NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT

PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

G.G’oyibnazarova

MATEMATIKA

(Tasviriy san’at va muhandislik grafikasi ta’lim yo’nalisi uchun)

Toshkent 2019

Ushbu metodik qo’llanmada tasviriy san’at va muxandislik grafikasi ta’lim yonalishida o’qitiladigam matematika fanining to’plamlar nazariyasi, chiziqli algebra elementlari, analitik geometriya, konstruktiv geometriya, proektiv geometriya bo’limlari bo’yicha nazariy ma’lumotlar keltirilgan.

Taqrizchilar

Abdulla Qodiriy nomidagi

Jizzax davlat pedagogika instituti

“Matematika o’qitish metodikasi”

kafedrasi dotsenti p.f.n. M.E.Nosirova

Nizomiy nomidagi

Toshkent davlat pedagogika universiteti

“Matematika va uni o’qitish metodikasi”

kafedrasi katta o’qituvchisi J.Saparboyev

Metodik qo’llanma Nizomiy nomidagi Toshkent davlat pedagogika universiteti o’quv-uslubiy kengashida ko’rib chiqilgan va nashrga tavsiya etilgan.

2019 yil -sonli yigilish bayonnomasi.

KIRISH

Pedagogika oliy ta’lim muassasalarida “Matematika” kursi barcha ta’lim yo’nalishlarida o’qitilib kelinmoqda. Ushbu kursni o’qitishdan asosiy maqsad talabalarni muhim ma’lumotlar majmuasi (ta’rif va tushunchalar, teoremalar va ularning isboti, masalalarni yechish usullari va boshqalar) bilan tanishtirishdan iborat. Shu bilan bir qatorda matematika talabalarni mantiqiy fikrlashga, amaliy masalalarni matematik usullar yordamida yechishga, turli jarayonlarning matematik modelini qurishga o’rgatadi. Pedagogika universitetining “Tasviriy san’at va muxandislik grafikasi” ta’lim yonalishida o’qitiladigan matematika kursida algebra va sonlar nazariyasi, analitik geometriya, konstruktiv geometriya, proektiv geometriya, matematik analiz hamda extimollar nazariyasi elementlari kiritiladi.

Usbu metodik qo’llanmada to’plamlar nazariyasi, chiziqli algebra elementlari, analitik geometriya, konstruktiv geometriya, proektiv geometriya bo’limi boyicha nazariy ma’lumotlar berilgan bo’lib, ushbu mavzular misol va masalalar yordamida to’ldirilgan. Matemetikadan mavjud oquv qo’llanmalarda konstruktiv va proektiv geometriya elementlari haqida ma’lumotlar berilmaganligini e’tiborga olib, biz ushbu bo’limlarga tegishli mavzularnu ham batafsilroq yoritishni lozim deb topdik.

Mazkur metodik qo’llanmadan maxsus sirtqi bo’lim talabalari ham foydalanishlari mumkin.

To’plam va uning elementlari, to’plamlar ustida amallar va ularning hossalari. Eyler-Venn diagrammalari

Reja:

1. To’plam va uning elementlari.
2. To’plamlar ustida amallar va ularning hossalari.
3. Eyler-Venn diagrammalari

Tayanch so’zlar: To’plam va uning elementlari, to’plamlar kesishmasi, birlashmasi, ayirmasi, bo’sh to’plam, universal to’plam.

To‘plam tushunchasi matematikaning boshlang‘ich tushunchalaridan bo‘lib, u ta’rifsiz qabul qilinadi. To‘plamni tashkil qiluvchi ob’yektlar uning elementlari deyiladi. To‘plamlarni *A, B,…,* harflari bilan belgilaymiz. To’plam bir qancha elementlardan iborat bo’lishi mumkin, quyidagi yozuv:

$$a \in A \qquad (1.1)$$

a elementni *A* to’plamga tegishliligini bildiradi.

$$a \notin A \qquad (1.2)$$

a elementni *A* to’plamga tegishli emasligini bildiradi, yoki mantiq belgisidan foydalangan holda $\neg(a \in A)$ ko’rinishda yozishimiz mumkin. Agar $a \in A$ bo’lsa, u holda *a* element *A* to’plamga tegishli deyiladi.

Hajmlilik Aksiomasiga ko’ra to’plam elementlarini quyidagicha belgilashimiz ham mumkin,

$$A = \{1, a, t, x\}, \qquad (1.3)$$

bunda, A to’plam tarkibida 1 soni va *a,t,x* harfiy belgilar kiradi.

To’liqlik Aksiomasiga ko’ra to’plam elementlari soni uning tarkibiga kiruvchi elementlar bilan aniqlanib ularning qanday tartiblanganiga bog’liq emas. (1.3) A to’plam $\{a, x, 1, t\}$ to’plam bilan xam va $\{x, t, a, 1, 1, 1, t, a, t, x\}$ to’plam bilan xam bir xildir.

To’plamlar ustida amallar

Agar *A* va *B* to’plamlar bir xil elementlardan tashkil topgan bo’lsa bu to’plamlar teng deyiladi. U holda to’liqlik aksiomasiga ko’ra agar ikkita to’plam bir xil elemantlar jamlanmasidan tuzilgan bo'lsa ular teng bo'ladi. Agar *A* to'plamning xar bir elementi *B* to'plamning ham elementi bo'lsa, *A* to'plam B to'plamning to'plamostisi deyiladi va

$A \subset B$ yoki $A \subseteq B$ orqali belgilanadi.

Bu belgilshlardan birinchisi *A* to'plam *B* to'plamning qismi va $A \neq B$ ekanligini ikkinchisi esa *A* to'plam *B* to'plamning qismi bo'lib ular teng bo'lishi ham va teng bo'lmasligi ham mumkinligini bildiradi. Masalan $\{x,t\} \subset \{x,t,1\}$. Ihtiyoriy A to'plam uchun $A \subseteq A$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Yuqoridagilarni matematik tilda quyidagicha yozish mumkin:

$$A \subseteq B \equiv (\forall x \in A)(x \in B)$$
$$A \subsetneq B \equiv (\forall x \in A)(x \in B) \wedge (A \neq B)$$

Bu yozuvda $\wedge$ yozuvi "va" ma'nosini bildiradi. Ba'zida ayrimlar $\subset$ belgisi o'rniga $\subseteq$ belgisini ayrimlar esa $\subsetneq$ belgisini ishlatadi. A $\subsetneq$ B bo'lganda A to'plam B to'plamning xos to'plam ostisi deyiladi.

Ixtiyoriy A to'plam uchun $\varnothing \subseteq A$, agar $A \neq \varnothing$ u holda $\varnothing \subsetneq A$.

A va *B* to'plamlarning ayirmasi deb, *A* to'plamning *B* to'plamga kirmagan barcha elementlardan tashkil topgan to'plamga aytiladi va *A \ B* yoki *A-B* Ko'rinishlarda belgilanadi. *A* va *B* to'plamlarning ayirmasini mantiq qoidalariga ko'ra bunday yozamiz:

$$A - B = A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

A va *B* to'plamlarning kamida biriga tegishli bo'lgan barcha elementlardan tashkil topgan $A \cup B$ to'plam *A* va *B* to'plamlarning birlashmasi yoki yig'indisi deyiladi. Buni matematik tilda quyidagicha yozamiz

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

Masalan: $\{1, x, a\} \cup \{2,7,x\} = \{1, x, a, 2, 7\}$

A va *B* to'plamlarning kesishmasi yoki ko'paytmasi deb, *A* va *B* to'plamlarning barcha umumiy, ya'ni *A* ga ham, *B* ga ham tegishli elementlardan tashkil topgan $A \cap B$ to'plamga aytiladi. A va B to'plamlarning kesishmasi mantiq qoidalariga ko'ra bunday yozamiz:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Matematikaning ba'zi sohalarida faqatgina birorta to'plam va uning barcha to'plamostilari bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Masalan, planimetriya tekislik va uning barcha to'plamostilari bilan, stereometriya esa fazo va uning barcha to'plamostilari bilan ish ko'radi.

Agar biror E to'plam va faqat uning to'plamostilari bilan ish ko'rsak, bunday E to'plamni universal to'plam deb ataymiz. Universal to'plamning barcha to'plamostilari to'plamini β(E) orqali belgilaymiz.

To'plamlar ustida bajariladigan algebraik amallar quyidagi xossalarga ega.

1^0. A ∩ A = A kesishmaning idempotentligi;

2^0. A ∪ A = A birlashmaning idempotentligi;

3^0. $\begin{matrix} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{matrix}$ kesishma va birlashmaning kommutativligi;

4^0. 2°. $\begin{matrix} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{matrix}$ kesishma va birlashmaning assosiativligi

5^0. Kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivligi:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

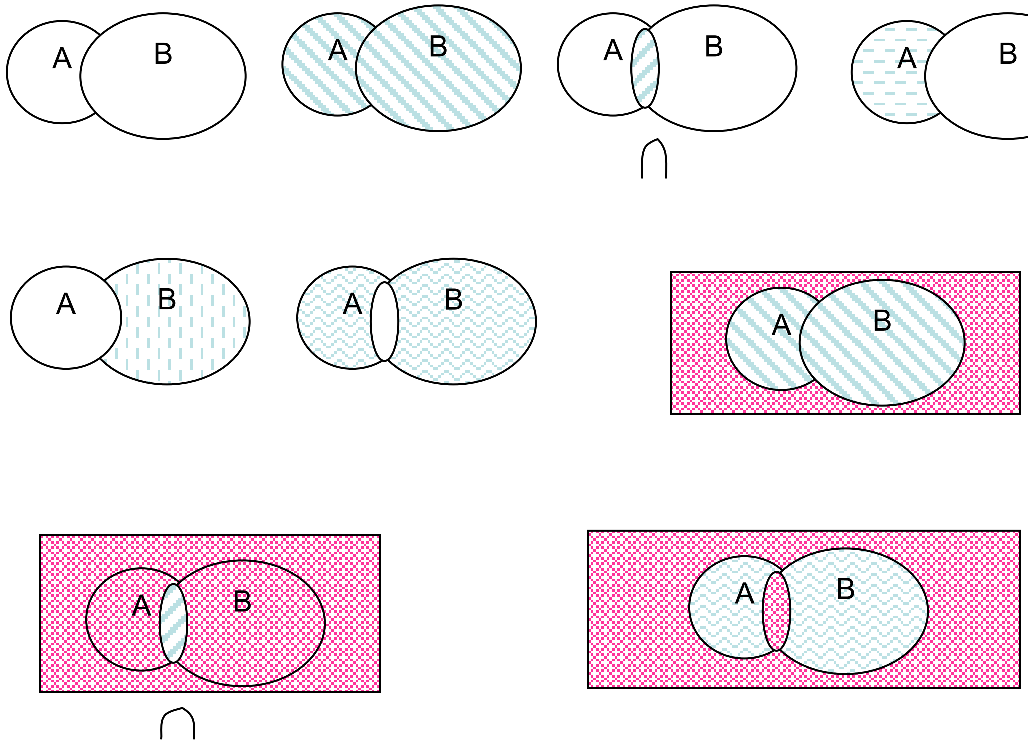
6^0. Birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivligi:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

7^0. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C);$

To'mlamlar ustida amallarni Eyler-Venn diagrammalari deb ataladigan quyidagi shakllar yordamida ifoda qilish, amallarning xossalarini isbot qilishni ancha engillashtiradi.

Universal to'plam to'g'ri to'rt burchak shaklida, uning to'plamostilarini to'g'ri to'rtburchak ichidagi doiralar orqali ifoda qilinadi. U xolda, ikki to'plam birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi, to’lduruvchi to’plamlar, ikki to’plamning simmetrik ayirmasi mos ravishda quyidagicha ifodalanadi:



Mavzuni mustahkamlash uchun savollar:

1.To’plam tushunchasini misollar yordamida tushuntiring.

2. To’plamlar ustida bajariladigan amallarni tushuntiring.

3. To’plamlar ustida bajariladigan amallarni diogrammalar orqali tushuntiring.

Matematik mantiq elementlari, mulohazalar ustida mantiq amallari

Reja:

1. Mulohaza haqida tushuncha.
2. Mulohazalar ustida amallar.

Tayanch so’zlar: Mulohaza, mulohazalar inkori, mulohazalar konyunksiyasi, mulohazalar dizyunksiyasi mulohazalar implikasiyasi, mulohazalar ekvivalensiyasi.

Mulohaza matematik mantiqning asosiy tushunchalaridan bo'lib, u rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gapdir. Masalan, «Kvadrat to'g'ri to'rtburchakdir», «7-tub son», «2>5» kabi tasdiqlar mulohazalar bo'lib, birinchi va ikkinchi mulohazalar rost, uchinchi mulohaza esa yolg'on mulohazadir.

Demak, biror bir gap mulohaza bo'lishi uchun, u albatta darak gap bo'lishi va rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanishi shart.

Undov, so'roq gaplar mulohaza bo'la olmaydi. Rost mulohazaga 1 qiymatni, yolg'on mulohazaga 0 qiymatni mos qo'yamiz. Mulohazalarni lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilashni kelishib olamiz.

Quyida biz berilgan mulohazalardan mantiq amallari deb ataladigan amallar yordamida boshqa mulohazalar hosil qilish usullarini ko'rib chiqamiz.

Ta'rif. Berilgan A mulohaza rost bo'lganda yolg'on, A mulohaza yolg'on bo'lganda rost bo'ladigan mulohaza A mulohazaning inkori deyiladi va $\urcorner A$ yoki $\bar{A}$ orqali belgilanadi.

Inkor amali quyidagi jadval yordamida to'liq aniqlanadi:

A	$\urcorner$A
1	0
0	1

Bunday jadvallarni rostlik jadvali deb ataymiz.

Masalan, A mulohaza - «7-tub son» degan rost mulohaza bo'lsin, u holda

$\urcorner$A - «7-tub son emas» degan yolg'on mulohazadan iborat.

Ta'rif. A va B mulohazalar rost bo'lgandagina rost bo'lib, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan mulohaza A va B mulohazalarning kon'yunksiyasi deyiladi va $A \wedge B$ yoki A & B ko'rinishda belgilanadi

Kon'yunksiya amalining rostlik jadvali quyidagichadir:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0

0	1	0
0	0	0

Ta'rif. A va B mulohazalar <u>diz'yunksiyasi</u> deb, A va B mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan

$A \vee B$ mulohazaga aytiladi.

Ta'rif. A va B mulohazalar <u>implikasiyasi</u> deb, A mulohaza rost va B mulohaza yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan $A \rightarrow B$ mulohazaga aytiladi.

Ta'rif. A va B mulohazalar <u>ekvivalensiyasi</u> deb, A va B mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on yoki rost bo'lganda rost, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan $A \leftrightarrow B$ mulohazaga aytiladi

Bu amallar uchun rostlik jadvallarini keltiramiz:

A	B	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	0	1	1

$\wedge$ - mantiqiy ko'paytirish, $\vee$ - mantiqiy qo'shish amallari deb yuritiladi. $A \wedge B$ mulohazani A va B; $A \vee B$ mulohazani A yoki B; $A \rightarrow B$ mulohazani A mulohazadan B mulohaza kelib chiqadi yoki agar A bo'lsa, u xolda B bo'ladi; $A \leftrightarrow B$ mulohazani A mulohazadan B mulohaza va BBmulohazadan A mulohaza kelib chiqadi yoki A bo'ladi, faqat va faqat shu holda-ki, agar B bo'lsa, deb o'qiymiz.

Mulohazalar to'plamini M harfi bilan belgilaylik. U holda M to'plam, unda bajariladigan barcha $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ amallar bilan birgalikda <u>mulohazalar algebrasi</u> deb yuritiladi. Mulohazalar algebrasini qisqacha MA orqali belgilaymiz.

M to'plamda bajariladigan amallarni bajarilish tartibi quyidagicha: avval inkor amali bajariladi, agar inkor amali qavslardan tashqarida bo'lsa, u xolda qavs ichidagi amallar bajariladi. Keyin kon'yunksiya, undan so'ng diz'yunksiya, implikasiya va nihoyat ekvivalensiya amallari bajariladi.

Matematik mulohazalarni yuqoridagi belgilar yordamida ifoda etishga doir misollar keltiramiz:

1-misol. Agar $a>b$ va $b>c$ bo'lsa, $a>c$ bo'ladi. $(a>b)\wedge(b>c)\Rightarrow(a>c)$.

2-misol. $a>b$ bo'lsa, $a+c>b+c$ bo'ladi. $(a>b)\Rightarrow(a+c>b+c)$.

3-misol. $a=0$ yoki $b=0$ bo'lsa, $ab=0$ bo'ladi va aksincha, $ab=0$ bo'lsa, $a=0$ yoki $b=0$ bo'ladi. $(ab=0)\Leftrightarrow((a=0)\vee(b=0))$.

4-misol. $a>0$ va $b>0$ bo'lsa, $ab>0$ bo'ladi. $(a>0)\wedge(b>0)\Rightarrow(ab>0)$.

5-misol. Ixtiyoriy x haqiqiy son uchun $|x|\geq x$. $\forall x\in R$: $|x|>x$.

6-misol. Ixtiyoriy $a\geq 0$ son uchun, shunday $x\in R$ son mavjudki, $x^2=a$ bo'ladi, ya'ni $\forall a\geq 0$, $\exists x\in R$: $x^2=a$.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar:

1. Mulohaza tushunchasiga ta'rif bering.
2. Mulohazaga misollar keltiring.
3. Mulohazalar inkorini ta'riflang.
4. Mulohazalar konyunksiyasini ta'riflang.
5. Mulohazalar dizyunksiyasini ta'riflang.
6. Mulohazalar implikasiyasini ta'riflang.
7. Mulohazalar ekvivalensiyasini ta'riflang.

Matritsa haqida tushuncha. Matritsalar ustida amallar

Reja:

1. Matritsa haqida tushuncha.
2. Matrisalar ustida amallar

Tayanch so'zlar: Matritsa, teskari matritsa, birlik matritsa.

$a_{i\kappa}$ haqiqiy sonlar m ta satr va n ta ustunda joylashgan quyidagi to`g`ri to`rtburchak

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

shaklidagi jadvalga m x n o`lchamli **matritsa** deyiladi. a_{ij} haqiqiy sonlar matritsa elementlari deb ataladi. Matritsalar odatda lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi.

1 x m o`lchamli matritsaga **satr matritsa**, n x 1 o`lchamli matritsaga **ustun matritsa** deyiladi.

Nol matritsa deb, har bir elementi nolga teng bo`lgan matritsaga aytiladi.

n x m o`lchamli $A = (a_{i\kappa})$ va $B = (b_{i\kappa})$ matritsalar berilgan bo`lsin. Agar matritsalarning barcha mos elementlari o`zaro teng bo`lsa, matritsalar o`zaro teng deyiladi va $A = B$ ko`rinishda yoziladi.

2. Matritsalar ustida amallar.

O`lchamlari aynan teng A va B matritsalarni qo`shganda, ularning mos elementlari qo`shiladi: $A + B = (a_{i\kappa}) + (b_{i\kappa}) = (a_{i\kappa} + b_{i\kappa})$.

Haqiqiy son matritsaga ko`paytirilganda, matritsaning har bir elementi shu songa ko`paytiriladi: $k\,(a_{i\kappa}) = (k\,a_{i\kappa})$.

Matritsalarni qo`shish va songa ko`paytirish amallari quyidagi xossalarga bo`y sinadi:

1) A + B = B + A;

2) A + (B + C) = (A + B) + C;

3) k(A + B) = kA + kB;

4) k(nA) = (kn)A ;

5) (k + n)A = kA + nA.

Agar A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo`lsa, A va B matritsalar o`zaro zanjirlangan matritsalar deyiladi. O`zaro zanjirlangan matritsalarni ko`paytirish mumkin.

n x m o`lchamli A = ($a_{ik}$) matritsani m x p o`lchamli B = (b_{ik}) matritsaga ko`paytmasi n x p o`lchamli C = (c_{ik}) matritsaga teng bo`lib, uning c_{ik}elementlari quyidagicha aniqlanadi

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} ,$$

ya`ni $c_{ik}$ element A matritsa i-satri elementlarining B matritsa k-ustuni mos elementlariga ko`paytmalarining yig`indisiga teng.

Masalan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

Matritsalarni ko`paytirish quyidagi xossalarga bo`ysinadi:

1. (kA)B = k(AB); 2. (A + B)C = AC + BC;

3. A(B + C) = AB + AC; 4. A(BC) = (AB)C.

Matritsalarning ko`paytmasi ko`paytuvchi matritsalar nolmas bo`li-shiga qaramasdan, nol matritsani berishi ham mumkin.

A va B matritsalarningko`paytmasi har doim o`rin almashtirish qonuniga bo`y sinavermaydi, ya`ni umuman olganda AB ≠ BA. AB = BA tenglikni qanoatlantiruvchi A va B matritsalarga o`rin almashinuvchi matritsalar deyiladi.

Berilgan n x m o`lchamli A matritsaning har bir satri mos ustunlari bilan almashtirilsa, hosil bo`lgan m x n o`lchamli matritsaga A matritsaning **transponirlangan matritsa**si deyiladi va $A^T$ ko`rinishda belgilanadi.

Matritsalar ko`paytmasi transponirlangani uchun quyidagi formula o`rinli: $(AB)^T = B^T A^T$.

Satrlari soni n ustunlari soni m ga teng bo`lgan matritsaga n–tartibli **kvadratik matritsa** deyiladi.

Kvadratik matritsaning quyidagi xususiy ko`rinishlari bir-biridan farqlaniladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – yuqori uchburchakli matritsa[1];

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – quyi uchburchakli matritsa;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – diagonal matritsa;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$ - birlik matritsa.

Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar, ularning xossalari

Reja:

1.Ikkinchi va uchinchi tartibli determinant haqida tushuncha.

2.Determinantning asosiy hossalari.

Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar

2x2- matrisaning determinanti quyidagicha hisoblanadi

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

1- misol. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 5\cdot 6 - 3\cdot(-2) = 30 + 6 = 36.$

---

[1]**Jane S Paterson,Dorothy A Watson"SQA Advanced Higher Mathematics" 179-180** betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

Shuningdek, 3x3- matrisaning determinanti quyidagicha hisoblanadi

Uchinchi tartibli kvadrat matritsa determinanti $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ni hisoblash uchun uchinchi darajali o'rniga qo'yishlar yordamida ko'paytmalar tuzamiz. Urniga qo'yishning ishorasi u yordamida hosil qilingan ko'paytmani qo'shish yoki ayirish kerakligini aniqlab beradi. Bundan quyidagi ifodani hosil qilamiz.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

2-ta'rif. n-tartibli kvadrat matritsa $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

ning determinanti deb $|A| = \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\tau(n)}$ ($n!$ qo'shiluvchilardan iborat) yig'indiga aytiladi.

Determinantning xossalari

1-teorema. Nol satr yoki ustunga ega kvadrat matritsaning determinanti nolga teng.

2-teorema. Diagonal matritsaning determinanti asosiy diagonal elementlari ko'paytmasiga teng.

3-teorema. Uchburchak matritsaning determinanti asosiy diagonal elementlari ko'paytmasiga teng.

4-teorema. Kvadrat matritsa va unga transponirlangan matritsalar determinantlari teng.

5-teorema. Kvadrat matritsaning ikkita satr (ustun)lari o'rnini almashtirish natijasida determinant ishorasi o'zgaradi.

6-teorema. Ikkita bir xil satr (ustun)ga ega kvadrat matritsa determinanti nolga teng.

7-teorema. A kvadrat matritsaning biror bir satr (ustun) elementlarini noldan farqli λ skalyarga ko'paytirilsa, u holda A matritsaning determinanti λ skalyarga ko'paytiriladi.

8-teorema. Qandaydir ikkita satr (ustun)lari proporsional bo'lgan kvadrat matritsaning determinanti nolga teng.

9-teorema. Kvadrat matritsa i- qatori (ustuni)ning har bir elementi m ta qo'shiluvchilardan iborat bo'lsa, bunday kvadrat matritsaning determinanti m ta determinantlar yig'indisidan iborat bo'lib, birinchi determinant i- qatori (ustuni)da birinchi, ikkinchi determinantda ikkinchi qo'shiluvchilar va h.z. boshqa qatorlar A matritsanikidek bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a & a_{22}+b & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

10-teorema. Kvadrat matritsaning biror-bir satr (ustun)iga noldan farqli skalyarga ko'paytirilgan boshqa satr (ustun)ni qo'shish natijasida determinant o'zgarmaydi.

11-teorema. Kvadrat matritsaning biror-bir satr (ustun)iga qolgan satr (ustun)lar chiziqli kombinatsiyasini qo'shish natijasida determinant o'zgarmaydi.

12-teorema. Kvadrat matritsaning biror-bir satri (ustuni) qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, uning determinanti nolga teng.

13-teorema. Har qanday elementar matritsaning determinanti noldan farqli.

14-teorema. Kvadrat matritsalar ko'paytmasining determinanti berilgan matritsalar determinantlari ko'paytmasiga teng.

Deteminantning nolga teng bo'lish sharti.

15-teorema. Kvadrat matritsaning determinanti nolga teng bo'lishi uchun uning satr (ustun)lari chiziqli bog'langan bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. 1. Matritsaning satrlari chiziqli erkli bo'lsa, $|A| \neq 0$ ekanligini isbotlaymiz.

Agar berilgan kvadrat matritsaning satrlari chiziqli erkli bo'lsa, u holda uni elementar matritsalar ko'paytmasi ko'rinishida ifodalash mumkin, ya'ni $A = E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_k$. U holda determinant xossalariga ko'ra

$|A| = |E_1| \cdot |E_2| \cdot \ldots \cdot |E_k|$ va $|E_i| \neq 0 (i = \{1, \ldots, k\}$. Bundan $|A| \neq 0$.

To'g'ri teorema bilan teskari teoremaga qarama-qarshi teoremalar teng kuchli bo'lganligidan, $|A| = 0$ ekanligidan A matritsa chiziqli erkliligi kelib chiqadi.

2. A matritsaning satrlari chiziqli bog'liq bo'lsa, $|A| = 0$ ekanligini isbotlaymiz.

Satrlari chiziqli bog'liq matritsaning kamida bitta satri qolganlari orqali chiziqli ifodalanadi. Determinantlar xossalariga ko'ra $|A| = 0$.

1-misol. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

16-teorema. Har qanday kvadrat matritsa uchun quyidagi shartlar teng kuchli:

1. $|A| \neq 0$.

2. Matritsaning satr (ustun)lari chiziqli erkli.

3. A matritsa teskarilanuvchi.

4. A matritsa elementar matritsalar yordamida ifodalanadi.

17-teorema. A matritsaning rangi uning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga teng.

Isboti. Noldan farqli A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$matritsa berilgan

bo'lsin. U holda uning rangi $r = r(A) > 0$. Matritsaning kamida bitta noldan farqli r tartibli minori mavjudligini isbotlaymiz.

$r = r(A) > 0$ bo'lganligi uchun, A matritsaning r ta chiziqli erkli satrlari bor. Shu satrlardan tuzilgan A matritsaning $B \in F^{r\times n}$ matritsaostisini tuzamiz B= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$, bu matritsaning rangi $r(B) = r$. Matritsaning satr va ustun ranglari tengligidan $\rho(B) = r$. Demak, B matritsaning r ta chiziqli erkli ustunlari mavjud. B matritsaning r ta chiziqli erkli ustunlaridan tashkil topgan matritsaostisini C bilan belgilaymiz. U holda $C \in F^{r\times r}$ va $r(C) = r$. Yuqoridagi teorema shartlariga ko'ra, C matritsaning ustunlari chiziqli erkli bo'lganligi uchun $|C| \neq 0$.

Demak, C matritsa A matritsaning tartibi r ga teng bo'lgan noldan farqli minori bo'ladi.

Agar $k > r(A)$ bo'lsa, A matritsaning k tartibli har qanday minori nolga teng bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $k > r(A)$ bo'lsa, A matritsaning har qanday k ta satri chiziqli bog'langan bo'ladi. Bundan A matritsaning har qanday ($k \times k$) tartibli qismmatritsasida satrlari chiziqli bog'langan bo'ladi va yuqoridagi teoremaga ko'ra bunday qismmatritsalar determinanti, ya'ni A matritsaning k tartibli har qanday minori nolga teng.

2-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa rangini minorlar yordamida aniqlang.

Yechish. Matritsa rangi haqidagi teoremaga ko'ra matritsaning noldan farqli minorlarini aniqlaymiz.

Matritsaning berilishidan, unda kamida bitta noldan farqli birinchi tartibli minor mavjud, masalan, $A_1 = (1)$ matritsaostining determinanti 1ga teng, ya'ni $M_1 = |1| = 1 \neq 0$.

Matritsaning $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaostining determinanti

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-2) = 3 \neq 0 .$$

Matritsaning $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaostining determinanti

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+1-0-0-(-2) = 4 \neq 0 \cdot$$

Matritsaning 4-tartibli minori berilgan matritsaning determinantidan iborat, uni hisoblaymiz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

Demak, berilgan matritsaning noldan farqli minorlari 1-tartibli, 2-tartibli va 3-tartibli. Ulardan yuqori tartibligi 3-tartibli minor bo’lganligi uchun, berilgan matritsaning rangi 3 ga teng.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar:

1.Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlarni xisoblash formulalarini yozing.

2.Determinantning qanday hossalari bjr?

3.Determinantning satri bo’yicha yoyish qanday amalga oshiriladi?

4. Minor nima?

Chiziqli tenglamalar sistemai va uni yechish usulari

Reja:

1. Chiziqli tenglamalar sistemalari haqida tushuncha.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli.
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli.

Tayanch so’zlar: Chiziqli tenglamalar sistemasii, bir jinsli **c**hiziqli tenglamalar sistemasi, ChTSni yechishning Gauss usuli, ChTSni yechishning

Kramer usuli, matritsa

$F=<F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon va maydon ustida

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$ (5.1) chiziqli tenglamalar sistemasi hamda

unga assotsirlangan $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad (5.2)$$

bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi BJChTS berilgan bo'lsin.

Yuqorida ta'kidlanganidek, (5.2) sistemaning yechimlari to'plami F^n arifmetik vektor fazoning biror W qism fazosini tashkil etadi.

1-ta'rif. F^n arifmetik vektor fazoning W qism fazosining bazisini tashkil etuvchi istalgan vektorlar sistemasi (5.2) sistemaning fundamental (asosiy) yechimlari sistemasi deyiladi.

Bazis vektorlar sistemasining ta'rifiga asosan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r$ sistema (5.1) ning fundamental yechimlari sistemasi bo'lishi uchun quyidagi ikkita shart bajarilishi lozim:

1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r$ sistema chiziqli bog'lanmagan sistema bo'ladi;

2. (5.1) sistemaning ixtiyoriy yechimi $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r$ sistema vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi.

(5.1) sistemaning umumiy yechimi ushbu

$\vec{a}=k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\ldots+k_r\vec{a}_r$ ($k_i\in F$, $i=\overline{1,r}$)

ko'rinishda ifodalanadi. Endi (1) yechimlarining fundamental sistemasini topaylik. Buning uchun (5.1) da bir necha marta elementar almashtirishlar bajargandan so'ng o'ziga ekvivalent bo'lgan ushbu

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + c_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = 0, \\
\qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + c_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad c_{rr}x_r + c_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = 0
\end{cases}
\qquad (5.3)
$$

ko'rinishdagi sistemaga ega bo'lamiz. (5.1) da $c_{kk}\neq 0$ ($k=\overline{1,r}$), r<n bo'ladi. Aks holda (5.1) sistema nolmas yechimlarga ega bo'lmas edi.

Tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli.

(5.1) sistema r ta tenglama va n-r ta noma'lumlardan iborat. Shuning uchun biz $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ larni erkin (ozod) noma'lumlar deb, ularga ixtiyoriy sonli (kamida bittasi noldan farqli) qiymatlarni berib, (1) dan ularga mos $x_r, x_{r-1}, ..., x_1$ noma'lumlar qiymatlarini topamiz. Aytaylik (1) da $x_{r+1}=1$, $x_{r+2}=x_{r+3}=...=x_n=0$ bo'lsin. Unda (5.1)dan $x_r, x_{r-1}, ..., x_1$ noma'lumlar qiymatlarini topamiz. Parametrlarning yuqoridagi qiymatlariga mos keluvchi (5.3) sistemaning yechimi $\vec{a}_{r+1}=(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, 1, 0, ..., 0)$ bo'ladi. Bundan keyin $x_{r+1}=x_{r+3}=...=x_n=0$, $x_{r+2}=1$ deb olaylik. U holda (4) sistemadan x_i($i=\overline{1,r}$) qiymatlarga mos keluvchi qandaydir β_i($i=\overline{1,r}$) sonlarni topamiz. Natijada (1*) sistemaning $\vec{a}_{r+2}=(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r, 0, 1, 0, ..., 0)$ ikkinchi yechimini topamiz. SHu jarayonni davom ettirib, n-r qadamdan so'ng (5.1) sistema ning

$$
\begin{cases}
\vec{a}_{r+1} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 1, 0, \ldots, 0), \\
\vec{a}_{r+2} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, 0, 1, \ldots, 0), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\vec{a}_n \ \ = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r, 0, 0, \ldots, 1)
\end{cases}
$$

yechimlari sistemasini topamiz. Hosil bo'lgan sistema (5.1) sistemaning fundamental yechimlari sistemasi bo'ladi.

1-misol. BCHTS $2x_1 + x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 0$ tenglamadan iborat bo'lsin. Bitta tenglama va 4 ta noma'lum bo'lganligi uchun berilgan sistema yechimlar to'plamining fundamental sistemasi 3 ta yechimdan iborat bo'ladi. Ularni aniqlash uchun $x_1 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{7}{2}x_4$ belgilashdagi x_2, x_3, x_4 noma'lumlarga mos ravishda 2,0,0; 0,2.0; 0,0,2 qiymatlarni beramiz. Hosil bo'lgan (-1,2,0,0);

(3,0,2,0); (-7,0,0,2) yechimlar berilgan BCHTSning yechimlar to'plamining fundamental sistemasi bo'ladi.

2-misol. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 8 \end{cases}$ chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechamiz. Buning uchun chiziqli tenglamalar sistemasini elementar almashtirishlar yordamida tanlab olingan tenglamasidan boshqa tenglamalarida biror bir o'zgaruvchi oldidagi koeffisientni nolga aylantiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 8 \\ 16x_2 + 24x_3 = -22 \\ 14x_2 + 9x_3 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 8 \\ 8x_2 + 12x_3 = -11 \\ -96x_3 = 58 \end{cases}.$$

Hosil bo'lgan tenglamalar sistemasi berilgan tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo'lib, uning yechimi $(69\frac{19}{48};13\frac{1}{8};-\frac{29}{48})$ vektordan iborat.

Tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli.

Teorema. Agar $|A| \neq 0$ bo'lsa, u holda CHTS yagona yechimga ega va u quyidagi formulalar orqali ifodalanadi:

$$x_1 = \frac{|A(1)|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A(n)|}{|A|} \quad (5.4).$$

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini Kramer formulalari yordamida topish uchun sistemaning asosiy matritsasi va A(1), A(2), A(3) matritsalarni tuzib, ularning determinantlarini hisoblaymiz:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

$$\Delta_1=|A(1)|=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\quad \Delta_2=|A(2)|=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3=A(3)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

U holda $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}, x_3\ \dfrac{\Delta_3}{\Delta}.$

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar

1.Chiziqli tenglamalar sistemasini turlarini ayting.

2.Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli qanday?

3.Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli qanday?

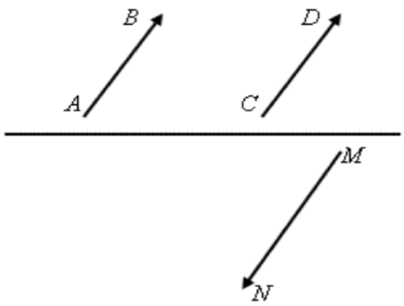
Vektorlar, vektorlar ustida chiziqli amallar. Vektor fazo aksiomalari

Reja:

1. Vektor haqida tushuncha.
2. Vektorlar ustida chiziqli amallar.
3. Koordinatasi bilan berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar.
4. Vektor fazo aksiomalari.

Tayanch so’zlar: Vektor, nol vektor, kollinear vektorlar, komplanar vektorlar, chiziqli amal, chiziqli bog’liq va chiziqli erkli vektorlar, vektor fazo.

1 - ta’rif. Agar berilgan kesmaning uchlari tartiblangan bo’lsa, u holda bunday kesma yo’nalgan kesma deyiladi.Yo’nalgan kesmaning birinchi uchi uning boshi, ikkinchi uchi esa oxiri deyiladi. Boshi A va oxiri B nuqtada bo’lgan yo’nalgan kesmani $\overrightarrow{AB}$ bilan belgilaymiz (1-chizma).



1-chizma

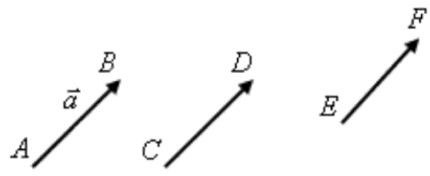
Yo’nalgan $\overline{AB}$ kesmaning uzunligideb, AB kesma uzunligiga aytiladi va $|\overline{AB}|$ bilan belgilanadi.

2 - ta’rif. Agar AB va CD nurlar bir xil (qarama-qarshi) yo’nalgan bo’lsa, $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ yo’nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo’nalishli deyiladi.

3 - ta’rif. Uzunliklari teng yo’nalishi bir xil bo’lgan barcha yo’nalgan kesmalar to’plamini ozod vektor yoki qisqacha vektor deb ataladi.(2-chizma)

Vektor ustiga "$\rightarrow$" belgi qo’yilgan kichik lotin harflari $\vec{a},\vec{в},\vec{c},...$ bilan yoki qo’yiq qilib yozilgan kichik lotin harflari $a,в,c,...$ bilan belgilanadi.

Vektor so’zi lotincha vektor – so’zidan olingan bo’lib, tashuvchi, olib yuruvchi degan ma’noni bildiradi.



2-chizma

Ta’rifdan vektor, uzunliklari teng bir xil yo’nalgan kesmalar to’plamidan iborat, ekanligi ravshan. Bu to’plamga tegishli har bir yo’nalgan kesma to’plamni to’liq aniqlaydi. Shuning uchun agar $\overline{AB} \in \vec{a}$ bo’lsa, $\vec{a}$ vektorni $\overline{AB} = \vec{a}$ ko’rinishda yozishimiz mumkin.

A nuqta $\overline{AB}$ vektorning boshi, Bnuqta esa $\overline{AB}$ vektorning oxiri deyiladi. Yo’nalgan $\overline{AB}$ kesmaning uzunligi $\overline{AB}$ vektor uzunligi, yoki moduli deyiladi va $|\overline{AB}|$ ko’rinishida belgilanadi.

4 - ta’rif. Uzunligi birga teng bo’lgan vektor birlik vektor yoki ort deyiladi.

5 - ta’rif. Boshi bilan oxiri ustma – ust tushgan vektor nol vektor deyiladi.

Nol vektor $\vec{0}$ ko’rinishida yoki $\overline{AA}$, yoki $\overline{BB}$ ko’rinishida belgilanadi. Nol vektor yo’nalishi (aniq emas) aniqlanmagan.

6 - ta’rif. Agar $\overline{AB} \in \vec{a}$, $\overline{CD} \in \vec{b}$ yo’nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo’nalishli bo’lsa, $\overline{AB} = \vec{a}$ va $\overline{CD} = \vec{b}$ lar bir xil (qarama-qarshi) yo’nalishli deb aytiladi.

Agar $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ lar bir xil yo’nalishli bo’lsa $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ ko’rinishida, qarama – qarshi yo’nalishda bo’lsa $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$ ko’rinishda belgilaymiz.

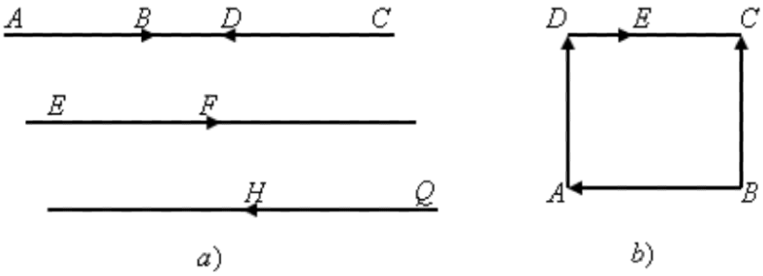
7 - ta’rif. Agar ikkita $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar bir to’g’ri chiziqda yoki parallel to’g’ri chiziqlarda yotsa, u holda bu vektorlarni kollinear vektorlar deyiladi.

8 – ta’rif. Agar quyidagi shartlar o’rinli bo’lsa:

1) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning modullari teng ;

2) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yo'nalishlari bir xil bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni teng vektorlar deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ ko'rinishida yoziladi.

1. Agar uchta vektor bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotsa, u holda bunday vektorlarni komplanar vektorlar deyiladi.



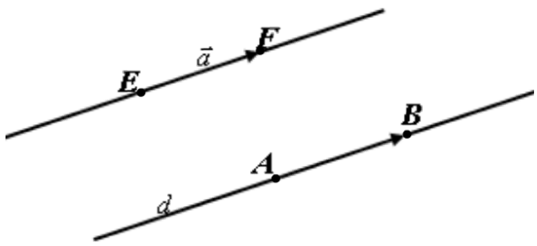
3-chizma

3-chizmada parallel to'g'ri chiziqlarda va *ABCD* kvadrat tomonlarida yotuvchi vektorlar ko'rsatilgan: 1) bularning qaysi juftlari bir xil yo'nalishga va qaysi juftlari qarama-qarshi yo'nalishga ega, 2) qaysi juftlari kollinear bo'ladi, 3) qaysi juftlari teng, qaysi juftlari teng emas.

Vektorlar ustidagi chiziqli amallar

Tekislikda $\vec{a} = \overrightarrow{EF}$ va A nuqta berilgan bo'lsin. *A*nuqtadan *EF* to'g'ri chiziqqa parallel *d* to'g'ri chiziq o'tkazamiz. (4-chizma)

A nuqtadan ko'rsatilgan yo'nalishda $\vec{a}$ vektor uzunligini o'lchab qo'yib *B* nuqtani topamiz. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Shunday qilib $\vec{a}$ ni *A* nuqtadan qo'ydik, ya'ni ko'chirdik.



4-chizma

9-Ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi deb, ixtiyoriy *A* nuqtadan $\vec{a}$ vektorni qo'yib, uning oxiri *B* nuqtaga $\vec{b}$ vektorni qo'yganda, boshi

$\vec{a}$ vektorning boshi A nuqtada oxiri $\vec{b}$ vektorning oxiri C nuqtada bo’lgan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi.

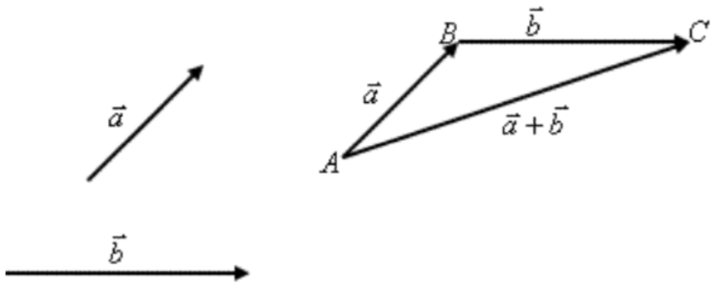
$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig’indisi $\vec{a}+\vec{b}$ kabi belgilanadi. (5- chizma)

Vektorlarni qo’shish ta’rifidan istalgan A ,Bva Cuchta nuqta uchun

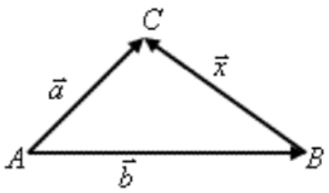
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

tenglik o’rinli bo’ladi. Bu tenglikni vektorlarni qo’shishning uchburchak qoidasi deyilADI.

10 - Ta’rif. $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, shunday $\vec{x}$ vektorgaa ytiladiki, ular chun



5-chizma



6-chizma

$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$ tenglik o’rinli bo’ladi. Uholda $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$.(6- chizma)

Ikkita vektorning ayirmasi hamma vaqt mavjud va bir qiymatli aniqlanishini isbotlash mumkin.

11.Ta’rif. $\vec{a}\neq\vec{0}$ vektorning $\alpha\in R$ songa ko’paytmasi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{p}$ ga aytiladi va $\vec{p}$ = $\alpha\cdot\vec{a}$ ko’rinishda yoziladi.

1) $|\vec{p}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|$;

2) $\vec{p}$ vektor $\vec{a}$ ga kollinear.

3) Agar α >0 bo’lsa $\vec{p}$ va $\vec{a}$ vektorlarbirxilyo’nalgan, agar α <0 bo’lsa, $\vec{p}$ va $\vec{a}$ vektorlarqarama- qarshiyo’nalganbo’ladi[2].

[2] College Geometry.Csaba Vincze and Lasrlo Kozma. March 27, 2014 197-198 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

1.1-teorema.Vektorlarni qo’shish va songa ko’paytirish quyidagi xossalarga ega.

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (qo’shishga nisbatan kommutativ)

2°. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (qo’shishga nisbatan assotsiativ)

3°. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun shunday $\vec{0}$ vektor mavjudki ular uchun: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

4°. Har bir $\vec{a}$ vektor uchun shunday - $\vec{a}$ vektor mavjudki ular uchun:

$\vec{a}$ + (-$\vec{a}$)=$\vec{0}$ (bunda -$\vec{a}$ ni $\vec{a}$ ga qarama-qarshi vektor deyiladi).

5°. Itiyoriy ikki haqiqiy $\alpha,\ \beta$ son va ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun:
$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\,\vec{a}$

6°. Ixtiyoriy ikki haqiqiy $\alpha,\ \beta$ son va ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun: $(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})$

7°.Ixtiyoriy α haqiqiy son va ixtiyoriy $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar uchun:
$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\,\vec{b}$

8^0. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot 1=\vec{a}$

Isbot. 1, 2 xossalarning isbotini 7, 8 chizmalardan ko’rish mumkin.

3^0 va 8^0 xossalar ravshan. 4^0 ga qaraylik. Agar $\vec{a}=\overrightarrow{MN}$ bo’lsa, -$\vec{a}$ sifatida $\overrightarrow{NM}$ ni olish mumkin. Vektorlarni qo’shish ta’rifiga asosan

$\vec{a}$ +(-$\vec{a}$)= $\overrightarrow{MN}$ +$\overrightarrow{NM}$ = $\overrightarrow{MM}$ = $\vec{0}$

5^0, 6^0, 7^0 xossalarni talabalar mustaqil ish sifatida o’rganadi.

Vektorlarning chiziqli bog’liqligi

Ixtiyoriy $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...\vec{a}_n$ (6.1) vektorlar sistemasi va $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\alpha_n$ haqiqiy sonlar berilgan bo’lsin.

$$\vec{p}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n \qquad (6.2)$$

vektorni berilgan (6.1) vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi. Bunda $\vec{p}$ vektor (3.1) vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalangan deyiladi, $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\alpha_n$ sonlar chiziqli kombinatsiya koeffitsentlari deyiladi.

Ta’rif.Agar koeffitsentlarning kamida bittasi noldan farqli bo’lganda

$$\vec{p}=0 \qquad (6.3)$$

bo’lsa, u holda (6.1) vektorlar sistemasi chiziqli bog’liq deyiladi.

Agar (6.3) tenglik $\alpha_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_n$ sonlarning hammasi nolga teng bo’lgandagina o’rinli bo’lsa, (3.1) vektorlar sistemasi chiziqli erkli deyiladi.

1.2-teorema.Agar (6.1) vektorlar sistemasining biror vektori nol vektor bo’lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bog’liq bo’ladi.

Isbot. Faraz qilaylik $\vec{a}_k = \vec{0}$ bo’lsin, u holda

$\alpha_k \neq 0, \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{k+1} = ... = \alpha_n = 0$, sonlar uchun

$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ munosabat o’rinli bo’ladi. Demak, ta’rifga asosan (6.1) vektorlar sistemasi chiziqli bog’liq.

Quyidagi teoremalarni talabalar o’zlari isbotlasin.

1.2-teorema. Agar (6.1) vektorlar sistemasi chiziqli bog’liq bo’lsa, sistemaning kamida bitta vektori uning qolgan vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi.

1.3-teorema. Ikkita vektor chiziqli bog’liq bo’lishi uchun ularning kollinear bo’lishi zarur va etarli.

1.4-teorema.Uchta vektor chiziqli bog’liq bo’lishi uchun ularning komplanar bo’lishi zarur va etarli.

Vektor fazo va bazis

Fazodagi barcha vektorlar to’plamini V bilan belgilaymiz, unda vektorni qo’shish va ayirish, vektorni songa ko’paytirish amallari aniqlangan.

V vektorlar to’plami 1.1-teoremada aytilgan sakkizta xossani qanoatlantirsa, u holda V vektorlar to’plamini vektor fazo yoki chiziqli fazo deyiladi.

1. Vektor fazoning bazisi

Vektor fazoda ma’lum tartibda olingan chiziqli erkli vektorlar

$$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \qquad (6.4)$$

berilgan bo’lsin.

Ta’rif. Vektor fazoning har bir vektori (6.1) vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalansa, (6.1) sistema vektor fazo bazisi deyiladi.

Ya’ni $\forall\vec{a} \in V, \quad \vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_n\vec{e}_n$

Ta’rif. Agar bazis vektorlarning har bir vektori birlik vektor bo’lib, ularning har ikkitasi o’zaro perpendikulyar bo’lsa, bunday bazisni ortogonal bazis deyiladi.

Bazis vektorlar soni vektor fazoning o’lchovi deyiladi.

2.Vektorlarning berilgan bazisga nisbatan koordinatalari va ularning xossalari.

V_3 uch o’lchovli chiziqli fazo va uning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis vektorlari berilgan bo’lsin, u holda ta’rifga ko’ra bu fazoning har bir $a \in V_3$ vektorini

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \qquad (6.5)$$

ko’rinishda yozish mumkin. $x, y, z \in R$

(6.5) ifodani $\vec{a}$ ning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis vektorlar bo’yicha yoyilmasi deyiladi.

2.1-teorema.Vektor fazoning ixtiyoriy vektori tanlab olingan bazis vektorlarga nisbatan yagona yoyilmaga ega.

Isbot.Faraz qilaylik, $\vec{a}$ vector bazis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar bo’yicha

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \qquad (6.6)$$

yoyilmadan tashqari, ikkinchi bir

$$\vec{a} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3 \qquad (6.7)$$

yoyilmaga ham ega bo’lsin. (6.6) tenglikdan (6.7) tenglikni hadlab ayirib quyidagiga ega bo’lamiz $(x - x')\vec{e}_1 + (y - y')\vec{e}_2 + (z - z')\vec{e}_3 = \vec{0}$.

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar chiziqli erkli bo’lgani uchun: $x - x' = 0,\ y - y' = 0,\ z - z' = 0$. Bundan $x = x',\ y = y',\ z = z'$ demak, yoyilma yagona.

(6.7) yoyilmadagi x, y, z haqiqiy sonlar $\vec{a}$ vektorning $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ bazis vektorlarga nisbatan koordinatalari deyiladi va $\vec{a}(x, y, z)$ ko’rinishda yoziladi. Shunday qilib $\vec{a}(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3$

Natija. Nol vektorning har qanday bazisga nisbatan koordinatalari nolga teng: $\vec{0}$ (0, 0, 0).

V_3 vektor fazoda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o’zining bazis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ vektorlariga nisbatan ushbu koordinatalarga ega bo’lsin:

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \vec{a} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$$

$$\vec{b}(x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \vec{b} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3$$

1. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni qo'shamiz (ayiramiz).

$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3) \pm (x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3)$

Bu tenglikdan vektorlarni qo'shish (ayirish) xossalariga ko'ra

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2)\vec{e}_1 + (y_1 \pm y_2)\vec{e}_2 + (z_1 \pm z_2)\vec{e}_3 .$$

Bundan $(\vec{a} \pm \vec{b})[(x_1 \pm x_2),(y_1 \pm y_2),(z_1 \pm z_2)]$.

Demak, ikki vektor yig'indisining (ayirmasining) koordinatalari qo'shiluvchi (ayriluvchi) vektorlar mos koordinatalarning yig'indisidan (ayirmasidan) iborat.

2. $\vec{a}$ ning λ songa ko'paytmasining, ya'ni $\vec{p} = \lambda\vec{a}$ vektorning koordinatalari

$$\vec{p} = \lambda\vec{a}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \qquad \text{bo'ladi.}$$

Masala: ABCD tetraedrning qirralaridan iborat $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ larni bazis vektor deb olib, $\overrightarrow{BC}$ ning shu vektorga nisbatan koordinatalarini toping.

Yechish $\overrightarrow{AB} = e_1$, $\overrightarrow{AC} = e_2$ va $\overrightarrow{AD} = e_3$ belgilaymiz.

$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{e}_2 - \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (-1)\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3$ $\overrightarrow{BC}\ (-1;\ 1;\ 0)$.

Misollar. $\vec{a}(3,\ -2,\ 1)$, $\vec{b}(-1,\ 0,\ -2)$ va $\vec{c}(1,\ 2,\ 0)$ vektorlar berilgan. $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $3\vec{a}$, $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{c}$ vektorlarning koordinatalarini aniqlang.

Yechish $\vec{a} + \vec{b} = (3 + (-1));\ \ (-2) + 0;\ \ (\vec{a} + \vec{b})(2;\ -2;\ -1);$ $\vec{b} - \vec{c}$ vektor koordinatalar $(\vec{b} - \vec{c})(-2;\ -2;\ -2);$ $3\vec{a}(3;\ -2;\ 1) = \vec{a}(9;\ -6;\ 3);$

$\vec{p} = (\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{c})(3 - \frac{1}{2} - 3;\ -2 + \frac{1}{2}\cdot 0 - 3\cdot 2;\ 1 + \frac{1}{2}(-1) - 3\cdot 0)$

bundan $\vec{p}(-\frac{1}{2},\ -8,\ 0)$

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar

1. Vektor tushunchasiga ta'rif bering.
2. Vektorlar ustida chiziqli amallarni tushuntiring.
3. Koordinatasi bilan berilgan vektorlar ustida chiziqli amallarni tushuntiring.
4. Vektor fazo aksiomalari ayting.

Vektorlarning skalyar ko`paytmasi

Reja:

1.Vektorlarning skalyar ko`paytmasi.

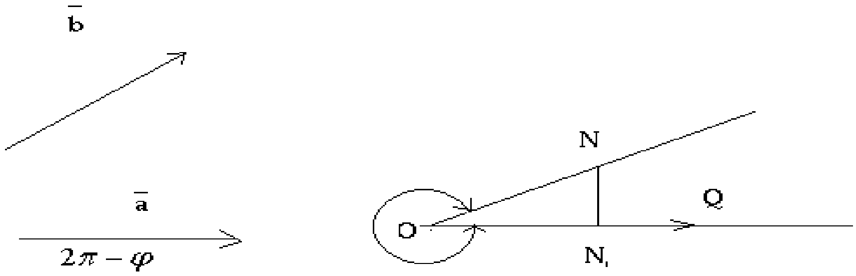
2.Vektorlarning skalyar ko`paytmasining xossalari.

3.Koordinatasi bilan berilgan vektorlarning skalyar ko`paytmasi.

Tayanch so'zlar: Vektorlarning skalyar ko`paytmasi, vektorlarning perprndikulyarlik sharti, ikki vertor orasidagi burchak.

Yuqorida vektorlar ustidagi chiziqli amallar- vektorni qo'shish va ayirish, vektorlarni songa ko'paytirish amallari bilan tanishdik. Endi vektorlar ustidagi bajariladigan chiziqli bo'lmagan amal, ikki vektorning skalyar ko'paytirish amali bilan tanishamiz.

Fazoda (yoki tekislikda) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsin. O nuqtadan $\vec{a} = \overrightarrow{ON}$, $\vec{b} = \overrightarrow{ON}$ vektorlarni qo'yamiz.



7- chizma

OQN nuqtalar orqali aniqlangan tekislikda, OQ va ON nurlar yordamida ikkita burchak aniqlanadi, bulardan biri φ ikkinchisi $2\pi - \varphi$.

Bu burchaklarning eng kichigini $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deb aytiladi va $(\vec{a}\ \vec{b}) = \varphi$ ko'rinishda belgilaymiz.

Tarif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusini ko'paytirishdan hosil bo'lgan son bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb aytiladi va $\vec{a}\cdot\vec{b}$ yoki $(\vec{a}\vec{b})$ ko'rinishida yoziladi[3].

Ta'rifga ko'ra $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$ (7.1)

Misol. $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4$ bo'lib, $\varphi=60^0$ bo'lsa, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ni toping.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi=3\cdot4\cos60^0=3\cdot4\cdot\frac{1}{2}6.$$

Natija. Nol vektorning har qanday vektorga skalyar ko'paytmasi nolga teng.

Skalyar ko'paytma xossalari

1^0. Ixtiyoriy ikkita vektor uchun: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2^0. Ixtiyoriy uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar uchun $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$

3^0. Ixtiyoriy ikkita $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar va ixtiyoriy haqiqiy son uchun: $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

4^0. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $\vec{a}\,\vec{a}=|\vec{a}|^2$

$\vec{a}\,\vec{a}$ coni $\vec{a}$ vektorning skalyar kvadrati deyiladi. $\vec{a}$ bilan belgilanadi. $\sqrt{\vec{a}^2}$ soni $\vec{a}$ vektorning uzunligi deyiladi va $|\vec{a}|$ bilan belgilanadi.

5^0. Agar $\vec{a}=0$ bo'lsa, $\vec{a}^2=0$.

Isbot. 1^0-xossani isbotlaylik.

Ta'rifga ko'ra $\begin{matrix}\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})\\ \vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{b}\wedge\vec{a})\end{matrix}$.

Kosinus juft funktsiya ekanini e'tiborga olsak, u holda $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

3^0-xossa, skalyar ko'paytma ta'rifiga ko'ra $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=|\lambda\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\lambda\vec{a},\vec{b})$, lekin $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ va $\cos(\lambda\vec{a},\vec{b})=\cos(\vec{a}\,\vec{b})$. Shuning uchun $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

4^0-xossa skalyar ko'paytma ta'rifdan

$$\vec{a}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{a})=|\vec{a}|^2\cos0^0=|\vec{a}| \qquad |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}.$$

---

[3] College Geometry.Csaba Vincze and Lasrlo Kozma. March 27, 2014 200-201 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar perpendikulyar bo'lsa, skalyar ko'paytma nolga teng:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 0 \qquad (7.2)$$

Buning isboti bevosita ta'rifdan kelib chiqadi.

Ortanormallangan $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ bazis uchun quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi

$$\vec{e}_i\,\vec{e}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3 \qquad (7.3)$$

Haqiqatan, skalyar ko'paytma ta'rifidan

$$\vec{e}_i\,\vec{e}_j = |\vec{e}_i|\,|\vec{e}_j|\cos(\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j) = 1 \cdot 1 \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Xususiy holda

$$\vec{e}_i\,\vec{e}_j = |\vec{e}_i|^2 = 1 \qquad (7.4)$$

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning skalyar ko'paytmasi

Uch o'lchovli vektor fazoda ortonormal bazis $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ berilgan bo'lib bu bazisga nisbatan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar koordinatasi bilan berilgab bo'lsin, $\vec{a}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{b}(x_2,\ y_2,\ z_2)$

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$$
$$\vec{b} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini hisoblashda yuqoridagi munosabatlarni e'tiborga olsak, quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3) \cdot (x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Demak, koordinatalari bilan berilgan ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi bu vektorlarning mos koordinatalari ko'paytmasining yig'indisiga teng. Ya'ni:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \qquad (7.5)$$

Natijalar. 1. $\vec{a}(x,\ y,\ z)$ vektor uzunligi

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}} \qquad (7.6)$$

2. Ikki $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakni hisoblash formulasiga ko'ra

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \qquad (7.7)$$

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor koordinatalar bilan berilgan bo'lsa, bu vektorlar orasidagi burchak ushbu formula bilan aniqlanadi.

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (7.8)$$

1-misol. $\vec{a}(1,\ 2,\ 3)$ $\vec{b}(3,\ 1,\ -3)$ $\vec{c}(2,\ 0,\ -2)$ vektorlarning qaysi jufti perpendikulyar?

Yechish $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ skalyar ko'paytmalarini tekshiramiz:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-3) = -4$ $\quad \vec{a}\cdot\vec{c} = 2 + 0 - 4 = -2$ $\quad \vec{b}\cdot\vec{c} = 6 + 0 + 6 = 12$

Bundan $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar

1.Vektorlarning skalyar ko`paytmasini ta'riflang.

2.Vektorlarning skalyar ko`paytmasining xossalarini ayting.

3.Koordinatasi bilan berilgan vektorlarning skalyar ko`paytmasini ta'riflang.

4. Ikki vektor orasidagi burchakni qanday topiladi?

Vektorlarning vektor va aralash ko`paytmasi

Reja:

1.Ikki vektorning vektor ko'paytmasi va uning xossalari.

2. Ikki vektorning vektor ko'paytmasining geometrik ma'nosi.

3.Uch vektorning aralash ko'paytmasi va uning xossalari.

4. Uch vektorning aralash ko'paytmasining geometrik ma'nosi.

Tayanch so'zlar: Ikki vektorning vektor ko'paytmasi, uch vektorning aralash ko'paytmasi, parallelogramm yuzi, tetraedr xajmi.

1. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi.

Ta'rif: $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi deb, quyidagi uchta shartni qanoatlantiruvchi $\bar{p}$ vektorga aytiladi[4]:

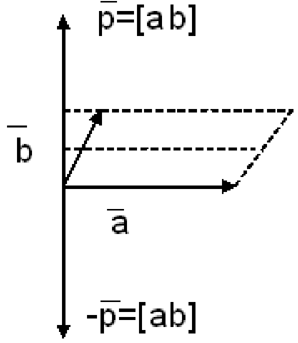
1. $|\bar{p}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin(\bar{a};\wedge\bar{b})$

[4] College Geometry.Csaba Vincze and Lasrlo Kozma. March 27, 2014 201-202 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

2. $\overline{p} \perp \overline{b}$

3. $\overline{a}, \overline{b}, \overline{p}$ vektorlar umumiy boshga keltirilib, $\overline{p}$ uchidan $\overline{a}, \overline{b}$ vektorlar yotgan tekislikka qaraganda $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ tomonga qarab eng qisqa yo'l bilan burilish soat mili harakatiga teskari bo'lsin.

Ikki vektorning vector ko'paytmasi $\overline{p} = [\overline{a}, \overline{b}]$ ko'rinishda belgilanadi.



8- chizma

Ta'rifda keltirilgan shartlarning geometrik ma'nosini aniqlaylik.

1-shart. $\overline{p}$ ning uzunligi $\overline{a}$ va $\overline{b}$ larga qurilgan parallelogramm yuzi necha kvadrat birlik bo'lsa, shuncha uzunlik birligiga teng, chunki $|\overline{a}|\ |\overline{b}|$ sin ($\overline{a}$;^$\overline{b}$) parallelogram yuzidir.

2-shart. Vektor ko'paytma (natija) $\overline{a}$ va $\overline{b}$ lar bilan aniqlanadigan tekislikka perpendikulyar ekanligini bildiradi.

3-shart. Vektor ko'paytmaning yo'nalishini aniqlaydi.

Ikki vektorning vektor ko'paytmasi quyidagi xossalarga ega:

1^0. $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar parallel bo'lsin, ya'ni $\overline{a} // \overline{b}$ bo'lsa, yoki birortasi nol vektor bo'lsa, $\overline{a} \wedge \overline{b} = 0^0$ yoki $\overline{a} \wedge \overline{b} = 180^0$ bo'lib, sin ($\overline{a} \wedge \overline{b}$)=0 bo'lib, $|\overline{p}|=0 \Rightarrow$ $\overline{p}\ [\overline{a}, \overline{b}]=0$ bo'ladi.

2^0. $[\overline{a}, \overline{b}]$= - $[\overline{b}, \overline{a}]$, ya'ni vektor ko'paytma antikommutativdir, $|\overline{p}|$= $|-\overline{p}|$ 1- 2-shartlarga asosan $|[\overline{a}, \overline{b}]|$= $|-[\overline{b}, \overline{a}]|$ bo'lib, hosil bo'lgan vektorlarning uzunliklari teng va ikkalasi ham bitta tekislikka perpendikulyar ekanini bildiradi. Yo'nalishlari esa 3- shartga asosan qarama-qarshi bo'ladi.

3^0. $[(\overline{a}+\overline{b}), \overline{c}] = [\overline{a}, \overline{c}] + [\overline{b}, \overline{c}]$ qo'shishga nisbatan taqsimot qonuniga bo'ysunadi. $[\overline{c}, (\overline{a}+\overline{b})] = [\overline{c}, \overline{a}] + [\overline{c}, \overline{b}]$.

4^0. $\forall\alpha\in R$ uchun $[\lambda\bar{a},\bar{b}]=\lambda\,[\bar{a},\bar{b}]=[\bar{a},\lambda\bar{b}]$

Haqiqatan $[\lambda\bar{a},\bar{b}]$ va $\lambda\,[\bar{a},\bar{b}]$ vektorlarning modullari teng bo'lib, yo'nalishlari esa $\lambda>0$ bo'lganda $[\bar{a},\bar{b}]$ vektor bilan bir xil, $\lambda<0$ bo'lganda esa $[\bar{a},\bar{b}]$ ning yo'nalishiga qarama- qarshi bo'ladi.

Endi dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan berilgan vektorlarni vektor ko'paytmasini qaraylik. Dastlab bazis vekltorlarni vektor ko'paytmasini qaraylik.

$[\bar{i},\bar{i}]=0,\ [\bar{j},\bar{j}]=0,\ [\bar{k},\bar{k}]=0$ (1) ta'rifga ko'ra .

$\left|[\bar{i},\bar{j}]\right|=|\bar{i}||\bar{j}|\sin 90^0=1*1*1=1,\quad \bar{i}\perp\bar{k},\ \bar{j}\perp\bar{k}$ ekanligidan $[\bar{i},\bar{j}]=\bar{k}$

Shunga o'xshash $\left.\begin{aligned}&[\bar{k},\bar{i}]=\bar{j},[\bar{j},\bar{k}]=\bar{i}\quad bo'lib,\\&[\bar{j},\bar{i}]=-\bar{k},[\bar{k},\bar{j}]=-\bar{i},[\bar{i},\bar{k}]=-\bar{j}\ bo'ladi.\end{aligned}\right\}$ (2)

Koordinatalari bilan berilgan $\bar{a}(x_1;y_1;z_1)$ va $\bar{b}(x_2;y_2;z_2)$ vektorlarning vektor ko'paytmasini ko'rib o'taylik.

$$\bar{a}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k},\quad \bar{b}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$$

$[\bar{a},\bar{b}]=[x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k},\ x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}]=x_1x_2\,[\bar{i},\bar{i}]+x_1y_2\,[\bar{i},\bar{j}]+x_1z_2\,[\bar{i},\bar{k}]+y_1x_2$
$[\bar{j},\bar{i}]+y_1y_2\,[\bar{j},\bar{j}]+y_1z_2\,[\bar{j},\bar{k}]+z_1x_2\,[\bar{k},\bar{i}]+z_1y_2\,[\bar{k},\bar{j}]+z_1z_2\,[\bar{k},\bar{k}]=$
$=0+x_1y_2\bar{k}-x_1z_2\bar{j}-y_1x_2\bar{k}+0+y_1z_2\bar{i}+z_1x_2\bar{j}-z_1y_2\bar{i}+0=\bar{i}(\ y_1z_2-z_1y_2)+\bar{j}(\ z_1x_2-x_1z_2)+\bar{k}($

$$x_1y_2-x_2y_1)=\bar{i}\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}+\bar{j}\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

Demak, $[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$ ifoda koordinatalari bilan berilgan vektorlarni vektor ko'paytmasini beradi.

$[\bar{a},\bar{b}]\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)$ bu uning koordinatalari.

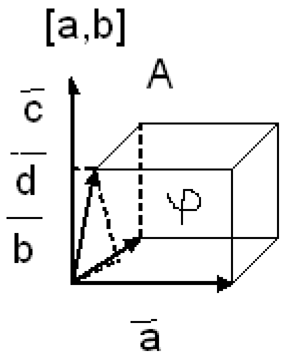
Vektor ko'paytma ta'rifidagi 3-shartni e'tiborga olsak,uchburchak yuzasini hisoblash formulasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|$.

2. Ych vektorning aralash ko'paytmasi.

Uchta $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

Ta’rif: Birinchi ikki vektorning vektor ko’paytmasidan iborat vektorlarni uchinchi vektorga skalyar ko’paytirishdan hosil qilingan son shu uch vektorning aralash ko’paytmasi $\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right)$ deb ataladi[5].

Faraz qilaylik $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vaktorlar O nuqtadan qo’yilgan bo’lib, komplanar bo’lmasin va o’ng uchlikni hosil qilsin.



9- chizma

Qirralari shu vektorlardan iborat parallelepipedni yasasak, $\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|$ miqdor parallelepiped asosining yuzini beradi. So’ngra $\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right]*\bar{c}\right)$ skalyar ko’paytma ta’rifiga ko’ra $\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|*\left|\bar{c}\right|\cos\varphi;\ \varphi=\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\hat{}\ \bar{c}\right)$ va $\left|\bar{c}\right|\cos\varphi=H$ bo’lib, parallelepiped balandligiga teng. Demak, $\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right)$=S$_{as}$*H=$\pm\nu$ bo’lib, bu son parallelepiped hajmini aniqlaydi.

Faraz qilaylik, vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo’lsin, ya’ni

$$\bar{a}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k},\ \bar{b}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k},\ \bar{c}=x_3\bar{i}+y_3\bar{j}+z_3\bar{k}.$$

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$$

Demak, $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ vektorning koordinatalari:

$\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)$ bo’lib, buni $\bar{c}$ vektorga skalyar ko’paytirsak, mos koordinatalar ko’paytmalarining yig’indisiga teng bo’ladi, ya’ni :

[5] College Geometry.Csaba Vincze and Lasrlo Kozma. March 27, 2014 203-204 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

$$\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right)=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Hosil bo'lgan formula koordinatalari bilan berilgan uch vektorning aralash ko'paytmasini hisoblash formulalari bo'ladi.

Ma'lumki, tetraedrning hajmi tetraedrning bir uchudan chiqqan uchta qirrasiga qurilgan parallelepiped hajmining $\frac{1}{6}$ qismiga teng bo'lgani uchun uning hajmini quyidagi formula yordamida hisoblash mumkin

$$V_{tet}=\frac{1}{6}V_{par-d}=\frac{1}{6}\left(\left[\bar{a};\bar{b}\right],\bar{c}\right)$$

Uch vektorning aralash ko'paytmasi quyidagi xossalarga ega:

1^0. $\left(\left[\bar{a};\bar{b}\right],\bar{c}\right)=\left(\bar{a},\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right)=\left(\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right)=\left(\overline{c}\overline{a}\overline{b}\right)=\left(\overline{b}\overline{c}\overline{a}\right)=-\left(\overline{b}\overline{a}\overline{c}\right)=-\left(\overline{a}\overline{c}\overline{b}\right)=-\left(\overline{c}\overline{b}\overline{a}\right)$. Haqiqatan, $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$; $\bar{c},\bar{a},\bar{b}$; $\bar{b},\bar{c},\bar{a}$ vektorlarga qurilgan parallelepiped hajmlari qiymati teng.

2^0 . $\forall\alpha\in R$ uchun $(\lambda\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\lambda(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$

3^0. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ komplanar bo'lsa, ya'ni bir tekislikda yotsa, u holda $\left(\left[\overline{a}\overline{b}\right]\overline{c}\right)=0$ bo'ladi. Demak, uchta vektorning komplanarlik sharti $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=0$ va aksincha.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar

1.Ikki vektorning vektor ko'paytmasini ta'riflang.

2. Ikki vektorning vektor ko'paytmasining xossalarini ayting.

3. Ikki vektorning vektor ko'paytmasining geometrik ma'nosi qanday?

4.Uch vektorning aralash ko'paytmasini ta'riflang.

5. Uch vektorning aralash ko'paytmasinining xossalarini ayting.

6. Uch vektorning aralash ko'paytmasining geometrik ma'nosi qanday?

7. Uch vektorning komplanarlik sharti qanday?

Tekislikda va fazoda koordinatalar sistemasi

Reja:

1.Tekislikda affin koordinatalar sistemasi.

2. Tekislikda dekart koordinatalar sistemasi.

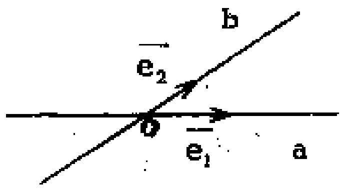
3. Tekislikda qutb koordinatalar sistemasi.

4. Fazoda affin koordinatalar sistemasi.

5. Fazoda dekart koordinatalar sistemasi.

Tayanch so'zlar: affin koordinatalar sistemasi, dekart koordinatalar sistemasi, Kesmani berilgan nisbatda bo'luvchi nuqta, ikki nuqta orasidagi masofa.

Tekislikda O nuqtadan qo'yilgan ikkita $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ bazis vektorlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlar orqali o'tuvchi a va b to'g'ri chiziqlarni olamiz ($a \cap b = 0$).



10- chizma

Ta'rif. Musbat yo'nalishlari mos ravishda $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ vektorlar bilan aniqlanuvchi a va b to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lgan sistema tekislikdagi affin koordinatalar sistemasi deyiladi va (0, $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$) ko'rinishda belgilanadi. O nuqta koordinatalar boshi, $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ vektorlar koordinata vektorlari deyiladi; a to'g'ri chiziqni Ox bilan belgilab abtsissalar o'qi, b to'g'ri chiziqni esa Oy bilan belgilab ordinatalar o'qi deb ataladi.

Tekislikda (0, $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$) affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Shu tekislikda birorta N nuqtani olaylik ON vektorni N nuqtaning *radius* vektori deyiladi.

$\overrightarrow{ON}$ vektorni hamma vaqt bazis vektorlari bo'yicha yoyib yozish mumkin:

$$\overrightarrow{ON} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \qquad (9.1)$$

$x,\ y \in R.$ $x,\ y$ sonlar ON radius vektorning koordinatalari deyiladi va

$\overrightarrow{ON}(x;\ y)$ ko'rinishda yoziladi.

Radius vektorning koordinatalari N nuqtaning ham koordinatalari deyiladi va N(x, y) ko'rinishda belgilanadi. Bunda x soni N nuqtaning abtsissasi yoki birinchi koordinatasi, y son esa N nuqtaning ordinatasi yoki ikkinchi koordinatasi deyiladi.

Xullas, tekislikda affin koordinatalar sistemasi berilsa, istalgan N nuqtaga uning koordinatalari bo'lgan bir juft $x,\ y \in R^2 = RxR$ sonlar mos keladi, aksincha, ma'lum tartibda olingan $x, y \in R$ sonlariga, koordinatalari shu sonlardan iborat bitta N nuqta mos keladi.

Haqiqatan, tekislikda (0, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$) affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin abtsissalar o'qiga O nuqtadan boshlab $\overrightarrow{ON_1} = x\vec{e}_1$ vektorni, ordinatalar o'qiga esa $\overrightarrow{ON_2} = y\vec{e}_2$ vektorlarni qo'yib, N_1 va N_2 nuqtalardan Oy va Ox o'qlarga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz, ularning kesishgan nuqtasi izlanayotgan N nuqta bo'ladi, chunki $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON_1} + \overrightarrow{ON_2} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

Shunday qilib, (0, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$) ga nisbatan

$$N(x,\ y) \Leftrightarrow \overrightarrow{ON} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \qquad (9.2)$$

Agar x=0 bo'lsa $\overrightarrow{ON} = y\vec{e}_2 \Rightarrow \overrightarrow{ON} \parallel x\vec{e}_1 \Rightarrow N \in oy$

Agar y=0 bo'lsa $N \in ox$, ya'ni *ox* o'qida yotadi.

Shunday qilib, abtsissa o'qida yotgan nuqtaning koordinatalari (x,0), ordinata o'qida yotgan nuqtaning koordinatalar (0,y) bo'ladi. Koordinatalar boshining koordinatalari 0(0, 0) bo'ladi.

Koordinat o'qlari tekislikni to'rtta qismga ajratadi, bu har bir qismni chorak deyiladi.

M(x, y) nuqta koordinata o'qlarida yotmasa uning qaysi chorakda yotishini nuqta koordinatalarining ishorasiga qarab aniqlash mumkin.

1-masala. $\overrightarrow{AB}$ vektorlarining boshi A(x_1, y_1) va oxiri B(x_2, y_2) koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinatasini toping.

$$\overrightarrow{OA} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$$

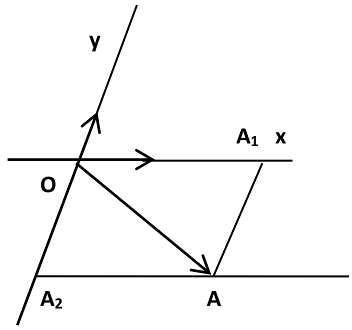
Yechish: $\overrightarrow{OB} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1)\vec{e}_1 - (y_2 - y_1)\vec{e}_2$ bundan

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$$

2 -misol. Affin koordinatalar sistemasiga nisbatan berilgan A(3, -3), B(0, 3), C(-2, 0) nuqtalarni yasang.

Yechish. A nuqtani yasash uchun $\overrightarrow{OA}=3\vec{e}_1-3\vec{e}_2$ vektorni yasaymiz.

Buning uchun 0 nuqtadan boshlab $\vec{e}_1$ vektorga kollinear $\overrightarrow{OA_1}=3\vec{e}_1$ vektorni, $\vec{e}_2$ kollinear $\overrightarrow{OA_2}=-3\vec{e}_2$ vektorlarni yasaymiz. Bu vektorlarning yig'indisini yasasak izlangan vektoriga ega bo'lamiz va A nuqta topiladi. Shu usulda qolgan nuqtalarni ham yasash mumkin.



11-chizma

Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.

Tekislikni A va B nuqtalar va $\lambda \neq -1$ haqiqiy son berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar $$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{NB} \qquad (9.3)$$
shart o'rinli bo'lsa, u holda N nuqta AB kesma berilgan λ nisbatda bo'ladi deyiladi.

λ sonni uchta A, B, N nuqtalarning oddiy nisbati deyiladi va λ =(AB, N) ko'rinishda yoziladi

Agar λ>0 bo'lsa, $\overrightarrow{AN}$ va $\overrightarrow{BN}$ vektorlar bir xil yo'nalgan bo'lib, $N \in \overrightarrow{AB}$ kesmada yotadi, agar λ<0 bo'lsa, $N \notin \overrightarrow{AB}$ bo'lib, $\overrightarrow{AN}$ va $\overrightarrow{BN}$ vektorlarning yo'nalishi har xil bo'ladi.

A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), N(x, y) nuqtalar berilgan bo'lsin. AB kesma berilgan λ nisbatda bo'luvchi N nuqtaning koordinatalarini topaylik.

$\overrightarrow{AN}(x-x_1,\ y-y_1)$, $\overrightarrow{NB}(x_2-x,\ y_2-y)$

(9.3) formuladan foydalanib yozamiz.

$x-x_1=\lambda(x_2-x_1)$

$y-y_1=\lambda(y_2-y_1)$

Bundan:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$
$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (9.4)$$

(9.4) formula berilgan kesmani λ nisbatda bo'luvchi nuqta koordinatalarini topish formulasi deb yuritiladi.

Agar $\lambda=1$ teng bo'lsa, N nuqta berilgan kesmani teng ikkiga bo'ladi. Ya'ni

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$
$$y=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (9.5)$$

(9.5) formula kesmaning o'rta nuqtasini topish formulasi deb yuritiladi.

To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi

Affin koordinatalar sistemasining $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ bazis vektorlari ortogonal bazisni tashkil qilsa, ya'ni $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$ bo'lsa, u holda hosil bo'gan sistema dekart koordinatalar sistemasi deb yuritiladi. Bunday koordinatalar sistemasi (o, i, j) ko'rinishida belgilanadi. Bu yerda $i^2=j^2=1$, ij=0.

Dekart koordinat sistemasi affin koordinatalar sistemasining xususiy holi bo'lgani uchun affin koordinatalar sistemasiga nisbatan o'rinli mulohazalar dekart koordinatalar sistemasida ham o'z kuchini saqlaydi. Ammo dekart koordinatalar sistemada o'rinli bo'lgan ba'zi mulohazalar affin koordinatalar sistemasida o'rinli bo'lavermaydi.

Tekislikda koordinatalari bilan berilgan $N_1(x_1,\ y_1)$ va $N_2(x_2,\ y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa $N_1N_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ formula orqali topiladi.

1-misol. Uchlari A(1,2), B(0,5), C(-2,3) nuqtalarda bo'lgan uchburchakning medianalari kesishgan nuqtasining koordinatasini toping.

Yechish AD mediana bo'lsin, u holda D(x, y) nuqta BC tomon o'rta nuqtasi bo'lib $x_D=-1$, $y_D=4$, D(-1, 4) bo'ladi.

Uchburchak medianalar kesishgan nuqtasi O(x, y) bo'lsin, u holda

$$\frac{AO}{OD} = \lambda = 2:1, \ \lambda = 2$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{1+2(-1)}{3} = -\frac{1}{3}$$

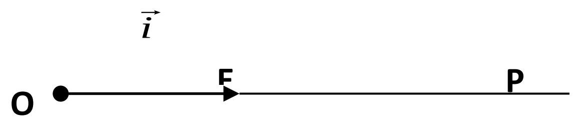
$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{2+2\cdot 4}{3} = \frac{10}{3}$$

Demak, $O(-\frac{1}{3}, \ \frac{10}{3})$.

Tekislikda qutb koordinatalar sistemasi

Geometriyada affin, to’g’ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi bilan bir qatorda qutb koordinatalar sistemasi ham qaraladi. Ko’plab tadqiqotlarda va egri chiziqning muhim sinflarini o’rganishda qutb koordinatalar sistemasidan foydalaniladi.

Yo’nalish tekislikda 0 nuqta va bu nuqtadan chiquvchi OP nur va OP nurda yotuvchi $\overrightarrow{OE} = \vec{i}$ birlik vektor berilgan bo’lsin (12- chizma).



12 - chizma

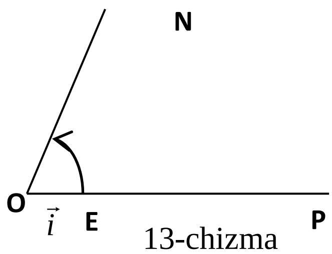
Hosil bo’lgan geometrik obraz qutb koordinatalar sistemasi deyiladi va (0, i) ko’rinishda belgilanadi.

O nuqtani qutb boshi, *OP* nur esa qutb o’qi deyiladi.

Tekislikda (0, i) qutb koordinatalar sistemasi va ixtiyoriy N nuqta berilgan bo’lsin, bu nuqtaning tekislikdagi vaziyatini ma’lum tartibda olingan ikkita son:

1) OE birlik kesma yordamida o’lchangan $\rho = |ON|$ masofa (13 - chizma).
2) OR nur ON nurning ustiga tushishi uchun burilishi kerak bo’lgan yo’nalishli $\varphi = (i \wedge ON)$ burchak bilan to’liq aniqlanadi.

ρ, N nuqtaning qutb radius φ esa N nuqtaning qutb burchagi deyiladi, ularni birgalikda N nuqtaning qutb koordinatalari deyiladi va (ρ, φ) ko'rinishda yoziladi. O nuqta uchun $\rho = 0$, φ - aniqlanmagan.



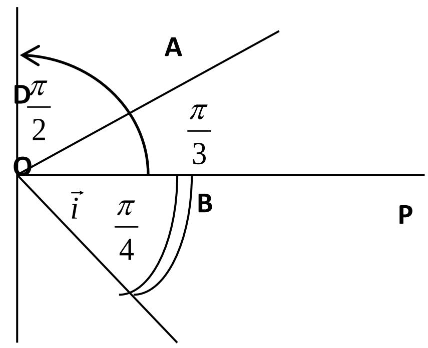
13-chizma

Agar $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ o'zgarsa, tekislikni har bir nuqtasi qutb koordinatalar bilan ta'minlanadi.

1-misol. $A(2;\ \frac{\pi}{3})$, $B(1;\ 0)$, $C(3;\ \frac{\pi}{4})$, $D(1;\ \frac{\pi}{2})$ nuqtalarni qutb koordinatalar sistemasiga nisbatan tasvirlang.

4- chizmada berilgan nuqtalar tasvirlangan.

Ravshanki, har qanday (ρ, φ) juft haqiqiy sonlar uchun tekislikda bitta nuqta mavjud bo'lib, bu sonlar shu nuqtaning koordinatalari bo'ladi. Ammo bir nuqtaning o'ziga cheksiz ko'p sonlar mos keladi. Chunki, N nuqtaning koordinatalari $\rho = a > 0,\ \ \varphi = \alpha$ bo'lsa, $\rho = a,\ \varphi = \alpha + 2\pi k$ (bu yerda k=0, 1…) juftlari ham shu N nuqtaning koordinatalari bo'ladi, chunki ON



14 - chizma

nur OR qutb o'qini α burchakka qadar burishdan hosil bo'ladi deb olaylik, u holda OR nurni $\varphi = \alpha \pm 2\pi k$ qadar burishdan ham o'sha nurning o'zini hosil qilish mumkin.

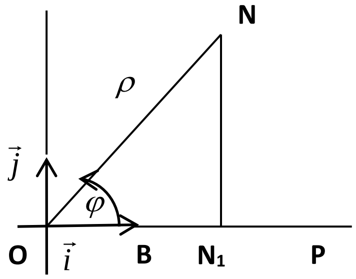
Nuqtaning qutb va dekart koordinatalari orasidagi bog'lanish.

Tekislikda $(0, \vec{i})$ qutb koordinatalar sistemasi berilgan. Koordinatalar boshi qutb boshi bilan, absissalar o'qining musbat qismi qutb o'qi bilan ustma-ust tushadigan musbat yo'nalishli (0, $\vec{i}$, $\vec{j}$) dekart reperini kiritamiz (5-chizma).

Tekislikdagi N nuqtaning qutb koordinatalar ρ, φ dekart koordinatalari x, y bo'lsin.

To'g'ri burchakli ONN_1 uchburchakdan

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \end{aligned} \qquad (9.6)$$



15-chizma

Nuqtaning qutb koordinatalari ma'lum bo'lsa, uning dekart koordinatalari (9.6) formuladan topiladi.

Agar N nuqtaning dekart koordinatalari ma'lum bo'lsa, uning qutb koordinatalarini ushbu

$$\begin{aligned} &\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = arctg\,\frac{y}{x}; \\ &\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned} \qquad (9.7)$$

formuladan topiladi.

N nuqtaning dekart koordinatalaridan qutb koordinatalariga o'tishda $tg\varphi = \frac{y}{x}$ formula qutb burchagini qiymatini to'liq aniqlamaydi, chunki buning uchun yana φ ning miqdori musbat yoki manfiy ekanligini ham bilish kerak. Odatda bu N nuqtaning qaysi chorakda joylashishiga qarab aniqlanadi. Masalan, (4.5) formulada x=3, y=3 bo'lsa, tgφ = 1 bo'lib, φ=45^0. Lekin, x=-3, y=-3 bo'lganda ham tgφ = 1 bo'lib, 45^0 emas, 135^0 bo'lishi kerak, chunki (-3; -3) nuqta uchinchi chorakda joylashgan φ burchakning qiymati va ishorasini cosφ, sinφ ga qarab aniqlash qulayroq.

Ikki nuqta orasidagi masofa.

Qutb koordinatalari bilan berilgan $N_1(\rho_1, \varphi_1)$ va $N_2(\rho_2, \varphi_2)$ nuqtalar orasidagi masofani hisoblash formulasini chiqaraylik.

Tekislikdagi N_1 va N_2 nuqtalarning dekart koordinatalari $N_1(x_1, y_1)$ va $N_2(x_2, y_2)$ bo'lsin. (9.7) formulaga ko'ra

$$\begin{matrix} x_1 = \rho_1 \cos\varphi_1 \\ y_1 = \rho_1 \sin\varphi_1 \end{matrix} \quad \text{va} \quad \begin{matrix} x_2 = \rho_2 \cos\varphi_2 \\ y_2 = \rho_2 \sin\varphi_2 \end{matrix}$$

U holda

$$N_1N_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(\rho_2\cos\varphi_2 - \rho_1\cos\varphi_1)^2 + (\rho_2\sin\varphi_2 - \rho_1\sin\varphi_1)^2} = \sqrt{\rho_1^{\ 2} + \rho_2^{\ 2} - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad (9.8)$$

(9.8) qutb koordinatalar bilan ikki nuqta orasidagi masofani hisoblash formulasi.

1-masala. Dekart koordinatalar sistemasida A(7, -7), N(-5, 12), P(3, 0) nuqtalar berilgan. Ularning qutb koordinatalarini toping?

Yechish Bu masalani yechishda (9.7) formuladan foydalanamiz.

$$A(7,\ -7),\ \ \rho = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = 7\sqrt{2} \qquad tg\varphi = \frac{-7}{7} = -1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$N(-5;\ 12),\ \ \rho = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13 \qquad tg\varphi = -\frac{12}{5}, \quad \varphi = arctg(-\frac{12}{5})$$

$$m(3;\ 0), \quad \rho = \sqrt{3^2} = 3 \qquad tg\varphi = \frac{0}{3} = 0, \quad \varphi = 0$$

2-masala. Uchlarini $A(5;\ \frac{\pi}{2}),\ B(8;\ \frac{5\pi}{6})$ va $C(3;\ \frac{7\pi}{6})$ nuqtalarda joylashgan uchburchakning muntazam ekanligini isbotlang.

Yechish Uchburchakning muntazam ekanligini isbotlash uchun AB=BC=AC ni isbotlash etarli. Buning uchun (9.8) formuladan

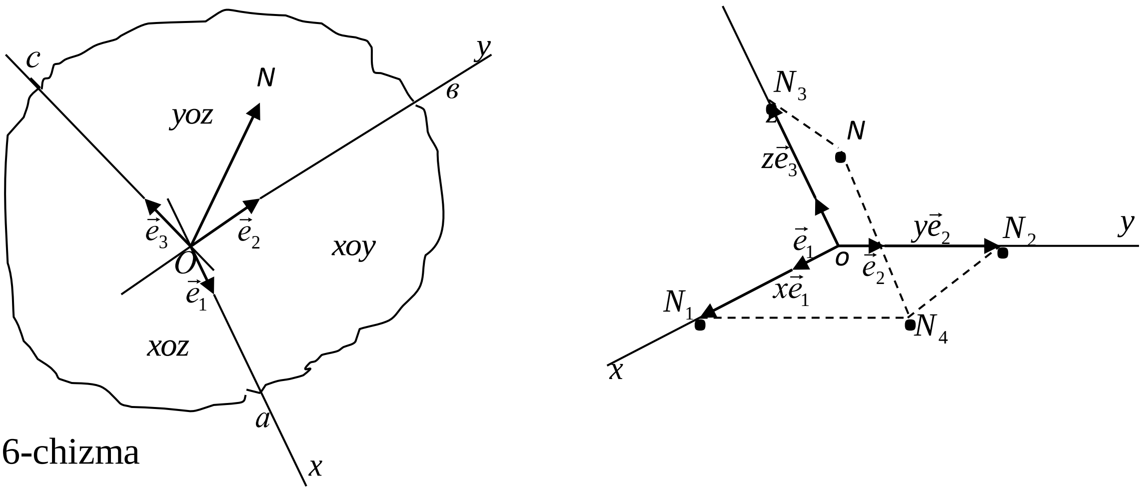
$$AB = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2\cdot5\cdot8\cdot\cos(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2})} = \sqrt{25 + 64 - 80\cdot\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{89 - 80\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$$

$$AC = \sqrt{5^2 + 3^2 - 2\cdot5\cdot3\cdot\cos(\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{2})} = \sqrt{25 + 9 - 30\cdot\cos(-\frac{2\pi}{3})} = \sqrt{25 - 30(-\frac{1}{2})} = \sqrt{49} = 7$$

$$BC = \sqrt{64 + 9 - 2\cdot8\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{73 - 24} = \sqrt{49} = 7$$

Demak, AB=AC=BC ekan, ABC uchburchak muntazam.

Fazoga koordinatalar sistemasi, tekislikdka qanday kiritilgan bo’lsa, shunday kiritiladi. Fazoning ixtiyoriy O nuqtasiga qo’yilgan uchta $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ bazis vektorlar berilgan’lsin .



16-chizma

Bu vektorlar orqali o’tuvchi a, b va c to’g’ri chiziqlarni olamiz ($a \cap b \cap c = 0$).

Ta’rif. Musbat yo’nalishlari mos ravishda $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ vektorlar bilan aniqlangan $a,$ b va c to’g’ri chiziqlardan iborat bo’lgan sistemani fazodagi affin koordinatalar

sistemasi deyiladi. $(O, \vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$ bilan belgilanadi.

O nuqtani koordinatalar boshi, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ vektorlarni koordinata vektorlari deyiladi. a to’g’ri chiziqni ox bilan belgilab absissalar o’qi, b to’g’ri chiziqni oy bilan belgilab ordinatalar o’qi, c to’g’ri chiziqni esa oz bilan belgilab aplikata o’qi deb ataymiz. Bu o’qlarning har ikkitasi bilan aniqlangan uchta $xoy,$ $xoz,$ yoz tekisliklarni koordinata tekisliklari deyiladi.

$(O, \vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$ - affin koordinatalar sistemasi, N - fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin. $\overrightarrow{ON}$ vektorni bazis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar yordamida yoyib yozish mumkin, ya’ni

$$\overrightarrow{ON} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \quad (9.9)$$ [6]

[6] College geometry, Csaba Vincze and Laszlo Kozma, 2014 Oxford University, 207 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

Bu erdagi x, y, z haqiqiy sonlar $\overrightarrow{ON}$ vektorning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazislarga nisbatan koordinatalari deyiladi va $\overrightarrow{ON}(x; y; z)$ ko'rinishda yoziladi. $\overrightarrow{ON}$ vektorning x, y, z koordinatalari N nuqtaning ham koordinatalari deyiladi. x soni N nuqtaning absissasi, y soni ordinatasi, z soni aplikatasi deyiladi va $N(x; y; z)$ ko'rinishda yoziladi.

Fazoda affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsa, u holda fazo nuqtalari to'plami bilan ma'lum tartibda olingan haqiqiy sonlar $(x, y, z) \in R^3$ uchliklari to'plami orasida biektiv moslik mavjud bo'ladi.

Agar $z = 0$ bo'lsa, u holda N nuqta xoy koordinata tekisligida yotadi, chunki $\overrightarrow{ON} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlar bir tekislikda yotadi. Shunga o'xshash $y = 0$ bo'lsa, N nuqta xoz tekisligida yotadi, $x = 0$ bo'lsa, N nuqta yoz tekisligida yotadi.

Agar $y = z = 0$ bo'lsa, u holda N nuqta absissa o'qida yotadi, agar $x = z = 0$ bo'lsa, u holda N nuqta ordinata o'qida, agar $x = y = 0$ bo'lsa, u holda N nuqta aplikata o'qida yotadi, agar $x = y = z = 0$ bo'lsa, u holda N nuqta koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushadi.

Agar N nuqtaning x, y, z koordinatalari berilgan bo'lsa, $(O, \vec{e}_1\, \vec{e}_2\, \vec{e}_3)$ affin koordinatalar sistemasiga nisbatan N nuqtaning fazodagi vaziyatini (8.8) formuladan foydalanib aniqlasa bo'ladi. Koordinatalar boshidan $\overrightarrow{ON_1} = x\vec{e}_1$ vektorni qo'yamiz, undan keyin $\overrightarrow{N_1N_4} = \overrightarrow{ON_2} = y\vec{e}_2$ vektorni qo'yamiz, oxirida $\overrightarrow{N_4N} = \overrightarrow{ON_3} = z\vec{e}_3$ vektorni qo'yamiz. Vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON_1} + \overrightarrow{N_1N_4} + \overrightarrow{N_1N} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Shunday qilib, N nuqta izlangan nuqta. ON_1N_4N siniq chiziqni koordinata siniq chizig'i deyiladi. Demak, fazodagi N nuqtani yasash uchun uning koordinata siniq chizig'ini yasash kifoya.

Uchta koordinata tekisligi birgalikda fazoni sakkiz qismga ajratadi, ularning har biri oktanta deb ataladi. Quyidagi jadvalda oktantalar va undagi koordinatalarning ishoralari belgilangan.

To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi.

Ikki nuqta orasidagi masofa

Agar affin koordinatalar sistemasining koordinata $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlari o'zaro ortogonal va birlik vektorlar bo'lsa, u holda bunday affin koordinatalar sistemasini to'g'ri burchakli dekart yoki qisqacha dekart koordinatalar sistemasi deyiladi.

Boshi O nuqtada bo'lgan bunday koordinatalar sistemasini $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ bilan belgilaymiz, bu erda $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1,\ \vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0$.

Bu to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasidan foydalanib, metrik masalalar echiladi.

1-masala. $\vec{a}(x; y; z)$ vektor uzunligini toping.

Echish. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ yozib olsak, u holda uning uzunligi

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (9.10)$$

ga teng bo'ladi.

2-masala. $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ va $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ vektorlar berilgan. Ular orasidagi burchak kosinusini toping.

Yechish. $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Vektorlarning skalyar ko'paytmasidan

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (9.11)$$

3-masala. $N_1(x_1; y_1; z_1)$, $N_2(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar berilgan. Bu nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. Bu nuqtalar orasidagi masofani $\rho(N_1, N_2)$ bilan belgilaymiz. $\overrightarrow{N_1N_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

$$\rho(N_1, N_2) = \left|\overrightarrow{N_1N_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (9.12)$$

4-masala. Uchlari $A(7,2,4)$, $B(4,-2,2)$, $C(6,-7,8)$, $D(9,-1,10)$ nuqtalarda bo'lgan to'rtburchakning kvadrat ekanligini isbotlang.

Isboti. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ vektorlarning uzunliklarining tengliklarini va $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ shartning o'rinli ekanligini ko'rsatish etarli.

$$\overrightarrow{AB}(-3,-6,-2),\ \overrightarrow{BC}(2,-3,6),\ \overrightarrow{CD}(3,6,2),\ \overrightarrow{AD}(2,-3,6).$$

Bundan $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AD}| = 49$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -6+18-12=0$, demak $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar

1.Tekislikda affin koordinatalar sistemasi qanday kiritiladi?

2. Tekislikda dekart koordinatalar sistemasi qanday kiritiladi?

3. Fazoda affin koordinatalar sistemasi qanday kiritiladi?

4. Fazoda dekart koordinatalar sistemasi qanday kiritiladi?

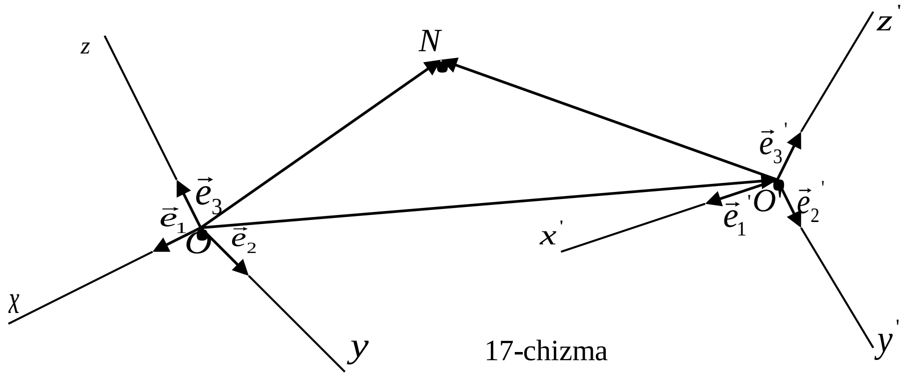
5. Kesmani berilgan nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini topish formulalari qanday?

6. Tekislikda qutb koordinatalar sistemasi qanday kiritiladi?

Tekislikda va fazoda nuqtaning koordinatalarini almashtirish

Fazoda ikkita $(O,\vec{e}_1\,\vec{e}_2\,\vec{e}_3)$-eski, $(O',\vec{e}\,'_1\,\vec{e}\,'_2\,\vec{e}\,'_3)$-yangi affin koordinatalar sistemalari berilgan bo'lsin. Fazoda ixtiyoriy N nuqtani olsak, uning eski sistemadagi x, y, z koordinatalari bilan, shu nuqtaning yangi sistemadagi x', y', z' koordinatalari orasidagi bog'lanishni aniqlash kerak bo'ladi. Yangi koordinatalar sistemasining boshi O' nuqta va koordinata vektorlari $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3$ eski sistemaga nisbatan berilgan bo'lsin, ya'ni:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OO'}(x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3,\\
&\vec{e}_1{}'(c_{11}, c_{21}, c_{31}) \Leftrightarrow \vec{e}_1{}' = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3,\\
&\vec{e}_2{}'(c_{12}, c_{22}, c_{32}) \Leftrightarrow \vec{e}_2{}' = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3,\\
&\vec{e}_3{}'(c_{13}, c_{23}, c_{33}) \Leftrightarrow \vec{e}_3{}' = c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3.
\end{aligned} \qquad (10.1)$$



17-chizma

Vektorlarni qo'shishdagi uchburchak qoidasiga ko'ra $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'N}$, shuning uchun (17-chizma)

$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x'\vec{e}_1' + y'\vec{e}_2' + z'\vec{e}_3' + x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3$, (10.2)

(7.12) dagi $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ va $\vec{e}'_3$ larning ifodalarini (7.13) ga qo'yib, o'ng va chap tomondagi mos koeffitsientlarni tenglashtirib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + x_0, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + y_0, \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + z_0. \end{aligned} \qquad (10.3)$$

N nuqtaning eski sistemasidagi koordinatalari x, y, z lar yangi sistemadagi x', y', z' koordinatalar orqali (5.3) formulalar orqali ifodalanadi. (10.3) formula nuqtaning affin koordinatalarini almashtirish formulasi deyiladi. Bu almashtirish koeffitsientlaridan

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \qquad (10.4)$$

matritsani $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ eski bazisdan $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ yangi bazisga o'tish matritsasi deyiladi. Bu matritsaning determinanti

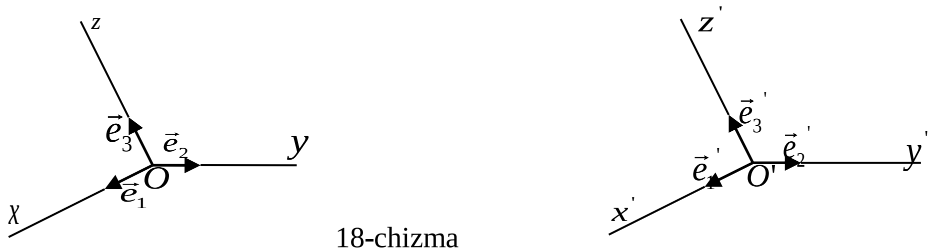
$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (10.5)$$

Agar $\Delta = 0$ bo'lsa, determinantning bitta yo'li qolgan yo'llari orqali chiziqli ifoda qilinadi. U holda, $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ va $\vec{e}'_3$ vektorlar komplanar bo'ladi, bundan esa $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ vektorlarning chiziqli bog'liqligi kelib chiqadi, bu esa zid natija.

$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ bo'lsa, u holda $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ bo'lib, N nuqtaning eski bazisga nisbatan koordinatalari ma'lum bo'lsa, uning yangi bazisga nisbatan koordinatalarini topish mumkin.

Xususiy hollar:

I hol. Affin koordinatalar sistemalarining boshlari turli nuqtalarda bo'lib, bazis vektorlari mos ravishda kollinear bo'lsin.



18-chizma

$$\begin{aligned} &c_{11} = 1,\ c_{21} = 0,\ c_{31} = 0, \\ &c_{12} = 0,\ c_{22} = 1,\ c_{32} = 0, \\ &c_{13} = 0,\ c_{23} = 0,\ c_{33} = 1, \end{aligned} \qquad (10.6)$$

(10.4) va (10.5) larga e'tibor bersak, ushbu

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0, \\ y &= y' + y_0, \\ z &= z' + z_0. \end{aligned} \qquad (10.7)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu formulani koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish formulasi deyiladi.

II hol. Eski va yangi sistemalarning koordinata boshlari bir nuqtada bo'lsin, ya'ni $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ bo'lsin, u holda (10.3) dan

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z', \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z', \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z'. \end{aligned} \qquad (10.8)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Nuqtaning dekart koordinatalarni almashtirish

Bir to'g'ri burchakli $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ koordinatalar sistemasidan ikkinchi dekart koordinatalar $(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ sistemasiga o'tish formulasi (9.3) ko'rinishda bo'ladi, chunki to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi affin koordinatalar sistemasining xususiy holi.

Bu formuladagi $c_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ koeffitsientlar $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ birlik vektorning $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortonormallangan bazisga nisbatan koordinatalari bo'ladi:

$$\vec{i}' = c_{11}\vec{i} + c_{21}\vec{j} + c_{31}\vec{k},$$
$$\vec{j}' = c_{12}\vec{i} + c_{22}\vec{j} + c_{32}\vec{k},$$
$$\vec{k}' = c_{13}\vec{i} + c_{23}\vec{j} + c_{33}\vec{k}.$$

Bu tenglikni $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlarga skalyar ko'paytirib topamiz:

$$\cos\left(\widehat{\vec{i}'\,\vec{i}}\right) = c_{11},\ \cos\left(\widehat{\vec{i}'\,\vec{j}}\right) = c_{21},\ \cos\left(\widehat{\vec{i}'\,\vec{k}}\right) = c_{31},$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{j}'\,\vec{i}}\right) = c_{12},\ \cos\left(\widehat{\vec{j}'\,\vec{j}}\right) = c_{22},\ \cos\left(\widehat{\vec{j}'\,\vec{k}}\right) = c_{32},$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{k}'\,\vec{i}}\right) = c_{13},\ \cos\left(\widehat{\vec{k}'\,\vec{j}}\right) = c_{23},\ \cos\left(\widehat{\vec{k}'\,\vec{k}}\right) = c_{33}.$$

Topilgan qiymatlarni formulaga qo'ysak, nuqtaning dekart koordinatalarini almashtirish formulasini hosil qilamiz.

$(\vec{i}')^2 = (\vec{j}')^2 = (\vec{k}')^2 = 1,\ \vec{i}' \cdot \vec{j}' = \vec{i}' \cdot \vec{k}' = \vec{j}' \cdot \vec{k}' = 0$, bo'lgani uchun

$$\begin{array}{ll} c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 = 1, & c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} = 0, \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1, & c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{33} = 0, \\ c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 = 1. & c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23} + c_{32}c_{33} = 0, \end{array} \tag{10.9}$$

Demak, (10.3) nuqtaning affin koordinatalarni almashtirish formulalari 12 parametrga bog'liq. Bu parametrlar (10.9) shartlarni qanoatlantirishi kerak, u holda jami 6 ta ixtiyoriy parametr qoladi.

Shunday qilib, nuqtaning dekart koordinatalarini almashtirish 6 ta parametrga bog'liq. Elementlari (10.9) shartni qanoatlantiruvchi (10.9) kvadrat matritsani ortogonal matritsa deb ataladi. Demak, bir dekart koordinatalar sistemasidan ikkinchi dekart koordinatalar sistemasiga o'tish matritsasi ortogonal matritsadan iborat.

1-masala. Yangi sistemaning boshi va bazis vektorlarning koordinatalari eski sistemaga nisbatan berilgan. $O'(0,3,-1)$, $\vec{e}_1'(1,3,0)$, $\vec{e}_2'(0,-3,1)$, $\vec{e}_3'(1,1,-2)$ bo'lsa, koordinatalarni almashtirish formulasini yozing.

Echish. Berilishiga ko'ra

$$c_{11}=1,\ c_{21}=3,\ c_{31}=0,$$
$$c_{12}=0,\ c_{22}=-3,\ c_{32}=1,$$
$$c_{13}=1,\ c_{23}=1,\ c_{33}=-2,$$
$$x_0=0,\ y_0=3,\ z_0=-1.$$

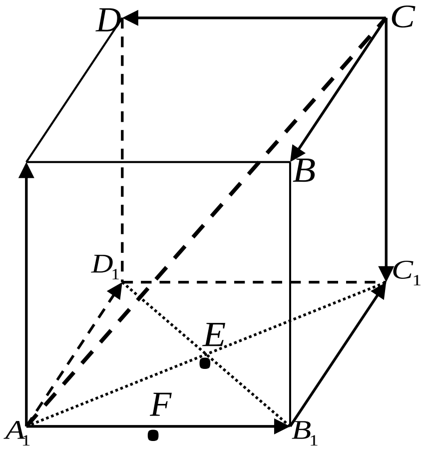
Bu qiymatlarni formulaga qo'ysak,

$$\begin{aligned} x&=x'+z',\\ y&=3x'-3y'+z'+3, \qquad (10.10)\\ z&=y'-2z'-1. \end{aligned}$$

Endi eski bazisdan yangi bazisga o'tish formulasini topish uchun bu sistemani x', y', z' larga nisbatan echib

$$\begin{aligned} x'&=\frac{5}{8}x+\frac{1}{8}y+\frac{3}{8}z,\\ y'&=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z+1,\\ z'&=\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}y-\frac{3}{8}z. \end{aligned}$$

2-masala. Qirrasi a ga teng bo'lgan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berilgan. $A_1B_1=\vec{i}$, $A_1D_1=\vec{j}$, $A_1A=\vec{j}$, $CB=\vec{i}\,'$, $CC_1=\vec{j}\,'$, $CD=\vec{k}\,'$. Dekart koordinatalar sistemasini almashtirish formulasini yozing va E nuqtaning koordinatalarini har ikkala koordinatalar sistemasida aniqlang.



19-chizma

Echish. Avvalo C nuqtani $\left(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ koordinatalar sistemasiga nisbatan aniqlaylik.

$\overrightarrow{A_1B_1}=a\,\vec{i}$, $\overrightarrow{B_1C_1}=a\,\vec{j}$, $\overrightarrow{C_1C}=a\,\vec{k}$, $\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1C}=a\,\vec{i}+a\,\vec{j}+a\,\vec{k}$, $C=(a,a,a)$ Endi $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ vektorlarning koordinatalarini topaylik. 118-chizmada $\vec{i}\,'=-\vec{j}$, $\vec{j}\,'=-\vec{k}$, $\vec{k}\,'=-\vec{i}$. Bulardan $\vec{i}\,'(0,-1,0)$, $\vec{j}\,'(0,0,-1)$

$\vec{e}_1\,'=\vec{i}$, $\vec{e}_2\,'=\vec{j}$, $\vec{e}_3\,'=\vec{k}$ desak, (10.10) formuladan

$$\begin{aligned} x &= -z'+a,\\ y &= -x'+a, \qquad (10.11)\\ z &= -y'+a. \end{aligned}$$

Nuqtaning dekart koordinatalarini almashtirish formulasiga ega bo'lamiz.

A_1B_1 tomonning o'rta nuqtasini F bilan belgilasak, $A_1F=\frac{a}{2}\vec{i}$.

$A_1E=A_1F+FE=\frac{a}{2}\vec{i}+\frac{a}{2}\vec{j}+\overline{O}\vec{K}.$ $\left(O,\vec{i}\;\vec{j}\;\vec{k}\right)$ koordinatalar sistemasida E nuqta $E\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$ koordinatalariga ega bo'ladi.

E ning $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ sistemadagi koordinatalarini topish uchun E ning $\left(O,\vec{i}\;\vec{j}\;\vec{k}\right)$ koordinatalar sistemasidagi (10.2) ga qo'yib topamiz:

$$\frac{a}{2} = -z' + a, \quad z' = \frac{a}{2},$$

$$\frac{a}{2} = -x' + a, \quad x' = \frac{a}{2},$$

$$0 = -y' + a. \quad y' = a.$$

bulardan $E\left(\frac{a}{2}, a, \frac{a}{2}\right)$.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar

1.Tekislikda affin koordinatalar sistemasi qanday kiritiladi?

2. Tekislikda dekart koordinatalar sistemasi qanday kiritiladi?

3. Fazoda affin koordinatalar sistemasi qanday kiritiladi?

4. Fazoda dekart koordinatalar sistemasi qanday kiritiladi?

5. Kesmani berilgan nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini topish formulalari qanday?

6. Tekislikda qutb koordinatalar sistemasi qanday kiritiladi?

To'g'ri chiziq va uning tenglamalari. Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati

Reja:

1. Algebraik chiziq va uning tartibi.
2. Tekislikda to'g'ri chiziqning turli tenglamalari.
3. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.
4. Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati.

Tayanch so'zlar: Algebraik chiziq, kanonik tenglama, kesmalar bo'yicha tenglama, umumiy tenglama.

Koordinatalarni bog'lovchi tenglama va tengsizliklarning geometrik ma'nosi.

1. Tekislikda koordinatalar sistemasi berilsa, tekislik nuqtalari bilan RxR=R^2 haqiqiy sonlar to'plami orasida bir qiymatli moslik o'rnatiladi.

Tekislikda $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ affin koordinatalar sistemasi olib, x, y o'zgaruvchilarni kamida birini o'z ichiga olgan $F(x, y)$ ifoda berilgan bo'lsin. Agar x=x_0, y=y_0

sonlar uchun $F(x_0, y_0)$ ifoda ma'noga ega bo'lsa, u holda x_0, y_0 sonlar $F(x, y)$ ifodani aniqlanish sohasiga tegishli deyiladi. Bunday sonlarning har bir jufti berilgan koordinatalar sistemasida aniq bitta nuqtani aniqlaydi. Barcha bunday nuqtalar to'plami tekislikdagi biror geometrik shakldan iborat. Bu figura butun tekislikdan yoki uning biror qismidan, ba'zan bo'sh to'plamdan iborat bo'ladi.

Algebraik chiziq va uning tartibi

Tekislikdagi geometriyani koordinatalar metodi bilan o'rganishda ko'pincha figura sifatida chiziq olinadi. Masalan, to'g'ri chiziq, aylana, parabola, sinusoida va hokazo chiziqlar.

Chiziq tushunchasiga qat'iy ta'rifni keyinroq beramiz.

Ta'rif. Tekislikdagi biror affin koordinatalar sistemusida $F(x,y)=0$ tenglamaning chap tomoni a, x, y larga nisbatan algebraik ko'phad, ya'ni $ax^i y^j$ ko'rinishdagi hadlarning algebraik yig'indisidan iborat bo'lsa, bu tenglama bilan aniqlanuvchi nuqtalar tuplami algebraik chiziq, tenglama esa algebraik tenglama deyiladi.

$a \in R$ bo'lib i, j lar manfiy bo'lmagan butun sonlar bo'lib $i+j$ son $ax^i y^j$ hadning darajasi deyiladi. i, j darajalar yig'indisining maksimal qiymati $F(x,y)$ ko'phad darajasi deyiladi.

Shu bilan bir vaqtda

$$F(x,y) = 0 \qquad (11.1)$$

tenglamaning ham darajasi deyiladi, bu daraja (11.1) tenglama bilan aniqlangan chiziq tartibi deb ham yuritiladi.

Ta'rif. Biror affin koordinatalar sistemasida n-darajali algebraik tenglama bilan aniqlangan figura n-tartibli algebraik chiziq deb aytiladi.

Biz tekislikdagi birinchi va ikkinchi tartibli chiziqlar bilan shug'ullanamiz.

Teorema. Bir affin koordinatalar sistemasidan ikkinchi koordinatalar sistemasiga o'tishda chiziqning algebraikligi va tartibi o'zgarmaydi.

Algebraik bo'lmagan barcha chiziqlar transendent chiziqlar deb aytiladi.

Algebraik bo'lmagan chiziqlarga misollar sifatida ushbu tenglamalar bilan berilgan chiziqlarni ko'rsatish mumkin.

y-sinx=0, y-tgx=0, y-lgx=0, y = a^x = 0.

To'g'ri chiziqning turli tenglamalari

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi quyidagicha:

$$ax+by+c=0 \qquad (11.2)$$

Bu yerda a,b,c berilgan sonlar. $(x;y)$ to'g'ri chiziqqa tegishli nuqta.Unga mos to'g'ri chiziqning berilish usullarini qarab chiqamiz.

1. $a=0$. U holda $y=-\frac{c}{b}$ kelib chiqadi. Ya'ni bu to'g'ri chiziq x o'qiga parallel bo'ladi. U holda $x=-\frac{c}{a}$ kelib chiqadi. Ya'ni bu to'g'ri chiziq y o'qiga parallel bo'ladi. $c=0$. U holda $ax+by=0$ kelib chiqadi. Ya'ni bu to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi.

Faraz qilaylik $a\neq 0$ $b\neq 0$ va $c\neq 0$ bo'lsin. $ax+by+c=0$ tenglikdan $ax+by=-c$ kelib chiqadi. Tenglikning ikkala tomonini $-c$ ga bo'lamiz.

$$\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$$

Agar $-\frac{c}{a}=\alpha$ va $-\frac{c}{b}=\beta$ belgilashlarni kiritsak;

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1 \qquad (11.3)$$

(11.3) tenglikka to'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi deyiladi. Bu yerda α va β modul jihatdan to'g'ri chiziq koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalar uzunligiga teng.

To'g'ri chiziq parametrik tenglama bilan ham beriladi.

$$x=at+b,\ y=ct+d \qquad -\infty<t<\infty \ (11.4)$$

Misollar:

1. a,b,cning qanday qiymatlarida $ax+by+c=0$ to'g'ri chiziq x o'qining musbat (manfiy) yo'nalishini kesib o'tadi.
2. a,b,cning qanday qiymatlarida $ax+by+c=0$ to'g'ri chiziq koordinatalar tekisligining birinchi choragini kesib o'tmaydi.

3. Ushbu $ax+by+c=0$ va $ax-by+c=0$ tenglamalar bilan berilgan to'g'ri chiziqlar x o'qiga nisbatan simmetrik joylashganligini ko'rsating.
4. To'g'ri chiziqning turli tenglamalariga doir masalalar echamiz:

1-masala. $M_0(1,-3)$ nuqtadan o'tuvchi $\overline{P}(2,-5)$ vektorga perallel to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

Yechish.

$a_1 = 2, a_2 = -5, x_0 = 1, y_0 = -3.$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-5}; \quad -5x+5=2y+6$$

yoki

$5x+2y+1=0.$

2-masala. Ushbu $M_1(1,-3)$, $M_2(3,7)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri, chiziq tenglamasini yozing.

Yechish.

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+3}{7+3}; \quad 10x-10=2y+6$$

yoki

$10x-2y-16=0.$

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi

Biz yuqorida ko'rib o'tgan barcha to'g'ri chiziq tenglamalari koordinatalar sistemasiga nisbatan birinchi darajali tenglamalardir.

Ularni umumiy holda

$$Ax + By + C = 0 \qquad (11.5)$$

ko'rinishda yozish mumkin. A va B lar bir vaqtda nolga teng emas.

Teorema. Barcha affin koordinatalar sistemasiga nisbatan birinchi darajali

$Ax + By + C = 0$ tenglama bilan berilgan chiziq, yo'naltiruvchi vektori $P(-B,A)$ bo'lgan to'g'ri chiziqdan iborat.

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \qquad (11.6)$$

Bunday nuqta hamisha mavjud, chunki *A* va *B* lar bir vaqtda nolga teng emas. Tenglamadan *C* ni topib qo'yamiz va *d* chiziq tenglamasini $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$

yoki $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$ (11.7)

ko'rinishda yozamiz.

Bu tenglama (11.5) tenglamaga ekvivalent demak, (11.7) tenglama $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan o'tuvchi va yo'naltiruvchi vektori *P(- B,A)* dan iborat to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

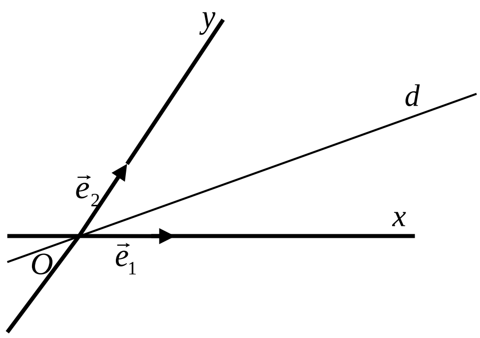
(11.5) tenglamasini to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

3-masala. Uchlarining koordinatalari *A(-3,-1), B(2,3), C(2,1)* nuqtalarda bo'lgan *ABC* uchburchak berilgan. Uchburchakning *A* uchidan *BC* tomoniga parallel bo'lib o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Izlangan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deb *BC(0,-2)* ni olish mumkin, u holda A=-2, B=0. To'g'ri chiziqning *A(-3,-1)* nuqtadan o'tishini e'tiborga olsak

$-2(-3)+0(-1)+C = 0$, $C = -6$

A,B,C larning qiymatini (11.5) ga qo'ysak izlangan to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz.



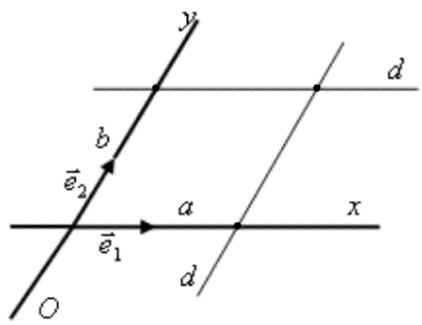
20-chizma

$x + 3 = 0$

To'g'ri chiziqning umumiy (11.6) tenglamasini tekshiraylik, ya'ni A,B,C larning ba'zi birlari nolga aylanganda to'g'ri chiziqning koordinatalar sistemasiga nisbatan joylanishini o'rganaylik:

C = 0 bo'lsa, (11.7) tenglama ushbu

Ax + By = 0 ko'rinishni oladi, *0* nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi,



21-chizma

demak, to’g’ri chiziq koordinatalar boshidan o’tadi va aksincha $O \in d$ bundan $A \cdot 0 + B \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$.

Shunday qilib (11.5) to’g’ri chiziq koordinatalar boshidan o’tishi uchun $C=0$ bo’lishi zarur va yetarlidir.

A=0 bo’lsin, (11.5) => By+C=0. R(-B,0). Bu yo’naltiruvchi vektor $\vec{e}_1$ koordinat vektoriga kollinear, demak, $x \parallel Ox$,

$$y = -\frac{C}{B},\ -\frac{C}{B} = b,\ y = b.$$

$y = b$ tenglama ordinata o’qidan b kesma ajratgan va Ox o’qiga parallel to’g’ri chiziq.

Agar *A=0, C=0 => By=0 =>* $y = 0$, demak, *d* to’g’ri chiziq Ox o’qi bilan ustma-ust tushadi.

B = 0 bo’lsa, bunda 2-holdagiga o’xshash x to’g’ri chiziq Oy o’qqa parallel joylashadi va bu holda *C=0* bo’lsa, *(Ax=0 => x=0)* x to’g’ri chiziq Oy o’qi bilan ustma-ust tushadi.

1.Affin koordinatalar sistemasida tekislikdagi ikkita d_1 va d_2 to’g’ri chiziqlar

$$d_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0; \quad (11.8)$$

$$d_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0. \quad (11.9)$$

tenglamalar bilan berilgan. d_1 to’g’ri chiziqni yo’naltiruvchi vektori $P_2(-B_2,A_2)$, d_2 to’g’ri chiziqni yo’naltiruvchi vektori $P_2(-B_2,A_2)$.

d_1 va d_2 to’g’ri chiziqlarning o’zaro joylashishida quyidagi hollar yuz berishi mumkin:

1) P_1 va P_2 vektorlar kolleniar emas. Bu holda d_1 va d_2 to’g’ri chiziqlar kesishadi. Aksincha, d_1 va d_2 to’g’ri chiziqlar kesishsa P_1 va P_2 lar kolleniar bo’lmaydi. Nokolleniarlik sharti:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow d_1 \nparallel d_2 \qquad (11.10)$$

(11.10) d_1, d_2 to'g'ri chiziqlarning kesishish sharti. Kesishish nuqtasining koordinatalarini topish uchun (11.5), (11.6) tenglamalarni sistema qilib yechish kerak.

2) P_1 va P_2 vektorlar kolleniar. Bu holda $d_1 \| d_2$. Aksincha, $d_1 \| d_2$ bo'lsa, P_1 va P_2 lar kolleniar bo'ladi. Kolleniarlik sharti:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow d_1 \parallel d_2 \qquad (11.11)$$

Ikkita d_1, d_2 to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti.

3) Bundan $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ (11.12)

(11.12) ikkita to'g'ri chiziqning ustma-ust tushish sharti.

Ta'rif. Tekislikdagi berilgan M_0 nuqtadan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar to'plamini to'g'ri chiziqlar dastasi deyiladi.

2. Tekislikdagi to'g'ri burchakli dekart koordinatalar $(0,i,j)$ sistemasi berilgan bo'lsin. Bu koordinatalar sistemasiga nisbatan d_1 va d_2 to'g'ri chiziq tenglamalari

d_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$;

d_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. (11.13)

bilan berilgan bo'lsin.

d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari mos ravishda $P_1(-B_1,A_1)$, $P_2(-B_2,A_2)$ lardan iborat.

Ta'rif. Ikkita to'gri chiziq orasidagi burchak deb, bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlar orasidagi burchakka aytiladi, $\varphi=(P_1 \hat{} P_2)$.

$$P_1 \cdot P_2 = |P_1||P_2|\cos\varphi. \qquad \cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_z^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (11.14)$$

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak (10.13) formula bilan hisoblanadi.

Xususiy holda $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow P_1P_2$

$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. (11.15)

Ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti.

To'g'ri burchak dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar o'zlarining burchak koeffitsientli tenglamalari bilan berilgan bo'lsin, ya'ni

$$d_1: y = k_1x + b_1;$$

$$d_2: y = k_2x + b_2. \qquad (11.16)$$

Bu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni hisoblash formulasini chiqaraylik.

d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarni absissa o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchaklarni mos ravishda φ_1 va φ_2 bilan belgilaymiz (46-chizma), y holda

$k_1=tg\varphi_1$, $k_2=tg\varphi_2$ va $(P_1\wedge P_2)=\varphi$, $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$

$$tg\varphi = tg(\varphi_2-\varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1+tg\varphi_1\cdot tg\varphi_2}$$

bundan

$$tg\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2} \qquad (11.17)$$

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni hisoblash formulasi.

$d_1\perp d_2$ bo'lgan holda $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}+\varphi_1$, deyish mumkin. Bundan

$tg\varphi = tg(\varphi_2-\varphi_1) = -ctg\varphi_1$ yoki

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \Rightarrow k_1k_2 = -1 \qquad (11.18)$$

(11.18) tenglik d_1d_2 to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti. Agar $d_1\|d_2$ bulsa $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ yoki $k_2 - k_1 = 0$

$$k_2 = k_1 \qquad (11.19)$$

d_1,d_2 to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti.

2-masala. d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar

$d_1: x + 7y – 5 = 0,$

$d_2: 3x – 4y + 20 = 0.$

tenglamalar berilgan, ular orasidagi burchakni toping.

Yechish d_1 to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti $k_1 = -\frac{1}{7}$, d_2 to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti $k_2 = -\frac{3}{4}$, (11.17) formulaga ko'ra

$$tg\varphi = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{7}\right)}{1 + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{7}\right)} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{28}} = 1$$

Demak, φ = 45°.

3. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash formulasini chiqaraylik.

Tekislikdagi d to'g'ri chiziq umumiy tenglamasi bilan

d: Ax + By+C = 0

berilgan bo'lsin. P(-B,A) yo'naltiruvchi vektori.

Ta'rif. To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori perpendikulyar har qanday vektorni bu to'g'ri chiziqning normal vektori deyiladi.

n(A,B) vektor d to'g'ri chiziqning normal vektori bo'ladi. Haqiqatan ham, p va n vektorlarning skalyar ko'paytmasi:

p·n = -BA +AB = 0 ⇔ n⊥p.

Demak, to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasidagi A,B sonlar shu tartibda olingan shu tenglama bilan aniqlangan to'g'ri chiziq normal vektorining koordinatalarini bildiradi.

d to'g'ri chiziq tenglama bilan, bo' to'g'ri chiziqda yotmaydigan $M_0(x_0,y_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. M_0 nuqtada d to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tushuramiz va uning asosini H bilan belgilaymiz.

M_0H vektor uzunligini M_0 nuqtadan d to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa deyiladi va $\rho(M_0,d)$ ko'rinishda yozamiz.

Agar $M_0 \in d$ bo'lsa, $\rho(M_0,d)=0$ bo'ladi. $M_0 \notin d$, u holda $\rho(M_0,d)=|NM_0|$. n vektor d to'g'ri chiziqning normal vektori bo'lgani uchun NM_0 vektorga kolleniar.

Vektorning skalyar ko'paytmasi ta'rifga ko'ra

$HM_0 \cdot n = |HM_0||n|\cos(HM_0,n) = \rho(M_0,d)|n|(\pm 1)$

Shunday qilib, $p(M_0, d) = \frac{|HM_0 \cdot n|}{|n|}$ (11.20)

H nuqtaning koordinatalari $H(x_1,y_1)$ bo'lsa,

$HM_0(x_0-x_1, y_0-y_1)n=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)=Ax_0+By_0-(Ax_1+By_1)$ u holda $Ax_1 + By_1 + C = O$ bundan $C=-(Ax_1+By_1)|$

$HM_0 \cdot n= Ax_0 + By_0 + C$, $|n| = \sqrt{A^2 + B^2}$ ekanligini e'tiborga olib (11.20) formulani quyidagicha yozamiz.

$$p(M_0, d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (11.21)$$

Bu formula berilgan nuqtadan d to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash formulasi.

3-masala. Koordinatalar boshi O(0,0) dan 3x-4y-2=0 to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping. (11.23) formuladan

$$p(M_0, d) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-2|}{5} = \frac{2}{5}$$

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar

1. Algebraik chiziq deb qanday chiziqga aytiladi?
2. To'g'ri chiziqning qanday tenglamalarini bilasiz?
3. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi qanday ko'rinishga ega?
4. To'g'ri chiziq koordinatalar sistemasiga nisbatan qanday vaziyatlarda bo'ladi?
5. Ikkita to'g'ri chiziq qanday joylashishi mumkin?
6. To'g'ri chiziqlarning ustma-ust tushish shartini ayting.
7. To'g'ri chiziqning qanday dastalari mavjud ta'rifini ayting.
8. Ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb nimaga aytiladi?
9. To'g'ri chiziqning normal vektori deb nimaga aytiladi?
10. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa haqida nima bilasiz?

Tekislikda ikkinchi tartib chiziqlar

Reja:

1. Ellips ta'rifi, kanonik tenglamasi.

2. Giperbola ta’rifi, kanonik tenglamasi.

Tayanch so’zlar: Ellips, giperbola, ekstsentrisitet, direktrisa, fokus nuqta, fokal radius.

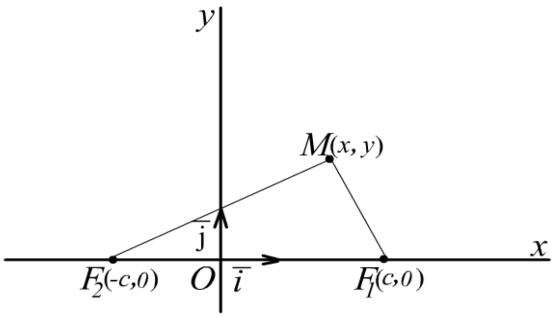
Ellips ta’rifi, kanonik tenglamasi.

T a ‘ r i f. Ellips deb tekislikdagi shunday nuqtalarning geometrik o`rniga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan fokuslar deb ataluvchi $F_1$ va $F_2$ nuqtalargacha bo`lgan masofalari yig’indisi berilgan PQ kesma uzunligiga teng bo’ladi. Bu yerda $PQ > F_1F_2$.

Fokuslar orasidagi masofani $F_1F_2=2c$, $PQ=2a$ deb olamiz. Ta’rifga asosan $a>c$ bo`ladi.

Agar F_1 va F_2 nuqtalar ustma-ust tushsa, u holda ta’rifga ko`ra ellips radiusi $a$ ga teng aylana bo`ladi. Bu holda ellipsning fokuslari aylana markazi bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib, aylana ellipsning xususiy holidir.

Ellipsning F_1, F_2 fokuslari orasidagi masofani ellipsning fokal masofasi deyiladi. M nuqta ellips nuqtasi bo`lsin, u holda $F_1M$ va $F_2M$ kesmalarni $M$ nuqtaning fokal radiuslari deyiladi. Fokal radiuslarni $r_1=F_1M$, $r_2=F_2M$ bilan belgilaymiz. Ixtiyoriy $M$ nuqta ellipsda yotsa, ta’rifga ko`ra



22- chizma

$$F_1M + F_2M = 2a,$$

yoki

$$r_1+r_2=2a \qquad (12.1)$$

(12.1) ellipsning ta’rifidan bevosita kelib chiqqan tenglamasidir.

Ellipsning to`g’ri burchakli dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini topaylik.

Buning uchun dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha tanlab olamiz. F_1F_2 to’g’ri chiziq bilan Ox absissa o`qi ustma-ust tushsin. $F_1F_2$ – kesmani o`rtasi

O nuqta bo`lsin. U holda fokuslar $F_1(c,0)$ va $F_2(-c,0)$ koordinatalarga $M(x,y)$ koordinatalarga ega bo`ladi. Tekislikdagi ixtiyoriy M nuqtaning fokal radiuslari quyidagilarga teng:

$$r_1=F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ ,\ r_2=F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad (12.2)$$

Topilgan qiymatlarni (1) tenglikka qo`yib

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglamani

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

ko`rinishda yozib olib, tenglikni ikkala tomonini kvadratga ko`tarib, ixchamlab quyidagini hosil qilamiz,

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx\ ,$$

Yana kvadratga ko`tarib ixchamlasak

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad (12.3)$$

$a>c \Rightarrow a^2>c^2$, demak $a^2-c^2>0$ bu sonni

$$b^2=a^2-c^2 \qquad (12.4)$$

kabi belgilab olsak (12.3) tenglama

$$b^2x^2+ay^2=a^2b^2 \qquad (12.5)$$

ko`rinishga keladi. (12.5) ni $a^2b^2$ ga bo`lib ushbu tenglamaga ega bo`lamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (12.6)$$

(12.6) tenglama ellipsning kanonik tenglamasi deyiladi.

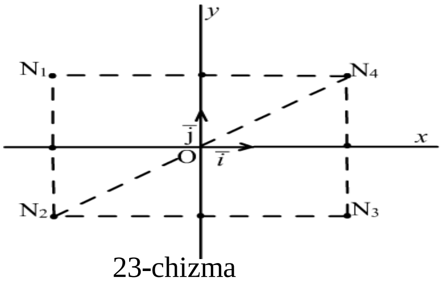
Ellipsning xossalari.

Bu yerda ellipsning xossalarini o`rganib, uning shaklini chizamiz.

1°. (6) tenglamadan ko'rinadiki, ellips ikkinchi tartibli chiziqdir.

2°. Agar $N(x,y)\in\gamma$ bo`lsa, u holda x,y koordinatalar (12.6) tenglamani qanoatlantiradi, shuning uchun $x^2\le a^2$, $y^2\le b^2$, demak

$$-a\le x\le a,\ -b\le x\le b$$



23-chizma

Ya’ni ellipsning hamma nuqtalari tomonlari $2a$ va $2b$ dan iborat bo`lgan $N_1N_2N_3N_4$ to`g’ri to’rtburchak ichida joylashgan (23-chizma).

3°. Agar $N(x,y)\in\gamma$ bo`lsa, u holda $N'(-x,-y)\in\gamma$, shuning uchun $O$ nuqta ellipsning yagona simmetriya markazi bo`ladi

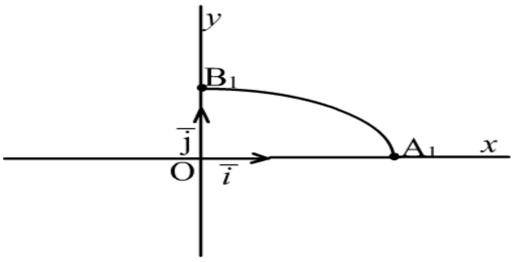
Agar $N(x,y)\in\gamma$, u holda $N'(-x,y)$ va $N'(x,-y)$ nuqtalar ham ellipsda yotadi. Chunki ellips ikkinchi tartibli chiziq. Demak, Ox va Oy o`qlari ellipsning simmetriya o`qlari bo`ladi. Ellips aylanadan farqli o`laroq boshqa simmetriya o`qlarga ega emas.

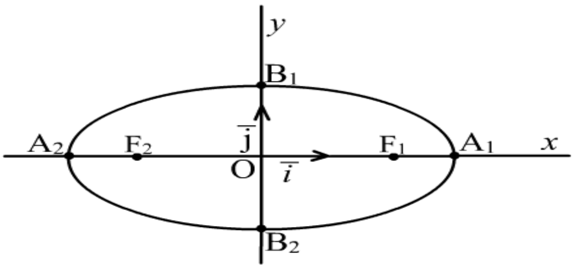
4°. Ellipsning koordinata o`qlari bilan kesishgan nuqtalarini topaylik:

a) $y=0$, (6) $\Rightarrow x^2=a^2$, $x=\pm a$ demak, tllips Ox o`qni $A_1(a;0)$ va $A_2(-a;0)$ nuqtalarda kesadi

b) $x=0$, (6) $\Rightarrow y^2=b^2$, $y=\pm b$. ellips Oy o’qni $B_1(0,b)$ va $B_2(0,-b)$ nuqtalarda kesadi. Bu nuqtalarni ellipsning uchlari deyiladi. A_1A_2 va B_1B_2 kesmalar mos ravishda ellipsning katta va kichik o`qlari deyiladi. Bu kesmalar $O$ nuqtada teng ikkiga bo`linadi. $OA_1=OA_2=a$, $OB_1=OB_2=b$ bu kesmalarni mos ravishda ellipsning katta va kichik yarim o`qlari deyiladi.

Birinchi chorakda $N(x,y)$ nuqta uchun $x>0$, $y>0$: $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. N nuqtaning absissasi x, 0 dan a gacha o`sganda, ordinatasi y, b dan 0 gacha kamayib boradi. Bu ma’lumotlardan foydalanib ellipsning birinchi chorakdagi qismini 24 a-chizmada ko’rsatilgan B_1A_1 yoy deb tasavvur qilish mumkin. Ellipsning koordinata o’qlariga nisbatan simmetrikligidan foydalanib, uning birinchi chorakda hosil qilingan qismi bo’yicha shaklini 24.b- cizmadagidek tasavvur qilish mumkin.





24-chizma

Ellipsning ekstsentrisiteti va direktrisalari.

T a ' r i f. Ellipsning fokuslari orasidagi masofaning ellipsning katta o`qi uzunligiga nisbati shu ellipsning ekstsentrisiteti deb ataladi. Ekstsentrisitet *e* harfi bilan belgilanadi.

$$e=\frac{2c}{2a},\ e=\frac{c}{a} \qquad (12.7)$$

c-fokal masofa, *a*- katta yarim o`q.

Shuning uchun $0<e<1$ har bir ellipsning ekstsentrisitenti birdan kichik.

(12.7) tenglikni e'tiborga olsak, u holda ellipsning fokal radiuslarini ekstsentrisitent orqali

$$r_1=a-ex,\ r_2=a+ex \qquad (12.8)$$

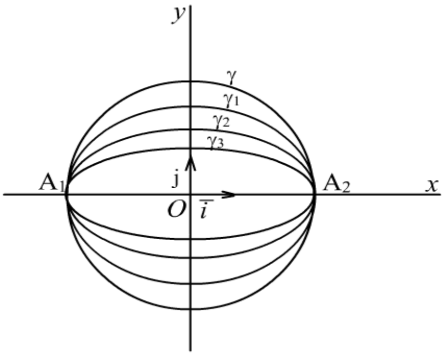
ko'rinishda yozish mumkin.

Ekstsentrisitet nolga teng bo`lishi uchun $c=0$ bo`lishi zarur va yetarlidir.

Bunda ellips aylana bo`lib qoladi.

$c^2 = a^2 - b^2$ ekanligini e'tiborga olsak , u holda

$$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2;$$



25-chizma

bundan

$$e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} \text{ va } \frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2};$$

Demak, ekstsentrisitet ellipsning o`qlarining nisbati bilan aniqlanadi, o`qlarning nisbati esa, o`z navbatida ekstsentrisitet bilan aniqlanadi. Shunday qilib, ekstsentrisitet ellipsning shaklini xarakterlaydi. Ekstsentrisitet birga qancha yaqin bo`lsa, $1-e^2$ shunchalik kichik, ya'ni $\frac{b}{a}$ nisbat shunchalik kichik bo`ladi.

Demak, ekstsentrisitet qanchalik katta bo`lsa, ellips shunchalik cho`ziq bo`ladi.

Aylana bo`lgan holda $b=a$ va ektsentrisitetlari $e_1<e_2<e_3$. tensizlikni qanoatlantiruvchi ellipslar 25-chizmada tasvirlangan.

Ellipsning direktrisalari.

Ellips o'zining

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b) \tag{12.9}$$

kanonik tenglamasi bilan berilgan bo'lsin.

Ta'rif: Ellips ning berilgan F fokusga mos direktrisasi deb, uning fokal o'qiga perpendikulyar va markazdan shu F fokus yotgan tomonda $\frac{a}{e}$ masofada turuvchi to'q'ri chiziqqa aytiladi.

$F_1(c,0)$ va $F_2(-c,0)$ fokuslarga mos direktrisalarni d_1 va d_2 deb belgilasak, u holda bu direktrisalarning tenglamalari

$$\begin{aligned} d_1: &\quad x-\frac{a}{e}=0 \\ d_2: &\quad x+\frac{a}{e}=0 \end{aligned} \tag{12.10}$$

ko’rinishda bo’ladi.

$d_1 \cap (Ox) = D_1$, $d_2 \cap (Ox) = D_2$ deb olsak, u holda ellips uchun $e < 1$ bo’lgani uchun, $\rho(0, D_1) = \rho(0, D_2) = \frac{a}{e} > a$ bo’ladi.

Demak, A_1 nuqta O nuqta bilan D_1 nuqta orasida, A_2 nuqta esa O nuqta bilan D_2 nuqta orasida yotadi.

Demak ellipsning direktrisalari uni kesmaydi.

Agar (a berilgan holda) ellipsning $e = \frac{c}{a}$ ekssentrisiteti kamaysa, u holda ellips direktrisasi ikkinchi o’qdan uzoqlashib boradi.

Aylana direktrisaga ega emas.

Endi ellips va giperbolaning 2-usulda aniqlanishini ko’rib chiqamiz:

Ellipsning ekstsentrisiti e 0 < e <1 va ixtiyoriy musbat a soni quyidagi

$$ae < \frac{a}{e},$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Giperbola ta’rifi, kanonik tenglamasi.

Ta’rif. Tekislikda har bir nuqtasidan *fokuslar* deb ataluvchi F_l va F_2 nuqtalargacha bo`lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati berilgan kesma uzunligiga teng bo`lgan nuqtalarning geometrik o`rniga *giperbola* deb ataladi. Berilgan kesma uzunligi fokuslar orasidagi masofadan kichik.

Ta’rifda aytilgan kesma uzunligini $2a$ fokuslari orasidagi masofani fokal masofa deb $2c$ bilan belgilaymiz, ta’rifga ko`ra

$$2a<2c \Rightarrow a<c \qquad (12.11)$$

$a>0$, $c>0$, F_l va F_z nuqtalar ustma-ust tushmaydi deb faraz qilamiz.

Giperbolaning M nuqtasidan fokuslarigacha bo`lgan masofalarni $g_1=F_1M$, $g_2=F_2M$ larni M nuqtaning fokal radiusi deyiladi.

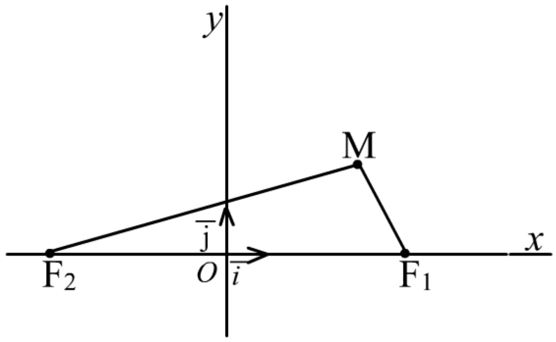
Giperbolaning ta’rifiga ko`ra giperbola tenglamasi

$|F_1M-F_2M|=2a$ yoki

$$|g_1-g_2|=2a \qquad (12.12)$$

Giperbola to`g’ri burchakli dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini chiqarish uchun, koordinatalar sistemasini ellips bilan ish ko`rgandek qilib tanlaymiz.

$F_1F_2=2c$ bo`lgani uchun olingan koordinatalar sistemasida $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$, $M(x,y)$ kordinatalarga ega bo`ladi (26-chizma).



26-chizma

U holda

$r_1=F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$,

$r_2=F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

Giperbola ta’rifiga ko`ra ya’ni (12.12) formaulaga asosan

$|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}|=2a$ ni hosil qilamiz

bu tenglamani quyidagicha yozib olamiz

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$$

bu tenglamani kvadratga oshirib quyidagiga ega bo`lamiz

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

yana kvadratga oshirib ba’zi bir almashtirishlarni bajarib, quyidagilarni yozamiz

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \qquad (12.13)$$

$$b^2=c^2-a^2>0 \qquad (12.14)$$

belgilab, bu belgilanishlarni e’tiborga olsak

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (12.15)$$

ega bo`lamiz.

Shunday qilib, giperbola ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari (12.6) tenglamani qanoatalntiradi.

Endi teskari jumlani isbotlaylik. Ya'ni koordinatalari (12.6) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqta giperbolada yotishini isbotlaylik.

(12.12) formuladagi y^2 ning qiymatini (12.13) formuladan topib qo`yamiz va (12.14) ni e'tiborga olsak ushbu tengliklarga ega bo`lamiz

$g_1=|\frac{c}{a}x-a|$ $g_2=|\frac{c}{a}x+a|$

$|x|\geq a$. Bundan tashqari $c>a$, $\frac{c}{a}>1$, u holda $x>0$ bo'lganda

$\frac{c}{a}x-a>0$, $\frac{c}{a}x+a>0$, bo'lib,

$g_1=\frac{c}{a}x-a$, $g_2=\frac{c}{a}x+a$, $x<0$ bo'lganda $a-\frac{c}{a}x>0$, $-\left(\frac{c}{a}x+a\right)>0$ bo'lib,

$g_1=a-\frac{c}{a}x$, $g_2=-\left(\frac{c}{a}x+a\right)$ o'rinli bo'ladi.

Demak, $|g_1-g_2|=2a$ ya'ni M nuqta giperbolada yotadi. Shunday qilib, (12.15) tenglama giperbolaning sodda tenglamasi yoki giperbolaning kanonik tenglamasi deyiladi.

Giperbolaning xossalalari

Giperbolaning geometrik xossalarini o`rganish va uni yasash uchun (12.15) tenglamadan foydalanamiz. Ellips tenglamasi ustida olib borgan muhokamalarni takrorlab giperbolaning koordinatalar boshi, koordinatalar o`qlariga nisbatan simmetrikligini aniqlanadi.

Giperbola Ox o`qi bilan $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$ nuqtalarda kesishadi. (12.16) tenglama bilan aniqlangan giperbola $Oy$ o`qi bilan kesishmaydi. Giperbola Oy o`qi bilan $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ mavxum nuqtalarda kesishadi deb kelishib olamiz.

A_1, A_2 nuqtalar giperbola uchlari deyiladi. Giperbolaning uchlari orasidagi masofa giperbolaning haqiqiy o`qi deyiladi.

B_1, B_2 nuqtalarni giperbolaning mavhum uchlari deyiladi. $B_1B_2=2b$ kesmani giperbolaning mavhum o`qi deyiladi. $a$ va $b$ larni mos ravishda haqiqiy va mavhum yarim o`qlar deyiladi.

Agar $N(x,y)$ nuqta giperbolada yotsa, (12.15) tenglamadan: $/x/\geq a$. demak $x=\pm a$ to`g'ri chiziqlar bilan chegaralangan tasmada (polosa) da giperbolaning birorta ham nuqtasi yo`q.

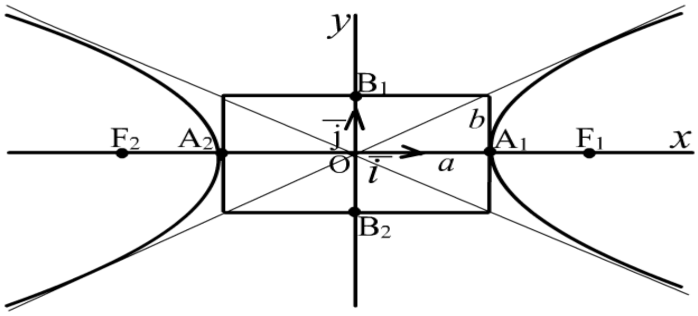
Giperbola tenglamasini y ga nisbatan echaylik

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \qquad (12.16)$$

bu tenlamaga e'tibor bersak x o`zgaruvchi $a$ dan $+\infty$ gacha o`sib borganda va $-a$ dan $-\infty$ gacha kamayganda, y miqdor $-\infty<y<+\infty$ oraliqda o`zgaradi. Demak, giperbola ikki qismdan iborat bo`lib, 27-chizmada tasvirlangan.

Ularni giperbolaning tarmoqlari deyiladi.

Giperbolaning o`ng tarmog'i $x\geq a$ yarim tekislikda, chap yarim tarmogi $x < -a$ yarim tekislikda yotadi.



27-chizma

Giperbolaning ekstsentrisiteti, asimptotalari va direktrisalari.

Giperbolaning shaklini aniq tasvirlash uchun yassi chiziqning asimptotasi tushunchasini kiritamiz. Bizga λ chiziqni kesmaydigan d to`gri chiziq berilgan bo`lsin.

Ta'rif. Agar $N\in\lambda$ nuqta shu λ chiziq bo`yicha harakat qilganda uning $d$ to`g'ri chiziqqacha bo`lgan masofasi nolga intilsa, to`g'ri chiziq λ chizining asimptotasi deyiladi.

Giperbola markazidan o`tuvchi $d$ to`g'ri chiziq

$$x=a_1t$$

$$y=a_2t \qquad (12.17)$$

parametrik tenglamasi bilan berilgan. (12.16) va (12.17) tenglamalarni sistema qilib echamiz

$$\left(\frac{a_1^{\ 2}}{a^2}-\frac{a_2^2}{b^2}\right)t^2=1 \qquad (12.18)$$

1) agar $\frac{a_1^2}{a^2}-\frac{a_2^2}{b^2}$>0 bo`lsa, (9.13) tenglama $t_{1,2}=\pm\frac{ab}{\sqrt{a_1^2b^2-a_2^2a^2}}$

demak , d to`g’ri chiziq giperbola bilan ikkita $N_1(a_1t,\ a_2t)$ va $N_2(a_1t_2,\ -a_2t_2)$ nuqtalarda kesishadi.

2. Agar $\frac{a_1^2}{a^2}-\frac{a_2^2}{b^2}$<0 bo`lsa, u holda $d$ to`g’ri chiziq giperbolani kesmaydi.

Xususan, $\frac{a_1^2}{a^2}-\frac{a_2^2}{b^2}$=0, u holda $\frac{a_2}{a_1}=\pm\frac{b}{a}$. d_1: $y=\frac{b}{a}x$, d_2: $y=-\frac{b}{a}x$ tenglama bilan aniqlangan d_1, d_2 to`g’ri chiziqlar giperbola assimptotalari deyiladi.

Giperbola koordinatalar o`qlariga nisbatan simmetrik bo`lgani uchun uning birinchi choragidagi qismini olamiz.

gar $x>0$ bo`lsa, giperbolaning birinchi chorakdagi qismini aniqlaydi

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

Giperbolaga tegishli $N_1(x_1,y_1)$ nuqtani va d_1 to`g’ri chiziqqa tegishli $N_2(x_2,y_2)$ nuqtani olaylik.

$$(y_1=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\ y_2=\frac{b}{a}x)\Rightarrow y_2>y_1$$

Demak, giperbola uning asimptotalar hosil qilgan vertikal burchaklardan fokuslarini o`z ichiga oluvchi sohada yotadi.

Endi ordinatalarning farqiga e’tibor beraylik.

$$y_2-y_1=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

Agar $N\in g$ nuqtaning absissasi $x>0$ cheksiz ortib borsa, y_2-y_1 ayirma monoton kamayib nolga intiladi va N nuqta giperbolani A_1 uchidan chiqib assimptotaga cheksiz yaqinlashib boradi.

Agar giperbolaning yarim o`qlari teng bo`lsa, bunday giperbolani teng tomonli deyiladi. Teng tomonli giperbolaning assimptotalari perpendikulyar bo`ladi. Teng tomonli giperbolaning kanonik tenglamasi

$$x^2-y^2=a^2$$

ko`rinishda yoziladi.

Ushbu

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (12.19)$$

tenglama fokal o`qi *Oy* da yotuvchi giperbolaning kanonik tenglamasi deb aytiladi.

Ayni bir koordinatalar sistemasida *a* va *b* larning ayni bir qiymatida

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

tenglamalar bilan aniqlangan ikki giperbola o`zaro qo`shma giperbola deb aytiladi.

Ta’rif. Giperbolaning fokuslari orasidagi masofani haqiqiy o`q uzunligiga nisbati giperbolaning ekstsentrisiteti deyiladi.

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a} \qquad \text{bunda } c>a \Rightarrow e>1.$$

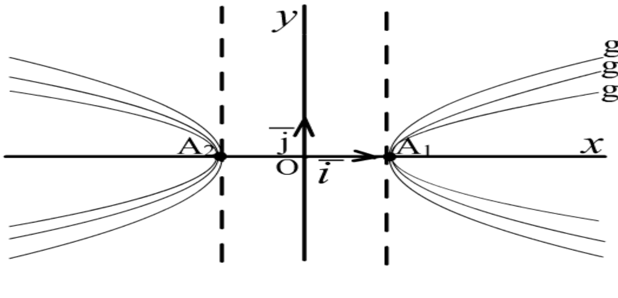
giperbolaning fokal radiuslarini quyidagicha

$x > 0$ bo’lganda $\quad g_1 = ex-a, g_2 = ex+a \quad$ (12.20)

$x < 0$ bo’lganda $\quad g_1 = a-ex, g_2 = -a-ex \quad$ (12.21)

yozish mumkin.

Ekstsentrisitet giperbolaning shaklini aniqlashda muhim ahamiyatga ega. haqiqatan ham $e=\frac{c}{a}$ dan $c=ea$, $b^2=c^2-a^2$ ga qo`ysak $b^2=a^2(e^2-1)$ yoki $\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$ bo`lib, bunga asosan, ekstsentrisitet qanchalik kichik, ya’ni $e\to 1$ bo`lsa, $\frac{b}{a}$ shunchalik kichik bo`ladi, ya’ni $\frac{b}{a}\to 0$ bo`ladi (bu



28-chizma

yerda a-const deb faraz qilinadi). Giperbola o`zining haqiqiy o`qiga siqilgan bo`ladi.

Aksincha, e kattalashib borsa $\frac{b}{a}$ ham kattalashib giperbola tarmoqlariga kengayib boradi.

28-chizmada g_1, g_2, g_3 giperbolalar tasvirlangan bo`lib, ularning $e_1$, $e_2$, $e_3$ ekstsentrisitetlari uchun $e_1<e_2<e_3$ tengsizliklar o`rinli.

Giperbolaning direktrisalari.

Giperbola o'zining

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b) \qquad (12.22)$$

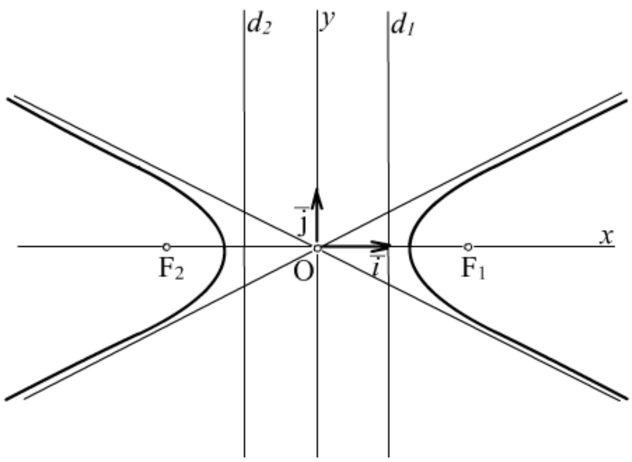
kanonik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin.

Ta'rif: Giperbolaning berilgan F fokusga mos direktrisasi deb, uning fokal o'qiga perpendikulyar va markazdan shu F fokus yotgan tomonda $\frac{a}{e}$ masofada turuvchi to'g'ri chiziqqa aytiladi.

$F_1(c,0)$ va $F_2(-c,0)$ fokuslarga mos direktrisalarni d_1 va d_2 deb belgilasak, u holda bu direktrisalarning tenglamalari

$$d_1: \quad x-\frac{a}{e}=0$$
$$d_2: \quad x+\frac{a}{e}=0 \qquad (12.23)$$

ko'rinishda bo'ladi.



29-chizma

$d_1 \cap (Ox) = D_1,\ d_2 \cap (Ox) = D_2$ deb olsak, Giperbola uchun $e > 1$ bo'lgani uchun $\rho(0, D_1) = \rho(0, D_2) = \frac{a}{e} < a$ bo'ladi.

Demak, D_1 nuqta O nuqta bilan A_1 nuqta orasida, D_2 nuqta esa O nuqta bilan A_2 nuqta orasida yotadi (29-chizma).

Demak giperbolaning direktrisalari uni kesmaydi.

Agar (a berilgan holda) giperbolaning $e = \frac{c}{a}$ ekssentrisiteti kamaysa, u holda giperbola direktrisasi ikkinchi o'qdan uzoqlashib boradi.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar

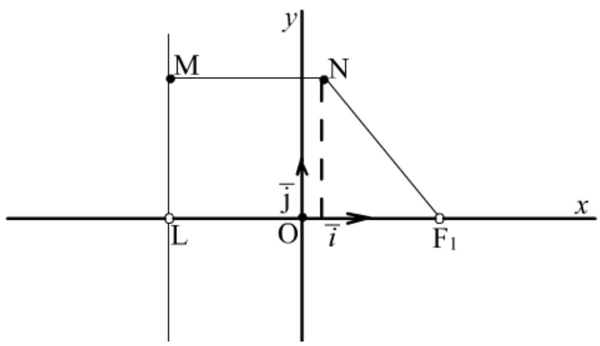
1. Ellips deb qanday chiziqqa aytiladi?
2. Giperbola deb qanday chiziqqa aytiladi?
3. Direktrisa qanday chiziq?

Parabola va uning xossalari

Ta'rif. Tekislikdagi har bir nuqtadan berilgan nuqtagacha va berilgan to`g'ri chiziqqacha bo`lgan masofalari o`zaro teng bo`lgan barcha nuqtalarning geometrik o`rni parabola deyiladi.

Berilgan nuqta berilgan to`g'ri chiziqda yotmaydi deb olamiz. Berilgan $F$ nuqta parabola fokusi, berilgan $d$ to`g'ri chiziq parabola direktrisasi deyiladi.

Parabolaning fokusidan direktrisasigacha bo`lgan masofani $|FL|=p$ harfi yordamida belgilaymiz va uni parabolaning parametri deb ataymiz. $N$ nuqtadan $d$ to`g'ri chiziqqacha bo`lgan masofani $q=|NM|$ bilan N va F nuqtalar orasidagi masofani $r=|NF|$ bilan belgilaymiz va buni parabolaning fokal radiusi deymiz. (30-chizma)



30-chizma

Ta'rifga binoan, parabola tenglamasi

$$|NM|=|NF| \qquad (13.1)$$

yoki $\quad r=q$

Parabolani to`g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini chiqarish uchun, tekislikda to`g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi o`qlarini maxsus joylashtiramiz.

Absissa o`qini fokus orqali direktrissaga perpendikulyar qilib o`tkazamiz

Koordinatalar boshini fokus bilan direktrisa orasidagi masofaning o`rtasiga joylashtiramiz.

Tekislikdagi ixtiyoriy *N* nuqtaning koordinatalarini *x,y* deb olamiz. (13.1) tenglikdan *r* va *q* o`zgaruvchilarni ularning *x,y* koordinatalari bilan berilgan ifodalarga almashtirish kerak. *F* fokusning koordinatalari $(\frac{p}{2},\ 0)$ ekanligini e'tiborga olib ushbuni topamiz;

$$FN=r=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} \qquad (13.2)$$

N nuqtadan *d* direktrisaga tushirilgan perpendikulyarning asosini *M* bilan belgilaymiz. M nuqtaning koordinatalari $(-\frac{p}{2},y)$ ekanligi ravshan. Bundan ushbuni hosil qilamiz;

$$NM=q=\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+(y-y)^2}=x+\frac{p}{2} \qquad (13.3)$$

(ildiz chiqarishda $x+\frac{p}{2}$ ni o`z ishorasi bilan oldik, chunki *x* musbat son). Bu *N(x,y)* nuqta direktrisascining fokus tomonida bo`lishdan kelib chiqadi, ya'ni

$x>-\frac{p}{2}$ bo`lishi kerak, bundan $x+\frac{p}{2}>0$. (13.3) tenglikda *r* va *q* larning (13.1) va (13.2) ifodalari bilan almashtirsak,

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=x+\frac{p}{2} \qquad (13.4)$$

Bu parabolaning to`g'ri burchakli dekard koordinatalar sistemasidagi tenglamasidir. Chunki *N(x,y)* nuqtaning koordinatalari *N* nuqta berilgan parabolada yotgan holdagina tenglamani qanoatlantiradi.

Parabola tenglamasini sodda ko`rnishga ya’ni kanonik ko`rinishga keltirish uchun (13.4) tenglamani ikkala qismini kvadratga ko`taramiz.

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \qquad (13.5)$$

yoki
$$y^2 = 2px \qquad (13.6)$$

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \pm(x + \frac{p}{2})$$

Agar x,y (13.6) tenglamani qanoatlantirsa, bu yerda faqat musbat ishora olishini ko`rsatish kerak. Ammo bu ravshan chunki, (13.6) tenglamadan $x = \frac{y^2}{2p}$, demak, $x>0$, shu sababli $x + \frac{p}{2}$ musbat sondir.

(13.6) tenglama parabola tenglamasi bo`ladi degan natijaga kelamiz. Bu tenglamani parabolaning kanonik tenglamasi deyiladi.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar

1. Parabola deb qanday chiziqqa aytiladi?

2. Direktrisa qanday chiziq?

Ikkinchi tartibli chiziqning qutb koordinatasidagi tenglamasi

Chiziqlardan biri berilgan bo’lsin. Fokuslardan biri F ni va unga yaqin D direktrisasini olamiz. Qutb sistemasini qo’yidagicha kiritamiz: O polyus F bilan, qutb uqi hfrabolaning direktrisasiga qarama-qarshi yo’nalib, simmetriya o’qi bilan ustma-ust tushsin. Egri chiziqda ihtiyoriy m(ρ,φ) nuqtani olib uni fokus bilan FM birlashtiramiz va direktrisaga MK $\perp$ tushiramiz.Yana F no’qtadan egri chiziq bilan kesishguncha qutb o’qiga perpendikulyar FR o’tkazamiz va R nuqtadan direktrisaga RQ perpendikulyar tushiramiz. FR=P deb, uni fokal radius deb ataymiz.U holda $\frac{FM}{KM}$ =E, FM= ρ, KM=DF+ $\rho\cos\varphi$. Xuddi shunga o’xshash: $\frac{FR}{QR}$ =E, $\frac{P}{DF}$ =E, DF= $\frac{P}{E}$

FM va KM qiymatlarini $\frac{FM}{KM}$ =E ga qo’yib : $\frac{\rho}{\frac{P}{E}+\rho\cos\varphi}$ =E,

$\rho=\frac{P}{1-E\cos\varphi}$ ga ega bo’lamiz.

Bu tenglama ikkinchi tartibli chiziqlarni qutb koordinatalaridagi tenglamasi deb ataladi.

1)E<1 da ellips

2)E>1 da giperbolaning shohi

3)E=1 da parabola bo’ladi.

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ da M(x;y) o’rniga (-c;p) qo’ysak:

$\frac{c^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}=1$, $\frac{p^2}{b^2}=1-\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}$, p= $\frac{b^2}{a}$

Xuddi shuningdek

2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ da M(x;y) o’rniga (-c;p) qo’ysak: $\frac{c^2}{a^2}-\frac{p^2}{b^2}=1$,

$\frac{p^2}{b^2}=1+\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+c^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}$, p= $\frac{b^2}{a}$

O’qlarni almashtirish

$\begin{cases} x'=x-m \\ y'=y-n \end{cases}$ o’rniga qo’yish orqali bajariladi.

Tekislikning berilish usullari

Reja:

1. Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan ikki vektorga parallel bo'lgan tekislik tenglamasi.

2.Tekislikning parametrik tenglamasi.

3. Tekislikning umumiy tenglamasi.

4. Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi.

5.Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi.

Tayanch so'zlar: Tekislikning parametric tenglamasi, umumiy tenglamasi, kesmalar bo'yicha tenglamasi.

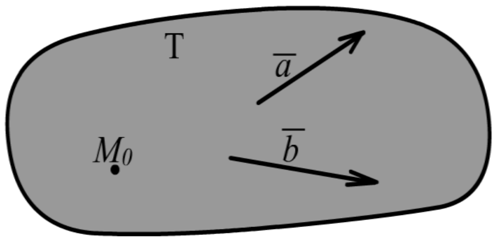
M_0 nuqtasi va kollinear bo'lmagan, har biri P tekislikka parallel bo'lgan, ikki $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar bilan aniqlangan tekislik tenglamasini tuzamiz. Fazoga affin koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lsin, u holda bu sistemaga nisbatan $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ koordinatalarga ega bo'ladi.

Tekislikka qarashli ixtiyoriy $N(x, y, z)$ nuqtani olaylik, u holda $\overrightarrow{M_0N}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar komplanar bo'ladi, ya'ni

$$\left(\overrightarrow{M_0N}\ \vec{a}\ \vec{b}\right) = 0$$

bundan

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (15.1)$$



(15.1) tenglama M_0 nuqtadan o'tib, kollinear bo'lmagan $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarga parallel tekislik tenglamasidir.

$\overrightarrow{M_0N}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar bir tekislikda yotgani uchun ularning biri qolganlari orqali chiziqli ifodalanadi, ya'ni

$$\overrightarrow{M_0N} = u\,\vec{a} + \vartheta\,\vec{b}\,.\ (u, \vartheta) \in R \quad (15.2)$$

u, ϑ sonlar parametrlardir. (15.2) tenglama tekislikning vektor parametrik tenglamasi deyiladi. (15.2) tenglamani koordinatalar bo'yicha yozaylik.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 u + b_1 \vartheta, \\ y &= y_0 + a_2 u + b_2 \vartheta, \\ z &= z_0 + a_3 u + b_3 \vartheta. \end{aligned} \qquad (15.3)$$

bu tenglamani tekislikning parametrik tenglamasi deyiladi. (u, ϑ larning turli qiymatlariga tekislikning turli nuqtalari mos keladi).

Endi (11.1) tenglamani quyidagicha yozaylik.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \; B = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \; C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \qquad (15.4)$$

$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$, bunda $-(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = D$ desak,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (15.5)$$

(15.1) dan (15.5) ni hosil qildik. Demak, (15.5) ham tekislik tenglamasidir. A, B, C larning kamida bittasi 0 dan farqli, agar $A = B = C = 0$ bo'lsa, (15.4) dan $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, $a_3 = \lambda b_3$ bo'lib, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lib qoladi. Bu esa $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning berilishiga ziddir. Tekislikning (15.5) tenglamasiga ko'ra quyidagi xulosaga kelamiz.

Demak, tekislik tenglamasi birinchi darajalidir.

Teskari jumla ham o'rinlidir, har qanday birinchi darajali

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (15.6)$$

tenglama, A, B, C lar bir vaqtda 0 ga teng bo'lmasa, tekislik tenglamasidir.

Haqiqatan ham, (15.5) tenglamadagi x, y, z larni (15.5) tenglama bilan aniqlangan Φ sirt ustida yotuvchi ixtiyoriy N nuqtaning koordinatalari deb qarash mumkin.

Agar (10.5) tenglamada $c \neq 0$ bo'lsa, u holda quyidagiga ega bo'lamiz.

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C} \qquad (15.7)$$

(15.7) dagi $x = u$, $y = \vartheta$ deb olib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$x = u,$$
$$y = \vartheta, \qquad (15.8)$$
$$z = -\frac{D}{C} - \frac{A}{C}u - \frac{B}{C}\vartheta$$

(15.8) tekislikning parametrik tenglamasi. (15.6) va (15.8) tenglamalar u, ϑ larning barcha qiymatlarida $N(x, y, z)$ nuqtalar to'plamini, ya'ni Φ sirtni aniqlaydi. Demak, (15.6) tenglama bilan aniqlangan Φ sirt tekislikdan iborat ekan. Shu bilan birga (15.6) tenglamani tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi. A, B, C sonlarni tekislik koeffitsiyentlari, D ni ozod had deyiladi.

2. Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtaning berilishi bilan aniqlangan tekislik tenglamasi.

Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalar berilgan. Agar $M_1 = M_0$, $\vec{a} = \overline{M_1\vec{M}_2}$, $\vec{b} = \overline{M_1\vec{M}_3}$, $M(x, y, z)$ deb olsak, (15.1) tenglamani

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (15.9)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasidir.

Tekislikni kesmalar bo'yicha tenglamasi.

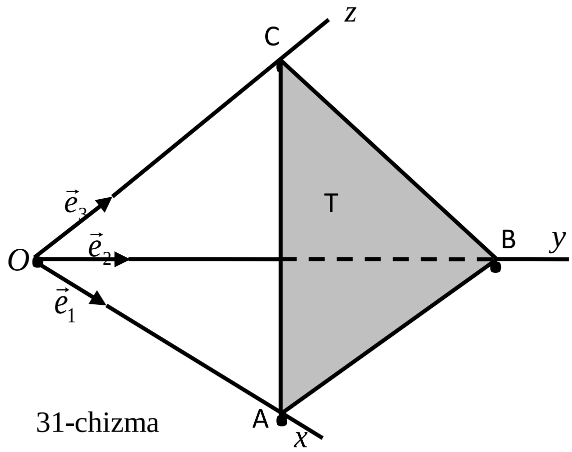
Agar P-tekislik koordinatalar boshidan o'tmasa, ox, oy, oz o'qlarni uchta $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ nuqtalarda kesadi, bu yerda a, b, c sonlar tekislikning shu o'qlardan ajratgan kesmalari. (15.9) tenglamaga asosan

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (15.10)$$

Bu tenglama tekislikning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalar bo'yicha tenglamasi deyiladi.



31-chizma

1-misol. $M_0(2, 0, 3)$ nuqtadan o'tib, $\vec{a}(1, 0, 1)$, $\vec{b}(2, 1, 3)$ vektorlarga parallel tekislikning parametrik va umumiy tenglamasini tuzing.

Yechish. Berilgan $x_0 = 2$, $y_0 = 0$, $z_0 = 3$. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $b_1 = 2$, $b_1 = 1$, $b_3 = 3$ qiymatlarni (15.11) parametrik tenglamaga qo'yib topamiz.

$$\begin{aligned} x &= 2 + u + 2\vartheta, \\ y &= \vartheta, \\ z &= 3 + u + 3\vartheta. \end{aligned}$$

Yuqoridagi ko'rsatilgan M_0 va $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektor koordinatalarini (15.12) tenglamaga qo'yib topamiz.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y_0 & z-3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Bundan tekislikning umumiy tenglamasi

$x + y - z + 1 = 0$.

2-misol. $M_0(1, 2, -3)$ nuqtadan o'tib (xoy) tekislikka parallel tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Izlangan tekislikning ixtiyoriy nuqtasi $N(x, y, z)$ bo'lsin. $\overline{M}_0\vec{N}(x-1, y-2, z+3)$, $\vec{e}_1(1, 0, 0)$, $\vec{e}_2(0, 1, 0)$ vektorlar komplanar bo'ladi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

bundan $z + 3 = 0$-izlangan tekislik tenglamasi kelib chiqadi.

3-misol. $ABCD$ tetraedr tasviri berilgan. A uchni koordinatalar boshi hamda $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AC}$, $\vec{e}_3 = \vec{AD}$ deb olib, BDC va EDC tekisliklar tenglamalarini tuzing (bunda E nuqta AB tomonining o'rta nuqtasi).

Yechish. Berilishiga ko'ra affin koordinatalar sistemasi $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dan iborat. Bu koordinatalar sistemasiga nisbatan

$$A(0,0,0),\ B(1,0,0),\ C(0,1,0),\ D(0,0,1),\ E\left(\frac{1}{2},0,0\right)$$

koordinatalarga ega. U holda BDC tekislik tenglamasini (15.12) tenglamadan foydalanib yozamiz.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ bundan } x+y+z-1=0.$$

Shunga o'xshash EDC tekislik tenglamasi $2x+y+z-1=0$.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar:

Tekislik tenglamalarini yozing.

Fazoda tekislik qanday kattaliklar bilan bir qiymatli aniqlanadi?

Tekisliklarning o'zaro joylashuvi

Reja:

1. Ikki tekislikning o'zaro vaziyati.
2. Ikki tekislik orasidagi burchak.
3. Uchta tekislikning o'zaro vaziyati.

Tayanch so'zlar: Tekislikning normal vektori, ikki tekislik orasidagi burchak.

Ta'rif: Berilgan M_1 nuqtadan P tekislikkacha masofa deb, shu nuqtadan tekislikka tushirilgan $\perp$ to'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishgan nuqtasi orasidagi masofaga aytiladi. $M_1(x_1;y_1;z_1) \notin P$ bo'lsin M_1 dan P ga $\perp$ tushirib, uning kesishgan nuqtasini $M_0(x_0;y_0;z_0)$ deylik, $\overline{N}(A;B;C)$ vektor P tekislikning normal vektori bo'lgani uchun $\overline{N} \,//\, \overline{M_0M_1}$. Demak, $\overline{M_0M_1} * \overline{N} = |\overline{M_0M_1}| * |\overline{N}|$

cos($\overline{M_0M_1}$,^$\overline{N}$)=$\rho(M_1;\text{P})|\overline{N}|$*($\pm$1). Bu yerda cos($\overline{M_0M_1}$,^$\overline{N}$)=$0^0$ yoki 180^0 .

Demak, $\rho(M_1;\text{P}) = \dfrac{|\overline{M_0M_1} * \overline{N}}{|\overline{N}|}$ yoki koordinata formasida

$\overline{M_0M_1}$ (x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0) dan va $\overline{N}$ (A;B;C) dan

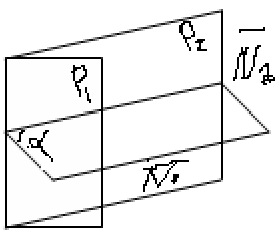
$$\rho(M_1,\text{P}) = \frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1-(Ax_0+By_0+Cz_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Xususiy holda koordinata boshidan tekislikkacha bo'lgan masofa $\rho(0;\text{P}) = \dfrac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ bo'ladi.

Ikki tekislik orasidagi burchak

Ikki tekislik orasidagi burchak shu ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi bilan aniqlanadi.Chiziqli burchaklar esa shu tekisliklarning normal vektorlari orasidagi burchakka teng. Demak, $\overline{N}_1$(A_1;B_1;C_1) , $\overline{N_2}(A_2;B_2;C_2)$ desak

cosφ=cos($\overline{N_1}$;^$\overline{N_2}$)=$\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}+C_1^{\,2}} * \sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}+C_2^{\,2}}}$. Bu ikki tekislik orasidagi burchakni hisoblash formulasidir.



32- chizma

a)ikki tekislikning parallellik sharti

Ikkita P_1.va P_2 tekisliklar parallel bo'lishi uchun ularning normal vektorlari $\overline{N}_1$ va $\overline{N_2}$ lar kolliniar bo'lishi kerak ,ya'ni $\overline{N}_1$(A_1;B_1;C_1) va $\overline{N_2}(A_2;B_2;C_2)$ uchun

$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ koordinatalar proporsionalligi

b) Ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti.

Ikkita P_1.va P_2 tekisliklar perpendikulyar bo'lishi uchun ularning normal vektorlari $\overline{N}_1$ va $\overline{N_2}$ lar bir- biriga orthogonal bo'lishi kerak, ya'ni : $\overline{N}_1$* $\overline{N_2}$ =0 yoki $(\overline{A_1;B_1;C_1})*(\overline{A_2;B_2;C_2})=$

$= A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$ =0 bo'ladi.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar:

1. Nuqtadan tekislikkacha bo`lgan masofa qanday topiladi?
2. Ikki tekislik orasidagi burchak qanday hisoblanadi?
3. Ikki tekislikning parallel va perpendikulyar shartlari qanday?

Fazoda to'g'ri chiziqning berilish usullari. Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati

Reja :

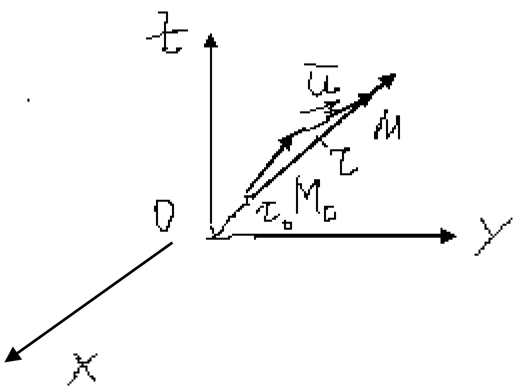
1.Fazoda to'g'ri chiziqning tenglamalari.

3. Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati.

4. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

Tayanch so'zlar: To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori, to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi, ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi, parallel to'g'ri chiziqlar.

Fazoda to'g'ri chiziq o'zining nuqtasi va shu chiziqqa parallel biror $\overline{u} \neq \overline{0}$ vektor bilan to'la aniqlanadi.



33- chizma

Ixtiyoriy to'g'ri chiziq va unga parallel $\bar{u}$(k,l,m) vector berilgan bo'lsin. $\bar{u}$ vektor to'g'ri chiziqni yo'naltiruvchi vektori deyiladi. To'g'ri chiziqqa tegishli $M_0(x_0;y_0;z_0)$ va ixtiyoriy M(x;y;z) nuqtalarni olsak, $\overline{M_0M} // \bar{u} \Rightarrow \overline{M_0M} = t\bar{u}$ bo'ladi. M_0 nuqtani radius- vektorini $\bar{r_0}$ bilan M nuqtani radius vektorini $\bar{r}$ bilan belgilasak, $\bar{r}$ - $\bar{r_0}$ = t$\bar{u}$ tenglik hosil bo'ladi. Bu yerda t parametr bo'lib, ixtiyoriy qiymatlar qabul qila oladi. Bundan $\bar{r}$ = $\bar{r_0}$ + t$\bar{u}$ bo'lib, bu tenglama to'g'ri chiziqning vektorli tenglamasi deb yuritiladi. Hosil bo'lgan tenglikni koorinatalarda ifodalasak quyidagi tengliklar hosil bo'ladi:

$$x = kt + x_0, \quad y = lt + y_0, \quad z = mt + z_0$$

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}.$$

tenglikni hosil qilqsh mumkin. Bu tenglama to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deb yuritiladi.

2. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

To'g'ri chiziqqa tegishli ikki nuqta ham uning fazodagi vaziyatini to'la aniqlaydi. U to'g'ri chiziq M_1 va M_2 nuqtalardan o'tsin. ($M_1 \neq M_2$). U holda tog'ri chiziqning kanonik tenglamasida M_0 nuqta o'rniga M_1 nuqta va $\bar{u} = \overline{M_1M_2}$ deb olinsa,

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{z - z'}{z'' - z'}. \qquad (17.1)$$

Tenglama hosil bo'lib, bu tenglama berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deb yuritiladi.

3. Fazodagi har bir to'g'ri chiziqni ikki tekislikning kesishish chizig'i deb qarash mumkin. Shunga ko'ra $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini ham to'g'ri chiziq tenglamasi deb qarash mumkin. Bu tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deb yuritiladi.

Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati.

Fazoda U_1 va U_2 to'g'ri chiziqlar parametrik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin.:

$$U_1:\ x=x_1+tm_1$$

$$y=y_1+tn_1 \quad va \quad \bar{u}\ (m_1;n_1;p_1)$$

$$z=z_1+tp_1$$

$$U_2:\ x=x_2+tm_2$$

$$y=y_2+tn_2 \quad va \quad \bar{u}\ (m_2;n_2;p_2)$$

$$z=z_2+tp_2$$

Fazoda ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel, kesishadi va ayqash holatlarda bo'lishi mumkin.

1) $U_1 \parallel U_2 \Rightarrow \overline{U_1} \parallel \overline{U_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$ parallellik sharti.

2) U_1, U_2 to'g'ri chiziqlar kesishmasin. U holda bu ikki to'g'ri chiziqlar bir tekislikka tegishli bo'lib, $\overline{U_1}$, $\overline{U_2}$, $\overline{M_1M_2}$ vektorlar komplanar, ya'ni ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'ladi, yoki $\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0$

bu U_1 , U_2 to'g'ri chiziqlarning bir tekislikka tegishlilik sartidir, bunda $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$ shart bajarilmasa, to'g'ri chiziqlar bir nuqtada kesishadi.

U_1 va U_2 to'g'ri chiziqlar kesishmasa hamda parallel bo'lmasa, u holda bu to'g'ri chiziqlar ayqash deyiladi.

Demak, $\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}\neq 0$ shart ikki to'g'ri chiziqning ayqashlik shartini beradi.

Agar to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari o'zaro perpendikulyar bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar ham o'zaro perprndikulyar bo'ladi, yani

$\overline{(m_1; n_1; p_1)}\ \overline{(m_2; n_2; p_2)} = 0, \quad m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$ shart ikki to'g'ri chiziqning perprndikulyarlik sharti bo'ladi.

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb, bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi. $\cos(\overline{U_1};\wedge\overline{U_2}) = \dfrac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$ bu yerda $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$ bo'lsa, $\cos(\overline{U_1};\wedge\overline{U_2}) = 0 \Rightarrow \overline{U_1} \perp \overline{U_2}$ bo'lib, to'g'ri chiziqlar ham perpendikulyar bo'ladi.

Fazoda to'g'ri chiziq bog'lami.

Ta'rif: Fazoda berilgan M_0 nuqtadan o'tgan barcha to'g'ri chiziqlar to'plami M_0 markazli to'g'ri chiziqlar bog'lami deb ataladi.

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ markazli bog'lam $\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$ parametrik tenglamalr bilan ifodalanadi.

Fazoda to'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro vaziyati.

U to'g'ri chiziq parametrik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin. U: $\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \quad \overline{U}(m; n; p) \\ z = z_0 + tp \end{cases}$

P tekislik umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsin

P:Ax+By+Cz+D=0 $\overline{N}(A; B; C)$ $\overline{N} \perp \mathrm{P}$ $\overline{N}$ va $\overline{U}$ vektorlar orasidagi burchakni σ desak, U to'g'ri chiziq bilan P tekislik orasidagi burchakni φ desak, u holda $\pm\cos\sigma = \sin\varphi$ bo'ladi.

Demak, $\cos\sigma = \dfrac{\overline{N} * \overline{U}}{|\overline{N}||\overline{U}|}$ *yoki* $\sin\varphi = \pm\dfrac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$

1) Agar $\overline{N}$ va $\overline{U}$ lar ortogonal bo'lsa, ya'ni ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, yani Am+Bn+Cp=0 bo'lsa, u holda tekislik va to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'ladi.

2) Agar $\overline{N} // \overline{U}$ bo'lsa, u holda $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ bo'lib, U to'g'ri chiziq P tekislikka perpendikulyar bo'ladi.

Demak, to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik sharti $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ bo'ladi.

1. To'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasi

Fazoda to'g'ri chziq parametrik tenglamasi bilan, tekislik umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsin:

U: $\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$ $\overline{U}(m;n;p)$, P: Ax+By+Cz+D=0, $\overline{N}$(A;B;C) $\overline{N} \perp$ P

Bularni kesishgan nuqtasini topish uchun ularning tenglamalarini sistema sifatida yechish kerak, u holda quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$A(x_0+tm)+B(y_0+tn)+C(z_0+tp)+D=0 \quad \text{yoki}$$

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D+t(Am+Bn+Cp)=0$$

bundan t=-$\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_o + D}{Am + Bn + Cp}$ bo'lib, t ning bu qiymatini to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasiga qo'yilsa izlangan nuqtaning koordinatalari topiladi.

To'g'ri chiziq va tekisliklarning o'zaro joylashuvi

1.Agar t yagona yechim bo'lsa, to'g'ri chiziq va tekisliklar yagona nuqtada kesishadi, ya'ni Am+Bn+Cp$\neq$0 bo'lsa.

2.Agar t ning qiymati mavjud bo'lmasa, to'g'ri chiziq va tekisliklar kesishmaydi, ya'ni Am+Bn+Cp=0 va $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0$ bo'lsa. Demak, to'g'ri chiziq va tekislik parallel bo'ladi. $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$

3.Agar t ning qiymati cheksiz ko'p bo'lsa, , to'g'ri chiziq tekislikda yotadi, ya'ni Am+Bn+Cp=0, $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ bo'lsa. Demak, to'g'ri chiziq tekislikda yotadi. $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$

Misol . Quyidagi to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini yozing.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 8 = 0, \\ x - 2y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Yechish.

$\overline{n_1} = \{2,3,1\}, \overline{n_2} = \{1,-2,-2\}$ vektorlar kollinear emasligini tekshirib ko'ramiz: $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-2}$.

Demak vektorlar kollinear emas, u xolda tekisliklar biror to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi.

$\overline{a} \perp \overline{n}_1 = \{2,3,1\}, \overline{a} \perp \overline{n}_2 = \{1,-2,-2\}.$

$$\overline{a} = [\overline{n_1}, \overline{n_2}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4\overline{i} + 5\overline{j} - 7\overline{k}.$$

Endi to'g'ri chiziqqa tegishli nuqtaning koordinatasini topamiz. Buning uchun o'zgaruvchilarning birortasiga, masalan u=0 qiymat beramiz. U xolda quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} 2x + z - 8 = 0, \\ x - 2z + 1 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Bu yerda tenglamalar sistemasi $x_0=3$, $y_0=0$, $z_0=2$, yechimga ega. Demak $M_0(3,0,2)$.

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-7}$$

Javob: Berilgan to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi : $\frac{x-3}{-4} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-7}$.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar

1.To'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

2. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

3. Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro qanday vaziyatlarda bo'ladi?

4. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasini yozing.

Fazoda ikkinchi tartibli sirtlar

Reja

1. Ellipsoid va uning xossalari.
2. Giperboloidlar va ularning xossalari.
3. Paraboloidlar va ularning xossalari.

Ellipsoid

Fazoda to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo`lsin.

Ta'rif. Koordinatalari

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (18.1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalar to`plamini ellipsoid deyiladi.

Bu tenglamani ellipsoidning kanonik tenglamasi deyiladi. Musbat a, b, c sonlarni ellipsoidning yarim G`qlari deyiladi.

Ellipsoidning shaklini va geometrik xossalarini uning kanonik tenglamasidan foydalanib, kesish metodi orqali o`rganamiz.

Ellipsoidning xossalari:

1°. (18.1) tenglama ikkinchi tartibli algebraik tenglama. Shuning uchun ikkinchi tartibli sirt. Demak, (18.1) tenglama bilan berilgan sirt, koordinata tekisliklariga, koordinatalar boshiga va koordinatalar G`qlariga nisbatan simmetrik joylashgan.

2°. Ellipsoidning simmetriya markazini sirtning markazi, simmetriya o`qlari esa uning o`qlari deyiladi.

3°. (18.1) tenglamaning o`ng tomoniga e'tibor beraylik. Unda musbat son yig'indisi birga teng, demak

$\frac{x^2}{a^2}\le 1,\ \frac{y^2}{b^2}\le 1,\ \frac{z^2}{c^2}\le 1$

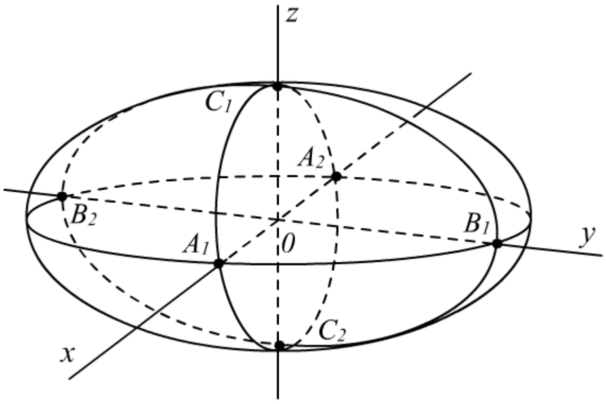
yoki

$x^2 \le a^2$, $y^2 \le b^2$, $z^2 \le c^2$.

Bundan

$$-a \le x \le a,\ -b \le y \le b,\ -c \le z \le c \qquad (18.2)$$

Ellipsoidning barcha nuqtalari, qirralari $2a$, $2b$, $2c$ dan iborat. Markazi koordinatalar boshida bo`lgan parallelepiped ichiga joylashgan (34-chizma).



34- chizma

4°. (18.1) dagi qo`shiluvchilardan biri birga teng bo'lsa, qolganlari nol bo`lishi kerak. $\frac{x^2}{a^2}=1$, $\frac{y^2}{b^2}=0$, $\frac{z^2}{c^2}=0$. Bundan $x=\pm a$, $y=0$, $z=0$. Ellipsoid ox o`qini $A_1(a,0,0)$ va $A_2(-1,0,0)$ nuqtada kesadi. Shunga o`xshash sirt oy o`qini ikkita $B_1(0,1,0)$ va $B_2(0,-1,0)$ nuqtalarda, $oz$ o`qini $C_1(0,0,1)$ va $C_2(0,0,-1)$ nuqtalarda kesadi. Bu A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 nuqtalarni ellipsoidning uchlari deyiladi.

Ellipsoid sirtni koordinatalar tekisligi bilan kesishini tekshiraylik.

5°. a) Ellipsoidni (xoy) koordinata tekisligi $z=0$ bilan kessak, kesimda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(xoy) tekisligida yotuvchi ellips hosil bo`ladi.

b) Sirtni (xoz) tekislik bilan, ya'ni $y=0$ tekislik bilan kessak, kesimda (xoz) tekisligida yotuvchi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellips hosil bo`ladi.

v) Ellipsoid (yoz) tekislik bilan kessak, ya'ni $x=0$ tekislik bilan kessak, kesimda shu tekislikda yotuvchi $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellips hosil bo`ladi.

Demak, ellipsoidni koordinata tekisliklari bilan kessak, kesimda ellipslar hosil bo`ladi.

6°. Endi ellipsoidni koordinatalar tekisligiga parallel tekisliklar bilan kesimini tekshiraylik.

Koordinata tekisligi (xoy) ga parallel $z=h$ $(h\in R)$ tekislik bilan kesaylik, kesimda

$$\gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \qquad (18.3)$$

chiziq hosil bo`ladi, bu erda uch hol o`rinli bo`lishi mumkin:

a) $-c<h<c$, bundan $1-\frac{h^2}{c^2}>0$ bo`lib, γ chiziq markazi $(0,0,h)$ nuqtada va $z=h$ tekislikda yotuvchi ellipsdan iborat.

b) $h=c$ yoki $h=-c$ bo'lsa, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ bo`lib, bu shartni faqatgina $x=0$, $y=0$ qanoatlantiradi. Demak, $z=c$ tekislik bu holda sirt bilan $(0,0,c)$ nuqtada kesishadi.

v) Agar $h>c$ yoki $h<-c$ bo'lsa, $1-\frac{h^2}{c^2}<0$ bo`lib, (18.3) ning o`ng tomonida manfiy, chap tomonida musbat son hosil bo`ladi. Demak, bu holda tekislik ellipsoid bilan kesishmaydi.

Bu ma'lumotlarga ko`ra ellipsoid shaklini chizamiz

Xususan: 1) Agar $a=b\neq c$ bo'lsa, oz o`qi atrofida aylanishdan hosil bo`lgan sirtni aylanma ellipsoid deyiladi.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

2) Agar $a=b=c$ bo'lsa, $x^2+y^2+z^2=a^2$ bo`lib, markazi koordinatalar boshida va radiusi $a$ ga teng bo`lgan sferani aniqlaydi.

3) Agar $a\neq b\neq c$ bo'lsa, u holda ellipsoidni uch o`qli ellipsoid deyiladi.

Giperboloidlar

Giperboloid sirtlar ikki xil bo`ladi. Bir pallali va ikki pallali giperboloidlar. To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo`lsin.

Ta'rif. Koordinatalari

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (18.4)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o`rni bir pallali giperboloid deyiladi. (18.4) tenglamani bir pallali giperboloidning kanonik tenglamasi deyiladi.

Bu sirtning shaklini va xossalarini aniqlaylik.

1°. Bir pallali giperboloid sirt ikkinchi tartibli sirtdir.

2°. Koordinatalar tekisligiga, koordinatalar o`qlariga (sirt o`qi) va koordinatalar boshiga (sirt markzi) nisbatan simmetrik joylashgan.

3°. Sirtning koordinata o`qlari bilan kesishishini tekshiraylik.

a) ox G`q $(y=0,\ z=0)$ bilan kesishishini tekshiraylik:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x=\pm a \qquad A_1(a,0,0) \text{ va } A_2(-a,0,0)$$

demak, ox o`qi bilan ikkita A_1 va A_2 nuqtalarda kesishadi.

b) Shuning singari oy o`q bilan ikkita $B_1(0,b,0)$ va $B_2(0,-b,0)$ nuqtalarda kesishadi.

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y=\pm b \qquad B_1(0,b,0) \text{ va } B_2(0,-b,0)$$

v) oz o`qi bilan $(x=0,\ y=0)$ kesishmaydi. Ḱaqiqatan,

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ \quad x=0 \\ \quad y=0 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow z^2=-c^2$$

Haqiqiy sonlar sohasida bu tenglikning o`rinli bo`lishi mumkin emas. Shuning uchun oz o`qni bir pallali giperboloidning mavhum o`qi deyiladi. ox, oy o`qlarni bir pallali giperboloidning haqiqiy o`qlari deyiladi. Yuqorida hosil qilingan A_1, A_2 va B_1, B_2 nuqtalarni bir pallali giperboloidning uchlari deyiladi.

4°. Bir pallali giperboloidning koordinata tekisliklari bilan kesishishini tekshiraylik.

(18.4) tenglamaga e'tibor beraylik. (xoy) tekislik bilan kessak kesimda ellips hosil bo`ladi. $x=0,\ y=0$ koordinata tekisliklari bilan kessak, kesimda giperbolalar hosil bo`ladi.

5°. Bir pallali giperbolani koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesaylik. (oxz) tekisligiga parallel $y=h$ tekislik bilan kesaylik.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ \quad y=h \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2} \quad (18.5)$$

Bunda quyidagi hollarni kG`rib chiqaylik:

a) $h=b$ bo'lsa, $(99)\Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ yoki $\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=0$ bo`lib, kesim ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlardan iborat.

b) $-b<h<b$ bo'lsa, $1-\dfrac{h^2}{b^2}>0$ bG`lib, (18.5) quyidagi ko`rinishni oladi.

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{b^2}\right)}-\frac{z^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1$$

Bu esa $y=h$ tekislikda mavhum o`qi oz ga parallel giperboloidni aniqlaydi.

v) $|h|>b$ bo'lsa, $1-\dfrac{h^2}{b^2}<0$ bo`lib, (18.5) tenglama quyidagi ko`rinshni oladi.

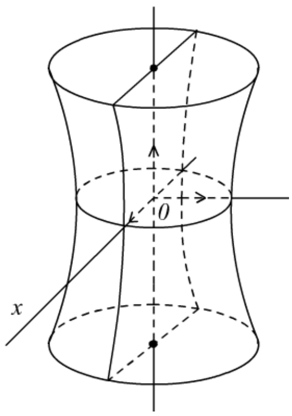
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\left(\frac{h^2}{b^2}-1\right) \text{ (bunda } \frac{h^2}{b^2}-1>0\text{)}$$

Bundan

$$-\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{b^2}-1\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{b^2}-1\right)}=1$$

Bu tenglama $y=h$ tekislikdagi giperbola tenglamasi bo`lib, mavhum o`qi ox o`qqa parallel. Agar giperbolani $x=h$ tekislik bilan kessak, kesimda yuqorida zikr qilingan hollar sodir bo`ladi.

Bir pallali giperboloidning barcha xossalari bu sirtning qanday sirt ekanligini ko`z oldimizda namoyon qiladi (35-chizma).



35- chizma

Agar $a=b$ bo'lsa, (18.4) tenglama

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

ko`rinishga keladi, bu tenglama $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbolani $oz$ o`qi atrofida aylanishdan hosil bo`lgan aylanma giperboloid sirt tenglamasi.

Šuyidagi tenglamalar ham bir pallali giperboloidlar tenglamalarni bo`lib,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (18.6)$$

yoki

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (18.7)$$

Ular mavhum o`qlari bilangina farq qiladi. (18.6) da mavhum o`q oy, (18.7) da mavhum o`q ox dir.

Ta’rif. Koordinatalari

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (18.8)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o`rni ikki pallali giperboloid deb aytiladi.

(18.8) tenglamani ikki pallali giperboloidning kanonik tenglamasi deyiladi.

Bir pallali giperboloid tenglamasini tekshirishdagi takrorlanadigan ba’zi hollarni ko`rmaymiz.

1°. Giperboloid ikkinchi tartibli sirt.

2°. Giperboloid koordinatalar tekisligiga, koordinatalar o`qiga (sirtning o`qi) va koordinatalar boshiga (sirt markazi) nisbatan simmetrik.

3°. Faqatgina ox o`q bilan $A_1(a,0,0)$ va $A_2(-a,0,0)$ nuqtalarda kesishib boshqa koordinatalar o`qi bilan kesishmaydi. A_1 va A_2 nuqtalarni ikki pallali giperboloidning uchlari deyiladi. ox o`qni haqiqiy o`q, oy va oz o`qlarni mavhum o`q deyiladi. a,b,c sonlarni ikki pallali giperboloidning yarim o`qlari deyiladi.

Bulardan ko`rinib turibdiki, giperboloid $oyz$ koordinatalar tekisligiga nisbatan simmetrik bo`lgan ikkita qismdan iborat, ya’ni ikki palladan iborat.

4°. (9.2) ni oyz tekislikka parallel $x=h$ tekislik bilan kesimini tekshiraylik:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=h\end{cases}\Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}$$

yoki

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{h^2}{a^2}-1 \quad (18.9)$$

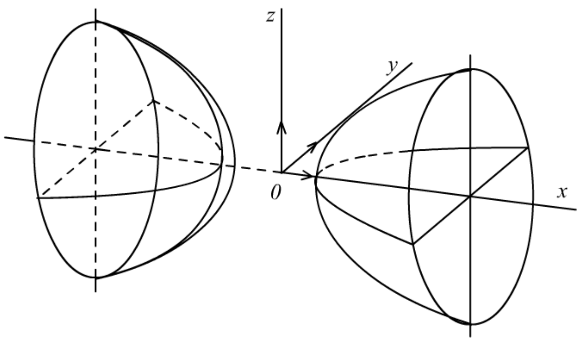
$|h|>a\Rightarrow \frac{h^2}{a^2}-1>0$. (9.30) tenglama

$$\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}=1$$

ko`rinishga keladi va $x=h$ tekislikda ellipsni aniqlaydi. $h=a$ da kesim faqat bitta $A_1(a,0,0)$ yoki $A_2(-a,0,0)$ nuqtadan iborat.

Boshqa koordinata tekisliklariga va unga parallel tekisliklar bilan kesimda giperbolalar hosil bo`ladi.

Ikki pallali giperbolaning shakli 36-chizmada berilgan.



36- chizma

Agar $b=c$ bo’lsa, (18.9) tenglama

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

ko`rinishni oladi va $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbolaning ($y=0$ tekislikda) $ox$ o`qi atrofida aylanishdan hosil qilinadi, u aylanma ikki pallali giperboloiddir.

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

yoki

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

ko’rinishdagi tenglamalar ham ikki pallali giperboloid bo`lib, birinchisi uchun $ox$, $oy$ o`qlar, ikkinchisi uchun ox, oz o`qlar mavhum o`qlar bo`ladi.

Paraboloidlar

Ikkinchi tartibli sirtlarning yana bir sinfi paraboloidlar. Bu sirtlar ham ikki turli bo`lib, ular bilan tanishib chiqamiz.

Ta’rif. Koordinatalari

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\ (p>0,\quad q>0)\quad (18.10)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o`rni elliptik paraboloid deb aytiladi.

(18.10) tenglama elliptik paraboloidning kanonik tenglamasi deyiladi.

Bu tenglamaga ko`ra paraboloidning geometrik xossalarini o`rganib shaklini yasaymiz.

1°. Elliptik paraboloid ham ikkinchi tartibli sirt, koordinatalar boshidan o`tadi.

2°. (18.10) tenglamaga e’tibor beraylik. x va y o`zgaruvchilar juft darajada, u holda elliptik paraboloid $oxz$ va $oyz$ koordinata tekisliklariga nisbatan va $oz$ o`qqa (sirt o`qi) nisbatan simmetrik joylashgan. Bu sirt $oxy$ tekislikka va $ox$, $oy$ o`qlarga nisbatan simmetrik emas.

Elliptik parabola o`zining o`qi bilan kesishishidan hosil bo`lgan nuqtani elliptik parabolaning uchi deyiladi. Agar sirt o`zining (18.10) kanonik tenglamasi bilan berilsa, u holda koordinatalar boshi uning uchi bo`ladi.

(18.10) ga e’tibor beraylik. Elliptik paraboloid sirtning har bir nuqtasi uchun $z\geq 0$, $z=0$ faqat uchi uchun to’g’ri.

Demak, elliptik paraboloidning uchidan tashqari hamma nuqtalari oxy tekislikning bir tarafida yotadi.

3°. xoy tekislik $(z=0)$ bilan kesishish chizig’i:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=0\Rightarrow(0,0,0)$$

4°. xoz tekislik $(y=0)$ bilan kesishib, kesimda o`qi $oz$ dan iborat $x^2=2pz$ parabola hosil bo`ladi.

5°. yoz tekislik $(x=0)$ bilan kesganda kesim chizig'i: $y^2=2pz$ bu ham simmetriya o`qi oz dan iborat yoz tekisligidagi paraboladir.

6°. Elliptik paraboloidni koordinata tekisligiga parallel tekisliklar bilan kesimini tekshiraylik.

$z=h$ tekislik bilan kesim chizig'i:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h \\ z=h \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h \qquad (18.11)$$

Agar $h=0 \Rightarrow z=0$ bo`ladi. 3° hol kelib chiqadi.

Agar $h<0$ bo'lsa, p va q shartga ko`ra musbat. Shuning uchun (9.32) tenglik o`rinli bo`lmaydi.

Agar $h>0$ bo'lsa, (18.11) dan

$$\frac{x^2}{2hp}+\frac{y^2}{2hq}=1$$

bo`lib, bu tenglama $z=h$ tekislikdagi ellipsni bildiradi.

Agar $p=q$ bo'lsa, u holda (18.11) tenglama

$$x^2+y^2=2pz$$

ko`rinishida bo`lib, aylanma paraboloid bo`ladi. O'qlari $ox$ va $oy$ dan iborat elliptik paraboloidlar tenglamalar mos ravishda quyidagicha bo`ladi:

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x \qquad \text{va} \qquad (18.12)$$

$$\frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2y\,.$$

Ta'rif. Koordinatalari

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z\ (p>0,\quad q>0)(18.13)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o`rnini giperbolik paraboloid deb aytiladi.

(18.13) tenglama giperbolik paraboloidning kanonik tenglamasi deyiladi.

Giperbolik paraboloidni (18.13) tenglamasiga ko`ra uning xossalarini o`rganib shaklini yasaymiz.

1°. Giperbolik paraboloid ikkinchi tartibli sirt bo`lib, koordinatalar boshidan o`tadi.

2°. Koordinata o`qlari bilan faqat koordinata boshidan kesishadi.

3°. Koordinatalar tekisliklar bilan kesishishini ko`raylik.

a) $z=0$ koordinatalar o`qi bilan kesishib, ikkita $\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=0$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlarni hosil qiladi.

b) $y=0$ tekislik bilan simmetriya o`qi oz dan iborat $y^2=2pz$ parabola bo'yicha kesishadi.

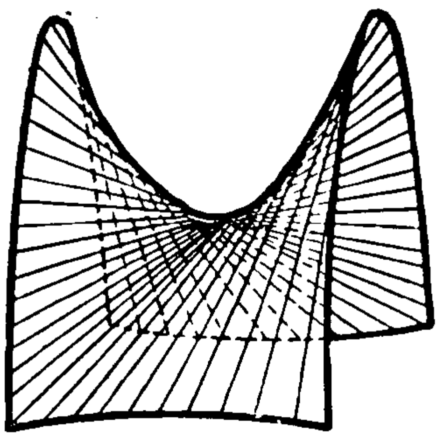
v) $x=0$ tekislik bilan kesishib, simmetrik o`qi $oz$ bo`lgan $y^2=-2pz$ parabola bo'yicha kesishadi.

4°. Koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesaylik.

a) xoy tekislikka parallel $z=h>0$ bilan kessak, kesimda $\frac{x^2}{2ph}-\frac{y^2}{2qh}=1$ giperbola hosil bG`ladi.

b) $z=h<0$ bo'lsa, $-\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1$ giperbola hosil qilinadi.

Boshqa koordinatalar tekisligiga parallel tekisliklar bilan kesganimizda kesimda doim parabolalar hosil bo`ladi.



37- chizma

Sirkul va chizg'iz yordamida yasash aksiomalari

Reja:

1. Yasashga doir masalani yechishdagi aksiomalar.
2. Sirkul va chizg'ich aksoimalari.
3. Asosiy elementar yasashlar.

Tayanch so'zlar: Yasashga doir masala, aksioma, elementar yasashga doir masalalar.

Bizga o'rta maktabdan yasashga doir masalalarni yechishning turli usullari ma'lum. Maktabda yasaladigan figuralarni asosan sirkul va chizg'ich yordamida bajarilishi talab qilinadi. Akademik litseylar uchun o'quv dasturda o'quvchilar sirkul va chizg'ich yordamida tipik yasashga doir masalalarni hal qilish talab qilinadi. Jumladan, berilgan tomonlariga ko'ra uchburchak yasash, berilgan burchakka teng burchak yasash; burchak bissiktrisani yasash; kesmani teng ikkiga bo'lish; perpendikulyar to'g'ri chiziq yasash va h.k.

O'quvchilarning fazoviy tasavvurlarini kengaytirishda ijodiy va konstruktorlik qobilyatlarini rivojlantirishda hamda ularni mantiqiy fikrlashga o'rgatishda yasashga doir masalalarni yechishning ahamiyati judda kattadir.

Bizga ma'lumki, nuqtalarning har qanday to'plami figura deb ataladi. Ma'lum talablarga javob beruvchi figurani bir yoki bir nechta yasash qurollari yordamida yasashni talab etgan masala konstruktiv (yasashga doir) masala deyiladi.

Konstruktiv geometriyada geometrik figurani yasash deganda uning barcha elementlarini topishni tushunamiz. Geometriyaning yasashga doir asosiy talablari quyidagi aksiomalar orqali ifoda qilinadi.

Aksioma - 1. Berilgan $F_1, F_2, ..., F_n$ figuralarni har biri yasalgan.

Aksioma - 2. Ikkita figura yasalgan bo'lsa, u holda ularning birlashmasi ham yasalgan.

Aksioma - 3. Ikkita F_1 va F_2 figuralar yasalgan bo'lsa, hamda ularning kesishmasi bo'sh bo'lmasa, ularning $F_1 \cap F_2$ kesishmasi ham yasalgan.

Aksioma - 4. Agar F_1 va F_2 figura yasalgan va $F_1 \subset F_2, F_1 \neq F_2$ bo'lsa, u holda $F_1 \setminus F_2$ figura ham yasalgan bo'ladi.

Aksioma - 5. Agar F figura yasalgan bo'lsa, bu figuraga qarashli nuqtani yasash mumkin.

Biz Yevklid tekisligiga taaluqli yasashga doir masalalar bilan shug'ullanamiz. Tekislikda yasashga doir masalalarni yechishda odatda yasash qurillaridan sirkul va chizg'ich ishlatiladi. Yasashga doir masalalarni chizg'ich va sirkul yordamida yechishda chizma praktikasida qo'llaniladigan chizg'ich va sirkul emas, balki abstrakt chizg'ich va sirkul e'tiborga olingan. Bu qurollarning konstruktiv imkoniyatlari quyidagi ikki aksioma bilan ifoda qilinadi:

1. Chizg'ich aksiomasi. Agar *A* va *B* nuqtalar ($A \neq B$) berilgan bo'lsa, *AB* to'g'ri chiziqni (nurni) yasash mumkin.

2. Sirkul aksiomasi. Agar *O* nuqta va *AB* kesma yasalgan bo'lsa, markazi *O* nuqtada va radiusi $r=AB$ bo'lgan aylana chizish mumkin.

Kontruktiv masalalarni yechishda ularni ko'p uchrab turadigan eng sodda masalalarga keltirib yechiladi. Bunday masalalarni odatda elementar masalalar yoki asosiy geometrik yasashlar deb ataladi. Ularning quyidagi ro'yxati albatta shartlidir.

1. Uchta tomoni berilgan uchburchak yasash.
2. Berilgan burchakka teng burchak yasash.
3. Ikki tomoni va ular orasidagi burchak berilgan uchburchak yasash.
4. Bir tomoni va unga yopishgan 2 burchagi bo'yicha uchburchak yasash.
5. Berilgan to'g'ri chiziqqa berilgan nuqtadan perpendikulyar o'tkazish (2 hol).
6. Berilgan nurni uchidan uni davom ettirishdan perpendikulyar chiqarish.
7. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazish.
8. Berilgan kesmani teng ikkiga bo'lish.
9. Berilgan burchakni teng ikkiga bo'lish.
10. Berilgan kesmani teng *n* ta bo'lakka bo'lish (n>2).

11.Berilgan kesmani *m:n* nisbatda bo'lish.

12.Berilgan nuqtadan aylanaga urinma o'tkazish.

13.Gipotenuzasi va bir kateti bo'yicha to'g'ri burchakli uchburchak yasash.

14. Ikki kateti bo'yicha to'g'ri burchakli uchburchak yasang va h.k.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar:

1.Yasashga doir masalani yechishdagi aksiomalarni ayting.

2.Sirkul va chizg'ich aksoimalarini ayting.

3.Asosiy elementar yasashlarni bajaring.

Yasashga doir masalalarni echish metodlari

Reja:

1.To'g'rilash metodi.

2.Geometrik o'rinlar metodi.

3.Geometrik almashtirishlar metodi.

4.Algebraik metod.

Tayanch so'zlar: Yasash bosqichlari, to'g'rilash metodi, geometrik o'rinlar metodi, geometrik almashtirishlar metodi, algebraik metod

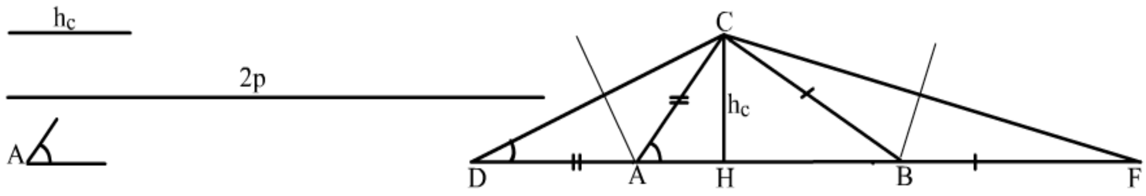
1. To'g'rilash metodi.

Bir to'g'ri chiziqda yotmagan kesmalarning, masalan siniq chiziq bo'g'inlarining algebraik yig'indisiga teng kesma yasash, kesmalarni to'g'rilash deb ataladi. To'g'rilashdan foydalanib masala yechish – yasashda to'g'rilash metodi deyiladi.

Yasashga doir masaladagi ma'lum elementlar qatorida izlanayotgan figura chiziqli noma'lum elementlarining yig'indisi yoki ayirmasi berilgan bo'lsa, bunday masala To'g'rilash metodi bilan oson yechiladi.

Misol: Balandligi, peremetri va asosiga yopishgan bitta burchagi berilgan uchburchak yasang.

$CA=AD$, $CB=BF$ deb olsak, $DF=2p$, $CH=h_c$, $\angle CDA=\frac{\angle A}{2}$;



38- chizma

U holda ΔCDF ($\angle D, 2p, hc$) yordamchi figura bo'ladi. Undan izlangan ΔABC ga o'tish uchun *DC* va *CF* ning o'rta perpendikulyarlarini o'tkazib *A* va *B* nuqtalarni topamiz. Masala $h < \frac{a+b+c}{2}$, $h_c < P.$ bo'lishi shart.

2. Geometrik o'rinlar metodi.

Geometrik o'rinlar metodida masala quyidagi ikki shartni qanoatlantiruvchi nuqtani topishga keltiriladi:
birinchi shartni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni F_1 figuradan;
ikkinchi shartni bajaruvchi nuqtalarning geometrik o'rni F_2 figuradan iborat bo'lsin. Har ikki shartni qanoatlantiradigan nuqtalar $F_1 \cap F_2$ kesishmaga tegishli bo'ladi.

Tekislikning ma'lum talablarga javob beruvchi biror yoki bir nechta nuqtasini topishga doir masalalar yoki shunday nuqtalarni topishga keltirib yechiladigan masalalar geometrik o'rinlar metodi bilan yechiladi.

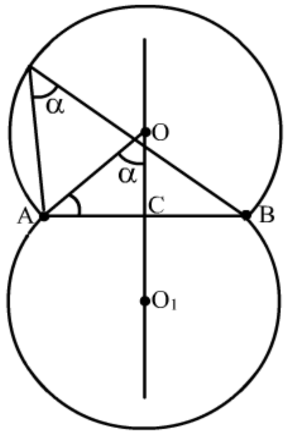
Bu metod bilan masala yechish uchun o'rta maktabda ma'lum bo'lgan quyidagi asosiy geometrik o'rinlarni puxta bilish zarur:

1. Tekislikning biror O nuqtasidan ma'lum *r* uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o'rni shu O nuqtadan *r* bilan chizilgan aylana bo'ladi.
2. Berilgan to'g'ri chiziqdan ma'lum masofada yotgan naqtalarning geometrik o'rni shu to'g'ri chiziqdan ikki tarafda unga parallel va berilgan masofada joylashgan ikki to'g'ri chiziqdir.
3. Kesma uchlaridan teng uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni shu kesmaning o'rta perpendikulyari bo'ladi.

4. Burchak tekisligida burchak tomonlaridan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rni shu burchakning bissektrisasidir.

5. O'zaro parallel ikki to'g'ri chiziqdan teng uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni bu to'g'ri chiziqlarning istalgan ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma o'rtasidan shu to'g'ri chiziqlarga parallel qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziqdir.

6. Berilgan *AB* kesma berilgan burchak (90^0) ostida ko'rinadigan nuqtalarning geometrik o'rni berilgan kesmani diametr qilib chizilgan aylanadan iboratdir (bu geometrik o'ringa *A*, *B* nuqtalar kirmaydi).



7. Berilgan kesma (*AB*) berilgan (α) burchak ostida ko'rinuvchi nuqtalarning geometrik o'rni birilgan burchakni sig'diruvchi ikkita teng sigmentning berilgan kesma bilan tortilib turuvchi yoylaridan iboratdir (geometrik o'ringa *A*,*B* nuqtalar kirmaydi).

Bundan keyingi geometrik o'rinlar asosiy geometrik o'rinlardan biriga keltiriladi yoki ularning bir nechtasidan foydalanib topiladi.

Geometrik o'rinlar metodi bilan yechiladigan masalalarga misol tariqsida qiyidagi masalani yechaylik.

Masala: Aylanada shunday nuqta topilsinki, u berilgan ikki nuqtadan teng masofada yotsin.

Agar bizga *A*,*B* nuqtalar va ω aylana berilgan bo'lsa, izlanayotgan nuqta [AB] kesmaning o'rta perpendikulyari bilan aylana kesishgan nuqtasidan iborat bo'ladi.

3. Geometrik almashtirishlar metodi.

Geometrik almashtirishlardan foydalanib, geometrik masalalarni yechish mumkin. Bu metod bilan masala yechishni analiz bosqichida, berilgan va izlangan figuralardan tashqari, berilgan figuraning yoki uning biror qismini u yoki bu geometrik almashtirishlar natijasida hosil qilingan figuralar ham qaraladi. Bu figura qaysi geometrik almashtirishni qo'llab hosil qilingan bo'lsa, yasashga doir masala o'sha metod bilan yechilgan deb ataladi. Jumladan, simmetrik metodi, parallel ko'chirish metodi, gomotetiya metodi, inversiya metodi va h.k.

Misollar:

1. *MN* to'g'ri chiziqning bir tarafida *A* va *B* nuqtalar joylashgan. *MN* to'g'ri chiziqda shunday X nuqta topilganki, bu nuqtadan *A,B* nuqtalargacha bo'lgan masofalarning yig'indisi eng kichik bo'lsin. (simmetrik metodi).
2. Asoslari va diognallari bo'yicha trapetsiya yasang (parallel ko'chirish metodi).
3. *A* va *B* burchaklari va *C* uchidan chiqqan bissektrisasi β_c bo'yicha uchburchak yasang (gomotetiya).

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar:

1.To'g'rilash metodi qanday bajariladi?

2.Geometrik o'rinlar metodini tushuntiring.

3.Geometrik almashtirishlar metodini tushuntiring.

4.Algebraik metod bilan qanday masalalar yechiladi?

Sirkul va chizg'ich yordamida yechilmaydigan klassik masalalar

Yasashga doir masalalarni boshqa yasash asboblari vositasida yechish.

Shu vaqtgacha yechilgan yasashga doir masalalarda keltirilgan ifodalarda berilgan kesmalarning ratsional funksiyalari, yoki faqat ularning kvadrat ildizlarini o'z ichiga olgan ifodalar ekanligini ko'rdik. Bu hol tasodifiy emas. Masalaning sirkul va chizg'ich vositasida yechilish belgisi (alomati) quyida berilmoqda:

Ma'lum *a,b,c,…*kesmalar orqali ifodalangan $x = f(a,b,c,...)$ kesmani sirkul va chizg'ich yordamida yasash mumkin bo'lishi uchun bu ifoda berilgan kesmalardan iborat argumentlarga nisbatan ratsional va birinchi darajali bir jinsli funksiya bo'lishi yoki rauional amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari) bilan birga faqat kvadrat ildizlarni o'z ichigi olgan funksiya bo'lishi zarur va yetarlidir.

Teoremaning zururiy shartini isboti o'zidan-o'zi ko'rinib turibdi. Chunki, algebraik metod bilan yechiladigan barcha masalalar maktabda ko'rilgan 1-7 masalalarga keltirib yechiladi.

Amaliyotda yechimi mavjud, lekin tanlab olingan yoki berilgan yasash asboblari bilan ochib bo'lmaydigan masalalar katta ahamiyatga ega. Bu holda berilgan masalani berilgan yasash vositalari bilan yechish mumkin emasligi ko'rsatib bilishimiz lozib bo'ladi. Bu – qiyin masalalar qatoriga kiradi. Qadimdan juda ko'p olimlar sirkul va chizg'ich yordamida yechib bo'lmaydigan masalalar bilan shug'ullanganlar.

1. Aylanani to'g'rilash. «Uzunligi $2\pi R$ ga teng bo'lgan kesmani yasang». R=1 bo'lsa, $\overline{X}=2\pi$ yasashga keltiriladi. Bizga ma'lumki, taxminan $\pi \approx \frac{22}{7}$ niyasash mumkin (Arximed). Lekin 1882 yilda π ni transendent son ekanligini F.Medemonn tomonidan isbot qilingan.

2. Doira kvadraturasi. «Yuzi berilgan doiraning yuziga teng bo'lgan kvadrat yasang». $X^2=\pi R^2=\left(\sqrt{2\pi R\cdot\frac{R}{2}}\right)^2$, $X=\sqrt{2\pi R\cdot\frac{R}{2}}$ dan $2\pi R$ kesmani sirkul va chizg'ich yordamida yasab bo'lmaydi.

3. Kubni ikkilantirish. «Xajmi berilgan kubni hajmidan 2 barobar katta bo'lgan kubning qirrasini yasang». $x^3=2a^3 \Rightarrow x=a\sqrt[3]{2}$ agar a=1 bo'lsa, $x^3=2\Rightarrow x^3-2=0$ Algebradan ma'lumki, bu tenglama haqiqiy sonlardan iborat ildizga ega emas. Lekin ushbu masalani ikkinchi tartibli egri chiziqlardan foydalanib yechish mumkin. $y^2=x,\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{1+b^2}{4}$

$x^2-x+y^2-by=0$ $\qquad C(\frac{1}{2},\frac{b}{2})$.

$y^4-y^2+y^2-by=0$

$y(y^3-b)=0 \qquad y_1=0,\ x_1=0 \qquad O(0,0)$

$y^3-b=0 \quad y=\sqrt[3]{b}$ b=2 bo'lsa $C(\frac{1}{2},1)$

$r=OC \qquad AB=\sqrt[3]{2}=x$

4. Burchakni teng 3 ga bo’lish (Zadacha o trisekuni ugla). «Berilgan α burchakni teng 3 ga bo’ling»

Faraz qilaylik $\varphi = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \alpha = 3\varphi$ $\cos\alpha = \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$. Agar

$\cos\alpha = \frac{a}{2}$; $\cos\varphi = \frac{x}{2}$ desak, $x^3 - 3x - a = 0$ (5.1) tenglamaga ega bo’lamiz.

Xususiy holda *a=0* bo’lsa, ($\alpha = 90^0$) $x^3 - 3x = 0$ tenglama hosil bo’ladi.

$x(x^2 - 3) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3}$. Masala yechimga ega. Ya’ni, sirkul va chizg’ich yordamida $\varphi = 30^0$ ni yasayolamiz. Umuman, ixtiyoriy burchakni $\frac{\pi}{2^n}$ teng bo’lakka bo’lish mumkin ($n \in N$). Agar *a*=1 bo’lsa, ($\alpha = \frac{\pi}{3}$) bo’lib

$x^3 - 3x - 1 = 0$

tenglamagan ega bo’lamiz. Algebradan ma’lumki bu tenglik keltirilmaydi. Ya’ni 60^0 burchakni sirkul va chizg’ich yordamida teng 3 ga bo’lib bo’lmaydi.

Muntazam ko’pburchaklarni yasash to’g’risida.

Ushbu muammo K.Gauss tomonidan 1796 yilda hal qilingan. *n*-tomoni muntazam ko’pburchakning sirkul va chizg’ich yordamida yasashning zarur va yetarli sharti $n = 2^m \cdot P_1 P_2 \ldots P_S$ ko’rinishida yozish mumkin. ekanligidadir. Bu yerda $P_1, P_2, \ldots, P_S$ lar turli $2^{2^k} + 1$ ko’rinishidagi tub sonlardir. Agar *n* tub son bo’lsa, uning ko’rinishi $2^{2^k} + 1$ ko’rinishda bo’lishi zarur. Misol tariqasida, aylanani 7 yoki 9 ta teng bo’lakka bo’lib bo’lmaydi, boshqacha qilib aytganda yirkul va chizg’ich yordamida muntazam 7 yoki 9 burchak yasab bo’lmaydi. Sababi $7 = 2^2 + 3,\ 9 = 3^2$. Xudi shunday 1^0 burchakni chsab bo’lmaydi.

Tekislik va fazoda nuqtaning proektiv koordinatalar

Reja:

1. To’g’ri chiziqda nuqtaning bir jinsli koordinatalari.
2. Tekislikda nuqtaning bir jinsli koordinatalari.
3. Fazoda nuqtaning bir jinsli koordinatalari.

Tayanch so'zlar: To'g'ri chiziqda, tekislikda va fazoda nuqtaning bir jinsli koordinatalari, proektiv reper.

Faraz qilaylik V_{n+1} haqiqiy (n+1) – o'lchovli vektor fazo bo'lsin. $\{\bar{a}_\alpha\}$, $\{\bar{b}_\alpha\}$, $\alpha = \overline{0,n}$ V_{n+1} ning bazislari bo'lsin . Agar $\forall\lambda \in R$ uchun

$$\bar{b}_\alpha = \lambda\overline{a_\alpha}$$

Shart bajarilsa, bu bazislar o'zaro *gomotetik* deyiladi.

V_{n+1} fazoning o'zaro gomotetik bo'lgan barcha bazislar to'plami P_n proektiv fazoning proektiv reperi deyiladi va B bilan belgilanadi.

Har bir $\{\overline{a_\alpha}\}$bazis bitta va faqat bitta proektiv reperga B ga tegishlidir.

R=B($\overline{a\alpha}$) $\forall M \in V/\{\varnothing\}$ uchun $\overline{M} = \alpha^\alpha \bar{a}\alpha$, bu yerda $x^\alpha \in$ R , b$\subset x^\alpha$

larning hammasi birdaniga nolga teng emas.

(x^0,x^1,x^2,…x^n) - (n+1) ta haqiqiy sonlar.

M= $f(\overline{m}) \in P_n$ nuqtaning R=B $(\overline{a\alpha})$ reperga nisbatan proektiv koordinatalar sistemasi deyiladi va M(x^0,x^1,x^2,…x^n) kabi belgilanadi.

Agar $\bar{a}\alpha$ o'rniga $\bar{b}\alpha = \lambda\bar{a}\alpha$ ni olsak, proektiv reper B ni o'zi qoladi. B=$B(\overline{a\alpha})$=$B(\bar{b}\alpha)$ va M nuqtani hosil qiluvchi $\overline{M} = y^\alpha \bar{b}\alpha$ bo'ladi. (y^0,y^1,y^2,…y^n) ham M ning B ga nisbatan koordinatalari bo'ladi.

$$\overline{M} = \lambda Y^2 \bar{a}\alpha \quad \text{bo'lgani uchun}$$

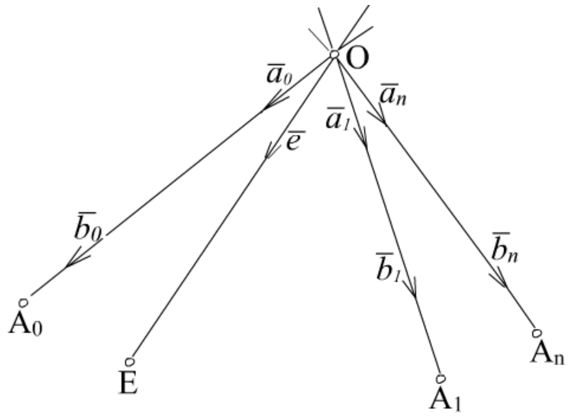
$$X^\alpha = \lambda Y^\alpha \quad \text{bo'ladi.}$$

Shunday qilib, M ni B ga nisbatan koordinatalari yagona ravishda aniqlanmay, balki λ ko'paytuvchiga ko'paytirishgacha aniqlik bilan ifodalanadi.

M(x^0,x^1,x^2…,x^n)=M($\lambda x^0, \lambda x^1, ... \lambda x^n \quad \lambda \neq 0$) (22.1)

Proektiv reper proektiv nuqtalar orqali ham berilishi mumkin.

P_n: f $(\bar{a}\alpha) = A_\alpha$ (n+1) ta nuqta, lekin { A_α } proektiv reperli yagona ravishda aniqlanmaydi.



39- chizma

Chunki $\{A_\alpha\}$ larni $\{\overline{a}_\alpha\}$ ga gomotetik bo'lgan $\{\overline{b}_\alpha\}$ A_1 lar orqali ham ifodalash mumkin.

$\overline{e} = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$ ni olaylik .U P_n da $E=f(\overline{e})$ ni aniqlaydi. E- birlik nuqta deyiladi. O'zaro gomotetik bazislar uchun E yagonadir. Shunday qilib, E, A_α-(n+2)ta nuqta hosil qildik. Agar bu nuqtalarning har qanday (n+1) tasi dimPn dan kichik o'lchovli proektiv fazoga qarashli bo'lmasa, bu nuqtalar to'plami umumjoylashgan nuqtalar deyiladi. Shunday holda Pn da bitta va faqat bitta proektiv reper mavjud bo'lib $f(a_\alpha) = A_\alpha,\quad f(\overline{a_0} + \overline{a_1} + ... + \overline{a_n}) = E$ bo'ladi.

Shunday qilib, to'g'ri chiziqda proektiv reper turli uchta nuqta bilan (A_0,A_1,E) bilan aniqlanadi. Tekislikda hech qanday uchtasi bir to'g'ri chiziqda joylashmagan to'rtta nuqta bilan, fazoda esa, umumjoylashgan beshta nuqta bilan, ya'ni uning hech qanday to'rttasi bir tekislikda yotmagan nuqtalar bilan aniqlanadi. Bizga ma'lumki, E da M nuqta X koordinataga ega bo'lsa , uning o'rniga $X=\frac{x_1}{x_2}$ sonlarni olsak x_1, x_2 ($x_2 \neq 0$) sonlar N nuqtaning bir jinslari koordinatalari deyiladi

$N(x_1{:}x_2)$ kabi yoziladi.

Xuddi shuningdek, M=E_2 da $M(x,y)$ bo'lsa, uning bir jinsli koordinatalari $M(x_1{:}x_2{:}x_3)$ bo'lib $X=\frac{x_1}{x_2}$, $Y=\frac{x_2}{x_3}$ shartni qanoatlantiradi va h. k

Proektiv tekislik P_2 da nuqtaning bir bir jinsli x_1,x_2,x_3 koordinatalaridan foydalanib, nuqtaning proektiv koordinatalarini kiritish mumkin.

$$\begin{cases} X_1^1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ X_2^1 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ X_3^1 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \qquad \Delta = |a_{ij}| \neq 0$$

Agar to'g'ri chiziq $ax + by + c = 0$ bo'lsa, uning bir jinsli kordinatalardagi tenglamasi $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ bo'ladi (bu erda $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$).

$A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$, $E(1:1:1)$, (A_2A_3): $x_1' = 0$, (A_1A_3): $x_2' = 0$, (A_1A_2): $x_3' = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bo'lgan proektiv tekislik nuqtalarining kordinatalarini almashtirish formulasini yozing.

Berilgan matrisa ustunlari moslashgan $(2+4+0 \neq 5)$ eng avval moslashtirish koeffisientlari k_1, k_2, k_3 larni topamiz.

$$\begin{cases} 2k_1 + 4k_2 = 5 \\ k_1 + 3k_2 = 4 \\ k_3 = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} k_3 = 3 \\ k_1 = -1/2 \\ k_2 = 3/2 \end{matrix}$$

Demak, (3.5) ga asosan

$$\begin{cases} \rho x_1 = -x_1^1 + 6x_2^1 \\ \rho x_2 = -1/2x_1^1 + 9/2x_2^1 \\ \rho x_3 = 3x^1{}_3 \end{cases}$$ formulaga ega bo'lamiz.

Agar to'g'ri chiziqning *B* reperda tenglamasi $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ bo'lsa, u_1, u_2 u_3 sonlar to'g'ri chiziqning proektiv koordinatalari deyiladi va $a(u_1, u_2, u_3)$ kabi yoziladi.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar

1. To'g'ri chiziqda nuqtaning bir jinsli koordinatalari qanday kiritiladi?
2. Tekislikda nuqtaning bir jinsli koordinatalari qanday kiritiladi?.
3. Fazoda nuqtaning bir jinsli koordinatalari qanday kiritiladi?

Tekislikda ikkilik prinsipi. Dezarg teoremasi. Murakkab nisbat

Reja:

1.Tekislikda ikkilik prinsipi.

2.Dezarg teoremasi.

3.To'rtta nuqtaning murakkab nisbati**.**

Tayanch so'zlar: Tekislikda ikkilik prinsipi, uch uchlik, Dezarg teoremalari, to'rtta nuqtaning murakkab nisbati.

Proektiv geometriyaning sosiy faktorlaridan biri bo'lgan ikkilik prinsipini ko'rib o'taylik. Tekislikda tegishlilik aksiomalari ifodalanishiga o'zgarish kiritib, tegishli termini o'rniga "insident" terminini ishlatamiz.

1.Ikkita A, B nuqta uchun ularning har biriga incident bo'lgan tog'ri chiziq mavjud.

2.Ikkita a, b to'g'ri chiziq uchun ularning har biriga incident bo'lgan nuqta mavjud.

Bu aksiomalarda "nuqta" so'zini "to'g'ri chiziq" so'zi bilan, "to'g'ri chiziq" so'zini "nuqta" so'zi bilan almashtirsak 1 aksiomadan 2 aksioma, 2 aksiomadan esa 1 aksiomani hosil qilamiz. Bu jumlalar o'zaro munosib jumlalardir.

Proektiv tekislikdagi ikkilik prinsipi quyidagicha: Agar proektiv tekislik elementlari-nuqta va to'g'ri chiziqlarning insidentligi terminida ifoda etilgan biror jumla o'rinli bo'lsa, u holda "nuqta" so'zi o'rnida "to'g'ri chiziq" so'zi ishlatilgan va aksincha, "to'g'ri chiziq" so'zi o'nida "nuqta" so'zi ishlatilgan boshqa jumla ham o'rinli bo'ladi. Ikkilik prinsipi bo'yicha bir biriga mos keluvchi jumlalarning birini isbotlash yetarli.

Ta'rif: Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqta va har ikki nuqta orqali o'tadigan uchta to'g'ri chiziqdan iborat figura uch uchlik deb ataladi.

Dezrg teoremalari.

1. Agar ikkita uch uchlikning mos uchlarini birlashtiruvchi to'g'ri chiziqlar biror S nuqtadan o'tsa, u holda bu uch uchliklar mos tomonlarini kesishgan uchta nuqtasi bitta to'g'ri chiziqda yotadi.

2. Agar ikkita uch uchlikning mos tomonlari kesishgan uchta nuqta bir to'g'ri chiziqda yotsa, u holda bu uch uchliklarning mos uchlarini birlashtiruvchi uchta to'g'ri chiziq bir nuqtadan o'tadi.

Faraz qilaylik d to'g'ri chiziq A,B,C,D to'rtta nuqta berilgan bo'lsin.

$B_0=(A,B,C)$ – d dagi proektiv reper bo'lsin.

Bu reperda $D(x_1, x_2)$ bo'lsin. Agar $D\neq A$ bo'lsa, $x_2\neq 0$ bo'ladi.

Ta'rif: A,B,C,D nuqtalarning murakkab (angarmonik) nisbati deb $\frac{x_1}{x_2}$ soniga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$(AB,CD)=\frac{x_1}{x_2}$ $(x_2\neq 0)$ (5.1)

Natija: Bir to'g'ri chiziqda yotyan A,B,C,D va D^1 nuqtalar uchun $(AB,CD)=(AB,CD^1)$ shart bajariladi, u holda $D^1=D$.

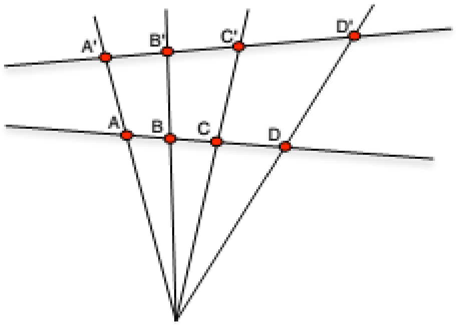
Teorema:

Agar bir to'g'ri chiziqda yotuvchi A,B,C,D nuqtalar biror B reperga nisbatan $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$, $D(d_1,d_2)$ koordinatalarga ega bo'lsalar hamda A,B,C lar turli nuqtalar bo'lib, $D\neq A$ bo'lsa

$$(AB.CD)=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}} \qquad (23.1)$$

Misol: $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$ $D(x_1,x_2)$ bo'lsa $(AB,CD)=\frac{x_1}{x_2}$ ekanligini isbotlang (16.1) ga ko'ra,

$$(AB,CD)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}}=\frac{1(-x_1)}{(-1)x_2}=\frac{x_1}{x_2}$$



40- chizma

To’g’ri chiziqdagi to’rtta nuqtaning murakkab nisbati , quyidagi xossalarga ega:

$1^{0.}$ (*AB*,*CD*)=(*CD*, *AB*) Koordinatalarni belgilab, (23.1) dan foydalanib isbotlang

2^0 $(AB,DC) = \frac{1}{(AB,CD)}$ yoki $(BA,CD) = \frac{1}{(AB,CD)}$

Bundan (BA,DC) = (*AB*,*CD*) kelib chiqadi.

3^0 $(AB,CC) = 1$, $(AB, CB) = 0$, $(DB,C\ ) = \frac{1}{0}$. Demak, A(1,0), B(0,1), C(1,1) D(x_1,x_2) ekanligi ma’lum bo’ladi.

4^0 $(AD,BC) = 1 - (AB\ ,CD)$

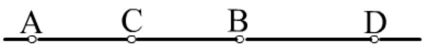
Shuni isbotlaylik:

$B_0 = (A,B,C)$, $D(d_1,d_2)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$,$C(1,1)$ U holda (16.1) ga asosan

$$(AC,BD) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & d_1 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & d_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{d_2 - d_1}{d_2} = 1 - \frac{d_1}{d_2}$$

Yuqoridagi xossalardan foydalanib, *A*,*B*,*C*,*D* nuqtalar yordamida tuzilgan ixtiyoriy tartibdagi (24 ta) 4 ta nuqtaning murakkab nisbatini topamiz. Masalan, $(AB,\ CD)=\lambda$ bo’lsa, (*AD*,*BC*) ni topaylik 4 ga asosan $(AD,BC) = \lambda$ bo’lsa, $(AD,BC) = 1 - \frac{1}{(AB,CD)} = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$.

Ta'rif: Agar A,B,C,D bir to'g'ri chiziqning 4 ta nuqtasi bo'lsa, hamda



(AB,CD<0)

(AB,CD>0)

$(AB,CD)<0$ bo'lsa, A,B juft C,D juftni bo'ladi, $(AB,CD)>0$ bo'lsa, A,B juft C,D juftni bo'lmaydi (ajratmaydi) deyiladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, agar biz d ni kengaytirilgan Evklid to'g'ri chiziq deb qarasak, $(AB,CD) = \dfrac{(AB,C)}{(AB,D)} = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{BD}}{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}$ ga teng bo'ladi

Bundan tashqari $(AB,CD\infty)=(AB,C)$ dir. Chunki $(AB,D\infty)=1$ dir

Agar kengaytirilgan to'g'ri chiziqda $A(x_1)$, $B(x_2)$, $C(x_3)$, $D(x_4)$ bo'lsa,

$(AB,CD) = \dfrac{x_3-x_1}{x_3-x_2}\cdot\dfrac{x_1-x_2}{x_4-x_1}$ ekanligini ko'rsatish mimkin.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar

1.Tekislikda ikkilik prinsipi qanday ifodalanadi?

2.Dezarg teoremalarini ayting.

3.To'rtta nuqtaning murakkab nisbatini tushutiring**.**

Tasvirlash metodlari. Markaziy va parallel proyeksiyalash

Reja:

1. Markaziy proyeksiyalash va uning xossalari.
2. Parallel proyeksiyalash va uning xossalari.

Tayanch so'zlar: Tasvirlash metodlariga qo'yiladigan talablar, figura tasviri, tasvirlash metodlari xossalari.

Geometriyada fazodagi figuralarning geometrik xossalarini o'rganishda bevosita figuralarning o'zlaridan emas, balki ularning tekisligidagi tavsvirlaridan foydalaniladi. Geometriya o'qitishda o'rganiladigan materialni ravshanligi va uni turli tasvirlash vositalari bilan konkretlashtirish katta ahamiyatga egadir. Tekis figuralarni aniq qilib doskada (tekislikda) aniq qilib tasvirlashimiz mumkin, ammo fazoviy figuralarni doskada (qog'ozda) tasvirlash ancha murakkabdir.

Agar tasvirlanadigan figuraning modelini yasashni e'tiborga olmasak, kundalik tajribada fazoviy figuralarni tekislikka tasvirlashga to'g'ri keladi. Tasvirlanishi kerak bo'lgan figurani original (asli), originalini tekislikda ifoda qiluvchi tekis figurani esa tasvir deb ataylik.

Originalni bilgan holda uni tasvirini topish qoidalar to'plami tasvirlash metodlari deyiladi.

Fazoviy figuralarni tasvirlash metodlari juda ko'pdir. Masalan, markaziy proyeksiyalash, parallel proyeksiyalash, Aksonometriya, tsiklografiya, sterarafik proksiyalash va h.k.

Markaziy proyeksiyalash

Tasvirlash metodlariga asosan 2 talab qo'yiladi:

1) ko'rgazmalilik (ravshanlik);
2) qulay o'rganuvchanlik.

Shuni ta'kidlash joizki, tasvirlash metodlariga qo'yiladigan bu ikki talab, ma'lum ma'noda bir-biriga qarshidir. Masalan, rassomlar uchun asosan ko'rgazmalilik kerak. Ular deyarli markaziy proyeksiyalash metodidan foydalanadilar. Ammo bu metod bilan hosil qilingan tasvirda original o'lchamlarini aniqlash ancha murakkab. Muhandislar asosan moxt metodidan foydalanadilar. Bu metod bilan hosil qilingan tasvirdan darxol originalning o'lchamlarini topib olish mumkin. Ammo , ma'lum tayyorgarligi bo'lingan odam tasvir orqali orginalni ko'z oldiga keltirolmaydi. Yuqoridagi 2 talabni «o'rtacha» qonoatlantiradigan tasvirlash metodlari ham juda keng tarqalgan. Masalan, paralel prayeksiyalash metodi ko'rgazmalilik talabiga jovob berishida markaziy prayeksiyalash metodidan qolishmaydi, hamda tasvirga qarab orginalni o'lchovlarini topish ham unga murakkab emas. Shu sababli geometriyada fozaviy figuralarni tasvirlashda paralel prayeksiyalash metodidan foydalaniladi. Uning asosiy xossalarini eslaylik:

1) To'g'ri chiziqning prayeksiyasi to'g'ri chiziqdir;

2) Agar $A \in F$ bo'lsa, $A' \in F'$ dir;
3) Agar $a \,//\, v$ bo'lsa , $a^{//} \,//\, B^{/}$ bo'ladi.
4) Bir to'g'ri chiziqda yotuvchi kesmalarning nisbati tasvirdagi mos kesmalar nisbatiga teng bo'ladi.
5) Paralel prayeksiyalashda bir to'g'ri chiziqda yotgan uchta nuqtaning oddiy nisbati saqlanadi v/x.k

$(A\,B,C) = (A'B',C')$ yoki $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$;

Fazodagi tekis figuralarning paralel prayeksiyasini topaylik. Chunki tekis figura fazoviy figuralar tarkibiga Kirishi mumkin. Masalan, pramidaning yoqlari uchburchak bo'ladi.

Teorema: $\overline{F}$ va F figuralar o'zaro kesishuvchi tekisliklarda yotsin $\overline{G} \cap G \neq \emptyset$ F figura $\overline{F}$ ning tasviri bo'lishi uchun F va $\overline{F}$ ning affin- ekvivalent bo'lishi zarur va yetarlidir.

Biz ma'lumki, $\overline{F}$ ni G tekislikni paralel payeksiyasi-peropektiv affin moslikdan iboratdir. Bunda $\Delta\overline{A}\overline{B}\overline{C} \Rightarrow \Delta\overline{A}B_0\overline{C}$ $\forall\Delta ABC$ $\Delta\overline{A}\overline{B}A_0\overline{C}$ ga affin ekvalentdir. Shunday ekan, $\forall ABC$ fazodagi berilgan $\Delta\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ni paralel prayeksiyasi-tasviri deb qarash mumkin.

Masalan: Katetlari a va $2a$ ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning to'g'ri burchagi uchidan median iva balandlik o'tkazilgan. Shu uchburchakning tasvirini yasang.

$$\overline{B}\overline{C} = a,\ \overline{A}\overline{C} = 2a,\ \overline{A}\overline{F} = \overline{F}\overline{B},\ \overline{C}\overline{H} \perp \overline{A}\overline{B}$$

$\forall ABC$ $\Delta\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ning tasviri bo'ladi. $AF=FV$ dan F ni yasay olamiz. $CH - \overline{C}\overline{H}$ ni tasvirini yasash uchun $\frac{\overline{A}\overline{H}}{\overline{H}\overline{B}} = \frac{(\overline{A}\overline{C})^2}{(\overline{C}\overline{B})^2} = \frac{4a^2}{a^2} = 4.$ $\frac{AH}{HB} = 4$ dan H ni topamiz va CN ni yasaymiz.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar

1. Markaziy proyeksiyalash va uning xossalarini ayting.
2. Parallel proyeksiyalash va uning xossalarini ayting.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Jo'raev T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-q,. 2-q. T.: «O'zbekiston». 1999. 303b.

2. Tojiyev SH. Oliy matematikadan masalalr yechish. 1-q. T.: «O'zbekiston». 2002.-509 b.

3. Dadajanov N.D., Jo'raeva M.Sh. Geometriya. 1-qism. T.: O'qituvchi. 1996.

4. Dadajanov N.D., Jo'raeva M.Sh. Geometriya. 2-qism. T.: O'qituvchi. 1997.

5. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.D., Dusumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. T.: O'qituvchi. 1993.

6. Otajonov R.K., Geometrik yasash metodlari. T.: O'qituvchi. 1996.