qituvchi », 2014 yil.

6. Isroilov I., Pashayev Z. Geometriya I va II qism: Akademik litseylar uchun darslik, T. « O‘qituvchi », 2010 yil.

7. Alimov Sh.A, Xolmuhamedov O.R., Mirzaahmedov M.A.. Algebra: Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 7-sinfi uchun darslik, T. «O‘qituvchi», 2017 yil.

8. Sh.A.Alimov, O.R. Xolmuhamedov,M.A. Mirzaahmedov. Algebra: Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 8-sinfi uchun darslik, T. «O‘qituvchi», 2019 yil.

9. Sh.A.Alimov, O.R. Xolmuhamedov,M.A. Mirzaahmedov. Algebra: Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 9-sinfi uchun darslik, T. «O‘qituvchi», 2019 yil.

10. Alixonov S. «Geometriya darslarida umumlashtirish» T., «O’qituvchi», 1989 yil.

11. Alixonov S. «Matematika o’qitish metodikasi». T., «O’qituvchi» 1992 yil.

12. Alixonov S. « Matematika o'qitish metodikasi » Qayta ishlangan II nashri. T., «O'qituvchi» 1997 yil.

13. Bikboeva N.U. va boshqalar «Boshlang'ich sinflarda matematika o'qitish metodikasi», T., «O'qituvchi», 1996 yil.

14. A. A'zamov, B.Haydarov,E.Sariqov. Geometriya: Umumiy o'rta ta'lim maktablarining 7-sinfi uchun darslik, T. «Yangiyo'l Poligraf Servis », 2017 yil.

15. A.A Rahimqoriyev,M.A. To'xtaxo'jayeva Geometriya: Umumiy o'rta ta'lim maktablarining 8-sinfi uchun darslik, T. «O'zbekiston », 2019 yil..

16. Galitskiy M.A. va boshqalar «Algebra va matematik analiz kursini chuqur o'rganish» T., «O'qituvchi», 1995 yil.

17. Davidov V.V. «Vozrostnaya i pedagogicheskaya psixologiya» M., Pedagogika, 1992.

18. Ikramov Dj.I. «Matematicheskaya kultura shkolnika» T., «O'qituvchi», 1981.

19. B.Q. Xaydarov Matematika I va II qism: Umumiy o'rta ta'lim maktablarining 5-sinfi uchun darslik, T. « Huquq va Jamiyat », 2020 yil.

20. M.A. Mirzaahmedov, A.A. Rahimqoriyev,Sh.N. Ismailov, M.A. To'xta-xodjayeva Matematika: Umumiy o'rta ta'lim maktablarining 6-sinfi uchun darslik, T. « O'qituvchi », 2017 yil.

21. Klarin M.V. «Innovatsionnie modeli obucheniya v zarubejnix pedagogicheskix poiskax», M., «Prosveshenie», 1994.

22. Kolyagin Yu.N. va boshqalar Metodika prepodavaniya matematiki v sredney shkole. Obhaya metodika., M., «Prosveshenie», 1988.

23. Litvinenko V.N., Mordkovich A.G «Praktikum po elementarnoy matematike» M. Izd-vo, «AVG», 1995.

17. Lyahenko S.E. «Laboratornie i prakticheskie raboti po metodike prepodavaniya matematiki» M., «Prosveshenie», 1988.

24. Metodika prepodavaniya matematiki v sredney shkole. (Pod redaksii Mishina). M. Prosveshenie, 1988.

25. Pogorelov A.V. «Geometriya 7-11 kl.» M., «Prosveshenie», 1995.

26. Stolyar A.A. «Metodi obucheniya matematike» Minsk, «Veyshaya shkola» 1993

27. Stolyar A.A. «Pedagogika matematiki» Minsk, «Veyshaya shkola», 1988

28. Fridman L.M. Kak reshat zadachi. M., «Prosveshenie» 1988.

29. Engeler E. Matematika elementarnoy matematike, Perevod nem. yazik. M., «Mir», 1986

30. N.R.G'aybullayev «Dirchenko I.i. Razvitiye matematicheskix sposobnostey uchashixsya» T., 1987.

31. Davidov V.V. Vidi obobheniya v obuchenii. M., «Pedagogika», 1982.

32. Davidov V.V. Problemi razvivayuhego obucheniya. M., «Pedagogika», 1986.

33. Demidov V.P., Saransev G.I. Metodika prepodavaniya matematiki. M., «Prosveshenie», 1978.

34. Lerner YA. Didakticheskaya osnovi metodov obucheniya. M., «Pedagogika», 1992.

35. Okon V. Vvedeniya v obheyu didaktiku. M., «Visshaya shkola», 1990.

36. Sbornik zadach po matematike dlya postupayuhix vo vtuzi. (Pod redaksii M.I. Skanavi.) M., Visshaya shkola., 1995.

37. Sirojiddinov S.X., Mirzaaxmedov M.A. Matematika kasbi haqida suhbatlar. T., «O'qituvchi», 1993.

38. Teslenko I.F. O prepodavaniya geometrii. M., «Prosveshenie». 1985.

39. Fridman L.M. Uchites uchitsya matematike. M, «Prosveshenie». 1986.

40. Erdniev P.N. Prepodavanie matematiki v shkole. M., «Prosveshenie», 1978.

41. Yastrebeneskiy G.A. Zadache s parametrami. M., «Prosveshenie». 1989.

MUNDARIJA

UMAROV A.Yu.

MATEMATIKA DARSLARIDA BILISHNING TURLARI VA XULOSA CHIQARISH METODLARIDAN FOYDALANISH METODIKASI

USLUBIY QO'LLANMA

Bosishga ruxsat etildi: 11.11.2021 yil

Bichimi 60x84 1/16 , «Times New Roman»
garniturada raqamli bosma usulida bosildi.
Nashriyot bosma tabog'i 3. Adadi: 100. Buyurtma: № 65
Bahosi kelishuv asosida

ZUXRA BARAKA BIZNES bosmaxonasida chop etildi.
Manzil: Toshkent shahar, Chilonzor tumani,
Bunyodkor ko'chasi, 27-uy.