K.SH.RUZMETOV, G'.X.DJUMABAYEV

MATEMATIKA

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

K.SH.RUZMETOV, G‘.X.DJUMABAYEV

MATEMATIKA

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan oliy o‘quv yurtlarining qishloq xo‘jaligi sohasi talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

«O‘zbekiston xalqaro islom akademiyasi» nashriyot-matbaa birlashmasi
Toshkent – 2020

UO'K: 51(075.8)
KBK: 22.1ya73
R 86
Ruzmetov, K.

Matematika [Matn] : darslik / K.Ruzmetov, G.Djumabayev. – Toshkent : «O'zbekiston xalqaro islom akademiyasi» nashriyot-matbaa birlashmasi, 2020. – 452 b.

UO'K: 51(075.8)
KBK: 22.1ya73

Taqrizchilar:

T.T.Tuychiyev – *UzMU «Matematik analiz» kafedrasi dotsenti, f-m.f.n.;*

A.A.Fayziyev – *ToshDAU «Oliy matematika, fizika va kimyo» kafedrasi dotsenti, f-m.f.n.*

Ushbu darslik qishloq xo'jaligi sohasida tahsil oladigan talabalarga «Matematika» fanini o'zlashtirishlariga yordam berish maqsadida tayyorlandi. Darslikka bakalavriyat talabalari uchun rejalashtirilgan o'quv soatiga mos mavzular kiritilgan. Har bir mavzu bo'yicha nazariy tushunchalar bayon etilib, namunaviy misol va masalalar yechib ko'rsatilgan.

O'quv qo'llanma O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2017-yil 28-iyundagi 434-sonli buyrug'iga asosan nashr etishga ruxsat berilgan.

ISBN 978-9943-6713-4-8

SO‘ZBOSHI

Ko‘pgina oliy ta’lim muassalarida matematika fani turli hajmda (tayyorlanadigan mutaxassislikka qarab, ma’lum dastur asosida) o‘qitiladi.

Matematikani o‘qitishdan ko‘zlangan maqsad:

1) talabalarni matematik ma’lumotlar majmuasi bilan tanishtirish, uning turli uslublarini o‘rganish, ular orasidagi bog‘lanishlarni bildirish;

2) talabalarni mantiqiy fikrlashga, matematik usullarni amaliy masalalarni yechishda qo‘llashga, jumladan qishloq xo‘jaligi, to‘qimachilik va yengil sanoat, iqtisodiy va mexanik masalalarning matematik modellarini qurishga o‘rgatishdan iborat.

Ravshanki, o‘quv jarayonida darsliklar, o‘quv qo‘llanmalari, shuningdek darslik shaklida yozilgan kitoblarning ahamiyati katta.

Matematika sohasida turli hajmda, turli sohalarga mo‘ljallab yozilgan kitoblar bor. Ayni paytda, jamiyatda barcha sohalarning shiddat bilan rivojlanayotganligi ularga mos keladigan kitoblarning yozilishini taqozo etmoqda.

Shuni e’tiborga olib, mualliflar matematika sohasi bo‘yicha bilimlariga, shuningdek oliy ta’lim muassasalarida matematikadan o‘tkazilgan darslardan hosil bo‘lgan tajribaga tayangan holda ushbu darslikni yozishdi.

Mazkur darslik qishloq xo‘jaligi sohasiga mo‘ljallangan.

Darslikda mavzularning muayyan ketma-ketlikda va o‘zaro uzviy bog‘lanishda bo‘lishiga, ma’lumotlarni qisqa va ravon bayon etilishiga, amaliy masalalarni yechishda matematik usullardan unumli foydalanishga alohida e’tibor qaratilgan.

1-bob. DETERMINANTLAR

1-§. Determinantlar

Aytaylik, ikkinchi va uchunchi tartibli kvadrat matritsalar

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

berilgan bo'lsin. Bu matritsalarga mos ravishda

$$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \text{ va } a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}$$

sonlarni mos qo'yamiz. Odatda ular ikkinchi va uchinchi tartibli determenantlar deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu ifodalarni mos ravishda A va B matritsaning determinanti, ularni *detA*, *detB* kabi ham belgilanadi.

Demak,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

1-misol. Quyida berilgan ikkinchi tartibli matritsaning determinantini hisoblang:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Yechish. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 9 - 4\cdot 2 = 9 - 8 = 1$

2-misol. Quyida berilgan ikkinchi tartibli matritsaning determinantini hisoblang:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $|A|=\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}=6\cdot 8-10\cdot 9=48-90=-42$

3-misol. Quyida berilgan ikkinchi tartibli determinantni hisoblang: $\begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

Yechish. Yuqoridagi ta'rifga asosan:

$$\begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$$

Demak,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Uchinchi tartibli determinantning qiymati 6 ta had yig'indisidan iborat bo'lib, ulardan uchtasi musbat ishorali, qolgan uchtasi esa manfiy ishorali bo'ladi.

4-misol. Quyidagi uchinchi tartibli determinantni uchburchak usuli bilan hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

Yechish.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}=5\cdot 1\cdot(-3)+(-2)\cdot(-4)\cdot 4+3\cdot 1\cdot 1-$$

$$-4\cdot 1\cdot 1-3\cdot(-2)\cdot(-3)-1\cdot(-4)\cdot 5=$$

$$=-15+32+3-4-18+20=18$$

5-misol. Quyidagi uchinchi tartibli determinantni uchburchak usuli bilan hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Yechish.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 4\cdot 2+1\cdot 0\cdot 5+3\cdot 1\cdot(-1)-$$

$$-(-1)\cdot 4\cdot 5-1\cdot 3\cdot 2-2\cdot 0\cdot 1=27.$$

Eslatma. Yuqoridagidek, n tartibli ($n>3$) determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

tushunchasi kiritiladi.

Aytaylik, uchinchi tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

berilgan bo'lsin. Bu determinant biror

$$a_{ik}\ (i=1,2,3;\ k=1,2,3)$$

elementini olib, shu element joylashgan yo'lni hamda ustunni o'chiramiz. Qolgan elementlari ikkinchi tartibli determinantni hosil qiladi. Uni a_{ik} *element minori* deyiladi va u M_{ik} kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

determinant $a_{12}=5$ elementning minori

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

bo'ladi.

Uchinchi tartibli determinant 9 ta minorga ega bo'ladi.

Ushbu

$$(-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$$

miqdor (2) determinant a_{ik} elementning algebraik to'ldiruvchisi deyiladi va A_{ik} orqali belgilanadi:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$$

8-ta'rif. a_{ij} minorning (elementning) algebraik to'ldiruvchisi deb $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ songa aytiladi.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

determinant $a_{13}=3$ elementining algebraik to'ldiruvchisi

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 3) = -6$$

bo'ladi.

2-§. Determinantning xossalari

Determinant qator xossalarga ega. Quyida ularni keltiramiz:

1) determinantning yo'llarini mos ustunlari bilan almashtirilsa determinantning qiymati o'zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

2) determinantning ixtiyoriy ikki yo'lini (ikki ustunini) o'zaro almashtirilsa, determinantning qiymati o'zgarmasdan, uni ishorasi esa qarama-qarshisiga o'zgaradi;

3) determinantning ikki yo'li (ustuni) bir xil bo'lsa, determinantning qiymati nolga teng bo'ladi;

4) determinantning ixtiyoriy yo'lida (ustunida) turgan barcha elementlari o'zgarmas *k* songa ko'paytirilsa, determinanting qiymati ham k soniga ko'payadi.

Masalan:

$$3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(24+60+56-18-70-64) = -36.$$

$$\begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 7 & 3\cdot 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72+180+168-54-192-210 = -36.$$

$$\begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 7 & 3 \\ 3\cdot 5 & 6 & 8 \\ 3\cdot 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72+180+168-54-192-210 = -36.$$

Laplas teoremasi. Determinantning qiymati uning ixtiyoriy satr (ustun) elementlari bilan, shu elementlarga mos algebraik to'ldiruvchilar ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

Bu formulaga Δ determinantni i satr elementlari bo'yicha yoyish formulasi deyiladi.

Determinantning biror satr (ustun) elementlari bilan uning boshqa satri (ustuni) elementlari algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisi nolga teng.

Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar bevosita ta'rifga ko'ra hisoblanadi.

Masalan:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 10$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 3 -$

$-3 \cdot (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 4 \cdot 3 = 10$

Uchinchi tartibli determinantlarni hisoblashda shuningdek ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

munosabatdan foydalanish mumkin.

Yuqori tartibli determinantlarni hisoblash birmuncha murakkab bo'ladi. Ularni hisoblashda yuqorida keltirilgan xossalardan yoki Laplas teoremasidan foydalaniladi.

1-misol. Ushbu

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblang.

Bu determinantni hisoblashda yuqorida keltirilgan Laplas teoremasidan foydalanamiz:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3[7\cdot 3\cdot 4 + (-1)\cdot 0\cdot 2 + 5\cdot 7\cdot 1] -$$

$$-1[5\cdot 3\cdot 4 - 7\cdot 2\cdot(-1) + 5\cdot 7\cdot 8] +$$

$$+0[5\cdot 0\cdot 4+7\cdot 1\cdot(-1)+7\cdot 7\cdot 8]+$$

$$+[5\cdot 0\cdot 2+7\cdot 1\cdot 5+7\cdot 3\cdot 8]=3\cdot 119-326-203=$$

$$=357-529=172$$

2-misol. Quyidagi determinantni Laplas formulasi bilan hisoblang:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}.$$

Yechish. Berilgan determinantni birinchi satr elementlari bo'yicha yoysak:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=2\cdot A_{11}+A_{12}+3A_{13}=2(-1)^{1+1}\cdot$$

$$\cdot M_{11}+(-1)^{1+2}\cdot M_{12}+3\cdot(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=$$

$$=2\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}5 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=2(9-8)-(15-2)+$$

$$+3(20-3)=2-13+51=40.$$

3-misol. Quyidagi determinantni Laplas formulasi bilan hisoblang:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 6 & 2\end{vmatrix}$$

Yechish. Berilgan determinantni ikkinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib chiqamiz. Bu ustunda 2 ta noldan farqli element bo'lgani uchun natijada 2 ta 3-tartibli determinant hosil bo'ladi.

$$\Delta = -1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Yoki, avval $a_{32}=2$ elementni nolga keltirishimiz mumkin. Buning uchun 2-satrni 2 ga ko'paytirib 3-satrga qo'shamiz va hosil bo'lgan determinantni 2-ustun elementlariga nisbatan yoyamiz va hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 7 & 0 & 9 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 7 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -21.$$

Ko'rinib turibdiki, Laplas teoremasidan yuqorida keltirilgan xossalar bilan birgalikda foydalanish determinantni hisoblashni ancha osonlashtiradi. Buning uchun biror satr yoki ustunni tanlab olib, shu ustun yoki satrdagi elementlarni determinantning xossalaridan foydalanib iloji boricha nollarga keltirishimiz kerak bo'ladi. So'ngra, Laplas teoremasi yordamida determinantning tartibini bittaga kamaytirishimiz mumkin.

2-bob. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

1-§. Chiziqli tenglamalar sistemasi haqida tushuncha

Ma'lumki bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, ularga *tenglamalar sistemasi* deyiladi.

Quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

sistemaga n noma'lumli m ta *chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi* (yoki soddalik uchun chiziqli tenglamalar sistemasi) deyiladi. Bu yerda $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ sonlar sistemaning koeffitsientlari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lar noma'lumlar, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sonlar esa ozod hadlar deyiladi.

Tenglamalar sistemasi koeffitsientlaridan tuzilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa tenglamalar sistemasining asosiy matritsasi deyiladi. Noma'lumlar vektorini $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ ustun vektor, ozod hadlarni $B=(b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ ustun vektor shaklida ifodalaymiz. U holda tenglamalar sistemasi quyidagi matritsa shaklida yozilishi mumkin

$$AX=B$$

Ta'rif. Agar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sonlar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ larning o'rniga qo'yilganda (1) sistemadagi tenglamalarni to'g'ri tenglikka aylantirsa, bu sonlarga (1) sistemaning yechimlar tizimi deb aytiladi va $X=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)^T$ kabi belgilanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi kamida bitta yechimga ega bo'lsa, u holda bunday sistema birgalikda deyiladi.

1-misol. $\begin{cases} x-y=2, \\ 2x+y=7 \end{cases}$ sistema birgalikda chunki u $x=3$, $y=1$ yechimga ega.

Bitta ham yechimga ega bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lmagan sistema deyiladi.

2-misol. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 3x+3y+3z=5 \end{cases}$

sistema yechimga ega bo'lmaganligi sababli birgalikda emas.

Birgalikda bo'lgan sistema yagona yechimga ega bo'lsa, aniq sistema va cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa aniqmas sistema deyiladi.

3-misol. $\begin{cases} x-y=1, \\ 2x-2y=2, \\ 3x-3y=3 \end{cases}$ sistema birgalikda, ammo aniqmas, chunki bu sistema $x=\alpha$, $y=-1+\alpha$ ko'rinishdagi cheksiz ko'p yechimga ega, bunda α – ixtiyoriy haqiqiy son.

Birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasi bir xil yechimlar majmuyiga ega bo'lsa, bunday sistemalar ekvivalent deyiladi.

4-misol. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+2y=3 \end{cases}$ (a) tenglamalar sistemaning yechimi

$$(x,y)=(1,1).$$

$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 3x+y=4 \end{cases}$ (b) tenglamalar sistemasining yechimi

$$(x,y)=(1,1).$$

(a) va (b) tenglamalar sistemasi ekvivalent tenglamalar sistemasi deyiladi.

Berilgan tenglamalar sistemasining birorta tenglamasini 0 dan farqli songa ko'paytirib, boshqa tenglamasiga hadma-had qo'shish bilan hosil bo'lgan sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo'ladi.

5-misol. $\begin{cases} x+3y=5 \\ 3x-y=5 \end{cases}$ (a) tenglamalar sistemadagi 1-tenglamani (-3) ga ko'paytirib 2-tenglamaga qo'shib quyidagini hosil qilamiz. $\begin{cases} x+3y=5 \\ -10y=-10 \end{cases}$ (b) natijada (a) va (b) tenglamalar sistemasi ekvivalent.

Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimga ega yoki ega emasligini quyidagi teorema yordamida aniqlash mumkin.

Kroneker-Kapelli teoremasi. Chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun uning A asosiy matritsa va kengaytirilgan $(A|B)$ matritsalarining ranglari teng bo'lishi zarur va yetarli.

Masalan, Quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining birgalikda yoki birgalikda emasligini tekshiring:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2 \\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4 \end{cases}$$

Yechish. Buning uchun asosiy va kengaytirilgan matritsa rangini topamiz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22\end{pmatrix}$$

2-satr elementlaridan 1-satr elementlarini ayiramiz:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22\end{pmatrix},\quad r(A)=2.$$

$$(A|\mathrm{B})=\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1\\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4\end{array}\right)$$

bu matritsa rangini topish uchun yana yuqoridagi ishni takrorlaymiz, natijada B matritsa quyidagi ko'rinishni oladi:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4\end{array}\right),\quad r(A|B)=3.$$

Demak, $r(A)<r(A|B)$ munosabat o'rinli, teorema shartiga ko'ra berilgan chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda emas.

2-§. Ikki va uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi

1°. Ikki noma'lumli, ikki chiziqli tenglamalardan tuzilgan sistema va uni yechish.

Ushbu

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}\qquad (1)$$

sistema ikki x va y noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} sonlar (1) sistemasining koeffitsientlari, b_1, b_2 lar esa sistemaning ozod hadlari deyiladi.

Agar (1) sistemadagi x noma'lumning o'rniga x_0 sonni, y noma'lumining o'rniga y_0 soni qo'yganda tenglamalarning har biri bajarilsa, (x_0, y_0) juftlik (1) sistemaning yechimi deyiladi.

(1) sistema koeffitsientlaridan

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

determinantni, so'ng bu determinantning birinchi va ikkinchi ustun elementlarini mos ravishda ozod hadlar bilan almashtirib quydagi

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ a_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

determinantlarni hosil qilamiz.

Teorema. Agar

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

sistemada:

1) $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (1) sistema yagona yechimga ega bo'lib,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

bo'ladi;

2) $\Delta = 0$ bo'lib, $\Delta_x \neq 0$ yoki $\Delta_y \neq 0$ bo'lsa, (1) sistema yechimga ega bo'lmaydi;

3) $\Delta = 0$ bo'lib, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ bo'lsa, (1) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

(1) sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga ikkinchi tenglamasini a_{12} ga ko'paytirib so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = a_{22}b_1 -$$
$$-a_{22}a_{12}x - a_{12}a_{22}y = -a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

keyingi tenglik ushbu

$$\Delta \cdot x = \Delta_x$$

ko'rinishga ega bo'lib, undan

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shuningdek, (1) sistemaning birinchi tenglamasini a_{21} ga ikkinchi tenglamasini a_{12} ga ko'payritib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$-a_{11} \cdot a_{21}x - a_{12} \cdot a_{21}y = -b_1a_{21}$$
$$a_{12}a_{21}x + a_{12} \cdot a_{22}y = b_2a_{12}$$
$$(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) \cdot y = a_{12}b_2 - a_{21}b_1$$

keyingi tenglik ushbu

$$\Delta \cdot y = \Delta_y$$

ko'rinishga ega bo'lib, undan

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunga o'xshash

$$\Delta = 0 \ \Delta_x \neq 0, \ yoki \ \Delta_y \neq 0$$

bo'lganda sistemaning yechimi mavjud bo'lmasligi,

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y 0$$

bo'lganda sistemaning yechimi cheksiz ko'p bo'lishi ko'rsatiladi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Bu sistema uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3 - (-5)\cdot 4 = 9 + 20 = 29,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 11\cdot(-5) = 3 + 55 = 58,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 3\cdot 11 - 1\cdot 4 = 33 - 4 = 29$$

bo‘lib,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{58}{29} = 2, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{29}{29} = 1$$

bo‘ladi. Demak, berilgan sistemaning yechimi (2;1) bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = 1 \end{cases}$$

sistemaning yechimi mavjudmi?

Bu sistema uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 16,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

bo'ladi. Demak qaralayotgan sistema yechimga ega emas.

Misol. Ushbu,

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$$

sistemani qaraylik. Bu sistema uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

bo'ladi. Demak, bu sistema cheksiz ko'p yechimga ega.

2°. Uch noma'lumli, uchta chiziqli tenglamalardan tuzilgan sistema va uni yechish.

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{13}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (2)$$

sistema uch x, y va z noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33}$$

sonlar (2) sistemaning koeffitsientlari,

$$b_1,\ b_2,\ b_3,$$

sonlar esa sistemaning ozod hadlari deyiladi.

Agar x_0, y_0, z_0 sonlarni mos ravishda (2) sistemadagi: x, y, z larning o'rniga qo'yilganda (2) sistemadagi tengliklar bajarilsa, (x_0, y_0, z_0) uchlik (2) sistemaning yechimi deyiladi.

(2) sistema koeffitsientlari hamda ozod hadlardan foydalanib qo'yidagi determinantlarni hosil qilamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

Teorema. Agar

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{13}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (2)$$

sistemada:

1) $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (2) sistema yagona (x,y,z) yechimga ega bo'lib

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

bo'ladi;

2) $\Delta=0$ bo'lib, $\Delta_x \neq 0$ yoki $\Delta_y \neq 0$ yoki $\Delta_z \neq 0$ bo'lsa, (2) sistema yechimga ega bo'lmaydi,

3) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ bo'lsa, (2) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

1-misol. Ushbu sistema yechilsin:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -5 \\ x + 2y - 4z = -9 \\ 5x - 4y + 6z = 5 \end{cases}$$

Bu sistema uchun Δ, Δ_x, Δ_y, Δ_z determinantlarni tuzib, ularni hisoblaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & -4\\ 5 & -4 & 6\end{vmatrix}=24-4+60-10-32+18=56$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}-5 & -3 & 1\\ -9 & 2 & -4\\ 5 & -4 & 6\end{vmatrix}-60+36+60-10-162+80=-56$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1\\ 1 & -9 & -4\\ 5 & 5 & 6\end{vmatrix}=-108+100+5+45+30+40=112$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}2 & -3 & -5\\ 1 & 2 & -9\\ 5 & -4 & 5\end{vmatrix}=20+20+135+50+15-72=168$$

Demak,

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-56}{56}=-1, \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{112}{56}=2,$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{168}{112}=3$$

Berilgan sistemaning yechimi $(-1,2,3)$ bo'ladi.

2-misol. Quyidagi tenglamalar sistemasini **Kramer usuli** yordamida yeching:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=8\\ 3x_1+2x_2+x_3=10\\ 4x_1+3x_2-2x_3=4\end{cases}$$

Bu sistema uchun Δ, Δ_{x1}, Δ_{x2}, Δ_{x3} determinantlarni tuzib, ularni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4+8+9-8-3+12=14.$$

$\Delta \neq 0$ bo‘lgani uchun sistema aniq Kramer formulalari yordamida topiladi:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -32+8+30-8+40-24=14.$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -20+32+12-40-4+48=28.$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8+80+72-64-24-30=42.$$

Demak, tenglamalar sistemasini yechimlari quyidagiga teng bo‘ladi:

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1, \qquad x_2 = \frac{28}{14} = 2, \qquad x_3 = \frac{42}{14} = 3. \qquad (1;\,2;\,3)$$

Eslatma. n ta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma’lumli chiziqli tenglamalardan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3)$$

sistema n ta noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda

$$a_{11},a_{12},...,a_{1n},a_{21},a_{22},...,a_{2n},...,a_{n1},a_{n2},...,a_{nn}$$

sonlar sistema koeffitsientlari

$$b_1,b_2,...,b_n$$

sonlar esa ozod hadlar deyiladi.

Agar (3) sistemaning koeffitsientlaridan tuzilgan

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\ \dots & \dots\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lsa unda (3) sistema yagona $(x_1,x_2,...,x_n)$ yechimga ega bo'lib

$$x_i=\frac{\Delta_{x_i}}{\Delta} \qquad (i=1,2,...,n)$$

bo'ladi. Bunda

$$\Delta_{x_i}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$(i=1,2,...,n)$$

3-bob. TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQ

Tekislikda geometrik shakllar, jumladan to'g'ri chiziq tekislik nuqtalari to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) sifatida qaraladi.

Ma'lumki tekslikdagi nuqta uning koordinatalari x va y lar orqali (ya'ni (x,y) juftlik bilan to'liq aniqlanadi. Agar bu o'zgaruvchi (x,y) nuqtaning koordinatalari o'zaro bog'lanishda bo'lsa, ular biror shaklni tasvirlashi mumkin. Bunda bog'lanishni ifodalovchi tenglik geometrik shaklning tenglamasi deyiladi.

To'g'ri chiziq tushunchasi sodda, ayni paytda muhim tushunchalardan biri hisoblanadi.

To'g'ri chiziqni tekislikdagi ikki nuqtadan baravar masofada joylashgan nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) deb qarash mumkin.

Ushbu bobda to'g'ri chiziq, uning turli tenglamalari, to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyati, to'g'ri chiziqqa oid masalalar bayon etiladi.

1-§. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi

Tekislikda ikkita

$$B_1=B_1=(x_1;y_1)\ va\ B_2=B_1(x_2;y_2)$$

nuqtani olib, bu nuqtalardan baravar uzoqlikda (masofada) joylashgan nuqtalardan birini

$$M=M(x;y)$$

deymiz (1-chizma)

Tekislikda ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan topamiz:

$$B_1M=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2},$$

$$B_2M=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

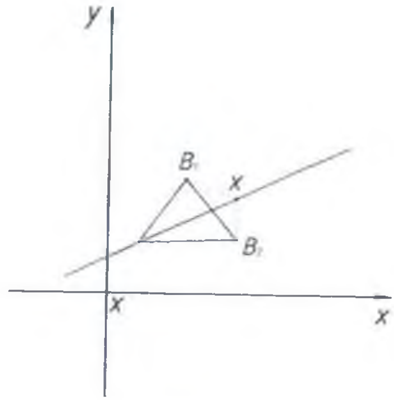
yuqorida aytilgan shart

$$B_1M=B_2M$$

ga ko'ra

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=$$
$$=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

bo'ladi.



1-chizma

Keyingi tenglikning ikki tomonini kvadratga ko'taramiz. Natijada

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$$

bo'lib undan

$$x^2-2xx_1+x_1^2+y^2-2yy_1+y_1^2=$$
$$=x^2-2xx_2+x_2^2+y^2-2yy_2+y_2^2$$

ya'ni

$$-2xx_1+x_1^2-2yy_1+y_1^2+2xx_2-x_2^1+$$
$$+2yy_2+y_2^2=0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Bu tenglikni quyidagicha

$$2(x_2 - x_1)\cdot x + 2(y_2 - y_1)\cdot y + (x_1^2 + y_1^1 - x_2^2 - y_2^2) = 0$$

yozib, so'ng

$$A = 2(x_2 - x_1), \qquad B = 2(y_2 - y_1)$$

$$C = x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2$$

belgilashlarni bajarib, ushbu

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

tenglikka kelamiz. Bu x va y larga nisbatan birinchi darajali tenglamadir.

Demak, to'g'ri chiziqning ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasining koordinatalari x,y lar (1) tenglama bilan bog'langan.

Ushbu

$$Ay+By+C=0 \qquad (1)$$

tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi A,B,C sonlarga (koeffitsientlarga) bog'liq. Bu sonlar turli qiymatlarga ega bo'lganda turli to'g'ri chiziqlar hosil bo'ladi. Binobarin, to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyati ham shu koeffitsientlarga bog'liq bo'ladi.

Endi (1) tenglamaning ba'zi xususiy hollarini qaraymiz:

1°. (1) tenglamada C=0 bo'lsin. Bu holda (1) tenglama.

$$Ax+By=0$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu to'g'ri chiziq koordinatalar boshi (0; 0) nuqtadan o'tadi.

2°. (1) tenglamada B=0 bo'lsin. Bu holda (1) tenglama

$$Ax+C=0, \quad \text{ya'ni} \quad x = -\frac{C}{A}$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu to'g'ri chiziq OY o'qiga parallel bo'ladi.

3°. (1) tenglamada A=0 bo'lsin. Bu haqda (1) tenglama

$$By+C=0, \quad ya'ni \quad y=-\frac{c}{B}$$

ko‘rinishga ega bo‘lib, bu to‘g‘ri chiziq *OX* o‘qiga parallel bo‘ladi.

4°. (1) tenglamada A=C=0 bo‘lsin. Bu holda (1) chiziq

$$By=0, \; ya'ni \; y=0$$

ko‘rinishga ega bo‘lib, bu to‘g‘ri chiziq *OX* o‘qi bo‘ldi.

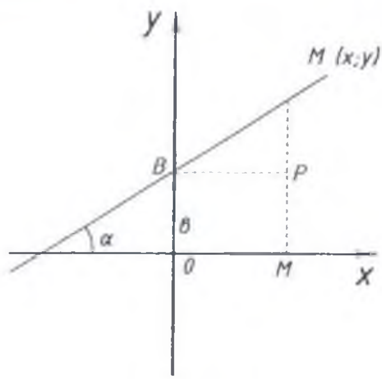
5°. (1) tenglamada B=C=0 bo‘lsin. Bu holda (1) tenglama

$$Ax=0, \; ya'ni \; x=0$$

ko‘rinishga ega bo‘lib, bu to‘g‘ri chiziq *OY* o‘qi bo‘ladi.

2-§. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi va biror to‘g‘ri chiziqni qaraylik. Bu to‘g‘ri chiziq *OY* o‘qining *B(0;b)* nuqtasi orqali o‘tib, *OX* o‘qining musbat yo‘nalishi bilan α burchak tashkil etsin (2-chizma)



2-chizma

Bu to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy $M=M(x;y)$ nuqtani olib, bu nuqtadan *OX* o‘qiga perpendekulyar tushiramiz, perpendekulyarning asosini M_1 bilan belgilaymiz. Ravshanki

$$OM_1=x, \; MM_1=y$$

bo'ladi.

B nuqtadan *OX* o'ngga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Uning MM_1 perpendikulyar bilan kesishgan nuqtasini *P* deylik.

Natijada to'g'ri burchakli *BMP* uchburchak hosil bo'ladi. Bu uchburchakda

$$\angle MBA=\alpha, \quad BP=OM_1=x_1, \quad MP=MM_1-PM_1=y-b$$

bo'lib,

$$tg\alpha=\frac{MP}{BP}=\frac{y-b}{x}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$y-b=tg\alpha\cdot x, \text{ ya'ni } y=tg\alpha\cdot x+b$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Odatda, to'g'ri chiziqning *OX* o'qi bilan tashkil etgan burchakning tangensi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti deyiladi va ko'pincha *k* bilan belgilanadi:

$$tg\alpha=k$$

Demak,

$$y=kx+b \qquad (2)$$

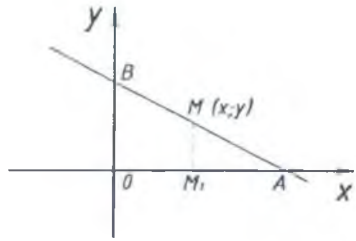
To'g'ri chiziqning (2) ko'rinishdagi tenglamasi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi deyiladi.

Bu holda to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyati *k* hamda *b* lar bilan to'liq aniqlanadi.

3-§. To'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi

Tekislikda biror to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tmasdan, u *OX* o'qidan $a=OA$ kesmani, *OY* o'qidan esa $b=OB$ kesmani ajratsin (3-chizma)

To'g'ri chiziqda ixtiyoriy $M=M(x;y)$ nuqtani olib bu nuqtadan *OX* o'qiga perpendikulyar tushiramiz. Perpendikulyarning asosini M_1 bilan belgilaymiz.



3-chizma

Ravshanki,

$$OM_1=x,\ MM_1=y.$$

Endi OAB va M_1AM to‘g‘ri burchakli uchburchaklarni qaraymiz. Bu uchburchaklarning o‘xshashligidan foydalanib

$$\frac{MM_1}{OB}=\frac{M_1A}{OA}$$

bo‘lishini topamiz.

Ravshanki,

$$M_1A=OA-OM_1=a-x$$

unda yuqoridagi tengliklardan

$$\frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak,

$$\frac{y}{b}=1-\frac{x}{a}$$

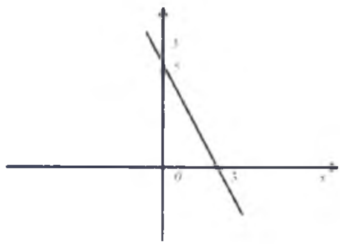
ya’ni

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (3)$$

Demak, to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtaning koordinatalari x va y lar (3) tenglama bilan bog‘langan. (3) tenglama to‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi deyiladi.

Masalan. To'g'ri chiziq Ox o'qdan 3 ga, Oy o'qdan 5 ga teng kesma ajratadi. Bu to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

Yechish. Masala shartida $a=3$ va $b=5$. Bu qiymatlarni $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ to'g'ri chiziqning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalari bo'yicha tenglamasiga qo'yamiz: $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ ga ega bo'lamiz (4-chizma).



4-chizma

4-§. To'g'ri chiziq haqidagi asosiy masalalar

1°. Berilgan nuqtadan (berilgan yo'nalish bo'yicha) o'tuvchi to'g'ri chiziq.

Tekislikda tayin $M(x_1,y_1)$ nuqta berilgan. Shu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasini topish talab etilsin. Uni

$$y=kx+b \qquad (1)$$

ko'rinishda izlaymiz.

Madomiki, to'g'ri chiziq $M(x_1,y_1)$ nuqtadan o'tar ekan, unda bu nuqtaning x_1 va y_1 koordinatalari $y=kx+b$ tenglamani qanoatlantiradi:

$$y_1=kx_1+b \qquad (2)$$

Yuqoridagi (1) tenglikdan (2) tenglikni hadlab ayirib

$$y-y_1=kx+b-(kx_1+b)$$

quyidagi

$$y-y_1=k(x-x_1) \qquad (3)$$

tenglamaga kelamiz. Bu berilgan $M(x_1,y_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

Masalan, $M=M(3;2)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y-2=k(x-3)$$

ya'ni

$$y=k(x-3)+2$$

bo'ladi. Ravshanki, bu tenglama, ya'ni to'g'ri chiziq k ning qiymatlariga bog'liq. k ning turli qiymatlarida $M(3;2)$ nuqtada o'tuvchi turli to'g'ri chiziqlar hosil bo'ladi.

2°. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq.

Tekislikda $M(x_1,y_1)$ va $N(x_2;y_2)$ ikkita tayin nuqtalar berilgan. Bu nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqni (to'g'ri chiziq tenglamasini) topish talab etilsin.

Ma'lumki $M(x_1,y_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y-y_1=k\cdot(x-x_1)$$

bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq $N(x_2;y_2)$ nuqtadan ham o'tsin deylik. Unda $N(x_2;y_2)$ nuqtaning koordinatalari x_2 va y_2 lar keying tenglamani qanoatlantiradi:

$$y_2-y_1=k\cdot(x_2-x_1)$$

bu tenglikdan

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

bo'lishini topamiz. Natijada

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_2)$$

bo'lib, undan

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (4)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

(4) tenglama $M(x_1,y_1)$ va $N(x_2;y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

Masalan, $M(2,2)$ va $N(1,3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-2}{3-2}, \qquad \frac{x-2}{-1}=\frac{y-2}{1},$$

$$x-2=-y+2$$

bo'ladi.

Bundan esa, $x+y-4=0$.

3°. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

Tekislikda ikkita

$$y=k_1x+b_1 \text{ va } y=k_2x+b_2$$

to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lib, bu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topish talab etilsin.

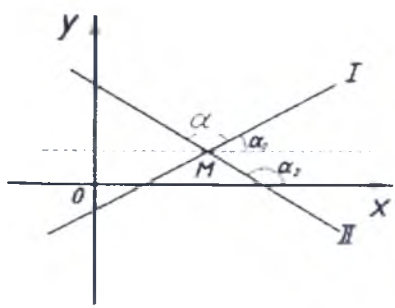
Ma'lumki,

$$k_1=tg\alpha_1$$

birinchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti,

$$k_2=tg\alpha_2$$

ikkinchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti (5-chizma)



5-chizma

Odatda, I to'g'ri chiziqni M nuqta atrofida soat strelkasiga teskari tomonga uni II to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushguncha burish natijasida hosil bo'lgan α burchak ($0\leq\alpha<\pi$) ikki I va II to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak deyiladi.

Chizmadan ko'rinadiki,

$$\alpha=\alpha_2-\alpha_1$$

bo'ladi.

Agar

$$tg\alpha = tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1 tg\alpha_2}$$

va

$$tg\alpha_1=k_1,\ tg\alpha_2=k_2$$

bo'lishni e'tiborga olsak unda

$$tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1} \qquad (5)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu berilgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakning teglamasini aniqlab beradi.

Demak, (5) formula yordamida ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak topiladi.

Masalan ushbu

$$y=-\frac{1}{7}x+\frac{4}{5}, \qquad y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$$

to'g'ri chiziqlar uchun

$$k_1=-\frac{1}{7}, \qquad k_2=\frac{3}{4}$$

bo'lib ular orasidagi burchak α ning tangensi

$$tg\alpha=\frac{\frac{3}{4}-(-\frac{1}{7})}{1+\frac{3}{4}\cdot(-\frac{1}{7})}=\frac{21+4}{28-3}=1$$

bo'ladi. Demak, berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak.

$$\alpha = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

bo'ladi.

4° Ikki to'g'ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Tekislikda ikkita to'g'ri chiziq berilgan bo'lib, birinchisining tenglamasi

$$y=k_1x+b_1$$

ikkichisining tenglamasi esa

$$y=k_2x+b_2$$

bo'lsin.

Ravshanki, bu to'g'ri chiziqlar orasidagi α burchak (burchakning tangensi) uchun

$$tg\alpha = \frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$$

bo'ladi.

1) Aytaylik, to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak nolga teng bo'lsin:

$\alpha = 0°$ bu holda berilgan to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'lib,

$$tg\alpha=tgo°=0$$

$$\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=0,$$

$$k_2-k_1=0,$$

$$k_1=k_2$$

bo'ladi. Demak,

$$k_1=k_2$$

tenglik ikki to'g'ri chiziqlarning o'zaro parallellik shartini ifodalaydi.

2) Aytaylik, to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak 90° ga teng bo‘lsin:

$$\alpha = 90°$$

bu holda berilgan to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lib,

$$tg\alpha = tg90° = \left(\frac{1}{0}\right)$$

bo‘lib,

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \left(\frac{1}{0}\right) \qquad 1 + k_1 \cdot k_2 = 0$$

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \qquad yoki \qquad k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

bo‘ladi. Demak,

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

tenglik ikki to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro perpendikulyarlik shartini ifodalaydi.

5°. Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha masofa.

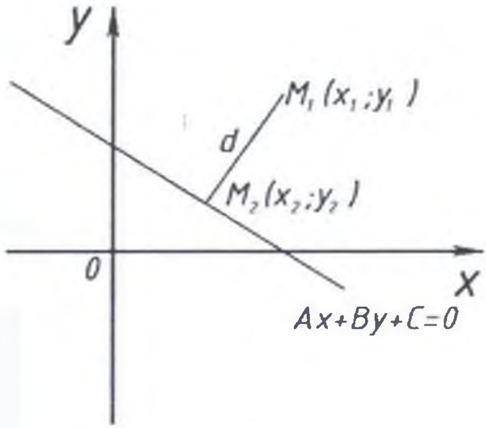
Tekislikda biror to‘g‘ri chiziq ushbu

$$Ax + By + C = 0$$

tenglama bilan berilgan bo‘lib, $M_1(x_1, y_1)$ nuqta esa shu to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqta bo‘lsin M_1 nuqtada berilgan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi M_1 nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa deyiladi (6-chizma).

Aytaylik, $M_1(x_1, y_1)$ nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtasi $M_2(x_2, y_2)$ bo‘lsin.

Demak, nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa M_1M_2 kesmaning uzunligi bo‘ladi. Uni d bilan belgilaymiz. Bu d masofa quyidagi



6-chizma

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

formula bilan topiladi.

Masalan. $M=M(3;2)$ nuqtadan

$$3x-4y+18=0$$

to‘g‘ri chiziqqacha masofa

$$d=\frac{|3\cdot3-2\cdot(-4)+18|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{35}{5}=7$$

bo‘ladi.

6°. Ikki to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi.

Tekislikda ikki to‘g‘ri chiziqlar ushbu

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

tenglamalar bilan berilgan bo‘lib, ular o‘zaro parallel bo‘lmasin. Bu to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topish talab etilsin.

Bu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini $M=M(x;y)$ bilan belgilaylik (7-chizma).

Madomiki, izlanayotgan nuqta bir vaqtda ikkala to'g'ri chiziqda yotar ekan, unda nuqtaning koordinatalari x va y lar

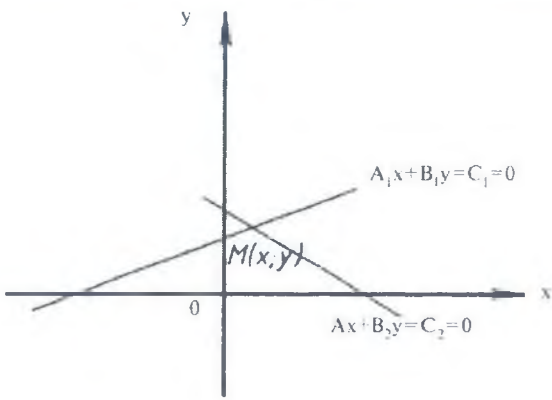
$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0$$

tenglamalarni qanoatlantiradi. Shuning uchun bu x va y lar ushbu

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi.

Demak, ikki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasini topish uchun yuqoridagi tenglamalar sistemasini yechish kerak bo'ladi.



7-chizma

Misol. Berilgan $M(0,5)$ nuqtadan o'tuvchi hamda

$$3x-2y-6=0$$

to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin.

Berilgan $M(0,5)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi formulasiga ko'ra

$$y-5=k(x-0)$$

ya'ni

$$y=kx+5$$

bo'ladi. Endi berilgan to'g'ri chiziq tenglamasi

$$3x-2y-6=0$$

ni y ga nisbatan yechib topamiz.

$$-2y=6-3x, \qquad y=\frac{3}{2}x-3$$

Bu $y=kx+5$, $y=\frac{3}{2}x-3$ to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulyar bo'lishi shartidan

$$k\cdot\frac{3}{2}=-1, \quad ya'ni \quad k=-\frac{2}{3}$$

bo'lishini topamiz. Topilgan k ning o'rniga qo'ysak, unda

$$y=-\frac{2}{3}x+5$$

bo'ladi. Bu berilgan nuqtadan o'tuvchi hamda berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

4-bob. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar x va y o'zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi darajali tenglamalar bilan ifodalanadi. Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

Bu tenglama ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi deb ataladi. Bu yerda A, B, C, D, E, F — haqiqiy o'zgarmas sonlar, bundan tashqari A, B yoki C lardan kamida bittasi noldan farqli.

Ushbu bobda sodda ko'rinishdagi ikkinchi tartibli egri chiziqlardan aylana, ellips, giperbola hamda parabolalarni qaraymiz. Bu egri chiziqlarning tenglamalarini topib, ular yordamida geometrik xossalarini o'rganamiz.

1-§. Aylana va uning tenglamasi

Ta'rif. Markaz deb ataluvchi nuqtadan baravar uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning to'plamiga aylana deyiladi.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida aylananing radiusi R va markazi A(a; b) nuqtada bo'lsin. N(x; y) aylanadagi ixtiyoriy nuqta. Aylananing ta'rifiga ko'ra: AN=R.

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan:

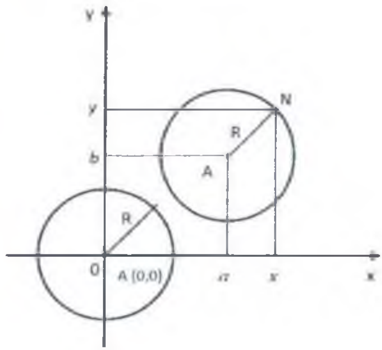
$$AN=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

Tenglikning ikkita tomonini kvadratga ko'tarib, AN=R ekanligini e'tiborga olsak $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (1) kelib chiqadi (1-chizma).

$N(x,y)$ aylananing ixtiyoriy nuqtasi bo'lgani uchun (1) tenglama aylananing markazi $A(a,b)$ nuqtada bo'lgan kanonik (sodda) tenglamasi deyiladi.

Aylananing tenglamasi o'zgaruvchi koordinatalarga nisbatan ikkinchi darajalidir. Xususiy holda, agar aylananing markazi koordinatalar boshida bo'lsa, uning tenglamasi:

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (2)$$



1-chizma

(1) tenglamada qavslarni ochib va ba'zi bir ayniy almashtirishlarni bajarib, aylananing quyidagi tenglamasini hosil qilamiz:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0 \qquad (3)$$

Bu tenglamani 2-tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi (1) bilan solishtirganda aylana tenglamasi uchun quyidagi ikkita shart bajarilganini ko'rish mumkin: 1) x, y koordinatalar ko'paytmasi bo'lgan $x\,y$ li had qatnashmayapti; 2) x^2 va y^2 lar oldidagi koeffitsientlar o'zaro teng, ya'ni $A=N\neq 0$; $B=0$. Bu holda (1) tenglama

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (4)$$

ko'rinishda bo'lib aylanani tasvirlaydi.

Agar $a=-\dfrac{D}{A}$; $b=-\dfrac{E}{A}$; $R^2=\dfrac{D^2+E^2-AF}{A^2}$ (5) bo'lsa, (4) tenglama (2) tenglamaga aylanadi va, aksincha, (1) tenglamadan (5) formulalar yordamida (4) tenglamaga o'tish mumkin.

Mumkin bo'lgan uchta holni ko'ramiz:

1) $D^2+E^2-AF>0$. Bu holda $\left(x+\dfrac{D}{A}\right)^2+\left(y+\dfrac{E}{A}\right)^2=\dfrac{D^2+E^2-AF}{A^2}$

(6) tenglama va demak, unga teng kuchli bo'lgan (4) tenglama

ham markazi $O_1\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A}\right)$ nuqtada bo'lgan, radiusi $R=\frac{\sqrt{D^2+E^2-AF}}{A}$ dan iborat aylanani aniqlaydi.

2) $D^2+E^2-AF=0$. Bu holda (6) tenglama $\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=0$ ko'rinishga ega bo'ladi. Ushbu tenglamani va demak, unga teng kuchli bo'lgan (4) tenglamani haqiqiy yagona $O_1\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A}\right)$ nuqtani tasvirlaydi.

3) $D^2+E^2-AF<0$ bo'lsa, (6) yoki (4) tenglamaning radiusi mavhum bo'lib, bu holda haqiqatan aylana mavjud bo'lmasada, umumiylik nuqtayi nazaridan mavhum aylana deyiladi.

Ta'rif. Aylana bilan umumiy bitta $M(x_1;y_1)$ nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziq aylanaga o'tkazilgan urinma deyiladi. Agar $(x_1;y_1)$ aylananing biror nuqtasining koordinatasi bo'lsa, u holda bu nuqtadan aylanaga o'tkazilgan urinmaning tenglamasi (2) tenglama uchun $x\cdot x_1+y\cdot y_1=R^2$ (7) yoki (1) tenglama uchun $(x-a)\cdot(x_{11}-a)+(y-b)\cdot(y_1-b)=R^2$ (8) ko'rinishida yoziladi.

1-misol. Markazi (1;3) nuqtada va radiusi 3 ga teng bo'lgan aylananing tenglamasini tuzing.

Yechish. $a=1$; $b=3$, $R=3$. Bularni (1) formulaga qo'yamiz:

$$(x-1)^2+(y-3)^2=9$$

2-misol. Markazi (−2;4) nuqtada bo'lgan va (3;−4) nuqtadan o'tadigan aylana tenglamasini tuzing.

Yechish. Radiusni aylana markazidan uning birorta berilgan nuqtasigacha bo'lgan masofa sifatida topamiz. Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalansak:

$$R=\sqrt{(3+2)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{25+64}=\sqrt{89}$$

$$(x+2)^2+(y-4)^2=89.$$

3-misol. A(8;5) va B(−1;−4) nuqtalardan va markazi abssissalar o‘qida bo‘lgan aylananing tenglamasini tuzing.

Yechish. Aylananing markazi C(a;0) bo‘lsin. U holda ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko‘ra

$$\sqrt{(8-a)^2+(5-0)^2}=\sqrt{(-1-a)^2+(0+4)^2}.$$

Bu ifodani soddalashtirib, quyidagini topamiz: $18a=72 \Rightarrow a=4$; C(4;0)

$$R=AC=\sqrt{(8-4)^2+5^2}=\sqrt{41}.$$

Aylananing tenglamasi: $(x-4)^2+y^2=41$.

4-misol. Aylananing radiusini va markazining koordinatalarini toping:

$$x^2+y^2-6x-10y+13=0.$$

Yechish. Berilgan tenglamani ushbu ko‘rinishda yozamiz:

$$x^2+6x+y^2-10y+13=0$$

x^2+6x va y^2-10y ikki hadlarni to‘la kvadratlargacha to‘ldirib, ushbuni hosil qilamiz:

$$x^2+2\cdot 3x+3^2+y^2-2\cdot 5y+5^2=25+9-13$$

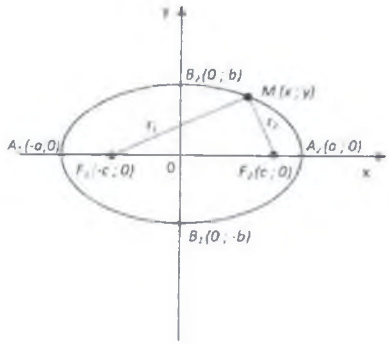
yoki $(x+3)^2+(y-5)^2=21$, bundan $a=-3$; $b=5$, $R=\sqrt{21}$.

2-§. Ellips va uning tenglamasi

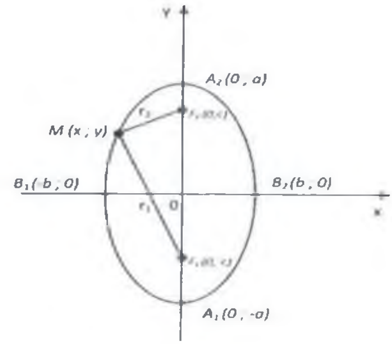
Ellips, bu qanday chiziq? U haqida tasavvurga ega bo‘lish uchun, bir bo‘lak ip uchlarini bir varaq qog‘ozning ikki nuqtasiga mahkamlanadi va bu ipni qalam uchi bilan tarang tortiladi. (1,2-chizmalar).

Qalamni shu tarang holatda harakatlantirilsa, uning uchi qog‘ozda chizadigan egri chiziq ellips bo‘ladi.

Ta’rif. Ellips – bu barcha, shunday M nuqtalardan iborat bo‘lgan yassi chiziqki, bunda M dan fokuslar deb ataluvchi F_1 va F_2 nuqtalargacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi o‘zgarmas songa teng (bu kattalik $2a$, fokuslar orasidagi masofa $2c$ dan katta bo‘lishi shart):



1-chizma



2-chizma

$$|MF_1|+|MF_2|=const=2a \qquad (1)$$

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan foydalanib, $MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ va $MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ ni hosil qilamiz, demak, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$ (2). Bu tenglamani soddalashtirgandan keyin: $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$ (3)

Ellipsning ta'rifiga ko'ra $2a>2c$ bo'lgani uchun a^2-c^2 son musbat: $a^2-c^2=b^2$ (4) belgilash kiritamiz. U holda (3) tenglama $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ yoki $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (5) ko'rinishni oladi.

(5) tenglama fokuslari Ox o'qda yotgan ellipsning kanonik (sodda) tenglamasi deyiladi. (1-chizma) (5) tenglama bilan berilgan ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikdir.

Ellipsning simmetriya o'qlarini ellips o'qlari deb, ularning kesishgan nuqtasini ellips markazi deb ataymiz. Ellips fokuslari joylashgan o'q fokal o'q deyiladi.

Koordinatalar boshi uning simmetriya markazi deyiladi.

$F_1(-c;0)$ va $F_2(c;0)$ nuqtalar ellipsning fokuslari deyiladi. $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;-b)$ nuqtalar ellipsning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalari. Bu nuqtalar odatda ellipsning uchlari deyiladi. $AA_1=2a$ kesma ellipsning katta o'qi, $BB_1=2b$ kesma esa, ellipsning kichik o'qi deyiladi. a va b lar ellipsning yarim o'qlaridir.

Agar ellipsning fokuslari Oy o'qda yotsa (2-chizma), uning tenglamasi $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $(a>b)$ (6) ko'rinishda bo'ladi.

Ellipsga doir hamma masalalarda ellipsning simmetriya o'qlari koordinata o'qlari bilan ustma-ust tushadi deb faraz qilinadi.

1-misol. Agar ellipsning o'qlari $2a=8$ va $2b=6$ bo'lsa, fokuslari Ox o'qda bo'lgan ellipsning tenglamasini tuzing.

Yechish. Ellipsning tenglamasini tuzish uchun a va b parametrlarni topamiz: $a=4$ va $b=3$. Bu qiymatlarni ellipsning (5) tenglamasiga qo'yib, ushbuni hosil qilamiz: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

2-misol. Agar ellipsning ikki uchi $(-5; 0)$ va $(5; 0)$ nuqtalarda, fokuslari esa $(-3; 0)$ va $(3; 0)$ nuqtalarda joylashgan bo'lsa, shu ellipsning tenglamasini tuzing.

Yechish. Shartdan $a=5$ va $c=3$ ekanligi kelib chiqadi. (4) formula bo'yicha $b^2=5^2-3^2=16$ ni topamiz. a^2 va b^2 ning qiymatlarini (5) tenglamaga qo'yib, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ni hosil qilamiz.

3-misol. Fokuslari $(0; -\sqrt{3})$ va $(0; \sqrt{3})$ nuqtalarda joylashgan, katta o'qi esa $4\sqrt{7}$ ga teng bo'lgan ellipsning tenglamasini tuzing.

Yechish. Fokuslari Oy o'qda yotadi, demak $a=2\sqrt{7}$. (4) formulaga ko'ra $b^2=\left(2\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=28-3=25$ ni topamiz. a^2 va b^2 ning qiymatlarini (6) tenglamaga qo'yib, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{28}=1$ ni topamiz.

4-misol. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ ellips berilgan. Ellipsning fokuslarining koordinatalarini va ular orasidagi masofani toping.

Yechish. Ellipsning tenglamasidan $a^2=12$, $b^2=3$ (4) formulaga ko'ra $c= =\pm 3$. Demak, fokuslarining koordinatalari (−3; 0) va (3; 0), ular orasidagi masofa esa $2c=2\cdot 3=6$.

3-§. Ellipsning ekssentritsiteti, fokal radiuslari, direktritsalari

Ellipsning qanday ko'rinishda bo'lishi, ellipsning ekssentritsiteti deb ataluvchi miqdor bilan aniqlanadi.

Ta'rif. Ellipsning ekssentritsiteti deb, fokuslar orasidagi (2c) masofaning katta o'qi (2a) nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \qquad (1)$$

yoki

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \qquad (2)$$

$c<a$ bo'lgani uchun ellips ekssentritsiteti birdan kichik: $\varepsilon<1$. Ekssentritsitet ellipsning shaklini xarakterlaydi. Haqiqatan, (2-§ dagi 4) formuladan $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 - \varepsilon$ kelib chiqadi. Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: ellipsning ekssentritsiteti qanchalik kichik bo'lsa, uning kichik yarim o'qi b katta yarim o'qi a dan shuncha kam farq qiladi, ya'ni ellips fokal o'q bo'ylab shuncha kam tortilgan bo'ladi.

(2) formuladan ko'rinadiki, b orta borsa ε kichiklasha boradi va, aksincha, b kamaya borsa ε kattalasha boradi. b ning limiti nolga intilsa $\varepsilon=1$ bo'lib, ellips ikkilangan kesmaga aylanadi.

Katta va kichik o'qlari teng bo'lgan ellips aylanadir, ya'ni b=a limit holda a radiusli aylana hosil bo'ladi: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ yoki $x^2+y^2a^2$ (3). Bunda $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - a^2} = 0$ va ellips fokuslari go'yo bitta nuqtada – aylana markazida birlashib ketadi. Aylana essentritsiteti nolga teng: $\varepsilon = \frac{0}{a} = 0$.

Ellips va aylana orasidagi bog'lanishni boshqa nuqtayi nazardan ham o'ranish mumkin. Yarim o'qlari a va b bo'lgan ellipsni a radiusli aylananing proeksiyasi deb qarash mumkin.

Ta'rif. Ellipsning fokuslaridan ixtiyoriy M(x;y) nuqtasigacha bo'lgan masofalar, M(x;y) nuqtaning fokal-radiuslari deyiladi va $r_1=a+\varepsilon x$, $r_2=a+\varepsilon x$ (3.4) formulalar bilan aniqlanadi (1-chizma). Ellipsning ta'rifiga ko'ra: $r_1+r_2=2a$ (3.5)

Demak, ellipsning har qanday nuqtasi fokal radiuslarining yig'indisi uning katta o'qiga teng.

Ta'rif. Ellipsning direktritsalari deb ushbu $x = \frac{a}{\varepsilon}$ va $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ (6)

tenglamalar bilan aniqlanadigan ikki to'g'ri chiziqqa aytiladi.

Ellipsning direktritsalari y o'qiga parallel va ellips markazidan $\pm\frac{a}{\varepsilon}$ uzoqlikda turgan to'g'ri chiziqlardir. $\varepsilon<1$ bo'lganligi uchun $\frac{a}{\varepsilon} > a$; demak, direktritsalar ellipsdan tashqarida joylashadi. (1-chizma). $|d_1d_2|$ – direktritsalar orasidagi masofa.

Markazning bir tomonida joylashgan direktritsa va fokus bir-biriga mos direktritsa va fokus deb ataladi.

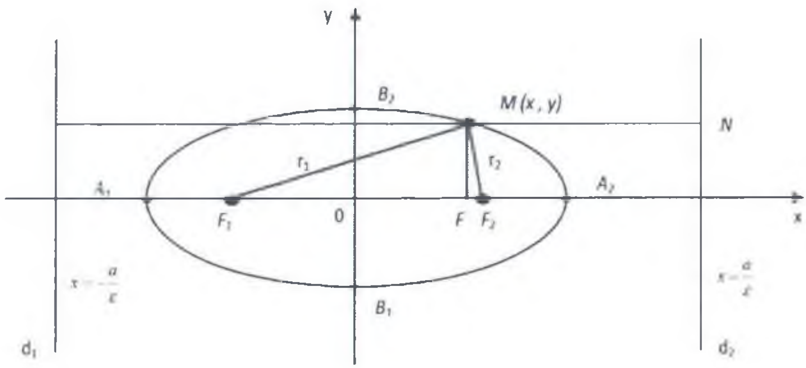
Ellipsning nuqtalari bir-biriga mos fokus va direktritsaga nisbatan ushbu xossaga ega: ellipsning har bir nuqtasidan fokusgacha olingan masofaning o'sha nuqtadan mos direktritsagacha bo'lgan masofaga nisbatan ellipsning ekssentritsitetiga baravar.

d_1 va d_2 direktritsalarning tenglamalari:

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad va \quad x = \frac{a}{\varepsilon} \qquad (6)$$

yoki

$$x = \frac{-a^2}{c} \quad va \quad x = \frac{a^2}{c} \qquad (7)$$



1-chizma

Ellipsning ixtiyoriy M(x;y) nuqtasidan fokusgacha bo'lgan (r_1 yoki r_2) masofasining shu M(x;y) nuqtadan direktritsagacha (d_1 yoki d_2) bo'lgan masofaga nisbati ellipsning ekssentritsitetiga teng, ya'ni:

$$\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon \quad yoki \quad \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \qquad (8)$$

Ellipsning o'qlari koordinata o'qlariga parallel bo'lib, simetriya markazi biror (x_0, y_0) nuqtda bo'lganda, uning tenglamasi

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$ (9) ko'rinishda bo'ladi.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning $M_1(x_1;\ y_1)$ nuqtasiga urinma bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasi: $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ (10)

1-misol. Katta yarim o'qi $a=6$ va $\varepsilon=0,5$ bo'lgan, ellipsning kanonik tenglamasini toping.

Yechish: $\varepsilon=\frac{c}{a}=0,5$. Demak, fokuslar orasidagi masofaning yarmi $c=a\cdot\varepsilon=6\cdot0,5=3$. Ellips kichik yarim o'qi $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}$

Ellipsning kanonik tenglamasi: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$.

2-misol. Ellipsning ekssentritsitetini toping: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

Yechish. Ellipsning tenglamasidan: $a^2=36$; $b^2=16$.

2-§ dagi (4) formuladan: $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ ni topamiz.

Ekssentritsitetni (2) formulaga ko'ra topamiz:

$$\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{16}{36}}=\frac{\sqrt{20}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Yoki (1) formulaga ko'ra: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

3-misol. M_1 (4; -2) nuqta orqali o'tuvchi, kichik yarim o'qi b=4 bo'lgan ellipsning ekssentritsitetini toping.

Yechish. $b=4$ da ellipsning kanonik tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1.$$

$M_1(4;-2)$ nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi.

Demak, $\frac{4^2}{a^2}+\frac{(-2)^2}{16}=1$. Bunda $a^2=\frac{64}{3}$ va $b^2=16$. Ekssentritsitetini (2) formula yordamida topmiz:

$$\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{16\cdot3}{64}}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}.$$

4-misol. Ellipsning katta o'qi 12 ga teng, $x=\pm 9$ to'g'ri chiziqlar esa uning direktritsalari bo'lsin. Ellipsning kanonik tenglamasini va ekssentritsitetini toping.

Yechish. Ellipsning kanonik tenglamasini topish uchun a va b yarim o'qlarni bilish kerak. Shart bo'yicha $2a=12 \Rightarrow a=6$, b yarim o'qni (7) formuladan foydalanib, quyidagicha topamiz:

$$x=\frac{a^2}{c} \Rightarrow c=\frac{a^2}{x}=\frac{36}{9}=4, \qquad b^2=a^2-c^2=36-16=20.$$

Ellips tenglamasi: $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$.

Ellips ekssentritsiteti: $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

5-misol. Ellipsning kichik o'qi 8 ga, ekssentritsiteti $\varepsilon=0{,}6$ ga teng bo'lsa ellipsning kanonik tenglamasini va direktritsa tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko'ra $2b=8 \Rightarrow b=4$. Ekssentritsitetni (2) formulasiga asosan: $\varepsilon=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}} \Leftrightarrow \sqrt{1-\dfrac{16}{a^2}}=0{,}6$. Bundan $a^2=25$.

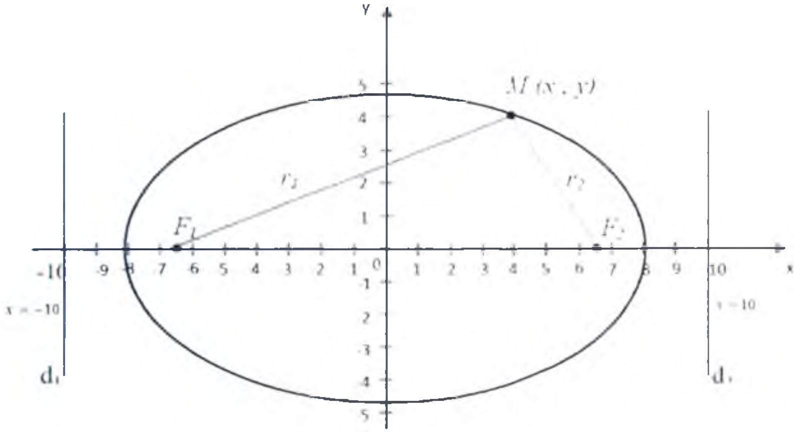
Ellips tenglamasi, $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ ko'rinishda bo'ladi.

$$c^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow c=\sqrt{25-16}=3$$

(7) formuladan foydalanib direktritsa tenglamasini topamiz:

$$x=\pm\frac{a^2}{c} \Leftrightarrow x=\pm\frac{25}{3}.$$

6-misol. Katta o'qi 16 ga, direktritsalar orasidagi masofa 20 ga teng bo'lsa, ellipsning kanonik tenglamasini va ekssentritsitetini toping.



2-chizma

Yechish. Shartga ko'ra $2b=16\Rightarrow b=8$; (6)

formuladan: $x=\frac{a}{\varepsilon}\Leftrightarrow\frac{12}{2}=\frac{8}{\varepsilon}\Rightarrow\varepsilon=\frac{4}{3}$; (7)

formuladan: $x=\frac{a^2}{c}\Leftrightarrow 10=\frac{64}{c}\Rightarrow c=6,4.$

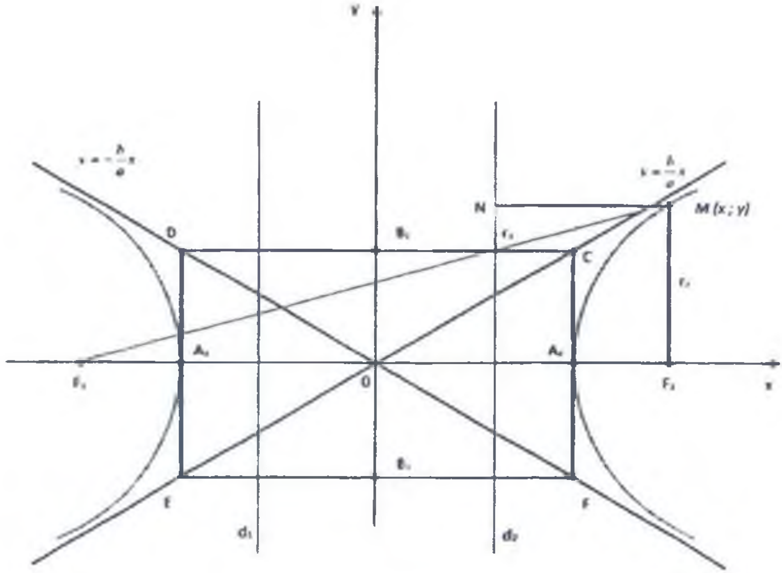
$b^2=a^2-c^2=64-40, \quad 96=23,04.$

Bundan, $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{23,04}=1$ yoki $\frac{x^2}{64}+\frac{25y^2}{576}=1.$

Ellipsning chizmasini yasaymiz: $a=8$; $b=4,8$; $c=6,4$.

4-§. Giperbola va uning tenglamasi

Ta'rif. Giperbola deb, tekislikning barcha shunday nuqtalari to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan shu tekislikning fokuslari deb ataluvchi berilgan ikki nuqtasigacha bo'lgan masofalar ayirmalarining absolyut qiymatlari o'zgarmas bo'ladi (bu kattalik nolga teng bo'lmagan va fokuslari orasidagi masofalardan kichik bo'lgan shartda).



1-chizma

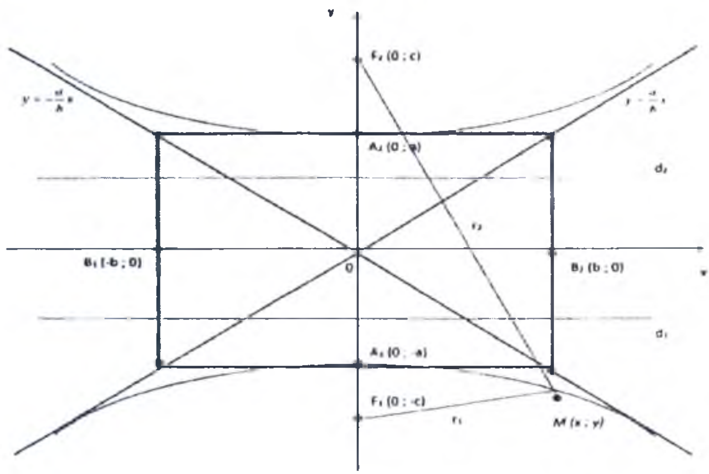
F_1 va F_2 fokuslar orasidagi masofani 2c orqali, giperbolaning har bir nuqtasidan fokuslargacha bo'lgan masofalar ayirmasining moduliga teng bo'lgan o'zgarmas miqdorni 2a orqali ($0<2a<2c$) belgilaymiz. Ellips holida bo'lgani kabi abssissalar o'qini fokuslar orqali o'tkazamiz, F_1F_2 kesmaning o'rtasini esa koordinatalar boshi deb qabul qilamiz (1-chizma).

Bunda fokuslar $F_1(-0; 0)$ va $F_2(0; 0)$ koordinatalarga ega bo'ladi. Fokuslari Ox o'qida yotgan giperbola (1-chizma) tenglamasini, uning ta'rifiga asoslanib keltirib chiqaramiz. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \qquad (1)$$

Soddalashtirishlarni bajargandan so'ng, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad (2)$$



2-chizma

(2) tenglamada giperbola uchun 2a < 2c bo'lgandan ayirma noldan kichik: $a^2-c<0$. Shuning uchun $c^2-a^2=b^2$ (3) deb olamiz. U holda (2) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (4).

(4) tenglamaga fokuslari *Ox* o'qida yotgan giperbolaning kanonik (sodda) tenglamasi deyiladi.

Giperbola tenglamasida $y=0$ deyilsa, $x=\pm a$ bo'lib, giperbola *Ox* o'qini $A_1(-a;0)$ va $A_2(a;0)$ nuqtalarda kesishini bildiradi. (4) tenglamada x=0 deyilsa $y^2=-b^2$ bo'lib, bu esa giperbola Oy o'qi bilan kesishmasligini bildiradi.

Lekin, $y=\pm\sqrt{-b^2}=\pm bi$ mavhum bo'lgani uchun, fokal o'qqa perpendikulyar bo'lgan simmitiriya o'qi giperbolaning mavhum o'qi (B_1B_2 kesma), giperbolaning fokuslari joylashgan o'q fokal o'q (F_1F_2 kesma) va fokal o'qni odatda haqiqiy o'q (A_1A_2 kesma) deyilib, A_1 va A_2 nuqtalar giperbolaning uchlari deyiladi.

a va b sonlar mos ravishda giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o'qlari deb ataladi.

Agar giperbolaning fokuslari Oy o‘qda yotsa (2-chizma), u holda uning tenglamasi $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ (5). Bu giperbola (4) giperbolaga nisbatan qo‘shma deyiladi.

1-misol. Agar giperbolaning haqiqiy o‘qi 18 ga, mavhum o‘qi esa 8 ga teng bo‘lsa, fokuslari Ox o‘qda yotgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

Yechish. Giperbolaning tenglamasini tuzish uchun a va b parametrlarni bilish zarur. Masalaning shartidan: $2a=18 \Rightarrow a=9$; $2b=8 \Rightarrow b=4$. Topilgan qiymatlarni (4) ga qo‘ysak: $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{16}=1$.

2-misol. Agar giperbolaning uchlari A1 (-2; 0) va A2 (2; 0) nuqtalarda joylashgan, fokuslari esa F1 (-4; 0) va F2 (4; 0) nuqtalarda joylashgan bo‘lsa, giperbola tenglamasini tuzing.

Yechish. Shartdan a=2, c=4 ekani kelib chiqadi. (3) formulaga ko‘ra $b^2=4^2-2^2=21$. Bu qiymatlarni (4) tenglamaga qo‘yib, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ ni hosil qilamiz.

3-misol. Giperbolaning tenglamasi berilgan $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{57}=1$. Uning uchlarining va fokuslarining koordinatalarini toping.

Yechish. Giperbolaning tenglamasidan: $a^2=64 \Rightarrow a=\pm 8$.

(3) formulaga ko‘ra $c^2=a^2+b^2=64+57=121 \Rightarrow c=\pm 11$. Demak, giperbolaning uchlari (−8;0) va (8;0) nuqtalar, fokuslari esa (−11;0) va (11;0) nuqtalar ekan.

Giperbolaning shakli

(4) tenglamadan $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $x=\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$ (2) tenglamalarni topamiz.

Bu tenglamalarning birinchisidan ushbu xulosalar chiqadi:

1) $|x|<a$ uchun y ning qiymati mavhum; demak, giperbola y o'qi bilan kesishmaydi va $x=\pm a$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan soha ichida nuqtalari bo'lmaydi.

2) $x=\pm<a$ bo'lganda, $y=0$ bo'ladi; demak, giperbola x o'qini ikkita A_1 va A_2 nuqtada kesadi; bu A_1 va A_2 nuqtalar koordinatalar boshida a masofada turadi va giperbolaning uchlari deb ataladi.

3) absolyut qiymati a dan katta bo'lgan x ning har bir qiymatiga y ning ikki qiymati to'g'ri keladi, bu qiymatlar bir-biridan ishoralari bilangina farq qiladi. Demak, giperbola x o'qiga nisbatan simmetrik egri chiziqdir;

4) x cheksiz o'sganda y ham cheksiz o'sadi. Demak, (2) tenglamalarning ikkinchisi giperbolaning y o'qiga nisbatan simmetrik egri chiziq ekanligini ko'rsatadi.

Giperbolaning hamma nuqtalari $x=\pm a$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan sohadan tashqarida joylashganligidan va ordinatalar o'qiga simmetrikligidan, u cheksiz cho'zilgan ikki ayrim tarmoqdan iborat ekanligi bilinadi (1-chizma).

Giperbolaning asimptotalari

Funksiya argumenti x cheksizlikka intilganda funksiya grafigi biror to'g'ri chiziqqa cheksiz yaqinlashish xossasi uning grafigini chizishda muhum rol o'ynaydi.

Ta'rif. Agar $y=f(x)$ egri chiziqning M nuqtasidan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan s masofa M nuqta cheksiz uzoqlashganda nolga intilsa, l to'g'ri chiziq $y=f(x)$ egri chiziqning asimptotasi deyiladi.

$y=f(x)$ funksiya grafigining asimptota chiziqlari umuman uch xil ko'rinishda bo'ladi:

1) vertikal asimptota;

2) gorizontal asimptota;

3) $y=k+b$ ko'rinishdagi asimptota chizig'i.

$x\to a$ bo'lganda $|y|\to\infty$ bo'lsa, $x=a$ vertikal asimptota chizig'i; $y\to a$ bo'lganda $|x|\to\infty$ bo'lsa, $y=a$ gorizontal asimptota chizig'i bo'ladi.

Agar $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ (1), $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-k(x))$ (2) limitlar mavjud bo'lsa, u holda $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ egri chiziqning og'ma asimptotasi deyiladi.

Agar $y=kx+b$ og'ma asimptota tenglamasini aniqlashda $k=0$ (xususiy holda $k=0$, $b=0$) bo'lsa, u holda $y=b$ (yoki $y=0$) to'g'ri chiziq gorizontal asimptota deyiladi.

Giperbolaning muhum xususiyatlaridan biri shundaki, uning nuqtalari uchlaridan uzoqlashib borgan sari asimptota deb atalgan to'g'ri chiziqlarga cheksiz yaqinlashib boradi.

Giperbolada ikkita asimptota bor bo'lib, uning tenglamalari, (4) uchun: $y=\pm\frac{b}{a}x$ (3), (5) tenglama uchun: $y=\pm\frac{a}{b}x$ (4).

1- va 2- chizmalarda giperbola va uning asimptotalarining o'zaro joylashishi ko'rsatilgan. Bu chizmalarda giperbola asimptotalarining qanday joylashishi ham ko'rsatilgan. Giperbolani yasashdan avval uning asimptotalarini yasash tavsiya qilinadi.

4-misol. Giperbola asimptotalarining tenglamalari $8y+6x=0$ va $8y-6x=0$ hamda fokuslar orasidagi masofa 20. Uning kanonik tenglamasini tuzing.

Yechish. Masala shartiga asosan va (3) formulaga ko'ra: $y=\pm\frac{6}{8}x$ Bundan: $b=\frac{6}{8}a$ (5)

Masala shartiga asosan:

$$2c=20\Rightarrow c=10;\ c^2=b^2+a^2\Rightarrow 100b^2+a^2 \qquad (6)$$

a va b larni (5) va (6) dan topamiz:

$$\begin{cases}100=a^2+\frac{36}{64}a^2\\ b=\frac{6}{8}a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=64\\ b^2=36\end{cases}$$

Demak, izlanayotgan giperbola tenglamasi: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

5-misol. Asimptotalar orasidagi burchak 150° va fokuslari abssissalar o'qida bo'lib, ular orasidagi masofa $2c=8\sqrt{3}$ bo'lsa giperbola tenglamasini tuzing.

Yechish. Agar giperbola asimptotalari o'zaro 150° li burchak tashkil etsa, ularda bittasi bilan Ox o'qning musbat yo'nalishi orasidagi burchak 30° bo'ladi.

Shuning uchun: $\frac{b}{a}=tg30^0 \Rightarrow a=\sqrt{3}b.$

a va b larning qiymatlarini aniqlaymiz. Masala shartiga asosan: c^2-48.

Bundan:

$$\begin{cases} a=\sqrt{3}b \\ a^2+b^2=48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b^2+b^2=48 \\ a^2=3b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2=12 \\ a^2=36 \end{cases}$$

Demak, izlanayotgan giperbola tenglamasi: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$.

Giperbolaning ekssentritsiteti, direktritsalari va fokal radiuslari

Ta'rif. Giperbolaning ekssentritsiteti deb, fokuslar orasidagi (2c) masofaning haqiqiy o'qi (2a) nisbatiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} \qquad (1)$$

$c<a$ bo'lgani uchun $e>1$ bo'ladi.

Ekssentritsitet giperbolaning shaklini xarakterlaydi. Haqiqatan (3) formuladan quyidagi kelib chiqadi: $\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2-1=e^2-1$ (2)

Bundan ekssentritsiteti qanchalik kichik bo'lsa, giperbolaning yarim o'qlari nisbati $\frac{b}{a}$ shunchalik kichik bo'lishi ko'rinadi.

Biroq $\frac{b}{a}$ nisbat giperbola asosiy to'g'ri to'rtburchagi CDEF (1-chizma)ning shaklini, demak, giperbolaning o'zining shaklini aniqlaydi. Giperbolaning ekssentritsiteti qanchalik kichik bo'lsa, uning asosiy to'g'ri to'rtburchagi fokal o'q yo'nalishi bo'yicha shunchalik tortilgan bo'ladi.

Ta'rif. Giperbolaning direktritsalari deb, uning simmetriya markazidan $\pm\frac{a}{e}$ masofada haqiqiy o'qiga perpendikulyar bo'lib o'tadigan (d_1 va d_2) to'g'ri chiziqlarga aytiladi.

Demak, giperbola direktritsalarining tenglamalari:

$$\left|\begin{array}{l} x=\frac{a}{e} \\ x=-\frac{a}{e} \end{array}\right. \quad (3) \quad yoki \quad \left|\begin{array}{l} x=\frac{a^2}{c} \\ x=-\frac{a^2}{c} \end{array}\right. \quad (4)$$

Giperbolaning markazidan bir tomonda yotgan direktritsasi va fokusi mos direktritsa va mos fokus deb ataladi.

Giperbolaning nuqtalari mos fokus va mos direktritsaga nisbatan ushbu xossaga ega: Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan fokusgacha bo'lgan masofaning mos direktritsagacha bo'lgan masofaga nisbati o'zgarmas son bo'lib, giperbolaning ekssentritsitetiga tengdir, ya'ni:

$$\frac{r_1}{d_1}=e \quad yoki \quad \frac{r_2}{d_2}=e$$

Ta'rif. Giperbolaning ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasidan uning $F_1(c;0)$ va $F_2(c;0)$ fokuslarigacha bo'lgan masofalari M nuqtaning fokal radiuslari deyiladi va ular shu

$\begin{cases} r_1 = -a + ex \\ r_2 = a + ex \end{cases}$ (o'ng tarmog'i uchun) va $\begin{cases} r_1 = -a - ex \\ r_2 = a - ex \end{cases}$ (chap tarmoq uchun) formulalar bilan aniqlanadi.

6-misol. Giperbolaning tenglamasi berilgan: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{12} = 1$. Uning ekssentritsitetini toping.

Yechish. Giperbola tenglamasidan: $a^2=36$, $b^2=12$. Ekssentritsitet yuqoridagi formulalardan kelib chiqqan holda hisoblanadi: $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{7}{6}$.

7-misol. Haqiqiy o'qining uzunligi 10 ga, ekssentritsiteti $\frac{6}{5}$ ga teng bo'lib, fokuslari Ox o'qda yotgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

Yechish. Shartga ko'ra: $2a=10 \Rightarrow a=5$ (1) tenglikdan foydalanib, quyidagini topamiz: $\frac{6}{5} = \frac{c}{5} \Rightarrow c = 6$.

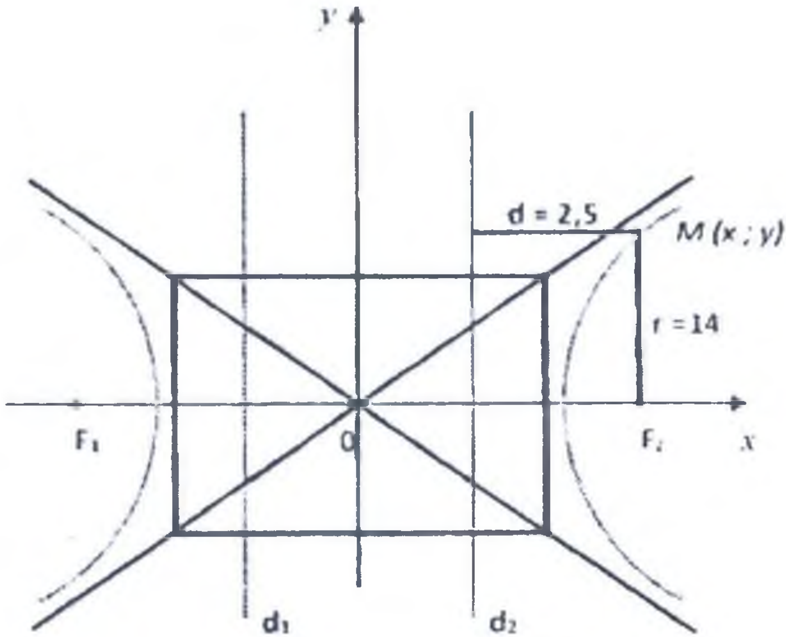
So'ngra, $b^2=36-25=11$ ni topamiz. Shunday qilib izlanayotgan tenglama $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$ ko'rinishda bo'ladi.

8-misol. Giperbolaning ekssentritsiteti $e = \frac{7}{5}$. $M(x;y)$ nuqtaning fokal – radiusi r=14. Shu M nuqtadan u bilan bir tomonda yotuvchi direktritsagacha bo'lgan masofani hisoblang.

Yechish. Masala shartiga asosan chizma chizamiz (3-chizma).

Agar $M(x;y)$ nuqtaning fokal radiusi r bo'lsa, $M(x;y)$ nuqtadan M nuqta bilan bir tomonda yotuvchi direktritsagacha bo'lgan masofani d desak, bular orasida $e = \frac{r}{d}$ munosabat mavjud. Bu munosabatdan:

$$d = \frac{r}{e} = \frac{14}{\frac{7}{5}} = \frac{5}{2} = 2,5.$$



3-chizma

5-§. Parabola va uning tenglamasi

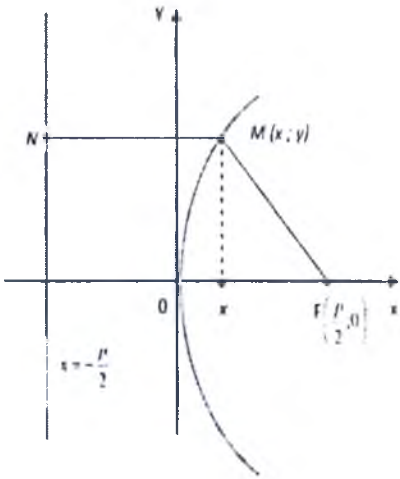
Uchi koordinatalar boshida bo'lgan parabola

Ta'rif. Parabola deb, tekislikning fokus deb ataluvchi berilgan to'g'ri chiziqdan baravar uzoqlashgan barcha nuqtalar to'plamiga (fokus direktritsada yotmaydi deb faraz qilinadi) aytiladi.

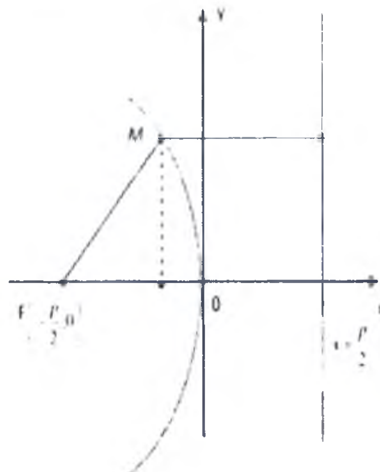
Fokusdan direktritsagacha bo'lgan masofani p orqali belgilaymiz. Bu kattalik *parabolaning parametri* deyiladi.

Parabola tenglamasini keltirib chiqarish uchun tekislikda koordinatalar sistemasini quyidagicha olamiz. Fokusdan o'tuvchi hamda berilgan direktritsaga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni abssissa o'qi deb, direktritsa va fokus orasidagi masofani ifodalovchi kesma o'rtasidan o'tuvchi hamda Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni Oy o'qi deb olamiz. (1-chizma)

Shunday qilib, tanlangan sistemada fokus $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ koordinatalarga, direktritsa tenglamasi $x=-\frac{p}{2}$ (1) ko'rinishda bo'ladi.



1-chizma



2-chizma

M(x;y) parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda parabola ta'rifiga asosan: *MN=MF* (2). Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$ (3) bo'ladi.

(2) tenglikning har ikki tomonini kvadratga oshirib topamiz:

$y^2=2px(p>0)$ (4). Bu tenglama, simmetriya o'qi Ox va tarmoqlari o'nga yo'nalgan, uchi koordinata boshida bo'lgan parabolaning kanonik (eng sodda) tenglamasi deyiladi (1-chizma).

Parabolaning simmetriya o'qi fokal o'q deyiladi. Parabolaning simmetriya o'qi bilan kesishish nuqtasi uning uchi deyiladi.

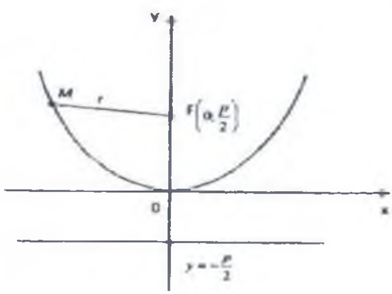
M(x;y) nuqtaning fokal – radiusi: $r = x + \frac{p}{2}$ *(5)*

Simmetriya o'qi Ox va tarmoqlari chapga yo'nalgan, uchi koordinatalar boshida bo'lgan parabola (2-chizma)ning kanonik tenglamasi $y^2=-2px(p>0)$ (5) ko'rinishda bo'ladi. Uning direktritsasi tenglamasi $x = \frac{p}{2}$ (7) bo'ladi.

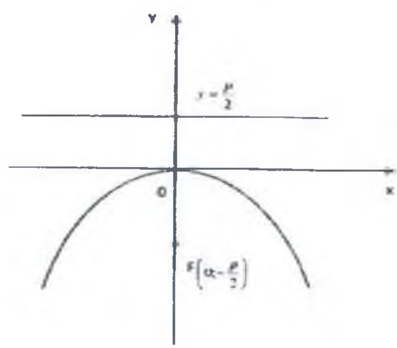
Oy o'q simmetriya o'qi bo'lgan va tarmoqlari yuqoriga yo'nalgan, uchi koordinatalar boshida joylashgan parabolaning tenglamasi (3-chizma).

$x^2=2py(p>0)$ (7) ko'rinishda bo'lib, uning direktritsasi tenglamasi $y = -\frac{p}{2}$ (8) bo'ladi. *M(x;y)* nuqtaning fokal radiusi:

$$r = y + \frac{p}{2} \qquad (9)$$



3-chizma



4-chizma

Oy o'q simmetriya o'qi bo'lgan va tarmoqlari pastga yo'nalgan, uchi koordinatalar boshida bo'lgan parabolaning (4-chizma) kanonik tenglamasi $x^2=-2py(p>0)$ (10) ko'rinishda bo'lib, uning direktritsasi tenglamasi $y=\frac{p}{2}$ (11) bo'ladi.

Parabolaning ekssentritsiteti: $\varepsilon=1$, chunki $d=r$; $\varepsilon=\frac{r}{d}=1$.

1-misol. Agar uchi koordinatalar boshida bo'lgan parabolaning fokusi $F(4;0)$ nuqtada yotsa, bu parabola tenglamasini tuzing.

Yechish. Parabolaning fokusi Ox o'qining musbat yarim o'qida yotibdi.

Unda parabolaning tenglamasi $y^2=2px$ bo'ladi. $\frac{p}{2}=4\Rightarrow p=8$.

Demak, y^2-16x.

2-misol. Uchi koordinatalar boshida, Ox o'qiga nisbatan simmetrik va $A(2;2)$ nuqtadan o'tuvchi parabolaning tenglamasi topilsin.

Yechish. Shartga ko'ra izlanayotgan parabola $(2;-2)$ nuqtadan o'tadi. Binobarin, bu nuqtaning koordinatalari parabola tenglamasini qanoatlantiradi.

$$(-2)^2=2p\cdot 2\Rightarrow p=1.$$

Demak, parabolaning tenglamasi $y^2=2\cdot 1\cdot x=2x$ bo'ladi.

3-misol. Parabola tenglamasi $y^2=10x$ berilgan. Uning direktritsasi tenglamasini tuzing.

Yechish. Parabola tenglamasi $y^2=10x$ dan $2p=10\Rightarrow 10p=5$.

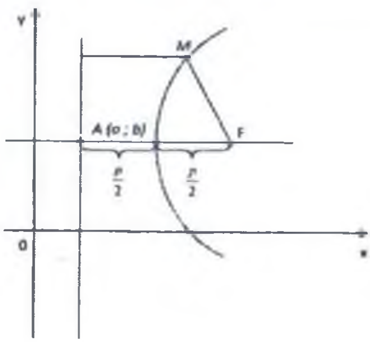
$x=-\frac{p}{2}$ bo'lgani uchun $x=-\frac{5}{2}$ yoki $2x+5=0$ direktritsa tenglamasidir.

4-misol. Uchi koordinatalar boshida, direktritsasining tenglamasi $x=-4$ bo'lgan parabola fokusining koordinatalarini yozing.

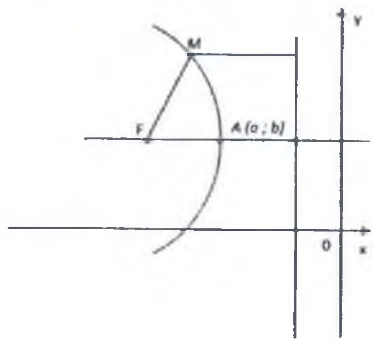
Yechish. Koordinatalar boshidan, direktritsagacha bo‘lgan masofa koordinatalar boshidan fokusgacha bo‘lgan masofaga, ya’ni $\frac{p}{2}$ ga teng. $x=-4$ direktritsa tenglamasidan $\frac{p}{2}=4$ ekani kelib chiqadi. $x=-\frac{p}{2}$ direktritsa tenglamasiga $y^2=2px$ parabola mos keladi, uning fokusi $F(4;0)$.

Uchi siljigan parabola

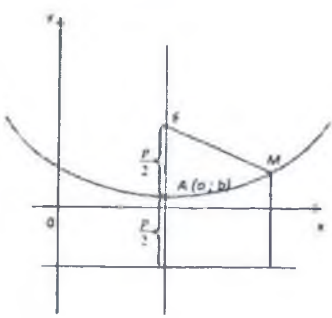
Uchi $(a;b)$ nuqtada, simmetriya o‘qi Ox o‘qqa parallel va tarmoqlari o‘ngga yo‘nalgan parabola tenglamasi (5-chizma):



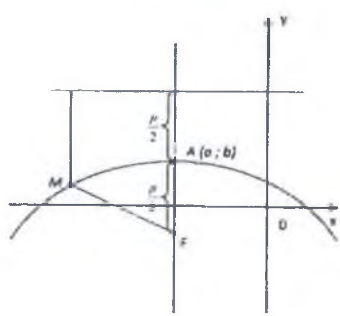
5-chizma



6-chizma



7-chizma



8-chizma

$(y-b)^2=2p(x-a)$ (1) ko'rinishda bo'ladi.

Uchi $(a;b)$ nuqtada, simmetriya o'qi Ox o'qqa parallel va tarmoqlari chapga yo'nalgan parabola tenglamasi (6-chizma):

$(y-b)^2=-2p(x-a)$ (2) ko'rinishda bo'ladi.

Uchi $(a;b)$ nuqtada, simmetriya o'qi Oy o'qqa parallel va tarmoqlari yuqoriga yo'nalgan parabola tenglamasi (7-chizma):

$(x-2)^2=-2p(y-b)$ (3) ko'rinishda bo'ladi.

Uchi $(a;b)$ nuqtada, simmetriya o'qi Oy o'qqa parallel va tarmoqlari pastga yo'nalgan parabola tenglamasi (8-chizma):

$(x-a)^2=-2p(y-b)$ (4) ko'rinishda bo'ladi.

Tenglamalarning har birida parabolaning parametri $p>0$ parabola fokusidan uning direktritsasigacha bo'lgan masofa.

5-misol. Uchi A(1; 3) nuqtada bolib, M(5; 7) nuqtadan o'tuvchi, simmetriya o'qi Ox o'qqa parallel bo'lgan parabola tenglamasini toping.

Yechish. Shartga muvofiq, izlanayotgan parabola tenglamasi (1) ko'rinishda bo'ladi, chunki M(5; 7) nuqta parabolaning uchidan o'ngda joylashgan. Demak, parabolaning tarmoqlari o'ngga yo'nalgan. p parametrning qiymatini hisoblash uchun A va M nuqtalarning koordinatalarini (1) tenglamaga qo'yamiz:

$(7-3)^2=2p(5-1)\Rightarrow 16=8p\Rightarrow p=2$. Topilgan $p=2$ qiymatni va A uchning koordinatalarini (1) tenglamaga qo'yib, izlanayotgan tenglamani hosil qilamiz: $(y-3)^2=4(x-1)$.

6-misol. Uchi $A(3;-3)$ nuqtada, fokusi $F(8;2)$ nuqtada bo'lgan parabola tenglamasini tuzing.

Yechish. Shartga ko'ra izlanayotgan parabolaning tenglamasi (1) ko'rinishda bo'ladi. Parabolaning o'qi Ox o'qqa parallel bo'lgani uchun (uchining va fokusining) ordinatalari bir xil va demak, Ox o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqda yotadi), parabolaning tarmoqlari esa o'ngga yo'nalgan (parabolaning fokusi uchidan o'ngda joylashgan). Parabolaning uchi bilan fokusi orasidagi masofa $\frac{p}{2}$ ga teng bo'lgani uchun

$$\frac{p}{2}=8-3=5\Rightarrow p=10.$$

A uchining koordinatalarini va p ning topilgan qiymatini (1) tenglamaga qo'yib, $(y+3)^2=10(x-3)$ ni hosil qilamiz.

7-misol. $y^2+4y-24x+76=0$ parabola uchi va fokusining koordinatalarini toping. Direktritsasining tenglamasini tuzing.

Yechish. Parabolala tenglamasini (1) ko'rinishga keltiramiz:

$$y^2+4y=24x-76\Rightarrow y^2+2\cdot 2y+2^2=24x-72\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(y+2)^2=24(x-3).$$

Bundan parabola uchining koordinatalari: $A(3;-2)$; $2p=24\Rightarrow p=12$.

Parabola uchidan fokusigacha bo'lgan masofa $\frac{p}{2}=\frac{12}{2}=6$ ga teng.

Fokusning abssissasi: $3+\frac{p}{2}=3+6=9$. Fokus parabola uchidan o'ngda joylashgan, chunki parabolaning tarmoqlari o'ngga yo'nalgan; fokusning ordinatasi parabola uchining ordinatasiga teng, chunki parabolaning o'qi Ox o'qqa parallel, u holda fokusning koordinatalari F(9; -2) bo'ladi.

Parabolaning tarmoqlari o'ngga yo'nalgani uchun direktritsa parabola uchidan chaproqdan o'tadi. U koordinatalar boshidan ham chapdan o'tadi, chunki uchidan Oy o'qqacha masofa 3 ga teng, uchidan direktritsagacha bo'lgan masofa 6 ga teng. Direktritsaning abssissasi minus ishora bilan olingan ushbu ayirmaga teng: $\frac{p}{2}-3=6-3=3$.

Shuning uchun direktritsaning tenglamasi: $x=-3$.

5-bob. FUNKSIYA VA UNING LIMITI

1-§. To'plamlar va ular ustida amallar

To'plam va uning elementi. Chekli va cheksiz to'plamlar

Matematikada ko'pincha biror obyektlar gruppalarini yagona butun deb qarashga to'g'ri keladi: 1 dan 10 gacha bo'lgan sonlar bir xonali sonlar, uchburchaklar, kvadratlar va shu kabilar. Bunday turli majmualar to'plamlar deb ataladi.

To'plam tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biridir va shuning uchun u boshqa tushunchalar orqali ta'riflanmaydi. Uni misollar yordamida tushuntirish mumkin. Jumladan biror sinfdagi o'quvchilar to'plami haqida, natural sonlar to'plami haqida gapirish mumkin.

Ba'zi hollarda to'plamlar lotin alfavitining A, B, C,..., Z harflari bilan belgilanadi. Birorta ham obyektni o'z ichiga olmagan to'plam bo'sh to'plam deyiladi va $\varnothing$ belgi bilan belgilanadi.

To'plamni tashkil etuvchi obyektlar uning elementlari deyiladi. To'plam elementlarini lotin alfavitining kichik harflari a, b, c,...,z bilan belgilash qabul qilingan.

To'plamdagi elementlarning ushbu to'plamga qarashli ekanligini quyidagicha belgilaymiz.

$a \in A$ a element A to'plamga qarashli. Agar biror element to'plamga qarashli bo'lmasa. U holda $\notin$ dan foydalaniladi. Masalan, $A = \{1, a, b, c, 4\}$ bo'lsin u holda quyidagilar o'rinli $1 \in A$, $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$, $4 \in A$, $5 \notin A$, $d \notin A$,m $k \notin A$.

Agar to'plam elementlarini sanash mumkin bo'lsa bunday to'plam cheklangan to'plam deyiladi. Agar ularni sanash mumkin bo'lmasa bunday to'plam cheksiz to'plam deyiladi.

Masalan, haftadagi kunlar to'plami chekli, to'g'ri chiziqdagi nuqtalar to'plami esa cheksizdir.

Matematikada bunday to'plamlar uchun maxsus belgi qabul qilingan: N harfi bilan natural sonlar to'plami belgilanadi, Z – butun sonlar to'plami, Q – rasional sonlar to'plami, R – haqiqiy sonlar to'plami.

[0; 1] sigment kantinium quvvatli to'plamdir. Unga ekvivalent to'plamlar cheksiz to'plam hisoblanadi. Ixtiyoriy kichik kesma ustidagi nuqtalar to'plami kantinium quvvatli to'plamga ekvivalent to'plamdir.

Doiraning markazidan to'g'ri chiziqlar o'tkazsak doiraning bir nechta nuqtalari to'g'ri chiziqning bitta nuqtasiga akslanadi. Bu akslantirishda doira nuqtalari to'plami to'g'ri chiziq nuqtalari to'plamiga akslantirish bo'lib, bu to'plamlar katinium quvvatli to'plamdir. Ya'ni cheksiz to'plamdir. Ikkita A va B to'plam berilgan bo'lsin biror f qoida bo'yicha A to'plamning har bir x elementiga B to'plamning y elementini mos keltiraylik. U holda shu qoidani A to'plamni B to'plamga akslantirish deyiladi. Quyidagicha belgilanadi:

$$f\colon A \to B \text{ yoki } A \xrightarrow{f} B$$

To'plam o'z elementlari bilan aniqlanadi, ya'ni agar ixtiyoriy obyekt haqida u biror to'plamga tegishli yoki tegishli emas deyish mumkin bo'lsa, bu to'plam berilgan deb hisoblanadi.

To'plamni uning barcha elementlarini sanab ko'rsatish bilan berish mumkin. Masalan, agar biz A to'plam 3, 4, 5 va 6 sonlardan tashkil topgan desak, biz bu to'plamni bergan bo'lamiz, chunki uning barcha elementlarini sanab ko'rsatildi. Uni bunday yozish mumkin: A={3, 4, 5, 6} bunda sanab ko'rsatilgan elementlar katta qavslar ichiga yoziladi.

Xarakteristik xossa – bu shunday xossaki, to'plamga tegishli har bir element bu xossaga ega bo'ladi va unga tegishli bo'lmagan birorta ham element bu xossaga ega bo'lmaydi.

Masalan, ikki xonali sonlar to'plami A ni qaraylik. Mazkur to'plamning ixtiyoriy elementi ega bo'lgan xossa – «ikki xonali son bo'lishlikdir». Bu xarakteristik xossa biror-bir obyektning A to'plamga tegishli yoki tegishli emasligi haqidagi masalani yechish imkonini beradi. Masalan, 21 soni A to'plamga tegishli, chunki u ikki xonali son, 145 soni esa A to'plamga tegishli emas, chunki u ikki xonali son emas.

Ta'rif. Agar B to'plamning har bir elementi A to'plamning ham elementi bo'lsa, B to'plam A to'plamning qism to'plami deyiladi.

Agar B A to'plamning qism to'plami bo'lsa, $B \subset A$ kabi yoziladi va bunday o'qiladi: «B A ning qism to'plami», «B to'plam A ga kiradi».

Ta'rif. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$ bo'lsa, A va B to'plamlar teng deyiladi.

Agar A va B to'plamlar teng bo'lsa, u holda $A = B$ kabi yoziladi.

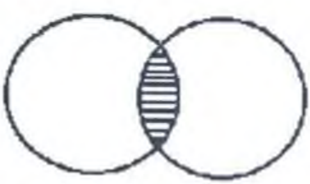
Kesishmaydigan to'plamlar umumiy nuqtaga ega bo'lmagan ikkita doira yordamida tasvirlanadi.

To'plamlar kesishmasi

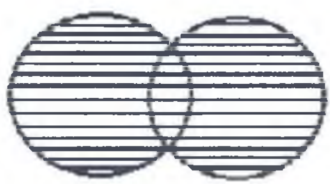
Ta'rif. A va B to'plamlarning kesishmasi deb shunday to'plamga aytiladiki, u faqat A va B to'plamga tegishli elementlarnigina o'z ichiga oladi.

A va B to'plamlarning kesishmasi $A \cap B$ kabi belgilanadi. Agar A va B to'plamlarni Eyler doiralari yordamida tasvirlasak, u holda berilgan to'plamlarning kesishmasi shtrixlangan soha bilan tasvirlanadi (1-chizma).

Agar A va B to'plamning elementlari sanab ko'rsatilgan bo'lsa u holda $A \cap B$ ni topish uchun A va B ga tegishli bo'lgan elementlarni, ya'ni ularning umumiy elementlarini sanab ko'rsatish yetarli.



1-chizma



2-chizma

Endi *A* juft natural sonlar to'plami va B 4 ga karrali natural sonlar to'plamining kesishmasi qanday to'plam ekanini aniqlaymiz. Berilgan A va B to'plamlar cheksiz to'plamlar va B to'plam A to'plamning qism to'plami. Shuning uchun A to'plamga va B to'plamga tegishli elementlar B to'plamning elementlari bo'ladi. Demak, $A \cap B = B$.

To'plamlarning birlashmasi

Ta'rif. A va B to'plamlarning birlashmasi deb shunday to'plamga aytiladiki, u faqat A yoki B to'plamning elementlarini o'z ichiga oladi.

A va B to'plamlarning birlashmasi $A \cup B$ kabi belgilanadi. Agar kesishuvchi A va B to'plamlarni Eyler doiralari yordamida tasvirlasak u holda ularning birlashmasi shtrixlangan soha bilan tasvirlanadi (2-chizma).

Endi A juft natural sonlar to'plami va B 4 ga karrali natural sonlar to'plamining birlashmasi qanday to'plam ekanini aniqlaymiz.

Ilgariroq $B \cap A$ ekani aniqlangan edi. Shuning uchun $A \cup B$ to'plamga tegishli elementlar A to'plamning elementlari bo'ladi. Demak mazkur holda $A \cup B = A$.

To'plamlar kesishmasi va birlashmasi qonunlari

1. Ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun to'plamlar kesishmasi va birlashmasining o'rin almashtirish qonunini ifodalovchi $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ tenglikning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

2. To'plamlar birlashmasi va kesishmasi uchun gruppalash qonuni ham o'rinli, ixtiyoriy A, B va C to'plamlar uchun $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ tengliklar bajariladi.

Gruppalash qonunlarini Eyler doiralari yordamida ko'rgazmali tasavvur qilish mumkin. Masalan, to'plamlar kesishmasining gruppalash qonunini ko'rib chiqaylik. A, B va C to'plamlarni juft-jufti bilan kesishadigan uchta doira ko'rinishida tasvirlaymiz.

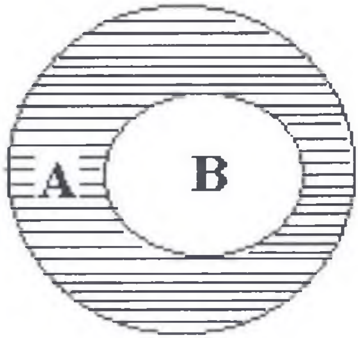
3. Taqsimot xossasi:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Qism to'plamning to'ldiruvchisi

Eyler doiralari yordamida mazkur vaziyat 3-chizmadagi kabi tasvirlanadi, bunda A to'plamdan B qism to'plam chiqarib tashlangandan keyin qolgan qism — bu shtrixlangan qismdir. Bu qism B to'plamning A to'plamgacha to'diruvchisi deyiladi.



3-chizma

Ta'rif. $B \subset A$ bo'lsin. A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlarnigina o'z iciga olgan to'plam B to'plamning A to'plamgacha to'ldiruvchisi deyiladi.

B to'plamning A to'plamgacha to'ldiruvchisi ($B \subset A$ shart bajarilganda) $A \backslash B$ kabi belgilanadi.

Qism to'plamning to'ldiruvchisini topishda foydalaniladigan operatsiya ayirish amali deyiladi.

Agar A va B to'plamlar elementlari sanab ko'rsatilgan bo'lsa, u holda $A \backslash B$ ni topish uchun A to'plamga tegishli bo'lgan va B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlarni sanab ko'rsatish yetarli.

$$B'_A = A \backslash B .$$

To'plamlarning dekart ko'paytmasi

To'plam elementlarining kelish tartibi muhim bo'lgan hollarda, matematikada elementlarning tartiblangan naborlari haqida gap boradi. Mazkur masalada biz tartiblangan juftliklar bilan ish ko'ramiz.

a va b elementlardan tashkil topgan tartiblangan juftlikni (a, b) bilan belgilash qabul qilingan, bunda a element juftliklarning birinchi koordinatasi (komponentasi), b element esa bu juftlikning ikkinchi koordinatasi (komponentasi) deyiladi.

(a, b) va (c, d) juftliklarda a = c va b = d bo'lgan holdagina bu juftliklar teng bo'ladi.

Ikkita turli to'plamlar elementlaridan ham tartiblangan jutliklar hosil qilish mumkin. Masalan, A = {1, 2, 3} va B = {3, 5} to'plamlarni olamiz va mumkin bo'lgan tartiblangan juftliklarni shunday hosil qilamizki, jutliklarning birinchi komponentasi A to'plamdan, ikkinchi komponentasi esa B to'plamdan tanlab olinsin. Ushbu to'plamga ega bo'lamiz:

$$\{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,3), (3,5)\}$$

Formal xarakterga ega bo'lgan ushbu masalaga konkret ma'no berish mumkin bo'lgan barcha ikki xonali sonlarni shunday hosil qilingki, bunda o'nliklar raqami 1, 2, 3 raqamlardan tanlab olinadi, birliklar raqami esa 3 yoki 5 raqami bo'lishi mumkin.

Ta'rif. A va B to'plamlarning Dekart ko'paytmasi deb birinchi komponentasi A to'plamga, ikkinchi komponentasi B to'plamga tegishli bo'lgan juftliklar to'plamiga aytiladi, ya'ni,

$$A \cdot B = \{(x,y) \colon x \in A,\ y \in B\}.$$

A va B to'plamlarning Dekart ko'paytmasi $A \cdot B$ kabi belgilanadi.

Dekart ko'paytmani topishda qo'llaniladigan amal to'plamlarning Dekart ko'paytirish deyiladi.

Ta'rif. A_1, A_2, ..., An to'plamlarning Dekart ko'paytmasi deb uzunligi n bo'lgan shunday kortejlar to'plamiga aytiladiki, bunda kortejning birinchi komponentasi A_1 to'plamga, ikkinchi komponentasi A_2 to'plamga,..., n-komponentasi A_n to'plamga tegishli bo'ladi.

A_1, A_2, ..., An to'plamlarning Dekart ko'paytmasi $A_1 x\ A_2$ x ... x A_n kabi belgilanadi.

2-§. Funksiya tushunchasi

*1°. **Funksiya ta'rifi, berilish usullari.*** E to'plamni F to'plamga akslantirish

$$f\colon E \to F$$

ni o'rgangan edik.

Endi E=F, F=R deb olamiz. Unda har bir haqiqiy x songa biror haqiqiy y sonni mos qo'yuvchi

$$f: F \to R \ (x \xrightarrow{f} y)$$

akslantirishga kelamiz. Bu esa funksiya tushunchasiga olib keladi.

Funksiya tushunchasi o'quvchiga o'rta maktab matematika kursidan ma'lum. Shuni e'tiborga olib funksiya haqidagi dastlabki ma'lumotlarni qisqaroq bayon etishni lozim topdik.

Aytaylik, $X \subset R$, $Y \subset R$ to'plamlar berilgan bo'lib, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda shu to'plamlarda o'zgarsin: $x \in X$, $y \in Y$.

Ta'rif. Agar X to'plamdagi har bir x songa biror f qoidaga ko'ra to'plamdan bitta Y son y mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda *funksiya berilgan* (aniqlangan) deyiladi va

$$f: x \to y \text{ yoki } y = f(x)$$

kabi belgilanadi. Bunda X – funksiyaning aniqlanish to'plami (sohasi), Y – funksiyaning o'zgarish to'plami (sohasi) deyiladi. x – erkli o'zgaruvchi yoki funksiya argumenti, y esa erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya deyiladi.

Misollar. 1. $X=(-\infty,+\infty)$, $Y=(0,+\infty)$ bo'lib, f qoida

$$f: x \to y = x^2+1$$

bo'lsin. Bu holda har bir $x \in X$ ga bitta $x^2+1 \in Y$ mos qo'yilib,

$$y = x^2+1$$

funksiyaga ega bo'lamiz.

2. Har bir ratsional songa 1 ni, har bir irratsional songa 0 ni mos qo'yish natijasida funksiya hosil bo'ladi. Odatda, bu *Dirixle funksiyasi* deyilib, u kabi belgilanadi:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & agar\ x\ ratsional \text{ son bo'lsa}, \\ 0, & agar\ x\ irratsional \text{ son bo'lsa} \end{cases}$$

Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiya uchta: X to'plam, Y to'plam va har bir $x \in X$ ga bitta $y \in Y$ ni mos qo'yuvchi f qoidaning berilishi bilan aniqlanar ekan.

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya $X\subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin. $x_0\in X$ nuqtaga mos keluvchi y_0 miqdor $y=f(x)$ *funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi xususiy qiymati* deyiladi va $f(x_0)=y_0$ kabi belgilanadi.

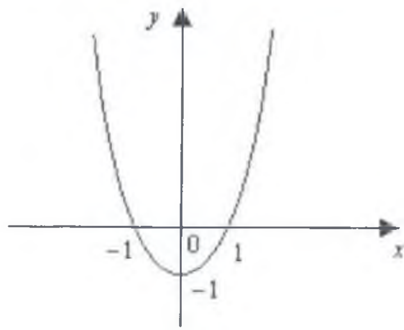
Tekislikda dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Tekislikdagi $(x,f(x))$ nuqtalardan iborat ushbu

$$\{(x,f(x))\}=\{(x,f(x))|x\in X,\ f(x)\in Y\}$$

to'plam $y=f(x)$ funksiyaning grafigi deyiladi. Masalan,

$$y=x^2-1\ (x\in X=[-2,2])$$

funksiyaning grafigi 1-chizmada tasvirlangan.



1-chizma

Funksiya ta'rifidagi f qoida turlicha bo'lishi mumkin.

a) Ko'pincha x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bu *funksiyaning analitik usulda berilishi* deyiladi.

Masalan,

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

funksiya analitik usulda berilgan bo'lib, uning aniqlanish to'plami

$$X=\{x\in R|-1\le x\le 1\}=[-1,1]$$

bo'ladi.

x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish quyidagi formulalar yordamida berilgan bo'lsin:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, \text{ agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \\ -1, \text{ agar } x < 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

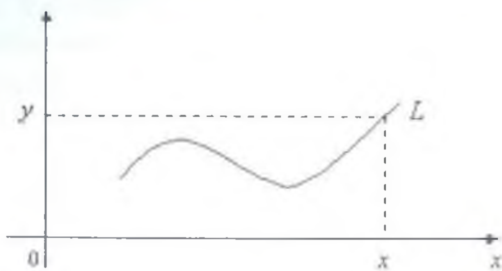
Bu funksiyaning aniqlanish to'plami X=R\{0} bo'lib, qiymatlar to'plami esa Y={−1,1} bo'ladi. Odatda bu funksiya y=singx kabi belgilanadi.

b) Ba'zi hollarda $x \in X$, $y \in Y$ o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish jadval orqali bo'lishi mumkin. Masalan, kun davomida havo haroratini kuzatganimizda, t_1 vaqtda havo harorati T_1, t_2 vaqtda havo harorati T_2 va h.k. bo'lsin. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

t – vaqt	t_1	t_2	t_3	...	t_n
T – harorat	T_1	T_2	T_3	...	T_n

Bu jadval t vaqt bilan havo harorati T orasidagi bog'lanishni ifodalaydi, bunda t – argument, T esa t ning funksiyasi bo'ladi.

v) x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish tekislikda biror egri chiziq orqali ham ifodalanishi mumkin (2-chizma).



2-chizma

Masalan, 2-chizmada tasvirlangan L egri chiziq berilgan bo'lsin. Aytaylik, [a,b] segmentdagi har bir nuqtadan o'tkazilgan perpendikulyar L chiziqni faqat bitta nuqtada kessin. $\forall x \in [a,b]$

nuqtadan perpendikulyar chiqarib, uning L chiziq bilan kesishish nuqtasini topamiz. Olingan x nuqtaga kesishish nuqtasining ordinatasi y ni mos qo'yamiz. Natijada har bir $x\in[a,b]$ ga bitta y mos qo'yilib, funksiya hosil bo'ladi. Bunda x bilan y orasidagi bog'lanishni berilgan L egri chiziq bajaradi.

Aytaylik, $f_1(x)$ funksiya $X_1\subset R$ to'plamda, $f_2(x)$ funksiya esa $X_2\subset R$ to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Agar

1) $X_1=X_2$

2) $\forall x\in X_1$ da $f_1(x)=f_2(x)$

bo'lsa, $f_1(x)$ hamda $f_2(x)$ funksiyalar o'zaro teng deyiladi va $f_1(x)=f_2(x)$ kabi belgilanadi.

2°. ***Funksiyaning chegaralanganligi.*** $f(x)$ funksiya $X\subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar shunday o'zgarmas M soni topilsaki, $\forall x\in X$ uchun $f(x)\le M$ tengsizlik bajarilsa, *$f(x)$ funksiya X to'plamda yuqoridan chegaralangan* deyiladi. Agar shunday o'zgarmas m soni topilsaki, $\forall x\in X$ uchun $f(x)\ge m$ tengsizlik bajarilsa, *$f(x)$ funksiya X to'plamda quyidan chegaralangan* deyiladi.

Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, *$f(x)$ funksiya X to'plamda chegaralangan* deyiladi.

1-misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya R da chegaralangan bo'ladi.

◄ Ravshanki, $\forall x\in R$ da $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}>0$.

Demak, berilgan funksiya R da quyidan chegaralangan.

Ayni paytda, $f(x)$ funksiya uchun

$$f(x)=\frac{1}{1+x^4}+\frac{x^2}{1+x^4}\le 1+\frac{x^2}{1+x^4}$$

bo'ladi. Endi

$$0 \le (x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \quad \Rightarrow \; 2x^2 \le x^4 + 1 \; \Rightarrow \; \frac{x^2}{x^4+1} \le \frac{1}{2}$$

bo‘lishini e’tiborga olib, topamiz: $f(x) \le 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Bu esa $f(x)$ funksiyaning yuqoridan chegaralanganligini bildiradi. Demak, berilgan funksiya R da chegaralangan. ►

Ta’rif. Agar har qanday $M>0$ son olinganda ham shunday $x_0 \in X$ nuqta topilsa va

$$f(x_0)>M$$

tengsizlik bajarilsa, *f(x) funksiya X to‘plamda yuqoridan chegaralanmagan* deyiladi.

3°. Davriy funksiyalar. Juft va toq funksiyalar. $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar shunday o‘zgarmas $T(T \ne 0)$ son mavjud bo‘lsaki, $\forall x \in X$ uchun

1) $x-T \in X$, $x+T \in X$

2) $f(x-T)=f(x)$

bo‘lsa, *f(x) davriy funksiya* deyiladi, T son esa *f(x) funksiyaning davri* deyiladi.

Masalan, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ funksiyalar davriy funksiyalar bo‘lib, ularning davri 2π ga, $f(x)=tgx$, $f(x)=ctgx$ funksiyalarning davri esa π ga teng.

Davriy funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

a) Agar $f(x)$ davriy funksiya bo‘lib, uning davri $T(T \ne 0)$ bo‘lsa, u holda

$$T_n = T_n (n=\pm 1, \pm 2,)$$

sonlar ham shu funksiyaning davri bo‘ladi.

b) Agar T_1 va T_2 sonlar $f(x)$ funksiyaning davri bo‘lsa, u holda $T_1+T_2 \ne 0$ hamda $T_1-T_2 (T_1 \ne T_2)$ sonlar ham $f(x)$ funksiyaning davri bo‘ladi.

v) Agar $f(x)$ hamda $g(x)$ lar davriy funksiyalar bo‘lib, ularning har birining davri $T(T \ne 0)$ bo‘lsa, u holda

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x)\neq 0)$$

funksiyalar ham davriy funksiyalar bo'lib, T son ularning ham davri bo'ladi.

2-misol. Ixtiyoriy $T(T\neq 0)$ ratsional son Dirixle funksiyasi

$$D(x)=\begin{cases} 1, & agar \quad x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar} \quad x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

ning davri bo'lishi ko'rsatilsin.

◄ Aytaylik, $T(T\neq 0)$ ratsional son bo'lsin. Ravshanki, $\forall x\in R$ irratsional son uchun $x+T$ irratsional son, $\forall x\in R$ ratsional son uchun $x+T$ ratsional son bo'ladi. Demak,

$$D(x+T)=\begin{cases} 1, & \text{agar} \quad x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar} \quad x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

Shunday qilib, $\forall x\in R$, T ratsional son bo'lganda

$$D(x+T)=D(x)$$

bo'ladi. ►

Ma'lumki, $\forall x\in X$ $(X\subset R)$ uchun $x\in X$ bo'lsa, X to'plam O nuqtaga nisbatan *simmetrik to'plam* deyiladi.

Aytaylik, O nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan X to'plamda f(x) funksiya berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar $\forall x\in X$ uchun $f(-x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, *f(x) juft funksiya* deyiladi. Agar $\forall x\in X$ uchun $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ toq funksiya deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2+1$ juft funksiya, $f(x)=x^3+x$ esa toq funksiya bo'ladi. Ushbu $f(x)=x^2+x$ funksiya juft ham emas, toq ham emas.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ juft funksiyalar bo'lsa, u holda

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x)\neq 0)$$

funksiyalar ham juft bo'ladi.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ toq funksiyalar bo'lsa, u holda

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x)$$

funksiyalar toq bo'ladi,

$$f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\quad (g(x)\neq 0)$$

funksiyalar esa juft bo'ladi.

Juft funksiyaning grafigi ordinatalar o'qiga nisbatan, toq funksiyaning grafigi esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi.

4°. Monoton funksiyalar. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X\subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar $\forall x_1,x_2\in X$ uchun $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)\le f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, *f(x) funksiya X to'plamda o'suvchi* deyiladi. Agar $\forall x_1,x_2\in X$ uchun $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)< f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, *f(x) funksiya X to'plamda qat'iy o'suvchi* deyiladi.

Ta'rif. Agar $\forall x_1,x_2\in X$ uchun $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)\ge f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, *f(x) funksiya X to'plamda kamayuvchi* deyiladi. Agar $\forall x_1,x_2\in X$ uchun $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)>f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, *f(x) funksiya X to'plamda qat'iy kamayuvchi* deyiladi.

O'suvchi hamda kamayuvchi funksiyalar umumiy nom bilan *monoton funksiyalar* deyiladi.

3-misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ funksiyaning $X=[1,-\infty)$ to'plamda kamayuvchi ekanligi isbotlansin.

◄ $[1,-\infty)$ da ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib, $x_1<x_2$ bo'lsin deylik. Unda

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1^2}-\frac{x_2}{1+x_2^2}=\frac{x_1+x_1x_2^2-x_2-x_2x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=$$

$$=\frac{x_1-x_2+x_1\cdot x_2(x_2-x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1\cdot x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikda

$$x_1-x_2<0, \qquad 1-x_1 \cdot x_2<0$$

bo'lishini e'tiborga olib,

$$f(x_1)-f(x_2)>0$$

ya'ni $f(x_1)>f(x_2)$ ekanini topamiz. Demak,

$$x_1<x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1)>f(x_2). \blacktriangleright$$

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X \subset R$ to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib, $C=const$ bo'lsin. U holda

a) $f(x)+C$ funksiya o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

b) $C>0$ bo'lganda $C \cdot f(x)$ o'suvchi, $C<0$ bo'lganda $C \cdot f(x)$ kamayuvchi bo'ladi.

v) $f(x)+g(x)$ funksiya o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

5°. ***Teskari funksiya. Murakkab funksiyalar.*** $y=f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, bu funksiyaning qiymatlaridan iborat to'plam

$$Y_f=\{f(x)|x \in X\}$$

bo'lsin.

Faraz qilaylik, biror qoidaga ko'ra Y_f, to'plamdan olingan har bir y ga X to'plamdagi bitta x mos qo'yilgan bo'lsin. Bunday moslik natijasida funksiya hosil bo'ladi. Odatda, bu funksiya $y=f(x)$ ga nisbatan *teskari funksiya* deyiladi va $x=f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $y=\frac{1}{2}x+1$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya $x=2y-1$ bo'ladi.

Yuqorida aytilganlardan $y=f(x)$ da x argument, y esa x ning funksiyasi, teskari $x=f^{-1}(y)$ funksiyada y argument, x esa y ning funksiyasi bo'lishi ko'rinadi.

Qulaylik uchun teskari funksiya argumenti ham x, uning funksiyasi y bilan belgilanadi: $y=g(x)$.

$y=f(x)$ ga nisbatan teskari $g(x)$ funksiya grafigi $f(x)$ funksiya grafigini I va III choraklar bissektrisasi atrofida 180° ga aylantirish natijasida hosil bo'ladi.

Aytaylik, Y_f to'plamda $u=F(y)$ funksiya berilgan bo'lsin. Natijada X to'plamdan olingan har bir x ga Y_f to'plamda bitta y:

$$f:x\to y \qquad (y=f(x)),$$

va Y_f to'plamdagi bunday y songa bitta u:

$$F:y\to u \quad (u=F(y))$$

son mos qo'yiladi. Demak, X to'plamdan olingan har bir x songa bitta u son mos qo'yilib, yangi funksiya hosil bo'ladi: $u=F(f(x))$. Odatda bunday funksiyalar *murakkab funksiya* deyiladi.

3-§. Elementar funksiyalar

Elementar funksiyalar kitobxonga o'rta maktab matematika kursidan ma'lum. Biz quyida elementar funksiyalar haqidagi asosiy ma'lumotlarni bayon etamiz.

1°. Butun ratsional funksiyalar.

Ushbu

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

ko'rinishdagi funksiya butun ratsional funksiya deyiladi. Bunda $a_0, a_1,\ldots,a_n$ o'zgarmas sonlar, $n\in N$. Bu funksiya $R=(-\infty,+\infty)$ da aniqlangan.

Butun ratsional funksiyaning ba'zi xususiy hollari:

a) chiziqli funksiya. Bu funksiya

$$y=ax+b \qquad (a\neq 0)$$

ko'rinishga ega, bunda a,b o'zgarmas sonlar.

Chiziqli funksiya $(-\infty,+\infty)$ da aniqlangan $a>0$ bo'lganda o'suvchi, $a<0$ bo'lganda kamayuvchi; grafigi tekislikdagi to'g'ri chiziqdan iborat;

b) kvadrat funksiya. Bu funksiya

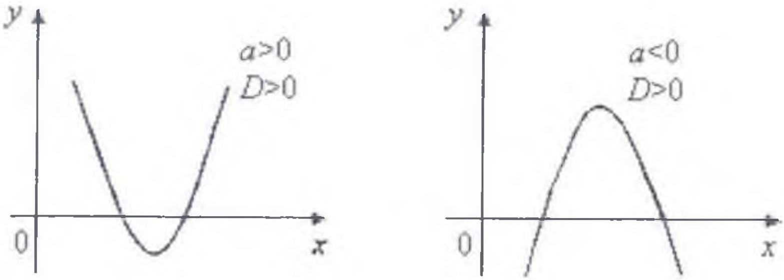
$$y=ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)$$

ko'rinishga ega, bunda a,b,c o'zgarmas sonlar.

Kvadrat funksiya R da aniqlangan bo'lib, uning grafigi parabolani ifodalaydi.

Ravshanki,

$$y=aE^2+bx+c=0\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$



3-chizma.

Parabolaning tekislikda joylashishi a hamda $D=b^2-4a$ larning ishorasiga bog'liq bo'ladi. Masalan, $a>0$, $D>0$ va $a<0$, $D<0$ bo'lganda uning grafigi 3-chizmada tasvirlangan parabolalar ko'rinishida bo'ladi.

2°. ***Kasr-ratsional funksiyalar.*** Ushbu

$$y=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}$$

ko'rinishdagi funksiya kasr-ratsional funksiya deyiladi. Bunda a_0, $a_1,\ldots,a_n$ va $b_0,b_1,\ldots,b_m$ lar o'zgarmas sonlar $n\in N$, $m\in N$. Bu funksiya

$$X=(-\infty,+\infty)\setminus\{x|b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m=0\}$$

to'plamda aniqlangan.

Kasr-ratsional funksiyaning ba'zi xususiy hollari:

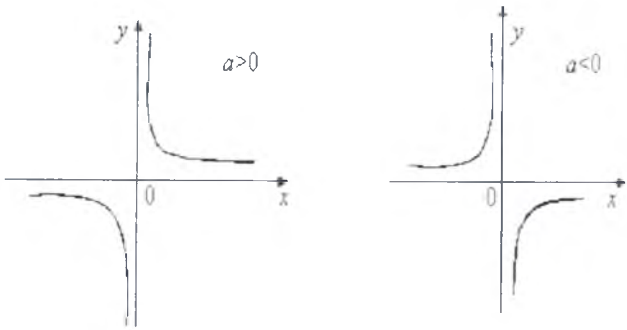
a) teskari proporsional bog'lanish. U

$$y=\frac{a}{E} \qquad (E\neq 0 \quad 0=const)$$

ko'rinishga ega. Bu funksiya

$$X=(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)=R\backslash\{0\}$$

to‘plamda aniqlangan, toq funksiya, *a* ning ishorasiga qarab funksiya $(-\infty,\ 0)$ va $(0,+\infty)$ oraliqlarning har birida kamayuvchi yoki o‘suvchi bo‘ladi (4-chizma).



4-chizma

b) kasr-chiziqli funksiya. U ushbu

$$y=\frac{aE+b}{cE+d}$$

ko‘rinishga ega. Bu funksiya

$$X=R\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}\qquad(c\neq 0)$$

to‘plamda aniqlangan:

Ravshanki,

$$y=\frac{aE+b}{cE+d}=\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{E+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}.$$

Demak,

$$y=\frac{\alpha}{E+\beta}+\gamma,\quad\left(\alpha=\frac{bc-ad}{c^2},\ \ \beta=\frac{d}{c},\ \ \gamma=\frac{a}{c}\right)$$

Uning grafigini $y=\frac{a}{x}$ funksiya grafigi yordamida chizish mumkin.

*3°. **Darajali funksiya.*** Ushbu

$$y=x^a, \quad (x\geq 0)$$

ko'rinishdagi funksiya *darajali funksiya* deyiladi.

Bu funksiyaning aniqlanish to'plami a ga bog'liq. Darajali funksiya $a>0$, bo'lganda $(0,-\infty)$ da o'suvchi, $a<0$ bo'lganda kamayuvchi bo'ladi. $y=x^a$ funksiya grafigi tekislikning (0,0) va (1,1) nuqtalaridan o'tadi.

*4°. **Ko'rsatkichli funksiya.*** Ushbu

$$y=a^x$$

ko'rinishdagi funksiya ko'rsatkichli funksiya deyiladi. Bunda $a\in R$, $a>0$, $a\neq 1$. Ko'rsatkichli funksiya $(-\infty,+\infty)$ aniqlangan, $\forall x\in R$ da $a^x>0$; $a>1$ bo'lganda o'suvchi; $0<a<1$ bo'lganda kamayuvchi bo'ladi.

Xususan, $a=e$ bo'lsa, matematikada muhim rol o'ynaydigan $y=e^x$ funksiya hosil bo'ladi.

Ko'rsatkichli funksiyaning grafigi Ox o'qidan yuqorida joylashgan va tekislikning (0,1) nuqtasidan o'tadi.

*5°. **Logarifmik funksiya.*** Ushbu

$$y=\log_a x$$

ko'rinishdagi funksiya logarifmik funksiya deyiladi. Bunda

$$a>0, \quad a\neq 1.$$

Logarifmik funksiya $(0,+\infty)$ da aniqlangan, $y=a^x$ funksiyaga nisbatan teskari; $a>1$ bo'lganda o'suvchi, $0<a<1$ bo'lganda kamayuvchi bo'ladi.

Logarifmik funksiyaning grafigi Oy o'qining o'ng tomonida joylashgan va tekislikning (0,1) nuqtasidan o'tadi.

*6°. **Trigonometrik funksiyalar.*** Ushbu

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=tgx,\ y=ctgx,\ y=\sec x,\ y=cosecx$$

funksiyalar *trigonometrik funksiyalar* deyiladi.

$y=sinx$, $y=cosx$ funksiyalar $R=(-\infty,+\infty)$ da aniqlangan, 2π davrli funksiyalar $\forall x\in R$ da

$$-1\leq sinx\leq 1,\ -1\leq cosx\leq 1$$

bo‘ladi. Ushbu

$$y=tgx$$

funksiya

$$X=R\setminus\left\{x\in R \mid x=(2k+1)\frac{\pi}{2};\ \ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...\right\}$$

to‘plamda aniqlangan π davrli funksiya, ctgx, secx, cosecx funksiyalar sinx, cosx,tgx lar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$ctgx=\frac{1}{tgx},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \cos ecx=\frac{1}{\sin x}.$$

*7°. **Giperbolik funksiyalar.*** Ko‘rsatkichli $y=e^x$ funksiya yordamida tuzilgan ushbu

$$\frac{5^x-5^{-x}}{2},\quad \frac{5^x+5^{-x}}{2},\quad \frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}},\quad \frac{5^x+5^{-x}}{5^x-5^{-x}}$$

funksiyalar *giperbolik* (mos ravishda *giperbolik sinus, giperbolik kosinus, giperbolik tangens, giperbolik katangens) funksiyalar* deyiladi va ular quyidagicha

$$shx=\frac{5^x-5^{-x}}{2},\quad chx=\frac{5^x+5^{-x}}{2},\quad thx=\frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}},\quad cthx=\frac{5^x+5^{-x}}{5^x-5^{-x}}$$

belgilanadi.

*8°. **Teskari trigonometrik funksiyalar.*** Ma’lumki, y=sinx funksiya R da aniqlangan va uning qiymatlari to‘plami

$$Y_f=[-1,1]$$

bo‘ladi.

Agar $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ bo‘lsa, u holda $X=\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ va $Y_f=[-1,1]$ to‘plamlarning elementlari o‘zaro bir qiymatli moslikda bo‘ladi.

y=sinx funksiyaga nisbatan teskari funksiya

$$y=\arcsin x$$

kabi belgilanadi.

Shunga o'xshash y=cosx, y=tgx, y=ctgx funksiyalarga nisbatan teskari funksiyalar mos ravishda

$$y=\arccos x,\ y=\mathrm{arctg}x,\ y=\mathrm{arcctg}x$$

kabi belgilanadi.

Ushbu $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}x$, $y=\mathrm{arcctg}x$ funksiyalar teskari trigonometrik funksiyalar deyiladi.

Funksiya limiti

Funksiya limiti oliy matematikaning muhim tushunchalaridan biri. Bu tushuncha yordamida matematika va uning tadbiqlarida ko'p foydalaniladigan funksiya hosilasi tushunchasi kiritiladi.

Avvalo, soddalik uchun natural argumentli funksiya (sonlar ketma-ketligi) va uning limitini keltiramiz. Keyinchalik ixtiyoriy argumentli funksiya limitini bayon etamiz.

4-§. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi

Aytaylik, barcha natural sonlar to'plam

$$N=\{1,2,3,...,n,...\}=\{n\}$$

ning har bir n elementiga (natural songa) biror f qoidaga ko'ra bitta tayin x_n haqiqiy son mos qo'yilgan bolsin. Bu holda argumetli n bo'lgan funksiya hosil bo'ladi. Uni natural argumetli funksiya deyiladi. Demak,

$$x_n=f(n)$$

Bu funksiya qiymatlari

$$x_1 f(1) \qquad x_2=f(2),..., \qquad x_n=f(n)$$

dan tashkil topgan ushbu

$$x_1,x_2,x_3,...,x_n,... \qquad (1)$$

to'plam sonlar ketma-ketligi deyiladi.

(1) ketma-ketlikni tashkil etgan

$$x_n \ (n=1,2,3,...)$$

sonlar ketma-ketlik hadlari deyiladi: x_1 – birinchi had, x_2 – ikkinchi had va hakozo, x_n–n – had (yoki umumiy had). (1) ketma-ketlikni qisqacha $\{x_n\}$ kabi belgilanadi.

Ko'pincha ketma-ketliklar umumiy hadlari orqali belgilanadi. Masalan:

1) $x_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$

2) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} : 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, ...$

3) $x_n = (-1)^n : -1, +1, \ -1, +1, ...$

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... \qquad (1)$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Agar bu (1) ketma-ketlikning hadlari quyidagi tengsizliklarni

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le ... \le x_n \le ... \qquad (x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < ...)$$

qanoatlantilirsa, ya'ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \le x_{n+1}, \ (x_n < x_{n+1})$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ o'suvchi (qat'iy o'suvchi) ketma-ketlik deyiladi.

Agar (1) ketma-ketlikning hadlari qiyidagi tengsizliklarni

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge ... \ge x_n \ge ... \qquad (x_1 > x_2 > x_3 > ... > x_n > ...)$$

qanoatlantirilsa, ya'ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \ge x_{n+1} \qquad (x_n > x_{n+1})$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ *kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) ketma-ketlik* deyiladi.

Masalan,

$$x_n = n : 1, 2, 3, ...$$

qat'iy o'suvchi,

$$x_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$$

qat'iy kamayuvchi ketma-ketliklar bo'ladi.

O'suvchi (qat'iy o'suvchi), kamayuvchi, (qat'iy kamayuvchi) ketma-ketliklar umumiy nom bilan *monoton ketma-ketliklar* deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi har doim bitta o'zgarmas M sondan kichik yoki teng, ya'ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \leq M$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ *yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik* deyiladi.

Masalan,

$$x_n = \frac{n^2+1}{n^2} : \frac{2}{1}, \frac{5}{4}, \frac{10}{9} \dots$$

ketma-ketlik yuqoridan chegalangan bo'ladi, chunki ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{n^2+1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^2} \leq 2$$

bo'ladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi har doim bitta o'zgarmas m sonidan katta yoki teng, ya'ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \geq m$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ *quyidan chegalangan ketma-ketlik* deyiladi.

Masalan,

$$x_n = \frac{1}{2^{n-1}} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

ketma-ketlik quyidan chegalangan bo'ladi, chunki ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{1}{2^{n-1}} > 0$$

bo'ladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegalangan bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$m \le x_n \le M$$

bo‘lsa, $\{x_n\}$ chegalangan ketma-ketlik deyiladi.

Masalan,

$$x_n = \frac{1}{4+n^2} : \frac{1}{5}, \frac{2}{8}, \frac{3}{13}, \dots$$

ketma-ketlik chegalangan bo‘ladi, chunki ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{n}{4+n^2} > 0$$

bo'ladi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning quyidan chegalanganligini bildiradi.

Ma’lumki,

$$0<(n-2)^2=n^2-4n+4$$

bo‘lib, undan $4n \le n^2|4$, ya’ni

$$\frac{n}{4+n^2} \le \frac{1}{4}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning yuqoridan chegalanganligini bildiradi.

Demak, berilgan ketma-ketlik chegalangan.

2°. Ketma-ketliklar ustida amallar.

Aytaylik, ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo‘lsin:

$$\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \dots$$

$$\{y_n\}: y_1, y_2, y_3, \dots y_n, \dots$$

Quyidagi

$$x_1+y_1, \quad x_2+y_2, \quad x_3+y_3, \dots, x_n+y_n, \dots,$$

$$x_1-y_1, \quad x_2-y_2, \quad x_3-y_3, \dots, x_n-y_n, \dots,$$

$$x_1 \cdot y_1, \quad x_2 \cdot y_2, \quad x_3 \cdot y_3, \dots, x_n \cdot y_n, \dots,$$

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots, \qquad (y_n \ne 0, n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma-ketliklar mos ravishda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi hamda nisbati deyiladi va ular

$$\{x_n+y_n\},\qquad \{x_n-y_n\},\qquad \{x_n\cdot y_n\},\qquad \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

kabi belgilanadi.

3°. Ketma-ketlikning limiti.

Biror a nuqta (haqiqiy son) hamda ixtiyoriy musbat ε soni berilgan bo'lsin. Ushbu

$$(a-c,a+\varepsilon)=\{x\in R\cdot a-\varepsilon<x<a+\varepsilon\}$$

interval a nuqtaning atrofi (ε – atrofi) deyiladi (1-chizma)

Ravshanki, ε soni turli qiymatlarga teng bo'lganda a nuqtaning turli atroflari hosil bo'ladi.

Masalan, $a=1$ nuqtaning $\varepsilon=\frac{1}{3}$ atrofi

$$\left(1-\frac{1}{3},1+\frac{1}{3}\right),\ ya'ni\ \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

intervaldan;

$a=0$ nuqtaning $\varepsilon=\frac{1}{10}$ atrofi

$$\left(0-\frac{1}{10},0+\frac{1}{10}\right)\ ya'ni\ \left(-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$$

intervaldan iborat bo'ladi.

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots$$

ketma-ketlik hamda a son (nuqta) berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar a nuqtaning ixtiyoriy

$$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$$

atrofi (ε — ixtiyoriy musbat son) olinganda ham $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'lsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

kabi belgilanadi.

Ta'rifdagi «$\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlari a nuqtaning ixtiyoriy $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ atrofiga tegishli» deyilishini quyidagicha aytish mumkin:

Ixtiyoriy musbat ε son olinganda ham, shunday natural n_0 topilib, barcha $n>n_0$ uchun

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$$

yoki

$$-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon \ \textit{ya'ni}\ |x^{m}\ a|<\varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu mulohazalarga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limitini quyidagicha ta'riflash mumkin bo'ladi.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday natural son n_0 topilsaki barcha $n>n_0$ uchun

$$|x_n\ a|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, *a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti* deyiladi.

Masalan,

$$x_n=\frac{1}{n}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

ketma-ketlikning limiti 0 ga teng bo'ladi, chunki ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonni olib, unga ko'ra $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ni topib, so'ng

$$n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$$

deyilsa, unda barcha $n>n_0$ uchun

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \le \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Ushbu $1,-1,1,-1,1,-1,...$ ketma-ketlik limitga ega bo'lmaydi, chunki har qanday a son, jumladan $a = \frac{1}{2}$ deyilsa, unda, ravshanki berilgan ketma-ketlikning biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari $a = \frac{1}{2}$ nuqtaning ε – atrofiga tegishli bo'lmaydi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti nolga teng, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'lsa, $\{x_n\}$ – cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Tasdiq. $\{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega bo'lishi uchun

$$\alpha_n = x_n - a$$

ning cheksiz kichik miqdor bo'lishi zarur va yetarli.

Bu tasdiqning isboti yuqorida keltirilgan ketma-ketlik limiti hamda cheksiz kichik miqdor ta'riflaridan kelib chiqadi.

Keltirilgan tasdiqdan

$$x_n = a + \alpha_n$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Masalan, $x_n = \frac{n}{n+1}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...$ ketma-ketlik uchun $x_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ bo'lib, $x_n = \frac{n}{n+1}$

Cheksiz kichik miqdor bo'lgani uchun $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ bo'ladi.

Agar har qanday musbat M son olinganda ham shunday n_0 natural son topilsaki, barcha $n>n_0$ uchun $|x_n|>M$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti «∞» deyiladi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Aytaylik, $x_n=n$; $1,2,3,4,...n,...$ bo'lsin. Bu ketma-ketlikning limiti ∞ bo'ladi: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

Biror $\{x_n\}$ $x_1,x_2,x_3,...,x_n,...$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Bu ketma-ketlik:

1) chekli limitga ega bo'lishi mumkin,

2) limiti cheksiz bo'lishi mumkin,

3) limitga ega bo'lmasligi mumkin.

Agar ketma-ketlik chekli limitiga ega bo'lsa, u *yaqinlashuvchi ketma-ketlik* deyiladi.

2) va 3) hollarda ketma-ketlik *uzoqlashuvchi* deyiladi.

4°. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar qator xossalarga ega. Ularni keltiramiz.

1) agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, uning limiti yagona bo'ladi;

2) agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi;

3) o'zgarmas sonning limiti o'ziga teng;

4) agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

bo'lsa, u holda $\{c\cdot x_n\}$, $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n\cdot y_n\}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$, $(y_n \neq 0)$

ketma-ketliklar ham yaqinlashuvchi bo'lib,

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n \pm y_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n \cdot y_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b,$

$$\lim_{n\to\infty}\{c\cdot x_n\} = c\cdot\lim_{n\to\infty} x_n c\cdot a \qquad (c-const)$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b} \qquad (b\neq 0, \quad y_n\neq 0)$$ bo'ladi;

5) agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, ixtiyoriy n natural son uchun $x_n \le y_n (x_n \ge y_n)$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n \quad (\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} y_n)$ bo'ladi;

6) agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

bo'lib, ixtiyoriy n natural son uchun $x_n \le z_n \le y_n$ bo'lsa, $\{z_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ bo'ladi.

*5°. **Ketma-ketlik limitining mavjudligi.***

e_soni.

Biz yuqorida yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning qator xossalarini keltirdik. Bu xossalar ketma-ketliklarning chekli limitga ega bo'lishi bilan bog'liq.

Ketma-ketlikning qachon chekli limitga ega bo'lishi haqidagi masala limitlar nazariyasining muhim masalalaridan hisoblanadi.

Ketma-ketlik limitining mavjudligini ifodalovchi teoremalar maxsus adabiyotlarda keltiriladi.

Biz quyida mavjudlik teoremalarining ayrimlarini isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. Agar $\{x_n\}$ $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangan bo'lsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega (ya'ni yaqinlashuvchi) bo'ladi.

2-teorema. Agar $\{x_n\}$ $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ ketma-ketlik kamayuvchi bo'lib, quyidan chegalangan bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitiga ega (ya'ni yaqinlashuvchi) bo'ladi.

e_soni. Matematikada e deb ataluvchi son muhum ro'l o'ynaydi. U maxsus ketma-ketlikning limiti sifatida ta'riflanadi.

Ma'lumki, ixtiyoriy $\alpha>-1$ va ixtiyoriy natural $n\geq 2$ sonlar uchun

$$(1+\alpha)^n>1+n\cdot\alpha \qquad (*)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Uni Bernulli tengsizligi deyiladi.

Endi ushbu

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n: \qquad 2,\frac{9}{4},\frac{64}{27},\ldots,\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ldots$$

Sonlar ketma-ketligini qaraymiz. Bu ketma-ketlikning o'suvchi hamda yuqoridan chegaralanganligini ko'rsatamiz.

a) ketma-ketlikning o'suvchiligi.

Qaralayotgan

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ketma-ketlikning o'suvchi bo'lishini korsatish uchun uning

$$x_{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \qquad x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

hadlarining nisbatini qaraymiz:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n:\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n:\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=$$

$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=\frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=$$

$$=\frac{n+1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}.$$

Bu tenglikdagi

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}$$

ifodaga Bernulli tengsizlikni qo'llab topamiz:

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n-1} > 1(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}.$$

Natijada

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{n+1}{n}\cdot\left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n-1} \geq \frac{n+1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{1}{n^3}>1$$

bo'ladi. Demak, $\frac{x_n}{x_{n-1}}>1.$

Keyingi tengsizlikdan $x_{n-1}<x_n$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ketma-ketlikning o'suvchi ekanligini bildiradi.

b) Ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligi.

Qaratilayotgan ketma-ketlikning umumiy hadi $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ni baholaymiz:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(\frac{2n+2}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+1}\right)^n=$$

$$=\left(\frac{2n+2}{2n}\right)^n\cdot\left(\frac{2n+1}{2n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^n}=$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)^n}<\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n}$$

Bernulli tengsizligidan foydalanib topamiz:

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n=\left(1+\frac{-1}{2n}\right)^n>1+n\cdot\frac{-1}{2n}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Natijada

$$x_n<\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=4$$

bo'lib, undan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi.

Shunday qilib

$$\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

ketma-ketlik o'suvchi va yuqoridan chegaralangan.

Unda 1-teoremaga ko'ra bu ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi.

Ta'rif. Ushbu

$$\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

ketma-ketlikning limiti e soni deyiladi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

Bunda e lotincha exponentis — «ko'rsatkich» so'zining dastlabki harfini ifodalaydi.

e — irratsional son bo'lib uning taqribiy qiymati e≈2,7182 ga teng.

Odatda asosi e bolgan logorifm natural logorifm deyilib $\ln A=\log_e A$ kabi belgilanadi.

5-§. Funksiya limiti

1°. Sonlar to'plamining limit nuqtasi.

Aytaylik, biror haqiqiy sonlar to'plami X va x_0 nuqta (haqiqiy son) berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ atrofida X to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'lsa, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

Masalan:

1) X=[0,1] to'plamning (segmentining) har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi;

2) X=(0,1) to'plamning (intervalning) har bir nuqtasi va x=0, x=1 nuqtalar shu to'plamning limit nuqtalari bo'ladi;

3) X=N={1,2,3,...} to'plam limit nuqtaga ega emas.

Tasdiq. Agar x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda shunday sonlar ketma-ketligi $\{x_n\}$ topiladiki:

1) Ixtiyoriy natural n da $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ bo'ladi.

Shuni aytish kerakki, tasdiqning shartlarini qanoatlahtiruvchi ketma-ketliklar istalgancha bo'ladi.

2°. Funksiya limitining ta'riflari.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya X to'plamda $(X\subset R)$ berilgan bo'lib, x_0 nuqta shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif. Agar X to'plam nuqtalaridan tuzulgan va x_0 ga intiluvchi (yaqinlashuvchi) har qanday

$$\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, ..., x_n, (x_n \neq a) \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan iborat

$$\{f(x_n)\}: f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n), ...$$

ketma-ketlik yagona A ga (chekli yoki cheksiz) intilsa shu A ga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi (x ning x_0 ga intilgandagi) limiti deyiladi va $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ kabi belgilanadi.

Misol. Ushbu $f(x)=2x-1$ funksiyaning $x_0=3$ nuqtadagi limitini topamiz.

Har bir hadi 3 dan farqli bo'lgan, 3 ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikni olamiz: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3 \quad (x_n \neq 3,\ n = 1,2,3,...)$.

U holda berilgan funksiyaning qiymatlari $f(x)$, $n=1,2,...$ bo'lib ulardan tuzulgan ketma-ketlik

$$\{f(x_n)\}=\{2x_n-1\}$$

bo'ladi. Bu sonlar ketma-ketligining limiti

$$\lim_{x_n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x_n\to\infty}(2x_n - 1) = 2\cdot 3 - 1 = 5$$

bo'ladi. Demak, ta'rifga ko'ra $f(x_n)=2x-1$ funksiyaning $x\to 3$ dagi limiti 5 ga teng bo'ladi:

$$\lim_{x\to 3} f(x_n) = \lim_{x\to 3}(2x-1) = 5$$

Ikkita $\varepsilon>0$ va $\delta>0$ (yetarlicha kichik) sonlarni olaylik.

Ma'lumki, x_0 nuqtaning δ atrofi $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ intervaldan, A sonining ε atrofi $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$ intervaldan iborat bo'ladi.

$f(x)$ funksiya argumenti x ning $x\neq x_0$ bo'lib, $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ atrofga tegishli ekanligini, ya'ni $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, bo'lishi quyidagicha ifodalanadi:

$$x_0-\delta<x<x_0<\delta, \qquad x\neq x_0 \qquad 0<|x-x_0|<\delta.$$

Shuningdek, $f(x)$ funksiya mos qiymatlarining $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$ atrofga tegishliligi, ya'ni

$$f(x)\in(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$$

bo'lishi quyidagicha ifodalanadi:

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon, \qquad |f(x)-A|<\varepsilon$$

U holda bu ifodalardan foydalanib, funksiya limitini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son topilsaki, argument x ning

$$0<|x-x_0|<\delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ($x \to x_0$ dagi) limiti deyiladi va yuqoridagidek $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ kabi belgilanadi.

Odatda, $(x_0 - \delta, x_0)$ va $(x_0, x_0+\delta)$ intervallar ($\delta>0$) x_0 nuqtaning mos ravishda chap va o'ng atrofi deyiladi.

Agar funksiya limiti ta'rifida funksiya argumenti x ning qiymatlari x_0 nuqtaning chap atrofida bo'lsa, funksiya limiti *chap limit* deyiladi va

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0 - 0)$$

kabi belgilanadi.

Agar funksiya limiti ta'rifida argumenti x ning qiymatlari x_0 nuqtaning o'ng atrofida bo'lsa, funksiyaning limiti *o'ng limiti* deyiladi va

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0 + 0)$$

kabi belgilanadi.

Funksiyaning o'ng va chap limitlari uning *bir tamonli limitlari* deyiladi.

Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & agar\ x>0 \\ x^3, & agar\ x \le 0 \end{cases}$$

funksiyaning $x_0=0$ nuqtadagi o'ng limiti

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x+2) = 2,$$

chap limiti $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^3 = 0$ bo'ladi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $M>0$ son topilsinki, $|x|>M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A son *$f(x)$ funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti deyiladi* va $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ kabi belgilanadi.

3°. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya X to'plamda ($X\subset R$) berilgan bo'lib, x_0 shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti cheksiz: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x\to x_0$ cheksiz katta funksiya deyiladi.

Masalan, $f(x)=\dfrac{1}{x-2}\ (x\neq 2)$ funksiya $x\to 2$ da cheksiz kata funksiya bo'ladi.

Agar $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti 0 ga teng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x\to x_0$ da cheksiz *kichik funksiya* deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiya $x\to 0$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Tasdiq. Agar $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya ($\alpha(x)\neq 0$) bo'lsa, u holda $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ cheksiz katta funksiya bo'ladi.

Agar $\beta(x)$ funksiya cheksiz katta funksiya bo'lsa, u holda $\dfrac{1}{\beta(x)}$ cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Tasdiq. Agar $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti A ga teng, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ bo'lsa, u holda $f(x)=A+\alpha(x)$ bo'ladi, bunda $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya ($x\to x_0$) va aksincha.

Tasdiq. Agar $x\to x_0$ da $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik funksiyalar bo'lsa, u holda

$$\alpha(x)+\beta(x),\ \alpha(x)-\beta(x),\ \alpha(x)\cdot\beta(x)$$

funksiyalar cheksiz kichik funksiyalar bo'ladi.

6-§. Limitga ega bo'lgan funksiyaning xossalari

Chekli limitiga ega bo'lgan funksiyalar qator xossalarga ega. Keyinchalik bu xossalar ko'p, ayniqsa funksiyalarning limitlarini hisoblashda foydalaniladi. Xossalarning asosiylarini teoremalar sifatida keltiramiz.

Teoremalarda keltiriladigan funksiyalar:

a) X to'plamda ($X \subset R$) aniqlangan, x_0 nuqta esa shu to'plamning limit nuqtasi;

b) $x \to x_0$ da chekli limitga ega deb qaraladi.

1-teorema. Ikki funksiya yig'indisining limiti bu funksiyalar limitlarining yig'indisiga teng:

$$\lim_{x \to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Xuddi shunga o'xshash

$$\lim_{x \to x_0}[f(x)-g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x)$$

bo'lishi isbotlanadi.

Natija. Agar $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limit A bo'lsa, u ya'gona bo'ladi.

2-teorema. Ikki funksiya ko'paytmasining limiti bu funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng:

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Natija. O'zgarmas (son) ko'payuvchini limit ishorasi tashqarisiga chiqarish mumkin:

$$\lim_{x \to x_0}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot c = const.$$

3-teorema. Ikki funksiya nisbatining limiti surat limitini maxraj limitiga bo'linganiga teng:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \quad \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0\right)$$

Misollar. 1. Ushbu $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-5x+6x\right)$ limit hisoblansin.

◀ Yuqorida keltirilgan teoremalardan ifodalanib topamiz:

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2-5x+6\right)=\lim_{x\to 1}x^2-\lim_{x\to 1}5x+\lim_{x\to 1}6=$$

$$=\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x-5\lim_{x\to 1}x+6=1\cdot 1-5\cdot 1+6=2.$$

2. Ushbu $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-10+21}$ limit hisoblansin.

◀ Ravshanki,

$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1),$$

$$x^2-10x+21=(x-3)(x-7).$$

Unda

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-10x+21}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-7)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-7}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-7)}=\frac{3+1}{3-7}=-\frac{4}{4}=-1$$

bo'ladi.

7-§. Muhim limitlar

Funksiyaning limitlarini hisoblashda quyidagi keltiriladigan limitlardan ko'p foydalahiladi. Odatda ular muhum limitlar deyiladi.

1°. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ munosabat o'rinli. Shuni isbotlaymiz.

Avvalo x o'zgaruvchining $0<x<\frac{\pi}{2}$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi qiymatlarida

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x \qquad (1)$$

tengsizliklarning bajarilishini ko'rsatamiz. Buning uchun tekislikda markazi (0;0) nuqtada, radiusi R ga teng bo'lgan doirani olamiz (1-chizma).

Bu chizmadan ko‘rinadiki, ΔAOB yuzi $S_1 = \frac{1}{2} R^2 \sin x$,

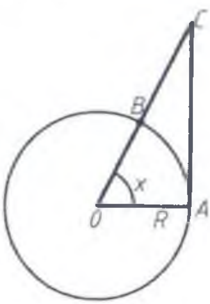
AOB sektorning yuzi

$$S_2 = \frac{1}{2} R^2 \sin x,$$

ΔAOC ning yuzi

$$S_3 = \frac{1}{2} R^2 \cdot tgx$$

bo‘ladi. Ravshanki, $S_1 < S_2 < S_3$



1-chizma

Demak, $\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 \cdot x < \frac{1}{2} R^2 \cdot tgx.$

Bu tengsizliklarning hamma tomonlarini $\frac{1}{2} R^2$ ga bo‘lib topamiz:

$$\sin x < x < tgx$$

keyingi tengsizliklarning hamma tomonlarini $\sin x$ ga $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ bo‘lish natijasida

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

kelib chiqadi. Bu tengsizliklarni, avvalo

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

ko'rinishida, so'ng

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$

ko'rinishida yozib. Agar $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < 2\cdot\frac{x}{2} = x$ munosabatni e'tiborga olsak, unda $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|$ bo'lishi kelib chiqadi.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olib, unga ko'ra $\delta > 0$ sonni (uni olingan $\varepsilon > 0$ va $\frac{\pi}{2}$ sonlardan kichik qilib) olinsa, u holda $|x - 0| = |x| < \delta$ bo'lganda

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x| < \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ bo'lishini bildiradi.

2°. Ushbu $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ tenglik isbotlansin.

◄ Ma'lumki $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

ketma-ketlik limitga ega bo'lib, uning limiti e soni deyiladi:

$\lim\limits_{n\to\infty} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ endi $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

funksiyaning $x > \infty$ dagi limiti e, ya'ni

$$\lim_{x\to\infty} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

bo'lishini ko'rsatamiz.

Aytaylik, $x>1$ bo‘lsin. Agar x ning butun qismini n desak, unda $n\leq x<n+1$ bo‘lib, $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\leq\frac{1}{n}$ bo‘ladi. Keyingi ikki munosabatdan

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Ravshanki,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right]=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=e\cdot 1=e$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e$$

Unda $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ bo‘ladi.

Aytaylik, $x<-1$ bo‘lsin. Agar $x=-t$ deyilsa, $x>-\infty$ da $t>+\infty$ bo‘lib,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\right]=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e\cdot 1=e$$

bo‘ladi. Demak,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

6-bob. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

Funksiya limiti tushunchasi bilan uzviy bog'langan funksiyaning uzluksizligini qaraymiz.

1-§. Funksiyaning uzluksizligi tushunchasi

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda berilgan va x_0 nuqta shu intervalga tegishli nuqta bo'lsin: $x_0 \in (a,b)$.

Ta'rif. Agar $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiya chekli limitga ega bo'lib, bu limit funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ ga teng,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiya uzluksizligining bu ta'rifi quyidagi ikki shartning bir yo'la bajarilishini taqozo etadi:

1) $x=x_0$ da $f(x)$ funksiya limitining chekli bo'lishini;

2) bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ ga teng bo'lishini

Masalan, $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ funksiya $x_0=2$ nuqtada uzluksiz bo'ladi, chunki birinchidan $x \to 2$ da $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ funksiyaning limiti chekli: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2+5} = \sqrt{4+5} = 3$ ikkinchidan, bu limit berilgan funksiyaning $x_0=2$ nuqtadagi qiymatiga teng: $f(2) = \sqrt{2^2+5} = 3$.

Demak, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & agar \quad x \neq 0, \\ 0, & agar \quad x = 0 \end{cases}$$

funksiya $x_0=2$ nuqtada uzluksiz bo'maydi, chunki

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

bo'lib, berilgan funksiyaning $x_0=0$ nuqtadagi qiymati $f(x_0)=f(0)=0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(x_0)$$

Funksiya limiti ta'rifidagi $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ munosabatni quyidagicha $\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ yozish mumkin.

Odatda $x-x_0$ ayirma argument orttirmasi, $f(x)-f(x_0)$ ayirma esa x_0 nuqtadagi funksiya orttirmasi deyiladi. Ular mos ravishda Δx va Δf kabi belgilanadi: $\Delta x=x\ x_0$,

$$\Delta f=f(x)-f(x_0)$$

keyingi tengliklardan $x=x_0=\Delta x$, $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ bo'lishi kelib chiqadi. Natijada $\lim_{x\to x_0} f(x)= f(x_0)$ munosabat ushbu

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0 \qquad (2)$$

ko'rinishga keladi.

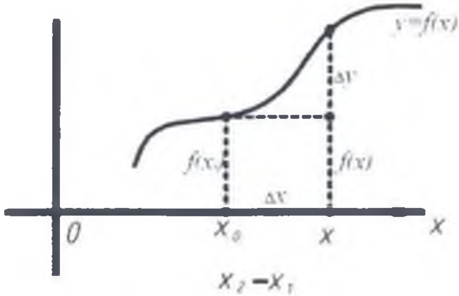
Demak, (2) munosabatni funksiyaning x_0 nuqtadagi uzluksizligi ta'rifi sifatida qabul qilinishi mumkin, ya'ni agar argument x ning x_0 nuqtadagi orttirmasi Δx nolga intilganda $f(x)$ funksiyaning orttirmasi Δf ham nolga intilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi (1-chizma).

Masalan, $y=f(x)=c$ (c – o'zgarmas son) funksiya ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi, chunki bu funksiya uchun

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0$$

bo'lib, $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0$ bo'ladi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda berilgan bo'lsin.



1-chizma

Agar *f(x)* funksiya (a,b) intervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya (a,b) intervalda uzluksiz deyiladi.

Aytaylik, *y=f(x)* funksiya [a,b] segmentda berilgan bo'lsin.

Agar *f(x)* funksiya (a,b) intervalda uzluksiz bo'lib, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b+0} f(x)=f(b)$ bo'lsa *f(x)* funksiya [a,b] segmentda uzluksiz deyiladi.

2-§. Funksiyaning uzilishi

Agar *f(x)* funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lmasa, ya'ni funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'lish shartlarini bajarmasa, funksiya x_0 nuqtada uziladi (uzilishga ega) deyiladi. Bunda x_0 funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

Agar x_0 nuqta *y=f(x)* funksiyaning uzilish nuqtasi bo'lsa, unda bu nuqtada funksiya uzluksizlik ta'rifidagi shartlarni bajarmaydi. Ular quyidagicha bo'lishi mumkin:

1°. Funksiya x_0 nuqtaning atrofida aniqlangan bo'lib, x_0 nuqtaning o'zida aniqlanmagan bo'ladi.

Masalan,

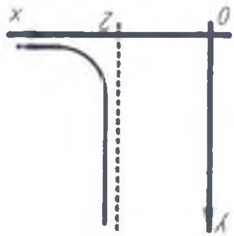
$$y=f(x)=\frac{1}{x-2}$$

funksiya $x_0=2$ nuqtada aniqlanmagan (2-chizma).

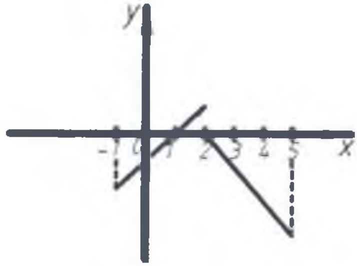
2°. Funksiya x_0 nuqtada va uning atrofida aniqlangan, biroq $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud emas.

Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} x-1, \; agar \; -1 \le x \le 2 \\ 2-x, \; agar \; 2 \le x \le 5 \end{cases}$$



2-chizma



3-chizma

funksiya $x_0=2$ nuqtada aniqlangan ($f(2)=0$) ammo bu funksiya $x \to x_0=2$ da limitga ega emas (3-chizma).

3°. Funksiya x_0 nuqtada va uning atrofida aniqlangan hamda $x \to x_0$ da funksiya limitga ega

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

ammo bu limit funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng emas

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \ne f(x_0).$$

7-bob. FUNKSIYANING HOSILA VA DIFFERENSIALI

1§-Funksiya hosilasining ta'riflari. Hosilaning geometrik hamda mexanik ma'nolari

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan va x_0 nuqta shu intervalning biror nuqtasi bo'lsin $(x_0\in(a,b))$.

Quyidagi amallarni bajaramiz:

1) funksiya argumenti x_0 ga Δx orttirma beramiz, bunda $x_0+\Delta x\in(a,b)$ va $\Delta x\neq 0$;

2) bu orttirmaga mos funksiya orttirmasi Δf (Δy) ni topamiz:

$$\Delta y=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0);$$

3) funksiya orttirmaning argument orttirmasiga nisbatini olamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \quad (\Delta x\neq 0).$$

Ravshanki, bu nisbat muayyan $f(x)$ va muayyan Δx ning funksiyasi bo'ladi.

Ta'rif. $y=f(x)$ funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining $\Delta x\to 0$ dagi limiti

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

f(x) funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va

$$f'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, y'_{x_0}$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Agar (1) limit chekli bo'lsa, hosila chekli, (1) limit cheksiz bo'lsa, hosila cheksiz deyiladi.

Eslatma. Agar *f(x)* funksiya (a,b) intervalning har bir nuqtasida chekli hosilaga ega bo‘lsa, bu *f'(x)* hosila *x* ning funksiyasi bo‘ladi.

Funksiyaning tayin nuqtadagi chekli hosilasi sonni ifodalaydi.

Ta’rif. Agar *f(x)* funksiya (a,b) intervalning ixtiyoriy nuqtasida hosilaga ega bo‘lsa, *f(x)* funksiyaning (a,b) intervalda differensiallanuvi deyiladi.

Odatda funksiyaning hosilasini topish amali differensiallash amali deyiladi.

Agar,

$$x_0+\Delta x=x$$

deyilsa, unda

$$\Delta x=x-x_0$$

bo‘lib,

$$\Delta x\to 0 \text{ da } x\to x_0 \text{ bo‘ladi.}$$

Natijada yuqoridagi (1) ifoda quyidagicha ifodalanadi

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Demak, funksiya hosilasini quyidagicha ham ta’riflash mumkin:

Ta’rif. Ushbu

$$\lim_{\Delta x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limit f(x) funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (2)$$

Funksiyaning x_0 nuqtadagi o‘ng va chap hosilalari quyidagicha ta’riflanadi:

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0-0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Misol. Ushbu

$$y=f(x)=x^2$$

funksiyaning hosilasi topilsin.

◄ 1) argument x ga Δx orttirma beramiz:

$$x+\Delta x$$

2) funksiyaning mos orttirmasi Δy ni topamiz:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=$$
$$=x^2+2x\cdot\Delta x+\Delta x^2-x^2=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2;$$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\cdot\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x;$$

4) bu nisbatni $\Delta x\to 0$ dagi limitini topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=2x+0=2x$$

Demak, berilgan funksiyaning hosilasi

$$y'=(x^2)'=2x$$

bo‘ladi.►

2-§. Hosilaning geometrik hamda mexanik ma’nolari

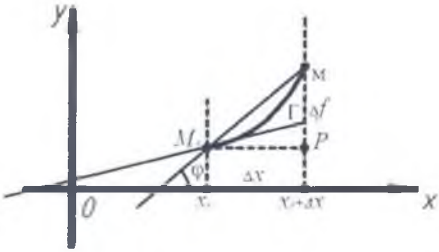
Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, shu intervalning x_0 nuqtasida $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsin.

Hosila ta’rifiga ko‘ra

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

bo‘ladi.

Aytaylik, f(x) funksiyaning grafigi Г chiziqni (egri chiziqni) tasvirlasin (1-chizma).



1-chizma

Endi Γ chiziqqa uning $M_0=M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasida urinma o'tkazish masalasini qaraymiz. Γ chiziqda M_0 nuqtasidan farqli

$$M=M(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$$

nuqtani olib, bu nuqtalar orqali l kesuvchini o'tkazamiz. l kesuvchining OX o'qi bilan tashkil etgan burchakni φ bilan belgilaymiz.

Ravshanki, φ burchak Δx ga bog'liq bo'ladi:

$$\varphi=\varphi(\Delta x)$$

Agar M nuqta Γ chiziq bo'ylab, M_0 ga intilganda (ya'ni $\Delta x \to 0$ da) kesuvchining limit holati mavjud bo'lsa, kesuvchining bu limit holati Γ chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma deyiladi. Urinma to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

Demak, f(x) funksiya grafigi M_0 nuqtada o'tkazilgan urinmaning mavjud bo'lishi uchun

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

limitning mavjud bo'lishini ko'rsatish yetarli. Bunda α urinmaning OX o'qi bilan tashkil etgan burchagi.

Uchburchak MM_0P dan

$$tg\varphi(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

va undan

$$\varphi(\Delta x) = arctg\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'lishini topamiz.

Funksiya uzluksizligidan foydalanib, $\Delta x \to 0$ da $\varphi(\Delta x)$ ning limitini topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0} arctg\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= arctg\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right] = arctg\, f'(x_0)$$

Demak,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)$$

mavjud va y

$$\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x) = arctg\, f'(x_0)$$

ga teng bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$f'(x_0)=tg\alpha$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya grafigiga $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinma mavjud.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)$ esa bu urinmaning burchak koeffitsientini ifodalaydi. Urinmaning tenglamasi ushbu

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Endi hosilaning mexanik ma'nosini keltiramiz.

Ataylik, moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab (bu to'g'ri chiziqni OX o'qi deylik) harakat qilib, M nuqtaga kelganda bosib o'tilgan yo'l S bo'lsin: *OM=S (2-chizma).*

2-chizma

Ravshanki, bu yo'l vaqtga bog'liq bo'lib, uning funksiyasi bo'ladi:

$$S=S(t) \qquad (3)$$

Odatda (3) tenglama moddiy nuqtaning harakat qonuni deyiladi.

Agar nuqta t vaqt oralig'ida $S(t)$ masofani, $t+\Delta t$ vaqt oralig'ida esa $S(t+\Delta t)$ masofani bosib o'tgan bo'lsa, unda Δt vaqt oralig'ida bosib o'tilgan yo'l $\Delta S=S(t+\Delta t)-S(t)$ bo'lib,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$$

nisbat esa moddiy nuqtaning t hamda $t+\Delta t$ vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlikni ifodalaydi.

Agar Δt nolga intila borsa o'rtacha tezlik moddiy nuqtaning t paytdagi (momentdagi) oniy tezlikni aniqroq ifodalay boradi. Demak, t paytdagi tezlik

$$V(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)+S(t)}{\Delta t}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$V(t)=S'(t) \qquad (4)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, moddiy nuqtaning harakat qonuni $S=S(t)$ bo'lganda funksiyaning t nuqtadagi hosilasi $S'(t)$ uning t paytdagi harakat (oniy) tezligini ifodalaydi.

3-§. Funksiya hosilasini hisoblash qoidalari

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da aniqlangan bo'lib, ular shu intervalda $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin.

1°. Ikki funksiya yig'indisi va ayirmasining hosilalari.

Teorema. Ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar yig'indisi va ayirmasining hosilalari bu funksiyalar hosilalarining mos ravishda yig'indisi va ayirmasiga teng bo'ladi:

$$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x).$$

◀ Quyidagi belgilashni ko'ramiz:

$$F(x)=f(x)\pm g(x),$$

Hosila ta'rifi va funksiya limiti haqidagi teoremalardan foydalanib topamiz:

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)\pm g(x+\Delta x)]-[f(x)\pm g(x)]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\pm\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\pm\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=$$

$$=f'(x)\pm g'(x)$$

Demak,

$$F'(x)=[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x).$$

Masalan,

$$y=x^3+x$$

funksiyaning hosilasi

$$y'=(x^2+x)'=(x^2)'+(x)'=2x+1$$

bo'ladi.

Masalan,

$$y=x^2+3x$$

funksiyaning hosilasi

$$y'=(x^2+3x)'=(x^2)'+(3x)'=2x+3$$

bo'ladi.

2°. Ikki funksiya ko'paytmasining hosilasi.

Teorema. Ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ko'paytmasining hosilasi

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

bo'ladi.

◄ Aytaylik,

$$\Phi(x)=f(x)\cdot g(x)$$

bo'lsin. Funksiya hosilasi ta'rifidan foydalanib topamiz.

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} \qquad (5)$$

Ma'lumki,

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x),$$

$$\Delta g(x+\Delta x)=\Delta g(x)+g(x).$$

Bu munosabatlardan

$$f(x+\Delta x)=\Delta f(x)+f(x)$$

$$g(x+\Delta x)=\Delta g(x)+g(x).$$

bo'lishi kelib chiqadi. Unda yuqoridagi (5) ifoda ushbu

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x)+\Delta f(x)]\cdot[g(x)+\Delta g(x)]-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot f(x)+f(x)\cdot\Delta g(x)+g(x)\cdot\Delta f(x)+\Delta f\cdot\Delta g-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[g(x)\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+f(x)\cdot\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}+\Delta g(x)\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right]$$

ko'rinishga keladi. Keyingi tenglikdan

$$\Phi'(x)=g(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}+$$

$$+f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta g(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=$$

$$=g(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

Demak,

$$\Phi'(x)=[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

3°. Ikki funksiya nisbatining hosilasi.

Teorema. Ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(g(x)\neq 0)$ nisbatining hosilasi

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik,

$$P(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

bo'lsin.

Funksiya hosilasi ta'rifi hamda limitlar haqidagi teoremalardan foydalanib topamiz:

$$P'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)+\Delta f(x)}{g(x)+\Delta g(x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(x)+g(x)\cdot\Delta f(x)-f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot\Delta g(x)}{\Delta x\left[g(x)+\Delta g(x)\right]\cdot g(x)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot\Delta f(x)-f(x)\cdot\Delta g(x)}{\Delta x\left[g^2(x)+g(x)\cdot\Delta g(x)\right]}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f(x)\dfrac{\Delta g(x)}{\Delta x}}{g^2(x)+g(x)\cdot\Delta g(x)}=$$

$$=\frac{g(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta g(x)}{\Delta x}}{g^2(x)+g(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta g(x)}=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}\ \square$$

Demak,

$$P'(x)=\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

4°. Murakkab funksiyaning hosilasi.

Aytaylik, $u=\varphi(x)$ va $y=f(u)$ funksiyalar berilgan bo‘lib, ular yordamida

$$y=f(\varphi(x))$$

murakkab funksiya hosil qilingan bo‘lsin.

Teorema. Agar $u=\varphi(x)$ funksiya x nuqtada $u'=\varphi'(x)$ hosilaga ega bo‘lib, $y=f(u)$ funksiya u nuqtada ($u=\varphi(x)$) $f'(u)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya x nuqtada hosilaga ega va

$$y'_x=f'(u)\cdot u'_x,$$

ya’ni

$$y'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

bo‘ladi.

◄ Aytaylik, $\varphi(x)\neq const$ bo‘lsin. Bu holda, $\Delta x\neq 0$ bo‘lganda

$$\Delta u=\Delta\varphi(x)=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\neq 0$$

bo‘ladi. Ayni paytda

$$\Delta y=\Delta f(u)=f(u+\Delta u)-f(u)$$

bo‘lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

bo‘ladi. Bu tenglikda $\Delta x\to 0$ da (bunda Δu ham nolga intiladi) limitga o‘tib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot$$

$$\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

Demak,

$$f'=(f(\varphi(x)))'\cdot f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

Masalan,

$$y=(x^2+5x+3)^3$$

funksiya uchun

$$u(x)=x^2+hx+3, \qquad f(u)=u^3$$

bo'lib, teoremaga ko'ra

$$[f(u(x))]'=f'(u)\cdot u'(x)$$

ya'ni

$$[(x^2+5x+3)^3]'=3\cdot(x^2+hx+3)^2\cdot(2x+5)$$

bo'ladi.

5°. Teskari funksiyaning hosilasi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan, qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) va $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $f'(x)\neq 0$ bo'lsin.

Teorema. $y=f(x)$ funksiya $x=\varphi(y)$ teskari funksiyaga ega bo'lib,

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

bo'ladi.

◄ Aytaylik, $y=f(x)$ funksiyaga teskari bo'lgan funksiya $x=\varphi(y)$ bo'lsin.

$x=\varphi(y)$ funksiya argumentiga $\Delta y(\Delta y\neq 0)$ orttirma beramiz. Unda $x=\varphi(y)$ funksiya ham Δx orttirmaga ega bo'lib, $y=f(x)$ funksiya qat'iy monoton bo'lganligi uchun $\Delta x\neq 0$ bo'ladi. Ravshanki,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Agar $\Delta y\to 0$ bo'lsa, unda Δx ham nolga intiladi. $\Delta x\to 0$ (funksiya uzluksiz bo'lganligi uchun).

Ma'lumki,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x) \qquad (f'(x)\neq 0)$$

Bu munosabatdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}.$$

Demak,

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

Masalan,

$$y=\sqrt{x}$$

funksiyaga teskari funksiya $x=y^2$ bo'lib

$$y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{(y^2)'}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

bo'ladi.

4-§. Sodda funksiyalarning hosilalari. Hosilalar jadvali

Funksiya hosilasi ta'rifi hamda hosila hisoblash qoidalaridan foydalanib sodda funksiyalarning hosilalarini topamiz.

1°. Darajali, $y=x^n$ $(n\in N)$ funksiyaning hosilasi.

$y=x^n$ funksiya argumenti x ga Δx orttirma berib, funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^n-x^n$$

Nyuton binomi formulasiga ko'ra

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=$$

$$=\left(x^n+nx^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\ldots+(\Delta x)^n\right)-x^n=$$

$$=nx^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\ldots+(\Delta x)^n$$

bo'ladi.

Endi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatini tuzamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{nx^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\ldots+}{\Delta x}+$$

$$+\frac{(\Delta x)^n}{\Delta x}=$$

$$=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x+\ldots+(\Delta x)^{n-1}$$

So'ng $\Delta x\to 0$ bu nisbatning limitini

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\ldots+(\Delta x)^{n-1}\right]=$$

$$=n\cdot x^{n-1}$$

Demak,

$$y'=(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$$

2°. Ko'rsatkichli funksiya $y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$ ning hosilasi.

Avvalo $y=e^x$ funksiyaning hosilasini topamiz. Funksiya argument x ga Δx orttirma berib funksiya orttirmasini

$$\Delta y=e^{x+\Delta x}-e^x=e^x(e^{\Delta x}-1),$$

so'ng uni Δx ga bo'lib, ushbu

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$$

nisbatni topamiz. Endi,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$$

limitni hisoblaymiz. Bu limitni hisoblashda $\Delta x\to 0$ da

$$e^{\Delta x}-1\sim\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=e^x.$$

Demak,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=e^x,\quad ya'ni\quad y'=(e^x)'=e^x$$

Endi $y=a^x$ funksiyani qaraymiz. Ma'lumki,

$$a^x=e^{x\,\ln a}$$

bo'ladi. Murakkab funksiya hosilasi formulasidan foydalanib topamiz.

$$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=e^{x\ln a}\cdot(x\cdot\ln a)'=e^{x\ln a}(\ln a)=(e^{\ln a})^x\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a.$$

Demak,

$$(a^x)'=a^x\cdot\ln a\qquad (a>0,\quad a\neq 1)$$

3°. Logarifmik funksiya $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ ning hosilasi.

Avvalo $y=\ln x$ funksiyaning hosilasini topamiz: Ravshanki,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\frac{\ln\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}=\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

Ma'lumki, $\Delta x\to 0$ da

$$\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\sim\frac{\Delta x}{x}$$

bo'ladi. Shuni e'tiborga olib topamiz.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{x}.$$

Demak,

$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

Endi

$$y=log_a x$$

funksiyani qaraymiz. Ravshanki,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Unda

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

bo'ladi. Demak,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

4°. Trigonometrik funksiyalar.

$$y=sinx,\ y=cosx,\ y=tgx,\ y=ctgx$$

larni hosilalari.

Ushbu

$$y=sinx$$

funksiya argument x ga Δx orttirma berib, funksiya orttirmasi

$$\Delta y=sin(x+\Delta x)\ sinx$$

ning Δx ga nisbatini qaraymiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

So'ng $\Delta x \to 0$ da limitga o'tib, bunda

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$

bo'lishidan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x.$$

Demak, $y'=(\sin x)'=\cos x$ bo'ladi.

Xuddi shunday o'xshash y=cosx funksiyaning hosilasi

$$y'=(\cos x)'=-\sin x$$

bo'lishi topiladi.

Endi $y=tgx$ va $y=ctgx$ funksiyalarning hosilalarini topamiz. Bunda ikki funksiya nisbatining hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanamiz:

$$y'=(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Demak,

$$y'=(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Shuningdek,

$$y'=(ctgx)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\cdot\sin x-\cos x\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot(\cos x)'}{\sin^2 x}=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

bo‘ladi.

Demak,

$$y' = (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

5°. Teskari trigonometrik funksiyalar.

$$y=arcsinx,\ y=arccosx,\ y=arctgx,\ y=arcctx$$

ning hosilalari.

Aytaylik,

$$y=arcsinx$$

bo‘lsin. Ma’lumki, bu funksiyaga nisbatan teskari funksiya

$$x=siny \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$$

bo‘ladi. Ravshanki, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ da

$$x'=cosy \qquad (cosy \neq 0)$$

Teskari funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demak,

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Xuddi shunga o‘xshash

$$y=arc\ cosx$$

funksiyaning hosilasi

$$y' = (\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

bo‘lishi ko‘rsatiladi.

Endi

$$y=arctgx$$

funksiyaning hosilasini topamiz.

Ma'lumki, $y=arctgx$ funksiya

$$x=tgy \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

funksiyaga teskari funksiya bo'ladi.

Teskari funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$y'=(arctgx)'=\frac{1}{(tgy)'}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Demak,

$$y'=(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$$

Xuddi shunga o'xshash

$$y=arc\ ctgx$$

funksiyaning hosilasi

$$y'=(arctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

bo'lishi ko'rsatiladi.

Sodda funksiyalar hosilalari uchun topilgan formulalarni jamlab, ularni jadval sifatida keltiramiz (bunda $u=u(x)$)

1. $(c)'=0, \quad c=const;$
2. $(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}, \quad (u^{\alpha})'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u';$
3. $(a^x)'=a^x\cdot \ln a, \quad (a^u)'=a^u\cdot \ln a\cdot u';$
4. $(e^x)'=e^x, \quad (e^u)'=e^u\cdot u';$
5. $(\log_a x)'=-\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{x}\log_a e, \quad (\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u';$

6. (sin x)'=cosx, (sin u)'=cosu·u';

7. (cos x)'=−sinx, (cos u)'=−sin u·u';

8. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$;

9. $(ctgx)' = \frac{1}{\sin^2 x}$, $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$;

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;

11. $(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;

12. $(\mathrm{arc}\,tgx)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arc}\,tgu)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$;

13. $(\mathrm{arc}\,ctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arc}\,ctgu)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

5-§. Funksiyaning differensiali

Differensial hisobning asosiy teoremalari

1°. Funksiya differensiali.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, x_0 nuqtada ($x_0 \in (a,b)$) differensiallanuvchi, ya'ni chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin.

Hosila ta'rifiga ko'ra

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'ladi, bunda Δx – argument orttirmasi, $\Delta f(x_0)$ esa funksiya orttirmasi.

Limitning xossalaridan foydalanib bu tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

bunda $\Delta x \to 0$ da $\alpha(\Delta x) \to 0$. Keyingi tenglikdan

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (6)$$

bo'lishi kelib chiqadi

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega ($f'(x_0) \neq 0$) bo'lsa, bu funksiyaning orttirmasi $\Delta f(x_0)$ ikki qo'shiluvchidan iborat bo'ladi.

Qo'shiluvchilardan birinchisi Δx ga nisbatan chiziqli ($f'(x_0)\Delta x$) bo'lib, $\Delta x \to 0$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi, qo'shiluvchilardan ikkinchisi $\alpha(\Delta x)\Delta x$ esa, $\Delta x \to 0$ da yuqori tartibli cheksiz kichik bo'ladi.

Ta'rif. (6) ifodadagi $f'(x_0)\Delta x$ ko'paytma $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi differensiali deyiladi va $df(x_0)$ kabi belgilanadi.

Demak, ta'rifga ko'ra

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) itervalning har bir x nuqtasida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, unda

$$df(x) = f'(x_0)\Delta x$$

deb olinadi, bunda Δx funksiya argumentining ixtiyoriy x nuqtadagi orttirmasi.

Xususan, $f(x)=x$ bo'lganda bu funksiyaning differensiali

$$df(x) = f'(x)\Delta x = (x)'\Delta x = 1\Delta x = \Delta x$$

bo'lib,

$$dx = \Delta x$$

bo'ladi. Bu hol o'zgaruvchi (argument) x ning erkin orttirmasi Δx ni uning differensiali dx almashtirilishi mumkinligini ko'rsatadi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensialini

$$df(x) = f'(x)dx$$

ko'rinishida ifodalash mumkinligini bildiradi.

Funksiya differensialining bu ifodasi hamda hosilalar jadvalidan foydalanib sodda funksiyalarning differensiallari jadvalini keltiramiz:

1. $d(x^{\alpha})=\alpha x^{\alpha-1}dx$,

2. $d(a^{x})=a^{x}\cdot lna\cdot dx$,

3. $d(e^{x})=e^{x}\cdot dx$,

4. $d(\log_a x) = \frac{1}{x} lo_a e \cdot dx$,

5. $d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$,

6. $d(sinx)=cosxdx$,

7. $d(cosx)=-sinxdx$,

8. $d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x} dx$,

9. $d(ctgx) = \frac{1}{\sin^2 x} dx$,

10. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$,

11. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$,

12. $d(\mathrm{arc}\,tgx) = -\frac{1}{1+x^2} dx$,

13. $d(\mathrm{arc}\,ctgx) = -\frac{1}{1+x^2} dx$.

2° Differensiallashning sodda qoidalari. Murakkab funksiyalarning differensiali.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $f(x)$ da aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy $x\in(a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Unda

1) $d(c\cdot f(x))=c\cdot df(x)$, $\quad c=const$,

2) $d[f(x)\pm g(x)]=df(x)\pm dg(x)$,

3) $d[(x)\cdot g(x)]=g(x)\cdot df(x)+f(x)\cdot dg(x)$,

4) $d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}, \qquad (g(x)\neq 0)$

Bu qoidalar sodda isbotlanadi. Ulardan birini masalan 2-formulani isbotlaymiz.

Shartga ko'ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi, ya'ni $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega.

Aytaylik, $F'(x)=f(x)+g(x)$ bo'lsin. Unda

$$F'(x)=[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$$

bo'ladi. Keyingi tenglikning ikki tamonini dx ga ko'paytirib

$$F'(x)dx=f'(x)dx+g'(x)dx$$

ya'ni

$$dF(x)=df(x)+dg(x)$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$d[f(x)+g(x)]=df(x)+dg(x).$$

Aytaylik, $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ funksiyalar yordamida $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya hosil qilingan bo'lsin. Bu $f(u)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar hosilalarga ega deylik. Murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasiga ko'ra

$$y'=(f(\varphi(x)))'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$y'dx=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$$

Unda

$$dy=f'(\varphi(x))\cdot d\varphi'(x)$$

$$dy=f'(u)du$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, funksiya murakkab bo'lgan holda ham funksiya differensiali funksiya hosilasi $f'(u)$ bilan argument differensiali ko'paytmasidan iborat bo'ladi.

Ikkala holda:

1) $y=f(x)$,

2) $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, ya'ni $y=f(\varphi(u))$

funksiya differensiali:

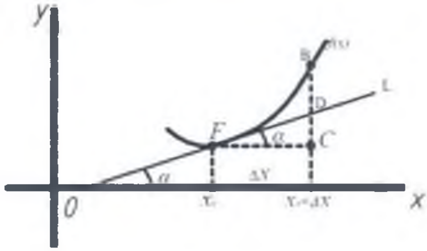
1) $dy=f'(x)dx$,

2) $dy=f'(u)du$

bir xil ko'rinishga ega. Odatda, bu differensial ko'rinishining invariantligi deyiladi.

3°. Funksiya differensialining geometrik ma'nosi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da aniqlangan bo'lib $x\in(a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Bu funksiyaning grafigi 3-chizmada ko'rsatilgan egri chiziqni tasvirlasin.



3-chizma

Endi egri chiziqning $(x,f(x))$ va $(x+\Delta x,\ f(x))$ nuqtalarni mos ravishda F va B bilan belgilaymiz. Unga

$$FC=\Delta x,\ \ BC=f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y$$

bo'ladi. $f(x)$ funksiya $x\in(a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun u shu nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiyaga grafigiga uning $F=F(x),\ f(x)$ nuqtasiga o'tkazilgan L urinma mavjud va bu urinmaning burchak koeffitsienti

$$tg\alpha=f'(x)$$

bo'ladi.

Urinmaning BC bilan kesishgan nuqtasini D bilan belgilaylik. FDC uchburchakdan topamiz:

$$\frac{DC}{FC}=tg\alpha.$$

Keyingi tengliklardan

$$DC=tg\alpha\cdot FC=f'(x)\cdot\Delta x$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning x nuqtasidagi differensiali

$$dy=f'(x)\cdot\Delta x$$

funksiya grafigiga $F=F(x,f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinma orttirmasi DC ni ifodalaydi.

Bu funksiya differensiallining geometrik ma'nosidir.

4°. Funksiya differensiali va taqribiy formula.

Nazariy va ayniqsa amaliy masalalarni yechishda tegishli funksiyalarning nuqtadagi qiymatlarini hisoblash zaruriyati tug'uladi. Ko'pincha, bunday funksiyalar murakkab bo'lib, ularning nuqtadagi qiymatlarini topish ancha qiyin bo'ladi. Bu hol funksiyaning nuqtadagi qiymatini taqribiy hisoblash (ularni hisoblash uchun taqribiy formulalar topish) masalasi yuzaga keladi.

Funksiyalarning differensiali esa taqribiy formulalarni topish imkonini beradi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b)da aniqlangan bo'lib, $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega $f'(x)\neq 0$ bo'lsin, u holda

$$\Delta y=\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$$

funksiya orttirmasi uchun

$$\Delta y=f'(x)\cdot+\Delta x+\alpha(x)\cdot\Delta x=df+a(\Delta x)\cdot\Delta x=dy+a(\Delta x)\cdot\Delta x$$

bo'ladi.

$$\frac{\Delta y}{dy}=\frac{f'(x)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}{f'(x)\cdot\Delta x}=1+\frac{\alpha(x)}{f'(x)}$$

bo'ladi. bunda $\Delta x\to 0$ va $a(\Delta x)\to 0$. Keyingi tenglikdan.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=1$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglik ushbu

$$\Delta y\approx dy$$

munosabatga (taqribiy tenlikka) olib keladi.

Ravshanki, Δx ning har qancha kichik bo'lishi bu taqribiy tenglamaning aniqligini shuncha oshiradi.

Yuqoridagi taqribiy formulani quyidagicha

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x \qquad (7)$$

ko'rinishida yozsa ham bo'ladi. (7) formuladan taqribiy hisoblashlarda foydalaniladi.

6-§. Differensial hisobning asosiy teoremalari

Ma'lumki, $y=f(x)$ funksiya (a,b)da aniqlangan va $x\in(a,b)$ bo'lib, ixtiyoriy $x\in(a,b)$ uchun

$$f(x)<f(x_0)\ (f(x_0)>f(x_0))$$

bo'lsa, $f(x_0)$ miqdor $f(x)$ funksiyaning (a,b) dagi eng katta (eng kichik) qiymati deyiladi.

Teorema. (Ferma teoremasi). Agar $y=f(x)$ funksiya c nuqtada ($c\in(a,b)$) o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishib, bu nuqtada $f'(c)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $f'(c)=0$ bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x=c$ nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishsin:

$$f(x)\leq f(c) \qquad (8)$$

Endi c nuqtaga shunday orttirma beramizki, $c+\Delta x$ shu (a,b) intervalga tegishli bo'lsin: $c+\Delta x\in(a,b)$ Unda (8) $f(c+\Delta x)\leq f(x)$ bo'lib $\Delta y=f(c+\Delta x-f(c)\leq 0$ bo'ladi.

Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya c nuqtada $f'(c)$ hosilaga ega. Hosila ta'rifiga ko'ra

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\leq 0$$

bo'ladi.

Agar $\Delta x>0$ bo'lsa, unda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\leq 0$$

bo'lib,

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\leq 0 \qquad (9)$$

bo‘ladi.

Agar $\Delta x<0$ bo‘lsa, unda

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0 \qquad (10)$$

bo‘ladi.

Yuqoridagi (9) va (10) munosabatlardan

$$f'(c)=0$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Teorema. (Lagranj teoremasi). Agar *f(x)* funksiya [a,b] segmentda uzliksiz bo‘lib, (a,b) intervalda *f'(x)* hosilaga ega bo‘lsa, u holda a bilan b orasida shunday c nuqta (a<c<b) topiladiki,

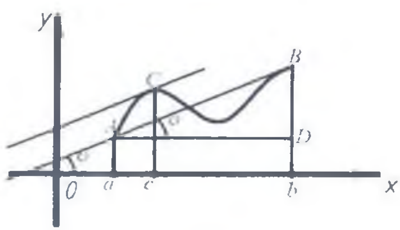
$$\frac{f(b)-f(a)\Delta y}{b-a}=f'(c)$$

bo‘ladi.

Aytaylik, *y=f(x)* funksiya [a,b] segmentda uzluksiz bo‘lib, uning grafigi chizmada tasvirlangan *AB* egri chiziqni ifodalasin.

A va *B* nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning *OX* o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil etgan burchakni φ deylik. Unda bu to‘g‘ri chiziqning burchak koeffisienti tgφ bo‘ladi.

AB egri chiziqdan shunday *C* nuqta bo‘lishini tasavvur etish mumkinki, egri chiziqqa shu nuqtada o‘tkazilgan urinma *AB* to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi. Bu *L* urinmaning *OX* o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil etgan burchakni *α* deylik. Uning ham burchak koeffitsienti tgφ bo‘ladi.



4-chizma

Ma'lumki, $y=f(x)$ funksiya hosilasining geometrik ma'nosi

$$tg\varphi=f'(c) \qquad (11)$$

bo'ladi, bunda C nuqta AB egri chiziqdagi C nuqtani abssissasi.

AB to'ri chiziq bilan bu urinma parallel bo'lgani uchun

$$tg\varphi=tg\alpha \qquad (12)$$

bo'ladi.

Chizmada keltirilgan ADB to'g'ri burchakli uchburchakda

$$AD=b-a,\ BD=f(b)-f(a), \quad \angle A=\varphi$$

Shu uchburchakdan

$$tg\varphi=\frac{BD}{AD}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (13)$$

bo'lishini topamiz.

Yuqoridagi (11), (12), (13) munosabatlardan

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Natija. Agar $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi hosilasi nolga teng

$$f'(x)=0, \quad x\in(a,b)$$

bo'lsa, u holda funksiya (a,b)da o'zgarmas bo'ladi:

$$f(x)=C, \quad C=const.$$

Natija. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya uchun Lagranj teoremasining shartlari bajarilib,

$$f(a)=f(b)$$

kabi bo'lsin. U holda a va b orasida shunday c nuqta ($a<c<b$) topiladi

$$f'(c)=0$$

bo'ladi.

Endi Lagranj teoremasidan umumiyroq bo'lgan teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. (Koshi teoremasi). Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar.

1) [a,b] segmentda uzliksiz;

2) (a,b) intervalda $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega;

3) (a,b) da $g'(x)\neq 0$ bo'lsin.

U holda a bilan b orasida shunday c nuqta (a<c<b) topiladiki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

7-§.Yuqori tartibli hosilalar

1°. Funksiyaning yuqori tartibli hosila tushunchasi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, uning ixtiyoriy nuqtasida ($x\in(a,b)$, $f'(x)$) hosilaga ega bo'lsin. Bu $f'(x)$ ni ($f'(x)$ ham x o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi) $g(x)$ orqali belgilaylik:

$$g(x) = f'(x), \qquad (x\in(a,b))$$

Ta'rif. Agar $x_0\in(a,b)$ nuqtada $g(x)$ funksiya $g'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, bu hosila $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va $f''(x_0)$ kabi belgilanadi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi uning birinchi tartibli hosilasining hosilasi bo'ladi:

$$f''(x_0) = (f'(x))'.$$

Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiyaning 3-tartibli, $f'''(x)$ 4-tartibli $f^{IV}(x)$ va h.k. tartibli hosilalari ta'riflanadi.

Umuman, $f(x)$ funksiyaning n-tartibli hosilasi $f^{(n)}(x)$ dan olingan hosila $f(x)$ funksiyaning (n+1)-tartibli hosilasi deyiladi va $f^{(n+1)}(x)$ kabi belgilanadi:

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'.$$

Odatda, $f(x)$ funksiyaning

$$f^{II}(x),\ (f(x))^{III},\ f^{IV}(x)\ ....$$

hosilalar uning yuqori tartibli hosilalari deyiladi.

Eslatma. $f(x)$ funksiyaning x nuqtada ($x \in (a,b)$), n-tartibli hosilasining mavjud bo‘lishida bu funksiyaning shu nuqta atrofida $1,2,\ldots,(n-1)$ tartibli hosilalarining mavjud bo‘lishi talab etiladi.

Funksiyaning yuqori tartibli, masalan n-tartibli ($n \geq 2$) hosilasini topish uchun, hamma oldingi tartibli hosilalarini hisoblash kerak bo‘ladi.

Ayrim funksiyalarining yuqori tartibli hosilalarini bir yo‘la topish mumkin.

Misol tariqasida ba’zi bir sodda funksiyalarning n-tartibli hosilalarini topamiz:

1) $y=x^a$ $(x>0,\ \alpha \in R)$. Bu funksiyaning hosilasini ketma-ket hisoblaymiz:

$$y'=(x^a)'=a \cdot x^{a-1},$$

$$y''=(y')'=(a \cdot x^{a-1})'=a \cdot (a-1) \cdot x^{a-3},$$

$$y'''=(a(a-1)x^{a-2})'=a(a-1)(a-2) \cdot x^{a-3}.$$

Bu funksiyaning n-tartibli hosilasi uchun ushbu

$$(x^a)^{(n)}=a \cdot (a-1)(a-2)\ldots(a-n+1) \cdot x^{a-n}$$

formula o‘rinli bo‘lishini matematik induksiya usuli yordamida ko‘rsatish qiyin emas.

Xususan, $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$ funksiyaning n-tartibli hosilasi.

$$f^{(n)}(x)=(\frac{1}{x})^{(n)}=(-1)\cdot(-2)\ldots\ldots\ldots(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^n+1}$$

bo‘ladi.

2. $y=\ln x$ $(x>0)$ funksiyaning n-tartibli hosilasini topamiz. Ravshanki,

$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

Unda yuqoridagi munosabatlarga ko‘ra

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n},\ (x>0)$$

bo'ladi.

3. $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ bo'lsa. Bu funksiyaning hosilasini ketma-ket hisoblaymiz:

$$y'=a^x \ln a,$$

$$y''=(y')'=(a^x\cdot \ln a)'=a^x\cdot \ln a\cdot \ln a=a^x \ln^2 a,$$

$$y'''=(y'')'=(a^x \ln^2 a)'=a^x \ln^3 a$$

Bu munosabatlarga qarab $y=a^x$ funksiyaning n-tartibli hosilasi uchun ushbu,

$$y^{(n)}=a^x\cdot \ln^n a$$

formulani yozamiz. Uning to'g'riligi matematik induksiya usuli yordamida isbotlanadi. Demak,

$$y^{(n)}=(a^x)^{(n)}=a^x\cdot \ln^n a$$

xususan, $(e^x)^{(n)}=e^x$ bo'ladi.

2° Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi.

Aytaylik, moddiy nuqta M to'g'ri chiziq bo'ylab $s=f(t)$ qonun bilan harakatlansin, bunda t — vaqt, S esa o'tilgan yo'l.

Ma'lumki, bu harakat qonuning t vaqtdagi oniy tezligi

$$S'(t)=f'(t)=v(t)$$

bo'ladi.

Aytaylik, t vaqtda moddiy nuqtaning tezligi $t+\Delta t$ vaqtdagi tezlik esa

$$v(t)+\Delta v$$

bo'lsin, ya'ni moddiy nuqta tezligi Δt vaqt oralig'ida Δv ga o'zgarsin. Unda ushbu

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

nisbat Δt vaqt oralig'dagi o'rtacha tezlanishini ifodalaydi. Bu nisbatning $\Delta t \to 0$ dagi limiti

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

t vaqtdagi moddiy nuqta harakatining tezlanishi deyiladi va u a bilan belgilanadi.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$

Ravshanki

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t).$$

Agar $v=S'(t)$ ekanligini e'tiborga olsak, unda

$$v'(t)=(S'(t))'=S''(t)$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$a=S''(t),$$

ya'ni $S=S(t)$ harakat qonunining ikkinchi tartibli hosilasi harakatning tezlanishini ifodalaydi. Bu ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosidir.

3°. Sodda qoidalar. Leybnits formulasi.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b)da aniqlangan bo'lib, $x \in (a,b)$ nuqtada n-tartibli $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. U holda

1. $[c \cdot f(x)]^{(n)}=c \cdot f^{(n)}(x), \quad c=const,$
2. $[f(x) \pm g(x)]^{(n)}=f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$
3. $[f(x) \cdot g(x)]^{(n)}=f^{(n)}(x) \cdot g(x)+C_n^1 f^{(n-1)}(x) \cdot g'(x)+$
$+C_n^2 f^{(n-2)} \cdot g''(x)+\ldots+C_n^k f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)+\ldots+f(x) \cdot g^{(n)}(x)$

bo'ladi, bunda

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-k-1)}{k!}$$

8-bob. FUNKSIYA HOSILASINING TADBIQLARI

1-§. Funksiyaning monotonli oralig'ini aniqlash

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin.

Ma'lumki, ixtiyoriy $x_1 \in (a,b)$ va $x_2 \in (a,b)$ nuqtalar uchun $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)\le f(x_2)$ $f(x_1)<f(x_2)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'suvchi (qat'iy o'suvchi), $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)\ge f(x_2)$ $f(x_1)>f(x_2)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) deyiladi.

Odatda $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lsa,

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda monoton, (a,b) interval esa $f(x)$ funksiyaning monotonli intervali deyiladi.

Endi funksiyaning hosilasidan foydalanib, uning berilgan intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishini topamiz.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, ixtiyoriy $x\in(a,b)$ da $f'(x)\ge 0$ bo'lsa, u holda funksiya (a,b)da o'suvchi bo'ladi.

◄ Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b)da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $f'(x)\ge 0$ bo'lsin.

(a,b) intervalda ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib, $x_1<x_2$ deylik. Ravshanki, $[x_1, x_2]$ sigmenti (a,b) intervalga tegishli bo'ladi:

$$[x_1, x_2]\in(a,b).$$

Bu $[x_1, x_2]$ sigmentda $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining shartlarini bajaradi. Unda shu teoremaga ko'ra shunday c nuqta $(x_1<c<x_2)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c), \qquad ya'ni \qquad f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$$

bo'ladi. Shartga ko'ra $f'(c)\ge 0$ va $x_2-x_1>0$ unda keying tenglikdan $f(x_2)-f(x_1)\ge 0$, ya'ni $f(x_1)\le f(x_2)$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)\le f(x_2)$ bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning (a,b) da o'suvchi bo'lishini bildiradi.

(a,b) intervalda ixtiyoriy x nuqtani olib, unda shunday Δx orttirma beramizki, $x+\Delta x$ nuqta ham shu (a,b)ga tegishli bo'lsin. Shartga ko'ra, $f(x)$ funksiya (a,b)da o'suvchi. Unda $\Delta x>0$ bo'lganda $f(x)\leq f(x+\Delta x)$ bo'lib, $f(x+\Delta x)-f(x)\leq 0$ bo'ladi.

Demak,

$$\Delta x>0 \text{ da } f(x+\Delta x)-f(x)\geq 0$$

$$\Delta x<0 \text{ da } f(x+\Delta x)-f(x)\leq 0.$$

Ikkala hol uchun $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$ bo'ladi.

Hosila ta'rifiga binoan $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$

Keyingi ikki munosabatdan (a,b) da $f'(x)\geq 0$ bo'lishi kelib chiqadi. ►

Natijada (a,b) intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning shu intervalda o'suvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $x\in(a,b)$ da $f'(x)\geq 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Yuqorida keltirilgan teoremalarga o'xshash quyidagi teoremalar ham isbotlanadi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, ixtiyoriy $x\in(a,b)$ da $f'(x)\leq 0$ bo'lsa u holda funksiya (a,b)da kamayuvchi bo'ladi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a,b)da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, funksiya (a,b) intervalda kamayuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)\leq 0$ bo'ladi.

Natijada, (a,b) intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning shu intervalda kamayuvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $x\in(a,b)$da $f'(x)\leq 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

2-§. Funksiyaning ekstremumlari

1°. Funksiya ekstremumlari tushunchalari.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b)da aniqlangan $x_0\in(a,b)$ va shu nuqtaning atrofi $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)=\{x\in R: x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$ $(\delta>0)$ ham (a,b) intervalda tegishli $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset(a,b)$ bo'lsin.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ bilan shu funksiyaning $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ atrofdagi qiymatlarini solishtirish funksiya ekstremumi tushunchasiga olib keladi.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ uchun $f(x)\leq f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal ***maksimumga erishadi*** deyiladi, x_0 ***funksiyaning maksimum nuqtasi***, $f(x_0)$ esa ***funksiyaning maksimum qiymati*** deyiladi.

Funksiyaning maksimum qiymati $max\{f(x)\}$ kabi belgilanadi.

$$f(x_0)=max\{f(x)\}$$

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ uchun $f(x)\geq f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal ***minimumga erishadi*** deyiladi, x_0 ***funksiyaning minimum nuqtasi***, $f(x_0)$ esa ***funksiyaning minimum qiymati*** deyiladi. Funksiyaning minimum qiymati $min\{f(x)\}$ kabi belgilanadi:

$$f(x_0)=min\{f(x)\}$$

Funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari umumiy nom bilan uning ekstremumlari deyiladi.

Eslatma. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda bir nechta maksimum va minimumlarga ega bo'lishi mumkin.

2°. Funksiya ekstremumga erishishining zaruriy sharti.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da aniqlangan bo'lib, $x\in(a,b)$ bo'lsin.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishsa va shu nuqtada funksiyaning hosilasi mavjud bo'lsa, u holda $f'(x_0)=0$ bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiya $x_0\in(a,b)$ nuqtada minimumga erishib, $f'(x_0)$ mavjud bo'lganda ham $f'(x_0)=0$ bo'lishi isbotlanadi.

Eslatma. $f(x)$ funksiyaning biror $x^*\in(a,b)$ nuqtada hosilasi mavjud bo'lib, $f(x^*)=0$ bo'lishidan uning x^* nuqtada ekstremumiga erishishi har doim kelib chiqavermaydi.

Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya uchun $f'(x)=3x^2$ va $x=0$ nuqtada $f'(x_0)=0$ bo'lsa ham bu funksiya $x=0$ nuqtada ekstremumga erishmaydi (ma'lumki, funksiya qat'iy o'suvchi).

Demak, yuqorida keltirilgan teorema funksiya ekstremumga erishishning zaruriy shartini ifodalaydi.

Eslatma. Hosilaga ega bo'lmagan nuqtada ham funksiya ekstremumiga erishishi mumkin. Masalan:

$$f(x)=|x|$$

funksiya $x_0=0$ nuqtada hosilaga ega emas, ammo u shu nuqtada minimumga erishadi.

Odatda funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqtalar funksiyasining statsionar nuqtalar deyiladi.

$f(x)$ funksiyaga ekstremum qiymat beradigan nuqtalar:

1. Funksiyaning statsionar nuqtalar.
2. Funksiyaning hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalar.

3°. Funksiya ekstremumga erishishining yetarli shartlari.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan,uning har bir nuqtasida hosilaga ega va $x_0\in(a,b)$ nuqtada funksiyaning hosilasi nolga teng: $f'(x_0)=0$ x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ atrofini olamizki, $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset(a,b)$ bo'lsin.

a) Agar ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,x_0)$ da $f'(x)>0$, ixtiyoriy $x\in(x_0,x_0+\delta,)$ da $f'(x)<0$, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani «o'sishda» ishorasining «+» dan «−» ga o'zgartirsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

$f(x)$ funksiyaning $(x_0-\delta,\ x_0)$ da hosilasi musbat $f'(x)>0$.

Demak, funksiya $(x_0-\delta,\ x_0)$ da o'suvchi. Unda $(x_0-\delta,\ x_0)$ *da* $f(x_0)\geq f(x)$ tengsizlik bajariladi.

Demak, $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ da $f(x)<f(x_0)$ bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishishini bildiradi.

b) Agar ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,x_0)$ da $f'(x)<0$, ixtiyoriy $x\in(x_0,x_0+\delta,)$ da $f'(x)>0$, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani «o'sishda» ishorasini «+» dan «−» ga o'zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi.

$f(x)$ funksiyaning hosilasi $(x_0-\delta,x_0)$ da $f'(x)<0$. Demak, funksiya $(x_0-\delta,x_0)$ da kamayuvchi.

Unda $(x_0-\delta,x_0)$ da $f(x)\geq f(x_0)$ tengsizlik bajariladi.

$f(x)$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasi $(x_0,x_0+\delta)$ da $f'(x)>0$. Demak, funksiya $(x_0,x_0+\delta)$ da o'suvchi. Unda $[x_0,x_0+\delta]$ da $f(x)\geq f(x_0)$ tenglik bajariladi.

Demak, ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ *da* $f(x)\geq f(x_0)$ bo'ladi. Bu esa funksiyaning x_0 nuqtada minimumga erishishini bildiradi.

c) Agar ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,x_0)$ da $f'(x)>0$, ixtiyoriy $x\in(x_0,x_0+\delta,)$ da $f'(x)>0$ yoki ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,x_0)$ da $f'(x)<0$, ixtiyoriy $x\in(x_0,x_0+\delta)$ da $f'(x)<0$ bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan «o'tishda» ishorasini o'zgartirmasa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumiga erishmaydi. Chunki bu holda $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da o'suvchi yoki kamayuvchi bo'ladi.

Natijada $f(x)$ funksiya ekstremumini topishda quyidagi qoidaga kelamiz:

1) funksiya hosilasi $f'(x)$ topiladi;

2) $f'(x)=0$ tenglama yechiladi. Aytaylik, bu tenglamaning yechimlaridan biri x_0 bo'lsin $f'(x)=0$;

3) x_0 nuqtaning chap atrofi $(x_0-\delta, x_0)$ va o'ng atrofi $(x_0, x_0+\delta)$ da $f'(x)$ hosilaning ishorasi aniqlanadi va yuqorida keltirilgan a) va b) tasdiqlar tatbiq etilib ekstremum topiladi.

$f'(x_0)$	$f'(x_0-\delta)$	$f'(x_0-\delta)$	$f(x_0)$
0 yoki mavjud emas	+ −	− +	Maksimum Minimum
0 yoki mavjud emas	+ −	+ −	Ekstremum mavjud emas

4°. Funksiya ekstremumini topishda yuqori tartibli hosilalardan foydalanish.

Yuqorida keltirilgan ekstremumning yetarli sharti sanaladigan nuqtaning o'ng va chap tomonlaridagi nuqtalarida funksiya hosilasi $f(x)$ ning ishorasini aniqlash bilan bog'liq. Ko'pincha x_0 nuqtaning atrofida $f'(x)$ ning ishorasini aniqlash qiyin bo'ladi.

Qaralayotgan funksiya x_0 nuqtada yuqori tartibli hosilalarning ega bo'lsa, hosilaning x_0 nuqtadagi qiymatining ishorasiga qarab funksiyaning ekstremumini aniqlash mumkin.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, $x \in (a,b)$ bo'lsin.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ atrofida $((x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b))$ birinchi va ikkinchi tartibli $f'(x)$, $f''(x)$ hosilalarga ega bo'lib,

1) $f'(x_0)=0$;

2) x_0 nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x)$ uzluksiz va $f''(x_0)\neq 0$ bo'lsin, u holda

a) $f''(x_0)>0$ bo'lgani $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi;

b) $f''(x_0)<0$ bo'lgani $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b))$ n-tartibli $f^{(n)}(x)$ hosilaga ega bo'lib,

1) $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ bo'lganda, n juft son bo'lsa funksiya ekstremumga ega bo'ladi va $f^{(n)}(x_0)>0$ bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga, $f^{(n)}(x_0)<0$ bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

2) n-toq son bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'ladi.

5°. Funksiyaning [a,b] segmentdagi eng katta va eng kichik qiymatlari.

$f(x)$ funksiya [a,b] segmentda aniqlanagan va u shu segmentda differensiallanuvchi bo'lsin. Ravshanki, $f(x)$ funksiya [a,b] da uzluksiz bo'ladi. Unda ma'lum teoremaga ko'ra funksiya [a,b] da eng katta va eng kichik qiymatlarga erishadi, ya'ni [a,b] segmentning shunday qiymatlari topiladiki, bu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlari eng katta (eng kichik) bo'ladi.

Funksiyaning eng katta qiymati quyidagicha topiladi:

1) $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi maksimum qiymatlari topiladi. Funksiyaning barcha maksimum qiymatlari to'plami $\{max\ f(x)\}$ bo'lsin;

2) funksiyaning [a,b] segmenti chegaralaridagi, ya'ni $x=a$, $x=b$ nuqtalardagi qiymatlari $f(a)$ va $f(b)$ hisoblanadi.

So'ngra $\{max\, f(x)\}$ to'plamning barcha elementlari bilan $f(a)$ va $f(b)$ lar taqqoslanadi. Bu qiymatlar ichida (orasida) eng kattasi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ segmentdagi eng katta qiymati bo'ladi.

Shunga o'xshash funksiyaning $[a,b]$ segmentdagi eng kichik qiymati topiladi.

6°. Hosilaning funksiya limitini topish tadbiqlari. Lopital qoidalari.

Biz oldingi boblarda, ma'lum shartlar bajarishganda funksiyalarning limitini hisoblashni bayon etdik.

Bazi hollarda bunday shartlar bajarilmaganda, ya'ni.

1) $x>x_0$ da $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$, da $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti (uni $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi).

2) $x>x_0$ da $f(x)=+\infty$, $g(x)=+\infty$ da $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti (uni $\dfrac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi).

Limitni topishda funksiyaning hosilalariga asoslangan qoidaga ko'ra hisoblash mumkin bo'ladi.

Bunday usul bilan funksiya limitini topish *Lopital qoidalari* deyiladi.

1°. $x\to x_0$ da $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$, da $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti.

Teorema. Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da aniqlangan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$;

2) ixtiyoriy $x\in(a,b)$ da $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalari mavjud;

3) ixtiyoriy $x\in(a,b)$ da $g'(x)\neq 0$;

4) ushbu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A \quad (A\in R)$ mavjud. U holda

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ bo'ladi.

f(x) hamda *g(x)* funksiyalarning $x=a$ nuqtadagi qiymati nolga teng, ya'ni $f(a)=0$, $g(a)=0$ deb olsak, natijada $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0=g(a)$ tengliklar o'rinli bo'lib, *f(x)* va *g(x)* funksiyalar [a,b] da uzluksiz bo'ladi. Ixtiyoriy $x\in(a,b)$ nuqta olib, [a,x] segmentda *f(x)* va *g(x)* funksiyalarni qaraymiz. Koshi teoremasiga ko'ra *a* bilan *x* orasida shunday $c(a<c<x)$ nuqta topiladiki

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan esa

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ravshanki $x\to a$ da $x\to c$ bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=A$$

2°. $x\to x_0$ da $(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti.

Teorema. Aytaylik, *f(x)* va *g(x)* funksiyalar (a,b) da aniqlangan bo'lib,quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$,

2) ixtiyoriy $x\in(a,b)$ da, $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va $g'(x)\neq 0$

3) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$

U holda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=A$ bo'ladi.

9-bob. ANIQMAS INTEGRAL

Ma'lumki, harakat qonuniga ko'ra harakatdagi jismning tezligini topish masalasi hosila tushunchasiga olib keladi.

Harakatdagi jismning tezligiga ko'ra harakat qonunini topish masalasi esa yuqorida aytilgan masalaga nisbatan teskari masala bo'lib, u funksiyaning aniqmas integrali tushunchasiga olib keladi.

1-§. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral

$f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, $F(x)$ esa shu (a,b) berilgan va differensiallanuvchi (ya'ni $F(x)$ hosilaga ega), $x\in(a,b)$ bo'lsin.

Ta'rif. Agar $F(x)$ funksiyaning hosilasi $F'(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaga teng $F'(x)=f(x)$ yoki $dF(x)=f'(x)dx$ bo'lsa, $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Masalan,

$$f(x)=x^2,\ (x\in(-\infty;+\infty))$$

funksiyaning boshlang'ich funksiyasi

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3$$

bo'ladi, chunki

$$F'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2=f(x)$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, u shu oraliqda ikkita $F(x)$ va $\Phi(x)$ boshlang'ich funksiyalarga ega bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$F'(x)=f(x),\ \Phi'(x)=f(x),(x\in(a,b))$$

Keyingi tengliklardan

$$F'(x)=\Phi'(x)$$

bo'lish kelib chiqadi. Unda $F(x)$ va $\Phi(x)$ funksiyalar bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi;

$$\Phi(x)=F(x)+C,\ C=const$$

Demak, berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalari cheksiz ko'p bo'lib, ular bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi.

Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, unda $f(x)$ funksiyaning istalgan boshlang'ich funksiyasi

$$F(x)+C,\ C=const$$

ko'rinishida bo'ladi.

Ta'rif. Ushbu

$$F(x)+C$$

ifoda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

bunda $\int$ integral belgisi, $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda deyiladi.

Masalan,

$$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C,$$

chunki $\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2$ bo'ladi.

Odatda funksiyaning aniqmas integralini topish amaliga shu funksiyani *integrallash amali* deyiladi.

Teorema. (a,b) da uzluksiz bo'lgan har qanday funksiya boshlang'ich funksiyaga, demak aniqmas integralga ega bo'ladi.

2-§. Aniqmas integralning xossalari

Aniqmas integral bir nechta xossalarga ega. Biz ularni keltiramiz:

1°. $f(x)$ funksiya aniqmas integral $\int f(x)dx$ ning differensiali $f(x)dx$ ga teng:

$$d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx,$$

2°. Funksiya differensialining aniqmas integarali shu funksiya bilan o'zgarmas son yig'ndisiga teng:

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

3°. Ushbu munosabat o'rinli:

$$\int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx \quad (k=const,\ k\neq 0)$$

4°. Ushbu formula o'rinli:

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$$

Bu xossalarning isboti bevosita aniqmas integral ta'rifidan kelib chiqadi. Biz ulardan birini, masalan, 2°-xossaning isbotini keltiramiz.

F(x) funksiya *f(x)* funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra $F'(x)=f(x)$ bo'ladi, $\int f(x)dx=F(x)+C$ bo'ladi.

Unda

$$\int f(x)dx=\int F'(x)dx=\int dF(x)$$

bo'ladi. Keyingi tengliklardan

$$\int dF(x)=F'(x)+C$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa 2° xossani isbotlaydi.

3-§. Asosiy integrallar jadvali

1°. Sodda funksiyalarning aniqmas integrallari.

Avval sodda funksiyalarning aniqmas integrallarini topamiz. Bunda boshlang'ich funksiya ta'rifidan hamda hosilalar jadvalidan foydalanamiz.

1) $f(x)=x^{\alpha}$ bo'lsin. ($x>0$, α – haqiqiy son, $\alpha\neq -1$)

Unda

$$\int f(x)dx = \int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

bo‘ladi, chunki

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right)' = (\alpha+1)\cdot\frac{x^{\alpha}}{\alpha+1} = x^{\alpha}.$$

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ bo‘lsin $(x \neq 0)$, unda $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ bo‘ladi.

2) $f(x)=a^x$ bo‘lsin $(a>0,\ a\neq 1)$. U holda

$$\int f(x)dx = \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

bo‘ladi, chunki

$$\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot a^x \cdot \ln a = a^x$$

Xususiy, $f(x)=e^x$ bo‘lsa,

$$\int f(x)dx = \int e^x \cdot dx = e^x + C$$

bo‘ladi.

3) $f(x)=\sin x$ bo‘ladi, unda $\int f(x)dx = \int \sin x dx = -\cos x + C$ bo‘ladi, chunki $(-\cos x+C)'=-(-\sin x)=\sin x$.

4) $f(x)=\cos x$ bo‘lsin, u holda $\int f(x)dx = \int \cos x dx = \sin x + C$ bo‘ladi, chunki, $(\sin x+C)'=\cos x$.

5) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ bo‘lsin, unda $\int f(x)dx = \int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C$ bo‘ladi, chunki, $(tgx + C)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ bo‘lsin, u holda

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$$

bo‘ladi, chunki, $(-ctgx + C)' = -\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{\sin^2 x}$

7) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ bo‘lsin, u holda

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$$

bo‘ladi, chunki, $(arctgx + C)' = \frac{1}{1+x^2}$

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bo‘lsin, unda

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

bo‘ladi, chunki, $(\arcsin x + C')' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

*2°. **Integrallar jadvali.*** Yuqorida keltirilgan formulalarni jamlab ushbu integrallar jadvalini hosil qilamiz:

1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$

4) $\int e^x dx = e^x + C,$

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C,$

6) $\int \cos x dx = \sin x + C,$

7) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C,$

8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C,$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C,$

10) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arc}\, tgx + C.$

4-§. Integrallash usullari

1°. Bevosita integrallash usuli. Bu usulda integral ostidagi funksiyani (yoki ifodani) ayniy almashtirishlar yo'li bilan yoki bevosita integralning xossalarini tatbiq etish yo'li bilan jadval integraliga keltirib hisoblanadi.

Ko'p hollarda quyidagi almashtirishlardan foydalaniladi:

du=d(u+a), a — o'zgarmas son,

$$du = \frac{1}{a} d(au), \quad a \neq 0 \quad udu = \frac{1}{2} d(u^2),$$

cosu du=d(sinu), sinu du=-d(cosu),

$$\frac{1}{u} du = d(\ln u), \quad \frac{1}{\cos^2 u} du = d(tgu),$$

umuman $f'(u)du=d(f(u))$.

Masalan,

$$\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \ln|x+2| + C,$$

$$\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

*2°. **O'zgaruvchilarni almashtirib integrallash usuli.***

Ushbu $\int f(x)dx$ integralni hisoblash talab etilsin. Ba'zan x o'zgaruvchini boshqa o'zgaruvchiga almashtirilish natijasida berilgan integral soddaroq, hisoblash uchun qulayroq integralga keladi.

Aytaylik,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (1)$$

bo'lsin. Bu integralda $x=\varphi(t)$ almashtirish bajaramiz. ($f(x)$, $\varphi(t)$ *va* $\varphi'(t)$ – uzluksiz funksiyalar).

Unda

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C \qquad (2)$$

bo'ladi. Shuni isbotlaymiz.

Ma'lumki, $F'(x)=f(x)$.

Unda $[F(\varphi(t))+C]'=(F(\varphi(t)))'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ bo'ladi. Bu esa (2) munosabatning to'g'riligini bildiradi. (1) va (2) tengliklardan topamiz:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)\cdot\varphi'(t)dt.$$

Masalan $\int(2+3x)^5dx$ integralni hisoblashda $2+3x=t$

Almashtirish bajarilsa, unda $x=\frac{t-2}{3}$, $dx=\frac{1}{3}dt$ bo'lib,

$\int(2+3x)^2dx=\int t^5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{t^6}{6}+C=\frac{1}{18}(2+3x)^6+C$ bo'ladi.

*3°. **Bo'laklab integrallash usuli.*** Aytaylik, $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar biror oraliqda aniqlangan uzluksiz hamda uzluksiz u'(x) va v'(x) hosilalarga ega bo'lsin. Ma'lumki,

$$d(u\cdot v)=udv+vdu.$$

Bu tenglikni integrallab topamiz:

$$\int d(u\cdot v) = \int udv + \int vdu.$$

Ravshanki, $\int d(u\cdot v)=u\cdot v$

Unda $u\cdot v=\int udv+\int vdu$ bo'lib, quyidagi formula

$$\int udv=u\cdot v-\int vdu \qquad (3)$$

hosil bo'ladi.

Odatda (3) bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

(3) formula ∫udv integralni ∫vdu ni hisoblashga keltiradi.

1-misol. $\int x\cos xdx$ ni hisoblang:

Yechish. u=x, du=x, v=sinx, dv=cosxdx belgilashlarni kiritamiz. U holda

$$\int x\cdot\cos xdx=\int udv=u\cdot v-\int vdu=x\cdot\sin x-$$
$$-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C$$

bo'ladi.

2-misol. lnxdx ni hisoblang:

Yechish. u=lnx, $du=\dfrac{dx}{x}$, v=x, dv=dx almashtirishni kiritamiz. U holda, $\int lnxdx=\int udv=x\cdot\ln x-\int\dfrac{dx}{x}=x\cdot\ln x-x+C$ bo'ladi.

Endi amaliyotda tez-tez uchrab turadigan va bo'laklab integrallash usuli bilan hisoblanadigan integrallar tiplarini keltiramiz.

1. $\int P_n(x)e^{kx}dx,\ \int P_n(x)\sin kxdx,\ \int P_n(x)\cos kxdx$ ko'rinishdagi integrallar, bu yerda $P_n(x)$ – n-darajali ko'phad, k biror son. Bu integrallarni hisoblash uchun $u=P_n(x)$ deb olish va (3) formulani n marta qo'llash yetarli.

2. $\int P_n(x)\ln xdx,\ \int P_n(x)arc\sin xdx,\ \int P_n(x)arc\cos xdx,\ \int P_n(x)arctgxdx,$ $\int P_n(x)arcctgxdx$ ko'rinishdagi integrallar, bu yerda $P_n(x)$ – n-darajali ko'phad. Bu integrallarni bo'laklab integrallash uchun $P_n(x)$ oldidagi ko'payuvchi funksiyani u deb olish lozim.

3. $\int e^{ax}\cos bx dx$, bu yerda a va b lar haqiqiy sonlar. Bu integrallar ikki marta bo'laklab integrallash usuli bilan hisoblanadi.

3-misol. $\int \arcsin x dx$ integralni hisoblang:

Yechish. Bu integral 2-tipga kiradi, bunda $P_0(x)=1$ va u=arcsinx deb olamiz. U holda

$$\int \arcsin x dx = \left| \begin{matrix} u=\arcsin x, & du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=dx, & v=x \end{matrix} \right| = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

bo'ladi.

4-misol. $\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx$ integralni hisoblang:

Yechish. Bu integral 3-tipga mansub. u sifatida dx ning oldidagi ko'paytuvchilardan ixtiyoriy birini olamiz va ikki marta bo'laklab integrallashni bajaramiz. Ikkinchi marta integrallaganimizda avval berilgan integralni o'z ichida saqlaydigan tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikdan berilgan integralni topamiz:

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx = \left| \begin{matrix} u=e^{-x}, & du=-e^{-x}dx \\ dv=\cos\frac{x}{2}dx, & v=2\int\cos\frac{x}{2}d(\frac{x}{2})=2\sin\frac{x}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2e^{-x}\sin\frac{x}{2} + 2\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}dx = \left| \begin{matrix} u=e^{-x}, & du=-e^{-x}dx \\ dv=\sin\frac{x}{2}dx, & v=-2\cos\frac{x}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2e^{-x}\sin\frac{x}{2} - 4e^{-x}\cos\frac{x}{2} - 4 - 4\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx, \ ya'ni$$

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx = 2e^{-x}\sin\frac{x}{2} - 4e^{-x}\cos\frac{x}{2} - 4\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx,$$

bundan $5\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}-4e^{-x}\cos\frac{x}{2}$ yoki

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{2}{5}(e^{-x}\sin\frac{x}{2}-2e^{-x}\cos\frac{x}{2}).$$

Endi bo'laklab integrallash usuli yordamida ushbu

$$J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\qquad (n=1,2,3,\dots\dots;\ \alpha - o'zgarmas)$$

integralni (bu integraldan keyinchalik ko'p foydalaniladi) hisoblaymiz.

Berilgan integralda

$$u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n},\quad dv=dx$$

deb olamiz. Unda

$$du=\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)'dx=\left[(x^2+a^2)^{-n}\right]'\cdot dx=$$

$$=-n(x^2+a^2)^{-n-1}\cdot 2xdx=-\frac{2nx}{(x^2+a^2)^n}\cdot dx,$$

$$dv=dx$$

bo'lishidan esa,

$$v=x$$

bo'lishini topamiz.

Bo'laklab integrallash formulasiga ko'ra

$$J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=x\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^n}-\int x\cdot\left(-\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right)dx=$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

bo'ladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

integralni quyidagicha yozib olamiz:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} -$$

$$-a^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = J_n - a^2 \cdot J_{n+1}$$

demak,

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \cdot J_n - 2na^2 \cdot J_{n+1}$$

Keyingi tenglikdan J(n+1) ni topamiz:

$$2na^2 \cdot J_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \cdot J_n - J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1) \cdot J_n$$

$$J_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}J_n \qquad (4)$$

Bu rekurrent formuladan foydalanib, J_1 ni bilgan holda birin-ketin J_2, J_3,... larni topish mumkin.

Ravshanki, n=1 bo'lganda

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{a\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$$

bo'ladi.

Masalan, (4) formuladan foydalanib,

$$J_2 = \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$$

integral quyidagicha hisoblanadi:

$$J_2=\int\frac{x}{2a^2\cdot(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^2}J_1=$$

$$=\frac{x}{2a^2\cdot(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^2}arctg\frac{x}{a}+C.$$

5-§. Sodda kasrlar va ularning integrallari

Ushbu,

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^m},\quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q},$$

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\qquad (m>1)$$

ko'rinishdagi kasrlar *sodda kasrlar* deyiladi. Bunda A,B,C,a,p,q – o'zgarmas haqiqiy sonlar, m – natural son, x^2+px+q – kvadrati uch had haqiqiy ildizlarga ega emas.

1°. $\frac{A}{x-a}$ sodda kasrning integrali quyidagicha hisoblanadi:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{dx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C$$

2°. $\int\frac{A}{(x-a)^m}dx(m>1)$ sodda kasrning aniqmas integrali.

Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=A\int\frac{dx}{(x-a)^m}=A\int(x-a)^{-m}d(x-a)=$$

$$=A\cdot\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C=\frac{A}{(x-a)^m\cdot(1-m)}+C.$$

3°. $\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$ sodda kasrning aniqmas integrali.

Avvalo sodda kasr maxrajidagi x^2+px+q kvadrat uchhadni quyidagicha yozib olamiz:

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+$$

$$+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2, \qquad a^2=q-\frac{p^2}{4}$$

U holda

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Bx+C}{(x+\frac{p}{2})^2+a^2}dx$$

bo'ladi. Keyingi integralda o'zgaruvchini almashtiramiz:

$$x+\frac{p}{2}=t.$$

Payshanki,

$$dx=dt,\ \ x=t-\frac{p}{2}.$$

Natijada

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Bx+C}{(x^2+\frac{p}{2})^2+a^2}=\int\frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{t^2+a^2}dt=$$

$$=\int\frac{Bt+C-\frac{p}{2}B}{t^2+a^2}dt=B\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+(C-\frac{p}{2}B)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\ln(t^2+a^2)+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}a\square\square t\frac{t}{a}+C=$$

$$=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{\square}}}a\square\square t\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{\square}}}+C$$

bo'ladi.

4°. $\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx \quad (m>1)$ sodda kasrning integrali.

Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx=\int\frac{Bx+C}{\left[(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^m}dx=\int\frac{B\cdot\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{(t^2+a^2)^m}dt=$$

$$=B\cdot\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^m}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=\frac{B}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m}+$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$$

Bu integraldagi $\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$ aniqmas integral

yuqorida keltirilgan rekurrent formula yordamida hisoblanadi.

6-§. Ratsional funksiyalarni integrallash

Ushbu $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n$ butun ratsional funksiyaning integrali oson hisoblanadi:

$$\int P_n(x)dx=\int\left[a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\ldots\ldots+a_nx^n\right]dx=$$

$$=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^2}{3}+\cdots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+C.$$

Kasr ratsional funksiya

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\ldots\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\ldots\ldots+b_mx^m}$$

ni integrallash birmuncha murakkab bo‘ladi.

Agar $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ noto‘g‘ri kasr (n>m) bo‘lsa, uning butun qismi ajratilib, butun ratsional funksiya va to‘g‘ri kasr yig‘indisi ko‘rinishida yoziladi:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx=R_n(x)+\frac{\overline{R_n}(x)}{Q_m(x)}.$$

U holda $\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx=\int R_n(x)dx+\int\frac{\overline{R_n}(x)}{Q_m(x)}$ bo‘ladi.

To‘g‘ri kasrni integrallash uchun, avvalo bu kasrni sodda kasrlar yig‘indisi sifatida yozib olinadi so‘ng ularning integrallari topiladi.

Endi ratsional karslarni sodda kasrlarga ajratishga doir bir nechta misollar keltiramiz:

1-misol. Ushbu $\frac{x^2}{x^3-8}$ ratsional kasrni sodda kasrlarga yoying.

Yechish. $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ bo‘lganligi sababli (8) formulaga ko‘ra

$$\frac{x^2}{x^3-8}=\frac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4},$$

bu yerda A, B va C lar noma’lum koeffitsientlar. Bu tenglikning o‘ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz, u holda $\frac{x^2}{x^3-8}=\frac{A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$ bo‘ladi. Bundan

$$x^2=(A+B)x^2+(2A+C-2B)x+4A-2C.$$

Endi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, A, B, C larni topish uchun ushbu tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 1 = A + B, \\ x^1 & ,0 = 2a + C - 2B, \\ x^0 & 0 = 4A - 2C \end{array} \Bigg\} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = \frac{2}{3}, C = \frac{2}{3}.$$

Shunday qilib,

$$\frac{x^2}{x^3-8} = \frac{1}{3(x-2)} + \frac{2(x+1)}{3(x^2+2x+4)}.$$

2-misol. Ushbu $\dfrac{7x^2 26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}$ ratsional kasrni sodda kasrlarga yoying.

Yechish. Kasrning maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^4+4x^3+4x^2-9=(x^2+2x)^2-9=(x^2+2x-3)(x^2+2x+3)=$$

$$=(x-1)(x+3)(x^2+2x+3).$$

sodda kasrlarga yoyish formulasidan foydalanib yoyilmani yozamiz:

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}.$$

Tenglamaning o‘ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz. U holda

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)} =$$

$$= \frac{A(x+3)(x^2+2x+3) + B(x-1)(x^2+2x+3) + (Cx+D)(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}$$

bo‘ladi. Bu kasrlarning suratlarini tenglashtiramiz so‘ngra x oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0 = A + B + C, \\ x^2 & 7 = 5A + B + 2C + D, \\ x^1 & 26 = 9A + B - 3C + 2D, \\ x^0 & -9 = 9A - 3B - 3D, \end{array} \Bigg\} \Rightarrow A = 1, B = 1, C = -2, D = 5.$$

Demak,

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}+\frac{-2x+5}{x^2+2x+3}.$$

3-misol. $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ ni sodda kasrlarga ajrating.

Yechish. (8) formulaga ko'ra

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{4x^2+16x-8}{x(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}.$$

Ushbu tenglikning o'ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz va suratlarini tenglashtiramiz:

$$4x^2+16x-8=A(x+2)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+2).$$

x ga ketma-ket x=0, x=-2 va x=2 qiymatlar berib quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{array}{l|l|}x=0 & -8=-4A\\ x=-2 & -24=8B\\ x=2 & 40=8C\end{array}\Rightarrow\begin{cases}A=2,\\ B=-3,\\ C=5.\end{cases}$$

Shunday qilib,

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x+2)(x-2)}=\frac{2}{x}+\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}.$$

4-misol. $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$ hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya to'g'ri kasrdan iborat. Uni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}.$$

Bundan $x^3+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$ kelib chiqadi. Endi x o'zgaruvchiga 0, 1, 2 va -1 qiymatlar berib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -A = 1, \\ D = 2, \\ A + 2B + 2C + 2D = 9, \\ -8A - 4B + 2C - D = 0. \end{cases}$$

Bundan A=-1, B=2, C=1, D=2 ni topamiz.

Demak,

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx = -\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^3} =$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$$

5-misol. $I = \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi kasr-noto'g'ri kasr. Uning butun va to'g'ri qismlarini ajratib olamiz:

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)}.$$

To'g'ri qismi $\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}$ ni sodda kasrlarga ajratamiz (qarang: 3-misol), natijada $\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x - +2} + \frac{5}{x-2}$ tenglikka ega bo'lamiz.

Bundan keyin integrallaymiz

$$\int\left(x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-2}\right)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x +$$

$$+2\int\frac{dx}{x} - -3\int\frac{dx}{x+2} + 5\int\frac{dx}{x-2} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| - 3\ln|x+2| +$$

$$+5\ln|x-2| + \ln C = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + +\ln\left|\frac{Cx^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|.$$

6-misol. $\int\frac{x^2}{x^3-8}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya to'g'ri kasrdan iborat. Uni sodda kasrlarga ajratishni 1-misolda ko'rgan edik. Shu yoyilmadan foydalanib integralni hisoblaymiz:

$$\int\frac{x^2}{x^3-8}dx=\int\frac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}dx=\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}\right)dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}A=\frac{1}{3},\\ B=C=\frac{2}{3}\end{array}\right|=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{3}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx=\frac{1}{3}\ln|x-2|+$$

$$+\frac{1}{3}\int\frac{d(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}=\frac{1}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln\left|x^2+2x+4\right|+\frac{1}{3}\ln C=$$

$$=\ln(C(x-2)(x^2+2x+4))^{\frac{1}{3}}=\ln\sqrt[3]{C(x^3-8)}.$$

Izoh. Integrallarni hisoblashda har doim ham tayyor sxemalardan foydalanishga harakat qilavermaslik kerak. Xususan, yuqoridagi misolda $x^2dx=\frac{1}{3}d(x^3-8)$ ekanligidan foydalanish mumkin edi. U holda

$$\int\frac{x^2}{x^3-2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3-8)}{x^3-8}dx=\frac{1}{3}\ln\left|x^3-8\right|+\frac{1}{3}\ln C=\ln\sqrt[3]{C(x^3-8)}.$$

7-§. Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash

Biz yuqorida ratsional funksiyalarning integrallari har doim hisoblanishini ko'rdik. Irratsional funksiyalarning integrallarini hisoblashda vaziyat boshqacha, ya'ni irratsional funksiyalarning integrallari o'zgaruvchilarini almashtirish yordamida ratsional funksiyaga keltirilib hisoblanadi.

Quyida ba'zi irratsional funksiyalarning integrallanishini keltirish bilan kifoyalanamiz.

1-misol. Ushbu $J=\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ integral hisoblansin.

◄ Bu integralda $\sqrt{x}=t$, *ya'ni* $x=t^2$ almashtirish bajaramiz. Unda $dx=2tdt$ bo'lib,

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{t}{1+t}2tdt=2\int\frac{t^2}{1+t}dt$$

bo'ladi. Natijada irratsional funksiyani integrallash ratsional funksiyani integrallanishiga keladi.

Ravshanki, $\frac{t^2}{1+t}=t-1+\frac{1}{t+1}$ bo'ladi.

Unda

$$\int\frac{t^2}{1+t}dt=\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dx=\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)+C$$

bo'ladi,

$$J=2\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right]+C=t^2-2t+2\ln(t+1)+C=$$

$$=x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+C$$

bo'ladi. ►

2-misol. $\int\frac{\sqrt{xdx}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ ni hisoblang.

Yechish: 1/2 va 1/3 kasrlarning eng kichik umumiy maxraji 6 ga teng bo'lganligi sababli $x=t^6$ almashtirishni bajaramiz. U holda $dx=6t^5dt$ bo'ladi.

$$\int\frac{\sqrt{xdx}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\int\frac{t^3 6t^5}{t^3-t^2}dt=6\int\frac{t^6}{t-1}dt=6\int(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+$$

$$+\frac{1}{t-1})dt=t^6+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4+2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+$$

$$+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$$

3-misol. Ushbu $J=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1}$ integral hisoblansin.

◀ Bu integralda $\sqrt[3]{2x-3}=t$, *ya'ni* $2x-3=t^3$ almashtirishni bajaramiz. U holda

$$2x-t^3=3,\quad x=\frac{1}{2}(t^3+3),\qquad dx=\frac{3}{2}t^2dt$$

bo'ladi. Demak,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1}=\int\frac{\frac{3}{2}t^2dt}{t+1}=\frac{3}{2}\int\frac{t^2dt}{t+1}=\frac{3}{2}\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int tdt-\frac{3}{2}\int dt+\int\frac{dt}{t+1}=\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{2}t+\ln|t+1|+C=\frac{3}{4}(2x-3)^{\frac{2}{3}}-$$

$$-\frac{3}{4}(2x-3)^{\frac{1}{3}}+\ln\left|\sqrt[3]{2x-3}+1\right|+C.$$

Endi boshqa ko'rinishidagi ba'zi irratsional funksiyalarni integrallashga doir tushunchalarini keltiramiz:

1. $I=\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_1},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_n}\right)dx$ ko'rinishdagi integral.

Bu integralda R – o'z argumentlarining ratsional funksiyasi, a, b, c, d lar haqiqiy sonlar va $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ – ratsional sonlar bo'lib, ularning eng kichik umumiy maxraji m va $ad-bc\neq 0$ bo'lsin. (Agar ad–bc=0 bo'lsa, u holda $\frac{ax+b}{cx+d}$=const va $R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_1},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_n}\right)dx$ ifoda x ga nisbatan ratsional funksiya bo'ladi).

Quyidagi $t=\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ yoki $t^m=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ almashtirishni kiritamiz. U holda

$$x=\frac{t^m d-b}{a-ct^m} \quad va \quad dx=\frac{m(ad-bc)t^{m-1}dt}{(a-ct^m)^2}$$

bo'ladi. Natijada, berilgan integral t ga nisbatan ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi, ya'ni

$$I=\int R(\frac{dt^m-b}{a-ct^m},t^{\alpha_1 m},...,t^{\alpha_n m})\frac{m(ad-b)t^{m-1}}{(a-ct^m)^2}dt.$$

Bundan avval R ning argumentlari irratsional ifodalardan tashkil bo'lsa, endi argumentlar ratsional va butun ratsional funksiyalarga keltirildi.

Qisqacha qilib yozsak, $I=\int R_1(t)dt$, bunda $R_1(t)$ – ratsional funksiya. Avval olingan natijalarga ko'ra bunday integral elementar funksiyalar orqali ifodalanadi.

4-misol. $I=\int\dfrac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya $R(x,\sqrt{x+1},\sqrt[3]{x+1})$ ko'rinishdagi funksiya bo'lib, bu yerda $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=\frac{1}{3}$. Bu kasrlarning eng kichik umumiy maxraji m=6. U holda $t^6=x+1$, $x=t^6-1$, $dx=6t^5dt$, $\sqrt{x+1}=t^3$, $\sqrt[3]{x+1}=t^2$ almashtirishlarni bajarib, quyidagi $I=\int\dfrac{6t^5dt}{t^3-t^2}=6\int\dfrac{t^3dt}{t-1}$ integralga kelamiz. Natijada

$$I=6\int(t^2+t+1+\frac{1}{t-1})dt=2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=$$
$$=2\sqrt{x+1}+3\sqrt[3]{x+1}+\left|6\sqrt[6]{x+1}-1\right|+C$$

bo'ladi.

2. $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_3=\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$

ko'rinishdagi integrallar.

I_1 integralni hisoblash uchun ildiz ostidagi ifodadan to'la kvadrat ajratiladi:

$$ax^2+bx+c=a((x+\frac{b}{2a})^2+(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}))=a((x+\frac{b}{2a})^2\pm k^2).$$

Keyin esa $x+\frac{b}{2a}=u$, $dx=du$ almashtirish bajariladi. Natijada integral jadvaldagi ushbu $\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm k^2}}$ ko'rinishdagi integralga keltiriladi.

I_2 integral suratida ildiz ostidagi ifodaning differensiali ajratib olinadi va bu integral ikkita integral yig'indisi ko'rinishida ifodalanadi.

$$I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+$$

$$+(B-\frac{AB}{2a})I_1=\frac{A}{2a}\int(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}d(ax^2+bx+c)+(B-\frac{Ab}{2a})I_1=$$

$$=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+(B-\frac{Ab}{2a})I_1,$$

bu yerda I_1 yuqorida hisoblangan integral.

I_3 integralni hisoblash $x=\frac{1}{u}$, $dx=-\frac{1}{u^2}du$ almashtirish yordamida I_1 ga keltiriladi.

5-misol. $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ ni hisoblang.

Yechish. Berilgan integral I_2 ko'rinishidagi integral.

$$\int\frac{(3x-1)}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)-4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\frac{3}{2}\int(x^2+2x+2)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+2x+2)-$$

$$-4\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$$

6-misol. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$ ni hisoblang.

Yechish. Ushbu integral I_3 ko'rinishdagi integral.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}=\left|\begin{array}{l}x=\frac{1}{u}\\ dx=-\frac{1}{u^2}du\end{array}\right|=-\int\frac{udu}{u^2\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{2}{u}-1}}=-\int\frac{du}{\sqrt{1+2u-u^2}}=$$

$$=\int\frac{d(u-1)}{\sqrt{2-(u-1)^2}}=-\arcsin\frac{\frac{1}{x}-1}{\sqrt{2}}+C=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}x}+C.$$

8-§. Tirgonometrik funksiyalarni integrallash

Ma'lumki, integrallar jadvalida

$$y=sinx,\qquad y=cosx,$$

funksiyalarning integrallari ham oson hisoblanadi:

Masalan,

$$\int ctgxdx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+C.$$

Shuningdek, $y=sin\ ax$, $y=cosa\ x$, $y=tgax$, $y=ctgax$ hamda

$$y=sin(x+a),\qquad y=cos(x+a),$$

$$y=tg(x+a),\qquad y=ctg(x+a)$$

funksiyalarning integrallari ham oson hisoblanadi.

Masalan,

$$\int\sin(2x+1)dx=\frac{1}{2}\int\sin(2x+1)d(2x+1)=-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C.$$

Ko'p hollarda trigonometrik funksiyalarni integrallashda

$$tg\frac{x}{2}=t$$

(ba'zan *sinx=t, cosx=t, tgx=t*) almashtirish natijasida qaralayotgan aniqmas integral ratsional funksiyalarni integrallashga keladi. Bunda

$$x=2arctgt, \qquad dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

bo'lishini e'tiborga olish kerak bo'ladi.

Masalan, $J=\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ integralni hisoblashda

$$tg\frac{x}{2}=t$$

almashtirish bajarib hisoblanadi:

Ravshanki,

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Unda

$$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{1+t^2+2t+1-t^2}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{1+t}=\ln|1+t|+c=\ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right|+C$$

bo‘ladi. ►

Ayrim trigonometrik funksiyalarni integrallashda trigonometriyada ma’lum bo‘lgan ushbu

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right],\quad \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha,$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

formulalardan foydalanish maqsadga muofiq bo‘ladi.

Trigonometrik funksiyalarni integrallashga doir bir nechta misollar keltiramiz.

1-misol. $\int\frac{dx}{1+\sin x}$ ni hisoblang.

Yechish. Bunda $tg\frac{x}{2}=t$ almashtirishni bajaramiz. U holda

$$\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2dt}{1+2t+t^2}=2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2}=\frac{-2}{t+1}+C=-\frac{2}{1+tg\frac{x}{2}}+C$$

bo‘ladi.

Shuni ta’kidlash kerakki, $t=tg\frac{x}{2}$ universal almashtirish yordamida $\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}$ ko‘rinishdagi integrallarni hisoblash osonlashadi.

2-misol. $\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $tg\frac{x}{2}=t$ almashtirishdan foydalanamiz. U holda

$$\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)}=\int\frac{2dt}{t^2+2t+17}=$$

$$=2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+16}=\frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{4}+C$$

Ko'pgina hollarda bunday universal almashtirish murakkab ratsional funksiyalarni integrallashga olib keladi. Shuning uchun, ba'zi hollarda boshqa almashtirishlardan foydalanish ancha qulay bo'ladi.

a) R(sinx, -cosx)=−R(sinx, cosx) bo'lsa, u holda sinx=t almashtirish bajariladi.

Agar R(-sinx, cosx)=-R(sinx, cosx) bo'lsa, u holda cosx=t almashtirish bajariladi. Nihoyat,

R(-sinx, -cosx)=R(sinx, cosx) bo'lsa, u holda tgx=t almashtirishdan foydalaniladi.

3-misol. $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu holda integral ostidagi funksiya uchun

R(−sinx, −cosx)=R(sinx, cosx)

shart bajariladi, tgx=t almashtirishdan foydalanamiz. Natijada

$$\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int(1+tg^2x)d(tgx)=\int(1+t^2)dt=t+\frac{t^3}{3}+C=tgx+\frac{tg^3x}{3}+C$$

bo'ladi.

b) $I=\int\sin^n x\cdot\cos^m xdx$ integralni qaraylik. Bunda m, n − butun sonlar. Quyidagi uchta holni ko'ramiz:

1) m va n lardan hech bo'lmaganda biri toq son bo'lsin. Masalan, m − toq son, ya'ni m=2k+1, k − butun son. U holda t=sinx, dt=cosxdx, $\cos^{2k}x=(1-\sin^2x)^k=(1-t^2)^k$ almashtirishlar natijasida

$$I=\int\sin^n x\cdot\cos^m xdx=\int\sin^n x\cos^{2k}x\cos xdx=\int t^n\cdot(1-t^2)^k dt$$

bo'ladi. Demak, t ga nisbatan ratsional funksiyaning integraliga ega bo'lamiz.

4-misol. $\int \sin^4 2x \cdot \cos^3 2x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int \sin^4 2x \cdot \cos^3 2x dx = \int \sin^4 2x(1-\sin^2 2x)\cos 2x dx =$

$$= \frac{1}{2}\int t^4(1-t^2)dt = \frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{14}t^7 + C = \frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{1}{14}\sin^7 2x + C$$

kelib chiqadi.

2) m va n musbat juft sonlar bo'lsin, ya'ni m=2s, n=2k, s, k – natural sonlar. Bu holda ushbu

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

formulalardan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Bu formulalar orqali sinx va cosx larning darajalarini pasaytirish mumkin bo'ladi.

5-misol. $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx$ ni hisoblang.

Yechish. $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin^2 x(\sin x\cos x)^2 dx =$

$$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)(\frac{1}{2}\sin 2x)^2 dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot$$

$$\cdot \cos 2x dx == \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

3) Agar m va n lar juft sonlar bo'lib, ularning kamida biri manfiy bo'lsa, yuqorida bayon qilingan usul maqsadga olib kelmaydi. Bunda tgx=t almashtirishni bajarish lozim bo'ladi.

c) $\int tg^n x dx$, $\int ctg^n x dx$, n – natural son, n>1 ko'rinishdagi integrallar mos ravishda tgx=t va ctgx=t almashtirishlar yordamida hisoblanadi.

Masalan, tgx=t, x=arctgt, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ almashtirishlarni bajarsak, $\int tg^n x dx=\int\frac{t^n}{1+t^2}dt$ hosil bo'ladi. Demak, berilgan integral ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

6-misol. $\int tg^5 x dx$ ni hisoblang.

Yechish. Yuqoridagi almashtirishlarni bajarsak,

$$\int tg^5 x dx=\int\frac{t^5}{1+t^2}dt=\int(t^3-t+\frac{t}{t^2+1})dt=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}=$$
$$=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+C=\frac{tg^4 x}{4}-\frac{tg^2 x}{2}+\frac{1}{2}\ln(tg^2 x+1)+C$$

hosil bo'ladi.

d) $\int\sin nx\cdot\cos mx dx$, $\int\cos nx\cdot\cos mx dx$, $\int\sin nx\cdot\sin mx dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash uchun ushbu

$$\sin nx\cdot\cos mx=\frac{1}{2}(\sin(n-m)x+\sin(n+m)x),$$
$$\cos nx\cdot\cos mx=\frac{1}{2}(\cos(n-m)x+\cos(n+m)x),$$
$$\sin nx\cdot\sin mx=\frac{1}{2}(\cos(n-m)x-\cos(n+m)x),$$

formulalardan foydalanib, berilgan integrallarni yig'indining integraliga keltirish mumkin.

7-misol. $\int\sin 5x\cdot\cos 3x dx$ ni hisoblang.

Yechish. $\int\sin 5x\cdot\cos 3x dx=\frac{1}{2}\int(\sin(5x-3x)+\sin(5x+3x))dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\sin 2x+\frac{1}{2}\int\sin 8x dx=-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C.$$

10-bob. ANIQ INTEGRAL

1-§. Aniq integral tushunchasi

Aniq integral matematikaning muhim tushunchalaridan hisoblanadi. Bu tushunchani bayon etishdan avval, unga olib keladigan masalalardan birini keltiramiz.

1°. O'tilgan yo'l haqidagi masala.

Moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab, V=V(t) tezlik bilan harakat qilsin. Uning t_0 momentdan T momentgacha ketgan vaqtda bosib o'tgan yo'lni topish talab etilsin.

Ma'lumki, tezlik V o'zgarmas bo'lganda, o'tilgan yo'l

$$S=V\cdot(T-t_0)$$

bo'ladi.

Tezlik o'zgaruvchan bo'lganda, ya'ni u vaqtning funksiyasi (V=V(t)) bo'lganda, ravshanki, bu formula bilan moddiy nuqtaning $[t_0, T]$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'lini aniq hisoblab bo'lmaydi. O'tilgan yo'lni aniq hisoblash maqsadida $[t_0, T]$ vaqt oralig'ini

$$t_0,t_1,t_2,\ldots,t_n\ ,(t_0<t_1<t_2<\cdots\ldots<t_n=T)$$

nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz. Natijada $[t_0,T]$ ushbu

$$[t_0,\ t_1],\ [t_1,\ t_2],\ldots,[t_{(n-1)},\ t_n]=[t_{(n-1)},T]$$

bo'laklarda ajraladi. Har bir

$$[t_k,t_{(k+1)}] \qquad\qquad (k=0,1,2,\ldots\ldots,n-1)$$

da ξ_k nuqta olib, so'ng shu $[t_k,\ t_{(k+1)}]$ da nuqtaning tezligi o'zgarmas $V(\xi_k)$ bo'lsin deb, o'tilgan yo'lni

$$V(\xi_k)\cdot(t_{(k+1)}-t_k)=V\,(t_k)\cdot\Delta t_k$$

$(\Delta t_k=t_{(k+1)}-t_k)$ bo'lishini topamiz. Bu ifoda albatta $[t_k,t_{(k+1)}]$ vaqt oralig'ida o'tilgan yo'lni taqriban ifodalaydi. Unda $[t_0,T]$ vaqt oralig'ida o'tilgan yo'l

$$S\approx V(\xi_0)\cdot\Delta t_0+V(\xi_1)\cdot\Delta t_1+\ldots+V(\xi_k)\cdot\Delta t_k+$$

$$+\ldots+V(\xi_{n-1})\cdot\Delta t_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}V(\xi_k)\cdot\Delta t_k$$

bo'ladi.

Endi $[t_k,t_{(k+1)}]$ (k=0,1,2,...,n=1) segmentlar uzunliklari

$$\Delta t_k=t_{(k+1)}-t_k$$

ning eng kattasini λ $(\lambda= maxk\{\Delta t_0,\Delta t_1,\ldots,\Delta t_{(n-1)}\})$ deylik.

Unda λ nolga intilganda $(\lambda\to 0)$

$$\sum_{k=0}^{n-1}V(\xi_k)\Delta t_k$$

yig'indining limiti moddiy nuqtaning $[t_0,T]$ vaqt oralig'ida bosib o'tilgan yo'lni ifodalaydi.

Demak, o'tilgan S yo'l $\lambda\to 0$ da

$$\sum_{k=0}^{n-1}V(\xi_k)\cdot\Delta t_k$$

yig'indining limiti bo'ladi.

Umuman, ko'p masalalarning yechimi yuqoridagi kabi yig'indining limitini topish bilan hal etiladi. Bu aniq integral tushunchasiga olib keladi.

2°. Funksiyaning integral yig'indisi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda berilgan bo'lsin. $[a,b]$ segmentni

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,x_n$$

$$(a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b)$$

nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz:

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{(n-1)},x_n]$$

$$(x_0=a,x_{n=b})$$

Har bir $[x_k,x_{(k+1)}]$ (k=0,1,2,...,n=1) bo'lakchada ixtiyoriy ξ_k $(x_k\le\xi_{(k)}\le x_{(k+1)})$ nuqtani olamiz. So'ng funksiyaning shu nuqtada qiymati $f(\xi_k)$ ni $\Delta x_k = x_{(k+1)} - x_k$ ga ko'paytirib quyidagi yig'indini tuzamiz:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k =$$

$$= f(\xi_0)\cdot\Delta x_0 + f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_n)\cdot\Delta x_k$$

$$+ \ldots + f(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}$$

Bu yig'indi *f(x)* funksiyaning [a,b] segment bo'yicha integral yig'indisi deyiladi va u σ orqali belgilanadi:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiyaning [a,b] segmentdagi integral yig'indisi (yuqoridagi bo'linishga nisbatan)

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2\cdot\Delta x_k$$

bo'ladi.

3°. Aniq integral ta'rifi.

f(x) funksiya [a,b] segmentda berilgan bo'lsin.

Bu funksiyaning integral yig'indisi

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

ni qaraymiz.

Ta'rif. Agar $\lambda\to 0$ da (yoki $n\to\infty$ da) *f(x)* funksiyaning integral yig'indisi

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

chekli limitga ega bo'lsa, bu limit *f(x)* funksiyaning aniq integrali deyiladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Bu holda *f(x)* funksiya [a,b] da integrallanuvchi deyiladi, a – integralning quyi chegarasi, b integralning yuqori chegarasi, *f(x)* integral ostidagi funksiya, *f(x)dx* integral ostidagi ifoda deyiladi.

Endi aniq integralning mavjudligini ifodalaydigan teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Agar *y=f(x)* funksiya *[a,b]* segmentida uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integral mavjud bo'ladi.

Eslatma. Funksiyaning uzluksiz bo'lishi sharti uning integrallanuvchi bo'lishining yetarli sharti bo'ladi. Agar funksiya [a,b] segmentda chegaralangan bo'lib, u shu segmentning chekli sondagi nuqtalarida uzilishga ega bo'lib, qolgan barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, u integrallanuvchi, ya'ni uning aniq integrali mavjud bo'ladi.

Eslatma. Agar *f(x)* funksiya [a,b] segmentda integrallanuvchi bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b f(x)dx = 0$$

deb qaraladi.

2-§. Aniq integralning xossalari

Aytaylik, *f(x)* funksiya [a,b] segmentda berilgan bo'lib, uning aniq integrali $\int_a^b f(x)dx$ mavjud bo'lsin.

Funksiyaning aniq integrali qator xossalarga ega. Ularni keltiramiz.

1°. Ushbu $\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx \quad (c-const)$ munosabat o'rinli bo'ladi.

2°. Agar *f(x)* va *g(x)* funksiyalar [a,b] da integrallanuvchi bo'lsa u holda f(x)±g(x) funksiya ham [a,b] da integrallanuvchi va

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi.

3°. Agar *f(x)* funksiya [a,b] da integrallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy a<c<b bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

4°. Agar *f(x)* funksiya [a,b] da integrallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy x∈[a,b] da f(x)≥0 bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ bo'ladi.

5°. Agar *f(x)* va *g(x)* funksiyalar [a,b] da integrallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy x∈[a,b] da *f(x)≤ g(x)* bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ bo'ladi.

3-§. Aniq integrallarni hisoblash usullari

1°. Nyuton-Leybnits formulasi va uning yordamida aniq integrallarni hisoblash. Aytaylik, y=f(x) funksiya [a,b] segmentda uzluksiz bo'lib, F(x) esa uning boshlang'ich funksiyasi (F'(x)=f(x)) bo'lsin. U holda ushbu

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

formula o'rinli bo'ladi. Shuni isbotlaymiz.

◄ [a,b] segmentni $a=x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n=b}$ $(x_0<x_1<\ldots<x_n)$ nuqtalar yordamida n ta $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{(n-1)},x_n]$ bo'laklarga ajratamiz.

So'ng quyidagi tenglikni qaraymiz:

$$F(b)-F(a)=F(x_n)-F(x_0)=[F(x_n)-F(x_{(n-1)})]+[F(x_{(n-1)})-F(x_{(n-2)})]+$$
$$\ldots+[F(x_2)-F(x_1)]+[F(x_1)-F(x_0)].$$

Mazkur kitobda Lagranj formulasi deb ataluvchi ushbu

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

formulani keltirgan edik. Shu formuladan foydalanib yuqoridagi tenglikning o'ng tomonidagi ayirmalarni quyidagicha yozamiz:

$$F(b)-F(a)=F'(\xi_k)\cdot(x_n-x_{n-1})+$$
$$+F'(\xi_{n-1})\cdot(x_{n-1}-x_{n-2})+$$
$$+\ldots+F'(\xi_2)\cdot(x_2-x_1)+F'(\xi_1)\cdot(x_1-x_0)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}F'(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

Demak, $$F(b)-F(a)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lgani uchun u [a,b] da integrallanuvchi. Bunobarin $\lambda\to 0$ da

$$\lim_{\lambda\to 0}=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi. Keyingi tenglamadan

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Odatda (1) Nyuton-Leybnits formulasi deyiladi.

Aniq integrallarni sodda, ayni paytda qulay bo'lgan hisoblash yo'llaridan biri ularni Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblashdir.

Agar quyidagi $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$ belgilash kiritilsa, unda Nyuton-Leybnits formulasi ushbu

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

ko'rinishga keladi.

Nyuton-Leybnits formulasi yordamida

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integral quyidagicha hisoblanadi:

Avvalo $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali $\int f(x)dx$ topiladi. Aytaylik, bu integral topilib, u $\Phi(x)$ ga teng bo'lsin.

$$\int f(x)dx = \Phi(x)+C$$

So'ng bu funksiyaning a va b nuqtalardagi qiymatlari hisoblanib $\Phi(b)-\Phi(a)$ ayirma topiladi. Bu qiymat Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra $\int f(x)dx$ integralning qiymati bo'ladi.

Masalan, $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2$ bo'ladi.

2°. O'zgaruvchilarni almashtirish usuli.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da berilgan va uzliksiz bo'lib, uning aniq integrali

$$\int_a^b f(x)dx$$

ni hisoblash talab etilsin. Bu integralda

$$x=\varphi(t)$$

almashtirish bajaramiz. Bunda $\varphi(t)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ segmentda uzluksiz;

2) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

3) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ segmentda uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega. U holda

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad (2)$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. Unda Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

bo'ladi. Ma'lumki,

$$(F(\varphi(t)))'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Demak, $F(\varphi(t))$ funksiya $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Unda Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dx=F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=$$

$$=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi. Bu (2) munosabatni isbotlaydi. ▶

1-misol. Ushbu

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$$

integral hisoblansin.

◄ Bu integralda x o'zgaruvchini quyidagicha almashtiramiz:

$$x=2\sin t.$$

Bunda $dx=(2\sin t)'\cdot dt=2\cos t\,dt$ bo'lish, x=0 bo'lganda t=0, x=2 bo'lganda, $t=\frac{\pi}{2}$ bo'ladi. Unda (2) formuladan foydalanib topamiz:

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\cdot\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt.$$

Keyingi integralni hisoblaymiz:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\cdot\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t dt=$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 4t)dt=$$

$$=2\left[t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=2\left(\frac{\pi}{0}-0\right)=\pi.$$

Demak,

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx=\pi.$$

2-misol. $\int_0^2\sqrt{1-x^2}dx$ hisoblang.

Yechish. Bu integralda x=sint almashtirishni bajaramiz. U holda x=sint funksiya yuqoridagi teoremadagi barcha shartlarni

$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ kesmada qanoatlantiradi va dx=costdt, a=0 da α=0, b=1 da β=π/2. Demak, (3) formulaga ko'ra

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2dx}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)=\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}.$$

3-misol. $\int_0^9\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ ni hisoblang.

Yechish. $x=t^2$ deb o'zgaruvchini almashtiramiz, u holda dx=2tdt va a=0 da $t_1=\sqrt{a}$ =0, b=9 da $t_2=\sqrt{b}=3$ bo'ladi.

(3) formulaga ko'ra

$$\int_0^9\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int_0^3\frac{2tdt}{1+t}=2\int_0^3\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2(t-\ln|1+t|)\Big|_0^3=6-2\ln 4.$$

4-misol. $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$ ni hisoblang.

Yechish. *sinx=t* deb almashtirish bajaramiz. U holda *cosxdx=dt*, $t_1=\sin(\pi/6)=1/2$, $t_2=\sin(\pi/3)=\sqrt{3}/2$ bo'ladi. (3) formulaga asosan

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos x}{\sin^5 x}dx=\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}t^{-5}dt=-\frac{1}{4t^4}\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{3}/2}=\frac{1}{4}\left(16-\frac{16}{9}\right)=\frac{32}{9}.$$

3°. Bo'laklab integrallash usuli.

Aytaylik, u=u(x) va v=v(x) funksiya [a,b] segmentda aniqlangan, uzluksiz u'(x) va v'(x) hosilalarga ega bo'lsin.

Ravshanki,

$$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

Demak, u(x)+v(x) funksiya

$$u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi.

Nyuton-Leybnits fopmulasiga ko‘ra

$$\int_a^b [u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)]dx=[u(x)\cdot (x)]\Big|_a^b$$

bo‘ladi. Agar

$$\int_a^b [u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)]dx=\int_a^b v(x)\cdot u'(x)dx+$$

$$+\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx=\int_a^b v(x)\cdot du(x)+\int_a^b u(x)\cdot dv(x)$$

bo‘lishini e’tiborga olsak, u holda

$$\int_a^b v(x)\cdot du(x)+\int_a^b u(x)\cdot dv(x)=[u(x)\cdot v(x)]_a^b$$

bo‘lib, bundan esa

$$\int_a^b u(x)\cdot du(x)=[u(x)\cdot v(x)]_a^b-\int_a^b v(x)\cdot du(x) \qquad (3)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu tenglik aniq integralning bo‘laklab integrallash formulasi deyiladi.

U u(x)dv(x) ni integrallashni v(x)du(x) ni integrallashga olib keladi.

Bo‘laklab integrallash formulasidan foydalanish uchun integral ostidagi ifodani u(x) va dv(x) lar ko‘paytmasi ko‘rinishida yozib olinadi, bunda, albatta v(x)du ifodalarning integralini oson hisoblana olinishi lozimligini e’tiborda tutish kerak.

1-misol. Ushbu

$$\int_e^{e^2} x\ln x dx$$

Integralni hisoblaymiz.

◄ Bu integralda *u=ln x, dv=x dx* deyiladi. Unda

$$du=\frac{1}{x}dx, \qquad v=\int xdx=\frac{x^2}{2}$$

bo'ladi. Bo'laklab integrallash formulasi (3) dan foydalanib topamiz:

$$\int_e^{e^2} x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_e^{e^2}-\frac{1}{2}\int_e^{e^2}xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^4\cdot\ln e^2-e^2\ln e-\frac{x^2}{2}\Big|_e^{e^2}\right]=\frac{1}{2}\left(2e^4-e^2-\frac{e^4}{2}+\frac{e^2}{2}\right)=\frac{1}{4}(3e^2-1)e^2.$$

2-misol. $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bunda u=x, dv=cosxdx deb olsak, du=dx, v=sinx hosil bo'ladi.

Demak, (2) ga ko'ra

$$\int_0^{\pi/2} x\cos xdx=(x\sin x)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin xdx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cos x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-\cos 0=\frac{\pi-2}{2}.$$

4-§. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash

Biz yuqorida integral ostidagi funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ma'lum bo'lsa integralni Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblash mumkinligini ko'rdik. Ammo boshlang'ich funksiyani topish masalasi doim osongina hal bo‘lavermaydi. Agar integral ostidagi funksiya murakkab bo‘lsa, tegishli aniq integralni hisoblashni taqribiy usullarini qo‘llash lozim bo‘ladi.

1°. To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi.

f(x) funksiya [a,b] segmentda berilgan va uzluksiz bo‘lsin. Bu funksiyaning aniq integrali

$$\int_a^b f(x)dx$$

ni taqribiy ifodalovchi formulani keltiramiz, [a,b] segmentni

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{(n-1)}<x_n=b$$

nuqtalar yordamida n ta teng bo‘lakka bo‘lamiz.

Bu holda

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n},$$

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad (k0,1,...,n)$$

bo‘ladi.

Berilgan f(x) funksiyaning x_k nuqtadagi qiymati $f(x_k)$ ni hisoblab, f(x) funksiyaning $[x_k, x_{(k+1)}]$ segment bo‘yicha aniq integralini quyidagicha

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx f(x_k)\cdot\Delta x_k = f(x_k)\cdot\frac{b-a}{n}$$

taqribiy ifodalaymiz. Bunday taqribiy formulani har bir $[x_k, x_{(k+1)}]$ (k=0,1,2,......,n-1) segmentga nisbatan yozib, so‘ng ularni hadlab qo‘shib topamiz:

$$\int_a^{x_1} f(x)dx \approx f(x_0)\cdot\frac{b-a}{n},$$

$$\int_{x_1}^{x_1} f(x)dx \approx f(x_1)\cdot\frac{b-a}{n},$$

$$\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx \approx f(x_2)\cdot\frac{b-a}{n}$$

. . . .

$$\int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx \approx f(x_{n-1})\cdot\frac{b-a}{n},$$

$$\int_{a}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx +$$

$$+\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \ldots + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{n}\left[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\right]$$

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\right],$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \qquad (4)$$

Bu aniq integralni taqribiy hisoblovchi formula to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi deyiladi.

2°. Trapetsiyalar formulasi.

f(x) funksiya [a,b] segmentda berilgan va uzluksiz bo‘lsin [a,b] segmentni yuqoridagidek n ta teng bo‘lakka bo‘lib, f(x) funksiyaning $[x_k, x_{(k+1)}]$ segment bo‘yicha olingan aniq integralini quyidagicha

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot \Delta x_k \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$$

taqribiy ifodalaymiz. Bunday taqribiy formulani har bir $[x_k, x_{(k+1)}]$ (k=0,1,2,......,n-1) segmentga nisbatan yozib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$\int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{2n}\left[\left(f(x_0)+f(x_1)\right)+\left(f(x_1)+f(x_2)\right)+\left(f(x_2)+f(x_3)\right)+\right.$$

$$\left.+\ldots+\left(f(x_{n-1})+f(x_n)\right)\right]=$$

$$=\frac{b-a}{2n}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1+f(x_2))+\ldots+f(x_{n-1})\right] \qquad (5)$$

Bu aniq integralni taqribiy hisoblovchi formulaga trapetsiyalar formulasi deyiladi.

3°. Parabolalar (Simpson) formulasi.

f(x) funksiya [a,b] segmentda berilgan va uzluksiz bo'lsin. [a,b] segmentni

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{(2n-2)}<x_{(2n-1)}<x_{2n}=b$$

nuqtalar yordamida 2n ta teng bo'lakka bo'lamiz.

f(x) funksiyaning $[x_{2k}, x_{(2k+2)}]$ segment bo'yicha aniq integralini quyidagicha

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\cdot\left[f(x_{2k})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k+2})\right]$$

taqribiy ifodalaymiz. Bu taqribiy formulani har bir

$$[x_{2k}, x_{2k+2}] \qquad (k=0,1,2,\ldots\ldots,n-1)$$

segmentga nisbatan yozib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx +$$

$$+ \int_{x_4}^{x_6} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{6n}\Big[\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big) +$$

$$+ \big(f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)\big) + \cdots (f(x_{2n-2})) +$$

$$+ 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\Big] =$$

$$= \frac{b-a}{6n}[(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + \cdots +$$

$$+ f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6)) + \cdots + (f(x_{2n-2}))]$$

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\Big[\big(f(x_0) + f(x_{2n})\big) +$$

$$+4\big(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})\big) +$$

$$+2\big(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2})\big)\Big] \qquad (6)$$

Bu (6) formula parabolalar (Simpson) formulasi deyiladi.

Misol. Ushbu

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

aniq integral to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar va Simpson formulalari yordamida taqribiy hisoblansin.

◄ [0,1] segmentni 5 ta teng bo'lakka bo'lamiz:

$$0=x_0,\ x_1=0,2,\ x_2=0,4,\ x_3=0,6,\ x_4=0,8,\ x_5=1$$

Bu nuqtalarda $f(x)=e^{-x2}$ funksiyaning qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

$$f(x_0)=1,00000,\quad f(x_1)=0,96079,\quad f(x_2)=0,85214,$$

$$f(x_3)=0,69768,\quad f(x_4)=0,52729,\quad f(x_5)=0,36788.$$

Har bir bo'lakning o'rtasini ifodalovchi nuqtalar quyidagicha

$$x_{\frac{1}{2}}=0,1,\ \ x_{\frac{3}{2}}=0,3,\ \ x_{\frac{5}{2}}=0,5,\ \ x_{\frac{7}{2}}=0,7,\ \ x_{\frac{9}{2}}=0,9.$$

bo'lib, bu nuqtalardagi qiymatlari esa quyidagicha bo'ladi:

$$f\left(x_{\frac{9}{2}}\right)=0,99005,\quad f\left(x_{\frac{3}{2}}\right)=0,91393,\quad f\left(x_{\frac{5}{2}}\right)=0,77680,$$

$$f\left(x_{\frac{7}{2}}\right)=0,61263,\quad f\left(x_{\frac{9}{2}}\right)=0,44486.$$

a) to'g'ri to'rtburchaklar formulasi (4) bo'yicha.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx$$

$$\approx\frac{1}{5}(0,99005+0,91393+0,77680+0,61263+0,44486)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 3,74027\approx 0,74805$$

b) trapetsiyalar formulasi (5) bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{5}\left(\frac{1,00000+0,36788}{2}+0,96079+0,85214+0,69768\right.$$

$$\left.+0,52729\right)=\frac{1}{5}\left(0,68394+3,03790\right)=\frac{1}{5}\cdot 3,72184 \approx 0,74437$$

v) Simpson formulasi (6) bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{30}\big[(1,00000+0,36788)+$$

$$+4(0,99005+0,91393+0,77680+0,61263+0,44486)+$$

$$+2(0,96079+0,85214+$$

$$+0,69768+0,52729)\big]=$$

$$=\frac{1}{30}(1,36788+4\cdot 3,74027+2\cdot 3,03790)=$$

$$=\frac{1}{30}(1,36788+6,07580+14,96108)\approx$$

$$\approx 0,74682$$

Taqribiy formulalar yordamida hisoblab topilgan

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

integralning qiymatini, uning

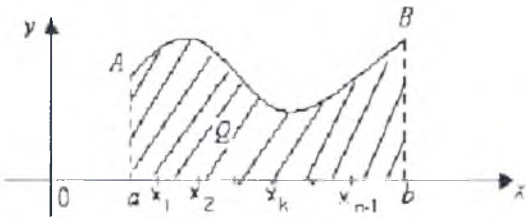
$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0,74685...$$

qiymati bilan taqqoslab, Simpson formulasi yordamida topilgan integralning taqribiy qiymati aniqroq ekanini ko'ramiz.

11-bob. ANIQ INTEGRALNING BA'ZI BIR TADBIQLARI

1-§. Tekis shaklning yuzini hisoblash

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan, uzliksiz hamda ixtiyoriy $x \in [a,b]$ da $f(x)>0$ bo'lsin. Yuqoridan $f(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlardan $x=a$, $x=b$ vertikal chiziqlar hamda pastdan OX – abssissa o'qi bilan chegaralangan shaklni qaraylik (1-chizma)



1-chizma

Odatda, bunday tekis shakl egri chiziqli trapetsiya deyiladi. Uni $aABb$ deylik.

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda o'zgarmas, ya'ni

$$f(x)=C=const$$

bo'lsa, u holda $aABb$ shakl to'g'ri to'rtburchak bo'lib, uning yuzi $S=C\cdot(b-a)$ bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya ixtiyoriy uzluksiz funksiya bo'lsa, unda $aABb$ shaklning yuzi quyidagicha topiladi:
$[a,b]$ segmentni

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\dots\ \dots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

$$(x_0<x_1<x_2<\dots<x_n)$$

nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz va har bir

$$[x_k,x_{k+1}]\ (k=0,1,2,\dots,\ n-1)$$

segmentda ixtiyoriy

$$\xi_k \qquad (\xi_k \in [x_k,x_{k+1}])$$

nuqta olamiz.

So'ng har bir $[x_k, x_{k+1}]$ segmentda $f(x_k)$ funksiyani o'zgarmas va uni $f(\xi_k)$ ga teng qilib olsak, u holda $x_k A_k B_k x_{k+1}$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzini

$$f(\xi_k)\cdot(x_{(k+1)}-x_k)$$

deb olish mumkin bo'lib, *aABb* shaklning yuzini esa

$$S\approx f(\xi_0)\cdot(x_1-x_0)+f(\xi_1)\cdot(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_k)\cdot(x_{(k+1)}-x_k)+\ldots+$$
$$+f(\xi_{(n-1)})\cdot(x_n-x_{(n-1)})$$

deyish mumkin. Demak,

$$S\approx\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \qquad (1)$$

bunda $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$.

aABb egri chiziqli trapetsiyaning yuzini ifodalovchi formula taqribiy formuladir.

Endi $[a,b]$ segmentning bo'laklari sonini shunday orttira boraylikki, bunda har bir $[x_k, x_{k+1}]$ segmentning uzunligi Δx_k nolga intila borsin. U holda

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

yig'indining miqdori ham o'zgara boradi.

Ma'lumki, bu holda

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx.$$

bo'ladi.

Demak, egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

aniq integral orqali topiladi.

Eslatma. Agar egri chiziqli trapetsiya OX o'qidan pastda joylashgan bo'lsa, ($f(x)<0$, $x\in[a,b]$) unda bu shaklning yuzi ushbu

$$S=-\int_a^b f(x)dx$$

formula yordamida topiladi.

Masalan, yuqoridan $f(x)=x^2$ parabola, yon tomonlardan x=1, x=3, vertikal to'g'ri chiziqlar va pastdan OX o'qi bilan chegaralangan shaklning yuzi yuqorida keltirilgan formulaga ko'ra

$$S=\int_1^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1}{3}=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}$$

bo'ladi.

Agar tekislikdagi shakil quyidagi

$$y=f_1(x),\ y=f_2(x),\ x=a,\ x=b$$

($f_1(x)$, $f_2(x)$ funksiyalar [a,b] da uzluksiz va $f_1(x)>0$, $f_2(x)>0$, $f_1(x)>f_2(x)$) chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi

$$Q=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx$$

formula bilan topiladi.

Demak, manfiy bo'lmagan uzluksiz funksiyaning aniq integral egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng. Bu aniq integralning geometrik ma'nosini ifodalaydi.

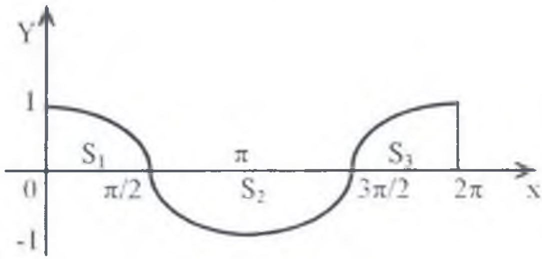
1-misol. $y=\cos x$, $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzi hisoblansin, bunda $x\in[0;2\pi]$ (2-chizma).

Yechish. $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ va $x\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ da $\cos x\geq 0$ hamda $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ da $\cos x\leq 0$ bo'lgani uchun

$$S=\int_0^{2\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\pi/2}\cos xdx+\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(-\cos x)dx\right|+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos xdx=$$

$$= \sin x\Big|_0^{\pi/2} + \Big|\sin x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}\Big| + \sin x\Big|_{3\pi/2}^{2\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 +$$

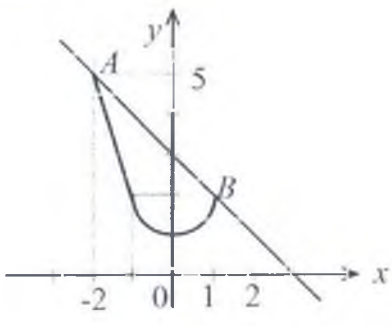
$$+\left|\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right| + \sin 2\pi - \sin\frac{3\pi}{2} = 1 + |-1-1| - (-1) = 4$$



2-chizma

Demak, *S=4*.

2-misol. $y=x^2+1$ va $y=3-x$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblang.



3-chizma

Yechish. Figurani yasash uchun avval ushbu $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 3 - x \end{cases}$ sistemani yechib, chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz (3-chizma).

Bu chiziqlar $A(-2;5)$ va $B(1;2)$ nuqtalarda kesishadi.
U holda

$$S\int_{-2}^{1}(3-x)dx-\int_{-2}^{1}(x^2+1)dx=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx=$$

$$=\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1}=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-\frac{4}{2}+\frac{8}{3}\right)=\frac{9}{2}.$$

2-§. Yoy uzunligi

f(x) funksiya [a,b] segmentda aniqlangan va uzliksiz bo‘lsin. Uning grafigi tekislikning

$$(a, f(a)) \text{ va } (b, f(b))$$

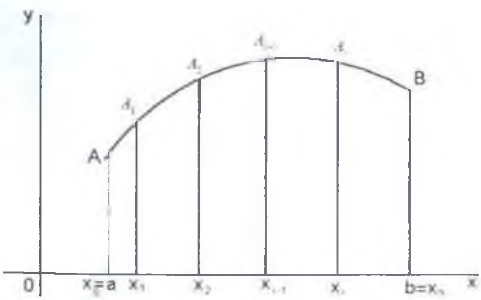
nuqtalari orasidagi egri chiziq yoyni ifodalasin (1-chizma).

Shu yoy uzunligini topish talab etilsin.

Agar *f(x)* funksiya [a,b] oraliqda o‘zgarmas, $f(x)=c$, $c=cons$ bo‘lsa, bu funksiyaning grafigi tekislikda (a,b), (b,c) nuqtalarni birlashtiruvchi to‘g‘ri chiziq kesmasi bo‘lib, uning uzunligi

$$l_l=b-a$$

bo‘ladi.



1-chizma

Agar *f(x)* funksiya [a,b] oraliqda chiziqli funksiya, ya’ni $f(x)=kx+b$ (k,b — o‘zgarmas sonlar) bo‘lsa, bu funksiyaning grafigi (a,$f(a)$), (b,$f(b)$) nuqtalarni birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasi bo'lib, uning uzunligi

$$l_2=\sqrt{(b-a)^2+(f(b)-f(a))^2}=(b-a)\cdot\sqrt{1+k^2}$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya [a,b] oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning grafigi 2-chizmada tasvirlangan egri chiziq yoyi bo'lsin.

Uni $\overset{\frown}{AB}$ deb belgilaymiz. [a,b] segmentda ixtiyoriy

$$a=x_0,\ x_1,x_2,\dots,x_n=b\ (x_0<x_1<x_2,<\dots<x_4)$$

nuqtalar olib, uni bu nuqtalar yordamida n ta bo'lakchalarga ajratamiz.

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ \dots,\ [x_k,x_{k+1}],\ \dots,\ [x_{n-1},x_n]$$

[a,b] segmentni bo'luvchi nuqtalar

$$x_0,x_1,x_2,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_{n-1},x_n$$

orqali OY o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning $\overset{\frown}{AB}$ yoy bilan kesishgan nuqtalari

$$A_k(x_k,f(x_k))\ (k=0,1,2,\dots n)$$

$A_0=A,\ A_n=B\ A_0=A,\ A_n=B$ bo'ladi. $\overset{\frown}{AB}$ yoyidagi bu nuqtalarni bir-biri bilan to'g'ri chiziq kesmalari yordamida birlashtirib, L_n siniq chiziqni hosil qilamiz. L_n siniq chiziq, $\overset{\frown}{AB}$ yoyga chizilgan siniq chiziq deyiladi. Bu siniq chiziq perimetri

$$l_n=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2}$$

bo'ladi.

Ravshanki, l_n perimetr [a,b] [a,b] oraliqning bo'linishiga, ya'ni $\Delta x_k=x_{k-1}\ x_k$ ga bog'liq bo'ladi.

Avvaldagidek, $\Delta x_k=x_{k+1}\ x_k$ larning eng kattasini λ bilan belgilaymiz.

Ta'rif. Agar $l\to 0$ da

$$l_n=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]}$$

perimetr chekli limitga ega bo'lsa, $\overset{\frown}{AB}$ yoy uzunlikka ega deyiladi va $\lim\limits_{\lambda\to 0} l_n=l$ limit $\overset{\frown}{AB}$ yoyining uzunligi deyiladi.

f(x) funksiya [a,b] segmentda aniqlangan, uzluksiz va uzluksiz *f'(x)* hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiyaning [a,b] oraliqdagi grafigi $\overset{\frown}{AB}$ yoyni tasvirlasin.

Ma'lumki, $\overset{\frown}{AB}$ yoyga chizilgan siniq chiziqning perimetri

$$l_n=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]^2}$$

bo'ladi.

Har bir $[x_k,x_{k+1}]$ da *f(x)* funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llaymiz. U holda shunday

$$\xi_k\ (\xi_k\in[x_k,x_{k+1}])$$

nuqta topiladiki,

$$f(x_{k+1})-f(x_k)+f'(0_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)$$

bo'ladi.

Demak,

$$l_n=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+f'^2(\xi_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)^2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_n$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi yig'indi

$$\sqrt{1+f'^2(x)}$$

funksiyaning integral yig'indisini eslatadi.

Uning integral yig'indidan farqi shuki, integral yig'indidagi ξ_k nuqta ixtiyoriy bo'lgan holda, yuqoridagi yig'indida esa ξ_k nuqta $[x_k,x_{k+1}]$ oraliqdagi tayin nuqtadir. Ammo

$$\sqrt{1+f'^2(x)}$$

funksiya integrallanuvchi bo'lganligi (chunki shartga ko'ra, $f'(x)$ uzluksiz) sababli buning ahamiyati yo'q. Demak,

$$\lim_{\lambda\to 0} l_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

Bu esa $\overset{\frown}{AB}$ yoyga chizilgan perimetri $\lambda\to 0$ da chekli limitga ega bo'lishini va u limit

$$\int_a^b \sqrt{1+f^2(x)}dx$$

integralga teng ekanini bildiradi.

Demak $\overset{\frown}{AB}$ yoy uzunlikka ega va bu yoy uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

formula yordamida (ya'ni aniq integral yordamida) hisoblanadi.

Misol. Ushbu

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \qquad (0\le x\le 4)$$

funksiya tasvirlagan egri chiziqning uzunligi topilsin.

◄ Avvalo berilgan funksiyaning hosilasini hisoblaymiz:

$$f'(x) = (x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

Undan

$$1+f'^2(x) = 1+\frac{9}{4}x, \quad \sqrt{1+f'^2(x)} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x}$$

bo'lib,

$$l=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$$

bo'ladi. Bu integralda

$$1+\frac{9}{4}x=t,\quad dx=\frac{4}{9}dt,\quad 1\le t\le 10$$

almashtirish bajaramiz. Natijada

$$\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\int_1^{10}t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{8}{27}\cdot t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{10}=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\sqrt{1000}-1\right)=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

bo'ladi. Demak, yoy uzunli $l=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$ ga teng. ►

3-§. Aylanma sirtning yuzi va uni hisoblash

1°. Aylanma sirt va uning yuzi tushunchasi. Ma'lumki, to'g'ri chiziq kesmasini biror o'q atrofida aylantirishdan silindrik, konus (kesik konus) sirtlar hosil bo'ladi. Bu sirtlar yuzaga ega va ular ma'lum formulalar yordamida topiladi.

Aytaylik, $f(x)\in C[a,b]$ bo'lib, $\forall x\in[a,b]$ da $f(x)\ge 0$ bo'lsin. Bu funksiya grafigi $\overline{AB}$ yoyini tasvirlasin (1-chizma).

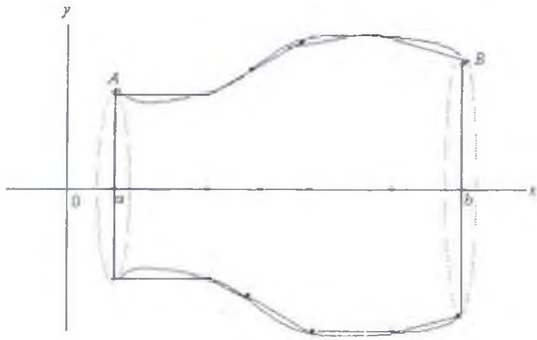
$\overline{AB}$ yoyni Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt aylanma sirt deyiladi. Uni T deylik. [a,b] segmentni ixtiyoriy

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\qquad (a=x_0<x_1<\dots<x_n=b)$$

bo'laklashni olaylik. Bu bo'laklashning har bir

$$x_k(k=0,1,2,\dots,n)$$

bo'luvchi nuqtalari orqali Oy o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ularning $\overline{AB}$ yoyi bilan kesishish nuqtalarini $A_k=A_k(x_k,f(x_k))$ bilan belgilaylik. $(A_0=A,\ A_n=B;\ k=0,1,2,\dots,n)$. Bu nuqtalarni o'zaro to'g'ri chiziq kesmalari bilan birlashtirib, $\breve{AB}$ yoyiga L siniq chiziq chizamiz.



1-chizma

$\breve{AB}$ yoyini Ox o'qi atrofida aylantirish bilan birga L siniq chiziqni ham shu o'q atrofida aylantiramiz. Natijada kesik konus sirtlarining birlashmasidan tashkil topgan K sirt hosil bo'ladi. Bu K sirt yuzaga ega va uning yuzi

$$\mu(K) = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

ga teng. (Bunda kesik konusning yon sirtining yuzini topish formulasidan foydalanildi.)

Ravshanki, K sirt, binobarin uning yuzi $\mu(K)$ $[a,b]$ segmentning bo'laklashlariga bog'liq bo'ladi.

1-ta'rif. Agar $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son topilsaki, $[a,b]$ segmentning diametri $\lambda_p<\delta$ bo'lgan ixtiyoriy P bo'laklashi uchun $|\mu(K)-S|<\varepsilon$ $(S\in R)$ tengsizlik bajarilsa, S son $\mu(K)$ ning $\lambda p \to 0$ dagi limiti deyiladi: $\lim\limits_{\lambda_p \to 0} \mu(K) = S$.

2-ta'rif. Agar $\lambda_p \to 0$ da $\mu(K)$ yig'indi chekli S limitga ega bo'lsa, T aylanma sirt yuzaga ega deyiladi.

Bunda S son T aylanma sirtning yuzi deyiladi: $S=\mu(T)$.

Demak,

$$\mu(T)=\lim_{\lambda_p\to 0} 2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]^2}.$$

2°. *Aylanma sirt yuzini hisoblash.* Faraz qilaylik, $f(x)\in C[a,b]$ bo'lib, u $[a,b]$ segmentda uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin.

Bu funksiya grafigi $\breve{AB}$ yoyini Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan T aylanma sirtning yuzini topamiz.

◄ $[a,b]$ segmentning ixtiyoriy P bo'laklashini olib, yuqoridagidek

$$\mu(K)=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]^2}$$

yig'indini tuzamiz.

Lagranj teoremasiga ko'ra

$$f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)=f'(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

bo'ladi, bunda $\xi_k\in[x,x_{k+1}]$. Natijada

$$\mu(K)=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k$$

bo'ladi. Keyingi tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\mu(K)=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k+\pi\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left[(f(x_k)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f'^2(\xi_k))+(f(x_{k+1})-f(\xi_k))\right]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k\right\}. \quad (1)$$

$f'(x)\in C'[a,b]$ bo'lganligi sababli $f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\in R[a,b]$ bo'ladi. Demak, $\lambda_p\to 0$ da

$$2\pi\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k\to 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx \quad (2)$$

Ravshanki, $\sqrt{1+f'^2(x)} \in C[a,b]$.

Demak, bu funksiya [a,b] da o'zining maksimum qiymatiga ega bo'ladi. Uni M deylik:

$$M = \max_{a \le x \le b} \sqrt{1+f'^2(x)}.$$

$f(x)$ funksiya [a,b] segmentda tekis uzluksiz. Unda $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham, $\dfrac{\varepsilon}{2M(b-a)}$ ga ko'ra shunday $\delta>0$ son topiladiki, $\lambda_p<\delta$ bo'lganda

$$|f(x_k)-f(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}, \quad |f(x_{k+1})-f(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$$

bo'ladi. Shularni e'tiborga olib topamiz:

$$\left|\left\{\sum_{k=0}^{n-1}[(f(x_k)-f(\xi_k))+(f(x_{k+1})-f(\xi_k))]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k\right\}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}\left[|f(x_k)-f(\xi_k)|+|f(x_{k+1})-f(\xi_k)|\right]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k <$$

$$< M\left[\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}+\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}\right]\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k < \varepsilon.$$

Bundan $\lambda_p \to 0$ da

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[(f(x_k)-f(\xi_k))+(f(x_{k+1})-f(\xi_k))\right]\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k \to 0 \quad (3)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

$\lambda_p \to 0$ da (1) tenglikda limitga o'tib, (bunda (2) va (3) munosabatlarni e'tiborga olib) aylanma sirtning yuzi uchun

$$\mu(\Pi) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (4)$$

bo'lishini topamiz. ►

1-misol. Ushbu

$$f(x)=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}}), \qquad a>0, \quad 0\le x\le a$$

zanjir chizig‘ini Ox o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanma sirtning yuzi topilsin.

◀ Ravshanki, $f'(x)=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{-x}{a}})$ (4) formuladan foydalanib, izlanayotgan aylanma sirtning yuzini topamiz:

$$\mu(T)=2\pi\int_0^a\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})^2}dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\int_0^a(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})^2dx=\frac{\pi a}{2}\int_0^a(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}})dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]_0^a=\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4) \ ▶$$

Aytaylik, AB egri chiziq yuqori yarim tekislikda joylashgan bo‘lib, u ushbu

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (\alpha\le t\le\beta)$$

parametrik tenglamalar sistemasi bilan berilgan bo‘lsin. Bunda $\varphi(t)$, $\psi(t)$ funksiyalari $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz va uzluksiz $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ hosilalarga ega. Bu egri chiziqni Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanma sirtning yuzi

$$\mu(T)=2\pi\int_\alpha^\beta\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \qquad (5)$$

bo‘ladi.

2-misol. Ushbu

$$x^2+(y-2)^2=1$$

aylanani Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning (torning) yuzi topilsin.

◄ Aylananing tenglamasini quyidagicha

$$x=\varphi(t)=cost$$

$$y=\psi(t)=2+sint \qquad (0\leq t\leq 2\pi)$$

parametrik ko'rinishda yozamiz.

Izlanayotgan aylanma sirtning yuzi, (5) formulaga ko'ra

$$\mu(T)=2\pi\int_0^{2\pi}(2+\sin t)\sqrt{(cost)'^2+(2+\sin t)'^2}\,dt=$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}(2+\sin t)dt=8\pi^2$$

bo'ladi. ►

4-§. O'zgaruvchi kuchning bajargan ishi

Aytaylik, biror jism OX o'qi bo'ylab F kuch ta'sirida harakat qilayotgan bo'lsin. Bunda F kuch jismning OX o'qidagi holatiga bog'liq, ya'ni $F=F(x)$ va uning yo'nalishi harakat yo'nalishi bilan ustma-ust tushsin. Bu kuch ta'sirida jismni a nuqtadan b nuqtaga o'tkazish uchun bajarilgan ishni topish masalasi yuzaga keladi.

Ma'lumki, $F=F(x)$ kuch $[a,b]$ oraliqda

$$F(x)=c,\ c-const$$

bo'lsa, jismni a nuqtadan b nuqtaga o'tkazish uchun bajarilgan ish $A=c\cdot(b-a)$ formula bilan ifodalanadi.

$F=F(x)$ kuch $[a,b]$ da x o'zgaruvchining ixtiyoriy uzluksiz funksiyasi bo'lsin. U holda $[a,b]$ oraliqni ushbu nuqtalar yordamida $a=x_0,x_1,x_2,\ldots\ \ldots,\ x_n=b$ $\quad(x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n)$ n ta $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2],\ldots,[x_k,x_{k+1}],\ldots,[x_{n-1},x_n]$ bo'laklarga ajratib, har bir bo'lakchada ixtiyoriy

$$\xi_k \ (k=0,1,2,\dots\ \dots,\ n-1) \qquad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

nuqta olamiz.

Agar har bir

$$[x_k, x_{k+1}] \ (k=0,1,2,\dots\ \dots,\ n-1)$$

oraliqda jismga ta'sir etayotgan $F(x)$ kuchni o'zgarmas va $F(\xi_k)$ ga teng deb olinsa, u holda $[x_k, x_{k+1}]$ oraliqda bajarilgan ish taxminan

$$F(\xi_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)$$

formula bilan, $[a,b]$ oraliqda bajarilgan ish esa taxminan

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\cdot(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\cdot \Delta x$$

formula bilan ifodalanadi.

Agar $\lambda \to 0$ da

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\cdot \Delta x_k$$

yig'indi chekli songa intilsa bu sonni $F(x)$ kuchning [a,b] oraliqdagi bajargan ishi deyilishi mumkin. Demak,

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\cdot \Delta x_k$$

Ravshanki, qaralayotgan yig'indi $F=F(x)$ funksiyaning [a,b] oraliq bo'yicha integral yig'indisi bo'ladi. $F=F(x)$ funksiya esa shartga ko'ra [a,b] da uzluksiz. Demak, yig'indining limiti mavjud va u

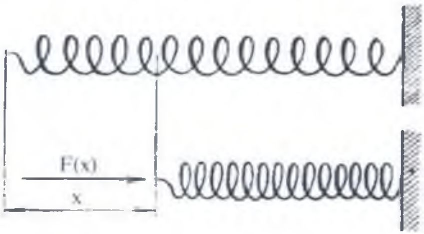
$$\int_a^b F(x)dx$$

ga teng bo'ladi:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

Shunday qilib, o'zgaruvchi $F(x)$ kuchning $[a,b]$ oraliqdagi bajargan ishi $A=\int_a^b F(x)dx$ bo'ladi.

Misol. Vintsimon prujinaning bir uchi mustahkamlangan, ikkinchi uchiga esa $F=F(x)$ kuch ta'sir etib, prujina qisilgan (1-chizma).



1-chizma

Agar prujinaning qisilishi unga ta'sir etayotgan $F(x)$ kuchga proporsional bo'lsa, prujinani a birlik qisish uchun $F(x)$ kuchning bajargan ishi topilsin. ◄ Agar $F(x)$ kuch ta'sirida prujinaning qisilishi miqdorini x orqali belgilasak, u holda

$$F(x)=k\cdot x$$

bo'ladi, bunda k – proporsionallik koeffitsienti (qisilish koeffisienti). Yuqoridagi formuladan foydalanib bajarilgan ishni topamiz:

$$A=\int_0^b kx\,dx=k\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^a=\frac{ka^2}{2}$$

12-bob. XOSMAS INTEGRALLAR

1-§. Chegaralari cheksiz xosmas integrallar

Funksiyaning aniq integrali (Riman integrali) tushunchasini kiritishda integrallash oralig'ining chekli bo'lishi talab etilgan edi.

Endi cheksiz oraliqda ($[a,+\infty)$; $(-\infty,a]$; $(-\infty,+\infty)$ oraliqlarda) berilgan funksiyaning shu oraliq bo'yicha integrali tushunchasini keltiramiz va o'rganamiz.

1°. Chegaralari cheksiz xosmas integral tushunchasi. $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda ($a\in R$) berilgan bo'lib, ixtiyoriy $[a,t]$ da ($a<t<+\infty$) integrallanuvchi bo'lsin: $f(x)\in R([a,t])$.

Ushbu

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx$$

belgilashni kiritamiz.

1-ta'rif. Agar $t\to+\infty$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lsa, bu limiti $f(x)$ funksiyaning $[a,+\infty)$ cheksiz oraliq bo'yicha xosmas integrali deyiladi va

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

kabi belgilanadi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}F(t)=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx. \qquad (1)$$

(1) integralni chegarasi cheksiz xosmas integral deb ham yuritiladi.

Qulaylik uchun, bundan keyin «chegarasi cheksiz xosmas integral» deyish o'rniga «integral» deymiz.

2-ta'rif. Agar $t\to+\infty$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud va chekli bo'lsa, (1) integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar $t\to+\infty$ da $F(t)$ funksiyaning limiti cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, (1) integral uzoqlashuvchi deyiladi.

1-misol. Ushbu

$$\int_a^{+\infty} e^{-x}dx$$

integralni qaraylik. Bu holda

$$F(t)=\int_a^t e^{-x}dx=-e^{-t}+1$$

bo'lib,

$$\lim_{t\to+\infty} F(t)=1$$

bo'ladi.

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi va

$$\int_a^{+\infty} e^{-x}dx=1.$$

2-misol. Ushbu

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} \qquad (a>0,\ \alpha>0)$$

integral uchun

$$F(t)=\int_a^t\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\ln t-\ln a,\ agar\ \alpha=1\ bo'lsa\\ \dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\dfrac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1},\ agar\ \alpha\neq1\ bo'lsa\end{cases}$$

bo'lib, $t\to+\infty$ da

$$F(t)\to\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} \qquad (\alpha>1), \qquad F(t)\to+\infty \qquad (\alpha\leq1)$$

bo'ladi.

Demak,

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

integral $\alpha>1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha\leq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

3-misol. Ushbu $\int_{a}^{+\infty} \cos x dx$ integral uzoqlashuvchi bo'ladi, chunki $t\to+\infty$ da

$$F(t)=\int_{a}^{t} \cos x dx=\sin t$$

funksiyaning limiti mavjud emas.

4-misol. $\int_{a}^{+\infty} e^{-ax} dx$, $a>0$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\int_{a}^{+\infty} e^{-ax} dx=\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} e^{-ax} dx=\lim_{t\to+\infty}\frac{-e^{-ax}}{a}\Big|_{0}^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-e^{-at}}{a}+\frac{e^{0}}{a}\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{ae^{at}}\right)=\frac{1}{a}.$$

5-misol. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$ ni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{r\to-\infty}\int_{r}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{r\to-8} arctgx\Big|_{r}^{0}=\lim_{r\to-\infty}(arctg0-arctgr)=\frac{\pi}{2}.$$

Demak, integral yaqinlashuvchi va

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

6-misol. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Biz bu integralni hisoblash uchun ikkita xosmas integrallar yig'indisi ko'rinishida yozib olamiz va integrallarni hisoblaymiz, ya'ni

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{r\to-\infty}\int\limits_{r}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{0}^{t}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\lim_{r\to-\infty}arctgx\Big|_{r}^{0}+\lim_{t\to+\infty}arctgx\Big|_{0}^{t}=\lim_{r\to-\infty}(arctg0-arctgr)+$$

$$+\lim_{t\to+\infty}(arctgt-arctg0)=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi=\pi.$$

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi.

Xuddi shunday quyidagi integrallar ham yuqoridagidek,

$$\int\limits_{-\infty}^{a}f(x)dx,\qquad\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$$

xosmas integrallar va ularning yaqinlashuvchiligi, uzoqlashuvchiligi ta'riflanadi:

$$\int\limits_{-\infty}^{a}f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int\limits_{t}^{a}f(x)dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{\substack{u\to+\infty\\ v\to-\infty}}\int\limits_{v}^{u}f(x)dx.$$

*2°. **Yaqinlashuvchi xosmas integralning sodda xossalari.*** Xosmas integralning turli xossalarini *f(x)* funksiyaning $[a,+\infty)$ oraliq bo'yicha olingan

$$\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx$$

integrali uchun bayon etamiz. Bu xossalarni

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

integrallar uchun keltirishni o'quvchiga havola etamiz.

1-xossa. Agar $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_{b}^{+\infty} f(x)dx \quad (a<b)$ integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha. Bunda

$$\int_{b}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx \qquad (2)$$

tenglik bajariladi.

◄ Ravshanki, $\int_{a}^{t} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{t} f(x)dx. \quad (a<b<t)$

Aytaylik, $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsin.

Demak, $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx$ mavjud va chekli bo'ladi:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx,$$

(2) tenglikdan foydalanib, $t\to+\infty$ da

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx - \int_{a}^{b} f(x)dx$$

bo'lishini topamiz. Demak, $\int_{b}^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi va

$$\int_b^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

Aytaylik, $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsin,

Demak, $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx = \int_b^{+\infty} f(x)dx$ chekli bo'ladi.

(2) tenglikdan, $t\to+\infty$ da

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx = \int_b^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi

va $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_b^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$ bo'ladi. ▶

2-xossa. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} C\cdot f(x)dx$ ham (C=const) yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^{+\infty} C\cdot f(x)dx = C\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

bo'ladi.

3-xossa. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lib, $\forall x\in[a,+\infty)$ da $f(x)\geq 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 0$ bo'ladi.

4-xossa. Agar $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int\limits_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo‘lib, $\int\limits_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ bo‘ladi.

Izoh. Berilgan integrallarning yaqinlashuvchiligi yetarli shart bo‘lib, funksiyalar yig‘indisining integrali yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun zaruriy shart emas. Masalan,

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \varphi(x) = -\frac{1}{x+1}, \quad x \in [1; +\infty)$$

bo‘lsin. U holda

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \lim_{t \to +\infty} \ln|x|\Big|_1^t = \lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty,$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{-1}{x+1} dx = -\lim_{t \to +\infty} \ln|x+1|\Big|_1^t = -\lim_{t \to +\infty} [\ln(t+1) - \ln 2] = -\infty.$$

Demak, qaralayotgan xosmas integrallar uzoqlashuvchi bo‘ladi. Funksiyalar yig‘indisi uchun esa

$$\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \lim_{t \to +\infty} (\ln|x| - \ln|x+1|)\Big|_1^t = \lim_{t \to +\infty} (\ln t - \ln(t+1) + \ln 2] =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \ln \frac{t}{t+1} + \ln 2 = \ln 1 + \ln 2 = \ln 2$$

yaqinlashuvchi xosmas integral bo‘ladi.

Shuni ham ta’kidlash kerakki, agar integrallardan biri yaqinlashuvchi bo‘lib, ikkinchisi uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int\limits_1^{+\infty} \left(f(x) \pm \varphi(x)\right) dx$$

xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

5-xossa. Agar $\forall x \in [a,+\infty)$ da $f(x) \le g(x)$ bo'lib, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$ bo'ladi.

Misol tariqasida 5° xossani isbotini keltiramiz. Qolgan xossalar bevosita xosmas integral va uning yaqinlashuvchiligi ta'riflaridan kelib chiqadi.

5-xossaning isboti. Aniq integral xossalariga ko'ra ixtiyoriy $t>a$ uchun $\int_a^t f(x)dx \le \int_a^t \varphi(x)dx$.

Agar $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \le \int_a^t \varphi(x)dx \le \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx < +\infty$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Demak, F(t) funksiya yuqoridan chekli son bilan chegaralangan. Shuningdek, $f(x) \ge 0$ bo'lgani uchun $F(t)$ funksiya o'suvchi bo'ladi. Bulardan chekli limitning

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx$$

mavjudligi, ya'ni $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

Aksincha, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yzoqlashuvchi bo'lsa, $\int_a^t f(x)dx \le \int_a^t \varphi(x)dx$

tengsizligidan $t\to+\infty$ da chap tomoni chegaralanmagan va bundan o'ng tomonini limiti chekli emasligi, ya'ni $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

7-misol. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. 5° xossadan foydalanamiz. Berilgan integralni $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ integral bilan solishtiramiz, bu integral $\alpha>1$ da yaqinlashuvchi (1-misol). $(1;+\infty)$ da

$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}<\frac{1}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{x^{3/2}}$ bo'lganligi sababli, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ integralning yaqinlashishidan berilgan $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ integralning yaqinlashishi kelib chiqadi.

6-xossa. Agar $\int_a^{+\infty}f(x)\cdot g(x)dx$ va $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda shunday o'zgarmas $\mu\,(m\le\mu\le M)$ topiladiki,

$$\int_a^{+\infty}f(x)\cdot g(x)dx=\infty\int_a^{+\infty}g(x)dx \qquad (3)$$

bo'ladi.

◄ Aytaylik, $\forall x\in[a,+\infty)$ da $g(x)dx\ge 0$ bo'lsin. Unda $m\cdot g(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$ bo'lib,

$$m\int_a^t g(x)dx\le\int_a^t f(x)g(x)dx\le M\int_a^t g(x)dx$$

bo'ladi. Bu tengsizliklardan, $t \to +\infty$ da limitga o'tsak unda

$$m\int_a^{+\infty} g(x)dx \le \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \le M\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki,

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = 0$$

bo'lganda (3) tenglik bajariladi.

Aytaylik,

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx > 0$$

bo'lsin. Bu holda

$$m \le \frac{\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}{\int_a^{+\infty} g(x)dx} \le M$$

bo'ladi. Agar

$$\mu = \frac{\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}{\int_a^{+\infty} g(x)dx}$$

deb olinsa, unda $m \le \mu \le M$ bo'lib,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx = \mu\cdot\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

bo'ladi.

$\forall x \in [a,+\infty)$ da $g(x)<0$ bo'lganda (3) tenglikning bajarilishi yuqoridagidek isbotlanadi. ►

Odatda, bu xossa o'rta qiymat haqidagi teorema deyiladi.

*3°. **Xosmas integralning yaqinlashuvchiligi.*** Aytaylik *f(x)*, funksiya $[a, +\infty)$ oraliqda berilgan bo'lsin.

Ma'lumki,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integralning yaqinlashuvchiligi ushbu

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \qquad (t > a)$$

funksiyaning $t \to +\infty$ da chekli limitga ega bo'lishidan iborat.

Funksiyaning chekli limitiga ega bo'lishi haqidagi Koshi teoremasi, ya'ni F(x) funksiyaning $t \to +\infty$ da chekli limitga ega bo'lishi uchun

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists t_0 > a, \quad \forall t' > t_0, \qquad \forall t'' > t_0 :$$

$$|F(t'') - F(t')| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli ekani keltirilgan edi.

Bu tushuncha va tasdiqdan

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (4)$$

xosmas integralning yaqinlashuvchiligini ifodalaydigan quyidagi teoremaga kelamiz.

Teorema (Koshi teoremasi). (4) integralning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $\forall \varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $t_0 \in R$ $(t_0>a)$ topilib, ixtiyoriy $t'>t_0$, $t''>t_0$ bo'lganda

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

2-§. Manfiy bo'lmagan funksiyaning xosmas integrallari. Integralning absolyut yaqinlashuvchiligi

1°. Manfiy bo'lmagan funksiya xosmas integralining yaqinlashuvchiligi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ oraliqda berilgan bo'lib, $\forall x \in [a, +\infty)$ da $f(x) \geq 0$ bo'lsin. Bu funksiyani $[a,t]$ da $(a<t<+\infty)$ integrallanuvchi deylik: $f(x) \in R([a,t])$. Bu holda $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ funksiya $(a,+\infty)$ oraliqda o'suvchi bo'ladi.

◄ Haqiqatan ham, $a<t_1<t_2<+\infty$ da

$$F(t_2) = \int_a^{t_2} f(x)dx = \int_a^{t_1} f(x)dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = F(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$$

bo'lib, $\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \geq 0$ bo'lganligi sababli $F(t_2) \geq F(t_1)$ bo'ladi. Demak, $\forall\ t_1, t_2 \in (a, +\infty)$ uchun

$$t_1 < t_2 \Rightarrow F(t_1) \leq F(t_2). \ ►$$

1-teorema. Manfiy bo'lmagan $f(x)$ funksiya xosmas integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (f(x) \geq 0,\ x > a) \qquad (1)$$

ning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $F(t)$ funksiyaning yuqoridan chegaralangan, ya'ni

$$\exists C \in R,\ \ \forall t > a: F(t) \leq C$$

bo'lishi zarur va yetarli.

◄ **Zarurligi.** Aytaylik, (1) integral yaqinlashuvchi bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$\lim_{t \to +\infty} F(t)$$

mavjud va chekli bo‘ladi. Unda, $\exists C\in R$, $\forall t>a: F(t)\leq C$ da $F(t)\leq C$ bo‘ladi.

Yetarliligi. Aytaylik, $F(t)$ funksiya $(a,+\infty)$ da yuqoridagi chegaralangan bo‘lsin. Ayni paytda, $F(t)$ o‘suvchi funksiya. Demak, $t\to+\infty$ da $F(t)$ funksiya chekli limitga ega. Bu esa (1) integralni yaqinlashuvchi bo‘lishini bildiradi.►

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $F(t)$ funksiya $(t\in(a,+\infty))$ yuqoridan chegaralanmagan bo‘lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integral uzoqlashuvchi bo‘ladi.

2°. Taqqoslash teoremalari. Ikkita funksiya ma’lum munosabatda bo‘lganda birining xosmas integralining yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘lishidan ikkinchisining ham yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘lishini ifodalovchi teoremalarni keltiramiz. Odatda, ular taqqoslash teoremalari deyiladi.

2-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,+\infty)$ oraliqda berilgan bo‘lib, $\forall x\in[a,+\infty)$ da

$$0\leq f(x)\leq g(x) \qquad (2)$$

bo‘lsin.

Agar $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

◄ Aytaylik, (2) munosabat o‘rinli bo‘lib, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo‘lsin. Unda 1-teoremaga ko‘ra

$$G(t)=\int_a^t g(x)dx\le C$$

bo'ladi. Ayni paytda,

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx\le G(t)$$

bo'lganligi sababli, ya'ni 1-teoremaga binoan $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, (2) munosabat o'rinli bo'lib, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsin. Unda yuqorida keltirilgan natija va $F(t)\le G(t)$ tengsizlikdan $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integralning uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.►

3-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,+\infty)$ da $f(x)\ge 0$ $g(x)\ge 0$ bo'lib,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k \qquad (0\le k\le+\infty)$$

bo'lsin.

Agar $k<+\infty$ bo'lib, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar $k>0$ bo'lib, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ Aytaylik, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k<+\infty$ bo'lib, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsin. Limit ta'rifiga binoan

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\ t_0>a,\ \forall t>t_0 \quad \text{da}$$

$$f(x)<(k+\varepsilon)g(x) \qquad (3)$$

bo'ladi. Yaqinlashuvchi integralning xossasiga ko'ra

$$\int\limits_a^{+\infty}(k+\varepsilon)g(x)dx$$

yaqinlashuvchi bo'ladi.

(3) munosabat va 2-teoremadan foydalanib, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ integralning yaqinlashuvchi bo'lishini topamiz.

Aytaylik,

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k>0$$

bo'lib, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsin. Bu holda k_1 son $(k>k_1>0)$ uchun shunday $t'_0>a$ topiladiki, $\forall x>t'_0$ da $\dfrac{f(x)}{g(x)}>k_1$, ya'ni

$$g(x)<\frac{1}{k_1}f(x) \qquad (4)$$

bo'ladi.

(4) munosabat va 2-teoremadan foydalanib $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ integralning uzoqlashuvchi bo'lishini topamiz.▶

Natija. Agar

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$$

bo'lib, $0<k<+\infty$ bo'lsa, u holda $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar bir vaqtda yoki yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'ladi.

Ko'p hollarda biror xosmas integralning yaqinlashuvchiligini yoki uzoqlashuvchiligini aniqlashda avvaldan yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligi ma'lum bo'lgan integral bilan taqqoslab (yuqorida keltirilgan teoremalardan foydalanib) qaralayotgan integralning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishi topiladi.

Masalan,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

integralni

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\qquad (a>0,\ \alpha>0)$$

integral bilan taqqoslab, quyidagi natijaga kelamiz.

Natija. Aytaylik, biror $C(0<C<+\infty)$ va $\alpha>0$ sonlar uchun $x\to+\infty$ da $f(x)\sim\frac{C}{x^\alpha}$, ya'ni

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha\cdot f(x)=C$$

bo'lsin. Unda $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ integral $\alpha>1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha\leq1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

1-misol. Ushbu

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$$

integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ Agar

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{1+x^2}, \qquad g(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

deyilsa, unda $\forall x\in[0,+\infty]$, $0\leq f(x)\leq g(x)$ bo'ladi.

Ravshanki,

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

integral yaqinlashuvchi. 2-teoremaga ko'ra berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi.▶

2-misol. Ushbu $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ $\forall x\geq 1$ da

$$f(x)=e^{-x^2},\ g(x)=e^{-x}$$

funksiyalari uchun $0\leq f(x)\leq g(x)$ bo'ladi.

Quyidagi $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ integralning yaqinlashuvchiligi ravshan.

Demak,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi. ▶

3-misol. Ushbu $\int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$ integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ $\forall x>1$ da $\ln x<x$ bo'lib, $f(x)=e^{-x}\ln x$, $g(x)=xe^{-x}$ funksiyalar uchun $0\leq f(x)\leq g(x)$ bo'ladi. Endi

$$\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} xe^{-x}dx$$

integralning yaqinlashuvchiligini e'tiborga olib, 2-teoremadan foydalanib, berilgan

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$$

integralning yaqinlashuvchiligini topamiz.►

4-misol. Ushbu

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}$$

integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◄ Integral ostidagi

$$f(x) = \frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\cdot\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}$$

integral yaqinlashuvchi. Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi bo'ladi.►

*4°. **Xosmas integralning absolyut yaqinlashuvchiligi.*** Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda berilgan bo'lsin. Bunda, $\forall x\in[a,+\infty)$ uchun $f(x)\geq 0$ bo'lishi shart emas.

Ta'rif. Agar

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lib, $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ shartli yaqinlashuvchi integral deyiladi.

4-teorema. Agar integral absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u yaqinlashuvchi bo'ladi.

◀ Aytaylik,

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'lsin. Berilgan $f(x)$ va $|f(x)|$ funksiyalar yordamida ushbu

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|),$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(-f(x) + |f(x)|)$$

funksiyalarni tuzamiz.

Bu funksiyalar uchun, $\forall x \in [a, +\infty)$ da

1) $\varphi(x) \geq 0$, $\psi(x) \geq 0$

2) $\varphi(x) \leq |f(x)|$, $\psi(x) \leq |f(x)|$

3) $\varphi(x) - \psi(x) = f(x)$

bo'ladi. Yuqorida keltirilgan 2-teoremadan foydalanib, quyidagi

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx, \qquad \int_a^{+\infty} \psi(x)dx$$

integral yaqinlashuvchiligini topamiz.

Unda $\int_a^{+\infty} (\varphi(x)-\psi(x))dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Demak, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'ladi. ▶

Masalan, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Avval $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}dx$ integralni tekshiramiz. $(1;+\infty)$ da $\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ va $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ yaqinlashuvchi bo'lganligi sababli, 5° xossaga ko'ra $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}dx$ integral yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ integral absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

3-§. Integralning yaqinlashuvchiligi alomatlari. Integralning bosh qiymati

*1°. **Dirixle alomati.*** Faraz qilaylik, *f(x)* va *g(x)* funksiyalar $[a,+\infty)$ oraliqda berilgan bo'lsin.

1-teorema (Dirixle alomati). *f(x)* va *g(x)* funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1. *f(x)* funksiya $[a,+\infty)$ da uzluksiz va uning shu oraliqdagi boshlang'ich F(x) ($F'(x)=f(x)$) funksiyasi chegaralangan;
2. g(x) funksiya $[a,+\infty)$ da uzluksiz $g'(x)$ hosilaga ega;

3. g(x) funksiya $[a,+\infty)$ da kamayuvchi;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0.$

U holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

integral yaqinlashuvchi bo‘ladi.

◄ Ravshanki,

$$f(x)\in C[a,+\infty),\ g(x)\in C[a,+\infty)\Rightarrow f(x)g(x)\in C[a,+\infty)$$

bo‘ladi. Binobarin, $f(x)\cdot g(x)$ funksiya $[a,t]$ $(a<t<+\infty)$ oraliqda integrallanuvchi bo‘ladi. Bo‘laklab integrallash formulasidan hamda teoremaning 1- va 2- shartlaridan foydalanib topamiz:

$$\int_a^t f(x)g(x)dx=\int_a^t g(x)dF(x)=g(x)F(x)\Big|_a^t-\int_a^t f(x)g'(x)dx. \quad (1)$$

Endi

$$|g(t)F(t)|\le Mg(t) \qquad (M=\sup|F(t)|<+\infty)$$

bo‘lishini e’tiborga olsak, undan $t\to+\infty$ da

$$g(t)F(t)\to 0$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Berilishiga ko‘ra, $g(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz differensiallanuvchi hamda shu oraliqda kamayuvchi funksiya. Demak, $\forall x\in[a,+\infty)$ da

$$g'(x)\le 0$$

bo‘ladi. Shuni e’tiborga olib topamiz:

$$\int_a^t |F(x)g'(x)|dx\le M\int_a^t |g'(x)|dx=-M\int_a^t g'(x)dx=$$

$$=M(g(a)-g(t))\le M\,g(a) \quad (g(t)\ge 0).$$

Unda yuqoridagi paragrafdagi teoremalardan foydalanib

$$\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)dx$$

xosmas integralning yaqinlashuvchi ekanligini aniqlaymiz.

(1) tenglikda t→+∞ da limitga o'tib, ushbu

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)g(x)dx$$

limitning mavjud va chekli bo'lishini topamiz. Bu esa $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ integralning yaqinlashuvchi bo'lishini bildiradi.►

Misol. Ushbu

$$J=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx \qquad (\alpha>0)$$

integralni yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◄ Berilgan integralni quyidagicha

$$J=\int_1^{+\infty}\sin x\frac{1}{x^\alpha}dx \qquad (\alpha>0)$$

yozib, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$ deymiz. Bu funksiyalar yuqorida keltirilgan teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi.

1) f(x)=sinx funksiya [1,+∞) oraliqda uzluksiz va uning boshlang'ich funksiyasi *F(x)=−cosx* funksiya [1,+∞) da chegaralangan;

2) $g(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha>0)$ funksiya [1,+∞) da

$$g'(x)=-\frac{\alpha}{x^{\alpha-1}}$$

hosilaga ega va u uzluksiz;

3) $g(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha>0)$ funksiya [1,+∞) da kamayuvchi;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}=0$. $(\alpha>0)$

Unda Dirixle alomatiga ko'ra

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx \qquad (\alpha>0)$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi. ►

*2°. **Abel alomati.*** Faraz qilaylik, *f(x)* va *g(x)* funksiyalar [a,+∞) oraliqda berilgan bo'lsin.

2-teorema (Abel alomati). *f(x)* va *g(x)* funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) *f(x)* funksiya [a,+∞) da uzluksiz bo'lib, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi;

2) *g(x)* funksiya [a,+∞) da uzluksiz *g'(x)* hosilaga ega va bu hosila [a,+∞) da o'z ishorasini saqlasin;

3) *g(x)* funksiya [a,+∞) da chegaralangan.

U holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

◄ Ravshanki, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ integralning yaqinlashuvchi bo'lishidan *f(x)* funksiyaning [a,+∞) oraliqda chegaralangan *F(x)* boshlang'ich funksiyaga ega bo'lishi kelib chiqadi.

Teoremaning 2- va 3- shartlaridan hamda monoton funksiyaning limiti haqidagi teoremadan foydalanib ushbu $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ limitning mavjud va chekli bo'lishini topamiz: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b$.

Unda $g_1(x)=g(x)-b$ funksiya $x\to+\infty$ da monoton ravishda nolga intiladi:

$$\lim_{x\to+\infty} g_1(x)=0$$

Shunday qilib $f(x)$ va $g_1(x)$ funksiyalari Dirixle alomati keltirilgan barcha shartlarni qanoatlantiradi. Dirixle alomatiga ko‘ra

$$\int_a^{+\infty} f(x)g_1(x)dx$$

integral yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Ayni paytda, $f(x)g(x)=f(x)b+f(x)g_1(x)$ bo‘lganligi sababli,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. ►

3°. Xosmas integralning bosh qiymati.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ da berilgan bo‘lib, bu oraliqning istalgan $[t',t]$ $(-\infty<t'<t<+\infty)$ qismida integrallanuvchi bo‘lsin:

$$F(t',t)=\int_{t'}^{t} f(x)\,dx.$$

Ma’lumki, ushbu

$$\lim_{\substack{t'\to-\infty,\\ t\to+\infty}} F(t',t)=\lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t\to+\infty}}\int_{t'}^{t} f(x)\,dx$$

limit $f(x)$ funksiyaning $(-\infty,+\infty)$ oraliq bo‘yicha xosmas integrali deyilib, u chekli bo‘lsa,

$$\lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t\to+\infty}}\int_{t'}^{t} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi deyilar edi.

Bunda t′ va t o‘zgaruvchilarning ixtiyoriy ravishda t′→ −∞ t→ +∞ ga intilishi ko‘zda tutiladi.

Xususan, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

bo‘ladi.

Biroq $F(t',t)=\int_{t'}^{t} f(x)dx$ funksiya, t′=−t bo‘lib, t→+∞ da chekli limitga ega bo‘lishidan $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integralning yaqinlashuvchi bo‘lishi kelib chiqavermaydi.

Masalan, ushbu $F(t',t)=\int_{t'}^{t}\sin x\,dx$ integrel uchun t′=−t bo‘lsa,

$\int_{-t}^{t}\sin x\,dx=0 \quad (\forall t>0)$ bo‘lib, $\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t}\sin x\,dx=0$ bo‘ladi.

Biroq $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi emas.

Ta’rif. Agar t′=−t bo‘lib, t→+∞ da

$$F(t',t)=\int_{-t'}^{t} f(x)dx$$

funksiyaning limiti mavjud va chekli bo‘lsa, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral bosh qiymat ma’nosida yaqinlashuvchi deyilib, $\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$

limit esa $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ xosmas integralning bosh qiymati deb ataladi. Odatda, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ xosmas integralning bosh qiymati

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_{-t}^{t} f(x)\,dx.$$

Bunda *v.p* belgi fransuzcha «valeur principiale» — «bosh qiymat» so'zlarining dastlabki harflarini ifodalaydi.

Shunday qilib, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u bosh qiymat ma'nosida ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Biroq, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integralning bosh qiymat ma'nosida yaqinlashuvchi bo'lishidan uning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

4-§. Xosmas integrallarni hisoblash

1°. Nyuton-Leybnits formulasi. Ushbu

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lib, uni hisoblash talab etilsin.

Aytaylik, *f(x)* funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda boshlang'ich *F(x)* funksiyaga ega va $x\to+\infty$ da *F(x)* funksiya chekli limiti mavjud bo'lsin:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty).$$

Unda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}(F(t) - F(a)) = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty} \qquad (1)$$

bo'ladi.

(1) formula *Nyuton-Leybnits formulasi* deyiladi.

1-misol. Ushbu,

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$$

integral hisoblansin.

◄ Ravshanki, $F(x) = \cos\frac{1}{x}$ funksiya $[\frac{2}{\pi}, +\infty)$ oraliqda $f(x) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi.

(1) formuladan foydalanib topamiz:

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \cos\frac{1}{x}\Big|_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} = 1. \;►$$

*2°. **Bo'laklab integrallash.*** Faraz qilaylik, *f(x)* va *g(x)* funksiyalar $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz va uzluksiz, *f'(x)* va *g'(x)* hosilalarga ega bo'lsin.

Agar

1) $\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g'(x)dx$ $\left(\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx\right)$ integral yaqinlashuvchi;

2) ushbu $\lim_{x\to+\infty}(f(x)g(x))$ limit mavjud va chekli bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f'(x)\cdot g(x)dx \qquad \left(\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx\right)$$

integral yaqinlashuvchi bo‘lib,

$$\int_a^{+\infty} f'(x)\cdot g(x)dx = \lim_{x\to+\infty}(f(x)g(x)) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx \quad (2)$$

$$\left(\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = \lim_{x\to+\infty}(f(x)g(x)) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx\right)$$

bo‘ladi.

◀ Ravshanki,

$$\int_a^{t} f'(x)g(x)dx = \int_a^{t} g(x)df(x) = f(x)g(x)\Big|_a^t - \int_a^{t} f(x)dg(x) =$$

$$= f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^{t} f(x)g'(x)dx.$$

Keyingi tenglikda, $t\to+\infty$ da limitga o‘tib topamiz:

$$\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx = \lim_{t\to+\infty}(f(t)g(t)) - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx. \ ▶$$

(2) formula bo‘laklab integrallash formulasi deyiladi.

2-misol. Ushbu

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$$

integral hisoblansin.

◀ Agar $g(x)=x$, $f'(x)=e^x$ deb olsak, unda

$$g'(x)=1, \qquad f(x)=-e^x$$

bo‘lib, (2) formulaga ko‘ra $(a=0)$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{t+\infty}(-te^{-t}) - 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$$

bo‘ladi. ►

3°. O‘zgaruvchilarni almashtirib integrallash.

Ushbu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integralni qaraymiz. Bu integralda $x=\varphi(z)$ almashtirishni bajaramiz. Bunda $x=\varphi(z)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\varphi(z)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz va uzluksiz $\varphi'(z)$ hosilaga ega;

2) $\varphi(z)$ funksiya $[a,+\infty)$ da qat’iy o‘suvchi;

3) $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(+\infty)=\lim\limits_{z\to+\infty}\varphi(z)=+\infty.$

Agar

$$\int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo‘lib,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz$$

bo‘ladi.

◄ Ixtiyoriy $z(\alpha<z<+\infty)$ ni olib, unga mos $\varphi(z)=t$ nuqtani topamiz.

Ravshanki, yuqoridagi shartlarda $[a,t)$ da yuqoridagi paragrafdagi (2) formulaga ko‘ra

$$\int_a^t f(x)dx=\int_\alpha^z f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)$$

bo‘ladi.

Keyingi tenglikda $t\to+\infty$ da (bunda $z=\varphi^{-1}(t)\to+\infty$) limitga o'tib topamiz:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz$$

Bu esa keltirilgan tasdiqni isbotlaydi. ►

3-misol. Ushbu

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$$

integral hisoblansin.

◄ Bu integralda $x=\frac{1}{t}$ almashtirishni bajaramiz. Natijada

$$J=\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{1+\frac{1}{t^4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{1+t^4}$$

bo'lib,

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Keyingi integralda $x-\frac{1}{x}=z$ deb, topamiz:

$$J=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{2+z^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{z}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Demak,

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.\ \blacktriangleright$$

4°. Xosmas integrallarni taqribiy hisoblash.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo'lib, ushbu

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx,$$

ya'ni $\forall\varepsilon>0$, $\exists t_0>a$, $\forall t>t_0$: $\left|\int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx\right| < \varepsilon$ bo'ladi.

Ravshanki, $\int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^t f(x) = \int_t^{+\infty} f(x)dx.$

Demak,

$$\left|\int_t^{+\infty} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Natijada ushbu

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \approx \int_a^t f(x)dx \qquad (5)$$

taqribiy formulaga kelamiz. Uning xatoligi

$$\left|\int_t^{+\infty} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

bo'ladi.

4-misol. Ushbu $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ xosmas integral taqribiy hisoblansin.

◄ (5) formulaga ko'ra, berilgan integralni taqribiy hisoblash uchun ushbu

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \approx \int_0^a e^{-x^2}dx \qquad (a>0)$$

formulani hosil qilamiz. Uning xatoligi $\int_{a}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ ga teng bo'ladi.

Bu xatolikni yuqoridan baholaymiz:

$$\int_{a}^{+\infty} e^{-x^2}dx \le \frac{1}{a}\int_{a}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2a}\int_{a}^{+\infty} e^{-x^2}d(x^2) = \frac{1}{2a}(-e^{-x^2})_{a}^{+\infty} = \frac{1}{2a}e^{-a^2}.$$

Aytaylik, a=1 bo'lsin. Bu holda

$$\int_{a}^{+\infty} e^{-x^2}dx \approx \int_{0}^{1} e^{-x^2}dx$$

bo'lib, bu taqribiy formulaning xatoligi uchun $\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}dx \le 0{,}1839$ bo'ladi.

Aytaylik, a=2 bo'lsin. Bu holda $\int_{a}^{+\infty} e^{-x^2}dx \approx \int_{0}^{2} e^{-x^2}dx$ bo'lib, bu taqribiy formulaning xatoligi uchun $\int_{2}^{+\infty} e^{-x^2}dx \le 0{,}00458$ bo'ladi.

Aytaylik, a=3 bo'lsin. Bu holda $\int_{a}^{+\infty} e^{-x^2}dx \approx \int_{0}^{3} e^{-x^2}dx$ bo'lib, bu taqribiy formulaning xatoligi uchun $\int_{3}^{+\infty} e^{-x^2}dx \le 0{,}00002$ bo'ladi. ►

5-§. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali

Aniq integral mavjudligining zaruriy sharti integral ostidagi funksiyaning chegaralanganligi edi.

Endi f(x) funksiya [a;b] da chegaralanmagan bo'lsin. Aniqrog'i, ixtiyoriy $\varepsilon>0$, ($\varepsilon<b-a$) uchun f(x) funksiya $[a;b-\varepsilon]$ da chegaralangan va integrallanuvchi bo'lib, b nuqtaning atrofidagina chegaralanmagan bo'lsin. Bu holda b nuqta f(x) funksiyaning maxsus nuqtasi deb ataladi.

Demak, ixtiyoriy t (a<t<b) uchun $\int_a^t f(x)dx$ integral mavjud bo'lib, u faqat t o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi:

$$\int_a^t f(x)dx = F(t),\ \ a < t < b.$$

Ta'rif. Agar $t \to b-0$ da F(t) funksiyaning limiti mavjud bo'lsa, bu limit chegaralanmagan f(x) funksiyaning [a;b) oraliqdagi xosmas integrali deyiladi va u $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b-0} F(t) = \lim_{t \to b-0} \int_a^t f(x)dx$$

Agar $t \to b-0$ da F(t) funksiyaning limiti mavjud bo'lib, u chekli bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, f(x) funksiya esa [a;b) da integrallanuvchi funksiya deb ataladi.

Agar $t \to b-0$ da F(t) funksiyaning limiti cheksiz bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi. Yuqorida limit mavjud bo'lmagan holda ham biz xosmas integralni uzoqlashuvchi deymiz.

Xuddi yuqoridagidek, a nuqta f(x) ning maxsus nuqtasi bo'lganda (a;b] oraliq bo'yicha xosmas integral ta'riflanadi.

f(x) funksiya (a;b] oraliqda berilgan bo'lib, a nuqta shu funksiyaning maxsus nuqtasi bo'lsin. Bu funksiya (a;b] ning istalgan [t;b] (a<t<b) qismida integrallanuvchi, ya'ni ushbu

$$\int_t^b f(x)dx = F(t)$$

integral mavjud bo'lsin.

Ta'rif. Agar $t \to a+0$ da F(t) funksiyaning $\lim\limits_{t \to a+0} F(t)$ limiti mavjud bo'lsa, bu limit chegaralanmagan f(x) funksiyaning (a;b] oraliqdagi xosmas integrali deb ataladi va u $\int\limits_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi. Demak,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a+0} f(t) = \lim_{t \to a+0} \int\limits_t^b f(x)dx.$$

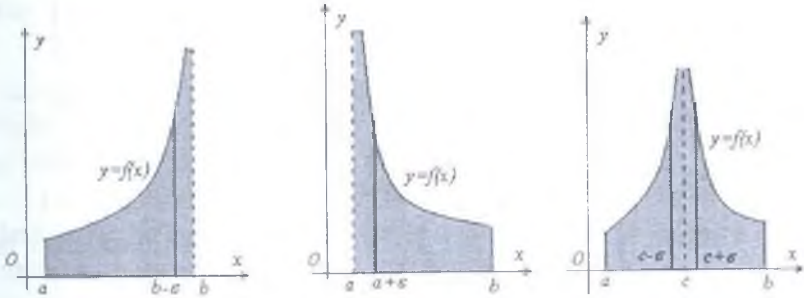
Agar $t \to a+0$ da F(t) funksiyaning limiti mavjud va chekli bo'lsa, $\int\limits_a^b f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi, f(x) esa (a;b] da integrallanuvchi funksiya deyiladi. Agar $t \to a+0$ da F(t) ning limiti cheksiz bo'lsa, u holda $\int\limits_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi. Yuqoridagi limit mavjud bo'lmagan holda ham biz integralni uzoqlashuvchi deymiz.

Agar f(x) funksiya [a;b] kesmaning biror ichki c nuqtasida $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ bo'lsa, u holda aniq integralning additivlik xossasiga ko'ra bu integralni ikkita integralning yig'indisi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{t \to c-0} \int\limits_a^t f(x)dx + \lim_{\tau \to c+0} \int\limits_\tau^b f(x)dx.$$

Agar tenglikning o'ng tomonidagi limitlar mavjud bo'lsa, u holda xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

Geometrik nuqtayi nazardan chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali y=f(x) egri chiziq, x=a, x=b to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan va x→b-0 da (x→a+0, x→c±0) Oy o'qi yo'nalishida cheksiz cho'zilgan figuraning chekli yuzga ega ekanligini anglatadi (1-rasm).



1-rasm

1-misol. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bunda x=0 nuqta integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtasidir. Bu holda ta'rif bo'yicha

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0+0}\int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0+0} 2\sqrt{x}\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0+0}(2-2\sqrt{t}) = 2.$$

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi va uning qiymati 2 ga teng.

2-misol. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bunda x=1 nuqta integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtasidir.

Bu holda

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1-0}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1-0}(-2\sqrt{1-x}\Big|_0^t =$$

$$= \lim_{t\to 1-0}(-2\sqrt{1-t}+2) = 2.$$

Demak, bu integral ham yaqinlashuvchi.

3-misol. $\int_0^1 \frac{dx}{E}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ta'rifga ko'ra

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0+0}\int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0+0} \ln|x|\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0+0}(\ln 1 - \ln t) = +\infty,$$

ya'ni bu xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

4-misol. $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \alpha\in R, a<b$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ikki holni qaraymiz. 1-hol. $\alpha\neq 1$ bo'lsin. U holda

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{t\to b-0}\int_a^t \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\lim_{t\to b-0}\int_a^t (b-x)^{-\alpha} d(b-x) =$$

$$= -\lim_{t\to b-0}\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^t = -\frac{1}{1-\alpha}\lim_{t\to b-0}((b-t)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha<1, \alpha>1. \\ \infty, & \end{cases}$$

2-hol. $\alpha=1$ bo'lsin. U holda

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)} = \lim_{t\to b-0}\int_a^t \frac{dx}{(b-x)} = -\lim_{t\to b-0}\ln|b-x|\Big|_a^t =$$

$$= -\lim_{t\to b-0}(\ln|b-t| - \ln|b-a|) = +\infty.$$

Demak, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ integral $\alpha<1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha\geq 1$ da uzoqlashuvchi bo'lar ekan.

6-§. Chegaralanmagan funksiya xosmas integralining xossalari

Quyida maxsus nuqtasi b bo'lgan f(x) funksiyaning [a;b) oraliq $\int_a^b f(x)dx$ bo'yicha olingan xosmas integralining xossalarini keltiramiz. Bu xossalarni maxsus nuqtasi a bo'lgan funksiyaning (a;b] oraliq bo'yicha olingan xosmas integrallari uchun ham tegishlicha bayon qilish mumkin.

1°. Agar f(x) funksiyaning [a;b) dagi xosmas integrali yaqinlashuvchi bo'lsa, bu funksiyaning [c;b), (a<c<b) oraliq bo'yicha integrali ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Bunda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

2°. Agar $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_a^b \varphi(E)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy α, β sonlar uchun

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta\varphi(x))dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta\varphi(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \pm \beta\int_a^b \varphi(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

3°. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lib, [a;b) da f(x)≥0 bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ bo'ladi.

4°. Agar $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_a^b \varphi(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo‘lib, $[a;b)$ da $f(x)\le\varphi(x)$ bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$ bo‘ladi.

5°. $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $[a;b)$ da uzluksiz bo‘lib, b esa ularning maxsus nuqtasi va $0\le f(x)\le\varphi(x)$, $x\in[a;b)$ bo‘lsin. U holda

a) $\int_a^b \varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\int_a^b f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo‘ladi;

b) $\int_a^b f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo‘lsa, $\int_a^b \varphi(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Misol tariqasida 3° xossaning isbotini keltiramiz. Qolgan xossalar bevosita xosmas integral va uning yaqinlashuvchiligi ta’riflaridan kelib chiqadi.

3° xossaning isboti. Aniq integralning xossalariga asosan $f(x)\ge 0$ bo‘lsa, ixtiyoriy $t\in[a;b)$ uchun $\int_a^t f(x)dx \ge 0$ bo‘ladi. Bundan

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)dx \ge 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Masalan, $I=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ ni hisoblang.

Yechish. Ushbu integralda $x=\varphi(t)=t^2$ almashtirishni bajaramiz. Ravshanki, $\varphi(t)$ funksiya $(0;1]$ oraliqda $\varphi'(t)=2t>0$ uzluksiz hosilaga ega hamda $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$. Demak,

$$I=\int_0^1\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\int_0^1\frac{2tdt}{(1+t^2)t}=2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=2\,arctgt\Big|_0^1=2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

13-bob. IKKI O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR

1-§. Ikki o‘zgaruvchili funksiya tushunchasi

Tabiatda, fan va texnikaning turli tarmoqlarida uchraydigan ko‘pchilik funksiyalar bitta o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lmay, ko‘p o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘ladi.

Masalan, tomonlari x va y ($x>0$, $y>0$) ga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi

$$S=x\cdot y \qquad (1)$$

bo‘lib, u x va y o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘ladi. Bu x va y o‘zgaruvchilarning turli qiymatlariga ko‘ra (1) formula yordamida ularga mos S ning qiymati topiladi.

Barcha haqiyqiy sonlar to‘plam R ni olib, bu to‘plamning ixtiyoriy ikki x va y elementlari (haqiqiy sonlar) yordamida (x,y) juftlikni tuzamiz. Barcha shunday juftliklar to‘plami

$$\{(x,y):\ x\in R, y\in R\}$$

ni R^2 orqali belgilaymiz:

$$R^2=\{(x,y):\ x\in R, y\in R\}$$

Odatda, R^2 to‘plamning elementi (juftlik) shu to‘plamning nuqtasi deyiladi.

Agar $(x_1,y_1)\in R^2$, $(x_2,y_2)\in R^2$, bo‘lib, $x_1=x_2, y_1=y_2$ bo‘ladi, (x_1, y_1) va (x_2, y_2) nuqtalar bir-biriga teng deyiladi:

$$(x_1,\ y_1)=(x_2,\ y_2)$$

Tekislikda Dekart koordinatalari sistemasi OXY ni olib, OX o‘qi bo‘yicha x o‘zgaruvchining qiymatlarini ($x\in R$),OY o‘qi bo‘yicha y o‘zgaruvchining qiymatlarini ($y\in R$) joylashtiramiz. Unda (x,y) juftlik $(x,y)\in R^2$ tekislikda bitta

$$M=M(x,y)$$

nuqtani aniqlaydi. Bunda x−M nuqtaning birinchi koordinatasi (abssissasi) y−M nuqtaning ikkinchi koordinatasi (ordinatasi) bo‘ladi.

(Demak, barcha $(x,y):x\in R, y\in R$ nuqtalar (juftliklar) to'plami tekislikni ifodalaydi.

Aytaylik, $(x_1,y_1)\in R^2$, $(x_2,y_2)\in R^2$ bo'lsin. ma'lumki ushbu

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

miqdor (x_1,y_1) va (x_2,y_2) nuqtalar orasidagi masofa deyiladi. Uni $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))$ kabi belgilaymiz:

$$d\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Masofa quyidagi xossalarga ega:

1) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))\geq 0$,

2) $((x_1,y_1),(x_2,y_2)=d((x_2,y_2),(x_1,y_1))$,

3) $d((x_1,y_1),(x_3,y_3))\leq d((x_1,y_1),(x_2,y_2))+d((x_2,y_2),(x_3,y_3))$

Endi R^2 to'plamning (tekislikning) ba'zi-bir qism to'plamlariga misollar keltiramiz.

1) R^2 tekislikning (a,b) nuqtasini hamda $r>0$ sonni olaylik. Tekislikning shunday (x,y) nuqtalari to'plamini qaraymizki, x va y koordinatalar ushbu

$$(x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2$$

tengsizlikni qanoatlantirsin. Bunday nuqtalar to'plami yopiq doira deyiladi va

$$\{(x,y)\in R^2:\ (x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2\}$$

kabi belgilanadi. Bunda (a,b) nuqta doira markazi, r esa radiusi deyiladi.

2) Tekislikning shunday (x,y) nuqtalari to'plamini qaraylikchi x va y lar ushbu

$$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$$

tengsizlikni qanoarlantirsin. Bunday nuqtalar to'plami ochiq doira deyiladi va

$$\{(x,y)\in R^2:\ (x-a)^2+(y-b)^2<r^2\}$$

kabi belgilanadi.

3) Ushbu

$$\{(x,y)\in R^2:\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$$

to'plam markazi (a,b) nuqtada, radiusi r ga teng aylana deyiladi.

4) Tekislikning shunday (x,y) nuqtalar to'plamini qaraymizki, ularning x va y koordinatalari ushbu $a\le x\le b$, $c\le y\le d$ (a,b,c,d-haqiqiy sonlar) tengsizliklarni qanoatlantirsin. Bunday nuqtalar to'plami to'g'ri to'rtburchak deyiladi va

$$\{(x,y)\in R^2:\ a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$$

kabi belgilanadi.

5) Tekislikning shunday (x,y) nuqtalar to'plamini qaraylikki, ularni x va y koordinatalari ushbu

$$a<x<b, \qquad c<y<d$$

tengsizliklarni qanoatlantirsin. Bunday nuqtalar to'plami ochiq to'g'ri to'rtburchak deyiladi va

$$\{(x,y)\in R^2:\ a<x<b,\ \ c<y<d\}$$

kabi belgilanadi.

Tekislikda biror M to'plam berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar M to'plamdan olingan har bir (x,y) nuqtaga biror qoida yoki qonunga ko'ra bitta haqiqiy z soni mos qo'yilgan bo'lsa, M to'plamda ikki o'zgaruvchili funksiya berilgan deyiladi va

$$z=f(x,y)$$

kabi yoziladi. Odatda M to'plam funksiyaning aniqlanish sohasi, x va y (o'zgaruvchilar) funksiya argumentlari, z esa x va y larning funksiyasi deyiladi.

Masalan, tekislikning har bir (x,y) nuqtasiga shu nuqta koordinatalari x va y larning ko'paytmasini mos qo'yish qoidasi berilsin. Unda

$$z=f(x,y)=x\cdot y$$

funksiya hosil bo'ladi.

Quyidagi funksiyalar

$$z=x^2+y^2, \qquad z=\sqrt{1-x^2-y^2},$$

$$z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

ikki o'zgaruvchili funksiyalar bo'ladi.

Aytaylik, M ($M\subset R^2$) to'plamda biror

$$z=f(x,y)$$

funksiya berilgan bo'lsin. M to'plamning (x_0,y_0) nuqtasini olamiz. Funksiya shu (x_0,y_0) nuqtaga bitta z_0 sonni mos qo'yadi. Bu z_0 son

$$z=f(x,y)$$

funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi qiymati deyiladi va

$$z_0=f(x_0,y_0)$$

kabi yoziladi.

Ma'lumki, koordinatalari x,y,z bo'lgan (x,y,z) nuqta fazodagi nuqtani ifodalaydi.

Uning (x_0,y_0,z_0) nuqtasi fazo nuqtasi bo'ladi.

Barcha x,y,z nuqtalardan iborat (bunda $(x,y)\in M, z=f(x,y)$) to'plam $z=f(x,y)$ funksiyaning grafigi deyiladi.

Masalan,

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

funksiyaning aniqlanish sohasi

$$1-x^2-y^2\geq 0, \qquad x^2+y^2\leq 1, \qquad x^2+y^2\leq 1^2,$$

ya'ni markazi (0, 0) nuqtada, radiusi 1 ga teng doiradan iborat bo'ladi.

Aytaylik, $z=f(x,y)$ funksiya M ($M\subset R^2$) to'plamda berilgan bo'lib, x va y o'zgaruvchilarning har biri (α,β) integralda berilgan funksiyalar

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t), \qquad t\in(\alpha,\beta)$$

bo'lsin. Bunda t o'zgaruvchi (α,β) oraliqda o'zgarganda mos x va y lardan tuzilgan (x,y) juftlik M to'plamga tegishli bo'lsin. Natijada ushbu

$$z=f(x,y)=f(\varphi(t), \quad \psi(t))$$

funksiya hosil bo'ladi. Bunda z finksiya t o'zgaruvchining murakkab funksiyasi bo'ladi.

2-§. Tekislik nuqtalaridan iborat ketma-ketlik va uning limiti

Har bir natural n songa tekislikda bitta (x_n,y_n) nuqtani mos qo'yuvchi qoidaga ega bo'laylik:

Bu qoidaga binoan; $n\rightarrow(x_n,y_n)$ $(n=1,2,3,...)$

$$(x_1,y_1),(x_1,y_2),...,(x_n,y_n),...$$

to'plamga ega bo'lamiz. Bu to'plam tekislik nuqtalaridan iborat ketma-ketlik deyiladi va $\{(x_n,y_n)\}$ kabi belgilanadi. Bunda har bir

$$(x_n,y_n) \qquad (n=1,2,3,...)$$

nuqta ketma-ketlikning hadi deyiladi.

Masalan,

$$(1,1),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),...,\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),...;$$

$$(1,1),(1,2),...,(1,n),... ;$$

$$(1,1),(-1,-1),(1,1),...$$

tekislik nuqtalaridan iborat ketma-ketliklar bo'ladi.

Aytaylik, biror $\{(x_n,y_n)\}$:

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n),...$$

ketma-ketlik hamda (a,b) nuqta berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday natural son n_0 topilsa, barcha $n>n_0$ uchun

$$d((x_n,y_n),(a,b))<\varepsilon \qquad (2)$$

tengsizlik bajarilsa, (a,b) nuqta $\{(x_n,y_n)\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(a,b)$$

kabi yoziladi.

Ravshanki, bu ta'rifdagi (2) tengsizlikni quyidagicha

$$\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}<\varepsilon$$

ham yozish mumkin.

Aytaylik, $\{(x_n,y_n)\}$:

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n),\ldots$$

ketma-ketlikning limiti (a,b) bo'lsin:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(a,b).$$

Ketma-ketlik limiti ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday notural n_0 son topiladiki, barcha$n>n_0$ uchun

$$d((x_n,\ y_n),(a,b)\ )<\varepsilon,\ ya'ni$$

$$\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}<\varepsilon$$

bo'ladi.

Ravshanki, bu tengsizlikdan quyidagi

$$|x_n-a|<\varepsilon,\ |y_n-b|<\varepsilon$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Bu esa

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a, \qquad \lim_{n\to\infty}y_n=b$$

bo'lishini bildiradi.

Shunday qilib, tekislik nuqtalaridan iborat $\{(x_n,y_n)\}$: ketma-ketlikning limiti (a,b) bo'lsa, u holda bu ketma-ketlikning koordinatalaridan iborat $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketliklari ham limitga ega bo'ladi. Ularning limiti (a,b) nuqtaning mos koordinatalariga teng bo'ladi:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (a,b):$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Aytaylik, tekislik nuqtalaridan iborat $\{(x_n, y_n)\}$: ketma-ketlik berilgan bo‘lib, ularning koordinatalaridan tuzilgan

$$\{x_n\} \text{ va } \{y_n\} \qquad (n=1,2,3,...)$$

sonlar ketma-ketliklari mos ravishda a va b limitlarga ega bo‘lsin:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Sonlar ketma-ketligi limiti ta’rifiga ko‘ra ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topiladiki, barcha $n>n_0$ uchun

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

bo‘ladi.

Shuningdek, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ olinganda ham shunday natural n_0' son topiladiki, barcha $n>n_0'$ uchun

$$|y_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

bo‘ladi.

Agar n_0 va n_0' natural sonlarning kattasini n_0^* deyilsa, unda barcha $n>n^*$ uchun bir yo‘la

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \qquad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

tengsizliklar bajariladi. Bu tengsizliklardan foydalanib topamiz:

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2\cdot\frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.$$

Demak,

$$d((x_n,y_n),(a,b))=\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}<\varepsilon$$

bundan

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(a,b)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, tekislik nuqtalaridan iborat $\{(x_n,y_n)\}$ ketma-ketlikning koordinatalaridan tuzilgan $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketliklarining limiti (a,b) nuqtaning mos koordinatalariga teng bo'lsa, u holda $\{(x_n,y_n)\}$ ketma-ketlikning limiti (a,b) bo'ladi.

3-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning limiti

Aytaylik, tekislikda biror M to'plam va (x_0,y_0) nuqta berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Markazi (x_0,y_0) nuqtada, radiusi $\varepsilon(\varepsilon>0)$ ga teng bo'lgan doira (ochiq doira) (x_0,y_0) nuqtaning atrofi (doiraviy atrofi) deyiladi va $U\varepsilon((x_0,y_0))$ kabi belgilanadi:

$$U\varepsilon((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R^2:\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2\}.$$

Agar (x_0,y_0) nuqtaning har bir atrofida M to'plamning (x_0,y_0) nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi mavjud bo'lsa, (x_0,y_0) nuqta M to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

Masalan,

$$M=\{(x,y)\in R^2:\ x^2+y^2\leq 1\}$$

to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

Agar (x_0,y_0) nuqta M to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda

1) (x_0,y_0) nuqtaning har bir atrofida M to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'ladi.

2) M to'plamning nuqtalaridan (x_0,y_0) nuqtaga intiluvchi $\{(x_n,y_n)\}$ ketma-ketlik ($(x_n,y_n)\in M$, $n=1,2,\ldots$) ajratish mumkin:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x_0,y_0)$$

Tekislikda biror M to'plam berilgan bo'lib, (x_0,y_0) nuqta M to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Shu to'plamda $z=f(x,y)$ funksiya aniqlangan deylik.

Ta'rif. Agar M to'plamning nuqtalaridan tuzilgan (x_0,y_0) ga intiluvchi har qanday $\{(x_n,y_n)\}$ ketma-ketlik olinganda ham mos $\{f(x_n,y_n)\}$ ketma-ketlik har doim bitta A songa intilsa, A son f(x,y) funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi limiti deyiladi va

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

kabi yoziladi.

Funksiya limitini quyidagicha ta'riflasa ham bo'ladi.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son

$$d((x,y),(x_0,y_0))<\delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $(x,y)\in M$ nuqtalar uchun.

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A son f(x,y) funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi limiti deyiladi va

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

kabi belgilanadi.

Masalan, $f(x,y)=x^2+y^2$ funksiyaning (0,0) nuqtadagi limiti 0 bo'lishi quyidagicha ko'rsatiladi:

(0,0) nuqtaga intiluvchi $\{(x_n,y_n)\}$ ketma-ketlikni olamiz:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$$

Yuqorida aytilganlariga ko'ra bu holda

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n=0$$

bo'ladi. Berilgan funksiyaning (x_n,y_n) dagi qiymatlaridan tuzilgan ketma-ketlik

$$\{f(x_n,y_n)\}=\{(x_n^2+y_n^2)\}$$

bo‘lib, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ da $f(x_n, y_n) = x_n^2 + y_n^2 \to 0$ bo‘ladi. Demak,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + y^2) = 0.$$

Limitga ega bo‘lgan funksiyalarning ba’zi-bir xossalarini keltiramiz:

1) Agar

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$$

limit mavjud va chekli bo‘lsa, u holda $f(x,y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtaning yetarlicha kichik atrofida chegaralangan bo‘ladi.

2) Agar

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = B$$

limitlar mavjud bo‘lsa, u holda $f(x,y) \pm g(x,y)$ funksiyaning limiti mavjud bo‘lib,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \left[f(x,y) \pm g(x,y) \right] = A \pm B$$

bo‘ladi.

3) Agar

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = B$$

limitlar mavjud bo‘lsa, u holda $f(x,y) \cdot g(x,y)$ funksiyaning ham limiti mavjud va

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \left[f(x,y) \cdot g(x,y) \right] = A \cdot B$$

bo‘ladi.

4) Agar

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = B$$

bo'lib, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)\neq 0$ bo'lsa, u holda $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{A}{B}$$

bo'ladi.

4-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi

Aytaylik $z=f(x,y)$ funksiya M to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0,y_0)\in M$ nuqta M to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif. Agar

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiya limiti ta'rifini e'tiborga olib, funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi uzliksizligini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son topilsaki, $d((x,y),(x_0,y_0))<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $(x,y)\in M$ nuqtalar uchun

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiya uzluksizligini uning orttirmasi yordamida ham ta'riflash mumkin.

M to'plamda (x_0,y_0) nuqta bilan birga

$$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$$

nuqtani ham olamiz. So'ng ushbu

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

ayirmani qaraymiz. Odatda bu ayirma, $f(x,y)$ funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi to'liq orttirmasi deyiladi.

Ta'rif. Agar argument orttirmalari Δx va Δy nolga intilganda funksiyaning to'liq orttirmasi $\Delta f(x_0,y_0)$ ham nolga intilsa

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \Delta f(x_0,y_0)=0$$

$f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz deyiladi.

Agar $f(x,y)$ funksiya M to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u shu M to'plamda uzluksiz deyiladi.

Eslatma. Agar yuqoridagi

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

munosabat bajarilmasa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada uzlishga ega deyiladi.

M to'plamda berilgan $f(x,y)$ funksiya to'plamining bir necha nuqtasida yoki to'plamdagi biror chiziqda uzilishga ega bo'lishi mumkin.

Endi ikki o'zgaruvchili uzluksiz funksiyaning ba'zi-bir xossalarini keltiramiz.

Aytaylik, $f(x,y)$ va $g(x,y)$ funksiyalarning har biri M to'plamda berilgan bo'lib, M to'plamning (x_0,y_0) nuqtasida uzluksiz bo'lsin. U holda:

1) $f(x,y)\pm g(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'ladi;

2) $f(x,y)\cdot g(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'ladi;

3) $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ funksiya $(g(x,y)\neq 0)$ (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'ladi

5-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning hosila va differensiallari

$z=f(x,y)$ funksiya M $(M\subset R^2)$ to'plamda berilgan bo'lsin. Bu M to'plamda (x_0,y_0) nuqta birga $(x_0+\Delta x,y_0)$ nuqtani olib ushbu

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

ayirmani qaraymiz. Odatda bu ayirma $f(x,y)$ funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi x o'zgaruvchi (argument) bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi va $\Delta_x f(x_0,y_0)$ kabi belgilanadi:

$$\Delta_x f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0)$$

Xuddi shunga o'xshash

$$\Delta_y f(x_0,y_0) = f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

ayirma f(x,y) funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi y o'zgaruvchi (argument) bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi.

Masalan, $f(x,y)=x\cdot y$ funksiyaning xususiy orttirmalari

$$\Delta_x f(x,y) = f(x+\Delta x,y) - f(x,y) = (x+\Delta x)\cdot y - xy = y\cdot\Delta x,$$

$$\Delta_y f(x,y) = f(x,y+\Delta y) - f(x,y) = x\cdot(y+\Delta y) - xy = x\cdot\Delta y$$

bo'ladi.

M to'plamda (x_0,y_0) nuqta bilan birga $(x_0+\Delta x,y_0)$ va $(x_0,y_0+\Delta y)$ nuqtalarni olib, funksiyaning xususiy orttirmalarini topamiz:

$$\Delta_x f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0),$$

$$\Delta_y f(x_0,y_0) = f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

Ta'rif. Agar $\Delta x \to 0$ da

$$\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

nisbatning limiti mavjud bo'lsa, bu limit f(x,y) funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \quad yoki \; f_x'(x_0,y_0)$$

kabi belgilanadi:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = f_x'(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

Xuddi shunga o'xshash $\Delta y \to 0$ da

$$\frac{\Delta_y f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

nisbatning limiti mavjud bo'lsa, bu limit f(x,y) funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \quad yoki\ f_y'(x_0,y_0)$$

kabi belgilanadi:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=f_y'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

Keltirilgan ta'rifdan ko'rinadiki, z=f(x,y) funksiyaning x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasini hisoblashda bu funksiyaning y o'zgaruvchini o'zgarmas, y bo'yicha xususiy hosilasini hisoblashda esa x o'zgaruvchini o'zgarmas deb qarash kerak ekan.

Demak, z=f(x,y) funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblashda bir o'zgaruvchili funksiyaning hosilalar jadvali hamda hosila hisoblashdagi mazkur qoidalardan foydalanish mumkin bo'ladi.

Masalan:

1) $f(x,y)=x^2+y^2$ funksiyaning xususiy hosilalari

$f_x'(x,y)=(x^2+y^2)_x'=2x,\quad f_y'(x,y)=(x^2+y^2)_y'=2y,$

2) $f(x,y)=x^y$, $(x>0)$ funksiyaning xususiy hosilalari

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^y)=y\cdot x^{y-1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^y)=x^y\cdot\ln x,$$

6-§. Funksiyaning to'liq orttirmasi

z=f(x,y) funksiya M $(M\subset R^2)$ to'plamda berilgan bo'lib, to'plamning (x_0, y_0) nuqtasini belgilaymiz.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ va $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalar mavjud va ular (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'lsin.

Endi $z=f(x,y)$ funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi orttirmasi $\Delta f(x_0,y_0)$ ni quyidagicha yozib olamiz:

$$\Delta f(x_0,y_0)=[f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+$$
$$+[f(x_0,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)] \qquad (3)$$

Lagranj teoremasidan foydalanib topamiz:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0+\Delta y)=f_x'(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)\cdot\Delta x,$$
$$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0+\theta_1\Delta y)\cdot\Delta y$$

$(0<\theta,\ \theta_1<1)$. Natijada yuqoridagi (3) tenglik ushbu ko‘rinishga keladi.

$$\Delta f(x_0,\ y_0)=f_x'(x_0+\theta\cdot\Delta x,y_0+\Delta y)\cdot\Delta x+f_y'(x_0,y_0+\theta_1\cdot\Delta y)\cdot\Delta y \qquad (4)$$

Shartga ko‘ra funksiyaning f_x' va f_y' xususiy hosilalari (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz. Demak,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to}} f_x'(x_0+\theta\cdot\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x'(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to}} f_y'(x_0,y_0+\theta_1\cdot\Delta y)=f_x'(x_0,y_0).$$

Shunday qilib,

$$f_x'(x_0+\theta\cdot\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x'(x_0,y_0)+\alpha,$$
$$f_y'(x_0,y_0+\theta_1\Delta y)=f_y'(x_0,y_0)+\beta \qquad (5)$$

deb yozish mumkin. Bunda α va β lar Δx va Δy larga bog‘liq hamda $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ da $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$ (4) va (5) munosabatlardan

$$\Delta f(x_0,y_0)=[f_x'(x_0,y_0)+\alpha]\cdot\Delta x+$$
$$+[f_y'(x_0,y_0)+\beta]\cdot\Delta y=$$
$$=f_x'(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\cdot\Delta y+$$
$$+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak

$$\Delta f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y \qquad (6)$$

bu funksiya orttirmasining formulasi deyiladi.

Natija. Agar f(x,y) funfsiya (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz f_x', f_y' xususiy hosilalarga ega bo'lsa, funksiya shu (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'ladi.

7-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning differensiali

$z=f_1(x,y)$ funksiya M $(M\subset R^2)$ to'plamda berilgan. Bu M to'plamda (x_0, y_0) va $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ nuqtalarni olib funksiya orttirmasini topamiz.

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

Ta'rif. Agar f(x,y) funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi orttirmasi ushbu

$$\Delta f(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$$

ko'rinishida ifodalansa, funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi deyiladi, bunda A,B – o'zgarmas. α va β esa Δx va Δy ga bog'liq hamda $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ da α va β lar ham nolga intiladi.

Aytaylik, f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Unda ta'rifga ko'ra

$$\Delta f(x_0,y_0)= A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$$

bo'ladi. Bu tenglikda $\Delta x\neq 0, \Delta y=0$ deb topamiz.

$$\Delta x\, f(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$$

keyingi tenglikning ikki tomonini Δx ga bo'lib,

$$\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x}=A+\alpha$$

tenglikka kelamiz. Bunda esa

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(A+\alpha)=A$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$f_x'(x_0,y_0)=A.$$

Xuddi shunga o'xshash, (6) tenglikda $\Delta x=0, \Delta y\neq 0$ deb,

$$\Delta_y f(x_0,y_0)=B\cdot\Delta y+\beta\cdot\Delta y$$

$$\frac{\Delta_y f(x_0,y_0)}{\Delta y}=B+\beta, \qquad \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}(B+\beta)=B,$$

$$f_y'(x_0,y_0)=B$$

bo'lishini topamiz.

Shunday qilib, quyidagi xulosaga kelamiz. Agar f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, funksiya shu nuqtada f_x' va f_y' xususiy hosilalarga ega bo'ladi. Funksiya orttirmasi esa ushbu

$$\Delta f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$$

ko'rinishga keladi.

Aytaylik, z=f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda

$$\Delta f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$$

bo'ladi. Bu ifodadagi

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

yig'indi f(x,y) funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi differensiali deyiladi va $df(x_0,y_0)$ yoki dz kabi belgilanadi:

$$df(x_0,y_0)=dz=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y$$

Demak, funksiya differensial funksiya orttirmasining Δx va Δy ga nisbatan chiziqli bosh qismi. Agar $\Delta x=dx, \Delta y=dy$ deyilsa, u holda funksiya differensiali ushbu ko'rinishni oladi:

$$dz=df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

f(x,y) va g(x,y) funksiyalar M to'plamda berilgan bo'lib, (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda

$$f(x,y) \pm g(x,y),$$

$$f(x,y) \cdot g(x,y),$$

$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)}, \quad (g(x,y) \neq 0)$$

funksiyalar ham shu (x0,y0) nuqtada differensiallanuvchi va

$$d[f(x,y) \pm g(x,y)] = df(x,y) \pm dg(x,y),$$

$$d[f(x,y) \cdot g(x,y)] =$$

$$= f(x,y) \cdot df(x,y) + g(x,y) \cdot df(x,y),$$

$$d\left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right] = \frac{g(x,y)df(x,y) - f(x,y)dg(x,y)}{g^2(x,y)}$$

bo'ladi. Shuningdek,

$$d[c \cdot f(x,y)] = c \cdot df(x,y), \ c = const$$

bo'ladi.

8-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli xususiy hosilalari va differensiali

z=f(x,y) funksiya M ($M \subset R^2$) to'plamda berilgan bo'lib, $(x,y) \in M$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Ravshanki, funksiya (x,y) nuqtada xususiy $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$ hosilalariga ega bo'ladi.

Bu xususiy hosilalar o'z navbatida x va y o'zgaruvchilarning funksiyasi bo'lishi mumkin.

Ta'rif. z=f(x,y) funksiya xususiy hosilalari $f_x'(x,y)$ va $f_y'(x,y)$ larning xususiy hosilalari berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari deyiladi va

$$f_{x^2}'', f_{xy}'', f_{yx}'', f_{y^2}'' \ yoki$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(f'_x(x,y)\right)'_x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(f'_x(x,y)\right)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \left(f'_y(x,y)\right)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(f'_y(x,y)\right)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Eslatma. Odatda $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ va $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ xususiy hosilalar aralash hosilalar deyiladi.

Bu aralash hosilalar (x,y) nuqtada uzluksiz bo'lsa, bir-biriga teng bo'ladi.

Xuddi yuqoridagidek, z=f(x,y) funksiyaning uchinchi, to'rtinchi va hokazo tartibli xususiy hosilalari ta'riflanadi.

Masalan,

$$f(x,y)=x^2+y^2+x^2y^2$$

funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari quyidagicha bo'ladi.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + x^2 y^2) = 2x + 2xy^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + x^2 y^2) = 2y + 2x^2 y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(2x + 2xy^2) =$$
$$= 2 + 2y^2 = 2(1 + y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2y + 2x^2 y) =$$
$$= 2 + 2x^2 = 2(1 + x^2).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 2xy^2) = 4xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2y + 2x^2 y) = 4xy$$

Aytaylik, z=f(x,y) funksiya M to'plamda berilgan bo'lib, $(x,y)\in M$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Ma'lumki, funksiyaning diffrensiali

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (7)$$

bo'ladi.

Ta'rif. z=f(x,y) funksiyaning (x,y) nuqtadagi differensiali df(x,y) ning differensiali berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deyiladi va $d^2f(x,y)$ kabi belgilanadi. Demak,

$$d^2f(x,y)=d(df(x,y)).$$

Endi f(x,y) funksiya differensialining (7) ifodasidan foydalanib, f(x,y) funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali ifodasini topamiz:

$$d^2 f(x,y) = d\left(df(x,y)\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{df}{dx}\right)\cdot dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy.$$

Agar

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'}$$

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy=$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy$$

va

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda

$$d^2 f(x,y)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy\right)dx+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dy=$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2=$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

bo'ladi.

Demak,

$$d^2 f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

Xuddi yuqoridagidek, $z=f(x,y)$ funksiyaning uchinchi, to'rtinchi va hakozo tartibli differensiallari ta'riflanadi va ularning ifodalari topiladi.

Ikki o'zgaruvchi funksiya uchun Teylor formulasini yozish mumkin. Quyida bunday formulani keltirish bilan kifoyalanamiz. $z=f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtaning

$$U\varepsilon((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R^2 : d((x,y),(x_0,y_0))<\delta\}$$

atrofida berilgan bo'lib, unda funksiya birinchi, ikkinchi va hokazo $(n+1)$ tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. U holda

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+$$

$$+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+\right.$$

$$\left.+2\left|\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]+\ldots+\right.$$

$$+\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x-x_0)^n+C_n^1\frac{\partial^n f(x-x_0)}{\partial x^{n-1}\partial y}(x-x_0)^{n-1}(y-y_0)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial y^n}(y-y_0)^{n-1}\right]+R_n$$

bo'ladi.

Bu formula ikki o'zgaruvchili funksiyaning Teylor formulasi deyiladi.

9-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ekstremum qiymatlari

Aytaylik, $z=f(x,y)$ funksiya $M\subset R^2$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0, y_0)\in M$ bo'lsin.

Ta'rif. Agar (x_0,y_0) nuqtaning M to'plamga tegishli shunday

$$U_\delta((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R^2 : d((x,y),(x_0,y_0))<\delta\}$$

atrofi topilsaki, ixtiyoriy $(x,y)\in U(x_0,y_0)\}$ uchun

$$f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada lokal maksimumga erishadi deyiladi. (x_0,y_0) nuqta funksiyaga maksimum qiymat beradigan nuqta, $f(x_0,y_0)$ esa $f(x,y)$ funksiyaning maksimum qiymati deyiladi. Uni

$$max\{f(x,y)\}, \ ((x,y)\in U_\delta((x_0,y_0)))$$

kabi belgilanadi. Demak

$$f(x_0,y_0)= max\{f(x,y)\}$$

Ta'rif. Agar (x_0,y_0) nuqtaning M to'plamga tegishli bo'lgan shunday

$$U_\delta((x_0,y_0))= \{(x,y)\in R^2: d((x,y),(x_0,y_0))\}$$

atrofi topilsaki, ixtiyoriy $(x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)$ uchun

$$f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x,y)$ funfsiya, (x_0,y_0) nuqtada lokal minimumga erishadi deyiladi. (x_0,y_0) nuqta funksiyaga minimum qiymat beradigan nuqta, $f(x_0,y_0)$ esa funksiyaning minimum qiymati deyiladi. Uni

$$min\{f(x,y)\}, \ ((x,y)\in U_\delta((x_0,y_0)))$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$f(x_0,y_0)= min\{f(x,y)\}$$

funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari umumiy nom bilan uning ekstremumi deyiladi.

10-§. Funksiya ekstremumining zaruriy va yetarli shartlari

$z=f(x,y)$ funksiya $M\subset R^2$ to'plamda berilgan bo'lib, (x_0, y_0) nuqtada ekstremumga, aytaylik maksimumga erishsin. Unda (x_0, y_0) nuqtaning shunday $U_\delta((x_0,y_0))$ atrofidagi ixtiyoriy (x, y) nuqtalar uchun

$$f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$$

bo'ladi. Jumladan

$$(x,y_0)\in U_\delta((x_0,y_0))$$

uchun ham

$$f(x,y_0)\geq f(x_0,y_0)$$

bo'ladi. Bu hol bir o'zgaruvchili $f(x,y_0)$ funksiyaning (bunda x argument) x_0 nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishishini bildiradi.

Agar $f(x,y)$ funfsiya, (x_0,y_0) nuqtada x o'zgaruvchi bo'yicha f_x' xususiy hosilaga ega bo'lsa, u holda Ferma teoremasiga ko'ra

$$f_x'(x_0,y_0)=0$$

bo'ladi.

Yuqoridagidek, (x_0,y_0) nuqtaning $U_\delta((x_0,y_0))$ atrofidagi ixtiyoriy nuqtada, jumladan

$$(x,y_0)\in U_\delta((x_0,y_0))$$

uchun

$$f(x,y_0)\leq f(x_0,y_0)$$

bo'ladi. Bu esa bir o'zgaruvchili $f(x_0,y)$ funksiyani (bunda y argument) y_0 nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishishini bildiradi.

Agar $f(x,y)$ funksiya $f(x_0,y_0)$ nuqtada y bo'yicha f_y' xususiy hosilaga ega bo'lsa, yana Ferma teoremasiga ko'ra $f_y'(x_0,y_0)=0$ bo'ladi.

$z=f(x,y)$ funksia (x_0,y_0) nuqtada minumumga erishganda ham xuddi shunday hol yuz beradi. Shunday qilib, $z=f(x,y)$ funksiya $(x_0,y_0)\in M$ nuqtada ekstremumga erishsa va shu nuqtada funksiya f_x', f_y' xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$f_x'(x_0,y_0)=0, \quad f_y'(x_0,y_0)=0$$

bo'ladi. Bu funksiya ekstremumga erishishning zaruriy shartini ifodalaydi.

Funksiya xususiy hosilalarini nolga aylantiradigan nuqtalar uning stasionar (turg'un) nuqtalari deyiladi.

$z=f(x,y)$ funksiya $M(M\subset R^2)$ to'plamda berilgan bo'lib, (x_0,y_0) nuqta va uning atrofi $U_\delta((x_0,y_0))$ shu to'plamga tegishli bo'lsin:

$$(x_0,y_0)\in M, \qquad U_\delta((x_0,y_0))\subset M$$

Agar $(x,y)\in U_\delta((x_0,y_0))$ nuqtalarda

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)>0$$

bo‘lsa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada maksimumga

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)<0$$

bo‘lsa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada maksimumga erishadi.

Demak, (x_0,y_0) nuqtaning $U_\delta((x_0,y_0))$ atrofidagi (x,y) nuqtalarda

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

ayirmaning har doim musbat yoki manfiy bo‘lishini aniqlash kerak bo‘ladi. Uni hal etishda $f(x,y)$ funksiyaga ma’lum shartlar qo‘yiladi $z=f(x,y)$ funksiya uchun:

1) (x_0,y_0) nuqtaning $U_\delta((x_0,y_0))$ atrofida f_x', f_y' hamda f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2} xususiy hosilalar mavjud va ular uzluksiz.

2) $f_x'(x_0,y_0)=0$, $f_y'(x_0,y_0)=0$

Teylor formulasidan foydalanib topamiz:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+$$

$$+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(y-y_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]$$

bunda ikkinchi tartibli xususiy hosilalar

$$(x_0+\theta_1(x-x_0),\ y_0+\theta_2\cdot(y-y_0))$$

nuqtada hisoblangan ($0<\theta_1, \theta_2<1$).

Natijada,

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]$$

bo'ladi.

Quyidagi belgilashlarni bajaramiz:

$$f''_{x^2}(x_0,y_0)=a_{11},\ f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)=a_{12},\ f''_{y^2}(x_0,y_0)=a_{22}$$

Shartga ko'ra ikkinchi tartibli xususiy hosilalar (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz. Demak,

$$f''_{x^2}\left(x_0+\theta_1(x-x_0),\ y_0+\theta_2(y-y_0)\right)=$$

$$=f''_{x^2}(x_0,y_0)+\alpha_{11}=a_{11}+\alpha_{11},$$

$$f''_{xy}\left(x_0+\theta_1(x-x_0),\ y_0+\theta_2\cdot(y-y_0)\right)=f''_{xy}(x_0,y_0)+\alpha_{12}=$$

$$=a_{12}+\alpha_{12},$$

$$f''_{(y^2)}(x_0+\theta_1(x-x_0),y_0+\theta_2(y-y_0))=$$

$$=f''_{y^2}(x_0,y_0)+\alpha_{22}=a_{22}+\alpha_{22}$$

Bunda $x-x_0\to 0$, $y-y_0\to 0$ da α_{11}, α_{12}, α_{22}, larning har biri nolga intiladi.

Natijada

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}\left[a_{11}(x-x_0)^2+\right.$$

$$+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+$$

$$+a_{22}(y-y_0)^2\Big]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\alpha_{11}(x-x_0)^2+2\alpha_{12}(x-x_0)(y-y_0)+\alpha_{22}(y-y_0)^2\right.$$

bo'lib,

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

ayirmaning ishorasi

$$a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+$$

$$+a_{22}(y-y_0)$$

ifodaning ishorasiga bog'liq bo'ladi.

1) Agar $a_{11}\cdot a_{22}-a^2_{12}>0$ va $a_{11}>0$ bo'lsa u holda

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)>0$$

bo'lib, f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada minimumga erishadi.

2) Agar $a_{11}\cdot a_{22}-a^2_{12}>0$ va $a_{11}<0$ bo'lsa u holda

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)<0$$

bo'lib, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada maksimumga erishadi.

3) Agar $a_{11}\cdot a_{22}-a^2_{12}<0$ bo'lsa, u holda

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

ayirma ishora saqlamaydi. Bu holda $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada ekstremumga erishmaydi.

4) Agar $a_{11}\cdot a_{22}-a^2_{12}=0$ bo'lsa, u holda $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada ekstremumga erishishi ham mumkin, erishmasligi ham mumkin. Uni qo'shimcha tekshirish bilan hal qilinadi.

Misol. Ushbu

$$z=x^2-2xy+2y^2-4x+6y+10$$

funksiyaning ekstremumi topilsin.

◄ Berilgan funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial z}=2x-2y-4,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-2x+4y+6$$

Bu xususiy hosilalarini nolga tenglab ushbu

$$\begin{cases} 2x-2y-4=0, \\ -2x+4y+6=0 \end{cases}$$

sistemani yechamiz. Bu sistemaning yechimi $x=1$, $y=-1$ ya'ni $(1,-1)$ bo'ladi. Demak, $(1,-1)$ berilgan funksiyaning statsionar nuqtasi bo'ladi.

Funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini topib, ularning statsionar $(1,-1)$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(2x-2y-4)=2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(-2x+2y+6)=4.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2x-2y-4)=-2$$

Demak,

$$a_{11}=2, \qquad a_{12}=-2, \qquad a_{22}=4.$$

Endi $a_{11}a_{22}-a^2_{12}$ ni hisoblaymiz:

$$a_{11}a_{22}-a^2_{12}=2\cdot 4-(-2)^2=8-4=4$$

Demak, $a_{11}a_{22}-a^2_{12}4>0$ va $a_{11}=2>0$. Yuqorida aytilganiga ko'ra berilgan funksiya $(1,-1)$ nuqtada minimumga erishadi.

Funksiyaning minimum qiymati

$$\min f(x,y)=\min(x^2-2xy+2y^2-4x+6y)=5$$

ga teng bo'ladi.▶

14-bob. QATORLAR

1-§. Sonli qatorlar

Biror

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_2, \ldots$$

sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lib, uning yordamida ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

ifodani hosil qilamiz

Odatda (1) ifoda sonli qator deyiladi. Bunda $a_n (1, 2, 3, \ldots)$ sonlar qatorning hadlari (a_1 – birinchi had, a_2 – ikkinchi had,..., $a_n - n$ – had yoki umumiy had) deyiladi.

(1) qator qisqacha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

kabi yoziladi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Bu qator hadlari yordamida quydagi yig'indilarni tuzamiz:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ular (1) qatorning qismiy yig'indilari deyiladi.

Natijada, (1) qatorning qismiy yig'indilaridan iborat ushbu

$$S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

sonlar ketma-ketligi hosil bo'ladi.

Masalan, agar $a_n = \frac{1}{2^n}$ bo‘lsa, u holda qator

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots \; yoki \; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Agar $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ bo‘lsa, u holda quyidagi ko‘rinishdagi qatorga ega bo‘lamiz:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots \; yoki \; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Ta’rif. Agar $n\to\infty$ da (1) qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat $\{S_n\}$ sonlar ketma-ketligi chekli limitga ega,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

bo‘lsa, (1) qator yaqinlashuvchi, S esa qatorning yig‘indisi deyiladi:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \cdots$$

Ta’rif. Agar $n\to\infty$ da (1) qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat $\{S_n\}$ sonlar ketma-ketligining limiti cheksiz yoki bu limit mavjud bo‘lmasa, (1) qator uzoqlashuvchi deyiladi.

Masalan, ushbu

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot n}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

qatorning qismiy yig‘indisi

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

bo'lib, uning limiti

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

ga teng.

Demak, qaralayotgan qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi 1 ga teng.

Ushbu

$$1-1+1-1+...+(-1)^{n+1}+...$$

Qatorning qismiy yig'indisi

$$S_n=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}=\begin{cases}1, & agar\ \ n-toq\ bo'lsa\\ 0, & agar\ \ n-juft\ bo'lsa\end{cases}$$

bo'lib, ketma-ketlik limitga ega emas.

Demak, bu qator uzoqlashuvchi.

Yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi qatorlarga misollar ko'ramiz.

1-misol. Ushbu qatorni yaqinlashishga tekshiring:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}+\cdots.$$

Yechish. Berilgan qatorning n-xususiy yig'indisi

$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$. Bu yig'indini soddalashtirish maqsadida qatorning n-hadini quyidagi $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$ ko'rinishda yozib olamiz. U holda

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

bo'ladi. Ravshanki, $\{S_n\}$ ketma-ketlik limiti mavjud va $\frac{3}{4}$ ga teng. Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi bo'lib, uni $\frac{3}{4}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\dots+\frac{1}{n(n+2)}+\dots$, yoki $\frac{3}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ kabi yozish mumkin ekan.

2-misol. Ushbu qatorni $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\dots$ yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bu qatorning n-xususiy yig'indisi $S_n=1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ va $S_n>\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}_{n-\text{ta}}=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot n=\sqrt[3]{n^2}$ bo'lganligi sababli, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$ bo'ladi. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

Geometrik qator. Qatorga eng sodda misol sifatida geometrik progressiya barcha hadlarining yig'indisini olishimiz mumkin:

$$a+aq+aq^2+\dots+aq^{n-1}+\dots \qquad (3)$$

bunda $a\neq 0$. Bu qator *geometrik qator* deyiladi. Geometrik qator q ning qanday qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'lishini aniqlaymiz. Buning uchun uning n-xususiy yig'indisini qaraymiz. Geometrik progressiya birinchi n ta hadi yig'indisining formulasiga ko'ra ($q\neq 1$)

$$S_n=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-a\frac{q^n}{1-q}$$

o'rinli.

Agar $|q|<1$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ mavjud va

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{1-q} - a\dfrac{q^n}{1-q}\right) = \dfrac{a}{1-q}$ bo'ladi. Demak, $|q|<1$ bo'lganda (3) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $\dfrac{a}{1-q}$ bo'ladi.

Agar $|q|>1$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ va $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ bo'ladi. Demak, bu holda geometrik qator uzoqlashuvchi bo'ladi. Agar $q=-1$ bo'lsa, qatorning xususiy yig'indisi $S_n = \dfrac{a}{2}(1+(-1)^n)$ bo'ladi. Ravshanki (qarang, 3-misol) bu holda xususiy yig'indilar ketma-ketligi uzoqlashuvchi, demak (3) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi. Agar $q=1$ bo'lsa, qatorning xususiy yig'indisi $S_n=a+a+\ldots a=na$ va $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ bo'ladi.

Shunday qilib, geometrik qator $|q|<1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $|q|\geq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi. Yaqinlashuvchi bo'lgan holda cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisining formulasi hosil bo'ladi:

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

2-§. Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari

Yaqinlashuvchi qatorlar bir nechta xossalarga ega.

1-xossa. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S ga teng bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\cdot a_n = c\cdot a_1 + c\cdot a_2 + \cdots + c\cdot a_n + \cdots \qquad (2)$$

qator ham yaqinlashuvi bo‘lib, uning yig‘indisi c·S ga teng bo‘ladi.

◄ Shartga ko‘ra (1) qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = S$$

Unda

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\cdot a_n = c\cdot a_1 + c\cdot a_2 + \cdots + c\cdot a_n + \cdots$$

Qator uchun

$$\lim_{n\to\infty}(c\cdot a_1 + c\cdot a_2 + \cdots + c\cdot a_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) =$$

$$= c\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c\cdot S$$

bo‘ladi. Demak, (2) qator yaqinlashuvchi, uning yig‘indisi c·S bo‘ladi.

Keyingi xossalarni isbotsiz keltiramiz.

2-xossa. Ikki

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots b_n + \cdots \qquad (3)$$

berilgan bo‘lsin. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) =$$

$$= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots +$$

$$+ (a_n + b_n) + \cdots \qquad (4)$$

qator (1) va (3) qatorlar yig'indisi deyiladi.

Agar (1) va (3) qatorlar yaqinlashuvi bo'lib, ularning yig'indisi mos ravishda S' va S″ bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=$$
$$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)+\cdots$$

qator ham yaqinlashuvi va uning yig'indisi S'+S″ ga teng bo'ladi.

3-xossa. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

qator yaqinlashuvi bo'lsa, u holda $n\to\infty$ da bu qatorning umumiy hadi a_n no'lga intiladi.

Eslatma. Qatorning umumiy hadi $n\to\infty$ da no'lga intilishidan qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

Qatorning qoldig'i. Ushbu

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

qator berilgan bo'lsin. Uning dastlabki n ta (tayin son) hadini tashlab yuborish natijasida yangi qator hosil bo'ladi:

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots+a_{n+k}+\ldots \qquad (2)$$

(2) qator (1) qatorning n-qoldig'i deyiladi. (2) qatorning yig'indisini r_n orqali belgilaymiz. Demak, $r_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n+k}$. Qator va uning qoldig'i orasida quyidagi munosabat o'rinli:

Teorema. Qator va uning qoldig'i bir vaqtda yo yaqinlashadi yoki uzoqlashadi.

Isboti. Berilgan (1) qatorning dastlabki n ta hadi yig'indisi S_n, qator qoldig'ining, ya'ni (2) qatorning dastlabki k ta hadining yig'indisi S'_k bo'lsin. U holda, ravshanki,

$$S'_k=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+k}=(a_1,a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+k})-$$
$$-(a_1+a_2+\ldots+a_n),$$

yoki

$$S'_k=S_{n+k}-S_n \qquad (3)$$

bundan esa

$$S_{n+k}=S_n+S'_k \qquad (4)$$

hosil bo'ladi.

Faraz qilaylik (1) qator yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ bo'lsin. U holda $\{S_n\}$ ketma-ketlikning qism ketma-ketligi $\{S_{n+k}\}$ ham yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+k} = S$ bo'ladi. Bu esa (3) tenglikning o'ng tomonining limiti va, demak, chap tomonining ham limiti mavjudligini ta'minlaydi. Shunday qilib,

$$\lim_{k\to\infty} S_k{}' = \lim_{k\to\infty}(S_{n+k} - S_n) = \lim_{k\to\infty} S_{n+k} - \lim_{k\to\infty} S_n = S - S_n.$$

Bu degani qatorning qoldig'i yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $r_n=S-S_n$ ga teng ekanligini bildiradi.

Endi (2) qator yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{k\to\infty} S_k{}' = r_n$ bo'lsin, bu yerda n tayin son ekanligini eslatib o'tamiz. U holda (4) tenglikdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lim_{k\to\infty} S_{n+k} = \lim_{k\to\infty}(S_n + S_k{}') = \lim_{k\to\infty} S_n + \lim_{k\to\infty} S_k{}' = S_n + r_n,$$ ya'ni

(1) qator xususiy yig'indilar ketma-ketligi $\{S_{n+k}\}$ yaqinlashuvchi va limiti S_n+r_n ga teng. Demak, (1) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S_n+r_n ga teng.

1-natija. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (2) qatorning yig'indisi $n\to\infty$ da nolga intiladi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ bo'ladi.

Isboti. Haqiqatan ham, $r_n=S-S_n$ tenglik o'rinli. Bundan

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = S - S = 0.$$

Misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ qator uchun r_n ni toping va barcha $n>N$ larda $|r_n|<0{,}0001$ tengsizlik bajariladigan N ni ko'rsating.

Yechish. Yuqorida ko'rib o'tgan misolimizda $S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ va $S = \frac{3}{4}$ ekanligini ko'rsatgan edik. $r_n=S-S_n$ formulaga ko'ra $r_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$ bo'ladi. Ravshanki, $|r_n| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \le \frac{1}{n+1}$. Demak, $|r_n|<0{,}0001$ tengsizlik bajarilishi uchun $\frac{1}{n+1}<0{,}0001$ bajarilishi yetarli. Bundan $n+1>10000$ yoki $n>9999$ munosabatga ega bo'lamiz. Shunday qilib, $N=9999$ dan boshlab barcha n lar uchun $|r_n|<0{,}0001$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

2-natija. Agar

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (5)$$

va

$$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n+\ldots \qquad (6)$$

qatorlar bir-biridan faqat chekli sondagi hadlari bilan farq qilsa, u holda bu qatorlar bir vaqtda yaqinlashadi yoki bir vaqtda uzoqlashadi.

Isboti. Haqiqatan, ham (5) va (6) qatorlar faqat chekli sondagi hadlari bilan farq qilsa, u holda biror k dan boshlab, ya'ni barcha $n>k$ da $a_n=b_n$ bo'ladi, demak, ularning qoldiqlari aynan bitta

$$a_{n+1}+a_{n+2}a_{n+3}+\ldots+a_{n+k}+\ldots \qquad (7)$$

qatordan iborat. Shu sababli (5) va (6) qatorlar (7) qator yaqinlashuvchi bo'lsa yaqinlashadi, uzoqlashuvchi bo'lsa uzoqlashadi.

3-natija. Berilgan qatorning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish (yoki chekli sondagi yangi hadlarni qo'shish) natijasida hosil bo'lgan qator berilgan qator bilan bir vaqtda yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'ladi.

Boshqacha aytganda, berilgan qatorning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish yoki qatorga chekli sondagi yangi hadlarni qo'shish qatorning yaqinlashish xarakteriga ta'sir etmaydi.

Shu sababli, qatorni yaqinlashishga tekshirganda uning chekli sondagi hadlarini o'zgartirish mumkin.

3-§. Qatorning yaqinlashuvchiligi

Quyida qator yaqinlashishining zaruriy shartini keltiramiz.

Teorema. Agar

$$a_1+a_2+...+a_n+... \qquad (1)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning a_n umumiy hadi n cheksizga intilganda nolga intiladi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, (1) qator yaqinlashuvchi va yig'indisi S ga ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ bo'lsin. U holda $\{S_n\}$ ketma-ketlikning qism ketma-ketligi $\{S_{n-1}\}$ $(n\geq 2)$ ham yaqinlashuvchi va bo'ladi.

Ravshanki, $a_n=S_n-S_{n-1}$ bundan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ mavjud va $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$ Shunday qilib, (1) qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning umumiy hadi nolga intilishi zarur ekan.

Yuqoridagi teoremadan qator uzoqlashishining yetarli sharti kelib chiqadi.

Natija. Agar (1) qatorning a_n umumiy hadi n cheksizga intilganda noldan farqli chekli limitga ega bo'lsa yoki limitga ega bo'lmasa, u holda bu qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu natija ba'zi qatorlarning uzoqlashuvchi ekanligiga oson ishonch hosil qilishga yordam beradi.

1-misol. Ushbu $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+...+\frac{n}{n+2}+...$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Qatorning umumiy hadi $a_n=\frac{n}{n+2}$ ga teng va $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1\neq 0$ demak, yuqoridagi natijaga ko'ra qator uzoqlashuvchi.

2-misol. Ushbu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2$ qatorni yaqinlashishiga tekshiring.

Yechish. Bu qatorning umumiy hadi $a_n=(-1)^{m-1}n^2$ va $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

3-misol. Ushbu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{3}$ qatorni yaqinlashishiga tekshiring.

Yechish. Bu qatorning $a_n=\cos\frac{n\pi}{3}$ umumiy hadi n→∞ da limitga ega emas. Demak, qator uzoqlashuvchi.

Yuqorida isbotlangan teoremaning teskarisi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ shartdan $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ qatorning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqavermaydi.

Bunga misol sifatida garmonik qator deb ataluvchi ushbu qatorni qaraymiz:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (2)$$

Garmonik qatorning uzoqlashuvchi ekanliligini ko'rsatamiz. Buning uchun teskaridan, ya'ni garmonik qator yaqinlashuvchi deb faraz qilamiz. U holda uning $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ xususiy yig'indisi chekli S limitga ega bo'ladi. Ravshanki, qatorning $S_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$ xususiy yig'indisi ham shu limitga ega bo'ladi.

Bu holda

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0.$$

Ammo

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

ya'ni $S_{2n}-S_n\geq\frac{1}{2}$, bundan $\{S_{2n}-S_n\}$ ketma-ketlikning $n\to\infty$ da nolga intilmasligi kelib chiqadi. Bu esa garmonik qator yaqinlashuvchi degan farazimizga zid. Demak, garmonik qator uzoqlashuvchi ekan.

Izoh. (2) qatorning ikkinchi hadidan boshlab har bir hadi u bilan qo'shni bo'lgan hadlarning o'rta garmoniga teng (ikkita musbat a va b sonlarning o'rta garmoni deb $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ songa aytiladi). Shu sababli bu qator garmonik qator deyiladi.

Musbat qatorlarning yaqinlashish sharti. Agar berilgan $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ qatorning hadlari nomanfiy, ya'ni $a_n \geq 0$, $n \in N$, bo'lsa, bu qator musbat qator (yoki musbat hadli qator) deyiladi. Ravshanki, musbat qatorlarning xususiy yig'indilari ketma-ketligi kamaymaydigan ketma-ketlik bo'ladi, chunki $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$, bundan $S_n \leq S_{n+1}$. Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremadan musbat qatorlar uchun quyidagi yaqinlashish sharti kelib chiqadi:

1-teorema. Musbat qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning xususiy yig'indilaridan tuzilgan ketma-ketlikning yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

Bu teoremadan ko'rinadiki, musbat qatorlarni yaqinlashishga tekshirish uchun uning xususiy yig'indilaridan tuzilgan $\{S_n\}$ ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligini ko'rsatish yetarli ekan. Quyida isbotlari shu teoremaga asoslangan musbat qator yaqinlashishining bir nechta yetarli shartlarini ko'rib chiqamiz.

1-misol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n}{n(n+1)}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Qatorning n-xususiy yig'indisini yozib olamiz: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin^2 k}{k(k+1)}$. $\dfrac{\sin^2 k}{k(k+1)} \leq \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ bo'lganligi sababli $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin^2 k}{k(k+1)} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1} < 1$ munosabatlar o'rinli. Demak, barcha n lar uchun $S_n < 1$, ya'ni qatorning xususiy yig'indilari ketma-ketligi yuqoridan chegaralangan. 1-teoremaga ko'ra berilgan musbat qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Taqqoslash alomatlari.

2-teorema. Aytaylik,

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+... \qquad (1)$$

$$b_1+b_2+b_3+...+b_n+... \qquad (2)$$

musbat qatorlar berilgan bo‘lsin. Biror n_0 nomerdan boshlab $a_n \le b_n$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda

a) (2) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, (1) qator yaqinlashuvchi bo‘ladi;

b) (1) qatorning uzoqlashuvchi bo‘lsa, (2) qatorning ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S_n' = \sum_{k=1}^{n} b_k$ bo‘lsin. Shartga ko‘ra $a_n \le b_n$ munosabat o‘rinli, bundan $S_n \le S'_n$ tengsizlik kelib chiqadi.

a) Agar (2) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\{S'_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan. Demak, (1) qator xususiy yig‘indilaridan tuzilgan $\{S_n\}$ ketma-ketlik ham yuqoridan chegaralangan. Bundan (1) qator yaqinlashuvchidir.

b) (1) qator uzoqlashuvchi bo‘lsin, u holda $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan. Demak, $\{S'_n\}$ ham yuqoridan chegaralanmagan. Bundan $\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = \infty$ va qator uzoqlashuvchi.

2-misol. Birinchi taqqoslash alomatidan foydalanib, $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \ldots$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ushbu qatorni qaraymiz: $\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \ldots$.

Ravshanki, $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n = b_n$. Maxraji $q = \frac{2}{3}$ bo‘lgan $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ geometrik qator yaqinlashuvchi, demak 1-teoremaga ko‘ra berilgan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$ qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

3-misol. Birinchi taqqoslash alomatidan foydalanib $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$ qatorning uzoqlashuvchi ekanligini asoslang.

Yechish. Berilgan qatorning hadlari, ikkinchi hadidan boshlab $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$ garmonik qatorning mos hadlaridan katta, garmonik qator esa uzoqlashuvchi. Demak, birinchi taqqoslash alomatiga ko'ra berilgan qator uzoqlashuvchi.

Yuqorida isbotlangan teoremadan bir nechta foydali natijalar kelib chiqadi. Bunda biz (2) qator hadlarini musbat, (1) qator hadlarini nomanfiy deb qaraymiz.

1-natija. Agar (1) va (2) qatorlar uchun $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$ $(k<\infty)$ mavjud bo'lsa, u holda (2) qatorning yaqinlashuvchi ekanligidan (1) qatorning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Isboti. Haqiqatan ham, agar $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$ mavjud bo'lsa, u holda limitning ta'rifiga ko'ra har qanday ε musbat son (masalan, ε=1) olmaylik, shunday n_0 nomer topilib, $n>n_0$ larda $\left|\frac{a_n}{b_n}-k\right|<1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan esa $\frac{a_n}{b_n}<k+1$ tengsizlik hosil bo'ladi. Shartga ko'ra $b_n>0$ bo'lganligi sababli, so'nggi tengsizlikni $a_n<(k+1)b_n$ ko'rinishda yozib olish mumkin. Endi, (2) qator yaqinlashuvchi, demak, 2-§ da isbotlangan 1-teoremaga ko'ra umumiy hadi $(k+1)b_n$ bo'lgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. U holda yuqorida isbotlangan taqqoslash alomatiga ko'ra (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Izoh. $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ bo'lganligi sababli $k \geq 0$ bo'ladi. Natija xulosasi $k=0$ da ham o'rinli ekanligi ravshan.

2-natija. Agar (1) va (2) qatorlar uchun $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$ $(0<k\leq\infty)$ mavjud bo'lsa, u holda (2) qatorning uzoqlashuvchi ekanligidan (1) qatorning uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Isboti. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lganda edi, u holda $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{k}$ $(0<\frac{1}{k}<+\infty)$ munosabat va 1-natijaga ko'ra (2) qator yaqinlashuvchi bo'lar edi. Bu esa shartga zid. Shuningdek, $k=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$ bo'lganda ham $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$ bo'lib, yuqoridagi natijaga ko'ra ziddiyatga kelamiz.

Yuqoridagi ikkita natijadan quyidagi natija kelib chiqadi:

3-natija. Agar (1) va (2) qatorlar uchun $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$ *(0<k<∞)* mavjud bo'lsa, u holda (1) va (2) qatorlar bir vaqtda yaqinlashuvchi yoki bir vaqtda uzoqlashuvchi bo'ladi.

4-misol. $\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\ldots+\sin\frac{1}{n}+\ldots$ qatorni $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ qator bilan taqqoslaymiz. $\frac{a_n}{b_n}=\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ nisbatni ko'ramiz. Ma'lumki, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$. Demak, berilgan $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ qator uzoqlashuvchi.

5-misol. $\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{2^2}+...+\sin\frac{1}{2^n}+...$ qatorni $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+...$ qator bilan taqqoslaymiz. Berilgan ikkinchi qator yaqinlashuvchi, chunki $q=\frac{1}{2}$ bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlari yig'indisidan iborat.

$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}$ va $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=1$. Shunday qilib, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2^n}$ qator yaqinlashuvchi.

Taqqoslash alomatidan foydalanib biror qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi haqida xulosa chiqarish har doim ham oson masala emas. Chunki bunday xulosa chiqarish uchun tadqiq etilayotgan qator bilan taqqoslanadigan yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi qatorni topishning umumiy usuli yo'q. Shu sababli qatorni yaqinlashishga tekshirishda yordamchi qatordan foydalanilmaydigan alomatlarni topish zaruriyati tug'iladi. Quyida shunday alomatlarni ko'rib o'tamiz.

Dalamber alomati.

3-teorema. Agar

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+... \qquad (3)$$

musbat qatorning (n+1)-hadining n-hadiga nisbati $n\to\infty$ da chekli limitga ega, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l \qquad (4)$$

bo'lsa, u holda

1) $l<1$ da qator yaqinlashadi;
2) $l>1$ da qator uzoqlashadi.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra (4) tenglik o'rinli. Limitning ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday n_0 natural son topilib, barcha $n>n_0$ larda quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$l-\varepsilon<a_{n+1}/a_n<l+\varepsilon \qquad (5)$$

1) Agar $l<1$ bo'lsa, u holda shunday $\varepsilon>0$ son topilib, $q=l+\varepsilon<1$ bo'ladi. U holda shu $\varepsilon>0$ songa mos n_0 natural son topilib, barcha $n>n_0$ larda $a_{n+1}/a_n<q$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan

$$a_{n0+1}<a_{n0}q,\ a_{n0+2}<a_{n0+1}q<a_{n0}q^2,\ \dots,\ a_{n0+k}<a_{n0+k-1}q<a_{n0}q^k,\dots$$

Endi, $|q|<1$ da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_0}q^k$ qator yaqinlashishidan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k} = \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$

qatorning, demak, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi.

2) Agar bo'lsa, u holda shunday $\varepsilon>0$ topilib, $q=l-\varepsilon>1$ bo'ladi. (3) munosabatdan barcha $n>n_0$ larda $a_{n+1}/a_n>q$ tengsizlik yoki $a_{n+1}>a_nq$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa biror haddan boshlab qator hadlari o'suvchi ekanligini anglatadi. Demak, qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi. Qator uzoqlashuvchi.

$l=1$ bo'lgan holda bu alomat qatorning yaqinlashuvchi bo'lish-bo'lmasligini aniqlash imkonini bermaydi.

6-misol. Qatorni yaqinlashishga tekshiring:

$$\frac{2}{1^2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{2^3}{3^2}+\dots+\frac{2^n}{n^2}+\dots$$

Yechish. Ravshanki, $a_n=\frac{2^n}{n^2}$, $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$. (4) formuladan quyidagini topamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=2>1.$$

Demak, qator uzoqlashuvchi.

7-misol. Berilgan qatorni yaqinlashishga tekshiring:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\left(\sqrt{2}\right)^{2}}+\frac{5}{\left(\sqrt{2}\right)^{3}}+\ldots+\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}+\ldots$$

Yechish. Ravshanki, $a_n=\dfrac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}$, $\quad a_{n+1}=\dfrac{2n+1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}$. (4) formulaga ko'ra

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{2n+1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}}{\dfrac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1.$$

Demak, qator yaqinlashuvchi.

8-misol. Qatorni yaqinlashishga tekshiring:

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots.$$

Yechish. Qatorning n va n+1 hadlarini yozib olamiz: $a_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\qquad a_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$. $\qquad$ (2) formulaga ko'ra

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}=1.$$

Qatorning yaqinlashishi to'g'risida Dalamber alomati asosida xulosa chiqarish mumkin emas. Taqqoslash alomatiga ko'ra (masalan, garmonik qator bilan taqqoslang), qatorning uzoqlashuvchi ekanligini ko'rish mumkin.

Koshining radikal alomati.

4-teorema. Agar

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+... \qquad (6)$$

musbat hadli qator uchun

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=p$$

chekli limit mavjud bo'lsa, u holda p<1 da berilgan qator yaqinlashuvchi, p>1 da esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isboti. Aytaylik p<1 bo'lsin. Ushbu p<q<1 tengsizlikni qanoatlantiruvchi biror q sonni tanlaymiz. U holda $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=p<q$ bo'lganligi sababli n=k nomerdan boshlab, $\sqrt[n]{a_n}<q$ yoki $a_n<q^n$ $(n\geq k)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan esa

$$a_k<q^k,\quad a_{k+1}<q^{k+1},\quad a_{k+2}<q^{k+2},... \qquad (7)$$

munosabatlar o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

$0<q<1$ bo'lganligi sababli,

$$q+q^2+q^3+...+q^k+q^{k+1}+q^{k+2}+... \qquad (8)$$

geometrik qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Qaralayotgan (6) qatorning k-hadidan boshlab barcha hadlari ((7) munosabatga ko'ra) (8) qatorning mos hadlaridan kichik. Demak taqqoslash alomatiga ko'ra (6) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Endi p>1 bo'lsin. U holda $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=p>1$ bo'lganligi sababli, biror n=k nomerdan boshlab $\sqrt[n]{a_n}>1$ bo'ladi. Bundan $a_n>1$ $(n\geq k)$. Demak (6) qatorning umumiy hadi $n\to+\infty$ da nolga intilmaydi, ya'ni (6) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

1-izoh. Agar $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=+\infty$ bo'lsa, (6) qator uzoqlashuvchi bo'ladi, chunki bu holda ham biror k nomerdan boshlab $\sqrt[n]{a_n}>1$ bo'ladi.

2-izoh. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ mavjud bo'lmagan yoki mavjud va 1 ga teng bo'lgan holda, Koshi alomati qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchiligi haqidagi masalaga javob bermaydi.

Haqiqatan ham, masalan $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ qator yaqinlashuvchi, lekin

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1.$$

1+1+ 1+...+1... qator uzoqlashuvchi, lekin bu qator uchun

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1.$$

9-misol. Berilgan qatorni yaqinlashishga tekshiring:

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{\ln^n(n+1)}+\ldots$$

Yechish. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}}=\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$

Demak, qator yaqinlashuvchi.

10-misol. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{4}{3}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}+\ldots$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e>1.$

Qator uzoqlashuvchi.

Koshining integral alomati.

5-teorema. Agar funksiya $[1;\infty)$ oraliqda nomanfiy, integrallanuvchi, monoton kamayuvchi hamda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ qator hadlari uchun f(1)=a_1, f(2)=a_2, ... , f(n)=a_n, ... tengliklar o‘rinli bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator va $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integrallar bir vaqtda yaqinlashuvchi yoki bir vaqtda uzoqlashuvchi bo‘ladi; yaqinlashuvchi bo‘lgan holda

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1 \qquad (9)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. *f(x)* funksiya monoton kamayuvchi, demak $k \le x \le k+1$ tengsizliklardan f(k)≥f(x)≥f(k+1) kelib chiqadi. Bu qo‘sh tengsizlikni k dan k+1 gacha integrallab, $\int_k^{k+1} f(k)dx \ge \int_k^{k+1} f(x)dx \ge \int_k^{k+1} f(k+1)dx$, yoki $f(k)=a_k$ bo‘lganligi uchun $a_k \ge \int_k^{k+1} f(x)dx \ge a_{k+1}$ qo‘sh tengsizliklarga erishamiz. So‘nggi tengsizliklarni k=1, 2, ... , n uchun yozamiz:

$$a_1 \ge \int_1^{2} f(x)dx \ge a_2,$$

$$a_2 \ge \int_2^{3} f(x)dx \ge a_3,$$

. . . .

$$a_n \ge \int_n^{n+1} f(x)dx \ge a_{n+1}.$$

Bularni hadma-had qo‘shib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$S_n \ge \int_1^{n+1} f(x)dx \ge S_{n+1} - a_1 \qquad (10)$$

Quyidagi hollarni qaraymiz.

1) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi va I ga teng. U holda $\int_1^{n+1} f(x)dx \leq I$ va $S_{n+1} \leq I + a_1$ tengsizlik barcha natural n larda o'rinli. Demak, $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan, bundan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat qator yaqinlashuvchi.

Va, aksincha, agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\{S^n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan, demak umumiy hadi $I_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x)dx$ bo'lgan monoton o'suvchi ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi, ya'ni $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

2) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integral uzoqlashuvchi bo'lsin. U holda $S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx$ tengsizlikdan $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan, bundan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda uning xususiy yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan, demak, umumiy hadi $I_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x)dx$ bo'lgan ket-

ma-ketlik ham chegaralanmagan. Bundan $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integralning uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

Qator yaqinlashuvchi bo'lgan holda (10) qo'sh tengsizlikda n→∞ limitga o'tib, $S \ge \int_1^{\infty} f(x)dx \ge S - a_1$ munosabatga, bundan (9) ga ega bo'lamiz.

11-misol. Umumlashgan garmonik qator deb ataluvchi ushbu

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $a_1 = f(1) = 1,\ a_2 = f(2) = \frac{1}{2^p},\ a_n = f(n) = \frac{1}{n^p}, \cdots$ va $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ekanligi ravshan, bu yerda p-haqiqiy son.

Ushbu

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} \lim_{n\to\infty} x^{-p+1}\Big|_1^n = \frac{1}{1-p} \lim_{n\to\infty} (n^{1-p} - 1) \quad (p \ne 1)$$

xosmas integralni hisoblaymiz.

Agar p>1 bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} n^{1-p} = 0$ va $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p}$ yaqinlashuvchi;

Agar p<1 bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} n^{1-p} = \infty$ va $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ uzoqlashuvchi;

Agar p=1 bo'lsa, u holda $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \ln x\Big|_1^{\infty} = \infty$ uzoqlashuvchi.

Shunday qilib, umumlashgan garmonik qator p>1 bo'lsa yaqinlashuvchi, p≤1 bo'lsa uzoqlashuvchi bo'ladi.

Raabe alomati

6-teorema. (1) qatorning hadlari musbat va $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r$ bo'lsin. U holda

agar r > 1 bo'lsa, (1) qator yaqinlashuvchi;

agar r < 1 bo'lsa, (1) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

12-misol. $1+\sum_{B=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring, bu yerda (2n)!! orqali 2n gacha bo'lgan barcha juft sonlarning, (2n-1)!! orqali esa 2n-1 gacha bo'lgan barcha toq sonlarning ko'paytmasi belgilangan.

Yechish. Bu qator uchun Dalamber alomati natija bermaydi, chunki $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}=1$. Raabe alomatini tatbiq etamiz:

$$r=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n-1}{2n(2n+1)}=\frac{3}{2}.$$

Demak, r=1,5>1 bo'lganligi uchun qator yaqinlashuvchi.

4-§. Hadlarining ishoralari almashinib keladigan qatorlar. Leybnits teoremasi

Ushbu

$$a_1-a_2+a_3-a_4+...+(-1)^n\cdot a_n+... \qquad (6)$$

qator, bunda $a_n>0$ $(n=1,2,3,...)$ hadlarining ishorasi almashinib keladigan qator deyiladi.

Teorema. Agar (6) qatorda

1) $a_1>a_2>a_3>...>a_4>...$,

2) $\lim_{n\to\infty} a_n=0$,

bo'lsa, u holda (6) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Masalan, ushbu

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\cdots$$

qator uchun:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\cdots>\frac{1}{4}>\cdots,$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

bo'ladi. Teoremaga ko'ra bu qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Ixtiyoriy hadli qatorlar Qatorning absolyut yaqinlashuvchiligi.

Biror

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

qator berilgan bo'lish. Bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots \qquad (7)$$

qatorini qaraymiz. Ravshanki, (7) musbat hadli qator bo'ladi.

Teorema. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Eslatma. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

qatorning yaqinlashuvchi bo‘lishidan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$$

qatorning yaqinlashuvchi bo‘lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

Ta’rif. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$$

qator yaqinlashuvi bo‘lsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

qator absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.

5-§. Funksional qatorlar

Aytaylik X to‘plamda ($X \subset R$) aniqlangan

$$f_1(x) f_2(x) f_3(x), \ldots f_n(x), \ldots$$

funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin. Bu ketma-ketlik hadlaridan tashkil topgan ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \\ + \cdots + f_n(x) + \cdots \qquad (8)$$

qator funksional qator deyiladi.

X to‘plamda x_0 nuqtani olib quyidagi.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \\ + \cdots + f_n(x_0) + \cdots$$

sonli qatorni qaraymiz.

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

funksional qator x_0 nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$$

sonli qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

funksional qator x_0 nuqtada uzoqlashuvchi deyiladi.

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

funksional qator X to‘plamning har bir nuqtasida yaqinlashuvchi bo‘lsa, berilgan funksional qator X to‘plamda (sohada) yaqinlashuvchi deyiladi.

Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)\right]$$

limit olingan x ga bog‘liq bo‘ladi. Uni $S(x)$ bilan belgilaylik:

$$S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)\right].$$

Odatda $S(x)$ qaralyotgan funksional qatorning yig‘indisi deyiladi.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topilsaki, barcha $n>n_0$ va ixtiyoriy $x\in X$ lar uchun bir vaqtda

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

funksional qator X to'plamda tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

Veyershtrass alomati. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots$$

funksional qatorning har bir $f_n(x)$ hadi X to'plamda ushbu

$$|f_n(x)|\le c_n \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa va

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n=c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

funksional qator X to'plada yaqinlashuvchi bo'ladi.

Masalan, ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+$$
$$+\cdots+\frac{\cos nx}{n^2}+\cdots$$

funksional qatorning har bir hadi $X=(-\infty,+\infty)$ to'plamda uzluksiz,

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

va

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sonli qator yaqinlashuvchi.

Demak Veyershtrass alomatiga ko'ra berilgan funksional qator $X=(-\infty,+\infty)$ da tekis yaqinlashuvchi.

Endi tekis yaqinlashuvchi funksional qatorning xossalarini keltiramiz.

1) Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

funksional qatorning har bir $f_n(x)$ hadi X to'plamda uzluksiz bo'lib, qator X to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda funksional qatorning yig'indisi $S(x)$ funksiya X to'plamda uzluksiz bo'ladi.

2) Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

funksional qatorning har bir $f_n(x)$ hadi $(n=1,2,3,...)$ $[a,b]$ sigmentda uzluksiz bo'lsin. Funksional qator $[a,b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qator hadlarining integrallaridan tuzilgan.

$$\int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi

$$\int_a^b S(x)dx$$

ga teng bo'ladi.

3) Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

funksional qatorning har bir fn (x) hadi [a,b] sigmentda $f_n'(x)$ hosilaga ega bo'lib, bu hosilalardan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \cdots + f'_n(x) + \cdots$$

funksional qator [a,b] da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda funksional qator yig'indisi S(x) funksiya [a,b] da S'(x) hosilaga ega va

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

1-misol. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)}$ qator yaqinlashish sohasi va yig'indisini toping.

Yechish. $u_n(x) = \frac{1}{(n+x)(n+x+1)}$ (n=1,2,...) funksiyalar x=−n va x=−(n+1) nuqtalarda aniqlanmagan. Shu sababli bu qatorni $x \neq -k$ ($k \in N$) bo'lgan nuqtalarda tekshiramiz. Qatorning umumiy hadini $u_n(x) = \frac{1}{(n+x)(n+x+1)}$ deb yozib olish mumkin. Shu sababli

$$S_n(x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)} + \frac{1}{(2+x)(3+x)} + \cdots + \frac{1}{(n+x)(n+x+1)} =$$

$$=\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2+x}\right)+\left(\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3+x}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+x+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{n+x+1}$$

Bundan

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{n+x+1}\right)=\frac{1}{1+x}.$$

Demak, berilgan qator nuqtalarda yaqinlashuvchi bo'ladi va uning yig'indisi $\frac{1}{1+x}$ ga teng.

2-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^x}{n!}\cos x$ qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. x argument qiymatini tayinlab olamiz va umumiy hadi $v_n(x)=\frac{x^n}{n!}$ bo'lgan yordamchi qatorni qaraymiz. Dalamber alomatiga ko'ra x ning har bir qiymatida

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{x^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0$$ bo'ladi, va bundan

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^x}{n!}$ qatorning absolyut yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Ixtiyoriy x uchun $\left|\frac{x^n}{n!}\cos x\right|\le\left|\frac{x^n}{n!}\right|=|v_n|$ bo'lganligi sababli, taqqoslash teoremasiga ko'ra berilgan qator x ning ixtiyoriy qiymatida yaqinlashuvchi bo'ladi. Shunday qilib, qatorning yaqinlashish sohasi $(-\infty;+\infty)$ oraliqdan iborat.

3-misol. Umumiy hadi $u_n(x)=n^3x^2$ bo'lgan qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. x ni tayinlab olamiz, natijada umumiy hadi $u_n=n^3x^2$ bo‘lgan sonli qatorga ega bo‘lamiz. Agar $x\neq 0$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}(n^3x^2) = x\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = \infty$ bo‘ladi. Demak, $x\neq 0$ bo‘lganda qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi va qator uzoqlashuvchi bo‘ladi. Agar x=0 bo‘lsa, u holda $u_n(0)=0$ (n=1,2,...), $S_n(0)=0$ bo‘lib, qator yig‘indisi $S(0)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(0)=\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ ga teng bo‘ladi. Shunday qilib, qatorning yaqinlashish sohasi faqat bitta, $x=0$ nuqtadan iborat.

Agar yuqoridagi qatorda x^2 o‘rniga x^2+4 ni qo‘ysak, u holda umumiy hadi $u_n(x)=n^3(x^2+4)$ qatorga ega bo‘lar edik. Bu qator esa hech bir nuqtada yaqinlashuvchi emas. Uning yaqinlashishi sohasi bo‘sh to‘plamdan iborat.

4-misol. Ushbu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$ funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish: x ning ($x\neq -1$) har bir qiymatida sonli qator hosil bo‘ladi. Bunga Dalamber alomatini tatbiq qilamiz (absolyut yaqinlashishga tekshirishdagi kabi):

$$u_{n+1}(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{3n+2}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}, \qquad u_n(x)=\frac{(-1)^n}{3n-1}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

U holda $l(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{3n+2}\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|=\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$

$\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|<1$ shartni qanoatlantiruvchi x larda berilgan qator absolyut yaqinlashadi. $l(x)>1$ shartni qanoatlantiruvchi x larda qator uzoqlashadi. $l(x)=1$ shartni qanoatlantiradigan x larda va l(x) aniqlanmagan nuqtalarda qatorni qo‘shimcha tekshirish lozim. Bu misolda $x=\pm 1$ bo‘lib, $x=-1$ da qator aniqlanmagan, x=1 da esa qator faqat 0 dan iborat bo‘ladi, absolyut yaqinlashadi. $l(x)<1$

tengsizlikni yechib, x>0 ni hosil qilamiz. Demak, qator $(0,+\infty)$ da yaqinlashadi. x=0 nuqtani alohida tekshirish lozim. x=0 da $-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{3n-1}+\cdots$ bo'lib, bu qator shartli yaqinlashadi.

Shunday qilib, berilgan qatorda yaqinlashadi.

Yuqoridagi misolni yechishda Koshining radikal alomatidan ham foydalanish mumkin edi.

5-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish: Dalamber alomatidan foydalanamiz:

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{n+1}}{1+x^{2n+2}}:\frac{|x|^{n+1}}{1+x^{2n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}|x|\cdot\frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}}=\begin{cases}|x|, & agar\ |x|<1,\\ 1, & agar\ |x|=1,\\ \frac{1}{|x|}, & agar\ |x|>1\end{cases}$$

l(x) uchun hosil qilingan ifodalardan $|x|<1$ va $|x|>1$ da berilgan qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi. x=0 bo'lganda Dalamber alomatidan foydalanib bo'lmaydi. Ammo bu holda qatorning barcha hadlari 0 dan iborat, qatorning yaqinlashishi o'z-o'zidan ravshan. $l(x)=1$, ya'ni $x=\pm1$ bo'lganda qator umumiy hadining absolyut qiymati 0,5 ga teng, demak, qator uzoqlashuvchi bo'ladi. Shunday qilib, berilgan qator $|x|<1$, $|x|>1$ shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalarda absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

6-misol. Qatorni $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg^2x}{n}$ yaqinlashishga tekshiring.

Yechish: Koshining radikal alomatidan foydalanamiz:

$$l(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{tg^n x}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|tgx|}{\sqrt[n]{n}} = |tgx|$$

$l(x)<1$ da, ya'ni $|tgx|<1$ da qator absolyut yaqinlashadi. Bu tengsizlik yechimi $(-\frac{\neq}{4}+\neq n, \frac{\neq}{4}+\neq n)$, $n\in\mathbb{Z}$. Bu intervallarning chap uchlarida berilgan qator shartli yaqinlashuvchi, o'ng uchlarida uzoqlashuvchi bo'lishini tekshirish qiyin emas.

6-§. Darajali qatorlar

Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (9)$$

ko'rinishidagi qator darajali qator deyiladi, bunda $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ lar o'zgarmas sonlar bo'lib ular darajali qatorning koeffisiyentlari deyiladi.

Masalan,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{1}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n+1}+\cdots$$

darajali qatordir.

Har qanday darajali qator x=0 nuqtada yaqinlashuvchi bo'ladi, chunki bu holda (9) ushbu

$$a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0+\ldots+a_n\cdot 0+\ldots$$

ya'ni

$$a_0+0+0+\ldots+0+\ldots$$

ko'rinishdagi sonli qatorga aylanadi va

$$\lim_{n\to\infty} S_n(0) = \lim_{n\to\infty}(a_0+0+0+\cdots+0) = \lim_{n\to\infty} a_0 = a_0$$

bo'ladi.

Teorema (Abel teoremasi). Agar

$$\sum_{n\to\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (9)$$

darajali qator x ning $x=_{x0}$ $(x_0 \neq 0)$ qiymatida yaqinlashuvchi bo'lsa, x ning

$$|x| < |x_0| \qquad (10)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida (9) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, berilgan (9) darajali qator $x=x_0$ da yaqinlashuvchi bo'lsin. Demak,

$$\sum_{n\to\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x_0^n + \cdots$$

sonli qator yaqinlashuvchi. Ma'lumki, bu holda

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$$

bo'lib, $\{a_n\ x_0^n\}$ ketma-ketlik chegeralangan bo'ladi.

$$|an\ x_0^n| \leq M \qquad (n=0,1,2,...)$$

(M – o'zgarmas son).

Endi berilgan qatorni quyidagicha yozib

$$a_0 + a_1 \cdot x_0 \cdot \frac{x}{x_0} + a_1 x_0^2 \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \cdots + a_n x_0^n \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \cdots$$

uning hadlarining absolyut qiymatlaridan ushbu

$$|a_0| + |a_1 x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_1 x_0^2| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots$$

qatorni tuzamiz. So'ng ushbu

$$M + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots$$

geometrik qatorni ko'ramiz. Bu qator

$$\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$$

bo'lganligi sababli, yaqinlashuvchi bo'ladi. Ayni paytda

$$\left|a_n \cdot x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

bo'lganligi sababli

$$|a_0| + |a_n x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_1 x_0^2| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, berilgan qator x ning $|x|<|x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruchi barcha qiymatlarida absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Natija. Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

darajali qator $x=x_1$ nuqtada esa uzoqlashuvchi bo'lsa, bu qator x ning $|x|>|x_1|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida uzoqlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

darajali qator $x=x_0$ $(x_0 \neq 0)$ da esa yaqinlashuvchi, x=x1 da esa uzoqlashuvchi bo'lsin. Ravshanki, $|x_0|<|x_1|$ bo'ladi. Unda yuqorida aytilganlarga ko'ra x ning $|x|<|x_0|$ tenglikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida yaqinlashuvchi, $|x|>|x_1|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida uzoqlashuvchi bo'ladi.

(9) darajali qatorning yaqinlashadigan nuqtalaridan iborat to'plamni {x} deylik (ya'ni shu {x} to'plamning har bir nuqtasida (9) qator yaqinlashuvchi). Bu {x} to'plam yuqorida chegaralangan. Uning yuqori aniq chegarasi mavjud. Uni r bilan belgilaylik.

Ko'rsatish mumkinki, x ning $|x|<r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida (9) qator yaqinlashuvchi, x ning $|x|>r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida (9) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Odatda, $(-r,r)$ interval (9) darajali qatorning yaqinlashish intervali, r esa yaqinlashish radiusi deyiladi.

Eslatma. Agar darajali qator $x=0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lib, boshqa barcha nuqtalarda uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda qatorning yaqinlashish radiusi $r=0$ deb olinadi. Agar darajali qator barcha nuqtalarda yaqinlashuvchi bo'lsa, $r=+\infty$ deb olinadi.

Eslatma. Darajali qator $x=-r, x=r$ nuqtalarda yaqinlashuvchi bo'lishi ham mumkin, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin.

Ko'pincha (9) darajali qatorning yaqinlashish radiusini ushbu

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

formula yordamida topiladi.

Endi darajali qator xossalarini keltiramiz:

1) Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi r bo'lsa, darajali qator $[-\alpha,\alpha]$ sigmentda $(0<\alpha<r)$ tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

2) Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi r bo'lsa, darajali qator yig'indisi S(x):

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$(-r,r)$ integralda uzluksiz bo'ladi.

3) Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi r bo'lib,

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$

$$=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

bo'lsa, u holda bu qatorni $[a,b]\subset(-r,r)$ da hadlab integrallash, ya'ni

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n x^n dx.$$

4) Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi r bo'lib, yig'indisi

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$

$$=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

bo'lsa, u holda bu qatorni $(-r,r)$ da hadlab integrallash mumkin, ya'ni

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=a_1+2a_2x+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

bo'ladi.

1-misol. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n3^{n+1}}$ qatorning yaqinlashish radiusi, yaqinlashish intervali va yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. Berilgan qator uchun $a_n=\frac{1}{n3^{n+1}}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l$ ni hisoblaymiz: $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n3^{n+1}}}=\frac{1}{3}\sqrt[n]{\frac{1}{n3}}=\frac{1}{3}$, demak, qatorning yaqinlashish radiusi r=3, yaqinlashish intervali (–3;3). Berilgan qatorni yaqinlashish intervali uchlarida yaqinlashishga tekshiramiz: x=3 da $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n3^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$. Bu esa garmonik qator, demak berilgan qator x=3 nuqtada uzoqlashuvchi. x= –3 da $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n3^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Bu Leybnits qatori, yaqinlashuvchi.

Demak, berilgan darajali qatorning yaqinlashish sohasi [–3;3) to'plamdan iborat.

2-misol. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$ qatorning yaqinlashish radiusi, yaqinlashish intervali va sohasini toping.

Yechish. Ushbu misolda $a_n=n!$ va $a_{n+1}=(n+1)!$. Bunda $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=l$ va $r=\frac{1}{l}$ formulalardan, yoki $r=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ formuladan foydalanamiz. U holda $r=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, bundan berilgan darajali qator faqat x=0 nuqtadagina yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

7-§. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish

1°. Makloren qatori. Aytaylik, y=f(x) funksiya (–δ,δ) (δ>0) oraliqa berilgan bo'lib, u shu oraliqda istalgan tartibdagi hosilaga ega bo'lsin. Ushbu

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

darajali qatorni qaraylik. Bu darajali qatorning koeffitsientlari f(x) funksiya va bu funksiya hosilalarining x=0 nuqtadagi qiymatlari orqali ifodalangan.

Endi f(x) funksiyaning Teylor (Makloren) formulasini yozamiz:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+ \\ +\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x) \qquad (10)$$

bunda $r_n(x)$ qoldiq had.

(9) darajali qatorning qismiy yig'indisi

$$S_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+ \\ +\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

bo'lsa, unda (10) formula ushbu $f(x)=S_n(x)+r_n(x)$ ko'rinishiga keladi.

(9) darajali qator $(-r,r)$ da yaqinlashuvchi bo'lsin. Unda

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x) \qquad (x\in(-r,r))$$

bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Aksincha, ixtiyoriy $x\in(-r,r)$ da

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

bo'lsa, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

bo'lishi, demak, $(-r,r)$ da (9) darajali qator yaqinlashuvchi, uning yig'ndisi f(x) ga teng bo'lishi kelib chiqadi:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Shunday qilib, munosabatning o'rinli bo'lishi uchun ixtiyoriy $x\in(-r,r)$ da

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Agar f(x) funksiya uchun (10) munosabat o'rinli bo'lsa, f(x) funksiya Makloren qatoriga yoyilgan deyiladi.

Agar $r_n(x)$ yetarli darajada kichik bo'lsa, u holda yuqoridagi (10) munosabatdan ushbu

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

taqribiy formulaga ega bo'lamiz.

Endi $f(x)= e^x$ funksiyani Makloren qatoriga yoyamiz.

Ma'lumki, $f(x)= e^x$ funksiya ixtiyoriy $[-r,r]$ sigmentda $(r>0)$ istalgan tartibli hosilaga ega bo'lib,

$$f^{(n)}(x)=e^x \qquad (n=1,2,3,...)$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$f^{(n)}(0)=1 \qquad (n=1,2,3,...)$$

Bu funksiyaning Makloren formulasi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n$$

bo'ladi. Qoldiq esa Lagranj ko'rinishida quyidagicha bo'ladi.

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Agar ixtiyoriy $x \in (-r, r)$ uchun

$$|r_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\right| \leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^{r}$$

va $n \to \infty$ da

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

bo'lishini topamiz. Bu $f(x) = e^x$ funksiyani Makloren qatoridir. Xuddi shunga o'xshash

$$f(x)=\sin x, \quad f(x)=\cos x, \quad f(x)=\ln(1+x)$$

funksiyaning Makloren qatorlari topiladi.

Quyida ularni keltirish bilan kifoyalanamiz:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \cdots (1+x)^{\alpha} =$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Bu keltirilgan formulalar uchun taqribiy formulalar quyidagicha bo'ladi:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n},$$

$$\sin x \approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

1-misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$ funksiyaning x ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

Yechish: $\dfrac{1}{x^2+5x+6}$ ratsional funksiyani sodda kasrlarga ajratamiz: $\dfrac{1}{x^2+5x+6}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}$, har bir sodda kasrni x ning darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz. Bu holda ham (6) formuladan foydalanamiz:

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}\cdot x^n, \text{ bunda } |x|<2.$$

$$\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n+1}}\cdot x^n, \text{ bunda } |x|<3.$$

Demak, bunda $|x|<2$ da $\dfrac{1}{x^2+5x+6}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}-\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n}\right)x^n$

o'rinli bo'ladi.

2-misol. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+6x-3}$ funksiyani (x+3) ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

Yechish: (6) formuladan foydalanamiz. $\frac{1}{(x+3)^2-12}=-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1-\frac{(x+3)^2}{12}}=$

$$=-\frac{1}{12}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\left(-\frac{(x+3)^2}{12}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{12^{n+1}}\cdot(x+3)^{2n},$$ bu yoyilma

$\left|\frac{(x+3)^2}{12}\right|<1$ da, ya'ni $|x+3|<2\sqrt{3}$ da o'rinli bo'ladi.

3-misol. f(x)=lnx funksiyani x−1 ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

Yechish: Berilgan funksiyani $f(x)=lnx=ln(1+(x-1))$ ko'rinishda yozib olamiz va (5) formuladan foydalanamiz. U holda $|x-1|<1$ shartda $f(x)=\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ yoyilma o'rinli bo'ladi.

4-misol. $f(x)=2^x$ ni $x+2$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

Yechish: $f(x)=2^x$ funksiyani quyidagicha yozib olamiz: $2^x=2^{x+2-2}=\frac{1}{4}e^{\ln 2^{x+2}}=\frac{1}{4}e^{(x+2)\ln 2}$ va (1) formuladan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$2^x=\frac{1}{4}e^{(x+2)\ln 2}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{n!}(x+2)^n$, bu formula $x\in(-\infty;+\infty)$ da o'rinli.

5-misol. $f(x)=sin^2x$ ni x ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

Yechish: $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$ formuladan va (3) dan foydalanamiz. U holda

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{2^2x^2}{2\cdot 2}-\frac{2^4x^4}{2\cdot 4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}}{2\cdot(2n)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$$

Bu formula $x\in(-\infty;\infty)$ da o'rinli.

6-misol. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ funksiyani x−9 ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

Yechish: $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x-9+9}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{x-9}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$ Endi (5) formuladan foydalanamiz, bunda $\alpha=-\frac{1}{2}$, x o'rniga $\frac{x-9}{9}$ qo'yamiz. U holda

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\cdot\frac{(x-9)^n}{9^n}=$$

$$=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(1-)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{3\cdot 2^{2n}\cdot n!}(x-9)^n.$$

Bu yoyilma $\left|\frac{x-9}{9}\right|<1$ shartda, ya'ni $|x-9|<9$ da o'rinli bo'ladi.

8-§. Darajali qatorlarning ba'zi bir tatbiqlari

Darajali qatorlar yordamida taqribiy hisoblash. Darajali qatorlar kuchli (taqribiy) hisoblash vositasi bo'lib xizmat qiladi. Ular yordamida funksiyalar qiymatlarini taqribiy hisoblash mumkin.

1-misol. ln1,2 ni 0,0001 aniqlikda hisoblang.

Yechish. ln(1+x) funksiyani x ning darajalari bo'yicha yoyamiz:

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$ bu qator (-1;1] sohada yaqinlashadi. Ushbu qatorda x=0,2 deb olib, ln1,2 ni hisoblash uchun

$$\ln 1,2=0,2-\frac{0,2^2}{2}+\frac{0,2^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{0,2^n}{n}+\ldots$$

ishora navbatlashuvchi qatorga ega bo'lamiz.

Bu qatorning birinchi k ta hadini yig'indisini ln1,2 ning taqribiy qiymati deb olsak, u holda xatolikning absolyut qiymati k+1 chi hadning absolyut qiymatidan kichik bo'ladi. Qator beshinchi hadining absolyut qiymati 0,000064 ga teng, ya'ni 0,0001 dan kichik. Shu sababli hisoblash uchun birinchi to'rtta hadini olish yetarli:

$$\ln 1,2 \approx 0,2 - \frac{0,04}{2} + \frac{0,008}{4} - \frac{0,0016}{4} \approx 0,18228.$$

2-misol. $\sqrt[4]{20}$ ni 0,001 aniqlikda taqribiy hisoblang.

Yechish. Binomial qatordan foydalanamiz. Uning uchun berilgan ildizni quyidagicha ifodalab olamiz:

$$\sqrt[4]{20} = \sqrt[4]{16+4} = \sqrt[4]{16\left(1+\frac{1}{4}\right)} = 2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$ soni $(1+x)^{\frac{1}{4}}$ binomining $x=\frac{1}{4}$ dagi qiymatiga teng.

$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{4}}$ funksiya uchun quyidagi yoyilma o'rinli:

$$(1+x)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)}{3!}x^3 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{4-1!}x - \frac{1\cdot 3}{4^2\cdot 2!}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4^3\cdot 3!}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4^4\cdot 4!}x^4 + \ldots$$

$x\frac{1}{4}$ da ishora navbatlashuvchi ushbu qatorni hosil qilamiz:

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4\cdot 1!\cdot 4} - \frac{1\cdot 3}{4^2\cdot 2!\cdot 4^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4^3\cdot 3!\cdot 4^3} - \frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4^4\cdot 4!4^4} + \ldots$$

Ishora navbatlashuvchi qatorning xossasiga ko'ra, berilgan ildiz qiymatini 0,001 aniqlikda hisoblash uchun so'nggi qatorning dastlabki to'rtta hadini olish yetarli, chunki beshinchi hadi absolyut qiymati bo'yicha 0,001 dan kichik.

$$\frac{2\cdot 1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4^4\cdot 4!\cdot 4^4} = \frac{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 8\cdot 2\cdot 16\cdot 4^4} < \frac{1}{2\cdot 4^5} < \frac{1}{2568} < 0,001$$

hisoblashni bajaramiz:

$$\sqrt[4]{20}=2\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot 1!\cdot 4}-\frac{1\cdot 3}{4^2\cdot 4!4^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{4^3\cdot 3!\cdot 4^3}\right)=$$
$$=2,000+0,0625-0,0059+0,0009\approx 2,0575$$

3-misol. $e^{0,2}$ ni 0,0001 aniqlikda hisoblang.

Yechish. e^x funksiyaning Teylor formulasiga ko'ra

$e^{0,2}=1+\frac{0,2}{1!}+\frac{0,2^2}{2!}+...+\frac{0,2^n}{n!}+...$ ni baholaymiz:

$$r_4=\frac{0,2^4}{4!}+\frac{0,2^5}{5!}+\frac{0,2^6}{6!}+...=\frac{0,2^4}{4!}(1+\frac{0,2}{5!}+\frac{0,2^2}{5\cdot 6}+...)<$$

$$<\frac{0,2^4}{4!}(1+\frac{0,2}{5}+\left(\frac{0,2}{5}\right)^2+...)=\frac{0,0016}{24}\cdot\frac{1}{1-\frac{0,2}{5}}<0,0001.$$

Demak, 0,0001 aniqlikda $e^{0,2}=1+\frac{0,2}{1!}+\frac{0,2^2}{2!}+\frac{0,2^3}{3!}\approx 1,2213.$

Tenglamalarni yechish

1-misol. $e^x-e^y=xy$ (1) tenglamani x ga nisbatan yeching (y ni x ning darajalari bo'yicha yoyilmasining dastlabki uchta hadini toping).

Yechish. (1) tenglama y ni x ning oshkormas funksiyasi sifatida aniqlaydi. Bu funksiya istalgan tartibli hosilaga ega. Bunda y ni x orqali aniq ifodalash mumkin emas. Shu sababli yechimni darajali qator ko'rinishda izlaymiz.

Bunda ikki usuldan foydalanish mumkin:

a) Noma'lum koeffitsientlar metodi.

Ma'lumki,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+... \qquad (2)$$

qator $(-\infty;+\infty)$ da yaqinlashuvchi. Shunga o'xshash

$$e^y=1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+...+\frac{y^n}{n!}+... \qquad (2')$$

qator ham $(-\infty;+\infty)$ da yaqinlashuvchi.

(2) va (2′) qatorlarni (1) tenglamaga qo‘yamiz:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^4}{n!}+...-(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+...+\frac{y^n}{n!}+...)=xy.$$

y funksiyani

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... \qquad (4)$$

qator ko‘rinishda izlaymiz. (3) tenglamadagi y o‘rniga (4) qatorni qo‘yamiz:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^4}{n!}+...x(a_0+a_1x+a_2x^2+...1+$$

$$+\frac{a_0+a_nx^n+...}{1}+\frac{(a_0+a_1x+...)}{2!}+...$$

Endi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsentlarni tenglashtiramiz. Avval x^0 oldidagi, ya’ni ozod hadni topamiz. Bunda

$$1-1-(a_0+\frac{a_0^2}{2}+...)=0,$$ bundan $a_0=0$.

x ning oldidagi koeffitsientlarni tenglashtiramiz:

$1-a_1-a_0(a_1+...)=a_0\cdot a_0=0$ ekanligini e’tiborga olib, $1-a_1=0$ yoki $a_1=1$ ekanligini topamiz. x^2 oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, $a_1=-1$, x^3 oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib $a_2=2$ ekanligini topamiz. Shunday qilib, y ning taqribiy formulasini $y\approx x-x^2+2x^3$ ni topamiz.

b) Hosiladan foydalanish metodi. Bu metod y funksiyaning 0 nuqtadagi hosilalarini ketma-ket topishga asoslangan.

(1) tenglamani y ni x ning differensiallanuvchi funksiyasi deb qarab, x bo‘yicha differensiallaymiz:

$$e^x-e^y\cdot y'=y+xy' \qquad (6)$$

x=0 da $e^0-e^{y(0)}\cdot y'(0)=y(0)+0\cdot y'(0)$, bu yerda $y(0)=0$ ekanligini e’tiborga olsak, $y'(0)=1$ hosil bo‘ladi. Endi $y''(0)$ ni izlaymiz. Shu maqsadda (6) tenglamani x bo‘yicha differensiallaymiz:

$$e^x-e^y(y')^2-e^y\cdot y''=y'+y'+xy'' \qquad (7)$$

(7) da $x=0$ va $y(0)=0$, $y'(0)=1$ ekanligini hisobga olib, $y''(0)=-2$ ekanligini topamiz. $y''(0)$ ni topish uchun (7) ni differensiallaymiz:

$$e^x-e^y\cdot y'^3-3e^y\cdot y'\cdot y''-e^y y'=3y''+xy''' \qquad (8)$$

$y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ ning qiymatlarini hisobga olib $y'''(0)=12$ ekanligini topamiz.

$$y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\dots$$

formulaga $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$ ni qo'yib

$$y\approx x-\frac{2}{2!}x^2+\frac{12}{3!}x^3=x-x^2+2x^3$$

ni hosil qilamiz. Ravshanki, ikkinchi usulda yechish osondir.

Darajali qatorlar yordamida integrallarni taqribiy hisoblash

Misol. 0,0001 aniqlikda integralni hisoblang.

Yechish. sinx funksiyani uning darajali qatori bilan almashtiramiz va hosil bo'lgan qatorni hadma-had integrallab quyidagiga erishamiz:

$$\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{0,5}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\dots\right)\Bigg|_0^{0,5}=0,5-\frac{0,125}{18}+\frac{0,03125}{600}-\dots$$

Natijada, ishora navbatlashuvchi qator hosil bo'ldi. Bunda $\frac{0,03125}{600}<0,0001$ bo'lganligi sababli, talab qilingan aniqlikda hisoblash uchun bu qatorning avvalgi ikkita hadi yig'indisi bilan chegaralanish kifoya.

Shunday qilib, $\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx=0,5-\frac{0,125}{18}\approx 0,4931.$

15-bob. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

1-§. Differensial tenglama tushunchasi

Erkli o'zgaruvchi x, noma'lum funksiya y=y(x) va bu funksiya hosilalarini bog'lovchi tenglama *differensial tenglama* deyiladi.

Bunday tenglama umumiy holda quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0 \qquad (1)$$

(1) tenglamada qatnashgan noma'lum funksiya hosilasining eng yuqori tartibi differensial tenglamaning tartibi deyiladi.

Agar $y=\varphi(x)$ funksiya va uning hosilalarini (1) tenglamaga qo'yilganda uni ayniyatga aylantirsa, ya'ni

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\dots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0$$

bo'lsa, $y=\varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi deyiladi.

Differensial tenglamaning yechimi cheksiz, ko'p bo'ladi. Barcha yechimlarni o'z ichiga olgan yechim, differensial tenglamaning umumiy yechimi deyiladi.

Masalan, ushbu

$$y''-x=0 \qquad (2)$$

tenglama ikkinchi tartibli differensial tenglama bolib, uning yechimi

$$\varphi(x)=\frac{1}{6}x^3+x$$

bo'ladi, chunki

$$\varphi(x)=\left(\frac{1}{6}x^3+x\right)'=\frac{1}{2}x^2+1, \qquad \varphi''(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)'=x$$

bo'lib,

$$\varphi''(x)-x=x-x=0$$

boladi.

(2) differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3+c_1x+c_2$$

bo‘ladi, bunda c_1, c_2 ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar. (Xususan $c_1=1$, $c_2=0$ bo‘lganda umumiy yechimdan yuqoridagi yechim kelib chiqadi.)

2-§. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy ko‘rinishi quydagicha

$$F(x,y,y')=0$$

bo‘ladi. Agar bu tenglama y' ga nisbatan yechiladigan bo‘lsa, unda

$$y'=f(x,y) \qquad (3)$$

tenglamaga kelamiz. Odatda, (3) tenglama hosilaga nisbatan yechilgan differensial tenglama deyiladi.

Endi (3) tenglamaning xususiy hollarini qaraymiz.

1°. (3) tenglamaning o‘ng tomoni faqat x o‘zgaruvchiga teng bo‘lsin:

$$y'=f(x) \qquad (4)$$

Bu tenglikni integrallab topamiz:

$$y=\int f(dx)+c \qquad (c-o'zgarmas\ son)$$

Demak, (4) tenglamaning umumiy yechimi

$$y=\int f(dx)+c \qquad (5)$$

bo‘ladi. Misol, ushbu

$$y'=2x^2$$

tenglama yechilsin.

◄ Berilgan differensial tenglamaning yechimini (5) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$y=\int 2x^2dx+c=\frac{2}{3}x^3+c.$$

2°. (3) tenglamaning o'ng tomoni faqat y ga bog'liq bo'lsin:

$$y'=f(y).$$

Avvalo,

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

ekanini etiborga olib, so'ng bu tenglamada y ni erkli o'zgaruvchi, x ni esa y ning funksiyasi bo'lsin deymiz. Unda

$$\frac{dy}{dx}=f(y),\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{f(y)}$$

bo'lib, yuqoridagi 1°-holga keladi. Keyingi tenglamaning yechimi

$$x=\int\frac{1}{f(y)}dy+c$$

bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$y'=7y^2$$

tenglama yechilsin.

◄ Bu tenglamani quydagicha yozib olamiz.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{7y^2}$$

keyingi tenglikdan esa,

$$dx=\frac{1}{7}\cdot\frac{dy}{y^2}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Uni integrallab topamiz:

$$x=\int\frac{1}{7}\cdot\frac{dy}{y^2}+c=\frac{1}{7}\int y^{-2}dy+c=$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\frac{-1}{y}+c=-\frac{1}{7y}+c.$$

Demak,

$$y=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{c-x}. \blacktriangleright$$

3°. (3) tenglamaning o‘ng tomoni faqat x o‘zgaruvchi ham-da faqat y o‘zgaruvchilar funksiyalarining ko‘paytmasidan iborat bo‘lsin:

$$y'=f(x)\cdot g(y)$$

Odatda bu o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deyiladi. Uni quydagicha ham yozsa bo‘ladi:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(x)$$

keyingi tenglamaning ikki tomonini dx ga ko‘paytirib, so‘ngra g(y) ga bo‘lib, ushbu tenglamaga kelamiz:

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

Uni itegrallab topamiz:

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+c$$

Bu integrallar hisoblanib, so‘ng y ni x orqali ifodalab berilgan tenglamaning yechimiga kelamiz.

1-misol: Ushbu

$$y'=xy+x+y+1$$

tenglama yechilsin.

◀ Berilgan tenglamaning o‘ng tomonini quydagicha yozib olamiz:

$$xy+x+y+1=x(y+1)+(y+1)=(x+1)(y+1)$$

Demak,

$$\frac{dy}{dx}=(x+1)(y+1)$$

keying tenglikda,

$$\frac{dy}{y+1}=(x+1)dx$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Integrallab topamiz:

$$\int\frac{dy}{y+1}=\int(x+1)dx+\ln c,$$

$$\ln(y+1)=\frac{(x+1)^2}{2}+\ln c,$$

$$\frac{y+1}{c}=e\frac{(x+1)^2}{2}$$

$$y=ce\frac{(x+1)^2}{2}-1$$

2-misol. *(1+x)ydx+(1−y)xdy=0* bu o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir.

Yechish. O‘zgaruvchilarni ajratish uchun tenglamaning har bir hadini $xy\neq0$ ga bo‘lamiz

$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0,$ integrallaymiz

$$\ln|x|+x+\ln y-y=\ln C,$$

$\ln\left|\frac{xy}{C}\right|=y-x;\quad \frac{xy}{C}=e^{y-x},\quad xy=Ce^{y-x}$ bu tenglamaning umumiy yechimi.

3-§. Bir jinsli differensial tenglamalar

Ikki o'zgaruvchili f(x,y) funksiya uchun ixtiyoriy t da

$$f(tx,ty)=f(x,y)$$

tenglik bajarilsa, f(x,y) bir jinsli (aniqrog'i, nolinchi tartibli bir jinsli) funksiya deyiladi.

Agar

$$y'=f(x,y) \qquad (6)$$

differensial tenglamaning o'ng tomonidagi f(x,y) bir jinsli funksiya bo'lsa, (6) bir jinsli differensial tenglama deyiladi.

Aytaylik, f(x,y) bir jinsli funksiya bo'lsin:

$$f(tx,ty)=f(x,y)$$

Xususan, $t=\frac{1}{x}$ bo'lsa,

$$f\left(1,\frac{y}{x}\right)=f(x,y)$$

bo'ladi va (6) tenglama quydagi ko'rinishga keladi

$$y'=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (7)$$

(7) tenglamani yechish uchun $\frac{y}{x}=u$ deb olamiz. Unda

$$y=ux, \quad y'=(ux)'=u'x+ux'=u'x+u$$

bo'ladi. Bularni (7) tenglamaga qo'yib topamiz:

$$u'x+u=\varphi(u)$$

$$u'x=\varphi(u)-u$$

$$x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u$$

natijada o'zgaruvchilari ajraladigan ushbu

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

tenglamaga kelamiz. Uni integrallab topamiz:

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+\ln c$$

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln x+\ln c$$

$$\ln cx=\int\frac{du}{\varphi(u)-u}$$

Misol. Ushbu differensial tenglama yechilsin:

$$y'=\frac{y}{x+y}$$

◄ Bu tenglamaning o'ng tomonidagi

$$f(x,y)=\frac{y}{x+y}$$

bir jinsli funksiya bo'ladi, chunki

$$f(tx,ty)=\frac{ty}{tx+ty}=\frac{ty}{t(x+y)}=\frac{y}{x+y}$$

berilgan tenglamani quydagicha yozib

$$y'=\frac{y}{x+y}=\frac{\frac{y}{x}}{\frac{x+y}{x}}=\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

so'ng,

$$\frac{y}{x}=u$$

deb olamiz u holda,

$$y=ux,\ y'=u'x+u$$

bo'lib, qaralayotgan tenglama ushbu ko'rinishga kelishini topamiz:

$$u'x+u=\frac{u}{1+u},\qquad u'x=\frac{u}{1+u}-u=-\frac{u^2}{1+u}$$

Natijada,

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{1+u},\quad y'ani\quad -\frac{1+u}{u^2}du=\frac{dx}{x}$$

bo'ladi. bundan

$$\int\left(-\frac{1+u}{u^2}\right)du=\int\frac{dx}{x}+\ln c$$

$$\frac{1}{u}-\ln u=\ln x+\ln c,$$

$$\frac{x}{y}-\ln\frac{y}{x}=\ln x+\ln c$$

$$x=y\ln cy$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa berilgan differensial tenglamani umumiy yechimi bo'ladi.

4-§. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

Noma'lum funksiya va uning hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lgan ushbu

$$y'+p(x)y+q(x)=0 \qquad (8)$$

ko'rinishdagi tenglama birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi, bunda p(x) va q(x) uzluksiz funksiyalar. (8) tenglamaning yechimini

$$y=u(x)\cdot v(x)=u\cdot v$$

ko‘rinishda izlaymiz

$$y=u\cdot v, \qquad y'=(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

Unda,

$$u'\cdot v+u\cdot v'+p(x)\cdot u\cdot v+q(x)=0 \tag{9}$$

Endi v ni shunday tanlaymizki,

$$v'+p\cdot v=0$$

ya’ni

$$\frac{dv}{dx}+p\cdot v=0$$

$$\frac{dv}{v}=-p(x)dx$$

$$\ln v=-\int p(x)dx$$

$$v=e^{-\int p(x)dx}$$

bo‘lsin.

Bu topilgan v ni (9) tenglamaga qo‘yib, hosil bo‘lgan tenglamani yechamiz:

$$u'\cdot e^{-\int p(x)dx}+q=0, \qquad \frac{du}{dx}=-qe^{-\int p(x)dx},$$

$$u=-\int q(x)\cdot e^{-\int q(x)dx}dx+c.$$

Natijada,

$$y=u\cdot v=e^{-\int q(x)dx}\left(c-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right) \tag{*}$$

bo‘ladi. Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimidir.

Misol. Ushbu

$$y'+xy-x^2=0$$

tenglama yechilsin.

◄ Bu tenglamaning yechimini topishda yuqorida keltirilgan (*) formuladan foydalanamiz. Misolda berilishiga ko'ra

$$p(x)=x, \qquad q(x)=-x^2$$

bo'ladi. Demak,

$$y=e^{-\int q(x)dx}\left(c-\int(-x^2)e^{\int xdx}dx\right)=$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(c+x^2e^{\frac{x^2}{2}}-2e^{\frac{x^2}{2}}\right)=c\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+x^2-2$$

bo'ladi. ►

5-§. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

Ushbu

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=f(x) \qquad (10)$$

ko'rinishdagi tenglama ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi, bunda p(x),q(x) va f(x) – uzluksiz funksiyalar.

Agar (10) tenglamada f(x)=0 bo'lsa,

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=0$$

uni ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglama deyiladi.

Avval chiziqli erkli hamda chiziqli bog'liq funksiyalar tushunchasini keltiramiz. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar [a,b] segmentga berilgan bo'lsin.

Agar shunday o'zgarmas α_1 va α_2 sonlar topilsaki, ulardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lib,

$$\alpha_1\cdot y_1(x)+\alpha_2\cdot y_2(x)=0$$

bo'lsa, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli bog'liq funksiyalar deyiladi.

Agar

$$\alpha_1 \cdot y_1(x)+\alpha_2 \cdot y_2(x)=0$$

tenglik faqat $\alpha_1=\alpha_2=0$ bo'lgandagina o'rinli bo'lsa, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli erkli funksiyalar deyiladi.

Masalan,

$$y_1(x)=1, \qquad y_2(x)=x$$

funksiyalar chiziqli erkli funksiyalar bo'ladi, chunki

$$\alpha_1 \cdot 1+\alpha_2 \cdot x=0$$

tenglik faqat $\alpha_1=\alpha_2=0$ bo'lgandagina bajariladi.

Aytaylik,

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=0$$

Ikkinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar berilgan bo'lsin.

Teorema. Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'lsa, u holda tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x)=c_1 \cdot y_1(x)+c_2 \cdot y_2(x)$$

bo'ladi, bunda c_1, c_2 – ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Ikkinchi tartibli

$$y''+p(x)y'(x)+q(x)y=f(x)$$

tenglamaning umumiy yechimi haqida ushbu teorema o'rinli.

Teorema. Ushbu

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

tenglamaning umumiy yechimi shu tenglamaning xususiy yechimi bilan

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

tenglamaning umumiy yechimi yig'indisiga teng bo'ladi.

6-§. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamalar

Ushbu

$$y''+py'+qy=0$$

ko'rinishdagi tenglama (bunda, p va q o'zgarmas sonlar) o'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar deyiladi.

Tenglamani yechish uchun

$$y=e^{kx}$$

deb olamiz, bunda k nolga teng bo'lmagan o'zgarmas son.

Ravshanki,

$$y'=e^{kx}\cdot k, \qquad y''=e^{kx}\cdot k^2$$

Endi

$$y=e^{kx}, \qquad y'=ke^{kx}, \qquad y''=k^2e^{kx}$$

larni tenglamaga qo'yib

$$k^2e^{kx}+p\cdot e^{kx}+q\cdot e^{kx}=0$$

ya'ni,

$$k^2+p^k+q=0$$

kvadrat tenglamaga kelamiz.

Ravshanki, k yuqoridagi kvadrat tenglamaning yechimi bo'lsa, e^{kx} funksiya differensial tenglamaning yechimi bo'ladi.

Odatda,

$$k^2+pk+q=0$$

Kvadrat tenglama

$$y''+py'+qy=0$$

differensial tenglamaning xarakterislik tenglamasi deyiladi.

Ma'lumki,

$$k^2+pk+q=0$$

kvadrat tenglamaning ildizlari.

$$k_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \qquad k_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

bo'ladi. Bunda quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1) k_1 va k_2 haqiqiy va bir biriga teng emas: $k_1\neq k_2$

2) k_1 va k_2 haqiqiy va bir-biriga teng: $k_1=k_2$

3) k_1 va k_2 kompleks sonlar: $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$. Har bir holni alohida-alohida qarab chiqamiz.

a) Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va bir-biriga teng emas ($k_1\neq k_2$). Bu holda

$$y_1=e^{k_1x}, \qquad y_2=e^{k_2x}$$

funksiyalar berilgan tenglamaning xususiy yechimlari bo'lib, tenglamaning umumiy yechimi

$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}$$

ko'rinishida bo'ladi, chunki

$$y'=c_1k_1e^{k_1x}+c_2k_2e^{k_2x}$$

$$y''=c_1k_1^2e^{k_1x}+c_2k_2^2e^{k_2x}$$

va

$$c_1k_1^2e^{k_1x}+c_2k_2^2e^{k_2x}+$$

$$+p(c_1k_1e^{k_1x}+c_2k_2e^{k_2x})+$$

$$+q(ce^{k_1x}+ce^{k_2x})=0$$

$$(c_1k_1^2e^{k_1x}+pc_1k_1e^{k_1x}+qc_1e^{k_1x})+$$

$$+(c_1k_2^2e^{k_2x}+pc_2k_2e^{k_2x}+qc_2e^{k_2x})=0$$

yoki

$$c_1e^{k_1x}(k_1^2+pk_1+q)+$$

$$+c_2e^{k_2x}(k_2^2+pk_2+q)=0$$

Masalan, ushbu

$$y''-8y'+15y=0$$

differensial tenglamani xarakteristik tenglamasi

$$k^2-8x+15=0$$

bo'lib, $yk_1=5$, $k_2=3$ ildizlarga ega. Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y=c_1e^{5x}+c_2e^{3x}$$

bo'ladi.

b) Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va ular bir-biriga teng ($k_1=k_2$).

Bu holda xarakteristik tenglamaning ildizlari,

$$k_1=k_2=-\frac{p}{2}$$

bo'lib,

$$2k_1=-p$$

yoki

$$2k_1+p=0$$

bo'ladi.

Differensial tenglamaning bitta xususiy yechimi

$$y_1=e^{k_1x}$$

bo'ladi. Ikkinchi xususiy yechimini

$$y_2=u(x)\cdot e^{k_1x}$$

ko'rinishida izlaymiz. Bunda noma'lum $u=u(x)$ funksiyani topish uchun y''_1, y''_2 larni topamiz.

$$y'_2=u'e^{k_1x}+uk_1e^{k_1x}=e^{k_1x}(u'+uk_1)$$

$$y''_2=e^{k_1x}(u''+2k_1u'+k^2_1u).$$

Endi,

$$y_2=ue^{k_1x}, \quad y'_2=e^{k_1x}(u'+uk_1)$$

$$y''_2=e^{k_1x}(u''+2k_1u'+k^2_1u)$$

larni

$$y''+py'+qy=0$$

tenglamaga qo'yamiz:

$$e^{k_1x}[(u''+2k_1u'+k^2_1u)+pe^{k_1x}(u'+k_1u)+que^{k_1x}]=0$$

$$e^{k_1x}[u''+(2k_1+p)u'+(k^2_1+k_1p+q)u]=0$$

k xarakteristik tenglamaning karrali ildizi va $2k_1+p=0$ bo'lgani uchun

$$e^{k_1x}=0 \quad yoki \quad u''=0$$

bo'lishi lozim, uni integrallab topamiz:

$$u(x)=Ax+B$$

Xususiy holda, B=0, A=1 deb olsak, u(x)=x bo'ladi.

Shunday qilib ikkinchi xususiy yechim

$$y_2=x\,e^{k_1x}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Demak, qaralayotgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y=c_1\,e^{k_1x}+c_2\,e^{k_1x}=e^{k_1x}(c_1+c_2x)$$

bo'ladi.

Masalan, ushbu

$$4k^2-12k+9=0$$

bo'lib, uning ildizlari $k_1=k_2=\frac{3}{2}$ bo'lgani uchun tenglamaning umumiy yechimi

$$y=(c_1+c_2x)e^{\frac{3}{2}x}$$

bo'ladi.

b) Xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks sonlar bo'lib, $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$ bo'lsin.

Bu holda qaralayotgan differensial tenglamaning xususiy yechimlari

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x},\quad y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Isbotlanadiki, agar haqiqiy koeffitsentli bir jinsli chiziqli tenglamaning xususiy yechimlari kompleks sonlardan iborat bo'lsa, uning haqiqiy va mavhum qismlari ham shu tenglamaning yechimi bo'ladi.

Xususiy yechim,

$$e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

bo'lgani uchun,

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad e^{\alpha x}\sin\beta x$$

lar ham tenglamaning yechimi bo'ladi. Shunday qilib, qaralayotgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y=e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x+ c_2 \sin\beta x)$$

bo'ladi.

Masalan, ushbu

$$y''-4y'+7y=0$$

differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi $k^2-4k+7=0$ ning ildizlari

$$k_1 = 2+i\sqrt{3}, \qquad k_2 = 2-i\sqrt{3}$$

bo'lib, differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y=e^{2x}(c_1 \cos\sqrt{3}+c_2 \sin\sqrt{3}x)$$

bo'ladi.

4. O'zgarmas koeffitsientli bir jinslimas chiziqli tenglamalar.

Ushbu,

$$y''+py'+qy=f(x)$$

ko'rinishdagi differensial tenglama ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama deyiladi, bunda p, q haqiqiy sondir.

Bu differensial tenglamaning yechimini f(x) funksiyaning berilishiga qarab topamiz.

1°. $y''+py'+qy=f(x)$ tenglamaning o'ng tomoni ko'rsatkichli funksiya bilan ko'phad ko'paytmasidan

$$f(x)=p_m(x)e^{\alpha x}$$

iborat, bunda

$$p_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots a_m.$$

Tasdiq. Agar

$$y''+py'+qy=0$$

tenglamaning umumiy yechimi $\bar{y}$ bo'lib, $u=u(x)$ esa

$$y''+py'+qy=f(x)$$

tenglamaning ixtiyoriy xususiy yechimi bo'lsa, u holda tenglamaning umumiy yechimi

$$y=\bar{y}+u$$

bo'ladi.

Bizga bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$k^2+pk+q=0$$

xarakteristik tenglamaning ildizlari bilan bog'lab topilishi ma'lum. Xususiy yechimni esa quyidagi hollarga muvofiq topamiz.

a) α soni $k^2+pk+q=0$ xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmagan hol.

Bu holda xususiy yechimni

$$y=(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m)e^{\alpha x}=Q_m(x)e^{\alpha x}$$

ko'rinishida izlaymiz, bunda $Q_m(x)-m$ – darajali ko'phad, u', u'' larni topamiz:

$$u'=(a_0mx^{m-1}+a_1(m-1)x^{m-2}+\ldots+a_{m-1})e^{\alpha x}+$$

$$+(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m)\alpha e^{\alpha x}.$$

$$u''=[a_0m(m-1)x^{n-2}+$$

$$+a_1(m-1)(m-2)x^{m-3}+\ldots+a_{m-2})]e^{\alpha x}+$$

$$+[a_0x^{m-1}+a_1(m-1)x^{m-2}+$$

$$+\ldots+a_{m-1})]\alpha e^{\alpha x}$$

$$+[a_0x^{m-1}+a_1(m-1)x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}]e^{\alpha x}+$$

$$+(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m)e^{\alpha x}\alpha^2$$

u′ va u″ larning ifodalarini tenglamaga qo‘yib, so‘ng soddalashtirish natijasida ushbu

$$Q''_m(x)+(2\alpha+p)Q'_m(x)+(\alpha^2+p\alpha+q)Q_m(x)=p_m(x)$$

tenglama hosil bo‘ladi, bunda Q''_m–(m–2) darajali ko‘phad, Q'_m–(m–1) darajali ko‘phad.

Tenglamaning chap va o‘ng tomonlari m-darajali ko‘phadlardan iborat. Bir xil darajali x lar oldidagi koeffitsientlarni bir-biriga tenglab, noma’lum $a_0,a_1,\ldots,a_m$ koeffitsientlarni topamiz.

b) α soni $k^2+pk+q=0$ xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lgan hol.

Bu holda xususiy yechimi $u=xQ_m(x)e^{\alpha x}$ ko‘rinishda izlaniladi.

c) α soni xarakteristik tenglamaning ikki karrali ildizi bo‘lgan hol. Bu holda

$$u=x^2Q_m(x)e^{\alpha x}$$

ko‘rinishda izlanadi.

16-bob. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

1-§. Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari va tasdiqlari

1°. Tasodifiy hodisa tushunchasi.

Tabiatni, texnik jarayonlari kuzatganimizda turli hodisalar yuz berishini ko'ramiz.

Masalan, Quyoshning chiqishi ba botishi, otilgan o'qning nishonga tegishi yoki tegmasligi, havo o'zgarib, yomg'ir yoki qor yog'ishi, tangani tashlash natijasida raqamli yoki gerbli tamoni tushishi hodisalari misol bo'ladi.

Umuman aytganda hodisa deganda kuzatish yoki tajriba natijasida kelgan dalil (fakt) tushuniladi.

Odatda, hodisalar ma'lum shartlar (shartlar majmuasi) bajarilganda yoki tajriba (sinov) o'tkazish natijasida sodir bo'ladi.

Masalan, tangani tashlashdan iborat tajribani qaraylik. Tanganing u yoki bu tomonini tushishini to'la ishonch bilan oldindan aytib bo'lmaydi yoki ekilgan chigit urug'ini unib chiqishini yoki chiqmasligini aytish qiyin. Bunga o'xshash barcha hollarda tajribaning natijasi turli tasodiflarga bog'liq deb hisoblanadi va uni tasodifiy hodisa sifatida qaraladi.

Tajriba natijasida (biror shartlar majmuyi bajarilganda) ro'y berish ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisa *tasodifiy hodisa* deyiladi. Masalan, tanga tashlash tajribasida gerbli tomoni tushishi yoki raqamli tomoni tushishi hodisasi tasodifiy hodisa bo'ladi.

Tajriba natijasida albatta ro'y beradigan hodisa *muqarrar hodisa* deyiladi.

Tajriba natijasida mutlaqo ro'y bermaydigan hodisa mumkin bo'lmagan hodisa deyiladi.

Odatda hodisalar bosh harflar bilan belgilanadi. Muqarrar hodisa U harfi, mumkin bo'lmagan hodisa esa V harfi bilan belgilanadi. Keyinchalik, tasodifiy hodisa deyish o'rniga hodisa deb ketaveramiz.

Tajribaning har bir hodisasini ifodalovchi hodisa elementar hodisa deyiladi.

Masalan, tajriba tangani ikki marta tashlashdan iborat bo'lsin. Bu tajribada sodir bo'ladigan elementar hodisalar quyidagicha bo'ladi.

Agar G — tanganing gerb tomoni tushishi hodisasi, R — tanganing raqam tomoni tushishi hodisasi bo'lsa, birinchi tajribada (G),(R), ikkinchi tajribada (G,G), (G,R), (R,G), (R,R) bo'ladi. Demak, tajriba natijasida to'rtta elementar hodisalar yuzaga keladi.

2°. Hodisalar ustida amallar (Hodisalar algebrasi).

Aytaylik, tajriba natijasida A va B hodisalar sodir bo'lishi mumkin deylik.

1-ta'rif. Agar A hodisa sodir bo'lganda hamma vaqt B hogisa ham sodir bo'lsa, A hodisa B hodisani ergashtiradi deyiladi va $A \subset B$ kabi yoziladi.

Masalan, kubikni tashlash tajribasida A — ikki raqamli tomonini tushishi hodisasi, B esa juft raqamli tomonini tushishi hodisasi bo'lsa, $A \subset B$ bo'ladi.

Agar $A \subset B$, $B \subset A$ bolsa, A va B teng kuchli hodisalar deyiladi va $A=B$ kabi yoziladi.

2-ta'rif. A va B hodisalarning hech bo'lmaganda bittasining sodir bo'lishi natijasida sodir bo'ladigan C hodisa, A va B hodisalarning yig'indisi deyiladi va

$$C=A+B$$

kabi yoziladi.

Huddi shunga o'xshash $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar yig'indisi ta'riflanadi.

Keltirilgan ta'rifdan $A+B=B+A$, $A+A=A$ bo'lishi kelib chiqadi.

3-ta'rif. A va B hodisalarning (bir vaqtda) sodir bo'lishi natijasida sodir bo'ladigan D hodisa A va B hodisalarning ko'paytmasi deyiladi. Uni $D=A\cdot B$ kabi yoziladi. Huddi shunga o'xshash $A_1,A_2,...,A_n$ hodisalar ko'paytmasi ta'riflanadi. Bu ta'rifdan $A\cdot B=B\cdot A$, $A\cdot A=A$ bo'lishi kelib chiqadi.

4-ta'rif. Agar A hodisaning sodir bo'lishi B hodisaning ham sodir bo'lishini inkor etmasa, A va B birgalikda bo'lgan hodisalar deyiladi.

Masalan, kubikni bir marta tashlash tajribasida 3 raqamli tomon tushishi hodisasi toq raqamli tomonini tushish hodisasi birgalikda bo'lgan hodisalar bo'ladi.

5-ta'rif. Agar A hodisaning sodir bo'lishi B hodisaning sodir bo'lishini inkor etsa, A va B birgalikda bo'lmagan hodisalar deyiladi.

3°. Hodisa ehtimolining ta'rifi.

Tajriba natijasida bir qancha hodisalar (ko'pincha ularni sanash mumkin bo'ladi) yuzaga keladi. Bunda, ba'zan hodisalarning yuzaga kelishi imkoniyati boshqa hodisalarning yuzaga kelishi imkoniyatidan ko'proq yoki kamroq bo'lishi mumkin. Uni xarakterlaydigan miqdorni aniqlash hodisa ehtimoli tushunchasiga olib keladi.

Aytaylik, tajriba natijasida bir xil imkoniyat bilan $e_1,e_2,...,e_n$ hodisalar yuzaga kelgan deylik.

6-ta'rif. Agar

1) $e_1+e_2+...+e_n=U$

2) $e_i\cdot e_j=V$, $(i,j=1,2...,n,i\neq j)$

bo'lsa, $e_1,e_2,...,e_n$ hodisalar juft-jufti birgalikda bo'lmagan teng imkoniyatli hodisalarning to'la gruppasini tashkil etadi deyiladi.

Masalan, kubikni tashlash tajribasida e_i — kubikning i raqamli $(i=1,2,3,4,5,6)$ tomoni tushishi hodisasi deyilsa, unda e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6 lar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la gruppasini tashkil etadi. Bunda e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6 teng imkoniyatli elementar hodisalar.

Ikki A va B hodisalarni qaraylik.

Agar A hodisaning sodir bo'lishi o'z navbatida B hodisani ergashtirsa, A hodisa B hodisaning sodir bo'lishiga qulaylik tug'diruvchi hodisa deyiladi. Masalan, A hodisa kubikni tashlash tajribasida uning juft raqamli tomonini tushishidan iborat bo'lsin. Bunda e_2, e_4, e_6 elementar hodisalar A hodisaning sodir bo'lishiga qulaylik tug'diradi.

Aytaylik, n ta hodisaning gruppasini tashkil etuvchi

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

elementar hodisalardan m tasi A hodisaning sodir bo'lishiga qulaylik tug'dirsin.

7-ta'rif. Ushbu $\frac{m}{n}$ son A hodisaning ehtimoli deyiladi va $P(A)$ kabi yoziladi:

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

4°. Kombinatorika elementlari.

Ehtimollar nazariyasiga doir misollarni yechishda quyidagi kombinatorika elementlaridan foydalaniladi.

1. n ta elementdan k ta dan tuzilgan o'rinlashtirishlar soni

$$A^k_n = n(n-1)(n-2).....[n-(k-1)]$$

2. n ta elementdan tuzilgan o'rin almashtirishlar soni $Pn = n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$, birdan n gacha bo'lgan sonlar ko'paytmasiga teng.

3. n ta elementdan k tadan tuzilgan guruhlashlar (kombinatsiyalar) soni

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1\cdot2\cdot3\ldots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1-misol. Talaba 20 ta savoldan 2 tasiga javob berishi kerak. Bu ikkita savolni necha xil usulda tanlash mumkin.

Yechish: n=20, k=2 deb olamiz, u holda:

$$C_{20}^2 = \frac{A_{10}^2}{P_2} = \frac{20\cdot19}{1\cdot2} = 190$$

Demak, 190 usulda tanlash mumkin ekan.

2-misol. Tekshirishda aniqlandiki, har 8 ta qorako'l terisidan 1 donasi nostandart. Tavakkaliga olingan 3 ta qorako'l terilarini barchasini standart bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: Ehtimolikning klassik ta'rifi $P(A)=\frac{m}{n}$ dan foydalanamiz. Bunda $n=C_8^3=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}=56$, $m=C_7^3=\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}=35$

Demak,

$$P(A)=\frac{35}{56}=0,625$$

3-misol. Qutida 7 ta oq, 3 ta qora shar bor. Undan tavakkaliga olingan sharning oq bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish: A tavakkaliga olingan shar oq ekanligi hodisasi bo'lsin. Bu tajriba 10 ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan iborat bo'lib, ularning 7 tasi A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diradi. Demak, $P(A)=\frac{7}{10}=0,7$.

4-misol. Telefon raqamini terayotgan abonent oxirgi ikki raqamni unutib qo'yadi va faqat bu raqamlar turlicha ekanligini eslab qolgan holda ularni tavakkaliga teradi. Kerakli raqamlar terilgan bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: B – ikkita kerakli raqam terilganlik hodisasi bo'lsin. O'nta raqamni ikkitadan o'rinlashtirib, $A_{10}^2=10\cdot9=90$ dona turli raqamlarni terish mumkin. Demak, $P(B)=\frac{1}{90}$.

5-misol. Qurilma 5 ta elementdan iborat bo'lib, ularning 2 tasi eskirgan. Qurilma ishga tushirilganda tasodifiy ravishda 2 ta element ulanadi. Ishga tushirishda eskirmagan elementlar ulangan bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish: Tajribaning barcha mumkin bo'lgan elementar hodisalari soni C_5^2. Ularning ichida C_3^2 tasi eskirmagan elementlar ulangan bo'lishi hodisasi (A) uchun qulaylik tug'diradi. Demak,

$$P(A)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3!\cdot 2!\cdot 3!}{2!\cdot 1!\cdot 5!}=\frac{3}{10}.$$

2-§. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremalari. To'la ehtimollik va Bayes formulalari

Faraz qilaylik A va B hodisalar birgalikda bo'lmasin va ularning ehtimollari P(A) va P(B) berilgan bo'lsin.

Teorema. Birgalikda bo'lmagan ikkita A va B hodisadan ixtiyoriy bittasining ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng.

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \qquad (1)$$

Natija. Juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan bir nechta hodisalardan ixtiyoriy birining ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yig'indisiga teng.

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \qquad (2)$$

Agar bitta tajribada ikkita hodisadan birining ro'y berishi ikkinchisining ro'y berishini inkor etmasa, bu hodisalar birgalikda deyiladi.

Faraz qilaylik A va B birgalikda bo'lgan hodisalar bo'lib, P(A), P(B) va P(AB) ehtimollar berilgan bo'lsin. A+B, ya'ni A va B hodisalardan kamida bittasining ro'y berish ehtimolini topish talab etilsin.

Birgalikda bo'lgan ikkita hodisadan bittasini ro'y berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolini ayrilganiga tengdir:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad (3)$$

To‘la gruppa tashkil etuvchi $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar ehtimollari yig‘indisi 1 ga teng.

$$P(A_1+A_2+ \dots +A_n)=P(U)=1.$$

Agar A+B=U va AB=V bo‘lsa, u holda A va B hodisalarni o‘zaro qarama-qarshi hodisalar deyiladi.

Agar ikkita hodisadan birining ro‘y berishi ikkinchisining ro‘y berish yoki ro‘y bermasligiga bog‘liq bo‘lmasa, bu hodisalar erkli hodisalar deyiladi.

Agar ikki hodisadan birining ro‘y berish ehtimoli ikkinchi hodisaning ro‘y berish yoki ro‘y bermasligiga bog‘liq bo‘lsa, bu hodisalar bog‘liq deyiladi.

Faraz qilaylik, A va B birgalikda va erkli hodisalar bo‘lib, ularning P(A) va P(B) ehtimollari berilgan bo‘lsin.

Teorema. Ikkita A va B erkli hodisalarni birgalikda ro‘y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari ko‘paytmasiga teng.

$$P(AB)=P(A)P(B) \qquad (4)$$

Natija. Birgalikda o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan bir nechta hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari ko‘paytmasiga teng. Xususan

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \qquad (5)$$

B hodisaning A hodisa ro‘y bergan degan shartda hisoblanadigan ehtimoliga shartli ehtimol deyiladi va u P (B/A) yoki $P_A(B)$ bilan belgilanadi.

Teorema. Ikkita A va B bog‘liq hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli ulardan birining ehtimolini shu hodisa ro‘y bergan degan farazda hisoblanadigan ikkinchi hodisaning shartli ehtimoli ko‘paytmasiga teng

$$P(AB)=P(A)P(B/A) \qquad (6)$$

Xususan 3 ta bog‘liq hodisalarni birgalikda ro‘y berish ehtimollari uchun ushbu formula o‘rinlidir

$$P(ABC)=P(A)PA(B)P_{AB}(C) \qquad (7)$$

Birgalikda bog'liq bo'lmagan A_1, A_2, ..., A_n hodisalardan kamida bittasini sodir bo'lish ehtimoli

$$P(A)=q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot ... \cdot q_n$$

To'la ehtimol formulasi.

A hodisa to'la gruppa tashkil etuvchi birgalikda bo'lmagan B_1, B_2, ..., B_n hodisalardan biri ro'y berganda ro'y bersin, ya'ni $A=AB_1+AB_2+...+AB_n$, $P(A)=?$.

Talab qilingan ehtimol quyidagi to'la ehtimol formulasi bilan hisoblanadi

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+$$

$$+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i) \qquad (8)$$

Ko'pincha amaliyotda A hodisa ro'y berganligi shartida B_1, B_2, ..., B_n hodisalardan birining ro'y berish ehtimolini topish, ya'ni $P(B_i/A)$ shartli ehtimollarni topish zarur bo'ladi. Bu ehtimollar uchun quyidagi kurinishdagi Bayes formulasi mavjud $P(A)\neq 0$

$$P_A(B_i)\frac{P(B_1)\cdot P_{B_2}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)} \qquad (9)$$

1-misol. O'tkazilgan o'rik va gilos ko'chatlarini ko'karish ehtimoli mos ravishda 0,8 va 0,6 ga teng bo'lsa,

a) shulardan hech bo'lmaganda bittasini ko'karish ehtimoli topilsin;

b) ikkalasini ham ko'karish ehtimoli topilsin.

Yechish: a) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ kurinishdagi formuladan foydalanamiz. Bunda

$$P(A)=0,8;\ P(B)=0.6,\ P(AB)=P(A)P(B)=0,8\cdot 0,6=0,48.$$

U holda $P(A+B)=0,8+0,6-0,48=0,92$

b) $P(AB)=P(A)P(B)$ formuladan $P(AB)=0,8\cdot 0,6=0,48$

2-misol. Paxta zavodiga birinchi fermer xo'jaligi 50%, ikkinchi fermer xo'jaligi 20%, uchinchi fermer xo'jaligi 30% mahsulot beradi. Undan birinchi fermer xo'jaligi mahsulotining 70%, ikkinchi fermer xo'jaligining 85%, uchinchi fermer xo'jaligining 95% birinchi nav bo'lsa, tavakkaliga tekshirish uchun olingan tolaning birinchi nav bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. A – olingan tolani birinchi nav bo'lish hodisasi, B_1, B_2, B_3, – mos ravishda birinchi, ikkinchi va uchinchi fermer xo'jaligini paxta tolasi bo'lish hodisalari bo'lsin.

Masala shartiga asosan $P(B_1)=0.5$; $P(B_2)=0.2$; $P(B_3)=0.3$ va shartli ehtimollari

$$P(A/B_1)=0.7;\ P(A/B2)=0.85;$$

$$P(A/B3)=0.95$$

To'la ehtimol formulasiga asosan talab qilingan ehtimol

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+$$

$$+P(B_3)P(A/B_3)=0.5\cdot 0.7+0.2\cdot 0.85+0.3\cdot 0.95=$$

$$=0.36+0.17+0.285=0.805$$

3-misol. Sexda bir necha stanok ishlaydi. Smena davomida bitta stanokni ta'mirlash talab etilishi ehtimoli 0,2 ga teng, ikkita stanokni ta'mirlash talab etilishi ehtimoli 0,13 ga teng. Smena davomida ikkitadan ortiq stanokni ta'mirlash talab etilishi ehtimoli esa 0,07 ga teng. Smena davomida stanoklarni ta'mirlash talab etilishi ehtimolini toping.

Yechish: Quyidagi hodisalarni qaraymiz.

A={smena davomida bitta stanokni ta'mirlash talab etiladi};

B={smena davomida ikkita stanokni ta'mirlash talab etiladi};

C={smena davomida ikkitadan ortiq stanokni ta'mirlash talab etiladi}.

A, B va C hodisalar o'zaro birgalikda emas. Bizni qiziqtiradigan hodisa:

A+B+C – smena davomida hech bo'lmaganda bitta stanokni ta'mirlash zarur bo'lishi hodisasining ehtimolini topamiz:

$$P(A+B+C)=P(B)+P(B)+P(C)=0,2+0,13+0,07=0,4.$$

4-misol. Yashikda 10 ta qizil va 6 ta ko'k shar bor. Tavakkaliga 2 ta shar olinadi. Olingan ikkala sharning bir xil rangli bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: A – hodisa olingan ikkala shar qizil bo'lishi, B – hodisa esa olingan ikkala sharnng ko'k bo'lishi hodisasi bo'lsin. Ko'rinib turibdiki, A va B hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalar. Demak, $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

A hodisaning ro'y berishiga C_{10}^{2} ta elementar hodisa imkoniyat tug'diradi. B hodisaning ro'y berishiga esa C_{6}^{2} ta elementar hodisa imkoniyat tug'diradi. Umumiy ro'y berishi mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni esa C_{16}^{2} ga teng. U holda

$$P(A+B)=\frac{C_{10}^{2}+C_{6}^{2}}{C_{16}^{2}}=\frac{1}{2}.$$

5-misol. Ikki ovchi bo'riga qarata bittadan o'q uzishdi. Birinchi ovchining bo'riga tekkizish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisiniki esa 0,8 ga teng. Hech bo'lmaganda bitta o'qning bo'riga tegishi ehtimolini toping.

Yechish: A – birinchi ovchining o'qni bo'riga tekkizishi hodisasi, B – ikkinchi ovchining o'qni bo'riga tekkizishi hodisasi bo'lsin. Ko'rininb turibdiki, A va B hodisalar birgalikda bo'lgan, ammo bir-biriga bog'liq bo'lmagan hodisalar. U holda

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,94.$$

6-misol. Tanga va kubik bir vaqtda tashlangan. «Gerb» tushishi va «3» ochko tushishi hodisalarining birgalikda ro'y berishi ehtimolini toping.

Yechish: A – tanganing «gerb» tomoni tushishi hodisasi, B – kubik tashlanganda «3» ochkoning tushishi hodisasi bo'lsin. A va B hodisalar bog'liq bo'lmagan hodisalar. Demak,

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{12}.$$

7-misol. Sexda 7 ta erkak va 3 ta ayol ishchi ishlaydi. Tabel raqamlari bo'yicha tavakkaliga 3 kishi ajratildi. Barcha ajratib olingan ishchilarning erkaklar bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish: Hodisalarni quyidagicha belgilaymiz:

A – birinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo'lishi hodisasi;

B – ikkinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo'lishi hodisasi;

C – uchinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo'lishi hodisasi.

Birinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo'lishi hodisasining ehtimoli: P(A)=0,7.

Birinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo'lishi shartida ikkinchi ishchining erkak kishi bo'lishi ehtimoli, ya'ni B hodisaning shartli ehtimoli: $P_A(B)=\frac{2}{3}$.

Oldin ajratib olinganlarning ikkalasi erkak kishi bo'lishi sharti ostida uchinchi ajratilgan ishchining ham erkak kishi bo'lishi ehtimoli, ya'ni C hodisaning shartli ehtimoli: $P_{AB}(C)=\frac{5}{8}$. Ajratib olingan ishchilarning hammasi erkak kishilar bo'lishi ehtimoli: $P(ABC)=\frac{7}{24}$.

8-misol. Ko'prik yakson bo'lishi uchun bitta aviatsiya bombasining kelib tushishi kifoya. Agar ko'prikka tushish ehtimollari mos ravishda 0,3; 0,4; 0,6; 0,7 ga teng bo'lgan 4 ta bomba tashlangan bo'lsa, u holda ko'prikning yakson bo'lish ehtimolini toping.

Yeshish: Demak, kamida bitta bombaning ko'prikka tushishi, uni yakson bo'lishi uchun yetarli (A hodisa). U holda izlanayotgan ehtimollik

$$P(A)=1-q_1q_2q_3q_4=0,95.$$

9-misol. Birinchi qutida 2 ta oq , 6 ta qora, ikkinchi qutida esa 4 ta oq, 2 ta qora shar bor. Birinchi qutidan tavakkaliga 2 ta shar olib, ikkinchi qutiga solindi, shundan keyin ikkinchi qutidan tavakkaliga bitta shar olindi:

a) olingan sharning oq bo‘lishi;

b) ikkinchi qutidan olingan shar oq bo‘lib chiqdi.

Birinchi qutidan olib ikkinchi qutiga solingan 2 ta shar oq shar bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish: a) quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

A — ikkinchi qutidan olingan shar oq; B_1 — birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta oq shar solingan; B_2— birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta turli rangdagi sharlar solingan; B_3— birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta qora shar solingan. B_1,B_2, B_3— hodisalarning to‘la guruhini tashkil etadi. To‘la ehtimollik formulasidan foydalanish uchun bu hodisalarning ro‘y berish ehtimolliklarini va A hodisaning B_1,B_2, B_3 shartlar bilan ro‘y berish ehtimollarini hisoblab chqamiz:

$$P(B_1)=\frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28};\quad P(B_2)=\frac{C_2^1C_6^1}{C_8^2}=\frac{12}{28};\quad P(B_3)=\frac{C_6^1}{C_8^2}=\frac{15}{28};$$

$$P_{B_1}(A)=\frac{3}{4};\quad P_{B_2}(A)=\frac{5}{8};\quad P_{B_3}(A)=\frac{1}{2}.$$

U holda: $P(A)=\dfrac{9}{16}.$

b) $P_A(B_1)$ ehtimollikni Bayes formulasidan foydalanib topamiz:

$$P_A(B_1)=\frac{1}{21}.$$

3-§. Bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma-ketligi. Bernulli formulasi. Muavr-Laplasning lokal va integral teoremalari. Puasson formulasi

Bog‘liq bo‘lmagan (erkli) tajribalar ketma-ketligi o‘tkazilayotgan bo‘lib, tajribaning har birida A hodisa yoki $\bar{A}$ ro‘y bersin.

Har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas P(A)=p ga, uning ro'y bermaslik ehtimoli $P(\bar{A})=1-P(A)=1-p=q$ bo'lsin. n ta erkli tajribalar ketma-ketligida A hodisaning k marta ro'y berishi ehtimoli $P_n(k)$ Bernulli formulasi bilan hisoblanadi

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (1)$$

Bu yerda k=0, 1, 2, ..., n,

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k!=1\cdot 2\cdot ...\cdot k, \quad 0!=1$$

Muavr-Laplasning lokal va integral teoremalari, Puasson formulasi.

a) Muavr-Laplasning lokal teoremasi. n ta erkli tajribada A hodisaning k marta ro'y berish $P_n(k)$ ehtimolini yuqoridagi shart $np \geq 10$ bajarilganda taqriban quyidagi formula bilan hisoblanishi mumkin

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x) \qquad (2)$$

Bu yerda $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$,

φ(x) funksiya juft funksiya bo'lib, uning qiymatlari $(0\leq x\leq 4)$ maxsus jadvaldan olinadi (ilovadagi 1-jadval).

b) Muavr-Laplasning integral teoremasi.

Agar har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas va p ga (0<p<1) teng bo'lsa, u holda n ta erkli tajribada A hodisaning kamida k_1 marta va ko'pi bilan k_2 marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k_1<k<k_2)$ n katta bo'lib, $np\geq 10$ bo'lganda taqriban quyidagi formula bilan hisoblanishi mumkin

$$P_n(k_1<k<k_2)\approx F(x_2)-F(x_1) \qquad (4)$$

Bu yerda

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}} \quad va \quad x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}},$$

Laplas funksiyasi F(−x)=−F(x) toq funksiya, qiymatlari maxsus jadvaldan olinadi (2-jadval, $0\le x\le 5$). Agar x>5 bo'lsa, F(x)≈0.5 deb olish mumkin.

c) Puasson formulasi.

Tajribalardagi n-ta erkli sinash seriyasining har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli juda kichik, sinashlar soni n katta va λ=np=const<10 bo'lsa, u holda n ta erkli sinashda A hodisani k marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k)$ uchun quyidagi taqribiy formula o'rinli bo'ladi:

$$P_n(k)\approx(\lambda^k e^{-\lambda})/k! \qquad (5)$$

Bu yerda k=0, 1, 2,... .

Ehtimoli (5) ifoda bilan aniqlanadigan tasodifiy hodisa Puasson qonuni bilan taqsimlangan deyiladi.

1-misol. Har bir chigitni unib chiqish ehtimoli 0.9 teng bo'lsa, 4 ta ekilgan chigitdan aniq 3 tasini unib chiqish P4(3) ehtimolni toping.

Yechish. Masala shartiga asosan n=4, k=3, $P((\overline{A}))$=p=0.9, P(A)=q=1−p=0.1. Talab qilingan ehtimollik Bernulli formulasiga asosan quyidagicha bo'ladi:

$$P_4(3)=C_4^3(0.9)^3(0.1)=0.729.\ 0.1=24/6\ 0.0729=0.2916$$

2-misol. Agarda biror o'simlik urug'ining 80% i unib chiqadigan bo'lsa, ekilgan 300 dona urug'dan unib chiqqanlar soni a) 240 dona, b) 220 dan 260 ta oraliqda bo'lish ehtimolliklarini toping.

Yechish. Masala shartiga ko'ra n=300, har bir urug'ni unib chiqish ehtimoli r=0.8, chiqmaslik ehtimoli q=0.2 ga teng.

a) k=240, talab qilingan $P_{300}(240)$=?

Bernulli formulasi bilan $P_{300}(240)=(0,8)^{240}(0,2)^{60}$ ehtimollikni aniq hisoblash juda qiyin. Umuman n ni qiymati katta bo'lganda

Bernulli formulasidan foydalanish qiyinlashadi. Bunday hollarda, ya'ni n-katta bo'lib, har bir sinashda hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas, ya'ni np>10 bo'lsa, u holda n ta erkli sinashda A hodisaning k marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k)$ ni taqriban (2) Muavr-Laplas formulasi (lokal teoremasi) yordamida hisoblash mumkin. Bunda, agar x>4 bo'lsa, $\varphi(x)<0.0001$ bo'ladi.

Qaralayotgan misolda n=300, k=240, p=0.8, q=0.2 bo'lganligidan

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{240-300\cdot 0,8}{\sqrt{300\cdot 0,8\cdot 0,2}}=\frac{240-240}{\sqrt{48}}=0$$

talab qilingan ehtimol

$$P_{300}(240)\approx\frac{1}{\sqrt{48}}\varphi(0)\approx\frac{1}{6,93}\varphi(0)$$

Ilovadagi 1-jadvaldan $\varphi(0)=0.3989$ topsak,

$$P_{300}(240)\approx\frac{1}{6,93}\cdot 0,3989\approx 0,0576$$

ekanligi kelib chiqadi.

b) Bu holda n=300, p=0.8, q=0.2, $k_1=220$, $k_2=260$, $P_{300}(220\le k\le 260)=?$ ehtimolni hisoblashda Muavr-Laplasning (4) ko'rinishdagi integral teoremasidan foydalanish mumkin.

Qayd etilgan misolda

$$x^1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{220-300\cdot 0,8}{\sqrt{300\cdot 0,8\cdot 0,2}}=\frac{220-240}{\sqrt{48}}\approx -2,89$$

$$x^2=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{220-300\cdot 0,8}{\sqrt{300\cdot 0,8\cdot 0,2}}=\frac{260-240}{\sqrt{48}}\approx 2,89$$

bo'lganligi uchun talab qilingan ehtimol (4) formulaga asosan:

$P_{300}(220\le k\le 260)\approx F(2.89)-F(-2.89)=F(2.89)+F(2.89)=2\,F(2.89)$

Ilovadagi 2 -jadvaldan F(2.89)=0.4980 topamiz, u holda

$$P_{300}(220 \le k \le 260) \approx 2 \quad 0.4980 = 0.996 \text{ bo‘ladi.}$$

Demak, 300 ta ekilgan chigitdan unib chiqqanlari soni (220; 260) oralig‘ida bo‘lishi qariyb muqarrar hodisa ekan.

3-misol. Bitta o‘q uzilganda nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. 100 ta o‘q uzilganda rosa 75 ta o‘qning nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish: n=100; k=75; p=0,8; q=0,2. U holda,

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = -1,25.$$

1-ilovadagi jadvaldan $\varphi(-1,25)=0,1826$. Demak, $P_{100}(75)=0,04565$.

4-misol. Agar biror hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,4 ga teng bo‘lsa, bu hodisaning 100 ta tajribada:

a) rosa 50 marta ro‘y berish ehtimolini;

b) kami bilan 30 marta, ko‘pi bilan 45 marta ro‘y berish ehtimolini toping.

Yechish: a) shartga ko‘ra: n=100; p=0,4; q=0,6. Tajribalar soni n katta bo‘lganligi uchun, masalani lokal teoremaga ko‘ra yechamiz:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = 2,04, \quad \varphi(2,04)=0,0498.$$

Muavr-Laplasning lokal formulasidan foydalanib, izlanayotgan ehtimolni topamiz:

$$P_{100}(50)=0,0102.$$

b) Laplasning integral teoremasini qo‘llaymiz. n=100; $k_1=30$; $k_2=45$; p=0,4 va q=0,6. U holda

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = -2,04, \qquad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = 1,02.$$

$\Phi(x)$ ning qiymatlar jadvalidan: $\Phi(-2,04)=-0,4793$, $\Phi(1,02)=0,3461$.

Topilganlarni formulaga qo'yib, talab qilingan ehtimollikni topamiz.

$$P_{100}(30;45)=0,8254.$$

5-misol. A hodisaning 900 ta bog'liqmas tajribaning har birida ro'y berish ehtimoli p=0,8 ga teng. A hodisa 750 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Yechish: n=900; k=750; p=0,8; q=0,2. U holda

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=2,5.$$

Jadvaldan $\varphi(2,5)=0,0175$. $P_{100}(750)=0,00146$.

4-§. Tasodifiy miqdorlar va ularning turlari

Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biridir.

Ta'rif. Tasodifiy miqdor deb, avvaldan qanday qiymat qabul qilishi noma'lum bo'lgan va tasodifga bog'liq holda sinov natijasida qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlaridan bitta va faqat bittasini qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Tasodifiy miqdorlar uch xil bo'lib, ulardan diskret va uzluksiz holini o'rganamiz.

Diskret tasodifiy miqdor deb, ayrim sanoqli qiymatlarni ma'lum ehtimollar bilan qabul qiluvchi miqdorga aytiladi. Diskret tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari soni chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin.

Uzluksiz tasodifiy miqdor deb, chekli yoki cheksiz oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan miqdorga aytiladi. Tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz.

1-misol. 100 ta ekilgan chigitdan o'nib chiqqanlari soni tasodifiy miqdor bo'lib u, 0, 1, 2, 3, ..., 100 qiymatlardan birini qabul qiladi. Bu diskret tasodifiy miqdor misol bo'ladi.

2-misol. Qishloq xo'jalik ekinlarini vegetatsiya davrida o'sish jarayoni tasodifiy miqdordir.

2-misolda keltirilgan tasodifiy miqdor uzluksiz tasodifiy miqdorga misol bo'la oladi.

Odatda tasodifiy miqdorlarni X, U, Z,... bosh harflar bilan, ularning mumkin bo'lgan qiymatlarini tegishli x, u, z kichik harflar bilan belgilanadi.

Tasodifiy miqdorni to'la xarakterlash uchun uning qabul qilish mumkin bo'lgan qiymatlari va bu qiymatlarni qanday ehtimolliklar bilan qabul qilishni bilish lozimdir. X tasodifiy miqdorning x_i qiymatini qabul qilishi ehtimolini r_i orqali belgilaymiz, ya'ni $P(X=x_i)=p_i$, (i=1, 2,...)

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb, uni qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bilan shu qiymatlarni qabul qilish ehtimolliklari jadvaliga aytiladi.

x_i	x_1	x_2	.....	x_n
p_i	p_1	p_2	.....	p_n

Bu yerda x_1 , x_2,....., x_n X diskret tasodifiy miqdorni qabul qiladigan qiymatlar i, $p_1+p_2+....+p_n=1$.

Diskret taqsimot funksiyaga tipik misol sifatida Binominal, Puassonva Geometrik taqsimotlarni keltirish mumkin.

3-misol. Talabaning yozma ish variantidagi savollarning har biriga javob berishi ehtimoli 0,7 ga teng. Yozma ish variantidagi 4 ta savolga bergan javoblari sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish: X tasodifiy miqdor orqali talabaning javoblari sonini belgilasak, uning qabul qiladigan qiymatlari $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$, $x_5=4$ dan iborat bo'ladi. n=4, p=0,7; q =0,3 ekanligidan, X ning yuqoridagi qiymatlarni qabul qilish ehtimollari Bernulli formulasi orqali topiladi:

$$p_1=P_4(0)=0,0081; \quad p_2=P_4(1)=0,0756; \quad p_3=P_4(2)=0,2646;$$

$$p_4=P_4(3)=0,116; \quad p_5=P_4(4)=0,401$$

U holda X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

X	0	1	2	3	4
P	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

4-misol. Qurilma bir-biridan erkli ishlaydigan uchta elementdan iborat. Har bir elementning bitta tajribada ishdan chiqishi ehtimoli 0,1 ga teng. Bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish: X diskret tasodifiy miqdor orqali bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonini $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=3$ orqali belgilaymiz. Bundan tashqari $n=3,\ p=0,1,\ q=0,9$ ekanligini hisobga olsak, u holda $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ formulaga asosan $p_1=P_3(0)=0,729;$ $p_2=P_3(1)=0,243;\ p_3=P_3(2)=0,027;\ p_4=P_3(3)=0,001.$

U holda, taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

Diskret tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalarini hisoblash va ularning xossalari

Bizga ma’lumki, tasodifiy miqdor o‘zining taqsimot qonuni bilan to‘la aniqlanadi.

Tasodifiy miqdorning muhim sonli xarakteristikalariga matematik kutilish, dispersiya va o‘rtacha kvadratik chetlanishlar kiradi.

a) Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi.

Ta’rif. Tasodifiy miqdorning o‘rtacha qiymatiga matematik kutilish deb ataladi.

X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi M(X) deb, uning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlarini mos ehtimollariga ko‘paytmalari yig‘indisiga aytiladi.

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n=\sum x_ip_i \qquad (1)$$

Matematik kutilishning xossalari.

1) O'zgarmas miqdorning matematik kutilishi shu o'zgarmasning o'ziga teng M(C)=C.

2) O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilish belgisidan tashqariga chiqarib yozish mumkin

$$M(cX)=cM(X)$$

3). Ikkita erkli X va U tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilishi ularning matematik kutilishlari ko'paytmasiga teng.

$$M(XU)=M(X)\ M(U)$$

4) Ikkiga tasodifiy miqdor yig'indisining matematik kutilishi qo'shiluvchilarining matematik kutilishlari yig'indisiga teng.

$$M(X+U)=M(X)+M(U)$$

b) Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi.

Amaliyotda ko'pincha tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini uning o'rtacha qiymati (matematik kutilishi) atrofida joylashish tarqoqligini baholash talab qilinadi. Masalan, nishonga otilgan o'qlarning nishon atrofiga qanchalik yaqin tushishini bilish muhimdir.

Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb, $(X\text{-}M(X))^2$ miqdorning matematik kutilishiga aytiladi va u D(X) bilan belgilanadi,

$$D(X)=M(X-M(X))^2=MX^2-(M(X))^2,$$

bu yerda

$$MX^2=\sum x_i^2 p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_n^2 p_n$$

Dispersiyaning xossalari.

1. C o'zgarmas miqdorning dispersiyasi nolga teng, ya'ni

$$D(C)=0,\ D(C)=M(C-M(C))^2=0$$

2. X tasodifiy miqdor bo'lib, C o'zgarmas son bo'lsa, u holda $D(CX)=C^2D(X)$ bo'ladi.

3. Ikkita erkli X va Y tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi bu miqdorlar dispersiyalarining yig'indisiga teng.

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

Diskret tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanish deb, dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi va bilan belgilanadi.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

1-misol. O'yin kubogi (soqqasi) bir marta tashlandi. Chiqqan ochkolar sonini taqsimot qonunini tuzing. X-o'yin kubogi bir marta tashlaganda tushadigan ochkolar soni bo'lsin. Uni qabul qilishi mumkin bo'lgan 1, 2, ..., 6 qiymatlari bo'lib, ular teng ehtimollidir, ya'ni

$$P(X=i)=1/6 \qquad i=\overline{1,6}$$

natijada X tasodifiy miqdorining taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

x	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

2-misol. Tangani ikki marta tashlashdan iborat tajriba o'tkazilmoqda. X gerbli tomon tushishlar sonining taqsimot qonuni topilsin.

Yechish: Tangani tashlaganda u yoki bu tomonini tushishi teng ehtimolli bo'lib, r=q=1/2 ga teng bo'ladi. X gerbli tomon tushishlari soni (Bernulli formulasiga ko'ra) mos ravishda ushbu ehtimolliklarga ega bo'ladi:

$$P_0=P(X=0)=C_2^0\ (1/2)^0\ (1/2)^{2-0}=1/4;$$

$$P_1=P(X=1)=C_2^1\ (1/2)^1\ (1/2)^{2-1}=2\ 1/4=1/2$$

$$P_2=P(X=2)=C_2^2\ (1/2)^2\ (1/2)^{2-2}=\ 1/4=1/4$$

demak, izlanayotgan taqsimot Binomial taqsimotga ega bo'ladi.

x	0	1	2
p	1/4	1/2	1/4

5-§. Uzluksiz tasodifiy miqdor. Tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi va uning xossalari. Sonli xarakteristikalari

Biz yuqorida o'rgangan diskret tasodifiy miqdor chekli yoki sanoqli qiymatlar qabul qiladi. Agar tasodifiy miqdor biror oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilsa, uni taqsimot qonunini diskret holdagidek jadval shaklda yozib bo'lmaydi.

Biz ixtiyoriy (diskret yoki uzluksiz) tasodifiy miqdor uchun o'rinli bo'lgan taqsimot funksiya tushunchasini o'rganamiz.

Faraz qilaylik A hodisa $A=\{X<x\}=\{-\infty<X<x\}$ bo'lsin. Ravshanki, A hodisaning ehtimoli x ning funksiyasidan iborat bo'ladi.

Ta'rif. Har bir x qiymat uchun X tasodifiy miqdorning x dan kichik qiymat qabul qilish ehtimolini aniqlovchi F(x) funksiyaga X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi yoki taqsimotning integral funksiyasi deyiladi,

$$F(x)=P(X<x) \qquad (1)$$

Ta'rif. Agar X tasodifiy miqdor taqsimotining integral funksiyasi F(x) uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda X tasodifiy miqdor uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

Masalan, X diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot bilan berilgan.

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish: Taqsimot funksiya ta'rifidan foydalanamiz: $F(x)=P(X<x)$. Har holatni alohida-alohida ko'rib chiqamiz:

$x<-2$ bo'lsin, u holda $X<x$ hodisa mumkin bo'lmagan hodisa bo'ladi, ya'ni $F(x)=0$. $-2<x\leq-1$ bo'lsin, u holda $F(x)=P(X<x)$;

$-1<x\leq0$ bo'lsin, u holda $F(x)=P(X<0)=0,1+0,2=0,3$;

$0<x\leq1$ bo'lsin, u holda $F(x)=P(X<1)=0,1+0,2+0,2=0,5$;

$1<x\leq2$ bo'lsin, u holda $F(x)=P(X<2)=0,1+0,2+0,2+0,4=0,9$.

$x>2$ bo'lsin, u holda $F(x)=P(X<2+\varepsilon)=0,1+0,2+0,2+0,4+0,1=1$.

Shunday qilib, F(x) taqsimot funksiyaning analitik ifodasini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar\ x\le -2,\\ 0{,}1, & agar\ -2<x\le -1,\\ 0{,}3, & agar\ -1<x\le 0,\\ 0{,}5 & agar\ \ 0<x\le 2,\\ 0{,}9, & agar\ \ 1<x\le 2,\\ 1, & agar\ \ x>2.\end{cases}$$

Taqsimot integral funksiyasining xossalari

1. Taqsimot funksiyaning qiymatlari [0,1] kesmaga tegishlidir $0\le F(x)\le 1$

2. F(x) kamaymaydigan funksiyadir, ya'ni agar $x_1<x_2$ bo'lsa, u holda

$$F(x_2)\le F(x_1)$$

3. Taqsimot funksiya chapdan uzluksiz bo'lib, X tasodifiy miqdorning (a; b) intervalga tegishli qiymatni qabul qilish ehtimoli integral funksiyaning shu integrvaldagi orttirmasiga teng

$$P(a\le X<b)=F(b)-F(a) \qquad (2)$$

Xususan, X uzluksiz tasodifiy miqdorning tayin bitta qiymat qabul qilish ehtimoli nolga teng $P(X=x_1)=0$

4. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari $(-\infty; +\infty)$ bo'lsa, u holda quyidagi limitlar o'rinlidir:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0, \qquad \lim_{x\to\infty} F(x)=1$$

Ta'rif. Taqsimot funksiyaning f(x) zichlik funksiyasi deb, integral funksiyadan olingan birinchi tartibli $f(x)=F'(x)$ hosilaga aytiladi.

Uzluksiz taqsimot funksiyaga misol sifatida ko'p qo'llaniladigan tekis taqsimot, ko'rsatkichli taqsimot va normal taqsimot funksiyalarni ko'rsatish mumkin.

Masalan, X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar\ \ x\le 0,\\ \sin 2x, & agar\ \ 0<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 1, & agar\ \ x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan, f(x) zichlik funksiyani toping.

Yechish: Zichlik funksiya taqsimot funksiyadan olingan birinchi tartibli hosilaga teng. U holda

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar\ \ x\le 0,\\ 2\cos 2x, & agar\ \ 0<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 0, & agar\ \ x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Zichlik funksiyaning xossalari:

1). Zichlik funksiya manfiy emas f(x)≥0, zichlik funksiyadan $(-\infty;+\infty)$ gacha olingan xosmas interval 1 ta teng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

2) Ixtiyoriy x∈[a; b] uchun $P(a\le x\le b)=\int_a^b f(x)dx$

Zichlik funksiyaning ehtimoliy ma'nosi X tasodifiy miqdorning (x; x+Δx) oraliqqa tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli taqriban x nuqtadagi ehtimol zichligini x interval uzunligini ko'paytmasiga teng.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari.

X uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari [a;b] kesmaga tegishli bo'lsa, bu tasodifiy miqdorni matematik kutilishi quyidagi formula bilan hisoblanadi.

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx \qquad (1)$$

X uzluksiz tasodifiy miqdor dispersiyasini hisoblash formulasi

$$D(X)=\int_a^b [x-M(X)]^{12} f(x)dx \qquad (2)$$

O'rtacha kvadratik chetlanishi:

$$\sigma(x)=\sqrt{D(X)} \qquad (3)$$

Eslatma. Dispersiyani ushbu formula bilan ham hisoblash mumkin: $D(X)=MX^2-[M(X)]^2$, bu yerda

$$M(X^2)=\int_a^b x^2 f(x)dx$$

Normal taqsimot va uning tadbiqlari.

Qishloq xo'jaligi, tibbiyot va boshqa sohalarga doir amaliy masalalarni yechishda keng qo'llaniladigan muhim taqsimot funksiyalardan biri normal taqsimotdir.

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimotni differensial funksiyasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

Bu yerda $-\infty<a<+\infty$, $0<\infty<+\infty$, a va σ – parametrga ega: a – normal taqsimotning matematik kutilishi, ya'ni $M(X)=a$, σ – normal taqsimotning o'rtacha kvadratik chetlanishi.

Standart normal taqsimotni differensial funksiyasi $a=0$ va $\sigma=1$ parametrli bo'ladi

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (2)$$

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning (0, x) intervalga tushish ehtimoli

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \tag{3}$$

(3) Laplas funksiyasini qiymatlari jadvali tuzilgan.

Agar X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo'lib, uning matematik kutilishi M(X)=a o'rtacha kvadratik chetlanishi bo'lsa, shu tasodifiy miqdorning $\sigma = \sqrt{D(x)}$ oraliqda yotuvchi qiymat qabul qilish ehtimoli quyidagi formula bilan topiladi:

$$P\{\alpha \le x \le \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \tag{4}$$

Bu yerda F(x) Laplas funksiyasi.

Yuqoridagi (1) tenglamadan foydalanib normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishini a dan farqi δ musbat sondan absolyut qiymat bo'yicha kichik bo'lish ehtimoli

$$P\{|x - a| \le \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \tag{5}$$

a, δ parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdorni taqsimotni zichlik funksiyasini quyidagicha geometrik izohlash mumkin.

1-misol. X tasodifiy miqdor ushbu taqsimot funksiyaga ega bo'lsin

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & -1 \le x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Sinash natijasida X tasodifiy miqdor (0,1) intervalda yotgan qiymat qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish. Uzluksiz tasodifiy miqdorni (a; b) oraliqda yotuvchi qiymat qabul qilish ehtimoli (2) formulaga asosan

$$P(0<X<1)=F(1)-F(0)=2/3-1/3=1/3$$

2-misol. Tovuqchilik fermasidan jo'natilayotgan tuxumlarning o'rtacha og'irligi (a) 60 g va o'rtacha kvadratik chetlanishi (σ) 5g ga teng. Tuxum og'irligini X normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb qarab jo'natilayotgan tuxumlar ichida og'irliklari 1) 50 grammdan 70 grammgacha bo'lgan tuxumlar qancha foizni tashkil qilishini; 2) tasodifiy olingan tuxum og'irligini uning o'rtacha og'irligidan absolyut qiymat bo'yicha 5 g dan oshmaslik ehtimolini hamda 3) og'irligi 70 grammdan ortiq bo'lgan tuxumlar foizni toping.

Yechish. X tasodifiy olingan tuxum og'irligi bo'lsin, masala shartiga asosan a=M(X)=60g $\sigma=\sqrt{D(x)}=5g$ 1) α=50, β=70 topish kerak P{50<x<70}=?

Tasodifiy miqdor X-normal taqsimlanganligidan yuqoridagi (1) formulaga asosan talab qilingan ehtimol:

$$P\{50<x<70\}=\Phi\left(\frac{70-60}{5}\right)-\Phi\left(\frac{50-60}{5}\right)=\Phi(2)-\Phi(-2)$$

Bu yerda F(x) toq funksiya bo'lganligidan, F(-x)=-F(x). Ilovadagi 2-jadvaldan, Laplas funksiyasining qiymatini topamiz:

$$F(2)=0.4772,$$

u holda P{50<x<70}=F(2)+F(2)=2F(2)=2*0.4772=0.9544

Demak, jo'natilayotgan tuxumlar ichida og'irliklari 50 grammdan to 70 grammgacha bo'lganlari umumiy tuxumlarning 95% dan ortiqrog'ini tashkil qilar ekan.

2) a=60, δ=5, σ=5 g talab qilingan P{|x−60|<50}=?

Bu ehtimolini yuqoridagi (2) formula yordamida topamiz:

$$P\{|x-60|<5\}=2F(5/5)=2F(1)=$$

2-jadvaldan F(1)=0.3413 ekanligidan

$$=2\cdot 0.3412=0.6826$$

3) Masala shartiga asosan $\alpha=70$ va talab qilingan $P\{70<x\}=?$

Ehtimol $P\{70<x\}=P\{70<x<\infty\}=\Phi(\infty)-\Phi\left(\frac{70-60}{5}\right)=0,5-\Phi(2)=$

2-jadvaldan qiymati $F(\infty)=0.5$, $F(2)=0.4772$, u holda talab qilingan ehtimol

$$=0.5-0.4772=0.0228.$$

Demak, og'irligi 70 grammdan katta bo'lgan tuxumlar jami fermadan jo'natilgan tuxumlarning 2% ni tashkil qilar ekan.

6-§. Katta sonlar qonuni

Biz o'tgan mavzularda tasodifiy miqdor, ularning turlari, taqsimot qonunlari, sonli xarakteristikalarni hisoblash, shuningdek muhim amaliy ahamiyatga ega bo'lgan normal taqsimot tushunchalarini o'rgandik.

Ma'lumki alohida tajriba (sinov) natijasida tasodifiy miqdorni qanday qiymatni qabul qilishini oldindan aytib bo'lmaydi. Bundan katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisini qanday qiymat qabul qilishini bilish mumkin emasdek ko'rinadi. Baholanki, ma'lum shartlar bajarilganda yetarli katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisi tasodifiylik xususiyatini yo'qotib, ma'lum qonuniyatga ega bo'ladi. Bu shartlar katta sonlar qonuni deb nomlanuvchi teoremalarda o'z ifodasini topgan.

Chebishev tengsizligi

Chekli dispersiyaga ega bo'lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishidan chetlanishining absolyut qiymatini musbat ε sonidan kichik bo'lish ehtimoli

$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-D(X)/\varepsilon^2$ dan kichik bo'lmaydi.

Teorema. Agar $x_1, x_2, \ldots, xn$ juft-jufti bilan erkli tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularni dispersiyalari $D(x_i)<C<\infty$ tekis chegaralangan bo'lsa, u holda

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(x_i)\right|\leq\varepsilon\right)$$

hodisaning ehtimoli 1 ga intiladi, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(x_i)\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

Katta sonlar qonunidan chekli dispersiyaga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlarni o'rta arifmetik qiymati yetarli katta n uchun qariyb o'zgarmas bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni o'zini tasodifiylik xususiyatini yo'qotadi.

Markaziy limit teorema

Bizga $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Shu tasodifiy miqdorlarni $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ yig'indisini qaraymiz.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi chekli

$$M(x_k) = a_k,\ D(x_k) = \sigma_k^2 \ (k = 1, 2, \dots)$$

matematik kutilish va dispersiyalarga ega bo'lsin.

$$MS_n = Mx_1 + Mx_2 + \dots + Mx_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n$$

$$DS_n = Dx_1 + Dx_2 + \dots + Dx_n = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 = B_n^2$$

Qanday shartda quyidagi yig'indi

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - a_k) = \frac{S_n - A_n}{B_n}$$

normal taqsimotga yaqinlashadi?

Lyapunov teoremasi. Agar o'zaro bog'liq bo'lmagan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun shunday $\sigma > 0$ musbat son mavjud bo'lib, $n \to \infty$ da quyidagi shart bajarilsa

$$\frac{1}{B_n^{2+\sigma}}\sum_{k=1}^{n}|X_k - a_k|^{x} \to 0$$

u holda barcha x uchun markaziy limit teorema o'rinli bo'ladi

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{B_n}(S_n - A_n) < x\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{x} e^{-t/2}dt = \Phi_{0,1}(x)$$

Xususan agar $X_1, X_2, ..., X_n$ o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bir xil taqsimotga ega bo‘lsa chekli dispersiyaga ega bo‘lgan

$$MX_k=a,\ DX_k=\sigma^2,\ MS_n=na,\ DSn=n\sigma^2$$

bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema o‘rinli bo‘ladi.

Ehtimollar nazariyasi tadqiqotlaridan ma’lumki, bir-biridan katta farq qilmaydigan tasodifiy miqdorlar yig‘indisi yanada umumiy shartda ham normal taqsimotga ega bo‘ladi.

Ma’lumki, qishloq xo‘jalik ekinlari yetarli katta maydonlarda ekilib, ular qariyb bir xil sharoitda etishtiriladi, ya’ni qalinliklari bir xil, agrotexnik ishlovlar, parvarish qilish barcha maydon uchun bir vaqtda amalga oshiriladi. Shu sababli, o‘rganilayotgan belgini masalan, bir xil sharoitda yetishtirilgan g‘o‘zalarning uzunliklari, shoxlar soni, ko‘saklar soni, ochilgan chanoqlar soni va boshqalarni ehtimollar nazariyasini markaziy limit teoremasiga asosan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb qarashimiz mumkin.

1-misol. Norma bo‘yicha 1 ga yerga 45 kg tuksiz chigit ekilishi kerak. Aslida 1 ga maydonga ketadigan chigit miqdori tasodifiy miqdor bo‘lib, uni o‘rtacha kvadratik chetlanishi 5 kg bo‘lsa, xo‘jalikni 100 ga yeriga 97% li kafolat bilan ketadigan chigit miqdorini toping?

Yechish. X_i tasodifiy miqdor bilan i ga yerga ketadigan chigit miqdorini belgilaymiz, masala shartiga asosan seyalka (nazariy) har bir ga yerga 45 kg dan chigit tashlashi lozim, ya’ni ular barcha maydon uchun bir xil taqsimlangan:

$$M(X_i)=45kg,\quad \sigma=\sqrt{D(x)}=5kg\quad (i=\overline{1,100})$$

Agar X bilan 100 ga yerga ketadigan chigit miqdorini belgilasak,

$$X=X_1+X_2+...+X_{100}=\sum_{i=1}^{100}X_i\ \ bo‘ladi.$$

Bu yerda X_1, X_2, ..., X_{100} o'zaro bog'liq bo'lmagan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlardir. Ehtimollar nazariyasini markaziy limit teoremasi shartlari bajariladi, demak X taqriban normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb qaralishi mumkin, uni

$$M(X)=\sum_{i=1}^{100} M(X_i)=100\cdot 45=4500kb=4,5t.$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{100} D(X_i)=100\cdot 5^2=100\cdot 25=2500$$

o'rtacha kvadratik chetlanishi

$$\sigma=50kg=0.05t$$

β bilan 100 ga yerni kamida 97% ga yetadigan chigit miqdorini belgilaymiz. Masala shartiga asosan $P\{X<\beta\}=0.97$ n=100 yetarli katta bo'lganligidan X-tasodifiy miqdorni N(4.5;0.05) parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb hisoblaymiz. Normal taqsimlangan $X-N(a;\sigma)$ miqdorni $(\alpha;\ \beta)$ oraliqda yotuvchi qiymat qabul qilish ehtimoli formulasidan

$$P\{\alpha<X<\beta\}=F((\beta-a)/\sigma)-F((\alpha-a)/\sigma) \qquad (4)$$

foydalanamiz:

$P\{\infty<X<\beta\}=F((\beta-4.5)/0.05)+F(\infty)=0.97$ bo'lganligidan

$$F((\beta-45)/0.05)+F(\infty)=0,97$$

Bu yerda F(X) qiymatlari jadvallashtirilgan Laplas funksiyasi,

$$F(+\infty)=0.5; \qquad F((\beta-4.5)/0.05)=0.47$$

Normal taqsimot funksiya jadvalidan foydalanib, F(1.88)=0.47 bo'lganligidan $(\beta-4.5)/0.05=1.88$ bo'ladi.

$$\beta=4.5+0.05x1.88=4.594t=4594\ kg.$$

Demak, 100 ga maydonni kamida 97% ga, ya'ni kamida 97 ga yerga yetadigan chigit miqdori 4594 kg ekan.

Tukli yoki tuksiz chigitni 1 ga maydonga ekish normasi ma'lum bo'lganda: $\frac{\beta-MS_n}{\sqrt{DS_n}}=1,88$ (97% li kafolat bilan)

$\beta=MS_n+1{,}88\ DS_n=na+1{,}88\ \sqrt{n\sigma}$ formuladan foydalanib, xo'jalikka ekish uchun avvaldan, qancha miqdorda chigit urug'ini buyurtma berish lozimligini aniqlash mumkin. Bu yerda

$$MS_n=A_n=na, \qquad DS_n=n\sigma=B_n,$$

n–jami paxta ekiladigan yer maydoni, a=1 ga maydonga norma bo'yicha ekiladigan chigit miqdori (kg), σ – o'rta kvadratik chetlanishi.

7-§. Matematik statistika elementlari. Asosiy tushunchalar. Statistik taqsimot va uni geometrik izohlash

Bir jinsli obyektlar to'plamini uning sifat yoki son belgisiga ko'ra o'rganish talab etilgan bo'lsin. Masalan, fermerni yetishtirgan paxta hosilini sifat belgisi uning navi, tola chiqishi, tolani uzunligi bo'lsa, son belgisi uning hajmi, hosildorligi bo'ladi.

Matematik statistikaning birinchi vazifasi statistik ma'lumotlarni to'plash va gruppalash usulini ko'rsatish bo'lsa, uning ikkinchi vazifasi – statistik ma'lumotlarni tahlil qilish metodlarini ishlab chiqish ular asosida ilmiy xulosalar chiqarishdan iboratdir.

1-ta'rif. Tahlil qilish uchun ajratilgan bir jinsli obyektlar to'plami *bosh to'plam* deyiladi.

Masalan, xo'jalikni 1000 ga maydonda etishtirgan paxtasi, Toshkent shahrida ta'lim olayotgan talabalar to'plamlari bosh to'plamga misol bo'ladi.

Bosh to'plamni o'rganishda unga tegishli barcha obyektlarni (ularni soni katta bo'lsa) tekshirish iqtisodiy va jismonan mumkin bo'lmaydi. Bunday hollarda bosh to'plamdan ma'lum bir qism elementlari ajratib olinib tekshiriladi.

2-ta'rif. Bosh to'plamdan tahlil qilish uchun tasodifiy ravishda tanlab olingan ma'lum bir elementlar to'plamiga tanlanma to'plam deyiladi.

Xo'jalikni barcha 1000 ga yer maydonida etishtirgan paxtasi *bosh to'plam*, undan tahlil qilish uchun ajratilib olingan 100 tup g'o'za *tanlanma to'plam* bo'ladi.

Tanlanma to'plamning hajmi deb shu to'plamdagi barcha obyektlar soniga aytiladi. Masalan 10000 tup g'o'zadan tahlil qilish uchun 70 dona g'o'za tanlab olingan. Bu misolda bosh to'plamni hajmi N=10000, tanlanmaning hajmi n=70.

Bosh to'plamdan tanlanma to'plamni shunday ajratish lozim-ki unda bosh to'plamning muhim, xarakterli xususiyatlari to'liq saqlasin. Bunday tanlanmani reprezentativ tanlanma to'plam deyiladi. Aks holda barcha o'tkazilgan statistik tadqiqotlar noto'g'ri xulosalarga olib kelishi mumkin.

Ta'rif. Variatsion qatorning variantlari va ularga mos absolyut chastotalari yoki nisbiy chastotalari ro'yxatiga tanlanmaning statistik taqsimoti deyiladi

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k
W_i	w_1	w_2	...	w_k

Bu yerda $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – tanlamaning hajmi, $\sum_{i=1}^{k} W_i = 1$.

Bu statistik taqsimotni poligon chizig'ini chizamiz. Chastotalar poligoni deb, $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_k; n_k)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi. Poligonni yasash uchun abssissalar o'qiga x_i variantlarni, ordinatalar o'qiga esa, mos n_i chastotalarini qo'yib chiqiladi. So'ngra $(x_k; n_k)$ nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib chiqiladi. Hosil bo'lgan grafik chastotalar poligoni deyiladi.

Agar o'rganilayotgan belgi uzluksiz o'zgaruvchan variantadan iborat bo'lsa, yoki diskret bo'lib qabul qiladigan qiymatlar soni ko'p (n>30) va ular har xil bo'lsa, unday holda statistik taqsimotning intervalli variatsion qatorini tuzish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Bosh to'plamni intervalli statistik taqsimot sifatida tahlil qilishda tanlanma to'plamning quyidagi Sterdjess formulasi yordamida k ta intervallarga bo'lib o'rganish mumkin:

$$k=1+3{,}322\lg n \qquad (2)$$

Interval uzunligi

$$h=(x_{max}-x_{min})/k \qquad (3)$$

formuladan topiladi. Bu yerda $x_{max}-x_{min}$ variatsiya qulochi deyiladi, k interval sifatida $[x_{min}+(k-1)h;\ x_{min}+kh)$ interval olinadi.

Xususan k=1 bo'lganda birinchi interval $[x_{min};\ x_{min}+h)$ bo'ladi. Bu x_{max}, x_{min} mos ravishda variatsion qatorning eng katta va eng kichik qiymatlarini bildiradi. Albatta intervallarni shunday olish kerakki, har bir variant faqat bitta intervalga kirsin.

Uzluksiz o'zgaruvchan variantdan iborat bo'lgan tanlanma to'plamning intervalli statistik taqsimoti quyidagicha bo'ladi:

Variant intervallari	Intervalga tegishli variantlar soni (chastotasi)	Nisbiy chastota $w_i=n_i/n$
$[x_{min};\ x_{min}+h)$	n_1	W_1
$[x_{min}+h;\ x_{min}+2h)$	n_2	W_2
...	...	...
$[x_{min}+(k-1)h;\ x_{min}+kh)$	n_k	W_k

Bu yerda $\sum_{i=1}^{k} n_i = n,\ \sum_{i=1}^{k} W_i = 1$.

Intervalli variatsion qatorlarni gistogrammasini chizish. Chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa n_i/h nisbatlarga (chastota zichligi) teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figuraga aytiladi. Chastotalar gistogrammasini yasash uchun abssissalar o'qiga h uzunlikdagi qismiy intervallar, ularning ustiga esa n_i/h masofada abssissalar o'qiga parallel kesmalar o'tkaziladi, i qismi to'g'ri to'rtburchakning yuzi $hn_i/h=n_i$ ga, ya'ni intervaldagi variantalarning chastotalari yig'indisiga teng; chastotalar gistogrammasining yuzi barcha chastotalar yig'indisiga, ya'ni tanlanma hajmiga teng.

Nuqtaviy statistik baholar. Statistik taqsimotning sonli xarakteristikalariga, tanlanma o'rtacha qiymat, tanlanma dispersiya, tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish, moda, mediana va variatsiya koeffitsientlari, boshlang'ich va markaziy empirik momentlar kiradi.

1) Tanlanma o'rtacha qiymatlarni hisoblash. Tanlanma o'rtacha qiymati deb, tanlanma to'plam belgisining o'rtacha arifmetik qiymatiga aytiladi va $\overline{x_T}$ bilan belgilanadi. (Bu ehtimollar nazariyasida o'rganilgan matematik kutilishning statistik bahosidir.)

Tanlanma o'rtacha qiymat quyidagi formula bilan hisoblanadi

$$\overline{x_T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k) \qquad (1)$$

Bu yerda $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ tanlanmani hajmi.

Agar taqsimotning intervalli variatsion qatori berilgan bo'lsa, u holda tanlanma o'rtacha qiymatini hisoblashda x_i sifatida i chi intervalning o'rtacha qiymati olinadi.

2) Tanlanma dispersiya. Tanlanma o'rtacha qiymat statistik taqsimot haqida to'la ma'lumot bermaydi. Taqsimotlari har xil, ammo bir xil matematik kutilishga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar mavjud. Amaliyotda tanlanma qiymatlarini $\overline{x_T}$ atrofida joylashish tarqoqligini bilish lozim bo'ladi.

Tanlanma dispersiya D_T, X belgining kuzatiladigan qiymatlarini ularning $\overline{x_T}$ o'rtacha qiymatidan chetlanishi kvadratlarining o'rtacha arifmetik qiymatiga teng.

Agar n hajmli tanlanmaning barcha $x_1, x_2, \ldots, x_k$ qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, \ldots, n_k$ chastotalarga ega bo'lsa, u holda tanlanma dispersiya quyidagi formula bilan topiladi:

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x_T})^2 \qquad (2)$$

Yuqoridagi tanlanma dispersiyani hisoblash formulasini quyidagicha yozish mumkin:

$$D_T = \overline{x^2} - \left[\overline{x_T}\right]^2 \qquad (3)$$

Bu yerda $\overline{x^2} = (x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + ... + x_k^2 n_k)$

Bu formuladan variantlarning qiymatlari kichik sonlar bo'lganda foydalanish qulay.

$$S_T^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_T})^2 n_i$$

tuzatilgan tanlanma dispersiya deyiladi, bu siljimagan asosli statistik baho bo'ladi. D_T va S_T^2 orasida $S_T^2=n/(n-1)D_T$ bog'lanish mavjud. agar n tanlanmani hajmi katta bo'lsa ular bir-birlaridan kam farq qiladi.

3) Tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish. Tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish deb, tanlanma dispersiyasidan chiqarilgan kvadrat ildizgaaytiladi va 6_T bilan belgilanadi:

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} \qquad (4)$$

4) Eng katta chastotaga esa bo'lgan variantaning qiymatiga M_0 moda deyiladi.

5) Statistik taqsimotni teng ikkiga bo'ladigan variantaning qiymatiga mediana deyiladi:

$$M_e = \begin{cases} x_{k+1}, & n = 2k+1 \quad bo'lsa \\ \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}), & n = 2k \quad bo'lsa \end{cases} \qquad (5)$$

6) Variatsiya koeffitsienti. Turli tanlanmalarni qiymatlarini o'rtacha qiymati atrofida joylashish tarqoqligini taqqoslashda variatsiya koeffitsientidan foydalaniladi. Variatsiya koeffitsienti

$$V_T = \frac{\sigma}{\overline{x_T}} 100\% \qquad (6)$$

Intervalli statistik baho

O'tgan mavzuda bitta son qiymat bilan aniqlanuvchi nuqtaviy statistik baholarni o'rgandik. Agar tanlanmani hajmi kichik bo'lsa nuqtaviy bahoni aniqligi kamayadi. Noma'lum parametrga ikkala tomondan yaqinlashuvchi statistik baholarni qurishni o'rganamiz.

Interval baho deb, ikkita son — intervalning uchlari bilan aniqlanadigan statistik bahoga aytiladi.

Faraz qilaylik tanlanma ma'lumotlar bo'yicha topilgan θ_n^* baho θ noma'lum parametrning statistik bahosi bo'lsin. Pavshanki, qurilgan baho tanlanmani funktsiyasidan iborat bo'ladi.

θ ning θ_n^* baho bo'yicha ishonchliligi deb, $|\theta_n^* - \theta| < \delta$ tengsizlikni bajarilish ehtimoli P ga aytiladi. Ishonchlilik γ bilan belgilanadi va 0,95; 0,99; 0,90 qiymatlardan birini qabul qilishi mumkin.

Bunday hol qishloq xo'jaligida ko'p uchraydi. Masalan, paxtani biror navi bo'yicha ilmiy tajirbalar 3—5 yil o'tkazilib shu asosida uni o'rtacha hosildorligi, sifati va boshqa ko'rsatkichlari bo'yicha xulosalar chiqariladi.

Normal taqsimotning noma'lum parametrlari uchun intervalli statistik baho qurish

Muhim vazifalaridan biri qishloq xo'jalik ma'lumotlarini statistik tahlil qilish asosida kelgusi yillar uchun hosildorlikni ma'lum bir kafolat bilan bashorat qilishdir. Albatta kafolatli xulosani aytish uchun o'rganilayotgan X son belgini taqsimot qonuni ma'lum bo'lishi kerak.

Qishloq xo'jalik ekinlari yetarli katta maydonlarda ekilib, ular qariyib bir xil sharoitda yetishtiriladi, ya'ni qalinliklari bir xil, agrotexnik ishlov, parvarish qilish barcha maydon uchun bir vaqtda amalga oshiriladi. Shu sababli, o'rganilayotgan X — son belgini ehtimollar nazariyasini markaziy limit teoremasiga asosan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb qarashimiz mumkin, masalan, ma'lum bir maydonda bir xil sharoitda etishtirilgan g'o'zalarni uzunliklari, har biridagi shoxlar, ko'saklar, ochilgan chanoqlar soni normal taqsimotga ega bo'ladi deb qarash mumkin. Umuman bir-biridan katta farq qilmaydigan 30 dan ortiq tasodifiy miqdorlarning o'rta arifmetigi taqriban normal taqsimlangan bo'ladi. Bu muhim xulosa ehtimollar nazariyasining markaziy limit teoremasining natijasidir. Bu tasdiqdan barcha ilmiy tajriba natijalarini tahlil qilishda foydalanamiz.

Normal taqsimotni noma'lum parametrlariga intervalli statistik baho qurish

Bosh to'plamning X son belgisi normal taqsimlangan bo'lsin. adabiyotlarda M(x)=a, $\sigma=\sqrt{D(x)}$ parametrli normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor qisqacha X~N(a; σ) deb yoziladi. Odatda ma'lum va noma'lum hollar ayrim-ayrim tahlil qilinadi. Ammo amaliy masalalarni yechishda normal taqsimotning ikkala parametri a va noma'lum bo'ladi. Shu sababli biz faqat ikkala parametr ham noma'lum holni o'rganamiz.

1) Faraz qilaylik o'rganilayotgan bosh to'plamning X son belgisi normal taqsimlangan va uni matematik kutilishi a va o'rtacha kvadratik chetlanish σ noma'lum bo'lsin. Normal taqsimotning noma'lum matematik kutilish a ga γ kafolat bilan intervalli baho qurish talab etiladi.

Styudent (Gosset) σ noma'lum bo'lganda, noma'lum matematik kutilish a uchun γ kafolat (ishonchlilik) bilan ishonchlilik intervalini quyidagi munosabat orqali qurish mumkinligini isbotlagan:

$$\left(\overline{\overline{x}}_T - t_\gamma \frac{S_T}{\sqrt{n}};\quad \overline{\overline{x}}_T + t_\gamma \frac{S_T}{\sqrt{n}}\right) \qquad (1)$$

Bu yerda $t_\gamma=t(n,\gamma)$ ni qiymati berilgan n va γ lar bo'yicha Styudent taqsimot jadvalidan olinadi.

2) Normal taqsimotning noma'lum o'rtacha kvadratik chetlanish σ uchun intervalli baho qurish. Normal taqsimotning

noma'lum o'rtacha kvadratik chetlanish σ-ni tuzatilgan o'rtacha kvadrat chetlanish S orqali baholash talab qilinadi.

Isbotlanganki, σ-ga berilgan γ kafolat (ishonchlilik) bilan qoplaydigan intervalli bahosi quyidagi munosabatlar yordamida quriladi:

1) q<1 bo'lganda $S_t(1-q)<\sigma<S_t(1+q)$ (2)

2) q>1 bo'lganda$0<\sigma<S_t(1+q)$ (3)

8-§. Eng kichik ahamiyatli farq va uni qishloq xo'jalik masalalarini yechishga qo'llanilishi

Faraz qilaylik X, U o'zaro erkli, normal taqsimlangan son belgilar bo'lsin. Hajmlari mos ravishda n va m bo'lgan tanlanma to'plamlar olib, ularni o'rta qiymatlarini $\overline{X_T}, \overline{U_T}$, hisoblaymiz va kuzatilgan tanlanma dispersiyalarini hisoblaymiz. $d=\overline{X_T}-\overline{Y_T}$ tanlanma o'rta qiymatlarni farqi qachon ahamiyatli yoki ahamiyatsiz bo'lishligini quyidagicha tekshirish mumkin.

$$D(d)=D(\overline{X_T}-\overline{Y_T})=D(\overline{X_T})+D(\overline{Y_T})=S^2_{\overline{X_T}}+S^2_{\overline{Y_T}}$$

bundan o'rtacha qiymatlar farqini o'rtacha kvadratik chetlanishi (xatosi)

$$\overline{X_T}=29ts/ga,\quad \overline{Y_T}=32ts/ga,\quad S_x^2=1{,}4\quad S_y^2=2$$

Natijada d tasodifiy miqdor uchun intervalli baho $d\pm t_\gamma s_d$ $(d-t_\gamma s_d;\ d+t_\gamma s_d)$ bo'ladi.

1) Agar $d<t_\gamma s_d$ bo'lsa, $H_0{:}MX_T=MY_T=Md=0$ gipotezani rad etishga asos yo'q.

2) Agar $d>t_\gamma s_d$ bo'lsa, H_0 gipoteza rad etiladi.

Tasodifiy chetlanishni limitik chegaraviy qiymatiga eng kichik ahamiyatli farq deyiladi va NCP bilan belgilanadi.

NCP= $t_\gamma s_d$ qiymat orqali aniqlanadi. Bu yerda $t_\gamma=t(n+m-2;\ 0.05)$ ni qiymati Styudent taqsimoti jadvalidan topiladi (4-jadval).

1) Agar $d\geq NCP$ bo'lsa $\Rightarrow N_0$ gipoteza rad etiladi.

2) Agar d<NCP bo'lsa N_0 gipotezani rad etishga asos yo'q deyiladi.

NCP dan intervalli baho qurishda va statistik gipotezalarni tekshirishda foydalaniladi.

Bosh to'plamlarni o'rta qiymatlari orasidagi farq uchun intervalli baho (d−NCP; d+NCP) munosabat yordamida quriladi.

Misol.

$$\overline{X_T} = 29s/ga,\ \overline{Y_T} = 32s/ga,\ S_x^2 = 1{,}4\ \ S_y^2 = 2$$

$$d = (\overline{X_T} - \overline{Y_T}) = 3S_d = \sqrt{S_{\overline{X_T}}^2 + S_{\overline{Y_T}}^2} = \sqrt{\frac{S_x^2}{n} + \frac{S_y^2}{m}} = \sqrt{\frac{14}{5} + \frac{2}{4}} =$$

$$= \sqrt{0{,}78} \approx 0{,}88 f = n + m - 2 = 5 + 4 - 2 = 7,$$

$$f=n+m-2=5+4-2=7$$

Styudent taqsimoti jadvalidan t(7; 0.05)=2,37. Bu masalaning yanada chuqurroq tahlil qilishga keyingi Styudent kriteriyasi mavzusida to'xtalamiz.

Bosh to'plamni o'rta qiymatlari orasidagi farq uchun intervalli bahosi d±tγsd munosabatdan 3±1,85. Demak ishonchlilik intervali (1,15; 4,85), NCP=1,85= tsd

Bizni misolda d=3>NCP=1,85 bo'lganligi uchun N_0 gipoteza rad etiladi, ya'ni ikki nav paxtani o'rtacha hosildorliklari har xil bo'lib, ularni farqi ahamiyatli ekan.

Zaruriy tanlanma hajmini aniqlash

Faraz qilaylik 800 ga maydonga kuzgi bug'doy ekilgan. Qancha yer maydonida kuzatishlar olib borilganda haqiqiy hosildorlikni 0,8 ts/ga dan oshmaydigan xatoda 0,954 ehtimol bilan baholash mumkin. Agar boshlang'ich kuzatishlarda uni o'rtacha kvadratik chetlanishi 3,6 s/ga teng bo'lsa.

Yechish. N=800 ga bosh to'plam, σ=3,6 ts/ga, ε_x=0,8 ts/ga, p=0.954 t(n;γ)=2 bo'lganligidan, qaytarilmaydigan tanlanma uchun zaruriy tanlanma hajmi quyidagi formula bilan topiladi

$$n = \frac{t^2\sigma^2 N}{\sigma^2 t^2 + \varepsilon_{\bar{x}}^2 N} \qquad n = \frac{2^2 \cdot 3,6^2 \cdot 800}{2^2 \cdot 3,6^2 + 0,8^2 \cdot 800} = 74$$

74 ga ekanligi kelib chiqadi. Demak 800 ga maydondagi bug'doy hosildorligini 0,954 ehtimol bilan baholash uchun 74 ga maydonda kuzatishlar olib borish kerak ekan.

Agar 74 ga =74000 m^2 ekanligini e'tiborga olsak pagonniy metr hisobida qancha zaruriy tanlanma olinishi kerakligi kelib chiqadi. Bunda takroriy tanlanma uchun

$$n_2 = \frac{t^2\sigma^2}{\varepsilon_{\bar{x}}^2} = \frac{2^2 \cdot 3,6^2}{0,8^2} = 81$$

81 ga maydonda kuzatishlar olib borilishi kerakligi kelib chiqadi.

Statistik gipotezalarni tekshirish. Normal taqsimlangan bosh to'plamlarning o'rta qiymatlarini taqqoslash. Styudent kriteriyasi

Bir jinsli obyektlar to'plamining son yoki sifat belgisi tasodifiy miqdor bo'lib, ma'lum taqsimot qonunga ega bo'ladi. Ko'pincha amaliyotda belgining qanday taqsimot qonunga egaligi noma'lum bo'lib, uning biror ko'rinishga egaligi haqida taxmin olg'a suriladi. Yoki taqsimot qonuni ma'lum, uning parametrlari noma'lum bo'lib, ularning tayin qiymatlari haqidagi taxminlarni tekshirish talab qilinadi.

Noma'lum taqsimotning ko'rinishi yoki ma'lum taqsimotning parametrlari haqidagi gipotezaga statistik gipoteza deyiladi. Masalan, quyidagi gipotezalar statistik gipotezaga bo'ladi:

1) bosh to'plam Puasson taqsimotiga ega;

2) ikkita normal to'plamning o'rta qiymatlari o'zaro teng.

Olg'a surilgan gipoteza nolinchi (asosiy) gipoteza deyiladi va N_0 bilan belgilanadi. Nolinchi gipotezaga zid bo'lgan gipotezani (konkurent) alternativ gipoteza deyiladi va u N_1 bilan belgilanadi.

Faqat bitta taxminni o'z ichiga olgan statistik gipotezaga oddiy statistik gipoteza deyiladi. Masalan, N_0:a=3 ga, ya'ni normal taqsimotning matematik kutilishi 3 ga teng (σ-ma'lum) degan taxmin oddiy gipotezadir.

Murakkab gipoteza, chekli yoki cheksiz sondagi oddiy gipotezalardan iborat bo'ladi. Masalan, N_0:$a \neq 3$ (σ-noma'lum) gipoteza murakkab statistik gipotezadir.

Olg'a surilgan gipotezani to'g'ri yoki noto'g'riligini tekshirish natijasida quyidagi ikki turdagi xatolikga yo'l qo'yilishi mumkin:

Birinchi tur xatolik shundan iboratki, bunda to'g'ri gipoteza rad qilinadi;

Ikkinchi tur xato – bunda noto'g'ri gipoteza qabul qilinadi.

Birinchi tur xatolikga yo'l qo'yilish ehtimoli α bilan belgilanadi va u qiymatdorlik darajasi deyiladi. Ko'pincha α sifatida 0,05 yoki 0,01 olinadi.

Statistik kriteriy deb, nolinchi gipotezani tekshirish uchun xizmat qiladigan K tasodifiy miqdorga aytiladi. Statistik gipotezalarni tekshirishni eng muqobil usullarini yaratish matematik statistika fanini asosiy vazifalaridan biridir.

Styudent kriteriyasi

Tajriba natijalari asosida ikki nav paxtadan qaysi birining hosildorligi yuqori ekanligini yetarli kafolat bilan aniqlab berish muhim amaliy ham iqtisodiy ahamiyatga ega bo'lgan masalalardan biridir. Bu savolga Styudent kriteriyasi yordamida javob topiladi.

Faraz qilaylik, o'rganilayotgan, X va Y bosh to'plamlar normal taqsimlangan bo'lsin. Ma'lumki, normal taqsimot matematik kutilishi a va o'rtacha kvadratik chetlanishi σ orqali to'liq aniqlanadi. Shu sababli, umumiy holda σ – ma'lum va σ – noma'lum hollar o'rganiladi. Aslida har ikkala parametrlar a va σ noma'lum hol ko'p uchraydi.

X va Y bosh to'plamlar normal taqsimlangan bo'lib, ularni ikkala parametrlari ham noma'lum bo'lsin. Shu bosh to'plamlardan hajimlari n va m ga teng bo'lgan tanlanma to'plamlar berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} X: x_1,\ x_2 \ldots\ldots x_n \\ Y: y_1, y_2 \ldots\ldots y_n \\ N_0: M(X) = M(Y) \end{cases} \qquad (1)$$

tanlanma to'plamlar asosida asosiy gipotezani

$$N_1: M(X) \neq M(Y)$$

shartda α qiymatdorlik darajasi bilan tekshirish talab qilingan. Biz avvalo Fisher-Snedekor kriteriyasi yordamida ularni dispersiyalari tengligi haqidagi statistik gipotezani tekshiramiz, aytaylik α qiymatdorlik darajasi bilan

$$N_0: D(X) = D(Y)$$

qabul qilinsin. Bu shartda ularni o'rta qiymatlari tengligi haqidagi statistik gipotezani Styudent kriteriyasi bilan tekshirish uchun avvalo (1) tanlanmalar yordamida ularni tanlanma o'rta qiymatlari $\overline{X_T}$, $\overline{Y_T}$ va tuzatilgan tanlanma dispersiyalarini S_x^2, S_y^2 hisoblab, quyidagi tasodifiy miqdorni topamiz:

$$t_{kuz} = \frac{|\overline{X} - \overline{Y}|}{\sqrt{((n-1)S_x^2 + (m-1))S_y^2}} \sqrt{\frac{(nm(n+m-2))}{n+m}} \qquad (2)$$

Asosiy N_0:M(X)=M(Y) gipoteza to'g'ri bo'lganda, tasodifiy miqdor

$t_{kuz}(n+m-2; \alpha)$, n+m-2 – ozodlik darajali Styudent taqsimotiga ega bo'ladi. Styudent taqsimot jadvalidan $t_{kr}=t(n+m-2; \alpha)$ topib, uni t_{kuz} miqdor bilan taqqoslaymiz.

1) Agar $t_{kuz}<t_{kr}$ bo'lsa, α qiymatdorlik darajasi bilan asosiy gipoteza N_0:M(X)=M(Y) ni rad etishga asos yo'q, ya'ni N_0 gipoteza qabul qilinadi;

2) Agar $t_{kuz}>t_{kr}$ bo'lsa, asosiy N_0 gipoteza rad etilib, unga alternativ N_1:M(X)≠M(Y) gipoteza α qiymatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi.

Bir faktorli dispersion tahlil usuli va uni qishloq xo'jalik masalalarini yechishga qo'llanilishi.

O‘rganilayotgan $X_1, X_2, \ldots, X_r$ bosh to‘plamlar normal taqsimlangan, noma’lum ammo bir xil dispersiyalarga ega bo‘lsin, (matematik kutilishlari ham noma’lum).

Berilgan qiymatdorlik darajasida barcha matematik kutilishlar tengligi haqidagi N_0:$M(X_1)=M(X_2)=\ldots=M(X_r)$ asosiy nolinchi gipotezani tanlanma o‘rtacha qiymatlar bo‘yicha tekshirish talab qilinadi.

Bir nechta o‘rta qiymatlarni taqqoslash ularni dispersiyalarini taqqoslashga asoslanganligi uchun unga dispersion tahlil usuli deb yuritiladi. Amaliy masalalar yechishda dispersion tahlil usuli r ta $F_1, F_2, \ldots, F_p$ darajaga ega bo‘lgan F sifat faktorning o‘rganilayotgan X miqdorga ta’siri muhim yoki muhim emasligini aniqlash uchun qo‘llaniladi.

Masalan, paxtadan yuqori hosil olishda o‘g‘itlarning qaysi birini samaraliroq ekanligini aniqlash talab qilinsa, u holda F faktor-o‘g‘it, uning darajalari esa o‘g‘it turlari bo‘ladi.

Dispersion tahlil usulini asosiy g‘oyasi faktor ta’sirida vujudga keladigan «Faktor dispersiya» va tasodifiy sabablar bilan bo‘ladigan «Qoldiq dispersiya»ni taqqoslashdan iboratdir.

Demak, berilgan α qiymatdorlik darajasida bir xil dispersiyali normal to‘plamlarning gruppaviy o‘rtacha qiymatlari tengligi haqidagi

$$N_0: M(X_1)=M(X_2=\ldots=M(X_r),$$

asosiy gipotezani alternativ

$$N_1: M(X_1)\neq M(X_2)\neq\ldots\neq M(X_r)$$

gipotezada tekshirish umumiy sxemasi quyidagicha:

1) kuzatish natijalariga asoslanib, S^2_{fakt} va S^2_{qoldiq} dispersiyalar hisoblaniladi;

2) N_0 gipotezani tekshirish kriteriysining F_{kuz} qiymati, $F_{kuz}=S^2_{fakt}/S^2_{qoldiq}$ topiladi;

3) berilgan α va ozodlik darajalari $k_1=r-1$ va $k_2=p(q-1)$ bo‘yicha Fisher-Snedekor taqsimotining kritik nuqtalari jadvalidan

$$F_{kr}(\alpha,\ k_1=r-1,\ k_2=p(q-1))$$

qiymati aniqlanadi. Bu yerda r-faktor darajalari soni, q-har bir darajada kuzatishlar soni;

4) agar $F_{kuz}<F_{kr}$ bo'lsa, N_0 gipoteza α qiymatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi,

5) agar $F_{kuz}>F_{kr}$ bo'lsa asosiy N_0 gipoteza rad etilib alternativ N_1 gipoteza qabul qilinadi.

1-misol. 3 xil A, B, C arpa navlarini o'rtacha hosildorliklari $N_0{:}M(X_1)=M(X_2)=M(X_3)$ teng degan asosiy gipotezani $N_1{:}M(X_1)\neq M(X_1)\neq M(X_3)$ ular har xil hosildorlikka ega degan alternativ shartda, $\alpha=0.05$ qiymatdorlik darajasi bilan kuyidagi o'tkazilgan tajriba natijasi asosida tekshiring.

Navlar	Tajriba natijalari (ts/ga)				O'tkazilgan tajribalar soni	Yig'indisi	O'rtachasi
	1	2	3	4			
A	24,6	29,2	26,8	29,4	4	110,0	27,5
B	22,4	27,3	27,4	23,3	4	100,4	25,1
C	21,3	25,2	24,5	22,2	4	93,2	23,3
					12	303,6	25,3

Hisoblashlarni yengillashtirish maqsadida dispersiyani

$$D(X_{iq}-C)=D(X_{iq})$$

xossasidan foydalanib, barcha tajriba natijalaridan umumiy o'rtacha yaqin C=25 ni ayirib, hosil bo'lgan sonlar uchun faktor va qoldiq dispersiyalarni hisoblaymiz:

	1	2	3	4	yig'indi x_i
A	-0,4	4,2	1,8	4,4	10
B	-2,6	2,3	2,4	1,7	3,8
C	-3,7	0,2	0,5	1,8	-1,2
					12,6

n=4, k=3

$$Q_1=\sum_{i=n}^{n} x_{iq}^2 = 0,16+6,76+13,69+17,64+5,29+0,04+$$

$$+3,24+5,76+0,25+19,36+2,89+3,24=78,3$$

$$Q_2=\sum_{i=n}^{n} x_i^2 = 1/4\left[10^2+3,8^2+(-1,2)^2\right]=1/4(100+14,44+1,44)=$$

$$=115,88/4=28,97$$

$$Q_3=\frac{1}{kn}\left(\sum_{i=n}^{n} x_i\right)^2=1/12(10+3,8-1,2)^2=1/12\cdot 12,6^2=158,76/12=13,23$$

$$S_{qol}^2=\frac{Q_1-Q_2}{k(n-1)}=(78,32-28,97)/(3\cdot(4-1))=49,35/9=5,48(3)$$

$$S_{jal}^2=\frac{Q_2-Q_1}{k-1}=(28,97-13,23)/2=15,74/2=7,87$$

$$F_{kuz}=\frac{S_{fak}^2}{S_{kol}^{*2}}=7,87/5,48=1,44F_{kritik}=F(2;9;0,05)=4,26$$

Demak, $F_{kuz}<F_{kr}$.

N_0 gipoteza $\alpha=0.05$ qiymatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi, ya'ni uch xil arpa navlarini o'rtacha hosildorliklari teng ekan.

9-§. Korrelyatsiya nazariyasi elementlari. Korrelyatsiya koeffitsientini hisoblash va uning xossalari

Ko'pincha U tasodifiy miqdorning bitta yoki bir nechta boshqa miqdorlarga bog'liqligini aniqlash talab qilinadi. Ikkita tasodifiy miqdor funksional, statistik, xususan korrelyatsion bog'langan bo'lishi mumkin.

Agar tasodifiy miqdorlardan birining o'zgarishi ikkinchisining taqsimotini o'zgarishiga olib kelsa, u holda bu miqdorlar statistik bog'lanishga ega deyiladi.

Agar X tasodifiy miqdorning o'zgarshi, ikkinchi Y tasodifiy miqdorning o'rtacha qiymatini o'zgarishiga olib kelsa, u holda bu

X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro korrelyatsion bog'langan deyiladi. Masalan, daraxtning bo'yi bilan diametri orasidagi bog'lanish yoki paxtaga solingan ma'lum miqdordagi mineral o'g'it bilan hosildorlik orasidagi bog'lanishlar korrelyatsion bog'lanishga misol bo'ladi.

Biz korrelyatsion bog'lanishni bir qiymatli eng sodda holatini qaraymiz.

Y ning X ga korrelyatsion bog'liqligi deb, Y_x shartli o'rtacha qiymatning x ga funksional bog'liqligiga aytiladi:

$$Y_x=f(x) \qquad (1)$$

tenglamani Y ning X ga regressiya tenglamasi deyiladi, f(x) funksiya Y ning X ga regressiya chizig'i deyiladi.

Korrelyatsiya nazariyasining birinchi asosiy masalasi – korrelyatsion bog'lanish formasini aniqlash, ya'ni regressiya funksiyasining ko'rinishini aniqlashdan iboratdir. Y chiziqli, kvadratik, ko'rsatkichli va boshqacha bog'lanishda bo'lishi mumkin.

Korrelyatsiya nazariyasining ikkinchi asosiy masalasi – korrelyatsion bog'lanishning zichligini (kuchini) korrelyatsiya koeffitsientini aniqlashdir.

Faraz qilaylik, X va Y son belgilar chiziqli korrelyatsion bog'lanish bilan bog'langan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziq tenglamasini tuzish uchun n ta tajriba o'tkazilgan bo'lsin: (x, y): (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n).

Tanlanma ma'lumotlariga asoslanib, Y ning X ga regressiya to'g'ri chizig'ining olingan noma'lum parametrlarini baholash lozim. Noma'lum parametrlarni baholashda eng kichik kvadratlar usuli ko'pincha qulay va muqobil hisoblanadi.

Masalan, $y=r_{ux}\,x+b$ regressiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tenglamasini gruppalanmagan va gruppalangan ma'lumotlar bo'yicha topish usullari mavjud (1) tenglamadagi r_{ux} koeffitsient y ning x ga regressiya to'g'ri chizig'ining tanlanma regressiya koeffitsienti deyiladi.

Pegressiya to'g'ri chizig'ining tenglamasini gruppalangan ma'lumotlar bo'yicha ushbu tenglama yordamida topiladi

$$y_x - \overline{y_T} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x_T})$$

Kichik hajmli tanlanmalar uchun korrelyatsiya koeffitsientini ushbu formula bilan hisoblash mumkin.

$$r_T = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x - \overline{x_T})(y_i - \overline{y_T})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x - \overline{x_T})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y_T})^2}}$$

Katta hajmli tanlanma uchun, ya'ni (x_i; y_i) takrorlangan holda tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini hisoblashning to'rt maydon usuli mavjud. Bu hol ko'plab hisoblashlarni talab qilganligi sababli ushbu uslubiy qo'llanmada keltirmaymiz. Bu mavzuni yuqorida keltirilgan adabiyotlardan foydalanib talabalarni mustaqil o'rganishlarini tavsiya etamiz.

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining xossalari

1. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini absolyut qiymati birdan ortmaydi, ya'ni $|r_T| \le 1$, ya'ni $1 \le r_T \le 1$.

2. Agar X va Y o'zaro erkli tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda $r_T = 0$, aksincha hol hamma vaqt ham to'g'ri bo'lmaydi.

3. Agar $r_T = \pm 1$ bo'lsa, u holda belgilarning kuzatilayotgan qiymatlari chiziqli funksional bog'lanish bilan bog'langan bo'ladi.

Demak, r_T X va Y miqdorlar orasidagi bog'lanishning kuchini bildiradi. Agar r_t qiymati 0 soniga qanchalik yaqin bo'lsa, X va Y orasidagi bog'lashi shunchalik kuchsiz bo'ladi. Aksincha qiymati 1 soniga qanchalik yaqin bo'lsa, X va Y orasidagi bog'lashi shunchalik kuchli bo'ladi.

1-misol. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida $\overline{x_v}$, σ_x larni toping.

X Y	4	5	6	7	n_y
1	3	1	–	3	7
2	–	2	4	1	7
3	5	1	5	–	11
n_x	8	4	9	4	n=25

Yechish:

$$\bar{x}_{y=1} = \frac{4\cdot 3 + 5\cdot 1 + 6\cdot 0 + 7\cdot 3}{7} = \frac{38}{7},$$

$$\bar{x}_{y=2} = \frac{4\cdot 0 + 5\cdot 2 + 6\cdot 4 + 7\cdot 1}{7} = \frac{41}{7},$$

$$\bar{x}_{y=3} = \frac{4\cdot 5 + 5\cdot 1 + 6\cdot 5 + 7\cdot 0}{11} = \frac{55}{11}.$$

U holda quyidagi jadval hosil bo'ladi:

X Y	4	5	6	7	n_y	$\bar{x}_y$
1	3	1	–	3	7	38/7
2	–	2	4	1	7	41/7
3	5	1	5	–	11	55/11
n_x	8	4	9	4	n=25	

Endi 1-jadvaldan foydalanib o'rtacha kvadratik chetlanishni hisoblaymiz:

$$\bar{x} = \frac{32 + 20 + 54 + 28}{25} = \frac{134}{25} = 5,36,$$

$$\overline{x^2} = \frac{128 + 100 + 324 + 196}{25} = \frac{748}{25} = 29,92.$$

U holda $\sigma_x = 1,09$.

2-misol. Berilgan korrelyatsion jadval bo'yicha $\overline{x}_y$, $\overline{y}_x$ larni hisoblang.

XY	40	50	60	70	n_y
10	2	11	3	2	18
11	1	19	2	4	26
12	3	6	27	6	42
13	2	3	3	6	14
n_x	8	39	35	18	n=100

Yechish:

$$\overline{x}_{y=10}=\frac{950}{18},\quad \overline{x}_{y=11}=\frac{1250}{26},\quad \overline{x}_{y=12}=\frac{2460}{42},\quad \overline{x}_{y=13}=\frac{830}{18};$$

$$\overline{y}_{x=40}=\frac{93}{8},\quad \overline{y}_{x=50}=\frac{430}{39},\quad \overline{y}_{x=60}=\frac{415}{35},\quad \overline{y}_{x=70}=\frac{214}{18}.$$

Bu ma'lumotlardan foydalanib quiydagi jadvalni hosil qilamiz:

X Y	40	50	60	70	n_y	$\overline{x}_y$,
10	2	11	3	2	18	950/18
11	1	19	2	4	26	1250/26
12	3	6	27	6	42	2460/42
13	2	3	3	6	14	830/18
n_y	8	39	35	18	n=100	
$\overline{y}_x$	93/8	430/39	415/35	214/18		

3-misol. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida Y ning X ga to'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini tuzing:

X	10	2	7	5
Y	8	2	6	4

Jadvaldan foydalanib tanlanma regressiya tenglamasini toping.

Yechish: Bu yerda $\left(\overline{y}_x-\overline{y}\right)=\rho_{yx}\left(x-\overline{x}\right)$, $\rho_{yx}=r_T\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ va

$r_T=\dfrac{\sum xy-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}$ formulalardan foydalanamiz.

$$\sum xy=80+4+42+20=144,\qquad \overline{x}=\frac{10+2+7+5}{4}=6,$$

$$\overline{y}=\frac{8+2+6+4}{4}=5,\qquad \overline{x^2}=\frac{100+4+49+25}{4}=44,5,$$

$$\overline{y^2}=\frac{64+4+36+16}{4}=30,\qquad \sigma_x=\sqrt{44,5-36}\approx 2,85,$$

$$\sigma_y=\sqrt{30-25}\approx 2,25,\qquad r_T=\frac{144-4\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 2,85\cdot 2,25}=0,94,$$

$$\rho_{yx}=0,94\cdot\frac{2,25}{2,85}=0,74,\qquad \overline{y}_x=0,74+0,56.$$

4-misol. n=50 hajmli quyidagi korrelyatsion jadval bo'yicha Y miqdorning X miqdorga korrelyatsion nisbati η_{yx} ni toping.

X Y	10	20	30	n_y
10	4	28	6	38
20	6	–	6	12
n_x	10	28	12	n=50
$\overline{y}_x$	16	10	18	

Yechish: $\overline{y}$ umumiy o'rtachani topamiz:

$$\overline{y}=\frac{38\cdot 10+12\cdot 20}{50}=12,4.$$

σ_y va $\sigma_{\overline{y}_x}$ larni topamiz

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y (y-\bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{38\cdot(10-12,4)^2+12\cdot(20-12,4)^2}{50}} = 4,27.$$

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{\frac{10\cdot(16-12,4)^2+28\cdot(10-12,4)^2+12\cdot(18-12,4)^2}{50}} = 3,65.$$

U holda $\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y} = \frac{3,65}{4,27} = 0,85.$

Demak, bog'lanish egri chiziqli.

5-misol. Quyidagi korrelyatsion jadvaldagi ma'lumotlar bo'yicha $\bar{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ regressiya tenglamasini toping:

X / Y	0	1	2	3	4	n_y
0	18	1	1	–	–	20
3	1	20	–	–	–	21
5	3	5	10	2	–	20
10	–	–	7	12	–	19
17	–	–	–	–	20	20
n_x	22	26	18	14	20	$n=100$

Yechish: Yuqoridagi jadval ma'lumotlari asosida quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	n_x	$\bar{y}_x$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \bar{y}_x$	$n_x \bar{y}_x x$	$n_x \bar{y}_x x^2$
0	22	0,8	0	0	0	0	17,6	0	1
1	26	3,27	26	26	26	26	85,02	85,02	85,02
2	18	6,67	36	72	144	288	120,06	240,12	480,24
3	14	9,3	42	126	378	1134	130	390	1170
4	20	17	80	320	1280	5120	340	1360	5440
$\sum$	100	-	184	544	1828	6568	692,68	2075,14	7175,26

Bu jadvaldan quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 6568A + 1828B + 544C = 7175,25; \\ 1828A + 544B + 184C = 2075,14; \\ 544A + 184B + 100C = 692,68. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, A=0,66; B=1,23 va C=1,07 ekanligini topamiz. U holda

$$\overline{y}_x = 0,66x^2 + 1,23x + 1,07.$$

6-misol. Biror mutaxassislikka mansub ishchilarning mehnat unumdorligi – X, yoshi – Y va mehnat staji –Z ning o'zaro bog'liqligini tekshirish maqsadida 100 ta ishchi ajratib olindi. Bu belgilarning juft-juft bog'liqligi tekshirilgan bo'lib, quyidagi ma'lumotlar olingan: $r_{xy}=0,20$; $r_{xz}=0,41$; $r_{yz}=0,82$. X ning Y va Z lar bilan bog'liqligining zichligi $R_{z,yz}$ va xususiy korrelyatsiya koeffitsientlari $r_{xy,z}$, $r_{xz,y}$, $r_{yz,x}$ ni aniqlang.

Yechish: Masalada X ning Y va Z lar bilan bog'liqligining zichligi $R_{x,yz}$ ni quyidagicha topamiz:

$$R_{x,yz} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2 - 2 \cdot r_{xy} \cdot r_{xz} \cdot r_{yz} + r_{xz}^2}{1 - r_{yz}^2}} = \sqrt{\frac{0,20^2 - 2 \cdot 0,20 \cdot 0,41 \cdot 0,82 + 0,41^2}{1 - 0,82^2}} =$$

$$= \sqrt{0,225} = 0,47;$$

Demak, ishchilarning mehnat unumdorligi bir tomondan ularning yosh ko'rsatkichlari, ikkinchi tomonidan esa mehnat stajlari bilan sezilarli darajada bog'liq ekan.

Endi quyidagi xususiy korrelyatsiya koeffitsientlarini baholaymiz:

$$r_{xy,z} = \frac{r_{xy}^2 - r_{xz} r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}} = \frac{0,20^2 - 0,41 \cdot 0,82}{\sqrt{(1 - 0,41^2)(1 - 0,82^2)}} = -0,26;$$

$$r_{xy,z} = \frac{r_{xy}^2 - r_{xz}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xz}^2)(1-r_{yz}^2)}} = \frac{0,41^2 - 0,20 \cdot 0,82}{\sqrt{(1-0,20^2)(1-0,82^2)}} = 0,44;$$

$$r_{yz,x} = \frac{r_{yz}^2 - r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{xz}^2)}} = \frac{0,82^2 - 0,20 \cdot 0,41}{\sqrt{(1-0,20^2)(1-0,41^2)}} = 0,83;$$

Xususiy korrelyatsiya koeffitsientlari bo'yicha quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

Ishchilarning mehnat unumdorligi bilan ularning yosh ko'rsatkichlari orasida to'g'ri korrelyatsion bog'lanish mavjud $r_{xy}=0,2$. Agar unga uchinchi omil, ya'ni mehnat stajining bog'liqligi o'rganilganda teskari korrelyatsion bog'lanish mavjudligini ko'rish mumkin $r_{xy,z}=-0,26$. Buni mehnat faoliyatining ma'lum bir davrida inson organizmining mehnatga layoqatlilik darajasi eng yuqori bo'lishi bilan izohlash mumkin.

Xuddi shu kabi boshqa xususiy korrelyatsiya koeffitsientlari haqida ham fikr bildirish mumkin.

17-bob. MODEL VA MODELLASHTIRISH

1-§. Model va modellashtirish haqida tushuncha

Model (lot. modulus – o'lchov, me'yor) biror obyekt yoki obyektlar sistemasining obrazi yoki namunasidir. Masalan, Yerning modeli globus, osmon va undagi yulduzlar modeli planetariy ekrani; odam suratini shu surat egasining modeli deyish mumkin.

Qadimdan insoniyatni yaxshi sharoitda turmush kechirish, tabiiy ofatlarni oldindan aniqlash muammolari qiziqtirib kelgan. Shuning uchun insoniyat dunyoning turli hodisalarini o'rganib kelishi tabiiy holdir.

Aniq fanlar mutaxassislari u yoki bu jarayonning faqat ularni qiziqtirish xossalarinigina o'rganadilar. Masalan, geologlar Yerning rivojlanish tarixini, ya'ni qachon, qayerda va qanday hayvonlar yashagan, o'simliklar o'sgan, iqlim qanday o'zgarganligini o'rganadilar. Bu ularga foydali qazilmalar to'plangan joylarni aniqlashga imkon beradi. Lekin ular yerda kishilik jamiyatining rivojlanish tarixini o'rganmaydilar, bu bilan tarixchilar shug'ullanadilar. Shu yerning o'zida biz sayyoramizdagi dunyo biz sayyoramiz tarixiy rivojlanishning tarkibiy tafsifiga ega bo'lamiz. Umuman, sayyoramizdagi dunyoning barcha tadqiqotlari bizga to'la bo'lmagan va juda aniq bo'lmagan ma'lumot beradi. Lekin bu koinotga uchish, atom yadrosi sirini bilish, jamiyat rivojlanish qonunlarini egallash va boshqalarga xalaqit etmaydi. Tuzilish modeli o'rganilayotgan hodisa va jarayonni iloji boricha to'la aks ettirishi zarur.

Modelning taqribiylik xarakteri turli ko'rinishda namoyon bo'lishi mumkin. Masalan, tajriba o'tkazish maboynida foydalaniladigan asboblarning aniqligi olinayotgan natijaning aniqligiga ta'sir etadi. Samalyotlarning ob-havo sharoitini hisobga olmay tuzilgan yozgi davri uchish jadvali aeroflot ishining takribiy modelini ifodalaydi va hokazo.

Modellashtirish bilan obyektlari (fizik hodisa va jarayonlar) ni ularning modellari yordamida tadqiq qilish, mavjud narsa va hodisalarning modellarini yasash va o'rganishdan iboratdir.

Modellashtirish uslubidan hozirgi zamon fanida keng foydalanilmoqda. U ilmiy-tadqiqot jarayonini osonlashtiradi, ba'zi hollarda esa murakkab obyektlarini o'rganishning yagona vositasiga aylanadi. Modellashtirish, ayniqsa mavhum obyektlarni, olis-olislarda joylashgan obyektlarni, juda kichik hajmli obyektlarni o'rganishda ahamiyati kattadir. Modellashtirish uslubidan fizik, astronomik, biologik iqtisod uchun ham foydalaniladi.

Umuman, modellarni ularni tanlash vositalariga qarab, ushbu guruhlarga ajratish mumkin: obstrakt, fizik va biologik guruhlar (1-rasm). Endi modellari bilan qisqacha tanishaylik.

1. Abstrakt modellar qatoriga matematik, matematik-mantiqiy modellar kiradi.

2. Fizik model. Tekshirilayotgan jarayonning tabiati va geometrik tuzilishi asl nusxadagidek, ammo undan miqdor (o'lchami, tezligi, hajmi) jihatidan farq qiladigan modellardir. Masalan, samolyot, kema, avtomobil, poyezd, GES va boshqalarning modellari. Fizik modellar qatoriga kichiklashtirilgan maketlar, turli asbob va qurilmalar, trenajyorlar kirishi mumkin. Jumladan, O'zbekiston milliy bog'idagilar bo'la oladi.

Model		
Abstrakt	Fizik	Biologik
Matematik	Iqtisodiy matematik	
Sonli	Tuzilish va obyektlari vazifalarining chuqurligiga qarab	Kichiklashtirilgan maketlar
Mantiqiy	Rasmiylashtirishning to'laligicha qarab	Turli asbob va qurilmalarda ishlaydigan modellar
Grafik	Obyektlarning bog'lanishining rasmiylashtirish darajasiga qarab	Trenajyorlar
Elektron	Obyekt tuzilishining shakllari darajasiga qarab	

3. Matematik modellar tirik sistemalarning tuzilishi, o'zaro aloqalari va funksiyasi qonuniyatlarining matematik-mantiqiy, matematik tavsifidan iborat bo'lib, tajriba ma'lumotlariga

ko‘ra yoki mantiqiy asosda tuziladi, so‘ngra ular tajriba yo‘li bilan tekshirib ko‘riladi. Biologik hodisalarning matematik modellarini kompyuterlarda hisoblash ko‘pincha tekshirilayotgan biologik jarayonning o‘zgarish xususiyati avvaldan bilish imkonini beradi. Shuni ta’kidlash o‘rinliki, tajriba yo‘li bilan bunday jarayonni o‘tkazish ba’zan juda qiyin bo‘ladi. Matematik va matematik-mantiqiy modellar yaratilishi, takomillashtirilishi va undan foydalanish matematik hamda nazariy biologiyaning rivojlanishiga qulay sharoit yaratadi.

4. Biologik model turli tirik obyektlar va ularning qismlari — molekula, suv — hujayra, organ — sistema organizm va shu kabilarga xos biologik tuzilish, funksiya va jarayonlarni modellashtirishda qo‘llaniladi. Biologiyada asosan uch xil modeldan foydalaniladi, ular biologik, fizik va matematik modellardir.

Biologik model odam va hayvonlarda uchraydigan ma’lum holat yoki kasallikni laboratoriya hayvonlarida sinab ko‘rish imkonini beradi. Bundan shu holat yoki kasallikni kelib chiqish mexanizmi, kechishi natijasida va hokazolar tajribada o‘rganiladi. Biologik modelda har bir usullar genetik apparatga ta’sir qilish, mikroblar yuqtirish, ba’zi organlarni olib tashlash yoki ular faoliyati mahsuli bo‘lgan garmonlarni kiritish va boshqa usullar qo‘llaniladi. Bunday modellardan genetika, fiziologiya, farmokologiyada foydalaniladi.

5. Fizik-kimyoviy modellar biologik tuzilish, funksiya yoki jarayonlarni fizik yoki kimyoviy vositalar bilan qaytadan hosil qilishdir. Dastlab, hujayra tuzilishi va ba’zi vazifalarning fizik-kimyoviy modelini yasashga urinib ko‘rilgan. Nemis zoologi O.Byuchli 1892-yili zaytun moyini suvda eriydigan turli moddalar bilan aralashtirdi va bu aralashmani bir tomchi suv bilan omuxta qilib, tashqi ko‘rinishidan protok plazmaga o‘xshash mikroskopik ko‘piklar hosil qiladi. Keyinchalik elektrotexnika va elektronik tamoyillar asosida birmuncha murakkab modellar nerv hujayralari, uning o‘simtalaridagi bioelektr potensiallarini ko‘rsatuvchi model, shuningdek shartli refleks hosil bo‘lishida markaziy tormozla-

nish jarayonini modellashtiruvchi elektron-mexanik mashinalar yaratilgan. Bunday modellar odatda toshbaqa, sichqon, it shaklida bo'ladi.

6. Iqtisodiy modellar taxminan XVIII asrdan qo'llana boshladi. F.Keninning «Iqtisodiy jadvallar»ida birinchi marta, butun ijtimoiy takror ishlab chiqarish jarayonining shakllanishini ko'rsatishga harakat qilingan.

Iqtisodiy sistemalarning turli yo'nalishlarini o'rganish uchun har xil modellardan foydalaniladi.

Matematik modellashtirish aniq fanlarga turli amaliy masalalarni yechishda muvaffaqiyat bilan qo'llanib kelinmoqda. Matematik modellashtirish usuli masalani tasvirlaydigan u yoki bu kattaliklarni miqdor jihatdan ifodalash, so'ngra esa ularning bog'liqligini o'rganish imkoniyatini beradi.

Bu usul asosida matematik model tushunchasi yotadi.

Matematik model deb, o'rganilayotgan obyektning matematik formula yoki algoritm ko'rinishida ifodalangan xarakteristikalari orasidagi funksional bog'lanishga aytiladi.

Masalan, ideal gazning matematik modeli gazning bosimi R, egallangan hajm va temperatura orasidagi funksional bog'lanishi ifodalaydigan formula (Klapeyron formulasi)dan iborat.

Matematik modellashtirishda o'rganilayotgan fizik jarayonlarning matematik ifodalari modellanadi. Matematik model olamning ma'lum hodisalari sinfining matematik belgilari bilan ifodalangan tarkibiy ifodasidir. Matematik model olamni bilish, shuningdek oldindan aytib berish va boshqarishning kuchli usulidir.

Matematik modelni tahlil qilish o'rganilayotgan hodisaning ichiga kirish imkonini beradi. Hodisalarni matematik model yordamida o'rganish to'rt bosqichni amalga oshiriladi.

Birinchi bosqich modelning asosiy obyektlarini bog'lovchi qonunlarini ifodalashdan iborat.

Ikkinchi bosqich matematik modeldagi matematik masalalarni tekshirishdan iborat.

Uchunchi bosqichda qabul qilingan modelning amaliy mezonlarini qanoatlantirishi aniqlanadi, boshqacha aytganda, kuzatishlar natijasi modelning nazariy natijalari bilan kuzatish aniqligi chegarasida mos kelishi masalasi aniqlandi.

To'rtinchi bosqichda o'rganilayotgan hodisalar haqidagi ma'lumotlarning yig'ilishi munosabati bilan modelning navbatdagi tahlili amalga oshiriladi, takomillashtiriladi va aniqlashtiriladi.

Shunday qilib, modellashtirish usulining asosiy mazmunini obyektni dastlabki o'rganish asosida modelni tajriba yo'li bilan yoki nazariy tahlil qilish, natijalari haqidagi ma'lumotlar bilan taqqoslash, modelni tuzatish (takomillashtirish) tashkil etadi va hokazo.

2-§. Matematik modellashtirish to'g'risida tushuncha

Hayotda insoniyat xotirasiga bog'liq bo'lmagan holda uchraydigan usullar muvaffaqiyatli va hatto, o'z-o'zini kuzatish va tajribalar mavjud bo'lib, o'z faoliyatida har xil sohalarga mos muammolari yaxshi yechimini topishga harakat qiladi.

Bunday yechimlarni aniqlash muammosi ko'p qirrali bo'lib, ularni har xil usullar bilan hal qilish kerakdir.

Kutilayotgan obyektlarni chuqur va har tomonlama o'rganish maqsadida tabiatda hamda jamiyatda ro'y beradigan jarayonlarning modellari yaratiladi. Jarayon modelini tuzish modellashtirish deb ataladi. Modellashtirish metodlarini ishlab chiqish bevosita kibernetika fanining rivojlanishi bilan bog'liq hisoblanadi. Masalalar yechimini topishda mashinalar, inson, murakkab holatlarda inson mashina tizimi qo'l kelib, bu esa o'z navbatida aniq yechimni topishga yo'naltiradi. Hozirgi vaqtda amaliyot sohasida matematik modellardan foydalanib natija olinmoqda.

Jamiyatda uchraydigan jarayon va obyektlari miqdoriy, bog'lanishlarning matematik ifodasi matematik model deb ataladi. Modelning hayotiyligi uning modellashtiriladigan obyektga qanchalik mos kelishiga bog'liq. Bitta modelda obyektning hamma tomonini aks ettirish qiyin bo'lganligidan unda obyektning eng xarakterli va muhim belgilarigina aks ettiriladi.

Binobarin, modelning to'g'riligi to'plangan ma'lumotlar hajmiga, ularning aniqlik darajasiga, tadqiqotchining malakasiga va modellashtirish jarayonida aniqlanadigan masalaning ko'lamiga bog'liq. Ma'lumki, tadbiq aniq va ijtimoiy fanlar takomillashuvida xizmat qilib kelmoqda.

Matematika boshlang'ich tushunchalari, faqatgina ijtimoiy jarayonlarda emas, balki, mojaroli holatlar, o'zaro kelishmovchiliklar, kelishuv, ijtimoiy fikrlarni aniqlashda ham muhim ahamiyatga egadir.

Matematik modellarni ishlab chiqish va tahlil qilib, matematik usullarga tadbiq qilinmoqda.

Jarayonlarni tahlil qilish sohasi XVIII–XIX asrlarda paydo bo'lib, ishni tashkil qilish va ishlab chiqarishda qo'llanila boshlanib, sanoat korxonalaridagi ko'pgina aniq masalalarni yechimini topishda A.Smit, Charlz Bebbirt, F.Teylor, G.Gentlar ijobiy natijalarga erishganlar. 1840-yilda Buyuk Britaniyada Bebbirt usuli yordamida pochtadan yuboriladigan ma'lumotlarni qayta ishlab, uni ajratib, tezgina iste'molchiga yuborish yo'llari yaratilgan. XX asr boshlarida antogonik mojarolarni matematik modellashtirish artilleriyalar uchun F.Lanchester usulidan, investitsiyani boshqarish nazariyasi bo'yicha F.Xarris usuli, maishiy xizmat sohasida A.Erling usullaridan foydalanilgan.

Ikkinchi Jahon urushi davrida Angliya harbiylari tomonidan Shimoliy Atlantikani shturm qilishda S.Blyejyet usulini qo'llagan bo'lib, bu mashhur «Blacked's Circus» operatsiyasi deb nomlanib, unda matematik, fizik, biolog, geodez, astrologik hamda harbiylar ishtirok qilganlar.

Keyinchalik matematik modellashtirish sohasida o'yinlar nazariyasi bilan D.Neyman chiziqli dasturlash sohasida D.Dansik, L.V.Kantorovichlar katta sohada ilmiy izlanishlarni amalga oshirganlar.

Shuni ham ta'kidlab, o'tish kerakki, soddalashtirilgan matematik model qo'yilgan talablarga yaxshi javob bera olmaydi, o'ta murakkab model esa masalani yechish jarayonida ancha muammolar yaratadi.

3-§. Matematik modellashtirish usullari va yechish bosqichlari

Matematik modellardan foydalanish usullari to'rt qismga bo'linadi:

1. Gidravlik modellar. Bunday modellashtirish asosan suyuqlik kuchi bilan ishlaydigan apparat (idishlar) orqali hisoblanadi. Modellashtirishning bunday usuli suyuqliklarni o'lchashda qo'llaniladi.
2. Elektr tasvirlash modellari. Fizika sohasida qo'llanilib, elektr tarmog'i xarakteristikasi tarzida tasvirlanadi.
3. Qurilishlarda bajariladigan ishlarning bajarilish muddatini aniqlashga yo'naltirilgan matematik modellar deb ataladi.
4. Xalq xo'jaligining turli tarmoqlaridagi bajarilayotgan ishlar tengsizlik va tenglamalar sistemasiga mos matematik model olib kelinib, ular iqtisodiy-matematik modellar deb yuritiladi.

Matematik modellar o'z navbatida quyidagilardan iborat bo'ladi:

1. Statistik tahlil.
2. Imitatsion modellashtirish.
3. Tarmoqli dasturlash.
4. Chiziqli dasturlash.
5. Ketma-ketlik nazariyasi.
6. Chiziqli bo'lmagan dasturlash.
7. Dinamik dasturlash.
8. O'yinlar nazariyasi.

Matematik modellashtirishning nazariy asoslari besh bosqichga bo'linib, amalga oshiriladi.

Birinchi bosqichda – jarayon sifat jihatdan tahlil qilinib, masala maqsadi o'rganilib, unga mos axborotlar to'planadi. Jarayonning mohiyatini nazariy asosda o'rganib, uning zarur ko'rsatkichlari aniqlanib, bu modellashtirish negizini tashkil etadi.

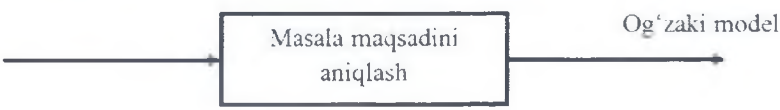
Ikkinchi bosqich – jarayonning optimallik mezoni hisoblanib, unda hamma ishlar bir xil o'lchov birligiga keltiriladi hamda mezon matematik funksiya ko'rinishida ifodalanib, argumentning ma'lum qiymatlarida yagona yechimga ega bo'ladi.

Uchinchi bosqichda – matematik model matematik ifodalar ko'rinishida (tenglama va tengsizliklar sistemasi) tasvirlanib, ular chiziqli, kvadrat, chiziqli bo'lmagan, giperbolik va boshqa matematik ifodalarda yozilishi mumkin.

To'rtinchi bosqichda – shakllantirilgan modelning miqdoriy yechimini aniqlaydigan usul tanlanadi. Matematik ifoda yordamida model bilan ifodalangan masalani yechishda matematik modellashtirish metodlari qo'llaniladi (iqtisodiy masalalarni yechishda simpleks), ehtimollarda (o'yinlar nazariyasi). Masalaning maqbul yechimini aniqlashda matematik dasturlash yoki boshqa usullardan foydalanish mumkin bo'ladi.

Matematik modellashtirishning beshinchi bosqichida masalaning yagona (maqbul) yechimi miqdor va sifat jihatdan tahlil qilinib, ular o'rtasidagi nisbiy holat olinadi.

Masalalarni zamonaviy axborot texnologiyalari yordamida yechish yaxshi natijalarni beradi, buning uchun:



1-chizma

1) matematik modelni yechish uchun maxsus dastur ishlab chiqiladi;

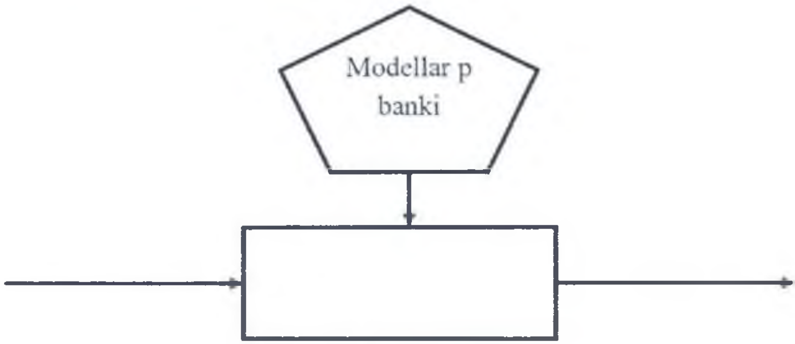
2) asosan zamonaviy axborot texnologiyalarida murakkab masalalar yechiladi.

Amaliy tajribalar shuni ko'rsatadiki, masalalarning yechimini aniqlashda quyidagi bosqichlardan foydalanishni taklif etamiz.

1-bosqich — masala maqsadini aniqlash (1-chizma).

Bu bosqichda masala maqsadini aniq va to'g'riligini ko'rsatgan holda vaqt, tushuncha, yozuvlar orqali aniqlashga harakat qilinadi.

2-bosqich — masalani yechish uchun matematik model tanlash. Bunday holda masala aniq ko'rsatilsa, unda tayyor model tanlanadi, agarda aniq model mavjud bo'lmasa, u holda ushbu masalani yechishga mos model ishlab chiqiladi.

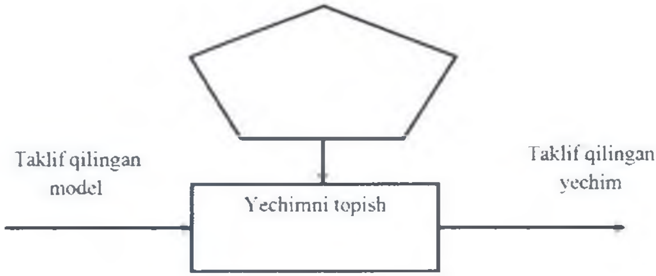


2-chizma

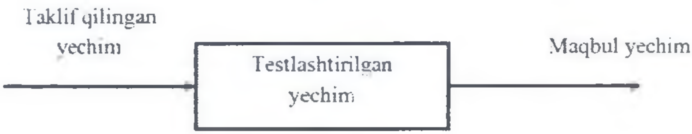
Modellar har xil bo'lishi mumkin fizik, anologik, matematik. Matematik modellar 3 guruhga bo'linadi, determinlovchi (aniqlovchi), staxostik va o'yinlar. Determinlovchi (aniqlovchi) modellar asosiy ko'rsatkichlarga bog'liq holda aniqlaydi. Masalan: optimallashtirish masalalarida ayrim miqdorlar bo'yicha (harajatni kamaytirish yoki daromadni yuksaltirish). Staxostik modellar aniq bo'lmagan yoki ehtimolli holatlarda ishlatilgan. O'z foydasi uchun nazariy o'yin modellaridan foydalaniladi.

3-bosqich yechimni aniqlashda kerakli boshlang'ich axborotlar izlanadi va tayyorlanib, aniq o'zgaruvchilar tanlanadi hamda og'zaki model asosida moslashadi.

4-bosqich — yechimni testlashtirish. Bunda yechimni testlashtirib, testdan yaqinroq yechim mos kelishi o'rganiladi.



3-chizma



4-chizma

5-bosqich – nazoratni tashkil qilish.

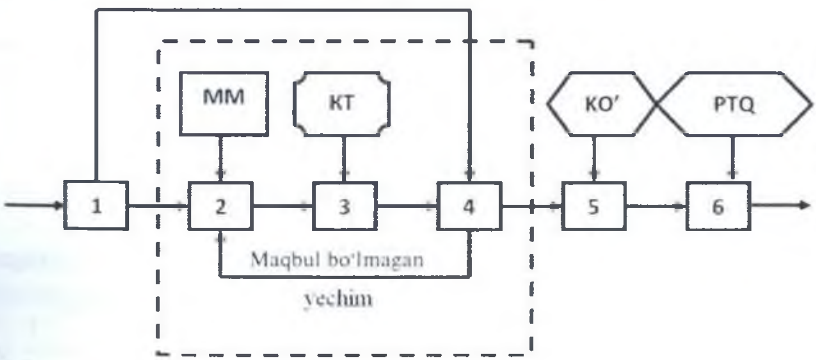
Agar aniqlangan yechim mos bo'lsa, uning nazoratini yo'lga qo'yishda to'g'ri modeldan foydalanish kerak, asosiy masaladagi bunday nazariy, chegaralar tartibini saqlashga mos modellardan foydalanish boshlang'ich axborotlar aniqligi va olinadigan yechimga bog'liq hisoblanadi.

5-chizma

6-bosqich – eng muhim va murakkab bo'lib, bunda inson asosiy rol o'ynagan holda yechimning tatbiqi bilan ish yuritadi.

6-chizma

Quyidagi sxemadagi nuqtali chiziqlar yechimni aniqlash jarayonlari qismlarini ifodalab, bu masalani yechishning matematik xususiyatlarini belgilashda asosiy rol o'ynaydi.



7-chizma

Bunda: MM — modellar majmuasi;
KT — ko'rsatkichlarni tayyorlash;
KO' — ko'rsatkichlarni o'zgartirish;
RTQ — reklamani tashkil qilish.

Stoxostik modellashtirish.

Stoxostik (ehtimolli) modellar ayrim hollarda ko'plab tatbiq qilinib, u yoki bu faktorlar uchun xarakterli hisoblanadi. Bunday holatlar inson faoliyatining hamma sohalarida qo'llaniladi.

Masalan: bir necha yildan keyingi ob-havo ma'lumoti, biror mahsulotga bo'lgan talablar, mamlakatdagi siyosiy holat va boshqalar. Shu sababli mantiqiy mulohazalarga asoslangan axborotlar bilan ishlashga to'g'ri keladi.

Ehtimol tushunchasidagi har xil fikrlar tasodifiy holat tushunchasi stoxostik metod va modellar yordamida o'rganiladi. Tasodifiy holat tushunish asosida ayrim kuzatishlar natijasiga asoslanadi. Kuzatishlar orqali natijaga erishishda kuzatuvchining xizmati muhim hisoblanib, kelajakdagi tasodifiy holatni soddagina holat deb ataymiz.

Misollar: 1. Sinov – tangani tanlash, kuzatilayotgan holat – gerb yoki son tomonining tushishi.

2. 12 yanvar kunining kelishi – sinov.

Kun davomida havoning ochiq kelishi – holat

3. Talabaning YaN topshirish sinovi – uni 86,0 ball olishi holat hisoblanadi.

Har qanday holat son bilan ifodalanib, u *[0,1]* kesmada joylashib, bu berilgan holatning ehtimoli deb ataladi va ingliz tilidagi *p* harfi bilan belgilanib, biror holatda ehtimol *0* ga, aniq ishonchli holatda *1* ga teng bo'ladi.

Misol: o'yindagi kubikni o'ynash holatida 1 va 6 ga bo'lgan sonlarni tushish holati mavjud bo'lib, ular {1;2;3;4;5;6} to'plamni tashkil etadi va har bir sonning paydo bo'lish ehtimol $p=\frac{1}{6}$ ga tengdir. Har bir to'plamda qism to'plam mavjud bo'lib, A={1;2;3;4;5;6 } to'plam bo'lsa, A_1={juft ochkolarni ifodalovchi} to'plam hisoblansa, A_2={3;4;5;6} ikkidan ortiq ochkolarni ifodalovchi qism to'plam bo'ladi.

Sinfiy ehtimol – bu *n* ham mavjud bo'lgan o'zgarishlar, *m A* holatdagi mavjud o'zgarishlar soni bo'lsa *A* ehtimol $p(A)=\frac{m}{n}$ formula bilan aniqlanib, bu *sinfiy ehtimol* deyiladi.

Bunda

$$(I)\quad \left.\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{1}{2} \\ P(A_2) &= \frac{2}{3} \end{aligned}\right\} \qquad P(A) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 3$$

Geometrik ehtimol – agar tekislikda F figura ichida f joylashgan figura bo‘lib, bir nuqta olib, ushbu figuralarga otish kerak, agar ushbu nuqta A holatda f ga tushsa, u holda A holat ehtimoli.

$\rho(A) = \dfrac{S_f}{S_F}$ (2) formula bilan aniqlanadi, bu yerda S_f va S_F lar figuralarning yuzalaridir.

O‘z navbatida geometrik ehtimollarni aniqlashda faqatgina figuralar yuzasi emas, balki ularning uzunligi hajmi ham hisobga olinadi.

Misol: to‘fon tufayli telefon simlarining 20- va 60-km lari ishdan chiqqan. Qanday ehtimolda 30- va 35-km larda telefon simlari ishdan chiqishi mumkin.

Yechish: Bu yerda $\ell_F = 60 - 20 = 40$

$$\ell_f = 35 - 30 = 5 \qquad P(A) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}.$$

Statistik ehtimol. Agarda A holat bir nechta kuzatuvlar natijasida paydo bo‘lmasin, uni yana qaytadan n marta takrorlagandan A holat paydo bo‘lib, bu son m ga teng bo‘lsa; m/n munosabat kuzatishlar asosida A holatning nisbiy paydo bo‘lish chastotasi deyiladi. Agarda n ning ko‘plab qiymatlarida nisbiy chastotalarni guruhlasak ular o‘zgarmas bo‘lib, uni A holatning *statistik ehtimoli* deb ataymiz.

$P(A) \approx \frac{m}{n}$ (3) bo‘lib, bu n ning katta qiymatlarida amalga oshiriladi.

Misol: agar tangani n ta holatda tashlab va m gerb holatda tushishini kuzatsak n ning katta qiymatida $\frac{m}{n} \Rightarrow 0.5$ ga yaqin bo‘ladi.

Noaniqlik ehtimoli. Ko‘pgina aniq holatlarda biror holat ehtimolini aniqlash murakkab bo‘lib, bundagi birinchi reja u yoki bu holatni muhimligini belgilashi kerak bo‘ladi. Shunday holatlarda ekspertlar so‘rovi asosidagi natija suyangan holatni ehtimol noaniq ehtimol deyiladi.

Misol: muz ustida harakat qiluvchi sportchilarni kuzatar ekanmiz ular 2 xil holda baholanadi, birinchisi artistlik mahorati bo‘lsa, ikkinchisi texnik mahorati bo‘lib, bunda 5 tadan ekspertlar (ya’ni sudyalar) tomonidan baholanib, ularning o‘rtacha bahosi uning haqiqiy harakati bahosi hisoblanadi.

Artistlik mahorati	5.9	5.7	5.4	5.3	5.4		
Texnik mahorati	9.1	9.6	8.5	8.4	8.3		

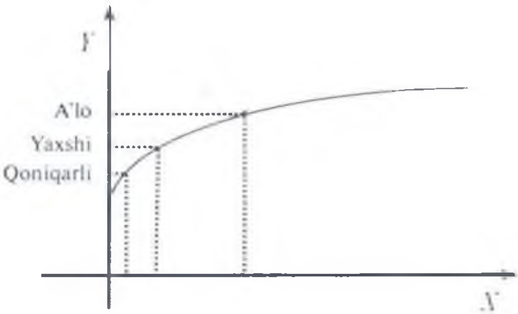
$$P(C) = \frac{5.5}{9.9} \approx 0.62$$

Dinamik modellar. Fizik modellar turiga birorta obyekt va tizimlarni kengaytirib yoki qisqartirib yozilishiga aytiladi.

Masalan: samalyotning modeli deganda uning 1:50 proporsiya sifatida qabul qilingan modul qaralib, unda samalyotning 50 marta kichik holdagi maketi hisobga olinadi.

Analogik modellar deb – izlanayotgan obyekt, haqiqiy obyekt sifatida qaraladi.

Misol: 1. Talabalarni YaN topshirishlariga mos holdagi holatni kuzatsak, unda sarflangan narsa bilan natija o‘zaro bog‘liq bo‘lib, bu analogik model hisoblanadi. Ya'ni, talaba YaN ga tayyorgarligi uchun sarflagan vaqti, uni YaN ni topshirishdagi natijasida ifodalanadi.



Misol: agar 1 ombordan 3 ta shaharga mahsulot yuborish kerak bo'lib, bunda transport harajatlari kam bo'lishi e'tiborga olingan. Agar yuborilgan fanerlarga qoqiladigan narsalar shaharlarni o'zida tayyorlansa u holda omborni optimal masofaga joylashtirish kerak bo'ladi.

Matematik modellar biror obyekt xarakteri va xossasiga bog'liq holda matematik ifoda va metodlar orqali yozilishiga aytiladi. Ayrim hollarda, formula tilida ifodalashda, murakkab qoidalarga duch kelinadi. Har qanday matematik modelni yaratishda formulalar ishtirok etib, ular bosqichlarga bo'linadi. Vaqt o'tishi bilan ko'rsatkichlar o'zgarib boradi.

Aholining o'sish dinamikasini hisoblash modeli. Ayrim hollarda matematik modellar yaratish oson amalga oshiriladi. Masalan: XVIII asr o'rtalarida Markaziy Yevropada cherkovlar mavjud bo'lib, ularga uning atrofidagi qishloq aholisi qatnaganlar. Cherkov ruhoniysining fikriga ko'ra sig'inuvchilar soni oshib borgan bo'lib, uning fikricha sig'inuvchilarning soni oshishi keyinchalik cherkovga yana qo'shimcha xona qilish yoki yangisini qurish kerakligini anglatib, qaysidir kelajakda cherkov qurish kerakligini aytadi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz, n yil oxirida cherkovga keluvchilar sonini X_n bilan belgilasak, keyingi $(n+1)$ yilda ular soni X_{k+1} bo'lib, u holda ular o'rtasidagi farq $\Delta X_n = X_{n+1} - X_n$ (1) bilan ifodalanadi.

Bunda ikkita holat – aholi yo'nalishi va aholining o'limi e'tiborga olinadi. Shu sababli cherkov ruhoniysi bu holatni quyidagicha ifodalaydi

$b_1 ... b_n$ – aholining tug'ilishi,

$d_1 ... d_n$ – aholining o'limi,

$x_1 ... x_n$ – cherkovga qatnashganlar soni bo'lsa, ular o'rtasida munosabat quyidagicha bo'ladi.

$$\frac{b_1}{x_1}; \frac{b_2}{x_2} .... \frac{b_n}{x_n}$$

$$\frac{d_1}{x_1}; \frac{d_2}{x_2} .... \frac{d_n}{x_n}.$$

O'z navbatida α va β o'zgarmaslarni kiritsak, n – yildagi tug'ilishlar soni αx_n. n – yildagi o'limlar soni βx_n bilan ifodalanib, ular o'rtasidagi munosabat $\alpha x_n - \beta x_n$ bo'lib, natijada

$$\Delta X_n = \alpha x_n - \beta x_n$$

$$x_{n+1} = x_n + \alpha x_n - \beta x_n = x_n(1 + \alpha - \beta)$$

(model yaratildi).

$$\gamma = 1 + \alpha - \beta$$

$$x_{n+1} = \gamma x_n$$

Agar $\gamma > 1(\delta = \alpha - \beta > 0 - tug'ilish\ ko'p)$

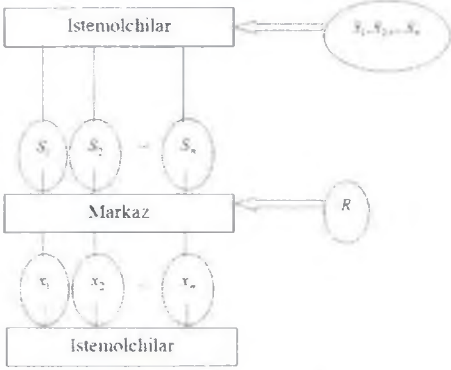
$\gamma = 1(\delta = \alpha - \beta = 0 - teng)$

$\gamma < 1(\delta = \alpha - \beta < 0 - o'lim\ ko'p\ \ hisoblanadi)$

Tashkiliy tizimlarni boshqarish.

Tashkiliy tizim – bu odamlar to'plami va texnikalar hisoblanib, ular o'zaro funksional bog'liq hisoblanadi. Misollarda oila, firma, ta'lim muassasalari, shahar va mamlakatlar ishtirok etadi.

Har qanday tizim elementlardan tashkil topadi. Bizga ma'lumki bunda 2 ta holat mavjuddir. Birinchi holatda tizim birorta aniq maqsadga yo'naltirilgan bo'lib, ikkinchi tomondan esa tizimda o'z foydasiga yo'naltirilib, bu o'yinlar nazariyasiga mos keladi va ikki o'lchamli modellar orqali ifodalanadi.



Masalan: n iste'molchi bo'lib, u S_n markaz talabiga ko'ra mahsulot yetkazish kerak bo'ladi, agar iste'molchi R xom-ashyo asosida mahsulot ishlab chiqarsa, qo'shimcha axborot asosida i iste'molchi tomonidan talab qilinadigan xom-ashyo $X_i(i=\overline{1,n})$ bilan belgilanadi.

$\sum_{i=1}^{n} S_i \le R$ bunda talab yuqori bo'lmasdan markazdagi masalani yechishda $S_1=X_1$, $S_2=X_2$,..... $S_4=X_4$ bo'lib, har bir iste'molchi o'z talabiga nisbatan mahsulot oladi, agarda

$\sum_{i=1}^{n} S_i > R$ bo'lsa bunda, berilgan talab asosida amalga oshiriladi.

To'g'ri tashkil qilish mexanizmi.

Iste'molchining ustunligi, dastlab $S_i(i=\overline{1,n})$ talab bo'lib, markaz har bir iste'molchi talabini o'rganib chiqadi va uni $A_i(i=\overline{1,n})$ bilan ifodalaydi va shu asosda to'g'ri tashkil qilish mexanizmi ishlab chiqilib u asosida mahsulotni taqsimoti amalga oshiriladi va quyidagi qoida paydo bo'ladi:

$$X_i = min\{S_i, \gamma, S_i\} = (i = \overline{1,n}) \qquad (1)$$

γ – hamma iste'molchilar uchun umumiy bo'lgan ko'rsatkich bo'lib, unda

$\sum_{i=1}^{n} X_i = R$ (2) shartda hamma mahsulot omborda qolmasdan

taqsimlanadi. (1) formulaga asosan $A_1 = A_2 = ... A_n = 1$ bo'lsa,

$$X_i = min\{S_i, \gamma, S_i\} = \gamma S_i (i = \overline{1,n})$$

$X_i = S_i$ bo'lish mumkin emas, chunki tanqislik holati mavjud bo'lmasligi shart.

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma S_i = R.$$

Bundan

$$\gamma = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} S_i}$$

Misol: 5 ta iste'molchi mahsulot uchun 5,8,12,7 va 8 holatda talabnoma bergan bo'lib, markazda esa taqsimlash uchun 32 miqdordagi mahsulot mavjud. Qanday qilib, to'g'ri tashkil qilish mexanizmi orqali qanday taqsimlash amalga oshiriladi.

Demak, berilganlar:

$$S_1 = 5, S_2 = 8, S_3 = 12, S_4 = 7, S_5 = 8, R = 32$$

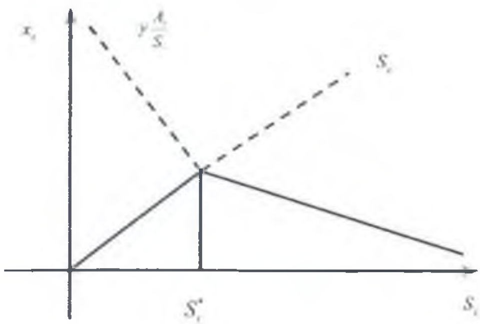
$$\sum_{i=1}^{5} S_i = 5 + 8 + 12 + 7 + 8 = 40 > 32 = R$$

Demak, bu yerda markazda tanqislik bo'lib $\gamma = \frac{32}{40} = 0,8$ bo'sh, talabnomalarni ko'paytirsak

$$X_1 = 0,85 = 4$$
$$X_2 = 0,88 = 6,4$$
$$X_3 = 0,812 = 9,6$$
$$X_4 = 0,87 = 5,6$$
$$\underline{X_5 = 0,88 = 6,4}$$
$$32$$

Bu yerda o'z navbatida birinchidan har bir iste'molchi talabidan kam mahsulot oladi. Ikkinchidan iste'molchi tanqislik holatini o'rgangan holda talabnoma bilan chiqishi kerak.

Teskari tashkil qilish mexanizmi.



8-chizma

Iste'molchi mahsulotga talabnomani kam bergan holda undan foydalanish samaradorligini oshirishga harakat qiladi. U holda mahsulot taqsimoti quyidagi qoida asosida amalga oshiriladi.

$$X_i = \min\left\{S_i, \gamma \frac{A_i}{S_i}\right\} (i = 1, n) \qquad (3)$$

bunda γ orqali belgilanib, quyidagi $\sum_{i=1}^{n} X_i = R$ shart amalga oshiriladi, (3) tenglikka asosan, S_i yuqori talabnomaga ko'ra kam mahsulot olish, ya'ni iste'molchi o'zi talab qilganiga nisbatan markazning X_i mahsulotini olish kerak bo'ladi

i iste'molchining S_i talabnoma asosidagi mahsulotga asoslanib, X_i dan maksimal mahsulot olishi shart. 8-chizmada ta x mahsulot S_i^* nuqtada bo'lib, unda tenglama

$$S_i^* = \gamma \frac{A_i}{S_i^*} \qquad S_i^{*2} = \gamma A_i \Rightarrow S_i^* = \sqrt{\gamma A_i}$$

$$S_i^* = \sqrt{\gamma A_1}, S_i^* = \sqrt{\gamma A_2}, ..., S_n^* = \sqrt{\gamma A_n} \qquad x_i = S_1^*, x_2 = S_2^*, ..., x_n = S_n^*$$

Bundan

$$R = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} S_i^* = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\gamma A_i} = \sqrt{\gamma} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i}$$

$$\sqrt{\gamma} = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i}}$$

Ochiq boshqarish mexanizmi.

Bu mexanizmda mahsulot taqsimoti bir necha bosqichda amalga oshiriladi, jumladan birinchi bochqich iste'molchilari R/n teng taqsimlansa, ayrimlari ko'proq bo'ladi, agar kam bo'lsa R_I/n_I va hokazo.

Misol: 8 ta iste'molchi 12,3,6,1,5,7,10,2 kabi taqsimot qilinib, markazda R=40 miqdorda mahsulot bo'lsin, taqsimotni ochiq boshqaruv mexanizmi asosida amalga oshiring:

$$\frac{R/n = 5}{S_1 = 12,} \; S_2 = 3,\ S_3 = 6,\ S_4 = 1,\ S_5 = 5,\ S_6 = 7,\ S_7 = 10,\ S_8 = 2$$

5 5 5 5 5 5 5 5

Bunda, 2,4,5 va 8 iste'molchilarni qanoatlantiradi:

$$x_2 = 3, \quad x_4 = 1, x_5 = 5, x_8 = 2$$

$$R = 40 - 3 - 1 - 5 - 2 = 29 \Rightarrow n_1 = 4$$

$$\frac{R_1}{n_1} = \frac{29}{4} = 7\frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{lllll} S_1 = 12, & x_3 = 6, & x_6 = 7, & x_7 = 10 & R = 29 \\ 7\frac{1}{4} & 7\frac{1}{4} & 7\frac{1}{4} & 7\frac{1}{4} & \end{array}$$

$x_3=6$, $x_6=7$ ni qanoatlantiradi.

$$x_3 = 6\ x_6 = 7$$

$$R_2 = 29 - 6 - 7 = 16,\ n_2 = 2$$

$$\frac{R_2}{n_2} = 8$$

$$\begin{array}{lll} S_1 = 12, & S_7 = 10 & R = 16 \\ 8 & 8 & \end{array}$$

Demak, $x_1 = 8$

$x_7 = 8$

Umuman olganda $-x_1 = 8$

$x_2 = 3$

$x_3 = 6$

$x_4 = 1$

$x_5 = 5$

$x_6 = 7$

$x_7 = 8$

$x_8 = 2$

40

Ochiq boshqarish va ekspertlar so'rovi.

n ta ekspertdan har biri [d, D] kesmadan, *S* sonni tanlab, ekspert baholashdan keyingi yechim *x* bo'lsin. Berilgan: S_i larga nisbatan x sonni aniqlash kerak bo'lib, ekspertlarning fikri oxirgi natijaga mos kelib,

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i$$

bilan hisoblanadi

Har bir ekspertning fikri r_i bo'lsa, oxirgi baholash r_i fikrga to'g'ri kelib, $S_i \neq r_i$ bo'lish kerak

Misol: 3 ta ekspertning fikri $r_1=10$, $r_2=10$, $r_3=40$, bo'lib, agar har birining fikri tasdiqlansa u holda

$$x = \frac{10+10+40}{3} = 20$$

Agarda 3 ta ekspert $S_3=100$ baho qo'ysa u holda

$$x = \frac{10+10+140}{3} = 40$$

r_3 ga mos keladi.

Dispersiyalarni tekshirish.

Bu farazni tekshirish uchun Kochren alomati qo'llaniladi:

$$G_x = \frac{S^2_{U\max}\{Y\}}{\sum_{U=1}^{N} S^2_U\{Y\}}.$$

So'ng 4-ilovadan $G_x \left|1-\alpha; N; f\left\{S^2_U\right\} = m-1\right|$ jadval qiymati topilib, G_X bilan solishtiriladi. Agar $G_X < G_J$ shart bajarilsa dispersiyalarning bir jinsliligi haqidagi faraz to'ri deb topiladi.

O'rtacha dispersiyani aniqlash.

O'rtacha dispersiya $S^2_{(t)}\{Y\} = \frac{1}{N}\sum_{U=1}^{N} S^2_U\{Y\}$ ko'rinishdagi formula bo'yicha aniqlanadi. Bu dispersiyaning ozodlik darajasi soni $f\left\{S^2_{(t)}\right\} = N(m-1)$ ga teng bo'ladi.

Regression modelning ko'rinishini aniqlash

Regression modelning ko'rinishini aniqlash uchun eksperiment natijalari bo'yicha ma'lumotlarning bo'lingan va bo'linmagan ayirmalari hisoblanadi. Agar eksperiment o'tkazish natijasida $(X_1,\overline{Y_1}),...,(X_U,\overline{Y_U}),...,(X_N,\overline{Y_N})$ juftlik qiymatlar olingan bo'lsa, birinchi tartibli bo'lingan ayirmalar quyidagicha hisoblanadi.

$$\Delta^{I}_{B1}=\frac{\overline{Y_2}-\overline{Y_1}}{X_2-X_1},...,\Delta^{I}_{BU}=\frac{\overline{Y_{U+1}}-\overline{Y_U}}{X_{U+1}-X_U},...,\Delta^{I}_{B(N-1)}=\frac{\overline{Y_N}-\overline{Y_{N-1}}}{X_N-X_{N-1}}.$$

Ikkinchi tartibli bo'lingan ayirmalar:

$$\Delta^{II}_{B1}=\frac{\Delta^{I}_{B2}-\Delta^{I}_{B1}}{x_3-x_1},...,\Delta^{II}_{BN-2}=\frac{\Delta^{II}_{RN-1}-\Delta^{II}_{RN-2}}{x_N-x_{N-2}}.$$

Birinchi tartibli bo'linmagan ayirmalar:

$$\Delta^{I}_{BM1}=\Delta^{I}_{B2}-\Delta^{I}_{B1},...,\Delta^{II}_{BM(N-2)}=\Delta^{I}_{BM(N-1)}-\Delta^{I}_{BM(N-2)}.$$

Bo'linmagan ayirmalardan X faktor o'zgarmas qadam bilan o'zgarganda foydalaniladi.

Agar $\left|\Delta^{I}_{Bi}-\Delta^{I}_{Bi-1}\right|\le 2S_{(1)}\{Y\}$ yoki $\left|\Delta^{I}_{BMi}-\Delta^{I}_{BMi-1}\right|\le 2S_{(1)}\{Y\}$, $i=2,...,N-2$ shartlar bajarilsa matematik modelni

$$Y_X=a_0+a_1X \quad yoki \quad Y_X=d_0+d_1\left(X-\overline{X}\right).$$

Chiziqli funksiyalar ko'rinishida qidiriladi, bunda

$$\overline{X}=\frac{1}{N}\sum_{U=1}^{N}X_U$$

Agar yuqoridagi shartlar bajarilmasa

$$\left|\Delta^{I}_{Bi-1}-\Delta^{I}_{Bi}\right|\le 2S_{(1)}\{Y\}, \quad yoki \quad \left|\Delta^{I}_{BMi-1}-\Delta^{II}_{BMi}\right|\le 2S_{(1)}\{Y\}, i=2,...,N-3, (*)$$

shartlarning bajarilishi tekshiriladi.

Agar bu shartlar bajarilsa, model

$$Y_X=a_0+a_1X+a_2X^2$$

Ikkinchi darajali polinom ko'rinishida qidiriladi. Agar (*) shartlar bajarilmasa 3-tartibli bo'lingan yoki bo'linmagan ayirmalar hisoblanib, yana yuqoridagi tengsizliklarning bajarilishi tekshiriladi, va hokazo.

Regressiya koeffitsientini aniqlash.

Eng kichik kvadratlar usuli bo'yicha $Y_X=a_0+a_1X$ chiziqli modelning noma'lum a_0 va a_1 koeffitsientlari quyidagi tenglamalar tizimidan aniqlanadi:

$$\begin{cases} a_0N + a_1\sum\limits_{U=1}^{N} X_U = \sum\limits_{U=1}^{N} \overline{Y}_U \\ a_0\sum\limits_{U=1}^{N} X_U + a_1\sum\limits_{U=1}^{N} X_U^2 = \sum\limits_{U=1}^{N} X_U\overline{Y}_U \end{cases}$$

Bu tizimni yechish uchun quyidagi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} N & \sum\limits_{U=1}^{N} X_U \\ \sum\limits_{U=1}^{N} X_U & \sum\limits_{U=1}^{N} X_U^2 \end{vmatrix}, \Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{U=1}^{N} \overline{Y}_U & \sum\limits_{U=1}^{N} X_U \\ \sum\limits_{U=1}^{N} X_U\overline{Y}_U & \sum\limits_{U=1}^{N} \end{vmatrix}, \Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} N & \sum\limits_{U=1}^{N} \overline{Y}_U \\ \sum\limits_{U=1}^{N} X_U & \sum\limits_{U=1}^{N} X_U\overline{Y}_U \end{vmatrix}.$$

$$a_0 = \frac{\Delta a_0}{\Delta},\ a_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta},\ Y_X = d_0 + d_1\left(X - \overline{X}\right)$$

bo'lganda noma'lum d_0 va d_1 ga nisbatan quyidagi tenglamalar tizimini tuzamiz:

$$\begin{cases} d_0N + d_1\sum\limits_{U=1}^{N}\left(X - \overline{X}\right) = \sum\limits_{U=1}^{N}\overline{Y}_U \\ d_0\sum\limits_{U=1}^{N}\left(X - \overline{X}\right) + d_1\sum\limits_{U=1}^{N}\left(X - \overline{X}\right) = \sum\limits_{U=1}^{N}\left(X_U - \overline{X}\right)\overline{Y}_U, \end{cases}$$

bunda

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{U=1}^{N} X_U, \sum_{U=1}^{N}\left(X_U - \overline{X}\right) = 0.$$

Tizimni yechib,

$$d_0=\frac{1}{N}\sum_{U=1}^{N}\overline{Y}_U,\ d_1=\frac{\sum_{U=1}^{N}\left(X_U-\overline{X}\right)\overline{Y}_U}{\sum_{U=1}^{N}\left(X_U-\overline{X}\right)^2}$$

larni topamiz.

$Y_X=a_0+a_1X+a_2X^2$ bo‘lganda a_0, a_1, a_2 noma’lum koeffitsientlar

$$\begin{cases} a_0N+a_1\sum_{U=1}^{N}X_U+a_2\sum_{U=1}^{N}X_U^2=\sum_{U=1}^{N}\overline{Y}_U \\ a_0\sum_{U=1}^{N}X_U+a_2\sum_{U=1}^{N}X_U^2+a_2\sum_{U=1}^{N}X_U^3=\sum_{U=1}^{N}\overline{X}_U\overline{Y}_U \\ a_0\sum_{U=1}^{N}X_U^2+a_1\sum_{U=1}^{N}X_U^3+a_2\sum_{U=1}^{N}X_U^4=\sum_{U=1}^{N}X_U^2\overline{Y}_U \end{cases}$$

tizimdan topiladi.

Bunda quyidagi asosiy va yordamchi determinantlar hisoblanadi:

$$\Delta=\begin{vmatrix} N & \sum_{U=1}^{N}X_U & \sum_{U=1}^{N}X_U^2 \\ \sum_{U=1}^{N}X_U & \sum_{U=1}^{N}X_U^2 & \sum_{U=1}^{N}X_U^3 \\ \sum_{U=1}^{N}X_U^2 & \sum_{U=1}^{N}X_U^3 & \sum_{U=1}^{N}X_U^4 \end{vmatrix},\ \Delta_{a_0}=\begin{vmatrix} \sum_{U=1}^{N}\overline{Y}_U & \sum_{U=1}^{N}X_U & \sum_{U=1}^{N}X_U^2 \\ \sum_{U=1}^{N}X_U\overline{Y}_U & \sum_{U=1}^{N}X_U^2 & \sum_{U=1}^{N}X_U^3 \\ \sum_{U=1}^{N}X_U^2\overline{Y}_U & \sum_{U=1}^{N}X_U^3 & \sum_{U=1}^{N}X_U^4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{a_1}=\begin{vmatrix} N & \sum_{U=1}^{N}\overline{Y}_U & \sum_{U=1}^{N}X_U^2 \\ \sum_{U=1}^{N}X_U & \sum_{U=1}^{N}X_U^2\overline{Y}_U & \sum_{U=1}^{N}X_U^3 \\ \sum_{U=1}^{N}X_U^2 & \sum_{U=1}^{N}X_U^2\overline{Y}_U & \sum_{U=1}^{N}X_U^4 \end{vmatrix},\ \Delta_{a_2}=\begin{vmatrix} N & \sum_{U=1}^{N}X_U & \sum_{U=1}^{N}\overline{Y}_U \\ \sum_{U=1}^{N}X_U & \sum_{U=1}^{N}X_U^3 & \sum_{U=1}^{N}X_U\overline{Y}_U \\ \sum_{U=1}^{N}X_U^2 & \sum_{U=1}^{N}X_U^3 & \sum_{U=1}^{N}X_U^2\overline{Y}_U \end{vmatrix}$$

$$a_0=\frac{\Delta_{a_0}}{\Delta},\ a_1=\frac{\Delta_{a_1}}{\Delta},\ a_2=\frac{\Delta_{a_2}}{\Delta}.$$

Agar $\sum_{U=1}^{N} X_U = 0$ shart bajarilsa, a_0, a_1, a_2 koeffitsientlarni hisoblashda X ning kodlangan qiymatlaridan foydalanish mumkin. Bunda faktor asosiy sathning natural qiymati $X_0 = \frac{1}{2}(X_{\min} + X_{\max})$ bo'lib, faktorning o'zgarish intervali $I = \frac{1}{N-1}(X_{\max} - X_{\min})$ bo'ladi. Noma'lum modelning kodlangan qiymati $Y=b_0+b_1x+b_2x^2$ ko'rinishda bo'ladi, bunda

$$b_0 = \frac{1}{B}\sum_{U=1}^{N} X_U^4 \sum_{U=1}^{N} \overline{Y}_U - \frac{1}{B}\sum_{U=1}^{N} X_U^2 \sum_{U=1}^{N} X_U^2 \overline{Y}_U;$$

$$b_1 = \frac{\sum_{U=1}^{N} X_U \overline{Y}_U}{\sum_{U=1}^{N} X_U^2};$$

$$b_2 = \frac{N}{B}\sum_{U=1}^{N} X_U^4 - \left(\sum_{U=1}^{N} X_U^4\right)^2; \quad X_U = \frac{1}{I}(X_U - X_0),\ U = 1,2,...,N;$$

a_i – koeffitsientlar quyidagicha aniqlanadi:

$$a_0 = b_0 - \frac{b_1}{I}X_0 + \frac{b_2}{I^2}X_0^2; \quad a_1 = \frac{b_1}{I} - \frac{2b_2}{I^2}X_0; \quad a_2 = \frac{b_2}{I^2}.$$

Regressiya koeffitsienti. Regressiya koeffitsientining ahamiyatliligini aniqlash

Regressiya koeffitsientlarining ahamiyatliligini aniqlash uchun Styudent alomatidan foydalaniladi:

$$t_r\{a_i\} = \frac{|a_i|}{S\{a_i\}}, (i = 1,2,3),$$

bunda $S\{a_i\}$ a_i – regressiya koeffitsientining o'rtacha kvadratik og'ishi. $Y=a_0+a_1X$ holat uchun $S^2\{a_0\}$ va $S^2\{a_1\}$ quyidagi formulalar bo'yicha hisoblanadi:

$$S^2\{a_0\} = \frac{S^2\{Y\}}{mN^2};$$

$$S^2\{a_1\} = \frac{S^2\{Y\}}{m\sum_{U=1}^{N}\left(X_U - \overline{X}\right)^2};$$

$$S^2\{Y\} = \frac{(m-1)NS_{(1)}^2\{Y\} + (N-2)S_{(2)}^2\{\ \}}{mN-2};$$

$$f\left\{S^2\right\} = mN-2; \qquad S_{(2)}^2\{Y\} = \frac{m\sum_{U=1}^{N}\left(\overline{Y}_U - \overline{Y}_{XU}\right)^2}{N-N_K}.$$

Chiziqli hol uchun $N_K=2$, kvadratik hol uchun $N_K=3$ bo'ladi. Styudent alomatining $t_J[1-\alpha; f=mN-2]$ jadval qiymati 5-ilovadan qaraladi. Agar $t_X>t_J$ shart bajarilsa, chiziqli modelning qaralayotgan koeffitsienti ahamiyatli bo'ladi.

$Y=a_0+a_1x+a_2x^2$ holi uchun faktorlarning kodlangan qiymatlaridan foydalaniladi.

Quyidagilar hisoblanadi:

$$S^2(a_0) = \frac{1}{nNB}\sum_{U=1}^{N} S^2\{Y\}\sum_{U=1}^{N} X_U^4$$

$$S^2(a_1) = \frac{\sum_{U=1}^{N} S_U^2\{Y\}}{mN\sum_{U=1}^{N} X_U^2};$$

$$S^2(a_2) = \sum_{U=1}^{N} S_U^2\{Y\}.$$

so'ng Styudent alomati hisoblanadi:

$$t_x\{a_2\} = \frac{|a_i|}{S\{a_i\}}.$$

5-ilova bo'yicha $t_J[1-\alpha; f=N(m-1)]$ qaraladi. Agar $t_X<t_J$ bo‘lsa, u holda qaralayotgan koeffitsient ahamiyatsiz bo‘ladi.

Regression model grafigini qurish.

Modelning adekvatligi Fisher alomati yordamida tekshiriladi:

$$F_x = \frac{S_U^2\{Y\}}{S_{(1)}^2\{Y\}} > 1 \quad yoki \quad F_x = \frac{S_{(1)}^2\{Y\}}{S_{(2)}^2\{Y\}}$$

Fisher alomatining jadval qiymati $J\left[R_d = 0{,}95,\ f\{S^2_{(1)}\}, f\{S^2_{(2)}\}\right]$ 6-ilovadan qaraladi. Agar $t_X<t_J$ bo‘lsa model adekvat deb qabul qilinadi.

1-misol. Pnevmomexanik usulda yig‘ish mashinasida lentaning chiziqli X va tishli diskretlovchi o‘q soqoli qarshiligi Y orasidagi bog‘lanish o‘rnatilsin.

1-jadvalda XU va YUVning tajribalar o‘tkazish natijasidagi qiymatlari keltirilgan, bunda N=5 va m=5.

1-jadval

U	U	YUV					$\overline{Y}_U$	$S_U^2\{Y\}$	V_{XUmax}	V_{XUmin}	W_{XU}
		V									
		1	2	3	4	5					
1	2	25,2	14,8	13,0	14,6	14,0	14,32	0,732	1,03	1,545	3,74
2	4	20,8	21,6	22,8	21,4	22,0	21,72	0,555	1,60	1,36	3,94
3	6	28,9	30,0	31,2	29,2	30,8	30,00	1,040	1,29	1,29	3,77
4	8	36,8	37.8	39,0	37,4	38,2	37,84	0,688	1,54	1,38	3,98
5	10	47,2	46,6	45,0	46,8	46,0	46,32	0,732	1,13	0,85	3,74

U=1 bo‘lgan hol uchun bu operasiyalar quyidagicha bajariladi:

$$\overline{Y}_1 = \frac{1}{5}\sum_{V=1}^{5} Y_{IV} = \frac{71{,}6}{5} = 14{,}32;$$

$$S_1^2\{Y\} = \frac{1}{5-1}\left[(15{,}2-14{,}32)^2 + \ldots + (14-14{,}32)^2\right] = 0{,}732;$$

$$V_{Y/max} = \frac{Y_{max} - \overline{Y}}{S_1\{Y\}} = \frac{15{,}2-14{,}32}{0{,}85}\sqrt{\frac{5}{5-1}} = 1{,}03;$$

$$V_{XI\min} = \frac{\overline{Y} - Y_{\max}}{S_1\{Y\}} = \frac{14,32-13}{85}\sqrt{\frac{5}{5-1}} = 1,545;$$

So'ngra 1-ilova bo'yicha $V_J|R_d=0,95;m=5|=1,869$

$V_{X1\max}<V_J$, $V_{X\min}<V_J$ bo'lganligi tufayli $Y_{1V\max}=15,2$ va $Y_{1V\min}=13$ qiymatlar keskin farq qilmaydi deb qaraladi va ular ma'lumotlar jadvalidan chiqarib tashlanmaydi.

Undan so'ng $W_{XI} = \frac{Q_1^2}{S_1^2\{Y\}}$ ni hisoblaymiz, bunda

$$Q_1 = q_5(Y_{15} - Y_{11}) - q_4(Y_{14} - Y_{12}),$$

$$Y_{15} = 15,2 > Y_{14} = 14,8 > Y_{13} = 14,6 > Y_{12} = 14 > Y_{11} = 13.$$

q_5 va q_4 ning qiymatlari 2-ilovadan qaraladi.

$$Q_I=0,6646(15,2-13)+0,2413(14,8-14)=1,655;$$

$$W_{X1} = \frac{1,655^2}{0,732^2} = 3,74.$$

3-ilovadan $W_J|R_d=0,95;\ m=5|=0,762$ ni topamiz $W_{X1}>W_J$ bo'lgani uchun Y_{1v} qiymatlarini normal qonunga bo'ysunishi haqidagi faraz to'g'ri deb qabul qilinadi.

U=2, 3, 4, 5 hollar uchun birinchi va ikkinchi operasiyalar yuqoridagilarga o'xshash bajariladi.

Uchinchi operasiyada G_X ni hisoblaymiz:

$$G_x = \frac{S_U^2 \max\{Y\}}{\sum_{U=1}^{S} S_U^2\{Y\}} = \frac{1,04}{3,744} = 0,279.$$

4-ilovadan $G_J|Rd=0,95;\ N=5;\ f=5-1=4|=0,544$ ni topamiz. $G_x<G_j$ bo'lgani uchun dispersiyalarning bir jinsliligi haqidagi faraz qabul qilinadi.

To'rtinchi operasiyada o'rtacha dispersiyani hisoblaymiz:

$$S_{(1)} = \frac{1}{5}\sum_{U=1}^{5} S_U^2\{Y\} = \frac{3,744}{5} = 0,749.$$

O'rtacha dispersiyaning erkinlik darajasi $f\{S_{(1)}^2\} = 5(5-1) = 20.$

Beshinchi operasiyada 1- va 2-tartibli bo'linmagan ayirmalarni hisoblaymiz:

$$\Delta^{I}_{BM1} = |21,72 - 14,32| = 7,4; \quad \Delta^{I}_{BM2} = |30 - 21,78| = 8,28;$$

$$\Delta^{I}_{BM3} = |37,84 - 30| = 7,84; \quad \Delta^{I}_{BM4} = |46,32 - 37,84| = 8,48;$$

$$\Delta^{I}_{BM1} = |8,28 - 7,4| = 0,88; \quad \Delta^{II}_{BM2} = 0,44; \quad \Delta^{III}_{BM3} = 0,64;$$

$$S_{(1)}\{Y\} = 0,86;$$

Shuning uchun modelning ko'rinishini $Y=a_0+a_1x$, yoki $Y=d_0+d_1(X-\overline{X})$ chiziqli model ko'rinishida tanlaymiz, bunda

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{U=1}^{N} X_U = \frac{1}{5}\cdot 30 = 6$$

Oltinchi operasiyada $Y=d_0+d_1(X-6)$ hol uchun d_0 va d_1 noma'lum koeffisiyentlarni aniqlaymiz:

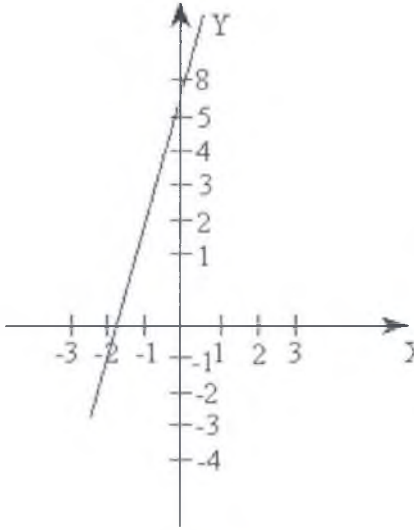
$$d_0 = \frac{1}{S}\sum_{U=1}^{5} \overline{Y}_U = \frac{1}{5}(14,32 + 21,74 + 30,00 + 37,84 + 46,32) \approx 30;$$

$$d_1 = \frac{\sum_{U=1}^{5}(X_U - 6)\overline{Y}_U}{\sum_{U=1}^{5}(X_U - 6)^2} = \frac{160,24}{40} \approx 4.$$

Demak, izlangan model quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

Y=30+4(X−6) *yoki* *Y=6+4X.*

Bu funksiyaning grafigi 9-chizmada ko'rsatilgan.



9-chizma

Model adekvatligini aniqlash.

Yettinchi operasiya Model koeffitsientlarining ahamiyatliligini aniqlash uchun Styudent alomatini hisoblaymiz:

$$t_x\{b_i\}=\frac{|b_i|}{S\{b_i\}}$$

$$S^2\{b_i\}=\frac{1}{mN^2}\sum_{U=1}^{8}S_U^2\{Y\}=\frac{3\cdot 875}{24}=0,16;$$

$$S\{b_i\}=0,4;$$

$$t_x\{b_1\}=\frac{2}{0,4}=5;$$

$$t_x\{b_2\}=\frac{1,25}{0,4}=3,1;$$

$$t_x\{b_3\}=\frac{2}{0,4}=5;$$

$$t_x\{b_{12}\}=\frac{0,25}{0,4}=0,62;$$

$$t_x\{b_{13}\}=\frac{0}{0,4}=0;$$

$$t_x\{b_{23}\}=\frac{1,25}{0,4}=3,1;$$

5-ilovadan Styudent alomatining jadval qiymatini topamiz:

$$t_J/R_D=0,95; \qquad f=8(3-1)=16]=2,12,.$$

t_X va T_J larni solishtirib, b_1, b_2, b_3, b_{23} koeffitsientlarining ahamiyatli ekanligini topamiz. Modelning oxirgi ko'rinishi

$$Y=15,5+2x_1+1,25x_2+2x_3-1,25x_2x_3$$

bo'ladi.

Sakkizinchi operatsiya. Modelning adekvatliligini tekshirish uchun Fisher alomatini hisoblaymiz:

$$F_x=\frac{S^2_{(1)}\{Y\}}{S^2_{(2)}\{Y\}}$$

yoki

$$F_x=\frac{S^2_{(2)}\{Y\}}{S^2_{(1)}\{Y\}}$$

Bunda

$$S^2_{(2)}\{Y\}=\frac{3\sum_{U=1}^{8}\left(\overline{Y}_U-Y_{XU}\right)^2}{8-3}=1$$

$S^2_{(2)}\{Y\}$ ni hisoblash yo'li 8-jadvalda keltirilgan

2-jadval

U	Y_{XU}	$\overline{Y}_U$	$\overline{Y}_U - Y_{XU}$	$(\overline{Y}_U - Y_{XU})^2$
1	9	9	0	0
2	13	13	0	0
3	14	14	0	0
4	18	18	0	0
5	15.5	15	0.5	0.25
6	19.5	20	0.5	0.25
7	15.5	16	0.5	0.25
8	19.5	19	0.5	0.25
			$S^2_{(2)}\{Y\} = 1,00$	

Shunday qilib,

$$F_x = \frac{S^2_{(1)}\{Y\}}{S^2_{(2)}\{Y\}} = 3,875$$

6-ilovadan

$$Fj\left[P_d = 0,95;\ f\left\{S^2_{(1)}\right\} = 16;\ f\left\{S^2_{(2)}\right\} = 3\right] = 8,69$$

ni topamiz. $F_X < F_J$ bo'lgani uchun qurilgan modellar adekvat deb qabul qilinadi.

Smirnov-Trabs alomatining jadval qiymatlari

Tajribalar	P_d		
m	0.99	0.95	0.90
3	1.414	1.412	1.406
4	1.723	1.689	1.791
5	1.955	1.869	1.894
6	2.130	1.996	1.974
7	2.265	2.093	2.041
8	2.374	2.172	2.097
9	2.464	2.237	2.146
10	2.540	2.294	2.190
11	2.606	2.343	2.229
12	2.663	2.387	2.264
13	2.714	2.426	2.297
14	2.759	2.461	2.326
15	2.800	2.493	2.354
16	2.837	2.523	2.380
17	2.871	2.551	2.404
18	2.903	2.577	2.426
19	2.932	2.600	2.447
20	2.959	2.623	2.267
21	2.984	2.644	2.486
22	3.008	3.664	3.504
23	3.030	3.683	3.502
24	3.051	3.701	3.537
25	3.071	3.717	3.537

m=3, 4, ..., 18 dollar uchun tajriba natijalarning normal qonunga bo'ysunishini tekshirishda q_{m-i+i} ning qiymatlari

i	m							
	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.7071	0.6872	0.6646	0.6431	0.6233	0.6052	0.5888	0.5739
2	–	0.1677	0.2413	0.2806	0.3031	0.3164	0.3244	0.3291
3	–	–	–	0.0875	0.1401	0.1743	0.1976	0.2141

4	–	–	–	–	–	0.0561	0.0947	0.1224
5	–	–	–	–	–	–	–	0.0399

i	m							
	11	12	13	14	15	16	17	18
1	0.6501	0.5475	0.5359	0.5251	0.5150	0.5056	0.4968	0.4886
2	0.3315	0.3325	0.3325	0.3318	0.3306	0.3290	0.3273	0.3253
3	0.2260	0.2347	0.2412	0.2460	0.2495	0.2521	0.2540	0.2553
4	0.1429	0.1586	0.1707	0.1802	0.1878	0.1939	0.1988	0.2027
5	0.0695	0.0922	0.1099	0.1240	0.1353	0.1447	0.1524	0.1587
6	–	0.0303	0.0539	0.0727	0.0880	0.1005	0.1109	0.1197
7	–	–	–	0.0240	0.0433	0.0593	0.0725	0.0837
8	–	–	–	–	–	0.0196	0.0359	0.0496
9	–	–	–	–	–	–	–	0.0163
10	–	–	–	–	–	–	–	–

ILOVALAR

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rightarrow\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ **Laplas funksiyasining qiymatlar jadvali**

X	Φ(X)	X	Φ(X)	X	Φ(X)	X	Φ(X)	X	Φ(X)	X	Φ(X)	X	Φ(X)
0,00	0,000	0,46	0,1772	0,92	0,3212	1,38	0,4168	1,84	0,4671	2,30	0,4893	2,76	0,4971
0,02	0,0080	0,48	0,1844	0,94	0,3264	1,40	0,4192	1,86	0,4686	2,32	0,4898	2,78	0,4973
0,04	0,0160	0,50	0,1915	0,96	0,3315	1,42	0,4222	1,88	0,4699	2,34	0,4904	2,80	0,4974
0,06	0,0239	0,52	0,1985	0,98	0,3365	1,44	0,4251	1,90	0,4713	2,36	0,4909	2,82	0,4976
0,08	0,0319	0,54	0,2054	1,00	0,3413	1,46	0,4279	1,92	0,4726	2,38	0,4913	2,84	0,4977
0,10	0,0398	0,56	0,2143	1,02	0,3461	1,48	0,4306	1,94	0,4738	2,40	0,4919	2,86	0,4979
0,12	0,0478	0,58	0,2190	1,04	0,3508	1,50	0,4332	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,88	0,4980
0,14	0,0557	0,60	0,2257	1,06	0,3554	1,52	0,4353	1,98	0,4761	2,44	0,4927	2,90	0,4981
0,16	0,0636	0,62	0,2324	1,08	0,3599	1,54	0,4382	2,00	0,4772	2,46	0,4931	2,92	0,4982
0,18	0,0714	0,64	0,2389	1,10	0,3643	1,56	0,4406	2,02	0,4783	2,48	0,4934	2,94	0,4984
0,20	0,0793	0,66	0,2454	1,12	0,3686	1,58	0,4409	2,04	0,4793	2,50	0,4938	2,96	0,4985
0,22	0,0871	0,68	0,2517	1,14	0,3729	1,60	0,4452	2,06	0,4803	2,52	0,4941	2,98	0,4986
0,24	0,0948	0,70	0,2580	1,16	0,3770	1,62	0,4474	2,08	0,4812	2,54	0,4945	3,00	0,49865
0,26	0,1026	0,72	0,2642	1,18	0,3810	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,56	0,4948	3,20	0,49931
0,28	0,1103	0,74	0,2703	1,20	0,3840	1,66	0,4515	2,12	0,4830	2,58	0,4951	3,40	0,49968
0,30	0,1179	0,76	0,2764	1,22	0,3883	1,68	0,4535	2,14	0,4838	2,60	0,4953	3,60	0,499841
0,32	0,1255	0,78	0,2823	1,24	0,3925	1,70	0,4554	2,16	0,4846	2,62	0,4956	3,80	0,499928

0,34	0,1331	0,80	0,2881	1,26	0,3962	1,72	0,4573	2,18	0,4854	2,64	0,4959	4,00	0,499968
0,36	0,1406	0,82	0,2939	1,28	0,3997	1,74	0,4591	2,20	0,4861	2,66	0,4961	4,50	0,499997
0,38	0,1480	0,84	0,2995	1,30	0,4032	1,76	0,4608	2,22	0,4868	2,68	0,4963	5,00	0,499997
0,40	0,1554	0,86	0,3051	1,32	0,4066	1,78	0,4625	2,24	0,4875	2,70	0,4965		
0,42	0,1628	0,88	0,3106	1,34	0,4099	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,72	0,4967		
0,44	0,1700	0,90	0,3159	1,36	0,4131	1,82	0,4656	2,28	0,4887	2,74	0,4969		

Styudent taqsimotining $t\gamma=t(n;\gamma)=T(n;\gamma)$ kritik qiymatlari jadvali

g	0,95	0,99	g	0,95	0,99
5	2,78	4,60	20	2,093	3,883
6	2,57	4,03	25	2,064	2,797
7	2,45	3,71	30	2,045	2,756
8	2,37	3,50	35	2,032	2,729
9	2,31	2,36	40	2,023	2,708
10	2,26	3,25	45	2,016	2,692
11	2,23	3,17	50	2,009	3,502
12	2.20	3.11	60	2.001	2.662
13	2.18	3.01	70	1.996	2.649
14	2.16	3.01	80	1.001	2.640
15	2.15	2.98	90	1.987	2.633
16	2.13	2.95	100	1.984	2.627
17	2.12	2.92	120	1.980	2.617
18	2.11	2.90	∞	1.960	2.576
19	2.10	2.88			

Q=q(γ, n) qiymatlar jadvali

γ	0,95	0,99	γ	0,95	0,99
5	1.37	2.67	20	0.37	0.58
6	1.09	2.01	25	0.32	0.49
7	0.92	1.62	30	0.28	0.43
8	0.80	1.38	35	0.26	0.38
9	0.71	1.20	40	0.24	0.35
10	0.65	1.08	45	0.22	0.32
11	0.59	0.98	50	0.21	0.30
12	0.55	0.90	60	0.188	0.269
13	0.52	0.83	70	0.174	0.245
14	0.48	0.78	80	0.161	0.226
15	0.46	0.73	90	0.151	0.211
16	0.44	0.70	100	0.143	0.198
17	0.42	0.66	150	0.115	0.160
18	0.40	0.63	200	0.099	0.136
19	0.39	0.60	250	0.089	0.120

Fisher-Snedekor taqsimotining $F(k_1; k_2, a)$ kritik qiymatlari jadvali ($a=0,05$)

	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,21
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,91
9	5,12	4,26	3,63	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,79
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,72	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78

23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,25	2,96	2,73	2,57	2,47	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,62
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,01	1,92	1,70	1,39
X	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

χ^2 taqsimotning kritik qiymatlari jadvali

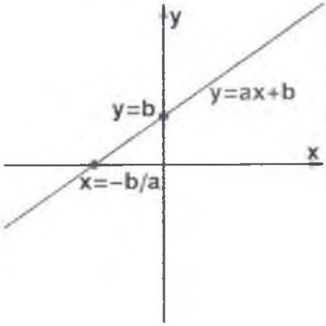
Ozodlik darajasi soni, K	a qiytmatdorlik darajasi			
	0,01	0,05	0,95	0,99
1	6,6	3,8	0,0039	0,00016
2	9,2	6,0	0,103	0,020
3	11,3	7,8	0,352	0,115
4	13,3	9,5	0,711	0,297
5	15,1	11,1	1,15	0,554
6	16,8	12,6	1,64	0,872
7	18,5	14,1	2,17	1,24
8	20,1	15,5	2,73	1,65
9	21,7	16,9	3,33	2,09
10	23,2	18,3	3,94	2,56
11	24,7	19,7	4,57	3,05
12	26.2	21.0	5.23	3.57
13	27.7	22.4	5.89	4.11
14	29.1	23.7	6.57	4.66
15	30.6	25.0	7.26	5.23
16	32.0	26.3	7.96	5.81
17	33.4	27.6	8.67	6.41
18	34.8	28.9	9.39	7.01
19	36.2	30.1	10.1	7.63
20	37,6	31,4	10,9	8,26
21	38,9	32,7	11,6	8,90
22	40,3	33,9	12,3	9,54
23	41,6	35,2	13,1	10.2
24	43,0	36,4	13.8	10,9
25	44,3	37,7	14,6	11,5
26	45,6	38,9	15,4	12,2
27	47,0	40,1	16,2	12,9
28	48,3	41,3	16,9	13,6
29	49,6	42,6	17,7	14,3
30	50,9	43,8	18,5	15,0

Korrelyasiya koeffitsientini 0<r<0.99 qiymatlariga mos Z kriteriyaning qiymatlari jadvali

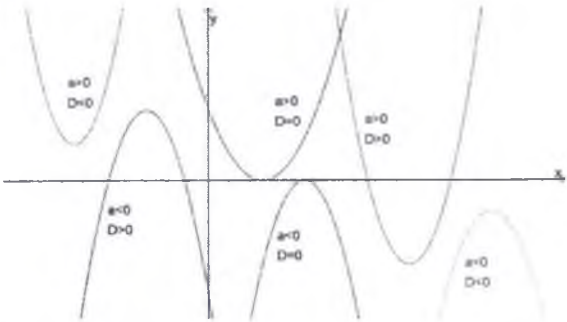
r	Z - ni qiymatlari									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090
0,1	0,100	0,110	0,121	0,131	0,141	0,151	0,161	0,172	0,182	0,192
0,2	0,203	0,213	0,224	0,234	0,245	0,255	0,266	0,277	0,288	0,299
0,3	0,310	0,321	0,332	0,343	0,354	0,365	0,377	0,388	0,400	0,412
0,4	0,424	0,436	0,448	0,460	0,472	0,485	0,497	0,510	0,523	0,536
0,5	0,549	0,563	0,576	0,590	0,604	0,618	0,633	0,648	0,662	0,78
0,6	0,693	0,709	0,725	0,741	0,758	0,775	0,793	0,811	0,829	0,848
0,7	0,867	0,887	0,908	0,929	0,950	0,973	0,996	1,020	1,045	1,071
0,8	1,099	1,127	1,157	1,188	1,221	1,256	1,293	1,333	1,376	1,422
0,9	1,472	1,528	1,589	1,658	1,738	1,832	1,946	2,092	2,298	2,647
0,99	2,647	2,700	2,759	2,826	2,903	2,995	3,106	3,250	3,453	3,800

Asosiy elementar funksiyalarning grafiklari

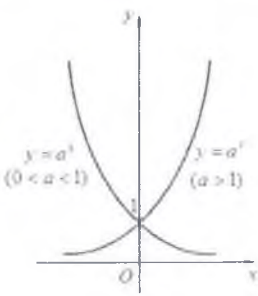
Chiziqli funksiya $y=ax+b$



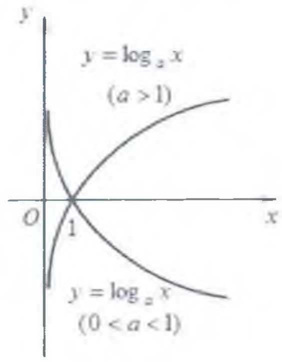
Kvadrat funksiya $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$



Ko'rsatkichli funksiya $y=a^x,\ a\in R,\ a>0,\ a\neq 1$

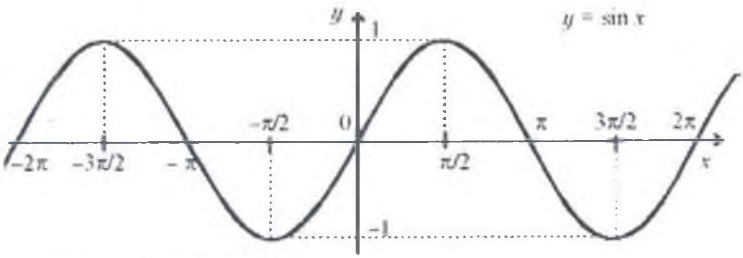


Logarifmik funksiya $y=\log_a x$, $a \in R$, $a>0$, $a \neq 1$

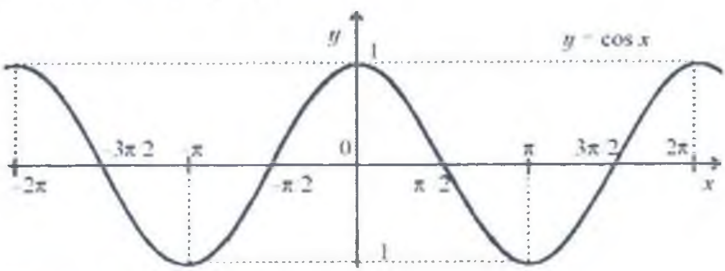


Trigonometrik funksiyalar

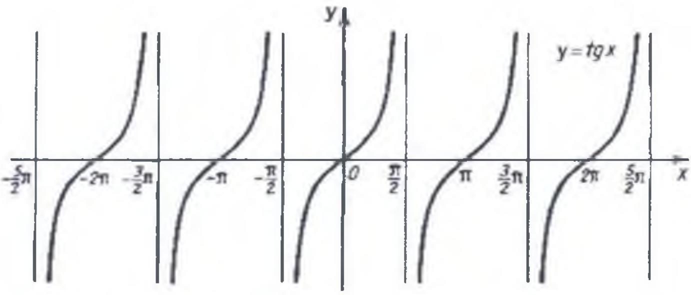
y=sinx funksiya grafigi



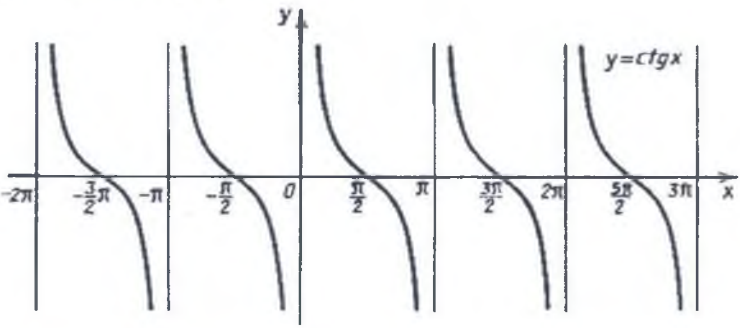
y=cosx funksiya grafigi



y=tgx funksiya grafigi

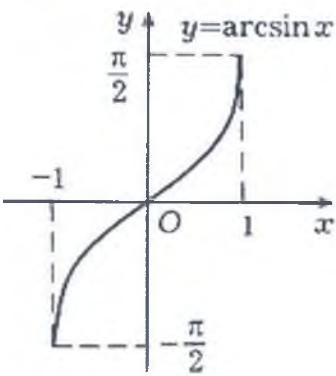


y=ctgx funksiya grafigi

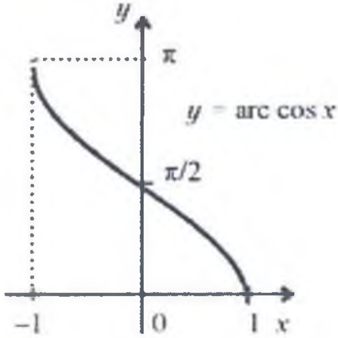


Teskari trigonometrik funksiyalar

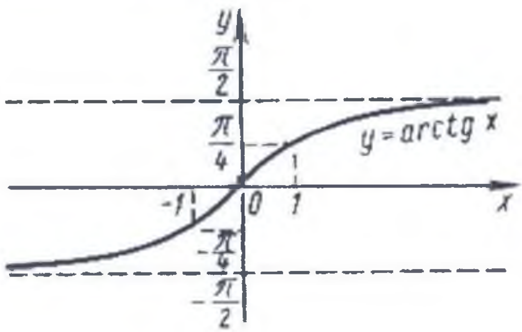
y=arcsinx funksiya grafigi



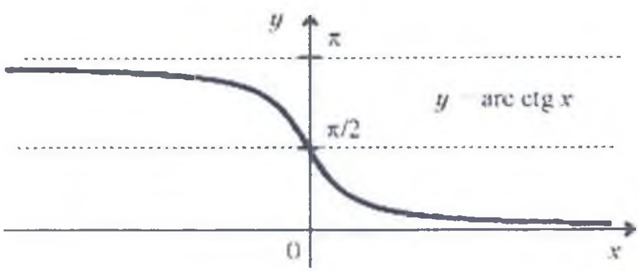
y=arccosx funksiya grafigi



y=arctgx funksiya grafigi



y=arcctgx funksiya grafigi



ADABIYOTLAR

Asosiy adabiyotlar

1. Mathematical Analyis 1, Claudio Canuto-Anita Tabacco, Milano, – Italiya, 2015.
2. Gerd Baumann. Mathematics for Engineers I. Minchen. 2010.
3. Ё.Соатов, «Олий математика». Дарслик. 3-жилд. – Т.: «Ўзбекистон», 1996 й. – 640 б.
4. Sh.I.Tojiyev, «Oliy matematikadan masalalar yechish». Darslik. – T.: «O‘zbekiston», 2002 y. – 512 b.
5. N.M.Jabborov, E.O.Aliqulov, Q.S.Axmedova, «Oliy matematika», O‘quv qo‘llanma. – Qarshi Davlat Universiteti, 1-, 2-jild, 2010 y.
6. P.E.Danko, «Oliy matematikadan misol va masalalar to‘plami». Darslik. – T.: «O‘zbekiston», 2007 й. – 248 b.
7. А.С.Расулов ва бошқалар, «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика», – Т.: «Ўзбекистон файласуфлари миллий жамияти», 2006 й.
8. Б.Абдалимов. Олий математика. – Т.: 1994.
9. Высшая математика для экономистов. – Москва: «Экзамен», 2009 г.

Qo‘shimcha adabiyotlar

1. Н.С.Пискунов, «Дифференциальное и интегральное исчисление», учебное пособие, том-1,2., – Москва: «Наука», 1985.
2. В.Е.Гмурман, «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан мисол ва масалалар тўплами» / ўқув қўлланма. – Т.: «Ўқитувчи», 1980 й.
3. В.П.Минорский, «Олий математикадан масалалар тўплами» – Т.: «Ўқитувчи», 1990 й.
4. Т.Жўраев, Г.Худойберганов, Х.Мансуров, А.Ворисов. «Олий математика асослари». Дарслик. – Т.: «Ўзбекистон», 1998 й. 303-б.
5. Ф.Усмонов, Р.Исмоилов, Б.Хўжаев. Математикадан қўлланма. – Т.: «Янги аср авлоди», 2006 й. 464-б.

MUNDARIJA

7-bob. FUNKSIYANING HOSILA VA DIFFERENSIALI

8-bob. FUNKSIYA HOSILASINING TADBIQLARI

9-bob. ANIQMAS INTEGRAL

10-bob. ANIQ INTEGRAL

11-bob. ANIQ INTEGRALNING BA'ZI BIR TADBIQLARI

12-bob. XOSMAS INTEGRALLAR

13-bob. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR

14-bob. QATORLAR

15-bob. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

K.SH.RUZMETOV, G'.X.DJUMABAYEV

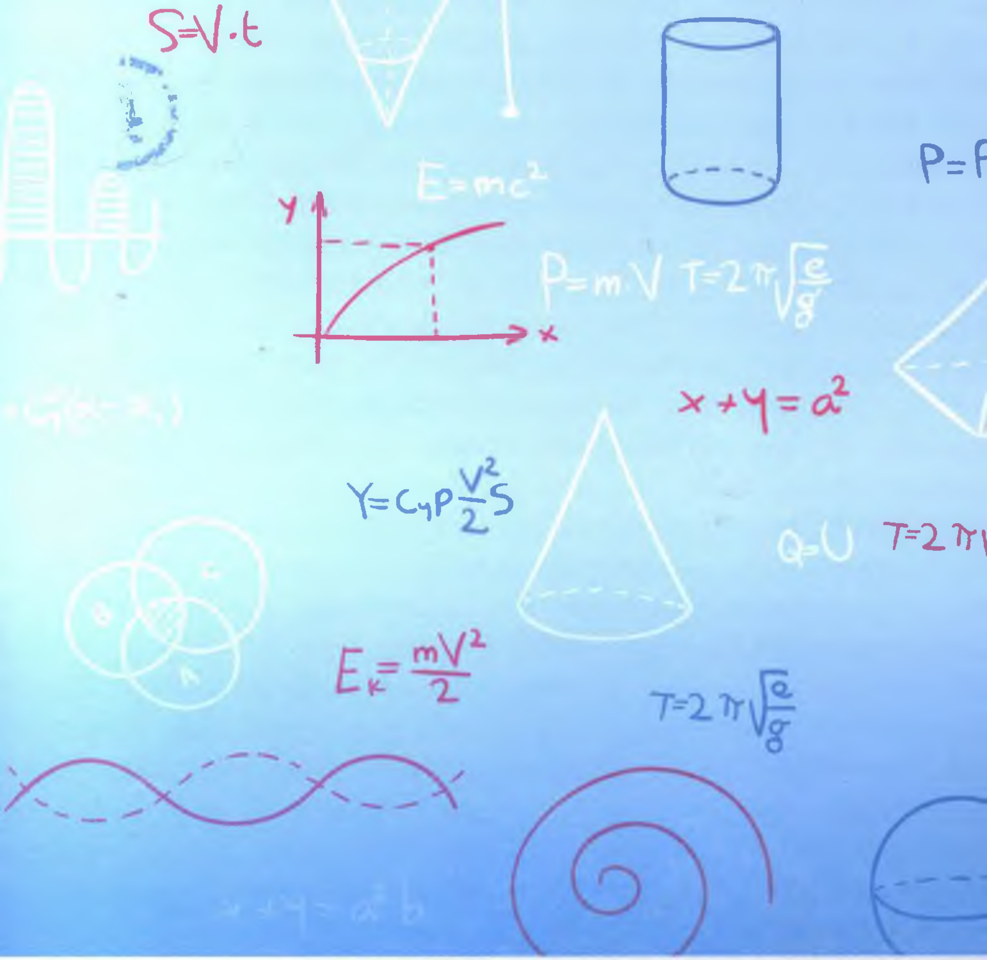
MATEMATIKA

«O'zbekiston xalqaro islom akademiyasi»
nashriyot-matbaa birlashmasi
Toshkent – 2020

Nashr uchun mas'ul: **I.Ashurmatov**
Muharrir: **A.Qobilov**
Badiiy muharrir: **F.Sobirov**
Dizayner sahifalovchi: **L.Abdullayev**

Nashriyot litsenziya raqami AA № 0011. 06.05.2019 yil.
Bosmaxonaga 08.10.2020 yilda berildi.
Bichimi 60×84 $^1/_{16}$ Shartli b.t. 26,0. Nashr t. 27,1.
Adadi 100 nusxa. Buyurtma № 48.
Bahosi shartnoma asosida.

O'zbekiston xalqaro islom akademiyasi
nashriyot-matbaa birlashmasi bosmaxonasida chop etildi.
100011. Toshkent sh. A.Qodiriy, 11.



O'ZBEKISTON XALQARO ISLOM AKADEMIYASI

ISBN 978-9943-6713-4-8