TDPU
TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

D.I. YUNUSOVA, G.A. ARTIKOVA

ALGEBRA VA SONLAR NAZARIYASI

V QISM

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT
PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

D.I. YUNUSOVA, G.A. ARTIKOVA

ALGEBRA VA SONLAR NAZARIYASI

(ma'ruzalar matni)

V QISM

TOSHKENT – 2017

«Matematika-informatika» yo'nalishi bakalavriati o'quv rejasiga kiritilgan asosiy ixtisoslik fanlaridan biri bo'lgan «Algebra va sonlar nazariyasi» kursi 1-5 semestrlar davomida o'qitiladi. Ushbu ma'ruzalar matni 3-kursning 5-semestriga rejalashtirilgan 26 soatlik ma'ruzalar uchun yozilgan bo'lib, unda 4 ta bob- Bir noma'lumli ko'phadlar, Haqiqiy va kompleks sonlar maydoni ustida ko'phadlar, Rasional sonlar maydoni ustida ko'phadlar. Algebraik kengaytmalar, Ko'p noma'lumli ko'phadlar.yoritilgan. Ma'ruzalar matni fanning modul texnologiyasi asosida tuzilgan dasturiga to'la mos keladi. Ma'ruzalarning 4 ta modulga jamlanganligi talabalar bilimini nazorat qilish va baholashni ayrim olingan mavzular bo'yicha emas, balki bir bob bo'yicha amalga oshirish imkoniyatini beradi.

Ma'ruzalar matni «Algebra», «Algebra va sonlar nazariyasi», «Matematika», «Oliy matematika», «Matematik mantiq» fanlari o'qitiladigan oliy o'quv yurtlari; akademik lisey, kasb-hunar kollejlari o'qituvchilari hamda talabalari uchun mo'ljallangan.

TUZUVCHILAR: p.f.d.,dotsent .D.I. Yunusova,
o'qituvchi G.A. Artikova.

TAQRIZCHILAR: p.f.n., dotsent I.Y. Raxmonov
f.-m.f.n., dotsent M. Mamatqulov

Metodik qo'llanma Nizomiy nomidagi Toshkent davlat pedagogika universiteti kengashida ko'rib chiqilgan va tasdiqlangan.

2017- yil 20-apreldagi 9-sonli majlis bayoni

XIV MODUL. BIR NOMA'LUMLI KO'PHADLAR

1. Halqaning oddiy transtsendent kengaytmasi.
2. Ko'phad darajasi, xossalari.
3. Ko'phadni ikkihadga bo'lish (Bezu teoremasi).
4. Ko'phad ildizi, xossalari.
5. Ko'phadlarning tengligi.
6. Qoldiqli bo'lish haqidagi teorema.
7. Evklid algoritmi.
8. Maydon ustida keltirilmaydigan ko'phadlar, xossalari.
9. Ko'phadni keltirilmaydigan ko'phadlar ko'paytmasiga yoyish.
10. Primitiv ko'phadlar.
11. Ko'phadlar halqasining faktorialligi.
12. Ko'phadning formal hosilasi.
13. Ko'phadni ikkihad darajalari bo'yicha yoyilmasi.
14. Ko'phadning keltirilmaydigan karrali ko'paytuvchilari.
15. .Ko'phadning karrali ildizlari.

1–ma'ruza. Bir o'zgaruvchili ko'phadlar halqasi. Kommutativ halqaning oddiy transsendent kengaytmasining mavjudligi.

Reja:

1. Halqaning oddiy kengaytmasi haqida tushuncha.
2. Halqaning oddiy transtsendent kengaytmasi ta'rifi.
3. Bir o'zgaruvchili ko'phadlar halqasi.
4. Kommutativ halqaning oddiy transtsendent kengaytmasi mavjudligi haqida teorema.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. II qism. T.: O'qituvchi. 1995 y. (140-143 betlar).
2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Vis.shk. 1979 g. (str. 459-465).

K va L kommutativ halqalar berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Quyidagi shartlar bajarila, u holda L halqa x element bo'yicha K halqaning oddiy kengaytmasi deyiladi:

1. $K \lhd L$, ya'ni K halqa L halqaning qism halqasi bo'lsa.

2. $\forall a \in L$ element $a = a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ $(a_i \in K, i = \overline{0,n})$ ko'rinishda ifodalansa. L halqa x elment bo'yicha K halqaning oddiy kengaytmasi ekanligini $L = K[x]$ ko'rinishda belgilaylik.

Ta'rif. Agar $L=K[x]$ oddiy kengaytmada K halqaning ixtiyoriy $a_o, a_1, \ldots, a_n$ elementlari uchun $a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n = o$ tenglikdan $a_o = a_1 = \ldots a_n = o$ ekanligi kelib chiqsa, u holda $L=K[x]$ halqa K halqaning oddiy transtsendent kengaytmasi deyiladi.

Ta'rif. Agar $L=K[x]$ halqa x element bo'yicha K halqaning oddiy kengaytmasi bo'lsa, va x element yuqoridagi ta'rifdagi shartni qanoatlantirsa, u holda x element K halqaga nisbatan L halqaning transtsendent elementi deyiladi.

Ta'rif. Agar $K[x]$ halqa x element bo'yicha K halqaning oddiy transtsendent kengaytmasi bo'lsa, u holda $K[x]$ halqa K halqa ustida x eelement bo'yicha tuzilgan ko'phadlar halqasi deyiladi. $K[x]$ halqaning elementlari K halqa ustida x ning ko'phadlari yoki K ustida ko'phadlar deyiladi va uning elementlari $a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ $(a_i \in K, i = \overline{0,n}, \forall n \in N)$ ko'rinishda yoziladi.

L halqa nolning bo'luvchisiga ega bo'lmagan kommutativ halqa, ya'ni butunlik sohasi bo'lsin. H halqa L kommutativ halqaning nolmas qismhalqasi va $x_1, x_2, \ldots, x_m$ lar L halqaning elementlari bo'lsin.

1-ta'rif. L halqaning qism halqasi va L dagi $x_1, x_2, \ldots, x_m$ elementlarni o'z ichiga oluvchi H halqaning minimal kengaytmasi H halqa va $x_1, x_2, \ldots, x_m$ elementlar yaratgan L xalqaning qism halqasi deyiladi va u $H[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ kabi belgilanadi.

$H[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ halqa H ning qism halqasi sifatida va $x_1, x_2, \ldots, x_m$ elementlarni o'z ichiga oluvchi L halqaning barcha qism halqalari kesishmasi bo'ladi.

2-ta'rif. Quyidagi induktivlik formulalari yordamida aniqlanadigan $H[x_1][x_2] \ldots [x_m]$ halqani H halqaning m karrali kengaytmasi deyiladi:

1. $H[x_1][x_2] = (H[x_1])[x_2]$;

2. $H[x_1][x_2] \ldots [x_m] = (H[x_1][x_2] \ldots [x_{m-1}])[x_m]$.

1-TEOREMA. H halqa L halqaning kommutativ qism halqasi va $x_1, x_2,..., x_m \in L$ bo'lsa u holda.

$$H[x_1,x_2,...,x_m]=H[x_1][x_2]...[x_1] \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. m=1 bo'lganda teorema o'rinli. H halqadagi m-1 ta element kiritilganda ham teoremani rost deylik va uning m ta element uchun rostligini isbotlaylik.

Ta'rifga asosan $N[x_1,x_2,...,x_{m-1}] \subset H[x_1,x_2, ..., x_m]$ va $x_m \in H[x_1, x_2, ..., x_m]$ bo'lgani uchun

$$(H[x_1, x_2, ..., x_m])[x_m] \subset H[x_1, x_2, ..., x_m] \qquad (2)$$

munosabat bajarildi. So'ngra $x_1, x_2, ..., x_m \in (H[x_1, x_2, ..., x_m])[x_m]$ bo'lgani uchun

$$(H[x_1, x_2, ..., x_m, x_m] \subset H[x_1, x_2, ..., x_m] [x_m] \qquad (3)$$

munosabat o'rinli. (2) va (3) ga asosan

$$H[x_1, x_2, ..., x_m]=H[x_1, x_2, ..., x_m] [x_m] \qquad (4)$$

Induktivlik fazasiga asosan,

$$H[x_1, x_2, ..., x_{m-1}]=H[x_1] [x_2]...[x_{m-1}] \qquad (5)$$

kelib chiqadi (4) va (5) tengliklardan esa

$$H[x_1,x_2,...,x_m] =H[x_1][x_2]...[x_m]$$

tenglikka ega bo'lamiz.

3-ta'rif. Agar $\{1,2,..,m\}$ to'plamning ixtiyoriy s elementi uchun $H[x_1,x_2,...,x_n]$ halqa x_n element orqali $H[x_1,x_2,...,x_{n-1}]$ halqaning oddiy trantsendent kengaytmasi bo'lsa, u holda $H[x_1,x_2,...,x_m]$ halqani H halqaning m karrali trantsendent kengaytmasi deyiladi.

4-ta'rif. H butunlik sohasining m karrali trantsendent kengaytmasi bo'lgan $H[x_1,x_2,...,x_m]$ halqani ko'phadlar halqasi, uning elementini $x_1,x_2,...,x_n$ noma'lumli ko'phad deyiladi.

5-ta'rif. Kamida ikkita noma'lumga bog'liq bo'lgan ko'phad ko'p noma'lumli ko'phad deyiladi.

Ko'p noma'lumli ko'phadlar 2,3,4, ..., n noma'lumli bo'lishi mumkin n noma'lumli ko'phad $x_1^{\alpha_i}, x_2^{\beta_i}, \dots, x_n^{\delta_i}$ ko'rinishdagi chekli sondagi hadlarning

Ta'rif. Quyidagi shartlar bajarila, u holda L halqa x element bo'yicha K halqaning oddiy kengaytmasi deyiladi:

1. $K \lhd L$, ya'ni K halqa L halqaning qism halqasi bo'lsa.

2. $\forall a \in L$ element $a=a_o+a_1 x+...+a_n x^n$ $(a_i \in K, i=\overline{0,n})$ ko'rinishda ifodalansa. L halqa x elment bo'yicha K halqaning oddiy kengaytmasi ekanligini $L= K[x]$ ko'rinishda belgilaylik.

Ta'rif. Agar $L=K[x]$ oddiy kengaytmada K halqaning ixtiyoriy $a_o, a_1, ..., a_n$ elementlari uchun $a_o+a_1x+...+a_nx^n=o$ tenglikdan $a_o=a_1=...a_n=o$ ekanligi kelib chiqsa, u holda $L=K[x]$ halqa K halqaning oddiy transtsendent kengaytmasi deyiladi.

Ta'rif. Agar $L=K[x]$ halqa x element bo'yicha K halqaning oddiy kengaytmasi bo'lsa, va x element yuqoridagi ta'rifdagi shartni qanoatlantirsa, u holda x element K halqaga nisbatan L halqaning transtsendent elementi deyiladi.

Ta'rif. Agar $K[x]$ halqa x element bo'yicha K halqaning oddiy transtsendent kengaytmasi bo'lsa, u holda $K[x]$ halqa K halqa ustida x eelement bo'yicha tuzilgan ko'phadlar halqasi deyiladi. $K[x]$ halqaning elementlari K halqa ustida x ning ko'phadlari yoki K ustida ko'phadlar deyiladi va uning elementlari $a_o+a_1x+...+a_nx^n$ $(a_i \in K, i=\overline{0,n}, \forall n \in N)$ ko'rinishda yoziladi.

L halqa nolning bo'luvchisiga ega bo'lmagan kommutativ halqa, ya'ni butunlik sohasi bo'lsin. H halqa L kommutativ halqaning nolmas qismhalqasi va $x_1, x_2, ..., x_m$ lar L halqaning elementlari bo'lsin.

1-ta'rif. L halqaning qism halqasi va L dagi $x_1, x_2,...,x_m$ elementlarni o'z ichiga oluvchi H halqaning minimal kengaytmasi H halqa va $x_1, x_2, ..., x_m$ elementlar yaratgan L xalqaning qism halqasi deyiladi va u $H[x_1, x_2, ..., x_m]$ kabi belgilanadi.

$H[x_1, x_2, ..., x_m]$ halqa H ning qism halqasi sifatida va $x_1, x_2, ..., x_m$ elementlarni o'z ichiga oluvchi L halqaning barcha qism halqalari kesishmasi bo'ladi.

2-ta'rif. Quyidagi induktivlik formulalari yordamida aniqlanadigan $H[x_1][x_2]...[x_m]$ halqani H halqaning m karrali kengaytmasi deyiladi:

1. $H[x_1][x_2]=(H[x_1])[x_2]$;

2. $H[x_1][x_2]...[x_m]=(H[x_1][x_2]...[x_{m-1}])[x_m]$.

1-TEOREMA. *H* halqa *L* halqaning kommutativ qism halqasi va $x_1, x_2,..., x_m \in L$ bo'lsa u holda.

$$H[x_1,x_2,...,x_m]=H[x_1][x_2]...[x_1] \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. m=1 bo'lganda teorema o'rinli. *H* halqadagi m-1 ta element kiritilganda ham teoremani rost deylik va uning m ta element uchun rostligini isbotlaylik.

Ta'rifga asosan $N[x_1,x_2,...,x_{m-1}]\subset H[x_1,x_2, ..., x_m]$ va

$x_m \in H[x_1, x_2, ..., x_m]$ bo'lgani uchun

$$(H[x_1, x_2, ..., x_m])[x_m]\subset H[x_1, x_2, ..., x_m] \qquad (2)$$

munosabat bajarildi. So'ngra $x_1, x_2, ..., x_m \in (H[x_1, x_2, ..., x_m])[x_m]$ bo'lgani uchun

$$(H[x_1, x_2, ..., x_{m,} x_m]\subset H[x_1, x_2, ..., x_m] [x_m] \qquad (3)$$

munosabat o'rinli. (2) va (3) ga asosan

$$H[x_1, x_2, ..., x_m]=H[x_1, x_2, ..., x_m] [x_m] \qquad (4)$$

Induktivlik fazasiga asosan,

$$H[x_1, x_2, ..., x_{m-1}]=H[x_1] [x_2]...[x_{m-1}] \qquad (5)$$

kelib chiqadi (4) va (5) tengliklardan esa

$$H[x_1,x_2,...,x_m] =H[x_1][x_2]...[x_m]$$

tenglikka ega bo'lamiz.

3-ta'rif. Agar $\{1,2,..,m\}$ to'plamning ixtiyoriy s elementi uchun $H[x_1,x_2,...,x_n]$ halqa x_n element orqali $H[x_1,x_2,...,x_{n-1}]$ halqaning oddiy trantsendent kengaytmasi bo'lsa, u holda $H[x_1,x_2,...,x_m]$ halqani *H* halqaning m karrali trantsendent kengaytmasi deyiladi.

4-ta'rif. *H* butunlik sohasining m karrali trantsendent kengaytmasi bo'lgan $H[x_1,x_2,...,x_m]$ halqani ko'phadlar halqasi, uning elementini $x_1,x_2,...,x_n$ noma'lumli ko'phad deyiladi.

5-ta'rif. Kamida ikkita noma'lumga bog'liq bo'lgan ko'phad ko'p noma'lumli ko'phad deyiladi.

Ko'p noma'lumli ko'phadlar 2,3,4, ..., n noma'lumli bo'lishi mumkin n

noma'lumli ko'phad $x_1^{\alpha_i}, x_2^{\beta_i}, ..., x_n^{\delta_i}$ ko'rinishdagi chekli sondagi hadlarning algebraik yig'indisidan iborat bo'lib, bu yerda

α_i ,β_i ,..., $\delta_i \geq 0$ $(i=1,2,...,n)$ lar R sonlar maydoniga tegishli bo'lgan butun sonlardir. n noma'lumli ko'phadning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$A_1x_1^{\alpha_1}x_2^{\beta_1}...x_n^{\delta_1}+A_2x_1^{\alpha_2}x_2^{\beta_2},...,x_n^{\delta_2}+...+A_nx_1^{\alpha_n}x_2^{\beta_n},...,x_n^{\delta_n} \quad (6)$$

n noma'lumli ko'phad $f(x_1,x_2,...,x_m)$, $g(x_1,x_2,...,x_m)$,... kabi belgilanadi.

$A_i \in R$ $(i=1,2,...,n)$ lar (6) ko'phad hadlarining koeffitsientlari deyiladi.

(6) ko'phadni $f(x_1,x_2,...,x_m)=\sum_{i=1}^{n}A_ix_1^{\alpha_i}x_2^{\beta_i},....,x_n^{\delta_i}$ ko'rinishda ham yoziladi.

Agar $A_i \neq 0$ bo'lsa, u holda (6) yig'indidagi har bir $A_ix_1^{\alpha_i}x_2^{\beta_i},....,x_n^{\delta_i}$ qo'shiluvchi ko'phadning hadi α_i ,β_i ,..., δ_i yigindi esa bu hadning darajasi deb ataladi.

n -noma'lumli ko'phadning darajasi deb, shu ko'phaddagi qo'shiluvchi hadlar darajalarining eng kattasiga aytiladi.

Masalan, ratsional sonlar ustidagi $x_1^2,x_2x_3^2-7x_2^4x_4^2+5x_3^2x_4-x_1$ ko'phadda birinchi $x_1^2,x_2x_3^2=x_1^2x_2x_3^3x_4^0$ hadning darajasi 2+1+3+0=6, ikkinchi $-7x_2^4x_4$ hadning darajasi 0+4+0+1=5, uchinchi $5x_3^2x_4$hadning darajasi 0+0+2+3=5, to'rtinchi -x_1 hadning darajasi 1+0+0+0=1 bo'ladi. Ko'phadning darajasi esa 6 ga teng.

(6) ko'phadning ba'zi yoki hamma koeffitsientlari, shuningdek, ba'zi yoki barcha α_i ,β_i ,..., δ_i daraja ko'rsatkichlari nolga teng bo'lishi mumkin. Masalan, $A_2=A_3=...=A_n=0$, $\alpha_1=\beta_1=...=\delta_1=0$ bo'lib, A_1 koeffitsient R maydonning istalgan elementini bildirsa, (6) ko'phad $f(x_1,x_2,...,x_n)=A_1$ ko'rinishni oladi. Demak, R maydonning hamma elementlari ham n o'zgaruvchili ko'phad deb hisoblanadi. Xususiy holda $A_1=A_2=...=A_n=0$ bo'lsa, u holda 0 ko'phad xosil bo'ladi. Biz uni $f(x_1,x_2,...,x_n)=0$ ko'rinishda belgilaymiz. $A_1 \neq 0$ bo'lsa, u holda $f(x_1,x_2,...,x_n)=a_1$ ni nolinchi darajali ko'phad deyiladi. Nol' ko'phadning darajasi aniqlanmagan.

(6) ko'phaddagi $x_1,x_2,...,x_n$ noma'lumlar bir-biriga bog'liq emas, ularni istalgan son qiymatni qabo'l qila oladi deb hisoblaymiz. Boshqacha aytganda, har bir x_1

noma'lumning qiymatlari qolgan noma'lumlarning qiymatlari bilan bog'liq emas, x_i noma'lum qolgan noma'lumlarning funktsiyasi emas. Bunday o'zgaruvchilar, odatda, erkin o'zgaruvchilar deb ataladi.

Aytilganlardan quyidagi natija chiqadi: hamma $A_1, A_2, ..., A_n$ koeffitsientlardan aqalli bittasi nolga teng bo'lmasa, (6) ko'phad ham nol' ko'phad bo'la olmaydi. Haqiqatan,

$$A_1x_1^{\alpha_1}x_2^{\beta_1},...,x_n^{\delta_1}+A_2x_1^{\alpha_2}x_2^{\beta_2},...,x_n^{\delta_2}+...+A_nx_1^{\alpha_n}x_2^{\beta_n},...,x_n^{\delta_n}=0$$

tenglikdan x_i qolgan noma'lumlarning oshkormas funktsiyasi ekanini ko'ramiz.

Demak, $A_1=A_2=...=A_n=0$ shartdagi (6) ko'phad aynan nolga teng.

5-ta'rif. $f(x_1,x_2, ..., x_n)$ va $\varphi(x_1, x_2,...,x_n)$ ko'phadlardan har birining istalgan $A_i x_1^{\alpha_i} x_2^{\beta_i},....,x_n^{\delta_i}$ hadi uchun ikkinchisining ham xuddi shunday (aynan teng) hadi mavjud bo'lsagina, bu *ikki ko'phad teng* deyiladi.

6-ta'rif. (6) ko'phadning hamma hadlari bir hil darajali bo'lsa, u holda bunday ko'phad bir jinsli ko'phad yoki forma deyiladi.

Masalan, $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2^3x_3^2-x_1^2x_3^4+7x_2x_3^5-4x_1^3x_2^2x_3$ ko'phad 6-darajali formadir.

Birinchi darajali forma chiziqli forma, ikkinchi darajalisi kvadratik forma, uchinchi darajalisi kubik forma deyiladi.

Endi R sonlar maydoni ustida berilgan n noma'lumli ikkita ko'phad uchun va ko'paytirish amallarini kiritamiz:

$f(x_1,x_2, ..., x_n)$, $\varphi(x_1, x_2,...,x_n)$ ko'phadlarni qo'shish deb, ulardagi mos hadlarning koeffitsientlarni qo'shishni tushunamiz.

$k_i=t_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ bo'lganda

$$Ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n} \tag{7}$$

va

$$Bx_1^{t_1}x_2^{t_2}...x_n^{t_n} \tag{8}$$

hadlar mos yoki o'xshash hadlar deb yuritiladi.

Agar biror had $f(x_1,x_2, ..., x_n)$ va $\varphi(x_1, x_2,...,x_n)$ ko'phadlarning faqatgina bittasi uchrasa ikkinchi ko'phaddagi bu hadning koeffitsienti nol' deb tushuniladi.

(7) va (8) kabi hadlarning ko'paytmasi deb

$$ABx_1^{k_1+t_1}x_2^{k_2+t_2}\dots x_n^{k_n+t_n} \qquad (9)$$

ifodani tuzamiz. Demak, $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ko'phadni $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ko'phadga ko'paytirish uchun $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ning har bir hadini $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ning barcha hadlariga ko'paytirish, keyin esa bir hil hadlarni ixchamlash kerak.

Masalan, kompleks sonlar maydoni ustidagi

$$f(x_1,x_2,x_3)=(1+i)x_1x_2-ix_2x_3^2+x_2 \quad \text{âà} \quad f(x_1,x_2,x_3)=3x_1x_2-ix_3$$

ko'phadlarning yig'indisi, ayirmasi va ko'paytmasi quyidagicha:

$$1.\ f(x_1,x_2,x_3)+\varphi(x_1,x_2,x_3)=(4+i)x_1x_2-ix_2x_3^2+x_2+ix_3$$

$$2/\ f(x_1,x_2,x_3)-\varphi(x_1,x_2,x_3)=(-2+i)x_1x_2-ix_2x_3^2+x_2+ix_3$$

$$3.\ f(x_1,x_2,x_3)\cdot\varphi(x_1,x_2,x_3)=(3+3i)x_1^2x_2^2+(i-1)x_1x_2x_3-$$
$$-3ix_2x_3^2x_3^2+x_2x_3^3+3x_1x_2^2+ix_2x_3$$

2-TEOREMA. n noma'lumli ko'phadlar to'plami halqa bo'ladi.

I s b o t . Teoremaning isbotini ko'phaddagi noma'lumlar soni bo'yicha induktsiya usuli asosida olib boramiz.

n=1 da biz bir noma'lumli ko'phadlar to'plamiga egamiz. Ma'lumki bu ko'phadlar to'plami halqa tashkil etar edi va bu halqa nolning bo'luvchilariga ega bo'lmas edi. Faraz qilaylik, teorema $k=n-1$ uchun to'g'ri bo'lsin. Boshqacha aytganda, barcha n-1 noma'lumli ko'phadlar to'plami nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan halqa bo'lsin.

Teoremaning $k=n$ uchun to'g'riligini isbotlaymiz. R sonlar maydoni ustida berilgan n noma'lumli ko'phadni bitta noma'lumli ko'phad deb qarash mumkin. Bu ko'phad koeffitsientlarining har biri x_1, x_2, ..., x_{n-1} noma'lumli ko'phadlar bo'ladi. Agar koeffitsientlar to'plamini $R[x_1, x_2,\dots,x_{n-1}]$ desak farazimizga asosan $R[x_1, x_2,\dots,x_{n-1}]$ nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan halqadir.

Ikkinchidan, bitta x_n noma'lumli ko'phadlar to'plami $R[x_1, x_2,\dots,x_{n-1}]$ da halqa tashkil etadi. Bu halqa biz izlagan n noma'lumli ko'phadlar halqasi bo'lib, u odatda $H[x_1, x_2,\dots,x_{n-1}]$ kabi belgilanadi. $H[x_1, x_2,\dots,x_{n-1}]$ nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan kommutativ halqa bo'lganligidan, $H[x_1, x_2,\dots,x_{n-1}]$ ham R sonlar maydoni ustida qurilgan nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan kommutativ halqadir. Ma'lumki, bunday halqalar butunlik sohasini tashkil qilar edi.

Demak, n noma'lumli ko'phadlar to'plami butunlik sohasidan iborat ekan.

Biz bir noma'lumli ko'phadlarni odatda ikki usulda, ya'ni noma'lumning darajalari o'sishi va kamayishi tartibida yozar edik, n noma'lumli ko'phadning bir necha hadlari bir hil darajada qatnashishi mumkin. SHuning uchun uni noma'lumlar darajalarining o'sishi yoki kamayishi tartibida yozish mumkin emas. Bunday ko'phadlarni ma'lum bir tartibda yozish uchun quyidagicha ish tutiladi: n o'zgaruvchili $f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ ko'phad berilgan bo'lib, bu ko'phadning ikki hadidan qaysi birida x_1 ning darajasi katta bo'lsa, o'sha hadni yuqori deb hisoblaymiz. Bu hadlardagi x_1 ning darajalari teng bo'lgan holda esa qaysi birida x_2 ning darajasi katta bo'lsa, o'sha hadni yuqori deymiz va x.k. Boshqacha aytganda $A_i x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_n^{\mu_n}$ va $A_j x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_n^{\nu_n}$ ikkita had uchun noldan farqli $\mu_k - \nu_k$ ayirmalarning birinchisi musbat bo'lsa, birinchi had ikkinchi haddan yuqori deb ataladi.

Masalan, $4x_1x_2^3x_3x_4^2$ va $-2x_2^5x_3^2x_4$ hadlarda birinchisi ikkinchisidan yuqori $x_1x_2^4x_3x_4$ *va* $x_1x_2^4x_3x_4^5$ hadlarda esa ikkinchisi birinchisidan yuqori.

$f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ ko'phadni yozishda birinchi urinda eng yuqori bo'lgan hadni, ikkinchi o'ringa qolgan hadlar orasidan eng yuqori bo'lgan hadni va shu jarayon oxirgi had uchun yozilsa, u holda $f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ ko'phad leksikografik yozilgan deyiladi. Masalan,

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1 - 4x_2^6x_3 + x_1x_2 + 3x_1x_2^3 - x_2^4 + 6x_3^4x_4 - x_2^6x_3x_4 + x_2^2$ ko'phadning leksikografik yozilishi quyidagicha bo'ladi:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 3x_1x_2^3 + x_1x_2 + 2x_1 - x_2^6x_3x_4 - 4x_2^6x_3 + x_2^2 + 6x_3^4x_4 - x_2^4$$

TEOREMA. Ko'p noma'lumli ko'phadlar ko'paytmasining eng yuqori **hadi bu** ko'phadlar eng yuqori hadlari ko'paytmasiga teng.

I s b o t . Teoremani $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $\varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ **ko'phad uchun** isbotlaylik.

$$Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n} \qquad (1)$$

had $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ko'phadning eng yuqori hadi.

$$Cx_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}...x_n^{\mu_n} \qquad (2)$$

esa uning istalgan hadi bo'lsin:

$$Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}...x_n^{\beta_n} \qquad (3)$$

had $\varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ ko'phadning eng yuqori hadi.

$$\ddot{A}x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}...x_n^{\nu_n} \qquad (4)$$

esa uning istalgan hadi bo'lsin.

Ushbu

$$ABx_1^{\alpha_1+\beta_1}x_2^{\alpha_2+\beta_2}...x_n^{\alpha_n+\beta_n} \qquad (5)$$

va

$$C\ddot{A}x_1^{\mu_1+\nu_1}x_2^{\mu_2+\nu_2}...x_n^{\mu_n+\nu_n} \qquad (6)$$

hadlarning qaysi biri yuqori had ekanligini aniqlaylik. (1) va (3) hadlar mos ravishda, (2) va (4) hadlardan yuqori bo'lgani uchun

$\alpha_1 \geq \mu_1$, $\beta_1 \geq \nu_1$. Bundan $\alpha_1 + \beta_1 \geq \mu_1 + \nu_1$

Agar $\alpha_1 + \beta_1 > \mu_1 + \nu_1$ bo'lsa, (5) had (6) haddan yuqori:

$\alpha_1 + \beta_1 = \mu_1 + \nu_1$ bo'lsa $(\alpha_1 - \mu_1) + (\beta_1 - \nu_1) = 0$ kelib chiqadi, ammo

$(\alpha_1 - \mu_1)$ va $(\beta_1 - \nu_1)$ amallar manfiy bo'lmagani uchun (chunki

$\alpha_1 \geq \mu_1$ va $\beta_1 \geq \nu_1$) $\alpha_1 - \mu_1 = 0$ va $\beta_1 - \nu_1 = 0$ yoki $\alpha_1 = \mu_1$ va $\beta_1 = \nu_1$

degan natijaga kelamiz. U holda $\alpha_2 \geq \mu_2$ va $\beta_2 \geq \nu_2$ bajarilib,

$\alpha_2 + \beta_2 \geq \mu_2 + \nu_2$ ni xosil qilamiz. Agar $\alpha_1 + \beta_1 = \mu_1 + \nu_1$ bo'lib,

$\alpha_2 + \beta_2 > \mu_2 + \nu_2$ bo'lsa, (5) had (6) haddan yuqoridir:

$\alpha_2 + \beta_2 = \mu_2 + \nu_2$ bo'lganda esa, yuqoridagidek, $\alpha_2 = \beta_2$, $\mu_2 = \nu_2$ ekanini topamiz va x.k. Bu jarayonni davom ettirib, (5) hadning (6) dan yuqoriligini isbotlaymiz.

Agar i ning barcha qiymatlarida $\alpha_i + \beta_i = \mu_i + \nu_i$ tengliklar bajarilsa, (2) had (1) ga va (4) had (3) ga aynan teng bo'ladi. Agar (2) va (4) hadlardan aqalli bittasi (1) va (3) ga teng bo'lmasa, biror i uchun albatta $\alpha_i + \beta_i > \mu_i + \nu_i$ tengsizlik bajariladi. SHunday qilib, $f(x_1, x_2,...,x_n)$ va $\varphi(x_1, x_2,...,x_n)$ ning eng yuqori hadlarini ko'paytirish bilan tuzilgan (5) had $f(x_1, x_2,...,x_n) \cdot \varphi(x_1, x_2,...,x_n)$ ko'paytmaning eng yuqori hadini ifodalaydi.

Teorema ikkitadan ortiq ku'hadlar ko'paytmasi uchun matematik induktsiya usuli bilan isbotlanadi.

Teorema. Har qanday nol bo'lmagan $K=<K,+,-,\cdot,1>$ halqa uchun oddiy transtsendent kengaytma mavjud.

Takrorlash uchun savollar:

1. Halqaning oddiy kengaytmasi deb nimaga aytiladi?
2. Halqaning oddiy transtsendent kengaytmasi deb nimaga aytiladi?
3. Halqaning oddiy kengaytmasi va halqaning oddiy trantsendent kengaytmalarining farqi nimada?
4. Bir o'zgaruvchili ko'phadlar halqasi deb nima aytiladi?
5. Bir o'zgaruvchili ko'phad qanday halqaning elementi bo'ladi?

2,3-ma'ruzalar. Ko'phad darajasi. Ko'phadlar ustida amallar. Ko'phadni x-c ikkihadga bo'lish. Ko'phad ildizi. Bezu teoremasi. Qoldiqli bo'lish. Gorner sxemasi. Ko'phadlar tengligi.

Reja:

1. Ko'phad ildizi haqida tushuncha.
2. Ko'phadni ikkihadga bo'lish.
3. Bezu teoremasi.
4. Ko'phadlarning bo'linishi.
5. Ko'phad ildizi mavjud bo'lishining zarur va etarli sharti.
6. Ko'phadlarning tengligi.

Asosiy tushunchalar: Ko'phad.Ko'phadlar ustida amallar.Ko'phadlar halqasi.Nolninig bo'luvchilari. Nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan kommutativ halqalar.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazaryasi. II qism.T.: O'qituvchi. 1995 y. (146-150 betlar).

2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Vis.shk. 1979 g. (str. 466-469).

Birlik elementga ega bo'lgan K butunlik sohasi va $f(x)\in K[x]$ ko'phad berilgan bo'lsin. $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ da x=s bo'lsa, u holda f(c) ga $f(x)$ ko'phadning x=c dagi qiymati deyiladi.

Ta'rif. Agar K butunlik sohasining biror s elementi uchun f(c)=0 tenglik o'rinli bo'lsa, u holda s element $f(x)$ ko'phadning yoki $f(x)=0$ tenglamaning ildizi deyiladi.

Nolinchi darajali $f(x)=a\neq 0$ ko'phadning ildizi bo'lmaydi.

Nolь ko'phadni e'tiborga olmaslik lozim, chunki bunday ko'phad x ning har qanday qiymatida nolga teng bo'ladi.

Bezu teoremasi. $f(x)$ ko'phadni x-s ikki hadga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiq f(c) ga teng.

Teorema. x=s element $f(x)$ ko'phadning ildizi bo'lishi uchun $f(x)$ ning x-s ikki hadga bo'linishi zarur va etarli.

Teorema. Agar $s_1,s_2,...,s_k$ lar $f(x)$ ko'phadning turli ildizlari bo'lsa, u holda $f(x)$ ko'phad $(x-s_1)(x-s_2)...(x-s_k)$ ko'paytmaga bo'linadi.

Ta'rif. Agar $f(x)\in K[x]$ va $0\neq\varphi(x)\in K[x]$ ko'phadlar berilganda shunday $g(x)\in K[x]$ ko'phad topilib, natijada $f(x)=\varphi(x)g(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ ko'phad $\varphi(x)$ ko'phadga bo'linadi deyiladi va uni $f(x)\vdots\in\varphi(x)$ yoki $f(x)/\varphi(x)$ ko'rinishlarda belgilanadi.

K maydon ustida berilgan ko'phadlarning bo'linishi quyidagi xossalarga ega:

1^0. $((f(x)\vdots\varphi(x))\wedge(\varphi(x)\vdots\psi(x)\Rightarrow(f(x)\vdots\psi(x))$, $(\varphi(x)\neq 0,\ \psi(x)\neq 0)$.

2^0. $(f_i(x)\vdots\varphi(x))\Rightarrow(f_1(x)\pm f_2(x)\pm...\pm f_m(x))\vdots\varphi(x)$ $(i=\overline{1,m})$, $(\varphi(x)\neq 0)$.

3^0. $f_i(x)$ (i=1,m) ko'phadlarning kamida bittasi $\varphi(x)\neq 0$ ga bo'linsa, u holda ularning ko'paytmasi ham $\varphi(x)$ ga bo'linadi.

4^0. Agar $f_i(x)$ $(i=\overline{1,m})$ ko'phadlarning har biri $\varphi(x)\neq 0$ ga bo'linib, $g_i(x)$ lar ixtiyoriy ko'phadlar bo'lsa, u holda $(f_1(x)g_1(x)\pm f_2(x)g_2(x)\pm \pm\ldots\pm f_m(x)g_m(x)) \vdots \varphi(x)$ bo'ladi.

5^0. Har qanday f(x) ko'phad har qanday nolinchi darajali ko'phadga bo'linadi.

6^0. $f(x) \vdots \varphi(x) \Rightarrow f(x) \vdots a\varphi(x)$ $(0\neq a\in K$ maydon, $\varphi(x)\neq 0)$

7^0. $f(x)\neq 0$ va $\varphi(x)\neq 0$ ko'phadlar bir-biriga bo'linsa, u holda ular bir-biridan o'zgarmas $a\neq 0$ ko'paytuvchi bilan farq qiladi.

Ta'rif. O'zgaruvchining bir xil darajalari oldidagi koefffitsientlari teng bo'lgan ko'phadlar o'zaro teng ko'phadlar deyiladi.

Bu ta'rifni ko'phadlarning algebraik ma'nodagi ta'rifi deyiladi.

Ta'rif. Agar o'zgaruvchining biror cheksiz sohadan olingan har qanday qiy matlariga mos keluvchi ko'phadlarning qiymatlari ustma-ust tushsa, u holda bunday ko'phadlarni o'zaro teng ko'phadlar deyiladi.

Bu ta'rifni ko'phadlarning funktsional ma'nodagi ta'rifi deyiladi.

Bu ikki ta'rif chekli sohalar uchun ekvivalent emas.

Misol. *K* butun sonlardan m=2 modulь bo'yicha tuzilgan sinflar to'plami bo'lsin, ya'ni $K=\{0,1\}$ bo'lsin. Bunday holda $K=\{0,1\}$ to'plam maydon bo'ladi. Shu maydon ustida $f(x)=x^2$ va $\varphi(x)=x$ ko'phadlarni olaylik. f(x) ko'phad ikkinchi, $\varphi(x)$ ko'phad birinchi darajali ko'phadlar bo'lgani uchun o'z-o'zidan ko'rinib turibdiki, ular algebraik ma'noda teng emas. Lekin $f(0)=\varphi(0)=0$, $f(1)=\varphi(1)=1$ bo'lgani uchun ular funktsional ma'noda teng.

Takrorlash uchun savollar:

1. Ko'phadning nuqtadagi qiymati haqida tushuncha bering?
2. Ko'phadning ildizi deb nimaga aytiladi?
3. Bezu teoremasini bayon eting.
4. Ko'phad ildizi mavjudligi haqidagi teoremani bayon eting.

4-ma'ruza. Ko'phadni keltirilmaydigan ko'phadlar ko'pytmasiga yoyish. Algebraning asosiy teoremasi. EKUB. EKUK. Ko'phadning formal hosilasi.

Reja:

1. Maydon ustida keltiriladigan va keltirilmaydigan ko'phadlar.
2. Keltirilmaydigan ko'phadlarning xossalari.
3. Ko'phadni keltirilmaydigan ko'phadlar ko'paytmasiga yoyish va bu yoyilmaning yagonaligi.
4. Algebraning asosiy teoremasi.
5. Ko'phadlar va ular ustida amallar.
6. Qoldiqli bo'lish.
7. Ko'phadlarning EKUB , EKUK i haqida tushunchalar.
8. .Ko'phadning formal hosilasi.
9. .Ko'phadni x-c ikkihad darajalari bo'yicha yozish.

Asosiy tushunchalar: Maydon.Maydon ustida ko'phad.Ko'phad ildizi. Kompleks sonlar va ular ustida amallar. EKUB , EKUK, ko'phadning formal hosilasi.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. II qism. T.: O'qituvchi, 1995 y. (159-164, 221-226 betlar).

2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M,: Vis.shk. 1979 g. (471-474 str).

Ta'rif. Agar F maydon ustida berilgan va darajasi nolga teng bo'lmagan f(x) ko'phadni shu maydon ustidagi va darajalari f(x) ning darajasidan kichik ikkita g(x), h(x) ko'phadlar ko'paytmasi shaklida ifodalash mumkin bo'lsa, u holda f(x) ko'phadni F maydon ustida keltiriladigan ko'phad, aksincha, agar bunday ko'paytma shaklida ifodalash mumkin bo'lmasa, u holda f(x) ni F maydon ustida keltirilmaydigan ko'phad deyiladi.

Har qanday F sonlar maydoni ustidagi 1-darajali istalgan ko'phad shu F maydon ustida keltirilmaydigan ko'phad bo'ladi.

Maydon ustida keltirilmaydigan ko'phadlar quyidagi xossalarga ega:

1^0. Agar $p(x)$ va $g(x)$ keltirilmaydigan ko'phadlar bo'lib $r(x)\vdots g(x)$ bo'lsa, u holda $r(x)=ag(x)$ $(a\neq 0)$ bo'ladi.

2^0. Ixtiyoriy $f(x)$ ko'phad keltirilmaydigan ixtiyoriy $r(x)$ ko'phadga bo'linadi yoki $(f(x);r(x))=1$ bo'ladi.

3^0. Agar $f_i(x)$ $(i=\overline{1,m})$ ko'phadlarning hyech biri keltirilmaydigan $r(x)$ ko'phadga bo'linmasa, u holda $f_1(x)\cdot f_2(x)\ldots f_m(x)\not\vdots\, r(x)$ bo'ladi.

4^0. Agar $f_1(x)\, f_2(x)\ldots f_m(x)\vdots r(x)$ ($p(x)$ –keltirilmaydigan ko'phad), u holda $f_i(x)$ $(i=\overline{1,m})$ ko'phadlarning aqalli bittasi $r(x)$ ga bo'linadi.

5^0. $p(x)$ keltirilmaydigan ko'phad bo'lsa, u holda $ar(x)$ $(0\neq a\in F)$ ham keltirilmaydigan ko'phad bo'ladi.

Teorema. F maydon ustida berilgan va darajasi 1 dan kichik bo'lmagan har bir ko'phad shu F maydon ustida keltirilmaydigan ko'phad yoki keltirilmaydigan ko'phadlar ko'paytmasiga yoyiladi va bu yoyilma ko'paytuvchilari o'zgarmas ko'paytuvchilargacha aniqlik darajasida yagonadir.

Algebrannig asosiy teoremasi. Darajasi 1 dan kichik bo'lmagan kompleks koeffitsientli har qanday ko'phad kamida bitta kompleks ildizga ega.

Misol. $f(x)= x^3+9x-26$ ko'phad $x_1=2$, $x_{2,3}=-1\pm 2\sqrt{3}\,i$ ildizlarga ega.

Bu teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

Natija. Kompleks sonlar maydon ustidagi n-darajali ko'phadning n ta ildizi mavjud.

Natija. n-darajali $f(x)$ ko'phad x ning n tadan ortiq har xil qiymatlarida nolga teng bo'lsa, u holda $f(x)$ nolь ko'phad bo'ladi.

Natija. Darajalari n dan yuqori bo'lmagan $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko'phadlar x ning n tadan ortiq har xil qiymatlarida bir-biriga teng bo'lsa, u holda $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko'phadlar o'zaro teng bo'ladi.

Misol. 1. $f(x)= x^4-2x+3$ ko'phad Q ratsional sonlar maydoni ustida keltirilmaydigan ko'phad bo'ladi, lekin S kompleks sonlar sonlar maydoni ustida keltiriladigan ko'phaddir.

2. $f(x)= x^2+x+1+i$ ko'phad kompleks sonlar maydoni ustida ikkita kompleks ildizga ega.

Berilgan $f(x)=a_n x^n+...+a_1 x+a_0$ ko'phadni $g(x)=b_m x^m+...+b_1 x+b_0$ ko'phadga bo'lishni quyidagi jadval asosida bajarish mumkin:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_m	a_{m-1}	...	a_0
b_m	a_n	$b_{m-1}\dfrac{a_n}{b_m}$	$b_{m-2}\dfrac{a_n}{b_m}$	...				
b_{m-1}		$a_{n-1}-\sigma_1$	$b_{m-1}\dfrac{a_{n-1}-\sigma_1}{b_m}$	...				
...								
b_1								
b_0								
					$a_m-\sigma_{n-m}$	$b_{m-1}\dfrac{a_m-\sigma_{n-m}}{b_m}$	...	$b_0\dfrac{a_m-\sigma_{m-n}}{b_m}$
	$\underbrace{\dfrac{a_n}{b_m}}_{c_{n-m}}$	$\underbrace{\dfrac{a_{n-1}-\sigma_1}{b_m}}_{c_{n-m-1}}$	$\underbrace{\dfrac{a_{n-2}-\sigma_2}{b_m}}_{c_{n-m-2}}$	...	$\underbrace{\dfrac{a_m-\sigma_{n-m}}{b_m}}_{c_0}$	$\underbrace{a_{m-1}-\delta_{m-1}}_{d_{m-1}}$	...	$\underbrace{a_0-\delta_0}_{d_0}$

Ta'rif. Agar f(x) va φ(x) ko'phadlar g(x)≠0 ko'phadga bo'linsa, u holda g(x) ko'phad f(x) va g(x) ko'phadlarning umumiy bo'luvchisi deyiladi.

f(x) va g(x) ko'phadlarning bir nyechta umumiy bo'luvchilari mavjud bo'lishi mumkin.

Ta'rif. Agar d(x) ko'phad f(x) va φ(x) ko'phadlarning umumiy bo'luvchisi bo'lib, d(x) ko'phad f(x) va φ(x) larning ixtiyoriy umumiy bo'luvchisiga bo'linsa, u holda d(x) bo'luvchini f(x) va φ(x) ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisi (EKUB) deyiladi va uni (f(x);φ(x)) ko'rinishda belgilanadi.

Ta'rif. Agar $(f(x);\varphi(x))=d(x)$ bulib, $d(x)$ ko'phad nolinchi darajali ko'phad bo'lsa, u holda $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarni o'zaro tub ko'phadlar deyiladi.

$f(x)\neq 0$ bo'lib, $f(x)$ ko'phadning darajasi $\varphi(x)\neq 0$ ko'phadning darajasidan kichik bulmasin. Qodiqli bo'lish teoremasidan foydalanib, quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} f(x)=\varphi(x)g_1(x)+r_1(x), \\ \varphi(x)=r_1(x)g_2(x)+r_2(x), \\ r_1(x)=r_2(x)g_3(x)+r_3(x), \\ - - - - - - - - - \\ r_{n-2}(x)=r_{n-1}(x)g_n(x)+r_n(x), \\ r_{n-1}(x)=r_n(x)g_{n+1}(x); \end{cases} \qquad (1)$$

Teorema. $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko'phadlarning EKUB si (1) sistemadagi so'nggi $r_n(x)$ qoldiq bo'ladi.

Teorema. Agar $(f(x);\varphi(x))=d(x)$ bo'lsa, u holda $(f(x);\varphi(x))=ad(x)$ bo'ladi (bunda a-nolinchi darajali ko'phad).

Teorema. $f(x)$, $\varphi(x)\in K[x]$ bo'lib $(f(x);\varphi(x))=d(x)$ bo'lsa, u holda $g(x),h(x)\in K[x]$ ko'phadlar uchun $f(x)g(x)+\varphi(x)h(x)=d(x)$ tenglikni qanoatlantiruvchi $g(x)$ va $h(x)$ ko'phadlar mavjud.

$f(x)$ va $\varphi(x)$ ko'phadlarning EKUK ga ham yuqoridagidek tushuncha beriladi.

Endi ko'phadning formal hosilasi bilan tanishaylik.

$f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$, $f(y)=a_0+a_1y+...+a_ny^n$ bo'lsin.

$f(x)-f(y)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x^k-y^k)=(x-y)\sum_{k=1}^{n} a_k(x^{k-1}+x^{k-2}y+...+y^{k-1})=(x-y)F(x;y)$, bu yerda

$F(x;y)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x^{k-1}+x^{k-2}y+...+y^{k-1})$. Aytaylik $x=y$ bo'lsin. U holda

$F(x;x)=\sum_{k=1}^{n} ka_kx^{k-1}= =a_1+2a_2x+...+na_nx^{n-1}$ bo'lib, $F(x;x)$ ni $f(x)$ ko'phadning formal hosilasi deyiladi va uni $f^I(x)$ yoki f^I orqali belgilanadi.

Teorema. $\forall$ $f(x),g(x)\in K[x]$ va $\lambda\in K$, $\forall m\in N$ bo'lsa, u holda

$(f+g)'=f'+g'$, $(fg)'=fg'+f'g$, $(\lambda f)'=\lambda f'$, $(f^m)'=mf^{m-1}f'$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ ko'phadni x-s ning darajalari bo'yicha

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f^{II}(c)}{2!}(x-c)^2+...+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

ko'rinishda yoziladi.

Misol. 1. $f(x)=x^4-1$, $\varphi(x)=2x^3+x^2-2x-1$ ko'phadlar uchun $(f(x);\varphi(x))=d(x)=x^2-1$ bo'ladi.

2. $f(x)=3x^2-2x+5$ uchun formal hosila $f'(x)=6x-2$ bo'ladi.

3. $f(x)=x^3+2x-5$ uchhad x-2 ning darajalari bo'yicha $x^3+2x-5=(x-2)^3+$ $+6(x-2)^2+14(x-2)+7$ ko'rinishda yoziladi.

Misol. $Q[x]$ halqada berilgan $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-5x+1$ ko'phad hosilalarining $x_0=1$ nuqtadagi hosilalarini toping va berilgan ko'phadni $x-1$ ikkihad darajalariga yoying.

Yechish.

1-usul. $f'(x)=4x^3-6x^2+6x-5$;

$f''(x)=12x^2-12x+6$;

$f'''(x)=24x-12$;

$f^{IV}(x)=24$.

U holda $f'(1)=4\cdot 1^3-6\cdot 1-5=-1$;

$f''(1)=12\cdot 1-12\cdot 1+6=6$;

$f'''(1)=24\cdot 1-12=12$;

$f^{IV}(x)=24$

Berilgan ko'phadning $(x-1)$ darajalariga yoyilmasini Teylor formulasidan foydalanib topamiz:

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{f^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4$$

Bu yerda $f(1)=-2$ bo'lganligi uchun

$$f(x)=-2-(x-1)+3(x-1)^2+2(x-1)^3+(x-1)^4.$$

2-usul. Gorner sxemasi yordamida yoyilmani topamiz:

	1	−2	3	−5	1
1	1	−1	2	−3	−2
1	1	0	2	−1	
1	1	1	3		
1	1	2			
1	1				
1					

Jadvaldan $f(1)=-2$; $f'(1)=-1$; $\frac{f''(1)}{2!}=3$; $\frac{f'''(1)}{3!}=2$; $\frac{f^{IV}(1)}{4!}=1$ larni aniqlaymiz.

Bundan, $f(x)=(x-1)^4+2(x-1)^3+3(x-1)^2-(x-1)-2$ va $f'(1)=-1$; $f''(1)=6$; $f'''(1)=12$; larni topamiz.

Takrorlash uchun savollar:

1. Maydon ustida keltiriladigan ko'phad deb nimaga aytiladi va unga doir bitta misol keltiring?
2. Maydon ustida keltirilmaydigan ko'phad deb nimaga aytiladi va unga doir misol keltiring?
3. Keltiriladigan ko'phadlarning xossalariga misollar keltiring.
4. Algebraning asosiy teoremasini bayon eting.
5. Kompleks sonlar maydoni ustida 5-darajali kG`phad nyechta ildizga ega?
6. Ko'phadlarning EKUB, EKUK deb nimaga aytiladi?
7. $[f(x);\varphi(x)]=\frac{f(x)\varphi(x)}{(f(x);\varphi(x))}$ tenglik to'g'rimi?
8. Ko'phadning formal hosilasini keltirib chiqaring.
9. Ko'phadni (x-s) ikkihadga yoyilmasini yozing.

XV МОДУЛ. HAQIQIY VA KOMPLEKS SONLAR MAYDONI USTIDA KO'PHADLAR

1. Kompleks sonlar maydonining algebraik yopiqligi.
2. Viet formulalari.
3. Haqiqiy koeffitsientli ko'phad mavhum ildizlarining qo'shmaligi.
4. Haqiqiy sonlar maydoni ustida keltirilmaydigan ko'phadlar.
5. Uchinchi darajali tenglamalar.
6. To'rtinchi darajali tenglamalar.
7. Shturm ko'phadlar tizimi.
8. Shturm teoremasi.

5-ma'ruza. Algebraning asosiy teoremasi va uning natijalari. Haqiqiy sonlar maydoni ustida keltirilmaydigan ko'phadlar

Reja: 1. Dalamber lemmasi.

2. Veyrshtrass lemmasi.

3. Kompleks sonlar maydonining algebraik yopiqligi.

4. Viet formulasi.**Asosiy tushunchalar**: algebraic yopiq to'plam,

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. II qism. T.:O'qituvchi. 1995 y. (200, 219-222 betlar). 2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Visshaya shkola. 1979 g. (str. 507-513).

Ta'rif. Agar F maydon ustida F[*x*] halqadan olingan ixtiyoriy musbat darajali r(*x*) ko'phad kamida bitta ildizga ega bo'lsa, u holda F maydon algebraik yopiq deyiladi. **Dalamber lemmasi**. Kompleks sonlar maydoni C ustida musbat darajali $f(x)$ ko'phad berilgan bo'lib, $a \in C$ uchun $f(a) \neq 0$ bo'lsa, u holda shunday c kompleks son topiladiki, natijada $|f(c)| < |f(a)|$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Veyrshtrass lemmasi. C[z] halqadan olingan ixtiyoriy f(z) ko'phadning moduli C maydonda biror x_0 nuqtada eng kichik qiymatni qabul qiladi.

Teorema. Kompleks sonlar maydoni algebraik yopiq maydon. **Lemma.** Koefitsientlari C maydondan olingan, darajasi 1 dan kichik bo'lmagan $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ ko'phad va ixtiyoriy haqiqiy musbat k son berilganda, moduli etarlicha katta bo'lgan x o'zgaruvchi uchun ushbu $|a_0x^n|>k|a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n|$ tengsizlik o'rinli.

Natija. Haqiqiy sonlar maydoni ustida berilgan $f(x)$ ko'phadning ishorasi χ ning moduli etarlichi katta bo'lganda bosh had ishorasi bilan bir xil bo'ladi.

Natija. Haqiqiy sonlar maydoni ustida berilgan ixtiyoriy toq darajali ko'phad kamida bitta haqiqiy ildizga ega bo'ladi.

Teorema. Kompleks sonlar maydoni ustida $f(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$ ko'phad berilgan bo'lib, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ lar $f(z)$ ko'phadning ildizi bo'lsa, u holda ushbu

$$\begin{cases} c_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n); \\ c_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n; \\ c_3=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \end{cases} \qquad (1)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. (1) formulani Viet formulasi deyiladi.

Misol. $f(x)$ ko'phadni karrali ko'paytuvchilarga yiing.

Yechish. $f(x)$ ko'phadni keltirilmaydigan ko'phadlarga kanonik yoyilmasini quyidagi jadvaldan foydalanib topamiz.

C maydonda $f(x)=\varphi_1\varphi_2^2\ldots\varphi_m^n$, $1\le i\le m$ bo'lsin, φ_i ko'phadlarni quyidagicha aniqlaymiz.

$f=\varphi_1\varphi_2^2....\varphi_m^m$	$q_1=\frac{1}{d_1}=\varphi_1\varphi_2....\varphi_m$	$\varphi_1=\frac{q_1}{q_2}$
$d_1=(f,f')=\varphi_2\varphi_3^2...\varphi_m^{m-1}$	$q_2=\frac{d_1}{d_2}=\varphi_2\varphi_3....\varphi_m$	$\varphi_2=\frac{q_2}{q_3}$
$d_2=(d_1d_1')=\varphi_3....\varphi_m^{m-2}$	$q_3=\frac{d_2}{d_3}=\varphi_3....\varphi_m$	
....	....	....
$d_{m-1}=(d_{m-2}d_{m-2}')=\varphi_m$	$q_m=\frac{d_{m-1}}{d_m}=\varphi_m$	$\varphi_m=q_m$
$d_m=1$		

Berilgan $f(x)$ ko'phad uchun Evklid algoritmi yordamida $d_1,d_2,....,d_m$ larni topamiz: $f'(x)=4x^3-6ix^2-2i$.

$d_1=(f,f')=(x-i)^2;$

$d_1'=2x-2i=2(x-i);$

$d_2=x-i;$

$d_2'=1;$

$d_3=(d_2,d_2')=1;$

$q_1=\frac{f}{d_1}=x^2+1;$

$q_2=\frac{d_1}{d_2}=x-i;$

$q_3=\frac{d_2}{d_3}=x-i;$

Bulardan, $\varphi_1=\frac{q_1}{q_2}=x+i$; $\varphi_2=\frac{q_2}{q_3}=1$; $\varphi_3=q_3=x-i$ lar kelib chiqadi.

Demak, $f(x)=(x+i)(x-i)^3$.

Takrorlash uchun savollar:

1. Dalamber, Veyrshtrass lemmalarini aytib bering?
2. Kompleks sonlar maydonining algebraik yopiqligi haqidagi teoremani bayon eting?
3. Viet formulasiga misol keltiring.

6-ma'ruza. Uchinchi, to'rtinchi darajali bir noma'lumli tenglamalar

Reja:

1. Kompleks sonlar maydoni ustidagi 3-darajali tenglama
2. 3-darajali tenglamani yechish
3. Ko'phadning Shturm sistemasi.
4. Shturm teoremasi.

Asosiy tushunchalar: 3-darajali tenglama, Kardano formulalari, ko'phad, ko'phadning nuqtadagi qiymati. Ishora almashinishlar soni. Ko'phadlar sistemasi.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi II-qism. T.:O'qituvchi 1995 y. (229-233 betlar)
2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.Vis.shk. 1979 g.(str. 515-520).

Ta'rif. Kompleks sonlar maydoni C ustidagi ushbu

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ (1)

ko'rinishdagi tenglama 3-darajali bir noma'lumli tenglama deyiladi.

(1)ning har ikki qismini a ga bo'lib

$$\tilde{o}^3+\frac{b}{a}\tilde{o}^2+\frac{\tilde{n}}{\grave{a}}\tilde{o}+\frac{d}{a}=0 \qquad (2)$$

tenglamani hosil qilamiz.

(2)da $x=y-3\frac{b}{a}$ almashtirish bajarib, soddalashtirgandan so'ng

$$y^3+ry+q=0 \qquad (3)$$

tenglamani hosil qilamiz. (3) da $y=u+v$ almashtirishdan so'ng u va v larni shunday tanlab olamizki, natijada $3uv+r=0$ shart bajarilsin. U holda

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27} \end{cases} \qquad (4)$$

sistemaga ega bo'lamiz. (4) dan ko'rinadiki u^3 va v^3 lar Viet teoremasiga ko'ra qandaydir $z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$ tenglamaning ildizi bo'ladi. Bu kvadrat tenglamani yechib

$z_1=u^3$ dan $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$, $v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ larni hosil qilamiz. u va v ning har biriga uchta qiymat, u o'zgaruvchi uchun esa to'qqizta qiymat topiladi.

Agar u, εu, $\varepsilon^2 u$ (bunda ε son 1 dan chiqarilgan 3-darajali ildiz) z_1 ning uchinchi darajali ildizlarining qiymatlari bo'lsa, unga mos z_2 ning uchinchi darajali ildizlari qiymatlari v, $\varepsilon^2 v$, εv bo'ladi. Natijada (3) tenglama

$y_1=u+v$, $y_2=\varepsilon u+\varepsilon^2 v$, $y_3=\varepsilon^2 u+\varepsilon v$ ildizlarga ega bo'lib, unda

$\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lgani uchun

$y_1=u+v$,

$y_2=-\frac{1}{2}(u+v)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)$,

$y_3=-\frac{1}{2}(u+v)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)$ bo'ladi.

Bu yerda $x=y-\frac{3b}{a}$ ni e'tiborga olib (1) tenglamaning $x_1=y_1-\frac{3b}{a}$, $x_2=y_2-\frac{3b}{a}$, $x_3=y_3-\frac{3b}{a}$ ildizlari topiladi.

(1) tenglamani bu usulda yechish (1) ni Kardano usuli bilan yechish deyiladi.

Teorema. Agar

$$x^3+px+q=0 \qquad (5)$$

tenglamada r, q lar haqiqiy sonlar bo'lib, $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ bo'lsa, u holda quyidagi mulohazalar o'rinli:

1) Agar $\Delta>0$ bo'lsa, (5) tenglama bitta haqiqiy va ikkita o'zaro qo'shma mavhum ildizlarga ega buladi;

2) Agar $\Delta=0$ bo'lsa, (5) tenglamaning barcha ildizlari haqiqiy va kamida bitta ildizi karrali bo'lad;

3) Agar $\Delta<0$ bo'lsa, (5) tenglamaning barcha ildizlari haqiqiy va turlicha bo'ladi.

Ta'rif. Agar quyidagi shartlar bajarilsa, noldan farqli ko'phadlarning tartiblangan chekli

$$f(x)=f_0(x), f_1(x), f_2(x),\ldots, f_s(x) \qquad (1)$$

sistemasi $f(x)$ ko'phadning Shturm sistemasi deyiladi:

1. (1) sistemaning qo'shni ko'phadlari umumiy ildizga ega emas;
2. Oxiri $f_s(x)$ ko'phad haqiqiy ildizlarga ega emas;
3. Agar α son (1) sistemaning oraliq ko'phadlaridan biri bo'lgan $f_k(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizi bo'lsa, $(1\leq k\leq s\text{-}1)$, u holda $f_{k-1}(x)$ va $f_{k+1}(x)$ qarama-qarshi ishoralarga ega bo'ladi;
4. Agar α son $f(x)$ ning haqiqiy ildizi bo'lsa, u holda x o'sa borib α nuqtadan o'tganda $f(x)f_1(x)$ ko'paytma o'z ishorasining manfiydan musbatga o'zgartiradi.

Agar s haqiqiy son $f(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizi bo'lmasa va (1) sistema $f(x)$ uchun Shturm sistemasi bo'lsa, u holda haqiqiy sonlarning $f(s), f_1(s), f_2(s),\ldots, f_s(s)$ cistemasini olamiz va undan barcha nolga teng bo'lganlarini o'chiramiz xamda W(s) orqali qolgan sistemaning ishora o'zgarishlar sonini belgilaymiz.

W(c) ni $f(x)$ ko'phadning (1) Shturm sistemasida x=s bo'lganda ishora o'zgarishlar soni deyiladi.

Shturm teoremasi. Agar a va v (a<v) haqiqiy sonlar karrali ildizlarga ega bo'lmagan haqiqiy koeffitsientli $f(x)$ ko'phadning ildizlari bo'lmasa, u holda $W(a)\geq W(v)$ va W(a)-W(v) ayirma $f(x)$ ko'phadning a va v orasida joylashgan ha qiqiy ildizlari soniga teng bo'ladi.

Bu teoremani $f(x)$ ning haqiqiy ildizlarining umumiy sonini topishga ishlatish uchun a sifatida manfiy ildizlarning quyi chegarasini, v sifatida musbat ildizlarning yuqori chegarasini olish lozim.

Misol. $f(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$ ko'phadning haqiqiy ildizlari sonini toping.

$f(x)= f_0(x)= x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3,$

$f_1(x)=5x^4+8x^3-15x^2+16x-7,$

$f_2(x)=66x^3+150x^2+172x+61,$

$f_3(x)=-464x^2+1135x+723,$

$f_4(x)=-32599457x-8486093,$

$f_5(x)=-1$

Shturm sistemasini tuzamiz va bu sistemadan $x=-\infty$, $x=\infty$ dagi ishoralarini aniqlaymiz.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$F_5(x)$	Ishora o'zgarishlar soni
$-\infty$	-	+	-	-	+	-	4
$+\infty$	+	+	+	-	-	-	1

Demak, Shturm sistemasi 3 ta ishora o'zgarishini yo'qotadi. Shunga ko'ra $f(x)$ ko'phad 3 ta haqiqiy ildizga ega bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Kompleks koeffitsientli 3-darajali bir noma'lumli tenglamaning umumiy ko'rinishi qanday bo'ladi?
2. 3-darajali bir noma'lumli tenglamalarni yechishda qanday almashtirishlar
3. bjariladi?
4. $\sqrt[3]{1}$ ildizlarni yozing?
5. $\forall r,q\in R$ bo'lganda $x^3+rx+q=0$ tenglamaning ildizlari qanday bo'ladi?
6. Shturm sistemasini tuzishni tushuntirib bering?
7. Shturm teoremasini bayon eting?

XVI МОДУЛ. RASIONAL SONLAR MAYDONI USTIDA KO'PHADLAR. ALGEBRAIK KENGAYTMALAR

1. Ko'phadning butun va ratsional ildizlari.
2. Eyzenshteynning keltirilmaslik alomati.
3. Maydonning oddiy kengaytmasi.
4. Algebraik elementning minimal ko'phadi.
5. Maydonning oddiy kengaytmasini qurish.
6. Kasr mahrajini algebraik irratsionallikdan qutqarish.
7. Maydonning chekli kengaytmasi.
8. Maydonning murakkab kengaytmasi.
9. Algebraik sonlar maydoni.
10. Tenglamalarni radikallarda yechilishi.
11. Uchinchi darajali tenglamalarning kvadrat radikallarda yechilish sharti.
12. Kvadrat radikallarda yechilmaydigan masalalar.

8-ma'ruza. Ko'phadning butun va ratsional ildizlari. Algebraik va transsendent sonlar. Maydonning oddiy kengaytmasi. Maydonning chekli va murakkab kengaytmalari.

Reja:

1. Ko'phadning butun va ratsional ildizlari.
2. Ko'phadlar uchun Eyzenshteynning keltirilmaslik kriteriyasi.
3. Algebraik sonlar.
4. Transtsendent sonlar.
5. Maydonning oddiy kengaytmasi.
6. Algebraik elementning minimal ko'phadi.
7. Maydonning chekli kengaytmasi.
8. Maydonning murakkab kengaytmasi.

Asosiy tushunchalar: Ko'phad.Ko'phadning ildizlari.Butun koeffitsientli ko'phad.Bosh koeffitsient, ozod had.Keltirilmaydigan ko'phad. Maydon. Kengaytma

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. II-qism. T.:O'qituvchi 1995 y. (236-246 betlar).

2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.:Vis.shk. 1979 g.(str. 526-531).

Ratsional sonlar maydoni ustida $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ ko'phadning ildizi $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$ tenglamaning ildizi bo'ladi. Shuning uchun n-darajali ko'phadning ratsional ildizi o'rniga n-darajali tenglamaning ildizini topamiz.

Teorema. Kasr koeffitsientli tenglamani butun koeffitsientli tenglama bilan almashtirish mumkin.

Teorema. Butun koeffitsientli tenglamani bosh koeffitsienti 1 ga teng butun koeffitsientli tenglamaga keltirish mumkin.

Teorema. Bosh koeffitsienti 1 ga teng bo'lgan koeffitsientlari butun sonlardan iborat tenglamannig ratsional ildizlari faqat butun sonlar bo'ladi.

Teorema. Bosh koeffitsienti 1 ga teng bo'lgan butun koeffitsientli tenglamaning butun ildizi ozod hadning bo'luvchisi bo'ladi.

Teorema. Bosh koeffitsienti 1 ga teng bo'lgan butun koeffitsientli $x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$ tenglamaning chap tomonini x-a (a-butun son) ga bo'lishdan chiqqan bo'linma butun koeffitsientli ko'phaddir.

Teorema. Agar a butun son koeffitsientlari butun bo'lgan $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+$ $+a_{n-1}x+a_n=0$ tenglamanin ildizi bo'lsa, u holda $\frac{f(1)}{a-1}$ va $\frac{f(-1)}{a+1}$ sonlar ham butun sonlar bo'ladi.

Teorema. Agar r/q (q>0) qiqarmas kasr koeffitsientlari butun bo'lgan $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$ tenglamaning ildizi bo'lsa, u holda r son a_n ozod hadning q son esa a_0 bosh koeffitsientning bo'luvchisi bo'ladi.

Eyzenshteyn kriteriyasi. Butun koeffitsientli $f(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+...+c_1x+c_0$ ko'phadning bosh koeffitsienti s_n dan boshqa barcha koeffitsientlari r tub songa bo'linib, ozod had s_0 esa r^2 ga bo'linmasa, u holda $f(x)$ ko'phad ratsional sonlar maydoni ustida keltirilmaydigan ko'phad bo'ladi.

Misol 1. $f(x)=x^3+9x-26$ ko'phadning butun ildizi – 26 ozod hadning bo'luvchisi bo'lgan 2 bo'ladi.

2. $f(x)=4x^3-3x-1$ ko'phadning ratsional ildizlari $x_1=1$, $x_{2,3}=-1/2$ bo'ladi.

Ta'rif. Agar α son koeffitsientlari ratsional sonlardan iborat ko'phadning yoki algebraik tenglamaning ildizi bo'la olsa, u holda α son algebraik son, aks holda transtsendent son deyiladi.

Bu ta'rifga ko'ra barcha ratsional sonlar algebraik sonlar bo'la oladi, chunki har qanday p/q ($q\neq0$) ko'rinishdagi ratsional sonlar $p-qx=0$ tenglamaning ildizi bo'la oladi. π, e sonlari transtsendent sonlardir. Hozirgi vaqtda transtsendent sonlar algebraik sonlarga nisbatan ko'proq ekanligi aniqlandi.

Ta'rif. Agar α son koeffitsientlari F_1 maydonga tegishli biror algebraik tenglamaning ildizi bo'lsa, u holda α son F_1 maydonga nisbatan algebraik son, aks holda α son F_1 maydonga nisbatan transtsendent son deyiladi.

Teorema. Ildizi α dan iborat bo'lgan keltirilmaydigan ko'phad nolinchi darajali ko'phad aniqligida yagonadir.

Ta'rif. F_1 maydon ustida keltirilmaydigan ko'phadning barcha ildizlari o'zaro qo'shma sonlar deyiladi.

Ratsional sonlar o'z-o'ziga qo'shma deb hisoblanadi. Ratsional bo'lmagan har qanday son, darajasi ikkidan kichik bo'lmagan ko'phadning ildizidan iborat bo'lgani uchun ular qo'shma algebraik sonlarga ega.

Ta'rif. F_1 maydon ustida bosh koeffitsienti 1 ga teng va keltirilmaydigan $f(x)$ ko'phad α ildizga ega bo'lsa, u holda bu ko'phadning darajasi F_1 maydonga nisbatan α algebraik sonning darajasi deyiladi, $f(x)$ ko'phad esa F_1 sonlar maydoni ustida minimal ko'phad deyiladi.

Bu ta'rifga ko'ra $f(x)= x^2+4$ ko'phad haqiqiy sonlar maydoni ustidagi minimal ko'phad bo'ladi.

Teorema. Agar α element F_1 maydon ustidagi algebraik element va $g(x)$, $\varphi(x)$ lar F_1 maydonga ustidagi minimal ko'phadlar bo'lsa, u holda $g(x)=\varphi(x)$ bo'ladi.

Isboti. $g(x)$ va $\varphi(x)$ minimal ko'phadlarning darajasi bir xil bo'ladi. Agar $g(x)\neq\varphi(x)$ bo'lsa, u holda α element (F_1 maydon ustidagi n daraja) $g(x)-\varphi(x)$ ko'phadning ildizi bo'ladi. Bu daraja esa $\varphi(x)$ darajasidan (n dan kichik) kichik bo'ladi. Buning bo'lishi mumkin emas. Demak, $g(x)=\varphi(x)$ bo'ladi.

Ta'rif. Agar F_1 maydon F maydonning qism maydoni bo'lib, $\alpha\in$ F bo'lsa, u holda F_1 maydonni va α elementni o'z ichiga olgan F maydonning eng kichik qism maydoni α element orqali hosil qilingan F_1 maydonning oddiy kengaytmasi, α algebraik element bo'lsa, u holda F maydon F_1 maydonning oddiy algebraik kengaytmasi deyiladi.

Misol. Ratsional sonlar maydoni Q ga darajasi 2 ga teng bo'lgan $\sqrt{2}$ algebraik sonni kiritsak va uni $Q[\sqrt{2}]$ orqali belgilasak, u holda $Q[\sqrt{2}]$ to'plam maydon tashkil qiladi va $Q[\sqrt{2}]$ maydon Q maydonning oddiy algebraik kengaytmasi bo'ladi.

F maydonning qism maydoni F_1 bo'lsin. U holda F ni F_1 maydon ustida vektor fazo deb qarash mumkin.

Ta'rif. Agar F maydon F_1 maydon ustida vektor fazo sifatida chekli o'lchovga ega bo'lsa, u holda F maydon F_1 maydonning chekli kengaytmasi deyiladi.

F ning F_1 maydon ustidagi chekli o'lchamini $[F: F_1]$ orqali belgilaylik.

Teorema. Agar α element F_1 maydon ustida n-darajali algebrik element bo'lsa, u holda $[F_1(\alpha):F_1]=n$ bo'ladi.

Ta'rif. Agar F maydonning har bir elementi F_1 maydon ustida algeboaik bo'lsa, u holda F maydon F_1 maydonning algebraik kengaytmasi deyiladi.

Teorema. F_1 maydonning ixtiyoriy chekli kengaytmasi bo'lgan F maydon F_1 maydon ustidagi algebrik kengaytma bo'ladi.

Ta'rif. Agar F maydonning $L_i(i=\overline{0,k})$ qism maydonlarining o'suvchi zanjiri mavjud bo'lsa, ya'ni $F_1=L_0\subset L_1\subset...\subset L_k=F$ ($k>1$) munosabat o'rni bo'lsa, u holda F_1 maydon F_1 maydonning murakkab kengaymasi deyiladi.

Teorema. F maydon L maydonning chekli kengaytmasi bo'lib, L maydon F_1 maydonning chekli kengaytmasi bo'lsa, u holda F maydon F_1 maydoning chekli kengaymasi bo'ladi va $[F: F_1]=[F: L]\,[L: F_1]$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Ta'rif. Agar F maydon L_i ($i=\overline{o,k}$) qism maydonlarining o'suvchi zanjiri $F_1=L_o\subset L_1\subset...\subset L_k$ = F (k>1) mavjud bo'lsa va i o'zgaruvchi 1 dan k gacha o'zgarganda L_i maydon L_{i-1} maydonning oddiy kengaytmasi bo'lsa, u holda F maydon F_1 maydonning murakkab algebrik kengaytmasi, k son esa yuqoridagi munosabatning zanjir uzunligi deyiladi.

Natija. F_1 maydonning F murakkab algebrik kengaytmasi F_1 maydonning chekili kengaytmasi ham bo'ladi.

Teorema. F maydonning F_1 maydon ustida algebrik elementlari α_1, $\alpha_2...,\alpha_k$ bo'lsa, u holda $F_1(\alpha_1, \alpha_2...,\alpha_k)$ maydon F_1 maydonning chekli kengaytmasi bo'ladi.

Natija. Maydonning murakkab algebrik kengaytmasi o'sha maydonning algebrik kengaytmasi ham bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Koeffitsientlari butun sonlardan iborat ko'phadning butun va ratsional ildizlari haqidagi teoremalarni bayon eting?
2. Eyzenshteynning keltirilmaslik kriteriyasini bayon eting?
3. $f(x)= x^2-2x+1$ ko'phadning ildizlari qanday bo'lishini tushuntirib bering?
4. Algebraik son deb nimaga aytiladi?
5. Transtsendent son deb nimaga aytiladi?
6. Maydonning oddiy kengaytmasi deb nimaga aytiladi?
7. Maydonning oddiy algebraik kengaytmasi deb nimaga aytiladi?
8. Algebraik elementning minimal ko'phadi deb nimaga aytiladi?
9. Maydonning chekli kengaytmasi haqida tushuncha bering?
10. Maydonning murakkab kengaytmasi deb nimaga aytiladi?
11. Maydonning murakkab algebrik kengaytmasi haqida tushuncha bering?

9-ma'ruza. Kasrning maxrajini algebrik iratsionallikdagi qutqarishi. Kvadrat radikallarda echilmaydigan masalalar.

Reja:

1. Kasrning maxrajini algebrik irratsionalikdan qutqarish.
2. Tenglamalarning radikallarda yechilishi tushunchasi.
3. Uchinchi darajali tenglamaning kvadrat radikallarda yechilish sharti.

Asosiy tushunchalar: Ko'phad va ular ustida amallar.Algebrik son.Kasr sonlar va ular ustida amallar.Irratsional son.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N, Toshpo'latov B.T, Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. II-qism. T.:O'qituvchi. 1995 y. (200-202, 246-255 betlar).

2 Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.:Vis.shk. 1979 g.(str. 532-541).

$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}(g(\alpha)\neq 0)$ kasr berilgan bo'lib uning maxraji g(α) da irratsional son qatnashgan bo'lsin. Shu irratsionallikni g(α) tarkibidan yo'qataylik.

Teorema. Kasrning maxrajdagi irratsionallikni yo'qotish mumkin, ya'ni F_1 sonlar maydoni ustida keltirilmaydigan n–darajali $r(x)=x^n+a_1x^{n-1}+..+a_{n-1}x+a_n$ $(n\geq2)$ ko'phad berilgan bo'lib, $x=\alpha$ uning ildizi bo'lsa, u holda $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}(g(\alpha)\neq 0)$ kasr-ratsional ifodani shunday o'zgartirish mumkinki, natijada uning mahraji butun ratsional ifodaga aylanadi.

Ta'rif. Agar $F=F_1(\alpha)$ $(\alpha\notin F_1,\ \alpha^2\in F_1)$ munosabatni qanoatlantiruvchi α element mavjud bo'lsa, u holda F maydon F_1 maydonning kvadratik kengaytmasi deyiladi.

Bu ta'rifga ko'ra $Q(\sqrt{2})$ maydon Q maydonning kvadratik kengaytmasi, lekin, $Q(\sqrt[3]{3})$ maydon Q maydonning kvadratik kengaytmasi bo'lmaydi.

Ta'rif. Agar

$$f(\chi)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0(a_i\in Q, i=\overline{1,n}) \qquad (1)$$

tenglamaning ildizlarini

$$x^{n_0}-\alpha_0=0\ (\alpha_0\in Q=\mathcal{F}_0);$$

$$x^{n_1}-\alpha_1=0\ (\alpha_1\in\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_0(\sqrt[n_0]{\alpha_0}));$$

$$x^{n_2}-\alpha_2=0\ (\alpha_2\in\mathcal{F}_2=\mathcal{F}_1(\sqrt[n_1]{\alpha_1}));$$

- - - - - - - - - - - - -

$$x^{n_{k-1}}-\alpha_{k-1}=0\ (\alpha_{k-1}\in\mathcal{F}_{k-1}=\mathcal{F}_{k-2}\ (\sqrt[n_{k-2}]{\alpha_{k-2}}))$$

ikki hadli kvadratik tenglamalar zanjirlarining ildizlari orqali ratsional ifodalash mumkin bo'lsa, u holda f(x)=0 tenglama radikalda yechiladi deyiladi.

Ta'rif. Agar f(x) ko'phad F_1 maydonning biror kengaytmasida chiziqli ko'paytuvchilar ko'paytmasi shaklida yozilsa, u holda Q maydon narmal maydon deyiladi.

Teorema. Koeffitsientlari F maydonga tegishli f(x) ko'phad uchun Q kengaytma narmal kengaytma bo'lsa, u holda f(x)=0 tenglama kvadrat radikallarda yechilishi uchun $(Q: F_1)=2^m$ bo'lishi zarur va etarli.

Teorema. Ushbu $x^3+ax^2+vx+s=o$ (2)

ratsional koeffitsentili 3-darajali tenglama kvadrat radikalda yechilishi uchun uning kamida bitta ildizi ratsional son bo'lishi zarur va etarli.

Takrorlash uchun savollar:

1. Kasrning mahrajini algebrik irratsonallikdan qutqarish yo'lini tushuntirib bering?
2. Kasrning maxrajini irratsionallikdan qutqarish uchun shu kasrning surat va mahrajini har doim ham mahrajining qo'shmasiga ko'paytirish mumkinmi?
3. Maydonning kvadratik kengaytmasi deb nimaga aytiladi?
4. Tenglamaning radikalda yechilishini tushuntirib bering?
5. 3-darajali tenglamaning kvadrat radikalda yechilishi zarur va etarli shartini bayon eting?
6. Kvadrat radikalda yechiladigan tenglamaga misol keltiring?

XVII МОДУЛ. KO'P NOMA'LUMLI KO'PHADLAR

1. Halqaning karrali kengaytmasi.
2. Ko'p o'zgaruvchili ko'phadlar halqasi.
3. Ko'phadlar halqalarining izomorfizmi.
4. Ko'phad darajasi, xossalari.
5. Ko'phad hadlarining leksikografik tartibi.
6. Simmetrik ko'phadlar.
7. Ikki ko'phad rezultanti.
8. Ikki o'zgaruvchili tenglamalar.

10- ma'ruza. Halqaning karrali kengaytmasi. Ko'p noma'lumli ko'phadlar halqasi. Ko'phadni normal ifodasi. Ko'phad darajasi va uning xossalari. Ko'phadlar halqasining faktorialligi

Reja:

1. Halqaning karrali kengaytmasi.
2. Halqaning karrali transtsendent kengaytmasi
3. Ko'p noma'lumli ko'phadlar halqasi.
4. Ko'p noma'lumli ko'phad.

Asosiy tushunchalar: Ko'phad. Halqa. Maydon. Kengaytma.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. II-qism. T.:O'qituvchi. 1995 y. (175, 176, betlar).

2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.:Vis.shk. 1979 g.(str 485-489).

L halqa butunlik sohasi bo'lsin. $K\subset L$ bo'lib $K\neq 0$ va $x_1,x_2,...,x_m\in L$ bo'lsin.

Ta'rif. L halqaning qism xalqasi va shu L dagi $x_1,x_2,...,x_m$ elementlarni o'z ichiga oluvchi K xalqaning minimal kengaytmasi K halqa va $x_1,x_2,...,x_m$ elementlar yaratgan L halqaning qism halqasi deyiladi va u $K[x_1,x_2,...,x_m]$ orqali belgilanadi.

Boshqacha aytganda $K[x_1,x_2,...,x_m]$ xalqa K ning qism xalqasi sifatida va

$x_1, x_2, ..., x_m$ elementlarni o'z ichiga oluvchi L halqaning barcha qism halqalari kesishmasi bo'ladi.

Ta'rif. Quyidagi induktivlik formulasi orqali aniqlanadigan $K[x_1][x_2]...[x_m]$ halqani K halqaning m karrali kengaytmasi deyiladi:

1. $K[x_1][x_2]=(K[x_1])[x_2]$.
2. $K[x_1][x_2]...[x_m]=(K[x_1][x_2]...[x_{m-1}])[x_m]$.

Teorema. K halqa L halqaning kommutativ qism halqasi va $x_1, x_2, ..., x_m \in L$ bo'lsa, u holda $K[x_1, x_2, ..., x_m]=K[x_1][x_2]...[x_m]$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Ta'rif. Agar $\{1,2,...,m\}$ to'plamning xitiyoriy s elementi uchun $K[x_1, x_2, ..., x_s]$ halqa x_s element orqali $K[x_1, x_2, ..., x_{s-1}]$ halqaning oddiy transtsendent kengaytmasi bo'lsa, u holda $K[x_1, x_2, ..., x_m]$ halqani K halqaning m karrali transtsendent kengaytmasi deyiladi.

Ta'rif. K butunlik sohasining m karrali transtsendent kengaytmasi bo'lgan $K[x_1, x_2, ..., x_m]$ halqani ko'phadlar halqasi, uning elementini esa $x_1, x_2, ..., x_m$ o'zgaruvchili ko'phad deyiladi.

Ta'rif. Kamida ikkitta o'zgaruvchiga boђliq bo'lgan ko'phad ko'p o'zgaruvchili ko'phad deyiladi.

n ta noma'lumli ko'phad $x_1^{\alpha_i} x_2^{\beta_i} ... x_n^{\gamma_i}$ ko'rinishdagi chekli sondagi hadlarning algebraik yiђindisidan iborat.

n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchili ko'phad $f(x_1, x_2, ..., x_n)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_1^{\alpha_i} x_2^{\beta_i} ... x_n^{\gamma_i}$ ko'rinishda bo'ladi. Bunda $a_i \in K$.

n ta noma'lumli ko'phadlar yiђindisi yoki ayirmasi o'xshash hadlarni ixchamlash kabi topiladi. Ikkita ko'p noma'lumli ko'phadlar ko'paytmasini topishda birinchi ko'phadning har bir hadini ikkinchi ko'phadning har bir hadiga ko'paytirib, natijalar qo'shiladi, so'ng o'xshash hadlar ixchamlanadi.

K maydon ustidagi ixtiyoriy ikkita ko'p noma'lumli ko'phadning yiђindisi, ayirmasi, ko'paytmasi, ya'ni K maydon ustidagi ko'phadlar bo'ladi. Shu sababli K maydon ustidagi ko'p noma'lumli ko'phadlar to'plami kommutativ halqa tashkil etadi. Bu halqani $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ ko'rinishda belgilanadi.

Ta'rif. n ta noma'lumli ko'phadning darajasi deb, bu ko'phaddagi qo'shiluvchilar darajalarining kattasiga aytiladi.

Misol. $f(x,y,z)= x^2y-2xyz+3xyz^4+7$ ko'phad 6-darajali ko'pxad bo'ladi.

Ta'rif. Barcha qo'shiluvchilarining darajalari bir xil bo'lgan ko'phadga bir jinsli ko'phad yoki forma deyiladi.

Misol. $f(x,y,z)=2xyz-3x^2y+4yz^2$, $f(x,y)=2x^2-xy+y^2$ ko'phadlar bir jinsli ko'phad bo'ladi. Bu misolda birinchi ko'phad kubik forma, ikkinchi ko'phad kvadratik forma deyiladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Halqaning karrali kengaytmasi deb nimaga aytiladi?
2. Halqaning karrali transtsendent kengaytmasi deb nimaga aytiladi?
3. Ko'p noma'lumli ko'phadlar halqasi deb nimaga aytiladi?
4. Ko'p noma'lumli ko'phad deb nimaga aytiladi?
5. Ko'p noma'lumli ko'phadning darajasi deb nimaga aytiladi?
6. Bir jinsli ko'phad yoki forma deb nimaga aytiladi?

11-ma'ruza. Ko'phadni leksikografik tartibda yozish. Ko'phadlar ko'paytmasining yuqori hadi haqida teorema

Reja:

1. Ko'p noma'lumli ko'phadni leksikografik tartibda yozish.
2. Ko'phadning yuqori hadi
3. Ko'phadlar ko'paytmasining yuqori hadi.

Asosiy tushunchalar: Ko'p noma'lumli ko'phad. Ko'phadning hadi.
Ko'phadning darajasi.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi II-qism. T.:O'qituvchi 1995 y. (180-182 betlar).

2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.Vis.shk. 1979 g.(str. 493-495).

Bir noma'lumli ko'phadlar noma'lumlarining darajalarining o'sishi yoki kamayishi tartibida yozilar edi. n ta noma'lumli ko'phadlarning bir nyechta hadlari bir xil darajali bo'lishi mumkin. Shu sababli n ta noma'lumli ko'phadni uning darajalarining o'sishi yoi kamayishi tartibida yozish mumkin emas.

$f(x_1,x_2,...,x_n)$ ko'phad berilgan bo'lib, uning ikkita hadidan qaysi birida x_1 ning darajasi katta bo'lsa, o'sha had yuqori had deb yuritiladi. Agar bu hadlardagi x_1 ning darajasi teng bo'lib, qaysi birida x_2 ning darajasi katta bo'lsa o'sha had yuqori deb hisoblanadi va h.k.

$f(x_1,x_2,...,x_n)$ ko'phadni birinchi o'rinda eng yuqori hadni, ikkinchi o'rinda qolgan hadlar orasida eng yuqori bo'lgan hadni va shu jarayon oxirgi had uchun yozil gan bo'lsa, u holda $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ko'phad leksikografik yozilgan deyiladi.

Ta'rif. Agar $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ko'phadning barcha hadlarining tartibi kamaygan holda yozilgan bo'lsa, u holda $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ko'phad leksikografik tartibda yozilgan deyiladi.

Teorema. Ko'p noma'lumli ko'phadlar ko'paytmasining eng yuqori hadi bu ko'phadlar eng yuqori hadlari ko'paytmasiga teng.

Misol 1. $f(x_1, x_2, x_3)=3x_1^3-2x_2^3+6x_2x_3+x_3^2-x_2x_3^3$

ko'phad $f(x_1, x_2, x_3)=3x_1^3-2x_2^4-x_2x_3^3+6x_2x_3+x_3^2$

ko'rinishda leksikografik tartibda yoziladi.

2. $f(x_1,x_2)=3x_1-2x_1x_2^2+x_2^5$ va $f(x_1,x_2)=6x_1^2-x_1x_2^2+x_2^4$ ko'phadlar ko'paytmasining eng yuqori hadi $(-2x_1x_2^2)(6x_1^2)= -12x_1^3 x_2^2$ bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Ko'phadning yuqori hadi qanday aniqlanadi?
2. Ko'phadni leksikografik yozish deganda nimani tushunasiz?
3. Ko'phadlar ko'paytmasining yuqori hadi haqidagi teoremani bayon eting.
4. Misollar keltiring.

12-ma'ruza. Simmetrik ko'phadlar. Simmetrik ko'phadlar haqidagi asosiy teorema. Ikkita ko'phad rezultanti

Reja:

1. Simmetrik ko'phad.
2. Asosiy simmetrik ko'phadlar.
3. Simmetrik ko'phadlar haqidagi asosiy teorema.
4. Ikkita ko'phadning rezultanti.

Asosiy tushunchalar: Ko'p noma'lumli ko'phad. Ko'phadning nuqtadagi qiymati. Determinant va uning xossalari.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. II qism. T.:O'qituvchi. 1995 y. (192-200, 202-206 betlar).
2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Visshaya shkola. 1979 g. (str. 495-502).

1-ta'rif. Agar ko'p noma'lumli ko'phaddagi ixtiyoriy ikkita noma'lumning urinlarini almashtirganda ko'phadni qiymati o'zgarmasa, u holda bunday ko'phad simmetrik ko'phad deyiladi.

1- misol. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2$ ko'phad simmetrik ko'phaddir, chunki bu ko'phaddagi x_1, x_2, x_3 noma'lumlarning hamma 6 ta o'rinlarini almashtirib chiqsak, ko'phad o'zgarmaydi. CHunonchi x_1 va x_2 noma'lumlarni bir-biri bilan almashtirsak,

$x_2^2x_1x_3 + x_2x_1x_3^2 + x_2x_1x_3^2$ ko'phad hosil bulib, bu esa berilgan ko'phadning o'zginasidir. SHunga o'xshash, x_2 va x_3 ni almashtirib,

$x_1^2x_3x_2 + x_1x_3x_2^2 + x_1x_3x_2^2$ ko'phadni hosil qilamiz, bu esa yana berilgan ko'phadning o'zidir.

n ta noma'lumli simmetrik ko'phadlarning algebraik yig'indisi yana n ta noma'lumli simmetrik ko'phadlar bo'ladi. Haqiqatan, ham noma'lumlarning istalgan o'rin almashtirishida har qaysi simmetrik ko'phad o'zgarmasa, ravshanki, ularning algebraik yig'indisi va ko'paytmasi ham o'zgarmaydi. Masalan, $f_1(x_1,x_2,x_3)$ = $x_1+x_2+x_3$ va

$f_2(x_1,x_2,x_3)= x_1x_2x_3$ simmetrik ko'phadlarning kuyidagi algebraik yig'indisi va ko'paytmasi yana simmetrik ko'phadlardir:

$$f_1 \pm f_2 = x_1 + x_2 + x_3 \pm x_1x_2x_3;$$
$$f_1 \cdot f_2 = x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2$$

2-ta'rif $x_1,x_2,\dots,x_n$ noma'lumlardan to'zilgan

$$\begin{aligned}
&\tau_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n,\\
&\tau_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n,\\
&-----------------\\
&\tau_n = x_1x_2\dots x_n
\end{aligned} \qquad (1)$$

simmetrik ko'phadlar asosiy (elementar) simmetrik ko'phadlar deb ataladi.

Yuqoridagi misolni $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)\ x_1x_2x_3$ kurinishda yozib, $\tau_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\tau_3 = x_1x_2x_3$ ekanini eotiborga olsak, u holda

$f = \tau_1 \cdot \tau_2$ tenglik hosil bo'ladi. SHunday kilib, berilgan simmetrik ko'phad asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ifodalandi. Yaoni

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2^2 + 3x_2x_3 + x_3^2 - 3x_1x_2x_3$$

simmetrik ko'phadni

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3+)^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-3x_1x_2x_3$$

kurinishda olib,

$\tau_1 = x_1+x_2+x_3$, $\tau_2 = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, $\tau_2=x_1x_2x_3$

ekanini xisobga olsak, u holda

$$f(x_1,x_2,x_3) = \tau_1^2 + \tau_2 - 3\tau_3$$

tenglikni hosil kilamiz. Demak, bu holda ham bu simmetrik ko'phad asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ifodalanadi.

1-TEOREMA. R maydon ustidagi τ_1, τ_2 , ..., τ_n asosiy simmetrik ko'phadlarning

$$A_1\tau_1^{\alpha_1}\tau_2^{\alpha_2}\dots\tau_n^{\alpha_n} + A_2\tau_1^{\beta_1}\tau_2^{\beta_2}\dots\tau_n^{\beta_n} + \dots + A_k\tau_1^{w_1}\tau_2^{w_2}\dots\tau_n^{w_n} \qquad (2)$$

ko'phadi, fakat $A_1=A_2=...=A_n=0$ bo'lgandagina nolga teng bula oladi, bu yerda α_i, β_i,..., w_i manfiymas butun sonlardir.

Isbot. (2) ko'phadning har bir

$$A\,\tau_1^{\gamma_1}\tau_2^{\gamma_2}\ldots\tau_n^{\gamma_n} \qquad (3)$$

hadi, maolumki, $x_1, x_2, ..., x_n$ noma'lumlarning biror ko'phadidan iborat, chunki (3) ga

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n,\\
\tau_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,\\
&-----------------\\
\tau_n &= x_1x_2\ldots x_n
\end{aligned}$$

kiymatlarni kUyib, ko'rsatilgan amallarni bajarsak, xuddi aytilgan ko'phad kelib chikadi.

Bu (3) ko'phadning eng yuqori hadini topamiz. τ_1, τ_2 , ..., τ_n ning eng yuqori hadlari mos ravishda,

$$x_1,\ x_1x_2,\ x_1x_2x_3,\ \ldots,\ x_1x_2..x_n$$

bo'lgani uchun (3) ko'paytmaning eng yuqori hadi

$$\begin{aligned}
&A_i x_1^{\gamma_1}(x_1x_2)^{\gamma_2}(x_1x_2x_3)^{\gamma_3}\ldots(x_1x_2\ldots x_n)^{\gamma_n} =\\
&= A_i x_1^{\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n} x_2^{\gamma_2+\ldots+\gamma_n} x_3^{\gamma_3+\gamma_4+\ldots+\gamma_n}\ldots x_1^{\gamma_n}
\end{aligned} \qquad (4)$$

bo'ladi. Xuddi shu yUl bilan (3) yig'indidagi har bir qo'shiluvchining eng yuqori hadini aniqlab chiqamiz. Bu yuqori hadlar orasida bir-biriga o'hshash hadlar yo'q. Haqiqatan, agar (4) biror boshqa yuqori hadni bir-biriga o'hshash desak,

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n,\\
&\gamma_2 + \ldots + \gamma_n = \delta_2 + \ldots + \delta_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\gamma_n = \delta_n
\end{aligned}$$

tengliklardan $\gamma_1 = \delta_1$, $\gamma_2 = \delta_2$,..., $\gamma_n = \delta_n$ ni topamiz. Bu esa (3) ko'phadning

$$A_i\tau_1^{\gamma_1}\tau_2^{\gamma_2}\ldots\tau_n^{\gamma_n} \text{ va } A_i\tau_1^{\delta_1}\tau_2^{\delta_2}\ldots\tau_n^{\delta_n}$$

hadlar o'hshash ekanini ko'rsatadi. Ammo bizga ma'lumki, ko'phadning o'hshash hadlari yo'q, deb faraz qila olamiz.

Endi aytilgan yuqori hadlar orasida eng yuqorisi, masalan,

$$A_i x_1^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n} x_2^{\alpha_2+...+\alpha_n} \dots x_n^{\alpha_n} \qquad (5)$$

bo'lsin. Bu vaqtda, ravshanki, (2) ni $x_1, x_2, ..., x_n$ ning ko'phad deb qarasak, (5) had uning eng yuqori hadi bo'ladi. SHu sababli (2) ni

$$A_i x_1^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n} x_2^{\alpha_2+...+\alpha_n} \dots x_n^{\alpha_n} + Q \qquad (6)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda Q - kolgan hamma hadlarning yig'indisi. $A_1 \neq 0$ holda, (6) yig'indi va demak, (2) ham nolga teng bo'la olmaydi. $A_1 = 0$ bo'lgan holda, (2) ko'phad

$$A_2 \tau_1^{\beta_1} \tau_2^{\beta_2} \dots \tau_n^{\beta_n} + \dots + A_k \tau_1^{w_1} \tau_2^{w_2} \dots \tau_n^{w_n}$$

ko'rinishni oladi. Yuqoridagi mulohazani takrorlab, $A_2 \neq 0$ holda bu ko'phadning nolga teng bo'laolmasligini isbotlaymiz va h.k.

Bu teoremaga asosan, ikki $f(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$ va $\varphi(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$ ko'phaddan har birining hadlari ikkinchisining hadlariga aynan teng bo'lgan holdagina bu ko'phadlar bir-biriga teng degan natijaga kelamiz.

Haqiqatan, bir ko'phadda $A \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_n^{\alpha_n}$ ham mavjud bo'lib, ikkinchisida bo'lmasa, ikkinchi ko'phadga $0 \cdot \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_n^{\alpha_n}$ hadni qo'shish mumkinligini nazarda tutib, bu ikki ko'phadni

$$f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = A_1 \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_n^{\alpha_n} + A_2 \tau_1^{\beta_1} \tau_2^{\beta_2} \dots \tau_n^{\beta_n} + \\ + \dots + A_k \tau_1^{\gamma_1} \tau_2^{\gamma_2} \dots \tau_n^{\gamma_n}$$

va

$$\varphi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = B_1 \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_n^{\alpha_n} + B_2 \tau_1^{\beta_1} \tau_2^{\beta_2} \dots \tau_n^{\beta_n} + \\ + \dots + B_k \tau_1^{\gamma_1} \tau_2^{\gamma_2} \dots \tau_n^{\gamma_n}$$

k o'rinishda yozaylik. Endi, ko'phadlarni bir-biriga tenglashtirgandan keyin ushbu tenglikka kelamiz:

$$(A_1 - B_1) \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_n^{\alpha_n} + (A_2 - B_2) \tau_1^{\beta_1} \tau_2^{\beta_2} \dots \tau_n^{\beta_n} + \\ + \dots + (A_k - B_k) \tau_1^{\gamma_1} \tau_2^{\gamma_2} \dots \tau_n^{\gamma_n} = 0$$

Bundan, yuqorida isbotlanganganga muvofiq, $A_i - B_i = 0$ yoki $A_i = B_i (i = 1,2,...,k)$ hosil bo‘ladi.

2-TEOREMA. (Simmetrik ko‘phadlar haqidagi asosiy teorema). R maydon ustidagi har qanday simmetrik ko‘phad shu maydon ustida elementar simmetrik ko‘phadlar orqali yagona ravishda ifodalanadi.

Isboti. Faraz qilaylik $f(x_1,x_2,...,x_n)$ simmetrik ko‘phad va uning eng yuqori hadi

$$A_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \qquad (7)$$

bo‘lsin. (7) hadning daraja ko‘rsatkichlari $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ tengsizliklarni qanoatlantiradi. Haqiqatan, simmetrik ko‘phadda x_1 va x_2 ning o‘rinlarini almashtirsak, ma’lumki, funktsiya o‘zgarmaydi. Bu almashtirish natijasida (7) had shu simmetrik ko‘phadning $Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots x_n^{\alpha_n}$ hadiga o‘tadi. Ammo (7) eng yuqori had bo‘lgani uchun $\alpha_1 \geq \alpha_2$. SHuningdek, simmetrik ko‘phadda x_2 va x_3 ni o‘zaro almashtirsak, (7) had ko‘phadning $A_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ hadiga o‘tadi va bundan $\alpha_2 \geq \alpha_3$ hosil bo‘ladi va h.k.

$x_1, x_2, ..., x_n$ noma’lumlarning $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ asosiy simmetrik ko‘phadliklarni olib, shu noma’lumlarning simmetrik ko‘phadi bo‘lgan ushbu

$$A \tau_1^{\alpha_1 - \alpha_2} \tau_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots \tau_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \tau_n^{\alpha_n} \qquad (8)$$

ko‘paytmani tuzamiz. $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ ning eng yuqori hadlari, mos ravishda x_1; x_1x_2; $x_1x_2x_3$; ...; $x_1x_2..x_n$ bo‘lgani sababli (8) ko‘paytmaning eng yuqori hadi

$$Ax_1^{\alpha_1 - \alpha_2} (x_1 x_2)^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots (x_1 x2 .. x_3)^{\alpha_n} = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

bo‘ladi. Bunda $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ko‘phadning eng yuqori hadi kelib chiqqanini ko‘ramiz. SHu sababli, ikkita simmetrik ko‘phadning ayirmasi bo‘lgan

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - A \tau_1^{\alpha_1 - \alpha_2} \tau_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots \tau_n^{\alpha_n} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

simmetrik ko‘phadda (8) had bo‘lmaydi. SHu mulohazalarni $f_1(x_1,x_2,...,x_n)$ ga nisbatan takrorlab,

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - B \tau_1^{\beta_1 - \beta_2} \tau_2^{\beta_2 - \beta_3} \dots \tau_n^{\beta_n} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

simmetrik ko‘phadni tuzamiz. Uning hadlari $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ning eng yuqori hadidan kichikdir va h.k. Bu jarayon chekli ravishda davom etadi. Haqiqatan , $f_1, f_2, f_3, \ldots$ simmetrik ko'phadlardan istalganining yuqori hadini

$$Mx_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n} \qquad (9)$$

orqali belgilasak, $\alpha_1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ tengsizliklarga ega bo'lamiz. Ammo bu tengsizliklarni faqat chekli son λ_1 , λ_2 ,..., λ_n ko'rsatkichlar (manfiymas butun sonlar) qanoatlantirishi mumkin. Demak, (9) ko'rinishdagi yuqori hadlarning, shuningdek f_1, f_2, f_3, ... ko'phadlarning soni faqat chekli bo'la oladi.

SHunday qilib, chekli sondagi qadamlardan keyin $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ simmetrik ko'phad $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ ning o'sha R maydon ustidagi ko'phadi sifatida ifodalanadi, ya'ni $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ (10) tenglik o'rinli.

Endi (10) ifodalashning yagona ekanini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ simmetrik ko'phad (10) dan boshqa yana $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ ning ikkinchi ko'phadni bilan ushbu

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \qquad (11)$$

ko'rinishda ifodalansin. (10) va (11) ning chap tomonlari bir hil ekanligidan $g(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = \varphi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglik esa $g(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ *va* $\varphi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ ko'phadlardan har birining hadlari aynan teng, ya'ni bu ko'phadlar aslida bitta ekanini ko'rsatadi. Demak, (10) ifodalanish yagona ekan.

2-misol. Ratsional sonlar maydoni ustidagi

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2$$

simmetrik ko'phadni asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ifodalang.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ning eng yuqori hadi $x_1^2 x_2$ bo'lgani uchun

$\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$. Teoremaga asosan quyidagi ayirmani tuzamiz:

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, x_3) - \tau_1^{\alpha_1 - \alpha_2} \tau_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \tau_3^{\alpha_3} = \\
&= (x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2) - \tau_1 \tau_2 = \\
&= (x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2) - \\
&-(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = -3x_1 x_2 x_3
\end{aligned}$$

Bunda $x_1 x_2 x_3 = \tau_3$. Demak , $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tau_1 \tau_2 - 3\tau_3$ bo'ladi.

Simmetrik ko'phadlarni asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ifodalashning amaliy jihatdan qulay usulini ko'rib o'tamiz. Bu aniqmas koeffitsientlar usuli deyiladi. Usulning mohiyati quyidagidan iborat.

Berilgan simmetrik ko'phad formalar yig'indisiga ajraladi (ravshanki, har bir forma o'z navbatida simmetrik ko'phadni ifodalaydi) so'ngra aniqmas koeffitsientlar usuli bilan har bir forma asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ifodalanadi.

3-misol. Ratsional sonlar maydoni ustidagi

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3x_2^2x_3+x_1^2x_2^3x_3+x_1^2x_2x_3^3+$$
$$+x_1^3x_2x_3^2+x_1x_2^2x_3^3+x_1x_2^3x_3^2+x_1^3+x_2^3+x_3^3$$

simmetrik ko'phadni asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ifodalang.

Berilgan ko'phad quyidagi ikkita forma yig'indisiga ajraladi:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\varphi_1(x_1,x_2,x_3)+\varphi_2(x_1,x_2,x_3)=$$
$$=(x_1^3x_2^2x_3+x_1^2x_2^3x_3+x_1^2x_2x_3^3+x_1^3x_2x_3^2+x_1x_2^2x_3^2+$$
$$+x_1x_2^3x_3^2)+(x_1^3+x_2^3+x_3^3)$$

formani olib asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ifodalaymiz.

2-teoremaning isbotida aytilgan hamma $f_1, f_2, f_3, \ldots$ simmetrik ko'phadlarning eng yuqori hadlarini hisobga olamiz. Bunda φ_1 ko'phad 6-darajali forma bo'lgani uchun $f_1, f_2, f_3, \ldots$ simmetrik ko'phadlar ham 6-darajali formalardan iborat bo'lishi kerak. SHu bilan birga, har bir yuqori hadning α_1, α_2, α_3 daraja ko'rsatkichlari $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$ va $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6$ shartlarni qanoatlantirishi kerakligini ham nazarda tutishimiz. Bunda φ_1 ko'phadning eng yuqori hadi $x_1^3x_2^2x_3$ bo'lib, daraja ko'rsatkichlari 3,2,1 sistemani tuzadi. Keyingi f_1 ko'phadning eng yuqori hadi φ_1 ning yuqori hadidan kichik bo'lishi kerak. SHu sababli, bu ikkinchi yuqori hadning daraja ko'rsatkichlari uchun faqat 2,2,2 sistemani hosil qilamiz, chunki shundan boshqa sistema $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$ va $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6$ shartlarni bir vaqtda qanoatlantira olmaydi. SHu bilan jarayon tugaydi, chunki keyingi f_2 simmetrik ko'phadning eng yuqori hadi uchun $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$ va $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6$ shartlarni qanoatlantiruvchi daraja ko'rsatkichlar sistemasi yo'q. Endi quyidagi jadvalni tuzamiz:

Eng yuqori hadlarning daraja ko'rsatkichlari sistemasi	Eng yuqori hadlari	Asosiy simmetrik ko'phadlardan tuzilgan tegishli ko'paytmalar
3 2 1	$x_1^3x_2^2x_3$	$\tau_1^{3-2}\cdot\tau_2^{2-1}\cdot\tau_3=\tau_1\tau_2\tau_3$
2 2 2	$Ax_1^2x_2^2x_3^2$	$A\tau_1^{2-2}\cdot\tau_2^{2-2}\cdot\tau_3^2=A\tau_3^2$

Bu jadvaldan quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3)=\tau_1\tau_2\tau_3+A\tau_3 \qquad (12)$$

Noma'lum A - koeffitsientni aniqlaymiz. SHu maqsadda, (12) tenglikni mukammal

$$\begin{aligned} &x_1^3x_2^2x_3+x_1^2x_2^3x_3+x_1^2x_2x_3^3+x_1^3x_2x_3^2+x_1x_2^2x_3^2+x_1x_2^3x_3^2= \\ &=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)(x_1x_2x_3)+A(x_1x_2x_3)^2 \end{aligned} \qquad (13)$$

ko'rinishni yozib, x_1,x_2,x_3 ga shunday ixtiyoriy qiymatlar beramizki, ularning yordami bilan A ning qiymatini aniqlash mumkin bo'lsin.

Masalan, $x_1=2,\ x_2=-1,\ x_3=-1$ desak, (13) dan -12=0+4A yoki

A= -3 kelib chiqadi. Demak,

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\tau_1\tau_2\tau-3\tau_3^2$$

tenglik hosil bo'ladi. Endi huddi shu usul bilan ikkinchi

$\varphi_2(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3$ forma uchun jadval tuzamiz:

Eng yuqori hadlarning daraja ko'rsatkichlari sistemasi	Eng yuqori hadlari	Asosiy simmetrik ko'phadlardan tuzilgan tegishli ko'paytmalar
3 0 0	x_1^3	$\tau_1^{3-2}\cdot\tau_2^{0-0}\cdot\tau_3=\tau_1^3$
2 1 0	$Ax_1^2x_2$	$A\tau_1^{2-1}\cdot\tau_2^{1-0}\cdot\tau_3^0=A\tau_1\tau_2$
1 1 1	B $x_1x_2x_3$	$B\tau_1^{1-1}\cdot\tau_2^{1-1}\cdot\tau_3^1=B\tau_3$

Jadvalga asosan quyidagini topamiz:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\tau_1^3+A\tau_1\tau_2+B\tau_3 \quad \text{yoki}$$

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3+A(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+,$$
$$+Bx_1x_2x_3$$

Agar o'zgaruvchilarga $x_1=x_2=1,\ x_3=0$ qiymatlar bersak, (14) dan 2=8+2A, A= - 3 hosil bo'ladi.

So'ngra $x_1=x_2=x_3=1$ qiymatlarda (14) dan A= -3 ekanini e'tiborga olib, 3=27-27+8 V=3 ni topamiz. Demak,

$$\varphi_2(x_1,x_2,x_3)=\tau_1^3-3\tau_1\tau_2+3\tau_3$$

tenglik hosil bo'ladi. SHunday qilib, berilgan $f(x_1,x_2,x_3)$ simmetrik ko'phad asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ushbu ko'rinishda ifodalanadi:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\tau_1\tau_2\tau_3-3\tau_3^2+\tau_1^3-3\tau_1\tau_2+3\tau_3$$

Simmetrik ko'phadlar tushunchasidan kelib chiqadigan ba'zi natijalarini ko'rib chiqamiz.

1-natija. Faraz qilaylik R sonlar maydoni ustida bosh koeffitsienti 1 ga teng

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots a_{n-1}x+a_n \qquad (15)$$

ko'phad berilgan bo'lib, $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_n$ uning ildizlari bo'lsin. U holda R sonlar maydoni ustida berilgan har qanday n noma'lumli $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ko'phadning $x_i=\alpha_i\ (i=\overline{1,n})$ dagi $f(\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_n)$ qiymati R sonlar maydoniga tegishli bo'ladi.

Isboti. Simmetrik ko'phadlar haqidagi asosiy teoremaga ko'ra

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=g(\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_n)$ *bo'ladi.* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_n$ lar $f(x)$ ko'phadning ildizlari bo'lgani uchun $f(x)$ ni

$$f(x)=(x-\alpha_1))x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) \qquad (16)$$

ko'rinishda yozish mumkin, (16) ning ung tomonini hadlab ko'paytirsak,

$$f(x)=x^n-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)x^{n-1}+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{1n-1}\alpha_n)x^{n-2}-$$
$$-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-3}+\ldots+(-1)^n\,\alpha_1\alpha_2..\,\alpha_n \qquad (17)$$

ga ega bo'lamiz. (15) va (17) ning o'ng tomonlarini soddalashtirib, Viet formulalari deb ataluvchi quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=-a_1, \qquad \tau_1=-a_1;$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n=a_2, \qquad \tau_2=a_2;$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n=-a_3, \quad \tau_3=-a_3; \qquad (18)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n=(-1)^n a_n, \qquad \tau_n=(-1)a_n.$$

(18) tenglikdan asosiy simmetrik ko‘phadlarning qiymtlarini $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=g(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)$ tenglikka qo‘ysak,

$f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\varphi(-a_1,a_2,\ldots,(-1)^n a_n)$ kelib chiqadi. $f(x)$ va $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ko‘phadlarning koeffitsientlari R sonlar maydoniga tegishli bo‘lganligidan

$$\varphi(-a_1,a_2,\ldots,(-1)^n a_n)=b\in P$$

2- natija. Kasrning mahrajidagi irratsionallikni yo‘qotish mumkin, ya’ni R sonlar maydoni ustida keltirilmaydigan n -darajali

$$(n\geq 2)P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

ko‘phad berilgan bo‘lib, $x=a$ uning ildizi bo‘lsa, u holda

$$\frac{f(\alpha)}{\psi(\alpha)} \quad \psi(\alpha)\neq 0 \qquad (19)$$

kasr ratsional ifodani shunday o‘zgartirish mumkinki, natijada uning mahraji butun ratsional ifodaga aylanadi.

Isboti. Faraz qilaylik.

$$\frac{f(\alpha)}{\psi(\alpha)} \quad h(\alpha)$$

bo‘lsin. Har qanday n-darajali ko‘phad kompleks sonlar maydoni ustida doimo n ta ildizga ega bo‘ladi. SHuning uchun $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ni R(x) ko‘phadning ildizlari deb olamiz. (19) ifodaning surat va mahrajini $\psi(\alpha_2)\cdot\psi(\alpha_3)\cdot\ldots\cdot\psi(\alpha_n)$ ga ko‘paytirib,

$$\frac{f(\alpha)}{\psi(\alpha)}=\frac{f(\alpha_1)\psi(\alpha_2)..\psi(\alpha_n)}{\psi(\alpha_1)\psi(\alpha_2)..\psi(\alpha_n)}$$

ni hosil qilamiz. $\psi(\alpha_2)\cdot\psi(\alpha_3)\cdot\ldots\cdot\psi(\alpha_n)$ ko‘paytma R sonlar maydoni ustida $x_1,x_2,\ldots,x_n$ noma’lumli simmetrik ko‘phad bo‘lgani uchun 1-natijaga ko‘ra $\psi(\alpha_2)\cdot\psi(\alpha_3)\cdot\ldots\cdot\psi(\alpha_n)=b$ bo‘lib, bu yerda $b\in R$ dir.

Demak,

$$\frac{f(\alpha)}{\psi(\alpha)}=\frac{f(\alpha)\psi(\alpha_2)..\psi(\alpha_n)}{b}$$

bo'ladi.

Endi maqsad $\psi(\alpha_2)\cdot\psi(\alpha_3)\cdot...\cdot\psi(\alpha_n)$ ko'paytmani α orqali ifodalashdan iborat $\psi(\alpha_2)\cdot\psi(\alpha_3)\cdot...\cdot\psi(\alpha_n)$ ko'paytma R sonlar maydoni ustida n-1 ta $x_1,x_2,...,x_n$ noma'lumli simmetrik ko'phad bo'lganidan, uni

$$\bar{\tau}_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n,$$
$$\bar{\tau}_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n,$$
$$..............................$$
$$\bar{\tau}_n = x_1x_2..x_n$$

kabi asosiy simmetrik ko'phadlar orqali ifodalaymiz. Ikkinchidan,

$$\bar{\tau}_1 = \tau_1 - x_1,$$
$$\bar{\tau}_2 = \tau_2 = x_1\bar{\tau}_1 = \tau_2 - \tau_1x_1 + x_1^2$$
$$\bar{\tau}_3 = \tau_3 - x_1\bar{\tau}_1 = \tau_3 - \tau_2x_1 + \tau_1x_1^2 - x_1^3$$
$$......................................$$

ga egamiz. (4) tengliklardan foydalanib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\bar{\tau}_1 = -a_1 - \alpha, \quad \bar{\tau}_2 = a_2 + a_1\alpha + \alpha^2,$$
$$\bar{\tau}_3 = -a_3 - a_2\alpha - a_1\alpha^2 - \alpha^2$$

va h.k. Umuman olganda, $\psi(\alpha_j)$ $(i=\overline{1,n})$ larning barchasi $\alpha_1=\alpha$ va R(x) ko'phadning koeffitsientlari orqali ifodalanadi, ya'ni

$\psi(\alpha_2)\cdot\psi(\alpha_3)\cdot...\cdot\psi(\alpha_n)=k(\alpha)$ va $\frac{f(\alpha)}{\psi(\alpha)}=\frac{f(\alpha_1)k(\alpha)}{b}$ hosil bo'lib, (5) ning maxraji irratsionallikdan yo'qoladi.

Amaliyotda simmetrik ko'phadlarni xususiy holi bo'lgan $x_1,x_2,...,x_n$ noma'lumlar k-darajalarining yig'indilari ko'p uchraydi. Darajali yig'indilar deb ataluvchi

$$S_k = x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k, k = 1,2,3,... \qquad (1)$$

simmetrik ko'phad simmetrik ko'phadlar xakidagi asosiy teoremaga ko'ra, elementar simmetrik ko'phadlar orqali ifodalanadi. Ammo k ning katta natural qiymatlari uchun u ifodani topish murakkablik tug'diradi. SHuning uchun ham $S_1, S_2, S_3 \ldots$ larni σ_1 , σ_2, ..., σ_n lar orqali bog'lanishlarni ifodalovchi quyidagi formulalar diqqatga sazovor:

Agar $k \leq n$ bo'lsa,

$$S_k - S_{k-1}\sigma_1 + S_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^{k-1} S_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0 \qquad (2)$$

agar $k > n$ bo'lsa.

$$S_k - S_{k-1}\sigma_1 + S_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^n S_{k-n}\sigma_n = 0$$

tengliklar o'ringa ega. Bu formulalar N'yuton formulalari deb ataladi, ular darajali yig'indilarni elementar simmetrik ko'phadlar bilan bog'laydi, hamda $S_1, S_2, S_3, \ldots$ larni σ_1 , σ_2, ..., σ_n lar orqali ifodasini ketma-ket topish imkonini beradi.

Masalan . Ma'lumki, $S_1 = \sigma_1$ (bu (2) formuladan ham kelib chiqadi). Agar $k=2 \leq n$ bo'lsa, (2) dan $S_2 - S_1\ \sigma_1 + 2\ \sigma_2 = 0$ ni hosil qilamiz, bundan $S_2 = S_1\sigma_1 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ ga ega bo'lamiz.

Agar $k=3 \leq n$ bo'lsa, u holda (3) dan $S_3 - S_2\sigma_1 + S_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0$ bo'ladi. S_1 *va* S_2 larni topilgan ifodalaridan foydalanish uchun quyidagi formulani hosil qilamiz: $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$. Agar k=3 bo'lib, n=2 bo'ulsa, u holda (3) dan $S_3 - S_2\sigma_1 + S_1\sigma_2 = 0$ kelib chiqadi, bundan $S_3 - S_2\sigma_1 + S_1\sigma_2 = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$

Yuqoridagilar kabi, N'yuton formulalaridan foydalanib, S_k ni σ_1 , σ_2, ..., σ_n lar orqali ifoda qiluvchi formulalarni hosil qilish mumkin.

Quyida $n=2,3$ bo'lgan hollarda N'yuton formulalarini matematika kursidagi ba'zi misol va masalalarni yechishga tatbiqini quramiz.

Agar $n=2$ bo'lsa, bu holda $\sigma_1 = x+y$, $\sigma_2 = xy$ $S_k = x^k + y^k$ bo'ladi. S_k ning aniqlanishidan $S_1 = x+y = \sigma_1$ buni e'tiborga olsak

$S_2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ bo'ladi. Umumiy holda $k=3,4,\ldots$ bo'lganda (3) formuladan $S_k - S_{k-1}\sigma_1 + S_{k-2}\sigma_2 = 0$ yoki

$S_k = S_{k-1}\sigma_1 - S_{l-2}\sigma_2$ tenglikni hosil qilamiz, bu tenglikni to'g'ri ekanligini quyidagicha ishonch hosil qilish mumkin.

$$\sigma_1 S_{k-1} = (x+y)(x^{k-1}+y^{k-1}) = x^k + x^{k-1}y + xy^{k-1} + y^k =$$

$$= x^k + y^k + xy(x^{k-2}+y^{k-2}) = S_k + S_{k-2}\,\sigma_2$$

Bundan

$$S_k = S_{k-1}\sigma_1 - S_{l-2}\sigma_2$$

formuladan foydalanib, S_1 va S_2 larni bilgan holda $S_3, S_4, \ldots$ larni topmish mumkin.

Endi $S_k = x^k + y^k$, $k=1,2,\ldots$ larni $\sigma_1 = x+y$, $\sigma_2 = xy$ lar orqali ifodalovchi formulalar jadvalini keltiramiz:

1-jadval

$S_k = x^k + y^k$ larni $\sigma_1 = x+y$, $\sigma_2 = xy$ lar orqali ifodalash
$S_1 = x+y = \sigma_1$
$S_2 = x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma^2$
$S_3 = x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$
$S_4 = x^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$
$S_5 = x^5 + y^5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$
$S_6 = x^6 + y^6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$
$S_7 = x^7 + y^7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3$

Quyida tenglamalar sistemasini yechishda ushbu teoremadan foydalanish foydadan holi emas.

2-TEOREMA. Ixtiyoriy α va β sonlar uchun

$$u^2 - \alpha u + \beta = 0 \qquad (4)$$

tenglama va

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ xy = \beta \end{cases} \qquad (5)$$

ikki noma'lumli tenglamalar sistemasi yechimlari orasida quyidagi bog'lanish o'ringa ega. Agar u_1, u_2 (4) tenglamaning yechimi bo'lsa, (5) tenglamalar sistemasi 2 ta yechimga ega:

$$\begin{cases} x_1 = u_1 \\ y_1 = u_2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = u_2 \\ y_2 = u_1 \end{cases}$$

aksincha, agar $x=\alpha$, $y=\beta$ (5) sistemaning yechimi bo'lsa, a va b lar (4) kvadrat tenglamaning yechimlari bo'ladi. Bu teoremaning isboti maktab kursidan ma'lum.

1. Yuqoridagilardan foydalanib, maktab matematika kursidagi ikki noma'lumli ba'zi tenglamalar sistemasini osongina yechish mumkin.

Haqiqatan ham:

1-misol : $\begin{cases} x^3+y^3=65 \\ x+y=5 \end{cases}$

tenglamalar sistemasini yeching.

$\Delta\sigma_1=x+y$, $\sigma_2=xy$ deb I -jadvaldan $S_3=x^3+y^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2$

tenglikni e'tiborga olsak, berilgan sistema

$$\begin{cases} \sigma_1^2-3\sigma_1\sigma_2=65 \\ \sigma_1=5 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Bundan $\sigma_1=5$, $\sigma_2=4$ ni topamiz. Bularni e'tiborga olsak, berilgan tenglamalar sistemasi quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo'ladi:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases} \text{Б}$$

2-teoremaga asosan x va y lar $t^2-5t+4=0$ kvadrat tenglamani ildizlari bo'ladi.

$$t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm3}{2}, t_1=1, t_2=4$$

Bulardan

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=4 \end{cases}, \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=1 \end{cases}$$

Bundan buyon

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$$

ko'rinishdagi tenglamalar sistemasini yechimlarini keltirmaymiz . Faqat javoblarini keltiramiz.

2-misol. $\begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

$\Delta\sigma_1 = x+y$, $\sigma_2 = xy$ deb, I-jadvaldan

$S_5 = x^5 + y^5 = \sigma_1^2 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma\sigma_2^2$ tenglikni e'tiborga olsak, berilgan tenglamalar sistemasidan

$\begin{cases} \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 33 \\ \sigma_1 = 3 \end{cases}$ tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Bundan σ_2

nisbatan $15\sigma_2^2 - 135\sigma_2 + 210 = 0$ va $\sigma_2^2 - 9\sigma_2 + 14 = 0$. Bu kvadrat tenglamani yechib $\sigma_1 = 2$ va $\sigma_2 = 7$ larni topamiz. Bularni e'tiborga olsak, berilgan tenglamalar sistemasi quyidagi ikkita sistemaga tengkuchli bo'ladi:

$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ va $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 7 \end{cases}$ Bu sistemalarni yechib, quyidagi javobga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{19}}{2}i \\ y_3 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{19}}{2}i \end{cases}, \begin{cases} x_4 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{19}}{2}i \\ y_4 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{19}}{2}i \end{cases}$$

3-misol. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ tenglamalar sistemasining yeching.

Yuqoridagi misollardagi kabi $\sigma_1 = x+y$, $\sigma_2 = xy$ deb, berilgan tenglamalar sistemasini quyidagi sistemaga teng kuchli almashtiramiz:

$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 8 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4 \end{cases}$ bu sistemaning 2-tenglamasidan σ_2 ni topib, 2-tenglamasiga

qo'ysak, σ_1 nisbatan $\sigma_1^3 - 12\sigma_1 + 16 = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\sigma_1^3 - 2\sigma_1^2 + 2\sigma_1^2 - 4\sigma_1 - 8\sigma_1 + 16 = \sigma_1^3(\sigma_1 - 2) + 2\sigma_1(\sigma_1 - 2) - 8(\sigma_1 - 2) =$$
$$= (\sigma_1 - 2)(\sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 8) = 0$$

Bundan σ_1 -2=0 yoki $\sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 8 = 0$ tenglamalarga ega bo'lamiz, bularni yechib $\sigma_1=2$, $\sigma_2= -4$ larni topamiz. $\sigma_1=2$ bo'lganda $\sigma_2=0$ yoki $\sigma_1= - 4$ bo'lganda $\sigma_2=6$.

SHunday qilib, berilgan sistema quyidagi ikkita sistemaga teng kuchli:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=0 \end{cases}, \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=6 \end{cases}$$

sistemalarni yechib, quyidagi 4 ta javobga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=0 \end{cases}, \begin{cases} x_2=0 \\ y_2=2 \end{cases}, \begin{cases} x_3=-2+i\sqrt{2} \\ y_3=-2-i\sqrt{2} \end{cases}, \begin{cases} x_4=-2-i\sqrt{2} \\ y_4=-2+i\sqrt{2} \end{cases}$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Simmetrik ko'phad deb nimaga aytiladi?
2. Asosiy (elementar) simmetrik ko'phadlar deb nimaga aytiladi?
3. Simmetrik ko'phadlar haqidagi asosiy teoremani bayon eting.
4. Ikkita ko'phadning rezultanti ta'riflarini aytib bering.

ASOSIY DARSLIK VA O'QUV QO'LLANMALAR:

1. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M., Visshaya shkola, 1979 g.

2. Nazarov R.N.,Toshpo'latov B.T., Dusumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi.T., O'qituvchi. I qism,1993 y., II qism, 1995 y.

3. Yunusov A., Yunusova D. Algebra va sonlar nazariyasi. Ma'ruzalar matni. TDPU. 2006.

4. Yunusova D., Yunusov A. Algebra va sonlar nazariyasi. Modul texnologiyasi asosida tuzilgan musol va mashqlar to'plami. O'quv qo'llanma. T., "Iqtisod-moliya". 2008.

5. Yunusova D., Yunusov A. Modul texnologiyasi asosida tayyorlangan mustaqil ishlar to'plami. TDPU. 2008.

6. Yunusov A., Yunusova D. Algebra va sonlar nazariyasi dan modul texnologiyasi asosida tuzilgan nazorat topshiriqlari to'plami. TDPU,2004.

Qo'shimcha adabiyotlar:

1. Xojiev J.X. Faynleyb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi kursi, Toshkent, «O'zbekiston», 2001y.
2. Kostrikin I.A. Vvedenie v algebru. M., Nauka.1977 g.
3. Skornyakov L.F. Elementi obshey algebri. M., 1983 g.
4. Petrova V.T.Leksii po algebre i geometrii.Ch.1,2. Moskva,1999g
5. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementleri. T., "Yangi asr avlodi". 2006.
6. Yunusov A., Yunusova D. Sonli sistemalar. T., «Moliya-iqtisod», 2008.
7. Mazurov V.D. i.dr. Kratkiy konspekt kursa visshey algebri. http://www.nsu.ru/education
8. www.pedagog.uz
9. http://ukrgap.exponenta.ru
10. http://avt.miem.edu.ru
11. http://lib.kruzzz.com/books

Adadi 50 nusxa. Hajmi 3,4 b/t. Bichimi 60x84 $^1/_{16}$
«Times New Roman» garniturasi. Ofset usulida bosildi.
Nizomiy nomidagi TDPU bosmaxonasida nashr qilindi.
Toshkent, Yusuf Xos Hojib 103.